

Er. 6.7  
373

TALLINNA POLÜTEHNILISE  
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№373

**МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ  
МЕХАНИКА**

**СБОРНИК СТАТЕЙ**

**VIII**

ТАЛЛИН 1975



Ep.6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED  
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 378

1975

УДК 518  
517  
621  
539

# МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СБОРНИК СТАТЕЙ

УШ

Таллин 1975

Fig. 2

TRAJDI TALLINNSKOGO PODNITSEKORSKOJO NIČHITATA  
TALLINNA POLITEHNILISE INSTITUUDI TOIMESKOD

1975

878

УДК 616  
617  
621  
638

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ  
МЕХАНИКА

СЕРИЯ КЛАССИЧЕСКАЯ  
VШ



УДК 518:517.392

М. Левин

О НАИЛУЧШИХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ С ЧАСТИЧНО  
ФИКСИРОВАННЫМИ УЗЛАМИ

Пусть  $J(\nu) = \{i_1, i_2, \dots, i_\nu\} \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ ,  $M > 0$ ,  $1 < p \leq \infty$ ,  $W_{0J(\nu)}^{(r)} L_p$  — множество всех функций  $f(x)$ , имеющих на  $[0, 1]$  абсолютно непрерывную производную порядка  $r-1$  и удовлетворяющих условиям

$$\|f^{(r)}(\cdot)\|_{L_p(0,1)} \leq M; \quad (1)$$

$$f^{(i_j)}(0) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, \nu). \quad (2)$$

В работе [1] на множестве  $W_{0J(\nu)}^{(r)} L_p$  построена наилучшая квадратурная формула [2]

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{r-1} A_{kj} f^{(j)}(x_k) + R_n[f], \quad (3)$$

т.е. та формула (3), для которой величина

$$R_n = \sup_{f \in W_{0J(\nu)}^{(r)} L_p} |R_n[f]|$$

имеет наименьшее значение. Для этой формулы

$$x_k = \left[ \sqrt[r]{R_{r,q}(1) / |S_{r,q,B}(1)|} + 2(k-1) \right] h \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

$$R_n = \frac{M \cdot R_{r,q}(1)}{r!(1+rq) \sqrt[q]{q}} h^r, \quad (5)$$

где  $R_{r,q}(x)$  — многочлен степени  $r$  со старшим членом  $x^r$ , наименее уклоняющийся от нуля на отрезке  $[-1, 1]$  в метрике  $L_q$ ;

$S_{r,q,B}(x)$  — многочлен вида

$$x^r + \sum_{i \in B} \alpha_i x^i,$$

наименее уклоняющийся от нуля в метрике  $L_q$  на отрезке  $[0, 1]$ ;

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad B = \{0, 1, \dots, r-1\} \setminus \{r-1-\nu_1, r-1-\nu_2, \dots, r-1-\nu_{r-\nu}\},$$

$$\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{r-\nu}\} = \{0, 1, \dots, r-1\} \setminus J(\nu);$$

$$h = \frac{\sqrt[r]{|S_{r,q,B}(1)|}}{2^{(n-1)} \sqrt[r]{|S_{r,q,B}(1)|} + \sqrt[r]{R_{r,q}(1)} (\sqrt[r]{|S_{r,q,B}(1)|} + 1)}.$$

В настоящей работе решается задача уточнения наилучшей формулы (3); подобные задачи раньше рассматривались в работах [3-7].

Рассмотрим формулы вида

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^{2n+1} \sum_{j=0}^{r-1} B_{ij} f^{(j)}(u_i) + \bar{R}_{2n+1}[f], \quad (6)$$

у которых часть узлов зафиксирована, а именно

$$u_{2k} = x_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

а остальные узлы удовлетворяют условию

$$x_{k-1} < u_{2k-1} < x_k \quad (k=1, 2, \dots, n+1), \quad x_0 = 1 - x_{n+1} = 0.$$

Здесь и ниже под значениями  $x_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) понимаем значения (4).

Теорема I. Наилучшая на множестве  $W_{0,1}^{(n)} L_p$  формула (6), т.е. формула (6) с наименьшим значением величины

$$\bar{R}_{2n+1} = \sup_{f \in W_{0,1}^{(n)} L_p} |\bar{R}_{2n+1}[f]|,$$

имеет узлы

$$u_1 = \frac{\sqrt[r]{R_{r,q}^{(1)} \cdot x_1}}{\sqrt[r]{R_{r,q}^{(1)} + 2\sqrt[r]{S_{r,q,B}^{(1)}}}},$$

$$u_{2k+1} = x_1 + (2k-1)h \quad (k=1, 2, \dots, n-1),$$

$$u_{2n+1} = \frac{2 + \sqrt[r]{R_{r,q}^{(1)} \cdot x_n}}{2 + \sqrt[r]{R_{r,q}^{(1)}}};$$

веса

$$B_{1j} = \frac{(-1)^j}{r!} \left[ u_1^{j+1} S_{r,q,B}^{(n-1-j)}(1) - R_{r,q}^{(n-1-j)}(-1) h_1^{j+1} \right],$$

$$B_{2j} = \frac{(-1)^j}{r!} \left[ h_1^{j+1} R_{r,q}^{(n-1-j)}(1) - h^{j+1} R_{r,q}^{(n-1-j)}(-1) \right],$$

(здесь  $h_1 = 0,5(x_1 - u_1)$ ),

$$B_{mj} = \frac{(-1)^j}{r!} h^{j+1} \left[ R_{r,q}^{(n-1-j)}(1) - R_{r,q}^{(n-1-j)}(-1) \right]$$

$$(m=3, 4, \dots, 2n-1),$$

$$B_{2n,j} = \frac{(-1)^j}{r!} [h^{j+1} R_{r,q}^{(r-1-j)}(1) - h_{2n}^{j+1} R_{r,q}^{(r-1-j)}(-1)],$$

$$B_{2n+1,j} = \frac{1}{(j+1)!} (1 - u_{2n+1})^{j+1} + \frac{(-1)^j}{r!} h_{2n}^{j+1} R_{r,q}^{(r-1-j)}(1),$$

$$(h_{2n} = 0,5(u_{2n+1} - x_n)), \quad j = 0, 1, \dots, r-1;$$

оценку остатка

$$\bar{R}_{2n+1} = \frac{M}{r!} \frac{R_{r,q}(1)}{(rq+1)^{1/q}} \left(\frac{h}{2}\right)^r (1+h\mu)^{\frac{1}{q}}, \quad (8)$$

где

$$\mu = 2^{rq} R_{r,q}^{\frac{1}{r}+q}(1) [(2|S_{r,q,B}(1)|^{\frac{1}{r}} + R_{r,q}^{\frac{1}{r}}(1))^{-rq} \times$$

$$\times |S_{r,q,B}(1)|^{-\frac{1}{r}} + (2 + R_{r,q}^{\frac{1}{r}}(1))^{-rq}] -$$

$$- R_{r,q}^{\frac{1}{r}}(1) (1 + |S_{r,q,B}(1)|^{-\frac{1}{r}}).$$

Доказательство проводится так же, как доказываются соответствующие теоремы в [1,6].

Теперь рассмотрим множество  $W^{(r)} L_p$  функций  $f(x)$ , имеющих абсолютно непрерывную производную порядка  $r-1$  на отрезке  $[0,1]$  и удовлетворяющих условию (I).

Как известно [8], на этом множестве (с помощью наилучшей на  $W_{0J(\nu)}^{(r)} L_p$  формулы (3)) легко находится наилучшая формула виде

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{r-1} A_{kj} f^{(j)}(x_k) + \sum_{j \in J(\nu)} c_j f^{(j)}(0) + R_n^*(f), \quad (9)$$

причём узлы этой наилучшей формулы совпадают со значениями (4).

С помощью теоремы 1 и теоремы 1 из [8] получаем наилучшую формулу вида

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{2n+1} \sum_{j=0}^{r-1} B_{kj} f^{(j)}(u_k) + \sum_{j \in J(v)} \gamma_j f^{(j)}(0) + \bar{R}_{2n+1}^*(f), \quad (10)$$

где  $u_{2k} = x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) (значения определены по (4)), уточняющую наилучшую формулу (9).

Теорема 2. Наилучшая на множестве  $W^{(n)}L_p$  формула (10) имеет веса  $B_{kj}$  и узлы  $u_k$ , определяемые теоремой 1, и веса

$$\gamma_j = \frac{1}{j!} \bar{R}_{2n+1} [x^j] \quad (j \in J(v)),$$

где  $\bar{R}_{2n+1} [x^j]$  означает ошибку наилучшей формулы (6) (полученной в теореме 1) для функции  $x^j$ .

Оценка ошибки наилучшей формулы (10) совпадает со значением (8).

**З а м е ч а н и е 1.** Сравнение оценок (5) и (8) показывает, что на множестве  $W_{0J(v)}^{(n)}L_p$  наилучшая формула (6) (у которой  $n$  узлов зафиксировано по (7) и (4)) асимптотически приближается к наилучшей формуле (3) с  $2n+1$  узлами (при  $n \rightarrow \infty$ ). То же можно сказать и относительно наилучших на множестве  $W^{(n)}L_p$  формул (10) и (9).

**З а м е ч а н и е 2.** Пусть  $J(v) = \{0, 1, \dots, r-1\}$  или  $J(v)$  — пустое множество. Тогда приведённая теорема 1 уточняет наилучшие квадратурные формулы (3), полученные соответственно для известных множеств  $W_0^{(n)}L_p$  и  $W^{(n)}L_p$ , например, в работе [9].

Дальнейшее уточнение формул (6) и (10) может быть проведено тем же путём, как это в подобном случае делается в работе [7].

## Л и т е р а т у р а

1. М. Л е в и н, М. Л е в и н а. Наилучшие квадратурные формулы для некоторых множеств функций. - Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 1975 № 1.
2. С.М. Н и к о л ь с к и й. Квадратурные формулы. М., 1958.
3. А.С. К р о н р о д. Узлы и веса квадратурных формул. М., Физматгиз, 1964.
4. И.П. М ы с о в с к и й. Один частный случай квадратурных формул, содержащих заданные узлы. - Изв. АН БССР, Физ. Матем., 1964 № 4, 125-127.
5. В.И. К р ы л о в. Приближенное вычисление интегралов. М., "Наука", 1967.
6. М.И. Л е в и н, Э.М. Ш а ц. Об увеличении числа узлов наилучшей на множестве функций квадратурной формулы. - Изв. вузов, Математика, 1972, № 10, 46-52.
7. М. Л е в и н. Об уточнении наилучших квадратурных формул. - Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 1973, 22, № 3, 323-326.
8. М. Л е в и н. О построении наилучших квадратурных формул. - Изв. АН ЭССР, Физ. матем., 1972, 21, № 4, 449-452.
9. Н.Е. Л у ш п а й. Квадратурные формулы для некоторых классов функций. - Изв. вузов, Математика, 1969, № 12, 53-59.

M. Levin

### On the Best Quadrature Formulas with Partial Fixed Knots

#### Summary

Let  $J(\nu) = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ ,  $W_{0j(\nu)}^{(r)} L_p$  denote the class of functions  $f(x)$  with conditions (1) - (2) and  $x_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) denote the knots of the best formula (3) for this class.

The best formula (6) satisfying condition (7) has been constructed for the class  $W_{0j(\nu)}^{(r)} L_p$ .

We can consider this formula as one that makes the formula (3) more precise.

The analogous problem for the class  $W^{(r)} L_p$  and formulas (9), (10) has been solved in this paper.

The best formula (6) for  $n \rightarrow \infty$  approaches the best formula (3) with  $2n+1$  knots.

УДК 518:517.3:6

А. Ивге

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КРОМФОРДА-ЛЕВИНА ДЛЯ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

В настоящей работе для множества функций, введенного в [8], рассматривается задача построения последовательности уточняемых друг друга квадратурных формул. Впервые такие задачи для формул типа Гаусса рассматривались в [1,2] и для замкнутых формул в [3,5].

Рассмотрим задачу построения на некотором множестве  $H$  функции  $f(x)$  замкнутой квадратурной формулы [4] вида

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{2r-1} \frac{A_{k,j}}{j!} f^{(j)}(x_{k,m}) + R_{n,m}(f). \quad (1)$$

При  $m=0$  замкнутой квадратурной формулы (1) (обозначим ее через  $F_{n,0}(H)$ ) получим, если узлы  $x_{k,0}$  и веса  $A_{k,j}$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ;  $j=0, 1, \dots, 2r-1$ ) выбраны так, чтобы выполняла

$$R_{n,m} = \sup_{f \in H} |R_{n,m}(f)| \quad (2)$$

при  $m=0$  минимальное значение. Узлы этой формулы обозначим через  $x_{k,0}$ . Под формулой  $F_{n,m}(H)$  будем понимать ту формулу (1) при  $m=1$ , у которой заданы только узлы  $x_{k,1} = x_{k,0}$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ), а остальные



УДК 518:517.392

А. Иьги

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КРОНРОДА-ЛЕВИНА ДЛЯ КВАДРАТУРНЫХ  
ФОРМУЛ

В настоящей работе для множества функций, введённого в [6], рассматривается задача построения последовательности уточняющих друг друга квадратурных формул. Впервые такие задачи для формул типа Гаусса рассматривались в [1, 2] и для наилучших формул в [3, 5].

Рассмотрим задачу построения на некотором множестве  $H$  функций  $f(x)$  наилучшей квадратурной формулы [4] вида

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{2^{m(n+1)}-1} \frac{2^{r-1}}{k} \sum_{j=0}^{2r-1} A_{kj} f^{(j)}(x_{k,m}) + R_{n,m}(f). \quad (I)$$

При  $m=0$  наилучшую квадратурную формулу (I) (обозначим её через  $F_{n,0}(H)$ ) получим, если узлы  $x_{k,0}$  и веса  $A_{kj}$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ;  $j=0, 1, \dots, 2r-1$ ) найдём так, чтобы величина

$$R_{n,m} = \sup_{f \in H} |R_{n,m}(f)| \quad (2)$$

при  $m=0$  имела наименьшее значение. Узлы этой формулы обозначим через  $x_{k,0}^*$ . Под формулой  $F_{n,1}(H)$  подразумеваем ту формулу (I) при  $m=1$ , у которой зафиксирована часть узлов  $x_{2k,1} = x_{k,0}^*$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ), а осталь-

ные узлы и веса найдены из условия, что величина (2) при  $m=1$  имеет наименьшее значение. Обозначим узлы формулы  $F_{n,1}(H)$  через  $x_{k,1}^*$ . Продолжая этот процесс, мы получим формулу  $F_{n,m_0}(H)$  (при  $m=m_0$ ), для которой узлы  $x_{2k,m_0}^* = x_{k,m_0-1}^*$  ( $k=1,2,\dots,2^{m_0-1}(n+1)-1$ ) являются узлами формулы  $F_{n,m_0-1}(H)$ , а узлы  $x_{2k+1,m_0}$  ( $k=0,1,\dots,2^{m_0-1}(n+1)-1$ ) и веса  $A_{kj}$  ( $k=1,2,\dots,2^{m_0}(n+1)-1$ ;  $j=0,1,\dots,2r-1$ ) доставляют величине (2) (при  $m=m_0$ ) наименьшее значение.

Пусть  $M > 0$ ,  $1 < q \leq \infty$ , целые  $r_1, r_2$  — заданные числа, причём  $r_1 + r_2 = 2r$ . Обозначим через  $W^{(2r)}_{L_q}$  множество функций  $f(x)$ , которые на отрезке  $[0,1]$  имеют абсолютно непрерывную производную порядка  $2r-1$  и удовлетворяют условию

$$\|f^{(2r)}(x)\|_{L_q} \leq M,$$

а через  $W^{(r_1; r_2)}_{01; L_q}$  — множество тех функций из  $W^{(2r)}_{L_q}$ , которые удовлетворяют условиям

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, r_1 - 1),$$

$$f^{(i)}(1) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, r_2 - 1).$$

Пусть  $Q_{m,s;p}(x)$  есть многочлен вида

$$x^m \left( x^s + \sum_{k=1}^s b_k x^{s-k} \right),$$

наименее уклоняющийся от нуля на отрезке  $[0,1]$  в метрике  $L_p$ ,  $R_{2r;p}(x)$  — многочлен степени  $2r$  со старшим коэффициентом, равным единице, наименее уклоняющимся от нуля в метрике  $L_p$  на отрезке  $[-1,1]$ .

Обозначим

$$\delta_1 = \left[ \frac{R_{2r;p}(1)}{Q_{r_2, r_1; p}(1)} \right]^{\frac{1}{2r}}, \quad \delta_2 = \left[ \frac{R_{2r;p}(1)}{Q_{r_1, r_2; p}(1)} \right]^{\frac{1}{2r}},$$

$$h = \frac{1}{\delta_1 + \delta_2 + 2(n+1)},$$

$$\gamma_1 = \frac{\delta_1}{2 + \delta_1}, \quad \gamma_2 = \frac{\delta_2}{2 + \delta_2}, \quad c_1 = \gamma_1 (2\gamma_1)^{2rp}, \quad c_2 = \gamma_2 (2\gamma_2)^{2rp}.$$

**Теорема I.** На множестве  $W_{01}^{(r_1; r_2)} L_q$  единственной наилучшей квадратурной формулой  $F_{n,m}(W_{01}^{(r_1; r_2)} L_q)$  является формула (I) с узлами

$$\left. \begin{aligned} x_{1,m}^* &= \delta_1 \gamma_1^m h, \\ x_{2^{j-1}+k,m}^* &= x_{2^{j-1},m}^* + \frac{\kappa}{2^{j-2}} \gamma_1^{m-j+1} h \\ &\quad (j=1, 2, \dots, m; \kappa=1, 2, \dots, 2^{j-1}), \\ x_{2^m+k,m}^* &= \delta_1 h + \kappa \frac{h}{2^{m-1}} \quad (\kappa=1, 2, \dots, 2^m(n-1)-1), \\ x_{2^{m(n+1)-2^{j-1}-k,m}^*} &= x_{2^{m(n+1)-2^{j-1},m}^*} - \frac{\kappa}{2^{j-2}} \gamma_2^{m-j+1} h \\ &\quad (j=1, 2, \dots, m; \kappa=1, 2, \dots, 2^{j-1}), \\ x_{2^{m(n+1)-1,m}^*} &= 1 - \delta_2 \gamma_2^m h \end{aligned} \right\} (3)$$

и весами

$$\left. \begin{aligned} A_{1j} &= \frac{(\gamma_1^m h)^{j+1}}{(2r)!} \left[ R_{2r;p}^{(2r-1-j)}(1) + (-1)^j \delta_1^{j+1} Q_{r_2, r_1; p}^{(2r-1-j)}(1) \right] \\ &\quad (j=0, 1, 2, \dots, 2r-2), \\ A_{1, 2r-1} &= 0, \\ A_{i+1, j} &= \frac{1}{(2r)!} \left[ h_{i+1, m}^{j+1} + (-1)^j h_{i, m}^{j+1} \right] R_{2r;p}^{(2r-1-j)}(1) \\ &\quad (i=1, 2, \dots, 2^m(n+1)-3; j=0, 1, \dots, 2r-1), \\ A_{2^{m(n+1)-1, j}} &= \frac{(-1)^j (\gamma_2^m h)^{j+1}}{(2r)!} \left[ R_{2r;p}^{(2r-1-j)}(1) + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^j \delta_2^{j+1} Q_{r_1, r_2; p}^{(2r-1-j)}(1) \right] \quad (j=0, 1, \dots, 2r-2), \\ A_{2^{m(n+1)-1, 2r-1}} &= 0, \end{aligned} \right\} (4)$$

где

$$h_{i,m} = \frac{1}{2} (x_{i+1,m}^* - x_{i,m}^*) \quad (i=1, 2, \dots, 2^m(n+1)-2).$$

Верхняя грань ошибки этой формулы равна

$$R_{n,m} = \frac{M \cdot R_{2r;p}(1)}{(2r)! \sqrt[2r]{2rp+1}} (1+s_n)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{h}{2^m}\right)^{2r}, \quad (5)$$

где

$$s_n = \frac{1}{\delta_1 + \delta_2 + 2(n-1)} \left[ \frac{(\delta_1 + 2)(c_1 - \gamma_1)(c_1^m - 1)}{c_1 - 1} + \frac{(\delta_2 + 2)(c_2 - \gamma_2)(c_2^m - 1)}{c_2 - 1} \right].$$

**Доказательство.** Докажем теорему методом полной математической индукции. Для  $m=0$  доказательство ничем не отличается от доказательства теоремы I из [6]. Пусть  $m=1$ . Теперь

$$x_{2k,1} = x_{k,0}^* \equiv [\delta_1 + 2(k-1)]h \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

и найдём  $x_{2k+1,1}$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ). Так же, как в теореме I [6], мы получим

$$f \in W_{0,1}^{(r_1; r_2)} L_q \quad |R_{n,1}(f)| = \frac{M}{(2r)!} \left( \int_0^1 |\bar{K}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$\bar{K}(t) = t^{r_2}(t-1)^{r_1} - (2r)! \sum_{k=1}^{2n+1} \sum_{j=0}^{2r-1} A_{kj} G_{x^j}^{(j)}(x_{k,1}, t),$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

а  $G(x, t)$  — функция Грина, построенная в [6].

Построим функцию

$$\bar{L}(t) = \begin{cases} x_{1,1}^{2r} Q_{r_2, r_1; p} \left( \frac{t}{x_{1,1}} \right), & t \in [0, x_{1,1}), \\ h_{i,1}^{2r} R_{2r; p} \left( \frac{t-b_i}{h_{i,1}} \right), & t \in [x_{i,1}, x_{i+1,1}) \quad (i=1, 2, \dots, 2n), \\ (1-x_{2n+1,1})^{2r} Q_{r_1, r_2; p} \left( \frac{1-t}{1-x_{2n+1,1}} \right), & t \in [x_{2n+1,1}, 1], \end{cases}$$

где

$$h_{i,1} = \frac{x_{i+1,1} - x_{i,1}}{2}, \quad b_i = \frac{x_{i+1,1} + x_{i,1}}{2}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\bar{K}(t)|^p dt &\geq \int_0^1 |\bar{L}(t)|^p dt = \\ &= \frac{1}{2^{r_{p+1}}} \left\{ [Q_{r_2, r_1; p}(1)]^p x_{1,1}^{2r_{p+1}} + (1 - x_{2n+1,1})^{2r_{p+1}} [Q_{r_1, r_2; p}(1)]^p + \right. \\ &\left. + \frac{[R_{2r; p}(1)]^p}{2^{2r_p}} \sum_{i=1}^{2n} (x_{i+1,1} - x_{i,1})^{2r_{p+1}} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Минимизация правой части последнего равенства по переменным  $x_{2i+1,1}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) даёт

$$x_{1,1}^* = \delta_1 \gamma_1 h,$$

$$x_{2n+1,1}^* = 1 - \delta_2 \gamma_2 h,$$

$$x_{2i+1,1}^* = \frac{x_{i,0}^* + x_{i+1,0}^*}{2},$$

откуда следуют формулы (3) при  $m=1$ . Веса (4) получаются как в работе [6]. Оценка (5) при  $m=1$  следует из соотношения (6) подстановкой узлов (3) при  $m=1$ . Теорема доказана при  $m=1$ .

Пусть теорема верна для  $m=m_0$ . Докажем, что тогда она справедлива и для  $m=m_0+1$ . В формуле (I) при  $m=m_0+1$  узлы

$$x_{2k, m_0+1} = x_{k, m_0}^* \quad (k = 1, 2, \dots, 2^{m_0(n+1)} - 1)$$

заданы и вычисляются по формулам (3) при  $m=m_0$ . Как при  $m=1$ , и здесь получим функцию  $\bar{K}(t)$  и построим функцию  $\bar{L}(t)$ . Минимизация интеграла

$$\int_0^1 |\bar{K}(t)|^p dt$$

по переменным  $x_{2i+1, m_0+1}$  ( $i = 0, 1, \dots, 2^{m_0(n+1)} - 1$ ) даёт

$$x_{1, m_0+1}^* = \delta_1 \gamma_1^{m_0+1} h,$$

$$x_{2^{m_0+1}(n+1)-1, m_0+1}^* = 1 - \delta_2 \gamma_2^{m_0+1} h,$$

$$x_{2i+1, m_0+1}^* = \frac{x_{i, m_0}^* + x_{i+1, m_0}^*}{2}.$$

Отсюда следует справедливость формул (3) при  $m = m_0 + 1$ . Аналогично получаются веса и оценка ошибки. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь формулы  $\bar{F}_{n, m}(H)$  вида

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{2^m(n+1)-1} \sum_{j=0}^{2r-1} A_{kj} f^{(j)}(x_{k, m}) + \sum_{i=0}^{r_1-1} \alpha_i f^{(i)}(0) + \sum_{j=0}^{r_2-1} \beta_j f^{(j)}(1) + \bar{R}_{n, m}(f). \quad (7)$$

Так же, как и выше, построим последовательность формул  $\bar{F}_{n, m}(H)$  ( $m = 0, 1, \dots$ ), где  $\bar{F}_{n, 0}(H)$  означает наилучшую на множестве  $H$  формулу (7) при  $m = 0$ , а

$\bar{F}_{n, m_0}(H)$  — наилучшую на множестве  $H$  формулу среди тех формул (7) при  $m = m_0$ , у которых часть узлов зафиксирована

$$x_{2k, m_0}^* = x_{k, m_0-1}^* \quad (k = 1, 2, \dots, 2^{m_0-1}(n+1) - 1), \quad \text{где } x_{k, m_0-1}^* \text{ — наилучшие узлы формулы } \bar{F}_{n, m_0-1}(H).$$

**Теорема 2.** На множестве  $W^{(2^n)} L_q$  единственной наилучшей квадратурной формулой  $\bar{F}_{n, m}(W^{(2^n)} L_q)$  является формула (7), которая имеет узлы  $x_{k, m}$  и веса  $A_{kj}$ , вычисленные по формулам (3) и (4), веса  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, \dots, r_1 - 1$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 0, 1, \dots, r_2 - 1$ ), являющиеся решением системы

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_k + \sum_{j=0}^k \frac{\beta_j}{(k-j)!} &= \frac{1}{k!} R_{n, m}(x^k) \quad (k = 0, 1, \dots, s_1 - 1), \\ \alpha_k E(r_1 - r_2) + \sum_{j=0}^s \frac{\beta_j}{(k-j)!} &= \frac{1}{k!} R_{n, m}(x^k) \\ &\quad (k = s_1, s_1 + 1, \dots, s_2 - 1), \\ \sum_{j=0}^{r_2-1} \frac{\beta_j}{(k-j)!} &= \frac{1}{k!} R_{n, m}(x^k) \quad (k = s_2, s_2 + 1, \dots, 2r - 1), \end{aligned} \right.$$

где

$$s_1 = \min(r_1, r_2), \quad s_2 = \max(r_1, r_2),$$

$$E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0, \end{cases}$$

$S = \kappa E(r_2 - r_1) + (r_2 - 1) E(r_1 - r_2)$  и  $R_{n,m}(x^\kappa)$  обозначает ошибку формулы (I) с узлами (3) и весами (4) для функции  $f(x) = x^\kappa$ . Для этой формулы величина

$$\sup_{f \in W^{(2r)} L_q} |\bar{R}_{n,m}(f)|$$

совпадает со значением (5).

Теорема следует из предыдущей теоремы и из теоремы I работы [7].

#### Л и т е р а т у р а

1. А.С. К р о н р о д. Об интегрировании с контролем точности. — ДАН СССР, 1964, 154, № 2, 283–286.
2. И.П. М ы с о в с к и х. Один частный случай квадратурных формул, содержащих наперед заданные узлы. — Изв. АН БССР, Физ. Мат. н., 1964, № 4, 125–127.
3. М. Л е в и н, Э. Ш а ц. Об увеличении числа узлов наилучшей на множестве функций квадратурной формулы. — Изв. вузов Матем., 1972, № 10, 46–52.
4. С.М. Н и к о л ь с к и й. Квадратурные формулы, М., Физматгиз, 1958.
5. М. Л е в и н. Об уточнении наилучших квадратурных формул. — Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 1973, 22, № 3, 323–326.
6. А. И н г и. Обобщение некоторых результатов по наилучшим квадратурным формулам. — Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 1973, 22, № 4, 358–364.
7. М. Л е в и н. О построении наилучших квадратурных формул. — Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 1972, 21, № 4, 449–452.

On a Problem of Kronrod-Levin for QuadratureFormulas

## Summary

The present paper is concerned with the problem to construct a sequential refined sequence of the best quadrature formulas  $F_{n,m}$  of the form (1) for sets  $W^{(2r)}L_q = \left\{ f(x) : f^{(2r-1)} \text{ absolutely continuous on } [0,1] \text{ and } \|f^{(2r)}(x)\| \leq M \right\}$  and  $W_{01}^{(r_1, r_2)}L_q = \left\{ f \in W^{(2r)}L_q, f^{(k)}(0) = 0 \text{ } (k=0, 1, \dots, r_1-1), f^{(i)}(1) = 0 \text{ } (i=0, 1, \dots, r_2-1), r_1+r_2=2r \right\}$ . In the case  $m=0$  the quadrature formula  $F_{n,0}$  with knots  $x_{k,0}^*$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) and weights  $A_{kj}$  ( $k=1, 2, \dots, n; j=0, 1, \dots, 2r-1$ ) is obtained by minimizing the value (2). If  $m=1$  the part of knots of the formula  $F_{n,1}$  is fixed ( $x_{2k,1} = x_{k,0}^*$  ( $k=1, 2, \dots, n$ )) and other knots and weights are found by the requirement to minimize the value (2) for  $m=1$ . The formula  $F_{n,m_0}$  is found by continuing this process for the case of knots  $x_{2k,m_0} = x_{k,m_0-1}^*$  ( $k=1, 2, \dots, 2^{m_0-1}(n-1) - 1$ ) being the knots of the formula  $F_{n,m_0-1}$ , while the knots  $x_{2k+1,m_0}$  ( $k=0, 1, \dots, 2^{m_0-1}(n+1) - 1$ ) and weights  $A_{kj}$  ( $k=1, 2, \dots, 2^{m_0}(n+1) - 1; j=0, 1, \dots, 2r-1$ ) are constructed by the requirement to minimize the value (2) for  $m=m_0$ .

УДК 518.48

Я. Хенно

СВОБОДНЫЕ  $\Gamma$ -КОММУТАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ МЕНГЕРА

Пусть  $J$  — некоторое множество натуральных чисел. Объединение  $A_J = \bigcup_{n \in J} A_n$  непустых непересекающихся множеств  $A_n$  называется **системой Менгера** [1], если любым  $a_1, \dots, a_m \in A_n, b \in A_m, n, m \in J$  сопоставлен элемент  $a_1 \dots a_m b \in A_n$  и выполняется тождество

$$x_1 \dots x_m (y_1 \dots y_e z) = (x_1 \dots x_m y_1) \dots (x_1 \dots x_m y_e) z.$$

Система Менгера  $A_J$  называется свободной в классе систем Менгера  $\mathcal{M}$  ( $\mathcal{M}$ -свободной) над множеством образующих  $X_J = \bigcup_{n \in J} X_n, X_n \in A_n$ , если всякое отображение  $\tau: X_J \rightarrow B_J$  ( $\tau X_n \in A_n$ ), множества  $X_J$  в произвольную систему Менгера  $B_J \in \mathcal{M}$  однозначно продолжимо до гомоморфизма.

Пусть всякому  $n \in J$  сопоставлена некоторая группа  $\Gamma_n$  подстановок множества  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\Gamma = \{\Gamma_n, n \in J\}$ . Назовём систему Менгера  $A_J$   $\Gamma$ -коммулативной, если при любых  $x_1 \dots x_m \in A_n, y \in A_m, n, m \in J, \sigma \in \Gamma_m$  имеем

$$x_1 \dots x_m y = x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)} y.$$

Обозначим через  $\mathcal{M}(\Gamma)$  совокупность всех  $\Gamma$ -коммулативных систем Менгера.  $\mathcal{M}(\Gamma)$  — многообразие систем Менгера как многоосновных алгебр в смысле Хиггинса [4]. Заметим, что в случае, когда всякая  $\Gamma_n$  состоит из тождественного преобразования,  $\mathcal{M}(\Gamma)$  состоит из всех систем Менгера.

Пусть  $X_j = \bigcup_{n \in J} X_n$ , где  $X_n$  — непустые непересекающиеся множества. Определим индуктивно множества  $W_n, n \in J$  слов (над  $X_j$ ) и вес  $h(w)$  каждого слова  $w$ .

I.1. Всякое  $x \in X_n$  является словом из  $W_n$  с весом 1.

I.2. Если  $w_1, \dots, w_m \in W_n, x \in X_m, n, m \in J$ , то выражение  $w_1 \dots w_m x$  является словом из  $W_n$  с весом  $\max h(w_i) + 1$ .

Обозначим  $W_j = \bigcup_{n \in J} W_n$  и определим индукцией по весу слов равенство слов. Считаем слова  $w, w' \in W_j$  равными ( $w = w'$ ), если  $w, w' \in W_n, n \in J, h(w) = h(w')$  и

II.1. При  $h(w) = h(w') = 1$ , т.е. при  $w, w' \in X_n$  имеем  $w = w'$  во множестве  $X_n$ .

II.2. При  $h(w) = h(w') > 1, w = w_1 \dots w_k x, w' = w'_1 \dots w'_k x'$  имеем  $k=1, x = x'$  и существует  $\sigma \in \Gamma_k$  такой, что  $w_i = w'_{\sigma(i)}, i = 1, \dots, k$  (тогда  $w'_i = w_{\sigma^{-1}(i)}$ ), где равенства  $x = x', w_i = w'_{\sigma(i)}$  по предположению индукции уже определены.

Сопоставим всяким  $w_1, \dots, w_m \in W_n, v \in W_m$  индукцией по  $h(w)$  слово  $w_1 \dots w_m x \in W_n$ , которое назовём произведением слов  $w_1, \dots, w_m, v$ .

III.1. При  $h(v) = 1, v = x \in X_m$  произведением является слово  $w_1 \dots w_m x$ .

III.2. При  $h(v) > 1, v = v_1 \dots v_k x$  положим  $w_1 \dots w_m v = (w_1 \dots w_m v_1) \dots (w_1 \dots w_m v_k) x$ , где все произведения в правой части равенства уже определены.

Точно так же, как это сделано в [2] для  $\Omega$ -систем, можно показать, что  $W_j$  — система Менгера, свободная над множеством образующих  $X_j$  в классе  $\mathcal{M}(\Gamma)$ . Индукцией по  $h(v)$  также легко показать, что в системе  $W_j$  имеем при любых  $w_1, \dots, w_m \in W_n, v \in W_m, n, m \in J$

$$h(w_1 \dots w_m v) = \max h(w_i) + h(v). \quad (I)$$

**Теорема I.** Пусть  $w_1, \dots, w_m, w'_1, \dots, w'_k \in W_n, v \in W_m, v' \in W_k, n, m, k \in J$ . Если  $w_1 \dots w_m v = w'_1 \dots w'_k v'$ , то

1) при  $h(v) = h(v')$  имеем  $m = k, v = v', w_i = w'_{\sigma(i)}, i = 1, \dots, m, \sigma \in \Gamma_m$ ;

2) при  $h(v) < h(v')$  существуют  $u_1, \dots, u_m \in W_k, \sigma \in \Gamma_m$  такие, что  $w_i = w'_1 \dots w'_k u_{\sigma(i)}, i = 1, \dots, m, v' = u_1 \dots u_m v$ .

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по

$h(v)$ .

Заметим, что по (1) из  $w_1 \dots w_m v = w'_1 \dots w'_k v'$  следует  $\max h(w_i) + h(v) = h(w_1 \dots w_m v) = h(w'_1 \dots w'_k v') = \max h(w'_i) + h(v')$ , так что при  $h(v) = h(v')$  имеем  $\max h(w_i) = \max h(w'_i)$ , а при  $h(v) < h(v')$  имеем  $\max h(w_i) > \max h(w'_i)$ . Пусть  $h(v) = 1$ . Тогда при  $h(v) = h(v')$  должно быть  $v \in X_m, v' \in X_k$  и из  $w_1 \dots w_m v = w'_1 \dots w'_k v'$  получим по определению II, что  $m = k, v = v'$  и  $w_i = w'_{\sigma(i)}, i = 1, \dots, m, \sigma \in \Gamma_m$ . При  $h(v) < h(v'), v' = u_1 \dots u_s x$  имеем  $w_1 \dots w_m v = (w'_1 \dots w'_k u_1) \dots (w'_1 \dots w'_k u_s) x$ , откуда  $l = m, v = x, w_i = w'_1 \dots w'_k u_{\sigma(i)}, i = 1, \dots, m, \sigma \in \Gamma_m$ .

Пусть  $h(v) > 1, v = v_1 \dots v_s x, v' = v'_1 \dots v'_t x'$ . Тогда из  $(w_1 \dots w_m v_1) \dots (w_1 \dots w_m v_s) x = w_1 \dots w_m v = w'_1 \dots w'_k v' = (w'_1 \dots w'_k v'_1) \dots (w'_1 \dots w'_k v'_t) x'$  следует, что  $s = t, x = x'$  и  $w_1 \dots w_m v_j = w'_1 \dots w'_k v_{\tau(j)}, \tau \in \Gamma_s, j = 1, \dots, s$ .

Если  $h(v) = h(v')$ , то  $\max h(w_i) = \max h(w'_i)$  и из-за  $\max h(w_i) + h(v_j) = h(w_1 \dots w_m v_j) = h(w'_1 \dots w'_k v_{\tau(j)}) = \max h(w'_i) + h(v_{\tau(j)})$  получим  $h(v_j) = h(v_{\tau(j)})$ . По предположению индукции  $m = k, v_j = v'_{\tau(j)}$  и  $w_i = w'_{\sigma_j(i)}, \sigma_j \in \Gamma_m$ , так что по П.2  $v = v_1 \dots v_s x = v'_{\tau(1)} \dots v'_{\tau(s)} x' = v'_1 \dots v'_s x' = v'$ . Если  $h(v) < h(v')$ , то  $\max h(w_i) > \max h(w'_i)$ , откуда  $h(v_j) < h(v_{\tau(j)})$  и по

предположению индукции существуют  $u_{j1} \dots u_{jm} \in W_n, \sigma_j \in \Gamma_m, j = 1, \dots, s$  такие, что  $w_i = w'_1 \dots w'_k u_{j\sigma_j(i)}, i = 1, \dots, m, v_{\tau(j)} = u_{j1} \dots u_{jm} v_j$ . Тогда  $w_i = w'_1 \dots w'_k u_{1\sigma_1(i)} = w'_1 \dots w'_k u_{2\sigma_2(i)} = \dots = w'_1 \dots w'_k u_{s\sigma_s(i)}$ , откуда  $h(u_{1\sigma_1(i)}) = h(u_{2\sigma_2(i)}) = \dots = h(u_{s\sigma_s(i)}, i = 1, \dots, m$  и по предположению индукции  $u_{1\sigma_1(i)} = u_{2\sigma_2(i)} = \dots = u_{s\sigma_s(i)}$  при всех  $i = 1, \dots, m$ . Обозначим  $u_{1\sigma_1(i)} = u_{2\sigma_2(i)} = \dots = u_{s\sigma_s(i)} = u_i$ . Тогда, ввиду  $\sigma_j \in \Gamma_m$ , имеем  $v_{\tau(j)} = u_{j1} \dots u_{jm} v_j = u_j \sigma_j(1) \dots u_j \sigma_j(m) v_j = u_1 \dots u_m v_j, j = 1, \dots, s$  и  $v' = v'_1 \dots v'_s x' = (u_1 \dots u_m v_{\tau^{-1}(1)}) \dots (u_1 \dots u_m v_{\tau^{-1}(s)}) x = u_1 \dots u_m v$ ,

так как  $v_{\tau^{-1}(1)} \dots v_{\tau^{-1}(s)} x = v_1 \dots v_s x = v$  из-за  $\tau^{-1} \in \Gamma_s$ .

Теорема доказана.

Назовём элемент  $x \in A_m$  системы Менгера  $A_j$   $\Gamma$ -сократимым справа, если при любых  $a_1, \dots, a_m, a'_1, \dots, a'_m \in A_n, n \in \mathbb{J}$  из  $a_1 \dots a_m x = a'_1 \dots a'_m x$  следует, что существует такая подстановка  $\sigma \in \Gamma_m$ , что  $a_i = a'_{\sigma(i)}, i = 1, \dots, m$ . Назовём последовательность элементов  $x_1, \dots, x_m \in A_n$

$\Gamma$ -сократимым слева, если при любых  $a, a' \in A_m, \sigma \in \Gamma_m$  из  $x_1 \dots x_m a = x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)} a'$  следует  $a = a'$ . Из доказанной теоремы вытекает

**Следствие 1.** Свободная  $\Gamma$ -коммутативная система Менгера  $W_J$  является  $\Gamma$ -сократимой и слева и справа.

Пусть  $A_J$  - произвольная система Менгера. Будем говорить, что любой элемент системы  $A_J$  имеет разложение длины 1. Если элементы  $a_1, \dots, a_m, b \in A_n$  имеют разложения длины  $g(a_1), \dots, g(a_m), g(b)$  соответственно, то элемент  $a_1 \dots a_m b$  имеет разложение длины  $g(a_1 \dots a_m b) = \max g(a_i) + g(b)$ . Назовём весом  $h(a)$  элемента  $a$  максимальную длину его разложения, если такой максимум существует; в противном случае положим  $h(a) = \infty$ . Из определения ясно, что всегда

$$h(a_1 \dots a_m b) \geq \max h(a_i) + h(b) \quad (2)$$

и в свободной  $\Gamma$ -коммутативной системе  $W_J$  таким образом определяемый вес совпадает с ранее определённым. Обозначим

$$A_n^1 = \{x \mid x \in A_n, h(x) = 1\}, \quad A_J^1 = \bigcup_{n \in J} A_n^1.$$

**Лемма 1.** Если все элементы системы  $A_J$  имеют конечные веса, то множество  $A_J^1$  является неприводимым множеством образующих системы  $A_J$ .

**Доказательство.** Покажем индукцией по  $h(a)$ , что всякий элемент  $a \in A_J$  выражается через элементы из  $A_J^1$ . При  $h(a) = 1$  имеем  $a \in A_J^1$ . Если  $h(a) > 1$ , то существует разложение  $a = a_1 \dots a_m b$ , где по (2)  $h(a_i), h(b) < h(a)$ , так что по предположению индукции для элементов  $a_1, \dots, a_m, b$  утверждение выполняется, откуда ясно, что и для  $a$  это так. Так как элементы из  $A_J^1$  неразложимы, то ясно, что множество образующих  $A_J^1$  - неприводимо. Лемма доказана.

**Теорема 2.**  $\Gamma$ -коммутативная система Менгера  $A_J$  является  $\mathcal{M}(\Gamma)$ -свободной тогда и только тогда, когда выполняются условия:

- 1) Все элементы системы  $A_J$  имеют конечный вес.
- 2) Элементы с весом 1  $\Gamma$ -сократимы справа.

3) Из  $a_1 \dots a_m c = b_1 \dots b_k d$  следует, что либо  $m=k, c=d$ , либо существуют  $u_1, \dots, u_k \in A_m$  такие, что  $c = u_1 \dots u_k d$ , либо существуют  $v_1, \dots, v_m \in A_k$  такие, что  $d = v_1 \dots v_m c$ .

Доказательство. Необходимость условия 1) следует из приведённой выше конструкции  $\Gamma$ -свободной системы Менгера, необходимость условий 2) и 3) - соответственно из следствия 1 и теоремы 1. Докажем достаточность.

Согласно лемме 1 из 1) следует, что все элементы системы  $A_J$  можно записать в виде слов над множеством  $A_J^1$ . Остаётся доказать, что если некоторый элемент  $a$  имеет две такие записи, то их равенство прямо следует из определения П. Покажем это индукцией по  $h(a)$ .

При  $h(a)=1$  имеем  $a \in A_J^1$  и  $a$  не может иметь разложений длины  $> 1$ . Пусть  $h(a) > 1$ ,  $a = a_1 \dots a_m x = b_1 \dots b_k x'$ , где  $x \in A_m^1, x' \in A_k^1, a_i, b_i$  - слова над  $A_J^1$ . Согласно 3) должно быть  $m=k, x=x'$  (иначе  $h(x) > 1$  или  $h(x') > 1$ ). Следовательно, по 2) существует подстановка  $\sigma \in \Gamma_m$  такая, что  $a_i = b_{\sigma(i)}, i=1, \dots, m$ , но так как  $h(a_1), h(b_1) < h(a)$  по (2), то для слов  $a_i, b_i$  утверждение выполняется по предположению индукции. Теорема доказана.

$\mathcal{M}(\Gamma)$ -свободным системам можно давать и "левую" характеристику.

Теорема 3.  $\Gamma$ -коммутативная система Менгера  $A_J$  является  $\mathcal{M}(\Gamma)$ -свободной тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) Все элементы системы  $A_J$  имеют конечный вес.

2) Любая последовательность элементов  $a_1, \dots, a_m \in A_n, n, m \in \mathbb{J}$   $\Gamma$ -сократима справа.

3) Из  $a_1 \dots a_m c = b_1 \dots b_k d$  следует, что либо  $m=k$  и существует  $\sigma \in \Gamma_m$  такая, что  $a_i = b_{\sigma(i)}, i=1, \dots, m$ , либо существуют  $u_1, \dots, u_m \in A_k$  такие, что  $a_i = b_1 \dots b_k u_i, i=1, \dots, m$ , либо существуют  $v_1, \dots, v_k \in A_m$  такие, что  $b_i = a_1 \dots a_m v_i, i=1, \dots, k$ .

Доказательство. Необходимость условий получается, как и при доказательстве теоремы 2 и нам остаётся пока-

зять, что если некоторый элемент  $a$  имеет различные записи в виде слов над множеством  $A'_j$ , то их равенство следует из определения II. При  $h(a) = 1$  утверждение выполняется. Пусть  $h(a) > 1$ ,  $a = a_1 \dots a_m x = b_1 \dots b_k x'$ ,  $x \in A'_m$ ,  $x' \in A'_k$ . Если предполагать, что  $a_i = b_1 \dots b_k u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , то  $b_1 \dots b_k x' = a_1 \dots a_m x = (b_1 \dots b_k u_1) \dots (b_1 \dots b_k u_m) x' = b_1 \dots b_k (u_1 \dots u_m x')$  и по 2)  $x' = u_1 \dots u_m x'$ , что противоречит  $h(x') = 1$ . Точно так же ведёт к противоречию предположение  $b_i = a_1 \dots a_m v_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , следовательно,  $m = k$  и существует подстановка  $\sigma \in \Gamma_m$  такая, что  $a_i = b_{\sigma(i)}$ , откуда по 2) следует, что  $x = x'$ . Теорема доказана.

Так как для подсистем  $\mathcal{M}(\Gamma)$ -свободных систем условия 1) и 2) теорем 2 и 3 всегда выполняются, то из этих теорем вытекает

**Следствие 2.** Подсистема  $A_j$   $\mathcal{M}(\Gamma)$ -свободной системы  $W_j$  является свободной тогда и только тогда, когда из равенства  $a_1 \dots a_m c = b_1 \dots b_k d$ ,  $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_k \in A_n$ ,  $c \in A_m$ ,  $d \in A_k$ ,  $n, m, k \in J$  следует, что выполняется одно из условий:

- 1)  $m = k$ ,  $c = d$ .
- 2) Существуют  $u_1, \dots, u_k \in A_m$  такие, что  $c = u_1 \dots u_k d$ .
- 3) Существуют  $v_1, \dots, v_m \in A_k$  такие, что  $d = v_1 \dots v_m c$ .
- 4)  $m = k$  и существует подстановка  $\sigma \in \Gamma_m$  такая, что  $a_i = b_{\sigma(i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ .
- 5) Существуют  $u_1, \dots, u_m \in A_k$  такие, что  $a_i = b_1 \dots b_k u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .
- 6) Существуют  $v_1, \dots, v_k \in A_m$  такие, что  $b_i = a_1 \dots a_m v_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

**Теорема 4.** Подсистема  $A_j$  свободной  $\Gamma$ -коммутативной системы Менгера  $W_j$  является свободной тогда и только тогда, когда для любых  $w_1 \dots w_m \in W_n$ ,  $a_1, \dots, a_n \in A_k$ ,  $b \in A_m$ ,  $n, m, k \in J$  из  $w_1 \dots w_m b \in A_n$ ,  $a_1 \dots a_n w_i \in A_k$ ,  $i = 1, \dots, m$  следует  $w_1, \dots, w_m \in A_n$ .

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $A_j$  - свободная подсистема свободной  $\Gamma$ -коммутативной системы  $W_j$ . Пусть для некоторых  $w_1, \dots, w_m \in W_n$ ,  $a_1, \dots, a_n \in A_k$ ,  $b \in A_m$  выполняется  $w_1 \dots w_m b \in A_n$ ,  $a_1 \dots a_n w_i \in A_k$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Тогда  $(a_1 \dots a_n w_1) \dots (a_1 \dots a_n w_m) b = a_1 \dots a_n (w_1 \dots w_m b)$  и так как система  $A_j$  - свободна и  $a_1 \dots a_n w_i$ ,  $w_1 \dots w_m b \in A_j$  то по тео-

реме 1 либо  $b = w_1 \dots w_m b$ , либо существуют  $v_1, \dots, v_n \in A_k$  такие, что  $b = v_1 \dots v_n (w_1 \dots w_m b)$ , либо существуют  $u_1, \dots, u_m \in A_n$  такие, что  $w_1 \dots w_m b = u_1 \dots u_m b$ . Так как  $h(b) < h(w_1 \dots w_m b)$ ,  $h(b) < h(v_1 \dots v_n (w_1 \dots w_m b))$ , то остаётся только третья возможность, т.е.  $w_1 \dots w_m b = u_1 \dots u_m b$ , но так как по следствию 1 система  $W_j$   $\Gamma$ -сократима справа, то  $w_i = u_{\sigma(i)} \in A_n$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\sigma \in \Gamma_m$ .

**Достаточность.** Пусть для подсистемы  $A_j$  свободной  $\Gamma$ -коммутативной системы условие теоремы выполняется. Предположим, что для некоторых  $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_k \in A_n$ ,  $c \in A_m$ ,  $d \in A_k$  имеем  $a_1 \dots a_m c = b_1 \dots b_k d$ . Так как система  $W_j$  - свободна, то по теореме 2 либо  $c = d$ , либо  $c = u_1 \dots u_k d$  для некоторых  $u_1, \dots, u_k \in W_m$ , либо  $d = v_1 \dots v_m c$ ,  $v_1, \dots, v_m \in W_k$ . В первом случае это равенство выполняется и в системе  $A_j$ . Если  $c = u_1 \dots u_k d$ , то  $b_1 \dots b_k d = a_1 \dots a_m c = a_1 \dots a_m (u_1 \dots u_k d) = (a_1 \dots a_m u_1) \dots (a_1 \dots a_m u_k) d$ , откуда по следствию 1 вытекает, что существует подстановка  $\sigma \in \Gamma_k$  такая, что  $b_i = a_1 \dots a_m u_{\sigma(i)}$ . Следовательно,  $u_1 \dots u_k d = c \in A_m$ ,  $a_1 \dots a_m u_i = b_{\sigma^{-1}(i)} \in A_n$ , так что  $u_1, \dots, u_k \in A_m$ . Согласно следствию 2 отсюда следует, что система Менгера  $A_j$  - свободна. Теорема доказана.

В случае, когда  $J = \{1\}$  и  $\Gamma_1$  состоит из тождественной подстановки, получим найденную разными авторами [3, 5] характеристику свободных подполугрупп свободной (абсолютно) полугруппы:

Подполугруппа  $A$  свободной (в классе всех полугрупп) полугруппы  $W$  является свободной тогда и только тогда, когда для любых  $a, b \in A$ ,  $w \in W$  из  $aw \in A$ ,  $wb \in A$  следует  $w \in A$ .

## Л и т е р а т у р а

1. Я. В. Х и о н.  $\Omega$ -системы Менгера. - Сиб. мат. ж., 1967, УШ, № 1, 174-194.
2. Я. А. Х е н н о. Свободные  $\Omega$ -системы. "Труды Галлинск. пол. ин-та", 1973, № 347, 29-40.
3. Л. Н. Ш е в р и н. О подполугруппах свободных полугрупп. - ДАН СССР, 1960, 133, № 3, 537-539.

4. P.I. H i g g i n s. Algebras with a scheme of operators. Math. Nachr., 1963, 27, Nr. 1-2, 115-132.
5. M.P. S c h ü t z e n b e r g e r. Une théorie algébrique du codage. C.R. Acad. Sci. Paris, 244, 862-864.

J. Henno

### Free $\Gamma$ -Commutative Menger Systems

#### Summary

Let  $\Gamma_n$  be some group of substitutions on the set  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\Gamma = \{\Gamma_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Menger system  $A_J$  is said to be  $\Gamma$ -commutative if  $a_1 \dots a_m b = a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(m)} b$  for all  $a_1, \dots, a_m \in A_n$ ,  $b \in A_m n$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma \in \Gamma_m$ . In the article is given the construction and abstract characterisation of the Menger system  $W_J$ , free in the class of all  $\Gamma$ -commutative Menger systems. Necessary and sufficient conditions for a subsystem of the system  $W_J$  to be free are also found.

Ф. Вихманн

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ

Пусть задана числовая последовательность  $\{\lambda_k\}$ ,  
которая удовлетворяет условию

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Ряд I)

$$\sum z_k \quad (I)$$

называется суммируемым методом Пуассона-Абеля  $PA(\lambda_k)$  к сумме  $z$ , если при всех  $\alpha > 0$  ряд  $\sum z_k e^{-\lambda_k \alpha} = \varphi(\alpha)$  сходится и существует предел

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \varphi(\alpha) = z.$$

Ряд (1) называется суммируемым методом  $T_s(\lambda_k)$  к сумме  $z$ , если при всех  $\alpha > 0$  ряд  $\sum \frac{z_k}{(1+\alpha \lambda_k)^s} = \psi_s(\alpha)$  ( $s > 0$ ) сходится и существует предел

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \psi_s(\alpha) = z.$$

Методы  $PA(\lambda_k)$  и  $T_s(\lambda_k)$  регулярны.

I) Если индексы суммирования не обозначены, то они пробегают все значения от 0 до  $\infty$ .

Ю.И. Худак [1] доказал, во-первых, если ряд (1) суммируем методом  $PA(\lambda_k)$  и для всех  $\alpha > 0$  существует  $\psi_1(t)$ , то ряд (1) суммируем методом  $T_1(\lambda_k)$  к той же сумме и, во-вторых, если ряд (1) суммируем методом  $T_1(\lambda_k)$  и ряд  $\sum z_k \lambda_k^{-\alpha}$  сходится для всех  $\alpha > 0$ , то ряд (1) суммируем методом  $PA(\ln \lambda_k)$  к той же сумме. В работах [2,3,4] рассматривалось применение метода  $T_s(\lambda_k)$  к рядам по системам ортогональных функций.

Определение. Ряд (1) называется суммируемым методом  $AT_s(\lambda_k)$  к сумме  $z$ , если при всех  $\alpha > 0$  ряд

$$\sum \frac{z_k}{(1+\alpha\lambda_k)^s} e^{-\lambda_k \alpha} = \rho_s(\alpha) \quad (2)$$

сходится и существует предел

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \rho_s(\alpha) = z.$$

В настоящей работе обобщены результаты Ю.И. Худака на случай методов  $AT_s(\lambda_k)$  и  $T_s(\lambda_k)$  и доказана для них одна тауберова теорема.

Теорема I. Если ряд  $\sum z_k \lambda_k^{-\alpha}$  сходится при всех  $\alpha > 0$ , то

$$\sum z_k \lambda_k^{-\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha) W_{\frac{1-\alpha-s}{2}, \frac{s-\alpha}{2}}(1)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \rho_s(t) dt, \quad (3)$$

где  $W_{\frac{1-\alpha-s}{2}, \frac{s-\alpha}{2}}(1)$  - значение функции Уиттекера в точке 1.

Доказательство. Поскольку

$$\rho_s(\alpha) = \sum z_k \lambda_k^{-\alpha} \frac{\lambda_k^{\alpha} e^{-\lambda_k \alpha}}{(1+\alpha\lambda_k)^s}$$

и при фиксированном  $\alpha$  начиная с некоторого  $k$  второй множитель под суммой убывает, то по признаку Абеля ряд (2) сходится при всех  $\alpha > 0$ . Очевидно, он сходится равномерно

на любом отрезке  $0 < \varepsilon \leq \alpha \leq T < \infty$ . Поэтому

$$\int_{\varepsilon}^T t^{\alpha-1} \rho_{\delta}(t) dt = \sum z_k \int_{\varepsilon}^T \frac{t^{\alpha-1} e^{-\lambda_k t}}{(1+t\lambda_k)^{\delta}} dt. \quad (4)$$

Покажем, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $T \rightarrow \infty$  суммы

$$\sum z_k \int_0^{\varepsilon} \frac{t^{\alpha-1} e^{-\lambda_k t}}{(1+t\lambda_k)^{\delta}} dt = p(\varepsilon)$$

и

$$\sum z_k \int_T^{\infty} \frac{t^{\alpha-1} e^{-\lambda_k t}}{(1+t\lambda_k)^{\delta}} dt = q(T)$$

стремятся к нулю. Действительно,

$$p(\varepsilon) = \varepsilon \sum \frac{z_k}{\lambda_k^{\alpha}} \int_1^{1+\varepsilon\lambda_k} (v-1)^{\alpha-1} v^{-\delta} e^{-v} dv = \varepsilon \sum \frac{z_k}{\lambda_k^{\alpha}} f_k(\varepsilon) \quad (5)$$

и

$$\int_1^{\infty} (v-1)^{\alpha-1} v^{-\delta} e^{-v} dv = e^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\alpha) W_{\frac{1-\alpha-\delta}{2}, \frac{\delta-\alpha}{2}}(1),$$

где справа в последнем равенстве стоит функция Уиттекера в точке 1 ([5], формула (3.383 4)). Поскольку при фиксированном  $\varepsilon$   $f_k(\varepsilon)$  образуют монотонно возрастающую последовательность, члены которой при всех  $\varepsilon > 0$  равномерно ограничены, то по теореме 29 из [6] ряд (5) сходится равномерно относительно  $\varepsilon$ , откуда  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p(\varepsilon) = 0$ . Аналогично  $\lim_{T \rightarrow \infty} q(T) = 0$ .

Теперь, переходя в равенстве (4) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $T \rightarrow \infty$  к пределу, получим

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \rho_{\delta}(t) dt = \sum z_k \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1} e^{-\lambda_k t}}{(1+t\lambda_k)^{\delta}} dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= e \sum \frac{z_k}{\lambda_k^\alpha} \int_1^\infty (v-1)^{\alpha-1} v^{-\delta} e^{-v} dv = \\
 &= \sqrt{e} \Gamma(\alpha) W_{\frac{1-\alpha-\delta}{2}, \frac{\delta-\alpha}{2}}(1) \sum \frac{z_k}{\lambda_k^\alpha},
 \end{aligned}$$

что завершает доказательство.

Теорема 2. Если  $\lambda_0 \geq 1$  и ряд  $\sum z_k \lambda_k^{-\alpha}$  сходится при всех  $\alpha > 0$ , то из суммируемости ряда (I) методом  $AT_\delta(\lambda_k)$  следует его суммируемость методом  $PA(\ln \lambda_k)$  к той же сумме.

Доказательство. Очевидно, можно ограничиться случаем, когда ряд (1) суммируем методом  $AT_\delta(\lambda_k)$  к нулю. Надо показать, что  $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \sum z_k \lambda_k^{-\alpha} = 0$ . По теореме 1

$$\sum z_k \lambda_k^{-\alpha} = \frac{1}{\sqrt{e} \Gamma(\alpha) W_{\frac{1-\alpha-\delta}{2}, \frac{\delta-\alpha}{2}}(1)} \left( \int_0^\delta + \int_\delta^\infty \right) t^{\alpha-1} \varrho_\delta(t) dt = A + B.$$

Поскольку  $\varrho_\delta(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ , то найдётся  $\delta > 0$ , что  $|\varrho_\delta(t)| < \varepsilon$  при  $0 < t \leq \delta$ . Тогда для достаточно малых  $\alpha$

$$|A| < \frac{\varepsilon \delta^\alpha}{\alpha \sqrt{e} \Gamma(\alpha) W_{\frac{1-\alpha-\delta}{2}, \frac{\delta-\alpha}{2}}(1)} < 2\varepsilon.$$

Ввиду сходимости ряда (2) при  $\alpha = \delta$ , из равенства

$$\sum \frac{z_k}{(1+t\lambda_k)^\delta} e^{-(\lambda_k - \lambda_0)t} = \sum \frac{z_k}{(1+\delta\lambda_k)^\delta} e^{-\lambda_k \delta} \left( \frac{1+\delta\lambda_k}{1+t\lambda_k} \right)^\delta e^{-(\lambda_k - \lambda_0)(t-\delta) + \lambda_0 \delta}$$

по теореме Абеля следует равномерная сходимость слева стоящего ряда для  $t \geq \delta$ . Поэтому  $|\varrho_\delta(t)| \leq M e^{-\lambda_0 t}$ , где  $M$  не зависит от  $t$ . Теперь

$$|B| \leq \frac{M}{\sqrt{e} \Gamma(\alpha) W_{\frac{1-\alpha-\delta}{2}, \frac{s-\alpha}{2}}(1)} \int_{\delta}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-\lambda_0 t} dt \leq$$

$$\leq \frac{M \int_{\delta}^{\infty} e^{-\lambda_0 t} dt}{\sqrt{e} \Gamma(\alpha) \delta^{1-\alpha} W_{\frac{1-\alpha-\delta}{2}, \frac{s-\alpha}{2}}(1)} \rightarrow 0$$

при  $\alpha \rightarrow 0$ . Значит, при достаточно малых  $\alpha$

$$|\sum z_k \lambda_k^{-\alpha}| < 3\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Аналогично доказываются

Теорема 3. Пусть ряд  $\sum \frac{z_k}{(1+\alpha \lambda_k)^s}$  сходится при всех  $\alpha > 0$ . Тогда

$$\psi_s(\alpha) = \frac{1}{\alpha^s \Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-\frac{t}{\alpha}} \varphi(t) dt.$$

Теорема 4. Если ряд (1) суммируем методом  $PA(\lambda_k)$  и ряд  $\sum \frac{z_k}{(1+\alpha \lambda_k)^s}$  сходится при всех  $\alpha > 0$ , то ряд (1) суммируем методом  $T_s(\lambda_k)$  к той же сумме.

Теорема 5. Если ряд  $\sum z_k \lambda_k^{-\alpha}$  сходится при всех  $\alpha > 0$ , то

$$\sum z_k \lambda_k^{-\alpha} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \Gamma(s) \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \psi_s(t) dt \quad (0 < \alpha < s).$$

Теорема 6. Если  $\lambda_0 \geq 1$  и ряд (1) суммируем методом  $T_s(\lambda_k)$  и ряд  $\sum z_k \lambda_k^{-\alpha}$  сходится при всех  $\alpha > 0$ , то ряд (1) суммируем методом  $PA(\ln \lambda_k)$  к той же сумме.

При  $s=1$  теоремы 3-6 превращаются в соответствующие теоремы Ю.И. Худака.

Приступим к доказательству тауберовой теоремы для метода  $AT_s(\lambda_k)$ . Для этого выведем сперва два вспомогательных результата.

Пусть  $a(t)$  — функция, определённая для всех  $t \geq 0$  и интегрируемая на любом конечном интервале  $[0, t]$ . Обозначим

$$j(t) = \int_0^t a(t) dt \quad \text{и} \quad J(y) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-yt}}{(1+yt)^s} a(t) dt.$$

Теорема 7. Если  $\lim_{y \rightarrow +0} J(y) = z$  и  $a(t) = \sigma\left(\frac{1}{t}\right)$  при  $t \rightarrow \infty$ , то  $\lim_{t \rightarrow \infty} j(t) = z$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} j\left(\frac{1}{y}\right) - J(y) &= \int_0^{\frac{1}{y}} a(t) dt - \int_0^{\infty} \frac{e^{-yt}}{(1+yt)^s} a(t) dt = \\ &= \int_0^{\frac{1}{y}} \left[1 - \frac{e^{-yt}}{(1+yt)^s}\right] a(t) dt - \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} \frac{e^{-yt}}{(1+yt)^s} a(t) dt = L - M. \end{aligned}$$

Так как  $1 - \frac{e^{-yt}}{(1+yt)^s} = O(yt)$  при  $t \leq \frac{1}{y}$ , то

$$L = \int_0^{\frac{1}{y}} O(yt) \sigma\left(\frac{1}{t}\right) dt = y \int_0^{\frac{1}{y}} \sigma(u) du = \sigma(1).$$

Для  $M$  получим:

$$M = \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} \frac{e^{-yt}}{(1+yt)^s} \sigma\left(\frac{1}{t}\right) dt = \sigma\left(\int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{(1+u)^s} du\right) = \sigma(1).$$

Теперь  $j\left(\frac{1}{y}\right) = J(y) + \sigma(1)$  и при  $y \rightarrow 0$  отсюда следует утверждение теоремы.

Теорема 8. Если  $\alpha(t)$  есть функция ограниченной вариации на любом конечном отрезке  $[0, t]$ ,  $\alpha(0) = 0$ ,

при  $y > 0$  существует интеграл

$$J(y) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-yt}}{(1+yt)^s} d\alpha(t)$$

и  $\lim_{y \rightarrow 0} J(y) = l$ , то для  $\int_0^{\infty} d\alpha(t) = l$  необходимо и достаточно условие

$$\beta(t) = \int_0^t u d\alpha(u) = o(t) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Доказательство. Необходимость условия вытекает из теоремы 88 [6]. Из доказательства этой же теоремы получаем

$$\alpha(t) = o(t),$$

$$\gamma(t) = \int_0^t (u+1) d\alpha(u) = \beta(t) + \alpha(t) = o(t) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Теперь, интегрируя по частям,

$$\begin{aligned} J(y) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-yt} d\gamma(t)}{(1+yt)^s(1+t)} = y \int_0^{\infty} \frac{e^{-yt} \gamma(t) dt}{(1+yt)^s(1+t)} + \\ &+ \int_0^{\infty} \frac{e^{-yt} \gamma(t) dt}{(1+yt)^s(1+t)^2} + \beta y \int_0^{\infty} \frac{e^{-yt} \gamma(t) dt}{(1+yt)^{s+1}(1+t)} = P + Q + R. \end{aligned}$$

Но

$$P + R = y \int_0^{\infty} \frac{\sigma(t) e^{-yt}}{1+t} dt = y \int_0^{\infty} \sigma(t) e^{-yt} dt = o(y),$$

и поэтому

$$Q = \int_0^{\infty} \delta(t) \frac{e^{-yt}}{(1+yt)^s} dt \rightarrow l \quad \text{при } y \rightarrow 0.$$

Поскольку  $\delta(t) = \sigma\left(\frac{1}{t}\right)$ , то по теореме 7  $\int_0^{\infty} \delta(t) dt = l$ .

Утверждение теоремы следует теперь из равенства

$$\int_0^{\infty} d\alpha(t) = \int_0^{\infty} \frac{d\gamma(t)}{t+1} = \int_0^{\infty} \frac{\gamma(t) dt}{(t+1)^2} = \int_0^{\infty} \delta(t) dt = l.$$

Теорема 9. Если ряд (1) суммируем методом  $AT_s(\lambda_k)$  к  $z$  и

$$z_k = \sigma\left(\frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right),$$

то ряд (1) сходится к  $z$ .

Доказательство. Определим

$$\alpha(t) = \sum_{\lambda_k < t} z_k$$

и применим теорему 8. Тогда  $J(y) = \varphi_s(y)$  и  $\lim_{y \rightarrow 0} \varphi_s(y) = z$ . Если  $\lambda_n$  есть последнее  $\{\lambda_k\}$ , которое меньше  $t$ , то

$$\beta(t) = \int_0^1 u d\alpha(u) = \sigma(\lambda_n) = \sigma(1).$$

Аналогично доказывается

Теорема 10. Если ряд (1) суммируем методом  $T_s(\lambda_k)$  к  $z$  и

$$z_k = \sigma\left(\frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right),$$

то ряд (1) сходится к  $z$ .

## Л и т е р а т у р а

1. Ю.И. Х у д а к. Две теоремы включения для метода обобщенного суммирования рядов  $T(\lambda_k)$ . ДАН СССР, 1972, 202:6, 1284-1287.
2. А.Н. Т и х о н о в. Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье. ДАН СССР, 1964, 156:2, 268-271.
3. В.К. И в а н о в. Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода. Дифф. уравнения, 1967, 3:3, 410-421.
4. Г.И. Ф у р л е т о в. О суммировании рядов Фурье по фундаментальной системе функций оператора Лапласа в произвольной  $N$ -мерной области ( $N \geq 4$ ) методом  $T_\lambda(\alpha \lambda_k)$ . Дифф. уравнения, 1970, 6:1, 172-189.
5. И.С. Г р а д ш т е й н, И.М. Р ы ж и к. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
6. Г. Х а р д и. Расходящиеся ряды. М., ГИИЛ, 1961.

F. Vichmann

### About a Method of Summability of Series

#### Summary

The series  $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$  is said to be summable  $AT_s(\lambda_k)$  to  $z$  if the series  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{(1 + \alpha \lambda_k)^s} e^{-\lambda_k \alpha} = \varphi_s(\alpha)$  converges

for every  $\alpha > 0$  and  $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \varphi_s(\alpha) = z$ , where the sequence  $\{\lambda_k\}$  satisfies the condition  $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k \rightarrow \infty$ .

In this paper it is shown that if  $\lambda_0 \geq 1$  and the series  $\sum_{k=0}^{\infty} z_k \lambda_k^{-\alpha}$  converges for every  $\alpha > 0$ , then the

$AT_s(\lambda_k)$ -summable series  $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$  is summable by the method of Poisson-Abel  $PA(\ln \lambda_k)$  to the same sum (th. 2). Also a Tauberian theorem with the Tauberian condition  $z_k = o\left(\frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right)$  for the method  $AT_s(\lambda_k)$  is proved (th. 9).



УДК 621.926.47:531.32

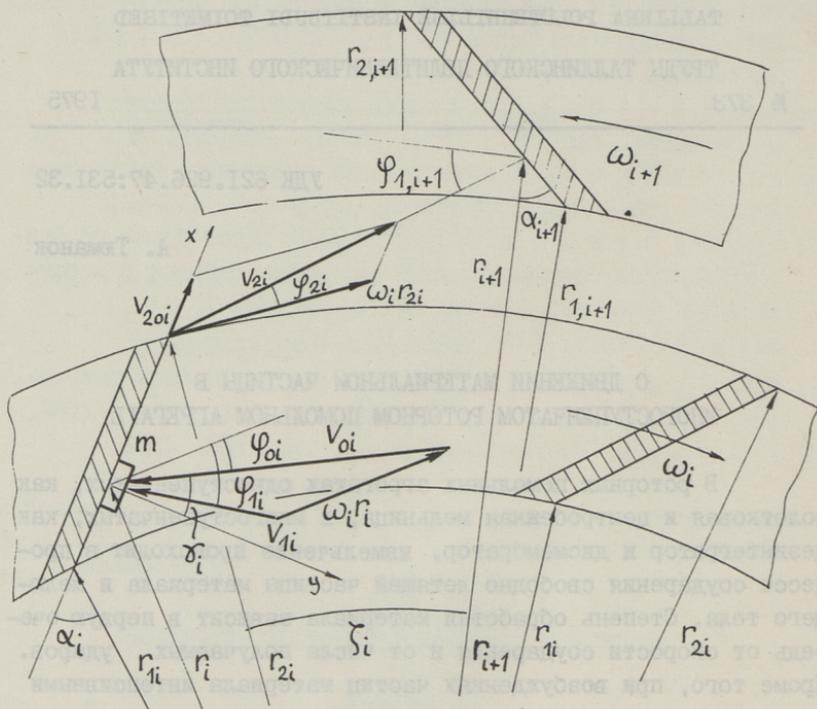
А. Тюманок

О ДВИЖЕНИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ В  
МНОГОСТУПЕНЧАТОМ РОТОРНОМ ПОМОЛЬНОМ АГРЕГАТЕ

В роторных помольных агрегатах одноступенчатых, как молотковая и центробежная мельница, и многоступенчатых, как дезинтегратор и дисмембратор, измельчение происходит в процессе соударения свободно летящей частицы материала и мелющего тела. Степень обработки материала зависит в первую очередь от скорости соударения и от числа получаемых ударов. Кроме того, при возбуждениях частиц материала интенсивными напряжениями, многократно превышающими их прочность, существенным становится временной фактор (задержка разрушения частицы, релаксация) и тем самым интервал времени между двумя последующими соударениями. Поэтому определённый интерес представляет время пребывания обрабатываемого материала в рабочей зоне роторного помольного агрегата.

В настоящей статье рассмотрено движение некоторой порции материала в многоступенчатом агрегате. Удар материала о рабочую поверхность мелющего тела принимается вполне неупругим. Рассматривается скольжение материала по рабочей поверхности (пренебрегается возможностью качения частиц). Приведены графики движения материальной частицы в 5-ступенчатом роторном помольном агрегате (дезинтеграторе) в зависимости от угла наклона рабочих поверхностей мелющих тел и угловой скорости роторов.

I. Сударение некоторой порции материала массой  $m$  которая летит со скоростью\*  $v_{i\bar{i}}$  под углом  $\varphi_{i\bar{i}}$  (Фиг. 1).



Фиг. 1.

Относительная скорость  $v_{oi}$  сударения обрабатываемого материала и мелющего тела будет

$$v_{oi} = \sqrt{v_{i\bar{i}}^2 + (\omega_i r_i)^2 + 2v_{i\bar{i}} \omega_i r_i \cos \varphi_{i\bar{i}}} \quad (I)$$

и происходит под углом  $\varphi_{oi}$

$$\sin \varphi_{oi} = \frac{v_{i\bar{i}}}{v_{oi}} \sin \varphi_{i\bar{i}}, \quad (2)$$

\* Второй индекс показывает порядковый номер круга обработки. Если это не вызывает сомнения, то будем его упускать.

образуя с нормалью к рабочей поверхности угол

$$\gamma_i = \alpha_i - \varphi_{0i}. \quad (3)$$

Если коэффициент трения между материалом и рабочей поверхностью равен  $f$ , то после соударения материал будет иметь начальную скорость скольжения по этой поверхности

$$v_0 = \begin{cases} -v_{0i}(\sin\gamma_i - f\cos\gamma_i), & \text{если } |\operatorname{tg}\gamma_i| > f, \\ 0, & \text{если } |\operatorname{tg}\gamma_i| < f. \end{cases} \quad (4)$$

Следует отметить, что начальная скорость скольжения может быть в зависимости от угла наклона  $\gamma_i$  направлена как наружу от центра (положительной), так и внутрь.

2. Скольжение материала по рабочей поверхности описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{\text{ин}} \cos\alpha_i - N, \\ m\ddot{y} &= N - F_{\text{кор}} - F_{\text{ин}} \sin\alpha_i, \quad \ddot{y} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

в подвижной системе координат, причём ось  $x$  направлена по рабочей поверхности (фиг. 2),  $F_{\text{ин}}$ ,  $F_{\text{кор}}$  - силы инерции,

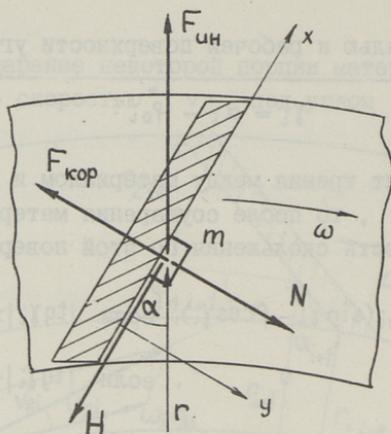
$N$ ,  $N$  - силы реакции поверхности. Подставляя выражения сил инерции, имеем

$$N = m\omega(\omega r \sin\alpha + 2\dot{x}), \quad (6)$$

$$\ddot{x} = \omega^2 r A - 2\omega\dot{x}f, \quad (7)$$

где

$$A = \cos\alpha - f\sin\alpha.$$



Фиг. 2.

Во время скольжения изменяются  $x$ ,  $r = r_i + x \cos \alpha$ ,  $\dot{x}$ , а также угол наклона  $\alpha$ , причём в уравнениях (5) и (7) не учтено влияние сопротивления среды. Учитывая, что радиальный размер рабочей поверхности значительно меньше радиуса  $r$ , можем считать угол  $\alpha$  постоянным. В первом приближении сопротивлением среды будем пренебрегать, что обсудим несколько ниже.

Учитывая эти упрощения, дифференциальное уравнение (7) можем записать в виде

$$\ddot{x} + 2\omega f \dot{x} - \omega^2 A \cos \alpha x = \omega^2 r_i A. \quad (8)$$

Теперь легко выписать его решение

$$x = -\frac{r_i}{\cos \alpha} + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 t, \quad (9)$$

где

$$B = \sqrt{f^2 + A \cos \alpha},$$

$$\lambda_{1,2} = \omega (\pm B - f). \quad (10)$$

После удовлетворения начальных условий движения

$$t = 0, \quad r = r_i, \quad x = 0, \quad \dot{x} = v_0$$

имеем

$$C_1 = \frac{v_0 \cos \alpha - \lambda_2 r_i}{2B\omega \cos \alpha}, \quad C_2 = \frac{r_i \lambda_1 - v_0 \cos \alpha}{2B\omega \cos \alpha}. \quad (\text{II})$$

Частица скользит до конца рабочей поверхности и покидает мелющее тело в некоторый момент времени  $t = t_1$ , которое определяется из уравнения

$$\frac{r_{2i}}{\cos \alpha} = C_1 e^{\lambda_1 t_1} + C_2 e^{\lambda_2 t_1}. \quad (\text{I2})$$

Скорость скольжения материала по рабочей поверхности равняется

$$v_{20i} = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t_1} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t_1}. \quad (\text{I3})$$

С учётом переносной скорости  $\omega_i r_{2i}$ , абсолютная скорость материала записывается в виде

$$v_{2i} = \sqrt{v_{20i}^2 + (\omega_i r_{2i})^2 + 2v_{20i} \omega_i r_{2i} \cos \alpha_i}. \quad (\text{I4})$$

Последняя образует с касательной угол

$$\sin \varphi_{2i} = \frac{v_{20i}}{v_{2i}} \sin \alpha_i. \quad (\text{I5})$$

С такой скоростью материал начинает лететь между кругами обработки навстречу следующему мелющему телу.

3. Движение материала между кругами обработки происходит в аэродинамически сложной возмущённой зоне. С одной стороны, это аналогия течения Куэтта [1] между двумя коаксиальными вращающимися цилиндрами ( $Re = (2+6) 10^5$ ).

Эта задача изучена в случае, когда отсутствует радиальное протекание воздуха. В роторном помольном агрегате имеется ряд особенностей. Во первых, круги обработки не цилиндры, во-вторых, имеется радиальное протекание воздуха и, в-третьих, вокруг мелющих тел возникает циркуляция вектора скорости воздуха. Это ещё не нашло в литературе освещения.

С другой стороны, в роторах между кругами обработки движется многокомпонентная смесь воздуха, измельчаемого материала, воды или пара. Движение смесей изучено в случае низких концентраций и низких перепадов давления [2, 3] или высоких концентраций и больших перепадов давления (пневмотранспорт [4, 5]). В роторных многоступенчатых помольных агрегатах при малых перепадах давления  $\Delta p \approx 100 \div 200 \text{ мм H}_2\text{O}$  весовая концентрация  $\mu$  равна  $2 \div 10$ . В таких случаях доминирующим является движение обрабатываемого материала. Воздух же движется вместе с материалом, и его можно рассматривать тоже как "измельчаемый материал". В таком случае потеря скорости между кругами обработки незначительна. Истинная картина, видимо, находится между этими крайними случаями. Для оценки продолжительности движения до встречи со следующим мелющим телом, рассмотрим движение частицы материала в неподвижной среде. Движение будет описываться дифференциальным уравнением

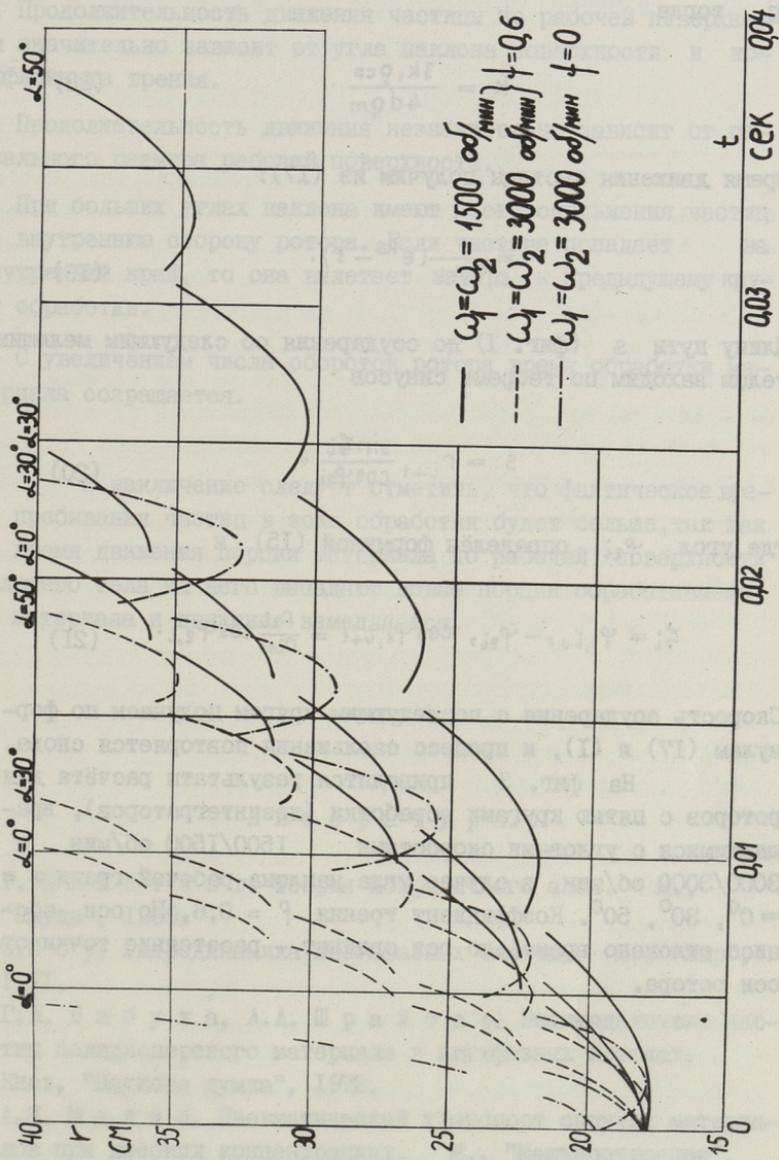
$$m\ddot{s} = -\frac{k_1}{2} \rho_{cp} S \dot{s}^2, \quad (I6)$$

где  $k_1$  - коэффициент аэродинамического сопротивления (для шара  $k_1 = 0,4$ , диска  $k_1 = 1$ ),  $\rho_{cp}$  - плотность среды,  $S$  - площадь поперечного сечения частицы. Решение дифференциального уравнения (I6) будет

$$\dot{s} = v_{2i} e^{-ks}, \quad (I7)$$

где  $v_{2i}$  - начальная скорость вылета,  $s$  - длина пройденного пути и коэффициент

$$k = \frac{k_1 \rho_{cp} S}{2m}.$$



Фиг. 3.

Если рассматривать частицу как приведённый шар с диаметром  $d$ , тогда

$$k = \frac{3k_1 \rho_{cp}}{4d \rho_m}. \quad (18)$$

Время движения частицы получим из (17):

$$t = \frac{1}{k v_{2i}} (e^{ks} - 1). \quad (19)$$

Длину пути  $s$  (фиг. 1) до соударения со следующим мелющим телом находим по теореме синусов

$$s = r_{i+1} \frac{\sin \xi_i}{\cos \varphi_{2i}}, \quad (20)$$

где угол  $\varphi_{2i}$  определён формулой (15) и

$$\xi_i = \varphi_{1,i+1} - \varphi_{2i}, \quad \cos \varphi_{1,i+1} = \frac{r_{2i}}{r_{i+1}} \cos \varphi_{2,i}. \quad (21)$$

Скорость соударения с последующим кругом получаем по формулам (17) и (1), и процесс скольжения повторяется снова.

На фиг. 3 приводятся результаты расчёта для роторов с пятью кругами обработки (дезинтеграторов), вращающимися с угловыми скоростями 1500/1500 об/мин и 3000/3000 об/мин, в случае угла наклона рабочей грани  $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 50^\circ$ . Коэффициент трения  $f = 0,6$ . По оси абсцисс отложено время, по оси ординат — расстояние точки от оси ротора.

На основании этих расчётов можно сделать некоторые выводы:

1. Продолжительность движения частицы по рабочей поверхности значительно зависит от угла наклона поверхности и коэффициента трения.

2. Продолжительность движения незначительно зависит от радиального размера рабочей поверхности.

3. При больших углах наклона имеют место скольжения частиц во внутреннюю сторону ротора. Если частица попадает на внутренний край, то она вылетает **внутрь** к предыдущему кругу обработки.

4. С увеличением числа оборотов ротора время обработки материала сокращается.

В заключение следует отметить, что фактическое время пребывания частиц в зоне обработки будет больше, так как за время движения порции материала по рабочей поверхности мелшего тела на него выпадают новые порции обрабатываемого материала и движение замедляется.

#### Л и т е р а т у р а .

1. Г. Ш л и х т и н г. Теория пограничного слоя. М., "Наука", 1969.
2. С. С о у. Гидродинамика многофазных систем. М., "Мир", 1971.
3. Г. Л. Б а б у х а, А. А. Ш р а й б е р. Взаимодействие частиц полидисперсного материала в двухфазных потоках. Киев, "Наукова думка", 1972.
4. А. Я. М а л и с. Пневматический транспорт сыпучих материалов при высоких концентрациях. М., "Машиностроение", 1969.
5. И. М. Р а з у м о в. Псевдооживление и пневмотранспорт. М., "Химия", 1972.

On Motion of a Particle in a MultistepedRotor Mill

## Summary

The subject of the paper is estimation of the motion of a particle in a multisteped rotor mill. The multisteped rotor mill includes two rotors with rows of grinding bodies. The grinding bodies have a working plane inclined to the radius of the angle  $\alpha$  (fig.1). A particle moves with the velocity  $V_{11}$  and runs into the working plane with a relative velocity (1). The slipping of a particle on the working plane is described by equations (8). The dependence of  $r$  on  $t$  is represented in fig. 3 with reference to different inclination angles  $\alpha$ , angular velocities  $\omega$  and friction factors  $f$ .

УДК 539.5.001:2

К. Кенк

О ПОЛЗУЧЕСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ  
ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАКЛЕПАННОГО МАТЕРИАЛА

Поликристаллические материалы состоят из различно ориентированных кристаллических зёрен. Сами зёрна и межзёрненное вещество имеют многочисленные несовершенства. Рассматривая такой материал как сплошную среду, нужно элемент среды выбрать достаточно больших размеров, т.е. состоящим из большого числа зёрен с неравномерно распределёнными дефектами. Этим обуславливается неоднородность распределения неупругих деформаций и возникновение микронапряжений. На современном уровне развития физика твёрдого тела ещё не даёт определяющих уравнений поведения такого элемента, учитывающих все несовершенства на микроуровне. Получение феноменологических уравнений в свою очередь усложняется тем, что реальный материал обладает всеми реологическими свойствами, которые в зависимости от условий нагружения проявляются в разной степени. Но часто нагружение можно разделить на этапы, на каждом из которых преобладают разные свойства (упругость, пластичность, ползучесть и т.д.). В этом случае уравнения, описывающие поведение материала на отдельных этапах, существенно упрощаются, но возникает трудная задача учёта влияния предшествующих этапов.

В настоящей работе сделана попытка учёта чередования этапов пластического деформирования и ползучести при нагружении вдоль прямой

$$\sigma_{ij} = \sigma \gamma_{ij} \quad (1)$$

в девиаторном пространстве напряжений. Здесь  $\gamma_{ij}$  - постоянный направляющий девиатор, а  $\sigma$  - переменный скалярный параметр.

I. Одной из основных характеристик материала является предел текучести. Из-за микроскопической неоднородности элемента среды, его можно представить состоящим из частиц, имеющих разные пределы текучести.

Введём переменный параметр  $x$  [1], который изменяется в пределах  $0 \leq x \leq 1$  и указывает частицу элемента с пределом текучести  $T(x)$ . Обозначим девиаторы, воспринимаемых частицей напряжений и деформаций, через  $\sigma_{ij}(x)$  и  $\varepsilon_{ij}(x)$ .

Осредненные по объёму элемента напряжения и деформации обозначим через  $\bar{\sigma}_{ij}$  и  $\bar{\varepsilon}_{ij}$ , причём

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} &= \int_0^1 \sigma_{ij}(x) dx, \\ \bar{\varepsilon}_{ij} &= \int_0^1 \varepsilon_{ij}(x) dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Примем, что

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}(x) &= m [\varepsilon_{ij}^{ny}(x) - \bar{\varepsilon}_{ij}^{ny}], \\ m = \text{const}, \quad m &\geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\bar{\varepsilon}_{ij}^{ny}$  и  $\varepsilon_{ij}^{ny}(x)$  соответственно девиаторы осредненных неупругих деформаций и неупругих деформаций частицы. Аналогичные предположения сделаны, например, в [2, I].

Кроме того, предположим, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{ny} &= \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^b, \\ \varepsilon_{ij}^{ny}(x) &= \varepsilon_{ij}^p(x) + \varepsilon_{ij}^b(x), \end{aligned} \quad (4)$$

где верхними индексами  $p$  и  $n$  обозначены соответственно пластические деформации и деформации ползучести.

В работе [1] принимают, что пластические деформации в частице развиваются, если

$$\sigma_{ij}(x) = T_{ij}(x) + S_{ij}(x), \quad (5)$$

где  $T_{ij}(x)$  и  $S_{ij}(x)$  соответственно диссипативная и упругая составляющие сопротивления пластическим деформациям и

$$S_{ij}(x) = \int_0^1 \alpha(x, \xi) \varepsilon_{ij}^p(\xi) d\xi. \quad (6)$$

Тем самым величину

$$\tilde{\sigma}_{ij}(x) = \sigma_{ij}(x) - S_{ij}(x) \quad (7)$$

можно рассматривать как эффективное напряжение, и пластические деформации развиваются, если

$$\tilde{\sigma}_{ij}(x) = T_{ij}(x). \quad (8)$$

С учётом (3) получим

$$T_{ij}(x) = \sigma_{ij} - m \varepsilon_{ij}^p(x) - m \varepsilon_{ij}^b(x) + m \varepsilon_{ij}^b - \int_0^1 \alpha^*(x, \xi) \varepsilon_{ij}^p(\xi) d\xi, \quad (9)$$

$$\alpha^*(x, \xi) = \alpha(x, \xi) - m.$$

На этапе пластического деформирования  $\varepsilon_{ij}^b(x)$  и  $\varepsilon_{ij}^b$  сохраняют постоянные значения и позволяют учесть влияние предыдущего этапа ползучести.

Для нагружения (I) получим

$$T(x) = \sigma - m \varepsilon^p(x) - m \varepsilon^b(x) + m \varepsilon^b - \int_0^1 \alpha^*(x, \xi) \varepsilon^p(\xi) d\xi. \quad (10)$$

2. Переходим к рассмотрению этапа ползучести.

На основе результатов макроопытов для описания поведения материала на стадии установившейся ползучести при нагружении (I) предлагают формулу

$$\dot{\varepsilon}^b = \nu \sigma^n, \quad (11)$$

где  $\nu$  и  $n$  — постоянные материала при постоянной температуре. Такого вида формула применяется в практических рас-

чётах часто для учёта всей ползучести. Аналогично (6) и (7) вводим для случая ползучести эффективное напряжение

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_b(x) &= \sigma(x) - \dot{s}_b(x), \\ s_b(x) &= \int_0^1 \alpha(x, \xi) \varepsilon^b(\xi) d\xi\end{aligned}\quad (I2)$$

и принимаем закон ползучести в частице в виде

$$\dot{\varepsilon}^b(x) = \nu [\tilde{\sigma}_b(x)]^n. \quad (I3)$$

Ввиду (I2) и (3) формула (I3) переписывается в виде

$$\dot{\varepsilon}^b(x) = \nu \left[ \sigma - m\varepsilon^p(x) + m\varepsilon^p - m\varepsilon^b(x) - \int_0^1 \alpha^*(x, \xi) \varepsilon^b(\xi) d\xi \right]^n, \quad (I4)$$

где на этапе ползучести  $\varepsilon^p(x)$  и  $\varepsilon^p$  сохраняют постоянные значения и позволяют учесть влияние предшествующих пластических деформаций.

3. Рассмотрим в качестве примера модель из двух частиц. Тогда формулы (I0) и (I4), с учётом равенств

$$\begin{aligned}\varepsilon^p &= \frac{\varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p}{2}, \\ \varepsilon^b &= \frac{\varepsilon_1^b + \varepsilon_2^b}{2},\end{aligned}$$

получают вид

$$T_1 = \sigma - \frac{m}{2}(\varepsilon_1^b - \varepsilon_2^b) - A\varepsilon_1^p + B\varepsilon_2^p, \quad (I5)$$

$$T_2 = \sigma - \frac{m}{2}(\varepsilon_1^b - \varepsilon_2^b) + B\varepsilon_1^p - C\varepsilon_2^p,$$

$$\dot{\varepsilon}_1^b = \nu \left[ \sigma - \frac{m}{2}(\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p) - A\varepsilon_1^b + B\varepsilon_2^b \right]^n, \quad (I6)$$

$$\dot{\varepsilon}_2^b = \nu \left[ \sigma + \frac{m}{2}(\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p) + B\varepsilon_1^b - C\varepsilon_2^b \right]^n,$$

где введены обозначения

$$A = \frac{1}{2} m + \alpha(1,1),$$

$$B = \frac{1}{2} m - \alpha(1,2),$$

$$C = \frac{1}{2} m + \alpha(2,2).$$

Пусть

$$A > 0, B > 0, C > 0,$$

$$A < B < C,$$

$$AC - B^2 = 0,$$

$$T_2 > T_1.$$

4. Рассмотрим ползучесть при  $\sigma = \text{const}$  в случае отсутствия предварительных пластических деформаций ( $\varepsilon_1^p = \varepsilon_2^p = 0$ ).

Если ограничиться малыми деформациями ползучести, формулы (16) получают вид

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1^b &= \nu \sigma^n - \nu n \sigma^{n-1} A \varepsilon_1^b + \nu n \sigma^{n-1} B \varepsilon_2^b, \\ \dot{\varepsilon}_2^b &= \nu \sigma^n + \nu n \sigma^{n-1} B \varepsilon_1^b - \nu n \sigma^{n-1} C \varepsilon_2^b. \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнения (17) имеют при начальных условиях  $\varepsilon_i^b|_{t=0} = \varepsilon_2^b|_{t=0} = 0$  решение

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^b &= \nu \sigma^n \frac{C+B}{C+A} t + \frac{\sigma}{n} \frac{A-B}{(A+C)^2} [1 - e^{-\nu n \sigma^{n-1} (A+C)t}], \\ \varepsilon_2^b &= \nu \sigma^n \frac{C+B}{C+A} \frac{A}{B} t - \frac{\sigma}{n} \frac{(A-B)C}{B(A+C)^2} [1 - e^{-\nu n \sigma^{n-1} (A+C)t}] \end{aligned} \quad (18)$$

или)

$$\varepsilon^b = \nu \sigma^n \frac{(C+B)(B+A)}{2B(C+A)} t + \frac{\sigma(A-B)(B-C)}{n(A+C)^2 2B} [1 - e^{-\nu n \sigma^{n-1} (A+C)t}].$$

Решение (18) по виду точно совпадает с выражением, принятым в [3] для аппроксимации результатов экспериментов, поэтому сделанные предположения можно рассматривать как допустимые.

5. В случае отсутствия предварительных деформаций ползучести пластическая деформация определяется формулами

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon^P &= 0 && \text{при } \sigma < T_1; \\ d\varepsilon^P &= \frac{2}{A} d\sigma && \text{при } T_1 \leq \sigma < \frac{AT_2 + BT_1}{A+B} = \sigma^*; \\ d\varepsilon^P &> 0, d\sigma = 0 && \text{при } \sigma = \sigma^*. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

С учётом предварительной ползучести, получаем

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon^P &= 0 && \text{при } \sigma < \bar{\sigma} \\ d\varepsilon^P &= \frac{2}{A} d\sigma && \text{при } \bar{\sigma} \leq \sigma < \tilde{\sigma} \\ d\varepsilon^P &> 0, d\sigma = 0 && \text{при } \sigma = \tilde{\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где

$$\bar{\sigma} = T_1 + \frac{m(C-A)}{2(C+A)} \left\{ \gamma \sigma^n t - \frac{\sigma}{n(A+C)} [1 - e^{-\gamma n \sigma^{n-1} (A+C)t}] \right\} \quad (21)$$

и

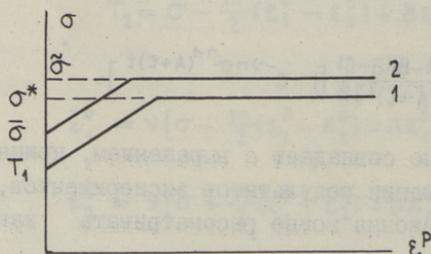
$$\tilde{\sigma} = \frac{T_2 A + T_1 B}{A+B} + \frac{B-A}{A+B} (\bar{\sigma} - T_1) = \sigma^* + \frac{B-A}{A+B} (\bar{\sigma} - T_1). \quad (22)$$

Отсюда видно, что  $\bar{\sigma} > T_1$ , так как при  $t = 0$  добавочное слагаемое равняется нулю, а её производная по времени

$$\frac{m(C-A)}{2(C+A)} \gamma \sigma^n [1 - e^{-\gamma n \sigma^{n-1} (A+C)t}] \geq 0.$$

Очевидно, что  $\tilde{\sigma} > \sigma^*$ .

Графики, соответствующие формулам (19) и (20), представлены на фиг. 1.



Фиг. 1.

- 1 - без предварительной ползучести,
- 2 - с предварительной ползучестью.

Видно, что предварительная ползучесть упрочняет материал по сопротивлению пластическим деформациям. Это согласуется с результатами экспериментов [4, 5].

6. В случае наличия предварительных пластических деформаций ползучесть определяется уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1^b &= \beta_1 - \bar{A} \varepsilon_1^b + \bar{B} \varepsilon_2^b, \\ \dot{\varepsilon}_2^b &= \beta_2 + \bar{B}_1 \varepsilon_1^b - \bar{C} \varepsilon_2^b,\end{aligned}\quad (23)$$

где

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \nu \left[ \sigma - \frac{1}{2} m (\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p) \right]^n, \\ \beta_2 &= \nu \left[ \sigma + \frac{1}{2} m (\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p) \right]^n, \\ \bar{A} &= n \nu \left[ \sigma - \frac{1}{2} m (\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p) \right]^{n-1} A, \\ \bar{B} &= n \nu \left[ \sigma - \frac{1}{2} m (\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p) \right]^{n-1} B, \\ \bar{B}_1 &= n \nu \left[ \sigma + \frac{1}{2} m (\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p) \right]^{n-1} B, \\ \bar{C} &= n \nu \left[ \sigma + \frac{1}{2} m (\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p) \right]^{n-1} C.\end{aligned}$$

Решение уравнений (23) имеет вид

$$\varepsilon^b = \frac{\bar{A} + \bar{B}}{2\bar{B}} \frac{\beta_1 \bar{C} + \beta_2 \bar{B}}{\bar{A} + \bar{C}} t - \frac{(\bar{C} - \bar{B})(\beta_1 \bar{A} - \beta_2 \bar{B})}{2\bar{B}(\bar{A} + \bar{C})^2} \left[ 1 - e^{-(\bar{A} + \bar{C})t} \right].$$

Начальная скорость ползучести (если  $\varepsilon_1^b = \varepsilon_2^b = 0$ )

$$\dot{\varepsilon}_0^b = \frac{\nu}{2} \left\{ \left[ \sigma - \frac{1}{2} m (\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p) \right]^n + \left[ \sigma + \frac{1}{2} m (\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p) \right]^n \right\}$$

увеличивается из-за наличия в материале предварительных пластических деформаций. Это подтверждается результатами экспериментов [6, 7]. Некоторое влияние предварительная пластическая деформация оказывает и на скорость установившейся ползучести. Можно убедиться, что при принятых параметрах модели эта скорость уменьшается. Результаты экспериментов, приведённые в работе [7] (табл. 1) имеют, к сожалению, слишком сильный разброс, но многие из них указывают на возможность такого уменьшения.

Из приведенного выше видно, что предложенная модель из двух элементов позволяет качественно описать многие важные аспекты взаимного влияния пластической деформации и ползучести. Это даёт основание надеяться, что модели с большим числом элементов позволяют получить и количественные результаты.

Уравнения (9) и (14) применимы также на этапах нагружения, в которых одновременно развиваются пластические деформации и деформации ползучести. В этом случае их следует решать совместно.

#### Л и т е р а т у р а

1. Ю.И. Кадашевич, В.В. Новожилов. Об учете микро-напряжений в теории пластичности. Инж. ж. МТТ, 1968, № 3.
2. E. K ö n e r. Zur plastischen Verformung des Vies-Kristalls. Acta Metallurgia, 1961, vol. 9.
3. Л.Б. Гецов. Об уравнениях ползучести со структурным параметром. Изв. вузов, Машиностроение, 1970, № 2.
4. В.С. Наместников. О ползучести алюминиевого сплава при переменных нагрузках. ПМТФ, 1964, № 2.
5. С.Т. Милейко, Ю.Н. Работнов. Некоторые результаты экспериментального исследования кратковременной ползучести при одноосном растяжении. ПМТФ, 1966, № 5.
6. Л.Б. Гецов, Н.С. Локалова. Кратковременная релаксация напряжений в жаропрочных сплавах. Изв. АН СССР, Металлы, 1969, № 4.
7. А.М. Борздыка, Л.Б. Гецов. Релаксация напряжений в металлах и сплавах. Изд. "Металлургия", М., 1972.

On Creep and Plasticity of Previously  
Work-hardened Material

Summary

The dependence of the response to the plastic deformation on the previous creep deformations as well as the dependence of the creep on the previous plastic deformations is analysed. The straight loading in the space of stress deviators is considered. The proposed equations allow to prescribe the increase of the response to the plastic deformation due to the previous creep and the increase of the initial creep velocity due to the previous plastic deformations.

## С о д е р ж а н и е

1. М. Левин.	О наилучших квадратурных формулах с частично фиксированными узлами...	3
2. А. Инги.	Об одной задаче Кронрода-Левина для квадратурных формул .....	II
3. Я. Хенно.	Свободные Г-коммутативные системы Менгера .....	19
4. Ф. Вихманн.	Об одном методе суммирования рядов .....	27
5. А. Тюманок.	О движении материальной частицы в многоступенчатом роторном помольном агрегате .....	37
6. К. Кенк.	О ползучести и пластичности предварительно наклепанного материала..	47

Таллинский политехнический институт

Труды ТПИ № 373

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Сборник статей УШ

Редактор Ф. Вихманн

Техн. редактор Л. Лоопер

Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 11 окт. 1974 года

---

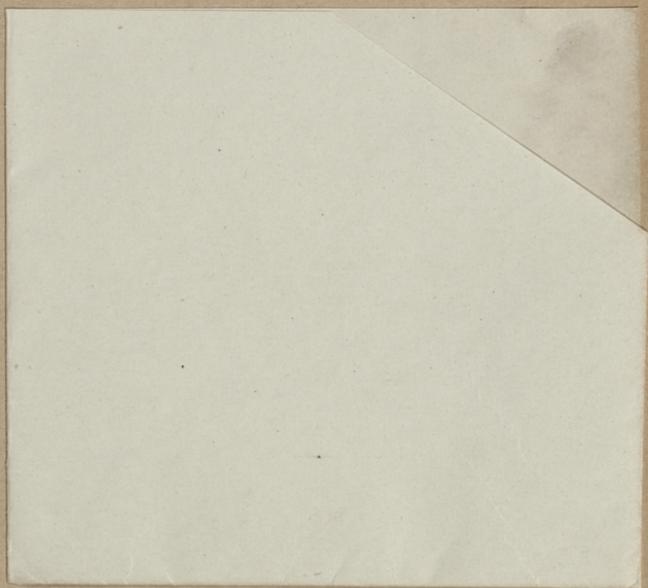
Подписано к печати 25 февр. 1975 года

Бумага 60x90/16. Печ. л. 3,5 + прил. 0,25. Уч.-изд. л. 2,4

Тираж 350, МВ-02804

Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскла, 2/9. Зак. № 186

Цена 24 коп.



Цена 24 коп.