Andres Lahe

ÕHUKESESEINALISTE VARRASTE TAKISTATUD VÄÄNE

EST-meetod

Raamatus kirjeldatakse õhukeseseinaliste varraste takistatud väändel tekkivaid kooldenormaalpingeid ja kooldenihkepingeid. Käsitletakse varraste liittööseisundit põhjustava koormuse ülekandmist elastsele teljele. Tuuakse avaldised bimomendi ja koguväändemomendi määramiseks. Varrassüsteemide takistatud väände rajaülesande püstitamisel esitatakse takistatud väände diferentsiaalvõrrandid ning kinemaatilised ja staatilised rajatingimused. Rajaülesannete lahendamiseks kasutatakse EST-meetodit. Seda meetodit testitakse ülesannetega, millel on juba teiste meetoditega leitud lahendid. Raamatu lisas on viited GNU Octave'iga kirjutatud programmidele. Lõpuks tuuakse sõnaseletuste loend koos vastetega saksa, inglise ja vene keeles.

Autorist

Andres Lahe on sündinud 30. märtsil 1938 Kõnnu vallas Harjumaal. 1956 lõpetas Loksa keskkooli. 1956–1959 õppis Tartu Riiklikus Ülikoolis. 1964 lõpetas Tallinna Polütehnilise Instituudi tööstus- ja tsiviilehituse insenerina. 1965–1970 täiendas teadmisi Leningradi Riikliku Ülikooli matemaatika ja mehaanika teaduskonna kaugõppes. Õppis aspirantuuris Eesti Teaduste Akadeemia Küberneetika Instituudi juures, kus kaitses füüsika-matemaatikakandidaadi kraadi 1973. Kandidaaditöö teemaks oli mittelineaarne lainelevi plaatides ja koorikutes. 1959. aastast töötas Tallinna Tehnikaülikoolis ehitustöölise, laborandi, inseneri, dotsendi ja professorina. Aastast 2005 on Tallinna Tehnikaülikooli emeriitprofessor.

$$\underbrace{\left[(L - h \ldots) \hat{\theta} - B_\omega \hat{\theta}' \right] \Big|_0^l}_{W_r - \text{rajajõudude töö}}$$

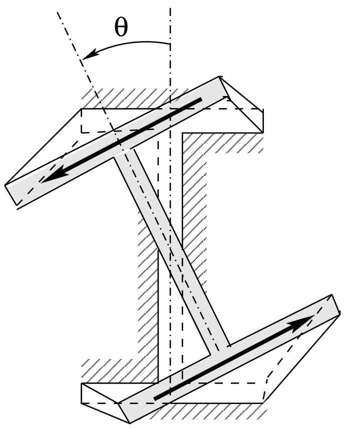
9 789949 239085 >

1918
TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL
MEHAANIKAINSTITUUT

Andres Lahe

Õhukeseseinaliste varraste takistatud vääne

EST-meetod



TTÜ KIRJASTUS
Tallinn 2016

Keeletoimetaja Aime-Rutt Hall
Kaane kujundanud Tiia Eikholm

ISBN 978-9949-23-907-8 (trükis)
ISBN 978-9949-23-908-5 (PDF)

Tallinna Tehnikaülikooli kirjastus 2016

Mente et manu

Õhukeseseinalisi vardaid kasutatakse lennuki-, laeva- ja sillaehituses ning ehituskonstruktsioonides. Õhukeseseinaliste varraste projekteerimisel tuleb arvestada ka varda väänet, mida on käsitletud vaid põgusalt raamatus „Teraskonstruktsioonide arvutus Eurokoodeks 3 järgi" [Loo08]. Tänaseni puudub eestikeelne kirjandus, ka õppematerjal, takistatud väändega seotud suuruste arvutamiseks. Siin esitatu püüab seda lünka täita.

Valik raamatus kasutatud termineist koos vastetega saksa, inglise ja vene keeles on koondatud sõnaseletuste loendisse „Terminid ja sümbolid".

Esimeses peatükis vaadeldakse Vlassovi hüpoteese õhukeseseinalise varda takistatud väände kohta. Tuuakse avaldised kooldenormaalpingete, kooldenihkepingete ja bimomendi leidmiseks ning määratakse märgikokkulepped väändel. Kirjeldatakse varraste liittööseisundit põhjustava koormuse ülekandmist elastsele teljele.

Teises peatükis esitatakse takistatud väände diferentsiaalvõrrandid. Tuletatakse takistatud väände põhivõrrandid ja laiendatud ülekandemaatriks EST-meetodiga lahendamiseks. Näidatakse, et varda takistatud väände ülesannete lahendamisel on EST-meetodiga leitud suurused heas kooskõlas raamatus [Sad63] toodud tulemustega.

Kolmas peatükk käsitleb õhukeseseinaliste varrassüsteemide arvutamist. Seatakse toetingimused (rajatingimused) varrassüsteemi kui terviku vabastamisel välissidemetest. Varrassüsteemi jaotamisel osadeks vabastatakse elemendid sisesidemetest[1]: sõlmedes elemente ühendavad sidemed asendatakse pidevus- ja tasakaalutingimustega (rajatingimustega). Sidemetest vabastamise printsiibi ning kinemaatiliste ja staatiliste rajatingimuste rakendamist vaadeldakse järgmistes näidetes:

- jätkuvtala arvutus EST-meetodiga (lk 109),
- murtud teljega L-tala arvutus EST-meetodiga (lk 121),
- murtud teljega Π-tala arvutus EST-meetodiga (lk 137).

Eesmärgiga testida EST-meetodit valiti näideteks ülesanded, millele olid juba olemas jõu- ja deformatsioonimeetodiga leitud lahendid [Bõt62], [Sad63].

Lisas A on vaatluse all õhukeseseinalise varda ristlõike geomeetrilised karakteristikud: sektorkoordinaat, staatiline sektormoment, sektortsentrifugaalmoment, sektorkoordinaadi nullpunkt, sektorinertsimoment jt.

[1] Sise- ja välissidemed vt [Jür85, lk 9].

Lisa B tutvustab elastsete varrassüsteemide energiateoreemi, milles sisalduv rajajõudude töö avaldis on oluline rajatingimuste püstitamisel.

Lisas C esitatakse õhukeseseinalise tala takistatud väände ülekandevõrrandid ja koormusvektorid.

Lisast D leiab avaldised, mis aitavad paindemomendi ja koguväändemomendi ühendussõlmes kontakti panna.

Lisas E on viited programmidele jätkuvtala ja murtud tala väände arvutamiseks.

Raamatus viidatakse vabavara GNU Octave[2] [3] abil kirjutatud programmidele. Siin peab arvestama, et kümnendkoha märkimiseks kasutatakse punkti. Nii on arvutuspäevikutes kümnendkohad arvus eraldatud punktiga.

Raamatule lisatud CD-plaadilt leiab arvuti kettaseadme tähisele vastava pdf-faili:

Kettaseadme tähis	Pdf-fail
D:	avatud6huke_D.pdf
E:	avatud6huke_E.pdf
F:	avatud6huke_F.pdf
S:	avatud6huke_S.pdf
Z:	avatud6huke_Z.pdf
/media/cdrom0	avatud6huke_cdrom0.pdf
/media/E_OPE	avatud6huke.pdf

Kõrgetasemelises programmeerimiskeeles GNU Octave kirjutatud programmide vaatamiseks soovitame installida Notepad++ redaktori[4].

Sobivad failid võib CD-plaadilt kirjutada mälupulgale. USB-draivi tähist arvutis saab muuta (vt *Changing drive letters for the USB stick*)[5].

Vanemas pdf-failide lugejas/vaatajas[6] tuleb failis leiduvate viidete avamiseks aktiveerida tugevdatud turbe suvand (*Enable enhanced security*)[7].

Andres Lahe

[2] http://vabavara.eu/index.php?programm=501 (03.02.2016)
[3] http://en.wikipedia.org/wiki/GNU_Octave (03.02.2016)
[4] https://notepad-plus-plus.org/ (16.03.2016)
[5] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Structural_Mechanics_Book_with_Media_and_Computer_Programs.pdf#page=4 (16.03.2016)
[6] https://helpx.adobe.com/acrobat/kb/install-reader-xi-windows2.html (16.03.2016)
[7] https://helpx.adobe.com/acrobat/using/enhanced-security-setting-pdfs.html (16.03.2016)

Sisukord

Näited

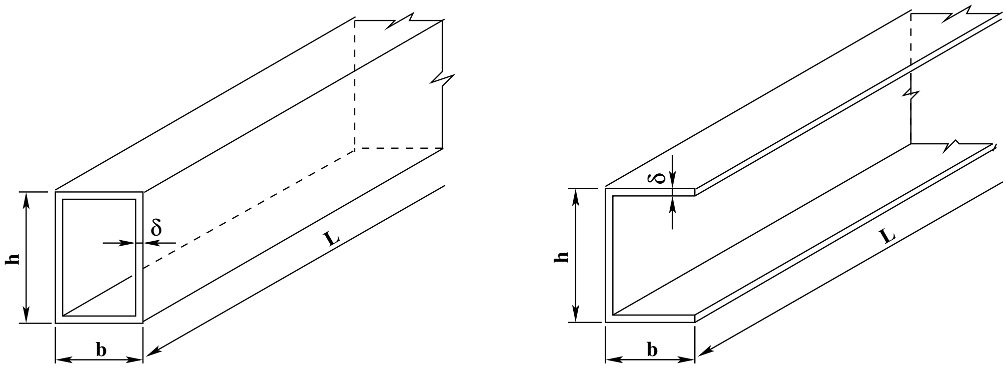
Joonised

Tabelid

1. Põhimõisted

1.1 Avatud ja suletud ristlõikega vardad

Õhukeseseinalise varda seina paksus δ on varda teiste mõõtmetega võrreldes väike: $\delta \ll b \approx h < L$ (jn 1.1). Õhukeseseinalised vardad võivad olla suletud ristlõikega (jn 1.1 a) või avatud ristlõikega (jn 1.1 b).



(a) Suletud ristlõige (b) Avatud ristlõige

Joonis 1.1. Avatud ja suletud ristlõikega vardad

Õhukeseseinalise suletud ristlõikega varda arvutus erineb vähe mitteümara ristlõikega varda arvutusest, mis leidub õpikus [KMPR12]. Õhukeseseinalise avatud ristlõikega varda arvutustes kehtib ristlõigete tasandilisuse hüpotees (Bernoulli[1] hüpotees) ainult koormuse teatud rakendamisel ristlõikes.

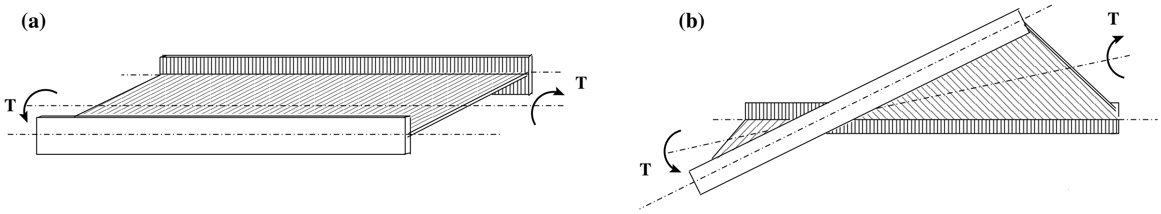
1.2 Vaba ja takistatud vääne

Kui kõik ristlõiketasandid kõverduvad takistuseta ja ühtmoodi, siis nimetatakse väänet vabaväändeks ehk takistamata väändeks (sks Saint-Venant Torsion, ingl St. Venant torsion, vn чистое кручение e свободное кручение).

Vabaväändemomendi (St. Venant'i väändemomendi) T_{xt} ja väändenurga $\theta\,(x)$ tuletis varda teljesuunalise koordinaadi x järgi on omavahel seotud (vt väändenurga diferentsiaalvõrrand [KMPR12]).

$$T_{xt} = GI_t\theta' \tag{1.1}$$

[1] Jacob Bernoulli (1655–1705), šveitsi matemaatik.



Joonis 1.2. Vabavääne

kus

GI_t – vabaväändejäikus;

G – nihkeelastsusmoodul e nihkemoodul e Coulomb'i[2] moodul;

I_t – väändeinertsimoment.

$$I_t = \frac{1}{3}\eta \sum_{i=1}^{n} b_i \delta_i^3 \tag{1.2}$$

kus

b_i ja δ_i – varda ristlõikes (jn 1.1) oleva ristkülikulise lehe küljed ($b_i \gg \delta_i$);

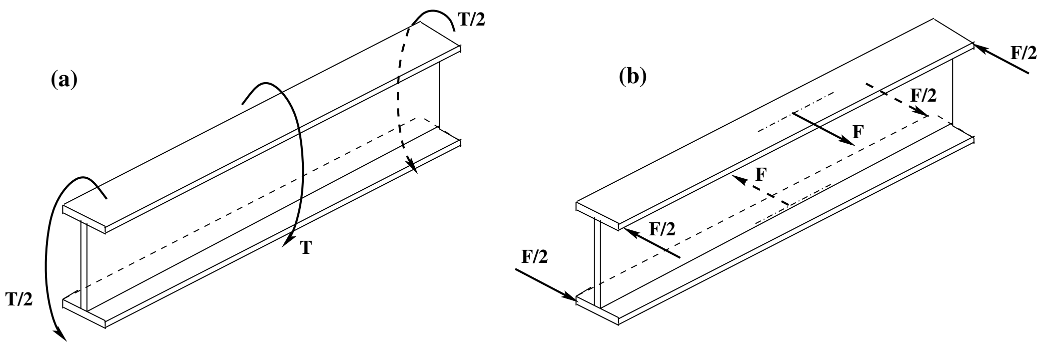
η – tegur, mille väärtus sõltub ristlõike kujust: L-profiilil $\eta = 1.00 \ldots 1.10$, I-profiilil $\eta = 1.2$, U-profiilil $\eta = 1.12$ ja T-profiilil $\eta = 1.15$, vt [Sad63, lk 23].

Väändeinertsimomendi I_t arvutamist suletud ristlõike korral vt [KMPR12, lk 305].

Vabaväändel (jn 1.2) säilitavad varda pikikiud oma pikkuse. Normaalpinged ristlõikes puuduvad, mõjuvad ainult nihkepinged.

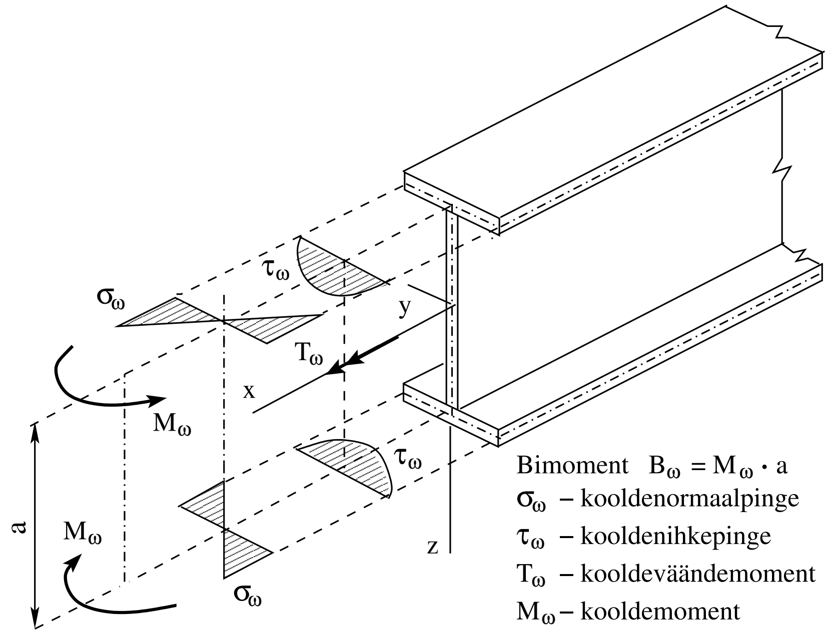
Kui ristlõiketasandite kõverdumine on takistatud, siis sellist väänet nimetatakse *takistatud väändeks* (sks Wölbkrafttorsion, ingl restrained warping torsion, vn изгибное кручение e стесненное кручение [Vla59], [Smi75, lk 314]).

Mitteümarvarraste väändel toimub ristlõiketasandi kõverdumine – kooldumine[3],



Joonis 1.3. Takistatud vääne

[2] Charles Augustin de Coulomb (1736–1806), prantsuse füüsik ja insener.
[3] http://www.eki.ee/dict/ies/index.cgi?Q=warp&F=M&C06=et (28.04.2015)



Joonis 1.4. Kooldepinged

deplanatsioon (sks Wölbung[4] e Verwerfung, ingl warping[5 6 7] e deplanation, vn коробление[8] e депланация).

Takistatud väändel deformeeruvad varda pikikiud erinevalt (jn 1.3). Joonisel 1.4 näeme I-profiili ülemise ja alumise vöö erisugust deformeerumist takistatud väändel. Erineva deformeerumise tagajärjel ristlõige kooldub (kõverdub). Ristlõike kooldumisel tekivad kooldepinged, mis jagunevad

- *kooldenormaalpingeteks* σ_ω (sks Wölbnormalspannungen[9], ingl warping normal stresses[10], vn секториальные нормальные напряжения) ja
- *kooldenihkepingeteks* τ_ω (sks Wölbschubspannungen, ingl warping shear stresses, vn секториальные касательные напряжения).

Kooldenormaalpinged σ_ω ülemises ja alumise vöös moodustavad paindemomentide M_ω paari (jn 1.4), mille korrutist nende vahekaugusega a nimetatakse bimomendiks B_ω.

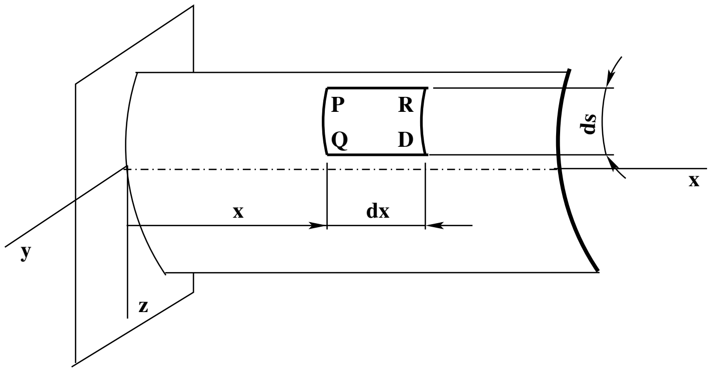
[4] http://dict.leo.org/#/search=w%C3%B6lbung&searchLoc=0&resultOrder=basic&multiwordShowSingle=on (28.04.2015)
[5] http://www.structuralwiki.org/en/Warping (28.04.2015)
[6] http://dict.leo.org/ende/index_de.html#/search=warping&searchLoc=0&resultOrder=basic&multiwordShowSingle=on (28.04.2015)
[7] http://www.ttu.ee/public/m/Mehaanikateaduskond/Instituudid/Materjalitehnika_instituut/Materjalitehnika_seletav_sonaraamat.pdf#page=163 (19.20.2015)
[8] http://slovar-vocab.com/english-russian/vocabulary/warping-100033.html (28.04.2015)
[9] http://de.wikipedia.org/wiki/Torsion_%28Mechanik%29#W.C3.B6lbkrafttorsion (8.03.2015)
[10] http://www.steel-insdag.org/TeachingMaterial/Chapter17.pdf#page=14 (8.03.2015)

1.3 Siirete ja deformatsioonide vahelised seosed

Vaatleme nüüd õhukeseseinalise varda siirete ja deformatsioonide vahelisi seoseid. Nendes seostes arvestatakse järgmisi hüpoteese [Vla59]:

- õhukeseseinalise varda keskpinnal võib hüljata nihkedeformatsioonid ehk nihkemoonded (vt [KMPR12, lk 109]), s.t keskpinnal on nihkenurk $\gamma \approx 0$;
- õhukeseseinalise varda ristlõike kontuur ei deformeeru, s.t kaugus ristlõike kahe punkti vahel ei muutu.

Esimese hüpoteesi selgitamiseks vaatleme õhukeseseinalise varda keskpinnal (jn A.1) ristkülikulist elementi PRQD mõõtmetega $dx \times ds$ (jn 1.5).



Joonis 1.5. Ristkülik keskpinnal

Nihkedeformatsiooni varda keskpinnal käsitleme kui kõrgemat järku väikest suurust: $\gamma \approx 0$.

Ristkülikulise elemendi punkti P (jn 1.6) siirete komponendid koordinaadi x ja sektorkoordinaadi s (vt jaotis A.1) suunas tähistame vastavalt $u\,(x, s)$ ja $v\,(x, s)$. Ristkülikulise elemendi punkti R siirete komponendid

$$u_R = u + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x, \qquad v_R = v + \frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x \tag{1.3}$$

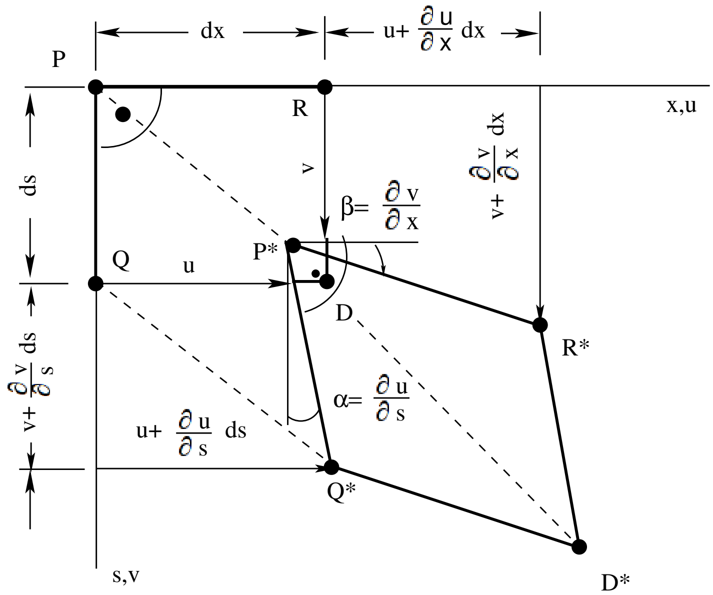
ja punkti Q siirete komponendid

$$u_Q = u + \frac{\partial u}{\partial s}\,\mathrm{d}s, \qquad v_Q = v + \frac{\partial v}{\partial s}\,\mathrm{d}s \tag{1.4}$$

Ristkülikulise elemendi deformeerumisel (jn 1.6) moodustub nihkenurk γ nurkade α ja β summana:

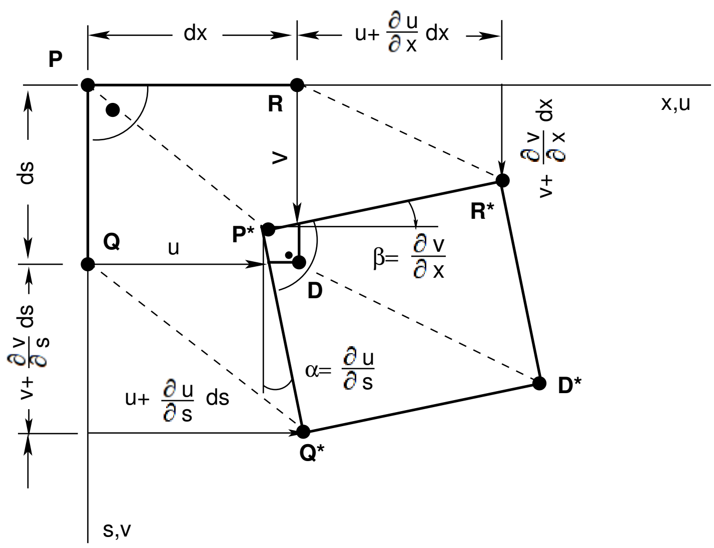
$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{1.5}$$

Tingimuse (1.5) rakendamine õhukeseseinalise varda keskpinnal moodustab *esimese hüpoteesi* sisu.



Joonis 1.6. Ristküliku deformatsioon

Nihkenurga puudumisel ($\gamma = 0$) võib elemendi siirdumist ja pöördumist vaadelda kui jäiga keha pööret. Ristkülikulise elemendi PRQD (jn 1.5 ja 1.7) kontuur ei deformeeru.



Joonis 1.7. Ristküliku pööre

Kahe ristlõike pööret teineteise suhtes ümber varda telje x mõõdame väändenurgaga θ. Vlassovi teooria [Vla59] *teise hüpoteesi* põhjal on väändenurk $\theta\,(x)$ ainult varda teljesuunalise koordinaadi x funktsioon.

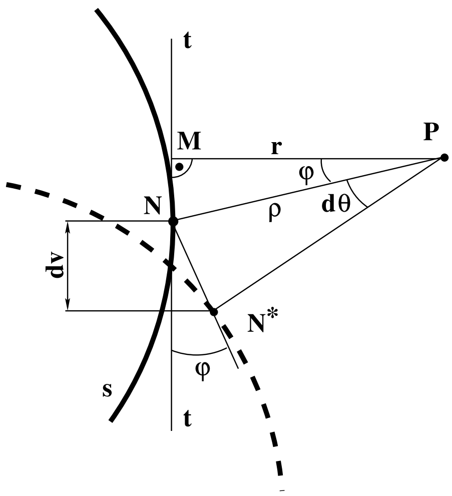
Ristlõike pöördumisel ümber telje, mis on paralleelne varda teljega (joonisel 1.8 on näidatud ristlõike keskjoone pööre ümber pooluseks nimetatava punkti P), võime keskjoone puutujasuunalise elementaarsiirde dv kirjutada kujul

$$\mathrm{d}v = \overline{NN^{*}}\cos\varphi \approx \rho\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta\,(x) = r\,\mathrm{d}\theta\,(x) \tag{1.6}$$

$$\mathrm{d}v = r\,\frac{\partial\theta}{\partial x}\,\mathrm{d}x \tag{1.7}$$

kus

ρ – raadiusvektor poolusest P vaadeldavasse punkti N (jn 1.8 ja jaotis A.1);
r – pooluse P kaugus keskjoone puutujast $t-t$, mis läbib vaadeldavat punkti N;
$\mathrm{d}\theta$ – elementaarväändenurk.



Joonis 1.8. Keskjoone pööre

Nihkenurga $\gamma = 0$ puudumise tingimusest (1.5) saame

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -r\,\frac{\partial\theta}{\partial x} \tag{1.8}$$

$$\partial u = -r\,\frac{\partial\theta}{\partial x}\partial s \tag{1.9}$$

Varda teljega paralleelse kiu pikkedeformatsioonil s-koordinaat ei muutu. Seega saame osatuletise avaldises (1.9) asendada täistuletisega:

$$\mathrm{d}u = -r\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}s = -r\,\theta'\mathrm{d}s \tag{1.10}$$

Nüüd saab suuruse $r\,\mathrm{d}s$ asendada sektorkoordinaadi diferentsiaaliga $\mathrm{d}\omega$ (A.33):

$$\mathrm{d}u = -\theta'\,r\,\mathrm{d}s = -\theta'\,\mathrm{d}\omega \tag{1.11}$$

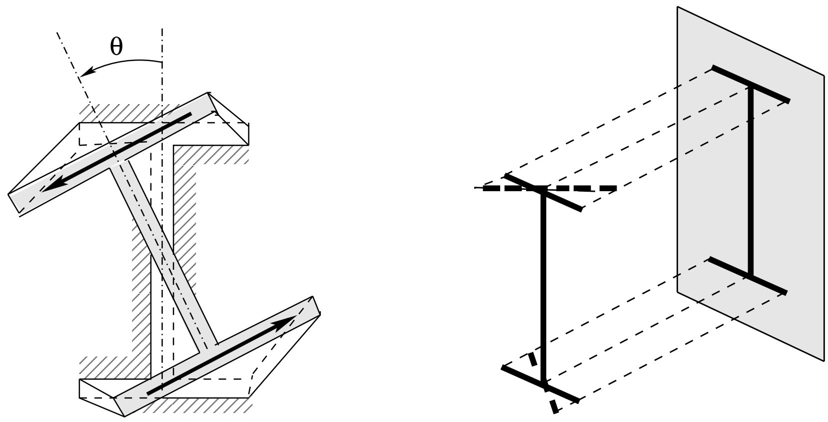
Ristlõikes, kus $x = konst$, saab siirde $u\,(s)$ leida avaldisega

$$u = -\theta'\int_s r\,\mathrm{d}s = -\omega\,\theta' \tag{1.12}$$

Ristlõike kõverdumisest (kooldumisest) tekkiv kooldepikkedeformatsioon on leitav avaldisega

$$\epsilon_{x\,\omega} = \frac{\partial u}{\partial x} = -\,\omega\,\theta'' \tag{1.13}$$

Vlassovi teooria *teise hüpoteesi* põhjal on raadiusvektori $\overrightarrow{PN^*}$ projektsiooni pikkus (jn 1.8) ristlõiketasandil pärast ristlõike kooldumist võrdne raadiusvektori $\overrightarrow{PN}$ esialgse pikkusega. Õhukeseseinalise varda ristlõike kontuur ei deformeeru (jn 1.9a), seega jääb kaugus kahe ristlõikes asuva punkti vahel deformeerimise käigus muutumatuks (jn 1.9b).



(a) Ristlõike pööre (b) Ristlõike projektsioon

Joonis 1.9. Ristlõike kooldumine takistatud väändel

1.4 Kooldenormaalpinged

Normaalpingete leidmiseks *takistatud väändel* kasutatakse Hooke'i[11] seadust:

$$\sigma = E\,\epsilon \tag{1.14}$$

Tegurit E seoses (1.14) nimetatakse (normaal)elastsusmooduliks (ka Youngi[12] mooduliks). Asendades deformatsiooni ϵ avaldises (1.14) tema avaldisega (1.13), saame

$$\sigma_\omega = -\,E\omega\theta'' \tag{1.15}$$

kus

σ_ω – kooldenormaalpinged;
ω – sektorpindala ehk sektorkoordinaat (vt jaotis A.1);
θ'' – väändenurga θ teine tuletis koordinaadi x järgi.

[11] Robert Hooke (1635–1703), inglise füüsik.
[12] Thomas Young (1773–1829), inglise füüsik.

Praktilisteks arvutusteks moodustame kooldenormaalpinge σ_ω ja bimomendi B_ω (jn 1.4) vahelise seose analoogiliselt tugevusõpetuses kasutatava normaalpinge σ ja paindemomendi M vahelise seosega [KMPR12]. Korrutame avaldist (1.15) sektorkoordinaadiga ω ja ristlõike elementaarpindalaga $\mathrm{d}A$ ning integreerime pindala A ulatuses.

$$\int_A \sigma_\omega \omega \,\mathrm{d}A = -\,E\theta'' \int_A \omega^2 \mathrm{d}A \tag{1.16}$$

Seose (1.16) vasakpoolset suurust nimetame bimomendiks B_ω.

$$B_\omega = \int_A \sigma_\omega \omega \,\mathrm{d}A \tag{1.17}$$

Seose (1.16) parempoolne integraal määrab sektorinertsimomendi I_ω (A.60):

$$I_\omega = \int_A \omega^2 \mathrm{d}A \tag{1.18}$$

Võttes arvesse bimomendi B_ω ja sektorinertsimomendi I_ω avaldised (1.17), (1.18), saame seose (1.16) esitada kujul

$$B_\omega = -\,EI_\omega \theta'' \tag{1.19}$$

Bimoment B_ω õhukeseseinalise varda ristlõikes on momendipaar (jn 1.4), mis staatilises mõttes on tasakaalustatud. Bimomendi leidmist vaatleme edaspidi. Avaldame suuruse $E\theta''$ seosest (1.19):

$$-\,E\theta'' = \frac{B_\omega}{I_\omega} \tag{1.20}$$

Saadud avaldise paigutame seosesse (1.15):

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega \omega}{I_\omega} \tag{1.21}$$

Bimoment B_ω ja sektorinertsimoment I_ω ristlõikes ei muutu. Muutub ainult sektorkoordinaat ω. Seega sarnaneb kooldenormaalpingete σ_ω epüür sektorkoordinaadi ω epüüriga.

Raamatus [HIM11, lk 3] toodud märkuses rõhutatakse, et bimomendi ja kooldemomendi mõistet ei tohi segi ajada. Bimomendi suuruseks on jõud korrutatud pikkuse ruuduga, kooldemomendi suuruseks aga jõu ja pikkuse korrutis.

$$M_\omega = \mp \frac{EI_\omega}{(h - t_f)} \theta'' \tag{1.22}$$

kus

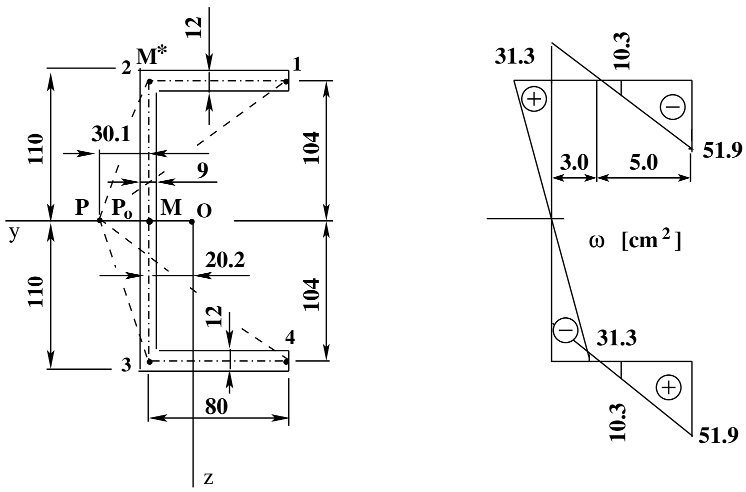
h – ristlõike kõrgus;

t_f – vöö paksus[13].

[13] http://sahtel.keila.ee/avalik/Tallinn%20-%20Paldiski%20mnt.%20eelprojekt/III.3%20Keila%20II%20sild/1_DOKUMENDID/2_LISAD/Lisa%204%20-%20arvutused-%20Keila%20II%20sild.pdf (6.06.2015)

Kooldemomendi märgi ($\mp$) määrame vastavalt bimomendi märgireeglile (jn 1.18). Vaadates piki momendipaari õlga, tuleb avaldises (1.22) vaatajapoolse momendi määramisel võtta miinusmärk, vaatajast kaugema momendi määramisel aga plussmärk. Vaatajapoolne moment on positiivne pöördumisel vastupäeva. Vaatajast kaugem moment on positiivne pöördumisel päripäeva. Siin on kasutatud parema käe teljestiku (jn A.3) märgireegleid.

Näide 1.1 (kooldenormaalpingete epüür). *Koostada kooldenormaalpingete epüür joonisel 1.10a toodud U-profiili ristlõikele. Ristlõikes mõjub bimoment* $B = 0.59\,\mathrm{kN{\cdot}m^2}$



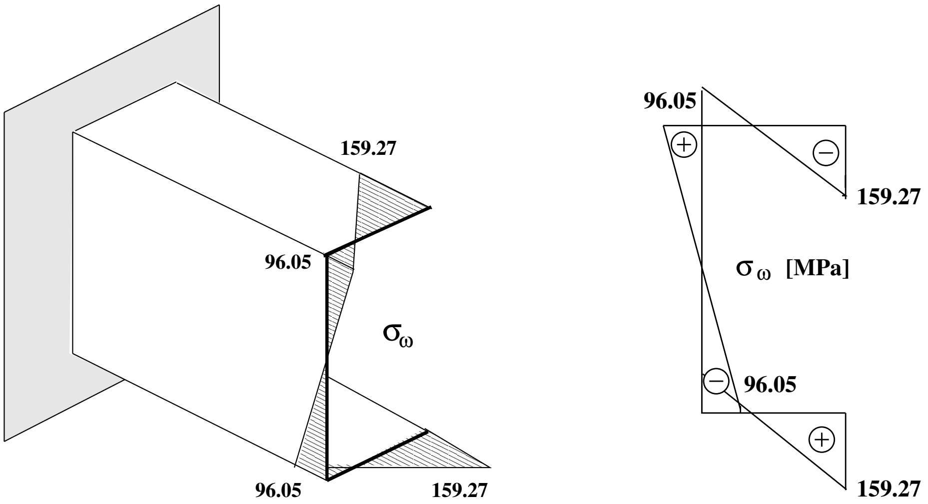
(a) U-profiil (b) Peasektorkoordinaadid

Joonis 1.10. U-profiili peasektorkoordinaadid

Joonisel 1.10a toodud ristlõike sektorkoordinaatide ω_i arvutus on toodud näites A.6: $\omega_1 = -51.9\,\mathrm{cm}^2$, $\omega_2 = 31.3\,\mathrm{cm}^2$, $\omega_3 = -31.3\,\mathrm{cm}^2$, $\omega_4 = 51.9\,\mathrm{cm}^2$. *Ristlõike sektorinertsimoment $I_\omega = 19\,226\,\mathrm{cm}^6$ (A.62). Kooldenormaalpinged σ_ω on võrdelised sektorkoordinaatidega ω (jn 1.10b).*

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\omega\,1} &= \frac{B_\omega \omega_1}{I_\omega} = \frac{5.9\times10^6\cdot(-51.9)}{19\,226} = -1.5927\times10^4\,\mathrm{N/cm^2} = -159.27\,\mathrm{MPa}\\
\sigma_{\omega\,2} &= \frac{B_\omega \omega_2}{I_\omega} = \frac{5.9\times10^6\cdot 31.3}{19\,226} = 9.6052\times10^3\,\mathrm{N/cm^2} = 96.05\,\mathrm{MPa}\\
\sigma_{\omega\,3} &= \frac{B_\omega \omega_3}{I_\omega} = \frac{5.9\times10^6\cdot(-31.3)}{19\,226} = -9.6052\times10^3\,\mathrm{N/cm^2} = -96.05\,\mathrm{MPa}\\
\sigma_{\omega\,4} &= \frac{B_\omega \omega_1}{I_\omega} = \frac{5.9\times10^6\cdot 51.9}{19\,226} = 1.5927\times10^4\,\mathrm{N/cm^2} = 159.27\,\mathrm{MPa}
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

Kooldenormaalpingete σ_{ω_i} (1.21) epüür on esitatud joonisel 1.11.



(a) U-profiili keskpind (b) Kooldenormaalpinged

Joonis 1.11. Kooldenormaalpinged U-profiilis

1.5 Tasakaaluvõrrandid ristlõike kõverdumisel

Vaatleme pingete jaotust ristlõikes takistatud väändel:

- vabaväändele vastavad nihkepinged τ_t (jn 1.12a) ristlõike keskjoonel (jn A.1) puuduvad, seina paksuses muutuvad lineaarselt;
- kooldenormaalpinged σ_ω (jn 1.13) on seina paksuses konstantsed;
- kooldenihkepinged τ_ω (jn 1.12b) on seina paksuses konstantsed.

Õhukeseseinalise varda ristlõikes moodustavad kooldenormaalpinged isetasakaalustuva süsteemi. Selle süsteemi kirjeldamisel seame järgmised tingimused:

- varda ristlõikes puudub *pikijõud* $N_{x\,\omega}$:

$$N_{x\,\omega} = \int_A \sigma_\omega \,\mathrm{d}A = 0 \tag{1.24}$$

- varda ristlõikes puudub *paindemoment y-telje suhtes* $M_{y\,\omega}$:

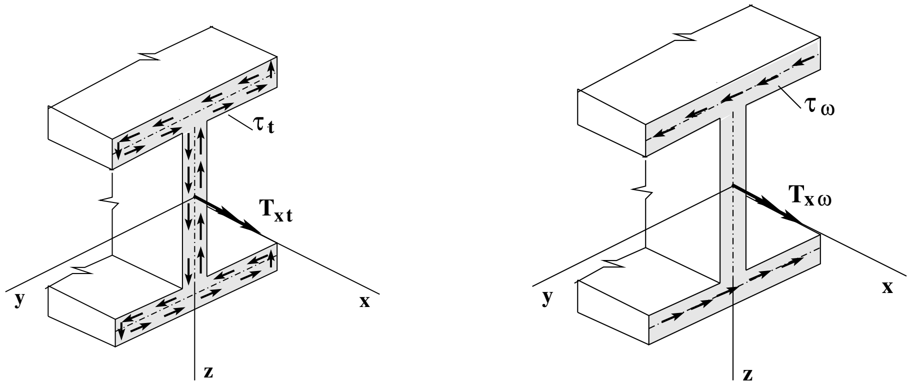
$$M_{y\,\omega} = \int_A \sigma_\omega \, z \,\mathrm{d}A = 0 \tag{1.25}$$

- varda ristlõikes puudub *paindemoment z-telje suhtes* $M_{z\,\omega}$:

$$M_{z\,\omega} = \int_A \sigma_\omega \, y \,\mathrm{d}A = 0 \tag{1.26}$$

- koguväändemoment T_{sum} on võrdne vabaväändemomendi $T_{x\,t}$ (jn 1.12a) ja kooldenihkepingetele vastava väändemomendi $T_{x\,\omega}$ (jn 1.12b) algebralise summaga:

$$T_{sum} = T_{x\,t} + T_{x\,\omega}, \qquad T_{sum} = T_{x\,t} + \int_A \tau_\omega \, r \,\mathrm{d}A \tag{1.27}$$



(a) Nihkepinged vabaväändel (b) Nihkepinged takistatud väändel

Joonis 1.12. Väändemomendid

Tingimus (1.27) annab seose välise väändemomendi ja takistatud väände komponentide vahel.

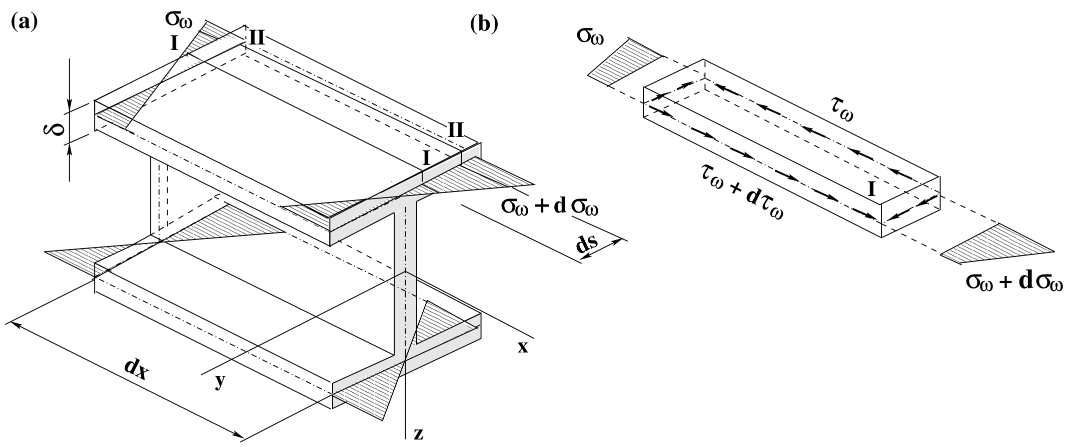
Kooldenihkepingetele vastav kooldeväändemoment $T_{x\,\omega}$ saadakse kooldenihkepinge τ_ω korrutamisel lõiguga r ja integreerimisel ristlõike pindala A ulatuses. Lõik r on sektorkoordinaadi pooluse kaugus keskjoone puutujast (vt jaotis A.1), mis läbib vaadeldavat kooldenihkepinge rakenduspunkti.

$$T_{x\,\omega} = \int_A \tau_\omega \, r \, \mathrm{d}A \tag{1.28}$$

Tingimuses (1.24) asendame σ_ω tema avaldisega (1.15):

$$\int_A \sigma_\omega \, \mathrm{d}A = -\,E\theta'' \int_A \omega \, \mathrm{d}A = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_A \omega \, \mathrm{d}A = S_\omega = 0 \tag{1.29}$$

Siit leiame, et sektorkoordinaat ω algab peanullpunktis ($S_\omega = 0$, vt avaldist (A.52)).



Joonis 1.13. Kooldenormaalpinged

Tingimustest (1.25) ja (1.26) leiame pooluse, mille puhul sektortsentrifugaalmomendid $I_{\omega\, y}$ (A.41), $I_{\omega\, z}$ (A.42) on võrdsed nulliga. Leitud poolus on lõikekese (vt jaotis A.5).

$$M_{y\,\omega} = \int_A \sigma_\omega z \,\mathrm{d}A = -\,E\theta'' \int_A \omega z \,\mathrm{d}A = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_A \omega z \,\mathrm{d}A = I_{\omega z} = 0 \tag{1.30}$$

$$M_{z\,\omega} = \int_A \sigma_\omega y \,\mathrm{d}A = -\,E\theta'' \int_A \omega y \,\mathrm{d}A = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_A \omega y \,\mathrm{d}A = I_{\omega y} = 0 \tag{1.31}$$

Kirjanduses [Jür85, lk 229] on väljendi *lõikekese* sünonüümina kasutatud ka terminit *paindekese* (sks Schubmittelpunkt e Drillruhepunkt, ingl bending center e twist center, vn центр изгиба e центр кручения).

1.6 Sisejõududevahelised seosed

1.6.1 Seos kooldepingete vahel

Kooldenormaalpinge σ_ω ja *kooldenihkepinge* τ_ω vahelise seose kirjeldamiseks vaatleme joonist 1.13. Eraldame õhukeseseinalisest vardast kahe teineteisele lähedase ristlõikega elemendi pikkusega $\mathrm{d}x$ (jn 1.13a). Eraldatud elemendi otspindadel mõjuvad erinevad kooldenormaalpinged σ_ω ja $\sigma_\omega + \mathrm{d}\sigma_\omega$. Vaadeldavast elemendist eemaldame lõigetega I-I ja II-II riba laiusega $\mathrm{d}s$ ja paksusega δ (jn 1.13b).

Võtame arvesse kooldenihkepinged τ_ω ja $\tau_\omega + \mathrm{d}\tau_\omega$, mis Ẑuravski[14] hüpoteesi kohaselt laotuvad pikilõike laiuses ühtlaselt. Koostame vaadeldava riba tasakaalutingimuse:

$$\Sigma X = 0; \qquad -\sigma_\omega \delta \,\mathrm{d}s + (\sigma_\omega + \mathrm{d}\sigma_\omega)\,\delta\,\mathrm{d}s - \tau_\omega \delta\,\mathrm{d}x + (\tau_\omega + \mathrm{d}\tau_\omega)\,\delta\,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.32}$$

Pärast sarnaste liikmete koondamist

$$\Sigma X = 0; \qquad \mathrm{d}\sigma_\omega\,\delta\,\mathrm{d}s + \mathrm{d}\tau_\omega\,\delta\,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.33}$$

Siit leiame otsitava seose kooldenormaalpinge ja kooldenihkepinge vahel:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\omega}{\mathrm{d}x} = -\,\frac{\mathrm{d}\tau_\omega}{\mathrm{d}s} \tag{1.34}$$

1.6.2 Seos bimomendi ja kooldeväändemomendi vahel

Bimomendi B (1.17) ja kooldeväändemomendi $T_{x\,\omega}$ (1.28) vahelise seose otsimist alustame avaldisest

$$B_\omega = \int_A \sigma_\omega \omega \,\mathrm{d}A \tag{1.35}$$

mida diferentseerime muutuja x järgi:

$$\frac{\mathrm{d}B_\omega}{\mathrm{d}x} = \int_A \frac{\mathrm{d}\sigma_\omega}{\mathrm{d}x} \omega \,\mathrm{d}A \tag{1.36}$$

[14] Dmitri Ẑuravski (1821–1891), vene insener.

Asendame siin kooldenormaalpinge tuletise $\mathrm{d}\sigma_\omega/\mathrm{d}x$ kooldenihkepinge tuletisega $-\mathrm{d}\tau_\omega/\mathrm{d}s$ (vt avaldis (1.34)) ja pinnaelemendi $\mathrm{d}A$ keskjoone pikkusele vastava elemendiga $\mathrm{d}s$ ($\mathrm{d}A = \delta\,\mathrm{d}s$):

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} = -\int_A \frac{\mathrm{d}\tau_\omega}{\mathrm{d}s}\,\omega\,\delta\,\mathrm{d}s = -\int_A \omega\,\mathrm{d}\left(\tau_\omega\,\delta\right) \tag{1.37}$$

Integreerime võrrandi (1.37) parempoolseimat liiget ositi valemi

$$\boxed{\int_a^b u dv = uv\;|_a^b - \int_a^b v du} \tag{1.38}$$

järgi, võttes u ja dv järgmiselt:

$$\int_a^b \underbrace{\omega}_{u}\,\underbrace{\mathrm{d}\left(\tau_\omega\,\delta\right)}_{dv}$$

Saame avaldise

$$\frac{\mathrm{d}B_\omega}{\mathrm{d}x} = -\,\tau_\omega\,\delta\,\omega\;|_A + \int_A \tau_\omega\,\delta\,\mathrm{d}\omega \tag{1.39}$$

Siin võrdub esimene parempoolne liige $-\tau_\omega\,\delta\,\omega\;|_A$ nulliga, sest varda välispinnal (sektorkoordinaadi $\omega\;|_a^b$ äärmistes punktides) kooldenihkepinged puuduvad: $\tau_{\omega\,b} = 0$, $\tau_{\omega\,a} = 0$.

$$-\;\tau_\omega\,\delta\,\omega\;|_A = -\,\tau_\omega\,\delta\,\omega\;|_a^b = -\,\tau_{\omega\,b}\,\delta\,\omega_b + \tau_{\omega\,a}\,\delta\,\omega_a = 0 \tag{1.40}$$

Võrrandis (1.39) teeme asenduse $\mathrm{d}\omega = r\mathrm{d}s$ (vt jaotis A.1):

$$\frac{\mathrm{d}B_\omega}{\mathrm{d}x} = \int_A \tau_\omega\,\delta\,\mathrm{d}\omega = \int_A \tau_\omega\,r\,\delta\mathrm{d}s = \int_A \tau_\omega\,r\,\mathrm{d}A \tag{1.41}$$

Avaldiste (1.41) ja (1.28) võrdlusest saame

$$\frac{\mathrm{d}B_\omega}{\mathrm{d}x} = T_\omega \tag{1.42}$$

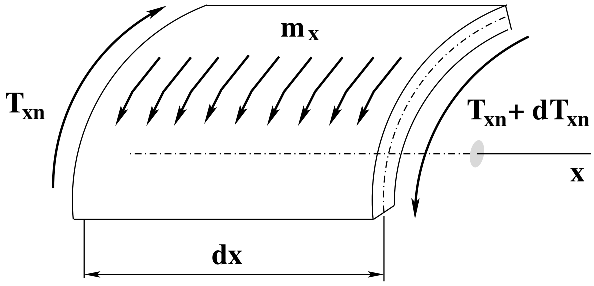
kus $\mathrm{d}B_\omega/\mathrm{d}x$ – bimomendi tuletis varda teljesuunalise koordinaadi x järgi – on võrdne kooldeväändemomendiga T_ω.

Seostest (1.19) ja (1.42) saame kooldeväändemomendi T_ω:

$$T_\omega = -\,E\,I_\omega\theta''' \tag{1.43}$$

1.6.3 Seos üldväändemomendi ja lausmomendi vahel

Üldväändemomendi T_{sum} (1.27) ja ümber varda telje mõjuva lausmomendi m_x vahelise seose leidmiseks vaatleme varda elementi pikkusega $\mathrm{d}x$ (jn 1.14).



Joonis 1.14. Lausmoment

Koostame tasakaaluvõrrandi x-teljele:

$$\sum X = 0, \qquad -T_{sum} + m_x \mathrm{d}x + (T_{sum} + \mathrm{d}T_{sum}) = 0 \tag{1.44}$$

Siit

$$\frac{\mathrm{d}T_{sum}}{\mathrm{d}x} = -\, m_x \tag{1.45}$$

Õhukeseseinalise varda lõikudes, kus väändemoment T_{sum} on konstantne, kehtib seos

$$\frac{\mathrm{d}T_{sum}}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{1.46}$$

1.7 Kooldenihkepinged

Vaatleme joonisel 1.15b kujutatud õhukeseseinalisest vardast eraldatud osa tasakaalu.
Koostame tasakaaluvõrrandi x-teljele:

$$\sum X = 0, \qquad -\int_{A^*} \sigma_\omega \mathrm{d}A + \int_{A^*} \left(\sigma_\omega + \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x}\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}A + \tau_\omega \delta \mathrm{d}x = 0 \tag{1.47}$$

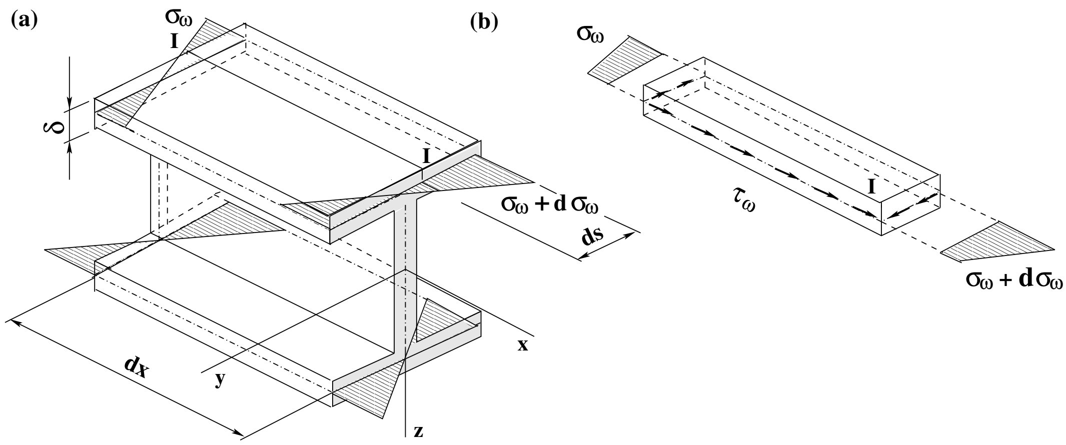
kus $A^* = \delta\, ds$ on lõikega I-I eraldatud osa pindala.

Asendame kooldenormaalpinge σ_ω avaldises (1.47) tema avaldisega (1.15) ja jagame $\mathrm{d}x$-iga:

$$\tau_\omega \delta + \int_{A^*} \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x} \mathrm{d}A = 0, \qquad \tau_\omega \delta - E\theta''' \int_{A^*} \omega \mathrm{d}A = 0 \tag{1.48}$$

Siit leiame

$$\tau_\omega = \frac{E\theta'''}{\delta} \int_{A^*} \omega \mathrm{d}A \tag{1.49}$$



Joonis 1.15. Kooldenihkepinged

Tähistame joonisel 1.15 lõikega I-I eraldatud osa staatilise sektormomendi (A.3) tähisega S_ω^*:

$$S_\omega^* = \int_{A^*} \omega \, \mathrm{d}A \tag{1.50}$$

Nüüd saame leida kooldenihkepinge:

$$\tau_\omega = E\theta''' \frac{S_\omega^*}{\delta} \tag{1.51}$$

Diferentseerime avaldist (1.19) varda teljesuunalise koordinaadi x järgi ning jagame sektorinertsimomendiga I_ω:

$$\frac{\mathrm{d}B_\omega}{I_\omega \mathrm{d}x} = -\, E\theta''' \tag{1.52}$$

Siit asendame $E\theta'''$ avaldisse (1.51). Valemis (1.52) saame bimomendi B_ω tuletise varda teljesuunalise koordinaadi x järgi asendada kooldeväändemomendiga T_ω (1.42).

$$\tau_\omega = -\,\frac{\mathrm{d}B_\omega}{\mathrm{d}x}\frac{S_\omega^*}{I_\omega \delta} = -\,\frac{T_\omega S_\omega^*}{I_\omega \delta} \tag{1.53}$$

Suurimad kooldenihkepinged τ_ω on ristlõikes seal, kus S_ω^*/δ on maksimaalne.

Avaldis (1.53) on struktuurilt sarnane tugevusõpetuses kasutatava Ẑuravski valemiga [KMPR12].

Näide 1.2 (kooldenihkepinged). *Leida joonisel 1.10a kujutatud U-profiili ristlõikes suurim kooldenihkepinge kooldeväändemomendist* $T_\omega = 600\,\mathrm{N \cdot m}$.

Selle ristlõike sektorinertsimoment $I_\omega = 19\,226\,\mathrm{cm}^6$ *(A.62). Suurim kooldenihkepinge on ülemises vöös, kus eraldatud osa staatiline sektormoment* S_ω^* *on minimaalne. Staatilise sektormomendi* S_ω^* *arvutamisel kasutame valemit (A.7). Selleks leiame peasektorkoordinaatide nulli asukoha joonisel 1.10b kujutatud sarnastest kolmnurkadest.*

$$\Delta_y = 51.9 \cdot 8.0 / \left(31.3 + 51.9\right) = 4.99\,\mathrm{cm} \tag{1.54}$$

Ülemisest vööst eraldatud osa staatiline sektormoment

$$S_\omega^* = \delta\Omega = 1.2\,(-51.9 \cdot 4.99)\,/2 = -155.4\,\mathrm{cm}^4 \tag{1.55}$$

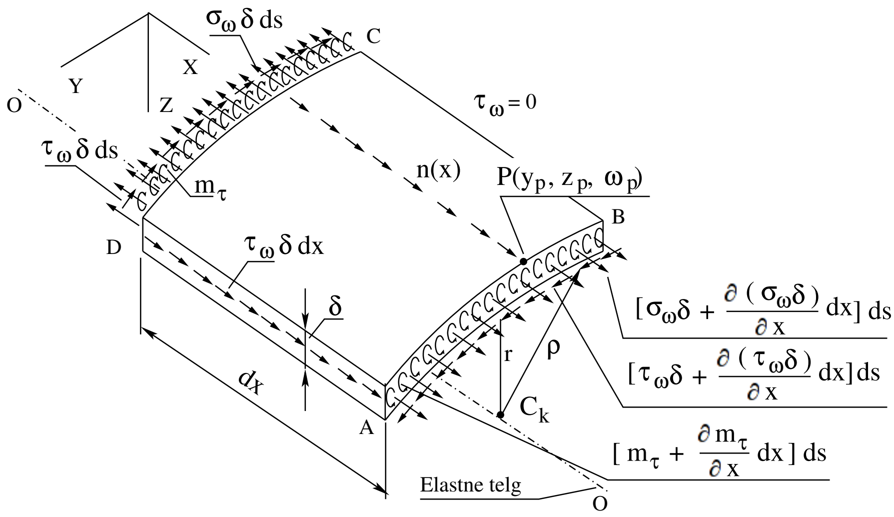
Suurimad kooldenihkepinged

$$\max \tau_\omega = -\frac{T_\omega S_\omega^*}{I_\omega \delta} = \frac{600 \cdot 155.4 \times 10^{-8}}{1.2 \times 10^{-2} \cdot 1.9226 \times 10^{-8}} = 4.04 \times 10^6\,\mathrm{Pa} = 4.04\,\mathrm{MPa} \tag{1.56}$$

1.8 Kooldenihkepinged ja pikikoormus

Järgnevalt tuletame diferentsiaalvõrrandi, kui õhukeseseinaline varras on koormatud pikikoormusega $n\,(x)$ (jn 1.16). Näitame, et pikikoormuse $n\,(x)$ olemasolul ei kehti avaldis (1.42), s.t $\mathrm{d}B_\omega/\mathrm{d}x \neq T_\omega$ [Bõt62].

Vaatleme õhukeseseinalise varda elementi ABCD mõõtmetega $dx \times ds$ (jn 1.16), kus $\mathrm{d}s$ on keskjoone diferentsiaal (jn A.2).



Joonis 1.16. Pikikoormus

Vaadeldaval elemendil läbib pikikoormus $n\,(x)$ ristlõike punkti $P\,(y_p, z_p, \omega_p)$. Siin on ω_p punkti P sektorkoordinaat (jn A.2). Ristlõike paksuse suunas ebaühtlaselt jaotatud nihkepingete (vabaväände, St. Venant'i nihkepingete) mõju tähistame jaotatud väändemomendina m_τ.

$$\int_A m_\tau \mathrm{d}s = T_t \tag{1.57}$$

kus T_t on vabaväändemoment.

Ristlõikes mõjuvad veel kooldenormaalpinged σ_ω ja kooldenihkepinged τ_ω. Koostame vaadeldava elemendi tasakaaluvõrrandi x-teljele:

$$\sum X = 0, \qquad \int_{A^*} \frac{(\partial \sigma_\omega \delta)}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}s + n\,(x)\,\mathrm{d}x + \tau_\omega \delta\,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.58}$$

kus $A^* = \delta\, ds$ on lõikega eraldatud osa pindala.

Ristlõikes (koordinaat x on fikseeritud) on elemendi paksus δ koordinaadi s funktsioon, mis lubab δ tuua osatuletise märgi alt välja. Jagades avaldise ka dx-iga, saame

$$\sum X = 0, \qquad \int_{A^*} \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x} \mathrm{d}A + n\,(x) + \tau_\omega\,\delta = 0 \tag{1.59}$$

Asendame siin kooldenormaalpinged σ_ω nende avaldisega (1.15)

$$\sigma_\omega = -\,E\,\omega\,\theta'' \tag{1.60}$$

Nüüd

$$-\,E\,\theta''' \int_{A^*} \omega\,\mathrm{d}A + n\,(x) + \tau_\omega\,\delta = 0 \tag{1.61}$$

millest avaldame kooldenihkepinged τ_ω:

$$\tau_\omega = \frac{1}{\delta}\left[E\,\theta''' \int_{A^*} \omega\,\mathrm{d}A - n\,(x)\right] \tag{1.62}$$

Kooldeväändemomendi T_ω arvutame vastavalt avaldisele (1.28):

$$T_{x\,\omega} = \int_A \tau_\omega\,\delta\,r\,\mathrm{d}s = \int_A \tau_\omega\,\delta\,\mathrm{d}\omega \tag{1.63}$$

Siin on tehtud asendus $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}\omega$ (vt (A.1)).

Asendame kooldenihkepinged valemis (1.63) nende avaldisega (1.62):

$$T_{x\,\omega} = \int_A \left[E\,\theta''' \int_{A^*} \omega\,\mathrm{d}A - n\,(x)\right] \mathrm{d}\omega = E\,\theta''' \int_A \mathrm{d}\omega \int_{A^*} \omega\,\mathrm{d}A - n\,(x) \int_A \mathrm{d}\omega \tag{1.64}$$

Integreerime esimest integraali ositi:

$$\int_A \mathrm{d}\omega \int_A \omega\mathrm{d}A = \omega \int_A \omega\mathrm{d}A - \int_A \omega\,\omega\mathrm{d}A \tag{1.65}$$

Kui sektorkoordinaat ω algab peanullpunktist, siis võrdub kogu ristlõike staatiline sektormoment nulliga: $\int_A \omega\mathrm{d}A = 0$ (vt avaldist (1.29)).

Kooldeväändemomendi T_ω saab nüüd esitada kujul

$$T_\omega = -EI_\omega\theta''' - n\,(x)\,\omega \tag{1.66}$$

kus

I_ω – sektorinertsimoment (A.60);

ω – sektorkoordinaat ristlõike punktile $P\,(y_p, z_p, \omega_p)$, mida läbib pikikoormuse $n\,(x)$ mõjusirge (jn 1.16).

Diferentseerime bimomenti B_ω (1.19) x-koordinaadi järgi:

$$\frac{\mathrm{d}B_\omega}{\mathrm{d}x} = -\,EI_\omega\theta''' \tag{1.67}$$

Asendame nüüd $-EI_\omega\theta'''$ avaldises (1.66) bimomendi tuletisega (1.67):

$$T_\omega = \frac{\mathrm{d}B_\omega}{\mathrm{d}x} - n\,(x)\,\omega \tag{1.68}$$

Siit

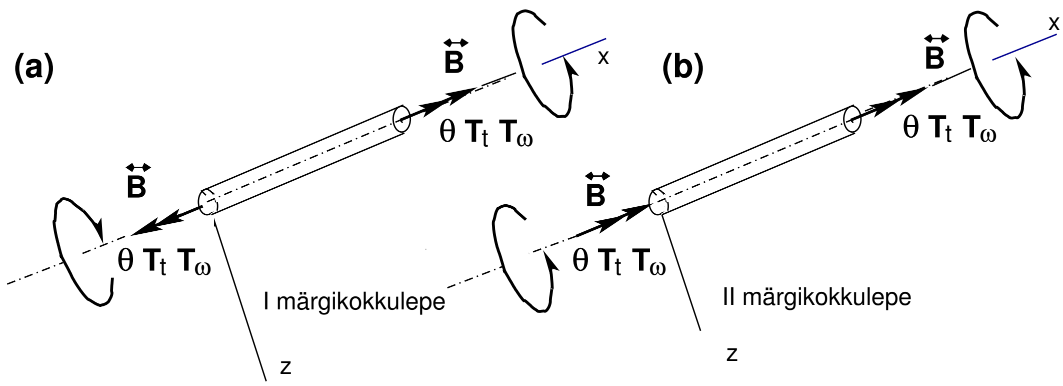
$$T_\omega \neq \frac{\mathrm{d}B_\omega}{\mathrm{d}x} \tag{1.69}$$

Varem saadud avaldis $\mathrm{d}B_\omega/\mathrm{d}x = T_\omega$ (1.42) ei kehti koormamisel pikikoormusega $n\,(x)$.

1.9 Märgikokkulepped väändel

Võtame kasutusele parema käe teljestiku (jn A.3). Nüüd on väändemomendi T ja väändenurga $\theta\,(x)$ pööre vastupäeva ümber varda teljega paralleelse x-telje positiivne (vt märgireegel [Bõt62, lk 166], mis erineb raamatus [KMPR12, lk 30] kasutatust).

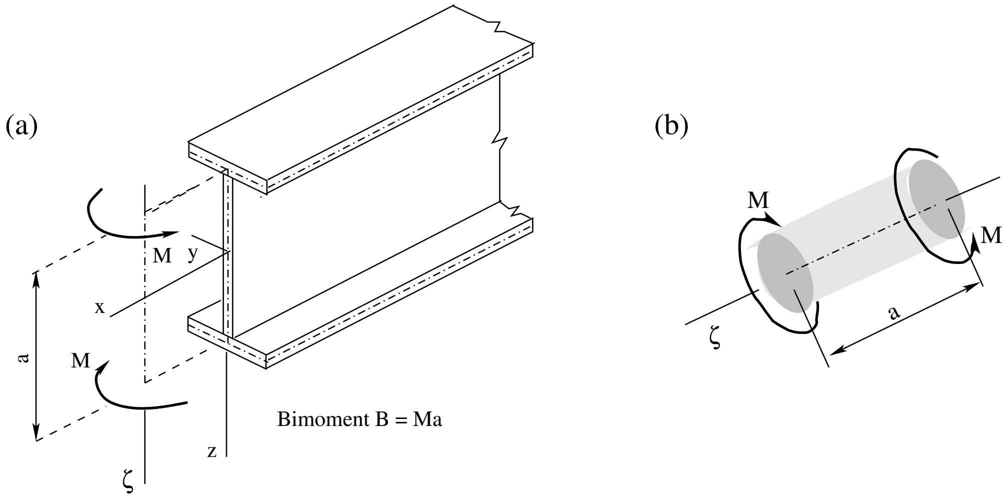
Varda otste välispinnal mõjuvaid rajajõude vaatleme kui välisjõude, täpsemini, kui reaktsiooni mõjuvale koormusele. Reaktsioonijõud määratakse tasakaalutingimustest. Rajajõudude märgi määramisel on kasutusel kaks märgikokkulepet. *Esimene märgikokkulepe* (jn 1.17 a) on tuttav tugevusõpetusest [MR96, lk 10, jn 8]. *Teine märgikokkulepe* (jn 1.17 b) on vajalik varrassüsteemide tasakaaluvõrrandite algoritmide koostamiseks.



Joonis 1.17. Märgikokkulepped

Märgikokkuleppeid võrreldes näeme, et rajajõudude suunad varda lõpus ühtivad, varda alguses on aga vastandmärgilised.

Bimoment B_ω õhukeseseinalise varda ristlõikes on staatilises tasakaalus momendipaar (jn 1.18). Bimomendi tekitavad kooldumist takistavad kooldenormaalpinged σ_ω (jn 1.4).



Joonis 1.18. Bimomendi märgireegel

Kui vaadata piki momendipaari õlga (ζ-telje suunas), siis loeme bimomendi B_ω (jn 1.18) positiivseks juhul, kui vaatajapoolne moment pöörab vastupäeva ning vaatajast kaugem moment pöörab päripäeva (jn 1.18 b). Reegel kehtib olenemata sellest, millises suunas ζ-telge vaadata.

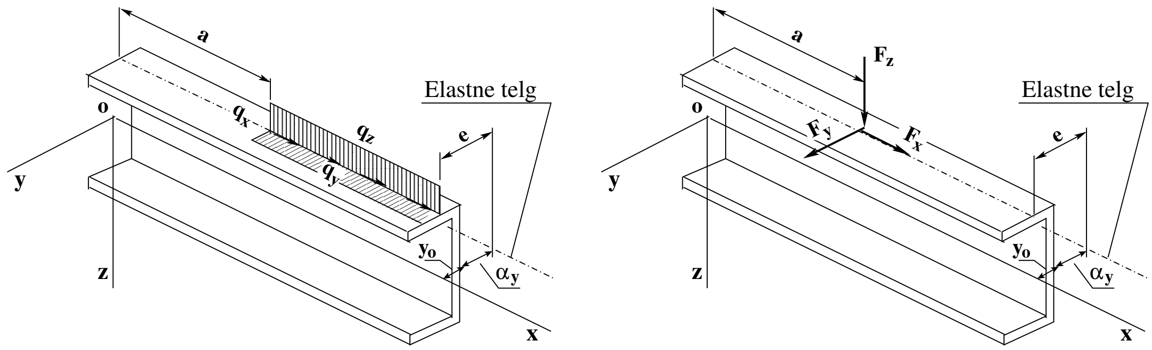
Kontrollime bimomendi märgireegli kehtivust valemiga (1.21) näite 1.1 abil. U-profiili ristlõikes on antud *positiivne* bimoment B_ω. U-profiili ristlõike punktides 1, 2, 3 ja 4 on leitud kooldenormaalpinged, mille epüür on toodud joonisel 1.11. Joonisel 1.11 a näidatud kooldenormaalpinged tekitavad bimomendi B_ω, mis vastab eespool olevale bimomendi märgireeglile. Siin on peasektorkoordinaatide leidmisel kasutatud parema käe teljestikku, mille puhul on raadiusvektori ϱ pööre vastupäeva positiivne.

1.10 Koormused

Õhukeseseinalise varda koormamisel põikkoormusega (jn 1.19), mis ei läbi lõikekeset, on varras *liittööseisundis* (paine koos väändega). Painde ja takistatud väände eraldi arvutamiseks kanname koormused üle ristlõike lõikekeskmeid (*väändekeskmeid* [Loo08], *paindekeskmeid* [Jür85, lk 229]) ühendavale joonele. Seda joont nimetame edaspidi *elastseks teljeks* (sks Schubmittelachse[15][16], ingl elastic axis e line of shear centers, vn упругая ось е линия центров изгиба). Paindel kõverdunud varda telge nimetatakse elastseks jooneks (sks Biegelinie e elastische Linie, ingl elastic line, vn упругая линия). Koormuste ülekandmisega elastsele teljele õnnestub meil eraldi vaadelda takistatud väände tööseisundit [Bõt62] [BKL13].

[15] https://www.bbik.de/assets/files/Seminare/Eurocode%203_2014/script-stahlbau-teil-3-2.pdf (07.01.2015)

[16] https://e-collection.library.ethz.ch/eserv.php?pid=eth:33999&dsID=eth-33999-02.pdf#page=59 (07.01.2015)



(a) Lauskoormus (b) Koondkoormus

Joonis 1.19. Koormused

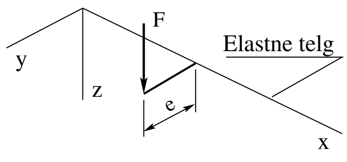
Järgnevas vaatleme põik- ja momentkoormuse ning varda teljesuunalise koormuse ülekandmist elastsele teljele. Siin peab arvestama tugede vastavust ülekantavale koormusele. Toereaktsioone käsitleme edaspidi.

1.10.1 Põikkoormuse ülekandmine elastsele teljele

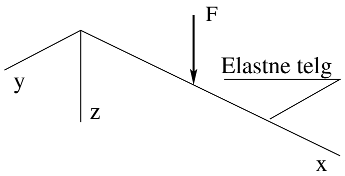
Mõjugu õhukeseseinalise varda mingis ristlõikes koondatud põikkoormus F, mille kaugus elastsest teljest on e (jn 1.20a). Kanname koondatud põikkoormuse F varda elastsele teljele. Nüüd on eraldi vaadeldavad kaks tööseisundit:

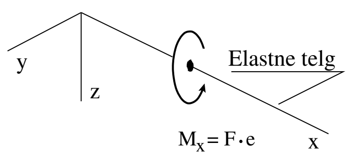
- paine, kus varras on koormatud põikkoormusega F (jn 1.20b);
- vääne, kus ristlõikes mõjub pöördemoment $\mathcal{M}_x = F \cdot e$ (jn 1.20c).

Pöördemomendi suuna märgi määrame vastavuses parema käe teljestikuga (jn A.3). Pöördemomendi $\mathcal{M}_x$ vastupäevane suund ümber varda teljega paralleelse x-telje on positiivne.



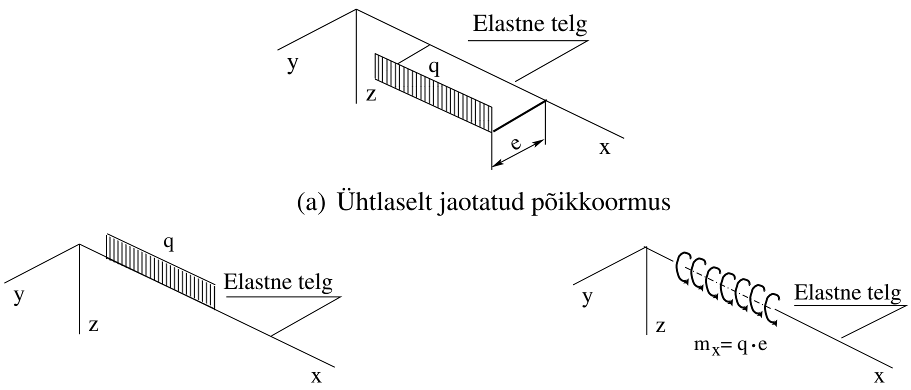
(a) Koondatud põikkoormus





(b) Paine (c) Vääne

Joonis 1.20. Koondatud põikkoormuse lahutamine



(a) Ühtlaselt jaotatud põikkoormus

(b) Paine

(c) Vääne

Joonis 1.21. Ühtlaselt jaotatud põikkoormuse lahutamine

Nii nagu koondatud põikkoormuse juhul, kanname ka juhul, kanname ka ühtlaselt jaotatud põikkoormuse q elastsele teljele (jn 1.21 a).

Ühtlaselt jaotatud põikkoormuse q kaugus elastsest teljest on e (jn 1.21 a). Koormuse ülekandmisel tekib kaks tööseisundit, mida saab eraldi vaadelda:

- paine, kus varras on koormatud ühtlaselt jaotatud põikkoormusega q (jn 1.21 b);
- vääne, kus varras on koormatud ühtlaselt jaotatud pöördemomendiga $m_x = q \cdot e$ (jn 1.21 c).

Jaotatud pöördemomendi suuna märgi määrame vastavuses parema käe teljestikuga (jn A.3), mispuhul on jaotatud pöördemomendi m_x vastupäevane suund ümber varda teljega paralleelse x-telje positiivne.

1.10.2 Momentkoormuse ülekandmine elastsele teljele

Mõjugu õhukeseseinalise varda mingis ristlõikes, ümber vardaga risti oleva telje y, koondmoment M_y, mille kaugus elastsest teljest on e (jn 1.22 a). Varras on liittööseisundis, kus esineb korraga paine ja takistatud vääne.

Koormuse ülekandmisel tekib kaks tööseisundit, mida saab eraldi vaadelda:

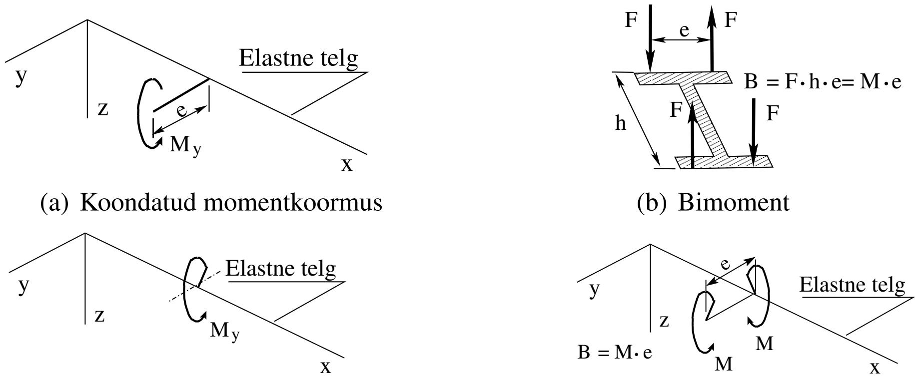
- paine, kus varras on koormatud momendiga M_y (jn 1.22 c);
- takistatud vääne, kus varras on koormatud *jõudude bipaariga*[17] $M \cdot e$, kus e on *jõudude bipaari õlg* (jn 1.22 d, $M = M_y$).

Kui vaadata piki momendipaari õlga, siis loeme jõudude bipaari momendi (bimomendi) positiivseks juhul, kui vaatajapoolne moment pöörab vastupäeva ning vaatajast kaugem moment pöörab päripäeva (jn 1.18 b). Reegel kehtib olenemata sellest, kummas telje suunas vaadata.

$$B_\omega = M_y \cdot e \tag{1.70}$$

kus

[17] Kaks võrdvastupidist *jõupaari* (joonisel 1.22 b jõupaarid $F \cdot h$), mis asetsevad paralleelsetel tasanditel, moodustavad *jõudude bipaari*. Nende tasandite vahelist kaugust nimetatakse *jõudude bipaari õlaks*. Jõupaari momendi korrutist bipaari õlaga nimetakse *bimomendiks*: $B = F \cdot h \cdot e = M \cdot e$.



(a) Koondatud momentkoormus (b) Bimoment

(c) Paine (d) Tõkestatud vääne

Joonis 1.22. Koondatud momentkoormuse lahutamine

M_y – koondmoment;
e – lõikekeskme kaugus ristlõike keskjoonest.

Nii nagu koondmomendi M_y üleviimisel, kanname ühtlaselt jaotatud momendi m_y elastsele teljele (jn 1.23 a). Jaotatud momendi m_y kaugus elastsest teljest on e. Varras on liittööseisundis, kus esineb korraga paine ja takistatud vääne.

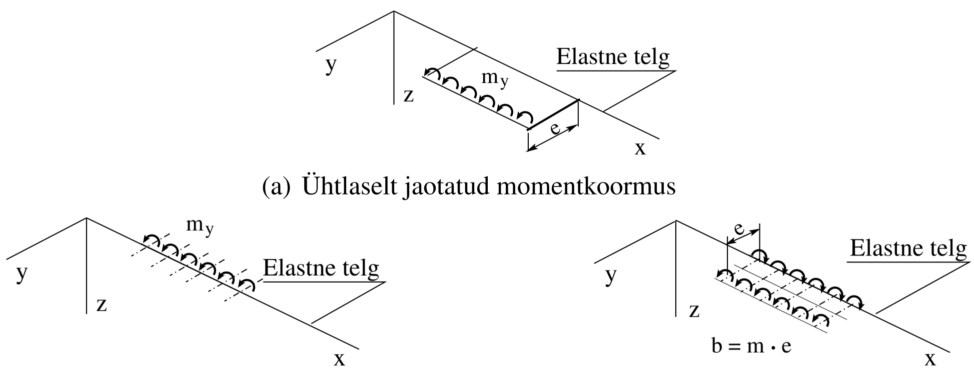
Koormuse ülekandmisel tekib kaks tööseisundit, mida saab eraldi vaadelda:

- paine, kus varras on koormatud ühtlaselt jaotatud momendiga m_y (jn 1.23 b);
- takistatud vääne, kus varras on koormatud *ühtlaselt jaotatud jõudude bipaariga* $m \cdot e$, kus e on *jõudude bipaari õlg* (jn 1.23 c, $m = m_y$).

$$b_\omega = m_y \cdot e \tag{1.71}$$

kus

m_y – ühtlaselt jaotatud moment;
e – lõikekeskme kaugus ristlõike keskjoonest.



(a) Ühtlaselt jaotatud momentkoormus

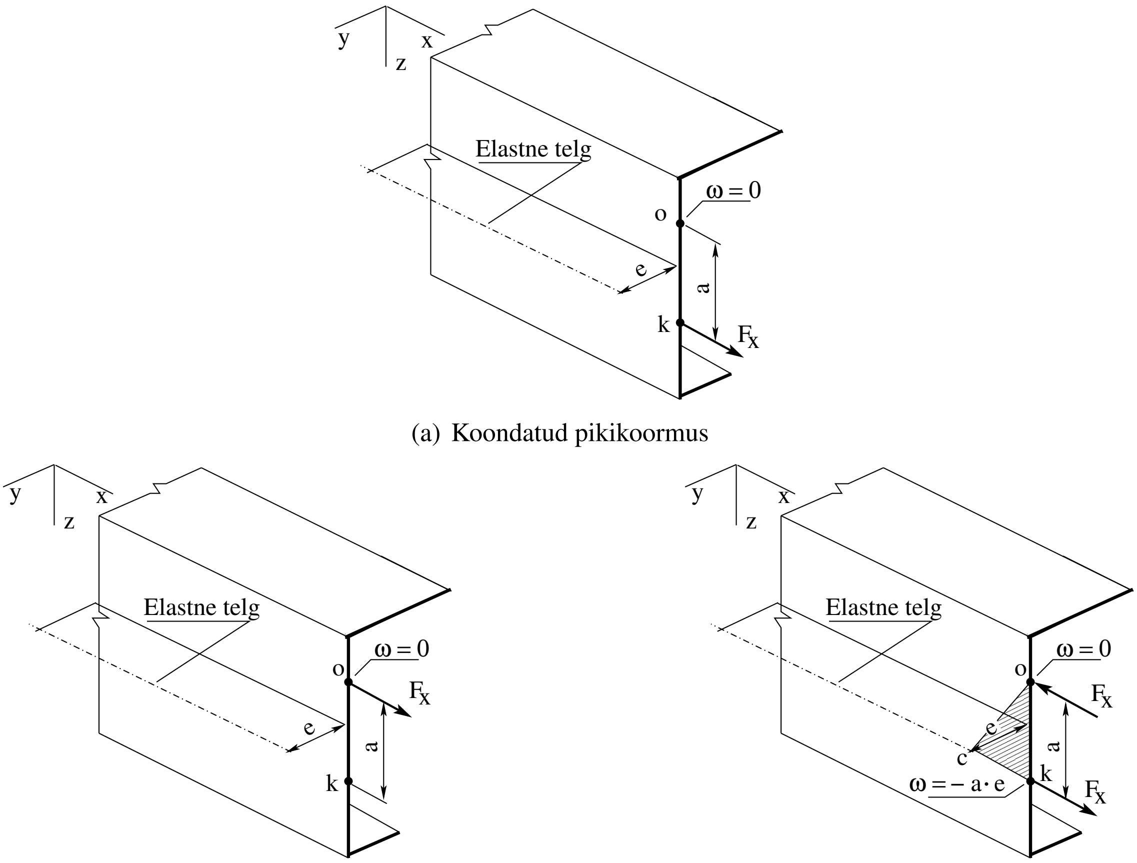
(b) Paine (c) Tõkestatud vääne

Joonis 1.23. Ühtlaselt jaotatud momentkoormuse lahutamine

Ühtlaselt jaotatud jõudude bipaari b_ω märgi määrame samal viisil kui jõudude bipaari momendi märgi.

1.10.3 Pikikoormuse ülekandmine elastsele teljele

Mõjugu õhukeseseinalise varda ristlõike keskjoone punktis k (mis ei ole sektorkoordinaadi nullpunkt) koondatud pikikoormus F_x (jn 1.24 a).



(a) Koondatud pikikoormus

(b) Pike

(c) Paine + vääne

Joonis 1.24. Koondatud pikikoormuse lahutamine

Kanname nimetatud pikikoormuse üle sektorkoordinaadi nullpunkti O (jn 1.24 b), mis asub kaugusel a, ja lisame jõupaari õlaga a (jn 1.24 c). Et jõupaar ei asu lõikekeset läbival tasandil, siis on varras liittööseisundis (paine + vääne), mida vaatlesime eelmises jaotises. Punkti k sektorkoordinaadi (sektorpindala) ω_k saame avaldada kauguse a ning lõikekeskme ja ristlõike keskjoone vahekauguse e kaudu (jn 1.24 c):

$$\omega_k = -\,2 \cdot \triangle okc = -\,a{\cdot}e \tag{1.72}$$

Sektorkoordinaadi määramisel on raadiusvektori päripäevane pööre negatiivne.

Koormuse ülekandmisel saime järgmised tööseisundid:

- pike, kus vardal on koondatud pikikoormus F_x sektorkoordinaadi nullpunktis O (jn 1.24b);
- paine + vääne, kus varras on koormatud koondmomendiga (jn 1.24c).

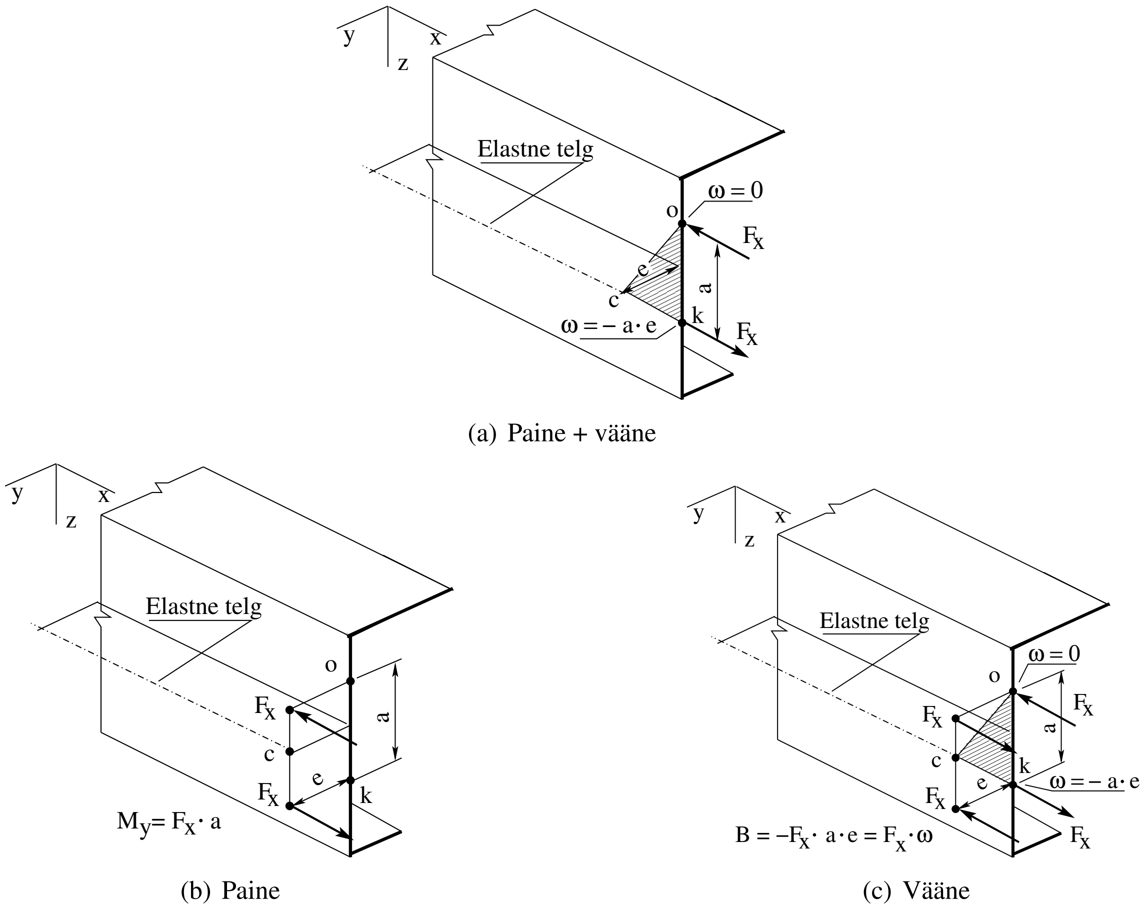
Lahutame liittööseisundi „paine + vääne" (jn 1.24c ja 1.25a) paindeks ja väändeks. Paindel kanname jõupaari momendi lõikekeset c läbivale tasandile, mis on paralleelne antud mõjutasandiga (jn 1.25b). Väändel lisame teise jõupaari tasandile, mis läbib lõikekeset c ja on paralleelne antud jõupaari mõjutasandiga. Antud ja lisatav jõupaar on moodulilt võrdsed, kuid vastassuunalised (jn 1.25c).

Kahel paralleelsel mõjutasandil mõjuvaid võrdseid, kuid vastupidiselt suunatud jõupaare nimetatakse *jõubipaariks*. Ühe jõupaari korrutamisel *bipaari õlaga* (jõupaaride mõjutasandite vahelise kaugusega) saadakse *bipaari moment* (*bimoment*).

Pikikoormuse F_x (ei asu sektorkoordinaadi nullpunktis) ülekandmisel saame tööseisunditeks pikke, painde ja väände.

Takistatud väändel tekib bipaari moment (bimoment) B_ω.

$$B_\omega = -F_x a \cdot e = F_x \cdot \omega_k \tag{1.73}$$



(a) Paine + vääne

(b) Paine

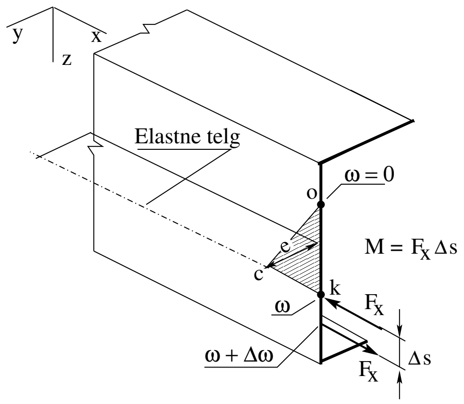
(c) Vääne

Joonis 1.25. Koondatud pikikoormuse lahutamine

kus

> F_x – pikijõud;
> ω_k – pikijõu rakenduspunkti k sektorkoordinaat;
> a – jõupaari õlg;
> e – lõikekeskme kaugus ristlõike keskjoonest.

Järgmisena vaatleme juhtu, kus keskpinna vabalt valitud punktis, mis on antud koordinaadiga ω, mõjub moment M (jn 1.26).



Joonis 1.26. Moment keskpinnas

Siin võib momentkoormust käsitleda kui pikijõu F_x ja õla Δs korrutise piirväärtust $M = \lim\limits_{\Delta s \to 0} F_x \Delta s$, kust avaldame pikikoormuse

$$F_x = \frac{M}{\Delta s} \tag{1.74}$$

Kasutame bipaari momendi (bimomendi) B_ω avaldist (1.73):

$$B_\omega = F_x \cdot (\omega + \Delta\omega) - F_x \cdot \omega = M \frac{\Delta\omega}{\Delta s} \tag{1.75}$$

Suhtega $\Delta\omega/\Delta s$ piirile minnes saame piirväärtuseks

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}s} = \omega' \tag{1.76}$$

Nüüd saame bimomendile B_ω (1.75) avaldise

$$B_\omega = M\omega' \tag{1.77}$$

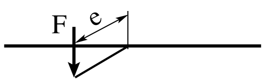
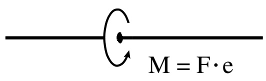
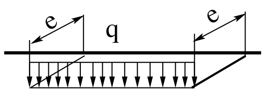
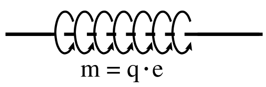
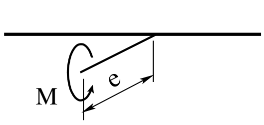
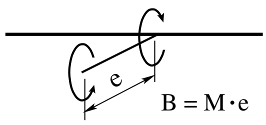
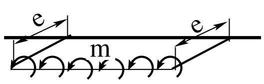
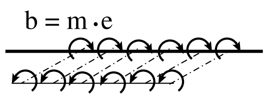
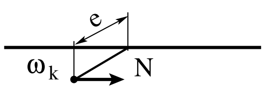
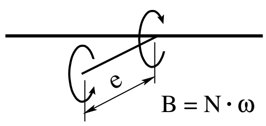
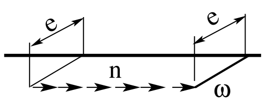
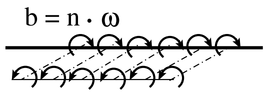
Selgub, et avaldistes (1.70) ja (1.77) on võrdsed suurused:

$$M \cdot e = M \cdot \omega' \tag{1.78}$$

Bipaari momendi märgi määrame vastavalt bimomendi märgireeglile (jn 1.18). Bimomendi vaatajapoolsel mõjutasandil oleva jõupaari pööramissuund[18] määrab ära ka tema märgi. Jooniselt 1.25c näeme, et vaatajapoolne moment pöörab päripäeva ja on seega negatiivne. Siin on kasutatud parema käe teljestiku (jn A.3) märgireegleid, kus telje otsast vaadates on pööre päripäeva negatiivne ja pööre vastupäeva positiivne.

Eespool vaadeldud liittööseisunditest lahutatud väändetööseisundid on esitatud tabelis.

Tabel 1.1. Koormusskeemid õhukeseseinalise varda takistatud väändel

Liittööseisund	Vääne
 vt jaotis 1.10.1	
 vt jaotis 1.10.1	
 vt jaotis 1.10.2	
 vt jaotis 1.10.2	
 vt jaotis 1.10.3	
 vt jaotis 1.10.3	

[18] http://www.mh.ttu.ee/jkirs/staatika/Staatika3.doc lk 126, (10.02.2016)

Ühtlaselt jaotatud pikikoormuse n_x tööseisundi saab lahutada lihttööseisunditeks nii nagu koondatud pikikoormuse juhul [Bõt62]. Takistatud väänet põhjustab ühtlaselt jaotatud bimoment b_ω:

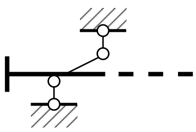
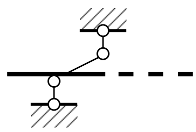
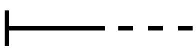
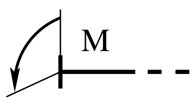
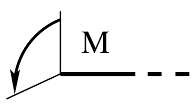
$$b_\omega = n_x \cdot \omega_k \tag{1.79}$$

kus n_x – ühtlaselt jaotatud pikikoormus;
ω_k – ühtlaselt jaotatud pikikoormuse rakenduspunkti k sektorkoordinaat.

1.11 Toed

Õhukeseseinaliste varraste takistatud väändel võib tugedele seada rajatingimusi väändenurga θ, suhtelise väändenurga θ', vabaväändemomendi T_t, koguväändemomendi T_{sum}, kooldeväändemomendi T_ω ja bimomendi B_ω järgi (vt tabel 1.2 ja [BP68, lk 424]).

Tabel 1.2. Toed õhukeseseinalise varda väändel

Toe skeem	Rajatingimus	Toe kirjeldus
	$\theta = 0$ $\theta' = 0$	Jäik tugi: ei võimalda pööret ega kooldumist
	$\theta = 0$ $B_\omega = 0$	Tugi ei võimalda pööret; kooldumine on vaba
	$\theta' = 0$ $T_\omega = 0$	Tugi võimaldab pööret; ei võimalda kooldumist
	$B_\omega = 0$ $T_{sum} = T_t + T_\omega = 0$	Vaba ots
	$\theta' = 0$ $T_\omega = M$	Tugi võimaldab pööret; ei võimalda kooldumist. Toel on rakendatud väändemoment
	$B_\omega = 0$ $T_{sum} = T_t + T_\omega = M$	Vabale otsale on rakendatud väändemoment

Rajatingimuste seadmisel tuleb arvestada energiateoreemis (B.8) leitud rajatingimusi:

$$W_r = \left[T_{sum}\hat{\theta} - B_\omega\hat{\theta}' - b_\omega\hat{\theta}\right] \Big|_0^l \tag{1.80}$$

Kui esitatud paarides $T_{sum} \Leftrightarrow \hat{\theta}$, $B_\omega \Leftrightarrow \hat{\theta}'$, $b_\omega \Leftrightarrow \hat{\theta}$ üks suurus on ette antud, siis teine on tundmatu, mis tuleb leida. Nii näiteks on tabelis 1.2 jäiga toe puhul antud θ ja T_t. Tundmatuks on $T_{sum} = T_t + T_\omega$, kus T_t on antud, ning järelikult T_ω tuleb leida.

2. Takistatud väände võrrandid

2.1 Takistatud väände diferentsiaalvõrrandid

2.1.1 Väändenurga elastse joone diferentsiaalvõrrand

Õhukeseseinalise varda takistatud väände diferentsiaalvõrrandi tuletamist alustame määrangust (1.27)

$$T_{sum} = T_{x\,t} + T_{x\,\omega} \tag{2.1}$$

kus

T_{sum} – koguväändemoment;
$T_{x\,t}$ – vabaväändemoment (väändemoment St. Venant'i väändel);
$T_{x\,\omega}$ – kooldeväändemoment (kooldenihkepingetele vastav väändemoment).

Vabaväändemoment $T_{x\,t}$ ja väändenurk $\theta\,(x)$ on seotud avaldisega (1.1)

$$T_{x\,t} = GI_t\theta' \tag{2.2}$$

kus G on nihkeelastsusmoodul e nihkemoodul e Coulomb'i moodul ja I_t on väändeinertsimoment.

Bimomendi B_ω ja väändenurga tuletis θ'' on seotud avaldisega (1.19)

$$B_\omega = -\,EI_\omega\theta'' \tag{2.3}$$

Kooldeväändemoment T_ω ja väändenurk $\theta\,(x)$ on seotud avaldisega (1.43)

$$T_\omega = -\,E\,I_\omega\theta''' \tag{2.4}$$

kus E on (normaal)elastsusmoodul (Youngi moodul) ja I_ω on sektorinertsimoment (A.60).

Koguväändemomendi T_{sum} ja lausmomendi m_x vaheline seos (1.45):

$$\frac{\mathrm{d}T_{sum}}{\mathrm{d}x} = -m_x \tag{2.5}$$

Diferentseerime võrrandit (2.1) x-koordinaadi järgi:

$$-\,\frac{T_{x\,t}}{\mathrm{d}x} - \frac{T_{x\,\omega}}{\mathrm{d}x} = -\,\frac{T_{sum}}{\mathrm{d}x} \tag{2.6}$$

Asendame võrrandis (2.6) väändemomendid väändenurga θ avaldistega ja lausmomendiga m_x:

$$EI_\omega \frac{\mathrm{d}^4\theta}{\mathrm{d}x^4} - GI_t \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} = m_x \tag{2.7}$$

Saadud võrrandi jagame *kooldejäikusega* EI_ω (sks Wölbsteifigkeit, ingl warping rigidity, vn секториальная жесткость депланации):

$$\frac{\mathrm{d}^4\theta}{\mathrm{d}x^4} - \frac{GI_t}{EI_\omega}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} = \frac{m_x}{EI_\omega} \tag{2.8}$$

Võtame kasutusele õhukeseseinalise varda takistatud väänet iseloomustava karakteristiku κ, mida edaspidi nimetame *kooldekarakteristikuks* (sks Abklingfaktor für Torsion, ingl flexural-torsion cross-section characteristic, vn изгибно-крутильная характеристика стержня):

$$\kappa = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}}, \qquad a = \sqrt{\frac{EI_\omega}{GI_t}} \tag{2.9}$$

kus

- a – kooldekarakteristiku pöördväärus (ingl torsional bending constant) [HIM11];
- EI_ω – kooldejäikus;
- GI_t – vabaväändejäikus (sks Torsionssteifigkeit, ingl torsional rigidity, vn жесткость при чистом кручении).

Õhukeseseinalise varda takistatud väänet iseloomustava karakteristikuna on kasutusel ka varda *tunnusarv väändel* ϵ_t (sks Stabkennzahl für Torsion, ingl torsion parameter e warping parameter, vn корень характеристического уравнения).

$$\epsilon_t = l\sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}} \tag{2.10}$$

kus l on varda pikkus.

Nüüd esitame diferentsiaalvõrrandi (2.8) kujul

$$\theta^{IV} - \kappa^2\theta'' = \frac{m_x}{EI_\omega} \tag{2.11}$$

2.1.2 Väändenurga elastse joone diferentsiaalvõrrand pikikoormusel

Koostame elemendile ABCD (jn 1.16) mõjuvate jõudude momentide võrrandi elastse telje O-O suhtes:

$$\sum M_{o-o} = 0, \qquad -\int_A \frac{(\partial\tau_\omega\delta)}{\partial x}\mathrm{d}x r\,\mathrm{d}s - \int_A \frac{\partial m_\tau}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}s = 0 \tag{2.12}$$

kus r on pooluse C_k kaugus keskjoone puutujast (vt ka jn A.2).

Taandame võrrandi (2.12) $\mathrm{d}x$-iga ja asendame $r\,\mathrm{d}s$ sektorkoordinaadi diferentsiaaliga $\mathrm{d}\omega$ (vt jaotis A.1):

$$\int_A \delta \frac{\partial \tau_\omega}{\partial x}\mathrm{d}\omega + \frac{\partial}{\partial x}\int_A m_\tau \mathrm{d}s = 0 \tag{2.13}$$

Saadud võrrandi teise liikme teisendamisel arvestame seost (1.57) ja vabaväändemomendi T_t avaldist (1.1):

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_A m_\tau \mathrm{d}s = \frac{\partial}{\partial x} T_t = GI_t\theta'' \tag{2.14}$$

Kooldenihkepingete avaldise (1.62) ja avaldise (2.14) kasutamine võimaldab võrrandi (2.13) esitada järgmisel kujul:

$$\int_A \left[E\theta^{IV}\int_{A^*}\omega\,\mathrm{d}A - n'(x)\right]\mathrm{d}\omega + GI_t\theta'' = 0 \tag{2.15}$$

Kirjutame viimase võrrandi kujule

$$E\theta^{IV}\int_A \mathrm{d}\omega\int_{A^*}\omega\,\mathrm{d}A - \int_A n'(x)\,\mathrm{d}\omega + GI_t\theta'' = 0 \tag{2.16}$$

Võrrandi (2.16) esimest liiget ositi integreerides (vt avaldis (1.65)) saame

$$E\theta^{IV}\int_A\left(\omega\int_A \omega\mathrm{d}A - \int_A \omega^2\mathrm{d}A\right) - n'(x)\,\omega + GI_t\theta'' = 0 \tag{2.17}$$

Kui sektorkoordinaadi ω algus on sektorkoordinaadi peanullpunktis, siis võrdub kogu ristlõike staatiline sektormoment nulliga: $\int_A \omega\mathrm{d}A = 0$ (1.29). Nüüd võtab võrrand (2.17) kuju

$$EI_\omega\theta^{IV} - GI_t\theta'' + n'(x)\,\omega = 0 \tag{2.18}$$

Jagame saadud võrrandi kooldejäikusega EI_ω:

$$\theta^{IV} - \kappa^2\theta'' + \frac{n'(x)\,\omega}{EI_\omega} = 0 \tag{2.19}$$

kus κ on kooldekarakteristik

$$\kappa = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}} \tag{2.20}$$

Siin on EI_ω kooldejäikus ja GI_t vabaväändejäikus.

2.1.3 Väändenurga elastse joone diferentsiaalvõrrand

Ühendame diferentsiaalvõrrandid (2.11) ja (2.19):

$$\theta^{IV} - \kappa^2\theta'' = \frac{m_x - b'_x}{EI_\omega} \tag{2.21}$$

kus $b'_x = n'(x)\,\omega$ (võrdle avaldisega $b_\omega = n_x{\cdot}\omega_k$ (1.79)).

Diferentsiaalvõrrandi (2.21) lahendit otsime kujul

$$\theta = \theta_0\theta_1 + \theta'_0\theta_2 + \theta''_0\theta_3 + \theta'''_0\theta_4 + \theta_e(x) \tag{2.22}$$

kus

$\theta_0,\ \theta'_0,\ \theta''_0$ ja θ'''_0 – otsitava funktsiooni väärtused kohal $x = x_0$;

$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3\ ja\ \theta_4$ – homogeense diferentsiaalvõrrandi normeeritud lahendite fundamentaalsüsteem[1] [Sad63, lk 39];

$\theta_e(x)$ – mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi erilahend.

2.1.4 Homogeenne diferentsiaalvõrrand

Homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\theta^{IV} - \kappa^2\theta'' = 0 \tag{2.23}$$

normeerimata lahendite süsteemi otsime järgmisel kujul:

$$\theta_1^* = 1, \quad \theta_2^* = x, \quad \theta_3^* = \operatorname{ch}\kappa x, \quad \theta_4^* = \operatorname{sh}\kappa x \tag{2.24}$$

kus $\kappa = \sqrt{\dfrac{GI_t}{EI_\omega}}$.

Lahendite süsteemi (2.24) normeerimiseks kirjutame välja Wronski[2] determinandi[3]:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \operatorname{ch}\kappa x & \operatorname{sh}\kappa x \\ 0 & 1 & \kappa\operatorname{sh}\kappa x & \kappa\operatorname{ch}\kappa x \\ 0 & 0 & \kappa^2\operatorname{ch}\kappa x & \kappa^2\operatorname{sh}\kappa x \\ 0 & 0 & \kappa^3\operatorname{sh}\kappa x & \kappa^3\operatorname{ch}\kappa x \end{vmatrix} \tag{2.25}$$

Wronski determinandi W väärtus kohal $x = 0$:

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & \kappa^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa^3 \end{vmatrix} \tag{2.26}$$

Selleks et determinandi (2.26) väärtus oleks üks, teeme teisendused:

[1] http://www.mh.ttu.ee/jkirs/Difequation/Difequat6.doc#page=163 (30.12.2015)

[2] Józef Maria Wronski (1776–1853), poola filosoof, matemaatik ja füüsik.

[3] Determinant, kus iga järgmine rida on eelmise rea tuletis.

- lahutame kolmandast veerust esimese veeru ja korrutame tulemuse suurusega $(1/\kappa)^2$;
- lahutame neljandast veerust κ-ga korrutatud teise veeru, seejärel korrutame neljanda veeru suurusega $(1/\kappa)^3$.

Tulemuseks on ühikmaatriks

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{2.27}$$

Teeme sarnase teisenduse normeerimata lahendite süsteemiga (2.25):

- lahutame kolmandast veerust esimese veeru ja korrutame tulemuse suurusega $(1/\kappa)^2$;
- lahutame neljandast veerust κ-ga korrutatud teise veeru, seejärel korrutame neljanda veeru suurusega $(1/\kappa)^3$.

Saame normeeritud lahendite fundamentaalsüsteemi:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 1, & \theta_2 &= x, \\ \theta_3 &= \frac{1}{\kappa^2}(\operatorname{ch}\kappa x - 1), & \theta_4 &= \frac{1}{\kappa^3}(\operatorname{sh}\kappa x - \kappa x) \end{aligned} \tag{2.28}$$

Varda sisejõudude leidmisel kasutatakse rajajõudude (kontaktjõudude) määramiseks kahte erinevat märgikokkulepet (jn 1.17). Esimese märgikokkuleppe puhul

$$\theta_0 = \theta_0, \quad \theta_0' = \frac{T_{xt}^{(0)}}{GI_t}, \quad \theta_0'' = -\frac{B_\omega^{(0)}}{EI_\omega}, \quad \theta_0''' = -\frac{T_\omega^{(0)}}{EI_\omega} \tag{2.29}$$

ja teise märgikokkuleppe korral

$$\theta_0 = \theta_0, \quad \theta_0' = -\frac{T_{xt}^{(0)}}{GI_t}, \quad \theta_0'' = \frac{B_\omega^{(0)}}{EI_\omega}, \quad \theta_0''' = \frac{T_\omega^{(0)}}{EI_\omega} \tag{2.30}$$

Homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend esimese märgikokkuleppe puhul on

$$\theta = \theta_0 + \frac{T_{xt}^{(0)}}{GI_t}x - \frac{B_\omega^{(0)}}{EI_\omega}\frac{1}{\kappa^2}(\operatorname{ch}\kappa x - 1) - \frac{T_\omega^{(0)}}{EI_\omega}\frac{1}{\kappa^3}(\operatorname{sh}\kappa x - \kappa x) \tag{2.31}$$

ning teise märgikokkuleppe korral

$$\theta = \theta_0 - \frac{T_{xt}^{(0)}}{GI_t}x + \frac{B_\omega^{(0)}}{EI_\omega}\frac{1}{\kappa^2}(\operatorname{ch}\kappa x - 1) + \frac{T_\omega^{(0)}}{EI_\omega}\frac{1}{\kappa^3}(\operatorname{sh}\kappa x - \kappa x) \tag{2.32}$$

Asendame avaldises (2.32) kooldejäikuse pöördväärtuse ($1/EI_\omega$) seosega (2.9) ($1/EI_\omega = \kappa^2/GI_t$).

$$\begin{aligned}
\theta &= \theta_0 - \frac{T_{x\,t}^{(0)}}{GI_t}x + \frac{B_\omega^{(0)}}{GI_t}(\mathrm{ch}\,\kappa x - 1) + \frac{T_\omega^{(0)}}{GI_t}\frac{1}{\kappa}(\mathrm{sh}\,\kappa x - \kappa x) && (2.33)\\
\theta' &= 0 - \frac{T_{x\,t}^{(0)}}{GI_t} + \frac{B_\omega^{(0)}}{GI_t}\kappa\,\mathrm{sh}\,\kappa x + \frac{T_\omega^{(0)}}{GI_t}(\mathrm{ch}\,\kappa x - \kappa) && (2.34)\\
\theta'' &= 0 + 0 + \frac{B_\omega^{(0)}}{GI_t}\kappa^2\mathrm{ch}\,\kappa x + \frac{T_\omega^{(0)}}{GI_t}\kappa\,\mathrm{sh}\,\kappa x && (2.35)\\
\theta''' &= 0 + 0 + \frac{B_\omega^{(0)}}{GI_t}\kappa^3\mathrm{sh}\,\kappa x + \frac{T_\omega^{(0)}}{GI_t}\kappa^2\mathrm{ch}\,\kappa x && (2.36)
\end{aligned}$$

2.1.5 Diferentsiaalvõrrandi erilahendid

Mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi (2.21) vabaliikmele lisame lauskoormusega *ekvivalentse üldistatud koormuse* [YSM00].

$$\theta^{IV} - \kappa^2\theta'' = \frac{m_x}{EI_\omega} + \frac{M_x\delta\,(t - x_0)}{EI_\omega} \tag{2.37}$$

Siin on

$M_x\delta\,(t-x_0)/EI_\omega$ lauskoormusega $m_x = q_z \cdot e$ (jn 1.19a) ekvivalentne koguväändemoment (2.1)), kus $M_x = F_z \cdot e$ ning e on jõu F_z kaugus lõikekeskmeid ühendavast teljest (jn 1.19b);

$\delta\,(t-a)$ – Dirac'i[4] deltafunktsioon.

Mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi (2.37) erilahendit $\theta_e\,(x)$ (2.22) otsime Cauchy[5] valemi [Sad63, lk 40], [Ste59] abil:

$$\theta_e\,(x) = \int_{x_0}^{x} K\,(x,t)\,f_n\,(t)\,dt \tag{2.38}$$

kus $K\,(x,t)$ on vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi normeeritud lahend. Täpsemalt,

$$\theta_e\,(x) = \int_{x_0}^{x} K_4\,(x,t)\,f_4\,(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} K_3\,(x,t)\,f_3\,(t)\,dt \tag{2.39}$$

Siin kasutame normeeritud lahendite fundamentaalsüsteemi (2.28):

$$\begin{aligned}
K_4\,(x,t) &= \theta_4\,(x-t) = \frac{1}{\kappa^3}(\mathrm{sh}\,\kappa\,(x-t) - \kappa\,(x-t)) && (2.40)\\
K_3\,(x,t) &= \theta_3\,(x-t) = \frac{1}{\kappa^2}(\mathrm{ch}\,\kappa\,(x-t) - 1) && (2.41)
\end{aligned}$$

[4] Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984), inglise füüsik.
[5] Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), prantsuse matemaatik.

ja koormusfunktsioone $f_n(t)$:

$$f_4(t) = \frac{m_x(t)}{EI_\omega}, \quad f_3(t) = \frac{M_x(t)}{EI_\omega} \tag{2.42}$$

Avaldame seosest (2.9) kooldejäikuse EI_ω:

$$\frac{1}{EI_\omega} = \frac{1}{GI_t}\kappa^2, \qquad EI_\omega = GI_t\frac{1}{\kappa^2} \tag{2.43}$$

Nüüd saame koormusfunktsioonid $f_n(t)$ esitada kujul

$$f_4(t) = \frac{m_x(t)}{GI_t}\kappa^2, \quad f_3(t) = \frac{M_x(t)}{GI_t}\kappa^2 \tag{2.44}$$

Vaatleme juhtu, kui $m_x(t) = const$. Erilahendi (2.39) saamiseks tuleb integreerida avaldis

$$\theta_{4e}(x) = \int_{x_0}^{x} K_4(x,t)\, f_4(t)\, dt = \frac{m_x}{EI_\omega}\frac{1}{\kappa^3}\int_{x_0}^{x} (\operatorname{sh}\kappa\,(x-t) - \kappa\,(x-t)\,)\, dt \tag{2.45}$$

või

$$\theta_{4e}(x) = \int_{x_0}^{x} K_4(x,t)\, f_4(t)\, dt = \frac{m_x}{GI_t}\frac{1}{\kappa}\int_{x_0}^{x} (\operatorname{sh}\kappa\,(x-t) - \kappa\,(x-t)\,)\, dt \tag{2.46}$$

Esmalt integreerime integraalide (2.45), (2.46) esimese liikme:

$$\int_a^x \operatorname{sh}\kappa\,(x-t)\, dt = -\frac{1}{\kappa}\operatorname{ch}\kappa\,(x-t)\Big|_a^x = \frac{1}{\kappa}\,\big(\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+ - 1\big) \tag{2.47}$$

kus $(x-a)_+$ on Heaviside'i[6] funktsioon

$$(x-a)_+ = \begin{cases} 0, & kui \quad (x-a) < 0 \\ x-a, & kui \quad (x-a) \geq 0 \end{cases} \tag{2.48}$$

Integraalide (2.45), (2.46) teise liikme integreerimisel saame

$$\int_a^x \kappa\,(x-t)\, dt = -\kappa\,\frac{(x-t)^2}{2}\Big|_a^x = \kappa\,\frac{(x-a)_+^2}{2} \tag{2.49}$$

Asetame leitud integraalid erilahenditesse (2.45), (2.46):

$$\theta_{4e}(x) = \frac{m_x}{EI_\omega}\frac{1}{\kappa^4}\left[\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+ - 1 - \kappa^2\,\frac{(x-a)_+^2}{2}\right] \tag{2.50}$$

$$\theta_{4e}(x) = \frac{m_x}{GI_t}\frac{1}{\kappa^2}\left[\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+ - 1 - \kappa^2\,\frac{(x-a)_+^2}{2}\right] \tag{2.51}$$

[6] Oliver Heaviside (1850–1925), inglise füüsik ja elektriinsener.

Mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi (2.37) teisele vabaliikmele ($M_x/EI_\omega = const$) vastava erilahendi saame avaldist (2.39) integreerides:

$$\theta_{3\,e}\,(x) = \int_{x_0}^{x} K_3\,(x,t)\, f_3\,(t)\, dt = \frac{M_x}{EI_\omega}\kappa^2 \int_{x_0}^{x} (\operatorname{ch}\kappa\;(x-t)\;-1)\, dt \tag{2.52}$$

või

$$\theta_{3\,e}\,(x) = \int_{x_0}^{x} K_3\,(x,t)\, f_3\,(t)\, dt = \frac{M_x}{GI_t} \int_{x_0}^{x} (\operatorname{ch}\kappa\;(x-t)\;-1)\, dt \tag{2.53}$$

Integreerime integraalide (2.52), (2.53) esimese liikme:

$$\int_{a}^{x} \operatorname{ch}\kappa\;(x-t)\, dt = -\frac{1}{\kappa}\operatorname{sh}\kappa\;(x-t)\Big|_a^x = \frac{1}{\kappa}\left(\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+\right) \tag{2.54}$$

Integraalide (2.52), (2.53) teise liikme integreerimisel saame

$$\int_{a}^{x} 1\, dt = -\;(x-t)|_a^x = \;(x-a)_+ \tag{2.55}$$

Asetame leitud integraalid erilahendisse (2.52), (2.53):

$$\theta_{3\,e}\,(x) \;=\; \frac{M_x}{EI_\omega}\frac{1}{\kappa^3}\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+ \;-\; \kappa\,(x-a)_+\right] \tag{2.56}$$

$$\theta_{3\,e}\,(x) \;=\; \frac{M_x}{GI_t}\frac{1}{\kappa}\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+ \;-\; \kappa\,(x-a)_+\right] \tag{2.57}$$

Lisame bimomendi $B_k = M\cdot e$ erilahendi:

$$\theta_{2\,e}\,(x) \;=\; \frac{B_k}{EI_\omega}\frac{1}{\kappa^2}\left[\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+ \;-\; 1\right] \tag{2.58}$$

$$\theta_{2\,e}\,(x) \;=\; \frac{B_k}{GI_t}\left[\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+ \;-\; 1\right] \tag{2.59}$$

Lisame erilahendid $n\cdot\omega$ jaoks:

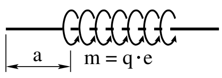
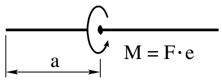
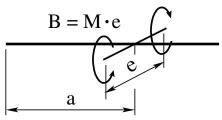
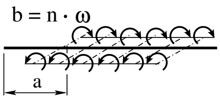
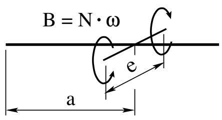
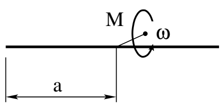
$$\theta_{3\,e}^{(n)}\,(x) \;=\; \frac{-n\cdot\omega}{GI_t}\frac{1}{\kappa}\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+ \;-\; \kappa\,(x-a)_+\right] \tag{2.60}$$

$$\theta_{2\,e}^{(N)}\,(x) \;=\; \frac{-N\cdot\omega}{GI_t}\left[\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+ \;-\; 1\right] \tag{2.61}$$

$$\theta_{2\,e}^{(M)}\,(x) \;=\; \frac{M\cdot\omega'}{GI_t}\left[\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+ \;-\; 1\right] \tag{2.62}$$

Tabelis 1.1 esitatud koormuste jaoks on koostatud diferentsiaalvõrrandite erilahendite tabel 2.1.

Tabel 2.1. Erilahendid õhukeseseinalise varda väändel

Koormuse skeem	Erilahendid
	$\theta_{4\,e}^{(q)}\,(x) = \dfrac{m}{GI_t}\,\dfrac{1}{\kappa^2}\left[\mathrm{ch}\,\kappa\,(x-a)_+\;-\;\kappa^2\,\dfrac{(x-a)_+^2}{2}-1\right]$
	$\theta_{3\,e}^{(M)}\,(x) = \dfrac{M}{GI_t}\,\dfrac{1}{\kappa}\left[\mathrm{sh}\,\kappa\,(x-a)_+\;-\;\kappa\,(x-a)_+\right]$
	$\theta_{2\,e}^{(B)}\,(x) = \dfrac{B}{GI_t}\left[\mathrm{ch}\,\kappa\,(x-a)_+\;-\;1\right]$
	$\theta_{3\,e}^{(n)}\,(x) = \dfrac{n\cdot\omega}{GI_t}\,\dfrac{1}{\kappa}\left[\mathrm{sh}\,\kappa\,(x-a)_+\;-\;\kappa\,(x-a)_+\right]$
	$\theta_{2\,e}^{(N)}\,(x) = \dfrac{N\cdot\omega}{GI_t}\left[\mathrm{ch}\,\kappa\,(x-a)_+\;-\;1\right]$
	$\theta_{2\,e}^{(M)}\,(x) = \dfrac{M\cdot\omega'}{GI_t}\left[\mathrm{ch}\,\kappa\,(x-a)_+\;-\;1\right]$ (vt 1.77)

Leiame erilahendi $\theta_{4\,e}\,(x)$ tuletised:

$$\theta_{4\,e}\,(x) = \frac{m_x}{GI_t}\,\frac{1}{\kappa^2}\left[\mathrm{ch}\,\kappa\,(x-a)_+\;-\;\kappa^2\,\frac{(x-a)_+^2}{2}-1\right] \tag{2.63}$$

$$\theta'_{4\,e}\,(x) = \frac{m_x}{GI_t}\,\frac{1}{\kappa}\left[\mathrm{sh}\,\kappa\,(x-a)_+\;-\;\kappa\,(x-a)_+\right] \tag{2.64}$$

$$\theta''_{4\,e}\,(x) = \frac{m_x}{GI_t}\left[\mathrm{ch}\,\kappa\,(x-a)_+\;-\;1\right] \tag{2.65}$$

$$\theta'''_{4\,e}\,(x) = \frac{m_x}{GI_t}\,\kappa\left[\mathrm{sh}\,\kappa\,(x-a)_+\right] \tag{2.66}$$

2.2 Ülekandemaatriks takistatud väändel

Õhukeseseinalise varda takistatud väände ülekandemaatriksi koostamiseks teise märgikokkuleppe järgi vaatleme väändenurga tuletiste ja momentide vahelisi seoseid:

$$T_t = GI_t\theta' = EI_\omega\kappa^2\theta' \tag{2.67}$$

$$B_\omega = -GI_t\frac{1}{\kappa^2}\theta'' = -EI_\omega\theta'' \tag{2.68}$$

$$T_\omega = -GI_t\frac{1}{\kappa^2}\theta''' = -EI_\omega\theta''' \tag{2.69}$$

Väändenurga ja väändemomentide seosed saame algparameetritest, võttes väändenurgast tuletised (2.33)–(2.36) ja korrutades need vastava jäikusega (2.67)–(2.69).

$$\theta = \quad = \theta_0 - \frac{T_{x\,t}^{(0)}}{GI_t}x + \frac{B_\omega^{(0)}}{GI_t}(\operatorname{ch}\kappa x - 1) + \frac{T_\omega^{(0)}}{GI_t}\frac{1}{\kappa}(\operatorname{sh}\kappa x - \kappa x) \tag{2.70}$$

$$T_t = GI_t\theta' = 0 - T_{x\,t}^{(0)} + B_\omega^{(0)}\kappa\operatorname{sh}\kappa x + T_\omega^{(0)}(\operatorname{ch}\kappa x - 1) \tag{2.71}$$

$$B = -GI_t\frac{1}{\kappa^2}\theta'' = -0 - 0 - B_\omega^{(0)}\operatorname{ch}\kappa x - T_\omega^{(0)}\frac{1}{\kappa}\operatorname{sh}\kappa x \tag{2.72}$$

$$T_\omega = -GI_t\frac{1}{\kappa^2}\theta''' = -0 - 0 - B_\omega^{(0)}\kappa\operatorname{sh}\kappa x - T_\omega^{(0)}\operatorname{ch}\kappa x \tag{2.73}$$

Esitame võrrandid (2.70)–(2.73) maatrikskujul

$$\mathbf{Z_L}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\cdot\mathbf{Z_A} \tag{2.74}$$

kus $\mathbf{Z_L}$, $\mathbf{Z_A}$ on varda lõpus ja alguses olevad väändenurgad ning väändemomendid

$$\mathbf{Z_L} = \begin{bmatrix}\theta_L\\ T_{tL}\\ B_{\omega L}\\ T_{\omega L}\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_A} = \begin{bmatrix}\theta_A\\ T_{tA}\\ B_{\omega A}\\ T_{\omega A}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\theta_0\\ T_{x\,t}^{(0)}\\ B_\omega^{(0)}\\ T_\omega^{(0)}\end{bmatrix} \tag{2.75}$$

ja ülekandemaatriks $\mathbf{U}$ teise märgikokkuleppe puhul

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{GI_t}x & \frac{1}{GI_t}(\operatorname{ch}\kappa x - 1) & \frac{1}{GI_t}\frac{1}{\kappa}(\operatorname{sh}\kappa x - \kappa x) \\ 0 & -1 & \kappa\operatorname{sh}\kappa x & \operatorname{ch}\kappa x - 1 \\ 0 & 0 & -\operatorname{ch}\kappa x & -\frac{1}{\kappa}\operatorname{sh}\kappa x \\ 0 & 0 & -\kappa\operatorname{sh}\kappa x & -\operatorname{ch}\kappa x \end{bmatrix} \tag{2.76}$$

2.2.1 Koormusvektor takistatud väändel

Koormusvektori $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ esitame kujul

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \theta_e \\ T_{t\,e} \\ B_{\omega\,e} \\ T_{\omega\,e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_e \\ GI_t\theta'_e \\ -GI_t\dfrac{1}{\kappa^2}\theta''_e \\ -GI_t\dfrac{1}{\kappa^2}\theta'''_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_e \\ EI_\omega\kappa^2\theta'_e \\ EI_\omega\theta''_e \\ EI_\omega\theta'''_e \end{bmatrix} \tag{2.77}$$

Koormusvektori leidmist alustame erilahendist (2.51):

$$\theta_e = \theta_{4\,e}(x) = \frac{m_x}{GI_t}\frac{1}{\kappa^2}\left[\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+ - 1 - \kappa^2\frac{(x-a)_+^2}{2}\right] \tag{2.78}$$

$$T_{t\,e} = GI_t\theta'_{4\,e}(x) = m_x\frac{1}{\kappa}\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+ - \kappa\,(x-a)_+\right] \tag{2.79}$$

$$B_{\omega\,e} = -GI_t\frac{1}{\kappa^2}\theta''_{4\,e}(x) = m_x\frac{1}{\kappa^2}\left[1 - \operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+\right] \tag{2.80}$$

$$T_{\omega\,e} = -GI_t\frac{1}{\kappa^2}\theta'''_{4\,e}(x) = -m_x\frac{1}{\kappa}\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+\right] \tag{2.81}$$

Avaldistest (2.78)–(2.81) moodustame lausmomendi m_x koormusvektori

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \theta_e \\ T_{t\,e} \\ B_{\omega\,e} \\ T_{\omega\,e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{m_x}{GI_t}\dfrac{1}{\kappa^2}\left[\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+ - 1 - \kappa^2\dfrac{(x-a)_+^2}{2}\right] \\ m_x\dfrac{1}{\kappa}\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+ - \kappa\,(x-a)_+\right] \\ m_x\dfrac{1}{\kappa^2}\left[1 - \operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+\right] \\ -m_x\dfrac{1}{\kappa}\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+\right] \end{bmatrix} \tag{2.82}$$

2.3 Põhivõrrandid takistatud väändel

Avaldame õhukeseseinalise varda takistatud väände põhivõrrandid maatrikskujul

$$\mathbf{Z_L}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\cdot\mathbf{Z_A} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.83}$$

kus

$\mathbf{Z_L}$, $\mathbf{Z_A}$ – avaldisega (2.75) näidatud väändenurgad ja väändemomendid varda lõpus ning alguses;

$\mathbf{U}$ – ülekandemaatriks (2.76).

Õhukeseseinalise varda takistatud väände põhivõrrandid teise märgikokkuleppe puhul (2.83) saab kirjutada võrrandisüsteemina

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{Z_A} - \mathbf{I_{4\times 4}}\cdot\mathbf{Z_L} = -\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.84}$$

Lühemalt

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8}\cdot\widehat{\mathbf{Z}}=-\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.85}$$

kus

$$\widehat{\mathbf{Z}}=\begin{bmatrix}\mathbf{Z_A}\\ \mathbf{Z_L}\end{bmatrix} \tag{2.86}$$

$\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8}$ – *laiendatud ülekandemaatriks* $(U_{4\times 4}\mid -I_{4\times 4})$:

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8}=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{i_0}{GI_t}x & \dfrac{i_0}{GI_t}(\operatorname{ch}\kappa x-1) & \dfrac{i_0}{GI_t}\dfrac{1}{\kappa}(\operatorname{sh}\kappa x-\kappa x)\\ 0 & -1 & \kappa\operatorname{sh}\kappa x & \operatorname{ch}\kappa x-1\\ 0 & 0 & -\operatorname{ch}\kappa x & -\dfrac{1}{\kappa}\operatorname{sh}\kappa x\\ 0 & 0 & -\kappa\operatorname{sh}\kappa x & -\operatorname{ch}\kappa x\end{bmatrix}- \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{2.87}$$

ning koormusvektor $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ lausmomendiga m_x avaldub

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}=\begin{bmatrix}\dfrac{i_0\,m_x}{GI_t}\dfrac{1}{\kappa^2}\left[\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+-1-\kappa^2\dfrac{(x-a)_+^2}{2}\right]\\ m_x\dfrac{1}{\kappa}\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+-\kappa\,(x-a)_+\right]\\ m_x\dfrac{1}{\kappa^2}\left[1-\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+\right]\\ -m_x\dfrac{1}{\kappa}\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+\right]\end{bmatrix} \tag{2.88}$$

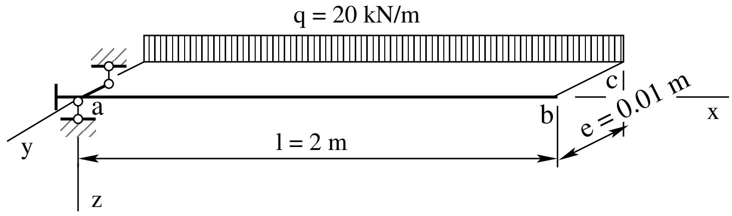
Siin on i_0 väändenurga θ skaleerimistegur (võrrandisüsteemiga (2.85) leitavad väändenurgad on i_0 korda suuremad).

Iga varda ülekandevõrrandite (2.85) kohta lisame neli rajatingimust.

2.3.1 Ülekandevõrrandite lahenduste testimine

Ülekandevõrrandeid kasutame varrassüsteemide rajaülesande püstitamiseks. Rajaülesande lahendamisel rakendame EST-meetodit. Lahendatavad ülesanded valisime nii, et saadud tulemused oleksid võrreldavad teiste meetodite abil leitutega. Õhukeseseinalise varda väände hõreda laiendatud ülekandemaatriksi $(\mathbf{U}_{4\times 4}|-\mathbf{I}_{4\times 4})$ (2.85) koostamiseks kasutame GNU Octave'i funktsioone yspWGvfmhvI.m, yspWGfhlin.m. Koormusvektori $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ (vt tabel C.1) leiame funktsioonidega yzWGmx.m, yzWGMx.m, yzWGBy.m, SisejoudWGmxpunktis.m.

Näide 2.1 (lausmoment konsoolil). *Koostada joonisel 2.1 kujutatud konsooli väändenurga θ_x, vabavääendemomendi T_t, bimomendi B_ω ja kooldeväändemomendi T_ω epüürid.*



Joonis 2.1. Lausmoment konsoolil

Andmed. *Konsoolile pikkusega $l = 2\,\mathrm{m}$ mõjub ekstsentriline lauskoormus $q = 20\,\mathrm{kN/m}$ ($m_x = -20$
$mathrm(\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m})/\mathrm{m}$). Vertikaalse lauskoormuse q ekstsentrilisus $e = 1.0\,\mathrm{cm}$. Ristlõike kooldejäikus (EI_ω= $1.052\times10^3\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}^4$), vabavääendejäikus ($GI_t$= 2.63×10^2 $\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}^2$) ja kooldekarakteristik (κ= $\sqrt{GI_t/EI_\omega} = \sqrt{2.63\times10^8/1.052\times10^{13}} = 0.005\,\mathrm{cm}^{-1}$) on konstantsed.*

Lahendus. *Vaatleme konsooli ühe elemendina, siis sisesidemed [Jür85, lk 8–9] puuduvad. Rajatingimuste W_r seadmisel on arvestatud energiateoreemi (B.8).*

$$W_r = [T_{sum}\theta - B_\omega\theta' - b_\omega\theta]\,\Big|_0^l \tag{2.89}$$

Siit saab jälgida, milline rajatingimus on antud ja milline leitakse. Esimesel toel on toetingimuste paarides $T_{sum} \Leftrightarrow \theta$ ja $B_\omega \Leftrightarrow \theta'$ antud väändenurk θ $= 0$ ja suhteline väändenurk θ' $= 0$. Seega on esimene tugi jäik ning ei võimalda pööret ega kooldumist. Tundmatud on bimoment B_ω ja koguväändemoment T_{sum}.

Konsooli lõpus on antud bimoment B_ω $= 0$ ja koguväändemoment $T_{sum} = T_t + T_\omega = 0$. Tundmatuks jäävad väändenurk θ ja suhteline väändenurk θ' ($T_t = GI_t\theta'$).

Rajaväärtuste arvutamiseks kasutame nagu EST-meetodi [Lah97a], [Lah14], [Lah97b], [Lah98a] puhulgi hõredat võrrandisüsteemi[7]

$$\mathbf{spA}\cdot\mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{2.90}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor

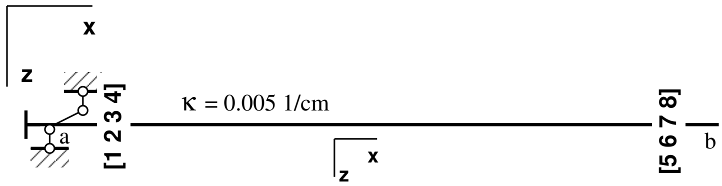
$$\mathbf{Z} = \widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a} \\ \mathbf{Z_b} \end{bmatrix} \tag{2.91}$$

mille elementideks on väändenurgad ja väändemomendid varda alguses ning lõpus (jn 2.2):

$$\mathbf{Z_a} = \begin{bmatrix} \theta_A \\ T_{tA} \\ B_{\omega A} \\ T_{\omega A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(1,1) \\ Z(2,1) \\ Z(3,1) \\ Z(4,1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b} = \begin{bmatrix} \theta_L \\ T_{tL} \\ B_{\omega L} \\ T_{\omega L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(5,1) \\ Z(6,1) \\ Z(7,1) \\ Z(8,1) \end{bmatrix} \tag{2.92}$$

Muutuja $Z(i,1)$ indeks (i=1, 2, 3, . . ., 8) on toodud joonisel 2.2.

[7] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.14.22



Joonis 2.2. Lausmoment konsoolil. Muutujad

Põhivõrrandites (2.84) [Lah12, jn 14.9][8]

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8} \cdot \widehat{\mathbf{Z}} = -\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.93}$$

sisalduva laiendatud ülekandemaatriksi $\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8} \equiv (\boldsymbol{U}_{4\times 4} \mid -\boldsymbol{I}_{4\times 4})$ *(2.87) arvutamiseks saab kasutada GNU Octave'i funktsiooni yspWGvfmhvI.m.*

Võrrandisüsteemis (2.93) on tundmatuid poole rohkem kui võrrandeid. Kanname need võrrandid võrrandisüsteemi (2.90) (vt väljavõte programmist 2.1).

Väljavõte programmist 2.1 (Naide2_1.m)

```
            # Tala hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=yspWGvfmhvI(baasi0,l,GIt,EIw);
vB=yzWGmx(baasi0,l,l,a,mx,GIt,EIw); # koormusvektori arvutus
IIv=1;
IJv=1;
vB=vB.*(-1);
            # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=Bvb
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
            # sisestab koormusvektori võrrandisüsteemi vabaliikmesse Bv
Bvb=InsertBtoA(Bvb,NNK,1,IIv,1,vB,4,1);
            # võrrandisüsteemi vabaliige Bvb on eelnevalt nullitud
```

Võrrandisüsteemis (2.90) peab olema võrrandeid ja tundmatuid ühepalju. Võrrandite arv peab ühtima maatriksi **spA** *astakuga. Puuduvad sõltumatud võrrandid saame kinemaatilistest ja staatilistest rajatingimustest (vt jaotis 3.1).*

Järgnevalt

- *püstitame rajatingimused;*
- *arvutame algparameetrid;*
- *arvutame väändenurgad ja väändemomendid;*
- *koostame sisejõudude epüürid.*

Rajatingimuste püstitus. *Väliste rajatingimuste seadmisel tuleb arvestada energiateoreemi*[9] *(B.8). Kui avaldistes* $\theta \Leftrightarrow T_{sum}$, $\theta' \Leftrightarrow B_\omega$ *üks pool (pöördenurk* θ*, suhteline väändenurk* θ'*) on antud, siis teine pool (koguväändemoment* T_{sum}*, bimoment* B_ω*) on tundmatu.*

Konsoolil on sõlmes a jäik tugi, mis ei võimalda pööret ega kooldumist (vt tabel 1.2). Tundmatud on bimoment B_ω *ja koguväändemoment* $T_{sum} = T_t + T_\omega$*. Viimases on vabaväändemoment antud:* $T_t = GI_t\theta' = 0$*. Tundmatuks jääb kooldeväändemoment* T_ω*.*

[8] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#figure.14.9
[9] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.F.26

Konsooli otsas, sõlmes b, on bimoment $B_\omega = 0$ ja koguväändemoment $T_{sum} = 0$. Tundmatud on pöördenurk θ ja suhteline väändenurk θ' ($GI_t\theta' = T_t$).

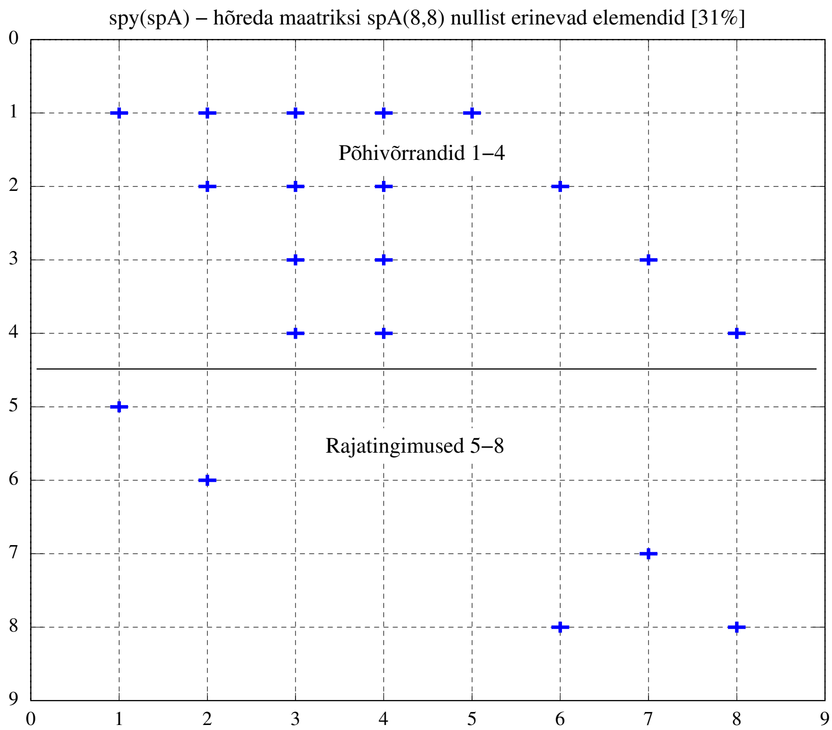
$$
\begin{array}{lllllll}
Z(1,1) & = & \theta_A & = & 0 & & \\
Z(2,1) & = & T_{t\,A} & \equiv & \theta_A & = 0 & \\
Z(7,1) & = & B_{\omega\,L} & = & 0 & & \\
Z(6,1) & + & Z(8,1) & = & T_{t\,L} + T_{\omega\,L} & \equiv & \\
 & & & & T_{sumL} & = 0 &
\end{array}
\tag{2.94}
$$

Koostatud on neli rajatingimuse võrrandit. Sisestame need võrrandisüsteemi (2.90) (vt väljavõte programmist 2.2). Võrrandisüsteemi astak võrdub tundmatute arvuga. Järelikult on sisestatud võrrandid lineaarselt sõltumatud.

Väljavõte programmist 2.2 (Naide2_1.m)

```
####### Rajatingimused
spA=spSisestaArv(spA,5,1,1);  # $theta_A$ - väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,6,2,1);  # $T_tA$ - kooldeväändemoment
spA=spSisestaArv(spA,7,7,1);  # $B_{L}$ - bimoment
spA=spSisestaArv(spA,8,6,1);  # $T_{tL}+ T_{\omega L}$ -
spA=spSisestaArv(spA,8,8,1);  #          - üldväändemoment
#vastavad vabaliikmed Bvb on juba nullitud
spA_rank = sprank(spA) # võrrandisüsteemi astak
```

Joonisel 2.3 on sisestatud võrrandisüsteemi kordajate hõreda maatriksi muster (hõreda maatriksi spA(8,8) nullist erinevate elementide asukohad).



Joonis 2.3. Lausmoment konsoolil. Hõreda maatriksi spA muster

Sisestatud võrrandisüsteemi kordajad hõredas maatriksis **spA** *on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 2.1.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.1 (Naide2_1.m)

```
spA =
Compressed Column Sparse (rows = 8, cols = 8, nnz = 20 [31%])

  (1, 1) ->  1
  (5, 1) ->  1
  (1, 2) -> -7604.6
  (2, 2) -> -1
  (6, 2) ->  1
  (1, 3) ->  20.649
  (2, 3) ->  0.0058760
  (3, 3) -> -1.5431
  (4, 3) -> -0.0058760
  (1, 4) ->  1332.3
  (2, 4) ->  0.54308
  (3, 4) -> -235.04
  (4, 4) -> -1.5431
  (1, 5) -> -1
  (2, 6) -> -1
  (8, 6) ->  1
  (3, 7) -> -1
  (7, 7) ->  1
  (4, 8) -> -1
  (8, 8) ->  1
```

Sisestatud võrrandisüsteemi vabaliikmete vektor **B** *on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 2.2.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.2 (Naide2_1.m)

```
B =

   1.3104e+07
   7.0080e+03
  -4.3446e+06
  -4.7008e+04
   0.0000e+00
   0.0000e+00
   0.0000e+00
   0.0000e+00
```

Algparameetrite arvutus. *Rajaväärtuste leidmisel korrutasime väändenurgad skaleerimisteguriga:* $baasi0 = 1.0 \times 10^{10}$*. Skaleerimata algparameetrite saamiseks tuleb vastavad suurused jagada skaleerimisteguriga. Konsooli skaleerimata algparameetrid on toodud arvutuspäeviku väljavõttes 2.3.*

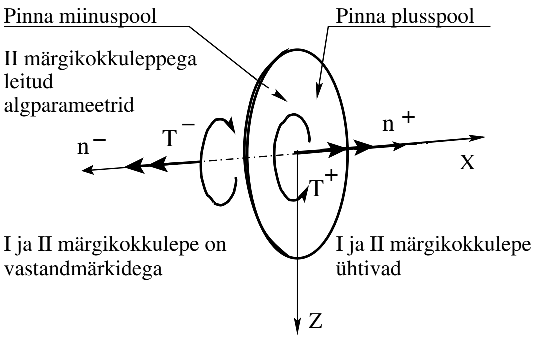
Väljavõte arvutuspäevikust 2.3 (Naide2_1.m)

```
 Algparameetrid - AP1
 theta -      0.0000e+00
    Tt -      0.0000e+00
     B -     -3.2772e+06
    Tw -      4.0000e+04
```

Väändenurkade ja väändemomentide arvutus. *Väändenurkade ja väändemomentide leidmiseks konsooli ristlõigetes kasutame ülekandevõrrandit (C.1)*

$$\mathbf{Z_L}\,(\mathbf{x}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z_A} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.95}$$

kus $\mathbf{Z_A}$ *on konsooli algparameetrid (vt arvutuspäeviku väljavõte 2.3). Ülekandemaatriksi* $\mathbf{U}$ *leiame GNU Octave'i funktsiooniga ylWGfhlin.m ja koormusvektori* $\mathbf{Z}$ *funktsioonidega yzWGmx.m ja yzWGMx.m (vt väljavõte programmist 2.3).*



Joonis 2.4. Pinna pluss- ja miinuspool[10]

Varda algul, ristlõike negatiivsel pinnal (x = 0, n^-) (jn 2.4), on algparameetrid I ja II märgikokkulepe puhul eri märkidega (jn 1.17). Arvutiprogrammiga leiame algparameetrid II märgikokkuleppe järgi, sisejõudude märgi määrame aga vastavalt I märgikokkuleppele. Plusspinnal on sisejõud I ja II märgikokkuleppe puhul sama märgiga. Seega arvutame sisejõud avaldisega (2.95) ka varda algul ristlõike plusspoolel (x = 0, n^+), nii saame sisejõud I märgikokkuleppe järgi.

Väljavõte programmist 2.3 (Naide2_1.m)

```
AP=AlgPar(:,1)
baasi0=1.0
Nmitmeks=4
xx=0;
xsamm=l/Nmitmeks;
for ij=1:Nmitmeks+1  # 5 - displacements and forces at x=0.0
Xloikes(ij,1)=xx;
  vvF=ylWGfhlin(baasi0,l,xx,GIt,EIw);
  vvB=yzWGmx(baasi0,l,xx,a,mx,GIt,EIw);  # koormusvektori arvutus
 Fvv(1:4,ij)=vvF*AP+vvB;
 Fvv(5,ij)=Fvv(2,ij)+Fvv(4,ij);
xx=xx+xsamm;
endfor
```

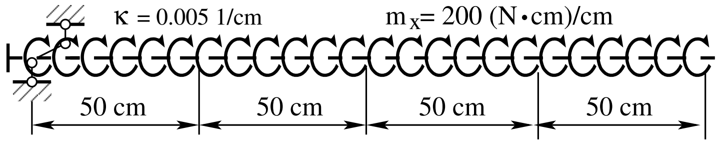
Arvutustulemused on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 2.4.

Väljavõte arvutuspäevikust 2.4 (Naide2_1.m)

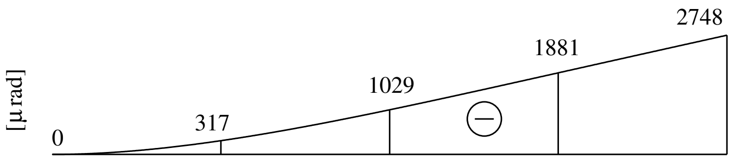
```
baasi0 =  1
Nmitmeks =  4
k =  0.0050000
      x=       0.00         50.00         100.00        150.00        200.00
 theta -    0.000e+00    -3.169e-04    -1.029e-03    -1.881e-03    -2.748e-03
    Tt -    0.000e+00    -2.987e+03    -4.277e+03    -4.580e+03    -4.542e+03
     B -    3.277e+06     1.611e+06     5.477e+05     2.185e+04    -9.313e-10
    Tw -   -4.000e+04    -2.701e+04    -1.572e+04    -5.420e+03     4.542e+03
  Tsum -   -4.000e+04    -3.000e+04    -2.000e+04    -1.000e+04    -2.001e-11

     x =     177.1936900000
 theta -   -2.354e-03
    Tt -   -4.561e+03
     B -   -5.173e+04
    Tw -    1.333e-03
  Tsum -   -4.561e+03
```

[10] Positiivne ja negatiivne sisepind: http://www.mh.ttu.ee/priitp/Tugevusopetus/Tugevusanaluusi_alused/3_Detailide_tugevus_vaandel.pdf#page=7 (lk 37) (4.04.2015)

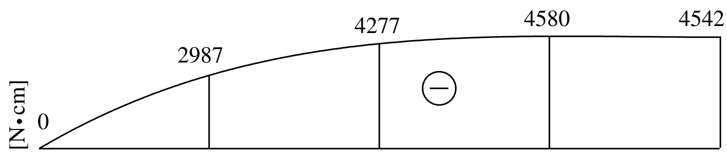
Leitud tulemuste põhjal koostame epüürid lausmomendist konsoolil (jn 2.5).



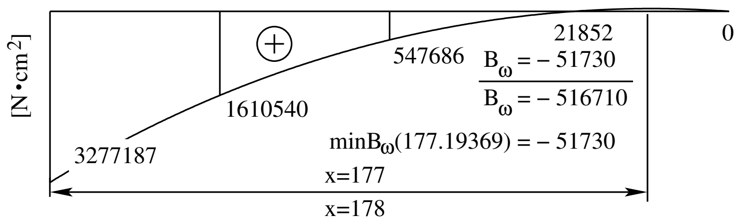
(a) Koormus $m_x = -200\ N$ (vt tabel 1.1)



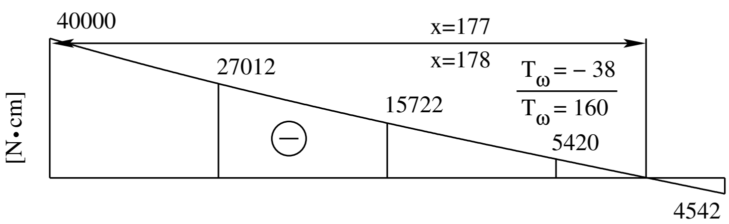
(b) Väändenurk θ



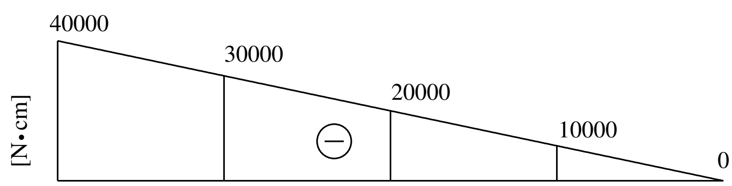
(c) Vabaväändemoment T_t



(d) Bimoment B_ω



(e) Kooldeväändemoment T_ω



(f) Koguväändemoment T_{sum}

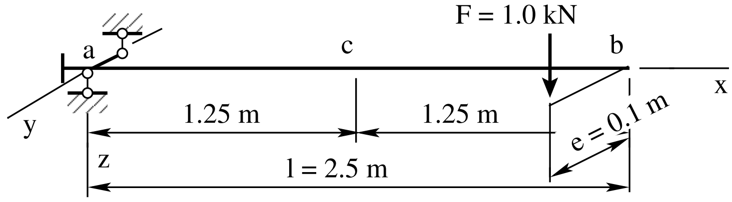
Joonis 2.5. Lausmoment konsoolil. Epüürid

Tabelist 2.2 näeme, et EST-meetodiga saadud tulemused on kooskõlas raamatus [Sad63] toodutega.

Tabel 2.2. Lausmoment konsoolil. Tulemuste võrdlus

x [cm]	Z(x)	[Sad63]	Mõõtühik	EST-meetod	Mõõtühik
0.0	θ		rad	0.000	rad
	T_t	0.00	kG·cm	0.000	N·cm
	B_ω	3.28×10^5	kG·cm^2	3.277×10^6	N·cm^2
	T_ω	-4.00×10^3	kG·cm	-4.000×10^4	N·cm
	T_{sum}	-4.00×10^3	kG·cm	-4.000×10^4	N·cm
50	θ		rad	-3.169×10^{-4}	rad
	T_t		kG·cm	-2.987×10^3	N·cm
	B_ω		kG·cm^2	1.611×10^6	N·cm^2
	T_ω		kG·cm	-2.701×10^4	N·cm
	T_{sum}		kG·cm	-3.000×10^4	N·cm
100	θ	-1.6×10^{-4}	rad	-1.029×10^{-3}	rad
	T_t	-4.20×10^2	kG·cm	-4.277×10^3	N·cm
	B_ω	5.47×10^4	kG·cm^2	5.477×10^5	N·cm^2
	T_ω	-1.58×10^3	kG·cm	-1.572×10^4	N·cm
	T_{sum}	-2.00×10^3	kG·cm	-2.000×10^4	N·cm
177	θ	-2.4×10^{-4}	rad	-2.351×10^{-3}	rad
	T_t	-4.60×10^2	kG·cm	-4.562×10^3	N·cm
	B_ω	-5.23×10^3	kG·cm^2	-5.173×10^4	N·cm^2
	T_ω	0.00	kG·cm	-3.849×10^1	N·cm
	T_{sum}	-4.60×10^2	kG·cm	-4.600×10^3	N·cm
200	θ	-2.9×10^{-4}	rad	-2.748×10^{-3}	rad
	T_t	-4.54×10^2	kG·cm	-4.542×10^3	N·cm
	B_ω	0.00	kG·cm^2	-9.313×10^{-10}	N·cm^2
	T_ω	4.54×10^2	kG·cm	4.542×10^3	N·cm
	T_{sum}	0.00	kG·cm	-2.001×10^{-11}	N·cm

Näide 2.2 (koondmoment konsoolil). *Koostada joonisel 2.6 kujutatud konsooli väändenurga θ_x, vabaväändemomendi T_t, bimomendi B_ω ja kooldeväändemomendi T_ω epüürid.*



Joonis 2.6. Koondmoment konsoolil

Andmed. *Konsooli pikkus* $l = 2.5\,\mathrm{m}$. *Konsooli otsa b on ekstsentriliselt rakendatud jõud* $F = 1.0\,\mathrm{kN}$. *Vertikaalse koormuse* F *ekstsentrilisus* $e = 10.0\,\mathrm{cm}$. *Ristlõike kooldejäikus* ($EI_\omega = 5.9130\times10^4\,\mathrm{kN\cdot m^4}$), *vabaväändejäikus* ($GI_t = 9.4608\times10^3\,\mathrm{kN\cdot m^2}$) *ja kooldekarakteristik* ($\kappa = \sqrt{GI_t/EI_\omega} = \sqrt{9.4608\times10^{10}/5.9130\times10^{15}} = 0.004\,\mathrm{cm^{-1}}$) *on konstantsed.*

Lahendus. *Vaatleme konsooli ühe elemendina, siis sisesidemed [Jür85, lk 8–9] puuduvad. Rajatingimuste* W_r *seadmisel on arvestatud energiateoreemi (B.8).*

$$W_r = [T_{sum}\theta - B_\omega\theta' - b_\omega\theta]\,\Big|_0^l \tag{2.96}$$

Siit saab jälgida, milline rajatingimus on antud ja milline leitakse. Esimesel toel on toetingimuste paarides $T_{sum} \Leftrightarrow \theta$ *ja* $B_\omega \Leftrightarrow \theta'$ *antud väändenurk* $\theta = 0$ *ja suhteline väändenurk* $\theta' = 0$. *Seega on esimene tugi jäik ning ei võimalda pööret ega kooldumist. Tundmatud on bimoment* B_ω *ja koguväändemoment* T_{sum}.

Konsooli lõpus on antud bimoment $B_\omega = 0$ *ja koguväändemoment* $T_{sum} = T_t + T_\omega = e \cdot F_z = 0.1 \cdot 1.0\times10^3 = 100\,\mathrm{N\cdot m}$. *Tundmatuks jäävad väändenurk* θ *ja suhteline väändenurk* θ' ($T_t = GI_t\theta'$).

Rajaväärtuste arvutamiseks kasutame nagu EST-meetodi [Lah97a], [Lah14] puhulgi hõredat võrrandisüsteemi[11]

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{2.97}$$

kus $\mathbf{Z}$ *on võrrandisüsteemi tundmatute vektor*

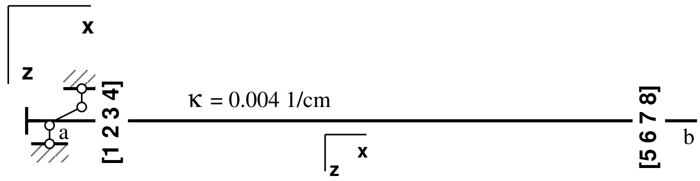
$$\mathbf{Z} = \widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a} \\ \mathbf{Z_b} \end{bmatrix} \tag{2.98}$$

mille elementideks on väändenurgad ja -momendid varda alguses ja lõpus (jn 2.7):

$$\mathbf{Z_a} = \begin{bmatrix} \theta_A \\ T_{tA} \\ B_{\omega A} \\ T_{\omega A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(1,1) \\ Z(2,1) \\ Z(3,1) \\ Z(4,1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b} = \begin{bmatrix} \theta_L \\ T_{tL} \\ B_{\omega L} \\ T_{\omega L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(5,1) \\ Z(6,1) \\ Z(7,1) \\ Z(8,1) \end{bmatrix} \tag{2.99}$$

Muutuja $Z(i,1)$ *indeks (i=1, 2, 3, . . ., 8) on toodud joonisel 2.7.*

[11] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.14.22



Joonis 2.7. Koondmoment konsoolil. Muutujad

Põhivõrrandites (2.84) [Lah12, jn 14.9][12]

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8} \cdot \widehat{\mathbf{Z}} = -\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.100}$$

sisalduva laiendatud ülekandemaatriksi $\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8} \equiv (\boldsymbol{U}_{4\times 4} \mid -\boldsymbol{I}_{4\times 4})$ *(2.87) arvutamiseks saab kasutada GNU Octave'i funktsiooni yspWGvfmhvI.m.*

Võrrandisüsteemis (2.100) on tundmatuid poole rohkem kui võrrandeid. Kanname need võrrandid võrrandisüsteemi (2.97) (vt väljavõte programmist 2.4).

Väljavõte programmist 2.4 (Naide2_2.m)

```
             # Tala hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=yspWGvfmhvI(baasi0,l,GIt,EIw);
%vB=yzWGmx(baasi0,l,l,a,mx,GIt,EIw); # koormusvektori arvutus
IIv=1;
IJv=1;
%vB=vB.*(-1);
             # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=Bvb
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
%             # sisestab koormusvektori võrrandisüsteemi vabaliikmesse Bv
%Bvb=InsertBtoA(Bvb,NNK,1,IIv,1,vB,4,1);
             # võrrandisüsteemi vabaliige Bvb on eelnevalt nullitud
```

Võrrandisüsteemis (2.97) peab olema võrrandeid ja tundmatuid ühepalju. Võrrandite arv peab ühtima maatriksi **spA** *astakuga. Puuduvad sõltumatud võrrandid saame kinemaatilistest ja staatilistest rajatingimustest (vt jaotis 3.1).*

Järgnevalt

- *püstitame rajatingimused;*
- *arvutame algparameetrid;*
- *arvutame väändenurgad ja väändemomendid;*
- *koostame sisejõudude epüürid.*

Rajatingimuste püstitus. *Väliste rajatingimuste seadmisel tuleb arvestada energiateoreemi*[13] *(B.8). Kui avaldistes* $\theta \Leftrightarrow T_{sum}$, $\theta' \Leftrightarrow B_\omega$ *üks pool (pöördenurk* θ*, suhteline väändenurk* θ'*) on antud, siis teine pool (koguväändemoment* T_{sum}*, bimoment* B_ω*) on tundmatu.*

Konsoolil on sõlmes a jäik tugi, mis ei võimalda pööret ega kooldumist (vt tabel 1.2). Tundmatud on bimoment B_ω *ja koguväändemoment* $T_{sum} = T_t + T_\omega$*. Viimases on vabaväändemoment* $T_t = GI_t\theta' = 0$ *antud. Tundmatuks jääb kooldeväändemoment* T_ω*.*

[12] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#figure.14.9
[13] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.F.26

Konsooli otsas, sõlmes b, on antud bimoment $B_\omega = 0$ ja koguväändemoment $T_{sum} = 0$. Tundmatuks jäävad pöördenurk θ ja suhteline väändenurk θ' ($GI_t\theta' = T_t$).

$$
\begin{array}{lclcccl}
Z(1,1) & = & \theta_A & = & 0 & & \\
Z(2,1) & = & T_{t\,A} & \equiv & \theta'_A & = 0 & \\
Z(7,1) & = & B_{\omega\,L} & = & 0 & & \\
Z(6,1) & + & Z(8,1) & = & T_{t\,L}+T_{\omega\,L} & \equiv & \\
 & & & & T_{sumL} & = 10000.0\,\mathrm{N{\cdot}cm} &
\end{array}
\tag{2.101}
$$

Koostatud on neli rajatingimuse võrrandit. Sisestame need võrrandisüsteemi (2.97) (vt väljavõte programmist 2.5). Võrrandisüsteemi astak võrdub tundmatute arvuga. Järelikult on sisestatud võrrandid lineaarselt sõltumatud.

Väljavõte programmist 2.5 (Naide2_2.m)

```
####### Rajatingimused
spA=spSisestaArv(spA,5,1,1);  # $theta_A$ - väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,6,2,1);  # $T_tA$ - kooldeväändemoment
spA=spSisestaArv(spA,7,7,1);  # $B_{L}$ - bimoment
spA=spSisestaArv(spA,8,6,1);  # $T_{tL}+ T_{\omega L}$
spA=spSisestaArv(spA,8,8,1);  #         - üldväändemoment
Bvb(8,1)=10000.0 ;
#vastavad vabaliikmed Bvb on juba nullitud
spA_rank = sprank(spA) # võrrandisüsteemi astak
```

Sisestatud võrrandisüsteemi kordajad hõredas maatriksis ***spA*** *on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 2.5.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.5 (Naide2_2.m)

```
spA =
Compressed Column Sparse (rows = 8, cols = 8, nnz = 20 [31%])

  (1, 1) -> 1              (3, 3) -> -1.5431        (2, 6) -> -1
  (5, 1) -> 1              (4, 3) -> -0.0047008     (8, 6) ->  1
  (1, 2) -> -26.425        (1, 4) ->  4.6297        (3, 7) -> -1
  (2, 2) -> -1             (2, 4) ->  0.54308       (7, 7) ->  1
  (6, 2) -> 1              (3, 4) -> -293.80        (4, 8) -> -1
  (1, 3) -> 0.057403       (4, 4) -> -1.5431        (8, 8) ->  1
  (2, 3) -> 0.0047008      (1, 5) -> -1
```

Algparameetrite arvutus. *Rajaväärtuste leidmisel korrutasime väändenurgad skaleerimisteguriga: $baasi0 = 1.0 \times 10^{10}$. Skaleerimata algparameetrite saamiseks tuleb vastavad suurused jagada skaleerimisteguriga. Konsooli skaleerimata algparameetrid on toodud arvutuspäeviku väljavõttes 2.6.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.6 (Naide2_2.m)

```
 Algparameetrid - AP1
 theta -      0.0000e+00
    Tt -      0.0000e+00
     B -      1.9040e+06
    Tw -     -1.0000e+04
```

Väändenurkade ja väändemomentide arvutus. *Väändenurkade ja väändemomentide leidmiseks konsooli ristlõigetes kasutame ülekandevõrrandit (C.1)*

$$\mathbf{Z_L}\left(\mathbf{x}\right)=\mathbf{U}\cdot\mathbf{Z_A}+\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.102}$$

kus $\mathbf{Z_A}$ on konsooli algparameetrid (vt arvutuspäeviku väljavõte 2.6). Ülekandemaatriksi $\mathbf{U}$ leiame GNU Octave'i funktsiooniga ylWGfhlin.m (vt väljavõte programmist 2.6).

Väljavõte programmist 2.6 (Naide2_2.m)

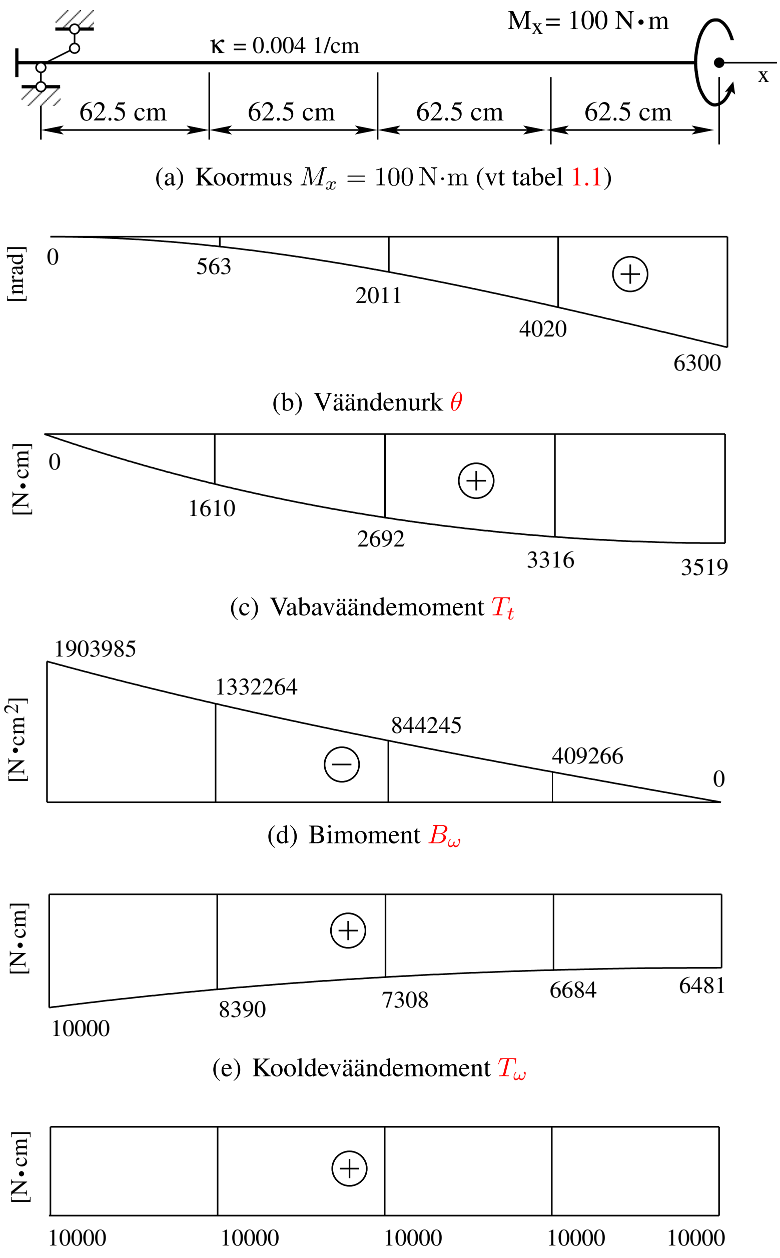
```
AP=AlgPar(:,1)
baasi0=1.0
Nmitmeks=4
xx=0;
xsamm=l/Nmitmeks;
for ij=1:Nmitmeks+1  # 5 - displacements and forces at x=0.0
Xloikes(ij,1)=xx;
  vvF=ylWGfhlin(baasi0,l,xx,GIt,EIw);
%  vvB=yzWGmx(baasi0,l,xx,a,mx,GIt,EIw);  # koormusvektori arvutus
 Fvv(1:4,ij)=vvF*AP % +vvB;
 Fvv(5,ij)=Fvv(2,ij)+Fvv(4,ij);
xx=xx+xsamm;
endfor
```

Arvutustulemused on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 2.7.

Väljavõte arvutuspäevikust 2.7 (Naide2_2.m)

```
baasi0 =  1
Nmitmeks =  4
k =  0.0050000
      x=       0.00        50.00        100.00        150.00        200.00
 theta -    0.000e+00   -3.169e-04   -1.029e-03   -1.881e-03   -2.748e-03
    Tt -    0.000e+00   -2.987e+03   -4.277e+03   -4.580e+03   -4.542e+03
     B -    3.277e+06    1.611e+06    5.477e+05    2.185e+04   -9.313e-10
    Tw -   -4.000e+04   -2.701e+04   -1.572e+04   -5.420e+03    4.542e+03
  Tsum -   -4.000e+04   -3.000e+04   -2.000e+04   -1.000e+04   -2.001e-11

     x =     177.1936900000
 theta -   -2.354e-03
    Tt -   -4.561e+03
     B -   -5.173e+04
    Tw -    1.333e-03
  Tsum -   -4.561e+03
```

Leitud tulemuste põhjal koostame epüürid koondmomendist konsoolil (jn 2.8).



(a) Koormus $M_x = 100\,\mathrm{N{\cdot}m}$ (vt tabel 1.1)

(b) Väändenurk θ

(c) Vabaväändemoment T_t

(d) Bimoment B_ω

(e) Kooldeväändemoment T_ω

(f) Koguväändemoment T_{sum}

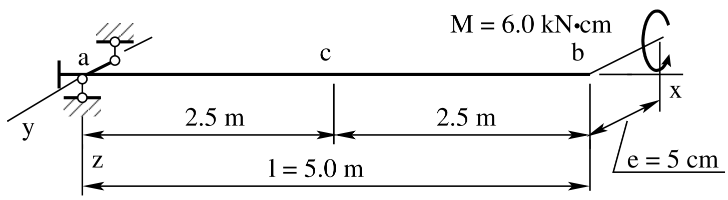
Joonis 2.8. Koondmoment konsoolil. Epüürid

EST-meetodiga saadud tulemused on kooskõlas raamatus [Bõt62] jõu- ja deformatsioonimeetodi abil leitutega (vt tabel 2.3).

Tabel 2.3. Koondmoment konsoolil. Tulemuste võrdlus

x [cm]	Z(x)	[Sad63]	Mõõtühik	EST-meetod	Mõõtühik
0.0	θ		rad	0.000	rad
	T_t	0.00	kG·cm	0.000	N·cm
	B_ω	-1.904×10^5	kG·cm^2	-1.904×10^6	N·cm^2
	T_ω	1.000×10^3	kG·cm	1.000×10^4	N·cm
	T_{sum}	1.000×10^3	kG·cm	1.000×10^4	N·cm
62.5	θ		rad	5.632×10^{-7}	rad
	T_t		kG·cm	1.610×10^3	N·cm
	B_ω		kG·cm^2	-1.332×10^6	N·cm^2
	T_ω		kG·cm	8.390×10^3	N·cm
	T_{sum}		kG·cm	1.000×10^4	N·cm
125	θ		rad	2.011×10^{-6}	rad
	T_t	2.69×10^2	kG·cm	2.692×10^3	N·cm
	B_ω	-8.440×10^4	kG·cm^2	-8.442×10^5	N·cm^2
	T_ω	7.31×10^2	kG·cm	7.308×10^3	N·cm
	T_{sum}	1.000×10^3	kG·cm	1.000×10^4	N·cm
187.5	θ		rad	4.020×10^{-6}	rad
	T_t		kG·cm	3.316×10^3	N·cm
	B_ω		kG·cm^2	-4.093×10^5	N·cm^2
	T_ω		kG·cm	6.684×10^3	N·cm
	T_{sum}		kG·cm	1.000×10^4	N·cm
250	θ		rad	6.300×10^{-6}	rad
	T_t	3.52×10^2	kG·cm	3.519×10^3	N·cm
	B_ω	0.00	kG·cm^2	4.657×10^{-10}	N·cm^2
	T_ω	6.48×10^2	kG·cm	6.481×10^3	N·cm
	T_{sum}	1.00×10^3	kG·cm	1.000×10^4	N·cm

Näide 2.3 (koondbimoment konsoolil). *Koostada joonisel 2.9 kujutatud konsooli väändenurga θ_x, vabaväändemomendi T_t, bimomendi B_ω ja kooldeväändemomendi T_ω epüürid.*



Joonis 2.9. Koondbimoment konsoolil

Andmed. *Konsooli pikkus* $l = 5.0\,\mathrm{m}$. *Konsooli otsa b on ekstsentriliselt rakendatud moment* $M_y = 6.0\,\mathrm{kN{\cdot}cm}$. *Momentkoormuse* M_y *ekstsentrilisus* $e = 5.0\,\mathrm{cm}$. *Ristlõike kooldejäikus* (EI_ω= $3.7311 \times 10^3\,\mathrm{kN \cdot m^4}$), *vabaväändejäikus* ($GI_t$= $2.3879 \times 10^3\,\mathrm{kN \cdot m^2}$) *ja kooldekarakteristik* (κ= $\sqrt{GI_t/EI_\omega} = \sqrt{2.3879 \times 10^{10}/3.7311 \times 10^{14}} = 0.008\,\mathrm{cm^{-1}}$) *on konstantsed.*

Lahendus. *Vaatleme konsooli ühe elemendina, siis sisesidemed [Jür85, lk 8–9] puuduvad. Rajatingimuste* W_r *seadmisel on arvestatud energiateoreemi (B.8).*

$$W_r = [T_{sum}\theta - B_\omega\theta' - b_\omega\theta]\,\Big|_0^l \tag{2.103}$$

Siit saab jälgida, milline rajatingimus on antud ja milline leitakse. Esimese toe toetingimuste paarides $T_{sum} \Leftrightarrow \theta$ *ja* $B_\omega \Leftrightarrow \theta'$ *on antud väändenurk* $\theta = 0$ *ja suhteline väändenurk* $\theta' = 0$. *Seega on esimene tugi jäik ning ei võimalda pööret ega kooldumist. Tundmatud on bimoment* B_ω *ja koguväändemoment* T_{sum}.

Konsooli lõpus on antud bimoment $B_\omega = -3.0 \times 10^4\,\mathrm{N \cdot cm^2}$ *ja koguväändemoment* $T_{sum} = T_t + T_\omega = 0$. *Tundmatuks jäävad väändenurk* θ *ja suhteline väändenurk* θ' ($T_t = GI_t\theta'$).

Rajaväärtuste arvutamiseks kasutame nagu EST-meetodi [Lah97a], [Lah14] puhulgi hõredat võrrandisüsteemi[14]

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{2.104}$$

kus $\mathbf{Z}$ *on võrrandisüsteemi tundmatute vektor*

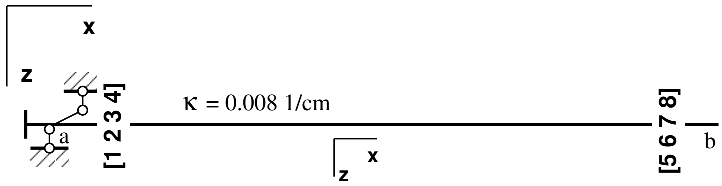
$$\mathbf{Z} = \widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a} \\ \mathbf{Z_b} \end{bmatrix} \tag{2.105}$$

mille elementideks on väändenurgad ja -momendid varda alguses ja lõpus (jn 2.10):

$$\mathbf{Z_a} = \begin{bmatrix} \theta_A \\ T_{tA} \\ B_{\omega A} \\ T_{\omega A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(1,1) \\ Z\,(2,1) \\ Z\,(3,1) \\ Z\,(4,1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b} = \begin{bmatrix} \theta_L \\ T_{tL} \\ B_{\omega L} \\ T_{\omega L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(5,1) \\ Z\,(6,1) \\ Z\,(7,1) \\ Z\,(8,1) \end{bmatrix} \tag{2.106}$$

Muutuja $Z\,(i,1)$ *indeks (i=1, 2, 3, . . ., 8) on toodud joonisel 2.10.*

[14] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.14.22



Joonis 2.10. Koondbimoment konsoolil. Muutujad

Põhivõrrandites (2.84) [Lah12, jn 14.9][15]

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times8}\cdot\widehat{\mathbf{Z}} = -\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.107}$$

sisalduva laiendatud ülekandemaatriksi $\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times8} \equiv (\boldsymbol{U}_{\mathbf{4\times4}} \mid -\boldsymbol{I}_{\mathbf{4\times4}})$ *(2.87) arvutamiseks saab kasutada GNU Octave'i funktsiooni yspWGvfmhvI.m.*

Võrrandisüsteemis (2.107) on tundmatuid poole rohkem kui võrrandeid. Kanname need võrrandid võrrandisüsteemi (2.104) (vt väljavõte programmist 2.7).

Väljavõte programmist 2.7 (Naide2_3.m)

```
             # Tala hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=yspWGvfmhvI(baasi0,l,GIt,EIw);
%vB=yzWGmx(baasi0,l,l,a,mx,GIt,EIw); # koormusvektori arvutus
IIv=1;
IJv=1;
%vB=vB.*(-1);
             # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=Bvb
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
%             # sisestab koormusvektori võrrandisüsteemi vabaliikmesse Bv
%Bvb=InsertBtoA(Bvb,NNK,1,IIv,1,vB,4,1);
             # võrrandisüsteemi vabaliige Bvb on eelnevalt nullitud
```

Võrrandisüsteemis (2.104) peab olema võrrandeid ja tundmatuid ühepalju. Võrrandite arv peab ühtima maatriksi **spA** *astakuga. Puuduvad sõltumatud võrrandid saame kinemaatilistest ja staatilistest rajatingimustest (vt jaotis 3.1).*

Järgnevalt

- *püstitame rajatingimused;*
- *arvutame algparameetrid;*
- *arvutame väändenurgad ja väändemomendid;*
- *koostame sisejõudude epüürid.*

Rajatingimuste püstitus. *Väliste rajatingimuste seadmisel tuleb arvestada energiateoreemi*[16] *(B.8). Kui avaldistes* $\theta \Leftrightarrow T_{sum}$*,* $\theta' \Leftrightarrow B_\omega$ *üks pool (pöördenurk* θ*, suhteline väändenurk* θ'*) on antud, siis teine pool (koguväändemoment* T_{sum}*, bimoment* B_ω*) on tundmatu.*

Konsoolil on sõlmes a jäik tugi, mis ei võimalda pööret ega kooldumist (vt tabel 1.2). Tundmatud on bimoment B_ω *ja koguväändemoment* $T_{sum} = T_t + T_\omega$*. Viimases on vabaväändemoment* $T_t = GI_t\theta' = 0$ *antud. Tundmatuks jääb kooldeväändemoment* T_ω*.*

[15] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#figure.14.9
[16] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.F.26

Konsooli otsas, sõlmes b, on antud bimoment $B_\omega = 0$ *ning koguväändemoment* $T_{sum} = 0$. *Tundmatud on pöördenurk* θ *ja suhteline väändenurk* θ' ($GI_t\theta' = T_t$).

$$\begin{array}{lllllll} Z\,(1,1) & = & \theta_A & = & 0 & & \\ Z\,(2,1) & = & T_{t\,A} & \equiv & \theta_A & = 0 & \\ Z\,(7,1) & = & B_{\omega\,L} & = & -3.0\times 10^4\,\mathrm{N{\cdot}cm^2} & & \\ Z\,(6,1) & + & Z\,(8,1) & = & T_{t\,L}+T_{\omega\,L} & \equiv & \\ & & & & T_{sumL} & = 0 & \end{array} \tag{2.108}$$

Koostatud on neli rajatingimuse võrrandit. Sisestame need võrrandisüsteemi (2.104) (vt väljavõte programmist 2.8). Võrrandisüsteemi astak võrdub tundmatute arvuga. Järelikult on sisestatud võrrandid lineaarselt sõltumatud.

Väljavõte programmist 2.8 (Naide2_3.m)

```
####### Rajatingimused
spA=spSisestaArv(spA,5,1,1);  # $theta_A$ - väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,6,2,1);  # $T_tA$ - kooldeväändemoment
spA=spSisestaArv(spA,7,7,1);  # $B_{L}$ - bimoment
Bvb(7,1)=-30000.0 ;
spA=spSisestaArv(spA,8,6,1);  # $T_{tL}+ T_{\omega L}$ -
spA=spSisestaArv(spA,8,8,1);  #            - üldväändemoment
#vastavad vabaliikmed Bvb on juba nullitud
spA_rank = sprank(spA) # võrrandisüsteemi astak
```

Sisestatud võrrandisüsteemi kordajad hõredas maatriksis ***spA*** *on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 2.8.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.8 (Naide2_3.m)

```
spA =
Compressed Column Sparse (rows = 8, cols = 8, nnz = 20 [31%])

  (1, 1) ->  1            (3, 3) -> -27.308        (2, 6) -> -1
  (5, 1) ->  1            (4, 3) -> -0.21832       (8, 6) ->  1
  (1, 2) -> -209.39       (1, 4) ->  1219.2        (3, 7) -> -1
  (2, 2) -> -1            (2, 4) ->  26.308        (7, 7) ->  1
  (6, 2) ->  1            (3, 4) -> -3411.2        (4, 8) -> -1
  (1, 3) ->  11.017       (4, 4) -> -27.308        (8, 8) ->  1
  (2, 3) ->  0.21832      (1, 5) -> -1
```

Sisestatud võrrandisüsteemi vabaliikmete vektor ***B*** *on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 2.9.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.9 (Naide2_3.m)

```
B =

       0                 0                 0            -30000
       0                 0                 0                 0
```

Algparameetrite arvutus. *Rajaväärtuste leidmisel korrutasime väändenurgad skaleerimisteguriga:* $baasi0 = 1.0 \times 10^{10}$. *Skaleerimata algparameetrite saamiseks tuleb vastavad suurused jagada skaleerimisteguriga. Konsooli skaleerimata algparameetrid on toodud arvutuspäeviku väljavõttes 2.10.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.10 (Naide2_3.m)

```
 Algparameetrid - AP1
 theta -      0.0000e+00
    Tt -      0.0000e+00
     B -      1.0986e+03
    Tw -     -2.3284e-14
```

Väändenurkade ja väändemomentide arvutus. *Väändenurkade ja väändemomentide leidmiseks konsooli ristlõigetes kasutame ülekandevõrrandit (C.1)*

$$\mathbf{Z_L}(\mathbf{x}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z_A} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.109}$$

kus $\mathbf{Z_A}$ *on konsooli algparameetrid (vt arvutuspäeviku väljavõte 2.10). Ülekandemaatriksi* $\mathbf{U}$ *leiame GNU Octave'i funktsiooniga ylWGfhlin.m (vt väljavõte programmist 2.9).*

Väljavõte programmist 2.9 (Naide2_3.m)

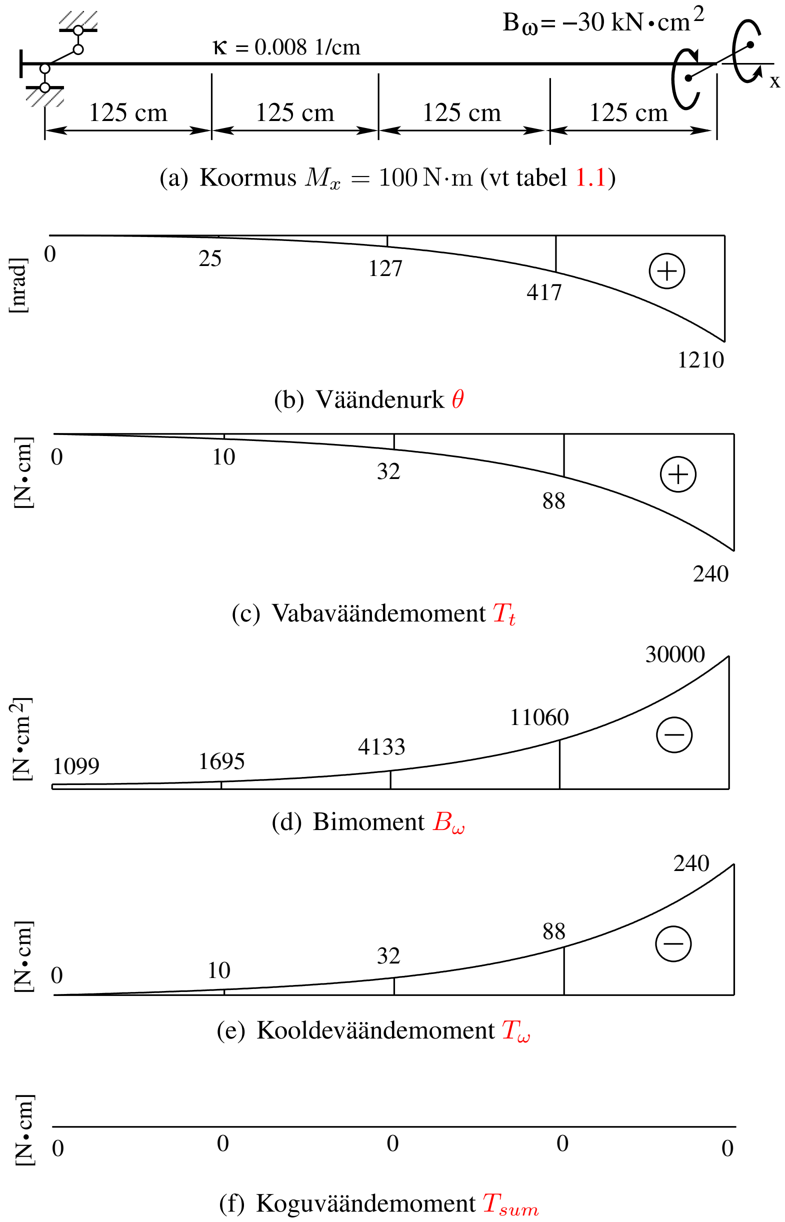
```
AP=AlgPar(:,1)
baasi0=1.0
Nmitmeks=4
xx=0;
xsamm=l/Nmitmeks;
for ij=1:Nmitmeks+1  # 5 - displacements and forces at x=0.0
Xloikes(ij,1)=xx;
  vvF=ylWGfhlin(baasi0,l,xx,GIt,EIw);
%  vvB=yzWGmx(baasi0,l,xx,a,mx,GIt,EIw);  # koormusvektori arvutus
 Fvv(1:4,ij)=vvF*AP % +vvB;
 Fvv(5,ij)=Fvv(2,ij)+Fvv(4,ij);
xx=xx+xsamm;
endfor
```

Arvutustulemused on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 2.11.

Väljavõte arvutuspäevikust 2.11 (Naide2_3.m)

```
baasi0 =  1
Nmitmeks =  4
k =  0.0080000
      x=        0.00        125.00        250.00        375.00        500.00
 theta -     0.000e+00     2.498e-08     1.271e-07     4.172e-07     1.210e-06
    Tt -     0.000e+00     1.033e+01     3.187e+01     8.804e+01     2.398e+02
     B -    -1.099e+03    -1.695e+03    -4.133e+03    -1.106e+04    -3.000e+04
    Tw -     2.328e-14    -1.033e+01    -3.187e+01    -8.804e+01    -2.398e+02
  Tsum -     2.328e-14     2.309e-14     2.487e-14     1.421e-14     0.000e+00
```

Leitud tulemuste põhjal koostame epüürid koondbimomendist konsoolil (jn 2.11).



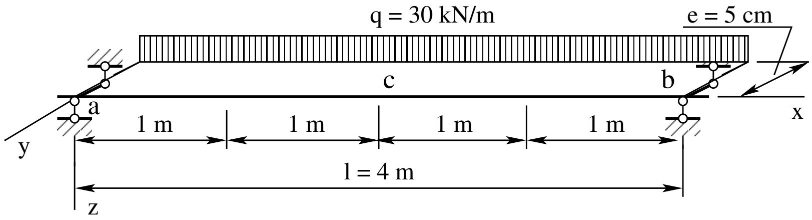
Joonis 2.11. Koondbimoment konsoolil. Epüürid

EST-meetodiga saadud tulemused on kooskõlas raamatus [Bõt62] jõu- ja deformatsioonimeetodi abil leitutega (vt tabel 2.4).

Tabel 2.4. Koondbimoment konsoolil. Tulemuste võrdlus

x [cm]	Z(x)	[Sad63]	Mõõtühik	EST-meetod	Mõõtühik
0.0	θ		rad	0.000	rad
	T_t	0.00	kG·cm	0.000	N·cm
	B_ω	-1.099×10^2	kG·cm^2	-1.099×10^3	N·cm^2
	T_ω	0.00	kG·cm	2.328×10^{-14}	N·cm
	T_{sum}	0.00	kG·cm	2.328×10^{-14}	N·cm
125	θ		rad	2.498×10^{-8}	rad
	T_t		kG·cm	1.033×10^1	N·cm
	B_ω		kG·cm^2	-1.695×10^3	N·cm^2
	T_ω		kG·cm	-1.033×10^1	N·cm
	T_{sum}		kG·cm	2.309×10^{-14}	N·cm
250	θ		rad	1.271×10^{-7}	rad
	T_t	3.19	kG·cm	3.187×10^1	N·cm
	B_ω	-4.13×10^2	kG·cm^2	-4.133×10^3	N·cm^2
	T_ω	-3.19	kG·cm	-3.187	N·cm
	T_{sum}	0.00	kG·cm	2.487×10^{-14}	N·cm
375	θ		rad	4.172×10^{-7}	rad
	T_t		kG·cm	8.804	N·cm
	B_ω		kG·cm^2	-1.106×10^4	N·cm^2
	T_ω		kG·cm	-8.804	N·cm
	T_{sum}		kG·cm	1.421×10^{-14}	N·cm
500	θ		rad	1.210×10^{-6}	rad
	T_t	2.40×10^1	kG·cm	2.398×10^2	N·cm
	B_ω	-3.000×10^3	kG·cm^2	-3.000×10^4	N·cm^2
	T_ω	-2.40×10^1	kG·cm	-2.398×10^2	N·cm
	T_{sum}	0.00	kG·cm	0.000	N·cm

Näide 2.4 (lausmoment talal). *Koostada joonisel 2.12 kujutatud tala väändenurga θ_x, vabaväändemomendi T_t, bimomendi B_ω ja kooldeväändemomendi T_ω epüürid.*



Joonis 2.12. Lausmoment talal

Andmed. *Varda pikkus* $l = 4.0\,\mathrm{m}$. *Tala on ekstsentriliselt koormatud lauskoormusega* $q = 30\,\mathrm{kN/m}$ *(*$m_x = -150\,(\mathrm{kN{\cdot}m})/\mathrm{m}$*). Vertikaalse lauskoormuse* q *ekstsentrilisus* $e = 5\,\mathrm{cm}$. *Ristlõike kooldejäikus (*$EI_\omega = 2.9686{\times}10^4\,\mathrm{kN{\cdot}m^4}$*), vabaväändejäikus (*$GI_t = 1.1875{\times}10^3\,\mathrm{kN{\cdot}m^2}$*) ja kooldekarakteristik (*$\kappa = \sqrt{GI_t/EI_\omega} = \sqrt{1.1875\times 10^{10}/2.9686\times 10^{15}} = 0.002\,\mathrm{cm}^{-1}$*) on konstantsed.*

Lahendus. *Vaatleme tala ühe elemendina, siis sisesidemed [Jür85, lk 8–9] puuduvad. Rajatingimuste* W_r *seadmisel on arvestatud energiateoreemi (B.8).*

$$W_r = [T_{sum}\theta - B_\omega\theta' - b_\omega\theta]\,\Big|_0^l \tag{2.110}$$

Siit saab jälgida, milline rajatingimus on antud ja milline leitakse. Esimese toe toetingimuste paarides $T_{sum} \Leftrightarrow \theta$ *ja* $B_\omega \Leftrightarrow \theta'$ *on antud väändenurk* $\theta = 0$ *ja bimoment* $B_\omega = 0$. *Tundmatud on koguväändemoment* $T_{sum} = T_t + T_\omega$ *ja suhteline väändenurk* θ' *(*$T_t = GI_t\theta'$*).*

Tala lõpus on antud väändenurk $\theta = 0$ *ja bimoment* $B_\omega = 0$. *Tundmatuks jäävad koguväändemoment* $T_{sum} = T_t + T_\omega$ *ja suhteline väändenurk* θ' *(*$T_t = GI_t\theta'$*).*

Rajaväärtuste arvutamiseks kasutame nagu EST-meetodi [Lah97a], [Lah14] puhulgi hõredat võrrandisüsteemi[17]

$$\mathbf{spA}\cdot\mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{2.111}$$

kus $\mathbf{Z}$ *on võrrandisüsteemi tundmatute vektor*

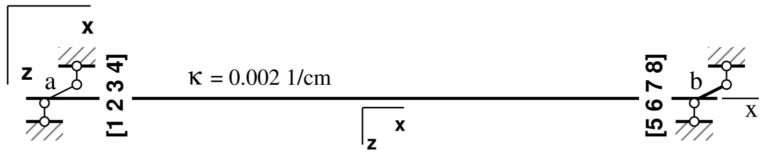
$$\mathbf{Z} = \widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a} \\ \mathbf{Z_b} \end{bmatrix} \tag{2.112}$$

mille elementideks on väändenurgad ja -momendid varda alguses ja lõpus (jn 2.13):

$$\mathbf{Z_a} = \begin{bmatrix} \theta_A \\ T_{tA} \\ B_{\omega A} \\ T_{\omega A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(1,1) \\ Z\,(2,1) \\ Z\,(3,1) \\ Z\,(4,1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b} = \begin{bmatrix} \theta_L \\ T_{tL} \\ B_{\omega L} \\ T_{\omega L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(5,1) \\ Z\,(6,1) \\ Z\,(7,1) \\ Z\,(8,1) \end{bmatrix} \tag{2.113}$$

Muutuja $Z\,(i,1)$ *indeks (i=1, 2, 3, . . ., 8) on toodud joonisel 2.13.*

[17] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.14.22



Joonis 2.13. Lausmoment talal. Muutujad

Põhivõrrandites (2.84) [Lah12, jn 14.9][18]

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8} \cdot \widehat{\mathbf{Z}} = -\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.114}$$

sisalduva laiendatud ülekandemaatriksi $\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8} \equiv (\boldsymbol{U}_{4\times 4} \mid -\boldsymbol{I}_{4\times 4})$ *(2.87) arvutamiseks saab kasutada GNU Octave'i funktsiooni yspWGvfmhvI.m.*

Võrrandisüsteemis (2.114) on tundmatuid poole rohkem kui võrrandeid. Kanname need võrrandid võrrandisüsteemi (2.111) (vt väljavõte programmist 2.10).

Väljavõte programmist 2.10 (Naide2_4.m)

```
            # Tala hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=yspWGvfmhvI(baasi0,l,GIt,EIw);
vB=yzWGmx(baasi0,l,l,a,mx,GIt,EIw); # koormusvektori arvutus
IIv=1;
IJv=1;
vB=vB.*(-1);
            # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=Bvb
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
%             # sisestab koormusvektori võrrandisüsteemi vabaliikmesse Bv
Bvb=InsertBtoA(Bvb,NNK,1,IIv,1,vB,4,1);
            # võrrandisüsteemi vabaliige Bvb on eelnevalt nullitud
```

Võrrandisüsteemis (2.111) peab olema võrrandeid ja tundmatuid ühepalju. Võrrandite arv peab ühtima maatriksi $\mathbf{spA}$ *astakuga. Puuduvad sõltumatud võrrandid saame kinemaatilistest ja staatilistest rajatingimustest (vt jaotis 3.1).*

Järgnevalt

- *püstitame rajatingimused;*
- *arvutame algparameetrid;*
- *arvutame väändenurgad ja väändemomendid;*
- *koostame sisejõudude epüürid.*

Rajatingimuste püstitus. *Väliste rajatingimuste seadmisel tuleb arvestada energiateoreemi*[19] *(B.8). Kui avaldistes* $\theta \Leftrightarrow T_{sum}$, $\theta' \Leftrightarrow B_\omega$ *üks pool (pöördenurk* θ, *suhteline väändenurk* θ'*) on antud, siis teine pool (koguväändemoment* T_{sum}, *bimoment* B_ω*) on tundmatu.*

Tala toed sõlmedes a ja b ei võimalda pööret ($\theta = 0$*), kuid kooldumine on vaba:* $B_\omega = 0$ *(vt tabel 1.2). Tundmatud on suhteline väändenurk* θ' *ja koguväändemoment* T_{sum}.

[18] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#figure.14.9
[19] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.F.26

$$\begin{array}{rclcl} Z\,(1,1) & = & \theta_A & = & 0 \\ Z\,(3,1) & = & B_{\omega\,A} & = & 0 \\ Z\,(5,1) & = & \theta_L & = & 0 \\ Z\,(7,1) & = & B_{\omega\,L} & = & 0 \end{array} \tag{2.115}$$

Koostatud on neli rajatingimuse võrrandit. Sisestame need võrrandisüsteemi (2.111) (vt väljavõte programmist 2.11).

Väljavõte programmist 2.11 (Naide2_4.m)

```
####### Rajatingimused
#Tugi a
spA=spSisestaArv(spA,5,1,1);  # $theta_A$ - väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,6,3,1);  # $B_{L}$ - bimoment
#Tugi b
spA=spSisestaArv(spA,7,5,1);  # $theta_A$ - väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,8,7,1);  # $B_{L}$ - bimoment
#vastavad vabaliikmed Bvb on juba nullitud

spA_rank = sprank(spA) # võrrandisüsteemi astak
```

Sisestatud võrrandisüsteemi kordajad hõredas maatriksis ***spA*** *on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 2.12.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.12 (Naide2_4.m)

```
spA =
Compressed Column Sparse (rows = 8, cols = 8, nnz = 19 [30%])

  (1, 1) ->  1              (4, 3) -> -0.0017762      (7, 5) ->  1
  (5, 1) ->  1              (6, 3) ->  1              (2, 6) -> -1
  (1, 2) -> -336.84         (1, 4) ->  37.098         (3, 7) -> -1
  (2, 2) -> -1              (2, 4) ->  0.33744        (8, 7) ->  1
  (1, 3) ->  0.28416        (3, 4) -> -444.05         (4, 8) -> -1
  (2, 3) ->  0.0017762      (4, 4) -> -1.3374
  (3, 3) -> -1.3374         (1, 5) -> -1
```

Sisestatud võrrandisüsteemi vabaliikmete vektor ***B*** *on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 2.13.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.13 (Naide2_4.m)

```
B =

   5.5059e+05        -6.6608e+04        0.0000e+00
   6.6081e+03         0.0000e+00        0.0000e+00
  -1.2654e+07         0.0000e+00
```

Algparameetrite arvutus. *Rajaväärtuste leidmisel korrutasime väändenurgad skaleerimisteguriga:* $baasi0 = 1.0 \times 10^{10}$. *Skaleerimata algparameetrite saamiseks tuleb vastavad suurused jagada skaleerimisteguriga. Tala skaleerimata algparameetrid on toodud arvutuspäeviku väljavõttes 2.14.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.14 (Naide2_4.m)

```
 Algparameetrid - AP1
 theta -      0.0000e+00
    Tt -      1.5039e+03
     B -      0.0000e+00
    Tw -      2.8496e+04
```

Väändenurkade ja väändemomentide arvutus. *Väändenurkade ja väändemomentide leidmiseks tala ristlõigetes kasutame ülekandevõrrandit (C.1)*

$$\mathbf{Z_L}\,(\mathbf{x}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z_A} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.116}$$

kus $\mathbf{Z_A}$ *on tala algparameetrid (vt arvutuspäeviku väljavõte 2.14). Ülekandemaatriksi* $\mathbf{U}$ *leiame GNU Octave'i funktsiooniga ylWGfhlin.m ja koormusvektori* $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ *funktsiooniga yzWGmx.m (vt väljavõte programmist 2.12).*

Väljavõte programmist 2.12 (Naide2_4.m)

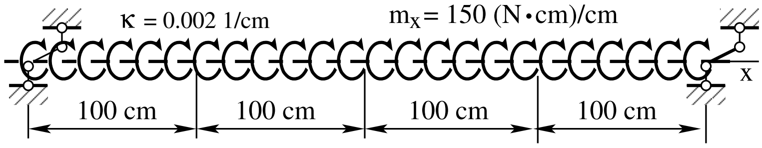
```
AP=AlgPar(:,1)
baasi0=1.0
Nmitmeks=4
xx=0;
xsamm=l/Nmitmeks;
for ij=1:Nmitmeks+1   # 5 - displacements and forces at x=0.0
Xloikes(ij,1)=xx;
  vvF=ylWGfhlin(baasi0,l,xx,GIt,EIw);
  vvB=yzWGmx(baasi0,l,xx,a,mx,GIt,EIw);   # koormusvektori arvutus
 Fvv(1:4,ij)=vvF*AP+vvB;
 Fvv(5,ij)=Fvv(2,ij)+Fvv(4,ij);
xx=xx+xsamm;
endfor
```

Arvutustulemused on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 2.15.

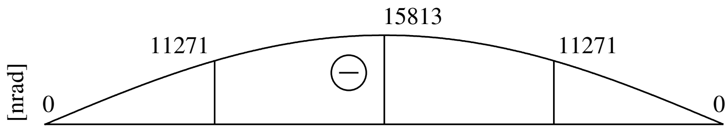
Väljavõte arvutuspäevikust 2.15 (Naide2_4.m)

```
baasi0 =   1
Nmitmeks =   4
k =   0.0020000
      x=         0.00         100.00         200.00         300.00         400.00
 theta -     0.000e+00    -1.127e-05    -1.581e-05    -1.127e-05     0.000e+00
    Tt -    -1.504e+03    -1.032e+03    -1.319e-11     1.032e+03     1.504e+03
     B -     0.000e+00    -2.116e+06    -2.812e+06    -2.116e+06     0.000e+00
    Tw -    -2.850e+04    -1.397e+04     1.091e-11     1.397e+04     2.850e+04
  Tsum -    -3.000e+04    -1.500e+04    -2.274e-12     1.500e+04     3.000e+04
```

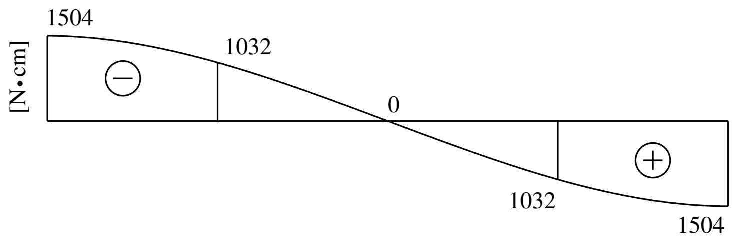
Leitud tulemuste põhjal koostame epüürid lausmomendist talal (jn 2.14).



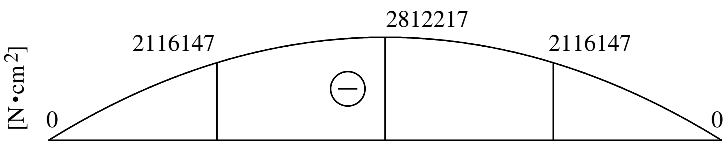
(a) Koormus $m_x = -150\,\mathrm{N}$ (vt tabel 1.1)



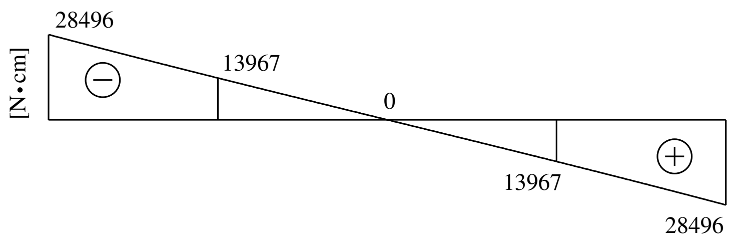
(b) Väändenurk θ



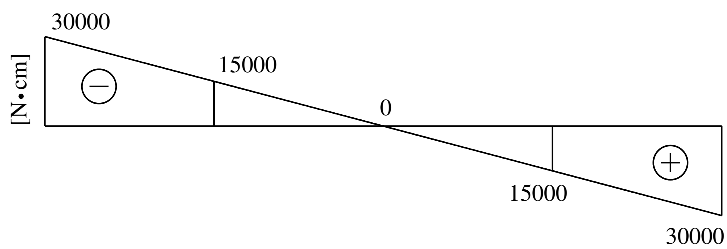
(c) Vabaväändemoment T_t



(d) Bimoment B_ω



(e) Kooldeväändemoment T_ω



(f) Koguväändemoment T_{sum}

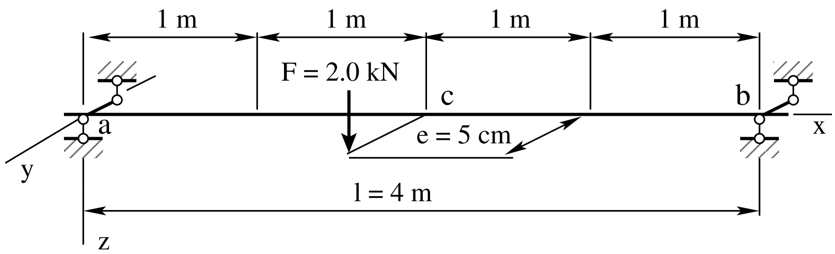
Joonis 2.14. Lausmoment talal. Epüürid

EST-meetodiga saadud tulemused on kooskõlas raamatus [Bõt62] jõu- ja deformatsioonimeetodi abil leitutega (vt tabel 2.5).

Tabel 2.5. Lausmoment talal. Tulemuste võrdlus

x [cm]	Z(x)	[Sad63]	Mõõtühik	EST-meetod	Mõõtühik
0.0	θ		rad	0.000	rad
	T_t	-1.50×10^2	kG·cm	-1.504×10^3	N·cm
	B_ω	0.00	kG·cm^2	0.000	N·cm^2
	T_ω	-2.85×10^3	kG·cm	-2.850×10^4	N·cm
	T_{sum}	-3.00×10^3	kG·cm	-3.000×10^4	N·cm
100	θ		rad	-1.127×10^{-5}	rad
	T_t	-1.00×10^2	kG·cm	-1.032×10^3	N·cm
	B_ω	-2.11×10^6	kG·cm^2	-2.116×10^6	N·cm^2
	T_ω	-1.40×10^3	kG·cm	-1.397×10^4	N·cm
	T_{sum}	-1.50×10^3	kG·cm	-1.500×10^4	N·cm
200	θ		rad	-1.581×10^{-5}	rad
	T_t	0.00	kG·cm	-1.216×10^{-11}	N·cm
	B_ω	2.87×10^5	kG·cm^2	-2.812×10^6	N·cm^2
	T_ω	0.00	kG·cm	3.638×10^{-12}	N·cm
	T_{sum}	0.00	kG·cm	-8.527×10^{-12}	N·cm
300	θ		rad	-1.127×10^{-5}	rad
	T_t	1.00×10^2	kG·cm	1.032×10^3	N·cm
	B_ω	-2.11×10^5	kG·cm^2	-2.116×10^6	N·cm^2
	T_ω	1.40×10^3	kG·cm	1.397×10^4	N·cm
	T_{sum}	1.50×10^3	kG·cm	1.500×10^4	N·cm
400	θ		rad	2.711×10^{-20}	rad
	T_t	1.50×10^2	kG·cm	1.504×10^3	N·cm
	B_ω	0.00	kG·cm^2	0.000	N·cm^2
	T_ω	2.85×10^3	kG·cm	2.850×10^4	N·cm
	T_{sum}	3.00×10^3	kG·cm	3.000×10^4	N·cm

Näide 2.5 (koondmoment talal). *Koostada joonisel 2.15 kujutatud tala väändenurga θ_x, vabaväändemomendi T_t, bimomendi B_ω ja kooldeväändemomendi T_ω epüürid.*



Joonis 2.15. Koondmoment talal

Andmed. *Varda pikkus $l = 4.0\,\mathrm{m}$. Tala on ekstsentriliselt koormatud koondatud jõuga $F = 2\,\mathrm{kN}$ ($M_x = 10.0\,\mathrm{kN{\cdot}cm}$). Vertikaalse jõu F ekstsentrilisus $e = 5\,\mathrm{cm}$. Ristlõike kooldejäikus ($EI_\omega = 7.560\times10^4\,\mathrm{kN\cdot m^4}$), vabaväändejäikus ($GI_t = 2.7216\times10^4\,\mathrm{kN\cdot m^2}$) ja kooldekarakteristik ($\kappa = \sqrt{GI_t/EI_\omega} = \sqrt{2.7216\times10^8/7.5600\times10^{12}} = 0.006\,\mathrm{cm^{-1}}$) on konstantsed.*

Lahendus. *Vaatleme tala ühe elemendina, siis sisesidemed [Jür85, lk 8–9] puuduvad. Rajatingimuste W_r seadmisel on arvestatud energiateoreemi (B.8).*

$$W_r = [T_{sum}\theta - B_\omega\theta' - b_\omega\theta]\,\Big|_0^l \tag{2.117}$$

Siit saab jälgida, milline rajatingimus on antud ja milline leitakse. Esimese toe toetingimuste paarides $T_{sum} \Leftrightarrow \theta$ ja $B_\omega \Leftrightarrow \theta'$ on antud väändenurk $\theta = 0$ ja bimoment $B_\omega = 0$. Tundmatud on koguväändemoment $T_{sum} = T_t + T_\omega$ ja suhteline väändenurk θ' ($T_t = GI_t\theta'$).

Varda lõpus on antud väändenurk $\theta = 0$ ja bimoment $B_\omega = 0$. Tundmatuks jäävad koguväändemoment $T_{sum} = T_t + T_\omega$ ja suhteline väändenurk θ' ($T_t = GI_t\theta'$).

Rajaväärtuste arvutamiseks kasutame nagu EST-meetodi [Lah97a], [Lah14] puhulgi hõredat võrrandisüsteemi[20]

$$\mathbf{spA}\cdot\mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{2.118}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor

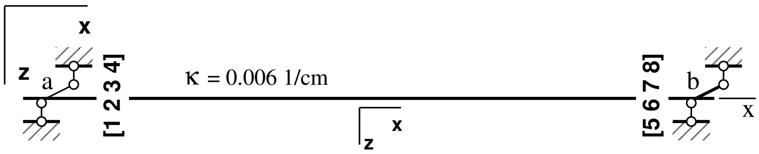
$$\mathbf{Z} = \widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a} \\ \mathbf{Z_b} \end{bmatrix} \tag{2.119}$$

mille elementideks on väändenurgad ja -momendid varda alguses ja lõpus (jn 2.16):

$$\mathbf{Z_a} = \begin{bmatrix} \theta_A \\ T_{tA} \\ B_{\omega A} \\ T_{\omega A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(1,1) \\ Z(2,1) \\ Z(3,1) \\ Z(4,1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b} = \begin{bmatrix} \theta_L \\ T_{tL} \\ B_{\omega L} \\ T_{\omega L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(5,1) \\ Z(6,1) \\ Z(7,1) \\ Z(8,1) \end{bmatrix} \tag{2.120}$$

Muutuja $Z(i,1)$ indeks (i=1, 2, 3, . . ., 8) on toodud joonisel 2.16.

[20] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.14.22



Joonis 2.16. Koondmoment talal. Muutujad

Põhivõrrandites (2.84) [Lah12, jn 14.9][21]

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8} \cdot \widehat{\mathbf{Z}} = -\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.121}$$

sisalduva laiendatud ülekandemaatriksi $\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8} \equiv (\boldsymbol{U}_{4\times 4} \mid -\boldsymbol{I}_{4\times 4})$ *(2.87) arvutamiseks saab kasutada GNU Octave'i funktsiooni yspWGvfmhvI.m.*

Võrrandisüsteemis (2.121) on tundmatuid poole rohkem kui võrrandeid. Kanname need võrrandid võrrandisüsteemi (2.118) (vt väljavõte programmist 2.13).

Väljavõte programmist 2.13 (Naide2_5.m)

```
            # Tala hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=yspWGvfmhvI(baasi0,l,GIt,EIw);
vB=yzWGMx(baasi0,l,l,a,Mx,GIt,EIw); # koormusvektori arvutus
IIv=1;
IJv=1;
vB=vB.*(-1);
            # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=Bvb
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
%            # sisestab koormusvektori võrrandisüsteemi vabaliikmesse Bv
Bvb=InsertBtoA(Bvb,NNK,1,IIv,1,vB,4,1);
            # võrrandisüsteemi vabaliige Bvb on eelnevalt nullitud
```

Võrrandisüsteemis (2.118) peab olema võrrandeid ja tundmatuid ühepalju. Võrrandite arv peab ühtima maatriksi $\mathbf{spA}$ *astakuga. Puuduvad sõltumatud võrrandid saame kinemaatilistest ja staatilistest rajatingimustest (vt jaotis 3.1).*

Nüüd

- *püstitame rajatingimused;*
- *arvutame algparameetrid;*
- *arvutame väändenurgad ja väändemomendid;*
- *koostame sisejõudude epüürid.*

Rajatingimuste püstitus. *Väliste rajatingimuste seadmisel tuleb arvestada energiateoreemi[22] (B.8). Kui avaldistes* $\theta \Leftrightarrow T_{sum}$, $\theta' \Leftrightarrow B_\omega$ *üks pool (pöördenurk* θ*, suhteline väändenurk* θ'*) on antud, siis teine pool (koguväändemoment* T_{sum}*, bimoment* B_ω*) on tundmatu.*

Tala toed sõlmedes a ja b ei võimalda pööret ($\theta = 0$)*, kuid kooldumine on vaba:* $B_\omega = 0$ *(vt tabel 1.2). Tundmatud on suhteline väändenurk* θ' *ja koguväändemoment* T_{sum}.

[21] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#figure.14.9
[22] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.F.26

$$
\begin{array}{rclcl}
Z\,(1,1) & = & \theta_A & = & 0 \\
Z\,(3,1) & = & B_{\omega\,A} & = & 0 \\
Z\,(5,1) & = & \theta_L & = & 0 \\
Z\,(7,1) & = & B_{\omega\,L} & = & 0
\end{array}
\tag{2.122}
$$

Koostatud on neli rajatingimuse võrrandit. Sisestame need võrrandisüsteemi (2.118) (vt väljavõte programmist 2.14). Võrrandisüsteemi astak võrdub tundmatute arvuga. Järelikult on sisestatud võrrandid lineaarselt sõltumatud.

Väljavõte programmist 2.14 (Naide2_5.m)

```
####### Rajatingimused
spA=spSisestaArv(spA,5,1,1);  # $theta_A$ - väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,6,3,1);  # $B_{L}$ - bimoment
spA=spSisestaArv(spA,7,5,1);  # $theta_A$ - väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,8,7,1);  # $B_{L}$ - bimoment
#vastavad vabaliikmed Bvb on juba nullitud
spA_rank = sprank(spA) # võrrandisüsteemi astak
```

Sisestatud võrrandisüsteemi kordajad hõredas maatriksis ***spA*** *on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 2.16.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.16 (Naide2_5.m)

```
spA =
Compressed Column Sparse (rows = 8, cols = 8, nnz = 19 [30%])

  (1, 1) ->  1              (4, 3) -> -0.032797      (7, 5) ->  1
  (5, 1) ->  1              (6, 3) ->  1             (2, 6) -> -1
  (1, 2) -> -1.4697e+04     (1, 4) ->  1.8777e+04    (3, 7) -> -1
  (2, 2) -> -1              (2, 4) ->  4.5569        (8, 7) ->  1
  (1, 3) ->  167.44         (3, 4) -> -911.04        (4, 8) -> -1
  (2, 3) ->  0.032797       (4, 4) -> -5.5569
  (3, 3) -> -5.5569         (1, 5) -> -1
```

Sisestatud võrrandisüsteemi vabaliikmete vektor ***B*** *on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 2.17.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.17 (Naide2_5.m)

```
B =

  -1.8951e+07        2.5158e+06         0.0000e+00         0.0000e+00
  -8.1066e+03        1.8107e+04         0.0000e+00         0.0000e+00
```

Algparameetrite arvutus. *Rajaväärtuste leidmisel korrutasime väändenurgad skaleerimisteguriga:* $baasi0 = 1.0 \times 10^{10}$. *Skaleerimata algparameetrite saamiseks tuleb vastavad suurused jagada skaleerimisteguriga. Tala skaleerimata algparameetrid on toodud arvutuspäeviku väljavõttes 2.18.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.18 (Naide2_5.m)

```
 Algparameetrid - AP1
 theta -      0.0000e+00
    Tt -     -2.2386e+03
     B -      0.0000e+00
    Tw -     -2.7614e+03
```

Väändenurkade ja väändemomentide arvutus. *Väändenurkade ja väändemomentide leidmiseks tala ristlõigetes kasutame ülekandevõrrandit (C.1)*

$$\mathbf{Z_L}(\mathbf{x}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z_A} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.123}$$

kus $\mathbf{Z_A}$ *on tala algparameetrid (vt arvutuspäeviku väljavõte 2.18). Ülekandemaatriksi* $\mathbf{U}$ *leiame GNU Octave'i funktsiooniga ylWGfhlin.m ja koormusvektori* $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ *funktsiooniga yzWGMx.m (vt väljavõte programmist 2.15).*

Väljavõte programmist 2.15 (Naide2_5.m)

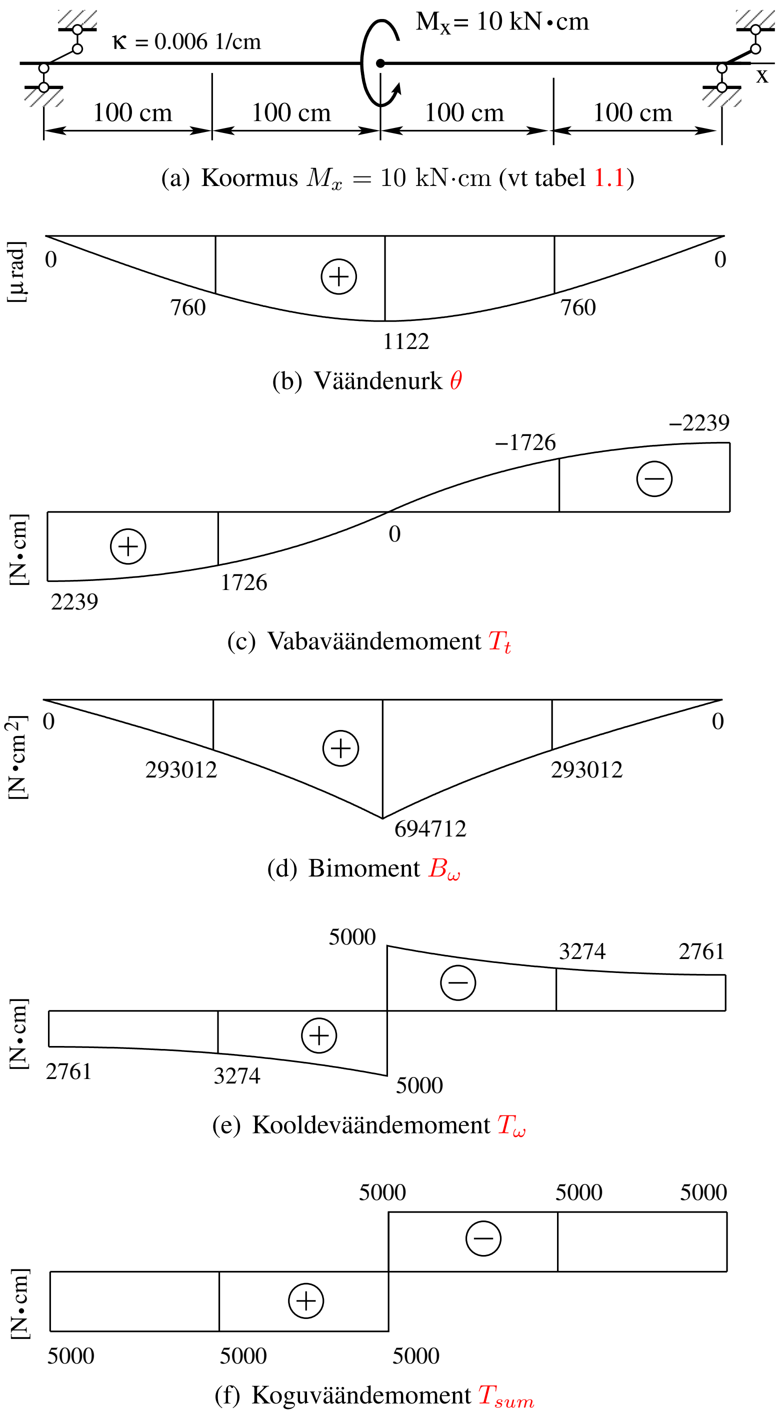
```
AP=AlgPar(:,1)
baasi0=1.0
Nmitmeks=4
xx=0;
xsamm=l/Nmitmeks;
for ij=1:Nmitmeks+1  # 5 - displacements and forces at x=0.0
Xloikes(ij,1)=xx;
  vvF=ylWGfhlin(baasi0,l,xx,GIt,EIw);
  vvB=yzWGMx(baasi0,l,xx,a,Mx,GIt,EIw);  # koormusvektori arvutus
 Fvv(1:4,ij)=vvF*AP+vvB;
 Fvv(5,ij)=Fvv(2,ij)+Fvv(4,ij);
xx=xx+xsamm;
endfor
```

Arvutustulemused on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 2.19.

Väljavõte arvutuspäevikust 2.19 (Naide2_5.m)

```
Nmitmeks =   4
k =   0.0060000
      x=        0.00        100.00        200.00        300.00        400.00
 theta -     0.000e+00     7.605e-04     1.122e-03     7.605e-04     2.168e-19
    Tt -     2.239e+03     1.726e+03     4.547e-13    -1.726e+03    -2.239e+03
     B -     0.000e+00     2.930e+05     6.947e+05     2.930e+05     0.000e+00
    Tw -     2.761e+03     3.274e+03    -5.000e+03    -3.274e+03    -2.761e+03
  Tsum -     5.000e+03     5.000e+03    -5.000e+03    -5.000e+03    -5.000e+03

     x =       199.9999999999
 theta -     1.122e-03
    Tt -     2.501e-09
     B -     6.947e+05
    Tw -     5.000e+03
  Tsum -     5.000e+03
```

Leitud tulemuste põhjal koostame epüürid koondmomendist talal (jn 2.17).



(a) Koormus $M_x = 10$ kN·cm (vt tabel 1.1)

(b) Väändenurk θ

(c) Vabaväändemoment T_t

(d) Bimoment B_ω

(e) Kooldeväändemoment T_ω

(f) Koguväändemoment T_{sum}

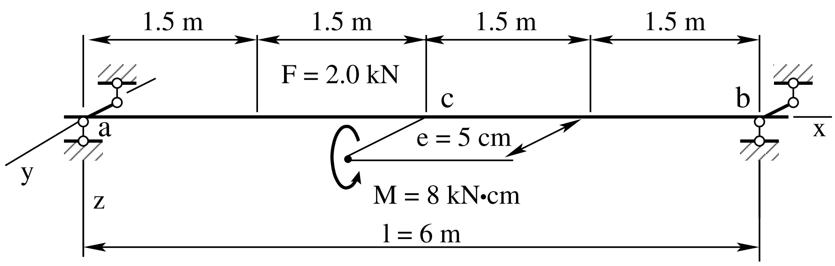
Joonis 2.17. Koondmoment talal. Epüürid

EST-meetodiga saadud tulemused on kooskõlas raamatus [Bõt62] jõu- ja deformatsioonimeetodi abil leitutega (vt tabel 2.6).

Tabel 2.6. Koondmoment tala keskel. Tulemuste võrdlus

x [cm]	Z(x)	[Sad63]	Mõõtühik	EST-meetod	Mõõtühik
0.0	θ		rad	0.000	rad
	T_t	2.24×10^2	kG·cm	2.239×10^3	N·cm
	B_ω	0.00	kG·cm^2	0.000	N·cm^2
	T_ω	2.76×10^2	kG·cm	2.761×10^3	N·cm
	T_{sum}	5.00×10^2	kG·cm	5.000×10^3	N·cm
100	θ		rad	7.605×10^{-4}	rad
	T_t	1.73×10^2	kG·cm	1.726×10^3	N·cm
	B_ω	2.93×10^4	kG·cm^2	2.930×10^5	N·cm^2
	T_ω	3.27×10^2	kG·cm	3.274×10^3	N·cm
	T_{sum}	5.00×10^2	kG·cm	5.000×10^3	N·cm
200	θ		rad	1.122×10^{-3}	rad
	T_t	0.00	kG·cm	4.547×10^{-13}	N·cm
	B_ω	6.94×10^4	kG·cm^2	6.947×10^5	N·cm^2
$200 - \epsilon$	T_ω	5.00×10^2	kG·cm^2	5.000×10^3	N·cm^2
200	T_ω	-5.00×10^2	kG·cm	-5.000×10^3	N·cm
$200 - \epsilon$	T_{sum}	5.00×10^2	kG·cm	5.000×10^3	N·cm
200	T_{sum}	-5.00×10^2	kG·cm	-5.000×10^3	N·cm
300	θ		rad	7.605×10^{-4}	rad
	T_t	-1.73×10^2	kG·cm	-1.726×10^3	N·cm
	B_ω	2.93×10^4	kG·cm^2	2.930×10^5	N·cm^2
	T_ω	-3.27×10^2	kG·cm	-3.274×10^3	N·cm
	T_{sum}	-5.00×10^2	kG·cm	-5.000×10^3	N·cm
400	θ		rad	2.168×10^{-19}	rad
	T_t	-2.24×10^2	kG·cm	2.239×10^3	N·cm
	B_ω	0.00	kG·cm^2	0.000	N·cm^2
	T_ω	-2.76×10^2	kG·cm	-2.761×10^3	N·cm
	T_{sum}	-5.00×10^2	kG·cm	-5.000×10^3	N·cm

Näide 2.6 (koondbimoment talal). *Koostada joonisel 2.18 kujutatud tala väändenurga θ_x, vabaväändemomendi T_t, bimomendi B_ω ja kooldeväändemomendi T_ω epüürid.*



Joonis 2.18. Koondbimoment talal

Andmed. *Varda pikkus* $l = 6.0\,\mathrm{m}$. *Tala on ekstsentriliselt koormatud koondmomendiga* $M_y = 8\,\mathrm{kN{\cdot}cm}$ *(*$B_y = 40.0\,\mathrm{kN{\cdot}cm^2}$*). Vertikaalse koondmomendi* M_y *ekstsentrilisus* $e = 5\,\mathrm{cm}$. *Ristlõike kooldejäikus (*$EI_\omega = 3.6288\times10^6\,\mathrm{kN{\cdot}m^4}$*), vabaväändejäikus (*$GI_t = 2.2680\times10^5\,\mathrm{kN\cdot m^2}$*) ja kooldekarakteristik (*$\kappa = \sqrt{GI_t/EI_\omega} = \sqrt{2.2680\times10^9/3.6288\times10^{14}} = 0.0025\,\mathrm{cm^{-1}}$*) on konstantsed.*

Lahendus. *Vaatleme tala ühe elemendina, siis sisesidemed [Jür85, lk 8–9] puuduvad. Rajatingimuste* W_r *seadmisel on arvestatud energiateoreemi (B.8).*

$$W_r = [T_{sum}\theta - B_\omega\theta' - b_\omega\theta]\,\Big|_0^l \tag{2.124}$$

Siit saab jälgida, milline rajatingimus on antud ja milline leitakse. Esimese toe toetingimuste paarides $T_{sum} \Leftrightarrow \theta$ *ja* $B_\omega \Leftrightarrow \theta'$ *on antud väändenurk* $\theta = 0$ *ja bimoment* $B_\omega = 0$. *Tundmatud on koguväändemoment* $T_{sum} = T_t + T_\omega$ *ja suhteline väändenurk* θ' *(*$T_t = GI_t\theta'$*).*

Varda lõpus on antud väändenurk $\theta = 0$ *ja bimoment* $B_\omega = 0$. *Tundmatuks jäävad koguväändemoment* $T_{sum} = T_t + T_\omega$ *ja suhteline väändenurk* θ' *(*$T_t = GI_t\theta'$*).*

Rajaväärtuste arvutamiseks kasutame nagu EST-meetodi [Lah97a], [Lah14] puhulgi hõredat võrrandisüsteemi[23]

$$\mathbf{spA}\cdot\mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{2.125}$$

kus $\mathbf{Z}$ *on võrrandisüsteemi tundmatute vektor*

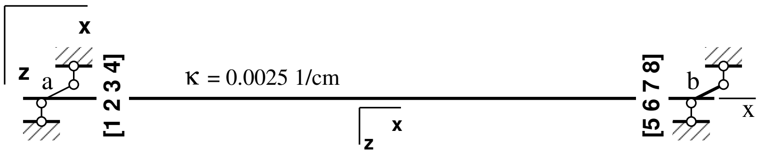
$$\mathbf{Z} = \widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a} \\ \mathbf{Z_b} \end{bmatrix} \tag{2.126}$$

mille elementideks on väändenurgad ja -momendid varda alguses ja lõpus (jn 2.19):

$$\mathbf{Z_a} = \begin{bmatrix} \theta_A \\ T_{tA} \\ B_{\omega A} \\ T_{\omega A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(1,1) \\ Z\,(2,1) \\ Z\,(3,1) \\ Z\,(4,1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b} = \begin{bmatrix} \theta_L \\ T_{tL} \\ B_{\omega L} \\ T_{\omega L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(5,1) \\ Z\,(6,1) \\ Z\,(7,1) \\ Z\,(8,1) \end{bmatrix} \tag{2.127}$$

Muutuja $Z\,(i,1)$ *indeks (i=1, 2, 3, . . ., 8) on toodud joonisel 2.13.*

[23] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.14.22



Joonis 2.19. Koondbimoment. Muutujad

Põhivõrrandites (2.84) [Lah12, jn 14.9][24]

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8} \cdot \widehat{\mathbf{Z}} = -\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.128}$$

sisalduva laiendatud ülekandemaatriksi $\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8} \equiv (\boldsymbol{U}_{4\times 4} \mid -\boldsymbol{I}_{4\times 4})$ *(2.87) arvutamiseks saab kasutada GNU Octave'i funktsiooni yspWGvfmhvI.m.*

Võrrandisüsteemis (2.128) on tundmatuid poole rohkem kui võrrandeid. Kanname need võrrandid võrrandisüsteemi (2.125) (vt väljavõte programmist 2.16).

Väljavõte programmist 2.16 (Naide2_6.m)

```
            # Tala hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=yspWGvfmhvI(baasi0,l,GIt,EIw);
vB=yzWGBy(baasi0,l,l,a,By,GIt,EIw); # koormusvektori arvutus
IIv=1;
IJv=1;
vB=vB.*(-1);
            # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=Bvb
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
%            # sisestab koormusvektori võrrandisüsteemi vabaliikmesse Bv
Bvb=InsertBtoA(Bvb,NNK,1,IIv,1,vB,4,1);
            # võrrandisüsteemi vabaliige Bvb on eelnevalt nullitud
```

Võrrandisüsteemis (2.125) peab olema võrrandeid ja tundmatuid ühepalju. Võrrandite arv peab ühtima maatriksi $\mathbf{spA}$ *astakuga. Puuduvad sõltumatud võrrandid saame kinemaatilistest ja staatilistest rajatingimustest (vt jaotis 3.1).*

Edasi

- *püstitame rajatingimused;*
- *arvutame algparameetrid;*
- *arvutame väändenurgad ja väändemomendid;*
- *koostame sisejõudude epüürid.*

Rajatingimuste püstitus. *Väliste rajatingimuste seadmisel tuleb arvestada energiateoreemi*[25] *(B.8). Kui avaldistes* $\theta \Leftrightarrow T_{sum}$, $\theta' \Leftrightarrow B_\omega$ *üks pool (pöördenurk* θ*, bimoment* B_ω*) on antud, siis teine pool (koguväändemoment* T_{sum}*, suhteline väändenurk* θ'*) on tundmatu.*

Tala toed sõlmedes a ja b ei võimalda pööret ($\theta = 0$*), kuid kooldumine on vaba:* $B_\omega = 0$ *(vt tabel 1.2). Tundmatud on suhteline väändenurk* θ' *ja koguväändemoment* T_{sum}*.*

[24] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#figure.14.9
[25] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.F.26

$$\begin{aligned} Z(1,1) &= \theta_A &&= 0 \\ Z(3,1) &= B_{\omega A} &&= 0 \\ Z(5,1) &= \theta_L &&= 0 \\ Z(7,1) &= B_{\omega L} &&= 0 \end{aligned} \tag{2.129}$$

Koostatud on neli rajatingimuse võrrandit. Sisestame need võrrandisüsteemi (2.125) (vt väljavõte programmist 2.17). Võrrandisüsteemi astak võrdub tundmatute arvuga. Järelikult on sisestatud võrrandid lineaarselt sõltumatud.

Väljavõte programmist 2.17 (Naide2_6.m)

```
####### Rajatingimused
spA=spSisestaArv(spA,5,1,1);  # $theta_A$ - väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,6,3,1);  # $B_{L}$ - bimoment
spA=spSisestaArv(spA,7,5,1);  # $theta_A$ - väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,8,7,1);  # $B_{L}$ - bimoment
#vastavad vabaliikmed Bvb on juba nullitud
spA_rank = sprank(spA) # võrrandisüsteemi astak
```

*Sisestatud võrrandisüsteemi kordajad hõredas maatriksis **spA** on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 2.20.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.20 (Naide2_6.m)

```
spA =
Compressed Column Sparse (rows = 8, cols = 8, nnz = 19 [30%])

  (1, 1) ->  1               (4, 3) -> -0.0053232      (7, 5) ->  1
  (5, 1) ->  1               (6, 3) ->  1              (2, 6) -> -1
  (1, 2) -> -2645.5          (1, 4) ->  1109.8         (3, 7) -> -1
  (2, 2) -> -1               (2, 4) ->  1.3524         (8, 7) ->  1
  (1, 3) ->  5.9630          (3, 4) -> -851.71         (4, 8) -> -1
  (2, 3) ->  0.0053232       (4, 4) -> -2.3524
  (3, 3) -> -2.3524          (1, 5) -> -1
```

*Sisestatud võrrandisüsteemi vabaliikmete vektor **B** on toodud arvutuspäeviku väljavõttes 2.21.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.21 (Naide2_6.m)

```
B =

  -5.1972e+04         5.1787e+04         0.0000e+00         0.0000e+00
  -8.2232e+01         8.2232e+01         0.0000e+00         0.0000e+00
```

Algparameetrite arvutus. *Rajaväärtuste leidmisel korrutasime väändenurgad skaleerimisteguriga:* $baasi0 = 1.0 \times 10^{10}$. *Skaleerimata algparameetrite saamiseks tuleb vastavad suurused jagada skaleerimisteguriga. Tala skaleerimata algparameetrid on toodud arvutuspäeviku väljavõttes 2.22.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.22 (Naide2_6.m)

```
 Algparameetrid - AP1
 theta -      0.00000
    Tt -     -5.86284
     B -      0.00000
    Tw -    -60.80382
```

Väändenurkade ja väändemomentide arvutus. *Väändenurkade ja väändemomentide leidmiseks tala ristlõigetes kasutame ülekandevõrrandit (C.1)*

$$\mathbf{Z_L}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z_A} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.130}$$

kus $\mathbf{Z_A}$ *on tala algparameetrid (vt arvutuspäeviku väljavõte 2.22). Ülekandemaatriksi* $\mathbf{U}$ *leiame GNU Octave'i funktsiooniga ylWGfhlin.m ja koormusvektori* $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ *funktsiooniga yzWGBy.m (vt väljavõte programmist 2.18).*

Väljavõte programmist 2.18 (Naide2_6.m)

```
AP=AlgPar(:,1)
baasi0=1.0
Nmitmeks=4
xx=0;
xsamm=l/Nmitmeks;
for ij=1:Nmitmeks+1  # 5 - displacements and forces at x=0.0

Xloikes(ij,1)=xx;
  vvF=ylWGfhlin(baasi0,l,xx,GIt,EIw);
  vvB=yzWGBy(baasi0,l,xx,a,By,GIt,EIw);  # koormusvektori arvutus
 Fvv(1:4,ij)=vvF*AP+vvB;
 Fvv(5,ij)=Fvv(2,ij)+Fvv(4,ij);
xx=xx+xsamm;
endfor
```

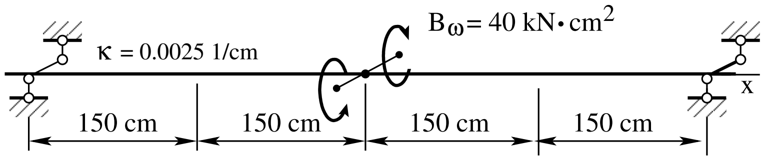
Arvutustulemused on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 2.23.

Väljavõte arvutuspäevikust 2.23 (Naide2_6.m)

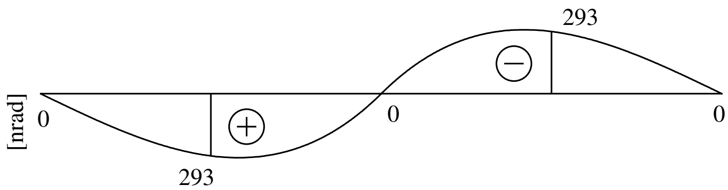
```
baasi0 =   1
Nmitmeks =   4
k =  0.0025000
      x=        0.00        150.00        300.00        450.00        600.00
 theta -     0.000e+00    2.928e-07   -1.694e-21   -2.928e-07    0.000e+00
    Tt -     5.863e+00    1.537e+00   -1.206e+01    1.537e+00    5.863e+00
     B -     0.000e+00    9.336e+03   -2.000e+04   -9.336e+03    0.000e+00
    Tw -     6.080e+01    6.513e+01    7.872e+01    6.513e+01    6.080e+01
  Tsum -     6.667e+01    6.667e+01    6.667e+01    6.667e+01    6.667e+01
```

```
     x = 299.99999999    Tt -  -1.206e+01      Tw -  7.872e+01
 theta -     5.293e-19    B -   2.000e+04    Tsum -  6.667e+01
```

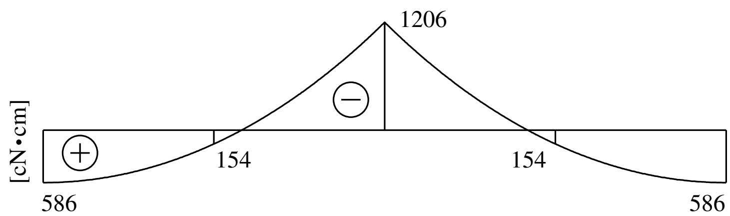
Leitud tulemuste põhjal koostame epüürid koondbimomendist talal (jn 2.20).



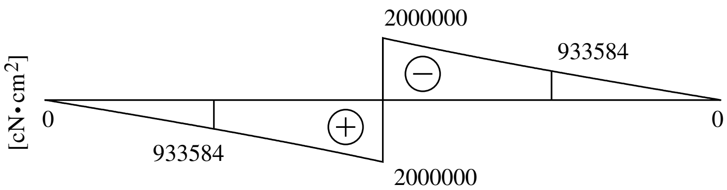
(a) Koormus $B_\omega = 40$ kN·cm^2 (vt tabel 1.1)



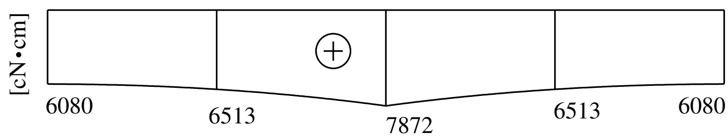
(b) Väändenurk θ



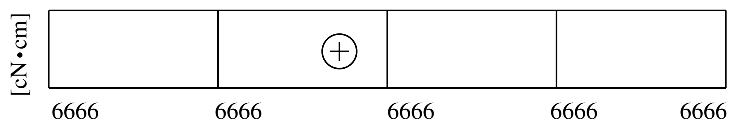
(c) Vabaväändemoment T_t



(d) Bimoment B_ω



(e) Kooldeväändemoment T_ω



(f) Koguväändemoment T_{sum}

Joonis 2.20. Koondbimoment talal. Epüürid

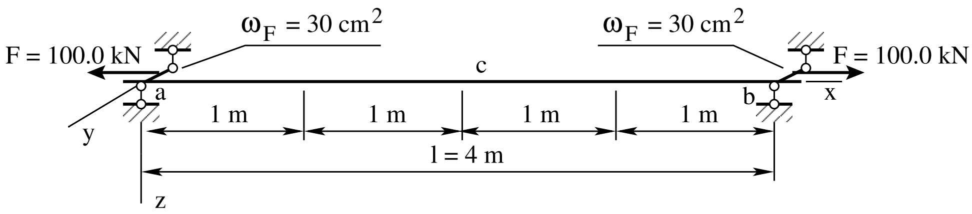
EST-meetodiga saadud tulemused on kooskõlas raamatus [Bõt62] jõu- ja deformatsioonimeetodi abil leitutega (vt tabel 2.7).

Tabel 2.7. Koondbimoment tala keskel. Tulemuste võrdlus

x [cm]	Z(x)	[Sad63]	Mõõtühik	EST-meetod	Mõõtühik
0.0	θ		rad	0.000	rad
	T_t	0.57	kG·cm	5.863	N·cm
	B_ω	0.00	kG·cm^2	0.000	N·cm^2
	T_ω	6.08	kG·cm	6.080×10^1	N·cm
	T_{sum}	6.65[26]	kG·cm	6.667×10^1	N·cm
150	θ		rad	2.928×10^{-7}	rad
	T_t	0.14	kG·cm	1.537	N·cm
	B_ω	9.33×10^2	kG·cm^2	9.336×10^3	N·cm^2
	T_ω	6.51	kG·cm	6.513×10^1	N·cm
	T_{sum}	6.65	kG·cm	6.667×10^1	N·cm
300	θ		rad	-1.694×10^{-21}	rad
	T_t	-1.22	kG·cm	-1.206×10^1	N·cm
$300 - \epsilon$	B_ω	2.00×10^3	kG·cm^2	2.000×10^4	N·cm^2
	B_ω	-2.00×10^3	kG·cm^2	-2.000×10^4	N·cm^2
300	T_ω	7.87	kG·cm	7.872×10^1	N·cm
	T_{sum}	6.65	kG·cm	6.667×10^1	N·cm
450	θ		rad	-2.928×10^{-7}	rad
	T_t	0.14	kG·cm	1.537	N·cm
	B_ω	-9.33×10^2	kG·cm^2	-9.336×10^3	N·cm^2
	T_ω	6.51	kG·cm	6.513×10^1	N·cm
	T_{sum}	6.65	kG·cm	6.667×10^1	N·cm
600	θ		rad	0.000	rad
	T_t	0.57	kG·cm	5.863	N·cm
	B_ω	0.00	kG·cm^2	0.000	N·cm^2
	T_ω	6.08	kG·cm	6.080×10^1	N·cm
	T_{sum}	6.65	kG·cm	6.667×10^1	N·cm

[26] Täpsem on $L_A = (T_{sum}) = 800 \cdot 5/600 = 6.666\ldots$

Näide 2.7 (pikikoormus vardal). *Koostada joonisel 2.21 kujutatud varda väändenurga θ_x, vabaväändemomendi T_t, bimomendi B_ω ja kooldeväändemomendi T_ω epüürid.*



Joonis 2.21. Pikikoormus vardal

Andmed. *Varda pikkus* $l = 4.0\,\mathrm{m}$. *Varras on ekstsentriliselt koormatud pikijõuga* $F = 100\,\mathrm{kN}$. *Varda otspinnal on pikikoormuse rakenduspunkti sektorkoordinaat* $\omega_F = 30\,\mathrm{cm}$ *(*$B_\omega = 3.0 \times 10^6\,\mathrm{N\cdot cm^2}$*). Ristlõike kooldejäikus* ($EI_\omega = 2.9686 \times 10^4\,\mathrm{kN\cdot m^4}$), *vabaväändejäikus* ($GI_t = 1.1875 \times 10^3\,\mathrm{kN\cdot m^2}$) *ja kooldekarakteristik* ($\kappa = \sqrt{GI_t/EI_\omega} = \sqrt{1.1875 \times 10^{10}/2.9686 \times 10^{15}} = 0.002\,\mathrm{cm^{-1}}$) *on konstantsed.*

Lahendus. *Vaatleme varrast ühe elemendina, siis sisesidemed [Jür85, lk 8–9] puuduvad. Rajatingimuste* W_r *seadmisel on arvestatud energiateoreemi (B.8).*

$$W_r = [T_{sum}\theta - B_\omega\theta' - b_\omega\theta]\,\Big|_0^l \qquad (2.131)$$

Siit näeb, milline rajatingimus on antud ja milline leitakse. Esimese toe toetingimuste paarides on antud väändenurk $\theta = 0$ *ja bimoment* $B_\omega = -3.0 \times 10^6\,\mathrm{N\cdot cm^2}$. *Tundmatud on suhteline väändenurk* θ' ($T_t = GI_t\theta'$) *ja koguväändemoment* $T_{sum} = T_t + T_\omega$.

Varda lõpus on antud väändenurk $\theta = 0$ *ja bimoment* $B_\omega = 3.0 \times 10^6\,\mathrm{N{\cdot}cm^2}$. *Tundmatuks jäävad suhteline väändenurk* θ' ($T_t = GI_t\theta'$) *ja koguväändemoment* $T_{sum} = T_t + T_\omega$.

Rajaväärtuste arvutamiseks kasutame nagu EST-meetodi [Lah97a], [Lah14] puhulgi hõredat võrrandisüsteemi[27]

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B} \qquad (2.132)$$

kus $\mathbf{Z}$ *on võrrandisüsteemi tundmatute vektor*

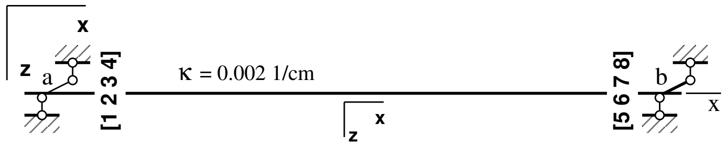
$$\mathbf{Z} = \widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a} \\ \mathbf{Z_b} \end{bmatrix} \qquad (2.133)$$

mille elementideks on väändenurgad ja -momendid varda alguses ja lõpus (jn 2.22):

$$\mathbf{Z_a} = \begin{bmatrix} \theta_A \\ T_{tA} \\ B_{\omega A} \\ T_{\omega A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(1,1) \\ Z(2,1) \\ Z(3,1) \\ Z(4,1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b} = \begin{bmatrix} \theta_L \\ T_{tL} \\ B_{\omega L} \\ T_{\omega L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(5,1) \\ Z(6,1) \\ Z(7,1) \\ Z(8,1) \end{bmatrix} \qquad (2.134)$$

Muutuja $Z(i,1)$ *indeks (i=1, 2, 3, . . ., 8) on toodud joonisel 2.22.*

[27] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.14.22



Joonis 2.22. Pikikoormus vardal. Muutujad

Põhivõrrandites (2.84) [Lah12, jn 14.9][28]

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8} \cdot \widehat{\mathbf{Z}} = -\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.135}$$

sisalduva laiendatud ülekandemaatriksi $\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8} \equiv (\boldsymbol{U}_{4\times 4} \mid -\boldsymbol{I}_{4\times 4})$ *(2.87) arvutamiseks saab kasutada GNU Octave'i funktsiooni yspWGvfmhvI.m. Siin* $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ *on tala takistatud väände koormusvektor (C.8).*

Võrrandisüsteemis on (2.135) tundmatuid poole rohkem kui võrrandeid. Kanname need võrrandid võrrandisüsteemi (2.132) (vt väljavõte programmist 2.19).

Väljavõte programmist 2.19 (Naide2_7.m)

```
            # Tala hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=yspWGvfmhvI(baasi0,l,GIt,EIw);
%vB=yzWGBy(baasi0,l,l,a,By,GIt,EIw); # koormusvektori arvutus
IIv=1;
IJv=1;
%vB=vB.*(-1);
            # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=Bvb
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
%            # sisestab koormusvektori võrrandisüsteemi vabaliikmesse Bv
%Bvb=InsertBtoA(Bvb,NNK,1,IIv,1,vB,4,1);
            # võrrandisüsteemi vabaliige Bvb on eelnevalt nullitud
```

Võrrandisüsteemis (2.132) peab olema võrrandeid ja tundmatuid ühepalju. Võrrandite arv peab ühtima maatriksi **spA** *astakuga. Puuduvad sõltumatud võrrandid saame kinemaatilistest ja staatilistest rajatingimustest (vt jaotis 3.1).*

Nüüd

- *püstitame rajatingimused;*
- *arvutame algparameetrid;*
- *arvutame väändenurgad ja väändemomendid;*
- *koostame sisejõudude epüürid.*

Rajatingimuste püstitus. *Väliste rajatingimuste seadmisel tuleb arvestada energiateoreemi*[29] *(B.8). Kui avaldistes* $\theta \Leftrightarrow T_{sum}$, $\theta' \Leftrightarrow B_\omega$ *üks pool (pöördenurk* θ*, bimoment* B_ω*) on antud, siis teine pool (koguväändemoment* T_{sum}*, suhteline väändenurk* θ'*) on tundmatu.*

Varda toed sõlmedes a ja b ei võimalda pööret: $\theta = 0$. *Sõlmes a on bimoment* $B_\omega = -3.0\times10^6\,\mathrm{N\cdot cm^2}$. *Sõlmes b on bimoment* $B_\omega = 3.0\times10^6\,\mathrm{N\cdot cm^2}$. *Tundmatud on suhteline väändenurk* θ' *ja koguväändemoment* T_{sum}.

[28] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#figure.14.9
[29] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.F.26

$$
\begin{array}{rclcl}
Z\,(1,1) & = & \theta_A & = & 0 \\
Z\,(3,1) & = & B_{\omega\,A} & = & -3.0\times 10^6\,\mathrm{N\cdot cm^2} \\
Z\,(5,1) & = & \theta_L & = & 0 \\
Z\,(7,1) & = & B_{\omega\,L} & = & 3.0\times 10^6\,\mathrm{N\cdot cm^2}
\end{array}
\qquad (2.136)
$$

Koostatud on neli rajatingimuse võrrandit. Sisestame need võrrandisüsteemi (2.132) (vt väljavõte programmist 2.20). Võrrandisüsteemi astak võrdub tundmatute arvuga. Järelikult on sisestatud võrrandid lineaarselt sõltumatud.

Väljavõte programmist 2.20 (**Naide2_7.m**)

```
####### Rajatingimused
spA=spSisestaArv(spA,5,1,1);  # $theta_A$ - väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,6,3,1);  # $B_{L}$ - bimoment
Bvb(6,1)=-By; # -3.0e+06;
spA=spSisestaArv(spA,7,5,1);  # $theta_A$ - väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,8,7,1);  # $B_{L}$ - bimoment
Bvb(8,1)= By;   # 3.0e+06;
#vastavad vabaliikmed Bvb on juba nullitud
spA_rank = sprank(spA) # võrrandisüsteemi astak
```

Sisestatud võrrandisüsteemi kordajad hõredas maatriksis ***spA*** *on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 2.24.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.24 (**Naide2_7.m**)

```
spA =
Compressed Column Sparse (rows = 8, cols = 8, nnz = 19 [30%])

  (1, 1) -> 1             (4, 3) -> -0.0017761     (7, 5) -> 1
  (5, 1) -> 1             (6, 3) -> 1              (2, 6) -> -1
  (1, 2) -> -336.87       (1, 4) -> 37.099         (3, 7) -> -1
  (2, 2) -> -1            (2, 4) -> 0.33742        (8, 7) -> 1
  (1, 3) -> 0.28417       (3, 4) -> -444.05
  (2, 3) -> 0.0017761     (4, 4) -> -1.3374
  (3, 3) -> -1.3374       (1, 5) -> -1
```

Sisestatud võrrandisüsteemi vabaliikmete vektor ***B*** *on 700dud arvutuspäeviku väljavõttes 2.25.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.25 (**Naide2_7.m**)

```
B =

          0          0          0          0
          0          0   -3000000    3000000
```

Algparameetrite arvutus. *Rajaväärtuste leidmisel korrutasime väändenurgad skaleerimisteguriga:* $baasi0 = 1.0 \times 10^{10}$. *Skaleerimata algparameetrite saamiseks tuleb vastavad suurused jagada skaleerimisteguriga. Tala skaleerimata algparameetrid on toodud arvutuspäeviku väljavõttes 2.26.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.26 (Naide2_7.m)

```
 Algparameetrid - AP1
 theta -      0.0000e+00
    Tt -     -2.2796e+03
     B -     -3.0000e+06
    Tw -      2.2796e+03
```

Väändenurkade ja väändemomentide arvutus. *Väändenurkade ja väändemomentide leidmiseks tala ristlõigetes kasutame ülekandevõrrandit (C.1)*

$$\mathbf{Z_L}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z_A} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.137}$$

kus $\mathbf{Z_A}$ *on tala algparameetrid (vt arvutuspäeviku väljavõte 2.26). Ülekandemaatriksi* $\mathbf{U}$ *leiame GNU Octave'i funktsiooniga ylWGfhlin.m. Koormusvektor* $\overset{\circ}{\mathbf{Z}} = 0$ *(vt väljavõte programmist 2.21).*

Väljavõte programmist 2.21 (Naide2_7.m)

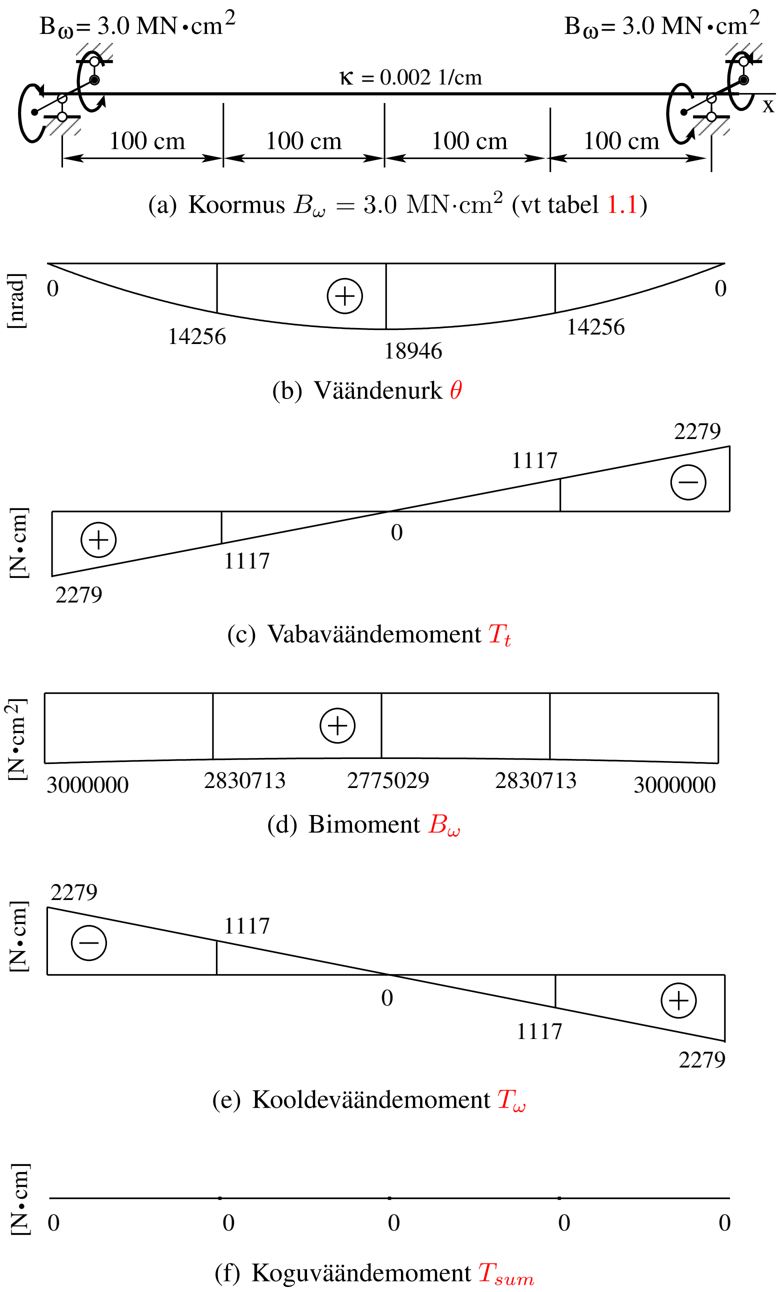
```
AP=AlgPar(:,1)
baasi0=1.0
Nmitmeks=4
xx=0;
xsamm=l/Nmitmeks;
for ij=1:Nmitmeks+1   # 5 - displacements and forces at x=0.0
Xloikes(ij,1)=xx;
  vvF=ylWGfhlin(baasi0,l,xx,GIt,EIw);
 Fvv(1:4,ij)=vvF*AP;   %+vvB;
 Fvv(5,ij)=Fvv(2,ij)+Fvv(4,ij);
xx=xx+xsamm;
endfor
```

Arvutustulemused on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 2.27.

Väljavõte arvutuspäevikust 2.27 (Naide2_7.m)

```
baasi0 =   1
Nmitmeks =   4
k =   0.0020000
      x=        0.00        100.00         200.00         300.00         400.00
 theta -     0.000e+00     1.426e-05     1.895e-05     1.426e-05     1.186e-20
    Tt -     2.280e+03     1.117e+03    -5.116e-13    -1.117e+03    -2.280e+03
     B -     3.000e+06     2.831e+06     2.775e+06     2.831e+06     3.000e+06
    Tw -    -2.280e+03    -1.117e+03     0.000e+00     1.117e+03     2.280e+03
  Tsum -    -4.547e-13    -4.547e-13    -5.116e-13    -4.547e-13    -4.547e-13
```

Leitud tulemuste põhjal koostame epüürid pikikoormusest vardal (jn 2.23).



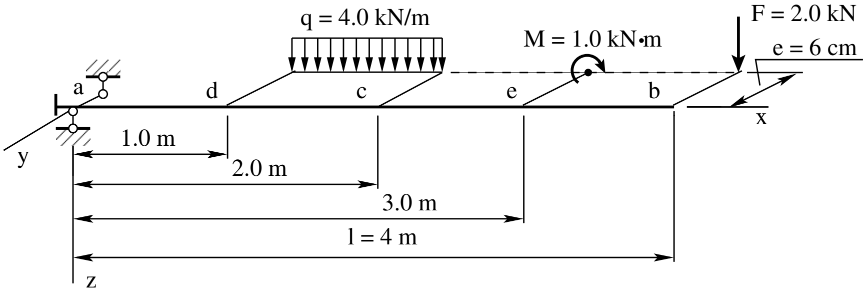
Joonis 2.23. Pikikoormus vardal. Epüürid

EST-meetodiga saadud tulemused on kooskõlas raamatus [Bõt62] jõu- ja deformatsioonimeetodi abil leitutega (vt tabel 2.8).

Tabel 2.8. Pikikoormus vardal. Tulemuste võrdlus

x [cm]	Z(x)	[Sad63]	Mõõtühik	EST-meetod	Mõõtühik
0.0	θ		rad	0.000	rad
	T_t	2.28×10^2	kG·cm	2.280×10^3	N·cm
	B_ω	3.00×10^5	kG·cm^2	3.000×10^6	N·cm^2
	T_ω	-2.28×10^2	kG·cm	-2.280×10^3	N·cm
	T_{sum}		kG·cm	-4.547×10^{-13}	N·cm
100	θ		rad	1.426×10^{-5}	rad
	T_t	1.12×10^2	kG·cm	1.117×10^3	N·cm
	B_ω	2.83×10^5	kG·cm^2	2.831×10^6	N·cm^2
	T_ω	-1.12×10^2	kG·cm	-1.117×10^3	N·cm
	T_{sum}		kG·cm	-4.547×10^{-13}	N·cm
200	θ		rad	1.895×10^{-5}	rad
	T_t	0.00	kG·cm	-5.116×10^{-13}	N·cm
	B_ω	2.77×10^5	kG·cm^2	2.775×10^6	N·cm^2
	T_ω	0.00	kG·cm	0.000	N·cm
	T_{sum}		kG·cm	-4.547×10^{-13}	N·cm
300	θ		rad	1.426×10^{-5}	rad
	T_t	-1.12×10^2	kG·cm	-1.117×10^3	N·cm
	B_ω	2.83×10^5	kG·cm^2	2.831×10^6	N·cm^2
	T_ω	1.12×10^2	kG·cm	1.117×10^3	N·cm
	T_{sum}		kG·cm	-4.547×10^{-13}	N·cm
400	θ		rad	1.186×10^{-20}	rad
	T_t	-2.28×10^2	kG·cm	-2.280×10^3	N·cm
	B_ω	3.00×10^5	kG·cm^2	3.000×10^6	N·cm^2
	T_ω	2.28×10^2	kG·cm	2.280×10^3	N·cm
	T_{sum}		kG·cm	-4.547×10^{-13}	N·cm

Näide 2.8 (laus- ja koondkoormus konsoolil). *Koostada joonisel 2.24 kujutatud konsooli väändenurga θ_x, vabaväändemomendi T_t, bimomendi B_ω ja kooldeväändemomendi T_ω epüürid.*



Joonis 2.24. Laus- ja koondkoormus konsoolil

Andmed. *Konsooli pikkus* $l = 4.0\,\mathrm{m}$. *Konsool on ekstsentriliselt koormatud lauskoormusega* $q = 4.0\,\mathrm{kN/m}$ *(*$m_x = -240\,(\mathrm{N\cdot cm})/\mathrm{cm}$*). Vertikaalse lauskoormuse* q *ekstsentrilisus* $e = 6\,\mathrm{cm}$. *Konsoolile on ekstsentriliselt rakendatud moment* $M_y = -1.0\,\mathrm{kN{\cdot}m}$ *(*$B_\omega = 600\,\mathrm{kN{\cdot}cm^2}$*). Konsool on ekstsentriliselt koormatud koondatud jõuga* $F = 2\,\mathrm{kN}$ *(*$M_x = -12.0\,\mathrm{kN{\cdot}cm}$*). Vertikaalse jõu* F *ekstsentrilisus* $e = 5\,\mathrm{cm}$. *Ristlõike kooldejäikus* ($EI_\omega = 7.560\times10^4\,\mathrm{kN{\cdot}m^4}$)*, vabaväändejäikus* ($GI_t = 2.7216\times10^4\,\mathrm{kN{\cdot}m^2}$) *ja kooldekarakteristik* ($\kappa = \sqrt{GI_t/EI_\omega} = \sqrt{2.7216\times10^8/7.5600\times10^{12}} = 0.006\,\mathrm{cm^{-1}}$) *on konstantsed.*

Lahendus. *Vaatleme konsooli ühe elemendina, siis sisesidemed [Jür85, lk 8–9] puuduvad. Rajatingimuste* W_r *seadmisel on arvestatud energiateoreemi (B.8).*

$$W_r = [T_{sum}\theta - B_\omega\theta' - b_\omega\theta]\,\Big|_0^l \tag{2.138}$$

Siit selgub, milline rajatingimus on antud ja milline leitakse. Esimese toe toetingimuste paarides $T_{sum} \Leftrightarrow \theta$ *ja* $B_\omega \Leftrightarrow \theta'$ *on antud väändenurk* $\theta = 0$ *ja suhteline väändenurk* $\theta' = 0$. *Seega on esimene tugi jäik ning ei võimalda pööret ega kooldumist. Tundmatud on bimoment* B_ω *ja koguväändemoment* T_{sum}.

Konsooli lõpus on bimoment $B_\omega = 0$ *ja koguväändemoment* $T_{sum} = T_t + T_\omega = -12.0\,\mathrm{kN{\cdot}cm}$. *Tundmatuks jäävad väändenurk* θ *ja suhteline väändenurk* θ' *(*$T_t = GI_t\theta'$*).*

Rajaväärtuste arvutamiseks kasutame nagu EST-meetodi [Lah97a], [Lah14] puhulgi hõredat võrrandisüsteemi[30]

$$\mathbf{spA}\cdot\mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{2.139}$$

kus $\mathbf{Z}$ *on võrrandisüsteemi tundmatute vektor*

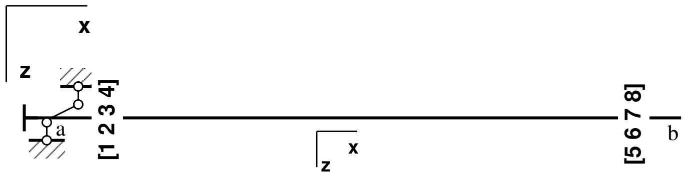
$$\mathbf{Z} = \widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a} \\ \mathbf{Z_b} \end{bmatrix} \tag{2.140}$$

mille elementideks on väändenurgad ja -momendid konsooli alguses ja lõpus (jn 2.25):

$$\mathbf{Z_a} = \begin{bmatrix} \theta_A \\ T_{tA} \\ B_{\omega A} \\ T_{\omega A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(1,1) \\ Z\,(2,1) \\ Z\,(3,1) \\ Z\,(4,1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b} = \begin{bmatrix} \theta_L \\ T_{tL} \\ B_{\omega L} \\ T_{\omega L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(5,1) \\ Z\,(6,1) \\ Z\,(7,1) \\ Z\,(8,1) \end{bmatrix} \tag{2.141}$$

Muutuja $Z\,(i,1)$ *indeks (i=1, 2, 3, ..., 8) on toodud joonisel 2.25.*

[30] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.14.22



Joonis 2.25. Laus- ja koondkoormus konsoolil. Muutujad

Põhivõrrandites (2.84) [Lah12, jn 14.9][31]

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8} \cdot \widehat{\mathbf{Z}} = -\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.142}$$

sisalduva laiendatud ülekandemaatriksi $\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8} \equiv (\boldsymbol{U}_{4\times 4} \mid -\boldsymbol{I}_{4\times 4})$ *(2.87) arvutamiseks saab kasutada GNU Octave'i funktsiooni yspWGvfmhvI.m.*

Võrrandisüsteemis (2.142) on tundmatuid poole rohkem kui võrrandeid. Kanname need võrrandid võrrandisüsteemi (2.139) (vt väljavõte programmist 2.22).

Väljavõte programmist 2.22 (Naide2_8.m)

```
             # Tala hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=yspWGvfmhvI(baasi0,l,GIt,EIw);
vB1q=yzWGmx(baasi0,l,l,a1,mx,GIt,EIw); # koormusvektori arvutus
vB2q=yzWGmx(baasi0,l,l,a2,-mx,GIt,EIw);
vB3B=yzWGBy(baasi0,l,l,a3,By,GIt,EIw);
vB=vB1q+vB2q+vB3B;
IIv=1;
IJv=1;
vB=vB.*(-1);
             # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=Bvb
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
             # sisestab koormusvektori võrrandisüsteemi vabaliikmesse Bvb
Bvb=InsertBtoA(Bvb,NNK,1,IIv,1,vB,4,1);
             # võrrandisüsteemi vabaliige Bvb on eelnevalt nullitud
```

Võrrandisüsteemis (2.139) peab olema võrrandeid ja tundmatuid ühepalju. Võrrandite arv peab ühtima maatriksi **spA** *astakuga. Puuduvad sõltumatud võrrandid saame kinemaatilistest ja staatilistest rajatingimustest (vt jaotis 3.1).*

Edasi

- *püstitame rajatingimused;*
- *arvutame algparameetrid;*
- *arvutame väändenurgad ja väändemomendid;*
- *koostame sisejõudude epüürid.*

Rajatingimuste püstitus. *Väliste rajatingimuste seadmisel tuleb arvestada energiateoreemi*[32] *(B.8). Kui avaldistes* $\theta \Leftrightarrow T_{sum}$, $\theta' \Leftrightarrow B_\omega$ *üks pool (pöördenurk* θ, *suhteline väändenurk* θ'*) on antud, siis teine pool (koguväändemoment* T_{sum}, *bimoment* B_ω*) on tundmatu.*

Jäik tugi konsooli sõlmes a ei võimalda pööret ega kooldumist (vt tabel 1.2). Tundmatuks on bimoment B_ω *ja koguväändemoment* T_{sum}. *Viimases* $(T_{sum} = T_t + T_\omega)$ *on vabaväändemoment* $T_t = GI_t\theta' = 0$ *antud. Tundmatuks jääb kooldeväändemoment* T_ω.

[31] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#figure.14.9
[32] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.F.26

Konsooli otsas, sõlmes b, on antud bimoment $B_\omega = 0$ *ja koguväändemoment* $T_{sum} = -1.2 \times 10^4\,\mathrm{N{\cdot}cm}$. *Tundmatud on pöördenurk* θ *ja suhteline väändenurk* θ' ($GI_t\theta' = T_t$).

$$\begin{array}{lclclc} Z(1,1) & = & \theta_A & = & 0 & \\ Z(2,1) & = & T_{t\,A} & \equiv & \theta_A & = 0 \\ Z(7,1) & = & B_{\omega\,L} & = & 0 & \\ Z(6,1) & + & Z(8,1) & = & T_{t\,L} + T_{\omega\,L} & \equiv \\ & & & & T_{sumL} & = 0 \end{array} \tag{2.143}$$

Koostatud on neli rajatingimuse võrrandit. Sisestame need võrrandisüsteemi (2.139) (vt väljavõte programmist 2.23). Võrrandisüsteemi astak võrdub tundmatute arvuga. Järelikult on sisestatud võrrandid lineaarselt sõltumatud.

Väljavõte programmist 2.23 (Naide2_8.m)

```
####### Rajatingimused
spA=spSisestaArv(spA,5,1,1);  # $theta(1)$ - väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,6,2,1);  # $Tt(2)$
spA=spSisestaArv(spA,7,7,1);  # $B(7)$ -bimoment
Bvb(7,1)=0.0;
spA=spSisestaArv(spA,8,6,1);  # $Tt(6)$ -
spA=spSisestaArv(spA,8,8,1);  # $Tw(8)$ =Tsum
Bvb(8,1)=Mx;  #Mx=-12000.0 Ncm;
#
#vastavad vabaliikmed Bvb on juba nullitud
#
spA_rank = sprank(spA) # võrrandisüsteemi astak
```

Sisestatud võrrandisüsteemi kordajad hõredas maatriksis ***spA*** *on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 2.28.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.28 (Naide2_8.m)

```
spA =
Compressed Column Sparse (rows = 8, cols = 8, nnz = 20 [31%])

  (1, 1) ->  1             (3, 3) -> -5.5569        (2, 6) -> -1
  (5, 1) ->  1             (4, 3) -> -0.032797      (8, 6) ->  1
  (1, 2) -> -14.697        (1, 4) ->  18.777        (3, 7) -> -1
  (2, 2) -> -1             (2, 4) ->  4.5569        (7, 7) ->  1
  (6, 2) ->  1             (3, 4) -> -911.04        (4, 8) -> -1
  (1, 3) ->  0.16744       (4, 4) -> -5.5569        (8, 8) ->  1
  (2, 3) ->  0.032797      (1, 5) -> -1
```

Sisestatud võrrandisüsteemi vabaliikmete vektor ***B*** *on toodud arvutuspäeviku väljavõttes 2.29.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.29 (Naide2_8.m)

```
B =

   9.3113e+04        -7.9342e+06        0.0000e+00         0.0000e+00
   3.1017e+04        -5.5017e+04        0.0000e+00        -1.2000e+04
```

Algparameetrite arvutus. *Rajaväärtuste leidmisel korrutasime väändenurgad skaleerimisteguriga:* $baasi0 = 1.0 \times 10^{10}$. *Skaleerimata algparameetrite saamiseks tuleb vastavad suurused jagada skaleerimisteguriga. Konsooli skaleerimata algparameetrid on toodud arvutuspäeviku väljavõttes 2.30.*

Väljavõte arvutuspäevikust 2.30 (Naide2_8.m)

```
 Algparameetrid - AP1
 theta -      0.0000e+00
    Tt -      0.0000e+00
     B -     -4.4743e+06
    Tw -      3.6000e+04
```

Väändenurkade ja väändemomentide arvutus. *Väändenurkade ja väändemomentide leidmiseks konsooli ristlõigetes kasutame ülekandevõrrandit (C.1)*

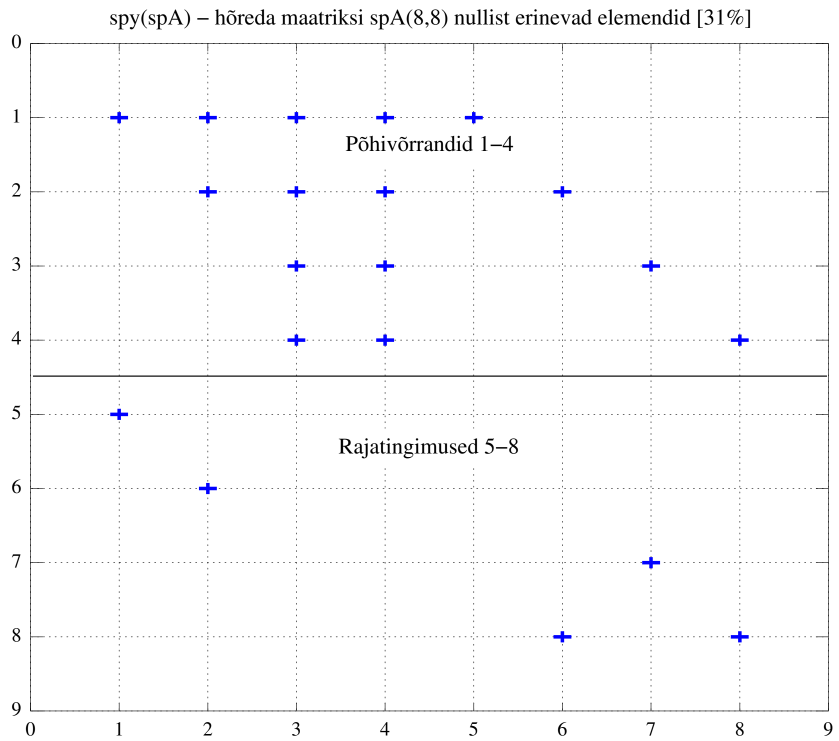
$$\mathbf{Z_L}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z_A} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.144}$$

kus $\mathbf{Z_A}$ *on konsooli algparameetrid (vt arvutuspäeviku väljavõte 2.30). Ülekandemaatriksi* $\mathbf{U}$ *leiame GNU Octave'i funktsiooniga ylWGfhlin.m ning koormusvektori* $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ *funktsioonidega yzWGmx.m ja yzWGMx.m (vt väljavõte programmist 2.24).*

Väljavõte programmist 2.24 (Naide2_8.m)

```
AP=AlgPar(:,1)
baasi0=1.0
Nmitmeks=4
xx=0;
xsamm=l/Nmitmeks;
vvB=zeros(4,1)
for ij=1:Nmitmeks+1  # 5 - displacements and forces at x=0.0
Xloikes(ij,1)=xx;
   vvF=ylWGfhlin(baasi0,l,xx,GIt,EIw);
vB1q=yzWGmx(baasi0,l,xx,a1,mx,GIt,EIw); # koormusvektori arvutus
vB2q=yzWGmx(baasi0,l,xx,a2,-mx,GIt,EIw);
vB3B=yzWGBy(baasi0,l,xx,a3,By,GIt,EIw);
vvB=vB1q+vB2q+vB3B;
 Fvv(1:4,ij)=vvF*AP+vvB;
 Fvv(5,ij)=Fvv(2,ij)+Fvv(4,ij);
xx=xx+xsamm;
endfor
```

Joonisel 2.26 on näidatud sisestatud võrrandisüsteemi kordajate hõreda maatriksi muster (hõreda maatriksi spA(8,8) nullist erinevate elementide asukohad).



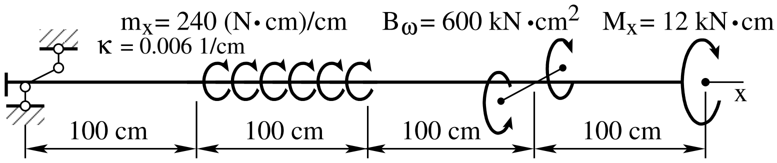
Joonis 2.26. Laus- ja koondkoormus konsoolil. Hõreda maatriksi spA muster

Arvutustulemused on arvutuspäeviku väljavõttes 2.31.

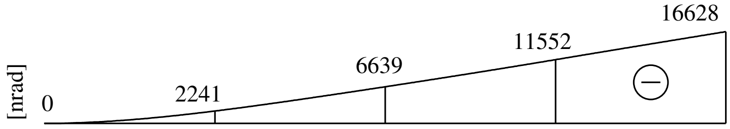
Väljavõte arvutuspäevikust 2.31 (Naide2_8.m)

```
      x=        0.00        100.00         200.00         300.00         400.00
  theta -    0.000e+00    -2.241e-03    -6.639e-03    -1.155e-02    -1.663e-02
     Tt -    0.000e+00    -1.041e+04    -1.280e+04    -1.403e+04    -1.371e+04
      B -    4.474e+06     1.484e+06     2.810e+05    -1.815e+05    -5.588e-09
     Tw -   -3.600e+04    -2.559e+04     8.048e+02     2.028e+03     1.710e+03
   Tsum -   -3.600e+04    -3.600e+04    -1.200e+04    -1.200e+04    -1.200e+04

     x =       299.999         x =        196.782         x =        197.000
  theta -   -1.155e-02     theta -   -6.487e-03     theta -   -6.498e-03
     Tt -   -1.403e+04        Tt -   -1.277e+04        Tt -   -1.277e+04
      B -    4.185e+05         B -    2.797e+05         B -    2.797e+05
     Tw -    2.028e+03        Tw -    6.755e-02        Tw -    5.458e+01
   Tsum -   -1.200e+04      Tsum -   -1.277e+04      Tsum -   -1.272e+04
```

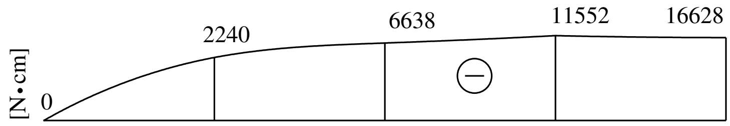
Leitud tulemuste põhjal koostame epüürid laus- ja koondkoormusest konsoolil (jn 2.27).



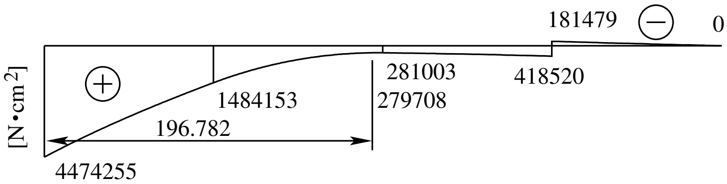
(a) Koormus $m_x = 240\,\mathrm{N}$, $M_x = 12\,\mathrm{kN{\cdot}cm}$, $B_\omega = 600\,\mathrm{kN{\cdot}cm^2}$ (vt tabel 1.1)



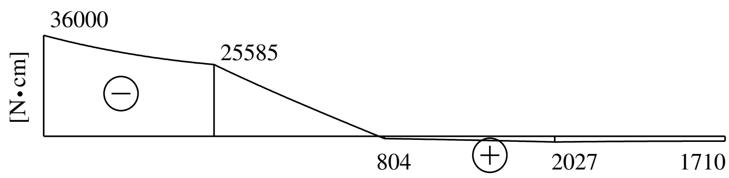
(b) Väändenurk θ



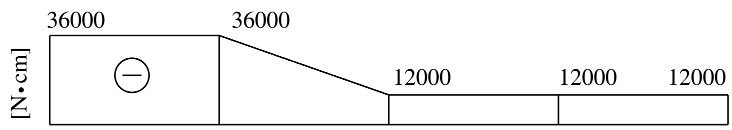
(c) Vabaväändemoment T_t



(d) Bimoment B_ω



(e) Kooldeväändemoment T_ω



(f) Koguväändemoment T_{sum}

Joonis 2.27. Laus- ja koondkoormus konsoolil. Epüürid

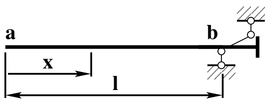
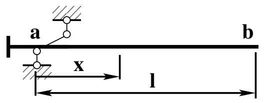
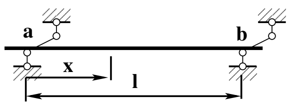
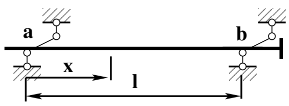
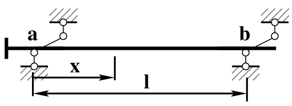
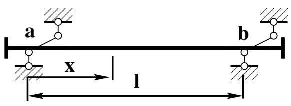
EST-meetodiga saadud tulemused on kooskõlas raamatus [Sad63] leitutega (vt tabel 2.9).

Tabel 2.9. Laus- ja koondkoormus konsoolil. Tulemuste võrdlus

x [cm]	Z(x)	[Sad63]	Mõõtühik	EST-meetod	Mõõtühik
	θ		rad	0.000	rad
	T_t	0.000	kG·cm	0.000	N·cm
0.0	B_ω	4.470×10^5	kG·cm^2	4.474×10^6	N·cm^2
	T_ω	-3.600×10^3	kG·cm	-3.600×10^4	N·cm
	T_{sum}	-3.600×10^3	kG·cm	-3.600×10^4	N·cm
	θ		rad	-2.241×10^{-3}	rad
	T_t	1.040×10^3	kG·cm	-1.041×10^4	N·cm
100	B_ω	1.480×10^5	kG·cm^2	1.484×10^6	N·cm^2
	T_ω	-2.560×10^3	kG·cm	-2.559×10^4	N·cm
	T_{sum}	-3.600×10^3	kG·cm	-3.600×10^4	N·cm
	θ		rad	-6.487×10^{-3}	rad
	T_t		kG·cm	-1.277×10^4	N·cm
196.782	B_ω	2.720×10^4	kG·cm^2	2.797×10^5	N·cm^2
	T_ω		kG·cm	6.755×10^{-2}	N·cm
	T_{sum}		kG·cm	-1.277×10^4	N·cm
	θ		rad	-6.639×10^{-3}	rad
	T_t	1.276×10^3	kG·cm	-1.280×10^4	N·cm
200	B_ω	2.730×10^4	kG·cm^2	2.810×10^5	N·cm^2
	T_ω	7.6×10^1	kG·cm	8.048×10^2	N·cm
	T_{sum}	-1.200×10^3	kG·cm	-1.200×10^4	N·cm
300	θ		rad	-1.155×10^{-2}	rad
	T_t	-1.395×10^3	kG·cm	-1.403×10^4	N·cm
$300 - \epsilon$	B_ω	4.050×10^4	kG·cm^2	4.185×10^5	N·cm^2
300	B_ω	-1.950×10^4	kG·cm^2	-1.815×10^5	N·cm^2
	T_ω	1.95×10^2	kG·cm	2.028×10^3	N·cm
	T_{sum}	-1.200×10^3	kG·cm	-1.200×10^4	N·cm
	θ		rad	-1.663×10^{-2}	rad
	T_t	-1.356×10^3	kG·cm	-1.371×10^4	N·cm
400	B_ω	0.000	kG·cm^2	-5.588×10^{-9}	N·cm^2
	T_ω	1.56×10^2 [33]	kG·cm	1.710×10^3	N·cm
	T_{sum}	-1.200×10^3	kG·cm	-1.200×10^4	N·cm

[33] Raamatus [Sad63, lk 64] on $M_{\omega B} = (T_\omega) = \ldots - 0.006 \cdot 10\,000 \cdot 0.6367 \ldots$, peab olema $\ldots - 0.006 \cdot 6 \cdot 10\,000 \cdot 0.6367 \ldots M_{\omega B} \ldots = 156\,\mathrm{kG{\cdot}cm}$.

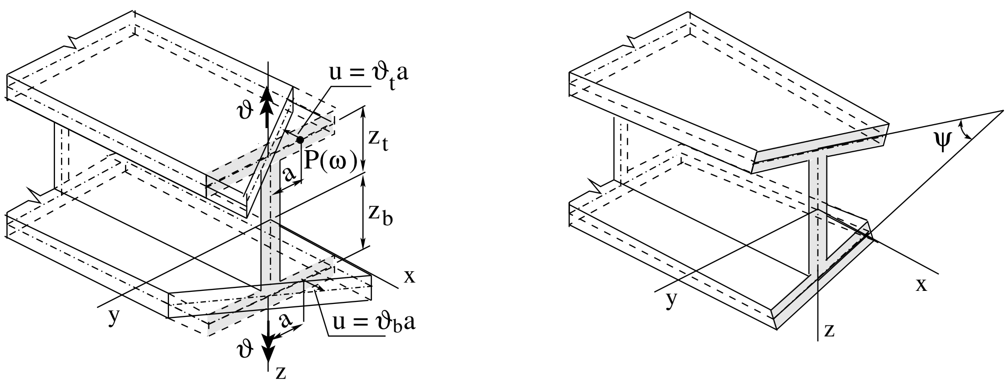
Tabel 2.10. Rajatingimused õhukeseseinalise varda väändel

Varda skeem	Rajatingimused		Valemid
	$x = 0$	$\theta'' = 0$	$B = -EI_\omega\theta'' = 0$
		$T_{sum} = 0$	$T_{sum} = GI_t\theta' - EI_\omega\theta''' = 0$
	$x = l$	$\theta = 0$	
		$\theta' = 0$	$T_t = GI_t\theta' = 0$
	$x = 0$	$\theta = 0$	
		$\theta' = 0$	$T_t = GI_t\theta' = 0$
	$x = l$	$B_\omega = 0$	$B_\omega = -EI_\omega\theta'' = 0$
		$T_{sum} = 0$	$T_{sum} = GI_t\theta' - EI_\omega\theta''' = 0$
	$x = 0$	$\theta = 0$	
		$B_\omega = 0$	$B_\omega = -EI_\omega\theta'' = 0$
	$x = l$	$\theta = 0$	
		$B_\omega = 0$	$B_\omega = -EI_\omega\theta'' = 0$
	$x = 0$	$\theta = 0$	
		$B_\omega = 0$	$B_\omega = -EI_\omega\theta'' = 0$
	$x = l$	$\theta = 0$	
		$\theta' = 0$	$T_t = GI_t\theta' = 0$
	$x = 0$	$\theta = 0$	
		$\theta' = 0$	$T_t = GI_t\theta' = 0$
	$x = l$	$\theta = 0$	
		$B_\omega = 0$	$B_\omega = -EI_\omega\theta'' = 0$
	$x = 0$	$\theta = 0$	
		$\theta' = 0$	$T_t = GI_t\theta' = 0$
	$x = l$	$\theta = 0$	
		$\theta' = 0$	$T_t = GI_t\theta' = 0$

3. Õhukeseseinalised varrassüsteemid

Õhukeseseinalise ristlõikega varda kinemaatikat kirjeldavad 7 vabadusastet: 3 siiret, 3 pöördenurka (väändenurka) ja ristlõike kooldumist iseloomustav vabadusaste, mis on võrdne suhtelise väändenurgaga θ'. Väändenurk θ ja kooldumine θ' on omavahel seotud.

Vaatleme kooldumist õhukeseseinaliste talade ühendamisel sõlmes. Piirdume süsteemiga, kus talade ristlõigete pinnakeskmed asuvad ühisel tasandil. Samuti asuvad ühisel tasandil talade elastsed teljed. Punkti, kus elastsed teljed lõikuvad, nimetame sõlme keskmeks (ingl joint center, vn центр узла). Selleks et sõlmes ühendatavate talade kooldumus θ' oleks võrdne, peaksid talade ristlõigete sektorkoordinaatide ω tuletised, s.t sektorkoordinaatide epüüride puutujad $(\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}s = \omega')$, olema kontaktpunktis võrdsed [Bõt62].



(a) Ristlõike kooldumine

(b) Ristlõike moondumine

Joonis 3.1. Kooldumine sõlmes

Vaatleme õhukeseseinalise tala (jn 3.1 a) ristlõike punkti $P\,(\omega)$ pikisiiret u. Pikisiirde u saame määrata avaldisega $u = -\,\omega\,\theta'$ (1.12), kus ω on punkti $P\,(\omega)$ sektorkoordinaat $(\omega_p = -z_t a)$. Tähistame ülemise vöö pöördenurga ümber z-telje sümboliga ϑ. Ristlõike punkti $P\,(\omega)$ pikisiirde saame avaldada korrutisena $u = \vartheta a$, kus a on punkti kaugus z-teljest. Kui võtta suhteline väändenurk võrdseks ühega $(\theta' = 1)$, siis avaldisest (1.12) saame

$$u = -\omega \cdot 1 = z_t a \cdot 1 = \vartheta_t a \tag{3.1}$$

ning alumises vöös

$$u = -\omega \cdot 1 = z_b a \cdot 1 = \vartheta_b a \tag{3.2}$$

Kui $z_t = z_b = h/2$, siis

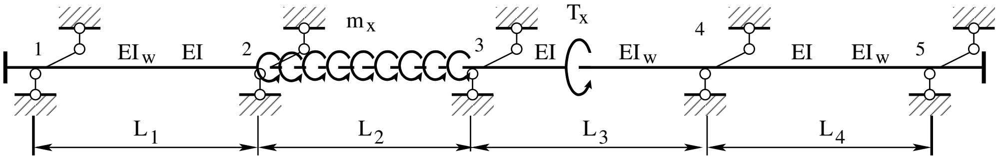
$$\vartheta_t = \vartheta_b = h/2 \tag{3.3}$$

Õhukeseseinaliste varraste liitekoht võib deformeeruda [MW03]. Kui varraste ühendamisel sõlmes ristlõige moondub (jn 3.1 b), siis tuleb valida sobivad kinemaatilised pidevustingimused [DK90].

Suurte pöördenurkade (väändenurkade) kirjeldamiseks kasutatakse pöörde pseudovektorit (D.46) [Teh05].

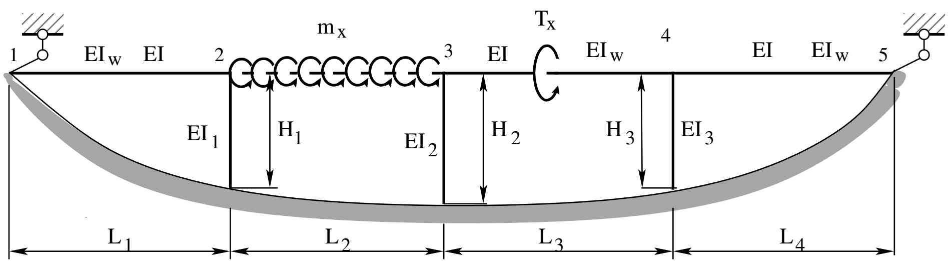
Õhukeseseinalisi varrassüsteeme arvutatakse ka jõumeetodiga ja deformatsioonimeetodiga [BC09], [Bõt62]. Jõumeetodi puhul on lisatundmatuteks jõud, mis leitakse kinemaatilistest pidevustingimustest. Deformatsioonimeetodi korral on tundmatuteks siirded ja pöörded, mis leitakse sõlmede tasakaalutingimustest. EST-meetodiga arvutamisel leitakse siirded, pöörded, jõud ja momendid varraste otstes samaaegselt. Selle meetodiga rajaülesannet lahendades kasutatakse kinemaatilisi pidevustingimusi ja tasakaalutingimusi.

Jätkuvtala kinemaatilisi pidevustingimusi kirjeldame näites 3.1. Joonisel 3.2 kujutatud jätkuvtala toesidemed takistavad väänet [1] (väändenurk $\theta = 0$).



Joonis 3.2. Jätkuvtala toed ei võimalda pööret

Joonisel 3.3 on kujutatud elastsete tugedega[2 3] jätkuvtala. Väändenurga ja paindenurga pidevustingimust on vaadeldud näites 3.2 „L-tala arvutus ülekandevõrranditega".



Joonis 3.3. Elastsete tugedega jätkuvtala

[1] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kraanad_ja_sillasambad_Ihaste_silla_ehitusel_Tartu_Idaringteel,_28._mai_2013.JPG
[2] http://www.youtube.com/watch?v=5smsMzA_xII&feature=related
[3] https://www.youtube.com/watch?v=IEl59FCBE-k

3.1 Rajatingimused

Varrassüsteemi elemente ühendavad sidemed jagatakse välis- ja sisesidemeteks. Selline jagamine on tinglik selles mõttes, et üle minnes varrassüsteemi kui terviku käsitluselt tema osa vaatlusele, muutuvad sisesidemed välissidemeteks, mis seovad vaadeldavat osa tervikuga [Jür85, lk 8–9]. [4]

Sidemetest vabastamise printsiipi rakendades vaatleme kinemaatilisi ja staatilisi rajatingimusi. Kinemaatiliste ja staatiliste rajatingimuste seadmisel arvestame energiateoreemist[5] (B.8) saadud rajatingimusi:

$$W_r = \left[T_{sum}\hat{\theta} - B_\omega\hat{\theta}' - b_\omega\hat{\theta} \right] \Big|_0^l \tag{3.4}$$

Kui toodud avaldises leiduvatest paaridest $T_{sum} \Leftrightarrow \hat{\theta}$, $B_\omega \Leftrightarrow \hat{\theta}'$, $b_\omega \Leftrightarrow \hat{\theta}$ üks on antud, siis teine on tundmatu ning tuleb leida. Nii näiteks on tabelis 2.10 [Bõt62, lk 156] jäiga toe puhul antud väändenurk θ ja suhteline väändenurk θ'. Tundmatud on bimoment B_ω ja koguväändemoment $T_{sum} = T_t + T_\omega$, milles vabaväändemoment $T_t = GT_t\theta' = 0$ on antud. Järelikult tuleb leida kooldeväändemoment T_ω.

Staatilised rajatingimused jagatakse välimisteks ja sisemisteks reaktsioonideks.[6]. Välimisi reaktsioone nimetame toereaktsioonideks Sisemised reaktsioonid on elementide ühendussõlmes tasakaalus, seega võrdub nende summa siin nulliga. Sisemisi reaktsioone võib nimetada ka kontaktjõududeks.[7] Nii tuleb murtud teljega tala puhul kontakti panna paindemoment ja koguväändemoment (vt näide D.1 ja 3.2).

Sisemisi kinemaatilisi rajatingimusi elementide ühendussõlmes nimetame pidevustingimusteks. Näiteks on jätkuvtala talasid ühendavas sõlmes pöördenurga pidevus $\theta_{vasakul} - \theta_{paremal} = 0$ ja kooldepidevus $\theta'_{paremal} - \theta'_{vasakul} = 0$. Murtud teljega tala puhul peab üleminek paindenurgalt väändenurgale ning ka vastupidi olema pidev (vt näited 3.2 ja D.1).

Sisemised kinemaatilised ja staatilised rajatingimused:[8]

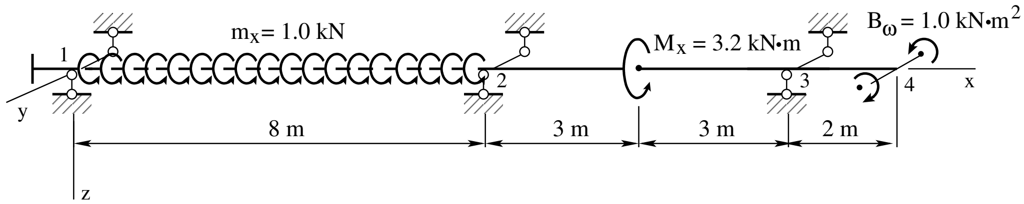
- pidevustingimused (kinemaatilised rajatingimused) ühendussõlmedes;
- ühendussõlmede tasakaalutingimused (staatilised rajatingimused);
- kõrvaltingimused liigendite kohta (varraste otstes).

3.1.1 Jätkuvtala arvutus

Näide 3.1 (jätkuvtala arvutus ülekandevõrranditega). *Koostada joonisel 3.4 kujutatud jätkuvtala väändenurga* θ_x, *vabaväändemomendi* T_t, *bimomendi* B_ω *ja kooldeväändemomendi* T_ω *epüürid.*

Andmed. *Jätkuvtala avad* $l_1 = 8\,\mathrm{m}$, $l_2 = 6\,\mathrm{m}$ *ja konsooli pikkus* $l_3 = 2\,\mathrm{m}$. *Tala esimene ava on koormatud ühtlase lausmomendiga* $m_x = 1.0\,(\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m})/\mathrm{m}$. *Tala teise ava*

[4] http://digi.lib.ttu.ee/i/?472
[5] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.F.26
[6] http://www.ce.memphis.edu/3121/notes/notes_04d.pdf (20.08.2013)
[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Contact_force (20.08.2013)
[8] http://digi.lib.ttu.ee/estmethod/ESTmethod.pdf#figure.1.13



Joonis 3.4. Jätkuvtala vääne

keskele on rakendatud moment $M_x = 3.2\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$. *Konsooli otsas mõjub bimoment* $B_\omega = -1.0\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}^2$. *Ristlõikeks on valitud I-profiil nr 60a [Bõt62, lk 435]. Ristlõike kooldetugevusmoment* ($W_\omega = 5373.4\,\mathrm{cm}^4$), *paindejäikus* ($EI = 1.7611\times10^5\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}^2$), *kooldejäikus* ($EI_\omega = 2.8348\times10^5\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}^4$), *vabaväändejäikus* ($GI_t = 1.5640\times10^5\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}^2$) *ja kooldekarakteristik* ($\kappa = \sqrt{GI_t/EI_\omega} = \sqrt{1.5640\times10^9/2.8348\times10^{13}} = 0.0074278\,\mathrm{cm}^{-1}$) *on konstantsed.*

Lahendus. *Toetingimuste seadmisel on arvestatud energiateoreemi (B.8)*

$$W_r = [T_{sum}\theta - B_\omega\theta' - b_\omega\theta]\,\Big|_0^l \tag{3.5}$$

Siit saab jälgida, milline toetingimus on antud ja milline leitakse. Esimese toe toetingimuste paarides $T_{sum} \Leftrightarrow \theta$ *ja* $B_\omega \Leftrightarrow \theta'$ *on antud väändenurk* $\theta = 0$ *ja suhteline väändenurk* $\theta' = 0$. *Seega on esimene tugi jäik ning ei võimalda pööret ega kooldumist. Tundmatud on bimoment* B_ω *ja koguväändemoment* T_{sum}. *Varda lõpus on antud bimoment* $B_\omega = -1.0\,\mathrm{kN{\cdot}m}^2$ *ja koguväändemoment* $T_{sum} = T_t + T_\omega = 0$. *Tundmatuks jäävad väändenurk* θ *ja suhteline väändenurk* θ' ($T_t = GI_t\theta'$).

Teisel ja kolmandal toel on varrassüsteemi elemente ühendavad sisesidemed ja välissidemed. Välissidemeks on antud väändenurk $\theta = 0$. *Tundmatu on toemoment, mis on võrdne elementide koguväändemomentide* T_{sum} *summaga. Elemente ühendavateks sisesidemeteks on väändenurkade* θ *võrdsus ja suhteliste väändenurkade* θ' *võrdsus. Samal ajal peavad elementide bimomendid* B_ω, *koguväändemomendid* T_{sum} *ja toemoment olema sõlmes tasakaalus.*

Rajaväärtuste arvutamiseks kasutame nagu EST-meetodi [Lah97a], [Lah14] puhulgi hõredat võrrandisüsteemi[9]

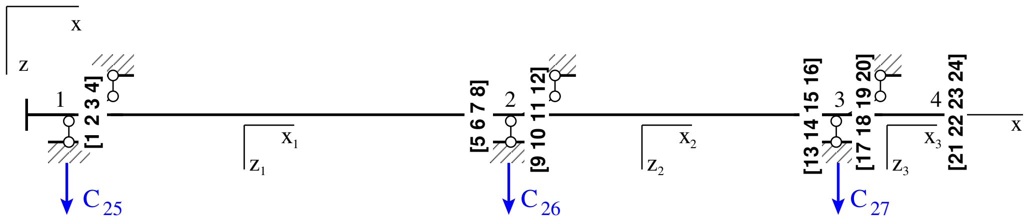
$$\mathbf{spA}\cdot\mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{3.6}$$

kus $\mathbf{Z}$ *on võrrandisüsteemi tundmatute vektor*

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a^{(1)}} \\ \mathbf{Z_b^{(1)}} \\ \mathbf{Z_a^{(2)}} \\ \mathbf{Z_b^{(2)}} \\ \mathbf{Z_a^{(3)}} \\ \mathbf{Z_b^{(3)}} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

mille elementideks on väändenurgad ja -momendid varraste 1, 2 *ja* 3 *alguses ja lõpus (jn 3.5):*

[9] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.14.22



Joonis 3.5. Jätkuvtala muutujad

$$\mathbf{Z_a^{(1)}} = \begin{bmatrix} \theta_A \\ T_{tA} \\ B_{\omega A} \\ T_{\omega A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(1,1) \\ Z(2,1) \\ Z(3,1) \\ Z(4,1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b^{(1)}} = \begin{bmatrix} \theta_L \\ T_{tL} \\ B_{\omega L} \\ T_{\omega L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(5,1) \\ Z(6,1) \\ Z(7,1) \\ Z(8,1) \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

$$\mathbf{Z_a^{(2)}} = \begin{bmatrix} \theta_A \\ T_{tA} \\ B_{\omega A} \\ T_{\omega A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(9,1) \\ Z(10,1) \\ Z(11,1) \\ Z(12,1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b^{(2)}} = \begin{bmatrix} \theta_L \\ T_{tL} \\ B_{\omega L} \\ T_{\omega L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(13,1) \\ Z(14,1) \\ Z(15,1) \\ Z(16,1) \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$$\mathbf{Z_a^{(3)}} = \begin{bmatrix} \theta_A \\ T_{tA} \\ B_{\omega A} \\ T_{\omega A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(17,1) \\ Z(18,1) \\ Z(19,1) \\ Z(20,1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b^{(3)}} = \begin{bmatrix} \theta_L \\ T_{tL} \\ B_{\omega L} \\ T_{\omega L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(21,1) \\ Z(22,1) \\ Z(23,1) \\ Z(24,1) \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Muutuja $Z(i,1)$ indeks (i=1, 2, 3, . . ., 24) on näidatud joonisel 3.5.
Põhivõrrandites[10] *(2.84)*

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8} \cdot \widehat{\mathbf{Z}} = -\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{3.11}$$

sisalduva laiendatud ülekandematriksi $\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8} \equiv (\boldsymbol{U}_{4\times 4} \mid -\boldsymbol{I}_{4\times 4})$ (2.87) arvutamiseks saab kasutada GNU Octave'i funktsiooni yspWGvfmhvI.m .

Võrrandisüsteemis (3.11) on tundmatuid poole rohkem kui võrrandeid. Kanname need võrrandid võrrandisüsteemi (3.6) (vt väljavõte programmist 3.1).

Väljavõte programmist 3.1 (Naide2_10.m)

```
            # Esimese tala hõreda laiendatud ülekandematriksi arvutus
spvF=yspWGvfmhvI(baasi0,l1,GIt,EIw);
vB1=yzWGmx(baasi0,l1,l1,a1,mx,GIt,EIw); # koormusvektori arvutus
IIv=1;
IJv=1;
vB1=vB1.*(-1);
            # sisestab ülekandematriksi võrrandisüsteemi spA*Z=Bvb
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
```

[10] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#figure.14.9

```
            # sisestab koormusvektori võrrandisüsteemi vabaliikmesse Bvb
Bvb=InsertBtoA(Bvb,NNK,1,IIv,1,vB1,4,1);
            # Teise tala hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=yspWGvfmhvI(baasi0,l2,GIt,EIw);
vB2=yzWGMx(baasi0,l2,l2,a2,Mx2,GIt,EIw); # koormusvektori arvutus
krda=2;
IIv=krda*8-7;
IJv=krda*16-15;
            # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=Bvb
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
            # sisestab koormusvektori võrrandisüsteemi vabaliikmesse Bvb
Bvb=InsertBtoA(Bvb,NNK,1,IIv,1,vB2,4,1);
            # Kolmanda tala hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=yspWGvfmhvI(baasi0,l3,GIt,EIw);
krda=3;
IIv=krda*4-3;
IJv=krda*8-7;
            # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=Bvb
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
            # võrrandisüsteemi vabaliige Bvb on eelnevalt nullitud
```

Võrrandisüsteemis (3.6) peab olema võrrandeid ja tundmatuid ühepalju. Võrrandite arv peab ühtima maatriksi **spA** *astakuga. Puuduvad sõltumatud võrrandid saame kinemaatilistest ja staatilistest rajatingimustest (vt jaotis 3.1).*

Järgnevalt

- *püstitame rajatingimused;*
- *arvutame algparameetrid;*
- *arvutame väändenurgad ja väändemomendid;*
- *koostame sisejõudude epüürid.*

Rajatingimuste püstitus. *Väliste rajatingimuste seadmisel sõlmedes tuleb arvestada energiateoreemi*[11] *(B.8). Kui avaldistes $\theta \Leftrightarrow T_{sum}$, $\theta' \Leftrightarrow B_\omega$ üks pool (pöördenurk θ, suhteline väändenurk θ') on antud, siis teine pool (koguväändemoment T_{sum}, bimoment B_ω) on tundmatu.*

Talal on sõlmes 1 jäik tugi, mis ei võimalda pööret ega kooldumist (vt tabel 1.2). Tundmatud on bimoment B_ω, toemoment C_{25} (vt jn 3.5) ja koguväändemoment $T_{sum} = T_t + T_\omega$. Viimases on vabaväändemoment $T_t = GI_t\theta' = 0$ antud. Tundmatuks jääb kooldeväändemoment T_ω. Teisel ja kolmandal toel on antud pöördenurk θ. Tundmatuks jäävad toemomendid C_{26} ja C_{27}. Tala otsas, sõlmes 4, on antud bimoment B_ω ja koguväändemoment $T_{sum} = 0$. Tundmatud on pöördenurk θ ja suhteline väändenurk θ' ($GI_t\theta' = T_t$).

$$
\begin{array}{lllll}
Z(1,1) & = & \theta_A^{(1)} & = & 0 \\
Z(5,1) & = & \theta_L^{(1)} & = & 0\ , \\
Z(13,1) & = & \theta_L^{(2)} & = & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
Z(2,1) & = & T_{t\,A}^{(1)} & \equiv & \theta_A'^{(1)} = 0 \\
Z(22,1) & + & Z(24,1) & = & \\
T_{t\,L}^{(3)} + T_{\omega\,L}^{(3)} & \equiv & T_{sum L}^{(3)} = 0 & & \\
Z(23,1) & = & B_{\omega\,L}^{(3)} & = & -\,1.0 \times 10^7\,\mathrm{N{\cdot}cm^2}
\end{array}
\tag{3.12}
$$

[11] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.F.26

Sisemistest rajatingimustest vaatleme sõlmede 2 ja 3 pidevustingimusi. Varraste 1 ja 2 ning 2 ja 3 väändenurgad ja kooldumus[12] *on võrdsed.*

$$\begin{array}{lclclcl} Z\,(5,1) - Z\,(9,1) & = & \theta_L^{(1)} - \theta_A^{(2)} & = & 0 & & \\ Z\,(6,1) + Z\,(10,1) & = & T_{tL}^{(1)} + T_{tA}^{(2)} & \equiv & \theta_L^{\prime(1)} - \theta_A^{\prime(2)} & = & 0 \\ Z\,(13,1) - Z\,(17,1) & = & \theta_L^{(2)} - \theta_A^{(3)} & = & 0 & & \\ Z\,(14,1) + Z\,(18,1) & = & T_{tL}^{(2)} + T_{tA}^{(3)} & \equiv & \theta_L^{\prime(2)} - \theta_A^{\prime(3)} & = & 0 \end{array} \tag{3.13}$$

Sisemistest rajatingimustest vaatleme veel sõlmede 2 ja 3 tasakaalutingimusi. Tasakaalus peavad olema bimomendid, koguväändemomendid ja toeväändemomendid.

$$\begin{array}{lclcl} Z\,(7,1) + Z\,(11,1) & = & B_{\omega\,L}^{(1)} + B_{\omega\,A}^{(2)} & = & 0 \\ Z\,(15,1) + Z\,(19,1) & = & B_{\omega\,L}^{(2)} + B_{\omega\,A}^{(3)} & = & 0 \\ Z\,(6,1) + Z\,(8,1) & \equiv & T_{sum}^{(1)} + & & \\ Z\,(10,1) + Z\,(12,1) & \equiv & T_{sum}^{(2)} - & & \\ C_{26} & = & 0 & & \\ Z\,(14,1) + Z\,(16,1) & \equiv & T_{sum}^{(2)} + & & \\ Z\,(18,1) + Z\,(20,1) & \equiv & T_{sum}^{(3)} - & & \\ C_{27} & = & 0 & & \end{array} \tag{3.14}$$

Koostatud on 16 rajatingimuse võrrandit. Sisestame need võrrandisüsteemi (3.6) (vt väljavõte programmist 3.2). Võrrandisüsteemi astak võrdub tundmatute arvuga. Järelikult on sisestatud võrrandid lineaarselt sõltumatud.

Väljavõte programmist 3.2 (Naide2_10.m)

```
########## Rajatingimused
# Pidevustingimused
# Sõlm 2
spA=spSisestaArv(spA,13,5,1);      # $theta_{5}$  on võrdne
spA=spSisestaArv(spA,13,9,-1);     # $theta_{9}$ väändenurgaga
  spA=spSisestaArv(spA,14,6,1);    # $T_{t6}$ on võrdne
  spA=spSisestaArv(spA,14,10,1);   # $T_{t10}$
# Sõlm 3
spA=spSisestaArv(spA,15,13,1);     # $theta_{13}$ - väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,15,17,-1);    # võrdne $theta_{17}$ väändenurga
  spA=spSisestaArv(spA,16,14,1);   # $T_{t14}$  on võrdne
  spA=spSisestaArv(spA,16,18,1);   # $T_{t18}$
# Tasakaalutingimused
# Sõlm 1
spA=spSisestaArv(spA,17,2,1);     # $T_{t2}$ +
spA=spSisestaArv(spA,17,4,1);     # $T_{t4}$ -
spA=spSisestaArv(spA,17,25,-1);   # $C_{25}$ summa on tasakaalus
# Sõlm 2
spA=spSisestaArv(spA,18,7,1);     # $B_{7}$ - bimoment
spA=spSisestaArv(spA,18,11,1);    # $B_{11}$ summa on tasakaalus
  spA=spSisestaArv(spA,19,6,1);     # $T_{t8}$ +
```

[12] Kooldumisel vabaväändemomenti kasutades järgitakse II märgikokkulepet.

```
  spA=spSisestaArv(spA,19,8,1);     # $T_{w8}$ +
  spA=spSisestaArv(spA,19,10,1);    # $T_{t10}$ +
  spA=spSisestaArv(spA,19,12,1);    # $T_{w12}$ -
  spA=spSisestaArv(spA,19,26,-1);   # $-C_{26}$
# Sõlm 3
spA=spSisestaArv(spA,20,15,1);    # $B_{15}$ - bimoment
spA=spSisestaArv(spA,20,19,1);    # $B_{19}$ summa on tasakaalus
  spA=spSisestaArv(spA,21,14,1);    # $T_{t14}$ +
  spA=spSisestaArv(spA,21,16,1);    # $T_{w16}$ +
  spA=spSisestaArv(spA,21,18,1);    # $T_{t18}$ +
  spA=spSisestaArv(spA,21,20,1);    # $T_{w20}$ -
  spA=spSisestaArv(spA,21,27,-1);   # $C_{27}$ summa on tasakaalus
#SUM1=Z(25,1)+Z(26,1)+Z(27,1)
# Toetingimused
# Sõlm 1
spA=spSisestaArv(spA,22,1,1);   # $theta_A$ - väändenurk on null
spA=spSisestaArv(spA,23,2,1);   # $T_tA$ - kooldeväändemoment
# Sõlm 2
spA=spSisestaArv(spA,24,9,1);   # $theta_A$ - väändenurk on null
# Sõlm 3
spA=spSisestaArv(spA,25,17,1); # $theta_A$ - väändenurk on null
# Sõlm 4
spA=spSisestaArv(spA,26,23,1); # $B_{L}$ - bimoment
Bvb(26,1)=By ;
spA=spSisestaArv(spA,27,22,1);   # $T_{tL}+
spA=spSisestaArv(spA,27,24,1);   # T_{\omega L}$ = üldväändemoment
#Bvb(27,1)=0.0;
#vastavad vabaliikmed Bvb on juba nullitud
#
#spA_rank = sprank(spA) # võrrandisüsteemi astak
```

Toereaktsioonid (toemomendid) leiab arvutuspäeviku väljavõttest 3.1.

Väljavõte arvutuspäevikust 3.1 (Naide2_10.m)

```
Toereaktsioonid (toemomendid)
C25 = -4.1206e+05
C26 = -5.8028e+05
C27 = -1.2767e+05
```

Algparameetrite arvutus. *Rajaväärtuste leidmisel korrutati väändenurgad skaleerimisteguriga: $baasi0 = 1.0 \times 10^{10}$. Skaleerimata algparameetrite saamiseks tuleb vastavad suurused jagada skaleerimisteguriga. Talade 1, 2 ja 3 skaleerimata algparameetrid on toodud arvutuspäeviku väljavõttes 3.2.*

Väljavõte arvutuspäevikust 3.2 (Naide2_10.m)

```
 Algparameetrid - AP1           AP2           AP3
 theta -      0.0000e+00     0.0000e+00     0.0000e+00
    Tt -      0.0000e+00     4.7899e+04     3.4901e+04
     B -      3.7593e+07     2.7948e+07     8.5483e+06
    Tw -     -4.1206e+05    -2.4023e+05    -3.4901e+04
```

Väändenurkade ja väändemomentide arvutus. *Väändenurkade ja väändemomentide leidmiseks tala ristlõigetes kasutame ülekandevõrrandit (C.1)*

$$\mathbf{Z_L}\left(\mathbf{x}\right)=\mathbf{U}\cdot\mathbf{Z_A}+\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{3.15}$$

kus $\mathbf{Z_A}$ on tala algparameetrid (vt arvutuspäeviku väljavõte 3.2). Ülekandemaatriksi $\mathbf{U}$ leiame GNU Octave'i funktsiooniga ylWGfhlin.m ning koormusvektori $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ funktsioonidega yzWGmx.m ja yzWGMx.m (vt väljavõte programmist 3.3).

Väljavõte programmist 3.3 (Naide2_10.m)

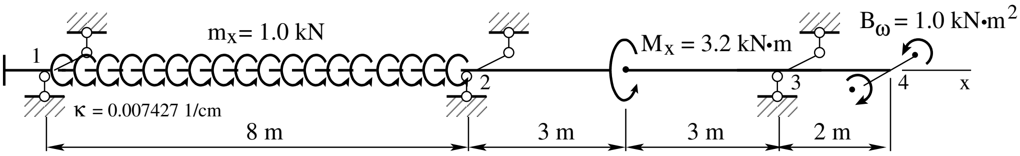
```
AP=AP1;
baasi0=1.0
Nmitmeks=4
xx=0.0;
xsamm=0.0;
xsamm=l1/Nmitmeks;
for ij=1:Nmitmeks+1  # 5 - displacements and forces at x=0.0
Xloikes(ij,1)=xx;
  vvF=ylWGfhlin(baasi0,l1,xx,GIt,EIw);
  vvB1=yzWGmx(baasi0,l1,xx,a1,mx1,GIt,EIw);
  Fvv(1:4,ij)=vvF*AP+vvB1;
  Fvv(5,ij)=Fvv(2,ij)+Fvv(4,ij);
xx=xx+xsamm;
endfor
AP=AP2;
baasi0=1.0
Nmitmeks=4
xx=0.0;
xsamm=0.0;
xsamm=l2/Nmitmeks;
for ij=1:Nmitmeks+1  # 5 - displacements and forces at x=0.0
Xloikes(ij,1)=xx;
  vvF=ylWGfhlin(baasi0,l2,xx,GIt,EIw);
  vvB2=yzWGMx(baasi0,l2,xx,a2,Mx2,GIt,EIw);
  Fvv(1:4,ij)=vvF*AP+vvB2;
  Fvv(5,ij)=Fvv(2,ij)+Fvv(4,ij);
xx=xx+xsamm;
endfor
AP=AP3;
baasi0=1.0
Nmitmeks=4
xx=0.0;
xsamm=0.0;
xsamm=l3/Nmitmeks;
for ij=1:Nmitmeks+1  # 5 - displacements and forces at x=0.0
Xloikes(ij,1)=xx;
  vvF=ylWGfhlin(baasi0,l3,xx,GIt,EIw);
  Fvv(1:4,ij)=vvF*AP;  %+vvB3;
  Fvv(5,ij)=Fvv(2,ij)+Fvv(4,ij);
xx=xx+xsamm;
endfor
```

Arvutustulemused on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 3.3.

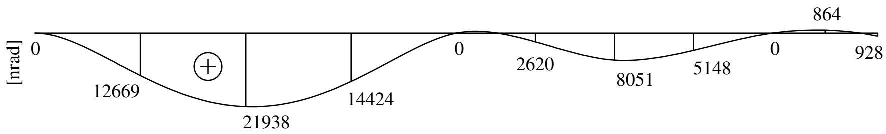
Väljavõte arvutuspäevikust 3.3 (Naide2_10.m)

```
baasi0 =  1
Nmitmeks =  4
k =  0.0074270
      x=      0.00       200.00        400.00       600.00       800.00
 theta -    0.000e+00    1.267e-02    2.194e-02    1.442e-02   -2.665e-15
    Tt -    0.000e+00    1.225e+05    8.375e+03   -1.155e+05   -4.790e+04
     B -   -3.759e+07    5.007e+06    1.292e+07    7.084e+06   -2.795e+07
    Tw -    4.121e+05    8.954e+04    3.682e+03   -7.244e+04   -3.400e+05
  Tsum -    4.121e+05    2.121e+05    1.206e+04   -1.879e+05   -3.879e+05

baasi0 =  1
Nmitmeks =  4
k =  0.0074270
      x=      0.00       150.00        300.00       450.00       600.00
 theta -    0.000e+00    2.621e-03    8.051e-03    5.148e-03   -1.665e-16
    Tt -   -4.790e+04    6.909e+04    1.663e+04   -5.742e+04   -3.490e+04
     B -   -2.795e+07   -3.196e+06    1.716e+07    2.552e+06   -8.548e+06
    Tw -    2.402e+05    1.232e+05   -1.443e+05   -7.024e+04   -9.277e+04
  Tsum -    1.923e+05    1.923e+05   -1.277e+05   -1.277e+05   -1.277e+05
     x =     299.9999999999
 theta -    8.051e-03
    Tt -    1.663e+04
     B -    1.716e+07
    Tw -    1.757e+05
  Tsum -    1.923e+05

baasi0 =  1
Nmitmeks =  4
k =  0.0074270
      x=      0.00        50.00        100.00       150.00       200.00
 theta -    0.000e+00   -7.605e-04   -8.646e-04   -3.266e-04    9.283e-04
    Tt -   -3.490e+04   -1.321e+04    6.632e+03    2.740e+04    5.199e+04
     B -   -8.548e+06   -7.359e+06   -7.196e+06   -8.038e+06   -1.000e+07
    Tw -    3.490e+04    1.321e+04   -6.632e+03   -2.740e+04   -5.199e+04
  Tsum -    0.000e+00    0.000e+00    0.000e+00    0.000e+00    7.276e-12
```

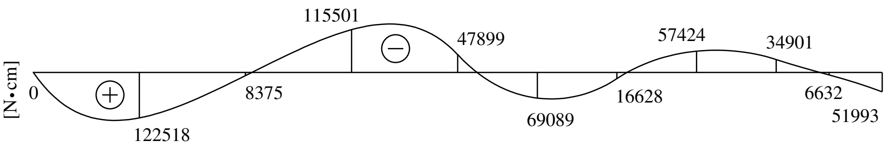
Leitud tulemuste põhjal koostame jätuvtala epüürid (jn 3.6).



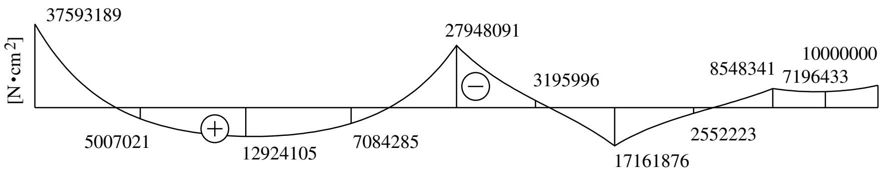
(a) Koormus $m_x = 1.0\,(\mathrm{kN{\cdot}cm})/\mathrm{cm}$, $M_x = 3.2\,\mathrm{kN{\cdot}cm}$, $B_\omega = 1.0\,\mathrm{kN{\cdot}cm}^2$ (vt tabel 1.1)



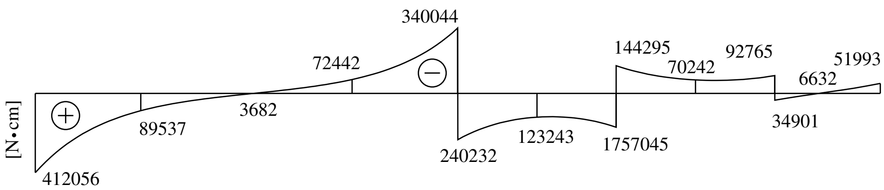
(b) Väändenurk θ



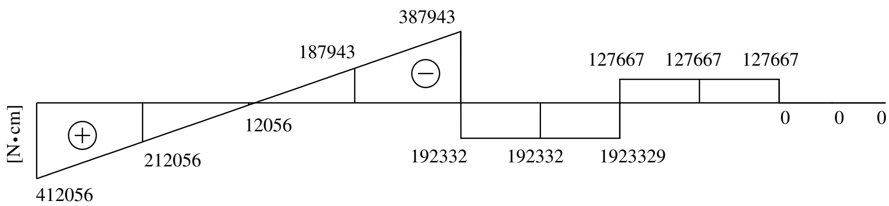
(c) Vabaväändemoment T_t



(d) Bimoment B_ω



(e) Kooldeväändemoment T_ω



(f) Koguväändemoment T_{sum}

Joonis 3.6. Jätkuvtala. Epüürid

EST-meetodiga saadud tulemused on kooskõlas raamatus [Bõt62] jõu- ja deformatsioonimeetodi abil leitutega (vt tabelid 3.1, 3.2 ja 3.3).

Tabel 3.1. Jätkuvtala. Tulemuste võrdlus (1)

x [cm]	Z(x)	[Bõt62]	Mõõtühik	EST-meetod	Mõõtühik
0.0	θ		rad	0.000	rad
	T_t		kG·m	0.000	N·cm
	B_ω	-3.762×10^2	kG·m^2	-3.759×10^7	N·cm^2
	T_ω		kG·m	4.121×10^5	N·cm
	T_{sum}	4.120×10^2	kG·m	4.121×10^5	N·cm
200	θ		rad	1.267×10^{-2}	rad
	T_t		kG·m	1.225×10^5	N·cm
	B_ω	4.89×10^1	kG·m^2	5.007×10^6	N·cm^2
	T_ω		kG·m	8.954×10^4	N·cm
	T_{sum}		kG·m	2.121×10^5	N·cm
400	θ		rad	2.194×10^{-2}	rad
	T_t		kG·m	8.375×10^3	N·cm
	B_ω	1.292×10^2	kG·m^2	1.292×10^7	N·cm^2
	T_ω		kG·m	3.682×10^3	N·cm
	T_{sum}		kG·m	1.206×10^4	N·cm
600	θ		rad	1.442×10^{-2}	rad
	T_t		kG·m	-1.155×10^5	N·cm
	B_ω	7.000×10^1	kG·m^2	7.084×10^6	N·cm^2
	T_ω		kG·m	-7.244×10^4	N·cm
	T_{sum}		kG·m	-1.879×10^5	N·cm
800	θ		rad	-2.665×10^{-15}	rad
	T_t		kG·m	-4.790×10^4	N·cm
	B_ω	-2.794×10^2	kG·m^2	-2.795×10^7	N·cm^2
	T_ω		kG·m	-3.400×10^5	N·cm
	T_{sum}	-3.880×10^2	kG·m	-3.879×10^5	N·cm
0.0	θ		rad	0.000	rad
	T_t		kG·m	-4.790×10^4	N·cm
	B_ω	-2.794×10^2	kG·m^2	-2.795×10^7	N·cm^2
	T_ω		kG·m	2.402×10^5	N·cm
	T_{sum}	1.920×10^2	kG·m	1.923×10^5	N·cm

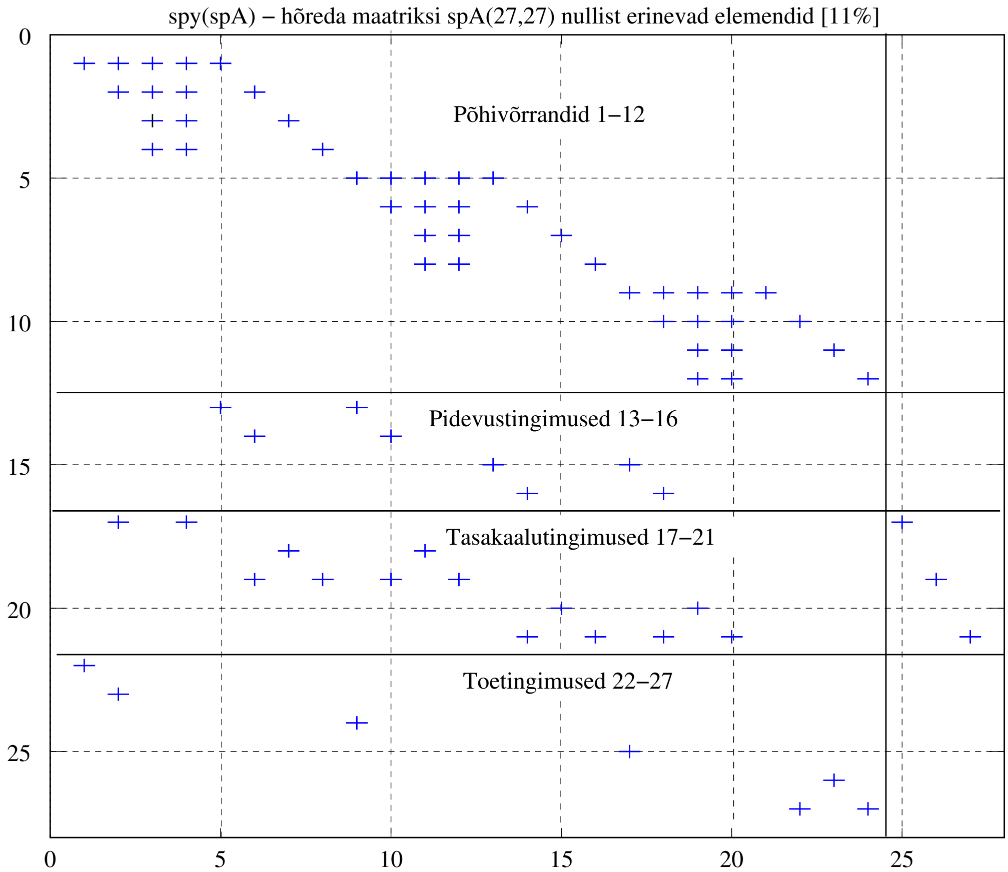
Tabel 3.2. Jätkuvtala. Tulemuste võrdlus (2)

x [cm]	Z(x)	[Bõt62]	Mõõtühik	EST-meetod	Mõõtühik
150	θ		rad	2.621×10^{-3}	rad
	T_t		kG·m	6.909×10^{4}	N·cm
	B_ω	-3.20×10^{1}	kG·m^2	-3.196×10^{6}	N·cm^2
	T_ω		kG·m	1.232×10^{5}	N·cm
	T_{sum}	1.920×10^{2}	kG·m	1.923×10^{5}	N·cm
300	θ		rad	8.051×10^{-3}	rad
	T_t		kG·m	1.663×10^{4}	N·cm
	B_ω	1.722×10^{2}	kG·m^2	1.716×10^{7}	N·cm^2
	T_ω		kG·m	-1.443×10^{5}	N·cm
$300 - \epsilon$	T_{sum}	1.920×10^{2}	kG·cm	1.923×10^{5}	N·cm
300	T_{sum}	-1.280×10^{2}	kG·m	-1.277×10^{5}	N·cm
450	θ		rad	5.148×10^{-3}	rad
	T_t		kG·m	-5.742×10^{4}	N·cm
	B_ω	2.56×10^{1}	kG·m^2	2.552×10^{6}	N·cm^2
	T_ω		kG·m	-7.024×10^{4}	N·cm
	T_{sum}	-1.280×10^{2}	kG·m	-1.277×10^{5}	N·cm
600	θ		rad	-1.665×10^{-16}	rad
	T_t		kG·m	-3.490×10^{4}	N·cm
	B_ω	-8.54×10^{1}	kG·m^2	-8.548×10^{6}	N·cm^2
	T_ω		kG·m	-9.277×10^{4}	N·cm
	T_{sum}	-1.280×10^{2}	kG·m	-1.277×10^{5}	N·cm
0.0	θ		rad	0.000	rad
	T_t		kG·m	-3.490×10^{4}	N·cm
	B_ω	-8.54×10^{1}	kG·m^2	-8.548×10^{6}	N·cm^2
	T_ω		kG·m	3.490×10^{4}	N·cm
	T_{sum}	0.00	kG·m	0.000	N·cm
100	θ		rad	-8.646×10^{-4}	rad
	T_t		kG·m	6.632×10^{3}	N·cm
	B_ω	-7.17×10^{1}	kG·m^2	-7.196×10^{6}	N·cm^2
	T_ω		kG·m	-6.632×10^{3}	N·cm
	T_{sum}	0.00	kG·m	0.000	N·cm

Tabel 3.3. Jätkuvtala. Tulemuste võrdlus (3)

x [cm]	Z(x)	[Bõt62]	Mõõtühik	EST-meetod	Mõõtühik
100	θ		rad	-8.646×10^{-4}	rad
	T_t		kG·m	6.632×10^{3}	N·cm
	B_ω	-7.17×10^{1}	kG·m^2	-7.196×10^{6}	N·cm^2
	T_ω		kG·m	-6.632×10^{3}	N·cm
	T_{sum}	0.00	kG·m	0.000	N·cm
200	θ		rad	9.283×10^{-4}	rad
	T_t		kG·m	5.199×10^{4}	N·cm
	B_ω	-1.000×10^{2}	kG·m^2	-1.000×10^{7}	N·cm^2
	T_ω		kG·m	-5.199×10^{4}	N·cm
	T_{sum}	0.00	kG·m	7.276×10^{-12}	N·cm

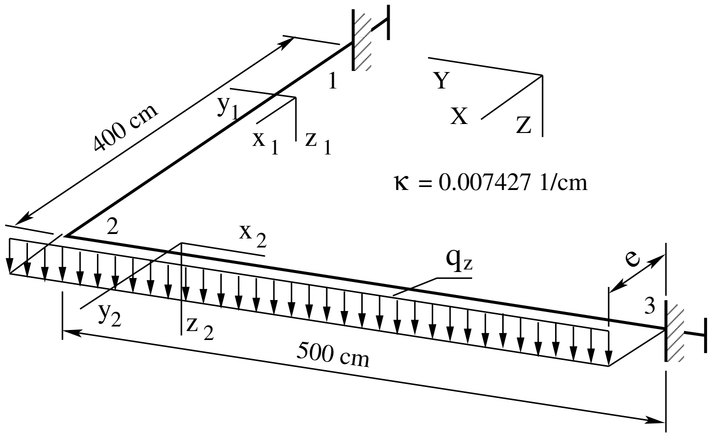
Joonisel 3.7 on hõreda maatriksi muster (hõreda maatriksi spA(27,27) nullist erinevate elementide asukohad).



Joonis 3.7. Jätuvtala hõreda maatriksi spA muster

3.1.2 Murtud teljega L-tala arvutus

Näide 3.2 (L-tala arvutus ülekandevõrranditega). *Koostada joonisel 3.8 kujutatud murtud teljega tala vertikaalse siirde w, paindenurga φ_y, põikjõu Q_z, paindemomendi M_y, väändenurga θ_x, vabaväändemomendi T_t, bimomendi B_ω ja kooldeväändemomendi T_ω epüürid.*



Joonis 3.8. L-tala paine ja vääne

Andmed. *Murtud teljega tala elementide pikkused* $l_1 = 4\,\mathrm{m}$ *ja* $l_2 = 5\,\mathrm{m}$. *Teine ava on ekstsentriliselt koormatud ühtlase lauskoormusega* $q_z = 1.0\,\mathrm{kN/m}$. *Vertikaalse lauskoormuse* q_z *ekstsentrilisus* $e = 1.0\,\mathrm{cm}$. *Ristlõikeks on valitud I-profiil nr 60a [Bõt62, lk 435]. Ristlõike paindejäikus* $(EI = 1.7611\times10^5\,\mathrm{kN\cdot m^2})$, *kooldejäikus* $(EI_\omega = 2.8348\times 10^5\,\mathrm{kN\cdot m^4})$, *vabaväändejäikus* $(GI_t = 1.5640\times10^5\,\mathrm{kN\cdot m^2})$ *ning kooldekarakteristik* $(\kappa = \sqrt{GI_t/EI_\omega} = \sqrt{1.5640\times10^9/2.8348\times10^{13}} = 0.0074278\,\mathrm{cm^{-1}})$ *on konstantsed.*

Lahendus. *Kanname ühtlaselt jaotatud põikkoormuse* q_z *elastsele teljele (jn 1.21 ja tabel 1.1). Vaatleme kahte koormusjuhtu (jn 3.9), kus elastsel teljel on ühtlaselt jaotatud väändemoment* $m_x = 10\,(\mathrm{N\cdot cm})/\mathrm{cm}$ *ja ühtlaselt jaotatud põikkoormus* $q_z = 10\,\mathrm{N/cm}$.

Rajaväärtuste arvutamiseks kasutame nagu EST-meetodi [Lah97a], [Lah14] puhulgi hõredat võrrandisüsteemi[13]

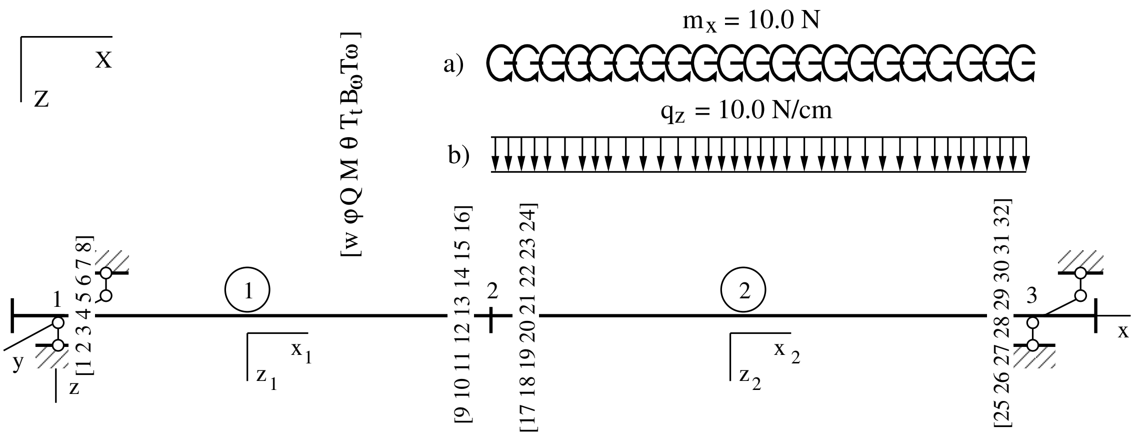
$$\mathbf{spA}\cdot\mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{3.16}$$

kus $\mathbf{Z}$ *on võrrandisüsteemi tundmatute vektor*

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_\mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{Z}_\mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{Z}_\mathbf{a}^{(2)} \\ \mathbf{Z}_\mathbf{b}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

mille elementideks on siirded, paindenurgad, põikjõud, paindemomendid, väändenurgad ja väändemomendid varraste 1 ja 2 alguses ning lõpus:

[13] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.14.22



Joonis 3.9. L-tala paine ja vääne. Muutujad

$$\mathbf{Z_a^{(1)}} = \begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ Q_A \\ M_A \\ \theta_A \\ T_{tA} \\ B_{\omega A} \\ T_{\omega A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(1,1) \\ Z(2,1) \\ Z(3,1) \\ Z(4,1) \\ Z(5,1) \\ Z(6,1) \\ Z(7,1) \\ Z(8,1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z_b^{(1)}} = \begin{bmatrix} w_L \\ \varphi_L \\ Q_L \\ M_L \\ \theta_L \\ T_{tL} \\ B_{\omega L} \\ T_{\omega L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(9,1) \\ Z(10,1) \\ Z(11,1) \\ Z(12,1) \\ Z(13,1) \\ Z(14,1) \\ Z(15,1) \\ Z(16,1) \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

$$\mathbf{Z_a^{(2)}} = \begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ Q_A \\ M_A \\ \theta_A \\ T_{tA} \\ B_{\omega A} \\ T_{\omega A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(17,1) \\ Z(18,1) \\ Z(19,1) \\ Z(20,1) \\ Z(21,1) \\ Z(22,1) \\ Z(23,1) \\ Z(24,1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z_b^{(2)}} = \begin{bmatrix} w_L \\ \varphi_L \\ Q_L \\ M_L \\ \theta_L \\ T_{tL} \\ B_{\omega L} \\ T_{\omega L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(25,1) \\ Z(26,1) \\ Z(27,1) \\ Z(28,1) \\ Z(29,1) \\ Z(30,1) \\ Z(31,1) \\ Z(32,1) \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

Muutuja $Z(i,1)$ indeks (i=1, 2, 3, . . ., 32) on toodud joonisel 3.9.

Põhivõrrandites[14] *(2.84)*

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{8\times16} \cdot \widehat{\mathbf{Z}} = -\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{3.20}$$

sisalduva laiendatud ülekandemaatriksi $\widehat{\mathbf{UI}}_{8\times16} \equiv (\boldsymbol{U}_{8\times8} \mid -\boldsymbol{I}_{8\times8})$ (C.13) arvutamiseks saab kasutada GNU Octave'i funktsioone yspTVmI.m ja yspTVlin.m.

Võrrandisüsteemis (3.20) on tundmatuid poole rohkem kui võrrandeid. Kanname need võrrandid võrrandisüsteemi (3.16) (vt väljavõte programmist 3.4).

[14] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#figure.14.9

Väljavõte programmist 3.4 (Naide4_5Gamma.m)

```
            # Esimese tala hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=yspTVmI(baasi0,l1,l1,GAr,EI,GIt,EIw);
IIv=1;
IJv=1;
            # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=Bvb
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
            # võrrandisüsteemi vabaliige Bvb on eelnevalt nullitud
            # Teise tala hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=yspTVmI(baasi0,l2,l2,GAr,EI,GIt,EIw);
#vB2a=yzTVqz(baasi0,l2,0.0,qz,EI) # koormusvektori arvutus
vB2b=yzTVmx(baasi0,l2,l2,0.0,mx,GIt,EIw) # koormusvektori arvutus
#vB2=vB2a+vB2b
vB2=vB2b
krda=2;
IIv=krda*8-7;
IJv=krda*16-15;
            # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=Bvb
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
            # sisestab koormusvektori võrrandisüsteemi vabaliikmesse Bvb
Bvb=InsertBtoA(Bvb,NNK,1,IIv,1,vB2,8,1);
```

Võrrandisüsteemis (3.16) peab olema võrrandeid ja tundmatuid ühepalju. Võrrandite arv peab ühtima maatriksi **spA** *astakuga. Puuduvad sõltumatud võrrandid saame kinemaatilistest ja staatilistest rajatingimustest. Varrassüsteemi elemente ühendavad sidemed võib jagada välis- ja sisesidemeteks [Jür85, lk 8–9].* [15] *Reaktsioonid jagatakse välimisteks ja sisemisteks.*[16] *Sisemiste reaktsioonide summa võrdub nulliga. Vaadeldes varrassüsteemi kui tervikut, võime sisemisi reaktsioone nimetada ka kontaktjõududeks.*[17]

Sisemised kinemaatilised ja staatilised rajatingimused: [18]

- *pidevustingimused (kinemaatilised rajatingimused) ühendussõlmedes;*
- *ühendussõlmede tasakaalutingimused (staatilised rajatingimused);*
- *kõrvaltingimused liigendite jaoks (liigendid varraste otstes).*

Järgnevalt

- *püstitame rajatingimused;*
- *arvutame algparameetrid;*
- *arvutame väändenurgad ja väändemomendid;*
- *koostame sisejõudude epüürid.*

Rajatingimuste püstitus. *Väliste rajatingimuste seadmisel tuleb arvestada energiateoreemi*[19] *(B.8). Kui avaldistes* $w \Leftrightarrow Q_z$, $\varphi \Leftrightarrow M_y$, $\theta \Leftrightarrow T_{sum}$, $\theta' \Leftrightarrow B_\omega$ *üks*

[15] http://digi.lib.ttu.ee/i/?472
[16] http://www.ce.memphis.edu/3121/notes/notes_04d.pdf (20.08.2013)
[17] https://en.wikipedia.org/wiki/Contact_force (20.08.2013)
[18] http://digi.lib.ttu.ee/estmethod/ESTmethod.pdf#figure.1.13
[19] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.F.26

pool (siire w, paindenurk φ, pöördenurk θ, suhteline väändenurk θ') on antud, siis teine pool (põikjõud Q_z, paindemoment M_y, koguväändemoment T_{sum}, bimoment B_ω) on tundmatu.

Talal on sõlmedes 1 ja 3 jäigad toed, mis ei võimalda pööret ega kooldumist (vt tabel 1.2).

$$
\begin{array}{lllll}
Z(1,1) & = & w_A^{(1)} & = & 0 \\
Z(2,1) & = & \varphi_A^{(1)} & = & 0 \\
Z(5,1) & = & \theta_A^{(1)} & = & 0 \\
Z(6,1) & = & T_{tA}^{(1)} & \equiv & \theta_A'^{(1)} \quad = \quad 0
\end{array}
\quad , \quad
\begin{array}{lllll}
Z(25,1) & = & w_L^{(2)} & = & 0 \\
Z(26,1) & = & \varphi_L^{(2)} & = & 0 \\
Z(29,1) & = & \theta_L^{(2)} & = & 0 \\
Z(30,1) & = & T_{tL}^{(2)} & \equiv & \theta_L'^{(2)} \quad = \quad 0
\end{array}
\tag{3.21}
$$

Sisemistest rajatingimustest vaatleme sõlmes 2 pidevustingimusi. Varraste 1 ja 2 siirded ja kooldumus[20] on võrdsed.

$$
\begin{array}{lllll}
Z(9,1) - Z(17,1) & = & w_L^{(1)} - w_A^{(2)} & = & 0 \\
Z(14,1) + Z(22,1) & = & T_{tL}^{(1)} + T_{tA}^{(2)} & \equiv & \theta_L'^{(1)} - \theta_A'^{(2)} \quad = \quad 0
\end{array}
\tag{3.22}
$$

Painde- ja väändenurkade (φ_y, θ_x) puhul peame arvestama, et varda x-telg on murtud (telgede pööre nurga $-\pi/2$ võrra ümber z-telje, vt avaldis (D.17)).

$$
\begin{array}{lllll}
Z(21,1) + Z(10,1) & = & \theta_A^{(2)} + \varphi_L^{(1)} & = & 0 \\
Z(18,1) - Z(13,1) & = & \varphi_A^{(2)} - \theta_L^{(1)} & = & 0
\end{array}
\tag{3.23}
$$

Sisemistest rajatingimustest vaatleme ka sõlme 2 tasakaalutingimusi. Painde- ja väändemomentide (M_y ja $T_{sum\,x}$) puhul peame arvestama, et varda x-telg on murtud (telgede pööre nurga $-\pi/2$ võrra ümber z-telje vt avaldis (D.17)).

$$
\begin{array}{lllll}
Z(19,1) + Z(11,1) & = & Q_{z\,A}^{(2)} + Q_{z\,L}^{(1)} & = & 0 \\
Z(22,1) + Z(24,1) - Z(12,1) & = & T_{t\,A}^{(2)} + T_{\omega\,A}^{(2)} - M_{y\,L}^{(1)} & = & 0 \\
Z(20,1) + Z(14,1) + Z(16,1) & = & M_{y\,A}^{(2)} + T_{t\,L}^{(1)} + T_{\omega\,L}^{(1)} & = & 0 \\
Z(33,1) + Z(15,1) & = & B_{\omega\,A}^{(2)} + B_{\omega\,L}^{(1)} & = & 0
\end{array}
\tag{3.24}
$$

Koostatud on 16 rajatingimuse võrrandit. Sisestame need võrrandisüsteemi (3.16) (vt väljavõte programmist 3.5). Võrrandisüsteemi astak võrdub tundmatute arvuga. Järelikult on sisestatud võrrandid lineaarselt sõltumatud.

Väljavõte programmist 3.5 (Naide4_5Gamma.m)

```
########## Rajatingimused
#  sõlm 1
spA=spSisestaArv(spA,17,1,1);   # siire w
spA=spSisestaArv(spA,18,2,1);   # pööre fi
spA=spSisestaArv(spA,19,5,1);   # $theta$ - väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,20,6,1);   # $T_t$ ($theta^{\prime}$)
#  sõlm 2
# pidevus
spA=spSisestaArv(spA,21,9,1);   # siire w
spA=spSisestaArv(spA,21,17,-1);
```

[20] Kooldumisel vabaväändemomenti kasutades järgitakse II märgikokkulepet.

```
spA=spSisestaArv(spA,22,10,1);  # pööre fi
spA=spSisestaArv(spA,22,21,1);
spA=spSisestaArv(spA,23,13,1);  # väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,23,18,-1);
spA=spSisestaArv(spA,24,14,1);
spA=spSisestaArv(spA,24,22,1);
# tasakaal
spA=spSisestaArv(spA,25,11,1);   # Q
spA=spSisestaArv(spA,25,19,1);
spA=spSisestaArv(spA,26,12,-1);  # M
spA=spSisestaArv(spA,26,22,1);   # $T_t$
spA=spSisestaArv(spA,26,24,1);   # $T_{\omega}$
spA=spSisestaArv(spA,27,20,1);   # M
spA=spSisestaArv(spA,27,14,1);   # $T_t$
spA=spSisestaArv(spA,27,16,1);   # $T_{\omega}$
spA=spSisestaArv(spA,28,15,1);   # B
spA=spSisestaArv(spA,28,23,1);
#  sõlm 3
spA=spSisestaArv(spA,29,25,1);   # siire w
spA=spSisestaArv(spA,30,26,-1);  # pööre fi
spA=spSisestaArv(spA,31,29,1);   # $theta$ - väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,32,30,1);   # $T_t$ ($theta^{\prime}$)
#
spA_rank = sprank(spA) # võrrandisüsteemi astak
```

Sisestatud võrrandite arvu ja astakut saab kontrollida arvutuspäeviku väljavõttest 3.4.

Väljavõte arvutuspäevikust 3.4 (Naide4_5Gamma.m)

```
Pärast põhivõrrandite sisestamist on võrrandisüsteemis
spA_rida =  16
spA_veergu =  32
Pärast toel 1 toetingimuste lisamist on võrrandisüsteemis
spA_rida =  20
spA_veergu =  32
Pärast pidevusvõrrandite lisamist on võrrandisüsteemis
spA_rida =  24
spA_veergu =  32
Pärast tasakaaluvõrrandite lisamist on võrrandisüsteemis
spA_rida =  28
spA_veergu =  32
Pärast toel 3 toetingimuste lisamist on võrrandisüsteemis
spA_rida =  32
spA_veergu =  32

spA_rank =  32
```

Algparameetrite arvutus. *Rajaväärtuste leidmisel korrutasime siirded, paindenurgad ja väändenurgad skaleerimisteguriga:* $baasi0 = 1.0 \times 10^{10}$. *Skaleerimata algparameetrite saamiseks tuleb vastavad suurused jagada skaleerimisteguriga. Talade 1 ja 2 skaleerimata algparameetrid on toodud arvutuspäeviku väljavõttes 3.5.*

Väljavõte arvutuspäevikust 3.5 (Naide4_5Gamma.m)
```
Algparameetrid - AP1     ja     AP2
     w -      0.0000e+00     7.6081e-05
    fi -      0.0000e+00     2.4997e-07
     Q -      2.2973e+00     2.2973e+00
     M -      1.3685e+03     3.0610e+02
 theta -      0.0000e+00     4.1519e-07
    Tt -      0.0000e+00    -3.9865e+02
     B -     -3.1677e+04     9.1154e+04
    Tw -      3.0610e+02    -1.8888e+03
```

3. Siirete, nurkade ja momentide arvutus. *Siirete, painde- ja väändenurkade, põikjõudude, painde- ja väändemomentide leidmiseks tala ristlõigetes kasutame ülekandevõrrandit (C.1)*

$$\mathbf{Z_L}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z_A} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{3.25}$$

kus $\mathbf{Z_A}$ on tala algparameetrid (vt arvutuspäeviku väljavõte 3.5). Ülekandemaatriksi $\mathbf{U}$ leiame GNU Octave'i funktsiooniga ylTVlin.m ning koormusvektori $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ funktsioonidega yzTVmx.m ja yzTVqz.m (vt väljavõte programmist 3.6).

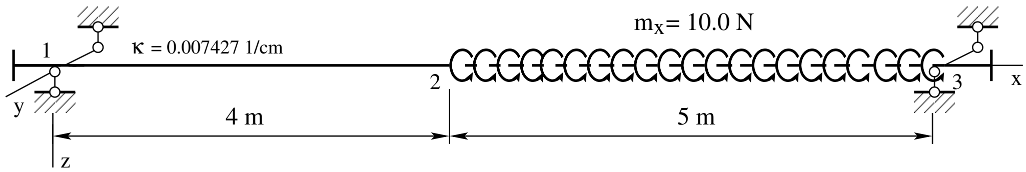
Väljavõte programmist 3.6 (Naide4_5Gamma.m)
```
AP=AP1;
for ij=1:Nmitmeks+1   # 5 - displacements and forces at x=0.0
Xloikes(ij,1)=xx;
vvF=ylTVlin(baasi0,l1,xx,GAr,EI,GIt,EIw);
 Fvv(1:8,ij)=vvF*AP;    %%+vvB1;
 Fvv(9,ij)=Fvv(6,ij)+Fvv(8,ij);
xx=xx+xsamm;
endfor
AP=AP2;
for ij=1:Nmitmeks+1   # 5 - displacements and forces at x=0.0
Xloikes(ij,1)=xx;
vvF=ylTVlin(baasi0,l2,xx,GAr,EI,GIt,EIw);
vB2b=yzTVmx(baasi0,l2,xx,0.0,mx,GIt,EIw);
vB2=vB2b;
 Fvv(1:8,ij)=vvF*AP+vB2;
 Fvv(9,ij)=Fvv(6,ij)+Fvv(8,ij);
xx=xx+xsamm;
endfor
```

Arvutustulemused on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 3.6.

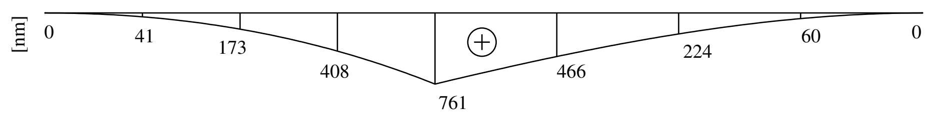
Väljavõte arvutuspäevikust 3.6 (Naide4_5Gamma.m)
```
baasi0 =   1
Nmitmeks =   4
k =  0.0074270
      x=         0.00        100.00        200.00        300.00        400.00
     w -     0.000e+00     4.103e-06     1.728e-05     4.084e-05     7.608e-05
    fi -     0.000e+00    -8.423e-08    -1.815e-07    -2.918e-07    -4.152e-07
     Q -    -2.297e+00    -2.297e+00    -2.297e+00    -2.297e+00    -2.297e+00
     M -    -1.368e+03    -1.598e+03    -1.828e+03    -2.058e+03    -2.287e+03
```

```
 theta -    0.000e+00  -3.999e-06  -1.070e-05  -1.267e-05   2.500e-07
    Tt -    0.000e+00  -1.029e+02  -8.839e+01   5.180e+01   3.987e+02
     B -    3.168e+04   7.320e+03  -1.281e+04  -4.034e+04  -9.115e+04
    Tw -   -3.061e+02  -2.032e+02  -2.177e+02  -3.579e+02  -7.048e+02
  Tsum -   -3.061e+02  -3.061e+02  -3.061e+02  -3.061e+02  -3.061e+02
baasi0 =   1
Nmitmeks =   4
k =   0.0074270
      x=       0.00       125.00       250.00       375.00       500.00
     w -    7.608e-05   4.662e-05   2.242e-05   6.029e-06   1.355e-20
    fi -    2.500e-07   2.181e-07   1.658e-07   9.307e-08  -6.617e-23
     Q -   -2.297e+00  -2.297e+00  -2.297e+00  -2.297e+00  -2.297e+00
     M -   -3.061e+02  -5.933e+02  -8.804e+02  -1.168e+03  -1.455e+03
 theta -    4.152e-07   4.031e-05   5.547e-05   2.942e-05   2.168e-19
    Tt -    3.987e+02   4.348e+02  -8.698e+01  -4.925e+02   0.000e+00
     B -   -9.115e+04   5.426e+04   8.211e+04   1.816e+04  -1.968e+05
    Tw -    1.889e+03   6.027e+02  -1.256e+02  -9.701e+02  -2.713e+03
  Tsum -    2.287e+03   1.037e+03  -2.126e+02  -1.463e+03  -2.713e+03
```

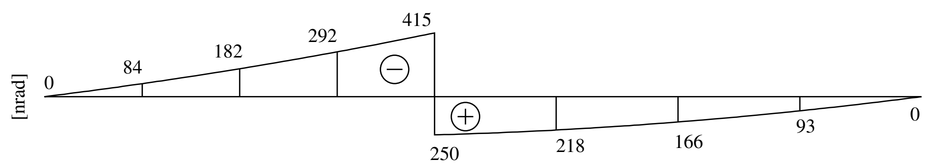
Leitud tulemuste põhjal koostame L-tala epüürid koormusest m_x (jn 3.10, b–j).



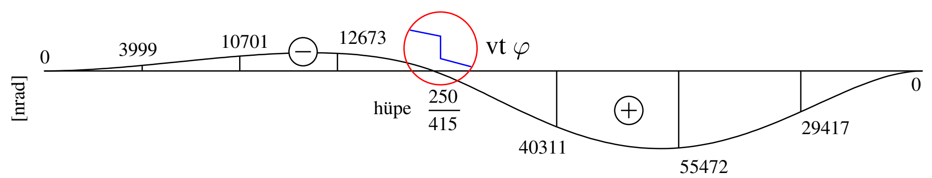
(a) Koormus $m_x = 10.0\,(\mathrm{N{\cdot}cm})/\mathrm{cm}$ (vt tabel 1.1)



(b) Siire w

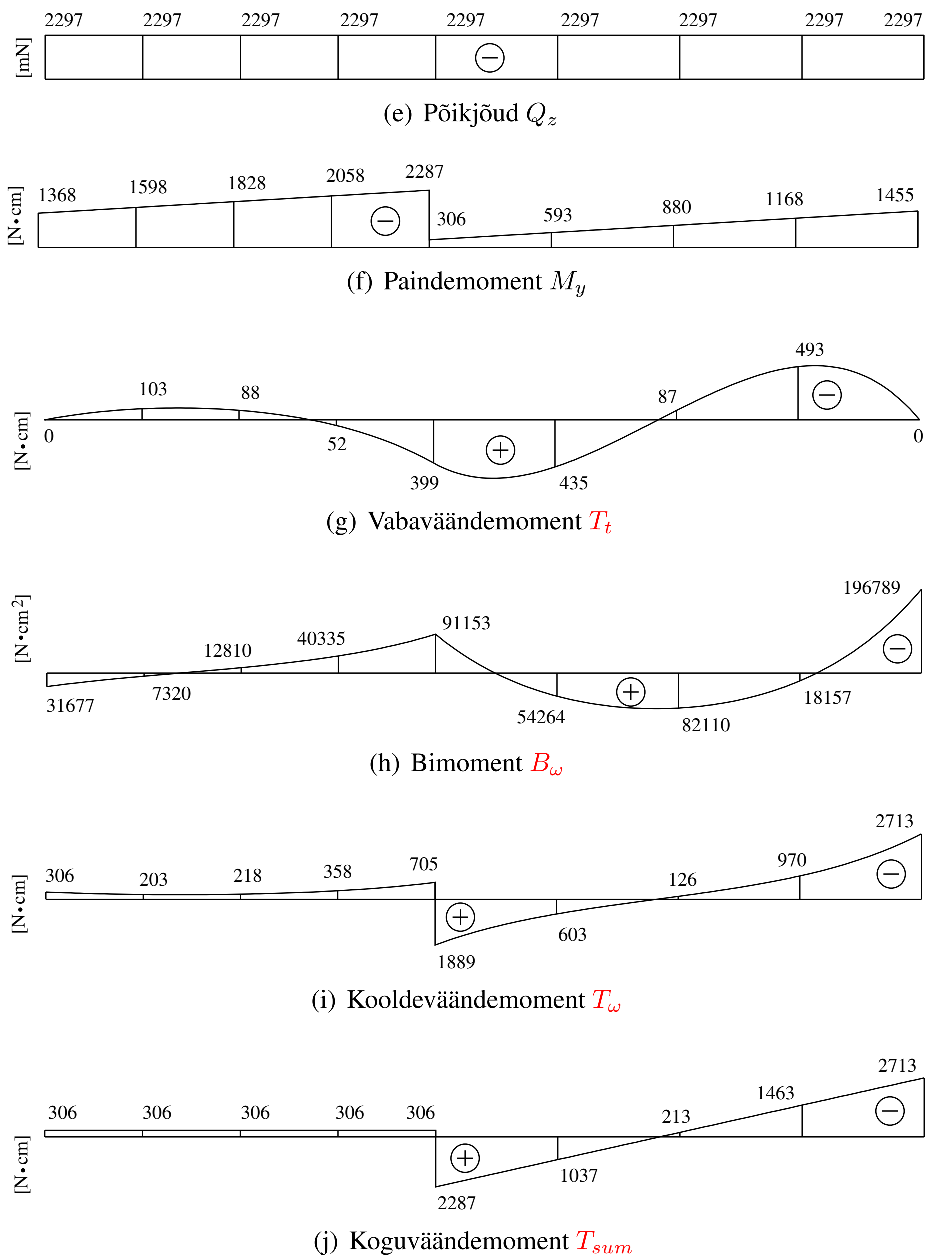


(c) Paindenurk φ



(d) Väändenurk θ

Joonis 3.10. L-tala koormusega m_x. Epüürid b–d



(e) Põikjõud Q_z

(f) Paindemoment M_y

(g) Vabaväändemoment T_t

(h) Bimoment B_ω

(i) Kooldeväändemoment T_ω

(j) Koguväändemoment T_{sum}

Joonis 3.10. L-tala koormusega m_x. Epüürid e–j

EST-meetodiga saadud tulemused on kooskõlas raamatus [Bõt62] jõu- ja deformatsioonimeetodi abil leitutega (vt tabelid 3.4 ja 3.5).

Tabel 3.4. L-tala koormusega m_x. Tulemuste võrdlus (1)

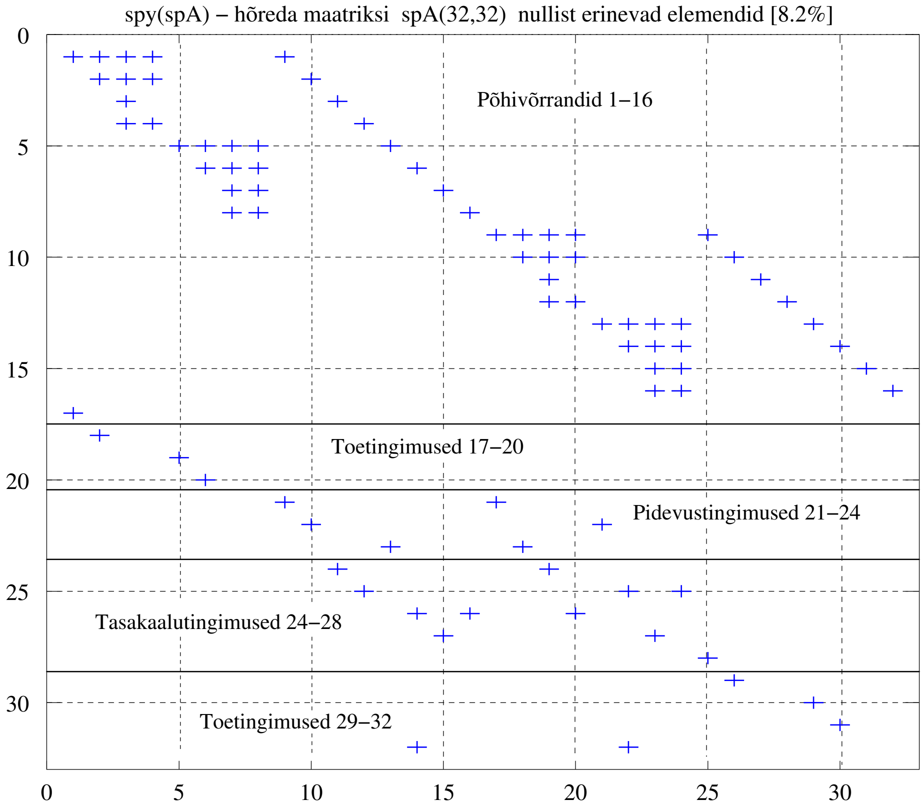
x [cm]	Z(x)	Jõumeetod [Bõt62]	Def-meetod [Bõt62]	Mõõtühik	EST-meetod	Mõõtühik
0.0	w			cm	0.000	cm
	φ			rad	0.000	rad
	Q_z			kG	-2.297	N
	M_y	-1.38×10^2	-1.34×10^2	kG·m	-1.368×10^3	N·cm
	θ			rad	0.000	rad
	T_t			kG·m	0.000	N·cm
	B_ω	3.22×10^3	3.21×10^3	kG·m^2	3.168×10^4	N·cm^2
	T_ω			kG·m	-3.061×10^2	N·cm
	T_{sum}			kG·m	-3.061×10^2	N·cm
200	w			cm	1.728×10^{-5}	cm
	φ			rad	-1.815×10^{-7}	rad
	Q_z			kG	-2.297	N
	M_y			kG·m	-1.828×10^3	N·cm
	θ			rad	-1.070×10^{-5}	rad
	T_t			kG·m	-8.839×10^1	N·cm
	B_ω			kG·m^2	-1.281×10^4	N·cm^2
	T_ω			kG·m	-1.281×10^4	N·cm
	T_{sum}			kG·m	-3.061×10^2	N·cm
$400 - \epsilon$	w			cm	7.608×10^{-5}	cm
	φ			rad	-4.152×10^{-7}	rad
	Q_z			kG	-2.297	N
	M_y	-2.30×10^2	2.28×10^2 [21]	kG·m	-2.287×10^3	N·cm
	θ			rad	2.500×10^{-7}	rad
	T_t			kG·m	3.987×10^2	N·cm
	B_ω	-9.20×10^3	9.18×10^3	kG·m^2	-9.115×10^4	N·cm^2
	T_ω			kG·m	-7.048×10^2	N·cm
	T_{sum}			kG·m	-3.061×10^2	N·cm

[21] Deformatsioonimeetodit kasutades on siin positiivsel momendil päripäevane suund.

Tabel 3.5. L-tala koormusega m_x. Tulemuste võrdlus (2)

x [cm]	Z(x)	Jõumeetod [Bõt62]	Def-meetod [Bõt62]	Mõõtühik	EST-meetod	Mõõtühik
$400+\epsilon$	w			cm	7.608×10^{-5}	cm
	φ			rad	2.500×10^{-7}	rad
	Q_z			kG	-2.297	N
	M_y	-3.11×10^{1}	-2.92×10^{1}	kG·m	-3.061×10^{2}	N·cm
	θ			rad	4.152×10^{-7}	rad
	T_t			kG·m	3.987×10^{2}	N·cm
	B_ω	-9.20×10^{3}	-9.13×10^{3}	kG·m^2	-9.115×10^{4}	N·cm^2
	T_ω			kG·m	1.889×10^{3}	N·cm
	T_{sum}			kG·m	2.287×10^{3}	N·cm
650	w			cm	2.242×10^{-5}	cm
	φ			rad	1.658×10^{-7}	rad
	Q_z			kG	-2.297	N
	M_y			kG·m	-8.804×10^{2}	N·cm
	θ			rad	5.547×10^{-5}	rad
	T_t			kG·m	-8.698×10^{1}	N·cm
	B_ω			kG·m^2	8.211×10^{4}	N·cm^2
	T_ω			kG·m	-1.256×10^{2}	N·cm
	T_{sum}			kG·m	-2.126×10^{2}	N·cm
900	w			cm	1.355×10^{-20}	cm
	φ			rad	-6.617×10^{-23}	rad
	Q_z			kG	-2.297	N
	M_y	-1.47×10^{2}	1.44×10^{2}	kG·m	-1.455×10^{3}	N·cm
	θ			rad	2.168×10^{-19}	rad
	T_t			kG·m	0.000	N·cm
	B_ω	-1.97×10^{4}	1.97×10^{4}	kG·m^2	-1.968×10^{5}	N·cm^2
	T_ω			kG·m	-2.713×10^{3}	N·cm
	T_{sum}			kG·m	-2.713×10^{3}	N·cm

Joonisel 3.11 on hõreda maatriksi muster (hõreda maatriksi spA(32,32) nullist erinevate elementide asukohad).



Joonis 3.11. L-tala hõreda maatriksi spA muster

Edasi arvutame GNU Octave'i programmiga Naide4_5GammaTV.m sedasama murtud teljega tala, kui tala teine ava on koormatud ühtlase lauskoormusega $q_z = 10\,\mathrm{N/cm}$. *Programm erineb eelnevast ainult koormusvektori poolest (vt väljavõte programmist 3.7).*

Väljavõte programmist 3.7 (Naide4_5GammaTV.m)

```
             # Esimese tala hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=yspTVmI(baasi0,l1,l1,GAr,EI,GIt,EIw);
IIv=1;
IJv=1;
             # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=Bvb
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
             # võrrandisüsteemi vabaliige Bvb on eelnevalt nullitud
             # Teise tala hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=yspTVmI(baasi0,l2,l2,GAr,EI,GIt,EIw);
vB2a=yzTVqz(baasi0,l2,0.0,qz,EI) # koormusvektori arvutus
#vB2b=yzTVmx(baasi0,l2,l2,0.0,mx,GIt,EIw) # koormusvektori arvutus
#vB2=vB2a+vB2b
vB2=vB2a
IIv=krda*8-7;
IJv=krda*16-15;
             # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=Bvb
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
             # sisestab koormusvektori võrrandisüsteemi vabaliikmesse Bvb
Bvb=InsertBtoA(Bvb,NNK,1,IIv,1,vB2,8,1);
```

Sisestatud võrrandite arvu ja astakut saab kontrollida arvutuspäeviku väljavõttest 3.7.

Väljavõte arvutuspäevikust 3.7 (Naide4_5GammaTV.m)

```
Pärast põhivõrrandite sisestamist on võrrandisüsteemis
spA_rida =  16
spA_veergu =  32
Pärast toel 1 toetingimuste lisamist on võrrandisüsteemis
spA_rida =  20
spA_veergu =  32
Pärast pidevusvõrrandite lisamist on võrrandisüsteemis
spA_rida =  24
spA_veergu =  32
Pärast tasakaaluvõrrandite lisamist on võrrandisüsteemis
spA_rida =  28
spA_veergu =  32
Pärast toel 3 toetingimuste lisamist on võrrandisüsteemis
spA_rida =  32
spA_veergu =  32

spA_rank =  32
```

Talade 1 ja 2 skaleerimata algparameetrid on toodud arvutuspäeviku väljavõttes 3.8.

Väljavõte arvutuspäevikust 3.8 (Naide4_5GammaTV.m)

```
 Algparameetrid - AP1     ja     AP2
     w -      0.0000e+00      1.5004e-02
    fi -      0.0000e+00      3.0202e-05
     Q -     -1.2399e+03     -1.2399e+03
     M -      4.9561e+05     -3.1834e+02
 theta -      0.0000e+00      5.6245e-05
    Tt -      0.0000e+00      2.2587e+01
     B -      3.8369e+04     -4.1739e+04
    Tw -     -3.1834e+02      3.2666e+02
```

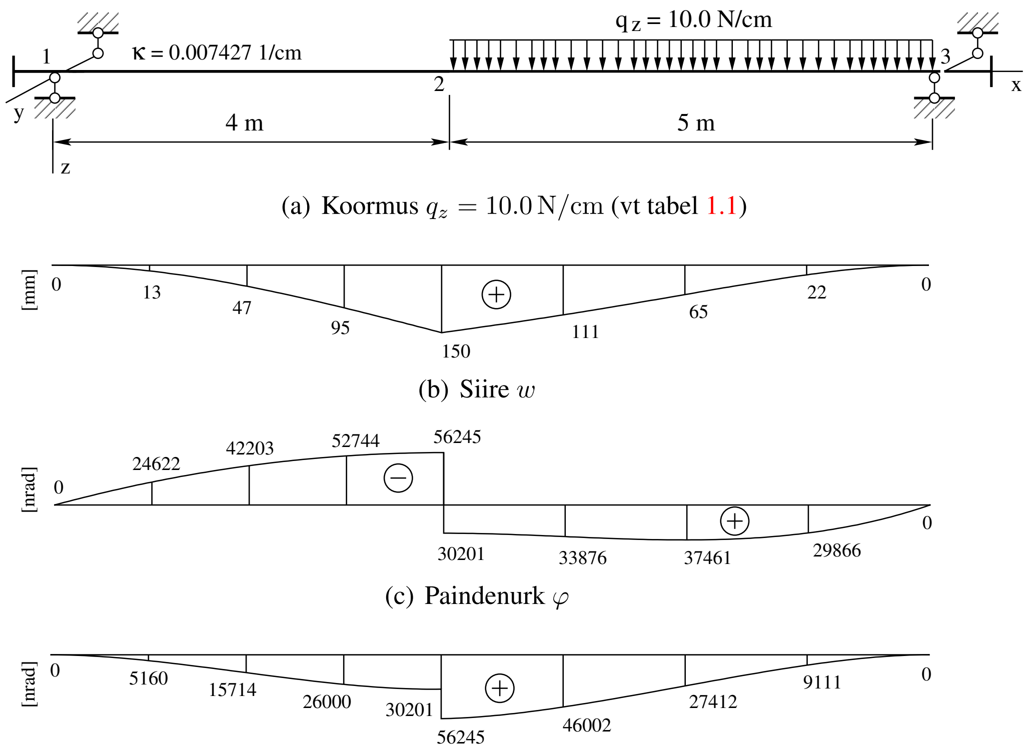
Arvutustulemused on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 3.9.

Väljavõte arvutuspäevikust 3.9 (Naide4_5GammaTV.m)

```
baasi0 =   1
Nmitmeks =   4
k =  0.0074270
      x=        0.00        100.00        200.00        300.00        400.00
     w -    0.000e+00    1.290e-03    4.690e-03    9.496e-03    1.500e-02
    fi -    0.000e+00   -2.462e-05   -4.220e-05   -5.274e-05   -5.625e-05
     Q -    1.240e+03    1.240e+03    1.240e+03    1.240e+03    1.240e+03
     M -   -4.956e+05   -3.716e+05   -2.476e+05   -1.236e+05    3.492e+02
 theta -    0.000e+00    5.161e-06    1.571e-05    2.600e-05    3.020e-05
    Tt -    0.000e+00    1.397e+02    1.764e+02    1.310e+02   -2.259e+01
     B -   -3.837e+04   -1.461e+04    7.258e+02    1.648e+04    4.174e+04
    Tw -    3.183e+02    1.786e+02    1.420e+02    1.874e+02    3.409e+02
  Tsum -    3.183e+02    3.183e+02    3.183e+02    3.183e+02    3.183e+02
```

```
baasi0 =   1
Nmitmeks =   4
k =   0.0074270
      x=        0.00        125.00        250.00        375.00        500.00
      w -     1.500e-02     1.106e-02     6.539e-03     2.156e-03     1.735e-18
     fi -     3.020e-05     3.388e-05     3.746e-05     2.987e-05    -1.355e-20
      Q -     1.240e+03    -1.011e+01    -1.260e+03    -2.510e+03    -3.760e+03
      M -     3.183e+02     7.718e+04    -2.209e+03    -2.378e+05    -6.297e+05
  theta -     5.625e-05     4.600e-05     2.741e-05     9.112e-06     1.084e-19
     Tt -    -2.259e+01    -2.024e+02    -2.462e+02    -1.946e+02     9.095e-13
      B -     4.174e+04     1.410e+04    -4.868e+02    -1.552e+04    -4.493e+04
     Tw -    -3.267e+02    -1.469e+02    -1.030e+02    -1.546e+02    -3.492e+02
   Tsum -    -3.492e+02    -3.492e+02    -3.492e+02    -3.492e+02    -3.492e+02
```

Leitud tulemuste põhjal koostame L-tala epüürid koormusest q_z (jn 3.12, b–j).



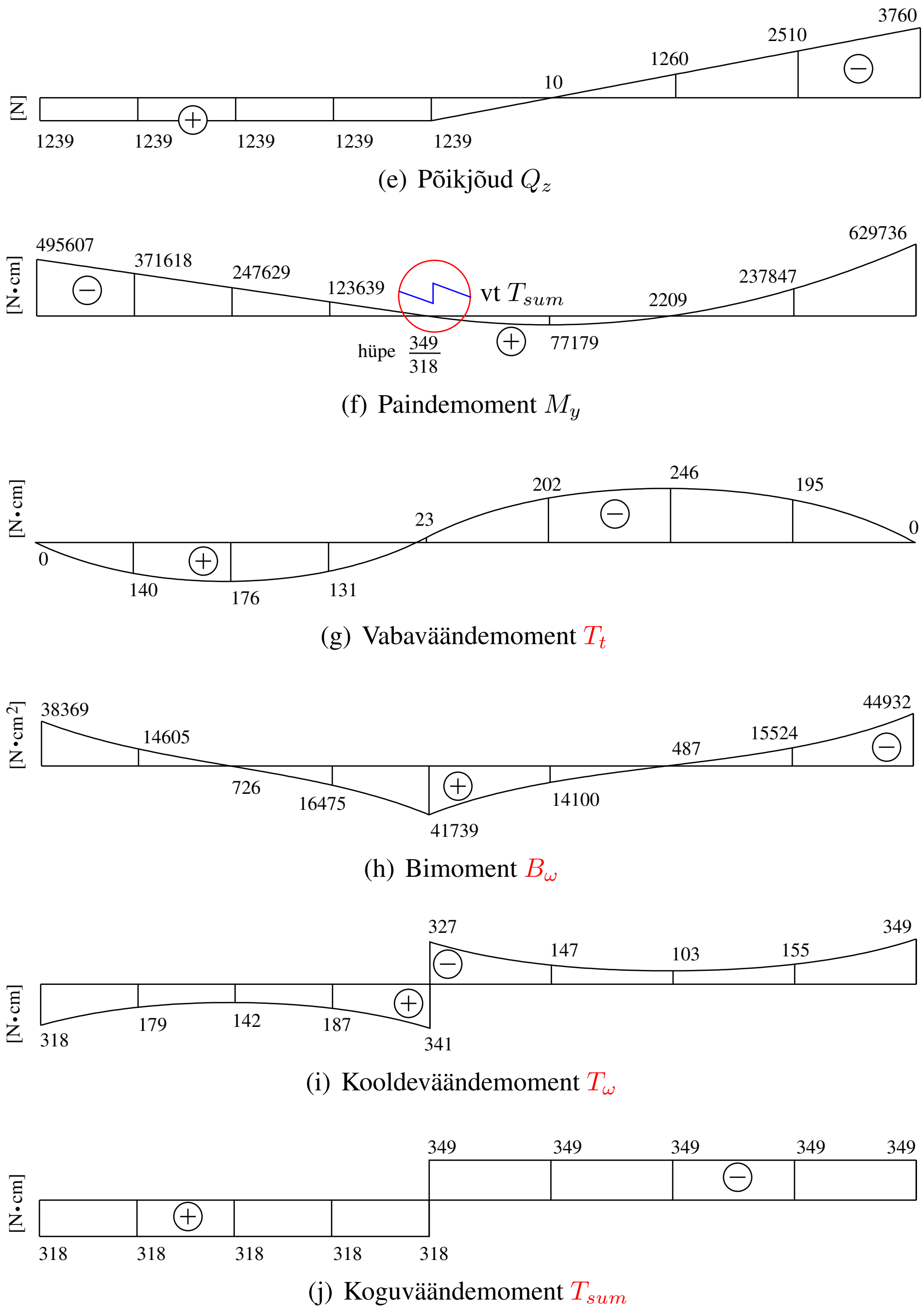
(a) Koormus $q_z = 10.0\,\mathrm{N/cm}$ (vt tabel 1.1)

(b) Siire w

(c) Paindenurk φ

(d) Väändenurk θ

Joonis 3.12. L-tala koormusega q_z. Epüürid b–d



Joonis 3.12. L-tala koormusega q_z. Epüürid e–j

Tabelitest 3.6 ja 3.7 selgub, et EST-meetodiga saadud tulemused on kooskõlas raamatus [Bõt62] jõu- ja deformatsioonimeetodi abil leitutega.

Tabel 3.6. L-tala koormusega q_z. Tulemuste võrdlus (1)

x [cm]	Z(x)	Jõumeetod [Bõt62]	Def-meetod [Bõt62]	Mõõtühik	EST-meetod	Mõõtühik
0.0	w			cm	0.000	cm
	φ			rad	0.000	rad
	Q_z			kG	1.240×10^3	N
	M_y	-4.96×10^4	-4.93×10^4	kG·m	-4.956×10^5	N·cm
	θ			rad	0.000	rad
	T_t			kG·m	0.000	N·cm
	B_ω	-3.82×10^3	-3.79×10^3	kG·m^2	-3.837×10^4	N·cm^2
	T_ω			kG·m	3.183×10^2	N·cm
	T_{sum}			kG·m	3.183×10^2	N·cm
200	w			cm	4.690×10^{-3}	cm
	φ			rad	-4.220×10^{-5}	rad
	Q_z			kG	1.240×10^3	N
	M_y			kG·m	-2.476×10^5	N·cm
	θ			rad	1.571×10^{-5}	rad
	T_t			kG·m	1.764×10^2	N·cm
	B_ω			kG·m^2	7.258×10^2	N·cm^2
	T_ω			kG·m	1.420×10^2	N·cm
	T_{sum}			kG·m	3.183×10^2	N·cm
$400 - \epsilon$	w		-1.49×10^{-2}	cm	1.500×10^{-2}	cm
	φ			rad	-5.625×10^{-5}	rad
	Q_z			kG	1.240×10^3	N
	M_y	3.46×10^1	2.2×10^1 [22]	kG·m	3.492×10^2	N·cm
	θ		2.98×10^{-5}	rad	3.020×10^{-5}	rad
	T_t		$-1.49 \times 10^{-8} \times GI_t$ [23]	kG·m	-2.259×10^1	N·cm
	B_ω	-4.14×10^3	-4.14×10^3	kG·m^2	4.174×10^4	N·cm^2
	T_ω			kG·m	3.409×10^2	N·cm
	T_{sum}			kG·m	3.183×10^2	N·cm

[22] Deformatsioonimeetodit kasutades on siin positiivsel momendil päripäevane suund.
[23] $GI_t = 1.5637 \times 10^9$ N·cm^2.

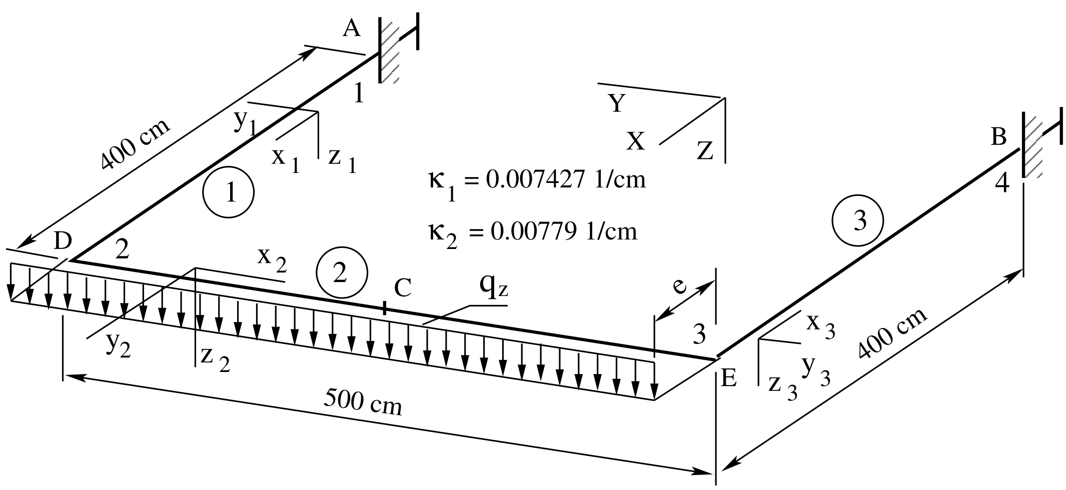
Tabel 3.7. L-tala koormusega q_z. Tulemuste võrdlus (2)

x [cm]	Z(x)	Jõumeetod [Bõt62]	Def-meetod [Bõt62]	Mõõtühik	EST-meetod	Mõõtühik
$400+\epsilon$	w		-1.49×10^{-2}	cm	1.500×10^{-2}	cm
	φ			rad	3.020×10^{-5}	rad
	Q_z			kG	1.240×10^{3}	N
	M_y	3.17×10^{1}	2.90×10^{2}	kG·m	3.183×10^{2}	N·cm
	θ		-5.60×10^{-5}	rad	5.625×10^{-5}	rad
	T_t		$-1.49\times10^{-8}\times GI_t$[24]	kG·m	-2.259×10^{1}	N·cm
	B_ω	4.14×10^{3}	4.14×10^{3}	kG·m^2	4.174×10^{4}	N·cm^2
	T_ω			kG·m	-3.267×10^{2}	N·cm
	T_{sum}			kG·m	-3.492×10^{2}	N·cm
650	w			cm	6.539×10^{-3}	cm
	φ			rad	3.746×10^{-5}	rad
	Q_z			kG	-1.260×10^{3}	N
	M_y			kG·m	-2.209×10^{3}	N·cm
	θ			rad	2.741×10^{-5}	rad
	T_t			kG·m	-2.462×10^{2}	N·cm
	B_ω			kG·m^2	-4.868×10^{2}	N·cm^2
	T_ω			kG·m	-1.030×10^{2}	N·cm
	T_{sum}			kG·m	-3.492×10^{2}	N·cm
900	w			cm	1.735×10^{-18}	cm
	φ			rad	-1.355×10^{-20}	rad
	Q_z			kG	-3.760×10^{3}	N
	M_y	6.30×10^{4}	6.30×10^{4}	kG·m	-6.297×10^{5}	N·cm
	θ			rad	1.084×10^{-19}	rad
	T_t			kG·m	9.095×10^{-13}	N·cm
	B_ω	-4.46×10^{3}	4.47×10^{3}	kG·m^2	-4.493×10^{4}	N·cm^2
	T_ω			kG·m	-3.492×10^{2}	N·cm
	T_{sum}			kG·m	-3.492×10^{2}	N·cm

[24] $GI_t = 1.5637\times10^{9}$ N·cm^2.

3.1.3 Murtud teljega Π-tala arvutus

Näide 3.3 (Π-tala arvutus ülekandevõrranditega). *Koostada joonisel 3.13 kujutatud murtud teljega tala vertikaalse siirde w, paindenurga φ_y, põikjõu Q_z, paindemomendi M_y, väändenurga θ_x, vabaväändemomendi T_t, bimomendi B_ω ja kooldeväändemomendi T_ω epüürid.*



Joonis 3.13. Π-tala paine ja vääne

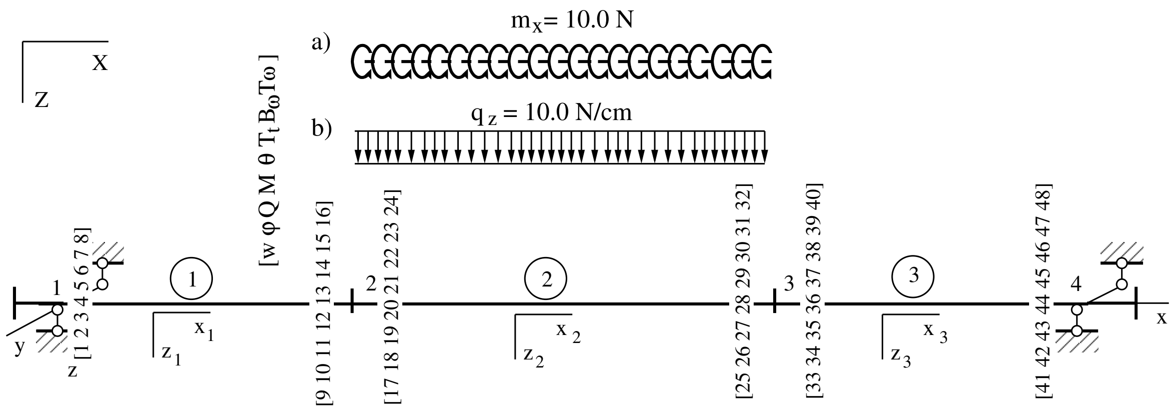
Andmed. *Murtud teljega tala elementide pikkused:* $l_1 = 4\,\mathrm{m}$, $l_2 = 5\,\mathrm{m}$ *ja* $l_3 = 4\,\mathrm{m}$. *Tala teine ava on ekstsentriliselt koormatud ühtlase lauskoormusega* $q_z = 1.0\,\mathrm{kN/m}$. *Vertikaalse lauskoormuse* q_z *ekstsentrilisus* $e = 1.0\,\mathrm{cm}$. *Varraste 1 ja 3 ristlõigeteks on valitud I-profiil nr 60a ning varda 2 ristlõikeks I-profiil nr 60b [Bõt62, lk 435]. Ristlõike paindejäikused* ($EI_1 = 1.7611 \times 10^5\,\mathrm{kN \cdot m^2}$, $EI_2 = 1.9989 \times 10^5\,\mathrm{kN \cdot m^2}$), *kooldejäikused* ($EI_{\omega 1} = 2.8348 \times 10^5\,\mathrm{kN \cdot m^4}$, $EI_{\omega 2} = 2.9254 \times 10^5\,\mathrm{kN \cdot m^4}$), *vabaväändejäikused* ($GI_{t1} = 1.5640 \times 10^5\,\mathrm{kN \cdot m^2}$, $GI_{t2} = 1.7753 \times 10^5\,\mathrm{kN \cdot m^2}$) *ning kooldekarakteristikud* ($\kappa_1 = \sqrt{GI_{t1}/EI_{\omega 1}} = \sqrt{1.5640 \times 10^9 / 2.8348 \times 10^{13}} = 0.0074278\,\mathrm{cm^{-1}}$, $\kappa_2 = \sqrt{GI_{t2}/EI_{\omega 2}} = \sqrt{1.7753 \times 10^9 / 2.9254 \times 10^{13}} = 0.007790\,\mathrm{cm^{-1}}$) *on konstantsed.*

Lahendus. *Kanname ühtlaselt jaotatud põikkoormuse* q_z *(jn 1.21 ja tabel 1.1) elastsele teljele. Vaatleme kahte koormusjuhtu (jn 3.14), kus elastsel teljel on ühtlaselt jaotatud väändemoment* $m_x = 10\,(\mathrm{N \cdot cm})/\mathrm{cm}$ *ja ühtlaselt jaotatud põikkoormus* $q_z = 10\,\mathrm{N/cm}$.

Rajaväärtuste arvutamiseks kasutame nagu EST-meetodi [Lah97a], [Lah14] puhulgi hõredat võrrandisüsteemi[25]

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{3.26}$$

[25] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.14.22



Joonis 3.14. Π-tala paine ja vääne. Muutujad

kus $\mathbf{Z}$ *on võrrandisüsteemi tundmatute vektor*

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\mathbf{a}}^{(\mathbf{1})} \\ \mathbf{Z}_{\mathbf{b}}^{(\mathbf{1})} \\ \mathbf{Z}_{\mathbf{a}}^{(\mathbf{2})} \\ \mathbf{Z}_{\mathbf{b}}^{(\mathbf{2})} \\ \mathbf{Z}_{\mathbf{a}}^{(\mathbf{3})} \\ \mathbf{Z}_{\mathbf{b}}^{(\mathbf{3})} \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

mille elementideks on siirded, paindenurgad, põikjõud, paindemomendid, väändenurgad ning väändemomendid varraste 1, 2 *ja* 3 *alguses ning lõpus.*

Muutuja $Z\,(i, 1)$ *indeks (i=1, 2, 3, . . ., 48) on toodud joonisel 3.14.*

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{a}}^{(\mathbf{1})} = \begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ Q_A \\ M_A \\ \theta_A \\ T_{tA} \\ B_{\omega A} \\ T_{\omega A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(1,1) \\ Z\,(2,1) \\ Z\,(3,1) \\ Z\,(4,1) \\ Z\,(5,1) \\ Z\,(6,1) \\ Z\,(7,1) \\ Z\,(8,1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z}_{\mathbf{b}}^{(\mathbf{1})} = \begin{bmatrix} w_L \\ \varphi_L \\ Q_L \\ M_L \\ \theta_L \\ T_{tL} \\ B_{\omega L} \\ T_{\omega L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(9,1) \\ Z\,(10,1) \\ Z\,(11,1) \\ Z\,(12,1) \\ Z\,(13,1) \\ Z\,(14,1) \\ Z\,(15,1) \\ Z\,(16,1) \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{a}}^{(\mathbf{2})} = \begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ Q_A \\ M_A \\ \theta_A \\ T_{tA} \\ B_{\omega A} \\ T_{\omega A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(17,1) \\ Z\,(18,1) \\ Z\,(19,1) \\ Z\,(20,1) \\ Z\,(21,1) \\ Z\,(22,1) \\ Z\,(23,1) \\ Z\,(24,1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z}_{\mathbf{b}}^{(\mathbf{2})} = \begin{bmatrix} w_L \\ \varphi_L \\ Q_L \\ M_L \\ \theta_L \\ T_{tL} \\ B_{\omega L} \\ T_{\omega L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(25,1) \\ Z\,(26,1) \\ Z\,(27,1) \\ Z\,(28,1) \\ Z\,(29,1) \\ Z\,(30,1) \\ Z\,(31,1) \\ Z\,(32,1) \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

$$\mathbf{Z_a^{(3)}} = \begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ Q_A \\ M_A \\ \theta_A \\ T_{tA} \\ B_{\omega A} \\ T_{\omega A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(33,1) \\ Z\,(34,1) \\ Z\,(35,1) \\ Z\,(36,1) \\ Z\,(37,1) \\ Z\,(38,1) \\ Z\,(39,1) \\ Z\,(40,1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b^{(3)}} = \begin{bmatrix} w_L \\ \varphi_L \\ Q_L \\ M_L \\ \theta_L \\ T_{tL} \\ B_{\omega L} \\ T_{\omega L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(41,1) \\ Z\,(42,1) \\ Z\,(43,1) \\ Z\,(44,1) \\ Z\,(45,1) \\ Z\,(46,1) \\ Z\,(47,1) \\ Z\,(48,1) \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

Põhivõrrandites[26] *(2.84)*

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{8\times 16} \cdot \widehat{\mathbf{Z}} = -\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{3.31}$$

sisalduva laiendatud ülekandemaatriksi $\widehat{\mathbf{UI}}_{8\times 16} \equiv (\boldsymbol{U_{8\times 8}} \mid -\boldsymbol{I_{8\times 8}})$ *(C.13) arvutamiseks saab kasutada GNU Octave'i funktsiooni yspTVmI.m.*

Võrrandisüsteemis (3.31) on tundmatuid poole rohkem kui võrrandeid. Kanname need võrrandid võrrandisüsteemi (3.26) (vt väljavõte programmist 3.8).

Väljavõte programmist 3.8 (Naide4_6U.m)

```
              # Esimese tala hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=yspTVmI(baasi0,l1,l1,GAr,EI,GIt,EIw);
IIv=1;
IJv=1;
              # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=Bvb
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
              # võrrandisüsteemi vabaliige Bvb on eelnevalt nullitud
              # Teise tala hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=yspTVmI(baasi0,l2,l2,GAr,EI,GIt,EIw);
#vB2a=yzTVqz(baasi0,l2,0.0,qz,EI) # koormusvektori arvutus
vB2b=yzTVmx(baasi0,l2,l2,0.0,mx,GIt,EIw) # koormusvektori arvutus
#vB2=vB2a+vB2b
vB2=vB2b
krda=2;
IIv=krda*8-7;
IJv=krda*16-15;
              # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=Bvb
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
              # sisestab koormusvektori võrrandisüsteemi vabaliikmesse Bvb
Bvb=InsertBtoA(Bvb,NNK,1,IIv,1,vB2,8,1);
              # Kolmanda tala hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=yspTVmI(baasi0,l1,l1,GAr,EI,GIt,EIw);
krda=3;
IIv=krda*8-7;
IJv=krda*16-15;
              # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=Bvb
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
              # võrrandisüsteemi vabaliige Bvb on eelnevalt nullitud
```

[26] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#figure.14.9

Võrrandisüsteemis (3.26) peab olema võrrandeid ja tundmatuid ühepalju. Võrrandite arv peab ühtima maatriksi $\mathbf{spA}$ *astakuga. Puuduvad sõltumatud võrrandid saame kinemaatilistest ja staatilistest rajatingimustest. Varrassüsteemi elemente ühendavad sidemed võib jagada välis- ja sisesidemeteks [Jür85, lk 8–9].*[27] *Reaktsioonid jagatakse välimisteks ja sisemisteks.*[28] *Sisemiste reaktsioonide summa võrdub nulliga. Vaadeldes varrassüsteemi kui tervikut, võib sisemisi reaktsioone nimetada ka kontaktjõududeks.*[29]

Edasi

- *püstitame rajatingimused;*
- *arvutame algparameetrid;*
- *arvutame väändenurgad ja väändemomendid;*
- *koostame sisejõudude epüürid.*

Rajatingimuste püstitus. *Väliste rajatingimuste seadmisel tuleb arvestada energiateoreemi*[30] *(B.8). Kui avaldistes* $w \Leftrightarrow Q_z$, $\varphi \Leftrightarrow M_y$, $\theta \Leftrightarrow T_{sum}$, $\theta' \Leftrightarrow B_\omega$ *üks pool (siire* w, *paindenurk* φ, *pöördenurk* θ, *suhteline väändenurk* θ'*) on antud, siis teine pool (põikjõud* Q_z, *paindemoment* M_y, *koguväändemoment* T_{sum}, *bimoment* B_ω*) on tundmatu.*

Talal on sõlmedes 1 *ja* 3 *jäigad toed, mis ei võimalda pööret ega kooldumist (vt tabel 1.2). Tähistame vabaväändejäikuste suhted järgmiselt:* $GI12 = GIt1/GIt2$ *ja* $GI21 = GIt2/GIt1$.

$$\begin{array}{lllllll} Z(1,1) &=& w_A^{(1)} &=& 0 & & \\ Z(2,1) &=& \varphi_A^{(1)} &=& 0 & & \\ Z(5,1) &=& \theta_A^{(1)} &=& 0 & & \\ Z(6,1) &=& T_{tA}^{(1)} &\equiv& \theta_A'^{(1)} &=& 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lllllll} Z(41,1) &=& w_L^{(3)} &=& 0 & & \\ Z(42,1) &=& \varphi_L^{(3)} &=& 0 & & \\ Z(45,1) &=& \theta_L^{(3)} &=& 0 & & \\ Z(46,1) &=& T_{tL}^{(3)} &\equiv& \theta_L'^{(3)} &=& 0 \end{array} \tag{3.32}$$

Sisemistest rajatingimustest vaatleme pidevustingimusi sõlmedes 2 *ja* 3*. Varraste* 1 *ja* 2 *ning* 2 *ja* 3 *siirded ja kooldumus*[31] *on võrdsed.*

$$\begin{array}{lllll} Z(9,1) - Z(17,1) &=& w_L^{(1)} - w_A^{(2)} &=& 0 \\ Z(14,1) + Z(22,1) \cdot GI12 &=& T_{tL}^{(1)} + T_{tA}^{(2)} \cdot GI12 &\equiv& \theta_L'^{(1)} - \theta_A'^{(2)} = 0 \\ Z(25,1) + Z(33,1) &=& w_L^{(2)} - w_A^{(3)} &=& 0 \\ Z(30,1) + Z(38,1) \cdot GI21 &=& T_{tL}^{(2)} + T_{tA}^{(3)} \cdot GI21 &\equiv& \theta_L'^{(2)} - \theta_A'^{(3)} = 0 \end{array} \tag{3.33}$$

Painde- ja väändenurkade (φ_y, θ_x*) puhul peame arvestama, et varda x-telg on murtud (telgede pööre nurga* $-\pi/2$ *võrra ümber z-telje, vt avaldis (D.17)).*

$$\begin{array}{lllll} Z(21,1) + Z(10,1) &=& \theta_A^{(2)} + \varphi_L^{(1)} &=& 0 \\ Z(18,1) - Z(13,1) &=& \varphi_A^{(2)} - \theta_L^{(1)} &=& 0 \\ Z(37,1) + Z(26,1) &=& \theta_A^{(3)} + \varphi_L^{(2)} &=& 0 \\ Z(34,1) - Z(29,1) &=& \varphi_A^{(3)} - \theta_L^{(2)} &=& 0 \end{array} \tag{3.34}$$

[27] http://digi.lib.ttu.ee/i/?472
[28] http://www.ce.memphis.edu/3121/notes/notes_04d.pdf (20.08.2013)
[29] https://en.wikipedia.org/wiki/Contact_force. (20.08.2013)
[30] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.F.26
[31] Kooldumisel vabaväändemomenti kasutades järgitakse II märgikokkulepet.

Sisemistest rajatingimustest vaatleme sõlmede 2 ja 3 tasakaalutingimusi. Painde- ja väändemomentide (M_y ja $T_{sum\,x}$) puhul arvestame, et varda x-telg on murtud (telgede pööre nurga $-\pi/2$ võrra ümber z-telje, vt avaldis (D.17)).

$$
\begin{array}{lclcl}
Z\,(19,1) + Z\,(11,1) & = & Q_{z\,A}^{(2)} + Q_{z\,L}^{(1)} & = & 0 \\
Z\,(22,1) + Z\,(24,1) - Z\,(12,1) & = & T_{t\,A}^{(2)} + T_{\omega\,A}^{(2)} - M_{y\,L}^{(1)} & = & 0 \\
Z\,(20,1) + Z\,(14,1) + Z\,(16,1) & = & M_{y\,A}^{(2)} + T_{t\,L}^{(1)} + T_{\omega\,L}^{(1)} & = & 0 \\
Z\,(33,1) + Z\,(15,1) & = & B_{\omega\,A}^{(2)} + B_{\omega\,L}^{(1)} & = & 0 \\
Z\,(27,1) + Z\,(35,1) & = & Q_{z\,L}^{(2)} + Q_{z\,A}^{(3)} & = & 0 \\
Z\,(38,1) + Z\,(40,1) - Z\,(28,1) & = & T_{t\,A}^{(3)} + T_{\omega\,A}^{(3)} - M_{y\,L}^{(2)} & = & 0 \\
Z\,(36,1) + Z\,(30,1) + Z\,(32,1) & = & M_{y\,A}^{(3)} + T_{t\,L}^{(2)} + T_{\omega\,L}^{(2)} & = & 0 \\
Z\,(31,1) + Z\,(39,1) & = & B_{\omega\,L}^{(2)} + B_{\omega\,A}^{(3)} & = & 0
\end{array}
\tag{3.35}
$$

Koostatud on 24 rajatingimuse võrrandit. Sisestame need võrrandisüsteemi (3.26) (vt väljavõte programmist 3.9). Võrrandisüsteemi astak võrdub tundmatute arvuga. Järelikult on sisestatud võrrandid lineaarselt sõltumatud.

Väljavõte programmist 3.9 (Naide4_6U.m)

```
########## Rajatingimused
#  sõlm 1
spA=spSisestaArv(spA,25,1,1);  # siire w
spA=spSisestaArv(spA,26,2,1);  # pööre fi
spA=spSisestaArv(spA,27,5,1);  # $theta_A$ - väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,28,6,1);  # $T_tA$ ($theta^{\prime}$)
#  sõlm 2
# pidevus
spA=spSisestaArv(spA,29,9,1);   # siire w
spA=spSisestaArv(spA,29,17,-1);
spA=spSisestaArv(spA,30,10,1);  # pööre fi
spA=spSisestaArv(spA,30,21,1);
spA=spSisestaArv(spA,31,13,1);  # väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,31,18,-1);
spA=spSisestaArv(spA,32,14,1);  # $T_t$ ($theta^{\prime}$)
spA=spSisestaArv(spA,32,22,1)*GIt1/GIt2;
# tasakaal
spA=spSisestaArv(spA,33,11,1);  # Q
spA=spSisestaArv(spA,33,19,1);
spA=spSisestaArv(spA,34,12,-1); # M
spA=spSisestaArv(spA,34,22,1);
spA=spSisestaArv(spA,34,24,1);
spA=spSisestaArv(spA,35,20,1);  # M
spA=spSisestaArv(spA,35,14,1);
spA=spSisestaArv(spA,35,16,1);
spA=spSisestaArv(spA,36,15,1);  # B
spA=spSisestaArv(spA,36,23,1);
#  sõlm 3
# pidevus
spA=spSisestaArv(spA,37,25,1);  # w
spA=spSisestaArv(spA,37,33,-1)
```

```
spA=spSisestaArv(spA,38,26,1);  # fi
spA=spSisestaArv(spA,38,37,1);
spA=spSisestaArv(spA,39,29,1);  # väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,39,34,-1);
spA=spSisestaArv(spA,40,30,1);  # $T_t$ ($theta^{\prime}$)
spA=spSisestaArv(spA,40,38,1)*GIt2/GIt1;
# tasakaal
spA=spSisestaArv(spA,41,27,1);  # Q
spA=spSisestaArv(spA,41,35,1);
spA=spSisestaArv(spA,42,28,-1); # M
spA=spSisestaArv(spA,42,38,1);
spA=spSisestaArv(spA,42,40,1);
spA=spSisestaArv(spA,43,36,1);  # M
spA=spSisestaArv(spA,43,30,1)
spA=spSisestaArv(spA,43,32,1);
spA=spSisestaArv(spA,44,31,1);  # B
spA=spSisestaArv(spA,44,39,1);
#  sõlm 4
spA=spSisestaArv(spA,45,41,1);  # w
spA=spSisestaArv(spA,46,42,-1); # pööre fi
spA=spSisestaArv(spA,47,45,1);  # väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,48,46,1);  # $T_t$ ($theta^{\prime}$)
#
spA_rank = sprank(spA) # võrrandisüsteemi astak
```

Sisestatud võrrandite arvu ja astakut saab kontrollida arvutuspäeviku väljavõttest 3.10.

Väljavõte arvutuspäevikust 3.10 (Naide4_6U.m)

```
Pärast põhivõrrandite sisestamist on võrrandisüsteemis
spA_rida =  24
spA_veergu =  48
Pärast toel A toetingimuste lisamist on võrrandisüsteemis
spA_rida =  28
spA_veergu =  48
Pärast sõlmes D pidevusvõrrandite lisamist on võrrandisüsteemis
spA_rida =  32
spA_veergu =  48
Pärast sõlmes D tasakaaluvõrrandite lisamist on võrrandisüsteemis
spA_rida =  36
spA_veergu =  48
Pärast sõlmes E pidevusvõrrandite lisamist on võrrandisüsteemis
spA_rida =  40
spA_veergu =  48
Pärast sõlmes E tasakaaluvõrrandite lisamist on võrrandisüsteemis
spA_rida =  44
spA_veergu =  48
Pärast toel B toetingimuste lisamist on võrrandisüsteemis
spA_rida =  48
spA_veergu =  48

spA_rank =  48
```

Algparameetrite arvutus. *Rajaväärtuste leidmisel korrutasime siirded, paindenurgad ja väändenurgad skaleerimisteguriga:* $baasi0 = 1.0e + 10$. *Skaleerimata algparameetrite saamiseks tuleb vastavad suurused jagada skaleerimisteguriga. Talade 1, 2 ja 3 skaleerimata algparameetrid on toodud arvutuspäeviku väljavõttes 3.11.*

Väljavõte arvutuspäevikust 3.11 (Naide4_6U.m)

```
Algparameetrid - AP1          AP2          AP3
    w -     0.0000e+00    1.1357e-04    1.1357e-04
   fi -     0.0000e+00    4.9646e-08    5.6784e-07
    Q -    -6.8039e-15   -6.8039e-15   -6.8039e-15
    M -     2.5000e+03    3.6090e+02    2.5000e+03
theta -     0.0000e+00    5.6784e-07    4.9646e-08
   Tt -     0.0000e+00   -4.6686e+02    4.6686e+02
    B -    -3.7392e+04    1.0704e+05    1.0704e+05
   Tw -     3.6090e+02   -2.0331e+03   -8.2776e+02
```

3. Siirete, nurkade ja momentide arvutus. *Siirete, painde- ja väändenurkade, põikjõudude, painde- ja väändemomentide leidmiseks tala ristlõigetes kasutame ülekandevõrrandit (C.1)*

$$\mathbf{Z_L}(\mathbf{x}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z_A} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{3.36}$$

kus $\mathbf{Z_A}$ *on tala algparameetrid (vt arvutuspäeviku väljavõte 3.11). Ülekandemaatriksi* $\mathbf{U}$ *leiame GNU Octave'i funktsiooniga ylTVlin.m ning koormusvektori* $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ *funktsioonidega yzTVmx.m ja yzTVqz.m (vt väljavõte programmist 3.10).*

Väljavõte programmist 3.10 (Naide4_6U.m)

```
AP=AP1;
baasi0=1.0
Nmitmeks=4
xx=0.0;
xsamm=0.0;
xsamm=l1/Nmitmeks;
for ij=1:Nmitmeks+1   # 5 - displacements and forces at x=0.0
Xloikes(ij,1)=xx;
   vvF=ylTVlin(baasi0,l1,xx,GAr,EI1,GIt1,EIw1);
 Fvv(1:8,ij)=vvF*AP;
 Fvv(9,ij)=Fvv(6,ij)+Fvv(8,ij);
xx=xx+xsamm;
endfor
AP=AP2;
baasi0=1.0
Nmitmeks=4
xx=0.0;
xsamm=0.0;
xsamm=l2/Nmitmeks;
for ij=1:Nmitmeks+1   # 5 - displacements and forces at x=0.0
Xloikes(ij,1)=xx;
   vvF=ylTVlin(baasi0,l2,xx,GAr,EI2,GIt2,EIw2);
vB2b=yzTVmx(baasi0,l2,xx,0.0,mx,GIt2,EIw2); # koormusvektori arvutus
vB2=vB2b;
   Fvv(1:8,ij)=vvF*AP+vB2;
```

```
   Fvv(9,ij)=Fvv(6,ij)+Fvv(8,ij);
xx=xx+xsamm;
endfor
AP=AP3;
baasi0=1.0
Nmitmeks=4
xx=0.0;
xsamm=0.0;
xsamm=l3/Nmitmeks;
for ij=1:Nmitmeks+1   # 5 - displacements and forces at x=0.0
Xloikes(ij,1)=xx;
   vvF=ylTVlin(baasi0,l3,xx,GAr,EI1,GIt1,EIw1);
  Fvv(1:8,ij)=vvF*AP;
  Fvv(9,ij)=Fvv(6,ij)+Fvv(8,ij);
xx=xx+xsamm;
endfor
```

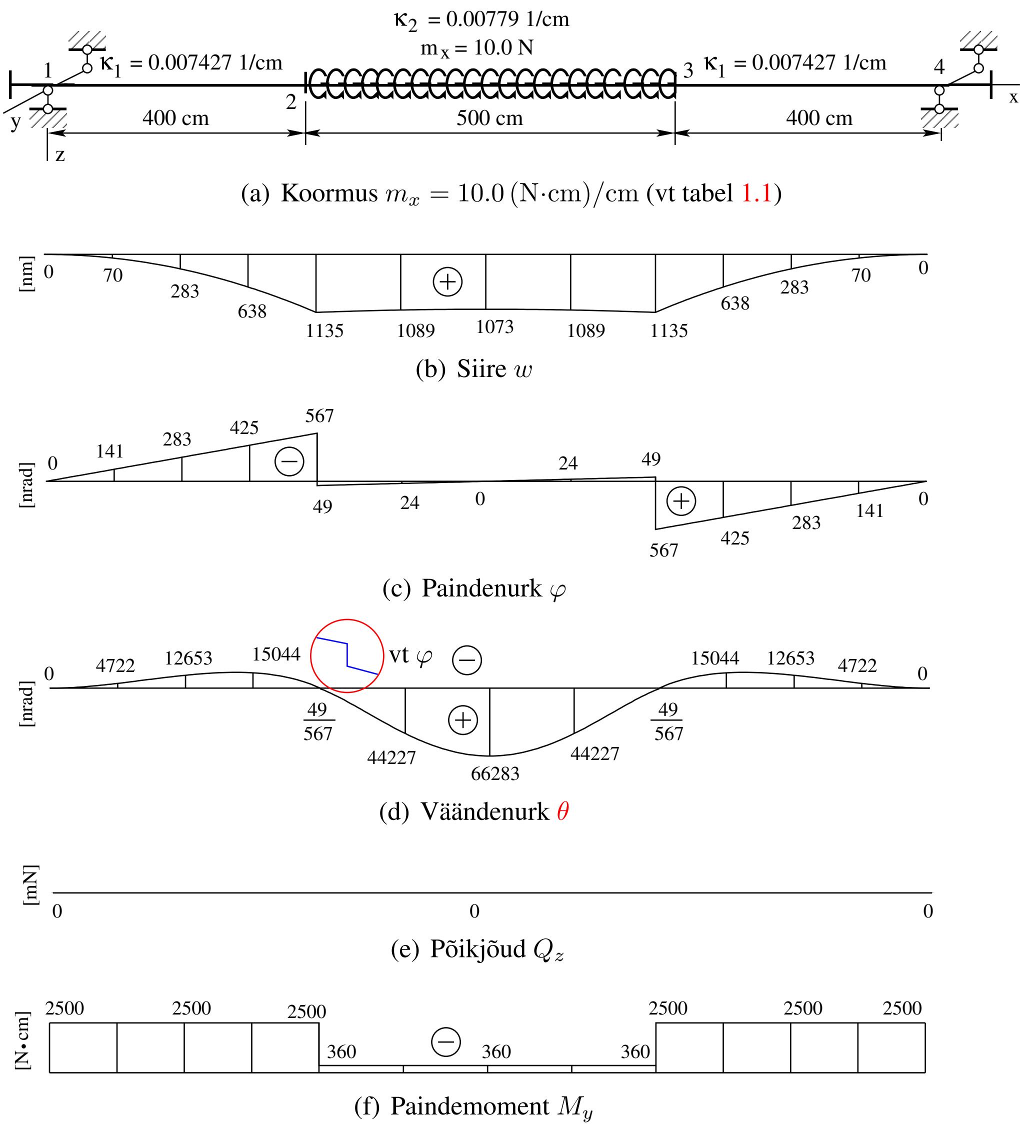
Arvutustulemused on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 3.12.

Väljavõte arvutuspäevikust 3.12 (Naide4_6U.m)

```
baasi0 =  1
Nmitmeks =  4
k =  0.007427
      x=       0.00       100.00       200.00       300.00       400.00
      w -    0.000e+00    7.098e-06    2.839e-05    6.388e-05    1.136e-04
     fi -    0.000e+00   -1.420e-07   -2.839e-07   -4.259e-07   -5.678e-07
      Q -    6.804e-15    6.804e-15    6.804e-15    6.804e-15    6.804e-15
      M -   -2.500e+03   -2.500e+03   -2.500e+03   -2.500e+03   -2.500e+03
  theta -    0.000e+00   -4.723e-06   -1.265e-05   -1.504e-05    4.965e-08
     Tt -    0.000e+00   -1.216e+02   -1.049e+02    5.958e+01    4.669e+02
      B -    3.739e+04    8.687e+03   -1.500e+04   -4.735e+04   -1.070e+05
     Tw -   -3.609e+02   -2.393e+02   -2.560e+02   -4.205e+02   -8.278e+02
   Tsum -   -3.609e+02   -3.609e+02   -3.609e+02   -3.609e+02   -3.609e+02

baasi0 =  1
Nmitmeks =  4
k =  0.007790
      x=       0.00       125.00       250.00       375.00       500.00
      w -    1.136e-04    1.089e-04    1.074e-04    1.089e-04    1.136e-04
     fi -    4.965e-08    2.482e-08    1.105e-21   -2.482e-08   -4.965e-08
      Q -    6.804e-15    6.804e-15    6.804e-15    6.804e-15    6.804e-15
      M -   -3.609e+02   -3.609e+02   -3.609e+02   -3.609e+02   -3.609e+02
  theta -    5.678e-07    4.423e-05    6.628e-05    4.423e-05    5.678e-07
     Tt -    4.669e+02    5.780e+02    3.638e-12   -5.780e+02   -4.669e+02
      B -   -1.070e+05    4.982e+04    8.879e+04    4.982e+04   -1.070e+05
     Tw -    2.033e+03    6.720e+02    0.000e+00   -6.720e+02   -2.033e+03
   Tsum -    2.500e+03    1.250e+03    3.638e-12   -1.250e+03   -2.500e+03


baasi0 =  1
Nmitmeks =  4
```

```
k =   0.007427
        x=        0.00        100.00        200.00        300.00        400.00
        w -     1.136e-04     6.388e-05     2.839e-05     7.098e-06     2.711e-20
       fi -     5.678e-07     4.259e-07     2.839e-07     1.420e-07     0.000e+00
        Q -     6.804e-15     6.804e-15     6.804e-15     6.804e-15     6.804e-15
        M -    -2.500e+03    -2.500e+03    -2.500e+03    -2.500e+03    -2.500e+03
    theta -     4.965e-08    -1.504e-05    -1.265e-05    -4.723e-06     1.084e-19
       Tt -    -4.669e+02    -5.958e+01     1.049e+02     1.216e+02    -1.819e-12
        B -    -1.070e+05    -4.735e+04    -1.500e+04     8.687e+03     3.739e+04
       Tw -     8.278e+02     4.205e+02     2.560e+02     2.393e+02     3.609e+02
     Tsum -     3.609e+02     3.609e+02     3.609e+02     3.609e+02     3.609e+02
```

Leitud tulemuste põhjal koostame Π*-tala epüürid koormusest* m_x *(jn 3.15, b–j).*



(a) Koormus $m_x = 10.0\,(\mathrm{N{\cdot}cm})/\mathrm{cm}$ (vt tabel 1.1)

(b) Siire w

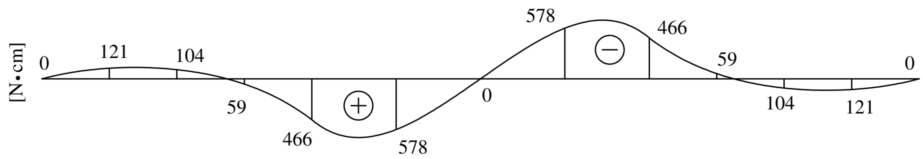
(c) Paindenurk φ

(d) Väändenurk θ

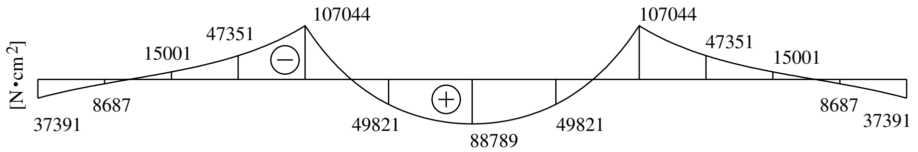
(e) Põikjõud Q_z

(f) Paindemoment M_y

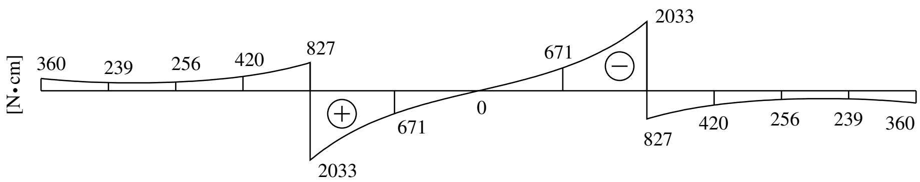
Joonis 3.15. Π-tala paine ja vääne. Epüürid b–f



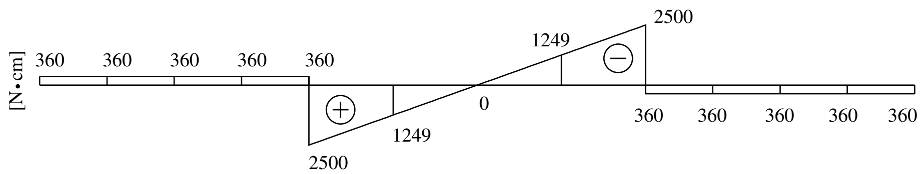
(g) Vabaväändemoment T_t



(h) Bimoment B_ω



(i) Kooldeväändemoment T_ω



(j) Koguväändemoment T_{sum}

Joonis 3.15. Π-tala paine ja vääne. Epüürid g–j

EST-meetodiga ja raamatus [Bõt62] toodud valemite abil arvutatud Π-tala paindemomendid ja bimomendid on esitatud tabelites 3.8, 3.9 ja 3.10.

Raamatus [Bõt62, lk 353 ja 386] on toodud näited Π-kujulise raami arvutamiseks jõu- ja deformatsioonimeetodiga. Neis näidetes on varraste 1 ja 3 (jn 3.13 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$) kooldejäikus $i_{1\omega} = EI_{1\omega}/l_1 = 1.0$. Leitud paindemomendid ja bimomendid on esitatud tabelite 3.8, 3.9 ja 3.10 veerus 'Def-meetod'.

Võrdluseks EST-meetodil saadud tulemustega võtsime [Bõt62] valemites varraste 1 ja 3 kooldejäikuseks $i_{1\omega} = EI_{1\omega}/l_1 = 2.8348{\times}10^{13}/400 = 7.0870\,{\times}10^{10}$ ($\kappa_1 = 0.007427$ $1/\mathrm{cm}$). Arvutiprogrammidega Naide4_6Udef.m ja Naide4_6Uforce.m arvutatud paindemomendid ja bimomendid on tabelite 3.8, 3.9 ja 3.10 veerus 'Def-meetod+'.

Arvude erinevus veergudes 'Def-meetod+' ja 'EST-meetod' on välja toodud tabelite 3.8, 3.9 ja 3.10 all.

Tabel 3.8. Π-tala koormusega m_x. Tulemuste võrdlus (1)

x [cm]	Z(x)	Def-meetod [Bõt62]	Def-meetod+[32] [Bõt62]	Mõõtühik	EST-meetod	Mõõtühik
	w			cm	0.000	cm
	φ			rad	0.000	rad
	Q_z			kG	6.804×10^{-15}	N
0.0	M_y	-2.5000×10^3	-2.5000×10^3	N·cm	-2.500×10^3	N·cm
	θ			rad	0.000	rad
	T_t			kG·m	0.000	N·cm
	B_ω	-1.2637×10^{-6}	-3.5662×10^4	N·cm^2	3.739×10^4	N·cm^2
	T_ω			kG·m	-3.609×10^2	N·cm
	T_{sum}			kG·m	-3.609×10^2	N·cm
	w			cm	2.839×10^{-5}	cm
	φ			rad	-2.839×10^{-7}	rad
	Q_z			kG	6.804×10^{-15}	N
200	M_y			kG·m	-2.500×10^3	N·cm
	θ			rad	-1.265×10^{-5}	rad
	T_t			kG·m	-1.049×10^2	N·cm
	B_ω			kG·m^2	-1.500×10^4	N·cm^2
	T_ω			kG·m	-2.560×10^2	N·cm
	T_{sum}			kG·m	-3.609×10^2	N·cm
	w			cm	1.136×10^{-4}	cm
	φ			rad	-5.678×10^{-7}	rad
	Q_z			kG	6.804×10^{-15}	N
$400 - \epsilon$	M_y	2.5000×10^3	2.5000×10^3 [33]	N·cm	-2.500×10^3	N·cm
	θ			rad	4.965×10^{-8}	rad
	T_t			kG·m	4.669×10^2	N·cm
	B_ω	3.6140×10^{-6}	1.0199×10^5	N·cm^2	-1.070×10^5	N·cm^2
	T_ω			kG·m	-8.278×10^2	N·cm
	T_{sum}			kG·m	-3.609×10^2	N·cm

$B_{AD} = 3.5662{\times}10^4 <=> 3.739{\times}10^4;$ $\quad 100{\times}(3.739{\times}10^4 - 3.5662{\times}10^4)/3.739{\times}10^4 = 4.62\,\%$

$B_{DA} = -1.0199{\times}10^5 <=> -1.070{\times}10^5;$ $\quad 100{\times}(1.070{\times}10^5 - 1.0199{\times}10^5)/1.070{\times}10^5 = 4.68\,\%$

[32] Raamatus [Bõt62] toodud valemeid on täiendatud varda kooldejäikusega $i_{1\omega} = EI_{1\omega}/l_1$ (vt arvutiprogramme Naide4_6Udef.m ja Naide4_6Uforce.m).

[33] Deformatsioonimeetodit kasutades on siin positiivsel momendil päripäevane suund.

Tabel 3.9. Π-tala koormusega m_x. Tulemuste võrdlus (2)

x [cm]	Z(x)	Def-meetod [Bõt62]	Def-meetod+[34] [Bõt62]	Mõõtühik	EST-meetod	Mõõtühik
	w			cm	1.136×10^{-4}	cm
	φ			rad	4.965×10^{-8}	rad
	Q_z			kG	6.804×10^{-15}	N
$400 + \epsilon$	M_y	-1.2194×10^{-8}	-3.4412×10^{2}	N·cm	-3.609×10^{2}	N·cm
	θ			rad	5.678×10^{-7}	rad
	T_t			kG·m	4.669×10^{2}	N·cm
	B_ω	-3.6140×10^{-6}	-1.0199×10^{5}	N·cm^2	-1.070×10^{5}	N·cm^2
	T_ω			kG·m	2.033×10^{3}	N·cm
	T_{sum}			kG·m	2.500×10^{3}	N·cm
	w			cm	1.074×10^{-4}	cm
	φ			rad	1.105×10^{-21}	rad
	Q_z			kG	6.804×10^{-15}	N
650	M_y			kG·m	-3.609×10^{2}	N·cm
	θ			rad	6.628×10^{-5}	rad
	T_t			kG·m	3.638×10^{-12}	N·cm
	B_ω			kG·m^2	8.879×10^{4}	N·cm^2
	T_ω			kG·m	0.000	N·cm
	T_{sum}			kG·m	3.638×10^{-12}	N·cm
	w			cm	1.136×10^{-4}	cm
	φ			rad	-4.965×10^{-8}	rad
	Q_z			kG	6.804×10^{-15}	N
$900 - \epsilon$	M_y	1.2194×10^{-8}	3.4412×10^{2}	N·cm	-3.609×10^{2}	N·cm
	θ			rad	5.678×10^{-7}	rad
	T_t			kG·m	-4.669×10^{2}	N·cm
	B_ω	3.6140×10^{-6}	1.0199×10^{5}	N·cm^2	-1.070×10^{5}	N·cm^2
	T_ω			kG·m	-2.033×10^{3}	N·cm
	T_{sum}			kG·m	-2.500×10^{3}	N·cm

$M_{DE} = -3.4412{\times}10^2 <=> -3.609{\times}10^2; \quad 100{\times}(3.609{\times}10^2 - 3.4412{\times}10^2)/3.609{\times}10^4 = 4.65\,\%$

$B_{DE} = -1.0199{\times}10^5 <=> -1.070{\times}10^5; \quad 100{\times}(1.070{\times}10^5 - 1.0199{\times}10^5)/1.070{\times}10^5 = 4.68\,\%$

$M_{ED} = 3.4412{\times}10^2 <=> -3.609{\times}10^2; \quad 100{\times}(3.609{\times}10^2 - 3.4412{\times}10^2)/3.609{\times}10^4 = 4.65\,\%$

$B_{ED} = 1.0199{\times}10^5 <=> -1.070{\times}10^5; \quad 100{\times}(1.070{\times}10^5 - 1.0199{\times}10^5)/1.070{\times}10^5 = 4.68\,\%$

[34] Raamatus [Bõt62] toodud valemeid on täiendatud varda kooldejäikusega $i_{1\omega} = EI_{1\omega}/l_1$ (vt arvutiprogramme Naide4_6Udef.m ja Naide4_6Uforce.m).

Tabel 3.10. Π-tala koormusega m_x. Tulemuste võrdlus (3)

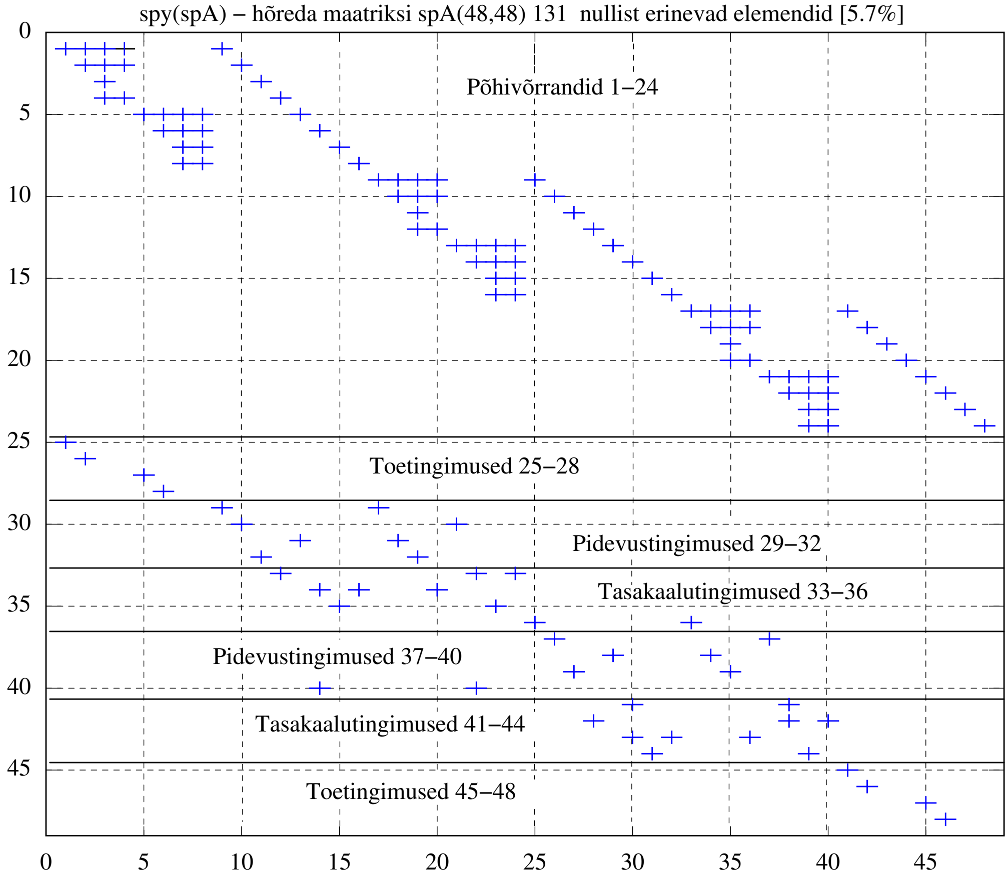
x [cm]	Z(x)	Def-meetod [Bõt62]	Def-meetod+[35] [Bõt62]	Mõõtühik	EST-meetod	Mõõtühik
	w			cm	1.136×10^{-4}	cm
	φ			rad	5.678×10^{-7}	rad
	Q_z			kG	6.804×10^{-15}	N
$900 + \epsilon$	M_y	2.5000×10^3	2.5000×10^3	N·cm	-2.500×10^3	N·cm
	θ			rad	4.965×10^{-8}	rad
	T_t			kG·m	-4.669×10^2	N·cm
	B_ω	-3.6140×10^{-6}	-1.0199×10^5	N·cm^2	-1.070×10^5	N·cm^2
	T_ω			kG·m	8.278×10^2	N·cm
	T_{sum}			kG·m	3.609×10^2	N·cm
	w			cm	2.839×10^{-5}	cm
	φ			rad	2.839×10^{-7}	rad
	Q_z			kG	6.804×10^{-15}	N
1100	M_y			kG·m	-2.500×10^3	N·cm
	θ			rad	-1.265×10^{-5}	rad
	T_t			kG·m	1.049×10^2	N·cm
	B_ω			kG·m^2	-1.500×10^4	N·cm^2
	T_ω			kG·m	2.560×10^2	N·cm
	T_{sum}			kG·m	3.609×10^2	N·cm
	w			cm	2.711×10^{-20}	cm
	φ			rad	0.000	rad
	Q_z			kG	6.804×10^{-15}	N
1300	M_y	-2.5000×10^3	-2.5000×10^3	N·cm	-2.500×10^3	N·cm
	θ			rad	1.084×10^{-19}	rad
	T_t			kG·m	-1.819×10^{-12}	N·cm
	B_ω	1.2637×10^{-6}	3.5662×10^4	N·cm^2	3.739×10^4	N·cm^2
	T_ω			kG·m	3.609×10^2	N·cm
	T_{sum}			kG·m	3.609×10^2	N·cm

$B_{EB} = -1.0199{\times}10^5 <=> -1.070{\times}10^5$; $100{\times}(1.0199{\times}10^5 - 1.070{\times}10^5)/1.070{\times}10^5 = 4.68\,\%$

$B_{BE} = 3.5662{\times}10^4 <=> 3.739{\times}10^4$; $100{\times}(3.739{\times}10^4 - 3.5662{\times}10^4)/3.739{\times}10^4 = 4.62\,\%$

[35] Raamatus [Bõt62] toodud valemeid on täiendatud varda kooldejäikusega $i_{1\omega} = EI_{1\omega}/l_1$ (vt arvutiprogramme Naide4_6Udef.m ja Naide4_6Uforce.m).

Joonisel 3.16 on hõreda maatriksi muster (hõreda maatriksi spA(48,48) nullist erinevate elementide asukohad).



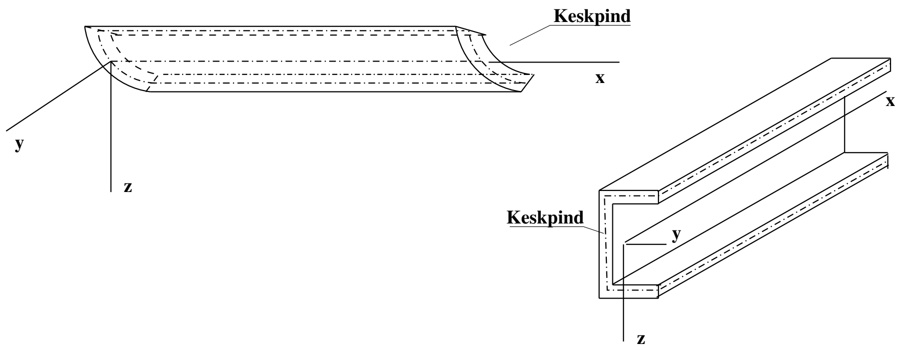
Joonis 3.16. Π-tala hõreda maatriksi spA muster

A. Õhukeseseinalise varda ristlõike geomeetrilised karakteristikud

Õhukeseseinalise varda ristlõike geomeetrilised karakteristikud on:

- sektorkoordinaat (sks Sektorkoordinate, ingl sectorial coordinate, vn секториальная координата);
- staatiline sektormoment (sks statisches Sektormoment, ingl sectorial statical moment, vn секториальный статический момент);
- sektortsentrifugaalmoment (sks Sektorzentrifugalmoment, ingl sectorial centrifugal moment of inertia, vn секториальный центробежный момент инерции);
- sektorinertsimoment (sks Sektorträgheitsmoment, ingl sectorial moment of inertia, vn секториальный момент инерции).

Õhukeseseinalise varda keskpinna ja ristlõike lõikejoont nimetame *keskjooneks* ehk *profiiljooneks* (jn A.1).



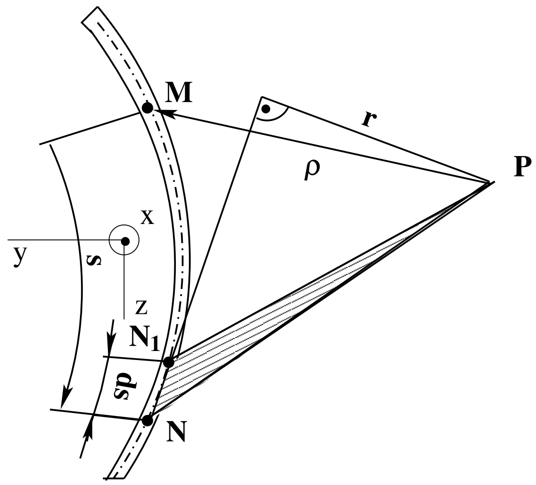
Joonis A.1. Keskjoon

A.1 Sektorkoordinaat

Õhukeseseinalise varda ristlõikest väljaspool võtame kasutusele punkti P (jn A.2), mida nimetame pooluseks. Keskjoonel valime koordinaadi alguspunktiks M. Raadiusvektor ρ määrab punkti M asukoha keskjoonel.

Meelevaldse punkti N asukoha keskjoonel saame avaldada määratud integraaliga:

$$\omega_N = \int_{s_1}^{s_2} r \mathrm{d}s \tag{A.1}$$



Joonis A.2. Sektorpindala

kus

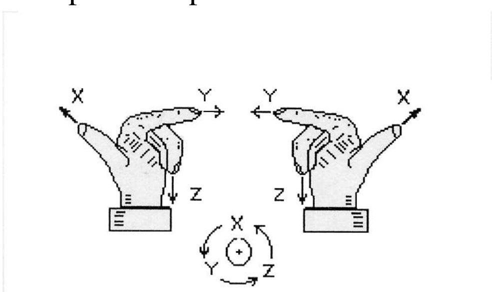
ω – sektorpindala e sektorkoordinaat;

r – pooluse P kaugus keskjoone puutujast, mis läbib punkti N;

$\mathrm{d}s$ – keskjoone diferentsiaal.

Integraalis olev suurus $r\mathrm{d}s$ on võrdne kolmnurga PN_1N kahekordse pindala-ga.Keskjoonega eraldatud sektorisse $\angle$ MPN jääva kujundi kahekordne pindala on võrdne sektorkoordinaadiga ω_N (A.1).

Võtame kasutusele parema käe teljestiku (jn A.3), mille puhul raadiusvektori ρ pööre vastupäeva on positiivne.



Joonis A.3. Vasaku ja parema käe teljestik

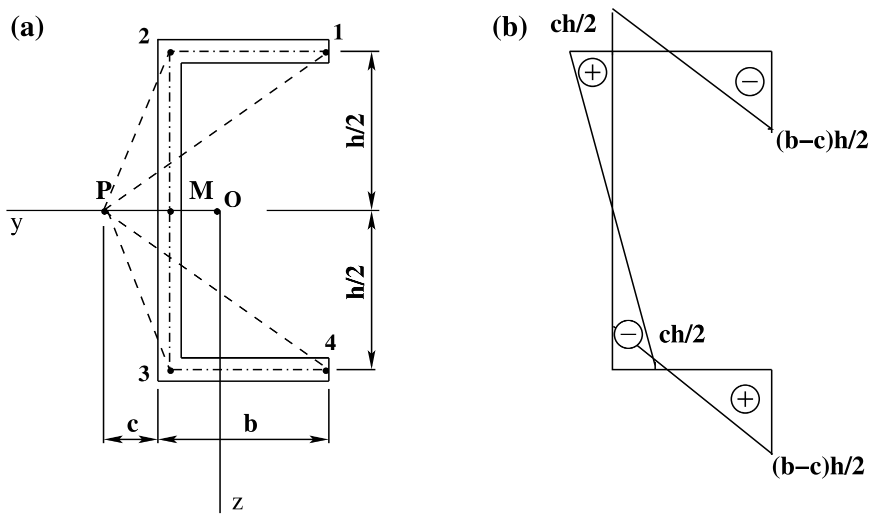
Joonisel on näidatud positiivse pöördenurga suund. Vaadates telje positiivsest otsast, loeme pöörde positiivseks z-teljest x-telje suunas, x-teljest y-telje suunas ja y-teljest z-telje suunas.

Sektorkoordinaadi muutuse õhukeseseinalise varda ristlõikes saab esitada graafikuna. Nimetame seda graafikut sektorkoordinaatide epüüriks. Kõverjoonelise keskjoone puhul on sektorkoordinaat mittelineaarne funktsioon muutujast s ja tema graafik on kõverjooneline. Keskjoone sirgjoonelisele osale vastav sektorkoordinaat on lineaarne funktsioon muutujast s.

Näide A.1 (sektorkoordinaat). *Arvutada joonisel A.4a kujutatud õhukeseseinalise varda ristlõike sektorkoordinaadid ja koostada ristlõike sektorkoordinaatide epüür.*

Valime pooluseks punkti P ja sektorkoordinaadi alguspunktiks M ($\omega_M = 0$). Arvutame punktide 1, 2, 3 ja 4 sektorkoordinaadid (raadiusvektori ϱ pööre vastupäeva on positiivne).

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2 \cdot \triangle PM2 - 2 \cdot \triangle P21 = ch/2 - bh/2 = -(b-c)h/2 \\ \omega_2 &= 2 \cdot \triangle PM2 = ch/2 \\ \omega_3 &= -2 \cdot \triangle PM3 = -ch/2 \\ \omega_4 &= -2 \cdot \triangle PM3 + 2 \cdot \triangle P34 = -ch/2 + bh/2 = (b-c)h/2 \end{aligned} \tag{A.2}$$



Joonis A.4. Sektorkoordinaat

Leitud sektorkoordinaatide väärtuste (A.2) põhjal koostame ristlõike sektorkoordinaatide epüüri (jn A.4b).

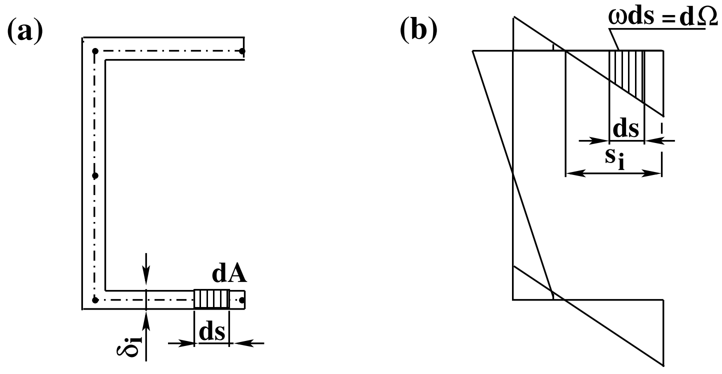
A.2 Staatiline sektormoment

Õhukeseseinalise varda ristlõike pinnaelemendi staatiliseks sektormomendiks nimetatakse pinnaelemendi dA ja sektorkoordinaadi ω korrutist. Kogu kujundi staatiline sektormoment S_ω määratakse integraalina pindala A ulatuses:

$$S_\omega = \int_A \omega \mathrm{d}A \tag{A.3}$$

Kui ristlõikes leidub sirgeid lõike ühtlase paksusega δ_i, siis staatilise sektormomendi arvutus lihtsustub. Sel juhul avaldub keskjoone elemendi ds pikkusele vastav pinnaelement dA (jn A.5a) kujul

$$dA = \delta_i ds \tag{A.4}$$



Joonis A.5. Staatiline sektormoment

Nüüd saame avaldada staatilise sektormomendi (A.3):

$$S_\omega = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \int_{s_i} \omega \mathrm{d}s \tag{A.5}$$

Leiame staatilise sektormomendi epüüri (jn A.5b) pindala diferentsiaali $\mathrm{d}\Omega$ seosega

$$\mathrm{d}\Omega = \omega \mathrm{d}s \tag{A.6}$$

Õhukeseseinalise varda ristlõike ühtlase paksusega lõikude puhul saab staatilise sektormomendi arvutada avaldisega

$$S_\omega = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \Omega_i \tag{A.7}$$

Näide A.2 (staatiline sektormoment). *Arvutada joonisel A.6a näidatud õhukeseseinalise varda ristlõikest lõikega I–I eraldatud osa staatiline sektormoment.*

Esmalt leiame staatilise sektormomendi punktides 1, 2, 3 ja 4:

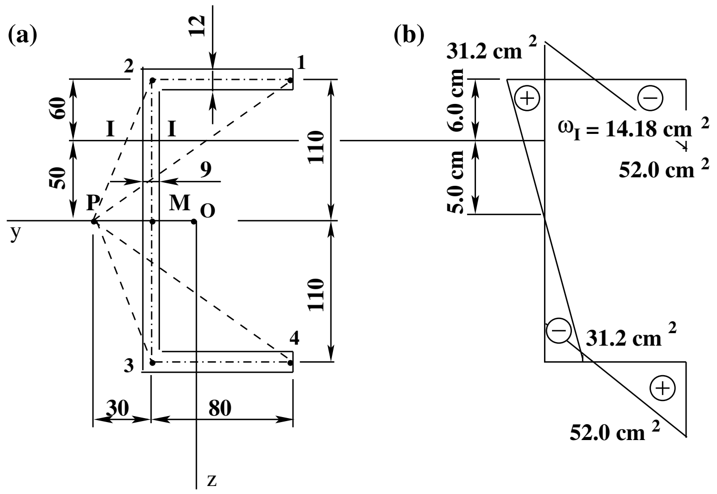
$$\begin{aligned}
\omega_M &= 0 \\
\omega_1 &= 2 \cdot \triangle PM2 - 2 \cdot \triangle P21 = 3.0\,(11.0 - 0.6) - 8.0\,(11.0 - 0.6) = -52.0\,\mathrm{cm}^2 \\
\omega_2 &= 2 \cdot \triangle PM2 = 3.0\,(11.0 - 0.6) = 31.2\,\mathrm{cm}^2 \\
\omega_3 &= -2 \cdot \triangle PM3 = -3.0\,(11.0 - 0.6) = -31.2\,\mathrm{cm}^2 \\
\omega_4 &= -2 \cdot \triangle PM3 + 2 \cdot \triangle P34 = -3.0\,(11.0 - 0.6) + 8.0\,(11.0 - 0.6) = 52.0\,\mathrm{cm}^2
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Sektorkoordinaadi lõikes I–I (jn A.6a) saame sarnastest kolmnurkadest (jn A.6b):

$$\omega_{I-I} = 31.2 \cdot 5.0/11.0 = 14.182\,\mathrm{cm}^2 \tag{A.9}$$

Staatiline sektormoment lõikes I–I

$$S_\omega = \sum_{i=1}^{2} \delta_i \Omega_i = 1.2\,\frac{31.2 - 52.0}{2}\,8.0 + 0.9\,\frac{31.2 + 14.182}{2}\,6.0 = 22.691\,\mathrm{cm}^4 \tag{A.10}$$



Joonis A.6. Staatiline sektormoment lõikes I–I

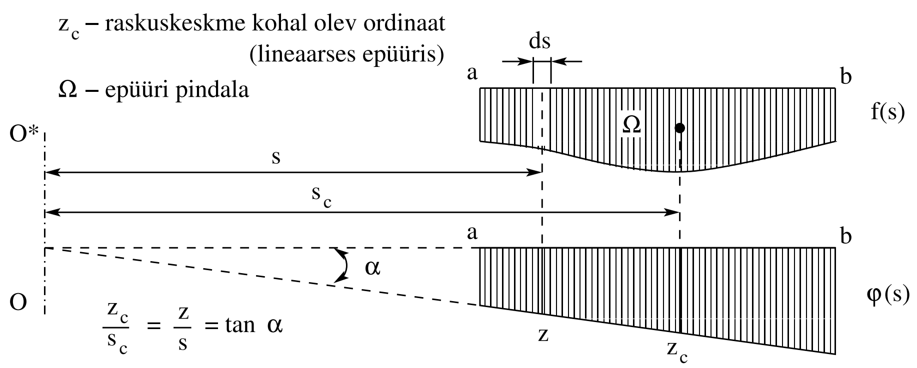
A.2.1 Vereštšagini võte

Vereštšagini[1] võtet integraali arvutamisel saab kasutada, kui üks epüüridest on lineaarne. Joonisel A.7 kujutatud lineaarse epüüri ordinaadi φ_s saab avaldada seosest $\varphi(s) = z = s \tan\alpha$. Integraali teisendame kujule

$$I = \int_a^b f(s)\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s = \tan\alpha \int_a^b s\,f(s)\,\mathrm{d}s \tag{A.11}$$

Epüüri $f(s)$ staatiline moment telje OO^* suhtes

$$\Omega\, s_c = \int_a^b s\,f(s)\,\mathrm{d}s \tag{A.12}$$



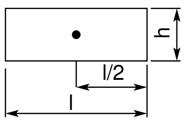
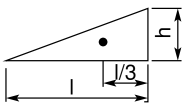
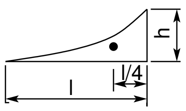
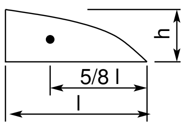
Joonis A.7. Vereštšagini võte

[1] A. K. Vereštšagin, Moskva Raudteetranspordi Inseneride Instituudi üliõpilane, esitas selle valemi 1925. aastal.

Integraalis (A.11) asendame $\int_a^b s\, f(s)\, \mathrm{d}s$ avaldisega (A.12). Jooniselt A.7 näeme, et $s_c \tan\alpha = z_c$, kus z_c on *lineaarselt* muutuvas epüüris $\varphi(s)$ epüüri $f(s)$ pindala Ω raskuskeskme kohal olev ordinaat. Eelnenut arvesse võttes avaldame integraali (A.11) järgmiselt:

$$I = \int_a^b f(s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s = \Omega\, z_c \tag{A.13}$$

Seega on epüüride $\varphi(s)$, $f(s)$ ordinaatide korrutise integraal lõigul $[a, b]$ võrdne korrutisega, mille üheks teguriks on epüüri pindala Ω ja teiseks teguriks lineaarselt muutuvas epüüris ordinaat z_c, mis on kohakuti pindala Ω raskuskeskmega (jn A.7). Korrutis $\Omega\, z_c$ on positiivne, kui koormusest põhjustatud epüür $f(s)$ ja ordinaat z_c on sama märgiga. Joonisel A.8 on näidatud lihtsate epüüride pindalad ja nende raskuskeskmete kaugused. Epüüri raskuskeskme arvutamise asemel on lihtsam kasutada Simpsoni valemit.

Epüüri kuju	Epüüri pindala	Raskuskeskme kaugus
	l h	(1/2)l
	(1/2) h	(1/3) l
	(1/3) h	(1/4) l
	(2/3) h	(5/8)l

Joonis A.8. Epüüride pindalad

A.2.2 Simpsoni valem

Simpsoni[2,3]. valemi puhul jagame *pideva funktsiooni* $f(x)$ integreerimisel lõigu $[a, b]$ pikkusega *l* pooleks (*l/2* ja *l/2*). Siis

$$I = \int_a^b f(s)\, \mathrm{d}s = \frac{l}{6}\left[f(a) + 4 \cdot f(c) + f(b)\right] \tag{A.14}$$

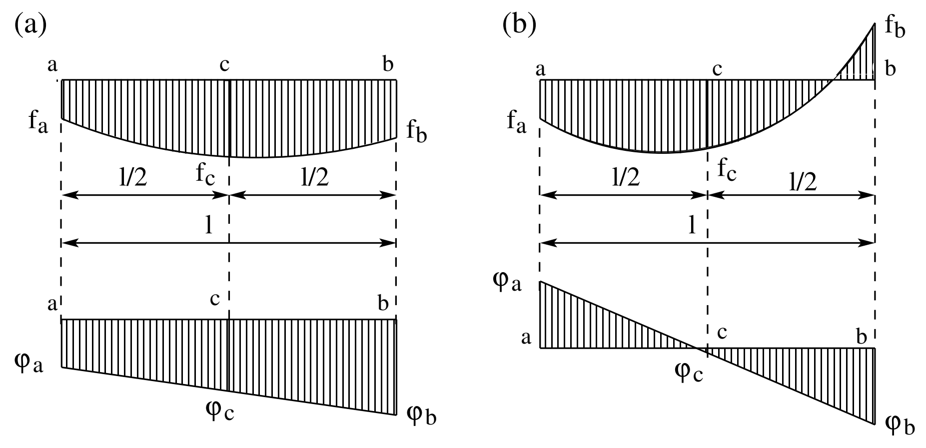
kus

$f(a)$ – funktsiooni väärtus lõigu alguses;
$f(c)$ – funktsiooni väärtus lõigu keskel;
$f(b)$ – funktsiooni väärtus lõigu lõpus.

Simpsoni valem (A.14) annab täpse tulemuse kuni kuuppolünoomini. Integreerimisvahemiku *a–b* jagamisel paarisarvuliseks *n* võrdseks osaks $\Delta s = l/n$ võtab Simpsoni valem kuju

$$\begin{aligned} I = \int_a^b f(s)\, \mathrm{d}s \quad \approx \quad & \frac{\Delta s}{3}\left[f_0 + 4 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + 4 \cdot f_3 + 2 \cdot f_4 + \ldots \right. \\ & \left. \ldots + 2 \cdot f_{n-2} + 4 \cdot f_{n-1} + f_n\right] \end{aligned} \tag{A.15}$$

[2] Thomas Simpson (1710–1761), inglise matemaatik.
[3] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Simpson.html



Joonis A.9. Märgid Simpsoni valemis

Joonisel A.9a on funktsioonide $f(s)$ ja $\varphi(s)$ epüüride ordinaadid sama märgiga. Joonisel A.9b on funktsioonide ordinaatidel epüüride otstes erinevad märgid. Korrutise integraali arvutamiseks rakendame Simpsoni valemit (A.14)

$$I = \int_a^b f(s)\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s = \frac{l}{6}\left[\varphi_a f_a + 4\cdot\varphi_c f_c + \varphi_b f_b\right] \tag{A.16}$$

Siin on korrutised $\varphi_a f_a$, $\varphi_c f_c$ ja $\varphi_b f_b$ positiivsed, kui epüüride ordinaadid on varda samal poolel, ja negatiivsed, kui epüüride ordinaadid on vastandmärkidega. Näiteks joonisel A.9b on lõigu algul (punktis a) ja lõpus (punktis b) epüüride ordinaatide korrutis negatiivne, kuna ordinaadid on suunatud eri poole. Lõigu keskel (punktis c) on ordinaatide korrutis positiivne. Simpsoni valem (A.16) annab täpse tulemuse lineaarsete epüüride ning lineaarse ja ruutparaboolse epüüri korrutamisel. Kõrgemat järku epüüride puhul tuleb kasutada Simpsoni 3/8-valemit (A.22).

Numbrilisel integreerimisel Simpsoni valemiga (A.16) kasutame arvutusprogrammi *GNU Octave*. Korrutame vektorid **a** (A.17) ja **b** (A.18) elementide kaupa (Hadamard'i[4] korrutis)[5]. Korrutamise tulemuseks on avaldis (A.19).

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix}\varphi_a & \varphi_c & \varphi_b\end{bmatrix} \tag{A.17}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix}f_a & f_c & f_b\end{bmatrix} \tag{A.18}$$

$$\mathbf{a}.^{*}\mathbf{b} = \begin{bmatrix}\varphi_a\cdot f_a & \varphi_c\cdot f_c & \varphi_b\cdot f_b\end{bmatrix} \tag{A.19}$$

Võtame kasutusele Simpsoni valemi kordajaid sisaldava vektori **spH**, mille transponeeritud kuju on

$$\mathbf{spH}' = \frac{l}{6}\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\end{bmatrix} \tag{A.20}$$

[4] Jacques Salomon Hadamard (1865–1963), prantsuse matemaatik.
[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Hadamard_product_%28matrices%29

Elementi elemendiga korrutades saadud tulemuse (A.19) korrutame skalaarselt vektoriga (A.20). Tulemuseks on Simpsoni valem (A.16)

$$\mathbf{a}.^{*}\mathbf{b}\cdot\mathbf{spH} \;=\; \frac{l}{6}\left[\varphi_a\cdot f_a \quad \varphi_c\cdot f_c \quad \varphi_b\cdot f_b\right]\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix} = \frac{l}{6}\left[\varphi_a f_a + 4\cdot\varphi_c f_c + \varphi_b f_b\right] \quad \text{(A.21)}$$

A.2.3 Simpsoni 3/8-valem

Kasutades Simpsoni 3/8-valemit pideva funktsiooni $f\,(x)$ integreerimisel, jagame lõigu $[a, b]$ pikkusega l kolmeks ($l/3$, $l/3$ ja $l/3$):

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = \frac{l}{8}\left[f\,(a) + 3\cdot f\,(c) + 3\cdot f\,(d) + f\,(b)\right] \quad \text{(A.22)}$$

kus

$f\,(a)$ – funktsiooni väärtus lõigu alguses;
$f\,(c)$ – funktsiooni väärtus $\frac{1}{3}$ lõigul;
$f\,(d)$ – funktsiooni väärtus $\frac{2}{3}$ lõigul;
$f\,(b)$ – funktsiooni väärtus lõigu lõpus.

A.3 Sektortsentrifugaalmomendid

Õhukeseseinalise varda ristlõike sektortsentrifugaalmoment pinnakeset läbiva keskpeatelje y või z suhtes avaldub integraalina

$$I_{\omega\,y} = \int_A z\,\omega\,\mathrm{d}A, \qquad I_{\omega\,z} = \int_A y\,\omega\,\mathrm{d}A \quad \text{(A.23)}$$

kus

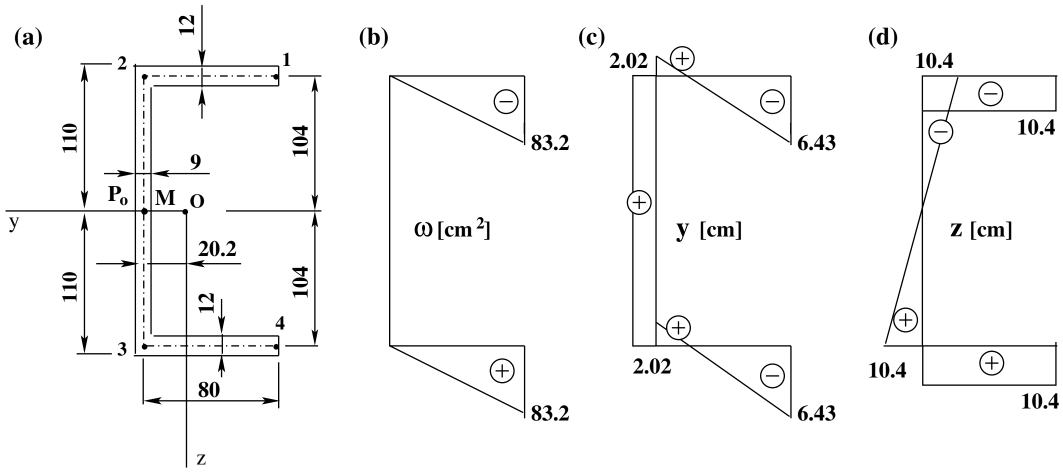
ω – sektorpindala e sektorkoordinaat;
A – ristlõike pindala.

Kui ristlõikes on lõike ühtlase paksusega δ_i, siis staatilise sektormomendi arvutus lihtsustub. Keskjoone elemendi ds pikkusele vastava pinnaelemendi dA pindala on siis $\delta_i \mathrm{d}s$.

$$I_{\omega\,y} = \sum_{i=1}^{n}\delta_i\int_{s_i} z\,\omega\,\mathrm{d}s, \qquad I_{\omega\,z} = \sum_{i=1}^{n}\delta_i\int_{s_i} y\,\omega\,\mathrm{d}s \quad \text{(A.24)}$$

Siinsed integraalid võib arvutada Vereštšagini võttega (A.13) või Simpsoni valemiga (A.16). Viimasel juhul tuleb koostada funktsioonide $\omega\,(s)$, $y\,(s)$ ja $z\,(s)$ graafikud (epüürid).

Näide A.3 (sektortsentrifugaalmomendid). *Arvutada joonisel A.10a kujutatud õhukeseseinalise varda ristlõike sektortsentrifugaalmoment y- ja z-telje suhtes.*



Joonis A.10. Sektortsentrifugaalmoment

Pooluse P_o ja koordinaadi alguspunkti M valime keskjoonel nii, nagu on näidatud joonisel A.10a. Pooluse P_o selline valik võimaldab arvutust lihtsustada. Punkti 1 sektorkoordinaat $\omega_1 = -8.0 \cdot 10.4 = -83.2\,\mathrm{cm}^2$.

Ristlõike pinnakeskme asukoha leidmiseks arvutame esmalt ristlõike pindala A:

$$A = 2\,(8.0 - 0.45)\,1.2 + 22 \cdot 0.9 = 37.92\,\mathrm{cm}^2 \tag{A.25}$$

Ristlõike pinnakeskme kaugus y_o vertikaalsest keskjoonest

$$y_o = 2\,(8.0 - 0.45)\,1.2\,(8 + 0.45)\,/\,(2 \cdot 37.92) = 2.0189\,\mathrm{cm} \tag{A.26}$$

Joonisel A.10a on ristlõike keskpeateljed y ja z. Nende telgede suhtes sektortsentrifugaalmomenti arvutades kasutame Vereštšagini võtet (A.13).

$$I_{\omega\,z} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \int_{s_i} y\,\omega\,\mathrm{d}s = 0 \tag{A.27}$$

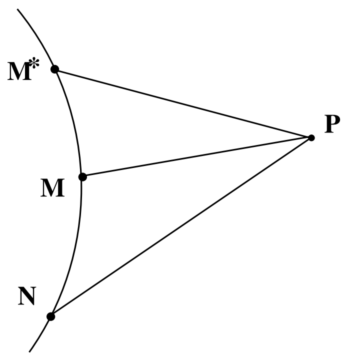
$$I_{\omega\,y} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \int_{s_i} z\,\omega\,\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{3} \delta_i\, z_c\,\Omega = 2 \cdot 1.2 \cdot 10.4\,(8 \cdot 83.2)\,/2 = 8\,306.7\,\mathrm{cm}^5 \tag{A.28}$$

A.4 Sektorkoordinaadi teisendused

Vaatleme sektorkoordinaadi alguspunkti ja pooluse teisendust.

A.4.1 Sektorkoordinaadi alguspunkti muutmine

Vaatame, kuidas muutub keskjoonel asuva punkti N (jn A.11) sektorkoordinaat ω tema alguspunkti M* üleviimisel punkti M (parema käe teljestiku puhul on raadiusvektori pööre vastupäeva positiivne).



Joonis A.11. Sektorkoordinaadi alguspunkti muutmine

Punkti N sektorkoordinaat alguspunktiga M*

$$\omega_N^* \;=\; 2 \cdot \triangle PM^*N \tag{A.29}$$

punkti M sektorkoordinaat alguspunktiga M*

$$\omega_M^* \;=\; 2 \cdot \triangle PM^*M \tag{A.30}$$

ning punkti N sektorkoordinaat alguspunktiga M

$$\omega_N \;=\; 2 \cdot \triangle PMN - 2 \cdot \triangle PM^*M = \omega_N^* - \omega_M^* \tag{A.31}$$

Märgid avaldises (A.31) kehtivad raadiusvektori pöördel vastupäeva.

A.4.2 Sektorkoordinaadi pooluse muutmine

Vaatame, kuidas muutub sektorkoordinaat ω tema pooluse P_o üleviimisel punkti P (jn A.12a). Võtame kasutusele parema käe teljestiku, mille puhul on raadiusvektori pööre vastupäeva positiivne.

Sektorkoordinaadi diferentsiaalid $\mathrm{d}\omega_{P_o}$ (poolus P_o) ja $\mathrm{d}\omega_P$ (poolus P):

$$\mathrm{d}\omega_{P_o} \;=\; r_o \mathrm{d}s \tag{A.32}$$

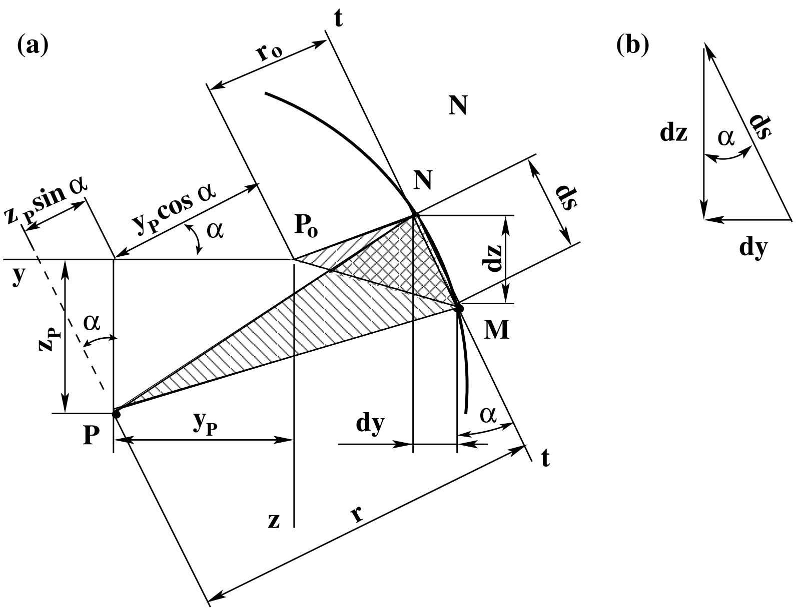
$$\mathrm{d}\omega_P \;=\; r \mathrm{d}s \tag{A.33}$$

Joonisel A.12a näeme, et

$$r = r_o + z_P \sin\alpha + y_P \cos\alpha \tag{A.34}$$

kus α tähistab nurka keskjoone puutuja $t - t$ (punktis M) ja z-telje vahel. Joonisel A.12b saame seosed

$$dy = ds \sin\alpha, \qquad dz = -\,ds \cos\alpha \tag{A.35}$$



Joonis A.12. Sektorkoordinaadi pooluse muutmine

Siit leiame

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \qquad \cos\alpha = -\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} \tag{A.36}$$

Saadud seosed asetame avaldisse (A.34):

$$r = r_o + z_P \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - y_P \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} \tag{A.37}$$

Sektorkoordinaadi diferentsiaali $\mathrm{d}\omega_P$ (A.33) kirjutame kujul

$$\mathrm{d}\omega = r\,\mathrm{d}s = r_o\mathrm{d}s + z_P\,\mathrm{d}y - y_P\,\mathrm{d}z \tag{A.38}$$

ehk

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega_o + z_P\,\mathrm{d}y - y_P\,\mathrm{d}z \tag{A.39}$$

Avaldist (A.39) integreerides saame

$$\omega = \omega_o + z_P\,y - y_P\,z + C \tag{A.40}$$

kus *C* on integreerimiskonstant.

A.5 Lõikekese

Poolust, mille puhul sektortsentrifugaalmomendid $I_{\omega\,y}$, $I_{\omega\,z}$ on võrdsed nulliga, nimetatakse lõikekeskmeks [KMPR12, lk 233] (sks Schubmittelpunkt, ingl shear center, vn центр изгиба).

$$I_{\omega\,y} = \int_A \omega\,z\,\mathrm{d}A = \int_A (\omega_o + z_P\,y - y_P\,z + C)\,z\,\mathrm{d}A = 0 \tag{A.41}$$

$$I_{\omega\,z} = \int_A \omega\,y\,\mathrm{d}A = \int_A (\omega_o + z_P\,y - y_P\,z + C)\,y\,\mathrm{d}A = 0 \tag{A.42}$$

Kasutatud on ka terminit paindekese [Jür85, lk 229]. Varda lõikekeskmeid ühendavat joont nimetame elastseks teljeks (sks Schubmittelachse, ingl elastic axis e line of shear centers, vn линия центров изгиба).

Õhukeseseinalise varda pinnakeskmes võtame kasutusele parema käe teljestiku, kus y ja z on peateljed. Sel juhul võrduvad nulliga nii ristlõikepinna staatilised momendid S_y ja S_z kui ka tsentrifugaalmoment $I_{y\,z}$:

$$S_y = \int_A z\,\mathrm{d}A = 0, \qquad S_z = \int_A y\,\mathrm{d}A = 0 \tag{A.43}$$

$$I_{y\,z} = \int_A y\,z\,\mathrm{d}A = 0, \qquad I_{z\,y} = \int_A z\,y\,\mathrm{d}A = 0 \tag{A.44}$$

$$\underbrace{\int_A \omega_o y\,\mathrm{d}A}_{I_{\omega_o\,z}} + z_P \underbrace{\int_A y^2\,\mathrm{d}A}_{I_z} - y_P \underbrace{\int_A z\,y\,\mathrm{d}A}_{I_{zy}=0} + C \underbrace{\int_A y\,\mathrm{d}A}_{S_z=0} = 0 \tag{A.45}$$

$$\underbrace{\int_A \omega_o z\,\mathrm{d}A}_{I_{\omega_o\,y}} + z_P \underbrace{\int_A y\,z\,\mathrm{d}A}_{I_{yz}=0} - y_P \underbrace{\int_A z^2\,\mathrm{d}A}_{I_y} + C \underbrace{\int_A z\,\mathrm{d}A}_{S_y=0} = 0 \tag{A.46}$$

Tingimusi (A.43) ja (A.44) arvestades leiame võrranditest (A.45) ja (A.46) lõikekeskme koordinaadid z_P ja y_P:

$$z_P = -\frac{\int_A \omega_o y\,\mathrm{d}A}{\int_A y^2\,\mathrm{d}A} = -\frac{I_{\omega_o\,z}}{I_z} \tag{A.47}$$

$$y_P = \frac{\int_A \omega_o z\,\mathrm{d}A}{\int_A z^2\,\mathrm{d}A} = \frac{I_{\omega_o\,y}}{I_y} \tag{A.48}$$

Valemeid (A.47) ja (A.48) kasutatakse ka siis, kui esialgne poolus P_0 ei asu pinnakeskmes. Nüüd tuleb nende abil leitud lõikekeskme koordinaatidele z_P, y_P lisada pooluse P kaugus pinnakeskmest.

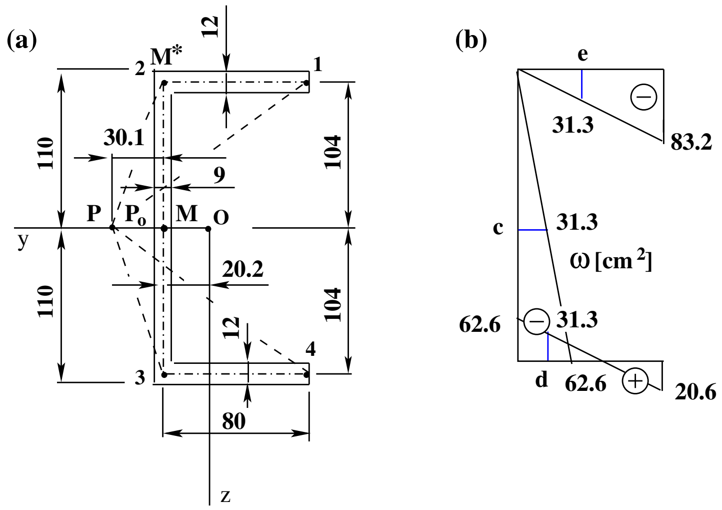
Kui ristlõikepinnal on sümmeetriatelg, siis asub pinna lõikekese sellel teljel.

Näide A.4 (õhukeseseinalise varda lõikekese). *Arvutada joonisel A.13a kujutatud õhukeseseinalise varda ristlõike lõikekese. Ristlõikepinnal on sümmeetriatelg y, millel asub lõikekese y_P ($z_P = 0$). Ristlõikepinna sektortsentrifugaalmomendid $I_{\omega\,z} = 0$ (A.27) ja $I_{\omega\,y} = 8\,306.7\,\mathrm{cm}^5$ (A.28).*

Leiame ristlõike inertsimomendi I_y ja lõikekeskme koordinaadi y_P:

$$I_y = 2\cdot\frac{7.55\cdot 1.2^3}{12} + 2\cdot 1.2\cdot 7.55\cdot 10.4^2 + \frac{0.9\cdot 22.0^3}{12} = 2\,760.6\,\mathrm{cm}^4 \tag{A.49}$$

$$y_P = \frac{I_{\omega_o\,y}}{I_y} = \frac{8\,306.7}{2\,760.6} = 3.01\,\mathrm{cm} \tag{A.50}$$



Joonis A.13. Sektorkoordinaadi nullpunktid

Lõikekeskme P kaugus keskjoonest on $3.01\,\mathrm{cm}$*. Ristlõike keskme O ja lõikekeskme P vaheline kaugus on* $3.01 + 2.02 = 5.03\,\mathrm{cm}$ *($y_o = 2.0189\,\mathrm{cm}$ (A.26)).*

Punktide 1, 2, 3 ja 4 (jn A.13b) sektorkoordinaadid:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= -2 \cdot \triangle P21 = -8.0 \cdot 10.4 = -83.2\,\mathrm{cm}^2 \\
\omega_2 &= 0.0 \\
\omega_3 &= -2 \cdot \triangle P23 = -3.009 \cdot 20.8 = -62.587\,\mathrm{cm}^2 \\
\omega_4 &= -2 \cdot \triangle P23 + 2 \cdot \triangle P34 = -62.587 + 8.0 \cdot 10.4 = 20.613\,\mathrm{cm}^2
\end{aligned} \tag{A.51}$$

A.6 Sektorkoordinaadi peanullpunkt

Sektorkoordinaadi nullpunktiks nimetatakse sellist sektorkoordinaadi alguspunkti, mille puhul kogu kujundi staatiline sektormoment võrdub nulliga:

$$S_\omega = \int_A \omega \mathrm{d}A = 0 \tag{A.52}$$

Valime pooluse lõikekeskmesse P (jn A.13a). Paigutame sektorkoordinaadi alguspunkti M^* punkti 2. Olgu otsitava sektorkoordinaadi nullpunkt M, siis tema sektorkoordinaat on ω_M.

$$\int_A (\omega_N - \omega_M)\,\mathrm{d}A = 0 \tag{A.53}$$

Nullpunkti sektorkoordinaat ω_M on konstantne suurus, mille võib tuua integraalimärgi alt välja:

$$\int_A \omega_N \mathrm{d}A - \omega_M \int_A \mathrm{d}A = 0 \tag{A.54}$$

Siit leiame nullpunkti sektorkoordinaadi

$$\omega_M = \frac{\int_A \omega_N \mathrm{d}A}{\int_A \mathrm{d}A} = \frac{S_\omega}{A} \tag{A.55}$$

Sektorkoordinaadi nullpunkte võib olla mitu. Peanullpunkt on lõikekeskmele kõige lähemal. Kui ristlõikekujundil on sümmeetriatelg, siis peanullpunkt asub sellel teljel.

Näide A.5 (sektorkoordinaadi peanullpunkt). *Leida joonisel A.13a toodud õhukeseseinalise varda sektorkoordinaadi peanullpunkt. Valime pooluse lõikekeskmesse P ja sektorkoordinaadi alguspunkti M^* punkti 2 (jn A.13a, kus raadiusvektori pööre vastupäeva on positiivne). Ristlõikekujundi staatilise sektormomendi S_ω arvutame avaldise (A.7) järgi, kus Ω_i on epüüri ω (jn A.13b) pindala.*

$$S_\omega = \sum_{i=1}^{3} \delta_i \Omega_i = 1.2 \frac{(-83.2 - 62.59 + 20.6)\, 8.0}{2} - 0.9 \frac{62.59 \cdot 20.8}{2} = -1\,186.8\,\mathrm{cm}^4 \tag{A.56}$$

Ristlõikekujundi pindala

$$A = 1.2 \cdot 8.0 \cdot 2 + 0.9 \cdot 20.8 = 37.92\,\mathrm{cm}^2 \tag{A.57}$$

Sektorkoordinaadi nullpunkt

$$\omega_M = \frac{S_\omega}{A} = \frac{-1\,186.8}{37.92} = -31.3\,\mathrm{cm}^2 \tag{A.58}$$

Sektorkoordinaadi epüürilt (jn A.13b) näeme, et $\omega = -31.3\,\mathrm{cm}$ punktides c, d, e. Kõige lähemal lõikekeskmele P (jn A.13a) on ristlõike sümmeetriateljel asuv punkt c, mis on seega sektorkoordinaadi peanullpunkt.

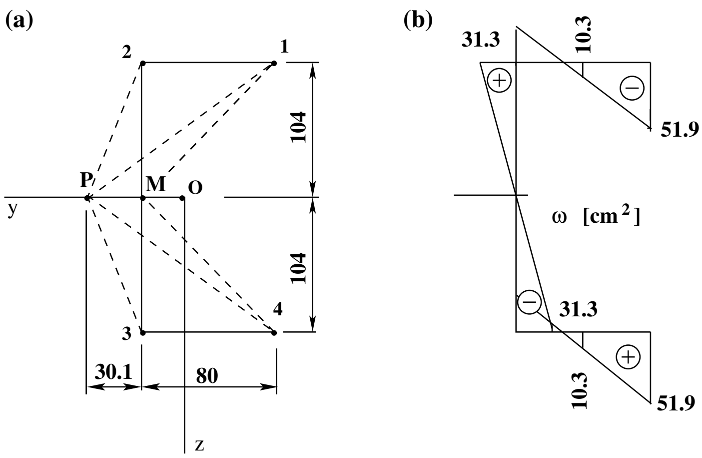
A.7 Peasektorkoordinaadid

Peasektorkoordinaatideks nimetatakse sektorkoordinaate, mille poolus on lõikekeskmes ja alguspunkt peanullpunktis. Peasektorkoordinaatide epüür on joonisel A.14b.

Näide A.6 (peasektorkoordinaatide epüür). *Koostada joonisel A.14a kujutatud õhukeseseinalise varda ristlõike keskjoone peasektorkoordinaatide epüür. Poolus asub punktis P ja peanullpunkt punktis M ($\omega_M = 0$). Valime parema käe teljestiku, mille puhul on raadiusvektori pööre vastupäeva positiivne.*

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= 2 \cdot \triangle PM2 = 3.01 \cdot 10.4 = 31.304\,\mathrm{cm}^2 \\
\omega_1 &= 2 \cdot \triangle PM2 - 2 \cdot \triangle P21 = 3.516 - 8 \cdot 10.4 = -51.896\,\mathrm{cm}^2 \\
\omega_3 &= -2 \cdot \triangle PM3 = -3.01 \cdot 10.4 = -31.304\,\mathrm{cm}^2 \\
\omega_4 &= -2 \cdot \triangle PM3 + 2 \cdot \triangle P34 = -31.304 + 8.0 \cdot 10.4 = 51.896\,\mathrm{cm}^2
\end{aligned} \tag{A.59}$$

Leitud tulemuste põhjal koostame peasektorkoordinaatide epüüri (jn A.14b).



Joonis A.14. Peasektorkoordinaadid

A.8 Sektorinertsimoment

Õhukeseseinalise varda ristlõike sektorinertsimoment I_ω on integraalina väljenduv summa:

$$I_\omega = \int_A \omega^2 \mathrm{d}A \tag{A.60}$$

Kui ristlõikes leidub sirgeid lõike ühtlase paksusega δ_i, siis sektorinertsimomendi arvutus lihtsustub:

$$I_\omega = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \int_{s_i} \omega^2 \omega \mathrm{d}s \tag{A.61}$$

Siin võib integreerimiseks rakendada Vereštšagini võtet (A.13) või Simpsoni valemit (A.16).

Näide A.7 (sektorinertsimoment). *Arvutada joonisel A.13 toodud ristlõike sektorinertsimoment I_ω. Peasektorkoordinaatide epüür on joonisel A.14b. Numbrilisel integreerimisel kasutame Simpsoni valemit (A.16). Eelnevalt leiame peasektorkoordinaatide epüüril keskmised väärtused $\omega_k = \pm(51.896 - 31.304)/2 = \pm 10.296\,\mathrm{cm}^2$.*

$$I_\omega = \sum_{i=1}^{3} \delta_i \int_{s_i} \omega^3 \mathrm{d}s = 2 \cdot 1.2 \cdot 8.0/6 \left(31.304^2 + 4 \cdot 10.296^2 + 51.896^2\right) +$$
$$2 \cdot 0.9 \cdot 10.4 \cdot 31.304^2/3 = 1.9226 \cdot 10^4\,\mathrm{cm}^6 \tag{A.62}$$

A.9 Valemid sektorinertsimomendi määramiseks

Õhukeseseinalise varda ristlõike sektorinertsimomendi I_ω, lõikekeskme kauguse *e* keskjoonest ja ristlõike väändeinertsimomendi I_t arvutamiseks kasutame valemeid tabelist „Properties of Sections"[6 7].

[6] http://www.steel-insdag.org/TeachingMaterial/Chapter17.pdf#page=2 (26.02.2014)
[7] http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/b16_chap7.pdf#page=8 (26.02.2014)

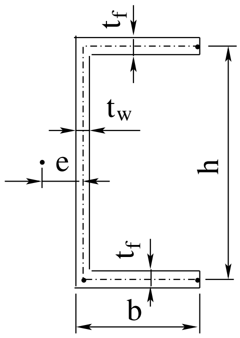
Näide A.8 (õhukeseseinaliste varraste ristlõike parameetrid). *Arvutame joonisel A.15 näidatud õhukeseseinalise varda lõikekeskme ja keskjoone vahekauguse e, väändeinertsimomendi*[8] I_t *ning ristlõike sektorinertsimomendi* I_ω*:*

$$e = \frac{3b^2t_f}{6bt_f + ht_w} \tag{A.63}$$

$$I_t = \frac{2bt_f^3 + ht_w^3}{3} \tag{A.64}$$

$$I_\omega = \frac{t_f b^3 h^2}{12}\,\frac{3bt_f + 2ht_w}{6bt_f + ht_w} \tag{A.65}$$

Arvutamisel rakendame GNU Octave'i programmi ohukeU(b,h,tf,tw). Programmis kasutatavad parameetrid b, h, tf ja tw on U-profiili (jn A.15) mõõtmed. Need võtame jooniselt A.13a: $b = 8\,\mathrm{cm}$, $h = 20.8\,\mathrm{cm}$, *vöö paksus* $tf = 1.2\,\mathrm{cm}$, *seina paksus* $tw = 0.9\,\mathrm{cm}$.



Joonis A.15. U-profiil

Arvutustulemused on toodud arvutuspäeviku väljavõttes A.1. Võrdleme saadud tulemusi näites A.4 leitud lõikekeskme ja keskjoone vahekaugusega $e = 3.01891\,\mathrm{cm}$ *(A.50) ning näites A.7 leitud sektorinertsimomendiga* $I_\omega = 1.9226 \cdot 10^4\,\mathrm{cm}^6$. *Võrdlus näitab, et programmiga arvutatud tulemused ühtivad näidetes leitutega.*

Väljavõte arvutuspäevikust A.1 (ohukeU.m)

```
octave:1> secU=ohukeU(8,20.8,1.2,0.9)
=========================================
       e       |        It    |      Iw
-----------------------------------------
secU =
   3.0189e+00    1.4270e+01   1.9226e+04
-----------------------------------------
octave:2>
```

[8] https://www.ioc.ee/~salupere/lk/elal_2014_ptk8_SirgeteVarrasteVaane_2.pdf#page=16 avaldis (8.60) (26.02.2014)

B. Töö õhukeseseinalise varda väändel

B.1 Väände töö

Õhukeseseinalise varda väändel tehtava töö avaldise saamiseks korrutame võrrandit

$$EI_\omega \frac{\mathrm{d}^4\theta}{\mathrm{d}x^4} - GI_t \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} - m_x(x) + b'_\omega(x) = 0 \tag{B.1}$$

suvalise väändenurgaga $\hat{\theta}(x)$ ja integreerime üle varda l:

$$\int_a^b \left(EI_\omega \frac{\mathrm{d}^4\theta}{\mathrm{d}x^4} - GI_t \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} \right) \hat{\theta}(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b \left(m_x(x) - b'_\omega(x) \right) \hat{\theta}(x)\, \mathrm{d}x \tag{B.2}$$

Saadud võrrandi parempoolne liige väljendab väliskoormuse tööd W_v väändel $\hat{\theta}$. Lisame koondkoormuse $M_{x\,i}$ töö ($M_{x\,i}\hat{\theta}_i$) varda telje punkti i siirdel $\hat{\theta}_i$. Seega

$$W_v = \int_a^b \left(m_x(x) - b'_\omega(x) \right) \hat{\theta}(x)\, \mathrm{d}x + M_{x\,i}\hat{\theta}_i \tag{B.3}$$

Nii nagu varda paindel [Lah12, lk 685], saame sise- ja rajajõudude töö avaldised võrrandi (B.2) vasakut poolt ositi integreerides (vt (1.38)).

Alustame võrrandi (B.2) vasaku poole esimesest liikmest:

$$\begin{aligned} \int_0^l \underbrace{\hat{\theta}}_{u} \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} EI_\omega \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} \right) \mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} = \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} EI_\omega \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} \right)}_{-T_\omega} \hat{\theta} \,\Big|_0^l - \\ \int_0^l \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \underbrace{\left(EI_\omega \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} \right)}_{-B_\omega} \underbrace{\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}x}}_{\hat{\theta}'} \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{B.4}$$

Nüüd integreerime avaldise (B.4) viimast liiget:

$$- \int_0^l \underbrace{\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}x}}_{u} \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(EI_\omega \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} \right) \mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} = - \underbrace{\left(EI_\omega \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} \right)}_{-B_\omega} \underbrace{\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}x}}_{\hat{\theta}'} \Big|_0^l + \int_0^l \underbrace{\left(EI_\omega \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} \right)}_{-B_\omega} \underbrace{\frac{\mathrm{d}^2\hat{\theta}}{\mathrm{d}x^2}}_{\hat{\theta}''} \mathrm{d}x \tag{B.5}$$

Võrrandi (B.2) vasaku poole teist liiget integreerides võtame u ja $\mathrm{d}v$ järgmiselt:

$$-\int_0^l \underbrace{\hat{\theta}}_{u} \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(GI_t\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} = -\underbrace{\left(GI_t\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right)}_{T_t}\hat{\theta}\ \Big|_0^l + \int_0^l \underbrace{\left(GI_t\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right)}_{T_t}\underbrace{\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}x}}_{\hat{\theta}'}\mathrm{d}x \tag{B.6}$$

Integreerime veel ositi võrrandi (B.2) parema poole teist liiget, võttes u ja $\mathrm{d}v$ järgmiselt:

$$-\int_0^l \underbrace{\hat{\theta}(x)}_{u}\underbrace{b'_\omega(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} = -b_\omega\hat{\theta}\ \Big|_0^l + \int_0^l b_\omega\,\hat{\theta}'\mathrm{d}x \tag{B.7}$$

Arvestades avaldisi (B.4), (B.5), (B.6) ja (B.7), võime võrrandi (B.2) esitada virtuaaltööde (passiivtööde) summana:

$$\underbrace{\left[(T_{sum}-b_\omega)\,\hat{\theta} - B_\omega\hat{\theta}'\right]\Big|_0^l}_{W_r -\ \text{rajajõudude töö}} \underbrace{-\int_0^l\left[T_t\hat{\theta}' - B_\omega\hat{\theta}''\right]\mathrm{d}x}_{W_s -\ \text{sisejõudude töö}} +$$
$$\underbrace{\int_a^b\Big(m_x(x)\,\hat{\theta}(x) + b_\omega(x)\,\hat{\theta}'(x)\Big)\,\mathrm{d}x + M_{x\,i}\hat{\theta}_i}_{W_k -\ \text{koormuse töö}} = 0 \tag{B.8}$$

Siin on arvestatud, et vabaväändemoment T_t ja kooldeväändemoment T_ω moodustavad koguväändemomendi $T_{sum} = T_t + T_\omega$.

Võttes arvesse, et rajajõudude töö W_r ja koormuse töö W_k summa moodustab välisjõudude töö $W_v = W_r + W_k$, saame elastsete varrassüsteemide energiateoreemi [Din11, lk 112]

$$W_s + W_v = 0 \tag{B.9}$$

sõnastuse: *sise- ja välisjõudude tööde summa võimalikel siiretel*[1] *võrdub nulliga*.

Rajajõudude töö avaldisele võib anda kuju

$$W_r = \left[(T_{sum}-b_\omega)\,\hat{\theta} - B_\omega\hat{\theta}'\right]\Big|_0^l = \left[(T_t+T_\omega)\,\hat{\theta} - b_\omega\hat{\theta} - B_\omega\hat{\theta}'\right]\Big|_0^l \tag{B.10}$$

Sisejõudude töö saab avaldada ka nii:

$$W_s = -\int_0^l\left[T_t\hat{\theta}' - B_\omega\hat{\theta}''\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x = -\int_0^l\frac{T_t\hat{T}_t}{GI_t}\mathrm{d}x - \int_0^l\frac{B_\omega\hat{B}_\omega}{EI_\omega}\mathrm{d}x \tag{B.11}$$

Siin on kasutatud vabaväändemomendi T_t ja bimomendi B_ω avaldisi

$$\hat{\theta}' = \frac{\hat{T}_t}{GI_t}, \qquad \hat{\theta}'' = -\frac{\hat{B}_\omega}{EI_\omega} \tag{B.12}$$

[1] http://www.mh.ttu.ee/jkirs/Anal%c3%bc%c3%bctiline-mehaanika/Anal%c3%bc%c3%bctiline-meh-1.docx (1.03.2016)

B.2 Varrassüsteemi rajaülesanne

Varrassüsteemi kuuluvad toed, sidemed ja jõud [Jür85, lk 6]. Välissidemeteks[2] nimetame varrassüsteemi kui terviku liikumist kitsendavaid tingimusi. [3]

Koormused[4] tekitavad välissidemetes toereaktsioone, kusjuures nii koormus kui ka toereaktsioonid (välisreaktsioonid) on välisjõud.

Välissidemetest (tugedelt) vabastamise printsiip kujutab tervikliku varrassüsteemi „tugedelt lahtilõikamist" ja nende mõju asendamist toesiirete ja toereaktsioonidega. Tugedele on ühed neist antud ja teised on tundmatud (vt rajajõudude töö (B.8)) ning määratakse ülesande lahendamisega. Toesiirdeid ja toepöördeid nimetatakse kinemaatilisteks, toereaktsioone aga staatilisteks rajaväärtusteks (sks Randwert, ingl boundary value, vn граничное значение e краевое значение).

Varrassüsteemi elemendid (vardad) on omavahel ühendatud sisesidemetega [Jür85, lk 9]. Süsteemi elemendi „lahtilõikamisel" asendame sisesidemed siirete ja reaktsioonidega. Viimaseid nimetatakse ka sisereaktsioonideks[5]. Varraste ühendussõlmedes määratakse siirete ja pöörete pidevustingimused. Tasakaalus olevas süsteemis on ka ühendussõlmed tasakaalus. Staatiline jõudude ülekanne[6] ühendussõlmes toimub kontaktjõududega[7], mille resultant on null. Sisesidemete siirdeid ja pöördeid nimetatakse kinemaatilisteks ning reaktsioone staatilisteks rajaväärtusteks.

Antud rajatingimustel (sks Randbedingung[8], ingl boundary condition, vn граничное условие e краевое условие) varrassüsteemi elementide diferentsiaalvõrranditele lahendite leidmist nimetame *varrassüsteemi rajaülesandeks* (sks Randwertproblem[9] e Randwertaufgabe, ingl boundary value problem[10], vn граничная задача e краевая задача).

Varrassüsteemi rajaülesande lahendamiseks võib kasutada EST-meetodit [Lah14][11].

[2] ./AJ_tugevus.djvu (3.12.2015)
[3] http://www.ioc.ee/~salupere/lk/Staatika_2006.pdf#page=10 (22.02.2016)
[4] https://www.ttu.ee/public/e/ehitusteaduskond/Instituudid/Ehitiste_projekteerimise_instituut/Oppematerjalid/Projekteerimise_alused/Sissejuh_Omak_Kasus.pdf#page=6 (22.02.2016)
[5] http://www.ce.memphis.edu/3121/notes/notes_04d.pdf (20.08.2013)
[6] https://de.wikipedia.org/wiki/Kraft%C3%BCbertragung (20.08.2013)
[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Contact_force (20.08.2013)
[8] https://de.wikipedia.org/wiki/Randbedingung (08.02.2016)
[9] https://de.wikipedia.org/wiki/Randwertproblem (08.02.2016)
[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Boundary_value_problem (08.02.2016)
[11] http://digi.lib.ttu.ee/i/?1717 (08.02.2016)

C. Põhivalemid

Esitame õhukeseseinalise tala painde ja takistatud väände ülekandevõrrandid maatrikskujul:

$$\mathbf{Z_L}\,(\mathbf{x}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z_A} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{C.1}$$

kus $\mathbf{Z_A}$, $\mathbf{Z_L}$ on vastavalt varda alguses ja lõpus olevad siirded, paindenurgad, põikjõud, paindemomendid, väändenurgad ja väändemomendid.

$$\mathbf{Z_A} = \begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ Q_A \\ M_A \\ \theta_A \\ T_{tA} \\ B_{\omega A} \\ T_{\omega A} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_L} = \begin{bmatrix} w_L \\ \varphi_L \\ Q_L \\ M_L \\ \theta_L \\ T_{tL} \\ B_{\omega L} \\ T_{\omega L} \end{bmatrix} \tag{C.2}$$

Ülekandemaatriks $\mathbf{U}$ teise märgikokkuleppe puhul on

$$\mathbf{U_{8\times 8}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U_{12}}_{\,(4\times 4)} & 0 \\ 0 & \mathbf{U_{22}}_{\,(4\times 4)} \end{bmatrix} \tag{C.3}$$

kus alammaatriks $\mathbf{U_{12}}_{\,(4\times 4)}$ kirjeldab tala painet (vt [Lah12, lk 688][1]):

$$\mathbf{U_{12}}_{\,(4\times 4)} = \begin{bmatrix} 1 & -x & -\frac{x}{GA_Q} + \frac{x^3}{6EI_y} & \frac{x^2}{2EI_y} \\ 0 & 1 & -\frac{x^2}{2EI_y} & -\frac{x}{EI_y} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & -1 \end{bmatrix} \tag{C.4}$$

ning alammaatriks $\mathbf{U_{22}}_{\,(4\times 4)}$ õhukeseseinalise tala takistatud väänet:

$$\mathbf{U_{22}}_{\,(4\times 4)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{GI_t}\,x & \frac{1}{GI_t}(\operatorname{ch}\kappa x\; - 1) & \frac{1}{GI_t}\,\frac{1}{\kappa}\;(\operatorname{sh}\kappa x\; - \kappa x\,) \\ 0 & -\,1 & \kappa \operatorname{sh}\kappa x & \operatorname{ch}\kappa x\; - 1 \\ 0 & 0 & -\operatorname{ch}\kappa x & -\frac{1}{\kappa}\operatorname{sh}\kappa x \\ 0 & 0 & -\kappa \operatorname{sh}\kappa x & -\operatorname{ch}\kappa x \end{bmatrix} \tag{C.5}$$

[1] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.F.36

$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ on tala koormusvektor, mis koosneb painde koormusvektorist $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathbf{11}}$ ja takistatud väände koormusvektorist $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathbf{21}}$:

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathbf{11}} \\ \overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathbf{21}} \end{bmatrix} \tag{C.6}$$

Painde koormusvektori $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathbf{11}}$ (vt [Lah12, avaldis (1.66)[2] ja tabel G.1[3]] saab siirde w_e erilahendite tuletistest:

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathbf{11}} = \begin{bmatrix} w_e \\ \varphi_e \\ Q_e \\ M_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_e \\ -w'_e \\ -EIw'''_e \\ -EIw''_e \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sum \mathcal{M}_y \frac{(x-a_M)_+^2}{EI_y 2!} + \sum F_z \frac{(x-a_F)_+^3}{EI_y 3!} + \sum q_z \frac{(x-a_q)_+^4}{EI_y 4!} \\ -\sum \mathcal{M}_y \frac{(x-a_M)_+^1}{EI_y 1!} - \sum F_z \frac{(x-a_F)_+^2}{EI_y 2!} - \sum q_z \frac{(x-a_q)_+^3}{EI_y 3!} \\ -\sum F_z (x-a_F)_+^0 - \sum q_z (x-a_q)_+^1 \\ -\sum \mathcal{M}_y (x-a_M)_+^0 - \sum F_z (x-a_F)_+^1 - \sum q_z \frac{(x-a_q)_+^2}{2!} \end{bmatrix} \tag{C.7}$$

Takistatud väände koormusvektori $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathbf{21}}$ saab väändenurga θ_e erilahendite tuletistest:

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathbf{21}} = \begin{bmatrix} \theta_e \\ T_{te} \\ B_{\omega e} \\ T_{\omega e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_e \\ GI_t\theta'_e \\ -GI_t\frac{1}{\kappa^2}\theta''_e \\ -GI_t\frac{1}{\kappa^2}\theta'''_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_e \\ EI_\omega\kappa^2\theta'_e \\ EI_\omega\theta''_e \\ EI_\omega\theta'''_e \end{bmatrix} \tag{C.8}$$

Koormusvektori $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ valime tabelitest C.1 ja C.2.

Õhukeseseinalise tala painde ja takistatud väände ülekandevõrrandid võib kirjutada võrrandisüsteemina

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{Z_A} - \mathbf{I_{8\times 8}} \cdot \mathbf{Z_L} = -\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{C.9}$$

Lühemalt

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{8\times 16} \cdot \widehat{\mathbf{Z}} = -\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{C.10}$$

kus

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_A} \\ \mathbf{Z_L} \end{bmatrix} \tag{C.11}$$

[2] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#equation.1.66
[3] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf#table.G.1

kus

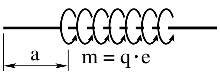
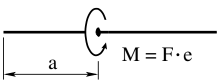
$$\mathbf{Z_A} = \begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ Q_A \\ M_A \\ \theta_A \\ T_{tA} \\ B_{\omega A} \\ T_{\omega A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(1,1) \\ Z\,(2,1) \\ Z\,(3,1) \\ Z\,(4,1) \\ Z\,(5,1) \\ Z\,(6,1) \\ Z\,(7,1) \\ Z\,(8,1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_L} = \begin{bmatrix} w_L \\ \varphi_L \\ Q_L \\ M_L \\ \theta_L \\ T_{tL} \\ B_{\omega L} \\ T_{\omega L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(9,1) \\ Z\,(10,1) \\ Z\,(11,1) \\ Z\,(12,1) \\ Z\,(13,1) \\ Z\,(14,1) \\ Z\,(15,1) \\ Z\,(16,1) \end{bmatrix} \tag{C.12}$$

ning laiendatud ülekandemaatriks avaldub

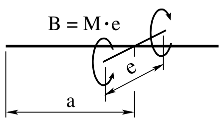
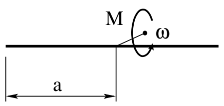
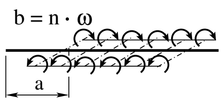
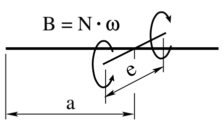
$$\widehat{\mathbf{UI}}_{8\times 16} = (\boldsymbol{U}_{\mathbf{8\times 8}} \mid -\boldsymbol{I}_{\mathbf{8\times 8}}) \tag{C.13}$$

C.1 Koormusvektorid

Tabel C.1. Koormusvektorid õhukeseseinalise varda väändel (1)

Koormuse skeem	$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$	Vektori komponentide avaldised
	θ_e	$\dfrac{m_x}{GI_t}\,\dfrac{i_0}{\kappa^2}\left[\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+\; -1-\;\kappa^2\,\dfrac{(x-a)_+^2}{2}\right]$
	$T_{t\,e}$	$m_x\,\dfrac{1}{\kappa}\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+\; -\;\kappa\,(x-a)_+\right]$
	$B_{\omega\,e}$	$m_x\;\dfrac{1}{\kappa^2}\left[1-\;\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+\right]$
	$T_{\omega\,e}$	$-\,m_x\;\dfrac{1}{\kappa}\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+\right]$
		yzWGmx.m
	θ_e	$\dfrac{M_x}{GI_t}\,\dfrac{i_0}{\kappa}\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+\; -\;\;\kappa\,(x-a)_+\right]$
	$T_{t\,e}$	$M_x\,\left[\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+\;-1\right]$
	$B_{\omega\,e}$	$-\,M_x\,\frac{1}{\kappa}\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+\right]$
	$T_{\omega\,e}$	$-\,M_x\,\left[\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+\right]$
		yzWGMx.m

Tabel C.2. Koormusvektorid õhukeseseinalise varda väändel (2)

Koormuse skeem	$\mathring{\mathbf{Z}}$	Vektori komponentide avaldised
	θ_e	$\frac{B_k\, i_0}{G I_t}\left[\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+ \;-\; 1\right]$
	$T_{t\,e}$	$B_k\,\kappa\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+\right]$
	$B_{\omega\,e}$	$-\,B_k\,\left[\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+\right]$
	$T_{\omega\,e}$	$-\,B_k\,\kappa\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+\right]$
	θ_e	$\frac{M\cdot\omega'\, i_0}{G I_t}\left[\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+ \;-\; 1\right]$
	$T_{t\,e}$	$M\cdot\omega'\,\kappa\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+\right]$
	$B_{\omega\,e}$	$-\,M\cdot\omega'\,\left[\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+\right]$
	$T_{\omega\,e}$	$-\,M\cdot\omega'\,\kappa\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+\right]$
	θ_e	$-\,\frac{n\cdot\omega}{G I_t}\,\frac{i_0}{\kappa}\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+ \;-\; \kappa\,(x-a)_+\right]$
	$T_{t\,e}$	$-\,n\cdot\omega'\,\left[\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+ \;-1\right]$
	$B_{\omega\,e}$	$n\cdot\omega'\,\frac{1}{\kappa}\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+\right]$
	$T_{\omega\,e}$	$n\cdot\omega'\,\left[\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+\right]$
	θ_e	$-\,\frac{N\cdot\omega\, i_0}{G I_t}\left[\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+ \;-\; 1\right]$
	$T_{t\,e}$	$-\,N\cdot\omega'\,\kappa\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+\right]$
	$B_{\omega\,e}$	$N\cdot\omega'\,\left[\operatorname{ch}\kappa\,(x-a)_+\right]$
	$T_{\omega\,e}$	$N\cdot\omega'\,\kappa\left[\operatorname{sh}\kappa\,(x-a)_+\right]$

D. Vektorite teisendused

D.1 Kohalik ja üldteljestik

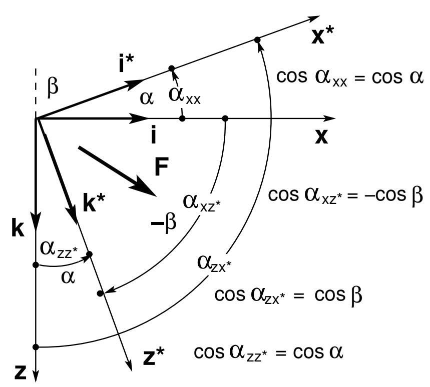
Konstruktsioonivarraste asukoha ja suuna kirjeldamiseks kasutame üldteljestikku (teljed x ja z joonisel D.1). Varraskonstruktsiooni iga vardaga seotakse teljestik x^*, z^* nii, et x^*-telg ühtib varda teljega. Nimetame x^*- ja z^*-telge kohalikuks teljestikuks.

Kasutame ainult parema käe teljestikku (jn A.3). Vaadates tasapinnalist konstruktsiooni y-telje positiivsest otsast, loeme pöörde positiivseks z-teljest x-telje suunas. Parema käe teljestiku puhul on positiivne pööre vastupäeva. Siirete ja jõuvektorite kirjeldamiseks kohalikes ja üldkoordinaatides tuleb teha koordinaatide teisendused.

D.2 Koordinaatide teisendus

Koordinaatide teisendusvalemite tuletamiseks vaatleme joonist D.1. Olgu koordinaadid xyz üldkoordinaadid ja $x^*y^*z^*$ kohalikud koordinaadid. Vaatleme veel parema käe kolmikuid $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ja $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*$. Need on ühikvektorite kolmikud, mis määravad koordinaattelgede suuna. Joonisel D.1 on ühikvektorid $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{j}^*$ suunatud vaataja poole. Vektori $\vec{F}$ projektsioonid telgedele x, z on F_x, F_z, telgedele x^*, z^* aga F_x^*, F_z^*. Seega

$$\vec{\mathbf{F}} = F_x \cdot \vec{\mathbf{i}} + F_z \cdot \vec{\mathbf{k}} = F_x^* \cdot \vec{\mathbf{i}}^* + F_z^* \cdot \vec{\mathbf{k}}^*, \qquad \begin{cases} \cdot \vec{\mathbf{i}}^* \\ \cdot \vec{\mathbf{k}}^* \end{cases}, \quad \begin{cases} \cdot \vec{\mathbf{i}} \\ \cdot \vec{\mathbf{k}} \end{cases} \tag{D.1}$$



Joonis D.1. Koordinaatide teisendus

Korrutame avaldise (D.1) vektoritega $\vec{\mathbf{i}}^*$ ja $\vec{\mathbf{k}}^*$. Võtame arvesse, et risti olevate vektorite skalaarkorrutis (sisekorrutis) on null. Saame

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{i}}^* &= F_x^* &= F_x\cdot\vec{\mathbf{i}}\cdot\vec{\mathbf{i}}^* &+ F_z\cdot\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{i}}^* \\ \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{k}}^* &= F_z^* &= F_x\cdot\vec{\mathbf{i}}\cdot\vec{\mathbf{k}}^* &+ F_z\cdot\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{k}}^* \end{aligned} \tag{D.2}$$

Pöördseoste leidmiseks korrutame avaldist (D.1) vektoritega $\vec{\mathbf{i}}$ ja $\vec{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{i}} &= F_x &= F_x^*\cdot\vec{\mathbf{i}}^*\cdot\vec{\mathbf{i}} &+ F_z^*\cdot\vec{\mathbf{k}}^*\cdot\vec{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{k}} &= F_z^* &= F_x^*\cdot\vec{\mathbf{i}}^*\cdot\vec{\mathbf{k}} &+ F_z^*\cdot\vec{\mathbf{k}}^*\cdot\vec{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{D.3}$$

Ühikvektorite skalaarkorrutis võrdub nende positiivsete suundade vahelise nurga koosinusega:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{i}}\cdot\vec{\mathbf{i}}^* &= \vec{\mathbf{i}}^*\cdot\vec{\mathbf{i}} = \cos\alpha_{xx^*}, &\qquad \vec{\mathbf{i}}\cdot\vec{\mathbf{k}}^* &= \cos\alpha_{xz^*} \\ \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{k}}^* &= \vec{\mathbf{k}}^*\cdot\vec{\mathbf{k}} = \cos\alpha_{zz^*}, &\qquad \vec{\mathbf{i}}^*\cdot\vec{\mathbf{k}} &= \cos\alpha_{zx^*} \end{aligned} \tag{D.4}$$

Telje x^* suunakoosinused tähistame järgmiselt: $\cos\alpha_{xx^*} = \cos\alpha$ ja $\cos\alpha_{zx^*} = \cos\beta$ ($\cos\beta = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$). Jooniselt D.1 näeme, et

$$\begin{aligned} \cos\alpha_{xx^*} &= \cos\alpha, &\qquad \cos\alpha_{zx^*} &= \cos\beta \\ \cos\alpha_{zz^*} &= \cos\alpha, &\qquad \cos\alpha_{xz^*} &= -\cos\beta \end{aligned} \tag{D.5}$$

Suunakoosinused arvutame varda lõpu ja alguse koordinaatide x_L, z_L, x_A, z_A (jn D.2) järgi:

$$\cos\alpha = \frac{x_L - x_A}{l} \tag{D.6}$$

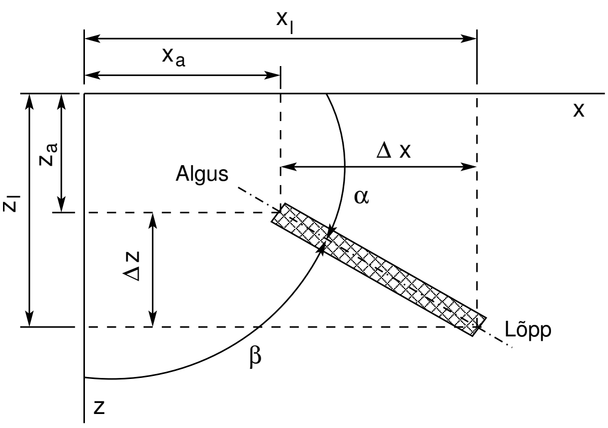
$$\cos\beta = \frac{z_L - z_A}{l} \tag{D.7}$$

kus varda pikkus

$$l = \sqrt{(z_L - z_A)^2 + (x_L - x_A)^2} \tag{D.8}$$

Nüüd avaldame koordinaatide teisenduse:

$$\begin{bmatrix} F_x^* \\ F_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ -\cos\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} \tag{D.9}$$



Joonis D.2. Varda suunakoosinused

Koordinaatide pöördteisendus:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\cos\beta \\ \cos\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x^* \\ F_z^* \end{bmatrix} \tag{D.10}$$

Võrreldes koordinaatide teisendusmaatrikseid avaldistes (D.9) ja (D.10), näeme, et nendes on read ja veerud vahetatud, s.t ühe saab teisest *transponeerimisel*. Asendades F_x ja F_z võrrandis (D.9) nende avaldistega võrrandis (D.10), saame maatrikskorrutise

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ -\cos\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\cos\beta \\ \cos\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{D.11}$$

Siin annab maatriksi korrutamine tema transponeeritud kujuga ühikmaatriksi. Selliseid maatrikseid nimetatakse *ortogonaalseteks*. Ortogonaalse maatriksi pöördmaatriks võrdub tema transponeeritud kujuga (mõlemal juhul on korrutiseks ühikmaatriks).

Arvestades, et $\cos\beta = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$, võime seosed (D.9) kirjutada kujul

$$\begin{bmatrix} F_x^* \\ F_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} \tag{D.12}$$

ja pöördteisenduse

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x^* \\ F_z^* \end{bmatrix} \tag{D.13}$$

Koordinaatide teisendus pöördel nurga α võrra:
– ümber z^*-telje

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_{z^*}(\alpha) \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} \tag{D.14}$$

– ümber x^*-telje

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_{x^*}(\alpha) \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} \tag{D.15}$$

– ümber y^*-telje

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_{y^*}(\alpha) \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} \tag{D.16}$$

Näide D.1 (vektorite teisendus pöördel). *Olgu antud varda väändenurga vektor $\theta_x^{(1)}$ ja paindenurga vektor $\varphi_y^{(1)}$. Kohalike koordinaatide x^*, y^* pöördel ümber z^*-telje nurga $-\pi/2$ võrra*

$$\begin{bmatrix} \theta_x^{(2)} \\ \varphi_y^{(2)} \\ z^* \end{bmatrix} = R_{x^*} \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) & 0 \\ -\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x^{(1)} \\ \varphi_y^{(1)} \\ z^* \end{bmatrix} \tag{D.17}$$

Siit saame

$$\theta_x^{(2)} + \varphi_y^{(1)} = 0 \tag{D.18}$$

$$\varphi_y^{(2)} - \theta_x^{(1)} = 0 \tag{D.19}$$

Avaldised (D.18) ja (D.19) selgitavad, kuidas tuleb pöörete vektorid kontakti panna.

Murdepunktis peavad olema tasakaalus koguväändemomendi vektor $T_{sum\,x}^{(1)}$ ja paindemomendi vektor $M_y^{(1)}$ ning vektorid $T_{sum\,x}^{(2)}$ ja $M_y^{(2)}$:

$$T_{sum\,x}^{(2)} - M_y^{(1)} = 0 \tag{D.20}$$

$$M_y^{(2)} + T_{sum\,x}^{(1)} = 0 \tag{D.21}$$

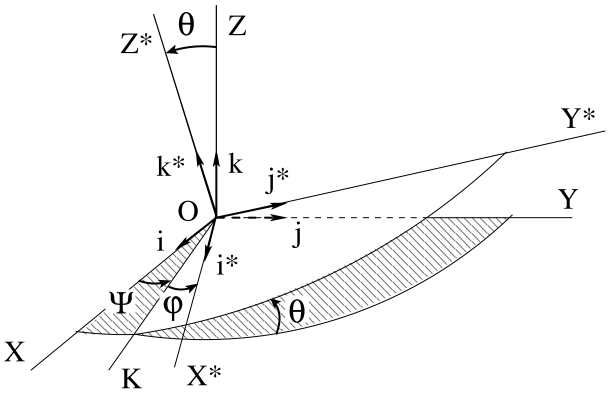
Võttes arvesse, et koguväändemoment T_{sum} koosneb vabaväändemomendist T_t ja kooldeväändemomendist T_ω ($T_{sum} = T_t + T_\omega$), saame sõlme tasakaaluvõrranditeks

$$T_{t\,x}^{(2)} + T_{\omega\,x}^{(2)} - M_y^{(1)} = 0 \tag{D.22}$$

$$M_y^{(2)} + T_{t\,x}^{(1)} + T_{\omega\,x}^{(1)} = 0 \tag{D.23}$$

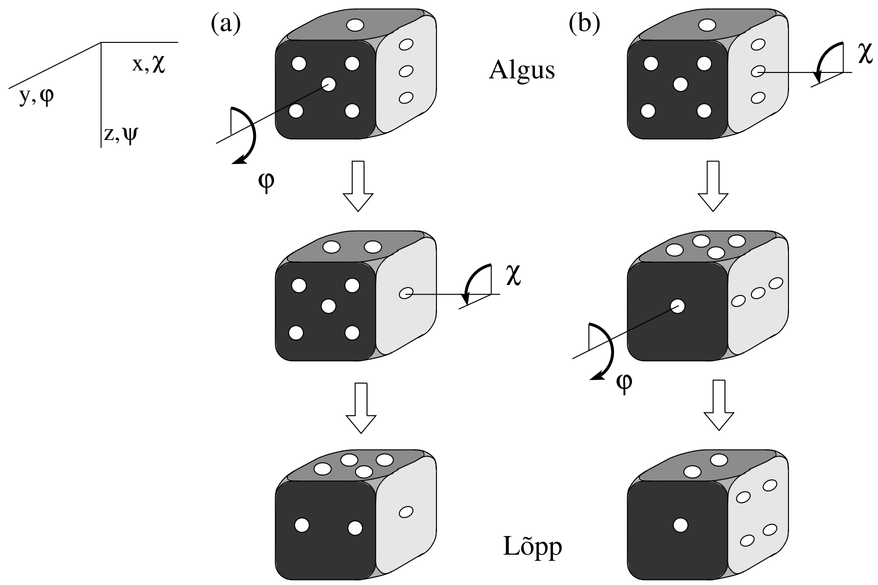
D.3 Jäiga keha pööre

Kinnispunkti ümber liikuva jäiga keha (jn D.3) asendi määramiseks kasutatakse *Euleri nurki* θ, ψ ja φ [LR71]. Vaatleme üldist (globaalset) Cartesiuse ristkoordinaadistikku X, Y, Z ja kohalikku (lokaalset) ristkoordinaadistikku X^*, Y^*, Z^*, mis on seotud jäiga kehaga. Tasandite OXY ja OX^*Y^* lõikejoont OK nimetatakse *sõlmjooneks*. Positiivse suuna sõlmjoonel määrame nii, et pöördel Z-teljelt Z^*-teljele väiksemat nurka θ mööda tekiks parema käe teljestik.

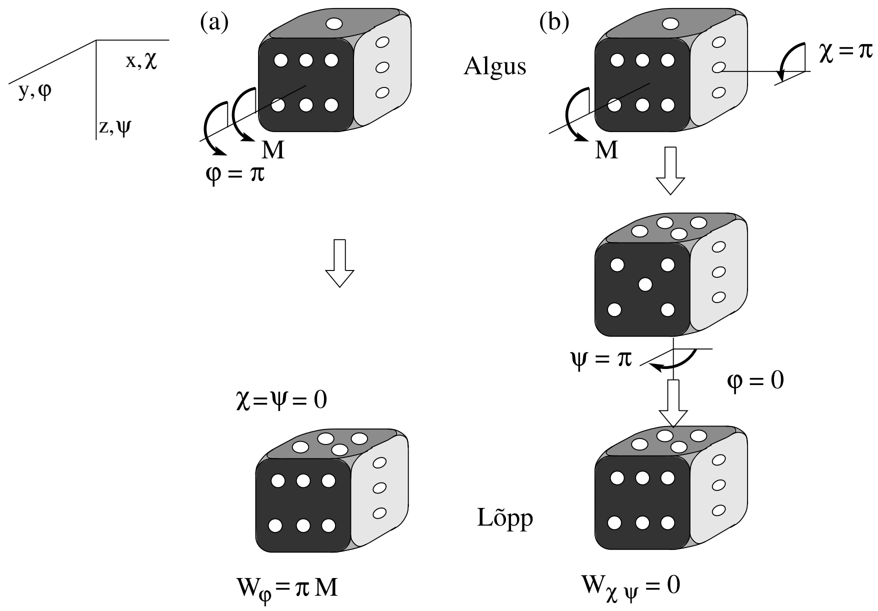


Joonis D.3. Euleri nurgad

Euleri nurkade jaoks on kasutusele võetud erinimetused, mis on pärit astronoomiast. Nii nimetatakse nurka θ *nutatsiooninurgaks*, nurka ψ *pretsessiooninurgaks* ja nurka φ *omapöördenurgaks*. Analoogilised nimetused on ka telgedel, mille ümber nimetatud pöörded toimuvad: Z-telge nimetatakse *pretsessiooniteljeks*, sõlmjoont OK *nutatsiooniteljeks* ja Z^*-telge *omapöörlemisteljeks*.



Joonis D.4. Pöördenurkade mittekonservatiivsus fikseeritud telgede suhtes



Joonis D.5. Momentide mittekonservatiivsus fikseeritud telgede suhtes

Lineaarses paindeteoorias vaadeldakse pöördenurki fikseeritud telgede suhtes. Näitame, et suurte (lõplike) pöördenurkade puhul ei kehti pöörete *kommutatiivsus*. Võrdleme joonisel D.4 näidatud pöördeid x- ja y-telje ümber. Joonisel D.4a teeme pöörded $\varphi = 1/2\pi$ ja $\chi = 1/2\pi$ ümber y- ja x-telje, joonisel D.4b pöörded $\chi = 1/2\pi$ ja $\varphi = 1/2\pi$ ümber x- ja y-telje. Pöörete algasendid on samad, lõppasendid aga erinevad, seega pöörded ümber fikseeritud telgede ei ole vahetatavad, kommutatiivsed [Arg82].

Edasi vaatleme jäika keha, millele mõjub moment y-telje suhtes (jn D.5a). Pöördel φ ümber y-telje teeb moment M positiivset tööd $W_\varphi = \pi M$. Jäiga keha sama lõppasendi (jn D.5b) saame pööretega χ ja ψ ümber x- ja z-telje. Viimati vaadeldud pööretel moment M tööd ei tee, s.t $W_{\chi\psi} = 0$. Nii sõltub töö fikseeritud telgede puhul tee (pöördenurkade) kujust ja on *mittekonservatiivne* [Zie77].

D.4 Kvaasi- ja semitangentsiaalsed momendid

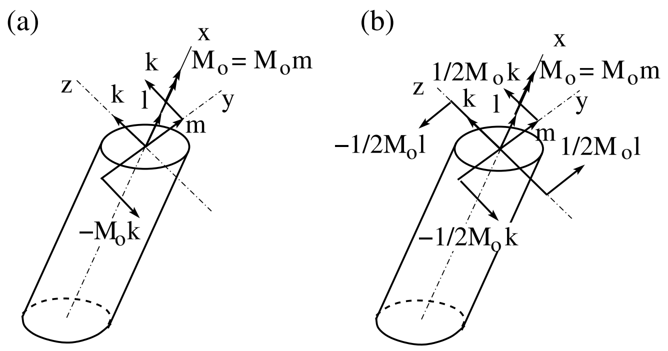
Kvaasi-[1] ja semitangentsiaalse[2] momendi mõistet [Kre09, lk 59] kasutatakse lõplike pöörete puhul lõplike elementide meetodis [GS94], [YM86].

Kvaasitangentsiaalne moment
Vaatleme kvaasitangentsiaalse momendi rakendust (jn D.6a). Võtame kasutusele jäiga jõuõla, mis on risti varda teljega. Jõuõla suuna määrb ühikvektora l. Rakendame varda ristlõikesse jõupaari $M_o\mathbf{k}$.

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{l} \times M_o\mathbf{k} = M_o\mathbf{m} \tag{D.24}$$

kus ühikvektorid $\mathbf{k}$ ja $\mathbf{m}$ on risti.

[1] Kvaasi- (ld *quasi* ’just nagu’) peaaegu.
[2] Semi- (ld *semi-* ’pool’) pool-.



Joonis D.6. Kvaasi- ja semitangentsiaalsed momendid

Rakendame varda otsa väikese pöörde $\vec{\varphi}$. Uueks jõuõlaks saab

$$\mathbf{l}^* = \mathbf{l} + \vec{\varphi} \times \mathbf{l} \tag{D.25}$$

ning uueks momendiks

$$\mathbf{M^q} = \mathbf{l} \times M_o \mathbf{k} \tag{D.26}$$

Momendi juurdekasv

$$\begin{aligned}\mathbf{M^q_\Delta} = \mathbf{M^q} - \mathbf{M_o} = M_o\,(\mathbf{l}^* - \mathbf{l}) \times \mathbf{k} = M_o\,(\vec{\varphi} \times \mathbf{l}) \times \mathbf{k} = \\ = M_o\,(\vec{\varphi} \cdot \mathbf{k})\,\mathbf{l}\end{aligned} \tag{D.27}$$

Ülemine indeks q osutab siin kvaasitangentsiaalsele momendile.

Semitangentsiaalne moment

Vaatleme *semitangentsiaalse momendi* rakendust (jn D.6b), kus momendil on kaks teineteisega risti olevat jõuõlga. Rakendatav moment

$$\mathbf{M_o} = \mathbf{l} \times \frac{1}{2} M_o \mathbf{k} - \mathbf{k} \times \frac{1}{2} M_o \mathbf{l} = M_o \mathbf{m} \tag{D.28}$$

on sama suur kui kvaasitangentsiaalne moment (D.24).

Rakendame varda otsa pöörde $\vec{\varphi}$, jättes momendid $\frac{1}{2} M_o \mathbf{l}$ ja $\frac{1}{2} M_o \mathbf{k}$ konstantseks. Jõuõlg (vektor) $\mathbf{k}$ muutub nii nagu $\mathbf{l}$ (D.25):

$$\mathbf{k}^* = \mathbf{k} + \vec{\varphi} \times \mathbf{k} \tag{D.29}$$

Semitangentsiaalse momendi juurdekasv

$$\mathbf{M^s_\Delta} = \mathbf{l}^* \times \frac{1}{2} M_o \mathbf{k} - \mathbf{k}^* \times \frac{1}{2} M_o \mathbf{l} - \mathbf{M_o} \tag{D.30}$$

Asetades $\mathbf{l}$, $\mathbf{k}$ ja $\mathbf{M_o}$ avaldised (D.25), (D.29), (D.28) võrrandisse (D.30), saame

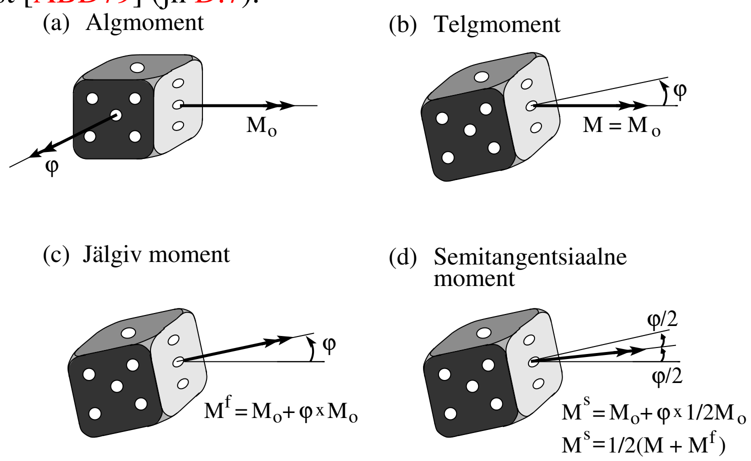
$$\mathbf{M^s_\Delta} = \frac{1}{2} M_o \left[(\vec{\varphi} \times \mathbf{l}) \times \mathbf{k} - (\vec{\varphi} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{l} \right] = \frac{1}{2} M_o \vec{\varphi} \times \mathbf{m} = \frac{1}{2} \vec{\varphi} \times \mathbf{M_o} \tag{D.31}$$

Ülemine indeks s osutab siin semitangentsiaalsele momendile.

Jälgiva momendi[3] (ingl *follower moment*) juurdekasv

$$\mathbf{M}^{\mathbf{f}}_{\mathbf{\Delta}} = \vec{\varphi} \times \mathbf{M_o} \tag{D.32}$$

Semitangentsiaalset momenti võib vaadelda kui fikseeritud momendi ja jälgiva momendi keskmist väärtust [ABD79] (jn D.7).



Joonis D.7. Jälgiv ja semitangentsiaalne moment

Joonisel:

(b) *telgmoment* M – moment ümber fikseeritud telje Lagrange'i koordinaatides;
(c) *jälgiv moment* M^{f} – moment kaasaliikuvates Lagrange'i koordinaatides;
(d) *semitangentsiaalne moment* M^{s} – momentide M, M^{f} aritmeetiline keskmine:

$$\mathrm{M}^{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}\mathrm{M} + \mathrm{M}^{\mathrm{f}} \tag{D.33}$$

D.5 Kvaasi- ja semitangentsiaalsed pöörded

Semitangentsiaalsetele momentidele (jn D.7) vastavaid pöördeid nimetatakse semitangentsiaalseteks (jn D.8). Semitangentsiaalne pööre on jälgiva pöörde ja telgpöörde (pööre ümber fikseeritud telje) aritmeetiline keskmine.

Semitangentsiaalse pöörde kommutatiivsus
Semitangentsiaalsete pöörete järjestuse kirjeldamiseks kasutame tähistust

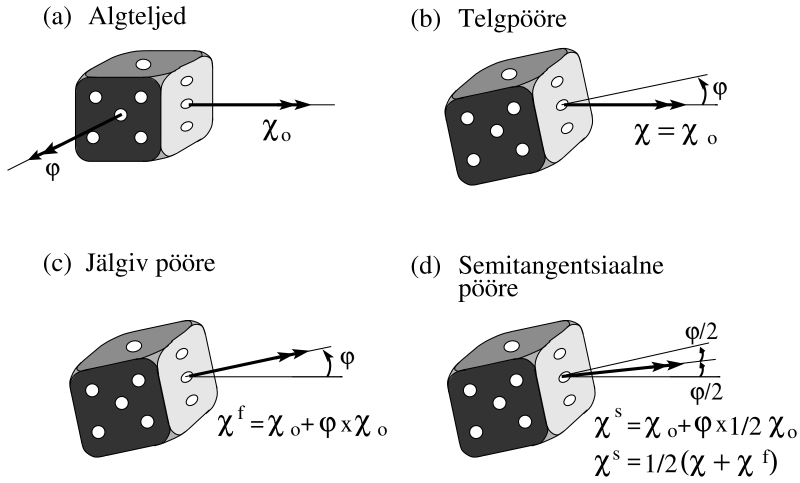
$$\mathbf{T}\left(\varphi^{\mathbf{s}}\right) = \frac{1}{2}\left(\varphi + \varphi^{\mathbf{f}}\right) \tag{D.34}$$

$$\mathbf{T}\left(\chi^{\mathbf{s}}\right) = \frac{1}{2}\left(\chi + \chi^{\mathbf{f}}\right) \tag{D.35}$$

Pöörete järjestus joonisel D.9:

(a) *telgpöörded* $\varphi = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \chi = \frac{\pi}{2}$;
(b) *jälgivad pöörded* $\varphi = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \chi^f = \frac{\pi}{2}$;
(c) *telgpöörded vastupidises järjestuses* $\chi = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{\pi}{2}$.

[3] Moment järgneb tema rakenduspunkti pööretele.



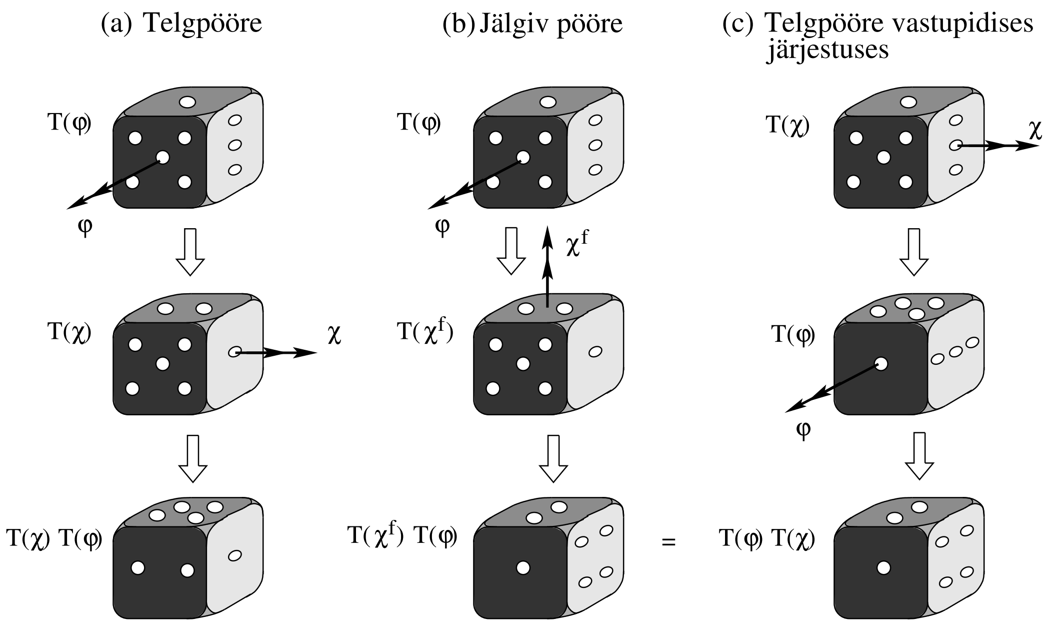
Joonis D.8. Jälgiv ja semitangentsiaalne pööre

Näitame, et semitangentsiaalsete pöörete järjestusest $\mathbf{T}(\chi^{\mathrm{s}}) \Rightarrow \mathbf{T}(\varphi^{\mathrm{s}})$ või $\mathbf{T}(\varphi^{\mathrm{s}}) \Rightarrow \mathbf{T}(\chi^{\mathrm{s}})$ ei sõltu lõpptulemus:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\chi^{\mathrm{s}})\,\mathbf{T}(\varphi^{\mathrm{s}}) &= \frac{1}{2}\left[\mathbf{T}(\chi)\,\mathbf{T}(\varphi) + \mathbf{T}\left(\chi^{\mathrm{f}}\right)\mathbf{T}(\varphi)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathbf{T}(\chi)\,\mathbf{T}(\varphi) + \mathbf{T}(\varphi)\,\mathbf{T}(\chi)\right] = \mathbf{T}(\varphi^{\mathrm{s}})\,\mathbf{T}(\chi^{\mathrm{s}}) \end{aligned} \tag{D.36}$$

Siin kasutasime joonisel D.9 olevat võrdust

$$\mathbf{T}\left(\chi^{\mathrm{f}}\right)\mathbf{T}(\varphi) = \mathbf{T}(\varphi)\,\mathbf{T}(\chi) \tag{D.37}$$



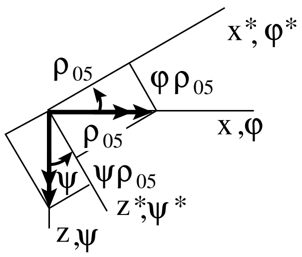
Joonis D.9. Semitangentsiaalsete pöörete kommutatiivsus

Semitangentsiaalsete röörete reeglid

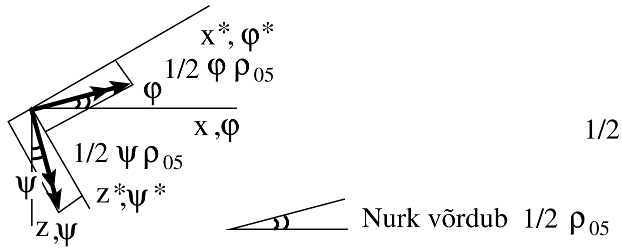
Semitangentsiaalsete pöörete puhul tuleb vahet teha järgmistel juhtudel (jn D.10):

(a) koordinaadid pöörduvad, kuid ristlõige ei pöördu;
(b) nii koordinaadid kui ka ristlõige pöörduvad;
(c) ristlõige pöördub, kuid koordinaadid ei pöördu.

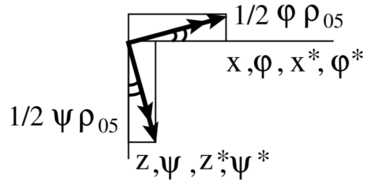
(a) Koordinaatide pööre



(b) Koordinaatide ja ristlõike pööre



(c) Ristlõike pööre



Joonis D.10. Semitangentsiaalsete pöörete reeglid

Alustame lihtsaima juhuga, kus koordinaadid pöörduvad, kuid ristlõige ei pöördu. Koordinaatide teisendus tehakse vektoritega $\varphi = \{\varphi, \chi, \psi\}$ ja $\varphi^* = \{\varphi^*, \chi^*, \psi^*\}$.

$$\varphi^* = (\mathbf{I}_3 + \mathbf{T}_R)\,\varphi \tag{D.38}$$

kus $\mathbf{I}_3$ on 3×3 ühikmaatriks ja

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} 0 & \rho_{06} & -\rho_{05} \\ -\rho_{06} & 0 & \rho_{04} \\ \rho_{05} & -\rho_{04} & 0 \end{bmatrix} \tag{D.39}$$

Teisenduse (D.38) maatrikskuju:

$$\begin{bmatrix} \varphi^* \\ \chi^* \\ \psi^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \rho_{06} & -\rho_{05} \\ -\rho_{06} & 0 & \rho_{04} \\ \rho_{05} & -\rho_{04} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \\ \psi \end{bmatrix} \tag{D.40}$$

Tasandilisel juhul $\chi = 0$, $\rho_{06} = 0$ (jn D.10a) teeme teisenduse

$$\begin{aligned} \varphi^* &= \varphi - \rho_{05}\psi \\ \psi^* &= \psi + \rho_{05}\varphi \end{aligned} \tag{D.41}$$

Koordinaatide ja ristlõike samaaegsel pöördumisel

$$\varphi^* = \left(\mathbf{I}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{T}_R\right)\varphi \tag{D.42}$$

kus $\mathbf{T}_R$ on antud avaldisega (D.39). Tasandilisel juhul $\chi = 0$, $\rho_{06} = 0$ (jn D.10b)

$$\begin{aligned} \varphi^* &= \varphi - \frac{1}{2}\rho_{05}\psi \\ \psi^* &= \psi + \frac{1}{2}\rho_{05}\varphi \end{aligned} \tag{D.43}$$

Kui koordinaadid ei pöördu ja ristlõige pöördub (jn D.10c), siis

$$\varphi^* = \left(\mathbf{I}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{T}_R\right)\varphi \tag{D.44}$$

Tasandilisel juhul $\chi = 0$, $\rho_{06} = 0$ (jn D.10c) teeme teisenduse

$$\begin{aligned} \varphi^* &= \varphi + \frac{1}{2}\rho_{05}\psi \\ \psi^* &= \psi - \frac{1}{2}\rho_{05}\varphi \end{aligned} \tag{D.45}$$

D.6 Pseudovektor

D.6.1 Suurte pöörete maatriksesitus

Lõplikud pöörded, nii nagu siirdedki, ei ole lineaarsed ega lihtsalt liidetavad. Geomeetriliselt mittelineaarses teoorias defineeris Argyris [Arg82] *pöörde pseudovektori*, mis on kasutusel näiteks programmipaketis **ANSYS** [ANS92].

$$\{\theta\} = \{\varphi \;\; \chi \;\; \psi\}^T = \theta\mathbf{e} \tag{D.46}$$

kus φ, χ, ψ on pöörde θ komponendid ristkoordinaadistikus $Oxyz$.

$$\theta = \sqrt{\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2} \tag{D.47}$$

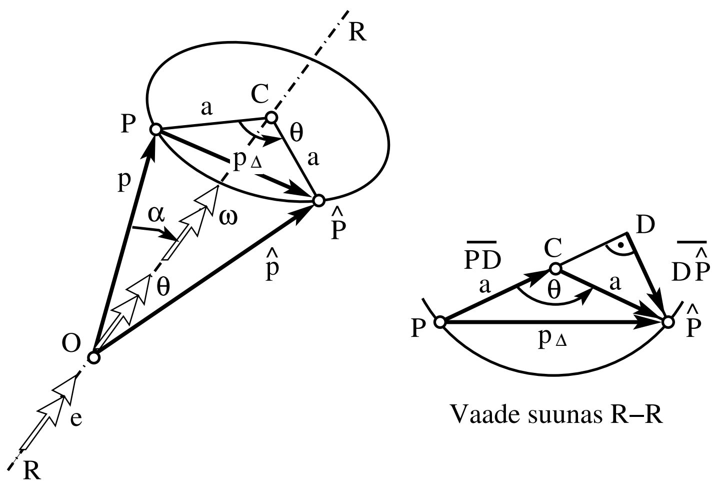
ja $\mathbf{e}$ on pöörde teljesuunaline ühikvektor (jn D.11).

Pöörete abimaatriks on

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} 0 & -\psi & \chi \\ \psi & 0 & -\varphi \\ -\chi & \varphi & 0 \end{bmatrix} \tag{D.48}$$

Leiame pöörete teisendusmaatriksi $\mathbf{T}(\theta)$ nii, et kohavektor $\mathbf{p}$ pöörduks uude asukohta $\hat{\mathbf{p}}$ (jn D.11):

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{T}(\theta)\,\mathbf{p} \tag{D.49}$$



Joonis D.11. Pseudovektor

Teisendusmaatriks $\mathbf{T}\,(\theta)$ on mittelineaarne funktsioon pöördest θ.

Normeerime pöörete pseudovektori nii:

$$\{\varpi\} = \omega\,\{\mathbf{e}\} \tag{D.50}$$

kus $\{\varpi\}$ on pöörde pseudovektor pikkusega ω ja komponentidega ω_1, ω_2 ja ω_3. Kasutame Rankini ja Brogani [RB86] normaliseerimist

$$\omega = 2\,\sin\frac{\theta}{2} \tag{D.51}$$

mis seob θ ja ω:

$$\{\varpi\} = 2\,\sin\frac{\theta}{2}\,\{\mathbf{e}\} \tag{D.52}$$

Teisendusmaatriks $\mathbf{T}$ [RB86] on seoses pöördega $\{\varpi\}$ või pöördega $\{\theta\}$.

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{I}_3] + \sqrt{1-\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}\,[\mathbf{T}] + \frac{1}{2}\,[\boldsymbol{\Omega}] \tag{D.53}$$

kus $\mathbf{I}_3$ on 3×3 ühikmaatriks ja Ω pöörete abimaatriks:

$$[\boldsymbol{\Omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{D.54}$$

Kui pseudovektor on moodustatud ja normaliseeritud, siis määrame lõplike pöörete teisenduse võrrandi (D.53) abil. Vastupidi, kui lõplike pöörete teisendus on teada, siis määrame pseudovektori $\{\varpi\}$ avaldisest

$$[\boldsymbol{\Omega}] = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma}}\left([\mathbf{T}] - [\mathbf{T}]^T\right) \tag{D.55}$$

kus γ on maatriksi $[\mathbf{T}]$ jälg:

$$\gamma = T_{11} + T_{22} + T_{33} \tag{D.56}$$

D.6.2 Üksik pseudovektor

Argyris [Arg82] vaatleb järjestikuste pööretega ekvivalentset üksikut pseudovektorit θ.

Määrame pseudovektori ω:

$$\{\omega\} = \{\omega_x \;\; \omega_y \;\; \omega_z\} = \tan\frac{\theta}{2}\{\mathbf{e}\} \tag{D.57}$$

ja pseudovektorile $\{\omega\}$ vastava abimaatriksi:

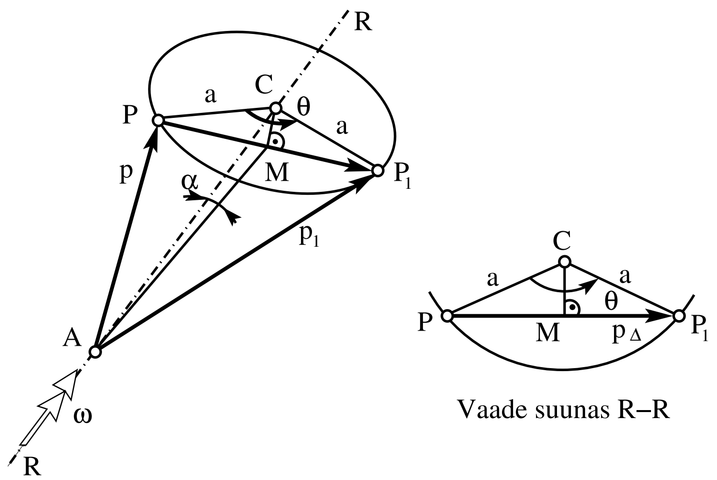
$$[\mathbf{\Omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\theta}\begin{bmatrix} 0 & -\psi & \chi \\ \psi & 0 & -\varphi \\ -\chi & \varphi & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}[\mathbf{S}] \tag{D.58}$$

Vaatleme joonist D.12, kus punkt M on lõigu $\overline{PP_1} = \mathbf{p}_\Delta$ keskpunkt. Lõik

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{p}_1) \quad \text{ehk} \quad \mathbf{p} + \mathbf{p}_1 = 2\,\overline{AM} \tag{D.59}$$

Jooniselt näeme, et

$$\mathbf{p} + \mathbf{p}_\Delta = \mathbf{p}_1 \quad \text{ehk} \quad \mathbf{p}_1 - \mathbf{p} = \mathbf{p}_\Delta \tag{D.60}$$



Joonis D.12. Üksik pseudovektor

Et lõik $\overline{CM}$ on risti lõiguga $\overline{PP_1}$, siis

$$\overline{PM} = \frac{1}{2}\mathbf{p}_\Delta = \overline{CM}\,\tan\frac{\theta}{2} \tag{D.61}$$

Kuna $\mathbf{p}_\Delta$ on risti pseudovektoriga ω ja $2\,\overline{AM} = \mathbf{p} + \mathbf{p}_1$, siis langeb ta kokku vektorkorrutisega $\omega \times (\mathbf{p} + \mathbf{p}_1)$. Arvestades, et pseudovektori ω ja lõigu $\overline{AM}$ vaheline nurk on α, saame vektorkorrutise $|\omega \times (\mathbf{p} + \mathbf{p}_1)\,|$ suuruseks

$$\sin\alpha\cdot\,\tan\frac{\theta}{2}\cdot 2\,\overline{AM} = \frac{\overline{CM}}{\overline{AM}}\cdot\,\tan\frac{\theta}{2}\cdot 2\,\overline{AM} = 2\,\overline{CM}\cdot\,\tan\frac{\theta}{2} = |\mathbf{p}_\Delta| \tag{D.62}$$

Siit saame seose

$$\mathbf{p}_{\Delta} = \omega \times (\mathbf{p} + \mathbf{p}_1) = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p} \tag{D.63}$$

Võttes arvesse määrangu (D.58), saame seose (D.63) esitada kujul

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p} = \mathbf{\Omega}\,(\mathbf{p} + \mathbf{p}_1) \tag{D.64}$$

Siin veendusime korrutiste $\omega \times \mathbf{p}$ ja $\mathbf{\Omega}\mathbf{p}$ samaväärsuses.

D.6.3 Suured pöörded ja kvaternioonid

Eesmärgiks on üles ehitada pöörete pseudovektor $\{\theta_{n+1}\}$ eelmisest pseudovektorist $\{\theta_n\}$ juurdekasvu (inkremendi) $\{\mathbf{\Delta}\theta\}$ abil. Argyris [Arg82] kasutas pöörete pseudovektori moodustamiseks *kvaternioone*[4].

Kvaternioonide [BŠ73] mõiste võttis kasutusele W. R. Hamilton[5] 1843. aastal. Kvaternioonid[6] on defineeritud skaalari ja vektori summana [ANS92]:

$$\langle q \rangle = a + \{\mathbf{b}\} \tag{D.65}$$

kus sulud $\langle\ \rangle$ tähistavad kvaternIooni. Kvaternooni $\langle \mathrm{q} \rangle$ skalaarne ja vektoriaalne osa on a ning $\{\mathbf{b}\}$. Kvaternooni $\langle \mathrm{q} \rangle$ norm $|q|$ arvutatakse järgmiselt:

$$|q| = \sqrt{a^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \tag{D.66}$$

kus b_1, b_2 ja b_3 on vektori $\{\mathbf{b}\}$ komponendid. Kui $|q| = 1$, siis $\langle \mathrm{q} \rangle$ on ühikkvaternioon.
Olgu $\langle q_1 \rangle$ ja $\langle q_2 \rangle$ kaks kvaterniooni:

$$\langle q_1 \rangle = a + \{\mathbf{b}\} \tag{D.67}$$
$$\langle q_2 \rangle = c + \{\mathbf{d}\} \tag{D.68}$$

Kvaternioonide korrutis $\langle q_{1\,2} \rangle$ avaldub viisil

$$\langle q_{1\,2} \rangle = \langle q_1 \rangle \langle q_2 \rangle = ac - \left\{\mathbf{b}^T\right\}\{\mathbf{d}\} + c\,\{\mathbf{b}\} + a\,\{\mathbf{d}\} - \{\mathbf{b}\} \times \{\mathbf{d}\} \tag{D.69}$$

Kvaterniooni $\langle q_{1\,2} \rangle$ skalaarne $\mathbf{S}\,(q_{1\,2})$ ja vektoriaalne $\{\mathbf{V}\,(q_{1\,2})\}$ osa:

$$\mathbf{S}\,(q_{1\,2}) = ac + \left\{\mathbf{b}^T\right\}\{\mathbf{d}\} \tag{D.70}$$
$$\{\mathbf{V}\,(q_{1\,2})\} = c\,\{\mathbf{b}\} + a\,\{\mathbf{d}\} - \{\mathbf{b}\} \times \{\mathbf{d}\} \tag{D.71}$$

Argyris [Arg82, lk 150] esitab pseudovektori kujul

$$\langle q \rangle = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\,\{\mathbf{e}\} \tag{D.72}$$

[4] Kvaternioon (ld *quaterni* 'neljakaupa') arvkujul: $\alpha = a + bi + cj + dk$, kus a, b, c ja d on reaalarvud ning 1, i, j ja k kvaterniooniühikud.
[5] Sir William Rowan Hamilton (1805–1865), iiri matemaatik ja füüsik.
[6] http://www.geometrictools.com/Documentation/Quaternions.pdf (11.03.2016)

Siin on $\langle q\rangle$ ühikkvaternioon. Avaldiste (D.52), (D.50) abil saame pseudovektori (D.72) kujul

$$\langle q\rangle = \cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\{\mathbf{e}\} \tag{D.73}$$

Pseudovektori moodustamisel vaatleme pöördeid $\{\theta_n\}$ ja $\{\Delta\theta\}$:

$$\langle q_n\rangle = \cos\frac{\theta_n}{2} + \frac{1}{2}\{\omega_n\} \tag{D.74}$$

$$\langle \Delta q\rangle = \cos\frac{\Delta\theta}{2} + \frac{1}{2}\{\Delta\omega\} \tag{D.75}$$

kus $\{\omega_{\mathbf{n}}\}$ on normaliseeritud $\{\theta_{\mathbf{n}}\}$ ja $\{\Delta\omega\}$ on normaliseeritud $\{\Delta\theta\}$.

Pseudovektori $\langle q_{n+1}\rangle$ moodustamiseks kasutatakse kvaternioonide korrutamist (D.69):

$$\begin{aligned}\langle q_{n+1}\rangle = \langle\Delta q\rangle\langle q_n\rangle &= \cos\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\Delta\theta}{2} - \frac{1}{4}\{\omega_n\}^T\{\Delta\omega\} + \\ +\frac{1}{2}\cos\frac{\Delta\theta}{2}\{\omega_{\mathbf{n}}\} &+ \frac{1}{2}\cos\frac{\theta_n}{2}\{\Delta\omega\} - \frac{1}{4}\{\omega_n\}\times\{\Delta\omega\}\end{aligned} \tag{D.76}$$

Pseudovektor $\langle q_{n+1}\rangle$ on ühikvektor, sest $\langle\Delta q\rangle$ ja $\langle q_n\rangle$ on ühikkvaternioonid. Pseudovektori $\langle q_{n+1}\rangle$ saab esitada kahel viisil:

$$\langle q_{n+1}\rangle = \cos\frac{\theta_{n+1}}{2} + \frac{1}{2}\{\omega_{n+1}\} \tag{D.77}$$

$$\langle q_{n+1}\rangle = \cos\frac{\theta_{n+1}}{2} + \sin\frac{\theta_{n+1}}{2}\{\mathbf{e}_{n+1}\} \tag{D.78}$$

Määrame kvaternioonі (D.76) skalaarse ja vektoriaalse osa:

$$\mathbf{S}\left(q_{n+1}\right) = \cos\frac{\theta_{n+1}}{2} = \cos\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\Delta\theta_n}{2} - \frac{1}{4}\{\omega_n\}^T\{\Delta\omega\} \tag{D.79}$$

$$\{\mathbf{V}\left(q_{n+1}\right)\} = \frac{1}{2}\{\omega_{n+1}\} = \frac{1}{2}\cos\frac{\Delta\theta}{2}\{\omega_n\} + \frac{1}{2}\cos\frac{\theta_n}{2}\{\Delta\omega\} - \frac{1}{4}\{\omega_n\}\times\{\Delta\omega\} \tag{D.80}$$

Pöörded θ_{n+1} ja $\{\omega_{n+1}\}$ leiame võrranditest (D.79) ja (D.80).

Tuleb arvestada, et nurk θ on piiratud pöördega $\pm\pi$. See piirang tuleneb siinusest, mille määramispiirkond on $0\ldots\pi$. Kui $|\theta|$ on suurem kui π, siis

$$\theta^* = \begin{cases} \theta & kui\ |\theta| \le \pi \\ 2\pi - \theta & kui\ |\theta| > \pi \end{cases} \tag{D.81}$$

E. Arvutiprogrammid

EST-meetodi arvutiprogrammid leiab raamatule lisatud CD-plaadilt vastavalt baasrajale (ingl base path) – file:///D:, file:///E:, file:///F:, file:///S:, file:///Z:, file:///media/cdrom0, file:///media/E_OPE. Arvutiprogrammide avamisest loe lk 4.

E.1 Programmid tala väände arvutamiseks

Programm E.1 (Naide2_1.m)[1] *56 – arvutab väändenurga θ ja momendid T_t, B_ω, T_ω ning T_{sum} lausmomendiga m_x koormatud konsoolis.*
Kasutab funktsioone

- *yspWGvfmhvI(baasi0,l,GIt,EIw)*[2]
- *yspWGfhlin(baasi0,l,x,GIt,EIw)*[3]
- *yzWGmx(baasi0,l,l,a,mx,GIt,EIw)*[4]
- *spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)*[5]
- *InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)*[6]
- *spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)*[7]
- *ylWGfhlin(baasi0,l,x,GIt,EIw)*[8]
- *SisejoudWGmxpunktis(l,X,a,AlgP,mx,GIt,EIw,suurused)*[9]
- *minMaxGrfVnurk(Fvv)*[10]

Programm E.2 (Naide2_2.m)[11] *63 – arvutab väändenurga θ ja momendid T_t, B_ω, T_ω ning T_{sum} koondmomendiga M_x koormatud konsoolis.*
Kasutab funktsioone

- *yspWGvfmhvI(baasi0,l,GIt,EIw)*[12]

[1] ./octaveProgrammid/Naide2_1.m
[2] ./octaveProgrammid/yspWGvfmhvI.m
[3] ./octaveProgrammid/yspWGfhlin.m
[4] ./octaveProgrammid/yzWGmx.m
[5] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[6] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[7] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[8] ./octaveProgrammid/ylWGfhlin.m
[9] ./octaveProgrammid/SisejoudWGmxpunktis.m
[10] ./octaveProgrammid/minMaxGrfVnurk.m
[11] ./octaveProgrammid/Naide2_2.m
[12] ./octaveProgrammid/yspWGvfmhvI.m

- *yspWGfhlin(baasi0,l,x,GIt,EIw)*[13]
- *yzWGMx(baasi0,l,x,a,Mx,GIt,EIw)*[14]
- *spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)*[15]
- *InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)*[16]
- *spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)*[17]
- *ylWGfhlin(baasi0,l,x,GIt,EIw)*[18]
- *SisejoudWGmxpunktis(l,X,a,AlgP,mx,GIt,EIw,suurused)*[19]
- *minMaxGrfVnurk(Fvv)*[20]

Programm E.3 (Naide2_3.m)[21] *69 – arvutab väändenurga θ ja momendid T_t, B_ω, T_ω ning T_{sum} bimomendiga B_ω koormatud konsoolis.*
Kasutab funktsioone

- *yspWGvfmhvI(baasi0,l,GIt,EIw)*[22]
- *yspWGfhlin(baasi0,l,x,GIt,EIw)*[23]
- *yzWGBy(baasi0,l,x,a,By,GIt,EIw)*[24]
- *spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)*[25]
- *InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)*[26]
- *spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)*[27]
- *ylWGfhlin(baasi0,l,x,GIt,EIw)*[28]
- *SisejoudWGmxpunktis(l,X,a,AlgP,mx,GIt,EIw,suurused)*[29]
- *minMaxGrfVnurk(Fvv)*[30]

Programm E.4 (Naide2_4.m)[31] *75 – arvutab väändenurga θ ja momendid T_t, B_ω, T_ω ning T_{sum} lausmomendiga m_x koormatud talas.*

---

[13] ./octaveProgrammid/yspWGfhlin.m
[14] ./octaveProgrammid/yzWGMx.m
[15] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[16] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[17] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[18] ./octaveProgrammid/ylWGfhlin.m
[19] ./octaveProgrammid/SisejoudWGmxpunktis.m
[20] ./octaveProgrammid/minMaxGrfVnurk.m
[21] ./octaveProgrammid/Naide2_3.m
[22] ./octaveProgrammid/yspWGvfmhvI.m
[23] ./octaveProgrammid/yspWGfhlin.m
[24] ./octaveProgrammid/yzWGBy.m
[25] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[26] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[27] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[28] ./octaveProgrammid/ylWGfhlin.m
[29] ./octaveProgrammid/SisejoudWGmxpunktis.m
[30] ./octaveProgrammid/minMaxGrfVnurk.m
[31] ./octaveProgrammid/Naide2_4.m

Kasutab funktsioone

- *yspWGvfmhvI(baasi0,l,GIt,EIw)*[32]
- *yspWGfhlin(baasi0,l,x,GIt,EIw)*[33]
- *yzWGmx(baasi0,l,l,a,mx,GIt,EIw)*[34]
- *spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)*[35]
- *InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)*[36]
- *spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)*[37]
- *ylWGfhlin(baasi0,l,x,GIt,EIw)*[38]
- *SisejoudWGmxpunktis(l,X,a,AlgP,mx,GIt,EIw,suurused)*[39]
- *minMaxGrfVnurk(Fvv)*[40]

Programm E.5 (Naide2_5.m)[41] *82* – *arvutab väändenurga θ ja momendid T_t, B_ω, T_ω ning T_{sum} koondmomendiga M_x koormatud talas.*
Kasutab funktsioone

- *yspWGvfmhvI(baasi0,l,GIt,EIw)*[42]
- *yspWGfhlin(baasi0,l,x,GIt,EIw)*[43]
- *yzWGMx(baasi0,l,x,a,Mx,GIt,EIw)*[44]
- *spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)*[45]
- *InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)*[46]
- *spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)*[47]
- *ylWGfhlin(baasi0,l,x,GIt,EIw)*[48]
- *SisejoudWGmxpunktis(l,X,a,AlgP,mx,GIt,EIw,suurused)*[49]
- *minMaxGrfVnurk(Fvv)*[50]

Programm E.6 (Naide2_6.m)[51] *87* – *arvutab väändenurga θ ja momendid T_t, B_ω, T_ω ning T_{sum} bimomendiga B_ω koormatud talas.*

[32] `./octaveProgrammid/yspWGvfmhvI.m`
[33] `./octaveProgrammid/yspWGfhlin.m`
[34] `./octaveProgrammid/yzWGmx.m`
[35] `./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m`
[36] `./octaveProgrammid/InsertBtoA.m`
[37] `./octaveProgrammid/spSisestaArv.m`
[38] `./octaveProgrammid/ylWGfhlin.m`
[39] `./octaveProgrammid/SisejoudWGmxpunktis.m`
[40] `./octaveProgrammid/minMaxGrfVnurk.m`
[41] `./octaveProgrammid/Naide2_5.m`
[42] `./octaveProgrammid/yspWGvfmhvI.m`
[43] `./octaveProgrammid/yspWGfhlin.m`
[44] `./octaveProgrammid/yzWGMx.m`
[45] `./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m`
[46] `./octaveProgrammid/InsertBtoA.m`
[47] `./octaveProgrammid/spSisestaArv.m`
[48] `./octaveProgrammid/ylWGfhlin.m`
[49] `./octaveProgrammid/SisejoudWGmxpunktis.m`
[50] `./octaveProgrammid/minMaxGrfVnurk.m`
[51] `./octaveProgrammid/Naide2_6.m`

Kasutab funktsioone

- *yspWGvfmhvI(baasi0,l,GIt,EIw)*[52]
- *yspWGfhlin(baasi0,l,x,GIt,EIw)*[53]
- *yzWGBy(baasi0,l,x,a,By,GIt,EIw)*[54]
- *spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)*[55]
- *InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)*[56]
- *spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)*[57]
- *ylWGfhlin(baasi0,l,x,GIt,EIw)*[58]
- *SisejoudWGmxpunktis(l,X,a,AlgP,mx,GIt,EIw,suurused)*[59]
- *minMaxGrfVnurk(Fvv)*[60]

Programm E.7 (Naide2_7.m)[61] *93* – *arvutab väändenurga θ ja momendid T_t, B_ω, T_ω ning T_{sum} pikijõuga F_x koormatud talas.*
Kasutab funktsioone

- *yspWGvfmhvI(baasi0,l,GIt,EIw)*[62]
- *yspWGfhlin(baasi0,l,x,GIt,EIw)*[63]
- *yzWGBy(baasi0,l,x,a,By,GIt,EIw)*[64]
- *spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)*[65]
- *InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)*[66]
- *spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)*[67]
- *ylWGfhlin(baasi0,l,x,GIt,EIw)*[68]
- *SisejoudWGmxpunktis(l,X,a,AlgP,mx,GIt,EIw,suurused)*[69]
- *minMaxGrfVnurk(Fvv)*[70]

Programm E.8 (Naide2_8.m)[71] *99* – *arvutab väändenurga θ ja momendid T_t, B_ω, T_ω ning T_{sum} laus- ja koondkoormusega m_x, M_x ning bimomendiga B_ω koormatud konsoolis.*

---

[52] ./octaveProgrammid/yspWGvfmhvI.m
[53] ./octaveProgrammid/yspWGfhlin.m
[54] ./octaveProgrammid/yzWGBy.m
[55] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[56] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[57] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[58] ./octaveProgrammid/ylWGfhlin.m
[59] ./octaveProgrammid/SisejoudWGmxpunktis.m
[60] ./octaveProgrammid/minMaxGrfVnurk.m
[61] ./octaveProgrammid/Naide2_7.m
[62] ./octaveProgrammid/yspWGvfmhvI.m
[63] ./octaveProgrammid/yspWGfhlin.m
[64] ./octaveProgrammid/yzWGBy.m
[65] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[66] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[67] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[68] ./octaveProgrammid/ylWGfhlin.m
[69] ./octaveProgrammid/SisejoudWGmxpunktis.m
[70] ./octaveProgrammid/minMaxGrfVnurk.m
[71] ./octaveProgrammid/Naide2_8.m

Kasutab funktsioone

- *yspWGvfmhvI(baasi0,l,GIt,EIw)* [72]
- *yspWGfhlin(baasi0,l,x,GIt,EIw)* [73]
- *yzWGBy(baasi0,l,x,a,By,GIt,EIw)* [74]
- *spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)* [75]
- *InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)* [76]
- *spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)* [77]
- *ylWGfhlin(baasi0,l,x,GIt,EIw)* [78]
- *SisejoudWGmxpunktis(l,X,a,AlgP,mx,GIt,EIw,suurused)* [79]
- *minMaxGrfVnurk(Fvv)* [80]

Programm E.9 (Naide2_10.m)[81] *116* – *arvutab väändenurga θ ja momendid T_t, B_ω, T_ω ning T_{sum} laus- ja koondkoormusega m_x, M_x ning bimomendiga B_ω koormatud mitmesildelises talas.*
Kasutab funktsioone

- *yspWGvfmhvI(baasi0,l,GIt,EIw)* [82]
- *yspWGfhlin(baasi0,l,x,GIt,EIw)* [83]
- *yzWGBy(baasi0,l,x,a,By,GIt,EIw)* [84]
- *spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)* [85]
- *InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)* [86]
- *spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)* [87]
- *ylWGfhlin(baasi0,l,x,GIt,EIw)* [88]
- *SisejoudWGmxpunktis(l,X,a,AlgP,mx,GIt,EIw,suurused)* [89]
- *minMaxGrfVnurk(Fvv)* [90]

---

[72] `./octaveProgrammid/yspWGvfmhvI.m`
[73] `./octaveProgrammid/yspWGfhlin.m`
[74] `./octaveProgrammid/yzWGBy.m`
[75] `./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m`
[76] `./octaveProgrammid/InsertBtoA.m`
[77] `./octaveProgrammid/spSisestaArv.m`
[78] `./octaveProgrammid/ylWGfhlin.m`
[79] `./octaveProgrammid/SisejoudWGmxpunktis.m`
[80] `./octaveProgrammid/minMaxGrfVnurk.m`
[81] `./octaveProgrammid/Naide2_10.m`
[82] `./octaveProgrammid/yspWGvfmhvI.m`
[83] `./octaveProgrammid/yspWGfhlin.m`
[84] `./octaveProgrammid/yzWGBy.m`
[85] `./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m`
[86] `./octaveProgrammid/InsertBtoA.m`
[87] `./octaveProgrammid/spSisestaArv.m`
[88] `./octaveProgrammid/ylWGfhlin.m`
[89] `./octaveProgrammid/SisejoudWGmxpunktis.m`
[90] `./octaveProgrammid/minMaxGrfVnurk.m`

Funktsioon E.1 (yspWGvfmhvI(baasi0,l,l,GIt,EIw))[91] *56, 54, 111 – arvutab õhukeseseinalise varda väände hõreda laiendatud ülekandemaatriksi* $(U_{4\times4} \mid -I_{4\times4})$.

Funktsioon E.2 (yspWGfhlin(baasi0,l,x,GIt,EIw))[92] *54 – arvutab õhukeseseinalise varda väände hõreda ülekandemaatriksi* $U_{4\times4}$.

Funktsioon E.3 (ylWGfhlin(baasi0,l,x,GIt,EIw))[93] *115 – arvutab õhukeseseinalise varda väände ülekandemaatriksi* $U_{4\times4}$.

Funktsioon E.4 (yzWGmx(baasi0,l,l,a,mx,GIt,EIw))[94] *54, 173, 115 – arvutab õhukeseseinalise varda väände lausmomendi koormusvektori* $-\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$.

Funktsioon E.5 (yzWGMx(baasi0,l,x,a,Mx,GIt,EIw))[95] *173, 115 – arvutab õhukeseseinalise varda väände koondmomendi koormusvektori* $-\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$.

Funktsioon E.6 (yzWGBy(baasi0,l,x,a,By,GIt,EIw))[96] *54 – arvutab õhukeseseinalise varda väände koondbimomendi koormusvektori* $-\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$.

Funktsioon E.7 (SisejoudWGmxpunktis(l,X,a,AlgP,mx,GIt,EIw, suurused)).[97] *54 – arvutab õhukeseseinalise varda väände koondbimomendi koormusvektori* $-\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$.

Funktsioon E.8 (minMaxGrfVnurk(Fvv))[98] *– arvutab siirete ja momentide maksimaalsed ja minimaalsed väärtused graafikute mahutamiseks ekraanile.*

Funktsioon E.9 (spInsertBtoA(spA,IM,JN,spB))[99] *– sisestab hõreda maatriksi* spB *hõredasse maatriksisse* spA*, alustades* IM*-nda rea ja* JN*-nda veeru lõikekohast. Hõredate maatriksite* spA *ja* spB *kattuvad elemendid liidetakse.*

Funktsioon E.10 (InsertBtoA(A,I,J,IM,JN,B,M,N))[100] *– sisestab* $(M \times N)$*-järku maatriksi* $\mathrm{B_{M\times N}}$ $(I \times J)$*-järku maatriksisse* $\mathrm{A_{I\times J}}$*, alustades* IM*-nda rea ja* JN*-nda veeru lõikekohast.*

Funktsioon E.11 (spSisestaArv(spA,iv,jv,sv))[101] *– sisestab arvu* sv *hõreda maatriksi* spA iv*-nda rea* jv*-nda veeru lõikekohale.*

---
[91] ./octaveProgrammid/yspWGvfmhvI.m
[92] ./octaveProgrammid/yspWGfhlin.m
[93] ./octaveProgrammid/ylWGfhlin.m
[94] ./octaveProgrammid/yzWGmx.m
[95] ./octaveProgrammid/yzWGMx.m
[96] ./octaveProgrammid/yzWGBy.m
[97] ./octaveProgrammid/SisejoudWGmxpunktis.m
[98] ./octaveProgrammid/minMaxGrfVnurk.m
[99] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[100] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[101] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m

E.2 Programmid murtud tala arvutamiseks

Programm E.10 (Naide4_5Gamma.m)[102] *123* – *arvutab väändenurga θ ja momendid T_t, B_ω, T_ω ning T_{sum} lausmomendiga m_x koormatud konsoolis.*
Kasutab funktsioone

- *yspTVmI(baasi0,l,l,GAr,EJ,GIt,EIw)*[103]
- *yspTVlin(baasi0,l,x,GAr,EJ,GIt,EIw)*[104]
- *ylTVlin(baasi0,l,x,GAr,EJ,GIt,EIw)*[105]
- *yzTVmx(baasi0,l2,l2,0.0,mx,GIt,EIw)]*[106]
- *yzTVqz(baasi0,l2,l2,0.0,mx,GIt,EIw)]*[107]
- *spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)*[108]
- *InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)*[109]
- *spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)*[110]
- *ylTVlin(baasi0,l,x,GAr,EJ,GIt,EIw)*[111]
- *minMaxGrfTVnurk(LisaGr,Fvvs)*[112]

Programm E.11 (Naide4_5GammaTV.m)[113] *131* – *arvutab väändenurga θ ja momendid T_t, B_ω, T_ω ning T_{sum} lauskoormusega q_z koormatud konsoolis.*
Kasutab funktsioone

- *yspTVmI(baasi0,l,l,GAr,EJ,GIt,EIw)*[114]
- *yspTVlin(baasi0,l,x,GAr,EJ,GIt,EIw)*[115]
- *ylTVlin(baasi0,l,x,GAr,EJ,GIt,EIw)*[116]
- *yzTVmx(baasi0,l2,l2,0.0,mx,GIt,EIw)]*[117]
- *yzTVqz(baasi0,l2,l2,0.0,mx,GIt,EIw)]*[118]
- *spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)*[119]
- *InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)*[120]

---
[102] ./octaveProgrammid/Naide4_5Gamma.m
[103] ./octaveProgrammid/yspTVmI.m
[104] ./octaveProgrammid/yspTVlin.m
[105] ./octaveProgrammid/ylTVlin.m
[106] ./octaveProgrammid/yzTVmx.m
[107] ./octaveProgrammid/yzTVqz.m
[108] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[109] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[110] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[111] ./octaveProgrammid/ylTVlin.m
[112] ./octaveProgrammid/minMaxGrfTVnurk.m
[113] ./octaveProgrammid/Naide4_5GammaTV.m
[114] ./octaveProgrammid/yspTVmI.m
[115] ./octaveProgrammid/yspTVlin.m
[116] ./octaveProgrammid/ylTVlin.m
[117] ./octaveProgrammid/yzTVmx.m
[118] ./octaveProgrammid/yzTVqz.m
[119] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[120] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m

- *spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)*[121]
- *ylTVlin(baasi0,l,x,GAr,EJ,GIt,EIw)*[122]
- *minMaxGrfTVnurk(LisaGr,Fvvs)*[123]

Programm E.12 (Naide4_6U.m)[124] *139* – *arvutab väändenurga θ ja momendid T_t, B_ω, T_ω ning T_{sum} lausmomendiga m_x koormatud konsoolis.*
Kasutab funktsioone

- *yspTVmI(baasi0,l,l,GAr,EJ,GIt,EIw)*[125]
- *yspTVlin(baasi0,l,x,GAr,EJ,GIt,EIw)*[126]
- *ylTVlin(baasi0,l,x,GAr,EJ,GIt,EIw)*[127]
- *yzTVmx(baasi0,l2,l2,0.0,mx,GIt,EIw)]*[128]
- *yzTVqz(baasi0,l2,l2,0.0,mx,GIt,EIw)]*[129]
- *spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)*[130]
- *InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)*[131]
- *spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)*[132]
- *ylTVlin(baasi0,l,x,GAr,EJ,GIt,EIw)*[133]
- *minMaxGrfTVnurk(LisaGr,Fvvs)*[134]

Funktsioon E.12 (yspTVmI(baasi0,l,l,GAr,EJ,GIt,EIw))[135] *139* – *arvutab õhukeseseinalise varda painde ja väände hõreda laiendatud ülekandemaatriksi* $(U_{4\times4} \mid -I_{4\times4})$.

Funktsioon E.13 (yspTVlin(baasi0,l,x,GAr,EJ,GIt,EIw))[136] *122* – *arvutab õhukeseseinalise varda painde ja väände hõreda ülekandemaatriksi.*

Funktsioon E.14 (ylTVlin(baasi0,l,x,GAr,EJ,GIt,EIw))[137] *126, 143* – *arvutab õhukeseseinalise varda painde ja väände ülekandemaatriksi.*

[121] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[122] ./octaveProgrammid/ylTVlin.m
[123] ./octaveProgrammid/minMaxGrfTVnurk.m
[124] ./octaveProgrammid/Naide4_6U.m
[125] ./octaveProgrammid/yspTVmI.m
[126] ./octaveProgrammid/yspTVlin.m
[127] ./octaveProgrammid/ylTVlin.m
[128] ./octaveProgrammid/yzTVmx.m
[129] ./octaveProgrammid/yzTVqz.m
[130] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[131] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[132] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[133] ./octaveProgrammid/ylTVlin.m
[134] ./octaveProgrammid/minMaxGrfTVnurk.m
[135] ./octaveProgrammid/yspTVmI.m
[136] ./octaveProgrammid/yspTVlin.m
[137] ./octaveProgrammid/ylTVlin.m

Funktsioon E.15 (yzTVmx(baasi0,l2,l2,0.0,mx,GIt,EIw))[138] *126, 143 – arvutab õhukeseseinalise varda väände lausmomendi koormusvektori* $-\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$.

Funktsioon E.16 (yzTVqz(baasi0,l2,0.0,qz,EI)[139] *126, 143 – arvutab õhukeseseinalise varda painde lauskoormuse* q_z *koormusvektori* $-\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$.

Funktsioon E.17 (minMaxGrfTVnurk(LisaGr,Fvvs))[140] *– arvutab siirete ja momentide maksimaalsed ja minimaalsed väärtused graafikute mahutamiseks ekraanile.*

Programm E.13 (Naide4_6Udef.m)[141] *149 – arvutab deformatsioonimeetodiga väändemomendi* M_y *ja bimomendi* B_ω *murtud talas.*

Programm E.14 (Naide4_6Uforce.m)[142] *149 – arvutab jõumeetodiga väändemomendi* M_y *ja bimomendi* B_ω *murtud talas.*

E.3 Ristlõike geomeetrilised karakteristikud

Funktsioon E.18 (ohukeU(b,h,tf,tw))[143] *166 – arvutab ristlõike lõikekeskme ja keskjoone vahelise kauguse* e*, väändeinertsimomendi* I_t *ning sektorinertsimomendi* I_ω.

[138] ./octaveProgrammid/yzTVmx.m
[139] ./octaveProgrammid/yzTVqz.m
[140] ./octaveProgrammid/minMaxGrfTVnurk.m
[141] ./octaveProgrammid/Naide4_6Udef.m
[142] ./octaveProgrammid/Naide4_6Uforce.m
[143] ./octaveProgrammid/ohukeU.m

Kirjandus

[ABD79] J. H. Argyris, H.-P. Balmer, J. St. Doltsinis, P. C. Dunne, M. Haase, M. Kleiber, G. A. Malejannakis, H. P. Mlejnek, M. Müller, D. W. Scharpf. Finite element method – the natural approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 17–18, pp. 1–106, 1979. 182

[And12] N. Andjelić. Torsional analysis of open section thin-walled beams.[1] Belgrade: *FME Transactions*, vol. 40, no. 2, pp. 93–97, 2012. 212

[ANS92] *ANSYS User's Manual for Revision 5.0.* Vol. IV, Theory. P. Kohnke (ed.). Chp. 3: Geometric Nonlinearities,[2] pp. 3-1–3-27. Houston, PA: Swanson Analysis Systems, Inc., 1992. 185, 188

[Arg82] J. H. Argyris. An excursion into large rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 32, no. 1–3, pp. 85–155, 1982. 180, 185, 187, 188

[BC09] O. A. Bauchau, J. I. Craig. *Structural Analysis: With Applications to Aerospace Structures.*[3] Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer Verlag, 2009. 108

[BKL13] Z. Brzoska, Z. Kączkowski, J. Lipka, Z. Olesiak, M. Życzkowski. Strength of Structural Elements.[4] *Studies in Applied Mechanics*. Vol. 26. Elsevier Science Ltd, 2013. 33

[BŠ73] В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский. *Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела.* Москва: Наука, 1973. 188

[1] http://www.mas.bg.ac.rs/_media/istrazivanje/fme/vol40/2/08_n_andjelic.pdf (3.12.2015)

[2] http://research.me.udel.edu/~lwang/teaching/MEx81/ansys56manual.pdf#page=70 (31.01.2016)

[3] https://books.google.ee/books?id=GYRX8ZYVNYQC&pg=PR8&lpg=PR8&dq=displacement+method+structural+analysis+thin-walled&source=bl&ots=HfiET119Bc&sig=D-vQzkD7TViBz2u0txNFv72oWzY&hl=en&sa=X&ved=0CDIQ6AEwBTgKahUKEwirtoDh0dDGAhVkKXIKHXpRAIw#v=onepage&q=displacement%20method%20structural%20analysis%20thin-walled&f=false (3.12.2015)

[4] https://books.google.ee/books?id=OE0vBQAAQBAJ&pg=PA419&lpg=PA419&dq=sign+of+\bimoment+and+moment&source=bl&ots=4eps3hNtsP&sig=qmfCXQTE9ZXWoKEwJXPzYbgDnXc\&hl=et&sa=X&ei=nOA3VeiXJoK6ygO4pYGYDQ&ved=0CDQQ6AEwBg (23.04.2015)

[Bõt62] Д. В. Бычков. *Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций.*[5] Москва: Госстройиздат, 1962. 3, 30, 32, 33, 41, 67, 73, 79, 85, 91, 97, 107, 108, 109, 110, 117, 118, 119, 120, 121, 128, 129, 130, 134, 135, 136, 137, 146, 147, 148, 149, 212

[DK90] L. Damkilde, S. Krenk. *MModels of Thin-Walled Beam Connections.*[6] Dept. of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University. *Engineering Mechanics*, no. 3, 1990. 108

[Din11] D. Dinkler. *Grundlagen der Baustatik. Modelle und Berechnungsmethoden für ebene Stabtragwerke.* 1. Auflage 2011.[7] Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 2011. 168

[Fil78] А. П. Филин. *Прикладная механика твердого деформируемого тела:* Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. Том II. Москва: Наука, 1978. 216

[Gei14] K. Geißler. *Handbuch Brückenbau.*[8] Berlin: John Wiley & Sons, 2014. 212

[GS94] A. S. Gendy, A. F. Saleeb. Generalized mixed finite element model for pre- and post-quasistatic buckling response of thin-walled framed structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, pp. 297–322, 1994. 180

[HIM11] A. F. Hughes, D. C. Iles, A. S. Malik. *Design of Steel Beams in Torsion.* In accordance with Eurocodes and the UK National Annexes.[9] Ascot, Berkshire: Steel Construction Institute (SCI), 2011. 22, 44, 212

[HM12] M. Horáček, J. Melcher. Mathematical definitions and experimentally verification of the torsion characteristics of perforated steel beams.[10] In: Proc. of the 14th WSEAS International Conference on Mathematical and Computational Methods in Science and

[5] http://sci-lib.com/book000149.html (26.01.2016)

[6] http://vbn.aau.dk/files/80026202/MODELS_OF_THIN_WALLED_BEAM_CONNECTIONS.pdf (3.07.2015)

[7] https://books.google.ee/books?id=ykQlBAAAQBAJ&q=Arbeitssatz&dq=Baustatik+Schnittprinzip&hl=et&source=gbs_word_cloud_r&cad=5#v=snippet&q=Arbeitssatz&f=false (01.03.2016)

[8] https://books.google.ee/books?id=EGaMAwAAQBAJ&pg=PA722&lpg=PA722&dq=Abklingfaktor+f%C3%BCr+Torsion\string&source=bl&ots=8-NCafhz3M&sig=qCf_B5wOlni7GZsOH7wfUNl7JAY&hl=en&sa=X&ei=qTEuVaO2BIq6sQHTkIGABg&ved=0CCgQ6AEwAQ#v=onepage&q=Abklingfaktor%20f%C3%BCr%20Torsion&f=false (3.12.2015)

[9] http://www.google.ee/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0ahUKEwj_g7z-4_TJAhUCXCwKHV0oAdoQFggbMAA&url=http%3A%2F%2Fwww.steelconstruction.info%2Ffile%3Asci_p385.pdf%3Finternal_link&usg=AFQjCNGrKCgjUX0yA1ERv2fpFjh6qNgtPg&bvm=bv.110151844,d.bGg (22.12.2015)

[10] http://www.wseas.us/e-library/conferences/2012/Sliema/MACMESE/MACMESE-13.pdf (18.04.2015)

Engineering (MACMESE ’12), Sliema, Malta September 7–9, 2012. WSEAS[11] Press, 2012, pp. 91–96. 216

[Jür85] A. Jürgenson. *Tugevusõpetus.*[12] [13] Tallinn: Valgus, 1985. 3, 26, 33, 55, 62, 68, 74, 80, 86, 92, 98, 109, 123, 140, 162, 169

[KK13] R. Kindmann, U. Krüger. *Stahlbau.* Teil 1: Grundlagen. Mit Beispielen nach Eurocode 3. 5. Auflage.[14] Berlin: Ernst & Sohn, 2013. 216

[KMPR12] A. Klauson, J. Metsaveer, P. Põdra, U. Raukas. *Tugevusõpetus.* Tallinn: Tallinna Tehnikaülikooli kirjastus, 2012. 15, 16, 18, 22, 29, 32, 161, 217

[Kre09] S. Krenk. *Non-linear Modeling and Analysis of Solids and Structures.*[15] Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 180

[Lah12] A. Lahe. *Ehitusmehaanika.*[16] Tallinn: Tallinna Tehnikaülikooli kirjastus, 2012. 56, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99, 167, 171, 172

[Lah14] A. Lahe. *The EST Method. Structural Analysis.*[17] Tallinn: Tallinn University of Technology Press, 2014. 55, 62, 68, 74, 80, 86, 92, 98, 110, 121, 137, 169

[Lah97a] A. Lahe. The transfer matrix and the boundary element method.[18] *Proc. Estonian Acad. Sci. Engng.*, 1997, 3, 1. pp. 3–12. 55, 62, 68, 74, 80, 86, 92, 98, 110, 121, 137

[Lah97b] A. Lahe. The EST method for the frame analysis. In: Proc. Tenth Nordic Seminar on Computational Mechanics, October 24–25, 1997. Tallinn: Tallinn University of Technology Press, 1997, pp. 202–205. 55

[Lah98a] A. Lahe. The EST method for the frame analysis in second order theory. In: Proc. of the NSCM-11: Nordic Seminar on Computational Mechanics, October 16–17, 1997. Royal Institute of Technology, Department of Structural Engineering, Stockholm, TRITA-BKN. Bulletin 39, Stockholm, 1998, pp. 167–170. 55

[11] http://www.wseas.org/cms.action (3.12.2015)
[12] ./AJ_tugevus.djvu (3.12.2015)
[13] http://digi.lib.ttu.ee/i/?472
[14] http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/9783433602560.fmatter/pdf (14.04.2013)
[15] https://books.google.ee/books?id=Z8jhqf9BpyAC&pg=PA60&lpg=PA60&dq=rotation++follower+moment&source=bl&ots=AadHzKlAkv&sig=8qTt00GmFO4R8xI1wo5FO8QwrxA&hl=et&sa=X&ved=0ahUKEwixoaycqb3KAhWB8HIKHWF-Cbk4FBDoAQgwMAY (22.01.2016)
[16] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf (8.08.2013)
[17] http://digi.lib.ttu.ee/estmethod/ESTmethod.pdf (8.08.2013)
[18] http://books.google.ee/books?id=ghco7svk5T4C&pg=PA3&lpg=PA3&dq=Andres+Lahe&source=bl&ots=3SFfo4UCES&sig=_XLUez-SfW2FVYGRx8v2LVm16V8&hl=et&ei=YQaFTMeIEoWcOOyCyNwP&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=5&ved=0CB0Q6AEwBDgK#v=onepage&q=Andres%20Lahe&f=false (3.12.2015)

[Lah08] A. Lahe. *Lõplike elementide meetod.*[19] Tallinn: Tallinna Tehnikaülikooli kirjastus, 2008.

[LH13] J. P. Lebet, M. A. Hirt. *Steel Bridges. Conceptual and Structural Design of Steel and Steel-Concrete Composite Bridges.*[20] Lausanne: EPFL Press. Distributed by CRC Press, 2013, p. 232.

[LR71] Ü. Lepik, L. Roots. *Teoreetiline mehaanika.*[21] Tallinn: Valgus, 1971. 179

[Loo08] K. Loorits. *Teraskonstruktsioonide arvutus Eurokoodeks 3 järgi.*[22] Tallinn: Eesti Teraskonstruktsiooniühing, 2008. 3, 33

[MR96] J. Metsaveer, U. Raukas. *Varda sisejõud ja pinged.*[23] Tallinn: Tallinna Tehnikaülikool, mehaanikainstituut, 1996. 32

[MW03] D. B. Moore, F. Wald (eds.). *Design of Structural Connections according to Eurocode 3 – Frequently Asked Questions.*[24] [25] Watford, UK: Building Research Establishment Ltd, 2003. 108

[Pra74] W. Prager. *Introduction to Structural Optimization. CISM Lecture Notes*. Vol. 212. Wien: Springer Verlag, 1974. 212

[BP68] *Прочность, устойчивость, колебания.* Справочник в трех томах. Том 1. Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. Москва: Машиностроение, 1968. 41

[RB86] C. C. Rankin, F. A. Brogan. An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations. *Journal of Pressure Vessel Technology – ASME*, vol. 108, no. 2, pp. 165–174, 1986. 186

[Sad63] С. Я. Садэтов. *Расчет тонкостенных стержней открытого профиля.* Москва: Росвузиздат, 1963. 3, 16, 46, 48, 61, 67, 73, 79, 85, 91, 97, 103, 104, 217

[Smi75] А. Ф. Смирнов. *Сопротивление материалов.* Москва: Высшая школа, 1975. 16

[Ste59] В. В. Степанов. *Курс дифференциальных уравнений.* Москва: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1959. 48

[19] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Lem.pdf (8.08.2013)
[20] https://books.google.ee/books?id=xYZFAQAAQBAJ&pg=PA232&lpg=PA232&dq=warping+moment&source=bl&ots=cgQSNUPqMZ&sig=JPwNJkW87XJDQbpJwQe_IEe5-Jc&hl=en&sa=X&ei=-norVeiWEtHXauK5gNAL&ved=0CDwQ6AEwBjgK#v=onepage&q=warpingmoment&f=false (13.04.2015)
[21] http://erb.nlib.ee/?kid=13346192&oid=7b4c150e (6.06.2015)
[22] http://www.ester.ee/record=b2379676~S1*est (5.04.2015)
[23] ./vsp.djvu (3.12.2015)
[24] http://www.e-konstrukcije.si/user_files/vsebina/Informacije/DESIGN_OF_STRUCTURAL_CONNECTIONS_TO_EUROCODE_3.pdf (3.12.2015)
[25] http://people.fsv.cvut.cz/~wald/CESTRUCO/_aa_Textbook.htm (3.07.2015)

[Teh05] L. H. Teh. *Spatial rotation kinematics and flexural-torsional buckling.*[26] University of Wollongong, Research Online. 2005. 108

[VN87] T. A. Vernon, Y. Nadeau. *Thin-Walled Beam Theories and Their Applications in the Torsional Strength Analysis of Ship Hulls.* ADA178296 Technical Memorandum 87/202.[27] [28] Canada: Defence Research Establishment Atlantic, 1987. 216

[Vla59] гВ. З. Власов. *Тонкостенные упругие стержни.* 2-ое издание.[29] Москва: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1959. 16, 18, 19

[WE98] W. Wagner, G. Erlhof. *Praktische Baustatik.* Teil 2. 15. Auflage.[30] Stuttgart: B. G. Teubner, 1998. 216

[YM86] Y.-B. Yang, W. McGuire. Joint rotation and geometric nonlinear analysis. *ASCE Journal of Structural Engineering*, vol. 112, no. 4, pp. 879–905, 1986. 180

[YSM00] A. Yavari, S. Sarkani, E. T. Moyer, Jr. On applications of generalized functions to beam bending problems.[31] *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, no. 40, pp. 5675-5705, 2000. 48

[Zie77] H. Ziegler. *Principles of Structural Stability.* 2nd edition. Basel: Birkhäuser, 1977. 180

[26] http://ro.uow.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1669&context=engpapers (3.07.2015)

[27] http://oai.dtic.mil/oai/oai?verb=getRecord&metadataPrefix=html&identifier=ADA178296 (25.03.2015)

[28] http://www.google.ee/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&ved=0ahUKEwiikdKT-NHKAhXI6CwKHQssDjsQFgggMAE&url=http://www.dtic.mil/cgi-bin/GetTRDoc%3FAD%3DADA178296&usg=AFQjCNEX73dt7oQwWX0bcW6bLH5_s6h_0Q&bvm=bv.113034660,d.bGg&cad=rja (25.03.2015)

[29] http://dwg.ru/dnl/9881 (26.01.2016)

[30] https://books.google.ee/books?id=VT5EcGYVvQIC&pg=PA177&lpg=PA177&dq=berechnung+w%C3%B6lbmoment&source=bl&ots=1CHx_GeAPJ&sig=xtbmAY75Jj9bGTs_1ysYNQgCxzo&hl=en&sa=X&ei=7ocrVfjgMMHnaJ6FgdgH&ved=0CDkQ6AEwAw#v=onepage&q=berechnung%20w%C3%B6lbmoment&f=false (13.04.2015)

[31] http://www.yavari.ce.gatech.edu/sites/default/files/pubs/generalized_functions.pdf (25.03.2015)

Aineregister

Terminid ja sümbolid

Bimoment. (eurokoodeksis – bimoment B_{Ed}; sks Bimoment, ingl bimoment, vn изгибно-крутящий бимомент). Bimomendi tähis on B_ω. Bimomendi võib leida avaldisega

$$B_\omega = -EI_\omega\theta'' \tag{T.1}$$

kus
E – elastsusmoodul ehk Youngi moodul (konstruktsiooniterastel $190 \ldots 220$ GPa);
I_ω – sektorinertsimoment;
θ'' – väändenurga teine tuletis varda teljesuunalise koordinaadi järgi.
3, 17, 22, 32, 35, 41, 43, 55–57, 60, 62–64, 66, 68–70, 72, 74, 75, 78, 80, 81, 84, 86, 87, 90, 92, 93, 96, 98–100, 103, 109, 110, 112, 117, 121, 128, 134, 137, 146, 168, 191–195, 197–199

Elastne joon (sks Biegelinie e elastische Linie, ingl elastic line, vn упругая линия). Elastseks jooneks nimetatakse varda kõverdunud telge, mille kuju määrab elastse joone võrrand.
33

Elastne telg (sks Schubmittelachse, ingl elastic axis e line of shear centers, vn упругая ось е линия центров изгиба) on varda lõikekeskmeid ühendav joon.
3, 33, 44, 107, 121, 137, 162

Koguväändemoment (eurokoodeksis – summaarne väändemoment; sks gesamte Torsionsmoment, ingl torsional moment, vn полный крутящий момент). Koguväändemoment on võrdne vabaväändemomendi (St. Venant'i väändemomendi) T_t ja kooldeväändemomendi T_ω algebralise summaga:

$$T_{sum} = T_t + T_\omega \tag{T.2}$$

kus
T_{sum} – koguväändemoment;
T_t – vabaväändemoment;
T_ω – kooldeväändemoment.
4, 24, 41, 43, 55–57, 60, 62–64, 66, 68–70, 72, 74, 75, 78, 80, 81, 84, 86, 87, 90, 92, 93, 96, 98–100, 103, 109, 110, 112, 117, 124, 128, 134, 141, 146, 168, 178, 191–195, 197, 198

Kooldejäikus (sks Wölbsteifigkeit, ingl warping rigidity of the section, vn секториальная жесткость депланации тонкостенного стержня). Kooldejäikus avaldub elastsusmooduli E ja sektorinertsimomendi I_ω korrutisena:

$$EI_\omega = E \times I_\omega \tag{T.3}$$

kus
I_ω – sektorinertsimoment;
E – elastsusmoodul ehk Youngi moodul (konstruktsiooniterastel $190 \ldots 220$ GPa).
44, 45, 55, 62, 68, 74, 80, 86, 92, 98, 110, 121, 137

Kooldekarakteristik (sks Abklingfaktor für Torsion [Gei14, lk 722], ingl flexural-torsion cross-section characteristic [And12], [Pra74], vn изгибно-крутильная характеристика стержня [Bõt62]). Kooldekarakteristik iseloomustab kooldumise määra. Kooldekarakteristiku tähis on κ. Kooldekarakteristik saadakse õhukeseseinalise varda takistatud väände diferentsiaalvõrrandi vastavast karakteristlikust võrrandist.

$$\kappa = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}}, \qquad a = \sqrt{\frac{EI_\omega}{GI_t}} \tag{T.4}$$

kus
GI_t – vabaväändejäikus;
EI_ω – kooldejäikus;
a – kooldekarakteristiku pöördväärus (ingl torsional bending constant) [HIM11].
44, 45, 55, 62, 68, 74, 80, 86, 92, 98, 110, 121, 137

Kooldemoment (eurokoodeksis – $M_{w,Ed}$; sks Wölbmoment, ingl warping moment, vn изгибно-крутящий момент). Kooldemomendi tähis on M_ω. Kooldemoment leitakse samal viisil nagu bimoment, kuid bimomendil puudub momendi dimensioon.

$$M_\omega = \mp \frac{EI_\omega}{(h - t_f)}\theta'' \tag{T.5}$$

kus
E – elastsusmoodul ehk Youngi moodul (konstruktsiooniterastel $190 \ldots 220$ GPa);
I_ω – sektorinertsimoment;
θ'' – väändenurga teine tuletis varda teljesuunalise koordinaadi järgi;
h – ristlõike kõrgus;
t_f – vöö paksus.
22

Kooldenihkepinge (eurokoodeksis – takistatud väändest tingitud nihkepinge; sks Wölbschubspannung, ingl warping shear stress, vn секториальное касательное напряжение). Kooldenihkepinge tähis on τ_ω. Kooldenihkepinge võib leida avaldisega

$$\tau_\omega = E\theta''' \frac{S_\omega^*}{\delta} = -\frac{T_\omega S_\omega^*}{I_\omega \delta} \tag{T.6}$$

kus

E – elastsusmoodul ehk Youngi moodul (konstruktsiooniterastel $190 \dots 220$ GPa);
θ''' – väändenurga kolmas tuletis varda teljesuunalise koordinaadi järgi;
S^*_ω – eraldatud osa staatiline sektormoment;
δ – ristlõikeelemendi paksus vaadeldavas kohas;
T_ω – kooldeväändemoment;
I_ω – sektorinertsimoment.
3, 24, 26, 29–31

Kooldenormaalpinge (eurokoodeksis – bimomendist tingitud normaalpinge; sks Wölbnormalspannungen, ingl warping normal stress, vn секториальное нормальное напряжение). Kooldenormaalpinge σ_ω võib leida avaldistega

$$\sigma_\omega = -E\omega\theta'', \qquad \sigma_\omega = \frac{B_\omega \omega}{I_\omega} \tag{T.7}$$

kus
E – elastsusmoodul ehk Youngi moodul (konstruktsiooniterastel $190 \dots 220$ GPa);
ω – sektorkoordinaat;
θ'' – väändenurga teine tuletis varda teljesuunalise koordinaadi järgi;
B_ω – bimoment;
ω – sektorkoordinaat;
I_ω – sektorinertsimoment.
3, 17, 21, 23, 24, 26, 30–32

Kooldetugevusmoment (sks Wölbwiderstandsmoment, ingl warping section modulus, vn секториальный момент сопротивления) on sektorinertsimomendi I_ω ja maksimaalse sektorkoordinaadi ω_{max} jagatis. Kooldetugevusmomendi tähis on W_ω.

$$W_\omega = \frac{I_\omega}{\omega_{max}} \tag{T.8}$$

siin
I_ω – sektorinertsimoment;
ω_{max} – maksimaalne sektorkoordinaat.
110

Kooldeväändemoment (eurokoodeksis – takistatud väände väändemoment; sks Wölbtorsionsmoment, ingl warping torsional moment, vn изгибно-крутящий момент). Kooldeväändemoment T_ω määratakse integraaliga:

$$\mathbf{T}_\omega = \int_A \tau_\omega r \, \mathrm{d}A \tag{T.9}$$

kus
τ_ω – kooldenihkepinge;
r – pooluse kaugus keskjoone puutujast;
A – ristlõike pindala.
24–27, 31, 41, 43, 55, 56, 60, 62, 63, 66, 68, 69, 72, 74, 78, 80, 84, 86, 90, 92, 96, 98, 99, 103, 109, 112, 117, 121, 128, 134, 137, 146, 168, 178, 191–195, 197, 198

Lõikekese e väändekese (eurokoodeksis – väändekese; sks Schubmittelpunkt, ingl shear center, vn центр изгиба) on punkt (poolus), mille puhul sektortsentrifugaalmomendid $I_{\omega\,y}$, $I_{\omega\,z}$ on võrdsed nulliga. Lõikekeskme koordinaadid z_P ja y_P keskpeateljestikus määratakse avaldistega

$$z_P = -\frac{\int_A \omega_o y \,\mathrm{d}A}{\int_A y^2 \,\mathrm{d}A} = -\frac{I_{\omega_o z}}{I_z} \tag{T.10}$$

$$y_P = \frac{\int_A \omega_o z \,\mathrm{d}A}{\int_A z^2 \,\mathrm{d}A} = \frac{I_{\omega_o y}}{I_y} \tag{T.11}$$

kus
ω – sektorkoordinaat;
$I_{\omega_o z}$ – sektortsentrifugaalmoment keskpeatelje y suhtes;
$I_{\omega_o y}$ – sektortsentrifugaalmoment keskpeatelje z suhtes;
I_z – peainertsimoment keskpeatelje y suhtes;
I_y – peainertsimoment keskpeatelje z suhtes.
26, 33, 36, 37, 39

Sektorinertsimoment (eurokoodeksis – ristlõike sektoriaalinertsimoment; sks Sektorträgheitsmoment, ingl warping constant, vn секториальный момент инерции) on integraalina väljenduv summa. Sektorinertsimomendi tähis on I_ω. Sektorinertsimoment määratakse integraaliga:

$$I_\omega = \int_A \omega^2 \mathrm{d}A \tag{T.12}$$

kus
ω – sektorkoordinaat;
A – ristlõike pindala.
3, 22, 23, 29, 31, 43, 166, 199

Sektorkoordinaadi nullpunkt (sks Nullpunkt für die Sektorkoordinate, ingl null sectorial point, vn секториальная нулевая точка) on selline sektorkoordinaadi alguspunkt, mille puhul kogu kujundi staatiline sektormoment võrdub nulliga.

$$S_\omega = \int_A \omega \mathrm{d}A = 0 \tag{T.13}$$

kus
S_ω – staatiline sektormoment;
ω – sektorkoordinaat;
A – ristlõike pindala.
Sektorkoordinaadi nullpunkti koordinaadi leiame avaldisega

$$\omega_M = \frac{S_\omega}{A} \tag{T.14}$$

Sektorkoordinaadi nullpunkte võib olla mitu. Sektorkoordinaadi peanullpunkt on lõikekeskmele kõige lähemal.
3, 37, 38

Sektorkoordinaat e sektorpindala (eurokoodeksis – sektoriaalpindala; sks Sektorkoordinate, ingl sectorial coordinate, vn секториальная координата) on pindala koordinaat. Sektorkoordinaadi tähis on ω. Sektorkoordinaat määratakse integraaliga:

$$\omega_N = \int_{s_1}^{s_2} r\,\mathrm{d}s \tag{T.15}$$

kus
r – pooluse kaugus keskjoone puutujast, mis läbib punkti N;
$\mathrm{d}s$ – keskjoone diferentsiaal.
3, 21, 26, 31, 37, 39, 41, 92, 107

Sektortsentrifugaalmoment (sks sektorielles Deviationsmoment, ingl sectorial deviation moment, vn секториальный центробежный момент инерции, kasutusel ka секториально-линейный центробежный статический момент) on integraalina väljenduv summa. Sektortsentrifugaalmomendi tähis on $I_{\omega\, y}$ või $I_{\omega\, z}$. Sektortsentrifugaalmoment määratakse integraaliga:

$$I_{\omega\, y} = \int_A z\,\omega\,\mathrm{d}A, \qquad I_{\omega\, z} = \int_A y\,\omega\,\mathrm{d}A \tag{T.16}$$

kus
ω – sektorkoordinaat;
$I_{\omega_o\, z}$ – sektortsentrifugaalmoment keskpeatelje y suhtes;
$I_{\omega_o\, y}$ – sektortsentrifugaalmoment keskpeatelje z suhtes;
A – ristlõike pindala.
3, 158

Staatiline sektormoment (eurokoodeksis – sektoriaal-staatiline moment; sks statisches Sektormoment, ingl warping statical moment, vn секториальный статический момент). Staatiline sektormoment S_ω määratakse integraaliga:

$$S_\omega = \int_A \omega\,\mathrm{d}A \tag{T.17}$$

kus
ω – sektorkoordinaat;
A – ristlõike pindala.
3, 29

Suhteline väändenurk (sks Verdrillung e relativer Verdrehwinkel, ingl rotation per unit length e twist, vn относительный угол закручивания) iseloomustab varda väändenurga muutumist varda telje suunas. Suhtelise väändenurga tähis on θ'.

$$\theta' = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} \tag{T.18}$$

kus
θ – väändenurk.
41, 55, 62, 68, 74, 75, 80, 81, 86, 87, 92, 93, 98, 109, 110

Tunnusarv väändel (sks Stabkennzahl für Torsion [KK13, lk 89], [WE98, lk 18], ingl torsion parameter [HM12] e warping parameter [VN87], vn корень характеристического уравнения [Fil78, lk 318, 407]) iseloomustab kooldumise määra. Tunnusarv väändel ϵ_t saadakse õhukeseseinalise varda takistatud väände diferentsiaalvõrrandi vastavast karakteristlikust võrrandist.

$$\epsilon_t = l\kappa = l\sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}} \tag{T.19}$$

kus
l – varda pikkus;
κ – kooldekarakteristik;
GI_t – vabaväändejäikus;
EI_ω – kooldejäikus.
44

Vabaväändejäikus (sks Torsionssteifigkeit, ingl torsional rigidity e St. Venant torsional constant, vn жесткость при чистом кручении) avaldub nihkeelastsusmooduli G ja väändeinertsimomendi I_t korrutisena:

$$GI_t = G \times I_t \tag{T.20}$$

kus
I_t – väändeinertsimoment;
G – nihkeelastsusmoodul e nihkemoodul e Coulomb'i moodul, mis on antud avaldisega $G = E/(1+\nu)$, kus E on elastsusmoodul ja ν on Poissoni tegur. Konstruktsiooniterastel $\nu \approx 0.25 \ldots 0.3$, $E/G = 2.6$ ja $G \approx 81\,\mathrm{GPa}$.
16, 44, 45, 55, 62, 68, 74, 80, 86, 92, 98, 110, 121, 137

Vabaväändemoment (eurokoodeksis – vabaväände (St. Venant'i väände) väändemoment; sks Torsionsmoment (Saint-Venant Torsion), ingl St. Venant torsional moment, vn момент чистого кручения). Vabaväändemomendi T_t ja väändenurga $\theta(x)$ tuletis varda teljesuunalise koordinaadi järgi on omavahel seotud:

$$T_t = GI_t\theta' \tag{T.21}$$

kus
θ' – väändenurga tuletis varda teljesuunalise koordinaadi järgi;
GI_t – vabaväändejäikus.
15, 24, 30, 41, 43, 45, 55, 56, 60, 62, 63, 66, 68, 69, 72, 74, 78, 80, 84, 86, 90, 92, 96, 98, 99, 103, 109, 112, 117, 121, 128, 134, 137, 146, 168, 178, 191–195, 197, 198

Väändeinertsimoment (eurokoodeksis – ristlõike väändeinertsimoment; sks Torsionträgheitsmoment, ingl St. Venant torsional constant, vn момент инерции при чистом кручении) võib pidada polaarinertsimomendi üldistuseks. Väändeinertsimomendi tähis on I_t. Väändeinertsimomendi määramiseks võib leida avaldisi teatmikest.

$$I_t = \frac{1}{3}\eta \sum_{i=1}^{n} b_i \delta_i^3 \tag{T.22}$$

kus
b_i ja δ_i – ristlõikes oleva väljavenitatud ristkülikulise lehe küljed ($b_i \gg \delta_i$);
η – tegur, mille väärus sõltub ristlõike kujust: L-profiilil $\eta = 1.00 \ldots 1.10$, I-profiilil $\eta = 1.2$, U-profiilil $\eta = 1.12$ ja T-profiilil $\eta = 1.15$ [Sad63, lk 23].
Väändeinertsimomendi I_t arvutamist õhukeseseinalise suletud ristlõike korral vt [KM-PR12, lk 305].

Väändenurk (eurokoodeksis – väändenurk; sks Drehwinkel, ingl torsional angle, vn угол закручивания) mõõdab varda ristlõigete pöördumist üksteise suhtes. Väändenurga tähis on θ.