

TALLINNA POLÜTEHNILISE  
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 387

**ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ  
И АВТОМАТИКЕ**

**СБОРНИК СТАТЕЙ**

**ХШ**



Ер. 6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED  
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 387

1975

---

УДК 621

# ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И АВТОМАТИКЕ

Сборник статей XIII

Таллин, 1975



УДК 621.372.63

Х.В. Силламаа

ПОСТРОЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СХЕМ АДМИТАНСНЫМ  
МНОГОПОЛЮСНИКАМ

Под эквивалентной схемой многополюсника принято понимать определенную совокупность соединенных между собой многополюсников, имеющих идентичные характеристики с исходным многополюсником относительно всех его полюсов. Если исходный многополюсник адмитансный [1], то есть его характеристики могут быть описаны системой уравнений проводимостей

$$\dot{I} = YV + \dot{I}, \quad (I)$$

то, согласно известному правилу соединения многополюсников [2, 3], неопределенная матрица проводимостей исходного многополюсника окажется суммой матриц проводимостей всех составных многополюсников, входящих в схему замещения. Кроме того, автономные параметры многополюсника, входящие в вектор  $\dot{I}$ , могут быть представлены в схеме замещения известным способом в виде совокупности двухполюсных источников тока [2, 3]. В итоге задача получения схемы замещения адмитансного многополюсника может быть решена путем подходящего разложения матрицы проводимостей на отдельные слагаемые. При этом должен быть зафиксирован класс многополюсников, которых желательно иметь в качестве составляющих схемы замещения.

Элементор-разложение. Общий подход к построению схем замещения может основываться на возможности рассмотрения множества всевозможных матриц проводимостей  $Y$  как некоторого векторного пространства, называемого в [4,7] элементор-пространством. При этом предполагается, что элементы любой матрицы проводимостей в алгебраическом смысле

принадлежат к некоторому полю  $\mathcal{P}$ , называемому полем параметров цепи (например, вещественные или комплексные числа, дробно-рациональные функции комплексной переменной и т.д.). Фундаментальным свойством любого векторного пространства является существование там базисов, другими словами, существование возможности выразить любой вектор как линейную форму базисных векторов. Применительно к матрицам проводимостей это значит существование соотношения

$$Y_n = \sum_{i=1}^p \lambda_i Y_{n0i}, \quad (2)$$

где  $Y_n$  — неопределенная матрица проводимостей исходного  $n$ -полюсника,

$Y_{n0i}$  — базисные матрицы проводимостей,

$\lambda_i$  — некоторые скалярные коэффициенты, принадлежащие к некоторому множеству скаляров  $\Lambda \subseteq \mathcal{P}$  (например, вещественные или комплексные числа).

Каждой матрице проводимостей можно однозначно сопоставить некоторый многополюсник с определенным порядком нумераций полюсов, могущий содержать еще изолированные полюсы, соответствующие парам нулевых строк и столбцов в составе матрицы проводимостей. Такой объект в [8] назван элементом  $\mathcal{E}_n$ . С учетом однозначной связи между матрицами проводимостей и элементами можно на базе (2) выписать соотношение (т.н. элементор-разложение)

$$\mathcal{E}_n = \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathcal{E}_{n0i}, \quad (3)$$

где  $\lambda_i \mathcal{E}_{n0i}$  — выбранные базисные элементоры из соответствующих классов скалярного подобия многополюсников [8], а суммирование следует понимать в смысле соединения соответствующих элементоров.

Тем самым выражение (3) определяет для заданного элементора  $\mathcal{E}_n$  некоторую схему замещения, составленную путем соединения базисных элементоров  $\lambda_i \mathcal{E}_{n0i}$ . Количество необходимых базисных элементоров  $p$  в выражении (3) определяется размерностью рассматриваемого вектор-пространства (элементор-пространства). Согласно [7] размерность элементор-пространства  $n$ -полюсников равняется  $(n-1)^2$ , причем она

естественным образом распадается на симметрическое (адмиторное) подпространство размерности  $\frac{1}{2}n(n-1)$  и на антисимметрическое (гираторное) подпространство размерности  $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ . Свойства и основные характеристики элементар-пространства, а также соответствующих подпространств, подробнее рассматривались в [6, 7, 8].

Для практического построения элементар-разложений (3) необходимо прежде всего задаваться классом базисных элементов, откуда далее выбираются составляющие схемы замещения. Для этого необходимо знать, какие совокупности элементов вообще могут образовать базисы элементар-пространства. Поэтому будем рассматривать подробнее основные типы базисов

Адмиторно-гираторные базисы (AG-базисы). Такой базис основывается на возможности разложения элементар-пространства на адмиторное и гираторное подпространства [7]. В адмиторном подпространстве базис можно образовать из всевозможных единичных двухполюсных элементов - адмиторов  $A_{ij}$  [5], подключенных к полюсам  $i$  и  $j$ . В гираторном подпространстве базис можно образовать из  $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$  единичных гираторов  $G_{ijk}$ , выбирая их различным образом [6]. Одной из возможностей является совокупность всевозможных гираторов  $G_{pij}$ , связанных с произвольно выбранным полюсом  $p$ . В итоге любой многополюсник, обладающий неопределенной матрицей проводимостей  $Y = [y_{ij}]_n^n$ , допускает разложение

$$Y = \sum_{i,j=1}^n \left( -\frac{y_{ij} + y_{ji}}{2} \right) A_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j \neq p}}^n \left( \frac{y_{ij} - y_{ji}}{2} \right) G_{pij}, \quad j > i. \quad (4)$$

Например, в случае пятиполюсника базис при общем полюсе I образуют 10 адмиторов ( $A_{I2}, A_{I3}, A_{I4}, A_{I5}, A_{23}, A_{24}, A_{25}, A_{34}, A_{35}, A_{45}$ ) и 6 гираторов ( $G_{I23}, G_{I24}, G_{I25}, G_{I34}, G_{I35}, G_{I45}$ ).

Адмиторно-транзорный базис (АТ-базис). Используя выявленные в [5] связи между единичными элементорами, можно из (4) получить различные другие элементор-разложения. Одной из возможностей будет выбор всех единичных адмиторов  $A_{pi}$  ( $i = 1 \dots n$ ,  $i \neq p$ ), связанных с произвольно выбранным полюсом  $p$ , а также всех единичных транзоров  $T_{jpi}$  ( $i, j = 1 \dots n$ ,  $i \neq j \neq p$ ). Тогда элементор-разложение имеет вид

$$Y = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n y_{ii} A_{pi} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j \neq p}}^n y_{ij} T_{jpi}. \quad (5)$$

В данном случае каждый элемент главной диагонали матрицы проводимостей, кроме  $y_{pp}$ , определяет двухполюсный базисный адмитор  $y_{ii} A_{pi}$ , соединенный с полюсами  $p$  и  $i$ , а каждый элемент вне главной диагонали, кроме элементов строки и столбца  $p$ , — трехполюсный базисный транзор  $T_{jpi}$ , соединенный с полюсами  $j$ ,  $p$  и  $i$ . Например, для четырехполюсника базис образуют адмиторы  $A_{I2}$ ,  $A_{I3}$ ,  $A_{I4}$  и транзоры  $T_{2I3}$ ,  $T_{2I4}$ ,  $T_{3I2}$ ,  $T_{3I4}$ ,  $T_{4I2}$ ,  $T_{4I3}$ . Описанный базис тесно связан с унитарными схемами замещения Мезона [3, 9]. Последние при анализе цепей весьма удобны, однако для целей синтеза, ввиду нереализуемости самих базисных элементоров-унисторов, менее выгодны.

Для обратимых многополюсников ( $y_{ij} = y_{ji}$ ) можно из разложения (5) путем замены пары базисных транзоров единичными инверторами иммитанса  $I_{ipj}$  [5]

$$I_{ipj} = T_{ipj} + T_{jpi} \quad (6)$$

получить частный вариант базиса адмиторного подпространства

$$Y_{\text{сумм}} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n y_{ii} A_{pi} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i,j \neq p}}^n y_{ij} I_{ipj}, \quad j > i. \quad (7)$$

Транзорные базисы (Т-базисы). Согласно [5] все адмитансные элементоры могут быть выражены через транзоры, поэтому базис элементор-пространства можно составить исключительно из транзоров. Такие базисы кроме принципиального интереса могут оказаться полезными и потому, что транзор является близкой идеализацией полевого транзистора, а в технике интегральных схем МОП-структуры весьма перспективны.

Простейший Т-базис можно получить из (5) заменой всех адмиторов транзорами [5]

$$A_{pi} = T_{pit} + T_{ipt} = T_{tpi} + T_{tip}. \quad (8)$$

В итоге имеем

$$Y = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p \neq t}}^n Y_{ii} (T_{pit} + T_{ipt}) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j \neq p}}^n Y_{ij} T_{jpi}, \quad (9)$$

где полюс  $t$  также выбирается произвольно. Аналогично из (4) вытекает

$$Y = \sum_{i,j=1}^n \left( -\frac{Y_{ij} + Y_{ji}}{2} \right) (T_{jit} + T_{ijt}) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j \neq p}}^n \left( \frac{Y_{ij} - Y_{ji}}{2} \right) (T_{pij} - T_{jip}), \quad j > i. \quad (10)$$

Таким образом, транзорные базисы могут быть образованы весьма различным способом. Для этих целей могут использоваться также связи, существующие между различными транзорами [5, форм. (I0) и (II)]. В итоге фактическое количество возможных транзорных базисов огромно — уже для четырехполюсников существует около  $8 \cdot 10^4$  различных транзорных базисов. К сожалению, среди транзорных базисов отсутствуют предпочтительные формы, удобно связанные с элементами матрицы проводимостей многополюсника.

Каждое элементор-разложение позволяет по известной матрице проводимостей многополюсника построить некоторую схему замещения. Используя различные разложения, описанные выше, а также получаемые от них дальнейшие преобразования, можно для заданного многополюсника получить большое количество различных схем замещения (в принципе — всевозмож-

ные). При синтезе многополюсников следует далее провести выбор подходящей схемы реализации, руководствуясь дополнительными соображениями (типы и возможности реализации базисных элементов и т.д.)

Пример 1. Задана матрица проводимостей

$$Y = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -5 & 5 \\ -1 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В данном случае могут быть получены элементор-разложения:

а) АТ-базис относительно полюса 1

$$Y = 3A_{12} + 6A_{13} + 5T_{312} + 5T_{412} - 5T_{413};$$

б) АG-базис относительно полюса 4

$$Y = 3A_{12} + A_{13} + 2,5A_{23} - 2,5A_{24} + 2,5A_{34} - 2,5G_{423};$$

в) Т-базис

$$Y = 6T_{132} + T_{312} + 8T_{412} + 3T_{421} - 5T_{413};$$

г) смешанный базис (с минимальным количеством базисных элементоров)

$$Y = 3A_{12} + A_{13} + 5T_{432}.$$

Пример 2. Рассмотрим возможную реализацию многополюсника с матрицей проводимостей

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{6s}{5s+6} & \frac{-14s}{(5s+6)(13s+12)} & \frac{2s(39s+29)}{(5s+6)(13s+12)} \\ 0 & \frac{10s+23}{(s+3)(13s+12)} & -\frac{10s+23}{(s+3)(13s+12)} \\ -\frac{6s}{5s+6} & -\frac{36s^2+133s+138}{(s+3)(5s+6)(13s+12)} & \frac{78s^3+342s^2+349s+138}{(s+3)(5s+6)(13s+12)} \end{bmatrix}.$$

Составим АТ-базис по (5), выбирая  $p = 3$ . Имеем

$$Y = \frac{6s}{5s+6} A_{13} + \frac{10s+23}{(s+3)(13s+12)} A_{23} - \frac{14s}{(5s+6)(13s+12)} T_{231}.$$

Вторая составляющая допускает дальнейшее разложение

$$\frac{10s+23}{(s+3)(13s+12)} A_{23} = \frac{7}{27(s+3)} A_{23} + \frac{179}{27(13s+12)} A_{23}.$$

Для преобразования отрицательного транзора необходимо ввести внутренний полюс [4]. В данном случае удобнее всего использовать соотношение, просто доказуемое на базе матриц проводимостей. Если в сумме транзоров

$$y_1 T_{bad} + y_2 T_{cda} + y_3 T_{dcb}$$

исключить полюс d, то получается транзор  $-y_1 y_2^{-1} y_3 T_{abc}$ . Обозначая, например,

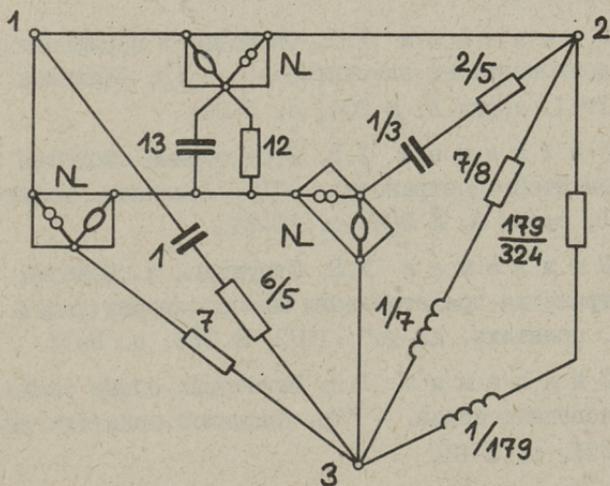
$$y_1 = \frac{2s}{5s+6}, \quad y_2 = 13s+12, \quad y_3 = 7,$$

имеем

$$-\frac{14s}{(5s+6)(13s+12)} T_{231} \rightarrow \frac{2s}{5s+6} T_{324} + (13s+12) T_{142} + 7 T_{413}.$$

Таким образом, окончательное элементор-разложение имеет вид (при условии, что полюс 4 внутренний)

$$Y = \frac{6s}{5s+6} A_{13} + \left( \frac{7}{27(s+3)} + \frac{179}{27(13s+12)} \right) A_{23} + \frac{2s}{5s+6} T_{324} + (13s+12) T_{142} + 7 T_{413}.$$



Фиг. 1.

Если для реализации транзоров использовать нуллорную схему замещения [10, табл. 2], то можно получить схему замещения исходного многополюсника, представленную на фиг. 1. При реализации нуллор можно рассматривать как идеализацию операционного усилителя с бесконечным коэффициентом усиления.

### Л и т е р а т у р а

1. Р э х э п а п п Ю.А., С и л л а м а а Х.В. Матричное описание многополюсников. - Радиотехника, т.27, 1972, № 12, с. 26-31.
2. Б л а ж к е в и ч Б.И. Основні методи аналізу лінійних електричних кіл. Київ, Вид. АН УССР, 1961.
3. Под ред. И о н к и н а П.А. Основы инженерной электрофизики, часть П. - Основы анализа и синтеза электронных цепей. М., "Высшая школа", 1972.
4. С и л л а м а а Х.В. Систематика элементов в теории цепей - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1970, серия А, № 288, с. 3-18.
5. С и л л а м а а Х.В. Свойства и взаимосвязи адмитансных многополюсных элементов. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1971, серия А, № 304, с. 3-20.
6. С и л л а м а а Х.В. Структурные свойства гираторного элементор-пространства. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1971, серия А, № 304, с. 21-34.
7. С и л л а м а а Х.В. Структура и свойства элементор-пространства представления многополюсных цепей. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1972, № 334, с. 3-15.
8. С и л л а м а а Х.В. Некоторые общие свойства множества многополюсников. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1974, № 371, с. 3-12.
9. М э з о н С., Ц и м м е р м а н Г. Электронные цепи, сигналы и системы. М., ИИЛ, 1963.
10. С и л л а м а а Х.В. Эквивалентные схемы неадмитансных многополюсников. См. наст. сб. с. 13.

Equivalent Network Design for Admittant Multipoles

Summary

A general method of forming equivalent networks for admittant multipoles is considered. The proposed elementor decomposition procedure uses various convenient expansions of the indefinite admittance matrix of the initial multipole. To any expansion term there corresponds an element of the equivalent network. Some decomposition classes are investigated and completed with examples.



УДК 621.372.63

Х.В. Силламаа

### ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ НЕАДМИТАНСНЫХ МНОГОПОЛЮСНИКОВ

Эквивалентные схемы для адмитансных многополюсников легко могут быть построены путем использования т.н. элементар-разложений [1]. Но их применение для построения эквивалентных схем неадмитансных многополюсников окажется невозможным, так как неадмитансные многополюсники соответствуют бесконечным предельным точкам адмитансного элементар-пространства [2]. Поэтому эквивалентные схемы неадмитансных многополюсников так или иначе должны содержать внутренние полюсы, которые могут быть введены различным образом. Ниже описывается семейство алгоритмов, которое подробнее анализируется применительно к омовским многополюсникам [3].

Допустим, что задана некоторая возможная форма

$$\begin{bmatrix} V_{\nu} \\ I_{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\nu\nu} & M_{\nu\gamma} \\ B_{\gamma\nu} & Y_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\nu} \\ V_{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{V}_{\nu} \\ \hat{I}_{\gamma} \end{bmatrix} \quad (1)$$

гибридных уравнений исходного неадмитансного омовского многополюсника [2, 3], где множество всех  $n$  полюсов разбито на подмножества  $\nu$  и  $\gamma$ , а параметры гибридной матрицы могут быть вещественными или комплексными числами, дробно-рациональными функциями комплексной частоты и т.д. Многополюсник, обладающий собственными уравнениями (1), можно сразу разложить на соединение адмитансного многополюсника  $A$ , инцидентного лишь к полюсам  $\gamma$  и обладающего уравнениями

$$I_{\gamma}'' = Y_{\gamma\gamma} V_{\gamma}, \quad (2)$$

а также многополюсника  $M$  с уравнениями

$$\begin{bmatrix} V_{\gamma} \\ I'_{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\gamma\gamma} & M_{\gamma\gamma} \\ B_{\gamma\gamma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\gamma} \\ V_{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{V}_{\gamma} \\ \dot{I}_{\gamma} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

причем  $I_{\gamma} = I'_{\gamma} + I''_{\gamma}$ . Кроме того, автономные параметры исходного многополюсника в составе векторов  $\dot{V}_{\gamma}$  и  $\dot{I}_{\gamma}$  можно также с самого начала заменить в схеме замещения двухполюсными источниками. При этом, как известно [4], двухполюсные источники тока, выражающие параметры  $\dot{I}_{\gamma}$ , подключаются параллельно полюсам  $\gamma$ , а двухполюсные источники напряжения, соответствующие параметрам  $\dot{V}_{\gamma}$ , последовательно полюсам множества  $\gamma$ . Тем самым далее достаточно рассмотреть схемы замещения многополюсника  $M$  с уравнениями

$$\begin{bmatrix} V_{\gamma} \\ I'_{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\gamma\gamma} & M_{\gamma\gamma} \\ B_{\gamma\gamma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\gamma} \\ V_{\gamma} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Вводим теперь множество внутренних полюсов  $\varepsilon$ , выбирая их количество по условию  $|\varepsilon| \leq |\gamma|$ . Если из множества полюсов  $\gamma$  далее выделить некоторое подмножество  $\varkappa$  так, что  $|\varepsilon| = |\varkappa|$  и  $\gamma = \varkappa \cup \bar{\varkappa}$  (т.е.  $\bar{\varkappa}$  — дополнение  $\varkappa$  во множестве  $\gamma$ ), то уравнения (4) можно переписать в иной блочной форме

$$\begin{bmatrix} V_{\varkappa} \\ V_{\bar{\varkappa}} \\ I'_{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\varkappa\varkappa} & Z_{\varkappa\bar{\varkappa}} & M_{\varkappa\gamma} \\ Z_{\bar{\varkappa}\varkappa} & Z_{\bar{\varkappa}\bar{\varkappa}} & M_{\bar{\varkappa}\gamma} \\ \hline B_{\gamma\varepsilon} & B_{\gamma\bar{\varepsilon}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\varkappa} \\ I_{\bar{\varkappa}} \\ V_{\gamma} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Вектор потенциалов  $V_{\varepsilon}$  введенных нами внутренних полюсов будем связывать с векторами внешних переменных посредством выражения

$$V_{\varepsilon} = V_{\varkappa} - Z'_{\varkappa\varepsilon} I_{\varkappa} - M'_{\varkappa\gamma} V_{\gamma}, \quad (6)$$

а для вектора полюсных токов принимаем

$$I_{\varepsilon} = B_{\varepsilon\varepsilon} I_{\gamma}. \quad (7)$$

Это даст нам возможность перегруппировать исходные собственные уравнения (5) многополюсника  $M$  на следующие

$$(M_1) \quad \begin{bmatrix} V_{\varepsilon} \\ I_{\varepsilon} \\ I'''_{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'_{\varepsilon\varepsilon} & I_{\varepsilon} & M'_{\varepsilon\gamma} \\ \hline B_{\varepsilon\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\varepsilon} \\ V_{\varepsilon} \\ V_{\gamma} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

	$M'_{xy} \neq 0$	$M'_{xy} = 0$
$ \varepsilon  <  \nu $	<p><b>A</b></p> $  \begin{bmatrix} V_x \\ I_\varepsilon \\ I_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'_{xx} & E_\varepsilon M'_{xt} & I_x \\ B_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ V_\varepsilon \\ V_\nu \end{bmatrix}  $	<p><b>B</b></p> $  \begin{bmatrix} V_x \\ I_\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'_{xx} & E_\varepsilon \\ B_{yx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ V_\varepsilon \end{bmatrix}  $
$ \varepsilon  =  \nu $ ( $x = \nu$ )	<p><b>C</b></p> $  \begin{bmatrix} V_x \\ I_\varepsilon \\ I_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'_{xx} & E_\varepsilon M'_{xt} & I_x \\ B_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ V_\varepsilon \\ V_\nu \end{bmatrix}  $	<p><b>D</b></p> $  \begin{bmatrix} V_x \\ I_\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'_{xx} & E_\varepsilon \\ B_{yx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ V_\varepsilon \end{bmatrix}  $

$$(M_2) \quad \begin{bmatrix} V_\varepsilon \\ V_{\bar{\varepsilon}} \\ I'_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\varepsilon\varepsilon} & Z_{\varepsilon\bar{\varepsilon}} & M''_{\varepsilon\gamma} \\ Z_{\bar{\varepsilon}\varepsilon} & Z_{\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}} & M''_{\bar{\varepsilon}\gamma} \\ B_{\gamma\varepsilon} & B_{\gamma\bar{\varepsilon}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_\varepsilon \\ I_{\bar{\varepsilon}} \\ V_\gamma \end{bmatrix}. \quad (9)$$

В эти уравнения введены следующие обозначения

$$Z_{\varepsilon\varepsilon} = Z'_{\varepsilon\varepsilon} + Z''_{\varepsilon\varepsilon}, \quad (10)$$

$$M_{\varepsilon\gamma} = M'_{\varepsilon\gamma} + M''_{\varepsilon\gamma}. \quad (11)$$

Если дополнительно выполняются условия

$$Z''_{\varepsilon\varepsilon} = -Z_{\varepsilon\varepsilon} B_{\varepsilon\varepsilon}, \quad (12)$$

$$Z''_{\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}} = -Z_{\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}} B_{\varepsilon\varepsilon}, \quad (13)$$

$$B_{\gamma\varepsilon} = -B_{\gamma\bar{\varepsilon}} B_{\varepsilon\varepsilon}, \quad (14)$$

$$e^T B_{\varepsilon\varepsilon} = -e^T, \quad (15)$$

$$M'_{\varepsilon\gamma} e = 0, \quad (16)$$

(здесь  $e = (1, \dots, 1)$  обозначает вектор, все составляющие которого равны единице), то уравнения (8) и (9) можно рассматривать как собственные уравнения двух самостоятельных омовских многополюсников  $M_I$  и  $M_2$ . Тем самым исходный многополюсник  $M$  с уравнениями (4) окажется разложенным на соединенные в соответствии с таблицей I A многополюсники  $M_I$  и  $M_2$ . При этом свойства составляющих элементов схемы замещения могут заметно отличаться от исходного многополюсника  $M$ . Для практического разложения необходимо найти такое  $B_{\varepsilon\varepsilon}$ , которое удовлетворяет условию (15) и допускает разбиения (12) (13) и (14). Одним из возможных решений является выбор  $B_{\varepsilon\varepsilon} = -E_\varepsilon$  (если  $\varepsilon$  и  $\bar{\varepsilon}$  содержат единственный полюс, то это будет единственным решением ввиду (15)). Однако в общем случае ввиду произвольного выбора множества полюсов  $\varepsilon$ , а также составляющих в (10) и (11), обычно возможно много решений, дающих различные схемы замещения. Для облегчения выбора  $B_{\varepsilon\varepsilon}$  целесообразно исходить из гибридных уравнений (1) исходного многополюсника, представленных с минимальным количеством полюсов во множестве  $\gamma$  [5].

Наибольший интерес для практики представляют упрощенные варианты описанного метода, получаемые при частных случаях разложения  $Z_{\mathcal{X}\mathcal{X}}$  и  $M_{\mathcal{X}\mathcal{I}}$  на составляющие по (I0) и (II), а также при выборе  $|\varepsilon| = |\gamma|$  (тогда  $\bar{\mathcal{X}}$  отпадает, будучи пустым множеством). Основные соотношения для некоторых частных вариантов представлены в таблице I. Во всех вариантах возможны дальнейшие разновидности. Например, при выборе  $Z'_{\mathcal{X}\mathcal{X}} = 0$  и  $Z''_{\mathcal{X}\mathcal{X}} = Z_{\mathcal{X}\mathcal{X}}$  получается в любых вариантах трансактансный многополюсник  $M_I$ . Иногда может представлять интерес разложение  $Z_{\mathcal{X}\mathcal{X}}$  по (I0) на симметрические и антисимметрические составляющие, выбирая, например,

$$Z'_{\mathcal{X}\mathcal{X}} = \frac{1}{2}(Z_{\mathcal{X}\mathcal{X}} + Z_{\mathcal{X}\mathcal{X}}^T), \quad (I7)$$

$$Z''_{\mathcal{X}\mathcal{X}} = \frac{1}{2}(Z_{\mathcal{X}\mathcal{X}} - Z_{\mathcal{X}\mathcal{X}}^T). \quad (I8)$$

Если дополнительно еще выбирается  $V_{\varepsilon\mathcal{X}} = -E_{\varepsilon}$ , то многополюсник  $M_I$  в вариантах B и D в таблице I окажется обратимым.

Следует выделить еще одну разновидность по (I0). В этом случае  $Z'_{\mathcal{X}\mathcal{X}}$  выбирается в виде диагональной матрицы, где все диагональные элементы ненулевые. Такой выбор всегда удастся так провести, что обе составляющие разложения (I0) окажутся обратимыми ( $\det Z'_{\mathcal{X}\mathcal{X}} \neq 0$ ,  $\det Z''_{\mathcal{X}\mathcal{X}} \neq 0$ ). Если к тому же выбирается  $V_{\varepsilon\mathcal{X}} = -E_{\varepsilon}$ , то многополюсник  $M_I$  во всех вариантах таблицы I окажется адмитансным. Таким же окажется многополюсник  $M_2$ , по крайней мере в вариантах C и D в таблице I. В итоге для исходного многополюсника можно получить полностью адмитансную схему замещения с внутренними полюсами  $\varepsilon$ . Частный вид уравнений  $M_I$  в описанном случае

$$\begin{bmatrix} V_{\mathcal{X}} \\ I_{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'_{\mathcal{X}\mathcal{X}} & E_{\varepsilon} \\ -E_{\varepsilon} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\mathcal{X}} \\ V_{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (I9)$$

при условии диагональной матрицы  $Z'_{\mathcal{X}\mathcal{X}}$  показывает, что  $M_I$  разлагается на совокупность двухполюсников, которые оказываются включенными последовательно к полюсам многополюсника  $M_2$ . Описанный вариант по существу совпадает с известным методом "расширения" Юла [6]. В частном случае, когда  $\mathcal{X}$  охватывает единственный полюс, в схеме замещения многополюсника выделяется некоторый "последовательный" двухполюсник.

Таблица 2

НАИМЕНОВАНИЕ МНОГОПОЛЮСНИКА	ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ	A	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ
ТРАНЗОР	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$	—	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$	
ВЕРСОР	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & -y \\ -1 & -y & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & -y \\ -y & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$	—	
ИДЕАЛЬНЫЙ ПОВТОРИТЕЛЬ	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}$	—	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}$	—
ТЕТРИСТОР	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}$	—	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}$	
НОНИТОР	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}$	—	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$	
—	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\beta & 1 & 0 \\ 0 & \beta & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}$	—	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}$	—

Описанный метод в целом может применяться также в случае неомовских многополюсников. Если гибридные уравнения исходного многополюсника даны в общем виде [2]

$$\begin{bmatrix} V_\lambda \\ I_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\lambda\bar{\mu}} & M_{\lambda\bar{\lambda}} \\ B_{\mu\bar{\mu}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\bar{\mu}} \\ V_{\bar{\lambda}} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

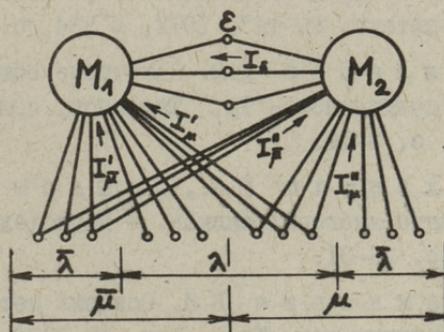
то введение внутренних полюсов  $\varepsilon$  при  $|\varepsilon| = |\lambda| = |\bar{\mu}|$  позволяет исходный многополюсник представить соединением многополюсника  $M_1$  с уравнениями

$$\begin{bmatrix} V_\lambda \\ I_\varepsilon \\ I'_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\lambda\bar{\mu}} & E_\varepsilon & 0 \\ B_{\varepsilon\bar{\mu}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I'_{\bar{\mu}} \\ V_\varepsilon \\ V_{\bar{\lambda}} \end{bmatrix} \quad (21)$$

и омовского многополюсника  $M_2$  с уравнениями

$$\begin{bmatrix} V_\varepsilon \\ I''_\mu \\ I''_{\bar{\mu}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\varepsilon\varepsilon} & M_{\lambda\bar{\lambda}} & 0 \\ B_{\mu\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_\varepsilon \\ V_{\bar{\lambda}} \\ V_\lambda \end{bmatrix}, \quad (22)$$

соединенных в соответствии с фиг. 1.



Фиг. 1.

В представленных уравнениях использованы соотношения

$$Z_{\lambda\bar{\mu}} = Z'_{\lambda\bar{\mu}} + Z''_{\lambda\bar{\mu}}, \quad (23)$$

$$I_{\mu} = I'_{\mu} + I''_{\mu}. \quad (24)$$

$$I_{\bar{\mu}} = I'_{\bar{\mu}} + I''_{\bar{\mu}}. \quad (25)$$

а, к тому же, должны быть выполнены условия

$$Z''_{\lambda\bar{\mu}} = -Z_{\epsilon\epsilon} B_{\epsilon\bar{\mu}}, \quad (26)$$

$$B_{\mu\bar{\mu}} = -B_{\mu\epsilon} B_{\epsilon\bar{\mu}}, \quad (27)$$

$$e^T B_{\epsilon\bar{\mu}} = -e^T. \quad (28)$$

Возможности применения представленного разложения вполне аналогичны ранее рассмотренному, хотя само разложение несколько более специфическое. При удачном выборе  $B_{\epsilon\bar{\mu}}$  многополюсник  $M_T$  может также оказаться омовским и далее разлагаться методами таблицы I.

Ряд примеров проведенных разложений представлен в таблице 2.

## Л и т е р а т у р а

1. С и л л а м а а Х.В. Структура и свойства элементар-пространства представления многополюсных цепей. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1972, № 334, с. 3-15.

2. С и л л а м а а Х.В. Некоторые общие свойства множества многополюсников. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1974, № 371, с. 3-12.

3. Р э х э п а п п Ю.А., С и л л а м а а Х.В. Матричное описание многополюсников. - Радиотехника, т. 27, 1972, № 12, с. 26-31.

4. Б л а ж к е в и ч Б.И. Основні методи аналізу лінійних електричних кіл. Київ, Вид. АН УССР, 1961.

5. С и л л а м а а Х.В. Канонические гибридные матрицы омовских многополюсников. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1973, № 350, с. 3-10.

6. C a r l i n, H.J., Y o u l a, D.C. Network synthesis with negative resistors. Proc. IRE, v. 49, May 1961, 907-920.

Equivalent Networks of Nonadmittant  
Multipoles

Summary

A general method of forming equivalent networks for nonadmittant multipoles is considered. The constitutive equations of the initial multipole are given in some hybrid form and then a splitting procedure of recurrent character is used. Some modifications of the proposed method are developed and illustrated with various examples.



УДК 621.372.5

В.А. Кукк, Г.И. Шифф

УСТОЙЧИВОСТЬ НАГРУЖЕННОГО КОНВЕРТОРА  
 ОТРИЦАТЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Ввиду активности конвертора отрицательного сопротивления (КОС), устойчивость цепей, содержащих КОС, является существенной проблемой в практике его использования, отражаясь в ряде работ [1, 2, 3, 4, 5].

В данной статье показана целесообразность применения динамической модели первого порядка для характеристики реального КОС при исследовании устойчивости.

Предполагаем, что  $z$ -параметры реального КОС с инвертированием тока (КОСТ) аппроксимированы матрицей

$$z = \frac{1}{\alpha s + \beta} \begin{bmatrix} \alpha s + b_1 & \alpha s + b_2 \\ \alpha s + b_1 & \alpha s + b_2 \end{bmatrix}, \quad (I)$$

где  $b_1 \cdot b_2 < 0$ , а все остальные коэффициенты положительны.

Матрица (I), очевидно, соответствует КОСТ на низких частотах, если  $\frac{|b_1|}{\alpha} \gg \frac{\beta}{\alpha}$  и  $\frac{|b_2|}{\alpha} \gg \frac{\beta}{\alpha}$ . Кроме того, величины  $\frac{|b_1|}{\beta}$  и  $\frac{|b_2|}{\beta}$  должны быть достаточно большими по сравнению с сопротивлениями, а  $\frac{\alpha}{|b_1|}$  и  $\frac{\alpha}{|b_2|}$  — достаточно малыми по сравнению с емкостями нагрузочных цепей. Последние условия в дальнейшем названы условиями нагружаемости.

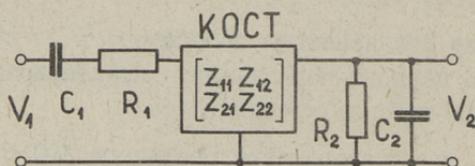
Случай комплексной нагрузки. При описании  $z$ -матрицей реального, нагруженного с обоих портов КОСТ характеристическое уравнение цепи принимает следующий вид:

$$\Delta z + z_{11} z_2 + z_{22} z_1 + z_1 z_2 = 0, \quad (2)$$

где  $z_1$  и  $z_2$  являются нагрузками соответственно на портах I и 2 конвектора.

Если  $z_1$  и  $z_2$  имеют функцию импеданса первого порядка, то при описании КОСТ матрицей (I) степень характеристического уравнения (2) не превышает трех и исследование устойчивости конкретной цепи удобно провести по критерию Рауса. Тем не менее, такой анализ в общем виде является малонаглядным. Поэтому представляется целесообразным выяснение применимости предложенной динамической модели КОСТ при исследовании устойчивости на конкретных схемах.

Рассмотрим типичную цепь, которая реализует узкополосную передаточную функцию напряжения второго порядка (фиг.1).



Фиг. 1.

Уравнение (2) с учетом (I) принимает форму:

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0, \quad (3)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha T_1 T_2, \\ a_1 &= \alpha T_1 R_2 / R_1 + \alpha (T_1 + T_2) + b_2 T_1 T_2 + \alpha T_1 R_2, \\ a_2 &= b_1 T_1 R_2 / R_1 + b_2 (T_1 + T_2) + \alpha + \alpha R_2 + \beta T_1 R_2, \\ a_3 &= b_2 + \beta R_2, \\ T_1 &= R_1 C_1, \quad T_2 = R_2 C_2. \end{aligned}$$

Используя критерий устойчивости Рауса и учитывая условия нагружаемости КОСТ, легко показать, что при  $b_1 < 0$  и  $b_2 > 0$  достаточным условием устойчивости является выполнение неравенства

$$\frac{R_2}{R_1} \leq -\frac{b_2}{b_1} \left(1 + \frac{T_2}{T_1}\right). \quad (4)$$

В случае  $b_1 > 0$  и  $b_2 < 0$  рассматриваемая цепь вообще не может быть устойчивой. Поэтому в дальнейшем ограни-

чимся случаем  $b_1 < 0$  и  $b_2 > 0$ , тем более, что случай  $b_1 > 0$  и  $b_1 < 0$  соответствует просто иному выбору входного и выходного портов КОСТ.

На фиг. 2 представлена область устойчивости рассматриваемой цепи на плоскости  $R_1 - R_2$  (заштрихованная часть плоскости с величинами вне скобок), где параметром границы является

$$A = -\left(\frac{b_1}{b_2} + \frac{C_2}{C_1}\right).$$

Прямая I с уравнением

$R_1 = -\frac{b_1}{b_2} R_2$  является границей области устойчивости

при  $\frac{C_2}{C_1} = 0$ , то есть при чис-

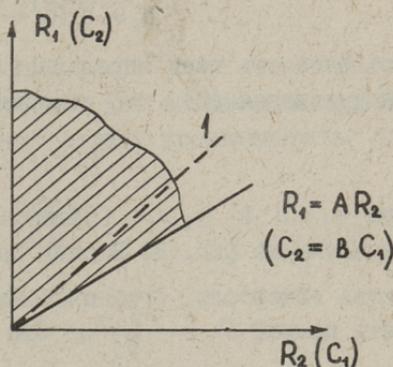
то резистивной нагрузке на одном из портов КОСТ (имеет место "емкостный" холостой ход -  $C_2 = 0$  или короткое замыкание -  $C_1 \Rightarrow \infty$ ).

При комплексной нагрузке на обоих портах область устойчивости увеличивается, достигая максимального значения при  $\frac{C_2}{C_1} = -\frac{b_1}{b_2}$ . Тогда цепь окажется устойчивой при любых положительных сопротивлениях. Можно сказать, что в данном случае режимы "холостого хода" и "короткого замыкания" на соответствующих портах КОСТ обеспечиваются емкостями.

Аналогичные выводы получаются при рассмотрении области устойчивости на плоскости  $C_1 - C_2$  (фиг. 2 с величинами в скобках), где параметром границы является

$$B = -\left(\frac{b_1}{b_2} + \frac{R_1}{R_2}\right).$$

Теперь прямая I соответствует границе области устойчивости при чисто емкостной нагрузке на одном из портов КОСТ ( $R_1 = 0$  или  $R_2 = \infty$ ). При  $\frac{R_1}{R_2} \geq -\frac{b_1}{b_2}$  рассматриваемая цепь окажется устойчивой при любых емкостях.



Фиг. 2.

Случай резистивной нагрузки. Характеристическое уравнение (2) принимает вид

$$a_0 s + a_1 = 0, \quad (5)$$

где

$$a_0 = a(R_1 + R_2) + \alpha R_1 R_2,$$

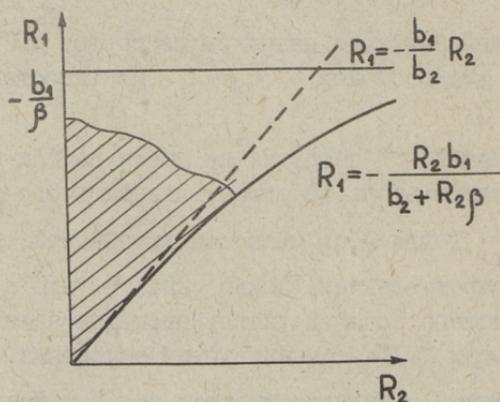
$$a_1 = b_1 R_2 + b_2 R_1 + \beta R_1 R_2.$$

Устойчивость цепи определяется условием отрицательного корня уравнения (5), что эквивалентно условию

$$R_1 > - \frac{R_2 b_1}{b_2 + \beta R_2}$$

при  $b_1 < 0$  и  $b_2 > 0$ . Область устойчивости графически представлена на фиг. 3. В силу неравенства  $\frac{|b_2|}{\beta} \gg R_2$  можно ветвь гиперболы, ограничивающую устойчивую область, заменить прямой  $R_1 = -\frac{b_1}{b_2} R_2$ . Это приводит к упрощенному условию устойчивости в виде

$$R_1 > -\frac{b_1}{b_2} R_2.$$



Фиг. 3.

Как видно, режимы "холостого хода" на одном и "короткого замыкания" на другом порте КОСТ являются крайними режимами устойчивой работы цепи.

Случай чисто емкостной нагрузки на обоих портах КОСТ описывается характеристическим уравнением

$$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0,$$

где

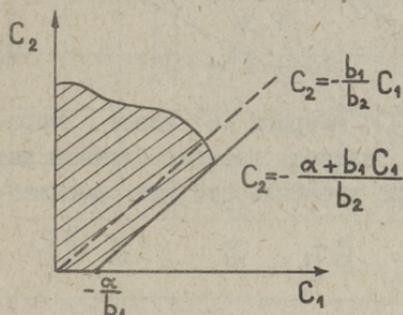
$$a_0 = a(C_1 + C_2),$$

$$a_1 = b_1 C_1 + b_2 C_2 + \alpha,$$

$$a_2 = \beta.$$

Из критерия Рауса вытекает, что для обеспечения устойчивости при  $b_1 < 0$  параметры цепи должны удовлетворять условию

$$C_2 > -\frac{\alpha + b_1 C_1}{b_2}.$$



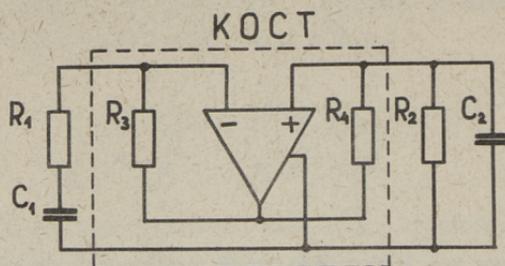
Фиг. 4.

Область устойчивости в графической форме представлена на фиг. 4.

Ввиду  $\frac{\alpha}{|b_1|} \ll C_1$ , можно нижнюю границу области устойчивости заменить прямой  $C_2 = -\frac{b_1}{b_2} C_1$ . Образовавшаяся в итоге область устойчивости, как и в предыдущем частном случае, является крайней областью устойчивости для общего случая нагрузки (фиг. 2). На приведенных частных случаях четко наблюдается влияние сделанных нами предпосылок.

Естественно, что совпадение теоретических (4) и практических условий устойчивости тем лучше, чем лучше выполняются условия нагружаемости КОСТ.

Экспериментально была исследована устойчивость цепи, представленной на фиг. 5, где усиление скорректированного операционного усилителя аппроксимируется функцией  $\frac{K}{1+sT}$ .



Фиг. 5.

Тогда КОСТ описывается  $z$ -матрицей вида:

$$z = \frac{1}{1+sT} \begin{bmatrix} R_3(1+sT-K) & R_4 K \\ -R_3 K & R_4(1+sT+K) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

При предпосылке  $K \gg (1+sT)$  матрица (6) имеет параметры с нулями в бесконечности, являясь частным случаем матрицы (1). Из (4) получим условие устойчивости для рассматриваемой цепи

$$\frac{R_2}{R_1} \leq \frac{R_4}{R_3} \left(1 + \frac{T_2}{T_1}\right).$$

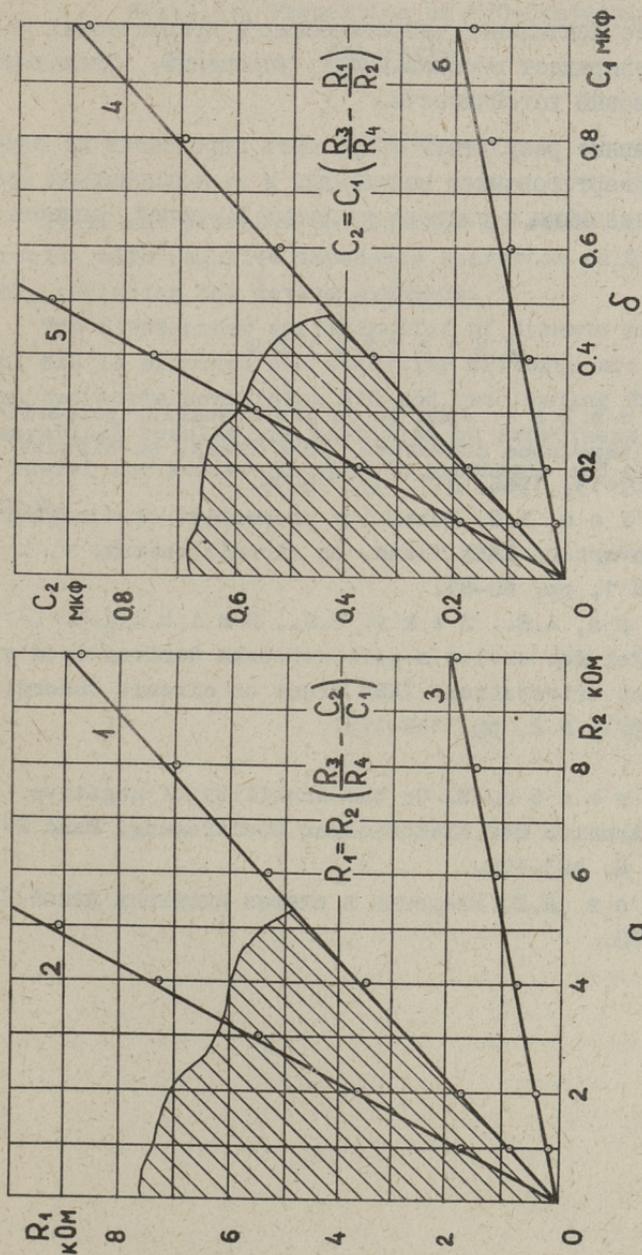
Используемый КОСТ был изготовлен на основе скорректированного операционного усилителя типа IUT53I с параметрами  $K = 50 \cdot 10^3$  и  $T = 0,8 \cdot 10^{-8}$  сек и резисторов  $R_3 = 19$  кОм и  $R_4 = 10$  кОм.

Результаты эксперимента приведены на фиг. 6, где заштрихованная часть на фиг. 6а и 6б является областью устойчивости цепи при  $C_1 = C_2 = 0,5$  мкф и  $R_1 = R_2 = 5$  кОм соответственно. Линиями обозначены расчетные границы областей устойчивости соответствующих цепей. Там же приведены экспериментально полученные "точки" на границах области устойчивости.

Как видно, совпадение теоретических и экспериментальных результатов можно считать вполне хорошим.

## Выводы

1. Предложенная модель КОСТ достаточно хорошо характеризует динамические свойства реального КОСТ и, с точки зрения устойчивости, его низкочастотные параметры яв-



Фиг. 6. Зависимость устойчивости цепи от ее параметров, причем графики соответствуют следующим значениям элементов нагрузки:

график 1 -  $C_1 = C_2 = 0,5$  мфк;

график 2 -  $C_1 = 10$  мфк,  $C_2 = 0,5$  мфк;

график 3 -  $C_1 = 0,5$  мфк,  $C_2 = 0,85$  мфк;

график 4 -  $R_1 = R_2 = 5$  кОм;

график 5 -  $R_1 = 0$ ,  $R_2 = 5$  кОм;

график 6 -  $R_1 = 5$  кОм,  $R_2 = 2,94$  кОм.

ляются определяющими (при предпосылке соблюдения условий нагружаемости реального КОСТ).

2. Хорошее совпадение теоретических и практических результатов подтверждает обоснованность упрощений, сделанных при выводе условий устойчивости.

3. Полученные результаты могут быть перенесены на случай КОС с инвертированием напряжения и использоваться при исследовании динамики и синтезе активных РС-цепей, содержащих КОС.

### Л и т е р а т у р а

1. B r o w n l i e, John D. On the stability properties of a negative impedance converter. IEEE Trans. on circuit theory, v. CT-13, 1966, N 1, pp. 98-99.

2. D a v i e s, A.C. Stability properties of a negative immittance converter. IEEE Trans. on circuit theory, v. CT-15, 1968, N 1, pp. 80-81.

3. S e d r a, A.S., Z a k y, S.G., S m i t h, K.C. A feedback model for active n-port networks derived from a concept of port orientation. IEEE Trans. on circuit theory, v. CT-19, 1972, N 2, pp. 168-175.

4. S c h w a r t s, E. On the stability of negative resistances. Archive der Elektrischen Übertragung, Band 27, 1973, Heft 9, S. 403-405.

5. С е д о в К.И. Введение в синтез активных цепей. Л., "Энергия", 1973.

Stability Properties of NIC-Containing  
Two-Ports

Summary

It is not possible to describe or study the stability of circuits with negative impedance converter (NIC) without explicitly including the device dynamics.

The first-order approximation of dynamic properties of real NIC is proposed and stability criteria are derived for some two-ports containing NIC and two loading RC one-ports. Theoretical results are certified by experiment and they may be useful for active RC circuit synthesis and practical realization.



УДК 518.5:621.372.061

М.Ю. Курм, В.А. Кукк

### АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ С ПОМОЩЬЮ ЛАГЕРРОВСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Введение. Для анализа линейных стационарных цепей в общем случае нужно решить систему линейных уравнений, матрица которой в случае активных RLCM-цепей состоит из дробно-рациональных (передаточных) функций. При машинном расчете увеличение числа узлов (порядка матрицы) приводит к резкому увеличению объема памяти и машинного времени. Поэтому предложен ряд методов расчета без прямого решения вышеописанной системы: непосредственный расчет коэффициентов искомой дробно-рациональной передаточной функции (топологический метод, метод сигнальных графов, метод структурных чисел, метод переменных состояния и т.д.) [1-7], отдельный анализ на каждой частоте и численное интегрирование в  $t$ -области [7] и т.д. Представление же функций цепей рациональными дробями имеет некоторые недостатки, особенно, если полиномы имеют высокий порядок [7].

Поэтому заслуживает внимания приближенный метод расчета, в котором параметры цепи (в том числе и любые передачи) представляются числовыми последовательностями (последовательностями Лагерра) [8]. После выполнения необходимых расчетов над последовательностями можно от них перейти на любой традиционный вид представления параметров динамических систем (передаточные функции, частотные характеристики, импульсные и переходные характеристики [9,10]).

Хотя для точного представления параметров цепей требуется в принципе бесконечное число членов последовательности, в практических расчетах можно ограничиваться их относительно малым количеством. Например, для аппроксимации переда-

точной функции  $n$ -го порядка требуется  $2n + 1$  членов последовательности [9].

Порядок передаточных функций, получаемый при переходе от последовательностей, можно заранее задавать. В практических расчетах можно, конечно, задавать максимально возможный порядок передаточной функции, определяемый числом реактивных элементов в цепи, но обычно целесообразно и достаточно искать аппроксимации передач относительно низких порядков (не более 8-10).

В данной статье показывается, что последовательности всех переменных данного координатного базиса вычисляются одновременно повторным решением некоторой системы линейных уравнений с вещественными коэффициентами, которая непосредственно получается из матриц  $G$ ,  $C$  и  $\Gamma$ .

L-представление. В основе метода числовых последовательностей лежит лагерровское представление любых функций времени (токов, напряжений, импульсных и переходных характеристик и т.д. [8], заданных в интервале  $t \in [0, \infty)$ )

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k l_k(t), \quad (1)$$

где  $a_k$  определяется из соотношения

$$a_k = \int_0^{\infty} h(t) l_k(t) dt. \quad (2)$$

Этим определено так называемое L-представление

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k l_k(t) \longleftrightarrow \{a_0, a_1, a_2, \dots\}. \quad (3)$$

Здесь отметим следующие свойства L-представления [8]:

I. Если обозначить

$$Dh(t) = \frac{d}{dt} h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k l_k(t) \quad (4)$$

и

$$Jh(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} c_k l_k(t), \quad (5)$$

то, из (1) и (2) следует, что

$$\begin{cases} b_0 = \frac{1}{2} a_0 \\ b_k = b_{k-1} + \frac{1}{2}(a_k + a_{k-1}), \quad k \geq 1 \end{cases} \quad (6)$$

и

$$\begin{cases} c_0 = 2a_0 \\ c_k = 2(a_k - a_{k-1}) - c_{k-1}, \quad k \geq 1 \end{cases} \quad (7)$$

$$2. \quad \delta(t) \longrightarrow \{1, 1, 1, \dots\}. \quad (8)$$

Расчет электронных RLC-цепей. В [8] приведены алгоритмы расчета передаточного сопротивления электронных RC- и RLC-цепей. В данной статье рассматривается возможность применения L-представления для расчета любых передач электронных RLC-цепей.

Исходим из узловых уравнений цепи в матричной форме

$$(G_0 + C_0 D + \Gamma_0 J) U(t) = I(t), \quad (9)$$

где  $G_0, C_0, \Gamma_0$  - числовые матрицы проводимостей, емкостей и обратных индуктивностей,

$U(t)$  - вектор узловых напряжений,

$I(t)$  - вектор задающих (узловых) токов.

Симметричность матриц  $C_0$  и  $\Gamma_0$  позволяет при машинном расчете представить их в треугольной форме.

Решением уравнения (9) можно найти  $U(t)$ , то есть напряжения всех узлов. Если рассматривать  $I(t)$  и  $U(t)$  при  $t \geq 0$ , и если в составе  $I(t)$  одну компоненту принимать равной  $\delta(t)$ , а остальные брать нулевыми, то рассчитанный  $U(t)$  оказывается вектором импульсных реакций, а его изображение по Лапласу

$$\mathcal{L}U(t) = F(s), \quad (10)$$

где  $\mathcal{L}$  - оператор Лапласа,

$F(s)$  - вектор передаточных сопротивлений.

Передача по напряжению. Допустим, что напряжение  $j$ -го узла равно  $\delta(t)$

$$U^j = \delta(t), \quad (11)$$

а

$$I(t) = \theta.$$

Тогда из (9) получается

$$\begin{pmatrix} G_{00} & G_{01} & \dots & G_{0j} & \dots & G_{0n} \\ G_{10} & G_{11} & \dots & G_{1j} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{j0} & G_{j1} & \dots & G_{jj} & \dots & G_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{n0} & G_{n1} & \dots & G_{nj} & \dots & G_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^0(t) \\ U^1(t) \\ \vdots \\ \delta(t) \\ \vdots \\ U^n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} & \dots & C_{0j} & \dots & C_{0n} \\ C_{10} & C_{11} & \dots & C_{1j} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{j0} & C_{j1} & \dots & C_{jj} & \dots & C_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{n0} & C_{n1} & \dots & C_{nj} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} U^0(t) \\ U^1(t) \\ \vdots \\ \delta(t) \\ \vdots \\ U^n(t) \end{pmatrix} + \\
 + \begin{pmatrix} \Gamma_{00} & \Gamma_{01} & \dots & \Gamma_{0j} & \dots & \Gamma_{0n} \\ \Gamma_{10} & \Gamma_{11} & \dots & \Gamma_{1j} & \dots & \Gamma_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{j0} & \Gamma_{j1} & \dots & \Gamma_{jj} & \dots & \Gamma_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{n0} & \Gamma_{n1} & \dots & \Gamma_{nj} & \dots & \Gamma_{nn} \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} U^0(t) \\ U^1(t) \\ \vdots \\ \delta(t) \\ \vdots \\ U^n(t) \end{pmatrix} = \theta, \quad (12)$$

которую можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} G_{00} & G_{01} & \dots & G_{0j-1} & G_{0j+1} & \dots & G_{0n} \\ G_{10} & G_{11} & \dots & G_{1j-1} & G_{1j+1} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{j-10} & G_{j-11} & \dots & G_{j-1j-1} & G_{j-1j+1} & \dots & G_{j-1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{j+10} & G_{j+11} & \dots & G_{j+1j-1} & G_{j+1j+1} & \dots & G_{j+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{n0} & G_{n1} & \dots & G_{nj-1} & G_{nj+1} & \dots & G_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^0(t) \\ U^1(t) \\ \vdots \\ U^{j-1}(t) \\ \vdots \\ U^{j+1}(t) \\ \vdots \\ U^n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} & \dots & C_{0j-1} & C_{0j+1} & \dots & C_{0n} \\ C_{10} & C_{11} & \dots & C_{1j-1} & C_{1j+1} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{j-10} & C_{j-11} & \dots & C_{j-1j-1} & C_{j-1j+1} & \dots & C_{j-1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{j+10} & C_{j+11} & \dots & C_{j+1j-1} & C_{j+1j+1} & \dots & C_{j+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n0} & C_{n1} & \dots & C_{nj-1} & C_{nj+1} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} U^0(t) \\ U^1(t) \\ \vdots \\ U^{j-1}(t) \\ \vdots \\ U^{j+1}(t) \\ \vdots \\ U^n(t) \end{pmatrix} + \\
 + \begin{pmatrix} \Gamma_{00} & \Gamma_{01} & \dots & \Gamma_{0j-1} & \Gamma_{0j+1} & \dots & \Gamma_{0n} \\ \Gamma_{10} & \Gamma_{11} & \dots & \Gamma_{1j-1} & \Gamma_{1j+1} & \dots & \Gamma_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{j-10} & \Gamma_{j-11} & \dots & \Gamma_{j-1j-1} & \Gamma_{j-1j+1} & \dots & \Gamma_{j-1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{j+10} & \Gamma_{j+11} & \dots & \Gamma_{j+1j-1} & \Gamma_{j+1j+1} & \dots & \Gamma_{j+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{n0} & \Gamma_{n1} & \dots & \Gamma_{nj-1} & \Gamma_{nj+1} & \dots & \Gamma_{nn} \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} U^0(t) \\ U^1(t) \\ \vdots \\ U^{j-1}(t) \\ \vdots \\ U^{j+1}(t) \\ \vdots \\ U^n(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} G_{0j} \\ G_{1j} \\ \vdots \\ G_{j-1j} \\ G_{j+1j} \\ \vdots \\ G_{nj} \end{pmatrix} \delta(t) - \begin{pmatrix} C_{0j} \\ C_{1j} \\ \vdots \\ C_{j-1j} \\ C_{j+1j} \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} D \delta(t) - \\
 - \begin{pmatrix} \Gamma_{0j} \\ \Gamma_{1j} \\ \vdots \\ \Gamma_{j-1j} \\ \Gamma_{j+1j} \\ \vdots \\ \Gamma_{nj} \end{pmatrix} J \delta(t) = - G_j \delta(t) - C_j D \delta(t) - \Gamma_j J \delta(t). \quad (13)$$

Отметим, что правая сторона системы уравнений представляет собой источники тока, полученные с помощью теоремы Нортока из источника напряжения  $\delta(t)$ .

Разлагая  $U(t)$  в лагерровскую последовательность

$$U(t) = \begin{pmatrix} U^0(t) \\ U^1(t) \\ \vdots \\ U^n(t) \end{pmatrix} \longleftrightarrow (U_0, U_1, U_2, \dots) = \begin{pmatrix} U_0^0, U_1^0, U_2^0, \dots \\ U_0^1, U_1^1, U_2^1, \dots \\ \vdots \\ U_0^n, U_1^n, U_2^n, \dots \end{pmatrix} \quad (I4)$$

и используя (4) - (8), можем уравнениям (I3) дать следующий вид:

$$\begin{cases} \Upsilon U_0 = -V_0 \\ \Upsilon U_1 = (4\Gamma - C)U_0 - V_1 \\ \Upsilon U_k = (4\Gamma - C)U_{k-1} + (G - \frac{1}{2}C - 2\Gamma)U_{k-2} - V_2, \quad k \geq 2, \end{cases} \quad (I5)$$

где  $\Upsilon = G + \frac{1}{2}C + 2\Gamma$ ,  $V_0 = G_j + \frac{1}{2}C_j + 2\Gamma_j$ ,  $V_1 = G_j + \frac{3}{2}C_j - 2\Gamma_j$   
и  $V_2 = 2C_j$ .

Решение системы (I5) сводится к повторному решению некоторой системы линейных уравнений с матрицей  $\Upsilon$  при различных правых частях. Для этого можно воспользоваться любым алгоритмом решения (вычисление обратной матрицы, LU-разложение, техника разреженных матриц и т.д.).

Воспользуясь обратной матрицей, можем решение системы уравнений (I5) представить рекуррентными соотношениями

$$\begin{cases} U_0 = -QV_0 \\ U_1 = R_1 U_0 - QV_1 \\ U_k = R_1 U_{k-1} + R_2 U_{k-2} - QV_2, \quad k \geq 2, \end{cases} \quad (I6)$$

где  $Q = (G + \frac{1}{2}C + 2\Gamma)^{-1}$ ,  $R_1 = Q(4\Gamma - C)$  и  $R_2 = Q(G - \frac{1}{2}C - 2\Gamma)$ .

Система уравнений (I5) разрешима, значит соотношения (I6) имеют смысл только в том случае, когда существует обратная матрица  $\Upsilon^{-1} = Q = (G + \frac{1}{2}C + 2\Gamma)^{-1}$ .

Так как

$$G + \frac{1}{2}C + 2\Gamma = Y(s) \Big|_{s = \frac{1}{2}}, \quad (I7)$$

где  $Y(s)$  – операторная матрица узловых проводимостей цепи, то  $Q$  существует тогда и только тогда, когда цепь не имеет полюса в точке  $s = \frac{1}{2}$ . При наличии полюса  $Y(s)$  в точке  $s = \frac{1}{2}$  можно путем подходящего перенормирования цепи всегда от него избавиться.

От найденных последовательностей Лагерра можно далее перейти к традиционным представлениям передачи по известным алгоритмам [9, 10]

$$\{U_0^K, U_1^K, U_2^K, \dots, U_m^K\} \begin{cases} \rightarrow h(t), r(t) \\ \rightarrow V(\omega) \\ \rightarrow F(s), \end{cases} \quad (I8)$$

где  $h(t)$  – импульсная характеристика,  
 $r(t)$  – переходная характеристика,  
 $V(\omega)$  – спектр (частотная функция),  
 $F(s)$  – передаточная функция.

Если нас интересуют передаточные проводимости, то есть все токи ветвей, то они легко вычисляются при помощи закона Ома по найденным напряжениям.

Понижение порядка уравнений. Очевидно, что порядок уравнений (I6) равняется  $p = l - 2$ , где  $l$  – число узлов (отсутствует уравнение, соответствующее входной клемме). Оказывается, что порядок уравнений можно уменьшить, исключая уравнения, соответствующие узлам, к которым присоединены только неактивные элементы и которые не являются выходными. Для этого надо в матрицах  $C_0$  и  $\Gamma_0$  зачеркнуть соответствующие строки и столбцы, состоящие из нулей, а с матрицей  $G_0$  производить т.н. частичное обращение – абсорбирование [II]. Это можно сделать, если условие

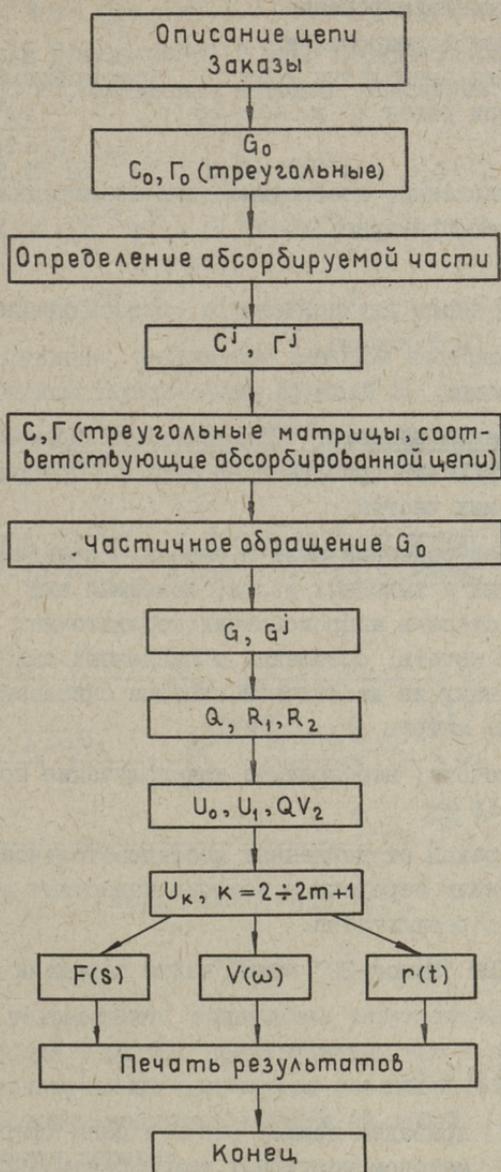
$$\det |G_d| \neq 0,$$

где  $G_d$  – матрица резистивных проводимостей абсорбируемой части цепи;

которое выполнено во всех практических случаях.

Из уравнений (I6) видно, что необходимое для решения число умножений равно ...

$$\dots \text{ для обращения } (G + \frac{1}{2}C + 2\Gamma) \sim p^3$$



Фиг. 1.

... для формирования	$R_1$	$\sim p^3$	
... для формирования	$R_2$	$\sim p^3$	
... для вычисления всех	$U_k$		при предположении, что
порядок цепи равен $p$ и $k \approx 2p$		$\sim 4p^3$	
		$\Sigma \approx 7p^3$ ,	

а число умножений, необходимое для исключения одного уравнения, равно примерно

$$(r+1)(r+2),$$

где  $r$  - число двухполюсников, присоединенных к исключаемой клемме.

Программа расчета. Блок-схема программы расчета передач по напряжению приведена на фиг. 1. Программа состоит из трех основных частей:

1. Ввод описания цепи и заказа (последний содержит номера входных и выходных узлов, желаемый вид результатов расчета и степень аппроксимации передаточных функций  $m$ ), их проверка и печать, сообщения о найденных ошибках, преобразование данных из десятичной системы счисления в двоичную и составление матриц  $G_0$ ,  $C_0$  и  $\Gamma_0$ .

2. Расчеты, необходимые для получения последовательностей.

3. Переход от найденных последовательностей к желаемым представлениям передачи с помощью известных алгоритмов [9, 10], печать результатов.

На ЭЦВМ "Минск-22" можно найти передачи для цепей с 30 узлами.

#### Пример.

В [12] приведен пример расчета цепи (фиг. 2) на ЭВМ "Минск-22" методом контурных токов с помощью программы, написанной в АЛГОЛе. Там были рассчитаны передачи

$$Y_{11} = \frac{I_1}{U_1}, \quad Y_{12} = \frac{I_1}{U_2}, \quad T_{31} = \frac{U_3}{U_1}, \quad T_{32} = \frac{U_3}{U_2}$$

в дробно-рациональном виде. Время расчета 8 мин. 45 секунд.

С помощью предложенного метода были найдены передачи по напряжению  $T_{ik} = \frac{U_i}{U_k}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $k = 1, 2$ . Общее время расчета (с печатью результатов) 2 мин. Передаточные функции для цепи (фиг. 2), найденные методом, описанным в [12], равны

$$T_{31} = -(2.45 \cdot 10^{-7} s^2 + 5.98 \cdot 10^{-4} s + 0,2) / D,$$

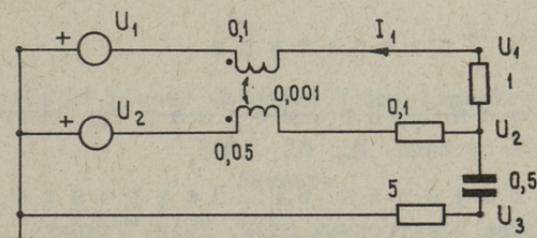
$$T_{32} = -(4.95 \cdot 10^{-7} s^2 + 5.198 \cdot 10^{-3} s + 2,0) / D,$$

где  $D = (4.999 \cdot 10^{-12} s^3 + 8.0 \cdot 10^{-7} s^2 + 5.896 \cdot 10^{-3} s + 2,2)$ .

Передаточные функции, найденные методом настоящей статьи, задаваясь порядком передаточных функций 3, равны

$$T_{31} = \frac{-(2.44999 \cdot 10^{-7} s^2 + 5.98004 \cdot 10^{-4} s + 0.20001)}{4.99898 \cdot 10^{-12} s^3 + 7.99997 \cdot 10^{-7} s^2 + 5.89600 \cdot 10^{-3} s + 2.20014} \quad \text{и}$$

$$T_{32} = \frac{-(4.95006 \cdot 10^{-7} s^2 + 5.19806 \cdot 10^{-3} s + 2.00000)}{4.99907 \cdot 10^{-12} s^3 + 8.00010 \cdot 10^{-7} s^2 + 5.89606 \cdot 10^{-3} s + 2.20000}$$



[кОм, мкФ, Гн]

Фиг. 2.

Как видно из изложенного, совпадение результатов хорошее (разница не более 0,01 %). Подчеркиваем, что с помощью данного метода одновременно получаются последовательности всех передач, от которых возможно перейти на любой традиционный вид представления передач.

**Итоги.** Основными преимуществами предложенного метода, на наш взгляд, являются:

1) простота алгоритма (16);

2) последовательности всех передач получаются повторным решением системы линейных уравнений (15) с неизменными вещественными коэффициентами;

3) быстрота;

4) метод применим для всех электронных цепей, имеющих матрицы  $G$ ,  $C$  и  $\Gamma$ ,

5) одновременно находятся последовательности всех передач от данного источника, а далее возможен переход на любые традиционные виды представления параметров линейных цепей - передаточные функции, частотные характеристики, переходные характеристики;

6) возможно получение приближенных передаточных функций относительно низкого порядка;

7) применение данного алгоритма, ввиду его простоты и представления матриц  $C$  и  $\Gamma$  треугольными, занимает относительно небольшой объем памяти; поэтому он применим для ЭЦВМ с малой и средней мощностью.

#### Л и т е р а т у р а

1. М э з о н С., Ц и м м е р м а н Г. Электронные цепи, сигналы и системы. М., ИЛ, 1963.

2. С и г о р с к и й В.П., П е т р е н к о А.И. Алгоритмы анализа электронных схем. Киев, "Техника", 1970.

3. Машинное проектирование. ТИИЭР, т. 55, № II, ноябрь 1967.

4. К а л а х а н Д. Методы машинного расчета электронных схем. М., "Мир", 1970.

5. K u h, E.S., R o h r e r, R.A. The State-Variable Approach to Network Analysis, Proc. IEEE, 53, N 7, July 1965, pp. 672-686.

6. Б е л л е р т С., В о з н я ц к и й Г. Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел. М., "Мир", 1972.

7. В г а н и н, Ф.Н. Computer Methods of Network Analysis, Proc. IEEE, 55, N 11, Nov. 1967, pp. 1787-1801.

8. К у к к В.А. К численному обращению матрицы проводимостей. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", серия А, № 304, 1971, с. 35-42.

9. К у к к В.А. Рациональная аппроксимация передаточной функции. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", серия А, № 288, 1970, с. 71-78.

10. К у к к В.А. Численный расчет переходной функции. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", № 334, 1972, с. 83-89.

11. К а р н и Ш. Теория цепей. Анализ и синтез. М., "Связь", 1973.

12. К о л л а р Я., Л а г е р К. Анализ линейных цепей с помощью ЭВМ. - Изв. вузов СССР, Радиоэлектроника, 1972, № 2.

M. Kurm, V. Kukk

### Analysis of Linear Networks Using Laguerre Series

#### Summary

A method is presented which uses the expansion of network parameters in series of Laguerre functions to solve the node equations for linear active RLCM networks. The coefficients of the voltage gain expansion are computed by the simple recursion formula

$$U_k = R_1 U_{k-1} + R_2 U_{k-2} - QV_2,$$

where matrices  $R_1$ ,  $R_2$  and  $Q$  and vector  $V_2$  may be simply obtained from the node admittance matrices of the network.



УДК 518.5:62-501.433

В.А.Кукк, Э.А.Рюстерн

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ  
 ИЗ ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В настоящей статье описываются алгоритм и программа нахождения передаточной функции из переходной характеристики. Алгоритм базируется на использовании лагерровских разложений [1, 2, 3].

Описание алгоритма. Предполагается, что переходная характеристика  $r(t)$  стремится к конечному пределу  $r_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t)$ , и что она задана таблицей, в которой указаны значения  $t_j$  ( $j=1, \dots, N$ ) и соответствующие значения  $r(t_j)$ . При этом должно  $t_1 = 0$  и  $t_N$  быть таким, чтобы при  $t \geq t_N$ ,  $r(t_N) = r_\infty$  и  $r(t) = r_\infty$ .

На первом этапе  $r(t)$  представляется следующим образом:

$$r(t) = r_\infty \cdot H(t) + q(t), \quad (1)$$

где  $H(t)$  — функция Хэвисайда (единичный скачок). Ввиду сделанных предположений  $q(t) = 0$  при  $t \geq t_N$ .

На втором этапе вычисляется разложение функции  $q(t)$  по функциям Лагерра:

$$q(t) = a_0 l_0(t) + a_1 l_1(t) + a_2 l_2(t) + \dots, \quad (2)$$

точнее, вычисляются  $(m+1)$  первых коэффициентов этого ряда. Число  $m$  ограничивает максимально возможную степень передаточной функции. О выборе этого числа будет сказано ниже. Алгоритм вычисления разложения (2) будет подробно описан ниже.

На третьем этапе дифференцируется  $q(t)$ . Эта операция легко выполняется на коэффициентах лагерровского разложения.

Если

$$\frac{dq(t)}{dt} = b_0 l_0(t) + b_1 l_1(t) + b_2 l_2(t) + \dots, \quad (3)$$

то

$$b_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad b_k = b_{k-1} + \frac{1}{2}(a_k + a_{k-1}). \quad (4)$$

Из последовательности  $\{b_0, b_1, \dots, b_m\}$  вычисляется преобразование Лапласа в виде рациональной дроби  $F_q(s)$  по алгоритму, описанному в [2,3,4]

$$F_q(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \mathcal{L} \frac{dq(t)}{dt}. \quad (5)$$

Так как

$$\mathcal{L} \frac{d}{dt} r_\infty H(t) = \mathcal{L} r_\infty \delta(t) = r_\infty. \quad (6)$$

то окончательный результат  $F(s)$  получается сложением  $F_q(s)$  и  $r_\infty$

$$F(s) = r_\infty + F_q(s) = \frac{P(s) + r_\infty Q(s)}{Q(s)}. \quad (7)$$

Степень функции  $F(s)$  или задается в исходных данных, или определяется автоматически программой вычисления  $F_q(s)$ . Во всяком случае она не может быть больше, чем  $\frac{m}{2}$ .

Из всех этапов алгоритма пояснений требует вычисление лаггерровского разложения. Этой проблеме посвящается основная часть статьи.

Постановка задачи. Нам необходимо вычислить коэффициенты разложения заданной функции

$$h(t) = \sum_0^{\infty} a_k l_k(t). \quad (8)$$

Ввиду ортонормальности системы функций  $\{l_k(t)\}$ , коэффициенты  $a_k$  могут быть найдены вычислением интегралов

$$a_k = \int_0^{\infty} h(t) l_k(t) dt. \quad (9)$$

В принципе такой интеграл не сложно вычислить численными методами, но здесь надо иметь в виду, что нам необходимо вычислить  $(m+1)$  коэффициентов и поэтому следует заботиться об объеме памяти и числе операций.

По-видимому, одним из удачных решений является следующее.

Известно, что для весовой функции  $\rho(t) = e^{-t}$  ортонормальную систему образуют многочлены Лагерра  $L_k(t)$ . Поэтому гауссова формула интегрирования при весе  $e^{-t}$  имеет вид [5,6]

$$\int_0^{\infty} e^{-t} f(t) dt \approx \sum_{i=1}^n A_i f(t_i), \quad (I0)$$

где  $t_i$  - корни многочлена Лагерра степени  $n$  и

$$A_i = \frac{1}{(n+1) L'_n(t_i) L_{n+1}(t_i)}. \quad (II)$$

Эта формула точна, если  $f(t)$  - многочлен степени не выше  $2n-1$ .

Перепишем (9) в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^{\infty} L_k(t) h(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-t/2} L_k(t) h(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} [e^{t/2} L_k(t) h(t)] dt \approx \sum_{i=1}^n A_i e^{t_i/2} L_k(t_i) h(t_i). \end{aligned} \quad (I2)$$

Последняя формула будет точной, если  $e^{t/2} h(t)$  является многочленом степени не выше  $2n-k-1$ . Обозначим  $B_{k,i} = A_i e^{t_i/2} L_k(t_i)$ .

Эти коэффициенты могут быть вычислены раз и навсегда, но их слишком много для хранения в памяти ЭВМ. Более экономично хранить только коэффициенты  $B_{0,i}$  (и узлы  $t_i$ ), а остальные  $B_{k,i}$  вычислить в ходе расчета. Это обосновывается тем, что многочлены Лагерра связаны простыми рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} L_0(t) &= S_0(t) = 1, \\ L_{k+1}(t) &= L_k(t) - \frac{t}{k+1} S_k(t), \\ S_{k+1}(t) &= S_k(t) + L_{k+1}(t), \end{aligned} \quad (I3)$$

которые, к тому же, работают крайне точно.

Для коэффициентов  $B_{k,i}$  имеем

$$C_{0,i} = B_{0,i}$$

$$B_{k+1,i} = B_{k,i} - \frac{t_i}{k+1} C_{k,i} \quad (I4)$$

$$C_{k+1,i} = C_{k,i} + B_{k+1,i}.$$

Вычисление  $t_i$  и  $B_{0,i}$ . Расчеты были проведены для  $n = 1 \dots 50$  на ЭВМ "Минск-22" и с двойной точностью на ЭВМ SIEMENS 4004/150 (для  $n \leq 32$  эти данные можно найти в [5]).

Корни  $t_i$  вычислялись методом деления отрезка пополам. Для контроля вычислялась сумма корней, которая должна равняться  $n^2$ . Расхождения были обнаружены в последних 2-3 битах.

Для расчета  $B_{0,i}$  формула (II) была преобразована с помощью соотношений [7]

$$\begin{aligned} (n+1)L_{n-1}(t) &= (2n+1-t)L_n(t) - nL_{n-1}(t), \\ tL'_n(t) &= n[L_n(t) - L_{n-1}(t)], \end{aligned} \quad (I5)$$

к следующему виду

$$B_{0,i} = \frac{t_i \cdot e^{t_i/2}}{n^2 [L_{n-1}(t_i)]^2} = \frac{t_i \cdot e^{-t_i/2}}{n^2 [L_{n-1}(t_i)]^2}. \quad (I6)$$

Совершенно ясно, что используя узлы и коэффициенты, рассчитанные для некоторого  $n$ , можно с приемлемой точностью вычислить коэффициенты до  $a_m$ ,  $m < n$ . Практическое испытание показало, что можно взять  $m \leq 0,7n$ .

Программа вычисления  $a_k$  была составлена для  $n = 50$ . Структура ее следующая.

Программа дает запросы внешнему блоку для получения значений  $h(t_i)$ . Во внешнем блоке работает квадратичный интерполятор, который использует таблицу  $t_j$  и  $q_j(t_j)$ . Значения  $t_i$  задаются в возрастающем порядке. Если  $t_j \geq t_n$ , то внешний блок должен дать соответствующий ответ и запросы прекращаются.

Получив  $h(t_i)$ , программа вычисляет  $B_{0,i} \cdot h(t_i)$ , затем по рекуррентным формулам (I4) находит все  $B_{k,i} \cdot h(t_i)$  и прибавляет к текущим значениям  $a_k$ .

Таблица I

$i$	$t_i$	$V_{0,i}$
1	0.2863051833937913-01	0.7243425469843454-01
2	0.1508829356769338+00	0.1586791875693046+00
3	0.3709487815348966+00	0.22350953 18188324+00
4	0.6890906998810483+00	0.2602319600866482+00
5	0.1105625023539914+01	0.2680223979291483+00
6	0.1620961751102503+01	0.2511791918937614+00
7	0.2235610375915182+01	0.2172893018282914+00
8	0.2950183366641837+01	0.1749461009270172+00
9	0.3765399774405785+01	0.1317571053852976+00
10	0.4682009387559286+01	0.9312194927138842-01
11	0.5701197574784890+01	0.6189467749570614-01
12	0.6823790909794550+01	0.3874075712908023-01
13	0.8051063669390791+01	0.2285381032418426-01
14	0.9384345308258405+01	0.1271212299249593-01
15	0.1082510903154915+02	0.6668196971410953-02
16	0.1237498160875746+02	0.3298257719571941-02
17	0.1403575459982990+02	0.1537837798851406-02
18	0.1580939719784467+02	0.6755685646225232-03
19	0.1769807093335027+02	0.2794280637777867-03
20	0.1970414653546158+02	0.1087301471128934-03
21	0.2183022330657828+02	0.3976281042258905-04
22	0.2407915144441151+02	0.1365049749803867-04
23	0.2645405784125299+02	0.4393275233586351-05
24	0.2895837601193740+02	0.1323561887424102-05
25	0.3159588095662287+02	0.3726328448989399-06
26	0.3437072996309047+02	0.9785316457072202-07
27	0.3728751061055050+02	0.2391680401004264-07
28	0.4035129757358608+02	0.5427933338961877-08
29	0.4356772026999503+02	0.1140814517534222-08
30	0.4694304399160305+02	0.2213869376501998-09
31	0.5048426796312995+02	0.3953609528259430-10
32	0.5419924488016864+02	0.6472996532382302-11
33	0.5809682801724852+02	0.9674710125734893-12
34	0.6218705417568894+02	0.1313684160584268-12
35	0.6648137387844483+02	0.1611626036879609-13
36	0.7099294482661947+02	0.1774995694254798-14
37	0.7573701154772730+02	0.1742168423301863-15
38	0.8073140480247773+02	0.1510775534604667-16
39	0.8599721113646323+02	0.1145782730982416-17
40	0.9155969041253392+02	0.7507604418065146-19
41	0.9744956561485057+02	0.4187590878449090-20
42	0.1037048912366923+03	0.1952254409150374-21
43	0.1103738588076403+03	0.7433053510452023-23
44	0.1175191982031111+03	0.2242912161901103-24
45	0.1252254701334734+03	0.5151735418774035-26
46	0.1336120279227287+03	0.8511144418172818-28
47	0.1428583254892541+03	0.9293345405035193-30
48	0.1532603719726036+03	0.5840936786421058-32
49	0.1653856433166826+03	0.1627823111041614-34
50	0.1806983437092145+03	0.1046817761803340-37

Таблица 2

n	К	Нули		Полусы	
4	0.9994	-0.2930	-0.2246	$\pm j 0.3046$	
		-0.00640I	-0.02983	$\pm j 0.4926$	
6	0.9967	-0.1076	$\pm j 0.4474$		
		-0.4814		$\pm j 0.3346$	
8	0.9922	+0.00003555		$\pm j 0.5000$	
		-0.08949	$\pm j 0.3317$	$\pm j 0.3551$	
10	0.9841	-0.1354	$\pm j 0.4824$		
		-2.553		$-2.454$	
12	0.9722	+0.002555		$-0.2919$	
		-0.09299	$\pm j 0.2368$	$-0.06679$	$\pm j 0.2486$
14	0.9604	-0.1535	$\pm j 0.3373$	$-0.07916$	$\pm j 0.4695$
		-0.05391	$\pm j 0.5169$	$-0.02709$	$\pm j 0.5127$
16	0.9487	-6.643		$-6.437$	
		+0.001897		$-0.3155$	
18	0.9371	-0.06738	$\pm j 0.1862$	$-0.06340$	$\pm j 0.1924$
		-0.08069	$\pm j 0.3880$	$-0.08150$	$\pm j 0.3539$
20	0.9256	-0.1949	$\pm j 0.3221$	$-0.04190$	$\pm j 0.4932$
		-0.05364	$\pm j 0.6072$	$-0.06279$	$\pm j 0.6006$

t	r(t)	n = 4	n = 6	n = 8	n = 10
0	1.000	0.9994	0.9967	0.9922	0.9841
0.2	0.9975	0.9982	0.9977	0.9980	1.000
2.0	0.7652	0.7660	0.7648	0.7639	0.7644
4.0	0.2239	0.2226	0.2235	0.2244	0.2241
4.8	0.0025	0.0018	0.0043	0.0041	0.0034
5.0	-0.0484	-0.0488	-0.0462	-0.0467	-0.0473
7.6	-0.4026	-0.3986	-0.4009	-0.4010	-0.4001
9.0	-0.3205	-0.3156	-0.3210	-0.3193	-0.3191
11.0	-0.0068	-0.0063	-0.0078	-0.0071	-0.0085
11.2	0.0270	0.0266	0.0261	0.0264	0.0250
14.0	0.3001	0.2858	0.2966	0.2939	0.2955
16.0	0.1717	0.1575	0.1650	0.1655	0.1677
17.2	0.0146	0.0083	0.0091	0.0122	0.0124
17.4	-0.0125	-0.0170	-0.0175	-0.0141	-0.0144
19.0	-0.1939	-0.1814	-0.1916	-0.1876	-0.1919
20.4	-0.2496	-0.2242	-0.2399	-0.2388	-0.2437
23.4	-0.0213	0.0009	-0.0160	-0.0227	-0.0169
23.6	0.0020	0.0224	0.0056	0.0012	0.0054
26.6	0.2183	0.2134	0.1946	0.1960	0.2022
28.0	0.1711	0.1672	0.1471	0.1551	0.1524
29.8	0.0064	0.0195	0.0019	0.0143	0.0002

Значения  $t_i$  и  $V_{0,i}$  для  $n = 50$  приведены в таблице I.

Пример практического расчета. Рассмотрим переходную характеристику

$$r(t) = J_0\left(\frac{1}{2}t\right),$$

соответствующую передаточной функции

$$F(s) = \frac{s}{\sqrt{s^2 + \frac{1}{4}}},$$

где  $J_0\left(\frac{1}{2}t\right)$  - функция Бесселя нулевого порядка [8,9]. С помощью изложенного алгоритма на ЭВМ "Минск-22" были получены дробно-рациональные передаточные функции в виде

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (s + \alpha_{ni}) \prod_{j=1}^{m_2} [(s + \alpha_{nj})^2 + \beta_{nj}^2]}{\prod_{k=1}^{n_1} (s + \alpha_{pk}) \prod_{l=1}^{n_2} [(s + \alpha_{pl})^2 + \beta_{pl}^2]},$$

которые представлены в таблице 2. Вычисленные значения соответствующих переходных характеристик представлены в таблице 3, где  $r(t)$  - точная переходная характеристика. Из полученных результатов следует, что оптимальной аппроксимацией является передаточная функция 6-го порядка, поскольку дальнейшее повышение порядка существенно не улучшит переходной характеристики.

#### Л и т е р а т у р а

1. К у к к В.А. Представление параметров линейных систем числовыми последовательностями. - Автореферат диссертации канд.техн.наук. Таллин, 1972.

2. S t e i g l i t z, K. Rational transform approximation via the Laguerre spectrum. J. Franklin Inst., v.280, 1965, pp. 387-394.

3. S a l o m o n s s o n, G. Linear network synthesis with Laguerre polynomials. Ericsson Technics, v. 27, 1971, pp. 83-109.

4. К у к к В.А. Рациональная аппроксимация передаточной функции. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", серия А, № 288, 1970, с. 71-78.

5. Крылов В.И., Шулгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию. М., "Наука", 1966.

6. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М., "Наука", 1967.

7. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., "Наука" 1966.

8. Чистова Э.А. Таблицы функции Бесселя от действительного аргумента и интегралов от них. М., Изд-во АН СССР, 1958.

9. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М., "Наука", 1968.

V. Kukk, E. Rüstern

Algorithm for the Computation of Transfer Function  
from Step Response

Summary

This paper presents an algorithm and a program for the computation of rational transfer functions from the given step response. The algorithm is based on the application of Laguerre series of step response.

The results of computer experiment are presented.



УДК 518.5:621.372.061

А.Х. Ронк

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧАСТИЧНОГО LU-РАЗЛОЖЕНИЯ  
РАЗРЕЖЕННОЙ МАТРИЦЫ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ  
АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

Введение. При анализе цепей на ЦВМ часто решают матричные уравнения цепи

$$y = A^0 x, \quad (1)$$

применяя LU-разложение и другие, т.н. точные методы. Иногда, исходя из уравнения (1), с помощью метода исключения Гаусса или его модификаций находят связи между несколькими переменными (координатами векторов  $x$  и  $y$ ) в виде уравнения

$$y^* = A^* x^* \quad (2)$$

меньшего порядка. В обоих случаях при значительной разреженности исходной матрицы  $A^0$  решение поставленной задачи целесообразно рассматривать в двух частях:

1. Подготовительная часть, в которой происходит:

а) выбор оптимальных (в смысле сохранения разреженности матрицы) главных элементов в матрице  $A^0$ ,

б) моделирование решения задачи,

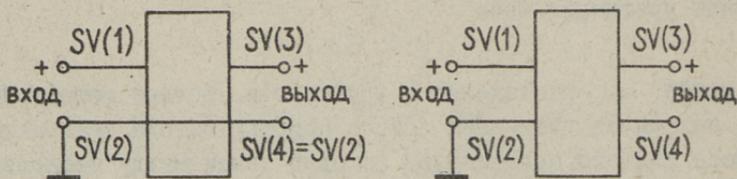
в) составление описания (массивов указателей) матрицы  $A^0$ , описывающего только те элементы матрицы, которые в ходе решения задачи хотя бы раз будут иметь отличное от нуля значение.

2. Основная часть, в которой многократно составляют уравнение (1) и решают поставленную задачу, используя результаты подготовительной части.

Существует несколько методов решения систем линейных уравнений [1,2] и ряд методов выбора главных элементов [4, 5, 6], применяемых при решении рассмотренных задач. Во всех случаях эффективность разработанных алгоритмов и программ

во многом зависит от структуры данных и от формы представления данных в ЦВМ, а также от организации работы программы [3]. Эти аспекты и учитывались при разработке описанного в настоящей статье алгоритма выбора главных элементов и моделирования частичного или полного LU-разложения.

Предлагаемый ниже алгоритм рассматривается вместе с алгоритмами других блоков подготовительной части программы PROPSY в которой частичное LU-разложение определенной матрицы узловых проводимостей цепи используется для получения матрицы узловых проводимостей трех- или четырехполюсника (исключаются все узлы, кроме входных и выходных, см. фиг. 1).



Фиг. 1.

В предлагаемом алгоритме главные элементы выбираются в главной диагонали, применяя метод Бергу [5]. В отличие от алгоритма Бергу моделирование LU-разложения выполняется не на системе указателей, а на матрице инцидентий цепи  $M = \|m_{ik}\|$ , где  $m_{ik} = m_{ki} = 0$ , если в неопределенной матрице узловых проводимостей  $Y = \|y_{ik}\|$   $y_{ik} = y_{ki} = 0$  и  $m_{ik} = m_{ki} = 1$  в противном случае. В основном в алгоритме оперируют  $n$ -мерными двоичными векторами.

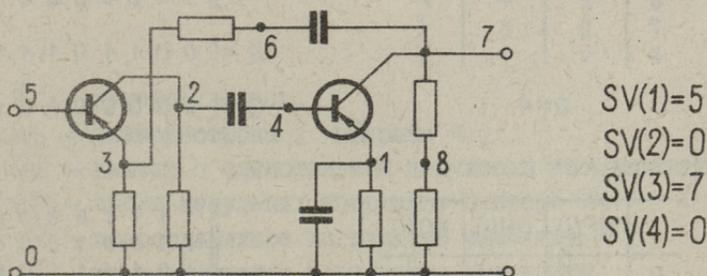
Для представления в памяти ЦВМ одного элемента матрицы  $M$  выделяют только один двоичный разряд, и для моделирования основной операции LU-разложения - сложения вектор-строк матрицы  $Y$  - требуется всего несколько операций поразрядного логического сложения.

**Алгоритм.** В первом блоке подготовительной части происходит подготовка данных для моделирования частичного LU-разложения. Вначале заданы описание цепи и массив номеров входных и выходных узлов SV (см. фиг. 1).

На основе описания цепи составляется матрица инцидентий  $M$  и затем формируется массив  $NF$ , где  $NF(i)$  равен числу ненулей вне главной диагонали в строке  $i$  матрицы  $Y^0$  (не учитывая столбцы, откуда уже выбраны главные элементы). Частично заполняются массивы  $ON$  ( $ON(i)$  - первоначальный номер будущего  $i$ -го узла) и  $NO$  ( $NO(i)$  - новый номер первоначального узла  $i$ ), определяя новые номера входных и выходных узлов. Для  $NF, ON$  и  $NO$   $i=0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Также формируются двоичные векторы  $\bar{R}$  и  $\bar{Q}$ . Ненулевые координаты  $\bar{R}$  указывают, что в соответствующих строках (столбцах)  $M$  на моделируемом шаге  $LU$ -разложения могут появляться новые нули. Сразу исключается из рассмотрения строка (столбец) базисного (будущего нулевого) узла. У вектора  $\bar{Q}$  ненулевыми будут только те координаты, которые соответствуют строкам (столбцам), из которых главные элементы выбирать не разрешается.

Значение переменной  $a$  равно номеру моделируемого шага  $LU$ -разложения и первоначально устанавливается  $a=1$ .



Фиг. 2.

На фиг. 2. изображена цепь, вход и выход которой определены с помощью массива  $SV$ . Все данные об этой цепи, подготовленные в ходе работы первого блока, приведены на фиг. 3а. Этот пример рассматривается и в дальнейшем.

Во втором блоке подготовительной части происходит моделирование  $LU$ -разложения с одновременным выбором главных элементов. Блок состоит из трех основных частей (см. фиг. 4 и 5), при описании которых использованы следующие обозначения:

i	NF(i)	ON(i)	NO(i)
0	3	0	0
1	2	-	-
2	3	-	-
3	3	-	-
4	3	-	-
5	2	-	7
6	2	-	-
7	4	5	8
8	1	7	-

$$a=1$$

a)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R} = (0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$$

$$\bar{Q} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0)$$

i	NF(i)	ON(i)	NO(i)
0	3	0	0
1	2	8	2
2	3	1	-
3	3	4	-
4	2	-	3
5	2	-	7
6	2	-	-
7	2	5	8
8	1	7	1

$$a=4$$

б)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R} = (0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0)$$

$$\bar{Q} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0)$$

i	NF(i)	ON(i)	NO(i)
0	3	0	0
1	2	8	2
2	3	1	5
3	2	4	6
4	2	6	3
5	1	2	7
6	2	3	4
7	1	5	8
8	1	7	1

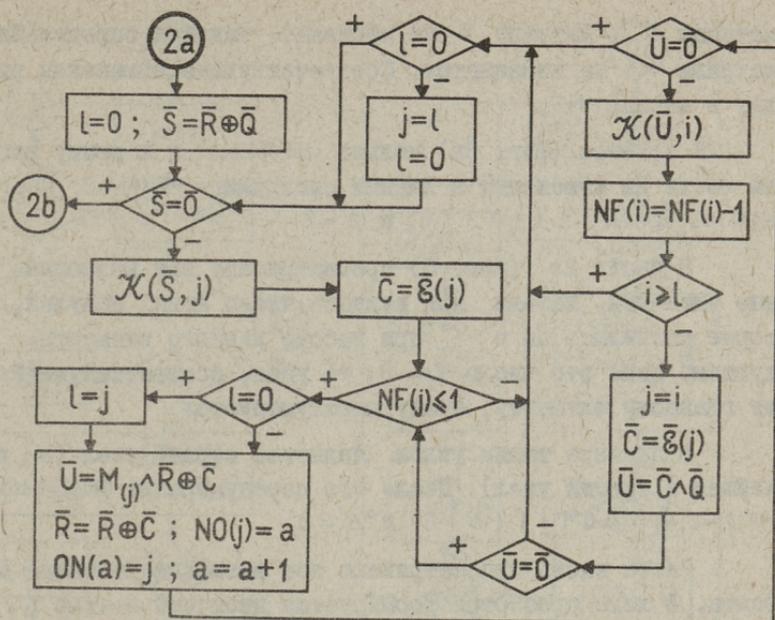
$$a=7$$

в)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R} = \bar{Q} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0)$$

Фиг. 3.



Фиг. 4.

- $\bar{0}$  - нулевой вектор,  
 $M_{(i)}$  - вектор-строка  $i$  матрицы  $M$ ,  
 $\bar{g}(y)$  - вектор с единственной ненулевой координатой  $y$ ,  
 $\varphi(\bar{x})$  - число ненулевых координат вектора  $\bar{x}$ ,  
 $\bar{x} \vee \bar{y}$  - покоординатное логическое сложение,  
 $\bar{x} \wedge \bar{y}$  - покоординатное логическое умножение,  
 $\bar{x} \oplus \bar{y}$  - покоординатное сложение с модулем 2,  
 $\mathcal{K}(\bar{x}, y)$  - процедура, в ходе которой переменному  $y$  присваивает номер первой ненулевой координаты вектора  $\bar{x}$ , а затем превращает эту координату в нуль.

В части 2а (фиг. 4) просматривает массив  $NF$ . Если  $NF(j) \leq 1$ , то на очередном шаге  $LU$ -разложения используют главный элемент из строки (столбца)  $j$  и число нулей в матрице  $\gamma^0$  на этом шаге не изменяется. Соответствующий узел цепи  $j$  получит новый номер  $a$ , что фиксируется в массивах  $ON$  и  $NO$ . С помощью изменения вектора  $\bar{R}$  из дальнейшего рассмотрения исключают строку (столбец)  $j$

матрицы  $M$ . Матрицу  $M$  не изменяют, так как определенная матрица  $M^0$  не изменяется. Соответствующие изменения вводят в массив  $NF$ .

В примере (фиг. 3а) только  $NF(8)=1$  и к концу работы части 2а изменения в данных следующие:  $ON(1)=8$ ,  $NO(8)=1$ ,  $NF(7)=3$ ,  $\bar{R}=(0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0)$  и  $a=2$ .

В части 2б (фиг. 5) просматривают все возможные главные элементы, находя для каждого число новых нулей, которые появились бы в  $Y^0$  при выборе данного элемента следующим. Если это число  $f_j=0$ , то узел, соответствующий этому главному элементу, сразу перенумеруется.

В примере таким узлом является первый узел (в дальнейшем и третий узел). После его перенумерации  $ON(2)=1$ ,  $NO(1)=2$ ,  $NF(7)=2$ ,  $\bar{R}=(0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0)$  и  $a=3$ .

Затем вновь просматривают все возможные главные элементы. В ходе просмотра формируется двоичный вектор  $\bar{X}$ , где единицы равны тем координатам, номера которых совпадают с номерами строк главных элементов, для которых  $f_j = \min f_j$ , если  $\min f_j > 0$ .

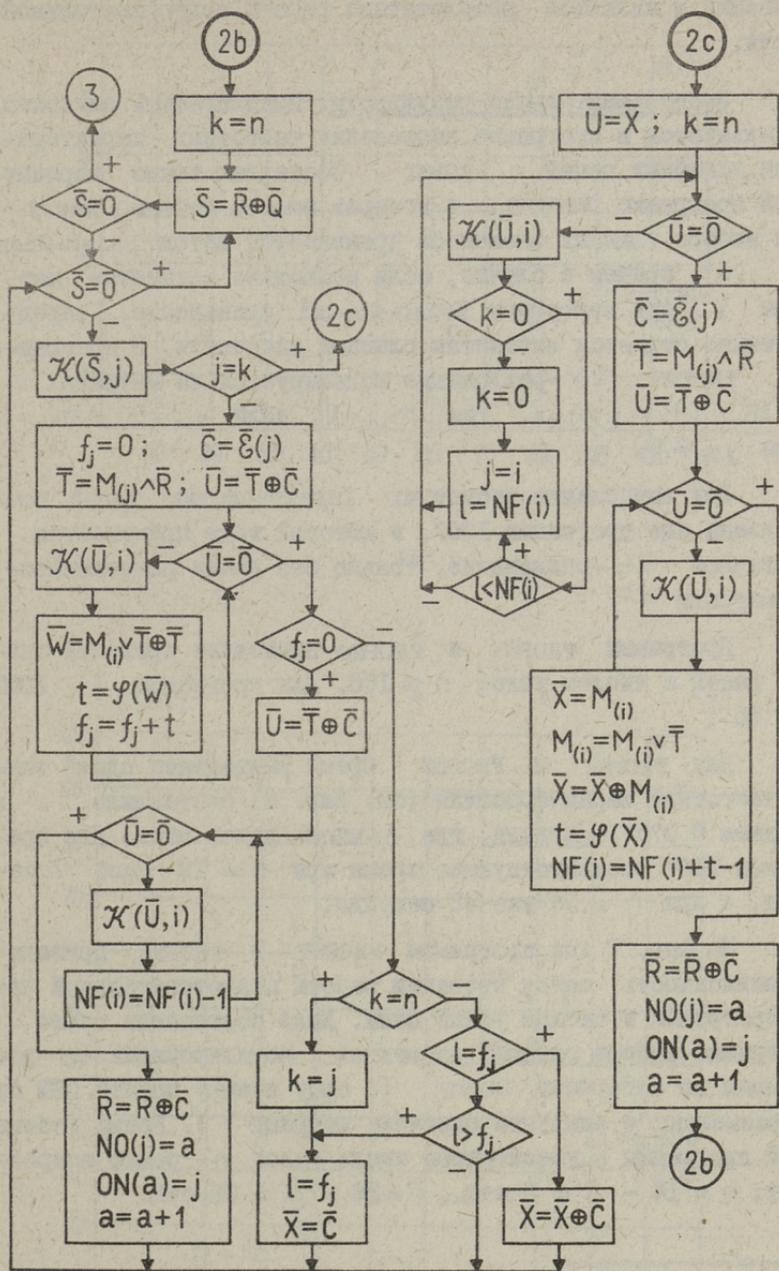
В примере на третьем шаге для главных элементов строк 4 и 6  $f_4 = f_6 = \min f_j = 2$  и соответственно  $\bar{X}=(0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0)$ .

В части 2с (фиг. 5) из строк, указанных в  $\bar{X}$ , находят ту, для которой  $NF(i)$  наибольший, и главный элемент выбирают из этой строки.

В примере  $NF(4) = NF(6) = 2$ . В таком случае главный элемент выбирают из строки с меньшим номером. После перенумерации узла 4 и ввода новых нулей в матрицу  $M$  данные примера имеют форму, указанную на фиг. 3б.

После этого снова начинается просмотр возможных главных элементов (часть 2б) и все повторяется до тех пор, пока  $\bar{R} = \bar{Q}$ , то есть пока все узлы не будут перенумерованы. Конечные результаты работы второго блока подготовительной части приведены на фиг. 3в.

В третьем блоке подготовительной части все номера узлов в описании цепи заменяют новыми, которые заданы в массиве  $NO$ . Затем, используя массивы  $ON$  и  $NO$ , составляют на основе матрицы  $M$  описание определенной матрицы  $Y^0$ . Эти два



Фиг. 5.

описания и являются результатами работы подготовительной части.

Экспериментальные результаты. Предлагаемый алгоритм используется в программе вычисления частотных характеристик линейных цепей FROPSY. Составлен также вариант этой программы FROPNS, в котором вместо метода Berry для выбора главных элементов применяется метод Hsieh-Ghausi [6], причем в случае, если несколько элементов матрицы  $Y^0$  при критериях Hsieh-Ghausi одинаковые, предпочтение отдается элементам главной диагонали. В программе FROPNS LU-разложение моделируется на матрицах  $M$  и  $M^T$  ( $M = \|m_{ik}\|$ , где  $m_{ik} = 0$ , если  $y_{ik} = 0$  и  $m_{ik} = 1$ , если  $y_{ik} \neq 0$ ).

Для вычисления частотных характеристик цепей составлена еще программа I007, в которой тоже применяется частичное LU-разложение, только без учета разреженности матрицы  $Y^0$ .

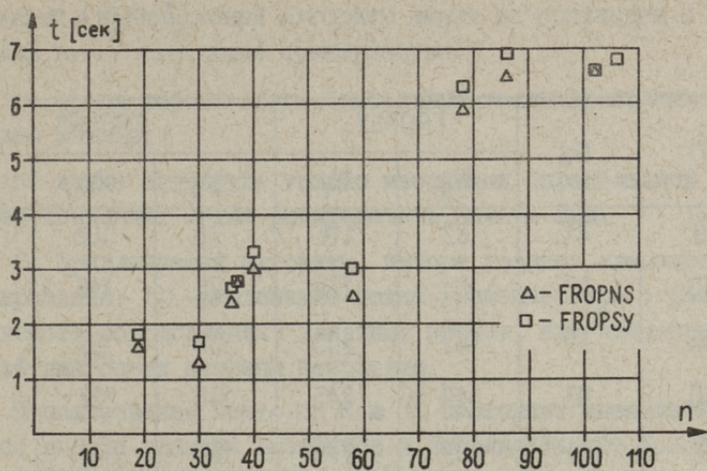
Программы FROPSY и FROPNS позволяют провести анализ цепей с числом узлов  $n \leq 108$ . Для программы I007  $n < 40$ <sup>I</sup>.

Для FROPSY и FROPNS время вычисления одной точки частотной характеристики (см. фиг. 6) составляло в среднем  $0,07n$  секунды, где  $n$  — число узлов цепи. Для программы I007 соответствующее время при  $n = 19$  было 7 секунд, а при  $n = 36$  уже 43 секунды.

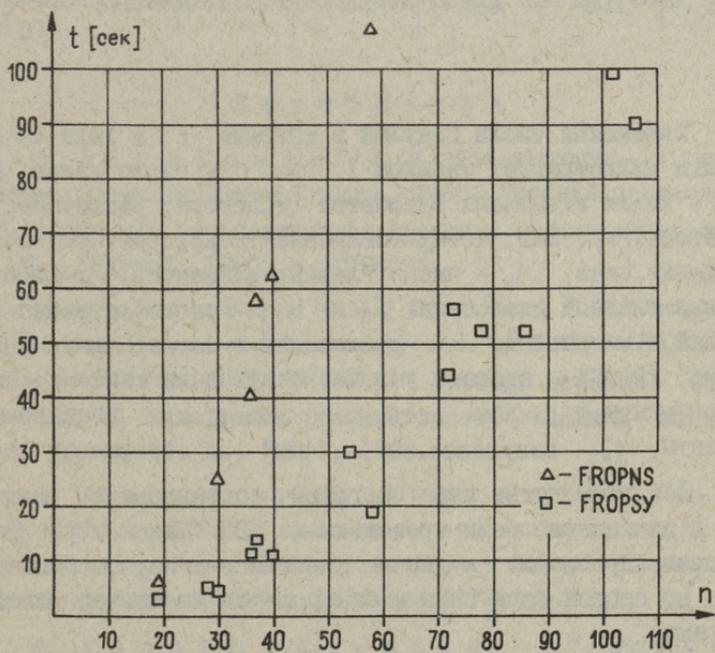
На фиг. 7 для программы FROPSY и FROPNS приведена зависимость между временем работы подготовительной части программы и числом узлов цепи. Была составлена также программа выбора главных элементов и моделирования LU-разложения по алгоритму Berry (в одну ячейку памяти ЦВМ были размещены 4 элемента описания матрицы  $Y$ ). Время работы этой программы с увеличением числа узлов  $n$  резко возрастает:  $n = 16 - t = 3$  сек.,  $n = 28 - t = 32$  сек.

---

<sup>I</sup> Эти ограничения введены, учитывая имеющиеся ресурсы памяти ЦВМ.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Таблица I

n	n <sub>e</sub>	FROPSY		FROPNS		
		N <sub>a</sub>	N <sub>l</sub>	N <sub>a</sub>	N <sub>l</sub>	n <sub>p</sub>
19	41	82	116	76	105	2
30	57	105	135	95	116	5
36	81	145	205	137	199	2
40	93	149	245	140	227	5
58	114	209	273	189	233	10
78	186	299	493	281	454	16
86	261	345	491	344	473	2
102	201	301	499	301	499	0
106	208	429	604	371	473	24

Изменения числа нулей в матрице  $Y^0$  в ходе LU-разложения иллюстрирует таблица I, где  $n$  - число узлов цепи,  $n_e$  - число идеальных элементов (транзисторы, резисторы, конденсаторы, катушки, четырехполюсные трансформаторы) в схеме замещения цепи,  $n_p$  - число главных элементов, расположенных вне главной диагонали,  $N_a$  и  $N_l$  - соответственно числа нулей в матрице до LU-разложения и после него. В программе FROPSY считают условно ненулевыми также те нулевые элементы  $y_{ik}$ , для которых симметрично расположенные элементы  $y_{ki}$  ненулевые.

Все упомянутые выше программы составлены в машинном коде и вычисления были проведены на ЦВМ "Минск-22". Вычислительные программы и данные хранились в первом блоке памяти, во второй блок памяти был помещен диспетчер системы программ.

В итоге можно отметить следующее:

I. Благодаря моделированию LU-разложения на матрице

инцидентий, предлагаемый алгоритм имеет по сравнению с алгоритмом Berry следующие преимущества:

а) время работы подготовительной части программы значительно меньше,

б) везде оперируют только массивами определенной длины, что позволяет лучше распределить память ЦВМ.

2. Предлагаемый алгоритм выбора главных элементов и моделирования LU-разложения можно применять при решении всех хорошо обусловленных линейных систем, где элементы главной диагонали матрицы ненулевые.

Использование векторов  $\bar{R}$  и  $\bar{Q}$  позволяет вмешиваться в процесс выбора главных элементов и направлять его. Такой пример приведен и в настоящей статье.

3. Если число узлов цепи  $n < 100$  и число ненулевых элементов  $y_{ij}$  исходной матрицы  $Y^0$ , для которых симметрично расположенные элементы  $y_{ji} = 0$ , составляет менее 15 % от общего числа ненулей, то методу выбора главных элементов Hsieh-Ghausi следует предпочитать метод Berry (если все  $y_{ii} \neq 0$ ).

### Л и т е р а т у р а

1. W i l k i n s o n, J. H. The algebraic eigenvalue problem. Clarendon Press, Oxford, 1965. Русский перевод:

Дж.Х. Уилкинсон. Алгебраическая проблема собственных значений. М., "Наука", 1970, с. 179-242.

2. F o r s y t h e, G. E., M o l e r, C. V. Computer solution of linear algebraic systems. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. Y., 1967. Русский перевод.

Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М., "Мир", 1969.

3. B r a y t o n, R. K., G u s t a v s o n, F. G., H a s h t e l, G. D. On the sparse tableau approach to network analysis. Proc. IEEE, Int. Sym. Circuit Theory, North Hollywood, Calif., December 1972, pp. 1-3.

4. T i n n e y, W. F., W a l k e r, J. W. Direct solutions of sparse network equations by optimally ordered triangular factorization. Proc. IEEE, v. 55, N 11, 1967, pp. 1801-1809.

5. B e r r y R.D. An optimal ordering of electronic circuit equations for a sparse matrix solution. IEEE Trans. Circuit Theory, v. CT-18, N 1, 1971, pp. 40-50.

6. H s i e h H.Y., G h a u s i M. S. On optimal pivoting algorithms in sparse matrices. IEEE Trans. Circuit Theory, v. CT-19, N 1, 1972, pp. 93-96.

A. Ronk

Modeling of Partial L/U Factorization of Sparse Matrix in Computer-Aided Circuit Analysis

Summary

An algorithm for optimal ordering of electronic circuit equations for a sparse matrix partial L/U factorization is described. The modeling of L/U factorization is realized on the incidence matrix. Pivoting elements are selected using the criteria proposed by Berry.

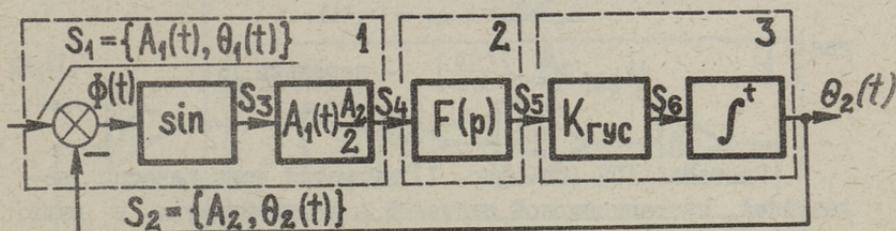
Some circuit analysis programs have been written for "Minsk-22" computer, using partial L/U factorization of sparse nodal admittance matrix. On the basis of computations, carried out with these programs, the comparison of some optimal ordering algorithms is presented.

УДК 621.316.726.078

М.В. Мин, Т.Э. Паавле

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ  
 ФАПЧ НА АВМ

Система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ), являющейся по существу следящей системой относительно частоты и фазы входного периодического сигнала, широко применяется в устройствах автоматики и измерительной техники [1].



Фиг. 1. Функциональная схема системы ФАПЧ.

Функциональная схема системы ФАПЧ, представленная на фиг. 1, содержит следующие основные блоки: фазовый компаратор (ФК) 1, фильтр низких частот (ФНЧ) 2 и генератор, управляемый сигналом (ГУС) 3 [2]. Синусоидальные сигналы  $S_1$  и  $S_2$  представлены в виде:

$$S_1 = \{ A_1(t), \theta_1(t) \};$$

$$S_2 = \{ A_2, \theta_2(t) \},$$

где  $A_1(t)$  и  $A_2$  — амплитуды сигналов,  
 $\theta_1(t)$  и  $\theta_2(t)$  — текущие фазы сигналов,

причем

$$\theta_1(t) = \int_0^t \omega_1(t) dt + \psi_1;$$

$$\theta_2(t) = \int_0^t \omega_2(t) dt + \psi_2.$$

Остальные сигналы на фиг. 1 имеют следующие выражения:

$$\Phi(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t) = \int_0^t [\omega_1(t) - \omega_2(t)] dt + \psi_1 - \psi_2,$$

причем, обозначив  $\omega_1(t) - \omega_2(t) = \Omega(t)$  и  $\psi_1 - \psi_2 = \varphi$ , получаем, что

$$\Phi(t) = \int_0^t \Omega(t) dt + \varphi.$$

$$S_5 = A_1(t) \frac{A_2}{2} \sin \left[ \int_0^t \Omega(t) dt + \varphi \right] \cdot F(p),$$

где  $F(p)$  — дифференциальная форма, характеризующая ФНЧ,  
 $p$  — оператор дифференцирования  $d/dt$ ;

$$S_6 = S_5 \cdot K_{\text{гус}} = \omega_2(t),$$

где

$$K_{\text{гус}} \left[ \frac{\text{рад}}{\text{V.S}} \right] - \text{передача ГУС};$$

$$\theta_2(t) = \int_0^t S_6 dt.$$

Система ФАПЧ (см. фиг. 1) является периодически нелинейной, нестационарной системой с нелинейностью в виде  $\sin \Phi(t)$  и с нестационарным множителем  $A_1(t)$ . Моделирование системы на аналоговой вычислительной машине (АВМ) усложняет то обстоятельство, что величина аргумента синусоидальной функции  $\Phi(t)$  может достигать высоких значений. Решена эта проблема созданием тригонометрического блока на основе операции обобщенного интегрирования [3]. Созданный тригонометрический блок I (см. фиг. 2) реализует операцию

$$y(t) = \sin \left[ \frac{1}{T} \int_0^t x(t) dt + c \right].$$

Характер действия тригонометрического блока определяет целую структуру аналоговой модели системы ФАПЧ, представленную на фиг. 2. Начальные значения переменных выбраны следующим образом:

$$\omega_2(0) = 0, \quad \psi_2 = \varphi;$$

$$\omega_1(0) = \Omega(0), \quad \psi_1 = 0.$$

Входным сигналом тригонометрического блока является

$$\Omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt}, \quad (I)$$

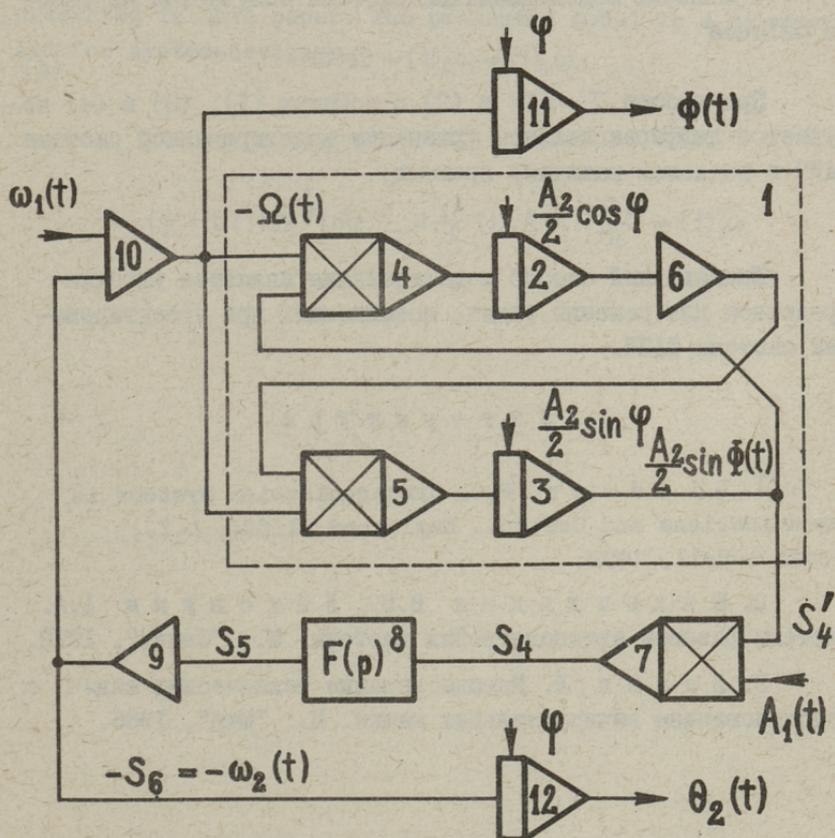
а выходной сигнал  $S_4'$  выражается через

$$S'_4 = \frac{A_2}{2} \sin \left[ \frac{1}{T} \int \Omega(t) dt + \varphi \right], \quad (2)$$

Где постоянная времени  $T$  интеграторов 2 и 3 определяет масштаб времени. Значения для величин  $\frac{A_2}{2}$  и  $\varphi$  определяются начальными условиями  $U'_0$  и  $U''_0$  интеграторов 2 и 3:

$$U'_0 = \frac{A_2}{2} \sin \varphi;$$

$$U''_0 = \frac{A_2}{2} \cos \varphi.$$



Фиг. 2. Структура аналоговой модели системы ФАПЧ.

Нестационарный множитель  $A_1(t)$  вводится с помощью множителя 7. Реализация ФНЧ первого или второго порядка не представляет трудностей.

Сигнал  $S_6$  на выходе масштабного блока 9 с коэффициентом передачи  $K_{гус}$  выражается следующим образом

$$S_6 = -\omega_2(t) = -A_1(t) \frac{A_2}{2} K_{гус} \sin \left[ \frac{1}{T} \int \Omega(t) dt + \varphi \right]. \quad (3)$$

Сумматором 10 вырабатывается сигнал ошибки  $\Omega(t)$ . Значения для  $\Phi(t)$  и  $\Theta_2(t)$  получаются с помощью дополнительных интеграторов 10 и 11.

Уравнение моделированной системы получается на основе баланса

$$\omega_1(t) = \omega_2(t) + \Omega(t). \quad (4)$$

При выборе  $T = 1S$  в (2) с помощью (1), (3) и (4) получается дифференциальное уравнение моделированной системы ФАПЧ в реальном масштабе времени:

$$\dot{\omega}_1(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} + A_1(t) \frac{A_2}{2} K_{гус} \sin \left[ \int \Omega(t) dt + \varphi \right].$$

Приведенный способ моделирования является удобным средством для решения задач, возникающих при проектировании системы ФАПЧ.

## Л и т е р а т у р а

1. L i n d e n , W.C. Synchronization Systems in Communications and Control. Englewood Cliffs, N.Y., Prentice-Hall, 1972.

2. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М., "Связь", 1972.

3. Л е в и н Л. Методы решения технических задач с использованием вычислительных машин. М., "Мир", 1966.

Simulation of the Deterministic PLL System Using  
Analogue Computer

Summary

The model of the deterministic phase-locked loop (PLL) system to simulate the system using analogue computer, is presented in this paper. The presented model is a necessary aid for system-designer.



УДК 621.316.726.078

М.В. Мин, Т.Э. Паавле

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОСЫ ЗАТЯГИВАНИЯ СИСТЕМЫ  
ФАПЧ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Важной проблемой при изучении свойств системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) является определение характера и параметров процесса установления синхронизма между эталонным и подстроечным сигналами [1]. В теории систем ФАПЧ полоса захвата  $\Omega_3$  определяется как самая большая начальная расстройка частот  $\Delta\omega$ , при которой возможно установление синхронизма при любых начальных условиях [1].

Оказывается, что полосу захвата  $\Omega_3$  целесообразно разделить на полосу втягивания  $\Omega_{\text{вт}}$  и на полосу затягивания  $\Omega_{\text{зат}}$  [2], которые соответствуют терминам "pull-in range" и "lock-in range" в литературе на английском языке. Переходные процессы в пределах  $\Omega_{\text{вт}}$  и  $\Omega_{\text{зат}}$  отличаются качественно и количественно. При  $\Delta\omega \in \Omega_{\text{зат}}$  переходный процесс протекает без скользящих периодов, то есть фазовая ошибка

$$\Phi(t) = \int_0^t \Omega(t) + \varphi,$$

где  $\Omega(t)$  — частотная ошибка,

$\varphi$  — начальная фазовая ошибка,

не превышает  $\pm 2\pi$ , а время установления синхронизма  $t_{\text{уст}}$  лишь немного превышает длительность переходного процесса в соответствующей линейной системе. При  $\Delta\omega \in \Omega_{\text{вт}}$  переходный процесс протекает со скользящими периодами число которых может достигать больших чисел, а время  $t_{\text{уст}}$  в десятки раз превышает длительности переходных процессов в соответствующей линейной системе.

Передаточная функция фильтра низких частот (ФНЧ) в системе ФАПЧ второго порядка имеет вид [1]:

$$F_1(s) = K_{\text{ФНЧ}} \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}, \quad (\text{Ia})$$

которая при  $T_2 \gg 1$  превращается в

$$F_2(s) = K_{\text{ФНЧ}} \frac{T_1 s + 1}{T_2 s}, \quad (\text{Iб})$$

и при  $T_1 \ll 1$  в

$$F_3(s) = K_{\text{ФНЧ}} \frac{1}{T_2 s + 1}. \quad (\text{Iв})$$

Дифференциальное уравнение системы ФАПЧ второго порядка, которое составлено на основе общего уравнения для систем ФАПЧ [3], следующее:

$$\frac{d^2 \Phi(t)}{dt^2} + \frac{T_1 + T_3}{T_2 T_3} \cos \Phi(t) \frac{d\Phi(t)}{dt} + \frac{1}{T_2 T_3} \sin \Phi(t) = \omega_1(0), \quad (2)$$

причем  $T_3 = \frac{1}{K}$ ,

где  $\omega_1(0)$  — начальная частота эталонного сигнала,

$T_1, T_2$  — постоянные времени ФНЧ,

$K$  — коэффициент передачи разомкнутой системы ФАПЧ.

Ввиду того, что начальное условие подстроечной частоты  $\omega_2(0) = 0$ ,  $\omega_1(0) = \Delta \omega$ , а начальное значение фазы подстроечного сигнала  $\psi_2 = \varphi$ , поскольку  $\psi_1 = 0$  [3]. Формулировка задания для определения полосы затягивания  $\Omega_{\text{зат}}$  на основе (2) следующая: найти при данной совокупности параметров  $T_1; T_2; T_3$  и при граничном условии  $|\Phi(t)| < 2\pi$  максимальное значение  $\omega_1(0) = \Delta \omega$  для разных начальных условий  $|\psi_2(0)| = \varphi \leq \pi$ .

Полоса затягивания является функцией четырех переменных:

$$\Omega_{\text{зат}} = f(T_1, T_2, T_3, \varphi).$$

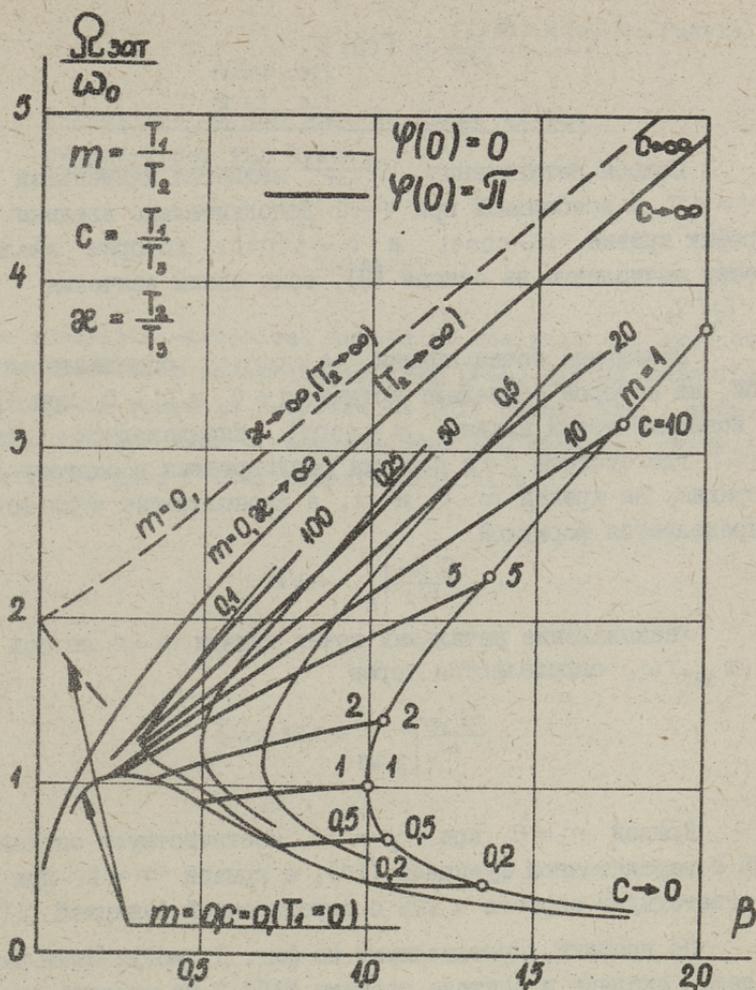
Задача намного упрощается с использованием нормированных безразмерных величин  $\Omega_{\text{зат}}/\omega_0$ ,  $\beta$ ,  $\kappa = T_2/T_3$ ,  $m = T_1/T_2$  и  $c = T_1/T_3$ ,

где  $\omega_0$  — собственная частота линеаризованной системы,

$\beta$  — коэффициент затухания линеаризованной системы,

Выражения для  $\omega_0$  и  $\beta$  на основе (2) следующие:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{T_2 T_3}} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{T_1 + T_3}{2\sqrt{T_2 T_3}}. \quad (3)$$



Фиг. 1. Зависимость  $\frac{\Omega_{30T}}{\omega_0} = f(\beta)$   $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \text{const} \\ \psi = \begin{cases} +\pi \\ 0 \end{cases} \end{array} \right.$

Задача решена моделированием системы на АВМ Meda 4I TA на основе метода, который представлен в [3], а результаты приведены графически на фиг. 1 в виде зависимости

$$\frac{\Omega_{3\text{ат}}}{\omega_0} = f(\beta) \left| \begin{array}{l} \varkappa = \text{const} \\ \varphi = \begin{cases} +\pi \\ 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Полоса затягивания  $\Omega_{3\text{ат}}$  является наименьшей при  $\varphi = \pm \pi$  и наибольшей при  $\varphi = 0$ . Дополнительно введены на график кривые  $m = \text{const}$  и  $s = \text{const}$ , которые аналитически вычисляемы на основе (3), если знаем значения  $\varkappa = T_2/T_3$ .

Начальные точки кривых  $\varkappa = \text{const}$  определяются кривой, на которой совпадают кривые  $m = 0$  и  $s = 0$  при  $T_1 = 0$ , а конечные точки кривых  $\varkappa = \text{const}$  определяются кривой  $m = 1$ , где система 2-го порядка редуцируется в систему 1-го порядка. На кривой  $m = 1$ ,  $\varkappa = s$ , а расположение этих точек определяется формулой

$$\frac{\Omega_{3\text{ат}}}{\omega_0} \Big|_{m=1} = \sqrt{\varkappa}.$$

Расположение начальных точек кривых  $m = 0$  на оси  $\Omega_{3\text{ат}}/\omega_0$  определяется через

$$\frac{\Omega_{3\text{ат}}}{\omega} \Big|_{\beta \rightarrow 0} = 1,98 \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Кривой  $m = 0$  при  $T_2 \rightarrow \infty$  соответствует система с ФНЧ с передаточной функцией (1б), а кривой  $m = 0$  при  $T_1 = 0$  соответствует система с ФНЧ с передаточной функцией (1в).

По графику, приведенному на фиг. 1, могут быть решены задачи анализа и синтеза системы ФАПЧ 2-го порядка относительно полосы затягивания  $\Omega_{3\text{ат}}$ .

### Л и т е р а т у р а

1. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частот. М., "Связь", 1972.
2. Gardner, F.M. Phaselock Techniques. N.-Y., Wiley, 1966.
3. Мин М.В., Павле Т.Э. Моделирование детерминированной системы ФАПЧ на АБМ. - См. наст. сб., с. 67.

Definition of the Lock-In Range of the  
Second-Order PLL System

Summary

An analytical-graphical method of analysis and synthesis of the second-order phase-locked loop (PLL) system according to the lock-in range is proposed in this paper. The method is usable in all cases of second-order PLL systems with arbitrary low-pass filter transfer function.



УДК 621.317.725.3

М.В. Мин, Т.Э. Парве

СПОСОБ КВАДРАТУРНОГО ПЕРЕМНОЖЕНИЯ ИССЛЕДУЕМОГО  
СИГНАЛА С ОПОРНЫМ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ АППРОКСИМАЦИЮ  
ПО УОЛШУ

При корреляционном гармоническом спектральном анализе сигналов требуется перемножение исследуемого сигнала с квадратурными гармоническими опорными сигналами. Тут возникают две трудности: реализация высокоточных широкополосных перемножителей с широким динамическим диапазоном и получение квадратурных опорных сигналов с регулируемой частотой и с точно зафиксированными амплитудами [1, 2].

Одной из возможностей обхода этих трудностей является приводимый ниже способ осуществления квадратурного перемножения. При этом способе используется аппроксимированное по Уолшу гармоническое изменение коэффициента передачи во времени канала перемножения синхронно с опорным импульсным сигналом без генерации самих квадратурных гармонических опорных сигналов.

Изменение коэффициента передачи канала перемножения во времени  $K(t)$ , которое должно произойти по гармоническому закону  $K(t) = K_0 \sin(\omega t + \varphi)$ , нормированному в  $K(\theta) = \sin 2\pi\theta$  (здесь  $\theta = \frac{t}{T}$  — нормированное время,  $t$  — текущее время,  $T$  — период колебания) и обозначенному в дальнейшем через  $K \sin(\theta)$ , аппроксимируется по  $m$  первым функциям Уолша в виде [3]

$$K \hat{\sin}(m, \theta) = \sum_{i=1}^{2k-1} w_i \text{sal}(i, \theta), \quad (I)$$

где  $i = 2k-1$  — порядковый номер функций и коэффициентов Уолша,

$m = 2^k$  — количество используемых при аппроксимации функций Уолша,

- $k = 1, 2, 3 \dots$  - натуральное число,  
 $w_i$  - коэффициенты Уолша,  
 $\text{sal}(i, \theta)$  - функции Уолша,  
 $K_{\widehat{\text{sin}}}(m, \theta)$  - аппроксимированная передача.

Аппроксимированная передача  $K_{\widehat{\text{sin}}}(m, \theta)$ , выражаемая через нормированные, но неортогональные ступенчатые функции  $f_{s_j}(\theta)$ , зависит от переменных  $\theta, j$  и  $m$ . Функции  $f_{s_j}(\theta)$  описываются следующим образом:

$$f_{s_j}(\theta) = \text{sign} \sin 2\pi\theta \cdot |f_{s_j}(\theta)|, \quad (2)$$

где  $j = 1, 2, 3, \dots, m$  - порядковый номер функций,

$$|f_{s_j}(\theta)| = \begin{cases} 0 & \text{при } |\theta| < \frac{j-1}{4m} \text{ и } |\theta| > \frac{1}{2} - \frac{j-1}{4m} \\ 1 & \text{при } \frac{j-1}{4m} < |\theta| < \frac{1}{2} - \frac{j-1}{4m} \end{cases}$$

с периодом  $\theta_T = \frac{1}{2}$ .

Следовательно,  $f_{s_1}(\theta) = \text{sign} \sin 2\pi\theta$ . Функция  $f_{s_{m+1}}(\theta)$  определяется  $f_{s_{m+1}}(\theta) = \text{sign}(-\cos 2\pi\theta)$ .

Выражение аппроксимированной передачи  $K_{\widehat{\text{sin}}}(m, \theta)$  через функции  $f_{s_j}(\theta)$  имеет следующий вид:

$$K_{\widehat{\text{sin}}}(m, \theta) = \sum_j F_j \cdot f_{s_j}(\theta), \quad (3)$$

где  $F_j$  - соответствующие коэффициенты, находящиеся через разложение функций  $f_{s_j}(\theta)$  по Уолшу

$$f_{s_j}(\theta) = \sum_i s_{ji} \cdot \text{sal}(i, \theta),$$

где  $s_{ji}$  - соответствующие коэффициенты.

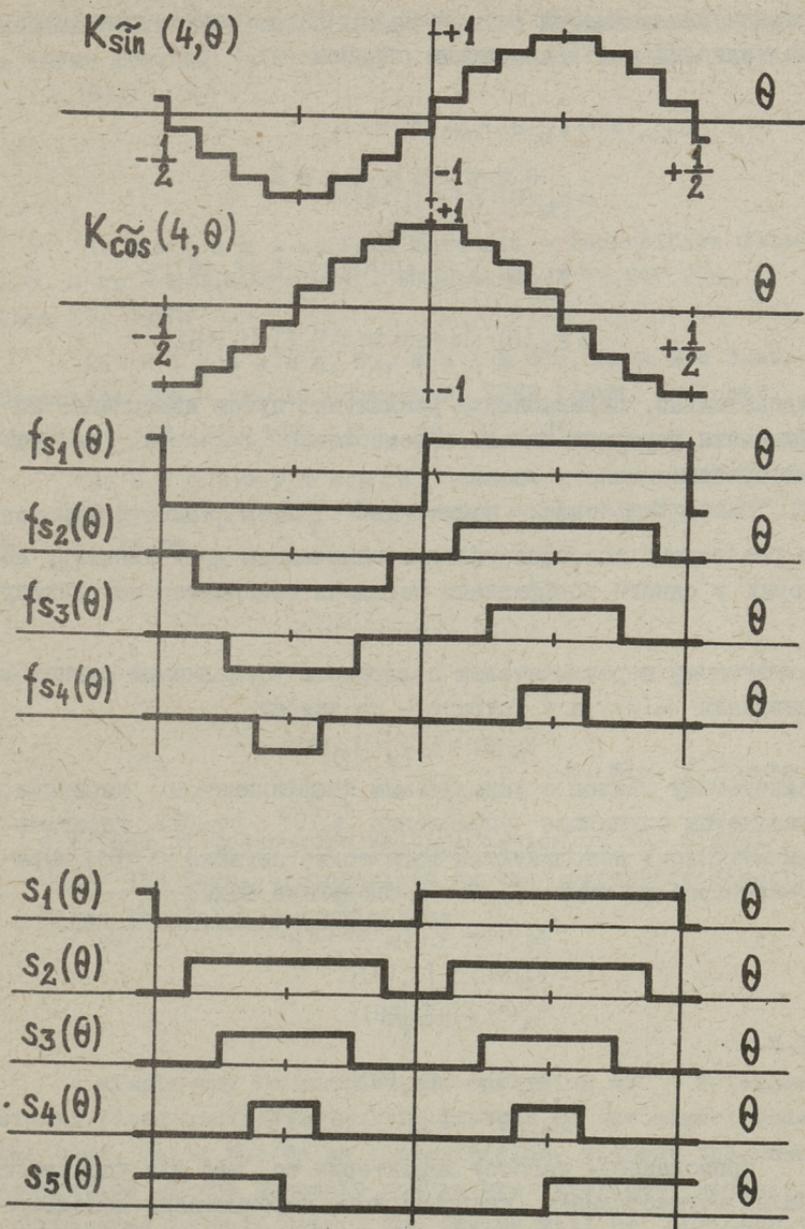
Коэффициенты  $s_{ji}$  получаются на основе адекватности выражений (1) и (3):

$$\sum_i w_i \cdot \text{sal}(i, \theta) = \sum_j F_j \sum_i s_{ji} \cdot \text{sal}(i, \theta).$$

Выражение перемножения

$$s_{\text{вых}}(\theta) = s_{\text{вх}}(\theta) \cdot K_{\text{sin}}(\theta),$$

где  $s_{\text{вх}}(\theta)$  - входной сигнал канала перемножения,  
 $s_{\text{вых}}(\theta)$  - выходной сигнал канала перемножения.



Фиг. 1. Реализация квадратурного перемножения с помощью аппроксимации с четырьмя функциями Уолша.

При аппроксимации изменения коэффициента передачи канала перемножения  $K_{\sin}(\theta)$  с  $K_{\sin}(m, \theta)$  можно развить, используя (2) и (3), следующим образом:

$$\begin{aligned} s_{\text{вых}}(\theta) &= s_{\text{вх}}(\theta) \cdot K_{\sin}(m, \theta) = \\ &= s_{\text{вх}}(\theta) \cdot \sum_j F_j \cdot f_{s_j}(\theta) = \\ &= s_{\text{вх}}(\theta) \cdot \sum_j F_j \cdot \text{sign} \sin 2\pi\theta \cdot |f_{s_j}(\theta)| = \\ &= s_{\text{вх}}(\theta) \cdot \text{sign} \sin 2\pi\theta \sum_j F_j \cdot |f_{s_j}(\theta)|. \end{aligned}$$

Следовательно, перемножение реализуемо путем изменения коэффициента передачи канала перемножения  $K_{\sin}(m, \theta)$  следующим образом:

$$K_{\sin}(m, \theta) = \text{sign} \sin 2\pi\theta \cdot \sum_j F_j \cdot |f_{s_j}(\theta)|,$$

что реализуемо последовательным включением двух звеньев, из которых у одного коэффициент передачи изменяется по закону

$$K_1(\theta) = \text{sign} \sin 2\pi\theta,$$

реализуемому переключателем полярности управляемым сигналом управления  $s_1(\theta)$ , а у другого — по закону

$$K_2(\theta) = \sum_j F_j \cdot |f_{s_j}(\theta)|,$$

реализуемому звеном с управляемым коэффициентом передачи, управляемым сигналами управления  $s_2(\theta) \dots s_m(\theta)$ . Управляющими сигналами используются логические сигналы  $s_j(\theta)$ , выражаемые через функции  $f_{s_j}(\theta)$  в следующем виде:

$$s_1(\theta) = \frac{1}{2} [f_{s_1}(\theta) + 1],$$

$$s_2(\theta) = |f_{s_2}(\theta)|,$$

$$s_3(\theta) = |f_{s_3}(\theta)|,$$

и т.д.

$$s_m(\theta) = |f_{s_m}(\theta)|,$$

$$s_{m+1}(\theta) = \frac{1}{2} [f_{s_{m+1}}(\theta) + 1].$$

Приведенному способу характерно то, что для управления каналом осуществления квадратурного перемножения используются логические сигналы управления, которые являются логическими отрицаниями сигналов  $s_{m+1}(\theta)$ ,  $s_m(\theta)$ , ...,  $s_3(\theta)$  и  $s_2(\theta)$ .

На фиг. I приведены графики изменения коэффициента передачи канала перемножения  $K_{\sin}(4, \theta)$  при аппроксимации с

четырьмя функциями Уолша и изменения коэффициента передачи канала соответствующего квадратурного перемножения  $K_{\cos}(4, \theta)$ , а также функций  $f_{s_1}(\theta) \dots f_{s_4}(\theta)$  и сигналов управления  $s_1, \theta \dots s_5(\theta)$ .

### Л и т е р а т у р а

1. R i c h m a n, P.L. Harmonic - Insensitive Gated A.C. - to - D.C. Converter. US patent N 3,517,298, June 23, 1970.

2. R i c h m a n, P., W a l k e r, N. A New Fast Computing RMS - to- DC Converter. IEEE Trans. on Instr. Meas., v. IM-20, 1971, N 4, pp. 313-319.

3. Б ё с в е т т е р К. Анализ и синтез сигналов с помощью функций Уолша. "Зарубежная радиоэлектроника", 1972. № 5, с. 18-25.

M. Min, T. Parve

A Method of Quadrature Multiplication of the Signal Under the Test, Synchronized by the Reference Signal, Using the Walsh Approximation

### Summary

A simple way to realize the operation of reference signal timed quadrature multiplication of the signal under the test, using the Walsh approximation, without the straight generation of the harmonic quadrature reference signals, is represented in this paper. The device will be noticeably simplified if realised on the switching elements under the control of logic circuits.



Э.Э. Велмре, В.Н. Дороднев

О ВЛИЯНИИ ОЖЕ-РЕКОМБИНАЦИИ НА ПРЯМУЮ ВЕТВЬ  
 ВОЛЬТАМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИЛОВОГО  
 ПОЛУПРОВОДНИКОГО ДИОДА

Как известно [1...3], при значительных плотностях тока, когда концентрация инжектированных в базовую область носителей заряда превышает  $10^{17} \dots 10^{18} \text{ см}^{-3}$ , на прямую ветвь вольтамперной характеристики будет влиять Оже-рекомбинация электронов и дырок [4]. Для оценки этого влияния используем диффузионно-дрейфовую теорию изотермической прямой ветви вольтамперной характеристики силовых диодных структур, представленную в работе [5].

Рассмотрим  $p^+ - n - n^+$ -структуру в режиме высокого уровня инжекции. В этом случае уравнение непрерывности для неравновесных носителей в  $n$ -слое (базе) записывается в виде:

$$\frac{2b}{b+1} D_p^N \frac{d^2 p}{dx^2} = R, \quad (1)$$

где

$$b = \frac{\mu_n^N}{\mu_p^N},$$

$$D_p^N = \varphi_T \mu_p^N$$

и  $\mu_n^N, \mu_p^N$  - подвижности электронов и дырок в  $n$ -базе (без учета рассеяния носителей на носителях).

Скорость рекомбинации  $R$  (с учетом Оже-рекомбинации) описывается выражением

$$R = \frac{p}{\tau_p^N} + \gamma_A p^3, \quad (2)$$

где  $\tau_p^N$  - время жизни дырок в  $n$ -базе в соответствии с теорией рекомбинации Шокли и Рида [6],

$\gamma_A$  - коэффициент Оже-рекомбинации.

От величины коэффициента  $\gamma_A$  зависит степень влияния Оже-рекомбинации на распределение носителей и электрического поля в  $n$ -слое и, тем самым, на падение напряжения на этом слое.

Значения коэффициента  $\gamma_A$ , измеренные различными авторами, приведены в таблице.

Т а б л и ц а  
Значения коэффициента Оже-рекомбинации в кремнии

$\gamma_A$ , см <sup>6</sup> /с	Источник и год	$\gamma_A$ , см <sup>6</sup> /с	Источник и год
$5 \cdot 10^{-30}$	[7], 1967	$2 \cdot 10^{-31}$	[9], 1972
$7 \cdot 10^{-33}$	[8], 1971	$2,9 \cdot 10^{-31}$	[10], 1973

В работе [11] рекомендуется значение  $\gamma_A = (1 \dots 2) 10^{-32}$  см<sup>6</sup>/с.

Большой разброс величин коэффициента  $\gamma_A$  затрудняет объективную количественную оценку влияния Оже-рекомбинации на прямое падение напряжения структуры.

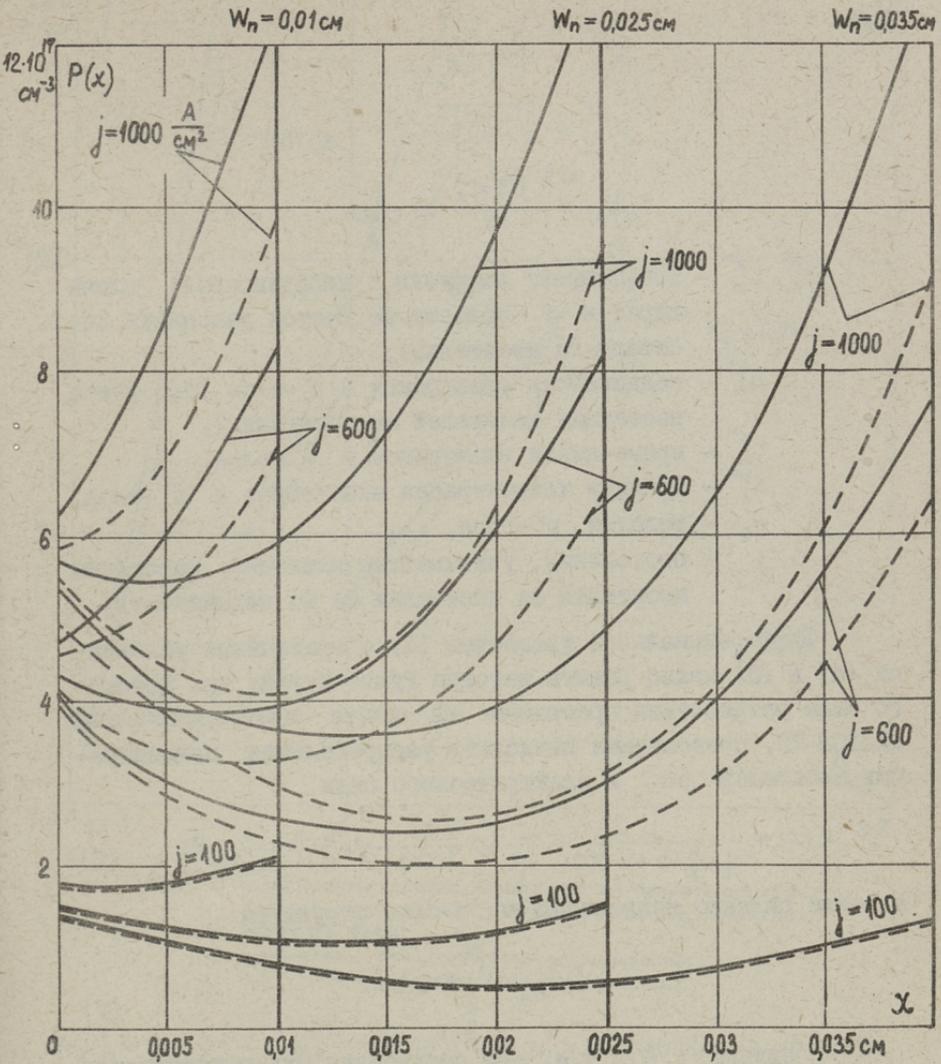
Подставляя формулу (2) в (1), получаем уравнение непрерывности в виде

$$\frac{2b}{b+1} D_p^N \frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{p}{\tau_p^N} + \gamma_A p^3. \quad (3)$$

Использование наиболее общих граничных условий (утечка в  $p^+$ - $n$ - и  $n^+$ - $n$ -переходах) причиняет значительные математические трудности при решении уравнения (3). Поэтому в данной работе ограничимся случаем, когда утечкой дырок из  $n$ -базы в  $n^+$ -эмиттер можно пренебречь. Если далее предположить, что контакт с  $p^+$ -слоем является хорошим рекомбинационным контактом (скорость рекомбинации электронов  $S_n \rightarrow \infty$ ), то граничные условия записываются в следующем виде

$$\left. \frac{dp}{dx} \right|_{x=0} = \frac{-j}{2q_p D_p^N} + \frac{b+1}{2b D_p^N} \cdot \frac{D_n^{p^+}}{N_A^{p^+} L_n^{p^+}} \operatorname{cth} \frac{w_{p^+}}{L_n^{p^+}} p^2(0), \quad (4)$$

$$\left. \frac{dp}{dx} \right|_{x=w_n} = \frac{j}{2q_p D_p^N}, \quad (5)$$



Фиг. 1. Распределения концентрации носителей заряда в базе диодной структуры при различных толщинах базы и плотности тока:  
 ————— без учета Оже-рекомбинации,  
 - - - - с учетом Оже-рекомбинации.

где

$$D_n^{p^+} = \varphi_T \frac{\mu_n^{p^+}}{1 + \delta_{p^+}},$$

$$L_n^{p^+} = \sqrt{D_n^{p^+} \tau_n^{p^+}},$$

$$\delta_{p^+} = \frac{\mu_n^{p^+} N_A^{p^+}}{c} \ln \frac{\gamma}{N_A^{p^+}},$$

$D_n^{p^+}, L_n^{p^+}$  - коэффициент диффузии и диффузионная длина дырок в  $p^+$ -области (с учетом рассеяния носителя на носителях),

$\mu_n^{p^+}$  - подвижность электронов в  $p^+$ -слое (без учета рассеяния носителей на носителях),

$\tau_n^{p^+}$  - время жизни электронов в  $p^+$ -слое,

$N_A^{p^+}$  - средняя концентрация акцепторов в  $p^+$ -слое,

$w_{p^+}$  - толщина  $p^+$ -слоя,

$c, \gamma$  - постоянные, учитывающие влияние рассеяния носителей на носителях на их подвижность.

Дифференциальное уравнение (3) с граничными условиями (4) и (5) можно решить методом Рунге-Кутты, для которого была разработана программа на языке программирования МАЛГОЛ-73, позволяющая вычислить распределения концентрации носителей  $p(x)$  и электрического поля.

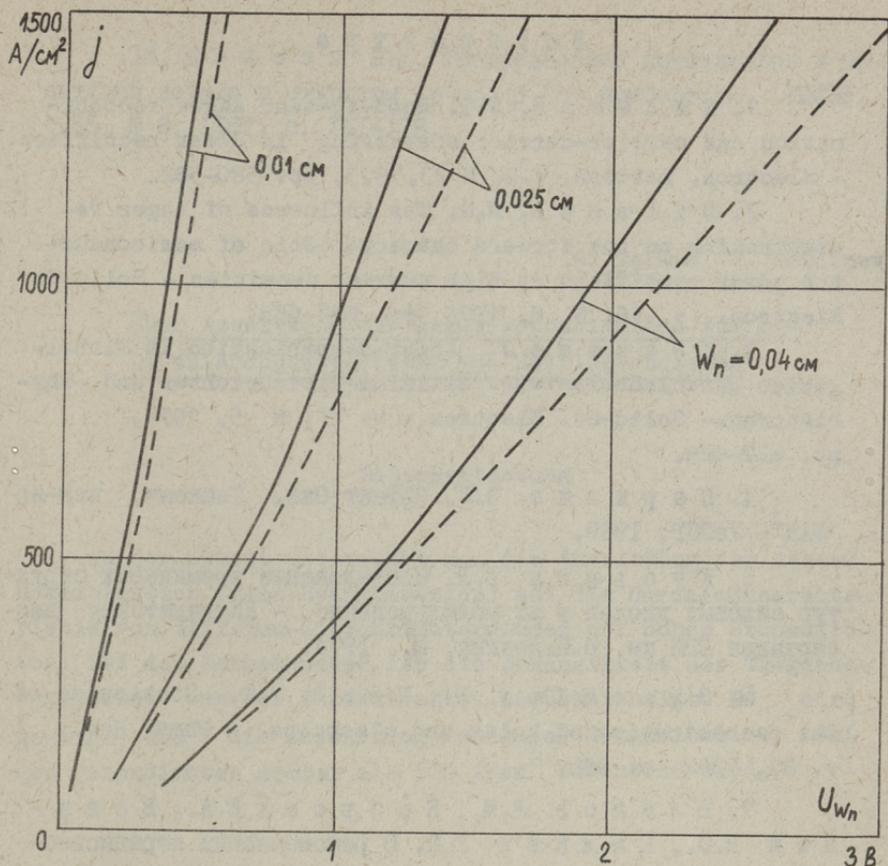
$$E(x) = \frac{j}{q \mu_p^N (b+i) p(x)} + \frac{j}{qc} \ln \frac{\gamma}{2p(x)} - \varphi_T \frac{b-1}{b+1} \cdot \frac{1}{p(x)} \cdot \frac{dp}{dx}, \quad (6)$$

а также падение напряжения на  $n$ -слое структуры

$$U_{w_n} = \int_0^{w_n} E(x) dx. \quad (7)$$

В случае  $\gamma_A = 0$ , т.е. при отсутствии Оже-рекомбинации, дифференциальное уравнение (3) с граничными условиями (4) и (5) интегрируется аналитически. Распределение электрического поля и падение напряжения на  $n$ -слое находятся с помощью ЭВМ по формулам (6) и (7).

Расчеты напряжения  $U_{w_n}$  с учетом и без учета Оже-рекомбинации были произведены для трех значений толщины  $n$ -слоя  $w_n = 0,01, 0,025, 0,04$  см и плотностей тока  $j$  от 100 до 1500 А/см<sup>2</sup>. Остальные исходные данные были следующими:  $N_A^{p^+} = 10^{19}$  см<sup>-3</sup>,  $w_{p^+} = 0,005$  см,  $\tau_p^N = 10^{-5}$  с,  $\tau_n^{p^+} = 5 \cdot 10^{-11}$  с.



Фиг. 2. Зависимости падения напряжения на базовой области диодной структуры от плотности тока при различных толщинах базы:

— — — — — без учета Оже-рекомбинации,  
 - - - - - с учетом Оже-рекомбинации.

$\varphi_T \mu_p^+ = 4,32 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $\mu_p^N = 480 \text{ см}^2/(\text{Вс})$ ,  $\mu_n^N = 1350 \text{ см}^2/(\text{Вс})$ ,  $\varphi_T = 0,026 \text{ В}$ ,  
 $\gamma_A = 2 \cdot 10^{-31} \text{ см}^6/\text{с}$  [9],  $s = 5 \cdot 10^{20} \text{ В} \cdot \text{см}/\text{с}$  [12],  $\gamma = 2,9 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$  [12].

Результаты расчета представлены на фиг. 1 и 2. По фигурам видно, что Оже-рекомбинация будет заметно влиять на вольтамперную характеристику силового диода начиная с плотностей тока около  $500 \text{ А}/\text{см}^2$ .

## Л и т е р а т у р а

1. N i l s s o n, N.G. Band-to-band Auger recombination and carrier-carrier scattering in power rectifiers. - Electron. Letters, v.8, N 23, 1973, pp. 580-582.
  2. N i l s s o n, N.G. The influence of Auger recombination on the forward characteristic of semiconductor power rectifiers at high current densities. - Solid-St. Electron., v. 16, N 6, 1973, pp. 681-688.
  3. K r a u s s e, J. Auger-Rekombination im Mittelgebiet durchlaßbelasteter Silizium-Gleichrichter und -Thyristoren. - Solid-St. Electron., v. 17, N 5, 1974, pp. 427-429.
  4. П а р и л и с Э.С. Эффект Оже. Ташкент, изд-во "ФАН", УзССР, 1969.
  5. К у з ь м и н В.Л. Исследование кремниевых структур силовых диодов и их моделирование. - Кандидатская диссертация ВЭИ им. В.И.Ленина, М., 1974.
  6. S h o c k l e y, W., R e a d, W.T. Statistics of the recombination of holes and electrons. - Phys. Rev., v. 87, 1952, p. 835.
  7. Б л и н о в Л.М., Б о б р о в а Е.А., В а в и л о в В.С., Г а л к и н Г.Н. О рекомбинации неравновесных носителей в кремнии при высоких уровнях фотовозбуждения. - Физика твердого тела, т.9, № II, 1967, с.322I-3228.
  8. S v a n t e s s o n, K.G., N i l s s o n, N.G., H u l d t, L. Recombination in strongly excited silicon. - Solid-St. Commun., v.9, N 3, 1971, pp. 213-216.
  9. N i l s s o n, N.G., S v a n t e s s o n, K.G. The spectrum and decay of the recombination radiation from strongly excited silicon. - Solid-St. Commun., v. 11, 1972, pp. 155-159.
  10. В е с к, J., C o n r a d t, R. Auger-Recombination in Si. - Solid-St. Commun., v. 13, N 1, 1973, pp. 93-95.
- II. О т б л е с к А.Е. Исследование физических процессов в диодных и тиристорных структурах при высокой плотности неравновесных носителей. - Кандидатская диссертация, ФТИ им. А.Ф. Иоффе, Л., 1974.

12. К о к о з а П.А. Распределение потенциалов и носителей заряда в открытом p-n-p-n-приборе. - ТИИЭР, т.55, № 8, 1967, с. 161-178,

Е. Velme, V. Dorodnev

Über Auswirkung der Auger-Rekombination auf die Durchlaßcharakteristik von Halbleiterdioden

Zusammenfassung

In der Arbeit untersucht man die Auswirkung der Auger-Rekombination (Stoß-Rekombination) auf die Durchlaßcharakteristik von Silizium-Gleichrichterdiolen bei hohen Stromdichten. Bei den Berechnungen ist die Abhängigkeit der Trägerbeweglichkeit von der Konzentration berücksichtigt. Es wird gezeigt, daß die Auswirkung der Auger-Rekombination bei den Stromdichten größer als  $500 \text{ A/cm}^2$  bedeutend wird.



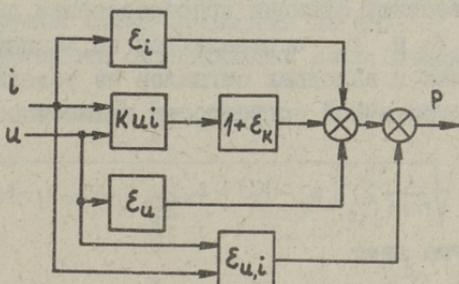
А.Э. Ярвалът

КОРРЕКЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ  
 МГНОВЕННОЙ МОЩНОСТИ

Преобразователи мгновенной мощности (ПММ) осуществляют перемножение измеряемого напряжения и тока. Так как погрешность ПММ зависит от двух входных сигналов, представление ее затруднительно. Погрешность ПММ выражается как максимальная разность выходного сигнала ПММ и выходного сигнала идеального ПММ с тем же номинальным выходным сигналом [1]. Такое представление погрешности оценивает точность только в одной точке диапазона изменения входных сигналов и не позволяет найти условия коррекции погрешности.

Целью данной работы является анализ погрешности ПММ с выявлением количественных соотношений, позволяющих найти условия коррекции погрешности.

Представление погрешности. Реальный ПММ может быть представлен в виде идеального ПММ и различных внешних элементов. Структурная схема реального ПММ приведена на фиг.1.



Фиг. 1. Структурная схема реального преобразователя мгновенной мощности.

### Выходной сигнал реального ПММ

$$p = f(u, i) = K(1 + \varepsilon_k)ui + \varepsilon_u u + \varepsilon_i i + \varepsilon_{i,u}(u, i), \quad (1)$$

где  $f(u, i)$  — функция преобразования,  
 $K$  — коэффициент преобразования идеального ПММ,  
 $\varepsilon_k$  — погрешность коэффициента преобразования,  
 $\varepsilon_i, \varepsilon_u$  — коэффициенты прохождения входных сигналов,  
 $\varepsilon_{i,u}(u, i)$  — погрешность нелинейности.

Считаем входные сигналы нормированными относительно максимальных значений.

Погрешность коэффициента преобразования и коэффициенты прохождения входных сигналов определяются из условия минимизации средней квадратичной погрешности:

$$\sigma = \sqrt{\iint_{-1}^1 [f(u, i) - K(1 + \varepsilon_k)ui - \varepsilon_u u - \varepsilon_i i]^2 didu}. \quad (2)$$

Условие минимума (2) дает [2]

$$\varepsilon_k = \frac{9}{4K} \iint_{-1}^1 f(u, i) i u didu - 1, \quad (3)$$

$$\varepsilon_i = \frac{3}{4} \iint_{-1}^1 f(u, i) i didu, \quad (4)$$

$$\varepsilon_u = \frac{3}{4} \iint_{-1}^1 f(u, i) u didu, \quad (5)$$

$$\sigma_{\min} = \sqrt{\iint_{-1}^1 f^2(u, i) didu - \frac{4}{9}K^2(1 + \varepsilon_k)^2 - \frac{4}{3}\varepsilon_i^2 - \frac{4}{3}\varepsilon_u^2}. \quad (6)$$

При неизвестной функции преобразования погрешность  $\varepsilon_k$  и коэффициенты  $\varepsilon_i$  и  $\varepsilon_u$  определяются по экспериментальным значениям входных и выходных сигналов из условия минимизации средней квадратичной погрешности нелинейности:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n [p_j - K(1 + \varepsilon_k)u_j i_j - \varepsilon_u u_j - \varepsilon_i i_j]^2}. \quad (7)$$

Условие минимума дает

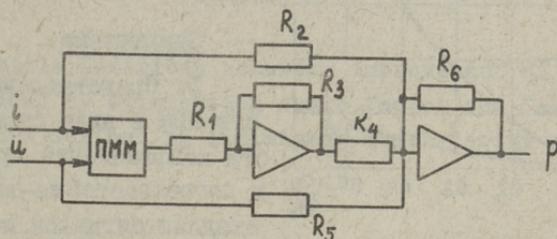
$$\varepsilon_k = \frac{\sum_{j=0}^n p_j i_j u_j}{K \sum_{j=0}^n u_j^2 i_j^2} - 1, \quad (8)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sum_{j=0}^n p_j i_j}{\sum_{j=0}^n i_j^2}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_u = \frac{\sum_{j=0}^n p_j u_j}{\sum_{j=0}^n u_j^2}, \quad (10)$$

$$\sigma_{\min} = \sqrt{\frac{1}{n+1} \left[ \sum_{j=0}^n p_j^2 - K^2 (1 + \varepsilon_k)^2 \sum_{j=0}^n u_j i_j - \varepsilon_i \sum_{j=0}^n i_j^2 - \varepsilon_u \sum_{j=0}^n u_j^2 \right]}. \quad (11)$$

**Коррекция погрешности.** Посредством сочетания реального ПММ и операционных усилителей, производящие изменение коэффициента преобразования, и вычитания проходных сигналов возможно исключить погрешность коэффициента преобразования и проходные сигналы.



Фиг. 2. Схема коррекции погрешности преобразователя мгновенной мощности.

Структурная схема приведена на фиг. 2. Параметры цепи коррекции погрешности определяются из соотношений:

$$\frac{R_3 R_6}{R_1 R_4} = \frac{1}{1 + \varepsilon_k}, \quad (12)$$

$$\frac{R_6}{R_2} = \frac{\varepsilon_i}{1 + \varepsilon_k}, \quad (13)$$

$$\frac{R_6}{R_5} = \frac{\varepsilon_u}{1 + \varepsilon_k}. \quad (14)$$

Коррекция погрешностей ПММ на базе интегрального перемножителя. В радио- и измерительной технике широко применяются интегральные аналоговые перемножители [3]. Работа ПММ на базе аналогового перемножителя описывается уравнением

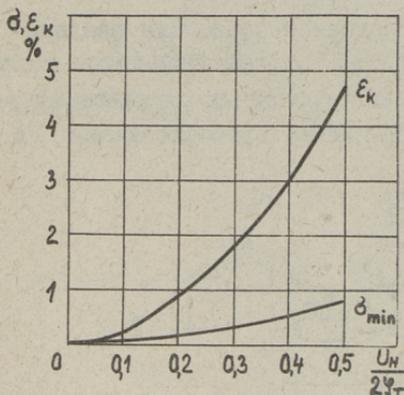
$$p = K i t h \frac{U}{2\varphi_T}, \quad (16)$$

где  $\varphi_T$  - термический потенциал p-n перехода.

Обозначив  $a = \frac{U_H}{2\varphi_T}$ , где  $U_H$  - номинальный входной сигнал, получим [4]:

$$\varepsilon_k = \frac{3}{2a} \int_{-a}^a x \operatorname{th} x dx = 1 - \frac{1}{5} a^2 + \frac{2}{35} a^4 - \dots + \frac{(-1)^{n-1} (2^{2n}-1) 2^{2n} 3 B_n}{(2n+1)!} a^{2n-1} + \dots,$$

где  $B_n$  - числа Бернулли,  $\varepsilon_0 = 0$ ,  $\varepsilon_i = 0$ .



Фиг. 3. Зависимости погрешностей ПММ на базе интегрального перемножителя от  $\frac{U_H}{2\varphi_T}$ .

На фиг. 3 представлены зависимости погрешности коэффициента преобразования и относительной средней квадратичной погрешности  $\sigma_{min}$  от  $a$ .

### Заключение.

I. Представление погрешности ПММ в виде суммы погрешности коэффициента преобразования и погрешностей из-за прохождения входных сигналов, исходя из условия минимизации средней квадратичной погрешности нелинейности, позволяет найти условия оптимизации параметров ПММ и параметры цепи коррекции погрешностей.

2. Зависимость средней квадратичной погрешности нелинейности от величин входных сигналов позволяет найти диапазон допустимых изменений входных сигналов.

### Л и т е р а т у р а

И. Бенин В.Л., Кизиллов В.У. Статические измерительные преобразователи электрической мощности. М., "Энергия", 1972.

2. А н г о А. Математика для электро- и радиоинженеров. М., "Наука", 1965.

3. Керекеснер И.П., Рысин В.С., Тимоштин В.Н., Ткаченко В.А. Проектирование биполярных ИС перемножителей сигналов. - Электронная промышленность, 1974, № 4, с. 36-39.

4. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М., "Наука", 1973.

A. Järvalt

### Errors Correction in Instant Power Transducer

#### Summary

This article describes accuracy improvement of instant power transducer by eliminating scale factor and feedthrough errors that are defined by minimizing nonlinearity mean-square error.



УДК 621.317.727.1

Р.Р. Иверс, Х.К. Росс

ОБЩИЙ АНАЛИЗ ПЕРЕДАЧ ТОЧНОГО ТРАНСФОРМАТОРА  
 СО ЖУТОВОЙ ОБМОТКОЙ

Рассмотрим точный трансформатор, обмотки которого для получения тесной индуктивной связи выполнены жгутом. В [1, 2] было показано, что жгут из  $n$  несоединенных проводов можно описывать уравнениями линии

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} U(x) \\ I(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Z_1 \\ Y & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U(x) \\ I(x) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $U(x), I(x)$  —  $n$ -мерные векторы напряжений и токов,  
 $Z_1, Y$  —  $n \times n$  симметричные матрицы, характеризующие жгут и сердечник трансформатора [1].

Решение уравнения (1) при длине жгута  $x = l$  связывает токи и напряжения в начале и в конце жгута

$$\begin{bmatrix} U(l) \\ I(l) \end{bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} 0 & Z_1 \\ Y & 0 \end{bmatrix} l \cdot \begin{bmatrix} U(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U(0) \\ I(0) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где компоненты переходной матрицы выражаются как

$$\begin{aligned} A_{11} &= I + \frac{1}{2!} Z_1 Y l^2 + \frac{1}{4!} Z_1 Y Z_1 Y l^4 + \dots, \\ A_{12} &= (I + \frac{1}{3!} Z_1 Y l^2 + \frac{1}{5!} Z_1 Y Z_1 Y l^4 + \dots) Z_1 l, \\ A_{21} &= Y l (I + \frac{1}{3!} Z_1 Y l^2 + \frac{1}{5!} Z_1 Y Z_1 Y l^4 + \dots), \\ A_{22} &= I + \frac{1}{2!} Y Z_1 l^2 + \frac{1}{4!} Y Z_1 Y Z_1 l^4 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Из (2) получим уравнение узловых напряжений несоединенного жгута как  $2n$ -полосника

$$\begin{bmatrix} I(0) \\ -I(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{12}^{-1} A_{11} & A_{12}^{-1} \\ -A_{21} + A_{22} A_{12}^{-1} A_{11} & -A_{22} A_{12}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U(0) \\ I(0) \end{bmatrix} \quad (4)$$

В настоящей статье рассмотрим однородные по длине и неоднородные в поперечном сечении жгуты, то есть жгуты с параметрами  $Z_1$  и  $Y$ , которые не зависят от его длины, но различны по величине элементов.

1. Уравнения передач трансформатора с неоднородной жгутовой обмоткой. Результаты численного анализа передач трансформатора в [2], вытекающие из решения уравнений многополюсника (4) с учетом уравнений соединения концов проводов жгута, являются точными в очень широком диапазоне частот, однако связаны со значительным объемом вычислений.

Для упрощения анализа трансформатора введем следующие ограничения на рассматриваемые процессы в жгутовой обмотке.

1. При анализе высокочастотных погрешностей можно не учитывать активное сопротивление проводов жгута [2], поэтому матрицы  $Z_1$  и  $Y$  выражаются через матрицы индуктивности  $L_1$  и емкости  $C$  проводов, согласно выражениям

$$Z_1 = -j\omega L_1, \quad Y = -j\omega C.$$

2. Практически интерес представляют малые частотные погрешности, возникающие в пределах рабочего диапазона частот трансформатора и зависящие от  $\omega^2$ . Членами, содержащими более высокие степени частоты, пренебрегаем, а в компонентах переходной матрицы (3) можем пренебречь членами, содержащими  $\omega^4$  и выше. В результате получим:

$$A_{11} \approx I - 3dL_1C,$$

$$A_{12} \approx -j\omega l(I - dL_1C)L_1,$$

$$A_{21} \approx Yl = (j\omega l)^{-1} L_1^{-1} L_1 C \cdot 6d,$$

$$A_{22} \approx Z_1^{-1}(I - 3dL_1C)Z_1,$$

где  $I$  — единичная матрица и  $d = \frac{1}{6} \omega^2 l$ .

В итоге компоненты уравнения (4) выражаются через

$$A_{12}^{-1} = -(j\omega l)^{-1} L_1^{-1} [I + dL_1C],$$

$$-A_{12}^{-1} A_{11} = (j\omega l)^{-1} L_1^{-1} [I - 2dL_1C],$$

$$A_{22} A_{12}^{-1} A_{11} = -(j\omega l)^{-1} L_1^{-1} [I - 5dL_1C],$$

$$-A_{21} + A_{22} A_{12}^{-1} A_{11} = -(j\omega l)^{-1} L_1^{-1} [I + dL_1C].$$

$$-A_{22} A_{12}^{-1} = (j\omega L)^{-1} L_1^{-1} [I - 2dL_1C],$$

и уравнение (4) можно заменить приближенной зависимостью

$$\begin{bmatrix} I(0) \\ -I(L) \end{bmatrix} = (j\omega L)^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} L_1^{-1} & -L_1^{-1} \\ -L_1^{-1} & L_1^{-1} \end{bmatrix} - d \begin{bmatrix} 2C & C \\ C & 2C \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} U(0) \\ U(L) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

или сокращенно

$$\begin{bmatrix} I(0) \\ -I(L) \end{bmatrix} = (j\omega L)^{-1} [\bar{A}_{жк} - d\bar{B}_{жк}] \cdot \begin{bmatrix} U(0) \\ U(L) \end{bmatrix}. \quad (5a)$$

Соединение начал и концов  $n$ -проводного жгута в обмотку трансформатора как  $(p+1)$ -полосника описываем при помощи матрицы соединения  $H$  с размерностью  $(p+1) \times 2n$ . Тогда матричное уравнение узловых напряжений для трансформатора приобретает вид:

$$I = \bar{Y}_T U,$$

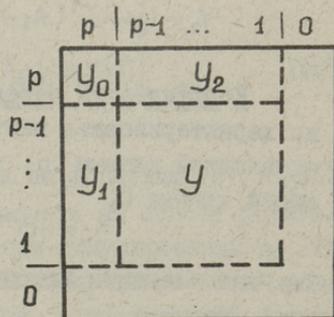
где  $I, U$  — токи и напряжения  $(p+1)$ -полосника,  $\bar{Y}_T$  — неопределенная матрица проводимостей трансформатора, состоящая, как и исходная матрица несоединенного жгута, из суммы двух матриц

$$\bar{Y}_T = H(j\omega L)^{-1} (\bar{A}_{жк} - d\bar{B}_{жк}) H^T = (j\omega L)^{-1} (\bar{A} - d\bar{B}). \quad (5б)$$

В качестве примера рассмотрим два способа соединения жгута с десятью проводами ( $n=10$ ) в обмотки трансформатора (фиг. 2):

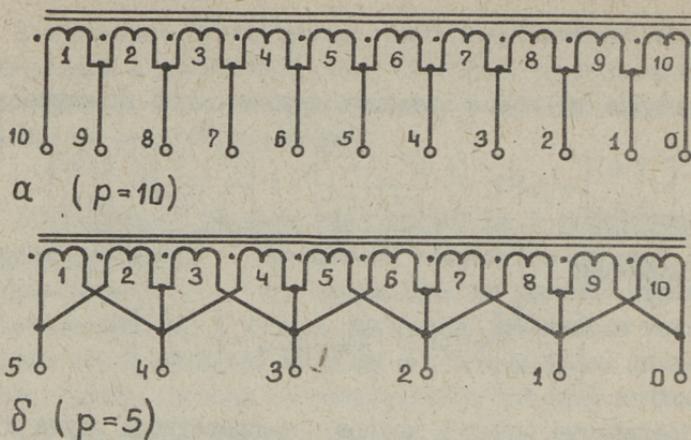
а) автотрансформаторное соединение проводов жгута (соединение Кельвина-Варлея);

б) бинарное соединение, используемое в случае, когда общий жгут трансформатора состоит из  $p/2$  отдельных двухпроводных жгутов [3]. Соответствующие матрицы соединения приведены в таблице I.



Фиг. 1. Разбиение на блоки неопределенной матрицы проводимости трансформатора  $\bar{Y}_T$ .

Для дальнейшего анализа целесообразно из неопределенной матрицы трансформатора  $\bar{Y}_T$



Фиг. 2. Соединение жгута  $n=10$  на обмотки трансформатора.

выделить блочные матрицы в соответствии с фиг. 1, где  $Y$  является истинной определенной матрицей трансформатора с размерами  $(p-1) \times (p-1)$  при заземленном полюсе 0 и подключении генератора к полюсу  $p$ , а  $Y_0, Y_1, Y_2$  дополняют  $Y$  до определенной матрицы трансформатора.

Все блочные матрицы можно в соответствии с (56) представить через сумму двух матриц

$$Y = (j\omega l)^{-1}(A - dB), \quad Y_1 = (j\omega l)^{-1}(A_1 - dB_1),$$

$$Y_2 = (j\omega l)^{-1}(A_2 - dB_2), \quad Y_0 = (j\omega l)^{-1}(A_0 - dB_0).$$

Коэффициенты передачи напряжения  $(p+1)$ -полюсника можно характеризовать вектором  $K_u$ , содержащим все передачи от входной клеммы  $p$  к клеммам  $i$ , где  $i=1, 2, \dots, p-1$  при общей клемме 0.

$$K_u = -(Y^{-1})^T Y_1 = -[(A - dB)^{-1}]^T (A_1 - dB_1).$$

Так как элементы матрицы  $dB$  малы по сравнению с элементами  $A$ , то

$$(A - dB)^{-1} = A^{-1}(I - dBA^{-1})^{-1} \approx A^{-1}(I + dBA^{-1}) = A^{-1} + dA^{-1}BA^{-1},$$

и вектор коэффициента передачи напряжения, состоящий из частотно-независимого и частотно-зависимого членов равен

$$K_u = K_{u1} + dK_{u2} = -(A^{-1})^T A_1 + \omega^2 l \frac{1}{6} [(A^{-1})^T B_1 - (A^{-1} B A^{-1})^T A_1]. \quad (6)$$

Выходные импедансы трансформатора между клеммами 0 и  $i = 1, 2, \dots, p-1$  при короткозамкнутом входе равны диагональным элементам матрицы  $Y^{-1} = j\omega l (A - dB)^{-1}$ . Обозначая элемент прямоугольной матрицы  $A$  через  $A(i, j)$ , можем при малых частотах  $\omega$  выходную проводимость приближенно представить в виде

$$Y_v(i) \approx \frac{1}{j\omega l [A^{-1}(i, i) + d(A^{-1} B A^{-1})(i, i)]} = \frac{1}{j\omega L_v(i)} + j\omega C_v(i),$$

откуда видно, что выходной импеданс состоит из параллельно соединенной индуктивности  $L_v$  и емкости  $C_v$

$$L_v(i) = l A^{-1}(i, i), \quad C_v(i) = \frac{l}{6} \frac{(A^{-1} B A^{-1})(i, i)}{[A^{-1}(i, i)]^2}. \quad (7)$$

Входная проводимость между клеммами 0 и  $p$  в режиме холостого хода на выходе равна сумме

$$Y_s = Y_0 + Y_2 K_u, \quad (8)$$

которую можно также представить в виде параллельного соединения индуктивности и емкости

$$Y_s = \frac{1}{j\omega L_s} + j\omega C_s,$$

где  $L_s$  и  $C_s$  вычисляются по формулам

$$L_s = 1/l \left( A_0 + \sum_{i=1}^{p-1} A_2(i) K_{u1}(i) \right), \quad (8a)$$

$$C_s = \frac{l}{6} \left[ B_0 + \sum_{i=1}^{p-1} (B_2(i) K_{u1}(i) - A_2(i) K_{u2}(i)) \right]. \quad (8б)$$

Расчеты передач трансформатора по формулам (6), (7) и (8) значительно легче произвести, чем расчеты на основе формулы (4). Это рационально, например, при моделировании на ЭВМ разных случайных способов расположения проводов неоднородного жгута в обмотках трансформатора, с последующей статистической обработкой результатов расчета.

Кроме того, приближенная  $Y$ -матрица в уравнении (5) позволяет описать жгут или трансформатор через простые эквивалентные схемы.

2. Приближенная схема замещения жгутовой обмотки и трансформатора. Как видно из уравнения узловых напряжений (5), для несоединенной жгутовой обмотки действительна эквивалентная схема, где между любыми двумя зажимами подключены параллельно индуктивность и емкость, величины которых определены матрицей индуктивных проводимостей жгута

$$Y_L = (j\omega l)^{-1} \begin{bmatrix} L_1^{-1} & -L_1^{-1} \\ -L_1^{-1} & L_1^{-1} \end{bmatrix} \quad (9a)$$

и матрицей емкостных проводимостей жгута

$$Y_C = j\omega l \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2C & C \\ C & 2C \end{bmatrix}. \quad (9b)$$

Если не учитывать емкостей, то матрица индуктивных проводимостей определяет известную схему замещения  $n$ -обмоточного трансформатора.

Ранее учет межпроводной емкости на передачи трансформатора [4] производился при помощи схемы замещения, где распределенную емкость  $C_{ij}$  между двумя проводами заменили двумя сосредоточенными емкостями  $\frac{1}{2}C_{ij}$  в начале и в конце жгута. Такой схеме замещения соответствует (в обозначениях распределенной модели) матрица емкостных проводимостей

$$Y_{CB} = j\omega l \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}. \quad (9c)$$

При сравнении результатов расчета схем замещения с емкостными составляющими (9b) и (9c) нужно отметить следующее:

1. При анализе трансформатора с автотрансформаторным соединением проводов жгута расчеты частотной погрешности коэффициента передачи напряжения  $K_{U2}$  и входной емкости  $C_s$  совпадают (совпадают и с экспериментальными расчетами).

2. Расчеты выходных емкостных составляющих той же схемы отличаются. Отличаются также передачи при другом способе соединения проводов в обмотки трансформатора.

3. Емкости схемы замещения (9b) могут иметь отрицательные величины.

**Пример.** Матрица емкостных проводимостей трансформатора с автотрансформаторным соединением  $n$ -проводного однородного жгута.

Учитывая, что  $C$ -матрица однородного жгута имеет вид

$$C = \bar{c} \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix},$$

где  $\bar{c}$  — погонная величина двухпроводной емкости, получим из (9в) посредством соответствующей матрицы соединения  $H$  (табл. Ia) матрицу емкостных проводимостей трансформатора в виде  $Y_{CT} = HY_c H^T$

$$Y_{CT} = j\omega l \frac{1}{6} \bar{c} \begin{bmatrix} 2(n-1) & n-3 & -3 & -3 & \dots & -3 & -1 \\ n & 4n-6 & n-6 & -6 & \dots & -6 & -3 \\ -3 & n-6 & 4n-6 & n-6 & \dots & -6 & -3 \\ -3 & -6 & n-6 & 4n-6 & \dots & -6 & -3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -3 & -6 & -6 & -6 & \dots & 4n-6 & n-3 \\ -1 & -3 & -3 & -3 & \dots & n-3 & 2(n-1) \end{bmatrix}.$$

### 3. Коррекция частотных погрешностей трансформатора.

Рассмотрим более подробно возможности уменьшения зависящей от частоты составляющей коэффициента передачи напряжения  $K_{U2}$  посредством внешней емкостной коррекции.

Анализ частных случаев емкостной коррекции жгутовых трансформаторов проведен в [4,5,6].

Пусть к трансформаторному делителю  $T$  с матрицей  $\bar{Y}_T$  подключен согласно фиг. За корректирующий  $(p+1)$ -полюсник  $\Pi$ , содержащий только емкости и имеющий поэтому матрицу проводимости

$$\bar{Y}_\Pi = j\omega \bar{c}_\Pi = -6l^{-1} d (j\omega l)^{-1} \bar{c}_\Pi.$$

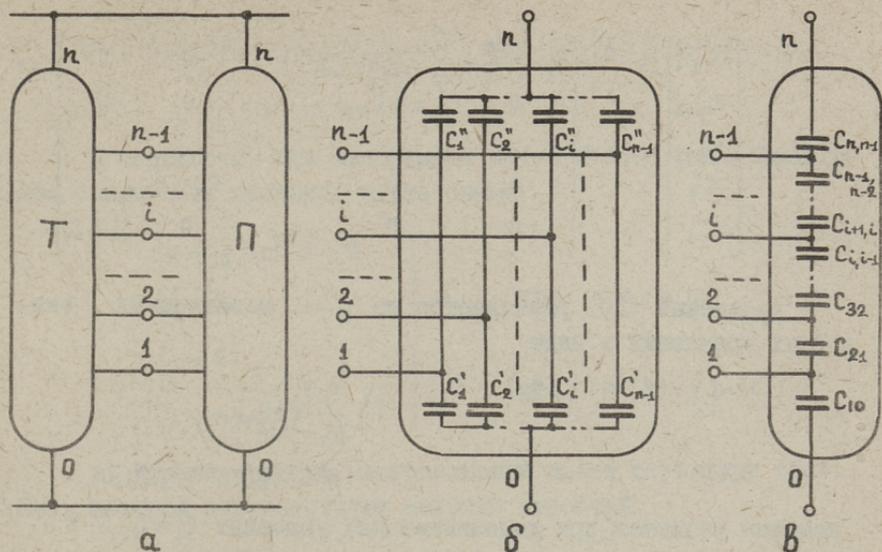
Матрица соединения жгута  $n = 10$   
в обмотки трансформатора

а) Согласно фиг. 2а

		начало										конец										
		I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
H =		I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
		0	I	0	0	0	0	0	0	0	0	I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
		0	0	I	0	0	0	0	0	0	0	0	I	0	0	0	0	0	0	0	0	8
		0	0	0	I	0	0	0	0	0	0	0	0	I	0	0	0	0	0	0	0	7
		0	0	0	0	I	0	0	0	0	0	0	0	0	I	0	0	0	0	0	0	6
		0	0	0	0	0	I	0	0	0	0	0	0	0	0	I	0	0	0	0	0	5
		0	0	0	0	0	0	I	0	0	0	0	0	0	0	0	I	0	0	0	0	4
		0	0	0	0	0	0	0	I	0	0	0	0	0	0	0	0	I	0	0	0	3
		0	0	0	0	0	0	0	0	I	0	0	0	0	0	0	0	0	I	0	0	2
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	I	0	0	0	0	0	0	0	0	I	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	I	0	

б) Согласно фиг. 2б

		начало										конец										
		I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
H =		I	I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
		0	0	I	I	0	0	0	0	0	0	I	I	0	0	0	0	0	0	0	0	4
		0	0	0	0	I	I	0	0	0	0	0	0	I	I	0	0	0	0	0	0	3
		0	0	0	0	0	0	I	I	0	0	0	0	0	0	I	I	0	0	0	0	2
		0	0	0	0	0	0	0	I	I	0	0	0	0	0	0	I	I	0	0	0	1
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	I	I	0	0



Фиг. 3. Корректирующие многополюсники трансформаторного делителя.

Матрица проводимостей схемы Т + П имеет тогда вид

$$\bar{Y}_{\text{тп}} = (j\omega L)^{-1} [\bar{A} - d(\bar{B} - 6L^{-1} \bar{C}_n)].$$

Матрицу  $\bar{Y}_n$  также целесообразно разбить на блоки, согласно фиг. I, где через  $Y_n = -6L^{-1}d(j\omega L)^{-1}C_n$  обозначим истинную определенную матрицу при заземленной клемме 0 и входном источнике напряжения на клемме  $p$ . Через  $Y_{n1} = -6L^{-1}d(j\omega L)^{-1}C_{n1}$  обозначим вектор длиной  $p-1$ , являющийся первым столбцом матрицы  $\bar{Y}_n$ , исключая строки 0 и  $p$ .

Частотная погрешность отсутствует, если

$$(A^{-1})^T (B_1 + 6L^{-1}C_{n1}) - (A^{-1})^T (B - 6L^{-1}C_n)^T (A^{-1})^T A_1 = 0.$$

Так как  $A^{-1}$  не сингулярен, то

$$6L^{-1}(C_{n1} - C_n^T (A^{-1})^T A_1) = B^T (A^{-1})^T A_1 - B_1. \quad (10)$$

Этому уравнению должны удовлетворять блоки  $C_n$  и  $C_{n1}$  матрицы емкостей  $(p+1)$ -полюсника коррекции.

Далее рассмотрим конкретные реализации частотной коррекции.

а) Корректирующий многополюсник имеет структуру (фиг. 3б) которой соответствует матрицы емкостей

$$C_{n1} = \begin{bmatrix} -C''_{p-1} \\ -C''_{p-2} \\ \dots \\ -C''_2 \\ -C''_1 \end{bmatrix}, \quad C_n = \begin{bmatrix} C'_{p-1} + C''_{p-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C'_{p-2} + C''_{p-2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C'_2 + C''_2 & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C'_1 + C''_1 \end{bmatrix}$$

Уравнение (10) распадается на  $p-1$  независимых скалярных уравнений в виде

$$6l^{-1}(-C''_i - (C'_i + C''_i) a_i) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, p-1,$$

$$a_i = ((A^{-1})^T A_i)(i),$$

$$b_i = (B^T (A^{-1})^T A_i)(i),$$

которые решаются при дополнительных условиях  $C'_i \geq 0, C''_i \geq 0$ .

В частности, при однородном жгуте и автотрансформаторном соединении проводов жгута получим

$$(p-i)C''_i - iC'_i = -\frac{1}{2}p\bar{c}l(p-2i),$$

и отсюда возможные емкости

$$\left. \begin{array}{l} C'_i = \frac{1}{2}p\bar{c}l \frac{p-2i}{i} \\ C''_i = 0 \end{array} \right\} \quad \text{при} \quad 1 \leq i \leq p/2,$$

$$\left. \begin{array}{l} C'_i = 0 \\ C''_i = -\frac{1}{2}p\bar{c}l \frac{p-2i}{p-i} \end{array} \right\} \quad \text{при} \quad p/2 \leq i \leq p-1.$$

б) При необходимости выравнивать частотную зависимость  $K_u$  только на выходе  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, p-1$ ) можно пользоваться лишь двумя корректирующими емкостями  $C'_i$  и  $C''_i$  (схемы изображены на фиг. 3б). Требуем, чтобы член  $i$  вектора  $K_{u2}$  равнялся нулю

$$\sum_{j=1}^{p-1} (A^{-1})^T(i, j) [B_1(j) + 6l^{-1}C_{n1}(j)] -$$

$$- \sum_{j=1}^{p-1} (A^{-1})^T(i, j) ((B^T + 6l^{-1}C_n)(A^{-1})^T A_i)(j) = 0.$$

После преобразований получим

$$C_i'' + (C_i'' + C_i')((A^{-1})^T A_i)(i) = \frac{l}{6(A^{-1})^T(i, i)} \sum_{j=1}^{p-1} (A^{-1})^T(i, j) [B_i(j) - (B^T(A^{-1})^T A_i)(j)].$$

В частности, при однородном жгуте и автотрансформаторном соединении проводов жгута имеем

$$\left. \begin{aligned} C_i' &= \frac{1}{12} \bar{c} p^2 l \frac{p-2i}{i} \\ C_i'' &= 0 \\ C_i' &= 0 \end{aligned} \right\} \text{при } 1 \leq i \leq p/2,$$

$$\left. \begin{aligned} C_i'' &= -\frac{1}{12} \bar{c} l p^2 \frac{p-2i}{p-i} \end{aligned} \right\} \text{при } p/2 \leq i \leq p-1.$$

в) Корректирующий многополюсник имеет структуру (фиг. 3в), которой соответствуют матрицы емкостей

$$C_{n1} = \begin{bmatrix} -C_{p,p-1} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_n = \begin{bmatrix} C_{p,p-1} + & -C_{p-1,p-2} & 0 & \dots & 0 \\ +C_{p-1,p-2} & C_{p-1,p-2} + & -C_{p-2,p-3} & \dots & 0 \\ -C_{p-1,p-2} & +C_{p-2,p-3} & C_{p-2,p-3} + & \dots & 0 \\ 0 & -C_{p-2,p-3} & +C_{p-3,p-4} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{10} + C_{21} \end{bmatrix}$$

Расчет по уравнению (10) позволяет определить емкости  $C_{i,i-1}$  при  $i = 1, 2, \dots, p$ .

В частности, при однородном жгуте и автотрансформаторном соединении проводов жгута получим

$$C_{i,i-1} = C_0 - \frac{1}{2} l p \bar{c} (i-1)(p-i+2),$$

где  $C_0$  — свободно выбранная постоянная, которую нужно выбрать так, чтобы все  $C_{i,i-1} \geq 0$ .

Однако нужно отметить, что возможны такие матрицы  $C$  и способы соединения проводов в обмотку, при которых не существует положительных корректирующих емкостей  $C_{i,i-1}$ , полностью компенсирующих частотную погрешность.

#### Л и т е р а т у р а

И. Инерс Р.Р., Росс Х.К. Расчет трансформатора со жгутовой обмоткой I. Уравнения жгутовой обмотки. — "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1974, № 371. с 33-39.

2. И н е р с Р.Р., Р о с с Х.К. Расчет трансформатора со жгутовой обмоткой П. Расчет индуктивных двигателей напряжения, соединенных по схеме Кельвина-Варлея. - "Тр. Таллинского политехн. ин-та", 1974. № 371, с. 41-49.

3. Л о б ж а н и д з е Н.Г., Т а в д г и р и д з е Л.Н. Компенсация погрешности индуктивного делителя напряжения, построенного соединением бинарных делителей цепочкой. - Сообщения АН Грузинской ССР, 1971, 63, № 2, с. 393-396.

4. B i n n i e, A.J., F o o r d, T.R. Leakage Inductance and Interwinding Capacitance in Toroidal Ratio Transformers. IEEE Transactions, v. IM-16, N 4, December 1967.

5. Б а й к о в В.М. Методика расчета погрешностей трансформаторных делителей напряжения от токов утечки между секциями. - "Труды метрологических институтов СССР, 1972. вып 138/198, с. 4-14.

6. Б а й к о в В.М., Р о ж д е с т в е н с к а я Т.Б. Анализ погрешности трансформаторного делителя напряжения от паразитных утечек между секциями. - Метрология, 1973, № 6, с. 3-10.

R. Jöers, H. Ross

### Theory and Design of the Inductive Voltage Dividers

#### Summary

A distributed model of an electric transformer consisting of  $n$  coupled nonuniform lossless LC transmission lines is analysed.

Voltage gain and driving point impedances formulas of voltage divider are obtained.

Я.В. Петерсон

### КОММУТАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ИНДУКТИВНЫХ ДЕЛИТЕЛЯХ НАПРЯЖЕНИЯ

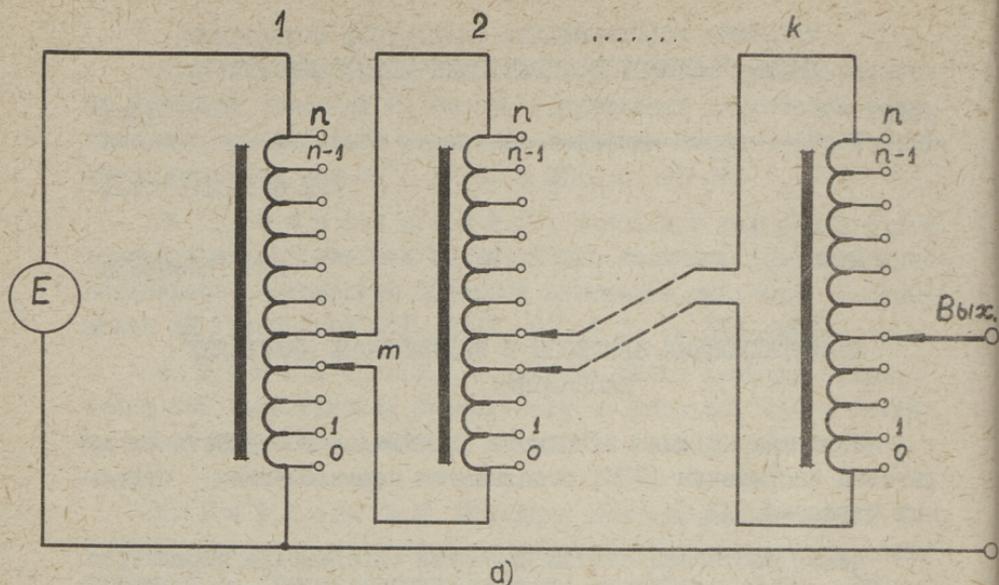
Изменение уровня выходного сигнала многоступенчатых делителей напряжения (ИДН) выполняется переключением отдельных ступеней [1].

Целью настоящей статьи является определение параметров коммутационных перенапряжений, связанных с автоматическим переключением ступеней ИДН.

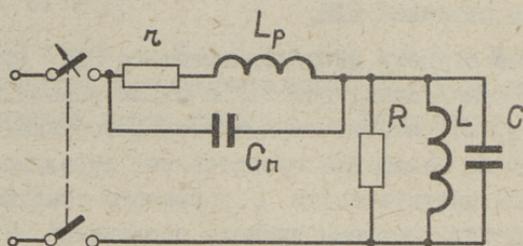
Отдельные ступени многоступенчатого ИДН (фиг. 1а) рассматриваются комплексно, поэтому в схеме замещения одной ступени (фиг. 1б) использование сосредоточенных параметров оправдано. Схема замещения представляет параллельное включение основной индуктивности  $L$ , емкости обмотки  $C$  и сопротивления потерь ферромагнитного сердечника  $R$ . Активное сопротивление обмотки  $r$ , индуктивность рассеяния  $L_p$  и паразитная емкость  $C_n$  из-за ничтожно малой величины  $L_p$  по сравнению с основной индуктивностью  $L$  практически не влияют на переходный процесс ИДН.

Входы каждой ступени, кроме первой, переключаются при помощи коммутационных элементов. В момент размыкания цепи на входе коммутируемой ступени появляются затухающие перенапряжения (фиг. 2) с амплитудным значением порядка сотни и тысячи вольт. Это увеличивает действующее значение переменного сигнала на выходе ИДН, усложняет работу коммутационных элементов и понижает надежность схемы.

Напряжение переходного процесса. Общее выражение напряжения на входе коммутируемой ступени после размыкания цепи при ненулевых начальных условиях



а)



б)

Фиг. 1.

а) Схема включения многоступенчатого ИДН.

б) Схема замещения одной ступени многоступенчатого ИДН.

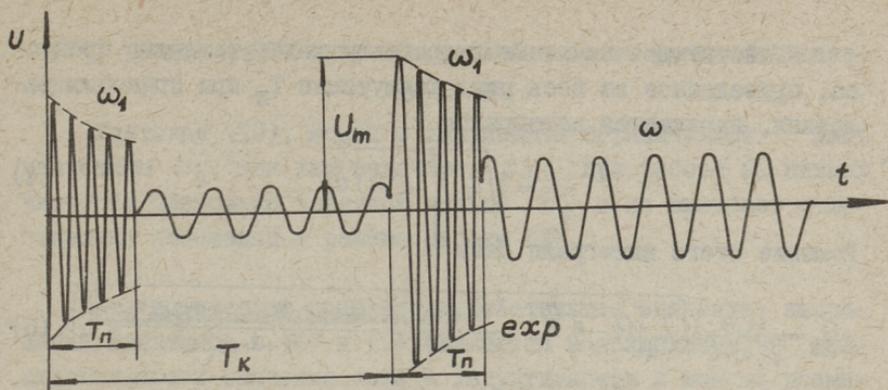
$$\begin{aligned}
 U(t) = & \frac{I_L(0)}{\omega_1 C} e^{-\delta t} \sin \omega_1 t + \\
 & + U_0(0) e^{-\delta t} (\cos \omega_1 t - \frac{\delta}{\omega_1} \sin \omega_1 t),
 \end{aligned}
 \tag{I}$$

где  $I_L(0)$  — ток в индуктивности в момент размыкания цепи,

$U(0)$  — напряжение на входе коммутируемой ступени в момент размыкания цепи,

$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  — угловая частота собственных затухающих колебаний,

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  — угловая частота собственных незатухающих колебаний,



Фиг. 2. Процесс переключения ИДН.

$\delta = \frac{1}{2\tau}$  — коэффициент затухания,

$\tau = RC$  — постоянная времени.

Максимальное значение выброса напряжения

$$U_m = \frac{I_{L,m}}{\omega_1 C}, \quad (2)$$

где  $I_{L,m}$  — амплитудное значение тока в индуктивности.

Колебательный процесс практически длится до окончания времени переключения  $T_{II}$  (фиг. 2).

После замыкания контактов, параллельно сопротивлению потерь  $R$  подключается выходное сопротивление предыдущей ступени ИДН, вследствие чего постоянная времени  $\tau$  уменьшается на 4–6 порядка и колебательный процесс практически моментально затухает.

В некоторых случаях измерение и сравнение выходного сигнала ИДН производится по действующему значению. Несмотря на относительно короткое время переключения  $T_{II}$ , напряжение переходного процесса существенно изменяет действующее значение установившегося периодического сигнала. В выражении (1) большой вес имеет первая слагаемая и при начальных условиях  $U(0) = 0$ ,  $I_L(0) = I_{L,m}$ , напряжение на входе коммутируемой ступени

$$U(t) = \frac{I_{L,m}}{\omega_1 C} e^{-\delta t} \sin \omega_1 t. \quad (3)$$

Действующее значение напряжения колебательного процесса, приведенное на весь цикл коммутации  $T_k$  при принятых условиях, выражается интегралом

$$U_g = \sqrt{\frac{1}{T_k} \int_0^{T_n} u^2(t) dt}. \quad (4)$$

Решение этого интеграла дает

$$U_g = \frac{I_{L,m}}{\sqrt{2} \omega_1 C} \sqrt{\frac{\tau}{T_k} \left[ \left(1 - e^{-\frac{T_n}{\tau}}\right) - \frac{1}{1 + 4\omega_1^2 \tau^2} - \frac{2\omega_1 \tau \sin 2\omega_1 T_n - \cos 2\omega_1 T_n}{1 + 4\omega_1^2 \tau^2} e^{-\frac{T_n}{\tau}} \right]}. \quad (5)$$

В практике для реальных ИДН последнюю слагаемую можно не учитывать, причем допускается относительная погрешность

$$|\Delta| \cong \frac{e^{-\frac{T_n}{\tau}}}{2\omega_1 \tau}.$$

Тогда

$$U_g = \frac{I_{L,m}}{\sqrt{2} \omega_1 C} \sqrt{\frac{\tau}{T_k} \left[ \left(1 - e^{-\frac{T_n}{\tau}}\right) - \frac{1}{1 + 4\omega_1^2 \tau^2} \right]}. \quad (6)$$

При начальных условиях  $U(0) = U_m$  и  $I_L(0) = 0$  на основе (1) можно выписать выражение напряжения колебательного процесса

$$\begin{aligned} U(t) &= U_m e^{-\delta t} (\cos \omega_1 t - \frac{\delta}{\omega_1} \sin \omega_1 t) = \\ &= U_m \frac{\omega_0}{\omega_1} e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t + \psi), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $U_m$  — амплитудное значение приложенного напряжения  
 $\psi = \arctg \frac{\delta}{\omega_1}$ .

Решение интеграла (4) при этих начальных условиях дает

$$\begin{aligned} U_{g,c} &= U_m \frac{\omega_0}{\sqrt{2} \omega_1} \sqrt{\frac{\tau}{T_k} \left[ \left(1 - e^{-\frac{T_n}{\tau}}\right) - \frac{1}{1 + 4\omega_1^2 \tau^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\omega_1 \tau \sin 2\omega_1 T_n + (1 - 2\frac{\delta^2}{\omega_0^2}) \cos 2\omega_1 T_n}{1 + 4\omega_1^2 \tau^2} e^{-\frac{T_n}{\tau}} \right]}. \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогично (6) можно принимать

$$U_{g,c} = U_m \frac{\omega_0}{\sqrt{2} \omega_1} \sqrt{\frac{\tau}{T_k} \left[ \left(1 - e^{-\frac{T_n}{\tau}}\right) - \frac{1}{1 + 4\omega_1^2 \tau^2} \right]}. \quad (9)$$

Сравнивая (6) и (9), получим, что

$$\frac{U_g}{U_{g,c}} \cong \frac{\omega_0}{\omega}, \quad (10)$$

где  $\omega$  — угловая частота установившегося периодического сигнала.

У реальных ИДН значение нижней частоты рабочего диапазона  $\omega \ll \omega_0$ .

Учитывая (10), можем в дальнейшем ограничиться лишь значением  $U_g$ , так как величина  $U_{g,c}$  при работе на низких частотах несколько порядков меньше  $U_g$  и не вызывает существенных изменений в режиме работы ИДН.

Статистические показатели. Действующее значение напряжений, найденное в (6) и (9), является максимальным. В действительности значение тока в индуктивности в момент замыкания цепи является случайным. Закон распределения момента переключения можно считать равномерным при периодическом сигнале, ограниченном в пределах от 0 до  $2\pi$ .

Плотность распределения начальной фазы в момент замыкания цепи при таких условиях можно предположить равномерной

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad \text{где } \varphi = \omega t.$$

Кривая синусоидального тока имеет различную крутизну, поэтому смещение фазы  $\varphi$  вдоль оси времени на одинаковые отрезки приводит к различным изменениям тока. В итоге можно получить плотность распределения вероятностей мгновенных значений тока в индуктивности  $i_L$ :

$$p(i_L) = \frac{1}{\pi I_{L,m} \sqrt{1 - \left(\frac{i_L}{I_{L,m}}\right)^2}} \quad (II)$$

$$-I_{L,m} \leq i_L \leq I_{L,m} \text{ при других } i_L \quad p(i_L) = 0.$$

Соответствующий интегральный закон распределения выражается

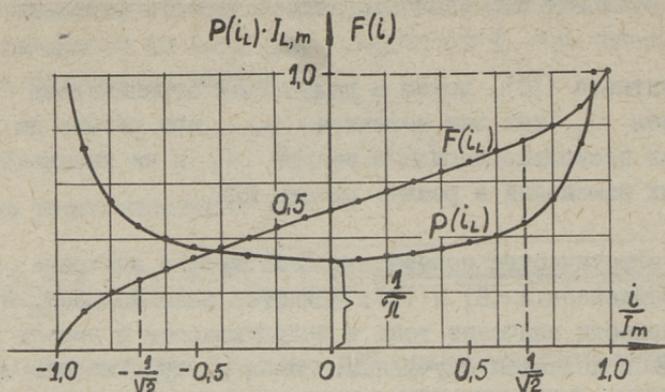
$$F(i_L) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{i_L}{I_{L,m}} \quad (I2)$$

где

$$F(i_L) = 0 \quad \text{при } i_L < -I_{L,m}$$

$$F(i_L) = 1 \quad \text{при } i_L > I_{L,m}.$$

Законы распределения показаны на фиг. 3. Статистическим средним вероятностным значением мгновенного тока  $i_L$  является  $I_{L,m}/\sqrt{2}$ , то есть при таких пределах интегрирования  $F(i_L) = \frac{1}{2}$ . Вставляя найденный ток в (6), получим среднюю вероятностную величину действующего значения напряжения переходного процесса на входе коммутируемой ступени



Фиг. 3. Законы распределения мгновенных значений тока в момент размыкания цепи.

$$\bar{U}_g = \frac{I_{L,m}}{2\omega_1 C} \sqrt{\frac{\tau}{T_k} \left[ (1 - e^{-\frac{T_n}{\tau}}) - \frac{1}{1 + 4\omega^2 \tau^2} \right]}. \quad (I3)$$

Часто ИДН используют в качестве делителя несинусоидальных периодических сигналов, например, для деления образцового напряжения прямоугольной формы. Ток в индуктивности в таком случае имеет треугольную форму с максимальным значением

$$I'_{L,m} = \frac{U_0 T}{4L}, \quad (I4)$$

где  $T = \frac{1}{f}$  — период сигнала,  
 $U_0$  — амплитуда прямоугольного напряжения.

При прямоугольной форме напряжения питания законы распределения можно выразить

$$P(i'_L) = \frac{1}{2I'_{L,m}}, \quad (I5)$$

$$F(i'_L) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{i'_L}{I'_{L,m}}, \quad (I6)$$

причем средними вероятностными значениями тока и напряжения являются  $I'_{L,m}/2$  и

$$\bar{U}'_g = \frac{I'_{L,m}}{2\sqrt{2}\omega_1 C} \sqrt{\left[ (1 - e^{-\frac{T_n}{\tau}}) - \frac{1}{1 + 4\omega^2 \tau^2} \right]}. \quad (I7)$$

**Коэффициент передачи.** В многоступенчатых ИДН, собранных по схеме Кельвина-Варлея, все ступени включены последо-

вательно. Найденное в (I3) и (I7) напряжение переходного процесса передается на выход ИДН с учетом коэффициента деления по напряжению соответствующих ступеней, где складывается геометрически со значением установившегося периодического сигнала.

При поочередном коммутировании ступеней, на выход ИДН (фиг. 1а) передается следующая часть напряжения переходного процесса

$$U_0 = \bar{U}_g \cdot \alpha, \quad (18)$$

причем

$$\alpha \cong \alpha_i + \frac{1}{n} \alpha_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$\alpha_{k+1} = 0$$

$\alpha_i$  - геометрический коэффициент передачи по напряжению  $i$ -ой ступени,

$i$  - номер коммутируемой ступени,

$k$  - число ступеней в многоступенчатом ИДН,

$n$  - число секций в одной ступени.

По сравнению с основным установившимся периодическим сигналом, доля  $U_0$  является существенным компонентом, которого нельзя исключить.

**Примеры.** Эксперименты и расчет провели с ИДН, выполненным на пермалловом сердечнике марки 83 НФ 0,02 мм 25/38-10 с числом витков  $w = 580$  и со следующими основными параметрами:  $L = 28 \Gamma$ ,  $R = 400 \text{ кОм}$  (на частоте  $\omega_1$ ) и  $C = 1600 \text{ пФ}$ .

Режим испытания:  $U = 4 \text{ В}$ ,  $T_K = 40 \text{ мс}$ ,  $T_{II} = 12 \text{ мс}$ , частота синусоидального сигнала  $f = 20$  и  $40 \text{ Гц}$ . Результаты расчета (эксперимента) оказались следующими:  $U_m = 226 \text{ В}$  (220 В),  $U_g = 20 \text{ В}$  (18 В) и  $\bar{U}_g = 13,7 \text{ В}$  (14,2 В). Экспериментально полученные данные  $\bar{U}_g$  больше расчетных из-за отскоков переключающих контактов.

Образец, выполненный на сердечнике 55/95-10 из материала 79НМ 0,05 мм, с данными  $w = 520$ ,  $L = 4,0 \Gamma$ ,  $R = 180 \text{ кОм}$ ,  $C = 1800 \text{ пФ}$ ,  $U = 8 \text{ В}$  и  $f = 20 \text{ Гц}$ , обладает максимальным выбросом напряжения на входе  $U_m = 1000 \text{ В}$  (допустимое напряжение герконов с 30 до 220 вольт).

В качестве третьего примера рассмотрели высокочастотный ИДН, выполненный на ферритовом сердечнике М 2000 НМ с данными  $w = 40$ ,  $L = 2,5 \cdot 10^{-3} \Gamma$ ,  $C = 50 \text{ пФ}$ ,  $R = 50 \text{ кОм}$

$U = 10 \text{ В}$  и  $f = 50 \text{ кГц}$ . Этот ИДН при работе на частоте  $50 \text{ кГц}$  дает максимальный выброс напряжения  $U_m = 80 \text{ В}$ .

Приведенные в статье зависимости позволяют оценить погрешности ИДН от коммутационных перенапряжений и дают основу для выбора коммутационных элементов.

### В ы в о д ы

1. При автоматическом коммутировании многоступенчатых ИДН появляются затухающие перенапряжения, которые могут вызывать дополнительные погрешности, превышающие на несколько порядков погрешности самих ИДН.

2. При выборе коммутационных элементов для переключения ступеней ИДН следует считаться с относительно высокими перенапряжениями, превышающими на несколько порядков рабочее напряжение.

### Л и т е р а т у р а

1. Петерсон Я.В. Коммутационные погрешности многоступенчатых индуктивных делителей напряжения. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1973, № 350.

J. Peterson

### Commutation Processes in Inductive Voltage Dividers

#### Summary

The switching processes in the inductive voltage dividers are described. The formulas for the average probability voltage after opening the circuit are derived.

It is shown that the root-mean-square voltage of the oscillation processes may exceed the basic signal.

УДК 621.317.727.1

Я.В. Петерсон

### АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИНДУКТИВНОГО ДЕЛИТЕЛЯ НАПРЯЖЕНИЯ С СЕКЦИЕЙ СВЯЗИ

В процессе коммутирования отдельных ступеней многоступенчатого индуктивного делителя напряжения (ИДН) появляются относительно большие затухающие перенапряжения, вследствие чего уменьшается точность ИДН и повышаются требования к коммутационным элементам [1].

Дополнительных погрешностей нагруженного ИДН вызывает его переходные сопротивления коммутационных элементов [2].

В данной статье рассматриваются погрешности ИДН с секцией связи, позволяющие исключить вышеуказанные недостатки.

Приводится сравнительный анализ коэффициента передачи, выходного сопротивления и частотных свойств с классическим автотрансформаторным соединением ИДН.

Коммутационные перенапряжения. Устройство многоступенчатого ИДН с секциями связи приведено на фиг. 1. Для этого в жгуте обмотки каждой ступени образуется дополнительная секция, подключаемая на вход следующей ступени. Этой секцией осуществляется непрерывная связь между ступенями ИДН в моменты коммутации. При переключении контактов переходные процессы теперь обусловлены перераспределением токов в двух параллельных секциях. Однако эти процессы весьма быстро затухают из-за малого выходного сопротивления предыдущей ступени (постоянная времени затухания  $\tau$  порядка  $10^{-8}$  -  $10^{-11}$  с). Экспериментально найденные перенапряжения без названной секции достигают от 300 до 1500 вольт (при  $\tau$  порядка  $10^{-3}$  с) для разных ИДН [1]. С секцией связи замечается уровень перенапряжений лишь от 10 до 100 милливольт ( $\tau$  порядка  $10^{-10}$  с), что весьма незначительно.

Влияние переходного сопротивления коммутационных элементов. Относительная величина дополнительной погрешности от переходного сопротивления коммутационных элементов одной ступени ИДН, нагруженной на следующую ступень, для схемы без секции связи выражается

$$\Delta_R = \frac{\Delta U}{U} = \frac{Z + 2R_K}{Z_H}, \quad (1)$$

а для схемы с секцией связи

$$\Delta'_R = \frac{Z + 2R_K}{2Z_H \left(1 + \frac{R_K}{Z}\right)}, \quad (2)$$

где  $U$  - напряжение на входе коммутируемой ступени,

$\Delta U$  - падение напряжения на переключающих элементах,

$Z = r + j\omega L_p$  - выходной импеданс секции,

$R_K$  - переходное сопротивление коммутационных элементов,

$Z_H = nr + j\omega n^2 L$  - импеданс нагрузки,

$L_p$  - индуктивность рассеяния секции,

$L$  - основная индуктивность секции,

$n$  - число секций в одной ступени (число проводов в жгуте).

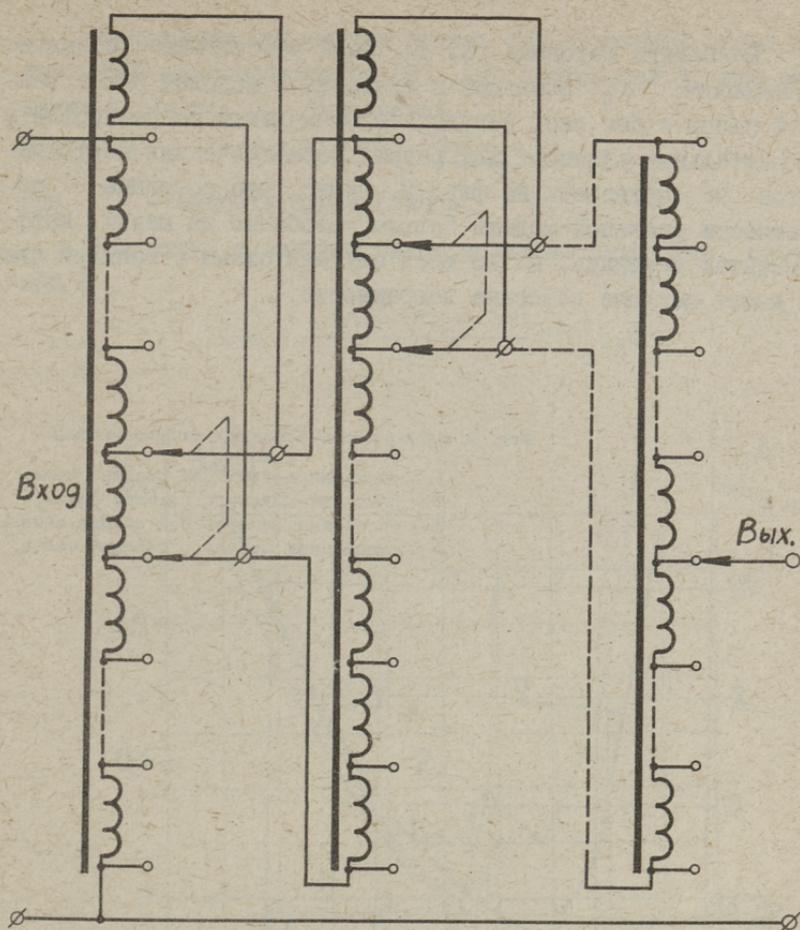
При одинаковом исполнении ступеней ИДН можно на основе (1) и (2) получить приближенное выражение дополнительной погрешности

$$|\Delta_R| = \frac{r \left(1 + 2 \frac{R_K}{r}\right)}{\omega n^2 L}, \quad (3)$$

$$|\Delta'_R| = \frac{r \left(1 + 2 \frac{R_K}{r}\right)}{2\omega n L^2 \left(1 + \frac{R_K}{r}\right)}. \quad (4)$$

Эти погрешности для всех ступеней складываются и становятся особенно ощутимыми на малых частотах. Из (1) и (2) видно, что многоступенчатый ИДН из ступеней с секциями связи имеет также меньшую погрешность от переходного сопротивления коммутационных элементов.

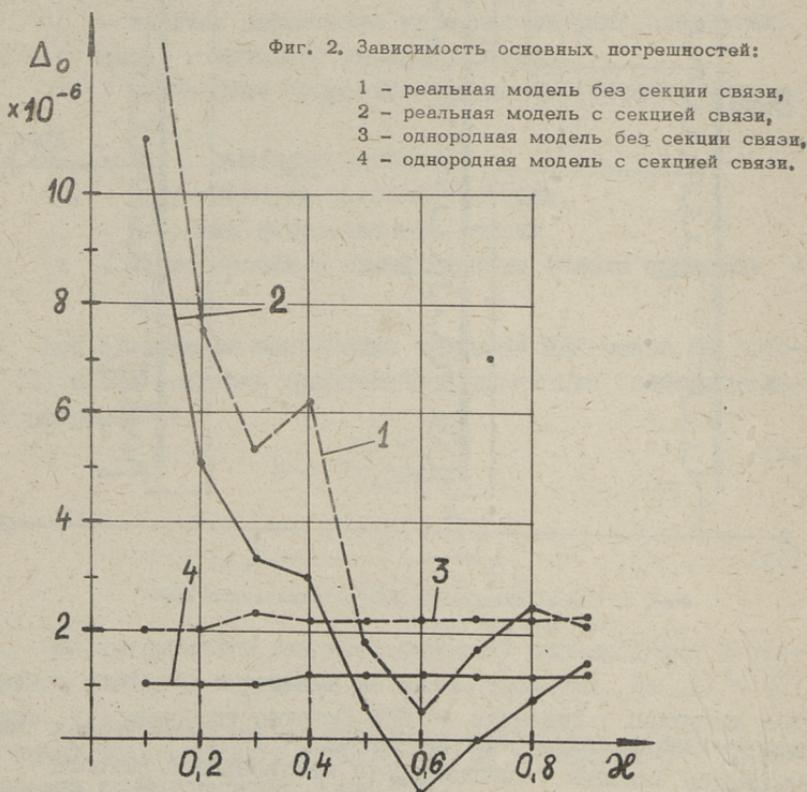
Определение основной погрешности. Для получения данных реальной модели был изготовлен делитель на сердечнике 83 НФ 0,02 мм 25/38-10 с числом витков жгута  $w = 58$ , причем  $n = 11$ , длина жгута  $l = 6,9$  м,  $r = 0,70$  м,  $L = 0,088$  Г. При соединении обмотки как делителя без секции связи, до-



Фиг. 1. Схема включения многоступенчатого ИДН с секциями связи.

полнительная секция была заземлена. В реальных жгутах наблюдаются сильные неоднородности межпроводной емкости и индуктивности. Поэтому расчет коэффициента передачи напряжения  $K_U$  с учетом параметров реальных жгутов возможен лишь на ЭВМ. Например, для жгута обмотки упомянутого экспериментального образца ИДН средняя емкость между двумя проводами была  $C=191$  пф с разбросом от 24 до 390 пф и средняя индуктивность рассеяния  $\bar{L}_p = 4,61$  мкГ с разбросом от 3,77 до 5,83 мкГ.

Используя методику [3, 4], были рассчитаны основные погрешности  $\Delta_0$  реальной и однородной моделей ИДН с секцией связи и без нее. Результаты вычислений погрешностей в относительных единицах для разных геометрических коэффициентов  $\varkappa$  приведены на фиг. 2. Видно, что основные погрешности реальной модели больше, особенно на малых коэффициентах передачи, но во всех случаях схема с секцией связи имеет меньшие основные погрешности.



Частотные погрешности. В общем случае для определенного  $\varkappa$

$$K_0 \cong \varkappa [1 - Af^2], \quad (5)$$

где  $A$  - некоторая постоянная,  
 $f$  - частота сигнала.

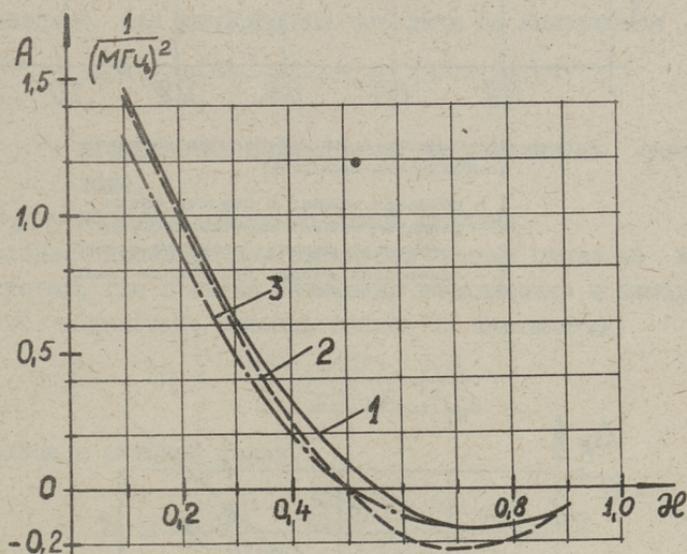
Рассмотрим однородную модель ИДН с секцией связи и без нее. Если основываться на [5], то постоянная  $A$ , при разложении в ряд по  $\omega$ , выражается

$$A = \frac{(1-\alpha)(1-2\alpha)}{3} \pi^2 n^3 L_p C, \quad (6)$$

где  $C$  — емкость одной секции.

Для схемы с секцией связи получено выражение постоянной  $A$

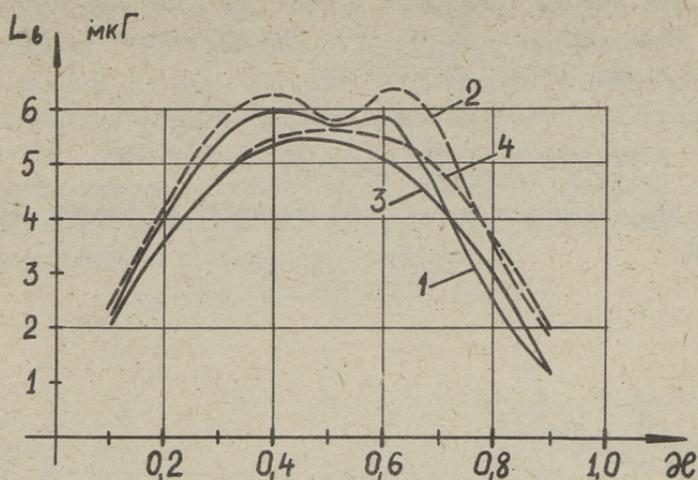
$$A' = \frac{1+2n(1-\alpha)(1-2\alpha)}{6} \pi^2 n^2 L_p C. \quad (7)$$



Фиг. 3. Коэффициенты частотной характеристики для схемы с секцией связи:

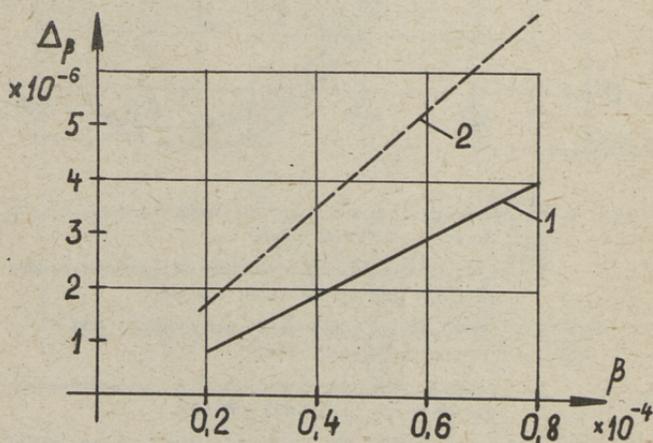
- 1 — точные значения постоянной  $A$ , рассчитанные на ЭВМ для однородной модели;
- 2 — значения постоянной  $A$ , полученные при помощи формулы (7);
- 3 — точные значения постоянной  $A$ , рассчитанные на ЭВМ для реальной модели.

Зная значение постоянной  $A$ , можем рассчитать частотные погрешности на любой частоте рабочего диапазона ИДН. На фиг. 3 приведены значения постоянной  $A$  для схемы с секцией связи. Можно сказать, что формула (7) вполне примени-



Фиг. 4. Зависимость выходной индуктивности от коэффициента передачи:

- 1 - реальная модель с секцией связи,
- 2 - реальная модель без секции связи,
- 3 - однородная модель с секцией связи,
- 4 - однородная модель без секции связи.



Фиг. 5. Зависимость погрешностей от величины коэффициента рассеяния:

- 1 - однородная модель с секцией связи,
- 2 - однородная модель без секции связи.

ма для оценки величины частотных погрешностей. Значительная разница, обусловленная некоторыми упрощениями, допущенными при выводе формулы (7), замечается в зоне минимальных частотных погрешностей при коэффициенте деления  $k$  около  $1/2$ . Введение секции связи незначительно ухудшает частотные свойства ИДН. В целях уменьшения частотных погрешностей можно использовать корректирующие емкости.

Выходной импеданс. Важным параметром нагруженного ИДН является его выходной импеданс, так как дополнительные погрешности от нагрузки пропорциональны выходному импедансу.

Известно, что коэффициент передачи по напряжению

$$K_U = K_{U_0} \frac{1}{1 + \frac{Z_b}{Z_H + Z_b}} \cong K_{U_0} \left[ 1 - \frac{Z_b}{Z_H} \right], \quad (8)$$

где  $K_{U_0}$  - коэффициент передачи по напряжению на холостом ходе,

$Z_b$  - выходной импеданс одной ступени.

Выходной импеданс для схемы без секции связи на высоких частотах, где в схеме замещения параллельно к импедансу секции  $Z$  подключена емкость секции  $C$ , выражается:

$$Z_b \cong \frac{n \varepsilon (1 - \varepsilon) (r + j\omega L_p)}{1 - \frac{n^3 \varepsilon (1 - \varepsilon)}{12} \omega^2 L_p C}, \quad (9)$$

а для схемы с секцией связи

$$Z'_b \cong \frac{n \varepsilon \left( 1 - \frac{2n\varepsilon}{2n-1} \right) (r + j\omega L_p)}{1 - \frac{n^3 \varepsilon \left( 1 - \frac{2n\varepsilon}{2n-1} \right)}{12} \omega^2 L_p C}. \quad (10)$$

Основное влияние на выходной импеданс имеет выходная индуктивность  $L_b$  по сравнению с емкостью  $C$ . Зависимость  $L_b$  от коэффициента передачи для экспериментальных образцов ИДН приведена на фиг. 4.

Разница между  $Z_b$  и  $Z'_b$  незначительная и ее приходится учитывать только при маленьких значениях  $n$ .

Влияние индуктивности рассеяния. Величину рассеяния целесообразно выразить через коэффициент рассеяния

$$\beta = \frac{L-M}{M} = \frac{L_p}{M}, \quad (11)$$

где  $M$  — взаимная индуктивность между двумя секциями.

Кроме рассмотренных дополнительных погрешностей коэффициент рассеяния  $\beta$  является и причиной появления погрешностей  $\Delta_{\beta}$ . На фиг. 5 приведена зависимость погрешности  $\Delta_{\beta}$  в относительных единицах от коэффициента рассеяния  $\beta$ . Эти характеристики практически не зависят от коэффициента передачи  $\kappa$ .

Сравнивая эти характеристики с кривыми 3 и 4 на фиг. 2, увидим, что  $\beta$  действительно является главным источником основной погрешности  $\Delta_0$ , причем влияние  $\beta$  меньше у ИДН с секцией связи.

В итоге можно сделать вывод, что ИДН с секцией связи имеет меньшие основные и дополнительные погрешности, чем ИДН без секции связи, уступая лишь незначительно по величине частотной погрешности. Кроме того, наличие секции позволяет изготовить многоступенчатый ИДН, у которого отсутствуют переходные процессы при переключении ступеней.

#### Л и т е р а т у р а

1. П е т е р с о н Я.В. Коммутационные процессы в многоступенчатых индуктивных делителях напряжения. — См. наст. сб. с. III.

2. П е т е р с о н Я.В. Погрешности многоступенчатых индуктивных делителей напряжения от переходного сопротивления коммутационных элементов. — "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1973, № 350, с. 155-161.

3. И н е р с Р.Р., Р о с с Х.К. Расчет трансформатора со жгутовой обмоткой I. — "Тр. Таллинск. политехн. ин-та" 1974, № 371, с. 33-39.

4. И н е р с Р.Р., Р о с с Х.К. Расчет трансформатора со жгутовой обмоткой II. — "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1974, № 371, с. 41-50.

5. С и л л а м а а Х.В., Э й с к о п И.Ю. Индуктивный делитель напряжения, как четырехполюсник с распределенными параметрами. — Сб. Устройства и элементы систем автоматизации научных экспериментов. Новосибирск, 1970.

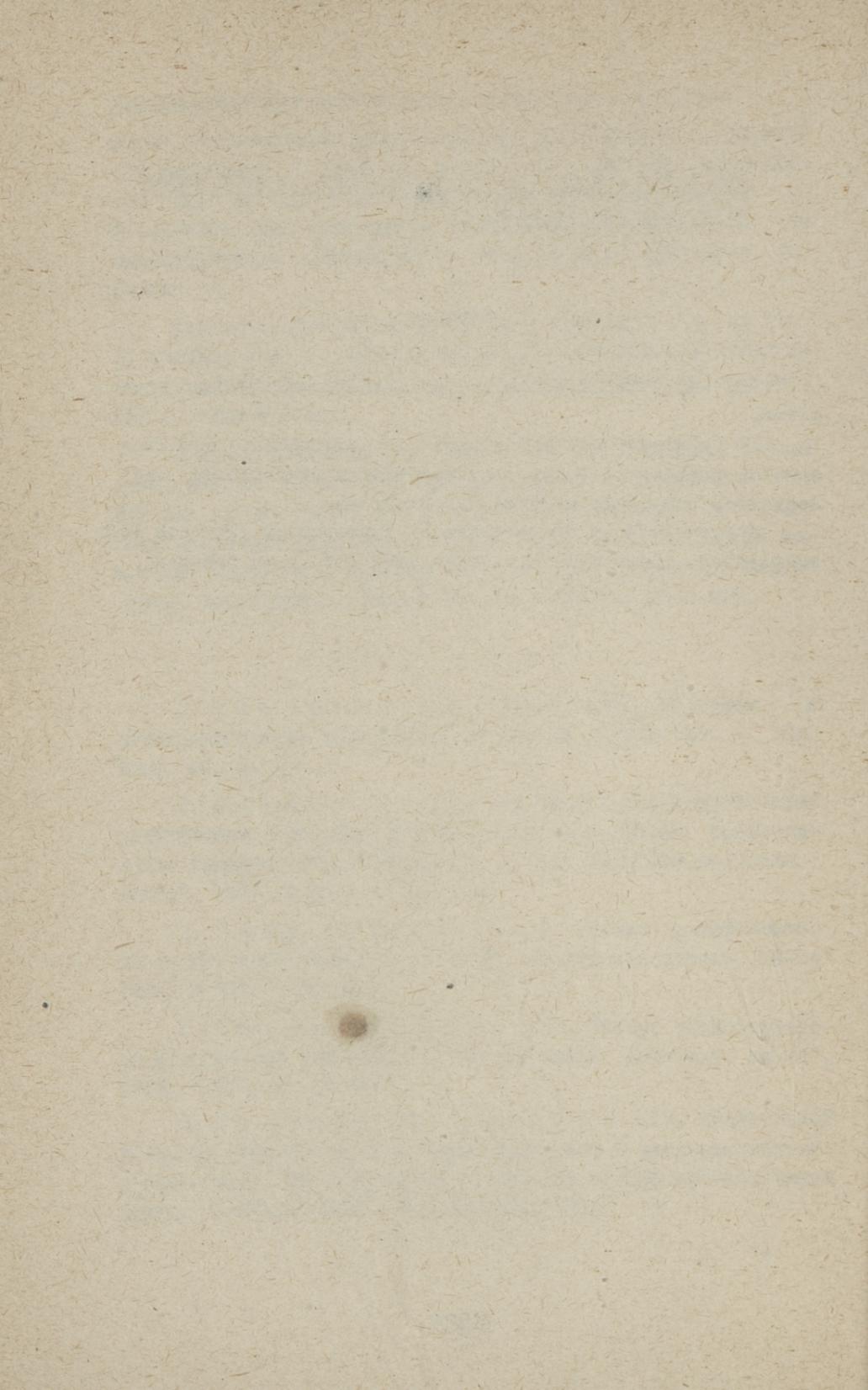
The Error Analysis of an Inductive Voltage Divider  
with Coupling Section

Summary

The analysis of basic and additional errors has been given.

It is shown that connection with additional coupling section enables to avoid the commutation overvoltage and decreases the basic voltage ratio errors.

The influences of resistance of switching elements over multi-stage inductive voltage divider have been reduced.



УДК 621.382.61:53.087.92

Г.Х.Вяльямяз, И.И.Тильк, В.И.Тихонов

ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА ОСНОВЕ  
ДАТЧИКА ХОЛЛА

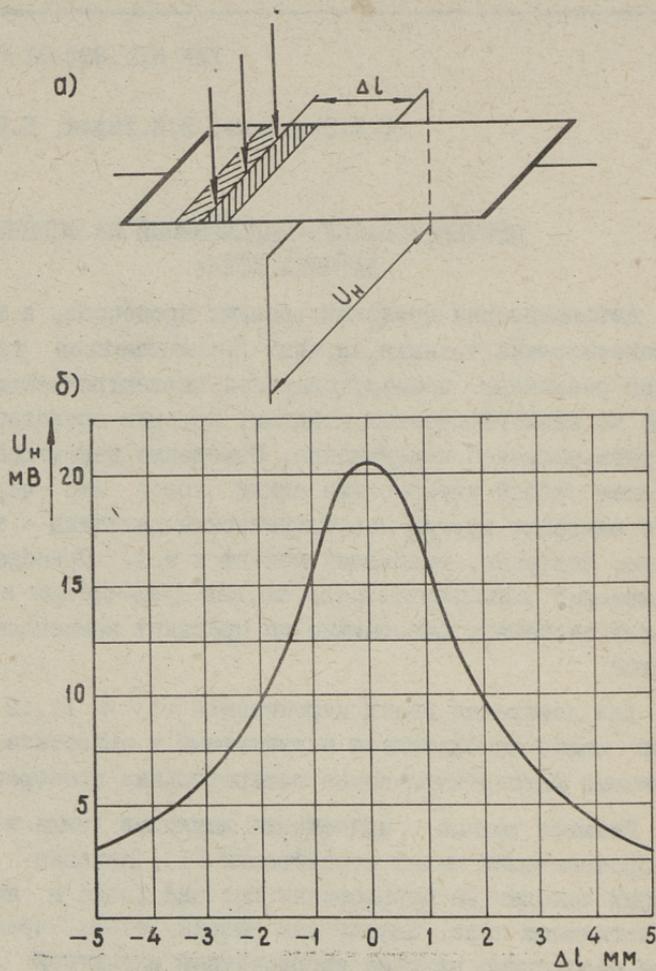
Автоматизация производственных процессов, а также усовершенствование техники научных экспериментов требуют создания различных преобразователей неэлектрических величин. Одной из неэлектрических величин, которую приходится часто измерять, является перемещение. Измерение перемещения представляет особый интерес еще ввиду того, что через него часто измеряют другие неэлектрические величины — такие, как усилие, давление, вращающий момент и т.д. Преобразователи перемещений используются так же, как нуль-органы в измерительных системах, работающие по принципу компенсации перемещений.

Для измерения малых перемещений ( $\Delta l \leq 1...2$  мм) наиболее часто используются индуктивные и емкостные, а также различные фотоэлектрические измерительные преобразователи.

Имеются данные о применении датчиков Холла в качестве преобразователей малых перемещений [1], принцип действия которых основан на перемещении датчика Холла в неоднородном магнитном поле. Однако для работы таких преобразователей необходимо наличие прецизионной магнитной системы, конфигурация которой должна обеспечить магнитное поле с заданным (чаще всего с постоянным) градиентом.

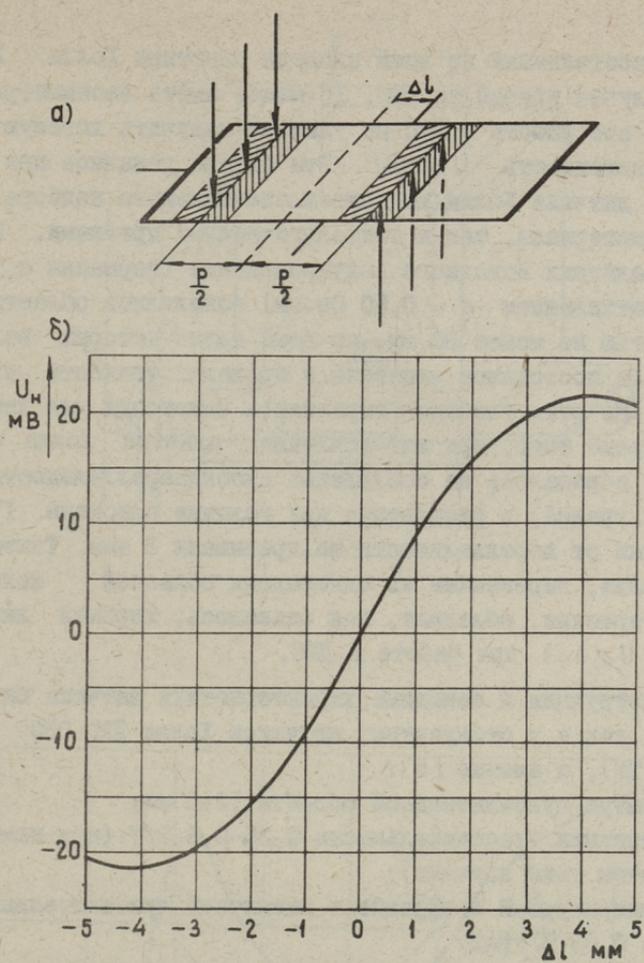
В преобразователе перемещений, описываемом в данной статье, для получения линейной характеристики преобразования используется различная чувствительность зон датчика Холла к магнитному полю. Если заштрихованная часть датчика Холла (фиг. 1а) находится в узком плоскопараллельном воздушном зазоре магнитопровода с постоянным магнитом, то воз-

никающее на холловских электродах выходное напряжение зависит от их положения относительно оси магнитопровода, согласно кривой фиг. 1б.



Фиг. 1.

При работе датчика Холла в дифференциальной магнитной системе (ДМС), как показано на фиг. 2а, получим приведенную на фиг. 2б зависимость выходного напряжения от перемещения датчика Холла относительно полюсов. Описываемый преобразователь перемещений [2] работает именно по такому принципу.



Фиг. 2.

Анализ работы датчика Холла в ДМС можно провести, следуя работам [3, 4], где показано, что для аналитического определения выходного напряжения датчика Холла, находящегося в неоднородном магнитном поле, целесообразно ввести понятие весовой функции. Выходное напряжение датчика Холла в зависимости от его перемещения относительно магнитного поля легко определяется методом свертки.

Уже из принципа работы датчика Холла в дифференциальной магнитной системе видно, что электрофизические параметры датчика, от которых зависит величина эффекта Холла, долж-

ны быть постоянными по всей площади пластины Холла. В противном случае кривая на фиг. 1б может иметь несимметричную форму, и при работе в ДМС не удастся получить хорошую линейную зависимость  $U_H(\Delta l)$ . Эта задача решалась при изготовлении датчика Холла как путем специального подбора исходного материала, так и технологическими приемами. Прежде всего в слитках исходного полупроводника (германия с удельным сопротивлением  $\rho = 0,50 \text{ Ом.см}$ ) выявлялись области протяженностью не менее 30 мм, по всей длине которых величина  $\rho$  имела постоянное значение в пределах точности измерений 5%. Из этих участков вырезались заготовки для датчиков Холла. Кроме того, при изготовлении пластин Холла особое внимание обращалось на соблюдение плоскопараллельности образующих граней; в результате при толщине пластины 170 мкм отклонения от параллельности не превышали 3 мкм. Такие пластины Холла, вырезанные из однородных областей исходного слитка германия, обладают, как оказалось, хорошей линейностью  $U_H(\Delta l)$  при работе в ДМС.

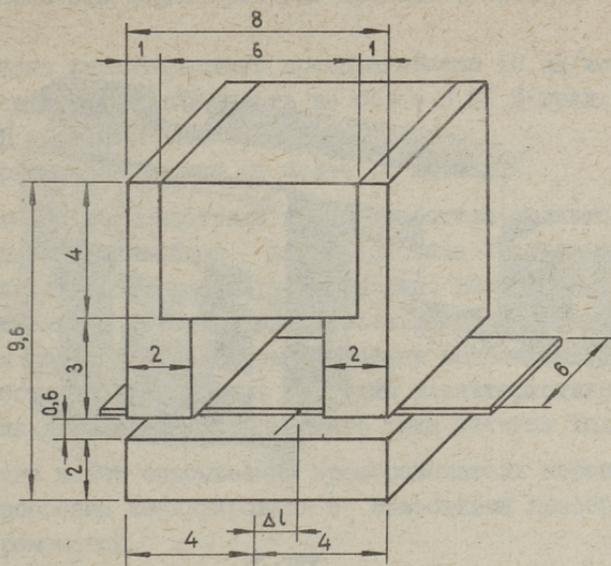
Конструкция и основные характеристики датчика были такими же, как и у стандартных датчиков Холла ДХГ-05С (ОАО. 529.092 ТУ), а именно [5]:

- размеры чувствительной области 12х6 мм;
- магнитная чувствительность 0,35–0,5 В/Т (при номинальном рабочем токе датчика);
- температурный коэффициент магнитной чувствительности не более 0,03%/град;
- входное и выходное сопротивления 40–90 Ом.

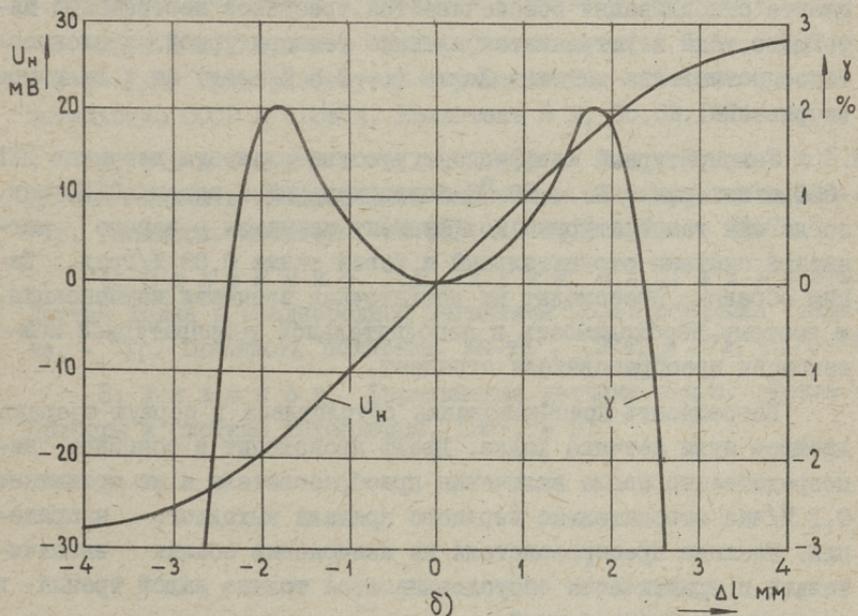
Магнитная система описываемого преобразователя изображена на фиг. 3а. Постоянный магнит изготовлен из сплава ИИДК24. На фиг. 3б приведены характеристика преобразования и кривая погрешности, показывающая отклонение характеристики от линейной. Фото преобразователя приведено на фиг. 4.

Преобразователь выполнен с неподвижным датчиком Холла и с подвижной магнитной системой, прикрепленной к немагнитной направляющей из нержавеющей стали. Корпус преобразователя изготовлен из бронзы.

Установка нуля производится смещением датчика Холла при помощи специального винта.

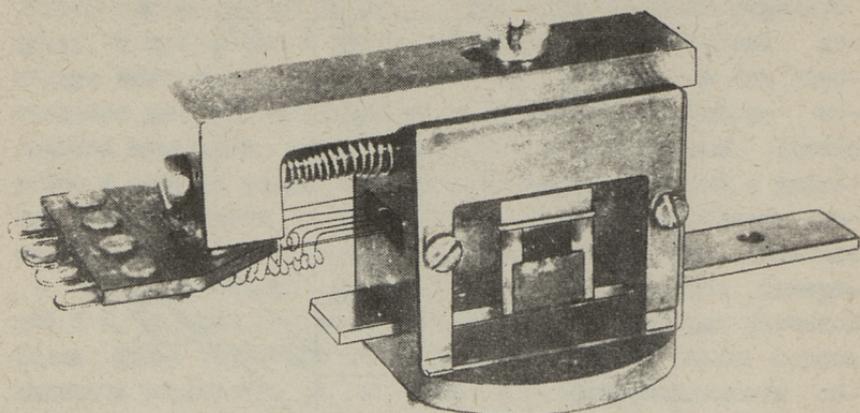


а)



б)

Фиг. 3.



Фиг. 4.

Для питания преобразователя необходимо использовать полупроводниковый стабилизатор тока. При достаточном коэффициенте стабилизации обеспечивается требуемое постоянство питающего тока и устраняется влияние температурной зависимости сопротивления датчика Холла ( $\sim 0,5\%$ /град) на выходное напряжение.

Температурный коэффициент чувствительности датчиков ДХТ  $-05^{\circ}\text{C}$  в интервале  $0\dots+50^{\circ}\text{C}$  положительный и равен  $0,02\%$ /град, тогда как температурный коэффициент индукции в зазоре магнитной системы отрицательный и равен также  $0,02\%$ /град. Таким образом, происходит их достаточная взаимная компенсация, и поэтому необходимость в дополнительной температурной компенсации преобразователя отпадает.

Погрешность преобразования обусловлена в первую очередь дрейфом нуля датчика Холла. Дрейф происходит в основном непосредственно после включения преобразователя и не превышает  $0,1\%$ /час относительно верхнего предела выходного напряжения. Реакция преобразователя на измеряемый объект незначительна и практически обуславливается только силой трения в подшипниках направляющей.

Основные параметры опытного преобразователя:  
диапазон измерения  $\pm 1$  мм,

нелинейность характеристики преобразования не более 1 %,

крутизна характеристики преобразования 10 мВ/мм,  
температурная погрешность не более 0,01 %/град,  
дрейф нуля не более 0,1 %/час,  
измерительное усилие не более 10 мН.

Основными достоинствами преобразователя являются малая погрешность, линейная характеристика преобразования, простота изготовления магнитной системы, малые размеры, малое измерительное усилие, возможность измерения выходного напряжения стандартными автоматическими потенциометрами, а также удобство регулирования крутизны характеристики преобразования изменением управляющего тока датчика Холла.

В итоге можно описываемый преобразователь перемещений считать способным конкурировать с известными преобразователями перемещений.

#### Л и т е р а т у р а

1. К о б у с А., Т у ш и н с к и й Я. Датчики Холла и магниторезисторы. М., "Энергия", 1971, с. 264-267.

2. В я л ь я м я э Г.Х., С е п п е л ь С.А., Э й - н е р Л.К. Преобразователь перемещений. - Авторское свидетельство СССР № 418874. Бюллетень № 9, 05.03.1974.

3. В я л ь я м я э Г.Х., К у к к В.А., Т и л ь к И.И. Датчик Холла в неоднородном магнитном поле: прямая задача. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1974, № 371, с. 63-71.

4. В я л ь я м я э Г.Х., К у к к В.А., Т и л ь к И.И. Датчик Холла в неоднородном магнитном поле: обратная задача. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", 1974, № 371, с. 73-77.

5. Т и х о н о в. Германиевые датчики э.д.с. Холла. - Приборы и системы управления, 1967, № 8.

Weggeber mit Hallgenerator

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein Weggeber vorgestellt, dessen Wirkungsweise auf der Ausnutzung der unterschiedlichen Magnetfeldempfindlichkeit verschiedener Flächenzonen eines Hallgenerators beruht. Der Weggeber besteht aus einem beweglichen Dauermagneten mit Weicheisenrückschluß in Miniaturausführung, in dessen Luftspalten sich der Hallgenerator befindet. Der Weggeber hat einen Meßbereich von  $\pm 1$  mm bei einer Fehlergrenze von  $\pm 1$  %.

О.А. Аарна

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ  
ПРОЦЕССОВ НА ЭВМ

I. О математических моделях непрерывных  
технологических процессов

Принятие обоснованных решений по проектированию, выбору технологического режима и синтезу систем автоматического управления технологическими процессами все больше связано с их моделированием на ЭВМ, дающим возможность перебора и сравнения достаточного количества вариантов. Под технологическим процессом будем понимать последовательность обработки материалов или энергии, а моделью — математическое описание этого реального процесса [1].

Технологические процессы принято разделять на непрерывные и дискретные. Любой непрерывный технологический процесс содержит некоторую совокупность аппаратов или устройств, связанных с непрерывными потоками материалов и энергии. Сюда относится в первую очередь большинство процессов химической технологии, теплоэнергетики, металлургии и другие. Характерно, что процессы одного класса, например, химико-технологические, составлены из сравнительно ограниченного набора типовых аппаратов и узлов (подпроцессов).

При создании математической модели процесса чаще всего модели подпроцессов используют как готовые модули, соединенные согласно технологической схеме. Значительная часть работы по составлению моделирующей программы для ЭВМ в таком случае оказывается рутинной и сравнительно легко формализуемой. С целью автоматизации этой работы лишь для химико-технологических процессов разработано значительное количество систем моделирующих программ [2]. Большинство

из них предназначено для автоматизации технологического проектирования и поэтому ограничивается моделированием стационарного состояния процесса. При синтезе систем автоматического управления не меньший интерес представляют и модели динамики процесса. Поэтому целесообразно разработать унифицированный подход, позволяющий одной системой получить модели стационарного состояния и динамики процесса, а также решить на этих моделях разнообразные задачи. Возможно это при подходящем выборе принципов организации вычислений, метода построения и способа представления математических моделей<sup>1</sup>.

Сложность создания системы моделирующих программ и круг решаемых на ней задач во многом определяются типом и формой представления математической модели процесса (и подпроцессов). В наиболее общей форме математическую модель процесса можно представить в виде системы  $\mu$  уравнений, связывающих  $\nu$  основных переменных [3]:

$$G_i(z_1, \dots, z_\nu) = 0 \quad (I)$$

$$i = 1, \dots, \mu,$$

причем  $\nu \geq \mu$ . Обозначаем множество основных переменных через  $Z = \{z_1, \dots, z_\nu\}$  и считаем его элементы функциями времени  $z_j(t), j=1, \dots, \nu$ . Математическая модель процесса типа (I) является неориентированной, то есть в ней не указаны, какие из переменных входные, какие - выходные. Таким образом, она в принципе применима для вычисления значений любого подмножества переменных  $Y \subset Z$  (мощности не более  $\nu$ ) при заданных значениях остальных переменных  $z_j \in (Z \setminus Y)$ .

При моделировании конкретного процесса встречаются проблемы двух типов: связанные с получением модели (I) для данного процесса и чисто вычислительные, связанные с решением уравнений модели относительно заданного подмножества переменных.

По способу получения математические модели процессов подразделяются на эмпирические и теоретические (феноменологические). Последние имеют более универсальную природу,

<sup>1</sup> В трех статьях, помещенных в настоящий сборник, рассмотрены проблемы создания системы моделирующих программ, отвечающей вышеперечисленным требованиям.

поскольку их получение не требует наличия реального процесса. Эта универсальность достигается, в частности, за счет большей сложности модели. Часто для получения модели процесса приемлемой сложности исходную теоретическую модель необходимо упрощать.

Все непрерывные технологические процессы связаны с явлениями переноса вещества, энергии и количества движения [4], определяющими физическое состояние процесса. Теоретические модели этих процессов имеют вид системы уравнений баланса названных характеристик состояния. Общий вид уравнений баланса для фиксированного объема  $V$  таков:

$$q_a - \sum_{i=1}^a q_{is} + \sum_{j=1}^b q_{jv} \mp \sum_{k=1}^c q_{kg} = 0, \quad (2)$$

где  $q_a$  - скорость накопления вещества, энергии или количества движения в объеме  $V$ ,

$q_{is}$  - интенсивность  $i$ -го входящего потока вещества, энергии или количества движения через границы объема  $V$ ,

$q_{jv}$  - интенсивность  $j$ -го выходящего потока вещества, энергии или количества движения через границы объема  $V$ ,

$q_{kg}$  - интенсивность  $k$ -го источника (стока) вещества, энергии или количества движения в объеме  $V$ .

Каждое слагаемое из (2) в общем нелинейно зависит от переменных  $z_j \in Z$ .

Учитывая специфику непрерывных технологических процессов и их теоретических моделей, целесообразно уточнить структуру модели (I). Для этого разобьем множество  $Z$  на два непересекающихся подмножества: внутренние переменные  $\Gamma$  и внешние переменные  $W$ . К внешним относятся переменные, описывающие связь процесса с окружающей средой и подпроцессов между собой, а также коэффициенты модели, роль которых будет уточнена ниже. Множество внешних переменных в свою очередь может быть представлено в виде объединения двух непересекающихся подмножеств:  $W = Q \cup P$ ,

где  $Q = \{v_1, \dots, v_l\}$  - множество потоковых переменных,

$P = \{p_1, \dots, p_m\}$  - множество параметров. Потоковые переменные описывают свойства входящих, внутренних и выходя-

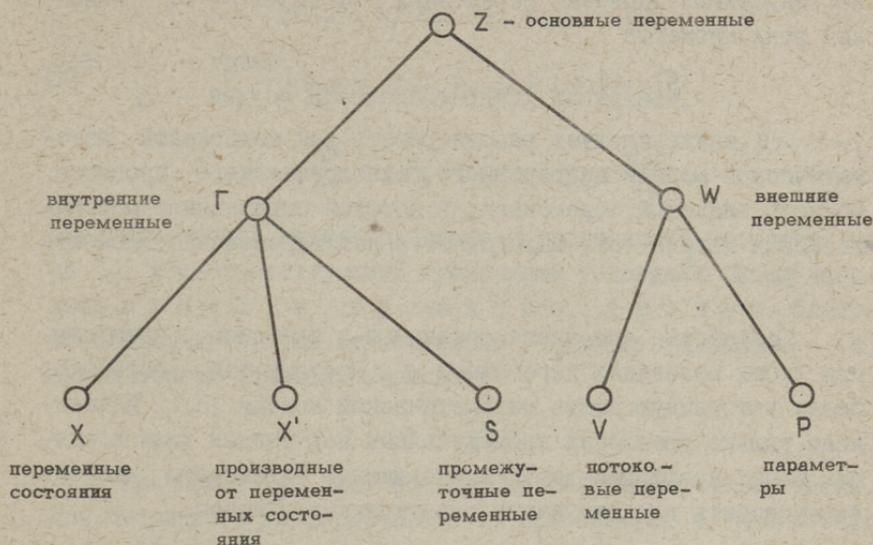
щих потоков процесса (подпроцессов). Сюда относятся расходы, температуры, плотность, составы и другие характеристики потоков. В число параметров входят геометрические размеры аппаратов, переменные, описывающие влияние окружающей среды на процесс, а также различные коэффициенты модели (например, коэффициент теплообмена или коэффициенты, необходимые для его вычисления по заданным формулам). Чем универсальнее модель, тем больше она содержит параметров.

Множество внутренних переменных можно разбить на три непересекающихся подмножества:  $\Gamma = (X, X', S)$ ,

где  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  — множество переменных состояния,  
 $S = \{s_1, \dots, s_q\}$  — множество промежуточных переменных,  
 $X'$  — множество производных от переменных состояния.

Переменные, относительно которых составлены уравнения баланса — это переменные состояния. Многие переменные, входящие в уравнения баланса (2), часто являются сложными функциями внешних переменных и переменных состояния, например, скорость химической реакции зависит от температуры смеси и концентрации реагентов. Чтобы придать уравнениям баланса большую универсальность, целесообразно такие зависимости в эти уравнения не вводить. К тому же, разные уравнения баланса (например, балансы общей массы, массы компонентов и энергии), как правило, содержат общие слагаемые или множители, которые при моделировании целесообразно вычислить только один раз. Для этого и введены промежуточные переменные. Приведенное разбиение множества  $Z$  иллюстрирует древовидный граф фиг. 1.

С учетом сказанного, кроме уравнений баланса (2) в математическую модель процесса (I) входят уравнения, связывающие промежуточные переменные с внешними и переменными состояния, а возможно и с другими промежуточными переменными и их производными от переменных из  $W$  и  $X$ , которые также относим к промежуточным. Ниже все подмножества переменных будем представлять в виде векторов и обозначать соответствующими прописными буквами:  $w, x, s$ . Математическая модель непрерывного технологического процесса принимает вид системы уравнений:



Фиг. 1. Разбиения множества основных переменных на непересекающиеся подмножества.

$$\begin{cases} F_i(w, x, x', s) = 0 \\ S_j = g_j(w, x, s) \end{cases} \quad (3)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, q.$$

Две группы уравнений, входящие в математическую модель непрерывного технологического процесса (3), будем называть уравнениями состояния и уравнениями промежуточных переменных. Эти две группы уравнений относительно независимы, поскольку выполняют в модели процесса различные функции. Так, уравнения состояния описывают балансовые соотношения типа (2). Уравнения промежуточных переменных чаще всего описывают зависимости характеристик явлений переноса, а также физико-химических показателей потоков и компонентов от температуры, давления и т.п. Названные зависимости, в отличие от уравнений баланса, как правило, получены в результате обработки экспериментальных данных. Поэтому уравнения промежуточных переменных, в общем, применимы на ограниченном множестве значений переменных  $Z$ . Ставим каждому

уравнению промежуточных переменных в соответствие множество допустимых значений переменных  $\Omega_j, j = 1, \dots, q$ . Описание этих множеств

$$\Omega_j = \{ z : z_{\min} \leq z \leq z_{\max} \}, \quad (4)$$

$j = 1, \dots, q$ , также следует рассматривать как компоненты математической модели непрерывного технологического процесса. Область значений переменных, в которой справедлива математическая модель (3), определяется как пересечение множеств  $\Omega_j: \Omega = \bigcap_{j=1}^q \Omega_j$ .

Балансовые уравнения состояния в принципе применимы при любых значениях переменных  $z$ . Поэтому они составляют более устойчивую часть математической модели (3). Изменением только уравнений промежуточных переменных (или входящих в них коэффициентов) можно данную балансовую модель приспособить для различных однотипных процессов.

Цель моделирования заключается в определении некоторых интересующих нас характеристик процесса, которые назовем выходными переменными  $Y = \{y_1, \dots, y_r\}$  и будем представлять в виде вектора  $y$ . Чаще всего выходными переменными являются характеристики выходящих потоков. На базе данной системы уравнений состояния и промежуточных переменных можно определить различные выходные переменные [6]. Далее считаем выходными переменные, которые представляемы в виде нелинейных функций от переменных  $z$ :

$$y_k = h_k(w, x, x', s), \quad k = 1, \dots, r. \quad (5)$$

Выходные переменные не принадлежат к множеству основных переменных  $z$  и соответственно уравнения выхода (5) мы не будем считать компонентой математической модели непрерывного технологического процесса (3), (4). Последнее связано с тем, что уравнениями выхода описывается не сам процесс, а только решаемая на модели процесса задача.

В зависимости от природы уравнений состояния, получим различные типы математической модели непрерывного технологического процесса (подпроцесса).

Наиболее детальное описание процесса получим, если запишем уравнения баланса массы, энергии и количества движения для дифференциала объема  $dV$ . Это т.н. микроскопиче-

ские балансы, которые имеют вид системы дифференциальных уравнений в частных производных:

$$F(w, x, s, x_t, x_\xi, x_{\xi\xi}) = 0, \quad (6)$$

где  $t$  - время,

$\xi$  - вектор пространственных координат,

$$x_t = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad x_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad x_{\xi\xi} = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}.$$

Математическую модель процесса с уравнениями состояния типа (4) и соответствующими граничными условиями будем называть моделью нулевого уровня. Следует подчеркнуть, что относительно времени уравнения (4) имеют первый порядок, поскольку

$$q_a = \frac{\partial x_i}{\partial t}.$$

Уравнения (4), как правило, не разрешимы аналитически. Для численного интегрирования их преобразуют в разностную или дифференциально-разностную форму. Целесообразно применять дифференциально-разностную аппроксимацию с дискретизацией только по пространственным координатам и рассматривать каждую пространственную ячейку как элемент идеального перемешивания. Последнее означает, что все характеристики состояния в объеме равны одноименным характеристикам выходящих потоков. Баланс массы, энергии и количества движения описывается в каждой ячейке идеального перемешивания системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(w, x, s). \quad (7)$$

Математическую модель процесса с уравнениями состояния типа (7) будем называть моделью первого уровня.

Для локального описания динамики процесса в окрестности некоторого стационарного состояния или траектории решений уравнений (7) могут быть применены линеаризованные модели:

$$\delta \dot{x} = A(w^0, x^0, s^0) \delta w + B(w^0, x^0, s^0) \delta x + C(w^0, x^0, s^0) \delta s, \quad (8)$$

где

$$\delta w = w - w^0, \quad \delta x = x - x^0, \quad \delta s = s - s^0,$$

а

$$A(w^0, x^0, s^0) = \left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_{w^0, x^0, s^0},$$

$$B(w^0, x^0, s^0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{w^0, x^0, s^0},$$

$$C(w^0, x^0, s^0) = \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{w^0, x^0, s^0},$$

причем тройка векторов  $(w^0, x^0, s^0)$  удовлетворяет уравнениям (7) и соответствующим уравнениям промежуточных переменных из (3), то есть математической модели первого уровня. Уравнения состояния (8) вместе с соответствующими линеаризованными уравнениями промежуточных переменных:

$$\delta S = D(w^0, x^0, s^0)\delta w + E(w^0, x^0, s^0)\delta x + F(w^0, x^0, s^0)\delta s, \quad (9)$$

где

$$D(w^0, x^0, s^0) = \left. \frac{\partial g}{\partial w} \right|_{w^0, x^0, s^0}$$

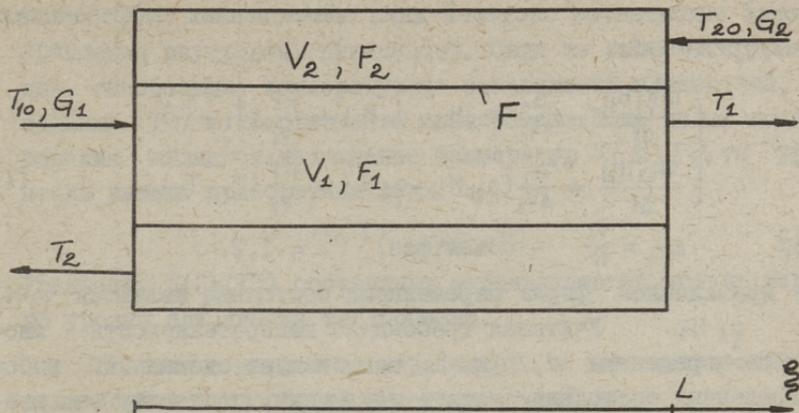
$$E(w^0, x^0, s^0) = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{w^0, x^0, s^0}$$

$$F(w^0, x^0, s^0) = \left. \frac{\partial g}{\partial s} \right|_{w^0, x^0, s^0}$$

составляют математическую модель второго уровня для непрерывного технологического процесса.

Как показано в работе [5], удобными для представления в ЭВМ и организации модельных расчетов являются модели первого и второго уровня, поскольку позволяют сравнительно просто автоматизировать компиляцию модели всего процесса из имеющихся моделей подпроцессов. С другой стороны, параллельное применение нелинейной и линеаризованной модели дает возможность применять для решения задач моделирования оптимизации и идентификации процесса наиболее эффективные методы [6].

В качестве примера рассмотрим математические модели нулевого и первого уровня для теплообменника типа "труба в трубе" (см. фиг. 2). Предполагая, что в обоих объемах —  $V_1$  и  $V_2$  происходит поршневое движение потоков вдоль оси, получим систему двух дифференциальных уравнений в частных производных, описывающую состояние теплообменника:



Фиг. 2. Схема теплообменника типа "труба в трубе".

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\rho_1 H_1)}{\partial t} + \frac{1}{F_1} \cdot \frac{\partial(G_1 \rho_1 H_1)}{\partial \xi} + \frac{\kappa F}{V_1} (T_2 - T_1) &= 0 \\ \frac{\partial(\rho_2 H_2)}{\partial t} + \frac{1}{F_2} \cdot \frac{\partial(G_2 \rho_2 H_2)}{\partial \xi} + \frac{\kappa F}{V_2} (T_1 - T_2) &= 0, \end{aligned} \right. \quad (10)$$

где  $H_i$  — энтальпии потоков  $i = 1, 2$   
 $\rho_i$  — плотности потоков,  
 $T_i$  — температуры потоков,  
 $G_i$  — объемные расходы потоков,  
 $F_i$  — поперечные сечения объемов,  
 $F$  — поверхность теплообмена,  
 $\kappa$  — коэффициент теплообмена.

Уравнения баланса энтальпий (10) вместе с начальными и граничными условиями:  $T_1(0, 0) = T_{10}(0)$ ,  $T_2(0, L) = T_{20}(0)$  ( $L$  — длина теплообменника), соотношениями, описывающими зависимости энтальпий и плотностей от температуры, а также зависимостью коэффициента теплообмена от температур и условий теплообмена (скоростей потоков и толщины поверхности), образуют математическую модель нулевого уровня для рассматриваемого теплообменника.

Разобьем теплообменник по длине на  $N$  отрезков длиной  $\Delta L: L = N \Delta L$  и рассмотрим каждый из отрезков как двухфазную ячейку идеального перемешивания, состояние ко-

торой описывается системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d(\rho_1 H_1)}{dt} = \frac{G_1}{\Delta V_1} (\rho_{10} H_{10} - \rho_1 H_1) - \frac{KF}{V_1} (T_2 - T_1) \\ \frac{d(\rho_2 H_2)}{dt} = \frac{G_2}{\Delta V_2} (\rho_{20} H_{20} - \rho_2 H_2) - \frac{KF}{V_2} (T_1 - T_2), \end{cases} \quad (II)$$

где  $\Delta V_i = \frac{V_i}{N}$  - объем фаз,  $i = 1, 2$ .

В приведенной форме переменными состояния являются  $\rho_i H_i$  и  $\rho_2 H_2$ . Учитывая требование непересекаемости множеств переменных  $W, X$  и  $S$ , нам следует сделанный выбор переменных состояния считать неудачным, поскольку он значительно снижает универсальность модели, не позволяя независимо задавать плотности и энтальпии потоков, которые, в общем, являются функциями температуры:

$$\begin{aligned} \rho_i &= \rho_i(T_i) \\ H_i &= H_i(T_i), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (I2)$$

Поэтому целесообразно преобразовать уравнения (II) так, чтобы переменными состояния становились  $T_1$  и  $T_2$ . Для этого избавимся от произведения переменных под знаком производной:

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho_i H_i)}{dt} &= H_i \frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \frac{dH_i}{dt} = \\ &= H_i \frac{d\rho_i}{dT_i} \cdot \frac{dT_i}{dt} + \rho_i \frac{dH_i}{dT_i} \cdot \frac{dT_i}{dt} = \\ &= (H_i \frac{d\rho_i}{dT_i} + \rho_i \frac{dH_i}{dT_i}) \dot{T}_i = g_i(T_i, \rho_i, H_i) \dot{T}_i. \end{aligned}$$

После преобразования уравнения состояния примут вид

$$\begin{cases} \dot{T}_1 = \frac{G_1}{s_1 \Delta V_1} (\rho_{10} H_{10} - \rho_1 H_1) - \frac{KF}{s_1 V_1} (T_2 - T_1) \\ \dot{T}_2 = \frac{G_2}{s_2 \Delta V_2} (\rho_{20} H_{20} - \rho_2 H_2) - \frac{KF}{s_2 V_2} (T_1 - T_2), \end{cases} \quad (I3)$$

где

$$\begin{aligned} s_1 &= H_1 \frac{d\rho_1}{dT_1} + \rho_1 \frac{dH_1}{dT_1}, \\ s_2 &= H_2 \frac{d\rho_2}{dT_2} + \rho_2 \frac{dH_2}{dT_2}, \end{aligned} \quad (I4)$$

Уравнения внутренних переменных. Сюда же относятся уравнения, описывающие температурные зависимости плотностей, энтальпий (I2) и коэффициента теплообмена. Если целью моделирования является нахождение температур  $T_1$  и  $T_2$ , то уравнения выхода приобретают вид:

$$y_1 = T_1, \quad y_2 = T_2. \quad (I5)$$

Уравнения (I2)-(I5) составляют математическую модель первого уровня для ячейки теплообмена.

Разбиение множества переменных  $z$  математической модели ячейки теплообмена имеет следующий вид

$$W = \{G_1, G_2, T_{10}, T_{20}, F/V_1, F/V_2, \Delta V_1, \Delta V_2\}, \quad X = \{T_1, T_2\},$$

$$S = \{s_1, s_2, q_{10}, q_{20}, H_{10}, H_{20}, q_1, q_2, H_1, H_2, K, \frac{dq_1}{dT_1}, \frac{dH_1}{dT_1}, \frac{dH_2}{dT_2}, \frac{dq_2}{dT_2}\},$$

причем множество внешних переменных  $W$  можно в свою очередь разбить на потоковые переменные и параметры

$$Q = \{G_1, G_2, T_{10}, T_{20}\}, \quad P = \{F/V_1, F/V_2, \Delta V_1, \Delta V_2\}.$$

Если мы какую-нибудь из промежуточных переменных  $s_j \in S$  считаем независимой от внешних переменных и переменных состояния, то  $s_j$  исключается из множества  $S$  и становится элементом множества  $W$ . Одновременно на единицу уменьшается и количество уравнений промежуточных переменных. В этом заключается один из основных методов упрощения математических моделей непрерывных технологических процессов, причем общий вид уравнений состояния остается неизменным.

Примечательным свойством теоретических моделей непрерывных технологических процессов является малое количество определяемых из эксперимента параметров. Например, в модели теплообменника можно ограничиться определением только коэффициента теплообмена, поскольку все остальные параметры легко получить из справочных данных. К тому же, модели стационарного состояния и динамики содержат одни и те же параметры, что позволяет идентификацию модели провести или на основе данных стационарного режима процесса, или по данным исследования динамики.

## Л и т е р а т у р а

1. Х и м м е л ь б л а у Д. Анализ систем статистическими методами. М., "Мир", 1973.
2. G r u h n, G., D i e t z s c h, L., R a i n e r, H. Programmsysteme für die mathematische Modellierung verfahrenstechnischer Systeme auf Digitalrechner. Chem. Technik, 23, Nr. 1, 4 (1971).
3. З а д е Л., Д е з о е р Ч. Теория линейных систем. М., "Наука", 1970.
4. Н и м м е л ь б л а у, D.M., В и с с h o f f, K.V. Process Analysis and Simulation. Wiley, N.Y., (1968).
5. А а р н а О.А. Моделирование непрерывных технологических процессов на ЭВМ. II. Организация модельных расчетов. См. наст. сб. с. 149.
6. А а р н а О.А. Моделирование непрерывных технологических процессов на ЭВМ. III. Решение типовых задач моделирования, оптимизации и идентификации. См. наст. сб. с. 163.

O. Aarna

### Computer Simulation of the Continuous Technological Processes I

On Mathematical Models of a Continuous Technological Process

#### Summary

A general form of the mathematical model of a continuous technological process is presented consisting of state (material, energy and momentum balance) and intermediate variable equations. The model is undirected on all variables excl. intermediate variables and thus allows solving numerous different problems. Three hierarchy levels of the state equations are considered: distributed parameter (microscopic balance), lumped parameter (macroscopic balance) and linearized lumped parameter form.

УДК 681.3.06:518

О.А.Аарна

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ  
 ПРОЦЕССОВ НА ЭВМ

II. Организация модельных расчетов

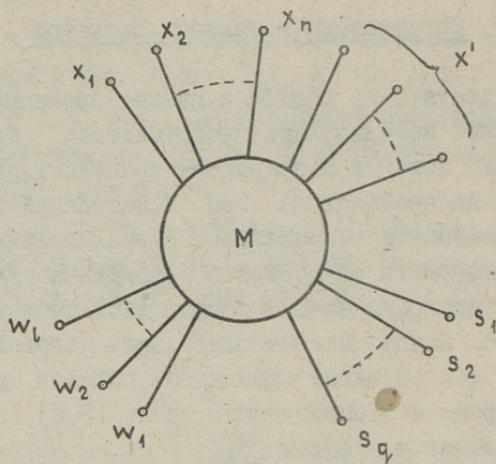
Только достаточно мощное и гибкое программное обеспечение позволяет использовать преимущества теоретических математических моделей непрерывных технологических процессов при их моделировании на ЭВМ. В настоящей статье показано, что применение концепции вычислительных моделей [1] дает возможность осуществить автоматическую генерацию моделирующих программ на ЭВМ с модульной системой программирования [2]. Концепция вычислительных моделей оказалась плодотворной при создании прикладных пакетов программ решения инженерных и экономических задач [3,4], а также входных языков для этих пакетов [5,6].

Вычислительная модель непрерывного технологического процесса. В работе [7] дана общая форма математической модели непрерывного технологического процесса в виде системы уравнений состояния и промежуточных переменных, а также описаний допустимых множеств значений переменных:

$$\begin{aligned} F_i(w, x, x', s) &= 0, \quad i = 1, \dots, n \\ s_j &= g_j(w, x, s), \quad j = 1, \dots, q \\ \Omega_j &= \{z : z_{\min}^j \leq z \leq z_{\max}^j\} \\ z &= (w, x, x', s)^T, \end{aligned} \quad (I)$$

где  $w$  — вектор внешних переменных,  
 $x$  — вектор состояния,  
 $x'$  — вектор производных от переменных состояния,  
 $s$  — вектор промежуточных переменных.

Каждому множеству  $\Omega_j$  можно взаимно однозначно сопоставить предикат  $r_j$ , который принимает значение истины, если  $\bar{z}^j \in \Omega_j$ , где  $\bar{z}^j$  — значение вектора переменных, входящих в уравнение  $g_j$ . Совокупность предикатов  $r_j$  образует множество  $R$ . Обозначим множество переменных, входящих в уравнения состояния, и промежуточных переменных через  $Z$ , а сами уравнения рассмотрим как множество отношений  $G$ . В таком случае тройка  $M=(Z,G,R)$  и есть вычислительная модель непрерывного технологического процесса. Схема этой модели приведена на фиг. 1.



Фиг. 1. Схема вычислительной модели непрерывного технологического процесса.

Специфика вычислительной модели непрерывного технологического процесса заключается в том, что уравнения состояния  $F_i = 0$  можно использовать как отношения в смысле работы [1], то есть применять для нахождения значений некоторого подмножества переменных из  $Z$ , если заданы значения остальных переменных. Каждое из уравнений промежуточных переменных может быть применено только для нахождения соответствующей  $s_j$ ,  $j=1, \dots, q$ , то есть каждое уравнение промежуточных переменных можно рассматривать как оператор присваивания:  $s_j := g_j(w, x, s)$ . Множество предикатов  $r_j$  связано только с операторами  $g_j$ . В работе [7] было показано, что пере-

менная  $s_j$  не входит в  $q_j$ . Поэтому вычислительная модель непрерывного технологического процесса является стационарной в смысле [1].

Вычислительной модели  $M$  можно сопоставить граф с двумя подмножествами вершин: вершины-переменные и вершины отношения. Дуги, инцидентные вершинам  $F_i$ , неориентированные. Ориентация остальных дуг определена уравнениями промежуточных переменных. На фиг. 2 приведен граф вычислительной модели для ячейки теплообмена, рассмотренной в работе [7] (см. уравнения (I2-I5)). Для лучшей обзорности вершины-переменные обозначены черными кружочками. Уравнения промежуточных переменных реализуются вычислительными модулями пяти типов:

$$\begin{aligned} c_1 &\equiv z_2 \frac{dz_3}{dz_1} + z_3 \frac{dz_2}{dz_1}, & c_2 &\equiv H(z_1), \\ c_3 &\equiv \rho(z_1), & c_4 &\equiv z_1 - z_2, & c_5 &\equiv -z_2. \end{aligned} \quad (2)$$

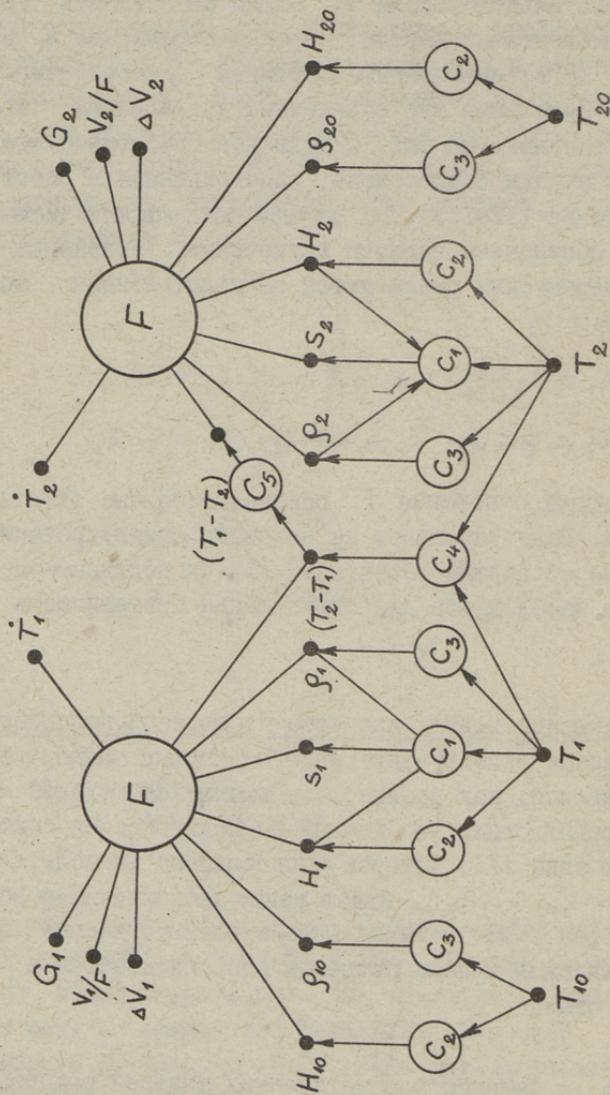
Однотипные отношения  $F$  описывают баланс энтальпий в двух фазах. Ради упрощения не показаны ориентированные дуги, ведущие от вершин-переменных  $z_k$  к вершинам-операторам  $q_j$  и необходимые для определения применимости операторов  $q_j$ .

Составление модели процесса из моделей подпроцессов. Математическая модель непрерывного технологического процесса составляется, как правило, из имеющихся моделей подпроцессов. Предположим, что каждый из подпроцессов описывается моделью типа (I), которой сопоставлена вычислительная модель  $M_\alpha = (Z_\alpha, G_\alpha, R_\alpha)$ . Связь между подпроцессами осуществляется через общие материальные и энергетические потоки. В математической модели процесса это описывается в виде уравнений связи

$$z_j^\alpha = z_j^\beta, \quad (3)$$

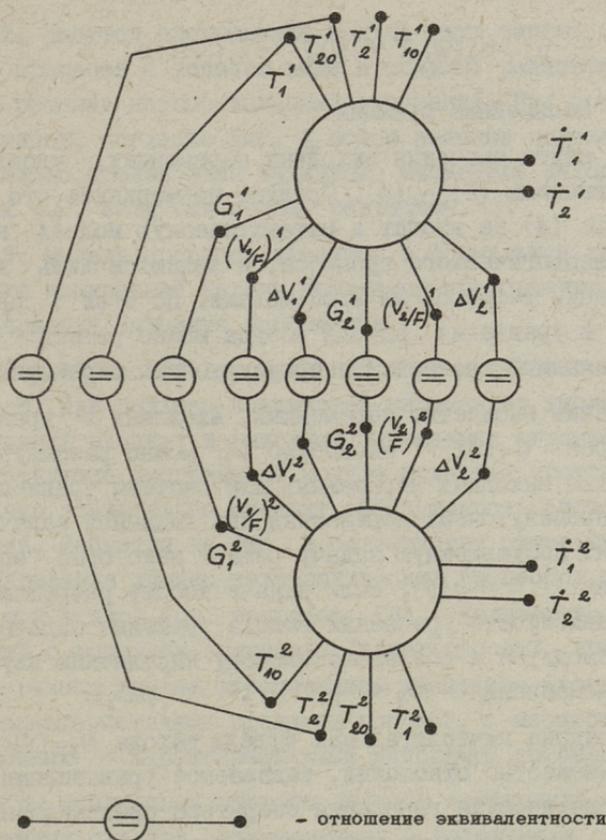
где  $\alpha, \beta$  - индексы математических моделей подпроцессов.

Нетрудно убедиться, что множество основных переменных непрерывного технологического процесса является объединением соответствующих множеств подпроцессов:  $Z = \bigcup_\alpha Z_\alpha$ , множество отношений - объединением множеств отношений подпро-



Фиг. 2. Граф вычислительной модели ячейки теплообмена.

и отношений эквивалентности  $E$  типа (3):  $G = \bigcup_{\alpha} G_{\alpha} \cup E$ , а множество предикатов соответственно объединением множеств предикатов подпроцессов:  $R = \bigcup_{\alpha} R^{\alpha}$ .



Фиг. 3. Составление вычислительной модели процесса из вычислительных моделей подпроцессов.

На фиг. 3 в качестве примера показана схема составления вычислительной модели теплообменника из двух идентичных вычислительных моделей ячеек теплообмена, приведенных на фиг. 2.

Решение задачи моделирования. Задачу моделирования можно сформулировать следующим образом: Даны два множества -

входные переменные  $J \subset (z \setminus s)$  и выходные переменные  $Y$ . Заданы значения входных переменных и уравнения, связывающие выходные переменные с основными переменными процесса  $Z$ :

$$y_k = h_k(w, x, x', s), \quad k = 1, \dots, r, \quad (4)$$

где  $h_k$  - нелинейные функции.

Необходимо найти значения выходных переменных, удовлетворяющих уравнениям (1) - (4). Следует подчеркнуть, что уравнения выхода (4) не входят в математическую модель непрерывного технологического процесса, а являются лишь компонентом задачи, решаемой на этой модели. По этой причине  $Y \cap Z = \emptyset$  и уравнения выхода всегда можно решать после решения уравнений состояния и промежуточных переменных (1).

Обозначим множество переменных, входящих в уравнения выхода, через  $D_y \subset Z$ . Множество  $D_y$  можно рассматривать как множество выходных переменных для системы уравнений состояния и промежуточных переменных при заданной задаче моделирования. Поставленную задачу решает некоторый оператор присваивания  $Y := \varphi(J)$ , если задача вообще разрешима. С учетом независимости уравнений выхода, решение задачи моделирования сводится к последовательному выполнению двух операторов присваивания:  $D_y := \varphi_1(J)$ ,  $Y := \varphi_2(D_y)$ .

Если задана вычислительная модель выхода  $M_y = (Y \cup D_y, H)$ , где  $H$  - множество отношений, задаваемое уравнениями выхода, то автоматическая генерация оператора присваивания  $Y := \varphi_2(D_y)$  не вызывает принципиальных затруднений, поскольку вычислительный процесс сводится к последовательному выполнению операторов  $y_k = h_k(w, x, x', s)$ ,  $k = 1, \dots, r$ .

Сложность реализации оператора присваивания  $D_y := \varphi_1(J)$  заключается в том, что уравнения состояния имеют неявный вид (в соответствующей вычислительной модели дуги, инцидентные вершинам  $F_i$ , не ориентированы). Если заданы множества  $J$  и  $D_y$ , то вычислительная модель процесса  $M$  преобразуется в оперативную схему, где все отношения  $F_i$  разрешены относительно одной из переменных  $d_i \in D_y$ , то есть преобразованы к явному виду. Для программной реализации оператора  $D_y := \varphi_1(J)$  имеются три возможности:

1. Для всех комбинаций наборов входных и выходных переменных имеются программные модули, реализующие соответствующий оператор  $\Psi$ .

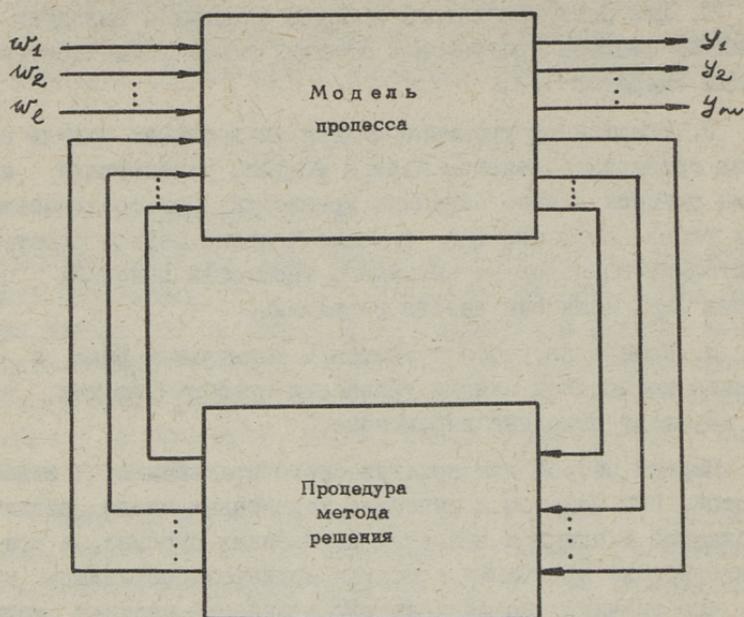
2. Имеются программные модули двух типов: модуль с моделью процесса в неявном виде и модули, реализующие алгоритмы решения неявно заданных уравнений. При соединении этих двух типов, согласно фиг. 4, можно неявные модели решать относительно произвольно заданного множества выходных переменных  $D_y$ , если они вообще разрешимы.

3. Модель процесса хранится в формульном виде, а для решения конкретной задачи уравнения преобразуют так, чтобы они выражали выходные переменные.

Первый способ для практического применения наиболее простой. При большом количестве переменных число различных комбинаций входных и выходных переменных огромно, а все соответствующие программные модули придется составлять вручную, что значительно снижает эффективность системы моделирования. Несмотря на это, в большинстве существующих систем моделирования химико-технологических процессов принят именно такой подход (см. например, [8]). Количество программных модулей с моделями процессов (подпроцессов) придерживается на умеренном уровне ограничением множества входных переменных характеристиками входящих потоков, а множества выходных переменных — характеристиками выходящих потоков.

Для реализации второго способа необходимо наличие более гибких средств оперирования с моделями и планирования процесса решения. Но зато, как известно в работе [9], появляется возможность решения на одной модели процесса значительного количества различных задач. Составление моделирующей программы происходит с применением средств модульной системы программирования на уровне внутреннего языка ЭВМ. Недостатком данного метода следует считать то, что алгоритмы решения неявно заданных моделей имеют итеративный характер и связаны, в общем, с большим объемом вычислений.

Наиболее эффективным, безусловно, следует считать третий способ, требующий наличия развитых средств преобразования алгебраических выражений. В качестве первых попыток применения этого метода для моделирования химико-технологических



Фиг. 4. Схема связи модели процесса с процедурой метода решения.

процессов следует отметить работы [10, 11]. Составление моделирующей программы происходит в два этапа. По описанию задачи преобразователь выражений автоматически генерирует программу на процедурно-ориентированном языке (ФОРТРАН, АЛГОЛ), которая затем транслируется во внутренний язык ЭВМ.

Для создания системы моделирования непрерывных технологических процессов нами выбран второй способ, при котором для планирования решения и автоматической генерации моделирующей программы можно применять вышерассмотренные вычислительные модели.

#### Комбинированная модель процесса

Особенности решения задачи моделирования определены видом и структурой уравнений состояния. Для расширения круга решаемых задач нами выбрана комбинированная форма математической модели непрерывного технологического процесса, где параллельно имеются нелинейная (модель первого уровня по [7]):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(w, x, s) \\ s = g(w, x, s) \end{cases} \quad (5)$$

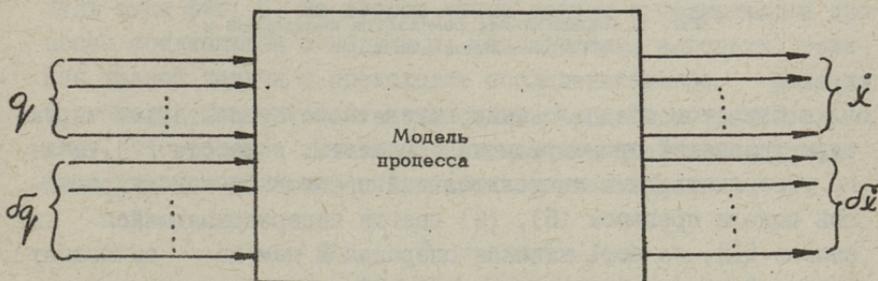
и линеаризованная модель (модель второго уровня):

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= A \delta q \\ \delta s &= B \delta q, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \delta x &= x - x^0, & \delta s &= s - s^0, & \delta q &= q - q^0, \\ q &= (w, x, s)^T, & A &= \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{q=q^0}, & B &= \left. \frac{\partial g}{\partial q} \right|_{q=q^0}, \end{aligned}$$

причем вектор  $q^0$  удовлетворяет уравнениям (5). Общая схема комбинированной модели процесса представлена на фиг. 5.

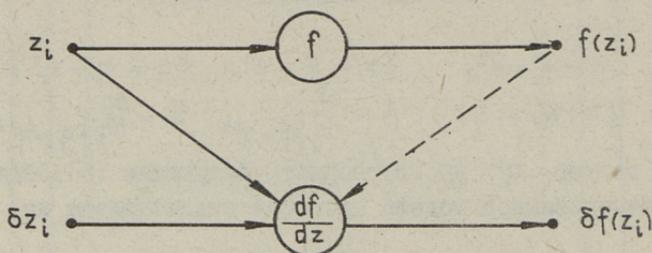


Фиг. 5. Схема комбинированной модели процесса.

В принятой комбинированной модели уравнения состояния разрешены относительно производных по времени от переменных состояния. Следует подчеркнуть, что в вычислительной модели процесса переменные, как правило, не объединены в векторы. Образование векторов происходит при описании задачи и предусмотрено для стандартизации связи модуля с моделью процесса и модуля, реализующего алгоритм решения задачи на модели (например, решение системы нелинейных уравнений, интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений и т.п.).

Для программной реализации комбинированной модели все операторы  $F_i, g_j$  оформляются в виде программных модулей,

где параллельно с вычислением значений функций вычисляются и их полные дифференциалы (см. фиг. 6), в результате чего количество входных и выходных переменных модели удваивается. Поэтому получение нелинейной и линеаризованной модели процесса можно рассматривать как одну задачу, считая каждую переменную двумерным вектором  $(z_j, \delta z_j)$ .



Фиг. 6. Параллельная реализация нелинейной и линеаризованной модели.

С учетом предположения, сделанного относительно структуры уравнений промежуточных переменных в работе [7], можно утверждать, что вычислительный процесс на комбинированной модели процесса (5), (6) всегда неперекрывающийся в смысле [1], то есть никакая операция в нем не вычисляет значений уже заданных переменных. Это обстоятельство сильно упрощает планирование решения и генерацию программы с комбинированной моделью процесса.

Аналогично комбинированной модели процесса можно реализовать и комбинированную модель выхода, в которой параллельно с вычислением выходных переменных

$$y_k = h_k(q), \quad k=1, \dots, r, \quad (7)$$

вычисляются соответствующие переменные линеаризованной модели выхода

$$\delta y = C \delta q, \quad (8)$$

где

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial q} \right|_{q=q^0}.$$

Декомпозиция задачи моделирования. Выше было показано, что структура уравнений выхода позволяет их всегда решать после решения уравнений состояния и внутренних переменных. Однако решение последних также часто удается раз-

бить на подзадачи меньшей размерности, решаемые последовательно. Размерностью задачи назовем размерность вектора итерлируемых переменных, в нашем случае  $\dot{x}$  (или  $\delta\dot{x}$ ). Стремление к уменьшению размерности задачи вызвано, с одной стороны, ограниченностью оперативного запоминающего устройства ЭВМ и, с другой стороны, тем, что эффективность итеративных алгоритмов снижается при решении задач высокой размерности. Разбиение модели процесса на подмодели минимальных размеров и их упорядочение также можно осуществить на вычислительной модели процесса.

Решение задачи моделирования непрерывного технологического процесса происходит в два этапа. На первом этапе по описанию задачи составляется соответствующая вычислительная модель, которая затем разбивается на минимальные упорядоченные подмодели. Для каждой такой подмодели составляется оперативная схема и генерируется программный модуль типа фиг. 5. На втором этапе модули с подмоделями процесса соединяются с модулями, реализующими алгоритм решения данной задачи и происходит последовательное решение подмоделей относительно подмножеств  $D_{y_i}$ . Это равносильно тому, что решение задачи моделирования сводится к последовательному выполнению операторов присваивания:

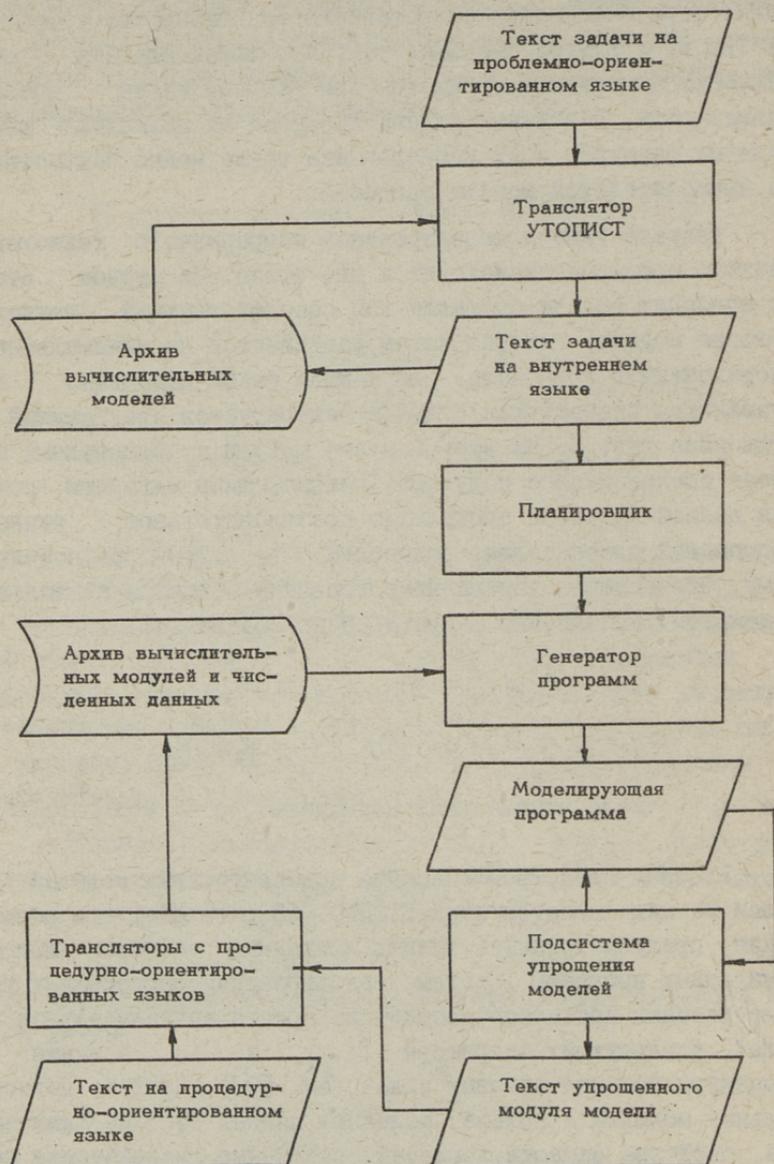
$$D_{y_1} := \psi_1(J), \quad D_{y_2} := \psi_2(JU D_{y_1}), \dots,$$

$$D_{y_p} := \psi_p\left(JU\left(\bigcup_{i=1}^{p-1} D_{y_i}\right)\right), \quad Y := \psi_2(D_y),$$

где  $p$  - число минимальных подмоделей, а  $D_y = JU\left(\bigcup_{i=1}^p D_{y_i}\right)$ .

Удобным средством описания вычислительных моделей и задач на них является язык УТОПИСТ [3], точнее, его расширения, предусмотренные служить входными языками пакетов прикладных программ. Система моделирования непрерывных технологических процессов состоит из архива вычислительных модулей, реализующих операторы  $f_i, g_j$  и  $h_k$ , а также из процедуры решения типовых задач (см. [9]), архива вычислительных моделей и архива численных данных (физико-химические свойства веществ и смесей, различные эмпирические коэффициенты и т.п.), транслятора с языка УТОПИСТ, планировщика, генератора программ, трансляторов с процедурно-ориентированных языков и подсистемы упрощения моделей. Последняя

будет подробно описана в одной из последующих статей настоящей серии. Схема системы моделирования непрерывных технологических процессов приведена на фиг. 7.



Фиг. 7. Функциональная схема системы моделирования непрерывных технологических процессов.

## Л и т е р а т у р а

1. Т н у г у Э.Х. Решение задач на вычислительных моделях. - Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 10, № 3, 717 (1970).
2. Т н у г у Э.Х. Генератор программ в модульной системе программирования. - Кибернетика, № 6, 74 (1974).
3. Т н у г у Э.Х. Система модульного программирования для ЭВМ "Минск-22". Общее описание. Таллин, 1970.
4. Г р и г о р е н к о В.П., М я н н и с а л у М.А., Р е б а н е Л.А. Пакет прикладных программ по математической статистике для ЭВМ "Минск-22". Таллин, 1975.
5. К а б е р М.И., М я н н и с а л у М.А., Т н у г у Э.Х., У н т М.И., Универсальный транслятор описаний текстовых задач для ЭВМ "Минск-22", "УТОПИСТ-3". Рабочая инструкция, Таллин, 1972.
6. М я н н и с а л у М.А., Т н у г у Э.Х. Язык описания задач УТОПИСТ. - Управляющие системы и машины, № 1, 80. (1974).
7. А а р н а О.А. Моделирование непрерывных технологических процессов на ЭВМ. I. О математических моделях непрерывных технологических процессов. - См. наст. сб. с. 137.
8. К р о у К. и др. Математическое моделирование химических производств, М., "Мир", 1973.
9. А а р н а О.А. Моделирование непрерывных технологических процессов на ЭВМ. III. Решение типовых задач моделирования, оптимизации и идентификации. См. наст. сб. с. 163.
10. M a h, R.S. Automatic program generation in chemical engineering computation. Trans. Instn. Chem. Engrs, v. 49, 101 (1971).
11. S o y l e m e z, S., S e i d e r, W.D. A new technique for precedence - ordering chemical process equation sets. AIChE Journal, v. 19, N 5, 934 (1973).

Computer Simulation of the Continuous Techno-  
logical Processes II

Simulation Calculations Organization

Summary

An automatic program generation for modelling continuous technological processes described by state, intermediate variable and output equations is considered. A combined non-linear and linearized process model implementation and the role of structural models are discussed. A functional scheme of the computer simulation system of a continuous technological process is given.

О.А. Аарна

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ  
 ПРОЦЕССОВ НА ЭВМ

Ш. Решение типовых задач моделирования,  
оптимизации и идентификации

В работе [1] показана возможность автоматической генерации комбинированной математической модели непрерывного технологического процесса, состоящей из нелинейной модели (модели первого уровня [2]):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(w, x, s), \\ s = g(w, x, s), \end{cases} \quad (1)$$

где  $x$  - вектор состояния,

$w$  - вектор внешних переменных,

$s$  - вектор промежуточных переменных,

$f, g$  - нелинейные фектор-функции размерности  $n$  и  $m$  соответственно,

и линеаризованной модели (модели второго уровня):

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = A \delta q, \\ \delta s = B \delta q, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\delta x = x - x^0$ ,  $\delta s = s - s^0$ ,  $\delta q = q - q^0$ ,

$$q = (w, x, s)^T, \quad A = \frac{\partial f}{\partial q} \Big|_{q=q^0}, \quad B = \frac{\partial g}{\partial q} \Big|_{q=q^0},$$

причем вектор  $q^0$  удовлетворяет уравнениям (1). При описании задачи, решаемой на модели процесса (1), (2), к последним прибавляются уравнения выхода

$$y = h(q) \quad (3)$$

$$\delta y = C \delta q, \quad (4)$$

где  $\delta y = y - y^0$ ,  $y^0 = h(q^0)$ ,  $C = \frac{\partial h}{\partial q} \Big|_{q=q^0}$ .

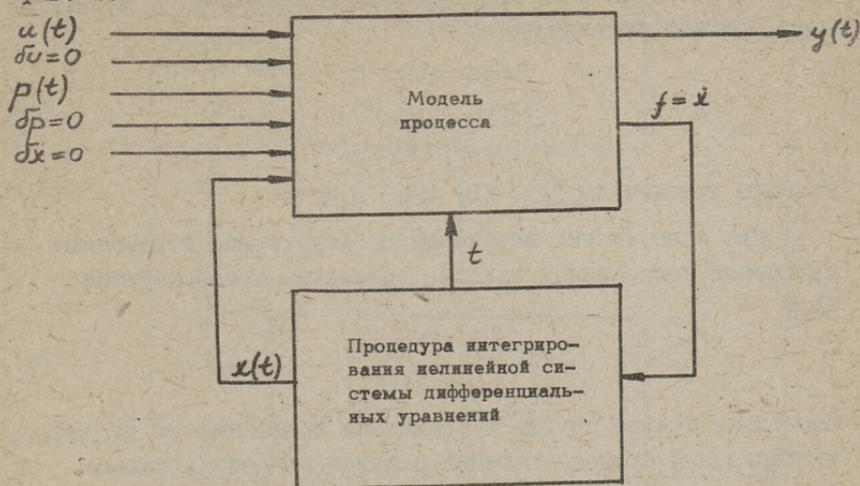


Фиг. 1. Схема модуля модели непрерывного технологического процесса.

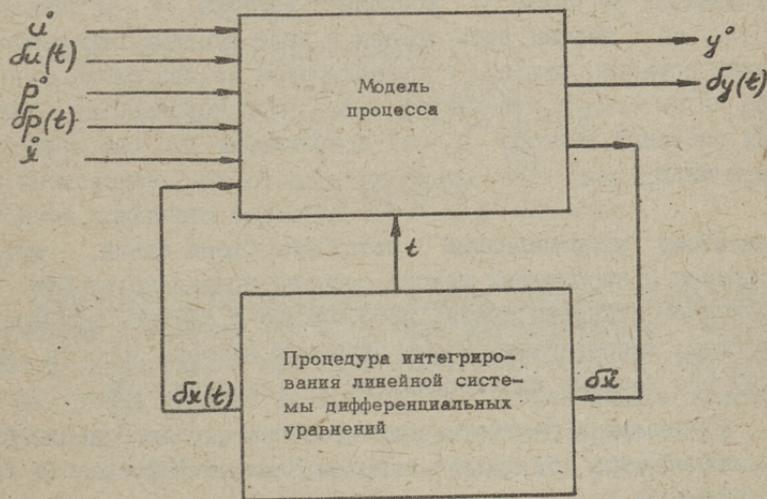
Входными для модели могут быть только внешние переменные и переменные состояния [1], которые обозначим общим символом  $v$ . В различных задачах вектор  $v$  по-разному разбивается на блоки. Схема математической модели (1) - (4) приведена на фиг. 1. Для управления вычислениями на модели имеется дополнительная входная переменная  $T$  - признак, разрабатываемый программой, которая реализует алгоритм решения задачи. По признаку  $T$  работает только нелинейная или комбинированная модель (самостоятельная работа линеаризованной модели невозможна). В данной статье показано, что на математической модели (1) - (4) возможно решать целый ряд различных задач.

Моделирование динамики процесса. При моделировании динамики процесса вектор  $w$  разбивается на входные переменные  $u$  и параметры  $p: w(u, p)^T$ . Решать необходимо систему уравнений (1) (или (2)) при заданном начальном состоянии  $x(t_0)$  (или  $\delta x(t_0)$ ) и входной вектор-функции  $u(t)$  (или  $\delta u(t)$ ),  $t \in [t_0, t_1]$ . При этом вектор параметров фиксирован  $p = p^0 = \text{const}$ . Для численного интегрирования уравнений (1) (или (2)) можно использовать любой из имеющихся методов решения систем нелинейных (линейных) обыкновенных дифференциальных уравнений, заданных в нормальной форме Коши [3]. Схемы связи модели процесса с процедурой интегри-

рования системы дифференциальных уравнений приведены на Фиг. 2.



а



б

Фиг. 2. Схема связи модели процесса с процедурой интегрирования системы дифференциальных уравнений :

а - нелинейная; б - линейная.

Нахождение стационарного состояния. Стационарное состояние процесса описывается тройкой векторов  $(v^0, s^0, y^0)$ , удовлетворяющей уравнениям

$$\begin{cases} f(v^0, s^0) = 0, \\ s^0 = g(v^0, s^0), \\ y^0 = h(v^0, s^0), \end{cases} \quad (5)$$

то есть уравнениям (1), (3) при  $\dot{x} = 0$ .

При подстановке выражений промежуточных переменных в уравнения состояния и выхода, последние преобразуются к виду

$$\begin{cases} \varphi(v^0) = 0, \\ y^0 = \psi(v^0). \end{cases} \quad (6)$$

Поскольку вектор выхода в уравнения состояния не входит, то итерационный процесс решения следует применять только к системе уравнений

$$\varphi(v^0) = 0. \quad (7)$$

Обозначим число координат вектора  $v^0$  через  $n_v$ . При правильной постановке задачи из уравнения (7) могут быть определены не более  $n$  координат вектора  $v^0$ , а остальные  $(n_v - n)$  должны быть заданы в виде входных переменных  $u$ . Таким образом, вектор  $v$  разбивается на два блока  $v = (u, r)^T$ , где  $\dim u = n_v - n$ , а  $\dim r = n$ . При подстановке заданных значений вектора  $u = u^0$  в уравнение (7) оно приводится к виду

$$\theta(r^0) = 0, \quad (8)$$

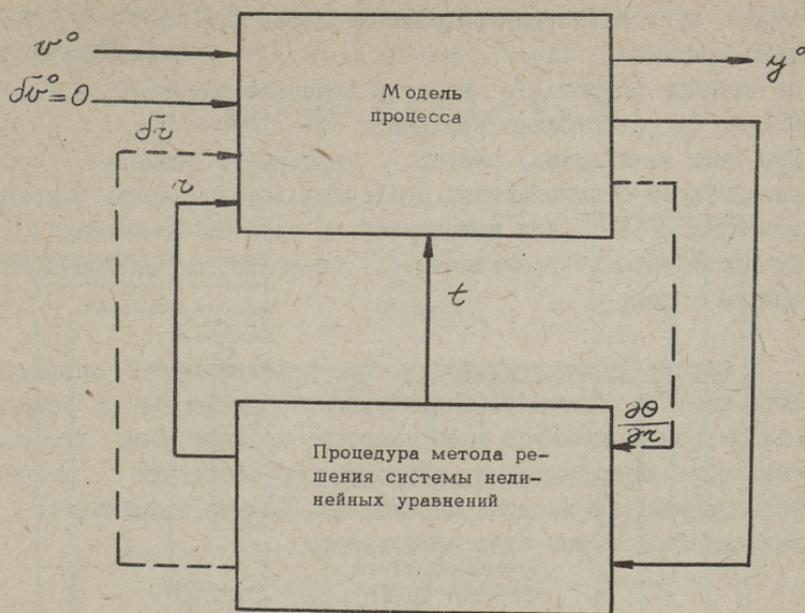
решаемому итерационными методами. Схема связи модели процесса с процедурой метода решения приведена на фиг. 3. Пунктиром показаны связи, необходимые в случае применения методов, использующих кроме значений вектора  $\theta(r)$  и матрицу его частных производных по  $r$  (якобиан)  $\frac{\partial \theta}{\partial r}$ .

Наиболее эффективными для решения систем нелинейных уравнений типа (8) являются метод Ньютона-Рафсона и его модификации [4]

$$r_{k+1} = r_k - \lambda_k \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{r=r_k} \theta(r_k), \quad (9)$$

где  $k$  - номер итерации.

Учитывая структуру модели процесса (1), (2), отпадает необходимость в явном преобразовании исходных уравнений



Фиг. 3. Схема связей модели процесса с процедурой метода решения при нахождении стационарного состояния.

(5) к виду (7). Нетрудно показать, что

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)_{r=r_k} = \left[ \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) \right]_{r=r_k} \quad (10)$$

Для вычисления  $i$ -го столбца якобиана  $\frac{\partial \theta}{\partial r}$  вектор  $\delta r$  должен быть единичным вектором  $\delta r = i^i$ , а  $\delta u = 0$ .

#### Получение линеаризованной модели объекта управления.

Рассмотрим уравнения (1) и (3) как математическую модель объекта управления с вектором измеряемых величин (выходов)  $y$ . Дан также входной вектор  $u$ , являющийся блоком вектора внешних переменных  $w$ . Требуется найти линеаризованную модель этого объекта управления в стандартной форме

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = A_0 \delta x + B_0 \delta u, \\ \delta y = C_0 \delta x + D_0 \delta u. \end{cases} \quad (11)$$

Матрицы  $A_0, B_0, C_0$  и  $D_0$  могут быть вычислены по столбцам. Для этого входные векторы модели  $(\delta u, \delta x)$  должны быть единичными векторами. При вычислении  $i$ -го столбца матриц

$A_0$  и  $C_0$  в качестве значений векторов  $\delta x$  и  $\delta u$  необходимо принимать  $\delta x = e^i$ ,  $\delta u = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Для получения  $j$ -го столбца матриц  $B_0$  и  $D_0$  в качестве значений векторов  $\delta x$  и  $\delta u$  необходимо принимать  $\delta x = 0$ ,  $\delta u = e^j$ ,  $j = 1, \dots, n_u$ . При этих вычислениях вектор  $V$  принимает значение, соответствующее стационарному состоянию (стационарная линеаризованная модель), или изменяется во времени по закону  $V(t)$ , удовлетворяющему уравнениям (I) (нестационарная линеаризованная модель).

Анализ чувствительности. При решении задач оптимизации, синтеза систем автоматического управления и оценки параметров появляется необходимость исследования чувствительности характеристик стационарного состояния относительно заданных входных переменных. Задача заключается в нахождении матрицы чувствительности

$$S = \frac{\partial y}{\partial u} \Big|_{v=v^0} \quad (I2)$$

В стационарном состоянии выполнены уравнения (6), из которых с учетом блочной структуры вектора  $V = (u, x)^T$  получим

$$S = \left[ \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \right]_{v=v^0} = \left[ \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right]_{v=v^0} \quad (I3)$$

С учетом обозначений, введенных в предыдущем разделе для стандартной линеаризованной модели объекта управления, получим

$$S = D_0 - C_0 A_0^{-1} B_0 \quad (I4)$$

Нахождение оптимального стационарного состояния. Пусть требуется найти входной вектор  $u^*$ , минимизирующий критерий качества стационарного состояния

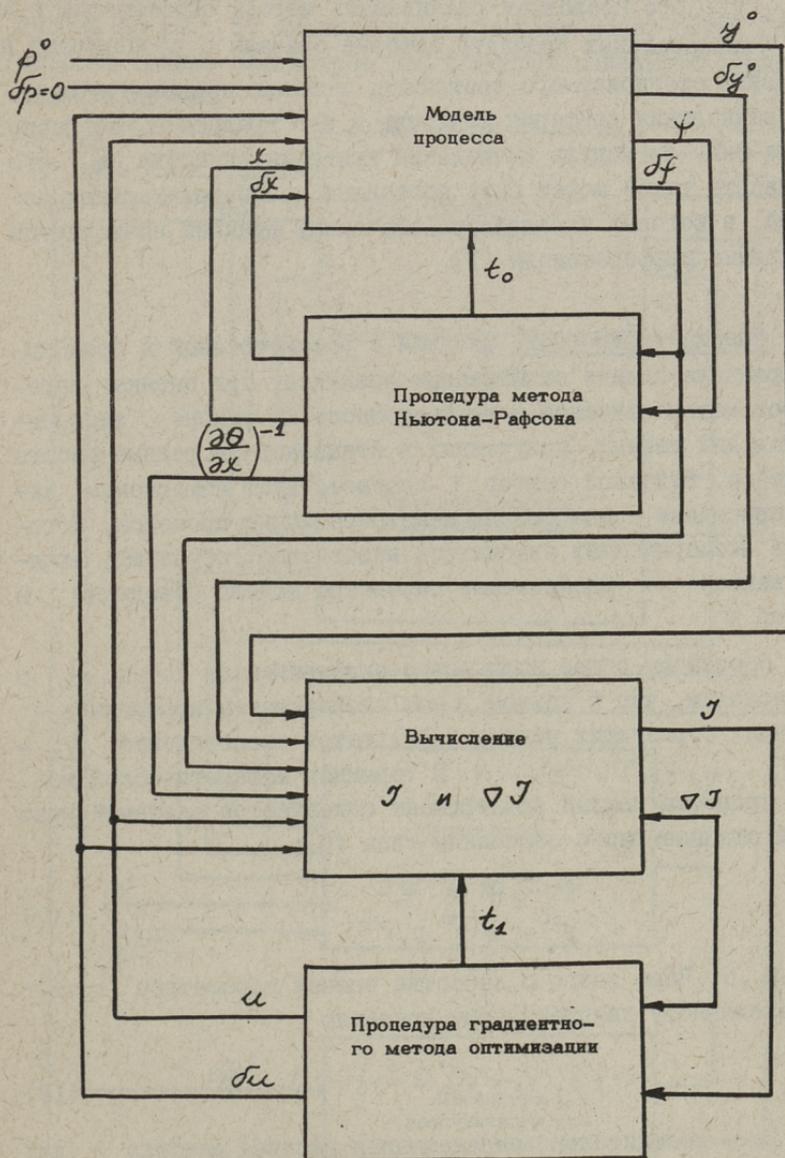
$$J = \eta(u^0, y^0) \rightarrow \min, \quad (I5)$$

причем  $u^0$  и  $y^0$  удовлетворяют уравнениям (6). Разбиение вектора  $V$  такое же, как при моделировании динамики процесса. Вектор параметров  $p$  считаем фиксированным.

Наиболее эффективными для решения этой задачи являются градиентные методы, особенно метод сопряженных градиентов.

тов [4]. Выражение для градиента критерия качества имеет следующий вид:

$$\nabla_u J = \frac{\partial J}{\partial u^0} + \frac{\partial J}{\partial y^0} \cdot \frac{\partial y^0}{\partial u^0} = \frac{\partial J}{\partial u^0} + \frac{\partial J}{\partial y^0} \cdot S_u, \quad (16)$$



Фиг. 4. Схема связи моделей при нахождении оптимального стационарного состояния.

где  $S_u$  — матрица, составленная из столбцов матрицы чувствительности (I3), соответствующих координатам вектора  $u$ .

От конкретного вида критерия (I5) зависят только векторы  $\frac{\partial J}{\partial u^0}$  и  $\frac{\partial J}{\partial y^0}$ . Это позволяет реализовать методы оптимизации в виде универсальных процедур, которые связаны с процедурами нахождения стационарного состояния, моделью процесса и модулем вычисления критерия качества и его градиента, согласно схеме фиг. 4. Модуль вычисления критерия качества и его градиента также может быть составлен из вычислительных модулей, в которых параллельно значениям функций вычисляются их полные дифференциалы [I].

Оценка параметров. Сходная с рассмотренной в предыдущем разделе задача оптимизации возникает при оценке параметров математической модели процесса на основе экспериментальных данных, полученных в стационарном режиме работы процесса. Выходной вектор  $Y$  соответствует измеряемым характеристикам процесса. Входные переменные процесса, которые в экспериментах изменялись независимо, образуют входной вектор  $u$ . Оцениваемые параметры модели объединим в вектор  $p$ .

Обозначим общее количество экспериментов через  $N$  и предположим, что в каждом  $i$ -ом эксперименте измерялись  $r$  величин, образующих вектор результатов эксперимента  $y_e^i = (y_{e1}^i, \dots, y_{er}^i)^T$ ,  $i=1, \dots, N$ . В терминах математической модели процесса каждый эксперимент описывается системой уравнений стационарного состояния типа (6):

$$\begin{aligned} \varphi(u^{0i}, p, x^{0i}) &= 0 \\ y^{0i} &= \psi(u^{0i}, p, x^{0i}). \end{aligned} \quad (I7)$$

$i=1, \dots, N$ . Чаще всего о качестве оценок параметров судят по взвешенному квадратичному критерию

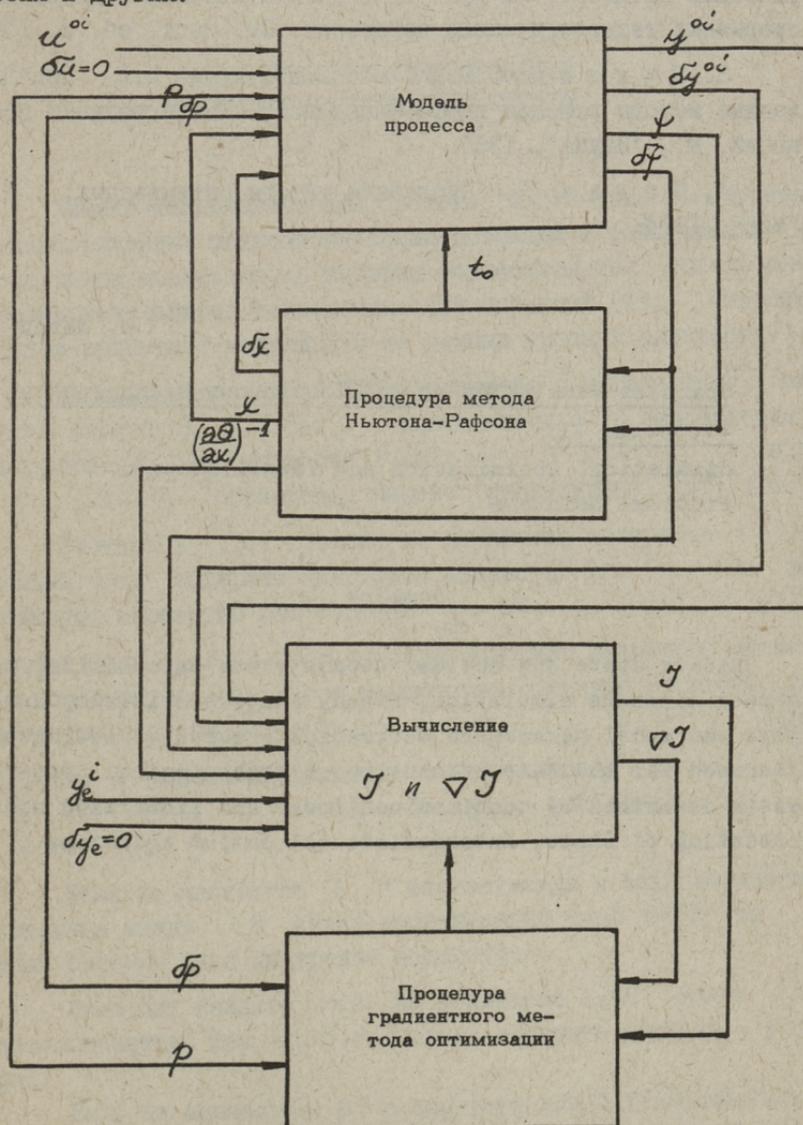
$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (y_e^i - y^i)^T Q_i (y_e^i - y^i), \quad (I8)$$

где  $Q_i$  — положительно определенная весовая матрица для  $i$ -го эксперимента.

Выражение для градиента критерия (I8) имеет следующий вид:

$$\nabla J_p = \sum_{i=1}^N (y_e^i - y^i)^T Q_i S_p, \quad (I9)$$

где  $S_p$  - матрица, составленная из столбцов матрицы чувствительности (I3), соответствующих координатам вектора  $p$ .  
 Схема соединения модулей программы оценки параметров приведена на фиг. 5. Аналогично описанному может быть осуществлена оценка параметров для критерия максимума правдоподобия и других.



Фиг. 5. Схема связи моделей при оценке параметров.

## Л и т е р а т у р а

1. А а р н а О.А. Моделирование непрерывных технологических процессов на ЭВМ. П. Организация модельных расчетов. См. наст. сб. с. 149.
2. А а р н а О.А. Моделирование непрерывных технологических процессов на ЭВМ. I. О математических моделях непрерывных технологических процессов. См. наст. сб. с. 137.
3. М и х л и н С.Г., С м о л и ц к и й Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., "Наука", 1965.
4. П о л а к Э. Численные методы оптимизации. М., "Мир", 1974.

O. Aarna

Computer Simulation of the Continuous Technological Processes III

Simulation, Optimization and Identification Problems Solution

### Summary

Steady state and optimal steady state calculation, process dynamics simulation, steady state sensitivity analysis and model parameters estimation problems solution are discussed for the case of continuous technological processes described by combined nonlinear and linearized model consisting of state, intermediate and output equations.

Ю.И. Каллас

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
 ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Химико-технологическая система (ХТС) – это совокупность взаимосвязанных технологическими потоками и действующих как одно целое аппаратов, в которых осуществляется определенная последовательность технологических операций [1]. Настоящая статья описывает модели ХТС на разных уровнях сложности.

Моделирование любой ХТС начинается с определения множеств аппаратов  $I$ , фаз  $J$ , компонентов  $K$  и закрепления им индексов. На базе множеств  $I = \{1 \dots i \dots\}$ ,  $J = \{1 \dots j \dots\}$  и  $K = \{1 \dots k \dots\}$  образуется дерево (структурный граф) ХТС:

Система  $A$  (ХТС) состоит из множества аппаратов  $B$  ( $B \sim I$ ). Каждый  $i \in B$  содержит некоторое множество фаз  $C_i$ , а все фазы образуют множество фаз системы  $C = \bigcup_{i \in B} C_i = \{\dots ij \dots\}$ ,  $|C| \geq |J|$ . Каждая фаза  $ij \in C$  в свою очередь содержит некоторое множество компонентов  $D_{ij}$ , а все компоненты образуют множество компонентов системы  $D = \bigcup_{ij \in C} D_{ij} = \{\dots ijk \dots\}$ ,  $|D| \geq |K|$ . Дерево системы  $A$  удобно представить в виде списка:  $A =$   
 $= i \in B [ij \in C_i (\dots ijk \in D_{ij} \dots) \dots], \dots$  или проще  $A =$   
 $= i \in B [j \in J (\dots k \in K \dots) \dots], \dots$

Если на множестве  $B$  в соответствии с технологическими потоками между  $i \in B$  задан направленный граф  $G(B)$ , то модель системы дана на уровне аппаратов.

Если для каждого  $i \in B$  на множестве  $C_i \subset C$  задан граф взаимодействия фаз  $G(C_i)$ , то модель аппарата дана на уровне фаз.

Если на множестве  $C$  в соответствии с технологическими потоками между различными аппаратами задан оргграф  $G(C')$  и

взаимодействия фаз аппарата заданы графом  $G(C_i)$ , то модель системы  $G(C) = G(C') \cup G(C_i)$  дана на уровне фаз.

Математическая модель ХТС на уровне компонентов  $M(D)$  не ограничивается графами. Универсальную аппаратуру моделирования представляют собой многофазные дифференциально-макроскопические уравнения явлений переноса [2]. Следующим описана макроскопическая форма многофазных балансов в виде модели "идеального перемешивания". Последняя, как показывает опыт, является удобным для решения многих практических задач.

Каждый аппарат  $i \in B$  характеризуется объемом  $V(i)$  и поперечным сечением (сечениями)  $\vec{A}(i)$ . Фазы, образующие множество  $C_i$ , имеют следующие свойства: порозность  $\bar{\varepsilon}(i) = \varepsilon(i, j)$ , где  $\varepsilon(i, j) = V(i, j)/V(i)$ ; плотность  $\bar{\rho}(i)$ , энтальпия  $\bar{H}(i)$ , давление  $\bar{P}(i)$  и скорость  $\vec{v}(i)$ . Состав фазы  $i, j \in C_i$  определяется вектором состава  $\vec{\omega}(i, j) = (\omega(i, j, k))$ , где  $i, j, k \in D_{ij}$ . Гомогенная реакция в фазе  $i, j \in C_i$  определяется вектором  $\vec{r}(i, j) = (r(i, j, k))$  и тепловым эффектом  $Q_r(i, j)$ . Межфазный перенос из фазы  $i, s$  в фазу  $i, j$  определяется вектором  $\vec{m}(i, s - i, j)$ , сопровождаемым тепловым эффектом  $Q(i, s - i, j)$ . В баланс фазы входит также кондуктивный перенос тепла  $q(i, s - i, j)$  и межфазная сила сопротивлений  $F(i, s - i, j)$ .

Ниже составлена математическая модель для следующего, довольно общего случая. Пусть  $I = \{i\}$ ,  $J = \{i, s\}$ ,  $K = \{1 \dots k\}$ ,

$$A = i [j (1 \dots k) s (1 \dots k)], \quad G(B) : \textcircled{i}, \quad G(C) = G(C_i) : \textcircled{i, j} \text{---} \textcircled{i, s}$$

Допустим также, что в фазах имеются все вышеописанные эффекты. Входящие и выходящие потоки аппарата обозначаем соответственно верхними индексами "+" и "-".

Модель фазы  $M(i, j)$  имеет вид:

баланс компонентов:

$$\frac{d[\varepsilon(i, j) V(i) \bar{\rho}(i, j)]}{dt} = \varepsilon^+(i, j) \vec{v}^+(i) \bar{\rho}^+(i, j) \cdot A^+(i, j) - \varepsilon^-(i, j) \vec{v}^-(i) \bar{\rho}^-(i, j) \cdot A^-(i, j) + \vec{m}(i, s - i, j) + \vec{r}(i, j); \quad (I)$$

баланс энтальпий:

$$\frac{d[\varepsilon(i, j) V(i) \bar{\rho}(i, j) \bar{H}(i, j)]}{dt} = \varepsilon^+(i, j) \vec{v}^+(i) \bar{\rho}^+(i, j) \bar{H}^+(i, j) \cdot A^+(i, j)$$

$$-\varepsilon^-(ij) \vec{v}^-(i) \varrho^-(ij) H^-(ij) \cdot A^-(ij) + Q(is-ij) + q(is-ij) + Q(ij); \quad (2)$$

баланс количества движения:

$$\frac{d[\varepsilon^-(ij) V(i) \vec{p}^-(ij) \vec{v}^-(ij)]}{dt} = \varepsilon^+(ij) \varrho^+(ij) \vec{v}^+(i) \vec{v}^+(ij) A^+(ij) - \varepsilon^-(ij) \varrho^-(ij) \vec{v}^-(i) \vec{v}^-(ij) A^-(ij) + \vec{v}^-(ij) \dot{m}(is-ij) + F(is-ij) - P^+(ij) A^+(i) \varepsilon^+(ij) - P^-(ij) A^-(i) \varepsilon^-(ij) + V(i) \varepsilon(ij) \cdot \varrho(ij) \cdot g, \quad (3)$$

где  $\dot{m} = \vec{m} \cdot \vec{1}^T$ ,  $\vec{p}^-(ij) = \varrho(ij) \vec{\omega}^-(ij)$ ,

$g$  - ускорение внешних сил.

Уравнения фазы следует дополнить следующими соотношениями

$$\vec{\omega}^-(ij) \cdot \vec{1}^T = 1, \quad \vec{\varepsilon}(i) \cdot \vec{1}^T = 1$$

и моделями для определения

$$\vec{p}^-(ij), H(ij), r(ij), Q_r(ij), \vec{m}(is-ij), Q(is-ij), F(is-ij), q(is-ij).$$

Четыре последних модели определяют межфазные эффекты, качественно выраженные графом  $G(C_i)$ , и обуславливают взаимосвязь между балансами фаз  $ij$  и  $is$ .

Если составлены модели для всех элементов (фаз) множества  $C_i$ , то определена модель  $M(i)$   $i$ -го аппарата  $M(i) = \bigcup_{ij \in C_i} M(ij)$ . Если  $|I| > 1$ , то, согласно графу фаз  $G(C)$ , осуществляется соединение моделей аппаратов  $M(i), i \in V$  в модель ХТС  $M(D)$  при помощи уравнений связи в виде  $x^+(ij) = x^-(kj); i \neq k$ , где  $x$  - некоторый параметр межаппаратного потока.

Определение моделей фазы, аппарата и ХТС имеет общий характер, но входящие в него уравнения "идеального перемешивания" могут быть заменены балансами других типов, например, дифференциально-макроскопическими уравнениями или балансами интегрального (равновесного) контакта.

### Л и т е р а т у р а

1. Кафаров В.В., Перов В.Л., Мешалкин В.П. Принципы математического моделирования химико-технологических систем. М., "Химия", 1974.

2. Каллас Ю.И. О математическом моделировании явлений переноса в многофазных аппаратах. - "Тр. Таллинск. политех. ин-та", № 377, 1975.

Chemical Plant Mathematical Models I

Summary

Chemical plant description on various levels is presented. The plant and apparatus graphs are introduced. The plant, apparatus and phases mathematical models are given by ideal mixing balance equations.

УДК 621.382.233.002.2:62-52

А.А. Аннус, А.А. Кийтам

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА  
ПРОИЗВОДСТВА СИЛОВЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРОВ

В последнее время возрос интерес к моделированию технологического процесса (ТП) производства полупроводниковых приборов (ПП); в частности, такая модель необходима при создании АСУТП производства ПП. Известно, что ТП производства ПП имеет остро выраженный вероятностно-нестационарный характер [1,2,3]; следовательно, в АСУТП надо применять статистические методы контроля и управления, а для описания ТП необходима статистическая модель.

Рассеяние параметров выпускаемых приборов вызвано различными источниками неоднородностей в ТП: рассеянием параметров исходного материала, неоднородностью и нестабильностью обработки. Поэтому статистические модели для разных ТП могут иметь различную структуру и степень детальности, которые зависят от особенностей ТП и построения АСУТП. Вообще говоря, структура ТП производства ПП представляет собой последовательность довольно большого числа технологических операций (ТО); при этом разбиение ТП на ТО можно осуществить с различной степенью детальности. Отсюда видно, что возможны по крайней мере две следующие структуры модели ТП:

1) модель, которая охватывает ТП целостно, без выделения отдельных ТО [4];

2) модель ТП, состоящая из связанных между собой моделей ТО [5].

Модель последнего вида имеет некоторые преимущества, так как она позволяет

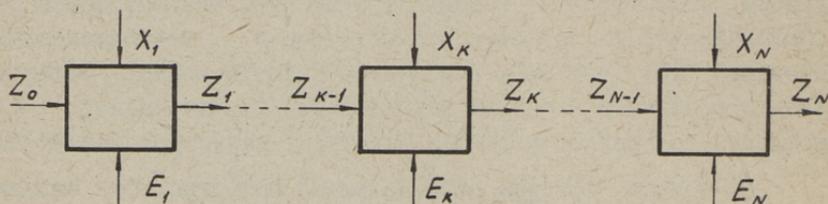
а) разработать локальные системы статистического управления для ТО, необходимость в которых возникает из-за

длительности ТП (несколько недель) при наличии быстроменяющихся дрейфов;

б) легче ввести изменения в модель, необходимость чего вызвана неизбежными изменениями в технологии: достаточно изменить модели тех ТО, на которых обновлена технология.

В настоящей статье приводим описание вероятностной структуры такой модели ТП, которая на наш взгляд позволяет учитывать основные особенности производства силовых ПИ (СПИ) и решать различные задачи, возникшие при изучении технологии и разработке систем статистического управления. Некоторые элементы этой модели могут подходить и для других ТП полупроводникового производства.

ТП рассматривается как цепь  $N$  отдельных ТО. Под ТО понимаем здесь такую совокупность "элементарных" ТО, которая кончается промежуточным контролем — измерением выхода  $Y_k = \{y_1, \dots, y_{t_k}\}$  и принятием решения о ходе дальнейшей обработки;  $k$  есть индекс ТО,  $k = 1, \dots, N$ . Выход  $Y_k$  является подмножеством состояния  $Z_k$  прибора;  $Y_k$  и  $Z_k$  в силу стохастичности ТП есть случайные векторы. Обозначим вектор управляющих воздействий  $X_k$  и назовем его наблюдаемым входом. Тогда  $Z_k$  полностью определено (в вероятностном смысле) векторами  $Z_{k-1}$  и  $X_k$ , то есть формирование и переформирование состояния происходит по схеме Маркова. Схема формирования  $Z$  изображена на фиг. 1;  $Z_0$  — состояние исходного материала,  $E$  — совокупность шумов ТО



Фиг. 1.

Пусть полученная на основе физических соображений модель ТО, которую будем называть моделью технологической установки, дана в виде

$$\tilde{Z}_k = A_k(Z_{k-1}, U_k), \quad (I)$$

где  $\tilde{Z}_k$  — детерминированная компонента  $Z_k$ ,  
 $U_k$  — вектор, который будем называть физическим входом.

Тогда рассеяние  $Z_k$  обусловлено рассеянием  $Z_{k-1}$ , рассеянием  $U_k$  и шумом  $F_k$  технологической установки, который учитывает приведенные к  $Z_k$  шумы от "непризнанных" источников рассеяния. Имеем

$$Z_k = \tilde{Z}_k + F_k. \quad (2)$$

Для замыкания контура локального управления (контура статистического регулирования ТО) необходимо модель, связывающая  $U_k$  с  $X_k$ . Назовем эту модель моделью регулятора. Обозначая приведенный к  $U_k$  шум в модели регулятора  $G_k$ , имеем

$$U_k = R_k(X_k) + G_k. \quad (3)$$

Если для описания ТО не имеется адекватных физико-теоретических моделей, то  $U_k = X_k$  и в качестве (1) используется экспериментальная модель вместе с (2).

ТП производства полупроводниковых приборов характерен групповой метод обработки, единицу групповой обработки обычно называют партией. Будем для простоты считать, что объем партии для каждой ТО фиксирован, а формирование партии происходит независимо от формирования на других ТО. При групповой обработке применяются два вида контроля:

- а) полный (100-процентный) контроль,
- б) выборочный контроль.

При полном контроле на каждом приборе измеряется выход  $Y_k$ . Если обозначить вектор ошибок измерения  $M_k$  и измеренный выход  $\hat{Y}_k$ , то

$$\hat{Y}_k = Y_k + M_k. \quad (4)$$

На основе  $\hat{Y}_k$  принимается решение о ходе дальнейшей обработки. Могут приниматься решения следующих типов:

- а) продолжать обработку (на операции  $k + 1$ );
- б) подвергать прибор дополнительной операции (ДО), после чего провести повторный контроль;
- в) считать прибор окончательным браком.

Схема модели ТО, соответствующая случаю, когда в качестве алгоритма измерения и решения (АИР) применяется полный контроль, приведена на фиг. 2.

При применении группового метода обработки можно рассеяние  $Z_k$  разбить на составляющие [6]. Будем различать следующие две компоненты рассеяния:

- а) рассеяние между партиями,
- б) рассеяние внутри партии.

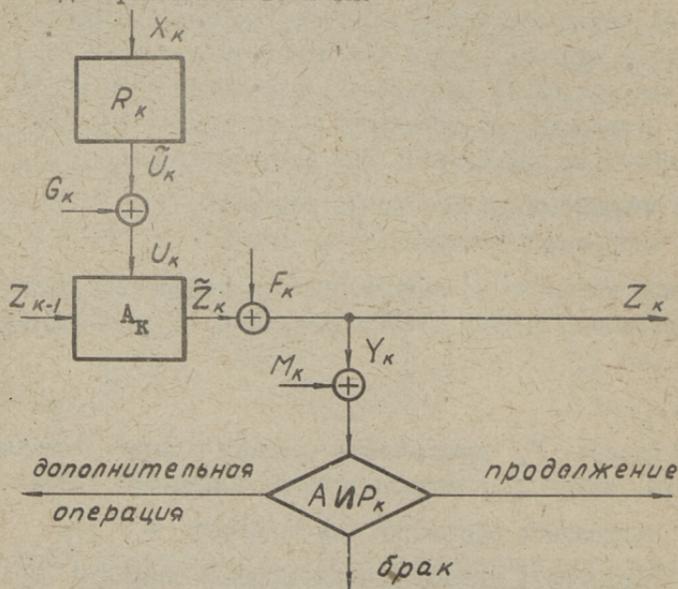
В модели ТО такое разложение может быть применено для шумов  $G_k$  и  $F_k$ , тогда получим

$$\left. \begin{aligned} G_k &= G'_k + G''_k \\ F_k &= F'_k + F''_k \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где  $G'_k$  и  $F'_k$  — межпартийные,

$G''_k$  и  $F''_k$  — внутрипартийные компоненты рассеяния.

Рассеяние между партиями вызвано нестабильностью условий реализации ТО, и его можно описать какими-то случайными процессами  $G'_k = G'_k(j)$ ,  $F'_k = F'_k(j)$ ,  $j=1, 2, \dots$ ;  $j$  — порядковый номер партии. Характер этих случайных процессов может различаться для различных ТО и ТП.



Фиг. 2.

Будем здесь для простоты считать, что  $G'_k(j)$  и  $F'_k(j)$  являются чисто случайными процессами, хотя в принципе возможны

и другие процессы, например, процессы динамической или авторегрессии. Предположим также, что  $G''_k$  и  $F''_k$  не зависят от  $G'_k$  и  $F'_k$  и что  $G''_k$  и  $F''_k$  независимы друг от друга как для одного, так и для разных приборов внутри партии.

При выборочном контроле подвергается измерению некоторое подмножество  $S$  партии. Обычно применяются контролируемые выборки с фиксированным объемом  $m = \text{const}$  (здесь и далее опускаем везде индекс к ТО). Пусть  $S_z$  есть вектор состояний выборки и  $S_y$  — вектор выходов  $Y_i$  выборки:

$$S_z = \{Z_i\} = \{Z_1, \dots, Z_m\}, S_y = \{Y_i\} = \{Y_1, \dots, Y_m\}, i = 1, \dots, m,$$

$i$  — порядковый номер прибора в контролируемой выборке.  $S_y$  следует рассматривать как матрицу  $\|S_{ji}\|$ ,  $j = 1, \dots, t$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Обозначим через  $Y_j$   $S(Y_j)$   $j$ -ую строку  $S_y$ , что является выборкой параметра  $Y_j$ . Тогда алгоритм статистического контроля состоит в последовательном вычислении какого-то статистического критерия (или критериев) статистического контроля  $\hat{C}_j = C_j[S(\hat{Y}_j)]$ ,  $j = 1, \dots, t$  и в проверке, попадет ли значение  $\hat{C}_j$  в область окончательной браковки  $P_j$  или условной браковки (область ДО)  $L_j$ ; соответственно решается ход дальнейшей обработки. Области  $P_j$  и  $L_j$  определяют обычно на основе процедур проверки статистических гипотез, характер и режимы проведения ДО могут для разных параметров быть разными. После проведения любой ДО цикл контроля повторяется сначала.

Обозначаем последовательность критериев и критических областей  $C(S_y) = \{C[S(Y_j)]\}$ ,  $L = \{L_j\}$  и  $P = \{P_j\}$  соответственно и рассматриваем их далее условно как совместную (непоследовательную) процедуру, то есть говорим, например, лишь об одной области  $P$ , подразумевая под  $C(S_y) \subset P$  логическое сложение предложений  $C_j[S(\hat{Y}_j)] \in P_j$ .

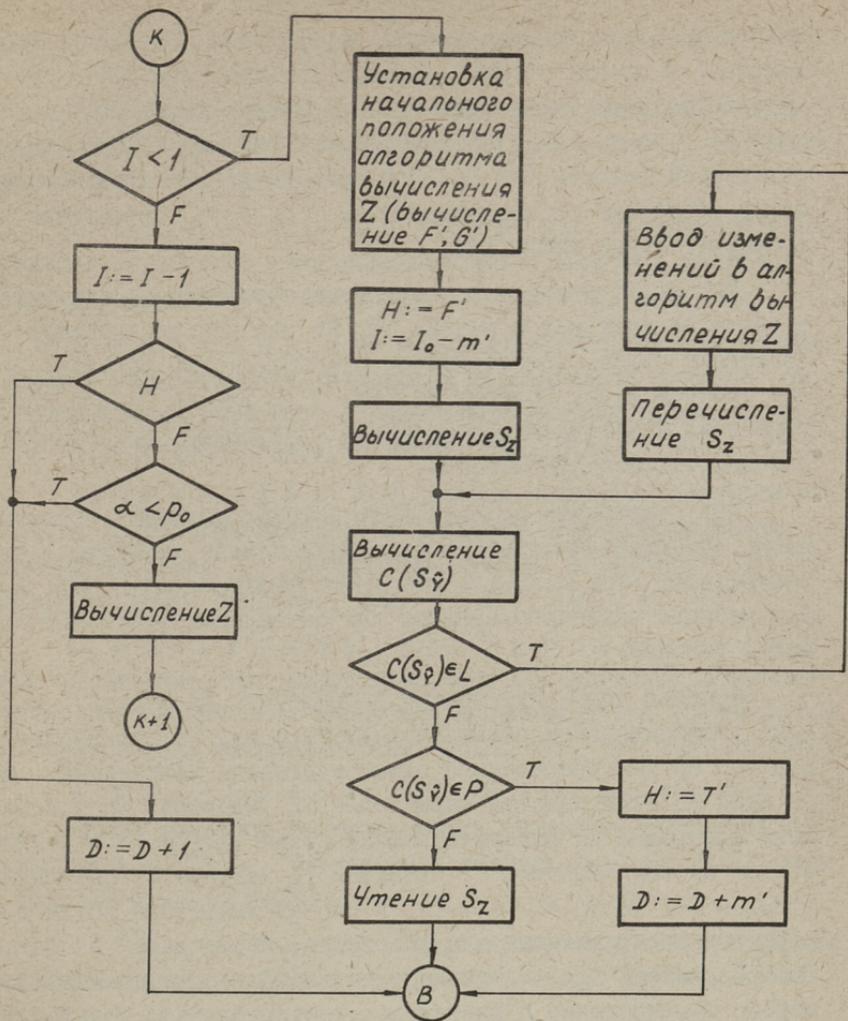
Отметим еще, что на некоторых операциях выбор режима обработки зависит от результатов промежуточного контроля, то есть  $X_k = X_k(\hat{Y}_{k-1})$ . На некоторых операциях возможно возникновение "качественного" брака, о чем судят на основе признака типа "в порядке — не в порядке"; примером может служить появление механических дефектов, которые превышают допустимые. Вероятность  $p_0$  возникновения качественного брака может зависеть от  $U_k$  и  $Z_{k-1}$ .

Ставим теперь задачу вычисления каких-то параметров или функционалов распределения на выходе ТП  $Z_n$  и процента брака на каждом ТО при известной стратегии управления ТП (то есть совокупности  $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ ), известном распределении  $Z_0$  и известной АИР на каждой ТО. Например, нас может интересовать распределение выпускаемых приборов по классам или его отклонение от планового; зная это распределение, вероятность брака по ТО и стоимость ТО, можем оценить эффективность данной стратегии управления ТП. Из вышеприведенной структуры, учитывая, что  $N$  может достигать 10–15, очевидно, что решить поставленную задачу аналитическими методами практически не удастся (в частности, очень неудобно оперировать с усеченными распределениями, которые возникают из-за браковки хвостов распределений). Поэтому предлагаем использовать вероятностное моделирование (имитацию), которое позволяет довольно легко сравнивать эффективность различных стратегий управления и АИР, учитывая всю имеющуюся информацию о моделях ТО (хотя за эти удобства придется платить большим расходом машинного времени).

Вычисления, проводимые при имитации ТП, делятся на три категории:

- а) проводимые однократно (фиксация  $\{\chi_k\}$  и вычисление зависящих только от  $\{\chi_k\}$  переменных);
- б) проводимые однократно для каждой партии;
- в) проводимые отдельно для каждого прибора.

Часть а) имитационного алгоритма (ИА) назовем фиксатором входа, остальную часть – имитатором. На фиг. 3 приведена общая схема имитатора ТО; индекс ТО при переменных опущен. Кружок с выходящей стрелкой обозначает метку, с входящей стрелкой – направление на метку,  $k$  – метка ТО,  $k+1$  метка следующей ТО,  $B$  – начало ИА ТП (ИА ТП есть последовательность ИА ТО).  $T$  ( $T'$ ) обозначает истинное значение логической переменной или выражения,  $F$  ( $F'$ ) – ложное значение,  $I$  – индекс прибора в партии,  $I_0$  – объем партии,  $N$  – признак браковки партии,  $D$  – счетчик брака ТО.  $\alpha$  обозначает очередное псевдослучайное число. Смысл других обозначений дан в предыдущем тексте.



Фиг. 3.

Так как внутрипартийные компоненты шума  $F''$  и  $G''$  независимы для разных приборов, можно составить контролируруемую выборку  $S_z$  из  $m'$  первых приборов каждой партии. Эти приборы записывают в стек с объемом  $m'$ . Стек является своего рода "промежуточным складом", на основе которого АИР принимает решение о ходе дальнейшей обработки партии. Для повышения быстродействия ИА и уменьшения занимаемой им па-

мати, желательно минимизировать объем стека. Очевидно, можно достичь  $m' \leq m$ ;  $\min m'$  зависит от характера АИР и  $Y$ . В частности, если компоненты  $Y$  независимо распределены, то получим  $\min m' = \max\{m_i\}$ ,  $i=1, \dots, t$ , где  $m_i$  — объем контролируемой выборки для  $Y_i$ . При применении параллельных режимов обработки (в зависимости от  $Y_{k-1}$ )  $m'$  возрастает в соответствующее число раз.

Модель ДО можно, вообще говоря, представить примерно в таком же виде, как и модель ТО. Не так как на практике ДО применяют редко, целесообразно представить ее модель в более простом виде. Поэтому на фиг. 3 ДО учтена введением изменений в алгоритм вычисления  $Z$  (например, добавлением дополнительного слагаемого).

При реализации больших имитационных моделей обычно возникает необходимость оценки нужных вычислительных ресурсов, то есть на какой ЭВМ можно ИА реализовать при разумном расходе машинного времени для достижения требуемой точности решения.

С целью получения оценки занимаемого ИА памяти и времени имитации одной реализации прибора для ТП производства СШ был по вышеприведенной схеме составлен конкретный ИА на базе ТП производства тиристоров ТД. По этой ИА составлена программа на алгоритмическом языке МАЛГОЛ-73 и реализована на ЭВМ "Минск-22". Размерность вектора состояния  $\dim Z_N = 10$ , число ТО  $N = 12$ . В состав имитатора вошли генераторы распределения  $S_B$  Джонсона, нормального и бета-распределения. Для имитации нормального распределения применено суммирование 5 равномерно распределенных псевдослучайных чисел вместе с соответствующим преобразованием Большева [7], исходные псевдослучайные числа вырабатывались мультипликативным методом. Получены результаты: занимаемый ИА объем памяти 4700<sub>8</sub> ячеек, в том числе 430<sub>8</sub> ячеек для имитаторов случайных величин и 600<sub>8</sub> ячеек для стеков, одна реализация прибора имитируется в среднем за 0,42 с. Следовательно, можно сделать вывод, что реализация имитационной модели ТП изготовления СШ реальная даже на сравнительно маломощных ЭВМ, как, например, "Минск-22"

## Л и т е р а т у р а

1. И в а н о в Е.Е. Статистическая динамика технологических процессов полупроводникового производства. - Изв. ЛЭТИ, вып. 151, 1974, с. 55-61.

2. Б у р е в Д.Д., Г е л л е р И.Х. О статистических моделях параметров полупроводниковых приборов и технологических процессов их производства. - Труды МЭИ, вып. 143, 1972.

3. У ч а й к и н И.Т. и др. Некоторые вопросы оптимизации и управляемости технологии изготовления силовых полупроводниковых приборов. - "Электротехническая промышленность. Сер. Преобразовательная техника", вып. 8(55), 1974, с. 5-7.

4. П е ч н и к о в Н.В. Оценка некоторых аспектов создания АСУТП применительно к силовому полупроводниковому приборостроению. - "Электротехническая промышленность. Сер. Общепромышленные вопросы", вып. 4 (407), 1973, с. 6-9.

5. П л е с к у н и н В.И., Б о р о в с к о й А.И. Обобщенная методика статистического исследования и оптимизации технологических процессов в производстве транзисторов и интегральных микросхем. - Изв. ЛЭТИ, вып. 127, 1972, с. 60-73.

6. П л е с к у н и н В.И., В о р о н и н а Е.Д. и др. Оценка точности и стабильности процессов групповой технологии в АСУТП. - "Электронная техника. Сер. 9 (АСУ)", вып. 1(9), 1974, с. 121-128.

7. Г о л е н к о Д.И. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на ЭВМ. - М., "Наука", 1965.

Stochastic Model of Technological Process Producing  
Power Semiconductor Devices

Summary

Scheme of the stochastic model of technological process (TP) producing power semiconductor devices is described. The model of TP is a sequence of models of single technological operations (TO), which use the batch treatment method. Models of TO are linked together via the state of device. Scheme of the model of TO and simulation algorithm for selection check are given. An example of realization is described and necessary computer resources are estimated.

УДК 621.382.233.002.2:62-52

А.А.Аянус, А.Г.Бахверк, Э.П.Калм,  
А.А.Кийтам, Я.М. Вярк

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ НА УЧАСТКЕ  
БОРАЛЮМИНИЕВОЙ ДИФФУЗИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА  
ПРОИЗВОДСТВА СИЛОВЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРОВ

Одним из возможных подходов к задаче моделирования технологического процесса (ТП) производства силовых полупроводниковых приборов (СПП) является создание моделей отдельных технологических операций (ТО) и последующее их соединение в целостную модель ТП [1]. Данная статья посвящена моделированию боралюминиевой диффузии, которая является одним из важнейших ТО в ТП. Основной технологической задачей (участка) боралюминиевой диффузии является создание в пластине кремния многослойной структуры с заданными параметрами распределения примесей. Так как модель нужна в первую очередь для управления, необходимо в модели связать параметры распределения примесей со всеми управляющими факторами ТО. Поэтому будем рассматривать диффузию совместно с операцией напыления диффузанта и ультразвуковой промывкой дисков.

Поскольку теория диффузионных процессов достаточно хорошо развита, целесообразно исходить при составлении модели операции диффузии из теоретических предпосылок. Следует отметить следующее:

1) при одновременной диффузии диффузия бора и алюминия протекает независимо [2];

2) коэффициент диффузии алюминия больше коэффициента диффузии бора, то есть общую глубину диффузии (глубину залегания  $p-n$  перехода) определяет глубина диффузии алюминия [2].

Решение уравнения Фика для диффузии бора и алюминия в рассматриваемом случае будет иметь вид [2]:

$$N_B(x, t) = N_s \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{D_B \cdot t}} \right), \quad (1)$$

$$N_{AL}(x, t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi D_{AL} t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4D_{AL} t}}, \quad (2)$$

где  $N_B$  - концентрация атомов бора;  
 $N_{AL}$  - концентрация атомов алюминия;  
 $N_s$  - поверхностная концентрация атомов бора;  
 $x$  - глубина;  
 $D_B$  - коэффициент диффузии бора;  
 $D_{AL}$  - коэффициент диффузии алюминия;  
 $t$  - время диффузии;  
 $Q$  - количество атомов алюминия, участвующих в диффузии, отнесенное к единице площади.

Решение уравнения (2) относительно глубины диффузии  $x_j$  дает

$$x_j = 2\sqrt{D_{AL} \cdot t} \sqrt{\ln \frac{Q}{N_0 \sqrt{\pi D_{AL} \cdot t}}}, \quad (3)$$

где  $N_0$  - концентрация примесей в исходном кремнии:

$$N_0 = 10^{15,74} \cdot \rho^{-1,01}, \quad (4)$$

где  $\rho$  - удельное сопротивление исходного кремния.

Коэффициент диффузии алюминия

$$D_{AL} = D_0 e^{-\frac{\Delta \varepsilon_0}{kT}} \quad (\text{см}^2/\text{с}), \quad (5)$$

где  $D_0$  - кажущаяся величина коэффициента диффузии при бесконечно большой температуре;

$\Delta \varepsilon_0$  - энергия активации;  
 $k$  - постоянная Больцмана;  
 $T$  - температура диффузии ( $^{\circ}\text{K}$ ).

Из уравнения (1) видно, что концентрация примеси в поверхностном слое кремния не зависит от времени и температуры диффузии

$$N_B(0, t) = N_s. \quad (6)$$

Следовательно,  $N_s$ , определяющая поверхностное сопротивление  $\rho$ , будет зависеть только от концентрации бора в источнике диффузанта, которым в данном случае является раствор  $\text{VB}_2\text{O}_3 \cdot x\text{nSiO}_2$ , образующийся на поверхности кремния:

$$N_s = k_s N'_s, \quad (7)$$

где  $k_s$  — коэффициент сегрегации;  
 $N'_s$  — концентрация атомов бора в растворе.

Концентрация атомов бора в растворе, очевидно, зависит от количества нанесенного перед диффузией на поверхность кремния диффузанта в виде водно-спиртового раствора  $(NH_4)_2 B_4 O_7$ , так как количество образующейся окиси кремния, при реальных режимах диффузии, практически постоянно.

Поверхностное сопротивление можно определить по приближенной формуле, которая получена путем аппроксимации кривых концентрация — проводимость, приведенных в работе [3] для случая аппроксимации, полученного при совместной диффузии, двойного распределения примеси экспоненциальным:

$$\rho = \frac{1}{x_j \cdot 10^{(0,6 \lg N_s - 14,024)}} \text{ Ом}, \quad (8)$$

где  $x_j$  — глубина диффузии.

Для получения модели поверхностного сопротивления необходимо к уравнениям (7) и (8) добавить уравнение, связывающее массу напыленного диффузанта  $m$  с концентрацией бора в растворе  $N'_s$ :

$$N'_s = k_1 m, \quad (9)$$

и уравнение, связывающее массу напыленного диффузанта с количеством напылений  $n$ :

$$m = f(n). \quad (10)$$

Так как в различных источниках даются различные значения коэффициента сегрегации, отличающиеся друг от друга на порядок [4], то его необходимо, как и коэффициент  $k_1$  уравнения (9), найти экспериментальным путем. Практически достаточно определить один коэффициент  $k_0 = k_s \cdot k_1$ . Тогда

$$N_s = k_0 m. \quad (11)$$

Еще одним важным параметром полупроводниковой структуры, который формируется на данной операции, является время жизни неосновных носителей заряда в  $n$ -базе  $\tau_p$ . Поскольку теоретических сведений о процессе формирования  $\tau_p$  очень мало, модель времени жизни носителей заряда искалась в виде полиномиальных регрессионных уравнений. С целью окончательной разработки моделей операций была поставлена серия экспериментов в цеховых условиях. При составлении планов за основу

был принят активный эксперимент. На операции нанесения диффузанта был применен полный факторный эксперимент (ПФЭ)  $3^1$ , а на операции самой диффузии, которая проводилась в печах КС 400/10, - ПФЭ  $2^4$ , совмещенный с латинским квадратом  $4 \times 4$  для изучения влияния режимов промывки дисков на выходные параметры диффузии. Исходя из экспериментальных данных была получена МНК-оценка неизвестного коэффициента уравнения (II)  $k_0 = 3,45 \cdot 10^{17}$  и модель (10) процесса нанесения диффузанта в виде экспоненциальной регрессии типа

$$m = n(A + B e^{-Cn}), \quad (12)$$

где  $A, B$  и  $C$  - оценимые коэффициенты (МНК).

В ходе эксперимента выяснилось, что дисперсия массы  $m$  существенно зависит от количества напылений  $n$ ; эта зависимость имеет вид

$$\sigma^2(m) = E \cdot n. \quad (13)$$

Получены следующие оценки коэффициентов уравнений (12) и (13):  $A = 0,0818$ ,  $B = 0,119$ ,  $C = 0,123$ ,  $E = 0,130$ . Поскольку значения коэффициентов диффузии, приводимые различными авторами [5,6,7], не дали желаемых результатов, то коэффициенты  $D_0$  и  $\Delta \varepsilon_d$  из уравнения (5), а также  $Q$  из уравнения (3), были также уточнены по результатам экспериментов. Получены следующие оценки:

$$\begin{aligned} D_0 &= 6,07 \cdot 10^9 \text{ см}^2/\text{с} \\ \Delta \varepsilon_d &= 6,16 \text{ эв} \\ Q &= 7,8 \cdot 10^{12}. \end{aligned}$$

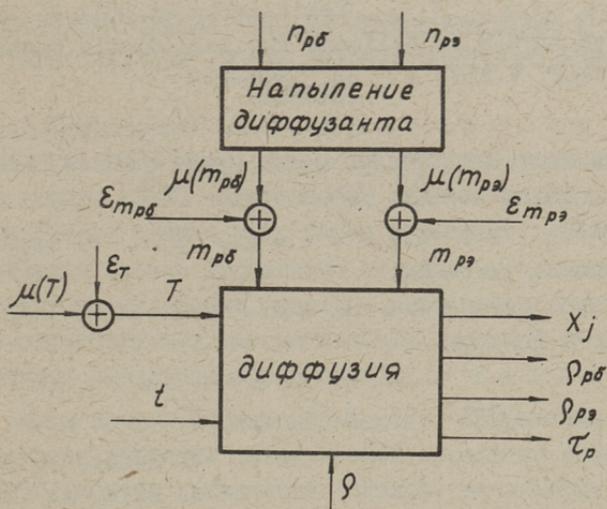
По экспериментальным данным была построена также полиномиальная регрессионная модель времени жизни неосновных носителей заряда  $\tau_p$ .

Обработка результатов эксперимента показала, что во всех случаях нарушается основная гипотеза регрессионного анализа

$$H_0: Y \sim N(xB, \sigma^2 I),$$

так как на выходе отсутствует нормальное распределение и разброс результатов эксперимента (выборочная дисперсия) зависит от режима. Из этого следует, что для полного описания процесса недостаточно иметь регрессионные уравнения. Выход из положения в данном случае был найден путем добавления к регрессионным уравнениям скедастических, коэффициенты которых также оценивались методом наименьших квадратов. Выясни-

лось, что большие дисперсии параметров распределений приме-сей в основном вызваны рассеянием температуры в зоне диффузии и рассеянием массы напыленного диффузанта. Определенную долю в рассеяние вносит также неоднородность обработки на предыдущих ТО, которая отражается в рассеянии  $\rho$ . Исходя из этого, получим модели диффузии как объекта статистического управления. Эта схема приведена на фиг. 1;  $\mu(x)$  обозначает среднее значение величины  $x$  (ее детерминированную компоненту),  $\varepsilon_x$  — ее случайную ошибку, индексы рб и рэ соответ-вуют р-базе и р-эмиттеру.



Фиг. 1.

Из этой схемы видно, что управляющими факторами на участке боралюминиевой диффузии являются  $p_{pb}$ ,  $p_{pe}$ ,  $\mu(T)$  и  $t$ , выходами  $X_j$ ,  $\rho_{pb}$ ,  $\rho_{pe}$ ,  $\tau_p$ . Эта модель включена в состав модели ТП, схема которой приведена в [1].

Задавая значения управляющих факторов, а также вид и параметры распределений  $F(\varepsilon_T)$ ,  $F(\varepsilon_m)$  и  $F(\rho)$  (последние определяются свойствами исходного кремния и режимами обработки на предыдущих операциях), можем вычислять распределение вектора параметров многослойной структуры. Из-за сложного характера приведенных зависимостей и, возможно, сложного вида распределений  $F(\varepsilon_T)$ ,  $F(m)$  и  $F(\rho_0)$ , здесь может оказаться разумным использование метода Монте-Карло (возможным альтернативом является метод моментов).

Реализуя на описанной модели различные эксперименты, можно вывести упрощенные модели, которые нужны для систем текущей идентификации и оптимизации ТО.

### Л и т е р а т у р а

1. А н н у с А., К и й т а м А. Вероятностная модель технологического процесса производства силовых полупроводниковых приборов. См. наст. сб. с. 177.

2. Бол так с Б.И. Диффузия в полупроводниках. М., "Наука", 1961.

3. I r v i n J.C. Resistivity of Bulk Silicon and of Diffused Layers in Silicon, The Bell System Technical Journal, 1962, V.XLI, N 2 pp. 387-411.

4. К о л о с о в с к и й А.В. Перераспределение примесей в процессе термического окисления кремния УНИИ, "Электроника", вып. 6 (288), 1971.

5. M i l l e r R., S a v a g e I.A. J. Appl. Phys., 1956, 27, N 12, p. 1430.

6. G o l d s t e i n B. Bull. Amer. Phys. Soc., 1956, 2, N 1, p. 145.

7. F u l l e r C.S., D i t z e n b e r g e r. J. Appl. Phys., 1954, 25, N 11, p. 1439.

A. Annus, A. Bachverk,  
E. Kalm, A. Kiitam

### Modeling of Technological Operations on the Division of Boron-Aluminium Diffusion of Power Semiconductor Devices Producing Technological Process

#### Summary

A model describing simultaneous diffusion of boron and aluminium in silicon is given. The unknown parameters in theoretical relationships are estimated by active design experiment. The possibilities to use the obtained model are delineated; the scheme of the model as the object for stochastic control is given.

УДК 621.382.233.002.2:62-52

А.А.Аннус, Э.П.Калм, А.Р.Кивистик,  
В.Э.-В.Ринк, Я.М.Вьрк

О МОДЕЛИРОВАНИИ УЧАСТКА МЕХАНООБРАБОТКИ КРЕМНИЯ  
ПРИ СОЗДАНИИ АСУТП СИЛОВЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ  
ПРИБОРОВ

В начале 70-х годов рядом предприятий были начаты работы по созданию АСУТП изготовления силовых полупроводниковых приборов (СПП). В рамках этих работ возникают проблемы создания локальных систем управления отдельными технологическими участками или операциями, которые невозможно решить без наличия соответствующих математических описаний и строго формулированных критериев управления.

В самом начале производственного цикла изготовления СПП находятся операции механической обработки кремния, формирующие геометрию кремниевых дисков, на которых создается в дальнейшем полупроводниковая структура.

К точности формы и геометрических размеров кремниевых дисков предъявляются высокие требования. К числу отклонений от точной формы дисков обычно относят отклонение расстояния между поверхностями (разнотолщинность, непараллельность плоскостей), клиновидность, неплоскостность и прогиб-изогнутость [1]. Однако к настоящему времени не разработана единая методика определения названных показателей, в результате чего выводы и модели, полученные различными авторами, несопоставимы.

Поэтому сформируем точную методику оценки параметров геометрической формы кремниевых дисков. За основу методики берем измерение толщины в пяти точках.

Определяем координаты точек измерения толщины дисков на нулевой плоскости измерения (фиг. 1):

$$\left. \begin{array}{l} m_0(x_0; y_0), \\ m_1(0; y_0), \\ m_2(x_2; 0), \\ m_3(x_3; 2y_0), \end{array} \right\} d = 0 \quad (I)$$

при условии, что

$$x_0 = R - x_a, \quad (2)$$

где  $d$  - третья координата измерения,

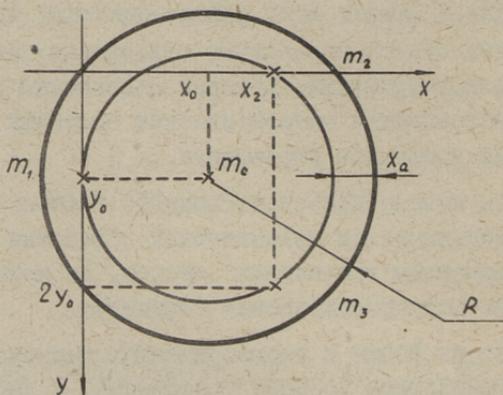
$x_a = 3 \div 5$  мм,

$R$  - радиус кремниевых дисков.

Тогда

$$y_0 = \sqrt{R^2 - x_0^2}, \quad (3)$$

$$x_2 = x_0 + \sqrt{x_0^2 - y_0^2}. \quad (4)$$



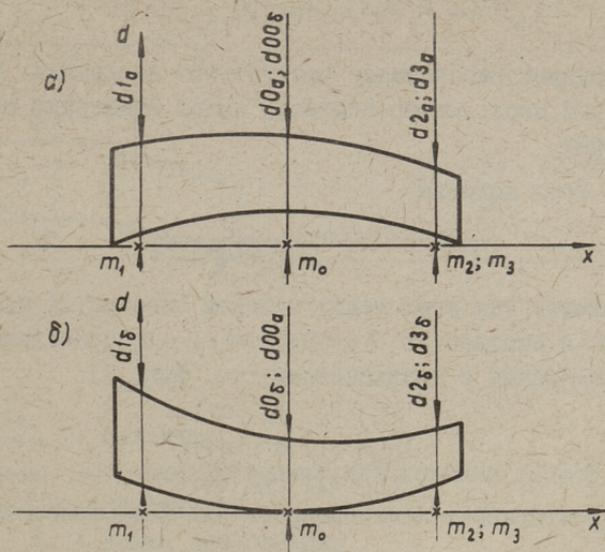
Фиг. 1.

Поверхность измерительного стола принимается как нулевая плоскость измерения ( $xy$ -плоскость). Кремниевые диски можно на этот стол класть в двух положениях (а и б фиг. 2). В одном положении диска (а или б) проводятся четыре измерения - в точках  $m_0, m_1, m_2, m_3$ , а на другом (б или а) - одно измерение - в точке  $m_0$ . В результате получаем на каждом диске по пять значений, которые составляют множество результатов измерений

$$D5 = \{d0; d1; d2; d3; d00\}, \quad (5)$$

но истинную толщину измеряемого диска при такой методике характеризуют четыре значения:

$$D_4 = \{d_1; d_2; d_3; \min(d_0, d_{00})\}. \quad (6)$$



Фиг. 2.

Основываясь на [1], по этим результатам измерений определяем следующие параметры, характеризующие толщину и геометрическую форму кремниевых дисков.

### 1. Средняя толщина кремниевого диска

$$d_k = M(D_4) = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \min(d_0; d_{00})}{4}. \quad (7)$$

которая характеризует разнотолщинность дисков.

### 2. Дисперсия толщины кремниевого диска

$$s^2 d = s^2(D_4) = \frac{(d_1 - d_k)^2 + (d_2 - d_k)^2 + (d_3 - d_k)^2}{3} + \frac{[\min(d_0; d_{00}) - d_k]^2}{3} \quad (8)$$

является несмещенной оценкой дисперсии  $\sigma(D_4)$  и характеризует рассеивание толщины на одном диске.

### 3. Максимальная и минимальная толщина кремниевого диска

$$d_{\max} = \max D_5 \quad (9)$$

$$d_{\min} = \min D_5 \quad (10)$$

#### 4. Размах

$$hd = H(D_5) = \max D_5 - \min D_5 \quad (11)$$

характеризует рассеивание результатов измерения. При  $hd = 0$  кремниевый диск, можно считать, имеет идеальную геометрическую форму.

#### 5. Угол наклона

$$\varphi = \arccos \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (12)$$

определяется как угол между нулевой плоскостью измерения ( $d = 0$ ) и плоскостью  $Ax + By + Cd + D = 0$ , проведенной через точки измерения с координатами (см. фиг. 3)

$$m_1(0, y_0, d_1),$$

$$m_2(x_2, 0, d_2),$$

$$m_3(x_2, 2y_0, d_3).$$

$\varphi$  характеризует клиновидность или непараллельность плоскостей.

#### 6. Неплоскостность

$$ku_1 = d_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + D}{C} \quad (13)$$

характеризует отклонение точки  $d_0$  от плоскости  $Ax + By + Cd + D = 0$ .

#### 7. Изогнутость (см. фиг. 3)

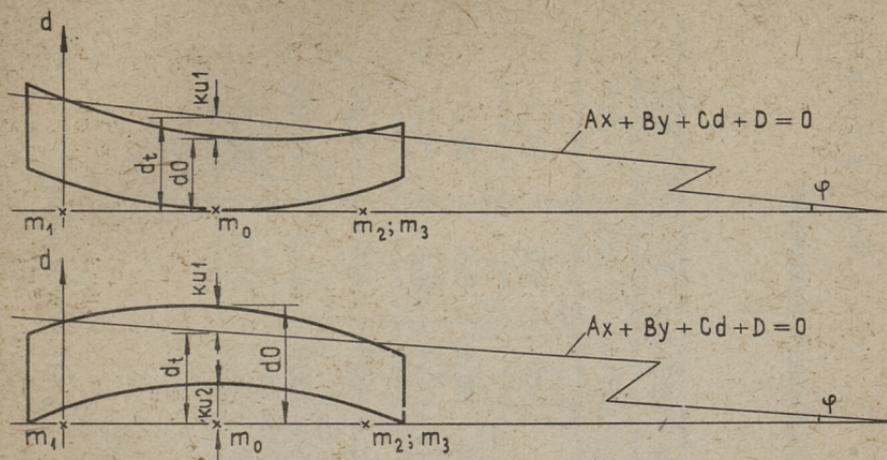
$$ku_2 = |d_{00} - d_0| \quad (14)$$

характеризует прогиб дисков.

Таким образом, результат некоторой подоперации механообработки кремния (резка, шлифовка, матирование) характеризуется  $n$ -мерным вектором (выход  $\bar{y}$ ). В зависимости от характера задачи  $n$  может приобретать различные значения, то есть могут потребоваться различные комбинации из приведенных показателей качества кремниевого диска (формулы (7) ... (14)).

Например, может определяться скорость шлифования

$$V = \frac{d_{\max}^{00} - Md_{\max}}{t} \quad (15)$$



Фиг. 3.

где  $d_{\max}^{00}$  — исходная  $d_{\max}$ ,  
 $Md_{\max}$  — средняя максимальная толщина дисков после шлифования,  
 $t$  — время шлифования.

С целью получения статистических оценок вышеназванных выходных параметров и составления экспериментального описания основных операций механической обработки кремния — резка, шлифовка М28 (I и II сторона) и матирование (МГ4) — был поставлен ряд активных экспериментов в цеховых условиях. Так как можно было ожидать [1], линейная модель не подходит для процесса резки кремния. Поэтому в качестве плана эксперимента для операции резки был выбран ортогональный композиционный план второго порядка с выходными параметрами:

$x_1$  — скорость вращения режущего диска:  
 основной уровень  $x_1(0) = 4000$  об/мин,  
 интервал варьирования  $l_1 = 1000$  об/мин;  
 $x_2$  — скорость рабочей подачи:  
 основной уровень  $x_2(0) = 35$  мм/мин,  
 интервал варьирования  $l_2 = 15$  мм/мин,  
 число повторений  $w = 150 \div 200$ .

Эксперименты проводились на станках марки 2405 Т.

Перед операциями шлифования проводилась классификация нарезанных дисков по  $d_{\max}$  с шагом  $\Delta d_{\max}$ .

МКИ оценки коэффициентов регрессионных и скелдастических уравнений  
для операции резки кремния

Регрессионное уравнение $M\{y/\bar{x}\} = \alpha(\bar{x})$					Скелдастическое уравнение $D\{y/\bar{x}\} = \beta(\bar{x})$							
$a_i$	$dk$	$d_{max}$	$d_{min}$	$hd$	$ku2$	$b_i$	$y$	$s^2(dk)$	$s^2(d_{max})$	$s^2(d_{min})$	$s^2(hd)$	$s^2(ku2)$
$a_0$	718	732	708	21,3	11,8	$b_0$		376	435	403	121	33,2
$a_1 \times 10^{-3}$	2,00	2,70	1,70	1,10	0,60	$b_1 \times 10^{-3}$		63,0	25,0	90,0	9,2	83,0
$a_2$	-0,23	-0,24	-0,26	0,01	-0,01	$b_2$		2,2	1,1	2,8	-0,2	-0,1
$a_{12} \times 10^{-3}$	-0,05	0,05	0,10	0,14	0,08	$b_{12} \times 10^{-3}$		4,1	7,2	5,3	2,5	2,2
$a_{11} \times 10^{-6}$	-2,10	-3,40	-0,39	-1,80	-1,00	$b_{11} \times 10^{-6}$		58,0	59,0	53,0	41,0	57,0
$a_{22} \times 10^{-2}$	-2,03	-1,96	-1,29	0,19	0,24	$b_{22} \times 10^{-2}$		-7,5	-2,6	-11,1	15,5	-54,0

МММ оценки коэффициентов регрессионных и скедастических уравнений для операции матирования (М4)

Регрессионное уравнение $M\{y/\bar{x}\} = \alpha(\bar{x})$						Скедастическое уравнение $D\{y/\bar{x}\} = \beta(\bar{x})$							
$a_i$	$y$	$dk$	$d_{max}$	$hd$	$ku1$	$ku2$	$b_i$	$y$	$s^2(dk)$	$s^2(d_{max})$	$s^2(hd)$	$s^2(ku1)$	$s^2(ku2)$
$a_0$		472	478	8,3	5,6	1,9	$b_0$		30,8	37,7	15,9	9,4	3,1
$a_1 \times 10^{-1}$		-1,2	-0,8	0,1	0,3	-0,1	$b_1 \times 10^{-1}$		7,7	8,1	-0,6	0,4	0,2
$a_2 \times 10^{-3}$		-2,3	-2,9	-0,7	-0,9	0	$b_2 \times 10^{-3}$		2,4	2,4	0,6	0,9	0
$a_{12} \times 10^{-5}$		0	-0,5	-0,4	-0,5	-0,2	$b_{12}$		3,8	1,6	1,7	1,1	0,1

В качестве плана для шлифования М28-I был выбран полный факторный план ПФЭ  $2^3$  с входными параметрами:

$x_1$  - скорость вращения шлифовальника:  
основной уровень  $x_1(0) = 84$  об/мин,  
интервал варьирования  $l_1 = 20$  об/мин;

$x_2$  - нагрузка притира:  
 $x_2(0) = 2210$  г,  
 $l_2 = 860$  г;

$x_3$  - признак классификации по толщине  $\Delta d_{\max}$ :  
 $x_3(0) = 7,5$  мкм,  
 $l_3 = 2,5$  мкм,

разбитый по блокам по выходному параметру  $x_4$ ,

$x_4$  - исходная максимальная толщина  $d_{\max}^{00}$ .

План эксперимента для шлифования М28-II существенно не отличается от предыдущей операции. Было введено изменение назначения третьего фактора  $x_3$ .

$x_3$  - заданная толщина шлифования  $d^0$ , которая определяется по измерениям удельного сопротивления  $\rho$ ,

$$x_3(+) = 510^{-20} \text{ мкм,}$$

$$x_3(-) = 480^{-20} \text{ мкм.}$$

В план эксперимента введены еще опыты на основных уровнях по  $x_1$  и  $x_2$ .

Для моделирования операций шлифования М-I4 был запланирован полный факторный эксперимент  $2^2$  с включением опытов на основных уровнях по входным переменным

$x_1$  - скорость вращения шлифовальника:  
 $x_1(0) = 76$  об/мин,  
 $l_1 = 12$  об/мин;

$x_2$  - нагрузка притира:  
 $x_2(0) = 2210$  г,  
 $l_2 = 860$  г.

Эксперимент был разбит на блоки по  $x_3$  - заданная толщина шлифовки  $d^0$ , и на подблоки по  $x_4$  - исходная максимальная толщина.

Повторение опытов при шлифовке  $\omega = 50 \div 100$ ; все эксперименты проводились на станках марки ЖК I4.08.

Анализ результатов эксперимента показал, что основные предпосылки классического регрессионного анализа выполня-

ются только для некоторых выходов ( $d_k, d_{max}$ ) самой последней операции – операции шлифовки М14 (матирование). Гипотеза о нормальности распределения на выходе принимается также и для  $d_k$  и  $d_{max}$  при резке, но здесь нарушается условие однородности дисперсии. Для шлифовки М28-I и М28-II гипотеза  $H_0: y \sim N(\lambda A, \sigma^2 I)$  отбрасывается практически во всех случаях. Следовательно, описание этих операций только регрессионными уравнениями возможно в очень редких случаях. В общем случае ситуация усложняется значительно и необходимым оказывается определение по крайней мере двух моментов условного распределения на выходе. В данном случае были выбраны для этих целей регрессионные и скелдастические уравнения

$$\left. \begin{aligned} M(y/\bar{x}) &= \alpha(\bar{x}), \\ D(y/\bar{x}) &= \beta(\bar{x}). \end{aligned} \right\} \quad (I6)$$

Для примера в таблице I приведены некоторые МНК оценки коэффициентов уравнений (I6) для операции резки и в таблице 2 для операции матирования.

Наличие подобных моделей позволяет поставить и решить задачу выбора оптимального режима. При этом принципиальное значение приобретает вопрос выбора критерия оптимизации. Если последний не будет задан вышестоящим иерархическим уровнем АСУТП, то для самостоятельных операций могут быть сформулированы и свои локальные критерии.

Например, для операции резки технология задает обычно номинальную толщину диска с определенным допуском  $\delta$ . В наших терминах это значит, что

$$d_{max} - d_{min} \leq \delta,$$

при условии, что средняя толщина соответствует заданному. Так как все эти параметры являются случайными, то и получение годного диска является событием случайным и формулируемый критерий оптимизации должен быть вероятностным.

Исходя из технологических требований, можем зафиксировать допустимые отклонения размеров диска в виде ограничений  $a$  и  $b$  и определить критерии оптимизации как вероятность получения годного диска при этих ограничениях, то есть

$$Q = P \{ a \leq d_{min} \quad d_{max} \leq b \}. \quad (I7)$$

Обозначая  $d_{\min} = y_1$ ,  $d_{\max} = y_2$  и учитывая, что они являются зависимыми и имеют плотность распределения  $f(y_1, y_2)$ , можем написать

$$Q = \int_a^b \int_a^b f(y_1, y_2) dy_1 dy_2. \quad (18)$$

Интеграл (18) в случае известной плотности распределения  $f(y_1, y_2)$  решается методом Монте-Карло, и поиск оптимума в пространстве допустимых режимов осуществляется любым методом поисковой оптимизации.

Решение данной задачи оптимизации с применением моделей таблицы I дает возможность значительно улучшить работы участка механообработки кремния.

### Л и т е р а т у р а

Г. Бочкин О.И., Брук В.А., Никифорова - Денисова С.Н. Механическая обработка полупроводниковых материалов. М., "Высшая школа", 1973.

A. Annus, E. Kalm, A. Kivistik, V. Rink

### Über die Modellierung des Abschnitts der mechanischen Siliziumbearbeitung beim Erarbeiten des automatischen Steuerungssystems des technologischen Prozesses der Starkstromhalbleitergeräteherstellung

#### Zusammenfassung

Im Beitrag wird strenge Methodik der Parameterbewertung der geometrischen Form von Siliziumscheiben vorgeschlagen.

Es werden die Probleme der experimentellen Modellierung der technologischen Operationen im Abschnitt der mechanischen Siliziumbearbeitung betrachtet. Für die Beschreibung der Prozesse sind skedastische und Regressionsgleichungen gewählt, die für die Bestimmung der im Sinne der lokalen Optimumskriterien optimalen Betriebsarten für einzelne Operationen verwendet werden können.

## С о д е р ж а н и е

I.	X.В. Силламаа. Построение эквивалентных схем адмитансным многополюсникам. . . . .	3
2.	X.В. Силламаа. Эквивалентные схемы неадмитансных многополюсников. . . . .	13
3.	В.А.Кукк, Г.И.Шифф. Устойчивость нагруженного конвертора отрицательного сопротивления. . . . .	23
4.	М.Ю.Курм, В.А. Кукк. Анализ линейных цепей с помощью лаггеровских разложений. . . . .	33
5.	В.А. Кукк, Э.А. Рустерн. Алгоритм вычисления передаточной функции из переходной характеристики. . . . .	45
6.	А.Х, Ронк. Моделирование частичного LU-разложения разреженной матрицы при решении задач анализа цепей. . . . .	55
7.	М.В. Мин, Т.Э. Паавле. Моделирование детерминированной системы ФАПЧ на АВМ . . . . .	67
8.	М.В. Мин, Т.Э. Паавле. Определение полосы затягивания системы ФАПЧ второго порядка . . . . .	73
9.	М.В. Мин, Т.Э. Парве. Способ квадратурного перемножения исследуемого сигнала с опорным, использующий аппроксимацию по Уолшу. . . . .	79
10.	Э.Э. Вельмре, В.Н. Дороднев. О влиянии Оже-рекомбинации на прямую ветвь вольтамперной характеристики силового полупроводникового диода. . . . .	85
II.	А.Э. Ярвалт. Коррекция погрешностей преобразователя мгновенной мощности . . . . .	93
I2.	Р.Р. Инерс, Х.К. Росс. Общий анализ передач точного трансформатора со шгтовой обмоткой . . . . .	99
I3.	Я.В. Петерсон. Коммутационные процессы в индуктивных делителях напряжения. . . . .	III
I4.	Я.В. Петерсон. Анализ погрешностей индуктивного делителя напряжений с секцией связи. . . . .	II9
I5.	Г.Х.Вяльямая, И.И.Тильк, В.И.Тихонов. Преобразователь перемещений на основе датчика Холла. . . . .	I29

16. О.А. Аарна. Моделирование непрерывных технологических процессов на ЭВМ. . . . .	
I. О математических моделях непрерывных технологических процессов. . . . .	137
17. О.А. Аарна. Моделирование непрерывных технологических процессов на ЭВМ. . . . .	
II. Организация модельных расчетов. . . . .	149
18. О.А. Аарна. Моделирование непрерывных технологических процессов на ЭВМ. . . . .	
III. Решение типовых задач моделирования, оптимизации и идентификации. . . . .	163
19. Ю.И. Каллас. Математическое моделирование химико-технологических систем I. . . . .	173
20. А.А. Аннус, А.А. Кийтам. Вероятностная модель технологического процесса производства силовых полупроводниковых приборов. . . . .	177
21. А.А. Аннус, А.Г. Бахверк, Э.П. Калм, А.А.Кийтам, Я.М. Вьрк. Моделирование технологических операций на участке боралюминиевой диффузии технологического процесса производства полупроводниковых приборов. . . . .	187
22. А.А. Аннус, Э.П. Калм, А.Р. Кивистик, В.Э-В. Ринк, Я.М. Вьрк. О моделировании участка механической обработки кремния при создании АСУТП силовых полупроводниковых приборов. . . . .	193

\* \* \*

Таллинский политехнический институт. Труды ТПИ № 387. ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И АВТОМАТИКЕ. Сборник статей XIII. Редактор Л.Эйнер. Техн. ред. Л. Лоопер. Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 19 июня 1975 г. Подписано к печати 16 окт. 1975 г. Бумага 60x90/16. Печ. л. 12,75+0,75 приложение. Уч.-изд. л. 9,95. Тираж 350. МВ-08283. Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскла, 2/9. Зак. № 758. Цена 1 рубль.



Цена 1 руб.

TRÜ AKADEEMILINE RAAMATUKOGU



1 0200 00214952 8