ISSN 0136-3549
0203-7343

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

504

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

TPI '81

# ТЕОРИЯ И РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

504

TPI '81

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 624.01/04

# ТЕОРИЯ И РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Строительные конструкции XX1

Таллин 1981

№ 504

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

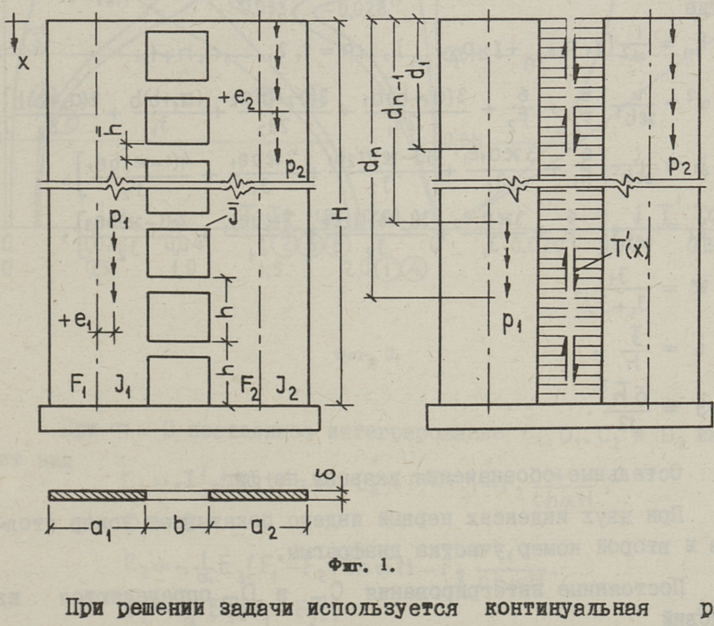
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 624.043.23

Л.А. Алликас

# О РАСЧЕТЕ ДИАФРАГМ ЗДАНИЙ НА ВЕРТИКАЛЬНЫХ НАГРУЗКАХ

В статье представлен приближенный метод расчета частично вертикально нагруженной диафрагмы (фиг. I,а). При разной удельной нагрузке столбов диафрагмы и при приложении нагрузки с эксцентриситетом возникают изгибающие моменты и перераспределение нормальных сил между столбами.




Фиг. 1.

При решении задачи используется континуальная расчетная схема. Предполагается, что I) сохраняется гипотеза плоских сечений элементов диафрагмы; 2) столбы диафрагмы имеют постоянное сечение и модуль упругости по всей высоте зданий; 3) моменты распределяются между столбами пропорционально ее жесткости $EJ_i$; 4) различие жесткости столбов диафрагмы $EJ_i$ незначительно.

В участке диафрагмы с постоянной нагрузкой дифференциальное уравнение и его решение имеет вид (I и 2).

$$
\begin{array}{ll}
0 \leq x \leq d_1, & T_1'' - \alpha^2 T_1 = -\alpha^2 F_1 x, \\
 & T_1 = C_1 sh\alpha x + D_1 ch\alpha x + F_1 x, \\
d_1 \leq x \leq d_2, & T_2'' - \alpha^2 T_2 = -\alpha^2 F_2 x, \\
 & T_2 = C_2 sh\alpha x + D_2 ch\alpha x + F_2 x, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
d_{n-1} \leq x \leq d_n, & T_n'' - \alpha^2 T_n = -\alpha^2 F_n x, \\
 & T_n = C_n sh\alpha x + D_n ch\alpha x + F_n x, \\
d_n \leq x \leq d_{n+1}, & T_{n+1}'' - \alpha^2 T_n = -\alpha^2 F_{n+1} x, \\
 & T_{n+1} = C_{n+1} sh\alpha x + D_{n+1} ch\alpha x + F_{n+1} x,
\end{array}
\qquad (I)
$$

где

$$F_m = \frac{1}{\alpha^2}(\gamma_1 p_{1,m} + \gamma_2 p_{2,m}), \quad m = 1, 2, \ldots, n, n+1,$$

$$\alpha^2 = \frac{i}{\varkappa b^3}\left[\frac{6}{F_1} + \frac{6}{F_2} + \frac{3(a_1+b)a_1}{2J_1} + \frac{3(a_2+b)a_2}{2J_2} + \frac{(a_1+b)b}{J_1} + \frac{2(a_2+b)b}{J_2}\right],$$

$$\gamma_1 = \frac{i}{\varkappa b^3}\left[\frac{6}{F_1} + \frac{3\varkappa a_1 e_1}{J_1} + \frac{3(1-\varkappa)a_2 e_1}{J_2} + \frac{2\varkappa b e_1}{J_1} + \frac{4(1-\varkappa)b e_1}{J_2}\right],$$

$$\gamma_2 = \frac{i}{\varkappa b^3}\left[-\frac{6}{F_2} + \frac{3\varkappa a_1 e_2}{J_1} + \frac{3(1-\varkappa)a_2 e_2}{J_2} + \frac{2\varkappa b e_2}{J_1} + \frac{4(1-\varkappa)b e_2}{J_2}\right],$$

$$\varkappa = \frac{J_1}{J_1 + J_2},$$

$$i = \frac{\bar{J}}{h},$$

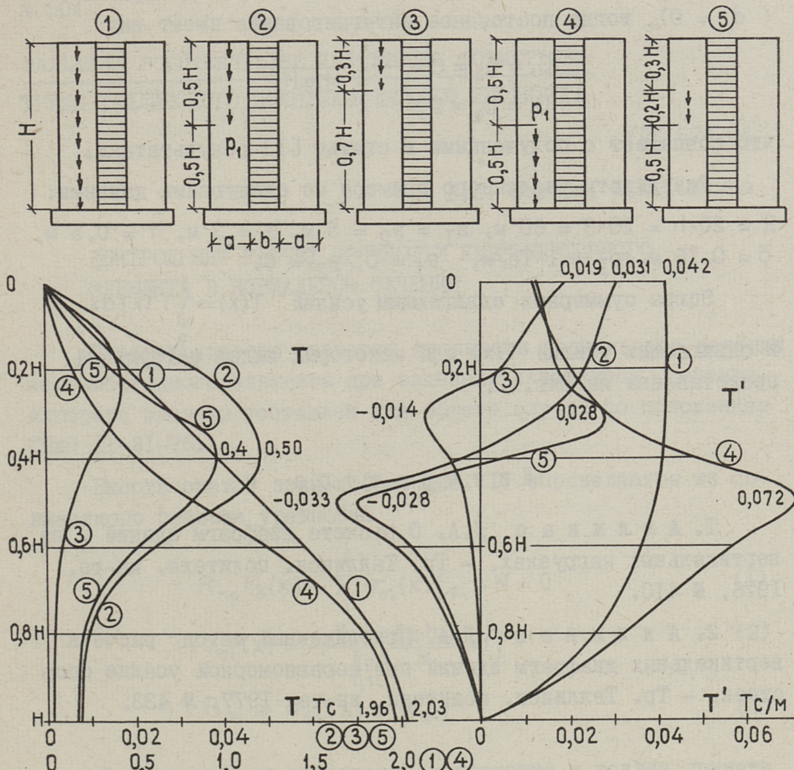
$$\bar{J} = \frac{\delta \bar{h}^3}{12}.$$

Остальные обозначения указаны на фиг. I.

При двух индексах первый индекс показывает номер столбов и второй номер участка диафрагмы.

Постоянные интегрирования $C_m$ и $D_m$ определяются из условий

$$
\begin{array}{ll}
x = 0, & \text{тогда } T_1 = 0, \\
x = H, & \text{тогда } T_{n+1}' = 0, \\
x = d_m, & \text{тогда } T_m = T_{m+1} \text{ и } T_m' = T_{m+1}'
\end{array}
\qquad (2)
$$




Фиг. 2.

При $m = 2$ постоянное интегрирование $C_1, D_1, C_2$ и $D_2$ имеет вид

$$C_1 = -\frac{1}{\alpha}(E_3 \operatorname{th}\alpha H - E_4)(F_1 - F_2) - F_2 \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha H},$$

$$D_1 = 0,$$

$$C_2 = -\frac{1}{\alpha}E_3(F_1 - F_2)\operatorname{th}\alpha H - F_2\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha H},$$

$$D_2 = \frac{1}{\alpha}E_3(F_1 - F_2), \tag{3}$$

$$E_3 = d_1\alpha \operatorname{ch}\alpha d_1 - \operatorname{sh}\alpha d_1,$$

$$E_4 = d_1\alpha \operatorname{sh}\alpha d_1 - \operatorname{ch}\alpha d_1.$$

Если нагрузка постоянная по всей высоте диафрагмы ( $d_1 = 0$), тогда постоянное интегрирование имеет вид

$$C_1 = C_2 = C = -F_2 \frac{1}{ch\alpha H},$$

$$D_1 = D_2 = 0,$$

что совпадает с полученными в статье [I] результатами.

Результаты численного примера со следующими данными: $H = 20 \cdot h = 20 \cdot 3 = 60$ м, $a_I = a_2 = 5$ м, $b = 3$ м, $\bar{h} = 0{,}5$ м, $\delta = 0{,}16$ м, $p_I = I$ Тс/м, $e_1 = 0$, $p_2 = 0$.

Эпюры суммарных сдвигающим усилий $T(x) = \int_0^x T'(x)dx$ и сдвигающих усилий $T'(x)$ для некоторых видов нагружений представлены на фиг. 2.

## Литература

I. Алликас Л.А. О расчете диафрагм зданий на вертикальных нагрузках. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1976, № 410.

2. Алликас Л.А. Приближенный метод расчета вертикальных диафрагм зданий при неравномерной усадке опор стоек. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1977, № 433.

L. Allikas

## Stresses in Shear Wall Subjected to Vertical Loads

### Summary

An approximate method for the analysis of shear walls subjected to non-continually distributed vertical loads is described. The wall is weakened by one band of openings. For the calculations a continuous system method is used. Formulae have been developed for the internal forces in walls on rigid foundations. The numerical examples are presented.

№ 504

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 624.04

В.Л. Волтри, В.А. Отсмаа

# КОНТРОЛЬНЫЙ РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО ЭЛЕМЕНТА В НОРМАЛЬНОМ СЕЧЕНИИ

Рассматривается проверка прочности нормального сечения железобетонного элемента при заданных параметрах сечения. Алгоритм расчета составлен для общего случая по положениям СНиП II-21-75.

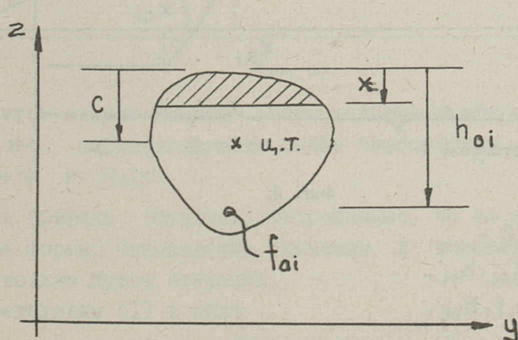
Высота сжатой зоны x (см. фиг. I) определяется из совместного решения уравнений

$$R_{np}F_{\delta}(x) + \sum_{1}^{n} \sigma_{ai}(x) f_{ai} - N = 0 \qquad (I)$$

$$\sigma_{ai}(x) = \frac{f}{1 - \frac{\xi_0}{1,1}} \left( \frac{\xi_0 h_{oi}}{x} - 1 \right) \qquad (2)$$

$$R_{ai} \geq \sigma_{ai}(x) \geq R_{aci} \qquad (3)$$

Все показатели прочности, напряжения и усилия приняты при растяжении со знаком (+) и при сжатии со знаком (-).




Фиг. 1.

Условие прочности -

$$\bar{M} \leqslant R_{np} S_{\delta}(x) + \sum_{1}^{n} \sigma_{ai}(x) S_{ai} , \qquad (4)$$

где $F_{\delta}(x)$ - площадь сечения сжатой зоны бетона,

$\sigma_{ai}(x)$ - напряжение арматуры $i$-го уровня,

$f_{ai}$ - суммарная площадь сечения арматуры $i$-го уровня,

$h_{oi}$ - рабочая высота сечения над $i$-м уровнем арматуры,

$\xi_0$ - показатель деформативности сжатой зоны бетона,

$N$ - нормальная сила.

$R_{np}, R_{ai}, R_{aoi}$ - расчетные сопротивления бетона и арматуры.

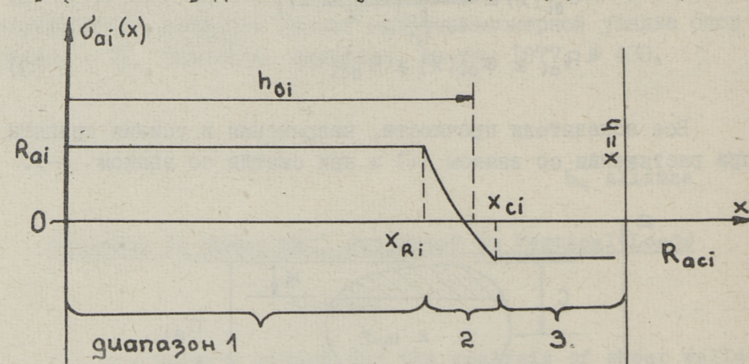
$f = 4000$ при $m_{\delta 1} \neq 0{,}85$,

$f = 5000$ при $m_{\delta 1} = 0{,}85$,

$\bar{M}$ - условный момент внешних сил относительно какой-то оси перпендикулярно плоскости действия момента,

$S_{\delta}(x), S_{ai}$ - статические моменты площадей сжатой зоны бетона и арматуры относительно вышеуказанной оси.

Графическое представление условий (2) и (3) дано на фиг. 2.




Фиг. 2.

На фиг. 2 -

$x_{Ri} = \xi_{Ri} \cdot h_{oi}$,

$x_{ci} = 1{,}1 \cdot h_{oi}$,

где $x_{Ri}$ - граничная высота сжатой зоны бетона $i$-го уровня армирования, обеспечивающая достижения в арматуре напряжения $R_{ai}$,

$x_{ci}$ – высота сжатой зоны, при которой обеспечивается в арматуре напряжение $R_{aci}$.

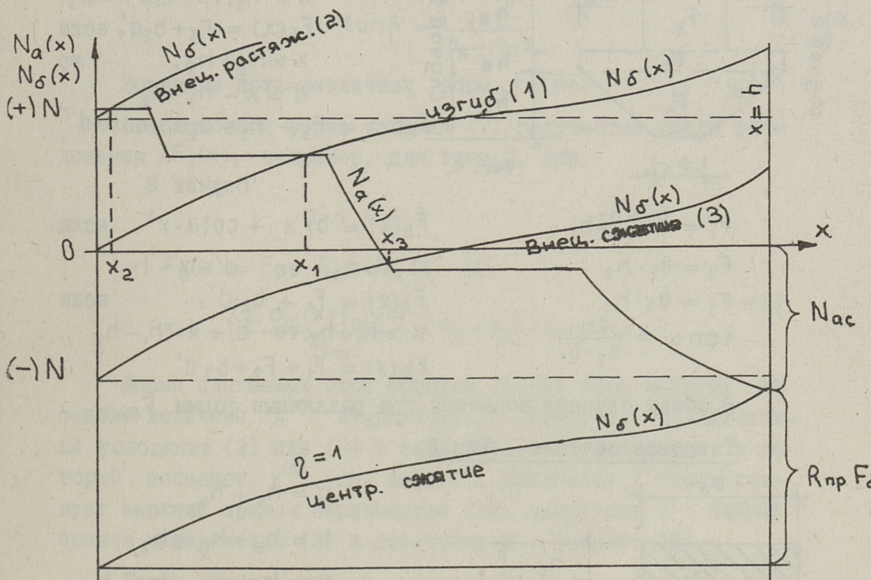
Совместное решение системы (I), (2) и (3) выполняется на основе следующих соображений.

Представим условие (I) графически на фиг. 3, применив обозначения

$$N_a(x) = \sum_1^n \sigma_{ai}(x) f_{ai} \quad \text{и} \tag{5}$$

$$N_б(x) = R_{пр} F_б(x), \tag{6}$$

причем $N_б(x)$ представляется с противоположным знаком.




Фиг. 3.

В этом случае решение этого условия графически выражается х-м, соответствующим точке пересечения графиков $N_б(x)+N$ и $N_a(x)$.

Оба графика (функции) непрерывные, но не имеют постоянной формы. Определение значения х возможно в общем случае только путем итерации.

Представим (I) в виде

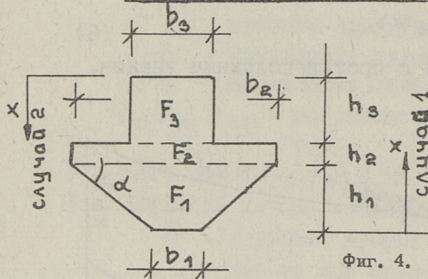
$$F_б(x) + \frac{\sum \sigma_{ai}(x) f_{ai} - N}{R_{пр}} = 0. \tag{7}$$

Форма слагаемой $F_\delta(x)$ зависит от типа сечения и величины переменной x, только для прямоугольной формы сечения можно написать единое условие –

$$F_\delta(x) = bx. \tag{8}$$

Ниже приводятся формы $F_\delta(x)$ еще для двух более часто встречаемых сечений.

Тавровое сечение – Тип 2




Фиг. 4.

Случай I

$F_\delta(x) = b_3 x$, если

$x > h_3$, то $d' = x - h_3$

$F_\delta(x) = F_3 + b_2 d'$, если

$x > h_3 + h_2$, то

$d' = x - h_3 - h_2$

$F_\delta(x) = F_3 + F_2 + b_2 d' - \cot\alpha \cdot d'^2$

Случай 2

$F_\delta(x) = b_1 \cdot x + \cot\alpha \cdot x^2$, если

$x > h_1$, то $d' = x - h_1$

$F_\delta(x) = F_1 + b_2 \cdot d'$, если

$x > h_1 + h_2$, то $d' = x - h_1 - h_2$

$F_\delta(x) = F_1 + F_2 + b_3 \cdot d'$

$$F_1 = \frac{b_1 + b_2}{2} h_1$$

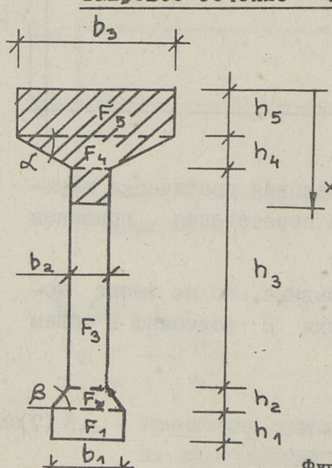
$$F_2 = b_2 \cdot h_2$$

$$F_3 = b_3 \cdot h_3$$

$$\tan\alpha = \frac{2h_1}{b_2 - b_1}$$

В обоих случаях возможны три различные формы $F_{\delta(x)}$.

Тавровое сечение – Тип 3




Фиг. 5.

$a = h_5 + h_4$

$b = h_5 + h_4 + h_3$

$v = h_5 + h_4 + h_3 + h_2$

$F_\delta(x) = b_3 \cdot x$, если

$\underline{x > h_5 \text{ и } h_4 \neq 0}$, то

$d' = x - h_5$

$F_\delta(x) = F_5 + b_3 \cdot d' - \cot\alpha \cdot d'^2$, если

$\underline{x > a}$ то

$d' = x - a$

$F_\delta(x) = F_5 + F_4 + F_2 \cdot d'$, если

$$\underline{x > b \quad \text{и} \quad h_2 \neq 0,} \quad \text{то}$$

$$d_1 = x - b$$

$F_1 = b_1 \cdot h_1$

$F_2 = \frac{b_1 + b_2}{2} h_2$

$F_3 = b_2 \cdot h_3$

$F_4 = \frac{b_2 + b_3}{2} h_4$

$F_5 = b_3 \cdot h_5$

$$F_б(x) = F_5 + F_4 + F_3 + b_2 \cdot d' + \cot\beta \cdot d'^2, \text{ если}$$

$$\underline{x > v}, \quad \text{то}$$

$$d' = x - v$$

$$F_б(x) = F_5 + F_4 + F_3 + F_2 + b_1 \cdot d'$$

$$\tan\alpha = \frac{2h_4}{b_3 - b_2}$$

$$\tan\beta = \frac{2h_2}{b_1 - b_2}$$

Возможны пять различных форм $F_б(x)$.

Итерационная форма условия (7) получается после разложения $F_б(x)$, например, для типа 2, при

$$a < x < b$$

$$F_б(x) = F_5 + F_4 + b_2(x - a)$$

$$x = -\left(\frac{\sum \sigma_{ai}(x) f_{ai} - N}{R_{пр}} + F_5 + F_4\right) / b_2 + a. \tag{9}$$

Форма слагаемых этой формулы должна быть выбрана на основе величины $x^{(k)}$ итерационного шага. $\sigma_{ai}$ определяется условиями (2) или (3) в зависимости от диапазона, в который попадает $x^{(k)}$ (см. фиг. 2). Диапазону I соответствует верхний предел неравенства (3), диапазону 2 – нижний предел неравенства (3) и диапазону 3 – условие (2).

После определения $x$ следует проверка условия (4), где для сжатых элементов учитывается еще влияние прогиба ($\eta$) элемента на увеличение расчетного эксцентриситета. Данный алгоритм можно использовать для контрольного расчета нормального сечения в общем случае действия $M, N$ с применением ЭВМ.

Для инженерного расчета при сложных ситуациях армирования можно рекомендовать графический способ решения задачи.

V. Voltri, V. Otsmaa

# Calculation of the Normal Section of Reinforced Concrete Elements

## Summary

In the paper an algorithm for calculating the normal section of reinforced concrete elements is given. The algorithm can be used to calculate any available load situations. The formulas of certain cross-sections are supplied.

№ 504

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

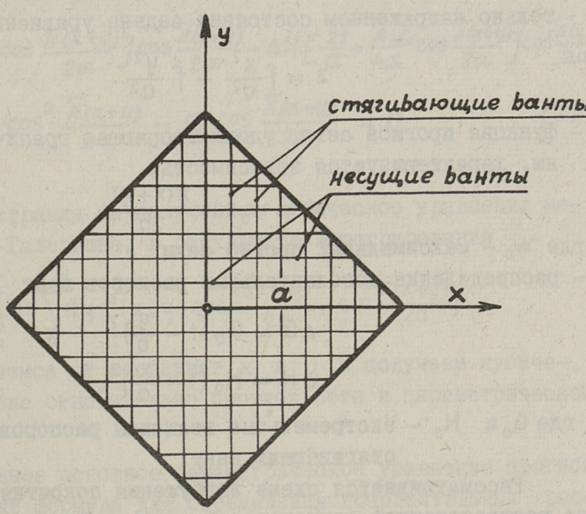
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 624.074

Т.Д. Халланг

# РАСЧЕТ СЕДЛОВИДНЫХ ВИСЯЧИХ ПОКРЫТИЙ С КОНТУРОМ ИЗ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Использование прямолинейных бортовых элементов в висячих сетчатых покрытиях, в общем, считается невыгодным из-за их больших изгибающих моментов, но при применении комбинированного покрытия из нескольких симметричных пологих гипаров условия работы бортовых элементов улучшаются.




Фиг. 1.

В данной статье и рассматривается расчет такого симметричного гипара с прямыми бортовыми элементами (см. фиг. I) с учетом деформаций контура.

Расчет проводится на основе континуальной расчетной схемы, так как этот метод оказывается подходящим в случае аналитически легко описываемых форм покрытий.

Метод расчета висячих покрытий отрицательной кривизны по континуальной схеме раньше разработан на кафедре строительных конструкций Таллинского политехнического института для эллиптических в плане покрытий. Основным допущением является предположение о непрерывности семейств несущих и стягивающих тросов. Площадь поперечного сечения тросов каждого семейства заменяется соответствующей приведенной толщиной сети

$$\delta_x = \frac{F_x}{B}; \quad \delta_y = \frac{F_y}{A},$$

где $A$ и $B$ – соответственно шаг несущих и стягивающих тросов.

В ходе дальнейшего расчета предполагается, что:

- на контуре покрытия

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \qquad (I)$$

- поверхность седловидного висячего покрытия в предварительно напряженном состоянии задана уравнением

$$z = f\frac{x^2}{a^2} - f\frac{y^2}{a^2} \qquad (2)$$

- функция прогиба сети, удовлетворяющая граничным условиям, характеризуется зависимостью

$$w = w_0 \cos\frac{\pi(x+y)}{2a}, \qquad (3)$$

где $w_0$ – максимальный прогиб сети

- распределение дополнительных распоров вант

$$\Delta G = G_0\left(1 - \frac{y}{a}\right)^2$$
$$\Delta H = H_0\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2, \qquad (4)$$

где $G_0$ и $H_0$ – экстремальные величины распоров несущих и стягивающих вант.

Рассматривается схема загружения покрытия равномерно распределенной симметричной нагрузкой.

При действии симметричной вертикальной внешней нагрузки работа сети характеризуется геометрическими уравнениями (5, 6) и условием равновесия (7).

В результате решения системы геометрических уравнений (5, 6) относительно дополнительных распоров вант последние ( $\Delta G$ и $\Delta H$ ) определяются как функции прогиба сети. После подстановки полученных значений распоров $\Delta G$ и

$\Delta H$ в уравнение равновесия (7) последнее превращается в кубическое уравнение относительно прогиба сети $w_0$.

$$\frac{\Delta G a^4}{180\sqrt{2}EI}\left(8-18\frac{y^2}{a^2}+15\frac{y^4}{a^4}-6\frac{y^5}{a^5}+\frac{y^6}{a^6}\right)-\frac{\Delta G a}{E\delta_x}\left(1-2\frac{y}{a}+\frac{y^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y}{a}\right)\left[1+\frac{2f^2}{a^2}\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)\right]-$$

$$-\frac{\Delta H a^4}{180\sqrt{2}EI}\left(18\frac{y^2}{a^2}-15\frac{y^4}{a^4}+6\frac{y^5}{a^5}-\frac{y^6}{a^6}\right)=\frac{4fw_0}{\pi a}\left(1-\sin\frac{\pi y}{2a}\right)-\frac{\pi w_0^2}{16a}\left(\pi+\sin\frac{\pi y}{a}\right) \tag{5}$$

$$-\frac{\Delta G a^4}{180\sqrt{2}EI}\left(18\frac{x^2}{a^2}-15\frac{x^4}{a^4}+6\frac{x^5}{a^5}-\frac{x^6}{a^6}\right)+\frac{\Delta H a}{E\delta_y}\left(1-2\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left[1+\frac{2f^2}{a^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]+$$

$$+\frac{\Delta H a^4}{180\sqrt{2}EI}\left(8-18\frac{x^2}{a^2}+15\frac{x^4}{a^4}-6\frac{x^5}{a^5}-\frac{x^6}{a^6}\right)=\frac{-4fw_0}{\pi a}\left(1-\sin\frac{\pi x}{2a}\right)-\frac{\pi w_0^2}{16a}\left(\pi+\sin\frac{\pi x}{a}\right) \tag{6}$$

$$\Delta G\left[\frac{2f}{a}-\frac{\pi^2 w_0}{4a}\cos\frac{\pi(x+y)}{2a}\right]\cos\frac{\pi(x+y)}{2a}-\Delta H\left[\frac{2f}{a}+\frac{\pi^2 w_0}{4a}\cos\frac{\pi(x+y)}{2a}\right]\cos\frac{\pi(x+y)}{2a}-$$

$$-(H_0+G_0)\frac{\pi^2 w_0}{4a^2}\cos^2\frac{\pi(x+y)}{2a}-q\cdot\cos\frac{\pi(x+y)}{2a}=0 \tag{7}$$

Распространяя на полученное кубическое уравнение метод Бубнова-Галеркина, в результате интегрирования

$$\int_0^a dx\int_0^{a-x} dy\, f\left(x,y,\cos\frac{\pi(x+y)}{2a},\ \sin\frac{\pi(x+y)}{2a}\right)$$

мы освобождаемся от координат $x$ и $y$ и получаем кубическое уравнение относительно прогиба сети в параметрической форме.

Полученное основное параметрическое уравнение прогиба сети, а также формулы для определения дополнительных распоров вант вышеуказанного симметричного гипара в дальнейшем успешно можно использовать при исследовании работы висячего покрытия, состоящего из нескольких пологих гипаров с прямолинейными бортовыми элементами.

Модель комбинированного из трех гипаров варианта изготовлена на кафедре строительных конструкций Таллинского политехнического института.

T. Hallang

# The Calculation of Hyperbolic Paraboloidal Hanging Roofs with Edgeframe from Straight Line Elements

## Summary

The paper deals with a method of calculating the symmetrical hyperbolic paraboloidal cable net with edge-frame from straight line elements. The analysis is done according to the membrane hypothesis. The deflections of edgeframe are taken into account. The solution equations are derived on a nonlinear universal form by symmetrical loads on the cable network. A system of dimensionless parameters by calculation of deflections and forces in cable network is evolved.

№ 504

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 624.043.6

Р. Касеметс

# РАСЧЕТ КОНТУРА ВИСЯЧЕГО ПОКРЫТИЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

## Введение

Расчет предварительного напряжения вантовой сети висячего покрытия состоит из трех взаимосвязанных задач [3]:

- расчет сети;
- расчет контура;
- итерация полученных результатов с целью удовлетворения краевых условий.

В настоящей статье рассматривается вторая задача - расчет перемещений и внутренних усилий замкнутого контура покрытия.

Деформации контура учитываются на каждом этапе расчета при помощи заданных матриц линий влияния усилий на контуре или непосредственным расчетом перемещений контура при помощи подпрограммы на основе метода конечных элементов стержневой системы [5], [I].

Методика расчета построена на основе теории расчета стержневых систем методом конечных элементов, изложенная в [4].

При решении задачи контур рассматривается как пространственная рама. После каждого этапа натяжения вант все покрытие получает какое-нибудь уравновешенное состояние, то есть в вантах имеются продольные внутренние усилия определенной величины, которые действуют на контур в местах пересечения вант с контуром. Для контура эти усилия являются внешними (обозначим р ). Кроме этих усилий могут учитываться еще усилия от собственного веса, от смещения опор контура, температурные воздействия и т.д.

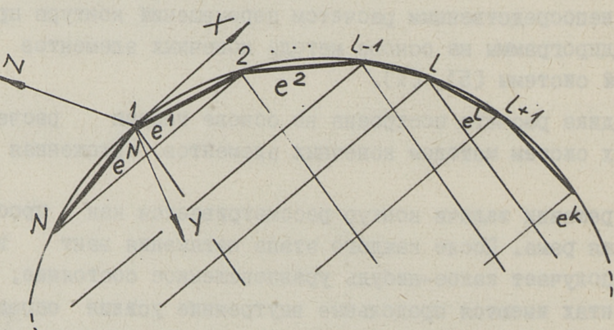
Полный расчет контура как стержневой системы (до определения внутренних усилий и перемещений в любом сечении контура) можно разделить на три этапа.

На первом этапе путем расчета отдельных элементов с закрепленными узлами нагрузка приводится к узловой. На втором этапе решается задача для всей стержневой системы под действием узловой нагрузки. При этом находятся только узловые перемещения и усилия, действующие на концах элементов, примыкающих к узлам. На третьем этапе определяются усилия и перемещения в пределах каждого элемента в отдельности от действия узловых перемещений и усилий, определенных на втором этапе расчета. Расчет заканчивается сложением полученных результатов [4].

I. Основные уравнения

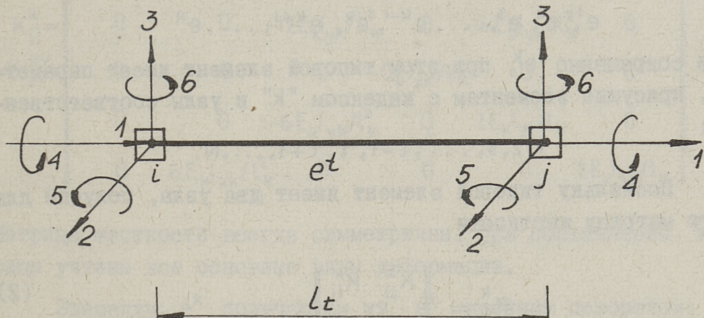
I.I. Разбивка контура на конечные элементы

Разбивку контура на элементы можно производить любым образом, однако целесообразно выбирать элементы так, чтобы узлы оказались на местах пересечения вант с контуром (фиг. I) (на этих местах передаются усилия от вантовой сети на контур), а для получения промежуточных значений перемещений и внутренних усилий можно элементы выбирать более мелкими.




Фиг. 1. Разбивка контура на конечные элементы.

При таком делении можем получить элементы с разными узлами, но для лучшей формализации решения выбираем однотипные конечные элементы с жесткими узлами (фиг. 2), которые имеют все шесть компонентов перемещений (три линейных и три угловых), а между узлом и примыкающим к нему элементом могут возникнуть все шесть компонентов усилий (три силы и три момента).




Фиг. 2. Типовой элемент.

Оба узла $e^t$ $i$ и $j$ имеют шесть степеней свободы, их положение характеризуется вектором перемещений

$$q_i^t = \left\| \begin{matrix} u_{1i}^t \\ u_{2i}^t \\ u_{3i}^t \\ u_{4i}^t \\ u_{5i}^t \\ u_{6i}^t \end{matrix} \right\| , \tag{I}$$

где компонентами являются линейные и угловые перемещения узлов, положительные направления которых даны на фиг. 2. При особых узлах [2] размерность вектора уменьшается на количество связей в этом узле.

Впредь разделяем общие (относятся ко всему контуру) и местные (относятся только к данному элементу) оси координат. Общие оси координат можно выбирать произвольно, однако следует учесть удобство расчета.

Связь между местными и общими осями координат устанавливается с помощью направляющих косинусов местных осей.

I.2. Матричные уравнения расчета элемента

Обозначим элементы контура следующим образом:

$$e^1,\ e^2,\ e^3, \ldots, e^{k-1}, e^k, e^{k+1}, \ldots, e^N$$

или сокращенно $e^k$, при этом типовой элемент имеет параметры, присущие элементам с индексом "k" и узлы соответственно:

$$1, 2, 3, \ldots, l-1,\ l,\ l+1, \ldots, N.$$

Поскольку типовой элемент имеет два узла, получим для него матрицу жесткости

$$K^k = \begin{Vmatrix} K_{ii}^k & K_{ij}^k \\ K_{ji}^k & K_{jj}^k \end{Vmatrix} \tag{2}$$

где

$$K_{ii}^k = \begin{Vmatrix} E_kF_k/l_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12E_kI_{zk}/l_k^3 & 0 & 0 & 0 & -6E_kI_{zk}/l_k^2 \\ 0 & 0 & 12E_kI_{yk}/l_k^3 & 0 & 6E_kI_{yk}/l_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_kI_{xk}/l_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6E_kI_{yk}/l_k^2 & 0 & 4E_kI_{yk}/l_k & 0 \\ 0 & -6E_kI_{zk}/l_k^2 & 0 & 0 & 0 & 4E_kI_{zk}/l_k \end{Vmatrix} \tag{3}$$

$$K_{jj}^k = \begin{Vmatrix} E_kF_k/l_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12E_kI_{zk}/l_k^3 & 0 & 0 & 0 & 6E_kI_{zk}/l_k^2 \\ 0 & 0 & 12E_kI_{yk}/l_k^3 & 0 & -6E_kI_{yk}/l_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_kI_{xk}/l_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6E_kI_{yk}/l_k^2 & 0 & 4E_kI_{yk}/l_k & 0 \\ 0 & 6E_kI_{zk}/l_k^2 & 0 & 0 & 0 & 4E_kI_{zk}/l_k \end{Vmatrix} \tag{4}$$

$$
K_{ij}^{k} = (K_{ji}^{k})' = \begin{Vmatrix} -E_kF_k/l_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12E_kI_{zk}/l_k^3 & 0 & 0 & 0 & -6E_kI_{zk}/l_k^2 \\ 0 & 0 & -12E_kI_{yk}/l_k^3 & 0 & -6E_kI_{yk}/l_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_kI_{xk}/l_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6E_kI_{yk}/l_k^2 & 0 & 2E_kI_{yk}/l_k & 0 \\ 0 & 6E_kI_{zk}/l_k^2 & 0 & 0 & 0 & 2E_kI_{yk}/l_k \end{Vmatrix} \tag{5}
$$

Матрица жесткости всегда симметрична. При составлении матрицы учтены все основные виды деформации.

Элементы $e^k$ получаются из $e^t$ двойным поворотом: вокруг общей оси Z и вокруг местной оси "2". Вместе с элементом поворачиваются и местные оси.

Матрицу направляющих косинусов местных осей относительно общих осей будем называть матрицей преобразования $\Lambda_L^k$.

Обозначив через $q_c^k$ и $f_c^k$ для элемента $e^k$ полные векторы узловых перемещений и усилий соответственно, получим для элемента следующие уравнения:

$$
q_c^k = \Lambda_l^k q^k; \tag{6}
$$

$$
f_c^k = \Lambda_l^k f^k, \tag{7}
$$

где $q^k$ – перемещения элемента $e^k$ в общих координатах;
$f^k$ – вектор усилий, действующих на узлы элемента $e^k$.

Составим матрицы преобразования векторов элемента при переходе от общих к местным для элемента осям:

$$
\Lambda^k = \begin{Vmatrix} \Lambda_i^k & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \Lambda_j^k & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & \Lambda_m^k \end{Vmatrix} \tag{8}
$$

на основе (6) и (7)

$$
q_{lc} = \Lambda^k q^k; \tag{9}
$$

$$f_{lc} = \Lambda^k f^k, \qquad (10)$$

где $q_{lc}$ и $f_{lc}$ – векторы перемещений и усилий узлов элемента $e^k$ в местных координатах;

$q^k$ и $f^k$ – векторы перемещений и усилий узлов элемента $e^k$ в общих координатах.

Пусть в местных осях координат для элемента $e^k$

$$f_{lc} = K_c^k q_{lc}, \qquad (11)$$

где $K_c^k$ – матрица жесткости элемента в местных координатах.

На основании (6), (7), (9), (10) и (11) получим

$$f^k = (\Lambda^k)^{-1} K_c^k \Lambda^k q^k, \qquad (12)$$

где

$$K^k = (\Lambda^k)^{-1} K_c^k \Lambda^k \qquad (13)$$

( $K^k$ – ортогональная матрица) и

$$(\Lambda^k)^{-1} = (\Lambda^k)'. \qquad (14)$$

На основе этого

$$K^k = (\Lambda^k)' K_c^k \Lambda^k. \qquad (15)$$

### I.3. Матричные уравнения для расчета стержневой системы

Для дальнейшего вводим квазидиагональные матрицы жесткости

$$\bar{K} = \begin{Vmatrix} K^1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & K^k & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & K^m \end{Vmatrix} \qquad (16)$$

и матрицу преобразования векторов

$$\bar{\Lambda} = \begin{Vmatrix} \Lambda^1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \Lambda^k & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \Lambda^m \end{Vmatrix} \qquad (17)$$

Тогда согласно (15)

$$\bar{K} = (\bar{\Lambda})' \bar{K}_c \bar{\Lambda} . \qquad (18)$$

Рассмотрим совокупность элементов контура, связанных между собой в узлах, т.е. каждый из узлов обеспечивает равенство соответствующих узловых перемещений для элементов, сходящихся в этом узле. Введем векторы, относящиеся к совокупности связанных таким образом элементов и узлов, образующих контур:

а) вектор перемещений во всех узлах стержневой системы:

$$q = \begin{Vmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_l \\ \vdots \\ q_N \end{Vmatrix} ; \qquad (19)$$

б) вектор суммарных узловых усилий, действующих со стороны каждого узла на все элементы, ему принадлежащие, (компоненты блоков вектора являются внутренними усилиями для контура):

$$f = \begin{Vmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \\ \vdots \\ f_N \end{Vmatrix} , \quad f_l = \sum_{k \in l} f_l^k ; \qquad (20)$$

в) вектор внешних усилий:

$$p = \begin{Vmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_l \\ \vdots \\ p_N \end{Vmatrix} \qquad (21)$$

Для равновесия должны

$$p = f \qquad (22)$$

На основе (II)

$$f = Kq \qquad (23)$$

С другой стороны,

$$\bar{f} = (\Gamma')^{-1} f; \qquad (24)$$

$$\bar{q} = \Gamma q; \qquad (25)$$

$$\bar{q}_c = \bar{\Lambda}\bar{q} = \bar{\Lambda}\Gamma q, \qquad (26)$$

т.е. $q_c$ состоит из проекций компонентов $\bar{q}$ на местные оси, соответствующие каждому отдельному элементу, матрица $\bar{\Lambda}\Gamma$ осуществляет перепроектирование векторов из общей в местные координатные системы. Матрица $\Gamma$ состоит из блоков единичных и нулевых матриц, так что каждому блочному компоненту $\bar{q}$ можно по порядку сопоставить соответствующую блочную строку $\Gamma$, а каждому блочному компоненту $q$ - соответствующий блочный столбец в $\Gamma$.

$$\bar{f} = (\Gamma')^{-1} f = (\Gamma')^{-1} Kq = (\Gamma')^{-1}(\Gamma')\bar{K}\Gamma q = \bar{K}\Gamma q, \qquad (27)$$

где

$$K = (\Gamma)'\bar{K}\Gamma \qquad (28)$$

- матрица жесткости контура.

В полученной системе уравнений имеются неизвестные величины перемещений контура.

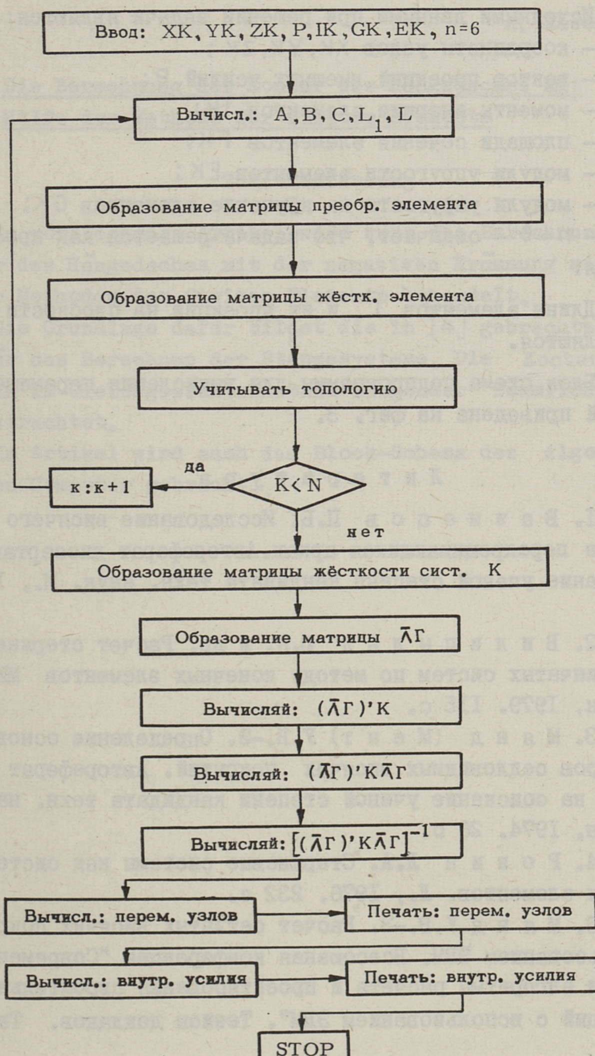
Согласно (22) $f = p$ и (23) $f = Kq$, следовательно, по (I8):

$$p = f = Kq = (\Gamma)'\bar{K}\Gamma q = (\bar{\Lambda}\Gamma)'\bar{K}_c\bar{\Lambda}\Gamma q, \qquad (29)$$

так как

$$(\Gamma)'(\bar{\Lambda})' = (\bar{\Lambda}\Gamma)' \qquad (30)$$

при любых матрицах.




Фиг. 3. Блок-схема алгоритма подпрограммы для ЭВМ.

2. Алгоритм для составления подпрограммы для ЭВМ

Исходными данными при решении задачи являются:

- координаты узлов XK, YK, ZK ;
- вектор проекций внешних усилий P ;
- моменты инерции элементов IK ;
- площади сечения элементов FK ;
- модули упругости элементов EK ;
- модули упругости на кручение элементов GK ;
- $n = 6$ – означает, что задача решается как пространственная.

Длины элементов L и их проекции на плоскости x-y $L_1$ вычисляются.

Блок схема подпрограммы для вычисления перемещений и усилий приведена на фиг. 3.

## Литература


I. Вазнецов П.Б. Исследование висячего покрытия на перекрещивающихся арках. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата техн. наук. М., 1979, 21 с.

2. Вилипыльд Ю.К. и др. Расчет стержневых и пластинчатых систем по методу конечных элементов МКЭ/20, Таллин, 1979. 115 с.

3. Мянд (Мент) У.В.-Э. Определение основных параметров седловидных висячих покрытий. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата техн. наук, Таллин, 1974. 26 с.

4. Розин Л.А. Стержневые системы как системы конечных элементов. Л., 1976, 232 с.

5. Мянд У.В.-Э. Расчет сетчатых висячих покрытий с использованием ЭВМ. Всесоюзная конференция "Современные методы и алгоритмы расчета и проектирования строительных конструкций с использованием ЭВМ". Тезисы докладов. Таллин, 1979.

R. Kasemets

## Die Berechnung der Kontur des Hängedaches mit Hilfe der Methode der finiten Elemente

### Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel wird kurz die Berechnung der Kontur des Hängedaches mit der negativen Krümmung mit Hilfe der Methoden der finiten Elemente behandelt.

Die Grundlage dafür bildet die in [4] gebrachte Theorie für das Berechnen der Stangesysteme. Die Kontur wird als ein im Gleichgewichtszustand liegender räumlicher Rahmen betrachtet.

Im Artikel wird auch das Block-Schema des Algorithmus für den Computer gebracht.

№ 504

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 624.074.4

Х.Х. Лаул, Э.Э. Юст

# РАЗРАБОТКА РАСЧЕТА ПОЛОГИХ ДЕРЕВЯННЫХ ГИПАРОВ (ПЕРВАЯ ЧАСТЬ)

## I. Введение

В данной статье продолжается разработка метода расчета пологих деревянных гипаров рассмотренной статьи [I], куда вводятся дополнительные упрощения и некоторые уточнения.

Рассматривается квадратный в плане пологий деревянный гипар с прямолинейными бортовыми элементами (фиг. I) с уравнением срединной поверхности, в виде:

$$Z_{i,k} = 0{,}1a - \frac{0{,}2a}{(n-1)^2}\left[(i-1)^2 - (k-1)^2\right]. \tag{I}$$

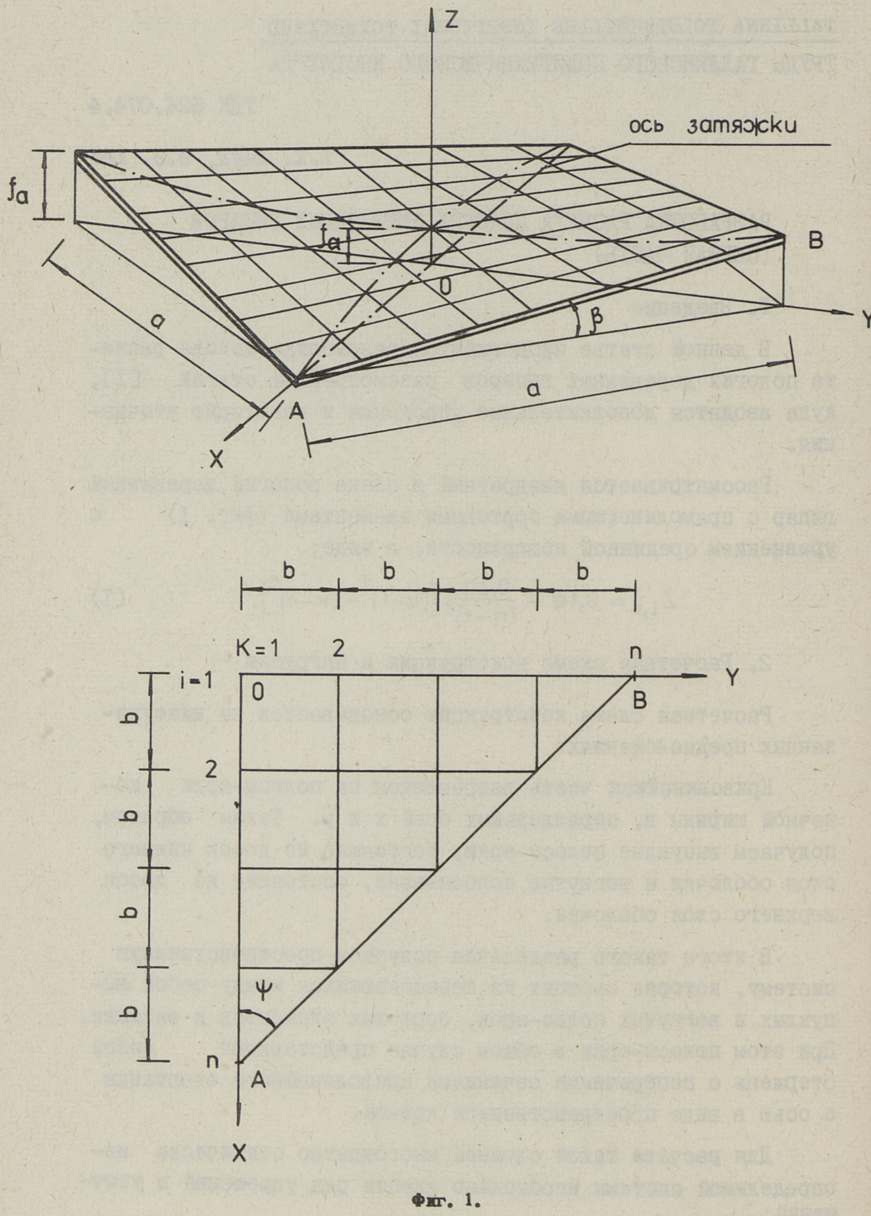
## 2. Расчетная схема конструкции и нагрузки

Расчетная схема конструкции основывается на нижеуказанных предположениях.

Криволинейная часть разрезается на полосы-арки конечной ширины в, параллельных осей х и у. Таким образом, получаем выпуклые полосы-арки, состоящие из досок нижнего слоя оболочки и вогнутые полосы-арки, состоящие из досок верхнего слоя оболочки.

В итоге такого разделения получаем пространственную систему, которая состоит из пересекающихся между собой выпуклых и вогнутых полос-арок, бортовых элементов и затяжки. При этом полосы-арки в общем случае представляют собой стержень с поперечными сечениями криволинейного очертания с осью в виде пространственной кривой.

Для расчета такой сложной многократно статически неопределимой системы необходимо ввести ряд упрощений и уточнений:




Фиг. 1.

I. Деформация криволинейной части, бортовых элементов и затяжки оболочки совершается в стадии упругой работы материала.

2. В виду пологости оболочки геометрия наклонной полосы-арки принимается равной геометрии вертикальной.

3. Полосы-арки рассматриваются в наклонных плоскостях (под углом $\alpha^{y}_{i,k}$ – для выпуклых, под углом $\alpha^{x}_{i,k}$ – для вогнутых полос-арок).

4. Предполагается шарнирное соединение полосы-арки с бортовыми элементами.

5. Принимается, что бортовые элементы высоких опор соединены шарнирно, а в низких - жестко.

6. Все внешние нагрузки приводятся в качестве сосредоточенных сил, приложенных в точках пересечения осей полос-арок (точки $i,k$ ).

7. Рассматривается равномерно распределенная по всей поверхности оболочки симметричная нагрузка, приложенная в точках пересечения осей полос-арок и равной 0,5 P для обеих видов полос-арок.

8. Так как жесткость изгиба в вертикальном направлении незначительная, то при составлении уравнений равновесия внутренних сил пренебрегаем изгибающими моментами относительно осей $y_1$ и $x_1$ соответственно у выпуклых и вогнутых полос-арок.

9. Влияние крутящих моментов в досках не учитывается, поскольку жесткость при кручении у деревянных досок весьма незначительна.

IO. Срединная поверхность оболочки находится в поверхности соприкосновения двух систем досок. Дальше для упрощения предполагается, что там же находятся срединные поверхности обеих систем досок (вследствие малой толщины досок).

Расчетные схемы даны на фиг. 2, 3, 4 с действующими на них нагрузками:

P – заданная сосредоточенная нагрузка в точках $i,k$;

$T^x_{i,k}, T^y_{i,k}$ – сдвигающие силы между выпуклыми и вогнутыми полосами-арками в местах их пересечения, соответственно по направлению осей $x$ и $y$ и приходящиеся на всю ширину полосы-арки;

$P^z_{i,k}$ – контактные силы между выпуклыми и вогнутыми полосами-арками в местах их пересечения по направлению нормали поверхности в точках $i, k$;

$P^{z'}_{n-k+1,k}$ и $P^{z''}_{i,n-i+1}$ – вертикальные,

$H^x_{i,n+i+1}$ $H^y_{n-k+1,k}$ – горизонтальные и

$T^x_{n-k+1}$ $T^y_{i,n-i+1}$ – контактные силы в местах соединения криволинейной части и бортовых элементов оболочки;

$H^x_{1,n}$ $H^y_{1,n}$ – горизонтальные контактные силы между бортовыми элементами у высоких опор соответственно по направлению осей $x$ и $y$;

$H^y_{n,1}$ – горизонтальная контактная сила между бортовыми элементами в низких опорах по направлению оси $y$;

$N_{зат.}$ – сила в затяжке;

$R_{1,n}$ и $R_{n,1}$ – вертикальные опорные реакции соответственно у высоких и низких опор оболочки

Определяем неизвестные силы

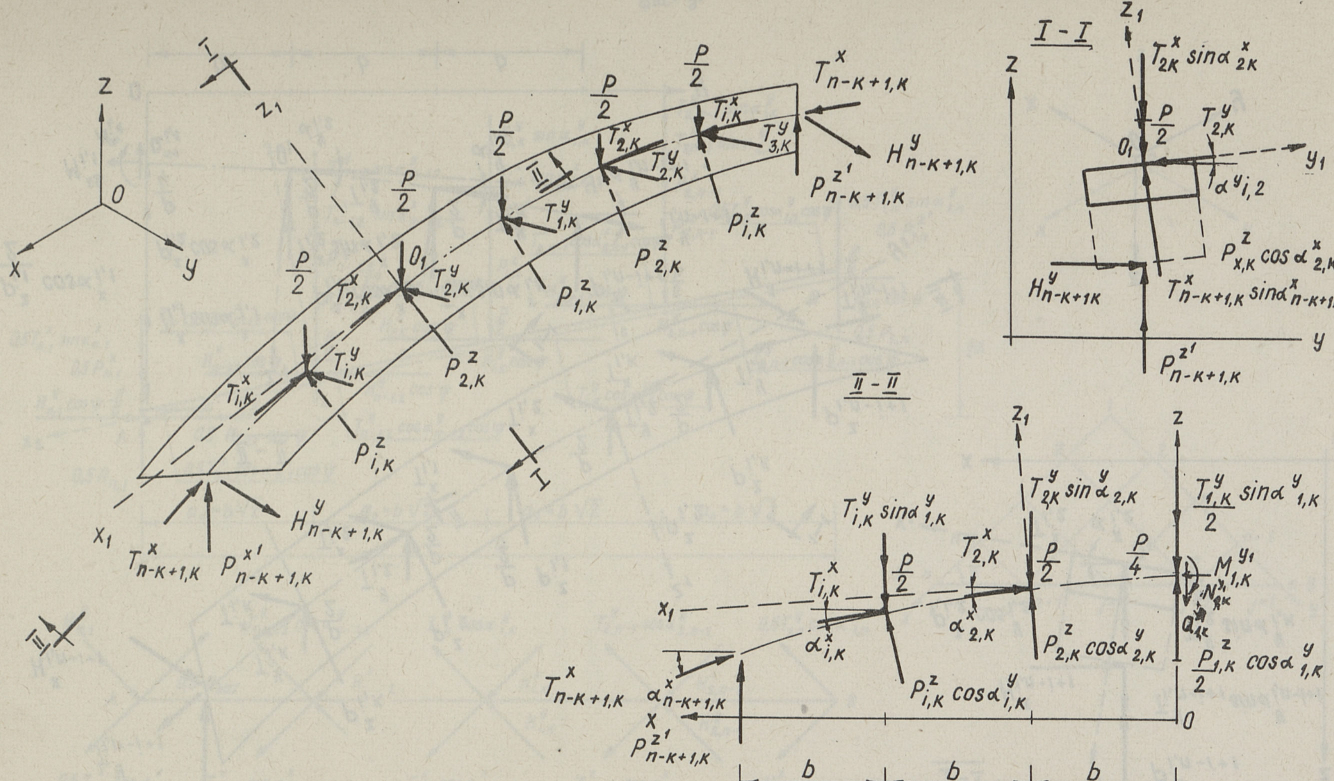
$P^{z'}_{n-k+1,k}$, $P^{z''}_{i,n-i+1}$, $H^x_{i,n-i+1}$, $H^y_{n-k+1,k}$, $H^x_{1,n}$, $H^y_{1,n}$ и $R_{1,n}$

через другие неизвестные из соответствующих уравнений равновесия. При этом рассматривается равновесие выпуклой или вогнутой полосы-арки или бортового элемента (фиг. 2, 3, 4).

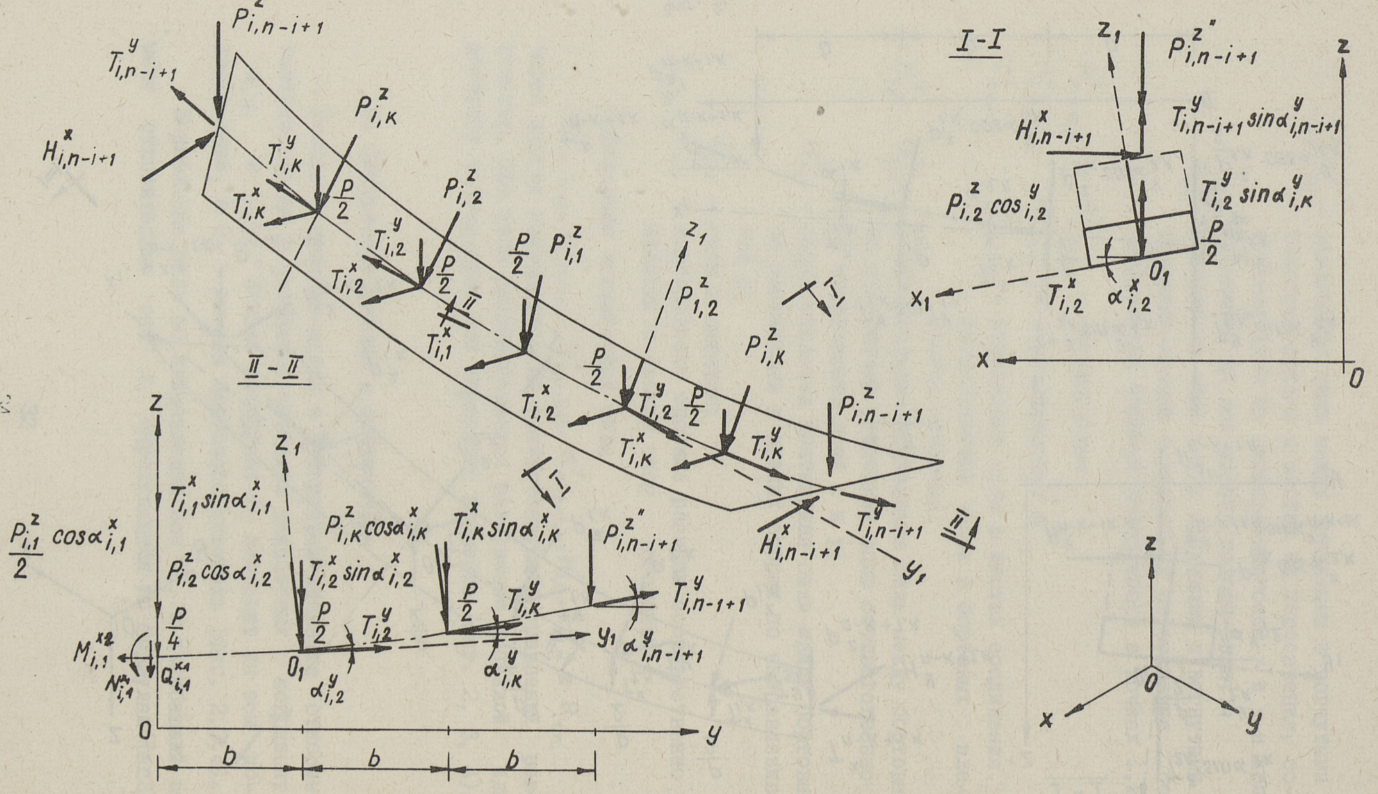
### 3. Внутренние усилия в оболочке

Усилия в полосах-арках и в бортовом элементе относим соответственно к подвижным системам декартовых координат $x_1 y_1$ и $x_2 y_2$. Начало координат $O_I$ скользит по оси полоски-арки, а $O_2$ – по оси бортового элемента (фиг. 2,3,4).

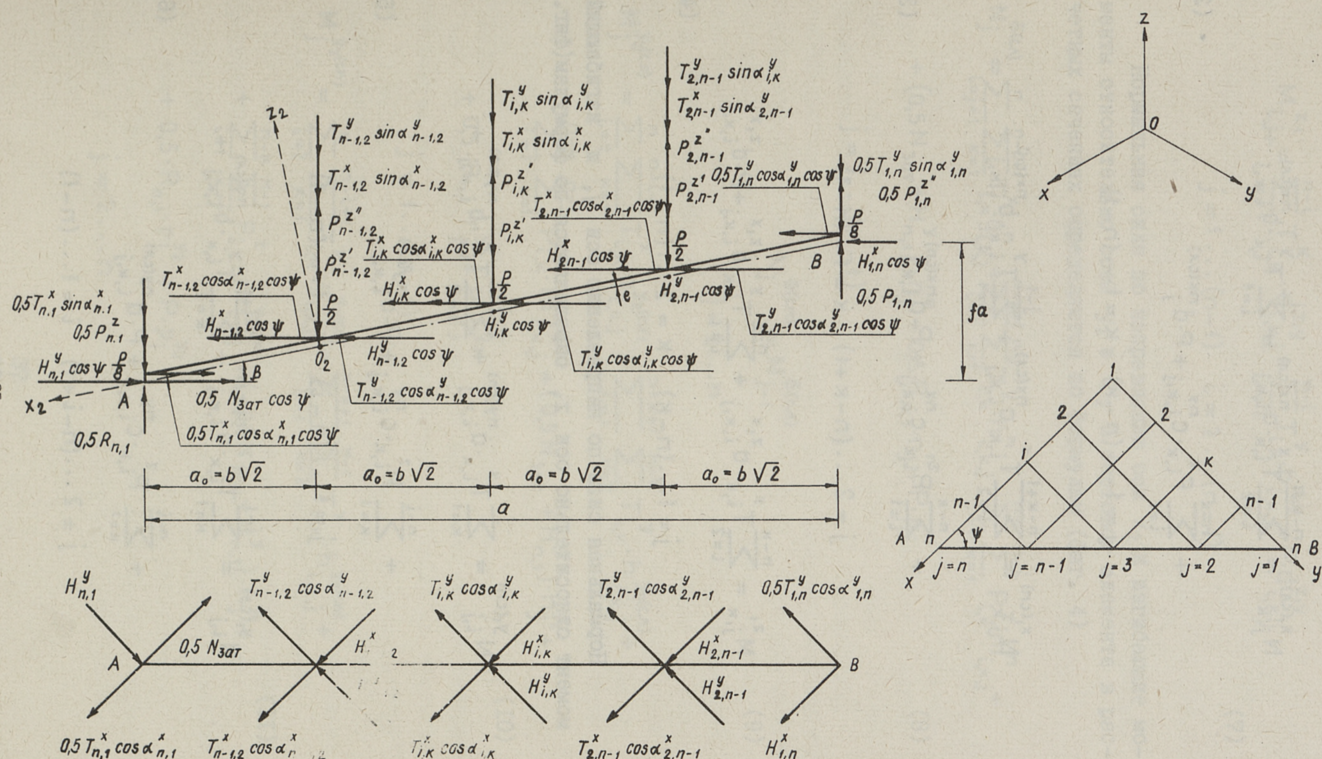
Нормальная сила по направлению оси $x_1$ и изгибающий момент относительно оси $z_1$ определяются по формулам(фиг.2)


I - I
II - II
Z
Y
X
0
$z_1$
$x_1$
$y_1$
$O_1$
$\frac{P}{2}$
$\frac{P}{4}$
$T^x_{n-k+1,k}$
$H^y_{n-k+1,k}$
$P^{z'}_{n-k+1,k}$
$P^{x'}_{n-k+1,k}$
$T^x_{i,k}$
$T^y_{i,k}$
$T^x_{2,k}$
$T^y_{2,k}$
$T^y_{1,k}$
$T^y_{3,k}$
$P^z_{i,k}$
$P^z_{1,k}$
$P^z_{2,k}$
$T^x_{2k} \sin\alpha^x_{2k}$
$\alpha^y_{i,2}$
$P^z_{x,k} \cos\alpha^x_{2,k}$
$T^x_{n-k+1,k} \sin\alpha^x_{n-k+1k}$
$H^y_{n-k+1k}$
$T^y_{i,k} \sin\alpha^y_{1,k}$
$T^y_{2k} \sin\alpha^y_{2,k}$
$\frac{T^y_{1,k}}{2} \sin\alpha^y_{1,k}$
$M^{y_1}_{1,k}$
$N^{x_1}_{1k}$
$Q_{1k}$
$\alpha^x_{i,k}$
$\alpha^x_{2,k}$
$\alpha^x_{n-k+1,k}$
$P^z_{i,k} \cos\alpha^y_{i,k}$
$P^z_{2,k} \cos\alpha^y_{2,k}$
$\frac{P_{1,k}}{2}^z \cos\alpha^y_{1,k}$
b
b
b

Фиг. 2.




Фиг. 3.



z
x
y
0
A
B
$O_2$
$z_2$
$x_2$
$a_o = b\sqrt{2}$
$a$
$fa$
$\beta$
$e$
$\psi$
$\frac{P}{2}$
$\frac{P}{8}$
$0{,}5\,N_{зат}\cos\psi$
$0{,}5\,N_{зат}$
$0{,}5\,R_{n,1}$
$0{,}5\,P_{1,n}$
$j=n$
$j=n-1$
$j=3$
$j=2$
$j=1$


Фиг. 4.

$$N_{j,\kappa}^{x_1(сл)} = \sum_{i=2}^{n-\kappa+1} T_{i,\kappa}^{x} \cdot a_{i,\kappa,j}^{nx(сл)} + \sum_{i=1}^{j} T_{i,\kappa}^{y} \cdot b_{i,\kappa,j}^{nx(сл)} + \sum_{i=1}^{n-\kappa} P_{i,\kappa}^{z} \cdot c_{i,\kappa,j}^{nx} + P \cdot d_{j}^{nx(сл)} \tag{2}$$

$$j = 1 \ldots (n-\kappa) \quad \kappa = 1 \ldots (n-1)$$

$$N_{j,\kappa}^{x_1(сп)} = \sum_{i=2}^{n-\kappa+1} T_{i,\kappa}^{x} \cdot a_{i,\kappa,j}^{nx(сл)} + \sum_{i=1}^{j-1} T_{i,\kappa}^{y} \cdot b_{i,\kappa,j}^{nx(сп)} + \sum_{i=1}^{n-\kappa} P_{i,\kappa}^{z} \cdot c_{i,\kappa,j}^{nx} + P \cdot d_{i,\kappa,j}^{nx(сп)} \tag{3}$$

$$j = 2 \ldots (n-\kappa+1) \quad \kappa = 1 \ldots (n-1)$$

$$M_{j,\kappa}^{z_1} = \sum_{i=2}^{n-\kappa} T_{i,\kappa}^{x} \cdot a_{i,\kappa,j}^{z_1 x} + \sum_{i=1}^{n-\kappa} T_{i,\kappa}^{y} \cdot b_{i,\kappa,j}^{z_1 x} + P \cdot d_{i,\kappa,j}^{z_1 x} \tag{4}$$

$$j = 1 \ldots (n-\kappa) \quad \kappa = 2 \ldots (n-1)$$

Нормальная сила по направлению оси $y_1$ и изгибающий момент относительно оси $z_1$ определяются по формулам(фиг.3)

$$N_{i,j}^{y_1(сп)} = \sum_{\kappa=1}^{j} T_{i,\kappa}^{x} \cdot a_{i,\kappa,j}^{ny(сп)} + \sum_{\kappa=2}^{n-i+1} T_{i,\kappa}^{y} \cdot b_{i,\kappa,j}^{ny(сп)} + \sum_{\kappa=1}^{n-i} P_{i,\kappa}^{z} \cdot c_{i,\kappa,j}^{ny} + P \cdot d_{i,\kappa,j}^{ny(сп)} \tag{5}$$

$$j = 1 \ldots (n-i) \quad i = 1 \ldots (n-1)$$

$$N_{i,j}^{y_1(сл)} = \sum_{\kappa=1}^{j-1} T_{i,\kappa}^{x} \cdot a_{i,\kappa,j}^{ny(сл)} + \sum_{\kappa=2}^{n-i+1} T_{i,\kappa}^{y} \cdot b_{i,\kappa,j}^{ny(сл)} + \sum_{\kappa=1}^{n-i} P_{i,\kappa}^{z} \cdot c_{i,\kappa,j}^{ny} + P \cdot d_{i,\kappa,j}^{ny(сл)} \tag{6}$$

$$j = 2 \ldots (n-i+1) \quad i = 1 \ldots (n-1)$$

$$M_{i,j}^{z_1} = \sum_{k=1}^{n-i} T_{i,k}^{x} \cdot a_{i,k,j}^{z_1 y} + \sum_{k=2}^{n-i} T_{i,k}^{y} \cdot b_{i,k,j}^{z_1 y} + P \cdot d_{i,k,j}^{z_1 y} \tag{7}$$

$$j = 1 \ldots (n-1) \quad i = 2 \ldots (n-1)$$

Нормальная сила по направлению оси $x_2$ и изгибающие моменты относительно осей $y_2$ и $z_2$ в бортовом элементе в расчетных сечениях определяются по формулам (фиг. 4)

$$N_j^{\delta(сл)} = \sum_{i=j+1}^{n} \sum_{k=1}^{n-i+1} T_{i,k}^{x} \cdot g_{i,k,j}^{n} + \sum_{i=1}^{n-k+1} \sum_{k=1}^{n-j} T_{i,k}^{y} \cdot h_{i,k,j}^{n} \quad \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} P_{i,k}^{z} \cdot m_{i,k,j}^{n} +$$

$$+ (0{,}5 N_{зат} + H_{n,1}^{y}) \cdot n_j^{n} + 0{,}5 R_{n,1} \cdot r_j^{n} + P \cdot p_j^{n} \tag{8}$$

$$j = 1 \ldots (n-1)$$

$$N_j^{\delta(сп)} = N_{j-1}^{\delta(сл)} \tag{9}$$

$$j = 2 \ldots n$$

$$M_j^{y_2(сл)} = \sum_{i=2}^{n} \sum_{k=1}^{n-i+1} T_{i,k}^{x} \cdot g_{i,k,j}^{y_2(сл)} + \sum_{i=1}^{n-k+1} \sum_{k=2}^{n-1} T_{i,k}^{y} \cdot h_{i,k,j}^{y_2(сл)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-k} \sum_{k=1}^{n-1} P_{i,k}^{z} \cdot m_{i,k,j}^{y_2(сл)} + (0{,}5 N_{зат} + H_{n,1}^{y}) \cdot n_j^{y_2} + \tag{10}$$

$$+ 0{,}5 \cdot R_{n,1} \cdot r_j^{y_2} + P \cdot p_j^{y_2}$$

$$j = 1 \ldots (n-1)$$

$$M_j^{y_2(сп)} = \sum_{i=2}^{n} \sum_{k=1}^{n-i+1} T_{i,k}^{x} \cdot g_{i,k,j}^{y_2(сп)} + \sum_{i=1}^{n-k+1} \sum_{k=2}^{n-1} T_{i,k}^{y} \cdot h_{i,k,j}^{y_2(сп)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-k} \sum_{k=1}^{n-1} P_{i,k}^{z} \cdot m_{i,k,j}^{y_2(сп)} + (-0{,}5 N_{зат} + H_{n,1}^{y}) \cdot n_j^{y_2} + \tag{11}$$

$$+ 0{,}5 \cdot R_{n,1} \cdot r_j^{y_2} + P \cdot p_j^{y_2}$$

$$j = 2 \ldots n$$

$$M_j^{z_2} = \sum_{i=2}^{n} \sum_{k=1}^{n-j+1} T_{i,k}^{x} \cdot g_{i,k,j}^{z_2} + \sum_{i=1}^{n-k+1} \sum_{k=2}^{n-1} T_{i,k}^{y} \cdot h_{i,k,j}^{z_2} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} P_{i,k}^{z} \cdot m_{i,k,j}^{z_2} + (-0{,}5\, N_{зат} + H_{n,1}^{y}) \cdot n_j^{z_2}$$

$$j = 2 \ldots n \qquad (12)$$

Коэффициенты уравнений в данной статье не приводятся.

## Литература


I. Лаул Х.Х., Пугаль Я.П. О расчете пологих деревянных гипаров. – Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1975, № 384.



H. Laul, E. Just


## About the Elaboration of the Calculation of the Flat Timber Hypars (Part I)


### Summary

In the present account the method of the calculation of flat timber hypars is developed on the ground of the discrete calculation scheme corresponding to the method of forces.

A square-plan flat timber hypar with rectilinear edge beams is submitted to examination.

The calculation schemes proposing a simplification of the calculation of the hypars are added.

At the end of the account the formulas for the determination of strain-deformation conditions are given.

№ 504
TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 624.074.4

А.И. Тальвик

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ МОДЕЛИ ВИСЯЧЕГО ПОКРЫТИЯ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ БОРТОВЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Висячие преднапряженные покрытия отрицательной кривизны уже более 20 лет широко используются в практике строительства как экономные и выразительные конструкции. Исследованием статической работы вантовой сети из перекрестных вант занимались многие авторы. На кафедре строительных конструкций ТПИ названный вопрос рассмотрен в нескольких диссертациях. В работе Ю.К. Энгельбрехта рассматривалась статическая работа седловидной вантовой сети на квадратном плане и с жестким контуром. В работе К.П. Ыйгера рассматривалось седловидное покрытие с плоскими криволинейными контурными арками, в работах А.А. Равасоо и У.В.-Э. Мянд висячее покрытие с пространственным свободно деформирующим контуром круглой формы в плане. В.Р. Кульбах в своих работах выявил общие закономерности статической работы седловидных преднапряженных висячих покрытий.

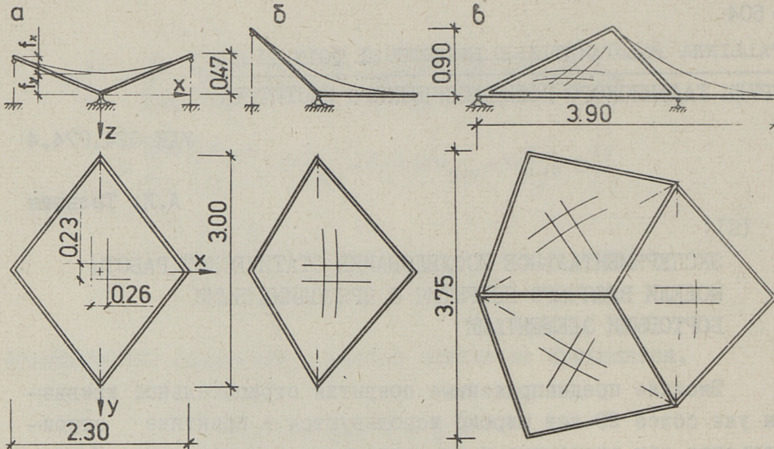
Целью настоящей работы явилось исследование следующих проблем:

I) работа пространственного обрамляющего контура из прямолинейных элементов;

2) роль внутренних затяжек в конструкции;

3) изменение кривизны сетевой поверхности при различных вариантах нагружения.

Для решения вышеприведенных проблем была построена модель, имеющая в плане форму неправильного шестиугольника (фиг. I). Идея подобного покрытия в виде правильного шестиугольника в плане была предложена институтом "Эстколхозпроект".



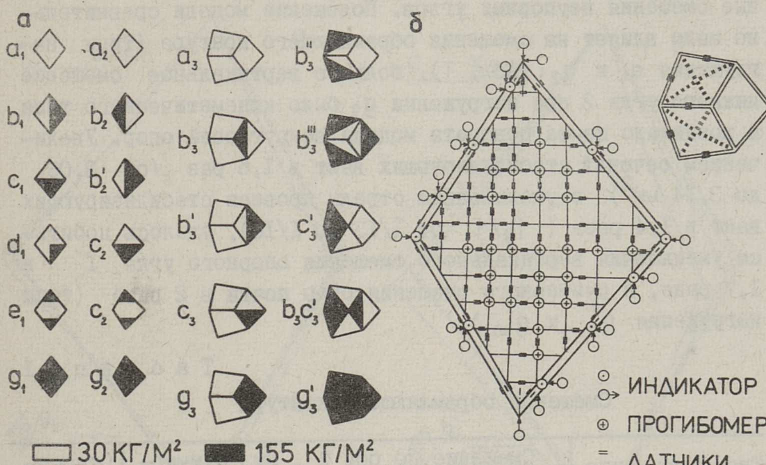

Фиг. 1. Виды моделей.

Выбранная нами форма имеет некоторые преимущества с эстетической и акустической точки зрения. Обрамляющий контур модели был выполнен из стальной трубы 70 x 4 мм (ГОСТ 3262-75), вантовая сеть из стальной пружинной проволоки I-I,6 и I-2,0 (ГОСТ 9389-60). Экспериментальные исследования проводились тремя этапами.

I) С отдельным гипаром (фиг. Iа): сетевые поверхности образовались натяжением каждого ванта по I00 кг ($f_y/f_x$ = = I,35, дополнительный вариант с горизонтальной затяжкой) и натяжением несущих вант по 50 кг, стабилизирующих вант по I25 кг ( $f_y/f_x$ = 0,96, основной вариант без затяжки). Все ванты имели диаметр в I,6 мм;

2) С наклонным гипаром (фиг. Iб), основной вариант поверхности;

3) С комплексной моделью (фиг. Iв), основной вариант поверхности с горизонтальными затяжками и без затяжек и дополнительный вариант (индекс "п" в обозначении типа нагружения) с сетевой поверхностью образованной натяжением несущих вант по 25 кг и стабилизирующих вант по I50 кг ( $f_y/f_x$ = 0,57). Стабилизирующие ванты имели диаметр в 2,0 мм.




Фиг. 2. Типы нагружения (а) и расположение измерительных приспособлений (б).

Нагружение модели осуществлялось гирями массой в I.9 и 9,8 кг, подвешенными в узлах сети и имитирующими распределенную нагрузку в 30 кг/м$^2$ и I55 кг/м$^2$ соответственно. Основные типы нагружения приведены на фиг. 2а. Цифровой индекс показывает этап испытания, далее индекс "т" – наличие горизонтальных затяжек. Прогибы сетевой поверхности измерялись прогибомерами типа Максимова, перемещения обрамляющего контура механическими индикаторами и внутренние усилия в конструкции тензометрическими мостами ЭИД-3М и ЦТМ-5 с помощью датчиков сопротивления типа ЦНИИСК-II (фиг. 2б).

Максимальные деформации обрамляющего контура модели с горизонтальной затяжкой наблюдались в процессе предварительного напряжения сети, при этом горизонтальные перемещения средних точек бортовых элементов достигали до I,5 мм (относительный прогиб I/I300). Перемещения точек бортового элемента, возникающие при нагружении сетевой поверхности, не превышали 30 % указанной величины. Интересно отметить, что при полном нагружении модели (тип нагружения $g_{1т}$; табл. I) неупорные углы контурной рамы показали тенденцию подняться вверх; смещению препятствовали стабилизирующие затяжки. При отсутствии горизонтальной затяжки определяющими по величине стали смещения опор и вертикальные смещения неупорных углов. Положение модели сравнительно мало влияет на смещения обрамляющего контура (типы нагружения $g_1$ и $g_2$; табл. I); большое вертикальное смещение нижнего угла 2 при нагружении $g_2$ было кинематического типа и возникало из-за поворота модели вокруг осей опор. Увеличением сечений стабилизирующих вант в I,5 раз (от 2,06 до 3,I4 $мм^2$) и уменьшением стрелы провеса стабилизирующих вант в I,4 раза ( $f_y/l$ от I/I3 до I/I8), удалось добиться уменьшения вертикального смещения опорного угла I в I,7 раза, а суммарного смещения опор почти в 2 раза (типы нагружения $g'_3$ и $g'_{3п}$).

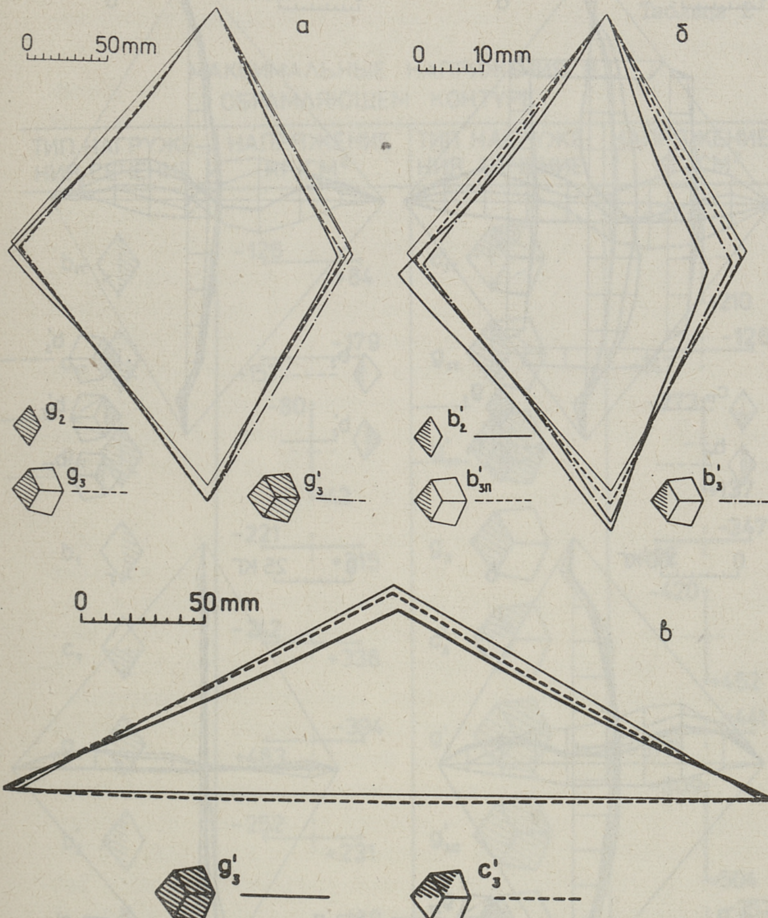
Таблица I

Смещения обрамляющего контура

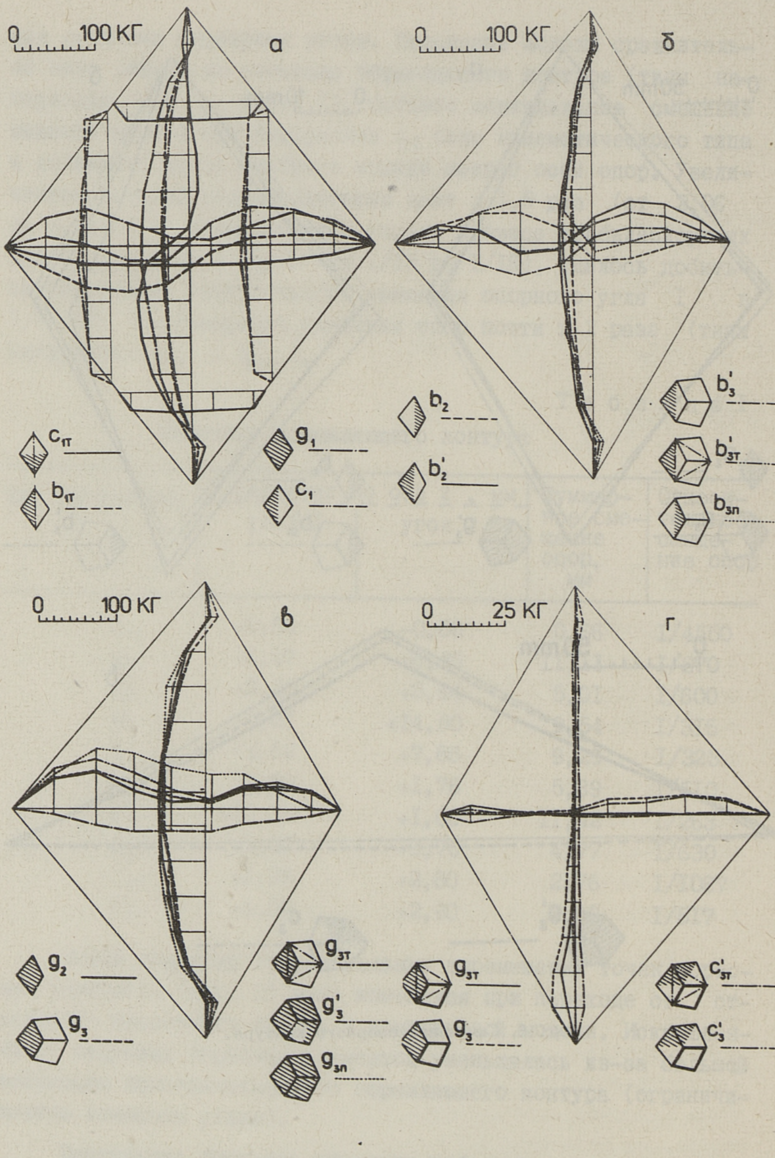
| Тип нагружения | Смещение по оси z , мм | | Суммарное смещение опор, мм | Относительное смещение опор |
|---|---|---|---|---|
| | угол I | угол 2 | | |
| $g_{1т}$ | -0,04 | -0,05 | 0,66 | I/4550 |
| $g_1$ | +6,07 | +6,30 | II,II | I/270 |
| $c_2$ | +0,I0 | +5,64 | 5,0I | I/600 |
| $g_2$ | -0,0I | +I4,50 | 9,54 | I/3I5 |
| $g_3$ | +3,62 | +7,86 | 9,29 | I/323 |
| $c'_3$ | +3,58 | +I,76 | 5,89 | I/5I0 |
| $g'_3$ | +I0,I6 | +I,60 | II,42 | I/263 |
| $g_{3п}$ | +I,90 | +9,70 | 4,77 | I/630 |
| $c_{3п}$ | +I,99 | +2,80 | 2,76 | I/I087 |
| $g'_{3п}$ | +6,00 | +2,90 | 5,80 | I/5I7 |

Общий характер горизонтальных перемещений точек бортовых элементов (фиг. 3) мало изменялся при переходе от отдельного наклонного гипара к комплексной модели. Искривленность наружных бортовых элементов уменьшалась из-за большей жесткости пространственного обрамляющего контура (ограничивались повороты углов).

Внутренние бортовые элементы работали в основном в вертикальной плоскости. При тяжелых нагружениях вертикальные перемещения средних точек бортовых элементов достигли 3,4 мм (относительный прогиб I/575, фиг. 3в). На фиг. 3б




Фиг. 3. Смещения опорного контура.




Фиг. 4. Приросты внутренних усилий в вантах.

Таблица 2

## МАКСИМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ОБРАМЛЯЮЩЕМ КОНТУРЕ

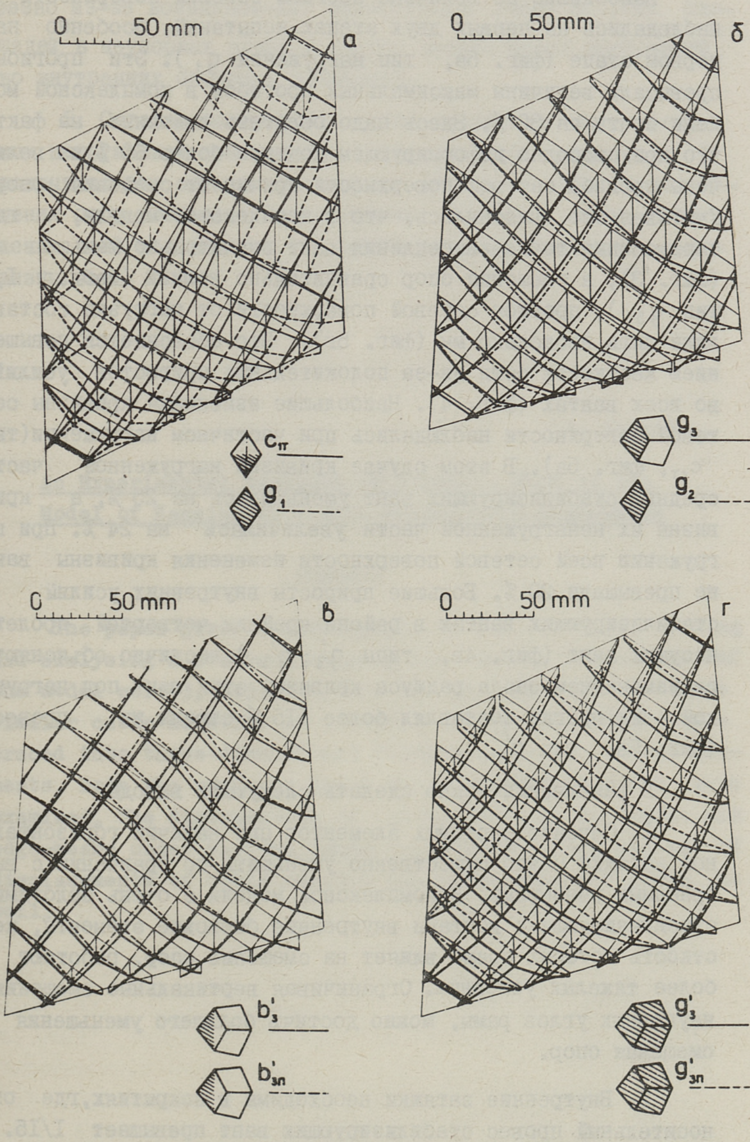
| ТИП НАГРУЖЕНИЯ, СЕЧЕНИЕ | НАПРЯЖЕНИЕ КГ/СМ$^2$ | ТИП НАГРУЖЕНИЯ, СЕЧЕНИЕ | НАПРЯЖЕНИЕ КГ/СМ$^2$ |
|---|---|---|---|
| $b_{1т}$ | −126; +84 | $c'_{3т}$ | −273; +210 |
| $c_{1т}$ | −179; +157 | $g_{3т}$ | −126; +147 |
| $g_{1т}$ | −80; +42 | $g'_{3т}$ | −273; +137 |
| $b_1$ | −221; +315 | $g_3$ | −347; +462 |
| $c_1$ | −242; +336 | $c'_3$ | −420; +452 |
| $g_1$ | −394; +483 | $g'_3$ | +441; +578 |
| $b'_2$ | −252; +231 | $g'_{3п}$ | −609; +504 |
| $c_2$ | −189; +273 | $g_{3п}$ | −252; +305 |
| $g_2$ | −336; +464 | $c'_{3п}$ | −494; +515 |

хорошо видны кинематические смещения неупорных углов наклонной отдельной модели (тип $b'_2$).

Напряжения в бортовых элементах возникали от усилий, передаваемых вантовой сетью на обрамляющий контур и от смещений опор. По приведенным в таблице 2 данным видно, что в контурной раме отдельного гипара, независимо от его положения, максимальные напряжения возникали в плоскости рамы. При наличии горизонтальной затяжки максимум напряжений находился в среднем сечении бортового элемента, а при отсутствии затяжки в нижнем бортовом элементе близко к опорному углу (зависел в основном от смещений опор). В комплексной модели при наличии горизонтальных затяжек максимум напряжений находился в среднем сечении внутреннего бортового элемента, а в модели без затяжек, как и в отдельном гипаре, в наружном контуре близко к опоре (за исключением типов нагружения $c'_3$; $c'_{3п}$ и $g'_{3п}$).

Общий характер прироста внутренних усилий в вантах мало зависит от положения модели (фиг. 4). Отрицательные приросты усилий в крайних несущих вантах объясняются ненагруженным состоянием этих вант. Изменения усилий возникали из-за деформации контурной рамы. При отсутствии горизонтальной затяжки включались в работу стабилизирующие ванты, где возникали положительные приросты внутренних усилий (фиг. 4а). При этом более интенсивно работали крайние ванты. Отрицательные приросты усилий в средних стабилизирующих вантах у модели без затяжки наблюдались при нагружении модели до половины пролета несущих вант (фиг. 4б). Наибольшие колебания в приростах внутренних усилий в вантах, а, следовательно, и в местной жесткости сетевой поверхности возникали при частичных нагружениях модели. Наблюдалось уменьшение усилий в ненагруженных несущих вантах благодаря деформации обрамляющего контура (тип нагружения $c_{1т}$, фиг. 4а). При полном нагружении комплексной модели (фиг. 4б) большие приросты усилий возникали при дополнительном варианте сетевой поверхности ($f_y / l$ = I/I8, тип нагружения $g'_{3п}$).

Нагружение соседних пролетов модели почти не вызывало изменений усилий в вантах измеряемого пролета (фиг. 4г) благодаря большой жесткости бортовых элементов.




Фиг. 5. Прогибы сетевой поверхности

Наибольшие по величине прогибы сетевой поверхности наблюдались на первых двух этапах испытаний, особенно на первом этапе (фиг. 5а, тип нагружения $g_1$). Эти прогибы превышали величины максимальных прогибов в комплексной модели почти на 30 %. Здесь надо обратить внимание на факт, что при свободно деформирующем контуре более 60 % из величины прогиба сетевой поверхности причиняют смещения опор. Учитывая это, выяснилось, что в комплексной модели, где перемещения точек закрепления вант значительно меньше (фиг. 3), а смещения опор сравнительно велики (табл. I, тип $g'_3$), прогибы сетевой поверхности от нагрузки составляли лишь несколько мм (фиг. 5г). Это объясняется повышением жесткости сети из-за положительных приростов усилий во всех вантах (фиг. 4). Наибольшие изменения кривизны сетевой поверхности наблюдались при частичном нагружении(тип $c_{1т}$, фиг. 5а). В этом случае кривизна нагруженной части средних стабилизирующих вант уменьшилась на 25 %, а кривизна их ненагруженной части увеличилась на 24 %. При нагружении всей сетевой поверхности изменения кривизны вант не превышали 20 %. Большие приросты внутренних усилий в стабилизирующих вантах в районе крайних четвертей пролета несущих вант (фиг. 4в, типы $g'_3$; $g'_{3п}$) частично объясняются изменением знака радиуса кривизны этих вант под нагрузкой - их прогиб составлял более II5 % стрелы их провеса (фиг. 5в, тип $b'_{3п}$).

В заключении можно сделать следующие выводы.

I. Сечение бортовых элементов при наличии горизонтальной затяжки можно существенно уменьшить по сравнению с выбранными размерами. В комплексной модели с очень пологими стабилизирующими вантами внутренние бортовые элементы, жесткость которых прямо влияет на смещение опор, работают в более тяжелых условиях. Ограничивая вертикальные смещения неупорных углов рамы, можно достичь большего уменьшения смещения опор.

2. Внутренние затяжки необходимы в покрытиях,где относительный провес стабилизирующих вант превышает I/I5. Уменьшая эту величину до I/20 и увеличивая жесткость стабилизирующих вант, можно достичь уменьшения смещения опор в 2...3 раза. Большее уменьшение провеса вант не целесооб-

разно из-за возникновения значительных очень пологих площадей в неупорных углах и быстро возрастающих напряжений во внутренних бортовых элементах.

3. Сетевая поверхность более чувствительна к местным нагружениям при наличии горизонтальной затяжки. В покрытиях без затяжки увеличение жесткости сети из-за смещения опор уменьшает разнозначие прогибов сети. Нагружение всей поверхности причиняет меньшие изменения кривизны вант.

A. Talvik

**An Experimental Research of Statical Work of the Model of Hanging Roof with Rectilinear Edge-beams**

Summary

The paper gives a description of constructing, testing and analysing a combined hanging roof model. Dimensions of the model were 3.90x3.75x0.90 m and it consisted of three similar cable networks of negative curvature, which were braced into three-dimensional framework of rectilinear elements. Both the separate hypar and the combined model were examined. The distribution of internal forces in cables and edge-beams under various loads is presented. The epures of displacements of cable network and edge-beams are given as well.

ренно могут приближенно удовлетворять обоим условиям. Изо-
ваться в некоторых узлах и могут возникнуть дополнительные
на внутренних опорных элементах.

3. Степень погрешности схемы при увязке [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

<u>An Experimental Research of Elastic Work of the</u>
<u>Model of Framing Shell with Rectilinear Generatrices</u>

Summary

The paper gives a description of constructing, testing and analyzing a combined cable-rod model, representing the cover over 3,6x3,6m, [illegible] similar cable structure of parallel generatrices, which were braced into three-dimensional framework of rectilinear elements. Both the separate types and the combined model were examined. The distribution of internal forces in cables and edge-beams under various loads is presented. The values of displacements of cable network and edge-beams are given as well.

№ 504

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 624.04

К.П. Ыйгер, А.И. Тальвик

# РАСЧЕТ НЕСИММЕТРИЧНОГО СЕДЛОВИДНОГО ПОКРЫТИЯ

Расчет висячих седловидных покрытий выполняют по двум основным схемам – по континуальной схеме, где вместо вантовой сети интерпретируется непрерывная поверхность с приведенной толщиной, и по дискретной схеме, где рассматривается конечное число пересекающихся вант. Дискретная схема расчета в большей мере соответствует действительной работе вантового покрытия и ее применение не зависит от формы покрытия. Применение других методов расчета в случаях, когда аналитическое описание сетевой поверхности является сложным, затруднительно.

Многие авторы использовали разные подходы к решению названного задания. В работе А.И. Битюцкого [I] рассматривается расчет вантовой сети на вертикальную нагрузку; предполагают, что узлы сети могут получить только вертикальные перемещения. В работе [2] добавляется учет горизонтальных смещений узлов в плоскости ванта. В нижеотмеченных работах рассмотрен также случай вертикального нагружения сети. В работах Л.А. Загорянского [3; 4] вантовая сеть рассматривается как шарнирно-стержневая система и предлагается метод упругих затяжек, имитирующих влияние вант одного семейства на ванту другого семейства. Усилия в затяжках вычисляются методом сил. В работе [5] вводится понятие "силы взаимодействия вант", через которое учитывается влияние одного ванта на перекрестную ванту. Расчет отдельных вант выполняется как для упругих нитей по системе В.К. Качурина [6]. В работах В.Р. Кульбаха, Ю.К. Энгельбрехта [7, 8] и И.Д. Глинкина [9] рассматривается расчет перекрестной сети с использованием многоступенчатого нагружения [I0]. Учитываются горизонтальные перемещения обрамляющего контура. В работах [II, I2] учитываются деформации обрамляющего контура поэтапно. Исходной схемой принимается абсолютно жесткий контур.

В настоящей работе рассматривается расчет по дискретной схеме несимметричного в плане седловидного вантового перекрытия при нагрузке произвольного направления. Несимметричность в данном случае обусловлена наклонным положением вантового перекрытия, симметричного относительно двух плоскостей. Для большего удобства составления разрешающих уравнений, покрытие рассматривается в положении, указанном на фиг. 2а. От этого положения с помощью простых преобразований координат можно перейти к наклонному положению. Сделанное упрощение не уменьшает общности получаемых уравнений. При составлении расчетных уравнений введены следующие допущения:

I) работа вантовой сети рассматривается без участия элементов кровли;

2) ванты работают только на растяжение;

3) ячейки вантовой сети в плане прямоугольные;

4) соединение вант в узлах исключает возможность взаимного смещения;

5) внешняя нагрузка передается только в узлах сети.

Расчет ведется по этапам, являющимся самостоятельными заданиями.

Задание № I: Определение начальной геометрии покрытия.

Задание № 2: Вычисление деформаций контура под действием усилий предварительного напряжения сети.

Задание № 3: Расчет сети на внешнюю нагрузку.

Задание № 4: Учет деформаций контура.

В процессе расчета задани № 2...4 составляют закрытый цикл, который работает до определенной заданной точности.

Задание № I. Для определения начальной геометрии сетевой поверхности известными принимаются координаты $x$; $y$; $z$ точек опорного контура, координаты $x^{\circ}_{i,k}$; $y^{\circ}_{i,k}$ узлов сети и силы преднапряжения в приконтурных отрезках вант. Обрамляющий контур считается абсолютно жестким. Координаты $z^{\circ}_{i,k}$ узлов сети в состоянии предварительного напряжения (внешняя узловая нагрузка $Q = 0$) вычисляются из уравнения равновесия. Для узла $i,k$ (фиг. I) из уравнений

$$\Sigma X \ldots -T^{\circ}_{i,k}\cos\alpha^{\circ}_{i,k} + T^{\circ}_{i,k+1}\cos\alpha^{\circ}_{i,k+1} = 0$$

$$\Sigma Y \ldots\ T^{\circ}_{k,i+1}\cos\alpha^{\circ}_{k,i+1} - T^{\circ}_{k,i}\cos\alpha^{\circ}_{k,i} = 0$$

$$\Sigma Z \ldots -T^{\circ}_{i,k}\sin\alpha^{\circ}_{i,k} + T^{\circ}_{k,i+1}\sin\alpha^{\circ}_{k,i+1} + T_{i,k+1}\sin^{\circ}_{i,k+1} - T^{\circ}_{k,i}\sin\alpha^{\circ}_{k,i} = 0$$

получаем

$$T^{\circ}_{i,k}(\cos\alpha^{\circ}_{i,k}\operatorname{tg}\alpha^{\circ}_{i,k+1} - \sin\alpha^{\circ}_{i,k}) + T^{\circ}_{k,i}(\cos\alpha^{\circ}_{k,i}\operatorname{tg}\alpha^{\circ}_{k,i+1} - \sin\alpha^{\circ}_{k,i}) = 0,$$

где

$$\sin\alpha^{\circ}_{i,k} = \frac{z^{\circ}_{i,k} - z^{\circ}_{i,k-1}}{s^{\circ}_{i,k}}; \qquad \sin\alpha^{\circ}_{k,i} = \frac{z^{\circ}_{k,i} - z^{\circ}_{k,i-1}}{s^{\circ}_{k,i}};$$

$$\cos\alpha^{\circ}_{i,k} = \frac{x^{\circ}_{i,k} - x^{\circ}_{i,k-1}}{s^{\circ}_{i,k}}; \qquad \cos\alpha^{\circ}_{k,i} = \frac{y^{\circ}_{k,i} - y^{\circ}_{k,i-1}}{s^{\circ}_{k,i}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha^{\circ}_{i,k+1} = \frac{z^{\circ}_{i,k+1} - z^{\circ}_{i,k}}{x^{\circ}_{i,k+1} - x^{\circ}_{i,k}}; \qquad \operatorname{tg}\alpha^{\circ}_{k,i+1} = \frac{z^{\circ}_{k,i+1} - z^{\circ}_{k,i}}{y^{\circ}_{k,i+1} - y^{\circ}_{k,i}};$$

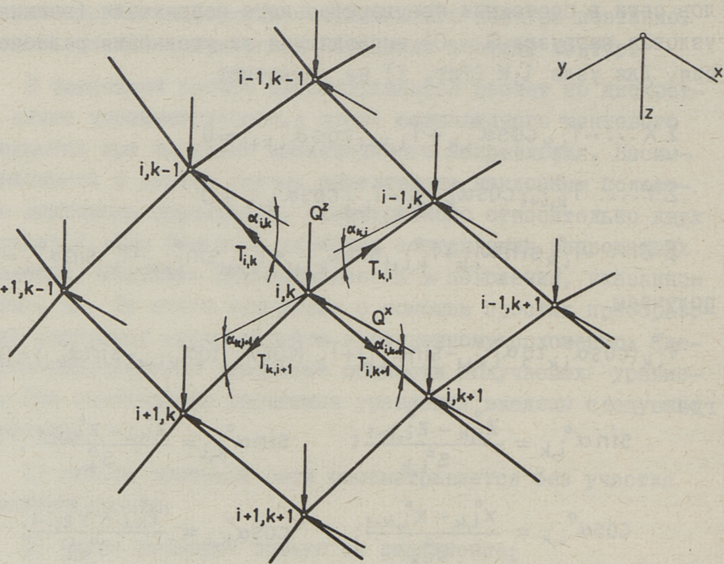
$$s^{\circ}_{i,k} = \sqrt{(x^{\circ}_{i,k} - x^{\circ}_{i,k-1})^2 + (z^{\circ}_{i,k} - z_{i,k-1})^2}; \quad s^{\circ}_{k,i} = \sqrt{(y^{\circ}_{k,i} - y^{\circ}_{k,i-1})^2 + (z^{\circ}_{k,i} - z^{\circ}_{k,i-1})^2}.$$

Общее уравнение для узла $i,k$, учитывающее знаки координат по всей поверхности, представляется в виде

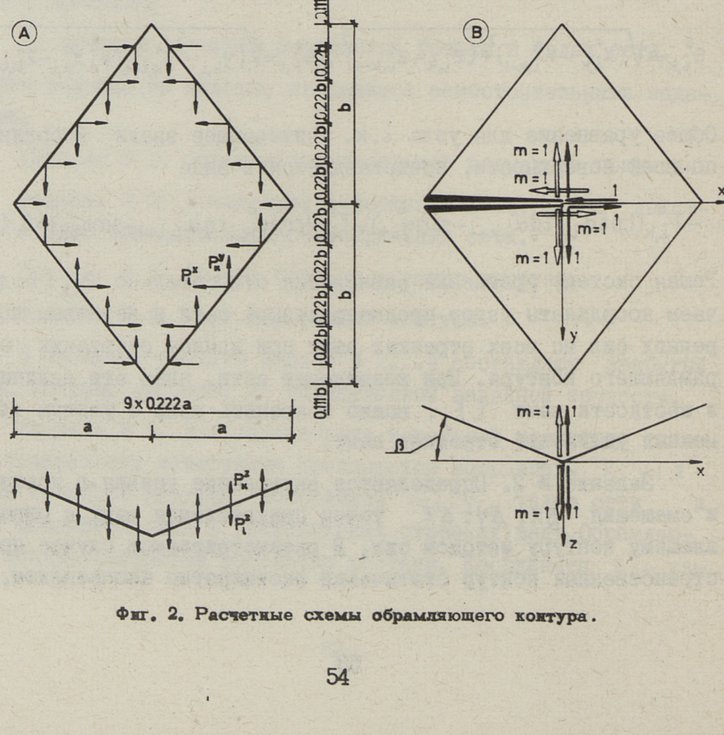
$$-T^{\circ}_{i,k}(\cos\alpha^{\circ}_{i,k}\operatorname{tg}\alpha^{\circ}_{i,k+1} - \sin\alpha^{\circ}_{i,k}) - T^{\circ}_{k,i}(\cos\alpha^{\circ}_{k,i}\operatorname{tg}\alpha^{\circ}_{k,i+1} - \sin\alpha^{\circ}_{k,i}) = 0. \quad (\mathrm{I})$$

Решая систему уравнений равновесия относительно $z_{i,k}$, получаем координаты узлов преднапряженной сети и величины внутренних сил во всех отрезках вант при данном очертании обрамляющего контура. При возведении сети, зная эти величины и жесткости вант $EF_j$, можно закрепить узлы с учетом возможных удлинений отрезков вант.

Задание № 2. Определяются внутренние усилия в контуре и смещения $\Delta x$; $\Delta y$; $\Delta z$ точек прикрепления вант к обрамляющему контуру методом сил. В рассматриваемом случае пространственный контур статически шестикратно неопределен.




**Фиг. 1.** Расчетная схема нагруженного узла.




**Фиг. 2.** Расчетные схемы обрамляющего контура.

Основная схема с единичными неизвестными (моменты указаны векторами по правилу правой руки) и схема внешней нагрузки представлена на фиг. 2. Составляющие внешней нагрузки в каждой точке прикрепления вант вычисляются из выражений

$$P_i^x = T_i^\circ \cos\alpha_i^\circ;\ P_k^y = T_k^\circ \cos\alpha_k^\circ;\ P_i^z = T_i^\circ \sin\alpha_i^\circ;\ P_k^z = T_k^\circ \sin\alpha_k^\circ. \quad (2)$$

где $i$ индекс несущих, $k$ индекс стабилизирующих вант;

$T_i^\circ$ – сила предварительного напряжения;

$\alpha_i^\circ$ – угол наклона приконтурного отрезка ванты.

Величины смещений контурных точек вычисляются из уравнений

$$X = -D_1^{-1} D_0, \quad (3)$$

где $X = \begin{Vmatrix} X_{11} \\ \vdots \\ X_{n1} \end{Vmatrix}$ – матрица дополнительных неизвестных;

$D_1 = b_1' f b_1$ – матрица смещений в канонических уравнениях метода сил;

$D_0 = b_1' f b$ – матрица моментов в основной схеме от внешней нагрузки;

$b_1 = \begin{Vmatrix} m_{11} \dots m_{1q} \\ \dots\dots\dots \\ m_{1n} \dots m_{nq} \end{Vmatrix}$ – матрица изгибающих моментов от единичных неизвестных; (3а)

$f = \begin{Vmatrix} f_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & f_n \end{Vmatrix}$ – матрица податливости; (3б)

$b = \begin{Vmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{Vmatrix}$ – матрица изгибающих моментов от нагрузки; (3с)

$b_1'; b'$ – соответственные транспонированные матрицы;

$n$ – число рассматриваемых отрезков;

$q$ – число единичных неизвестных.

Уравнение (3) решают относительно плоскостей $xy; xz$ и $yz$; результаты суммируют соответственно (I2). Получаемые из уравнения (3) величины смещений точек обрамляющего контура учитываются при определении их координат для повторного решения задания № I.

Задание № 3. Определение величин усилий в отрезках вант и смещений узлов сети под действием внешней нагрузки. В уравнение равновесия узла $i,k$ (I) вводятся члены от нагрузки. Общее уравнение равновесия узла представляется в форме

$$Q_z - Q_x \operatorname{tg}\alpha_{i,k+1} - Q_y \operatorname{tg}\alpha_{k,i+1} - T_{i,k}(\cos\alpha_{i,k}\operatorname{tg}\alpha_{i,k+1} - \sin\alpha_{i,k}) - T_{k,i}(\cos\alpha_{k,i}\operatorname{tg}\alpha_{k,i+1} - \sin\alpha_{k,i}) = 0. \quad (4)$$

В дальнейшем рассмотрим случай $Q_y = 0$, соответствующий варианту нагружения наклонного гипара вертикальной нагрузкой. Под действием внешней нагрузки углы наклона $\alpha_j^\circ$ получают приросты $\Delta\alpha_j$. Имеем:

$$\left.\begin{aligned}
\sin(\alpha^\circ_{i,k}+\Delta\alpha_{i,k}) &= \frac{z^\circ_{i,k}-z^\circ_{i,k-1}+\Delta z_{i,k}-\Delta z_{i,k-1}}{s^\circ_{i,k}+\Delta s_{i,k}};\\
\cos(\alpha^\circ_{i,k}+\Delta\alpha_{i,k}) &= \frac{x^\circ_{i,k}-x^\circ_{i,k-1}+\Delta x_{i,k}-\Delta x_{i,k-1}}{s^\circ_{i,k}+\Delta s_{i,k}};\\
\operatorname{tg}(\alpha^\circ_{i,k+1}+\Delta\alpha_{i,k+1}) &= \frac{z^\circ_{i,k+1}-z^\circ_{i,k}+\Delta z_{i,k+1}-\Delta z_{i,k}}{x^\circ_{i,k+1}-x^\circ_{i,k}+\Delta x_{i,k+1}-\Delta x_{i,k}},
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

где

$$s^\circ_{i,k}+\Delta s_{i,k} = \sqrt{(x^\circ_{i,k}-x^\circ_{i,k-1}+\Delta x_{i,k}-\Delta x_{i,k-1})^2+(z^\circ_{i,k}-z^\circ_{i,k-1}+\Delta z_{i,k}-\Delta z_{i,k-1})^2}. \quad (6)$$

Составляющей смещения узла, выходящей из плоскости ванта пренебрегаем, так как она не имеет существенного влияния на изменение внутренних усилий в ванте. Из уравнения (6) после нескольких простых преобразований, пренебрегая величинами высшего порядка, получаем

$$\Delta s_{i,k} = \frac{(x^\circ_{i,k}-x^\circ_{i,k-1})(\Delta x_{i,k}-\Delta x_{i,k-1})+(z^\circ_{i,k}-z^\circ_{i,k-1})(\Delta z_{ik}-\Delta z_{i,k-1})}{\sqrt{(x^\circ_{i,k}-x^\circ_{i,k-1})^2+(z^\circ_{i,k}-z^\circ_{i,k-1})^2}}. \quad (7)$$

С другой стороны, имеется зависимость

$$\Delta s_{i,k} = \frac{1}{EF_i}(T_{i,k} - T^{\circ}_{i,k}) s^{\circ}_{i,k}, \tag{8}$$

где $T^{\circ}_{i,k}$ - внутренняя сила преднапряжения;

$T_{i,k}$ - внутренняя сила от внешней нагрузки;

$EF_i$ - жесткость растяжения отрезка ванты.

Приравнивая правые стороны уравнения (7) и (8) и учитывая температурное воздействие, получаем для отрезка несущей ванты

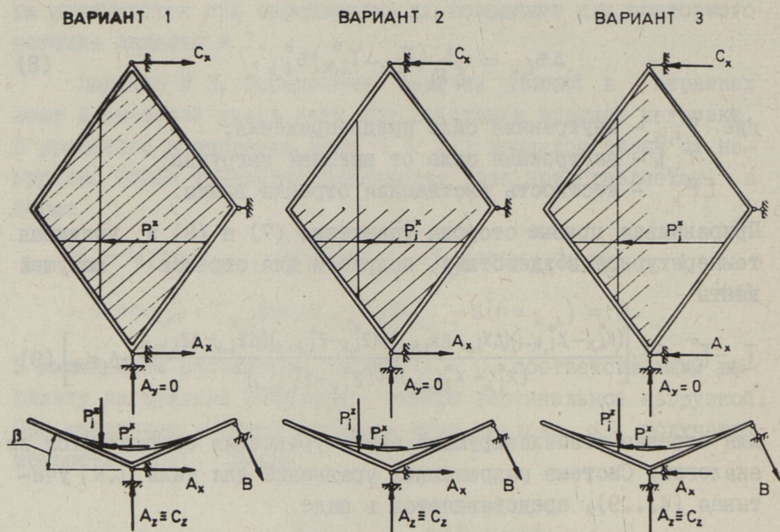
$$T_{i,k} - T^{\circ}_{i,k} = EF_i\left[\frac{(x^{\circ}_{i,k} - x^{\circ}_{i,k-1})(\Delta x_{i,k} - \Delta x_{i,k-1}) + (z^{\circ}_{i,k} - z^{\circ}_{i,k-1})(\Delta z_{i,k} - \Delta z_{i,k-1})}{(x^{\circ}_{i,k} - x^{\circ}_{i,k-1})^2 + (z^{\circ}_{i,k} - z^{\circ}_{i,k-1})^2} - \Delta_t \alpha_t\right]. \tag{9}$$

Для отрезка стабилизирующей ванты уравнения составляются по аналогии. Система разрешающих уравнений для узла $i,k$, учитывая (4...9), представляется в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\Delta s_{i,k}}{s^{\circ}_{i,k}} EF_i - \Delta T_{i,k} = 0\\
&\frac{\Delta s_{k,i}}{s^{\circ}_{k,i}} EF_k - \Delta T_{k,i} = 0\\
&Q_z - Q_x \operatorname{tg}(\alpha^{\circ}_{i,k+1} + \Delta\alpha_{i,k+1}) - T_{i,k}[\cos(\alpha^{\circ}_{i,k} + \Delta\alpha_{i,k}) \operatorname{tg}(\alpha^{\circ}_{i,k+1} +\\
&+ \Delta\alpha_{i,k+1}) - \sin(\alpha^{\circ}_{i,k} + \Delta\alpha_{i,k})] - T_{k,i}[\cos(\alpha^{\circ}_{k,i} - \Delta\alpha_{k,i}) \cdot\\
&\cdot \operatorname{tg}(\alpha^{\circ}_{k,i+1} - \Delta\alpha_{k,i+1}) - \sin(\alpha^{\circ}_{k,i} - \Delta\alpha_{k,i})] = 0
\end{aligned}\right\}, \tag{10}$$

где $\quad \Delta T_{i,k} = T_{i,k} - T^{\circ}_{i,k}; \ \Delta T_{k,i} = T_{k,i} - T^{\circ}_{k,i}$

Задание № 4. Для учитывания влияния деформаций обрамляющего контура на усилия и смещения вантовой сети вычисляют величины моментов в обрамляющем контуре от опорных реакций. На фиг. 3 представлены рассматриваемые варианты нагружения сетевой поверхности. Величины опорных реакций вычисляются из следующих выражений:




**Фиг. 3.** Схемы нагружения сетевой поверхности.

## Вариант нагружения I

$$\left.\begin{aligned} A_x &= C_x = \frac{1}{2}\Big(\sum_1^n P_j^x - \frac{\cos\beta\sin\beta}{a} P_j^x \sum_1^n |z_j|\Big) \\ A_z &= C_z = \frac{1}{2}\Big(\sum_1^n P_j^z + \frac{\cos^2\beta}{a} P_j^x \sum_1^n |z_j|\Big) \\ B &= \frac{\cos\beta}{a} P_j^x \sum_1^n |z_j| \end{aligned}\right\} \quad \text{(IIa)}$$

## Вариант нагружения 2

$$\left.\begin{aligned} A_x &= \sum_1^m P_j^x - \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin\beta\cos\beta}{a} P_j^x \sum_1^m |z_j| + \frac{1}{b} P_j^x \sum_1^m (b - |y_j|)\Big] \\ C_x &= \frac{1}{2b}\Big[P_j^x \sum_1^m (b - |y_j|) - \frac{b\sin\beta\cos\beta}{a} P_j^x \sum_1^m |z_j|\Big] \\ A_z &= \frac{b\sum_1^m P_j^z - P_j^z \sum_1^m |y_j|}{2b}; \quad C_z = \frac{b\sum_1^m P_j^z - P_j^z \sum_1^m |y_j|}{2b} \\ B &= \frac{\cos\beta}{a} P_j^x \sum_1^m |z_j| \end{aligned}\right\} \quad \text{(IIв)}$$

Вариант нагружения 3

$$\left.\begin{aligned}
A_x = C_x &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\beta\cos\beta}{a}\left(P_j^z\sum_1^m |x_j| + P_j^x\sum_1^m |z_j|\right) - \sum_1^m P_j^x\right] \\
A_z = C_z &= \frac{1}{2}\left[\sum_1^m P_j^z + \frac{\cos^2\beta}{a}\left(P_j^z\sum_1^m |x_j| + P_j^x\sum_1^m |z_j|\right)\right] \\
B &= \frac{\cos\beta}{a}\left(P_j^z\sum_1^m |x_j| + P_j^x\sum_1^m |z_j|\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (11c)$$

Подставляя в выражения (2) величины усилий в приконтурных отрезках вант, вычисляемые в задании № 3 и добавляя к элементам матрицы (3c), составляющие от опорных реакций, заново решаем задание № 2. Новые координаты контурных точек вычисляются из выражений

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= x + (b_{2xy}\, f b_{xy} + b'_{2xz}\, f b_{xz}) \\
y_1 &= y + (b'_{2xy}\, f b_{xy} + b'_{2yz}\, f b_{yz}) \\
z_1 &= z + (b'_{2xz}\, f b_{xz} + b_{2yz}\, f b_{yz})
\end{aligned}\right\}, \qquad (12)$$

где $b_{2j}$ – матрица изгибающих моментов от единичных нагрузок.

Величины усилий в приконтурных отрезках вычисляем из условия, что суммарное перемещение точки контура по направлению ванта равняется укорочению приконтурного отрезка ванты.

Расчеты выполняются на ЭВМ; сходимость решения хорошая.

## Литература


1. Битюцкий А.И. Некоторые вопросы расчета висячих покрытий с ортогональной пространственной сеткой нитей. - Сб. "Висячие покрытия", Госстройиздат, М., 1962.

2. Битюцкий А.И. Расчет висячих покрытий с предварительно напряженной ортогональной пространственной сеткой тросов. - Сб. "Пространственные конструкции в СССР", Стройиздат. М.-Л., 1964.

3. З а г о р я н с к и й Л.А. Практический способ расчета ортогональных предварительно напряженных вантовых сеток. - Сб. "Висячие покрытия", Госстройиздат, М., 1962.

4. З а г о р я н с к и й Л.А. Расчет предварительно напряженных канатных и канатно-балочных сеток способом упругих подвесок. - Сб. "Стальные предварительно напряженные и тросовые конструкции". Стройиздат, М., 1964.

5. К а р а д ж и К.М., З и л ь б е р м а н М.П. Практический метод расчета тросовых сетчатых покрытий. - Сб. "Стальные предварительно напряженные и тросовые конструкции". Стройиздат, М., 1964.

6. К а ч у р и н В.К. Теория висячих систем. - Госстройиздат, М.-Л., 1962, 224 с.

7. К у л ь б а х В.Р., Э н г е л ь б р е х т Ю.К. Расчет висячих покрытий отрицательной кривизны с конечным числом тросов. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, № 256, серия А, Таллин 1967.

8. К у л ь б а х В.Р., Э н г е л ь б р е х т Ю.К. О некоторых результатах расчета висячих покрытий отрицательной кривизны с конечным числом тросов. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, серия А, № 257, Таллин, 1967.

9. Г л и н к и н И.Д. Расчет пологих предварительно напряженных вантовых систем с учетом деформаций опорного контура. -Сб. "Строительство и архитектура", вып. VI, изд. "Будивельник", Киев, 1968, с. 99-102.

10. Д м и т р и е в Л.Г., С о с и с П.Н. Программирование расчета пространственных конструкций, Госстройиздат УССР, Киев, 1963.

11. К у л ь б а х В.Р., М я н д У.В.-Э., Э н г е л ь б р е х т Ю.К. Влияние деформаций опорного контура на работу сетки седловидных висячих покрытий круглой формы в плане. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, серия А, № 278, Таллин, 1969.

12. К у л ь б а х В.Р., Ы й г е р К.П. О статической работе пологих седловидных висячих покрытий с контуром из двух плоских полукруглых арок. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, серия А, № 295, Таллин, 1970.

K. Õiger, A. Talvik

## The Calculation of a Nonsymmetric Saddle-shape Hanging Roof

Summary

A short review of the methods of calculation on saddle-shape hanging roof by discrete scheme is presented. The system of nonlinear equations for calculating internal forces and displacements of nonsymmetric discrete cable-network under the load of arbitrary direction is given. In forming the system of equations the horizontal and vertical displacements of edge frame are taken into consideration.

№ 504

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 624.074.4

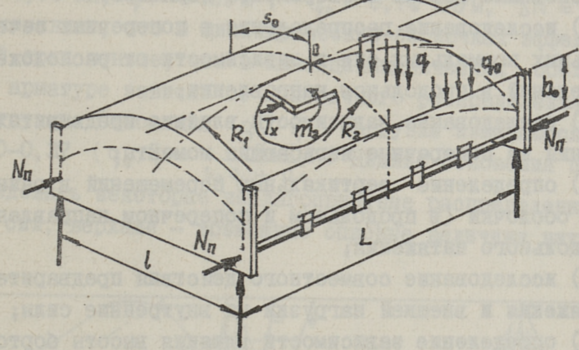
Ю.А. Тярно

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И КВАЗИЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ПРЯМЫМИ ПРОДОЛЬНЫМИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫМИ СТРИНГЕРАМИ

В цилиндрических и квазицилиндрических оболочках средней длины положительной гауссовой кривизны у нижнего волокна продольного бортового элемента развиваются значительные растягивающие усилия $T_x$. Эти растягивающие усилия развиваются в пределах высоты бортовых элементов и в зонах криволинейной части у бортового элемента. Эти условия могут быть причиной образования поперечных трещин, которые при некоторых грузовых и геометрических параметрах развиваются далеко в криволинейную часть железобетонных оболочек [I]. Одновременно с образованием значительных зон растяжения в поперечном сечении наблюдаются отрицательные поперечные изгибающие моменты значительной величины. Для регулирования основных внутренних сил кроме изменения геометрических параметров можно использовать методы предварительного натяжения отдельных элементов оболочки, а также применить отдельные типы для предварительного напряжения рабочей арматуры в оболочке, как целой. Рассматриваются оболочки с балочными продольными бортовыми элементами с прямыми или криволинейными верхними поясами. Значительный интерес вызывает использование предварительного напряжения в продольных прямых стрингерах у низа бортового элемента в продольном направлении. В роли предварительно напряженных элементов применяются свободные относительно бортовых элементов в продольном направлении арматурные стержни. В поперечном направлении стержни надежно прикреплены к бортовым элементам. Крепление продольных стержней позволяет наблюдать все вертикальные и горизонтальные перемещения бортовых элементов. При этом устраняются также влияния потери устойчивости продольного бортового элемента при влиянии продольного сжатия и изменения эксцентриситета силы натяжения в ходе эксперимента.

Для исследования поведения стержней, предварительно напряженных в продольном направлении, они сопоставляются с экспериментальными методами с разными вариантами нагружения при разных величинах предварительного напряжения. При этом учитывается и влияние предварительного натяжения на внутренние силы в зависимости от высоты бортовых элементов и продольной кривизны оболочки. Применяемая схема крепления продольных стержней обеспечивает действительную работу конструкции только при наличии предварительного натяжения. При нагружении оболочки ненадежная анкеровка продольных стрингеров к бортовому элементу при сдвиге вызывает некоторые изменения в распределении внутренних сил. Эти изменения отражаются, в основном, на продольных нормальных силах. От внешней нагрузки на стрингер передается только та часть продольного усилия, которая передается на угловые опорные зоны при помощи образующего продольного свода. Остальная часть перераспределяется между продольным бортовым элементом и криволинейной частью. Этот вариант соответствует конструкциям с неиньектированными каналами.

Для экспериментального исследования применяются малогабаритные в масштабе модели из стеклопластика на основе полиэфирной смолы ПН-I и стеклоткани, упругие свойства которых близки к железобетону (Е = I50–240 МПа, $\mu$ = 0,2) и позволяют непосредственно перейти к исследованию внутренних усилий на действительную железобетонную конструкцию. Для модели цилиндрической оболочки ($L$ = I20 см, $l$ = 60 см, $\alpha_0 = 35^{\circ}$, $R$ = 52,3 см, $\delta$ = 5 мм, $\delta_0$ = 5 мм) варьировали высотой продольного бортового элемента ($b_{01}$ = 5,5 см, $b_{02}$ = = 3,5 см, $b_{03}$ = I,5 см). Квазицилиндрическая оболочка ($L$ = I20 см, $l$ = 60 см, $\alpha_0 = 35^{\circ}$, $R_1$ = 470 см, $R$ = 52,3, $\delta$ = 5 мм, $\delta_0$ = 5 мм) испытывалась только при одной высоте бортового элемента в середине продольного пролета $b_0$ = = 5,5 см, у торцевого края элемента $b_{0\,min}$ = I,5 см. Для продольной арматуры применяются стальные стержни $\varnothing$ 4 мм. Анкеровка и оборудование для создания предварительного на-




Фиг. 1. Общий вид исследуемого объекта.
$L$ = 120 см, $l$ = 60 см, $\delta$ = 5 мм,
$R$ = 52,3 см, $\alpha_0$ = 35 $^oC$.

пряжения представлены на фиг. I. Трубчатые элементы крепления продольных стержней обеспечивают продольное свободное движение (перемещение) при создании сил предварительного натяжения. Для создания продольных сил и их анкеровки применяются механические динамометры (0 – 5 кН). Применяемый метод позволяет при экспериментах избежать потери предварительного напряжения и произвести непосредственное измерение сил в арматуре при нагружении. Для точной фиксации точки приложения анкерных сил применяются специальные круглые стальные детали с отверстиями. Для исследования изменения поперечного сечения от предварительного напряжения и от нагрузки применялись прогибомеры типа Максимова. Для определения внутренних сил в тонкостенной криволинейной части применялась система тензорезисторов. Измерения были сделаны со I00 резисторами в 8 точках поперечного сечения и в трех поперечных сечениях ($L/2$, $L/4$, $L/8$). Для регистрации и обработки экспериментальных данных была использована полуавтоматическая система ЦТМ 5 с использованием ЭВМ. Обобщенные результаты экспериментов были проверены с помощью условий равновесия. Для получения более достоверных окончательных экспериментальных данных были сделаны многократные повторные испытания, а также многократные регистрации отдельных показателей.

Основными целями эксперимента являлись:

I) исследование распределения в поперечных сечениях продольных нормальных сил в зависимости от расположения этих сечений в продольном направлении;

2) исследование зависимости влияния предварительного натяжения на поперечные изгибающие моменты;

3) определение вертикальных перемещений в разных точках оболочки (в продольном и поперечном направлениях) от продольного натяжения;

4) исследование совместного действия предварительного натяжения и внешней нагрузки на внутренние силы;

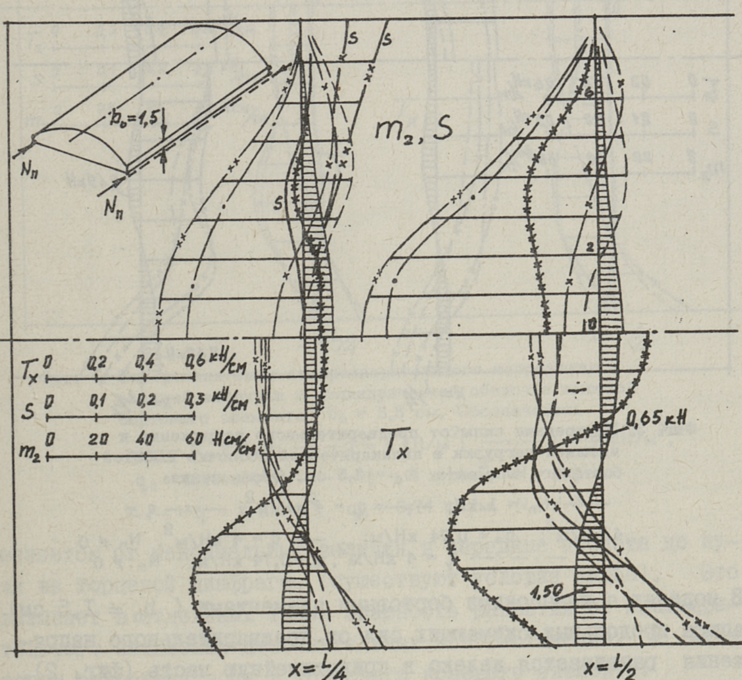
5) определение зависимости влияния высоты бортовых элементов на внутренние силы.

При использовании продольных стрингеров не обеспечивается надежное крепление этих стрингеров, против продольного сдвига, к бортовому элементу. На всех этапах предварительного натяжения и нагружения в этих стержнях могут развиться только постоянные в продольном направлении внутренние силы. В действительных конструкциях к этому относятся варианты с ненадежно иньектированными каналами при натяжении стержней на конструкции.

Внутренние усилия в стрингерах должны сохраняться постоянными при нагружении модели внешними нагрузками. При естественных условиях продольное распределение продольных нормальных сил соответственно близко к параболическому распределению. На торцевых диафрагмах внутренние усилия удовлетворяют условию Навье т.е. $T_x = 0$. Увеличение сил в стрингерах может происходить только за счет эффекта продольной арки. Продольные силы в стрингерах были измерены прямо на концах стержней при помощи динамометров. Значительные изменения в силах намечаются в квазицилиндрических оболочках. При нагружении с нагрузкой $q = 4$ кН/м$^2$ усилия увеличиваются $\Delta N = 0{,}3$ кН, с нагрузкой $q = 4$ кН/м$^2$, $q_0 = 0{,}7$ кН/м, $\Delta N = 0{,}58$ кН.

В цилиндрических моделях эти изменения значительно меньше. Для оболочки $b_0 = 5{,}5$ см – $q = 4$ кН/м$^2$ $\Delta N = 0$; $q = 4$ кН/м$^2$, $q_0 = 0{,}74$ кН/м $\Delta N = 0{,}15$ кН; для $b_0 = 3{,}5$ см, $q = 4$ кН/м$^2$ $\Delta N = 0{,}03$ кН; $q = 4$ кН/м$^2$, $q_0 =$

$= 0{,}74$ кН/м, $\Delta N = 0{,}18$ кН; для $b_0 = 1{,}5$ см, $q = 0{,}4$ кН/м$^2$, $\Delta N = 0{,}05$ кН, $q = 4$ кН/м$^2$, $q_0 = 0{,}74$ кН/м, $\Delta N = 0{,}23$ кН. Это доказывает, что в цилиндрических оболочках эффект продольной арки меньше, чем в квазицилиндрических оболочках. Силы в арматуре зависят от поперечного распределения внешней нагрузки. Отношения $q_0/\bar{q}$ нагрузки изменяются в пределах 0–0,37 ($q_0/\bar{q} = \dfrac{q_0}{s_0 q + q_0}$). Нижние отношения позволяют определить некоторые неблагоприятные распределения внутренних сил, верхние – возможные опасные величины внутренних сил.



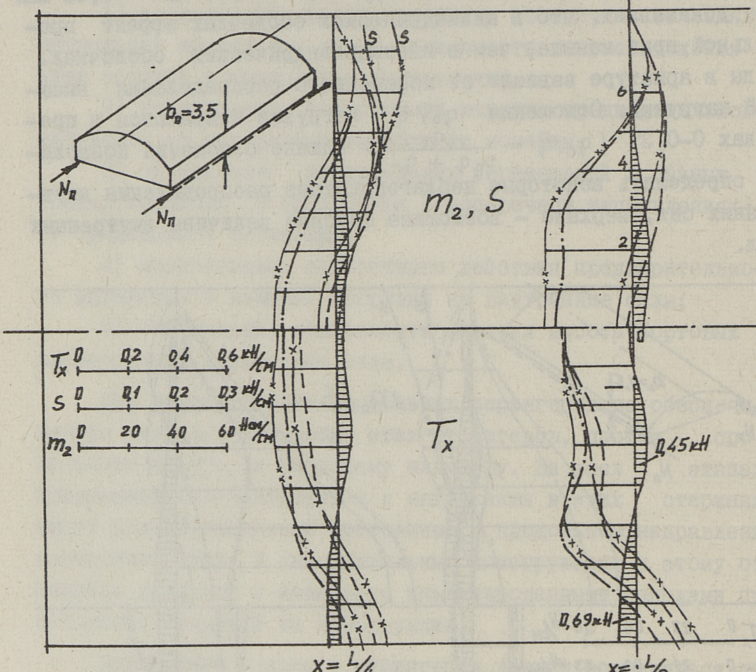

Фиг. 2. Внутренние силы от предварительного напряжения и внешней нагрузки в цилиндрической оболочке высотой бортового элемента $b_0 = 1{,}5$ см. Обозначения:

—— $N_n = 1$ кН; —x—x $q = 4$ кН/м$^2$; —xx— $q = 4$ кН/м$^2$; $q_0 = 0{,}74$ кН/м; – – – $q = 4$ кН/м$^2$, $N_n \neq 0$

—·—·- $q = 4$ кН/м$^2$, $q_0 = 0{,}74$ кН/м, $N_n \neq 0$

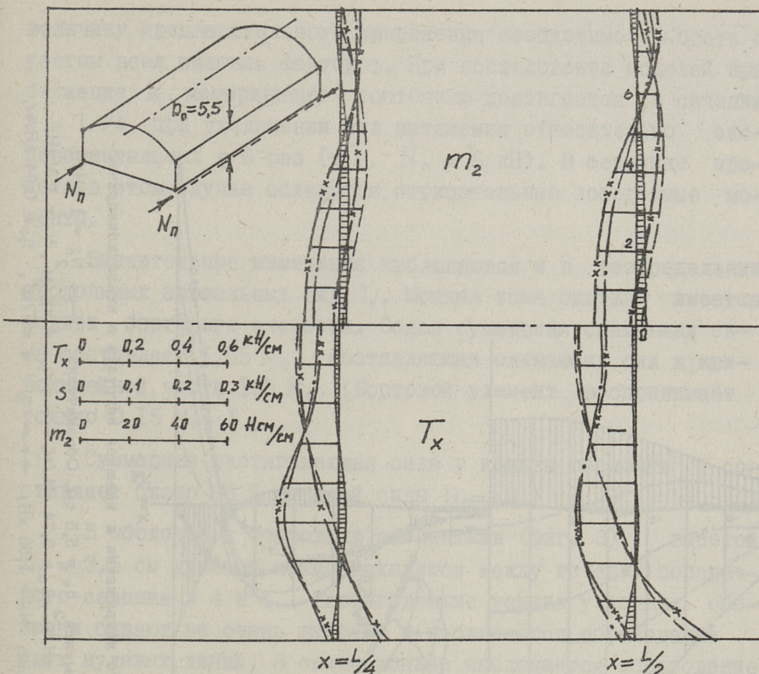
–x–x–x $q = 4$ кН/м$^2$, $q_0 = 0{,}74$ кН/м, $N_n = 6$ кН.

Внутренние силы в цилиндрических оболочках с разными бортовыми элементами представлены на фиг. 2, 3 и 4.




Фиг. 3. Внутренние силы от предварительного напряжения и внешней нагрузки в цилиндрической оболочке высотой бортового элемента $b_0$ = 3,5 см. Обозначения:
—— $N_n$ = 1 кН; —×—× $q$ = 4 кН/м$^2$; —××— $q$ = 4 кН/м$^2$; $q_0$ = 0,74 кН/м; —— $q$ = 4 кН/м$^2$, $N_n \neq 0$
—·—·— $q$ = 4 кН/м$^2$, $q_0$=0,74 кН/м, $N_n \neq 0$

В моделях с невысокими бортовыми элементами ( $b_0$ = I,5 см) эпюра продольных сжимающих сил от предварительного напряжения развивается далеко в криволинейную часть (фиг. 2). Нулевая линия в середине продольного пролета находится между точками № 3 и № 4 поперечного сечения. В зоне у конька криволинейной части развивается зона растяжения. В зоне у торцевой диафрагмы нулевая линия приближается к бортовому элементу. При нагружении максимум сжимающих сил приближается к бортовому элементу. В продольном направлении эпюра продольных сил $T_x$ при предварительном натяжении относительно мало изменяется, а при обычном нагружении эти силы из-



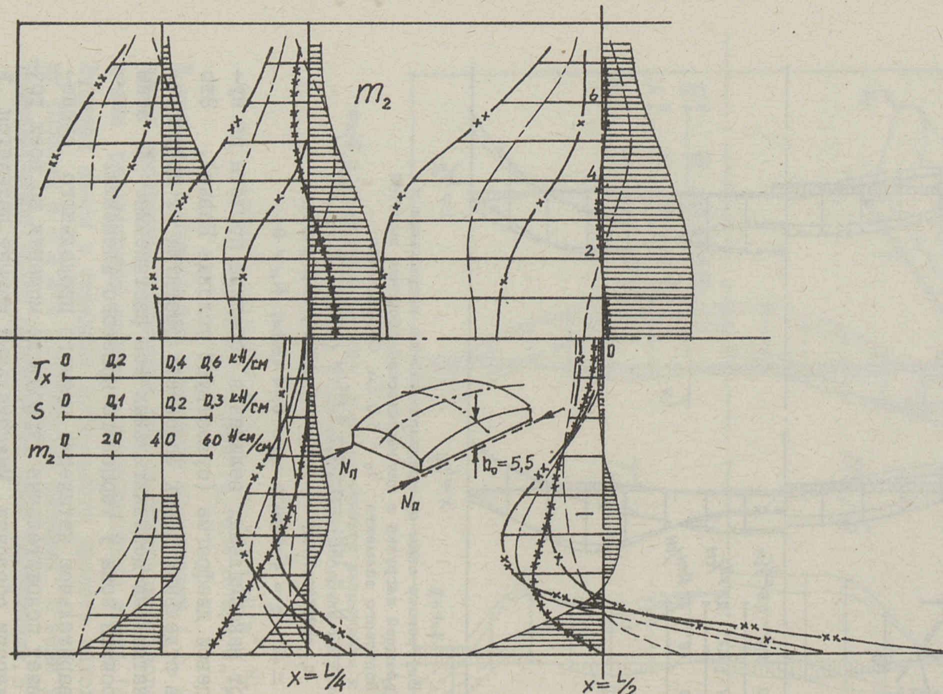

Фиг. 4. Внутренние силы от предварительного напряжения и внешней нагрузки в цилиндрической оболочке высотой бортового элемента $b_0$ = 5,5 см. Обозначения:

——— $N_n$ = 1кН; —×— $q$ = 4 кН/м$^2$; —××— $q$ = 4 кН/м$^2$, $q_0$ = 0,74 кН/м; – – – $q$ = 4 кН/м$^2$, $N_n \neq 0$

—·—· $q$ = 4 кН/м$^2$, $q_0$ = 0,74 кН/м, $N_n \neq 0$

меняются от максимальных величин в середине пролета до нуля на торцевой диафрагме (существуют условия Навье). Это вызывает в отдельных зонах опасность развития от предварительного натяжения дополнительных зон растяжения. К этим зонам относится зона у торцевого краевого элемента.

Предварительное натяжение прямого продольного стрингера вызывает положительные изгибающие моменты во всех точках поверхности оболочки. Максимальный момент находится в зоне у конька оболочки. Так как при эксплуатационных нагрузках развиваются только отрицательные поперечные моменты и имеется возможность ввести оболочку близко к мембранному состоянию. При этом надо учесть также изменение поперечных моментов в продольном направлении. Оптимальную




Фиг. 5. Внутренние силы от предварительного напряжения и внешней нагрузки в квазицилиндрической оболочке ( $R_1/R \simeq 10$) высотой бортового элемента $b_o$ = 5,5 см. Обозначения: ——— $N_n$ = 1 кН; —×—× $q$ = 4 кН/м$^2$; —××— $q$ = 4 кН/м$^2$, $q_o$ = 0,74 кН/м, – – – $q$ = 4 кН/м$^2$, $N_n$ = 1,3 кН; —·—· $q$ = 4 кН/м$^2$, $q_o$ = 0,74 кН/м, $N_n$ = 1,58 кН; ‑×‑×‑ $q$ = 4 кН/м$^2$, $q_o$ = 0,74 кН/м, $N_n$ = 2,5+0,58 кН.

величину предварительного напряжения необходимо выбрать с учетом всех силовых факторов. При исследовании моделей приближение к мембранному состоянию достигается в сечении $x = L/4$, при увеличении сил натяжения относительно экспериментальных в 6 раз (т.е. $N_п = 6$ кН). В середине пролета в этом случае останутся отрицательные поперечные моменты.

Значительные изменения наблюдаются и в распределении продольных нормальных сил $T_x$. Мощная зона сжатия имеется вблизи бортового элемента. Общая суммарная сжимающая сила составляет $1{,}65\ N_п$, составляющая сжимающих сил в криволинейной части $1{,}5\ N_п$. (Бортовой элемент воспринимает только $0{,}15\ N_п$.)

Суммарная растягивающая сила у конька оболочки составляет около 65 % от всей силы $N_п$.

В оболочке с бортовыми элементами (фиг. 3) высотой $b_0 = 3{,}5$ см нулевая линия находится между точками поперечного сечения № 4 и 5. Растягивающие усилия у конька оболочки бывают не очень высокие и наблюдается образование двух нулевых линий. В самом коньке наблюдается образование дополнительной зоны сжатия. Суммарная растягивающая сила в криволинейной части составляет около 45 % от силы предварительного напряжения. Максимальные величины положительных изгибающих моментов при внешних нагрузках уменьшаются около 1,5 раза.

Общая суммарная сжимающая нормальная сила – около 145 % от силы предварительного натяжения, составляющая в криволинейной части 69 % от $N_п$.

В оболочке с бортовыми элементами высотой $b_0 = 5{,}5$ см (фиг. 4) имеются в криволинейной части две нулевые линии и в коньке оболочки развивается зона сжимающих усилий. Продольные нормальные силы в криволинейной части уравновешиваются в пределах криволинейной части. Силы $N_п$ уравновешиваются в пределах высоты бортового элемента. Положительные изгибающие поперечные моменты от предварительного натяжения незначительные. Эффективно влияют предварительно напряженные стрингеры на внутренние силы квазицилиндрических оболочек (фиг. 5). В этих оболочках при любом распределении внешней нагрузки развиваются в криволинейной части отрицательные поперечные изгибающие моменты, в также в бортовых элементах и рядомстоящих зонах криволинейной части - значительные растягивающие усилия.

При $N_n = 2,50$ кН и $q = 4$ кН/м$^2$, $q_0 = 0,74$ кН/м можно оболочки перевести на мембранное состояние.

При предварительном натяжении прямого стрингера у низа бортового элемента цилиндрической и квазицилиндрической оболочки изменяется геометрия поперечного сечения в середине оболочки. Намечаются значительные вертикальные перемещения вблизи бортовых элементов, которые поднимаются вверх. При предварительном натяжении квазицилиндрической модели силой $N_n = 1$ кН это составляет около 4 мм.

Зона у конька оболочки перемещается в незначительной мере (около I мм). Поперечная кривизна оболочки уменьшает и увеличивает положительные изгибающие моменты. Влияние предварительного натяжения на поперечные изгибающие моменты зависит от высоты бортового элемента. При очень высоких бортовых элементах влияние предварительного натяжения на изгибающие моменты незначительно, при невысоких бортовых элементах это влияние довольно значительно. Можно сделать вывод, что кроме обеспечения трещиностойкости оболочки продольные прямые предварительно-напряженные стрингеры влияют на поперечные изгибающие моменты. Они уменьшают отрицательные изгибающие моменты в зоне у конька оболочки,которые при некоторых основных параметрах (невысокие бортовые элементы) имеют значительные величины. В цилиндрических оболочках с высокими бортовыми элементами при нагружении внешними нагрузками развиваются положительные изгибающие моменты и это очень удобно, что в этих оболочках влияние предварительного натяжения на поперечные моменты незначительно. Основное преимущество продольных предварительно напряженных стрингеров в том, что уменьшается общий объем эпюры поперечных изгибающих моментов и при целесообразном выборе продольного натяжения можно привести оболочку близко к мембранному состоянию.

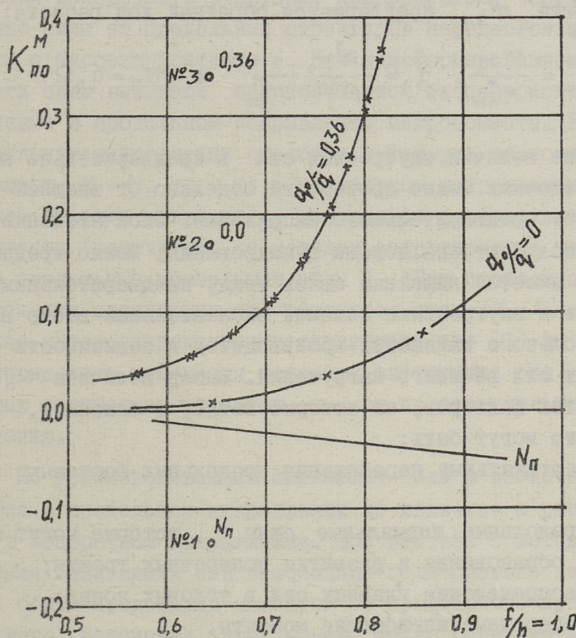
Для исследования влияния продольного натяжения с разными величинами и на разных моделях можно использовать безразмерные параметры.

При оболочках предварительно напряженными прямыми продольными стержнями можно употреблять приведенную равномерно распределенную нагрузку $q_п$. Приведенная равномерно распределенная нагрузка определяется при помощи формулы

$$q_п = \frac{N_п}{\Omega},$$

где $N_п$ – предварительное натяжение на одну половину оболочки;

$\Omega = \frac{L s_0}{2}$ – площадь поверхности четверти оболочки.




Фиг. 6. Определение безразмерного параметра $K^M_{пп}$ (n=0) в зависимости от геометрических и грузовых параметров $\gamma = f/h$, $\rho = R_1/R$, $æ = q_0/\bar{q}$ ( $\delta$ = 5 мм, $\delta_0$ = 5 мм). Обозначения:
——— – предварительное напряжение $N_п$ в стрингере цилиндрической оболочки; —×—×— $q_0/\bar{q}$ = 0,
—××—××— $q_0/\bar{q}$ = 0,36.
Точка № 1 – предварительное натяжение $N_п$ в стрингере квазицилиндрической оболочки, точка № 2 – $q_0/\bar{q}$ = 0, точка № 3 – $q_0/\bar{q}$ = 0,36.

Влияние предварительного натяжения на внутренние силы определяется в зависимости от безразмерных параметров обычного типа ($K^{T}_{П}$, $K^{M}_{П}$ и т.д.) [2]. Предполагается, что существует линейная связь между величинами натяжения и внутренними силами. Для получения внутренних сил от предварительного натяжения применяются следующие выражения

$$m^{n}_{2n} = K^{M}_{nn} \cdot m^{n}_{00}, \text{ где } m^{n}_{00} = -q_n R^2 \frac{\psi_0}{100}.$$

Множители $K^{M}_{nn} = \Pi_M(\gamma, \varkappa, \lambda, \rho, \alpha_0, \ldots)$ определяются при помощи графиков (фиг. 6).

Для расчета в определенной точке требуемого изгибающего момента $m_{2n}$ предлагается обратный ход расчета:

$$m^{n}_{00} = \frac{m_{2n}}{K^{M}_{nn}}, \quad q_n = -\frac{R^2 \psi_0}{100} \cdot \frac{1}{m^{n}_{00}} \quad \text{и} \quad N_n = q_n \Omega.$$

Определение величин внутренних сил в предварительно напряженных оболочках можно произвести отдельно от внешней нагрузки и от предварительного напряжения. Окончательные результаты получают при помощи суммирования. Можно предположить, что имеется линейная связь между предварительными напряжениями и внутренними силами. Окончательный выбор величины продольного натяжения производится в зависимости от внутренних сил внешнего нагружения. Выбор величины $N_n$ зависит от тех факторов, на которые хотят, в основном, повлиять. Это могут быть:

I) вертикальные перемещения продольных бортовых элементов;

2) продольные нормальные силы $T_x$, которые могут быть причинами образования и развития поперечных трещин;

3) распределение главных сил в угловых зонах;

4) поперечные изгибающие моменты.

Самые незначительные влияния на поперечные изгибающие моменты в цилиндрических оболочках и, таким образом, требуются значительные величины $N_n$.

Определение влияния предварительного напряжения производится разными методами расчета. При методах А.А. Сумбака [3] и А.М. Болдышева [4, 5] продольные анкерные силы передаются на концы бортовых элементов и влияют на тонкостенную часть оболочки через условия сходства деформации бортовых элементов и края тонкостенных частей. Большая часть предварительного натяжения уравновешивается в пределах высоты бортового элемента и в близких к ним зонах тонкостенной криволинейной части. Нагруженный с продольными сжимающими силами бортовой элемент поднимается вверх и влияет на край криволинейной части с непостоянными в продольном направлении силами, направленными вверх. Эти силы имеют распределение, близкое к квадратной параболе, с максимумом в середине пролета и нулевые значения у торцевых диафрагм. Эти силы имеют только местное влияние на криволинейную часть и тем самым вызывают изменения поперечного очертания криволинейной части. Анкерные силы от продольных стрингеров передаются на оболочки с эксцентриситетом e. При недеформированном контуре эти силы вызывают при постоянном эксцентриситете постоянные в продольном направлении макромоменты. Если в продольном направлении оболочки действует постоянный макромомент $M = N_n \cdot e$, то в продольном направлении в поперечном сечении развиваются постоянные в продольном направлении (рассчитаны по методам сопротивления материалов) продольные нормальные силы $T_x$. При постоянном $T_x$ приращения сдвигающих сил равняются нулю $(\xi = 0)$. В этом случае метод аппроксимации сдвигающих сил [6] не позволяет определить изменения основных внутренних сил - поперечных изгибающих моментов $m_2$ от предварительного напряжения.

Но уравновешивающая сжимающая сила в оболочке изменяется в продольном направлении по величине и распределению в поперечном направлении. При расчете с методом приращения сдвигающих сил необходимо пользоваться изменяющимися общим продольным моментом от продольного предварительного натяжения. Этот момент можно определить экспериментальным путем и состоит он из сил натяжения $M_n(x)$ и эксцентриситета $e(x)$. На бортовой элемент влияет постоянная нагрузка $q_0^n = \frac{8 \Delta M}{L^2}$, направленная вверх. Здесь $\Delta M$ дополнительный момент в середине продольного пролета.

При квазицилиндрических оболочках положительной кривизны кроме остальных влияний на криволинейную часть влияют и значительные перенаправляющие силы, направленные вверх.

## Выводы

Предварительное натяжение прямого продольного стрингера у низа продольного бортового элемента цилиндрической и квазицилиндрической оболочки вызывает положительные поперечные изгибающие моменты во всех точках поверхности оболочки. Максимум моментов находится в зоне у конька оболочки. Влияние предварительного натяжения на поперечные изгибающие моменты зависит от высоты бортовых элементов.

## Литература


1. Лаул Х.Х., Тярно Ю.А. Влияние условий опирания бортовых элементов на виды разрушения квазицилиндрических оболочек.-Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1972, № 333.

2. Тярно Ю.А. Определение внутренних сил в железобетонных оболочках при помощи параметров $K^T$, $K^s$ и $K^m$. -Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1975, № 384.

3. Сумбак А.А. Расчет предварительно напряженных цилиндрических железобетонных оболочек.-Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1959, № 159.

4. Болдышев А.М. Учет влияния бортовых элементов на работу цилиндрических оболочек.-Тр. Томского инж.-строит. ин-та, 1961.

5. Болдышев А.М., Рудницкий Д.Г., Учет влияния бортовых элементов на работу ортотропных оболочек двоякой кривизны.-Тр. Томского инж.-строит. ин-та, 1962.

6. Лаул Х.Х. Цилиндрические железобетонные оболочки с предварительно напряженной арматурой.-Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1953, № 45.

Ü. Tärno

## Investigation of Cylindrical and Quasicylindrical Shells with Strait Prestressed Cables

Summary

In the longitudinal edge beams of the cylindrical and quasicylindrical shells very high longitudinal normal tension forces take place. Due to these forces in the beams the transversal tension cracks take place. A large area of negative transversal bending moments also develops on the ridge zone of the thin walled part. Some experimental data about the cylindrical and quasicylindrical shells with various dimensions of the edge beams are presented. The prestressed cables call forth the increase of the positive transversal bending moments on the ridge zones of the shell. It is possible to determine the prestressing forces to minimize the negative transversal bending moments. The paper deals with some problems of the transversal bending moments in the cylindrical and quasicylindrical shells with strait prestressed cables and presents some methods for calculating the inner forces of the shells.

С о д е р ж а н и е

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Труды № 504
ТЕОРИЯ И РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Строительные конструкции XXI
Редактор В. Райдна
Техн. ред. М. Тамме
Сборник утвержден коллегией ТПИ 9.12.80
Подписано к печати 26.05.81
Бумага 60x90/16. Печ.л 5,0 + 0,5 приложение
Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 300. МВ-04985
Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскла, 2/9. Зак.№ 351
Цена 60 коп.

Цена 60 коп.