

Er. 6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 160 1959

В. Р. Кульбах

**О решении задач плоской фильтрации со
свободной поверхностью методом конечных
разностей**

ТАЛЛИН, 1959

Ер. 6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Серия А

№ 160

1959

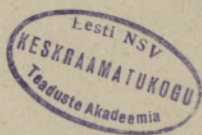
В. Р. Кульбах

**О решении задач плоской фильтрации со
свободной поверхностью методом конечных
разностей**

ТАЛЛИН, 1959

~~Ep. 3298~~

Ep. 3306



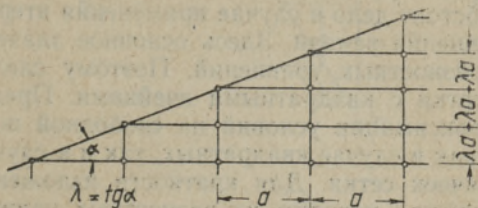
Метод конечных разностей успешно применяется для решения задач напорной фильтрации. Такие задачи представляют собой типичные краевые задачи уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями, аппроксимация которых в сеточной области не представляет особых затруднений. Решение задач безнапорной фильтрации осложняется тем, что ординаты кривой свободной поверхности зависят от значений напорной функции во всей области фильтрации.

В единичных случаях применения метода конечных разностей для решения задач безнапорной фильтрации форма кривой свободной поверхности была задана произвольно. Правда, возможно уточнение формы кривой свободной поверхности в ходе расчета с помощью графических построений, но это приводит к значительному увеличению циклов приближений.

В настоящей работе устанавливаются аналитические зависимости для учета условий на свободной поверхности и их включения в общую систему разностных уравнений. Затем рассматриваются возможные схемы решения системы разностных уравнений.

1. О переходе от фактической области фильтрации на сеточную область

Область безнапорной фильтрации обычно характеризуется вытянутой в горизонтальном направлении формой. Поэтому сетка с прямоугольными ячейками обладает определенными преимуществами перед сеткой с квадратными ячейками. Наиболее удобной оказывается сетка, отношение размеров ячейки которой равно тангенсу угла наклона откоса. В этом случае крайние узлы сетки оказываются точками поверхности откоса (см. фиг. 1). С дру-



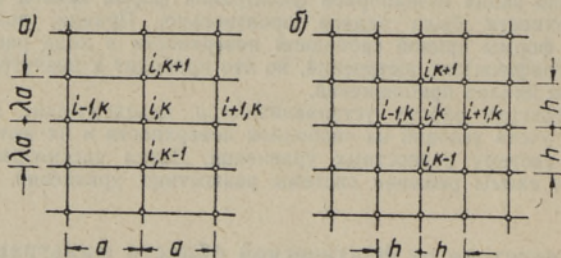
Фиг. 1.

гой стороны, разностное уравнение в случае прямоугольных ячеек (фиг. 2а)

$$H_{i,k} = \frac{H_{i,k-1} + H_{i,k+1} + \lambda^2 (H_{i-1,k} + H_{i+1,k})}{2(1 + \lambda^2)} \quad (1)$$

несколько сложнее такого в случае квадратных ячеек (фиг. 2б)

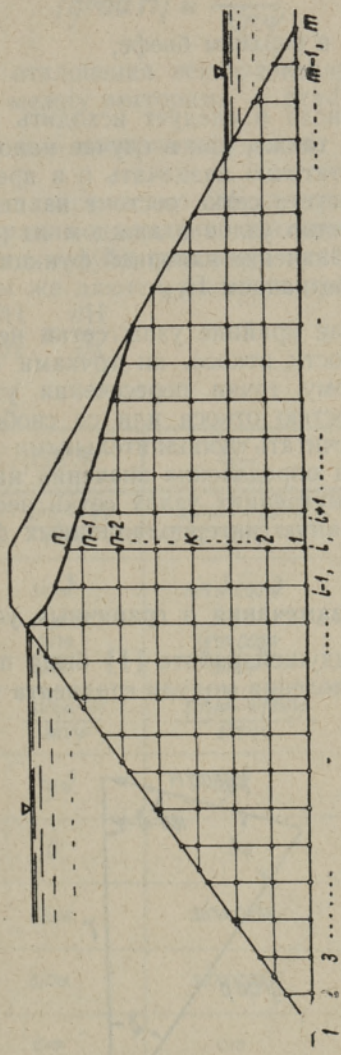
$$H_{i,k} = \frac{1}{4} (H_{i,k-1} + H_{i,k+1} + H_{i-1,k} + H_{i+1,k}) \quad (2)$$



Фиг. 2.

Преимущества сетки с прямоугольными ячейками проявляются в первую очередь в случае непосредственного решения системы разностных уравнений. Заданную точность расчета в случае прямоугольных ячеек можно получить при меньшем количестве узлов сетки (т. е. при меньшем количестве уравнений в разностной системе). Более сложная структура разностных уравнений в полной мере компенсируется уменьшением их количества.

Иначе обстоит дело в случае применения итерационного способа решения задачи. Здесь основное значение имеет простота разностных уравнений. Поэтому следует предпочитать сетки с квадратными ячейками. Предлагаемый способ аппроксимации условий на свободной поверхности применим как в случае квадратных, так и в случае прямоугольных ячеек сетки. Для краткости изложения в следующих пунктах исходим из разностных уравнений для сетки с квадратными ячейками.



Фиг. 3.

Размер ячейки целесообразно назначать равным

$$h = \frac{H_1}{n},$$

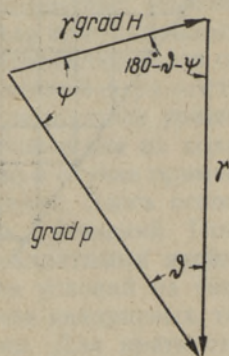
где H_1 — напор в верхнем бьефе,
 n — целое число.

При выборе числа n следует исходить из требований точности расчета также, как в случае напорной фильтрации. Обычно достаточно назначать n в пределах от 5 до 10. В конечном счете сетка состоит из m вертикальных столбцов, количество узлов в каждом из них составляет n_i (см. фиг. 3). Значение напорной функции в k -том узле i -того столбца обозначаем $H_{i,k}$.

В общем случае крайние узлы сетки не являются ни точками поверхности откоса, ни точками свободной поверхности. Поэтому точки пересечения узловых линий сетки с поверхностью откоса или со свободной поверхностью следует считать дополнительными узлами сетки. В этой связи для определения значений напорной функции в крайних внутренних узлах сетки необходимо прибегать к пользованию интерполяционных формул.

2. Общие замечания о граничных условиях

В нашей предыдущей работе [1] была получена зависимость для определения модуля градиента напора в виде (см. фиг. 4).



Фиг. 4.

$$|\text{grad } H| = \frac{\sin \vartheta}{\sin \psi} \quad (3)$$

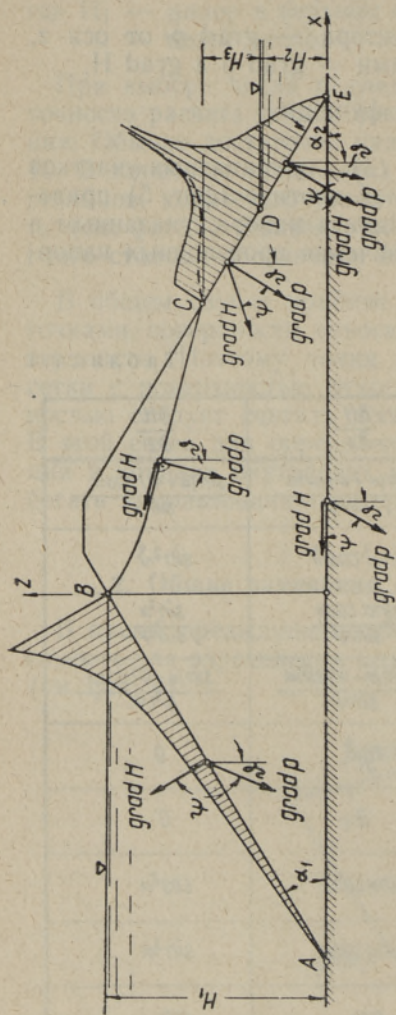
где ϑ — угол отклонения вектора — grad p от оси z,
 ψ — угол между векторами — grad p и grad H,

$H = \frac{p}{\gamma} + z$ — напорная функция.

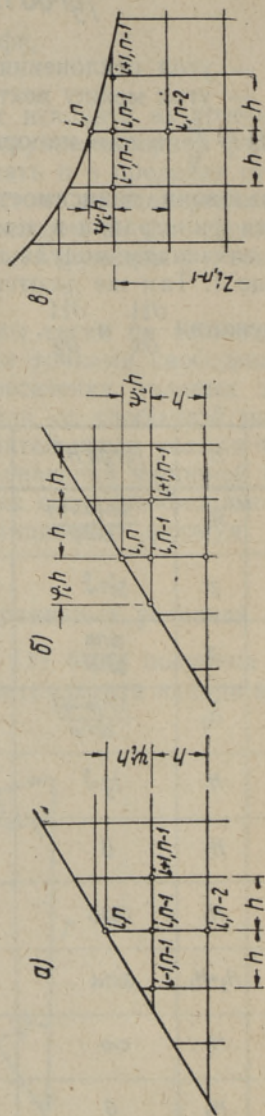
Пользование зависимостью (3) для граничных участков области фильтрации в земляной плотине (фиг. 5) приводит к значениям модуля градиента напора, указанным в таблице 1. Там же даются значения производных напорной функции $\frac{\partial H}{\partial x}$ и $\frac{\partial H}{\partial z}$.

Таблица 1

Участок	H	$ \text{grad } H $	$\frac{\partial H}{\partial x}$	$\frac{\partial H}{\partial z}$
AB	H_1	$\frac{\sin(\alpha+\psi)}{\sin\psi}$	$\frac{\sin(\alpha+\psi)\sin\alpha}{\sin\psi}$	$\frac{\sin(\alpha+\psi)\cos\alpha}{\sin\psi}$
BC	z	$\sin\vartheta$	$\sin\vartheta\cos\vartheta$	$\sin^2\vartheta$
CD	z	$\frac{\sin\alpha}{\sin\psi}$	$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\psi}$	$\frac{\sin^2\alpha}{\sin\psi}$
DE	H_2	$\frac{\sin(\alpha-\psi)}{\sin\psi}$	$\frac{\sin(\alpha-\psi)\sin\alpha}{\sin\psi}$	$\frac{\sin(\alpha-\psi)\cos\alpha}{\sin\psi}$
AE	H	$\text{tg}\vartheta$	$\text{tg}\vartheta$	0
A	H_1	0	0	0
B	H_1	$\cos\alpha$	$\sin\alpha\cos\alpha$	$\cos^2\alpha$
C	H_2+H_3	$\sin\alpha$	$\sin\alpha\cos\alpha$	$\sin^2\alpha$
D	H_2	∞	∞	∞
E	H_2	0	0	0



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Участки АВ и СЕ (см. фиг. 5) представляют собой границы с заданными значениями напорной функции H . Для увязки значений напорной функции на поверхности откоса с ее значениями в крайних внутренних узлах сетки (фиг. 6а) следует пользоваться интерполяционной формулой Микеладзе

$$H_{i,n-1} = \frac{1}{1+\psi_i} \frac{H_{i,n} + \psi_i H_{i,n-2}}{1+\psi_i} + \frac{\psi_i}{1+\psi_i} \frac{H_{i-1,n-1} + H_{i+1,n-1}}{2} \quad (4)$$

В некоторых случаях линия откоса может пересекаться двумя узловыми линиями в пределах одного квадрата (см. фиг. 6б). Тогда интерполяционная формула имеет вид

$$H_{i,n-1} = \frac{\psi_i}{\varphi_i + \psi_i} \frac{H_{i,n} + \varphi_i H_{i+1,n-1}}{1+\psi_i} + \frac{\varphi_i}{\varphi_i + \psi_i} \frac{H_{i,n} + \psi_i H_{i,n-2}}{1+\psi_i} \quad (5)$$

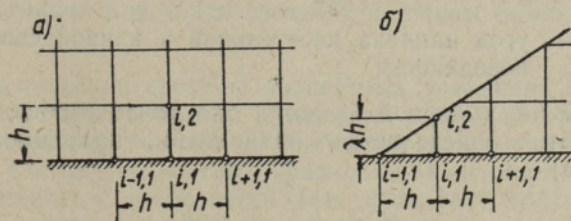
Участок ВС (см. фиг. 5), т. е. кривая свободной поверхности имеет координаты, равные значениям напорной функции. Поэтому имеем (см. фиг. 6в)

$$H_{i,n} = z_{i,n-1} + \psi_i h \quad (6)$$

а интерполяционная формула (4) принимает вид

$$H_{i,n-1} = \frac{1}{1+\psi_i} \frac{z_{i,n-1} + \varphi_i (H_{i,n-2} + h)}{1+\psi_i} + \frac{\psi_i}{1+\psi_i} \frac{H_{i-1,n-1} + H_{i+1,n-1}}{2} \quad (7)$$

В формуле (7) значение ψ не является заданной величиной как в формуле (4), а должно определяться дополнительными условиями, рассматриваемыми в пункте 3.



Фиг. 7.

Участок АЕ (см. фиг. 5) как горизонтальное водонепроницаемое основание характеризуется вертикальностью касательных к линиям равных напоров. Разностное уравнение может быть представлено в виде (см. фиг. 7а)

$$H_{i,1} = \frac{1}{4}(H_{i-1,1} + H_{i+1,1} + 2H_{i,2}) \quad (8)$$

В зонах пересечения линий откоса с основанием образуются неквадратные ячейки (см. фиг. 7б), и формула (8) заменяется формулой

$$H_{i,1} = \frac{2H_{i,2} + \lambda^2(H_{i-1,1} + H_{i+1,1})}{2(1 + \lambda^2)} \quad (9)$$

3. Аппроксимация условий на свободной поверхности

Модуль градиента напора в любой точке свободной поверхности определяется зависимостью (см. табл. 1 и фиг. 8а)

$$|\text{grad } H| = \sin \vartheta \quad (10)$$

а его составляющие равны

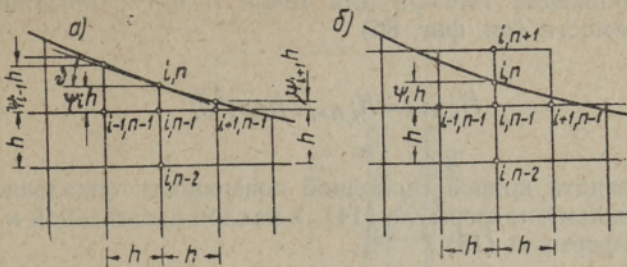
$$\frac{\partial H}{\partial x} = \sin \vartheta \cos \vartheta \quad (11)$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \sin^2 \vartheta \quad (12)$$

где ϑ — угол наклона касательной к кривой свободной поверхности.

Значение напорной функции для точек свободной поверхности определяется ординатами последних (см. фиг. 8а)

$$H_{i,n} = z_{i,n-1} + \psi_i h \quad (6')$$



Фиг. 8.

С другой стороны, пользуясь разложением Тэйлора и ограничиваясь двумя членами, на основе (12) находим

$$H_{i,n} = H_{i,n-1} + \psi_i h \sin^2 \vartheta_i \quad (13)$$

Совместное решение (6) и (13) дает искомую величину ψ_i

$$\psi_i = \frac{H_{i,n-1} - z_{i,n-1}}{h} (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta_i) \quad (14)$$

Наклон касательной к кривой свободной поверхности определяется разностью ее ординат

$$\operatorname{tg} \vartheta_i = 0,5 (\psi_{i-1} - \psi_{i+1}) \quad (15)$$

Подставляя значение $\operatorname{tg} \vartheta_i$ из (15) в (14), а затем значение ψ_i из (14) в (7), находим искомое значение напорной функции для узлов соседних к точкам свободной поверхности.

При решении системы разностных уравнений методом итерации целесообразно применить несколько иной путь аппроксимации условий на свободной поверхности. Включая в систему разностных уравнений зависимости для дополнительных точек сетки (см. фиг. 8б), получим для определения напорной функции в крайних внутренних узлах сетки обыкновенные разностные уравнения (2).

Разложение Тэйлора для точки i , $p+1$ приводит к зависимости (см. фиг. 8б)

$$H_{i,p+1} = H_{i,p-1} + h \sin^2 \vartheta_i \quad (16)$$

Ордината кривой свободной поверхности определяется попрежнему по формуле (14), а наклон касательной к ней — по формуле (15).

4. Схема решения системы разностных уравнений прямыми методами

Пусть требуется определить значения напорной функции в узлах области фильтрации, изображенной на фиг. 9. Узлы сетки образуют m вертикальных столбцов, i -тый из которых содержит n_i узлов.

Все столбцы узлов разделяем в 3 группы (см. фиг. 9): m_1 столбцов зоны верхового откоса, m_2 столбцов зоны низового откоса и m_3 столбцов зоны кривой свободной поверхности. Количество неизвестных в зоне верхового откоса составляет $\sum_{i=2}^{m_1} (n_i - 1)$. Для их определения имеем такое же количество уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=i_0}^{m_1} (n_i - 3) \text{ уравнений типа (2),} \\ & m_1 - 1 \text{ уравнений типа (8) или (9),} \\ & m_1 - i_1 + 1 \text{ уравнений типа (4) или (5),} \end{aligned}$$

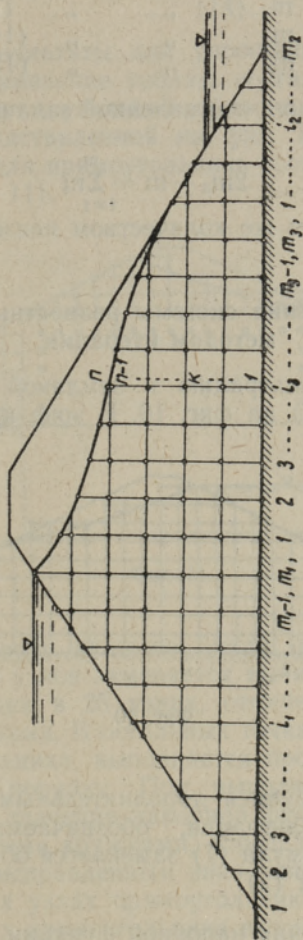
где i_0 определяется условием $n_{i_0} = 4$,

i_1 определяется условием $n_{i_1} = 3$.

Аналогично для зоны низового откоса имеем $\sum_{i=1}^{m_2-1} (n_i - 1)$ неизвестных и такое же количество уравнений.

В зоне кривой свободной поверхности имеем

$$\sum_{i=1}^{m_3} (n_i - 1) + 2m_3 = \sum_{i=1}^{m_3} n_i + m_3 \text{ неизвестных.}$$



Фиг. 9.

Соответственно имеем

$$\sum_{i=1}^{m_3} (n_i - 3) \text{ уравнений типа (2),}$$

$$m_3 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad (8),$$

$$m_3 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad (7),$$

$$m_3 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad (14),$$

$$m_3 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad (15).$$

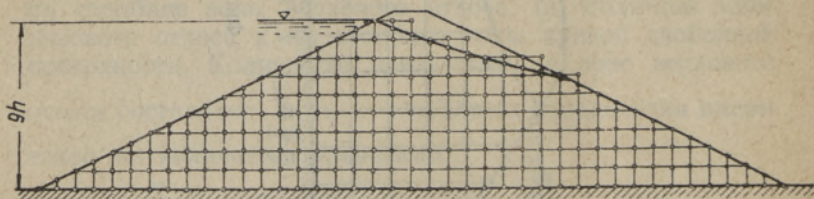
Итак, для решения поставленной задачи имеем систему, в которую входит

$$2m_3 - m + \sum_{i=1}^m n_i$$

уравнений с таким же количеством неизвестных.

5. Схема решения системы разностных уравнений методом итерации

Рассмотрим фильтрацию в земляной плотине, схема которой приведена на фиг. 10. В зоне кривой свободной



Фиг. 10.

поверхности пользуемся дополнительными узлами сетки вне области фильтрации, обозначаемыми индексами $n_i + 1$. Тогда формула (7) заменяется обыкновенной разностной формулой (2).

Исходные значения напорной функции, а также форма кривой свободной поверхности задаются по приближенным соображениям. Для выполнения каждого цикла итерации необходимо выполнить $3m_3 - m + \sum_{i=1}^m n_i$ вычислительных операций, из них

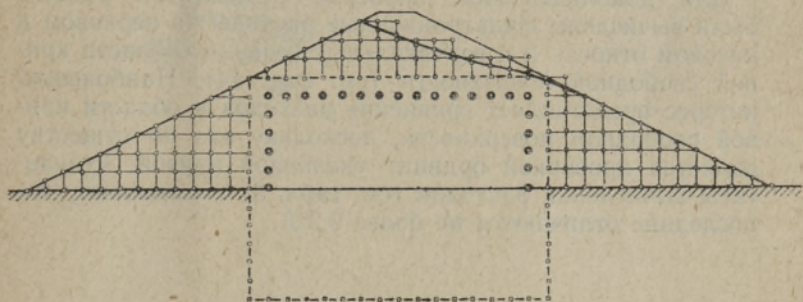
$\sum_{i=1}^m n_i$ — m операций типа (2), (8), (9), (4) или 5,

m_3 „ „ (16),

m_3 „ „ (15),

m_3 „ „ (14).

Хорошие результаты для упрощения итерационного расчета дает применение таблиц, составленных для граничных задач прямоугольной области [2]. Для схемы фильтрации, представленной на фиг. 10, может применяться таблица для прямоугольника соотношением сторон 12 : 16 (см. фиг. 11).



Фиг. 11.

Тогда выполнение каждого цикла процесса итерации для $6 \times 15 = 90$ узлов заменяется вычислением значений напорной функции в 25 узлах, отмеченных на фиг. 11 двойными кружками. В остальных точках, включая и границы прямоугольника, выполняется процесс итерации по обыкновенному порядку. При выполнении следующего цикла итерации значения напорной функции в узлах, отмеченных двойными кружками, определяются с помощью таблиц уже по исправленным значениям напорной функции в контурных узлах прямоугольника. Значения H во внутренних узлах прямоугольника вычисляются по таблицам после достижения сходимости процесса в остальной части области фильтрации.

Для схемы фильтрации, указанной на фиг. 10, было выполнено численное определение значений напорной функции методом итерации. Исходные значения H были

заданы на-глаз. Для получения окончательных результатов требовалось выполнение 22-х циклов итерации при пользовании обыкновенных приемов улучшения сходимости. Шаблон вычисления с указанием результатов расчета показан на фиг. 12. Система линии равных напоров приведена на фиг. 13.

Для нескольких точек были вычислены значения H по таблицам прямоугольной области, причем получилось полное совпадение результатов. При выполнении каждого цикла вычисления уравнения (14), (15) и (16) были решены в таблицах, форма которых для последнего цикла показана в табл. 2.

Для дополнительной проверки результатов расчета были вычислены фильтрационные расходы на верховом и низовом откосах и в вертикальных сечениях области кривой свободной поверхности (см. фиг. 14). Наибольший интерес представляет сравнение расходов в области кривой свободной поверхности, поскольку это по существу является проверкой ординат указанной кривой. Результаты вычисления расходов (см. табл. 3) показывают, что последние отличаются не более 0,2%.

Таблица 2

$\frac{x}{h}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ψ	1,000	0,489	0,128	0,808	0,512	0,225	0,940	0,646	0,344	0,031	0,707	0,360	1,000
$\operatorname{tg} \vartheta$	2,000	0,436	0,340	0,308	0,292	0,286	0,290	0,298	0,308	0,318	0,336	0,354	0,430
$\operatorname{tg}^2 \vartheta$	4,000	0,190	0,116	0,095	0,085	0,082	0,084	0,089	0,095	0,101	0,113	0,125	0,185
$\sin^2 \vartheta$	0,800	0,160	0,104	0,087	0,078	0,076	0,077	0,082	0,087	0,092	0,101	0,111	0,156
$\frac{H_{i,n+1}}{h}$	9,000	8,571	8,219	7,825	7,550	7,284	6,945	6,676	6,401	6,120	5,737	5,431	5,000
$\frac{H_{i,n}}{h}$	8,697	8,411	8,115	7,738	7,472	7,208	6,866	6,594	6,314	6,028	5,636	5,320	4,854

ЛИТЕРАТУРА

1. Кульбах В. Р. «О влиянии фильтрационных сил на устойчивость структуры песчаных грунтов», Труды ТПИ, Серия А, № 82, 1957.
2. Канторович А. В., Крылов В. И., Чернин К. Е. «Таблицы для решения граничных задач». 1956.
3. Микеладзе Ш. Е. «Численные методы математического анализа», 1953.
4. Панов Д. Ю. «Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. 1951.
5. Полубаринова-Кочина П. Я. «Теория движения грунтовых вод» 1952.

В. Р. Кульбах

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Таллинский Политехнический Институт

*

Редактор Х. Вельнер

Технический редактор А. Тамм

Корректор Х. Реммель

Сдано в набор 26. IV 1959. Подписано к печати 16. V 1959.
Бумага $54 \times 84 \frac{1}{16}$. Печатных листов 1,5. По формату 60×92 печатных листов 1,23. Учетно-издательских листов 0,68. Тираж 500.
МВ-04393. Заказ № 288.

Типография Управления Делами СМ ЭССР, Таллин.

Цена 50 коп.

Цена 50 коп.

EESTI AKADEEMILINE RAAMATUKOGU



1 0200 00133792 6