TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
PUBLICATIONS FROM THE TALLINN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
Seeria A nr. 27 1947

A. HUMAL

FUNKTSIOONIDE VAHE GRAAFILINE INTEGREERIMINE

С РЕЗЮМЕ:
ГРАФИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЗНОСТИ ФУНКЦИЙ

RUUTVÕRRANDI GEOMEETRILINE LAHENDAMINE

С РЕЗЮМЕ:
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

RK „TEADUSLIK KIRJANDUS“
TARTU, 1947

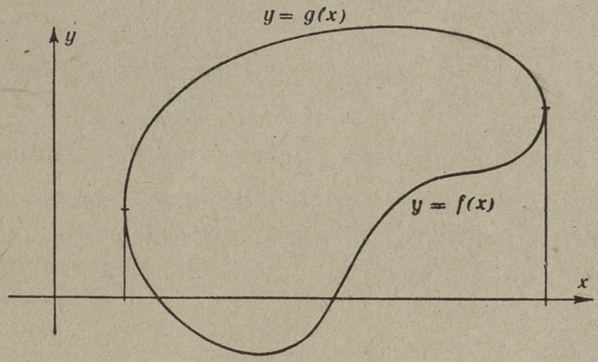
Funktsioonide vahe graafiline integreerimine.

1. Lähtekohti ja tõlgitsusi.

Graafiliseks integreerimiseks nimetatakse teatavasti neid geomeetrilisi toiminguid, mis võimaldavad xy-tasapinnal antud kõverjoonest $y = f(x)$ saada kõverjoont

$$y = \int_a^x f(t)dt.$$

Niisuguste võtete lähtekohaks on integreerimisülesande geomeetriline



Joonis 1.

tõlgitsus — funktsiooni $f(x)$ graafiku abil asendatakse integreerimine pindala leidmisega; eesmärgiks on saada sirglõik, mille pikkus võrduks teatava pinnatüki pindalaga.

Et graafilised integreerimisvõtted kasutavad ainult seesuguseid pinnatükke, millede äärjoone osana esineb abstsissteljje lõik, siis ei sobi need võtted juhusliku äärjoonega pinnatükile. Seepärast kujuneb mingi juhusliku äärjoonega piirkonna pindala leidmine hoopis kaudseks: pindala esitatakse kahe funktsiooni integraalide vahena, kusjuures piirkonna ülemine äär loetakse ühe funktsiooni graafikuks ja alumine äär teise funktsiooni omaks. Nii osutub joonisel 1 antud pinnatükk funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ graafikute vaheliseks piirkonnaks ning selle pindala on avaldatav vahena

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx,$$

milles kumbki integraal tuleks leida graafilise integreerimise võtteil, vahe ise seega kõverate

$$y = \int_a^x f(t)dt \text{ ja } y = \int_a^x g(t)dt \text{ abil.}$$

Käesoleva kirjutise otstarbeks on tutvustada menetlust, mis annab pinnatükkide pindalu sirglõikude pikkuste kujul, kui pinnatüki äärjooneks on juhuslik kinnine kõver. Matemaatilise analüüsi seisukohalt on niisugusel võttel see tähendus, et ta võimaldab leida vahet

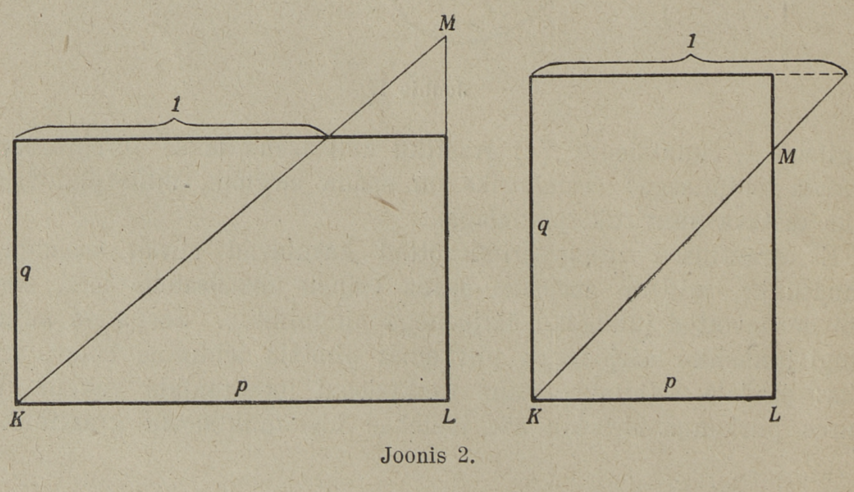
$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

üheainsa kõverjoone

$$y = \int_a^x \big(g(t) - f(t)\big)dt \text{ abil.}$$

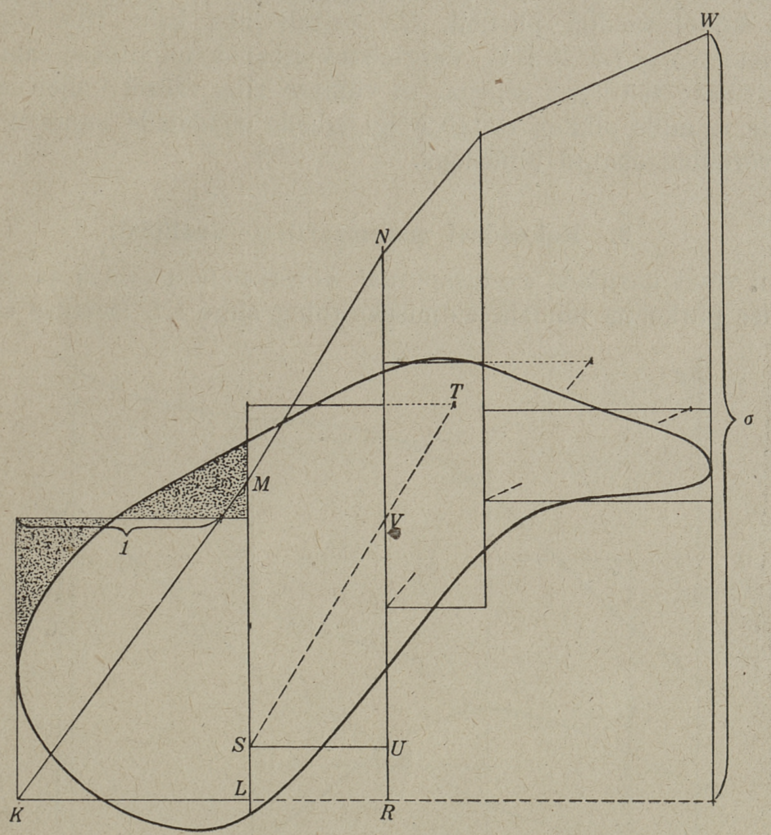
2. Kõvera äärjoonega piirkonna pindala leidmine.

Pindala väärtust esitava sirglõigu saamisel kasutatakse — nii siin kui ka tavalistes graafilise integreerimise võtetes — lihtsat sarnasuskonstruktsiooni, mille andmeteks on ühiklõik ning ristküliku alus p ja



Joonis 2.

kõrgus q ning tulemuseks on lõik pikkusega pq. Joonisel 2 on see konstruktsioon näidatud (kahes variandis — ühel $p > 1$ ja teisel $p < 1$): ühiklõik mõõdetakse ristküliku ühele alusele, alates tipust, ning joonestatakse hüpotenuus kolmnurgas, mille kaatetiteks jäävad ühiklõik ja ristküliku kõrgus q; nii saadud kolmnurgaga kõrvuti tekkiva sar-



Joonis 3.

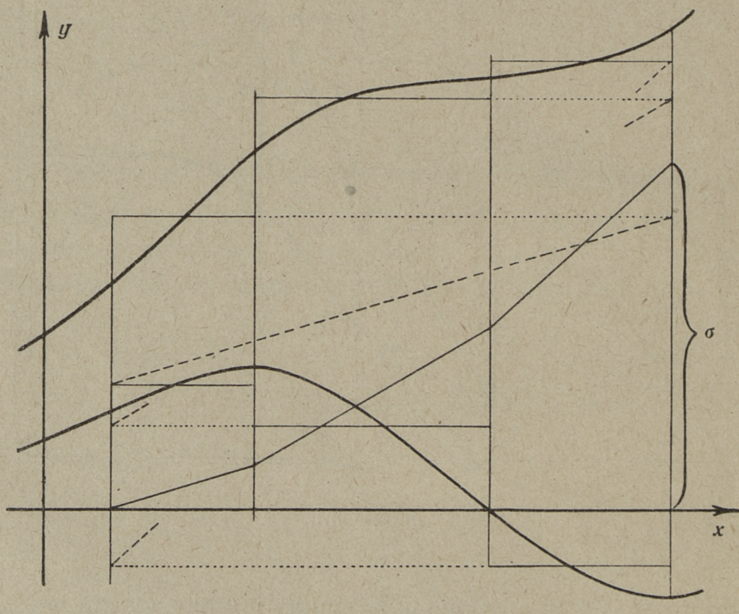
nase kolmnurga KLM püstkaatet osutubki lõiguks pikkusega pq. Tõepoolest, kolmnurkade sarnasusest nähtub, et $\frac{LM}{q} = \frac{p}{1}$, seega $LM = pq$.

Pindala leidmiseks juhusliku äärjoone puhul tükeldatakse piirkond esmalt ribadeks mingisuguste paralleelide, näiteks püstsirgete abil (joonis 3). Iga riba otstes võetakse äärjoone kaarte asemele riba külgedega risti olevad sirglõigud nõnda, et riba pindala jääks muutumata.

Esimesest ribast tekkinud ristküliku puhul rakendatakse tema pindala esitava lõigu LM saamiseks ülalselgitatud konstruktsiooni. Teises ribas kantakse ühiklõik küll endisel viisil ristküliku ülemisele küljele, kuid saadud täisnurkse kolmnurga hüpotenuus jäetakse joonestamata — tema otspunktide S ja T poolt määratud sirgega paralleelset lõiku alustatakse punktist M ja jätkatakse kuni riba vastasküljeni. On näha, et sel küljel saadud püstlõik RN esitab juba kahe riba pindalade summat: $RN = LM + UV$. Järgmistes ribades toimitakse samuti kui teises ribas; töö lõpeb sellega, et viimase riba välisel küljel saadakse sirglõik σ, mille pikkus esitab kõigi ribade pindalade summat, järelikult võrdubki otsitud pindalaga.

3. Rakendusi matemaatilisse analüüsi.

Kui võtet kasutada xy-tasapinnal kõverjoonte $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ vahelise piirkonna pindala leidmiseks (ning sirge KL loetakse abstsiss-



Joonis 4.

teljeks), siis asetsevad saadud punktid K, M, N, . . . , W kõverjoonel

$$y = \int_a^x \big(g(t) - f(t)\big)dt.$$

Järelikult osutub kirjeldatud võte funktsioonide vahe integreerimisel kõõlude-murdjoone võtteks.

Olgu tähendatud, et võtet saab hõlpsasti kohastada ka funktsioonide vahe integraalkeskmise leidmisele: kui integreerimisvahemiku pikkust kasutatakse ühikuks (joonis 4), siis saadud lõik σ (ordinaatide esialgse ühikuga mõõdetuna) esitabki keskmist funktsioonide vahet antud integreerimisvahemikus.

Графическое интегрирование разности функций.

Обычные приёмы графического интегрирования дают возможность нахождения площади плоской области, ограниченной замкнутой кривой, только после разложения контура на две части (черт. 1), рассматриваемые, как графики функций $f(x)$ и $g(x)$. В целях понижения трудоёмкости и повышения точности результата, предлагается новый графический способ, позволяющий интегрировать разность двух функций.

Используя конструкцию отрезка, длина которого представляет площадь данного прямоугольника (черт. 2), и заменив полосы, составляющие данную область, прямоугольниками соответственно равных площадей (черт. 3), получаем искомую площадь в виде длины отрезка σ.

Среднее значение разности двух функций, относительно некоторого интервала, можно найти тем же способом, если интервал интеграции взять за линейную единицу (черт. 4).

Ruutvõrrandi geomeetriline lahendamine.

1. Lahendamisviiside võrdlus.

Võrrandi $x^2 + px + q = 0$ algebralise lahendamise hõlpsuse tõttu tunduvad sama võrrandi graafilised lahendamisviisid praktiliselt üle-arustena. Nii pakuvad tuntud graafilised võtted (parabooli lõikamine sirgega, võrrandi kordajate murdjoone lõikamine ringjoonega, lahendite konstruktsioon täisnurkse kolmnurga külgede ja kõrguste vaheliste seoste põhjal) ainult teoreetilist huvi, sest nende võtete praktiline kasutamine nõuab liiga palju tööd. Näiteks võte, mille järgi võrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendid leitakse kui joonte $y = x^2$ ja $y + px + q = 0$ lõikepunktide abstsissid, nõuab igale võrrandile omaette sirgjoone $y + px + q = 0$ saamiseks igakord kahe punkti leidmist, kui parabool $y = x^2$ on juba joonestatud. Et sedasama parabooli on teatavasti võimalik edukalt kasutada ka kuupvõrrandi ja neljanda-astmelise võrrandi graafiliseks lahendamiseks, siis võib tema joonestamist jätta arvestamata ruutvõrrandi graafilise lahendamise töökoguse hindamisel; ikkagi kulub sirgjoone $y + px + q = 0$ kahe punkti leidmiseks juba liiga palju tööd. Alljärgnevalt selgub, et ruutvõrrandit saab lahendada tavalises koordinaadivõrgus (millimeeterpaberil) ilma ühtki joont tõmbamata, ainult mõõtesirkli abil. Seesugune lahendamisviis võiks oma hõlpsuse tõttu juba ka rakenduslikku huvi pakkuda.

2. Ruutvõrrandi lahendamine mõõtesirkli abil.

Võrrandit $x^2 + px + q = 0$ saab tema lahendite x_1 ja x_2 abil kirjutada teatavasti järgmiselt:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Nii on selge, et võrrand $x^2 + px + q = 0$ esitab koordinaadivõrgus sirgjooni, mis on paralleelsed ordinaatteljega, eeldusel muidugi, et võrrand pole lahenditu. Järelikult nende sirgjoonte ja abstsisstelje lõikepunktide koordinaadipaarid rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2+px+q=0 \\ y=0. \end{cases}$$

Süsteemi ükski lahend ei muutu, kui esimesesse võrrandisse kirjutatakse veel liikmed y^2+cy, sest süsteemi teine võrrand annab nende liikmete väärtuseks nulli. Süsteem

$$\begin{cases} x^2+y^2+px+cy+q=0 \\ y=0 \end{cases}$$

esitab teatavasti ringjoone ja abstsisstelje lõikepunkte; kordajat c saab pealegi nii valida, et ringjoon läbiks üht kindlat valitud punkti, — siis jääb ringjoone saamiseks paberile kanda ainult veel ta keskpunkt. Kui nõuda, et ringjoon läbiks punkti $(0 \mid 1)$, siis kordaja c on määratud võrrandiga

$$1+c+q=0,$$

millest $c=-(q+1)$, ning saadud ringjoone

$$x^2+y^2+px-(q+1)y+q=0$$

keskpunkt on $\left(-\frac{p}{2} \,\middle|\, \frac{q+1}{2}\right)$.

Seega võib võrrandi $x^2+px+q=0$ lahendid leida järgmisel viisil: mõõtesirkli teravikkude vahele võetakse punktide $\left(-\frac{p}{2} \,\middle|\, \frac{q+1}{2}\right)$ ja $(0 \mid 1)$ vaheline lõik ning, hoides üht teravikku esimeses punktis, märgitakse teise teravikuga need abstsisstelje punktid, kuhu lõik pööramisel küünib; saadud punktide abstsissid ongi võrrandi lahendid.

Kirjeldatud lahendamisviis ei nõua ühegi uue joone tõmbamist olemasolevasse koordinaadivõrku, mistõttu teda ei saa õieti „graafiliseks“ võtteks nimetadagi, olemuselt osutub ta ainult „geomeetriliseks“.

Võetud tükki koordinaadivõrguga paberit saab kasutada ruutvõrrandite lahendamiseks ka kordajate mitmesuguse suurusjärgu puhul: tuleb ainult pikkusühik nii valida, et punktid $\left(-\frac{p}{2} \,\middle|\, \frac{q+1}{2}\right)$, $(0 \mid 1)$ ning ringjoone ja abstsisstelje lõikepunktid paberile mahuksid.

Kui punkt $(0 \mid 1)$ ei mahu paberile (muude vajalike punktide sobiv mahutamine nõuaks liiga pikka ühikut) või kui see punkt asetseb väga lähedal abstsissteljele (muude punktide mahutamine nõuaks liiga lühikest ühikut), siis võib tema asemel kasutada punkti $(0 \mid n)$, milles n on mingi lihtne valitud arv. Vastav kordaja c väärtus järeldub siis võrrandist

$$n^2 + cn + q = 0,$$

nimelt

$$c = -\left(\frac{q}{n} + n\right).$$

Sel viisil painduvamaks muutunud võtet saab lühidalt väljendada järgmise lausega.

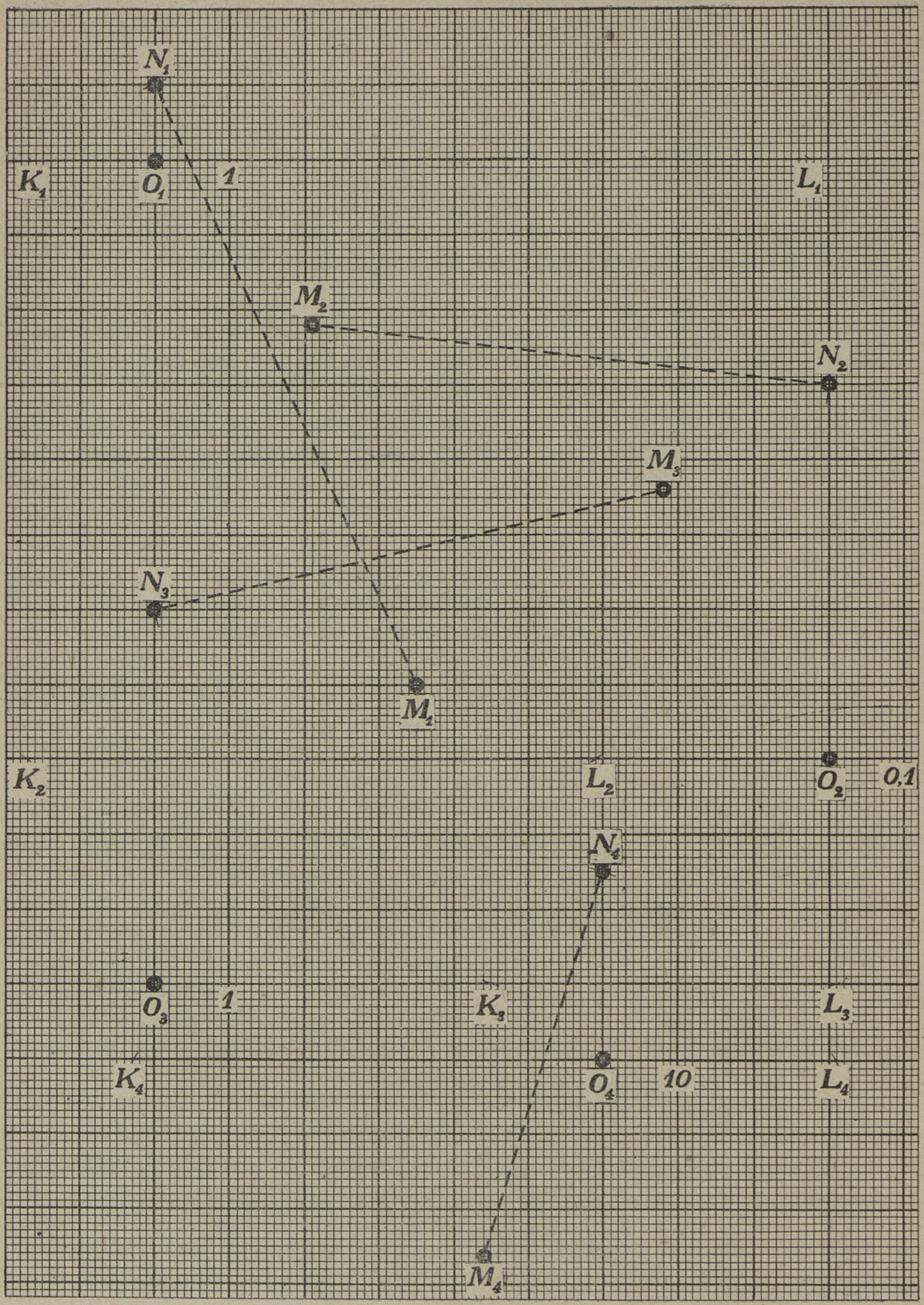
Võrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahenditeks on ringjoone $x^2 + y^2 + px - \left(\frac{q}{n} + n\right) y + q = 0$ ja abstsisstelje lõikepunktide abstsissid; need lõikepunktid leitakse mõõtesirkli abil, kasutades asjaolu, et ringjoon läbib punkti $(0 \mid n)$ ja ringjoone keskpunkt on $\left(-\frac{p}{2} \,\middle|\, \frac{q}{2n} + \frac{n}{2}\right)$.

3. Rakendamisnäiteid.

1) Kui võrrandi $x^2 - 7x - 15 = 0$ lahendamisel võetakse $n = 1$, siis on sirkli paigalejääva teraviku asukohaks $\left(\frac{7}{2} \,\middle|\, \frac{-15+1}{2}\right)$ ehk $(3{,}5 \mid -7)$; antud tükk millimeeterpaberit mahutab kõik vajalikud punktid, kui ühikuks võetakse sentimeeter. Juuresoleval joonisel on koordinaatide alguspunkt tähistatud O_1, punkt $(0 \mid 1)$ on tähistatud N_1 ja sirkli paigalejääva teraviku asukoht on M_1; mõõtesirkliga pööratakse lõik N_1M_1 ümber punkti M_1 abstsissteljeni, saades lõikepunktid K_1 ja L_1. Nende abstsissid $-1{,}72$ ja $8{,}72$ ongi võrrandi lahendid.

2) Võrrandi $x^2 + 1{,}38\,x + 0{,}33 = 0$ lahendamisel sobib ühikuks võtta detsimeeter; valides näiteks $n = 0{,}5$, leitakse paigalejääva teraviku asukoht $\left(-\frac{1{,}38}{2} \,\middle|\, 0{,}33 + 0{,}25\right)$ ehk $(-0{,}69 \mid 0{,}58)$, mis on tähistatud sümboliga M_2. Punktide K_2 ja L_2 abstsissid $-1{,}072$ ja $-0{,}308$ on võrrandi lahendid.

3) Võrrandi $x^2 - 13{,}6\,x + 41 = 0$ lahendamine samal millimeeterpaberi tükil võiks toimuda jälle sentimeetrilise ühikuga, kui võetakse sobiv n, näiteks $n = 5$. Punkt $\left(\frac{13{,}6}{2} \,\middle|\, \frac{41}{10} + 2{,}5\right)$ ehk $(6{,}8 \mid 6{,}6)$ on tähistatud M_3 ning $(0 \mid 5)$ on N_3; punktide K_3 ja L_3 abstsissidena leitakse võrrandi lahendid $4{,}51$ ja $9{,}09$.


N_1
K_1
O_1
1
L_1
M_2
N_2
M_3
N_3
M_1
K_2
L_2
O_2
0,1
N_4
O_3
1
K_3
L_3
K_4
O_4
10
L_4
M_4

4) Võrrandi $x^2 + 32x - 1935 = 0$ lahendamisel võib ühikuks võtta millimeetri, kui valitakse küllalt suur abiarv n. Joonis on valmistatud $n = 25$ puhul. Punktiks M_4 on seega $\left(-\frac{32}{2} \,\middle|\, -\frac{1935}{50} + 12{,}5\right)$ ehk $(-16 \mid -26{,}2)$. Punktide K_4 ja L_4 abstsissid $-62{,}8$ ja $30{,}8$ on võrrandi lahendid.

Olgu tähendatud, et näidetes toodud täpsusega on võrrandite lahendid tegelikult saavutatavad umbes 3 korda suuremate mõõtmetega jooniselehel.

Геометрический способ решения квадратного уравнения.

Вместо уравнения $x^2+px+q=0$ можно решать систему

$$\begin{cases} x^2+px+q=0 \\ y=0 \end{cases}$$

или же эквивалентную ей систему

$$\begin{cases} x^2+y^2+px+cy+q=0 \\ y=0, \end{cases}$$

причём коэфициент c является произвольным.

При $c=-\left(\frac{q}{n}+n\right)$ получается уравнение

$$x^2+y^2+px-\left(\frac{q}{n}+n\right)y+q=0,$$

представляющее окружность с центром $\left(-\frac{p}{2}\,\middle|\,\frac{q}{2n}+\frac{n}{2}\right)$ и проходящую через точку $(0\mid n)$. Точки пересечения её с осью абсцисс можно наметить при помощи циркуля. Абсциссы этих точек являются решениями данного уравнения.

Sisukord.

1. trükk.

Vastutav toimetaja A. Särev.

Tehniline toimetaja H. Kohu.

Ladumisele antud 23. VIII 47. Trükkimisele antud 22. X 47. Paberi kaust 67×95. 1/16. Trükipoognaid 1. Autoripoognaid 0,41. Arvestuspoognaid 0,62. MB 05924. Laotihedus trpg. 42 600. Tiraaž 1200. Trükikoja tellimus nr. 1545. Trükikoda „Hans Heidemann“, Tartu, Vallikraavi 4.

Hind rbl. 1.—

А. Хумал, Графическое интегрирование разности функций. Геометрический способ решения квадратного уравнения.

На эстонском языке.
Эгосиздат „Научная Литература“, Тарту.