Ü. LUMISTE, K. ARIVA

ANALÜÜTILINE GEOMEETRIA

«VALGUS» TALLINN 1973
ISBN 9789949483013 (pdf)

EESSÕNA

Käesolev analüütilise geomeetria kursus, mille aluseks on autorite sellealased loengud Tartu Riiklikus Ülikoolis, on määratud eeskätt ülikooli matemaatikateaduskonna üliõpilastele. See on tinginud nii materjali kui esitusviisi valiku. Raamatu sisu osas on juhindutud NSVL ülikoolide matemaatikateaduskondades kehtivast õppeprogrammist, aine käsitlemisel on aga mõningate uuenduste sisseviimisega püütud arvestada kaasaegseid seisukohti metoodikas.

Prantsusmaal 17. sajandi esimesel poolel P. Fermat' ja R. Descartes'i töödes alguse saanud analüütilist geomeetriat on tavakohaselt arendatud kui koordinaatide meetodi ja sümboolse algebra süstemaatilise rakendamise tulemust esialgu elementaargeomeetrias, kuid seejärel ka üldisemate objektide — koonuselõigete ja teist järku pindade, samuti lihtsamate teisenduste uurimisel. Sellisel juhul on tõestustes tuginetud keskkoolist tuttavatele teadmistele ning kasutatud neid ilma mingite täiendavate põhjendusteta [1]. Seesugune käsitlusviis õigustab end analüütilise geomeetria õpetamisel kõrgema matemaatika osana erialadel, kus matemaatika on ettevalmistav aine. Kvalifitseeritud matemaatikute koolitamisel on ta aga juba osutunud ebapiisavaks. Tänapäeval ei saa enam leppida olukorraga, kus ülikoolis analüütilise ja diferentsiaalgeomeetria tulemuste tõestamisel võetakse ilma valikuta aluseks kogu keskkoolis omandatud teadmiste pagas. Häirib nimelt selle aluse puudulikkus, asjaolu, et kooligeomeetrias loogilise järeldamise teel tuletatud laused põimuvad tähelepanekutega, mis tehakse joonise või mudeli lihtsal kirjeldamisel. Matemaatikaüliõpilastele ei saa selgeks, missugune on

[1] Niiviisi on koostatud ka seni eesti keeles ilmunud analüütilise geomeetria algkursused:
G. Rägo, Tasapinnalise analüütilise geomeetria põhijooni. Tartu, 1921.
J. Sarv, Analüütilise geomeetria algkursus. Tartu, 1924.
A Borkvell, Analüütiline geomeetria. Tartu, 1949.
J. Privalov, Analüütiline geomeetria. Tartu, 1964.
G. Rägo, Kõrgem matemaatika. I, Tallinn, 1962. II, Tallinn, 1963. (Kolmas osa, kaheksas osa.)

see vundament, millele toetub kogu geomeetria hoone. Võib tekkida koguni mulje, et geomeetrias on iga isiku enda teha, missuguseid lauseid ta peab vajalikuks tõestada, missuguseid aga võib võtta niisama teadmiseks, sest viimased ei ole selgelt piiritletud. Olukord paraneb mõnevõrra stuudiumi teises pooles pärast geomeetria aluste kursust, milles selgub võimalus järeldada kogu elementaargeomeetria teatavatest aksioomidest rangelt deduktiivse teooriana, kuid aine esitamise loogilise struktuuri järjekindlusetus jääb ikkagi püsima ja see on kahtlemata geomeetria õpetamise senise süsteemi puuduseks ülikoolis.

Matemaatika ranguse tunnetamist tuleb üliõpilastes kasvatada juba esimesest kursusest alates. Naaberainetes — kõrgemas algebras ja matemaatilises analüüsis — tehakse seda märksa edukamalt. Varem esinenud samasugune puudus on nendes ainetes suudetud likvideerida teooria aluste (reaalarvude teooria ja algebraliste süsteemide aksiomaatika) lülitamisega kursustesse endisse. Sellele teele tuleb asuda ka geomeetria õpetamisel, kuigi raskusi teeb geomeetria aluste suurem keerukus. Viimasel ajal on aga tehtud selles suunas huvitavaid katsetusi ning leitud uudseid ja metoodiliselt õnnestunud käsitlusi, kus geomeetria aluseid esitatakse just analüütilisele geomeetriale sobivas vaimus.

Mõningast lisa sellistele käsitlustele pakub ka käesolev õpik. Analüütiline geomeetria ehitatakse siin üles iseseisva matemaatilise teooriana, mis formaalselt võttes ei eelda mingeid varasemaid teadmisi peale reaalarvude aritmeetika.[2] Kõik muud vajalikud mõisted defineeritakse ja kõik esitatavad väited tõestatakse teooria arendamise käigus, tuginedes paarile algmõistele ja reale aksioomidele. Keskkoolis omandatud teadmistel on siin üksainus ülesanne: olla abiks teooria sisust arusaamisel. Järelduste loogilise ahelaga nad ei seostu.

Raamatu piiratud mahtu arvestades on loomulik, et siin ei tuletata uuesti kogu kooligeomeetriat (kuigi oleks küllalt huvipakkuv teha seda nüüd uutel ja täiesti rangetel alustel). Koolist saadud teadmisi korratakse ainult õpiku II peatükis ja selleski on tähtsad mitte tulemused, vaid meetodid. Punkte, sirgeid, tasandeid ja nende vastastikuseid asendeid käsitlevate arvukate lausete kõrval peatutakse pikemalt ainult rööpkülikutel ja kolmnurkadel, mille puhul kooligeomeetria materjal esitatakse ulatuslike täiendustega. Põhiliseks meetodiks selles osas on suure rakendusliku väärtusega vektoralgebra, millega raamat õieti algabki. I peatükis, mis sisaldab kogu järgneva kursuse aluse, antakse pärast vajalikku ettevalmistust teooria aksioomid, tuletatakse

---

[2] Selle range põhjenduse võib leida matemaatilise analüüsi kaasaegsetes õpikutes; vt. näit. G. Kangro, Matemaatiline analüüs. I osa. Tallinn, 1965.

nendest kogu vektoralgebra ning seejärel ka geomeetria sellised põhimõisted nagu sirge, tasand ja ruum.

Raamatu järgmistes peatükkides, alates kolmandast, esitatakse analüütilise geomeetria põhiosa, millega ta rikastab elementaargeomeetriat: teisenduste teooria, koonuselõiked, teist järku jooned ja pinnad. Selle osa käsitluses on märksa vähem traditsioonist kõrvalekaldumisi. Oluline on endiselt võimalus tugineda uute mõistete defineerimisel rangele aksiomaatilisele alusele, mis muudab senisest märksa selgemaks aine sisemise loogilise struktuuri. Nii näiteks on juba esimestest sammudest alates võimalik eristada afiinse geomeetria mõisteid ja tulemusi eukleidilise geomeetria omadest. Raamatu viimases peatükis leiab käsitlemist ka projektiivne analüütiline geomeetria. Üksikute ainelõikude metoodikas on teiste NSV Liidus käibel olevate õpikutega võrreldes uudseks teist järku joonte ja pindade üldise teooria ühtne käsitlus, mis lubab vältida analoogiliste võtete kordamist. Selline käsitlus sai võimalikuks tänu täheliste indeksite ja tänapäeval juba laialt levinud Einsteini summeerimiskokkuleppe kasutamisele. Lisavaeva, mida lugejal tuleb näha uude metoodikasse süvenemisel, korvab avaldiste ja valemite maksimaalne kompaktsus ja ülevaatlikkus.

Raamatut on võimaluste piirides püütud koostada selliselt, et teda saavad õppevahendina kasutada ka ainest vähemas ulatuses huvitatud isikud. Ilma edasist arusaamist kahjustamata võib näiteks vahele jätta kogu peenkirjalise teksti. Õpiku kasutamist käsiraamatuna hõlbustavad register ja järjekindel viidete süsteem. Need võimaldavad ainet mõnevõrra juba tundval lugejal materjalis orienteeruda ka siis, kui ta ei ole läbi töötanud teda huvitavale küsimusele eelnenud osa. Definitsioonid, teoreemid ja valemid on nummerdatud kahe numbriga, millest esimene näitab artiklit, milles see definitsioon, teoreem või valem sisaldub, teine aga selle järjenumbrit artikli piirides. Mõttekäikude näitlikustamiseks on esitatud rohkesti jooniseid, milledel on aga siin ainult illustreeriv tähendus. Joonise näitlikkus ei ole käesolevas kursuses ühelgi juhul argumendiks mingi väite põhjendamisel. Teoreemide tõestamisel tuginetakse üksnes aksioomidele ja varem tõestatud teoreemidele; tõestuse lõppu tähistab märk ▮. Näidete ja harjutusülesannete esitamisest on autoritel raamatu piiratud mahu tõttu tulnud teadlikult loobuda, pealegi on olemas vastavad ülesandekogud ja õppeplaanis on ette nähtud vajalikul hulgal harjutustunde.

Õpik tervikuna kajastab mõlema autori ühiseid metoodilisi seisukohti, kõik selle osad on suuremal või vähemal määral koos läbi arutatud. Seejuures on Ü. Lumiste kirjutanud §§ 1 kuni 14 ning 16 kuni 18, K. Ariva sulest on §§ 15 ja 19 kuni 22.

Avaldame südamlikku tänu õpiku käsikirja retsensentidele akad. A. Humalale, kelle asjatundlikud märkused olid suureks abiks teksti lõplikul viimistlemisel, ning dots. L. Võhandule ja füüsika-matemaatikakandidaat L. Tuulmetsale, kes tutvusid käsikirja esialgse variandiga. Palju tänu ka T. Eerusele püüdliku töö eest käsikirja tehnilisel vormistamisel.

Autorid

I peatükk

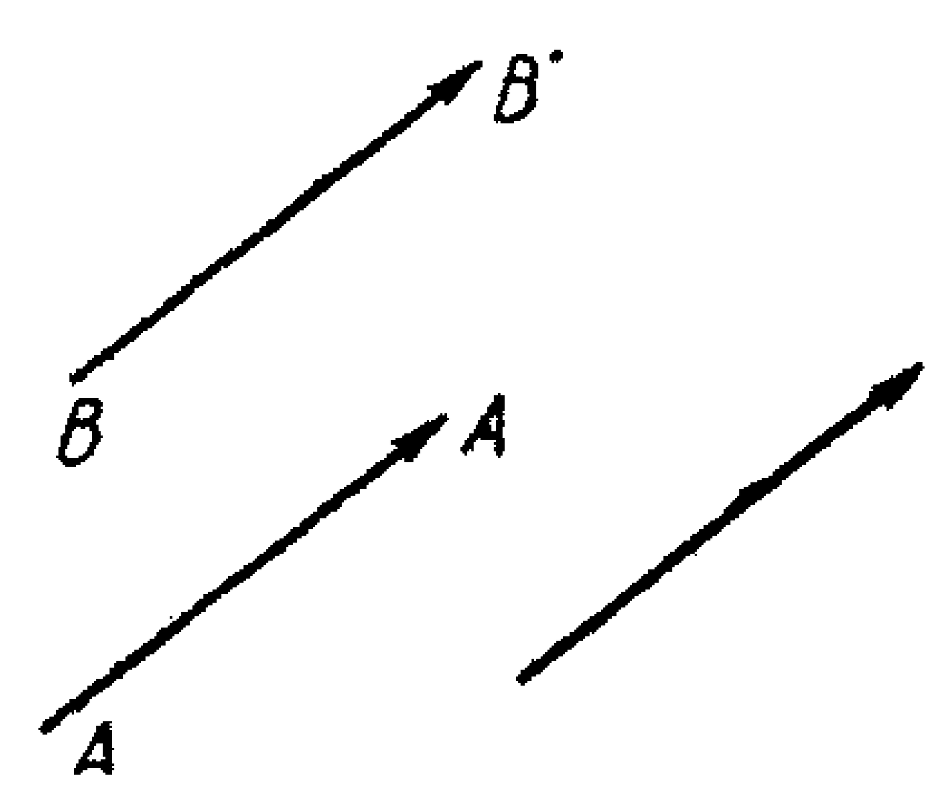
VEKTORALGEBRA

§ 1. LÄHTEMÕISTED

Geomeetria süstemaatiline käsitlus, mis esitatakse käesolevas raamatus, tugineb mõningatele lihtsatele algmõistetele ja algtõdedele. Need on, nagu alati praktikast välja kasvanud teooriate puhul, saadud tegelikkusest pärinevate mõistete ja vahekordade abstraktsioonidena. Seetõttu tuleb siin alustada vastavate mõistete ja vahekordade näitlikust tutvustamisest Saadud tähelepanekud võetakse edaspidi (§ 2) aluseks analüütilise geomeetria kui matemaatilise teooria aksioomide formuleerimisel. Kogu järgnev käsitlus toimub siis juba deduktiivsele teooriale iseloomulikul viisil: iga uus mõiste defineeritakse, iga uus lause tõestatakse. Kuid algav paragrahv ei sisalda veel teooria niisugust käsitlust, ta on alles ettevalmistav osa.

1. Lüke. Kujutleme, et suurele tasasele plaadile on asetatud teine plaat, mida saab vabalt nihutada mööda esimest. Lepime kokku piirduda seejuures üksnes selliste nihutustega, millega ei kaasne pööret, nimetades neid lüketeks. Täpsemalt öeldes, l ü k e on ühe plaadi niisugune nihutus mööda teist, mille puhul iga sirglõik jääb iseendaga võrdseks ja algasendiga paralleelseks.

On selge, et antud lükke puhul kõik punktid nihkuvad ühes ja samas suunas ühesugusele kaugusele algasendeist (joon. 1). Seepärast on lükke täielikuks määramiseks küllalt, kui on näidatud mingi punkti A uus asend A'. On tavaks saanud vastavat lüket märkida joonisel punktist A punkti A' viiva noolega, tekstis aga tähisega $\overrightarrow{AA'}$. Punkti A valik on seejuures täiesti vaba: kui lükke $\overrightarrow{AA'}$ korral punkt B kandub punkti B', siis võib sama lükke tähistada ka $\overrightarrow{BB'}$. Seetõttu on otstarbekas hakata lükkeid tähistama iseseisvalt, sõltumata punktidest, mida nad nihutavad. Järgides üht levinumat



Joon. 1.

viisi, tähistame edaspidi lükkeid poolpaksult trükitud väikeste ladina tähtedega: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ jne. Asjaolu, et lükke $\mathbf{a}$ puhul punkt A kandub punktiks A', tähistame $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{a}$.

Sõnastame nüüd mõned lihtsad tähelepanekud.

a1. *Iga kahe kindlas järjekorras võetud punkti A ja A' korral leidub parajasti uks luke $\mathbf{a}$, nii et $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{a}$.*

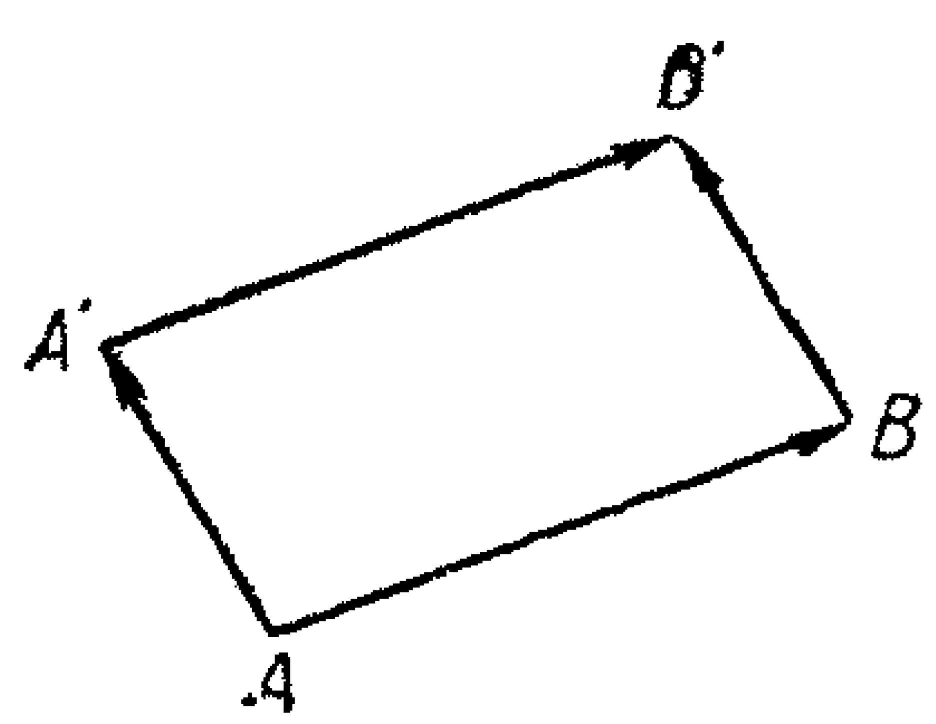
Kui selle lause õigsus ei tekita kahtlusi suvalise suurusega plaadi korral, siis enne järgmise lause sõnastamist tuleb eeldada, et tugiplaat on ülisuur, et ta ulatub igas suunas praktiliselt kuitahes kaugele. Sel juhul on selge, et kehtib niisugune lause.

a2. *Iga punkti A ja iga lükke $\mathbf{a}$ korral leidub parajasti üks punkt A', nii et $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{a}$.*

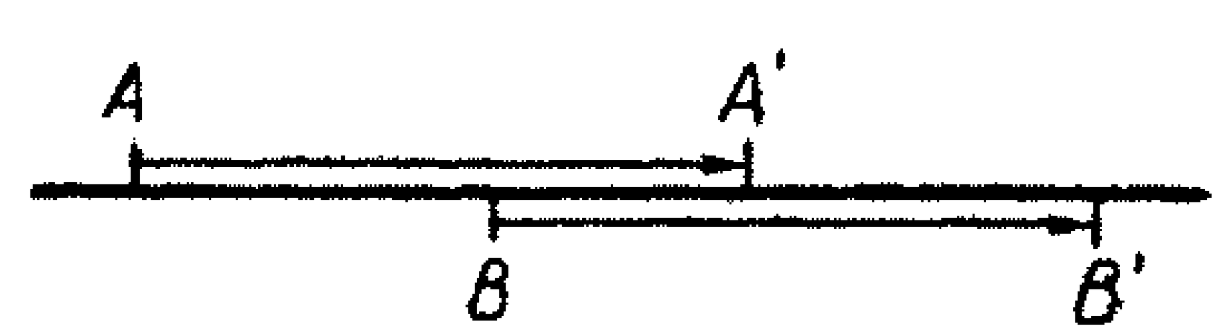
Vaatleme nüüd mingit lüket $\mathbf{a}$, mis viigu punktid A ja B vastavalt punktideks A' ja B'. Siis

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}.$$

Punktid A ja B määravad teise lükke $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$. Et lõigud AA' ja BB' on võrdsed ja paralleelsed, siis on seda ka lõigud AB ja $A'B'$. Seetõttu kujutab $\overrightarrow{A'B'}$ endast sama lüket $\mathbf{b}$ ning me võime sõnastada järgmise tähelepaneku (joon. 2):



Joon. 2.



Joon. 3.

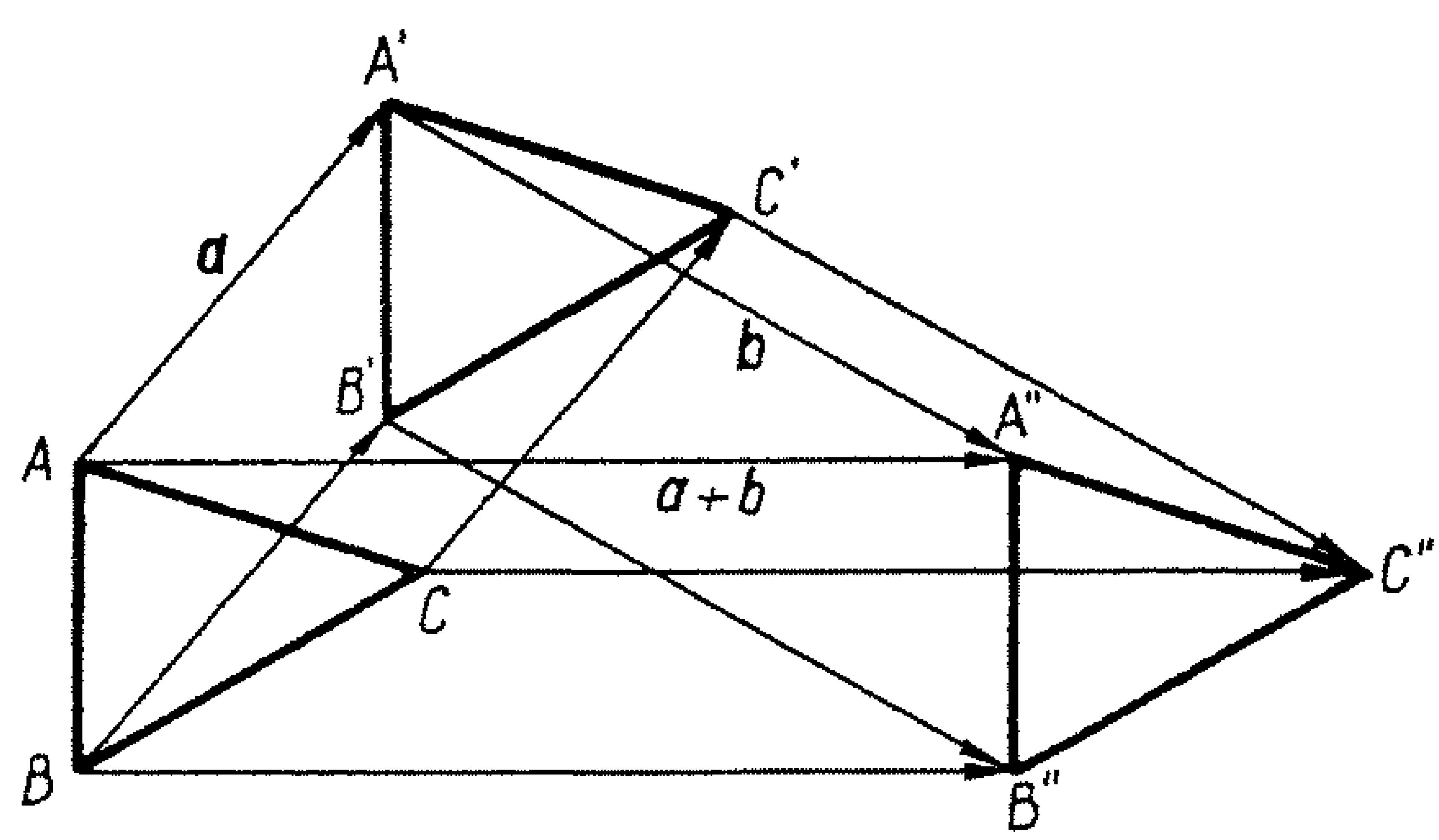
a3. *Kui $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, siis $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.*

Arutluses on kasutatud asjaolu, et nelinurk $ABB'A'$ on rööpkülik. Seetõttu nimetatakse lauset **a3** sageli rööpküliku aksioomiks

Samasugused tähelepanekud **a1**, **a2** ja **a3** võib teha ka siis, kui me plaadi lükete asemel vaatleme ülipika varda lükkeid piki iseennast või ülisuure keha lükkeid ruumis. Viimaste all mõistame keha selliseid nihutusi, mille puhul iga lõik jääb iseendaga võrdseks ja oma algasendiga paralleelseks. Lausete **a1** ja **a2** kehtivuse osas ei tohiks siin kummalgi juhul tekkida kahtlusi. Mis puutub lause **a3** õigsusse keha lükete puhul, siis on see järeldatav asjaolust, et nelinurk $AA'B'B$ on siin endiselt rööpkülik teataval tasandil. Lause **a3** õigsuses varda puhul võib aga veenduda joonise 3 abil.

Sõnastatud kolm lihtsat lauset määravad lükete iseloomulikud omadused, millest on rangelt järeldatav kõik ülejäänu. Siinkohal me selliste järelduste üksikasjalikule tuletamisele veel ei asu, vaid jätkame lähtemõistete näitlikku tutvustamist. Seejuures ei ole järgmise kolme artikli ulatuses lüketest kõneldes oluline, kas tegemist on varda, plaadi või keha lüketega.

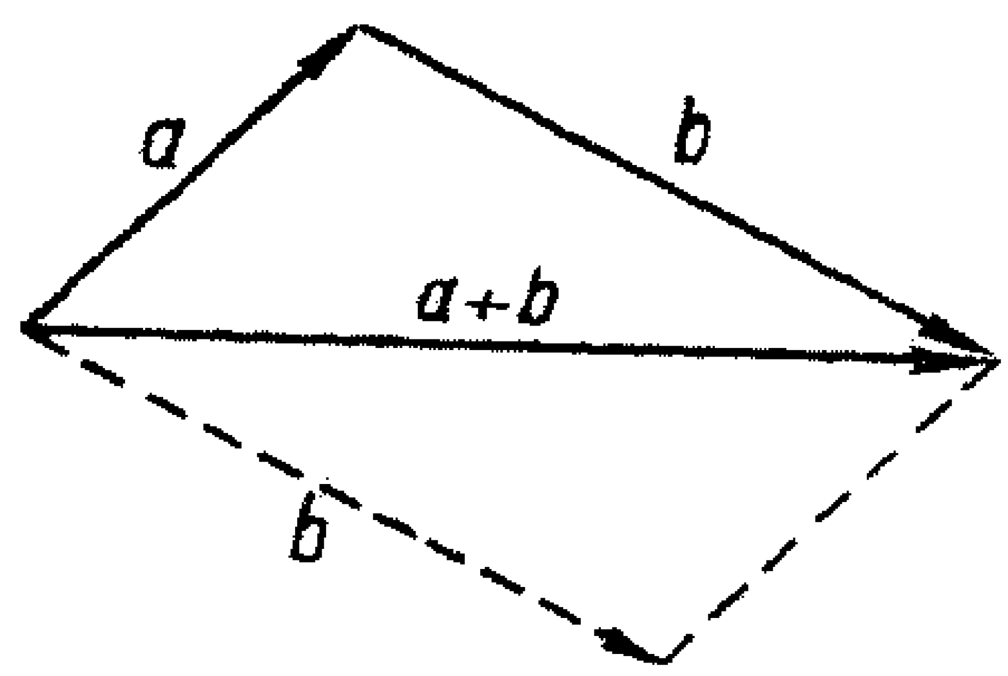
2. Resultant. Olgu antud kaks lüket $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$. On selge, et nende järjest sooritamine annab jällegi teatava lükke, sest kui kahe nihutuse puhul iga sirglõik jääb iseendaga võrdseks ja oma algasendiga paralleelseks, siis on sama omadusega ka nende järjest sooritamise teel saadud nihutus. Sel viisil tekkivat uut lüket nimetatakse antud lükete $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ r e s u l t a n d i k s ja tähistatakse $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. (Niisugust tähistusviisi õigustab asjaolu, et resultant kujuneb edaspidi, kui lüket vaadeldakse üldisema mõiste — vektori erijuhuna, kahe vektori $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ s u m m a $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ üheks enam levinud tõlgenduseks (vt. art. 10) ning et ta moodustamine allub tavalise arvude liitmise kõigile põhiomadustele).



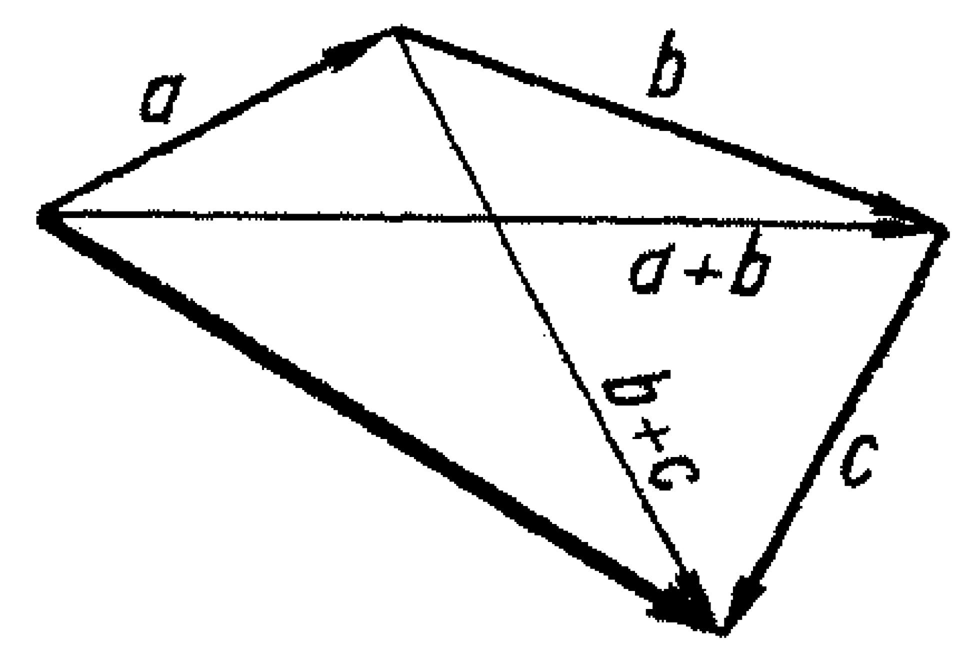
Joon. 4.

Öeldut illustreerib joonis 4. Sellel on võetud $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$ ja $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{A'A''}=\overrightarrow{B'B''}=\overrightarrow{C'C''}$, s. t. kolmnurgale $\triangle ABC$ on rakendatud lüket $\boldsymbol{a}$ ning uuele kolmnurgale $\triangle A'B'C'$ omakorda lüket $\boldsymbol{b}$. Kokkuvõttes on lähtekolmnurk $\triangle ABC$ kandunud asendisse $\triangle A''B''C''$, mis on saavutatav ka üheainsa lükkega $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AA''}=\overrightarrow{BB''}=\overrightarrow{CC''}$ — lükete $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ resultandiga.

Kokkuvõtlikum on joonis 5, millel iga lüke on esindatud üheainsa noolega. Selgub, et lükete $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ resultandi leidmiseks joonisel on vaja kõigepealt joonistada lüket $\boldsymbol{a}$ kujutav nool ning selle lõpp-punktist tõmmata edasi lüket $\boldsymbol{b}$ kujutav nool; resultant $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ viib siis $\boldsymbol{a}$ alguspunktist $\boldsymbol{b}$ lõpp-punkti (nn. kolmnurga reegel)



Joon 5.



Joon 6

Ühtlasi selgub ka teine võimalus resultandi $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ leidmiseks: lüket $\boldsymbol{b}$ kujutav nool tuleb joonestada lüket $\boldsymbol{a}$ kujutava noole alguspunktist (joonisel 5 on seda tehtud katkendliku joonega); resultanti $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ kujutab siis nooltele ehitatud rööpküliku see diagonaal, mis lähtub esimese kahe noole ühisest alguspunktist (nn. rööpküliku reegel).

Joonise 5 uurimine näitab otsekohe, et mõlemad eeskirjad viivad sama tulemuseni. Kumba neist eelistada, see sõltub konkreetsest olukorrast. Näiteks kolme lükke $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$ korral on nende resultandi (järjest sooritamisel tekkinud uue lükke) leidmiseks lihtsam kasutada kolmnurga reeglit. Jooniselt 6, millel resultant on tõmmatud tugevama joonega, nähtub siis otsekohe, et

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$

mistõttu tulemust on lihtsam kirjutada kujul $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

Rööpküliku reegli eeliseks on, et $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ on sel juhul samaväärses olukorras. Seetõttu nähtub jooniselt 5 kohe, et $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$. Kui seda omadust kasutada eelmiste avaldiste sulgudes, siis selgub otsekohe, et resultant $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ ei muutu $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ või $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$ (siis aga ka ükskõik missuguse kahe neist) kohtade vahetamisel.

Mainitud omadusi pole raske üldistada mistahes arvu lükete juhule (vt. § 2), nii et võib kõnelda resultandist $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\ldots+\boldsymbol{w}$, mis ei muutu lükete ümberjärjestamisel.

3. **Kordne.** Resultandi $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ võib moodustada ka juhul, kui $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ on üks ja seesama lüke, s. t. kui $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$. Sel korral on lepitud kokku kirjutada $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}$ ning tulemust nimetada lükke $\boldsymbol{a}$

kahekordseks. Tegemist on ju tõesti lükke a kahekordse rakendamisega.

Sama lükke a veelkordsel rakendamisel on resultandiks $2a + a$, mida nimetatakse lükke a kolmekordseks ja tähistatakse $3a$. Toimides korduvalt samal viisil, jõuame lõpuks lükke a n-kordse na mõisteni, kus n on suvaline naturaalarv:

$$a+a=2a,\quad 2a+a=3a,\quad 3a+a=4a,\quad \ldots,\quad (n-1)a+a=na.$$

Kui niiviisi tekkivas võrduste ahelas igasse järgmisse seosesse teha asendus eelnevast, saame:

$$a+a=2a,\quad a+a+a=3a,\quad \ldots,\quad \overbrace{a+a+\ldots+a}^{n}=na.$$

Joon 7.

Joonisel 7 näiteks on kujutatud lüket a ja selle viiekordset $5a$ esitavad nooled.

Osutub, et lükete kordsetel on samad omadused mis arvude kordsetel:

b1. $(m+n)a=ma+na,$

b2. $m(na)=(mn)a;$

b3. $n(a+b)=na+nb.$

Põhjendusedki on samasugused:

$$ma+na=\overbrace{a+\ldots+a}^{m}+\overbrace{a+\ldots+a}^{n}=\overbrace{a+\ldots+a}^{m+n}=(m+n)a,$$

$$m(na)=\overbrace{na+na+\ldots+na}^{m}=$$

$$=m\text{ rida}\left\{\begin{matrix}\overbrace{a+a+\ldots+a+}^{n}\\ +a+a+\ldots+a+\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ +a+a+\ldots+a\end{matrix}\right\}=\overbrace{a+a+\ldots+a}^{mn}+(mn)a.$$

$$n(a+b)=\overbrace{(a+b)+\ldots+(a+b)}^{n}=a+b+\ldots+a+b=$$

$$=\overbrace{a+\ldots+a}^{n}+\overbrace{b+\ldots+b}^{n}=na+nb.$$

Viimasel juhul tuli kasutada resultandi eespool märgitud omadust, mis lubab teha lükete vajalikke ümberjärjestusi.

4. Kordse üldistamine. Lükke a n-kordset na võib tõlgendada kui naturaalarvu n ja lükke a omalaadset korrutist. Sellelt vaatekohalt pakub huvi võimalus üldistada mõistet na. Üldistamise vajadus tuleneb asjaolust, et naturaalarvud on arvude väga kitsas erijuht. Nende lähimaks üldistuseks on täisarvud, mis saadakse, kui arvudele $1, 2, \ldots, n, \ldots$ lisada arv 0 ja vastandarvud $-1, -2, \ldots, -n, \ldots$; seejuures iseloomustavad arve 0 ja $-n$ võrdused $n+0=n$, $n+(-n)=0$. Järelikult tuleb kordse na mõiste üldistamiseks kõigepealt selgitada, mida mõista $0a$ ja $(-n)a$ all. Loomulik on püüda seda teha niimoodi, et säiliksid omadused **b1**—**b3**.

Kui omaduses **b1** naturaalarv m asendada arvuga 0, saame nõude

$$na=na+0a.$$

Seega $0a$ all tuleb mõista niisugust lüket, mis jätab paigale noole na lõpp-punkti (kui pidada silmas kolmnurga reeglit resultandi $na+0a$ leidmiseks ja seda, et tulemus peab olema jällegi na). Koos sellega jääb paigale iga punkt (on ju lüke nihutus, millega ei tohi kaasneda pööret). Niisugust «lüket», mis jätab paigale kõik punktid, nimetatakse null-lükkeks ja tähistatakse $\mathbf{0}$. Seega **b1** nõuab, et oleks $0a=\mathbf{0}$.

Kui samas omaduses **b1** naturaalarv m asendada täisarvuga $-n$, saame nõude

$$0a=na+(-n)a.$$

Järelikult peaks $(-n)a$ olema esitatav niisuguse noolega, mille joonestamine noole na lõpp-punktist viiks tagasi selle noole alguspunkti (et $na+(-n)a=\mathbf{0}$, siis alguspunkt peab ju kokkuvõttes paigale jääma). Niisugune lüke tõepoolest leidub. Kui $na=\overrightarrow{AA'}$, siis on selleks $\overrightarrow{A'A}$ (joon. 8).

Joon 8

Lüket $\overrightarrow{A'A}$ nimetatakse lükke $\overrightarrow{AA'}$ vastandlükkeks ja tähistatakse $-\overrightarrow{AA'}$; on selge, et igal lükkel a on olemas vastandlüke $-a$, mis rahuldab tingimust $a+(-a)=\mathbf{0}$.

Kõigest sellest järeldub, et $(-n)a$ all tuleb mõista järgmist lüket:

$$(-n)a=-(na).$$

Niiviisi ongi antud sisu kirjutisele αa, kus α on ükskõik missugune täisarv. Huvipakkuv on seejuures, et omadused **b1—b3** jäävad endiselt kehtima; osutub nimelt, et vabalt võetud täisarvude α ja β korral on

$$\begin{aligned} &\mathbf{b'1.}\quad (\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a},\\ &\mathbf{b'2.}\quad \alpha(\beta\boldsymbol{a})=(\alpha\beta)\boldsymbol{a},\\ &\mathbf{b'3.}\quad \alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

Enne nende omaduste kontrollimise juurde asumist loetleme selleks vajalikud eeldused. Kõigepealt tuleb arvestada ilmselt kehtivaid võrdusi $n\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $n(-\boldsymbol{a})=-n\boldsymbol{a}$. Samuti on vajalik eelnevalt tähele panna, et võrdused $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ ja $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{b})$ on samaväärsed: kui võtta esimese poolte ja lükke $-\boldsymbol{b}$ resultant, saame teise; kui võtta teise poolte ja lükke $\boldsymbol{b}$ resultant, saame esimese. Vaja läheb ka kergesti kindlakstehtavaid võrdusi $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ ja $-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$. Muidugi on kasutada ka kõik eespool kindlakstehtud või kokkulepitud võrdused, eriti $(-n)\boldsymbol{a}$ definitsioon ja omadused **b1—b3** naturaalarvude m ja n puhul.

Ja nüüd siis omaduste **b'1—b'3** kontroll.

Kui arvudest α ja β üks on 0, siis on omadused **b'1—b'3** otsesteks järeldusteks võrdustest $0\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ ja $n\mathbf{0}=\mathbf{0}$. Kui α ja β on mõlemad nullist erinevad, siis on vaja eraldi analüüsida järgmisi juhte (kus m ja n on naturaalarvud).

b'1. a) $\alpha=m$, $\beta=-n$.

Kui siin $m\geqslant n$, siis $(m-n)\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}$ kehtivuse tõttu $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=(m-n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}+(-n\boldsymbol{a})=m\boldsymbol{a}+(-n)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$; kui $m<n$, siis $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=-(n-m)\boldsymbol{a}=-[n\boldsymbol{a}+(-m)\boldsymbol{a}]=-n\boldsymbol{a}+[-(-m)\boldsymbol{a}]=(-n)\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$.

b) $\alpha=-m$, $\beta=-n$.

Sel korral $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=-(m+n)\boldsymbol{a}=-[m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}]=-m\boldsymbol{a}+(-n\boldsymbol{a})=(-m)\boldsymbol{a}+(-n)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$.

b'2. a) $\alpha=m$, $\beta=-n$,

siis $(\alpha\beta)\boldsymbol{a}=-(mn)\boldsymbol{a}=-m(n\boldsymbol{a})=m(-n\boldsymbol{a})=m[(-n)\boldsymbol{a}]=\alpha(\beta\boldsymbol{a})$.

b) $\alpha=-m$, $\beta=n$,

siis $(\alpha\beta)\boldsymbol{a}=-(mn)\boldsymbol{a}=-m(n\boldsymbol{a})=(-m)(n\boldsymbol{a})=\alpha(\beta\boldsymbol{a})$.

c) $\alpha=-m$, $\beta=-n$,

siis $(\alpha\beta)\boldsymbol{a}=(mn)\boldsymbol{a}=m(n\boldsymbol{a})=-[-m(n\boldsymbol{a})]=-m[-(n\boldsymbol{a})]=(-m)[(-n)\boldsymbol{a}]=\alpha(\beta\boldsymbol{a})$.

b'3. $\alpha=-n$.

Sel puhul $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-n(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-(n\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b})=-n\boldsymbol{a}+(-n\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$.

Täisarvudest veelgi üldisemad on ratsionaalarvud. Iga ratsionaalarvu ϱ võib esitada kujul $\varrho=\frac{\alpha}{n}=\alpha\frac{1}{n}$, kus α on täisarv ja n naturaalarv. Sisu andmiseks kirjutisele $\varrho\boldsymbol{a}$ ratsionaalarvulise kordaja ϱ puhul on küllalt, kui selgitada, mida mõista $\frac{1}{n}\boldsymbol{a}$

all. Edasi saaks siis lugeda, et

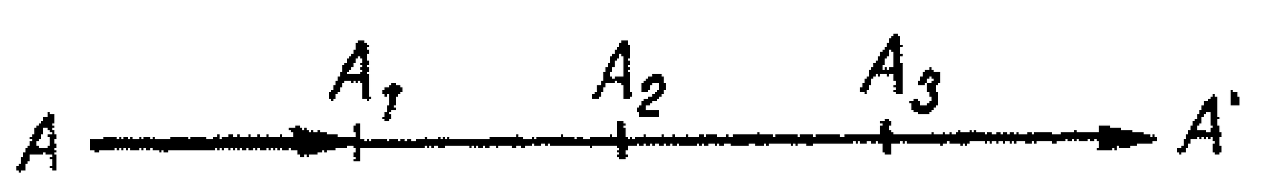
$$\varrho \boldsymbol{a} = \alpha \left(\frac{1}{n} \boldsymbol{a} \right).$$

Omadustest **b'1—b'3** järelduksid siis kohe sama laadi võrdused, ainult täisarvud α ja β on asendatud ratsionaalarvudega ϱ ja σ. Selleks tuleb vaid omadusi **b'1—b'3** rakendada lükke $\frac{1}{n}\boldsymbol{a}$ korral, valides sobivalt n.

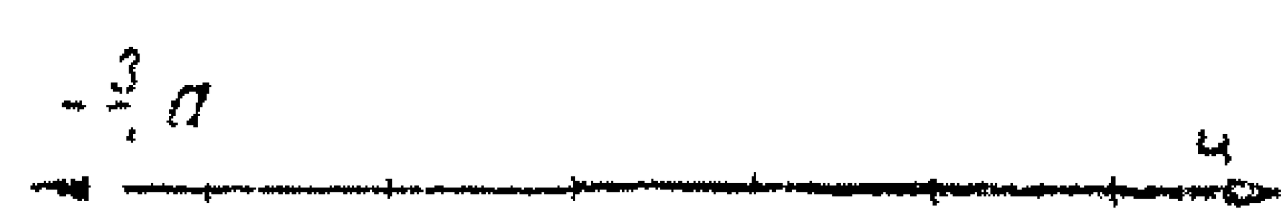
Mis aga puutub lükkesse $\frac{1}{n}\boldsymbol{a}$, siis selle määrab soov säilitada **b2** kehtivus. Nimelt kui vahetada võrduses **b2** m ja n osad ning võtta seejärel m asemele $\frac{1}{n}$, siis saame:

$$n\left(\frac{1}{n} \boldsymbol{a} \right) = 1\boldsymbol{a}.$$

Järelikult tuleb lükkeks $\frac{1}{n}\boldsymbol{a}$ võtta niisugune lüke $\boldsymbol{b}$, et $n\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$. Selline $\boldsymbol{b}$ leidub iga $\boldsymbol{a}$ ja iga n korral: kui $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AA'}$, siis tuleb sirglõik AA' jagada punktidega $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ n võrdseks osaks ja võtta $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AA_1}$ (joon. 9; $n = 4$). Kirjeldatud programm



Joon 9.



Joon. 10

on seega alati realiseeritav ning $\varrho\boldsymbol{a}$ niisiis defineeritav iga ratsionaalarvulise ϱ korral. Joonisel 10 on näitena kujutatud lükked $\boldsymbol{a}$ ja $-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}$.

Kaugemale sellisel vahetul teel ei ole enam võimalik minna. Kõige lihtsam oleks muidugi piirdudagi ratsionaalarvudega, kuid teooria, mille rangele käsitlemisele me peatselt asume, jääks siis piiratuks ja selle ülesehitamisel tekiksid tõsised raskused. Sisuka ja rakendusteks piisava geomeetria saamiseks tuleb ratsionaalarvude kõrval kasutusele võtta ka irratsionaalarvud. Teisiti öeldes, arvu all tuleb edaspidi mõista reaalarvu. Siit tuleneb vajadus anda sisu ka lükkele $\lambda\boldsymbol{a}$, kus λ on vabalt võetud reaalarv. Kuid osutub, et hoolimata näivast lihtsusest on kirjutisele $\lambda\boldsymbol{a}$ konkreetse sisu omistamine irratsionaalse λ korral üpris raske ülesanne. Rangel lähenemisel tuleb siin rakendada reaalarvude teoorial[3] ning püstitada aksioom (nn. pidevuse aksioom) ruumi selliste omaduste kohta, mis väljuvad vahetu kogemuse raamidest.

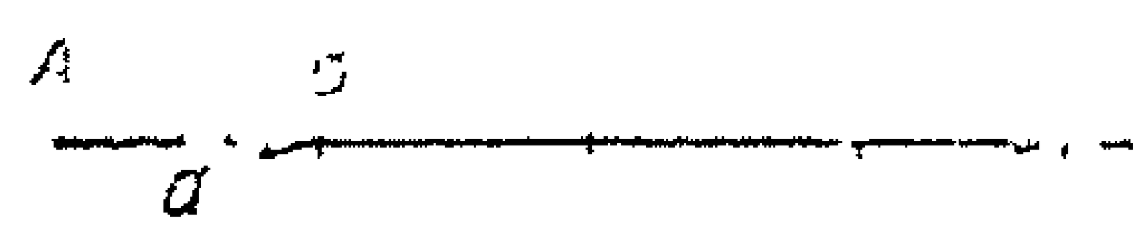
Mõistliku viisi kujunevast keerdsõlmest möödapääsemiseks anname § 2; selleks on mõiste λa defineerimine vahetult aksioomide abil. Siinkohal püüame siiski mõne sõnaga selgitada, mida tuleks õieti kujutleda λa all reaalarvulise λ korral, et edaspidi antava aksiomaatilise käsitluse puhul ei kaoks side tegelikkusega.

Reaalarvu võib ranges teoorias defineerida lõpmatu kümnendmurruna. Irratsionaalarvud on seejuures lõpmatud mitteperioodilised kümnendmurrud. Neid saab kuitahes täpselt lähendada ratsionaalsete lähismurdudega, kui võtta küllalt palju kümnendkohti. Ratsionaalse $\varrho=\frac{\alpha}{n}$ korral on mõiste ϱa juba olemas ning me teame, kuidas leida lüket ϱa antud ρ ja a korral. Reaalarvu λ ja lükke a korral võime niisiis määrata lükkeid ϱa arvu λ järjest suurema täpsusega võetud lähismurdude järgi ja sel viisil, piltlikult öeldes, järjest enam ja enam läheneda eesmärgile — lükkele λa.

Seejuures on arusaadav, et tulemus λa on lüke, mis toimib samas sihis milles a, sest lükked $\varrho a=\alpha\left(\frac{1}{n}a\right)$ kui $\frac{1}{n}a$ kordsed ja $\frac{1}{n}a=x$ ise kui tingimusega $nx=a$ määratud lüke toimivad selliselt.

Niiviisi võib kätte saada iga lükke b, mis toimib lükkega $a\neq 0$ samas sihis. Selles võib veenduda järgmiselt. Võtame vabalt punkti A, mille lükked a ja b viigu punktideks B ja C. Sel korral A, B ja C on ühel sirgel ja $a=\overrightarrow{AB}$, $b=\overrightarrow{AC}$. Näitame nüüd, kuidas «mõõta» lüket b lükkega a, alustades juhust, kus a ja b toimivad samas suunas.

Näitlikult on selge, et alati võib leida a niisuguse kordse na, et na kas jätab punkti A paigale (kui $n=0$) või viib ta A ja C vahel asuvasse punkti A_n, kuid $(n+1)a$ viib punkti A teisele poole punkti C (joonisel 11 on näiteks



Joon. 11.

$n=3$). Edasi tuleb võtta lüke $a_1=\frac{1}{10}a$ ja «mõõta» sellega analoogiliselt lüket $\overrightarrow{A_nC}$, s. t. leida a_1, $0\leqslant a_1\leqslant 9$, nii et $a_1\left(\frac{1}{10}a\right)$ kas jätab punkti A_n paigale või viib ta A_n ja C vahel asuvasse punkti K_1, kuid $(a_1+1)\left(\frac{1}{10}a\right)$ viib punkti A_n teisele poole punkti C. Sel korral

$$AK_1=AA_n+A_nK_1=na+\frac{a_1}{10}a=\left(n+\frac{a_1}{10}\right)a.$$

[3] Vt. G. Kangro, Matemaatiline analüüs. I osa. Tallinn, 1965, § 1.

Järgnevalt tuleb võtta lüke $\frac{1}{100}a=\frac{1}{10^2}a$ ja «mõõta» sellega lüket K_1C, määrates a_2 selliselt, et ta on vähim arvude 0, 1, 2, ..., 9 seas, mille puhul $(a_2+1)\left(\frac{1}{10^2}a\right)$ viib punkti K_1 teisele poole punkti C. Kui $a_2\left(\frac{1}{10^2}a\right)=$ $=\overrightarrow{K_1K_2}$, siis

$$\overrightarrow{AK_2}=\overrightarrow{AK_1}+\overrightarrow{K_1K_2}=\left(n+\frac{a_1}{10}\right)a+\frac{a_2}{10^2}a=\left(n+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}\right)a.$$

Selliselt jätkates lisandub järjest uusi liidetavaid — lükete $\frac{1}{10^3}a, \ldots, \frac{1}{10^n}a, \ldots$ kordseid — ning me jõuame järgmise võrduseni·

$$\overrightarrow{AC}=\left(n+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}+\ldots\right)a,$$

kus kordaja on lõpmatu kümnendmurd, s. t. teatav mittenegatiivne reaalarv

$$\lambda=n,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots$$

Selliselt jõuamegi veendumusele, et iga kahe samasuunalise $a \neq 0$ ja b korral leidub reaalarv $\lambda \geqslant 0$, nii et

$$b=\lambda a.$$

Siin võib kordajat λ tõlgendada kui lükke b pikkust, mida on mõõdetud lükkega a. Erijuhul, kui b on a kordne na, on selliseks pikkuseks naturaalarv, üldjuhul aga teatav mittenegatiivne reaalarv.

Kui a ja b on erisuunalised, siis tuleb lüket b «mõõta» lükkega $-a$ ning tulemuseks on võrdus $b=\lambda(-a)$. Siin paremat poolt tõlgendame lükkena $(-\lambda)a$, kus $-\lambda$ on juba mittepositiivne reaalarv, s. t.

$$(-\lambda)a=\lambda(-a).$$

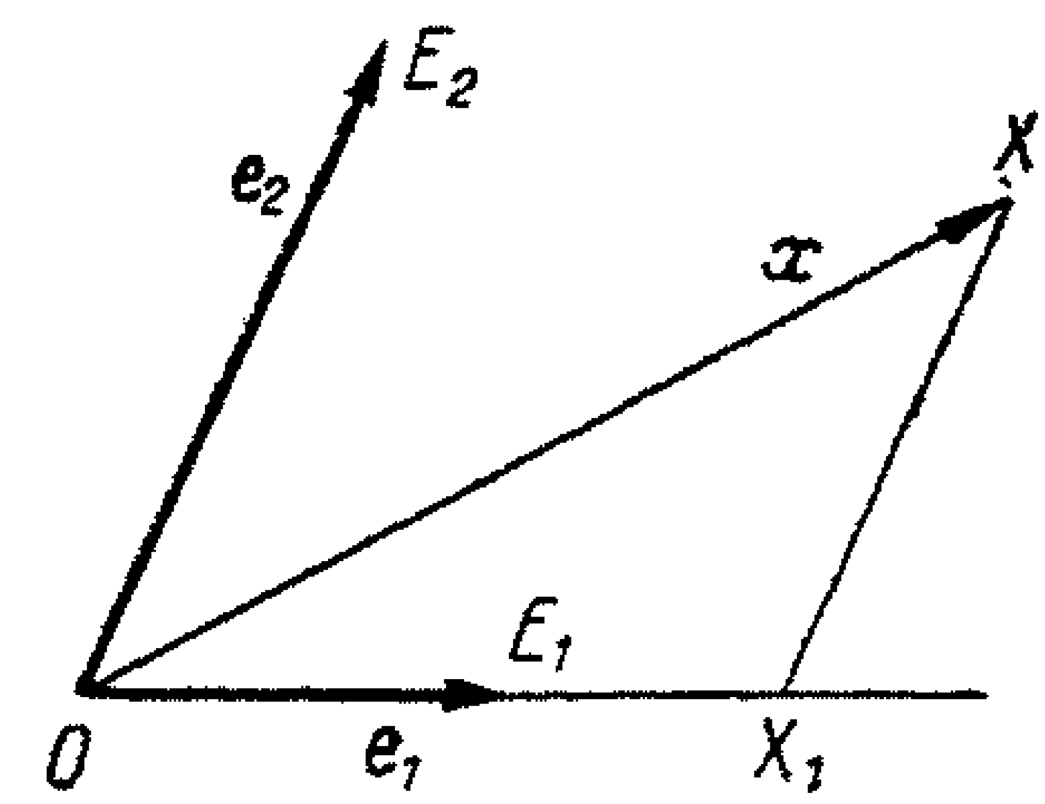
Sel viisil on λa määratud iga reaalarvu λ ja lükke a korral, kusjuures on selge, et nii võib kätte saada iga lükke b, mis toimib lükkega $a \neq 0$ samas sihis.

Seoses selle arutlusega tuleb siiski märkida, et mitmed väited tuginevad kujutlusele ja ei ole rangelt põhjendatud, rääkimata nendest raskustest, mis meid ootavad, kui me tahaksime selle arutluse alusel kanda omadused **b'1**—**b'3** üle suvaliste reaalarvuliste kordajate juhule. Seetõttu me edaspidi (§ 2) võtame need omadused lihtsalt aksioomideks.

5. **Komponentideks lahutamine.** Jätkame lähtemõistete näitlikku uurimist. Kahe lükke resultandi ja lükke üldistatud kordse mõisted võimaldavad antud lüketest moodustada uusi. Tänu nendele kujuneb lükete hulgas, nagu kõneldakse, teatav struktuur. Järgnevalt uurime selle struktuuri üht iseloomulikumat omadust.

Alustame plaadi lüketest. Osutub, et plaadi iga lükke saab avaldada kahe antud lükke e_1 ja e_2 kaudu, kui ainult viimased rahuldavad üht lihtsat lisatingimust: kumbki ei ole null-lüke 0 ja ei leidu reaalarvu λ, nii et $e_2=\lambda e_1$. Varem öeldu põhjal tähendab see seda, et lükked e_1 ja e_2 ei toimi samas sihis, neid joonisel kujutavad nooled ei ole ühisesse alguspunkti kantuna ühel sirgel.

Olgu nüüd antud kaks seda lisanõuet rahuldavat lüket $\boldsymbol{e}_1$ ja $\boldsymbol{e}_2$. Näitame, kuidas nende kaudu saab avaldada plaadi iga lükke $\boldsymbol{x}$. Valime vabalt punkti O: olgu $\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ ja $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX}$ (joon. 12). Lisatingimus tähendab, et O, E_1 ja E_2 ei ole ühel sirgel. Tõmbame läbi punkti X sirge, mis on paralleelne sirgega OE_2 ja lõikab seetõttu sirget OE_1 mingis punktis X_1. Et $\overrightarrow{OX_1}$ ja $\boldsymbol{e}_1$ toimivad samas sihis, siis leidub reaalarv x_1, nii et $\overrightarrow{OX_1} = x_1\boldsymbol{e}_1$, selleks tuleb vaid lüket $\overrightarrow{OX_1}$ «mõõta» lükkega $\boldsymbol{e}_1$ või $-\boldsymbol{e}_1$.



Joon. 12.

Täpselt samuti leidub ka ühes ja samas sihis toimivate lükete $\overrightarrow{OE_2} = \boldsymbol{e}_2$ ja $\overrightarrow{X_1X}$ puhul reaalarv x_2, nii et

$$\overrightarrow{X_1X} = x_2\boldsymbol{e}_2.$$

Kolmnurga reeglit rakendades leiame vahetult, et

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{X_1X}$$

ehk teisiti:

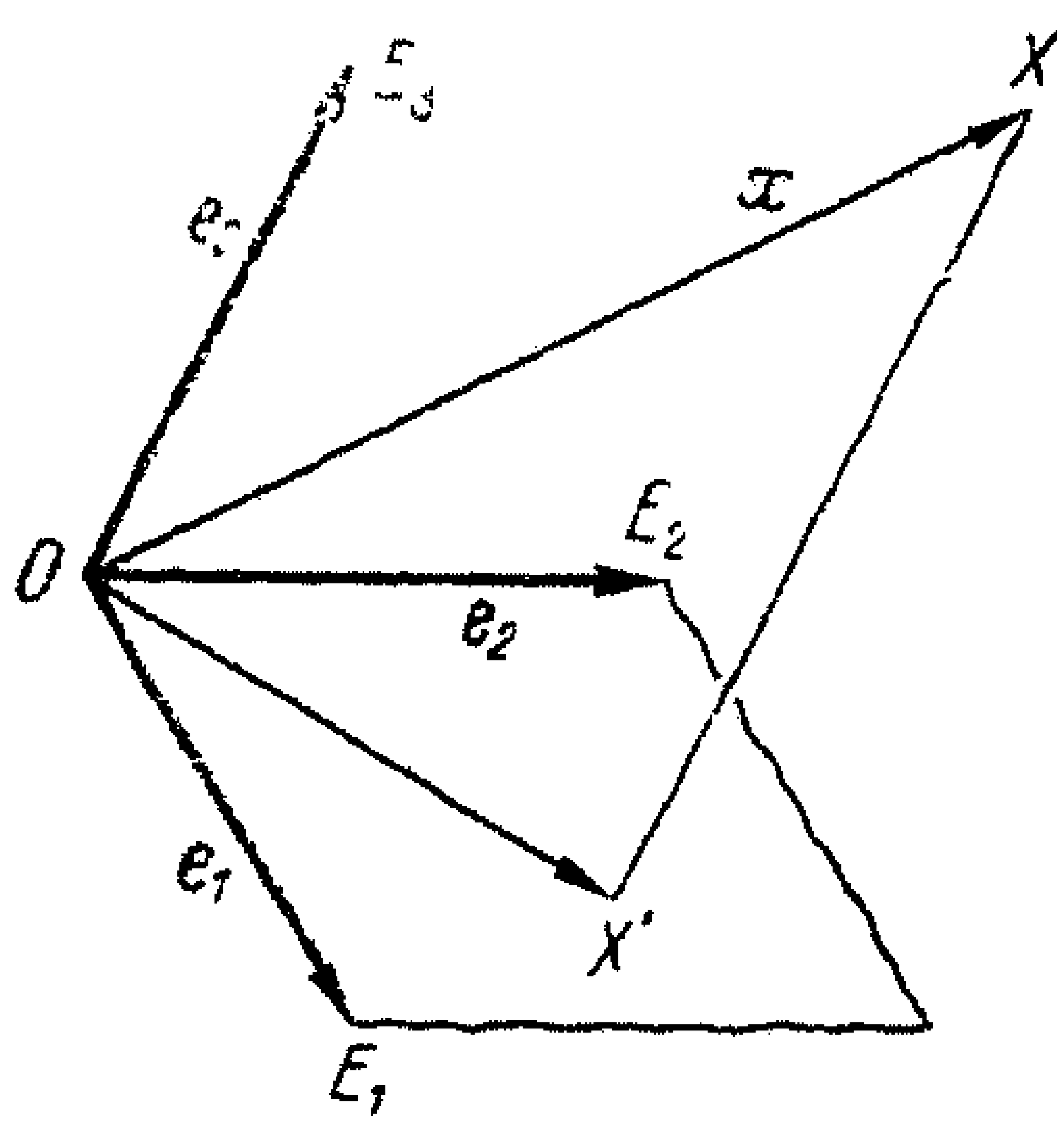
$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2.$$

Nii olemegi plaadi vabalt võetud lükke $\boldsymbol{x}$ avaldanud kahe antud lükke $\boldsymbol{e}_1$ ja $\boldsymbol{e}_2$ kaudu. Lükkeid $\overrightarrow{OX_1} = x_1\boldsymbol{e}_1$ ja $\overrightarrow{X_1X} = x_2\boldsymbol{e}_2$, mille resultandina avaldub lüke $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX}$, nimetatakse lükke $\boldsymbol{x}$ komponentideks $\boldsymbol{e}_1$ ja $\boldsymbol{e}_2$ sihtides, avaldise $x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ puhul aga kõneldakse komponentideks lahutamisest. Selgub, et plaadi iga lükke saab lahutada komponentideks teatava kahe lükke sihtides.

Siin ilmneb esmakordselt erinevus plaadi lükete ning varda või keha lükete vahel. Kui vaadelda näiteks varda lükkeid piki iseennast ning arutleda samuti, nagu eespool lükete $\overrightarrow{OX_1}$ ja $\boldsymbol{e}_1$ korral, siis saab kohe selgeks, et varda iga lükke $\boldsymbol{x}$ saab mingi nullist erineva lükke $\boldsymbol{e}$ kaudu avaldada kujul $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e}$. Tähendab, varda igal lükkel on üksainus komponent.

Vaatleme nüüd keha lükkeid ruumis. Osutub, et igaühe neist saab lahutada komponentideks kolme lükke $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ja $\boldsymbol{e}_3$ sihtides, kui ainult eeldada, et viimased ei ole mingi ühe ja sama plaadi lükked mööda iseennast.

Väite õigsuses veendumiseks leiame punktid E_1, E_2 ja E_3, nii et $e_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $e_2 = \overrightarrow{OE_2}$ ja $e_3 = \overrightarrow{OE_3}$ (joon. 13). Seatud eeldus tähendab seda, et punktid O, E_1, E_2 ja E_3 ei ole ühel tasandil. Vabalt võetud lükke $x = \overrightarrow{OX}$ korral tõmbame läbi punkti X sirge, mis on paralleelne sirgega OE_3 ja lõikab seetõttu tasandit OE_1E_2 mingis punktis X'. Lükete $\overrightarrow{OX'}$, e_1 ja e_2 osas oleme siis samas olukorras nagu eespool plaadi lükete puhul (võib kujutleda, et kehas on fikseeritud plaat OE_1E_2). Järelikult leiduvad reaalarvud x_1 ja x_2, nii et



Joon. 13.

$$\overrightarrow{OX'} = x_1e_1 + x_2e_2.$$

Et lükked e_3 ja $\overrightarrow{X'X}$ toimivad samas sihis, siis võib leida reaalarvu x_3, nii et $\overrightarrow{X'X} = x_3e_3$. Kokkuvõttes

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OX'} + \overrightarrow{X'X} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3.$$

Keha lükked ruumis on seega lahutatavad komponentideks kolme antud lükke sihtides.

Selgub niisiis, et struktuurid varda, plaadi ja keha lükete hulkades erinevad selle poolest, mitu lüket tuleb võtta, selleks et nende sihtides oleks vabalt võetud lüke komponentideks lahutatav.

Jääb küsimus, kuidas struktuuri määravate mõistete — resultandi ja üldistatud kordse abil iseloomustada eespool seatud eeldusi, mille kohaselt plaadi puhul e_1 ja e_2 ei tohi olla ühe ja sama varda lükked piki iseennast ning keha puhul e_1, e_2 ja e_3 ei tohi olla ühe ja sama plaadi lükked mööda iseennast. Alustame viimasest eeldusest. Osutub, et see on samaväärne nõudega: kui

$$x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = 0, \tag{5.1}$$

siis $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Tõepoolest, kui oletada, et see nõue on rikutud, näiteks et võrduses (5.1) $x_3 \neq 0$, siis oleks võimalik avaldada

$$e_3 = -\frac{x_1}{x_3}e_1 - \frac{x_2}{x_3}e_2,$$

see aga tähendaks, et lüke e_3 toimib samal plaadil, mille lüketeks on e_1 ja e_2.

Vastupidi, kui oletada, et kõne all olev eeldus on rikutud, s. t. et e_1, e_2 ja e_3 on ühe ja sama plaadi lükked, siis juhul, kui mingid kaks neist, näiteks e_1 ja e_2, mõjuvad eri sihtides, saaksime avaldada $e_3 = \mu e_1 + \mu e_2$, kui aga nad mõjuvad samas sihis ja näiteks $e_1 \neq 0$, siis oleks $e_2 = \lambda e_1$. Esimesel juhul $\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 - 1 \cdot e_3 = 0$, teisel juhul $\lambda e_1 - 1 \cdot e_2 + 0 e_3 = 0$ — mõlemal juhul ei ole seatud nõue rahuldatud, sest kehtivad võrduse (5.1) teatavad erikujud, milledes üks kordajatest on $-1 \neq 0$. Tähendab, kui kehtib eeldus lükete e_1, e_2 ja e_3 kohta, siis ei saa ka viimati seatud nõue olla rikutud ning, vastupidi, selle nõude kehtimisel ei saa eeldus olla rikutud. Seega mõlemad on samaväärsed.

Analoogiliselt on võimalik näidata, et e_1 ja e_2 on eri sihtides toimivad lükked (s. t. ei ole fikseeritud varda lükked) parajasti siis, kui võrdusest

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 = 0 \tag{5.2}$$

järeldub, et $x_1 = x_2 = 0$. Tõepoolest, kui võrduses (5.2) oleks näiteks $x_2 \neq 0$, siis oleks $e_2 = -\frac{x_1}{x_2} e_1$ ning e_1 ja e_2 mõjuksid samas sihis; vastupidi, kui e_1 ja e_2 mõjuvad samas sihis ja näiteks $e_1 \neq 0$, siis $e_2 = \lambda e_1$ ja $\lambda e_1 - 1 e_2 = 0$.

Selliselt jõuame järgmiste tähelepanekuteni.

c[(1)]. *Leidub varda selline lüke* $\boldsymbol{e}$, *nii et varda iga lüke* $\boldsymbol{x}$ *on avaldatav kujul* $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e}$, *kusjuures võrdus* $x\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$ on *võimalik ainult siis, kui* $x = 0$.

c[(2)]. *Leiduvad plaadi sellised lükked* e_1 *ja* e_2, *nii et plaadi iga lüke* x *on avaldatav kujul* $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$, *kusjuures võrdus* $x_1 e_1 + x_2 e_2 = \boldsymbol{0}$ *on võimalik ainult siis, kui* $x_1 = x_2 = 0$.

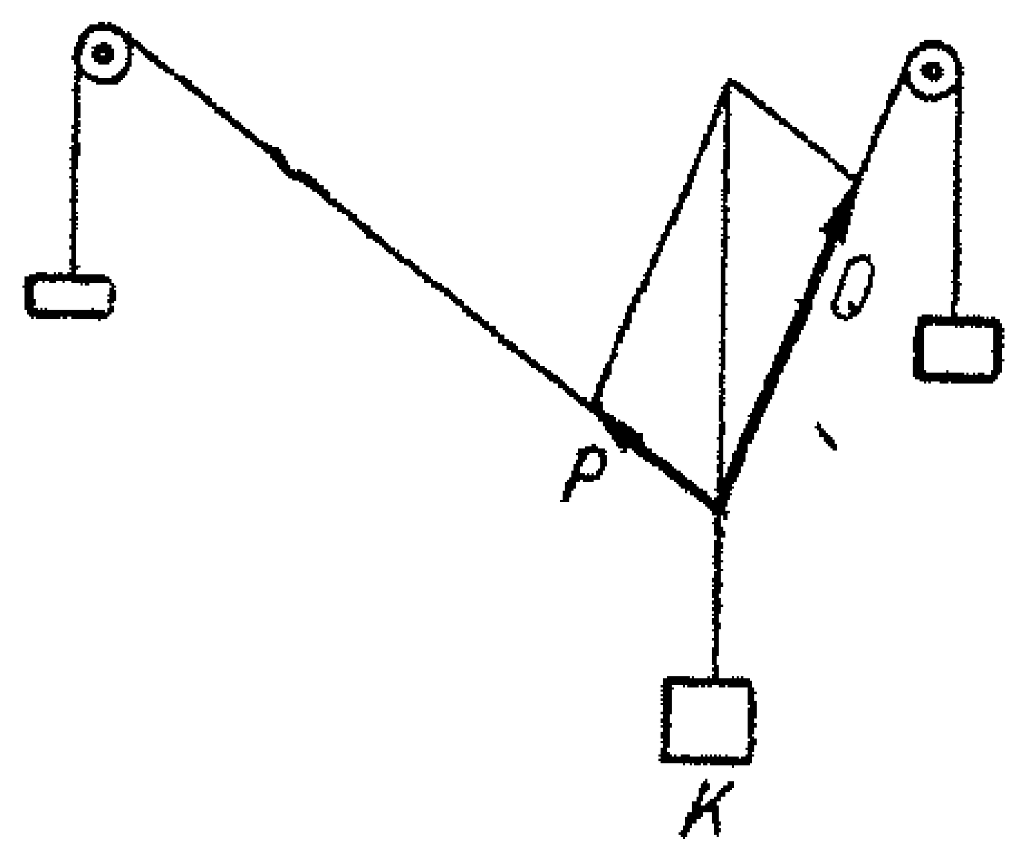
c[(3)]. *Leiduvad keha sellised lükked* e_1, e_2 ja e_3, *nii et keha iga lüke* x *on avaldatav kujul* $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, *kusjuures võrdus* $x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \boldsymbol{0}$ *on võimalik ainult siis, kui* $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Alles nende omaduste juures ilmneb esmakordselt, mille poolest varda lükete hulk erineb plaadi lükete hulgast ja need omakorda keha lükete hulgast. Kõigi varem kirjeldatud omaduste poolest on struktuurid neis hulkades ühesugused.

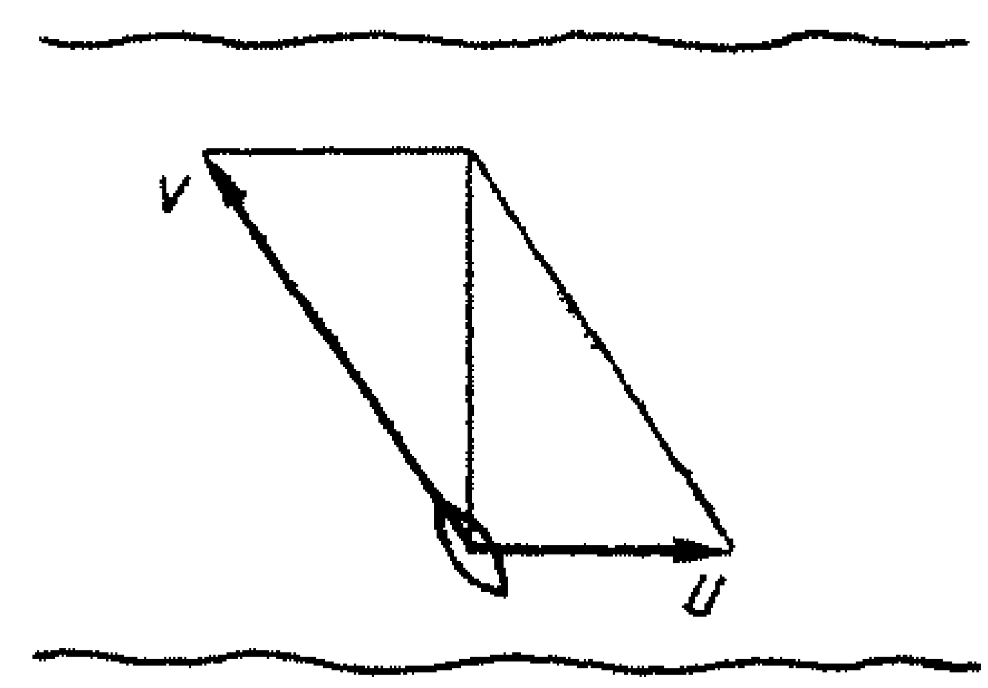
6. Vektoriaalsed suurused ja vektorid. Lükked ei ole ainsad seda laadi suurused matemaatikas ja selle rakendustes, milledega opereerimisel tuleb kasutada joonisel nooli suuruste esindajatena ja rööpküliku reeglit resultandi moodustamisel. Juba XVII sajandi algul (1636) jõudis prantsuse õpetlane G. P. de Roberval kehade tasakaalu uurides selgusele, et kui kehale mõjub kaks eri sihtides toimivat jõudu, siis nende koosmõju on samaväärne ühe jõuga (resultandiga), mis leitakse rööpküliku reegli abil.[4] Nii õnnestus näiteks selgitada, et keha K saab joonisel 14

[4] Erijuhul, kui tegemist on kahe ristuva jõuga, esitas sama reegli juba 1586. a. hollandi õpetlane S. Stevin.

näidatud juhul olla tasakaalus vaid siis, kui jõudude P ja Q resultant on vertikaalne. XVII sajandi jooksul selgus samuti, et rööpküliku reeglit tuleb kasutada ka kiiruste liitmisel, näiteks vaikses vees kiirust v arendava laeva kursi määramisel, kui tahetakse ületada kiirusega u voolavat jõge lühimat teed pidi (joon. 15). Aja jooksul seda laadi suuruste nimekiri järjest pikenes.



Joon. 14.



Joon. 15

Kõiki neid suurusi iseloomustab asjaolu, et nende määramiseks pole küllaldane teada arvulist väärtust, vaid on vaja anda ka siht ja suund, milles suurus toimib. Niisuguseid suurusi on hakatud ühiselt nimetama vektoriaalseteks suurusteks ehk lihtsalt v e k t o r i t e k s[5]. Lükete, jõudude ja kiiruste kõrval on sellisteks suurusteks ka kiirendus, elektri- või magnetvälja pinge jt. Kõigi nende puhul on kasutusel resultandi, kordse ja komponentide mõisted.

Võimaluse kasutada laialdaselt vektoreid geomeetrias, mehaanikas ja füüsikas näitasid XIX sajandi keskel inglise teadlane W. R. Hamilton (1805—1865) ja saksa õpetlane H. Grassmann (1809—1877). Vektorarvutuse lihtsa geomeetrilise käsitluse andis esmakordselt oma 1881.—1884. a. peetud loengutes ameerika füüsikateoreetik J. W. Gibbs (1839—1903).

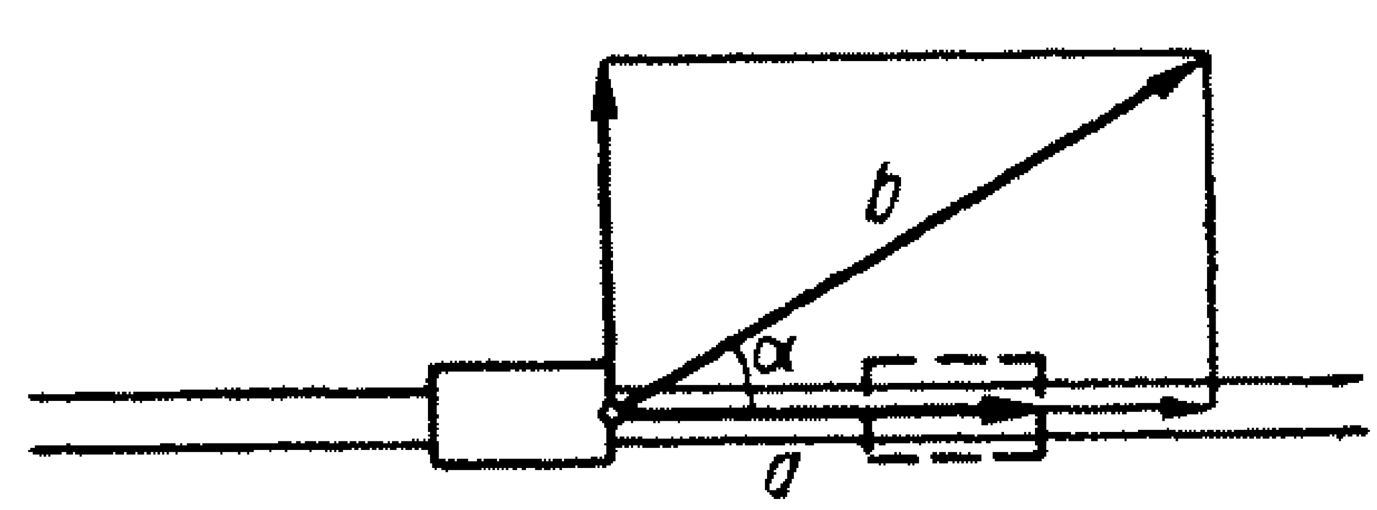
Asjaolu, et vektorid on mitte üksnes lihtsustavaks geomeetriliseks abivahendiks, vaid et neile tuginedes on võimalik arendada kogu geomeetriat range süstemaatilise teooriana, selgus alles käesoleva sajandi 20-ndail aastail. Põhjapanevateks on siin saksa matemaatiku H. Weyli (1885—1955) tööd, milledes vektori mõiste on võetud juba teooria algmõisteks. H. Weyli seisukohalt

[5] Nimetuse «vektor» võttis kasutusele W. R. Hamilton XIX saj. keskel (lad k. *vector* — vedaja, edasikandja). Selgema vahe tegemiseks on hakatud suurusi, mida saab täielikult iseloomustada üksnes arvulise väärtusega (näit. pikkus, nurk, pindala, mass, temperatuur jt.), nimetama skalaarseteks suurusteks ehk s k a l a a r i d e k s (lad. k *scalaris* — astmeline)

ei tule vektoreist kõneldes enam tingimata mõelda lükkeid, jõudusid, kiirust vms. Vektorid on sel puhul lihtsalt matemaatika omalaadi objektid, mis on teatavas kindlas vahekorras punktidega ning milledega on võimalik sooritada tehteid teatavate kindlate reeglite järgi. Need vahekorrad ja reeglid — teooria aksioomid — üldistavad nihete eespool sõnastatud omadusi **a1—a3**, **b1—b3** ning $c^{(1)}$, $c^{(2)}$ ja $c^{(3)}$. Teooria süstemaatilist arendamist nende baasil alustame järgmises paragrahvis.

7. Vektorite korrutised ja vektoralgebra mõiste. Enne kui asuda range teooria arendamisele, tutvustame näitlikult veel mõningaid vektoritega seotud olulisi mõisteid. Eespool lükete vaatlemisel jõudsime lihtsate reegliteni resultandi, kordse ja komponentide moodustamiseks. Mehaanikas esinevate vektoriaalsete suuruste — jõudude, kiiruste jms. uurimine rikastab veelgi vektoritega seostuvate mõistete loetelu.

Kujutleme, et lüke $\boldsymbol{a}$ on esile kutsutud teatava jõu $\boldsymbol{b}$ poolt. (Olgu näiteks rööbasteel liikuv vagun nihkunud edasi lükke $\boldsymbol{a}$ võrra tee suhtes kaldu olevat trossi mööda mõjuva jõu $\boldsymbol{b}$ toimel; joon. 16.) Määrame sel puhul jõu $\boldsymbol{b}$ poolt tehtud töö. On selge, et $\boldsymbol{b}$ kahest komponendist, milledest üks on võetud $\boldsymbol{a}$ sihis ja teine sellega risti, teeb tööd ainult esimene, kusjuures töö suuruseks on teepikkuse (s. t. $\boldsymbol{a}$ pikkuse a) ja esimese komponendi suuruse b_1 korrutis. Et b_1 avaldub jõu $\boldsymbol{b}$ suuruse b ning $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ vahelise nurga α kaudu järgmiselt:



Joon. 16.

$$b_1 = b \cos \alpha,$$

siis tehtud töö on

$$ab_1 = ab \cos \alpha.$$

Siin paremal pool on teatav vektoritega $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ seotud arv (ehk skalaar), mida on hakatud tähistama $\boldsymbol{ab}$ ja nimetama $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ s k a l a a r k o r r u t i s e k s. Niisiis

$$\boldsymbol{ab} = ab \cos \alpha.$$

Et vaadeldav arv ei muutu vektorite $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ vahetamisel, siis $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$; tähendab, vektorite skalaarkorrutis on kommutatiivne. Selle mõiste omadustega, mis õieti õigustavadki tema nimetamist korrutiseks, näiteks distributiivsuse omadusega

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc},$$

tutvume edaspidi (§ 5), kus neile antakse ka ranged tõestused.

Vektorite rakendamisest mehaanikas on pärit ka konstruktsioon, mis võimaldab kahe vektoriga $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ siduda mitte enam arvu, vaid vektori, seejuures niiviisi, et kehtib samuti distributiivsuse omadus.

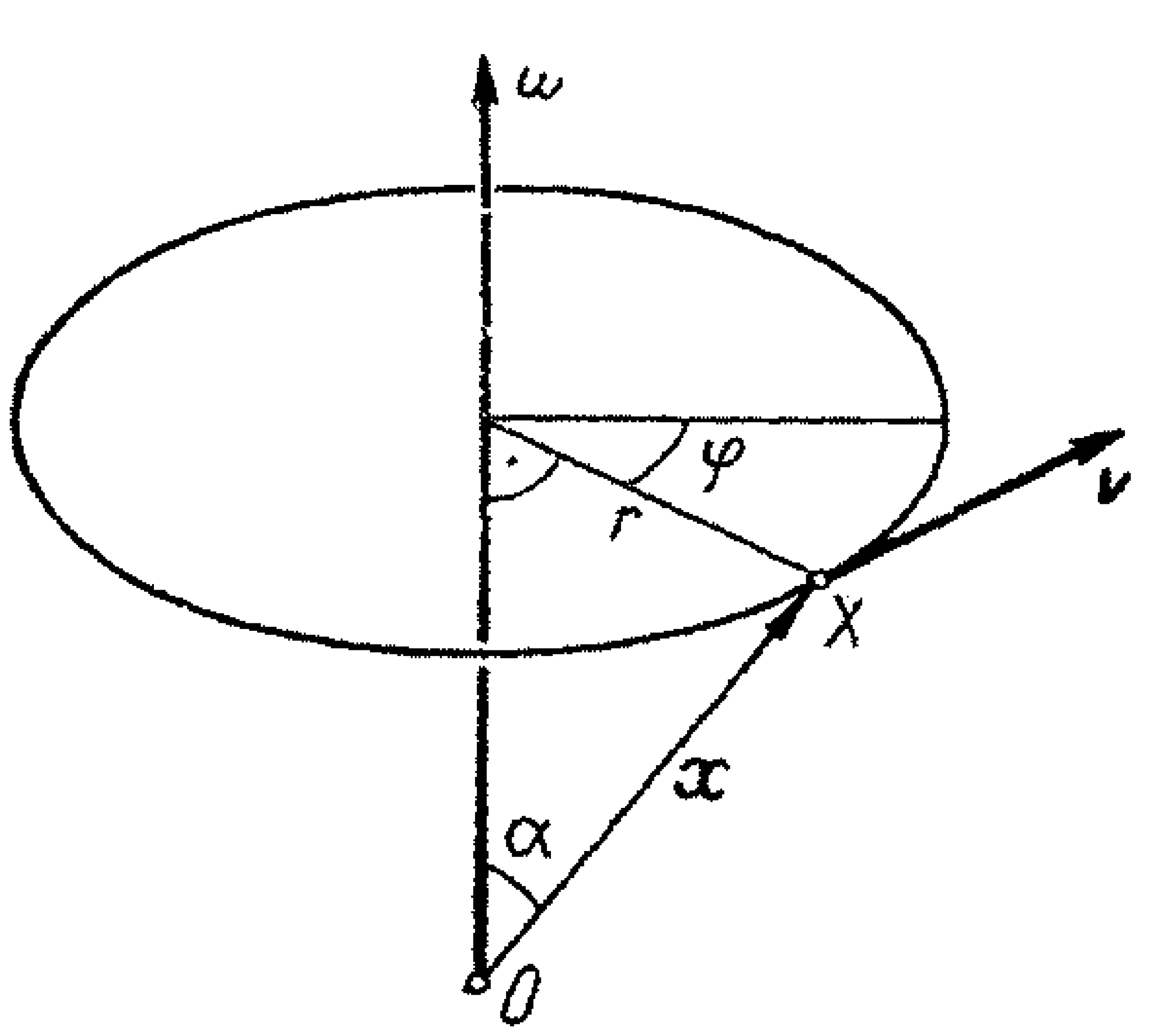
Olgu tegemist ühtlase pöörlemisega teatava telje ümber. Niisugust pöörlemist iseloomustatakse vektoriga $\boldsymbol{\omega}$, mis kulgeb 1) telje sihis, seejuures 2) suunas, milles liigub tavaline parema käe kruvi antud pöörlemises, kusjuures 3) $\boldsymbol{\omega}$ pikkuseks ω on pöörlemise konstantne nurkkiirus, s. t. $\omega = \frac{\varphi}{t}$ (φ on nurk, mis on läbitud pöörlemisel ajavahemiku t jooksul). Vektorit $\boldsymbol{\omega}$ nimetatakse antud ühtlase pöörlemise nurkkiirusvektoriks. Olgu tegemist teljel mitteasuva punktiga X, mille võib määrata telje mingist punktist O lähtuva vektori $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX}$ abil. Punkt X kirjeldab antud pöörlemisel ringjoone, mille raadiuse tähistame r. Igal hetkel X liigub ringjoone puutuja sihis, kusjuures liikumise suund määratakse pöörlemise suunaga. Punkti X liikumise kiiruseks v on ajavahemikus t läbitud tee pikkuse $s = r\varphi$ ja t suhe:

$$v = \frac{r\varphi}{t} = r\frac{\varphi}{t} = r\omega.$$

Et siin $r = x \sin \alpha$, kus x on vektori $\boldsymbol{x}$ pikkus ja α on vektorite $\boldsymbol{\omega}$ ja $\boldsymbol{x}$ vaheline nurk, siis

$$v = \omega x \sin \alpha.$$

Vektorit $\boldsymbol{v}$, mille siht ja suund ühtib punkti X liikumise sihi ja suunaga ning mille pikkuseks on punkti X liikumise kiirus v, nimetatakse kiirusvektoriks. Nagu näha (joon. 17), on ta antud juhul määratud täielikult vektoritega $\boldsymbol{\omega}$ ja $\boldsymbol{x}$: 1) vektori $\boldsymbol{v}$ siht on risti mõlema vektori $\boldsymbol{\omega}$ ja $\boldsymbol{x}$ sihtidega, 2) vektori $\boldsymbol{v}$ suund on selline, et parema käe pöidla ja esimese sõrme seadmisel $\boldsymbol{\omega}$ ja $\boldsymbol{x}$ suundadesse peopesa poole pööratud keskmine sõrm näitab $\boldsymbol{v}$ suunda (kõneldakse, et vektorid $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{v}$ moodustavad parema käe kolmiku), 3) vektori $\boldsymbol{v}$ pikkuseks on $v = \omega x \sin \alpha$, s. t. vektorite $\boldsymbol{\omega}$ ja $\boldsymbol{x}$ pikkuste ning nende vektorite vahelise nurga α siinuse korrutis.



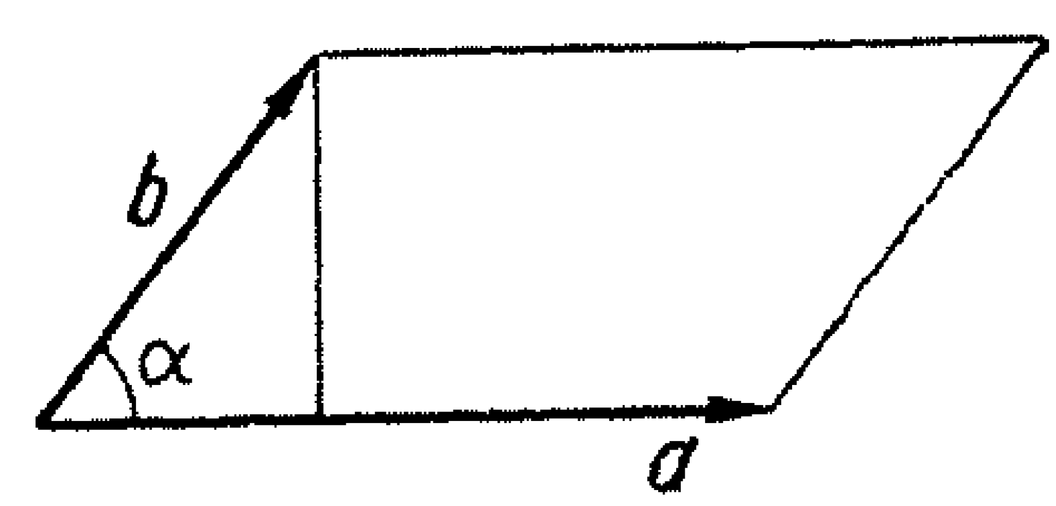
Joon. 17.

Üldiselt, kui kolm vektorit $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$ on seotud selliselt nagu eespool vektorid ω, $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{v}$ (s. t. kehtivad 1), 2) ja 3), kus ω, $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{v}$ asemel on vastavalt $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$), siis kõneldakse, et $\boldsymbol{c}$ on $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ vektorkorrutis ning tähistatakse

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

Seega siis 1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}$, 2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ moodustavad parema käe kolmiku, 3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ pikkuseks on $ab\sin\alpha$, kus α on nurk $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ vahel.

Märgime, et vektorkorrutise $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ pikkus $ab\sin\alpha$ on tõlgendatav ka vektoritele $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ ehitatud rööpküliku pindalana, sest $b\sin\alpha$ kujutab endast sellise rööpküliku kõrgust ja a alust (joon. 18).



Joon. 18.

Vektorkorrutisel $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ on omadusi, mis erinevad arvude korrutise ja ka vektorite skalaarkorrutise omadustest. Näiteks kui vahetada vektorite $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ kohad, s. t. vaadelda korrutist $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$, siis tuleb $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ suuna määramisel vahetada ka parema käe pöidla ja esimese sõrme asendid, mistõttu kätt tuleb pöörata nii, et $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ suund tuleb $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ suunale vastupidine. Samal ajal aga siht ja pikkus jäävad muutmatuiks. Siit järeldub, et

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

Seega vektorkorrutis ei ole kommutatiivne, vaid, nagu öeldakse, antikommutatiivne. Tema nimetamist korrutiseks õigustab see, et ta on siiski distributiivne:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}.$$

Selle omaduse tõestuse anname edaspidi (art-s 31).

Me oleme nüüd tundma õppinud mitut võimalust ühendada antud kahe vektoriga $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ kas uut vektorit või reaalarvu: resultanti $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, skalaarkorrutist $\boldsymbol{ab}$, vektorkorrutist $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. Siia võib lisada kordse üldistuse $\lambda\boldsymbol{a}$, mida saab tõlgendada reaalarvu λ ja vektori $\boldsymbol{a}$ korrutamisel tekkinud vektorina. Resultandi $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ moodustamist võib tõlgendada vektorite $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ liitmisena ning tulemust nimetada ka $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ summaks. Kokkuvõttes on vektorite hulgas defineeritud rida tehteid, mis muudavad selle hulga algebra uurimisalaks. Tekib nn. vektoralgebra, millel on väärtuslikke rakendusi analüütilises geomeetrias, teoreetilises mehaanikas, füüsikas jm. Siiani on näitlikult tutvustatud ainult selle algebra põhimõisteid. Vektoralgebra üksikasjalikum arendamine seisab alles ees. Silmas tuleb seejuures pidada peamist eesmärki: anda käesolevas raamatus analüütilise geomeetria rangelt süstemaatiline, üksnes aksioomidele tuginev käsitlus. Seetõttu on vaja ka vektoralgebra põhimõisted veel kord korralikult defineerida. Eespool toodud näitlikke selgitusi ei saa lugeda piisavateks, sest nendes (eriti skalaar- ja vektorkorrutise tutvustamisel) on üsna ulatuslikult rakendatud geomeetriast pärit teadmisi, kuid just viimaseid me ju tahamegi edaspidi rangelt põhjendada. Järelikult tuleb vektoralgebra põhimõisted ja nende omadused tuletada vahetult aksioomidest. Selle tööga alustame järgmises paragrahvis. Eespool sisalduv andmestik jääb seejuures näitlikuks lähtematerjaliks, mille juurde on alati kasulik tagasi pöörduda siis, kui lugejal edasise üldise ja küllalt abstraktse käsitluse jälgimisel ähvardab kaotsi minna mõistete sisuline tähendus ja seos kaemusega.[6]

8. **Vajalikke teadmisi hulgateooriast.** Matemaatiliste teooriate süstemaatilisel käsitlemisel kasutatakse tänapäeval laialdaselt hulgateooria mõisteid ja meetodeid, mis võimaldavad saavutada esituse kompaktsust ja ülevaatlikkust. Hulgateooria terminoloogia ja sümboolika on väärtuslik ka analüütilise geomeetria ülesehitamisel.

Hulkadeks on edaspidi enamasti punktihulgad — teatavad geomeetrilised kujundid, kuid mõnikord ka nendest kujunditest endist moodustatud hulgad, näiteks sirgete hulgad. Küllalt sageli tuleb vaadelda vektorite hulki. Samuti läheb vaja reaalarvude hulki[7], seejuures ka reaalarvupaaride või -kolmikute hulki. Ükskõik millest vaadeldav hulk ka koosneb, teda moodustavaid objekte nimetatakse selle hulga e l e m e n t i d e k s. Hulki endid tähistame edaspidi suurte ladina tähtedega tähestiku keskosast. Asjaolu, et x on hulga M element, märgitakse sümboliga $x \in M$. Kui hulga N iga element on samal ajal ka hulga M elemendiks, siis hulka N nimetatakse hulga M a l a m h u l g a k s ehk osahulgaks ja kirjutatakse

$$N \subset M \quad \text{ehk} \quad M \supset N.$$

Kui samaaegselt $N \subset M$ ja $M \subset N$, siis hulgad M ja N koosnevad samadest elementidest ning neid nimetatakse v õ r d s e t e k s ja tähistatakse $N = M$. Alamhulga definitsiooni järgi on ka hulk M ise oma alamhulgaks. Kui alamhulk N ei sisalda hulga M kõiki punkte, s. t. kui $N \subset M$ ja $N \neq M$, siis teda nimetatakse hulga M pärisalamhulgaks. Sel puhul leidub hulga M element x,

[6] Sel puhul võib abi leida ka nendest õpikutest, mis käsitlevad analüütilist geomeetriat vähemas ulatuses ja näitliku geomeetria baasil. Sellistest võib soovitada viimaseid eessõna allviites märgituist kui kättesaadavamaid.

[7] Vt G. K a n g r o, Matemaatiline analüüs. I osa. Tallinn, 1965, lk. 13—16.

mis ei kuulu alamhulka N; viimast asjaolu tähistatakse kirjutiseega $x \notin N$.

Alamhulk N määratakse sageli mingi tunnusega T, mis eraldab hulgas M välja just alamhulga N elemendid. Sel puhul kirjutatakse

$$N = \{x \mid T(x)\}$$

(siin sümbol $T(x)$ tähistab, et elemendil x on tunnus T). Näiteks ringjoon keskpunktiga C ja raadiusega r on tasandi alamhulk

$$\{X \mid \overrightarrow{CX} \text{ pikkus on } r\}.$$

Reaalarvude hulgas saab kahe antud arvu a ja b abil (kus $a < b$) välja eraldada järgmisi alamhulki: vahemiku

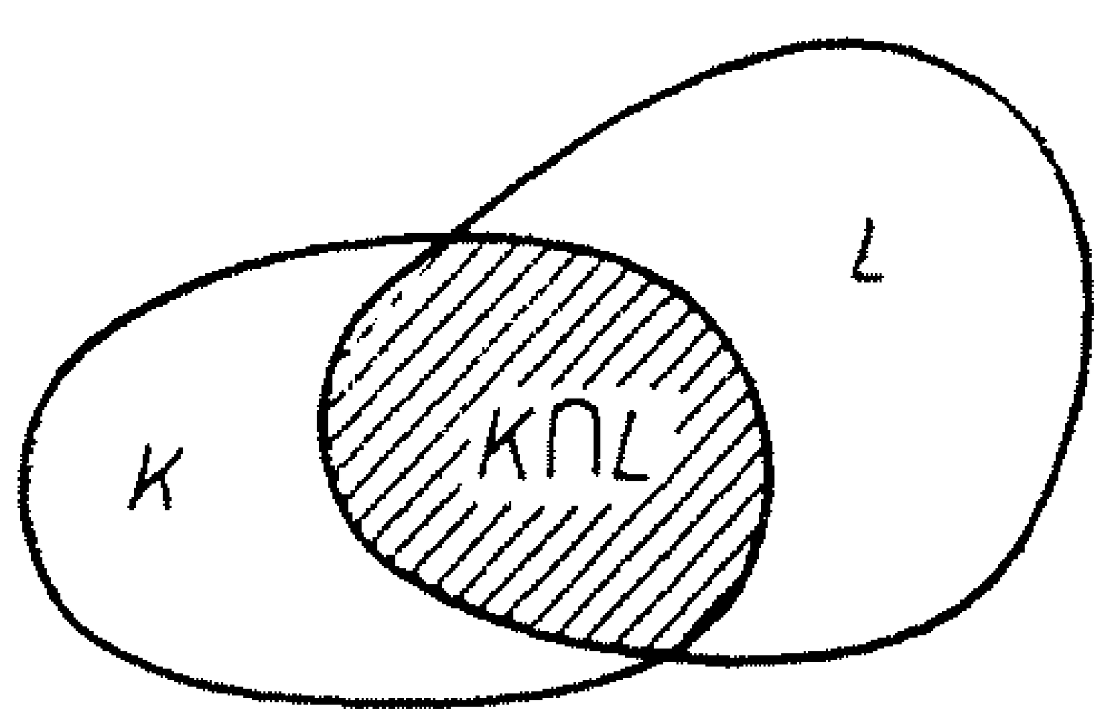
$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\},$$

lõigu

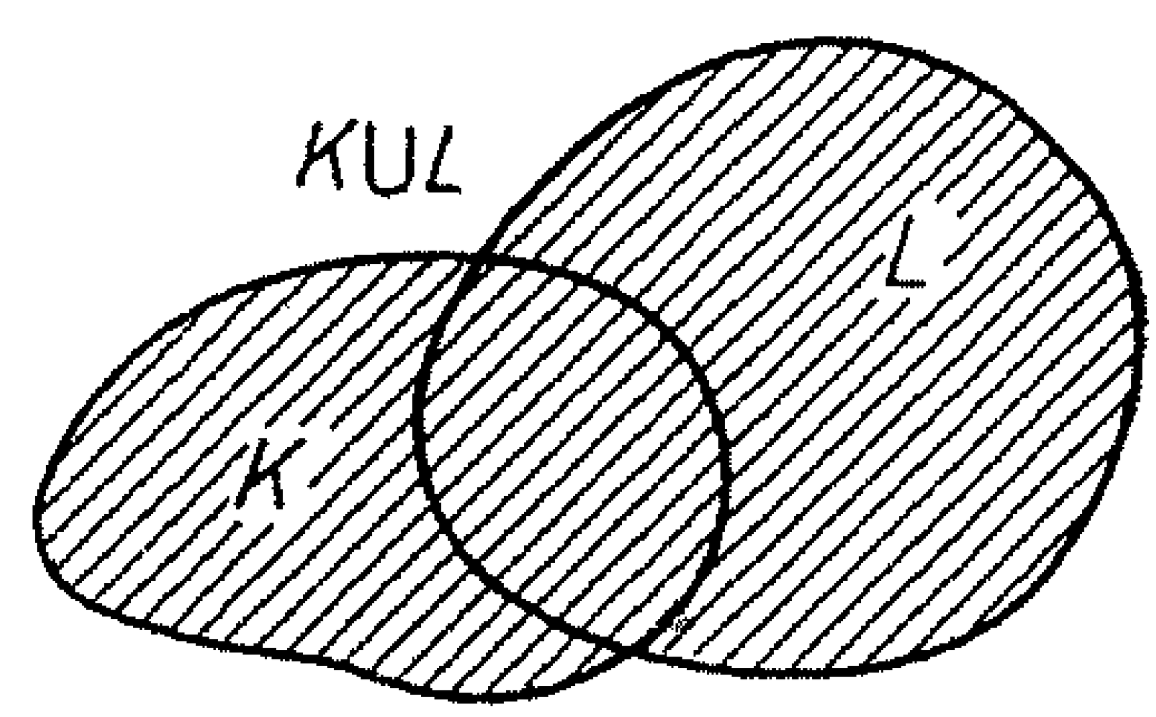
$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

ja poollõigud

$$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}, \qquad (a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}.$$



Joon. 19.



Joon. 20.

Kui hulgas M on antud kaks alamhulka K ja L, siis nende lõikeks ehk ühisosaks nimetatakse alamhulka

$$K \cap L = \{x \mid x \in K \text{ ja } x \in L\}$$

(joon. 19), nende summaks ehk ühendiks alamhulka

$$K \cup L = \{x \mid x \in K \text{ või } x \in L\}$$

(joon. 20). Kui alamhulkadel K ja L pole ühiseid punkte, siis $K \cap L$ on nn. tühi hulk, mida tähistatakse $\varnothing$.

Olgu kahe hulga P ja Q puhul antud teatav eeskiri f, mis korraldab nende hulkade elemente kindlatesse paaridesse (x, y), kus $x \in P$ ja $y \in Q$, s. t. mis kõikide seda laadi paaride hulgas (viimast tähistatakse sümboliga $P \times Q$) eraldab välja teatava alamhulga F. Niisugusel juhul kõneldakse, et hulkade P ja Q vahel on korraldatud **vastavus** f (ehk relatsioon f) paaride hulgaga F. Kui $(x, y) \in F$, siis kõneldakse, et elemendid x ja y on vastavuses f; öeldakse ka lihtsalt, et elemendile x vastab element y. Meesisikute hulga P ja naisisikute hulga Q puhul on sellise vastavuse f näiteks abielu; F on siis abielupaaride hulk. Kui P on üliõpilaste hulk ja Q on kõrgemate õppeasutuste hulk, siis eeskirjaks f võib võtta immatrikulatsiooni. Sel korral F koosneb niisugustest paaridest (x, y), kus üliõpilane x õpib õppeasutuses y.

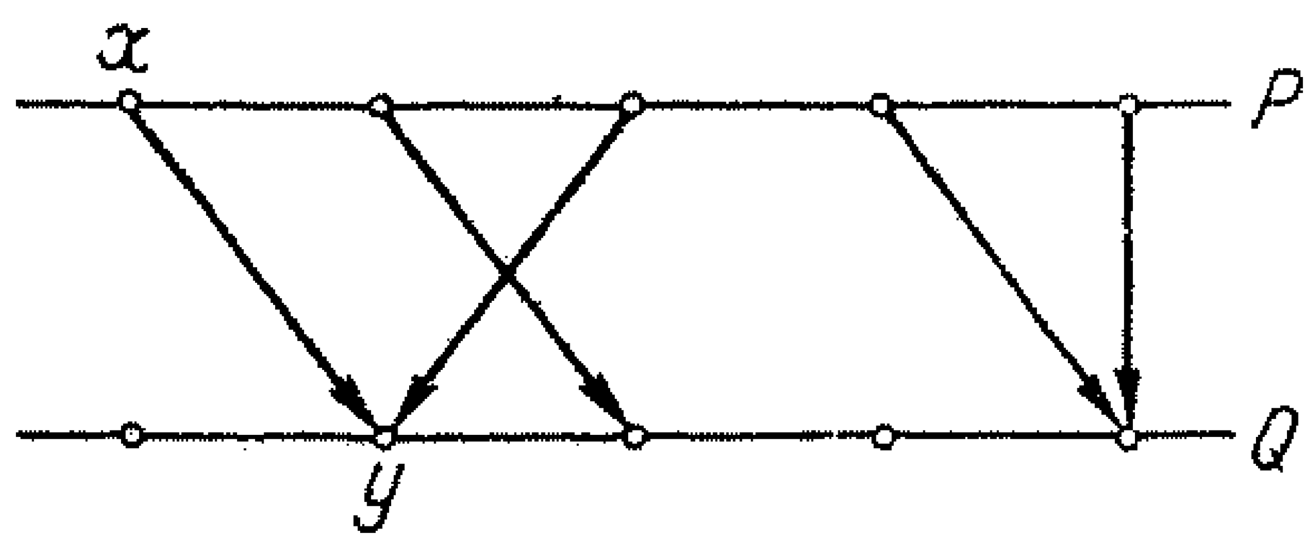
Kui hulga P igale elemendile x vastab parajasti üks element y hulgas Q, siis kõneldakse, et hulk P on kujutatud hulka Q. Vastavust f nimetatakse siis **kujutuseks** (ka funktsiooniks) ja tähistatakse $f: P \to Q$. Kui sel puhul $(x, y) \in F$, siis elementi y nimetatakse kujutiseks ja tähistatakse $y = f(x)$; elementi x nimetatakse tema originaaliks. Märgime, et Q iga element y ei tarvitse omada originaali, seejuures mõnel võib neid olla rohkem kui üks (vt. joon. 21 ja joon. 22; viimasel P on ringjoon, Q on sirglõik ja $f: P \to Q$ on ristprojektsioon lõigule Q).

Eristatakse kahesuguseid kujutusi. Kui hulga Q igal elemendil y on vähemalt üks originaal, siis kõneldakse, et f kujutab P hulgale Q; öeldakse ka, et f on pealekujutus (joon. 23 ja 24; viimasel Q on ringjoone P diameeter). Kui hulga P iga elemendi x kujutisel $f(x)$ on ainult üks originaal, siis kujutust nimetatakse üksüheseks; kõneldakse ka 1 : 1-kujutusest (joon. 25 ja 26).

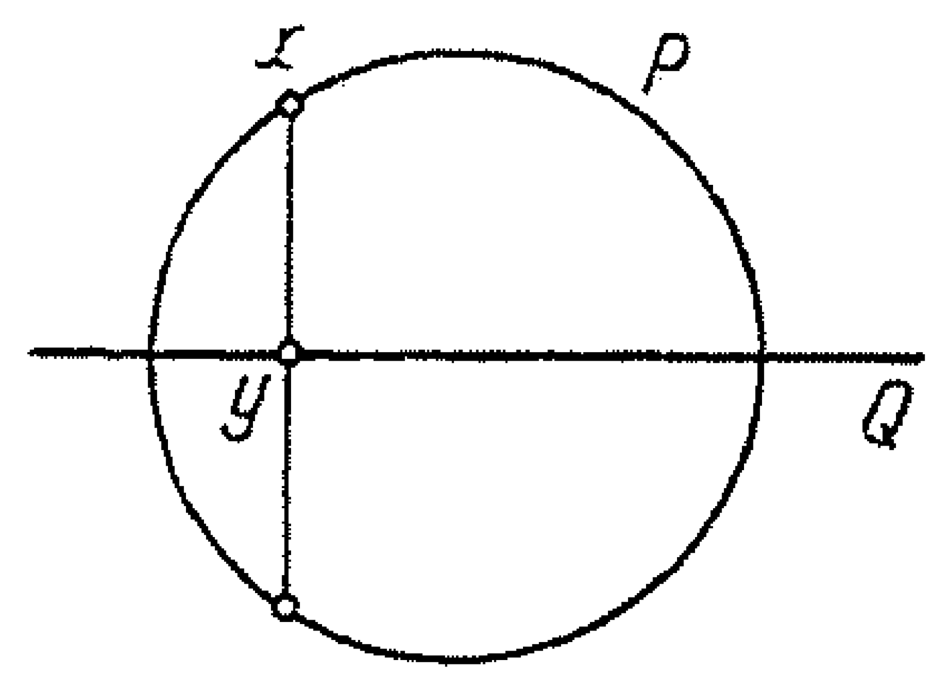
Oletame, et kahe hulga P ja Q puhul on võimalik korraldada hulga P 1 : 1-kujutus hulgale Q (joon. 27). Sel korral Q igal elemendil on parajasti üks originaal hulgas P, mistõttu on määratud ka, vastupidi, hulga Q 1 : 1-kujutus hulgale P — esialgse 1 : 1-kujutuse nn. pöördkujutus. Hulki P ja Q nimetatakse sel puhul **ekvivalentseteks**.

Hulki, milledes on lõplik arv elemente, nimetatakse lõplikeks hulkadeks, kõiki teisi hulki — lõpmatuteks hulkadeks. Kui lõplik hulk koosneb elementidest $a_1, \ldots, a_n$, siis teda tähistatakse sageli sümboliga $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Lõplike hulkade ekvivalentsus tähendab lihtsalt seda, et neil on ühepalju elemente. Ka ekvivalentsete lõpmatute hulkade puhul võib kujutleda, et neil on «ühepalju elemente», kuigi neid elemente pole võimalik ükshaaval ära lugeda.

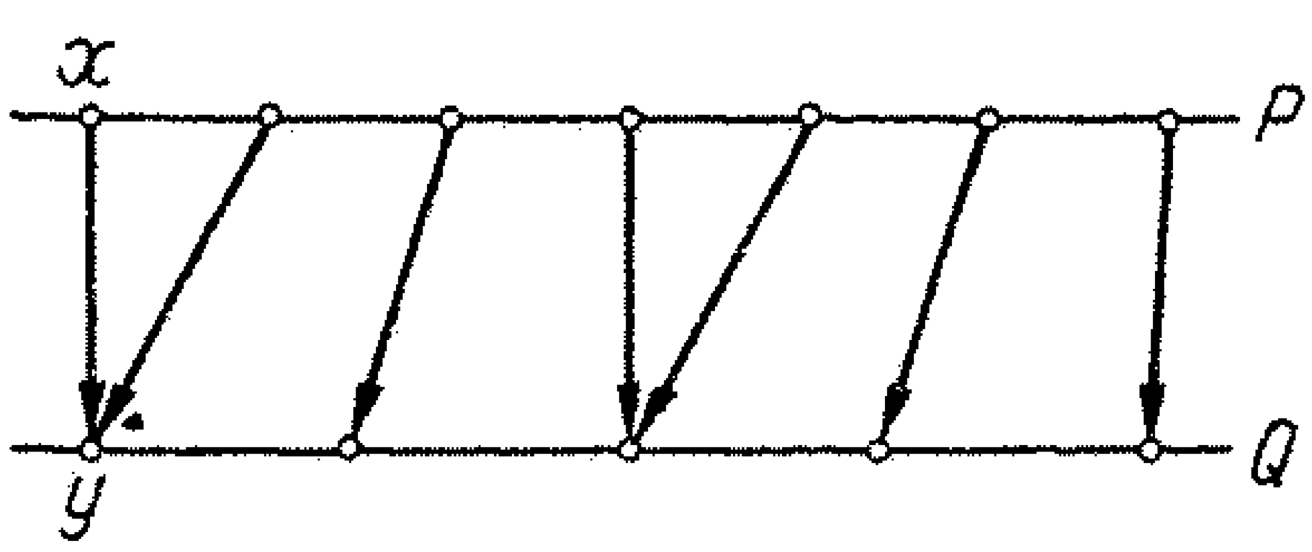
Hulgad P ja Q võivad erijuhul ühtida. Nii võib vaadelda hulga P kujutust iseendasse $f: P \to P$. Kui hulgaks P on tasand, siis sellise kujutuse näiteks on tasandi punktide projekteerimine mingile sirgele sellel tasandil. Eriliigi moodustavad siin 1 : 1-pealekujutused. Hulga P 1 : 1-pealekujutust $f: P \to P$ iseendale nimetatakse hulga P **teisenduseks**. Näiteks tasandi pööre mingi punkti ümber on teisendus. Märgime, et lõpliku hulga teisendust nimetatakse ka substitutsiooniks.



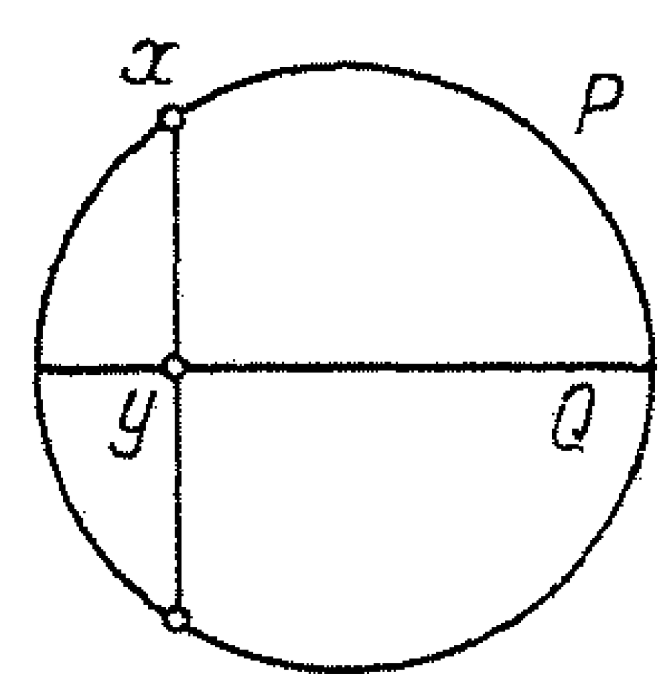
Joon 21



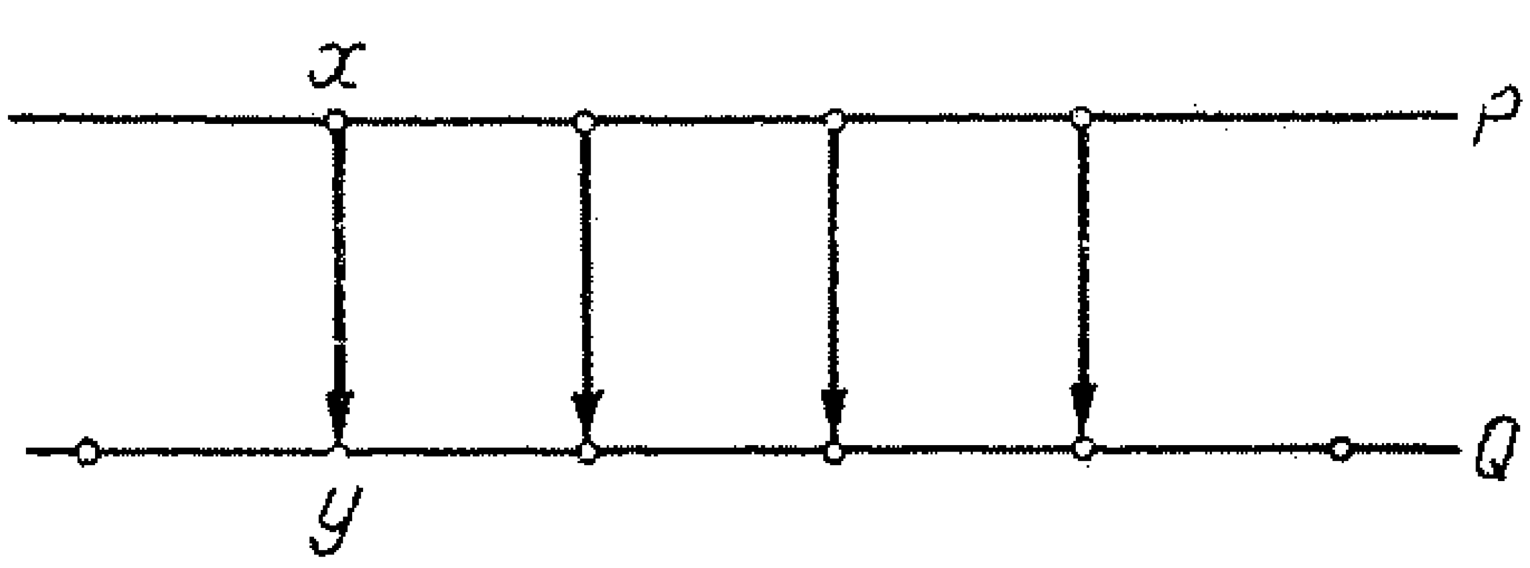
Joon 22



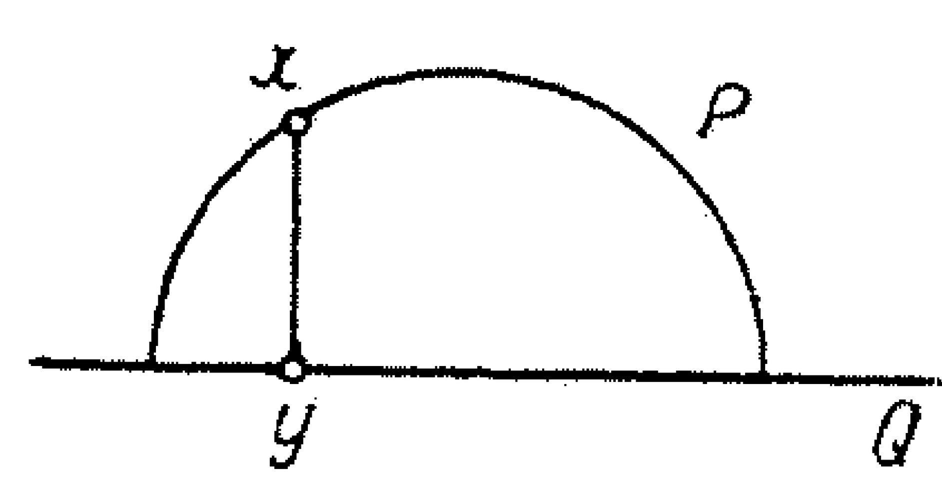
Joon 23



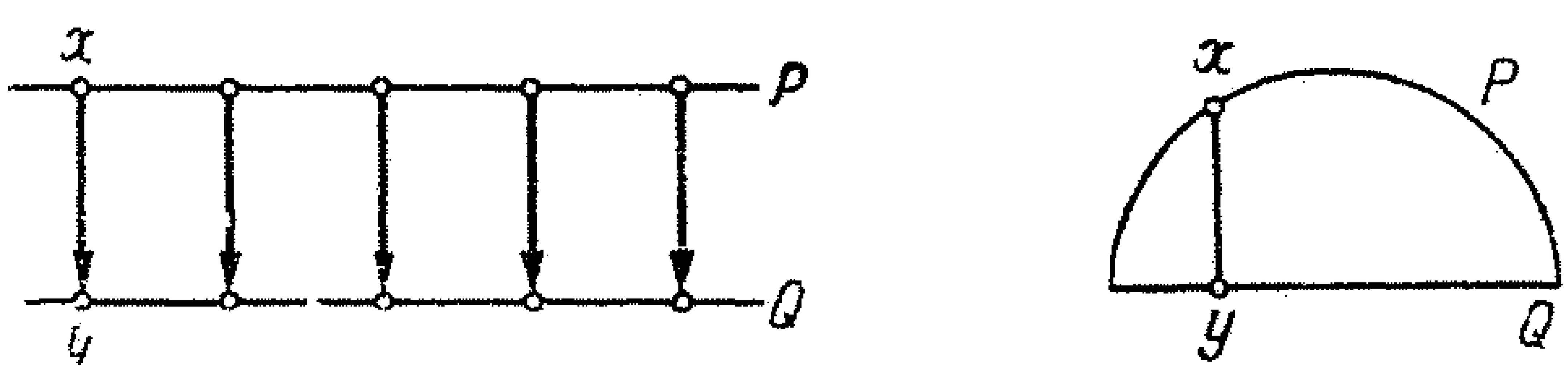
Joon 24



Joon 25



Joon 26



Joon 27

§ 2. VEKTORITE LINEAARALGEBRA

Geomeetria käsitlemine vektorite abil tugineb mõningatele lihtsatele aksioomidele, mis võtavad kokku eelmises paragrahvis tehtud tähelepanekud ja seavad nad kogu järgneva loogiliste järelduste süsteemi lähtekohaks. Käsitlus algab seetõttu aksioomide sõnastamisega. Esimesena tuletatakse aksioomidest vektorite lineaaralgebra — defineeritakse vektorite liitmine ja vektori korrutamine arvuga, uuritakse neid tehteid ja nende vastastikuseid omadusi. Alles pärast seda on võimalik defineerida niisugused geomeetria põhilise tähtsusega mõisted nagu sirge, tasand ja ruum ning tõestada nende kõige olulisemad omadused.

9. Algmõisted ja aksioomid. Teooria deduktiivsel ülesehitamisel — s. t. korrastamisel loogiliste järelduste süsteemiks, kus iga uus mõiste defineeritakse eelnevaist lähtudes ja iga uus lause tõestatakse eelnevatele tuginedes — on erilise tähtsusega süsteemi lähtekoht. On ju selge, et deduktiivset käsitlust ei saa alustada tühjalt kohalt. Tuleb anda teatavad algmõisted, mis jäävad selles teoorias defineerimata, ja alglaused ehk aksioomid, mida selles teoorias ei tõestata, vaid lihtsalt võetakse teatavaks.

Käesolevas raamatus arendatavale teooriale omasteks algmõisteteks on «punkt» ja «vektor», mis lähevad käiku esimestest sammudest alates. Art-s 12 lisandub neile matemaatilisest analüüsist ülevõetav mõiste «reaalarv». Formaalselt võttes piisab niisiis, kui eeldada ainult seda, et on olemas kolm hulka. Lepitakse kokku nimetada esimese hulga elemente punktideks ja tähistada edaspidi suurte ladina tähtedega tähestiku algus- ja lõpuosast: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$. Teise elemente nimetame vektoriteks ja tähistame poolpaksult trükitud väikeste ladina tähtedega: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$. Kolmandaks hulgaks on reaalarvude hulk; reaalarve tähistavad edaspidi väikesed kreeka või ladina tähed. Vajaduse korral kasutame tähistuste juures indekseid. Nii kirjutame näiteks x_1, x_2, x_3, mõistes nende all kolme eri sümbolit, mis tähistavad kolme reaalarvu. Kahe esimese hulga elementide — punktide ja vektorite kohta pole meil vaja teada muud kui seda, mis on kirja pandud allpool toodud aksioomides.[8] Reaalarvude puhul, vastupidi, eeldame, et on olemas reaalarvude teooria, mida me ilma pikemata võime kasutada.[9]

---

[8] Aksioome võib seega üheskoos vaadelda kui nõuete süsteemi, mis määravad mõisted «punkt» ja «vektor» meile vajalikus mahus, nad annavad niisiis nende mõistete kaudse definitsiooni.

[9] Reaalarvude teooria range ülesehitus on antud näiteks raamatus G. K a n g r o, Matemaatiline analüüs. I osa. Tallinn, 1965, § 1.

Selline on formaalne vaatekoht. Sisuliselt on muidugi ka algmõisted «punkt» ja «vektor» seotud teatavate ettekujutustega. Viimaste kujundamiseks oligi mõeldud kogu eelnev paragrahv. Nii võib punkti kujutleda kriipsukesena ülipikal peenel vardal, täpina ülisuurel plaadil või kaduvväikese osakesena ülisuurest kehast, vektorit aga varda, plaadi või keha lükkena. Kindlasti tuleb edaspidi silmas pidada, et kujutlustega seotud asjaolud ei tohi mingil juhul saada argumentideks väidete tõestamisel. Tõestuste esitamisel tohib tugineda ainult aksioomidele või nendele järeldustele, mis aksioomidest juba tehtud.

Ainult sel viisil on lootust saada loogiliselt laitmatu teooria, mis on rakendatav ka valdkondades, kuhu meie kujutlus seni võib-olla veel ei küüni. See ei tähenda muidugi, et kujutlustest tuleb täielikult loobuda. Tegelikult juhib uurija mõtet alati intuitsioon, mis aitab ette näha uusi tulemusi ning püstitada hüpoteese. Ka käesolevas raamatus esitatavaid mõisteid ja tuletuskäike peab lugeja alati tõlgendama olemasolevate kujutluste abil, neid samm-sammult avardades. Asi on lihtsalt selles, et mõttekäikude analüüs peab jõudma lõpuks alati tasemele, kus valitseb ainult range loogika.

Selline viis arendada deduktsiooni ja intuitsiooni käsikäes — esimest teooria rangel ülesehitamisel (tõestuste juures), teist tulemuste ennustamisel ja tõlgendamisel — on iseloomulik kogu kaasaja täppisteadusele. Eelised on suured: kui teooria on ehitatud üles täiesti omaette, ühtki konkreetset tõlgendust silmas pidamata, siis on ta ilma pikemata rakendatav kõikvõimalike tõlgenduste puhul — teooria rakendusala on siis ülimalt avar.

Aksioomideks, mis seovad algmõisteid «punkt» ja «vektor», võtame need tähelepanekud, mis on vormistatud eespool (§ 1), üldistades ja täiendades neid vajalikul viisil. Üks oluline täiendus käib punktide hulga kohta. Kui me ehitame teooria üles täiesti formaalselt, siis me ei tohi vaadeldavate hulkade kohta eeldada midagi rohkemat kui seda, mis on öeldud aksioomides. Viimastes tuleb seega öelda kõik vajalik, ka näiteks see, et punktide hulk (piltlikult öeldes «anum», millest me võtame «punkte») ei tohi olla tühi. Selle nõude seamegi esimeseks aksioomiks **A1**. Järgmised kaks aksioomi **A2** ja **A3** fikseerivad neid tõsiasju, mis on eespool art-s 1 sõnastatud tähelepanekutena **a1** ja **a2**.

A1. *Eksisteerib vähemalt üks punkt.*

A2. *Igale kahele kindlas järjekorras võetud punktile A ja B on vastavusse seatud parajasti üks vektor* ***a***.

A3. *Iga punkti A ja iga vektori* ***a*** *korral eksisteerib parajasti üks punkt B, nii et punktidele A ja B vastab vektor* ***a***.

Punktidele A ja B aksioomi **A2** põhjal vastavat vektorit tähistatakse ka $\overrightarrow{AB}$ ja nimetatakse vektoriks alguspunktiga A ja lõpppunktiga B. Aksioomi **A3** kasutamist nimetatakse sageli vektori $\boldsymbol{a}$ rakendamiseks punktis A. Antud vektorit $\boldsymbol{a}$ võib selle aksioomi põhjal rakendada igas punktis A, alati leidub parajasti üks punkt B, nii et vektorid $\boldsymbol{a}$ ja $\overrightarrow{AB}$ ühtivad. Viimast asjaolu tähistatakse kirjutisega $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ (ka edaspidi tähendab võrdusmärk vektorite puhul lihtsalt vektorite ühtimist). Vektori $\boldsymbol{a}$ alguspunktiks võib seega olla iga punkt, kuid antud alguspunkti A korral on lõpppunkt B juba üheselt määratud. Siit nähtub, et vektorid võivad ühtida ka siis, kui neil on erinevad algus- ja lõpp-punktid. Sellisel juhul peab aga rahuldatud olema järgmine, nn. rööpküliku aksioom (vt. **a3**):

A4. *Kui* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, *siis* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Asume nüüd lihtsaimale järelduste tegemisele aksioomidest. Aksioom **A1** nõuab, et eksisteeriks vähemalt üks punkt. Kuidas on aga lugu vektoritega? Osutub, et nüüd on vähemalt ühe vektori olemasolu järeldatav aksioomidest **A1** ja **A2**. Tõepoolest, aksioomis **A2** pole nõutud, et punktid A ja B peaksid olema erinevad. Kui eksisteeriks ka ainult üks punkt A, ikkagi oleks **A2** põhjal olemas vektor $\overrightarrow{AA}$. Huvitav on see, et niisugune võimalus, kus eksisteerib ainult üks punkt A ja ainult üks vektor $\overrightarrow{AA}$, on aksioomide **A1**—**A4** poolt täiesti lubatav: lihtne on kontrollida, et ka aksioomid **A3** ja **A4** on siis rahuldatud. Üldiselt kehtib järgmine teoreem.

***Teoreem* 9.1.** *Punktide hulk ja vektorite hulk on ekvivalentsed hulgad.*

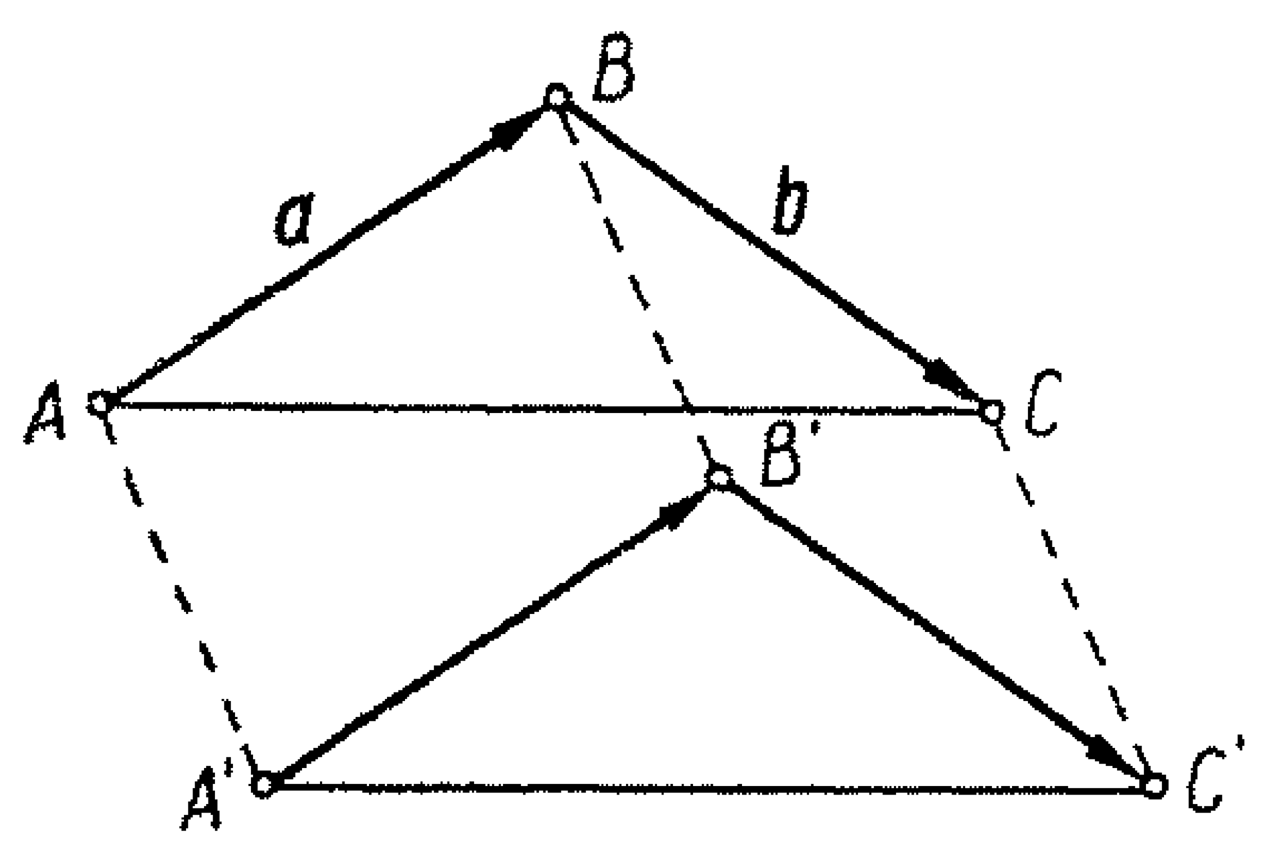
T õ e s t u s. Fikseerime punktide hulgas vabalt teatava punkti O (selline eksisteerib **A1** põhjal). Igale punktile X vastab siis **A2** põhjal parajasti üks vektor $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX}$, s. t. on määratud punktide hulga kujutus vektorite hulka. Seejuures on **A3** põhjal iga vektori $\boldsymbol{x}$ puhul olemas parajasti üks punkt X, nii et $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX}$. Järelikult on tegemist punktide hulga 1 : 1-kujutusega vektorite hulgale ning need hulgad on tõepoolest ekvivalentsed. ∎

***Def.* 9.1.** Vektorit $\boldsymbol{x} = \overleftarrow{OX}$, kus O on fikseeritud punkt, nimetatakse punkti X k o h a v e k t o r i k s alguspunktiga O.

Kujutus, mis korraldab teoreemiga 9.1 kindlakstehtud ekvivalentsuse punktide hulga ja vektorite hulga vahel, seab igale punktile vastavusse tema kohavektori vabalt fikseeritud alguspunktiga O. Kohavektori muutumist alguspunkti vahetamise korral saab kirjeldada järgmises artiklis defineeritava mõiste abil.

10. Vektorite liitmine. Aksioomid **A1**—**A4** võimaldavad defineerida vektorite liitmise tehte, mis üldistab kahe lükke, jõu või kiiruse resultandi moodustamise võtet.

Olgu antud kaks vektorit $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$. Valime vabalt punkti A (selline eksisteerib aksioomi **A1** põhjal). On olemas parajasti üks punkt B, nii et $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, ja parajasti üks punkt C, nii et $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$ (aksioom **A3**). Tekib vektor $\overrightarrow{AC}$ (aksioom **A2**). Osutub, et see vektor ei sõltu punkti A valikust ja on seetõttu määratud üksnes vektoritega $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$. Tõepoolest, kordame sama mõttekäiku teisiti valitud punkti A' korral (joon. 28): leiduvad B' ja C', nii et $\overrightarrow{A'B'} = \boldsymbol{a}$ ja $\overrightarrow{B'C'} = \boldsymbol{b}$. Sel puhul aga $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ ning aksioomi **A4** põhjal $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$; täpselt samuti $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$ ning järelikult $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$. Siit järeldame, et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$, ning aksioomi **A4** rakendamine annabki soovitud tulemuse: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.



Joon. 28.

***Def.* 10.1.** Olgu antud kaks vektorit $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ ning olgu vabalt võetud punkti A korral $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$ ja $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$; siis vektorit $\overrightarrow{AC}$ (mis, nagu selgus, ei sõltu A valikust) nimetatakse vektorite $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ *summaks* ning tähistatakse $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Seega siis

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Summa leidmist nimetatakse vektorite *liitmiseks*.

Võib anda järgmise formaalse reegli: üleminekuks summale $\overrightarrow{AC}$ tuleb kirjutises $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ kustutada keskmised korduva punkti tähised koos vahepealse plussmärgiga.

Vektorite summa mõiste abil on võimalik selgitada punkti kohavektori muutumist alguspunkti vahetamisel. Olgu antud kaks alguspunkti O ja O'; punkti X kohavektoreiks nende puhul on siis vektorid $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX}$ ja $\boldsymbol{x}' = \overrightarrow{O'X}$. Vektorite summa definitsiooni kohaselt

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'X}.$$

Järelikult saab näidata järgmise teoreemi kehtivust.

Teoreem 10.1. *Üleminekul ühelt alguspunktilt O teisele alguspunktile O′ muutuvad kõikide punktide kohavektorid ühe ja sama vektori* $\overrightarrow{OO'}$ *võrra: kui* $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{OX}$, $\boldsymbol{x}'=\overrightarrow{O'X}$ *ja* $\overrightarrow{OO'}=\boldsymbol{a}$, *siis*

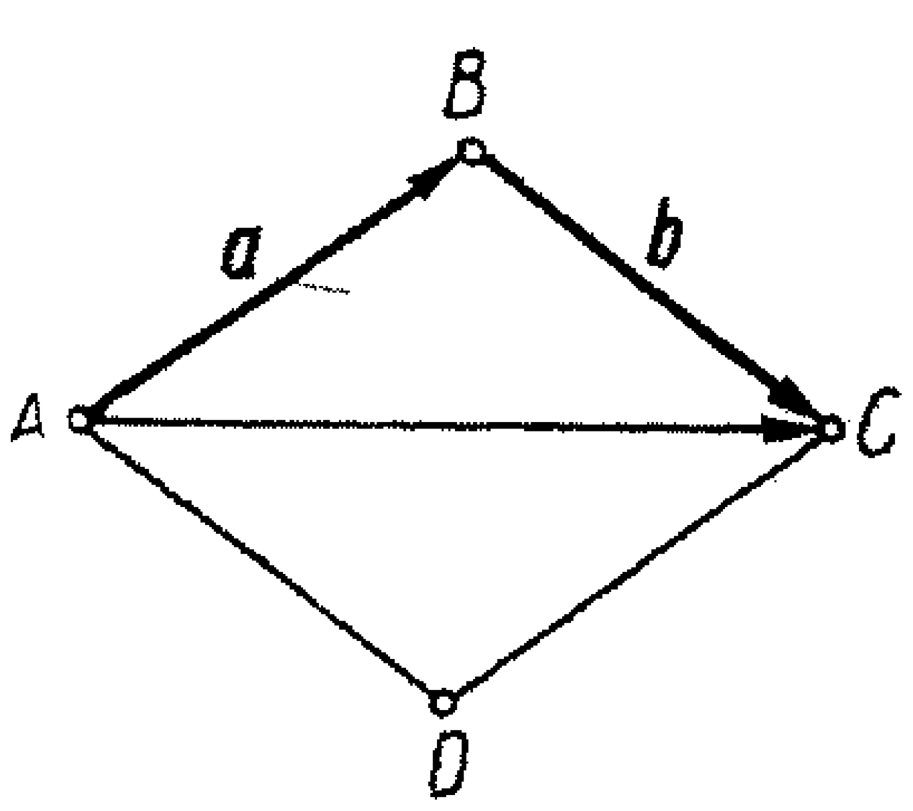
$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{a}.$$

Aksioomid **A1—A4** võimaldavad tõestada, et vektorite liitmisel on samad omadused mis tavalisel arvude liitmisel. See asjaolu õieti õigustabki siin nimetuse «liitmine» kasutamist. Nendest aksioomidest saab nimelt järeldada sellised laused.

Teoreem 10.2. *Vektorite liitmine on kommutatiivne:*

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

Tõestus (joon. 29). Olgu vabalt valitud punkti A korral $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ ja $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$; siis $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$. Aksioomi **A3** põhjal on olemas punkt D, nii et $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. Osutub, et siis parajasti $\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{a}$. Tõepoolest, vektor $\boldsymbol{b}$ esineb meil kahes võrduses, mistõttu $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$; aksioomi **A4** põhjal siit $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ning samal ajal $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$. Niisiis selgub, et



Joon 29

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \quad \blacksquare$$

Teoreem 10.3. *Vektorite liitmine on assotsiatiivne:*

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

Tõestus. Olgu vabalt valitud punkti A korral $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ ja $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$; siis $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$. On olemas D, nii et $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CD}$ (aksioom **A3**); siis $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$. Teiselt poolt $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}$, mistõttu $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$. ∎

Defineerime kolme vektori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ summa $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ järgmiselt:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}.$$

Liitmise kommutatiivsuse tõttu

$$a+b+c=(a+b)+c=(b+a)+c=b+a+c;$$

liitmise assotsiatiivsuse lisamine annab:

$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)=a+(c+b)=(a+c)+b=\\=a+c+b.$$

Järelikult $a+b+c$ ei muutu kahe kõrvutiseisva liidetava omavahelise ümberpaigutuse ehk transpositsiooni korral. Lihtne on veenduda, et transpositsioonide korduv järjest rakendamine võimaldab saada a, b, c iga ümberpaigutuse ehk permutatsiooni, järelikult summa $a+b+c$ ei muutu liidetavate ühegi permutatsiooni korral — ta on sümmeetriline avaldis.

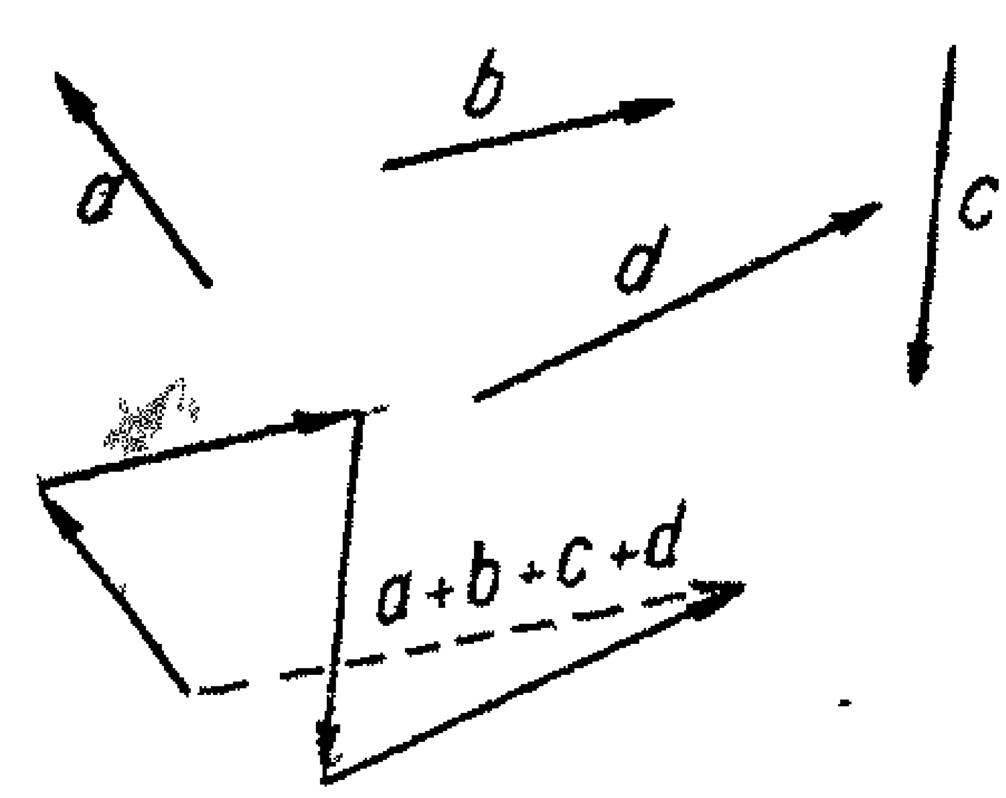
Nelja vektori a, b, c, d summaks nimetatakse vektorit (joon. 30)

$$a+b+c+d=(a+b+c)+d.$$

Üldiselt n vektori $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ summaks nimetatakse vektorit

$$a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n=(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})+a_n.$$

Siin on näide nn. rekurrentsest definitsioonist: mõiste antakse algul n mingil algväärtusel ja siis näidatakse, kuidas väärtuselt $n-1$ üle minna järgmisele väärtusele n. Osutub, et n vektori summa on sümmeetriline avaldis ka iga $n > 3$ korral: ta ei muutu liidetavate ühegi permutatsiooni korral.



Joon. 30.

Väite põhjendust tutvustame siin $n=4$ korral.[10] Definitsioonide ning liitmise kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse põhjal

$$a+b+c+d=((a+b)+c)+d=(a+b)+(c+d)=\\=(a+b)+(d+c)=\\=((a+b)+d)+c=a+b+d+c.$$

[10] Üldjuhul on võimalik analoogilise mõttekäiguga minna $n-1$ liidetavalt üle n liidetavale ja sel teel matemaatilise induktsiooni meetodiga anda täiesti üldine tõestus.

Järelikult võib omavahel ümber paigutada kaks viimast liidetavat. Samal ajal on $a+b+c+d$ definitsiooni ja kolme vektori summa omaduse põhjal sümmeetriline oma kolme esimese liidetava iga permutatsiooni suhtes. Sellised permutatsioonid ja kahe viimase liidetava transpositsioon võimaldavad aga saada nelja liidetava iga permutatsiooni.

Kui $a_1=\overrightarrow{A_0A_1}$, $a_2=\overrightarrow{A_1A_2}$, $\ldots$, $a_n=\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$, siis ilmselt a_1+ $+a_2+\ldots+a_n=\overrightarrow{A_0A_n}$. Näitlikult kõneldes, vektorite summa on vektoreid esindavatest nooltest moodustatud murdjoont sulgev vektor (joon. 30). See tähelepanek võimaldab kergesti põhjendada valemit

$$(a_1+\ldots+a_m)+(a_{m+1}+\ldots+a_n)=a_1+\ldots+a_n.$$

Tõepoolest, et $a_1+\ldots+a_m=\overrightarrow{A_0A_m}$, $a_{m+1}+\ldots+a_n=\overrightarrow{A_mA_n}$, siis

$$(a_1+\ldots+a_m)+(a_{m+1}+\ldots+a_n)=\overrightarrow{A_0A_m}+\overrightarrow{A_mA_n}=\overrightarrow{A_0A_n}.$$

Omadust, mida väljendab tõestatud valem, nimetatakse summa jaotuvuseks. Selle erijuhuks on liitmise assotsiatiivsuse omadus.

11. Nullvektor, vastandvektor ja vektorite vahe. Analoogia arvude liitmise ja vektorite liitmise vahel ulatub kaugemalegi: on olemas arvule 0 analoogiline vektor — nullvektor, mille liitmine ükskõik missugusele vektorile a ei muuda seda; samuti on iga vektori a jaoks olemas tema vastandvektor, mille liitmine vektorile a annab nullvektori.

Nullvektori saamiseks tuleb aksioomis **A2** võtta $A=B$; tekib vektor $\overrightarrow{AA}$. Osutub, et iga kahe punkti A ja C korral $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{CC}$. Tõepoolest, see võrdus on aksioomi **A4** põhjal vahetuks järelduseks ilmselt kehtivast (õigemini küll aksioomist **A2** tulenevast) võrdusest $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$.

***Def.* 11.1.** Vektorit $\overrightarrow{AA}$ (mis, nagu selgus, ei sõltu A valikust) nimetatakse n u l l v e k t o r i k s ja tähistatakse **0**.

***Teoreem* 11.1.** *Iga vektori* a *korral*

$$a+\mathbf{0}=a.$$

T õ e s t u s. Kui vabalt võetud punkti A korral $\overrightarrow{AC}=a$, siis $a+\mathbf{0}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC}=\overrightarrow{AC}=a$. ∎

Vektori $\boldsymbol{a}$ vastandvektori saamiseks võtame vabalt punkti A; olgu $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$. Sel korral eksisteerib aksioomi **A2** põhjal vektor $\overrightarrow{BA}$. Osutub, et see vektor sõltub üksnes vektorist $\boldsymbol{a}$, mitte aga punkti A valikust. Tõepoolest, kui $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, siis aksioomi **A4** põhjal $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ ehk $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'}$ ja siin veel kord aksioomi **A4** rakendades leiamegi, et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$.

Def. **11.2.** Olgu antud vektori $\boldsymbol{a}$ ja vabalt võetud punkti A korral $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$; siis vektorit $\overrightarrow{BA}$ (mis, nagu selgus, ei sõltu A valikust) nimetatakse $\boldsymbol{a}$ v a s t a n d v e k t o r i k s ja tähistatakse $-\boldsymbol{a}$.

Teoreem **11.2.** *Iga vektori* $\boldsymbol{a}$ *korral*

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0};$$

seejuures $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{a}$ *on võrrandi* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ *ainsaks lahendiks.*

T õ e s t u s. Kui $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, siis $-\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BA}$ ning tõepoolest $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \boldsymbol{0}$. Kui $\boldsymbol{x}$ on võrrandi $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ lahendiks, siis $(-\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{0}$ ehk $[(-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}] + \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{a}$. Siin vasakul pool liitmise kommutatiivsuse põhjal $\boldsymbol{x} + [\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a})] = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$, nii et tõepoolest $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{a}$. ∎

Nende tulemustega ilmnenud analoogia vektorite liitmise ja arvude liitmise vahel viib kahe vektori lahutamistehte järgmise definitsioonini.

Def. **11.3.** Vektori $\boldsymbol{b}$ l a h u t a m i s e k s vektorist $\boldsymbol{a}$ nimetatakse sellise vektori $\boldsymbol{x}$ leidmist, mille korral

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}.$$

Vektorit $\boldsymbol{x}$ nimetatakse sel puhul $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ v a h e k s ja tähistatakse $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

Teoreem **11.3.** *Iga kahe vektori* $\boldsymbol{a}$ *ja* $\boldsymbol{b}$ *korral on olemas parajasti üks vahe* $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, *selleks on nimelt summa* $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$.

T õ e s t u s. Näitame kõigepealt, et $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$ tõesti rahuldab definitsioonis antud võrrandit:

$$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$$

(siin kasutasime vektorite liitmise assotsiatiivsust ja kommutatiivsust ning eelmist kaht teoreemi). Seejuures teistsuguseid lahendeid sellel võrrandil olla ei saa, sest kui me liidame võrrandi pooltele vektori $(-\boldsymbol{b})$, on tulemuseks

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x})+(-\boldsymbol{b});$$

siin paremal pool saame aga tuttaval viisil just lahendi $\boldsymbol{x}$. Tähendab $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ on ainus lahend, mistõttu tõepoolest

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}). \blacksquare$$

Erijuhuna saame siit:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

Teoreem **11.4.** *Iga kahe punkti A ja B korral*

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},$$

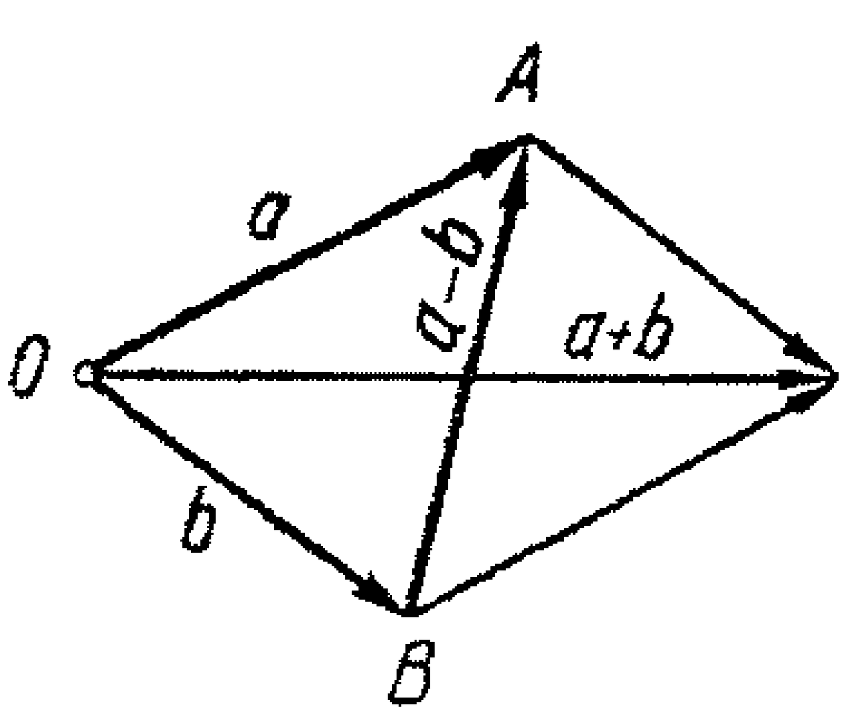
kus $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ ja $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$ *on punktide A ja B kohavektorid vabalt võetud alguspunkti O korral.*

Tõestus. Et

$$\boldsymbol{a}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},$$

siis $\overrightarrow{AB}$ on võrrandi $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}$ lahend, seega tõesti $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. $\blacksquare$

Vahetades A ja B kohad, saame siit ühtlasi järgmise reegli: kui vektorid $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ on rakendatud samas punktis O, siis $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ on vektor, mis ühendab $\boldsymbol{b}$ (lahutatava) lõpp-punkti $\boldsymbol{a}$ (vähendatava) lõpp-punktiga. Jooniselt 31 nähtub, et kui $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ ühendab ühe diagonaali otspunkte vektoritega $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ ning punktiga O määratud rööpkülikus, siis $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ ühendab sama rööpküliku teise diagonaali otspunkte.



Joon. 31.

12. Vektori korrutamine reaalarvuga.

Aksioomid **A1—A4** seovad mõisteid «punkt» ja «vektor», s. t. punktide hulga ja vektorite hulga elemente.

Esitame nüüd aksioomid, mis seovad vektoreid kolmanda analüütilise geomeetria käsitlemisel vajaliku hulga — reaalarvude hulga elementidega. Eeldame seejuures, nagu juba kokku lepitud (art. 9), et reaalarvude teooria on valmiskujul olemas. Aksioomide vormistamisel juhindume kordsete omadustest **b1—b3** või **b′1—b′3**, milledeni jõudsime art-tes 3 ja 4.

B1. *Igale paarile* $(\boldsymbol{a}, \lambda)$, *mis on moodustatud vektorist* $\boldsymbol{a}$ *ja reaalarvust* λ, *on seatud vastavusse parajasti üks vektor* $\boldsymbol{b}$ (mida nimetatakse $\boldsymbol{a}$ ja λ korrutiseks ning tähistatakse $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\lambda$).

B2. $a(\lambda+\mu)=a\lambda+a\mu$.

B3. $(a\lambda)\mu=a(\lambda\mu)$.

B4. $(a+b)\lambda=a\lambda+b\lambda$.

B5. $a1=a$.

Sellised on formaalsed nõuded. Korrutise $a\lambda$ tõlgendamisest ja nendest kujutlustest, mida tuleb seostada selle mõistega, oli juttu eespool art-s 4. Erinevus on selles, et seal oli korrutis kirjutatud kujul λa. Kuigi mõlemad kujud tuleb lugeda samaväärseteks, eelistame me siiski aksioomidega **B1**—**B5** defineeritud korrutise puhul kirjutist $a\lambda$. Ühtlasi saab art-st 4 selgeks, miks on loomulik seada nõuded **B2**—**B4**. Mõnevõrra iselaadi on aksioom **B5**, mis näiliselt ütleb väga vähe, tegelikult on aga teooria formaalsel ülesehitamisel äärmiselt oluline. Asjast tuleb aru saada nii, et kui elementide valikul «reaalarvude anumast» on juhuslikult satutud arvule 1, siis iga vektori a puhul tuleb paarile $(a, 1)$ vastavusse seada sama vektor a. Kuivõrd vajalik on aksioom **B5** mõistliku teooria saamiseks, selgub järgmisest lihtsast näitest. Seame igale paarile (a, λ) vastavusse nullvektori $\mathbf{0}$, s. t. loeme, et alati $a\lambda=\mathbf{0}$. Lihtne on veenduda, et aksioomid **B1**—**B4** on siis rahuldatud. Alles aksioomi **B5** lisamine teeb võimatuks niisuguse väheütleva olukorra.

Tänu aksioomile **B5** saab näidata, et kui reaalarv λ osutub naturaalarvuks n, siis korrutis $a\lambda$, mille määravad aksioomid **B1**—**B5**, ühtib art-s 3 uuritud kordsega $na=a+\ldots+a$. Tõepoolest, **B2** ja **B5** põhjal $a2=a(1+1)=a1+a1=a+a$, $a3=a(2+1)=a2+a1=(a+a)+a=a+a+a, \ldots,$ $an=a((n-1)+1)=a(n-1)+a1=(\underbrace{a+\ldots+a}_{n-1})+a=$ $=\underbrace{a+\ldots+a}_{n}$. Kui puuduks aksioom **B5**, siis avaldisest $a1+a1$ edasi minna ei oleks enam võimalik — aksioomid **B1**—**B4** ei anna selleks mingit alust.

Tegelikult haarab siin defineeritud korrutis $a\lambda$ endasse erijuhuna mitte üksnes lihtsa kordse na, vaid ka selle üldistuse $\frac{\alpha}{n}a$, kus α on vabalt võetud täisarv (art. 4). Selle tõestamiseks tuleb aksioomidest **B1**—**B5** teha eelnevalt mõningaid järeldusi.

Kui aksioomis **B2** võtta $\lambda=\nu-\mu$, on tulemuseks seos $a\nu=$ $=a(\nu-\mu)+a\mu$; järelikult kehtib valem

$$a(\nu-\mu)=a\nu-a\mu. \tag{12.1}$$

Siit $\nu = \mu$ puhul järeldub, et

$$a0 = 0, \tag{12.2}$$

$\nu = 0$ puhul aga valem

$$a(-\mu) = -a\mu. \tag{12.3}$$

Nüüd on võimalik tõestada järgmine lause.

***Teoreem* 12.1.** *Kui λ osutub ratsionaalarvuks $\frac{\alpha}{n}$, siis aksioomidega* **B1—B5** *määratud korrutis $a\lambda$ ühtib $\alpha = m$ korral vektori $b = a\frac{1}{n}$ m-kordsega, $\alpha = -m$ korral aga selle vastandvektoriga; seejuures $b = a\frac{1}{n}$ on defineeritav võrrandi $xn = a$ ainsa lahendina.*

Tõestus. Alustame viimasest väitest. Et $bn = \left(a\frac{1}{n}\right)n = a\left(n\frac{1}{n}\right) = a1 = a$, siis $b = a\frac{1}{n}$ on tõesti võrrandi $xn = a$ lahend, kusjuures ta on ainus lahend, sest kui $xn = a$, siis $(xn)\frac{1}{n} = a\frac{1}{n}$, vasakul on aga $(xn)\frac{1}{n} = x\left(n\frac{1}{n}\right) = x1 = x$, nii et $x = a\frac{1}{n}$. Edasi saame: $a\frac{m}{n} = a\left(\frac{1}{n}m\right) = \left(a\frac{1}{n}\right)m = bm$ ning $a\left(-\frac{m}{n}\right) = a\left(\frac{1}{n}(-m)\right) = \left(a\frac{1}{n}\right)(-m) = -\left(a\frac{1}{n}\right)m = -bm$. Siin tuli korduvalt kasutada aksioomi **B3**, üks kord aksioomi **B5** ning üks kord valemit (12.3). Jääb veel arvestada eespool kindlakstehtud asjaolu, et bm kujutab endast vektori b m-kordset. ∎

Teoreem 12.1 võimaldab korrutise $a\lambda$ tõlgendamisel kasutada art-tes 3 ja 4 arendatud kujutlusi.

Edaspidi on olulised ka mõningad aksioomist **B4** vahetult järelduvad seosed. Kui selles aksioomis võtta $a = c - b$, on tulemuseks seos $c\lambda = (c - b)\lambda + b\lambda$; järelikult kehtib valem

$$(c - b)\lambda = c\lambda - b\lambda. \tag{12.4}$$

Siit $c = b$ puhul järeldub, et

$$0\lambda = 0, \tag{12.5}$$

$c = 0$ puhul aga valem

$$(-b)\lambda = -b\lambda. \tag{12.6}$$

Nüüd on võimalik kontrollida järgmise teoreemi kehtivust.

Teoreem **12.2.** *Võrdus* $a\lambda = 0$ *leiab aset parajasti siis, kui kas* $\lambda = 0$ *või* $a = 0$.

Tõestus. Tingimuse tarvilikkus nähtub sellest, et võrduse $a\lambda=0$ kehtimise puhul ei saa korraga olla $\lambda\neq 0$ ja $a\neq 0$, sest siis oleks kord $(a\lambda)\frac{1}{\lambda}=0\frac{1}{\lambda}=0$, kord aga $(a\lambda)\frac{1}{\lambda}=a\left(\lambda\frac{1}{\lambda}\right)= a1 = a \neq 0$, mis on muidugi võimatu. Tingimuse piisavus on vahetu järeldus valemitest (12.2) ja (12.5). ∎

Teeme kokkuvõtte viimase kolme artikli 10, 11 ja 12 materjalist. Neis käsitletud kaht tehet — vektorite liitmist ja vektori korrutamist reaalarvuga — nimetatakse ühiselt lineaartehteteks. Nende tehete kohta käivat teooriat, mida me käsitlesime mainitud artiklites, nimetatakse vektorite lineaaralgebraks Me veendusime, et vektorite lineaaralgebra arvutusseadused on samasugused nagu reaalarvude algebra analoogilised eeskirjad. Seda üldist tähelepanekut on edaspidi kasulik silmas pidada töötamisel vektoritega. Järgnevalt rakendame vektorite lineaaralgebrat geomeetria kõige põhilisemate mõistete defineerimisel.

13. Sirge, tasandi ja ruumi definitsioonid. Eespool formuleeritud aksioomid **A1**—**A4** ja **B1**—**B4** võimaldavad tõlgendada punkte ja vektoreid mitmel viisil, kusjuures erinevused võivad ilmneda mitte üksnes näitliku sisu, vaid ka selliste formaalsete omaduste juures, mida need aksioomid veel ei puuduta. Art-s 9 me juba märkisime, et aksioomid **A1**—**A4** on rahuldatud näiteks üheainsa punkti A ja üheainsa vektori $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$ olemasolu korral. Kerge on veenduda, et sel juhul on rahuldatud ka aksioomid **B1**—**B5**. Tõepoolest, igale paarile $(\mathbf{0}, \lambda)$ saab siin vastavusse seada üksnes ainsa olemasoleva vektori $\mathbf{0}$. Aksioomide **B2**—**B5** kontrollimine ei valmista nüüd mingeid raskusi.

Arusaadavalt on edasise teooria huvides soovitatav, et sellist sisuvaest tõlgendust oleks võimalik kõrvale jätta. Seda on kerge teha täiendava nõudega, et eksisteeriks vähemalt üks nullist erinev vektor. Kuid ka sel puhul võib esineda mitmesuguseid olukordi, nagu näitavad võimalused tõlgendada vektoreid kas 1) varda lüketena, 2) plaadi lüketena või 3) keha lüketena. Art-s 5 tehtud analüüs selgitas, et erinevus kolme sellise võimaluse vahel ilmneb sõltumatute komponentide arvus, millede summana on esitatav iga vektor. Seal tehtud tähelepanekute $\mathbf{c}^{(1)}$—$\mathbf{c}^{(3)}$ järgi on varda puhul selliseid komponente üksainus, plaadi puhul kaks, keha puhul aga kolm.

Need kaalutlused juhivad meid järgmiste formaalsete võimaluste juurde.

$C^{(0)}$. *Eksisteerib ainult nullvektor* **0**.

$C^{(1)}$. *Eksisteerib selline vektor* $\mathbf{e}$, *nii et iga vektor* $\mathbf{x}$ *on avaldatav kujul* $\mathbf{x} = \mathbf{e}x$, *kusjuures võrdus* $\mathbf{e}x = \mathbf{0}$ *on võimalik ainult siis, kui* $x = 0$.

$C^{(2)}$. *Eksisteerivad sellised vektorid* $\mathbf{e}_1$ *ja* $\mathbf{e}_2$, *nii et iga vektor* $\mathbf{x}$ *on avaldatav kujul* $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1x_1 + \mathbf{e}_2x_2$, *kusjuures võrdus* $\mathbf{e}_1x_1 + \mathbf{e}_2x_2 = \mathbf{0}$ *on võimalik ainult siis, kui* $x_1 = x_2 = 0$.

$C^{(3)}$. *Eksisteerivad sellised vektorid* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ja $\mathbf{e}_3$, *nii et iga vektor* $\mathbf{x}$ *on avaldatav kujul* $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1x_1 + \mathbf{e}_2x_2 + \mathbf{e}_3x_3$, *kusjuures võrdus* $\mathbf{e}_1x_1 + \mathbf{e}_2x_2 + \mathbf{e}_3x_3 = \mathbf{0}$ *on võimalik ainult siis, kui* $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Igaüks neist võimalustest suleb välja ülejäänud kaks. Nii näiteks vektor $\mathbf{e}$ lauses $C^{(1)}$, vektorid $\mathbf{e}_1$ ja $\mathbf{e}_2$ lauses $C^{(2)}$ ning vektorid $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ja $\mathbf{e}_3$ lauses $C^{(3)}$ peavad olema kindlasti nullist erinevad, s. t. nende lausete puhul on $C^{(0)}$ võimatu. Tõepoolest, kui oleks näiteks $\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$, siis võrdus $\mathbf{e}_1x_1 + \mathbf{e}_2x_2 + \mathbf{e}_3x_3 = \mathbf{0}$ kehtiks ka $x_1 \neq 0$, $x_2 = x_3 = 0$ korral, mis on $C^{(3)}$ põhjal lubamatu. Samasuguselt tuleb arutleda $C^{(1)}$ ja $C^{(2)}$ korral. Korraga ei saa aset leida ka näiteks võimalused $C^{(1)}$ ja $C^{(2)}$. Tõepoolest, siis oleks $C^{(1)}$ põhjal $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}\lambda_1$ ja $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}\lambda_2$ ning järelikult oleks $\mathbf{e}_1x_1 + \mathbf{e}_2x_2 = \mathbf{e}(x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2)$. Võrdus $\mathbf{e}_1x_1 + \mathbf{e}_2x_2 = \mathbf{0}$ võiks kehtida ka siis, kui x_1 ja x_2 pole korraga nullid — piisaks nõuda, et $x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 = 0$. Samasugused arutlused näitaksid, et korraga ei saa aset leida $C^{(1)}$ ja $C^{(3)}$ ning $C^{(2)}$ ja $C^{(3)}$.

Igaüht lausetest $C^{(0)}$, $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ ja $C^{(3)}$ võib vaadelda aksioomina, mille lisamine aksioomidele **A1—A4** ja **B1—B5** annab teatava, juba kindlamalt piiritletud teooria. Aksioomi $C^{(0)}$ puhul on vastav «teooria» äärmiselt vaene: sel korral saab eksisteerida üksainus punkt ning selle ja üheainsa vektori **0** kohta ei saa ju tõepoolest midagi huvitavat öelda. Aksioomide $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ ja $C^{(3)}$ puhul on olukord teistsugune; nendele vastavad teooriad on sisukad ja pakuvad huvi rohkete rakenduste seisukohalt. Anname järgmised definitsioonid.

***Def.* 13.1.** Olgu rahuldatud aksioomid **A1—A4**, **B1—B5** ja $C^{(1)}$. Sel korral punktide hulka nimetatakse s i r g e k s, vektoreid aga selle sirge vektoreiks.

***Def.* 13.2.** Olgu rahuldatud aksioomid **A1—A4**, **B1—B5** ja $C^{(2)}$. Sel korral punktide hulka nimetatakse t a s a n d i k s, vektoreid aga selle tasandi vektoreiks.

***Def.* 13.3.** Olgu rahuldatud aksioomid **A1—A4**, **B1—B5** ja $C^{(3)}$. Sel korral punktide hulka nimetatakse r u u m i k s, vektoreid aga ruumi vektoreiks.

Nendes definitsioonides loetletud aksioomidega on antud kindel alus geomeetria rangeks käsitlemiseks sirgel, tasandil ja ruumis. Nagu näha, on need definitsioonid väga ühetaolised. Üldiselt võib sõnastada järgmise aksioomi.

$\mathbf{C}^{(n)}$ *Eksisteerivad sellised n vektorit* $e_1, \dots, e_n$, *nii et iga vektor* x *on avaldatav kujul* $x = e_1x_1 + \dots + e_nx_n$, *kusjuures võrdus* $x_1e_1 + \dots + x_ne_n = 0$ *on võimalik ainult siis, kui* $x_1 = \dots = x_n = 0$.

Analoogiliselt võib esitada sellise definitsiooni.

Def. **13.4.** Olgu rahuldatud aksioomide **A1—A4**, **B1—B5** ja $\mathbf{C}^{(n)}$ nõuded. Sel korral punktide hulka nimetatakse afiinseks[11] *n*-ruumiks, vektoreid aga selle *n*-ruumi vektoreiks.

Sirge, tasand ja ruum kujutavad endast vastavalt afiinset 1-, 2- ja 3-ruumi.

Selle definitsiooniga saab afiinse *n*-ruumi mõiste kindla sisu ka siis, kui $n > 3$. Niisugusel üldisel mõistel on vaartuslikke rakendusi nii matemaatikas endas, kui ka mitmetes muudes matemaatikat kasutavates teadusharudes, kuid tema lähem uurimine juhul, kui $n > 3$, ei mahu käesoleva raamatu raamidesse.[12]

See aga ei tähenda, et afiinse *n*-ruumi mõiste meil edaspidi kasutamist ei leia. Ta osutub vaartuslikuks neil juhtudel, kus tasandi ($n = 2$) ja ruumi ($n = 3$) omaduste käsitlemine on täiesti ühetaoline. Nii näiteks on juba aksioomid $\mathbf{C}^{(2)}$ ja $\mathbf{C}^{(3)}$ ise väga sarnased ning on kokkuvõetavad aksioomina $\mathbf{C}^{(n)}$ ($n = 2$ või $n = 3$). Viimases kasutatud märkide $, \dots ,$ ja $+ \dots +$ all tuleb niisiis siin ja ka edaspidi mõista $n = 2$ puhul lihtsalt märke $,$ ja $+$, $n = 3$ puhul aga kirjutisi, kus punktikolmiku asemel seisab äärmiste liikmetega samasugune liige, kuid indeksi väärtusel 2.

Lõpuks anname veel järgmise definitsiooni.

Def. **13.5.** Aksioomidest **A1—A4**, **B1—B5** ja $\mathbf{C}^{(n)}$ tulenevate järelduste süsteemi nimetatakse afiinse *n*-ruumi geomeetriaks.

Kui $n = 1$, $n = 2$ või $n = 3$, siis kõneldakse lihtsalt sirge, tasandi või ruumi afiinsest geomeetriast.

---

[11] Nimetuse «afiinne» (lad. k. *affinis* — lähedane, hõimlaslik) võttis 18. sajandil kasutusele L. Euler (1707—1783) geomeetria niisuguste mõistete ja vahekordade tähistamiseks, mis jäävad püsima pärast kujundite paralleelprojekteerimist ühelt tasandilt teisele. Hiljem see nimetus laienes ka geomeetria osale, milles uuritakse selliseid mõisteid ja vahekordi nii tasandil kui ruumis.

[12] Lugejale, kes on huvitatud afiinse *n*-ruumi üldisest teooriast ($n > 3$), võib soovitada raamatut Б. А. Розенфельд, Многомерные пространства. Москва, 1966.

§ 3. KOORDINAADID JA LINEAARNE SÕLTUVUS

Käesolev paragrahv on pühendatud analüütilise geomeetria kõige põhilisemale meetodile — koordinaatide meetodile, mis võimaldab punktide ja vektoritega tegelemise taandada opereerimisele reaalarvude aritmeetikas. Tuleb tundma õppida mitmeid uusi mõisteid, nagu näiteks vektorite lineaarne sõltuvus, avaldiste või seoste süsteemi invariantsus, orientatsioon sirgel, tasandil ja ruumis jm. Ent koordinaatide meetodi laialdased geomeetrilised rakendused algavad alles järgmistes peatükkides.

14. Koordinaadid. Afiinse n-ruumi ($n = 1$, 2 või 3; seega sirge, tasandi või ruumi) iga vektor $\boldsymbol{x}$ on aksioomi $\mathbf{C}^{(n)}$ järgi avaldatav kujul $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n x_n$, kus $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ on n-ruumi teatavad kindlad vektorid. Vastupidi, iga vektor, mis avaldub selliselt, on vaadeldava n-ruumi vektor, sest koos vektoritega $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ kuuluvad sellesse ruumi aksioomi **B1** põhjal ka vektorid $\boldsymbol{e}_1 x_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n x_n$, koos viimastega aksioomide **A1**—**A4** põhjal aga siis ka nende summa. Seega kehtib järgmine lause.

***Teoreem* 14.1.** *Afiinse n-ruumi vektorite hulk koosneb parajasti kõikidest vektoritest* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n x_n$, *kus* $x_1, \ldots, x_n$ *on n vabalt võetud reaalarvu ning* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ *on n-ruumi niisugused n vektorit, et võrdus* $\boldsymbol{e}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n x_n = \boldsymbol{0}$ *on võimalik ainult siis, kui* $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Sellest teoreemist järeldub, et igale n reaalarvust koosnevale järjestatud süsteemile $(x_1, \ldots, x_n)$ (seega $n = 1$ puhul igale arvule x_1, $n = 2$ puhul igale järjestatud paarile (x_1, x_2), $n = 3$ puhul igale järjestatud kolmikule (x_1, x_2, x_3)) vastab parajasti üks n-ruumi vektor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n x_n$. Et selles vastavuses võib kätte saada n-ruumi iga vektori $\boldsymbol{x}$, s. t. igal vektoril on vähemalt üks originaal $(x_1, \ldots, x_n)$, siis on tegemist teatava pealekujutusega (art. 8). Osutub, et see kujutus on tegelikult 1 : 1-pealekujutus, s. t. igal vektoril on parajasti üks originaal, mistõttu kehtib järgmine teoreem.

***Teoreem* 14.2.** *Afiinse n-ruumi vektorite* $\boldsymbol{x}$ *hulk on ekvivalentne n reaalarvust koosnevate järjestatud süsteemide* $(x_1, \ldots, x_n)$ *hulgaga.*

T õ e s t u s. Küllalt on näitamisest, et kui ühtivad vektorid $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n x_n$ ja $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 y_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n y_n$, siis ühtivad ka süsteemid $(x_1, \ldots, x_n)$ ja $(y_1, \ldots, y_n)$, milledele nad vastavad. Kui $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, siis on

$$\boldsymbol{e}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n x_n = \boldsymbol{e}_1 y_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n y_n$$

ehk

$$\boldsymbol{e}_1 (x_1 - y_1) + \ldots + \boldsymbol{e}_n (x_n - y_n) = \boldsymbol{0}$$

ning siit järeldub aksioomi $\mathbf{C}^{(n)}$ põhjal tõesti, et

$$x_1 - y_1 = \ldots = x_n - y_n = 0,$$

s. t. $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$. ∎

Seega eespool vaadeldud kujutus kui 1 : 1-pealekujutus omab pöördkujutuse, mis on samuti 1 : 1-pealekujutus.

***Def.* 14.1.** Reaalarve $x_1, \ldots, x_n$ vektorile $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n x_n$ vastavas järjestatud süsteemis $(x_1, \ldots, x_n)$ (sirge puhul on see (x_1), tasandi puhul paar (x_1, x_2), ruumi puhul kolmik (x_1, x_2, x_3)) nimetatakse selle vektori $\boldsymbol{x}$ koordinaatideks.[13]

Võrduse $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n x_n$ asemel kirjutatakse sageli

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n).$$

Näiteks 3-ruumis on $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, sest $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 1 + \boldsymbol{e}_2 0 + \boldsymbol{e}_3 0$; analoogiliselt on $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$ ja $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$.

***Teoreem* 14.3.** *Kui* $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *ja* $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, *siis*

1) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ *parajasti siis, kui* $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$,
2) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ *ja*
3) $\boldsymbol{x}\lambda = (x_1\lambda, \ldots, x_n\lambda)$.

Tõestus. Väide 1) järeldub vahetult teoreemi 14.2 tõestusest. Väidete 2) ja 3) tõestamiseks kirjutame eeldused kujul $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n x_n$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 y_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n y_n$; siis tõepoolest

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{e}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n x_n) + (\boldsymbol{e}_1 y_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n y_n) = \\ = \boldsymbol{e}_1 (x_1 + y_1) + \ldots + \boldsymbol{e}_n (x_n + y_n),$$
$$\boldsymbol{x}\lambda = (\boldsymbol{e}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n x_n)\lambda = \boldsymbol{e}_1 (x_1\lambda) + \ldots + \boldsymbol{e}_n (x_n\lambda). \ ∎$$

Siit on näha, et võrdus ja lineaartehted vektorite puhul on samaväärsed võrdusega ja samade lineaartehetega ühesuguse indeksi väärtusega koordinaatide puhul. Muuhulgas selgub, et $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ parajasti siis, kui $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Järelikult $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ niipea, kui vähemalt üks vektori $\boldsymbol{x}$ koordinaatidest on nullist erinev.

Vektori koordinaatide abil defineeritakse ka punkti koordinaadid. Teoreemi 9.1 kohaselt järeldub juba aksioomidest **A1—A4**, et punktide hulk ja vektorite hulk on ekvivalentsed: esimese saab üksüheselt kujutada teisele, kui fikseerida vabalt võetud punkt O ja igale punktile X seada vastavusse tema kohavektor $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX}$ alguspunktiga O. Sellest ja teoreemist 14.2 järeldub, et afiinne n-ruum kui punktihulk on samuti ekvivalentne järjestatud süsteemide $(x_1, \ldots, x_n)$ hulgaga.

[13] lad. k. *coordinatus* — juurde e. kaasa korraldatud.

***Teoreem* 14.4.** *Afiinne n-ruum koosneb parajasti sellistest punktidest X, mille korral* $\overrightarrow{OX} = e_1x_1 + \ldots + e_nx_n$, *kus O on n-ruumi vabalt fikseeritud punkt ning* $e_1, \ldots, e_n$ *rahuldavad aksioomi* $C^{(n)}$ *tingimust.*

***Def.* 14.2.** Punkti X kohavektori $\overrightarrow{OX}$ koordinaate nimetatakse selle punkti X koordinaatideks.

Kui punktil X on koordinaadid $x_1, \ldots, x_n$, siis kirjutatakse $X(x_1, \ldots, x_n)$. Näiteks on $O(0, \ldots, 0)$, sest $\overrightarrow{OO} = \mathbf{0}$ Sirgel, tasandil või ruumis nimetatakse esimest koordinaati sageli ka abstsissiks[14], teist — ordinaadiks[15], kolmandat — aplikaadiks[16]. Nende sageli kasutatavateks tähisteks on x_1, x_2 ja x_3 kõrval ka x, y ja z. Nii näiteks võib kõnelda tasandi punktist $M(x, y)$ ning ruumi punktist $P(x, y, z)$.

Punktide ja vektorite koordinaate seob järgmine teoreem.

***Teoreem* 14.5.** *Kui* $A(a_1, \ldots, a_n)$ *ja* $B(b_1, \ldots, b_n)$, *siis* $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)$, *s. t. kahe punktiga antud vektori koordinaatideks on lõpp-punkti ja alguspunkti vastavate koordinaatide vahed.*

Tõestus. Eelduse järgi on $\overrightarrow{OA} = (a_1, \ldots, a_n)$ ja $\overrightarrow{OB} = (b_1, \ldots, b_n)$, ning et samal ajal on $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, siis tõesti

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)$$

(vrd. ka teoreemiga 11.4). ∎

15. Vektorite lineaarne sõltuvus. Kõige üldisem avaldis, mida saab moodustada antud vektoritest $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ lineaartehete abil, on $\mathbf{a}_1\lambda + \ldots + \mathbf{a}_m\lambda_m$, kus $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ on teatavad m vabalt võetud reaalarvu. Iga niisugust avaldist nimetatakse vektorite $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ lineaarkombinatsiooniks, kusjuures arve $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ nimetatakse selle lineaarkombinatsiooni kordajateks. Sel juhul saadavat vektorit nimetatakse sageli lineaarkombinatsiooni väärtuseks.

Lihtsaimat lineaarkombinatsiooni, mille kõik kordajad on võrdsed nulliga, nimetatakse triviaalseks; selle väärtuseks on alati $\mathbf{0}$. Leidub aga ka vektorite mittetriviaalseid lineaarkombinatsioone väärtusega $\mathbf{0}$, mis väljendavad teatavat lineaarset

---

[14] lad. k. *abscissus* — eraldatud.
[15] lad. k. *ordinatus* — korraldatud
[16] lad. k. *applicatus* — kulge liidetud

sõltuvust vektorite vahel. Näiteks tasandi iga vektor $\boldsymbol{x}$ on avaldatav kujul $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1x_1 + \boldsymbol{e}_2x_2$, mistõttu $\boldsymbol{e}_1x_1 + \boldsymbol{e}_2x_2 + \boldsymbol{x}(-1) = \boldsymbol{0}$, ning kui ka $x_1 = x_2 = 0$, siis vähemalt üks kordaja (-1) on nullist erinev.

***Def.* 15.1.** Olgu antud lõplik hulk vektoreid. Kui leidub nende mingi mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, mille väärtuseks on nullvektor, siis neid vektoreid nimetatakse lineaarselt sõltuvateks. Vastupidisel juhul öeldakse, et vektorid on lineaarselt sõltumatud.

Aksioomis $\mathbf{C}^{(n)}$ väljendatud nõue, et vektorite $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ puhul võrdus $\boldsymbol{e}_1x_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_nx_n = \boldsymbol{0}$ on võimalik ainult siis, kui $x_1 = \ldots = x_n = 0$, on nüüd def. 15.1 arvestades sõnastatav järgmiselt: vektorid $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ on lineaarselt sõltumatud.

***Teoreem* 15.1.** *Vektorid $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ on lineaarselt sõltuvad parajasti siis, kui vähemalt üks neist on avaldatav ülejäänute lineaarkombinatsioonina.*

Tõestus. Olgu $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ lineaarselt sõltuvad, s. t. leidugu nende mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, mille väärtuseks on $\boldsymbol{0}$:

$$\boldsymbol{a}_1\lambda_1 + \ldots + \boldsymbol{a}_m\lambda_m = \boldsymbol{0}.$$

Et siin kõik kordajad ei ole võrdsed nulliga, siis vajaduse korral vektoreid ümber nummerdades võime alati saavutada olukorra, kus $\lambda_m \neq 0$. Sel korral avaldame

$$\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{a}_1\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right) + \ldots + \boldsymbol{a}_m\left(-\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right);$$

vektor $\boldsymbol{a}_m$ osutub ülejäänute lineaarkombinatsiooniks.

Vastupidi, kui on teada, et $\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{a}_1\mu_1 + \ldots + \boldsymbol{a}_{m-1}\mu_{m-1}$, siis

$$\boldsymbol{a}_1\mu_1 + \ldots + \boldsymbol{a}_{m-1}\mu_{m-1} + \boldsymbol{a}_m(-1) = \boldsymbol{0},$$

kusjuures vasakul on vektorite $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, sest $(-1) \neq 0$; tähendab, vektorid $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ on lineaarselt sõltuvad. ∎

Tõestusest on näha, et lineaarselt sõltuvate vektorite korral on ülejäänute lineaarkombinatsioonina avaldatav parajasti iga niisugune vektor, mis läheb sõltuvust väljendavasse (s. t. nullvektoriga võrduvasse) lineaarkombinatsiooni nullist erineva kordajaga.

***Teoreem* 15.2.** *Kui vektorite lõpliku hulga $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ mingi alamhulk koosneb lineaarselt sõltuvatest vektoritest, siis ka vektorid $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ on lineaarselt sõltuvad.*

T õ e s t u s. Olgu vektoritest $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ mingid r, näiteks r esimest vektorit $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ lineaarselt sõltuvad, s. t. leidugu arvud $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, mis pole korraga nullid, nii et

$$\boldsymbol{a}_1\lambda_1 + \ldots + \boldsymbol{a}_r\lambda_r = \mathbf{0}.$$

Kui võtta $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_m = 0$, siis

$$\boldsymbol{a}_1\lambda_1 + \ldots + \boldsymbol{a}_m\lambda_m = \boldsymbol{a}_1\lambda_1 + \ldots + \boldsymbol{a}_r\lambda_r + \boldsymbol{a}_{r+1}0 + \ldots + \boldsymbol{a}_m 0 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

kusjuures vasakul on vektorite $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ mittetriviaalne lineaarkombinatsioon. Järelikult $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ on lineaarselt sõltuvad vektorid. ∎

Teoreemist 15.2 järeldub, et lineaarselt sõltumatute vektorite hulga iga alamhulk koosneb samuti lineaarselt sõltumatutest vektoritest. Samuti nähtub siit, et kui vektorite $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ seas on nullvektor $\mathbf{0}$, siis nad on alati lineaarselt sõltuvad, sest vektori $\mathbf{0}$ iga mittetriviaalne lineaarkombinatsioon on võrduse $\mathbf{0}\lambda = \mathbf{0}$ tõttu nullvektor, nii et teoreemis 15.2 võib alamhulgaks võtta $\{\mathbf{0}\}$.

Osutub, et vektorite arv afiinse n-ruumi lineaarselt sõltumatute vektorite hulgas ei saa olla suurem kui n. Tõestame selle juhtudel, kus $n = 1$, 2 või 3, s. t. sirge, tasandi ja ruumi puhul.

***Teoreem* 15.3.** *Sirge (ehk afiinse* 1*-ruumi) iga kaks vektorit on lineaarselt sõltuvad.*

T õ e s t u s. Olgu antud sirge kaks vektorit $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$. Kui üks neist on $\mathbf{0}$, siis nad on lineaarselt sõltuvad eelmise teoreemi järelduse põhjal. Kui kumbki pole $\mathbf{0}$, siis aksioomist $\mathbf{C}^{(1)}$ tulenevates võrdusies $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}a$ ja $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}b$ on $a \neq 0$ ja $b \neq 0$. Et samal ajal

$$\boldsymbol{a}b - \boldsymbol{b}a = (\boldsymbol{e}a)b - (\boldsymbol{e}b)a = \boldsymbol{e}[ab - ba] = \boldsymbol{e}0 = \mathbf{0},$$

siis $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ on lineaarselt sõltuvad. ∎

Tasandi vektorite lineaarse sõltuvuse uurimisel osutub kasulikuks järgmine mõiste.

***Def.* 15.4.** Tasandi kahe vektori $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ ja $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ koordinaatidest moodustatud avaldist $a_1b_2 - a_2b_1$ nimetatakse d e t e r m i n a n d i k s (täpsemalt, teist järku determinandiks) ja tähistatakse kas $\mathrm{D}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ või $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$, s. t.

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

***Teoreem* 15.4.** *Tasandi kaks vektorit* $\boldsymbol{a}$ *ja* $\boldsymbol{b}$ *on lineaarselt sõltuvad parajasti siis, kui nende koordinaatidest moodustatud determinant on võrdne nulliga, s. t. kui* $\mathrm{D}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$.

Tõestus. Oletame, et $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ on lineaarselt sõltuvad. Teoreemi 15.1 põhjal on üks neist avaldatav teise lineaarkombinatsioonina. Vajaduse korral vektoreid ümber tähistades võib alati saavutada olukorra, kus $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\lambda$. Et võrdus ja lineaartehted kanduvad vektoreilt üle vastavatele koordinaatidele, siis

$$b_1 = a_1\lambda, \quad b_2 = a_2\lambda, \tag{15.1}$$

mistõttu

$$D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_2 - a_2b_1 = a_1(a_2\lambda) - a_2(a_1\lambda) = 0.$$

Vastupidise väite tõestamiseks lähtume nüüd eeldusest, et $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$, s. t.

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0. \tag{15.2}$$

Juhul kui $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, järeldub $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ lineaarne sõltuvus vahetult teoreemile 15.2 järgnenud märkusest. Seetõttu jääb uurida juht, mil $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, s. t. a_1 ja a_2 ei ole korraga nullid. Vajaduse korral vektoreid $\boldsymbol{e}_1$ ja $\boldsymbol{e}_2$ ning koos sellega ka koordinaate ümber nummerdades võib alati saavutada olukorra, kus $a_1 \neq 0$. Sel korral leidub reaalarv $\lambda = \frac{b_1}{a_1}$; seejuures $b_1 = a_1\lambda$. Asendus tingimusse (15.2) annab nüüd:

$$a_1b_2 - a_2(a_1\lambda) = 0$$

ehk

$$a_1(b_2 - a_2\lambda) = 0.$$

Et $a_1 \neq 0$, siis siit $b_2 = a_2\lambda$. Järelikult $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1b_1 + \boldsymbol{e}_2b_2 = \boldsymbol{e}_1(a_1\lambda) + \boldsymbol{e}_2(a_2\lambda) = (\boldsymbol{e}_1a_1 + \boldsymbol{e}_2a_2)\lambda = \boldsymbol{a}\lambda$. Teoreemi 15.1 põhjal on $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ lineaarselt sõltuvad. ∎

Seda, kas $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ on lineaarselt sõltuvad või mitte, on siiski kõige lihtsam kindlaks teha vahetult võrduste (15.1) abil. Kui kumbki arvudest a_1 ja a_2 ei ole võrdne nulliga (s. t. kui mõlemaga neist võib jagada), siis saab nendest võrdustest avaldada λ kahel viisil ja võrdused (15.1) on samaväärsed ühe võrdega

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}, \tag{15.3}$$

mis näitab, et $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ koordinaadid on võrdelised. Sageli lubatakse võrdused (15.1) kirjutada kokkuleppeliselt kujul (15.3) ka siis, kui a_1 ja a_2 seas on üksainus nullist erinev. Kui näiteks $a_2 = 0$, siis (15.1) põhjal ka $b_2 = 0$. Järelikult (15.3) loetakse selle kokkuleppega kehtivaks ka siis, kui ühel võrduse pooltest on $\frac{0}{0}$.

***Teoreem* 15.5.** *Tasandi (ehk afiinse 2-ruumi) iga kolm vektorit on lineaarselt sõltuvad.*

T õ e s t u s. Võtame vabalt tasandi kolm vektorit

$$\begin{array}{l|ll} \boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1a_1+\boldsymbol{e}_2a_2, & b_2 & -b_1 \\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1b_1+\boldsymbol{e}_2b_2, & -a_2 & a_1 \\ \boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}_1c_1+\boldsymbol{e}_2c_2. & & \end{array} \qquad (15.4)$$

Kui osutub, et $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$, siis eelmise teoreemi põhjal $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ on lineaarselt sõltuvad ning teoreemi 15.2 põhjal ka $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$ on lineaarselt sõltuvad. Seetõttu jääb uurida juht, mil $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq 0$. Korrutame seostest (15.4) esimese kahe võrduse mõlemaid pooli paremal näidatud arvudega ja liidame tulemused. Tekivad võrdused

$$\boldsymbol{a}b_2+\boldsymbol{b}(-a_2)=\boldsymbol{e}_1 D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$
$$\boldsymbol{a}(-b_1)+\boldsymbol{b}a_1=\boldsymbol{e}_2 D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Et meil $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq 0$, siis on võimalik siit avaldada $\boldsymbol{e}_1$ ja $\boldsymbol{e}_2$ vektorite $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ lineaarkombinatsioonidena (tuleb jagada arvuga $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$). Tulemuste asendamisel kolmandasse seosesse (15.4) saame pärast vajalikke ümberkorraldusi vektori $\boldsymbol{c}$ avaldise vektorite $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ lineaarkombinatsioonina. Teoreemist 15.1 järeldubki nüüd, et $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$ on lineaarselt sõltuvad. ∎

Analoogilised teoreemid saab tõestada ka ruumi vektorite puhul. Siin on kahe vektori $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ja $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ korral kasulik üldistada võrdelisuse mõistet. Lepime kokku kõnelda, et arvud $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on võrdelised arvudega $b_1, b_2, \ldots, b_n$, kui leidub kas reaalarv λ, nii et $b_i = a_i\lambda$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, või leidub reaalarv μ, nii et $a_i = b_i\mu$. (Erijuhuna saame siit võrdega (15.3) defineeritud võrdelisuse.) Kui näiteks esimestes seostes $\lambda \neq 0$, siis teised muidugi järelduvad neist, kusjuures $\mu=\frac{1}{\lambda}$. Selline järeldamine ei ole teostatav, kui $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, kuid arvude a_i seas on nullist erinevaid. Sel korral on teised seosed võimatud. Samuti võib juhtuda, et esimesed seosed on võimatud (kui $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$), kuid teised seosed kehtivad.

***Teoreem* 15.6.** *Ruumi kaks vektorit on lineaarselt sõltuvad parajasti siis, kui nende koordinaadid on võrdelised.*

T õ e s t u s. Võtame vabalt ruumi kaks vektorit

$$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3),$$
$$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3).$$

Teoreemi 15.2 põhjal on $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ lineaarselt sõltuvad parajasti siis, kui üks neist on avaldatav teise lineaarkombinatsioonina, s. t. kui kas $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\lambda$ või $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\mu$. Viimased võrdused on samaväärsed vastavalt võrdustega $b_i = a_i\lambda$ või $a_i = b_i\mu$ $(i = 1, 2, 3)$. ∎

Kui näiteks $b_i = a_i\lambda$ ja arvudest a_1, a_2 ja a_3 igaüks on nullist erinev, siis võib λ avaldada kolmel viisil ja tekivad seosed

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}. \tag{15.5}$$

Kokkuleppeliselt loetakse, et selline kirjutis on tõene ka siis, kui nimetajate a_1, a_2 ja a_3 seas vähemalt üks on nullist erinev ja iga nulliga võrduva nimetaja kohal olev lugeja on samuti võrdne nulliga, s. t. kui ühe või kahe suhte kohal seisab $\frac{0}{0}$.

Ruumi enam kui kahe vektori lineaarse sõltuvuse uurimisel osutub kasulikuks järgmine mõiste.

***Def.* 15.3.** Ruumi kolme vektori

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= (a_1, \ a_2, \ a_3), \\ \boldsymbol{b} &= (b_1, \ b_2, \ b_3), \\ \boldsymbol{c} &= (c_1, \ c_2, \ c_3) \end{aligned}$$

koordinaatidest moodustatud avaldist

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \tag{15.6}$$

nimetatakse d e t e r m i n a n d i k s[17] $\mathrm{D}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ (kolmandat järku determinandiks) ja tähistatakse

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

***Teoreem* 15.7.** *Ruumi iga neli vektorit on lineaarselt sõltuvad. Ruumi kolm vektorit* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *ja* $\boldsymbol{c}$ *on lineaarselt sõltuvad parajasti siis, kui* $\mathrm{D}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$.

T õ e s t u s. Võtame vabalt ruumi neli vektorit

$$\begin{array}{l|lll} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1a_1 + \boldsymbol{e}_2a_2 + \boldsymbol{e}_3a_3, & b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1b_1 + \boldsymbol{e}_2b_2 + \boldsymbol{e}_3b_3, & c_2a_3 - c_3a_2 & c_3a_1 - c_1a_3 & c_1a_2 - c_2a_1 \\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}_1c_1 + \boldsymbol{e}_2c_2 + \boldsymbol{e}_3c_3, & a_2b_3 - a_3b_2 & a_3b_1 - a_1b_3 & a_1b_2 - a_2b_1 \\ \boldsymbol{d} = \boldsymbol{e}_1d_1 + \boldsymbol{e}_2d_2 + \boldsymbol{e}_3d_3. & & & \end{array} \tag{15.7}$$

Korrutame siin esimese kolme võrduse pooli paremal peenkirjas näidatud avaldistega. Toimides nii kordamööda esimese, teise ja kolmanda veeru avaldistega ja liites iga kord tulemused, jõuame järgmiste võrdusteni:

[17] Determinantide kohta lähemalt vt G. K a n g r o, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, I ptk.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}(b_2c_3-b_3c_2)+\boldsymbol{b}(c_2a_3-c_3a_2)+\boldsymbol{c}(a_2b_3-a_3b_2)=\boldsymbol{e}_1\mathrm{D}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}),\\
&\boldsymbol{a}(b_3c_1-b_1c_3)+\boldsymbol{b}(c_3a_1-c_1a_3)+\boldsymbol{c}(a_3b_1-a_1b_3)=\boldsymbol{e}_2\mathrm{D}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}),\\
&\boldsymbol{a}(b_1c_2-b_2c_1)+\boldsymbol{b}(c_1a_2-c_2a_1)+\boldsymbol{c}(a_1b_2-a_2b_1)=\boldsymbol{e}_3\mathrm{D}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}).
\end{aligned}
\tag{15.8}
$$

Paneme tähele, et paremal vektorite $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ja $\boldsymbol{e}_3$ juures tuleb kordajaks alati üks ja seesama avaldis (15.6).

Kui osutub, et $\mathrm{D}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \neq 0$, siis on võimalik viimati saadud seostest avaldada vektorid $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ja $\boldsymbol{e}_3$ vektorite $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$ lineaarkombinatsioonidena. Saadud avaldiste asendamisel võrduse (15.7) paremasse poolde saame tulemuseks vektori $\boldsymbol{d}$ avaldise $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$ teatava lineaarkombinatsioonina. Järelikult $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ja $\boldsymbol{d}$ on sel korral teoreemi 15.1 põhjal lineaarselt sõltuvad.

Jääb uurida juhtu, mil $\mathrm{D}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$. Näitame, et sel korral $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$ on lineaarselt sõltuvad. Seoste (15.8) paremad pooled on siis võrdsed nullvektoriga. Kui nende seoste vasakutes pooltes kordajateks olevatest suluavaldistest kas või üks on nullist erinev, siis seos, milles esineb see kordaja, näitab $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$ teatava mittetriviaalse lineaarkombinatsiooni võrdumist nullvektoriga. Järelikult $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$ on def. 15.1 põhjal sel korral lineaarselt sõltuvad.

Lahtiseks jääb juht, mil seoste (15.8) vasakutes pooltes kordajateks olevad suluavaldised on kõik võrdsed nulliga. Näitame, et näiteks juba võrdustest

$$a_3b_1-a_1b_3=0, \qquad a_1b_2-a_2b_1=0 \tag{15.9}$$

järeldub vektorite $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ lineaarne sõltuvus ja koos sellega siis ka $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$ lineaarne sõltuvus. Juhul kui $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, järeldub see otsekohe teoreemile 15.2 järgnenud märkusest. Seetõttu eeldame, et $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$. Vajaduse korral vektoreid $\boldsymbol{e}_i$ ja koos nendega koordinaate a_i ümber nummerdades võib alati saavutada, et $a_1 \neq 0$. Leidub reaalarv $\lambda = \frac{b_1}{a_1}$; seejuures $b_1 = a_1\lambda$. Pärast asendust võrdustesse (15.9) saame nüüd:

$$a_1(a_3\lambda-b_3)=0, \qquad a_1(b_2-a_2\lambda)=0,$$

mistõttu $a_3\lambda - b_3 = 0$, $b_2 - a_2\lambda = 0$. Kokkuvõttes: $b_i = a_i\lambda$, s. t. vektorite $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ koordinaadid on võrdelised ning need vektorid on seetõttu teoreemi 15.6 põhjal lineaarselt sõltuvad.

Niisiis on näidatud, et kui $\mathrm{D}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$, siis $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$ on lineaarselt sõltuvad. Järelikult on siis lineaarselt sõltuvad ka $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ja $\boldsymbol{d}$. On jäänud tõestada vaid, et tingimus $\mathrm{D}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$ on $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$ lineaarseks sõltuvuseks mitte üksnes piisav, vaid ka tarvilik.

Oletame, et a, b ja c on lineaarselt sõltuvad. Sel korral saab ühe neist avaldada ülejäänud kahe lineaarkombinatsioonina. Vajaduse korral vektoreid ümber tähistades võib alati saavutada olukorra, kus $c = a\lambda + b\mu$, s. t. $c_i = a_i\lambda + b_i\mu$. Sel korral def. 15.3 järgi tõesti

$$D(a, b, c) = a_1b_2(a_3\lambda+b_3\mu) - a_1b_3(a_2\lambda+b_2\mu) + a_2b_3(a_1\lambda+b_1\mu) -$$
$$-a_2b_1(a_3\lambda+b_3\mu) + a_3b_1(a_2\lambda+b_2\mu) - a_3b_2(a_1\lambda+b_1\mu) = 0,$$

sest kõik korrutised koonduvad siin paarikaupa. ∎

Vektorite lineaarse sõltuvuse tunnustest teoreemides 15.4, 15.6 ja 15.7 on nüüd lihtne järeldada veel ühe teoreemi kehtivust.

***Teoreem* 15.8.** *Tasandi või ruumi iga nullist erineva vektori **a** korral leidub vektor **b**, nii et **a** ja **b** on lineaarselt sõltumatud. Ruumi iga kahe lineaarselt sõltumatu vektori **a** ja **b** korral leidub vektor **c**, nii et **a**, **b** ja **c** on lineaarselt sõltumatud.*

T õ e s t u s. Kui $a \neq 0$, siis võib koordinaate vajaduse korral ümber nummerdades saavutada olukorra kus $a_1 \neq 0$. Alati võib leida arvud b_i ($i = 1, 2$ või $i = 1, 2, 3$), mis ei ole võrdelised arvudega a_i; näiteks võib võtta $b_1 = a_1$, $b_2 \neq a_2$. Vajalikuks vektoriks on siis b koordinaatidega b_i.

Kui ruumis on antud lineaarselt sõltumatud a ja b, siis nende koordinaadid a_i ja b_i ei ole võrdelised, s. t. kui $a_1 \neq 0$ ja $b_1 = a_1\lambda$, siis kas $b_2 \neq a_2\lambda$ või $b_3 \neq a_3\lambda$. Sel korral võib leida vektori c koordinaatidega c_i nii, et $D(a, b, c) \neq 0$. Näiteks kui $b_2 \neq a_2\lambda$, siis võib võtta $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 \neq 0$, sest niisugusel juhul def. 15.3 järgi

$$D(a, b, c) = a_1b_2c_3 - a_2(a_1\lambda)c_3 = a_1c_3(b_2 - a_2\lambda) \neq 0.$$

Teoreemi 15.7 põhjal a, b ja c on siin lineaarselt sõltumatud. ∎

Pöördudes tagasi teoreemide 15.3, 15.5 ja 15.7 juurde, märgime, et need annavad sirge, tasandi või ruumi lineaarselt sõltumatute vektorite arvu suurimad mõeldavad väärtused — nendeks on vastavalt 1, 2 ja 3. Sellised väärtused tegelikult ka saavutatakse, sest aksioomides $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ ja $C^{(3)}$ väljendatud nõuded vastavalt sirge vektori e, tasandi vektorite e_1 ja e_2 ning ruumi vektorite e_1, e_2 ja e_3 kohta tähendavad def. 15.1 kohaselt nende vektorite lineaarset sõltumatust.

***Def.* 15.4.** Afiinse n-ruumi lineaarselt sõltumatute vektorite maksimaalset arvu nimetatakse selle n-ruumi m õ õ t m e k s ehk dimensiooniks.

Seega sirge mõõde on 1, tasandi mõõde 2, ruumi mõõde on aga 3. Osutub, et õige on ka üldine väide: afiinse n-ruumi mõõde on n [18]. Afiinset n-ruumi nimetatakse seetõttu sageli ka afiinseks n-mõõtmeliseks ruumiks.

16. Lineaarse sõltuvuse tõlgendused. Kui on antud afiinse n-ruumi vektorite hulga niisugune alamhulk, mille vektorite arv ei ületa n, siis selle alamhulga vektorid ei tarvitse olla lineaarselt sõltuvad. Sel korral lineaarne sõltuvus tähendab vektorite alamhulga teatavat erilist omadust. Allpool piirdume juhtudega, kus $n \leqslant 3$ (s t. vaatleme tasandi vektorite paare ning ruumi vektorite paare ja kolmikuid), kuigi erijuhtude ühtseks haaramiseks on esialgu otstarbekas kasutada ka üldist afiinse n-ruumi mõistet. Mainitud juhtudel on eesmärgiks leida vektorite lineaarse sõltuvuse geomeetriline tõlgendus. Eespool on juba antud analüütilised tunnused, mis võimaldavad koordinaatide abil antud vektorite puhul otsustada, kas nad on lineaarselt sõltuvad või mitte. Selliste tõlgenduste ja tunnuste vahel asetleidva vastavuse kasutamine on analüütilise geomeetria üks olulisemaid võtteid. Tõlgendusteks on vajalik järgmine mõiste.

***Def.* 16.1.** Afiinset m-ruumi, mis osutub teatava teise afiinse n-ruumi alamhulgaks, nimetatakse selle n-ruumi a l a m r u u m i k s.

Praegu ei ole veel teada, kas afiinses n-ruumis on üldse olemas alamruume, mis ei ühti tema endaga (s. t. on pärisalamhulkadeks). Järgnevalt tõestame, et neid on tõesti olemas, ning näitame ühtlasi, kuidas neid on võimalik määrata. Afiinse n-ruumi tähistame A_n.

Oletame esialgu, et mingi afiinne m-ruum A_m on ruumi A_n alamruum. Tema iga kaks punkti X ja Y on siis ka A_n punktideks ning seetõttu A_m vektor $\overrightarrow{XY}$ on samastatav A_n vektoriga $\overrightarrow{XY}$. Järelikult A_m vektorite hulk on alamhulgaks A_n vektorite hulgas. Aksioomi $\mathbf{C}^{(m)}$ põhjal eksisteerib m lineaarselt sõltumatut A_m vektorit. Tähistame need seekord $\boldsymbol{k}_1, \ldots, \boldsymbol{k}_m$, nii et A_m iga vektor $\boldsymbol{x}$ on avaldatav kujul

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{k}_1u_1+\ldots+\boldsymbol{k}_mu_m,$$

seejuures ühelainsal viisil (nagu selgus art-s 14).

Et $A_m \subset A_n$, siis $\boldsymbol{k}_1, \ldots, \boldsymbol{k}_m$ on ka A_n vektoreiks. Kui nüüd fikseerida vabalt A_m punkt A, siis võib teoreemi 14.4 põhjal öelda, et A_m koosneb afiinse n-ruumi A_n parajasti niisugustest punktidest X, mille korral

$$\overrightarrow{AX}=\boldsymbol{k}_1u_1+\ldots+\boldsymbol{k}_mu_m;$$

[18] Väite põhjendus antakse kõrgemas algebras vektorruumide teoorias, kus tõestatakse, et kui kehtib aksioom $\mathbf{C}^{(n)}$, siis lineaarselt sõltumatute vektorite maksimaalne arv on n, vt. G K a n g r o, Kõrgem algebra Tallinn, 1962, lk. 345 (teoreem 1).

siin $u_1, \ldots, u_m$, s. t. m vabalt võetud reaalarvu, on A_m punkti X koordinaadid.

Olles niiviisi selgitanud, kuidas peaks olema kirjeldatav ruumi A_n alamruum A_m, kui ta eksisteerib, võime nüüd seada vastupidise küsimuse: kas afiinse n-ruumi A_n iga alamhulk

$$\mathrm{M}=\{X \mid \overrightarrow{AX}=\boldsymbol{k}_1u_1+\ldots+\boldsymbol{k}_mu_m\}$$

koos selle ruumi vektorite alamhulgaga

$$\mathrm{V}=\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}=\boldsymbol{k}_1w_1+\ldots+\boldsymbol{k}_mw_m\}$$

(kus A on A_n fikseeritud punkt, $\boldsymbol{k}_1, \ldots, \boldsymbol{k}_m$ — lineaarselt sõltumatud vektorid ja $u_1, \ldots, u_m$ — vabalt võetud reaalarvud) osutub alamruumiks A_m? Küsimusele vastamiseks tuleb kontrollida, kas hulkade M ja V puhul on rahuldatud aksioomide **A1—A4**, **B1—B5** ja $\mathbf{C}^{(m)}$ nõuded.

Alustame esimese rühma aksioomidest. Et alamhulk M sisaldab kindlasti punkti A, siis **A1** on rahuldatud. Aksioomi **A2** kontrollimiseks võtame alamhulgas M vabalt kaks punkti X ja Y ning näitame, et $\overrightarrow{XY} \in \mathrm{V}$. Tõepoolest, $\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{k}_1u_1+\ldots+\boldsymbol{k}_mu_m$, $\overrightarrow{AY} = \boldsymbol{k}_1v_1+\ldots+\boldsymbol{k}_mv_m$, ning et $\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{AY}$, siis

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{AY}-\overrightarrow{AX}&=(\boldsymbol{k}_1v_1+\ldots+\boldsymbol{k}_mv_m)-(\boldsymbol{k}_1u_1+\ldots+\boldsymbol{k}_mu_m)=\\&=\boldsymbol{k}_1(v_1-u_1)+\ldots+\boldsymbol{k}_m(v_m-u_m).\end{aligned} \tag{16.1}$$

Seega avaldub vektor $\overrightarrow{XY}$ tõesti kujul, mida nõutakse alamhulga V vektoreilt, s. t. $\overrightarrow{XY} \in \mathrm{V}$.

Aksioomi **A3** puhul on vaja kontrollida, kas iga $X \in \mathrm{M}$ ja $\boldsymbol{x} \in \mathrm{V}$ korral leidub parajasti üks punkt $Y \in \mathrm{M}$, nii et $\overrightarrow{XY}=\boldsymbol{x}$. Kui $\overrightarrow{AX}=\boldsymbol{k}_1u_1+\ldots+\boldsymbol{k}_mu_m$ ja $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{k}_1w_1+\ldots+\boldsymbol{k}_mw_m$, siis otsitava punkti Y leidmiseks saame lineaarkombinatsiooni $\overrightarrow{AY}=$ $=\boldsymbol{k}_1v_1+\ldots+\boldsymbol{k}_mv_m$ kordajatele (16.1) põhjal parajasti üheselt lahenduvad võrrandid $v_1-u_1=w_1, \ldots, v_m-u_m=w_m$, seega on hulgas M tõesti olemas üksainus vajalik punkt Y.

Aksioom **A4** leiab aset A_n kõigi punktide, ammugi siis alamhulga M punktide puhul.

Aksioomidega **B1—B5** on lugu lihtsam: siin tuleb **B1** puhul kontrollida, et kui $\boldsymbol{x} \in \mathrm{V}$, siis iga reaalarvu λ korral ka $\boldsymbol{x}\lambda \in \mathrm{V}$, see on aga ilmne. Ülejäänud aksioomide kehtivus järeldub sellest, et nad on rahuldatud A_n kõikide vektorite, ammugi siis ka alamhulga V vektorite puhul.

Lõpuks on alamhulga V definitsioonist vahetult näha, et täidetud on ka aksioomi $\mathbf{C}^{(m)}$ nõue, kui selles vektoriteks $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ võtta $\boldsymbol{k}_1, \ldots, \boldsymbol{k}_m$. Seega on kindlaks tehtud järgmise teoreemi kehtivus.

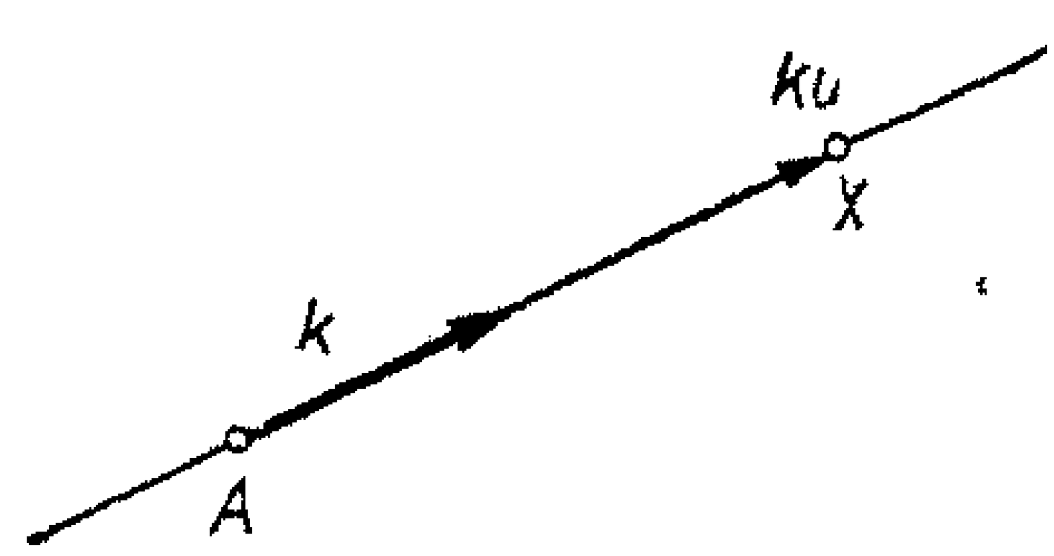
Teoreem 16.1. *Afiinse n-ruumi kõigi selliste punktide X hulk, mille korral*

$$\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{k}_1 u_1 + \ldots + \boldsymbol{k}_m u_m$$

(kus A on mingi kindel punkt, $\boldsymbol{k}_1, \ldots, \boldsymbol{k}_m$ on kindlad lineaarselt sõltumatud vektorid ja $u_1, \ldots, u_m$ on vabalt võetavad reaalarvud), osutub afiinseks m-ruumiks ning seega antud ruumi alamruumiks. Tema vektorite hulk koosneb parajasti vektoreist $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}_1 u_1 + \ldots + \boldsymbol{k}_m u_m$. Selliselt on kirjeldatav iga alamruum.

Erijuhtudel, kui $m = 1$ ja $n = 2$ või $n = 3$, on teoreem sõnastatav järgmiselt

Teoreem 16.2. *Tasandi või ruumi kõigi selliste punktide X hulk, mille korral $\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{k}u$ (kus A on mingi kindel punkt, $\boldsymbol{k}$ on kindel nullist erinev vektor ja u on vabalt valitav reaalarv), osutub sirgeks, mille vektorite hulk koosneb parajasti vektoreist $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}u$. Selliselt on kirjeldatav iga sirge, mis asetseb tasandil või ruumis alamruumina* (joon. 32).



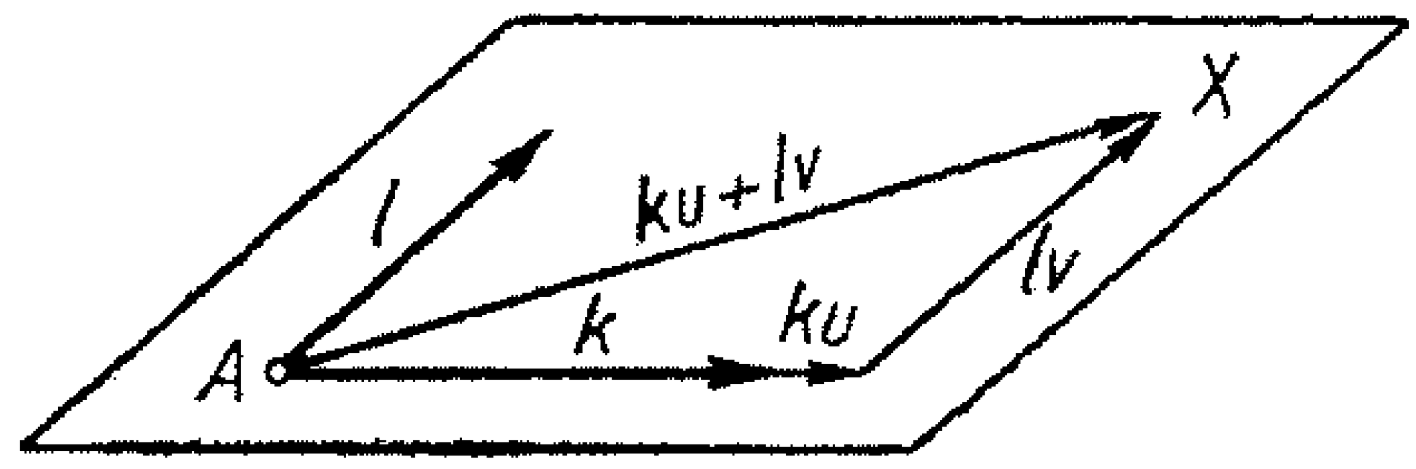
Joon 32.

Viimast nimetatakse sageli ka lihtsalt sirgeks tasandil või sirgeks ruumis, selle vektorite hulka aga s i h i k s tasandil või ruumis. Vektorit $\boldsymbol{k}$ nimetatakse sel puhul sirge s i h i v e k t o r i k s. Sama siht võib olla mitmel sirgel, sest teoreemis 16.2 võib sama sihivektori $\boldsymbol{k}$ korral punkti A valida täiesti vabalt. Kaht erinevat sama sihiga sirget nimetatakse ka p a r a l l e e l s e t e k s. Nende lähema uurimisega tegeleme edaspidi art-s 38.

Erijuhul $m = 2$ ja $n = 3$ on tegemist teoreemi 16.1 järgmise sõnastusega.

Teoreem 16.3. *Ruumi kõigi selliste punktide X hulk, mille korral $\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{k}u + \boldsymbol{l}v$ (kus A on mingi kindel punkt, $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$ on kindlad lineaarselt sõltumatud vektorid ning u ja v on vabalt vali-*

tavad reaalarvud), osutub tasandiks, mille vektorite hulk koosneb parajasti vektoreist $x = ku + lv$. Selliselt on kirjeldatav iga tasand, mis asetseb ruumis teatava alamruumina (joon. 33).



Joon. 33.

Viimast nimetatakse sageli ka lihtsalt tasandiks ruumis; selle vektorite hulka hakkame nimetama r i h i k s[19] ruumis. Vektoripaari $\{k, l\}$ nimetame sel puhul tasandi r i h i v e k t o r i p a a r i k s. Sama riht võib olla mitmel eri tasandil ruumis, sest teoreemis 16.3 võib sama paari $\{k, l\}$ korral punkti A valida täiesti vabalt. Kaht erinevat sama rihiga tasandit nimetatakse ka paralleelseteks. Nende lähema uurimisega tegeleme edaspidi art-s 48.

***Teoreem* 16.4.** *Iga sihi puhul leidub riht, mis teda sisaldab. Selleks et riht sisaldaks sihi, on piisav, et ta sisaldaks selle sihi mingi nullist erineva vektori.*

T õ e s t u s. Olgu antud siht $\{ku\}$. Võtame vabalt vektori l, nii et k ja l on lineaarselt sõltumatud. Selliseid vektoreid l leidub, tuleb vaid hoolitseda, et l koordinaadid ei oleks saadavad k omadest korrutamisel ühe ja sama arvuga. Riht $\{ku + lv\}$ sisaldabki nüüd antud sihi kõik vektorid — nende puhul on $v = 0$.

Kui riht $\{ku + lv\}$ sisaldab nullist erineva vektori $m = k\varkappa + l\lambda$, siis ta sisaldab ka kõik vektorid $m\mu = k(\varkappa\mu) + l(\lambda\mu)$, seega terve sihi $\{m\mu\}$. ∎

Nüüd on võimalik defineerida vektorite teatavad vahekorrad, mis osutuvad samaväärseteks nende lineaarse sõltuvusega.

***Def.* 16.2.** Tasandi või ruumi kaht vektorit a ja b nimetatakse k o l l i n e a a r s e t e k s[20] ja tähistatakse $a \parallel b$, kui tasandil või ruumis leidub sirge, mille vektoreiks nad mõlemad on, s. t. kui nad on teatava ühe ja sama sihi vektorid (lihtsamalt öeldes, samasihilised); mittekollineaarsete a ja b puhul tähistatakse $a \nparallel b$.

***Def.* 16.3.** Ruumi kolme vektorit nimetatakse k o m p l a n a a r s e t e k s[21], kui ruumis leidub tasand, mille vektoreiks nad

[19] nim. «riht», teised muutevormid nagu sõnal «siht».
[20] lad. k. *col* — koos, seoses, *linea* — (sirg-)joon.
[21] lad. k. *com* = *col*, *planum* — tasand.

on, s. t. kui nad on teatava ühe ja sama rihi vektorid (n.-ö. samarihilised).

Teoreem **16.5.** *Tasandi või ruumi kaks vektorit on lineaarselt sõltuvad parajasti siis, kui nad on kollineaarsed.*

T õ e s t u s. Kahe kollineaarse vektori lineaarne sõltuvus järeldub vahetult definitsioonist 16 2 ja teoreemist 15.3.

Lähtume nüüd vastupidisest eeldusest, et vektorid $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ on lineaarselt sõltuvad. Oletame esialgu, et üks neist, näiteks $\boldsymbol{a}$, on nullist erinev. Sõltuvuses $\boldsymbol{a}\lambda + \boldsymbol{b}\mu = 0$ siis $\mu \neq 0$, sest kui oleks $\mu = 0$, siis peaks olema $\lambda \neq 0$ ja $\boldsymbol{a}\lambda = 0$, mis juhul $\boldsymbol{a} \neq 0$ on võimatu. Järelikult saab avaldada

$$\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{a}\frac{\lambda}{\mu}.$$

Vaatleme tasandil või ruumis mingit sirget sihivektoriga $\boldsymbol{a}$. Selle vektoreiks on kõik vektorid $\boldsymbol{a}u$. Väärtustel $u = 1$ ja $u = -\frac{\lambda}{\mu}$ on nendeks $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$, seega $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

Ühtlasi on näha, et $\boldsymbol{0}$ on iga sirge vektor, ta vastab väärtusele $u = 0$. Järelikult ka juhul, kui $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, on $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. ∎

Teoreem **16.6.** *Ruumi kolm vektorit on lineaarselt sõltuvad parajasti siis, kui nad on komplanaarsed.*

T õ e s t u s Komplanaarsete vektorite lineaarne sõltuvus järeldub otseselt definitsioonist 16.3 ja teoreemist 15.5.

Eeldame nüüd, et ruumi vektorid $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$ on lineaarselt sõltuvad, ja näitame, et nad on siis komplanaarsed. Oletame esialgu, et mingid kaks neist, näiteks $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$, on lineaarselt sõltumatud. Siis sõltuvuses $\boldsymbol{a}\lambda + \boldsymbol{b}\mu + \boldsymbol{c}\nu = 0$ on $\nu \neq 0$, sest kui oleks $\nu = 0$, siis peaks arvudest λ ja μ vähemalt üks olema nullist erinev, kusjuures oleks $\boldsymbol{a}\lambda + \boldsymbol{b}\mu = 0$, see on aga vastuolus oletusega. Järelikult võib avaldada

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\left(-\frac{\lambda}{\nu}\right) + \boldsymbol{b}\left(-\frac{\mu}{\nu}\right).$$

Võtame nüüd ruumis rihi, mis on määratud rihivektoripaariga $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$. See riht koosneb parajasti vektoreist $\boldsymbol{a}u + \boldsymbol{b}v$. Väärtustel $u = 1$ ja $v = 0$, $u = 0$ ja $v = 1$ ning $u = -\frac{\lambda}{\nu}$ ja $v = -\frac{\mu}{\nu}$ saame siit vektorid $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$; järelikult need on komplanaarsed.

Oletame nüüd, et vektorite a, b ja c seas iga kaks on lineaarselt sõltuvad, kuid mõni neist, näiteks a, on nullist erinev. Sel korral võib samuti nagu eelmise teoreemi tõestuses näidata, et b ja c avalduvad kujul $b = a\beta$ ja $c = a\gamma$. Vektorid a, b ja c on seega ühe sihi $\{au\}$ vektorid. Teoreemi 16.4 põhjal leidub riht, millele nad kõik kuuluvad.

Olgu lõpuks a, b ja c kõik võrdsed nullvektoriga. Sel korral nad on ilmselt komplanaarsed, sest 0 on iga rihi vektor. ∎

Tõestame järgnevalt mõned laused, mis samuti nagu teoreem 16.4 käsitlevad uusi, vektorite lineaarse sõltuvuse tõlgendamisel kasutatud mõisteid siht ja riht.

***Teoreem* 16.7.** *Kahe erineva sihi puhul on olemas parajasti üks riht, mis neid sisaldab.*

T õ e s t u s. Kui on antud kaks erinevat sihti $\{ku\}$ ja $\{lv\}$, siis k ja l on lineaarselt sõltumatud vektorid, sest vastupidisel juhul üks oleks avaldatav teise lineaarkombinatsioonina, näiteks oleks $l = k\lambda$ ning sihid ühtiksid: $lv = (k\lambda)v = k(\lambda v)$. Leidub mõlemat sihti sisaldav riht $\{ku + lv\}$. Teist sellist enam olla ei saa. Tõepoolest, kui ka riht $\{k'u' + l'v'\}$ sisaldab antud sihid, siis on

$$\begin{array}{l|c:c} k = k'\alpha + l'\beta, & \delta & -\gamma \\ l = k'\gamma + l'\delta, & -\beta & \alpha \end{array}$$

kusjuures $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, sest vastupidisel juhul oleksid teoreemi 15.4 põhjal k ja l lineaarselt sõltuvad. Järelikult on võimalik avaldada

$$k' = k\frac{\delta}{\Delta} - l\frac{\beta}{\Delta},$$

$$l' = -k\frac{\gamma}{\Delta} + l\frac{\alpha}{\Delta},$$

kus $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$. Seetõttu on ühelt poolt

$$ku + lv = (k'\alpha + l'\beta)u + (k'\gamma + l'\delta)v = k'(\alpha u + \gamma v) + l'(\beta u + \delta v),$$

teiselt poolt

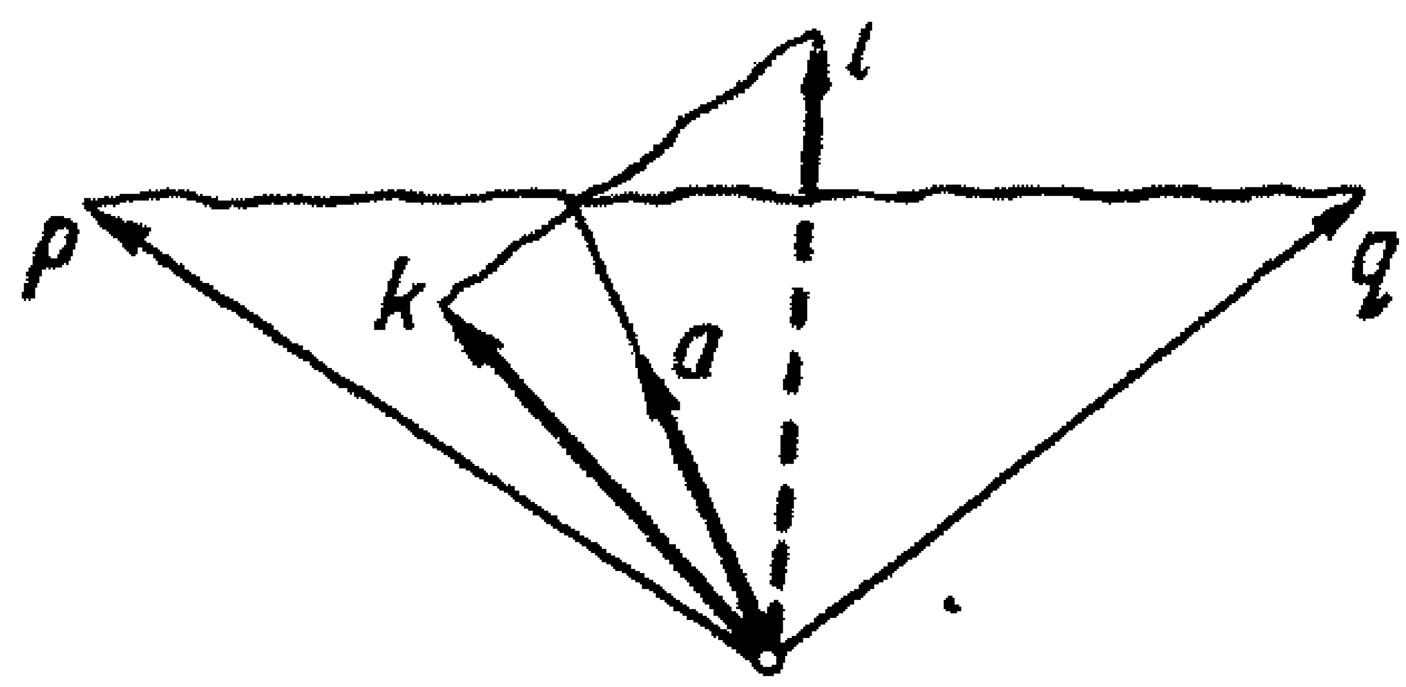
$$k'u' + l'v' = \left(k\frac{\delta}{\Delta} - l\frac{\beta}{\Delta}\right)u' + \left(-k\frac{\gamma}{\Delta} + l\frac{\alpha}{\Delta}\right)v' =$$

$$= k\frac{\delta u' - \gamma v'}{\Delta} + l\frac{\alpha v' - \beta u'}{\Delta},$$

s. t. ühe rihi iga vektor on samal ajal ka teise rihi vektoriks — rihid ühtivad. ∎

Kahe rihi kohta on tõestatav järgmine lause.

***Teoreem* 16.8.** *Kahe rihi lõige sisaldab alati nullist erineva vektori $\boldsymbol{a}$ ning koos sellega ka sihi $\{\boldsymbol{a}u\}$* (joon. 34).



Joon 34.

Tõestus. Olgu antud kaks rihti $\{\boldsymbol{k}u+\boldsymbol{l}v\}$ ja $\{\boldsymbol{p}s+\boldsymbol{q}t\}$. Ruumi neli vektorit $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{p}$ ja $\boldsymbol{q}$ on teoreemi 15.7 põhjal lineaarselt sõltuvad, s. t. leiduvad reaalarvud α, β, γ ja δ, nii et

$$\boldsymbol{k}\alpha+\boldsymbol{l}\beta+\boldsymbol{p}\gamma+\boldsymbol{q}\delta=0$$

ehk

$$\boldsymbol{k}\alpha+\boldsymbol{l}\beta=-\boldsymbol{p}\gamma-\boldsymbol{q}\delta.$$

Siit järeldubki, et esimese rihi vektor $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{k}\alpha+\boldsymbol{l}\beta$ on samal ajal ka teise rihi vektoriks. Seejuures on võrdus $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ võimatu, sest siis oleksid kas $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$ või $\boldsymbol{p}$ ja $\boldsymbol{q}$ lineaarselt sõltuvad, mis praegu on lubamatu. Et $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, siis teoreemi 16.4 põhjal sisaldavad mõlemad rihid sihi $\{\boldsymbol{a}u\}$. ∎

Mitmeid olulisi lauseid saab tõestada sirgete ja tasandite kohta.

***Teoreem* 16.9.** *Kahe erineva punkti korral leidub parajasti üks sirge, mis neid sisaldab.*

Tõestus. Punktide A ja B korral määratakse selline sirge punktiga A ja sihivektoriga $\overrightarrow{AB}$, s. t. ta koosneb punktidest, mille korral $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AB}u$. Teist sellist sirget enam pole, sest sirge, mis läbib punkti A, koosneb punktidest $\overrightarrow{AX}=\boldsymbol{k}v$, kus $\boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{0}$, ning kui ta sisaldab B, siis leidub v_0, nii et $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{k}v_0$, $v_0\neq 0$, mistõttu $\boldsymbol{k}=\overrightarrow{AB}\frac{1}{v_0}$. ∎

Mitmed laused tulenevad otseselt teoreemidest 16.4, 16.7 ja

16.8 ning eespool selgunud asjaolust, et iga sihi või iga rihi korral leidub parajasti üks antud punkti läbiv sirge või tasand, millel on see siht või riht, kusjuures selliselt võib kätte saada kõik seda punkti läbivad sirged ja tasandid.

***Teoreem* 16.10.** *Kui sirge kaks punkti on tasandil, siis on sellel tasandil kogu sirge. Üht punkti läbiva kahe erineva sirge korral leidub parajasti üks tasand, mis neid sisaldab. Kahel ühise punktiga tasandil on ka ühine sirge.*

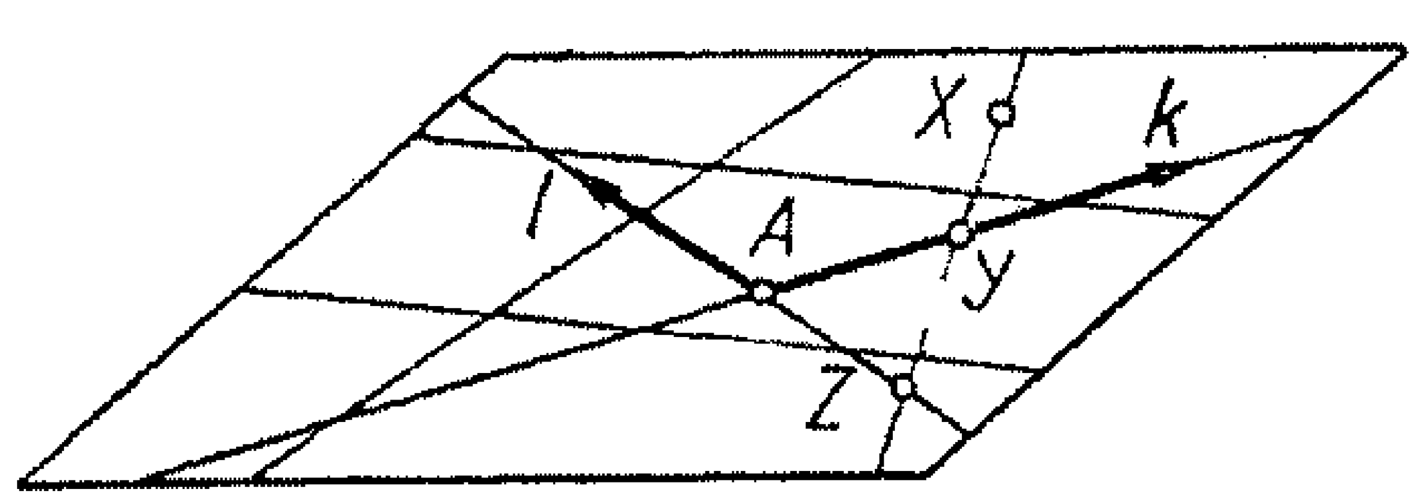
Siit järeldub omakorda, et kui kolm punkti ruumis ei ole ühel sirgel, siis leidub parajasti üks neid läbiv tasand. Põhjenduseks tuleb võtta kaks neid punkte läbivat sirget ja rakendada teoreemi 16.10 keskmist lauset.

Saadud tulemused võetakse sageli (D. Hilberti[22] eeskujul) ruumi geomeetria ülesehitamisel aksioomideks. Käesolevas kursuses antavas käsitluses on nad aga, nagu selgus, järeldusteks aksioomidest **A1—A4**, **B1—B5** ja **C**$^{(3)}$.

Huvi pakub ka järgmine teoreem.

***Teoreem* 16.11.** *Olgu ruumis antud kaks lõikuvat sirget. Neid sisaldava tasandi igast punktist saab panna läbi sirge, mis lõikab kumbagi antud sirgetest, seejuures erinevates punktides.*

Teisiti öeldes, vabalt libisev sirge, mis «toetub» kahele antud sirgele, moodustab kõnesoleva tasandi (joon. 35).



Joon 35.

T õ e s t u s. Olgu antud sirgete lõikepunktiks A ja sihivektoreiks $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$. Tasand koosneb siis punktidest X, mille korral $\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{k}u + \boldsymbol{l}v$, kusjuures antud kahe sirge punktide Y ja Z korral on $\overrightarrow{AY} = \boldsymbol{k}s$ ja $\overrightarrow{AZ} = \boldsymbol{l}t$. Neid läbiv sirge on määratav punktiga Y ja sihivektoriga $\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AY} = \boldsymbol{l}t - \boldsymbol{k}s$ ning koosneb seega punktidest W, mille korral $\overrightarrow{YW} = (\boldsymbol{l}t - \boldsymbol{k}s)w$. Siit järeldub, et $\overrightarrow{AW} =$

[22] D a v i d H i l b e r t (1862—1943) — saksa matemaatik; viis lõpule sajandeid kestnud töö elementaargeomeetria rangete aluste rajamisel, esitades 1889. a. esmakordselt geomeetria aksioomide täieliku süsteemi.

$= \overrightarrow{AY} + \overrightarrow{YW} = ks + (lt - ks)w = ltw + k(1-w)s$. Sirge läbib punkti X, kui

$$(1-w)s = u, \qquad tw = v.$$

Siit saab antud u ja v korral tõesti alati leida s ja t sobivad väärtused tuleb vabalt võtta w, nii et $w \neq 1$ ja $w \neq 0$, ning seejärel määrata $s = \frac{u}{1-w}$, $t = \frac{v}{w}$. ∎

17. **Koordinaaditeisendus.** Osutub, et vektorid $e_1, \ldots, e_n$ aksioomis $C^{(n)}$ ei ole afiinse n-ruumi mingid erilised vektorid, vaid et neid võib asendada ükskõik missuguse n lineaarselt sõltumatu vektoriga. Võimalus valida selliseid n sõltumatust vektorist moodustatud alamhulki küllalt suure vabadusega on sirge, tasandi ja ruumi puhul eespool (art. 15) juba kindlaks tehtud. Näiteks ruumi korral võib võtta vabalt nullist erineva vektori e'_1, lisada sellele mingi vektori e'_2, nii et oleks $e'_2 \nparallel e'_1$, ning saadud kahele vektorile lisada mingi vektori e'_3, nii et e'_1, e'_2 ja e'_3 oleksid mittekomplanaarsed.

Olgu nüüd $e'_1, \ldots, e'_n$ afiinse n-ruumi mingid n lineaarselt sõltumatut vektorit ($n \leqslant 3$). Selle n-ruumi vabalt võetud vektori x lisamisel neile on tulemuseks juba $n+1$ vektorit, mis teoreemide 15.3, 15.5 ja 15.7 põhjal on lineaarselt sõltuvad: leiduvad reaalarvud $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu$, mis ei ole kõik nullid, nii et

$$e'_1\lambda_1 + \ldots + e'_n\lambda_n + x\mu = 0.$$

Siin kindlasti $\mu \neq 0$, sest vastupidisel juhul, kui $\mu = 0$, oleks

$$e'_1\lambda_1 + \ldots + e'_n\lambda_n = \mathbf{0}$$

ja kordajad ei oleks korraga nullid, mis on vastuolus vektorite $e'_1, \ldots, e'_n$ lineaarse sõltumatuse nõudega. Järelikult võib avaldada

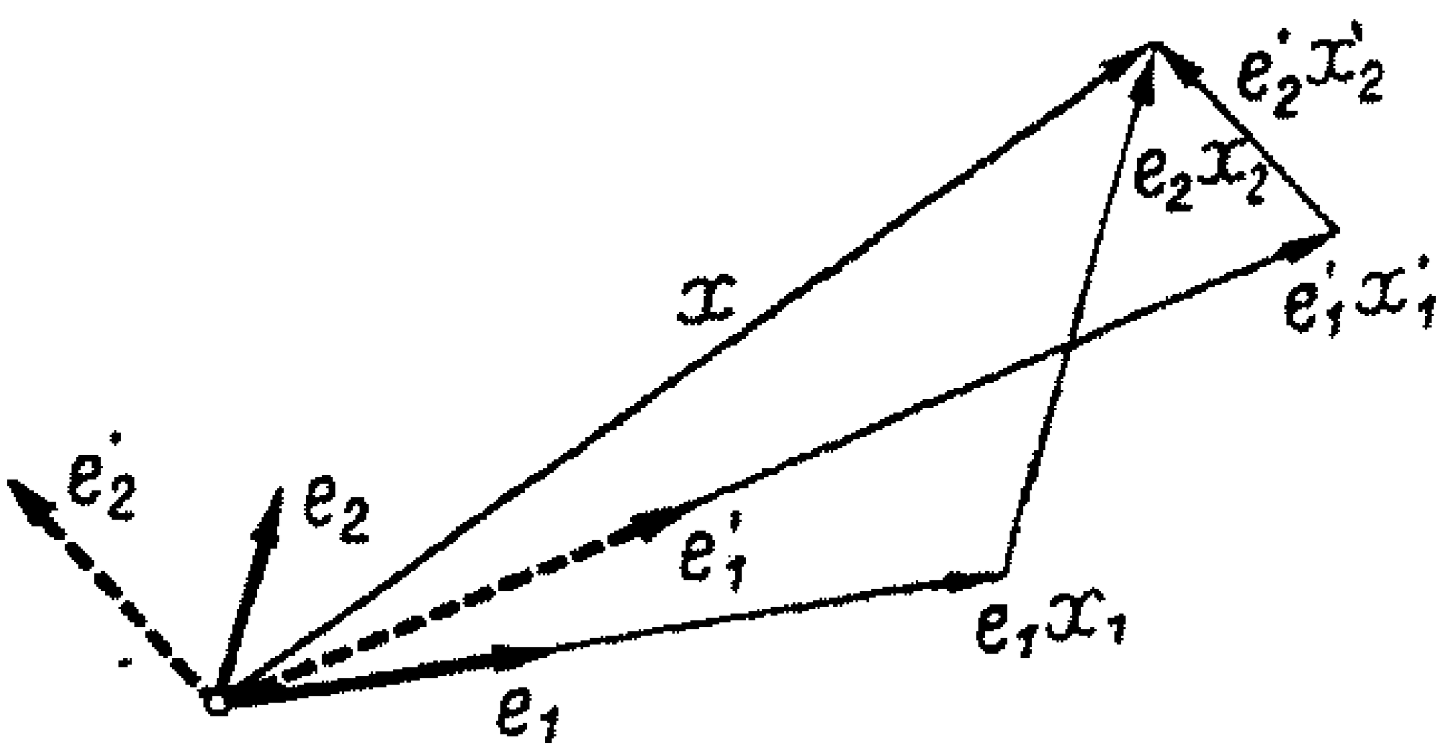
$$x = e'_1x'_1 + \ldots + e'_nx'_n, \tag{17.1}$$

kus $x'_i = -\frac{\lambda_i}{\mu}$, $i = 1, \ldots, n$. Seejuures võrdus $e'_1x'_1 + \ldots + e'_nx'_n = \mathbf{0}$ on $e'_1, \ldots, e'_n$ lineaarse sõltumatuse tõttu võimalik ainult siis, kui $x'_1 = \ldots = x'_n = 0$. Nagu näha, vektorid $e'_1, \ldots, e'_n$ rahuldavad tõepoolest samu nõudeid, mis aksioomis $C^{(n)}$ on seatud vektoritele $e_1, \ldots, e_n$. Seetõttu võib viimaseid ka kõikides järeldustes asendada uute vektoritega $e'_1, \ldots, e'_n$. Nii näiteks võrdus (17.1) korraldab uuesti reaalarvude järjestatud süsteemide $(x'_1, \ldots, x'_n)$ hulga 1 : 1-pealekujutuse kõikide vektorite hulgale. Arve süsteemis $(x'_1, \ldots, x'_n)$, mis on vektori x ainsaks originaaliks, on loomulik endisviisi nimetada selle vektori koordinaatideks, kuid selleks et vahet teha kahesuguste koordinaatide vahel, tuleb märkida, missuguste vektorite baasil need on määratud.

***Def.* 17.1.** Olgu lineaarselt sõltumatute $e_1, \ldots, e_n$ ja $e'_1, \ldots$ $\ldots, e'_n$ korral

$$x = e_1 x_1 + \ldots + e_n x_n = e'_1 x'_1 + \ldots + e'_n x'_n. \tag{17.2}$$

Öeldakse, et vektoril x on koordinaadid $x_1, \ldots, x_n$ b a a s i l $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ning koordinaadid $x'_1, \ldots, x'_n$ baasil $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ (joon. 36). Üleminekul esimeselt baasilt teisele öeldakse, et on toimunud b a a s i t e i s e n d u s.



Joon. 36.

Lepime kokku esimest baasi nimetada «vanaks» ja teist «uueks». Samu epiteete kasutame ka vektori x koordinaatide puhul nendel baasidel. Arusaadavalt on tähtis selgitada, kuidas avalduvad uued koordinaadid vanade kaudu või vastupidi, kui on teada baaside vahekord. Viimast on kõige lihtsam määrata ühe baasi vektorite koordinaatidega teisel baasil, näiteks valemitega

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 c_{11} + \ldots + e_n c_{n1}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ e'_n &= e_1 c_{1n} + \ldots + e_n c_{nn}, \end{aligned} \tag{17.3}$$

mida nimetatakse b a a s i t e i s e n d u s v a l e m i t e k s. Siin on uue baasi vektorid avaldatud vana baasi vektorite lineaarkombinatsioonidena. Valemid (17.3) on täielikult määratud oma kordajate hulgaga, mis on esitatav tabelina:

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} \ldots c_{1n} \\ \ldots \\ c_{n1} \ldots c_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Selliseid tabeleid nimetatakse üldiselt maatriksiteks [23], antud maatriksit C — t e i s e n d u s m a a t r i k s i k s. Tema veerud koosnevad, nagu näha, uute baasivektorite $e'_1, \ldots, e'_n$ koordinaatidest vanal baasil. Selle maatriksi determinant [24]

[23] Vt. G. K a n g r o, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 59.

[24] Meile pakuvad $n \leqslant 3$ tõttu huvi ainult juhud $n = 2$ ja $n = 3$, mil determinandi mõiste on antud def-idega 15.2 ja 15.3 (vt. ka allmärkus [17]).

$$|C|=\begin{vmatrix} c_{11} \dots c_{1n} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ c_{n1} \dots c_{nn} \end{vmatrix}$$

on vektorite $e'_1, \dots, e'_n$ lineaarse sõltumatuse tõttu teoreemide 15.4 ja 15.7 põhjal nullist erinev.

Valemitele (17.3) vastupidiste seoste saamiseks tuleb neid valemeid vaadelda süsteemina «tundmatute» $e_1, \dots, e_n$ $(n \leqslant 3)$ määramiseks. Süsteemi lahendamisel algebrast tuntud reeglite järgi[25] on tulemuseks valemid

$$\begin{aligned} e_1 &= e'_1 c^*_{11} + \dots + e'_n c^*_{n1}, \\ &\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ e_n &= e'_1 c^*_{1n} + \dots + e'_n c^*_{nn}, \end{aligned} \tag{17.4}$$

mis näitavad, kuidas vana baasi vektorid avalduvad uue baasi vektorite lineaarkombinatsioonidena. Et kordajad avalduvad siin maatriksi C elementide kaudu ning et valemid (17.4) on saadud valemite (17.3) n.-ö. pööramisel, siis uute kordajate maatriksit nimetatakse maatriksi C pöördmaatriksiks[26] ja tähistatakse C^{-1}. Seega

$$C^{-1}=\begin{Vmatrix} c^*_{11} \dots c^*_{1n} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ c^*_{n1} \dots c^*_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Seosed antud vektori x uute ja vanade koordinaatide vahel võib saada võrdusest (17.2), kui sellesse teha asendused valemist (17.3) või (17.4). Esimeste valemite kasutamisel on tulemuseks:

$$\begin{gathered} e_1 x_1 + \dots + e_n x_n = \\ = (e_1 c_{11} + \dots + e_n c_{n1}) x'_1 + \dots + (e_1 c_{1n} + \dots + e_n c_{nn}) x'_n = \\ = e_1 (c_{11} x'_1 + \dots + c_{1n} x'_n) + \dots + e_n (c_{n1} x'_1 + \dots + c_{nn} x'_n). \end{gathered}$$

Et vektorid $e_1, \dots, e_n$ on lineaarselt sõltumatud, siis siit järeldub:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11} x'_1 + \dots + c_{1n} x'_n, \\ &\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ x_n &= c_{n1} x'_1 + \dots + c_{nn} x'_n. \end{aligned} \tag{17.5}$$

Tehes seosesse (17.2) asendused valemist (17.4), on tulemuseks:

$$\begin{aligned} x'_1 &= c^*_{11} x_1 + \dots + c^*_{1n} x_n, \\ &\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ x'_n &= c^*_{n1} x_1 + \dots + c^*_{nn} x_n. \end{aligned} \tag{17.6}$$

---

[25] Vt. G. Kangro, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 9 ja 10 (juhtudel $n=2$ ja $n=3$, millega käesolevas raamatus piirdutakse) või lk. 53 (üldjuhul, mistahes naturaalarvulise n korral).

[26] Lähemalt selle mõiste kohta vt. sealsamas lk. 92 ja 93.

Kui baasiteisendusvalemid (17.3) annavad uue baasi vektorite avaldised vana baasi vektorite kaudu, siis äsjasaadud valemid (17.6) näitavad, kuidas sel puhul avalduvad vektori $\boldsymbol{x}$ uued koordinaadid vanade koordinaatide kaudu. Valemeid (17.6) nimetatakse seetõttu vastavateks koordinaaditeisendusvalemiteks. Kordajate maatriksiks on siin, nagu näha, teisendusmaatriksi C pöördmaatriks C^{-1}. Üldiselt, kui võrrelda valemeid (17.3) ja (17.5) või valemeid (17.4) ja (17.6), siis selgub, et uute vektorite kohale on asunud vanad koordinaadid, vanade vektorite kohale aga uued koordinaadid, kusjuures kordajate c_{ik} või c^*_{ik} ridadest on saanud veerud. Selliselt on omavahel seotud vastavad baasiteisendus- ja koordinaaditeisendusvalemid.

Punkti X koordinaatide saamiseks tuleb fikseerida teatav alguspunkt O. Sel puhul X koordinaatideks on def. 14.2 kohaselt kohavektori $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX}$ koordinaadid. Alguspunkt O on vabalt valitav ning seega asendatav ükskõik missuguse teise punktiga O', samuti nagu baas $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ on asendatav ükskõik missuguse n lineaarselt sõltumatu vektori hulgaga $\{\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n\}$. Seetõttu osutub vajalikuks järgmine mõiste.

***Def.* 17.2.** Kui

$$\overrightarrow{OX} = \boldsymbol{e}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n x_n, \qquad \overrightarrow{O'X} = \boldsymbol{e}'_1 x'_1 + \ldots + \boldsymbol{e}'_n x'_n,$$

siis kõneldakse, et $x_1, \ldots, x_n$ on punkti X koordinaadid reeperi[27] $\{O; \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ suhtes ning $x'_1, \ldots, x'_n$ on punkti X koordinaadid reeperi $\{O'; \boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n\}$ suhtes.

Seosed punkti X uute ja vanade koordinaatide vahel on lihtsad, kui reeperid erinevad ainult alguspunkti poolest. Sel juhul kõneldakse, et on toimunud reeperi lüke. Kui uue alguspunkti O' vanad koordinaadid tähistada $O'(c_1, \ldots, c_n)$, s.t. kui $\overrightarrow{OO'} = \boldsymbol{e}_1 c_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n c_n$, siis võrdustest $\overrightarrow{OX} = \boldsymbol{e}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n x_n$, $\overrightarrow{O'X} = \boldsymbol{e}_1 x'_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n x'_n$ ja $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X}$ järeldub otsekohe, et

$$x_1 = x'_1 + c_1, \quad \ldots, \quad x_n = x'_n + c_n \tag{17.7}$$

ning siit

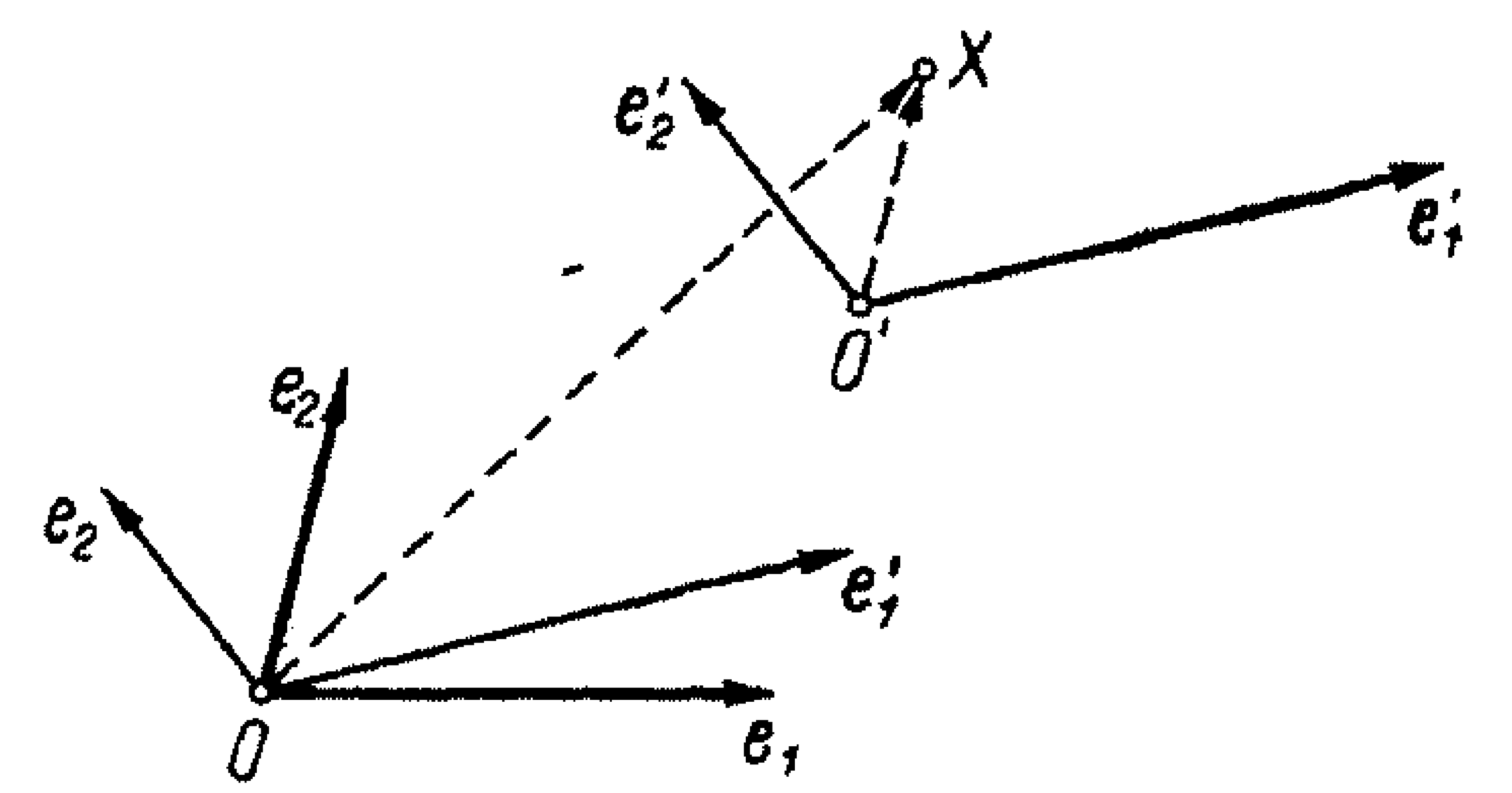
$$x'_1 = x_1 + c^*_1, \quad \ldots, \quad x'_n = x_n + c^*_n, \tag{17.8}$$

kus $c^*_1 = -c_1, \ldots, c^*_n = -c_n$. Võttes viimastes valemites $x_1 = \ldots = x_n = 0$, saame $x'_1 = c^*_1, \ldots, x'_n = c^*_n$; järelikult $c^*_1, \ldots, c^*_n$ on vana alguspunkti O uued koordinaadid.

Kui vana ja uus reeper erinevad üksnes baasi poolest,

[27] pr. k. *repère* — märk, tähis.

s. t. kui $O' = O$, siis punkti X koordinaatideks nende reeperite suhtes on ühe ja sama kohavektori $x = \overrightarrow{OX}$ koordinaadid vastavate baaside suhtes. Koordinaaditeisendusvalemeiks on siis järelikult valemid (17.6).



Joon 37

Üldise reeperiteisenduse, kus muutuvad nii alguspunkt O kui ka baas $\{e_1, \ldots, e_n\}$, võib teha kahes etapis (joon. 37). Esialgu võib teha ainult baasiteisenduse sama alguspunkti O korral, s. t. minna üle vahepealsele reeperile $\{O;\ e'_1, \ldots, e'_n\}$. Kui punkti X koordinaadid viimase suhtes tähistada $x''_1, \ldots, x''_n$, siis valemite (17.6) kohaselt

$$\begin{aligned} x''_1 &= c^*_{11}x_1 + \ldots + c^*_{1n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x''_n &= c^*_{n1}x_1 + \ldots + c^*_{nn}x_n. \end{aligned}$$

Edasi tuleb teha reeperi lüke, s. t. üleminek reeperilt $\{O;\ e'_1, \ldots, e'_n\}$ uuele reeperile $\{O';\ e'_1, \ldots, e'_n\}$. Sel korral valemite (17.8) põhjal on

$$x'_1 = x''_1 + c^*_1, \ \ldots, \ x'_n = x''_n + c^*_n$$

(selle ülemineku korral vanadeks koordinaatideks on $x''_1, \ldots, x''_n$). Pärast asendamist on tulemuseks valemid

$$\begin{aligned} x'_1 &= c^*_{11}x_1 + \ldots + c^*_{1n}x_n + c^*_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n &= c^*_{n1}x_1 + \ldots + c^*_{nn}x_n + c^*_n. \end{aligned} \tag{17.9}$$

Et siin jällegi $x_1 = \ldots = x_n = 0$ korral on $x'_1 = c^*_1, \ldots, x'_n = c^*_n$, siis valemite vabaliikmed osutuvad vana alguspunkti O uuteks koordinaatideks (s. t. punkti O koordinaatideks reeperi $\{O';\ e'_1, \ldots, e'_n\}$ suhtes). Kordajate maatriks on aga endiselt teisendusmaatriksi pöördmaatriks.

Vastupidiste seoste saamiseks tuleb vahetada reeperite osad.

Tulemuseks on valemid

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x'_1 + \ldots + c_{1n}x'_n + c_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= c_{n1}x'_1 + \ldots + c_{nn}x'_n + c_n. \end{aligned} \tag{17.10}$$

Asjaolu, et sirgel, tasandil ja ruumis ei saa ühtegi reeperit eelistada teisele, mistõttu vektori ja punkti koordinaadid ei ole üheselt määratavad, on muidugi koordinaatide meetodi puuduseks, mida mõnevõrra leevendab kindlate seoste olemasolu eri reeperite suhtes võetud koordinaatide vahel. Teiselt poolt aga, nagu selgub järgmistes artiklites, on just baasi- ja vastavate koordinaaditeisenduste abil võimalik defineerida mitmeid olulisi mõisteid, mis muidu oleksid jäänud varju.

18. Ekvivalentsus. Osutub, et kuigi afiinse n-ruumi (seega $n \leqslant 3$ puhul sirge, tasandi või ruumi) vektorite baasid rahuldavad kõik ühtemoodi aksioomi $\mathbf{C}^{(n)}$ nõudeid ($n = 1$, 2 või 3 korral), ei saa siiski iga kaht neist lugeda täiesti samaväärseteks. Tegelikult jagunevad kõik baasid kahte klassi niiviisi, et samaväärsed on kõik baasid ühes klassis ning ka klassid ise on samaväärsed, kuid iga kaks baasi eri klassidest erinevad teatava omaduse poolest. Seda omadust nimetatakse orientatsiooniks, tema täpne definitsioon antakse hiljem.

Enne seda on kasulik mõnevõrra täiendada teadmisi hulgateooriast (vt. art. 8) nende mõistete osas, mis on seotud hulkade klassijaotusega.

***Def.* 18.1.** Vastavust f, mis on korraldatud hulga P elementide vahel ning seetõttu eraldab välja teatava elemendipaaride alamhulga $F \subset P \times P$, nimetatakse e k v i v a l e n t s u s e k s, kui on rahuldatud järgmised tingimused:

1° iga $x \in P$ korral $(x, x) \in F$ (refleksiivsus);
2° kui $(x, y) \in F$, siis $(y, x) \in F$ (sümmeetria);
3° kui $(x, y) \in F$ ja $(y, z) \in F$, siis $(x, z) \in F$ (transitiivsus).

Sel puhul tõsiasi $(x, y) \in F$ kirjutatakse ka kujul $x \sim y$ ning väljendatakse sõnadega: x ja y on e k v i v a l e n t s e d. Tingimused 1°—3° saab sel puhul kirja panna järgmiselt: 1° $x \sim x$, 2° kui $x \sim y$, siis $y \sim x$, 3° kui $x \sim y$ ja $y \sim z$, siis $x \sim z$.

Elementaarseks näiteks on vastavus f, mille korral $F = P \times P$; sel juhul P iga kahe elemendi x ja y korral on $x \sim y$. Lihtsaks näiteks on ka vastavus f, mille puhul hulga P igale elemendile x vastab ainult tema ise, s. t. mille puhul hulka F kuuluvad üksnes samadest elementidest moodustatud paarid. Tegemist on ekvivalentsusega, mida nimetatakse elementide võrduseks hulgas. Kolmandaks näiteks võib tuua vastavuse naturaalarvude hulgas, mis ühendab paaridesse kõik niisugused naturaalarvud, millede summa on paarisarv. Ka see on ekvivalentsus, nagu on kerge kontrollida. Omavahel ekvivalentsed on kõik paarisarvud ning samuti ka kõik paaritud arvud.

Teoreem 18.1. *Kui hulgas* P *on määratud ekvivalentsus, siis hulk* P *lahutub alamhulkadeks selliselt, et* 1) P *iga element kuulub ühte ja ainult ühte alamhulka,* 2) *iga kaks elementi samast alamhulgast on ekvivalentsed ning* 3) *ükski kaks elementi eri alamhulkadest ei ole ekvivalentsed.*

Tõestus. Võtame vabalt elemendi $a \in \mathrm{P}$ ja vaatleme alamhulka

$$\mathrm{P}_a = \{x \mid x \in \mathrm{P}, x \sim a\}.$$

See alamhulk ei ole tühi, sest 1° põhjal $a \in \mathrm{P}_a$. Esimesest näitest selgub, et P_a võib ühtida kogu hulgaga. Kui see nii ei ole, siis võib leida elemendi $b \in \mathrm{P}$, nii et $b \notin \mathrm{P}_a$, ning määrata alamhulga P_b. Osutub, et $\mathrm{P}_a \cap \mathrm{P}_b = \varnothing$. Tõepoolest, kui oletada, et leidub $c \in \mathrm{P}$, nii et $c \in \mathrm{P}_a$ ja $c \in \mathrm{P}_b$, siis oleks $c \sim a$ ja $c \sim b$ ehk 2° põhjal $b \sim c$ ja $c \sim a$ ning siit järelduks 3° põhjal, et $b \sim a$, mis on praegu lubamatu, sest $b \notin \mathrm{P}_a$. Võib osutuda, et $\mathrm{P}_a \cup P_b = \mathrm{P}$ (vt. ülalantud kolmandat näidet). Kui see nii ei ole, siis võib leida $c \in \mathrm{P}$, nii et $c \notin \mathrm{P}_a$ ja $c \notin \mathrm{P}_b$. Samuti nagu eespool saab näidata, et $\mathrm{P}_c \cap \mathrm{P}_a = \varnothing$ ja $\mathrm{P}_c \cap \mathrm{P}_b = \varnothing$. Võib osutuda, et $\mathrm{P}_a \cup \mathrm{P}_b \cup \mathrm{P}_c = \mathrm{P}$. Vastupidisel juhul tuleb samal viisil jätkata, kuni varem või hiljem on ammendatud terve hulk P. Sel teel on kindlakstehtav, et nõue 1) on rahuldatud.

Tuleb veel näidata, et kui vabalt võetud $a \in \mathrm{P}$ korral $x \in \mathrm{P}_a$ ja $y \in \mathrm{P}_a$, siis $x \sim y$. See on tõesti nii, sest kui $x \sim a$ ja $y \sim a$, siis 2° põhjal on $a \sim y$ ning 3° põhjal on siis $x \sim y$. Lõpuks tuleb veel näidata, et kui $x \in \mathrm{P}_a$ ja $y \in \mathrm{P}_b$, kus $\mathrm{P}_a \neq \mathrm{P}_b$ (s. t. $a \notin \mathrm{P}_b$), siis $x \sim y$ on lubamatu. See on tõesti nii, sest kui oleks $x \sim y$, siis oleks korraga $a \sim x$ ja $x \sim y$, millest järelduks $a \sim y$, kuid sel juhul oleks korraga $a \sim y$ ja $y \sim b$, millest tuleneks $a \sim b$, mis aga on $a \notin \mathrm{P}_b$ tõttu võimatu. ∎

Alamhulki, millest on juttu tõestatud teoreemis, nimetatakse ekvivalentsusklassideks. Igaüks neist on täielikult määratud, kui on antud selle mingi element, mida sageli nimetatakse selle klassi esindajaks. Eespool toodud kolmanda näite korral on ekvivalentsusklassideks paaris- ja paaritute naturaalarvude alamhulgad, viimaste esindajateks on näiteks arvud 0 ja 1.

Rakendame nüüd neid mõisteid baaside hulga puhul, defineerides selles ekvivalentsuse järgmiselt.

Def. **18.2.** Baasi $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ nimetatakse ekvivalentseks baasiga $\{e_1, \ldots, e_n\}$ parajasti siis, kui baasiteisendusmaatriksi C (vt. (17.3)) determinant $|C|$ on positiivne.

Nimetuse õigustamiseks tuleb kontrollida, et siin on tõesti tegemist ekvivalentsusega, s. t. et tingimused 1°—3° on rahuldatud. Seda teeme eraldi kõigepealt sirge puhul, kus olukord on suhteliselt lihtne, ning seejärel tasandi ja ruumi puhul.

Sirge vektorite korral on baasiks iga nullist erinev vektor e. Def. 18.12 järgi on $e' \sim e$ parajasti siis, kui seoses $e' = ec$ on $c > 0$. Siin 1° $e \sim e$, sest seoses $e = e$ on tõesti $c = 1 > 0$. Edasi, 2° kui $e' \sim e$, siis $e \sim e'$, sest kui $e' = ec$ ja $c > 0$, siis $e = e'\frac{1}{c}$ ja tõesti $\frac{1}{c} > 0$. Lõpuks 3° kui $e'' \sim e'$ ja $e' \sim e$, siis $e'' \sim e$, sest kui $e'' = e'c'$ ja $c' > 0$ ning $e' = ec$ ja $c > 0$, siis $e'' = (ec)c' = e(cc') = e(cc')$ ja tõesti $cc' > 0$. Järelikult def-iga 18.2 on sirge nullist erinevate vektorite hulgas tõepoolest määratud ekvivalentsus. Seejuures ekvivalentsusklasse on ainult kaks, sest kui e ja e^* kuuluvad erinevatesse klassidesse, s. t. seose $e = e^*c^*$ puhul on $c^* < 0$, siis vabalt võetud vektori $e' = ec$, $c \neq 0$ korral on kas $c > 0$ ja seega $e' \sim e$ või $c < 0$ ning koos sellega seose

$$e' = (e^*c^*)c = e^*(c^*c)$$

puhul on $c^*c > 0$ ja seega $e' \sim e^*$.

Def. **18.3.** Sirge nullist erinevate vektorite hulgas nimetatakse kumbagi ekvivalentsusklassi suunaks ehk orientatsiooniks sirgel. Kahe sama klassi vektori x ja y korral öeldakse, et nad on samasuunalised ehk ühtemoodi orienteeritud; selle tunnuseks on kordaja c positiivsus võrduses $y = xc$. Kaht vektorit x ja y eri klassidest nimetatakse erisuunalisteks ehk erinevalt orienteerituiks; selle tunnuseks on kordaja c negatiivsus võrduses $y = xc$.

Tasandi või ruumi korral on arutlused analoogilised, kuid vektorid e ja e' (baasid sirge puhul) asenduvad baasidega tasandi või ruumi puhul — mittekollineaarsete vektorite paaridega või mittekomplanaarsete vektorite kolmikutega. Kasulik on sellist paari või kolmikut tähistada ühe tähega. Lepime kokku vana baasi tähistada

$$\{e_1, \ldots, e_n\} = \varepsilon \tag{18.1}$$

ning sellest teisendamisel saadud uut baasi $\{e'_1, \ldots, e'_n\} = \varepsilon'$ tähistada

$$\{e_1c_{11} + \ldots + e_nc_{n1}, \ldots, e_1c_{1n} + \ldots + e_nc_{nn}\} = \varepsilon C. \tag{18.2}$$

Baasiteisendusvalemid (17.3) on siis kokkuvõtlikult kirjutatavad kujul

$$\varepsilon' = \varepsilon C. \tag{18.3}$$

Sel korral tulevad eelnenud arutluses esinenud arvuliste kordajate asemele baasiteisendusmaatriksid. Arutluse kordamiseks on eelnevalt vaja selgitada, mida tuleks mõista kahe maatriksi korrutise all ning kuidas on arvutatav korrutisena saadud maatriksi determinant.

Maatriksite

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} \dots c_{1n} \\ \dots \\ c_{n1} \dots c_{nn} \end{Vmatrix} \quad \text{ja} \quad C' = \begin{Vmatrix} c'_{11} \dots c'_{1n} \\ \dots \\ c'_{n1} \dots c'_{nn} \end{Vmatrix}$$

korrutis CC' on loomulik defineerida nii, et teisenduste $\varepsilon' = \varepsilon C$ ja $\varepsilon'' = \varepsilon' C'$ järjest sooritamise tulemus $\varepsilon'' = (\varepsilon C) C'$ oleks kirjutatav kujul $\varepsilon'' = \varepsilon (CC')$, s. t. nii, et oleks

$$(\varepsilon C) C' = \varepsilon (CC').$$

Et siin võrduse (18.2) kahekordse rakendamise tulemuseks on

$$\begin{aligned}(\varepsilon C) C' = \{&(e_1 c_{11} + \dots + e_n c_{n1}) c'_{11} + \dots + (e_1 c_{1n} + \dots + e_n c_{nn}) c'_{n1}, \dots \\ &\dots, (e_1 c_{11} + \dots + e_n c_{n1}) c'_{1n} + \dots + (e_1 c_{1n} + \dots + e_n c_{nn}) c'_{nn}\} = \\ = \{&e_1 (c_{11} c'_{11} + \dots + c_{1n} c'_{n1}) + \dots + e_n (c_{n1} c'_{11} + \dots + c_{nn} c'_{n1}), \dots \\ &\dots, e_1 (c_{11} c'_{1n} + \dots + c_{1n} c'_{nn}) + \dots + e_n (c_{n1} c'_{1n} + \dots + c_{nn} c'_{nn})\},\end{aligned}$$

siis [28]

$$CC' = \begin{Vmatrix} c_{11} c'_{11} + \dots + c_{1n} c'_{n1} & \dots & c_{11} c'_{1n} + \dots + c_{1n} c'_{nn} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} c'_{11} + \dots + c_{nn} c'_{n1} & \dots & c_{n1} c'_{1n} + \dots + c_{nn} c'_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{18.4}$$

Meenutame et $(\varepsilon C) C'$ vektorite koordinaadid baasil ε lähevad maatriksi CC' veergudesse (vt. art. 17).

Maatriksi C pöördmaatriks C^{-1}, mis on eespool defineeritud nii, et seosest $\varepsilon' = \varepsilon C$ järeldub $\varepsilon = \varepsilon' C^{-1}$, on nüüd iseloomustatav sellega, et

$$\varepsilon = (\varepsilon C) C^{-1} = \varepsilon (C^{-1} C).$$

Maatriksit E, mille korral $\varepsilon E = \varepsilon$, nimetatakse ühikmaatriksiks. Sel korral baasiteisendusvalemis (17.3) on $e'_1 = e_1, \dots, e'_n = e_n$, ning et $e'_1, \dots, e'_n$ on lineaarselt sõltumatud vek-

[28] Vrd. G. Kangro, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 87.

torid, siis maatriksi E kuju on vastavalt tasandi või ruumi korral järgmine:

$$E=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad E=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{18.5}$$

Pöördmaatriksit C^{-1} iseloomustab seega võrdus

$$CC^{-1}=E. \tag{18.6}$$

Osutub, et kahe maatriksi C ja C′ korrutise CC′ determinandiks $|CC'|$ on tegurite determinantide $|C|$ ja $|C'|$ korrutis:

$$|CC'|=|C|\,|C'|. \tag{18.7}$$

See tulemus tõestatakse üldises determinantide teoorias[29], kuid teist ja kolmandat järku determinantide puhul, milledega käesolevas raamatus on võimalik piirduda, on ta kontrollitav ka vahetu arvutamise teel. Näiteks $n=2$ korral on

$$|C|=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}=c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21},$$

$$|C'|=\begin{vmatrix} c'_{11} & c'_{12} \\ c'_{21} & c'_{22} \end{vmatrix}=c'_{11}c'_{22}-c'_{12}c'_{21}$$

ning

$$|CC'|=\begin{vmatrix} c_{11}c'_{11}+c_{12}c'_{21} & c_{11}c'_{12}+c_{12}c'_{22} \\ c_{21}c'_{11}+c_{22}c'_{21} & c_{21}c'_{12}+c_{22}c'_{22} \end{vmatrix}=$$

$$=(c_{11}c'_{11}+c_{12}c'_{21})(c_{21}c'_{12}+c_{22}c'_{22})-$$

$$-(c_{11}c'_{12}+c_{12}c'_{22})(c_{21}c'_{11}+c_{22}c'_{21}).$$

Pärast vajalikke korrutamisi ja sarnaste liikmete koondamist on kohe selge, et $|CC'|=|C||C'|$. Analoogiliselt võib valemit (15.6) kasutades kontrollida võrduse (18.7) kehtivust ka $n=3$ puhul.

Valemist (18.6) saame nüüd:

$$|C|\,|C^{-1}|=|E|,$$

kusjuures nii $n=2$ kui $n=3$ puhul $|E|=1$, nagu on lihtne kindlaks teha. Seega

$$|C^{-1}|=|C|^{-1}, \tag{18.8}$$

s. t. pöördmaatriksi determinant on maatriksi determinandi pöördväärtus.

Nende tulemuste abil saab nüüd täpselt samuti nagu eespool sirge puhul kontrollida, et ka tasandi ja ruumi korral on rahul-

[29] Vt. G. Kangro, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 87.

datud tingimused 1°—3°, kui lähtuda baaside ekvivalentsuse eespool antud definitsioonist: $\varepsilon' \sim \varepsilon$, kui $\varepsilon' = \varepsilon C$ puhul $|C| > 0$.

1° Siin tõesti $\varepsilon \sim \varepsilon$, sest $\varepsilon = \varepsilon E$ ja $|E| = 1 > 0$.

2° Kui $\varepsilon' \sim \varepsilon$, siis $\varepsilon \sim \varepsilon'$, sest kui $\varepsilon' = \varepsilon C$ ja $|C| > 0$, siis $\varepsilon = \varepsilon' C^{-1}$ ja tõesti $|C^{-1}| = |C|^{-1} > 0$.

3° Kui $\varepsilon'' \sim \varepsilon'$ ja $\varepsilon' \sim \varepsilon$, siis $\varepsilon'' \sim \varepsilon$, sest kui $\varepsilon' = \varepsilon C$ ja $|C| > 0$ ning $\varepsilon'' = \varepsilon' C'$ ja $|C'| > 0$, siis $\varepsilon'' = (\varepsilon C)C' = \varepsilon(CC')$ ja tõesti $|CC'| = |C||C'| > 0$.

Järelikult on tegemist ekvivalentsusega tasandi või ruumi baaside hulgas Seejuures ekvivalentsusklasse on ainult kaks, sest kui ε ja ε^* kuuluvad erinevatesse klassidesse, s t. seose $\varepsilon = \varepsilon^* C^*$ puhul on $|C^*| < 0$, siis vabalt võetud baasi $\varepsilon' = \varepsilon C$ korral on kas $|C| > 0$ ja seega $\varepsilon' \sim \varepsilon$ või $|C| < 0$ (sest baasiteisenduse korral alati $|C| \neq 0$) ning koos sellega seose

$$\varepsilon' = (\varepsilon^* C^*)C = \varepsilon^*(C^* C)$$

puhul on $|C^* C| = |C^*||C| > 0$ ja seega $\varepsilon' \sim \varepsilon^*$.

Tähistuses (18.2), mille abil baasiteisendusvalemid sai kokkuvõtlikult kirjutada kujul $\varepsilon' = \varepsilon C$, on seni tegemist lihtsalt teatava kokkuleppega. Pärast seda, kui on defineeritud maatriksite korrutamise tehe, saab kokkuleppeliselt kasutatud sümbolit εC tõlgendada teatava korrutisena. Selleks tuleb maatriksite korrutamise eeskirja (18.4) laiendada ka juhule, kus korrutatavad maatriksid ei ole ühesuguse ridade ja veergude arvuga. Seda saab teha juhul, kui esimese maatriksi veergude arv on võrdne teise maatriksi ridade arvuga. Olgu tegemist maatriksitega

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} \dots b_{1n} \\ \dots\dots \\ b_{p1} \dots b_{pn} \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} c_{11} \dots c_{1q} \\ \dots\dots \\ c_{n1} \dots c_{nq} \end{Vmatrix}.$$

Nende korrutiseks nimetatakse siis (18.4) eeskujul maatriksit

$$BC = \begin{Vmatrix} b_{11}c_{11} + \dots + b_{1n}c_{n1} & \dots & b_{11}c_{1q} + \dots + b_{1n}c_{nq} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ b_{p1}c_{11} + \dots + b_{pn}c_{n1} & \dots & b_{p1}c_{1q} + \dots + b_{pn}c_{nq} \end{Vmatrix},$$

millel on p rida ja q veergu. Kui nüüd baasi $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$ vaadelda maatriksina, millel on üks rida ja n (üheelemendilist) veergu, siis selle maatriksi veergude arv on võrdne C ridade arvuga ja saab kõnelda korrutisest εC mis, nagu näha, ühtib parajasti üherealise maatriksiga (18.2). Seega (18.3) on tõlgendatav võrdusena üherealiste maatriksite vahel.

Analoogiliselt saab käsitleda ka koordinaaditeisendusvalemeid. Selleks tuleb koordinaatidest $x'_1, \dots, x'_n$ moodustada üheveeruline maatriks x′, millel on n (üheelemendilist) rida. Sel korral võib kõnelda korrutisest Cx′:

$$Cx' = \begin{Vmatrix} c_{11} \dots c_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{n1} \dots c_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x'_1 \\ \cdot \; \cdot \\ x'_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_{11}x'_1 + \dots + c_{1n}x'_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{n1}x'_1 + \dots + c_{nn}x'_n \end{Vmatrix}.$$

Selle elemendid, nagu selgub, osutuvad just valemite (17.5) paremateks poolteks. Seega võib need valemid kirjutada kokkuvõtlikult kujul

$$x = Cx'. \tag{18.9}$$

19. Orientatsioon. Pärast neid ettevalmistusi on võimalik anda orientatsiooni üldine mõiste järgmise definitsiooniga.

***Def.* 19.1.** Olgu sirge, tasandi või ruumi baaside hulgas määratud ekvivalentsus, milles $\varepsilon' \sim \varepsilon$ parajasti siis, kui seoses $\varepsilon' = \varepsilon C$ on $|C| > 0$. Kumbagi kahest ekvivalentsusklassist, milledeks lahutub baaside hulk, nimetatakse o r i e n t a t s i o o n i k s sirgel, tasandil või ruumis. Kui baasid kuuluvad samasse klassi, siis öeldakse, et nad on ühtemoodi orienteeritud. Kaht baasi eri klassidest nimetatakse erinevalt orienteerituiks.

Sirget, millel on valitud üks kahest orientatsioonist ehk suunast, nimetatakse orienteeritud ehk suunatud sirgeks. Orientatsiooni tasandil nimetatakse ka pöördesuunaks. Kui on valitud üks pöördesuund kahest võimalikust, siis öeldakse, et tasand on orienteeritud. Ruumi, milles on valitud orientatsioon, nimetatakse orienteeritud ruumiks.

Kui orientatsiooni sirgel võib eeltoodu põhjal tõlgendada suunana sirgel, siis tasandi või ruumi puhul ei nähtu veel def-ist 19.1 vahetult, milles õieti seisneb orientatsiooni sisuline tähendus. Ei ole näiteks selge seegi, millega on tasandi puhul õigustatud orientatsiooni nimetamine pöördesuunaks.

Selle nimetuse ja ühtlasi orientatsiooni mõiste sisu selgitamiseks vaatleme kõigepealt juhtu, kus baasiteisendus seisneb lihtsalt baasi vektorite vahetamises, s. t. kus baasiteisendusvalemeiks on

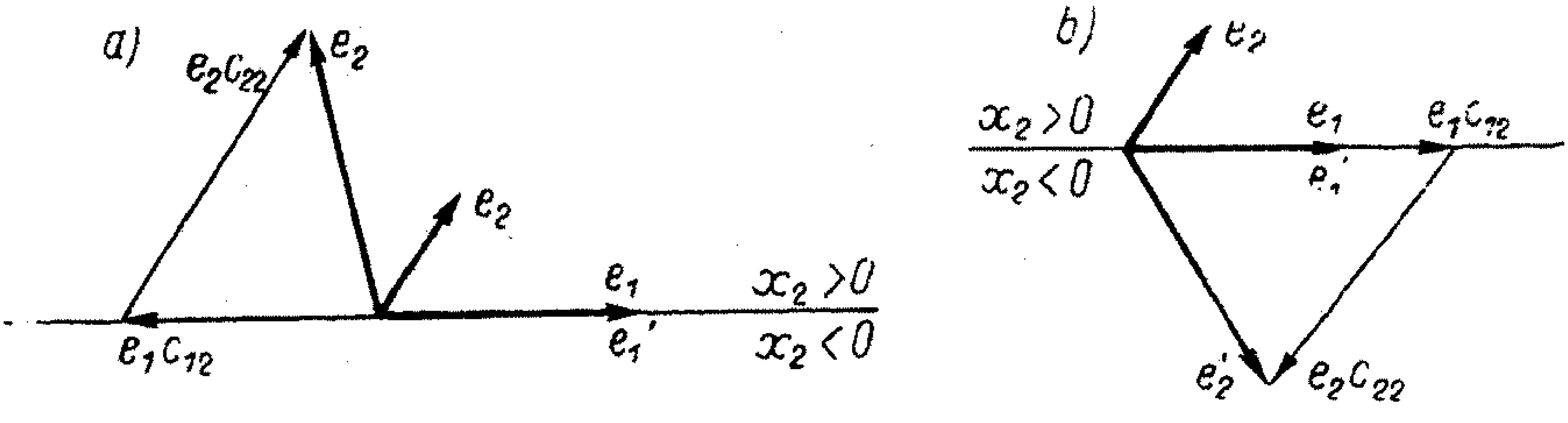
$$\begin{aligned} e_1 &= e_2, \\ e'_2 &= e_1. \end{aligned}$$

Siin on kordajate maatriksiks

$$C_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

ja $|C_0| = -1 < 0$. Tähendab, sellise baasiteisenduse korral orientatsioon muutub.

Üldisema juhu haaramiseks vaatleme järgnevalt baasiteisendust, kus muudetakse ainult baasi üht vektorit, näiteks vektorit



Joon. 38.

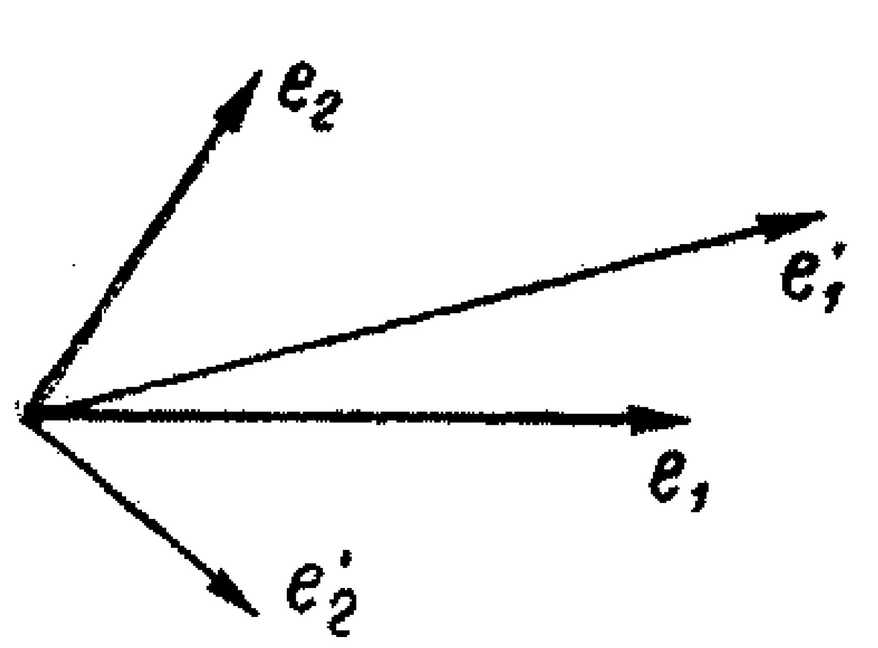
e_2. Baasiteisendusvalemeiks on siis

$$e'_1=e_1,$$
$$e'_2=e_1c_{12}+e_2c_{22}.$$

Et siin

$$|C|=\begin{vmatrix}1 & c_{12}\\ 0 & c_{22}\end{vmatrix}=c_{22},$$

siis baasid $\varepsilon'=\{e_1, e'_2\}$ ja $\varepsilon=\{e_1, e_2\}$ on sama- või erisuguselt orienteeritud olenevalt sellest, kas $c_{22}>0$ (joon. 38, *a*) või $c_{22}<0$ (joon. 38, *b*). Antud reeperi $\{O;\ e_1, e_2\}$ korral nimetatakse positiivseks x_2-pooltasandiks kõigi niisuguste punktide X hulka, mille koordinaat x_2, s. t. üks kordajaist avaldises $\overrightarrow{OX}=e_1x_1+e_2x_2$, on positiivne. Analoogiliselt hulka $\{X|\,x_2<0\}$ nimetatakse negatiivseks x_2-pooltasandiks. Punkt $(0, 1)$ kohavektoriga e_2 on ilmselt positiivses x_2-pooltasandis. Öeldust järeldub, et vaadeldavad baasid $\varepsilon'=\{e_1, e'_2\}$ ja $\varepsilon=\{e_1, e_2\}$ on ühe- või erisuguse orientatsiooniga olenevalt sellest, kas punktid kohavektoritega e'_2 ja e_2 on samas x_2-pooltasandis või erinevates x_2-pooltasandites.



Joon. 39.

Olgu nüüd antud mingid kaks baasi $\varepsilon=\{e_1, e_2\}$ ja $\varepsilon'=\{e'_1, e'_2\}$. Baasi ε vektoreist vähemalt üks ei ole kollineaarne vektoriga e'_2. Vajaduse korral ε vektoreid ümber nummerdades võime alati saavutada, et $e_1 \nparallel e'_2$. Sel juhul eksisteerib baas $\varepsilon^*=\{e_1, e'_2\}$ ning üleminekus $\varepsilon\to\varepsilon'$ võib teha kahes etapis $\varepsilon\to\varepsilon^*\to\varepsilon'$, milles kummaski muudetakse ainult üht baasivektorit. Baasiteisenduste $\varepsilon^*=\varepsilon C^*$ ja $\varepsilon'=\varepsilon^*C'$ puhul on maatrikseiks

$$C^*=\begin{Vmatrix}1 & c^*_{12}\\ 0 & c^*_{22}\end{Vmatrix},\qquad C'=\begin{Vmatrix}c'_{11} & 0\\ c'_{21} & 1\end{Vmatrix}$$

determinantidega $|C|=c^*_{22}$ ja $|C'|=c'_{11}$. Tekib baasiteisendus

$$\varepsilon' = (\varepsilon C^*) C' = \varepsilon (C^* C')$$

maatriksiga $C = C^* C'$, mille determinant on $|C| = |C^*||C'| = c^*_{22} c'_{11}$. Kui eelnevalt oli vaja ε vektorid vahetada, siis $C = C_0 C^* C'$ ning sel korral

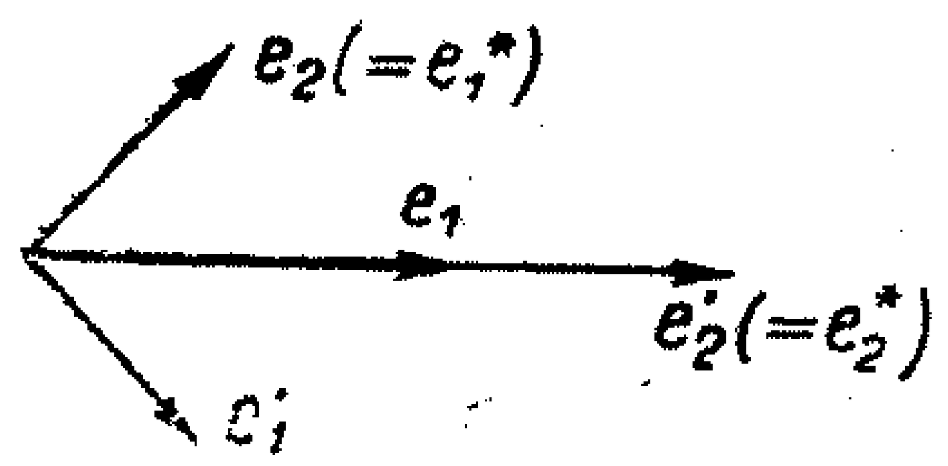
$$|C| = -c^*_{22} c'_{11}.$$

Üldiselt on seega

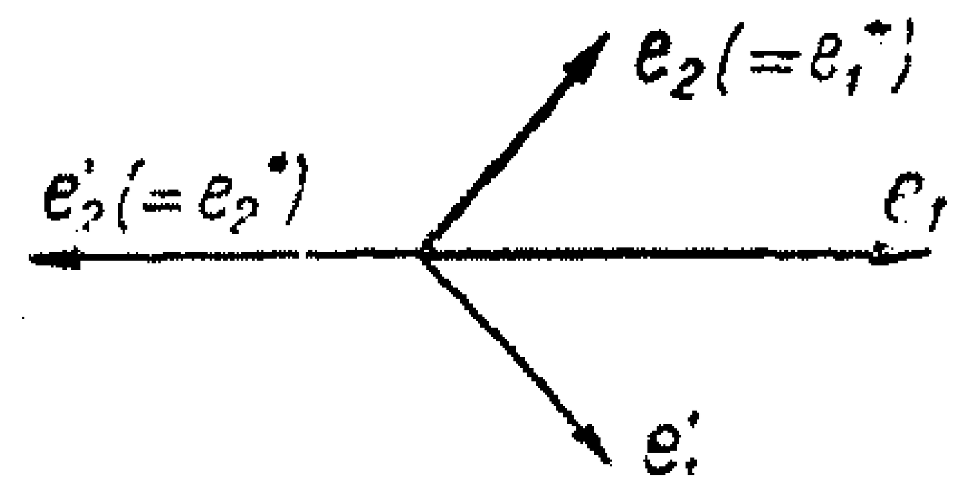
$$|C| = \eta c^*_{22} c'_{11},$$

kus $\eta = +1$ või -1.

Kokkuvõttes võib öelda, et iga baasiteisendus on tehtav kahe või kolme lihtsa sammu kaupa. Iga sammu jaoks on eespool antud reegel, mis võimaldab selgitada, kas orientatsioon sel puhul säilib või muutub, s. t. kas vastav tegur determinandi $|C|$ viimati saadud avaldises on positiivne või negatiivne. Kui orientatsiooni muutuste arv on 0 või 2, siis $|C| > 0$ ja baasid ε' ja ε on ühtemoodi orienteeritud, kui aga orientatsiooni muutuste arv on 1 või 3, siis $|C| < 0$ ja baasid ε' ja ε on erinevalt orien-



Joon. 40.



Joon. 41.

teeritud. Näiteks joonisel 40 näidatud olukorras on $\eta = -1$, $c^*_{22} > 0$, $c'_{11} < 0$ ning baasid on ühtemoodi orienteeritud, joonisel 41 on aga $\eta = -1$, $c^*_{22} < 0$, $c'_{11} < 0$ ning baasid on erinevalt orienteeritud.

Tulemus näitab, et orientatsioon tasandil on tõesti seotud intuitiivse kujutlusega pöördesuunast, s. t. suunast, milles tuleb antud baasi $\{e_1, e_2\}$ korral pöörata vektorit e_1, et saada vektoriga e_2 samasuunaline vektor. Kahe pöördesuuna erinevust tasandil väljendatakse kõnekeeles kas subjektiivse tunnetuse abil («pööre paremale», «pööre vasakule») või mõne välisilma nähtuse abil («päripäeva», «vastupäeva»). Meil oleks nähtavasti üpris raske neid kujutlusi ilma ette näitamata veenvalt selgitada, veel vähem kaugele edasi anda (näiteks oletatava kosmilise naabertsivilisatsiooni esindajale). Eespool defineeritud orientatsiooni mõiste väärtus selles seisnebki, et ta on eksaktne ja annab seega võimaluse valada intuitiivne pöördesuuna kujutlus täiesti rangesse vormi.

Oluline on tähele panna, et def. 19.1 ei anna mingit alust ühe orientatsiooni eelistamiseks teisele. Kui selline eelistamine on soovitav, siis tuleb ta määrata täiendava kokkuleppega. Käesoleva raamatu joonistel eelistame nagu tavaliselt orientatsiooni «vastupäeva».

Ruumi puhul on arutlused analoogilised. Ka siin saab iga baasiteisenduse taandada järgmiste lihtsate teisenduste järjest sooritamisele: baasi kahe vektori numbrite vahetamine, baasi üheainsa vektori muutmine. Esimene neist muudab alati orientatsiooni, sest üleminekul baasilt $\varepsilon = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ baasidele

$$\varepsilon C_1 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2\}, \quad \varepsilon C_2 = \{\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1\} \quad \text{ja} \quad \varepsilon C_3 = \{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3\}$$

on teisendusmaatrikseiks

$$C_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

ja siin tõesti $|C_1| = |C_2| = |C_3| = -1$. Teine lihtne teisendus, mille maatriksiks vastavalt $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ või $\boldsymbol{e}_3$ muutmise korral on

$$C^{(1)} = \begin{Vmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{12} & 1 & 0 \\ c_{13} & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C^{(2)} = \begin{Vmatrix} 1 & c_{21} & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & c_{23} & 1 \end{Vmatrix}, \quad C^{(3)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & c_{31} \\ 0 & 1 & c_{32} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{Vmatrix},$$

võib orientatsiooni muuta või mitte. See sõltub sellest, kas $|C^{(1)}| = c_{11}$, $|C^{(2)}| = c_{22}$ või $|C^{(3)}| = c_{33}$ on negatiivne või positiivne. Antud reeperi $\{O;\ \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ korral nimetatakse positiivseks x_i-poolruumiks kõigi niisuguste puktide X hulka, mille korral koordinaat x_i $(i = 1, 2, 3)$ on positiivne, s. t. hulka $\{X \mid x_i > 0\}$; sellesse kuulub alati punkt kohavektoriga $\boldsymbol{e}_i$, sest selle punkti puhul $x_i = 1 > 0$. Hulka $\{X \mid x_i < 0\}$ nimetatakse negatiivseks x_i-poolruumiks. Seega orientatsiooni säilimine või muutumine üheainsa vektori $\boldsymbol{e}_i$ muutumise korral sõltub sellest, kas punktid kohavektoritega $\boldsymbol{e}_i$ ja $\boldsymbol{e}'_i$ kuuluvad samasse x_i-poolruumi või erinevatesse x_i-poolruumidesse.

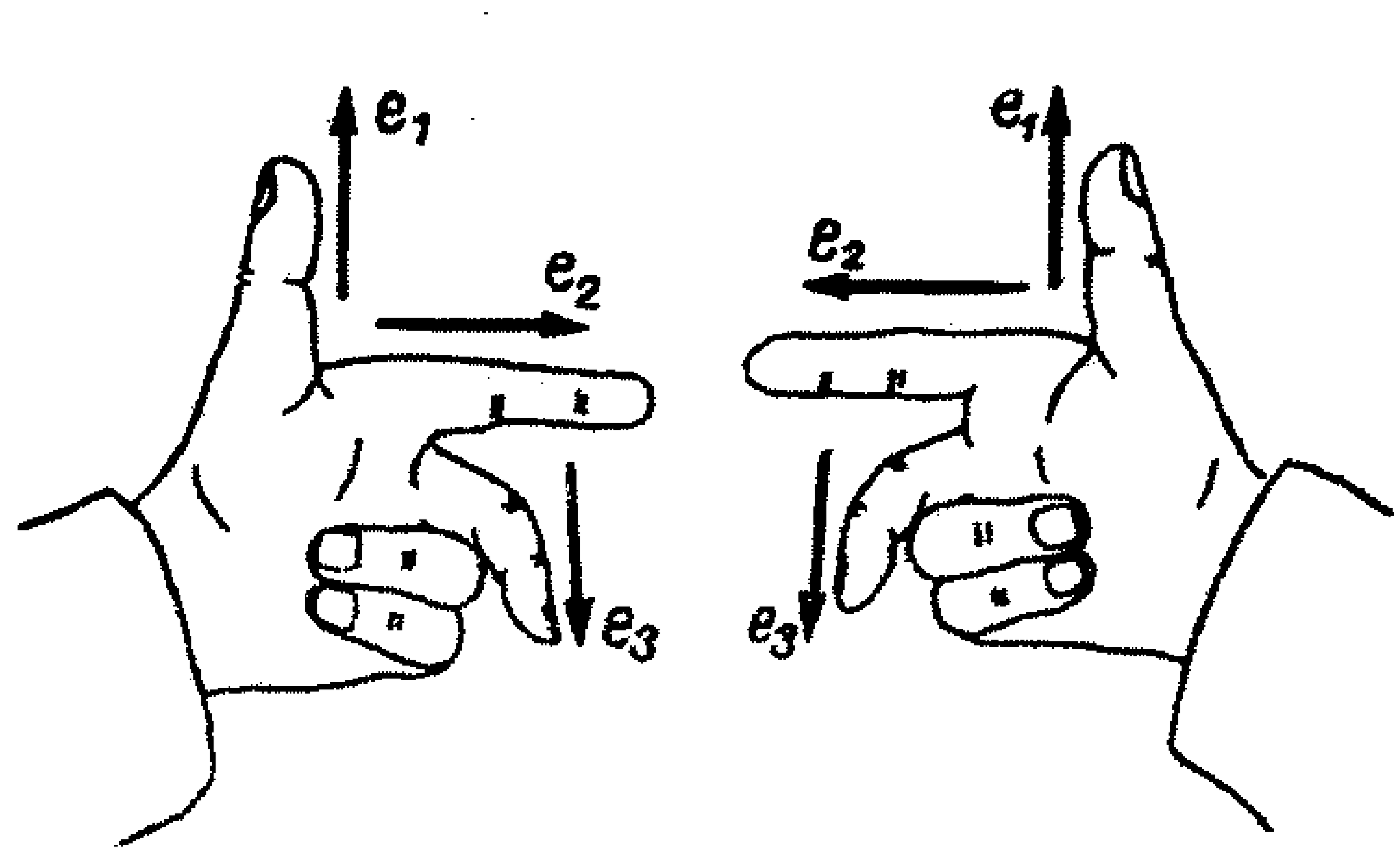
Üleminek baasilt $\varepsilon = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ baasile $\varepsilon' = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ on nüüd sooritatav järgmiselt. Et baasi ε' kõik vektorid ei saa olla komplanaarsed vektoritega $\boldsymbol{e}_1$ ja $\boldsymbol{e}_2$, siis võib, vajaduse korral neid ümber nummerdades, alati saavutada, et $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ja $\boldsymbol{e}'_3$ on mittekomplanaarsed. Kui juhtuks, et $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}'_2$ ja $\boldsymbol{e}'_3$ on komplanaarsed, siis $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_2$ ja $\boldsymbol{e}'_3$ ei saa enam olla komplanaarsed ning $\boldsymbol{e}_1$ ja $\boldsymbol{e}_2$ numbrite vahetamisega jõuaksime olukorrani, kus $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}'_2$ ja $\boldsymbol{e}'_3$ on mittekomplanaarsed. Kui pärast neid ümbernummerdamisi saadud baasid tähistada lihtsuse mõttes endiselt ε ja ε' ning võtta appi baasid $\varepsilon^* = \varepsilon C^{(3)} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ ja $\varepsilon^{**} = \varepsilon^* C^{(2)} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, siis üleminek $\varepsilon \to \varepsilon'$ on teostatav järgmiselt:

$$\varepsilon \to \varepsilon^* \to \varepsilon^{**} \to \varepsilon'.$$

Kokkuvõttes tekib teisendus $\varepsilon' = (\varepsilon^* C^{(2)} C^{(1)} = (\varepsilon C^{(3)}) (C^{(2)} C^{(1)} = \varepsilon (C^{(3)} C^{(2)} C^{(1)}$ maatriksiga $C = C^{(3)} C^{(2)} C^{(1)}$, mille determinant on $|C| = c_{33} c_{22} c_{11}$. Ümbernummerdamise puhul lisandub C avaldisse üks või kaks maatriksit C_k ($k = 1$, 2 või 3) ja $|C|$ avaldisse seega üks või kaks tegurit -1. Siit selgub jällegi, et kui nende lihtsate sammude puhul, millede kaupa on tehtav esialgne baasiteisendus $\varepsilon' = \varepsilon C$, on paarisarv orientatsiooni muutusi, siis esialgsed kaks baasi ε ja ε' on ühtemoodi orienteeritud. Kui aga orientatsiooni muutusi on paaritu arv, siis ε ja ε' on erinevalt orienteeritud.

Nende lihtsate reegl'ite järgi on kerge näitlikult kindlaks teha, kas antud kaks baasi on sama või erineva orientatsiooniga[30]. Ühe orientatsiooni eelistamiseks teisele pole siin, samuti nagu tasandi puhul, mingit alust. Selline eelistamine, kui selleks on vajadus, tuleb teha täiendava kokkuleppega. Siin kasutatakse tavaliselt järgmist lihtsat võtet. Kui kujutleda, et baasivektoreil e_1, e_2 ja e_3 on ühe käe kolme esimese sõrme suunad (joon. 42), ning siduda sel viisil baasid mõlema käega, siis on kerge veenduda, et need baasid on erisuguselt orienteeritud (piisab, kui kokku viia käeseljad, vektorid e_3 suunduvad siis eri poolruumidesse). Järelikult sellised baasid esindavad kaht eri orientatsiooni. Kõneldakse «parema käe» ja «vasaku käe» orientatsioonist ruumis. Käesoleva raamatu joonistel eelistame «parema käe» orientatsiooni.

Orientatsiooni mõiste käsitlemise lõpetame järgmise märkusega. Def. 19.1 järgi on orientatsioon seotud sirge, tasandi või ruumiga mitte vahetult, vaid vektorite hulga kaudu. Tõepoolest, selles definitsioonis on tegemist üksnes baasidega, mis koosne-



Joon. 42.

[30] Edaspidi (art-s 58) selgub orientatsiooni mõiste veel üks lihtne näitlik tõlgendus.

vad vektorite hulga elementidest. Siit selgub, et kui orientatsioon on valitud näiteks tasandil ruumis, siis on ta seotud mitte otseselt tasandi endaga, vaid esmajoones selle rihiga. Sama võib öelda ka sirge ja selle sihi kohta tasandil või ruumis. Seetõttu võib kõnelda orienteeritud ehk suunatud sihist tasandil või ruumis, mõistes selle all mingi orienteeritud sirge sihti koos valitud suunaga, ning orienteeritud rihist ruumis, mõistes selle all mingi orienteeritud tasandi rihti koos valitud pöördesuunaga.

20. Invariantsus. Eelnevas kahes artiklis on tehtud mõningaid järeldusi baasiteisendusvalemitest. Mitmeid tähtsaid järeldusi saab teha ka vastavatest koordinaaditeisendusvalemitest. Need järeldused on enamasti seotud järgmise olulise ülesandega.

Olgu ühe või mitme vektori mingi omadus või vahekord väljendatud koordinaatide abil teatava avaldiste või seoste süsteemina. Kuidas sel puhul otsustada, kas see omadus või vahekord sõltub üksnes vaadeldavatest vektoritest või oleneb ta ka baasist, mille suhtes on võetud vektorite koordinaadid? Vaatleme järgmist kahte näidet.

1. Olgu tasandi mingi kolme vektori $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{z}$ puhul teada, et nende koordinaadid teatava baasi ε suhtes on seotud järgmiselt:

$$z_1 = x_1 + y_1, \qquad z_2 = x_2 + y_2. \tag{20.1}$$

Mingi teise baasi $\varepsilon' = \varepsilon C$ korral on siis koordinaaditeisendusvalemite (17.6) järgi

$$\begin{aligned} x'_1 &= c^*_{11}x_1 + c^*_{12}x_2, & y'_1 &= c^*_{11}y_1 + c^*_{12}y_2, & z'_1 &= c^*_{11}z_1 + c^*_{12}z_2, \\ x'_2 &= c^*_{21}x_1 + c^*_{22}x_2, & y'_2 &= c^*_{21}y_1 + c^*_{22}y_2, & z'_2 &= c^*_{21}z_1 + c^*_{22}z_2. \end{aligned} \tag{20.2}$$

Asendades z_1 ja z_2 avaldised (20.1) viimastesse valemitesse (20.2) ning arvestades esimesi valemeid (20.2), saame:

$$\begin{aligned} z'_1 &= c^*_{11}(x_1+y_1) + c^*_{12}(x_2+y_2) = (c^*_{11}x_1 + c^*_{12}x_2) + \\ &\quad + (c^*_{11}y_1 + c^*_{12}y_2) = x'_1 + y'_1, \\ z'_2 &= c^*_{21}(x_1+y_1) + c^*_{22}(x_2+y_2) = (c^*_{21}x_1 + c^*_{22}x_2) + \\ &\quad + (c^*_{21}y_1 + c^*_{22}y_2) = x'_2 + y'_2. \end{aligned}$$

Siit on näha, et samas vahekorras (20.1) on vektorite $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{z}$ koordinaadid ka iga teise baasi ε' suhtes. Kõneldakse, et seosed (20.1) on invariantsed koordinaaditeisenduse suhtes. Nad väljendavad tuntud vahekorda

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}.$$

2. Asendame võrdused (20.1) järgmistega:

$$z_1 = x_1 y_1, \qquad z_2 = x_2 y_2. \tag{20.3}$$

Uue baasi ε' suhtes on

$$z'_1 = c^*_{11}x_1y_1 + c^*_{12}x_2y_2,$$
$$z'_2 = c^*_{21}x_1y_1 + c^*_{22}x_2y_2,$$

kuid need arvud ei võrdu enam arvudega

$$x'_1y'_1 = (c^*_{11}x_1 + c^*_{12}x_2)(c^*_{11}y_1 + c^*_{12}y_2),$$
$$x'_2y'_2 = (c^*_{21}x_1 + c^*_{22}x_2)(c^*_{21}y_1 + c^*_{22}y_2).$$

Kõneldakse, et seosed (20.3) ei ole invariantsed koordinaaditeisenduse suhtes. Seega ei saa nad väljendada seost vektorite $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{z}$ endi vahel — püüe sel viisil defineerida kahe vektori korrutamine on määratud nurjumisele.

Kerge on veenduda, et kui moodustada võrdustega (20.2) ja (20.3) analoogilised seosed ruumi vektorite koordinaatide vahel, siis esimesed on invariantsed, teised aga mitte. Samas mõttes on mitteinvariantsed ka seosed, mis nõuavad ruumi vektori ühe või kahe koordinaadi võrdumist nulliga. (Kolme koordinaadi võrdumine nulliga on aga invariantne seoste süsteem — ta eraldab välja vektori **0**.)

Üldiselt võib anda järgmise definitsiooni.

***Def.* 20.1.** Kui vektorite koordinaatidest moodustatud avaldiste või seoste süsteem säilitab oma kuju koordinaaditeisenduse puhul, siis kõneldakse, et ta on i n v a r i a n t n e[31]. Invariantset avaldist nimetatakse lihtsalt i n v a r i a n d i k s.

Invariantne avaldiste või seoste süsteem väljendab alati mingit vektorite endi omadust või vahekorda. Toome järgnevalt paar näidet koordinaatide abil defineeritavatest invariantsetest mõistetest.

Vaatleme kahe vabalt võetud baasi korral tasandi kahe vektori $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ koordinaatidest moodustatud maatrikseid

$$W = \begin{Vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{Vmatrix}, \qquad W' = \begin{Vmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \end{Vmatrix}.$$

Koordinaaditeisendusvalemite (17.6) põhjal on

$$W' = \begin{Vmatrix} c^*_{11}x_1 + c^*_{12}x_2 & c^*_{11}y_1 + c^*_{12}y_2 \\ c^*_{21}x_1 + c^*_{22}x_2 & c^*_{21}y_1 + c^*_{22}y_2 \end{Vmatrix},$$

selle võrduse võib aga maatriksite korrutise definitsiooni (18.4) põhjal kirjutada kujul

$$W' = C^{-1}W.$$

[31] lad. k. *invarius* — muutumatu.

Determinantide jaoks saame siit valemite (18.7) ja (18.8) põhjal

$$|W'| = |C|^{-1}\,|W|. \tag{20.4}$$

Nagu näha, ei ole $|W|$ invariantne, ta korrutub baasiteisendusmaatriksi determinandi pöördväärtusega.

Invariandi võib saada, kui võtta veel kaks vektorit $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{w}$ ja vaadelda saadud nelja vektori koordinaatidest moodustatud determinantide suhet

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{20.5}$$

See suhe ei muutu koordinaaditeisenduse korral (sest jagaja ja jagatav korrutuvad sama arvuga $|C|^{-1}$) ning on seega tõesti invariant. Tema sisuline tähendus — vektoreile $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ning $\boldsymbol{z}$ ja $\boldsymbol{w}$ ehitatud rööpkülikute pindalade suhe, võetud sobiva märgiga — selgub edaspidi art-s 31. Erijuhul, kui $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{y}$, võib siit saada tasandi kolme vektoriga $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{z}$ seotud invariandi. (Märgime, et tasandi kahe mittekollineaarse vektoriga ei ole võimalik afiinses geomeetrias siduda ühtki invarianti, sest iga kaks niisuguste vektorite paari (ehk baasi) on selles geomeetrias samaväärsed, invariandi olemasolu aga võimaldaks neid eristada selle invariandi väärtuste järgi.)

Analoogiliselt saab ruumi iga nelja vektoriga $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ ja $\boldsymbol{w}$ siduda invariandi

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}, \tag{20.6}$$

mille sisuline tähendus — vektoreile $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{z}$ ning $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ ja $\boldsymbol{w}$ ehitatud rööptahukate ruumalade suhe, võetud sobiva märgiga — selgub edaspidi art-s 32.

Viimase näitena vaatleme muutuva vektori piirväärtuse mõistet. Juba eespool oli $\boldsymbol{x}\lambda$ näol tegemist muutuva vektoriga, mis sõltub ühest reaalarvulisest parameetrist λ. Teise niisuguse muutuva vektoriga tutvume järgmises artiklis.

Tähistame üldiselt reaalarvulisest parameetrist λ sõltuva muutuva vektori sümboliga $\boldsymbol{x}(\lambda)$. Mida mõista $\boldsymbol{x}(\lambda)$ piirväärtuse all, kui $\lambda \to \lambda_0$? Siin ongi loomulik kasutada koordinaate ja alustada lõpmata väikese vektori mõistest.

Muutuva vektori $\boldsymbol{x}(\lambda)$ koordinaatideks antud baasi $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ suhtes on teatavad muutuvad reaalarvud, mis samuti sõltuvad parameetrist λ ja kujutavad endast seega selle parameetri teatavaid funktsioone $x_1(\lambda), \ldots, x_n(\lambda)$. Selliseid reaalarvuliste väärtustega funktsioone uuritakse matemaatilises analüüsis, kus defineeritakse ka funktsiooni $x_i(\lambda)$ piirväärtuse mõiste $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} x_i(\lambda)$. Selle mõiste me loeme tuntuks[32] ning anname tema abil järgmise definitsiooni.

***Def.* 20.2.** Öeldakse, et muutuv vektor

$$\boldsymbol{y}(\lambda)=\boldsymbol{e}_1 y_1(\lambda)+\ldots+\boldsymbol{e}_n y_n(\lambda)$$

on protsessis $\lambda\to\lambda_0$ lõpmata väike, ja tähistatakse

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\boldsymbol{y}(\lambda)=\boldsymbol{0},$$

kui $\boldsymbol{y}(\lambda)$ koordinaadid on selles protsessis lõpmata väikesed, s. t. kui

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} y_1(\lambda)=\ldots=\lim_{\lambda\to\lambda_0} y_n(\lambda)=0. \tag{20.7}$$

Näitame, et muutuva vektori $\boldsymbol{y}(\lambda)$ omadus olla protsessis $\lambda\to\lambda_0$ lõpmata väike on invariantne omadus. Tõepoolest, kui mõne teise baasi suhtes on

$$\boldsymbol{y}(\lambda)=\boldsymbol{e}'_1 y'_1(\lambda)+\ldots+\boldsymbol{e}'_n y'_n(\lambda),$$

siis valemite (17.6) kohaselt

$$\begin{aligned} y'_1(\lambda)&=c^*_{11}y_1(\lambda)+\ldots+c^*_{1n}y_n(\lambda),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y'_n(\lambda)&=c^*_{n1}y_1(\lambda)+\ldots+c^*_{nn}y_n(\lambda). \end{aligned}$$

Siit nähtub piirväärtuse omaduste põhjal kohe, et kui kehtivad võrdused (20.7), siis ka

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} y'_1(\lambda)=\ldots=\lim_{\lambda\to\lambda_0} y'_n(\lambda)=0,$$

s. t. muutuva vektori $\boldsymbol{y}(\lambda)$ vaadeldav omadus on invariantne.

Piirväärtuse üldise mõiste võib nüüd anda järgmise definitsiooniga.

***Def.* 20.3.** Kõneldakse, et muutuva vektori $\boldsymbol{x}(\lambda)$ piirväärtuseks protsessis $\lambda\to\lambda_0$ on vektor $\boldsymbol{a}$ ja kirjutatakse:

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\boldsymbol{x}(\lambda)=\boldsymbol{a},$$

kui $\boldsymbol{y}(\lambda)=\boldsymbol{x}(\lambda)-\boldsymbol{a}$ on selles protsessis lõpmata väike, s. t. kui

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}[\boldsymbol{x}(\lambda)-\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{0}.$$

---

[32] Vt. G. Kangro, Matemaatiline analüüs. I. Tallinn, 1965, lk. 62, 80.

Sel korral peab def. 20.2 kohaselt olema

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}[x_1(\lambda)-a_1]=\ldots=\lim_{\lambda\to\lambda_0}[x_n(\lambda)-a_n]=0$$

ehk

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}x_1(\lambda)=a_1,\ \ldots,\ \lim_{\lambda\to\lambda_0}x_n(\lambda)=a_n.$$

Seega $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0}\boldsymbol{x}(\lambda)=\boldsymbol{a}$ parajasti siis, kui $\boldsymbol{x}(\lambda)$ koordinaatide piirväärtusteks protsessis $\lambda\to\lambda_0$ on $\boldsymbol{a}$ vastavad koordinaadid. Viimane vahekord on seejuures eelöeldu põhjal invariantne.

Näiteks $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0}(\boldsymbol{x}\lambda)=\boldsymbol{x}\lambda_0$, sest $\boldsymbol{x}\lambda$ koordinaatideks on $x_1\lambda, \ldots$ $\ldots, x_n\lambda$, ning $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0}(x_i\lambda)=(x_i\lambda_0)$. Erijuhul $\lim\limits_{\lambda\to 0}(\boldsymbol{x}\lambda)=\boldsymbol{x}0=\boldsymbol{0}$, s. t. $\boldsymbol{x}\lambda$ on protsessis $\lambda\to 0$ lõpmata väike.

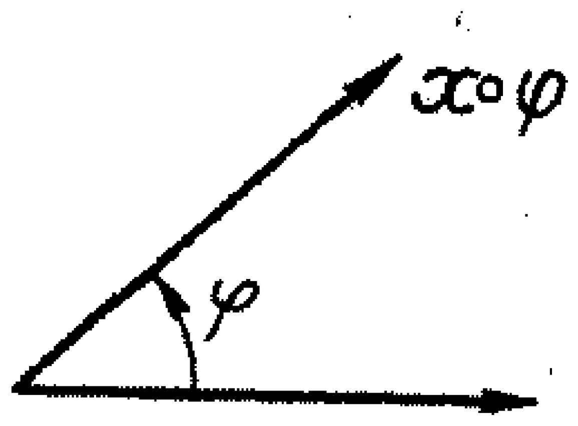
§ 4. MEETRIKA

Eelmises kahes paragrahvis on esitatud kõik olulisemad järeldused, mida saab tuletada vektorite kohta afiinses geomeetrias, s. t. kümnest aksioomist **A1—A4**, **B1—B5** ja $\mathbf{C}^{(n)}$, kus $n=1$, 2 või 3. Selles geomeetrias puuduvad veel sellised vektoritega seotud rakenduslikult tähtsad mõisted nagu näiteks vektori pikkus ja kahe vektori vaheline nurk. Viimase kahe mõiste tuletamine nimetatud aksioomidest ei ole põhimõtteliseltki võimalik, sest afiinses geomeetrias on iga kaks nullist erinevat vektorit samaväärsed, samuti nagu on samaväärsed kaks mittekollineaarsete vektorite paari. Ammugi siis ei ole võimalik eristada neid mingi arvulise karakteristiku — pikkuse või nurga poolest. Need kaks arvulist suurust — pikkus ja nurk, mis väljendavad teatavaid mõõtmistulemusi ja mida seetõttu nimetatakse ühiselt meetrika [33] mõisteteks, — tulevad teooriasse alles pärast aksioomide süsteemi laiendamist uute aksioomidega.

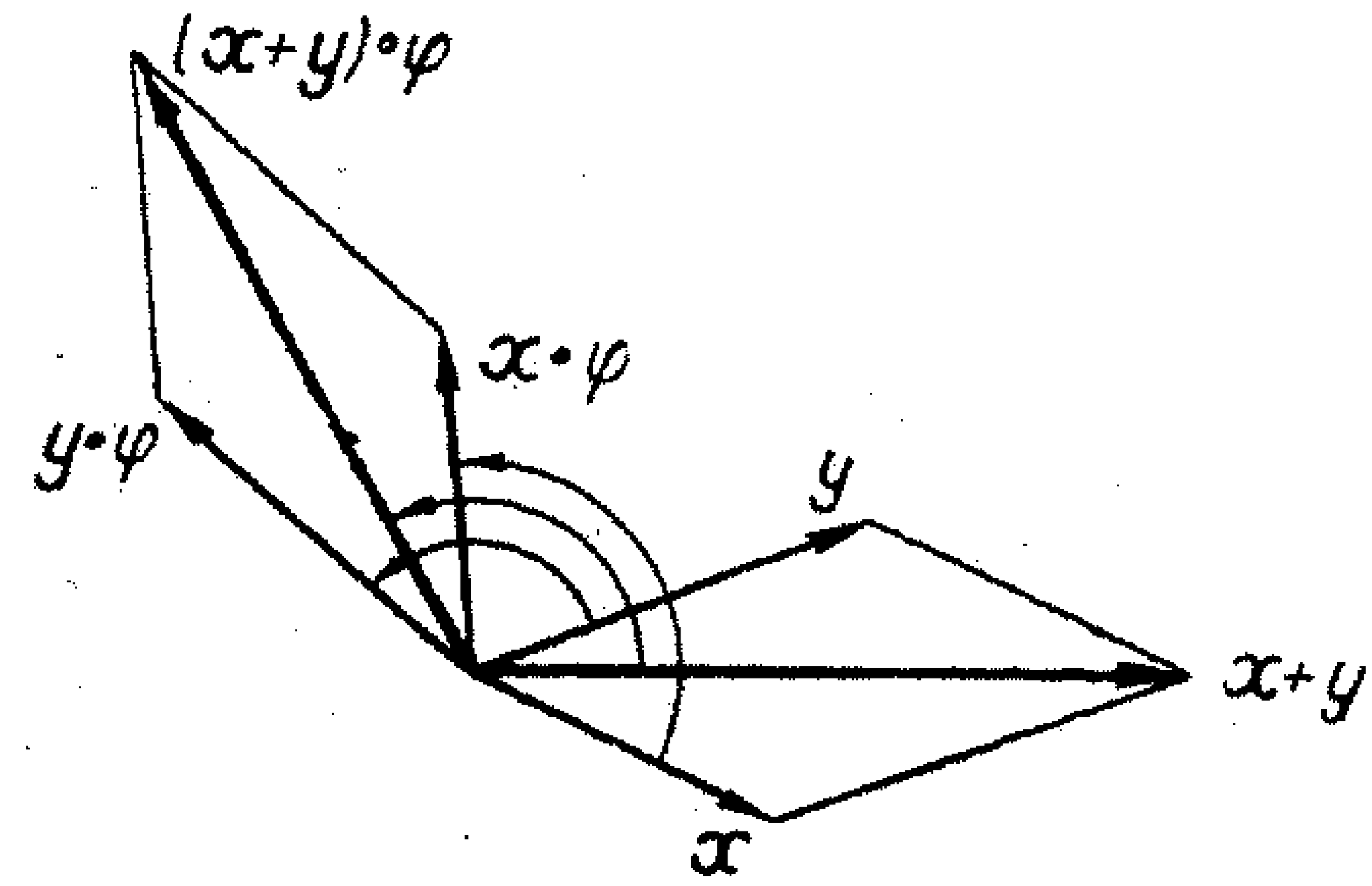
21. Pöörde aksioomid. Kui varasemate aksioomide sõnastamisel oli aluseks kujutlus vektoreist kui plaadi või keha lüketest, s. t. nihutustest ilma pööramiseta, siis allpool sõnastatavate uute aksioomide näitlikuks lähtekohaks on, vastupidi, kujutlus vektori $\boldsymbol{x}$ pööramisest nurga φ võrra tasandil. Sellise pööramise tulemuseks on antud vektori $\boldsymbol{x}$ ja reaalarvu φ korral teatav uus vektor, mille me tähistame $\boldsymbol{x}\circ\varphi$ ja nimetame vektoriks «$\boldsymbol{x}$ pöördes φ» (joon. 43). Siin on analoogia vektori $\boldsymbol{x}$ ja reaalarvu λ korrutisega $\boldsymbol{x}\lambda$. Ka sel puhul on vektori $\boldsymbol{x}$ ja reaalarvu λ paarile vastavusse seatud teatav uus vektor $\boldsymbol{x}\lambda$. Erine-

[33] kr. k. μετρική sõnast μετρον — mõõt.

vus ilmneb selle kahe vastavuse omadustes. Korrutise $x\lambda$ põhiomadused on vormistatud eespool aksioomidena **B1**—**B5**. Meie ülesandeks on nüüd välja eraldada vektori pööramise operatsiooni põhiomadused, mis võiksid aksioomidena olla aluseks teooria ülesehitamisel. Alustame järgmise näitliku tähelepanekuga.



Joon. 43.



Joon. 44.

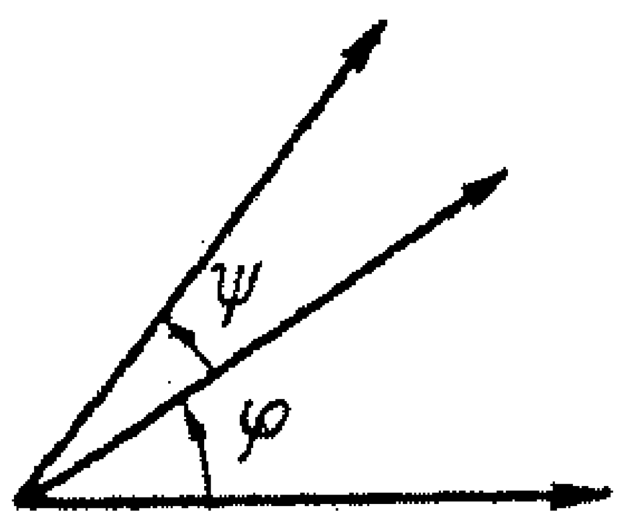
Kõigi pöördenurkade φ seas leidub niisugune, mille puhul antud nullist erinev vektor e läheb oma vastandvektoriks — vähimaks selliseks on poolpööre π. Niisiis on olemas reaalarv π, nii et $e \circ \pi = -e$. Nagu näha, on arvul π pöörete puhul sama osa mis arvul -1 korrutise $e\lambda$ puhul.

Edasi on näitlikult selge, et lõpmatult väheneva pöördenurga φ korral läheneb pööratud vektor $x \circ \varphi$ lõpmatult oma algasendile x, s. t. $\lim\limits_{\varphi \to 0} (x \circ \varphi) = x$. See omadus erineb juba oluliselt korrutise $x\lambda$ analoogilisest omadusest: on ju $\lim\limits_{\lambda \to 0} (x\lambda) = \mathbf{0}$ iga vektori x korral.

Mitmeid tähelepanekuid võib teha pöörde ja eelmises peatükis defineeritud tehete vahekorra kohta. Vektorite x ja y summat $x + y$ kujutab teatavasti nendele vektoritele ehitatud rööpküliku üks diagonaal. Et see rööpkülik käitub pöörde korral jäiga kujundina, siis on kohe selge (joon. 44), et $(x + y) \circ \varphi = x \circ \varphi + y \circ \varphi$. See pöörde omadus on analoogiline korrutamise distributiivsuse omadusega (vrd. aksioomiga **B4**).

Kui arvestada korrutise $x\lambda$ näitlikku tõlgendust (s. t. vektori kordse mõistet ja selle üldistamist art-s 4), saab selgeks, et vektorist $x\lambda$ saame pärast pööret nurga φ võrra vektori $(x \circ \varphi)\lambda$, s. t. $(x\lambda) \circ \varphi = (x \circ \varphi)\lambda$. See pöörde omadus on mõnevõrra analoogiline korrutamise assotsiatiivsuse omadusega (vrd. aksioomiga **B3**).

Kaugemale analoogia enam ei ulatu. Kui teha järjest kaks pööret nurkade φ ja ψ võrra (joon. 45), siis on tulemuseks pööre nurga $\varphi+\psi$ võrra, s. t. $(\boldsymbol{x}\circ\varphi)\circ\psi=\boldsymbol{x}\circ(\varphi+\psi)$. See omadus erineb juba oluliselt korrutise omadusest: vektor $\boldsymbol{x}\circ(\varphi+\psi)$ ei ühti kunagi summaga $\boldsymbol{x}\circ\varphi+\boldsymbol{x}\circ\psi$ (s. t. seda laadi distributiivsus pöörde puhul aset ei leia, vrd. aksioomiga **B2**).



Joon. 45.

Nende tähelepanekute alusel formuleerime nüüd kuus uut aksioomi **D1—D6**, mis osutuvad tasandi puhul küllaldaseks sisuka geomeetrilise teooria loomisel. Need aksioomid on järgmised.

D1. *Iga vektori $\boldsymbol{x}$ ja iga reaalarvu φ puhul on paarile $(\boldsymbol{x}, \varphi)$ vastavusse seatud parajasti üks vektor $\boldsymbol{z}$ (mida tähistatakse $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\circ\varphi$ ja nimetatakse vektoriks «$\boldsymbol{x}$ pöördes φ»).*

D2. *Leidub nullist erinev vektor $\boldsymbol{e}$ ja positiivne reaalarv, mille me tähistame π, nii et $\boldsymbol{e}\circ\pi=-\boldsymbol{e}$, kusjuures väiksemat positiivset reaalarvu sama omadusega pole olemas (s. t. kui $\boldsymbol{e}\circ\varphi=-\boldsymbol{e}$, $\varphi>0$, siis $\varphi\geqslant\pi$).*[34]

D3. $\lim\limits_{\varphi\to 0}(\boldsymbol{e}\circ\varphi)=\boldsymbol{e}$.

D4. $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\circ\varphi=\boldsymbol{x}\circ\varphi+\boldsymbol{y}\circ\varphi$.

D5. $(\boldsymbol{x}\lambda)\circ\varphi=(\boldsymbol{x}\circ\varphi)\lambda$.

D6. $(\boldsymbol{x}\circ\varphi)\circ\psi=\boldsymbol{x}\circ(\varphi+\psi)$.

Aksioomidest **A1—A4**, **B1—B5**, **C**$^{(2)}$ ja **D1—D6** tulenevate järelduste süsteemi nimetatakse meetriliseks ehk e u k l e i d i l i s e k s[35] geomeetriaks tasandil, ka eukleidiliseks planimeetriaks.

---

[34] Rõhutame, et π tähistab siin teatavat reaalarvu, mille väärtus ei ole järgneva teooria jaoks oluline ja sõltub õieti pöördenurga mõõtmiseks valitud ühikust. Praktikas on levinud kaks viisi. Esimese puhul võetakse selleks väärtuseks tuntud konstant

$$\pi=\sqrt{12}\lim_{k\to\infty}\left[1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\ldots+\frac{(-1)^k}{(2k+1)\cdot 3^k}\right]\approx 3{,}1416$$

ning kõneldakse radiaan- ehk absoluutmõõdust. Teise, ajalooliselt vanema puhul võetakse $\pi=180$ ning kõneldakse kraadimõõdust. Kui esimesele viisile võib leida sisulise õigustuse (ainult sel juhul on ringjoone kaare pikkus võrdne vastava kesknurga suuruse ja raadiuse korrutisega), siis teise näol on tegemist üksnes ajalooliselt kujunenud kokkuleppega, millel pole olulisi eeliseid teiste võimalike kokkulepete ees. (Praktikas oleks palju lihtsam näiteks $\pi=200$, mida Prantsuse revolutsiooni päevil püütigi juurutada.)

[35] Vanakreeka matemaatiku E u k l e i d e s e järgi, kes 3. saj. Aleksandrias võttis kokku tolleaegsed geomeetria-alased saavutused oma kuulsas teoses «Elemendid». Nimetust «eukleidiline» tuleb eelistada nimetusele «meetriline», sest viimast mõistetakse tänapäeva matemaatikas ka hoopis üldisemalt.

Et varem antud aksioomid on jäänud endisteks, siis haarab see geomeetria endasse ka kogu afiinse geomeetria tasandil.

22. Pöörete põhiomadused. Asume lihtsamate järelduste tegemisele uutest aksioomidest. Kui aksioomis **D4** võtta $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, saame

$$(\boldsymbol{x}+\mathbf{0})\circ\varphi=\boldsymbol{x}\circ\varphi+\mathbf{0}\circ\varphi.$$

Siin vasak pool on $\boldsymbol{x}\circ\varphi$; seega $\mathbf{0}\circ\varphi = \boldsymbol{x}\circ\varphi - \boldsymbol{x}\circ\varphi = \mathbf{0}$, s. t. iga φ korral on

$$\mathbf{0}\circ\varphi=\mathbf{0}. \tag{22.1}$$

Osutub, et $\mathbf{0}$ on ainus niisugune vektor $\boldsymbol{x}$, mille korral $\boldsymbol{x}\circ\varphi = \mathbf{0}$. Tõepoolest, kui $\boldsymbol{x}\circ\varphi = \mathbf{0}$, siis on ühelt poolt $(\boldsymbol{x}\circ\varphi)\circ(\pi-\varphi) = \mathbf{0}\circ(\pi-\varphi) = \mathbf{0}$, teiselt poolt aga **D6** ja **D2** põhjal $(\boldsymbol{x}\circ\varphi)\circ(\pi-\varphi) = \boldsymbol{x}\circ[\varphi+(\pi-\varphi)] = \boldsymbol{x}\circ\pi = -\boldsymbol{x}$.

***Teoreem* 22.1.** *Vabalt võetud reaalarvu φ korral võrrandi $\boldsymbol{x}\circ\varphi = \mathbf{0}$ ainsaks lahendiks on $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.*

Siit järeldub kohe selline teoreem.

***Teoreem* 22.2.** *Kui $\boldsymbol{x}\circ\varphi = \boldsymbol{y}\circ\varphi$, siis $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.*

T õ e s t u s. Kui $\boldsymbol{x}\circ\varphi = \boldsymbol{y}\circ\varphi$, siis $(\boldsymbol{x}\circ\varphi) + (\boldsymbol{y}\circ\varphi)(-1) = \mathbf{0}$. Siin vasak pool on **D4** ja **D5** järgi võrdne vektoriga

$$[\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}(-1)]\circ\varphi=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\circ\varphi,$$

seega $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\circ\varphi = \mathbf{0}$ ning eelmise teoreemi põhjal $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. ∎

Tõestatud teoreemi ja aksioomi **D6** lihtsaks järelduseks on järgmine oluline võrdus:

$$\boldsymbol{x}\circ 0=\boldsymbol{x}. \tag{22.2}$$

Tõepoolest, **D6** järgi on $(\boldsymbol{x}\circ 0)\circ\varphi = \boldsymbol{x}\circ(0+\varphi) = \boldsymbol{x}\circ\varphi$, siit aga teoreemi 22.2 järgi on $\boldsymbol{x}\circ 0 = \boldsymbol{x}$.

Sellised on tulemused, mis selgitavad vektori $\mathbf{0}$ ja arvu 0 erilist käitumist pöörete puhul.

Aksioomi **D2** põhjal on pöörete suhtes eriliste omadustega ka reaalarv π. Need omadused väärivad lähemat uurimist. Kõigepealt võib selgitada, et vektor $\boldsymbol{e}$ aksioomis **D2** ei ole tasandi mingi eriline vektor. Osutub, et iga vektori $\boldsymbol{x}$ korral $\boldsymbol{x}\circ\pi = -\boldsymbol{x}$. Selle tõestamiseks teeme esmalt kindlaks järgmise teoreemi kehtivuse.

***Teoreem* 22.3.** *Vektorid $\boldsymbol{e}$ ja $\boldsymbol{e}\circ\frac{\pi}{2}$ on mittekollineaarsed.*

T õ e s t u s. Kui teatavate reaalarvude λ ja μ korral oleks

$$\boldsymbol{e}\lambda+\left(\boldsymbol{e}\circ\frac{\pi}{2}\right)\mu=\mathbf{0}, \tag{22.3}$$

siis oleks ühelt poolt (22.1) põhjal

$$\left[e\lambda+\left(e\circ\frac{\pi}{2}\right)\mu\right]\circ\frac{\pi}{2}=0\circ\frac{\pi}{2}=0,$$

teiselt poolt aga **D2—D6** põhjal

$$\left[e\lambda+\left(e\circ\frac{\pi}{2}\right)\mu\right]\circ\frac{\pi}{2}=\left(e\circ\frac{\pi}{2}\right)\lambda+(e\circ\pi)\mu=$$

$$=-e\mu+\left(e\circ\frac{\pi}{2}\right)\lambda.$$

Järelikult oleks

$$-e\mu+\left(e\circ\frac{\pi}{2}\right)\lambda=0. \tag{22.4}$$

Võrduste (22.3) ja (22.4) poolte korrutamisel vastavalt arvudega λ ja $-\mu$ ning seejärel liitmisel saaksime

$$e(\lambda^2+\mu^2)=0.$$

ning et $e\neq 0$, siis siit $\lambda=\mu=0$. Seega võrdus (22.3) on võimalik ainult siis, kui $\lambda=\mu=0$, see tähendab aga teoreemi 16.5 põhjal e ja $e\circ\frac{\pi}{2}$ mittekollineaarsust. ∎

Nüüd võimegi tõestada soovitud väite.

***Teoreem* 22.4.** *Tasandi iga vektori x korral $x\circ\pi=-x$.*

Tõestus. Vektorid e ja $e\circ\frac{\pi}{2}$ moodustavad tasandil teatava baasi, mistõttu iga vektori x võib avaldada nende lineaarkombinatsioonina (vt. art. 17), s. t. kujul

$$x=e\alpha+\left(e\circ\frac{\pi}{2}\right)\beta.$$

Seetõttu **D2—D6** järgi tõesti

$$x\circ\pi=\left[e\alpha+\left(e\circ\frac{\pi}{2}\right)\beta\right]\circ\pi=(e\circ\pi)\alpha+\left[(e\circ\pi)\circ\frac{\pi}{2}\right]\beta=$$

$$=-e\alpha+\left\{[e(-1)]\circ\frac{\pi}{2}\right\}\beta=-e\alpha-\left(e\circ\frac{\pi}{2}\right)\beta=-x. \ ∎$$

Edasi on võimalik selgitada, et π ei ole ainus reaalarv φ, mille puhul iga vektori x korral $x\circ\varphi=-x$. Nii on näiteks lihtne kindlaks teha, et

$$x\circ(-\pi)=-x, \tag{22.5}$$

sest ühelt poolt on **D2** põhjal $[x\circ(-\pi)]\circ\pi=-[x\circ(-\pi)]$, teiselt poolt on **D6** ja (22.2) põhjal $[x\circ(-\pi)]\circ\pi=x\circ[(-\pi)+\pi]=x\circ 0=x$.

Üldine seos, mis sisaldab erijuhtudena aksioomis **D2** nõutud võrduse ning seosed (22.2) ja (22.5), on järgmine:

$$x \circ k\pi = x(-1)^k, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{22.6}$$

Selle võrduse tõestamisel tuleb kasutada matemaatilise induktsiooni meetodit. Juhtudel $k=0, \pm 1$ on võrduse kehtivus juba kindlaks tehtud. Oletame, et ta kehtib k sellistel väärtustel, mille puhul $-n \leqslant k \leqslant n$, ning näitame, et ta kehtib siis ka väärtustel $k = \pm(n+1)$:

$$x \circ [(n+1)\pi] = x \circ [n\pi + \pi] = [x \circ (n\pi)] \circ \pi =$$
$$= [x(-1)^n] \circ \pi = -[x(-1)^n] = x(-1)^{n+1},$$
$$x \circ [(-n-1)\pi] = x \circ [-n\pi - \pi] = [x \circ (-n\pi)] \circ (-\pi) =$$
$$= [x(-1)^{-n}] \circ (-\pi) = -x(-1)^{-n} = x(-1)^{-n-1}.$$

Seose (22.6) rakendamine eraldi k paaris- ja paarituarvulistel väärtustel annab tulemuseks

$$x \circ 2l\pi = x, \quad x \circ (2l+1)\pi = -x, \quad l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{22.7}$$

Järelikult on olemas lõpmata palju reaalarve, mis rahuldavad aksioomis **D2** nõutud võrdust. Aksioomi **D2** lisanõude kohaselt peab arv π olema vähim kõigi selliste positiivsete reaalarvude seas. Siit muide järeldub, et $-\pi$ on suurim kõigi selliste negatiivsete reaalarvude seas. Tõepoolest, kui leiduks arv φ, nii et oleks $-\pi < \varphi < 0$ ja $x \circ \varphi = -x$, siis oleks ka $x \circ (-\varphi) = -x$ [vt. (22.5) tõestus], ning $\pi > -\varphi > 0$, see aga oleks vastuolus aksioomiga **D2**. Seega on õige niisugune lause.

***Teoreem* 22.5.** *Ei leidu reaalarvu φ, nii et oleks $-\pi < \varphi < \pi$ ja $x \circ \varphi = -x \neq 0$.*

Siit järeldub ühtlasi järgmise teoreemi kehtivus.

***Teoreem* 22.6.** *Ei leidu reaalarvu φ, nii et oleks $0 < \varphi < 2\pi$ ja $x \circ \varphi = x \neq 0$.*

Tõestus. Kui oleks $0 < \varphi < 2\pi$ ja $x \circ \varphi = x \neq 0$, siis oleks $-\pi < \varphi - \pi < \pi$ ja $x \circ (\varphi - \pi) = (x \circ \varphi) \circ (-\pi) = x \circ (-\pi) = -x$, see aga räägib vastu teoreemile 22.5. ∎

Nüüd on võimalik anda oluline täiendus teoreemile 22.2. Viimast võib tõlgendada eeskirjana reaalarvu φ «taandamiseks» võrduses $x \circ \varphi = y \circ \varphi$ (seejuures on siin lubatav «taandada» isegi arvuga 0). Vektori x «taandamine» võrduses $x \circ \varphi = x \circ \psi$ on aga võimalik ainult teatavatel lisatingimustel (vt. järgmine teoreem).

***Teoreem* 22.7.** *Kui $x \circ \varphi = x \circ \psi$ ning $x \neq 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ ja $0 \leqslant \psi < 2\pi$, siis $\varphi = \psi$.*

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et leiduvad niisugused reaalarvud φ ja ψ, nii et $0 \leqslant \varphi < \psi < 2\pi$ ja $x \circ \varphi = x \circ \psi$, kus

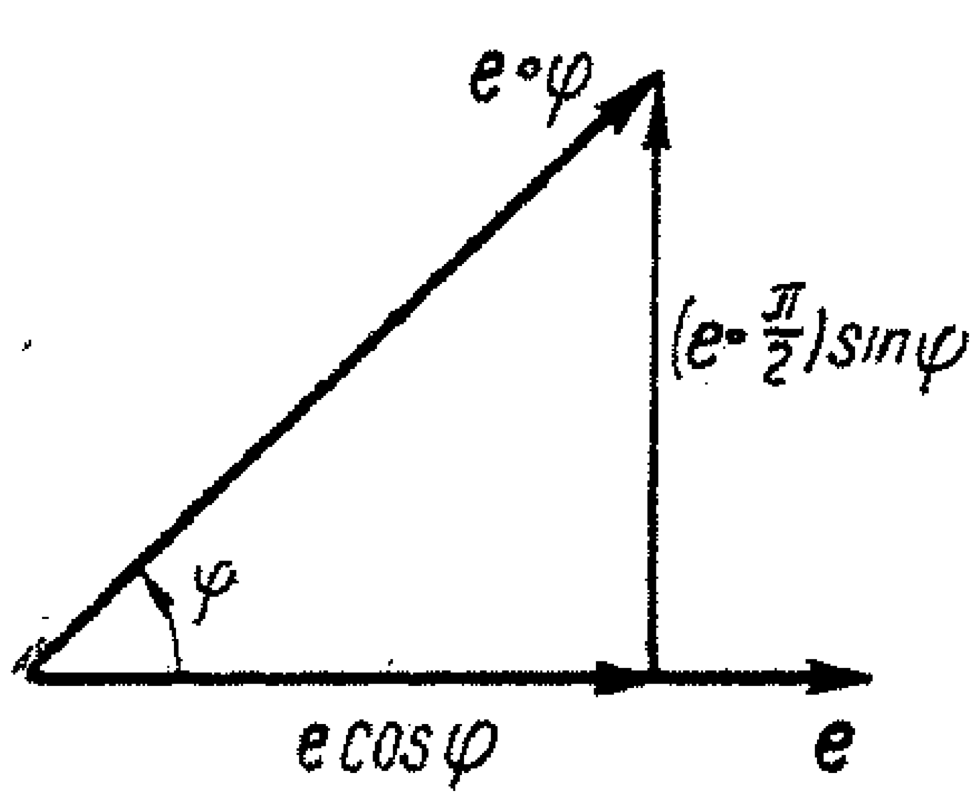
$x \neq 0$. Siis

$$x \circ (\psi - \varphi) = (x \circ \psi) \circ (-\varphi) = (x \circ \varphi) \circ (-\varphi) = \\ = x \circ [\varphi + (-\varphi)] = x \circ 0 = x,$$

samal ajal kui $0 < \psi - \varphi < 2\pi$. Tulemus räägib vastu teoreemile 22.6. ∎

Sellega on kindlaks tehtud pöörde kõige põhilisemad omadused, seejuures rangelt aksiomaatilisele alusele tuginedes.

23. Koosinus ja siinus. Pöörde sügavamate omaduste analüüsimisel on tähtsad pöördenurga kaks erilist funktsiooni. Kuigi need funktsioonid — tavalised koosinus ja siinus — on lugejale kahtlemata tuttavad, siiski on käesolevas raamatus esitatava käsitluse seisukohalt oluline kindlaks teha, et nii nende funktsioonide definitsioonid kui ka põhiomadused on võimalik tuletada üksnes eespool toodud aksioomidest lähtudes. Ilma sellise tuletuskäiguta jääks meie käsitlusse «loogiline ring», sest trigonomeetriliste funktsioonide tutvustamine koolis tugineb ju näitlikult esitatavale elementaargeomeetriale, aga just viimast me tahamegi rangelt põhjendada.



Joon. 46.

Alustame koosinuse ja siinuse definitsioonist. Teoreemi 22.3 põhjal on vektorid $e_1 = e$ ja $e_2 = e \circ \frac{\pi}{2}$ mittekollineaarsed ja moodustavad seega tasandil teatava baasi $\{e_1, e_2\}$.

Def. **23.1** Vektori $e \circ \varphi$ koordinaate sellise baasi $\{e_1, e_2\}$ suhtes, kus $e_1 = e$ ja $e_2 = e \circ \frac{\pi}{2}$, nimetatakse reaalarvu φ k o o s i n u s e k s ja s i i n u s e k s ning tähistatakse vastavalt $\cos \varphi$ ja $\sin \varphi$ (joon. 46).

Seega

$$e_1 \circ \varphi = e_1 \cos \varphi + e_2 \sin \varphi. \tag{23.1}$$

Selle definitsiooni järgi kujutavad $\cos \varphi$ ja $\sin \varphi$ endast argumendi φ funktsioone, mis on määratud kogu arvteljel, sest igale reaalarvule φ vastab antud vektori e korral aksioomi **D1** põhjal parajasti üks vektor $e \circ \varphi$, millel on baasi $\left\{e, e \circ \frac{\pi}{2}\right\}$ suhtes üheselt määratud koordinaadid.

Näitame, et funktsioonid $\cos\varphi$ ja $\sin\varphi$ on arvtelje igas punktis pidevad [36].

Teeme kõigepealt kindlaks pidevuse punktis $\varphi = 0$. Et

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0 \tag{23.2}$$

(sest ühelt poolt on (22.2) põhjal $e_1 \circ 0 = e_1$, teiselt poolt aga (23.1) põhjal $e_1 \circ 0 = e_1 \cos 0 + e_2 \sin 0$), siis tuleb näidata, et $\lim\limits_{\varphi\to 0} \cos\varphi = 1$, $\lim\limits_{\varphi\to 0} \sin\varphi = 0$. Siin on võimalik kasutada aksioomi **D3**, mis def. 20.3 järgi nõuab järgmise võrduse kehtimist:

$$\lim_{\varphi\to 0} [e \circ \varphi - e] = 0.$$

Et seejuures (23.1) põhjal

$$e \circ \varphi - e = e_1 (\cos\varphi - 1) + e_2 \sin\varphi,$$

siis def. 20.2 järgi tähendabki eelmine võrdus seda, et

$$\lim_{\varphi\to 0} (\cos\varphi - 1) = 0, \quad \lim_{\varphi\to 0} \sin\varphi = 0.$$

Niisiis tõesti, $\cos\varphi$ ja $\sin\varphi$ on pidevad punktis $\varphi = 0$.

Edasi kasutame aksioomi **D6**, mille põhjal

$$(e \circ \varphi) \circ \psi = e \circ (\varphi + \psi) = e_1 \cos(\varphi + \psi) + e_2 \sin(\varphi + \psi). \tag{23.3}$$

Samal ajal on (23.1), **D4** ja **D5** järgi

$$(e \circ \varphi) \circ \psi = (e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi) \circ \psi = (e_1 \circ \psi) \cos\varphi + (e_2 \circ \psi) \sin\varphi,$$

kusjuures

$$e_2 \circ \psi = -e_1 \sin\psi + e_2 \cos\psi, \tag{23.4}$$

sest

$$e_2 \circ \psi = \left(e_1 \circ \frac{\pi}{2}\right) \circ \psi = e_1 \circ \left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) = (e_1 \circ \psi) \circ \frac{\pi}{2} =$$

$$= (e_1 \cos\psi + e_2 \sin\psi) \circ \frac{\pi}{2} = \left(e_1 \circ \frac{\pi}{2}\right) \cos\psi + \left(e_2 \circ \frac{\pi}{2}\right) \sin\psi$$

ning $e_1 \circ \frac{\pi}{2} = e_2$, $e_2 \circ \frac{\pi}{2} = \left(e_1 \circ \frac{\pi}{2}\right) \circ \frac{\pi}{2} = e_1 \circ \pi = -e_1$.

[36] Teatavasti nimetatakse funktsiooni $f(x)$ pidevaks punktis $x = x_0$, kui $f(x)$ piirväärtus kohal x_0 võrdub funktsiooni $f(x)$ enda väärtusega sellel kohal, s. o. kui $\lim\limits_{y\to 0} f(x_0 + y) = f(x_0)$; vt. G. Kangro, Matemaatiline analüüs. I. Tallinn, 1965, lk. 116.

Niisiis,

$$(e\circ\varphi)\circ\psi=(e_1\cos\psi+e_2\sin\psi)\cos\varphi+(-e_1\sin\psi+e_2\cos\psi)\sin\varphi=$$
$$=e_1(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi)+e_2(\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi).$$

Tulemuse võrdlemisel võrdusega (23.3) saame e_1 ja e_2 mittekollineaarsuse tõttu järgmised tähtsad valemid:

$$\cos(\varphi+\psi)=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi, \tag{23.5}$$
$$\sin(\varphi+\psi)=\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi. \tag{23.6}$$

Piirprotsessi $\psi\to 0$ saame siit:

$$\lim_{\psi\to 0}\cos(\varphi+\psi)=\cos\varphi\lim_{\psi\to 0}\cos\psi-\sin\varphi\lim_{\psi\to 0}\sin\psi=$$
$$=\cos\varphi\cdot 1-\sin\varphi\cdot 0=\cos\varphi,$$
$$\lim_{\psi\to 0}\sin(\varphi+\psi)=\sin\varphi\lim_{\psi\to 0}\cos\psi+\cos\varphi\lim_{\psi\to 0}\sin\psi=$$
$$=\sin\varphi\cdot 1+\cos\varphi\cdot 0=\sin\varphi,$$

mis tähendabki $\cos\varphi$ ja $\sin\varphi$ pidevust punktis φ. Seega on uuritavad funktsioonid tõesti pidevad kogu arvteljel.

Tulemusest on järeldatav järgmine oluline samasus[37]:

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1. \tag{23.7}$$

Samasuse tõestamiseks tähistame esialgu

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=\Delta(\varphi);$$

ilmselt on $\Delta(\varphi)\geqslant 0$. Lihtne arvutus näitab, et

$$\Delta(\varphi+\psi)=\Delta(\varphi)\cdot\Delta(\psi); \tag{23.8}$$

tõepoolest,

$$\Delta(\varphi+\psi)=\cos^2(\varphi+\psi)+\sin^2(\varphi+\psi)=$$
$$=(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi)^2+(\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi)^2=$$
$$=\cos^2\varphi\cos^2\psi+\sin^2\varphi\sin^2\psi+\sin^2\varphi\cos^2\psi+\cos^2\varphi\sin^2\psi=$$
$$=(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)(\cos^2\psi+\sin^2\psi).$$

Edasi on lihtne näha, et

$$\Delta(0)=\Delta\left(\frac{\pi}{2}\right)=1. \tag{23.9}$$

[37] Märgime, et trigonomeetria arendamisel elementaargeomeetria baasil tuleb just selle samasuse puhul kasutada geomeetria üht loogilises ahelas võrdlemisi kaugel asuvat lauset — Pythagorase teoreemi, mistõttu samasuse alljärgnev vahetu tuletamine aksioomidest **D1—D6** tohiks olla eriti huvipakkuv.

See järeldub kohe võrdustest (23.2) ning sellest, et ühelt poolt $e_1 \circ \frac{\pi}{2} = e_2$, teiselt poolt aga $e_1 \circ \frac{\pi}{2} = e_1 \cos \frac{\pi}{2} + e_2 \sin \frac{\pi}{2}$, mistõttu

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0, \qquad \sin \frac{\pi}{2} = 1. \tag{23.10}$$

Kui seoses (23.8) võtta $\varphi = \psi = \frac{\pi}{2}$, saame:

$$\Delta\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \Delta\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \Delta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Edasi on $\Delta\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \Delta\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \Delta\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \Delta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ jne., üldiselt

$$\Delta\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

iga naturaalarvu n korral. Kui nüüd seoses (23.8) võtta $\varphi = n \cdot \frac{\pi}{2}$, $\psi = (-n) \frac{\pi}{2}$, saame: $\Delta(0) = \Delta\left(n \frac{\pi}{2}\right) \Delta\left[(-n) \frac{\pi}{2}\right]$ ja siit $\Delta\left[(-n) \frac{\pi}{2}\right] = 1$.

Seega

$$\Delta\left(p \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

iga täisarvu p korral.

Võttes seoses (23.8) $\varphi = \psi = \frac{\pi}{4}$, saame:

$$\Delta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left[\Delta\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^2$$

ja siit $\Delta(\varphi) \geqslant 0$ tõttu

$$\Delta\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Võttes samas seoses $\varphi = \psi = \frac{\pi}{8}$, saame: $\Delta\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left[\Delta\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]^2$, mistõttu $\Delta\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$. Niiviisi jätkates leiame k sammu järel:

$$\Delta\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) = 1.$$

Nüüd pole raske kindlaks teha, et $\Delta(\varphi)=1$ samaselt kogu arvteljel. Võtame selleks vabalt reaalarvu φ ja esitame $\frac{2\varphi}{\pi}$ kahendmurruna[38]:

$$\frac{2\varphi}{\pi}=p+\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2}+\ldots+\frac{\varepsilon_k}{2^k}+\ldots,$$

kus p on täisarv ja $\varepsilon_k=0$ või 1 $(k=1, 2, \ldots)$. Piirdudes siin lähismurruga, tähistame

$$\varphi_k=\frac{\pi}{2}\left(p+\frac{\varepsilon_1}{2}+\ldots+\frac{\varepsilon_k}{2^k}\right);$$

ilmselt $\varphi=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k$. Samal ajal võib (23.8) korduva rakendamisega kindlaks teha, et

$$\Delta(\varphi_k)=\Delta\left(p\cdot\frac{\pi}{2}+\varepsilon_1\frac{\pi}{2^2}+\ldots+\varepsilon_k\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)=$$

$$=\Delta\left(p\cdot\frac{\pi}{2}\right)\Delta\left(\varepsilon_1\frac{\pi}{2^2}\right)\ldots\Delta\left(\varepsilon_k\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)=1\cdot1\cdot\ldots\cdot1=1.$$

Funktsioonide $\cos\varphi$ ja $\sin\varphi$ pidevuse tõttu on pidev ka $\Delta(\varphi)$, mistõttu

$$\Delta(\varphi)=\lim_{\varphi_k\to\varphi}\Delta(\varphi_k)=\lim_{\varphi_k\to\varphi}1=1.$$

Sellega ongi tõestatud samasuse (23.7) kehtivus kogu arvteljel.

---

[38] Arvu a esitamiseks kahendmurruna tuleb kõigepealt eraldada a täisosa p, nii et $0\leqslant a-p<1$. Olenevalt sellest, kas $0\leqslant a-p<\frac{1}{2}$ või $\frac{1}{2}\leqslant a-p<1$, tuleb võtta kas $\varepsilon_1=0$ või $\varepsilon_1=1$. Edasi olenevalt sellest, kas $0\leqslant a-p-\frac{\varepsilon_1}{2}<\frac{1}{4}$ või $\frac{1}{4}\leqslant a-p-\frac{\varepsilon_1}{2}<\frac{1}{2}$, tuleb võtta kas $\varepsilon_2=0$ või $\varepsilon_2=1$ jne. Üldiselt, olenevalt sellest, kas $0\leqslant a-p-\frac{\varepsilon_1}{2}-\ldots-\frac{\varepsilon_k}{2^k}<\frac{1}{2^{k+1}}$ või $\frac{1}{2^{k+1}}\leqslant a-p-\frac{\varepsilon_1}{2}-\ldots-\frac{\varepsilon_k}{2^k}<\frac{1}{2^k}$, tuleb võtta kas $\varepsilon_{k+1}=0$ või $\varepsilon_{k+1}=1$ jne. Tulemuseks on esitus

$$a=p+\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2}+\ldots+\frac{\varepsilon_k}{2^k}+\ldots$$

Näiteks, et $a=-\frac{4}{3}$ puhul $p=-2$, $a-p=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$, siis $\varepsilon_1=1$. Et $a-p-\frac{\varepsilon_1}{2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}<\frac{1}{4}$, siis $\varepsilon_2=0$. Et $a-p-\frac{\varepsilon_1}{2}-\frac{\varepsilon_2}{2^2}=\frac{1}{6}>\frac{1}{8}$, siis $\varepsilon_3=1$ jne. Selliselt jätkates leiame, et

$$-\frac{4}{3}=-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^{2k-1}}+\ldots$$

Edasi on võimalik tõestada niisugune lause.

***Teoreem* 23.1.** *Funktsioonid* $\cos\varphi$ *ja* $\sin\varphi$ *on vahemiku* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *ulatuses positiivsed, s. t. kui* $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, *siis*

$$\sin\varphi>0, \qquad \cos\varphi>0. \tag{23.11}$$

T õ e s t u s. Oletame vastuväiteliselt, et näiteks $\cos\varphi$ ei ole vahemiku $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ mingis punktis θ positiivne: $\cos\theta\leqslant 0$. Näitame, et sel korral leidub selles vahemikus punkt ω, nii et $\cos\omega = 0$. Tõepoolest, kui $\cos\theta = 0$, siis võib võtta $\omega = \theta$, kui aga $\cos\theta < 0$, siis $\cos\varphi$ on võrduse $\cos 0 = 1$ tõttu vahemiku $(0, \theta)$ otspunktides erimärgiline ja pidevuse tõttu muutub nulliks selle vahemiku mingis punktis ω, s. t. leidub ω, nii et [39]

$$\cos\omega=0, \qquad 0<\omega\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}.$$

Samasuse (23.7) põhjal on nüüd $\sin\omega = \pm 1$.

Et valemeist (23.5) ja (23.6) $\varphi = \psi$ puhul

$$\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi, \tag{23.12}$$
$$\sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi, \tag{23.13}$$

siis

$$\cos 2\omega=-1, \qquad \sin 2\omega=0,$$

nii et

$$e\circ 2\omega=e_1\cos 2\omega+e_2\sin 2\omega=-e, \qquad 0<2\omega<\pi.$$

Tulemus räägib vastu teoreemile 22.5, seetõttu tehtud oletus on väär. ∎

Analoogiliselt võib veenduda, et $\sin\varphi>0$, kui $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$. ∎

Valemitest (23.5) ja (23.6) on lihtne järeldada koosinuse ja siinuse nn. taandamisvalemeid:

$$\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\varphi, \qquad \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\varphi, \tag{23.14}$$
$$\cos(-\varphi)=\cos\varphi, \qquad \sin(-\varphi)=-\sin\varphi. \tag{23.15}$$

Esimeste saamiseks tuleb nimetatud valemites võtta $\psi=\frac{\pi}{2}$ ja arvestada võrdusi (23.10), teiste saamiseks tuleb võtta $\psi = -\varphi$ ja

[39] Vt. G. K a n g r o, Matemaatiline analüüs. I. Tallinn, 1965, lk. 129.

lahendada tekkiv süsteem

$$1=\cos\varphi\cos(-\varphi)-\sin\varphi\sin(-\varphi),$$
$$0=\sin\varphi\sin(-\varphi)+\cos\varphi\sin(-\varphi)$$

$\cos(-\varphi)$ ja $\sin(-\varphi)$ suhtes, kasutades samasust (23.7).

Ülejäänud taadamisvalemid on sel viisil saadavate valemite (23.14) ja (23.15) lihtsateks järeldusteks, näiteks valemid

$$\cos(\varphi+\pi)=\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\varphi,$$

$$\sin(\varphi+\pi)=\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\varphi$$

(need järelduvad muide ka def-ist 23.1 ja võrdusest $\boldsymbol{e}\circ(\varphi+\pi)=(\boldsymbol{e}\circ\varphi)\circ\pi=-\boldsymbol{e}\circ\varphi$), samuti näiteks valemid

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\left[(-\varphi)+\frac{\pi}{2}\right]=-\sin(-\varphi)=\sin\varphi,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\left[(-\varphi)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos(-\varphi)=\cos\varphi.$$

Üldiselt võib öelda, et aksioomid **D1**—**D6** (koos eelnevate aksioomidega) võimaldavad def-ist 23.1 tuletada kõik koosinuse ja siinuse puhul asetleidvad seosed. Võrdustega

$$\tan\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},\qquad \cot\varphi=\frac{1}{\tan\varphi}$$

võib sisse tuua kaks uut funktsiooni — tangensi ja kootangensi — ning saada ka kõik nende puhul kehtivad seosed.

Koosinuse ja siinuse ülalsaadud omadused võimaldavad jõuda järgmise põhimõtteliselt tähtsa järelduseni. Osutub, et vektor $\boldsymbol{e}$ aksioomides **D2** ja **D3** ei ole tasandi mingi eriline vektor — teda võib asendada tasandi iga nullist erineva vektoriga $\boldsymbol{x}$. Aksioomi **D2** osas järeldub see vahetult varem tõestatud teoreemidest 22.4 ja 22.5. Näitame, et see on nii ka aksioomi **D3** puhul, isegi enam: iga vektori $\boldsymbol{x}$ korral (ka $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ puhul)

$$\lim_{\varphi\to 0}(\boldsymbol{x}\circ\varphi)=\boldsymbol{x}. \tag{23.16}$$

Tõepoolest, tähistades endiselt $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}\circ\frac{\pi}{2}$, võime iga vektori $\boldsymbol{x}$ avaldada kujul

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1x_1+\boldsymbol{e}_2x_2. \tag{23.17}$$

Sel korral

$$x \circ \frac{\pi}{2} = \left(e_1 \circ \frac{\pi}{2}\right) x_1 + \left(e_2 \circ \frac{\pi}{2}\right) x_2,$$

s. t.

$$x \circ \frac{\pi}{2} = -e_1 x_2 + e_2 x_1. \tag{23.18}$$

Selle võrduse ning (23.1) ja (23.4) põhjal saame

$$\begin{aligned} x \circ \varphi &= (e_1 \circ \varphi) x_1 + (e_2 \circ \varphi) x_2 = (e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi) x_1 + \\ &+ (-e_1 \sin\varphi + e_2 \cos\varphi) x_2 = \\ &= (e_1 x_1 + e_2 x_2) \cos\varphi + (-e_1 x_2 + e_2 x_1) \sin\varphi, \end{aligned}$$

s. t.

$$x \circ \varphi = x \cos\varphi + \left(x \circ \frac{\pi}{2}\right) \sin\varphi. \tag{23.19}$$

Järelikult tõesti

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi\to 0} (x \circ \varphi) &= x \lim_{\varphi\to 0} \cos\varphi + \left(x \circ \frac{\pi}{2}\right) \lim_{\varphi\to 0} \sin\varphi = \\ &= x \cdot 1 + \left(x \circ \frac{\pi}{2}\right) \cdot 0 = x. \end{aligned}$$

Selle tulemuse põhjal võib ka kõikides järeldustes vektori e asendada ükskõik missuguse vektoriga $x \neq 0$. Muuhulgas võib seda teha ka koosinuse ja siinuse definitsioonivalemis (23.1). Tulemuse võrdlemine seosega (23.19) näitab, et sel puhul (s. t. vektori x alusel) saadavad koosinus ja siinus ühtivad eespool (s. t. vektori e alusel) saadud koosinuse ja siinusega. Teisiti öeldes, funktsioonid $\cos\varphi$ ja $\sin\varphi$ on vähemalt tasandil universaalsed, nad ei sõltu sellest, missuguse vektori $x \neq 0$ abil nad on valemiga (23.19) defineeritud.

24. Pikkus ja nurk. Kõige olulisemateks geomeetrilisteks mõisteteks, mis on defineeritavad uute aksioomide **D1—D6** alusel, on kahtlemata meetrika mõisted — vektori pikkus ja kahe vektori vaheline nurk. Nendega koos rikastub geomeetria selliste mõistete ja tulemustega, mis kirjeldavad praktika jaoks väga olulisi mõõtmistel tekkivaid vahekordi.

Sirgel on võimalik vektori pikkuse mõiste defineerida ka varasemate aksioomide **A1—A4**, **B1—B5** ja **C**$^{(1)}$ alusel järgmiselt.

***Def.* 24.1.** Kui sirge vektor x avaldub baasivektori e kaudu kujul $x = ex$, siis selle vektori p i k k u s e k s $|x|$ baasil e nimetatakse reaalarvu x absoluutväärtust $|x|$, s. t.

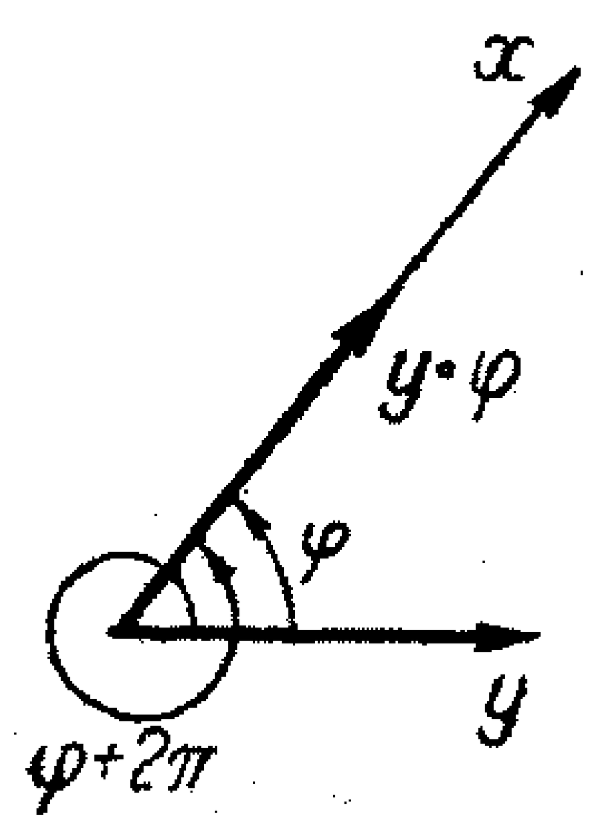
$$|\boldsymbol{x}| = |x|.$$

Tasandil ei ole see definitsioon vahetult rakendatav, sest antud baasivektori $\boldsymbol{e}$ korral ei ole iga vektor $\boldsymbol{x}$ avaldatav kujul $\boldsymbol{e}x$. Siin on loomulik kasutada pöörde aksioome ning püüda nende abil antud $\boldsymbol{x}$ korral vektor $\boldsymbol{e}$ asendada pärast sobivalt valitud pööret saadud vektoriga $\boldsymbol{e} \circ \varphi$. Eelnevalt tuleb anda vastus järgmisele küsimusele: kas antud $\boldsymbol{e}$ ja iga $\boldsymbol{x}$ korral leidub reaalarv φ, nii et $\boldsymbol{x} \parallel \boldsymbol{e} \circ \varphi$? Osutub, et vastus sellele küsimusele on jaatav.

***Teoreem* 24.1.** *Tasandi iga kahe nullist erineva vektori* $\boldsymbol{x}$ *ja* $\boldsymbol{y}$ *korral leidub reaalarv* φ, *nii et* $\boldsymbol{x}$ *ja* $\boldsymbol{y} \circ \varphi$ *on kollineaarsed samasuunalised vektorid, s. t. nii et*

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y} \circ \varphi) r, \qquad r > 0. \tag{24.1}$$

Need tingimused määravad reaalarvu r *üheselt, reaalarvu* φ *aga kuni liidetavani* $2l\pi$ $(l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, *s. t.* φ *iga kaks väärtust saavad erineda ainult* $2l\pi$ *võrra* (joon. 47).



Joon. 47.

Tõestus. Vektori $\boldsymbol{x}$ võib avaldada baasivektorite $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{y} \circ \frac{\pi}{2}$ lineaarkombinatsioonina:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 x_1 + \boldsymbol{e}_2 x_2.$$

Samal ajal on, nagu teada,

$$\boldsymbol{y} \circ \varphi = \boldsymbol{e}_1 \cos \varphi + \boldsymbol{e}_2 \sin \varphi.$$

Selleks et kehtiks võrdus (24.1), peab olema

$$x_1 = r \cos \varphi, \qquad x_2 = r \sin \varphi. \tag{24.2}$$

Tuleb näidata, et leiduvad reaalarvud r ja φ, nii et $r > 0$, ja kehtivad võrdused (24.2), ning et r on sellega määratud üheselt, φ aga liidetava $2l\pi$ täpsusega. Selleks võtame võrduste (24.2) pooled ruutu, liidame ja kasutame samasust (23.7):

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2. \tag{24.3}$$

Et $r > 0$, siis on sellega r väärtus täielikult määratud:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \tag{24.4}$$

Reaalarv φ peab nüüd rahuldama tingimusi

$$\cos \varphi = \frac{x_1}{r}, \qquad \sin \varphi = \frac{x_2}{r}. \tag{24.5}$$

Seose (24.3) põhjal $x_1^2 \leqslant r^2$, mistõttu

$$-1 \leqslant \frac{x_1}{r} \leqslant 1.$$

Täpselt samuti järeldub samasusest (23.7), et

$$-1 \leqslant \cos\varphi \leqslant 1.$$

Seega, $\cos 0 = 1$ ja $\cos\pi = -1$ on funktsiooni $\cos\varphi$ ekstremaalsed väärtused. Et iga pidev funktsioon omandab kõiki väärtusi oma ekstremaalsete väärtuste vahel[40], siis leidub φ niisugune väärtus α, nii et

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{r}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi.$$

Seejuures on (24.3) põhjal

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{x_1}{r}\right)^2 = \left(\frac{x_2}{r}\right)^2$$

ning järelikult $\sin\alpha = \frac{x_2}{r}$ või $\sin\alpha = -\frac{x_2}{r}$. Esimesel juhul on φ sobiv väärtus juba leitud — selleks on $\varphi = \alpha$, teisel juhul võib võtta $\varphi = 2\pi - \alpha$, sest $\cos(2\pi - \alpha) = \cos[(-\alpha) + 2\pi] = \cos(-\alpha) = \cos\alpha = \frac{x_1}{r}$, $\sin(2\pi - \alpha) = \sin[(-\alpha) + 2\pi] = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha = \frac{x_2}{r}$.

Sellega on näidatud tingimusi (24.1) rahuldavate reaalarvude r ja φ olemasolu ning see, et r on määratud üheselt. Arv φ ei ole seejuures määratud üheselt, sest (22.7) põhjal

$$y \circ (\alpha + 2l\pi) = (y \circ \alpha) \circ 2l\pi = y \circ \alpha, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

mistõttu koos väärtusega $\varphi = \alpha$ rahuldab tingimusi (24.1) ka väärtus $\varphi = \alpha + 2l\pi$ iga täisarvulise l korral. Jääb tõestada, et φ iga kaks lubatud väärtust saavad erineda ainult $2l\pi$ võrra.

Selleks näitame kõigepealt, et poollõigus $[0, 2\pi)$ ei saa olla φ kahte erinevat lubatud väärtust α ja α'. Tõepoolest, kui kord $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y} \circ \alpha) r$, kord aga $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y} \circ \alpha') r$, siis

$$\boldsymbol{y} \circ \alpha = \boldsymbol{y} \circ \alpha',$$

ning kui sel juhul

$$0 \leqslant \alpha < 2\pi, \quad 0 \leqslant \alpha' < 2\pi,$$

siis teoreemi 22.7 põhjal $\alpha' = \alpha$.

Olgu tegemist φ mistahes kahe lubatud väärtusega β ja γ. Et kogu reaalarvude hulk jaguneb poollõikudeks $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$,

[40] Vt. G. Kangro, Matemaatiline analüüs. I osa. Tallinn, 1965, lk. 129.

$k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, siis need väärtused kuuluvad mingitesse sellistesse poollõikudesse. Olgu näiteks

$$2p\pi \leqslant \beta < 2(p+1)\pi, \quad 2q\pi \leqslant \gamma < 2(q+1)\pi.$$

Koos väärtustega β ja γ on φ lubatud väärtusteks ka $\beta - 2p\pi$ ja $\gamma - 2q\pi$, kusjuures

$$0 \leqslant \beta - 2p\pi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \gamma - 2q\pi < 2\pi.$$

Järelikult

$$\beta - 2p\pi = \gamma - 2q\pi$$

ning seega

$$\gamma = \beta + 2l\pi,$$

kus $l = q - p$. ∎

Tõestatud teoreemi 24.1 alusel saab defineerida vektori pikkuse mõiste järgmiselt. Fikseerime vabalt teatava vektori $\boldsymbol{e}$, eeldades, et $\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$.

***Def.* 24.2.** Nullist erineva vektori $\boldsymbol{x}$ pikkuseks $|\boldsymbol{x}|$ baasil $\boldsymbol{e}$ nimetatakse positiivset reaalarvu r võrduses $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e} \circ \varphi) r$. Vektori $\boldsymbol{0}$ pikkuseks nimetatakse arvu 0.

Teoreemist 24.1 järeldub, et $|\boldsymbol{x}| = r$ on antud $\boldsymbol{e}$ korral määratud üheselt.

Märgime, et võrdus (24.4) annab võimaluse vektori $\boldsymbol{x}$ pikkuse $|\boldsymbol{x}| = r$ tegelikuks arvutamiseks, kui on teada $\boldsymbol{x}$ koordinaadid x_1 ja x_2 baasi $\left\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e} \circ \frac{\pi}{2}\right\}$ suhtes:

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \tag{24.6}$$

Teoreemi 24.1 tingimustes (24.1) esineva teise arvu φ abil on võimalik defineerida järgmine mõiste.

***Def.* 24.3.** Kui kahe nullist erineva vektori $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ puhul

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x} \circ \varphi) r, \quad r > 0, \tag{24.7}$$

siis reaalarvu nimetatakse vektori $\boldsymbol{y}$ pöördenurgaks vektori $\boldsymbol{x}$ suhtes ja tähistatakse $\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (joon. 47).

Teoreemi 24.1 kohaselt pöördenurk $\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ei ole määratud üheselt, vaid liidetava $2l\pi$ täpsusega, kus $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Tõestame veel mõningaid pöördenurga omadusi. Osutub, et

$$\angle(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = -\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{24.8}$$

Tõepoolest, võrdusest (24.7) järeldub, et

$$\boldsymbol{x} \circ \varphi = \boldsymbol{y} \frac{1}{r}.$$

Seetõttu $[\boldsymbol{x} \circ \varphi] \circ (-\varphi) = [\boldsymbol{y} \circ (-\varphi)] \frac{1}{r}$, kusjuures vasakul on

D6 põhjal

$$[x\circ\varphi]\circ(-\varphi)=x\circ[\varphi+(-\varphi)]=x\circ 0=x.$$

Niisiis

$$x=[y\circ(-\varphi)]\frac{1}{r},\qquad \frac{1}{r}>0$$

ja siit def. 24.3 põhjal järeldubki võrdus (24.8).

Olgu lisaks vektoreile x ja y antud veel kolmas vektor z. Näitame, et siis

$$\angle(x,z)=\angle(x,y)+\angle(y,z)+2l\pi, \tag{24.9}$$

kus $l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Tõepoolest, kui tähistada

$$\angle(x,y)=\varphi,\qquad \angle(y,z)=\psi,$$

siis

$$y=(x\circ\varphi)r,\qquad z=(y\circ\psi)s,\qquad r>0,\quad s>0,$$

mistõttu aksioomide **D5** ja **D6** põhjal

$$z=\{[(x\circ\varphi)r]\circ\psi\}s=[(x\circ\varphi)\circ\psi](rs)=[x\circ(\varphi+\psi)]rs,$$

kus $rs>0$. Siit nähtubki, et

$$\angle(x,z)=\varphi+\psi+2l\pi.$$

***Def.* 24.4.** Kahe nullist erineva vektori x ja y korral kummalgi pöördenurgal $\angle(x, y)$ ja $\angle(y, x)$ on teoreemi 24.1 kohaselt ainult üks väärtus poollõigus $[0, 2\pi)$. Väiksemat nendest väärtustest nimetatakse vektorite x ja y vaheliseks n u r g a k s ja tähistatakse $\sphericalangle(x, y)$.

Vaatleme siin kaht erijuhtu. Kui $x \parallel y$, siis leidub reaalarv λ, nii et $x=y\lambda$, ning kui $\lambda>0$, siis (22.2) põhjal

$$x=(y\circ 0)\lambda,\qquad y=(x\circ 0)\frac{1}{\lambda}, \tag{24.10}$$

kui aga $\lambda<0$, siis teoreemi (22.4) põhjal

$$x=(y\circ\pi)|\lambda|,\qquad y=(x\circ\pi)\frac{1}{|\lambda|}. \tag{24.11}$$

Sellest järeldub, et kui x ja y on kollineaarsed ja samasuunalised vektorid, siis nendevaheline nurk $\sphericalangle(x, y)=0$, kollineaarsete ja erisuunaliste vektorite x ja y vaheline nurk aga $\sphericalangle(x, y)=\pi$. Seejuures, nagu on kerge näha, kehtivad ka vastupidised väited: kui $\sphericalangle(x, y)=0$ või $\sphericalangle(x, y)=\pi$, siis vektorid x ja y on kollineaarsed ning vastavalt kas sama- või erisuunalised.

Üldjuhul, kui $x \nparallel y$, on def. 24.4 rakendamisel kasulik teada seost $\angle(x, y)$ ja $\angle(y, x)$ väärtuste vahel poollõigus $[0,2\pi)$.

Olgu $\angle(x, y)$ selliseks väärtuseks $\alpha \neq 0$, $0 < \alpha < 2\pi$. Võrduse (24.8) põhjal

$$\angle(y, x) = -\alpha + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Et võrratusest $0 < \alpha < 2\pi$ järeldub $0 > -\alpha > -2\pi$, nendest aga $2\pi > 2\pi - \alpha > 0$, siis $\angle(y, x)$ soovitavaks väärtuseks on $2\pi - \alpha$. Järelikult, kui $x \not\parallel y$, siis nurgaks $<(x, y)$ on vähim väärtustest $\alpha \neq 0$ ja $2\pi - \alpha$.

Kui $\angle(x, y)$ väärtuseks poollõigus $[0, 2\pi)$ on 0, siis $\angle(y, x) = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ väärtuseks selles poollõigus on samuti 0, s. t. sel korral $<(x, y) = 0$.

Saab näidata, et kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 24.2. *Kahe nullist erineva vektori x ja y korral on $<(x, y)$ määratud üheselt, mistõttu $<(x, y) = <(y, x)$. Seejuures*

$$<(x, y) = \min\{\alpha, 2\pi - \alpha\},$$

kus α on pöördenurga $\angle(x, y)$ poollõiku $[0,2\pi)$ kuuluv väärtus.

Et

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos[(-\alpha) + 2\pi] = \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$
$$\sin(2\pi - \alpha) = \sin[(-\alpha) + 2\pi] = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

ning $\angle(x, y) = \alpha + 2l\pi$, siis selle teoreemi põhjal

$$\cos <(x, y) = \cos \angle(x, y), \tag{24.12}$$
$$\sin <(x, y) = \pm \sin \angle(x, y), \tag{24.13}$$

kus ülemise märgi puhul $\angle(x, y) = <(x, y) + 2l\pi$, alumise märgi puhul $\angle(x, y) = 2\pi - <(x, y) + 2l\pi = -<(x, y) + 2(l+1)\pi$.

Esiletõstmist väärib järgmine tähtis erijuht.

***Def.* 24.5.** Kui kahe nullist erineva vektori x ja y korral $<(x, y) = \frac{\pi}{2}$, siis kõneldakse, et vektorid x ja y on risti (ehk ortogonaalsed[41]), ning tähistatakse $x \perp y$. Lisaks sellele loetakse, et nullvektor on risti vektoriga, s. t. iga x korral $x \perp 0$ ja $0 \perp x$.

Eelmise teoreemi põhjal vektorite ristumine on vastastikune omadus: kui $x \perp y$, siis $y \perp x$. Siit järeldub selline lause.

Teoreem 24.3. *Tasandi iga kaks vektorit y ja z, mis on risti mingi nullist erineva vektoriga x, on kollineaarsed, s. t. kui $y \perp x$ ja $z \perp x$, siis $y \parallel z$.*

[41] kr. k. ὀρθός — otse, γωνια — nurk.

T õ e s t u s. Kui vektoreist y ja z üks on nullvektor, siis ilmselt $y \parallel z$. Olgu y ja z nullist erinevad vektorid. Kui $y \perp x$, s.t. $\sphericalangle(x, y) = \frac{\pi}{2}$, siis teoreemi 24.2 põhjal $\min\{\alpha, 2\pi - \alpha\} = \frac{\pi}{2}$, kus $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, s.t. kas $\alpha = \frac{\pi}{2}$ või $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ ning järelikult kas $y = \left(x \circ \frac{\pi}{2}\right) r$ või $y = \left[x \circ \left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right] r = \left[(-x) \circ \frac{\pi}{2}\right] r = -\left(x \circ \frac{\pi}{2}\right) r$, kus $r > 0$. Täpselt samuti $z = \left(x \circ \frac{\pi}{2}\right) s$ või $z = -\left(x \circ \frac{\pi}{2}\right) s$, kus $s > 0$. Siit ongi näha, et y ja z kuuluvad mõlemad vektorit $x \circ \frac{\pi}{2}$ sisaldavasse sihti ning on seega kollineaarsed. ∎

25. Pöörded ruumis. Eespool antud käsitlus on kergesti laiendatav ruumi juhule. Lisandub kaks uut aksioomi, kusjuures aksioomides **D1**—**D6** on vaja teha mõningaid väheolulisi muudatusi. Eelkõige on need vajalikud aksioomis **D1**, mida muutmata kujul ruumi juhule üle kanda loomulikult ei saa. Osutub, et küllaldane on nõuda selle aksioomi ning koos temaga ka ülejäänud aksioomide **D2**—**D6** kehtivust igal tasandil ruumis. Et nendes aksioomides **D1**—**D6** on tegemist ainult vektoritega ja reaalarvuga ning punktide hulk jääb hoopis puudutamata, siis on selge, et olulised pole mitte niivõrd tasandid ise, kui just nende poolt määratud rihid.

Arvestada tuleb ka üht uut asjaolu, millele eespool ei ole veel tähelepanu pööratud, nimelt asjaolu, et aksioomid **D1**—**D6** määravad tasandil eelisorientatsiooni, mille esindajaks on baas $\left\{e, e \circ \frac{\pi}{2}\right\}$. Sama orientatsiooniga (ehk pöördesuunaga) on iga vektori $x \neq 0$ korral ka baas $\left\{x, x \circ \frac{\pi}{2}\right\}$, sest valemite (23.17) ja (23.18) põhjal baasiteisendusmaatriksiks üleminekul esimeselt baasilt teisele on

$$C = \begin{Vmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{Vmatrix},$$

mille determinant $|C| = x_1^2 + x_2^2$ on tõesti positiivne. Seega aksioom **D1** toimib tegelikult orienteeritud rihis, seades selle rihi igale vektorile x ja igale reaalarvule φ vastavusse vektori $x \circ \varphi$.

Lepime kokku orienteeritud rihte ruumis tähistada väikeste kreeka tähtedega ρ, σ, τ, ... Meenutades veel, et vektor e on aksioomides **D2** ja **D3** asendatav ükskõik missuguse vektoriga $x \neq 0$ (vt. art. 23), sõnastame nüüd pöörde aksioomid ruumis.

D1. *Igale vektorile* x *ja igale reaalarvule* φ *on igas vektorit* x *sisaldavas orienteeritud rihis* σ *seatud vastavusse üks ja ainult üks vektor* $x \circ \varphi$.

Sümbol $\circ$ asendab siin varasemat märki $\circ$, näidates ühtlasi, et pööre toimub nüüd ühes orienteeritud rihis σ.

D2. *Leidub positiivne reaalarv* π, *nii et* $x \circ \pi = -x$; *kui* $x \circ \varphi = -x \neq 0$ *ja* $\varphi > 0$, *siis* $\varphi \geqslant \pi$.

D3. $\lim\limits_{\varphi \to 0} x \circ \varphi = x$.

D4. $[x+y] \circ \varphi = x \circ \varphi + y \circ \varphi$.

D5. $(x\lambda) \circ \psi = (x \circ \varphi)\lambda$.

D6. $(x \circ \varphi) \circ \psi = x \circ (\varphi + \psi)$.

Need kuus aksioomi nõuavad antud σ korral, nagu selgub, täpselt sedasama mida aksioomid **D1—D6**, õieti nad sisaldavad viimaseid erijuhtudena. Sellega ongi õigustatud nende aksioomide tähistamine samade sümbolitega **D1—D6**. Koos aksioomidega **D1—D6** kanduvad antud orienteeritud rihi juhule üle ka kõik nende järeldused, s. t. kogu eelmise paragrahvi sisu. Nii näiteks võib defineerida koosinuse ja siinuse valemiga

$$x \circ \varphi = x \cos \varphi + \left(x \circ \frac{\pi}{2}\right) \sin \varphi,$$

kusjuures on teada, et selle valemi rakendamine sama orienteeritud rihi σ iga teise vektori $y \neq 0$ puhul annab tulemuseks samad funktsioonid $\cos \varphi$ ja $\sin \varphi$.

Viimase märkusega seoses kerkib järgmine küsimus. Kui analoogilise valemiga defineerida mõne teise orienteeritud rihi τ puhul kaks funktsiooni, võttes nende väärtusteks argumendi väärtuse φ korral vektori $z \circ \varphi$ koordinaadid baasi $\left\{z, z \circ \frac{\pi}{2}\right\}$ suhtes (kus $z \in \tau$ ja $z \neq 0$), kas võib siis kindel olla, et tulemuseks on eespool uuritud $\cos \varphi$ ja $\sin \varphi$? Teisiti öeldes, kas koosinus ja siinus on universaalsed ka ruumis? Osutub, et vastus sellele küsimusele on jaatav.

Põhjenduseks näitame, et vaadeldava kahe funktsiooni omadused, mis tulenevad iga orienteeritud rihi σ valiku korral ühtviisi aksioomidest **D1—D6** (täpselt samuti nagu $\cos \varphi$ ja $\sin \varphi$ omadused üle-eelmises artiklis), määravad need funktsioonid üheselt. Et need omadused on kõigi selliste funktsioonipaaride puhul samad, siis sellest järeldubki, et tegemist on kogu aeg ka samade funktsioonidega $\cos \varphi$ ja $\sin \varphi$.

Tegelikult pole siin vaja kasutada koosinuse ja siinuse kõiki teadaolevaid omadusi. Piisab, kui võtta samasused (23.5)—(23.7):

$$\cos(\varphi+\psi)=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi, \tag{25.1}$$
$$\sin(\varphi+\psi)=\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi, \tag{25.2}$$
$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1, \tag{25.3}$$

võrdused (23.10):

$$\cos\frac{\pi}{2}=0, \quad \sin\frac{\pi}{2}=1 \tag{25.4}$$

ning võrratused (23.11):

$$\text{kui} \quad 0<\varphi<\frac{\pi}{2}, \quad \text{siis} \quad \sin\varphi>0, \quad \cos\varphi>0. \tag{25.5}$$

Ülesandeks on niisiis näidata, et kui kaks funktsiooni rahuldavad samasusi, võrdusi ja võrratusi, mis on analoogilised koosinuse ja siinuse ülalesitatud omadustega, siis nende väärtused on argumendi iga väärtuse puhul üheselt määratud. Piirdume esialgu argumendi väärtustega vahemikus $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, kus need funktsioonid on (25.5) järgi positiivsed. Lihtsuse mõttes arutleme edasi koosinuse ja siinusega, pidades silmas, et täpselt sama võib korrata iga kahe eespool mainitud funktsiooniga.

Avaldame samasusest (25.3) $\sin^2\varphi$ ja $\cos^2\varphi$:

$$\sin^2\varphi=1-\cos^2\varphi, \quad \cos^2\varphi=1-\sin^2\varphi$$

ning asendame tulemused samasusest (25.1) järelduvasse seosesse

$$\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi.$$

Selliselt saame

$$\cos 2\varphi=2\cos^2\varphi-1=1-2\sin^2\varphi.$$

Tähistades siin $2\varphi=\psi$, võime avaldada

$$\cos\frac{\psi}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\psi}{2}}, \quad \sin\frac{\psi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\psi}{2}}.$$

Kui nüüd neis valemeis võtta järgemööda $\psi=\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \ldots, \frac{\pi}{2^k}$ ning arvestada väärtusi (25.4), on tulemuseks järgmised võrdused:

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{2^4}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{2^4}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2},$$

. . . .

$$\cos\frac{\pi}{2^k}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{2^k}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}{2}.$$

Võtame vabalt reaalarvu φ vahemikust $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Siis $0<\frac{2\varphi}{\pi}<1$ ning $\frac{2\varphi}{\pi}$ esitus kahendmurruna ei sisalda täisosa:

$$\frac{2\varphi}{\pi}=\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2}+\ldots+\frac{\varepsilon_k}{2^k}+\ldots, \qquad \varepsilon_k=0 \text{ või } 1.$$

Tähistame

$$\varphi_k=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2}+\ldots+\frac{\varepsilon_k}{2^k}\right).$$

Valemite (25.1) ja (25.2) korduva rakendamisega on nüüd võimalik arvutada $\cos\varphi_k$ ja $\sin\varphi_k$ väärtused ning seejärel $\cos\varphi$ ja $\sin\varphi$ pidevust ja võrdust $\varphi=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k$ arvestades ka väärtused

$$\cos\varphi=\lim_{k\to\infty}\cos\varphi_k, \qquad \sin\varphi=\lim_{k\to\infty}\sin\varphi_k.$$

Sel teel saab leida $\cos\varphi$ ja $\sin\varphi$ väärtused vahemikku $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ kuuluva argumendi väärtuse φ korral ükskõik missuguse etteantud täpsusega. Vahemikku $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ saab nad kanda valemitega (25.1) ja (25.2), võttes neis $\psi=\frac{\pi}{2}$.

$$\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\varphi\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\sin\varphi\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\cos\varphi\cdot 0=\sin\varphi\cdot 1=-\sin\varphi,$$

$$\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\varphi\cdot\cos\frac{\pi}{2}+\cos\varphi\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\cos\varphi.$$

Pannes siin φ asemele $\varphi+\frac{\pi}{2}$, saame

$$\cos(\varphi+\pi)=-\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\varphi,$$

$$\sin(\varphi+\pi)=\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\varphi,$$

ning võttes siin φ asemel uuesti $\varphi+\frac{\pi}{2}$, saame

$$\cos\left(\varphi+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\varphi,$$

$$\sin\left(\varphi+\frac{3\pi}{2}\right)=-\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\varphi.$$

Nende tulemustega on $\cos\varphi$ ja $\sin\varphi$ väärtused määratud lõigul $[0,2\pi]$. Edasi tuleb kasutada võrdusi

$$\cos(\varphi+2k\pi)=\cos\varphi,\quad \sin(\varphi+2k\pi)=\sin\varphi,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

mis järelduvad valemeist (25.1) ja (25.2) ning määravad $\cos\varphi$ ja $\sin\varphi$ väärtused tervel poolsirgel $[0,+\infty)$.

Poolsirgele $(-\infty,\ 0]$ minekuks tuleb kasutada seoseid

$$\cos(-\varphi)=\cos\varphi,\quad \sin(-\varphi)=-\sin\varphi, \tag{25.6}$$

mis järelduvad valemeist (25.1) ja (25.2), kui võtta neis $\psi=-\varphi$ ja arvestada võrdusi (25.4):

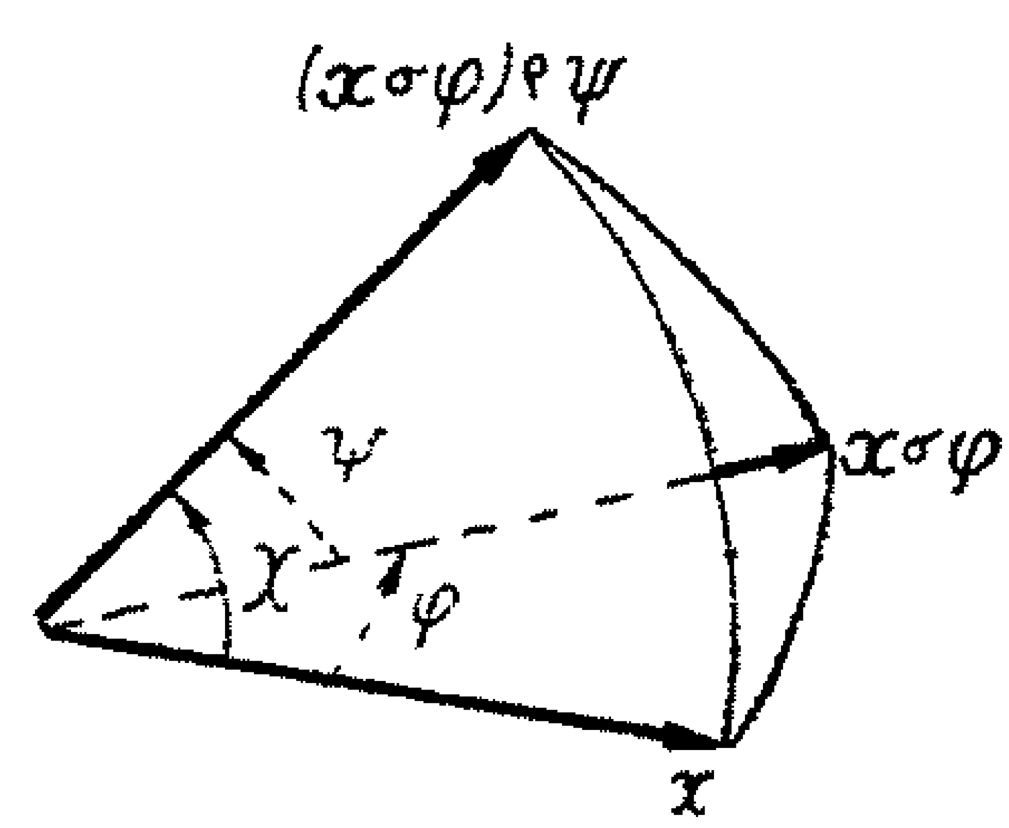
$$\begin{aligned}1&=\cos\varphi\cos(-\varphi)-\sin\varphi\sin(-\varphi),\\ 0&=\sin\varphi\cos(-\varphi)+\cos\varphi\sin(-\varphi).\end{aligned}$$

Saadud süsteemi lahendamisel $\cos(-\varphi)$ ja $\sin(-\varphi)$ suhtes saame (25.3) põhjal parajasti seosed (25.6).

Selliselt ongi kindlaks tehtud, et koosinuse ja siinuse (või ükskõik missuguse kahe tervel arvteljel tingimusi (25.1) — (25.5) rahuldava funktsiooni) väärtused on argumendi iga väärtuse puhul üheselt määratud. Märgime, et need väärtused võib kirjeldatud viisil soovitud täpsusega ka tegelikult välja arvutada, kuigi see on niisugusel moel väga töömahukas. Tegelikult kasutatakse $\cos\varphi$ ja $\sin\varphi$ väärtuste arvutamisel (näiteks tabelite koostamisel) märksa võimsamaid meetodeid.

Tähtis on siin eeskätt asjaolu, et koosinus ja siinus on, nagu ülaltoodust järeldub, universaalsed ka ruumis — ei ole erinevaid koosinusi ja siinuseid eri rihtides võetud vektorite jaoks.

Seni on käesolevas artiklis käsitletud pöördeid ruumi ainult ühes ja samas orienteeritud rihis. Selgitamata on, kuidas on seotud omavahel pöörded erinevates orienteeritud rihtides. Ilma selleta ei saa eespool tasandi juhul defineeritud pikkuse ja nurga mõisteid laiendada ruumi vektorite hulga kui seostatud terviku juhule. Osutub, et siin ei saa läbi kahe uue aksioomita. Näitlikuks aluseks nendele on järgmised tähelepanekud.



Joon. 48.

Ühes ja samas rihis võib võtta kaks orientatsiooni ehk pöördesuunda. Sel juhul saadavat kaht vastupidiste pöördesuundadega orienteeritud rihti tähistame σ ja $-\sigma$. Näitlikult on selge, et kui σ asemel võtta $-\sigma$, siis tuleb kõigi pöördenurkade ees muuta märgid. Samuti on arusaadav, et ükskõik missuguse vektori $\boldsymbol{x}$ pööramisel mingis orienteeritud rihis σ vektoriks $\boldsymbol{x}\sigma\varphi$ ja saadud vektori pööramisel mingis teises orienteeritud rihis ϱ vektoriks $(\boldsymbol{x}\sigma\varphi)\rho\psi$ võib tulemuse saada otsekohe vektori $\boldsymbol{x}$ sobiva pööramisega (joon. 48).

Nende tähelepanekute alusel vormistame järgmised kaks uut aksioomi:

E1. $x_{(-\sigma)}\varphi = x_{\sigma}(-\varphi)$.

E2. $(x_{\sigma}\varphi)_{\rho}\psi = x_{\tau}\chi$.

Aksioomidest **A1—A4**, **B1—B5**, **C**$^{(3)}$, **D1—D6**, **E1** ja **E2** tulenevate järelduste süsteemi nimetatakse e u k l e i d i l i s e k s geomeetriaks ruumis ehk eukleidiliseks stereomeetriaks. Ta sisaldab afiinse geomeetria ruumis — rühmade **A** ja **B** aksioomide ja **C**$^{(3)}$ järelduste süsteemi.

Teine aksioom **E2** meenutab mõnevõrra aksioomi **D6**, kuid erinevus on selles, et ρ, σ ja τ võivad siin olla erinevad orienteeritud rihid ning ei nõuta mingit seost φ, ψ ja χ vahel. Kui ρ ja σ on üks ja seesama orienteeritud riht, s. t. $\rho = \sigma$, siis on aksioomi **D6** põhjal

$$(x_{\sigma}\varphi)_{\sigma}\psi = x_{\sigma}(\varphi+\psi),$$

s. t. ka $\tau = \sigma$ ning $\chi = \varphi + \psi$; kui aga $\rho = -\sigma$, siis on **E1** ja **D6** põhjal

$$(x_{\sigma}\varphi)_{(-\sigma)}\psi = (x_{\sigma}\varphi)_{\sigma}(-\psi) = x_{\sigma}(\varphi-\psi),$$

s. t. $\tau = \sigma$ ja $\chi = \varphi - \psi$.

Aksioomist **E1** saab teha olulisi järeldusi nurga mõiste kohta. Kui ruumi kaks nullist erinevat vektorit $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ei ole kollineaarsed, siis nad määravad parajasti ühe rihi. Vektoreid $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ sisaldavaid orienteeritud rihte on aga kaks: σ ja $-\sigma$. Kummaski saame teoreemi 24.1 ja def. 24.3 järgi pöördenurga, s. t. on olemas nii $\varphi = \angle_{\sigma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ kui ka $\psi = \angle_{(-\sigma)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (siin indeks märgi $\angle$ juures näitab, missuguses orienteeritud rihis pöördenurk on määratud), kusjuures

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}_{\sigma}\varphi)r, \quad \boldsymbol{y} = [\boldsymbol{x}_{(-\sigma)}\psi]r', \quad r>0, \quad r'>0.$$

Aksioomi **E1** põhjal järeldub teisest võrdusest:

$$\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{x}_{\sigma}(-\psi)]r',$$

siit aga teoreemi 24.1 tõttu $r' = r$ ja $\psi = -\varphi + 2l\pi$, s. t.

$$\angle_{(-\sigma)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\angle_{\sigma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + 2l\pi. \tag{25.7}$$

Tulemuse võrdlemisel seosega (24.8) leiame, et

$$\angle_{(-\sigma)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \angle_{\sigma}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + 2l'\pi.$$

Järelikult def-is 24.4 on ükskõik, kas tasandil kasutatav sümbol $\angle$ asendada ruumi vektorite $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ korral sümboliga $\angle_{\sigma}$ või sümboliga $\angle_{(-\sigma)}$, sest viimase võrduse põhjal vähim $\angle_{\sigma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ja $\angle_{\sigma}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ väärtustest poollõigus $[0, 2\pi)$ on samal ajal vähimaks ka $\angle_{(-\sigma)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ja $\angle_{(-\sigma)}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ väärtustest selles poollõigus. Seega

$\sphericalangle(x, y)$ ei sõltu sellest, kas valida σ või $-\sigma$, ning on seetõttu ruumi vektoritega x ja y määratud üheselt.

Sama tulemuseni jõuame ka kollineaarsete x ja y puhul, sest siis võib võrdusi (24.10) ja (24.11) rakendada ükskõik missuguse vektoreid x ja y sisaldava orienteeritud rihi puhul, mistõttu samasuunaliste x ja y korral $\sphericalangle(x, y) = 0$ ning erisuunaliste x ja y korral $\sphericalangle(x, y) = \pi$.

Kokkuvõttes võib öelda, et ruumi iga kahe nullist erineva vektoriga x ja y on täielikult määratud nendevaheline nurk $\sphericalangle(x, y)$, kusjuures $\sphericalangle(y, x) = \sphericalangle(x, y)$. Seetõttu saab def. 24.5 rakendada ka ruumi korral: ka siin nimetatakse vektoreid x ja y, mille puhul $\sphericalangle(x, y) = \frac{\pi}{2}$, ristuvateks ja tähistatakse $x \perp y$.

Aksioom E2 on oluline vektori pikkuse mõiste käsitlemisel ruumi juhul. Def. 24.2 järgi saab küll defineerida vektori x pikkuse iga seda vektorit sisaldava orienteeritud rihi puhul, kuid ei ole veel selge, kuidas on seostatavad pikkused eri rihtides.

Siin on otstarbekas defineerida ruumi vektorite hulgas järgmine ekvivalentsus.

***Def.* 25.1.** Vektorit x nimetatakse ühepikkuseks vektoriga y, kui neid vektoreid sisaldava orienteeritud rihi σ korral leidub reaalarv φ, nii et

$$x = y \circ_\sigma \varphi.$$

Näitame, et siin on tõesti tegemist ekvivalentsusega (vt. def. 18.1). Tõepoolest, 1° x on iseendaga ühepikkune, sest $x \circ_\sigma 0 = x$, 2° kui x on ühepikkune vektoriga y, siis y on ühepikkune vektoriga x, sest kui $x = y \circ_\sigma \varphi$, siis D6 põhjal $x \circ_\sigma (-\varphi) = (y \circ_\sigma \varphi) \circ_\sigma (-\varphi) = y \circ_\sigma [\varphi + (-\varphi)] = y \circ_\sigma 0 = y$, 3° kui x on ühepikkune vektoriga y ja y on ühepikkune vektoriga z, siis x on ühepikkune vektoriga z, sest kui $x = y \circ_\rho \psi$ ja $y = z \circ_\sigma \varphi$, siis aksioomi E2 põhjal

$$x = (z \circ_\sigma \varphi) \circ_\rho \psi = z \circ_\tau \chi.$$

Teoreemi 18.1 põhjal lahutub ruumi vektorite hulk nüüd paarikaupa ühepikkuste vektorite alamhulkadeks, nii et iga vektor kuulub parajasti ühte alamhulka ja iga kaks vektorit erinevatest alamhulkadest ei ole ühepikkused. Iga niisugust alamhulka nimetatakse vektorisfääriks.

Et teoreemi 22.1 põhjal võrrandi $x \circ \varphi = \mathbf{0}$ ainsaks lahendiks on $x = \mathbf{0}$, siis üks vektorisfäär koosneb ainult nullvektorist. Teda nimetatakse nullvektorisfääriks.

Võtame kõigi ülejäänud vektorisfääride seast ühe ja lepime kokku nimetada selle vektoreid ühikvektoreiks. Iga nullist erineva vektori x ja iga ühikvektori e korral leidub neid sisaldav riht σ

ning teoreemi 24.1 põhjal on olemas reaalarvud $r > 0$ ja φ, nii et

$$x = (e \circ \varphi) r = (er) \circ \varphi,$$

kusjuures selline r on määratud üheselt. Et $r = 0$ korral $er = e0 = \mathbf{0}$, siis võime öelda, et igas vektorisfääris (ka nullvektorisfääris) leidub parajasti üks niisugune vektor er, kus $r \geqslant 0$.

***Def.* 25.2.** Kui vektoriga x samas vektorisfääris on vektor er, kus $r \geqslant 0$, ja e on ühikvektor, siis öeldakse, et vektori x pikkus on r, ja tähistatakse $|x| = r$.

Vektori pikkus ei sõltu ühikvektori e valikust teda sisaldavas vektorisfääris, sest üleminekul teisele ühikvektorile e', kus $e = e' \rho \psi$, on aksioomi **E2** põhjal

$$x = [(e' \rho \psi) \circ \varphi] r = (e' \tau \chi) r = (e' r) \tau \chi,$$

s. t vektoriga x samas vektorisfääris on $e'r$ endise kordajaga $r > 0$. Samuti on selge, et ühe ja sama vektorisfääri vektoreil on kõigil võrdne pikkus, seejuures ühikvektoreil on pikkus 1.

Lihtne on veenduda, et def. 25.2 haarab endasse erijuhuna ka def. 24.2, millega on eespool defineeritud tasandi vektori pikkus (kui ühikvektoreiks lugeda e ja tasandi kõik vektorid, millel on temaga võrdne pikkus 1).

§ 5. VEKTORITE KORRUTAMINE

Ebaõnnestunud katse defineerida vektorite korrutamine tasandi afiinses geomeetrias on tehtud eespool art-s 20. Meenutame, et vektorite $x = (x_1, x_2)$ ja $y = (y_1, y_2)$ korrutiseks püüdsime seal nimetada vektorit $z = (x_1 y_1, x_2 y_2)$, kuid selgus, et selline vektor z ei ole vektoritega x ja y invariantselt seotud, vaid osutub sõltuvaks ka baasist $\{e_1, e_2\}$, mille suhtes on võetud x ja y koordinaadid. Eukleidilises planimeetrias, mis saadakse uute aksioomide **D1—D6** lisamisel tasandi afiinse geomeetria omadele, on olukord teine. Uutest aksioomidest tulenevad uued järeldused võimaldavad baaside hulgas välja eraldada teatavad erilised baasid — nn. ristbaasid, kusjuures osutub, et ülalkirjeldatud meetod, kui teda rakendada ristbaasi suhtes võetud koordinaatide — nn. ristkoordinaatide puhul, viib teatava vektoritega x ja y invariantselt seotud reaalarvuni ehk skalaarini. Viimast nimetatakse vektorite x ja y skalaarkorrutiseks xy, ta osutub selleks suuruseks, mida on näitlikult tutvustatud art-s 7.

Ruumi vektorite puhul on eukleidilises geomeetrias lisaks skalaarkorrutisele võimalik defineerida ka teatav vektor, mis on invariantselt seotud vektoritega x ja y ning mida on samuti loomulik nimetada nende korrutiseks — seekord siis vektorkorrutiseks

$x \times y$ (vrd. art. 7). Tekivad ka kolme vektori x, y ja z korrutised — segakorrutis $(x \times y)z$ ja topeltvektorkorrutis $(x \times y) \times z$. Kokkuvõttes on tegemist vektoralgebra tunduva rikastumisega rakenduslikult väga tähtsate mõistete ja tulemustega.

26. Rist- ja polaarkoordinaadid tasandil. Vektori pikkuse ja kahe vektori vahelise nurga mõiste võimaldab iga reeperiga $\{O;\ e_1,\ e_2\}$ tasandil siduda kolm reaalarvu: baasivektorite pikkused $|e_1|$ ja $|e_2|$ ning baasivektoritevahelise nurga $\sphericalangle(e_1,\ e_2)$. Seejuures tingimus $e_1 \nparallel e_2$ on samaväärne järgmiste nõuete süsteemiga: $|e_1| \neq 0$, $|e_2| \neq 0$, $\sphericalangle(e_1,\ e_2) \neq 0$, $\sphericalangle(e_1,\ e_2) \neq \pi$.

Def. **26.1.** Baasi $\{e_1,\ e_2\}$, mille korral $|e_1| = |e_2| = 1$ ja $\sphericalangle(e_1,\ e_2) = \frac{\pi}{2}$, s. t. ristuvatest ühikvektoritest koosnevat baasi, nimetatakse r i s t b a a s i k s. Reeperit $\{O;\ e_1,\ e_2\}$, mille vektorid moodustavad ristbaasi, nimetatakse r i s t r e e p e r i k s.

Vektori (või punkti) koordinaate ristbaasi (või ristreeperi) suhtes nimetatakse r i s t k o o r d i n a a t i d e k s.

Kui on vaja rõhutada, et baas, reeper või vastavad koordinaadid ei tarvitse olla ristbaas, -reeper ega -koordinaadid, siis kõneldakse a f i i n s e s t baasist või reeperist või vastavatest a f i i n s e t e s t koordinaatidest. Ka lihtsalt «baas», «reeper» või «koordinaadid» tähendavad edaspidi alati viimaseid.

Kahe vektori vahelise nurga definitsiooni kohaselt $\sphericalangle(e_1, e_2) = \frac{\pi}{2}$ parajasti siis, kui kas $e_2 = e_1 \circ \frac{\pi}{2}$ või $e_2 = e_1 \circ \frac{3\pi}{2} = (e_1 \circ \pi) \circ \frac{\pi}{2} = -e_1 \circ \frac{\pi}{2}$. Järelikult on olemas kahesuguseid ristbaase: baasid $\left\{e_1, e_1 \circ \frac{\pi}{2}\right\}$ ja baasid $\left\{e_1, -e_1 \circ \frac{\pi}{2}\right\}$, kus e_1 on ühikvektor. (Vastavalt sellele on olemas kahesuguseid ristreepereid.) Üleminek esimeselt baasilt teisele toimub valemitega

$$e'_1 = e_1, \qquad e'_2 = -e_2, \tag{26.1}$$

mille kordajate maatriksi determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Järelikult need kaks baasi on erinevalt orienteeritud. Käesoleva paragrahvi ulatuses eelistame alati baase $\left\{e_1, e_1 \circ \frac{\pi}{2}\right\}$ ja vastavaid reepereid. Peatselt selgub, et kõik need baasid on ühtemoodi orienteeritud. Niisiis, käesolevas paragrahvis on vektori x ristkoordinaatideks x_1 ja x_2 kordajad avaldises

$$x = e_1 x_1 + \left(e_1 \circ \frac{\pi}{2} \right) x_2. \tag{26.2}$$

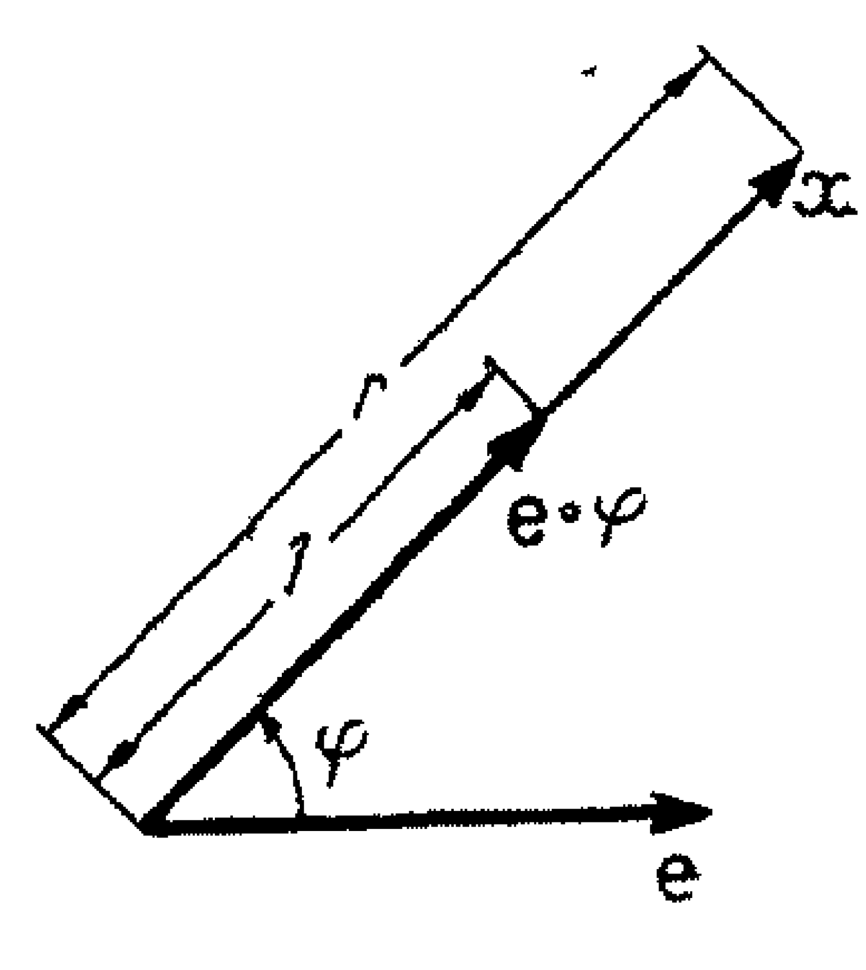
Selliste ristkoordinaatidega on juba varemgi tegemist olnud. Nii näiteks def 23.1 kohaselt $\cos\varphi$ ja $\sin\varphi$ kujutavad endast $e \circ \varphi$ ristkoordinaate ristbaasi $\left\{ e, e \circ \frac{\pi}{2} \right\}$ suhtes. Vabalt võetud vektori x ristkoordinaate on kasutatud teoreemi 24.1 tõestuses.

Teoreem 24.1 väärib tähelepanu ka teisest seisukohast. Ta avab võimaluse koordinaatide mõiste teatavaks üldistamiseks. Koordinaatide meetodi põhiidee seisneb selles, et tasandi kõikidele vektoritele seatakse vastavusse reaalarvude paarid, mistõttu vektoritega tegelemise asemel võib tegelda vastavate arvupaaridega. Seni on kasutatud üht võimalust sellise vastavuse korraldamiseks: vektorile $x = e_1 x_1 + e_2 x_2$, kus $e_1 \nparallel e_2$, seatakse vastavusse kordajate paar (x_1, x_2). Teoreem 24.1 annab eukleidilises planimeetrias ka teistsuguse võimaluse, kuid ainult nullist erinevate vektorite x puhul. Selle teoreemi kohaselt (kui tähistada $y = e$) leidub iga $x \neq 0$ korral parajasti üks paar arve (φ, r) mis rahuldab tingimusi

$$x = (e \circ \varphi) r, \qquad 0 < \varphi < 2\pi, \qquad r > 0. \tag{26.3}$$

Järelikult selle paari arve r ja φ võib samuti vaadelda vektori $x \neq 0$ omalaadsete koordinaatidena (joon. 49).

Eraldi võttes on neid arve eespool nimetatud ja tähistatud järgmiselt (vt. def. 24.2 ja 24.3): arvu $r = |x|$ vektori x pikkuseks, arvu $\varphi = \angle(x, e)$ vektori x pöördenurgaks vektori e suhtes (kooskõlas tingimustega (26.3) tuleb piirduda pöördenurga $\angle(x, e)$ väärtusega poollõigus $[0, 2\pi)$). Ühise nimetuse saavad nad järgmise definitsiooniga.



Joon. 49

***Def.* 26.2.** Tingimusi (26.3) rahuldavaid arve r ja φ nimetatakse tasandi nullist erineva vektori x p o l a a r k o o r d i n a a t i d e k s baasivektoril e.

Vastavalt eespool tehtud kokkuleppele on siin alati vaja lisada eesliide «polaar».

Teoreemi 22.1 järgi $e \circ \varphi \neq 0$ iga φ väärtuse korral. Järelikult $(e \circ \varphi) r = 0$ ainult siis, kui $r = 0$, kusjuures φ võib sel juhul olla ükskõik missugune reaalarv. Seega nullvektori 0 pikkus on 0, kuid tema pöördenurk vektori e suhtes jääb määramatuks, s. t. nullvektori polaarkoordinaadid ei ole üheselt määratud. See on kahtlemata polaarkoordinaatide puuduseks. Nendega töötamisel tuleb vektorite hulgast välja jätta nullvektor $\mathbf{0}$.

Valemid, mis seovad vektori $\boldsymbol{x}$ polaarkoordinaate baasivektoril $\boldsymbol{e}$ selle vektori ristkoordinaatidega baasi $\left\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e} \circ \frac{\pi}{2}\right\}$ suhtes, on leitud eespool valemitena (24.2), (24.4) ja (24.5):

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \tag{26.4}$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x_1}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{x_2}{r}. \tag{26.5}$$

Vektori $\boldsymbol{x}$ ristkoordinaadid on määratud niipea, kui on antud baasivektor $\boldsymbol{e}$. Selleks võib aga olla tasandi iga ühikvektor. Seetõttu on vaja selgitada, kuidas muutuvad antud vektori ristkoordinaadid, kui baasivektori $\boldsymbol{e}$ asemele võtta vektor

$$\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e} \circ \alpha, \quad 0 \leqslant \alpha < 2\pi. \tag{26.6}$$

Üleminekul baasilt $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, kus $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e} \circ \frac{\pi}{2}$, uuele baasile $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, kus $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 \circ \alpha$, $\boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}'_1 \circ \frac{\pi}{2} = (\boldsymbol{e}_1 \circ \alpha) \circ \frac{\pi}{2} = \boldsymbol{e}_1 \circ \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \left(\boldsymbol{e}_1 \circ \frac{\pi}{2}\right) \circ \alpha = \boldsymbol{e}_2 \circ \alpha$, on baasiteisendusvalemeiks (23.1) ja (23.4) järgi (joon. 50)

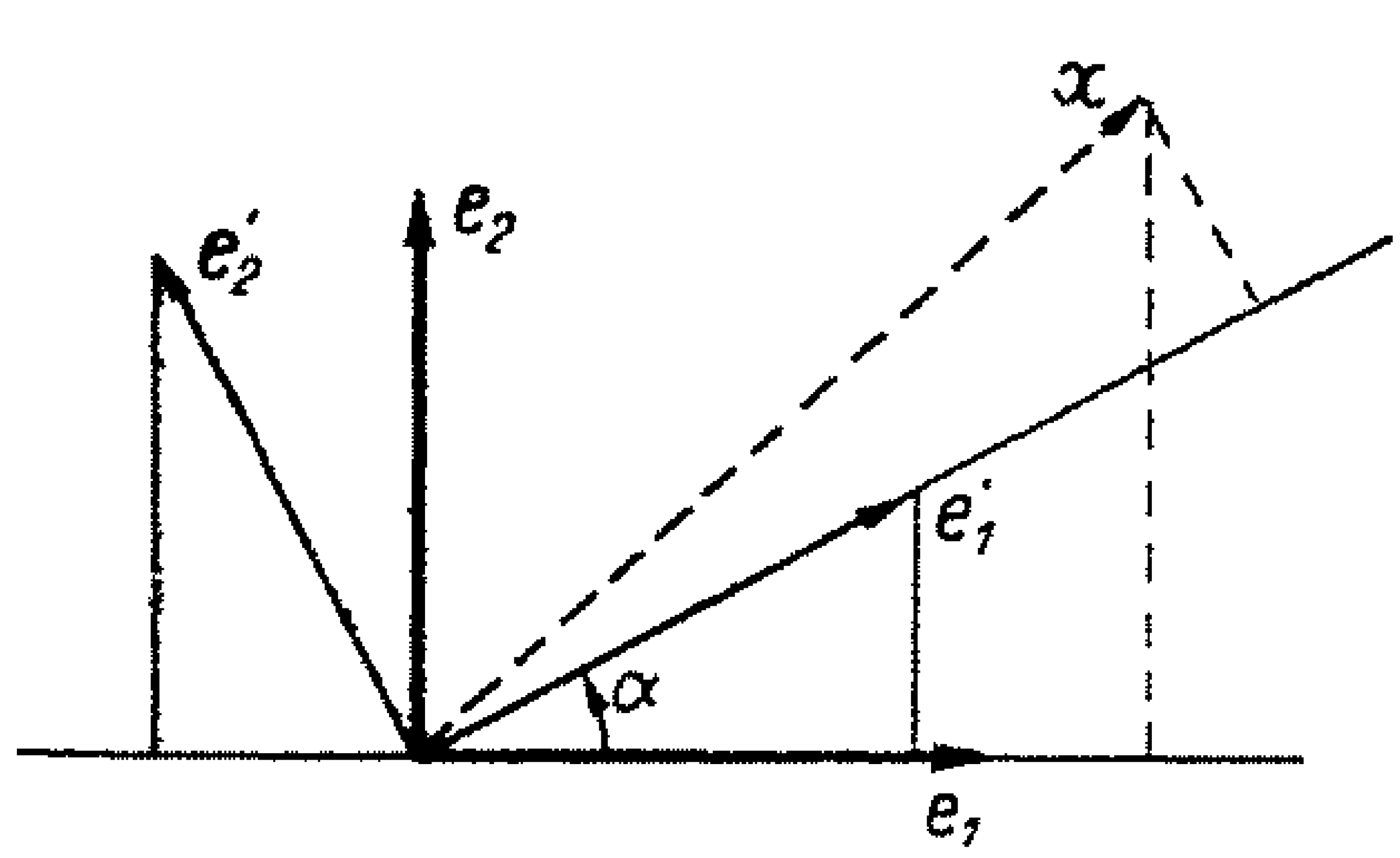
$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1 &= \boldsymbol{e}_1 \cos \alpha + \boldsymbol{e}_2 \sin \alpha, \\ \boldsymbol{e}'_2 &= -\boldsymbol{e}_1 \sin \alpha + \boldsymbol{e}_2 \cos \alpha. \end{aligned} \tag{26.7}$$

Järelikult (17.5) põhjal

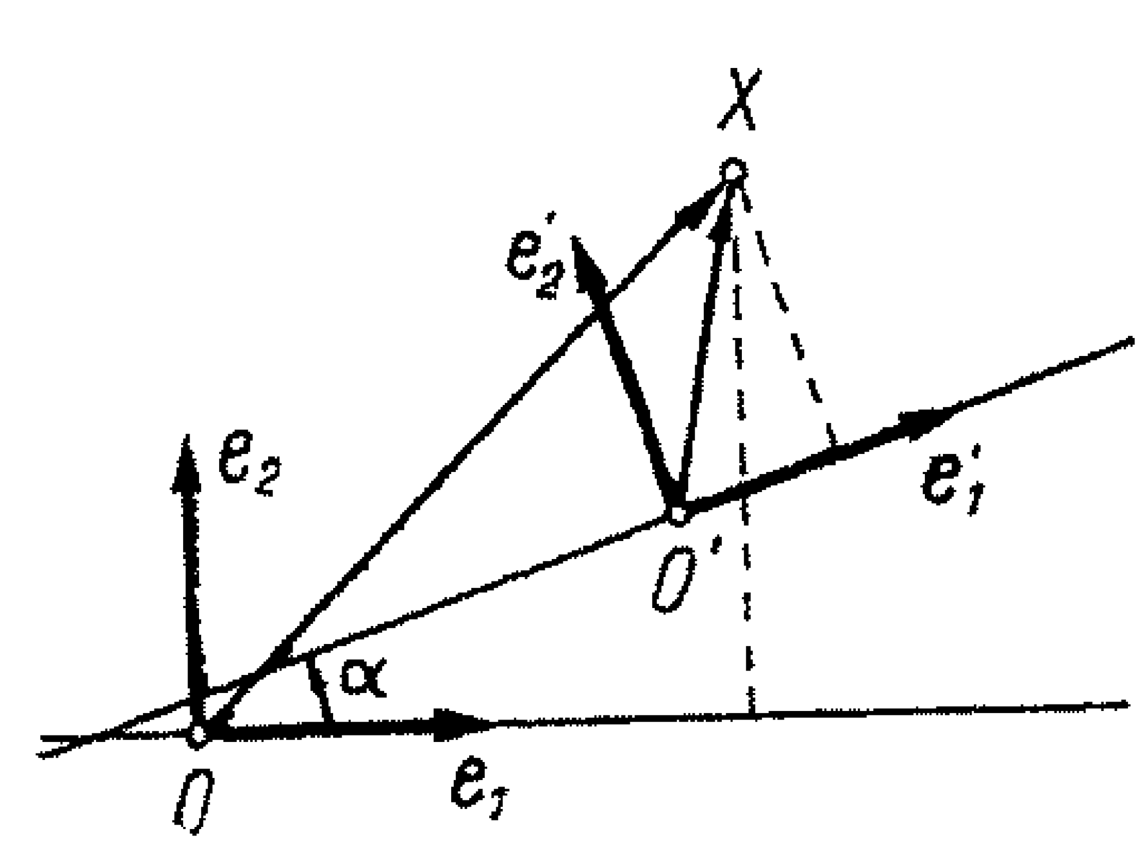
$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \cos \alpha - x'_2 \sin \alpha, \\ x_2 &= x'_1 \sin \alpha + x'_2 \cos \alpha. \end{aligned} \tag{26.8}$$

Vastupidised seosed saame siit, kui avaldame x'_1 ja x'_2:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha, \\ x'_2 &= -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha. \end{aligned} \tag{26.9}$$



Joon. 50.



Joon. 51.

Sellised on vektori ristkoordinaatide teisendusvalemid baasivektorite e_1 ja e_2 pööramisel nurga α võrra, s. t. baasiteisenduse (26.7) korral.

Üleminekul ristbaasilt $\left\{e_1, e_1 \circ \frac{\pi}{2}\right\}$ vastupidiselt orienteeritud ristbaasile $\left\{e_1, -e_1 \circ \frac{\pi}{2}\right\}$, s. t. baasiteisenduse (26.1) korral, on vektori ristkoordinaatide teisendusvalemeiks (17.5) põhjal

$$x'_1 = x_1, \qquad x'_2 = -x_2.$$

Punkti X koordinaatide saamiseks tuleb tasandil lisaks baasivektorile e fikseerida ka teatav alguspunkt O. Punkti X koordinaatideks nimetatakse siis tema kohavektori $x = \overrightarrow{OX}$ koordinaate. Kõneldakse punkti X ristkoordinaatidest ristreeperi $\left\{O; e, e \circ \frac{\pi}{2}\right\}$ suhtes, mõistes nende all vektori $\overrightarrow{OX}$ ristkoordinaate ristbaasi $\left\{e, e \circ \frac{\pi}{2}\right\}$ suhtes. Fikseeritud alguspunkti O korral punkti X ristkoordinaadid teisenevad baasivektori e_1 ja e_2 pööramisel samuti nagu $\overrightarrow{OX}$ koordinaadid, s. t. valemite (26.9) järgi. Kui sellega kaasneb alguspunkti O ülekandmine punkti O', siis punkti X koordinaatide teisendusvalemid järelduvad valemeist (17.9), kus kordajateks c^*_{ij} on nüüd valemite (26.9) kordajad. Seega

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha + c^*_1, \\ x'_2 &= -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha + c^*_2, \end{aligned} \tag{26.10}$$

kus c^*_1 ja c^*_2 on punkti O ristkoordinaadid reeperi $\{O'; e'_1, e'_2\}$ suhtes (joon. 51).

Valemitest (17.10) ja (26.8) järelduvad analoogiliselt vastupidised seosed:

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \cos\alpha - x'_2 \sin\alpha + c_1, \\ x_2 &= x'_1 \sin\alpha + x'_2 \cos\alpha + c_2, \end{aligned} \tag{26.11}$$

kus c_1 ja c_2 on punkti O' ristkoordinaadid reeperi $\{O; e_1, e_2\}$ suhtes.

Analoogiliselt defineeritakse punkti X polaarkoordinaadid kui vektori $\overrightarrow{OX}$ polaarkoordinaadid baasivektoril e, s. t. tingimusi

$$\overrightarrow{OX} = (e \circ \varphi) r, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad r > 0$$

rahuldavate arvudena φ ja r. Sellised arvupaarid (φ, r) on üksüheselt seotud kõikide punktidega X, mis erinevad punktist O (s. t.

punktist kohavektoriga $\overrightarrow{OO} = \mathbf{0}$). Kohavektori $\overrightarrow{OX}$ pikkust $r = |\overrightarrow{OX}|$ nimetatakse seejuures punkti X polaarraadiuseks, pöördenurka φ — punkti X polaarnurgaks. Punkti X ristkoordinaatidega ristreeperi $\left\{O; \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}\circ\frac{\pi}{2}\right\}$ suhtes on nad seotud valemitega (26.4) ja (26.5). Punkti O nimetatakse polaarkoordinaatide puhul tavaliselt pooluseks. Sirget, mis läbib pooluse O vektori $\boldsymbol{e}$ sihis ja millel on valitud vektoriga $\boldsymbol{e}$ määratud suund, nimetatakse polaarteljeks.

Polaarkoordinaate on mõnikord kasulik käsitleda mõnevõrra üldisemalt kui eespool, loobudes tingimustes (26.3) viimasest nõudest $r > 0$. See toob endaga kaasa loobumise tasandi vektorite $\boldsymbol{x}$ hulga ja paaride (r, φ) hulga vahelise vastavuse üksühesusest. Igale paarile (r, φ), $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ jääb endiselt vastama üksainus vektor $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e}\circ\varphi)r$, kuid sama vektor vastab ka paarile $(-r, \varphi')$, $0 \leqslant \varphi' < 2\pi$, kus $\varphi' = \varphi + \pi$ (kui $0 \leqslant \varphi < \pi$) või $\varphi' = \varphi - \pi$ (kui $\pi \leqslant \varphi < 2\pi$). Tõepoolest,

$$[\boldsymbol{e}\circ(\varphi\pm\pi)](-r) = [(\boldsymbol{e}\circ\varphi)\circ(\pm\pi)](-r) = [-(\boldsymbol{e}\circ\varphi)](-r) = \\ = (\boldsymbol{e}\circ\varphi)r = \boldsymbol{x}.$$

Vaatamata sellele toob nõudest $r > 0$ loobumine mõnikord (näiteks art-s 73) endaga kaasa käsitluse lihtsustumise.

***Def.* 26.3.** Arve r ja φ, mille korral

$$\boldsymbol{x} = r(\boldsymbol{e}\circ\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

nimetatakse vektori $\boldsymbol{x}$ (kui $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX}$, siis ka punkti X) üldistatud polaarkoordinaatideks.

Seosed (26.4) üleminekuks ristkoordinaatidele x_1 ja x_2 jäävad siin endiselt kehtima. Vastupidistes valemites (26.5) tuleb esimese seose parema poole ette panna $\pm$, seetõttu iga paar (x_1, x_2) annab kaks paari: koos paariga (r, φ) ka paari $(-r, \varphi')$.

Siin muidugi ei sobi enam vektori $\boldsymbol{x}$ koordinaatide r ja φ endised nimetused — vektori $\boldsymbol{x}$ pikkus ja pöördenurk $\boldsymbol{e}$ suhtes. Seetõttu nimetatakse neid samuti nagu punkti X koordinaate polaarraadiuseks ja polaarnurgaks, lisades vajaduse korral täiendi «üldistatud».

27. Tasandi kahe vektori skalaarkorrutis. Lineaartehted vektoritega — liitmine ja reaalarvuga korrutamine — taanduvad, nagu eespool selgus (vt. teoreem 14.3), samade tehete sooritamisele eraldi vastavate koordinaatidega. Analoogilise võtte rakendamine korrutamise puhul art-s 20 ei viinud aga soovitud sihile. Analüüsime nüüd uuesti seda võtet, piirdudes üksnes vektorite ristkoordinaatidega.

Olgu antud tasandi kaks vektorit x ja y oma ristkoordinaatidega kahe erineva ristbaasi $\left\{e_1, e_1 \circ \frac{\pi}{2}\right\}$ ja $\left\{e'_1, e'_1 \circ \frac{\pi}{2}\right\}$ suhtes, kus $e'_1 = e_1 \circ \alpha$. Ühe baasi suhtes olgu $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, teise baasi suhtes $x = (x'_1, x'_2)$, $y = (y'_1, y'_2)$. Moodustame mõlemal juhul vastavate koordinaatide korrutised x_1y_1, x_2y_2 ja $x'_1y'_1$, $x'_2y'_2$ ning uurime seost nende vahel. Et valemite (26.9) järgi

$$\begin{aligned} x'_1y'_1 &= (x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha)(y_1 \cos\alpha + y_2 \sin\alpha) = \\ &= x_1y_1 \cos^2\alpha + x_2y_2 \sin^2\alpha + (x_1y_2 + x_2y_1)\sin\alpha\cos\alpha, \\ x'_2y'_2 &= (-x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha)(-y_1 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha) = \\ &= x_1y_1 \sin^2\alpha + x_2y_2 \cos^2\alpha - (x_1y_2 + x_2y_1)\sin\alpha\cos\alpha, \end{aligned}$$

siis on see seos küllalt keerukas. On selge, et (x_1y_1, x_2y_2) ja $(x'_1y'_1, x'_2y'_2)$ ei ole ühe ja sama vektori ristkoordinaatideks vaadeldava kahe ristbaasi suhtes, sest nad ei ole seotud valemitega (26.9). Järelikult ka sel viisil ei ole lootust siduda vektoritega x ja y teatavat vektorit z, mida võiks nimetada nende korrutiseks.

Küll saab aga saadud seostest järeldada, et

$$x'_1y'_1 + x'_2y'_2 = (x_1y_1 + x_2y_2)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Ka üleminekul ristbaasilt $\left\{e_1, e_1 \circ \frac{\pi}{2}\right\}$ ristbaasile $\left\{e_1, -e_1 \circ \frac{\pi}{2}\right\}$, mil $x'_1 = x_1$, $x'_2 = -x_2$ ja $y'_1 = y_1$, $y'_2 = -y_2$, on

$$x'_1y'_1 + x'_2y'_2 = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Siit sugeneb mõte siduda tasandi vektoritega x ja y reaalarv $x_1y_1 + x_2y_2$ — nende vastavate ristkoordinaatide korrutiste summa. See arv, nagu näha, ei muutu ristkoordinaatide teisendamisel ja sõltub seega üksnes vektoreist x ja y.

Def. 27.1. Reaalarvu

$$xy = x_1y_1 + x_2y_2, \tag{27.1}$$

kus (x_1, x_2) ja (y_1, y_2) on tasandi vektorite x ja y ristkoordinaadid ühe ja sama ristbaasi suhtes, nimetatakse vektorite x ja y s k a l a a r k o r r u t i s e k s. Erijuhul, kui $x = y$, kõneldakse vektori x s k a l a a r r u u d u s t: $x^2 = xx = x_1^2 + x_2^2$.

Nimetuse esimene pool on tulnud sellest, et kahe vektori x ja y korrutiseks xy on reaalarv ehk skalaar (vt. art. 6), nimetuse teist poolt õigustab asjaolu, et sellel skalaaril on mitmed kahe arvu korrutise omadused, sest saab näidata järgmise teoreemi kehtivust.

***Teoreem* 27.1.** *Skalaarkorrutamine on*

1) *kommutatiivne:* $\boldsymbol{xy} = \boldsymbol{yx}$,
2) *distributiivne:* $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{xz}+\boldsymbol{yz}$ *ning*
3) *vektori korrutamisel reaalarvuga käitub järgmiselt:*

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}\lambda) = (\boldsymbol{xy})\lambda.$$

Tõestus. Põhjendused on siin lihtsad ning tuginevad def-ile 27.1 ja reaalarvudega sooritatavate tehete vastavatele omadustele:

1) $\boldsymbol{xy} = x_1y_1+x_2y_2 = y_1x_1+y_2x_2 = \boldsymbol{yx}$,
2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{z} = (x_1+y_1)z_1+(x_2+y_2)z_2 = (x_1z_1+y_1z_1)+$ $+(x_2z_2+y_2z_2) = (x_1z_1+x_2z_2)+(y_1z_1+y_2z_2) = \boldsymbol{xz}+\boldsymbol{yz}$,
3) $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}\lambda) = x_1(y_1\lambda)+x_2(y_2\lambda) = (x_1y_1+x_2y_2)\lambda = (\boldsymbol{xy})\lambda$. ∎

Viimase omaduse 3) tõttu võib tähistada lihtsalt $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}\lambda) = \boldsymbol{xy}\lambda = \lambda\boldsymbol{xy}$. Tõestatud omaduste 1)—3) järgi võib vektoritega arvutades kasutada skalaarkorrutise puhul mitmeid samu võtteid, mis reaalarvudega arvutades. Nii on näiteks

$$(\boldsymbol{x}\lambda+\boldsymbol{y}\mu)^2 = (\boldsymbol{x}\lambda+\boldsymbol{y}\mu)(\boldsymbol{x}\lambda+\boldsymbol{y}\mu) = (\boldsymbol{x}\lambda)(\boldsymbol{x}\lambda+\boldsymbol{y}\mu)+(\boldsymbol{y}\mu)(\boldsymbol{x}\lambda+\boldsymbol{y}\mu) =$$
$$= \boldsymbol{x}^2\lambda^2+\boldsymbol{xy}\,\lambda\mu+\boldsymbol{yx}\,\mu\lambda+\boldsymbol{y}^2\mu^2 = \lambda^2\boldsymbol{x}^2+2\lambda\mu\,\boldsymbol{xy}+\mu^2\boldsymbol{y}^2,$$

s. t. kehtib tavaline kaksliikme ruudu arvutamise valem. Erijuhul, kui $\lambda = 1$ ja $\mu = \pm 1$, on tulemuseks:

$$(\boldsymbol{x}\pm\boldsymbol{y})^2 = \boldsymbol{x}^2\pm 2\boldsymbol{xy}+\boldsymbol{y}^2. \tag{27.2}$$

Samuti on

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2, \tag{27.3}$$

nagu on kerge kontrollida.

Mitmete sarnaste joonte kõrval on vektorite skalaarkorrutamisel ja arvude korrutamisel ka olulisi erinevusi. Kõigepealt tuleb rõhutada seda, et skalaarkorrutamine ei ole assotsiatiivne: $(\boldsymbol{xy})\boldsymbol{z}$ ei ole enam vektorite skalaarkorrutis, vaid on reaalarvu $\boldsymbol{xy}$ ja vektori $\boldsymbol{z}$ korrutis; kusjuures lisaks sellele vabalt võetud vektorite $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{z}$ korral $(\boldsymbol{xy})\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{x}(\boldsymbol{yz})$, sest vasak pool on saadud vektorist $\boldsymbol{z}$ selle korrutamisel reaalarvuga $\boldsymbol{xy}$ ning on seetõttu kollineaarne vektoriga $\boldsymbol{z}$, parem pool on aga samal põhjusel kollineaarne vektoriga $\boldsymbol{x}$, ning kui $\boldsymbol{x} \nparallel \boldsymbol{z}$, siis on võrdus võimatu.

Teiseks oluliseks erinevuseks on asjaolu, et skalaarkorrutis võib olla null ka siis, kui korrutatavad vektorid on mõlemad nullist erinevad. Näiteks kui $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\circ\frac{\pi}{2}$, siis valemite (23.17) ja (23.18) põhjal

$$xy=x\left(x\circ\frac{\pi}{2}\right)=x_1(-x_2)+x_2x_1=0.$$

Seetõttu puudub skalaarkorrutise puhul üheselt määratud pöördtehe — arvude jagamise analoog. Nii ei või võrdusest

$$xy=xy'$$

ühegi vektori x puhul järeldada, et $y=y'$, sest võrdus on rahuldatud ka siis, kui $y'=y+\left(x\circ\frac{\pi}{2}\right)\lambda$, nagu on kerge veenduda.

Selgitame järgnevalt, kuidas avaldub skalaarkorrutis xy korrutatavate vektorite x ja y polaarkoordinaatide kaudu. Tulemus võimaldab teha mitmeid olulisi järeldusi. Olgu kahe nullist erineva vektori x ja y polaarkoordinaatideks baasivektoril e vastavalt arvud $r=|x|$ ja φ ning $s=|y|$ ja ψ. Sel korral nende vektorite ristkoordinaatideks baasi $\left\{e, e\circ\frac{\pi}{2}\right\}$ suhtes on valemite (26.4) järgi

$$x_1=r\cos\varphi,\quad x_2=r\sin\varphi,$$
$$y_1=s\cos\psi,\quad y_2=s\sin\psi.$$

Seetõttu

$$\begin{aligned}xy=x_1y_1+x_2y_2&=rs(\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi)=\\&=rs[\cos\varphi\cos(-\psi)-\sin\varphi\sin(-\psi)]=\\&=rs\cos(\varphi-\psi).\end{aligned}$$

Tähistame pöördenurga $\angle(x, y)$ poollõiku $[0, 2\pi)$ kuuluva väärtuse α. Et võrduse (24.9) põhjal

$$\angle(x,e)=\angle(x,y)+\angle(y,e)+2l\pi,\qquad l=0,\ \pm1,\ \pm2\ \ldots$$

ja $\angle(x, e)$ ning $\angle(y, e)$ väärtusteks poollõigus $[0, 2\pi)$ on vastavalt φ ja ψ, siis juhul $0\leqslant\alpha+\psi<2\pi$ tekib seos

$$\varphi=\alpha+\psi;$$

juhul $2\pi\leqslant\alpha+\psi<4\pi$ aga seos

$$\varphi=\alpha+\psi-2\pi.$$

Kokkuvõttes niisiis

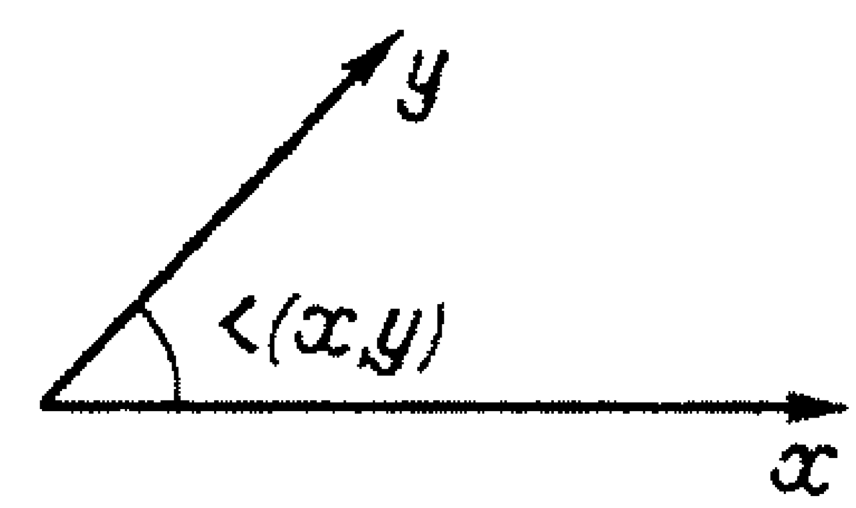
$$\alpha=\varphi-\psi+2\varepsilon\pi,\qquad \varepsilon=0 \text{ või } 1.$$

Seejuures teoreemi 24.2 kohaselt vektorite x ja y vaheliseks nurgaks $\sphericalangle(x, y)$ on väiksem kahest arvust α ja $2\pi-\alpha$. Et $\cos(2\pi-\alpha)=\cos(-\alpha+2\pi)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, siis

$$\cos\sphericalangle(x,y)=\cos\alpha=\cos(\varphi-\psi+2\varepsilon\pi)=\cos(\varphi-\psi).$$

Kui arvestada seda võrdust xy jaoks eespool leitud avaldises (koos võrdustega $r = |x|$ ja $s = |y|$), on tulemuseks järgmine oluline valem (joon. 52; vrd. art. 7):

$$xy = |x|\,|y| \cos \sphericalangle (x, y). \qquad (27.4)$$



Joon. 52.

Sellest valemist järeldub otsekohe, et skalaarkorrutis xy sõltub üksnes korrutatavatest vektoritest x ja y ning on defineeritav vahetult nende vektoritega seotud suuruste abil ilma baasi kasutamata. See asjaolu võimaldab edaspidi defineerida ka ruumi kahe vektori skalaarkorrutise mõiste.

Valemit (27.4) võib laiendada ka juhule, kui mõlemad korrutatavad vektorid x ja y ei ole nullist erinevad. Def. 27.1 põhjal on siis $xy = 0$, sest $\mathbf{0} = (0,0)$. Sel korral ei ole küll $\sphericalangle(x, y)$ üheselt määratud, kuid et $\cos\varphi$ on tõkestatud funktsioon ja üks tegureist $|x|$ ja $|y|$ kui nullvektori pikkus on võrdne nulliga, siis on ka (27.4) kogu parem pool võrdne nulliga ning seega (27.4) jääb kehtima.

Valemist (27.4) järeldub niisugune lause.

***Teoreem* 27.2.** *Kahe vektori x ja y skalaarkorrutis on võrdne nulliga, s. t. $xy = 0$ siis ja ainult siis, kui $x \perp y$.*

T õ e s t u s. Kui $xy = 0$, siis $|x||y| \cos\sphericalangle(x, y) = 0$ ning üks tegureist peab olema null. Seejuures võrdusest $|x| = 0$ järeldub, et $x = \mathbf{0}$, võrdusest $\cos\sphericalangle(x, y) = 0$ aga järeldub, et $\sphericalangle(x, y) = \frac{\pi}{2}$. Mõlemal juhul on def. 24.5 põhjal $x \perp y$. ∎

Võrdusest (27.4) saab tuletada ka mitmeid tähtsaid valemeid. Kui võtta $x = y$ ning arvestada, et $\sphericalangle(x, x) = 0$, mistõttu $\cos\sphericalangle(x, x) = 1$, siis on tulemuseks seos

$$x^2 = |x|^2, \qquad (27.5)$$

ja siit

$$|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \qquad (27.6)$$

Edasi on võimalik avaldada

$$\cos \sphericalangle (x, y) = \frac{xy}{|x|\,|y|}, \qquad (27.7)$$

mistõttu

$$\cos \sphericalangle (x, y) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}. \qquad (27.8)$$

Järelikult kahe vektori $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ristumise tunnuseks on (tänu sellele, et $\sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\pi}{2}$ parajasti siis kui $\cos \sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$):

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0. \tag{27.9}$$

Tuleb märkida, et pöördenurga $\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ leidmiseks ei ole valem (27.8) küllalt sobiv. Nagu eespool selgus, on küll $\cos \angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \cos \sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, kuid koosinuse omaduse (23.15) tõttu on ka $\cos(-\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = \cos \sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Seetõttu valem (27.8) määrab pöördenurga $\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ainult märgi täpsusega.

Sobivama valemi võib saada järgmiselt. Olgu $\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ üheks väärtuseks α, s. t. $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x} \circ \alpha) r$, kus $r > 0$. Sel korral $\boldsymbol{y} \circ \frac{\pi}{2} = [(\boldsymbol{x} \circ \alpha) r] \circ \frac{\pi}{2} = \left[\boldsymbol{x} \circ \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] r$, mistõttu $\angle\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \circ \frac{\pi}{2}\right)$ üheks väärtuseks on $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Et pöördenurk on määratud liidetava $2l\pi$ täpsusega, siis (23.14) põhjal

$$\cos \angle\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \circ \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha = -\sin \angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Samal ajal on vasak pool arvutatav valemi (27.8) järgi, kusjuures selles tuleb arvestada, et (23.18) põhjal $\boldsymbol{y} \circ \frac{\pi}{2} = (-y_2, y_1)$:

$$\cos \angle\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \circ \frac{\pi}{2}\right) = \frac{x_1(-y_2) + x_2 y_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{(-y_2)^2 + y_1^2}}.$$

Järelikult

$$\sin \angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}. \tag{27.10}$$

Saadud kaks valemit (27.8) ja (27.10) määravad juba täielikult pöördenurga $\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ väärtuse poollõigus $[0, 2\pi)$, kui on teada tasandi vektorite $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ristkoordinaadid. Viimase valemi puhul piisab, kui leida lugeja märk, mis on ühtlasi $\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ selle väärtuse märgiks. Praktilistes arvutustes on aga sageli lihtsam kasutada mainitud kahe valemi lihtsat järeldust. Et $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$, siis

$$\tan \angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 y_1 + x_2 y_2}. \tag{27.11}$$

Selle valemiga on $\angle(x, y)$ mainitud väärtus määratud liidetava π täpsusega. Pöördenurga $\angle(x, y)$ täielikuks määramiseks poollõigus $[0, 2\pi)$ tuleb arvestada ka lugeja ja nimetaja märke.

Lõpuks märgime, et valemite (27.4) ja (27.5) abil saab võrdustele (27.2) ja (27.3) anda järgmised kujud:

$$|x \pm y|^2 = |x|^2 + |y|^2 \pm 2\,|x|\,|y| \cos \angle(x, y), \tag{27.12}$$

$$4\,|a|\,|b| \cos \angle(a, b) = |a+b|^2 - |a-b|^2 \tag{27.13}$$

(võrduses (27.3) on tähistatud $x + y = 2a$, $x - y = 2b$). Edaspidi selgub, et saadud seostel on tähtsad geomeetrilised tõlgendused.

28. Ruumi kahe vektori skalaarkorrutis. Valemi (27.4) paremal pool olevad suurused on defineeritud ka ruumi kahe nullist erineva vektori x ja y korral. Seetõttu on võimalik skalaarkorrutise mõistet laiendada ka ruumi vektorite juhule.

Def. **28.1.** Kahe nullist erineva vektori x ja y s k a l a a r k o r r u t i s e k s nimetatakse reaalarvu

$$xy = |x|\,|y| \cos \angle(x, y). \tag{28.1}$$

Kui vähemalt üks vektoreist x ja y on võrdne nullvektoriga $\mathbf{0}$, siis loetakse, et $xy = 0$.

Ruumi kaks vektorit x ja y kuuluvad alati teatavale tasandile ruumis. Seejuures nende skalaarkorrutistel on, nagu selgub valemite (27.4) ja (28.1) võrdlemisel, ühesugune väärtus olenemata sellest, kas neid vaadeldakse ruumi vektoreina või selle tasandi vektoreina. Sellest tulenevalt kanduvad eelmisest artiklist üle kõik skalaarkorrutisega seotud mõisted ja tulemused, mis käivad ruumi ühe ja sama tasandi vektorite kohta. Seetõttu on ka ruumi vektorite skalaaarkorrutis kommutatiivne, s. t. $xy = yx$, ning omadusega $x(y\lambda) = (xy)\lambda$, sest x, y ja $x\lambda$ kuuluvad ühele ja samale tasandile ruumis. Et sama võib öelda ka x, y ja $x \pm y$ kohta, siis kanduvad üle ka võrdused (27.2) ja (27.3), seega nendest järelduvad seosed (27.12) ja (27.13), rääkimata muidugi valemeist (27.5) ja (27.7) ning teoreemist 27.2.

Teisiti on lugu distributiivsusega. Ruumi kolm vektorit x, y ja z ei tarvitse enam olla ühe ja sama tasandi vektorid ja distributiivsuse seadus: $(x + y)z = xz + yz$ ei ole vahetult ülekantav tasandi vektoreilt ruumi vektoreile. Osutub, et siiski kehtib järgmine lause.

Teoreem **28.1.** *Ruumi vektorite skalaarkorrutis on*

1) *kommutatiivne*: $xy = yx$,
2) *distributiivne*: $(x + y)z = xz + yz$ *ning*
3) *reaalarvuga korrutamise suhtes omadusega* $x(y\lambda) = (xy)\lambda$.

Tõestus. Ülalmärgitu põhjal vajab tõestamist ainult distributiivsuse omadus. Kasutame asjaolu, et kehtib (27.2):

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2. \tag{28.2}$$

Rakendame seda valemit korduvalt ruumi ükskõik missuguse kolme vektori $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{z}$ puhul, võttes

$$\begin{array}{llll}
\text{kord } \boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, & \boldsymbol{b}=\boldsymbol{z}, & \text{kord } \boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}, & \boldsymbol{b}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z},\\
\text{kord } \boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, & \boldsymbol{b}=-\boldsymbol{z}, & \text{kord } \boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}, & \boldsymbol{b}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z},\\
\text{kord } \boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, & \boldsymbol{b}=\boldsymbol{z}, & \text{kord } \boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}, & \boldsymbol{b}=-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z},\\
\text{kord } \boldsymbol{a}=-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, & \boldsymbol{b}=+\boldsymbol{z}, & \text{kord } \boldsymbol{a}=-\boldsymbol{x}, & \boldsymbol{b}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}.
\end{array}$$

Viimased kolm rida on saadud esimesest mingi ühe vektori $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ või $\boldsymbol{z}$ asendamisel vastandvektoriga. Seejuures ühes reas näidatud kahe asenduse korral on $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ väärtuseks sama avaldis. Järelikult ka valemi (28.2) rakendamise tulemused on sel puhul võrdsed. Nii tekivad võrdused:

$$\begin{array}{l|r}
(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2+2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}+\boldsymbol{z}^2=\boldsymbol{x}^2+2\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})^2, & +1\\
(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2-2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}+\boldsymbol{z}^2=\boldsymbol{x}^2+2\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})^2, & -1\\
(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2+2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}+\boldsymbol{z}^2=\boldsymbol{x}^2-2\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})^2, & -1\\
(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2-2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}+\boldsymbol{z}^2=\boldsymbol{x}^2-2\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})^2. & +1
\end{array}$$

Pärast korrutamist paremal näidatud arvudega ning seejärel liitmist on tulemuseks:

$$4(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}-4(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}=2(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})^2-2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})^2.$$

Paremal pool on valemi (27.2) järgi

$$2[\boldsymbol{y}^2+2\boldsymbol{yz}+\boldsymbol{z}^2-(\boldsymbol{y}^2-2\boldsymbol{yz}+\boldsymbol{z}^2)]=8\boldsymbol{yz}$$

ning seega

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}=2\boldsymbol{yz}. \tag{28.3}$$

Et see võrdus kehtib iga kolme vektori $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ korral, siis võib siin vahetada $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ osad:

$$(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}-(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}=2\boldsymbol{xz}$$

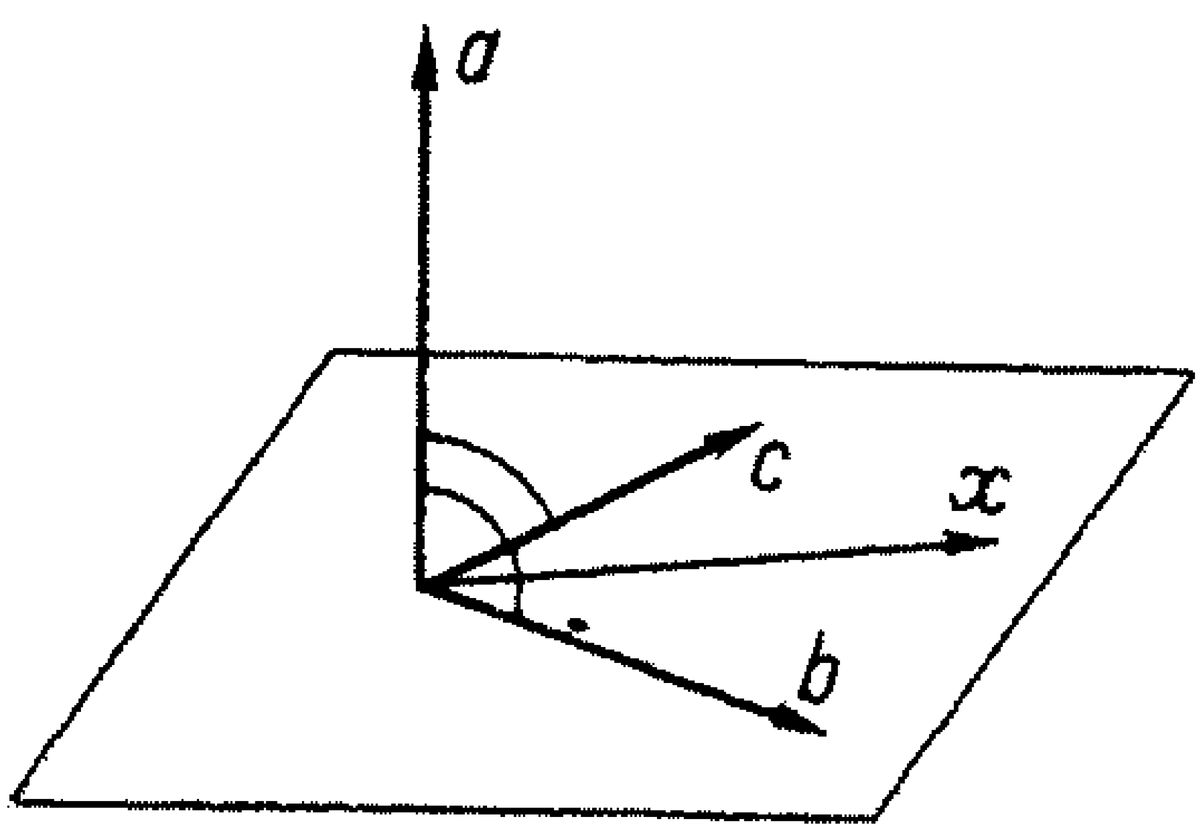
ehk (28.4)

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}=2\boldsymbol{xz}.$$

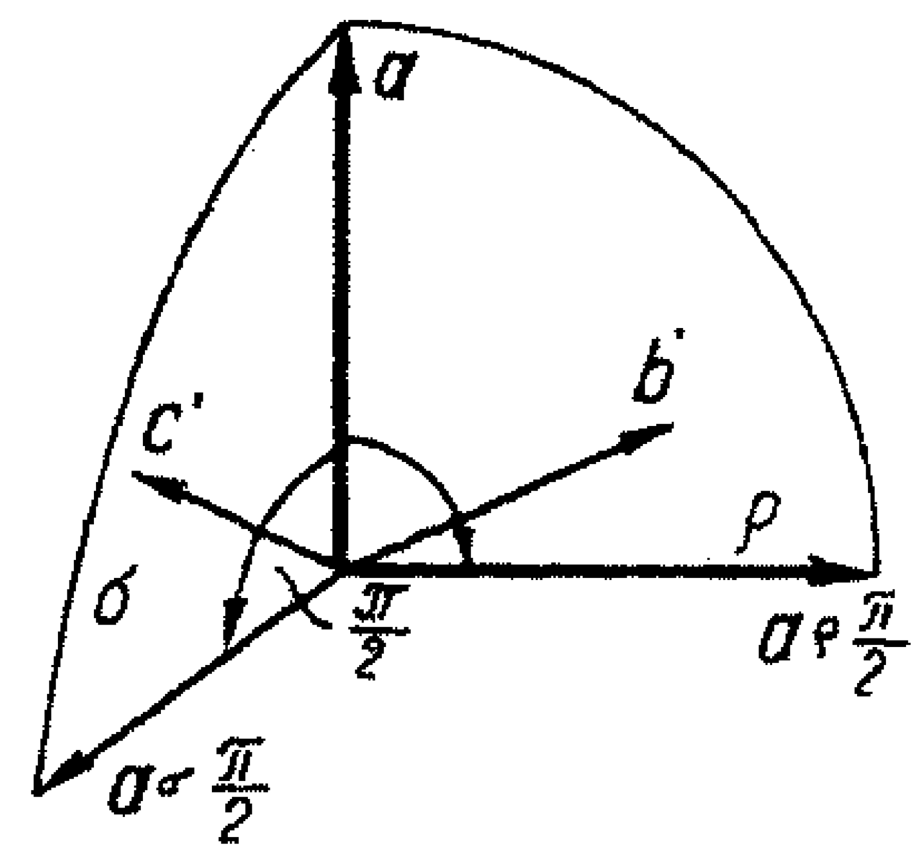
On jäänud veel liita võrduste (28.3) ja (28.4) vastavad pooled:

$$2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}=2\boldsymbol{xz}+2\boldsymbol{yz},$$

et veenduda skalaarkorrutiste distributiivsuses ka ruumi mistahes kolme vektori korral. ∎



Joon. 53.



Joon. 54

Tulemuse rakendusena uurime ruumi vektorite ristumist, seades eesmärgiks näidata, et ruumi ühikvektorite hulgas saab leida kolm paarikaupa ristuvat vektorit. Meenutame seejuures, et tingimus $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ on teoreemi 27.2 põhjal samaväärne sellega, et $\boldsymbol{xy} = 0$. Ühikvektorit iseloomustab valemi (27.5) põhjal võrdus $\boldsymbol{x}^2 = 1$. Edaspidi mõistame käesolevas artiklis vektorite all alati ruumi vektoreid.

Kõigepealt tõestame sellise teoreemi kehtivuse.

***Teoreem* 28.2.** *Kui vektor **a** on risti kahe mittekollineaarse vektoriga, siis ta on risti ka neid vektoreid sisaldava rihi iga vektoriga.*

Tõestus. Olgu $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$ ruumi sellised vektorid, et $\boldsymbol{b} \nparallel \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$; siis $\boldsymbol{ba} = \boldsymbol{ca} = 0$ (joon. 53). Vaatleme rihti $\{\boldsymbol{b}\lambda + \boldsymbol{c}\mu\}$. Selle iga vektori $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\lambda + \boldsymbol{c}\mu$ korral on teoreemi 28.1 põhjal

$$\boldsymbol{xa} = (\boldsymbol{b}\lambda + \boldsymbol{c}\mu)\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b}\lambda)\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c}\mu)\boldsymbol{a} = \lambda(\boldsymbol{ba}) + \mu(\boldsymbol{ca}) = \lambda 0 + \mu 0 = 0.$$

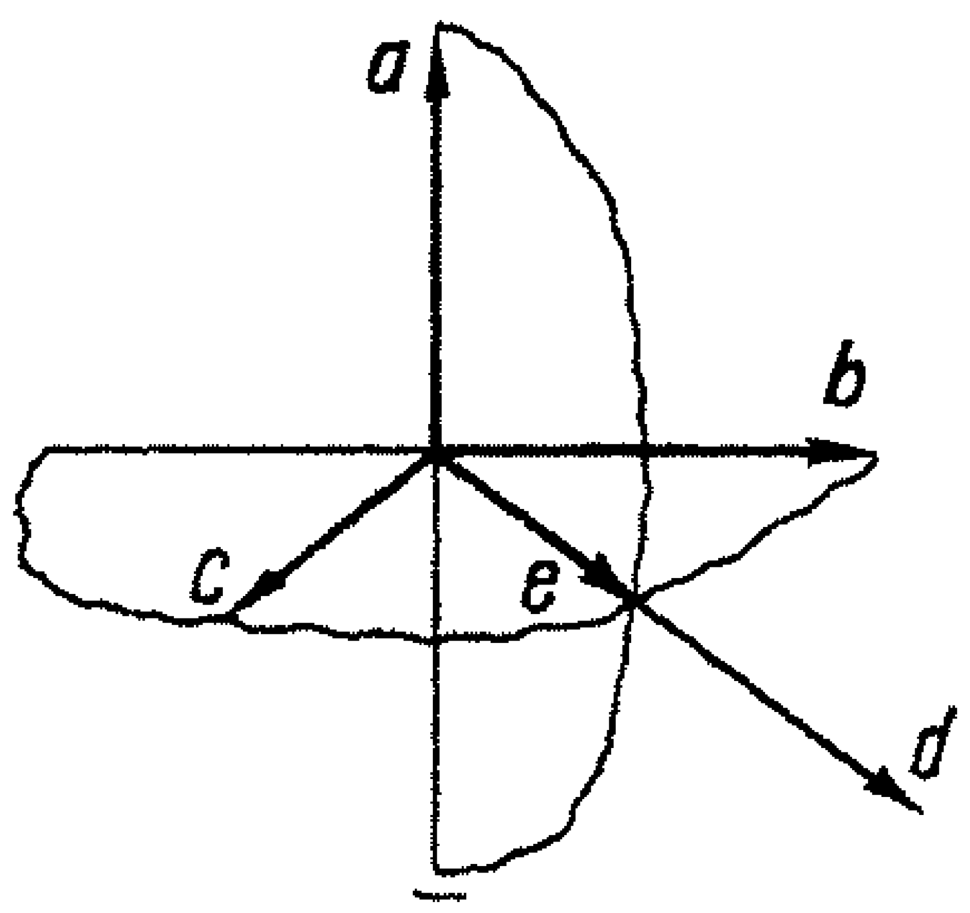
Et kaks vektorit $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{a}$ on alati ühe tasandi vektorid, siis teoreemi 27.2 põhjal võrdus $\boldsymbol{xa} = 0$ on samaväärne tingimusega $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{a}$. ▮

Järgnevalt saab tõestada sellise teoreemi kehtivuse.

***Teoreem* 28.3.** *Iga nullist erineva vektori **a** korral leidub riht, mille iga vektor on risti vektoriga **a** ning mis sisaldab kõik vektoriga **a** ristuvad vektorid.*

Tõestus. Teoreemi esimese poole (soovitava rihi olemasolu) tõestamiseks tuleb eelmise teoreemi 28.2 põhjal leida sellised vektorid $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$, nii et $\boldsymbol{b} \nparallel \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$. Selleks valime vabalt $\boldsymbol{b}'$ ja $\boldsymbol{c}'$, nii et $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}'$ ja $\boldsymbol{c}'$ on mittekomplanaarsed vektorid (art. 17 alguses selgus, et niisugused $\boldsymbol{b}'$ ja $\boldsymbol{c}'$ leiduvad alati) ning määrame orienteeritud rihid ϱ ja σ selliselt, et ϱ sisaldab $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}'$ ning σ sisaldab $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{c}'$ Vajalikud vektorid on siis $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\rho\frac{\pi}{2}$ ja $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\sigma\frac{\pi}{2}$ (joon. 54). Tõepoolest, def. 24.3 ja def. 24.4 kohaselt $\sphericalangle(b, a) = \sphericalangle(c, a) = \frac{\pi}{2}$ ning def. 24.5 kohaselt $b \perp a$, $c \perp a$. Seejuures $b \nparallel c$, sest kui oleks $b \parallel c$, siis vaadeldavad rihid ϱ ja σ ühtiksid, see on aga a, b' ja c' mittekomplanaarsuse tõttu võimatu.

Teoreemi teise poole tõestamiseks tuleb näidata, et riht $\{b\lambda + c\mu\}$ sisaldab iga vektori d, mis on risti vektoriga a. Eeldame niisiis, et $d \perp a$. Teoreemi 16.8 kohaselt rihtide $\{b\lambda + c\mu\}$ ja $\{au + dv\}$ lõige sisaldab alati nullist erineva vektori e (joon. 55). Teoreemi 28.2 põhjal rihi $\{b\lambda + c\mu\}$ iga vektor on risti vektoriga a, ning et $e \in \{\lambda b + \mu c\}$, siis $e \perp a$. Samal ajal on teada, et $e \in \{au + dv\}$ ja $d \in \in \{au + dv\}$, kusjuures $e \perp a$ ja $d \perp a$. Teoreemi 24.3 järgi on nüüd $d \parallel e$ ehk $d = e\nu$. Järelikult koos vektoriga e kuulub rihile $\{b\lambda + c\mu\}$ ka vektor d. ∎



Joon 55.

Teoreemist 28.3 järeldub, et ruumis vektoriga a ristuvate vektorite hulk ühtib parajasti teatava rihiga.

Def. 28.2. Kui riht koosneb kõigist vektoriga a ristuvaist vektoreist, siis kõneldakse, et ta on r i s t i vektoriga a.

Nüüd on lihtne tõestada järgmine lause.

***Teoreem* 28.4.** *Leidub kolm vektorit* e_1, e_2 ja e_3, *nii et*

$$e_1 \perp e_2, \quad e_2 \perp e_3, \quad e_3 \perp e_1,$$
$$|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1.$$

Need vektorid on mittekomplanaarsed.

T õ e s t u s. Vektoriks e_1 võib võtta vabalt valitud ühikvektori, vektoriks e_2 aga vektori $e_2 = e_1 \sigma \frac{\pi}{2}$, kus σ on mingi vektorit e_1 sisaldav orienteeritud riht; siis $e_2 \perp e_1$. Teoreemi 28.3 põhjal leidub orienteeritud riht τ, mille iga vektor on risti vektoriga e_1, ning mis sisaldab e_2. Vektoriks e_3 võtame nüüd vektori $e_3 = = e_2 \tau \frac{\pi}{2}$; sel korral $e_3 \perp e_2$. Et $e_3 \in \tau$, siis $e_3 \perp e_1$. Koos vektoriga e_1 on ühikvektoriks ka e_2 ning järelikult siis ka e_3.

Jääb tõestada, et nii võetud vektorid e_1, e_2 ja e_3 on mittekomplanaarsed, s. t. lineaarselt sõltumatud. Näitame, et nende nulliga võrduv lineaarkombinatsioon

$$e_1\lambda_1 + e_2\lambda_2 + e_3\lambda_3 = 0 \qquad (28.5)$$

saab olla ainult triviaalne. Tõepoolest, vaatleme võrduse (28.5) poolte ja vektori e_i skalaarkorrutisi, kus $i = 1, 2$ või 3:

$$(e_1\lambda_1+e_2\lambda_2+e_3\lambda_3)e_i=0e_i. \tag{28.6}$$

Vasakul on teoreemi 28.1 põhjal

$$(e_1\lambda_1+e_2\lambda_2)e_i+(e_3\lambda_3)e_i=\lambda_1(e_1e_i)+\lambda_2(e_2e_i)+\lambda_3(e_3e_i),$$

paremal aga 0. Et vektorid e_1, e_2, e_3 on ühikvektorid, siis

$$e_1^2=e_2^2=e_3^2=1, \tag{28.7}$$

ning et nad on paarikaupa risti, siis

$$e_1e_2=e_2e_3=e_3e_1=0. \tag{28.8}$$

Seetõttu võrduse (28.6) vasaku poole teisendatud avaldises on sulgudes olevatest skalaarkorrutistest nullid need, kus vektorite alumised indeksid ei ole võrdsed; kui aga need indeksid on võrdsed, siis korrutis on 1: $e_ie_i = e_i^2 = 1$. Järelikult võrduse (28.6) vasak pool on võrdne λ_i ning et paremal pool on 0, siis

$$\lambda_i=0.$$

Seega vektorite e_1, e_2 ja e_3 nulliga võrduv lineaarkombinatsioon saab olla ainult triviaalne, s. t. need vektorid on lineaarselt sõltumatud. ∎

Def. 28.3. Baasi $\{e_1, e_2, e_3\}$, mille vektorite puhul leiavad aset võrdused (28.7) ja (28.8), nimetatakse **ristbaasiks**. Reeperit $\{O; e_1, e_2, e_3\}$, mille vektorid moodustavad ristbaasi, nimetatakse **ristreeperiks** (joon. 56). Vektori x või punkti X koordinaate (x_1, x_2, x_3) vastavalt ristbaasi või ristreeperi suhtes nimetatakse **ristkoordinaatideks**.

Teoreemi 28.4 põhjal on alati olemas ristbaas ning järelikult ka ristkoordinaadid.

Kui võrdused (28.7) ja (28.8) ei tarvitse olla rahuldatud, siis kõneldakse lihtsalt baasist, reeperist või koordinaatidest, ehk, kui seda asjaolu on tarvis eriti rõhutada, vastavalt afiinsest baasist, reeperist või afiinsetest koordinaatidest.

Olgu antud kaks vektorit $x = (x_1, x_2, x_3)$ ja $y = (y_1, y_2, y_3)$ oma ristkoordinaatidega, s. t. olgu

$$x=e_1x_1+e_2x_2+e_3x_3, \qquad y=e_1y_1+e_2y_2+e_3y_3.$$

Teoreemi 28.1 põhjal

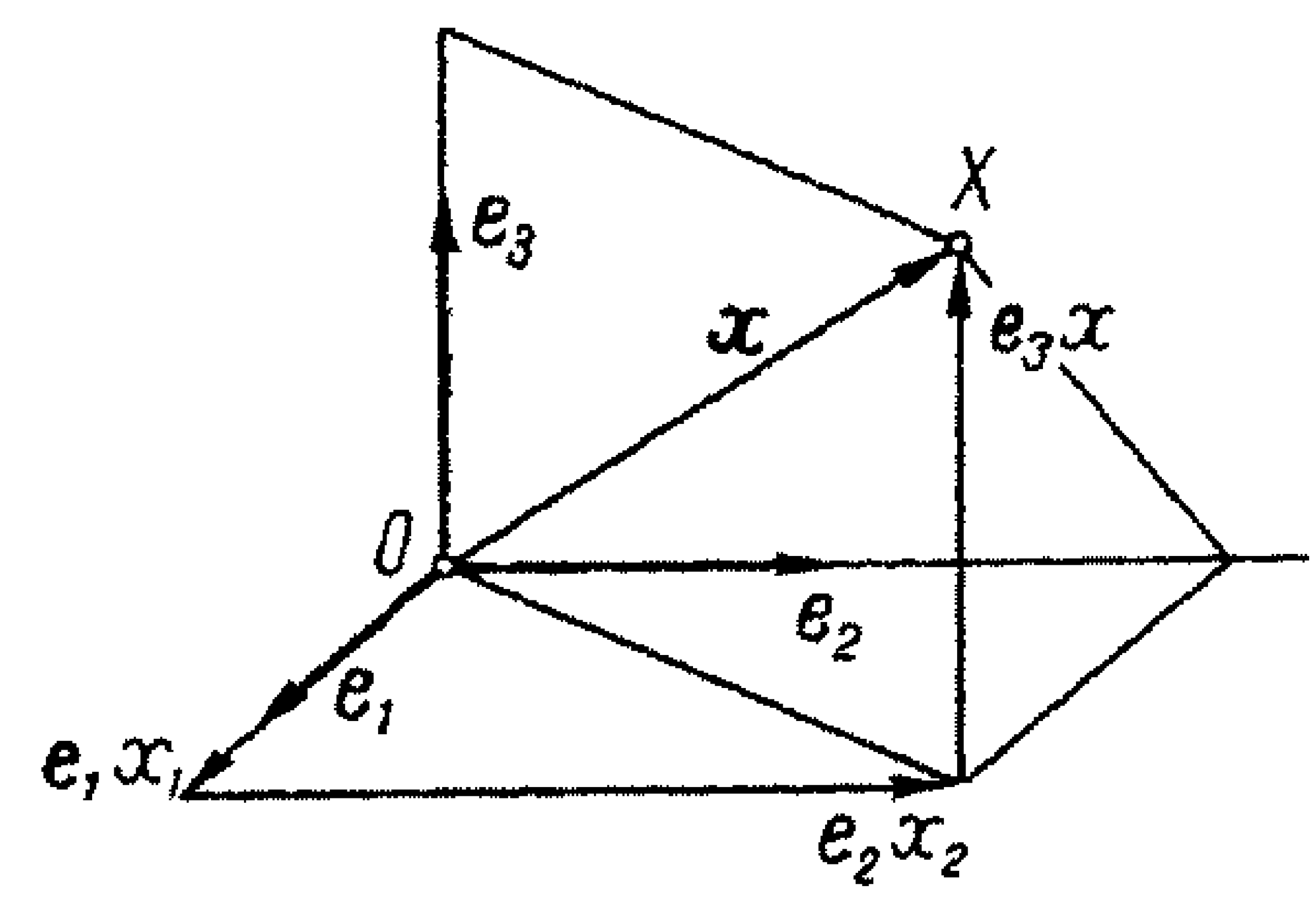
$$\begin{aligned}xy&=(e_1x_1+e_2x_2+e_3x_3)(e_1y_1+e_2y_2+e_3y_3)=\\&=e_1^2(x_1y_1)+e_2^2(x_2y_2)+e_3^2(x_3y_3)+\\&+e_1e_2(x_1y_2+x_2y_1)+e_2e_3(x_2y_3+x_3y_2)+e_3e_1(x_1y_3+x_3y_1)\end{aligned} \tag{28.9}$$

ning järelikult võrduste (28.7) ja (28.8) põhjal

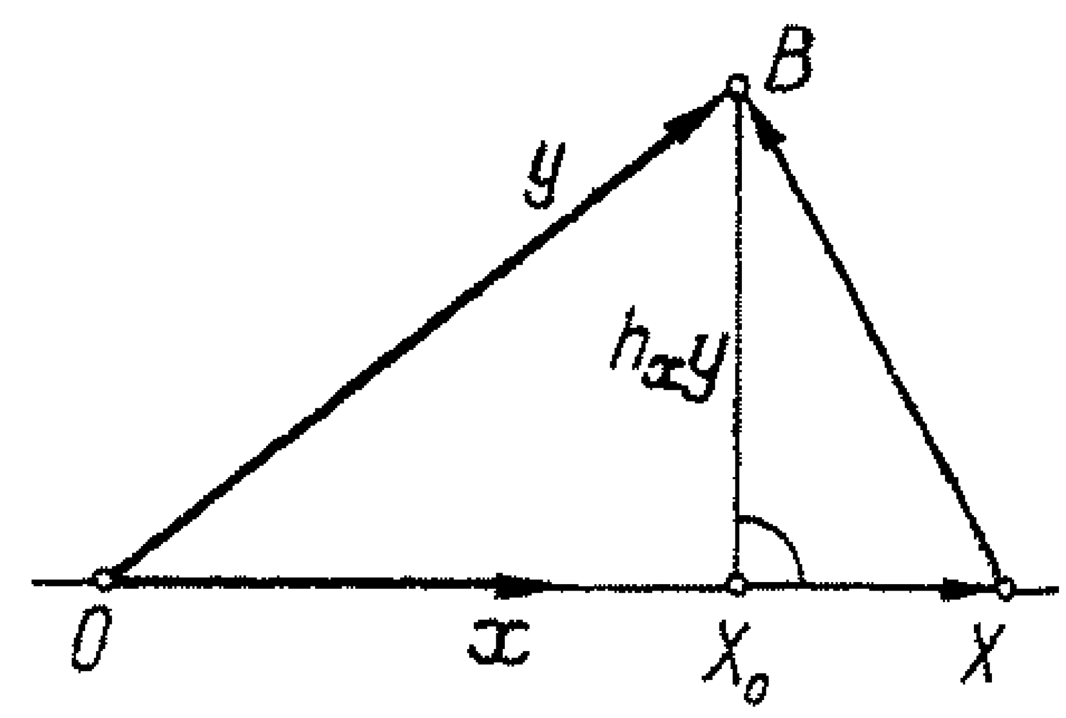
$$xy=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3. \tag{28.10}$$

Selgub, et ruumi kahe vektori skalaarkorrutise $\boldsymbol{xy}$ avaldis vektorite $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ristkoordinaatide kaudu on sarnane tasandi kahe vektori skalaarkorrutise avaldisega (27.1). Liidetavana lisandub veel kolmandate koordinaatide korrutis. Siit järeldub, et varasematega sarnased on ka vektori $\boldsymbol{x}$ pikkuse $|\boldsymbol{x}|$ ja kahe vektori vahelise nurga $\sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ koosinuse avaldised: valemite (27.5) ja (28 10) põhjal

$$|\boldsymbol{x}|=\sqrt{\boldsymbol{x}^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} \qquad (28\ 11)$$



Joon 56



Joon 57.

ning valemite (28.1) ja (28.10) põhjal

$$\cos \sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\frac{\boldsymbol{xy}}{|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|}=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}. \qquad (28.12)$$

Kahe vektori $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ristumise tunnuseks on seega

$$x_1y_2+x_2y_2+x_3y_3=0. \qquad (28.13)$$

Valemist $|\boldsymbol{x}|=\sqrt{\boldsymbol{x}^2}$ järeldub, et

$$|\boldsymbol{x}\lambda|=|\boldsymbol{x}|\,|\lambda|, \qquad (28.14)$$

sest $|\boldsymbol{x}\lambda|=\sqrt{(\boldsymbol{x}\lambda)^2}=\sqrt{\lambda^2\boldsymbol{x}^2}=\sqrt{\boldsymbol{x}^2}\sqrt{\lambda^2}=\sqrt{\boldsymbol{x}^2}\,|\lambda|$

29. Rööpnelinurga pindala. Skalaarkorrutise mõiste abil saab kahe vektoriga siduda veel teisigi lihtsalt tõlgendatavaid reaalarve. Tõlgendustes on otstarbekas lisaks vektoreile kasutada ka punkte, kuigi mõisted ise, nagu hiljem selgub, on seotud ainult vektoritega.

Olgu antud tasandi või ruumi kaks mittekollineaarset vektorit $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$. Valime vabalt tasandi või ruumi punkti O ning leiame punkti B, nii et $\overrightarrow{OB} = y$ (joon. 57). Punkt O koos vektoriga x määrab ruumis sirge $\{X \mid \overrightarrow{OX} = x\lambda\}$, mille vektoreiks on sihi $\{x\lambda\}$ vektorid.

***Def.* 29.1.** Kahe punkti X ja Y vaheliseks k a u g u s e k s nimetatakse vektori $\overrightarrow{XY}$ pikkust $|\overrightarrow{XY}|$.

Rakendame seda definitsiooni juhul, kui X on punktiga O ja vektoriga x määratud sirge vabalt võetud punkt ja $Y = B$. Osutub et sel puhul on kauguste $|\overrightarrow{XB}|$ hulgas olemas vähim väärtus $\min|\overrightarrow{XB}|$. Tõepoolest,

$$\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OX} = y - x\lambda$$

ning

$$|\overrightarrow{XB}|^2 = \overrightarrow{XB}^2 = (y - x\lambda)^2 = y^2 - 2xy\lambda + x^2\lambda^2 = x^2\left(\lambda^2 - 2\lambda\frac{xy}{x^2}\right) + y^2.$$

Täiendame suluavaldise täisruuduni, liites ja lahutades reaalarvu $\left(\frac{xy}{x^2}\right)^2$:

$$|\overrightarrow{XB}|^2 = x^2\left[\lambda^2 - 2\lambda\frac{xy}{x^2} + \left(\frac{xy}{x^2}\right)^2\right] + \left[y^2 - \frac{(xy)^2}{x^2}\right] =$$

$$= |x|^2\left(\lambda - \frac{xy}{x^2}\right)^2 + \left[y^2 - \frac{(xy)^2}{x^2}\right]. \tag{29.1}$$

Et teine liidetav ei sõltu muutujast λ, olles antud vektorite x ja y korral seega konstantne, ning esimene liidetav kui reaalarvu ruut on alati mittenegatiivne, siis $|\overrightarrow{XB}|^2$ saavutab tõesti oma vähima väärtuse, milleks on teine liidetav:

$$\min|\overrightarrow{XB}|^2 = y^2 - \frac{(xy)^2}{x^2}.$$

Selgub, et see vähim väärtus sõltub tõesti ainult vektoreist x ja y ning punkti O valik teda vähimalgi määral ei mõjusta.

***Def.* 29.2.** Reaalarvu $\min|y - x\lambda|$ nimetatakse vektori y k õ r g u s e k s vektori x kohal ja tähistatakse $h_x y$ (joon. 57).

Seega

$$h_x y = \sqrt{y^2 - \frac{(xy)^2}{x^2}} = \frac{1}{|x|}\sqrt{x^2y^2 - (xy)^2}; \tag{29.2}$$

analoogiliselt

$$h_y x = \frac{1}{|y|}\sqrt{x^2y^2-(xy)^2}.$$

Selgub, et

$$|x|\,h_x y = |y|\,h_y x = \sqrt{x^2y^2-(xy)^2} \tag{29.3}$$

on reaalarv, mis ei muutu, kui vahetada omavahel vektorid x ja y.

***Def.* 29.3.** Tasandi või ruumi kahe mittekollineaarse vektori x ja y puhul punktihulka

$$\{X \mid \overrightarrow{OX} = x\lambda + y\mu,\quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1\},$$

kus O on vabalt valitud punkt, nimetatakse punktis O vektoritele x ja y ehitatud *rööpnelinurgaks*[42] (joon. 58). Reaalarvu $|x|h_x y = |y|h_y x$, mis nagu selgus, ei sõltu punkti O valikust, nimetatakse selle rööpnelinurga *pindalaks* ja tähistatakse $S(x, y)$.

Seega

$$S(x, y) = \sqrt{x^2y^2-(xy)^2}. \tag{29.4}$$

Siit on näha, et $S(x, y) \geqslant 0$ ning

$$S(x, y) = S(y, x) = S(-x, y).$$

Kui arvestada, et $x^2 = |x|^2$, $xy = |x|\,|y| \cos \sphericalangle(x, y)$, siis selgub, et

$$S(x, y) = \sqrt{|x|^2|y|^2-(|x|\,|y|\cos\sphericalangle(x, y))^2} = |x|\,|y|\sqrt{1-\cos^2\sphericalangle(x, y)}$$

ja siit

$$S(x, y) = |x|\,|y| \sin \sphericalangle(x, y), \tag{29.5}$$

sest teoreemi 24.2 kohaselt $\sphericalangle(x, y)$ on lõiku $[0, \pi]$ kuuluv arv ning $\sin\varphi$ on teoreemi 23.1 ja valemite (23.14) põhjal selle lõigu ulatuses mittenegatiivne.

Järelikult

$$h_x y = \frac{1}{|x|} S(x, y) = |y| \sin \sphericalangle(x, y). \tag{29.6}$$

---

[42] Me teeme siin vahet mõistete «rööpnelinurk» ja «rööpkülik» vahel (analoogiliselt nagu «ringi» ja «ringjoone» puhul) — def-ide 29.3 ja 35.1 järgi esimene on tasandi osa, mille piirab teine. (Vrd ka «Kolmnurk» ja «kolmkülik» art-s 35.)

Tulemus võimaldab geomeetriliselt tõlgendada nurga $\sphericalangle(x, y)$ siinust (joon. 58):

$$\sin \sphericalangle (x, y) = \frac{h_x y}{|y|}.$$

30. Vektori projektsioon. Pöördume nüüd tagasi avaldise (29.1) juurde. Kauguse $|\overrightarrow{XB}|$ vähim väärtus $h_x y$ saavutatakse λ sellise väärtuse λ_0 korral, mis muudab nulliks $|\overrightarrow{XB}|^2$ avaldise esimese liidetava, s. t.

$$\lambda_0 = \frac{xy}{x^2}. \tag{30.1}$$

Osutub, et sama väärtuseni võib jõuda ka teisiti. Otsime punktiga O ja vektoriga x määratud sirgel $\{X | \overrightarrow{OX} = x\lambda\}$ sellist punkti X_0, nii et $\overrightarrow{X_0B} \perp x$ (joon. 57). Teoreemi 27.2 põhjal sellest tingimusest järeldub, et

$$(y - x\lambda)x = 0.$$

Tekib võrrand $xy - \lambda x^2 = 0$, mille ainsaks lahendiks on parajasti (30.1).

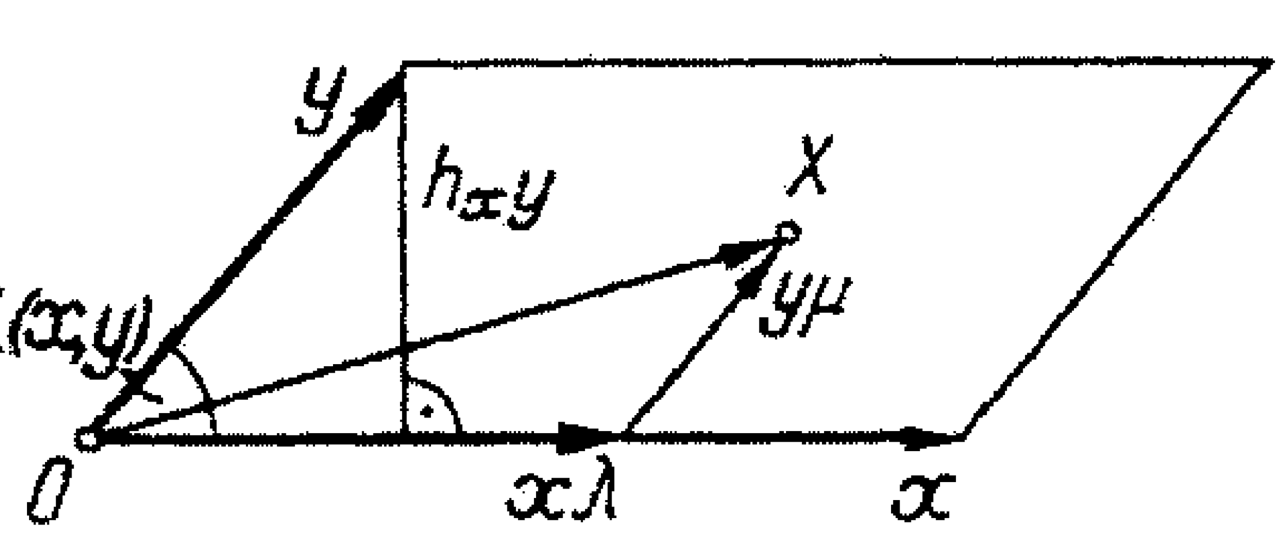
Tähistame $h_x y = y - x\lambda_0$ ja $l_x y = x\lambda_0$, kus λ_0 määratakse valemist (30.1). Siis

$$y = l_x y + h_x y, \quad l_x y \parallel x, \quad h_x y \perp x. \tag{30.2}$$

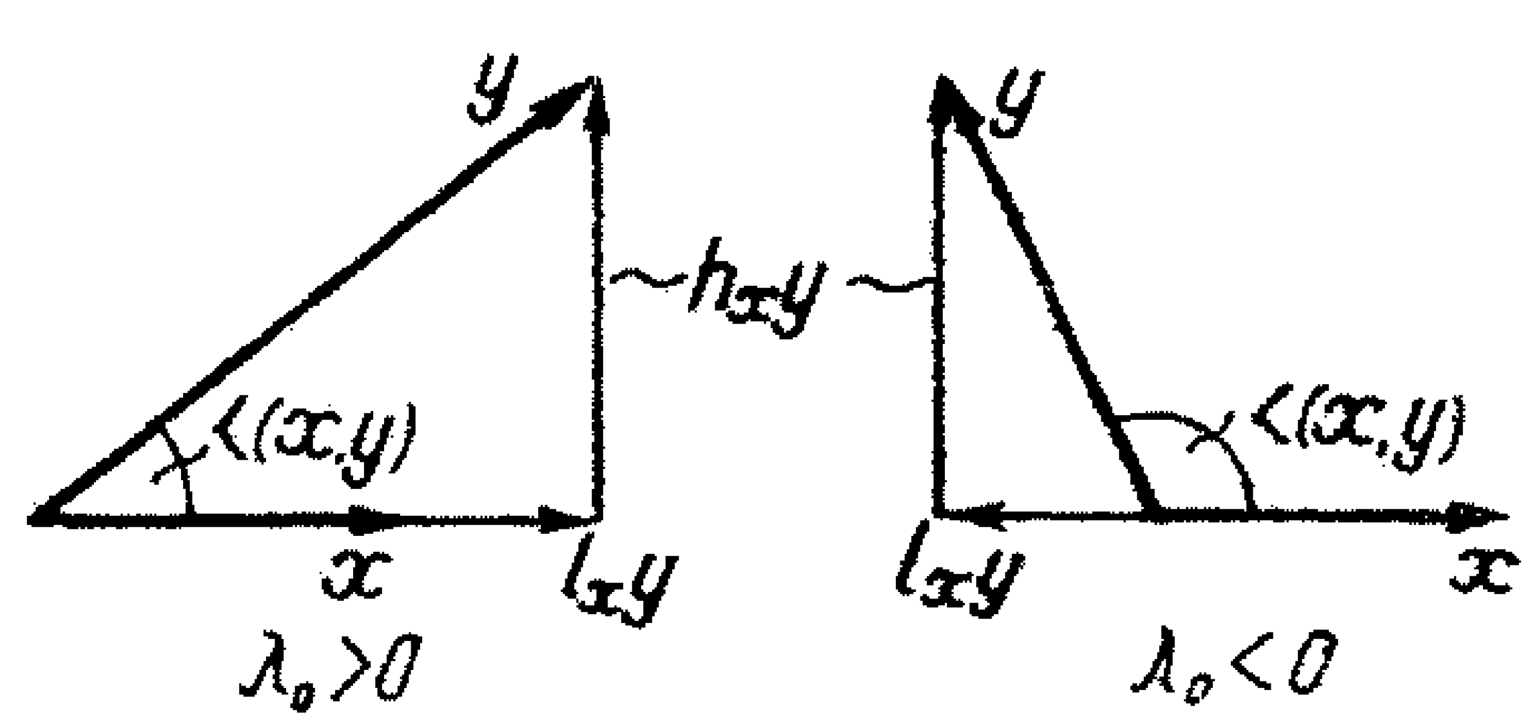
Nagu selgus, lahutub vektor y neid tingimusi rahuldavaks kaheks liidetavaks üheselt. Seejuures liidetava $h_x y$ pikkus on võrdne y kõrgusega x kohal: $|h_x y| = h_x y$.

Liidetava $l_x y$ puhul saab pikkuse $l_x y = |l_x y| = |x\lambda_0|$ kõrval määrata ka reaalarvu $\lambda_0|x|$, mille absoluutväärtuseks see pikkus $l_x y$ on.

Def. **30.1.** Kui $x \neq 0$ ja $y - x\lambda_0 \perp x$, siis reaalarvu $\lambda_0|x|$ nimetatakse vektori y p r o j e k t s i o o n i k s vektori x sihil ja tähistatakse $p_x y$; selle absoluutväärtust $|p_x y| = l_x y$ nimetatakse vektori y l a i u s e k s x kohal.



Joon. 58.



Joon. 59.

Märgime, et kui $x \parallel y$, siis tingimus $y - x\lambda_0 \perp x$ on samaväärne võrdusega $y = x\lambda_0$. Tõepoolest, kui $y = x\lambda_0$, siis $y - x_0\lambda = 0 \perp x$; vastupidi, kui $y - x\lambda_0 \perp x$ (s. t. $(y - x\lambda_0)x = 0$) ja $y \parallel x$ (s. t. $y = x\lambda$), siis $(x\lambda - x\lambda_0)x = 0$ ehk $x^2(\lambda - \lambda_0) = 0$ ehk $\lambda = \lambda_0$, mistõttu tõesti $y = x\lambda_0$.

Tulemus on heas kooskõlas võrdusega (30.1) (meenutame, et see oli esialgu tuletatud mittekollineaarsete x ja y korral). Järelikult $x \neq 0$ puhul alati

$$p_x y = \frac{xy}{|x|} \tag{30.3}$$

ning et $xy = |x|\,|y| \cos \sphericalangle (x, y)$, siis

$$p_x y = |y| \cos \sphericalangle (x, y). \tag{30.4}$$

Tulemus, mis on analoogiline valemiga (29.6), annab võimaluse geomeetriliselt tõlgendada nurga $\sphericalangle (x, y)$ koosinust (joon. 59): $\cos \sphericalangle (x, y) = \frac{p_x y}{|y|}$. Selgub, et kui $\cos \sphericalangle (x, y) \neq 0$, siis tema märk ühtib $p_x y = \lambda_0 |x|$ märgiga ehk λ_0 märgiga, mistõttu $\cos \sphericalangle (x, y)$ on positiivne või negatiivne olenevalt sellest, kas vektorid $l_x y = x\lambda_0$ ja x on sama- või erisuunalised.

Valem (30.3) võimaldab teistviisi tõlgendada skalaarkorrutist

$$xy = |x|\, p_x y. \tag{30.5}$$

Ühtlasi on põhjendatavad projektsiooni järgmised omadused:

1) kui $|x| = |y|$, siis $p_x y = p_y x$,
2) $p_x (y + z) = p_x y + p_x z$,
3) $p_x (y\lambda) = p_x y\lambda$.

Tõepoolest, et $xy = yx = |y| p_y x$, siis on alati

$$|x|\, p_x y = |y|\, p_y x$$

ning 1) on siit vahetuks järelduseks. Seosed 2) ja 3) järelduvad otseselt võrdustest $x(y + z) = xy + xz$ ja $x(y\lambda) = (xy)\lambda$, kui jagada nende pooled arvuga $|x|$ ja rakendada valemit (30.3).

Kui x on ühikvektor, siis $|x| = 1$ ja (30.3) järgi

$$p_x y = xy.$$

See tulemus annab võimaluse uutviisi tõlgendada vektori ristkoordinaate (vt. def. 28.3). Olgu ruumi vektori x korral

$$x = e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3,$$

kusjuures

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1, \qquad e_1 e_2 = e_2 e_3 = e_3 e_1 = 0. \tag{30.6}$$

Et e_i $(i = 1, 2, 3)$ on ühikvektor, siis

$$p_{e_i} x = e_i x = e_i (e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3) = (e_i e_1) x_1 + (e_i e_2) x_2 + (e_i e_3) x_3.$$

Siin kolmest skalaarkorrutisest on nullist erinev ja võrdne 1 ainult see, mille puhul baasivektorite indeksid on võrdsed, s.t. mille puhul teise teguri indeks on samuti i. Näiteks kui $i = 2$, siis $\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 = 0$, $\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2^2 = 1$, $\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 = 0$. Niisiis

$$p_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{x} = x_i. \tag{30.7}$$

Vektori $\boldsymbol{x}$ ristkoordinaat x_i on seega tõlgendatav vektori $\boldsymbol{x}$ projektsioonina baasivektori $\boldsymbol{e}_i$ sihil, tema absoluutväärtus $|x_i|$ on aga $\boldsymbol{x}$ laius $\boldsymbol{e}_i$ kohal (joon. 56).

Analoogiliste tulemusteni võib jõuda tasandi vektori $\boldsymbol{x}$ korral, tuletuskäigud on sel puhul lihtsamad, sest langeb ära üks liidetav.

Valemite (30.7) ja (30.4) põhjal

$$x_i = p_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|\cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x}). \tag{30.8}$$

Kui teha siit asendused valemist (28.10) järelduvasse seosesse

$$\boldsymbol{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

ning arvestada, et $|\boldsymbol{x}|^2 = \boldsymbol{x}^2$, siis on tulemuseks:

$$(|\boldsymbol{x}|\cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}))^2 + (|\boldsymbol{x}|\cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x}))^2 + (|\boldsymbol{x}|\cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{x}))^2 = |\boldsymbol{x}|^2$$

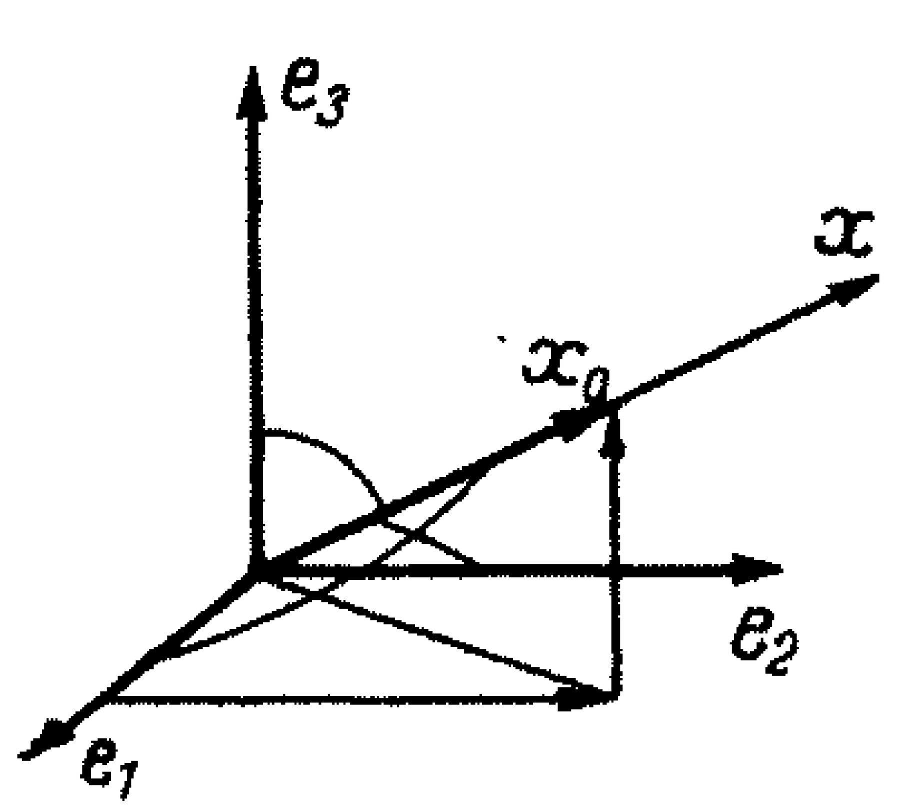
ehk

$$\cos^2\sphericalangle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}) + \cos^2\sphericalangle(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x}) + \cos^2\sphericalangle(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{x}) = 1. \tag{30.9}$$

Valemist (30.8) järeldub projektsiooni omaduse 3) ja võrduse (30.4) põhjal, et

$$\cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x}\lambda) = \frac{p_{\boldsymbol{e}_i}(\boldsymbol{x}\lambda)}{|\boldsymbol{x}\lambda|} = \frac{\lambda p_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{x}}{|\lambda||\boldsymbol{x}|} = \frac{\lambda}{|\lambda|}\cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x}).$$

Järelikult $\cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x})$ ei muutu, kui $\boldsymbol{x}$ asendada temaga kollineaarse samasuunalise vektoriga $\boldsymbol{x}\lambda$, $\lambda > 0$, sest $|\lambda| = \lambda$; kui aga $\boldsymbol{x}$ asendub kollineaarse erisuunalise vektoriga $\boldsymbol{x}\lambda$, $\lambda < 0$. siis kõik kolm arvu $\cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x})$, $i = 1, 2, 3$ muudavad korraga märki, sest siis $|\lambda| = -\lambda$. Seetõttu arvud $\cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x})$, $i = 1, 2, 3$ iseloomustavad täielikult vektori $\boldsymbol{x}$ suunda. Neid nimetatakse s u u n a k o o s i n u s t e k s. Et valemi (30.8) põhjal



Joon. 60

$$\cos\sphericalangle(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}p_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{x} = p_{\boldsymbol{e}_i}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right),$$

siis suunakoosinused kujutavad endast vektori $x_0=\frac{x}{|x|}=\frac{1}{|x|}x$ koordinaate (joon. 60). Vektor x_0 on kollineaarne ja samasuunaline vektoriga x, sest $\frac{1}{|x|}>0$, kuid on ühikvektor, sest (28.14) põhjal $|x_0|=\left|\frac{1}{|x|}x\right|=\frac{1}{|x|}|x|=1$. Öeldakse, et ühikvektor x_0 on saadud vektorist x selle normeerimisel.

Võrdus (30.9) tähendab valemi (28.11) põhjal nüüd lihtsalt seda, et $|x_0|=1$.

Suunakoosinused on analoogiliselt defineeritavad ka tasandi vektori x jaoks ristbaasi $\{e_1, e_2\}$ puhul, kus $e_2=e_1\circ\frac{\pi}{2}$, kui arvud $\cos\sphericalangle(e_1, x)$ ja $\cos\sphericalangle(e_2, x)$. Selgub, et siin

$$\cos\sphericalangle(e_1, x)=\cos\varphi, \qquad \cos\sphericalangle(e_2, x)=\sin\varphi, \tag{30.10}$$

kus $\varphi=\angle(e_1, x)$.

Selle tõestamiseks kasutame valemit (24.12):

$$\cos\sphericalangle(x, y)=\cos\angle(x, y),$$

millest kohe järeldub, et

$$\cos\sphericalangle(e_1, x)=\cos\angle(e_1, x)=\cos\varphi.$$

Teise suunakoosinuse $\cos\sphericalangle(e_2, x)$ avaldamiseks märgime, et valemi (24.9) põhjal

$$\angle(e_1, x)+\angle(x, e_2)=\angle(e_1, e_2)+2l\pi,$$

kus $\angle(e_1, x)=\varphi$, $\angle(e_1, e_2)=\frac{\pi}{2}$ ning (24.8) järgi $\angle(x, e_2)=$ $=-\angle(e_2, x)+2k\pi$.

Järelikult

$$-\angle(e_2, x)=\frac{\pi}{2}-\varphi+2p\pi$$

Seega

$$\cos\sphericalangle(e_2, x)=\cos\angle(e_2, x)=\cos[-\angle(e_2, x)]=$$
$$=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\varphi\right]=\sin\varphi.$$

Tõestatud seoste (30.10) põhjal

$$\cos^2\sphericalangle(e_1, x)+\cos^2\sphericalangle(e_2, x)=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1.$$

Võrdust (30.9) võib seega vaadelda kui tuntud samasuse $\cos^2\varphi+$ $+\sin^2\varphi=1$ üldistust ruumi juhule. Et

$$x=|x|(e_1\circ\varphi)=|x|(e_1\cos\varphi+e_2\sin\varphi),$$

siis suunakoosinused on ka siin ühikvektori $x_0=\frac{x}{|x|}$ koordinaatideks.

31. Areaal- ja vektorkorrutis. Kahele mittekollineaarsele vektorile x ja y ehitatud rööpnelinurga pindala $S(x, y)$ kujutab endast valemi (29.5) põhjal positiivset reaalarvu:

$$S(x,y)=|x|\,|y|\sin\angle(x,y).$$

Tasandi mistahes kahe vektori x ja y korral on defineeritav ka reaalarv $|x|\,|y|\sin\angle(x, y)$, mille absoluutväärtuseks mittekollineaarsete x ja y korral on (24.13) põhjal parajasti $S(x, y)$.

Def. **31.1.** Tasandi kahe vektori x ja y järgi moodustatud reaalarvu $|x|\,|y|\sin\angle(x, y)$ nimetatakse nende vektorite a r e a a l k o r r u t i s e k s[43] ja tähistatakse $x\wedge y$:

$$x\wedge y=|x|\,|y|\sin\angle(x,y). \tag{31.1}$$

(Märgime, et analoogilise võtte rakendamine juhul, kui siinuse asemel on koosinus, s. t. arvu $|x|\,|y|\cos\angle(x, y)$ moodustamine, viib (24.12) põhjal juba tuttava skalaarkorrutiseni $xy=|x|\,|y|\cos\angle(x, y)$.)

Selgub, et areaalkorrutisel on tõesti korrutise omadused. Ta on nimelt

1) distributiivne: $(x+y)\wedge z=x\wedge z+y\wedge z$ ning 2) reaalarvuga korrutamise suhtes omadusega $x\wedge(y\lambda)=(x\wedge y)\lambda$.

Selle põhjendamiseks tuleb teha võrdusse (31.1) asendused valemeist (27.6) ja (27.10). Tulemuseks on valem

$$x\wedge y=x_1y_2-x_2y_1=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \tag{31.2}$$

Omaduste 1) ja 2) tõestamine toimub nüüd samuti nagu skalaarkorrutise xy omaduste 2) ja 3) puhul art-s 27 (tegemist on õieti determinandi vastavate omadustega).

Kommutatiivsuse omadus areaalkorrutise puhul ei kehti; areaalkorrutis on antikommutatiivne ehk alternatiivne:

$$y\wedge x=-x\wedge y. \tag{31.3}$$

Tõepoolest,

$$y\wedge x=y_1x_2-y_2x_1=-(x_1y_2-x_2y_1)=-x\wedge y.$$

Valemist (31.1) järeldub, et $x\wedge y=0$ parajasti siis, kui kas $x=\mathbf{0}$ või $y=\mathbf{0}$ või $\angle(x, y)=2k\pi$. Kõikidel nendel juhtudel on $x\parallel y$. Niisiis, $x\wedge y=0$ kujutab endast vektorite kollineaarsuse

---

[43] lad. k. *area* — pindala.

tingimust. Muidugi on ka $x \wedge x = 0$, mistõttu vektori areaalruudust ei ole mõtet kõnelda.

Kui $x \wedge y \neq 0$, siis $x \wedge y$ absoluutväärtuseks on, nagu eespool selgus, vektoritele x ja y ehitatud rööpnelinurga pindala $S(x, y)$. Seega

$$S(x, y) = |x \wedge y| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|. \tag{31.4}$$

Nullist erineva areaalkorrutise $x \wedge y$ märk on määratav orientatsiooni mõiste abil. Sel korral $x \nparallel y$ ning võib kõnelda baasist $\{x, y\}$. Seejuures võrdused

$$x = e_1 x_1 + e_2 x_2,$$
$$y = e_1 y_1 + e_2 y_2$$

kujutavad endast erijuhtu baasiteisendusvalemeist (17.3), kus teisendusmaatriksi

$$C = \begin{Vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{Vmatrix}$$

determinandiks on parajasti areaalkorrutis:

$$|C| = x_1 y_2 - x_2 y_1 = x \wedge y. \tag{31.5}$$

Seega $x \wedge y$ on positiivne või negatiivne olenevalt sellest, kas baasil $\{x, y\}$ on ristbaasiga $\{e_1, e_2\}$, kus $e_2 = e_1 \circ \frac{\pi}{2}$, sama või erinev orientatsioon. Siit järeldub, et üldiselt baasid $\{x, y\}$ ja $\{u, v\}$ on sama või erineva orientatsiooniga sõltuvalt sellest, kas $x \wedge y$ ja $u \wedge v$ on sama- või erimärgilised.

Valemite (31.4) ja (29.4) põhjal

$$|x \wedge y| = \sqrt{x^2 y^2 - (xy)^2}. \tag{31.6}$$

Kui siin esinevad reaalarvud avaldada vektorite x ja y ristkoordinaatide kaudu, siis on tulemuseks järgmine algebraline samasus:

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2,$$

mille kehtivuses võib veenduda ka vahetult ning mida nimetatakse Lagrange'i samasuseks.[44]

Ruumi vektorite x ja y puhul on areaalkorrutis $x \wedge y$ määratud ainult juhul, kui neid vektoreid sisaldavas rihis on antud orientatsioon. Kui sel puhul saadav orienteeritud riht tähistada σ,

[44] Joseph Louis Lagrange (1736—1813) — prantsuse matemaatik. Torino, Berliini ja Pariisi TA liige.

siis $\underset{\sigma}{x \wedge y}$ on defineeritav valemiga

$$\underset{\sigma}{x \wedge y} = |x|\,|y| \sin \underset{\sigma}{\angle} (x, y).$$

Paraku puudub valem $\underset{\sigma}{x \wedge y}$ ning koos sellega $S(x, y) = |\underset{\sigma}{x \wedge y}|$ arvutamiseks vektorite $x = (x_1, x_2, x_3)$ ja $y = (y_1, y_2, y_3)$ ristkoordinaatide järgi, sest valem (31.2) lakkab ka siin kehtimast.

Selleks et siingi jõuda sobiva valemini $S(x, y)$ arvutamiseks, on otstarbekas vektoritega x ja y siduda hoopis teatav vektor.

***Def.* 31.2.** Kui on antud ruumi kaks vektorit $x = (x_1, x_2, x_3)$ ja $y = (y_1, y_2, y_3)$ oma ristkoordinaatidega, siis vektorit

$$x \times y = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right) \tag{31.7}$$

nimetatakse nende v e k t o r k o r r u t i s e k s.[45]

Selle definitsiooni õigustamiseks on tarvis näidata, esiteks, et $x \times y$ on vektoritega x ja y invariantselt seotud (s. t. ei sõltu sellest, missuguse ristbaasi $\{e_1, e_2, e_3\}$ suhtes ta on määratud), ning teiseks, et tal on korrutise omadused.

Vektori $x \times y$ invariantsuse teeme kindlaks sel teel, et anname talle uue definitsiooni, milles pole üldse vaja vektorite x ja y ristkoordinaate.

Teoreem 31.1. *Kui $x \nparallel y$, siis $x \times y$ kujutab endast nullist erinevat vektorit,* 1) *mis on risti vektoritega x ja y:*

$$x \times y \perp x, \qquad x \times y \perp y, \tag{31.8}$$

2) *mille pikkuseks on $S(x, y)$:*

$$|x \times y| = S(x, y) \tag{31.9}$$

ning 3) *mille suund on selline, et $\{x, y, x \times y\}$ ja $\{e_1, e_2, e_3\}$ on ühtemoodi orienteeritud baasid* (joon. 61; vrd. art. 7). *Kui $x \parallel y$, siis $x \times y = 0$.*

---

[45] Märgime, et ristbaasi $\{e_1, e_2, e_3\}$ vektorite abil võib seose (31.7) esitada kujul

$$x \times y = e_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + e_2(x_3 y_1 - x_1 y_3) + e_3(x_1 y_2 - x_2 y_1) =$$

$$= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

kui laiendada determinandi sümbolit (vt. def. 15.3) ka juhule, mil ühe rea elementideks on vektorid.

Tõestus. Kui $x \nparallel y$, siis vektorite x ja y koordinaadid ei ole võrdelised ja vähemalt üks vektori (31.7) koordinaatidest on nullist erinev, s. t. $x \times y \neq 0$.

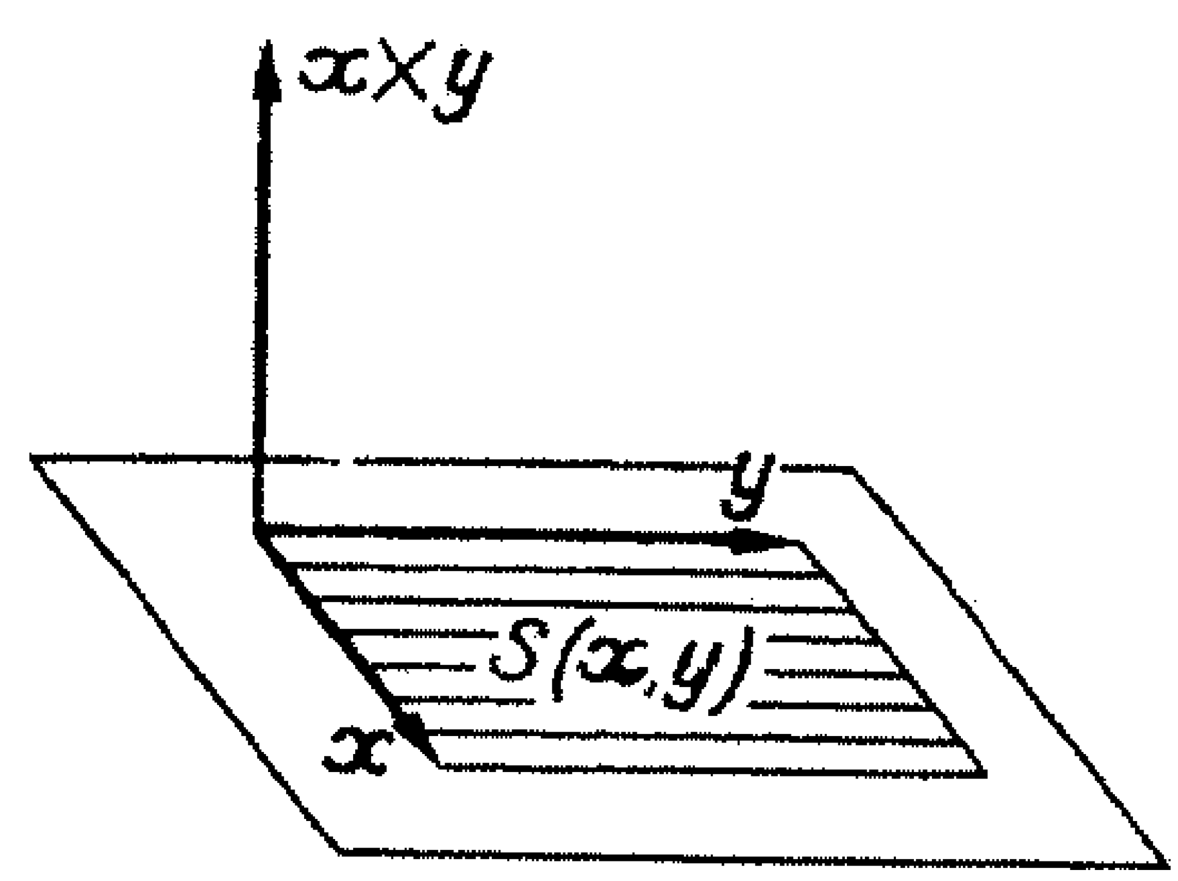
Väite 1) kontrollimiseks on vaja näidata, et

$$(x \times y) x = 0, \qquad (x \times y) y = 0.$$

Siin esimese võrduse vasakul pool on (31.7) ja (28.10) põhjal

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} x_3 =$$

$$= (x_2 y_3 - x_3 y_2) x_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) x_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) x_3 = 0,$$



Joon. 61.

sest kõik liikmed paarikaupa koonduvad, seega esimene võrdus kehtib. Samuti võib kontrollida ka teise võrduse kehtivust.[46]

Väite 2) puhul leiame (28.11) põhjal, et

$$|x \times y|^2 = (x \times y)^2 = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.$$

Osutub, et eespool toodud Lagrange'i samasus kehtib ka üldisemal juhul. Nimelt on

$$(x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 =$$
$$= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2,$$

nagu on võimalik veenduda vahetu arvutamisega, kontrollides,

[46] Märgime, et nende võrduste vasakud pooled pole midagi muud kui kolmandat järku determinandid, mis saadakse eelmises allviites antud determinandist selle esimese rea elementide asendamisel vektori x või y ristkoordinaatidega ning mis võrduvad nulliga seetõttu, et tekkivates determinantides on alati kaks võrdset rida.

et mõlemal pool tekivad ühesugused liikmed. Kui kasutada seda seost — Lagrange'i samasuse üldisemat kuju — ning valemeid (28.10) ja (28.11) eespool $|x\times y|^2$ jaoks saadud avaldises, on tulemuseks võrdus

$$|x\times y|^2=x^2y^2-(xy)^2, \tag{31.10}$$

millest (29.4) põhjal järeldubki (31.9).

Väite 3) põhjendamiseks vaatleme seoseid

$$x=e_1x_1+e_2x_2+e_3x_3,$$
$$y=e_1y_1+e_2y_2+e_3y_3,$$
$$x\times y=e_1\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}+e_2\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}+e_3\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

baasiteisendusvalemitena ning arvutame teisendusmaatriksi

$$C=\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ x_2 & y_2 & \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \\ x_3 & y_3 & \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{matrix}\right\|$$

determinandi.

Lihtne on kontrollida (soovitame lugejal seda teha[47]), et

$$|C|=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2=(x\times y)^2.$$

Seega $|C|>0$ ja baasid $\{x, y, x\times y\}$ ja $\{e_1, e_2, e_3\}$ on tõesti ühtemoodi orienteeritud.

Kui $x \parallel y$, siis x ja y koordinaadid on võrdelised:

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}$$

ning kohe on selge, et vektor (31.7) on nullvektor. ∎

Osutub, et teoreemi 31.1 tingimusi rahuldav vektor on üheselt määratud.

---

[47] Selleks võib kasutada avaldist (15.6), korraldades enne selle vasaku poole kujju, kus sulgudest on välja toodud a_3, b_3 ja c_3 — teisiti öeldes, võttes determinandi arendise viimase veeru järgi.

***Teoreem* 31.2.** *Ruumi kahe mittekollineaarse vektori x ja y korral leidub üks ja ainult üks selline vektor z, nii et*

$$1)\ z \neq 0, \quad z \perp x, \quad z \perp y, \tag{31.11}$$

2) $|z| = S(x, y)$ *ning* 3) *baasid* $\{x, y, z\}$ *ja* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *on ühtemoodi orienteeritud.*

Tõestus. Sellise vektori z olemasolu selgus eelmises teoreemis — niisuguseks on näiteks $z = x \times y$. On vaja näidata sellise vektori z ainsus.

Kõigepealt teeme kindlaks, et kui tingimused $x \nparallel y$ ja 1) on täidetud, siis $\{x, y, z\}$ moodustavad baasi, s. t. on lineaarselt sõltumatud. Tõepoolest, kui

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = 0,$$

siis pärast selle võrduse poolte skalaarkorrutamist vektoritega x, y ja z on tulemuseks süsteem

$$\begin{aligned} x^2\alpha + (xy)\beta + (xz)\gamma &= 0, \\ (xy)\alpha + y^2\beta + (yz)\gamma &= 0, \\ (xz)\alpha + (yz)\beta + z^2\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Tingimuste $z \neq 0$, $z \perp x$ ja $z \perp y$ põhjal $z^2 \neq 0$, $xz = yz = 0$, mistõttu sellest süsteemist $\gamma = 0$ ja

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta(xy) &= 0, \\ \alpha(xy) + \beta y^2 &= 0. \end{aligned} \tag{31.12}$$

Siit järeldub, et

$$\alpha[x^2y^2 - (xy)^2] = 0, \qquad \beta[x^2y^2 - (xy)^2] = 0$$

ning et $x \nparallel y$, mistõttu $S(x, y) = \sqrt{x^2y^2 - (xy)^2} \neq 0$, siis ka $\alpha = \beta = 0$. Seega vektorid x, y ja z on tõesti lineaarselt sõltumatud — iga nende nullvektoriga võrduv lineaarkombinatsioon on triviaalne.

Järelikult saab ruumi mistahes vektori z' avaldada kujul

$$z' = x\alpha + y\beta + z\gamma.$$

Kui z' rahuldab samu tingimusi 1) mis z, siis on ka $xz' = yz' = 0$ ning seega α ja β peavad samuti rahuldama süsteemi (31.12), s. t. $\alpha = \beta = 0$. Niisiis

$$z' = z\gamma. \tag{31.13}$$

Kui nüüd tingimuse 2) kohaselt $|z'| = |z| = S(x, y) \neq 0$, siis võrdustest $|z'| = |z\gamma| = |z||\gamma|$ järeldub, et $|\gamma| = 1$, s. t. kas $\gamma = 1$ ja $z' = z$ või $\gamma = -1$ ja $z' = -z$. On jäänud näidata, et teine võimalus satub vastuollu tingimusega 3). Et z rahuldab seda tingimust, siis

$$|C| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} > 0. \qquad (31.14)$$

Kui siin $\boldsymbol{z}$ asemele võtaksime $\boldsymbol{z}' = -\boldsymbol{z}$, siis determinandi kolmanda rea iga elemendi ees muutuks märk, mistõttu märki muudaks ka determinant. Järelikult uus determinant poleks enam positiivne ning selline $\boldsymbol{z}'$ ei rahuldaks tingimust 3). ∎

Viimase kahe teoreemi alusel võib nüüd ruumi kahe mittekollineaarse vektori $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ vektorkorrutise $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ defineerida ka kui vektori, mis on risti vektoritega $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$, mille pikkuseks on $S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ning mille puhul baas $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}\}$ on ühtemoodi orienteeritud nagu aluseks võetud ristbaas $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Kahe kollineaarse vektori $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ vektorkorrutiseks $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ nimetatakse nullvektorit: kui $\boldsymbol{x} \parallel \boldsymbol{y}$, siis $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.

Selles definitsioonis ei ole kasutatud vektorite $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ristkoordinaate. Tegemist on küll ühe ristbaasiga, kuid seda vajatakse ainult orientatsiooni kindlaksmääramiseks. Seetõttu võibki öelda, et kui ruum on orienteeritud, siis ruumi kahe vektori $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ vektorkorrutis $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ on invariantne mõiste.

Tema nimetamist korrutiseks õigustavad järgmised omadused.

***Teoreem* 31.3.** *Vektorkorrutis* $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ *on*

1) *antikommutatiivne:* $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{x}$,

2) *distributiivne:* $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}$ *ning*

3) *reaalarvuga korrutamise suhtes omadusega* $\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y}\lambda) = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})\lambda$.

Tõestus. Teoreemi väited järelduvad vahetult valemist (31.7) ja determinantide teoorias tõestatavatest determinandi omadustest[48], kuid neid võib kontrollida ka vahetu arvutamisega, kasutades seda, et

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = (x_2y_3 - x_3y_2, \quad x_3y_1 - x_1y_3, \quad x_1y_2 - x_2y_1).$$

Näiteks

$$\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y}\lambda) =$$
$$= (x_2(y_3\lambda) - x_3(y_2\lambda), \quad x_3(y_1\lambda) - x_1(y_3\lambda), \quad x_1(y_2\lambda) - x_2(y_1\lambda)) =$$
$$= ((x_2y_3 - x_3y_2)\lambda, \quad (x_3y_1 - x_1y_3)\lambda, \quad (xy_2 - x_2y_1)\lambda),$$

samad koordinaadid on aga ka vektoril $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})\lambda$. Esimese kahe väite kontrollimise samal viisil jätame lugeja enda hooleks. ∎

Võib näidata lihtsa seose areaal- ja vektorkorrutise vahel. Kui

---

[48] Vt. G. Kangro, Kõrgem algebra. Tallinn. 1962, lk. 22—25.

x ja y on ristbaasi $\{e_1, e_2, e_3\}$ kaht esimest vektorit sisaldava rihi $\{e_1\lambda+e_2\mu\}$ vektorid, siis $x_3=y_3=0$ ning (31.7) ja (31.2) põhjal

$$x\times y=\left(0, 0, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right)=(0, 0, x\wedge y)=e_3(x\wedge y). \qquad (31.15)$$

Vektorkorrutise omadustest 1)—3) teoreemis 31.3 järeldub, et

$$x\times(y+z)=-(y+z)\times x=-[y\times x+z\times x]=x\times y+x\times z,$$
$$(x\lambda)\times y=-y\times(x\lambda)=-(y\times x)\lambda=(x\times y)\lambda.$$

(Et samad omadused on ka areaalkorrutisel, siis võib märgi $\times$ asemele panna ka märgi $\wedge$.) Antikommutatiivsuse omaduse tõttu ei saa siin kasutada mitmeid reaalarvude algebrast tuttavaid samasusi. Näiteks

$$(x+y)\times(x-y)=x\times(x-y)+y\times(x-y)=$$
$$=x\times x-x\times y+y\times x-y\times y=-2(x\times y), \qquad (31.16)$$

sest $x\times x=y\times y=0$ ja $y\times x=-x\times y$.

32. Segakorrutis. Asjaolu, et ruumi kahe vektori vektorkorrutis kujutab endast jälle teatavat vektorit, lubab tulemust edasi korrutada mingi kolmanda vektoriga. Teine korrutamine võib seejuures olla skalaar- või vektorkorrutamine. Alustame esimesest juhust.

***Def.* 32.1** Ruumi kolme vektori x, y ja z segakorrutiseks nimetatakse reaalarvu

$$xyz=(x\times y)z. \qquad (32.1)$$

Kui vektorid on antud ristkoordinaatidega

$$x=(x_1, x_2, x_3), \quad y=(y_1, y_2, y_3), \quad z=(z_1, z_2, z_3),$$

siis (31.7) põhjal

$$x\times y=\left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

ning (28.10) järgi

$$xyz=(x\times y)z=\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} z_1+\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} z_2+\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3,$$

s. t.

$$xyz=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (32.2)$$

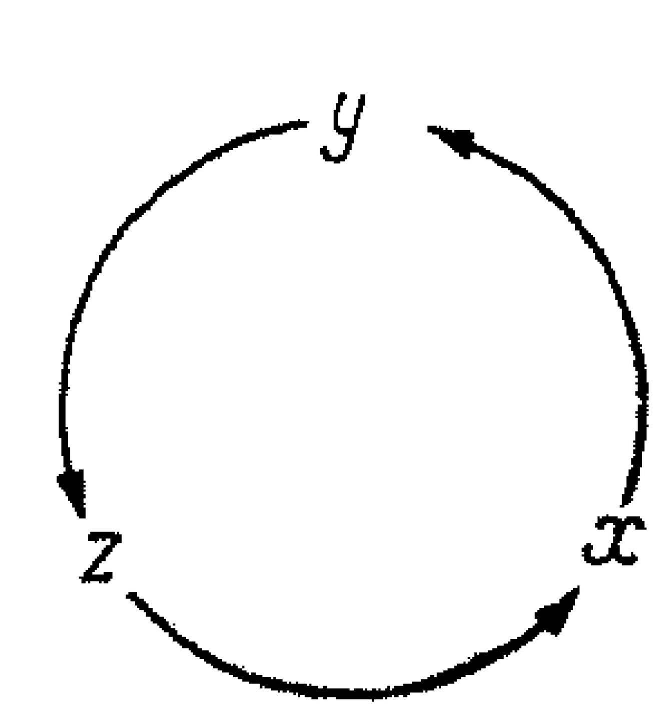
Viimase ülemineku õigsuses võib veenduda, kui võtta determinandi (32.2) arendis viimase rea järgi, kuid seda võib kontrollida ka vahetu arvutamisega, kasutades teist ja kolmandat järku determinantide definitsioone. Avaldise (15.6) abil võib arvutustega kindlaks teha, et determinandi (32.2) ükskõik missuguse kahe rea omavahelisel ümberpaigutamisel determinant muudab ainult oma märki.[49] Järelikult

$$\boldsymbol{yxz} = \boldsymbol{xzy} = \boldsymbol{zyx} = -\boldsymbol{xyz} \tag{32.3}$$

ning edasi

$$\boldsymbol{yzx} = \boldsymbol{zxy} = \boldsymbol{xyz}. \tag{32.4}$$

Viimase rea kaks esimest avaldist on saadud kirjutisest $\boldsymbol{xyz}$ sel teel, et kaks korda on vahetatud kõrvuti olevate tähtede asukohad. Tulemuseks on tegurite niinimetatud tsükliline ümberpaigutus — tegurid liiguksid nagu mööda ringjoont (joon. 62). On võimalik tõestada sellise teoreemi kehtivus.



Joon. 62.

***Teoreem* 32.1.** *Segakorrutis* $\boldsymbol{xyz}$ *ei muutu tegurite tsüklilisel ümberpaigutamisel.*

Valemi (32.1) seisukohalt tähendab see, et

$$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z}), \tag{32.5}$$

sest vasakul on $\boldsymbol{xyz}$, paremal aga $(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{yzx}$, ning need arvud on võrdsed. Järelikult segakorrutise $\boldsymbol{xyz}$ puhul on ükskõik, missuguse kahe kõrvuti oleva teguri vektorkorrutis võetakse enne selle skalaarkorrutamist kolmanda teguriga.

Kui meid huvitavad ainult absoluutväärtused, siis on (32.3) ja (32.4) põhjal

$$|\boldsymbol{yxz}| = |\boldsymbol{xzy}| = |\boldsymbol{zyx}| = |\boldsymbol{zxy}| = |\boldsymbol{yzx}| = |\boldsymbol{xyz}|.$$

Siin on esindatud tegurite kõikvõimalikud ümberpaigutused. Järelikult mittenegatiivne reaalarv $|\boldsymbol{xyz}|$ on seotud üksnes vektorite $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ kolmikuga ning ei olene vektorite järjekorrast kolmikus.

Valemite (30.5) ja (31.9) põhjal

$$\boldsymbol{xyz} = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\boldsymbol{z} = |\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}|\, p_{\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}}\boldsymbol{z} = S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, p_{\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}}\boldsymbol{z},$$

kus $S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ on vektoritele $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ehitatud rööpnelinurga pindala, $p_{\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}}\boldsymbol{z}$ aga kujutab endast vektori $\boldsymbol{z}$ projektsiooni vektori $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ sihil. Seejuures $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ on, nagu teada, risti vektoritega $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$. Võttes absoluutväärtused, saame:

$$|\boldsymbol{xyz}| = S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, l_{\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}}\boldsymbol{z}, \tag{32.6}$$

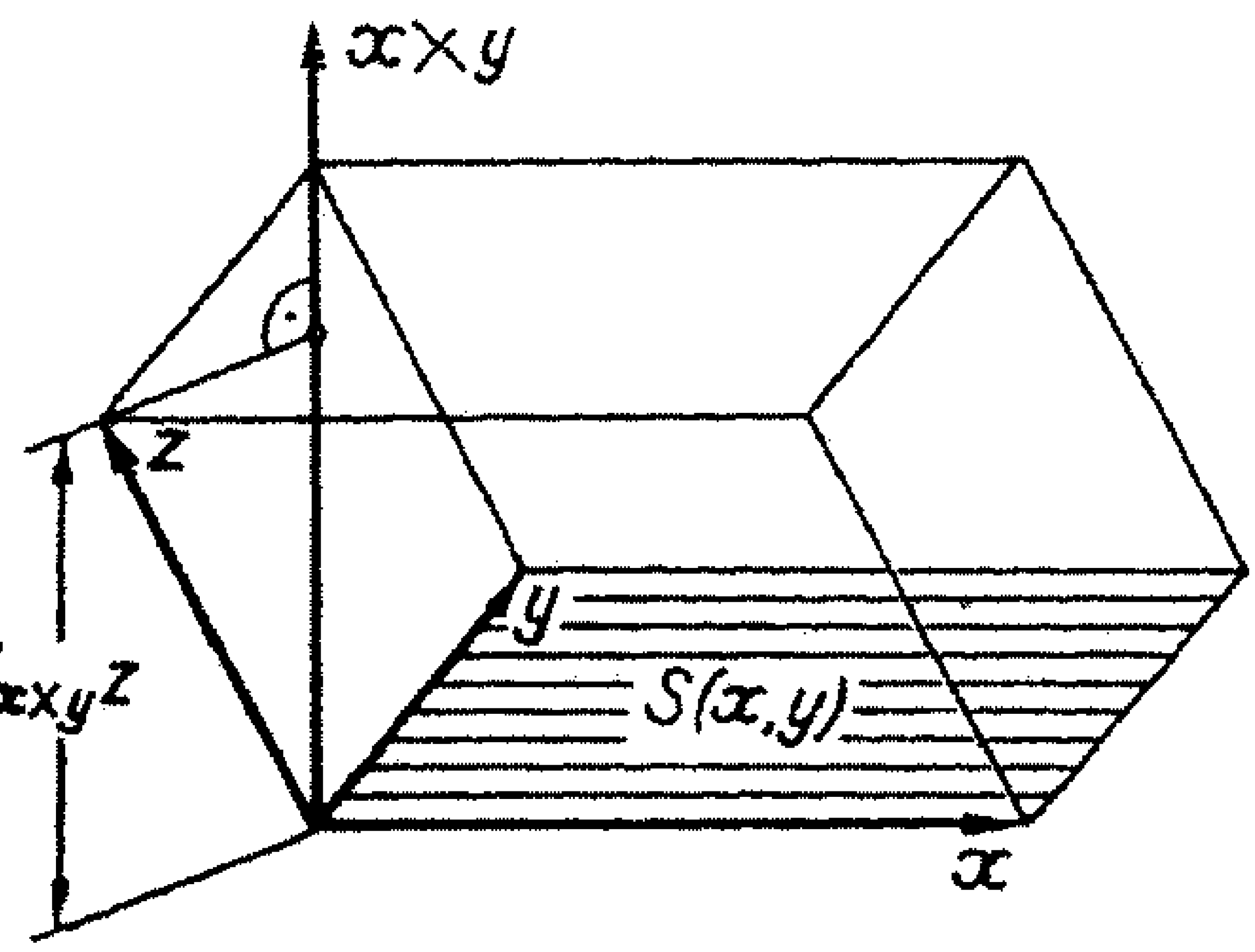
[49] Vt. G. Kangro, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 22.

kus $l_{x\times y}z = |p_{x\times y}z|$ on vektori z laius vektoritega x ja y ristuval sihil (vt. def. 30.1).

Def. **32.2.** Ruumi kolme mittekomplanaarse vektori x, y ja z järgi moodustatud punktihulka

$$\{X \mid \overrightarrow{OX} = x\lambda + y\mu + z\nu, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant 1\},$$

kus O on vabalt valitud punkt, nimetatakse punktis O vektoritele x, y ja z ehitatud r ö ö p t a h u k a k s. Positiivseid reaalarve $S(x, y)$



Joon. 63.

ja $l_{x\times y}z$ nimetatakse vastavalt rööptahuka põhjapindalaks ja kõrguseks (joon. 63). Positiivset reaalarvu $S(x, y)\, l_{x\times y}z$, mis, nagu selgus, ei muutu vektorite x, y ja z ükskõik missuguse omavahelise ümberpaigutuse korral, nimetatakse selle rööptahuka r u u m a l a k s ja tähistatakse $V(x, y, z)$.

Kui nullist erinevad vektorid x, y ja z on paarikaupa risti, s. t. $x \perp y$, $y \perp z$, $z \perp x$, siis on rahuldatud tingimused (31.11), ning et samu tingimusi rahuldab koos vektoriga z ka $x \times y$, siis (31.13) põhjal

$$z = (x \times y)\gamma.$$

Def. 30.1 järgi $p_{x\times y}z = |x \times y|\gamma$ ning järelikult $l_{x\times y}z = |p_{x\times y}z| = |x \times y|\,|\gamma| = |(x \times y)\gamma| = |z|$. Edasi on $\sphericalangle(x, y) = \frac{\pi}{2}$, mistõttu (29.5) põhjal

$$S(x, y) = |x|\,|y| \sin\frac{\pi}{2} = |x|\,|y|. \tag{32.7}$$

Kokkuvõttes,

$$V(x, y, z) = S(x, y)\, l_{x\times y}z = |x|\,|y|\,|z|. \tag{32.8}$$

Järelikult paarikaupa ristuvale kolmele vektorile ehitatud rööptahuka (seda nimetatakse siis risttahukaks) ruumala on võrdne vektorite pikkuste korrutisega. Analoogiliselt on (32.7) põhjal kahele ristuvale vektorile ehitatud rööpnelinurga (seda nimetatakse siis ristnelinurgaks) pindala võrdne vektorite pikkuste korrutisega.

Üldine valem rööptahuka ruumala $V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ arvutamiseks vektorite $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{z}$ ristkoordinaatide järgi järeldub võrdusest $V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) l_{\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}}\boldsymbol{z}$ ning seosest (32.6):

$$V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = |\boldsymbol{xyz}|, \tag{32.9}$$

kus $\boldsymbol{xyz}$ on (32.2) järgi võrdne vektorite $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{z}$ ristkoordinaatidest moodustatud determinandiga.[50]

Teoreemidest 15.7 ja 16.6 järeldub, et vektorid $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{z}$ on komplanaarsed parajasti siis, kui nende segakorrutis on võrdne nulliga:

$$\boldsymbol{xyz} = 0. \tag{32.10}$$

Mittekomplanaarsete vektorite $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{z}$ korral segakorrutise märk näitab (32.2) järgi seda, kas baas $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ on ristbaasiga $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ võrreldes sama või erineva orientatsiooniga. Esimesel juhul $\boldsymbol{xyz} > 0$, teisel juhul aga $\boldsymbol{xyz} < 0$. Järelikult segakorrutis $\boldsymbol{xyz}$ on täielikult määratud (s. t. koos märgiga) ainult orienteeritud ruumis samuti nagu vektorkorrutis. Selle poolest erinevad need korrutised skalaarkorrutistest, mis on määratud ka orienteerimata ruumis.

Osutub, et segakorrutise absoluutväärtus $|\boldsymbol{xyz}|$ on avaldatav tegurite skalaarkorrutiste kaudu. Kehtib nimelt valem

$$(\boldsymbol{xyz})^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}^2 & \boldsymbol{xy} & \boldsymbol{xz} \\ \boldsymbol{xy} & \boldsymbol{y}^2 & \boldsymbol{yz} \\ \boldsymbol{xz} & \boldsymbol{yz} & \boldsymbol{z}^2 \end{vmatrix}, \tag{32.11}$$

mille õigsust on lihtne kontrollida, kasutades sega- ja skalaarkor-

---

[50] Mittekomplanaarsete $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{y}$ korral nimetatakse punktihulka

$$\{X \mid \overrightarrow{OX} = \boldsymbol{x}\lambda + \boldsymbol{y}\mu + \boldsymbol{z}\nu, \quad \lambda \geqslant 0, \quad \mu \geqslant 0, \quad \nu \geqslant 0, \quad \lambda + \mu + \gamma \leqslant 1\}$$

tetraeedriks (kr. k. τετραεδρον — nelitahukas; vt. D. I. Perepjolkin, Elementaargeomeetria kursus. II. Tallinn, 1956, lk. 31) ehk kolmnurkseks püramiidiks. Integraalarvutuses (vt. G. Kangro, Matemaatiline analüüs. I. Tallinn, 1965, lk. 410) tõestatakse, et sellise tetraeedri ruumalaks on $V = \frac{1}{3} V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$. Järelikult punktihulka

$$V = \frac{1}{3} |\boldsymbol{xyz}|.$$

rutise avaldisi (32.2) ja (28.10) ristkoordinaatide puhul ning determinandi korrutamise eeskirja (vt. allviide [29]):

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^2+x_2^2+x_3^2 & x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 & x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3 \\ x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 & y_1^2+y_2^2+y_3^2 & y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3 \\ x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3 & y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3 & z_1^2+z_2^2+z_3^2 \end{vmatrix}.$$

Segakorrutise algebralisi omadusi kirjeldab järgmine teoreem.

***Teoreem* 32.2.** *Segakorrutis* xyz *on*

1) *distributiivne:* $(x+y)zw = xzw + yzw$,

2) *reaalarvuga korrutamise suhtes omadusega* $xy(z\lambda) = (xyz)\lambda$.

T õ e s t u s. Väite 1) põhjendamiseks tuleb võtta teoreemis 31.3 antud võrduse 2) poolte skalaarkorrutised vektoriga w ning arvestada segakorrutise def. 32.1. Väite 2) puhul tuleb rakendada sama def. 32.1 ja skalaarkorrutise vastavat omadust. ▮

Märgime, et võrduste (32.3) ja (32.4) põhjal võib eelnenud teoreemi väited üle kanda ka segakorrutise teisele ja kolmandale tegurile. Nii näiteks on

$$(x+y)(x-y)\left(z\frac{1}{2}\right) = (x(x-y)z)\frac{1}{2} + (y(x-y)z)\frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}(xyz) + \frac{1}{2}(yxz) = -(xyz),$$

sest $xxz = yyz = 0$.

33. Topeltvektorkorrutis. Segakorrutis xyz on vektorite $x \times y$ ja z skalaarkorrutis. Kui võtta nende vektorite vektorkorrutis, siis on tulemuseks vektor $(x \times y) \times z$ — niinimetatud topeltvektorkorrutis. Ka see on samuti nagu segakorrutis iga oma teguri osas distributiivne ja reaalarvuga korrutamise suhtes «assotsiatiivne» (nagu järeldub vahetult vektorkorrutise vastavatest omadustest, kui neid rakendada järjest kaks korda), kuid tegurite ja sulgude ümberpaigutamisel käitub topeltvektorkorrutis hoopis erinevalt. Teatavad seaduspärasused ilmnevad aga siingi. Nende avastamiseks arvutame vektori $(x \times y) \times z$ ristkoordinaadid tegurite x, y ja z ristkoordinaatide kaudu, tähistades $x \times y = v$ ja $(x \times y) \times z = v \times z = w$.

Valemi 31.7 järgi

$$v=(v_1, v_2, v_3)=\left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right).$$

Vektori $\boldsymbol{w}$ ristkoordinaatide leidmiseks tuleb sama valemit rakendada nüüd $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{z}$ puhul. Näiteks

$$w_1=\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}=v_2z_3-v_3z_2=\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}z_3-\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}z_2=$$

$$=(x_3y_1-x_1y_3)z_3-(x_1y_2-x_2y_1)z_2=y_1(x_3z_3+x_2z_2)-x_1(y_3z_3+y_2z_2).$$

Liidame siin $x_1y_1z_1$ ja $-x_1y_1z_1$:

$$w_1=y_1(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)-x_1(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)=$$
$$=y_1(\boldsymbol{xz})-x_1(\boldsymbol{yz}).$$

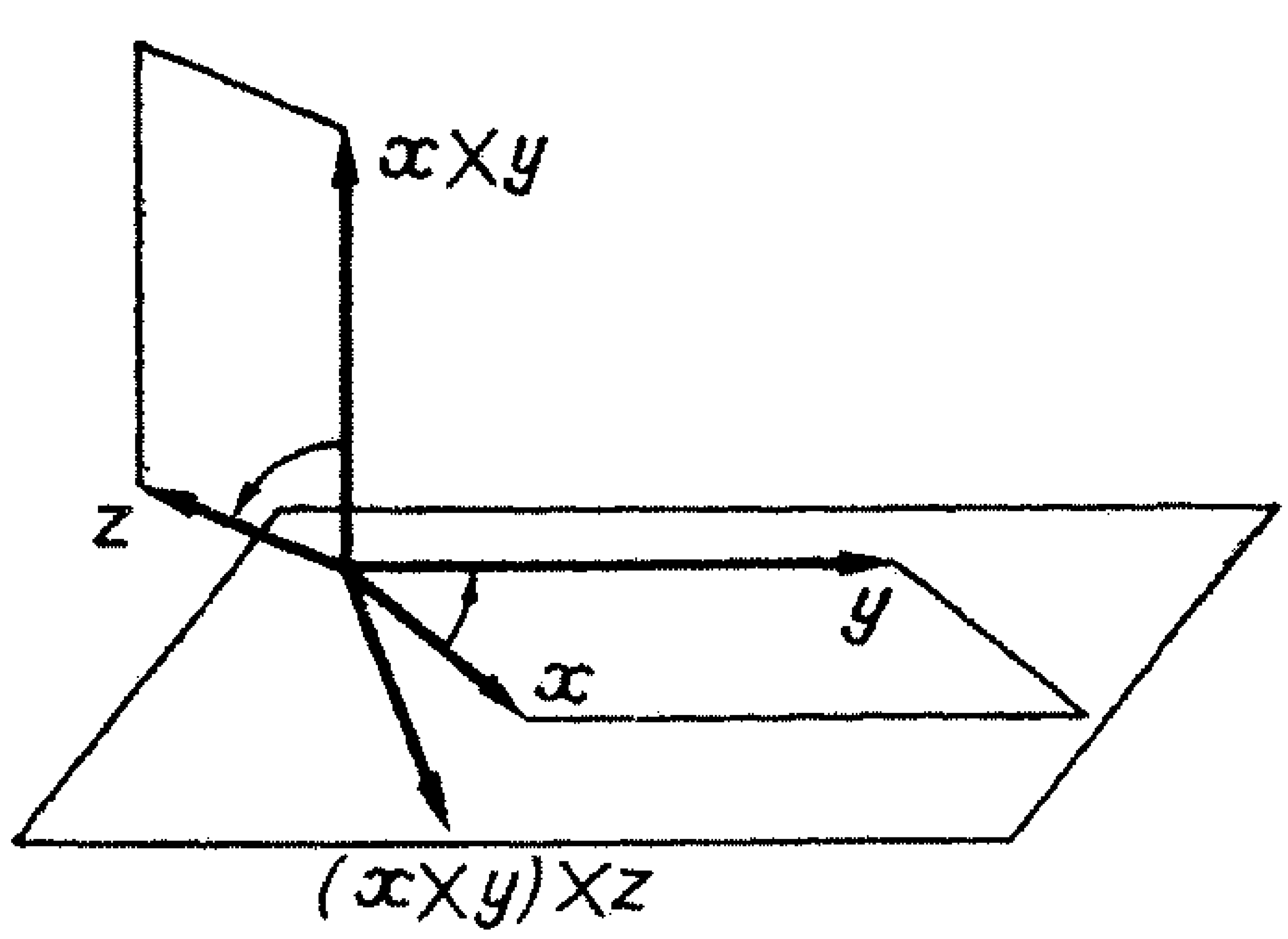
Analoogiliste arvutustega võib veenduda, et üldiselt

$$w_i=y_i(\boldsymbol{xz})-x_i(\boldsymbol{yz}).$$

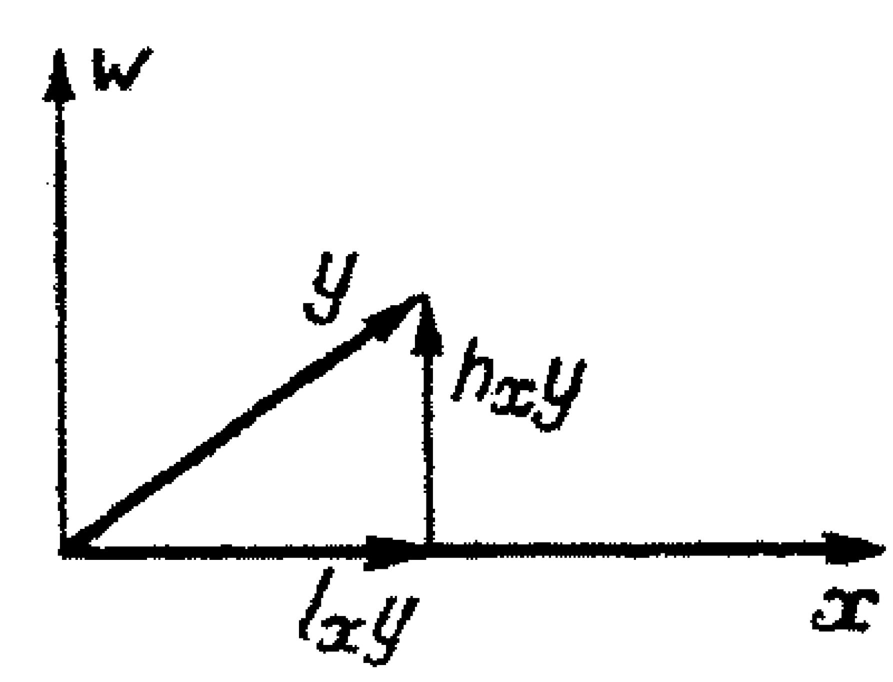
(Kontrolli viimase kahe koordinaadi, s. t. $i=2$ ja $i=3$ puhul jätame lugeja hooleks.) Sellest järeldub, et

$$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{xz})-\boldsymbol{x}(\boldsymbol{yz}). \qquad (33.1)$$

Mittekomplanaarsete $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{z}$ korral oleks võinud juba ette öelda, et $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z}$ kui teatav vektor peab avalduma vektorite $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{z}$ lineaarkombinatsioonina, sest viimased moodustavad siis baasi. Nüüd on see lineaarkombinatsioon leitud. Seejuures pole valemi (33.1) tuletamisel tehtud mingeid kitsendusi, mistõttu ta kehtib igasuguste $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{z}$ korral. Paneme tähele, et $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z}$ kuulub alati tegureid $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ sisaldavasse rihti (joon. 64), mis on ka loomulik, sest see vektor on (31.8) järgi risti vektoriga $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$



Joon. 64.



Joon. 65.

samuti nagu vektorid x ja y, ning kui $x \times y \neq 0$, siis mainitud asjaolu järeldub otse teoreemist 28.3.

Valemi (33.1) järgi on lihtne selgitada, et vektorkorrutis ei ole assotsiatiivne, s. t. topeltvektorkorrutis muutub sulgude ümberpaigutamisel. Tõepoolest,

$$x \times (y \times z) = -(y \times z) \times x = (z \times y) \times x$$

ning valemi (33.1) järgi, kui rakendada teda viimase korrutise puhul, on

$$x \times (y \times z) = y(zx) - z(yx). \tag{33.2}$$

Seetõttu

$$(x \times y) \times z - x \times (y \times z) = z(xy) - x(yz), \tag{33.3}$$

ning kui $x \nparallel z$, siis tulemus kindlasti ei ole nullvektor, s. t. kui $x \nparallel z$, siis

$$(x \times y) \times z \neq x \times (y \times z)$$

— vektorkorrutis ei ole assotsiatiivne.

Valemite (33.1) ja (33.2) uurimisel võib teha järgmise tähelepaneku, mis aitab neid meeles pidada: *ükskõik kuidas on topeltvektorkorrutises paigutatud sulud, ikka võib teda arvutada, korrutades keskmist vektorit ülejäänud kahe vektori skalaarkorrutisega, seejärel korrutades sulgude äärmist tegurit ülejäänud kahe teguri skalaarkorrutisega ning võttes saadud vektorite vahe.*

Võrduste (33.1) ja (33.3) paremate poolte võrdlemisel selgub, et nad erinevad ainult vektorite y ja z omavahelise paigutuse poolest, seega (33.3) parem pool on $(x \times z) \times y$ ning järelikult

$$(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y = 0. \tag{33.4}$$

Tulemust tuntakse J a c o b i s a m a s u s e[51] nime all. Selle vasakul poolel on iga kaks liidetavat saadud teineteisest tegurite tsükleerimisel.

Topeltvektorkorrutise abil saab ruumi kahe mittekollineaarse vektori x ja y kaudu kergesti avaldada niisuguse vektori w, mis on vektoreid x ja y sisaldavas rihis risti vektoriga x, kusjuures $\{x, y\}$ ja $\{x, w\}$ on selles rihis ühtemoodi orienteeritud baasid (joon. 65). Niisugust vektorit w on rakendustes sageli vaja teada; selleks on

$$w = (x \times y) \times x = yx^2 - x(xy). \tag{33.5}$$

Tõepoolest, see vektor on rihis $\{x\lambda + y\mu\}$ ning on seal (31.8)

[51] C a r l G u s t a v J a c o b J a c o b i (1804—1851) — saksa matemaatik, Berliini TA liige.

põhjal risti vektoriga x. Seejuures

$$x\wedge w = x\wedge[yx^2 - x(xy)] = (x\wedge y)x^2,$$

sest $x \wedge x = 0$, ning et kordaja x^2 on positiivne, siis baasid $\{x, w\}$ ja $\{x, y\}$ on tõesti ühtemoodi orienteeritud (siin $\wedge$ tähendab areaalkorrutist vektoreid x ja y sisaldavas orienteeritud rihis).

Võrdusest (33.5) saab vabalt võetud vektori y avaldada antud vektori x ja sellega ristuva vektori w lineaarkombinatsioonina:

$$y = x\frac{(xy)}{x^2} + [(x\times y)\times x]\frac{1}{x^2}. \tag{33.6}$$

Võrdlemisel seostega (30.2) selgub, et

$$l_x y = x\frac{(xy)}{x^2}, \qquad h_x y = [(x\times y)\times x]\frac{1}{x^2}. \tag{33.7}$$

Eespool me olime huvitatud peaasjalikult nende liidetavate pikkustest, mida me nimetasime vastavalt vektori y laiuseks ja kõrguseks vektori x kohal. Nüüd on leitud valemid ka nende liidetavate endi arvutamiseks.

Topeltvektorkorrutise jaoks saadud valem (33.1) võimaldab tuletada teisigi samasusi. Kui näiteks võtta selle valemi poolte skalaarkorrutised vabalt võetud vektoriga w, siis vasakust poolest saame segakorrutise $[(x\times y)\times z]w$, mis (32.5) põhjal on võrdne reaalarvuga $(x\times y)(z\times w)$. Seega,

$$(x\times y)(z\times w) = (xz)(yw) - (yz)(xw) = \begin{vmatrix} xz & xw \\ yz & yw \end{vmatrix}. \tag{33.8}$$

Tulemust tuntakse L a g r a n g e'i ü l d i s e s a m a s u s e nime all. Selle erijuhuks, kui $z = x$ ja $w = y$, on varem antud samasus (31.10) ning (31.15) põhjal ka samasus (31.6).

Kui valemis (33.1) vektor z asendada vektorkorrutisega $z\times w$, arvestades, et $x(z\times w) = (z\times w)x = zwx = xzw$ ja $y(z\times w) = (z\times w)y = zwy = yzw$, siis on tulemuseks valem

$$(x\times y)\times(z\times w) = y(xzw) - x(yzw). \tag{33.9}$$

Selle valemi põhjal on teiselt poolt

$$(x\times y)\times(z\times w) = -(z\times w)\times(x\times y) = -[w(zxy) - z(wxy)].$$

Pärast lahutamist saame seega

$$y(xzw) - x(yzw) + w(zxy) - z(wxy) = 0.$$

Eeldades, et $zxy \neq 0$, ning arvestades võrdusi (32.3) ja (32.4), võime avaldada:

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{x}\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}}+\boldsymbol{y}\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{w}\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}}+\boldsymbol{z}\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}}. \tag{33.10}$$

Siin on vabalt võetud vektor $\boldsymbol{w}$ avaldatud kolme mittekomplanaarse vektori $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{z}$ lineaarkombinatsioonina:

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{x}\lambda+\boldsymbol{y}\mu+\boldsymbol{z}\nu, \tag{33.11}$$

kusjuures on näidatud, kuidas arvutada selle kordajaid:

$$\lambda=\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}}, \quad \mu=\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{w}\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}}, \quad \nu=\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}}. \tag{33.12}$$

Et (33.11) on samaväärne kolme seosega

$$w_i=x_i\lambda+y_i\mu+z_i\nu \tag{33.13}$$

koordinaatide vahel, viimased aga moodustavad antud $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{z}$ korral lineaarvõrrandite süsteemi λ, μ ja ν leidmiseks, siis on võrduste (33.12) näol tegemist Crameri valemite rakendamisega süsteemi (33.13) lahendamiseks.[52] Mainitud reegli puhul ei ole vaja eeldada, et tegemist on vektorite ristkoordinaatidega. See on heas kooskõlas art. 20 ühe tulemusega, mille järgi arvud (33.12) kui determinantide suhted (20.6) on invariantsed iga baasileisenduse suhtes ka siis, kui ristbaas ei jää ristbaasiks.

[52] Vt. G. Kangro, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 11 ja 53.

II PEATÜKK

SIRGETE JA TASANDITE GEOMEETRIA

§ 6. LÕIGUD JA KOLMNURGAD

Eespool formuleeritud aksioomid ja nendest tuletatud järeldused annavad kindla aluse nii afiinse kui eukleidilise geomeetria arendamiseks tasandil või ruumis. Arusaadavalt on sellega haaratud ka kogu koolis uuritav elementaargeomeetria. Käesolev paragrahv sisaldabki muu hulgas olulisema sellest, mida on elementaargeomeetrias teada kolmnurkadest. Uudne on siin range deduktiivne käsitlusviis, mis pealegi kasutab uusi võtteid ja mõisteid. Viimastel on väärtuslikke rakendusi ka kursuse järgnevates osades.

34. Lihtsuhe. Olgu sirgel antud kolm erinevat punkti A, B ja C. Vektorid $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{CB}$ on siis teoreemi 15.3 põhjal lineaarselt sõltuvad ning teoreemi 15.1 põhjal üks on avaldatav teise kordsena. Olgu näiteks $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}\lambda$ (joon. 66).

Joon. 66.

***Def.* 34.1.** Kui sirge kolme erineva punkti A, B ja C korral $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}\lambda$, siis reaalarvu λ nimetatakse nende punktide l i h t s u h t e k s ning tähistatakse (ABC):

$$\lambda = (ABC).$$

Lihtsuhe ei saa omada väärtusi 0 ja -1. Tõepoolest, kui oletaksime, et $\lambda = 0$, siis oleks $\overrightarrow{AC} = 0$ ning punktid A ja C peaksid ühtima; kui oletaksime, et $\lambda = -1$, siis oleks $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CB}$ ehk $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$ ning aksioomi **A3** põhjal punktid A ja B peaksid ühtima, samal ajal kui on eeldatud, et A, B ja C on erinevad punktid. Osutub, et kõiki teisi reaalarvulisi väärtusi võib lihtsuhe omada. Nimelt saab näidata järgmise teoreemi kehtivust.

***Teoreem* 34.1.** *Iga kahe erineva punkti A ja B ning iga reaalarvu λ korral, mis ei ole 0 ega -1, leidub parajasti üks punkt X, nii et $(ABX) = \lambda$.*

Tõestus. Olgu punktide A ja B kohavektoreiks alguspunkti O teatava valiku korral vektorid $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$. Otsitavaks on niisugune punkt X kohavektoriga $\boldsymbol{x}$, et $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{XB}\lambda$. Teoreemi 11.4 põhjal $\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ ja $\overrightarrow{XB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{x}$, järelikult peab olema

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{x})\lambda. \tag{34.1}$$

Siit leiame, et

$$\boldsymbol{x}(1+\lambda) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\lambda$$

ning et eelduse kohaselt $1 + \lambda \neq 0$, siis

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\lambda)(1+\lambda)^{-1}.$$

Järelikult eksisteerib tõepoolest parajasti üks punkt X soovitava omadusega. ▮

Viimase võrduse saab esitada ka kujul

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\lambda}{1+\lambda}. \tag{34.2}$$

Võrdused (34.1) ja (34.2) on samaväärsed analoogiliste võrdustega vastavate koordinaatide vahel:

$$x_i - a_i = \lambda(b_i - x_i), \tag{34.3}$$

$$x_i = \frac{a_i + \lambda b_i}{1+\lambda}. \tag{34.4}$$

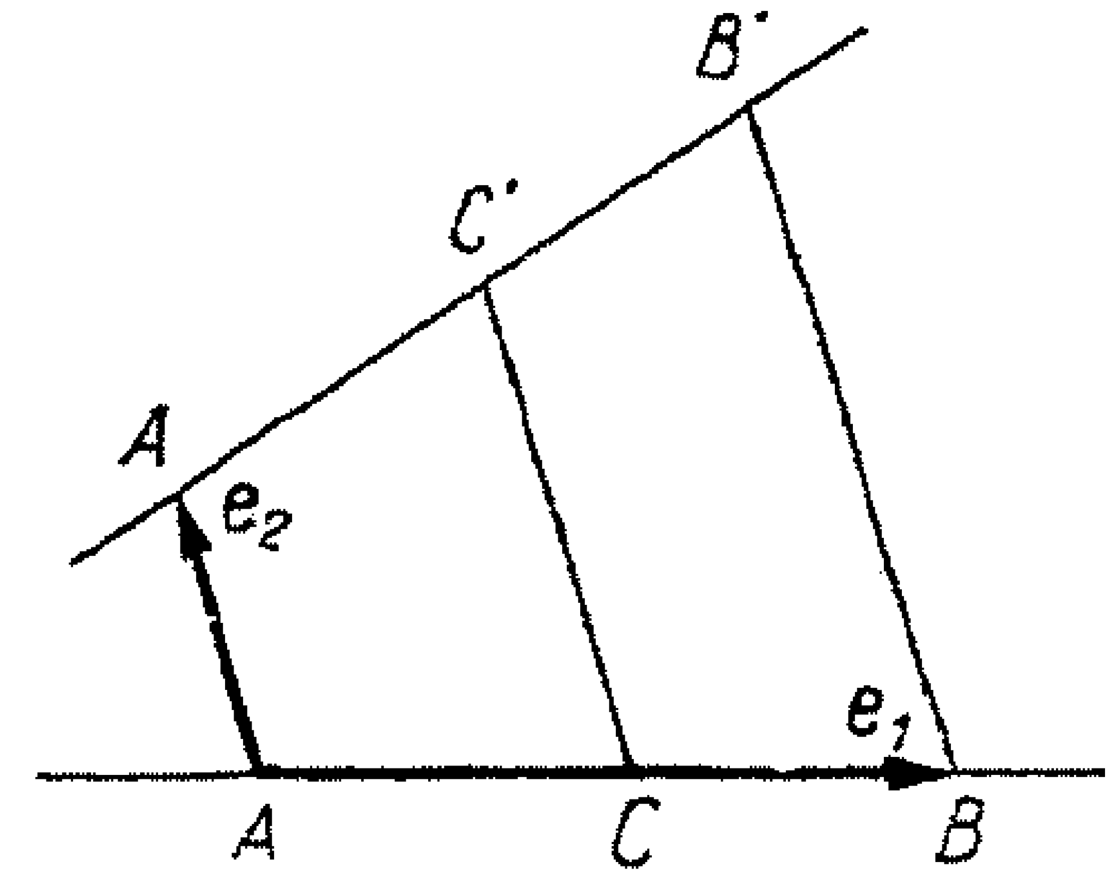
Seosest (34.3), kui arvestada, et $\lambda = (ABX)$, ja teha asendus $X = C$, järeldub:

$$(ABC) = \frac{c_i - a_i}{b_i - c_i}. \tag{34.5}$$

Lihtsuhe (ABC) on seega arvutatav punktide A, B ja C ükskõik missuguste vastavate koordinaatide järgi. Sellest faktist on kergesti järeldatav niisugune lause.

***Teoreem* 34.2.** *Kui tasandil ühe sirge erinevad punktid A, B ja C projekteeritakse paralleelselt teise sirge punktideks A', B' ja C', s. t. kui vektorid $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ ja $\overrightarrow{CC'}$ on paarikaupa kollineaarsed, siis $(A'B'C') = (ABC)$* (joon. 67).

Tõestus. Tähistame $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e}_1$ ja $\overrightarrow{AA'} = \boldsymbol{e}_2$ (eeldades, et $\boldsymbol{e}_2 \neq \boldsymbol{0}$) ning vaatleme tasandil reeperit $\{A; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Et eelduse kohaselt $\overrightarrow{AC} \parallel e_1$ ja $\overrightarrow{CC'} \parallel e_2$, siis $\overrightarrow{AC} = e_1c_1$ ja $\overrightarrow{CC'} = e_2c_2$. Seejuures $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = e_1c_1 + e_2c_2$. Siit on näha, et punktidel C ja C' on sama esimene koordinaat c_1. Sama võib öelda ka punktide A ja A' ning B ja B' kohta. Teoreemi väide järeldub nüüd valemist (34.5), kui võtta seal $i = 1$. ∎



Joon. 67.

Punktide ümberpaigutamisel käitub lihtsuhe järgmiselt:

$$(BAC) = (ABC)^{-1}, \quad (ACB) = -[1 + (ABC)]. \qquad (34.6)$$

Selle näitamiseks tähistame $(ABC) = \lambda$ ja $(BAC) = \mu$; siis def. 34.1 järgi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}\lambda$ ja $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}\mu$. Viimast võrdust võib arendada järgmiselt:

$$\overrightarrow{BC} = (-\overrightarrow{AC})\mu = (-\overrightarrow{CB}\lambda)\mu = \overrightarrow{BC}\lambda\mu;$$

seega

$$\overrightarrow{BC}(1 - \lambda\mu) = 0$$

ning et $\overrightarrow{BC} \neq 0$, siis $\lambda\mu = 1$. Järelikult esimene võrdus (34.6) tõesti kehtib.

Tähistame $(ACB) = \nu$, siis $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}\nu$. Ühelt poolt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}\lambda + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}(1 + \lambda)$, teiselt poolt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}\nu = -\overrightarrow{CB}\nu$. Et $\overrightarrow{CB} \neq 0$, siis $\nu = -(1 + \lambda)$ ning seega kehtib ka teine võrdus (34.6).

Kõiki teisi mõeldavaid ümberpaigutusi on võimalik saada vaadeldud kahe ümberpaigutuse järjest sooritamisel.

Esimese võrduse (34.6) põhjal (ABC) märk ei muutu A ja B kohtade vahetamisel. Seda arvestame järgmise definitsiooni juures.

Def. **34.2.** Kui $(ABC) > 0$ (s. t. kui $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{CB}$ on samasuunalised vektorid), siis öeldakse, et punkt C on punktide A ja B vahel. Kõigi A ja B vahel olevate punktide hulka nimetatakse vahemikuks (AB), punkte A ja B — selle otspuktideks. Vahemiku (AB) ja otspunktide ühendit nimetatakse lõiguks AB.

Teoreem **34.3.** *Vahemik (AB) on selliste punktide X hulk, mille kohavektorid $\overrightarrow{OX} = x$ moodustavad hulga*

$$\{x \mid x = at + b(1-t), \quad 0 < t < 1\},$$

kus $a = \overrightarrow{OA}$ *ja* $b = \overrightarrow{OB}$.

Tõestus. Olgu X vahemiku (AB) teatav punkt, s. t. olgu $(ABX) = \lambda > 0$; siis

$$t = \frac{1}{1+\lambda} > 0, \quad s = \frac{\lambda}{1+\lambda} > 0, \tag{34.7}$$

kusjuures $t + s = 1$. Seega $t < 1$, ning et $s = 1 - t$, siis valemi (34.2) põhjal tõesti

$$x = at + bs = at + b(1-t), \quad 0 < t < 1.$$

Vastupidi, kui mingi punkti X kohavektor $\overrightarrow{OX} = x$ avaldub selliselt, siis asendusega $t = \frac{1}{1+\lambda}$ saame siit võrduse (34.2), kusjuures $\lambda = \frac{1-t}{t} > 0$, s. t. siis $(ABX) > 0$ ning X on vahemiku (AB) punkt. ∎

Kui võrduses $x = at + b(1-t)$ võtta $t = 0$ või $t = 1$, siis on tulemuseks $x = b$ ja $x = a$. Järelikult lõik AB on selliste punktide X hulk, mille kohavektorid moodustavad hulga

$$\{x \mid x = at + b(1-t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1\}. \tag{34.8}$$

Siin esinev võrdus on kirjutatav ka kujul

$$x = b + (a - b)t,$$

mis on samaväärne analoogilise seosega koordinaatide vahel:

$$x_i = b_i + t(a_i - b_i) \tag{34.9}$$

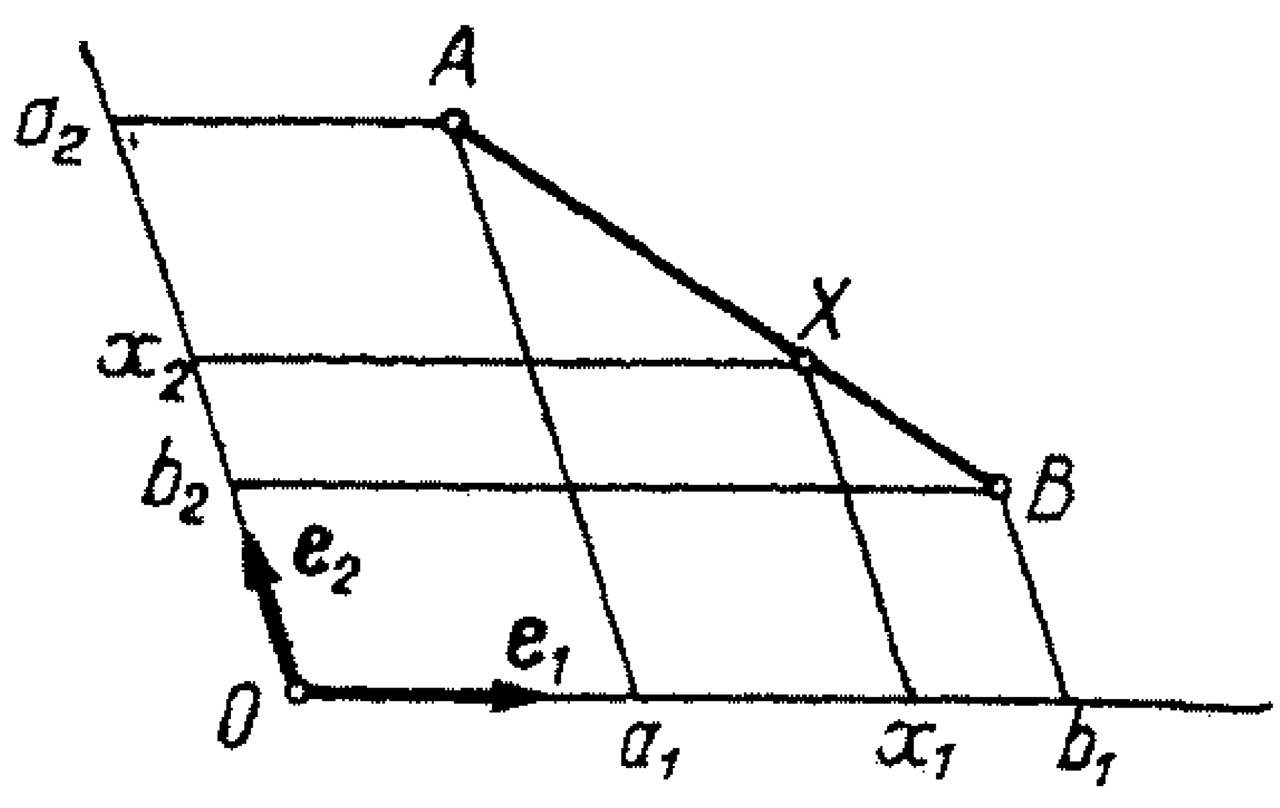
(sirgel $i = 1$, tasandil $i = 1, 2$, ruumis $i = 1, 2, 3$). Võrratustest $0 \leqslant t \leqslant 1$ saame pärast korrutamist arvuga $a_i - b_i$ olenevalt sellest, kas $a_i - b_i \geqslant 0$ või $a_i - b_i < 0$:

$$0 \leqslant t(a_i - b_i) \leqslant a_i - b_i \quad \text{või} \quad 0 \geqslant t(a_i - b_i) \geqslant a_i - b_i.$$

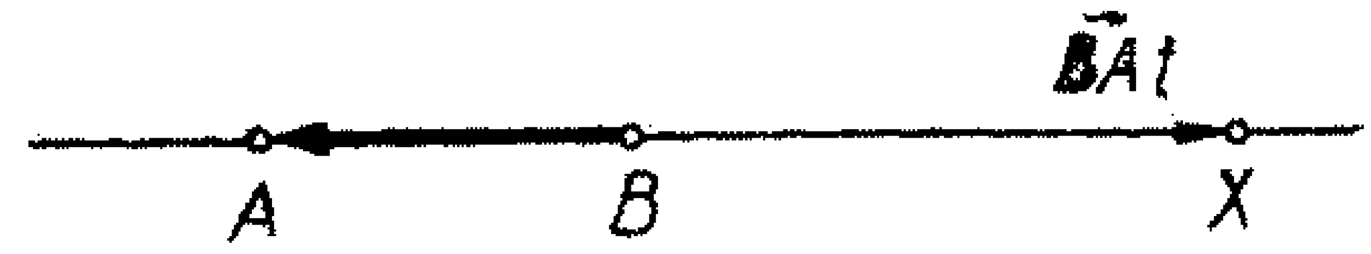
Kui siin liita b_i, on (34.9) põhjal tulemuseks

$$b_i \leqslant x_i \leqslant a_i \quad \text{või} \quad b_i \geqslant x_i \geqslant a_i. \tag{34.10}$$

Järelikult lõiku AB kuuluva punkti X koordinaadid asuvad otspunktide A ja B vastavate koordinaatide vahel reaalteljel, s. t. kuuluvad reaaltelje vastavatesse lõikudesse (joon. 68). Tingimustes (34.8) võib võrratused $0 \leqslant t \leqslant 1$ asendada saadud nõudega punktide koordinaatidele, kusjuures on küllalt, kui võtta üksainus i väärtus, kuid selline, et $a_i \neq b_i$. Põhjenduseks tuleb võrdusest (34.9) avaldada



Joon 68.



Joon. 69

$$t = \frac{x_i - b_i}{a_i - b_i}$$

ning arvestada, et võrratuste (34.10) puhul on $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Öelduga seoses pakub huvi asjaolu, et võrratuste $0 \leqslant t \leqslant 1$ ärajätmisel tingimustest (34.8) on tulemuseks punkte A ja B sisaldava sirge punktide X kohavektorite

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}(1 - t) \qquad (34.11)$$

hulk. Tõepoolest, sel puhul on

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})t$$

ehk

$$\overrightarrow{BX} = \overrightarrow{BA}t,$$

mis teoreemi 16.2 põhjal tähendabki, et kõik vaadeldavat tingimust rahuldavad punktid X moodustavad sirge sihivektoriga $\boldsymbol{k} = \overrightarrow{BA}$ (joon. 69).

Järelikult kaks erinevat punkti A ja B määravad neid sisaldava sirge üheselt. Seda sirget võib seega nimetada lihtsalt sirgeks AB.

Lihtsuhet (ABC) nimetatakse sageli ka suhteks, milles punkt C j a g a b lõigu AB. Kui C on vahemiku (AB) punkt, s. t. kui $(ABC) > 0$, siis öeldakse, et C jagab lõigu AB s i s e s e l t. Kui $(ABC) < 0$, s. t. kui $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{CB}$ on erisihilised vektorid, siis C ei ole lõigu AB punkt ja öeldakse, et C jagab lõigu AB v ä l i s e l t.

Sisemise jagamise puhul pakub erilist huvi juht, kui $\lambda = 1$.

***Def.* 34.3.** Kui $(ABC) = 1$, s. t. kui $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, siis öeldakse, et C on lõigu AB k e s k p u n k t.

Valemist (34.2) järeldub otsekohe, et sel korral

$$\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\frac{1}{2} \qquad (34.12)$$

ehk koordinaatide järgi:

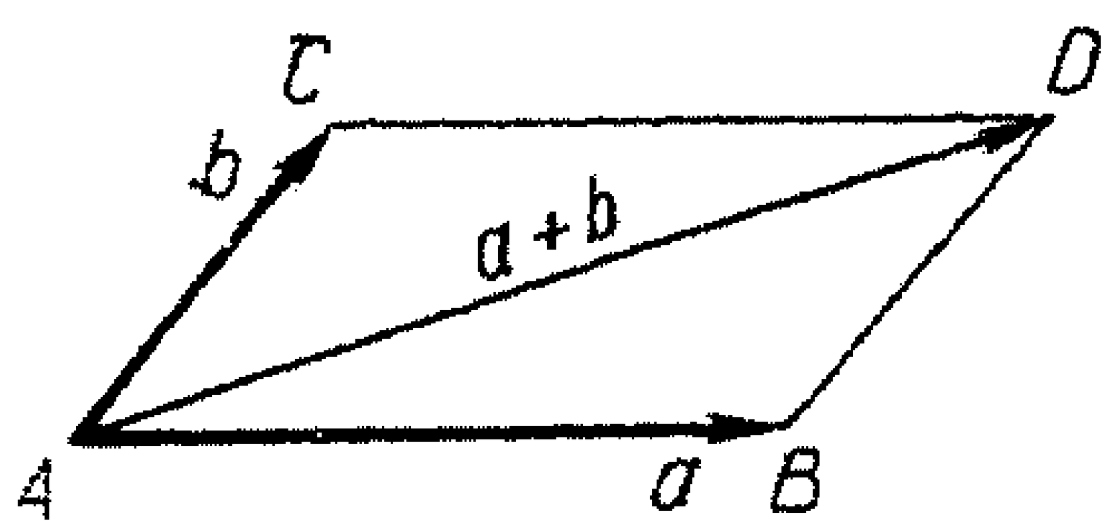
$$c_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i). \qquad (34.13)$$

Seega lõigu keskpunkti kohavektor ja iga koordinaat on lõigu otspunktide kohavektorite ja vastavate koordinaatide aritmeetiline keskmine.

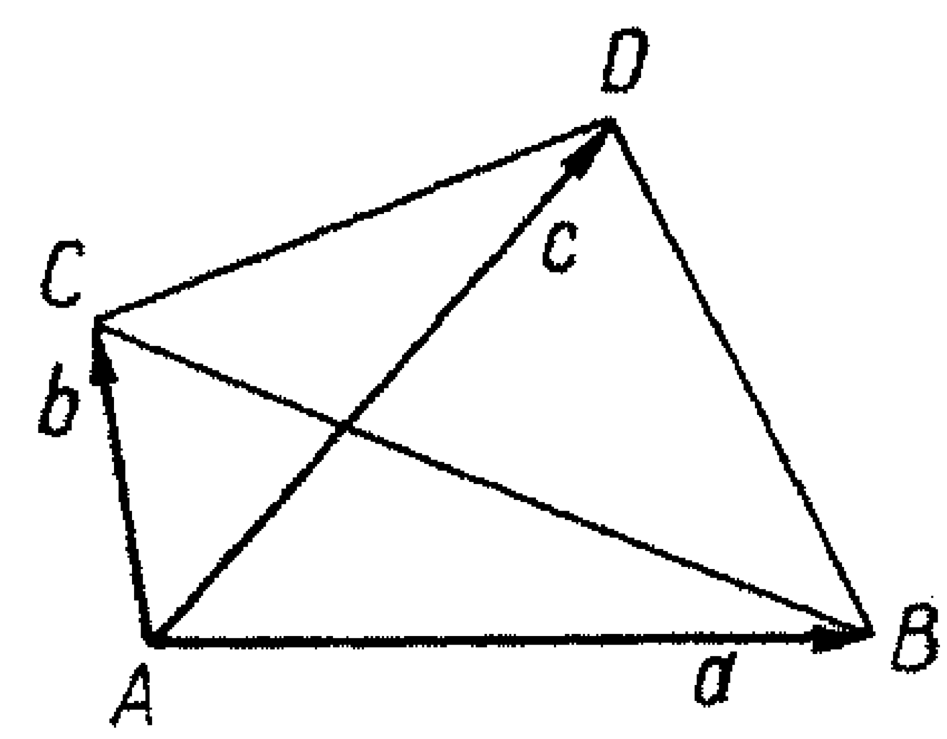
35. Rööpkülik ja kolmnurk. Artiklis 29 on defineeritud punktis O vektoritele $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ehitatud rööpnelinurk kui punktihulk

$$\{X \mid \overrightarrow{OX} = \boldsymbol{x}\lambda + \boldsymbol{y}\mu, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1\}$$

(vt. def. 29.3). Rakendame seda definitsiooni nüüd punktis A vektorite $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$ ja $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}$ korral (joon. 70) ning veendume, et



Joon. 70.



Joon. 71.

sel puhul saadav rööpnelinurk sisaldab lõigud AB, AC, BD ja CD, mis on talle teatavas mõttes «äärteks»; D on punkt kohavektoriga $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Selleks vaatleme λ ja μ äärmisi väärtusi $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\mu = 0$ ja $\mu = 1$. Neile vastavateks alamhulkadeks on $\{X|\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{b}\mu, \ 0 \leqslant \mu \leqslant 1\}$, $\{X|\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\mu, \ 0 \leqslant \mu \leqslant 1\}$, $\{X|\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{a}\lambda, \ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ ja $\{X|\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{a}\lambda + \boldsymbol{b}, \ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$. Esimene on lõik AC ehk CA, sest $\boldsymbol{b}\mu = \boldsymbol{b}\mu + \boldsymbol{0}(1-\mu)$, kus $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}$ ja $\boldsymbol{0} = \overrightarrow{AA}$ on C ja A kohavektorid. Teine on lõik BD ehk DB, sest $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\mu = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\mu + \boldsymbol{a}(1-\mu)$, kus $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AD}$ ja $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ on punktide D ja B kohavektorid. Täpselt samuti veendume, et kolmas alamhulk on lõik AB ja neljas alamhulk on lõik CD.

Saadud lõikusid AB, AC, BD ja CD nimetatakse vaadeldava rööpnelinurga külgedeks. Seejuures

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}, \qquad (35.1)$$

sest $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$. Nendest võrdustest (35.1) üks on õieti teise järelduseks (vt. aksioomi **A4**).

***Def.* 35.1.** Nelja mitte ühel sirgel asuva punkti A, B, C ja D korral lõikude AB, AC, DB ja CD ühendit nimetatakse n e l i k ü l i k u k s $ABCD$, mainitud lõike nimetatakse selle k ü l g e d e k s, lõike AD ja BC — d i a g o n a a l i d e k s (joon. 71). Kui seejuures $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, siis nelikülikut $ABCD$ nimetatakse r ö ö p k ü l i k u k s.

Osutub, et võrdused (35.1) järelduvad märksa üldisematest tingimustest

$$\overrightarrow{BD}\parallel\overrightarrow{AC},\qquad \overrightarrow{CD}\parallel\overrightarrow{AB}. \tag{35.2}$$

Kehtib nimelt niisugune lause.

***Teoreem* 35.1.** *Kui nelja punkti A, B, C* ja *D korral on täidetud tingimused* (35.2) *ja $\overrightarrow{AB}\nparallel\overrightarrow{AC}$, siis nelikülik $ABCD$ on rööpkülik.*

T õ e s t u s. Tähistame $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$. Eeldustest (35.2) järeldub teoreemi 16.5 põhjal, et $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}\lambda$ ja $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}\mu$. Edasi, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$ ja $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$, mistõttu

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\mu=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\lambda$$

ning

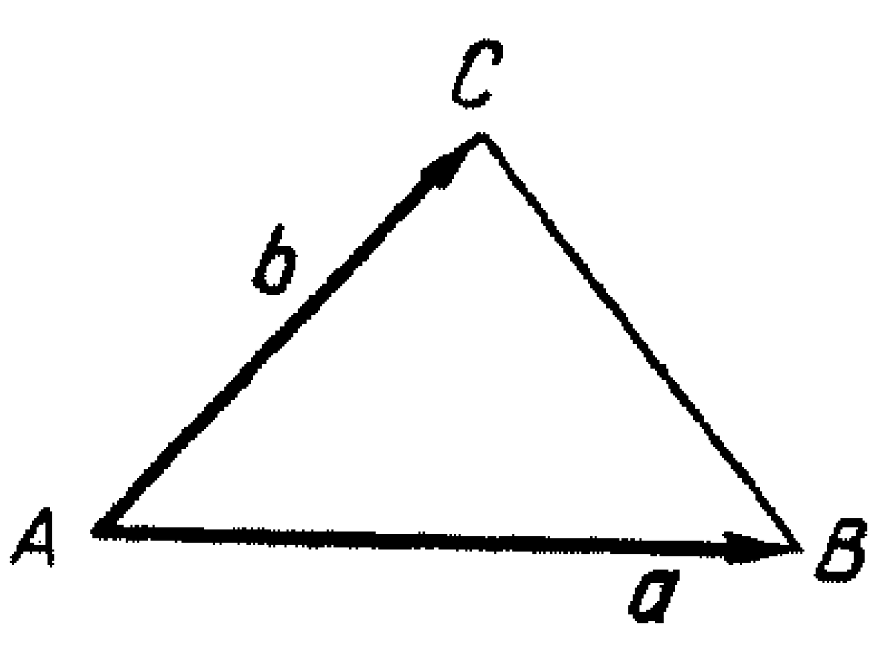
$$\boldsymbol{a}(1-\lambda)+\boldsymbol{b}(\mu-1)=0.$$

Et siin $\boldsymbol{a}\nparallel\boldsymbol{b}$, siis teoreemi 16.5 põhjal $1-\lambda=0$, $\mu-1=0$, s. t. $\lambda=\mu=1$ ja leiavad aset võrdused (35.1). ∎

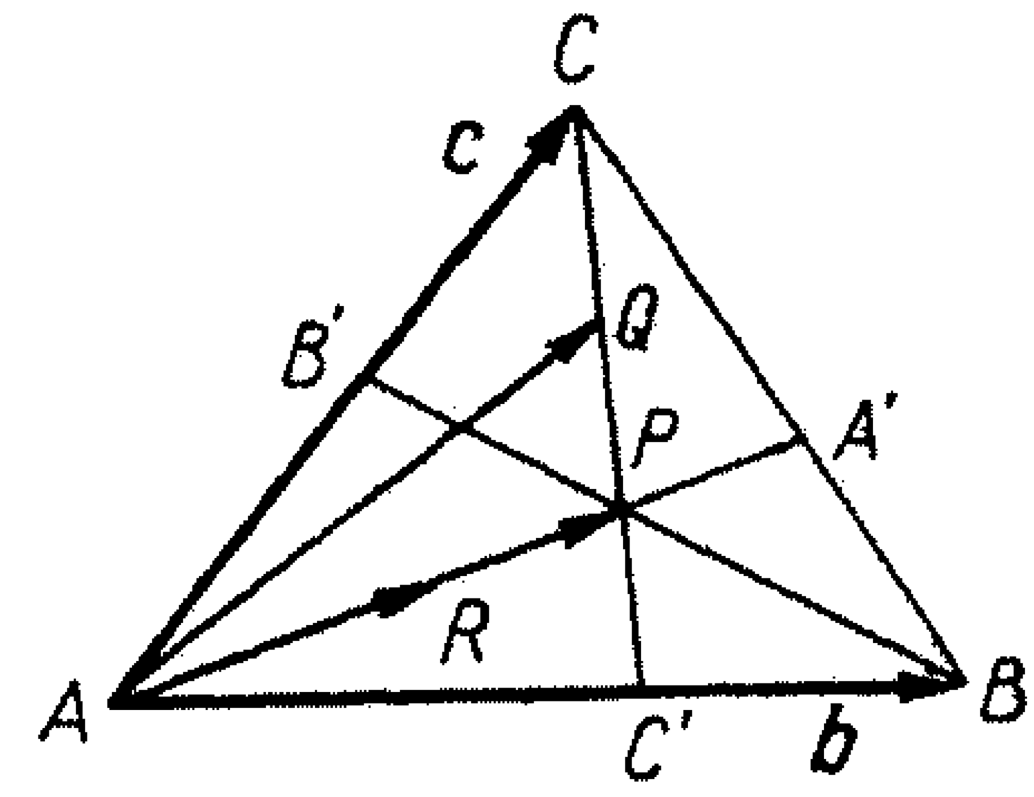
***Teoreem* 35.2.** *Rööpküliku diagonaalid lõikuvad punktis, mis on kummalegi keskpunktiks. Sellise omadusega nelikülik on rööpkülik.*

T õ e s t u s. Et punktide B ja C kohavektoreiks on $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ ja $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$ (joon. 70), siis diagonaali BC keskpunkti kohavektoriks on (34.12) põhjal $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\frac{1}{2}$; et rööpküliku $ABCD$ korral punktide A ja D kohavektoreiks on $\overrightarrow{AA}=\boldsymbol{0}$ ja $AD=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, siis diagonaali AD keskpunkti kohavektoriks on $\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{0}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})]\frac{1}{2}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\frac{1}{2}$. Nagu näha $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$, s. t diagonaalide keskpunktid ühtivad.

Suvalise neliküliku $ABCD$ korral tähistame $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$ (joon. 71).



Joon 72



Joon 73

Diagonaali AD keskpunkti kohavektoriks on siin $(0+\boldsymbol{c})\frac{1}{2}=\boldsymbol{c}\frac{1}{2}$ ning kui diagonaalidel on ühine keskpunkt, siis see vektor on võrdne $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\frac{1}{2}$, s. t. $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ ja nelikülik $ABCD$ on rööpkülik.

Teiseks lihtsamaks punktihulgaks rööpnelinurga kõrval on kolmnurk.

***Def.* 35.2.** Kahe mittekollineaarse vektori $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ järgi moodustatud punktihulka

$$\{X \mid \overrightarrow{OX}=\boldsymbol{x}\lambda+\boldsymbol{y}\mu, \quad \lambda\geqslant 0, \quad \mu\geqslant 0, \quad \lambda+\mu\leqslant 1\} \tag{35.3}$$

nimetatakse punktis O vektoritele $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ehitatud k o l m n u r g a k s.

Rakendame seda definitsiooni punktis A vektorite $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ ja $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$ korral (joon. 72) ning veendume, et sel puhul saadav kolmnurk sisaldab lõigud AB, AC ja BC, mis on talle teatavas mõttes «äärteks». Selleks vaatleme λ, μ ja $\lambda+\mu$ äärmisi väärtusi $\lambda=0$ (siis $0\leqslant\mu\leqslant 1$), $\mu=0$ (siis $0\leqslant\lambda\leqslant 1$) ja $\lambda+\mu=1$ (siis $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, $0\leqslant\mu\leqslant 1$) Esimesel juhul on alamhulgaks $\{X \mid \overrightarrow{AX}=\boldsymbol{b}\mu,\ 0\leqslant\mu\leqslant 1\}$, mis, nagu juba eespool selgus, on lõik AC. Teisel juhul saadav alamhulk $\{X \mid \overrightarrow{AX}=\boldsymbol{a}\lambda,\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$ kujutab endast lõiku AB Kolmandal juhul on tegemist alamhulgaga $\{X \mid \overrightarrow{AX}=\boldsymbol{a}\lambda+\boldsymbol{b}(1-\lambda),\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$, mis on lõik BC, sest $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ ja $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$ on punktide B ja C kohavektorid.

Lõikusid AB, AC ja BC nimetatakse vaadeldava kolmnurga külgedeks, nende ühendit — k o l m k ü l i k u k s[53] ABC. Kolm-

[53] Vt allviide 42.

nurka ennast tähistatakse $\triangle ABC$. Punkte A, B ja C nimetatakse selle kolmnurga või kolmküliku tippudeks, antud tippu mittesisaldavat külge selle tipu vastasküljeks.

Kolmküliku puhul kehtib järgmine sisukas teoreem, mille 1678. aastal andis itaalia matemaatik Giovanni Ceva (1647—1736).

***Teoreem* 35.3.** (Ceva teoreem). *Kui kolmküliku ABC tipud A, B ja C on ühendatud vastaskülgedel asuvate punktidega A', B' ja C', milledest ükski ei ole tipuks* (joon. 73), *siis kolmel lõigul AA', BB' ja CC' on ühine punkt parajasti sel juhul, kui*

$$(ABC')\cdot(BCA')\cdot(CAB')=1. \tag{35.4}$$

Enne selle üldise teoreemi tõestamist vaatleme tema tähtsat erijuhtu, mille tõestus on eriti lihtne.

Kui punktideks A', B' ja C' on kolmküliku külgede keskpunktid, s. t. kui $(ABC')=(BCA')=(CAB')=1$, siis lõike AA', BB' ja CC' nimetatakse kolmküliku m e d i a a n i d e k s ehk küljepoolitajateks.

***Teoreem* 35.4.** *Kolmküliku mediaanid lõikuvad ühes punktis, mis jagab igaühe neist suhtes* 2 : 1.

T õ e s t u s. Valime vabalt alguspunkti O ja tähistame tippude kohavektorid järgmiselt: $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$. Mediaani CC' suhtes 2 : 1 jagava punkti tähistame P. Sel korral (34.12) põhjal

$$\overrightarrow{OC'}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\frac{1}{2}$$

ning (34.2) järgi

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boldsymbol{c}+\overrightarrow{OC'}\cdot 2}{1+2}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}. \tag{35.5}$$

Tulemus on sümmeetriline tippude järjekorra muutmise suhtes. Järelikult punkt P, mis jagab mediaani CC' suhtes 2 : 1, on sama kõikide mediaanide jaoks. ▮

Mediaanide lõikepunkti P nimetatakse kolmnurga r a s k u s k e s k m e k s. Nagu näha, on tema kohavektor tippude kohavektorite aritmeetiline keskmine.

C e v a t e o r e e m i t õ e s t u s. Arvutuste lihtsustamiseks võtame alguspunktiks O tipu A. Tippude A, B ja C kohavektoreiks on siis $\overrightarrow{AA}=\boldsymbol{0}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$, kusjuures $\boldsymbol{b} \nparallel \boldsymbol{c}$. Kui tähistada $(BCA')=\lambda$, $(CAB')=\mu$, $(ABC')=\nu$, siis punktidel A', B' ja C' on (34.2) põhjal kohavektorid

$$\overrightarrow{AA'}=\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\lambda}{1+\lambda},\quad \overrightarrow{AB'}=\frac{\boldsymbol{c}}{1+\mu},\quad \overrightarrow{AC'}=\frac{\boldsymbol{b}\nu}{1+\nu}. \tag{35.6}$$

Võtame sirgetel BB' ja CC' vastavalt punktid P ja Q ning tähistame $(BB'P)=\varrho$, $(CC'Q)=\sigma$. Siis

$$\overrightarrow{AP}=\frac{b+\overrightarrow{AB'}\varrho}{1+\varrho}=\frac{b+c\frac{\varrho}{1+\mu}}{1+\varrho},$$

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{c+\overrightarrow{AC'}\sigma}{1+\sigma}=\frac{c+b\frac{\sigma\nu}{1+\nu}}{1+\sigma}.$$

Selgitame, kas on võimalik ϱ ja σ leida selliselt, et punktid P ja Q ühtiksid, s. t. nii, et

$$\frac{1}{1+\varrho}=\frac{\sigma\nu}{(1+\nu)(1+\sigma)},\qquad \frac{\varrho}{(1+\mu)(1+\varrho)}=\frac{1}{1+\sigma}. \tag{35.7}$$

Jagame saadud võrrandite vastavad pooled:

$$\frac{1+\mu}{\varrho}=\frac{\sigma\nu}{1+\nu};$$

järelikult

$$\varrho\sigma\nu=(1+\mu)(1+\nu). \tag{35.8}$$

Esimesest võrdusest (35.7) leiame:

$$(1+\varrho)\sigma\nu=(1+\nu)(1+\sigma);$$

siin vasakul on (35.8) põhjal $\sigma\nu+\varrho\sigma\nu=\sigma\nu+(1+\mu)(1+\nu)=$ $=\sigma\nu+1+\nu+\mu(1+\nu)$ ning parem pool on $1+\nu+\sigma+\sigma\nu$. Järelikult

$$\sigma=\mu(1+\nu) \tag{35.9}$$

ning (35.8) põhjal

$$\varrho=\frac{1+\mu}{\mu\nu}. \tag{35.10}$$

Kerge on kontrollida, et ϱ ja σ sellise valiku korral ongi

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AQ}=\frac{c+b\mu\nu}{1+\mu+\mu\nu}.$$

Võtame nüüd sirgel AA' punkti R ja tähistame $(AA'R)=\tau$. On vaja leida τ niisugune väärtus, et $\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AQ}$. Et

$$\overrightarrow{AR}=\frac{0+\overrightarrow{AA'}\tau}{1+\tau}=\frac{(b+c\lambda)\tau}{(1+\lambda)(1+\tau)}, \tag{35.11}$$

siis peaks olema

$$\frac{\mu\nu}{1+\mu+\mu\nu}=\frac{\tau}{(1+\lambda)(1+\tau)}, \quad \frac{1}{1+\mu+\mu\nu}=\frac{\lambda\tau}{(1+\lambda)(1+\tau)}. \quad (35.12)$$

Nende võrduste vastavate poolte jagamisel on tulemuseks tarvilik tingimus (35.4): $\mu\nu=\frac{1}{\lambda}$ ehk

$$\lambda\mu\nu=1, \quad (35.13)$$

mis on ka piisav, sest kui kehtib (35.13), siis võrrandid (35.12) on samaväärsed; kumbki neist on kirjutatav kujul

$$\frac{\tau}{1+\tau}=\frac{\mu\nu+1}{1+\mu+\mu\nu}$$

ja siit

$$\tau(1+\mu+\mu\nu)=(1+\tau)(\mu\nu+1)$$

ehk

$$\tau=\frac{1+\mu\nu}{\mu}. \quad (35.14)$$

Seejuures on (35.12) põhjal

$$\overrightarrow{AR}=\frac{(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\lambda)\mu\nu}{1+\mu+\mu\nu}=\frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\mu\nu}{1+\mu+\mu\nu}=\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AQ}. \quad (35.15)$$

Võrduse (35.13) abil saab ϱ, σ ja τ leitud avaldised (35.10), (35.9) ja (35.14) esitada ühetaoliselt:

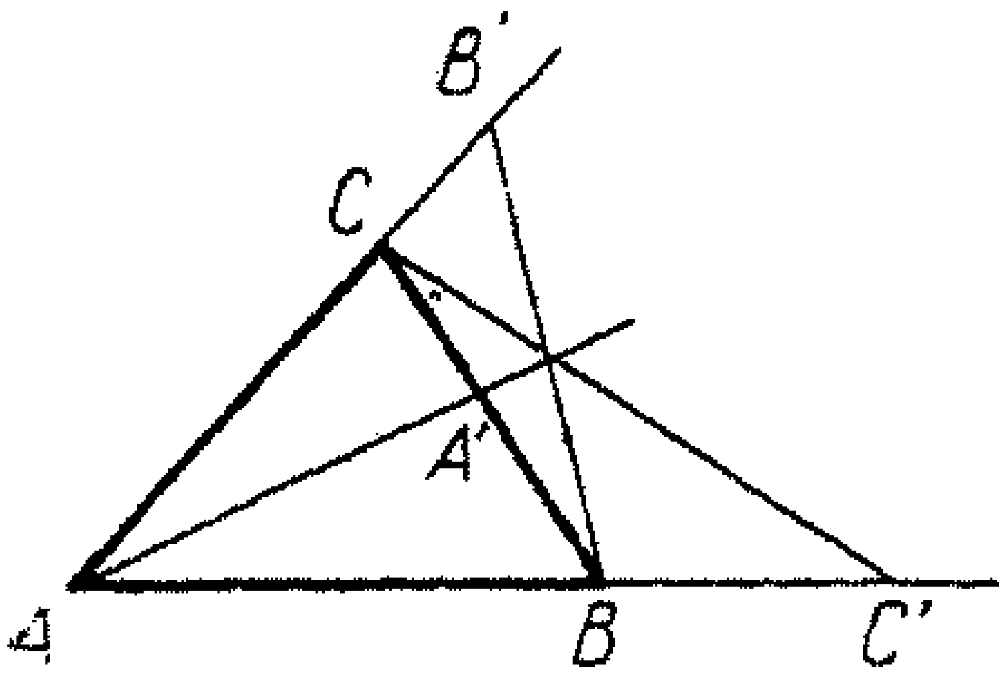
$$\varrho=\lambda(1+\mu), \quad \sigma=\mu(1+\nu), \quad \tau=\nu(1+\lambda). \quad (35.16)$$

Kui A', B' ja C' on vahemikus (BC), (CA) ja (AB), siis $\lambda>0$, $\mu>0$ ja $\nu>0$ ning (35.16) põhjal ka $\varrho>0$, $\sigma>0$, $\tau>0$, s.t. sirgete AA', BB' ja CC' ühine punkt kohavektoriga (35.15) on vahemikes (AA'), (BB'), (CC'). ∎

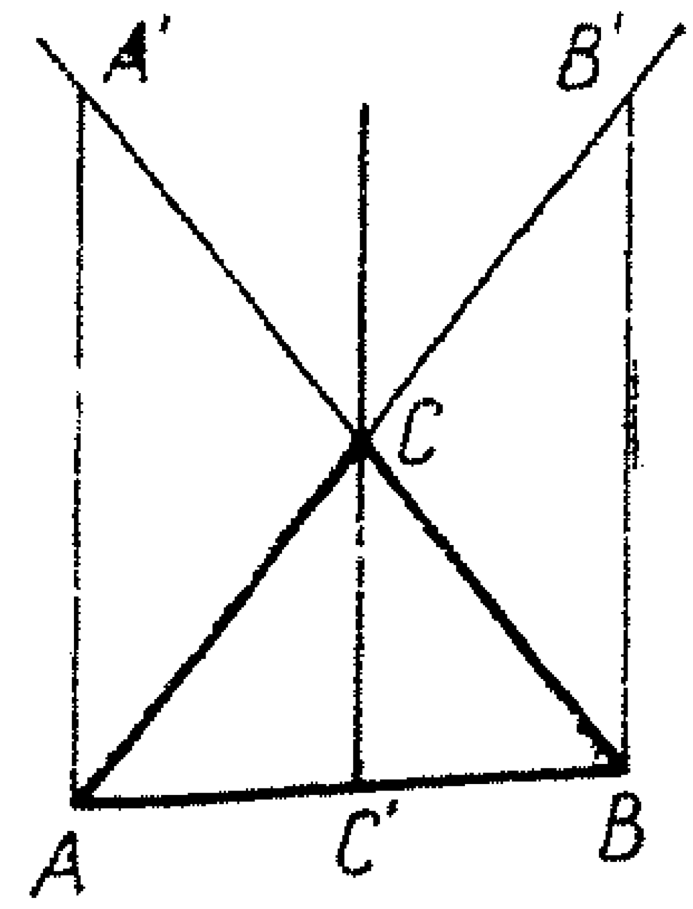
Tõestatud on õieti rohkemgi, kui väidab teoreem 35.3. Esitatud arutlustes ei ole tingimata vaja eeldada, et $\lambda>0$, $\mu>0$ ja $\nu>0$. Võrdused (35.13), (35.15) ja (35.16) tulenevad ka ilma selle eelduseta. Järelikult kehtib üldisem teoreem.

***Teoreem* 35.5.** *Kui kolme mitte ühel sirgel asuva punkti A, B ja C puhul igaüks neist on ühendatud ülejäänud kaht punkti läbivate sirgete BC, CA või AB mingite punktidega A', B' või C' selliselt, et sirged AA', BB' ja CC' lõikuvad ühes punktis P, siis $\lambda\mu\nu=1$, kus $\lambda=(BCA')$, $\mu=(CAB')$ ja $\nu=(ABC')$* (joon. 74).

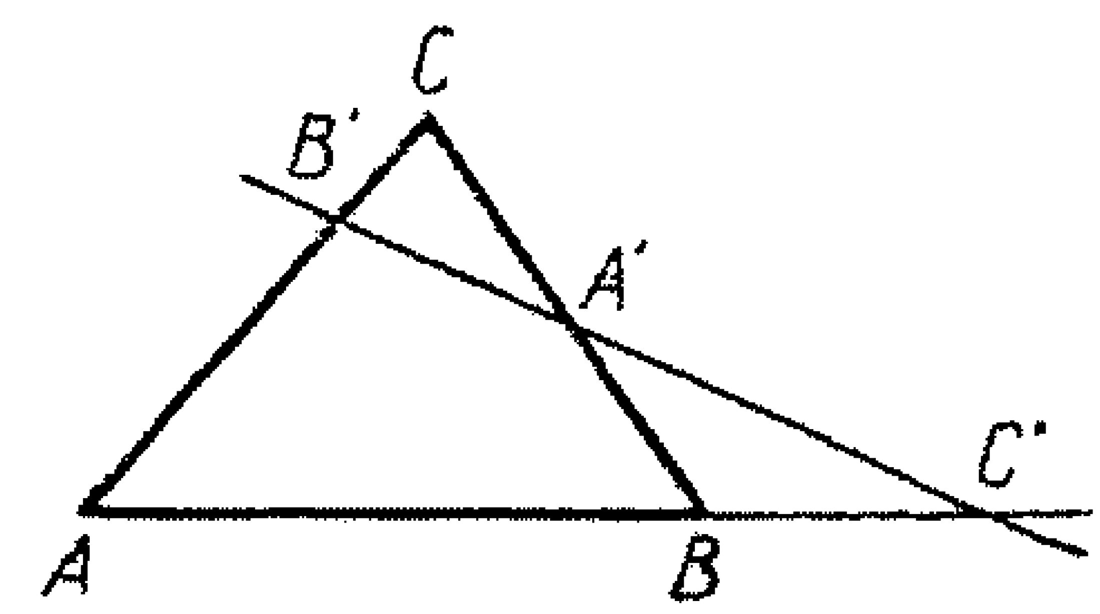
Vastupidi, kui $\lambda\mu\nu=1$, siis sirged AA', BB' ja CC' kas lõiku-



Joon. 74.



Joon. 75.



Joon. 76.

vad ühes punktis või on paralleelsed (joon. 75). *Viimane võimalus vastab juhule, kui valemeis* (35.16) *on* $\varrho = -1$ (*siis ka* $\sigma = \tau = -1$).

Viimati mainitud valemite kasutamine kolmküliku ABC mediaanide puhul, mil $\lambda = \mu = \nu = 1$, annab juba tuttava tulemuse:

$$\varrho = \sigma = \tau = 2.$$

Eelmise teoreemiga mõnevõrra analoogiline on järgmine lause.

***Teoreem* 35.6.** *Kolmküliku ABC puhul sirgetel AB, BC* ja *CA valitud punktid C', A' ja B' kuuluvad ühele sirgele parajasti siis, kui*

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = -1.$$

Selle juhu jaoks, kui punktidest A', B' ja C' kaks on kolmküliku külgedel (joon. 76), teadis teoreemi vististi juba Eukleides; taolise teoreemi sfääri geomeetrias tõestas M e n e l a o s (I saj.).

T õ e s t u s. Endisi tähistusi kasutades saame punktide A', B' ja C' kohavektorite jaoks endised avaldised (35.6), ainukese vahega, et λ, μ ja ν ei pea siin enam olema positiivsed. Vektorite

$$\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB'} = \frac{\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}\lambda}{1+\lambda} - \frac{\boldsymbol{c}}{1+\mu} = \frac{\boldsymbol{b}(1+\mu) + \boldsymbol{c}(\lambda\mu - 1)}{(1+\lambda)(1+\mu)}$$

ja

$$\overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AC'} = \frac{\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}\lambda}{1+\lambda} - \frac{\boldsymbol{b}\nu}{1+\nu} = \frac{\boldsymbol{b}(1 - \lambda\nu) + \boldsymbol{c}(1+\nu)\lambda}{(1+\lambda)(1+\nu)}$$

avaldistest selgub, et sirgete $B'A'$ ja $C'A'$ sihivektoreiks on vastavalt $(1+\mu)\boldsymbol{b} + (\lambda\mu - 1)\boldsymbol{c}$ ja $(1 - \lambda\nu)\boldsymbol{b} + \lambda(1+\nu)\boldsymbol{c}$. Punktid A', B' ja C' on ühel sirgel parajasti siis, kui need sihivektorid on kollineaarsed, s. t. kui teoreemi 15.4 põhjal

$$\lambda(1+\mu)(1+\nu) - (1 - \lambda\nu)(\lambda\mu - 1) = 0.$$

Siit

$$(1+\lambda)(1+\lambda\mu\nu)=0,$$

ning et $\lambda \neq -1$, siis tõesti $\lambda\mu\nu = -1$. ∎

36. Liitsuhe. Ühe sirge nelja erineva punktiga A, B, C ja D on seotud teatav reaalarv, millel on huvitavad omadused ja tähtsad rakendused.

Def. **36.1.** Sirge nelja erineva punkti A, B, C ja D korral lihtsuhete (ABC) ja (ABD) jagatist nimetatakse nende punktide l i i t s u h t e k s ja tähistatakse (AB, CD):

$$(AB, CD) = (ABC):(ABD).$$

Kui punktidel A, B, C ja D on koordinaadid a_i, b_i, c_i ja d_i, siis (34.5) põhjal

$$(AB, CD) = \frac{c_i - a_i}{b_i - c_i} : \frac{d_i - a_i}{b_i - d_i}.$$

Selle valemi abil on kerge kontrollida, et

$$(CD, AB) = (AB, CD), \qquad (BA, CD) = (AB, CD)^{-1}, \qquad (36.1)$$

s. t. liitsuhe (AB, CD) ei muutu, kui vahetada punktipaarid A, B ja C, D (punktide järjekorda paarides muutmata), kuid asendub pöördväärtusega, kui vahetada punktid ühes paaris.

Liitsuhe ei saa omada väärtusi 0 ja 1. Tõepoolest, kui oleks $(AB, CD) = 0$, siis oleks $(ABC) = 0$, mis viiks punktide B ja C ühtimisele; kui oleks $(AB, CD) = 1$, siis oleks $(ABC) = (ABD)$ ning teoreemi 34.1 põhjal punktid C ja D peaksid ühtima, samal ajal kui on eeldatud, et A, B, C ja D on erinevad punktid. Kõiki teisi reaalarvulisi väärtusi võib liitsuhe omada, sest kehtib järgmine lause.

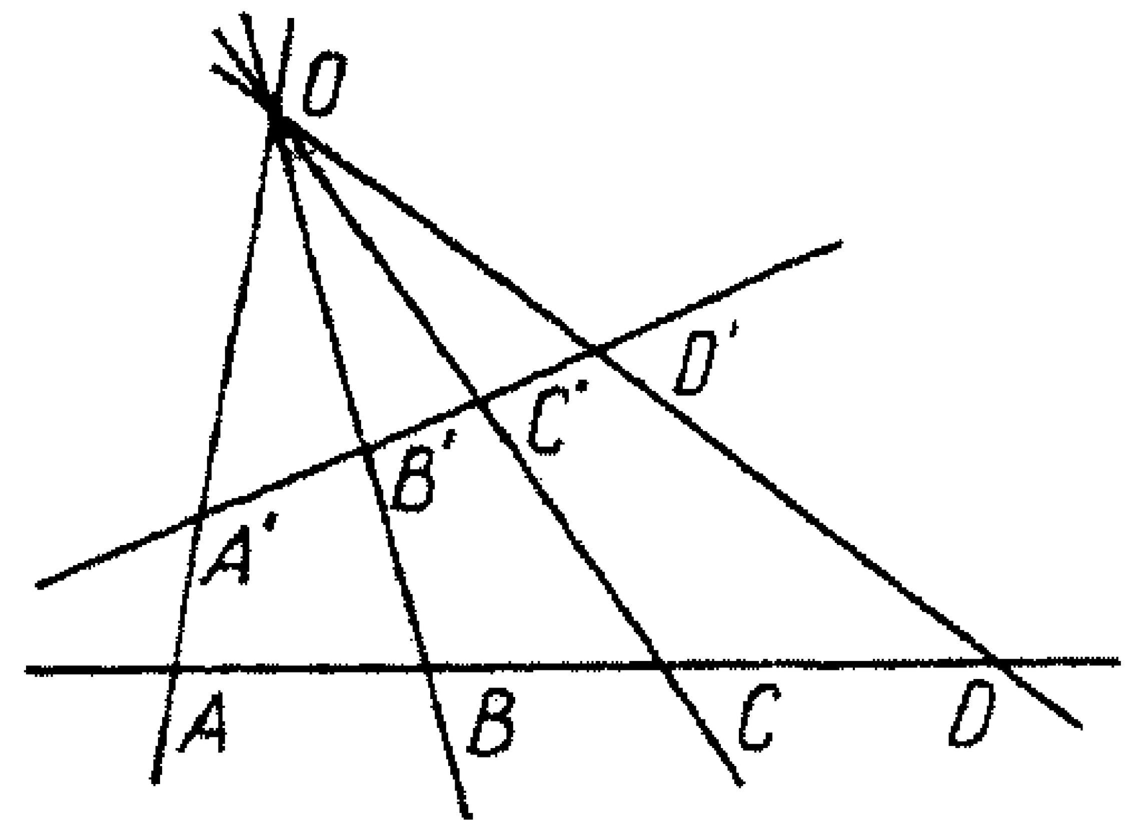
Teoreem **36.1.** *Sirge iga kolme erineva punkti A, B ja C korral ning iga reaalarvu μ korral, mis ei ole* 0, 1 *ega* $-(ABC)$, *leidub parajasti üks punkt X, nii et* $(AB, CX) = \mu$.

T õ e s t u s. Kui tähistada $(ABC) = \lambda$, siis def. 36.1 kohaselt X peab olema selline, et $\mu = \lambda:(ABX)$, s. t. $(ABX) = \frac{\lambda}{\mu}$. Edasi jääb rakendada teoreemi 34.1. ∎

Selleks et saada liitsuhteks (AB, CX) etteantud reaalarv μ, tuleb niisiis hoolitseda, et punktid A, B ja C oleksid valitud selliselt, et $(ABC) \neq -\mu$.

Liitsuhte huvitavaimat omadust väljendab järgmine teoreem.

Teoreem **36.2.** *Kui tasandil ühe sirge punktinelik A', B', C' ja D' on saadud teise sirge punktineliku A, B, C ja D projekteerimisel mingist punktist O, s. t. kui sirged AA', BB', CC' ja*



Joon. 77.

DD′ läbivad üht punkti O (joon. 77), *siis*

$$(A'B', C'D') = (AB, CD).$$

Teisiti öeldes, liitsuhe säilib projekteerimisel[54].

T õ e s t u s. Tähistame punktide kohavektorid järgmiselt:

$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}, \quad \overrightarrow{OD} = \boldsymbol{d},$$
$$\overrightarrow{OA'} = \boldsymbol{a}', \quad \overrightarrow{OB'} = \boldsymbol{b}', \quad \overrightarrow{OC'} = \boldsymbol{c}', \quad \overrightarrow{OD'} = \boldsymbol{d}'.$$

Eelduse järgi kohakuti olevad vektorid kuuluvad samale sirgele ja on seega kollineaarsed, mistõttu leiduvad reaalarvud α, β, γ ja δ, nii et

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'\alpha, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}'\beta, \quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}'\gamma, \quad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}'\delta. \tag{36.2}$$

Et C ja D on sirge AB punktid, siis (34.11) põhjal leiduvad reaalarvud σ ja τ, nii et

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\sigma + \boldsymbol{b}(1-\sigma), \quad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}\tau + \boldsymbol{b}(1-\tau). \tag{36.3}$$

Seejuures (34.7) järgi $(ABC) = \lambda$ ja $(ABD) = \mu$ on arvudega σ ja τ seotud järgmiselt:

$$\sigma = \frac{1}{1+\lambda}, \quad \tau = \frac{1}{1+\mu}$$

ning siit

$$(ABC) = \frac{1-\sigma}{\sigma}, \quad (ABD) = \frac{1-\tau}{\tau},$$

[54] Tulemusel on väärtuslikke rakendusi fotogramm-meetrias — objektide mõõtmisel fotode järgi. Kauguste suhted ja ka lihtsuhted on fotodel moonutatud, kuid kõikidel liitsuhetel on nende tegelikud väärtused.

mistõttu

$$(AB, CD) = \frac{1-\sigma}{\sigma} : \frac{1-\tau}{\tau}. \tag{36.4}$$

Kui seostesse (36.3) teha asendused võrdustest (36.2) ja võrrelda tulemusi

$$c'\gamma = a'\sigma\alpha + b'(1-\sigma)\beta, \qquad d'\delta = a'\tau\alpha + b'(1-\tau)\beta$$

analoogiliste seostega

$$c' = a'\sigma' + b'(1-\sigma'), \qquad d' = a'\tau' + b'(1-\tau'),$$

siis on tulemuseks:

$$\sigma' = \frac{\sigma\alpha}{\gamma}, \qquad 1-\sigma' = \frac{(1-\sigma)\beta}{\gamma}, \qquad \tau' = \frac{\tau\alpha}{\delta}, \qquad 1-\tau' = \frac{(1-\tau)\beta}{\delta}$$

ning järelikult

$$(A'B', C'D') = \frac{1-\sigma'}{\sigma'} : \frac{1-\tau'}{\tau'} = \frac{\frac{(1-\sigma)\beta}{\gamma}}{\frac{\sigma\alpha}{\gamma}} : \frac{\frac{(1-\tau)\beta}{\delta}}{\frac{\tau\alpha}{\delta}} =$$

$$= \frac{1-\sigma}{\sigma} : \frac{1-\tau}{\tau} = (AB, CD). \ \blacksquare$$

Liitsuhte (AB, CD) märk iseloomustab nelja punkti A, B, C ja D omavahelist paiknemist sirgel. Võrduste (36.1) põhjal see märk iseloomustab ainult punktipaare A, B ja C, D, sõltumata nende paaride järjekorrast ja punktide järjekorrast paarides. Kui $(AB, CD) > 0$, siis (ABC) ja (ABD) on samamärgilised ning punktid C ja D jagavad lõigu AB üheaegselt kas siseselt või väliselt (joon. 78); öeldakse, et punktipaarid A, B ja C, D ei lahuta teineteist. Kui $(AB, CD) < 0$, siis on olukord vastupidine (joon. 79) ning öeldakse, et paarid A, B ja C, D lahutavad teineteise.

Joon. 78.

Joon. 79.

Viimasel juhul pakub erilist huvi nn. harmooniline lahutamine. Võrdustest (36.1) nähtub, et ainsaks (AB, CD) väärtuseks μ, mis ei muutu punktide vahetamisel paarides, on $\mu = -1$, sest $\mu = \mu^{-1}$ on võimalik üksnes $\mu = \pm 1$ puhul, väärtust $\mu = 1$ ei saa aga liitsuhe omada.

Def. **36.2.** Öeldakse, et punktipaarid A, B ja C, D sirgel lahutavad teineteise harmooniliselt, kui $(AB, CD) = -1$, s. t. kui C ja D jagavad lõigu AB absoluutväärtuselt samades, kuid märgi poolest erinevates suhetes (s. t. üks siseselt, teine väliselt). Sel puhul kõneldakse ka lihtsalt, et paarid A, B ja C, D on harmoonilised.

Punktipaaride A, B ja C, D harmoonilisus on mõiste, mis (36.1) põhjal ei sõltu paaride järjekorrast ega punktide järjekorrast paarides ning teoreemi 36.2 põhjal jääb püsima projekteerimisel. Teoreemist 36.1 järeldub, et iga kolme punkti A, B ja C korral, mille puhul $(ABC) \neq 1$ (s. t. C ei ole lõigu AB keskpunkt), leidub punkt D, nii et $(AB, CD) = -1$. Seda punkti nimetatakse A, B ja C neljandaks harmooniliseks.

Ceva ja Menelaose teoreemid (s. t. teoreemid 35.5 ja 35.6) võimaldavad anda lihtsa konstruktsiooni neljanda harmoonilise leidmiseks, mille puhul kasutatakse üksnes joonlauda. Tuleb võtta vabalt sirgel AB mitteasuv punkt E ning sirgel EC asuv punkt F (joon. 80). Edasi tuleb leida BF ja AE lõikepunkt G ning AF ja BE lõikepunkt H (seades eelnevalt E ja F nii, et need sirged tõepoolest lõikuvad). Otsitavaks punktiks D on siis AB ja GH lõikepunkt.

Tõepoolest, Ceva teoreemi põhjal on

$$(ABC) \cdot (BFG) \cdot (FAH) = 1,$$

Menelaose teoreemi põhjal aga

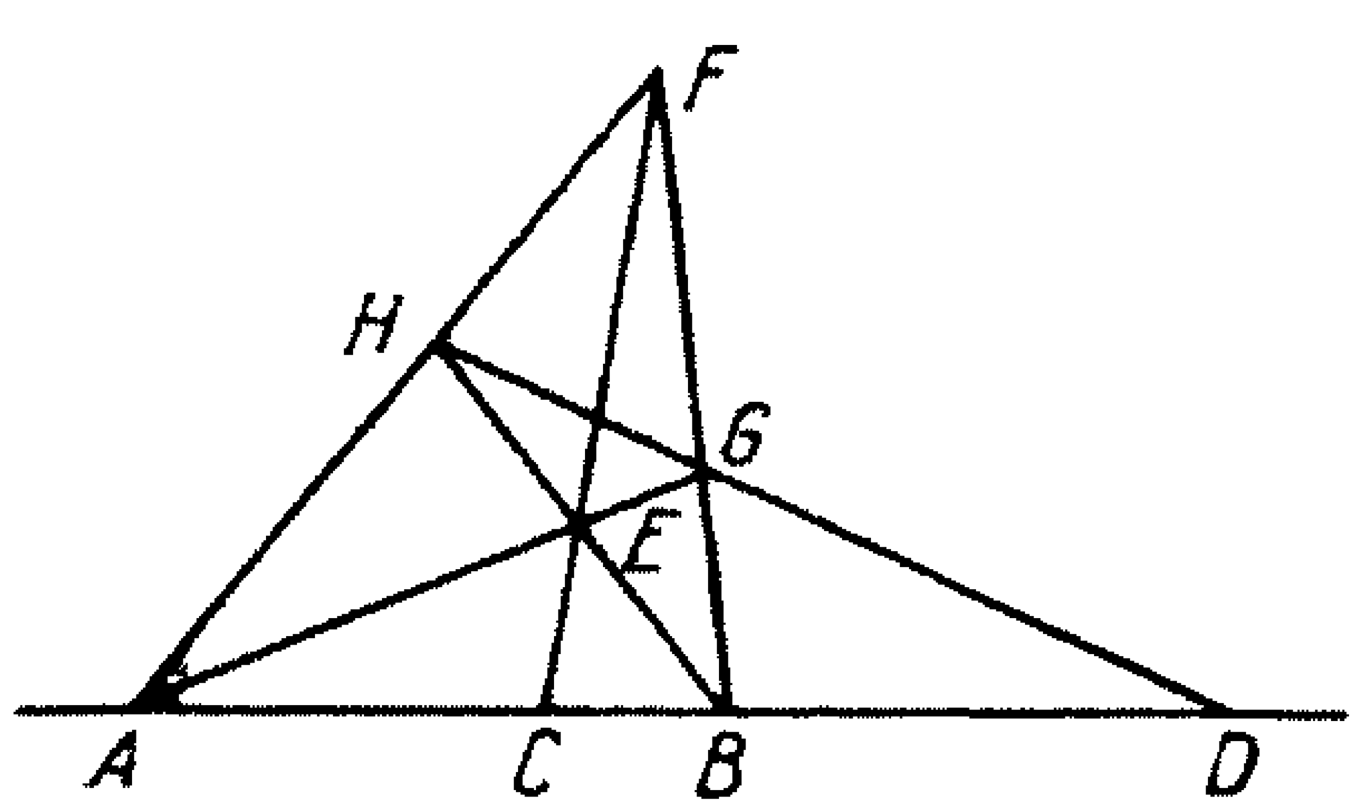
$$(ABD) \cdot (BFG) \cdot (FAH) = -1$$

ning siit pärast jagamist

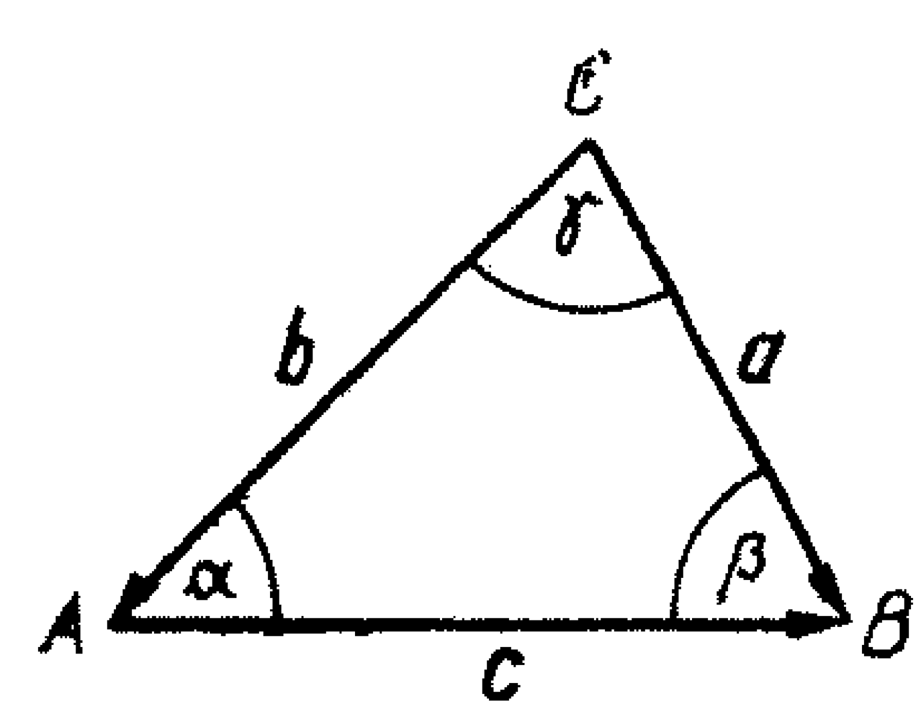
$$(AB, CD) = (ABC) : (ABD) = -1,$$

s. t. punktipaarid A, B ja C, D lahutavad teineteise harmooniliselt.

Liitsuhte ja harmoonilisusega on tegemist ka edaspidi projektiivse geomeetria käsitlemisel, kus nad on olulised mõisted.



Joon. 80.



Joon. 81.

37. Kolmnurk eukleidilises geomeetrias. Pikkuse, nurga ja pindala mõistete lisandumine eukleidilises geomeetrias võimaldab tõestada kolmnurkade kohta rea täiendavaid valemeid ja teoreeme.

Olgu antud kolmnurk $\triangle ABC$ (joon. 81). Kui tähistada, erinevalt varasemast, $\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{c}$, siis võrdusest $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ järeldub, et $\boldsymbol{c} = (-\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. Reaalarve $|\boldsymbol{a}| = a$, $|\boldsymbol{b}| = b$, $|\boldsymbol{c}| = c$ nimetatakse kolmnurga küljepikkusteks, reaalarve $\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \gamma$, $\sphericalangle(-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha$, $\sphericalangle(-\boldsymbol{c}, -\boldsymbol{a}) = \sphericalangle(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = \beta$ aga kolmnurga sisenurkadeks. Et

$$\boldsymbol{c}^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2,$$

kus $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos \sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ab \cos \gamma$, siis

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \tag{37.1}$$

Saadud valemit tuntakse nn. koosinusteoreemina. Ta seob kolmnurga $\triangle ABC$ küljepikkusi ja ühte sisenurka.

Järgnevalt vaatleme reaalarvu $S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, kus $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ on mingid kaks kolmnurga $\triangle ABC$ tippe ühendavatest vektoritest. Et (31.3) ja (31.4) põhjal $S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = S(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = S(-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, siis piisab, kui vaadelda ainult arve $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $S(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ ja $S(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})$. Osutub, et need on kõik võrdsed.

Tõepoolest, (31.4) järgi $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}|$; samal ajal areaalkorrutise omaduste põhjal

$$S(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{b} \wedge (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})| = |\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b}| = |-\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}|$$

ja

$$S(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = |(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}|.$$

Järelikult

$$S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = S(-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = S(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})$$

ning seega (29.5) põhjal

$$ab \sin \gamma = bc \sin \alpha = ca \sin \beta. \tag{37.2}$$

Pärast jagamist arvuga abc on tulemuseks seosed

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}, \tag{37.3}$$

mis väljendavad nn. siinusteoreemina tuntud vahekorda kolmnurga küljepikkuste ja sisenurkade vahel.

Positiivset reaalarvu (37.2) nimetatakse kolmnurga $\triangle ABC$ kahekordseks pindalaks $2S_{ABC}$. Seega

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b});$$

kus $a=\overrightarrow{CB}$, $b=\overrightarrow{CA}$. Kui kolmnurga tipud A, B ja C on antud oma ristkoordinaatidega a_i, b_i ja c_i tasandil või ruumis, siis $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ koordinaatideks on vastavalt b_i-c_i ja a_i-c_i ning valemi (31.4) põhjal tasandil

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|a\wedge b|=\frac{1}{2}|(b_1-c_1)(a_2-c_2)-(b_2-c_2)(a_1-c_1)|=$$

$$=\frac{1}{2}|b_1a_2-b_1c_2-c_1a_2-b_2a_1+b_2c_1+c_2a_1|$$

ehk

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1\end{matrix}\right\|, \tag{37.4}$$

ruumis aga valemite (31.7) ja (31.9) põhjal

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|a\times b|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} b_2-c_2 & b_3-c_3 \\ a_2-c_2 & a_3-c_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} b_3-c_3 & b_1-c_1 \\ a_3-c_3 & a_1-c_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} b_1-c_1 & b_2-c_2 \\ a_1-c_1 & a_2-c_2\end{vmatrix}^2}. \tag{37.5}$$

Kolmnurga pindala mõiste abil on defineeritav ka üldisema punktihulga pindala mõiste. Piirdume siin kumera hulknurgaga tasandil, mõistes selle all teatava arvu kolmnurkade ühendit, kui on täidetud järgmised tingimused: 1) iga kahe kolmnurga ühisosa on kas tühi või ühtib kolmnurkade mingi tipu või küljega, 2) iga lõik, mille otspunktid on ühendis, on tervikuna selle ühendi alamhulgaks. Kumera hulknurga pindalaks nimetame nende kolmnurkade pindalade summat, mis rahuldavad tingimust 1) ja mille ühendiks see hulknurk on.

Täiesti rangel lähenemisel tuleks veel tõestada, et kumera hulknurga selliselt defineeritud pindala ei sõltu sellest, missugusel viisil on see hulknurk lahutatud tingimust 1) rahuldavate kolmnurkade ühendiks. Paraku on selle väite tõestus liialt pikk, selleks et teda võiks esitada käesolevas kursuses.[55]

Näitame, et punktis A vektoritele $x=\overrightarrow{AB}$ ja $y=\overrightarrow{AC}$ ehitatud rööpnelinurk $\{X\,|\,\overrightarrow{AX}=x\lambda+y\mu,\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1,\ 0\leqslant\mu\leqslant 1\}$ on kumer hulknurk ning et tema

[55] Vt. D. I. Perepjolkin, Elementaargeomeetria kursus. I. Tallinn, 1951, § 58.

pindala ülalantud definitsiooni mõttes on võrdne juba varem (vt. def. 29.3) pindalaks nimetatud arvuga $S(x, y)$. Selleks märgime kõigepealt, et see rööpnelinurk sisaldab kolmnurga

$$\triangle ABC = \{X \mid \overrightarrow{AX} = x\lambda + y\mu,\ \lambda \geqslant 0,\ \mu \geqslant 0,\ \lambda + \mu \leqslant 1\}$$

kõrval veel punktihulga

$$M = \{X \mid \overrightarrow{AX} = x\lambda + y\mu,\ \lambda \leqslant 1,\ \mu \leqslant 1,\ \lambda + \mu \geqslant 1\}$$

olles samal ajal nende ühendiks. Kui $x + y = \overrightarrow{AD}$, siis (joon. 82)

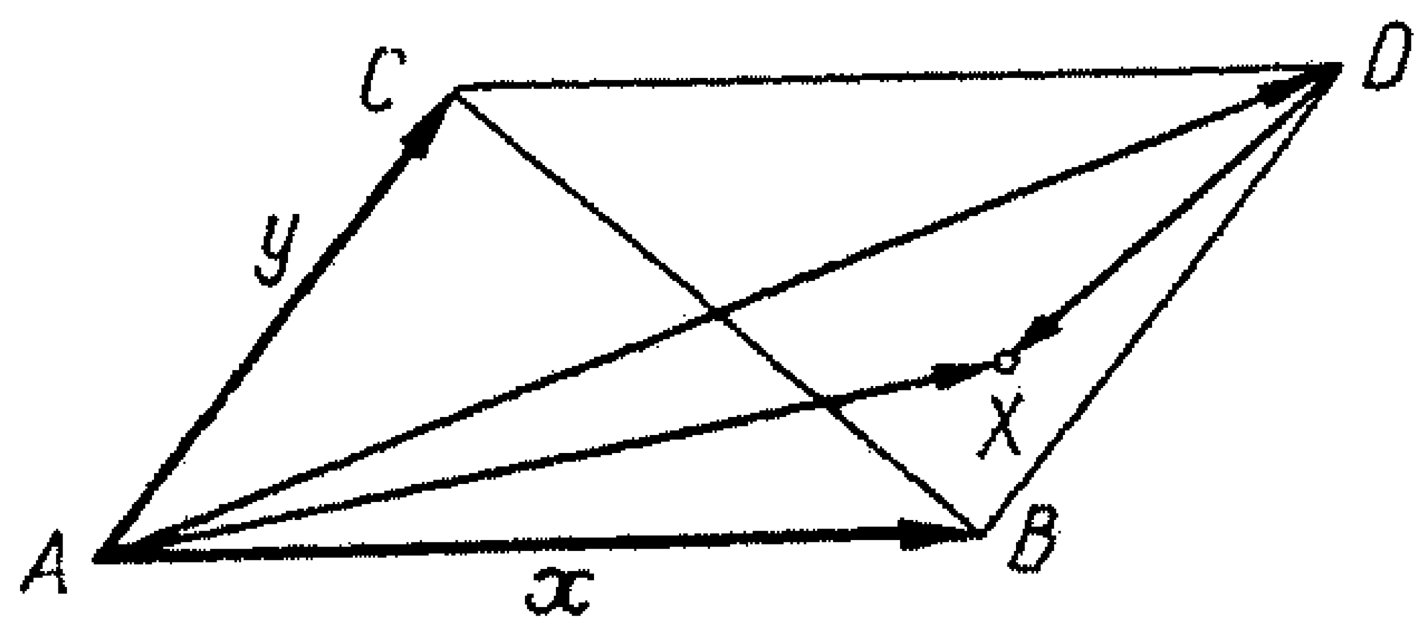
$$\overrightarrow{DX} = \overrightarrow{AX} - \overrightarrow{AD} = (\lambda - 1)x + (\mu - 1)y$$

ning kui tähistada $1 - \lambda = \varrho$, $1 - \mu = \sigma$, siis

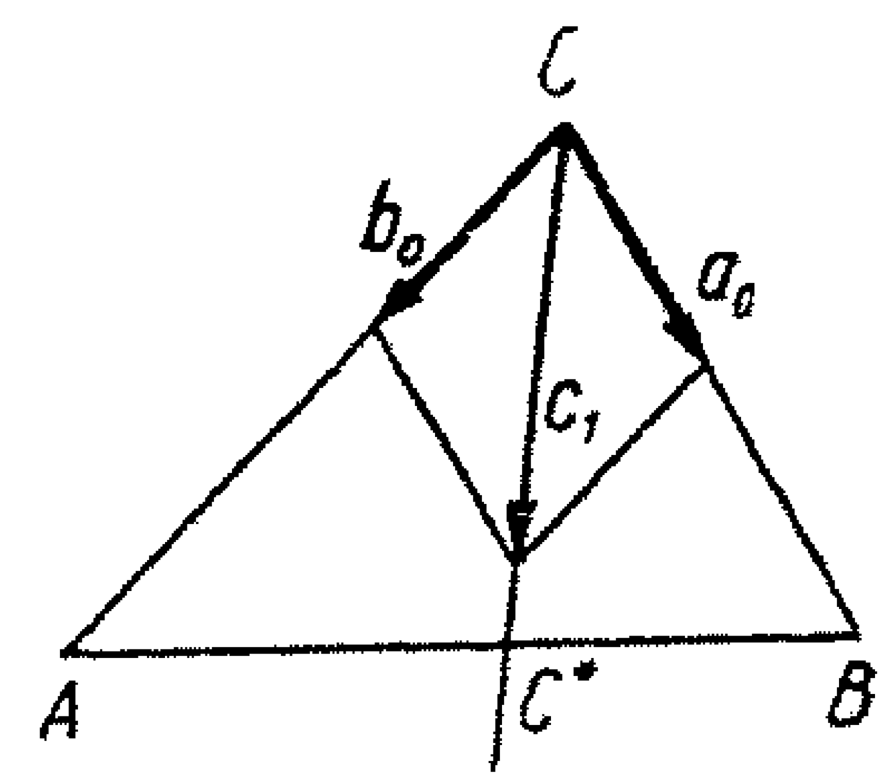
$$M = \{X \mid \overrightarrow{DX} = (-x)\varrho + (-y)\sigma,\ \varrho \geqslant 0,\ \sigma \geqslant 0,\ \varrho + \sigma \leqslant 1\}.$$

Järelikult M on punktis D vektoritele $-x$ ja $-y$ ehitatud kolmnurk $\triangle DCB$ pindalaga $S_{DBC} = \frac{1}{2}|(-x) \wedge (-y)| = \frac{1}{2}|x \wedge y| = S_{ABC}$. Et siin kolmnurkade $\triangle ABC$ ja $\triangle DCB$ puhul on rahuldatud tingimus 1) (nende ühisosaks on $\{X \mid \overrightarrow{AX} = x\lambda + y\mu,\ \lambda \geqslant 0,\ \mu \geqslant 0,\ \lambda + \mu = 1\} = \{X \mid \overrightarrow{AX} = \lambda x + (1 - \lambda)y,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$, mis kujutab endast lõiku BC), siis vaadeldava rööpküliku pindala on tõesti

$$S_{ABC} + S_{DCB} = \frac{1}{2}|x \wedge y| + \frac{1}{2}|x \wedge y| = |x \wedge y| = S(x, y).$$



Joon. 82.



Joon. 83.

Tähistame endiselt $\overrightarrow{CB} = \boldsymbol{a}$ ja $\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{b}$ ning normeerime need vektorid:

$$\boldsymbol{a}_0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{\boldsymbol{a}}{a}, \qquad \boldsymbol{b}_0 = \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{\boldsymbol{b}}{b}.$$

Osutub, et vektor $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0$ moodustab vektoritega $\boldsymbol{a}_0$ ja $\boldsymbol{b}_0$ võrdsed nurgad (joon. 83). Tõepoolest,

$$\cos \sphericalangle (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{c}_1) = \frac{\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{c}_1}{|\boldsymbol{c}_1|} = \frac{\boldsymbol{a}_0(\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0)}{|\boldsymbol{c}_1|} = \frac{1 + \boldsymbol{a}_0\boldsymbol{b}_0}{|\boldsymbol{c}_1|},$$

$$\cos \sphericalangle(\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{c}_1) = \frac{\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{c}_1}{|\boldsymbol{c}_1|} = \frac{\boldsymbol{b}_0(\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{b}_0)}{|\boldsymbol{c}_1|} = \frac{\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{b}_0+1}{|\boldsymbol{c}_1|},$$

seega $\sphericalangle(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{c}_1) = \sphericalangle(\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{c}_1)$. Sirget läbi punkti C sihivektoriga $\boldsymbol{c}_1$ nimetatakse kolmnurga $\triangle ABC$ n u r g a p o o l i t a j a k s.

***Teoreem* 37.1.** *Kolmnurga $\triangle ABC$ nurgapoolitajad lõikuvad ühes punktis Q.*

T õ e s t u s. Küljel AB leidub punkt C^*, nii et CC^* on nurgapoolitaja. Tõepoolest, lihtsuhte $(ABC^*) = \nu$ võib valida nii, et

$$\overrightarrow{CC^*} = \frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\nu}{1+\nu} \tag{37.5}$$

on kollineaarne vektoriga $\boldsymbol{c}_1 = \frac{\boldsymbol{a}}{a} + \frac{\boldsymbol{b}}{b} = \frac{\boldsymbol{a}b+\boldsymbol{b}a}{ab}$. Selleks peavad vektorid $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\nu$ ja $\boldsymbol{a}b+\boldsymbol{b}a$ olema kollineaarsed, s. t. peab olema

$$\frac{1}{a} = \frac{\nu}{b}$$

ehk

$$\nu = \frac{b}{a}. \tag{37.6}$$

Analoogiliselt, kui tähistada $(BCA^*) = \lambda$ ja $(CAB^*) = \mu$, kus sirged AA^* ja BB^* on nurgapoolitajad, siis

$$\lambda = \frac{c}{b}, \qquad \mu = \frac{a}{c}.$$

Et siin

$$\lambda\mu\nu = 1,$$

siis Ceva teoreemi põhjal nurgapoolitajad CC^*, BB^* ja AA^* lõikuvad tõesti ühes punktis Q. ∎

Nurgapoolitajaks nimetatakse sageli ka lõiku CC^*. Valemid (37.5) ja (37.6) võimaldavad arvutada tema pikkuse $|\overrightarrow{CC^*}|$, valem (35.9) aga suhte, milles Q jagab nurgapoolitaja CC^*:

$$(CC^*Q) = \mu(1+\nu) = \frac{a}{c}\left(1+\frac{b}{a}\right) = \frac{a+b}{c}. \tag{37.7}$$

Sirget CC_1, mis lõikub sirgega AB punktis C_1, nii et $\overrightarrow{CC_1} \perp \overrightarrow{AB}$, nimetatakse kolmnurga $\triangle ABC$ k õ r g u s e k s (joon. 84).

***Teoreem* 37.2.** *Kolmnurga $\triangle ABC$ kõrgused lõikuvad ühes punktis.*

Tõestus. Kui tähistada endiselt $(ABC_1)=\nu$, siis $\overrightarrow{CC_1}$ avaldub samuti nagu enne $\overrightarrow{CC'}$ valemiga (37.5). Tingimus $\overrightarrow{CC_1}\perp\overrightarrow{AB}$ on seega samaväärne võrrandiga

$$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\nu)\boldsymbol{c}=0,$$

kus $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}$, millest

$$\nu=-\frac{\boldsymbol{bc}}{\boldsymbol{ac}}=\frac{(-\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{ac}}=\frac{bc\cos\alpha}{ac\cos\beta}$$

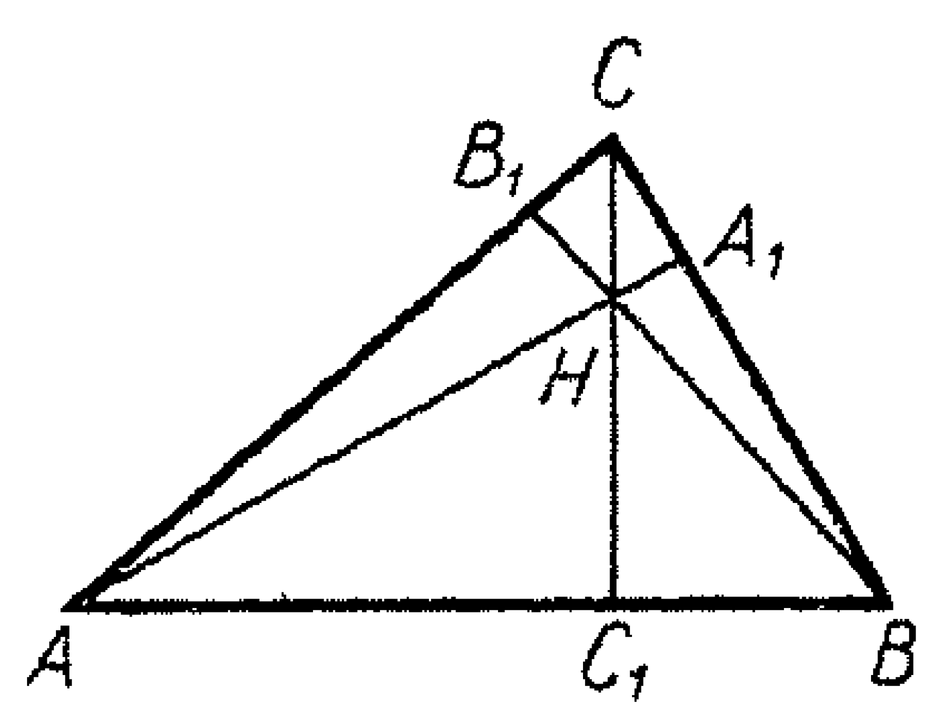
s. t.

$$\nu=(ABC_1)=\frac{b\cos\alpha}{a\cos\beta}. \tag{37.8}$$

Analoogiliselt, kui tähistada $(BCA_1)=\lambda$ ja $(CAB_1)=\mu$, siis

$$\lambda=\frac{c\cos\beta}{b\cos\gamma},\qquad \mu=\frac{a\cos\gamma}{c\cos\alpha}.$$

Et $\lambda\mu\nu=1$, siis teoreemi 35.5 põhjal kõrgused CC_1, BB_1 ja AA_1 lõikuvad tõesti ühes punktis H. ∎



Joon. 84

Läheme nüüd tagasi eelmises art-s kasutatud tähistustele, kus $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$ on kolmnurga tippude A, B ja C kohavektorid, võttes seekord alguspunktiks äsja leitud punkti H, s. t. tähistame

$$\overrightarrow{HA}=\boldsymbol{a},\qquad \overrightarrow{HB}=\boldsymbol{b},\qquad \overrightarrow{HC}=\boldsymbol{c}.$$

Et $\overrightarrow{HA}\perp\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{HB}\perp\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{HC}\perp\overrightarrow{AB}$, siis

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=0, \tag{37.9}$$

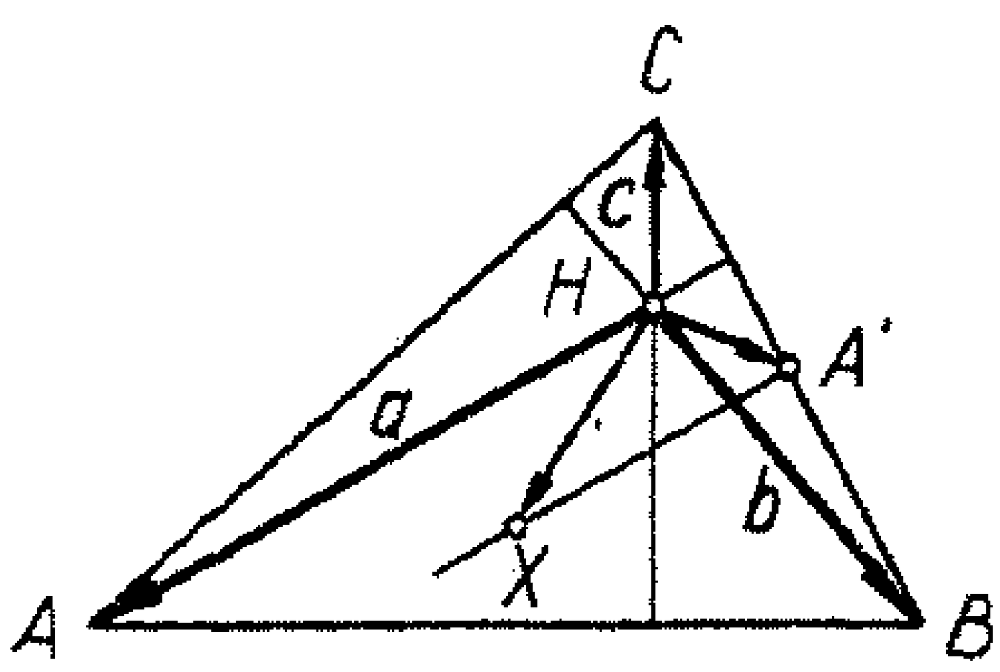
mistõttu

$$\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{bc}=\boldsymbol{ca}. \tag{37.10}$$

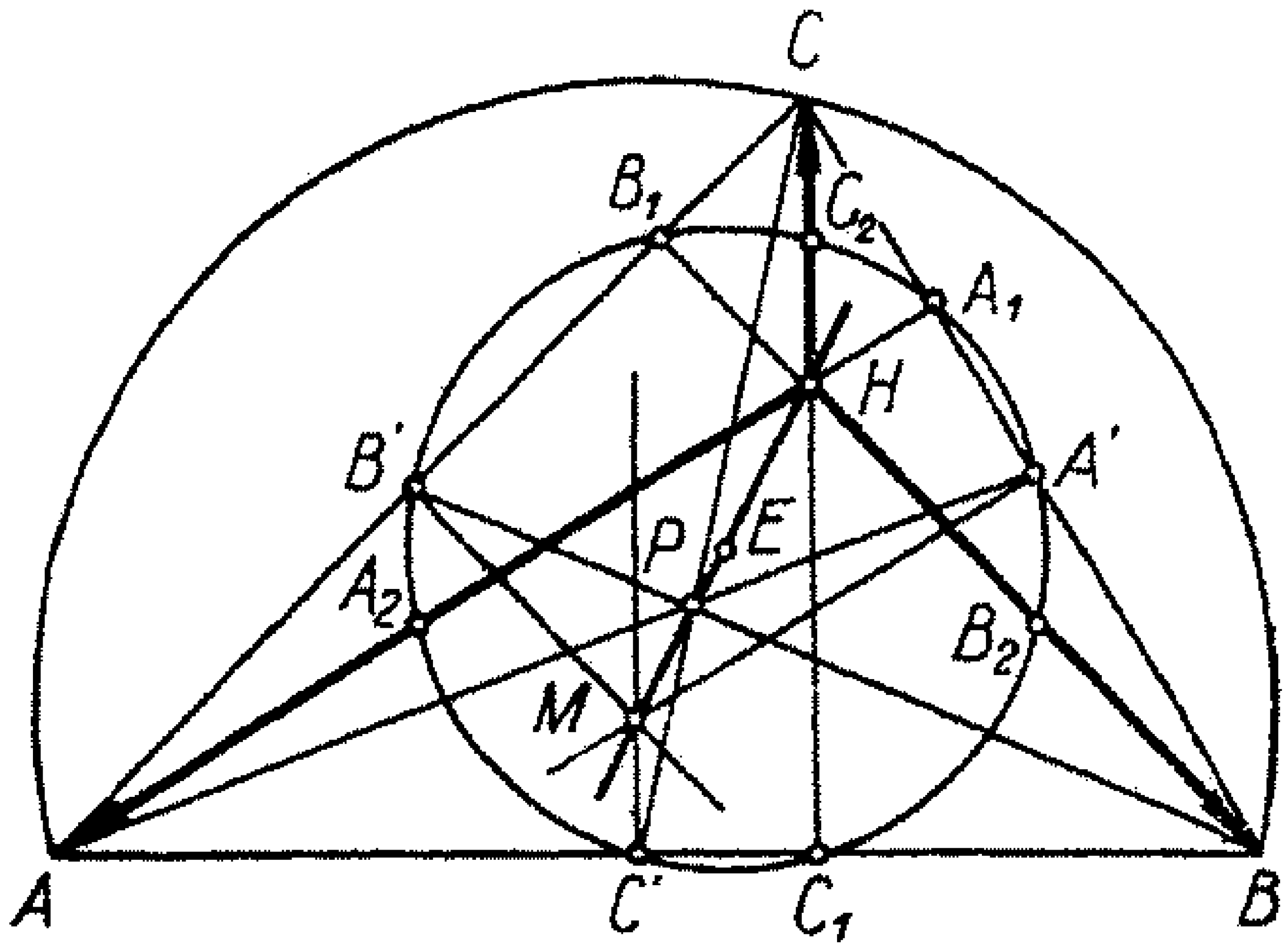
Külje BC keskpunkti A' läbivat sirget sihivektoriga $\boldsymbol{a}$ nimetatakse külje BC keskristsirgeks.

***Teoreem* 37.3.** *Kolmnurga $\triangle ABC$ külgede keskristsirged lõikuvad ühes punktis M.*

Tõestus. Punkti A' kohavektoriks on (34.12) põhjal $\overrightarrow{HA'}=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\frac{1}{2}$. Järelikult külje BC keskristsirge $\{X\,|\,\overrightarrow{A'X}=\boldsymbol{a}t\}$ suvalise punkti X kohavektoriks on (joon. 85)



Joon. 85.



Joon. 86.

$$\overrightarrow{HX}=\overrightarrow{HA'}+\overrightarrow{A'X}=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\frac{1}{2}+\boldsymbol{a}t.$$

Analoogiliselt külje CA keskristsirge punkti Y kohavektoreiks on

$$\overrightarrow{HY}=(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\frac{1}{2}+\boldsymbol{b}u.$$

Selleks et nendel ristsirgetel oleks ühine punkt M, peavad leiduma t ja u sellised väärtused, nii et oleks

$$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\frac{1}{2}+\boldsymbol{a}t=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}u$$

ehk

$$\boldsymbol{a}(2t-1)+\boldsymbol{b}(1-2u)=\boldsymbol{0}.$$

Punkt H ei saa olla korraga kolmnurga kõikidel külgedel. Seetõttu võime eeldada, vajaduse korral kolmnurga tippe ümber tähistades, et H ei ole sirgel AB. Sel korral vektorid $\overrightarrow{HA}=\boldsymbol{a}$ ja $\overrightarrow{HB}=\boldsymbol{b}$ ei ole kollineaarsed ja on järelikult lineaarselt sõltumatud. Eelmise võrduse vasak pool saab seega olla ainult triviaalne lineaarkombinatsioon, mistõttu

$$2t-1=1-2u=0,$$

s. t. $t=u=\frac{1}{2}$ ja seega

$$\overrightarrow{HM}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2}.$$

Siit ongi näha, et M on ka külje AB keskristsirgel, sest selle suvalise punkti Z kohavektoriks on

$$\overrightarrow{HZ}=(a+b)\frac{1}{2}+cv$$

ning M vastab siin väärtusele $v=\frac{1}{2}$. ∎

Art-s 35 selgus, et kolmnurga $\triangle ABC$ mediaanide lõikepunkti P (ehk raskuskeskme) kohavektoriks on

$$\overrightarrow{HP}=\frac{a+b+c}{3}.$$

Siit järeldub, et $\overrightarrow{HP}=\overrightarrow{HM}\frac{2}{3}=(\overrightarrow{HP}+\overrightarrow{PM})\frac{2}{3}$, mistõttu $\overrightarrow{HP}=$ $=2\overrightarrow{PM}$. Seetõttu kehtib järgmine lause.

***Teoreem* 37.4.** *Kolmnurga kõrguste lõikepunkt H, külgede keskristsirgete lõikepunkt M ja mediaanide lõikepunkt P on ühel sirgel, kusjuures* $(HMP)=2$.

Antud kolmnurga $\triangle ABC$ korral sirget, mis sisaldab punktid H, M ja P, nimetatakse selle kolmnurga Euleri sirgeks.[56] Osutub, et sellel sirgel on veel üks huvitav punkt.

***Teoreem* 37.5.** *Lõigu HM keskpunkt E on ühekaugusel* 1) *külgede keskpunktidest A′, B′ ja C′,* 2) *lõikude AH, BH ja CH keskpunktidest* A_2, B_2 *ja* C_2 *ning* 3) *punktidest* A_1, B_1 ja C_1, *kus kõrgused lõikuvad külgedega* (joon. 86).

Tõestus. Punkti E kohavektor $\overrightarrow{HE}$ on lõigu HM otspunktide kohavektorite $\overrightarrow{HH}=0$ ja $\overrightarrow{HM}=(a+b+c)\frac{1}{2}$ aritmeetiline keskmine, s. t.

$$\overrightarrow{HE}=\frac{a+b+c}{4}.$$

Järelikult

$$\overrightarrow{EA'}=\overrightarrow{HA'}-\overrightarrow{HE}=\frac{b+c}{2}-\frac{a+b+c}{4}=\frac{b+c-a}{4}$$

ning analoogiliselt

$$\overrightarrow{EB'}=\frac{a+c-b}{4}, \qquad \overrightarrow{EC'}=\frac{a+b-c}{4}.$$

Seetõttu on (37.10) põhjal

[56] Teoreem 37.4 pärineb Peterburi akadeemikult Leonhard Eulerilt (1707—1783), kes avaldas selle 1765. a.

$$\overrightarrow{EA'}^2=\frac{1}{16}(b^2+c^2+a^2+2bc-2ba-2ca)=\frac{1}{16}(k-2l);$$

kus $k=a^2+b^2+c^2$ ja $l=ab=bc=ca$. Samuti avalduvad ka $\overrightarrow{EB'}^2$ ja $\overrightarrow{EC'}^2$. Seega

$$|\overrightarrow{EA'}|=|\overrightarrow{EB'}|=|\overrightarrow{EC'}|=\frac{1}{4}\sqrt{k-2l}.$$

Lõigu AH keskpunkti A_2 kohavektoriks on $\overrightarrow{HA_2}=a\frac{1}{2}$. Järelikult

$$\overrightarrow{EA_2}=\overrightarrow{HA_2}-\overrightarrow{HE}=\frac{a}{2}-\frac{a+b+c}{4}=\frac{a-b-c}{4}=-\overrightarrow{EA'}$$

ning analoogiliselt

$$\overrightarrow{EB_2}=-\overrightarrow{EB'},\quad \overrightarrow{EC_2}=-\overrightarrow{EC'},$$

mistõttu

$$|\overrightarrow{EA_2}|=|\overrightarrow{EB_2}|=|\overrightarrow{EC_2}|=\frac{1}{4}\sqrt{k-2l}.$$

Punkti A_1 kohavektor $\overrightarrow{HA_1}$ on kollineaarne vektoriga $\overrightarrow{HA}=a$ ja seega $\overrightarrow{HA_1}=a\varkappa$. Seejuures vektor $\overrightarrow{A'A_1}=\overrightarrow{HA_1}-\overrightarrow{HA'}=a\varkappa-\frac{b+c}{2}$ on risti vektoriga a. Järelikult

$$\left(a\varkappa-\frac{b+c}{2}\right)a=0$$

ehk $\varkappa a^2-l=0$ ja siit

$$\varkappa=\frac{l}{a^2}.$$

Et $\overrightarrow{EA_1}=\overrightarrow{HA_1}-\overrightarrow{HE}=a\varkappa-(a+b+c)\frac{1}{4}=[a(4\varkappa-1)-b-c]\frac{1}{4}$, siis

$$\overrightarrow{EA_1}^2=\frac{1}{16}[(16\varkappa^2-8\varkappa+1)a^2+b^2+c^2-2(4\varkappa-1)(ab+ac)+2bc]=$$

$$=\frac{1}{16}\left[16\frac{l^2}{a^2}-8l+k-2\left(4\frac{l}{a^2}-1\right)2l+2l\right]=\frac{1}{16}(k-2l).$$

Analoogiliselt $\overrightarrow{EB_1}^2=\overrightarrow{EC_1}^2=\frac{1}{16}(k-2l)$, mistõttu

$$|\overrightarrow{EA_1}|=|\overrightarrow{EB_1}|=|\overrightarrow{EC_1}|=\frac{1}{4}\sqrt{k-2l}. \blacksquare$$

Antud punktist E ühekaugusel olevate punktide hulka nimetatakse **r i n g j o o n e k s** keskpunktiga E, selle punktide ühist kaugust keskpunktist — **r a a d i u s e k s**. Teoreemi 37.5 võib seega sõnastada ka järgmiselt: *punktid* A', B', C', A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 *on ühel ringjoonel.* Seda ringjoont nimetatakse antud kolmnurga **E u l e r i r i n g j o o n e k s** ehk **ü h e k s a p u n k t i r i n g j o o n e k s.**

Kolmnurga $\triangle ABC$ tipud asuvad ringjoonel keskpunktiga M, sest näiteks $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HM}=a-\frac{a+b+c}{2}=\frac{a-b-c}{2}=2\overrightarrow{EA_2}$ ning analoogiliselt $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{EB_2}$ ja $\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{EC_2}$, mistõttu

$$|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MC}|=2\,|\overrightarrow{EA_2}|=\frac{1}{2}\sqrt{k-2l}\,.$$

Tippe A, B, C läbivat ringjoont nimetatakse $\triangle ABC$ **ü m b e r r i n g j o o n e k s.** Selle raadius on kaks korda suurem Euleri ringjoone raadiusest (joon. 86).

§ 7. SIRGED TASANDIL

Eespool on mitmel korral olnud juttu sirgetest tasandil või ruumis, kuid nende süstemaatiline käsitlus seni veel puudub. Esmajoones on siin oluline kirjeldada kahe sirge kõiki võimalikke vastastikuseid asendeid tasandil või ruumis, uurida lähemalt sirgete esitusviise ning anda tingimused sirgete vastastikuse asendi määramiseks üksikute esitusviiside korral. Nende põhiülesannete lahendamisel selgub kõigepealt, et kahel sirgel on tasandil kolm, ruumis neli vastastikust asendit.

Edasises uurimises on otstarbekas esialgu piirduda sirgetega tasandil. Ilmneb, et iga sirge tasandil on esitatav lineaarvõrrandiga, mis seob punkti kaht koordinaati, kusjuures kahe sirge vastastikuste asendite tunnuseid väljendavad teatavad tingimused võrrandite kordajatele. Selgub ühtlasi, et eukleidilises planimeetrias lisanduvad neile tunnustele reaalarvulised suurused — nurgad sirgete vahel ning kaugused punktide ja sirgete vahel, mis avalduvad samuti võrrandite kordajate kaudu ning võimaldavad veelgi täpsemini iseloomustada neid asendeid.

38. Sirgepaar. Sirge tasandil või ruumis on teoreemi 16.2 kohaselt tasandi või ruumi selliste punktide X alamhulk, mille korral $\overrightarrow{AX}=k\boldsymbol{u}$, kus A on kindel punkt ja k on kindel nullist erinev vektor. Kui punktide A ja X kohavektorid alguspunktiga O

tähistada $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ ja $\overrightarrow{OX} = \boldsymbol{x}$, siis $\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ ning sirge koosneb seega punktidest X kohavektoritega

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{k}u. \tag{38.1}$$

Kui siin muutuja u — nn. p a r a m e e t e r — omandab kõikvõimalikke reaalarvulisi väärtusi, siis punkt X sellise kohavektoriga $\boldsymbol{x}$ kirjeldab parajasti vaadeldava sirge, sest sellise X korral alati $\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{k}u$. Seost (38.1) nimetatakse sirge parameetriliseks v e k t o r v õ r r a n d i k s Võrdusest $\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{k}u$ järeldub, et parameeter u on tõlgendatav punkti X koordinaadina (abstsissina) sirgel reeperi $\{A; \boldsymbol{k}\}$ suhtes.

Kui $u = 0$, siis $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, s.t. vaadeldav sirge sisaldab punkti A (ehk, nagu sagedamini kõneldakse, läbib punkti A). Kui väärtusele $u = 1$ vastav punkt kohavektoriga $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{k}1 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{k}$ tähistada B, siis $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$. Järelikult saab sirge määrata täielikult punktidega A ja B: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})u$ ehk

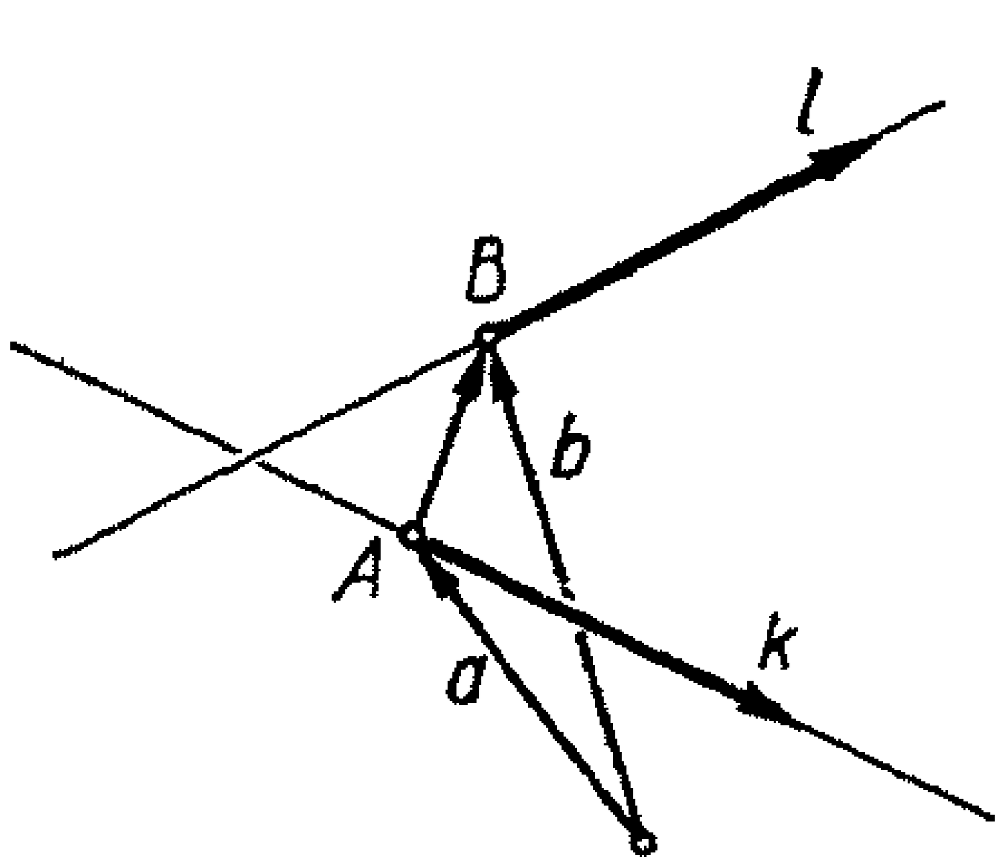
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}(1 - u) + \boldsymbol{b}u.$$

(Sirge parameetrilise vektorvõrrandi see uus kuju ühtib art-s 34 saadud tulemusega (34.11), kui viimases võtta $t = 1 - u$).

Olgu antud kaks sirget ruumis oma parameetriliste vektorvõrranditega

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{k}u,$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{l}v.$$

Siin $\boldsymbol{a}$ on esimese sirge mingi punkti A ja $\boldsymbol{b}$ teise sirge mingi punkti B kohavektor (joon. 87). Kui ruumis leiduks tasand, mis sisaldab mõlemad sirged, siis punkte A ja B ühendav vektor $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ ning sirgete sihivektorid $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$ (kui ühe ja sama tasandi vektorid) oleksid komplanaarsed. Et vektoreiks $\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$ võib võtta ruumi ükskõik missugused kolm vektorit (ainsate kitsendustega $\boldsymbol{k} \neq 0$ ja $\boldsymbol{l} \neq 0$) ning et ruumi vektorite seas leidub alati kolm mittekomplanaarset (vt. art. 16), siis kaks sirget võivad ka mitte olla ühel tasandil. Sellisel juhul neid nimetatakse k i i v a t e k s.



Joon. 87.

Tõestame, et vektorite $\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$ komplanaarsus on ka piisav tingimus vaadeldavate sirgete asumiseks ühel tasandil. Ühtlasi selgub, missugused on kahe sirge vastastikused asendid tasandi afiinses geomeetrias.

Alustame juhust, mil $\boldsymbol{k} \nparallel \boldsymbol{l}$. Sel korral võib punktiga A ja rihivektoripaariga $\{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}\}$ määrata tasandi $\{X \mid \overrightarrow{AX} = \boldsymbol{k}u + \boldsymbol{l}v\}$. Et me eeldame $\overrightarrow{AB}$ komplanaarsust vektoritega $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$, siis $\overrightarrow{AB}$ on sama tasandi vektor ning koos punktiga A on sellel tasandil ka punkt B. Järelikult vaadeldavad sirged on sellel tasandil. Osutub pealegi, et sel korral neil on olemas parajasti üks ühine punkt. Tõepoolest, et $\boldsymbol{k} \nparallel \boldsymbol{l}$, siis leiduvad reaalarvud u_0 ja v_0, nii et $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{k}u_0 + \boldsymbol{l}v_0$ ehk, teisiti, $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{k}u_0 + \boldsymbol{l}v_0$. Viimase võrduse võib kirjutada kujul

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{k}u_0 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{l}v_0, \tag{38.2}$$

kus vasakul on esimese sirge ja paremal on teise sirge mingi punkti kohavektor — seega sirgeil on ühine punkt. See on aga ainus ühine punkt, sest kui oleks veel teine selline, siis sirged ühtiksid ning eeldus $\boldsymbol{k} \nparallel \boldsymbol{l}$ oleks võimatu.

Juhul kui $\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{l}$, eeldame algul, et $\overrightarrow{AB} \nparallel \boldsymbol{k}$. Sel korral saab määrata tasandi $\{X \mid \overrightarrow{AX} = \boldsymbol{k}u + \overrightarrow{AB}v\}$. Selle vektoreiks on $\boldsymbol{k}$ ja $\overrightarrow{AB}$, ning et $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{k}\lambda$, siis ka $\boldsymbol{l}$. Koos punktiga A on sellel tasandil ka punkt B, nii et vaadeldavad sirged on tõesti ühel tasandil. Ühist punkti nüüd sirgeil olla ei saa, sest kui näiteks punkt C oleks mõlemal sirgel, siis esimese sirge $\{X \mid \overrightarrow{CX} = \boldsymbol{k}t\}$ iga punkt oleks samal ajal teise sirge $\{X \mid \overrightarrow{CX} = \boldsymbol{l}s\}$ punktiks, sest $\boldsymbol{l}s = (\boldsymbol{k}\lambda)s = \boldsymbol{k}(\lambda s)$, ning sirged ühtiksid. Siis aga $\overrightarrow{AB}$ ja $\boldsymbol{k}$ oleksid sama sirge vektorid ning eeldus $\overrightarrow{AB} \nparallel \boldsymbol{k}$ oleks võimatu.

Ühtlasi selgub siit, et on olemas veel võimalus, kus $\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{l}$ ja $\overrightarrow{AB} \parallel \boldsymbol{k}$. Sel korral $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{k}u$, s. t. B on esimese sirge punkt ning sirged ühtivad.

Ühtainsat ühist punkti omavaid sirgeid nimetatakse l õ i k u v a t e k s. Võrdusest (38.2) järeldub, et sel korral $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$ on lineaarselt sõltuvad ja seetõttu komplanaarsed, s. t. lõikuvad sirged on alati ühel tasandil. Seejuures $\boldsymbol{k} \nparallel \boldsymbol{l}$, sest kui $\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{l}$, siis sirgeil, nagu ülal selgus, kas poleks ühtegi ühist punkti või neid oleks lõpmata palju. Viimasel kahel juhul sirged on sama sihiga (vt. art. 16); kui nad on erinevad, siis neid nimetatakse p a r a l l e e l s e t e k s.

Kokkuvõttes on tõestatud järgmise teoreemi kehtivus.

Teoreem 38.1. *Kaks sirget $\{X \mid \overrightarrow{AX} = \boldsymbol{k}u\}$ ja $\{X \mid \overrightarrow{BX} = \boldsymbol{l}v\}$, mis ei ole ühel tasandil (s. t. on kiivsirged), ei oma ühist sihti ega ühist punkti. Sirged on ühel tasandil parajasti siis, kui $\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$ on komplanaarsed. Kui sel korral sirgetel ei ole ühist sihti (s. t. kui $\boldsymbol{k} \nparallel \boldsymbol{l}$), siis neil on ühine punkt (lõikuvad sirged), kui neil aga on ühine siht (s. t. kui $\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{l}$), siis ühine punkt kas puudub (paralleelsed sirged, $\overrightarrow{AB} \nparallel \boldsymbol{k}$) või sirged ühtivad ($\overrightarrow{AB} \parallel \boldsymbol{k}$).*

Afiinses geomeetrias on kahe sirge erinevaid vastastikuseid asendeid seega ruumis neli, tasandil aga kolm.

Huvitav on see, et suurema mõõtmega afiinses n-ruumis kahe sirge asendite arv ei ole suurem. Iga kaks sirget afiinses n-ruumis ($n > 3$) sisalduvad teatavas afiinses 3-ruumis — kui sirged ei ole ühel tasandil, siis selleks 3-ruumiks on $\{X \mid \overrightarrow{AX} = \boldsymbol{k}u + \boldsymbol{l}v + \overrightarrow{AB}w\}$, sest see sisaldab punktid $A(u = v = w = 0)$ ja $B(u = v = 0,\ w = 1)$ ning selle vektorite hulgas $\{\boldsymbol{k}u + \boldsymbol{l}v + \overrightarrow{AB}w\}$ on nii $\boldsymbol{k}(u = 1,\ v = w = 0)$ kui $\boldsymbol{l}(u = w = 0,\ v = 1)$.

39. Sirge üldvõrrand. Tasandil asuva sirge parameetriline vektorvõrrand (38.1) on samaväärne kahe võrrandiga

$$x_1 = a_1 + uk_1, \qquad x_2 = a_2 + uk_2, \tag{39.1}$$

mida nimetatakse sirge parameetrilisteks võrranditeks. Sirge on seega käsitletav ka kui punktide

$$X(a_1 + uk_1,\ a_2 + uk_2)$$

hulk, kus u on parameeter ning k_1 ja k_2 (kui sihivektori $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{0}$ koordinaadid) ei ole korraga nullid.

Parameetriline vektorvõrrand (38.1) tähendab seejuures tingimust kahe vektori $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{k}$ lineaarseks sõltuvuseks, sest ta on teisendatav kujju

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{k}u$$

ning on ise järeldatav üldisest sõltuvuse tingimusest

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\lambda + \boldsymbol{k}\mu = 0,$$

sest selles kindlasti $\lambda \neq 0$ (vastandjuhul oleks $\boldsymbol{k}\mu = 0$, kus $\mu \neq 0$, mis on aga eelduse $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{0}$ tõttu võimatu). Seetõttu võib rakendada teoreemi 15.4, mille kohaselt tasandi kaks vektorit on lineaarselt sõltuvad parajasti siis, kui nende vektorite koordinaatidest moodustatud teist järku determinant on võrdne nulliga. Sellest järeldub, et võrrand (38.1) on samaväärne järgmise tingimusega punkti X koordinaatide jaoks:

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = 0$$

ehk

$$(x_1 - a_1)k_2 - (x_2 - a_2)k_1 = 0$$

ehk

$$-k_2x_1 + k_1x_2 = -k_2a_1 + k_1a_2. \qquad (39.2)$$

Järelikult kehtib järgmine lause.

***Teoreem* 39.1.** *Kui sirge tasandil läbib punkti $A(a_1, a_2)$ ja on sihivektoriga $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2)$, siis ta koosneb parajasti tasandi nendest punktidest, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit* (39.2).

Tegemist on, nagu näha, järgmist tüüpi võrrandiga:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0; \qquad (39.3)$$

siin on tähistatud $A_1 = -k_2$, $A_2 = k_1$, $A_3 = -k_1a_2 + k_2a_1$. Kitsenduseks on nõue, et kordajatest A_1 ja A_2 vähemalt üks oleks nullist erinev, sest vektor

$$\boldsymbol{k} = (A_2, -A_1)$$

kui sirge sihivektor on nullist erinev. (Selle tingimuse tarvilikkus on arusaadav, sest kui $A_1 = A_2 = 0$, siis võrrand (39.3) kas kaoks hoopis või viiks $A_3 \neq 0$ korral vastuoluni.)

Võrrandit (39.3) nimetatakse sirge ü l d v õ r r a n d i k s. Ta kujutab endast lineaarset kahe muutujaga võrrandit, mis sisaldab vähemalt üht neist muutujatest.

Kas iga seda tüüpi võrrand osutub teatava sirge üldvõrrandiks, s. t. kas iga niisuguse võrrandi korral tasandi kõigi nende punktide hulk, mille koordinaadid rahuldavad seda võrrandit, osutub teatavaks sirgeks tasandil? Vastus on jaatav.

Tõestuseks vaatleme vabalt võetud võrrandit (39.3), milles kordajad A_1 ja A_2 pole korraga nullid. Sel korral leidub vähemalt üks punkt $A(a_1, a_2)$, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit, s. t.

$$A_1a_1 + A_2a_2 + A_3 = 0$$

(näiteks $A_1 \neq 0$ korral võib võtta $a_1 = -\frac{A_3}{A_1}$, $a_2 = 0$). Kui saadud võrdusest avaldada A_3 ja asendada võrrandisse (39.3), võib viimase kirjutada kujul (39.2), kus $k_2 = -A_1$, $k_1 = A_2$. Teoreemi 39.1 põhjal sirge, mis on määratud punktiga $A(a_1, a_2)$ ja sihivektoriga $\boldsymbol{k} = (A_2, -A_1)$, koosnebki parajasti punktidest, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit (39.3).

***Teoreem* 39.2.** *Iga võrrand*

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0,$$

mille kordajatest A_1 ja A_2 vähemalt üks on nullist erinev, on teatava sirge üldvõrrand, kusjuures vektor $\boldsymbol{k} = (A_2, -A_1)$ on selle sirge sihivektor.

Võrrandiga (39.3) on samaväärne iga niisugune võrrand, mis on saadud tema läbikorrutamisel vabalt võetud reaalarvuga $\lambda \neq 0$. Iga võrrand

$$(\lambda A_1)x_1+(\lambda A_2)x_2+(\lambda A_3)=0$$

esitab seega sama sirge mis lähtevõrrand (39.3). Uue võrrandi järgi määratud sihivektoriks $(\lambda A_2 - \lambda A_1)$ on seejuures $\lambda \boldsymbol{k}$. Siin on tähtis, kas sirge on orienteeritud või mitte. Orienteeritud sirge puhul on loomulik λ märk valida nii, et $\lambda \boldsymbol{k}$ oleks sirgel samas suunas milles $\boldsymbol{k}$; sel puhul üldvõrrandi kordajate märgid on täielikult määratud. Mitteorienteeritud sirge korral puudub võimalus kordajate märke fikseerida ning lubatav on võrrandi pooli korrutada ka negatiivse arvuga.

Ühtlasi selgub siit tarvilik ja piisav tingimus vabalt võetud vektori $\boldsymbol{k}=(k_1, k_2)$ kuulumiseks võrrandiga $A_1x_1+A_2x_2+A_3=$ $=0$ antud sirge vektorite hulka: selleks on

$$A_1k_1+A_2k_2=0, \tag{39.4}$$

sest see võrdus on kirjutatav kujul

$$\frac{k_1}{-A_2}=\frac{k_2}{A_1}$$

ja tähendab seega tõesti, et $\boldsymbol{k} \parallel (-A_2, A_1)$.

Olgu tasandil antud kaks sirget üldvõrranditega

$$\begin{aligned} A_1x_1+A_2x_2+A_3=0, \\ B_1x_1+B_2x_2+B_3=0; \end{aligned} \tag{39.5}$$

sirgete sihivektoreiks on siis $\boldsymbol{k}=(A_2, -A_1)$ ja $\boldsymbol{l}=(B_2, -B_1)$. Sirgete lõikumisega on teoreemi 38.1 põhjal tegemist parajasti siis, kui $\boldsymbol{k} \nparallel \boldsymbol{l}$, s. t. kui teoreemide 16.5 ja 15.4 järgi

$$\begin{vmatrix} A_2 & -A_1 \\ B_2 & -B_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

ehk

$$A_1B_2-A_2B_1\neq 0. \tag{39.6}$$

Lõikepunkti koordinaadid rahuldavad sel korral korraga mõlema sirge üldvõrrandit ning moodustavad seetõttu nendest võrranditest koosneva süsteemi (39.5) lahendi. Viimase leidmiseks tuleb korrutada võrrandite pooli kord arvudega B_2 ja $-A_2$, kord arvudega $-B_1$ ja A_1 ning liita tulemused. Sel puhul tekivad seosed

$$\begin{aligned} (A_1B_2-A_2B_1)x_1+(A_3B_2-A_2B_3)=0, \\ (A_1B_2-A_2B_1)x_1+(A_1B_3-A_3B_1)=0, \end{aligned} \tag{39.7}$$

millest tänu eeldusele (39.6) on tõesti võimalik leida x_1 ja x_2 üheselt määratud väärtused.

Tingimuse (39.6) vasakut poolt

$$A_1B_2 - A_2B_1 = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}$$

nimetatakse süsteemi (39.5) determinandiks. Kui see on erinev nullist, siis süsteemil on, nagu selgus, parajasti üks lahend.

Kui

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0, \tag{39.8}$$

s. t. kui $\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{l}$, siis on teoreemi 38.1 järgi kaks võimalust: sirged kas on paralleelsed või ühtivad. Ühtimise korral sirgetel on ühiseid punkte, s. t. süsteemil (39.5) on olemas vähemalt üks lahend. Viimane peab rahuldama ka sellest süsteemist järelduvaid seoseid (39.7), see on aga (39.8) puhul võimalik üksnes siis, kui

$$A_3B_2 - A_2B_3 = A_1B_3 - A_3B_1 = 0. \tag{39.9}$$

Saadud tingimustele võib anda mõnevõrra lihtsama kuju. Et $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{0}$ ja $\boldsymbol{l} \neq \boldsymbol{0}$, siis tingimuse (39.8) võib kirjutada ka kujul

$$A_1 = \lambda B_1, \quad A_2 = \lambda B_2. \tag{39.10}$$

Tehes siit asendused seostesse (39.9), saame:

$$B_2(A_3 - \lambda B_3) = 0, \quad B_1(\lambda B_3 - A_3) = 0,$$

ning et siin B_1 ja B_2 ei ole korraga nullid, siis

$$A_3 = \lambda B_3. \tag{39.11}$$

Siit on näha, et sirgete võrrandeist (39.5) esimene on saadav teisest selle läbikorrutamisel reaalarvuga λ, s. t. tingimused (39.8) ja (39.9) ehk nendega samaväärsed (39.10) ja (39.11) on ka piisavad sirgete ühtimiseks.

Pärast neid ettevalmistusi on lihtne tõestada järgmine teoreem.

***Teoreem* 39.3.** *Üldvõrranditega* (39.5) *antud sirged* 1) *lõikuvad, kui*

$$\frac{A_1}{B_1} \neq \frac{A_2}{B_2}, \tag{39.12}$$

(*seejuures lõikepunkti koordinaadid moodustavad süsteemi* (39.5) *lahendi*), 2) *on paralleelsed, kui*

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \neq \frac{A_3}{B_3}, \tag{39.13}$$

ning 3) *ühtivad, kui*

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}. \tag{39.14}$$

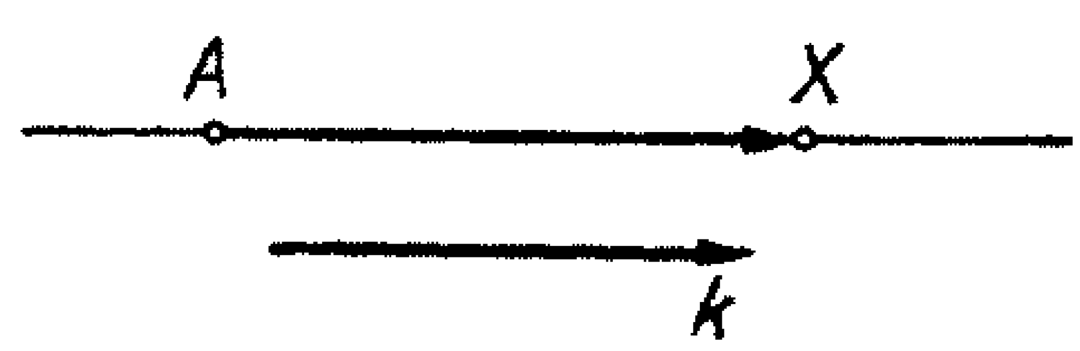
Tõestus. Tingimus (39.12) nõuab täpselt sama mida (39.6). Edasi, art-s 15 tehtud kokkuleppe põhjal on (39.14) võrduste (39.10) ja (39.11) kompaktsem kirjutusviis. Lõpuks tingimused (39.13) väljendavad ülejäänud kolmandat võimalust ja vastavad seega kolmandale võimalusele sirgete paiknemises nende paralleelsusele. ∎

Märgime, et teoreemis antud eeskiri lõikuvate sirgete lõikepunkti leidmiseks on heas kooskõlas teoreemi ülejäänud kahe väitega. Paralleelsetel sirgetel pole ühist punkti ja tõepoolest pole süsteemil (39.5) sel korral lahendeid, sest tema järeldustest (39.7) vähemalt üks on vastuoluline. Kui sirged ühtivad, siis (39.10) ja (39.11) põhjal süsteemi (39.5) esimene võrrand on saadav teisest selle poolte korrutamisel arvuga λ ja võrrandid on seega samaväärsed; süsteemi lahendeiks on kõikide nende punktide koordinaadid, mis asetsevad ainsal võrranditega (39.5) antud sirgel.

40. Üldvõrrandi erikujud. Sirge üldvõrrandi algkuju (39.2) võib pärast lihtsaid teisendusi kirjutada ka kergemini meeldejääva võrrandina:

$$\frac{x_1 - a_1}{k_1} = \frac{x_2 - a_2}{k_2}. \tag{40.1}$$

Et lugejais on $\overrightarrow{AX}$ ja nimetajais $\boldsymbol{k}$ koordinaadid, siis kooskõlas teoreemiga 15.4 on siin kirjas nõue $\overrightarrow{AX} \parallel \boldsymbol{k}$, viimane on aga tõesti rahuldatud parajasti siis, kui X kuulub punktiga A ja sihivektoriga $\boldsymbol{k}$ määratud sirgele (joon. 88).



Joon 88.

Sirge võib olla antud ka teisiti, näiteks kahe punktiga $A(a_1, a_2)$ ja $B(b_1, b_2)$. Sirge üheks sihivektoriks on siis $\boldsymbol{k} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ ning sirge üldvõrrandi koostamiseks saame sel juhul eeskirja

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2}. \tag{40.2}$$

Saadud võrrandit nimetatakse sirge võrrandiks kahe punkti järgi.

Kõige lihtsam on siiski talitada järgmiselt. Kui on antud või leitud sirge sihivektor $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2)$, siis on (39.2) põhjal teada, et sirge üldvõrrand on kujuga

$$-k_2x_1 + k_1x_2 + A_3 = 0.$$

Vabaliikme A_3 väärtuse leiame nüüd, nõudes, et sirge mingi antud punkti koordinaadid rahuldaksid seda võrrandit.

Üldvõrrandiga (39.3) saab esitada iga sirge tasandil. Mõningate kitsenduste korral saab üldvõrrandile anda ühe või teise spetsiaalsema kuju, mis ei ole küll sedavõrd universaalne kui üldkuju, kuid osutub mõnel juhul kasulikuks. Erandeiks on reeperi suhtes eriliselt asetsevad sirged.

Kaht sirget, mis lähevad läbi alguspunkti $O(0, 0)$ baasivektorite $\boldsymbol{e}_1$ ja $\boldsymbol{e}_2$ sihis, nimetatakse koordinaattelgedeks, vastavalt x_1- ja x_2-teljeks. Et $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 1 + \boldsymbol{e}_2 0 = (1, 0)$, siis x_1-telje üldvõrrandi koostamiseks tuleb võrrandis (39.2) võtta $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $a_1 = a_2 = 0$. Järelikult x_1-telje võrrand on

$$x_2 = 0.$$

Täpselt samuti veendume, et x_2-telje võrrand on

$$x_1 = 0.$$

Selliseid tulemusi võiski oodata, sest koordinaattelgedel on ju tõesti parajasti need punktid, mille üks koordinaat on võrdne nulliga.

Rakendame nüüd teoreemi 39.3 tingimusi koordinaattelgede ja üldvõrrandiga

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0 \qquad (40.3)$$

antud sirge vastastikuse asendi uurimisel. Et näiteks x_1-telje korral $B_1 = 0$, $B_2 = 1$, $B_1 = 0$, siis vaadeldav sirge ühtib x_1-teljega parajasti siis, kui

$$\frac{A_1}{0} = \frac{A_2}{1} = \frac{A_3}{0},$$

s. t. kui $A_1 = A_3 = 0$ (vt. teoreemile 15.4 järgnevat kokkulepet). Sel puhul $A_2 \neq 0$ (sest A_1 ja A_2 ei saa olla korraga nullid) ja võrrand (40.3) on tõesti samaväärne x_1-telje võrrandiga $x_2 = 0$. Täpselt samuti veendume, et võrrandiga (40.3) antud sirge ühtib x_2-teljega, kui $A_2 = A_3 = 0$.

Paralleelsus x_1-teljega leiab aset parajasti siis, kui $A_1 = 0$, $A_3 \neq 0$. Sel korral saab võrrandile (40.3) anda kuju $x_2 = a_2$, kus $a_2 = -\frac{A_3}{A_2} \neq 0$ Analoogiliselt on vaadeldava sirge ja x_2-telje paralleelsuse tunnuseks $A_2 = 0$, $A_3 \neq 0$. Sirge võrrandile saab siis anda kuju $x_1 = a$, kus $a_1 = -A_3 : A_1$.

Kui $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, siis sirge lõikab mõlemat koordinaattelge. Selleks et leida näiteks x_1-telje ja sirge lõikepunkt, tuleb lahendada võrranditest $x_2 = 0$ ja (40.3) koosnev süsteem; lõikepunktiks on $\left(-\frac{A_3}{A_1}, 0\right)$. Lõikumine toimub reeperi alguspunktis $O(0, 0)$ parajasti siis, kui $A_3 = 0$.

Jätame nüüd kordamööda vaatluse alt välja need juhud, mil sirge üldvõrrandi üks kordaja või vabaliige on võrdne nulliga. Vaatleme näiteks ainult neid sirgeid, mis lõikavad x_2-telge. Sel korral $A_2 \neq 0$. Võrrandi (40.3) poolte jagamisel arvuga A_2 ja liikmete ümberkorraldamisel saame talle anda kuju

$$x_2 = m_1 x_1 + p_2, \tag{40.4}$$

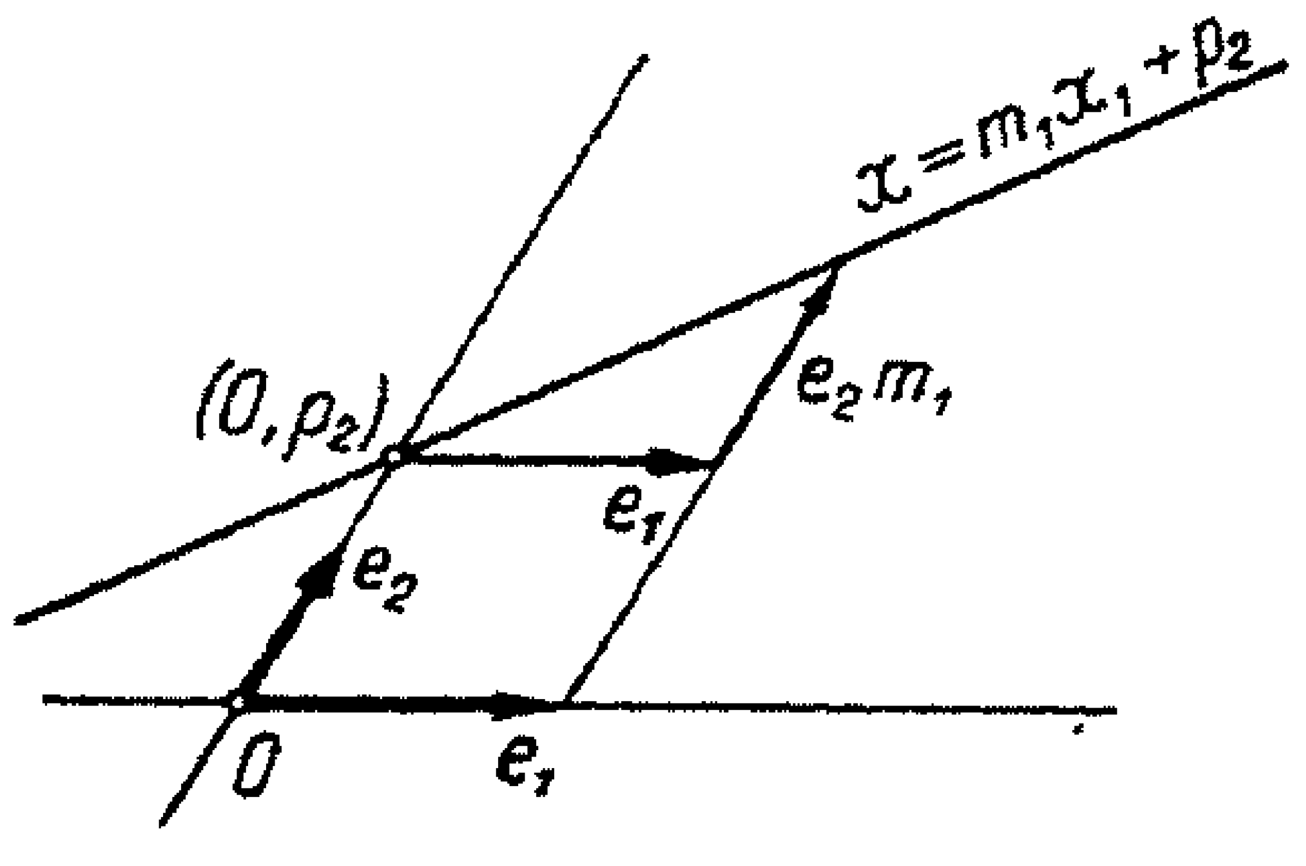
kus $m_1 = -\frac{A_1}{A_2}$ $p_2 = -\frac{A_3}{A_2}$. Arvud m_1 ja p_2 on antud sirgega seotud üheselt, sest võrrandiga $x_2 = m'_1 x_1 + p'_2$ antud sirge saab esialgsega ühtida ainult siis, kui üldkujule viidud võrrandeis

$$m_1 x_1 - x_2 + p_2 = 0,$$
$$m'_1 x_1 - x_2 + p'_2 = 0$$

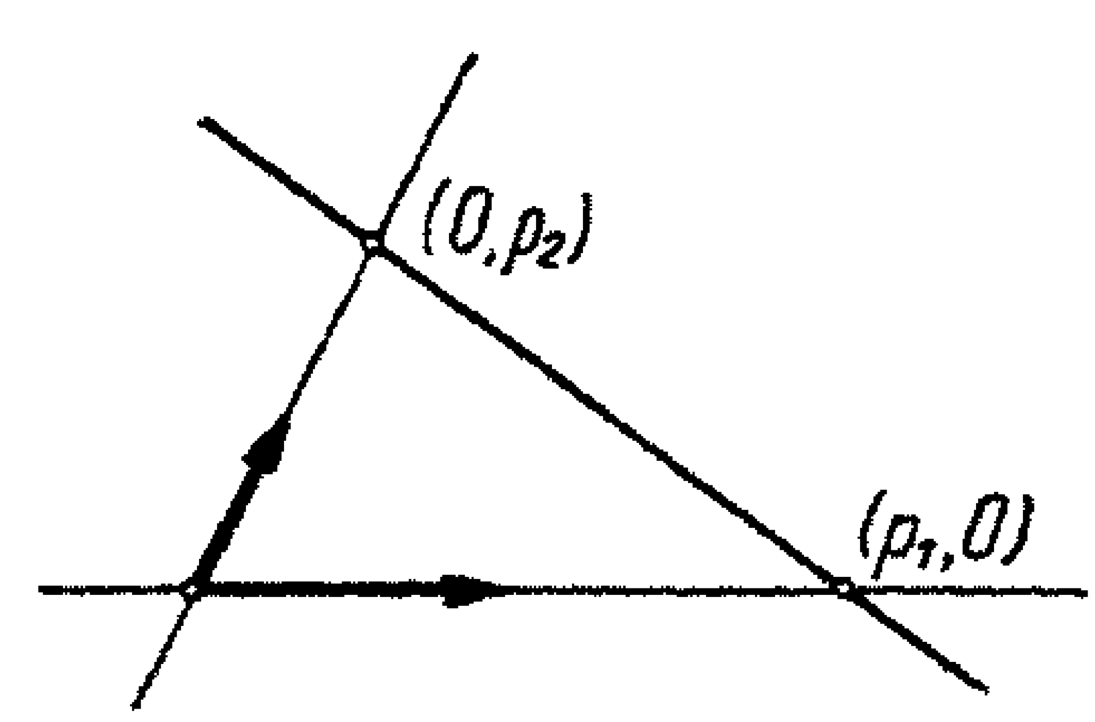
on teoreemi 39.3 põhjal

$$\frac{m_1}{m'_1} = \frac{-1}{-1} = \frac{p_2}{p'_2},$$

s. t. kui $m_1 = m'_1$ ja $p_2 = p'_2$. Suurusi m_1 ja p_2 nimetatakse võrrandiga (40.4) antud sirge vastavalt *ordinaattõusuks* ja *algordinaadiks* (joon. 89). Viimane on nimelt, nagu kerge veenduda, sirge ja x_2-telje lõikepunkti $(0, p_2)$ ordinaat. Sirgete paralleelsuse tunnuseks on $m_1 = m'_1$, s. t. ordinaattõusude võrdumine.



Joon. 89.



Joon. 90.

Sirged, mis lõikavad x_1-telge, saab analoogiliselt esitada võrrandiga

$$x_1 = m_2 x_2 + p_1; \tag{40.5}$$

seejuures arve m_2 ja p_1, mis on antud sirgega seotud üheselt, nimetatakse selle a b s t s i s s t õ u s u k s ja a l g a b s t s i s s i k s. Paralleelsetel sirgetel on sama abstsisstõus, algabstsiss on sirge ja x_1-telje lõikepunkti abstsiss.

On jäänud vaadelda juhtu, mil sirge lõikab mõlemat koordinaattelge, kuid ei läbi alguspunkti O. Sel korral üldvõrrandis (40.3) $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$ ja $A_3 \neq 0$ ning võrrandile võib anda kuju

$$\frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} = 1. \tag{40.6}$$

Samal viisil nagu eespool võib kontrollida, et ka siin on suurused p_1 ja p_2 sirgega üheselt seotud. Neid nimetatakse sirge t e l g - l õ i k u d e k s (joon. 90) — sirge ja koordinaattelje lõikepunktideks on praegu nimelt punktid $(p_1, 0)$ ja $(0, p_2)$, nagu on lihtne kindlaks teha. Kui need lõikepunktid on teada, siis saab (40.6) järgi otsekohe kirja panna sirge võrrandi. (Soovitame lugejal kontrollida, et (40.2) viib punktide $A(p_1, 0)$ ja $B(0, p_2)$ puhul täpselt sama tulemuseni.)

41. Sirgekimbud. Oletame, et on antud kaks sirget oma üldvõrranditega ning on vaja määrata sirged, mis läbivad antud sirgete lõikepunkti. Sel puhul on kasulik teada võtet, mis võimaldab kirja panna iga seda lõikepunkti läbiva sirge üldvõrrandi, ilma et vahepeal oleks vaja arvutada lõikepunkti enda koordinaate.

***Def.* 41.1.** Punkti A läbivate sirgete hulka tasandil nimetatakse s i r g e k i m b u k s ehk lihtsalt k i m b u k s keskpunktiga A.

Olgu antud kimbu kaks sirget üldvõrranditega

$$\begin{aligned} A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 &= 0, \\ B_1x_1 + B_2x_2 + B_3 &= 0. \end{aligned} \tag{41.1}$$

Et need sirged lõikuvad, siis

$$A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0. \tag{41.2}$$

***Teoreem* 41.1.** *Sirgekimp, mis sisaldab sirged üldvõrranditega* (41.1), *koosneb parajasti nendest sirgetest, mille üldvõrrandiks on*

$$\lambda(A_1x_1 + A_2x_2 + A_3) + \mu(B_1x_1 + B_2x_2 + B_3) = 0, \tag{41.3}$$

kus λ ja μ on vabalt võetud reaalarvud, mis pole korraga nullid.

Tõestus. Võrrand (41.3) määrab tõesti alati sirge, sest ta on korraldatav kujju

$$(\lambda A_1+\mu B_1)x_1+(\lambda A_2+\mu B_2)x_2+(\lambda A_3+\mu B_3)=0, \qquad (41.4)$$

milles x_1 ja x_2 kordajad ei ole korraga nullid, sest vastandjuhul võrduste

$$\lambda A_1+\mu B_1=0, \qquad \lambda A_2+\mu B_2=0$$

pooli sobivalt korrutades ja liites saaksime (samuti nagu seoste (39.7) tuletamisel):

$$\lambda(A_1B_2-A_2B_1)=0, \qquad \mu(A_1B_2-A_2B_1)=0$$

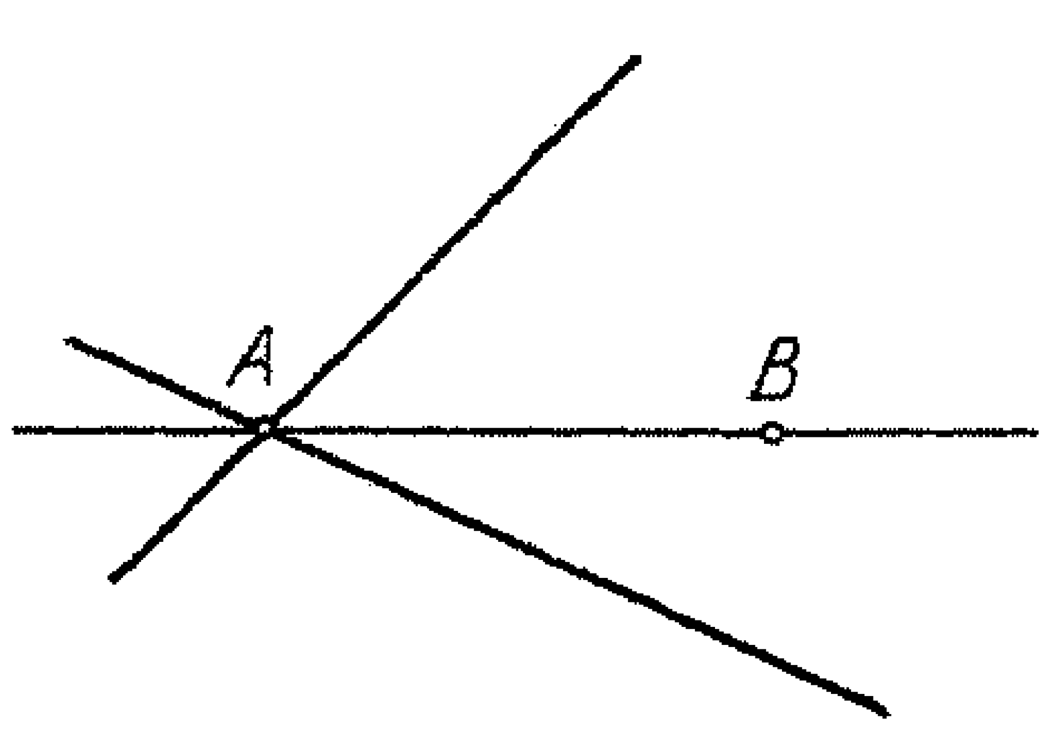
ning siit (41.2) põhjal järelduks, et $\lambda=\mu=0$, mis on praegu lubamatu. Edasi jääb rakendada teoreemi 39.2.

Seejuures võrrand (41.3) määrab λ ja μ iga väärtuse puhul kimpu kuuluva sirge. Tõepoolest, kimbu keskpunkti A koordinaadid rahuldavad võrrandeid (41.1) ning muudavad seega võrrandi (41.3) vasakul poolel olevad suluavaldised eraldi nullideks, järelikult muutub nulliks kogu vasak pool, see aga tähendabki, et võrrandiga (41.3) määratud sirge läbib kimbu keskpunkti A ja kuulub seega kimpu.

Kas võrrandi (41.3) abil saab määrata kimpu kuuluva iga sirge? Valime kimbus vabalt sirge ja sellel vabalt keskpunktist A erineva punkti $B(b_1, b_2)$ (joon. 91). Võtame

$$\lambda=B_1b_1+B_2b_2+B_3, \qquad \mu=-(A_1b_1+A_2b_2+A_3) \qquad (41.5)$$

ja moodustame vastava võrrandi (41.3). Lihtne on veenduda, et B koordinaadid rahuldavad seda võrrandit. Seejuures ei saa niiviisi võetud λ ja μ olla korraga nullid, sest see tähendaks, et B koordinaadid rahuldavad võrrandeid (41.1), ning B ühtiks keskpunktiga A, mis on praegu lubamatu. Järelikult (41.3) abil moodustatud võrrand määrab sirge, mis läbib A ja B, ning seega ühtib kimbus vabalt valitud sirgega.



Joon 91.

Pakub huvi selgitada, mida esitab võrrand (41.3) siis, kui lõikumise tingimus (41.2) ei ole täidetud, s. t. kui antud sirged on paralleelsed või ühtivad. Sel korral leidub teoreemi 39.3 põhjal reaalarv $\varkappa$, nii et $B_1=\varkappa A_1$, $B_2=\varkappa A_2$. Järelikult võrrand (41.4) on kujuga

$$(\lambda+\mu\varkappa)(A_1x_1+A_2x_2)+(\lambda A_3+\mu B_3)=0,$$

ning kui ta üldse määrab sirge (s. t. kui $\lambda+\mu\varkappa\neq 0$), siis selle sirge üldvõrrandiks on

$$A_1x_1+A_2x_2+C=0, \tag{41.6}$$

kus $C=\dfrac{\lambda A_3+\mu B_3}{\lambda+\varkappa\mu}$.

Kui võrranditega (41.1) antud sirged ühtivad, s. t. kui $B_3 = \varkappa A_3$, siis $C = A_3$ ning seega ka võrrandiga (41.3) ehk (41.6) määratud sirge ühtib nendega. Kui antud sirged on paralleelsed, s. t. kui $B_3 \neq \varkappa A_3$, siis $C \neq A_3$, ning ka saadud uus sirge on paralleelne nendega. Seejuures on niiviisi määratav iga sirge, mis on paralleelne kahe antud sirgega, sest endist viisi saab λ ja μ valikuga (41.5) garanteerida, et võrrandiga (41.3) määratud sirge läbib vabalt etteantud punkti B; ka on siis

$$\lambda+\mu\varkappa=B_1b_1+B_2b_2+B_3-(A_1b_1+A_2b_2+A_3)\varkappa=B_3-\varkappa A_3\neq 0.$$

***Def.* 41.2.** Kõigi omavahel paralleelsete sirgete hulka tasandil nimetatakse sirgete e b a k i m b u k s.

Ülalöeldu võtab kokku järgmine lause.

***Teoreem* 41.2.** *Sirgete ebakimp, mis sisaldab paralleelsed sirged üldvõrranditega* (41.1), *koosneb parajasti sirgetest üldvõrrandiga* (41.3), *kus λ ja μ on vabalt võetud reaalarvud, mis pole korraga nullid.*

Rakenduslikku väärtust sellel teoreemil ei ole, sest kui sirge on antud esimese võrrandiga (41.1), siis iga temaga paralleelse sirge üldvõrrand on kõige lihtsamini leitav kujust (41.6), kus on vaja täiendavalt määrata ainult vabaliikme C sobiv väärtus.

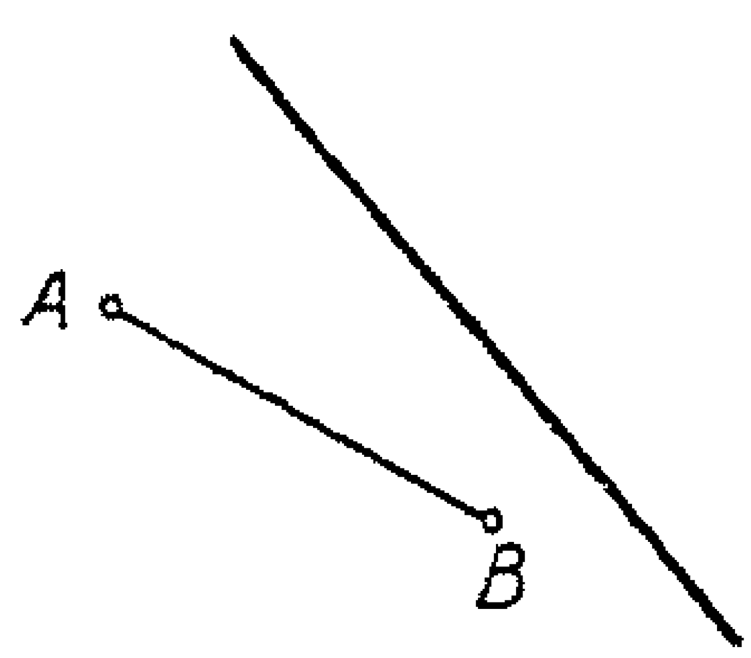
Siit nähtub ühtlasi, et ebakimbus sõltub sirge ühestainsast parameetrist, näiteks reaalarvust C. Sama võib öelda ka kimbu kohta. Tähtsad ei ole mitte reaalarvud λ ja μ eraldi, vaid tähtis on ainult nende suhe $\lambda:\mu$, sest võrrandit (41.3) võib läbi korrutada ükskõik missuguse nullist erineva reaalarvuga. Kimbu sirge sõltuvus ühestainsast parameetrist saab eriti selgeks, kui oletada, et on teada kimbu keskpunkti A koordinaadid (a_1, a_2). Kimbu sirge saab siis esitada võrrandiga

$$\frac{x_1-a_1}{k_1}=\frac{x_2-a_2}{k_2},$$

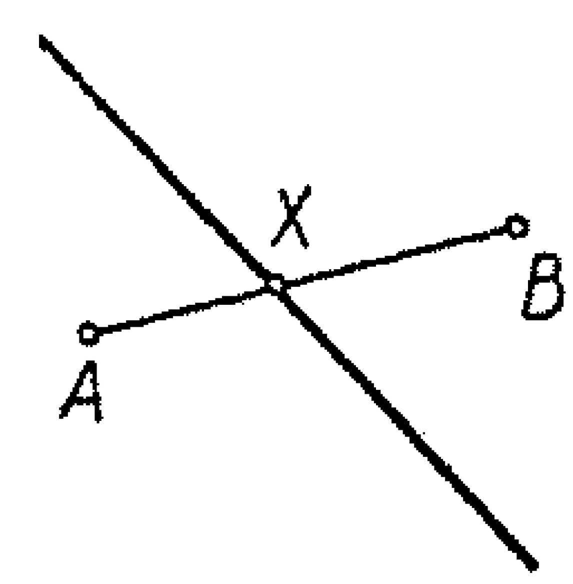
millega juhul $k_1\neq 0$ on samaväärne võrrand $(x_2-a_2)=m_1(x_1-a_1)$ ning juhul $k_2\neq 0$ võrrand $x_1-a_1=m_2(x_2-a_2)$, kus $m_1=\dfrac{k_2}{k_1}$ ja $m_2=\dfrac{k_1}{k_2}$ on vastavalt sirge ordinaattõus või abstsisstõus. Ainsaks parameetriks ongi kas m_1 või m_2 (kimbust tuleb seejuures välja jätta esimesel juhul x_2-teljega, teisel juhul x_1-teljega paralleelne sirge).

Analoogia kimpude ja ebakimpude vahel juhib järgmistele mõttekäikudele. Kui igale kimbule seada vastavusse tema keskpunkt, siis tekib kimpude hulga 1 : 1-pealekujutus tasandi punktide hulgale. Kahe kimbu ühine sirge on seejuures vastavaid punkte läbivaks sirgeks. Analoogiliselt võib talitada ka ebakimpudega. Igaühele neist võib seada vastavusse teatava fiktiivse ebapunkti, mida nimetatakse ka ebakimbu sirgete ühiseks «lõpmata kaugeks punktiks». Ebakimbu sirgeid võib nimelt vaadelda «lõikuvatena» selles ebapunktis. Antud kimbu ja ebakimbu ühise sirge korral võib lugeda, et ta läbib mitte üksnes esimese keskpunkti, vaid ka teisele vastava ebapunkti. Kui selliselt talitada, siis võib iga kahte sirget lugeda lõikuvateks, ainult et paralleelsed sirged lõikuvad ebapunktis. Tänu sellele kaovad paljude tulemuste sõnastustes ebameeldivad erandjuhud, mis tulenevad paralleelsete sirgete paari erandlikkusest. Õieti ei ole siis põhjustki teha teravat vahet punktide ja ebapunktide vahel. Kui neid nimetada ühtekokku lihtsalt «punktideks», siis saame lihtsa olukorra, kus igal kahel erineval sirgel on olemas parajasti üks ühine «punkt» ja iga kaht erinevat «punkti» läbib parajasti üks sirge (ka ebapunktide hulka tuleb siis lugeda sirgeks). Niiviisi jõuame projektiivse tasandi mõisteni, mida me lähemalt käsitleme edaspidi art-s 103. Siinkohal lisame veel ainult järgmise märkuse.

Kui kimbu sirgetel on olemas ühine punkt, siis ebakimbu sirgetel kui omavahel paralleelsetel sirgetel on olemas ühine siht. Järelikult ebapunkt on tõlgendatav ka sihina.



Joon. 92



Joon. 93.

42. Pooltasand ja lineaarvõrratused. Olgu antud sirge tasandil. Sirgele kuuluvad kõik need punktid, mille koordinaadid rahuldavad lineaarset võrrandit

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3=0. \qquad (42.1)$$

Tasandi kõigi ülejäänud punktide korral võrrandi vasak pool on nullist erinev reaalarv, mis on kas positiivne või negatiivne. Osutub, et selle reaalarvu märgi abil on võimalik iseloomustada punktide paiknemist sirge suhtes.

***Def.* 42.1.** Öeldakse, et tasandi punktid A ja B, mis ei ole antud sirgel, on ühel pool seda sirget, kui nende vahel ei ole selle sirge ühtegi punkti (joon. 92), ning teine teisel pool seda sirget vastupidisel juhul (joon. 93).

Tähistame

$$\alpha=A_1a_1+A_2a_2+A_3,$$
$$\beta=A_1b_1+A_2b_2+A_3,$$

kus (a_1, a_2) ja (b_1, b_2) on punktide A ja B koordinaadid.

***Teoreem* 42.1.** *Võrrandiga* (42.1) *määratud sirgel mitteasuvad punktid A ja B on ühel pool sirget parajasti siis, kui $\alpha\beta > 0$, ja teine teisel pool sirget parajasti siis, kui $\alpha\beta < 0$.*

Tõestus. Olgu A ja B teine teisel pool sirget. Nende vahel on siis sirge punkt X. Ühelt poolt avalduvad selle koordinaadid (34.4) järgi kujul

$$x_i = \frac{a_i + \lambda b_i}{1+\lambda},$$

kus $\lambda = (ABX) > 0$, teiselt poolt aga rahuldavad sirge võrrandit (42.1):

$$A_1 \frac{a_1 + \lambda b_1}{1+\lambda} + A_2 \frac{a_2 + \lambda b_2}{1+\lambda} + A_3 = 0;$$

seega

$$\alpha + \lambda\beta = 0.$$

Et $\lambda > 0$ ning A ega B ei ole vaadeldaval sirgel, siis α ja β on nullist erinevad erimärgilised reaalarvud, mistõttu $\alpha\beta < 0$.

Vastupidi, kui $\alpha\beta < 0$, siis sirge AB punkt X, mis on määratud tingimusega $(ABX) = -\frac{\alpha}{\beta}$, on, nagu kerge kontrollida, võrrandiga (42.1) määratud sirgel; et samal ajal $(ABX) > 0$, siis X on ka punktide A ja B vahel, s. t. A ja B on teine teisel pool sirget.

Võrdus $\alpha\beta = 0$ on praegu lubamatu, sest A ega B koordinaadid ei tohi rahuldada võrrandit (42.1). Seetõttu on veel ainult võimalus, kus $\alpha\beta > 0$. See võrratus kehtib parajasti siis, kui A ja B vahel ei ole antud sirge punkti (sest sellise punkti olemasolu on samaväärne võrratusega $\alpha\beta < 0$), s. t. kui A ja B on ühel pool seda sirget. ∎

Tõestatud teoreemi abil on lihtne kontrollida, et «ühel pool sirget olemise» vastavus (ehk relatsioon; vt. art. 8) tasandi kõigi nende punktide hulgas, mis jäävad järele pärast sirge punktide eemaldamist, kujutab endast ekvivalentsust (vt. art. 18). Tõepoolest, teoreemi järgi on ühel pool sirget parajasti niisugused kaks punkti, mille koordinaatide asendamine sirge üldvõrrandi vasakusse poolde annab nullist erinevad samamärgilised reaalarvud. Seetõttu on selge, et kirjeldatud relatsioon on 1° refleksiivne, 2° sümmeetriline ja 3° transitiivne. Kontrollime näiteks omadust 3° (eelmised kaks on ilmsed). Kui A ja B on ühel pool sirget ning B ja C on ühel pool sirget, siis A ja B koordinaatide ning B ja C koordinaatide asendamisel sirge üldvõrrandi vasakusse poolde on tulemuseks samamärgilised reaalarvud, mistõttu ka A ja C on ühel pool sirget.

Ekvivalentsusklasse on siin ainult kaks: ühte kuuluvad need punktid $X(x_1, x_2)$, mille korral

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3>0, \tag{42.2}$$

teise need, mille puhul

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3<0. \tag{42.3}$$

Kumbagi ekvivalentsusklassi nimetatakse pooltasandiks, seejuures üht nimetatakse teise täiendpooltasandiks. Sirget võrrandiga $A_1x_1+A_2x_2+A_3=0$ nimetatakse ükskõik kumma sellise pooltasandi ääreks.

Pooltasandi mõistega on seega antud geomeetriline tähendus kahe muutujaga lineaarvõrratusele: tasandi punktide hulk, mille koordinaadid rahuldavad sellist võrratust, osutub pooltasandiks. Näiteks võrratused $x_2>0$ ja $x_2<0$ esitavad kaks pooltasandit, mille ühiseks ääreks on x_1-telg võrrandiga $x_2=0$. Esimest nimetatakse antud reeperi positiivseks, teist negatiivseks x_2-pooltasandiks. Analoogiliselt defineeritakse positiivne ja negatiivne x_1-pooltasand. Jääb märkida, et etteantud pooltasandi võib soovi korral alati esitada võrratusega (42.2), s. t. nõuet >0 kasutades, sest vajaduse korral võib võrratuse (42.3) läbi korrutada arvuga -1.

Kahe lineaarvõrratuse süsteemi

$$\begin{cases} A_1x_1+A_2x_2+A_3>0, \\ B_1x_1+B_2x_2+B_3>0 \end{cases} \tag{42.4}$$

tõlgendamiseks tuleb sisse tuua järgmine mõiste.

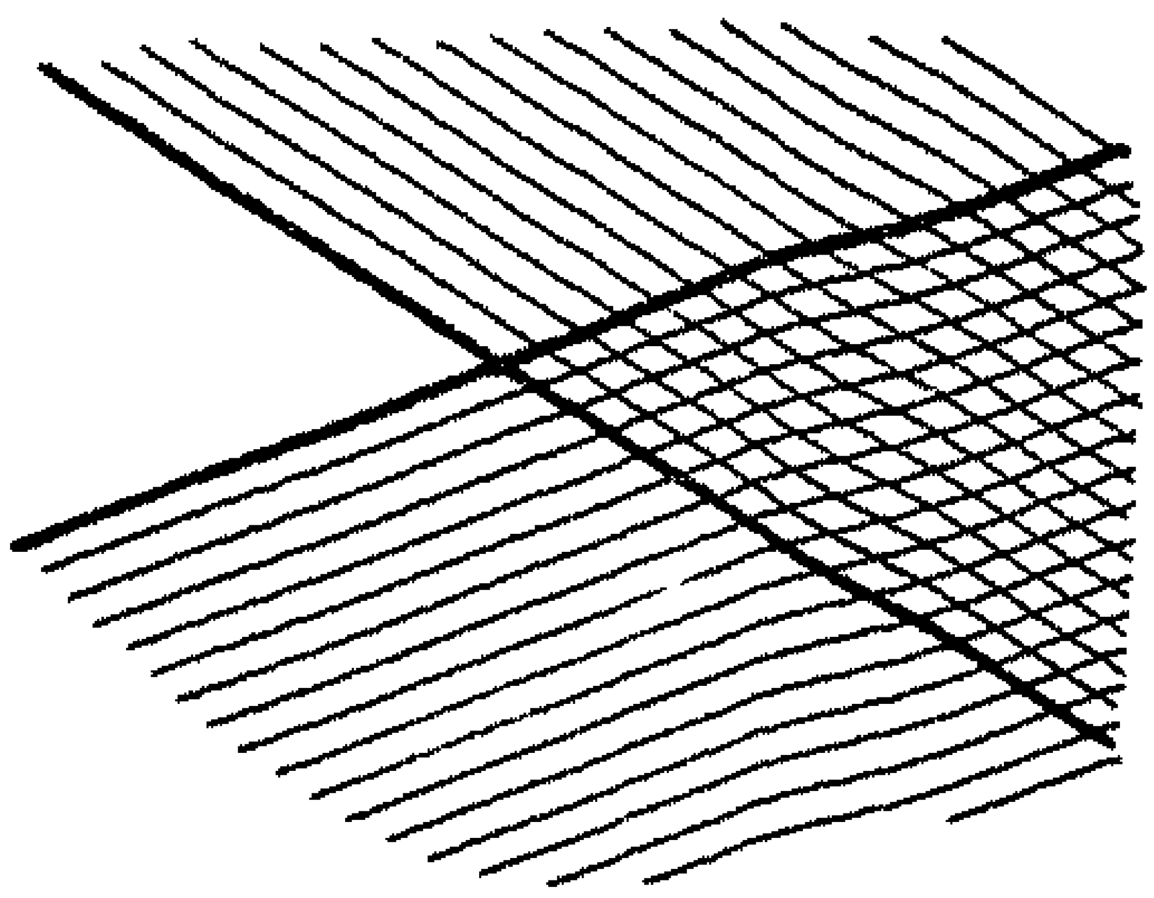
***Def.* 42.2.** Kui kahe pooltasandi äärteks on lõikuvad sirged, siis pooltasandite ühisosa nimetatakse nurgaks (joon. 94). Sirgete lõikepunkti nimetatakse nurga tipuks, nende poolsirgeid, mille ühiseks otspunktiks on tipp ning mis kuuluvad antud pooltasandeile, nimetatakse nurga haaradeks.[57]

Tasandi selliste punktide hulk, mille koordinaadid rahuldavad võrratusesüsteemi (42.4) lisaeeldusel $\frac{A_1}{B_1} \neq \frac{A_2}{B_2}$, on seega nurk, mille haarad kuuluvad sirgetele võrranditega $A_1x_1+A_2x_2+A_3=0$ ja $B_1x_1+B_2x_2+B_3=0$.

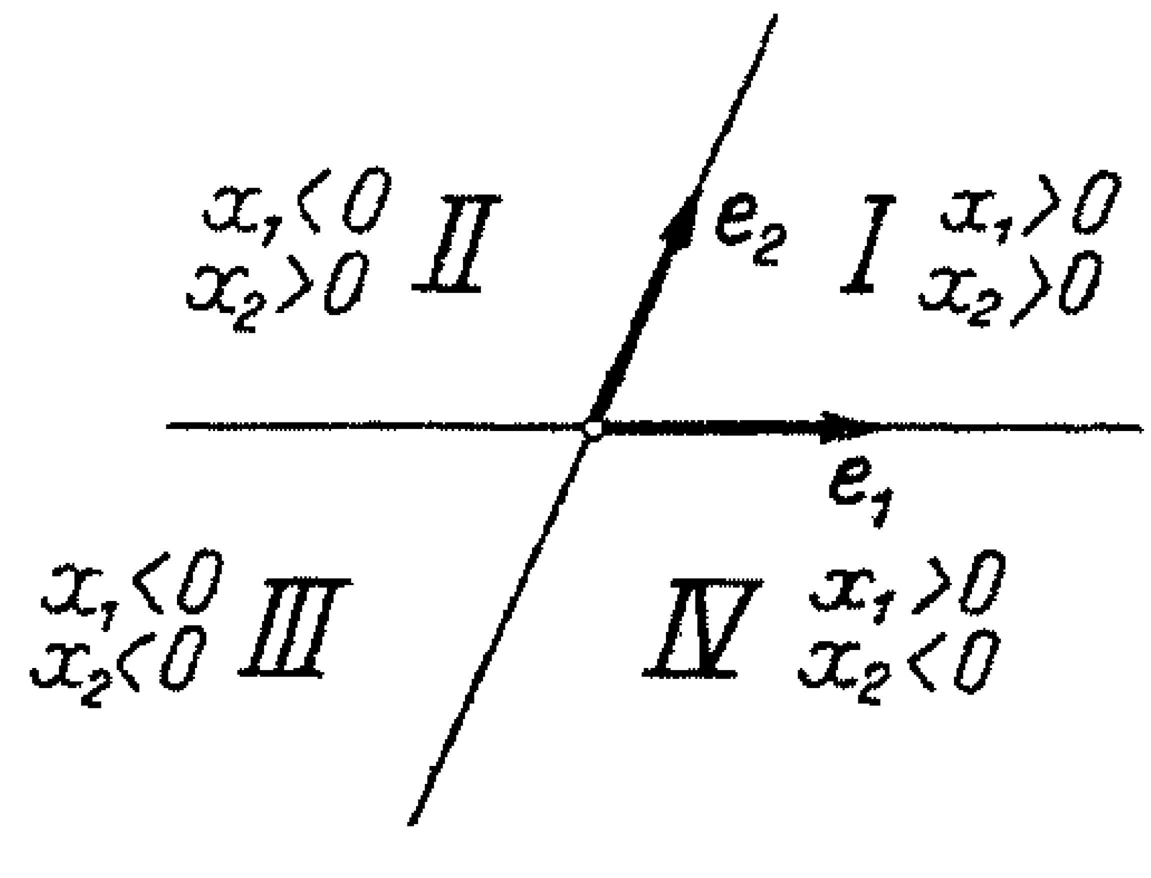
---

[57] Sageli (vt. näit. D. I. Perepjolkin, Elementaargeomeetria kursus. I. Tallinn, 1951, lk. 12) nimetatakse nurgaks tipu ja haarade ühendit. Sel korral def-is 42.2 kirjeldatud pooltasandite ühisosa nimetatakse nurga kumeraks sisepiirkonnaks.

Tuleb märkida, et sõna «nurk» üksi tähendab meil edaspidi alati def-iga 42.2 määratud punktihulka; sellega seotud reaalarvu korral kõneleme kas «vektoritevahelisest nurgast» (art. 24) või «sirgetevahelisest nurgast» (art. 43).



Joon. 94.



Joon. 95.

Näiteks võrratusesüsteemid

$$\begin{cases} x_1>0, \\ x_2>0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1<0, \\ x_2>0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1<0, \\ x_2<0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1>0, \\ x_2<0 \end{cases}$$

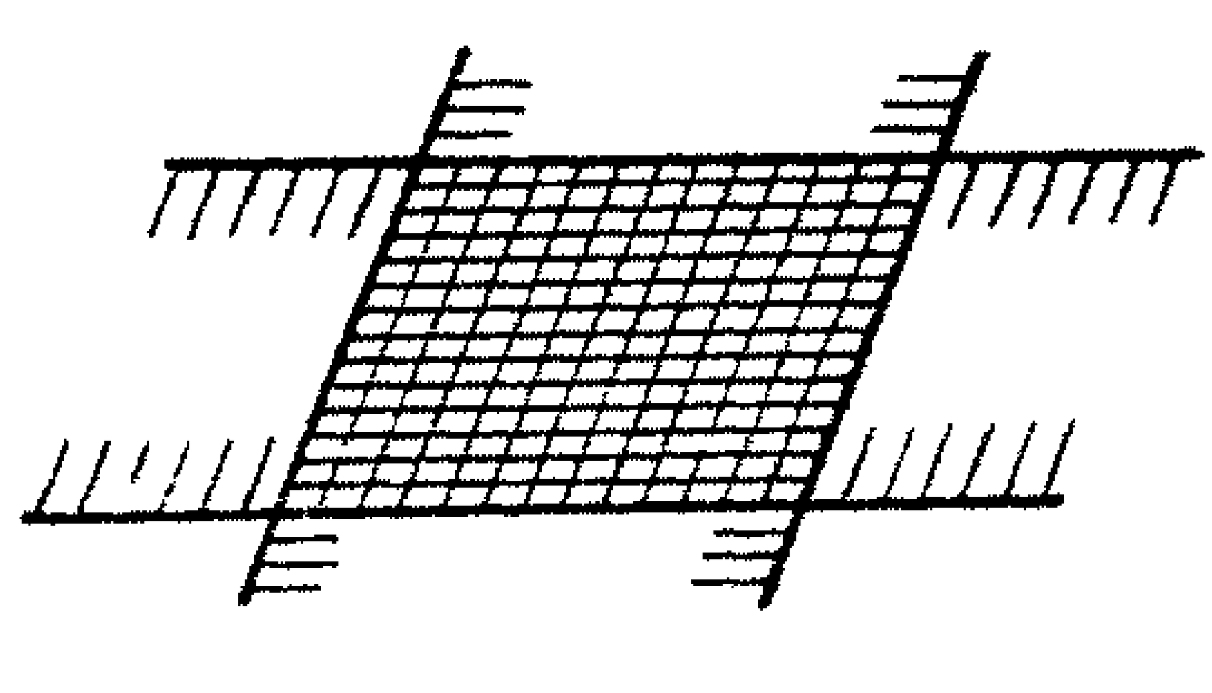
esitavad nurki, mida nimetatakse antud reeperi vastavalt I, II ja III, IV koordinaatnurgaks (joon. 95).

Kui range võrratuse (42.2) asemel vaadelda mitteranget võrratust (s. t. sellist, kus on lubatud ka võrdus)

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3\geqslant 0,$$

siis selle geomeetriliseks vasteks on võrratusega (42.2) määratud pooltasandi ja selle ääre ühend, mida nimetatakse ääristatud pooltasandiks. Kui def-is 42.2 pooltasandid asendada ääristatud pooltasanditega, siis nende ühisosaks on nurga ning selle tipu ja haarade ühend, mida nimetatakse ääristatud nurgaks. (Nurk def. 42.2 mõttes on n.-ö. ääristamata nurk.)

Enam kui kahe ääristatud pooltasandi ühisosa — mitmest lineaarvõrratusest (märgiga $\geqslant$) koosneva süsteemi geomeetriline vaste — võib olla väga mitmesuguse ehitusega. Lihtsaimal juhul, kui ta ei ole tühi ja temas ei sisaldu ühtki poolsirget, osutub ta kas punktiks, lõiguks või juba eespool defineeritud kumeraks hulknurgaks (vt. art. 37 peenkirjas osa). Selle väite üksikasjalik tõestus on aga kahjuks liialt pikk selleks, et teda võiks esitada käesolevas kursuses.[58] Seetõttu piirdume siin joonise abil selgitatava näitega. Kui nelja ääristatud pooltasandi äärteks on paarikaupa paralleelsed sirged ja nende ühisosa ei sisalda ühtegi poolsirget, siis see ühisosa on rööpnelinurk (joon. 96).



Joon. 96.

[58] Vt. näit. Энциклопедия элементарной математики. Книга V. Москва, 1966, lk. 209—218.

43. Sirged eukleidilises planimeetrias. Käesoleva paragrahvi eelmiste artiklite aineks olid sirged tasandi afiinses geomeetrias. Aksioomide **D1—D6** lisamisel — üleminekul eukleidilisele planimeetriale — lisandub mitmeid uusi mõisteid ja tulemusi. Viimaste käsitlemisel kasutame ristkoordinaate, sest ainult nende puhul kehtivad eespool (§ 5) leitud valemid kahe vektori skalaarkorrutise ja areaalkorrutise arvutamiseks.

Kui on antud sirge tasandil ja selle sirge sihivektoril $\boldsymbol{k}$ on ristkoordinaadid (k_1, k_2), siis vektorit $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}\circ\frac{\pi}{2}$, mis on risti sihivektoriga $\boldsymbol{k}$ ja mille ristkoordinaadid määratakse (23.18) põhjal seosega

$$\boldsymbol{n}=(-k_2, k_1),$$

nimetatakse sirge normaalvektoriks. Iga sirget sihivektoriga $\boldsymbol{n}$ nimetatakse antud sirge normaaliks[59].

Olgu antud sirge üldvõrrandiga

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3=0. \tag{43.1}$$

Tema sihivektoriks on siis art. 39 järgi $\boldsymbol{k}=(A_2, -A_1)$ ning normaalvektoriks seega (kui on tegemist ristkoordinaatidega)

$$\boldsymbol{n}=(A_1, A_2).$$

Seega ristkoordinaatide korral x_1 ja x_2 kordajad sirge üldvõrrandis on samas järjekorras sirge normaalvektori koordinaatideks. Skalaarkorrutise avaldist (27.1) arvestades saab sirge üldvõrrandi (43.1) esitada järgmiselt:

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{x}+A_3=0. \tag{43.2}$$

Kui sirge mingi punkti A kohavektor tähistada $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, siis $\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}+A_3=0$. Siit $A_3=-\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}$ ning võrrand (43.2) on seega teisendatav kujju

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=0.$$

Sellisena ta tähendab sirge suvalise vektori $\overrightarrow{AX}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}$ ja normaalvektori $\boldsymbol{n}$ ristumist: $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AX}$ (joon. 97).

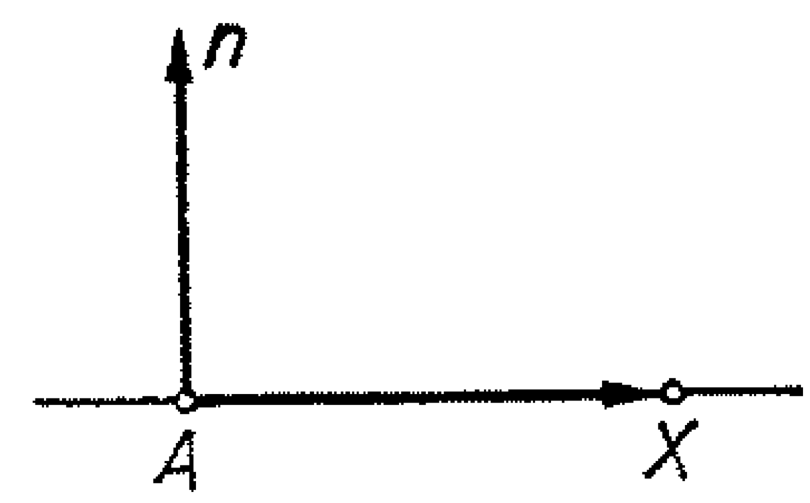
Osutub, et sirge ongi eukleidilises planimeetrias defineeritav punktihulgana $\{X|\overrightarrow{AX}\perp\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{0}\}$. Tõepoolest, $\overrightarrow{AX}\perp\boldsymbol{n}$ kehtib teoreemi 27.2 põhjal parajasti siis, kui $\boldsymbol{n}\overrightarrow{AX}=0$, s. t. kui

$$A_1(x_1-a_1)+A_2(x_2-a_2)=0.$$

[59] lad. k. *normalis* — [siin] otse-, otse suunduv.

Saadud lineaarne võrrand määrabki teoreemi 39.2 põhjal sirge. Vektor $\boldsymbol{n}$ on selle normaalvektor.

Võrrandi (43.1) läbikorrutamisel nullist erineva reaalarvuga λ asendub normaalvektor $\boldsymbol{n}$ vektoriga $(\lambda A_1, \lambda A_2) = \lambda \boldsymbol{n}$. Seetõttu on antud sirgega seotud õieti ainult normaali siht — vektorite $\{\lambda \boldsymbol{n}\}$ hulk, mille iga vektor on risti sirge iga sihivektoriga. Kui sirge ja tasand on orienteeritud, s. t. sirgel on valitud üks kahest võimalikust suunast, näiteks vektori $\boldsymbol{k} = (A_2, -A_1)$ suund, ja tasandil üks kahest pöördesuunast, siis saab orienteerida ka normaali sihi, näiteks vektoriga $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k} \circ \frac{\pi}{2} = (A_1, A_2)$.



Joon. 97.

Sirgepaare on eukleidilises planimeetrias võimalik eristada mitte üksnes kvalitatiivselt: lõikuvad, paralleelsed ja ühtivad. Kahel esimesel juhul saab sirgepaariga siduda ka teatava arvulise suuruse. Osutub nimelt, et kahe vektori $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$ vaheline nurk jääb muutumatuks, kui need vektorid asendada samasuunaliste vektoritega $\boldsymbol{k}\varkappa$ ja $\boldsymbol{l}\lambda$ (kus $\varkappa > 0$ ja $\lambda > 0$). Tõepoolest, def. 24.3 puhul sellest, et $\boldsymbol{l} = (\boldsymbol{k} \circ \varphi) r$, $r > 0$, järeldub, et $\boldsymbol{l}\lambda = [(\boldsymbol{k}\varkappa) \circ \varphi] r'$, kus $r' = \frac{\lambda r}{\varkappa}$; seega $\angle(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}) = \angle(\boldsymbol{k}\varkappa, \boldsymbol{l}\lambda)$, kui $\varkappa > 0$ ja $\lambda > 0$. Edasi tuleb rakendada def. 24.4, mille järgi tõesti

$$\sphericalangle(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}) = \sphericalangle(\boldsymbol{k}\varkappa, \boldsymbol{l}\lambda), \quad \text{kui} \quad \varkappa > 0 \quad \text{ja} \quad \lambda > 0.$$

***Def.* 43.1.** Kahe orienteeritud sirge sihivektorite vahelist nurka nimetatakse antud *orienteeritud sirgete vaheliseks nurgaks*. (Nagu selgus, ei sõltu see nurk orientatsiooni määravate sihivektorite valikust.) Kui kas või üks sirgetest on orienteerimata, siis sirgetevaheliseks nurgaks nimetatakse vähimat vastavate orienteeritud sirgete vahelistest nurkadest.

Niisiis, kui sirged on antud ristkoordinaatides üldvõrranditega

$$\begin{aligned} A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 = 0, \\ B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 = 0 \end{aligned} \tag{43.3}$$

ja nad on orienteeritud sihivektoritega $\boldsymbol{k} = (A_2, -A_1)$ ja $\boldsymbol{l} = (B_2, -B_1)$, siis nendevaheline nurk α on arvutatav valemist (27.11), milles tuleb teha vajalikud asendused. Seega,

$$\tan \alpha = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 B_1 + A_2 B_2}, \tag{43.4}$$

kus $0 \geqslant \alpha < \pi$. Siit on näha, et α on samal ajal ka sirgete normaalvektorite $\boldsymbol{n} = (A_1, A_2)$ ja $\boldsymbol{m} = (B_1, B_2)$ vaheline nurk.

Orienteerimata sirgete (43.3) vaheliseks nurgaks on aga $\min(\alpha, \pi - \alpha)$, kus α arvutatakse endiselt valemist (43.4).

Kui sirged on antud võrranditega

$$\begin{aligned} x_2 &= m_1 x_1 + p_2, \\ x_2 &= m'_1 x_1 + p'_2, \end{aligned} \tag{43.5}$$

siis nende sihivektoreiks on $\boldsymbol{k} = (1, m_1)$ ja $\boldsymbol{l} = (1, m'_1)$ ning

$$\tan \alpha = \frac{m'_1 - m_1}{1 + m_1 m'_1}. \tag{43.6}$$

Selliselt avaldub orienteeritud sirgete vahelise nurga tangens sirgete ordinaattõusude kaudu. Nurka φ x_1-telje ja sirge vahel nimetatakse sirge tõusunurgaks. Selle korral $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$ ja $\boldsymbol{l} = (1, m_1)$, mistõttu

$$\tan \varphi = \frac{m_1 - 0}{1 + m_1 0} = m_1.$$

Järelikult sirge ordinaattõus on ristkoordinaatide korral tõlgendatav sirge tõusunurga tangensina (joon. 89 ja 98; $\boldsymbol{e}_1 \circ \varphi = \boldsymbol{e}_1 \cos \varphi + \boldsymbol{e}_2 \sin \varphi = \cos \varphi \, (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \tan \varphi) \parallel (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \tan \varphi)$.

Kaht sirget nimetatakse ristuvaiks, kui nendevaheline nurk on $\frac{\pi}{2}$, s. t. kui nende sihivektorid on risti. Sirgete (43.3) korral on selleks tarvilik ja piisav, et $\boldsymbol{kl} = 0$, s. t. et

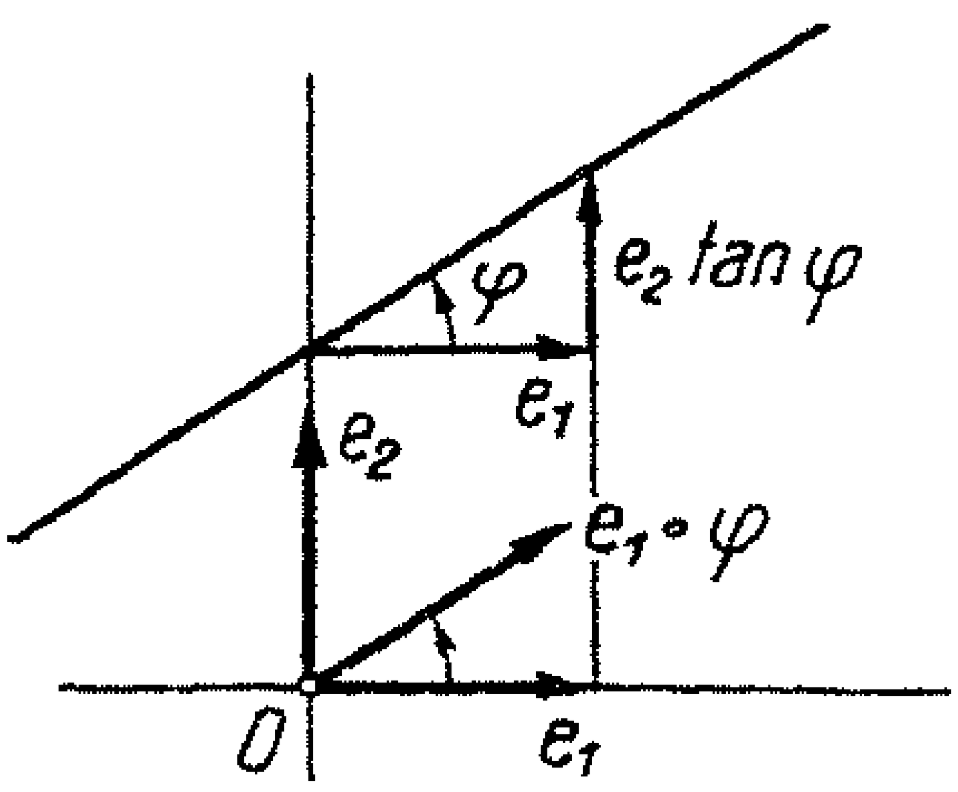
$$A_1 B_1 + A_2 B_2 = 0. \tag{43.7}$$

Tulemust võib vaadelda ka kui sirgete normaalvektorite ristumise tunnust. Kui sirged on antud võrranditega (43.5), siis nende ristumise tunnuseks on

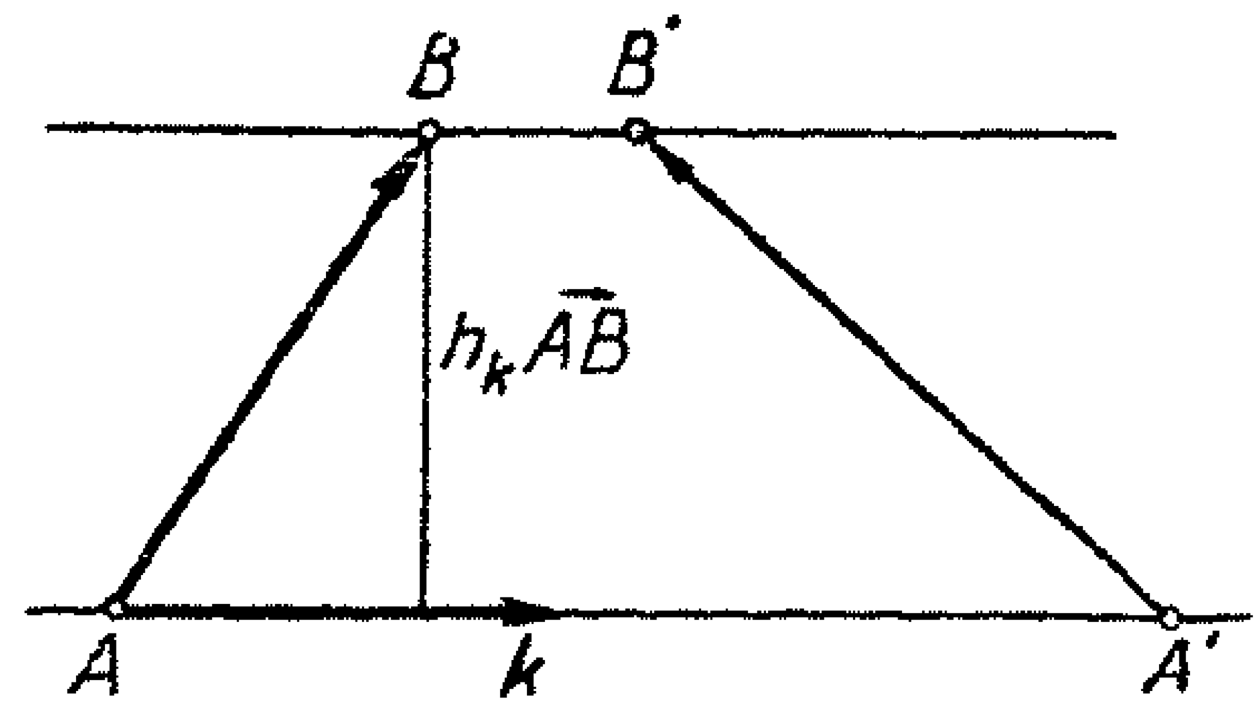
$$1 + m_1 m'_1 = 0,$$

s. t. sirged on risti parajasti siis, kui $m'_1 = -\frac{1}{m_1}$, s. t. kui ühe ordinaattõus on teise pöördväärtuse vastandarv. Analoogilise tulemuse võib saada sirgete abstsisstõusude jaoks.

Valemid (43.4) ja (43.6) on rakendatavad ka paralleelsete sirgete korral, kuid annavad siis tulemuseks $\alpha = 0$. Osutub, et siiski ka paralleelsete sirgete paariga saab eukleidilises planimeetrias siduda teatava nullist erineva reaalarvu. Näitame, et kahe paralleelse sirge punkte A ja B ühendava vektori $\overrightarrow{AB}$ kõrgus $h_{\boldsymbol{k}}\overrightarrow{AB}$ sirgete ühise sihivektori $\boldsymbol{k}$ kohal (vt. def. 29.2) ei



Joon 98.



Joon 99

muutu, kui punktid A ja B asendada ükskõik missuguste teiste punktidega antud sirgetel.

Tõepoolest, kõrgus $h_k\overrightarrow{AB}$ avaldub valemiga (29.2), millesse tuleks praegu asendada $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{y}=\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ (kus $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ ja $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$ on punktide A ja B kohavektorid). Kuid eelnevalt on kasulik valemi (29.2) parem pool teisendada eukleidilises planimeetrias kehtiva samasuse (31.6) abil kujju $\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}|\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}|$. Seega

$$h_k\overrightarrow{AB}=\frac{|\boldsymbol{k}\wedge(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})|}{|\boldsymbol{k}|}. \tag{43.8}$$

Võttes nüüd A ja B asemele punktid A' ja B' kohavektoritega $\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k}u$ ja $\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{k}v$ samadel paralleelsetel sirgetel, saame:

$$h_k\overrightarrow{A'B'}=\frac{|\boldsymbol{k}\wedge(\boldsymbol{b}'-\boldsymbol{a}')|}{|\boldsymbol{k}|}.$$

Et

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}\wedge(\boldsymbol{b}'-\boldsymbol{a}')&=\boldsymbol{k}\wedge[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{k}v)-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k}u)]=\\&=\boldsymbol{k}\wedge(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{k}(v-u)=\boldsymbol{k}\wedge(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),\end{aligned}$$

sest $\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{k}(v-u)=0$, siis tõesti (joon. 99)

$$h_k\overrightarrow{A'B'}=h_k\overrightarrow{AB}.$$

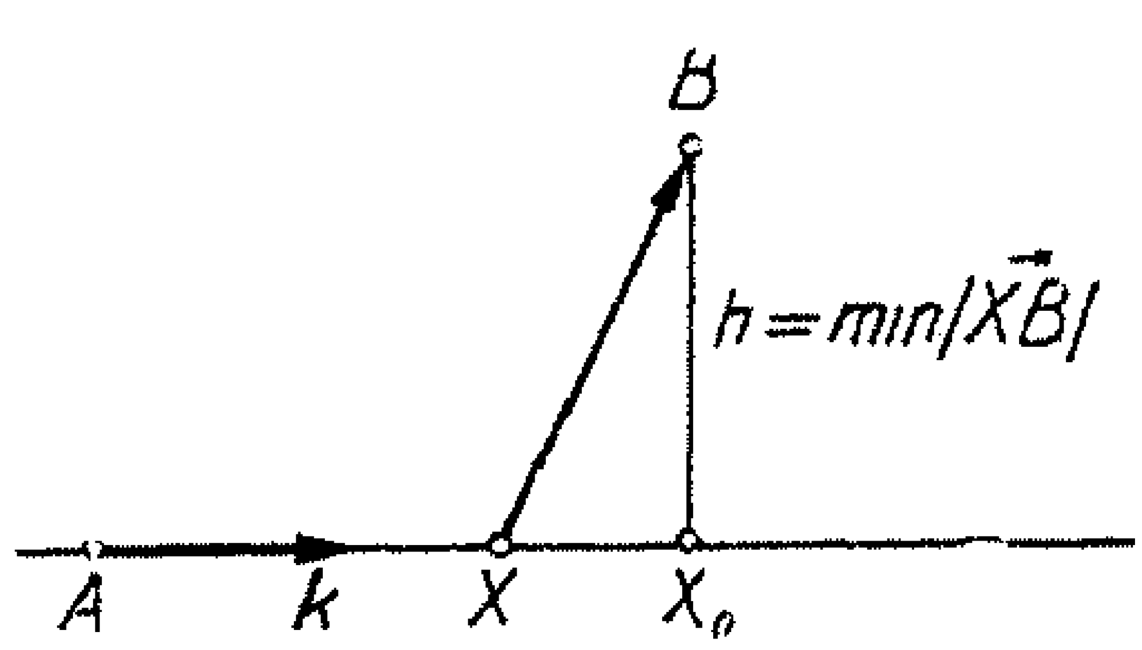
***Def.* 43.2.** Kahel paralleelsel sirgel võetud punkte ühendava vektori kõrgust sirgete ühise sihivektori kohal (see kõrgus, nagu selgus, ei sõltu punktide valikust sirgetel) nimetatakse nende paralleelsete sirgete vaheliseks k a u g u s e k s.

Viimast on valemi (43.8) abil lihtne arvutada juhul, kui sirged on antud oma punktide ja sihivektoritega. Kuid ka üldvõrranditega antud sirgete puhul pole raske leida selleks vajalikku eeskirja, nagu selgub järgmises artiklis.

44. Punkti kaugus sirgest ja peegeldus. Tuletame meelde, et kahe punkti A ja B vaheliseks kauguseks on def. 29.1 kohaselt vektori $\overrightarrow{AB}$ pikkus $|\overrightarrow{AB}|$, mis tuleb (27.6) järgi arvutada valemist

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}. \tag{44.1}$$

Olgu nüüd lisaks punktidele A ja B antud sirge, mis läbib punkti A vektori $\boldsymbol{k}$ sihis (joon. 100). Vaatleme kaugusi $|\overrightarrow{XB}|$, kus X on vabalt võetud punkt antud sirgel. Tekib kauguste $|\overrightarrow{XB}|$ hulk. Art-s 29 selgus, et see hulk sisaldab minimaalse väärtuse $\min|\overrightarrow{XB}|$. Seejuures art. 30 ühe tulemuse põhjal



Joon. 100.

$$\min|\overrightarrow{XB}|=|\overrightarrow{X_0B}|,$$

kus X_0 on sirge niisugune punkt, mille korral $X_0B \perp \boldsymbol{k}$; teisiti öeldes, X_0 on lõikepunktiks antud sirgele ja selle niisugusele normaalile, mis läbib punkti B.

***Def.* 44.1.** Antud punkti B kauguseks h antud sirgest nimetatakse selle punkti B ja selle sirge punktide X vaheliste kauguste vähimat väärtust $\min|\overrightarrow{XB}|$:

$$h=\min|\overrightarrow{XB}|=|\overrightarrow{X_0B}|.$$

Eeltoodust järeldub võimalus kauguse h arvutamiseks, kui sirge on antud oma üldvõrrandiga

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3=0. \tag{44.2}$$

Tuleb määrata normaal X_0B, näiteks punkti $B(b_1, b_2)$ ja sihivektori $\boldsymbol{n}=(A_1, A_2)$ järgi

$$x_i=b_i+A_iu,$$

leida antud sirge ja selle normaali lõikepunkt X_0 võrrandist

$$A_1(b_1+A_1u)+A_2(b_2+A_2u)+A_3=0$$

ning seejärel arvutada $h=|\overrightarrow{X_0B}|$. Viimasele võrrandile saab anda kuju

$$(A_1b_1+A_2b_2+A_3)+(A_1^2+A_2^2)u=0$$

ning tema lahendiks on seega

$$u_0 = -\frac{A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3}{A_1^2 + A_2^2}.$$

Punkti X_0 koordinaatideks on $x_i^0 = b_i + A_i u_0$ ning kauguseks $h = |\overrightarrow{X_0 B}| = \sqrt{(x_1^0 - b_1)^2 + (x_2^0 - b_2)^2}$ on järelikult

$$h = \sqrt{(A_1 u_0)^2 + (A_2 u_0)^2} = |u_0| \sqrt{A_1^2 + A_2^2}.$$

Asendades siia u_0 avaldise, saame tulemuseks

$$h = \frac{|A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}. \tag{44.3}$$

Sama tulemuseni võib jõuda ka valemi (43.8) abil. Nimelt on selge, et $h = h_k \overrightarrow{AB}$. Seejuures $\boldsymbol{k} = (A_2, -A_1)$ ja $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, mistõttu (31.2) järgi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k} \wedge (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) &= A_2(b_2 - a_2) - (-A_1)(b_1 - a_1) = \\ &= A_1 b_1 + A_2 b_2 - (A_1 a_1 + A_2 a_2). \end{aligned}$$

Et A on antud sirgel, siis tema koordinaadid rahuldavad võrrandit (44.2) ja seega $A_1 a_1 + A_2 a_2 = -A_3$. Tehes siit asenduse $\boldsymbol{k} \wedge (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ avaldisse ja pannes tulemuse omakorda võrdusse (43.8), saamegi veel kord juba tuttava valemi (44.3).

Uurime saadud valemi (44.3) paremat poolt. See on saadud punkti B koordinaatide asendamisel antud sirge võrrandi (44.2) vasakusse poolde, mis on eelnevalt läbi jagatud arvuga $\sqrt{A_1^2 + A_2^2} = |\boldsymbol{n}|$, teisiti öeldes, võrrandi

$$\frac{A_1}{|\boldsymbol{n}|} x_1 + \frac{A_2}{|\boldsymbol{n}|} x_2 + \frac{A_3}{|\boldsymbol{n}|} = 0 \tag{44.4}$$

vasakusse poolde. Viimane on muidugi sellesama sirge võrrand, iseärasus seisneb selles, et tema järgi määratud normaalvektor

$$\boldsymbol{n}_0 = \left(\frac{A_1}{|\boldsymbol{n}|}, \frac{A_2}{|\boldsymbol{n}|} \right) = \frac{1}{|\boldsymbol{n}|} \boldsymbol{n}$$

on ühikvektor, sest

$$|\boldsymbol{n}_0| = \left| \frac{1}{|\boldsymbol{n}|} \boldsymbol{n} \right| = \frac{1}{|\boldsymbol{n}|} |\boldsymbol{n}| = 1.$$

Öeldakse, et võrrand (44.4) on saadud võrrandist (44.2) selle normeerimisel[60]. Valemi (44.3) võib nüüd sõnastada järgmise reeglina.

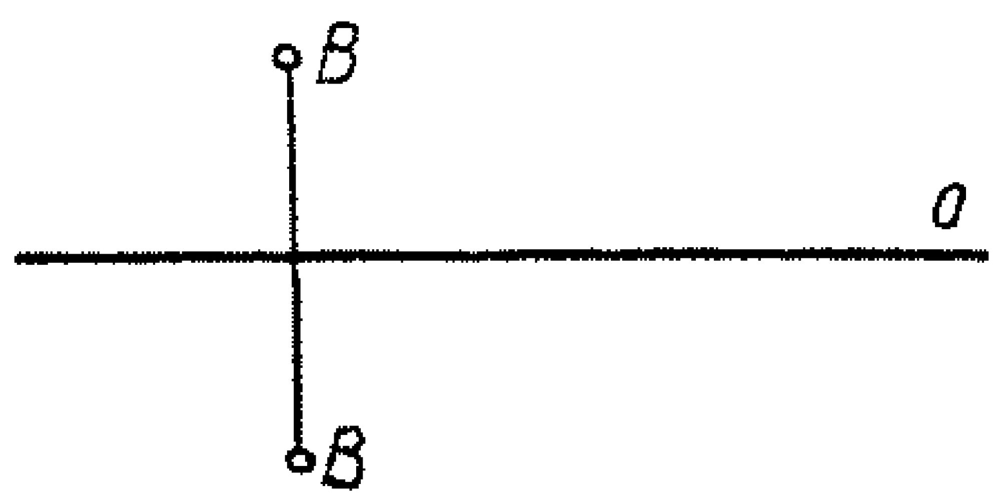
Selleks et leida punkti B kaugus sirgest, mis on antud oma üldvõrrandiga, tuleb viimane normeerida, asendada punkti B koordinaadid saadud võrrandi vasakusse poolde ning võtta tulemuse absoluutväärtus.

Valemist (44.3) järeldub, et kui punktid on antud sirgest antud kaugusel h, siis nende koordinaadid rahuldavad üht järgmisest kahest võrrandist:

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3=h\sqrt{A_1^2+A_2^2},$$

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3=-h\sqrt{A_1^2+A_2^2}.$$

Seega need punktid täidavad kaks sirget, mis on paralleelsed antud sirgega. Kõneldakse, et need sirged on sümmeetrilised antud sirge suhtes. Analoogiliselt käsitletakse punktide sümmeetriat antud sirge suhtes.



Joon. 101.

Def. 44.2. Kaht punkti B ja B' nimetatakse **sümmeetrilisteks** antud sirge a suhtes, kui 1) sirge BB' on risti sirgega a ning 2) B ja B' on teine teisel pool ja 3) võrdsetel kaugustel sellest sirgest a (joon. 101).

Teisiti öeldes, $\overrightarrow{BB'}$ peab olema sirge a normaalvektor ning lõigu BB' keskpunkt peab asuma sirgel a. Järelikult, kui antud sirge a võrrandiks on

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3=0,$$

siis peab olema

$$\begin{gathered}\frac{b'_1-b_1}{A_1}=\frac{b'_2-b_2}{A_2},\\ A_1\frac{b'_1+b_1}{2}+A_2\frac{b'_2+b_2}{2}+A_3=0.\end{gathered}\tag{44.5}$$

Saadud süsteemist on antud sirge a ja antud punkti B korral alati leitavad sümmeetrilise punkti B' koordinaadid. Näiteks kui sirgeks a on x_1-telg, siis on $A_1=0$, $A_2=1$, $A_3=0$ ning süsteem on

$$b'_1-b_1=0, \quad b'_2+b_2=0.$$

[60] lad. k. *norma* — õige mõõt.

Järelikult punktiga $B(b_1, b_2)$ x_1-telje suhtes sümmeetriliseks punktiks on $B'(b_1, -b_2)$.

Def. **44.3.** Tasandi teisendust, mis kujutab iga punkti X temaga antud sirge suhtes sümmeetriliseks punktiks X', nimetatakse peegelduseks antud sirge suhtes.

Punktihulki tasandil või ruumis nimetatakse tavaliselt kujunditeks. Öeldakse, et kujund tasandil on sümmeetriline antud sirge a suhtes, kui ta koos oma iga punktiga sisaldab ka sellega sümmeetrilist punkti sirge a suhtes, teisiti öeldes, kui ta kujutub iseendaks peegelduse puhul sirge a suhtes. Viimast nimetatakse sel korral kujundi sümmeetriateljeks ehk lihtsalt teljeks. Näiteks kahel paralleelsel sirgel on olemas telg — sirge, millest nende punktid on võrdsetel kaugustel.

45. Sirge normaalvõrrand. Võrrandit, mis saadakse sirge üldvõrrandi normeerimisel, nimetatakse sirge normaalvõrrandiks.

Lihtne on veenduda, et antud sirgel on ainult kaks normaalvõrrandit, mis erinevad vasaku poole märgi poolest. Tõepoolest, olgu antud sirge üks normaalvõrrandeid

$$A_1^0x_1+A_2^0x_2+A_3^0=0, \tag{45.1}$$

s. t. olgu $(A_1^0)^2+(A_2^0)^2=1$. Sama sirge iga üldvõrrandi kõik kordajad on siis teoreemi 23.1 põhjal võrdelised selle võrrandi kordajatega, iga üldvõrrand on seega kirjutatav kujul

$$(\lambda A_1^0)x_1+(\lambda A_2^0)x_2+(\lambda A_3^0)=0.$$

Selleks et ta oleks normaalvõrrand, peab olema

$$(\lambda A_1^0)^2+(\lambda A_2^0)^2=1.$$

Siit $\lambda^2=1$, mistõttu $\lambda=\pm 1$. Väärtus $\lambda=1$ annab ühe normaalvõrrandi, väärtus $\lambda=-1$ aga teise normaalvõrrandi, mis erineb esimesest ainult vasaku poole märgi poolest. Kui sirge on orienteeritud, siis kordajate märkide muutmine üldvõrrandis on lubamatu ning normaalvõrrand on seega üheselt määratud nõudega, et sihivektor $\boldsymbol{k}_0=(A_2^0, -A_1^0)$ oleks positiivselt orienteeritud. Teisiti on lugu orienteerimata sirge puhul. Kui sirge ei läbi koordinaatide alguspunkti $O(0, 0)$, s. t. kui $A_3\neq 0$, siis tavaliselt valitakse kahest normaalvõrrandist see, mille korral $A_3^0<0$. Kui sirge läbib punkti $O(0, 0)$, s. t. kui $A_3=0$, siis harilikult nõutakse, et kordajate A_1 ja A_2 seas esimene nullist erinev oleks positiivne.

Kõikidel juhtudel on tehtud kokkulepete abil normaalvõrrand antud ristreeperi puhul sirgega üheselt seotud ning on põhjust arvata, et tema kordajatel on kindel geomeetriline tähendus.

Kordajad A_1^0 ja A_2^0 kujutavad endast sirge normaalühikvektori koordinaate:

$$\boldsymbol{n}_0 = (A_1^0, A_2^0).$$

Tähistame $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{n}_0) = \alpha$; et $|\boldsymbol{n}_0| = 1$, siis def. 24.3 ja def. 24.2 põhjal $\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{e}_1 \circ \alpha = \boldsymbol{e}_1 \cos\alpha + \boldsymbol{e}_2 \sin\alpha$, kus $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 \circ \frac{\pi}{2}$, mistõttu $\boldsymbol{n}_0$ ristkoordinaatideks on $A_1^0 = \cos\alpha$, $A_2^0 = \sin\alpha$ (vt. art. 30). Kui veel tähistada $A_3^0 = -p_0$, siis sirge normaalvõrrand (45.1) on kirjutatav kujul

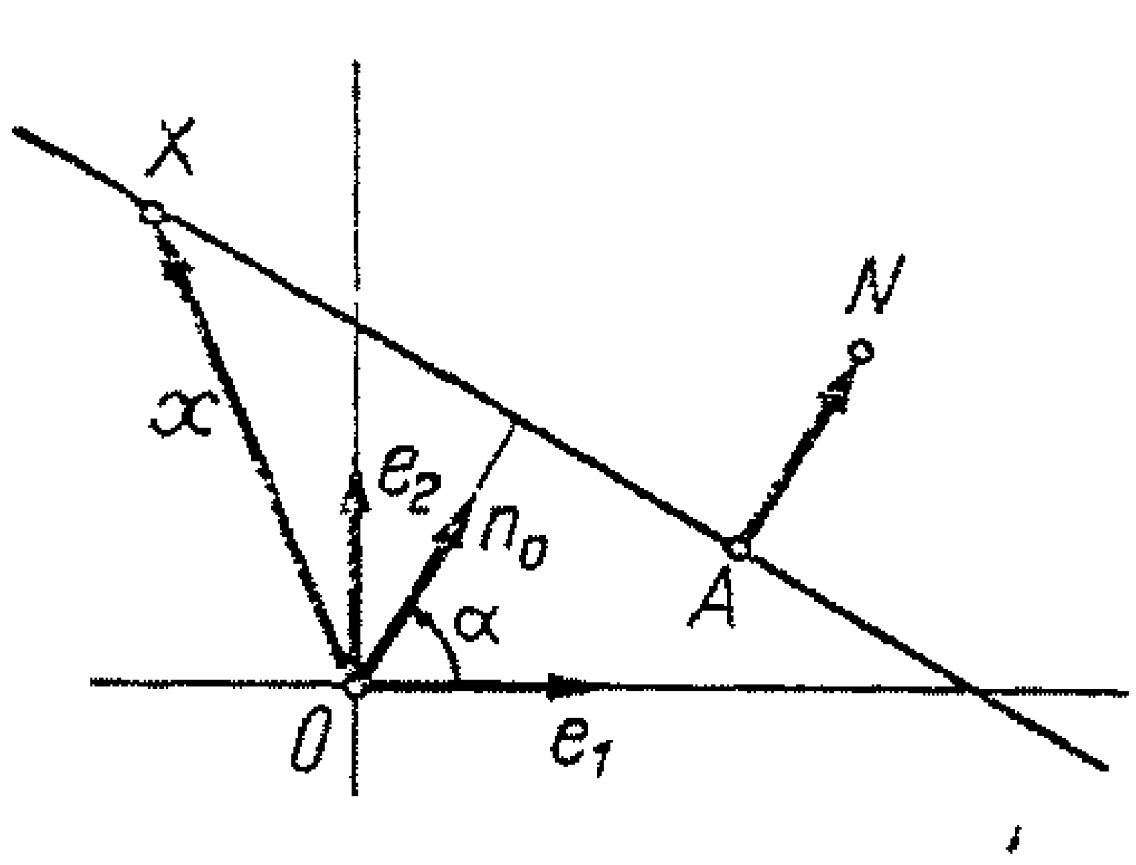
$$x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha - p_0 = 0. \tag{45.2}$$

Nüüd on lihtne selgitada suuruse p_0 tähendust: tema absoluutväärtus on koordinaatide alguspunkti $O(0, 0)$ kaugus sirgest, sest selle punkti koordinaatide asendamisel võrrandi vasakusse poolde on tulemuseks $-p_0$.

On jäänud veel selgitada neid kokkuleppeid, mille järgi orienteerimata sirge puhul valitakse üks kahest võimalikust normaalvõrrandist. Kui $p_0 \neq 0$, siis kokkuleppe järgi võetakse $p_0 > 0$. Valime sirgel vabalt punkti $A(a_1, a_2)$ ja leiame punkti $N(n_1, n_2)$ selliselt, et $\overrightarrow{AN} = \boldsymbol{n}_0 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ (joon. 102). Siis $n_1 - a_1 = \cos\alpha$, $n_2 - a_2 = \sin\alpha$, $a_1 \cos\alpha + a_2 \sin\alpha - p_0 = 0$ ning N koordinaatide asendamisel võrrandi (45.2) vasakusse poolde on tulemuseks

$$n_1 \cos\alpha + n_2 \sin\alpha - p_0 = (a_1 + \cos\alpha)\cos\alpha + (a_2 + \sin\alpha)\sin\alpha - p_0 = \\ = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 > 0.$$

Samal ajal punkti $O(0, 0)$ koordinaatide asendamisel on tulemuseks $-p_0 < 0$. Järelikult N ja O on teine teisel pool sirget. Selles seisnebki tehtud kokkuleppe tähendus: vektor $\boldsymbol{n}_0$ suundub sirgest mitte sinnapoole, kus on O, vaid teisele poole. Teisiti öeldes, O ei ole võrratusega $x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha - p_0 > 0$ määratud pooltasandil.



Joon. 102.

Kui orienteerimata sirge puhul $p_0 = 0$, siis kokkuleppe kohaselt tuleb valida kas $\cos\alpha > 0$, või kui $\cos\alpha = 0$, siis $\sin\alpha = 1$. Sel puhul võrratusega $x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha > 0$ määratud pooltasand sisaldab kas punkti $(1, 0)$ (ning koos sellega siis kogu positiivse poolsirge x_1-teljel), või kui see punkt on sirgel, siis punkti $(0, 1)$.

Kõikidel juhtudel on normaalvõrrandi kordajad ja vabaliige seotud antud sirgega üheselt. Normaalvõrrand on sirge võrrandi ainuke kuju, millel on see omadus ja millega saab samal ajal esitada kõik sirged ilma ühegi erandita. (Meenutame, et sama omadusega on ka sirge võrrandi kujud (40.4), (40.5) ja (40.6), kuid igaühe jaoks leiduvad erandsirged, mis ei ole sellise võrrandiga esitatavad.)

Vahetult vektorite abil, s. t. võrrandi (43.2) erijuhuna, on sirge normaalvõrrand kirjapandav kujul

$$\boldsymbol{n}_0\boldsymbol{x} - p_0 = 0. \tag{45.3}$$

Et valemi (30.5) järgi $\boldsymbol{n}_0\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{n}_0| p_{\boldsymbol{n}_0}\boldsymbol{x} = p_{\boldsymbol{n}_0}\boldsymbol{x}$ on sirge punkti X kohavektori $\boldsymbol{x}$ projektsioon normaalühikvektori $\boldsymbol{n}_0$ sihil (joon. 102), siis (45.3) väljendab lihtsalt tõsiasja, et see projektsioon on sirge kõikide punktide X korral üks ja seesama, võrdudes arvuga p_0 — alguspunkti O kaugusega sirgest.

§ 8. SIRGED JA TASANDID RUUMIS

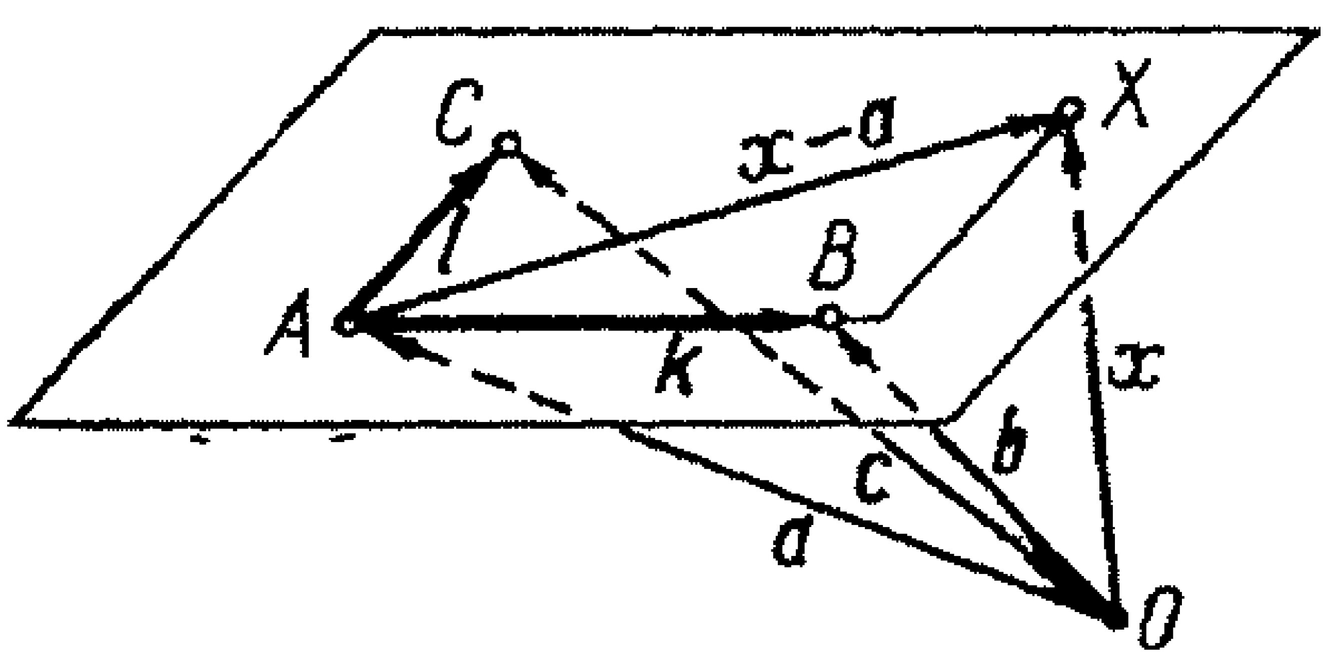
Ruumi geomeetria esmane põhiülesanne on kirjeldada sirgete ja tasandite esitamisviise, vastastikuseid asendeid ning neid asendeid määravaid suurusi. Käesolevas paragrahvis selgub, et tasand ruumis on esitatav ühe lineaarse võrrandiga, mis seob punkti kolme koordinaati, sirge ruumis aga kahe sellise võrrandiga — kahe tasandi lõikena. Vastastikuseid asendeid iseloomustavad seejuures teatavad tingimused võrrandite kordajate vahel. Eukleidilises stereomeetrias, nagu selgub, on lisaks sellele võimalik defineerida ja arvutada reaalarvulisi suurusi — teatavaid kaugusi ja nurki, mis täielikult määravad punkti ja sirge, punkti ja tasandi ning kahe sirge vastastikuse paiknemise.

46. Tasandi üldvõrrand. Tasand ruumis on teoreemi 16.3 järgi ruumi kõigi selliste punktide X alamhulk, mille korral $\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{k}u + \boldsymbol{l}v$, kus A on kindel punkt, $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$ on kindlad mittekollineaarsed vektorid ning u ja v on vabalt muutuvad reaalarvud. Ruumi vektorite alamhulka $\{\boldsymbol{k}u + \boldsymbol{l}v\}$ me nimetasime selle tasandi rihiks. Et punkt A võib olla tasandi ükskõik missugune punkt, siis võib öelda, et vektor kuulub tasandi rihti parajasti siis, kui leidub temaga võrdne vektor, mis ühendab tasandi mingid kaks punkti.

Samuti nagu eespool sirge puhul (vt. art. 38), tähistame ka siin $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ ja $\overrightarrow{OX} = \boldsymbol{x}$. Sel korral $\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ ning tasand koosneb seega punktidest X kohavektoritega

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k}u+\boldsymbol{l}v. \tag{46.1}$$

Saadud seost nimetatakse tasandi parameetriliseks **vektorvõrrandiks**. Kui muutujad u ja v, nn. parameetrid, omandavad teineteisest sõltumatult kõikvõimalikke reaalarvulisi väärtusi, siis punkt X kohavektoriga (46.1) kirjeldab parajasti vaadeldava tasandi. Parameetrid u ja v on siin tõlgendatavad punkti koordinaatidena tasandil reeperi $\{A;\ \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{l}\}$ suhtes (joon. 103).



Joon. 103

Kui $u=v=0$, siis $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$, s. t. vaadeldav tasand sisaldab punkti A (ehk, nagu öeldakse, läbib punkti A) Tähistame väärtustele $u=1$, $v=0$ ja $u=0$, $v=1$ vastavad punktid B ja C; neil on kohavektorid $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{l}$. Siit on lihtne järeldada, et eeldus $\boldsymbol{k}\nparallel\boldsymbol{l}$ on samaväärne tingimusega, et A, B ja C ei ole ühel sirgel. Järelikult saab tasandi määrata ka kolme mitte ühel sirgel oleva punktiga A, B ja C, mida ta peab läbima:

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})u+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})v. \tag{46.2}$$

Kui tähistada $1-u-v=w$, siis on tasandi viimati saadud vektorvõrrand esitatav ka kujul

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}w+\boldsymbol{b}u+\boldsymbol{c}v, \qquad u+v+w=1$$

(vrd. sirge vektorvõrrandiga (34.11)).

Pöördume tagasi esialgse võrrandi (46.1) juurde. See on samaväärne kolme võrrandiga koordinaatide vahel:

$$x_i=a_i+k_iu+l_iv, \qquad i=1,\ 2,\ 3; \tag{46.3}$$

viimaseid nimetatakse vaadeldava tasandi **parameetrilisteks võrranditeks**.

Teiselt poolt on (46.1) kolme vektori $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$ lineaarse sõltuvuse tingimus, sest ta on teisendatav kujju

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})-\boldsymbol{k}u-\boldsymbol{l}v=0$$

ning on ise järeldatav üldisest sõltuvuse tingimusest

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\lambda+\boldsymbol{k}\mu+\boldsymbol{l}\nu=0,$$

sest selles kindlasti $\lambda\neq 0$ (vastupidisel juhul tekiks võrdus

$k\mu + l\nu = 0$, kus μ ja ν ei ole korraga nullid, mis on vastuolus eeldusega $\boldsymbol{k} \nparallel \boldsymbol{l}$). Rakendame nüüd teoreemi 15.7, mille kohaselt ruumi kolm vektorit on lineaarselt sõltuvad parajasti siis, kui nende koordinaatidest moodustatud kolmandat järku determinant on võrdne nulliga. Sellest järeldub, et võrrand (46.1) on samaväärne järgmise võrrandiga punkti X koordinaatide jaoks:

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (46.4)$$

See võrrand ei sisalda enam parameetreid u ja v ning on determinandi arendamisega teisendatav kujju

$$\begin{vmatrix} k_2 & k_3 \\ l_2 & l_3 \end{vmatrix} (x_1 - a_1) + \begin{vmatrix} k_3 & k_1 \\ l_3 & l_1 \end{vmatrix} (x_2 - a_2) + \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 & l_2 \end{vmatrix} (x_3 - a_3) = 0.$$

Siin suluavaldiste kordajad on teatavad reaalarvud, mis ei ole kõik korraga nullid. Tõepoolest, kui

$$k_2 l_3 - k_3 l_2 = k_3 l_1 - k_1 l_3 = k_1 l_2 - k_2 l_1 = 0,$$

siis vektorite $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$ koordinaadid, nagu on kerge kindlaks teha, oleksid võrdelised ning $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$ teoreemide 15.6 ja 16.5 põhjal kollineaarsed, mis on praegu lubamatu. Tähistame need kordajad A_1, A_2 ja A_3. Võrrandile (46.4) saame kuju

$$A_1(x_1 - a_1) + A_2(x_2 - a_2) + A_3(x_3 - a_3) = 0, \qquad (46.5)$$

ning kui siin tähistada $-(A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3) = A_4$, siis on tulemuseks

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 = 0. \qquad (46.6)$$

Seda tingimust rahuldavad just parajasti vaadeldava tasandi punktide X koordinaadid x_1, x_2, x_3, sest kui tingimusse asendada tagasi A_1, A_2, A_3 ja A_4 avaldised, siis on tulemuseks (46.4), see aga, nagu eespool on selgitatud, on samaväärne võrrandiga (46.1).

Saadud võrrandit (46.6) nimetatakse vaadeldava tasandi üldvõrrandiks. See on lineaarne võrrand kolme muutujaga x_1, x_2, x_3. Tema kordajate kohta ei ole praegu teada muid kitsendusi peale selle, et A_1, A_2 ja A_3 ei tohi olla korraga nullid, s. t. $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \neq 0$. Osutub, et muid kitsendusi polegi, sest kehtib niisugune lause.

***Teoreem* 46.1.** *Iga võrrand (46.6), mille kordajatest A_1, A_2 ja A_3 vähemalt üks on nullist erinev, on teatava tasandi üldvõrrand.*

Tõestus Leidub punkt $A(a_1, a_2, a_3)$, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit (46.6), nii et

$$A_1a_1+A_2a_2+A_3a_3+A_4=0. \tag{46.7}$$

(Kui näiteks $A_1 \neq 0$, siis on selliseks punktiks $A(-\frac{A_4}{A_1}, 0, 0)$.) Vaatleme vektoreid $\boldsymbol{k}=(A_2, -A_1, 0)$, $\boldsymbol{l}=(A_3, 0, -A_1)$ ja $\boldsymbol{m}=(0, A_3, -A_2)$. Nad ei ole kõik paarikaupa kollineaarsed (s. t võrdeliste koordinaatidega) Näiteks kui $A_1 \neq 0$, siis $\boldsymbol{k} \nparallel \boldsymbol{l}$. Vajaduse korral koordinaate ümber nummerdades võib alati saavutada olukorra, kus $A_1 \neq 0$; seetõttu võime järgnevalt eeldada, et $\boldsymbol{k} \nparallel \boldsymbol{l}$.

Määrame nüüd ruumis tasandi, mis läbib punkti A ja mille riht sisaldab vektorid $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$. Selle tasandi punktide X koordinaadid rahuldavad võrrandit (46.4), mis praegu nõuab, et

$$\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2-a_2 & x_3-a_3 \\ A_2 & -A_1 & 0 \\ A_3 & 0 & -A_1 \end{vmatrix}=0.$$

Determinandi arendamisel jõuame võrrandini

$$A_1^2(x_1-a_1)+A_1A_2(x_2-a_2)+A_1A_3(x_3-a_3)=0.$$

Pärast selle läbijagamist reaalarvuga $A_1 \neq 0$ ja võrduse (46.7) arvestamist ongi tulemuseks võrrand (46.6). ∎

Vastavus tõestatud teoreemis kirjeldatud võrrandite hulga ja tasandite hulga vahel ei ole siiski üksühene Võrrandi (46.6) võib nimelt läbi korrutada vabalt võetud reaalarvuga $\lambda \neq 0$. Sel puhul saadav võrrand

$$(\lambda A_1)x_1+(\lambda A_2)x_2+(\lambda A_3)x_3+\lambda A_4=0$$

on samaväärne esialgsega ja määrab seetõttu sama tasandi. Selgub, et tasandi määramisel pole olulised mitte võrrandi (46.6) kõik kordajad A_1, A_2, A_3 ja A_4 eraldi, tähtsad on vaid nende suhted (näiteks kui $A_1 \neq 0$, siis suhted $A_2:A_1$, $A_3:A_1$ ja $A_4:A_1$). Tasand ruumis sõltub seega kolmest parameetrist.

Sageli on oluline teada tingimust vektori $\boldsymbol{k}=(k_1, k_2, k_3)$ kuulumiseks üldvõrrandiga (46.6) antud tasandi rihti. See tingimus on

$$A_1k_1+A_2k_2+A_3k_3=0. \tag{46.8}$$

Tõepoolest, kui $\boldsymbol{k}$ on selles rihis, siis leidub tasandi punkt X, nii et $\overrightarrow{AX}=\boldsymbol{k}$ ehk $x_i-a_i=k_i$. Asendusega võrdusse (46.5) saame kohe tingimuse (46.8) Vastupidi, kui mingi vektori $\boldsymbol{k}$

puhul on rahuldatud see tingimus, siis punkt X, mille korral $\boldsymbol{k} = \overrightarrow{AX}$, on tasandil (sest sel korral asendus tingimusse (46.8) annab kohe võrduse (46.5)), järelikult $\boldsymbol{k}$ kuulub tasandi rihti.

47. Sirge ja tasand. Sirge ruumis on esitatav parameetrilise vektorvõrrandiga (38.1) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{k}u$, mis on samaväärne kolme võrrandiga

$$x_1 = a_1 + uk_1, \quad x_2 = a_2 + uk_2, \quad x_3 = a_3 + uk_3 \tag{47.1}$$

sirge punkti X koordinaatide jaoks. Neid võrrandeid nimetatakse sirge parameetrilisteks võrranditeks. Siin $A(a_1, a_2, a_3)$ on sirge teatav punkt, mis vastab väärtusele $u = 0$, vektor $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, k_3) \neq \boldsymbol{0}$ on aga sirge sihivektor.

Olgu lisaks sirgele antud tasand üldvõrrandiga (46.6):

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0. \tag{47.2}$$

Sirge ja tasandi vastastikuse asendi uurimisel on loomulik alustada nende lõike leidmisest. Kui selline lõige pole tühi hulk, siis ta asub sirgel, mistõttu tema punkti koordinaadid avalduvad kujul (47.1). Kuid see punkt peab asuma ka tasandil; seega need koordinaadid peavad rahuldama ka tasandi võrrandit (47.2). Otsitavale punktile vastava väärtuse u leidmiseks tekib võrrand

$$A_1(a_1 + uk_1) + A_2(a_2 + uk_2) + A_3(a_3 + uk_3) + A_4 = 0$$

ehk

$$(A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3)u + (A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3 + A_4) = 0. \tag{47.3}$$

***Teoreem* 47.1.** *Kui sirge ja tasand ruumis on antud vastavalt võrranditega* (47.1) *ja* (47.2), *siis neil ühiseid punkte*

1) *on parajasti üks, kui* $A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3 \neq 0$,

2) *pole üldse, kui* $A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3 = 0$, $A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3 + A_4 \neq 0$,

3) *on lõpmata palju, kui* $A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3 = 0$, $A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3 + A_4 = 0$.

T õ e s t u s. Esimesel juhul võrrandil (47.3) on tõesti parajasti üks lahend. Teisel juhul see võrrand on vastuoluline — pole ühtegi reaalarvu, mis teda rahuldaks. Kolmandal juhul võrrand muutub triviaalseks samasuseks $0 = 0$ — teda rahuldab iga reaalarv. ∎

Kirjeldatud kolmel juhul öeldakse, et 1) sirge ja tasand lõikuvad, 2) sirge ja tasand on paralleelsed, 3) sirge on tasandil. Esimese juhu jaoks on antud ühtlasi eeskiri lõikepunkti leidmiseks: tuleb lahendada võrrand (47.3) ja tulemus asendada võrrandeisse (47.1). Teisel ja kolmandal juhul sirge sihivektor $\boldsymbol{k}$ kuulub (46.8) põhjal tasandi rihti, kusjuures juhul 2) sirge punkt A ei ole tasandil, juhul 3) aga on tasandil. Viimasel juhul, nagu näitas analüüs, on sirge iga punkti tasandil; öeldakse ka, et tasand läbib sirge.

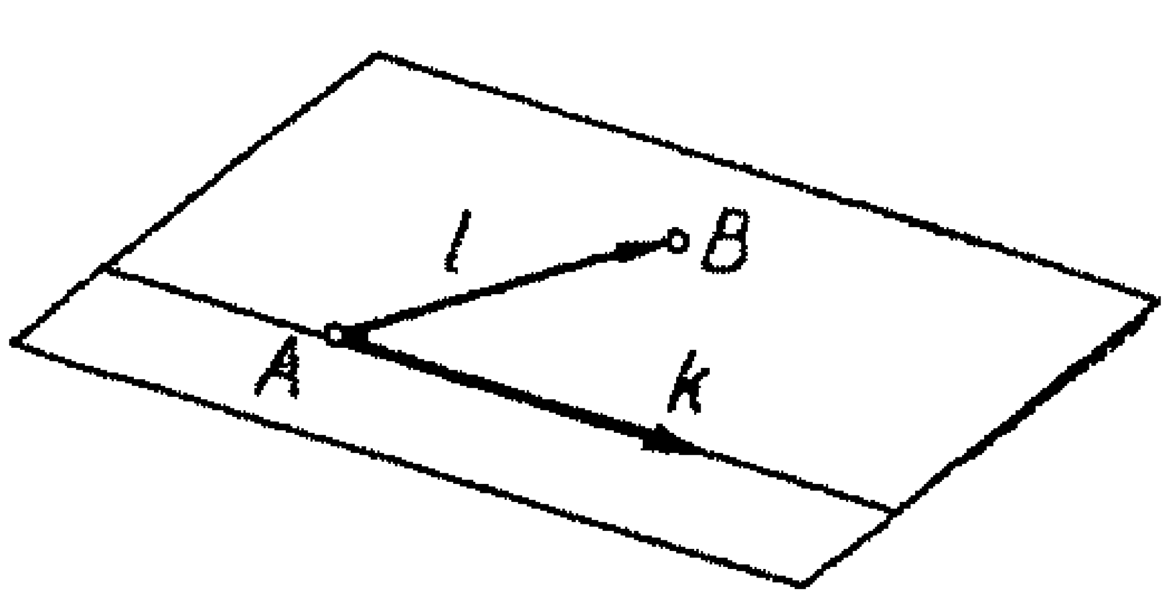
Osutub, et kui lisaks võrranditega (47.1) määratud sirgele on antud punkt B, mis ei asu sellel sirgel, siis leidub parajasti üks tasand, mis läbib antud sirge ja antud punkti. Tõepoolest, koos sirge sihivektoriga $\boldsymbol{k}$ on siis antud ka vektor $\boldsymbol{l} = \overrightarrow{AB}$, mis ei ole kollineaarne vektoriga $\boldsymbol{k}$, sest vastandjuhul B oleks sirgel. Leidub parajasti üks tasand, mis läbib punkti A ja mille riht sisaldab vektorid $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{k} \nparallel \boldsymbol{l}$ (joon. 104). See tasand ilmselt läbib sirge, sest teoreemi 47.1 nõuded 3) on rahuldatud, ning samuti ka punkti B, sest selle kohavektor $\overrightarrow{AB}$ vastab väärtustele $u = 0$, $v = 1$ võrduses $\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{k}u + \boldsymbol{l}v$ (vt. teoreemi 16.3).

Tasandi saab määrata ka kahe temal asuva lõikuva või paralleelse sirgega. Tõepoolest, kui on antud kaks sirget võrranditega

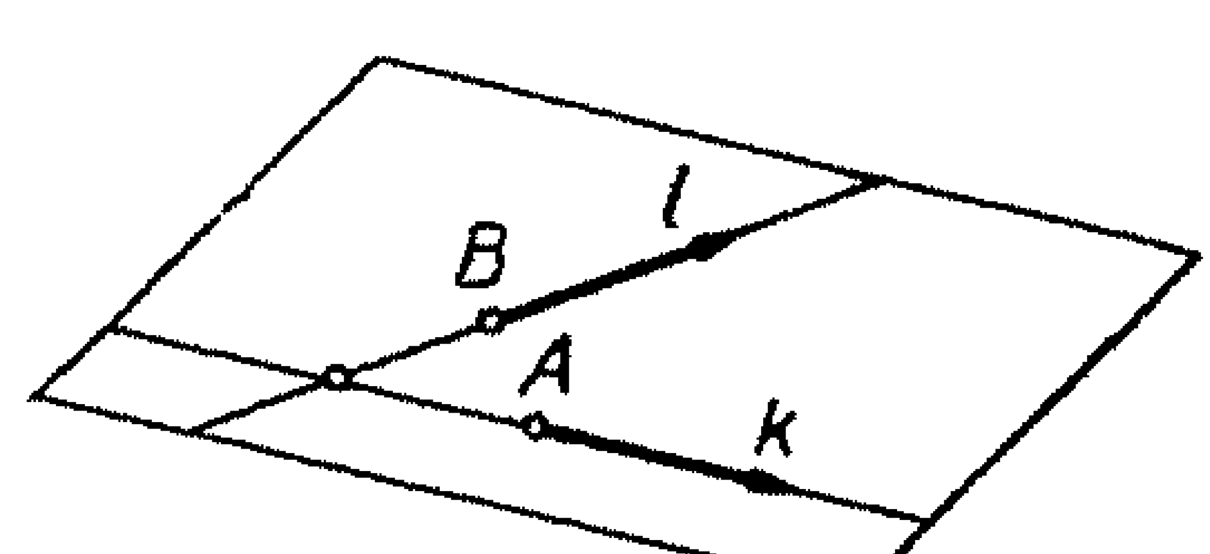
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{k}u, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{l}v,$$

siis lõikuvate sirgete puhul, mil $\boldsymbol{k} \nparallel \boldsymbol{l}$ ning $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$ on komplanaarsed (vt. teoreemi 38.1), piisab nõudmisest, et tasand läbiks näiteks punkti A kohavektoriga $\boldsymbol{a}$ ja et tema rihis oleksid vektorid $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$. Selline tasand leidub ja on üheselt määratud, kusjuures tasand läbib ilmselt esimese sirge, kuid sellega koos ka teise sirge, sest tasandil on sirgete lõikepunkt ja tasandi rihti kuulub vektor $\boldsymbol{l}$ (joon. 105).

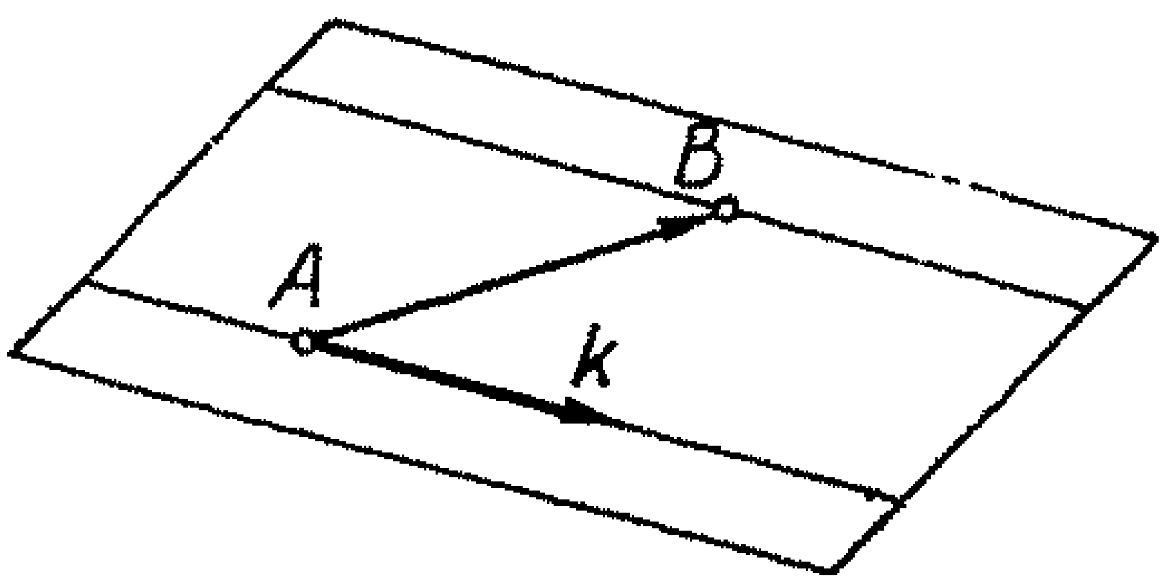
Paralleelsete sirgete puhul $\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{l}$ ja $\overrightarrow{AB} \nparallel \boldsymbol{k}$ (vt. teoreemi 38.1). Siin piisab nõudmisest, et tasand läbiks punkti A ning et tema rihis oleksid vektorid $\boldsymbol{k}$ ja $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ (joon. 106). Sellega on tasand $\{X | \overrightarrow{AX} = \boldsymbol{k}u + \overrightarrow{AB}v\}$ üheselt määratud, kusjuures esimese sirge moodustavad temal kõik need punktid, mille puhul $v = 0$. Tasand läbib aga ka teise sirge, sest väärtustele $u = 0$, $v = 1$ vastavaks punktiks tasandil on parajasti teise sirge punkt B, kusjuures vektor $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{k}\varkappa$ kuulub koos vektoriga $\boldsymbol{k}$ tasandi rihti — järelikult teoreemi 47.1 ja sellele järgnenud märkuste põhjal ka teine sirge on tasandil.



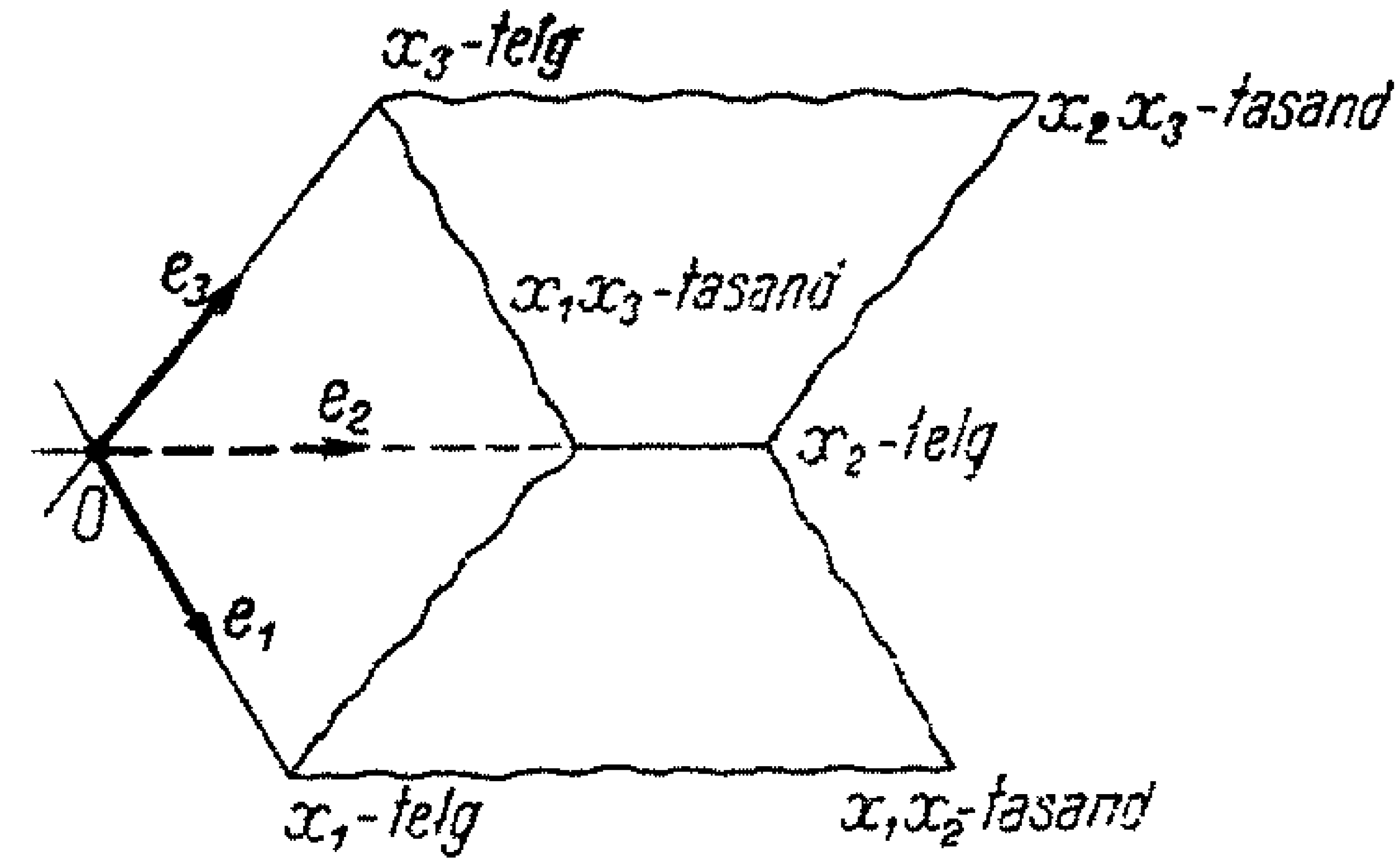
Joon 104



Joon 105



Joon. 106.



Joon. 107.

Kirjeldatud kolmel juhul on tasand määratav oma punktiga ja rihivektoripaariga. Tasandi üldvõrrandi koostamiseks saab seetõttu kõikidel nendel juhtudel kasutada eeskirja (46.4).

Antud reeperiga $\{O;\, e_1, e_2, e_3\}$ on eriliselt seotud kolm sirget, mis läbivad alguspunkti O baasivektorite e_1, e_2 ja e_3 sihis. Neid nimetatakse **koordinaattelgedeks**, vastavalt x_1-, x_2- ja x_3-teljeks (joon. 107). Võrrandeis (47.1) on nende puhul $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ning näiteks x_1-telje puhul lisaks sellele $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 0$. Seega x_1-telje võrrandeiks on $x_1 = u$, $x_2 = x_3 = 0$. Analoogiliselt on x_2- ja x_3-telje võrrandeiks vastavalt $x_2 = u$, $x_1 = x_3 = 0$ ja $x_3 = u$, $x_1 = x_2 = 0$.

Üldvõrrandiga $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$ antud tasandi ja koordinaattelgede vastastikuste asendite selgitamiseks tuleb kasutada teoreemi 47.1. Näiteks x_1-telje puhul saame, et tasand ja see telg lõikuvad parajasti siis, kui $A_1 1 + A_2 0 + A_3 0 \neq 0$, s. t. kui $A_1 \neq 0$. Lõikepunktil on seejuures koordinaadid $\left(-\frac{A_4}{A_1},\ 0, 0\right)$. Tasand ja x_1-telg on paralleelsed parajasti siis, kui $A_1 = 0$ ja $A_4 \neq 0$. Tasand läbib x_1-telje, kui $A_1 = A_4 = 0$. Analoogilised tunnused võib saada ka teiste telgede puhul (indeks 1 asendub indeksiga 2 või 3).

Üldiselt võib öelda, et koordinaattelg on paralleelne tasandiga või on tasandil parajasti siis, kui viimase üldvõrrand ei sisalda liiget sellele teljele vastava koordinaadiga (s. t. kui vastav kordaja on 0). Kui tasandi üldvõrrand ei sisalda korraga kaht koordinaati, siis on selle omadusega korraga kaks koordinaattelge. Näiteks võrrand

$$A_1x_1 + A_4 = 0, \tag{47.4}$$

milles $A_1 \neq 0$, $A_4 \neq 0$, määrab tasandi, mis on paralleelne korraga x_2- ja x_3-teljega. Kui aga võrrandis (46.4) $A_1 \neq 0$, $A_4 =$

$= 0$, siis ta nõuab lihtsalt seda, et $x_1 = 0$. Teda rahuldavad seega kõik punktid, mille esimene koordinaat on 0. Vastav tasand läbib nii x_2-telje kui ka x_3-telje. Teda nimetatakse x_2x_3-*tasandiks*. Üldiselt kolme tasandit võrranditega $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ja $x_3 = 0$ nimetatakse *koordinaattasandeiks*, vastavalt x_2x_3-, x_1x_3- ja x_1x_2-tasandiks (joon. 107).

Kui piirduda ainult tasanditega, mis lõikavad näiteks x_3-telge, siis iga sellise üldvõrrandis $A_3 \neq 0$ ning selle võrrandi võib pärast läbijagamist arvuga A_3 esitada kujul

$$x_3 = m_1x_1 + m_2x_2 + p_3. \tag{47.5}$$

Tasandi ja x_3-telje lõikepunktiks on siis $(0, 0, p_3)$. Analoogiliselt saab üldvõrrandist avaldada ka iga teise koordinaadi ülejäänud kahe koordinaadi lineaarse funktsioonina, kui piirduda tasanditega, mis lõikavad vastavat koordinaattelge.

Kui tasand lõikab kõiki koordinaattelgi ja ei läbi seejuures alguspunkti $O(0, 0, 0)$ (s. t. kui üldvõrrandis on nullist erinevad kõik kordajad A_1, A_2 ja A_3 ning ka vabaliige A_4), siis võib üldvõrrandi pärast jagamist arvuga A_4 teisendada kujju

$$\frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3} = 1. \tag{47.6}$$

Siin arve $p_i = -\frac{A_4}{A_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ nimetatakse tasandi *telglõikudeks*, sest tasandi ja koordinaattelgede lõikepunktideks on parajasti punktid $(p_1, 0, 0)$, $(0, p_2, 0)$ ja $(0, 0, p_3)$, nagu on lihtne kindlaks teha (joon. 108). Kui need lõikepunktid on teada, siis saab (47.6) järgi otsekohe kirja panna tasandi võrrandi.

48. Sirge võrrandid ja tasandipaar. Sirge parameetrilised võrrandid (47.1) saab esitada ka kujul

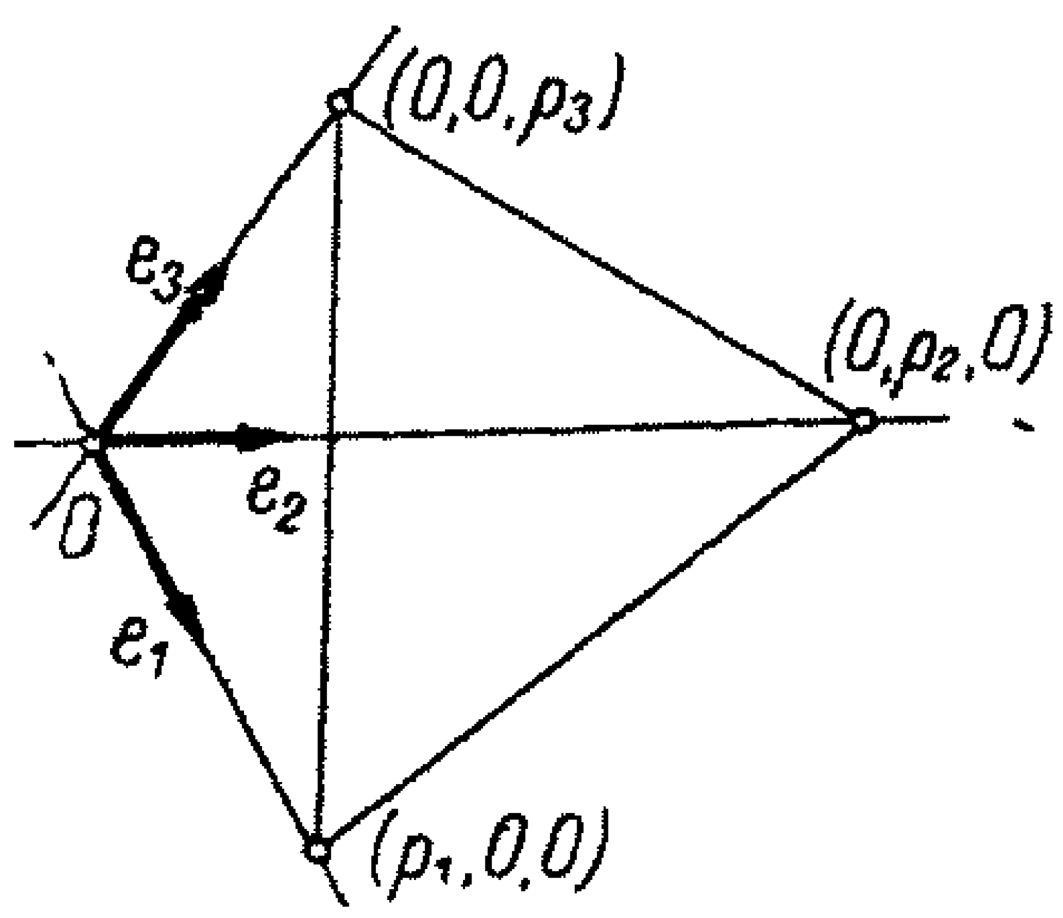
$$x_1 - a_1 = uk_1, \quad x_2 - a_2 = uk_2, \quad x_3 - a_3 = uk_3. \tag{48.1}$$

Sellest kujust on näha, et vasakud pooled on võrdelised sirge sihivektori $\boldsymbol{k}$ koordinaatidega ja art-s 16 tehtud kokkuleppe kohaselt saab võrrandid (48.1) kirjutada ka järgmiselt:

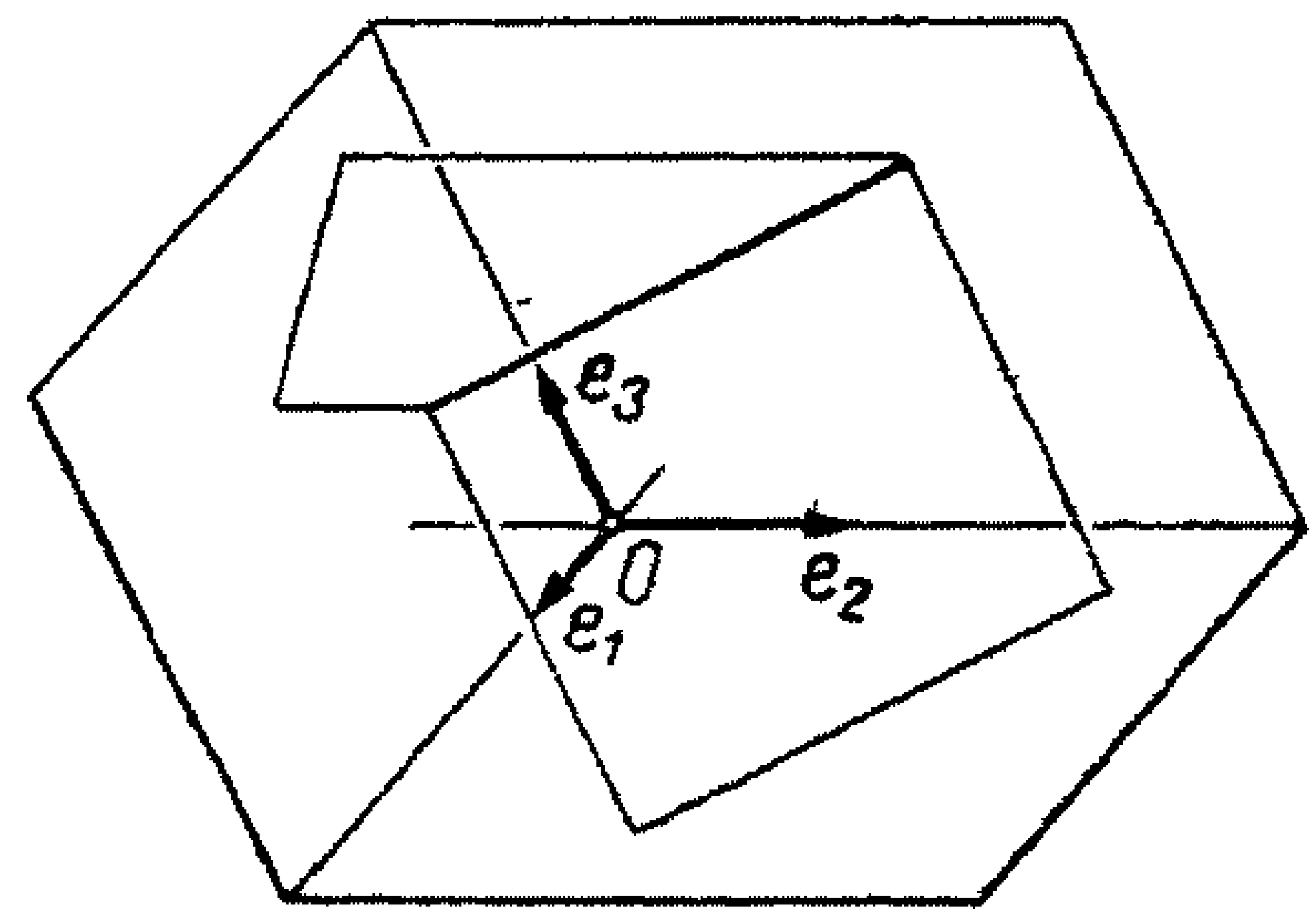
$$\frac{x_1 - a_1}{k_1} = \frac{x_2 - a_2}{k_2} = \frac{x_3 - a_3}{k_3}. \tag{48.2}$$

Tulemus on samaväärne sirge võrranditega (47.1) ning kujutab endast samuti sirge teatavat laadi võrrandeid. Viimaseid nimetatakse sirge *kanoonilisteks võrranditeks*. Nendes parameetrit u enam ei esine, kõneldakse, et nad on saadud parameetri u elimineerimisel[61] võrrandeist (47.1). Seoses sellega väheneb

[61] lad. k. *eliminare* — välja ajama.



Joon. 108



Joon. 109.

oluliste võrrandite arv. Kolmest seostega (48.2) antud võrdusest on olulised ainult kaks, näiteks võrrandid

$$\frac{x_1-a_1}{k_1}=\frac{x_2-a_2}{k_2}, \quad \frac{x_1-a_1}{k_1}=\frac{x_3-a_3}{k_3}, \tag{48.3}$$

kolmas:

$$\frac{x_2-a_2}{k_2}=\frac{x_3-a_3}{k_3} \tag{48.4}$$

on juba nende järeldus. Kõik kolm viimast võrrandit on lineaarsed, kusjuures alati leidub kaks, mis rahuldavad teoreemi 46.1 lisatingimust (nõuet, et koordinaatide kordajatest vähemalt üks oleks nullist erinev), sest sihivektori $\boldsymbol{k}$ koordinaadid pole kõik korraga nullid. Järelikult kumbki niisugusest kahest võrrandist määrab tasandi. Et sirge punktide koordinaadid rahuldavad mõlemat võrrandit, siis sirge punktid on korraga mõlemal tasandil, mistõttu sirge kujutab endast nende tasandite lõiget. Seejuures on need tasandid teatavais eriasendeis koordinaatteljede suhtes. Näiteks võrranditest (48.3) esimene ei sisalda liiget koordinaadiga x_3, teine — koordinaadiga x_2. Kui mõlemad neist määravad tasandi, siis esimene tasand on paralleelne x_3-, teine x_2-teljega. Öeldakse, et esimene projekteerib sirge x_1x_2-tasandile paralleelselt x_3-teljega, teine projekteerib sirge x_1x_3-tasandile paralleelselt x_2-teljega (joon. 109). Analoogiliselt tasand võrrandiga (48.4) — kui viimane üldse määrab tasandi, s. t. kui $k_2^2+k_3^2\neq 0$ — projekteerib sirge x_2x_3-tasandile paralleelselt x_1-teljega. (Seda tasandit ei eksisteeri, kui $k_2=k_3=0$, s. t. kui $\boldsymbol{k}=k_1\boldsymbol{e}_1 \parallel \boldsymbol{e}_1$ — teisiti öeldes, kui sirge ise on paralleelne x_1-teljega (vt. art. 38).)

Niisugused projekteerivad tasandid pole ainukesed tasandid, mis läbivad antud sirget. Eelmises art-s selgus nimelt, et ruumi iga punkti puhul, mis pole antud sirgel, leidub parajasti üks tasand, mis läbib seda punkti ja sirget. Seetõttu võib sirgeid käsitleda üldiselt kui tasandite lõikeid, mitte eriti kitsendades tasandite valikut.

Vaatlemegi järgnevalt vabalt võetud tasandipaari ruumis. Selle paari tasandid olgu antud üldvõrranditega

$$\begin{aligned} A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4=0,\\ B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3+B_4=0. \end{aligned} \tag{48.5}$$

***Teoreem* 48.1.** *Kui kahe tasandi üldvõrrandites* (47.5) *koordinaatide kordajad ei ole võrdelised, s. t. kui vähemalt üks kolmest tingimusest on täidetud:*

$$\frac{A_1}{B_1}\neq\frac{A_2}{B_2},\qquad \frac{A_2}{B_2}\neq\frac{A_3}{B_3},\qquad \frac{A_3}{B_3}\neq\frac{A_1}{B_1},$$

siis tasandid lõikuvad mööda teatavat sirget sihivektoriga

$$\boldsymbol{k}=\left(\begin{vmatrix} A_2 & A_3\\ B_2 & B_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_3 & A_1\\ B_3 & B_1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & A_2\\ B_1 & B_2\end{vmatrix}\right).$$

T õ e s t u s. Vajaduse korral koordinaate ümber nummerdades võib alati saavutada olukorra, kus

$$\frac{A_2}{B_2}\neq\frac{A_3}{B_3} \tag{48.6}$$

ehk $A_2B_3-A_3B_2\neq 0$. Sel korral esitame võrrandid (48.5) kujul

$$\begin{aligned} A_2x_2+A_3x_3&=-A_1x_1-A_4, \quad & B_3 \quad & -B_2\\ B_2x_2+B_3x_3&=-B_1x_1-B_4 \quad & -A_3 \quad & A_2 \end{aligned}$$

ja vaatleme neid süsteemina x_2 ja x_3 määramiseks vabaks jääva x_1 puhul. Korrutades võrrandid läbi kord arvudega B_3 ja $-A_3$, kord arvudega $-B_2$ ja A_2 (väiketähed paremal ülal) ning liites tulemused, saame järgmised seosed:

$$\begin{aligned} (A_2B_3-A_3B_2)x_2&=(A_3B_1-A_1B_3)x_1+(A_3B_4-A_4B_3),\\ (A_2B_3-A_3B_2)x_3&=(A_1B_2-A_2B_1)x_1+(A_4B_2-A_2B_4) \end{aligned} \tag{48.7}$$

ning siit

$$\begin{aligned} x_2&=\lambda_2x_1+a_2,\\ x_3&=\lambda_3x_1+a_3, \end{aligned} \tag{48.8}$$

kus

$$\lambda_2=\frac{\begin{vmatrix} A_3 & A_1\\ B_3 & B_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & A_3\\ B_2 & B_3\end{vmatrix}},\qquad \lambda_3=\frac{\begin{vmatrix} A_1 & A_2\\ B_1 & B_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & A_3\\ B_2 & B_3\end{vmatrix}}$$

ning a_2 ja a_3 avalduvad analoogiliselt teatavate determinantide jagatistena. Võrrandid (48.8) võib teisendada kujju

$$x_1 = \frac{x_2 - a_2}{\lambda_2}, \quad x_1 = \frac{x_3 - a_3}{\lambda_3} \tag{48.9}$$

mis kujutavad endast erijuhtu võrrandeist (48.3): kui viimastes võtta $a_1 = 0$ ja $k_1 = 1$, siis tulemuseks on just saadud võrrandid. Järelikult võrrandid (48.9) ehk kokkuvõtlikult

$$x_1 = \frac{x_2 - a_2}{\lambda_2} = \frac{x_3 - a_3}{\lambda_3}$$

kujutavad endast teatava sirge kanoonilisi võrrandeid, kusjuures sirge läbib punkti $A(0, a_2, a_3)$ vektori

$$\boldsymbol{k}' = (1, \lambda_2, \lambda_3)$$

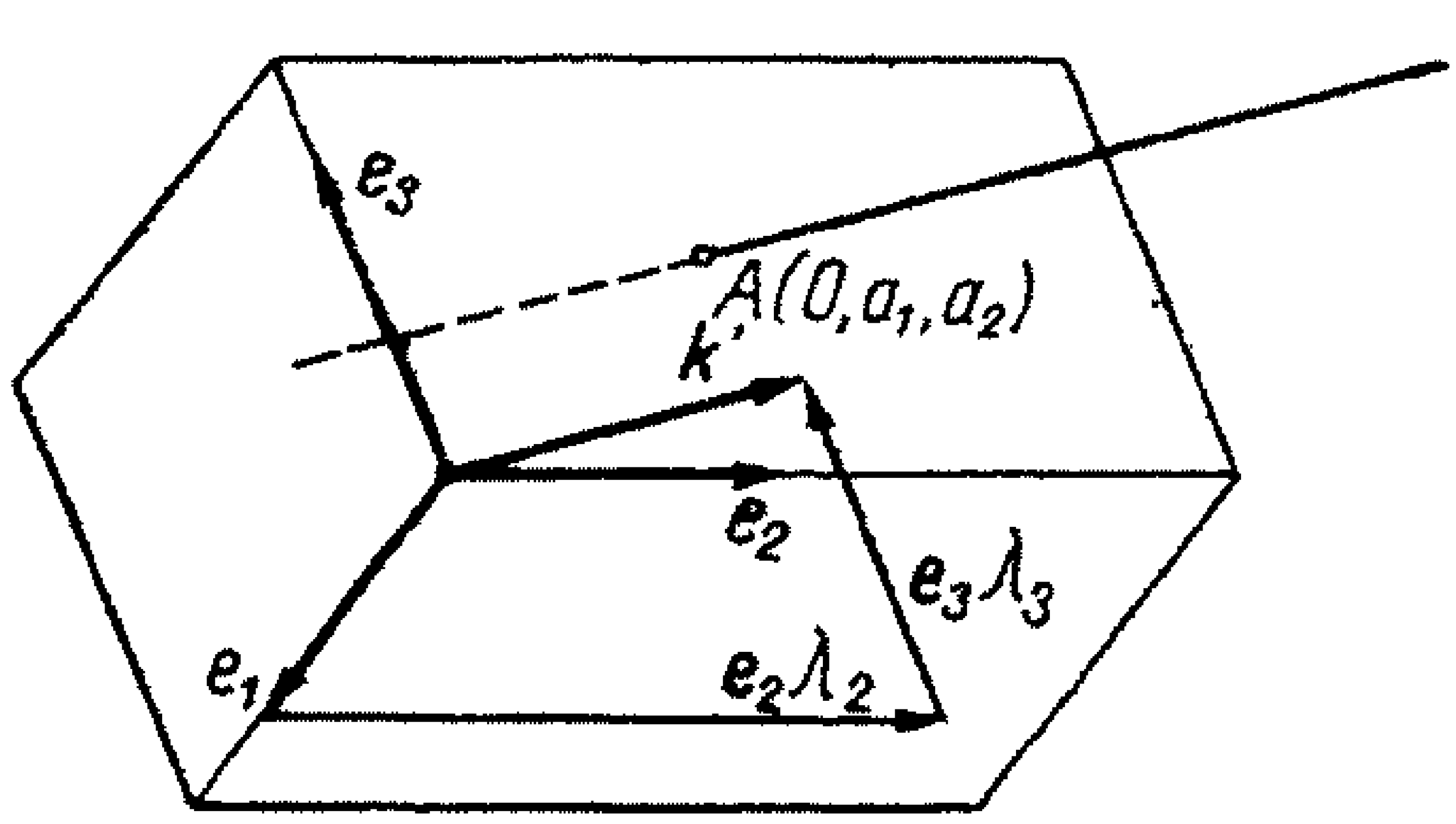
sihis. Koos viimasega on sirge sihivektoriks ka

$$\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}',$$

mis, nagu kerge näha, ühtibki teoreemi sõnastuses antud vektoriga. ∎

Võrrandeid (48.5) teoreemis 48.1 sõnastatud lisatingimusel nimetatakse nende poolt määratud tasandite lõikumisel tekkiva sirge üldvõrranditeks.

Mainitud teoreemi tõestusest selgub, et iga sirget ruumis saab esitada ka võrranditega (48.8) (vajaduse korral koordinaate ümber nummerdades). Lisame, et ka kanoonilised võrrandid (48.2) ehk (48.3) on teisendatavad kujju (48.8), kui nendest avaldada x_2 ja x_3. Saadud võrrandeid (48.8) nimetatakse sirge taandatud võrranditeks. Suurustel λ_2, λ_3, a_2 ja a_3 on siin kindel tähendus (joon. 110): esimesed kaks on sirge sihivektori $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, k_3)$ koordinaatide suhted: $\lambda_2 = \frac{k_2}{k_1}$, $\lambda_3 = \frac{k_3}{k_1}$, viimased kaks on sirge ja x_2x_3-tasandi lõikepunkti $A(0, a_2, a_3)$ kaks viimast koordinaati. (Eeldatakse, et $k_1 \neq 0$; koordinaatide ümbernummerdamisega võib seda alati saavutada.) Sellele neljale



Joon. 110.

suurusele võib anda vabalt reaalarvulisi väärtusi, igale väärtusenelikule vastab teatav sirge. Samuti on selge, et antud sirge korral on need suurused täielikult määratud. Seda asjaolu väljendatakse sõnadega: sirge ruumis sõltub neljast parameetrist.

Tasandipaaride juurde tagasi pöördudes jääb selgitada, missugustes vastastikustes asendeis võivad olla kaks tasandit siis, kui nende võrrandite (48.5) puhul ei ole rahuldatud teoreemi 48.1 eeldus, s. t. kui

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_3}{B_3}(=\varkappa). \tag{48.10}$$

Sel korral $A_i=\varkappa B_i$ $(i=1, 2, 3)$. Tingimused

$$\begin{aligned} A_1k_1+A_2k_2+A_3k_3&=0,\\ B_1k_1+B_2k_2+B_3k_3&=0, \end{aligned} \tag{48.11}$$

mida peavad rahuldama vektori $\boldsymbol{k}$ koordinaadid, selleks et $\boldsymbol{k}$ kuuluks vastavalt kas esimese või teise tasandi rihile (vt. (46.8)), sellisel juhul ühtivad, sest esimene on saadav teisest selle läbikorrutamisel arvuga $\varkappa$. Järelikult juhul, mil kehtivad võrdused (48.10), vaadeldava kahe tasandi rihid ühtivad. Lihtne on veenduda, et tingimus (48.10) on mitte üksnes piisav, vaid ka tarvilik tasandite rihtide ühtimiseks, sest ainult tingimuse (48.10) korral on võrrandid (48.11) samaväärsed: iga esimest rahuldav arvukolmik (k_1, k_2, k_3) rahuldab ka teist.

Tuleb niisiis selgitada, missugustes vastastikustes asendeis võivad olla kaks ühtivate rihtidega tasandit. Kui võrrandeist (48.5) teine korrutada läbi arvuga $-\varkappa$ ja seejärel liita võrrandite pooled, siis tulemuseks saame

$$A_4-\varkappa B_4=0. \tag{48.12}$$

On kaks võimalust. Kui

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_3}{B_3}\neq\frac{A_4}{B_4}, \tag{48.13}$$

siis $A_4\neq\varkappa B_4$ ja (48.12) ei kehti. Võrrandid (48.5) on siis vasturääkivad — ei ole ühtegi reaalarvukolmikut (x_1, x_2, x_3), mis rahuldaks korraga mõlemat võrrandit. Järelikult nende võrrandite poolt määratud tasanditel ei ole sel korral ühtegi ühist punkti. Kaht ühise punktita tasandit nimetatakse p a r a l l e e l s e t e k s. (Järgnev teoreem 48.2 näitab, et selline nimetamine on kooskõlas art-s 16 antud tasandite paralleelsuse mõistega.)

Jääb üle võimalus, mil

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_3}{B_3}=\frac{A_4}{B_4}; \tag{48.14}$$

võrrandid (48.5) on siis samaväärsed — esimene on saadav teisest selle läbikorrutamisel arvuga $\varkappa$. Järelikult sel korral tasandid ühtivad.

Teoreemist 48.1 järeldub, et tingimus (48.13) on tasandite paralleelsuseks mitte üksnes piisav, vaid ka tarvilik, sest kui see tingimus oleks rikutud, s. t. kui kehtiks kas üks teoreemi 48.1 sõnastuses antud vahekorrast või (48.14), siis tasandeil oleks, nagu eespool selgus, ühiseid punkte.

Kokkuvõttes on tõestatud järgmine lause.

***Teoreem* 48.2.** *Kahe tasandi paralleelsuseks (s. t. ühise punkti puudumiseks) on tarvilik tasandite rihtide ühtimine (s. t. tingimuse* (48.10) *kehtivus). Sama rihiga tasandid on kas paralleelsed (kui kehtib* (48.13)*) või ühtivad (kui kehtib* (48.14)*).*

Viimati mainitud kaht tingimust nimetatakse seetõttu kahe tasandi vastavalt paralleelsuse või ühtimise tunnusteks. Näiteks võrrandiga $A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4=0$ antud tasand on paralleelne x_2x_3-tasandiga, mille võrrandiks on teatavasti $x_1=0$, parajasti siis, kui

$$\frac{A_1}{1}=\frac{A_2}{0}=\frac{A_3}{0}\neq\frac{A_4}{0},$$

s. t. kui $A_1\neq 0$, $A_2=A_3=0$, $A_4\neq 0$. Eespool selgus, et samasuguse võrrandiga (47.4) määratakse tasand, mis on paralleelne x_2- ja x_3-teljega. (Üldiselt võib tõestada, et tasand on paralleelne teise tasandiga parajasti siis, kui ta on paralleelne mingi kahe lõikuva sirgega sellel tasandil.) Kui tasand ei ole paralleelne mingi koordinaattasandiga, siis tema lõikesirget selle tasandiga nimetatakse antud tasandi j ä l j e k s sellel koordinaattasandil (näiteks joonisel 108 on näidatud tasand oma kolme jäljega). Jälgedega kahel koordinaattasandil on iga tasand määratud üheselt.

49. Tasandikimp. Sirgekimbu analoogiks ruumis on tasandikimp, mis defineeritakse järgmiselt.

***Def.* 49.1.** T a s a n d i k i m b u k s nimetatakse üht sirget — kimbu telge — läbivate tasandite hulka ruumis.

Samuti nagu sirgekimbu korral, saab anda lihtsa eeskirja tasandikimbu suvalise tasandi leidmiseks, kui on antud kimbu kaks tasandit oma üldvõrranditega (48.5) (teoreemi 48.1 eeldus peab sel juhul muidugi olema rahuldatud).

***Teoreem* 49.1.** *Tasandikimp, mis sisaldab üldvõrranditega* (48.5) *määratud tasandid, koosneb parajasti kõigist niisugustest tasanditest, mille üldvõrrandiks on*

$$\lambda(A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4)+\mu(B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3+B_4)=0, \qquad (49.1)$$

kus λ ja μ on vabalt võetud reaalarvud, mis pole korraga nullid.

Tõestus. Võrrand (49.1) määrab tõesti alati tasandi, sest ta on korraldatav kujju

$$(\lambda A_1+\mu B_1)x_1+(\lambda A_2+\mu B_2)x_2+(\lambda A_3+\mu B_3)x_3+(\lambda A_4+\mu B_4)=0, \tag{49.2}$$

milles koordinaatide kordajad ei ole korraga nullid, sest vastandjuhul võrdustest

$$\lambda A_1+\mu B_1=0, \quad \lambda A_2+\mu B_2=0, \quad \lambda A_3+\mu B_3=0$$

järelduks, et

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_3}{B_3} \quad \left(=-\frac{\mu}{\lambda}\right),$$

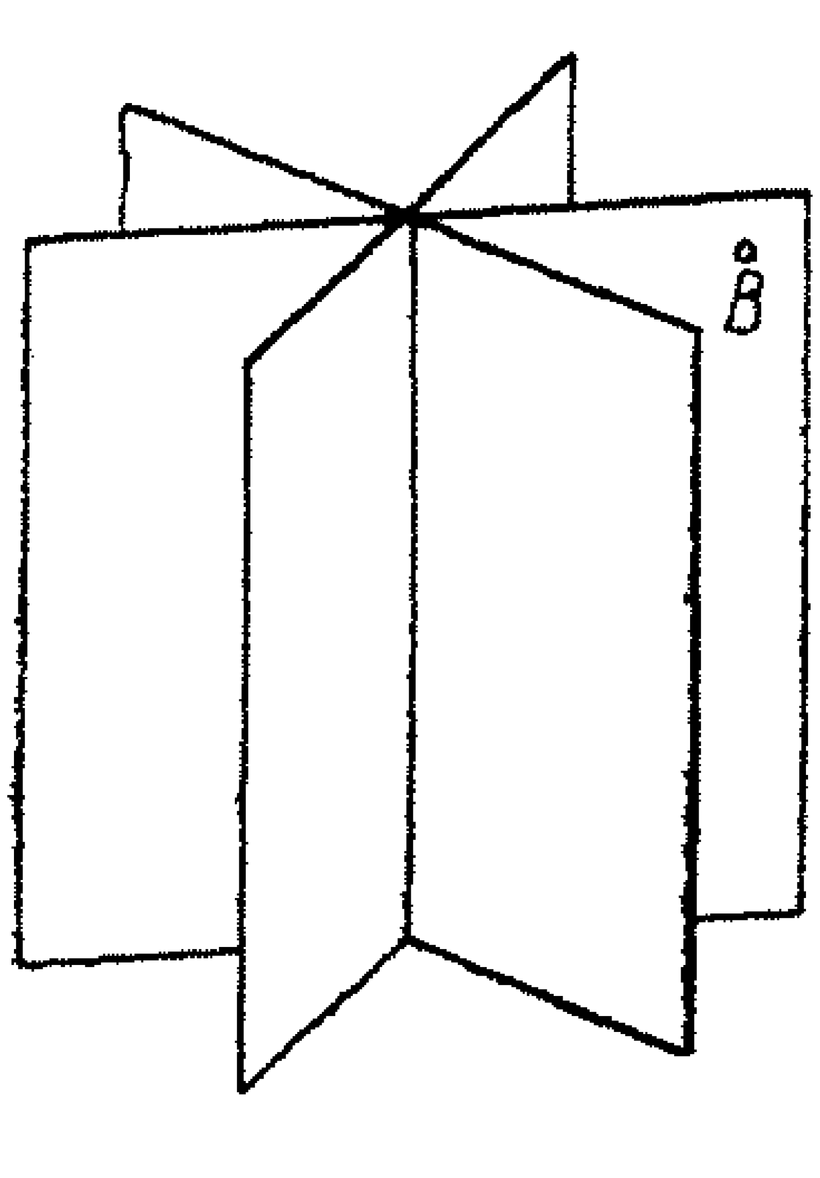
mis on vastuolus teoreemi 48.1 eeldusega.

Tasand võrrandiga (49.1) kuulub vaadeldavasse kimpu, sest antud tasandite lõikesirge iga punkti koordinaadid, rahuldades tasandite võrrandeid, muudavad nulliks võrrandi (49.1) vasakul pool olevad suluavaldised ning rahuldavad seega seda võrrandit. Järelikult võrrandiga (49.1) määratud tasand sisaldab lõikesirge iga punkti ning läbib seega seda sirget.

Niiviisi võib kätte saada kimbu iga tasandi, sest ruumi iga punkti $B(b_1, b_2, b_3)$ korral, mis ei ole võrranditega (48.5) antud sirgel, saab määrata sellised nullist erinevad reaalarvud λ ja μ, nii et vastav tasand võrrandiga (49.1) läbib punkti B (joon. 111). Selleks piisab, kui võtta

$$\lambda=B_1b_1+B_2b_2+B_3b_3+B_4, \quad \mu=-(A_1b_1+A_2b_2+A_3b_3+A_4). \tag{49.3}$$

Sel korral, nagu kerge kontrollida, B koordinaadid tõesti rahuldavad saadavat võrrandit (49.1). Niiviisi valitud λ ja μ ei ole korraga nullid, sest vastandjuhul peaks B olema võrranditega (48.5) antud sirgel, mis praegu on võimatu. ▮



Joon. 111.

Täiendavalt tuleb märkida, et kimbu tasandi määramisel võrrandiga (49.1) kordajad λ ja μ ei ole eraldi tähtsad, oluline on ainult nende suhe $\lambda:\mu$ (sest võrrandi (49.1) võib alati läbi jagada näiteks arvuga μ, kui see on nullist erinev). Seega tasand kimbus sõltub ühestainsast parameetrist.

Pakub huvi selgitada, mida esitab võrrand (49.1) siis, kui teoreemi 48.1 eeldus ei ole rahuldatud, s. t. kui antud tasandid on paralleelsed või ühtivad. Sel korral $A_i=\varkappa B_i$ ning võrrand (49.2) on seega kujuga

$$(\lambda\varkappa+\mu)(B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3)+(\lambda A_4+\mu B_4)=0.$$

Kui siin üldse määratakse tasand (s. t. kui $\lambda\varkappa+\mu\neq 0$), siis selle üldvõrrand on

$$B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3+C_4=0, \tag{49.4}$$

kus

$$C_4=\frac{\lambda A_4+\mu B_4}{\lambda\varkappa+\mu}.$$

Kui võrranditega (48.5) antud tasandid ühtivad, s. t. kui $A_4 = \varkappa B_4$, siis $C_4 = B_4$ ning seega ka võrrandiga (49.1) ehk (49.4) määratud tasand ühtib nendega. Kui antud tasandid on paralleelsed, s. t. kui $A_4 \neq \varkappa B_4$, siis $C_4 \neq B_4$ ning ka saadud uus tasand on paralleelne nendega. Seejuures on niiviisi määratav iga tasand, mis on paralleelne kahe antud tasandiga, sest endistviisi saab λ ja μ valikuga (49.3) kindlustada, et võrrandiga (49.1) määratud sirge läbib vabalt etteantud punkti B.

Siin võib märgata suurt analoogiat vastavate arutlustega sirgete kohta tasandil (vt. art. 41). Seetõttu on loomulik kasutada ka analoogilisi nimetusi.

***Def.* 49.2.** Kõigi omavahel paralleelsete (s. t. ühise rihiga) tasandite hulka ruumis nimetatakse tasandite e b a k i m b u k s.

Et tasandikimpudega on üksüheses vastavuses teatavad sirged — nende teljed, siis ebakimpude puhul on otstarbekas seada ka neile vastavusse teatavad fiktiivsed ebasirged ja vaadelda paralleelseid tasandeid lõikuvatena ebasirgel. Et paralleelsetel tasanditel on ühine riht, siis ebasirge on tõlgendatav lihtsalt rihina. Põhjalikumalt arendatakse neid kujutlusi art-s 107 seoses projektiivse ruumi mõistega.

50. Poolruum ja lineaarvõrratused. Ülalmainitud analoogia, tänu millele suur osa tulemusi kandub ilma oluliste muutusteta sirgetelt tasandil üle tasanditele ruumis, on rakendatav ka art-s 42 esitatu puhul. Seetõttu ei korrata käesolevas artiklis mõningaid üksikasju ja arutlusi, mis erinevad art. 42 omadest ainult selle poolest, et sõnad «sirge» ja «tasand» asenduvad sõnadega «tasand» ja «ruum» ning lisanduvad liikmed kolmanda koordinaadiga x_3.

Olgu antud tasand üldvõrrandiga

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4=0. \tag{50.1}$$

***Def.* 50.1.** Öeldakse, et ruumi punktid A ja B, mis ei ole antud tasandil, on ü h e l p o o l tasandit, kui nende vahel ei ole tasandi ühtegi punkti, ning t e i n e t e i s e l p o o l tasandit vastupidisel juhul.

Tähistame

$$\alpha = A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3 + A_4, \qquad \beta = A_1b_1 + A_2b_2 + A_3b_3 + A_4,$$

kus (a_1, a_2, a_3) ja (b_1, b_2, b_3) on punktide A ja B koordinaadid.

***Teoreem* 50.1.** *Võrrandiga* (50.1) *määratud tasandil mitteasuvad punktid A ja B on ühel pool tasandit parajasti siis, kui* $\alpha\beta > 0$, *ja teine teisel pool tasandit parajasti siis, kui* $\alpha\beta < 0$.

Tõestus kordab täielikult teoreemi 42.1 tõestust (muidugi eespool märgitud erinevustega). Samuti on järgnevalt lihtne kontrollida, et «ühel pool tasandit olemine» ruumi kõigi nende punktide hulgas, mis jäävad järele pärast tasandi punktide eemaldamist, kujutab endast ekvivalentsust. Ekvivalentsusklasse on seejuures kaks: ühte kuuluvad need punktid $X(x_1, x_2, x_3)$, mille korral

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 > 0, \tag{50.2}$$

teise need, mille puhul

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 < 0. \tag{50.3}$$

Kumbagi ekvivalentsusklassi nimetatakse p o o l r u u m i k s, seejuures üht nimetatakse teise täiendpoolruumiks. Tasandit võrrandiga $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$ nimetatakse ükskõik kumma sellise poolruumi ääreks.

Poolruumi mõistega on seega antud geomeetriline tähendus kolme muutujaga lineaarvõrratusele: ruumi punktide hulk, mille koordinaadid rahuldavad sellist võrratust, osutub poolruumiks. Näiteks võrratused $x_3 > 0$ ja $x_3 < 0$ esitavad kaks poolruumi, mille ühiseks ääreks on x_1x_2-tasand võrrandiga $x_3 = 0$. Etteantud poolruumi võib soovi korral alati esitada võrratusega (50.2), s. t. nõuet > 0 kasutades, sest vajaduse korral võib võrratuse (50.3) läbi korrutada arvuga -1.

Kahest lineaarvõrratusest koosneva süsteemi

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 > 0,$$
$$B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B_4 > 0$$

tõlgendamiseks tuleb defineerida järgmine mõiste.

***Def.* 50.2.** Kui kahe poolruumi äärteks olevad tasandid lõikuvad, siis poolruumide ühisosa nimetatakse k a h e t a h u l i s e k s n u r g a k s. Tasandite lõikesirget nimetatakse kahetahulise nurga s e r v a k s, nende pooltasandeid, mille ühiseks ääreks on serv ning mis kuuluvad antud poolruumidele, nimetatakse kahetahulise nurga t a h k u d e k s.[62]

[62] Sageli (näit. D. I. P e r e p j o l k i n, Elementaargeomeetria kursus II. Tallinn, 1956, lk. 26) nimetatakse kahetahuliseks nurgaks serva ja tahkude ühendit. Sel korral def-iga 50.2. määratud punktihulka nimetatakse kahetahulise nurga kumeraks sisepiirkonnaks.

Kui range võrratuse (50.2) asemel vaadelda võrratust

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4 \geqslant 0,$$

siis selle geomeetriliseks vasteks on võrratusega (50.2) määratud poolruumi ja selle ääre ühend, mida nimetatakse ääristatud poolruumiks. Kui def-is 50.2 poolruumid asendada ääristatud poolruumidega, siis nende ühisosaks on kahetahulise nurga ning selle serva ja tahkude ühend, mida nimetatakse ääristatud kahetahuliseks nurgaks.

Enam kui kahe ääristatud poolruumi ühisosa — mitmest lineaarvõrratusest (märgiga $\geqslant$) koosneva süsteemi geomeetriline vaste — võib olla väga mitmesuguse ehitusega. Kui selline ühisosa ei ole tühi, ei koosne ühestainsast punktist, ei ole lõik ega kumer hulknurk ning ei sisalda ühtegi poolsirget, siis teda nimetatakse kumeraks hulktahukaks ehk polüeedriks[63]. Märgime ilma tõestuseta, et näiteks eespool defineeritud rööptahukas (vt. def. 32.2) kujutab endast kumera kuustahuka erijuhtu (kuue sellise ääristatud poolruumi ühisosa, mille ääred on paarikaupa paralleelsed). Kumerat nelitahukat — nelja ääristatud poolruumi ühisosa, kui see on kumer hulktahukas (märgime, et vähema kui nelja poolruumi ühisosa ei saagi olla kumer hulktahukas) — nimetatakse tetraeedriks[64].

51. Sirge- ja tasandisidum. Sirgekimp tasandil ja tasandikimp ruumis on vastavalt sirgete ja tasandite üheparameetrilised hulgad. Ruumis on võimalik analoogiliselt defineerida ka teatavad sirgete ja tasandite kaheparameetrilised hulgad.

***Def.* 51.1.** Üht punkti läbivate sirgete hulka ruumis nimetatakse s i r g e s i d u m i k s. Üht punkti läbivate tasandite hulka ruumis nimetatakse t a s a n d i s i d u m i k s. Sirgete või tasandite ühist punkti nimetatakse mõlemal juhul sidumi keskpunktiks.

On selge, et defineeritud kaks mõistet on tihedalt seotud. Sirgesidumi iga kaks sirget (kui lõikuvad sirged ruumis) on ühel tasandil ja määravad seetõttu sama keskpunktiga tasandisidumi teatava tasandi. Vastupidi, tasandisidumi iga kaks tasandit (kui ühist punkti omavad tasandid) lõikuvad mööda sirget ja määravad seega sama keskpunktiga sirgesidumi teatava sirge.

Kui on antud sidumi keskpunkt $A(a_1, a_2, a_3)$, siis sirgesidumi iga sirge on esitatav võrranditega

$$\frac{x_1-a_1}{k_1}=\frac{x_2-a_2}{k_2}=\frac{x_3-a_3}{k_3}, \tag{51.1}$$

---

[63] kr. k. πολυ — palju, hulk, εδρα — alus, tahk.
[64] Vt. allviide 50.

kus k_1, k_2 ja k_3 on vabalt muutuvad reaalarvud, mis ei ole korraga nullid, tasandisidumi iga tasand aga võrrandiga

$$A_1(x_1-a_1)+A_2(x_2-a_2)+A_3(x_3-a_3)=0, \tag{51.2}$$

kus A_1, A_2 ja A_3 on vabalt muutuvad reaalarvud, mis ei ole korraga nullid (vrd. (46.5)). Seejuures pole siin tähtsad mitte kõik arvud, k_1, k_2, k_3 (või kõik arvud A_1, A_2, A_3) eraldi, sest nimetajad võrrandeis (51.1) (või kordajad võrrandis (51.2)) võib läbi jagada sellega nendest arvudest, mis on nullist erinev. Seega olulised on ainult mingid kaks suhet nimetatud kolme arvu suhetest, mistõttu sirged sirgesidumis ja tasandid tasandisidumis sõltuvad üksnes kahest parameetrist.

Siin ilmnenud analoogia sirge- ja tasandisidumi vahel lakkab, kui vaadelda, mitme sirgega või tasandiga sidum on määratud. Sirgesidum on määratud niipea, kui on antud sidumi kaks sirget (sest need määravad lõikudes sidumi keskpunkti), kuid tasandisidumi määramiseks ei piisa kahest tasandist. Osutub siiski, et oma kolme erineva tasandiga on tasandisidum täielikult määratud, kusjuures juhul, kui tasandid on antud oma üldvõrranditega, võib anda lihtsa reegli sidumi suvalise tasandi üldvõrrandi koostamiseks.

***Teoreem* 51.1.** *Kui tasandid üldvõrranditega*

$$\begin{aligned} A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4=0,\\ B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3+B_4=0,\\ C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3+C_4=0 \end{aligned} \tag{51.3}$$

on teatava tasandisidumi kolm sellist tasandit, mis ei kuulu ühte tasandikimpu, siis sidum koosneb parajasti nendest tasanditest, mille üldvõrrandiks on

$$\lambda(A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4)+\mu(B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3+B_4)+ \\ +\nu(C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3+C_4)=0, \tag{51.4}$$

kus λ, μ ja ν on vabalt võetud reaalarvud, mis pole korraga nullid.

T õ e s t u s. Võrrand (51.4) määrab tõesti alati tasandi, sest ta on korraldatav kujju

$$(\lambda A_1+\mu B_1+\nu C_1)x_1+(\lambda A_2+\mu B_2+\nu C_2)x_2+ \\ +(\lambda A_3+\mu B_3+\nu C_3)x_3+(\lambda A_4+\mu B_4+\nu C_4)=0, \tag{51.5}$$

milles x_1, x_2 ja x_3 kordajad ei ole korraga nullid, sest vastandjuhul tekiksid praegu lubamatud võrdused

$$\begin{aligned} \lambda A_1+\mu B_1+\nu C_1=0,\\ \lambda A_2+\mu B_2+\nu C_2=0,\\ \lambda A_3+\mu B_3+\nu C_3=0. \end{aligned} \tag{51.6}$$

Need on tõesti praegu võimatud, sest nende kehtivuse korral λ, μ ja ν mingi väärtusekolmiku puhul võrrand (51.5) kas annaks vasturääkivuse (kui $\lambda A_4 + \mu B_4 + \nu C_4 \neq 0$) ning süsteem (51.3) oleks vasturääkiv ja ei omaks ühtegi lahendit või osutuks samasuseks $0 = 0$ (kui $\lambda A_4 + \mu B_4 + \nu C_4 = 0$). Mõlemad juhud on praegu võimatud: esimesel juhul antud tasandeil poleks ühist punkti ja nad ei saaks olla ühe tasandisidumi tasandid, nagu eeldatud, teisel juhul (51.4) oleks samasus ning ühe tasandi üldvõrrandi vasaku poole saaks avaldada ülejäänud kahe tasandi võrrandite vasakute poolte kaudu, mistõttu selle tasandi võrrand oleks esitatav kujul (49.1) (või sellega analoogilisel kujul) — tasandid kuuluksid ühte tasandikimpu, mis on jällegi vastuolus eeldusega.

Võrduste (51.6) mittekehtimine tähendab seda, et tasandite üldvõrrandite (51.3) kordajatest moodustatud determinandi read on lineaarselt sõltumatud ning see determinant on seega teoreemi eelduste puhul nullist erinev:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (51.7)$$

Oleme vahetulemusena saanud tunnuse (51.7) kolme tasandi lõikumiseks parajasti ühes punktis, sest (51.7) kujutab endast, nagu teada lineaarvõrrandisüsteemide teooriast[65], ka piisavat tingimust selleks, et süsteemil (51.3) oleks parajasti üks lahend.

Niisiis, võrrand (51.4) määrab tasandi, kusjuures on selge, et see läbib sidumi keskpunkti $A(a_1, a_2, a_3)$, sest viimase koordinaadid, rahuldades võrrandeid (51.3), muudavad nullideks (51.4) vasakul pool olevad suluavaldised.

Jääb tõestada, et võrrandiga (51.4) saab määrata sidumi iga tasandi, s. t. võrrand (51.4) on λ, μ ja ν sobiva valiku puhul samaväärne sidumi suvalise tasandi võrrandiga

$$D_1(x_1 - a_1) + D_2(x_2 - a_2) + D_3(x_3 - a_3) = 0.$$

Siin piisab, kui λ, μ ja ν võtta nii, et oleks

$$\lambda A_1 + \mu B_1 + \nu C_1 = D_1,$$
$$\lambda A_2 + \mu B_2 + \nu C_2 = D_2,$$
$$\lambda A_3 + \mu B_3 + \nu C_3 = D_3,$$

selle süsteemiga on aga (51.7) tõttu tõesti määratud parajasti üks väärtusekolmik $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ — selle süsteemi lahend. ∎

---

[65] Vt. G. K a n g r o, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, II ptk.

Võrranditega (51.3) määratud kolme tasandi vastastikune asend (ning koos sellega ka võrrandiga (51.4) antud tasandite hulk) juhul, kui ei ole rahuldatud (51.7), sõltub maatriksite

$$\mathrm{A}=\left\| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} \right\|, \qquad \mathrm{B}=\left\| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{matrix} \right\|$$

astakutest [66]. Tähistame need vastavalt r ja r'. Et maatriksi astak on tema nullist erinevate miinorite kõrgeim järk ning teine vaadeldavaist maatrikseist on saadud esimesele ühe veeru lisamisel, siis on selge, et $r \leqslant r' \leqslant r+1$. Tõepoolest, on ju maatriksi A iga nullist erinev r järku miinor ka maatriksi B sama järku miinoriks, s. t. $r \leqslant r'$, ning kui A kõik $r+1$ järku miinorid on võrdsed nulliga, siis on B kõik $r+2$ järku miinorid samuti võrdsed nulliga — põhjenduseks tarvitseb vaid uue veeru elemente sisaldavad $r+2$ järku miinorid arendada selle veeru elementide järgi, s. t. $r' \leqslant r+1$.

Vaadeldaval juhul, kui (51.7) ei kehti, on $r<3$. Järelikult on võimalikud vaid järgmised juhud:

1) $r=2, \quad r'=3,$
2) $r=2, \quad r'=2,$
3) $r=1, \quad r'=2,$
4) $r=1, \quad r'=1.$

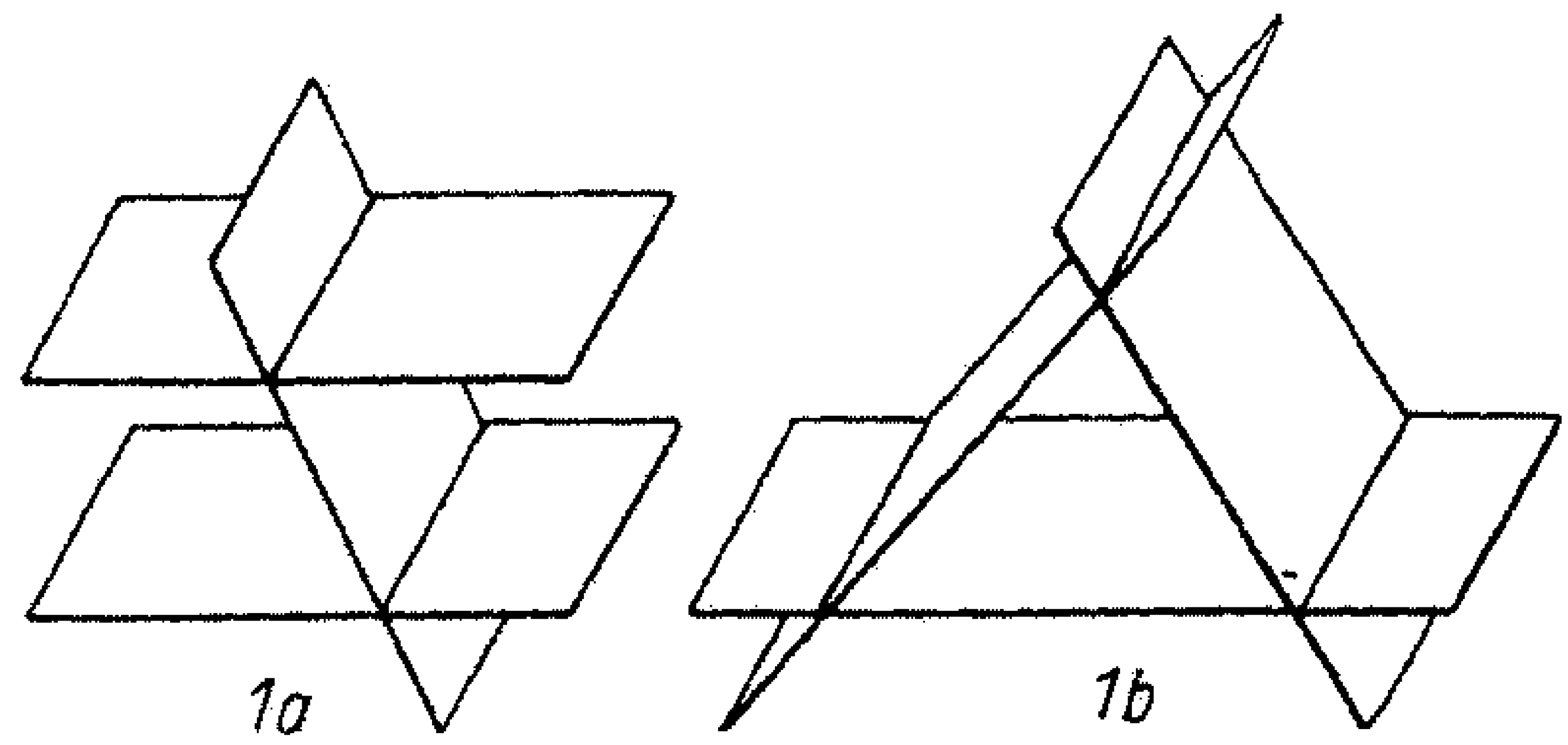
Juhtudel 1) ja 3) ei ole rahuldatud Kronecker-Capelli tarvilik ja piisav tingimus süsteemi (51.3) lahendi olemasoluks, järelikult nendel juhtudel tasandeil puudub ühine punkt. Erinevus nende juhtude vahel seisneb selles, et juhul 3), kus $r=1$, on maatriksi A iga kaks rida lineaarselt sõltuvad, s. t. võrdelised, mistõttu iga kaks tasandit on sama rihiga, juhul 1) see aga ei ole nii. Mõlemal juhul on kaks võimalust: 1a) mingid kaks tasandit on paralleelsed, kolmas aga enam pole nendega paralleelne, 1b) ükski kaks tasandit antud kolmest pole paralleelsed, 3a) mingid kaks tasandit ühtivad, kolmas on nendega paralleelne, 3b) iga kaks tasandit on paralleelsed. Esimese kahe võimaluse puhul mitteparalleelsete tasandite paarid määravad tasandite lõikesirge (juhul 1a on neid kaks, juhul 1b — kolm). Iga kaks neist sirgeist on ühel tasandil ja nad ei lõiku (sest tasandeil pole ühist punkti), järelikult iga kaks lõikesirget on paralleelsed.

Juhtudel 2) ja 4) kolmel tasandil on ühiseid punkte. Erinevus nende juhtude vahel seisneb selles, et juhul 4), kus $r'=1$, on maatriksi B iga kaks rida lineaarselt sõltuvad, s. t. võrdelised, mistõttu iga kaks tasandit ühtivad, juhul 2) see aga ei ole nii. Viimasel juhul on kaks võimalust: a) mingid kaks tasandeist ühtivad, kolmas lõikab neid, b) ükski kaks tasandit ei ühti. Et B read on lineaarselt sõltuvad, siis juhul b) ühe tasandi üldvõrrandi vasaku poole saab avaldada ülejäänud kahe üldvõrrandite vasakute poolte kaudu kujul (49.1), s. t. tasandid kuuluvad ühte kimpu.

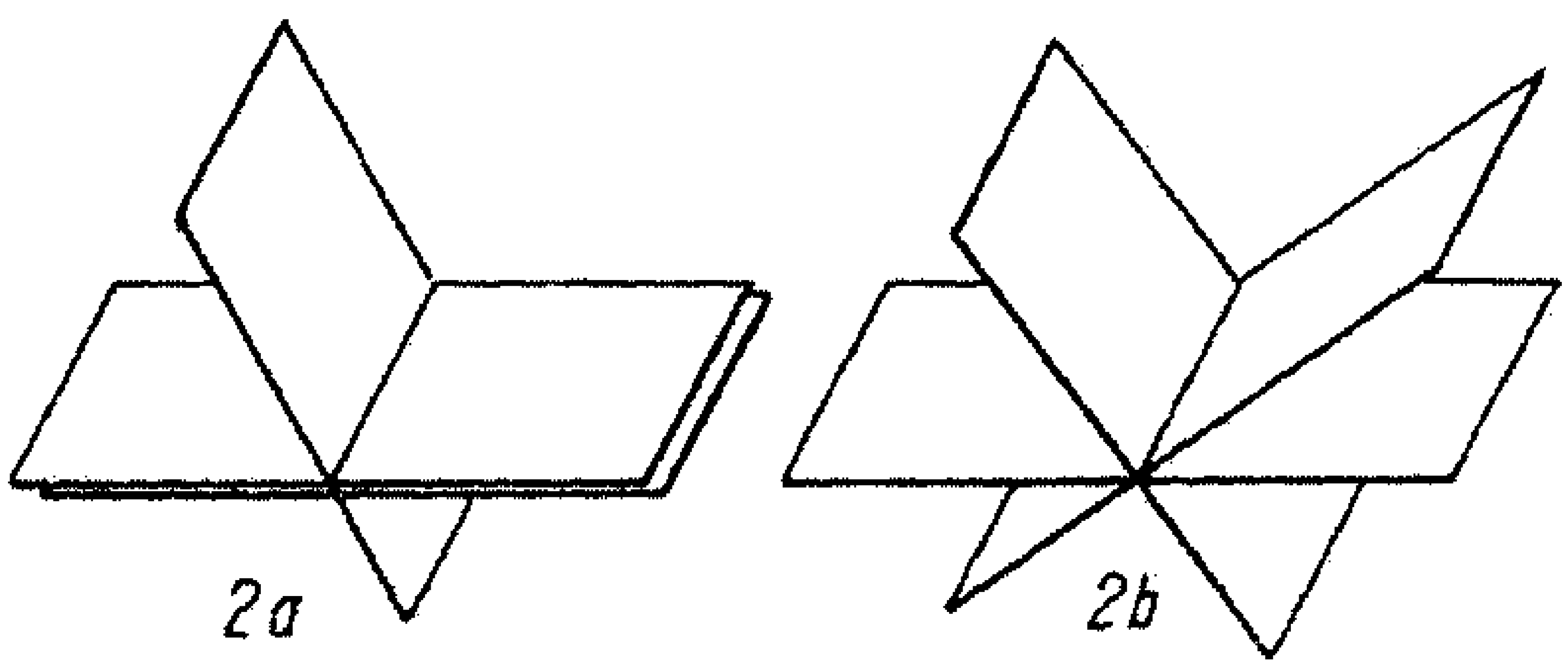
Kirjeldatud juhte illustreerivad joonised 112, 113 ja 114. Jätame lugeja analüüsida, millise tasandihulga esitab igal neist juhtudest võrrand (51.4).

52. Sirge ja tasand eukleidilises stereomeetrias. Käesoleva paragrahvi eelmistes artiklites käsitleti sirgeid ja tasandeid ruumi afiinses geomeetrias. Aksioome **D1—D6** ja **E1—E2** ning nende järeldusi ei ole nendes artiklites veel kasutatud. Järgnevas kol-

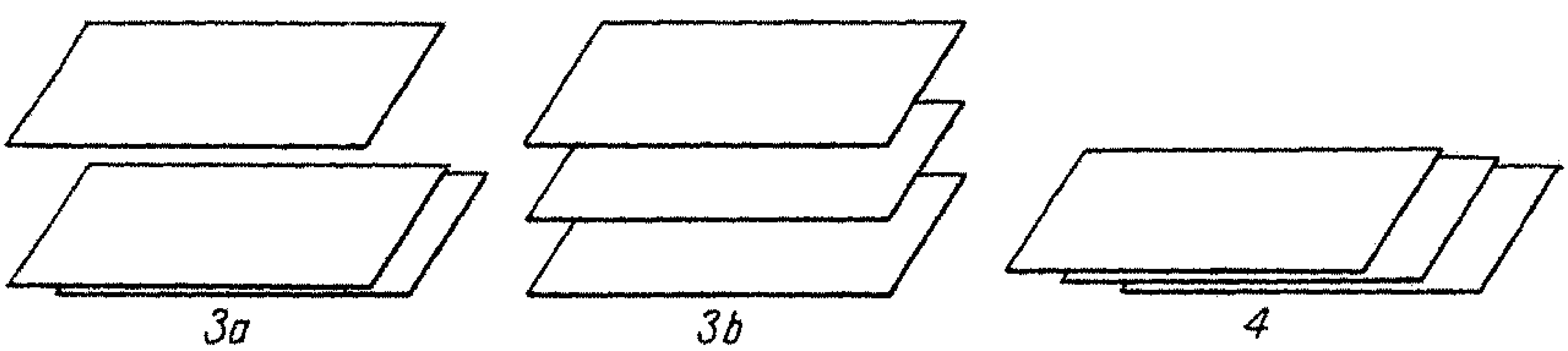
[66] Vt. G. Kangro, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 59—79.



Joon. 112.



Joon. 113.



Joon. 114.

mes artiklis vaatleme nüüd, millised täiendavad mõisted ja tulemused lisanduvad nende aksioomide juurdevõtmisel, s. t. eukleidilises stereomeetrias. Seejuures kasutame ristkoordinaate (vt. def. 28.3), mis võimaldavad uusi suurusi ja seoseid avaldada kõige lihtsamal kujul.

Olgu antud punkti $A(a_1, a_2, a_3)$ läbiv tasand võrrandiga (51.2):

$$A_1(x_1-a_1)+A_2(x_2-a_2)+A_3(x_3-a_3)=0.$$

Suluavaldised kujutavad endast tasandi suvalise punkti X kohavektori $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ ja tasandi antud punkti A kohavektori $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ vahe

$$\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = (x_1 - a_1,\ x_2 - a_2,\ x_3 - a_3)$$

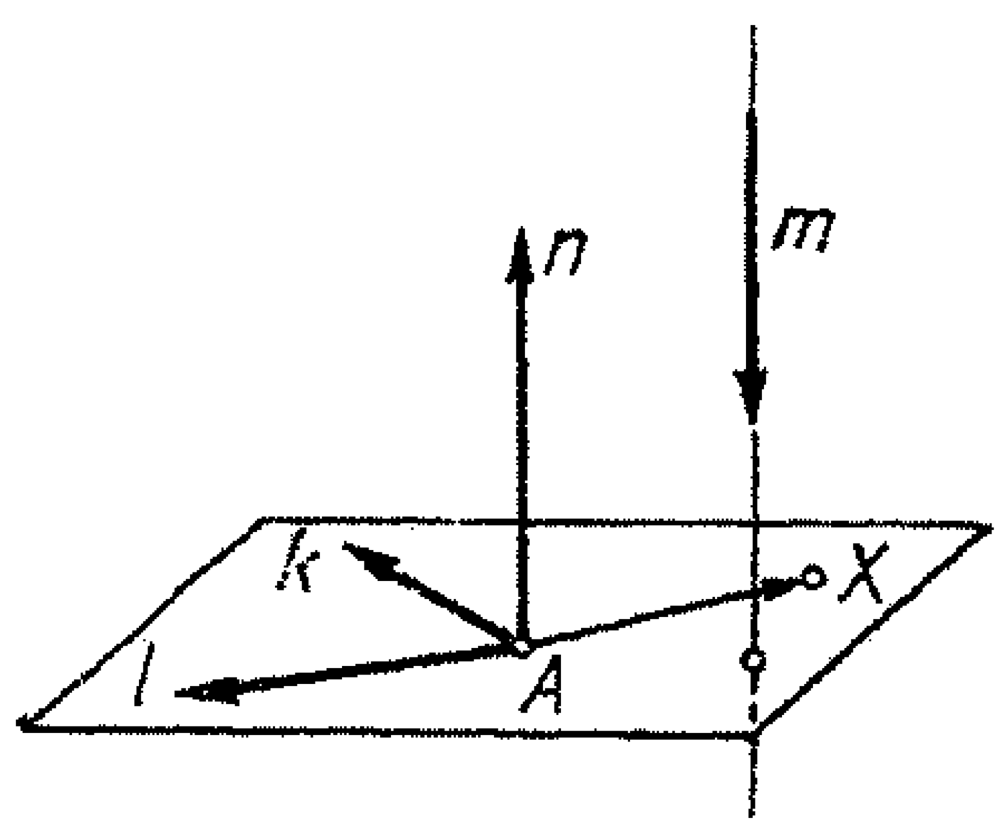
ristkoordinaate. Järelikult tasandi võrrandi vasak pool on tõlgendatav teatava vektori

$$\boldsymbol{n} = (A_1,\ A_2,\ A_3) \tag{52.1}$$

ja tasandi suvalise vektori $\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ skalaarkorrutisena (vt. (28.10)) ning võrrand ise on seega kirjutatav kujul

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = 0. \tag{52.2}$$

***Def.* 52.1.** Nullist erinevat vektorit, mis on risti antud tasandi iga vektoriga, nimetatakse n o r m a a l v e k t o r i k s, iga sellesihilist sirget — tasandi n o r m a a l i k s (joon. 115).



Joon 115

Et võrrand (52.2) väljendab tingimust $\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{AX}$, siis vektor (52.1) kujutabki endast antud tasandi normaalvektorit. Järelikult kehtib selline lause.

***Teoreem* 52.1.** *Kui tasand on antud ristkoordinaatides üldvõrrandiga, siis vektor* $\boldsymbol{n}$, *mille ristkoordinaatideks on* x_1, x_2 *ja* x_3 *kordajad selles võrrandis, on tasandi normaalvektor.*

T õ e s t u s. Tuleb vaid meenutada, et võrrandi (51.2) kordajateks on parajasti x_1, x_2 ja x_3 kordajad tasandi üldvõrrandis. ∎

Tasandi iga vektor $\overrightarrow{AX}$ on teoreemi 16.3 järgi selle tasandi mingi kahe mittekollineaarse vektori $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$ lineaarkombinatsioon:

$$\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{k}u + \boldsymbol{l}v.$$

Seetõttu $\boldsymbol{n}\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{k}u + \boldsymbol{l}v) = u(\boldsymbol{nk}) + v(\boldsymbol{nl})$. Järelikult $\boldsymbol{n}$ on tasandi normaalvektor niipea, kui ta on risti tasandi mingi kahe mittekollineaarse vektoriga $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$, s. t. niipea, kui $\boldsymbol{nk} = \boldsymbol{nl} = 0$. Seega kehtib (joon. 115) järgmine lause.

***Teoreem* 52.2.** *Tasandi mingit punkti läbiv sirge on tasandi normaal niipea, kui ta on risti kahe seda punkti läbiva sirgega tasandil. Ta on siis risti iga seda punkti läbiva sirgega tasandil. Seetõttu kõneldakse iga sirge puhul, mis on tasandi normaaliks, et ta on risti tasandiga. Selleks on tarvilik ja piisav, et* $\boldsymbol{m} \parallel \boldsymbol{n}$, *kus* $\boldsymbol{m}$ *on sirge sihi- ja* $\boldsymbol{n}$ *on tasandi normaalvektor.*

Kui tasand on antud oma mingi punktiga A ja rihivektoripaariga $\{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}\}$, siis tema normaalvektoriks on teoreemi 31.1 põhjal vektorkorrutis

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{l}$$

ning üheks normaaliks seega sirge, mille parameetriliseks vektorvõrrandiks on

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{l})t,$$

kus $\boldsymbol{a}$ on punkti A kohavektor.

Tasandi saab määrata ka tema punktiga $A(a_1, a_2, a_3)$ ja normaalvektoriga $\boldsymbol{n} = (A_1, A_2, A_3)$ kui selliste punktide X hulga, mille kohavektorid $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ rahuldavad võrrandit (52.2) ehk võrrandit

$$A_1(x_1-a_1)+A_2(x_2-a_2)+A_3(x_3-a_3)=0.$$

Siin võrrandit (52.2) ehk temast tulenevat võrrandit

$$\boldsymbol{nx}+A_4=0, \tag{52.3}$$

mis on õieti tasandi üldvõrrandi $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$ lühemaks, vektorite abil kirjapandud kujuks, nimetatakse tasandi v e k t o r v õ r r a n d i k s.

Nii näiteks on kohe määratav sellise tasandi võrrand, mis läbib punkti $B(b_1, b_2, b_3)$ risti sirgega $\frac{x_1-a_1}{k_1}=\frac{x_2-a_2}{k_2}=\frac{x_3-a_3}{k_3}$, selleks on $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})=0$ ehk

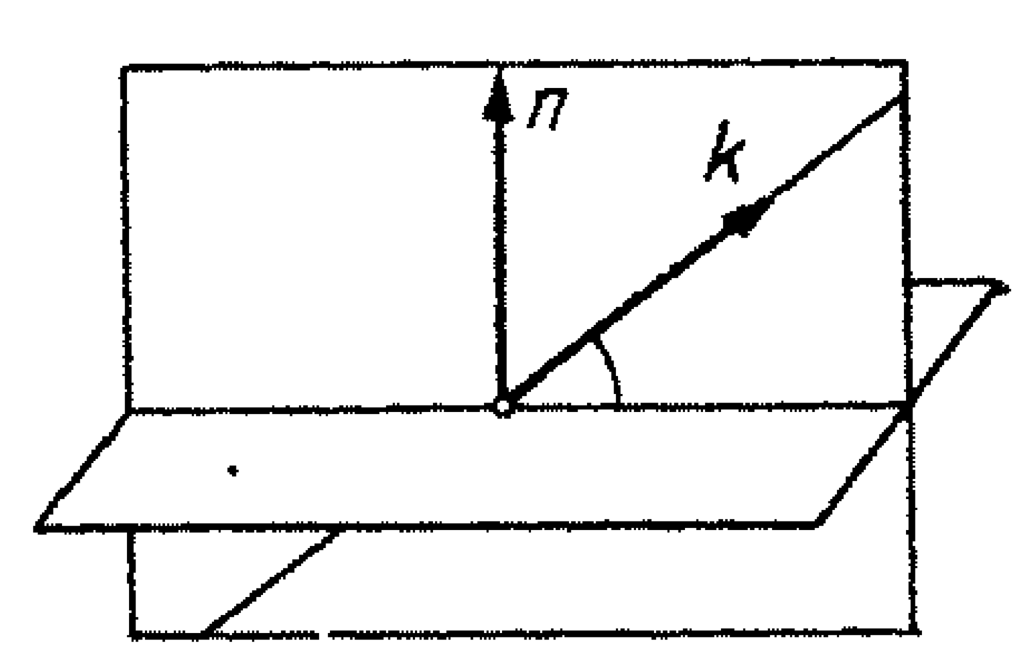
$$k_1(x_1-b_1)+k_2(x_2-b_2)+k_3(x_3-b_3)=0.$$

Tasandi normaalvektori $\boldsymbol{n}$ abil saab vektori $\boldsymbol{k}$ sihilise sirge ja tasandi vastastikust asendit iseloomustavatele tingimustele teoreemis 47.1 anda järgmise kuju:

1) sirge ja tasand lõikuvad parajasti siis, kui $\boldsymbol{nk} \neq 0$, s. t. kui $\boldsymbol{n}$ ja $\boldsymbol{k}$ ei ole risti (joon. 116),

2) sirge ja tasand on paralleelsed või sirge on tasandil parajasti siis, kui $\boldsymbol{nk} = 0$, s. t. kui $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{n}$, ehk teisiti, kui sirge on risti tasandi mingi normaaliga.

Kahe tasandi rihtide ühtimise tingimusele (48.10) saab anda lihtsa kuju: tasandite normaalvektoreiks on $\boldsymbol{n} = (A_1, A_2, A_3)$ ja $\boldsymbol{m} = (B_1, B_2, B_3)$ ning (48.10) tähendab lihtsalt seda, et $\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{m}$. Järelikult tasandite rihid ühtivad parajasti siis, kui nende normaalid on paralleelsed.



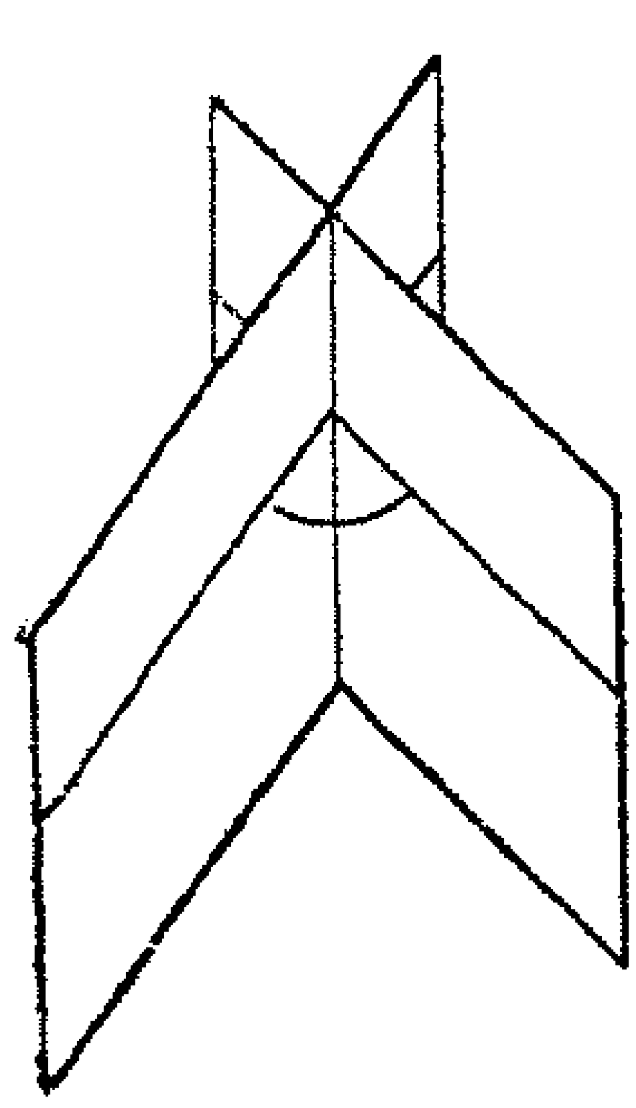
Joon. 116.

Kui sirge ei ole risti tasandiga, s. t. kui $\mathbf{k} \nparallel \mathbf{n}$, siis on üheselt määratav antud tasandi lõige sellise tasandiga, mis läbib sirge mingi punkti ja mille rihivektoreiks on $\mathbf{k}$ ja $\mathbf{n}$. Viimase tasandi normaalvektoriks on $\mathbf{k} \times \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$; see on teatavasti risti vektoriga $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, nii et $\mathbf{k} \times \mathbf{n} \nparallel \mathbf{n}$ ja vaadeldavad tasandid tõesti lõikuvad, määrates teatava sirge. Viimast nimetatakse antud sirge r i s t p r o j e k t s i o o n i k s antud tasandil (joon. 116). Ta on antud sirgega samal tasandil — nn. projekteerival tasandil, kusjuures tema asendid antud sirge suhtes vastavad üksüheselt sirge ja tasandi vastastikustele asenditele. Siit saab arusaadavaks, miks viimaseid on kolm, samuti nagu kahe sirge vastastikuseid asendeid tasandil. Kui sirge ja tasand on antud võrranditega, siis sirge ristprojektsiooni võrrandite saamiseks tuleb antud tasandi üldvõrrandile lisada projekteeriva tasandi võrrand, viimast on aga ülaltoodud näpunäidete järgi lihtne koostada.

Selle ülesandega seoses väärib tähelepanu võimalus tõlgendada kahe tasandi lõikesirge sihivektorit $\mathbf{k}$ teoreemis 48.1 kui tasandite normaalvektorite $\mathbf{n}$ ja $\mathbf{m}$ vektorkorrutist: $\mathbf{k} = \mathbf{n} \times \mathbf{m}$ (vrd. valemiga (31.7)). Et praegu projekteeriva tasandi normaalvektoriks on $\mathbf{n} \times \mathbf{k}$, siis sirge ristprojektsiooni sihivektoriks on seega topeltvektorkorrutis

$$(\mathbf{n}\times\mathbf{k})\times\mathbf{n}=\mathbf{k}\mathbf{n}^2-\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{k})$$

(vt. (33.5)). Siit on veel kord näha, et sirge on paralleelne tasandiga, s. t. $\mathbf{n} \perp \mathbf{k}$ ehk $\mathbf{n}\mathbf{k} = 0$ parajasti siis, kui ta on paralleelne oma ristprojektsiooniga tasandil, s. t. kui nimetatud topeltvektorkorrutis on kollineaarne vektoriga $\mathbf{k}$.



Joon 117.

Eukleidilises stereomeetrias saab antud sirgega ja antud tasandiga või kahe antud tasandiga siduda nende lõikumise puhul ka teatava arvulise suuruse — nendevahelise nurga.

Def. 52.2. Kui sirge ja tasand lõikuvad, siis s i r g e ja t a s a n d i v a h e l i s e k s n u r g a k s nimetatakse sirge ja selle ristprojektsiooni vahelist nurka (joon. 116). K a h e l õ i k u v a t a s a n d i v a h e l i s e k s n u r g a k s nimetatakse sellise kahe sirge vahelist nurka, mis on neil tasandeil risti lõikesirgega ja lõikuvad selle mingis punktis (joon. 117).

Sirge ja tasandi vahelise nurga arvutamiseks oletame, et on teada sirge sihivektor $\mathbf{k}$ ja tasandi normaalvektor $\mathbf{n}$. Sel korral on lihtne arvutada sirge ja tasandi normaali vahelist nurka β:

selleks on vähim reaalarvudest φ ja $\pi-\varphi$, kus $0 \leqslant \varphi < \pi$ ja

$$\cos\varphi = \frac{nk}{|n|\,|k|}.$$

Et tasandi normaal on risti sirge ristprojektsiooniga (kui tasandil oleva sirgega), siis nendevaheline nurk on $\frac{\pi}{2}$. Järelikult sirge ja tasandi vaheline nurk on $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, s. t. suurem kahest reaalarvust $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ja $\frac{\pi}{2} - (\pi - \varphi) = \varphi - \frac{\pi}{2} = -\psi$, kusjuures $\frac{\pi}{2} \geqslant \frac{\pi}{2} - \varphi = \psi > -\frac{\pi}{2}$, seega lihtsalt reaalarv α, nii et $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ ja

$$\sin\alpha = \frac{|nk|}{|n|\,|k|} \tag{52.4}$$

$\left(\text{siin on arvestatud, et mõlemal juhul } \varphi = \frac{\pi}{2} - \psi, \text{ mistõttu } \cos\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \sin\psi\right)$.

Kahe lõikuva tasandi vahelise nurga definitsioonis aluseks võetud kaks sirget on risti tasandite lõikesirgega ning on seega samal tasandil mõlema tasandi normaaliga. Seega mõlemad nad kujutavad endast ühe tasandi normaali ristprojektsiooni teisel tasandil. Järelikult nende sihivektorid on saadavad tasandite normaalvektoreist $\boldsymbol{n}$ ja $\boldsymbol{m}$ viimaste pööramisel projekteerival tasandil $\pi/2$ võrra, mistõttu nende sirgete vaheline nurk on võrdne tasandite normaalide vahelise nurgaga. Kahe lõikuva tasandi vaheline nurk α on seega vähim reaalarvudest φ ja $\pi - \varphi$, kus $0 \leqslant \varphi < \pi$ ja

$$\cos\varphi = \frac{nm}{|n|\,|m|}.$$

ehk teisiti, reaalarv α, nii et $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ ja

$$\cos\alpha = \frac{|nm|}{|n|\,|m|}. \tag{52.5}$$

Kui ristkoordinaatide puhul sirge on antud kanooniliste võrranditega

$$\frac{x_1-a_1}{k_1}=\frac{x_2-a_2}{k_2}=\frac{x_3-a_3}{k_3}$$

ning tasand on antud üldvõrrandiga

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4=0,$$

siis sirge ja tasandi vaheline nurk α arvutatakse (52.4) põhjal valemist

$$\sin\alpha=\frac{|A_1k_1+A_2k_2+A_3k_3|}{\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}}. \qquad (52.6)$$

Kui on antud veel teine tasand üldvõrrandiga

$$B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3+B_4=0,$$

siis kahe tasandi vaheline nurk arvutatakse (52.5) põhjal valemist

$$\cos\alpha=\frac{|A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3|}{\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}\sqrt{B_1^2+B_2^2+B_3^2}}. \qquad (52.7)$$

Öeldakse, et tasandid on risti, kui nendevaheline nurk $\alpha=\frac{\pi}{2}$, s. t. kui $\cos\alpha=\cos\frac{\pi}{2}=0$. Selle tunnuseks on

$$A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3=0. \qquad (52.8)$$

53. Punkti kaugus sirgest või tasandist. Arvulisi suurusi saab siduda sirge ja tasandiga või kahe tasandiga ka siis, kui need ei lõiku, vaid on paralleelsed. Võimaluse selleks annab kauguse mõiste. Kahe punkti A ja B vaheline kaugus d on def. 29.1 kohaselt vektori $\overrightarrow{AB}$ pikkus $d=|\overrightarrow{AB}|$, mis valemi (28.11) põhjal arvutatakse järgmiselt:

$$d=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}. \qquad (53.1)$$

Punkti B kauguseks sirgest on def. 44.1 kohaselt $h=$ $=\min|\overrightarrow{XB}|$, kus X on sirge suvaline punkt. Valemite (29.2) ja (31.10) järgi (milles praegu tuleb võtta $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{y}=\overrightarrow{AB}=$ $=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, kus A on sirge mingi punkt ning $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ punktide A ja B kohavektorid)

$$h=\frac{|\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})|}{|\boldsymbol{k}|}. \qquad (53.2)$$

Saadud valem sobib tegelikeks arvutusteks. Kui näiteks sirge on antud kanooniliste võrranditega

$$\frac{x_1-a_1}{k_1}=\frac{x_2-a_2}{k_2}=\frac{x_3-a_3}{k_3},$$

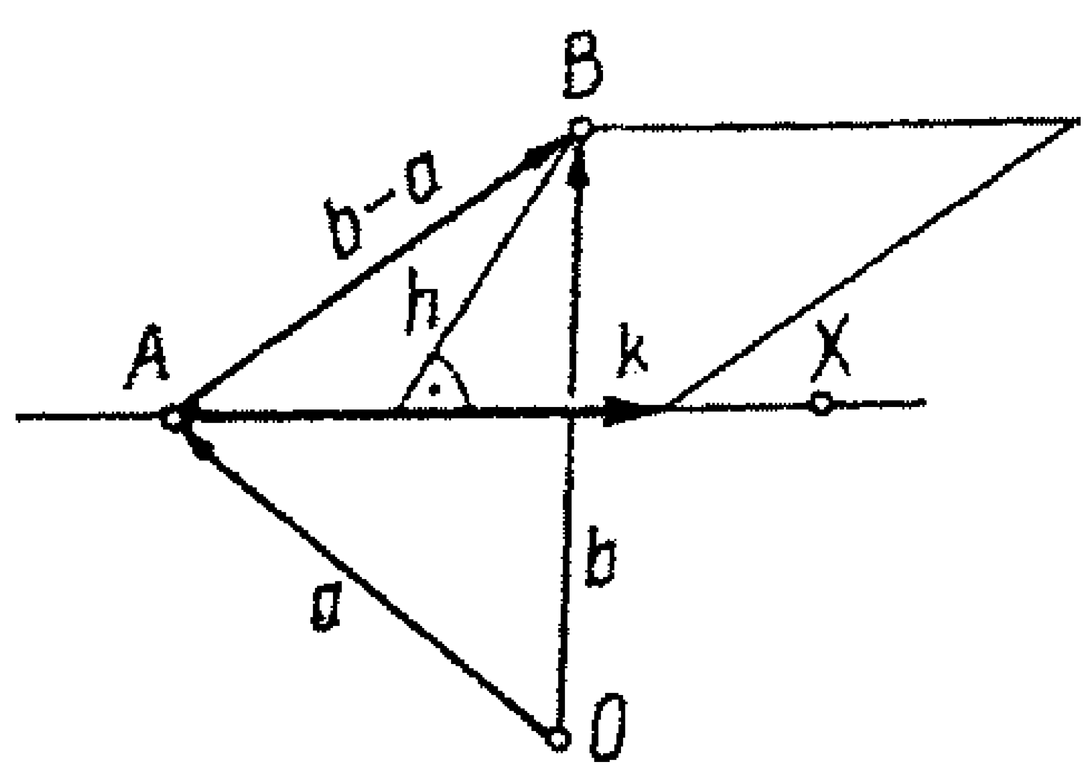
siis (31.7) ja (28.11) põhjal

$$h=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} k_2 & b_2-a_2 \\ k_3 & b_3-a_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} k_3 & b_3-a_3 \\ k_1 & b_1-a_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} k_1 & b_1-a_1 \\ k_2 & b_2-a_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}}. \quad (53.3)$$

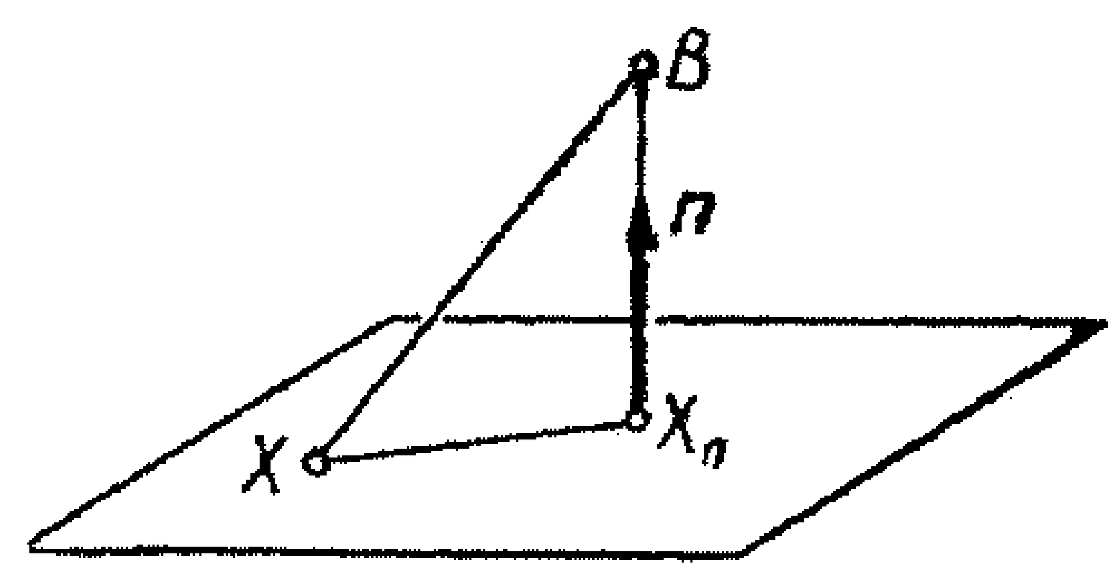
Valemi (53.2) lihtsamaks meeldejätmiseks on kaugust h kasulik tõlgendada vektoritele $\boldsymbol{k}$ ja $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ ehitatud rööpküliku kõrgusena, sest lugejas on (31.9) põhjal selle rööpküliku pindala, nimetajas aga ühe külje pikkus (joon. 118).

Analoogiliselt defineeritakse punkti kaugus tasandist.

***Def.* 53.1.** Punkti B k a u g u s e k s tasandist nimetatakse reaalarvu $h=\min|\overrightarrow{XB}|$, kus X on tasandi suvaline punkt.



Joon. 118.



Joon 119.

Näitame, et selline arv $\min|\overrightarrow{XB}|$ tõesti eksisteerib.

Teoreem 53.1. *Kui X_0 on antud tasandi lõikepunkt tasandi normaaliga, mis läbib punkti B, siis tasandi iga teise punkti X kaugus $|\overrightarrow{XB}|$ punktist B on suurem kui $|\overrightarrow{X_0B}|$.*

T õ e s t u s. Asetame läbi vaadeldava normaali ja punkti X tasandi, mis lõikab antud tasandit mööda teatavat sirget (joon. 119). Sellel tasandil on art. 29 tulemuste põhjal $|\overrightarrow{X_0B}|=\min|\overrightarrow{XB}|$, seega tõesti $|\overrightarrow{XB}|\geqslant|\overrightarrow{X_0B}|$. ∎

Kauguse $h=\min|\overrightarrow{XB}|$ arvutamiseks on leitav lihtne eeskiri.

Punkti B läbiva normaali parameetriliseks vektorvõrrandiks on

$$x = b + nt.$$

Et tasandi saab anda võrrandiga (52.3), siis lõikepunkti X_0 määramiseks tekib võrrand

$$n(b+nt) + A_4 = 0,$$

millest $t = -\frac{nb+A_4}{n^2}$. Seega X_0 kohavektoriks on $x_0 = b - n\frac{nb+A_4}{n^2}$ ning järelikult

$$h = |\overrightarrow{X_0B}| = |b - x_0| = |n|\left|\frac{nb+A_4}{n^2}\right| = \frac{|nb+A_4|}{|n|^2}|n|,$$

s. t.

$$h = \frac{|nb+A_4|}{|n|} \tag{53.4}$$

ehk

$$h = \frac{|A_1b_1+A_2b_2+A_3b_3+A_4|}{\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}}. \tag{53.5}$$

Siin, samuti nagu art-s 44, on tulemuse paremaks sõnastamiseks kasulik tasandi võrrandilt (52.3) üle minna võrrandile

$$\frac{n}{|n|}x + \frac{A_4}{|n|} = 0. \tag{53.6}$$

Vektor $n_0 = \frac{n}{|n|}$ on endiselt tasandi normaalvektor, kuid lisaks sellele on ta veel ühikvektor, sest $|n_0| = \left|\frac{n}{|n|}\right| = \frac{|n|}{|n|} = 1$. Art-s 30 selgus, et ühikvektori koordinaatideks on suunakoosinused: kui tähistada $\sphericalangle(e_i, n_0) = \alpha_i$, siis

$$n_0 = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3).$$

Võrrandi (53.6) koordinaatkujuks on seega

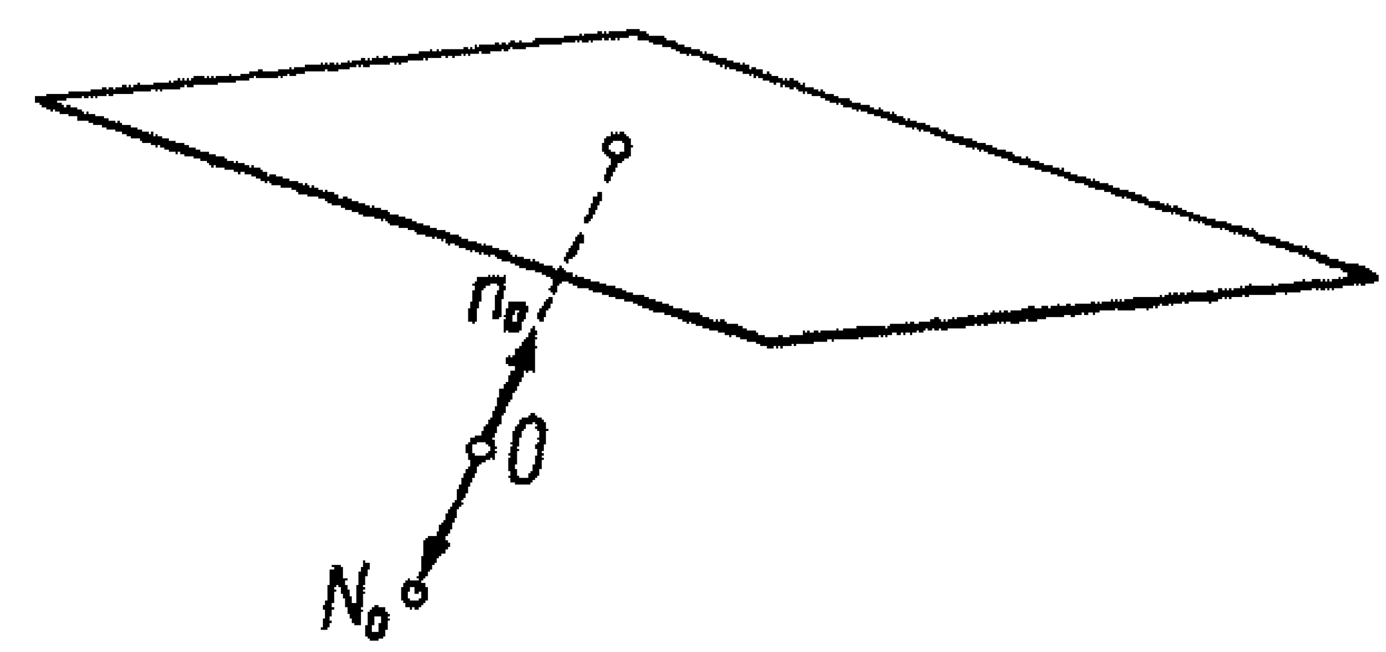
$$x_1\cos\alpha_1 + x_2\cos\alpha_2 + x_3\cos\alpha_3 - p_0 = 0, \tag{53.7}$$

kus me oleme tähistanud $p_0 = -\frac{A_4}{|n|}$. Saadud võrrandit (53.7), samuti nagu temaga samaväärset (53.6) ehk

$$n_0x - p_0 = 0, \tag{53.8}$$

nimetatakse tasandi n o r m a a l v õ r r a n d i k s (vrd. art. 45). Nüüd võib sõnastada järgmise reegli.

Selleks et leida punkti B kaugus tasandist, tuleb B koordinaadid asendada tasandi normaalvõrrandi vasakusse poolde ning võtta tulemuse absoluutväärtus.



Joon. 120.

Tasandi normaalvõrrandi puhul on kindel tähendus mitte üksnes kordajatel $\cos \alpha_i$, vaid ka vabaliikmel p_0: eelmise reegli järgi $|p_0|$ on alguspunkti O (0, 0, 0) kaugus tasandist. Vabaliikme p_0 märgi selgitamisel on tähtis, kas tasand on orienteeritud või mitte. Orienteeritud tasandi korral valitakse $\boldsymbol{n}_0$ alati nii, et ta on kollineaarne ja samasuunaline vektoriga $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{l}$, kus $\{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}\}$ on positiivselt orienteeritud baas tasandi rihis. Sel juhul võrrand (53.8) on täielikult määratud ja p_0 võib olla nii positiivne kui negatiivne (ning muidugi ka null — alguspunkti O läbiva tasandi puhul).

Kui tasand ei ole orienteeritud, siis $\boldsymbol{n}_0$ suuna valik on vaba ning, võrrandit (53.8) vajaduse korral läbi korrutades arvuga -1, võib alati saavutada, et kui $p_0 \neq 0$, siis $p_0 > 0$. Vaadeldes sel korral punkti N_0 kohavektoriga $\overrightarrow{ON_0} = -\boldsymbol{n}_0$, saame võrrandi (53.8) vasakust poolest $\boldsymbol{n}_0(-\boldsymbol{n}_0) - p_0 = -\boldsymbol{n}_0^2 - p_0 = -1 - p_0 < 0$, samal ajal kui punkti O korral $\boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{0} - p_0 = -p_0 < 0$. Järelikult punktid N_0 ja O on samal pool tasandit (vt. art. 50), s. t. vektor $\boldsymbol{n}_0$ suundub tasandist mitte sinnapoole, kus on O, vaid teisele poole ehk, teisiti öeldult, punktist O tasandi poole (joon. 120).

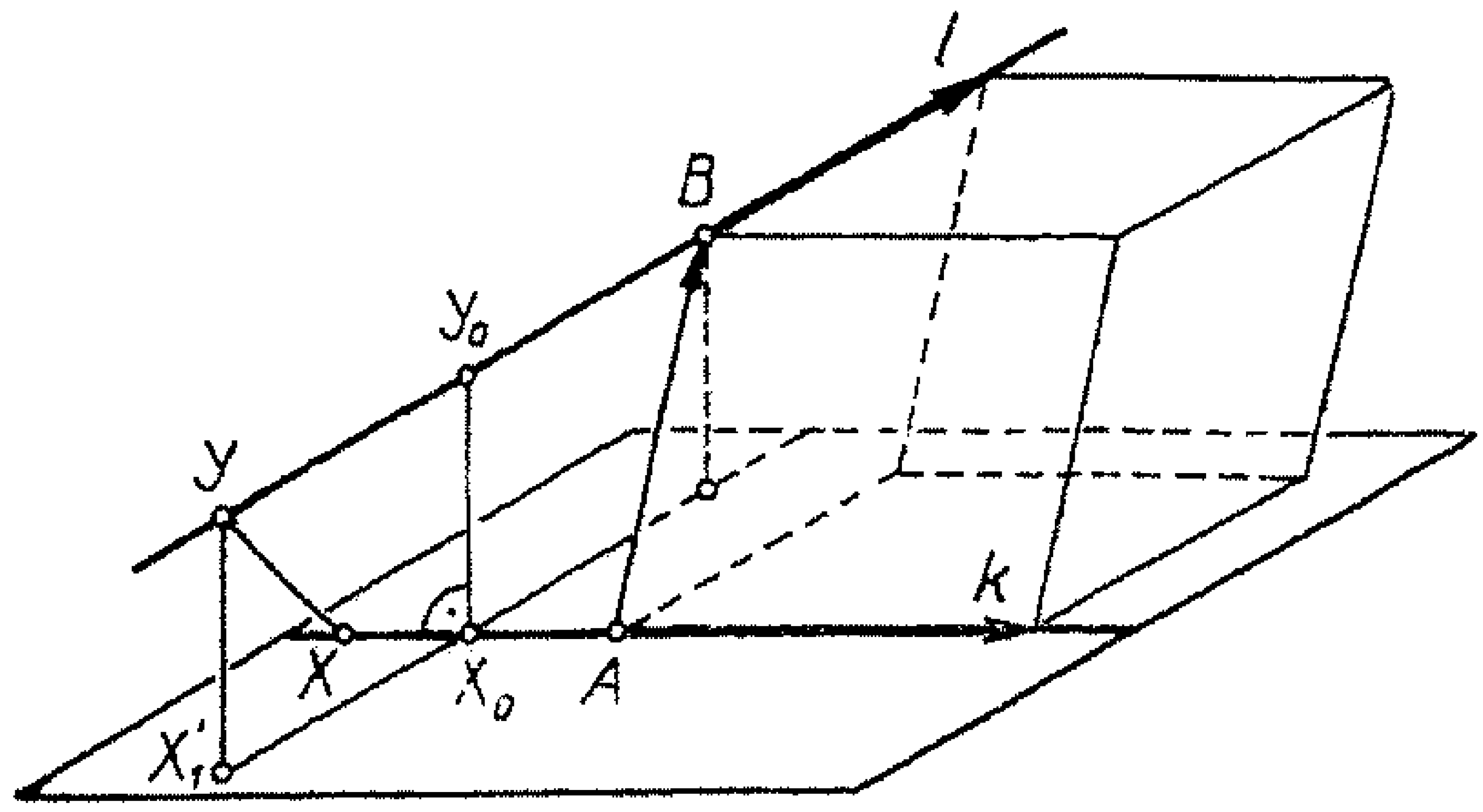
Punkti O läbiva tasandi puhul on $p_0 = 0$. Kui tasand pole orienteeritud, siis tavaliselt võetakse normaalvõrrand (vajaduse korral korrutades arvuga -1) selliselt, et võrratust $\boldsymbol{n}_0\boldsymbol{x} > 0$ rahuldaks punkt (1, 0, 0), või kui see on tasandil, siis punkt (0, 1, 0), või kui ka see on tasandil, siis punkt (0, 0, 1).

Normaalvõrrandi (53.8) järgi $\boldsymbol{n}_0\boldsymbol{x}$ ehk $p_{\boldsymbol{n}_0}\boldsymbol{x}$ (tasandi punkti X kohavektori $\boldsymbol{x}$ projektsioon normaalühikvektori $\boldsymbol{n}_0$ sihil) on tasandi kõikide punktide puhul üks ja seesama p_0.

54. Kiivsirgete ühine ristlõik. Olgu ruumis antud kaks kiivsirget, näiteks parameetriliste vektorvõrranditega

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{a} + \boldsymbol{k}u, \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{b} + \boldsymbol{k}v. \end{aligned} \tag{54.1}$$

Art-s 38 selgus, et kiivsirgete korral vektorid $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$ ja $\overrightarrow{AB}$ on mittekomplanaarsed. Eukleidilises stereomeetrias võib selle tingi-



Joon. 121.

muse kirja panna vektorite segakorrutise abil (vt. (32.10)):

$$\boldsymbol{k}\boldsymbol{l}\overrightarrow{AB}\neq 0.$$

Osutub, et ka kahe kiivsirge korral on nende punktide X ja Y vahelistel kaugustel olemas vähim väärtus $\min|\overrightarrow{XY}|$.

***Teoreem* 54.1.** *Kahel kiivsirgel on parajasti üks ühine ristlõik (s. t. niisugune sirgete punkte X_0 ja Y_0 ühendav lõik X_0Y_0, nii et $\overrightarrow{X_0Y_0}\perp\boldsymbol{k}$ ja $\overrightarrow{X_0Y_0}\perp\boldsymbol{l}$). Seejuures $|\overrightarrow{X_0Y_0}|=\min|\overrightarrow{XY}|$, kus X ja Y on sirgetel vabalt võetud punktid.*

Tõestus. Kui soovitav lõik X_0Y_0 leiduks, siis tema üheks sihivektoriks oleks tingimuste $\overrightarrow{X_0Y_0}\perp\boldsymbol{k}$ ja $\overrightarrow{X_0Y_0}\perp\boldsymbol{l}$ kohaselt $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{l}$. Järelikult see lõik peaks olema ühelt poolt tasandil, mis läbib punkti X_0 ja mille rihivektoripaariks on $\{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k}\}$, teiselt poolt aga tasandil, mis läbib punkti Y_0 ja mille rihivektoripaariks on $\{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{l}, \boldsymbol{l}\}$ (joon. 121). Need tasandid peaksid läbima antud sirgeid, seega ka vastavalt nende punkte A ja B, kusjuures nad kindlasti lõikuvad, sest nende normaalvektorid (vt. (33.1))

$$(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{l})\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{l}\boldsymbol{k}^2-\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{l}), \tag{54.2}$$

$$(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{l})\times\boldsymbol{l}=\boldsymbol{l}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{l})-\boldsymbol{k}\boldsymbol{l}^2 \tag{54.3}$$

ei ole kollineaarsed, vastupidisel juhul oleks

$$\frac{\boldsymbol{k}^2}{\boldsymbol{k}\boldsymbol{l}}=\frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{l}^2}$$

ehk $\boldsymbol{k}^2\boldsymbol{l}^2-(\boldsymbol{k}\boldsymbol{l})^2=0$ ehk (31.10) põhjal $|\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{l}|^2=0$, see on aga võimatu, sest kiivsirgete korral $\boldsymbol{k}\not\parallel\boldsymbol{l}$. Tasandite lõikesirge on ühel tasandil kummagagi antud sirgetest, ning et ta on nendega ühtlasi risti, siis ta lõikab kumbagi parajasti ühes punktis. Tekibki soovitud omadustega lõik X_0Y_0.

Jääb näidata, et $|\overrightarrow{X_0Y_0}| = \min|\overrightarrow{XY}|$, s. t. sirgete iga kahe teise punkti X ja Y korral on $|\overrightarrow{XY}| > |\overrightarrow{X_0Y_0}|$. Selleks määrame tasandi, mis läbib punkti X_0 ja mille rihivektoripaariks on $\{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}\}$. Et see tasand läbib ühtlasi esimest vaadeldavaist sirgeist võrrandiga (54.1), seega ka selle punkti A kohavektoriga $\boldsymbol{a}$, ning et ta normaalvektor on $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{l}$, siis selle tasandi võrrandiks on

$$(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{l})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=0. \tag{54.4}$$

Teine antud sirgeist on temaga paralleelne, sest $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{l}\perp\boldsymbol{l}$, mistõttu see sirge on paralleelne ka oma ristprojektsiooniga sellel tasandil (vt. art. 52). Kahe paralleelse sirge korral ühe sirge punktide kaugused teisest sirgest on kõik omavahel võrdsed (vt. art. 43 ja 44). Järelikult $|\overrightarrow{X_0Y_0}| = \min|\overrightarrow{X'Y}|$, kus Y on vaadeldava teise sirge vabalt fikseeritud punkt ja X' on selle sirge ristprojektsiooni suvaline punkt. Leidub selline punkt X'_1, nii et $|\overrightarrow{X'_1Y}| = \min|\overrightarrow{X'Y}|$, s. t. nii et $|\overrightarrow{X_0Y_0}| = |\overrightarrow{X'_1Y}|$. Seejuures on teada, et $\overrightarrow{X'_1Y}\perp\boldsymbol{l}$, mistõttu $\overrightarrow{X'_1Y}$ ja $\overrightarrow{X_0Y_0}$ on kollineaarsed kui nullist erineva vektoriga $\boldsymbol{l}$ ristuvad ühe tasandi vektorid. Siit järeldub, et $\overrightarrow{X'_1Y}\parallel\boldsymbol{n}$, mistõttu $|\overrightarrow{X'_1Y}|$ kujutab endast punkti Y kaugust võrrandiga (54.4) antud tasandist. Seega selle tasandi iga punkti korral, sealhulgas ka tasandil asuva esimese antud sirge iga punkti X korral $|\overrightarrow{XY}| \geqslant \overrightarrow{X'_1Y}| = |\overrightarrow{X_0Y_0}|$, seda aga oligi tarvis tõestada. ∎

Tõestusest selguvad ka võimalused kahe kiivsirge ühist ristlõiku X_0Y_0 sisaldava sirge võrrandite koostamiseks: kasutades eeskirja (52.2) tuleb vaid leida võrrandid tasandeile, mis läbivad punkte A ja B ning mille normaalvektoreiks on vastavalt (54.2) ja (54.3).

***Def.* 54.1.** Reaalarvu $h = \min|\overrightarrow{XY}|$, kus X ja Y on kahel kiivsirgel võetud punktid, nimetatakse nende kiivsirgete vaheliseks k a u g u s e k s.

See kaugus h, nagu tõestuses selgus, on teise vaadeldava sirge ükskõik missuguse punkti, sealhulgas ka punkti B kauguseks võrrandiga (54.4) antud tasandist. Et B kohavektor on $\boldsymbol{b}$, siis see kaugus on valemi (53.4) järgi

$$h = \frac{|\boldsymbol{kl}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})|}{|\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{l}|} \tag{54.5}$$

(lugejas on vektorite segakorrutise absoluutväärtus).

Valemeid (32.2), (31.7) ja (28.11) kasutades pole raske (54.5) paremat poolt avaldada vektorite $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$ ja $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ ristkoordinaatide kaudu. Avaldise kohmakuse tõttu jätame ta siin esitamata. Alati on otstarbekas kasutada otse valemit (54.5) ennast, arvutades enne selle parema poole lugeja ja nimetaja. Viimastele saab muide anda lihtsa tõlgenduse. Lugeja on (32.9) põhjal vektoritele $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$ ja $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ ehitatud rööptahuka ruumala, nimetaja aga (31.9) põhjal vektoritele $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$ ehitatud rööpküliku — rööptahuka ühe tahu — pindala. Kaugus h on seega tõlgendatav rööptahuka kõrgusena selle tahu kohal (joon. 121).

III peatükk

LIIKUMISED JA AFIINSED TEISENDUSED

§ 9. LIIKUMISED

Eukleidilises planimeetrias, s. t. aksioomide **A1—A4**, **B1—B5**, **C**$^{(2)}$, **D1—D6** alusel tuletatavas deduktiivses teoorias, leiavad uuesti koha ka lükke ja pöörde mõisted, mille näitlik käsitlus art-tes 1 ja 21 oli aluseks aksioomide **A1—A4** ja **D1—D6** formuleerimisel. Mõlemaid neid saab selles teoorias defineerida kui tasandi või ruumi teatavaid teisendusi — üksüheseid kujutusi iseendale (vt. art. 8). Tasandi teisendust, mis saadakse lükke ja pöörde järjest sooritamisel, nimetatakse liikumiseks. Liikumise puhul tasandi iga kahe punkti vaheline kaugus jääb muutumatuks.

Üldist teisendust, millel on see omadus, nimetatakse isomeetriliseks[67] teisenduseks. Käesoleva paragrahvi üheks olulisemaks tulemuseks on teoreem, mille kohaselt tasandi isomeetriline teisendus kas ühtib liikumisega või erineb sellest ainult ühe peegelduse poolest. See tulemus annab ühtlasi võtme liikumiste käsitlemiseks ruumis.

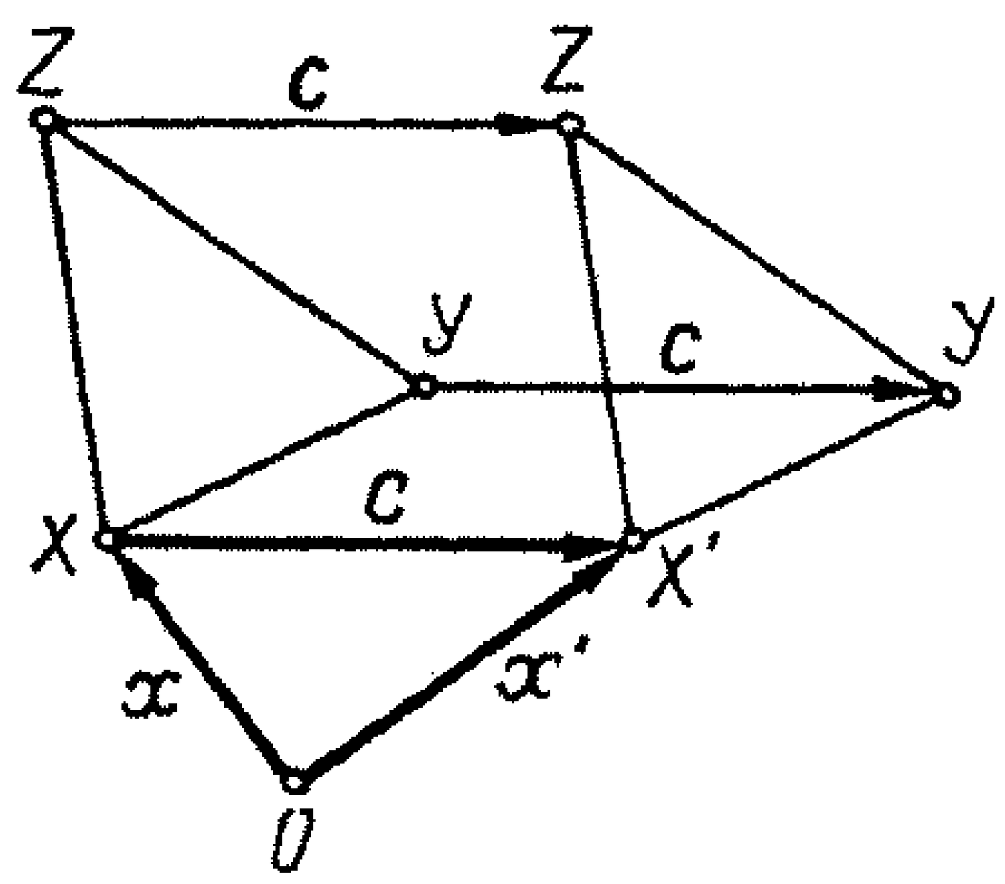
55. Liikumised tasandil. Liikumiste kui tasandi või ruumi teatavate teisenduste defineerimisel alustame lihtsaimatest erijuhtudest.

***Def.* 55.1.** Vektori c poolt määratud l ü k k e k s ehk t r a n s l a t s i o o n i k s[68] nimetatakse tasandi või ruumi niisugust teisendust, mis iga punkti X kujutab punktiks X' selliselt, et $\overrightarrow{XX'} = c$.

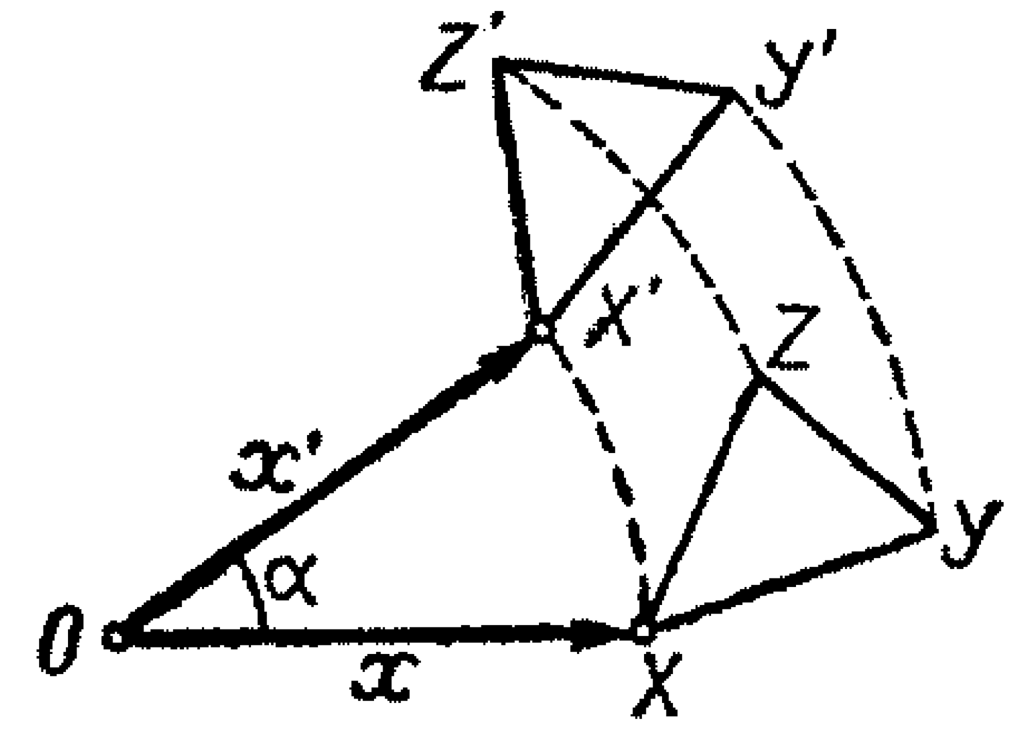
Aksioomist **A3** järeldub, et tasandi iga vektor c määrab ühe lükke. Vektori **0** puhul $X = X'$, s. t. iga punkt jääb paigale. Niisugust teisendust, mis kujutab iga punkti iseendaks, nimeta-

---

[67] kr. k. ισος — võrdne, μετρον — mõõt.
[68] lad. k. *translatio* — ülekandmine.



Joon. 122.



Joon. 123.

takse samasusteisenduseks. Vektori $\mathbf{0}$ poolt määratud lüke on seega samasusteisendus.

Kui punkti X ja tema kujutise X' kohavektorid mingi alguspunkti O korral tähistada $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{x}'$, siis $\overrightarrow{XX'} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ ning lükke korral $\mathbf{x}' - \mathbf{x} = \mathbf{c}$ ehk (joon. 122)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{c}. \tag{55.1}$$

Seega lükke korral liitub kõikide punktide kohavektoreile üks ja seesama seda lüket määrav vektor $\mathbf{c}$. Mingi teise punkti Y korral

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} + \mathbf{c}$$

ning seega $\overrightarrow{X'Y'} = \mathbf{y}' - \mathbf{x}' = (\mathbf{y} + \mathbf{c}) - (\mathbf{x} + \mathbf{c}) = \mathbf{y} - \mathbf{x} = \overrightarrow{XY}$ (see tulemus järeldub aksioomi **A4** põhjal ka otsekohe võrdusest $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{YY'} = \mathbf{c}$). Järelikult

$$|\overrightarrow{X'Y'}| = |\overrightarrow{XY}|,$$

s. t. lükke korral kaugus iga kahe punkti X ja Y kujutiste X' ja Y' vahel on võrdne kaugusega originaalide vahel. Lühemalt öeldes, lükke puhul vektorid ja järelikult ka punktidevahelised kaugused jäävad muutumatuks.

***Def.* 55.2.** Tasandi teisendust nimetatakse p ö ö r d e k s punkti O ümber nurga α võrra, kui tasandi iga punkti X ja selle kujutise X' korral $\overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{OX} \circ \alpha$.

Aksioomide **D1** ja **A3** põhjal on iga punkti O ja iga reaalarvu α korral määratud tasandi üks pööre, sest iga punkt X määrab koos vektoriga $\overrightarrow{OX} = \mathbf{x}$ ka vektori $\mathbf{x} \circ \alpha$, selle puhul aga leidub parajasti üks punkt X' kohavektoriga $\overrightarrow{OX'} = \mathbf{x}'$, nii et (joon. 123)

$$x' = x \circ \alpha. \qquad (55.2)$$

Mingi teise punkti Y korral

$$y' = y \circ \alpha$$

ning seega aksioomide **D4** ja **D5** põhjal

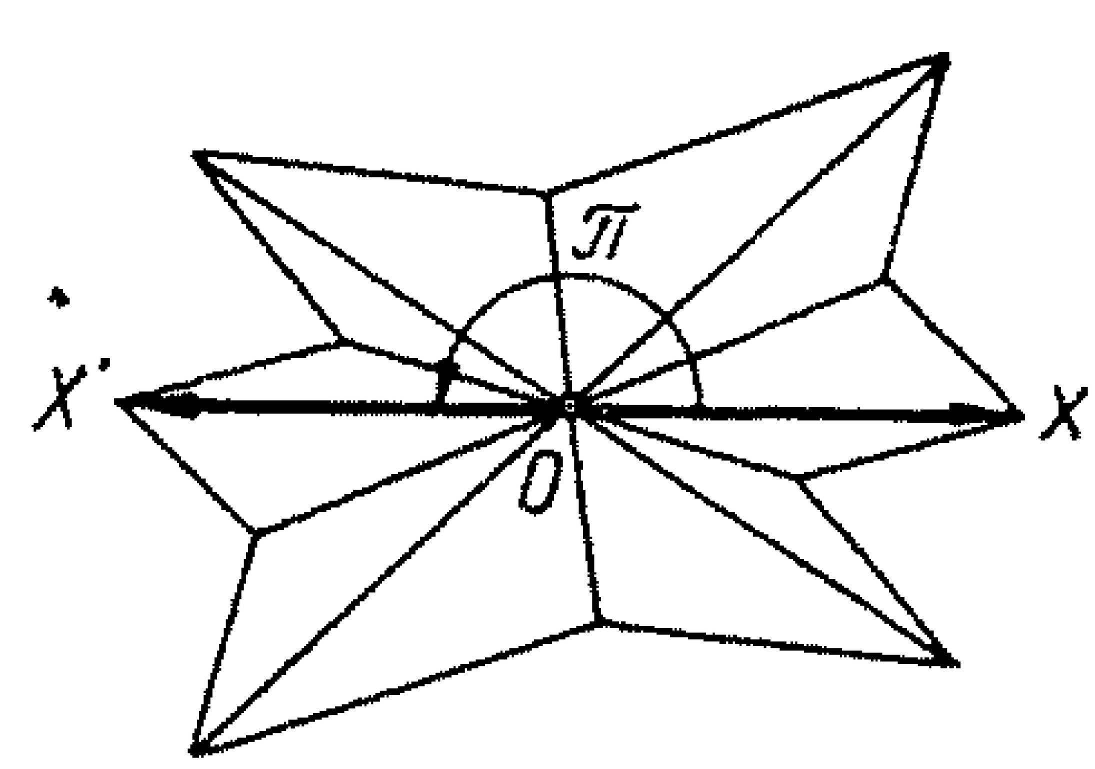
$$y' - x' = y \circ \alpha - x \circ \alpha = y \circ \alpha + x(-1) \circ \alpha = \\ = [y + x(-1)] \circ \alpha = (y - x) \circ \alpha$$

ehk $\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{XY} \circ \alpha$. Olgu $|\overrightarrow{XY}| = r$, s. t. def. 24.2 järgi $\overrightarrow{XY} = (e \circ \varphi) r$, kus e on baasiühikvektor; siis $\overrightarrow{X'Y'} = [(e \circ \varphi) r] \circ \alpha = [e \circ (\varphi + \alpha)] r$, mistõttu $|\overrightarrow{X'Y'}| = r$. Seega pööre, samuti nagu lüke, säilitab iga kahe punkti vahelise kauguse:

$$|\overrightarrow{X'Y'}| = |\overrightarrow{XY}|.$$

Et iga vektori x korral (22.7) põhjal $x \circ 2l\pi = x$, siis reaalarvudele $2l\pi$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ vastavad pöörded kujutavad endast samasusteisendusi.

Pööre punkti O ümber nurga π võrra seab igale punktile X vastavusse punkti X', mida nimetatakse sümmeetriliseks punktiga X punkti O suhtes. Sel korral on võrdusel (55.2) kuju $x' = -x$. Järelikult O on lõigu XX' keskpunkt. Kujundit nimetatakse sümmeetriliseks punkti O suhtes, kui ta koos iga punktiga sisaldab ka sellega O suhtes sümmeetrilise punkti (joon. 124). Punkti O nimetatakse sel korral kujundi sümmeetriakeskpunktiks ehk lihtsalt keskpunktiks.



Joon. 124.

Def. **55.3.** Tasandi teisendust nimetatakse l i i k u m i s e k s, kui ta kujutab endast teatava pöörde ja teatava lükke järjest sooritamise tulemust.

Valemite (55.2) ja (55.1) järgi saadakse tasandi liikumise puhul iga punkti X kujutise X' kohavektor x' originaali kohavektorist x, kui vektorile $x \circ \alpha$ lisada üks ja seesama vektor c:

$$x' = x \circ \alpha + c \qquad (55.3)$$

(kohavektorid tuleb muidugi võtta sellest alguspunktist O, mille ümber toimub pööre).

Valemeid (55.1), (55.2) ja (55.3) nimetatakse vastavalt lükke, pöörde ja liikumise teisendusvalemeiks. Need võimaldavad originaali X kohavektori x järgi arvutada kujutise X' (ehk teisiti öeldud, punkti X uue asendi) kohavektori $\boldsymbol{x}'$. Esimesed kaks neist on kolmanda erijuhtudeks, vastates väärtustele $\alpha = 2l\pi$ ja $\boldsymbol{c} = 0$. Seega lüke ja pööre kujutavad endast liikumise erijuhte.

Olgu punkt X antud ristkoordinaatidega (x_1, x_2) ristreeperi $\{O;\ \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ suhtes; siis $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 x_1 + \boldsymbol{e}_2 x_2$ ning (23.19) põhjal

$$\boldsymbol{x}\circ\alpha = \boldsymbol{x}\cos\alpha + \left(\boldsymbol{x}\circ\frac{\pi}{2}\right)\sin\alpha =$$
$$= (\boldsymbol{e}_1 x_1 + \boldsymbol{e}_2 x_2)\cos\alpha + (-\boldsymbol{e}_1 x_2 + \boldsymbol{e}_2 x_1)\sin\alpha =$$
$$= (x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha)\boldsymbol{e}_1 + (x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha)\boldsymbol{e}_2.$$

Kui X' ristkoordinaadid tähistada x'_1, x'_2, s. t. kui $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{e}_1 x'_1 + \boldsymbol{e}_2 x'_2$, ning lugeda, et $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}_1 c_1 + \boldsymbol{e}_2 c_2$, siis (55.3) põhjal, arvestades, et vektorite liitumisel liituvad ka vastavad koordinaadid, saame:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha + c_1,\\ x'_2 &= x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha + c_2. \end{aligned} \tag{55.4}$$

Selliste valemite järgi on antud liikumise korral arvutatavad punkti X kujutise X' ristkoordinaadid originaali X ristkoordinaatide järgi. Neid valemeid nimetatakse, samuti nagu nendega samaväärset valemit (55.3), liikumise teisendusvalemeiks. Niisuguste valemitega on def. 55.3 järgi esitatav iga liikumine.

Kehtib ka vastupidine väide: iga teisendus tasandil, mille puhul punkti X kujutise X' ristkoordinaadid avalduvad originaali X ristkoordinaatide kaudu valemitega (55.4), on liikumine tasandil. Tõepoolest, on vaid vaja teha pööre reeperi alguspunkti O ümber nurga α võrra ning seejärel lüke, mis viib O punktiks $O'(c_1, c_2)$. Saadud liikumise teisendusvalemeiks on parajasti etteantud valemid (55.4).

Teisendusvalemite (55.4) ja nendega samaväärse (55.3) abil on kergesti tõestatav järgmine lause.

***Teoreem* 55.1.** *Iga liikumine tasandil on kas lüke või osutub pöördeks tasandi mingi punkti ümber.*

T õ e s t u s. Olgu antud liikumine tasandil teisendusvalemitega (55.4). Näitame kõigepealt, et kui see ei ole lüke, siis tasandil leidub üks ja ainult üks punkt, mis jääb paigale.

Punkt $X(x_1, x_2)$ jääb paigale parajasti siis, kui $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$. Järelikult sellise püsipunkti leidmiseks tekib süsteem

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha + c_1,\\ x_2 &= x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha + c_2 \end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned} x_1(1-\cos\alpha) + x_2\sin\alpha &= c_1,\\ -x_1\sin\alpha + x_2(1-\cos\alpha) &= c_2. \end{aligned} \tag{55.5}$$

Selle süsteemi determinant

$$\begin{vmatrix} 1-\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{vmatrix} =$$

$= (1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha =$ $= 2(1-\cos\alpha)$ on null ainult siis, kui $\cos\alpha = 1$. Sel korral $\sin\alpha = 0$ ning teisendusvalemeil on kuju

$$x'_1 = x_1 + c_1, \quad x'_2 = x_2 + c_2,$$

s. t. teisendus on lüke. Järelikult, kui vaadeldav liikumine ei osutu lükkeks, siis süsteemi (55.5) determinant on nullist erinev, süsteemil on parajasti üks lahend (vt. art. 39) ning liikumisel seega parajasti üks püsipunkt. Tähistame selle punkti tähega A. Tema kohavektori $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ puhul $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}$, mistõttu (55.3) järgi

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \circ \alpha + \boldsymbol{c}. \tag{55.6}$$

Valime punkti A uueks alguspunktiks ning tähistame punktide X ja X' uued kohavektorid järgmiselt: $\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{x}_A$, $\overrightarrow{AX'} = \boldsymbol{x}'_A$. Et $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}$, siis $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}_A$; analoogiliselt $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}'_A$. Asendus liikumise teisendusvalemisse (55.3) annab:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}'_A = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}_A) \circ \alpha + \boldsymbol{c}.$$

Aksioomi **D4** ja võrduse (55.6) põhjal siit

$$\boldsymbol{x}'_A = \boldsymbol{x}_A \circ \alpha,$$

s. t. vaadeldav liikumine, kui ta pole lüke, osutub pöördeks punkti A ümber. ∎

Et tasandi iga kahe punkti vaheline kaugus säilib nii pöörde kui lükke korral, siis ta jääb muutumatuks ka iga liikumise korral. Osutub, et see omadus on liikumisele küllalt iseloomulik: tasandi iga teisendus, mis säilitab suvalise kahe punkti vahelise kauguse (s. t. mille puhul originaalidevaheline kaugus on võrdne kujutistevahelise kaugusega), saab erineda liikumisest võib-olla ainult peegelduse (vt. def. 44.3) poolest.

56. Isomeetrilised teisendused. Selleks et tõestada eelmise artikli lõpus sõnastatud väidet, tuleb lähemalt uurida kaugusi säilitavaid teisendusi.

***Def.* 56.1.** Eukleidilise tasandi või ruumi teisendust, mille puhul iga kahe punkti X ja Y ning nende kujutiste X' ja Y' korral $|\overrightarrow{XY}| = |\overrightarrow{X'Y'}|$, nimetatakse i s o m e e t r i l i s e k s t e i s e n d u s e k s.

Nimetus «isomeetriline» tuleneb nende teisenduste järgmisest tähelepanuväärsest omadusest.

***Teoreem* 56.1.** *Isomeetriline teisendus jätab iga kolme punkti X, Y ja Z korral muutumatuks vektorite $\overrightarrow{XY} = \boldsymbol{y}$ ja $\overrightarrow{XZ} = \boldsymbol{z}$ skalaarkorrutise ning koos sellega ka nullist erinevate vektorite vahelised nurgad, mittekollineaarsetele vektoritele ehitatud rööpnelinurkade pindalad ja mittekomplanaarsetele vektoritele ehitatud rööptahukate ruumalad.*

Tähendab, kauguste säilimisest järeldub ka nurkade, pindalade ja ruumalade, n.-ö. kogu meetrika säilimine.

Tõestus. Kui vaadeldavate punktide X, Y ja Z kujutisteks on X', Y' ja Z' ning kui tähistada $\overrightarrow{X'Y'} = \boldsymbol{y}'$ ja $\overrightarrow{X'Z'} = \boldsymbol{z}'$, siis teisenduse isomeetrilisuse tõttu

$$|\boldsymbol{y}| = |\overrightarrow{XY}| = |\overrightarrow{X'Y'}| = |\boldsymbol{y}'|, \quad |\boldsymbol{z}| = |\overrightarrow{XZ}| = |\overrightarrow{X'Z'}| = |\boldsymbol{z}'|$$

ning

$$|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}| = |\overrightarrow{ZY}| = |\overrightarrow{Z'Y'}| = |\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{z}'|.$$

Järelikult

$$(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z})^2 = (\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{z}')^2$$

ehk

$$\boldsymbol{y}^2 - 2\boldsymbol{y}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}^2 = \boldsymbol{y}'^2 - 2\boldsymbol{y}'\boldsymbol{z}' - \boldsymbol{z}'^2.$$

Et siin $\boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{y}'^2$, $\boldsymbol{z}^2 = \boldsymbol{z}'^2$, siis tõesti

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{z}'.$$

Siit on omakorda lihtne järeldada, et isomeetriline teisendus säilitab ka nullist erinevate vektorite vahelise nurga, mittekollineaarsetele vektoritele ehitatud rööpnelinurga pindala ja mittekomplanaarsetele vektoritele ehitatud rööptahuka ruumala, sest kõik nad avalduvad üksnes skalaarkorrutiste kaudu valemitega (28.12), (29.4), (32.9) ja (32.11). ▮

Olgu tasandil või ruumis antud ristreeper $\{O; \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$. Vabalt võetud punkti X koordinaadid x_i on siis (30.7) põhjal tõlgendatavad selle punkti kohavektori $\overrightarrow{OX} = \boldsymbol{x}$ ja baasivektorite $\boldsymbol{e}_i$ skalaarkorrutistena:

$$x_i = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{x}.$$

Skalaarkorrutiste säilimine isomeetrilise teisenduse korral võimaldab nüüd seda teisendust kirjeldada järgmiselt. Ristreeper $\{O; \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ määrab lisaks alguspunktile O veel punktid $A_1, \ldots, A_n$ selliselt, et $\boldsymbol{e}_i = \overrightarrow{OA_i}$. Seejuures juhul $n = 2$ on $\boldsymbol{e}_1{}^2 = \boldsymbol{e}_2{}^2 = 1$, $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = 0$, juhul $n = 3$ aga on $\boldsymbol{e}_1{}^2 = \boldsymbol{e}_2{}^2 = \boldsymbol{e}_3{}^2 = 1$,

$e_1e_2 = e_2e_3 = e_3e_1 = 0$. Olgu punktide $O, A_1, \ldots, A_n$ kujutisteks isomeetrilise teisenduse korral punktid $O', A'_1, \ldots, A'_n$. Sel korral O' moodustab koos vektoritega $e'_1 = \overrightarrow{O'A'_1}, \ldots, e'_n = \overrightarrow{O'A'_n}$ jälle ristreeperi $\{O'; e'_1, \ldots, e'_n\}$, sest skalaarkorrutiste säilimise tõttu ka siin juhul $n = 2$ on $e'^2_1 = e'^2_2 = 1$, $e'_1e'_2 = 0$, juhul $n = 3$ aga $e'^2_1 = e'^2_2 = e'^2_3 = 1$, $e'_1e'_2 = e'_2e'_3 = e'_3e'_1 = 0$. Kui vabalt võetud punkt X kujutub punktiks X', siis selle kohavektori $\overrightarrow{O'X'} = x'$ koordinaatideks on $x'_i = e'_ix'$, ning et isomeetrilise teisenduse puhul $e_ix = e'_ix'$, siis

$$x'_i = x_i.$$

Tulemust mõnevõrra laiendades on sõnastatav järgmine teoreem.

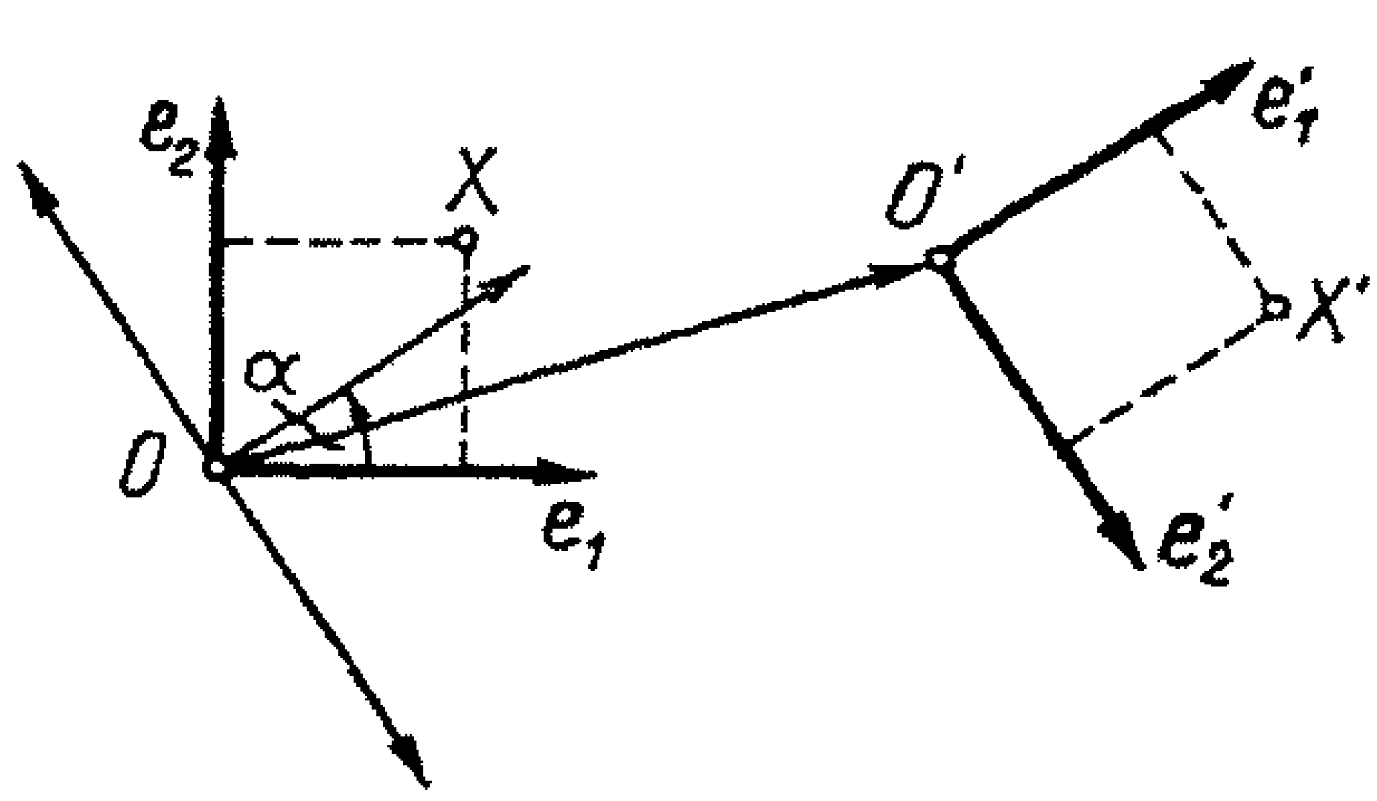
***Teoreem* 56.2.** *Tasandi või ruumi isomeetrilise teisenduse korral vabalt võetud punktil X ja selle kujutisel X' on vabalt võetud ristreeperi $\{O; e_1, \ldots, e_n\}$ ja vastavalt selle kujutise $\{O'; e'_1, \ldots, e'_n\}$ suhtes ühesugused koordinaadid. Vastupidi, kui teisendus kujutab punkti X, mille koordinaadid mingi ristreeperi suhtes on x_i, punktiks X' samade koordinaatidega x_i mingi teise ristreeperi suhtes, siis see on isomeetriline teisendus* (joon. 125).

T õ e s t u s. Esimese lause põhjendus on eespool juba antud. Teise lause põhjendamiseks on küllalt, kui meenutada, et ristkoordinaatide puhul punktide $X(x_1, \ldots, x_n)$ ja $Y(y_1, \ldots, y_n)$ vaheliseks kauguseks on

$$|\overrightarrow{XY}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Järelikult kui punktidel X' ja Y' on mõne teise ristreeperi suhtes samad koordinaadid, siis on ka nendevaheline kaugus sama.

Teoreemist järeldub, et antud isomeetriline teisendus on määratud niipea, kui on antud mingi ristreeper ja selle kujutis. Samuti on siit järeldatav, et iga kahe ristreeperi korral leidub isomeetriline teisendus, mis kujutab esimese ristreeperi teiseks. Selleks on küllalt, kui märkida, et teoreemi teises lauses kirjeldatud teisenduses reeperi alguspunkt $O(0, \ldots, 0)$ kujutub alguspunktiks O', vektori $\overrightarrow{OA_1} = e_1$ otspunkt A_1 kujutub vektori $\overrightarrow{O'A'_1} = e'_1$ otspunktiks A'_1 jne. Seetõttu taandub isomeetrilise teisenduse uurimine kahe ristreeperi vahekorra selgitamisele.



Joon. 125.

Käesolevas artiklis piirdume tasandi isomeetriliste teisendustega. Saab näidata järgmise teoreemi kehtivust.

Teoreem 56.3. *Tasandi isomeetriline teisendus, mis jätab muutumatuks orientatsiooni, on liikumine (s. t. on saadav teatava pöörde ja teatava lükke järjest sooritamisel). Tasandi isomeetriline teisendus, mis muudab orientatsiooni, erineb liikumisest ainult teatava peegelduse poolest.*[69]

T õ e s t u s. Olgu tasandil antud kaks ristreeperit $\{O;\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ ja $\{O';\ \boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2\}$. Teise asend esimese suhtes on määratud alguspunkti O' kohavektoriga (joon. 125)

$$\overrightarrow{OO'}=\boldsymbol{e}_1c_1+\boldsymbol{e}_2c_2 \tag{56.1}$$

ning baasiteisendusvalemitega. Kui baasivektorid $\boldsymbol{e}'_1$ ja $\boldsymbol{e}'_2$ on saadud baasivektoreist $\boldsymbol{e}_1$ ja $\boldsymbol{e}_2$ nende pööramisel nurga α võrra, siis baasiteisendusvalemeiks on (26.7). Üldjuhul võib neile lisanduda üleminek $\boldsymbol{e}'_1 \to \boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2 \to -\boldsymbol{e}'_2$. Seega kokkuvõttes

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1&=\boldsymbol{e}_1\cos\alpha+\boldsymbol{e}_2\sin\alpha,\\ \boldsymbol{e}'_2&=\mp\boldsymbol{e}_1\sin\alpha\pm\boldsymbol{e}_2\cos\alpha. \end{aligned} \tag{56.2}$$

Üleminek ühelt ristreeperilt teisele on niisiis kirjeldatav valemitega (56.1) ja (56.2).

Teoreemi 56.2 kohaselt tasandi isomeetriline teisendus kujutab punkti X kohavektoriga

$$\overrightarrow{OX}=\boldsymbol{e}_1x_1+\boldsymbol{e}_2x_2$$

punktiks X' kohavektoriga

$$\overrightarrow{O'X'}=\boldsymbol{e}'_1x_1+\boldsymbol{e}'_2x_2.$$

Et

$$\begin{gathered} \overrightarrow{OX'}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'X'}=(\boldsymbol{e}_1c_1+\boldsymbol{e}_2c_2)+\\ +(\boldsymbol{e}_1\cos\alpha+\boldsymbol{e}_2\sin\alpha)x_1+(\mp\boldsymbol{e}_1\sin\alpha\pm\boldsymbol{e}_2\cos\alpha)x_2=\\ =\boldsymbol{e}_1(x_1\cos\alpha\mp x_2\sin\alpha+c_1)+\boldsymbol{e}_2(x_1\sin\alpha\pm x_2\cos\alpha+c_2), \end{gathered}$$

siis isomeetrilise teisenduse teisendusvalemiks reeperi $\{O;\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ suhtes on

$$\begin{aligned} x'_1&=x_1\cos\alpha\mp x_2\sin\alpha+c_1,\\ x'_2&=x_1\sin\alpha\pm x_2\cos\alpha+c_2. \end{aligned} \tag{56.3}$$

[69] Seetõttu kasutatakse sageli ka järgmist terminoloogiat (vt. näit. D. I. P e r e p j o l k i n, Elementaargeomeetria kursus I. Tallinn, 1951, lk. 92): liikumiseks nimetatakse iga isomeetrilist teisendust def. 56.1 mõttes; orientatsiooni säilitavaid isomeetrilisi teisendusi (s. t. liikumist def. 55.3 mõttes) nimetatakse siis esimest liiki liikumisteks (ehk pärisliikumisteks), kõiki ülejäänuid teist liiki liikumisteks.

Võrdlus liikumise teisendusvalemitega (55.4) näitab, et ülemiste märkide puhul valemid (56.3) määravad parajasti liikumise tasandil. Sel puhul isomeetriline teisendus osutub teatavaks liikumiseks. Alumiste märkide puhul tuleb eelnevalt teha teisendus

$$x''_1 = x_1,$$
$$x''_2 = -x_2,$$

mis kujutab endast peegeldust x_1-telje suhtes. Tehes siit asendused valemitesse (56.3), saame alumiste märkide puhul neile kuju

$$x'_1 = x''_1 \cos\alpha - x''_2 \sin\alpha + c_1,$$
$$x'_2 = x''_1 \sin\alpha + x''_2 \cos\alpha + c_2.$$

Järelikult tasandi antud isomeetrilise teisenduse saamiseks on pärast tehtud peegeldust jäänud sooritada veel tasandi teatav liikumine.

Erinevus nende kahe juhu vahel ilmneb baasiteisenduse (56.2) determinandi

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \mp\sin\alpha & \pm\cos\alpha \end{vmatrix} = \pm\cos^2\alpha \pm \sin^2\alpha = \pm 1$$

märgis. Ülemiste märkide puhul baas $\{e_1, e_2\}$ ja tema kujutis $\{e'_1, e'_2\}$ on ühtemoodi orienteeritud — orientatsioon säilib, alumiste märkide puhul on olukord vastupidine — orientatsioon muutub. ▮

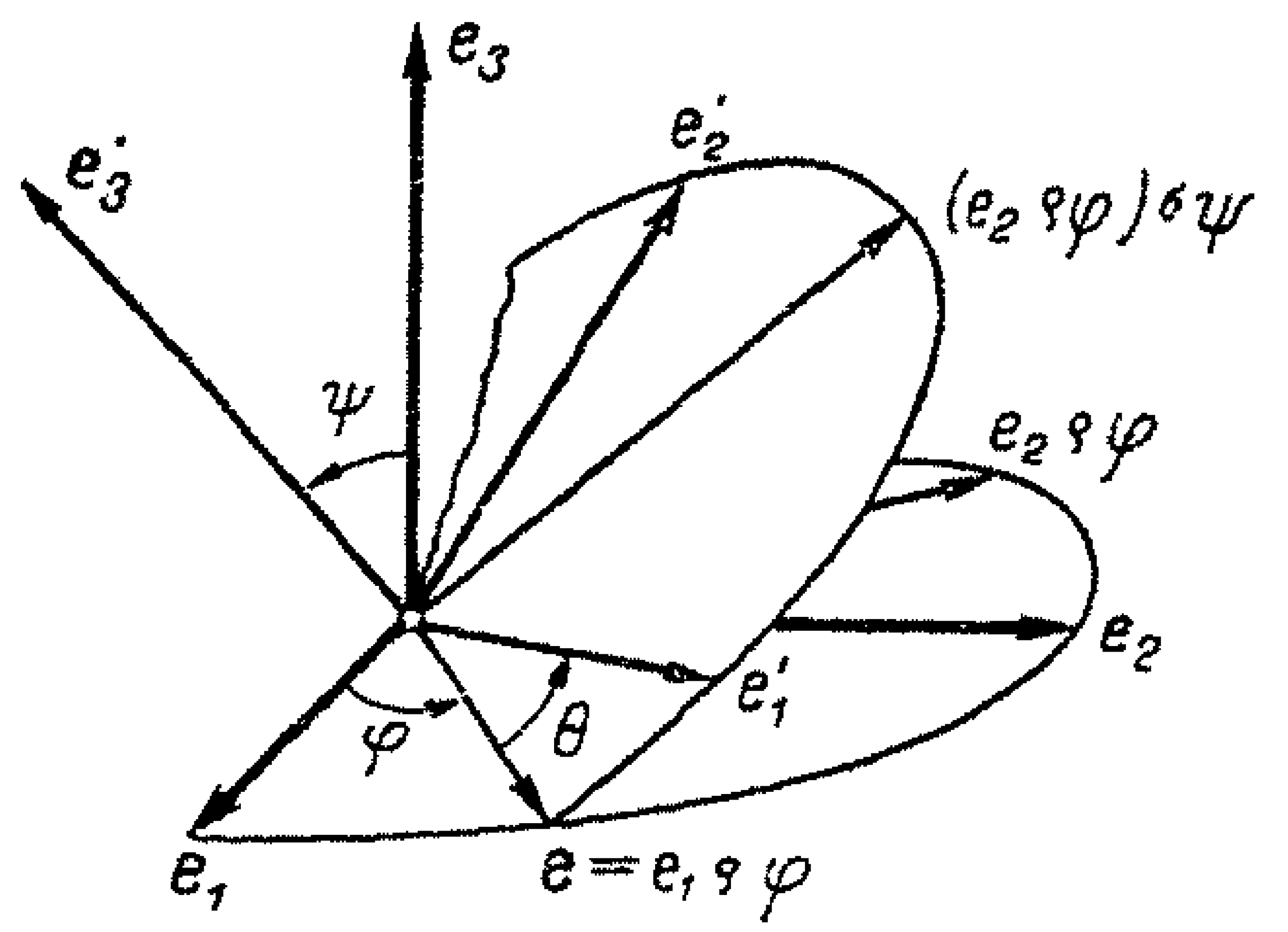
Tõestatud teoreemi kohaselt võib liikumise tasandil defineerida ka kui tasandi sellise isomeetrilise teisenduse, mis jätab muutumatuks orientatsiooni. Ruumi puhul on otstarbekas lähtudagi analoogilisest definitsioonist.

57. Liikumised ruumis. Võtame niisiis liikumiste käsitlemisel ruumis aluseks järgmise definitsiooni (eeldades muidugi, et tegemist on eukleidilise ruumiga).

Def. 57.1. Liikumiseks ruumis nimetatakse ruumi sellist isomeetrilist teisendust, mis säilitab orientatsiooni.

Osutub, et iga liikumine ruumis kujutab endast teatava lükke ja teatava kolme pöörde järjest sooritamise tulemust (vrd. def-iga 55.3; seejuures pööre ruumis on mõiste, mis tuleb veel defineerida). Selle väite põhjendus tugineb samuti nagu teoreemi 56.3 tõestus teoreemile 56.2. Viimase järgi on küllalt, kui analüüsida kahe vabalt võetud ristreeperi $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ ja $\{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$ vastastikust asendit ruumis, piirdudes ühtemoodi orienteeritud reeperitega.

Kui teha lüke, mis on määratud vektoriga $\overrightarrow{OO'} = c$, siis esi-



Joon 126.

mene reeper kujutub reeperiks $\{O'; e_1, e_2, e_3\}$, sest lükke korral kõik vektorid, samuti siis ka baasivektorid e_i jäävad muutumatuks. Seega võib edasises analüüsis piirduda kahe ühist alguspunkti O' omava ristreeperiga.

Üleminеku ühelt teisele saab teha lihtsate sammude kaupa, mis on kirjeldatavad järgmiselt (joon. 126). Et kahel rihil on teoreemi 16.4 kohaselt alati olemas ühine siht, siis võib leida ühikvektori e, mis on korraga komplanaarne nii vektoritega e_1 ja e_2 (s. t. risti vektoriga $e_3 = e_1 \times e_2$) kui ka vektoritega e'_1 ja e'_2 (s. t. risti vektoriga e'_3).

Valides vektoreid e_1 ja e_2 sisaldavas (s. t. vektoriga e_3 ristuvas) rihis baasiga $\{e_1, e_2\}$ määratud orientatsiooni ning tähistades saadud orienteeritud rihi tähega ϱ, võib alati leida reaalarvu φ, nii et $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ ja

$$e = e_1 \rho \varphi$$

(vt. teoreem 24.1). Et seejuures $e_2 \rho \varphi = \left(e_1 \rho \frac{\pi}{2}\right) \rho \varphi = e_1 \rho \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = e_1 \rho \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \overset{a}{=} (e_1 \rho \varphi) \rho \frac{\pi}{2} = e \rho \frac{\pi}{2} \perp e$ ning lisaks sellele $e_3 \perp e$ ja $e'_3 \perp e$, siis vektorid $e_2 \rho \varphi$, e_3 ja e'_3 on teoreemi 28.3 põhjal komplanaarsed. Võttes neid sisaldavas (s. t. vektoriga e ristuvas) rihis baasiga $\{e_2 \rho \varphi, e_3\}$ määratud orientatsiooni ning tähistades saadud orienteeritud rihi tähega σ, võib alati leida reaalarvu ψ, nii et $0 \leqslant \psi < 2\pi$ ja

$$e'_3 = e_3 \sigma \psi. \tag{57.1}$$

Osutub, et mitte üksnes $e'_3 \perp e$, vaid ka $(e_2 \rho \varphi) \sigma \psi \perp e'_3$. Tõepoolest, σ valiku tõttu $e_2 \rho \varphi = e_3 \sigma \left(-\frac{\pi}{2}\right)$, seega

$$(e_2 \rho \varphi) \sigma \psi = \left[e_3 \sigma \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \sigma \psi = e_3 \sigma \left(-\frac{\pi}{2} + \psi\right) =$$

$$= (e_3 \sigma \psi) \sigma \left(-\frac{\pi}{2}\right) = e'_3 \sigma \left(-\frac{\pi}{2}\right) \perp e'_3.$$

Järelikult vektorid e'_1, e'_2, e ja $(e_2 \,\rho\, \varphi)\,\sigma\,\psi$ on kõik risti ühikvektoriga e'_3 ning seega komplanaarsed. Seejuures $(e_2 \rho\, \varphi)\,\sigma\,\psi \perp$ $\perp e$, sest orienteeritud riht σ, milles toimus vektori $e_2 \,\rho\, \varphi$ pööre, on risti vektoriga e. Vektoriga e'_3 ristuvas rihis on seega kaks ristbaasi $\{e, (e_2 \,\rho\, \varphi)\,\sigma\,\psi\}$ ja $\{e'_1, e'_2\}$. Valides esimesega määratud orientatsiooni ja tähistades saadud orienteeritud rihi tähega τ, võib leida reaalarvu θ, nii et $0 \leqslant \theta < 2\pi$ ja

$$e'_1 = e\,\tau\,\theta = (e_1 \,\rho\, \varphi)\,\tau\,\theta. \tag{57 2}$$

Vektor $[(e_2 \,\rho\, \varphi)\,\sigma\,\psi]\,\tau\,\theta$ on selles rihis risti vektoriga $e\,\tau\,\theta = e'_1$ ja seega kollineaarne vektoriga e'_2. Järelikult on kaks võimalust:

$$[(e_2 \,\rho\, \varphi)\,\sigma\,\psi]\,\tau\,\theta = e'_2 \tag{57.3}$$

või

$$[(e_2 \rho\, \varphi)\,\sigma\,\psi]\,\tau\,\theta = -e'_2. \tag{57.4}$$

Osutub, et esimesel juhul baasid $\{e_1, e_2, e_3\}$ ja $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ on ühtemoodi orienteeritud. Selle näitamiseks teeme kindlaks, et baasiteisendused

$$\begin{aligned}\{e_1, e_2, e_3\} &\to \{e_1 \,\rho\, \varphi, e_2 \,\rho\, \varphi, e_3\} \to \{e_1 \,\rho\, \varphi, (e_2 \,\rho\, \varphi)\,\sigma\,\psi, e_3\,\sigma\,\psi\} \to \\ &\to \{(e_1 \rho\, \varphi)\,\tau\,\theta, [(e_2 \,\rho\, \varphi)\,\sigma\,\psi]\,\tau\,\theta, e_3\,\sigma\,\psi\}\end{aligned} \tag{57.5}$$

ei muuda orientatsiooni. Seejuures piisab, kui uurida esimest üleminekut, sest teised on määratud analoogiliselt pöördega mingis teises orienteeritud rihis. Et esimese teisenduse valemid on

$$\begin{aligned} e_1 \rho\, \varphi &= e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi, \\ e_2 \rho\, \varphi &= -e_1 \sin\varphi + e_2 \cos\varphi, \\ e_3 &= e_3 \end{aligned} \tag{57.6}$$

ja seega kordajatest moodustatud determinant

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

on positiivne, siis orientatsioon tõesti säilib.

Et kolme teisenduse (57.5) lõpptulemuseks on võrduste (57.2), (57.3) ja (57.1) põhjal baas $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ ning et baaside ühesugune orienteeritus on ekvivalentsus baaside hulgas (vt. art. 18 ja 19), seega transitiivne, siis baasid $\{e_1, e_2, e_3\}$ ja $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ on võrduse (57.3) puhul tõesti ühtemoodi orienteeritud. ∎

Def. 57.2. Liikumise erijuhtu ruumis, mille puhul ristreeper $\{O;\, e_1, e_2, e_3\}$ kujutub ristreeperiks $\{O;\, e_1 \rho\, \varphi, e_2 \rho\, \varphi, e_3\}$, nimetatakse **pöördeks** nurga φ võrra ümber sirge, mis läbib punkti O vektori e_3 sihis. Seda sirget nimetatakse seejuures **pöördeteljeks**.

Punkt X kohavektoriga

$$\overrightarrow{OX} = x + e_3 x_3,$$

kus $x = e_1 x_1 + e_2 x_2$, kujutub sellise pöörde korral teoreemi 56.2 põhjal punktiks X' kohavektoriga

$$\overrightarrow{OX'} = (e_1 \rho\, \varphi) x_1 + (e_2 \rho\, \varphi) x_2 + e_3 x_3 = (e_1 x_1 + e_2 x_2) \rho\, \varphi + e_3 x_3 = \\ = x \rho\, \varphi + e_3 x_3.$$

Tähendab, igal tasandil võrrandiga $x_3 = c$ (s. t. tasandil, mis on risti pöördeteljega) toimub pööre telje punkti O_C ümber, seejuures ühe ja sama nurga φ võrra. Tõepoolest, et $\overrightarrow{OO_C} = e_3 c$, siis $\overrightarrow{O_C X'} = \overrightarrow{OX'} - \overrightarrow{OO_C} = x \rho\, \varphi$, samal ajal kui $\overrightarrow{O_C X} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OO_C} = x$. Kogu eelnenud arutlus annab nüüd aluse sõnastada järgmine lause.

***Teoreem* 57.1.** *Iga liikumise ruumis — isomeetrilise teisenduse, mis jätab muutumatuks orientatsiooni — võib saada, kui teha järjest üks lüke ja kolm pööret üht punkti läbivate pöördetelgede ümber.*

Tõestus. Liikumine on teoreemi 56.2 põhjal täielikult määratud, kui on antud ristreeper koos oma kujutisega, kusjuures üleminek esimeselt teisele on teostatav, nagu eespool selgitatud, ühe lükkega ja kolme baasimuutmisega (57.5). Esimesele neist vastab pööre punkti O' vektori e_3 sihis läbiva sirge ümber nurga φ võrra, teisele — pööre sama punkti $e_1 \sigma\, \varphi$ sihis läbiva sirge ümber nurga ψ võrra, kolmandale — pööre sama punkti $e_3 \rho\, \psi$ sihis läbiva sirge ümber nurga θ võrra. ∎

Ülaltoodud arutlustest selgub ühtlasi, et isomeetrilise teisenduse ruumis, mille korral orientatsioon muutub, võib saada eelmises teoreemis kirjeldatud teisendusest, kui pärast seda teisendust tekkinud vektori $[(e_2 \rho\, \varphi) \sigma\, \psi] \tau\, \theta$ asemele võtta kooskõlas võrdusega (57.4) selle vastandvektor.

Def. 57.3. Ruumi isomeetrilise teisenduse erijuhtu, mille puhul ristreeperi alguspunkt ja kaks baasivektorit jäävad muutumatuks, kolmas baasivektor aga asendub oma vastandvektoriga, nimetatakse **peegelduseks** alguspunkti ja kahe esimese baasivektoriga määratud tasandi suhtes. Sellise peegelduse korral nimetatakse punkti X ja tema kujutist X' teineteisega **sümmeetrilisteks** selle tasandi suhtes (vrd. def. 44.2).

Üldine isomeetriline teisendus võib teoreemis 57.1 mainitud lükke ja kolme pöörde järjest sooritamise tulemusest — liikumisest — erineda niisiis ainult peegelduse poolest.

58. **Ortogonaalmaatriksid.** Teoreem 56.2 annab küll lihtsa võimaluse isomeetrilise teisenduse kirjeldamiseks kaasateiseneva ristreeperi suhtes (sel juhul punktid säilitavad teisenemisel oma koordinaadid) kuid ta ei anna veel isomeetrilise teisenduse kirjeldust fikseeritud ristreeperi suhtes, teisiti öeldes, ei selgita, kuidas avalduvad sel puhul kujutise X' koordinaadid originaali X koordinaatide kaudu. Tasandil on viimane küsimus lahendatud teoreemi 56.3 tõestamise käigus, kus on leitud tasandi isomeetrilise teisenduse teisendusvalemid (56.3). Analoogilised valemid tuleb nüüd leida ka ruumi juhul. Ka siin, samuti nagu teoreemi 56.3 tõestuses, tugineb kõik reeperi teisenemist kirjeldavatele seostele (vrd. (56.1) ja (56.2)). Viimased koosnevad alguspunkti O kujutise O' kohavektori avaldisest

$$\overrightarrow{OO'}=e_1c_1+e_2c_2+e_3c_3 \tag{58.1}$$

ning baasi $\varepsilon=\{e_1, e_2, e_3\}$ ja selle kujutise $\varepsilon'=\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ vahekorda kirjeldavatest valemitest

$$\begin{aligned} e'_1&=e_1c_{11}+e_2c_{21}+e_3c_{31}, \\ e'_2&=e_1c_{12}+e_2c_{22}+e_3c_{32}, \\ e'_3&=e_1c_{13}+e_2c_{23}+e_3c_{33}, \end{aligned} \tag{58.2}$$

mida võib (18.3) eeskujul kokkuvõtlikult esitada kujul

$$\varepsilon'=\varepsilon C. \tag{58.3}$$

Siin baasiteisendusmaatriksi

$$C=\left\| \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{matrix} \right\| \tag{58.4}$$

puhul ei saa enam, erinevalt art-st 17, piirduda üksnes nõudega, et selle determinant $|C|$ oleks nullist erinev. Tuleb võtta arvesse ka seda, et baasideks ε ja ε' on praegu ristbaasid, s. t.

$$e_1^2=e_2^2=e_3^2=1, \qquad e_1e_2=e_2e_3=e_3e_1=0, \tag{58.5}$$

$$e'^2_1=e'^2_2=e'^2_3=1, \qquad e'_1e'_2=e'_2e'_3=e'_3e'_1=0. \tag{58.6}$$

Siit järeldub rida seoseid maatriksi C elementide vahel. Nende saamiseks tuleb vaid teha seostest (58.2) asendused tingimustesse (58.6) ning vektorite skalaarruutude ja -korrutiste arvutamisel arvestada tingimusi (58.5). Tulemuseks on järgmised seosed:

$$
\begin{aligned}
&c_{11}^2+c_{21}^2+c_{31}^2=1,\\
&c_{12}^2+c_{22}^2+c_{32}^2=1,\\
&c_{13}^2+c_{23}^2+c_{33}^2=1,\\
&c_{11}c_{12}+c_{21}c_{22}+c_{31}c_{32}=0,\\
&c_{12}c_{13}+c_{22}c_{23}+c_{32}c_{33}=0,\\
&c_{13}c_{11}+c_{23}c_{21}+c_{33}c_{31}=0,
\end{aligned}
\tag{58.7}
$$

mida nimetatakse **ortogonaalsusetingimusteks**[70].

On selge, et nad on mitte üksnes tarvilikud, vaid ka piisavad selleks, et ristbaasi ε korral ka selle kujutis εC osutuks ristbaasiks, sest kui on rahuldatud (58.5) ja (58.7), siis on täidetud ka (58.6). Maatriksit (58.4), mille elemendid rahuldavad ortogonaalsusetingimusi (58.7), nimetatakse **ortogonaalmaatriksiks**.

Ortogonaalmaatriksi mõistet on lihtne kirjeldada, kui võtta kasutusele maatriksi C nn. transponeeritud maatriks

$$
C^T=\left\|\begin{matrix} c_{11} & c_{21} & c_{31}\\ c_{12} & c_{22} & c_{32}\\ c_{13} & c_{23} & c_{33}\end{matrix}\right\|, \tag{58.8}
$$

mis on saadud C ridade ja veergude vahetamisel, ning kooskõlas valemiga (18.4) arvutada korrutis

$$
C^TC=\left\|\begin{matrix} c_{11}^2+c_{21}^2+c_{31}^2 & c_{11}c_{12}+c_{21}c_{22}+c_{31}c_{32} & c_{11}c_{13}+c_{21}c_{23}+c_{31}c_{33}\\ c_{12}c_{11}+c_{22}c_{21}+c_{32}c_{31} & c_{12}^2+c_{22}^2+c_{32}^2 & c_{12}c_{13}+c_{22}c_{23}+c_{32}c_{33}\\ c_{13}c_{11}+c_{23}c_{21}+c_{33}c_{31} & c_{13}c_{12}+c_{23}c_{22}+c_{33}c_{32} & c_{13}^2+c_{23}^2+c_{33}^2\end{matrix}\right\|.
$$

Ortogonaalsusetingimused (58.7) on nüüd samaväärsed nõudega, et see korrutis oleks ühikmaatriks

$$
E=\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\|;
$$

seega on nad esitatavad kompaktselt kujul

$$
C^TC=E. \tag{58.9}
$$

Ortogonaalmaatriks on niisiis defineeritav ka kui saadud tin-

[70] kr. k. ὀρθογώνιος — täisnurkne.

gimust rahuldav maatriks, s. t. kui maatriks C, mis korrutamisel oma transponeeritud maatriksiga C^T annab ühikmaatriksi.[71]

Et determinantide korrutamine toimub sama eeskirja järgi mis maatriksite korrutamine, siis võib võrduses (58.9) üle minna determinantidele

$$|C^T|\,|C|=|E|.$$

Determinandi ühe põhiomaduse järgi $|C^T| = |C|$, lisaks sellele $|E| = 1$. Järelikult ortogonaalmaatriksi C korral

$$|C|^2=1$$

ja $|C| = \pm 1$. Parema poole märk näitab siin, kas vaadeldava isomeetrilise teisenduse korral orientatsioon säilib (juht $|C| = 1$) või mitte (juht $|C| = -1$).

Need tulemused võimaldavad kirjeldada liikumist ruumis teisendusvalemite abil järgmiselt.

***Teoreem* 58.1.** *Liikumisteks ruumis on parajasti niisugused teisendused, mis fikseeritud ristreeperi suhtes on määratud teisendusvalemitega*

$$\begin{aligned} x'_1&=c_{11}x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3+c_1,\\ x'_2&=c_{21}x_1+c_{22}x_2+c_{23}x_3+c_2,\\ x'_3&=c_{31}x_1+c_{32}x_2+c_{33}x_3+c_3, \end{aligned} \tag{58.10}$$

kus kordajatest c_{ij} (i, j = 1, 2, 3) *moodustatud maatriks* (58.4) *on ortogonaalmaatriks determinandiga* 1.

T õ e s t u s. Liikumine ruumis kui isomeetrilise teisenduse erijuht kujutab teoreemi 56.2 kohaselt ristreeperi $\{O;\ e_1, e_2, e_3\}$ jälle ristreeperiks $\{O';\ e'_1, e'_2, e'_3\}$, kusjuures iga punkti X kujutisel X' on viimase reeperi suhtes samad koordinaadid x_1, x_2, x_3 mis originaalil X esimese reeperi suhtes. Kohavektorite $\overrightarrow{OX}$ ja $\overrightarrow{O'X'}$ jaoks tähendab see, et kui

$$\overrightarrow{OX}=e_1x_1+e_2x_2+e_3x_3,$$

siis

$$\overrightarrow{O'X'}=e'_1x_1+e'_2x_2+e'_3x_3.$$

Üleminek lähtereeperilt selle kujutisele olgu määratud valemitega (58.2) ja alguspunkti O kujutise O' kohavektori avaldisega $\overrightarrow{OO'} = e_1c_1 + e_2c_2 + e_3c_3$. Sel korral

[71] Vrd. G. K a n g r o, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 440.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX'}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'X'}&=e_1c_1+e_2c_2+e_3c_3+\\&+(e_1c_{11}+e_2c_{21}+e_3c_{31})x_1+\\&+(e_1c_{12}+e_2c_{22}+e_3c_{32})x_2+\\&+(e_1c_{13}+e_2c_{23}+e_3c_{33})x_3=\\&=e_1(c_{11}x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3+c_1)+\\&+e_2(c_{21}x_1+c_{22}x_2+c_{23}x_3+c_2)+\\&+e_3(c_{31}x_1+c_{32}x_2+c_{33}x_3+c_3).\end{aligned}$$

Järelikult punkti X kujutise X' koordinaadid x'_1, x'_2, x'_3 reeperi $\{O;\ e_1,\ e_2,\ e_3\}$ suhtes määratakse tõesti valemitega (58.10). Seejuures, nagu eespool juba selgus, maatriks (58.4) on ortogonaalne, ning et liikumise puhul säilib orientatsioon, siis selle maatriksi determinant on 1.

Vastupidi, kui on antud valemid (58.10) teoreemi sõnastuses märgitud omadustega, siis võib vabalt võetud ristreeperi $\{O;\ e_1,\ e_2,\ e_3\}$ korral määrata uue reeperi, mille baasivektorid avalduvad seostega (58.2) (kus kordajad c_{ij} võetakse valemeist (58.10)) ning mille alguspunkti O' koordinaatideks on c_1, c_2 ja c_3. Et eelduse järgi maatriks (58.4) on ortogonaalne, siis uus reeper on samuti ristreeper, ning et selle maatriksi determinant on positiivne, siis uus reeper on esialgsega ühtemoodi orienteeritud. Teoreemi 56.2 teise lause, selle järelduse ning def. 57.1 põhjal leidub liikumine, mis kujutab ristreeperi $\{O;\ e_1,\ e_2,\ e_3\}$ mainitud uueks ristreeperiks. Kui leida selle liikumise teisendusvalemid, siis need, nagu selgub eeltoodud arutlustest, ühtivad just etteantud valemitega (58.10). ▮

Erijuhul, kui teisendusvalemeis (58.10) $c_1=c_2=c_3=0$, on nendega määratud liikumisel järgmine omadus: punkt $O(0,\ 0,\ 0)$ jääb paigale, sest kui sel korral $x_1=x_2=x_3=0$, siis ka $x'_1=x'_2=x'_3=0$.

***Def.* 58.1.** Liikumist ruumis, mille puhul üks punkt jääb paigale, nimetatakse p ö ö r a m i s e k s selle punkti ümber.

Pööramiseks on näiteks pööre ümber sirge (vt. def. 57.2). Osutub, et see näide on küllalt üldine, sest kehtib järgmine teoreem.

***Teoreem* 58.2.** *Iga pööramine ruumis osutub pöördeks ümber teatava sirge (mis erinevate pööramiste korral võib olla erinev).*

T õ e s t u s. Ristreeperi valime nii, et O oleks paigalejääv punkt. Näitame, et leidub sirge, mis läbib O ja jääb samuti paigale. Võtame vabalt mingi punkti X ja tähistame $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{OX}$. Kui pööramisel X läheb punktiks X', siis $\boldsymbol{x}$ läheb vektoriks $\boldsymbol{x}'=\overrightarrow{OX'}$. Seejuures vektoreil $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{x}'$ on samad koordinaadid mis vastavalt punktidel X ja X'. Järelikult x ja x' koordinaadid on seotud valemitega (58.10), kus praegu $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Otsime nüüd sellist vektorit $\boldsymbol{k}$, kus $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{0}$, mille korral $\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}\lambda$. Kui niisugune leiduks, siis sirge läbi O sihivektoriga $\boldsymbol{k}$ teiseneks iseendaks. Otsitava vektori $\boldsymbol{k}$ koordinaatide jaoks tekib süsteem

$$\begin{aligned} k_1\lambda &= c_{11}k_1 + c_{12}k_2 + c_{13}k_3, \\ k_2\lambda &= c_{21}k_1 + c_{22}k_2 + c_{23}k_3, \\ k_3\lambda &= c_{31}k_1 + c_{32}k_2 + c_{33}k_3, \end{aligned}$$

mille võrrandid võib esitada kujul

$$\begin{array}{rcccccl} (c_{11}-\lambda)k_1 & + & c_{12}k_2 & + & c_{13}k_3 & = & 0, \\ c_{21}k_1 & + & (c_{22}-\lambda)k_2 & + & c_{23}k_3 & = & 0, \\ c_{31}k_1 & + & c_{32}k_2 & + & (c_{33}-\lambda)k_3 & = & 0. \end{array} \tag{58.11}$$

Tulemuseks on lineaarne homogeenne võrrandisüsteem vektori $\boldsymbol{k}$ koordinaatide jaoks. Meid huvitab niisugune lahend, mille korral $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{0}$, s. t. mittetriviaalne lahend.[72] Selline lahend on olemas parajasti siis, kui vektorid, mille koordinaatideks on (58.11) kordajate veerud, on lineaarselt sõltuvad, s. t. kui teoreemi 15.7 järgi

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\lambda & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22}-\lambda & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Tekib kuupvõrrand λ määramiseks. Igal reaalsete kordajatega kuupvõrrandil on vähemalt üks reaalne lahend.[73] Kui tähistada see λ_0 ja asendada süsteemi (58.11) võrrandisse λ asemele, saabki kujunenud süsteemist leida vektori $\boldsymbol{k}$, kus $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{0}$, mille puhul $\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}\lambda_0$.

Valime ristreeperi ruumis nii, et $\boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$. Sel korral $\boldsymbol{e}'_3 = \left(\boldsymbol{k}\frac{1}{|\boldsymbol{k}|}\right)' = \boldsymbol{k}'\frac{1}{|\boldsymbol{k}|} = (\boldsymbol{k}\lambda_0)\frac{1}{|\boldsymbol{k}|} = \boldsymbol{k}\left(\lambda_0\frac{1}{|\boldsymbol{k}|}\right) = \left(\boldsymbol{k}\frac{1}{|\boldsymbol{k}|}\right)\lambda_0 = \boldsymbol{e}_3\lambda_0$. Järelikult selle reeperi puhul valemeis (58.2) $c_{13} = c_{23} = 0$, $c_{33} = \lambda_0$. Kolmandast ortogonaalsusetingimusest (58.7) saame nüüd $\lambda_0^2 = 1$, viiendast ja kuuendast tingimusest aga järeldub: $c_{32} = c_{31} = 0$. Kasutamata jäänud tingimused avalduvad kujul:

$$\begin{aligned} c_{11}^2 + c_{21}^2 &= 1, \\ c_{12}^2 + c_{22}^2 &= 1, \\ c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} &= 0. \end{aligned}$$

[72] Vt. G. Kangro, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 74.
[73] Vt. G. Kangro Matemaatiline analüüs. I. Tallinn, 1965, lk. 131.

Leidub reaalarv φ, nii et $c_{11} = \cos\varphi$, $c_{21} = \sin\varphi$. Kolmandast tingimusest

$$\frac{c_{12}}{\sin\varphi} = -\frac{c_{22}}{\cos\varphi};$$

seega $c_{12} = \mu\sin\varphi$, $c_{22} = -\mu\cos\varphi$. Asendus teise tingimusse annab:

$$\mu^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 1,$$

s. t. $\mu^2 = 1$. Niisiis maatriksi (58.4) kujuks on praegu

$$C = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \mu\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & -\mu\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{Vmatrix},$$

kus $\mu^2 = 1$ ja $\lambda_0^2 = 1$. Seejuures $|C| = -\mu\lambda_0$. Et liikumise korral $|C| = 1$, siis μ ja λ_0 peavad olema erimärgilised. Kui $\lambda_0 = 1$ ja $\mu = -1$, siis

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1\cos\varphi + e_2\sin\varphi = e_1\circ\varphi, \\ e'_2 &= -e_1\sin\varphi + e_2\cos\varphi = e_2\circ\varphi, \\ e'_3 &= e_3, \end{aligned}$$

s. t. def. 57.2 järgi on tegemist pöördega nurga φ võrra ümber sirge, mis läbib punkti O vektori e_3 sihis.

Jääb uurida juht, mil $\lambda_0 = -1$ ja $\mu = 1$. Sel korral

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1\cos\varphi + e_2\sin\varphi, \\ e'_2 &= e_1\sin\varphi - e_2\cos\varphi, \\ e'_3 &= -e_3; \end{aligned}$$

järelikult

$$\begin{aligned} (e'_1)' &= e'_1\cos\varphi + e'_2\sin\varphi = \\ &= (e_1\cos\varphi + e_2\sin\varphi)\cos\varphi + (e_1\sin\varphi - e_2\cos\varphi)\sin\varphi = \\ &= e_1(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = e_1. \end{aligned}$$

Vektorite $l_1 = e_1 + e'_1$ ja $l_2 = e_1 - e'_1$ korral $l_1 \perp l_2$ ja $l'_1 = e'_1 + (e'_1)' = e'_1 + e_1 = l_1$, $l'_2 = e'_1 - (e'_1)' = e'_1 - e_1 = -l_2$.

Kui $l_1 \neq 0$ ja $l_2 \neq 0$, siis tähistame $k_1 = \frac{l_1}{|l_1|}$, $k_2 = \frac{l_2}{|l_2|}$, $k_3 = e_3$. Eeltoodust järeldub kohe, et

$$k'_1 = k_1, \quad k'_2 = -k_2 = k_2\circ\pi, \quad k'_3 = -k_3 = k_3\circ\pi,$$

s. t. tegemist on pöördega nurga π võrra ümber sirge, mis läbib punkti O vektori k_1 sihis. Kui $l_1 = 0$, siis $e'_1 = -e_1$, s. t. $\cos\varphi = -1$, $\sin\varphi = 0$ ja $e'_2 = e_2$; me saame sama tulemuse, kui tähistame $k_1 = e_2$, $k_2 = e_1$, $k_3 = e_3$. Kui $l_2 = 0$, siis $e'_1 = e_1$ ja $e'_2 = -e_2$; siin tuleb võtta $k_1 = e_1$, $k_2 = e_2$, $k_3 = e_3$. ∎

Tõestatud teoreem koos teoreemiga 55.1 annab ühe huvitava järelduse ruumi mistahes liikumise kohta.

***Def.* 58.2.** Liikumist, mis saadakse, kui järjest sooritada pööre ümber teatava sirge ja lüke selle sirge sihis, nimetatakse k r u v i l i i k u m i s e k s. Sirget nimetatakse selle kruviliikumise teljeks.

Kui pööre toimub nurga 0 võrra või lüke määratakse vektoriga 0, siis selline kruviliikumine osutub vastavalt lükkeks või pöördeks. Viimaseid võib seega vaadelda kruviliikumise erijuhtudena.

***Teoreem* 58.3.** *Iga liikumine ruumis on kruviliikumine (mille telg erinevate liikumiste korral võib olla erinev).*

T õ e s t u s. Liikumine on määratud täielikult, kui on antud ristreeper ja selle uus asend. Mingu reeperi alguspunkt O punkti O'. Teeme antud liikumisele lisaks vektoriga $\overrightarrow{O'O}$ määratud lükke. Tulemuseks on pööramine O ümber, mis teoreemi 58.2 kohaselt osutub pöördeks ümber teatava sirge a. Vaatleme tasandit α, mis läbib punkti O risti selle sirgega a, ning tõmbame viimasega paralleelse sirge läbi O' kuni lõikumiseni selle tasandiga α punktis O''. Lüke $\overrightarrow{O'O}$ on siis kahe lükke $\overrightarrow{O'O''}$ ja $\overrightarrow{O''O}$ summa, kusjuures teine lüke teisendab tasandi α iseendaks samuti nagu pööre ümber a. Antud liikumine tekib pöörde, lükke $\overrightarrow{OO''}$ ja lükke $\overrightarrow{O''O'}$ järjest sooritamisel. Esimese kahe tulemusena tekib liikumine tasandil α, mis, kui ta ei ole lüke, on teoreemi 55.1 kohaselt pööre teatava punkti C ümber. Ruumis tekib kas lüke või pööre ümber sirge, mis läbib punkti C paralleelselt sirgega a. Antud liikumise saamiseks jääb lisada lüke $\overrightarrow{O''O'}$, s. t. teatav lüke selle sirge sihis. ∎

Kui pööret määrava maatriksi elemendid sõltuvad ühestainsast parameetrist φ muutumispiirkonnaga $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, siis üldise liikumise teisendusvalemite maatriksiga on lugu teisiti. Ortogonaalsusetingimused (58.7) kujutavad endast kuut seost maatriksi C üheksa elemendi vahel. Seega on põhjust arvata, et need elemendid jäävad sõltuma teatavast kolmest parameetrist. Et see tõesti nii on, selgub art. 57 tulemustest — nendeks parameetriteks võib võtta pöördenurgad φ, ψ ja θ. Positiivse determinandiga ortogonaalmaatriksi C elementide c_{ij} avaldiste saamiseks tuleb kirjeldada kõiki üleminekuid (57.5) analoogiliselt valemitega (57.6). Nii lisanduvad valemitele (57.6) analoogilised seosed

$$(e_2 \rho \varphi) \sigma \psi = (e_2 \rho \varphi) \cos \psi + e_3 \sin \psi,$$
$$e'_3 = e_3 \sigma \psi = -(e_2 \rho \varphi) \sin \psi + e_3 \cos \psi,$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}'_1 &= \qquad\quad (\boldsymbol{e}_1 \,\rho\, \varphi)\,\tau\,\theta = \quad (\boldsymbol{e}_1 \,\rho\, \varphi)\cos\theta + [(\boldsymbol{e}_2 \,\rho\, \varphi)\,\sigma\,\psi]\sin\theta,\\
\boldsymbol{e}'_2 &= [(\boldsymbol{e}_2 \,\rho\, \varphi)\,\sigma\,\psi]\,\tau\,\theta = -(\boldsymbol{e}_1 \,\rho\, \varphi)\sin\theta + [(\boldsymbol{e}_2 \,\rho\, \varphi)\,\sigma\,\psi]\cos\theta.
\end{aligned}
$$

Kui teha viimase kolme võrduse paremlatesse pooltesse asendused eelmistest seostest, ongi tulemuseks võrdused, mis on samaväärsed valemitega (58.2) ja milledest seega

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\cos\psi\sin\theta,\\
c_{21} &= \sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\cos\psi\sin\theta,\\
c_{31} &= \sin\psi\sin\theta,\\
c_{12} &= -\cos\varphi\sin\theta - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
c_{22} &= -\sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
c_{32} &= \sin\psi\cos\theta,\\
c_{13} &= \sin\varphi\sin\psi,\\
c_{23} &= -\cos\varphi\sin\psi,\\
c_{33} &= \cos\psi.
\end{aligned}
\tag{58.12}
$$

Siin parameetrite φ, ψ ja θ muutumispiirkondadeks on $0 \leqslant \varphi < \pi$, $0 \leqslant \psi < 2\pi$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, sest ühikvektori $\boldsymbol{e}$, mis on korraga komplanaarne nii vektoritega $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ kui ka vektoritega $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, võib soovi korral asendada vektoriga $-\boldsymbol{e}$ ja niiviisi alati saavutada, et $\varphi = \angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e})$ on kas 0 või asub 0 ja π vahel. Muus osas valikuvabadus puudub. Selleks et saada negatiivse determinandiga ortogonaalmaatriksi elementide avaldisi, tuleb valemeis ühe kolmiku (näiteks viimase kolmiku) paremate poolte ees muuta märgid.

Parameetreid φ, ψ ja θ valemeis (58.12) nimetatakse **E u l e r i n u r k a d e k s**[74]. Asjaolu, et antud ristbaasi kujutis vabalt võetud liikumise korral ruumis sõltub kolmest parameetrist, väljendatakse sageli, eriti mehhaanikas, sõnadega: ristbaas ruumis on kolme vabadusastmega. Ristreeperi puhul ruumis lisanduvad alguspunkti kolm koordinaati. Seega ristreeperi asend ruumis sõltub kuuest parameetrist ehk, nagu öeldakse, ristreeperil ruumis on kuus vabadusastet. Tasandil on ristbaasil ja ristreeperil vastavalt üks ja kolm vabadusastet.

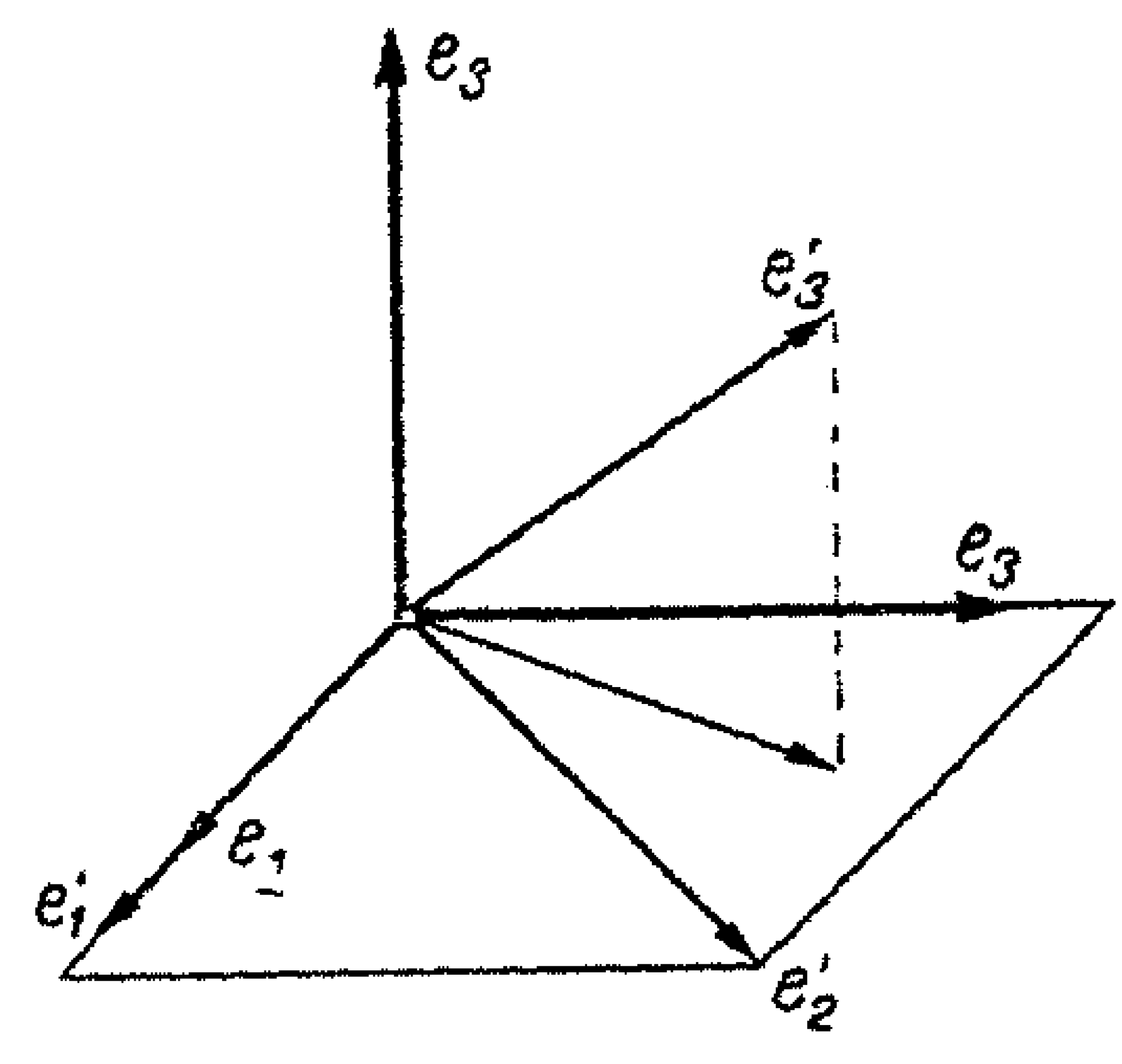
Valemid (58.12) võimaldavad uuest seisukohast tõlgendada orientatsiooni mõistet ruumis. Orientatsiooni käsitlemisel võib piirduda ristbaasidega, sest iga baasiga $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ võib siduda temaga ühtemoodi orienteeritud ristbaasi $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, nii et oleks

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}'_1 &= \boldsymbol{e}_1\lambda_1,\\
\boldsymbol{e}'_2 &= \boldsymbol{e}_1\mu_1 + \boldsymbol{e}_2\lambda_2,\\
\boldsymbol{e}'_3 &= \boldsymbol{e}_1\mu_2 + \boldsymbol{e}_2\mu_3 + \boldsymbol{e}_3\lambda_3
\end{aligned}
\tag{58.13}
$$

---

[74] Leonhard **E u l e r** (1707—1783) — šveitsi päritoluga matemaatik, Peterburi ja Berliini Teaduste Akadeemia liige. Valemid (58.12) sisalduvad tema teoses «Sissejuhatus lõpmata väikeste analüüsi» (1748).

ja $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$. (Viimastele võrratustele võib anda lihtsad geomeetrilised tõlgendused, kasutades poolsirge, pooltasandi ja poolruumi mõisteid; joon. 127.) Valemitest (58.12) selgub, et iga kahe ühtemoodi orienteeritud ristbaasi korral on võimalik pidev üleminek ühelt baasilt teisele, mille vältel on kogu aeg tegemist ristbaasiga. Tuleb nimelt parameetreid φ, ψ, θ lasta väärtustelt $\varphi = \psi = \theta = 0$ (neile vastab ühikmaatriks E) kasvada pidevalt teist ristbaasi määravate väärtusteni φ_0, ψ_0, θ_0, võttes näiteks $\varphi = t\varphi_0$, $\psi = t\psi_0$, $\theta = t\theta_0$ ja lastes kordajat t muutuda lõigul $[0, 1]$. Funktsioonide $\cos x$ ja $\sin x$ pidevuse tõttu elemendid c_{ij} muutuvad sel korral pidevalt, kusjuures maatriks $C = \|c_{ij}\|$ jääb kogu aeg ortogonaalmaatriksiks determinandiga $|C| = 1$.



Joon. 127.

Huvi pakub vastupidine väide: kui üks baas on saadav teisest pideva protsessiga, mille vältel on kogu aeg tegemist baasiga (s. t. vektorid jäävad selles protsessis kogu aeg lineaarselt sõltumatuiks), siis need baasid on ühtemoodi orienteeritud.

Põhjendus on lihtne. Kui baas ε' on saadav baasist ε pideva üleminekuga

$$\varepsilon(t) = \varepsilon C(t)$$

selliselt, et 1) $\varepsilon(0) = \varepsilon$ (s. t. et $C(0) = E$), 2) $\varepsilon(1) = \varepsilon'$ ning 3) $\varepsilon(t)$ on kogu aeg baas (s. t. $|C(t)| \neq 0$), siis tänu sellele, et a) $|C(0)| = |E| = 1 > 0$, b) $|C(t)|$ on pidev ja c) $|C(t)|$ ei saa omada väärtust null, on kogu aeg $|C(t)| > 0$. Järelikult ka valemite

$$\varepsilon' = \varepsilon(1) = \varepsilon C(1)$$

puhul on $|C(1)| > 0$, s. t. baasid ε ja ε' on ühtemoodi orienteeritud.

Eelmisele väitele lisaks võib öelda, et ka kaht suvalist baasi (s. t. mitte tingimata ristbaasi), mis on ühtemoodi orienteeritud, võib saada teineteisest pideva üleminekuga selliselt, et kogu aeg on tegemist baasiga. Valemid (58.13) võimaldavad nimelt teha pideva ülemineku antud baasi määravatelt väärtustelt $\lambda_i^{(0)}$, $\mu_i^{(0)}$ ristbaasi määravate väärtusteni $\lambda_i = 1$, $\mu_i = 0$, võttes näiteks

$$\lambda_i = t\lambda_i^{(0)} + (1 - t), \quad \mu_i = t\mu_i^{(0)}$$

ja lastes parameetrit muutuda lõigul $[1, 0]$. Ristbaasilt tuleb üle minna ülalkirjeldatud viisil Euleri nurki muutes teise baasiga seotud ristbaasile ja sellelt eelnenud võtet tagurpidi rakendades teisele baasile endale. Kokkuvõtteks on järgmine lause.

Teoreem 58.4. *Kaks baasi on ühtemoodi orienteeritud parajasti siis, kui saab näidata ühe baasi sellise pideva muutumise, mis viib ta teiseks baasiks, ilma et ta vahepeal lakkaks olemast baas.*

Väide kehtib ka tasandi juhul, kus põhjendus on põhimõtteliselt samasugune, detailides aga märgatavate lihtsustustega.

Kahe erisuguselt orienteeritud baasi puhul lisandub baasi pidevale muutumisele peegeldus mingi tasandi suhtes.

59. Ristkoordinaatide teisendamine ruumis. Teisendusvalemid (55.4), mis määravad liikumise tasandil, erinevad vähe ristkoordinaatide teisendusvalemitest (26.10). See sarnasus ei ole juhuslik, vaid väljendab kindlat seost liikumiste ja ristkoordinaatide teisenduste vahel, mis on jälgitav ka ruumis ning võimaldab siin liikumise teisendusvalemeist (58.10) järeldada ka ristkoordinaatide teisendusvalemid ruumis.

Liikumise teisendusvalemid (58.10) kujutavad endast seoseid, mille abil saab iga punkti X koordinaatide järgi antud ristreeperi $\{O;\ e_1,\ e_2,\ e_3\}$ suhtes arvutada selle punkti kujutise X' koordinaate sellesama ristreeperi suhtes. Seejuures on teoreemist 56 2 teada, et kui liikumisega teisendada kaasa ka reeperit, s. t. vaadelda antud ristreeperi kujutist $\{O';\ e'_1,\ e'_2,\ e'_3\}$ selles liikumises, siis punktil X' on reeperi $\{O';\ e'_1,\ e'_2,\ e'_3\}$ suhtes samad koordinaadid mis punktil X reeperi $\{O;\ e_1,\ e_2,\ e_3\}$ suhtes. See tulemus võimaldabki liikumise teisendusvalemeid kasutada teistsuguses olukorras.

Vaatleme nimelt ruumis fikseeritud punkti X ning kaht vabalt võetud ristreeperit $\{O;\ e_1,\ e_2,\ e_3\}$ ja $\{O';\ e'_1,\ e'_2,\ e'_3\}$ ühtemoodi orienteeritud baasidega. Punktil X on kummagi reeperi suhtes teatavad koordinaadid $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ ja $(x'_1,\ x'_2,\ x'_3)$. Ülesandeks on leida seosed nende koordinaatide vahel — ristkoordinaatide teisendusvalemid ruumis. (Tasandil on sellisteks valemiteks (26.10).)

Kahe antud reeperi korral leidub ruumis liikumine, mis teisendab esimese reeperi teiseks. Et liikumine kui teisendus on 1 : 1-pealekujutus, siis leidub punkt Y, mille kujutiseks Y' on antud punkt X, s. t. $y'_i = x_i$. Et teiselt poolt Y koordinaadid y_i esimese reeperi suhtes on võrdsed kujutise $Y' = X$ koordinaatidega x'_i selle reeperi kujutise (s. t. teise reeperi) suhtes, siis $y_i = x'_i$. Järelikult tuleb liikumise teisendusvalemeis (58.10), kui neid kasutada koordinaatide y_i ja y'_i puhul, teha asendused $y'_i = x_i$, $y_i = x'_i$, s. t. neis valemeis esialgsel kujul (58.10) tuleb lihtsalt vahetada koordinaatide x_i ja x'_i kohad:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + c_{13}x'_3 + c_1, \\ x_2 &= c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + c_{23}x'_3 + c_3, \\ x_3 &= c_{31}x'_1 + c_{32}x'_2 + c_{33}x'_3 + c_3. \end{aligned} \tag{59.1}$$

Selliselt on seotud punkti X koordinaadid erinevate reeperite $\{O;\ e_1,\ e_2,\ e_3\}$ ja $\{O';\ e'_1,\ e'_2,\ e'_3\}$ suhtes, kui O' koordinaatideks esimese reeperi suhtes on c_1, c_2, c_3 ja baasivektorid on seotud valemitega (58.2).

Valemid (59.1) on erijuhuks art-s 17 leitud koordinaaditeisendusvalemeist (17.10), mis kirjeldavad punkti koordinaatide muutumist üleminekul ühelt suvaliselt reeperilt teisele. Iseärasuseks on praegu see, et tegemist on ristkoordinaatidega, s. t. üleminekuga ühelt ristreeperilt teisele ristreeperile. Kooskõlas art. 58 tulemustega on see samaväärne asjaoluga, et kordajatest c_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ moodustatud maatriks (58.4) on ortogonaalmaatriks, s. t.

$$C^T C = E. \tag{59.2}$$

Valemitele (59.1) vastupidised seosed on erijuhuks valemeist (17.9), mille kordajate maatriksiks

$$\begin{Vmatrix} c^*_{11} & c^*_{12} & c^*_{13} \\ c^*_{21} & c^*_{22} & c^*_{23} \\ c^*_{31} & c^*_{32} & c^*_{33} \end{Vmatrix}$$

on art. 17 tulemuste põhjal valemite (59.1) kordajate maatriksi C pöördmaatriks C^{-1}.

Osutub, et ortogonaalmaatriksi C korral

$$C^{-1} = C^T. \tag{59.3}$$

Väide järeldub sellest, et C on ortogonaalmaatriks parajasti siis, kui seoses (58.3)

$$\varepsilon' = \varepsilon C$$

mõlemad baasid ε ja ε' on ristbaasid, ning et C^{-1} on definitsiooni kohaselt (vt. art. 17) maatriksiks vastupidises üleminekus

$$\varepsilon = \varepsilon' C^{-1},$$

mis seob samuti ristbaase. Viimasest kahest võrdusest järeldub, et[75]

$$\varepsilon' = (\varepsilon' C^{-1}) C = \varepsilon' (C^{-1} C), \qquad \varepsilon = (\varepsilon C) C^{-1} = \varepsilon (C C^{-1}),$$

seega

$$C^{-1} C = C C^{-1} = E.$$

Kui nüüd võrduse (59.2) pooli korrutada paremalt maatriksiga C^{-1}, siis on tulemuseks

$$(C^T C) C^{-1} = C^{-1},$$

ning et $(C^T C) C^{-1} = C^T (C C^{-1}) = C^T E = C^T$, siis tõepoolest kehtib (59.3).

Seetõttu valemeis (17.9) tuleb ristkoordinaatide puhul kordajate maatriksiks C^{-1} võtta maatriksi C transponeeritud maatriks C^T:

[75] Kui arvestada maatriksite korrutamise assotsiatiivsust, vt. G. Kangro, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 89 ja 99

$$\begin{aligned} x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + c_{31}x_3 + c^*_1, \\ x'_2 &= c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + c_{32}x_3 + c^*_2, \\ x'_3 &= c_{13}x_1 + c_{23}x_2 + c_{33}x_3 + c^*_3. \end{aligned} \tag{59.5}$$

Ka tasandi puhul on täheldatav samasugune seaduspärasus (vrd. valemeid (26.11) ja (26.10)). Väärib veel märkimist, et kui baasiteisenduse (58.2) korral orientatsioon jääb muutumatuks, siis kordajad c_{ij} valemeis (59.5) on avaldatavad Euleri nurkade φ, ψ ja θ kaudu valemite (58.12) järgi.

§ 10. AFIINSED TEISENDUSED

Seos, mis ilmnes liikumiste ja ristkoordinaatide teisendamise vahel, tugineb asjaolule, et kaasaliikuva ristreeperi puhul punkti asend selle reeperi suhtes on jäik, s. t. punkti ristkoordinaadid jäävad muutumatuks. Kui nüüd reeperi puhul mitte nõuda, et ta peab olema ristreeper, siis tekib loomuliku üldistusena teisendus, mis igale punktile X koordinaatidega x_i mingi afiinse reeperi suhtes seab vastavusse punkti X' samade koordinaatidega x_i mingi teise afiinse reeperi suhtes. Selliseid teisendusi nimetatakse afiinseteks teisendusteks. Võib öelda, et afiinse tasandi või ruumi puhul (s. t. aksioomide **D1**—**D6** puudumisel), mil ristreeperi mõiste ja koos sellega ka liikumise mõiste ei ole üldse defineeritavad, on nad kõige lihtsamat tüüpi teisendused ja asendavad siin liikumisi.

Käesoleva paragrahvi põhiülesande võib seada järgmiselt (kui arvestada, et eukleidilise tasandi või ruumi liikumised on afiinsete teisenduste erijuht): selgitada, missugused liikumise omadustest on üldisema iseloomuga, kehtides ka kõigi afiinsete teisenduste puhul, missugused neist on aga omased ainult liikumistele. Selle ülesande lahendamise käigus selguvad ühtlasi võimalused afiinsete teisenduste mõningate eriliikide väljaeraldamiseks.

60. Afiinne teisendus ja paralleelprojekteerimine. Ülalantud kirjelduse järgi on tasandi või ruumi afiinne teisendus defineeritav järgmiselt.

***Def.* 60.1.** Tasandi või ruumi teisendust nimetatakse a f i i n s e k s t e i s e n d u s e k s, kui leiduvad sellised kaks afiinset reeperit $\{O;\, e_1, \ldots, e_n\}$ ja $\{O;\, e'_1, \ldots, e'_n\}$, nii et iga punkti X koordinaadid esimese reeperi suhtes on võrdsed tema kujutise X' koordinaatidega teise reeperi suhtes, s. t. kui võrdusest $\overrightarrow{OX} = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ järeldub alati, et $\overrightarrow{O'X'} = x_1e'_1 + \ldots + x^ne'_n$.

On selge, et esimese reeperi alguspunkti O kujutiseks on sel korral teise reeperi alguspunkt O', sest mõlema koordinaadid nende reeperite suhtes on $x_i = 0$.

Afiinne teisendus määrab teatava teisenduse ka tasandi või ruumi vektorite hulgas. Tõepoolest, iga vektori $\boldsymbol{a}$ jaoks võib vabalt valitud punkti X korral leida punkti Y, nii et $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{XY}$. Vektori $\boldsymbol{a}$ kujutiseks afiinse teisenduse korral loetakse siis vektor $\boldsymbol{a}' = \overrightarrow{X'Y'}$, kus X' ja Y' on punktide X ja Y kujutised. Jääb näidata, et $\boldsymbol{a}'$ ei sõltu punkti X valikust. Kui punktide X ja Y koordinaadid esimese reeperi suhtes on x_i ja y_i ning vektori $\boldsymbol{a}$ koordinaadid selle reeperi baasil on a_i, siis $a_i = x_i - y_i$. Et X' ja Y' koordinaatideks teise reeperi suhtes on samad x_i ja y_i, siis ka vektori $\boldsymbol{a}'$ koordinaatideks selle baasil on samad a_i. Järelikult, kui

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1 a_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n a_n, \tag{60.1}$$

siis ka

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{e}'_1 a_1 + \ldots + \boldsymbol{e}'_n a_n. \tag{60.2}$$

sõltumatult punkti X valikust.

Siit järeldub, et esimese reeperi baasivektorite $\boldsymbol{e}_i$ kujutisteks on teise reeperi vastavad baasivektorid $\boldsymbol{e}'_i$, sest nende vastavad koordinaadid reeperite baasidel on võrdsed (kas 0 või 1). Tähendab, def-is 60.1 märgitud kahest reeperist teine on esimese kujutiseks.

Sama definitsiooni vahetuks järelduseks on järgmine lause.

***Teoreem* 60.1.** *Iga kahe reeperi korral leidub parajasti üks afiinne teisendus, mis kujutab esimese reeperi teiseks.*

T õ e s t u s. Selline afiinne teisendus on olemas ja on määratud täielikult: iga punkt X, millel on koordinaadid x_i esimese reeperi suhtes, tuleb kujutada punktiks X', millel on samad koordinaadid x_i teise reeperi suhtes. ∎

Võrdustest (60.1) ja (60.2) järeldub, et iga kahe vektori $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ ja iga reaalarvu λ korral on

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})' = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}', \tag{60.3}$$

$$(\boldsymbol{a}\lambda)' = \boldsymbol{a}'\lambda. \tag{60.4}$$

Tõepoolest, mõlemal juhul on vasakul ja paremal pool üks ja seesama vektor — võrduses (60.3) on selleks $\boldsymbol{e}'_1(a_1 + b_1) + \ldots + \boldsymbol{e}'_n(a_n + b_n)$, võrduses (60.4) aga $(\boldsymbol{e}'_1 a_1 + \ldots + \boldsymbol{e}'_n a_n)\lambda$.

Tasandi või ruumi afiinse teisenduse poolt vektorite hulgas määratud teisendust nimetatakse vektorite l i n e a a r t e i s e n d u s e k s. Omadusi (60.3) ja (60.4) nimetatakse vektorite teisenduse l i n e a a r s u s e o m a d u s t e k s.

Viimaste abil on nüüd tõestatav niisugune lause.

***Teoreem* 60.2.** *Afiinse teisenduse korral iga reeper kujutub jälle teatavaks reeperiks, kusjuures def-is 60.1 kirjeldatud omadus on igal reeperil ja tema kujutisel.*

Tõestus. Olgu antud teatav vabalt võetud reeper $\{P;\ f_1, \ldots, f_n\}$ ning olgu selle alguspunkti P kujutiseks punkt P' ja selle baasivektori f_i kujutiseks vektor f'_i. Tasandi vektori $x = f_1x_1 + f_2x_2$ (juht $n = 2$) kujutiseks on siis lineaarsuseomaduste (60.3) ja (60.4) põhjal vektor

$$x' = (f_1x_1 + f_2x_2)' = (f_1x_1)' + (f_2x_2)' = f'_1x_1 + f'_2x_2,$$

ruumi vektori $x = f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3$ (juht $n = 3$) kujutiseks analoogiliselt vektor

$$x' = [(f_1x_1 + f_2x_2) + (f_3x_3)]' = (f_1x_1 + f_2x_2)' + (f_3x_3)' = \\ = f'_1x_1 + f'_2x_2 + f'_3x_3.$$

Kokkuvõttes, kui

$$x = f_1x_1 + \ldots + f_nx_n, \tag{60.5}$$

siis

$$x' = f'_1x_1 + \ldots + f'_nx_n. \tag{60.6}$$

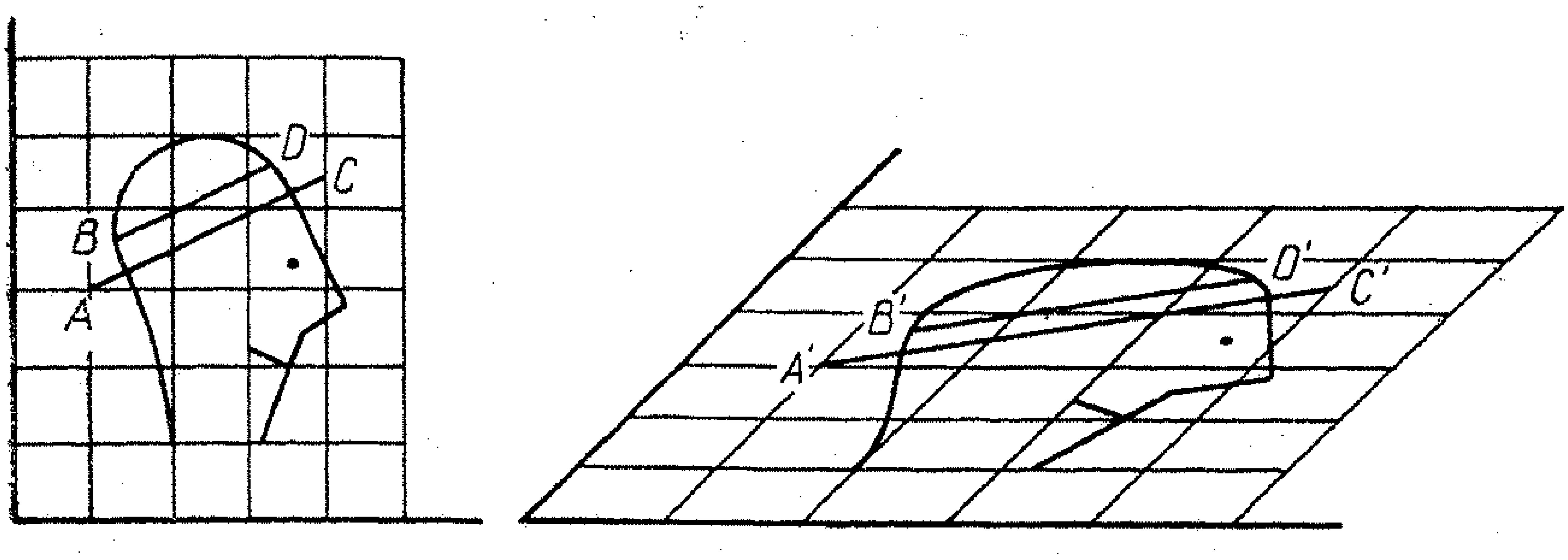
Võttes siin $x_i = 0$, selgub, et $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$. Sellest, et afiinne teisendus on 1 : 1-kujutus, järeldub, et alati kui $x' = \mathbf{0}$, on ka $x = \mathbf{0}$. Seetõttu $f'_1, \ldots, f'_n$ ei saa olla lineaarselt sõltuvad. Tõepoolest, siis kehtiks (60.6) juhul, kui $x' = \mathbf{0}$ ja kordajatest x_i vähemalt üks on nullist erinev, ning koos sellega kehtiks ka samade kordajatega võrdus (60.5) juhul $x = \mathbf{0}$, mis on aga võimatu, sest $f_1, \ldots, f_n$ on reeperi vektorid ja seega lineaarselt sõltumatud. ∎

Teoreemidest 60.1 ja 60.2 järeldub vahetult, et afiinse teisenduse täielikuks määramiseks on küllalt teadmisest, kuidas teiseneb mingi reeper. Samuti on järeldatav niisugune lause.

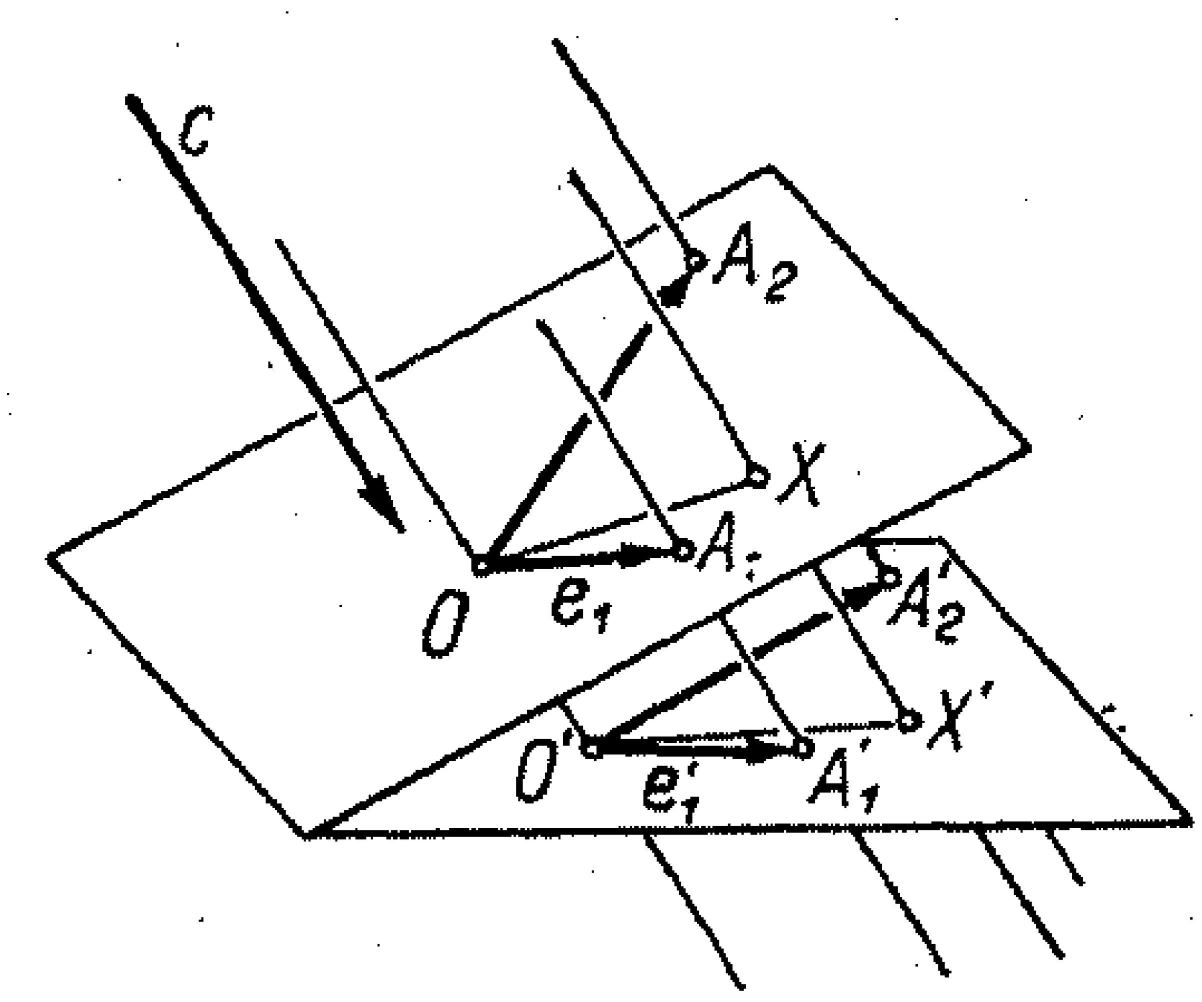
***Teoreem*[76] 60.3.** *Tasandi (ruumi) iga afiinse teisenduse korral järjestatud punktikolmik (-nelik), mis ei koosne ühe sirge (tasandi) punktidest, kujutub samasuguse omadusega järjestatud punktikolmikuks (-nelikuks). Seejuures iga kahe niisuguse kolmiku (neliku) korral leidub parajasti üks afiinne teisendus, mis kujutab esimese kolmiku (neliku) punktid teise vastavateks punktideks.*

Tõestus. Kui punktikolmik (-nelik) koosneb punktidest O ja A_i, siis võib määrata vektorid $f_i = \overrightarrow{OA_i}$, mis on lineaarselt

[76] Siin on korraga kaks teoreemi; teise saab sulgudes olevate sõnade asetamisel neile vahetult eelnevate sõnade kohale.



Joon. 128.



Joon. 129.

sõltumatud ning moodustavad reeperi $\{O; f_1, \ldots, f_n\}$. Edasi jääb rakendada teoreeme 60.2 ja 60.1.∎

Seega tasandi (ruumi) afiinse teisenduse täielikuks määramiseks on küllalt teadmisest, kuidas teisenevad mingid kolm (neli) punkti, mis ei ole ühel sirgel (tasandil). Teoreem 60.2 annab ühtlasi võimaluse konstrueerida punkthaaval mistahes kujundi kujutis. Näiteks tasandil tuleb antud punktikolmikuga siduda ülalkirjeldatud viisil reeper ning katta tasand sirgetest $x_1 = k\lambda_1$ ja $x_2 = k\lambda_2$ koosneva küllalt tiheda võrguga (kus $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ja λ_1, λ_2 on mingid konstantsed reaalarvud). Selle võrgu kujutis koosneb sirgetest, millel on reeperi kujutise suhtes samad võrrandid, sest koordinaadid säilivad. Kujundi saab nüüd üle kanda võrgu punktide abil, võttes vajaduse korral järjest tihedama võrgu, s. t. järjest väiksemad reaalarvud λ_1 ja λ_2 (joon. 128).

Tasandi afiinsele teisendusele võib anda ka teatava uue tõlgenduse, kui kujutleda tasandit asetsevana ruumis ja kasutada paralleelprojekteerimise mõistet, mis defineeritakse järgmiselt.

***Def.* 60.2.** Olgu ruumis antud kaks erinevat tasandit ning nullist erinev vektor c, mis ei ole kummagi tasandi vektoriks. Ühe tasandi kujutust teisele nimetatakse p a r a l l e e l p r o j e k t e e -

r i m i s e k s vektori c sihis, kui iga punkti X ja tema kujutise X' korral $\overrightarrow{XX'} \parallel c$ (joon. 129).

Vektori c kohta tehtud eelduse kohaselt iga tema sihiline sirge (nn. projekteeriv sirge) lõikab kumbagi tasandit parajasti ühes punktis. Järelikult paralleelprojekteerimine määrab 1 : 1-pealekujutuse.

Kui lisaks antud tasandile on ruumis võetud veel rida tasandeid, siis võib antud tasandi kujutada paralleelprojekteerimisega mõnele teisele tasandile, selle samal viisil kolmandale tasandile ja nii edasi, kuni lõpuks võib paralleelprojekteerimisega tagasi tulla jälle antud tasandile. Kokkuvõttes tekib antud tasandi 1 : 1-pealekujutus iseendale ehk teisendus. Võib näidata, et see on afiinne teisendus.

Põhjenduseks tuleb ühel tasandeist võtta reeper $\{O;\ e_1,\ e_2\}$, mis on määratud kolme mitte ühel sirgel oleva punktiga O, A_1 ja A_2 selliselt, et $e_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $e_2 = \overrightarrow{OA_2}$. Kui nüüd on antud selle tasandi paralleelprojekteerimine teisele tasandile vektori c sihis, siis teisel tasandil saab määrata analoogiliselt reeperi $\{O';\ e'_1,\ e'_2\}$ nende punktide kujutistega O', A'_1 ja A'_2. Sel korral $e'_i = \overrightarrow{O'A'_i} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{A_iA'_i}$, kus $\overrightarrow{OA_i} = e_i$ ning $\overrightarrow{O'O}$ ja $\overrightarrow{A_iA'_i}$ on kollineaarsed vektoriga c (joon. 129). Järelikult

$$e'_1 = e_1 + c\lambda_1, \qquad e'_2 = e_2 + c\lambda_2.$$

Esimese tasandi vabalt võetud punkti X ja selle kujutise X' korral

$$\overrightarrow{O'X'} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{OX} + c\mu,$$

sest siin samuti $\overrightarrow{O'O} \parallel c$, $\overrightarrow{XX'} \parallel c$. Et $\overrightarrow{O'X'} = e'_1x'_1 + e'_2x'_2$, $\overrightarrow{OX} = e_1x_1 + e_2x_2$, siis

$$e'_1x'_1 + e'_2x'_2 = e_1x_1 + e_2x_2 + c\mu$$

ehk

$$(e_1 + c\lambda_1)x'_1 + (e_2 + c\lambda_2)x'_2 = e_1x_1 + e_2x_2 + c\mu.$$

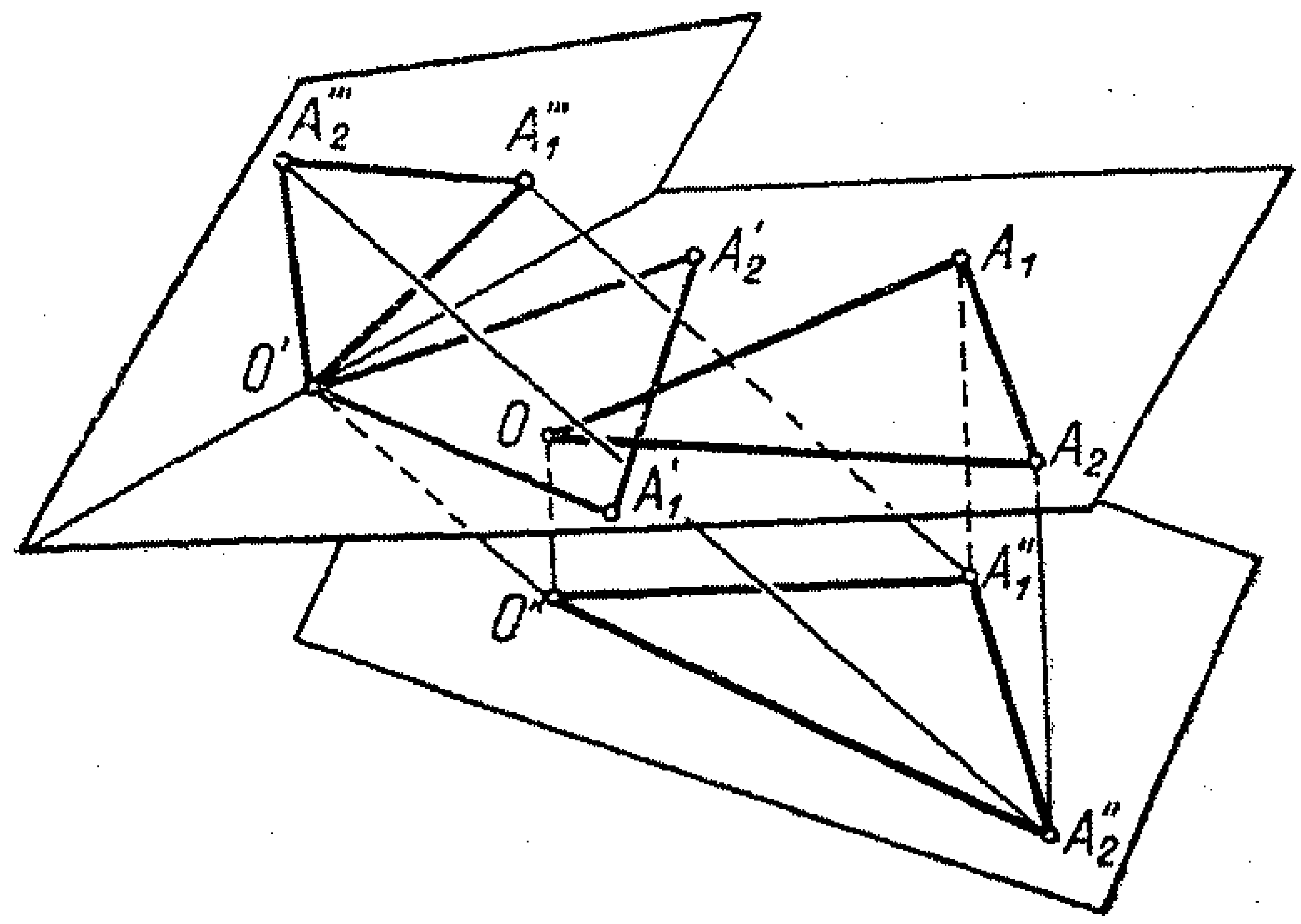
Et vektorid e_1, e_2 ja c on mittekomplanaarsed, seega lineaarselt sõltumatud, siis e_1 ja e_2 kordajad vasakul ja paremal on võrdsed, s. t.

$$x'_1 = x_1, \qquad x'_2 = x_2.$$

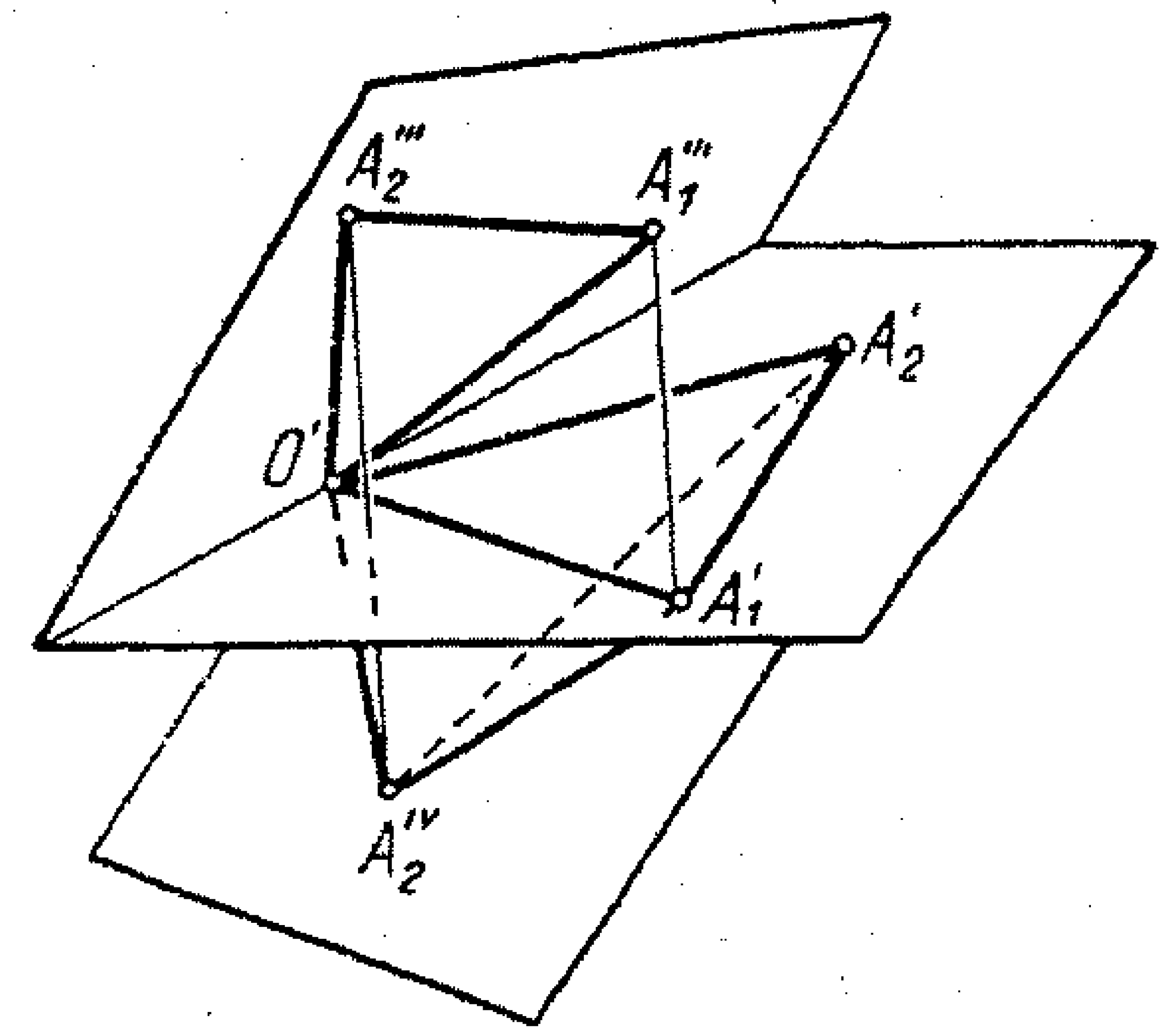
Niisiis paralleelprojekteerimisel punkti X koordinaadid reeperi $\{O;\ e_1,\ e_2\}$ suhtes on võrdsed tema kujutise X' koordinaatidega reeperi kujutise $\{O';\ e'_1,\ e'_2\}$ suhtes. Kui nüüd järgmise paralleelprojekteerimise puhul korrata seda arutlust, võttes aluseks reeperi $\{O';\ e'_1,\ e'_2\}$, ning selliselt jätkata kõikide paralleelprojekteerimiste korral, siis selgubki, et tulemus on def. 60.1 kohaselt afiinne teisendus.

***Teoreem* 60.4.** *Ruumis antud tasandi iga afiinne teisendus on saadav mitte enam kui nelja järjestikuse paralleelprojekteerimisega.*

T õ e s t u s. Olgu tasandi kolme mitte ühel sirgel oleva punkti O, A_1 ja A_2 kujutisteks vaadeldava afiinse teisenduse korral O', A'_1 ja A'_2. Võtame mingi



Joon. 130.



Joon. 131.

teise tasandi ja sellel vabalt punkti O'', mis pole antud tasandil OA_1A_2 (joon. 130). Tähistame $\overrightarrow{OO''} = c_1$ ning vaatleme tasandi OA_1A_2 paralleelprojekteerimist vektori c_1 sihis sellele teisele tasandile. Punktide A_1 ja A_2 kujutisteks olgu A_1'' ja A''_2. Edasi võtame vabalt punkti O' läbiva tasandi, tähistame $\overrightarrow{O''O'} = c_2$ ja vaatleme tasandi $O''A_1''A_2''$ paralleelprojekteerimist c_2 sihis sellele tasandile. Viimase võib alati valida nii, et A_1'' kujutis A_1''' ei ole antud tasandil $O'A'_1A'_2$. Punkti O' kujutiseks on ta ise, punkti A_2'' kujutise tähistame A_2'''. Edasi võtame vabalt punkte O' ja A'_1 läbiva tasandi, mis ei ühti antud tasandiga (joon. 131), tähistame $\overrightarrow{A_1'''A'_1} = c_3$ ja vaatleme tasandi $OA_1'''A_2'''$ paralleelprojekteerimist c_3 sihis sellele uuele tasandile. Punktide O' ja A_1''' kujutisteks on vastavalt O' ja A'_1, punkti A_2 kujutise tähistame A_2^{IV}. Lõpuks tähistame $\overrightarrow{A_2^{IV}A'_2} = c_4$ ja vaatleme tasandi $O'A'_1A_2^{IV}$ paralleelprojekteerimist c_4 sihis antud tasandile. Punktide O', A_1', A_2^{IV} kujutisteks on just etteantud punktid O', A'_1, A'_2. Et vaadeldavate paralleelprojekteerimiste tulemuseks on, nagu ülal selgus, teatav afiinne teisendus, siis teoreemi 60.3 (õigemini selle järelduse) põhjal ühtib see tasandi esialgu antud afiinse teisendusega. ∎

Erijuhtudel võivad mõned vaadeldavast neljast paralleelprojekteerimisest ühtida. Kui näiteks $O' = O$, s. t. kui afiinne teisendus jätab punkti O paigale, siis $c_2 = -c_1$ ja kaks esimest paralleelprojekteerimist võib asendada üheainsa paralleelprojekteerimisega punkti O läbivale tasandile vabalt võetud sihis.

61. Afiinse teisenduse omadused. Asjaolu, et afiinse teisenduse korral punkti koordinaadid jäävad kaasateiseneva reeperi korral muutumatuks, võimaldab öelda, et püsima jäävad ka kõik mõisted, mis on ühteviisi väljendatavad koordinaatide abil ükskõik missuguse afiinse reeperi suhtes. Sellisteks mõisteteks on näiteks tasandi geomeetrias sirge ja sirgete paralleelsus, sest sirgeks tasandil on parajasti selliste punktide hulk, mille koordinaadid mingi afiinse reeperi suhtes rahuldavad võrrandit $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$, kus $A_1^2 + A_2^2 \neq 0$, kaks sirget on aga paralleelsed parajasti siis, kui nende võrrandeis kaks esimest kordajat on võrdelised. Analoogilised arutlused on rakendatavad ka ruumi geomeetrias, ainult et sirgete asemel tuleb võtta tasandid. Et lõikuvad tasandid kujutuvad jälle lõikuvaiks, siis ka ruumis sirged kujutuvad jälle sirgeteks. Järelikult kehtib järgmine lause.

***Teoreem* 61.1.** *Afiinse teisenduse korral sirged kujutuvad sirgeteks, tasandid tasanditeks. Seejuures paralleelsed sirged või tasandid kujutuvad paralleelseteks sirgeteks või tasanditeks.*

Teisiti on lugu mõistetega, mille väljendamiseks on eespool kasutatud ristkoordinaate, näiteks sirgete ristumisega. Osutub, et sellised mõisted ei jää vabalt võetud afiinse teisenduse korral püsima. Teoreemist 60.3 selgub näiteks, et iga kolmnurga saab sobivalt valitud afiinse teisendusega viia igaks teiseks kolmnurgaks, seetõttu ka iga lõigu või nurga igaks teiseks lõiguks või nurgaks. Järelikult näiteks ristuvad sirged ei tarvitse jääda ristuvaiks, võrdse pikkusega lõigud võrdse pikkusega lõikudeks jne.

Arusaadavalt on afiinsete teisenduste uurimisel oluline välja selgitada kõigi nende (sealhulgas muidugi ka liikumiste kui teatavate erijuhtude) ühised tähtsamad omadused. Mõningaid reaalarvulisi suurusi, mis jäävad muutumatuks iga afiinse teisenduse korral, kirjeldab järgmine teoreem.

***Teoreem* 61.2.** *Tasandi afiinse teisenduse korral jäävad muutumatuiks ühe sirge punktide lihtsuhted, samadel või paralleelsetel sirgetel olevate lõikude pikkuste suhted ning rööpnelinurkade pindalade suhted.*

Tõestus. Olgu tegemist lõikudega AC ja DB ühtivatel või paralleelsetel sirgetel, s. t. olgu $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} \neq 0$ ja $\overrightarrow{DB} = \boldsymbol{b} \neq 0$ puhul $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. Sel korral leidub reaalarv λ, nii et $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\lambda$. Teisenegu punktid A, B, C ja D punktideks A', B', C' ja D' (joon. 128). Vektorite $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ kujutisteks on siis $\boldsymbol{a}' = \overrightarrow{A'C'}$ ja $\boldsymbol{b}' = \overrightarrow{D'B'}$. Seejuures lineaarsuseomaduse (60.4) põhjal $\boldsymbol{b}' = (\boldsymbol{a}\lambda)' = \boldsymbol{a}'\lambda$.

Kui ühe sirge kolme punkti A, B ja C korral võtta eelnevates kirjutistes $D = C$, siis def. 34.1 põhjal ühelt poolt $(ABC) = \lambda$, teiselt poolt aga ka $(A'B'C') = \lambda$, seega

$$(A'B'C') = (ABC). \tag{61.1}$$

Üldiselt on võrduse $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\lambda$ ja sellest järelduva $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{a}'\lambda$ korral $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\lambda|$ ja $|\boldsymbol{b}'| = |\boldsymbol{a}'||\lambda|$, s. t.

$$\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{DB}|} = \frac{|\overrightarrow{A'C'}|}{|\overrightarrow{D'B'}|}$$

On jäänud tõestada viimane väide rööpnelinurkade pindalade kohta. Olgu antud kaks rööpnelinurka, mis on ehitatud vastavalt vektoritele $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$. Et $\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{b}$, siis leiduvad reaalarvud α, β, γ ja δ, nii et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{a}\alpha+\boldsymbol{b}\beta, \\ \boldsymbol{d} &= \boldsymbol{a}\gamma+\boldsymbol{b}\delta. \end{aligned} \tag{61.2}$$

Järelikult

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d} &= (\boldsymbol{a}\alpha+\boldsymbol{b}\beta)\wedge(\boldsymbol{a}\gamma+\boldsymbol{b}\delta) = \\ &= (\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a})(\alpha\gamma)+(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})(\alpha\delta)+(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a})(\beta\gamma)+ \\ &+(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{b})(\beta\delta) = (\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})(\alpha\delta-\beta\gamma) \end{aligned}$$

ning seega (31.4) põhjal

$$S(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = |\alpha\delta-\beta\gamma|\, S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Kui vektorite $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ja $\boldsymbol{d}$ kujutisteks on $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{c}'$ ja $\boldsymbol{d}'$, siis lineaarsuseomaduste (60.3) ja (60.4) põhjal

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}' &= (\boldsymbol{a}\alpha+\boldsymbol{b}\beta)' = \boldsymbol{a}'\alpha+\boldsymbol{b}'\beta, \\ \boldsymbol{d}' &= (\boldsymbol{a}\gamma+\boldsymbol{b}\delta)' = \boldsymbol{a}'\gamma+\boldsymbol{b}'\delta. \end{aligned}$$

Seega saame endiselt

$$\boldsymbol{c}'\wedge\boldsymbol{d}' = \boldsymbol{a}'\wedge\boldsymbol{b}'(\alpha\delta-\beta\gamma)$$

ja siit

$$S(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{d}') = |\alpha\delta-\beta\gamma|\, S(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}').$$

Et vektoritele $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ ehitatud rööpnelinurkade kujutisteks on vastavalt vektoreile $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$ ja $\boldsymbol{c}'$, $\boldsymbol{d}'$ ehitatud rööpnelinurgad (põhjenduseks tuleb rakendada def. 29.3 ja lineaarsuseomadusi (60.3), (60.4)) ning et saadud võrduste põhjal

$$\frac{S(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})}{S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})} = \frac{S(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{d}')}{S(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}')}, \tag{61.3}$$

siis tõesti teoreemi viimane väide kehtib. ∎

Võrdusest (61.1), kui seda rakendada juhul $(ABC) = 1$, järeldub, et lõigu keskpunkt kujutub afiinse teisenduse korral jälle lõigu keskpunktiks, järelikult kolmnurga mediaan jälle mediaaniks jms.

Võrdusest (61.3) järeldub, et

$$\frac{S(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}')}{S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})} = \frac{S(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{d}')}{S(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})} = k, \tag{61.4}$$

s. t. *tasandi kõikide rööpnelinurkade pindalad korrutuvad afiinse teisenduse korral ühe ja sama arvuga k.*

Osutub, et see arv k on tihedalt seotud valemitega, mis kirjeldavad mingi baasi ja selle kujutise vahekorda. Nende valemite, samuti nagu nendest tulenevate järelduste käsitlemisel võib kasutada liikumiste uurimisel saadud seoseid, sest enamik neist on ülekantavad ka afiinsete teisenduste juhule (tuleb vaid ära jätta nõue, et tegemist on ristreeperi või -baasiga). Nii võib näiteks öelda, et kui ruumi mingi afiinse reeperi $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ ja selle kujutise vahekorda kirjeldavad valemid (58.1) ja (58.2), siis punkti X koordinaadid x_1, x_2, x_3 ja selle kujutise X' koordinaadid x'_1, x'_2, x'_3 (mõlemad reeperi $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ suhtes) on seotud valemitega (58.10). Põhjenduseks on küllalt märkimisest, et teoreemi 58.1 tõestuses esinevates võrdustes pole kuskil oluline, et vaadeldav reeper peaks olema just ristreeper. Afiinse teisenduse juhule on ülekantav ka sama teoreemi tõestuse lõpposa, üksnes nõue, et maatriks (58.4) oleks ortogonaalmaatriks, tuleb asendada nõudega $|C| \neq 0$. Analoogiliselt on käsitletavad ka tasandi afiinsed teisendused. Seega kehtib niisugune lause.

Teoreem 61.3. *Tasandi või ruumi afiinseteks teisendusteks on parajasti niisugused teisendused, mis fikseeritud reeperi suhtes on määratud teisendusvalemitega*

$$\begin{aligned} x'_1 &= c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n + c_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n &= c_{n1}x_1 + \ldots + c_{nn}x_n + c_n, \end{aligned} \tag{61.5}$$

kus $|C| = \det|c_{ij}| \neq 0$, *s. t. lineaarsete teisendusvalemitega, milles koordinaatide kordajatest moodustatud determinant on nullist erinev.*

See viimane determinant osutub tähtsaks afiinset teisendust iseloomustavaks arvuks. Selgub, et ta ei sõltu aluseks võetud reeperi valikust. Tõepoolest, kui antud baas ε, mille teisenemist kirjeldab (58.3), asendada mõne teise baasiga $\eta = \varepsilon K$, mille teisenemist kirjeldagu $\eta' = \eta C'$, siis lineaarsuseomaduste (60.3) ja (60.4) põhjal $\eta' = (\varepsilon K)' = \varepsilon' K = \varepsilon CK$. Teiselt poolt aga $\eta' = \eta C' = \varepsilon KC'$; seega $\varepsilon CK = \varepsilon K'C$, mistõttu $CK = KC'$. Kui siin minna üle determinantidele, on tulemuseks $|C|\,|K| = |K|\,|C'|$, ning et $|K| \neq 0$, siis tõesti $|C| = |C'|$.

***Def.* 61.1.** Antud afiinse teisenduse korral valemite (58.2) kordajatest moodustatud maatriksi determinanti $|C|$ (mis on samal ajal ka valemites (61.5) koordinaatide kordajate maatriksi determinant ja, nagu selgus, ei sõltu lähtereeperi valikust) nimetatakse selle a f i i n s e t e i s e n d u s e d e t e r m i n a n d i k s.

Determinandi $|C|$ absoluutväärtus ongi see arv k, millega on tegemist võrduses (61.4). Tõepoolest, baasivektoreile e_1 ja e_2 ning nende kujutistele e'_1 ja e'_2 ehitatud rööpnelinurkade korral on $S(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = |\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2|$ ja $S(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2) = |\boldsymbol{e}'_1 \wedge \boldsymbol{e}'_2|$, ning et

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 c_{11} + \boldsymbol{e}_2 c_{21},$$
$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 c_{12} + \boldsymbol{e}_2 c_{22},$$

siis

$$\boldsymbol{e}'_1 \wedge \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}),$$

s. t.

$$S(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2) = |c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}|\, S(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2).$$

Kui arvestada veel seoseid (61.4), siis selgub, et tõesti kehtib selline teoreem.

Teoreem **61.4.** *Tasandi afiinse teisenduse korral kõikide rööpnelinurkade pindalad korrutuvad ühe ja sama arvuga, milleks on teisenduse determinandi absoluutväärtus.*[77]

Analoogiliselt teoreemiga 61.2 on ruumi puhul sõnastatav järgmine teoreem.

***Teoreem* 61.5.** *Ruumi afiinse teisenduse korral jäävad muutumatuiks ühe sirge punktide lihtsuhted, samadel või paralleelsetel sirgetel olevate lõikude pikkuste suhted, samadel või paralleelsetel tasanditel olevate rööpnelinurkade pindalade suhted ning rööptahukate ruumalade suhted.*

Tõestus. Lihtsuhete ja pikkuste kohta käivate väidete tõestused ei erine millegi poolest teoreemi 61.2 vastavate väidete tõestustest, sest viimaste puhul ei ole kuskil oluline, et punktid ja vektorid kuuluksid tasandile. Rööpnelinurkadegi korral tugineb kogu arutlus ainult seostele (61.2), need kehtivad aga ka paralleelsetel tasanditel olevate rööpnelinurkade puhul.

Rööptahukate kohta käiv väide on analoogiline teoreemi 61.2 viimase väitega ning on ka tõestatav analoogiliselt. Käsitluse mitmekesistamiseks kasutame siin siiski teist võtet (mis muide oleks olnud rakendatav ka tasandi juhul). Olgu ruumis valitud mingi fikseeritud ristreeper. Vektoritele $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{z}$ ehitatud rööptahuka ruumala on siis (32.9) põhjal

$$V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = |\boldsymbol{xyz}|,$$

kus $\boldsymbol{xyz}$ on vektorite $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{z}$ ristkoordinaatidest moodustatud determinant. Ruumi afiinse teisenduse korral nende vektorite kujutiste $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{y}'$ ja $\boldsymbol{z}'$ ristkoordinaadid tuleb arvutada valemeist (61.5). Järelikult antud rööptahuka kujutisel, mis on jälle rööptahukas (lineaarsuseomaduste ja def. 32.2 põhjal), on ruumalaks

[77] Siit järeldub ühtlasi, et sama arvuga korrutuvad ka kõikide kolmnurkade pindalad. Et iga hulknurk on lahutatav lõplikuks arvuks kolmnurkadeks, iga kujund tasandil aga lähendatav kuitahes täpselt hulknurgale, siis võib sama öelda ka tasandi mistahes kujundi puhul.

arvu $x'y'z' =$

$$= \begin{vmatrix} c_{11}x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3 & c_{21}x_1+c_{22}x_2+c_{23}x_3 & c_{31}x_1+c_{32}x_2+c_{33}x_3 \\ c_{11}y_1+c_{12}y_2+c_{13}y_3 & c_{21}y_1+c_{22}y_2+c_{23}y_3 & c_{31}y_1+c_{32}y_2+c_{33}y_3 \\ c_{11}z_1+c_{12}z_2+c_{13}z_3 & c_{21}z_1+c_{22}z_2+c_{23}z_3 & c_{31}z_1+c_{32}z_2+c_{33}z_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = |C|\,(xyz)$$

absoluutväärtus. Et rööptahuka ruumala, nagu näha, korrutub arvu $|C|$ absoluutväärtusega, mis on antud afiinse teisenduse korral konstantne, siis rööptahukate ruumal'ade suhe säilib. ∎

Tõestuse viimase osa põhjal on sõnastatav ka järgmine lause.

***Teoreem* 61.6.** *Ruumi afiinse teisenduse korral kõikide rööptahukate ruumalad korrutuvad ühe ja sama reaalarvuga, milleks on teisenduse determinandi absoluutväärtus.*[78]

Saadud tulemustest järeldub, et tasandi või ruumi iga nelja vektori x, y, z ja w ning nende kujutiste x', y', z' ja w' korral

$$|x \wedge y| : |z \wedge w| = |x' \wedge y'| : |z' \wedge w'|,$$
$$|xyz| : |yzw| = |x'y'z'| : |y'z'w'|.$$

Kui need võrdused panna kirja vektorite ristkoordinaatide abil, siis tulemused kinnitavad veel kord art-s 20 vaadeldud suuruste (20.5) ja (20.6) invariantsust koordinaaditeisenduste korral. Tuleb vaid märkida, et viimased on afiinsete teisendustega seotud täpselt samuti nagu ristkoordinaatide teisendused liikumistega (või üldisemalt isomeetriliste teisendustega, vt. art. 59).

62. Afiinne kollineatsioon. Osutub, et üks teoreemis 61.1 märgitud omadustest on küllaldane afiinse teisenduse täielikuks iseloomustamiseks. Kehtib nimelt järgmine huvitav lause.

***Teoreem* 62.1.** *Tasandi või ruumi teisendus, mis kujutab iga sirge jälle sirgeks, on afiinne teisendus.*

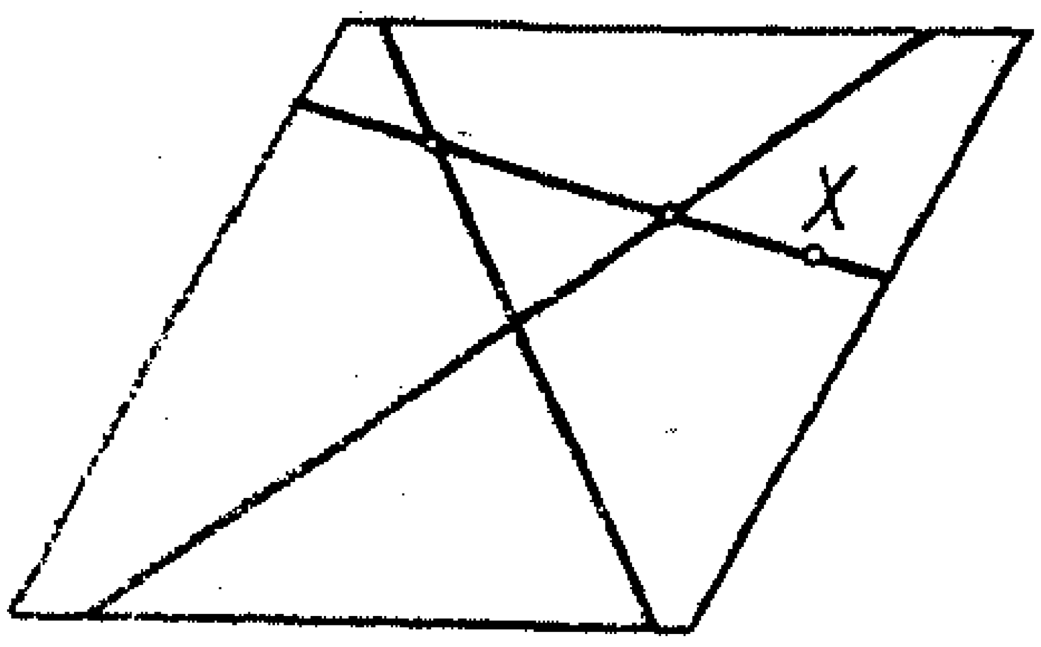
Tõestus on komplitseeritud, mistõttu teda on kasulik esitada etappide kaupa. Kõigepealt on otstarbekas teisendusele, mille puhul on rahuldatud teoreemi 62.1 eeldus, anda erinimetus: afiinne kollineatsioon.[79]

***Lemma* 1.** *Tasandi või ruumi iga afiinse kollineatsiooni korral paralleelsed sirged kujutuvad jälle paralleelseteks sirgeteks.*

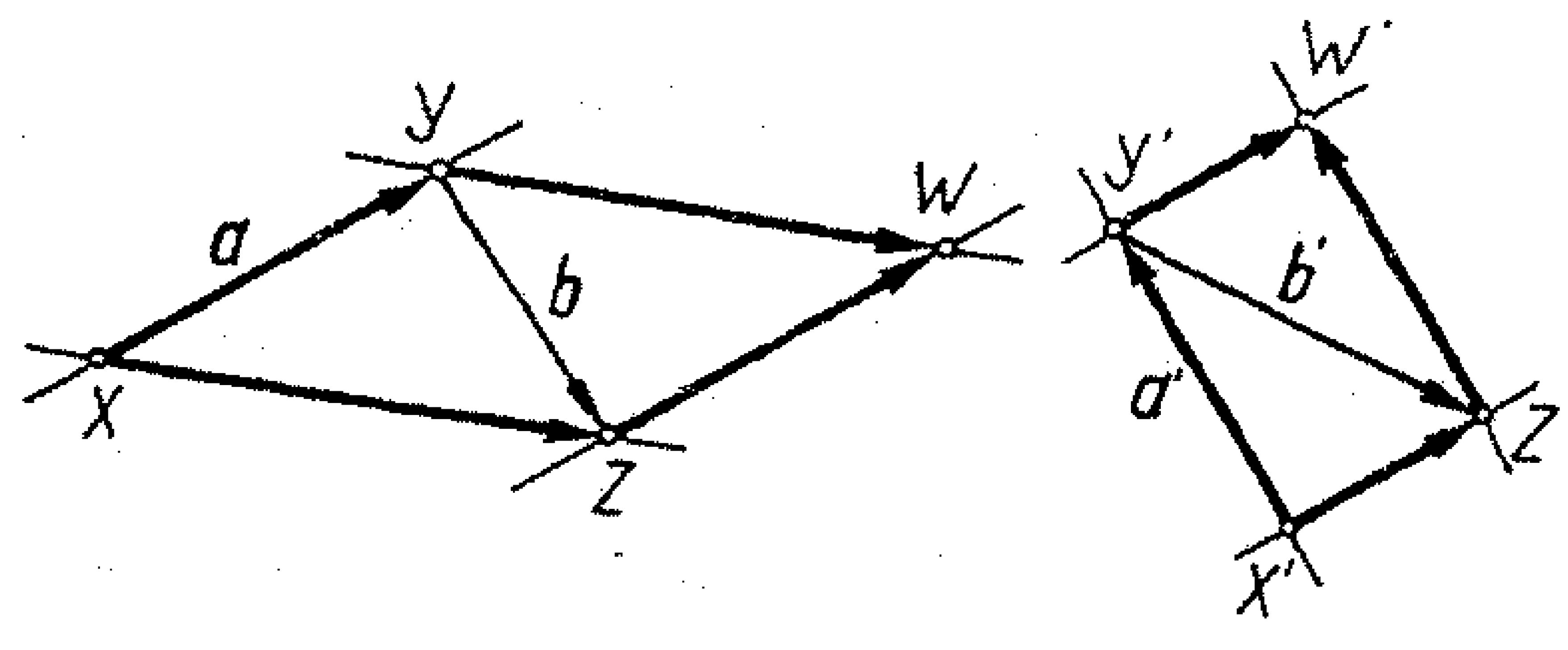
T õ e s t u s. Paralleelsed sirged on alati ühel tasandil. Seejuures sirgete mitteparalleelsus tasandil tähendab seda, et sirgetel on olemas ühine punkt. Järelikult kui on tegemist tasandi afiinse kollineatsiooniga, siis paralleelsed sirged ei saa teiseneda mitteparalleelseteks sirgeteks, sest vastupidisel juhul viimaste ühisel punktil puuduks originaal, samal ajal kui teisenduse korral

[78] Siit järeldub ühtlasi, et sama arvuga korrutuvad ka kõikide tetraeedrite ruumalad (vt. allviide 50). Et iga hulktahukas on lahutatav lõplikuks arvuks tetraeedriteks, iga ruumiline kujund on aga kuitahes täpselt lähendatav hulktahukale, siis võib sama öelda ka ruumi mistahes kujundi korral.

[79] Termini päritolu kohta vt. allviide 20.



Joon. 132.



Joon. 133.

(s. t. teatava 1 : 1-pealekujutuse korral) peab igal punktil olema originaal. Seega tasandi teisenduse juhul on lemma tõestatud.

Ruumi afiinse kollineatsiooni juhul on jäänud veel näidata, et iga tasand kujutub jälle tasandiks. Põhjendamiseks võtame antud tasandil kaks lõikuvat sirget. Need kujutuvad jälle sirgeteks, seejuures muidugi lõikuvateks sirgeteks (sest vastupidisel juhul lõikepunktil puuduks kujutis). Järelikult need kujutissirged on ühel tasandil, mille nad ühtlasi määravad. Osutub, et see tasand ongi antud tasandi kujutiseks. Tõepoolest, antud tasandi iga punkti X korral võib teoreemi 16.11 põhjal leida seda punkti läbiva sirge, millel on kummagi võetud sirgega ühine punkt (joon. 132). Need punktid lähevad antud tasandil võetud sirgete kujutiste teatavateks punktideks, neid punkte läbiv sirge aga nende kujutisi läbivaks sirgeks. Viimane asub kujutissirgetega määratud tasandil, järelikult on sellel tasandil ka punkti X kujutis X'. Seega tasand kujutub tasandiks. Tõestuse lõpuleviimiseks tuleb nüüd korrata tasandi teisenduse puhul tehtud mõttekäike. ▮

Osutub, et tasandi või ruumi afiinne kollineatsioon määrab teatava teisenduse ka tasandi või ruumi vektorite hulgas. Selle näitamiseks tuleb kõigepealt tõestada järgmine lemma.

***Lemma* 2.** *Kui punktide X, Y, Z ja W korral $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{ZW}$ ning nende punktide kujutisteks antud afiinse kollineatsiooni korral on X', Y', Z' ja W', siis $\overrightarrow{X'Y'}=\overrightarrow{Z'W'}$.*

T õ e s t u s. Et eelduse järgi $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{ZW}$, siis punkte X ja Y ning punkte Z ja W läbivad sirged XY ja ZW kas ühtivad või on paralleelsed. Et samal ajal aksioomi **A4** põhjal $\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{YW}$, siis võib sama öelda ka sirgete XZ ja YW kohta. Oletame esialgu, et $\overrightarrow{XY} \nparallel \overrightarrow{XZ}$ (joon. 133). Sel korral Z ei ole sirgel XY ja Y sirgel XZ, mistõttu sirged XY ja ZW on paralleelsed samuti nagu sirged XZ ja YW. Et afiinse kollineatsiooni puhul sirgete paralleelsus säilib, siis ka sirged $X'Y'$ ja $Z'W'$ on paralleelsed samuti nagu sirged $X'Z'$ ja $Y'W'$. Järelikult $\overrightarrow{X'Y'} \nparallel \overrightarrow{X'Z'}$, $\overrightarrow{X'Y'} \parallel \overrightarrow{Z'W'}$ ning $\overrightarrow{X'Z'} \parallel \overrightarrow{Y'W'}$. Nelinurk $X'Y'Z'W'$ on seega rööpkülik ning teoreemi 35.1 põhjal $\overrightarrow{X'Y'}=\overrightarrow{Z'W'}$.

Kui $\overrightarrow{XY} \parallel \overrightarrow{XZ}$, siis punktid X, Y, Z ja W on ühel sirgel. Sel korral tuleb võtta punktid U ja V, mis ei ole sellel sirgel, nii et $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{UV}$; siis $\overrightarrow{XY} \nparallel \overrightarrow{XU}$ ning ühtlasi $\overrightarrow{ZW}=\overrightarrow{UV}$. Nagu juba näidatud, on vaadeldavate kujutiste puhul $\overrightarrow{X'Y'}=\overrightarrow{U'V'}$ ja $\overrightarrow{Z'W'}=\overrightarrow{U'V'}$ ning järelikult ka $\overrightarrow{X'Y'}=\overrightarrow{Z'W'}$. ▮

Afiinsele kollineatsioonile vastava teisenduse vektorite hulgas saab nüüd määrata järgmiselt. Antud vektori a ja vabalt võetud punkti X korral leidub parajasti üks punkt Y, nii et $\overrightarrow{XY}=a$. Vektorile a tuleb vastavusse seada vektor $a'=\overrightarrow{X'Y'}$, kusjuures lemmast 2 järeldub nüüd, et see vektor a' ei sõltu punkti X valikust ning on antud teisenduse korral seega määratud täielikult vektori a endaga.

Kõige olulisemaks teoreemi 62.1 tõestamisel on järgmine lemma.

Lemma 3. *Afiinse kollineatsiooni poolt vektorite hulgas määratud teisendusel on lineaarsuseomadused* (60.3) *ja* (60.4).

Tõestus. Antud vektorite a ja b korral valime vabalt punkti X ning leiame Y ja Z, nii et $\overrightarrow{XY}=a$, $\overrightarrow{YZ}=b$ (joon. 133). Sel korral $\overrightarrow{XZ}=a+b$ ning järelikult $(a+b)'=\overrightarrow{X'Z'}$. Teiselt poolt $a'=\overrightarrow{X'Y'}$ ja $b'=\overrightarrow{Y'Z'}$, ning et $\overrightarrow{X'Z'}=\overrightarrow{X'Y'}+\overrightarrow{Y'Z'}$, siis tõesti kehtib (60.3).

Mõnevõrra keerukam on võrduse (60.4) tõestamine. Lemmast 1 järeldub küll kohe, et kollineaarsed vektorid a ja $a\lambda$ kujutuvad kollineaarseteks vektoriteks a' ja $(a\lambda)'$, sest nad kui paralleelsete sirgete sihivektorid kujutuvad jälle paralleelsete sirgete sihivektoreiks. Seega leidub reaalarv λ', nii et

$$(a\lambda)'=a'\lambda'. \tag{62.1}$$

Võrduse $\lambda'=\lambda$ kindlakstegemine aga ei ole enam nii lihtne.

Kõigepealt võib tõestada, et λ' sõltub ainult esialgsest reaalarvust λ, mitte aga vektori a valikust. Selleks tuleb vaadelda teist vektorit b esialgu eeldusel, et $a \nparallel b$. Ka vektori b korral peab kehtima võrdusega (62.1) analoogiline seos:

$$(b\lambda)'=b'\lambda''. \tag{62.2}$$

Eesmärgiks on näidata, et $\lambda''=\lambda'$. Valime vabalt punkti X ning määrame punktid Y, Z ja U, V selliselt, et $\overrightarrow{XY}=a$, $\overrightarrow{XZ}=a\lambda$, $\overrightarrow{XU}=b$, $\overrightarrow{XV}=b\lambda$ (joon. 134). Nende punktide kujutiste puhul kehtivad siis võrdused $\overrightarrow{X'Y'}=a'$, $\overrightarrow{X'Z'}=(a\lambda)'=a'\lambda'$, $\overrightarrow{X'U'}=b'$, $\overrightarrow{X'V'}=(b\lambda)'=b'\lambda''$. Sirgete YU ja ZV sihivektoreiks on $\overrightarrow{YU}=\overrightarrow{XU}-\overrightarrow{XY}=b-a$ ja $\overrightarrow{ZV}=\overrightarrow{XV}-\overrightarrow{XZ}=b\lambda-a\lambda=(b-a)\lambda$, ning et $\overrightarrow{YU}\parallel\overrightarrow{ZV}$, siis need sirged kas ühtivad või on paralleelsed. Järelikult ka sirged $Y'U'$ ja $Z'V'$ kas ühtivad või on paralleelsed, s. t. $\overrightarrow{Y'U'}\parallel\overrightarrow{Z'V'}$. Et $\overrightarrow{Y'U'}=\overrightarrow{X'U'}-\overrightarrow{X'Y'}=b'-a'$ ja $\overrightarrow{Z'V'}=\overrightarrow{X'V'}-\overrightarrow{X'Z'}=b'\lambda''-a'\lambda'$, siis järelikult $b'-a'\parallel b'\lambda''-a'\lambda'$. Seejuures $b'-a'\neq 0$, sest vastupidisel juhul oleks $b'=a'$, ning et iga teisendus on 1 : 1-kujutus, siis ka $b=a$, mis on aga vastuolus eeldusega $a\nparallel b$. Järelikult leidub reaalarv μ, nii et

$$b'\lambda''-a'\lambda'=(b'-a')\mu$$

ehk

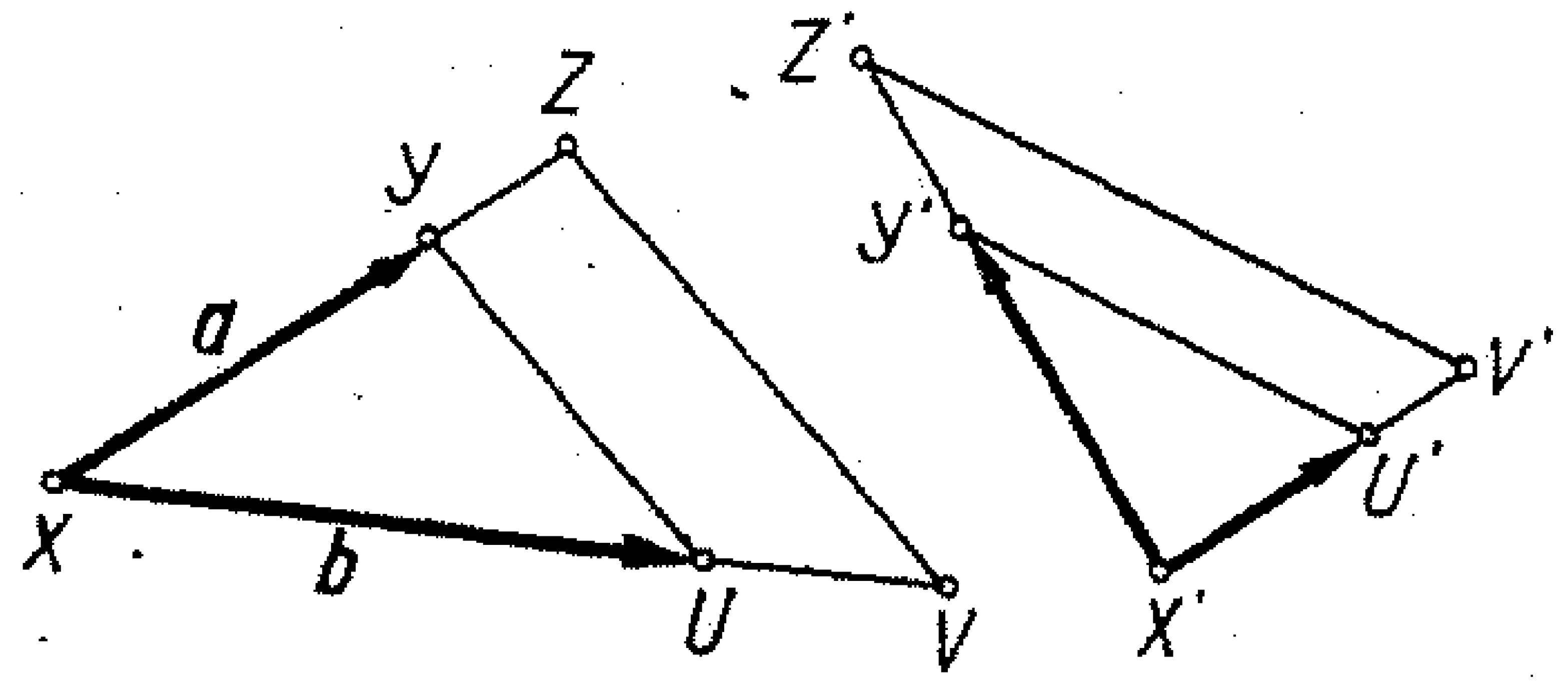
$$a'(\lambda'-\mu)+b'(\mu-\lambda'')=0.$$

Et siin $a'\nparallel b'$, siis

$$\lambda'-\mu=\mu-\lambda''=0,$$

mistõttu $\lambda''=\lambda'=\mu$.

Tuleb näidata, et võrduste (62.1) ja (62.2) puhul on $\lambda''=\lambda'$ ka siis, kui



Joon. 134.

$a \parallel b$. Selleks võtame vabalt vektori c, nii et $c \nparallel a$. Nagu näidatud, on siis $(c\lambda)' = c'\lambda'$, ning et $c \nparallel b$, siis järeldub siit, et ka $(b\lambda)' = b'\lambda'$.

Selliselt on kindlaks tehtud, et λ' võrduses (62.1) sõltub üksnes reaalarvust λ ning on seega selle teatav funktsioon: $\lambda' = f(\lambda)$. Osutub, et funktsioonil $f(\lambda)$ on järgmised omadused:

$$f(\lambda+\mu) = f(\lambda) + f(\mu), \tag{62.3}$$
$$f(\lambda\mu) = f(\lambda) f(\mu), \tag{62.4}$$
$$\text{kui } \lambda \neq 0, \text{ siis } f(\lambda) \neq 0. \tag{62.5}$$

Tõepoolest, ühelt poolt on $[a(\lambda+\mu)]' = a' f(\lambda+\mu)$, teiselt poolt aga $[a(\lambda+\mu)]' = [(a\lambda) + (a\mu)]'$, ning et vektorite summa teiseneb nende vektorite kujutiste summaks, siis

$$[a(\lambda+\mu)]' = (a\lambda)' + (a\mu)' = a' f(\lambda) + a' f(\mu) = a'[f(\lambda) + f(\mu)].$$

Et see on nii iga vektori a' korral, siis tõesti kehtib (62.3). Täpselt samuti on ühelt poolt $[a(\lambda\mu)]' = a' f(\lambda\mu)$, teiselt poolt aga $[a(\lambda\mu)]' = [(a\lambda)\mu]' = (a\lambda)' f(\mu) = [a' f(\lambda)] f(\mu) = a'[f(\lambda) f(\mu)]$, mistõttu kehtib ka (62.4). Omaduse (62.5) põhjendamiseks oletame vastuväiteliselt, et eeldusest $\lambda \neq 0$ järeldub $f(\lambda) = 0$. Siis oleks $(a\lambda)' = a'0 = 0$ ka siis, kui $a \neq 0$. Võttes vabalt punkti X ja määrates Y nii, et oleks $\overrightarrow{XY} = a\lambda$, saaksime: $\overrightarrow{X'Y'} = (a\lambda)' = 0$. Erinevad punktid X ja Y kujutuksid samasse punkti $X' = Y'$, see on aga teisenduse — teatava 1 : 1-pealekujutuse korral võimatu.

Lemma tõestuse lõpuleviimiseks jääb veel näidata, et ainsaks funktsiooniks, mis rahuldab tingimusi (62.3), (62.4) ja (62.5), on $f(\lambda) \equiv \lambda$.

Et $1 \cdot \lambda = \lambda$, siis (62.4) põhjal $f(1) f(\lambda) = f(\lambda)$, ja siit, võttes $\lambda \neq 0$, saame (62.5) põhjal $f(\lambda) \neq 0$ ning järelikult $f(1) = 1$. Edasi on (62.3) põhjal

$$\begin{aligned}
f(2) &= f(1+1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2,\\
f(3) &= f(2+1) = f(2) + f(1) = 2 + 1 = 3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f(n) &= f[(n-1)+1] = f(n-1) + f(1) = (n-1) + 1 = n.
\end{aligned}$$

Et $n \cdot \frac{1}{n} = 1$, siis (62.4) põhjal on $f(n) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) = 1$, mistõttu

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{n}.$$

Järelikult

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = f(m) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}.$$

Võrdus $f(\lambda)=\lambda$ on seega kindlaks tehtud esialgu λ iga positiivse ratsionaalarvulise väärtuse korral.

Kui λ on negatiivne ratsionaalarv, siis $\lambda+|\lambda|=0$. Et $\lambda+0=\lambda$, siis (62.3) põhjal $f(\lambda)+f(0)=f(\lambda)$, mistõttu $f(0)=0$. Seega võrdusest $\lambda+|\lambda|=0$ järeldub, et $f(\lambda)+f(|\lambda|)=f(0)=0$, ning et $|\lambda|$ on positiivne ratsionaalarv ja seetõttu $f(|\lambda|)=|\lambda|$, siis $f(\lambda)+|\lambda|=0$ ja siit

$$f(\lambda)=-|\lambda|=\lambda.$$

Võrdus $f(\lambda)=\lambda$ kehtib seega λ kõigi ratsionaalarvuliste väärtuste puhul. Tema laiendamiseks kõikidele reaalarvudele näitame, et funktsioon $f(\lambda)$ on monotoonselt kasvav. Vaatleme λ mingit positiivset reaalarvulist väärtust. Sel korral leidub reaalarv $\sqrt{\lambda}$, kusjuures (62.4) ja (62.5) põhjal

$$f(\lambda)=f(\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt{\lambda})=f(\sqrt{\lambda})\cdot f(\sqrt{\lambda})=[f(\sqrt{\lambda})]^2>0.$$

Seega, kui $\lambda>0$, siis ka $f(\lambda)>0$. Järelikult kui $y>x$, s. t. kui $y=x+\lambda$, $\lambda>0$, siis $f(y)=f(x+\lambda)=f(x)+f(\lambda)$, $f(\lambda)>0$ ning seega ka $f(y)>f(x)$ — uuritav funktsioon on monotoonselt kasvav.

Olgu nüüd antud vabalt mingi reaalarv x. Iga naturaalarvu n korral leidub täisarv a, nii et

$$\frac{a}{n}\leqslant x<\frac{a+1}{n}. \tag{62.6}$$

Et ratsionaalarvu $\lambda_n=\frac{a}{n}$ korral on $f(\lambda)=\lambda$ ning et $f(x)$ on monotoonselt kasvav, siis

$$\frac{a}{n}\leqslant f(x)<\frac{a+1}{n}$$

ehk

$$-\frac{a+1}{n}<-f(x)\leqslant-\frac{a}{n}. \tag{62.7}$$

Liites võrratused (62.6) ja (62.7) liikmeti, saame:

$$-\frac{1}{n}<x-f(x)<\frac{1}{n},$$

s. t. x ja $f(x)$ on lõigus pikkusega $\frac{2}{n}$:

$$0<|x-f(x)|<\frac{2}{n}.$$

Et siin n võib olla kuitahes suur naturaalarv ja $\frac{2}{n}$ seetõttu kuitahes väike positiivne ratsionaalarv, siis saadud võrratus on antud reaalarvude x ja $f(x)$ korral võimalik ainult siis, kui

$$f(x)=x.$$

Võrdusest $(a\lambda)'=a'\lambda'$ ja $\lambda'=f(\lambda)$ järeldubki nüüd soovitud omadus (60.4): $(a\lambda)'=a'\lambda$.

Sellega on tehtud kõik vajalikud eeltööd, et võiksime sõnastada järgmise lause.

Teoreemi 62.1 tõestus. Tasandil või ruumis võib vabalt võtta reeperi $\{O;\ e_1, \ldots, e_n\}$. Selle kujutiseks antud afiinse kollineatsiooni korral olgu $\{O';\ e'_1, \ldots, e'_n\}$. Et punkti X ja tema kujutise X' puhul on kohavektori

$$\overrightarrow{OX} = e_1x_1 + \ldots + e_nx_n \tag{62.8}$$

kujutiseks ühelt poolt kohavektor $\overrightarrow{O'X'}$, teiselt poolt lineaarsuseomaduste (60.3), (60.4) põhjal aga

$$(e_1x_1 + \ldots + e_nx_n)' = e'_1x_1 + \ldots + e'_nx_n$$

(vt. teoreemi 60.2 tõestust), siis

$$\overrightarrow{O'X'} = e'_1x_1 + \ldots + e'_nx_n. \tag{62.9}$$

Täpselt samuti nagu teoreemi 60.2 tõestuses võib näidata, et $e'_1, \ldots, e'_n$ on lineaarselt sõltumatud, s. t. $\{O;\ e'_1, \ldots, e'_n\}$ on teatav uus reeper. Võrduste (62.8) ja (62.9) võrdlemisel selgub, et punkti X' koordinaatideks selle uue reeperi suhtes on X koordinaadid esialgse reeperi suhtes. Teisendus on def. 60.1 põhjal afiinne. ▮

63. Ekviafiinsed ja sarnasusteisendused. Nii nagu iga liikumise võib saada lihtsamate liikumiste — lükke ja pöörete järjest sooritamisel, nii saab ka iga afiinse teisenduse lahutada lihtsamateks eri liiki teisendusteks. Viimaseid on võimalik välja eraldada, nõudes, et mõni kujund või kujundite mõni omadus jääks afiinse teisenduse korral muutumatuks. Näiteks nõue, et säiliks iga kahe punkti vaheline kaugus eukleidilisel tasandil, eraldab välja liikumised tasandil. Analoogiliselt võib nõuda ka pindala või ruumala säilimist.

***Def.* 63.1.** Tasandi või ruumi afiinset teisendust, mis jätab muutumatuks vastavalt iga rööpnelinurga pindala või iga rööptahuka ruumala (s. t. kujutab iga rööpnelinurga võrdse pindalaga rööpnelinurgaks või iga rööptahuka võrdse ruumalaga rööptahukaks), nimetatakse e k v i a f i i n s e k s[80] teisenduseks.

Teoreemidest 61.4 ja 61.6 järeldub, et selleks on tarvilik ja piisav võrdus

$$|C| = \pm 1,$$

s. t. teisenduse determinant peab olema kas $+1$ või -1. Seega iga isomeetriline teisendus (mille teisendusmaatriksiks on teatavasti ortogonaalmaatriks; vt. art. 58) on ühtlasi ekviafiinne, kuid muidugi mitte vastupidi.

Ekviafiinsed teisendused kujutavad endast isomeetriliste teisenduste ulatuslikku üldistust. Mõne näitega ekviafiinsetest teisendustest tutvume järgmises art-s 64.

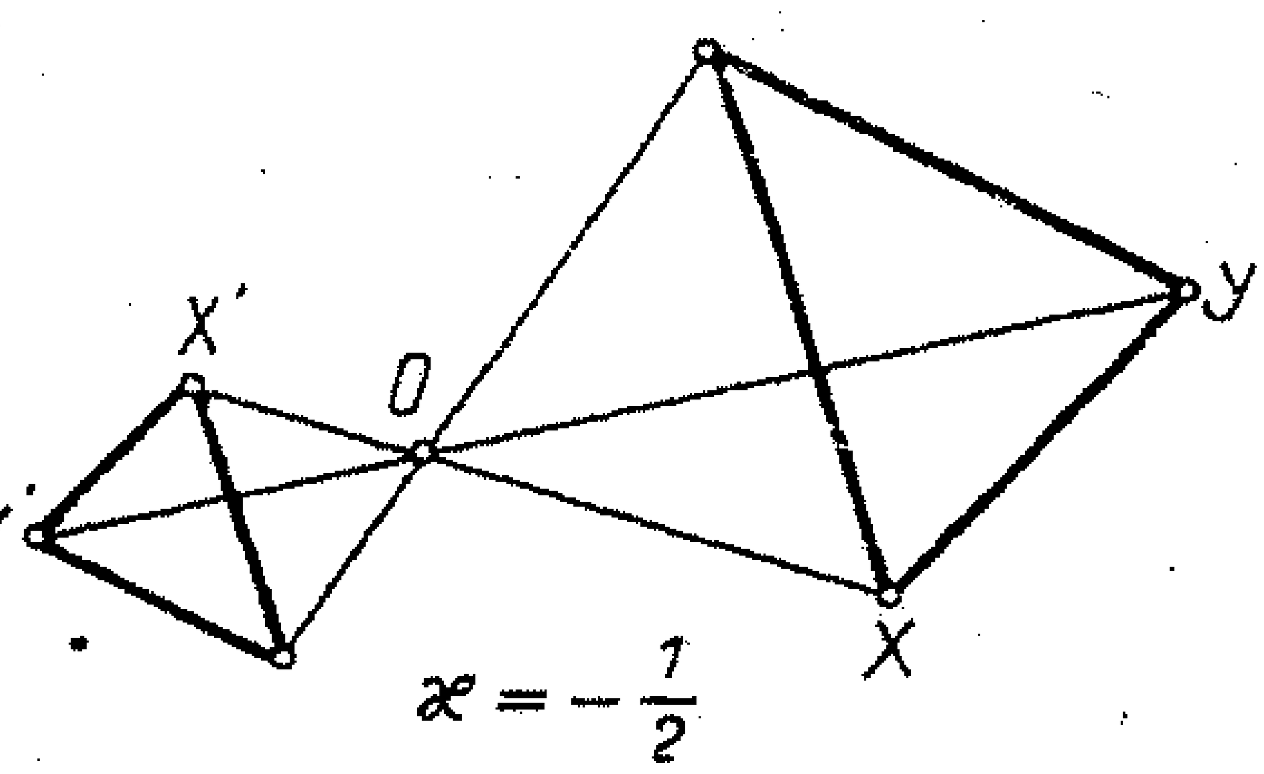
---

[80] lad. k. *aequus* — võrdne.

Isomeetriliste teisenduste kitsamaks üldistuseks, kuid teises suunas, on sarnasusteisendused.

Def. **63.2.** Tasandi või ruumi teisendust nimetatakse s a r n a s u s t e i s e n d u s e k s, kui tema korral iga kahe punkti vaheline kaugus korrutub ühe ja sellesama positiivse reaalarvuga k. Viimast nimetatakse sel puhul s a r n a s u s t e g u r i k s.

Lihtsaimaks näiteks on siin teisendus, mille puhul punkt X kohavektoriga $\overrightarrow{OX}$ kujutub punktiks X' kohavektoriga $\overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{OX}\varkappa$, kus $|\varkappa| = k$ (joon. 135). Et sel korral $e_1x'_1 + \ldots + e_nx'_n = (e_1x_1 + \ldots + e_nx_n)\varkappa$, siis $x'_1 = x_1\varkappa, \ldots, x'_n = x_n\varkappa$ ning teisendus on seega teoreemi 61.3 põhjal afiinne teisendus. Seejuures $O' = O$, mistõttu võrdusest $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$ järeldub: $\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{OY}\varkappa - \overrightarrow{OX}\varkappa = \overrightarrow{XY}\varkappa$. Seega $|X'Y'| = |\varkappa|\,|XY|$, s. t. tegemist on sarnasusteisenduse erijuhuga. Kirjeldatud lihtsat teisendust nimetatakse h o m o t e e t s u s e k s[81]. Punkti O nimetatakse homoteetsuse keskpunktiks, arvu $\varkappa$ — homoteetsuse teguriks.



Joon. 135.

***Teoreem* 63.1.** *Tasandi või ruumi iga sarnasusteisendus on saadav isomeetrilise teisenduse ja homoteetsuse järjest sooritamisel ning on seega afiinse teisenduse teatav erijuht.*

T õ e s t u s. Kui sarnasusteisenduse $X \to X'$ korral kaugused korrutuvad arvuga k, siis teeme edasi homoteetsuse $X' \to X''$ teguriga $\frac{1}{k}$, s. t. nii, et $\overrightarrow{OX''} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OX}$. Kokkuvõttes oleme saanud teisenduse $X \to X''$, mille puhul iga kahe punkti vaheline kaugus jääb muutumatuks — järelikult on see teatav isomeetriline teisendus. Esialgne sarnasusteisendus on saadav sellest isomeetrilisest teisendusest, kui viimase järel rakendada vaadeldud homoteetsust vastupidises suunas: $X'' \to X'$. Sel puhul eelmisest võrdusest järeldub, et $\overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{OX''}k$, s. t. vastupidises suunas on tegemist samuti homoteetsusega, mille teguriks on k.

Et nii isomeetriline teisendus kui homoteetsus on afiinse teisenduse erijuht, siis võib sama öelda ka nende järjest sooritamisel saadava sarnasusteisenduse kohta. ∎

---

[81] kr. k. ὁμός — ühesugune, θετός — asetatud.

Sarnasusteisenduse definitsioonis seatud nõude võib sõnastada ka järgmisel kujul: iga kahe lõigu pikkuste suhe on muutumatu. See viimane tingimus on tõesti samaväärne nõudega, et iga kahe punkti vaheline kaugus (s. t. iga lõigu pikkus) korrutuks sama arvuga. Võrdluseks meenutame, et üldise afiinse teisenduse korral jäävad muutumatuks ainult ühtivatel või paralleelsetel sirgetel olevate lõikude suhted.

Veelgi huvitavam on ruumis kehtiv järgmine lause.

Teoreem 63.2. *Ruumi teisendus, mille korral jääb muutumatuks iga kahe kolmnurga pindalade suhe, osutub sarnasusteisenduseks.*

Tõestus. Eeldusest on lihtne järeldada, et kõikide kolmnurkade pindalad korrutuvad ühe ja sama arvuga k^2. Kui teha edasi homoteetsus teguriga $\frac{1}{k}$, siis selle puhul, nagu on kerge kontrollida, kõikide kolmnurkade pindalad korrutuvad arvuga $\frac{1}{k^2}$. Kokkuvõttes tekib teisendus, mis jätab muutumatuks kolmnurkade pindalad. Et ühel sirgel oleva kolme punkti korral pindala on null ning seega need punktid kujutuvad jälle ühe sirge punktideks, siis vaadeldav teisendus on teoreemi 62.1 põhjal afiinne teisendus.

Teoreemi tõestamiseks on nüüd vaja näidata, et afiinne teisendus, mis jätab muutumatuks kolmnurkade pindalad, on tegelikult isomeetriline teisendus. Põhjenduseks on küllalt, kui kontrollida, et ristreeper teiseneb ristreeperiks. Et pindalad jäävad muutumatuks ka iga liikumise korral, siis võib pärast sobiva liikumise sooritamist eeldada, et ristreeper $\{O;\ e_1,\ e_2,\ e_3\}$ teiseneb reeperiks $\{O;\ e'_1,\ e'_2,\ e'_3\}$ selliselt, et

$$e'_1 = e_1c_{11},$$
$$e'_2 = e_1c_{12} + e_2c_{22},$$
$$e'_3 = e_1c_{13} + e_2c_{23} + e_3c_{33}.,$$

kus $c_{11}c_{22}c_{33} \neq 0$. Kolmnurkade pindalade säilimise korral säilivad ka rööpnelinurkade pindalad. Et ristuvatele ühikvektoritele e_1 ja $e_2 \cos\alpha + e_3 \sin\alpha$, e_2 ja $e_1 \cos\beta + e_3 \sin\beta$ ning e_3 ja $e_1 \cos\gamma + e_2 \sin\gamma$ ehitatud rööpnelinurkade pindalad on 1, siis peavad ka nende kujutistele $(c_{11},\ 0,\ 0)$ ja $(c_{12}\cos\alpha + c_{13}\sin\alpha,\ c_{22}\cos\alpha + c_{23}\sin\alpha,\ c_{33}\sin\alpha)$, $(c_{12},\ c_{22},\ 0)$ ja $(c_{11}\cos\beta + c_{13}\sin\beta,\ c_{23}\sin\beta,\ c_{33}\sin\beta)$, $(c_{13},\ c_{23},\ c_{33})$ ja $(c_{11}\cos\gamma + c_{12}\sin\gamma,\ c_{22}\sin\gamma,\ 0)$ ehitatud rööpnelinurkade pindalad olema 1. Järelikult nende kujutiste vektorkorrutiste

$$(0,\ -c_{11}c_{33}\sin\alpha,\ c_{11}(c_{22}\cos\alpha + c_{23}\sin\alpha)),$$
$$(c_{22}c_{33}\sin\beta,\ -c_{12}c_{23}\sin\beta,\ c_{12}c_{23}\sin\beta - c_{22}(c_{11}\cos\beta + c_{13}\sin\beta)),$$
$$(-c_{33}c_{22}\sin\gamma,\ c_{33}(c_{11}\cos\gamma + c_{12}\sin\gamma),\ c_{13}c_{22}\sin\gamma - c_{23}(c_{11}\cos\gamma + c_{12}\sin\gamma))$$

skalaarruudud on 1. Esimese vektorkorrutise puhul tekib võrdus

$$c_{11}^2[c_{33}^2\sin^2\alpha + (c_{22}\cos\alpha + c_{23}\sin\alpha)^2] = 1,$$

mis väärtustel $\alpha = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}$ annab

$$\begin{array}{l|r} c_{11}^2c_{22}^2 = 1, & -1 \\ c_{11}^2(c_{33}^2 + c_{23}^2) = 1, & -1 \\ c_{11}^2(c_{33}^2 + c_{22}^2 + 2c_{22}c_{23} + c_{23}^2) = 2. & 1 \end{array}$$

Pärast korrutamist paremal näidatud arvudega ja liitmist on tulemuseks võrdus $2c_{11}^2c_{22}c_{23}=0$, millest $c_{23}=0$.

Teise vektorkorrutise juures nüüd

$$c_{33}^2(c_{22}^2+c_{12}^2)\sin^2\beta+c_{22}^2(c_{11}\cos\beta+c_{13}\sin\beta)^2=1.$$

Väärtustel $\beta=0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ tekivad võrdused

$$\begin{array}{l|r} c_{11}^2c_{22}^2=1, & -1 \\ c_{33}^2(c_{22}^2+c_{12}^2)+c_{22}^2c_{13}^2=1, & -1 \\ c_{33}^2(c_{22}^2+c_{12}^2)+c_{22}^2(c_{11}^2+2c_{11}c_{13}+c_{13}^2)=2. & 1 \end{array}$$

Pärast korrutamist ja liitmist on tulemuseks $2c_{22}^2c_{11}c_{13}=0$, millest $c_{13}=0$. Kui talitada nüüd analoogiliselt kolmanda vektorkorrutisega

$$c_{33}^2[c_{22}^2\sin^2\gamma+(c_{11}\cos\gamma+c_{12}\sin\gamma)^2]=1,$$

$$\begin{array}{l|r} c_{33}^2c_{11}^2=1, & -1 \\ c_{33}^2(c_{22}^2+c_{12}^2)=1, & -1 \\ c_{33}^2(c_{22}^2+c_{11}^2+2c_{11}c_{12}+c_{12}^2)=2, & 1 \end{array}$$

on tulemuseks $2c_{11}c_{12}=0$ ja siit $c_{12}=0$. Saadud seostest järeldub ühtlasi, et $c_{11}=1$, $c_{22}=1$, $c_{33}=1$. Järelikult reeper $\{O;\ e_1, e_2, e_3\}$ kujutab endast ristreeperit. ▌

Tõestusest selgub ühtlasi järgmise teoreemi kehtivus.

***Teoreem* 63.3.** *Ruumi teisendus, mille puhul iga kolme punkti A, B, C ja nende kujutiste A′, B′, C′ korral kolmnurkadel △ ABC ja △ A′B′C′ on võrdsed pindalad, osutub isomeetriliseks teisenduseks.*

Võrdluseks meenutame, et tasandi puhul viib analoogiline nõue tasandi küllalt üldise afiinse teisenduseni — ainsaks tingimuseks on, et teisendusmaatriksi determinant oleks $+1$ või -1, s. t. et teisendus oleks ekviafiinne.

64. Tsentro- ja telgafiinsed teisendused. Olles sel viisil kirjeldanud teatavaid reaalarvulisi suurusi — pikkusi, pindalasid ja ruumalasid ning nende suhteid säilitavaid afiinseid teisendusi, asume nüüd lihtsamaid kujundeid paigalejätvate afiinsete teisenduste uurimisele.

***Def.* 64.1.** Tasandi või ruumi afiinset teisendust, mis jätab paigale mingi punkti O, nimetatakse t s e n t r o a f i i n s e k s t e i s e n d u s e k s; punkti O nimetatakse selle keskpunktiks e. tsentriks.

Lihtsateks näideteks on tasandi homoteetsus ja pööre.

***Teoreem* 64.1.** *Iga afiinne teisendus on saadav lükke ja tsentroafiinse teisenduse järjest sooritamisel.*

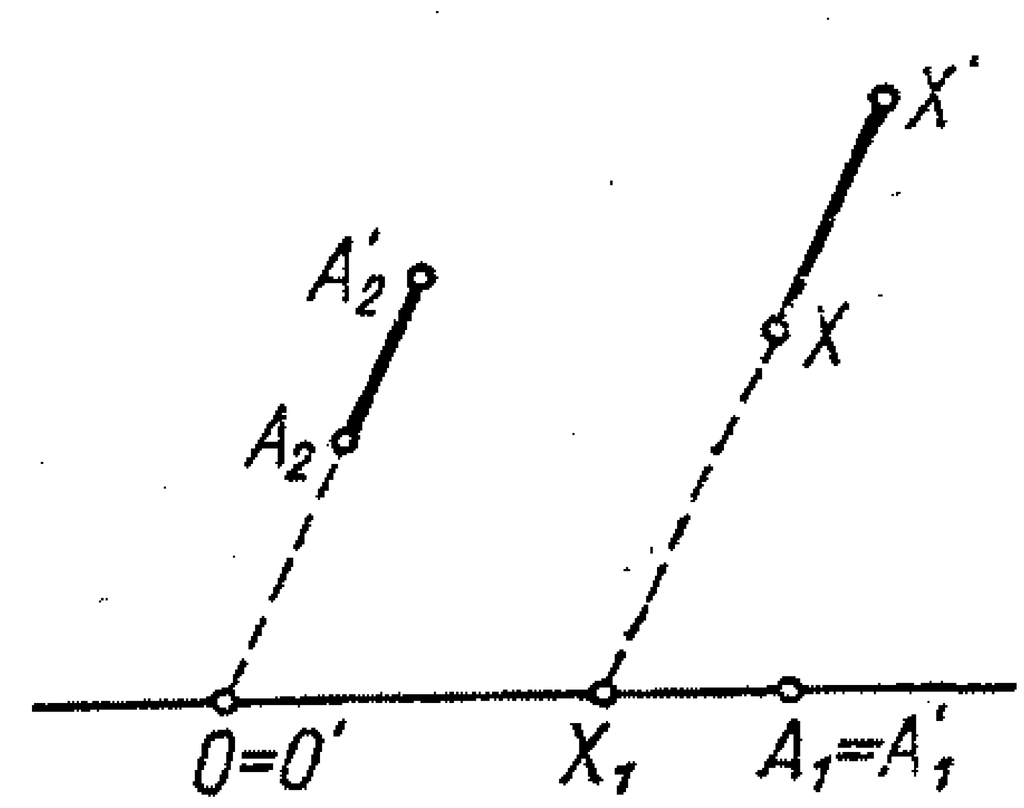
T õ e s t u s. Afiinne teisendus on täielikult määratud mingi reeperi $\{O;\ e_1, \ldots, e_n\}$ ja selle kujutisega $\{O';\ e'_1, \ldots, e'_n\}$. Kui esialgu vaadelda afiinset teisendust, mis viib esimese reeperi reeperiks $\{O'; e_1, \ldots, e_n\}$, siis see osutub lükkeks. Edasi on jäänud teha tsentroafiinne teisendus keskpunktiga O'. ▮

Järgnevalt asume uurima tasandi afiinseid teisendusi, mis jätavad paigale tasandi kaks erinevat punkti O ja A_1. Kui tähistada $\overrightarrow{OA_1} = e_1$, siis sel puhul $e'_1 = e_1$. Järelikult jääb paigale sirge OA iga punkt X, sest selle punkti kujutise X' korral

$$\overrightarrow{OX'} = (\overrightarrow{OX})' = (e_1x_1)' = e'_1x_1 = e_1x_1 = \overrightarrow{OX}, \quad \text{s.t.} \quad X' = X.$$

***Def.* 64.2.** Tasandi afiinset teisendust, mis jätab paigale mingi sirge OA_1 iga punkti, nimetatakse t e l g a f i i n s e k s t e i s e n d u s e k s[82]; sirget OA_1 nimetatakse selle teljeks.

Tasandi iga telgafiinne teisendus on määratud täielikult, kui on antud teljel OA_1 mitteasuv punkt A_2 ja selle kujutis A'_2, sest sel korral on teada tasandi kolme mitte ühel sirgel oleva punkti O, A_1 ja A_2 kujutised ning saab rakendada teoreemi 60.3 järeldust.



Joon. 136.

Tasandi telgafiinseid teisendusi on kahte liiki.

Kui sirge $A_2A'_2$ lõikab telge OA_1, siis võib punktiks O võtta selle lõikepunkti (joon. 136). Kui lisaks varasemale tähistada $\overrightarrow{OA_2} = e_2$, siis $e'_2 = \overrightarrow{OA'_2} \parallel e_2$, s. t. $e'_2 = e_2k$. Järelikult reeper $\{O; e_1, e_2\}$ teiseneb reeperiks $\{O; e'_1, e'_2\}$, kus

$$e'_1 = e_1, \qquad e'_2 = e_2k.$$

Tasandi suvalise punkti X korral

$$\overrightarrow{OX'} = (\overrightarrow{OX})' = (e_1x_1 + e_2x_2)' = e'_1x_1 + e'_2x_2 = e_1x_1 + e_2x_2k, \qquad (64.1)$$

s.t. $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{OX'} - \overrightarrow{OX} = (e_1x_1 + e_2x_2k) - (e_1x_1 + e_2x_2) = e_2x_2(k-1) \parallel e_2$. Järelikult kõiki punkte nende kujutistega ühendavad sirged on omavahel paralleelsed. Et sirgete XX' ja OA_1 lõikepunktil X_1 on kohavektor $\overrightarrow{OX_1} = e_1x_1$, siis $\overrightarrow{X_1X'} = \overrightarrow{OX'} - \overrightarrow{OX_1} = (e_1x_1 + e_2x_2k) - e_1x_1 = (e_2x_2)k = (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OX_1})k = \overrightarrow{X_1X}k$. Saadud tin-

[82] Ka teljeliseks afiinsuseks (vt. O. R ü n k, N. P a l u v e r, Kujutav geomeetria. Tallinn, 1961, lk. 46—50, kus seda teisendust ühel erijuhul uuritakse paralleelprojekteerimiste abil).

gimustega

$$\overrightarrow{X_1X'}=\overrightarrow{X_1X}k \parallel e_2$$

(kus X_1 on antud sirge OA_1 punkt, e_2 on antud vektor, mis ei kuulu sellele sirgele, ja k on antud reaalarv) on tasandi teisendus täielikult määratud. Tasandi niisugust telgafiinset teisendust nimetatakse k a l d - t e l g a f i i n s u s e k s. Võrratuste $0<k<1$ puhul kõneldakse ka tasandi kokkusurumisest, võrratuse $k>1$ puhul tasandi väljavenitamisest vektori e_2 sihis teljega OA_1 ja teguriga k. Juhul $k<0$ lisandub ühele sellisele teisendus, mille puhul $\overrightarrow{X_1X'}=-\overrightarrow{X_1X} \parallel e_2$ (n.-ö. kaldpeegeldus). Võrdustest (64.1) järeldub, et kald-telgafiinsuse saab sobivalt valitud afiinse reeperi suhtes esitada teisendusvalemitega

$$x'_1=x_1, \quad x'_2=kx_2. \tag{64.2}$$

Erijuhul, kui $e_1 \perp e_2$, kõneldakse r i s t - t e l g a f i i n s u s e s t.

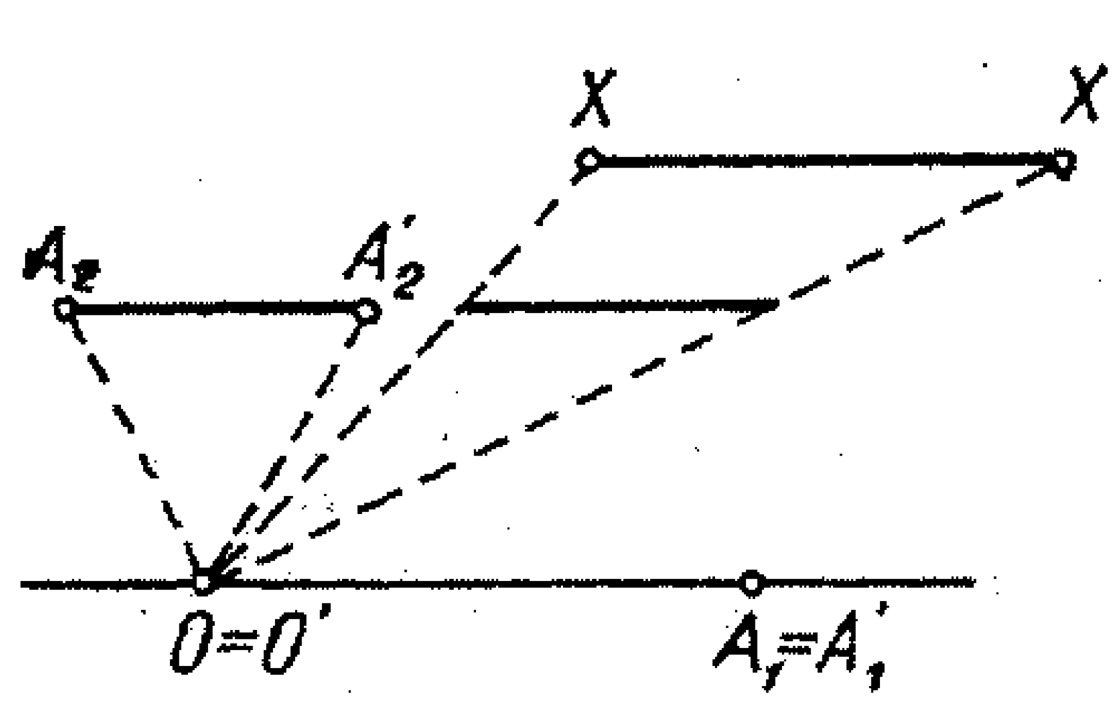
Tasandi telgafiinse teisenduse teise liigiga on tegemist, kui sirge $A_2A'_2$ on paralleelne teljega OA_1 (joon. 137). Sel korral $e'_2-e_2=\overrightarrow{OA'_2}-\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{A_2A'_2} \parallel e_1$, s. t. $e'_2-e_2=e_1k$. Järelikult reeper $\{O;\ e_1,\ e_2\}$ teiseneb reeperiks $\{O;\ e'_1,\ e'_2\}$, kus

$$e'_1=e_1, \quad e'_2=e_2+e_1k.$$

Tasandi suvalise punkti X korral

$$\overrightarrow{OX'}=(\overrightarrow{OX})'=(e_1x_1+e_2x_2)'=e'_1x_1+e'_2x_2=e_1(x_1+kx_2)+e_2x_2, \tag{64.3}$$

s. t. $\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{OX'}-\overrightarrow{OX}=[e_1(x_1+kx_2)+e_2x_2]-(e_1x_1+e_2x_2)=e_1kx_2 \parallel e_1$.



Joon. 137.

Järelikult kõiki punkte nende kujutistega ühendavad sirged on paralleelsed teljega OA_1, kusjuures kõigi samal sirgel olevate punktide X korral, s. t. $x_2=c=\text{const.}$ korral on vektor $\overrightarrow{XX'}$ konstantne võrdudes vektoriga e_1kc. Lisaks sellele tuleb arvestada, et telje punkti läbiva sirge kujutiseks on telje sama punkti läbiv sirge. Nende tingimustega ja mingi punkti A_2 kujutisega on vaadeldavat liiki telgafiinne teisendus täielikult määratud. Seda nimetatakse r õ h t - t e l g - a f i i n s u s e k s ehk n i h k e k s püsisirgega OA_1. Sobivalt valitud afiinse reeperi suhtes saab teda (64.3) põhjal esitada teisendusvalemitega

$$x'_1=x_1+kx_2,$$
$$x'_2=x_2.$$

Siit nähtub, et nihe on ekviafiinne teisendus, s. t. jätab muutumatuks pindalad.

Analoogiliselt jagunevad kahte liiki ka ruumi afiinsed teisendused, mis jätavad paigale mingid kolm mitte ühel sirgel olevat punkti O, A_1, A_2 (ning koos nendega ka tasandi OA_1A_2 iga punkti). Ühte liiki kuuluvad nn. ruumi kokkusurumised ja väljavenitamised antud sihis püsitasandiga OA_1A_2, teise liiki — ruumi nihked. Arutlused on seejuures täiesti analoogilised eespool esitatutega.

Pöördudes tagasi tasandi üldiste afiinsete teisenduste juurde, võib näidata, et igaüks neist on saadav järgmisel lihtsal viisil.

***Teoreem* 64.2.** *Tasandi iga afiinse teisenduse võib saada ühe liikumise ja mitte rohkem kui kahe rist-telgafiinsuse järjest sooritamisel.*

T õ e s t u s. Osutub, et tasandi iga afiinse teisenduse korral võib leida kaks ristuvat sihti, mis kujutuvad jälle ristuvateks sihtideks. Põhjenduseks valime tasandil vabalt ristreeperi $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ ning tähistame otsitavate sihtide pöördenurgad $\boldsymbol{e}_1$ suhtes α ja $\alpha+\frac{\pi}{2}$. Vastavaiks sihiühikvektoreiks on siis

$$\boldsymbol{a}=(\cos\alpha, \sin\alpha), \qquad \boldsymbol{b}=(-\sin\alpha, \cos\alpha).$$

Nende kujutistel on antud afiinse teisenduse korral koordinaatideks

$$\begin{aligned} a'_1&=c_{11}\cos\alpha+c_{12}\sin\alpha, & b'_1&=-c_{11}\sin\alpha+c_{12}\cos\alpha,\\ a'_2&=c_{21}\cos\alpha+c_{22}\sin\alpha, & b'_2&=-c_{21}\sin\alpha+c_{22}\cos\alpha. \end{aligned}$$

Selleks et kujutised oleksid samuti risti, on tarvilik ja piisav, et

$$a'_1b'_1+a'_2b'_2=0,$$

s. t. et

$$\begin{aligned} &(c_{11}\cos\alpha+c_{12}\sin\alpha)(-c_{11}\sin\alpha+c_{12}\cos\alpha)+\\ &+(c_{21}\cos\alpha+c_{22}\sin\alpha)(-c_{21}\sin\alpha+c_{22}\cos\alpha)=0. \end{aligned}$$

Tekib võrrand

$$(c_{11}c_{12}+c_{21}c_{22})(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-(c_{11}^2+c_{21}^2-c_{12}^2-c_{22}^2)\sin\alpha\cos\alpha=0$$

ehk

$$2(c_{11}c_{12}+c_{21}c_{22})\cos 2\alpha=(c_{11}^2+c_{21}^2-c_{12}^2-c_{22}^2)\sin 2\alpha.$$

Alati leidub väärtus α, mille puhul see võrrand on rahuldatud; seejuures, kui pole tegemist samasusega (s. t. kui suluavaldised pole nullid — sellele vastab sarnasusteisenduse juht), siis lahend on määratud $\frac{\pi}{2}$-kordse täpsusega (s. t. leidub parajasti üks paar otsitavaid ristuvaid sihte). Kui võtta ristreeperi $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ baasivektorid sel viisil määratud sihtides, siis reeperi kujutise $\{O'; e'_1, e'_2\}$ vektorid on samuti risti ning seega leidub lähtereeperiga ühtemoodi orienteeritud ristreeper $\{O'; e_1'', e_2''\}$, nii et

$$e'_1 = e''_1 k_1, \quad e'_2 = e''_2 k_2.$$

Kui nüüd sooritada liikumine, mis kujutab ristreeperi $\{O; e_1, e_2\}$ ristreeperiks $\{O'; e_1'', e_2''\}$, siis antud afiinse teisenduse saamiseks jääb lisada ainult kaks rist-telgafiinsust — kaks kokkusurumist või väljavenitamist vektorite e_1'' ja e_2'' sihtides teguritega k_1 ja k_2. ∎

Märgime, et ekviafiinne on saadav teisendus parajasti siis, kui $k_1 k_2 = \pm 1$.

Teoreemiga 64.2 analoogiline väide kehtib ka ruumi juhul, kuid selle tõestus ei ole enam teostatav nii lihtsate vahenditega. Seetõttu me esitame selle väite koos tõestusega art-s 96 (vt. teoreem 96.3).

§ 11. TEISENDUSED JA KUJUNDITE KLASSIFITSEERIMINE

Liikumised ja nende lähemad üldistused (sarnasusteisendused, ekviafiinsed ja afiinsed teisendused) pälvivad küll huvi ka iseseisvate uurimisobjektidena, kuid märksa olulisem on võimalus võrrelda nende abil erinevaid kujundeid tasandil või ruumis. Mingit liiki teisenduste abil võib antud kujundist saada arvukalt uusi kujundeid, mis on temaga teatavas erilises vahekorras. Selleks et see vahekord oleks ekvivalentsus (näiteks et ka uute kujundite seas iga kaks oleksid samas vahekorras), peab vaadeldavat liiki teisenduste hulk rahuldama teatavaid nõudeid, ehk, nagu öeldakse, ta peab moodustama teisenduste rühma. Käesolevas paragrahvis käsitletaksegi mõningaid afiinsetest teisendustest koosnevaid rühmi ja nende poolt kujundite hulgas määratud ekvivalentsusi.

65. Kujundite kongruentsus ja sarnasus. Lihtsaimaks vahekorraks kahe kujundi vahel on kongruentsus [83], mis on defineeritav järgmiselt.

***Def.* 65.1.** Kaht kujundit K ja K′ tasandil või ruumis nimetatakse k o n g r u e n t s e t e k s ja tähistatakse $K \equiv K'$, kui leidub tasandi või ruumi selline isomeetriline teisendus, mille puhul K′ on K kujutiseks.

---

[83] lad. k. *congruens* — vastav, ühilduv.

Teisiti öeldes, K ja K′ on kongruentsed, kui K′ on saadud kujundist K liikumise või liikumise ja peegelduse teel.

***Teoreem* 65.1.** *Kujundite kongruentsus on ekvivalentsus tasandi või ruumi kõigi kujundite hulgas.*

T õ e s t u s. Tuleb kontrollida, et kongruentsuse puhul on rahuldatud def. 18.1 tingimused:

1° $K \equiv K$,

2° kui $K \equiv K'$, siis $K' \equiv K$,

3° kui $K \equiv K'$ ja $K' \equiv K''$, siis $K \equiv K''$.

Esimene tingimus 1° on rahuldatud tänu sellele, et isomeetriliste teisenduste seas on lihtsaima erijuhuna ka samasusteisendus, mis jätab kõik punktid paigale. Tingimuse 2° kehtivus järeldub praegu sellest, et isomeetrilise teisenduse pöördteisendus, s. t. selline teisendus, mis viib punktid tagasi lähteasendeisse, on samuti isomeetriline teisendus, sest punktidevahelised kaugused jäävad muutumatuks. Tingimuse 3° kontrollimiseks tuleb võtta need kaks isomeetrilist teisendust, milledest esimene viib kujundi K kujundiks K′ ja teine viib kujundi K′ kujundiks K″, ning rakendada neid järjest. Tekib teisendus, mis viib kujundi K otse kujundiks K″ ning on ilmselt isomeetriline teisendus, sest kaugused säilivad. ∎

Teoreemist 18.1 järeldub nüüd, et kõik kujundid tasandil või ruumis jagunevad klassideks, nii et 1) iga kujund kuulub ühte ja ainult ühte klassi, 2) iga kaks kujundit samast klassist on kongruentsed ja 3) ükski kaks eri klassi kujundit ei ole kongruentsed. Neid klasse nimetatakse kujundite k o n g r u e n t s u s k l a s s i d e k s.

Analoogiliselt saab käsitleda mõnevõrra üldisemat vahekorda — kujundite sarnasust.

***Def.* 65.2.** Kaht kujundit K ja K′ tasandil või ruumis nimetatakse s a r n a s t e k s ja tähistatakse $K \sim K'$, kui leidub tasandi või ruumi selline sarnasusteisendus, mille puhul K′ on K kujutiseks.

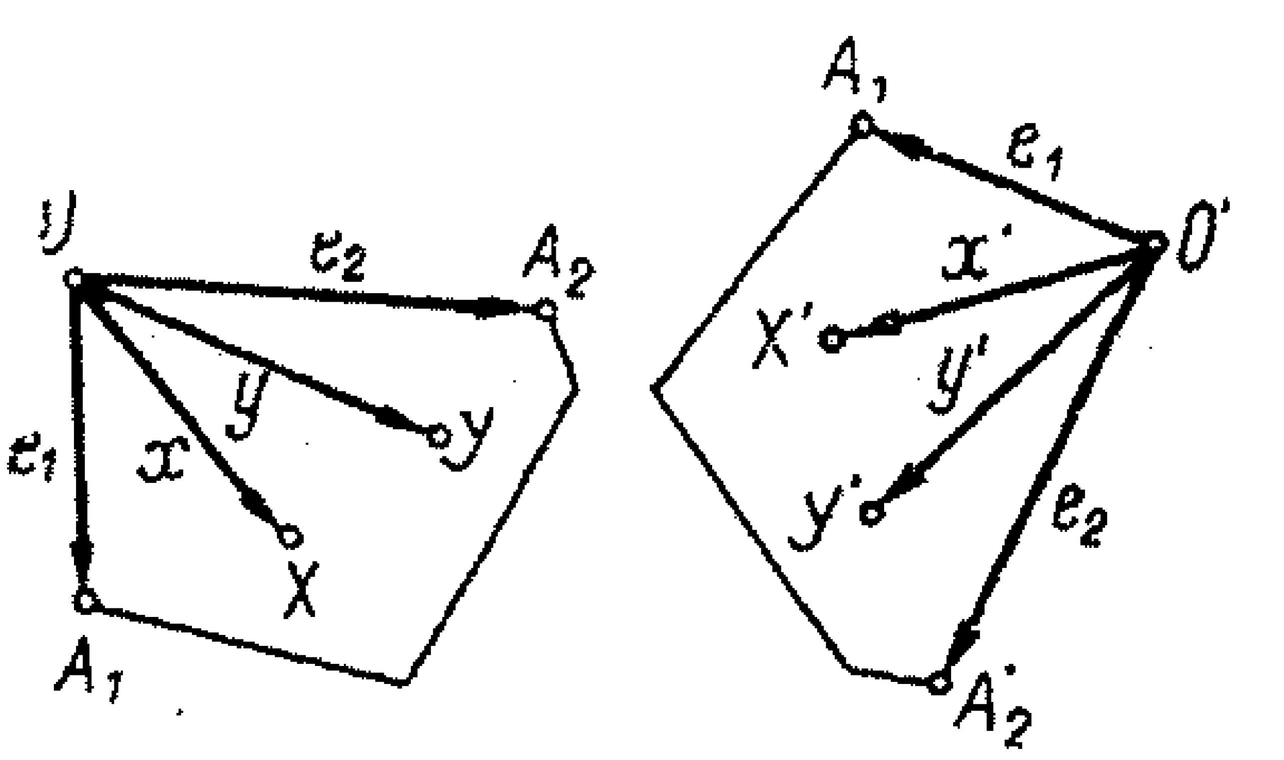
Teisiti öeldes, K ja K′ on sarnased, kui K′ on saadud kujundist K isomeetrilise teisenduse (s. t. liikumise või liikumise ja peegelduse) ning homoteetsuse teel. Homoteetsusega teineteisest saadud kujundeid nimetatakse h o m o t e e t s e t e k s. Seetõttu võib öelda ka, et K ja K′ on sarnased, kui leidub ühega homoteetne kujund, mis on teisega kongruentne.

***Teoreem* 65.2.** *Kujundite sarnasus on ekvivalentsus tasandi või ruumi kujundite hulgas.*

T õ e s t u s. Ka siin on rahuldatud tingimused: 1° $K \sim K$, 2° kui $K \sim K'$, siis $K' \sim K$, 3° kui $K \sim K'$, $K' \sim K''$, siis $K \sim K''$.

Põhjendused tuginevad def-idele 65.2 ja 63.2. Tingimuse 1° kehtivus järeldub sellest, et sarnasusteisenduse üheks erijuhuks on samasusteisendus, vastates sarnasustegurile $k=1$. Tingimuse 2° puhul tuleb arvestada, et kui sarnasusteisendus, mis viib K kujundiks K′, on sarnasusteguriga k, siis pöördteisendus on samuti sarnasusteisendus, kuid teguriga $\frac{1}{k}$. Tingimus 3° on rahuldatud tänu sellele, et kahe sarnasusteisenduse järjest sooritamisel on tulemuseks jälle sarnasusteisendus, kusjuures tegurid korrutuvad. ∎

Järelikult kõik kujundid tasandil või ruumis jagunevad nn. s a r n a s u s k l a s s i d e s s e, nii et iga kaks sama klassi kujundit on sarnased, ükski kaks eri klassi kujundit aga pole sarnased.



Joon. 138.

Kujundite kongruentsuse ja sarnasuse ülalantud definitsioone võib tunduvalt lihtsustada ja piirduda nendes vastavusega ainult kujundite endi punktide vahel.

Teoreem 65.3. *Kaks kujundit* K *ja* K′ *on kongruentsed (sarnased) parajasti siis, kui nende punktide vahel on võimalik korraldada selline üksühene vastavus* $X \leftrightarrow X'$, *nii et* K *iga kahe punkti* X *ja* Y *korral* $|\overrightarrow{X'Y'}| = |\overrightarrow{XY}|$ $(|\overrightarrow{X'Y'}| = k|\overrightarrow{XY}|$, *kus* $k=$ const.).

T õ e s t u s. On küllalt tõestada teoreemi väide kongruentsuse kohta, sest väite sarnasuse kohta saab taandada sellele, kui minna ühelt kujundilt üle temaga homoteetsele kujundile, näiteks kui kujundile K' rakendada homoteetsust teguriga k^{-1}.

Tingimuse tarvilikkus kongruentsuse korral järeldub sellest, et isomeetriline teisendus, mis leidub kongruentsete K ja K′ korral ning viib esimese teiseks, korraldab just nõutava vastavuse.

Tingimuse piisavuse põhjendame üksikasjalikult tasandi kujundite K ja K′ puhul. Ruumi kujundite korral on arutlused analoogilised.

Esimese kujundi K kolme punkti O, X ja Y korral tähistame $\overrightarrow{OX}=x$, $\overrightarrow{OY}=y$, neile teises kujundis K′ vastavate punktide O', X' ja Y' korral tähistame $\overrightarrow{O'X'}=x'$, $\overrightarrow{O'Y'}=y'$ (joon. 138).

Sel korral

$$\overrightarrow{YX}=x-y, \qquad \overrightarrow{Y'X'}=x'-y',$$

ning et

$$x^2=|\overrightarrow{OX}|^2=|\overrightarrow{O'X'}|^2=x'^2, \qquad y^2=|\overrightarrow{OY}|^2=|\overrightarrow{O'Y'}|^2=y'^2,$$

$$(x-y)^2=|\overrightarrow{YX}|^2=|\overrightarrow{Y'X'}|^2=(x'-y')^2,$$

siis tekkivast võrdusest

$$x^2-2xy+y^2=x'^2-2x'y'+y'^2$$

järeldub, et

$$xy = x'y'.$$

Seame nüüd lisaeelduse, et K sisaldab kolm mitte ühel sirgel olevat punkti O, A_1 ja A_2. Sel korral ka kujundis K′ neile vastavad punktid O', A'_1, A'_2 pole ühel sirgel, sest vastupidisel juhul üks nendevahelistest kaugustest oleks kahe teise summa, see aga on praegu võimatu. Järelikult vektorite

$$e_1 = \overrightarrow{OA_1}, \quad e_2 = \overrightarrow{OA_2}, \quad e'_1 = \overrightarrow{O'A'_1}, \quad e'_2 = \overrightarrow{O'A'_2}$$

abil võib moodustada reeperid $\{O;\ e_1, e_2\}$ ja $\{O';\ e'_1, e'_2\}$.

Osutub, et kujundite K ja K′ vastavatel punktidel X ja X' on nende reeperite suhtes täpselt ühesugused koordinaadid x_1 ja x_2. Selle põhjendamiseks tuleb avaldada vektor $\overrightarrow{OX} = x$:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 \tag{65.1}$$

ning leida tema skalaarkorrutised vektoritega e_1 ja e_2:

$$\begin{aligned} xe_1 &= x_1e_1^2 + x_2e_1e_2, \\ xe_2 &= x_1e_1e_2 + x_2e_2^2. \end{aligned} \tag{65.2}$$

Tekib lineaarvõrrandite süsteem x_1 ja x_2 määramiseks, millel on üheselt määratud lahend, sest süsteemi determinant

$$e_1^2e_2^2 - (e_1e_2)^2 = (e_1 \wedge e_2)^2$$

on nullist erinev vektorite e_1 ja e_2 mittekollineaarsuse tõttu. Koordinaadid x_1 ja x_2 avalduvad seejuures kujundi K punkte O, X, A_1 ja A_2 ühendavate vektorite skalaarkorrutiste kaudu, ning et need on samasugused kujundi K′ vastavaid punkte O', X', A'_1 ja A'_2 ühendavate vektorite korral, siis on ka punkti X' koordinaatidel reeperi $\{O';\ e'_1, e'_2\}$ suhtes samad väärtused x_1 ja x_2.

Tasandi isomeetrilise teisenduse, mis viib K kujundiks K′, saab nüüd määrata järgmiselt. Tasandi suvalisele punktile X, millel on reeperi $\{O;\ e_1, e_2\}$ suhtes koordinaadid x_1 ja x_2, tuleb seada vastavusse punkt X', millel on reeperi $\{O';\ e'_1, e'_2\}$ suhtes samad koordinaadid x_1 ja x_2. Et vektori $x = x_1e_1 + x_2e_2$ skalaarruut

$$x^2 = x_1^2e_1^2 + 2x_1x_2e_1e_2 + x_2^2e_2^2$$

avaldub ainult koordinaatide x_1 ja x_2 ning skalaarkorrutiste e_1^2, e_1e_2, e_2^2 kaudu, need aga jäävad sel viisil defineeritud teisenduse korral muutumatuks, siis see teisendus on isomeetriline. Kujundi K kujutiseks selle teisenduse korral on parajasti K′, s. t. K ja K′ on kongruentsed.

Kui K ei sisalda kolme mitte ühel sirgel olevat punkti, siis ta asub ühel sirgel. Sel korral tuleb võtta tema kaks erinevat punkti O ja A_1, vaadelda neile vastavaid punkte O' ja A'_1 kujundis K′ ning tähistada $\overrightarrow{OA_1} = e_1$, $e_2 = e_1 \circ \frac{\pi}{2}$, $\overrightarrow{O'A'_1} = e'_1$, $e'_2 = e'_1 \circ \frac{\pi}{2}$. Ka siin

$$e_1^2 = |\overrightarrow{OA_1}|^2 = |\overrightarrow{O'A'_1}|^2 = e_1'^2, \qquad e_2^2 = e_1^2 = e_1'^2 = e_2'^2,$$

$$e_1e_2 = e'_1e'_2 = 0,$$

seejuures (65.1) asendub võrdusega $x = x_1e_1$ ning süsteem (65.2) seega üheselt lahenduva võrrandiga $xe_1 = x_1e_1^2$. Muus osas mõttekäik kordub täielikult. ∎

Tõestusest võib veel järeldada järgmise teoreemi kehtivuse.

Teoreem 65.4. *Tasandi või ruumi afiinne teisendus (ehk afiinne kollineatsioon; vt. art. 62) osutub isomeetriliseks teisenduseks (sarnasusteisenduseks) parajasti siis, kui tema puhul mingi kolme mitte ühel sirgel oleva punkti või nelja mitte ühel tasandil oleva punkti vahelised kaugused jäävad muutumatuks (korrutuvad ühe ja sama arvuga k).*

Näiteks tasandil tuleb neid kolme punkti vaadelda tõestuses kasutatud punktide O, A_1 ja A_2 osas.

Siit on võimalik järeldada, et kaks kolmnurka on kongruentsed parajasti siis, kui leiab aset üks kolmest järgnevast võimalusest: neil on võrdsed 1) ühe külje pikkus ja selle külje lähisnurgad, 2) kahe külje pikkused ja nende külgede vaheline nurk, 3) kahe külje pikkused ja suurema külje vastasnurk, 4) kolme külje pikkused. Üksikasjalike tõestuste läbiviimise jätame lugeja hooleks.

66. Teisenduste rühm ja kujundite ekvivalentsus. Kujundite kongruentsus ja sarnasus on vastavalt isomeetriliste teisendustega ja sarnasusteisendustega seotud mõisted. Seejuures asjaolu, et nad on ekvivalentsused kujundite hulgas, on seotud mainitud teisenduste teatavate omadustega. Võib arvata, et ka üldisemate teisendustega on seotud kujundite vastavad ekvivalentsused, kui neil teisendustel on analoogilised omadused.

Viimaste kirjeldamisel on kasulik teisendusi tähistada eri sümbolitega: φ, ψ, ω jne. Kui punkti X kujutiseks teisenduse φ korral on X', siis kirjutatakse

$$X'=\varphi(X).$$

Kahe teisenduse φ ja ψ korral annab nende järjest sooritamine teatava uue teisenduse, mida nimetatakse ψ ja φ k o r r u t i s e k s ja tähistatakse $\psi\varphi$, s. t. kui $X'=\varphi(X)$ ja $X''=\psi(X')$, siis $X''=\psi(\varphi(X))=(\psi\varphi)(X)$.

Tuleb märkida, et sellist teisenduste korrutamist on eespool juba mitmel korral kasutatud. Näiteks teoreemide 56.3 ja 64.2 väited saab nüüd sõnastada järgmiselt: tasandi iga isomeetriline teisendus on kas lükke ja pöörde või lükke, pöörde ja peegelduse korrutis, tasandi iga afiinne teisendus on ühe liikumise ja kahe rist-telgafiinsuse korrutis.

Teisenduste korrutamine on assotsiatiivne:

$$\omega(\psi\varphi)=(\omega\psi)\varphi. \tag{66.1}$$

Tõepoolest, kui vabalt võetud punkti X korral $\varphi(X)=X'$, $\psi(X')=X''$, $\omega(X'')=X'''$, siis ühelt poolt

$$(\psi\varphi)(X)=\psi(\varphi(X))=\psi(X')=X''$$

ja seega

$$[\omega(\psi\varphi)](X)=\omega[(\psi\varphi)(X)]=\omega(X'')=X''',$$

teiselt poolt

$$[(\omega\psi)\varphi](X)=(\omega\psi)(\varphi(X))=(\omega\psi)(X')=\omega(\psi(X'))=\omega(X'')=X''',$$

s. t. (66.1) eri pooltel on tõesti üks ja seesama teisendus.

Teisendusele φ vastupidist teisendust, mis viib punktid tagasi algasendeisse, nimetatakse φ pöördteisenduseks ja tähistatakse φ^{-1}, s. t. kui $X'=\varphi(X)$, siis $X=\varphi^{-1}(X')$. Korrutisel $\varphi^{-1}\varphi$ on järgmine omadus:

$$(\varphi^{-1}\varphi)(X)=\varphi^{-1}(\varphi(X))=\varphi^{-1}(X')=X,$$

s. t. ta jätab kõik punktid paigale ning ühtib seega samasusteisendusega. Viimast tähistatakse E, tal on ilmselt omadus: iga φ korral $\varphi\mathrm{E}=\varphi$, $\mathrm{E}\varphi=\varphi$. Niisiis

$$\varphi^{-1}\varphi=\mathrm{E}.$$

See võrdus iseloomustab täielikult pöördteisendust: kui $\omega\varphi=$ $=\mathrm{E}$, siis ilmselt $\omega=\varphi^{-1}$. Seetõttu

$$(\psi\varphi)^{-1}=\varphi^{-1}\psi^{-1}, \tag{66.2}$$

sest (66.1) põhjal

$$(\varphi^{-1}\psi^{-1})(\psi\varphi)=[(\varphi^{-1}\psi^{-1})\psi]\varphi=$$
$$=[\varphi^{-1}(\psi^{-1}\psi)]\varphi=(\varphi^{-1}\mathrm{E})\varphi=\varphi^{-1}\varphi=\mathrm{E}.$$

Sellise sümboolika ja terminoloogia abil võib nüüd defineerida järgmise olulise mõiste.

***Def.* 66.1.** Tasandi või ruumi teisenduste hulka nimetatakse teisenduste rühmaks, kui ta sisaldab 1) koos iga oma kahe teisendusega φ ja ψ ka nende korrutise $\psi\varphi$ ning 2) koos iga oma teisendusega φ ka selle pöördteisenduse φ^{-1}.

Tingimused 1) ja 2) ongi need omadused, mis on vajalikud kujundite ekvivalentsuse defineerimiseks teisenduste abil. Kui analüüsida näiteks teoreemi 65.1 tõestust, siis selgub, et selles on kasutatud just nimelt tingimuste 1) ja 2) kehtivust isomeetriliste teisenduste hulgas. Järelikult tasandi või ruumi isomeetrilised teisendused moodustavad rühma. Samuti võib teoreemi 65.2 tõestusest järeldada, et tasandi või ruumi sarnasusteisendused moodustavad rühma.

Lihtne on tuua näiteid ka teisenduste sellistest hulkadest, mis pole rühmad. Nii näiteks tasandi kõik peegeldused sirgete suhtes ei moodusta rühma — tingimus 1) on rikutud: peegeldused ristreeperi x_1-telje ja x_2-telje suhtes annavad korrutamisel mitte enam peegelduse, vaid pöörde, sest esimese peegelduse teisendusvalemeiks on $x'_1=x_1$, $x'_2=x_2$, teise peegelduse teisendusvalemeiks on $x'_1=-x_1$, $x'_2=x_2$, mistõttu korrutamisel tekib pööre reeperi alguspunkti O ümber π võrra, sest teisendusvalemid on $x'_1=-x_1$,

$x'_2 = -x_2$. Rühma ei moodusta ka pöörded tasandil punkti O ümber positiivse nurga α võrra — tingimus 2) on rikutud: ühe sellise teisenduse pöördteisendus on pööre mitte enam positiivse, vaid juba negatiivse nurga $-\alpha$ võrra.

Teoreemide 65.1 ja 65.2 väited haarab endasse järgmine üldine teoreem.

***Teoreem* 66.1.** *Olgu antud tasandi või ruumi teisenduste teatav rühm. Sel korral vastavus kujundite vahel, mis ühendab paariks kujundi* K *ja selle kujutise* K′ *antud rühma mingi teisenduse korral, on ekvivalentsus kujundite hulgas.*

Tõestus. Tähistame antud rühma teisendusi φ, ψ jne., ning loeme, et $K \sim K'$, kui rühmas leidub niisugune teisendus φ, et

$$K' = \varphi(K),$$

kus $\varphi(K) = \{\varphi(X) \mid X \in K\}$. Sel puhul $K \sim K$, sest tingimuste 1) ja 2) tõttu leidub rühmas samasusteisendus $\varphi^{-1}\varphi = E$ ja ilmselt $K = E(K)$. Samuti võib öelda, et kui $K \sim K'$, siis ka $K' \sim K$, sest kui rühmas leidub φ, nii et $K' = \varphi(K)$, siis tingimuse 2) põhjal leidub temas ka φ^{-1}, kusjuures $K = \varphi^{-1}(K')$. Lõpuks on selge, et kui $K \sim K'$ ja $K' \sim K''$, siis ka $K \sim K''$, sest kui rühmas leiduvad φ ja ψ, nii et $K' = \varphi(K)$ ja $K'' = \psi(K')$, siis tingimuse 1) põhjal leidub temas ka teisendus $\psi\varphi$, kusjuures $(\psi\varphi)(K) = \psi(\varphi(K)) = \psi(K') = K''$. ∎

Kui teisenduste rühmaks on isomeetriliste teisenduste rühm või sarnasusteisenduste rühm, siis kujundite kirjeldatud ekvivalentsus on vastavalt kongruentsus või sarnasus. Märksa huvitavamad on teoreemi 66.1 rakendused üldisemate teisenduste rühmade korral.

67. Kujundite afiinne ja meetriline klassifitseerimine. Osutub, et rühma moodustavad ka tasandi või ruumi afiinsed teisendused. Seda on lihtne järeldada vahetult def-ist 60.1 teoreemi 60.2 põhjal, veel lihtsam aga otse teoreemist 62.1: afiinne on iga teisendus, mille puhul sirged kujutuvad jälle sirgeteks. On selge, et iga kahe sellise teisenduse korrutis ja iga sellise teisenduse pöördteisendus on jälle sama omadusega.

Järelikult afiinsed teisendused määravad teoreemi 66.1 järgi tasandi või ruumi kujundite hulgas teatava ekvivalentsuse. Sel puhul kõneldakse afiinselt ekvivalentsetest kujunditest. Kujundite liigitamist afiinselt ekvivalentsete kujundite klassidesse ehk afiinsetesse klassidesse nimetatakse kujundite afiinseks klassifitseerimiseks. Et isomeetrilised teisendused ja sarnasusteisendused on afiinsete teisenduste erijuhud, siis kongruentsed kujundid ja sarnased kujundid on afiinselt ekvivalentsete kujundite erijuhud ning kuuluvad seega alati samasse afiinsesse klassi.

Lihtsa tunnuse, mis võimaldab kahe kujundi korral otsustada, kas nad on afiinselt ekvivalentsed või mitte, annab järgmine teoreem.

***Teoreem* 67.1.** *Kaks kujundit on afiinselt ekvivalentsed parajasti siis, kui kummagi jaoks saab leida niisuguse afiinse reeperi, et kujundid koosnevad punktidest, milledel on vastavate reeperite suhtes ühesugused koordinaadid.*

Tõestus. Kui kujundid K ja K′ on afiinselt ekvivalentsed, siis leidub afiinne teisendus φ, nii et $K' = \varphi(K)$. Kujundiga K võib siduda vabalt võetud afiinse reeperi, kujundiga K′ tuleb siduda selle reeperi kujutis teisenduse φ korral. Kujundi K igal punktil X ja kujundi K′ vastaval punktil $X' = \varphi(X)$ on nende reeperite suhtes teoreemi 60.2 põhjal samad koordinaadid.

Vastupidi, kui kujunditega K ja K′ saab siduda afiinsed reeperid, nii et kujundid koosnevad samasuguste koordinaatidega punktidest, siis teisendus, mis kujutab punkti X koordinaatidega $x_1, \ldots, x_n$ esimese reeperi suhtes punktiks X' samade koordinaatidega $x_1, \ldots, x_n$ teise reeperi suhtes, kujutab kujundi K kujundiks K′ ning on vahetult def. 60.1 põhjal afiinne teisendus. ∎

Tõestatud teoreemist on lihtne järeldada, et omavahel afiinselt ekvivalentsed on iga kaks lõiku, iga kaks rööpnelinurka, iga kaks kolmnurka. Tõepoolest, näiteks punktis O vektoritele e_1 ja e_2 ehitatud rööpnelinurk on def. 29.3 kohaselt punktihulk

$$\{X \mid \overrightarrow{OX} = x_1 e_1 + x_2 e_2, \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$$

sõltumata sellest, missugused on punkt O ja vektorid e_1 ja e_2. Seetõttu iga kaks rööpnelinurka tasandil on selliste punktide X hulgad, mille koordinaadid ruumis sobivalt valitud afiinsete reeperite suhtes rahuldavad võrratusi $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 1$ ja võrdust $x_3 = 0$, ning on teoreemi põhjal tõesti afiinselt ekvivalentsed. Lõikude korral asenduvad need võrratused võrratustega $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ ja võrdusega $x_2 = 0$ (vt. (34.8), kus tuleb võtta $\boldsymbol{a} = e_1$, $\boldsymbol{b} = 0$), kolmnurkade korral aga def. 35.2 põhjal võrratustega $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_1 + x_2 \leqslant 1$.

Kujundite afiinses klassifikatsioonis moodustavad rööpnelinurgad seega ühe klassi, mida selles klassifikatsioonis ei saa enam edasi liigitada. Samuti moodustavad ühe klassi kõik kolmnurgad ja ühe klassi kõik lõigud. Ülalantud käsitluse laiendamisega ruumi juhule on kerge kindlaks teha, et ühe afiinse klassi moodustavad ka kõik rööptahukad (vt. def. 32.2), samuti kõik tetraeedrid (vt. allviide 50).

Edasine liigitamine on võimalik mõne spetsiaalsema teisenduste rühma alusel. Vaatleme näiteks selliseid afiinseid teisendusi, mille teisenduse determinant on positiivne. Järgmisest teoreemist on lihtne järeldada, et kõik niisugused teisendused moodustavad rühma.

***Teoreem* 67.2.** *Afiinsete teisenduste korrutamisel korrutuvad ka nende teisendusmaatriksite determinandid.*

Tõestus. Afiinse teisenduse puhul teisenduse determinant on def. 61.1 järgi tema poolt määratud baasiteisenduse $\varepsilon' = \varepsilon C$ teisendusmaatriksi C determinant $|C|$. Kahe afiinse teisenduse korral on tegemist kahe baasiteisendusega $\varepsilon' = \varepsilon C$ ja $\varepsilon'' = \varepsilon' C'$, kusjuures kahe esimese korrutamisel tuleb viimased kaks sooritada järjest. Nagu selgus art-s 18, on tekkiva baasiteisenduse $\varepsilon'' = \varepsilon C''$ maatriksiks $C'' = CC'$ ning selle determinandiks

$$|C''| = |C|\,|C'|. \tag{67.1}$$

Saadud teoreem võimaldabki näidata, et afiinsed teisendused positiivse determinandiga moodustavad rühma. Tõepoolest, kahe sellise teisenduse korrutise teisendusmaatriksi determinant on võrduse (67.1) põhjal samuti positiivne, ning et afiinse teisenduse ja selle pöördteisenduse korrutiseks on samasusteisendus teisendusmaatriksiga E (vt. (18.5)), siis on valemite (18.6) ja (18.7) põhjal pöördteisenduse maatriksi C^{-1} determinandiks antud afiinse teisenduse determinandi $|C|$ pöördväärtus, mis on positiivse $|C|$ korral samuti positiivne. ▮

See rühm võimaldab tasandi rööpkülikute või ruumi rööptahukate seas välja eraldada ühtemoodi orienteeritud rööpkülikute või rööptahukate klassi.

Teoreemi 67.2 abil saab anda veel ühe näite teisenduste hulgast, mis pole rühm — selliseks on kõigi niisuguste afiinsete teisenduste hulk, mille teisendusmaatriksi determinant on negatiivne: selle hulga puhul on rikutud tingimus 2°.

Ühtlasi järeldub teoreemist 67.2, et kõik ekviafiinsed teisendused — afiinsed teisendused, mille teisenduse determinant on $+1$ või -1, moodustavad rühma, sest $(\pm 1)(\pm 1) = \pm 1$ ja $(\pm 1)^{-1} = \pm 1$.

Ekviafiinsete teisenduste rühma järgi saab teha tasandi rööpnelinurkade seas või ruumi rööptahukate seas peenema klassijaotuse — ühe klassi moodustavad sama pindalaga rööpnelinurgad või sama ruumalaga rööptahukad. Omaette rühma moodustavad sellised ekviafiinsed teisendused, mille teisendusmaatriksi determinant on 1. See rühm ühendab ühte klassi sama pindalaga või ruumalaga ning sama orientatsiooniga rööpnelinurgad või rööptahukad.

Ekviafiinsete teisenduste erijuht on isomeetrilised teisendused. Viimased moodustavad, nagu juba öeldud, samuti rühma, mis ühendab ühte klassi omavahel kongruentsed kujundid. Kehtib teoreemiga 67.1 analoogiline teoreem.

***Teoreem* 67.3.** *Kaks kujundit on kongruentsed parajasti siis, kui kummagi jaoks saab leida niisuguse ristreeperi, et kujundid koosnevad punktidest, milledel on vastavate reeperite suhtes ühesugused koordinaadid.*

Tõestus kordab teoreemi 67.1 tõestuse mõttekäike selle erinevusega, et afiinsete teisenduste asemel tuleb kasutada isomeetrilisi teisendusi, afiinsete reeperite asemel ristreepereid ning tugineda tuleb mitte enam teoreemile 60.2, vaid teoreemile 56.2.

Kujundite liigitamist isomeetriliste teisenduste rühma järgi, s. t. omavahel kongruentsete kujundite klassidesse, nimetatakse kujundite m e e t r i l i s e k s k l a s s i f i t s e e r i m i s e k s.

IV peatükk

LIHTSAMAD KÕVERJOONED JA -PINNAD

§ 12. RINGJOONED JA SFÄÄRID

Seniselt sirgete ja tasandite käsitlemiselt läheme nüüd käesolevas peatükis üle mõnevõrra keerukamate punktihulkade uurimisele, võttes vaatluse alla kõigepealt sellised kujundid nagu ringjooned, sfäärid, pöördsilindrid ja -koonused. Viimases kahes paragrahvis lisanduvad neile koonuselõiked ja koonuselõikelised pinnad. Ühiselt oleme neid kõiki nimetanud peatüki pealkirjas lihtsamateks kõverjoonteks ja -pindadeks. Erinevalt varasemast tuleb siin aine esitamist alustada eukleidilise geomeetria raames. Alles hiljem, vaadeldavate kujundite üldises teoorias, pöörame tähelepanu ka sellele, missugused nende omadustest on üldisema iseloomuga ja kuuluvad afiinsesse geomeetriasse. Seetõttu kasutame siin kohe esimestest sammudest alates, õieti juba ühe või teise uuritava kujundi defineerimisel, eukleidilise geomeetria selliseid põhilisi mõisteid nagu punkti kaugus teisest punktist või sirgest ning kahe vektori vaheline nurk. Peamine eesmärk on näidata, et võrrandite abil saab esitada ja uurida mitte üksnes sirgeid ja tasandeid, vaid ka ülalmainitud kõverjooni ja -pindu.

68. Üldvõrrand. Ringjoon ja sfäär on ühtselt defineeritavad järgmiselt.

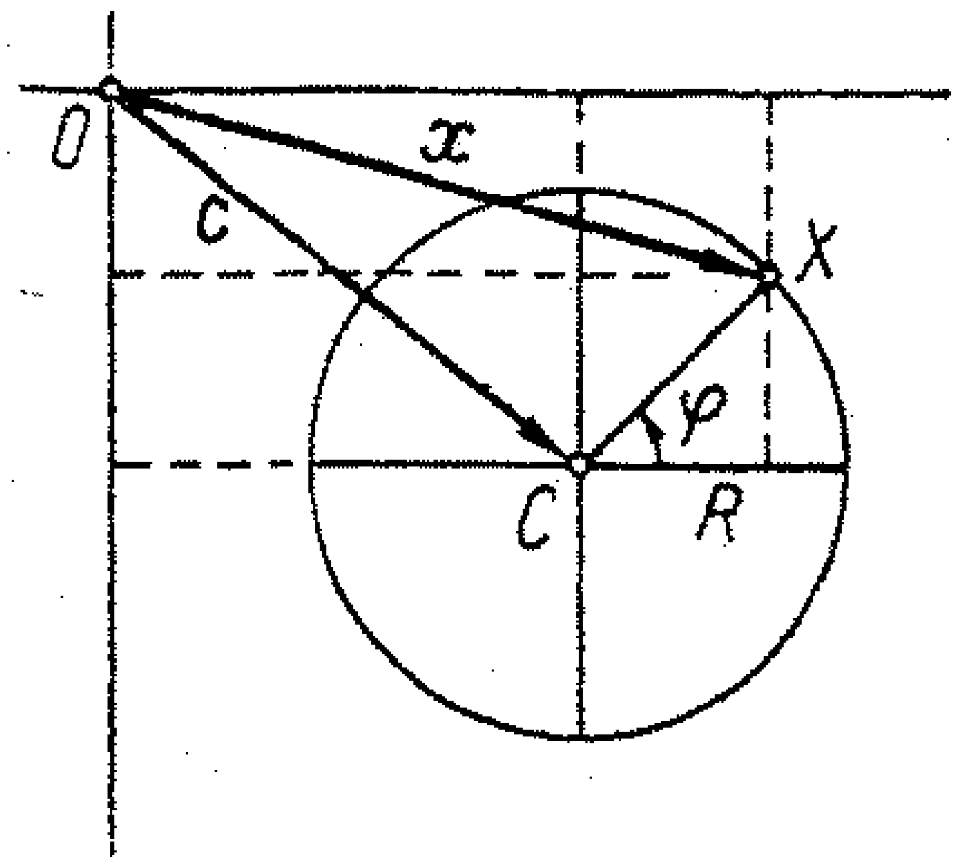
***Def.* 68.1.** Ringjooneks või sfääriks nimetatakse vastavalt tasandi või ruumi kõigi selliste punktide X hulka, mis on antud punktist C antud kaugusel R. Reaalarvu R nimetatakse ringjoone või sfääri raadiuseks, punkti C — keskpunktiks.

Niisiis ringjooneks tasandil või sfääriks ruumis on punktihulk

$$\{X \mid |\overrightarrow{CX}| = R\}.$$

Kui punktide X ja C kohavektorid mingi alguspunkti O korral tähistada $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX}$ ja $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$, siis $\overrightarrow{CX} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}$ ning tingimus $|\overrightarrow{CX}| = R$ ehk teisiti $\overrightarrow{CX}^2 = R^2$ on seega samaväärne võrrandiga (joon. 139)

$$(\mathbf{x}-\mathbf{c})^2=R^2. \tag{68.1}$$



Joon. 139.

Järelikult ringjoon või sfäär on parajasti selliste punktide X hulk, mille kohavektorid $\mathbf{x}$ rahuldavad võrrandit (68.1). Viimast nimetatakse ringjoone või sfääri võrrandiks. Kui tasandil või ruumis on võetud kasutusele ristkoordinaadid, siis ringjoone võrrand on def. 27.1 järgi kirjutatav kujul

$$(x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2=R^2, \tag{68.2}$$

sfääri võrrand aga (27.5) ja (28.11) põhjal kujul

$$(x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2+(x_3-c_3)^2=R^2. \tag{68.3}$$

Erijuhul, kui keskpunktiks C on alguspunkt O, saame võrrandid (68.1), (68.2) ja (68.3) vastavalt kujul

$$\mathbf{x}^2=R^2, \qquad x_1^2+x_2^2=R^2, \qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2.$$

Kui võrrandis (68.1) teha vajalikud tehted, siis on tulemuseks võrrand

$$\mathbf{x}^2-2\mathbf{c}\mathbf{x}+\mathbf{c}^2-R^2=0$$

ehk üldiselt, kui korrutada see veel läbi mingi nullist erineva reaalarvuga a, võrrand

$$a\mathbf{x}^2+2\mathbf{b}\mathbf{x}+d=0, \tag{68.4}$$

kus $\mathbf{b} = -\mathbf{c}a$ ja $d = a(\mathbf{c}^2-R)$. Ringjoone puhul on (68.4) samaväärne võrrandiga

$$a(x_1^2+x_2^2)+2b_1x_1+2b_2x_2+d=0, \tag{68.5}$$

sfääri puhul aga võrrandiga

$$a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2b_1x_1+2b_2x_2+2b_3x_3+d=0. \tag{68.6}$$

Võrreldes sirge või tasandi üldvõrranditega on siin see iseärasus, et (68.5) ja (68.6) vasakud pooled sisaldavad ka koordinaatide x_i ruute — need võrrandid pole enam lineaarsed.

Kas iga võrrand (68.5) või (68.6) määrab vastavalt ringjoone või sfääri, s. t. kas vastavalt tasandi või ruumi kõigi selliste punktide hulk, mille ristkoordinaadid rahuldavad võrrandit (68.5) või (68.6), osutub ringjooneks või sfääriks? Vastuse leidmiseks tuleb uurida, kas nende võrranditega samaväärne (68.4) on alati tagasi teisendatav kujju (68.1).

Selleks jagame kõigepealt (68.4) läbi reaalarvuga $a \neq 0$:

$$x^2+\frac{2}{a}bx+\frac{d}{a}=0$$

ning täiendame seejärel vasakul esimesed kaks liiget täisruuduks, liites ja lahutades $\left(b\frac{1}{a}\right)^2$:

$$x^2+2\left(b\frac{1}{a}\right)x+\left(b\frac{1}{a}\right)^2-\left(b\frac{1}{a}\right)^2+\frac{d}{a}=0.$$

Tulemuse võib kirjutada kujul

$$\left(x+\frac{1}{a}b\right)^2=\frac{1}{a^2}(b^2-ad). \tag{68.7}$$

Selleks et saadud võrrand oleks samaväärne võrrandiga (68.1), peaks tema parem pool olema teatava nullist erineva reaalarvu R ruut R^2, see ei pruugi aga alati nii olla. Järelikult kehtib niisugune lause.

***Teoreem* 68.1.** *Võrrand* (68.4), *kus* $a \neq 0$, *kujutab endast ringjoone või sfääri võrrandit parajasti siis, kui*

$$b^2-ad>0.$$

Keskpunkti C kohavektoriks on siis $c=-\frac{1}{a}b$, *raadiuseks*

$$R=\frac{\sqrt{b^2-ad}}{|a|}.$$

Kui võrrandi (68.4) puhul $b^2-ad=0$, siis (68.7) tekib kujul

$$\left(x+\frac{1}{a}b\right)^2=0,$$

millest $x+\frac{1}{a}b=0$ ehk $x=-\frac{1}{a}b$. Järelikult sel puhul võrrandit (68.4) rahuldab üheainsa punkti C kohavektor. Võib kujutleda, et ringjoon või sfäär on kidunud punktiks — oma piirhulgaks, kui $R \to 0$.

Kui võrrandis (68.4) on $b^2-ad<0$, siis pole ühtegi punkti X, mille kohavektor x rahuldaks võrrandit (68.7) (ehk sellega samaväärset võrrandit (68.4)), sest iga x korral oleks (68.7) vasak pool mittenegatiivne, parem pool aga negatiivne reaalarv ning võrdus ei saaks kehtida. Sel puhul (68.4) on vastuoluline, ta määrab tühja punktihulga. Tinglikult öeldakse sel korral, et võrrandile (68.4) vastab imaginaarne[84] ringjoon või sfäär.

Saadud tulemustest selgub ühelt poolt, et võrranditega saab määrata mitte üksnes sirgeid ja tasandeid, vaid ka keerulisemaid jooni ja pindu, kuid teiselt poolt ilmneb ka, et mitte igale võrrandile ei tarvitse vastata joon tasandil või pind ruumis.

Ringjoone saab esitada ka võrranditega, mis on analoogilised sirge parameetriliste võrranditega (39.1), s. t. milles ringjoonel liikuva punkti koordinaadid on avaldatud mingi abimuutuja ehk parameetri funktsioonidena. Nimelt võrrandist (68.2) järeldub, et $(x_1 - c_1)^2 \leqslant R^2$, s. t.

$$-1 \leqslant \frac{x_1 - c_1}{R} \leqslant 1.$$

Seetõttu ringjoone iga punkti korral leidub parajasti üks selline reaalarv φ, nii et $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ ja

$$\frac{x_1 - c_1}{R} = \cos(\pm\varphi)$$

(vt. (23.15) ja teoreemi 24.1 tõestust). Sel korral

$$(x_2 - c_2)^2 = R^2(1 - \cos^2\varphi),$$

s. t.

$$x_2 - c_2 = R\sin(\pm\varphi).$$

Et $\cos(-\varphi) = \cos(2\pi - \varphi)$, $\sin(-\varphi) = \sin(2\pi - \varphi)$ ja $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ puhul on $0 \geqslant -\varphi \geqslant -\pi$, $2\pi \geqslant 2\pi - \varphi \geqslant \pi$, siis ringjoone iga punkti (x_1, x_2) jaoks leidub poollõigus $[0, 2\pi)$ parajasti üks väärtus φ, nii et

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 + R\cos\varphi, \\ x_2 &= c_2 + R\sin\varphi. \end{aligned} \tag{68.8}$$

Seejuures iga punkt $(c_1 + R\cos\varphi, c_2 + R\sin\varphi)$ on vaadeldaval ringjoonel, nagu on kerge kindlaks teha. Seetõttu võrrandid (68.8) esitavad parajasti selle ringjoone (joon. 139). Neid nimetatakse ringjoone *parameetrilisteks võrranditeks*.

Eriti lihtsad on nad juhul, kui $c_1 = c_2 = 0$, s. t. kui reeperi alguspunktiks $O(0, 0)$ on ringjoone keskpunkt C:

$$x_1 = R\cos\varphi, \quad x_2 = R\sin\varphi. \tag{68.9}$$

Võrdlus valemitega (26.4), mis seovad omavahel punkti ristkoor-

[84] lad. k. *imaginarius* — näilik, ebareaalne; imaginaarsetest joontest ja pindadest on edaspidi lähemalt juttu art-s 85.

dinaate x_1, x_2 ja polaarkoordinaate r, φ, näitab, et ringjoonel keskpunktiga O on polaarkoordinaatides maksimaalselt lihtne võrrand:

$$r=R.$$

Ühtlasi selgub parameetri φ tähendus — ta on selle ringjoone mingi punkti polaarnurk.

Ringjoone punkti X kohavektor avaldub (68.9) põhjal järgmiselt:

$$\overrightarrow{OX}=e_1(R\cos\varphi)+e_2(R\sin\varphi)=(e_1\cos\varphi+e_2\sin\varphi)R=$$
$$=(e_1\circ\varphi)R=(e_1R)\circ\varphi.$$

Seetõttu ringjoon keskpunktiga O koosneb punktidest, milledesse kujutub punkt A kohavektoriga $\overrightarrow{OA}=e_1R$ pöörete korral ümber punkti O (vt. def. 55.2).

Ka sfääri saab esitada teatavate parameetriliste võrranditega. Piirdume siin selle juhuga, mil ristreeperi alguspunktiks O on valitud sfääri keskpunkt. Sfääri esitab sel korral võrrand

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2,$$

kus R on sfääri raadius. Et siin $x_3^2\leqslant R^2$, siis sfääri iga punkti X korral leidub parajasti üks selline θ, nii et $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ ja

$$x_3=R\sin\theta.$$

Asendus sfääri võrrandisse annab:

$$x_1^2+x_2^2=R^2\cos^2\theta.$$

Seetõttu võib edasi arutleda samuti nagu ringjoone korral, ainult et R asemele tuleb $R\cos\theta$. Järelikult

$$x_1=R\cos\theta\cos\varphi,$$
$$x_2=R\cos\theta\sin\varphi,$$

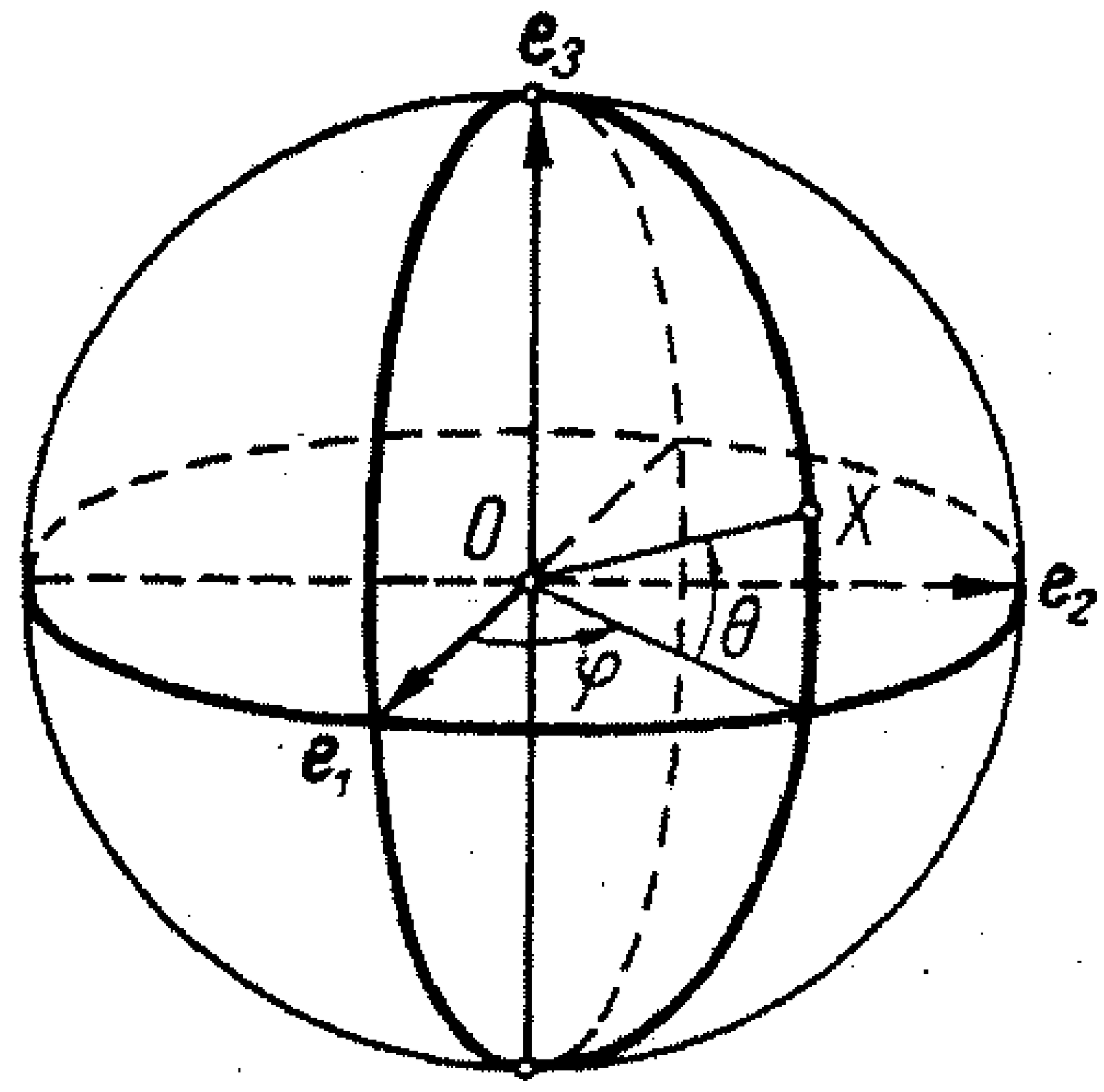
kus $0\leqslant\varphi<2\pi$. Vastupidi, on kerge veenduda, et iga punkt $(R\cos\theta\cos\varphi,\ R\cos\theta\sin\varphi,\ R\sin\theta)$ asetseb vaadeldaval sfääril, sest

$$(R\cos\theta\cos\varphi)^2+(R\cos\theta\sin\varphi)^2+(R\sin\theta)^2=$$
$$=R^2\cos^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+R^2\sin^2\theta=R^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=R^2.$$

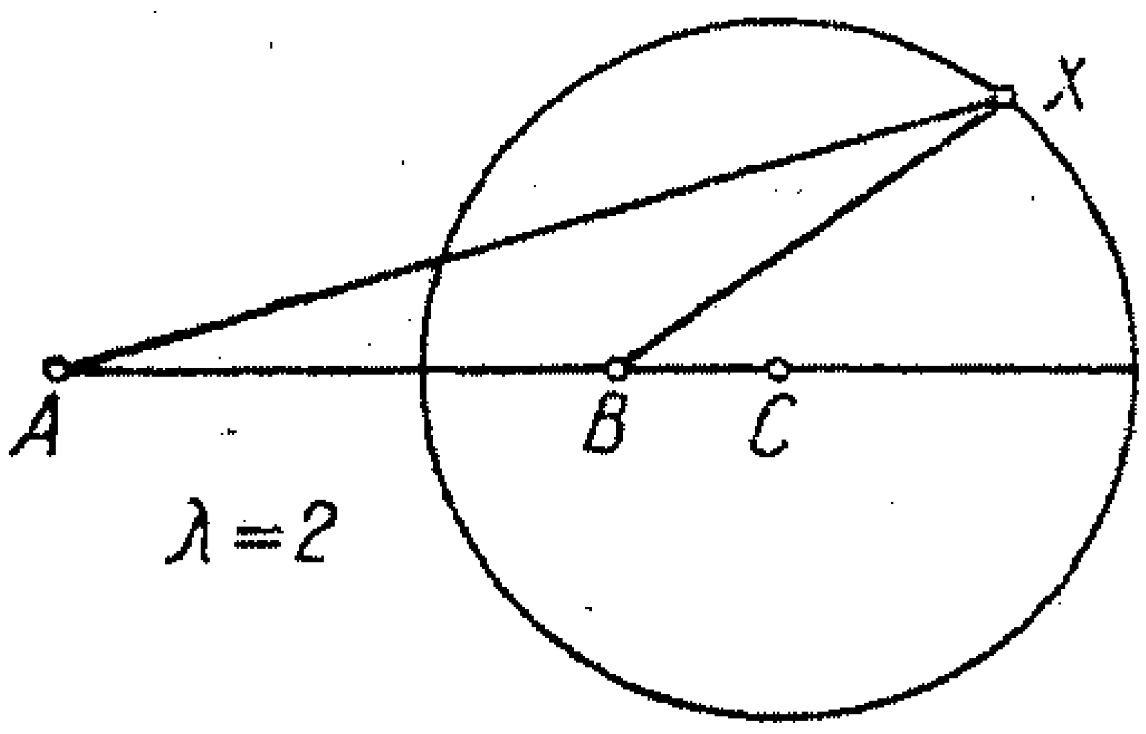
Kokkuvõttes selgub, et võrrandid

$$x_1=R\cos\theta\cos\varphi,\qquad x_2=R\cos\theta\sin\varphi,\qquad x_3=R\sin\theta$$

esitavad parajasti selle sfääri. Neid nimetatakse sfääri *parameetrilisteks võrranditeks*. Sfääri punkti X asend söl-



Joon. 140.



Joon. 141.

tub siin kahest parameetrist φ ja θ (joon. 140). Kui $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ ja $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, siis vastavus sfääri punktide ja reaalarvupaaride (φ, θ) vahel on üksühene. Erandlikeks on siin punktid, kus $\theta = \frac{\pi}{2}$ või $\theta = -\frac{\pi}{2}$, s. t. punktid $(0, 0, R)$ ja $(0, 0, -R)$ — nendes jääb φ määramatuks. Olukord on nende puhul samasugune nagu polaarkoordinaatide juures pooluse puhul.[85]

Polaarkoordinaatidega mõnevõrra analoogilised koordinaadid saab nüüd kasutusele võtta ka ruumis. Nimelt iga punkt X, mis ei ole x_3-teljel, asetseb teataval sfääril keskpunktiga O ja raadiusega r ning on järelikult määratav sellel arvupaariga (φ, θ). Reaalarvude kolmikut (r, ϑ, φ), kus $r > 0$, $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \theta$, $0 < \vartheta < \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, nimetatakse punkti X sfääriliste koordinaatide kolmikuks. Erandlikeks on punkt O, kus $r = 0$ ning ϑ ja φ jäävad määramatuks (s. t. on valitavad vabalt), ning x_3-telje teised punktid, kus $\vartheta = 0$ või $\vartheta = \pi$ ning φ jääb määramatuks. Sfäärilisteks nimetatakse neid koordinaate seepärast, et punktid, kus $r = R = \text{const.}$, moodustavad siin sfääri.

Saadud tulemused lubavad algebra abil lahendada mitmeid

---

85 Parameetrid φ ja θ leiavad kasutamist geograafias punkti asendi määramisel Maad kujutaval sfäärilisel gloobusel. Tavaliselt φ asemel võetakse $\lambda = \varphi - \pi$, $-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$. Meridiaani, mille punktides $\lambda = 0$, nimetatakse algmeridiaaniks. Arvu λ nimetatakse punkti geograafiliseks pikkuseks, arvu θ — geograafiliseks laiuseks (eeldusel, et $\theta = 0$ määrab ekvaatori). Viimase sümboliks võetakse sageli φ.

huvitavaid geomeetriaülesandeid. Vaatleme näitena järgmist kaht ülesannet.

1. Leida ruumi kõigi selliste punktide X hulk, mille kaugustel kahest kindlast punktist A ja B on etteantud suhe λ (joon. 141).

Ülesande lahendamiseks tähistame punktide X, A ja B kohavektorid vastavalt $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$. Siis $|\overrightarrow{AX}| = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|$ ja $|\overrightarrow{BX}| = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}|$, ning et ülesande tingimuse kohaselt $|\overrightarrow{AX}| = \lambda|\overrightarrow{BX}|$, siis $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}| = \lambda|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}|$ ehk

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2=\lambda^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})^2.$$

Siit

$$\boldsymbol{x}^2-2\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}^2=\lambda^2(\boldsymbol{x}^2-2\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}^2)$$

ehk

$$(1-\lambda^2)\,\boldsymbol{x}^2-2(\boldsymbol{a}-\lambda^2\boldsymbol{b})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}^2-\lambda^2\boldsymbol{b}^2=0.$$

Kui $\lambda = 1$, siis saadud võrrand määrab tasandi normaalvektoriga $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BA}$, kusjuures seda võrrandit

$$2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2)=0$$

rahuldab vektor $\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$, s. t. lõigu AB keskpunkti kohavektor. Saadud tasandit nimetatakse lõigu AB keskristtasandiks.

Kui $\lambda \neq 1$, siis on tegemist võrrandiga (68.4), kus praegu $a = 1-\lambda^2$, $\boldsymbol{b}$ osas on $\lambda^2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ ja $d = \boldsymbol{a}^2-\lambda^2\boldsymbol{b}$. Et endise $\boldsymbol{b}^2-ad$ asemele tuleb nüüd

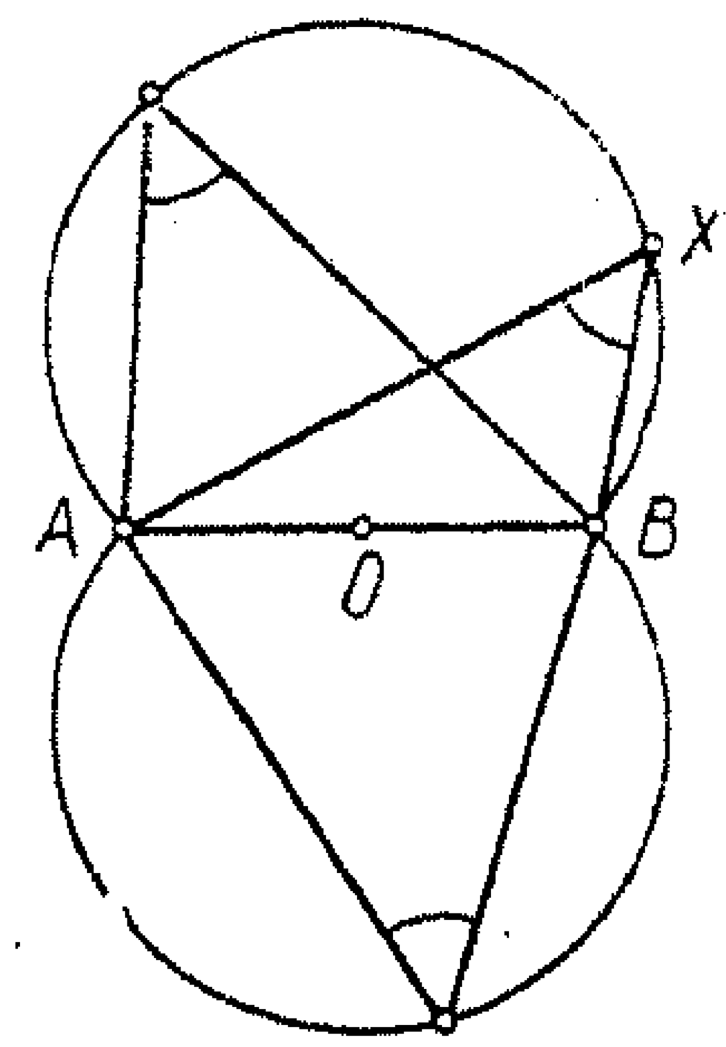
$$(\lambda^2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2-(1-\lambda^2)(\boldsymbol{a}^2-\lambda^2\boldsymbol{b}^2)=\lambda^2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2>0,$$

siis see võrrand määrab teoreemi 68.1 põhjal sfääri, mille keskpunkti C kohavektoriks on $\boldsymbol{c}=\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\lambda^2}{1-\lambda^2}$ ning raadiuseks on $R=\frac{\lambda|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}{|1-\lambda^2|}$.

2. Leida tasandi kõigi selliste punktide X hulk, milledest antud lõik AB paistab antud nurga α all (joon. 142).

Ülesande lahendamiseks valime tasandil ristkoordinaadistiku selliselt, et x_1-telg läbiks punktid A ja B ning alguspunktiks O oleks lõigu AB keskpunkt. Punktidel X, A ja B on koordinaadid $X(x_1, x_2)$, $A(-c, 0)$ ja $B(c, 0)$, kus $c = |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$. Määrame järgnevalt vektorid

$$u = \overrightarrow{XA} = (-c - x_1,\ -x_2),$$
$$v = \overrightarrow{XB} = (c - x_1,\ -x_2)$$



Joon. 142.

ning määrame esialgu selliste punktide X hulga, mille korral $\tan \angle (u, v) = \tan \alpha$. Valemi (27.11) põhjal on nende punktide puhul rahuldatud tingimus

$$\tan \alpha = \frac{(-c - x_1)(-x_2) - (-x_2)(c - x_1)}{(-c - x_1)(c - x_1) + (-x_2)(-x_2)}$$

ehk

$$\tan \alpha = \frac{2cx_2}{x_1^2 + x_2^2 - c^2}. \qquad (68.10)$$

Siit saame otsitava hulga määramiseks võrrandi

$$x_1^2 + x_2^2 - c^2 = 2\frac{c}{\tan \alpha} x_2, \qquad (68.11)$$

mis on kergesti viidav kujju (68.5), milles praegu $a = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = -\frac{c}{\tan \alpha}$, $d = -c^2$. Et $b^2 - ad = \left(\frac{c}{\tan \alpha}\right)^2 + c^2 > 0$, siis võrrand (68.11) määrab teoreemi 68.1 kohaselt ringjoone keskpunktiga $C\left(0, \frac{c}{\tan \alpha}\right)$. Seejuures ringjoon läbib punktid A ja B, sest nende koordinaadid $x_1 = \pm c$, $x_2 = 0$ rahuldavad võrrandit (68.11).

Sellega ei ole aga veel leitud lahendus esialgsele ülesandele. On teada, et $\tan \alpha = \tan(\pi + \alpha)$, mistõttu tingimust (68.10) rahuldavad ka need punktid, mille korral $\angle(u, v) = \pi + \alpha$. Nende kõrvaldamiseks tuleb arvestada, et (68.10) parema poole lugeja märk ühtib (27.10) põhjal $\sin \alpha$ märgiga, mis on α ja $\pi + \alpha$ korral erinev. Järelikult, kui $0 < \alpha < \pi$, siis võrrandile lisandub võrratus $x_2 > 0$ (sest siis $\sin \alpha > 0$), kui aga $\pi < \alpha < 2\pi$, siis lisandub võrratus $x_2 < 0$. Ringjoonest tuleb seega võtta ainult üks kahest osast, mis on teine teisel pool sirget AB.

Selline on lahendus orienteeritud tasandil, kui nõuda, et $\alpha = \angle(u, v)$. Kui aga nõuda lihtsalt, et $\alpha = \sphericalangle(u, v)$, siis teoreemi 24.2 põhjal lisandub veel võimalus, kus $\alpha = 2\pi - \angle(u, v)$ ehk $\angle(u, v) = 2\pi - \alpha$. Sel korral võrduse $\tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ tõttu võrrandis (68.10) võib vasaku poole asemele asetada ka $-\tan \alpha$. Lisaks võrrandile (68.11) tekib uus võrrand, mis erineb temast asenduse $x_2 \to -x_2$ poolest. Vastava uue ringjoone vajalik osa on seega esialgsega sümmeetriline sirge AB suhtes.

69. Puutuja ja potents. Vaatleme võrrandiga (68.1) antud ringjoone või sfääri lõikumist sirgega, mille parameetriliseks vektorvõrrandiks on

$$x=a+kt. \tag{69.1}$$

Siin a on sirge punkti A kohavektor $\overrightarrow{OA}$ ja k on sirge sihivektor. Lihtsuse mõttes eeldame, et $|k|=1$. Lõikepunktide leidmiseks tuleb sirge võrrandist (69.1) teha asendus võrrandisse (68.1):

$$[(a+kt)-c]^2=R^2.$$

Pärast vajalike tehete tegemist on tulemuseks järgmine ruutvõrrand lõikepunkte määravate parameetri t väärtuste leidmiseks:

$$t^2-2(c-a)kt+(c-a)^2-R^2=0. \tag{69.2}$$

Vaatleme esialgu juhtu, mil sellel võrrandil on kaks võrdset lahendit. Sirgel on siis ringjoone või sfääriga üksainus ühine punkt Y ning teda nimetatakse ringjoone või sfääri puutujaks punktis Y. Sel korral ruutvõrrandi diskriminant on võrdne nulliga (s. t. lahendusvalemis kaob liige $\pm\sqrt{(\ldots)}$) ning võrrandi ainsaks lahendiks on

$$t=(c-a)k.$$

Punkti Y, niinimetatud puutepunkti kohavektoriks on seega

$$y=a+k[(c-a)k].$$

Keskpunktist C puutepunkti Y suunduvaks vektoriks on

$$\overrightarrow{CY}=y-c=(a-c)+k[(c-a)k],$$

mistõttu

$$\overrightarrow{CY}k=\{(a-c)+k[(c-a)k]\}k=(a-c)k+(c-a)k=0$$

ning seega $\overrightarrow{CY}\perp k$. Tulemus ütleb, et *ringjoone või sfääri puutuja punktis Y on risti puutepunkti Y ja keskpunkti C ühendava sirgega.*

Tasandil ringjoone korral on puutuja selle tingimusega määratud üheselt. Ruumis sfääri puhul järeldub siit, et kõik puutujad punktis Y on ühel tasandil, mis läbib Y ja mille normaalvektoriks on $n=\overrightarrow{CY}=y-c$. Seda tasandit nimetatakse sfääri puutujatasandiks punktis Y, tema võrrandiks on (52.2) põhjal

$$(y-c)(x-y)=0. \tag{69.3}$$

(See on ühtlasi ka ringjoone puutuja võrrand vektorkujul.) Tehes siin vajalikud tehted

$$yx-cx+cy-y^2=0, \tag{69.4}$$

korrutades saadud võrrandi läbi reaalarvuga $a \neq 0$ ning arvestades, et $\boldsymbol{y}$ kui sfääri punkti Y kohavektor rahuldab võrrandit (68.4):

$$ay^2+2by+d=0, \tag{69.5}$$

kus $\boldsymbol{b}=-c\boldsymbol{a}$, saame pärast (69.4) ja (69.5) poolte liitmist puutujatasandi võrrandile kuju

$$ayx+b(y+x)+d=0. \tag{69.6}$$

See kuju pakub huvi selle poolest, et ta on saadud sfääri võrrandist (68.4) puutepunkti Y kohavektori asendamisel vasakusse poolde n.-ö. pooliti. Teda on hea kasutada siis, kui kespunkti C kohavektor (ehk koordinaadid) ei ole leitud. (Tasandil esitab võrrand (69.6) võrrandiga (68.4) antud ringjoonele selle punktis Y tõmmatud puutuja; ta on punktis Y samaväärne võrrandiga

$$a(y_1x_1+y_2x_2)+b_1(y_1+x_1)+b_2(y_2+x_2)+d=0, \tag{69.7}$$

kus $Y(y_1, y_2)$, vrd. (68.5).)

Võrrandist (69.2) võib teha veel teise olulise järelduse. Oletame, et sellel võrrandil on kaks reaalset lahendit t_1 ja t_2, mis määravad sirge ja ringjoone või sfääri lõikepunktid X_1 ja X_2 kohavektoritega $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k}t_1$, $\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k}t_2$. Sel puhul $\overrightarrow{AX_i}=\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{k}t_i$, mistõttu $|\overrightarrow{AX_i}|=|\boldsymbol{k}t_i|=|t_i||\boldsymbol{k}|=|t_i|$ ning järelikult $|\overrightarrow{AX_1}||\overrightarrow{AX_2}|=|t_1t_2|$. Et võrrandi (69.2) lahendite t_1 ja t_2 korrutis on võrdne võrrandi vabaliikmega:

$$t_1t_2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})^2-R^2, \tag{69.8}$$

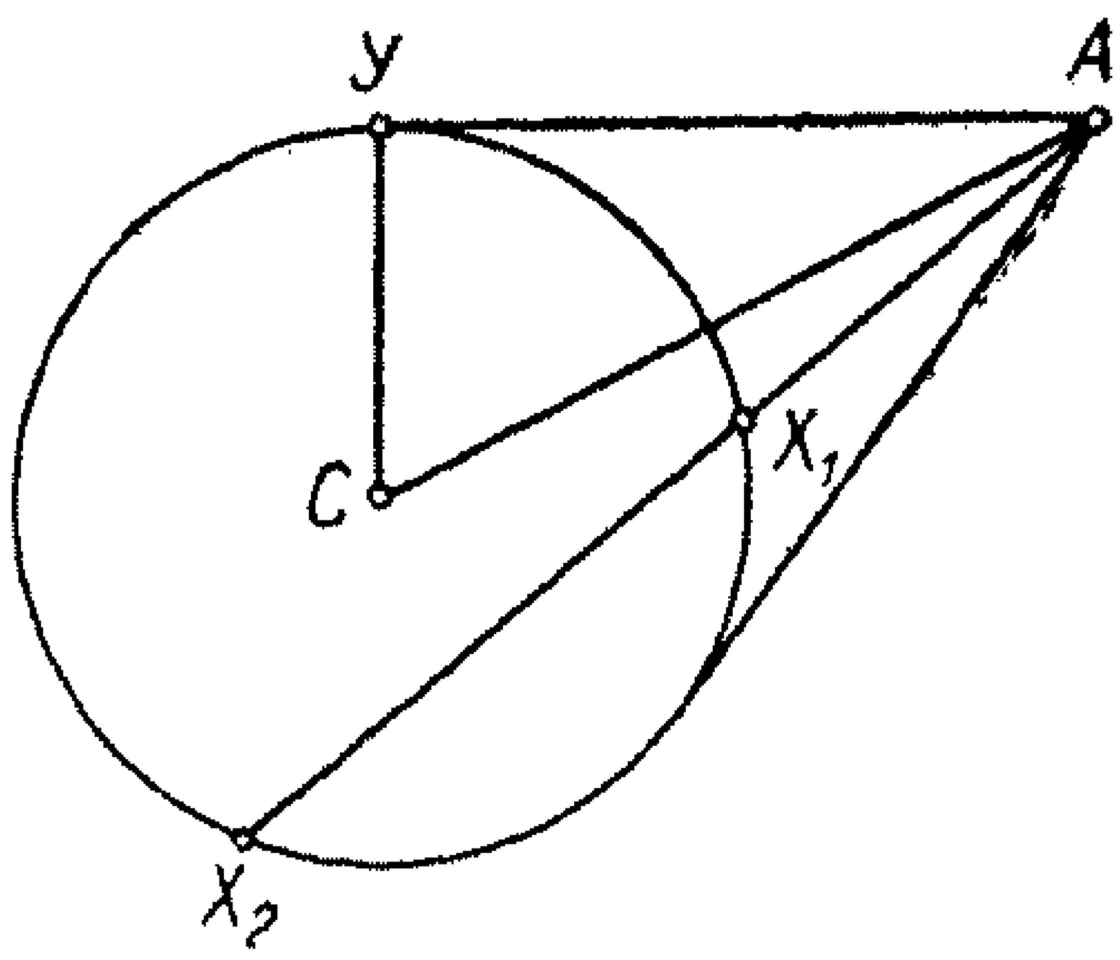
siis

$$|\overrightarrow{AX_1}|\,|\overrightarrow{AX_2}|=|(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})^2-R^2| \tag{69.9}$$

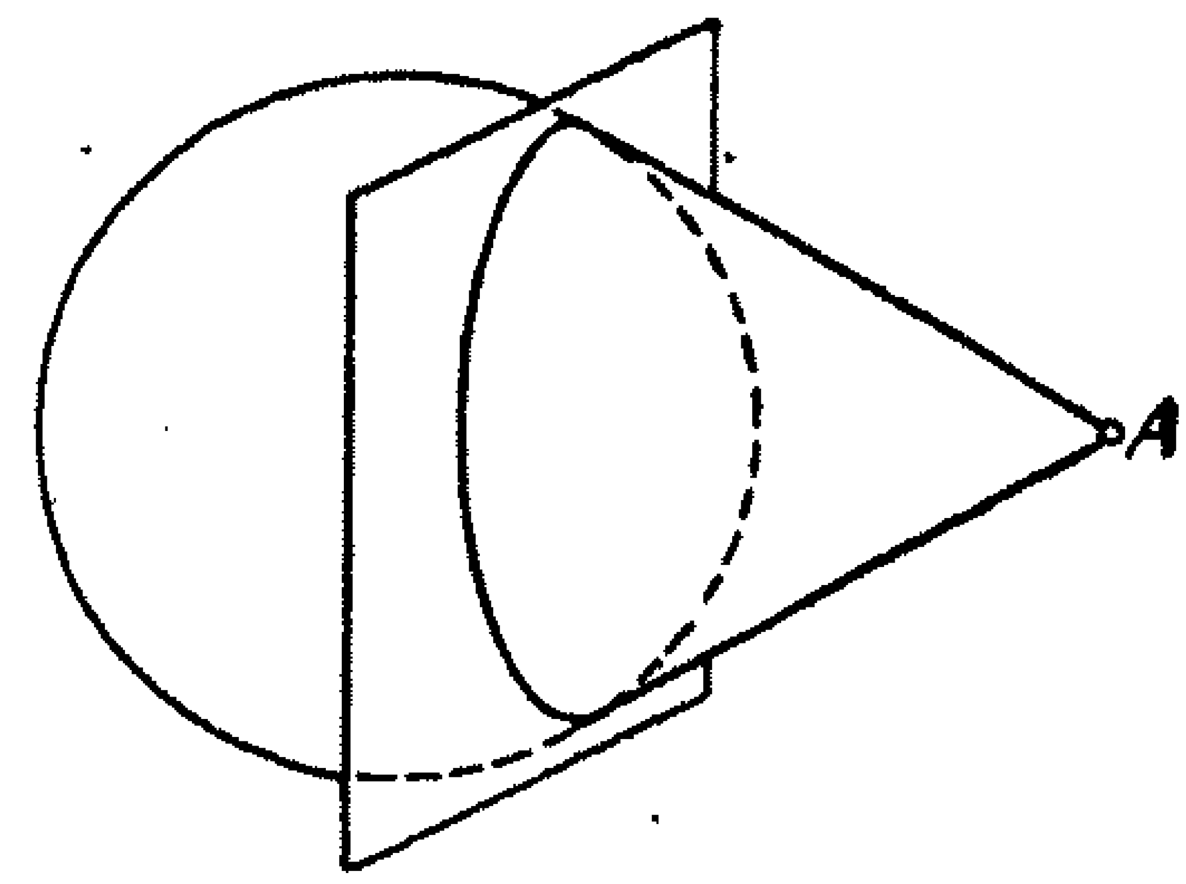
ning kauguste $|\overrightarrow{AX_1}|$ ja $|\overrightarrow{AX_2}|$ korrutis, nagu näha, ei sõltu üldse läbi punkti A tõmmatud sirge sihist (s. t. ühikvektori $\boldsymbol{k}$ valikust).

***Def.* 69.1.** Reaalarvu (69.8), mis saadakse punkti A kohavektori (ehk koordinaatide) asendamisel ringjoone või sfääri võrrandi $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})^2-R^2=0$ (vrd. (68.1)) (ehk samasuguselt korraldatud võrrandi (68.2) või võrrandi (68.3)) vasakusse poolde, nimetatakse punkti A p o t e n t s i k s antud ringjoone või sfääri suhtes.

Punkti A potentsi absoluutväärtus on tõlgendatav võrduse (69.9) vasaku poolena. Potentsi märk iseloomustab punkti A asendit ringjoone või sfääri suhtes. Kui potents on positiivne, siis (69.8) põhjal t_1 ja t_2 on samamärgilised, ning et A ise vastab väärtusele 0, siis sel juhul A ei ole X_1 ja X_2 vahel — öeldakse,



Joon. 143.



Joon. 144.

et A on väljaspool ringjoont või sfääri. Kui potents on negatiivne, siis on olukord vastupidine ning öeldakse, et A on ringjoone või sfääri sees. Potentsi võrdumine nulliga tähendab A asumist ringjoonel või sfääril.

Ühemärgilised t_1 ja t_2 võivad k muutumisel piirjuhul ühtida. Väljaspool ringjoont või sfääri olevat punkti A läbiva sirge piirasendiks on siis puutuja punktis Y. Võrduse (69.9) vasakule poole saame sel korral suuruse $|\overrightarrow{AY}|^2$. Järelikult väljaspool ringjoont või sfääri oleva punkti A potents on ühtlasi võrdne puutujalõigu AY pikkuse ruuduga. Et $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}| = |\overrightarrow{CA}|$ ja $R = |\overrightarrow{CY}|$, siis tulemus

$$|\overrightarrow{AY}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 - |\overrightarrow{CY}|^2$$

on tõlgendatav ka seosena kolmnurga $\triangle AYC$ küljepikkuste vahel (joon. 143).

Ühtlasi järeldub siit, et kõigi punktist A ringjoonele või sfäärile tõmmatud puutujate puutepunktid Y on punktist A võrdsetel kaugustel — selle kauguse ruuduks on A potents ringjoone või sfääri suhtes.

Et sfääri iga sellises punktis Y võetud puutujatasand (69.6) läbib punkti A, siis

$$\boldsymbol{aya} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a}) + d = 0,$$

kus $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{ac}$, s. t. kõik sellised puutepunktid Y on ühel tasandil, mille võrrandiks on $\boldsymbol{aax} - \boldsymbol{ac}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}) + d = 0$ ehk

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\boldsymbol{x} + d - \boldsymbol{aac} = 0$$

ning normaalvektoriks seega $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c} = \overrightarrow{CA}$. Seda tasandit nimetatakse punkti A p o l a a r i k s antud sfääri suhtes (joon. 144).

Analoogiliselt defineeritakse A polaar ringjoone suhtes kui punktist A ringjoonele tõmmatud puutujate puutepunkte läbiv sirge.

Eeltoodust järeldub ühtlasi ruutvõrratuste

$$a(x_1^2+x_2^2)+2b_1x_1+2b_2x_2+d>0, \tag{69.10}$$

$$a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2b_1x_1+2b_2x_2+2b_3x_3+d>0 \tag{69.11}$$

geomeetriline tähendus. Kui $a>0$, siis need võrratused on samaväärsed vastavalt võrratustega

$$(x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2-R^2>0,$$

$$(x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2-R^2>0$$

ning punktideks, mille ristkoordinaadid rahuldavad neid võrratusi, on vastavalt tasandi või ruumi kõik punktid, mille potents on positiivne, s. t. kõik punktid, mis on väljaspool sellist ringjoont või sfääri, mille võrrand saadakse nõude >0 asendamisel nõudega $=0$. (Kui saadavale võrrandile vastab imaginaarne sfäär või ringjoon, siis rahuldavad võrratust (69.10) või (69.11) kõigi punktide koordinaadid.) Selline on olukord, kui kehtivad võrratused $a>0$ ja (69.10) [või (69.11)]. Kui ühes neist võrratustest on >0 asemel <0, siis on olukord vastupidine — välimiste punktide asemel tulevad sisemised. Kui mõlemas on >0 asemel <0, siis jõuame tagasi esialgse olukorra juurde.

Olgu antud kaks ringjoont või sfääri võrranditega

$$(\mathbf{x}-\mathbf{c}_1)^2-R_1^2=0, \qquad (\mathbf{x}-\mathbf{c}_2)^2-R_2^2=0 \tag{69.12}$$

ning olgu neil mitteühtivad keskpunktid C_1 ja C_2. Määrame tasandi või ruumi kõigi selliste punktide hulga, mille potentsid nende ringjoonte või sfääride suhtes on võrdsed. Nende punktide kohavektorid $\mathbf{x}$ rahuldavad def. 69.1 põhjal tingimust

$$(\mathbf{x}-\mathbf{c}_1^2)-R_1^2=(\mathbf{x}-\mathbf{c}_2)^2-R_2^2,$$

millest pärast vajalike tehete sooritamist

$$\mathbf{x}^2-2\mathbf{c}_1\mathbf{x}+\mathbf{c}_1^2-R_1^2=\mathbf{x}^2-2\mathbf{c}_2\mathbf{x}+\mathbf{c}_2^2-R_2^2$$

ja lihtsaid teisendusi saame võrrandi

$$(\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_1)\mathbf{x}+\frac{1}{2}(\mathbf{c}_1^2-\mathbf{c}_2^2-R_1^2+R_2^2)=0. \tag{69.13}$$

Viimane määrab tasandil sirge ning ruumis tasandi, mille normaalvektoriks on $\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_1=\overrightarrow{C_1C_2}$ (erinevate C_1 ja C_2 korral see erineb nullvektorist) ning mis on seetõttu risti keskpunkte ühendava sirgega. Seda sirget või tasandit nimetatakse vastavalt antud kahe ringjoone radikaalteljeks või kahe antud sfääri r a d i k a a l t a s a n d i k s.

Kui antud kaks ringjoont või sfääri omavad ühiseid punkte, siis viimaste potentsideks kummagi suhtes on 0, mistõttu kõik need ühised punktid kuuluvad radikaalteljele või -tasandile. Järelikult radikaaltelg või -tasand läbib antud kahe ringjoone või sfääri kõiki lõikepunkte.

Eespool selgus, et sirge saab ringjoont lõigata mitte rohkem kui kahes punktis. Seetõttu ka kaks ringjoont saavad lõikuda mitte rohkem kui kahes punktis. Kui ühiseid punkte on üksainus, siis öeldakse, et ringjooned puutuvad, radikaaltelg on siis nende ühiseks puutujaks.

Sfääri ja tasandi lõikepunktide hulk kujutab endast ringjoont, sest ristreeperi võib alati valida nii, et tasand on x_1x_2-tasandiks, selle võrrandi $x_3=0$ arvestamine sfääri võrrandis (68.3) aga annab võrrandi

$$(x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2=R^2-c_3^2, \tag{69.14}$$

mis juhul, kui $R^2-c_3^2>0$, osutub parajasti teatava ringjoone võrrandiks. Järelikult on ka kahe sfääri lõige ringjoon. Iga ringjoone ruumis võib seega esitada kahe võrrandi (69.12) süsteemiga, milles ühe võrrandeist võib asendada ka lihtsama võrrandiga (69.13).

Lõikena saadav ringjoon võrrandiga (69.14) on suurima raadiusega, kui $c_3=0$, s. t. kui sfääri keskpunkt C on lõiketasandil (praegu x_1x_2-tasand). Sfääri lõiget keskpunkti C läbiva tasandiga nimetatakse sfääri s u u r r i n g j o o n e k s.

§ 13. PÖÖRDSILINDRID JA -KOONUSED

Ringjoone või sfääri defineerimisel on aluseks kahe punkti vahelise kauguse mõiste. Eukleidilise ruumi geomeetrias tuntakse veel teisigi lihtsaid reaalarvulisi invariante, mida võib analoogiliselt võtta aluseks teatavate punktihulkade defineerimisel. Nii võimaldab punkti kaugus sirgest defineerida pöördsilindri, kahe lõikuva sirge vaheline nurk aga pöördkoonuse. Käesoleva paragrahvi pühendamegi nende uurimisele. Selgub näiteks, et nii pöördsilinder kui pöördkoonus koosnevad sirgetest — esimene paralleelsetest, teine üht punkti läbivatest sirgetest. Huvipakkuvad on nende pindade lõiked tasanditega, mis ei sisalda ühtegi neist sirgetest. Sel teel saadud punktihulki nimetatakse ühiselt koonuselõigeteks. Kuigi koonuselõiked defineeritakse siin esialgu stereomeetria mõistete abil, on nad oma loomult eukleidilise planimeetria objektid. Kuid sellistena asume neid uurima alles järgmises paragrahvis.

70. Pöördsilinder. Vaatleme punktihulka ruumis, mida defineeritakse järgmiselt.

Def. **70.1.** P ö ö r d s i l i n d r i k s nimetatakse ruumi kõigi selliste punktide X hulka, mis on antud sirgest antud kaugusel R. Reaalarvu R nimetatakse pöördsilindri r a a d i u s e k s, antud sirget — t e l j e k s.

Olgu telg antud punktiga A ja sihiühikvektoriga $\boldsymbol{k}$ (joon. 145). Punktide X ja A kohavektoreiks olgu $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{a}$. Punkt X kuulub valemi (53.2) põhjal pöördsilindrile parajasti siis, kui

$$|\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})|=R \tag{70.1}$$

(sest $|\boldsymbol{k}|=1$), s. t. kui $|\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})|^2=R^2$. Võrduse (31.10) abil saab sellele tingimusele anda kuju

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2-[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})]^2=R^2 \tag{70.2}$$

ehk ristkoordinaatides

$$\begin{gathered}(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2-\\-[k_1(x_1-a_1)+k_2(x_2-a_2)+k_3(x_3-a_3)]^2=R^2.\end{gathered} \tag{70.3}$$

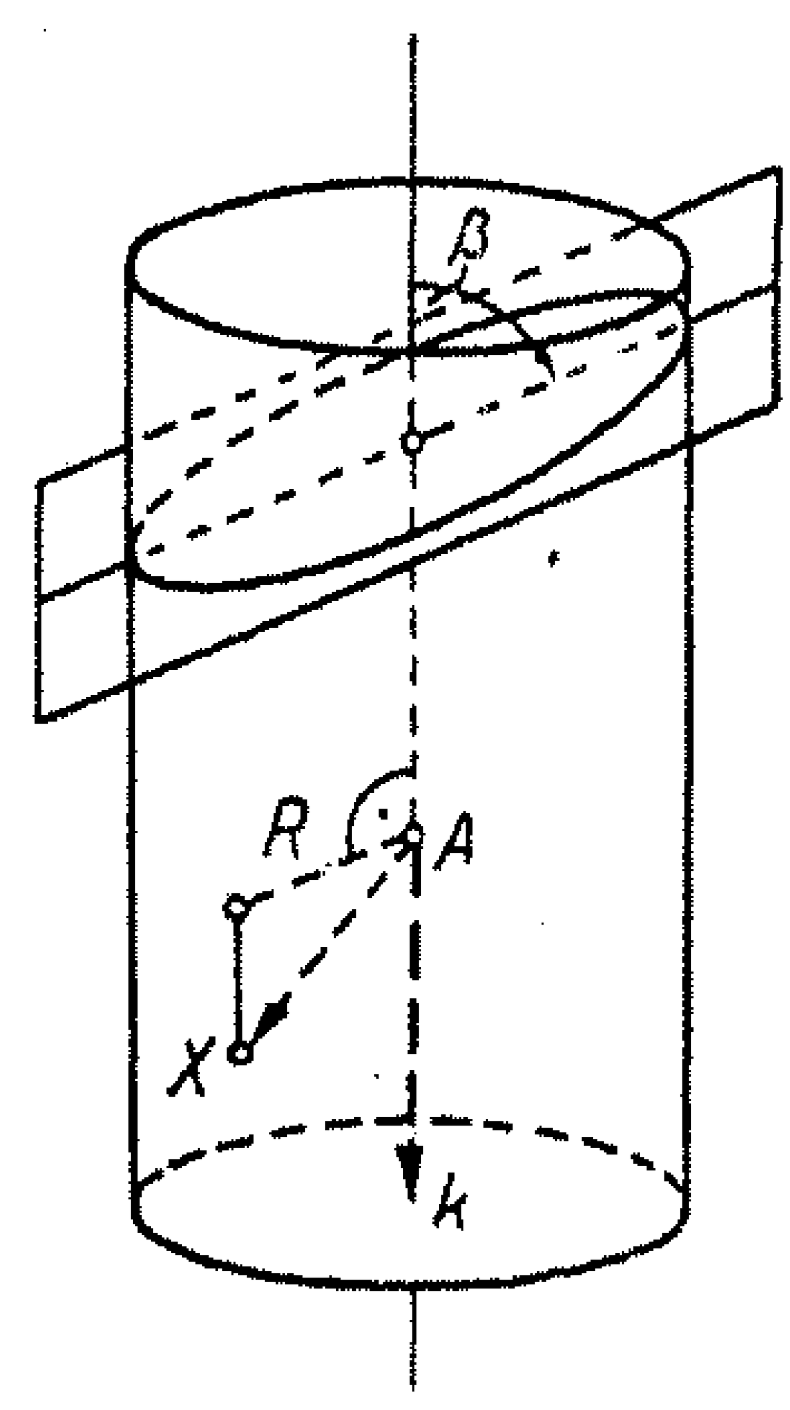
Tulemus kujutab endast pöördsilindri võrrandit.

Osutub, et *pöördsilinder koosneb teljega paralleelsetest sirgetest* — tema iga punkti X_0 kohavektoriga $\boldsymbol{x}_0$ läbib üks selline sirge (võrrandiga $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+u\boldsymbol{k}$), mille iga punkt X on pöördsilindril. Tõepoolest, et X_0 on pöördsilindril, siis $|\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{a})|=R$. Järelikult

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{x}_0+u\boldsymbol{k}-\boldsymbol{a})|&=|\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{k}\times(u\boldsymbol{k})|=\\&=|\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{a})|=R,\end{aligned}$$

sest $\boldsymbol{k}\times(u\boldsymbol{k})=u(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})=u\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$, mistõttu ka X on tõesti pöördsilindril.

Sirgeid, milledest pöördsilinder koosneb, nimetatakse tema sirgjoonelisteks moodustajateks, sageli ka lihtsalt m o o d u s t a j a t e k s.



Joon. 145.

Pöördsilindri võrrand (70.3) on eriti lihtne, kui ristreeper valida selliselt, et pöördsilindri telg oleks x_3-teljeks, s. t. nii, et $A(0, 0, 0)$ ja $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{e}_3=(0, 0, 1)$. Kui asendada võrrandisse (70.3) $a_1=a_2=a_3=0$, $k_1=k_2=0$, $k_3=1$, on tulemuseks

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_3^2=R^2$$

ehk

$$x_1^2+x_2^2=R^2. \tag{70.4}$$

Pöördsilindri võrrandi see lihtne kuju ühtib väliselt sellise ringjoone võrrandiga, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis, erinevus on aga selles, et võrrand (70.4) seob nüüd ruumi punkti $X(x_1, x_2, x_3)$ koordinaate. Asjaolu, et ta jätab ühe koordinaadi x_3 vabaks, on heas kooskõlas sellega, et tema poolt määratud pöördsilinder koosneb teljega (praegu x_3-teljega) paralleelsetest sirgetest. Iga selline sirge määratakse x_1 ja x_2 fikseeritud väärtustega, mis peavad rahuldama võrrandit (70.4), kusjuures x_3 muutub täiesti vabalt.

Kui võrrandit (70.4) vaadelda x_1x_2-tasandil, s. t. koos võrrandiga $x_3 = 0$, siis ta määrab ringjoone, mis kujutab pöördsilindri lõiget x_1x_2-tasandiga. Viimaseks võib võtta pöördsilindri teljega ristuva iga tasandi, mistõttu pöördsilindri lõige iga sellise tasandiga on ringjoon, kusjuures ringjoone raadiused on, nagu näha, võrdsed pöördsilindri enda raadiusega R.

Kui vaadelda kujutust, mis ruumi punktile $X(x_1, x_2, x_3)$ seab vastavusse x_1x_2-tasandi punkti $X'(x_1, x_2, 0)$, ning nimetada teda punkti X ristprojekteerimiseks x_1x_2-tasandile, siis võib öelda, et pöördsilindri kõik punktid projekteeruvad (s. t. kujutuvad ristprojekteerimisel) teatava ühe ja sama ringjoone punktideks.

Selle ringjoone võib esitada parameetriliste võrranditega

$$x_1 = R\cos\varphi, \qquad x_2 = R\sin\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

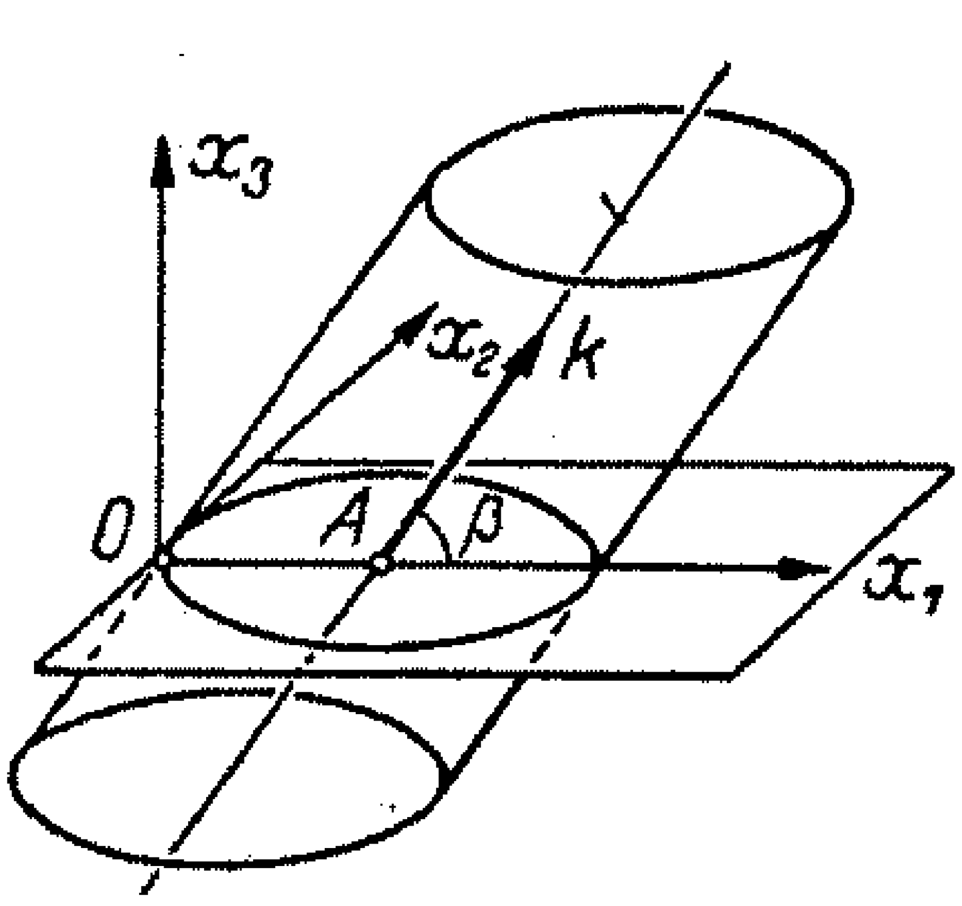
Pöördsilindri iga punkti saab nüüd määrata arvupaariga (φ, x_3), $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Ruumi iga punkt X, mis pole x_3-teljel, asetseb teataval sellisel pöördsilindril, mille teljeks on see x_3-telg ja raadiuseks punkti X kaugus r sellest teljest. Järelikult saab punkti X määrata reaalarvukolmikuga (r, φ, x_3), kus $r > 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Selle kolmiku arve nimetatakse punkti X *silindrilisteks koordinaatideks*. Erandlikeks on x_3-telje punktid, kus $r = 0$ ja φ jääb määramatuks. Silindriliste koordinaatide puhul on pöördsilindri võrrand maksimaalselt lihtne: $r = R = \text{const}$.

***Def.* 70.2.** Pöördsilindri lõiget tasandiga, mis lõikab telge, kuid mitte risti, nimetatakse *ellipsiks* (joon. 145).

Lisaks ellipsitele on pöördsilindri lõigeteks tasanditega veel ringjooned, sirged ja paralleelsete sirgete paarid.

Tuletame ellipsi võrrandi, valides ristreeperi ruumis selliselt, et 1) lõiketasand oleks x_1x_2-tasandiks, 2) pöördsilindri telg oleks x_1x_3-tasandil ning 3) pöördsilinder läbiks alguspunkti $O(0, 0, 0)$ (joon. 146).



Joon. 146.

Eelduse 2) põhjal võrrandis (70.3) $a_2 = a_3 = 0$, ning kui nurk $\angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{k})$ tähistada β, siis $k_1 = \cos\beta$, $k_2 = 0$,

$k_3 = \sin\beta$. Seejuures eelduse 1) põhjal lõiketasandil punktides $x_3 = 0$. Tehes kõik need asendused võrrandis (70.3), saame:

$$(x_1 - a_1)^2 + x_2^2 + a_3^2 - [(x_1 - a_1)\cos\beta]^2 - R^2 = 0.$$

Pärast tehete sooritamist tuleb siin arvestada eeldust 3), mille põhjal tekkiva võrrandi vabaliige on võrdne nulliga. Seetõttu on tulemuseks

$$x_1^2 - 2a_1x_1 + x_2^2 - (x_1^2 - 2a_1x_1)\cos^2\beta = 0$$

ehk

$$x_2^2 = 2px_1 - x_1^2\sin^2\beta, \qquad (70.5)$$

kus $p = a_1\sin^2\beta$. Erijuhul, kui $\beta = \frac{\pi}{2}$, saame siit võrrandi

$$x_2^2 = -x_1^2 + 2a_1x_1 \qquad (70.6)$$

ehk

$$(x_1 - a_1)^2 + x_2^2 = a_1^2,$$

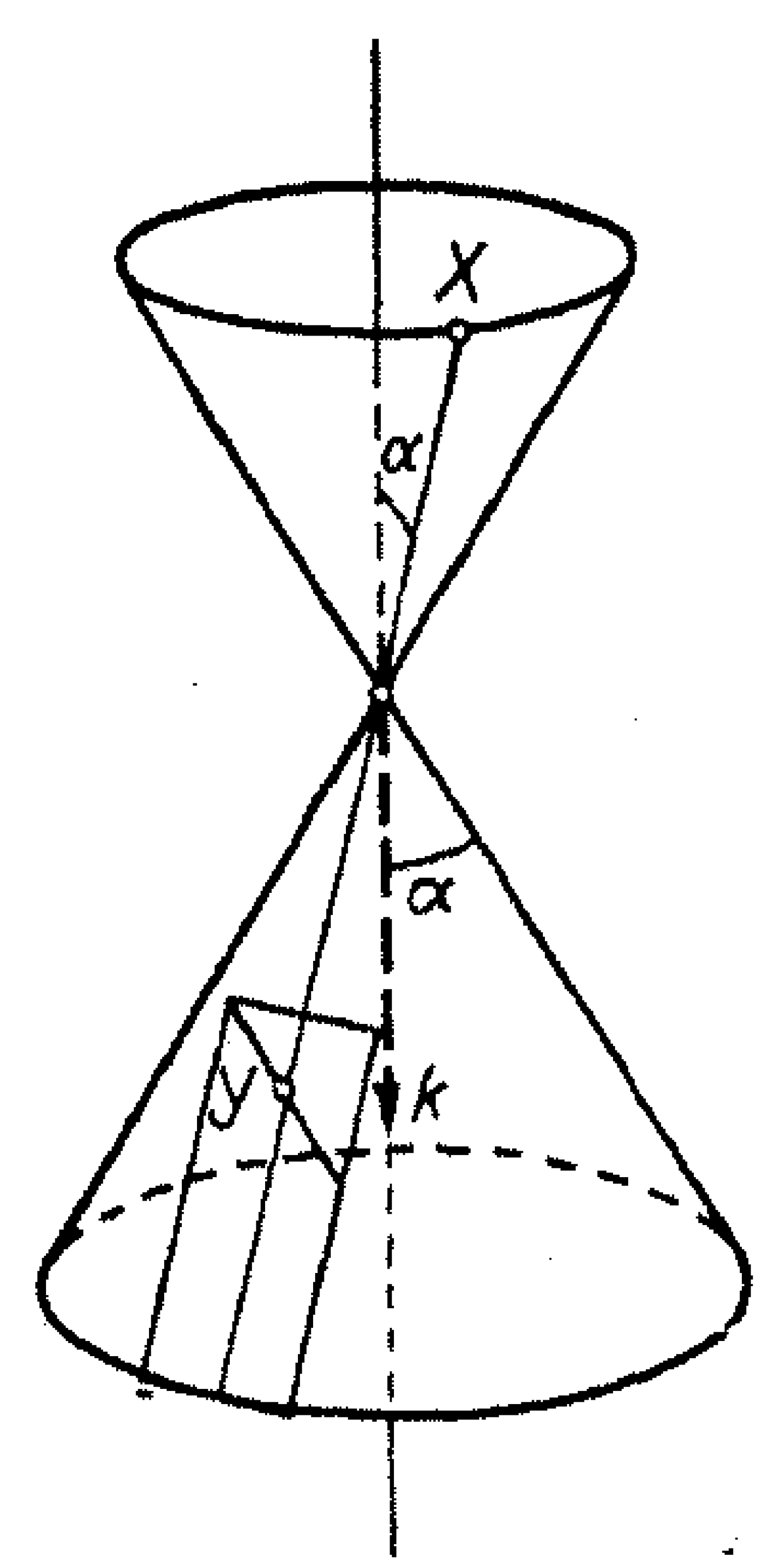
mis määrab x_1x_2-tasandil ringjoone keskpunktiga $(a_1, 0, 0)$ ja raadiusega $|a_1|$. Analoogilisse kujju

$$(x_1 - a_1)^2\sin^2\beta + x_2^2 = (a_1\sin\beta)^2 \qquad (70.7)$$

on korraldatav ka ellipsi võrrand (70.5). Ellipsi lähema uurimisega tegeleme edaspidi art-s 76.

71. Pöördkoonus. Lähtume nüüd järgmisest definitsioonist.

***Def.* 71.1.** Ruumi kõigi selliste punktide X hulka, millesse antud punktist A suunduvad vektorid $\overrightarrow{AX}$ moodustavad antud sihi vektoritega antud nurga α, nimetatakse p ö ö r d k o o n u s e k s (joon. 147). Punkti A nimetatakse selle t i p u k s, punkti A läbivat antud sihiga sirget — t e l j e k s.



Joon. 147.

Kui antud sihis võtta vabalt ühikvektor $\boldsymbol{k}$ ja punktide X ja A kohavektorid tähistada $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{a}$, siis $|\boldsymbol{k}| = 1$, $\overrightarrow{AX} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ ning def. 71.1 ja valemi (28.12) põhjal

$$\frac{(\pm\boldsymbol{k})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|} = \cos\alpha$$

ehk

$$[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})]^2 - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^2\cos^2\alpha = 0. \qquad (71.1)$$

Saadud tingimus, mis ei muutu vektori $\boldsymbol{k}$ asendamisel teise ühikvektoriga $-\boldsymbol{k}$ samas sihis ning on ristkoordinaatide abil kirjutatav kujul

$$[k_1(x_1-a_1)+k_2(x_2-a_2)+k_3(x_3-a_3)]^2-$$
$$-[(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2]\cos^2\alpha=0, \qquad (71.2)$$

kujutab endast pöördkoonuse võrrandit.

Osutub, et *pöördkoonus koosneb tippu A läbivatest sirgetest* — tema iga punkti X_0 kohavektoriga $\boldsymbol{x}_0$ läbib üks selline sirge (võrrandiga $\boldsymbol{x}=u\boldsymbol{a}+(1-u)\boldsymbol{x}_0$), mille kõik punktid X on pöördkoonusel. Tõepoolest, et X_0 on pöördkoonusel, siis

$$[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{a})]^2-(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{a})^2\cos^2\alpha=0.$$

Järelikult

$$[\boldsymbol{k}(u\boldsymbol{a}+(1-u)\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{a})]^2-(u\boldsymbol{a}+(1-u)\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{a})^2\cos^2\alpha=$$
$$=(1-u)^2\{[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{a})]^2-(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{a})^2\cos^2\alpha\}=0,$$

mistõttu ka X on tõesti pöördkoonusel.

Sirgeid, millest pöördkoonus koosneb, nimetatakse tema sirgjoonelisteks moodustajateks ehk lihtsalt m o o d u s t a j a t e k s. Tipp jagab iga sellise moodustaja kaheks poolsirgeks ning pöördkoonuse seetõttu kaheks eraldi osaks. Neid osi nimetatakse pöördkoonuse k a t e t e k s.

Pöördkoonuse võrrand (71.2) on eriti lihtne, kui ristreeper valida selliselt, et pöördkoonuse tipp A on alguspunktiks $O(0, 0, 0)$ ja telg on x_3-teljeks. Et viimase sihiühikvektoriks on $\boldsymbol{e}_3=(0, 0, 1)$, siis sel puhul $a_1=a_2=a_3=0$, $k_1=k_2=0$, $k_3=1$. Kui need väärtused asendada võrrandisse (71.2), on tulemuseks

$$x_3^2-[x_1^2+x_2^2+x_3^2]\cos^2\alpha=0$$

ehk

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2\tan^2\alpha=0. \qquad (71.3)$$

Siit on näha, et pöördkoonuse lõikeks teljega ristuva tasandiga $x_3=h$ on ringjoon, sest lõike võrrand on

$$x_1^2+x_2^2=(h\tan\alpha)^2.$$

Ringjoone keskpunkt on teljel, raadiuseks on $R=|h\tan\alpha|$.

Osutub, et pöördsilindrit võib vaadelda pöördkoonuse piirjuhuna, kui viimasel fikseerida teatav ringjoon ja lasta tippu piiramatult kaugeneda. Põhjenduseks valime ristreeperi selliselt, et pöördkoonuse teljeks oleks endiselt x_3-telg, kuid tipuks oleks punkt $A(0, 0, a_3)$. Sel korral avaldub võrrand (71.2) kujul

$$(x_3-a_3)^2-[x_1^2+x_2^2+(x_3-a_3)^2]\cos^2\alpha=0$$

ehk

$$x_1^2+x_2^2-(x_3-a_3)^2\tan^2\alpha=0, \qquad (71.4)$$

mistõttu pöördkoonuse ja x_1x_2-tasandi lõikeringjoone võrrand on

$$x_1^2+x_2^2=a_3^2\tan^2\alpha.$$

Selle ringjoone fikseerimisel raadius $R=|a_3|\tan\alpha$ on konstantne, mistõttu

$$\tan^2\alpha=\frac{R^2}{a_3^2}.$$

Asendamisel võrrandisse (71.4) saame

$$x_1^2+x_2^2-\frac{x_3^2R^2}{a_3^2}+2\frac{x_3R^2}{a_3}-R^2=0$$

ning siit piirprotsessis $a_3\to\infty$ tekib tõepoolest pöördsilindri võrrand (70.4).

Pöördkoonuse (piirjuhul pöördsilindri) punkti Y läbivat sirget, millel on pöördkoonusega üksainus ühine punkt Y, nimetatakse pöördkoonuse puutujaks punktis Y. Punkti Y ennast nimetatakse sel korral puutepunktiks (joon. 147).

Punkti Y läbiv sirge on esitatav parameetriliste võrranditega

$$x_i=y_i+tl_i.$$

Paremate poolte asendamisel pöördkoonuse võrrandisse (71.4) tekib võrrand

$$(y_1+tl_1)^2+(y_2+tl_2)^2-(y_3+tl_3-a_3)^2\tan^2\alpha=0$$

t suhtes, mille vabaliige on võrdne nulliga, sest Y asub pöördkoonusel. Järelikult saadava võrrandi

$$(l_1^2+l_2^2-l_3^2\tan^2\alpha)t^2+2[y_1l_1+y_2l_2-(y_3-a_3)l_3\tan^2\alpha]t=0$$

üks lahend on $t=0$ (see määrab punkti Y enda). Puutuja korral peab ka teine lahend olema 0, s. t. peab olema rahuldatud tingimus

$$y_1l_1+y_2l_2-(y_3-a_3)l_3\tan^2\alpha=0.$$

Siit on näha, et punktis Y kõikide puutujate sihivektorid $\boldsymbol{l}$ kuuluvad rihile normaalvektoriga

$$\boldsymbol{n}=(y_1,\ y_2,\ -(y_3-a_3)\tan^2\alpha),$$

mistõttu kõikide puutujate punktid asuvad tasandil, mille võrrandiks on

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=0$$

ehk

$$y_1(x_1-y_1)+y_2(x_2-y_2)-(y_3-a_3)(x_3-y_3)\tan^2\alpha=0.$$

Et seejuures $y_1^2+y_2^2-(y_3-a_3)^2\tan^2\alpha=0$, siis see võrrand on korraldatav kujju

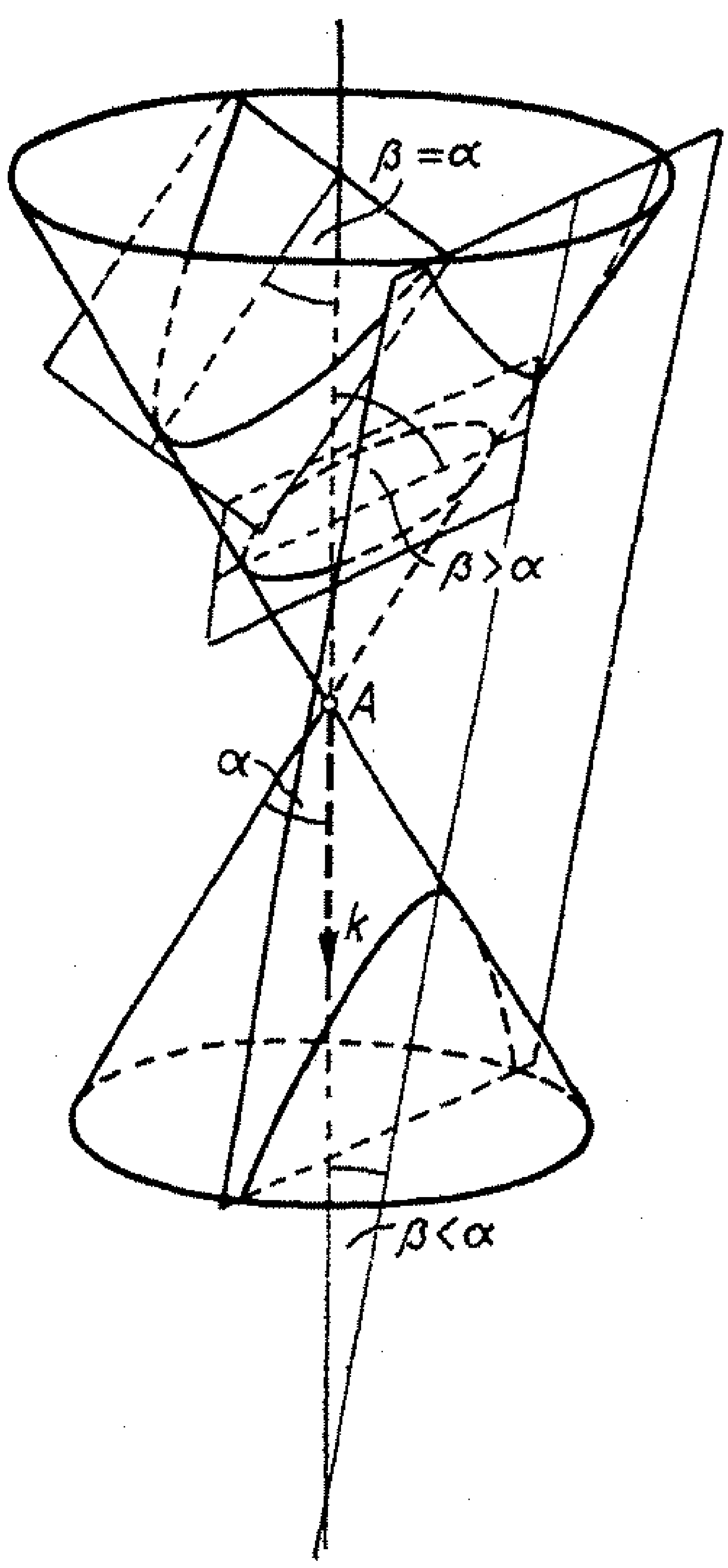
$$y_1x_1+y_2x_2-(y_3-a_3)(x_3-a_3)\tan^2\alpha=0. \qquad (71.5)$$

Saadud tasandit nimetatakse pöördkoonuse puutujatasandiks punktis $Y(y_1, y_2, y_3)$. Nagu näha, läbib ta tipu $A(0, 0, a_3)$ ning sisaldab seetõttu pöördkoonuse moodustaja AY. Piirjuhul, kui $a_3\to0$ ja $R^2=a_3^2\tan^2\alpha=\text{const.}$, saame võrrandi pöördsilindri puutujatasandile punktis $Y(y_1, y_2, y_3)$:

$$y_1x_1+y_2x_2-R^2=0. \qquad (71.6)$$

Mõlemad võrrandid (71.5) ja (71.6) on saadud puutepunkti Y koordinaatide «pooliti» asendamisel vastavalt pöördkoonuse võrrandisse (71.4) või pöördsilindri võrrandisse (70.4).

72. **Pöördkoonuse lõikamine tasandiga.** Osutub, et ka pöördkoonuse lõikamisel sobivalt valitud tasandiga võib lõikejoonena kätte saada ellipsi. Kuid pöördkoonuse lõiked tippu mitteläbivate tasanditega ei ole kõik ellipsid. Seetõttu on vajalik anda järgmine üldine definitsioon.



Joon. 148.

***Def.* 72.1.** Pöördkoonuse lõiget tasandiga, mis ei läbi tippu, nimetatakse koonuselõikeks (joon. 148).

Koonuselõike võrrandi saamiseks valime ristreeperi ruumis selliselt, et 1) lõiketasand oleks x_1x_2-tasandiks, 2) pöördkoonuse telg oleks x_1x_3-tasandil ning 3) pöördkoonus läbiks alguspunkti $O(0, 0, 0)$.

Eeldusest 2) järeldub, samuti nagu art-s 70, et $a_2=0$, $k_1=\cos\beta$, $k_2=0$, $k_3=\sin\beta$. Eelduse 1) põhjal lõiketasandi punktides $x_3=0$. Nende asenduste tegemisel võrrandis (71.2) saame:

$$[(x_1-a_1)\cos\beta+(-a_3)\sin\beta]^2-$$
$$-[(x_1-a_1)^2+x_2+(-a_3)^2]\cos^2\alpha=0.$$

Pärast tehete sooritamist tuleb siin arvestada eeldust 3), mille põhjal tekkiva võrrandi vabaliige on võrdne nulliga:

$$(a_1 \cos\beta + a_3 \sin\beta)^2 - (a_1^2 + a_3^2)\cos^2\alpha = 0. \tag{72.1}$$

Seetõttu on tulemuseks

$$x_1^2 \cos^2\beta - 2\cos\beta\,(a_1 \cos\beta + a_3 \sin\beta)\,x_1 - (x_1^2 - 2a_1x_1 + x_2^2)\cos^2\alpha = 0$$

ehk

$$x_2^2 = 2px_1 + (e^2 - 1)\,x_1^2, \tag{72.2}$$

kus

$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \tag{72.3}$$

ja

$$p = a_1\left(1 - \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}\right) - a_3\frac{\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha}. \tag{72.4}$$

Reaalarvu e nimetatakse koonuselõike ekstsentrilisuseks. Kui $e = 0$, s. t. kui $\cos\beta = 0$, siis võrrandist (72.2) tuleneb (72.4) põhjal parajasti ringjoone võrrand (70.6). Seega ringjoon on koonuselõike erijuht, mille puhul lõiketasand (praegu x_1x_2-tasand) on risti pöördkoonuse telje sihiga (praegu vektoriga $\boldsymbol{k} = (0,\ 0,\ 1)$).

Kui $0 < e < 1$, siis $0 < e^2 < 1$ ning $-1 < e^2 - 1 < 0$. Seega võib leida nurga γ, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$, nii et

$$e^2 - 1 = -\sin^2\gamma.$$

Koonuselõike võrrand (72.2) on sel juhul kirjutatav kujul

$$x_2^2 = -x_1^2 \sin^2\gamma + 2px_1,$$

mis erineb ellipsi võrrandist (70.5) ainult selle poolest, et β asemel on nüüd γ. Järelikult ellips on koonuselõike selline erijuht, mille puhul ekstsentrilisus e on positiivne, kuid väiksem kui 1.

Koonuselõiget, mille ekstsentrilisus on 1, s. t. mille korral $\cos\beta = \cos\alpha$ ehk $\beta = \alpha$, nimetatakse parabooliks. Parabooli võrrand on seega

$$x_2^2 = 2px_1. \tag{72.5}$$

Koonuselõiget, mille ekstsentrilisus on suurem kui 1, s. t.

$e > 1$, nimetatakse hüperbooliks[86]. Sel korral $\cos\beta > \cos\alpha$, s. t. $\beta < \alpha$.

Osutub, et koonuselõike tüüp, s. t. ekstsentrilisuse e väärtus, sõltub sellest, kas ja kui palju leidub pöördkoonuse moodustajaid, mis on paralleelsed lõiketasandiga. Et viimaseks on praegu x_1x_2-tasand, siis otsitavate moodustajate sihivektoreil peab kolmas koordinaat olema 0: $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, 0)$. Samal ajal peavad nad moodustama nurga α telje sihivektoriga $\boldsymbol{k} = (\cos\beta, 0, \sin\beta)$:

$$\frac{l_1 \cos\beta}{\sqrt{l_1^2+l_2^2}} = \cos\alpha.$$

Siit

$$l_1^2 \cos^2\beta = (l_1^2+l_2^2)\cos^2\alpha$$

ehk

$$l_1^2(e^2-1) = l_2^2.$$

Kui $e^2 < 1$, s. t. kui on tegemist ellipsiga, siis seda tingimust rahuldavad reaalarvud puuduvad, juhul $e^2 = 1$ (parabooli puhul) on ainus võimalus $l_2 = 0$, s. t. lõiketasand on paralleelne üheainsa moodustajaga. Hüperbooli korral $e^2 > 1$ ning leidub kaks moodustajat sihivektoritega

$$\boldsymbol{l}_1 = (1, \sqrt{e^2-1}, 0), \quad \boldsymbol{l}_2 = (1, -\sqrt{e^2-1}, 0), \tag{72.6}$$

millega lõiketasand on paralleelne.

Nende tulemuste alusel võib luua esialgse kujutluse ellipsist, paraboolist ja hüperboolist.[87] Ellips on kinnine lõplik joon, mis asetseb ainult pöördkoonuse ühel kattel. Parabool asetseb samuti ühel kattel, kuid on lahtine, sest tal pole punkti ühel moodustajal. Hüperbool asetseb kahel kattel ning koosneb seetõttu kahest eraldi osast. Mõlemad neist on lahtised, sest kummalgi pole punkte kahel moodustajal.

Koonuselõigete üksikasjalikuma uurimisega tegeleme järgmises paragrahvis, kasutades üksnes planimeetria mõisteid ja tulemusi.

---

[86] Nimetused «ellips», «parabool» ja «hüperbool» tulenevad kreekakeelsetest sõnadest ἔλλειψιζ (puudujääk), παραβολή (kõrvaleseadmine) ja ὑπερβολή (ülejääk) ning on seotud sellega, et parabooli puhul võrrandi (72.5) asemel vaadeldi Vana-Kreekas sellega samaväärset ülesannet: ehitada ruudu x_2^2 suurune ristkülik, mille küljeks on antud lõik $2p$; ellipsi puhul tuli seda teha puudujäägiga ((70.5) järgi: $-x_1^2 \sin^2\beta$), hüperbooli korral ülejäägiga ((72.2) järgi: $(e^2-1)x_1^2$; siin $e > 1$).

[87] Ühega nendest on tegemist näiteks alati siis, kui ringikujulise avaga abažuur heidab varju seinale; varju ääreks on kas ringjoon, ellips, parabool või hüperbool või mõne sellise joone osa.

§ 14. KOONUSELÕIKED

Koonuselõiked on eespool (art. 72) defineeritud joontena, mis tekivad pöördkoonuse lõikamisel tippu mitteläbiva tasandiga. Selliselt mõisteti neid jooni esialgu ka Vana-Kreekas, kus koonuselõigete uurimist alustati juba —4. sajandil[88] üheaegselt elementaargeomeetria korrastamisega rangelt deduktiivseks süsteemiks. Koonuselõigete süstemaatilise teooria andis Apollonius Pergest — 3. sajandil, s. o. samal sajandil, mille algul Eukleides süstematiseeris elementaargeomeetria oma «Elementides». Apolloniuse teoorias on tähtsamaid ülesandeid järgmine.

Koonuselõigete näol on tegemist tasandiliste joontega, seega planimeetria objektidega. Järelikult tuleb välja selgitada nende joonte niisugused omadused, mis võimaldaksid neid defineerida üksnes planimeetria enda abil, pöördkoonust ja tasandeid ruumis kasutamata.

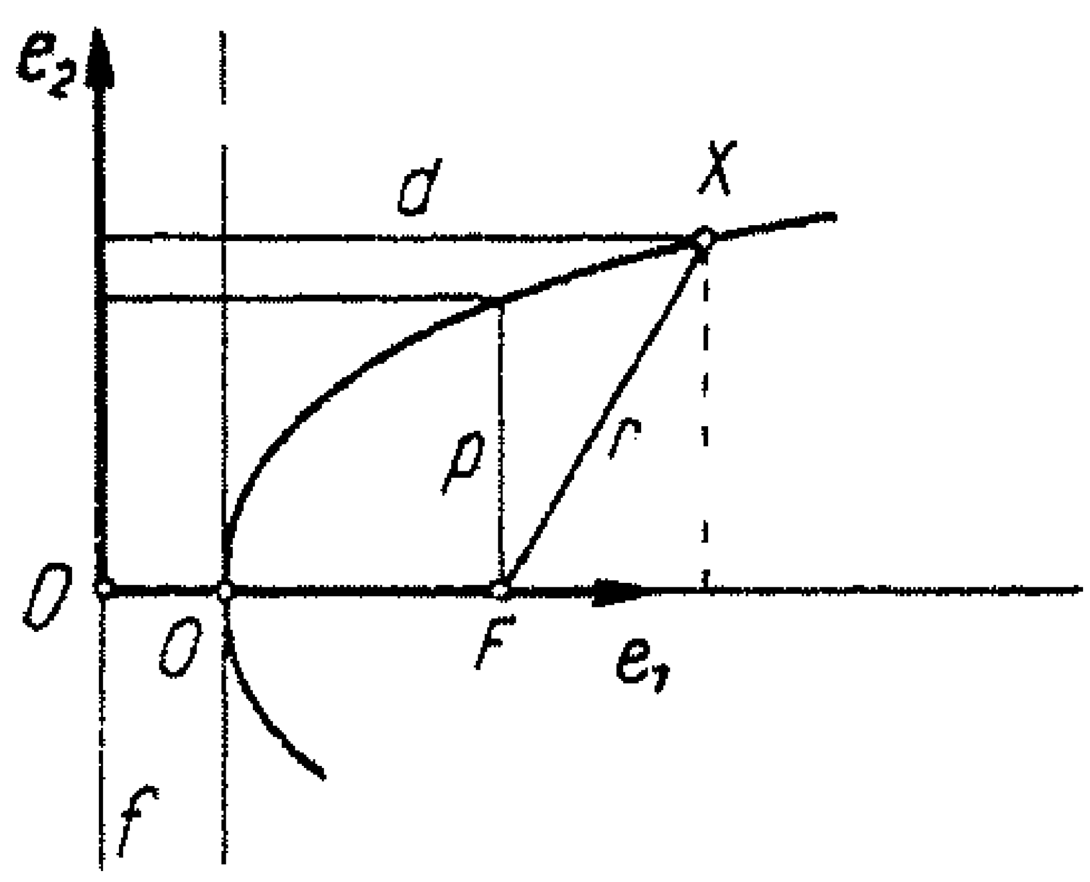
Selle ülesande lahendamisega alustame ka käesolevat paragrahvi. Selgub, et kõiki koonuselõikeid, välja arvatud ringjoon, saab tasandil ühiselt iseloomustada kui selliste punktide hulki, mille kaugused ühest kindlast punktist — fookusest — ja ühest kindlast sirgest — juhtsirgest ehk direktrissist — on etteantud positiivses suhtes e. Koonuselõigete edasine liigitamine ja uurimine käib selle suhte e väärtuse järgi. On omadusi, mille poolest koonuselõiked väärtusega $e = 1$ (paraboolid) erinevad koonuselõigetest väärtusega $e \neq 1$. Viimaste omadused sõltuvad omakorda oluliselt sellest, kas $e < 1$ (ellipsid) või $e > 1$ (hüperboolid). Allpool käsitleme detailselt kõiki neid juhte, uurime parabooli, ellipsi ja hüperbooli ehitust ning nende mitmesuguseid nii ühiseid kui ka spetsiifilisi omadusi.

73. Fookus ja juhtsirge. Ülalsõnastatud ülesandele andis äsja kirjeldatud lahenduse Apollonius juba — 3. sajandil, kasutades nn. sünteetilise geomeetria[89] meetodeid. Käesolevas artiklis põhjandame seda lahendust analüütilise geomeetria märksa võimsamate vahenditega. Arutleme siin järgmiselt. Olgu tasandil valitud mingi punkt F ja mingi sirge f, mis ei läbi seda punkti F. Vaatleme kõigi selliste punktide X hulka, mille kaugus $r = |\overrightarrow{XF}|$ punktist F ja kaugus d sirgest f on etteantud suhtes e (joon. 149).

---

[88] S. o. IV sajandil enne meie ajaarvamist.

[89] Sünteetilise geomeetria all mõistetakse geomeetria seda osa, kus sobivale aksiomaatikale tuginedes arutletakse vahetult kujundite *endiga*, koordinaate ja algebrat kasutamata. Kogu geomeetria enne 17. sajandit oli sünteetiline, kuid nimetus tuli käibele alles 19. sajandil vastukaaluks nimetusele «analüütiline geomeetria», mille S. F. Lacroix (1765—1843) andis uuele distsipliinile



Joon 149.

Koostame sobivalt valitud ristreeperi suhtes võrrandi, mida rahuldavad parajasti selle hulga punktide ristkoordinaadid. Kui selgub, et see võrrand ühtib mingi koonuselõike võrrandiga (72.2) ning et, vastupidi, iga koonuselõike puhul võib leida niisuguse punkti F ja sirge f, nii et mainitud võrrandid ühtivad, siis ongi soovitud tulemus käes.

Asume selle mõttekäigu realiseerimisele. Ristreeperi $\{O'; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ valime esialgu selliselt, et alguspunkt O' asetseks sirgel f ning vektorid $\overrightarrow{O'F}$ ja $\boldsymbol{e}_1$ oleksid kollineaarsed ja samasuunalised. Kui sel korral F kaugus sirgest f tähistada q, siis punktil F on järgmised koordinaadid: $F(q, 0)$. Ristkoordinaadid valitud reeperi suhtes tähistame x'_1, x'_2. Punkti $X(x'_1, x'_2)$ kauguseks r punktist F on

$$r = |\overrightarrow{XF}| = \sqrt{(x'_1 - q)^2 + (x'_2)^2},$$

selle punkti kaugus sirgest f (praegu x'_2-teljest) on $d = |x'_1|$ ning kui need kaugused on etteantud suhtes e, siis $r = ed$ ehk

$$(x'_1 - q)^2 + x'^2_2 = e^2 x'^2_1. \tag{73.1}$$

Saadud võrrandi võib kergesti korraldada kujju

$$x'^2_2 = 2qx'_1 + (e^2 - 1)x'^2_1 - q^2, \tag{73.2}$$

mis erineb väliselt koonuselõike võrrandist (72.2) ainult selle poolest (kui mitte arvestada tähistuse erinevust), et paremal on siin vabaliige $-q^2$, mis võrrandis (72.2) puudub. See erinevus on arusaadav, sest koonuselõike võrrand (72.2) on koostatud eeldusel, et koonuselõige läbib reeperi alguspunkti O, mida aga praegu vaadeldava punktihulga korral öelda ei saa. Seetõttu on võrrandi (73.2) puhul otstarbekas paigutada ristreeperi alguspunkt ümber vaadeldava punktihulga mingisse punkti O. Kõige lihtsam on valida punktiks O selle hulga ja x'_1-telje lõikepunkt, kui selline eksisteerib. Niisuguse lõikepunkti $(x'_1, 0)$ leidmiseks tekib võrrandist (73.1) järgmine seos:

$$(x'_1 - q)^2 = e^2 x'^2_1,$$

millest

$$x'_1 - q = \pm e x'_1$$

ehk

$$(1 \mp e)x'_1 = q.$$

Et siin e kui kahe kauguse suhe on positiivne, siis alati $1+e\neq 0$ (seda ei saa väita vahe $1-e$ kohta, mis juhul $e=1$ on 0) ning vähemalt üks lahend $x'_1=\frac{q}{1+e}$ ning seega vähemalt üks lõikepunkt $\left(\frac{q}{1+e}, 0\right)$ eksisteerib alati. Seejuures juhul $e\neq 1$ on veel teine lõikepunkt $\left(\frac{q}{1-e}, 0\right)$. Kui valida esimene, alati eksisteeriv lõikepunkt uue ristreeperi $\{O;\ e_1,\ e_2\}$ alguspunktiks O (joon. 149) ning ristkoordinaadid selle reeperi suhtes tähistada x_1 ja x_2, siis seosed punkti X koordinaatide vahel on järgmised:

$$x'_1=x_1+\frac{q}{1+e}, \qquad x'_2=x_2$$

(vrd. (17.7)). Et punkti F korral $x'_1=q$, $x'_2=0$, siis uue reeperi suhtes on $F\left(q-\frac{q}{1+e}, 0\right)$, s. t.

$$F\left(\frac{eq}{1+e}, 0\right), \tag{73.3}$$

ning et f võrrandiks esialgse reeperi suhtes on $x'_1=0$, siis uue reeperi suhtes esitab teda võrrand

$$x_1=-\frac{q}{1+e}. \tag{73.4}$$

Selleks et saada vaadeldavat punktihulka kirjeldav võrrand uue reeperi suhtes, tuleb teha teisendusvalemitest asendused võrrandisse (73.1), arvestades, et

$$x'_1-q=\left(x_1+\frac{q}{1+e}\right)-q=x_1-\frac{eq}{1+e}.$$

Tulemuseks on võrrand

$$\left(x_1-\frac{eq}{1+e}\right)^2+x_2^2=e^2\left(x_1+\frac{q}{1+e}\right)^2$$

ehk

$$x_1^2-2\frac{eq}{1+e}x_1+\frac{e^2q^2}{(1+e)^2}+x_2^2=e^2\left(x_1^2+2\frac{q}{1+e}x_1+\frac{q^2}{(1+e)^2}\right)$$

ehk

$$x_2^2=2eqx_1+(e^2-1)x_1^2. \tag{73.5}$$

Kõik punktid $X(x_1, x_2)$, mille koordinaadid rahuldavad seda võrrandit, kuuluvad vaadeldavasse punktihulka, sest kõik eespool tehtud üleminekud on üheselt pööratavad, nagu on kerge veenduda.

Järelikult on jäänud näidata, et see võrrand ühtib mingi koonuselõike võrrandiga (72.2). Võrdlus näitab, et kõne all olevate võrrandite väline ühtelangevus on kergesti saavutatav, kui lugeda, et

$$p = eq. \tag{73.6}$$

Siin q ja e on vabalt võetavad positiivsed arvud — vastavalt F kaugus sirgest f ning kauguste $r = |\overrightarrow{XF}|$ ja d etteantud suhe. Küsimus seisneb nüüd selles, kas koonuselõike puhul e ja p võivad omada mistahes positiivseid väärtusi, teisiti öeldes, kas iga kahe positiivse reaalarvu e ja p korral saab leida pöördkoonuse selliselt, et tema lõige antud tasandiga ühtib sellel tasandil eespool vaadeldud punktihulgaga antud e ja $q = \frac{p}{e}$ korral. Seega tuleb selgitada, kas seoste (72.3) ja (72.4):

$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}, \tag{73.7}$$

$$p = a_1\left(1 - \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}\right) - a_3\frac{\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha} \tag{73.8}$$

puhul antud positiivsete reaalarvude e ja p jaoks leiduvad neid seoseid ja tingimust (72.1):

$$(a_1\cos\beta + a_3\sin\beta)^2 - (a_1^2 + a_3^2)\cos^2\alpha = 0 \tag{73.9}$$

rahuldavad reaalarvud α, β, a_1 ja a_3. Kui see nii on, siis vastus seatud küsimusele on jaatav; antud tasandi võib valida x_1x_2-tasandiks. Vajaliku pöördkoonuse saab siis määrata art-s 72 tehtud eeldustel 1)—3) selle nelja reaalarvu järgi — nurgaga α pöördkoonuse telje ja moodustaja vahel, nurgaga β selle telje ja lõikava x_1x_2-tasandi vahel ning pöördkoonuse tipu $A(a_1, 0, a_3)$ koordinaatidega.

Seoseid (73.7), (73.8) ja (73.9) rahuldavate arvude α, β, a_1 ja a_2 leidmiseks talitame järgmiselt. Esimese seose (73.7) puhul tuleb vaadelda kahte juhtu. Kui $0 < e \leqslant 1$, siis võtame vabalt reaalarvu α nii, et $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, ja määrame β nii, et oleks $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ja

$$\cos\beta = e\cos\alpha.$$

Sel korral tänu võrratusele $0 < \cos\alpha < 1$ on

$$0 < e\cos\alpha < e \leqslant 1,$$

mistõttu selline arv β kindlasti leidub. Kui $e > 1$, siis tuleb, vastupidi, võtta vabalt β nii, et $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, ning α määrata tingimustest $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ja

$$\cos\alpha = \frac{1}{e}\cos\beta.$$

Olles selliselt leidnud α ja β, võime seostest (73.8) ja (73.9) nüüd määrata a_1 ja a_2. Selleks esitame koonuse tipu A x_1x_3-tasandil üldistatud polaarkoordinaatidega r ja φ nii, et (vt. def. 26.3)

$$a_1 = r\cos\varphi, \qquad a_3 = r\sin\varphi.$$

Asendus tingimusse (73.9) annab

$$r^2(\cos\varphi\cos\beta + \sin\varphi\sin\beta)^2 = r^2\cos^2\alpha$$

ehk

$$r^2\cos^2(\varphi - \beta) = r^2\cos^2\alpha.$$

Saadud seose ja seega ka (73.9) rahuldamiseks on küllalt, kui valida $\varphi - \beta = \alpha$, s. t.

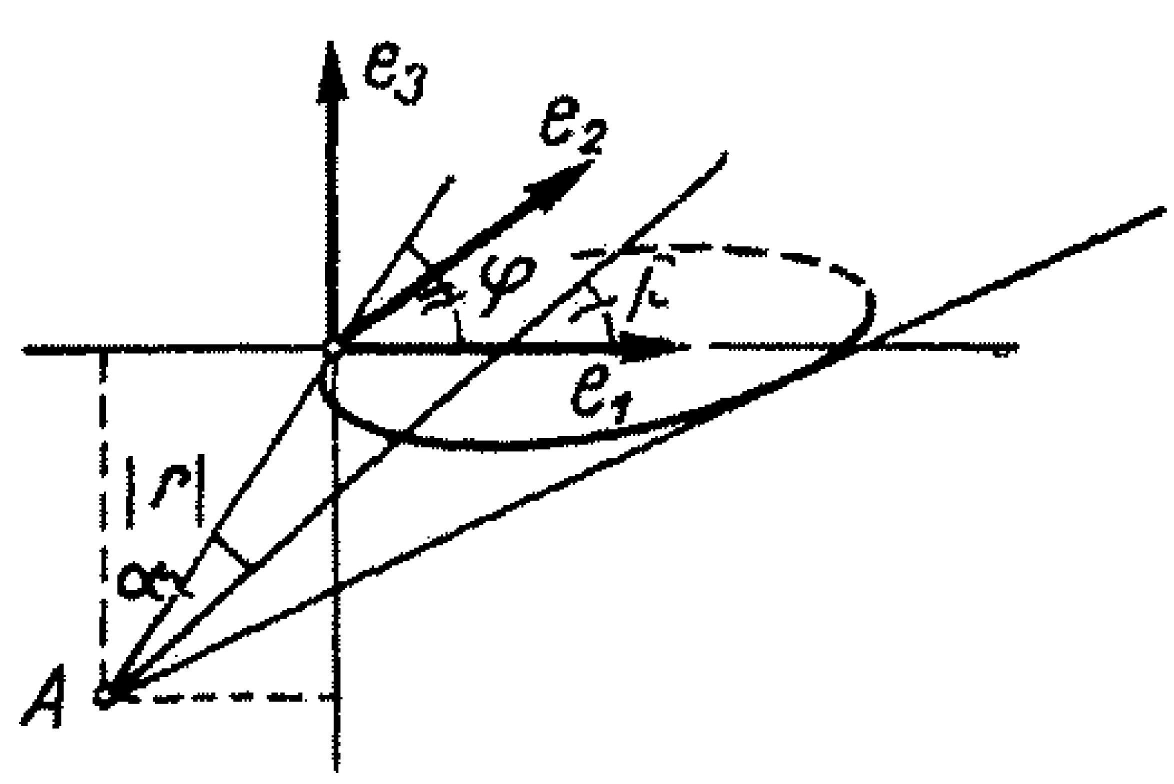
$$\varphi = \alpha + \beta$$

(joon. 150). Tingimusele (73.8), kui selle pooli korrutada juba leitud arvuga $\cos^2\alpha$, tuleb nüüd järgmine kuju:

$$p\cos^2\alpha = r\cos(\alpha+\beta)(\cos^2\alpha - \cos^2\beta) - r\sin(\alpha+\beta)\sin\beta\cos\beta$$

ehk

$$p\cos^2\alpha = r[(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\cos^2\alpha - \cos^2\beta) -$$
$$-(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\sin\beta\cos\beta].$$



Joon. 150.

Siin nurksulgudes on

$$\cos^3\alpha\cos\beta-\cos^2\alpha\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos^3\beta+\sin\alpha\cos^2\beta\sin\beta-$$
$$-\sin\alpha\cos^2\beta\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta\sin^2\beta=$$
$$=\cos\alpha(\cos^2\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta-\cos\beta)=$$
$$=\cos\alpha(-\sin^2\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta)=$$
$$=-\cos\alpha\sin\alpha\sin(\alpha+\beta).$$

Seega

$$p\cos^2\alpha=-r\cos\alpha\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)$$

ja siit

$$r=-\frac{p\cos\alpha}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}.$$

Pöördkoonuse tipuks on niisiis punkt $A(r\cos(\alpha+\beta),\ 0,\ r\sin(\alpha+\beta))$, s. t. punkt

$$A\left(-\frac{p}{\tan\alpha\tan(\alpha+\beta)},\ 0,\ -\frac{p}{\tan\alpha}\right).$$

Sellega ongi määratud üks pöördkoonus, mille lõikel x_1x_2-tasandiga kui koonuselõikel on e ja p etteantud positiivsed väärtused. Vastus eespool seatud küsimusele on seega jaatav.

Ühtlasi on selge, et koonuselõige, mille e ja p on etteantud positiivsete väärtustega, ühtib eespool punkti F ja sirge f abil määratud punktihulgaga: F kauguseks sirgest f tuleb võtta $q=\frac{p}{e}$ ja selle hulga punktide kaugused r ja d vastavalt punktist F ja sirgest f võtta suhtes $\frac{r}{d}=e$. Sel puhul on koonuselõikel ja sellel punktihulgal täpselt ühesugused võrrandid.

Kokkuvõttes on tõestatud järgmine lause.

***Teoreem* 73.1.** *Koonuselõigeteks tasandil on parajasti ringjooned ja sellised punktihulgad, kus igaühes punktide kaugused ühest kindlast punktist F ja seda mitteläbivast sirgest f on nullist erinevas etteantud suhtes e.*

Selle teoreemi sisu võib käsitleda ka kui koonuselõike mõiste uut definitsiooni, mis erinevalt definitsioonist 72.1 ei välju planimeetria raamest ning omab seetõttu olulisi eeliseid viimase ees.

Teoreemis mainitud kindlat punkti F nimetatakse ringjoonest erineva koonuselõike[90] fookuseks, kindlat sirget f — selle koonuselõike juhtsirgeks ehk direktrissiks. Koonuselõike

[90] Kui ei ole eraldı märgitud, siis selliseid me peamegi edaspidi silmas.

punkti X kaugusi r ja d vastavalt fookusest ja juhtsirgest nimetatakse fokaal- ja juhtkauguseks. Nende konstantseks suhteks $\frac{r}{d}$ on juba eespool art-s 72 esinenud ekstsentrilisus e.

Igal koonuselõikel on kaks punkti, mille juhtkauguseks on fookuse F kaugus q juhtsirgest f — nendeks on punktid fookust F läbival ja juhtsirgega f paralleelsel sirgel kahel pool fookust kaugusel $p = eq$. Nende punktide fokaalkaugust p nimetatakse koonuselõike fokaalparameetriks (joon. 149). Koonuselõike laius fookuse kohal on, nagu selgub, võrdne selle suuruse kahekordsega $2p$.

Ekstsentrilisus e ja fokaalparameeter p määravad täielikult võrrandi (72.2):

$$x_2^2 = 2px_1 + (e^2 - 1)x_1^2, \tag{73.10}$$

järelikult siis ka koonuselõike antud ristreeperi korral. Teise ristreeperi korral esitab sama võrrand teise koonuselõike, mis on esimesega kongruentne. Seega e ja p määravad koonuselõigete kongruentsusklassi, teisiti öeldes, koonuselõike kuju, kuid mitte asendi.

Lisaks võrrandile (72.2) on eespool tuletatud koonuselõike võrrand (73.2) ka selle juhu jaoks, kui x_1-telg on endine, kuid alguspunkt O asetseb mitte koonuselõike, vaid juhtsirge punktis. Analoogilise võrrandi saab tuletada ka juhul, kui ristreeperi x_1-telg on küll endine, kuid O on fookuses. Osutub, et eriti otstarbekas on sel juhul rakendada üldistatud polaarkoordinaate (vt. def. 26.3).

Arvestades (73.3) ja (73.6), võtamegi pooluseks fookuse $F\left(\frac{p}{1+e}, 0\right)$ ja polaarteljeks x_1-telje, valides sellel suuna juhtsirgest f fookuse F poole. Üleminekuks vastavatele üldistatud polaarkoordinaatidele teeme esmalt ristreeperi lükke, nii et alguspunkt läheks fookusesse:

$$x_1 = x''_1 + \frac{p}{1+e};$$

$$x_2 = x''_2.$$

Seejärel läheme üle üldistatud polaarkoordinaatidele:

$$x''_1 = r\cos\varphi,$$

$$x''_2 = r\sin\varphi.$$

Kokkuvõttes tuleb seega teha teisendus

$$x_1 = r\cos\varphi + \frac{p}{1+e},$$

$$x_2 = r\sin\varphi.$$

Selle tagajärjel võrrand (72.2) omandab järgmise kuju:

$$(r\sin\varphi)^2 = 2p\left(r\cos\varphi + \frac{p}{1+e}\right) + (e^2-1)\left(r\cos\varphi + \frac{p}{1+e}\right)^2$$

ehk

$$r^2(1-e^2\cos^2\varphi) - 2epr\cos\varphi - p^2 = 0$$

ehk

$$[r(1-e\cos\varphi)-p][r(1+e\cos\varphi)+p] = 0.$$

Siit

$$r = \frac{p}{1-e\cos\varphi} \tag{73.11}$$

või

$$r = -\frac{p}{1+e\cos\varphi}.$$

Need kaks juhtu on tegelikult samaväärsed, sest üldistatud polaarkoordinaatide puhul punktil (r, φ) on samal ajal ka koordinaadid (r', φ'), kus $r' = -r$ ning $\varphi' = \varphi + \pi$, kui $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, või $\varphi' = \varphi - \pi$, kui $\pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Et $\cos\varphi' = \cos(\varphi \pm \pi) = -\cos\varphi$, siis teine saadud kahest võrrandist on kirjutatav ka kujul $r' = \frac{p}{1-e\cos\varphi'}$, mis ühtib esimese võrrandiga (73.11).

Võrrandit (73.11), mis kirjeldab seega täielikult koonuselõiget üldistatud polaarkoordinaatides, nimetatakse selle koonuselõike **polaarvõrrandiks**. Juhul $e \geqslant 1$, s. t. parabooli ja hüperbooli korral, tuleb siin juhtida tähelepanu ühele asjaolule. Nimetaja (73.11) paremal poolel võib siis saada võrdseks nulliga. See juhtub, kui

$$\cos\varphi_0 = \frac{1}{e}.$$

Sellisele φ väärtusele φ_0 ei vasta punkti koonuselõikel, sest kui $\varphi_0 = 0$ korral $\varphi \to 0$ või $\varphi \to 2\pi$, siis $r \to +\infty$, ning kui $\varphi_0 > 0$ korral $\varphi \to \varphi_0 \pm$, siis $r \to \pm\infty$. Siin esinevat olukorda selgitame lähemalt art-tes 75 ja 77, kus me uurime vastavalt parabooli ja hüperbooli.

Kui võrrandis (73.11) võtta $e = 0$, siis saadud võrrand $r = p$ määrab ringjoone keskpunktiga F ja raadiusega p. Sama tulemuse annab ka võrrand (73.10), mis pärast asendust $e=0$ samuti muutub sellise ringjoone võrrandiks, mille keskpunktiks on $(p, 0)$ ja raadiuseks p (vt. art. 68). Järelikult võrrandid (73.10) ja (73.11) esitavad kumbki kõik koonuselõiked ilma ainsagi erandita. Ringjoon erineb ülejäänud koonuselõigetest selle poolest, et tal puudub juhtsirge ja fookuse asemel on keskpunkt. Tõepoolest, valemid (73.3) ja (73.4), kui neis teha asendus (73.6), määravad fookuse $F\left(\frac{p}{1+e}, 0\right)$ ja juhtsirge võrrandi

$$x_1=-\frac{p}{e(1+e)},$$

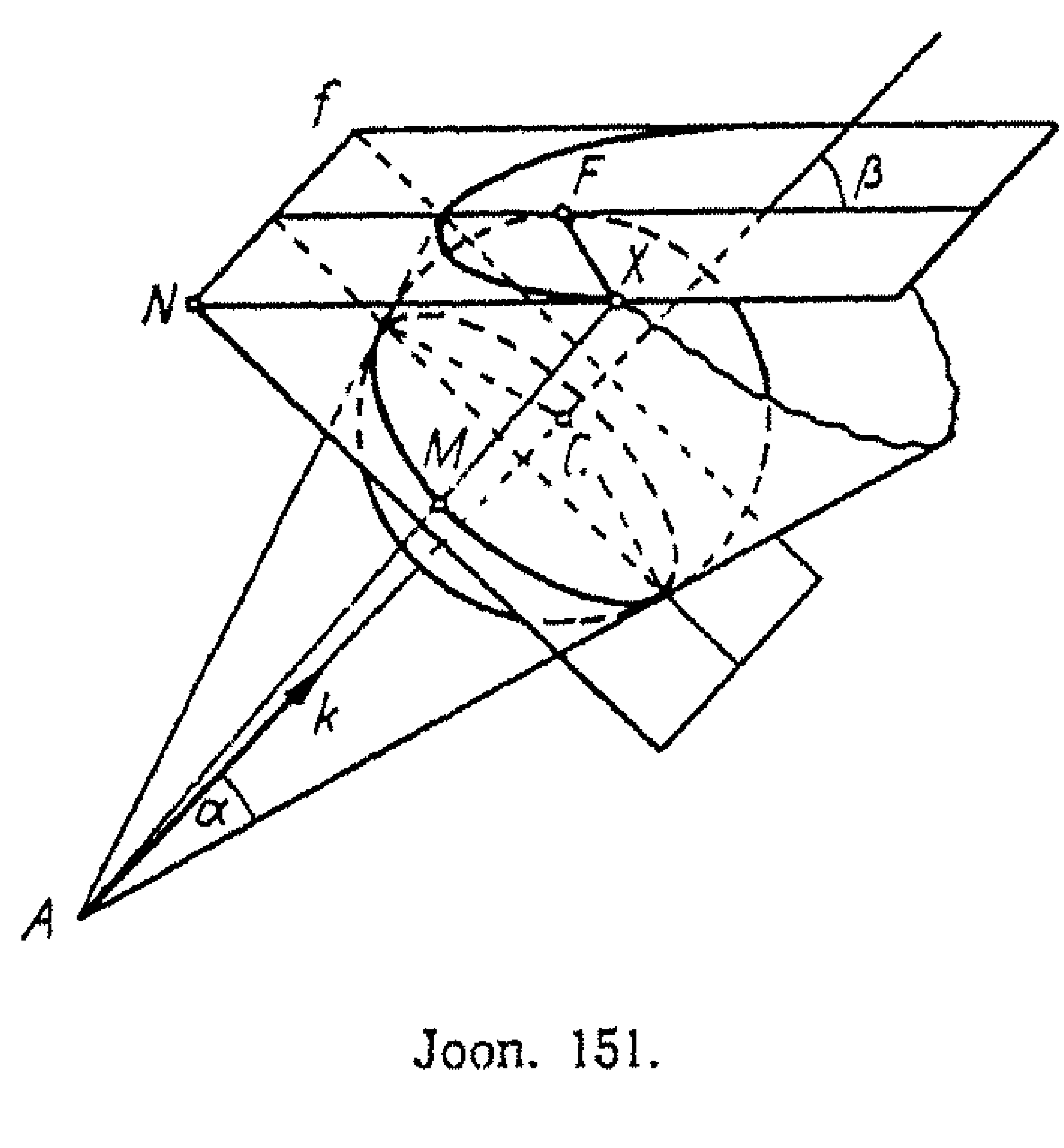
ning siin $e=0$ puhul saame vastavalt ringjoone keskpunkti ja sirget mittemäärava $x_1=-\infty$.

Koonuselõike fookus ja juhtsirge on huvitavalt seotud selle pöördkoonusega ja selle tasandiga, millede lõikumisel koonuselõige tekib. Seose selgitamiseks tuletame kõigepealt pöördkoonuse puutujasfääri mõiste. Võtame pöördkoonuse teljel vabalt punkti C. Sel korral $\overrightarrow{AC}=kc$. Pöördkoonuse võrrandist (71.1) järeldub, et

$$\left|(kc)\frac{x-a}{|x-a|}\right|=|c\cos\alpha|=\text{const.},$$

s. t. $\overrightarrow{AC}$ projektsioon pöördkoonuse moodustajal on konstantne (joon. 150). Art-te 29 ja 30 tulemuste põhjal võib öelda, et siis on konstantne ka punkti C kaugus moodustajast. Kui nüüd määrata sfäär, mille keskpunktiks on C ja raadiuseks see konstantne kaugus, siis koonuse moodustajad on ühtlasi selle sfääri puutujad, mistõttu seda sfääri nimetatakse pöördkoonuse puutujasfääriks.

Punkti C sobiva valikuga antud koonuselõiget läbiva pöördkoonuse teljel võib saavutada, et puutujasfääril keskpunktiga C on üheks puutujatasandiks



Joon. 151.

koonuselõike tasand. Tähistame puutepunkti tähega F. Pöördkoonuse moodustajate puutepunktid puutujasfääriga on art. 69 ühe tulemuse põhjal ühel tasandil (A polaaril), mille normaalvektoriks on $\boldsymbol{k}$. Kui koonuselõige ei ole ringjoon, siis $\boldsymbol{k}$ ei ole tema tasandi normaalvektor ning A polaar lõikab tema tasandit mööda teatavat sirget f.

Koonuselõike punkti X puhul võtame A polaaril kaks punkti — moodustaja AX punkti M ja X ristprojektsiooni N sirgel f. Sel korral $|\overrightarrow{MX}\cdot\boldsymbol{k}|$ ja $|\overrightarrow{NX}\cdot\boldsymbol{k}|$ on, nagu järeldub art. 53 tulemustest, võrdsed punkti X kaugusega A polaarist ning seetõttu ka omavahel võrdsed. Samal ajal

$$|\overrightarrow{MX}\cdot\boldsymbol{k}|=|\overrightarrow{MX}|\,|\boldsymbol{k}|\cos\alpha,\quad |\overrightarrow{NX}\cdot\boldsymbol{k}|=|\overrightarrow{NX}|\,|\boldsymbol{k}|\cos\beta.$$

Järelikult

$$|\overrightarrow{MX}|\cos\alpha=|\overrightarrow{NX}|\cos\beta$$

ning

$$\frac{|\overrightarrow{MX}|}{|\overrightarrow{NX}|}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}=e,$$

kus e on (72.3) järgi antud koonuselõike ekstsentrilisus.

Art. 69 ühe tulemuse järgi puutepunktid M ja F on punktist X võrdsetel kaugustel, s. t. $|\overrightarrow{MX}|=|\overrightarrow{FX}|$. Seega

$$|\overrightarrow{FX}|:|\overrightarrow{NX}|=e.$$

Koonuselõige on seega niisuguste punktide hulk, mille kaugused punktist F ja sirgest f on suhtes e, kus e on ekstsentrilisus. Et koonuselõikel on sama omadus oma fookuse ja juhtsirge suhtes, siis F on tema fookus ja f on tema juhtsirge.

Niisiis kehtib järgmine lause.

***Teoreem* 73.2.** *Koonuselõike fookus on koonuselõiget läbiva pöördkoonuse puutujasfääri ja koonuselõike tasandi puutepunkt; koonuselõike juhtsirge on sirge, mis tekib selle tasandi lõikumisel pöördkoonuse tipu polaariga puutujasfääri suhtes.*

74. Teljed, diameetrid ja puutujad. Kujundi sümmeetriatelje mõistet meenutades (vt. art. 44) anname järgmise definitsiooni.

***Def.* 74.1.** Koonuselõike sümmeetriatelge nimetatakse koonuselõike t e l j e k s, lõikepunkte teljega — koonuselõike t i p p u d e k s ehk haripunktideks.

Võrrandiga (72.2)

$$x_2^2=2px_1+(e^2-1)x_1^2 \tag{74.1}$$

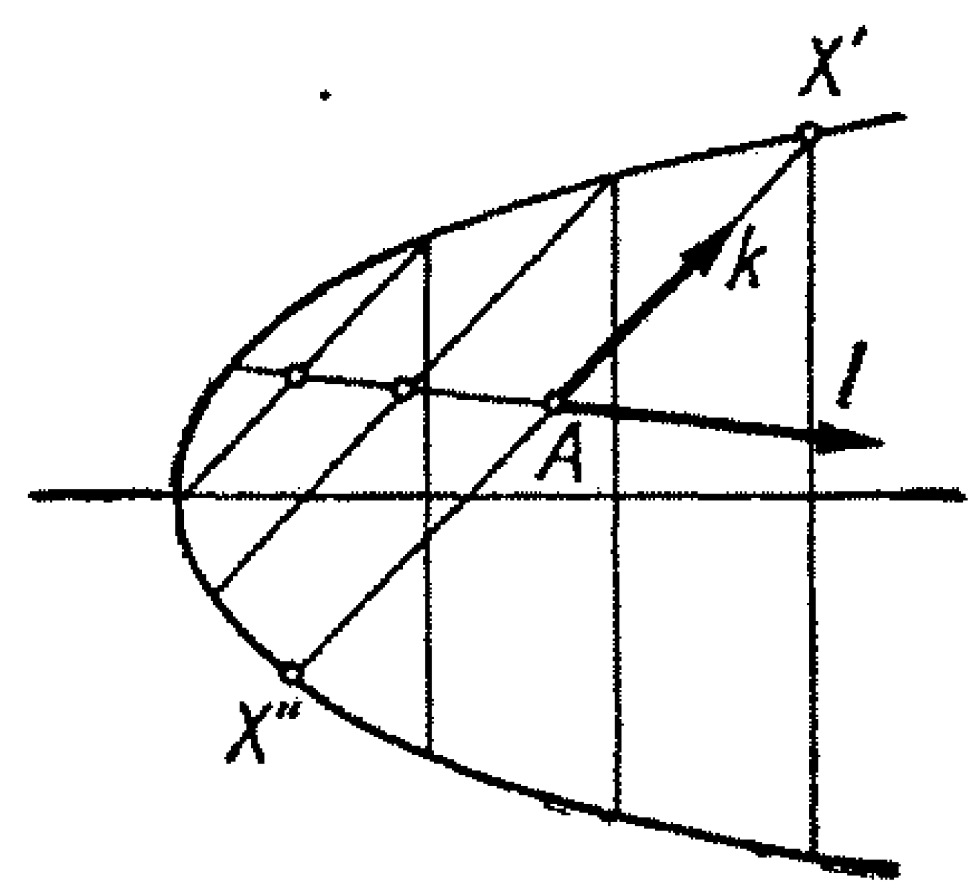
antud koonuselõike üheks teljeks on kindlasti x_1-telg. Sellest võrrandist nähtub nimelt, et kui punkt $X(x_1, x_2)$ on koonuselõike punkt, siis on seda ka x_1-telje suhtes sümmeetriline punkt $X(x_1, -x_2)$. Sellel teljel asetseva tipu abstsissi leidmiseks tekib võrrand

$$2px_1+(e^2-1)x_1^2=0,$$

millel on alati lahend $x_1=0$ (ning juhul $e\neq 1$ ka teine lahend $x_1=\frac{2p}{1-e^2}\Big)$. Järelikult koonuselõike tipuks on reeperi alguspunkt $O(0,0)$ $\left(\text{ning juhul } e\neq 1 \text{ ka punkt } \left(\frac{2p}{1-e^2}, 0\right)\right)$. Edasi meenutame, et (73.3) ja (73.6) põhjal on fookuseks punkt $F\left(\frac{p}{1+e}, 0\right)$, mis asetseb teljel, ning et juhtsirget f esitab (73.4) ja (73.6) põhjal võrrand $x_1=-\frac{p}{e(1+e)}$, millega määratud sirge on risti teljega.

***Teoreem* 74.1.** *Igal koonuselõikel on vähemalt üks telg, mis läbib fookust ja on risti juhtsirgega, ning vähemalt üks tipp.*

Seda asjaolu, et ristreeperil, mille suhtes koonuselõiget esitab võrrand (74.1), on alguspunktiks O koonuselõike tipp, väljendatakse järgmiselt: võrrandit (74.1) nimetatakse koonuselõike t i p p v õ r r a n d i k s.



Joon. 152.

Tekib küsimus, kas koonuselõikel on veel teisi telgi. Vastuse leidmiseks sellele küsimusele tuleb kõigepealt analüüsida telje mõistet.

***Def.* 74.2.** Koonuselõike kaht punkti ühendavat sirglõiku nimetatakse koonuselõike k õ õ l u k s.

Telje definitsioonist 74.1 järeldub vahetult, et telg on sirge, mis poolitab kõik temaga ristuvad koonuselõike kõõlud. Telje sellest omadusest lähtudes selgitame järgnevalt, missugune võib üldse olla koonuselõike paralleelsete kõõlude keskpunktide hulk.

Sirge, millel asetseb kõõl, määrame selle kõõlu keskpunktiga $A(a_1, a_2)$ ja sihivektoriga $\boldsymbol{k}=(k_1, k_2)$ (joon. 152). Sirge parameetrilisteks võrranditeks on siis (39.1):

$$x_1=a_1+uk_1, \qquad x_2=a_2+uk_2.$$

Kõõlu otspunktide leidmiseks tuleb siit teha asendused koonuselõike tippvõrrandisse (74.1):

$$(a_2+uk_2)^2=2p(a_1+uk_1)+(e^2-1)(a_1+uk_1)^2.$$

Tulemuseks on ruutvõrrand u suhtes

$$[k_2^2+(1-e^2)k_1^2]u^2+2[k_2a_2+(1-e^2)k_1a_1-pk_1]u+ \\ +[a_2^2-2pa_1+(1-e^2)a_1^2]=0. \qquad (74.2)$$

Olgu selle lahenditeks u' ja u''. Kõõlu otspunktideks on siis punktid $X'(a_1+u'k_1,\ a_2+u'k_2)$ ja $X''(a_1+u''k_1,\ a_2+u''k_2)$. Kõõlu keskpunkti koordinaatideks on nende otspunktide vastavate koordinaatide aritmeetilised keskmised, ning et selleks keskpunktiks on $A(a_1,\ a_2)$, siis tekivad järgmised võrdused:

$$a_1=a_1+\frac{u'+u''}{2}k_1,\qquad a_2=a_2+\frac{u'+u''}{2}k_2.$$

Siit

$$(u'+u'')k_1=(u'+u'')k_2=0.$$

Sihivektori $\boldsymbol{k}$ koordinaadid ei saa olla korraga võrdsed nulliga; seetõttu

$$u'+u''=0.$$

Tulemus tähendab Viète'i valemite põhjal seda, et ruutvõrrandis (74.2) tundmatu u esimese astme kordaja on null:

$$(1-e^2)k_1a_1+k_2a_2-pk_1=0.$$

Selline on tingimus, et punkt $A(a_1,\ a_2)$ poolitaks koonuselõike kõõlu sihivektoriga $\boldsymbol{k}$. Paralleelsete kõõlude puhul sihivektor $\boldsymbol{k}$ on konstantne ning seega ka tema koordinaadid on konstandid. Järelikult paralleelsete kõõlude keskpunktide koordinaadid rahuldavad järgmist võrrandit:

$$(1-e^2)k_1x_1+k_2x_2-pk_1=0. \qquad (74.3)$$

Saadud võrrand on lineaarne, kusjuures koordinaatide kordajad saavad korraga nulliks ainult ühel juhul: $e=1$, $k_2=0$, mil on tegemist parabooliga ja selle telje sihivektoriga. Sel juhul võrrand (74.2) lakkab olemast ruutvõrrand (sest u^2 kordaja tuleb null) ning annab ainult ühe lahendi. Järelikult paraboolil pole üldse teljesihilisi kõõle ning seetõttu ei saa rääkida ka nende keskpunktidest.

Selliselt selgub, et iga koonuselõike paralleelsete kõõlude keskpunktid asetsevad teataval sirgel võrrandiga (74.3) (joon. 152).

***Def.* 74.3.** Sirget, millel asetsevad koonuselõike paralleelsete kõõlude keskpunktid, nimetatakse koonuselõike d i a m e e t r i k s, täpsemalt kõneldes, kõõlude ühise sihi k a a s diameetriks.

Diameetri võrrandile (74.3) saab anda kuju

$$k_1[(1-e^2)x_1-p]+k_2x_2=0.$$

Et kõõle võib võtta igas sihis (välja arvatud parabooli telje siht), siis $\boldsymbol{k}$ koordinaadid k_1 ja k_2 on siin vabalt muutuvad suurused. Art. 41 tulemustest järeldub, et diameetrid moodustavad juhul $e\neq 1$ kimbu, mille keskpunktiks on võrranditega

$$(1-e^2)x_1-p=0, \quad x_2=0 \tag{74.4}$$

määratud sirgete lõikepunkt $\left(\frac{p}{1-e^2}, 0\right)$. Juhul $e=1$ (s. t. parabooli korral) on võrrandil (74.3) kuju

$$k_2x_2-pk_1=0.$$

Vabalt muutuvate k_1 ja k_2 korral tekib x_1-teljega paralleelsete sirgete ebakimp.

Tulemuse võib sõnastada järgmiselt.

***Teoreem* 74.2.** *Parabooli kõik diameetrid moodustavad teljega paralleelsete sirgete ebakimbu. Paraboolist erineva koonuselõike kõik diameetrid moodustavad lõikuvate sirgete kimbu.*

Diameetrite lähema uurimisega tegeleme edaspidi art-s 90. Rakendame nüüd siin saadud tulemusi telgede puhul seatud küsimuse lahendamiseks.

Nagu selgus, telg on samal ajal diameeter, kusjuures ta on risti kõõludega, mida poolitab (joon. 152). Järelikult diameeter (74.3) on telg parajasti siis, kui tema sihivektor

$$\boldsymbol{l}=(k_2, (e^2-1)k_1)$$

on risti kõõlude ühise sihivektoriga $\boldsymbol{k}=(k_1, k_2)$, s. t. kui $\boldsymbol{kl}=0$ ehk

$$k_1k_2+(e^2-1)k_1k_2=0$$

ehk

$$e^2k_1k_2=0. \tag{74.5}$$

Saadud tingimusest ongi nüüd näha, kuidas on lugu koonuselõike telgedega. Lihtsaim on juht, mil $e=0$, s. t. kui on tegemist ringjoonega. Sel korral tingimus (74.5) on rahuldatud iga sihivektori $\boldsymbol{k}$ korral ning seega kõik diameetrid on teljed.

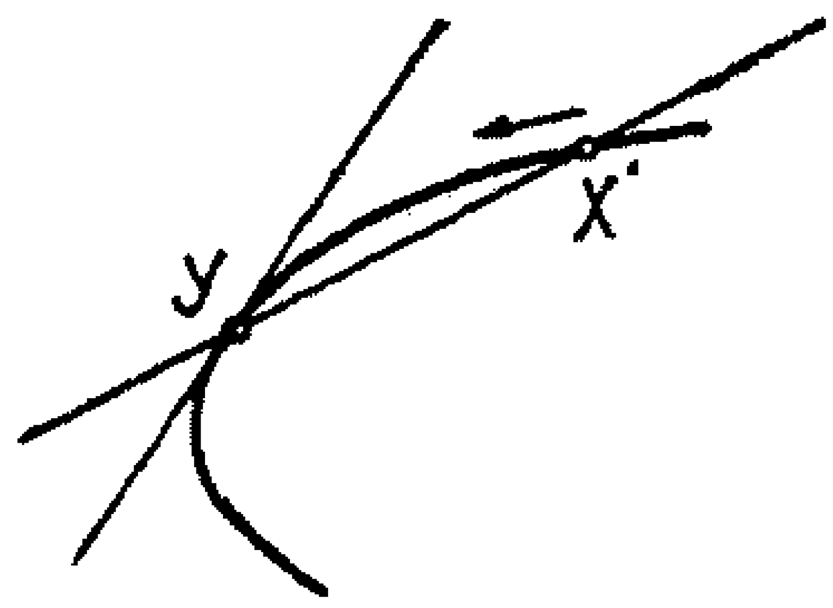
Juhul $e\neq 0$ järeldub tingimusest (74.5), kas $k_1=0$ või $k_2=$ $=0$. Esimesel alajuhul saame (74.3) põhjal teljele võrrandi $k_2x_2=0$ ehk $x_2=0$. Tegemist on juba tuttava x_1-teljega. Teisel alajuhul on telje võrrandiks $(1-e^2)k_1x_1-pk_1=0$. Siit juhul $e\neq 1$ saame x_1-teljega ristuva sirge võrrandi

$$x_1=\frac{p}{1-e^2}.$$

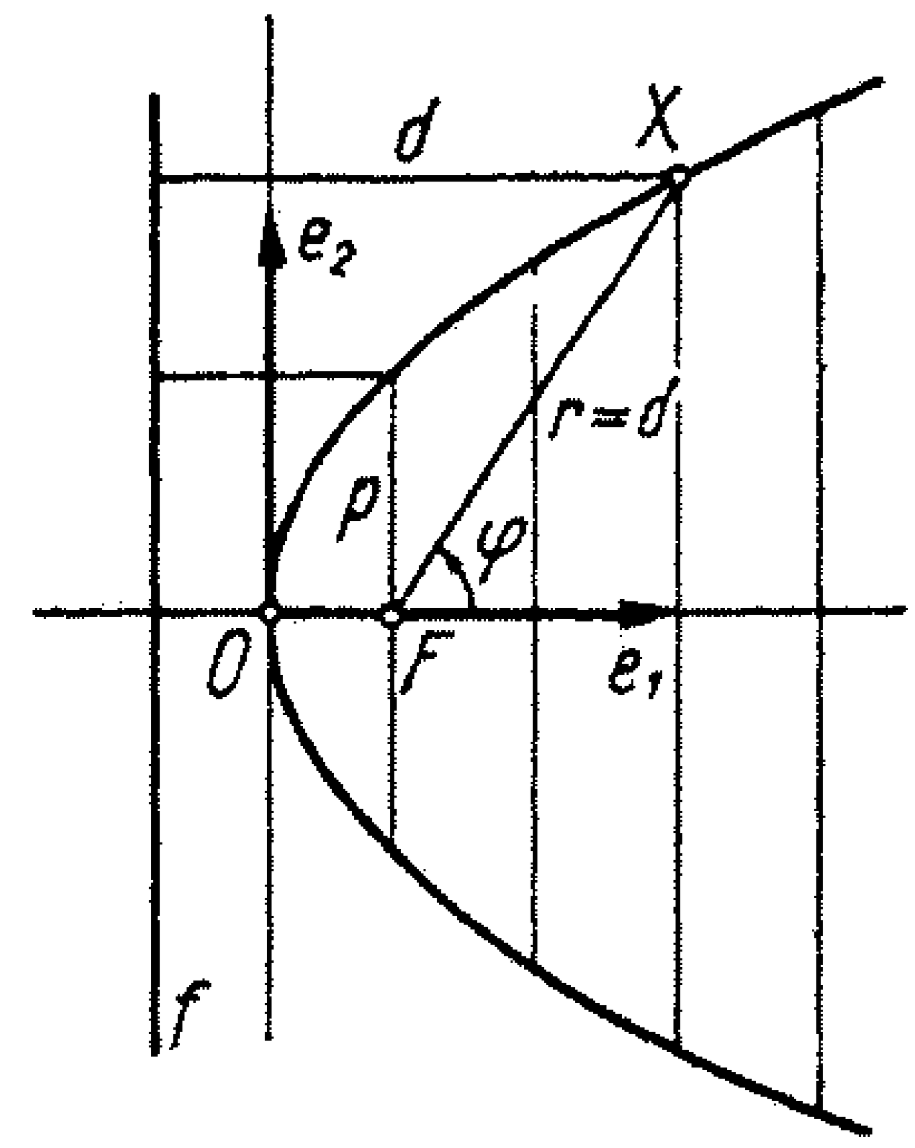
Juhul $e=1$ saame vastuolu, sest $p\neq 0$, $k_1\neq 0$, ning mingit uut telge ei teki.

Järelikult kehtib järgmine lause.

***Teoreem* 74.3.** *Ringjoonel on terve kimp telgi. Ellipsil ja hüperboolil on parajasti kaks vastastikku ristuvat telge, milledest*



Joon. 153.



Joon. 154.

üks läbib fookuse ja on risti juhtsirgega. Paraboolil on ainult üks telg samade omadustega.

Paneme ühtlasi tähele, et ellipsi ja hüperbooli telgede võrrandeiks on parajasti (74.4).

Koonuselõigete uurimisel on sageli vajalik puutuja mõiste, mis defineeritakse järgmiselt.

***Def.* 74.4.** Koonuselõike punkti Y läbivat sirget nimetatakse koonuselõike puutujaks selles punktis, kui ta osutub seda punkti Y ja koonuselõike mingit teist punkti X' läbiva sirge piirasendiks punkti X' liikumisel mööda joont punkti Y (joon. 153). Punkti Y nimetatakse sel korral puutepunktiks.

Tuletame koonuselõike puutuja võrrandi.[91]

Olgu $Y(y_1, y_2)$ koonuselõike fikseeritud punkt ja $X'(x'_1, x'_2)$ tema mistahes teine selline punkt, mille korral korrutis $(x'_1 - y_1)(x'_2 + y_2)$ erineb nullist. Jagame selle korrutisega võrduste

$$\begin{aligned} x_2'^2 &= 2px_1' + (e^2-1)x_1'^2, \\ y_2^2 &= 2py_1 + (e^2-1)y_1^2 \end{aligned} \tag{74.6}$$

vastavate poolte lahutamisel tekkiva võrduse

$$x_2'^2 - y_2^2 = (x'_1 - y_1)[2p + (e^2-1)(x'_1 + y_1)]$$

pooli. Saadud seosest

$$\frac{x'_2 - y_2}{x'_1 - y_1} = \frac{1}{x'_2 + y_2}[2p + (e^2-1)(x'_1 + y_1)]$$

[91] Koonuselõike puutuja teistsugune, kuid siin esitatavaga samaväärne käsitlus antakse edaspidi art-s 91.

teeme asenduse sirge $X'Y$ võrrandisse

$$x_2 - y_2 = \frac{x'_2 - y_2}{x'_1 - y_1}(x_1 - y_1),$$

mille me saame seejärel kujul

$$x_2 - y_2 = \frac{1}{x'_2 + y_2}[2p + (e^2 - 1)(x'_1 + y_1)](x_1 - y_1).$$

Kui $X' \to Y$, siis $x'_1 \to y_1$ ja $x'_2 \to y_2$; seepärast viimane võrrand annab pärast niisugust piirprotsessi võrrandi

$$x_2 - y_2 = \frac{1}{y_2}[p + (e^2 - 1)y_1](x_1 - y_1)$$

ehk

$$y_2 x_2 = [p + (e^2 - 1)y_1]x_1 + [y_2^2 - 2py_1 - (e^2 - 1)y_1^2] + py_1,$$

millest võrduse (74.6) abil saame koonuselõike punktis $Y(y_1, y_2)$ võetud puutuja võrrandile järgmise lihtsa kuju:

$$y_2 x_2 = p(x_1 + y_2) + (e^2 - 1)y_1 x_1. \qquad (74.7)$$

Ka siin, samuti nagu varem ringjoone puutuja puhul ning sfääri või pöördkoonuse puutujatasandi puhul, tuleb puutuja võrrandi saamiseks asendada puutepunkti koordinaadid «pooliti» koonuselõike tippvõrrandisse (74.1) (vrd. näit. (69.6)).

Nagu selgub, *igal koonuselõikel on igas punktis parajasti üks puutuja*, sest x_1 ja x_2 kordajad võrrandis (71.7) ei saa korraga nulliks.

75. **Parabool.** Parabooliks on juba eespool nimetatud koonuselõiget, mille korral $e = 1$. Teoreemist 73.1 järeldub, et parabooli võib seega eraldi defineerida järgmiselt.

***Def.* 75.1.** Parabool on tasandi selliste punktide hulk, mille kaugused ühest kindlast punktist F — fookusest — ja ühest kindlast sirgest f — juhtsirgest — on võrdsed (joon. 154).

Asendades $e = 1$ võrrandisse (74.1), saame parabooli võrrandi

$$x_2^2 = 2px_1, \qquad (75.1)$$

kus $p > 0$. Tegemist on parabooli lihtsaima võrrandiga ristkoordinaatide puhul (mõnevõrra keerukam on näiteks (73.2), kui selles võtta $e = 1$), mis on seetõttu kõige sobivam parabooli kuju uurimisel. See kuju sõltub, nagu näha, üksnes fokaalparameetrist p, mille tähendus on selgitatud juba eespool art-s 73; antud juhul on ta pool parabooli laiusest fookuse kohal.

Et paraboolil pole kõõlu teljel ega ka teljega paralleelseid kõõle, nagu selgus eelmises artiklis, siis parabool ei sulgu. Telge lõikab ta ühesainsas punktis, seetõttu on tal ainult üks tipp. Võrrandiga (75.1) antud parabooli korral on selleks reeperi alguspunkt $O(0, 0)$.

Parabooli puutujal tema punktis $Y(y_1, y_2)$ on (74.7) põhjal võrrand

$$y_2 x_2 = p(x_1 + y_1). \tag{75.2}$$

Järelikult puutujal tipus $O(0, 0)$ on võrrand $px_1 = 0$ ehk $x_1 = 0$ — selleks puutujaks on x_2-telg. Et (75.1) järgi

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2p} \geqslant 0,$$

siis parabool on tervikuna ühel pool seda puutujat, nimelt sealpool, kus on fookus $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Juhtsirge $x_1 = -\frac{p}{2}$ jääb teisele poole, olles paralleelne selle puutujaga ning temast kaugusel $\frac{p}{2}$.

Edasi järeldub võrrandist (75.1), et

$$x_2 = \pm\sqrt{2px_1}.$$

Järelikult x_1 igale positiivsele väärtusele vastab paraboolil kaks x_1-telje suhtes sümmeetrilist punkti $(x_1, \sqrt{2px_1})$ ja $(x_1, -\sqrt{2px_1})$, milledevaheline kaugus $2\sqrt{2px_1}$ kasvab x_1 kasvades monotoonselt ja tõkestamatult. Sellele vaatamata on paraboolil järgmine huvitav omadus: iga, ka kuitahes väike telje suhtes sümmeetriline nurk sisaldab parabooli kõiki tipust küllalt kaugel olevaid punkte. See on hästi näha parabooli polaarvõrrandist (vt. (73.11), kus $e = 1$):

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}, \qquad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Polaarnurga φ iga, ka kuitahes väikese positiivse väärtuse korral on vastav r määratud, kusjuures kui $\varphi \to 0+$, siis $r \to +\infty$ (kui $\varphi \to 2\pi-$, siis samuti $r \to +\infty$).

Paraboolil on üksainus fookus ja seega ka üksainus juhtsirge, sest kui oleks veel teine fookus, siis ka selle kohal peaks parabooli laius olema $2p$, see aga on eeltoodu põhjal võimatu.

***Teoreem* 75.1.** *Parabool on tervikuna ühel pool iga oma puutujat. Seejuures puutepunkti kaugenemisel tipust nurk puutuja ja parabooli telje vahel kahaneb monotoonselt, lähenedes nullile.*

T õ e s t u s. Parabooli puutujal punktis $Y(y_1, y_2)$ on võrrand (75.2) ehk

$$p(x_1+y_1)-y_2x_2=0. \tag{75.3}$$

Seejuures

$$y_2^2=2py_1.$$

Näitame, et parabooli kõigi punktide $X(x_1, x_2)$, $x_2^2=2px_1$, koordinaadid annavad puutuja võrrandi vasakusse poolde asendamisel sellele sama märgi. Tõepoolest, asendamisel saame

$$p(x_1+y_1)\pm\sqrt{2px_1}\cdot\sqrt{2py_1}=$$

$$=p(x_1+y_1)\pm 2p\sqrt{x_1y_1}=p(\sqrt{x_1}\pm\sqrt{y_1})^2\geqslant 0.$$

Järelikult parabooli kõik punktid on ühel pool puutujat (vt. art. 42). Puutuja tõusuks on

$$\tan\alpha=\frac{p}{y_2}=\pm\frac{p}{\sqrt{2py_1}}.$$

Nurgaks puutuja ja telje vahel on seega $\arctan\sqrt{\frac{p}{2y_1}}$; see on tõesti y_1 monotoonselt kahanev funktsioon ja läheneb nullile, kui $y_1\to\infty$. ∎

Parabooli puutujal on huvitav omadus.

***Teoreem* 75.2.** *Parabooli puutuja punktis Y moodustab võrdsed nurgad parabooli teljega ja sirgega FY (kus F on parabooli fookus*; joon. 155).

T õ e s t u s. Puutuja sihivektoriks on võrrandi (75.3) järgi

$$\boldsymbol{k}=(y_2, p),$$

punkte $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ja $Y(y_1, y_2)$ läbiva sirge sihivektoriks on

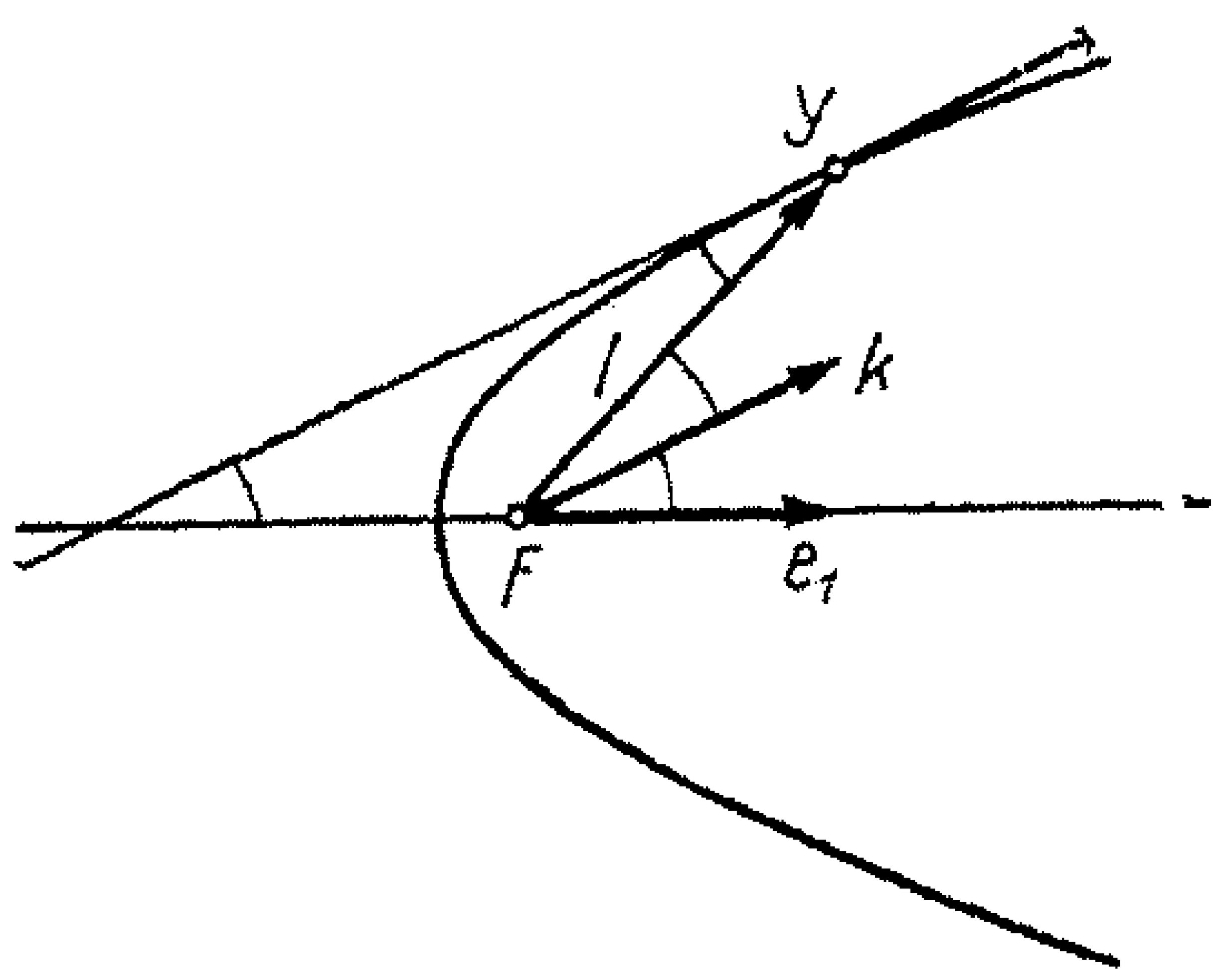
$$\boldsymbol{l}=\overrightarrow{FY}=\left(y_1-\frac{p}{2}, y_2\right),$$

parabooli telje sihivektoriks on $\boldsymbol{e}_1=(1, 0)$. Et

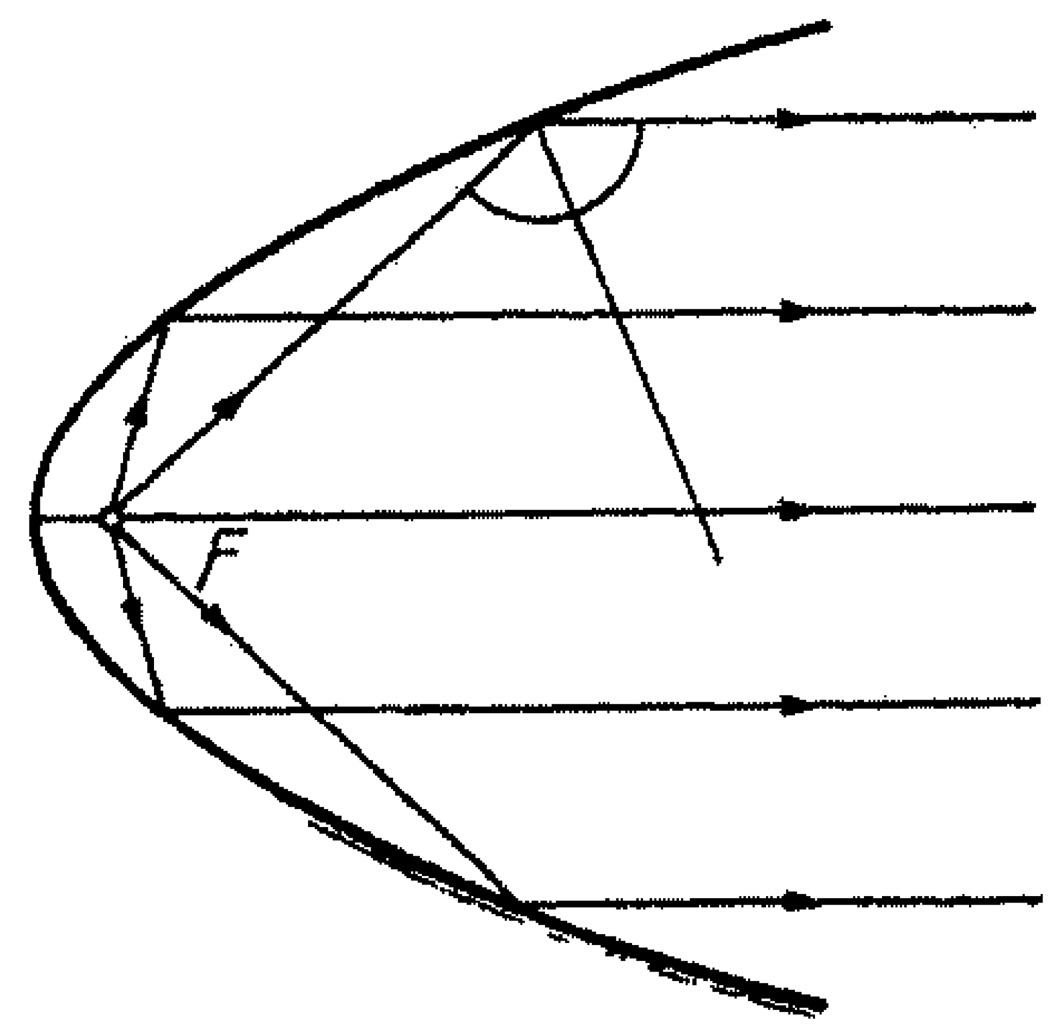
$$\boldsymbol{k}^2=y_2^2+p^2=2py_1+p^2=2p\left(y_1+\frac{p}{2}\right),$$

$$\boldsymbol{l}^2=\left(y_1-\frac{p}{2}\right)^2+y_2^2=y_1^2-py_1+\frac{p^2}{4}+2py_1=\left(y_1+\frac{p}{2}\right)^2,$$

$$\boldsymbol{kl}=y_2\left(y_1-\frac{p}{2}\right)+py_2=y_2\left(y_1+\frac{p}{2}\right),$$



Joon. 155.



Joon. 156.

siis

$$\cos \sphericalangle (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}) = \frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{k}|\,|\boldsymbol{l}|} = \frac{y_2\left(y_1+\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{2p\left(y_1+\frac{p}{2}\right)}\left(y_1+\frac{p}{2}\right)} = \frac{y_2}{\sqrt{2p\left(y_1+\frac{p}{2}\right)}}.$$

Et $e_1^2 = 1$ ja $\boldsymbol{k}\boldsymbol{e}_1 = y_2$, siis

$$\cos \sphericalangle (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e}_1) = \frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{e}_1}{|\boldsymbol{k}|\,|\boldsymbol{e}_1|} = \frac{y_2}{\sqrt{2p\left(y_1+\frac{p}{2}\right)}}.$$

Siit nähtubki, et $\sphericalangle(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}) = \sphericalangle(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e}_1)$. ∎

Tulemusel on huvitav tõlgendus optikas; seda nimetataksegi sageli parabooli optiliseks omaduseks: kui valgusallikas on parabooli fookuses, siis paraboolilt peegeldunud kiired on kõik paralleelsed parabooli teljega (joon. 156).[92] See asjaolu leiab kasutamist prožektorite projekteerimisel. Võib anda ka teise tõlgenduse: paraboolile teljega paralleelselt langevad kiired läbivad pärast peegeldumist paraboolilt fookuse. Seda asjaolu kasutatakse reflektorteleskoopide ehitamisel.

Kui võrrandist (75.1) avaldada x_1 ja tähistada $\frac{1}{2p} = a$, siis on tulemuseks

$$x_1 = a x_2^2,$$

[92] Sellest on tulnudki nimetus «fookus» (lad. k. *focus* — [tule-]kolle); teatavate analoogiliste omadustega on nimelt ka ellipsi ja hüperbooli fookused (vt. art. 76 ja 77).

ning kui nüüd vahetada koordinaattelgede osad ja seejärel tähistada $x_1 = x$, $x_2 = y$, siis saame

$$y = ax^2. \tag{75.4}$$

Parabool osutub seega sellise lihtsa ruutfunktsiooni graafikuks (joon. 157).

Pärast lüket, kui koordinaadid teisenevad valemite

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0$$

järgi, on vaadeldava parabooli kujutisel võrrand

$$y' + y_0 = a(x' + x_0)^2$$

ehk

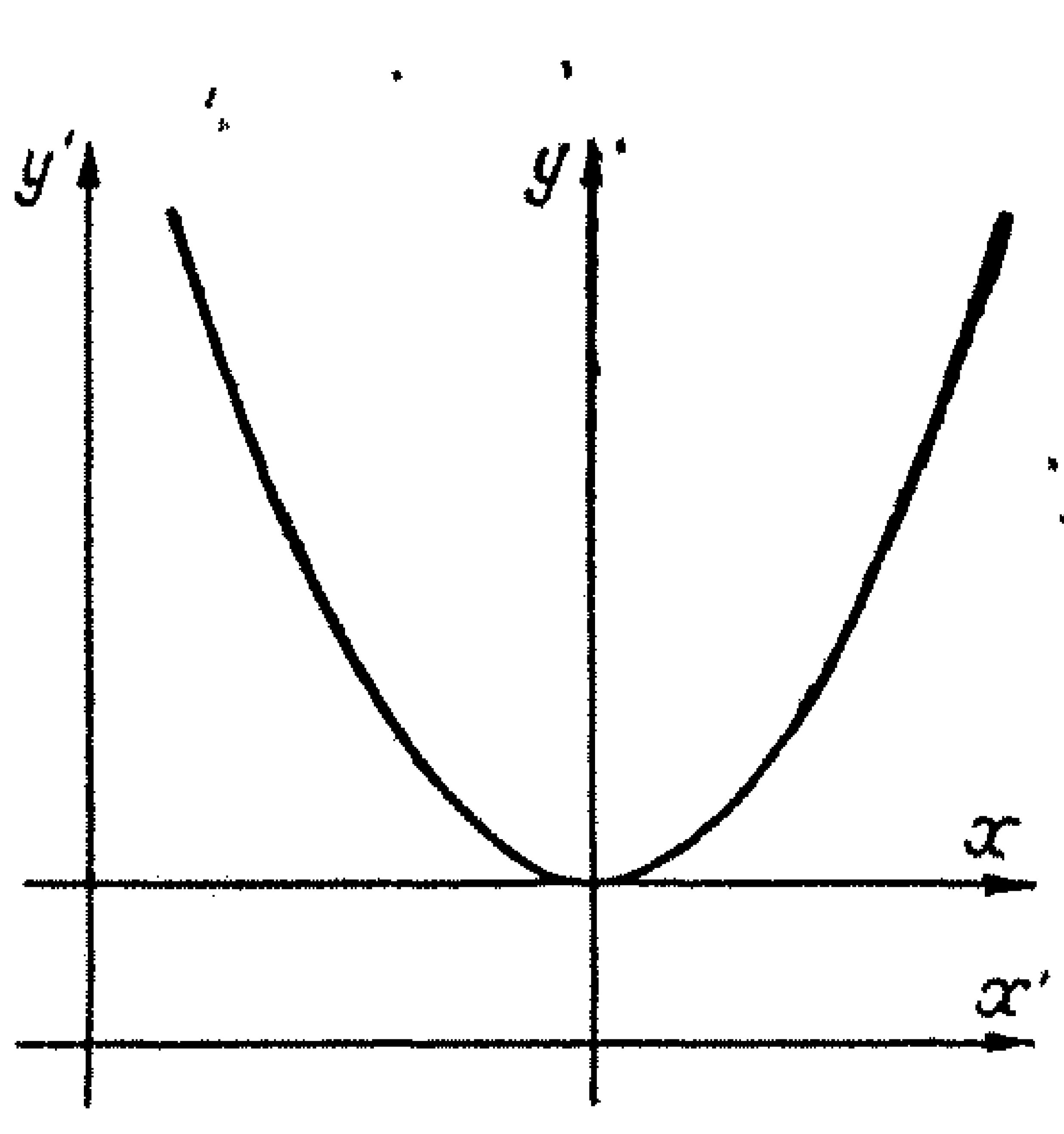
$$y' = ax'^2 + 2bx' + c,$$

kus

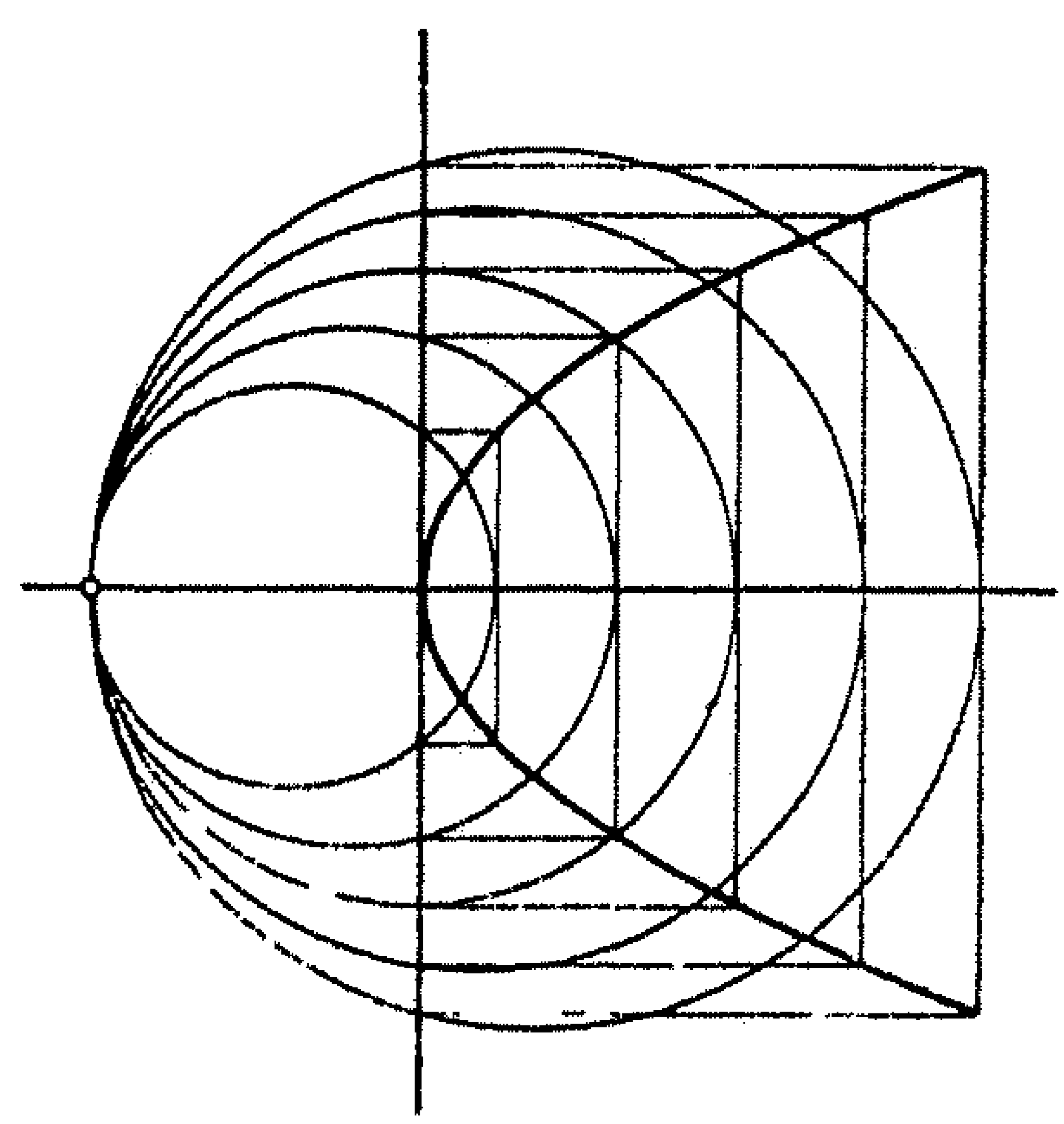
$$b = ax_0, \quad c = ax_0^2 - y_0.$$

Parabool on siin juba üldise ruutfunktsiooni graafikuks. Vastupidi, on lihtne näidata (seda tehakse juba keskkoolis), et iga sellise ruutfunktsiooni graafikuks on teatav parabool, s. t. joon lihtsaima võrrandiga (75.4).

On leitud mitmeid võtteid koonuselõike, tema puutuja ja fookuse konstrueerimiseks[93]. Tutvustame siin üht parabooli joonestamisvõtet. Võrrandist (75.1) on näha, et parabooli punkti ordinaat x_2 on selle punkti abstsissi x_1 ja parabooli fokaallaiuse $2p$ keskmine võrdeline. Seda silmas pidades tõmbame ringjoone, mille diameetriks on punktidega $X_1(x_1, 0)$ ja $P(-2p, 0)$ määratud



Joon. 157.



Joon. 158.

[93] Mõningaid neist võib leida joonestamise käsiraamatutes, näit. O. Rünk, E. Targo, K. Tihase, Joonestamise ja joonistamise põhikursus. Tallinn, 1963.

sirglõik X_1P. Selle ringjoone ja ordinaattelje lõikepunktid $T(0, x_2)$ ja $T'(0, -x_2)$ võimaldavad leida parabooli kaks punkti $X(x_1, x_2)$ ja $X'(x_1, -x_2)$. Korrates seda võtet, saab leida kuitahes tiheda punktide hulga paraboolil (joon. 158).

76. Ellips. Ellips on koonuselõige, mille ekstsentrilisus on väiksem kui 1 (vt. art. 72). Tema tippvõrrandis (74.1), kui selles koordinaadid tähistada x'_1 ja x'_2:

$$x'^2_2 = 2px'_1 + (e^2 - 1)x'^2_1,$$

on $0 < e < 1$. Teoreemi 74.3 põhjal on ellipsil kaks ristuvat telge, mida esitavad võrrandid (74.4):

$$x'_2 = 0, \qquad x'_1 = \frac{p}{1 - e^2}$$

ja mis seetõttu lõikuvad punktis $\left(\frac{p}{1 - e^2}, 0\right)$. Seejuures esimesel neist asetseb fookus $F\left(\frac{p}{1+e}, 0\right)$ ja teda lõikab risti juhtsirge võrrandiga $x'_1 = -\frac{p}{e(1+e)}$.

Ellipsi uurimisel on loomulik ristreeper valida selliselt, et koordinaattelgedeks oleksid ellipsi teljed. Kui koordinaadid sellise ristreeperi suhtes tähistada x_1 ja x_2, siis on tegemist koordinaaditeisendusvalemitega

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + \frac{p}{1 - e^2}, \\ x'_2 &= x_2. \end{aligned} \tag{76.1}$$

Siit asendus ellipsi tippvõrrandisse annab:

$$x_2^2 = 2p\left(x_1 + \frac{p}{1 - e^2}\right) + (e^2 - 1)\left(x_1^2 + \frac{2px_1}{1 - e^2} + \frac{p^2}{(1 - e^2)^2}\right)$$

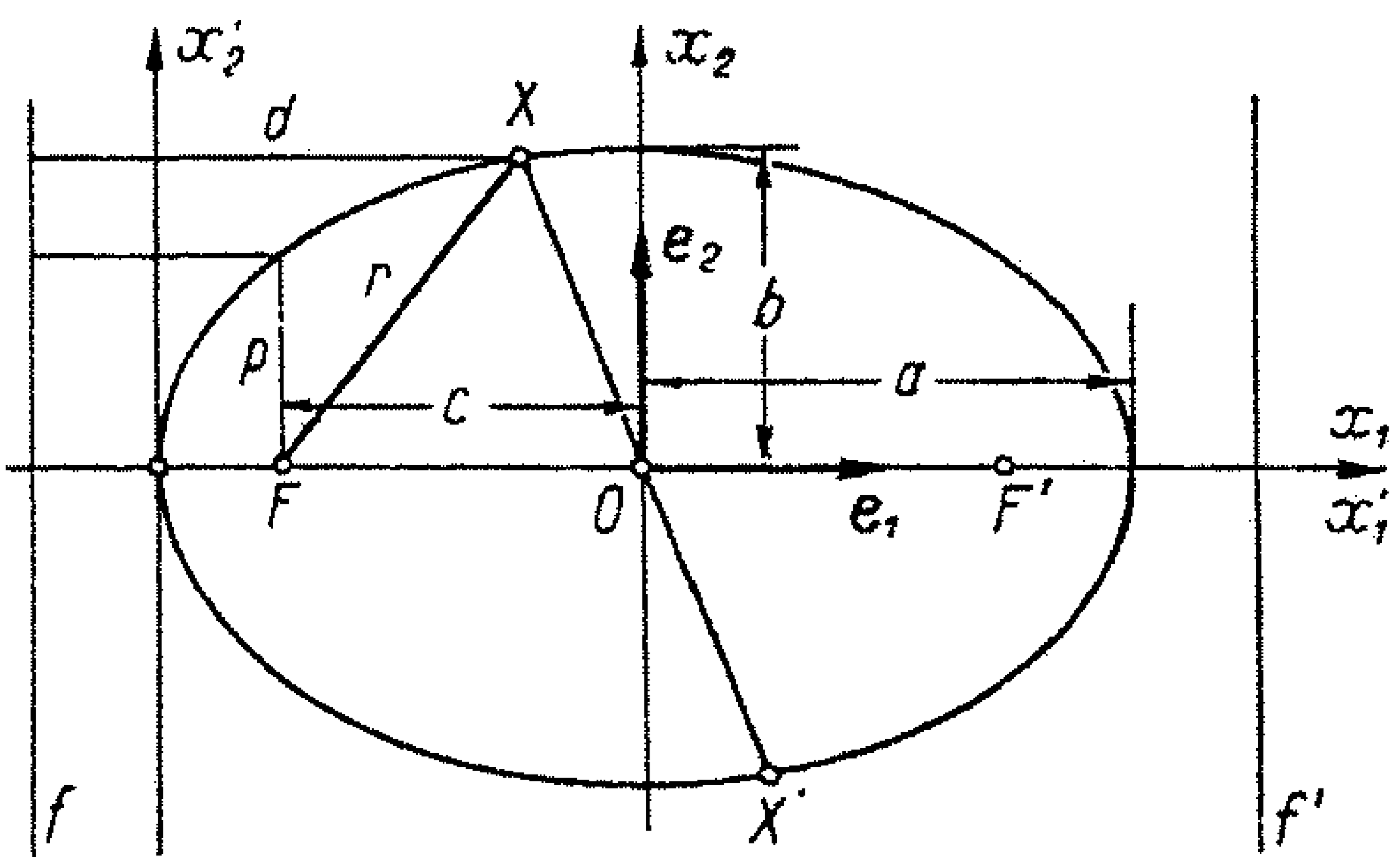
ehk

$$(1 - e^2)x_1^2 + x_2^2 = \frac{p^2}{1 - e^2}$$

ehk

$$\frac{(1 - e^2)^2}{p^2} x_1^2 + \frac{1 - e^2}{p^2} x_2^2 = 1. \tag{76.2}$$

Meenutame, et siin $e < 1$. Seetõttu vasakul pool mõlemad kordajad on positiivsed ning järelikult leiduvad positiivsed reaal-



Joon. 159.

arvud a ja b selliselt, et

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}. \tag{76.3}$$

Ellipsi võrrandi (76.2) saab nüüd kirjutada kujul

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1. \tag{76.4}$$

Siit on veel kord hästi näha, et ellips on sümmeetriline kahe ristuva telje — x_1-telje ja x_2-telje suhtes (joon. 159). Telgede lõikepunkti, praegu reeperi alguspunkti $O(0, 0)$, nimetatakse ellipsi **keskpunktiks**. Ellips on selle suhtes sümmeetriline, sest koos punktiga $X(x_1, x_2)$ on ellipsil alati ka punkt $X'(-x_1, -x_2)$.

Leiame fookuse koordinaadid ja juhtsirge võrrandi valitud reeperi suhtes. Fookuse puhul $x'_1 = \frac{p}{1+e}$, $x'_2 = 0$, seega $x_1 =$
$= \frac{p}{1+e} - \frac{p}{1-e^2} = \frac{(1-e)p - p}{1-e^2} = -\frac{ep}{1-e^2} = -ea, \quad x_2 = 0.$
Juhtsirge uueks võrrandiks tuleb $x_1 = -\frac{p}{e(1+e)} - \frac{p}{1-e^2}$; siin paremal pool on $-\frac{(1-e)p + ep}{e(1-e^2)} = -\frac{p}{e(1-e^2)} = -\frac{a}{e}$. Järelikult fookusel on koordinaadid $F(-ae, 0)$ ja juhtsirgel on võrrand $x_1 = -\frac{a}{e}$.

Arvestame nüüd ellipsi sümmeetriat oma teise telje, s. t. praegu x_2-telje suhtes. Sellest tuleneb, et ellipsil on ka teine, esimesega sümmeetriline fookus $F'(ae, 0)$ ja teine, esimesega sümmeetriline juhtsirge f' võrrandiga $x_1 = \frac{a}{e}$. Telge, millel asetsevad ellipsi fookused, nimetatakse ellipsi fokaalteljeks, teist telge, mis on sellega risti — kaasteljeks.

Reaalarvu ae nimetatakse fookuskauguseks ja tähistatakse c, s. t.

$$c = ae = \frac{ep}{1 - e^2}. \tag{76.5}$$

Kui nüüd arvutada $b^2 + c^2$:

$$b^2 + c^2 = \frac{p}{1 - e^2} + \frac{e^2p^2}{(1 - e^2)^2} = \frac{(1 - e^2)p^2 + e^2p^2}{(1 - e^2)^2} = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2},$$

siis selgub, et

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{76.6}$$

Siit on hästi näha, et $a > b$ ja $a > c$.

Näitame, et iga võrrand (76.4), milles $a > b$, esitab teatava ellipsi, s. t. et iga kahe reaalarvu a ja b, $a > b > 0$ korral leiduvad positiivsed reaalarvud p ja e, nii et $e < 1$ ja on rahuldatud seosed (76.3). Selleks tõstame nende seoste pooled ruutu ja lahutame; saame

$$a^2 - b^2 = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2} - \frac{p^2}{1 - e^2}$$

ehk

$$a^2 - b^2 = \frac{e^2p^2}{(1 - e^2)^2}.$$

Seega

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Siit leiame e, kusjuures $e < 1$. Edasi esimesest seosest (76.3) arvutame p.

Järelikult võrrand (76.4), kus $a > b > 0$, kujutab endast alati teatava ellipsi võrrandit, kusjuures ellipsi keskpunkt on ristreeperi alguspunktiks O. Viimase asjaolu kajastamiseks nimetatakse võrrandit (76.4) ellipsi keskpunktvõrrandiks.[94]

Võrrand (76.4), milles $a = b$, esitab ringjoone raadiusega a. Mis puutub juhtu $a < b$, siis selle saab koordinaattelgede vaheta-

[94] Sageli ka kanooniliseks võrrandiks, kuigi niisama hästi on «kanooniline» (kr. k. κανων — norm, eeskuju) ka tippvõrrand.

misega taandada eelmisele. Järelikult on samuti tegemist ellipsiga, kuid see ellips paikneb koordinaattelgede suhtes teisiti.

Ellipsi tippude määramiseks on vaja leida tema lõikepunktid telgedega, s. t. praegu koordinaattelgedega. Võrrandist (76.4) järeldub kohe, et ellipsil on neli tippu: $A(-a, 0)$ ja $A'(a, 0)$ sellel teljel, millel on fookused, ning $B(-b, 0)$ ja $B'(b, 0)$ teisel teljel. Võrratuse $a > c$ tõttu fookused F ja F' on tippude A ja A' vahel. Seevastu juhtsirged võrranditega $x_1 = \pm\frac{a}{e}$ lõikavad telge väljaspool lõiku AA', sest $e < 1$.

Tippudevaheliste kõõlude AA' ja BB' pikkusteks on vastavalt $2a$ ja $2b$. Neid arve nimetatakse, arvestades seda, et $2a > 2b$, vastavalt ellipsi suurteljeks ja väiketeljeks. Arve a ja b, mis, nagu näha, määravad täielikult ellipsi võrrandi (76.4), nimetatakse vastavalt ellipsi suur- ja väikepoolteljeks. Fookuskaugusega c seob neid võrdus (76.6).[95]

Ellipsi kuju kohta saab lisaks juba märgitud sümmeetriaomadustele teha võrrandist (76.4) järgmisi järeldusi. Et vasakul on mõlemad liidetavad mittenegatiivsed, siis on nad ühtlasi väiksemad kui 1. Seega

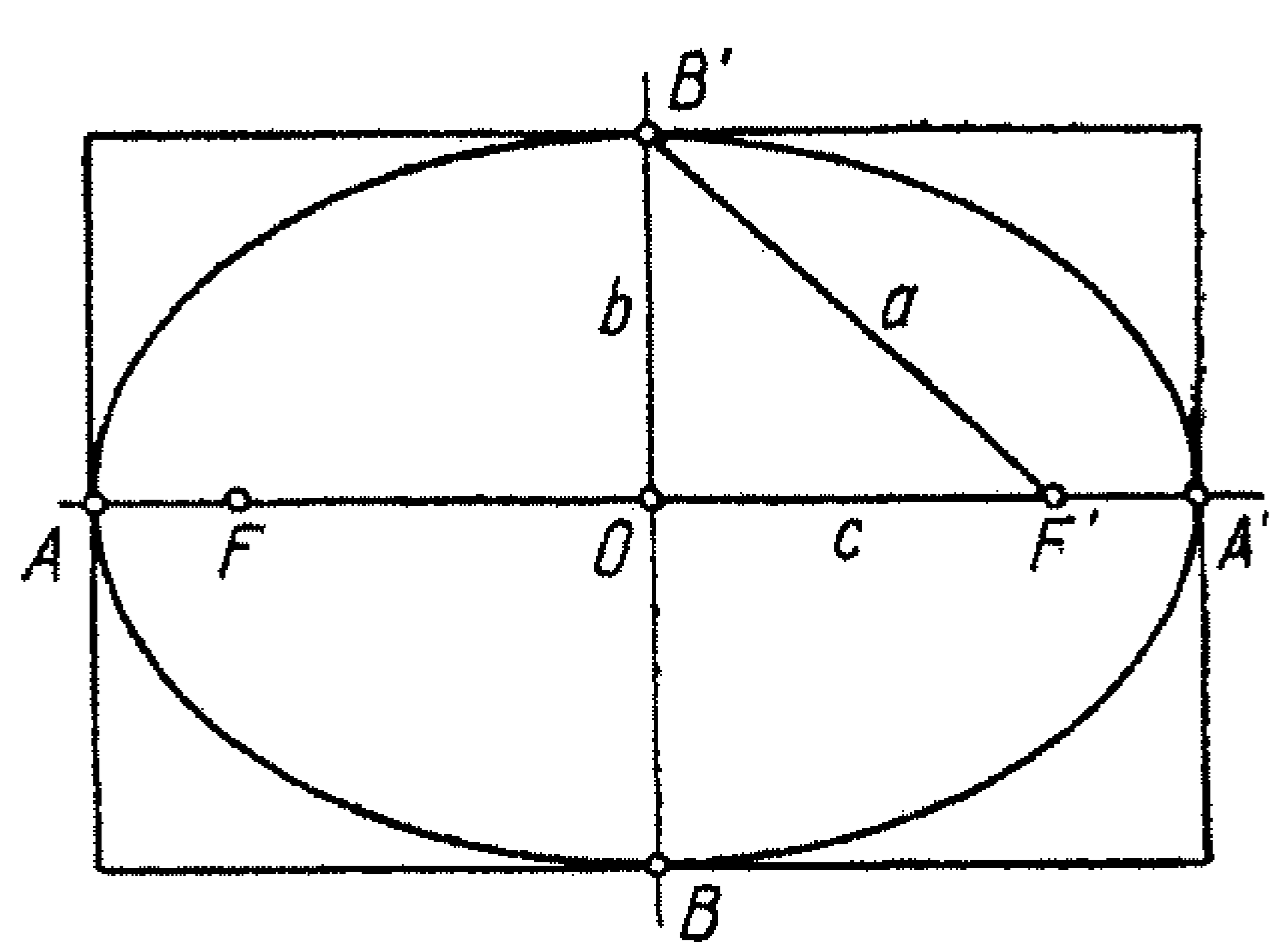
$$x_1^2 \leqslant a^2, \quad x_2^2 \leqslant b^2$$

ehk

$$-a \leqslant x_1 \leqslant a, \quad -b \leqslant x_2 \leqslant b.$$

Ellips on järelikult ristkülikus, mille küljed läbivad tippe ja on paralleelsed telgedega (joon. 160).

Ellipsil on iga sihiga kõõle. Tõepoolest, näiteks iga keskpunkti läbiv sirge — seda saab esitada parameetriliste võrranditega $x_1 = uk_1$, $x_2 = uk_2$ — lõikab ellipsit kahes sümmeetrilises punktis, sest asendus võrrandisse (76.4) annab u jaoks lihtsa ruutvõrrandi kahe märgi poolest erineva lahendiga.



Joon. 160.

Ellipsi ehitust selgitab ka tema puutujate uurimine. Puu-

[95] Viimane on muide tõlgendatav täisnurkse kolmnurga $\triangle OBF$ külgede vahelise seosena, millest nähtub, et BF pikkus on a — asjaolu, mida on hea kasutada ellipsi fookuse konstrueerimisel juhul, kui see ei ole joonisele veel kantud.

tuja võrrandi saamiseks praegu kasutatava ristreeperi suhtes tuleb asendus (76.1) teha võrrandis (74.7):

$$y'_2x'_2=p(x'_1+y'_1)+(e^2-1)y'_1x'_1.$$

Tulemuse

$$y_2x_2=p\left(x_1+y_1+\frac{2p}{1-e^2}\right)+(e^2-1)\left(y_1+\frac{p}{1-e^2}\right)\left(x_1+\frac{p}{1-e^2}\right)$$

korraldamine annab esialgu

$$y_2x_2=\frac{2p^2}{1-e^2}+(e^2-1)\left(y_1x_1+\frac{p^2}{(1-e^2)^2}\right)$$

ning seejärel

$$(1-e^2)y_1x_1+y_2x_2=\frac{p^2}{1-e^2}. \tag{76.7}$$

Pärast tähistuste a ja b kasutuselevõtmist saame siit ellipsi puutujale võrrandi

$$\frac{y_1x_1}{a^2}+\frac{y_2x_2}{b^2}=1. \tag{76.8}$$

Leiame ellipsi puutujad tippudes $A'(a, 0)$ ja $B'(b, 0)$:

$$\frac{ax_1}{a^2}+\frac{0x_2}{b^2}=1, \qquad \frac{0x_1}{a^2}+\frac{bx_2}{b^2}=1.$$

Näeme, et nendeks on telgedega paralleelsed sirged võrranditega $x_1=a$ ja $x_2=b$. Neli puutujat tippudes moodustavad seega selle ristküliku, milles ellips asetseb.

Üldiselt ellipsi puutuja kohta on võimalik tõestada järgmised teoreemid.

***Teoreem* 76.1.** *Ellips on ühel pool iga oma puutujat. Kui puutepunkt liigub mööda ellipsit algasendini, siis ellipsi puutuja pöördub samuti oma algasendini.*

Tõestus. Esitame ellipsi parameetriliste võrranditega, kasutades asjaolu, et võrratuste $-1\leqslant\frac{x_1}{a_1}\leqslant 1$ tõttu leidub α, mille korral $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$ ja

$$\frac{x_1}{a}=\cos\alpha.$$

Samuti nagu ringjoone parameetriliste võrrandite tuletamisel (vt. art. 68) järeldub siis, et $\frac{x_2}{b}=\sin\alpha$. Seega ellipsi saab esitada järgmiste parameetriliste võrranditega:

$$x_1 = a\cos\alpha, \quad x_2 = b\sin\alpha, \quad 0 \leqslant \alpha < 2\pi. \tag{76.9}$$

Puutujal mingis ellipsi punktis on järelikult võrrand

$$\frac{x_1\cos\alpha}{a} + \frac{x_2\sin\alpha}{b} - 1 = 0.$$

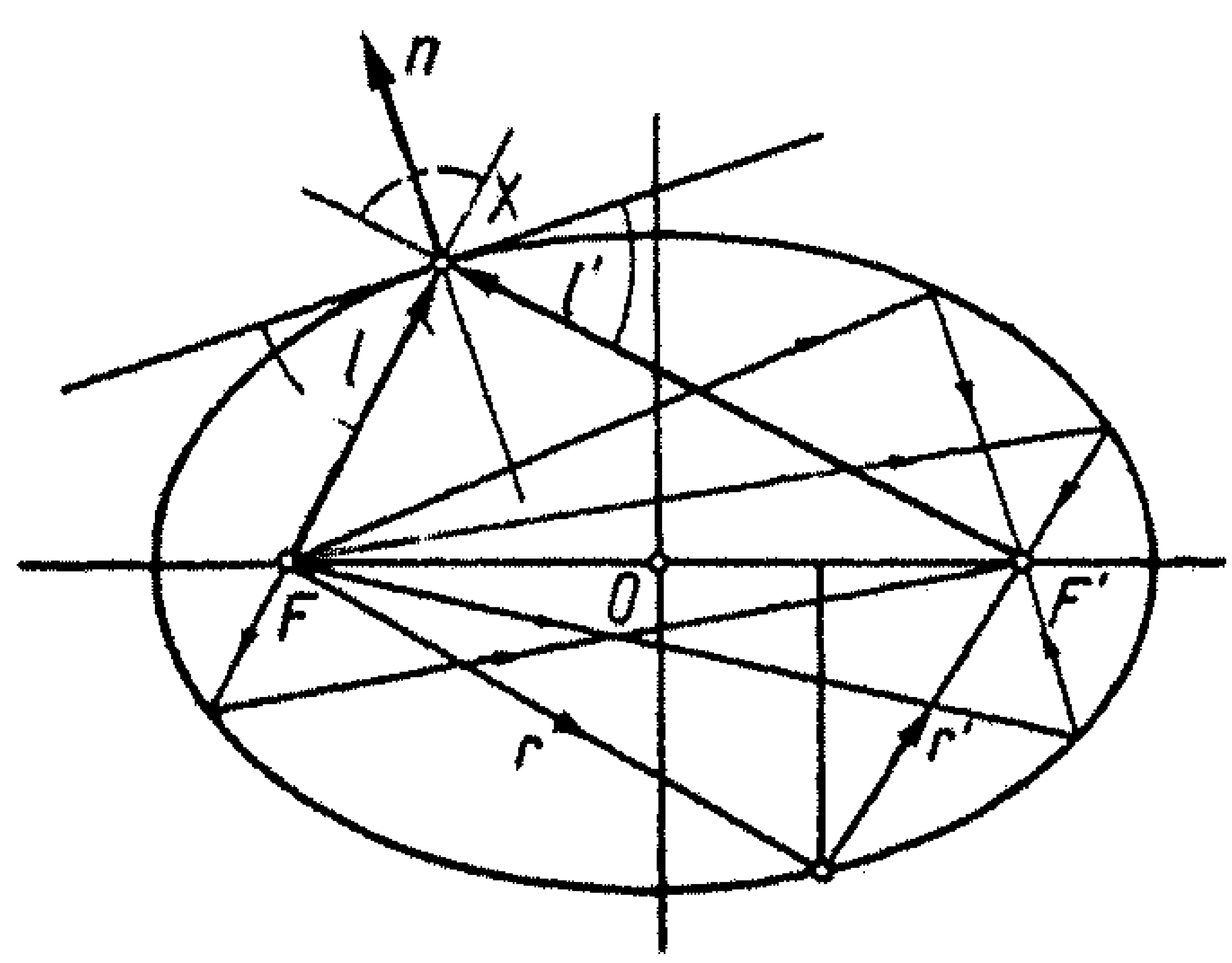
Ellipsi mingi teise punkti $(a\cos\beta,\ b\sin\beta)$ koordinaatide asendamisel selle võrrandi vasakusse poolde on tulemusel

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta - 1 = \cos(\alpha - \beta) - 1$$

alati sama märk, sest $\cos(\alpha - \beta) \leqslant 1$. Seega ellips on ühel pool puutujat.

Teoreemi teise lause tõestamiseks on küllalt, kui märkida, et puutujal on normaalvektor $\left(\frac{\cos\alpha}{a}, \frac{\sin\alpha}{b}\right)$, mis α muutudes pöördub kuni algasendini. ∎

Teoreem 76.2. *Ellipsi puutuja punktis X moodustab võrdsed nurgad sirgetega FX ja F′X, kus F ja F′ on fookused* (joon. 161).



Joon. 161.

Tõestus. Ellipsi puutuja sihi asemel võib siin vaadelda puutuja normaalvektori sihti, mille saab, nagu selgus, määrata vektoriga

$$\boldsymbol{n} = (b\cos\alpha,\ a\sin\alpha).$$

Vektoritel $\boldsymbol{l} = \overrightarrow{FX}$ ja $\boldsymbol{l}' = \overrightarrow{F'X}$ on järgmised koordinaadid:

$$\boldsymbol{l} = (a\cos\alpha + c,\ b\sin\alpha),$$
$$\boldsymbol{l}' = (a\cos\alpha - c,\ b\sin\alpha).$$

On vaja näidata, et $\cos\sphericalangle(l, n) = \frac{ln}{|l|\,|n|}$ ja $\cos\sphericalangle(l', n) = \frac{l'n}{|l'|\,|n|}$ on võrdsed, s. t. et

$$\frac{ln}{|l|} = \frac{l'n}{|l'|}. \tag{76.10}$$

Siin

$$ln = ab\cos^2\alpha + bc\cos\alpha + ab\sin^2\alpha = b(a + c\cos\alpha),$$
$$l'n = ab\cos^2\alpha - bc\cos\alpha + ab\sin^2\alpha = b(a - c\cos\alpha),$$

edasi,

$$l^2 = a^2\cos^2\alpha + 2ac\cos\alpha + c^2 + b^2(1 - \cos^2\alpha) =$$
$$= (a^2 - b^2)\cos^2\alpha + 2ac\cos\alpha + c^2 + b^2 =$$
$$= c^2\cos^2\alpha + 2ac\cos\alpha + a^2 = (a + c\cos\alpha)^2$$

ning analoogiliselt

$$l'^2 = (a - c\cos\alpha)^2.$$

Et $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$ ja $c < a$, siis

$$-a < -c \leqslant c\cos\alpha \leqslant c < a.$$

Järelikult $a + c\cos\alpha > 0$ ja $a - c\cos\alpha > 0$, mistõttu

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{FX}| &= |l| = a + c\cos\alpha, \\ |\overrightarrow{F'X}| &= |l'| = a - c\cos\alpha. \end{aligned} \tag{76.11}$$

Siit järeldubki soovitud võrdus (76.10). ∎

Kaugusi (76.11) nimetatakse ellipsi punkti $(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$ f o k a a l r a a d i u s t e k s ning tähistatakse vastavalt r ja r'. Et $c\cos\alpha = ea\cos\alpha$, kus $a\cos\alpha = x_1$ on ellipsi punkti abstsiss, siis (76.11) põhjal

$$\begin{aligned} r &= a + ex_1, \\ r' &= a - ex_1. \end{aligned} \tag{76.12}$$

Viimase teoreemi tulemusel on huvitav tõlgendus optikas. Kui asetada valgusallikas ellipsi ühte fookusesse, siis läbivad kõik kiired pärast ühekordset peegeldumist ellipsilt teise fookuse. Seetõttu teoreemis 76.2 väljendatud omadust nimetatakse sageli ellipsi optiliseks omaduseks.

Ellipsi üks lihtsamaid joonestamisvõtteid tugineb järgmisele tähtsale teoreemile, mis annab ühtlasi aluse ellipsi uuele, iseseisvale definitsioonile.

***Teoreem* 76.3.** *Punktihulk tasandil on ellips parajasti siis, kui selle hulga iga punkti X ja tasandi mingi kahe fikseeritud punkti F ja F′ vaheliste kauguste summa* $|\overrightarrow{FX}| + |\overrightarrow{F'X}|$ *on konstantne ja suurem kui lõigu FF′ pikkus.*

T õ e s t u s. Valemitest (76.11) järeldub vahetult, et ellipsil on kirjeldatud omadus, sest nende valemite põhjal $|\overrightarrow{FX}|+|\overrightarrow{F'X}|=$ $=2a>2c$.

Tõestame nüüd, et iga selle omadusega punktihulk tasandil on ellips. Valime ristreeperi selliselt, et O on lõigu FF' keskpunkt ning e_1 on kollineaarne ja samasuunaline vektoriga $\overrightarrow{OF'}$ (joon. 159). Sel korral F ja F' koordinaatideks on $F(-c, 0)$ ja $F'(c, 0)$, kus $2c=|\overrightarrow{FF'}|>0$. Teoreemis mainitud konstandi tähistame $2a$; seega $2a>2c$ ehk $a>c>0$. Vaadeldavasse hulka kuuluvad siis kõik need punktid $X(x_1, x_2)$, mille korral on rahuldatud tingimus

$$\sqrt{(x_1+c)^2+x_2^2}+\sqrt{(x_1-c)^2+x_2^2}=2a.$$

Sellest järeldub, et

$$x_1^2+2cx_1+c^2+x_2^2=4a^2-4a\sqrt{(x_1-c)^2+x_2^2}+x_1^2-2cx_1+c^2+x_2^2$$

ehk

$$a^2-cx_1=a\sqrt{(x_1-c)^2+x_2^2},$$

mistõttu

$$a^4-2ca^2x_1+c^2x_1^2=a^2(x_1^2-2cx_1+c^2+x_2^2)$$

ehk

$$(a^2-c^2)x_1^2+a^2x_2^2=a^2(a^2-c^2).$$

Eelduse kohaselt $a^2-c^2>0$; seega leidub reaalarv $b=$ $=\sqrt{a^2-c^2}$, $b>0$. Tingimusele saame kuju

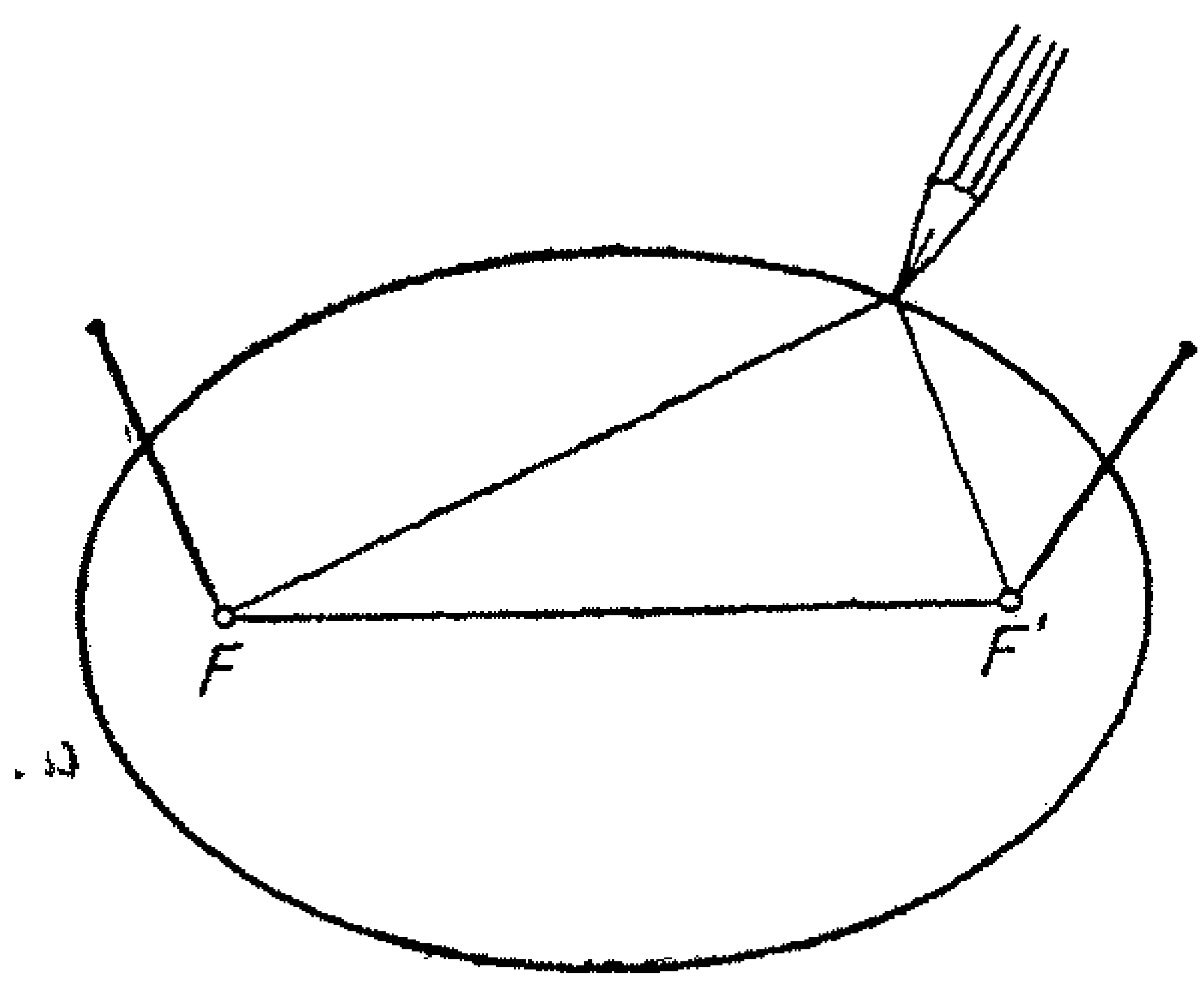
$$b^2x_1^2+a^2x_2^2=a^2b^2,$$

mis pärast poolte jagamist arvuga a^2b^2 osutub samaväärseks teatava ellipsi keskpunktvõrrandiga (76.4). Tähendab, vaadeldava hulga iga punkt on sellel ellipsil. Eespool aga selgus, et ka, vastupidi, ellipsi iga punkt rahuldab seda hulka iseloomustavat tingimust. ∎

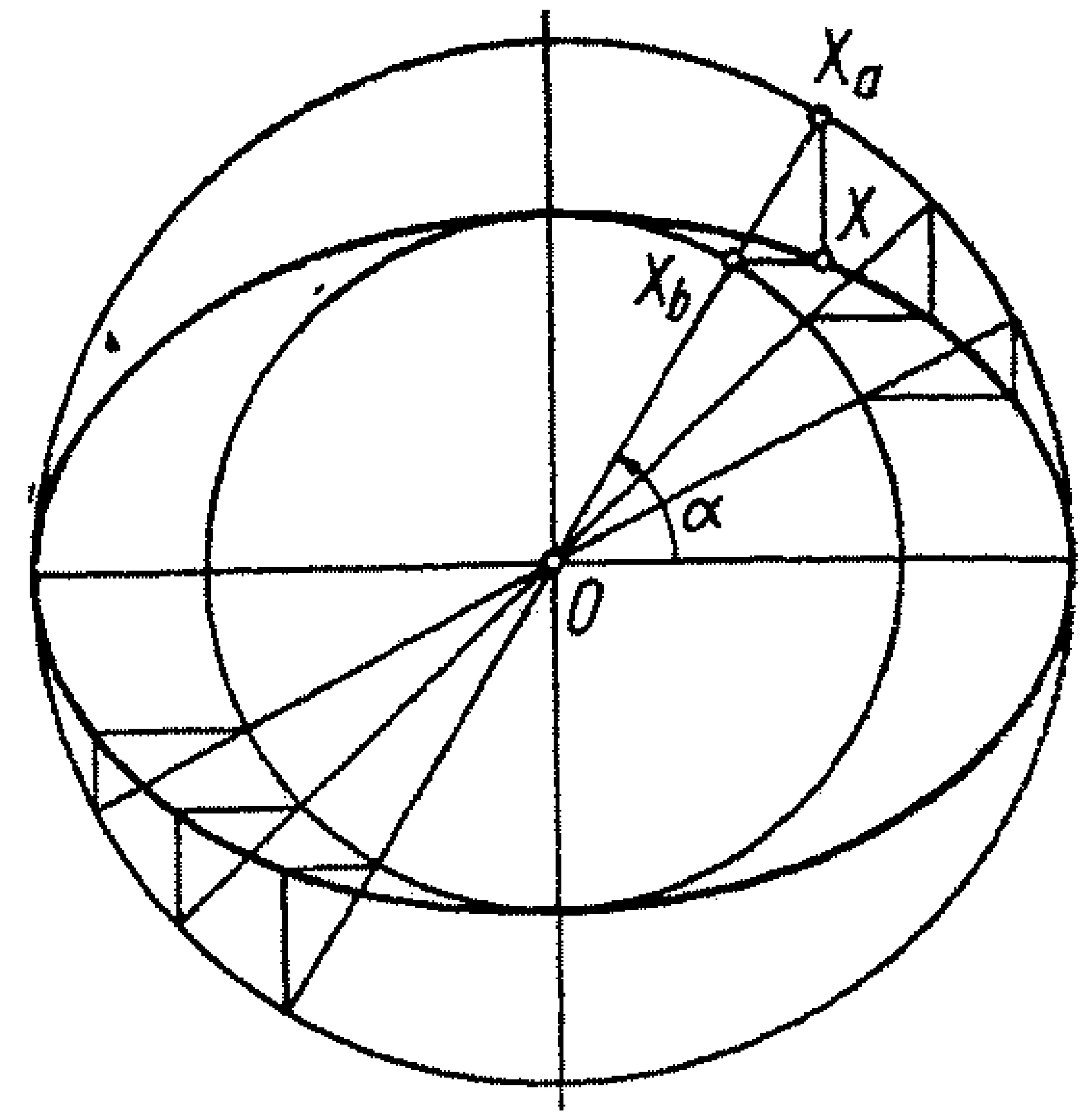
Tõestatud teoreemi põhjal võib ellipsile anda uue, täiesti iseseisva definitsiooni.

***Def.* 76.1.** Ellipsiks nimetatakse tasandi kõigi selliste punktide hulka, mille kauguste summa tasandi mingist kahest fikseeritud punktist F ja F' on konstantne ning suurem punktide F ja F' vahelisest kaugusest. Punkte F ja F' nimetatakse ellipsi fookusteks.

Sageli võetaksegi ellipsi uurimisel aluseks see definitsioon.



Joon. 162.



Joon. 163.

Ühtlasi järeldub siit üldtuntud lihtne võte ellipsi joonestamiseks fookustesse kinnitatud nõelte ning nende taha pliiatsiteravikuga pinguletõmmatud niidiaasa abil (vt. joon. 162). Pliiatsi vedamisel selliselt, et niit oleks kogu aeg pingul, joonestab teravik def. 76.1 põhjal parajasti ellipsi.

Teise joonestusvõtteni võib jõuda, kui tõlgendada geomeetriliselt parameetrit a ellipsi võrrandites

$$x_1 = a \cos \alpha, \qquad x_2 = b \sin \alpha, \qquad 0 \leqslant \alpha < 2\pi.$$

Paneme tähele, et reeperi alguspunktist O lähtuv poolsirge, mille tõusunurk x_1-telje suhtes on α, lõikab ringjoont keskpunktiga O ja raadiusega a punktis $X_a(a \cos \alpha,\ a \sin \alpha)$ ning ringjoont sama keskpunktiga O ja raadiusega b punktis $X_b(b \cos \alpha,\ b \sin \alpha)$. Järelikult ellipsi punkt $X(a \cos \alpha,\ b \sin \alpha)$ osutub täisnurga tipuks kolmnurgas, mille hüpotenuus on X_aX_b ja kaatetid on paralleelsed telgedega (joon. 163). Nurga α muutumisel 0-st 2π-ni kirjeldab sel viisil ehitatud täisnurga tipp kogu ellipsi. Koos parameetri α tähendusega on leitud praktiline meetod ellipsi konstrueerimiseks kahe ühise keskpunktiga ringjoone abil, mille raadiusteks on ellipsi pooltelјed.

77. Hüperbool. Koonuselõiget, mille ekstsentrilisus e on suurem kui 1, nimetatakse hüperbooliks (vt. art. 72). Ka hüperboolil, samuti nagu ellipsil, on teoreemi 74.3 põhjal kaks ristuvat telge. Kui need teljed võtta koordinaattelgedeks, siis sellise ristreeperi suhtes on ka hüperboolil võrrand (76.2)

$$\frac{(1-e^2)^2}{p^2} x_1^2 + \frac{1-e^2}{p^2} x_2^2 = 1,$$

sest selle võrrandi tuletamisel art-s 76 ei olnud vaja teha mingit eeldust e väärtuse kohta. Samal põhjusel on selle ristreeperi suhtes fookuse koordinaatideks endiselt $F\left(-\frac{ep}{1-e^2}, 0\right)$ ja juhtsirge f võrrandiks endiselt $x_1 = -\frac{p}{e(1-e^2)}$.

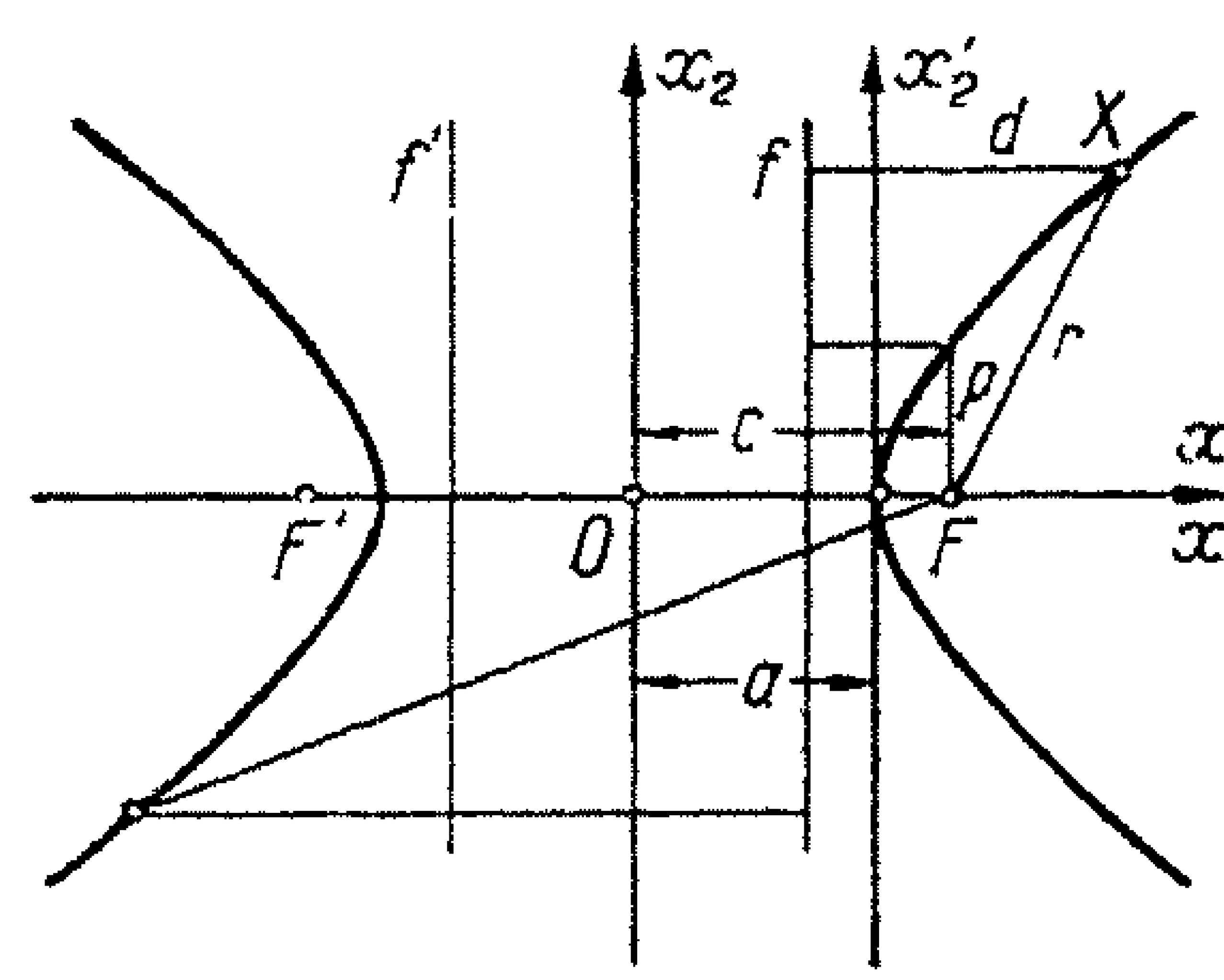
Siin hüperbooli korral, kus $e > 1$, on võrrandis (76.2) x_2^2 kordaja negatiivne. Kui seada eesmärgiks anda ka hüperbooli võrrandile ellipsi võrrandiga (76.4) analoogiline kuju, siis tuleb positiivsed reaalarvud a ja b võtta nüüd järgmiselt:

$$a = \frac{p}{e^2-1}, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}. \tag{77.1}$$

Nende abil saab hüperbooli võrrandi kirjutada kujul

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1. \tag{77.2}$$

Siit on veel kord näha, et hüperbool on sümmeetriline x_1- ja x_2-telje suhtes (joon. 164). Järelikult on ta sümmeetriline ka nende lõikepunkti O suhtes. Seda telgede lõikepunkti nimetatakse hüperbooli **keskpunktiks**.



Joon. 164.

Valemi (77.1) põhjal on fookuse F koordinaatideks $F(ea, 0)$ ja juhtsirge võrrandiks $x_1 = \frac{a}{e}$. Hüperbooli sümmeetria tõttu x_2-telje suhtes on tal ka teine fookus $F'(-ea, 0)$ ja teine juhtsirge võrrandiga $x_1 = -\frac{a}{e}$.

Reaalarvu ea nimetatakse ka siin fookuskauguseks ja tähistatakse c, s. t.

$$c = ea = \frac{ep}{e^2-1}. \tag{77.3}$$

Kui arvutada $a^2 + b^2$:

$$a^2 + b^2 = \frac{p^2}{(e^2-1)^2} + \frac{p^2}{e^2-1} = \frac{(e^2-1)p^2 + p^2}{(e^2-1)^2} = \frac{e^2p^2}{(e^2-1)^2},$$

siis selgub, et hüperbooli korral

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{77.4}$$

See seos erineb analoogilisest seosest (76.6) ellipsi puhul. Ka järeldused tulevad siit teised: $c > a$, $c > b$.

Näitame, et iga võrrand (77.2), milles a ja b on vabalt võetud kaks positiivset reaalarvu, osutub teatava hüperbooli võrrandiks. Selleks loeme p ja e seostes (77.1) tundmatuteks. Viimastest järeldub $a^2 + b^2$ juba saadud avaldis ning selgub, et

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}=e^2.$$

Siit on arvutatav e positiivne väärtus, kusjuures $e > 1$, nagu peabki olema. Esimesest seosest (77.1) määrame nüüd p.

Võrrandit (77.2) nimetatakse hüperbooli keskpunktvõrrandiks, sageli ka kanooniliseks võrrandiks. Selgitame tema abil, kui palju on hüperboolil tippe.

Fookusi F ja F' sisaldav telg, milleks on praegu x_1-telg võrrandiga $x_2 = 0$, lõikab hüperbooli, nagu on näha võrrandist (77.2), kahes punktis $A(a, 0)$ ja $A'(-a, 0)$. Teisiti on lugu x_2-teljega. Selle korral lõikepunkte määraval võrrandil $x_2^2 = -b^2$ on imaginaarsed lahendid $x_2 = \pm ib$. Seetõttu sellel teljel tippe pole. Hüperboolil on seega ainult kaks tippu. Neid läbivat telge, millel asetsevad ühtlasi ka fookused, nimetatakse hüperbooli f o k a a l t e l j e k s, teist telge — k a a s t e l j e k s. Et siin, erinevalt ellipsi juhust, on $c > a$, siis mitte fookused ei ole tippude vahel, vaid vastupidi, tipud on fookuste vahel. Juhtsirged võrranditega $x_1 = \pm\frac{a}{e}$ omakorda lõikavad fokaaltelge tippude vahel.

Tippudevahelist kaugust $2a$ nimetatakse reaalteljeks, poolt sellest — r e a a l p o o l t e l j e k s a. Mõnesuguse analoogia tõttu reaalarvu b, mille ruut on teiseks nimetajaks hüperbooli keskpunktvõrrandis, nimetatakse samuti poolteljeks, seekord i m a g i n a a r p o o l t e l j e k s. Hiljem saab ka see arv tõlgenduse: ta on hüperbooliga seotud teatava lõigu pikkus. Fookuskaugusega c seob neid arve a ja b võrdus (77.4).

Hüperbooli enda ehituse kohta saab võrrandist (77.2) teha järgmisi järeldusi. Et selle võrrandi järgi

$$\frac{x_1^2}{a^2}=1+\frac{x_2^2}{b^2}\geqslant 1,$$

siis $x_1^2 \geqslant a^2$, s. t. kas $x_1 \geqslant a$ või $-x_1 \leqslant -a$. Hüperboolil pole seega punkte võrratustega

$$-a<x_1<a$$

määratud tasandiosas — ribas sirgete $x_1 = -a$ ja $x_1 = a$ vahel. See riba lahutab hüperbooli kaheks x_2-telje suhtes sümmeetriliseks ja omavahel mittelõikuvaks osaks. Kumbagi neist nimetatakse hüperbooli h a r u k s.

Riba ääred osutuvad hüperbooli puutujateks tippudes. Tõepoolest, et võrrandi (76.7) tuletamisel ei ole kasutatud mingit eeldust e väärtuse kohta, siis ta esitab $e > 1$ korral ka hüperbooli puutuja. Asendustega (77.1) tuleb talle kuju

$$\frac{y_1 x_1}{a^2} - \frac{y_2 x_2}{b^2} = 1. \qquad (77.5)$$

Kui siin $y_1 = \pm a$, $y_2 = 0$, siis tulemuseks on tõesti võrrandid $x_1 = \pm a$.

Keskpunkti $O(0, 0)$ läbivatest sirgetest, millel on teatavasti parameetrilised võrrandid $x_1 = uk_1$, $x_2 = uk_2$, lõikavad hüperbooli ainult need, mille puhul asendamisel tekkival ruutvõrrandil u suhtes

$$\frac{(uk_1)^2}{a^2} - \frac{(uk_2)^2}{b^2} = 1$$

ehk

$$u^2\left(\frac{k_1^2}{a^2} - \frac{k_2^2}{b^2}\right) = 1$$

on reaalne lahend, s. t. need, mille korral

$$\frac{k_1^2}{a^2} - \frac{k_2^2}{b^2} > 0.$$

Need on sirged, mille tõusud rahuldavad tingimust

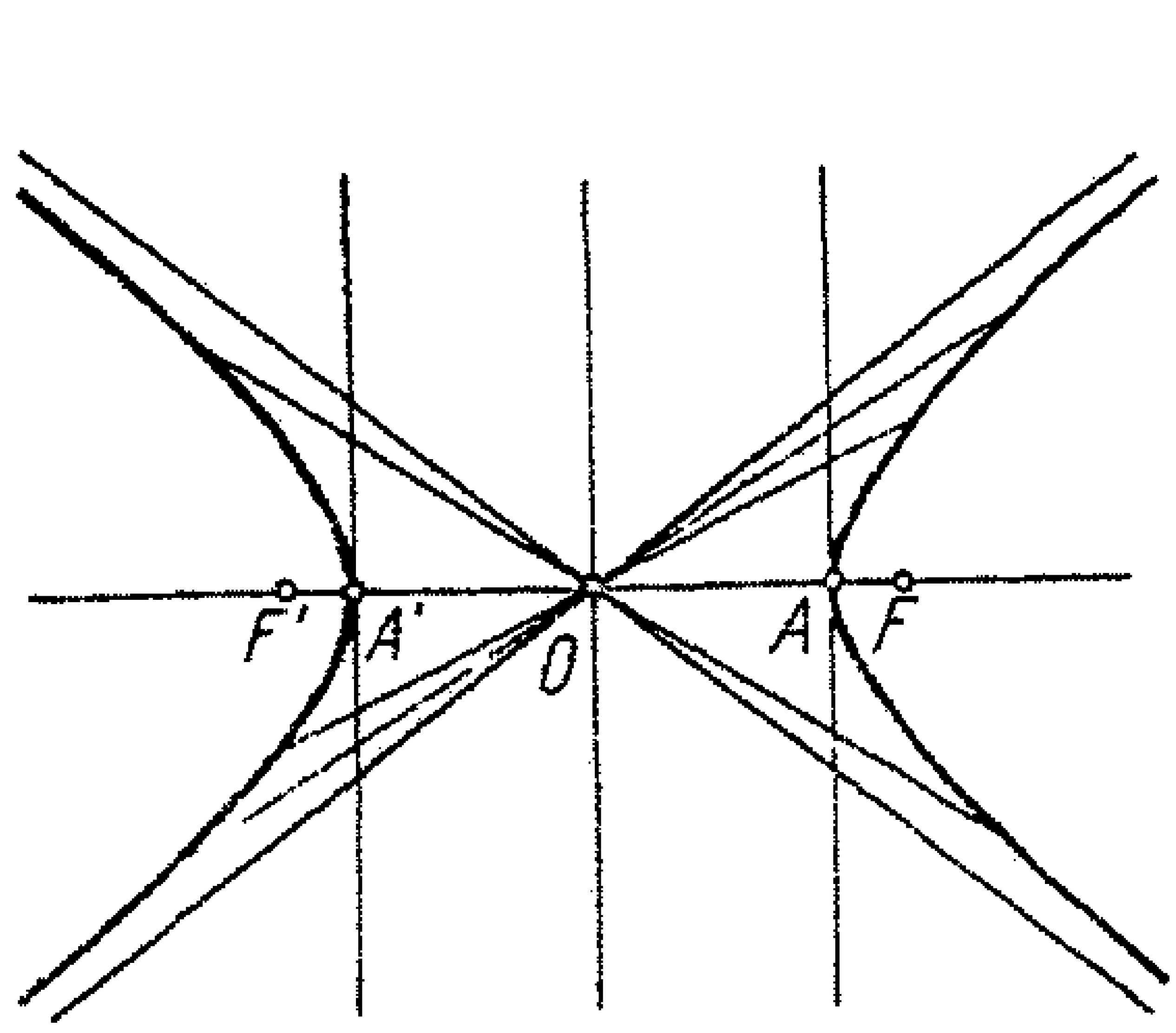
$$\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 < \frac{b^2}{a^2}$$

ehk

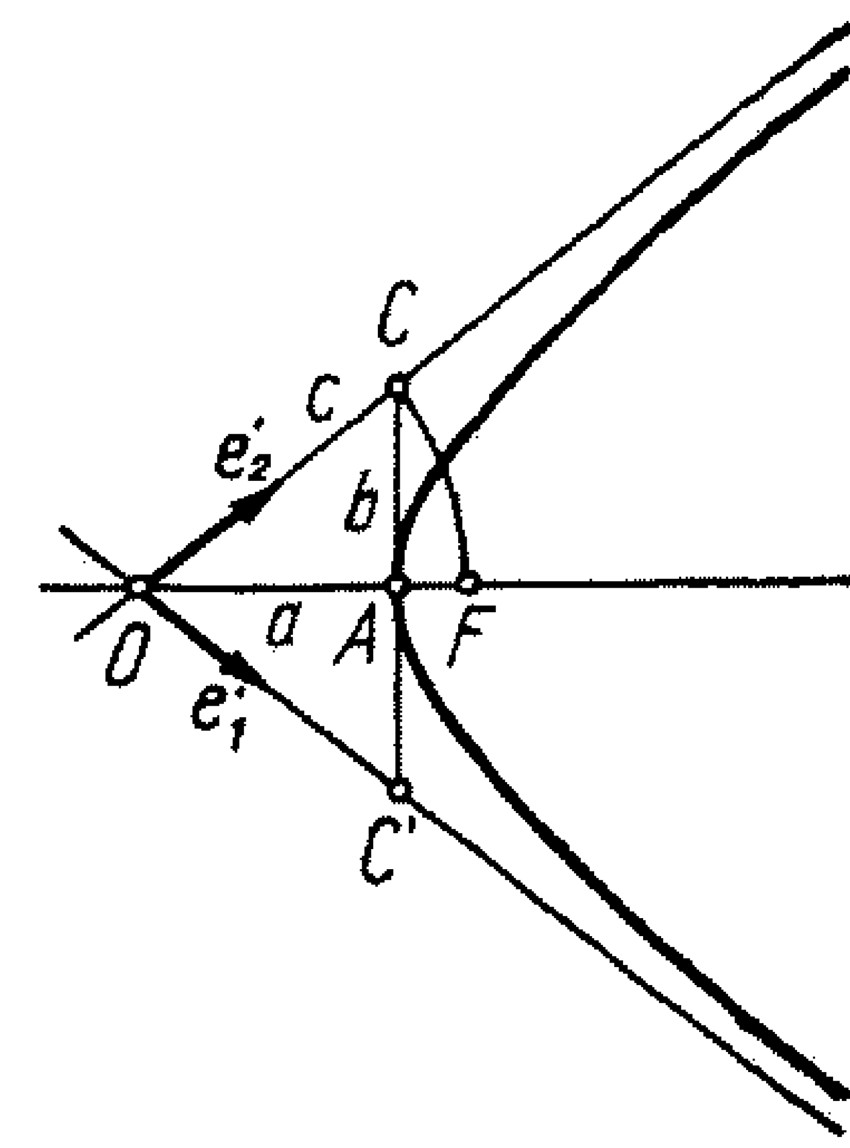
$$-\frac{b}{a} < \frac{k_2}{k_1} < \frac{b}{a}.$$

Sirged läbi O, mille tõusu korral $\frac{k_2}{k_1} \geqslant \frac{b}{a}$ või $\frac{k_2}{k_1} \leqslant -\frac{b}{a}$, ei lõika hüperbooli. Äärmisi sirgeid tõusudega $-\frac{b}{a}$ ja $\frac{b}{a}$ ning seetõttu võrranditega

$$x_2 = -\frac{b}{a} x_1, \qquad x_2 = \frac{b}{a} x_1 \qquad (77.6)$$



Joon. 165.



Joon. 166.

nimetatakse hüperbooli a s ü m p t o o t i d e k s (vt. joon. 165). Asümptoodid, nagu selgub, hüperbooli ei lõika.

Teoreem 77.1. *Hüperbool on nendes asümptootidevahelistes nurkades, kus on tipud, seejuures sealpool tippudes võetud puutujaid, kus pole keskpunkti. Kui hüperbooli punkt kaugeneb tipust, siis tema kaugus ühest asümptoodist kahaneb monotoonselt ja tõkestamatult (s. t. on lõpmata väike suurus).*

T õ e s t u s. Asümptootide võrrandid saab kirjutada kujul

$$\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{b}=0, \qquad \frac{x_1}{a}-\frac{x_2}{b}=0.$$

Seejuures võrrandi (77.2) järgi hüperbooli punkti korral

$$\left(\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{b}\right)\left(\frac{x_1}{a}-\frac{x_2}{b}\right)=1>0,$$

s. t. asümptootide võrrandite vasakud pooled on kas korraga positiivsed või korraga negatiivsed. Tekib kaks kahest võrratusest koosnevat süsteemi. Kumbki neist määrab ühe asümptootidevahelise nurga, mis sisaldab tipu kui hüperbooli ühe punkti. Nendest nurkadest tuleb välja jätta, nagu eespool selgus, tippudes võetud puutujate vahelise riba punktid, kusjuures see riba sisaldab keskpunkti.

Teoreemi teise lause tõestamiseks esitame asümptootide võrrandid (77.6) ühiselt kujul

$$bx_1 \mp ax_2=0,$$

hüperbooli võrrandist aga avaldame

$$x_2=\mp\frac{b}{a}\sqrt{x_1^2-a^2}.$$

Kui nendes seostes võtta korraga kas ülemised märgid või alumised märgid, siis hüperbooli punkti kaugus (vt. art. 44) vastavast asümptoodist on järgmise suuruse absoluutväärtuseks:

$$\frac{bx_1 - a\cdot\frac{b}{a}\sqrt{x_1^2-a^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} =$$

$$=\frac{b\left(x_1-\sqrt{x_1^2-a^2}\right)\left(x_1+\sqrt{x_1^2-a^2}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}\left(x_1+\sqrt{x_1^2-a^2}\right)}=\frac{b\left[x_1^2-(x_1^2-a^2)\right]}{\sqrt{a^2+b^2}\left(x_1+\sqrt{x_1^2-a^2}\right)}=$$

$$=\frac{a^2b}{\sqrt{a^2+b^2}\left(x_1+\sqrt{x_1^2-a^2}\right)}$$

ja kahaneb tõesti monotoonselt. Tema piirväärtuseks on 0, kui $x_1 \to +\infty$ või $x_1 \to -\infty$. ∎

Hüperbooli selline asend asümptoodi suhtes on andnudki viimasele nime[96]. Asümptoodi abil on võimalik tõlgendada imaginaarpooltelge b teatava lõigu pikkusena. Ühe asümptoodi võrrandist $bx_1 - ax_2 = 0$ (vt. (77.6)) on näha, et kui $x_1 = a$, siis $x_2 = b$. Seega b on tipu A kaugus selles tipus võetud puutuja ja asümptoodi lõikepunktist C (joon. 166).[97] Samal ajal on ta võrdne fookuse $F(c, 0)$ kaugusega sellest asümptoodist, sest selleks kauguseks on

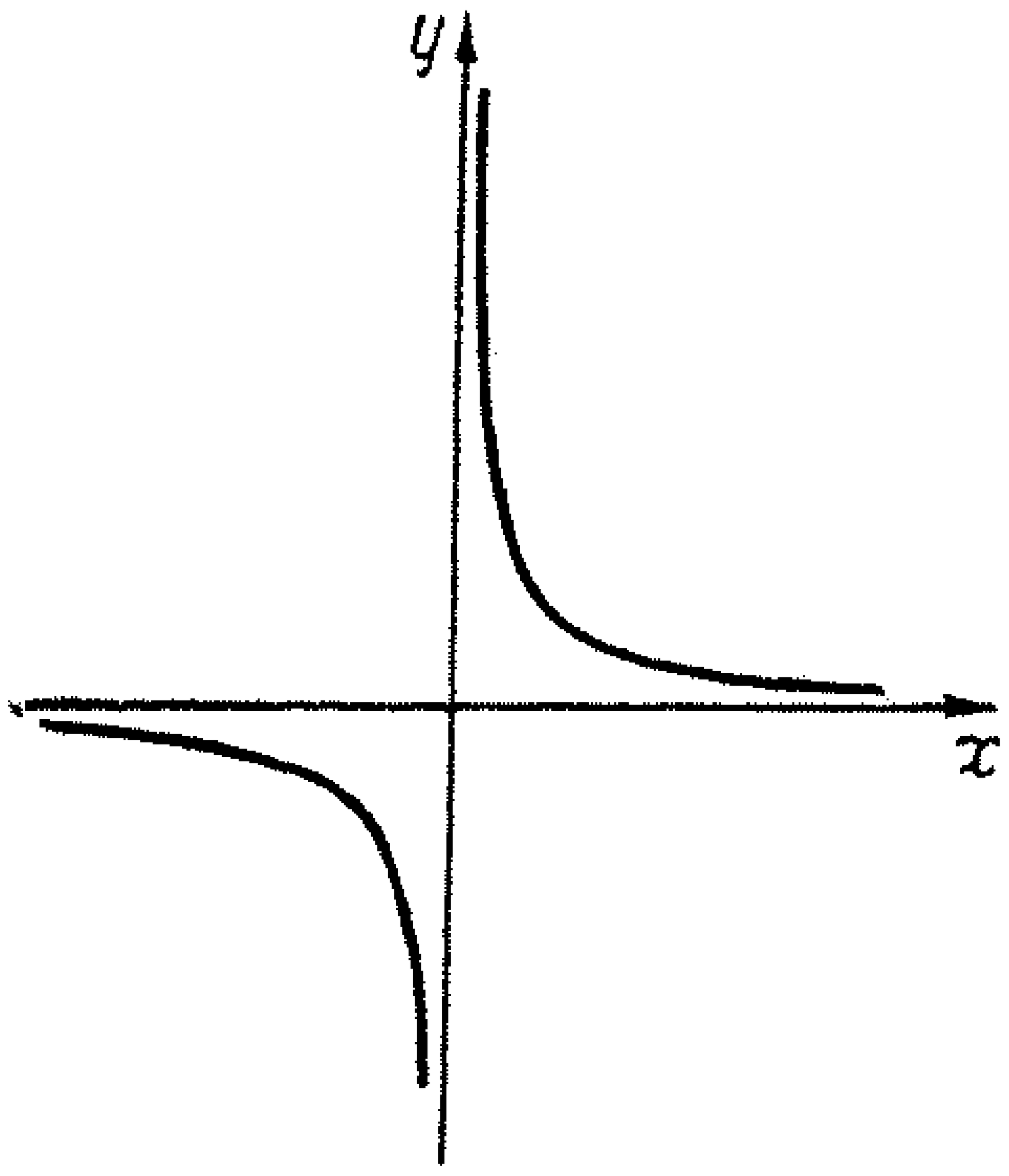
$$\frac{bc - a\cdot 0}{\sqrt{a^2+b^2}} = b.$$

Näidatud punktiga $C(a, b)$ on reaaltelje suhtes sümmeetriline punkt $C'(a, -b)$. Osutub, et hüperbooli võrrand on eriti lihtne sellise reeperi suhtes, mille alguspunktiks on endiselt hüperbooli keskpunkt O, kuid baasivektoreiks on $\boldsymbol{e}'_1 = \overrightarrow{OC'}\cdot\lambda$ ja $\boldsymbol{e}'_2 = \overrightarrow{OC}\cdot\lambda$, kus λ on mingi nullist erinev reaalarv. Selline reeper üldiselt ei ole enam ristreeper, sest $\boldsymbol{e}'_1 = (\lambda a, -\lambda b)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (\lambda a, \lambda b)$ ning $\boldsymbol{e}'^2_1 = \boldsymbol{e}'^2_2 = \lambda^2(a^2+b^2) = \lambda^2 c^2$, $\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2 = \lambda^2(a^2-b^2)$, s. t. baasivektorid $\boldsymbol{e}'_1$ ja $\boldsymbol{e}'_2$ on küll võrdse pikkusega, kuid juhul $a \neq b$ nad ei ole risti. Koordinaattelgedeks on

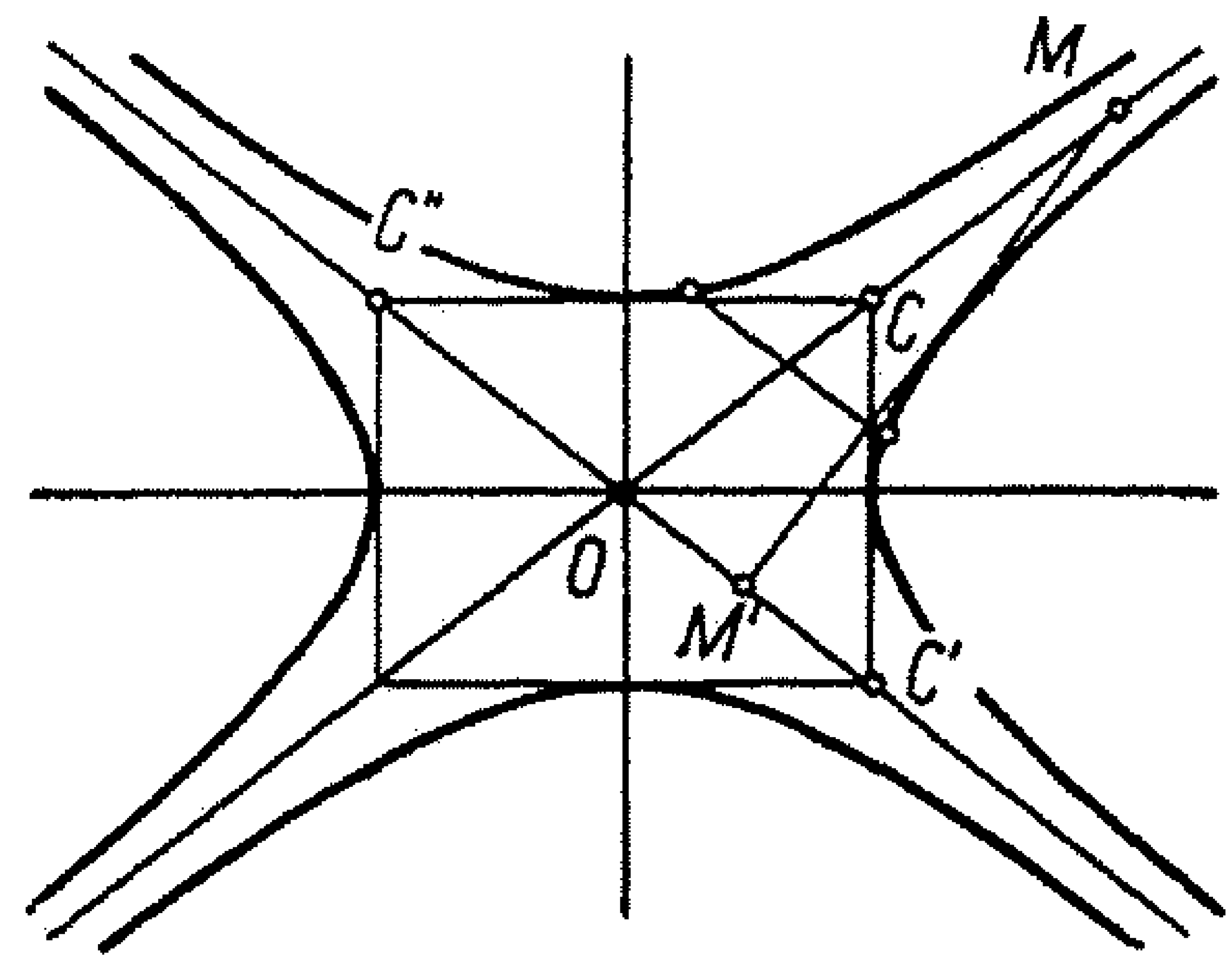
---

[96] kr. k. ἀσύμπτωτος — mittekokkulangev.

[97] Arvud a ja b on seega kaatetiteks täisnurkses kolmnurgas $\triangle OAC$. Seose (77.4) tõttu fookuskaugus c on hüpotenuusi OC pikkus. See tulemus võimaldab kergesti määrata hüperbooli fookused, kui need ei ole veel joonisele kantud.



Joon. 167.



Joon. 168.

siin hüperbooli asümptoodid. Et

$$e'_1=\lambda(ae_1-be_2),$$
$$e'_2=\lambda(ae_1+be_2),$$

siis vastavateks koordinaaditeisendusvalemiteks on (vt. (17.5))

$$x_1=\lambda a(x'_1+x'_2),$$
$$x_2=-\lambda b(x'_1-x'_2).$$

Järelikult hüperbooli võrrandiks uue reeperi suhtes on

$$\frac{\lambda^2a^2(x'_1+x'_2)^2}{a^2}-\frac{\lambda b^2(x'_1-x'_2)^2}{b^2}=1$$

ehk

$$4\lambda^2x'_1x'_2=1. \qquad (77.7)$$

Kui siin tähistada $k=\frac{1}{4\lambda^2}$, $x'_1=x$ ja $x'_2=y$, siis on tegemist võrrandiga $xy=k$ ehk

$$y=\frac{k}{x}. \qquad (77.8)$$

Vaadeldav hüperbool on pöördvõrdelise sõltuvuse graafikuks (joon. 167). Et $k=\frac{1}{4\lambda^2}$ võib siin olla ükskõik missugune positiivne reaalarv, siis iga sellise pöördvõrdelise sõltuvuse graafik on teatav hüperbool.

Erijuhul, kui $a=b$, on ka uued koordinaatteljed risti, nii nagu seda tavaliselt eeldatakse funktsioonide graafikute määramisel. Hüperbooli, mille korral $a=b$, nimetatakse v õ r dhaarseks[98] (ka risthüperbooliks; teda iseloomustab täielikult see, et ta asümptoodid on risti).

Hüperbooli, millel on võrrand (77.8) reeperi $\{O;\ -e'_1,\ e'_2\}$ suhtes, nimetatakse esialgse hüperbooli kaashüperbooliks. Ta on saadud esialgsest n.-ö. kaldpeegelduse teel ühe asümptoodi suhtes, s. t. teisendusega, kus iga punkt läheb teda ennast läbivale ja teise asümptoodiga paralleelsele sirgele teisele poole esimest asümptooti ja sellest niisama kaugele (joon. 168). Reeperi $\{O;\ e'_1,\ e'_2\}$ suhtes on selline kaashüperbool funktsiooni $y=-\frac{k}{x}$ graafikuks, s. t. (77.7) asemel on tema võrrand

$$4\lambda^2 x'_1 x'_2 = -1.$$

Esialgse ristreeperi suhtes on vaadeldava kaashüperbooli võrrand

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = -1. \tag{77.9}$$

Nagu selgus, on hüperboolil ja tema kaashüperboolil samad asümptoodid, kuid asümptootidevahelised nurgad, milledes nad asetsevad, on erinevad. Punktiga C' analoogiliseks punktiks kaashüperbooli jaoks on O suhtes sümmeetriline punkt C''. Seega kaashüperbooli fokaalteljeks ja kaasteljeks on antud hüperbooli vastavalt kaastelg ja fokaaltelg, samuti näiteks reaalpoolteljeks on imaginaarpooltelg b. Üldiselt eesliited «fokaal-» ja «kaas-» ning «reaal-» ja «imaginaar-» on vahetanud kohad.

Hüperbooli edasisel uurimisel osutuvad kasulikeks tema parameetrilised võrrandid, mille tuletamisele me nüüd asume. Võrrandi (77.2) järgi

$$\frac{x_1^2}{a^2} = 1 + \frac{x_2^2}{b^2} \geqslant 1.$$

Järelikult $\frac{a^2}{x_1^2} \leqslant 1$, $-1 \leqslant \frac{a}{x_1} \leqslant 1$, mistõttu leidub reaalarv α, nii et $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ ja

$$\frac{a}{x_1} = \cos(\pm\alpha).$$

Kui jätta välja väärtus $\alpha = \frac{\pi}{2}$, mil $\cos(\pm\alpha) = 0$, saame siit $x_1 = \frac{a}{\cos(\pm\alpha)}$. Asendamisel võrrandisse (77.2) on tulemuseks

[98] Sellise hüperbooli korral täisnurkne kolmnurk $\triangle\, OAC$ on võrdhaarne.

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{x_2^2}{b^2}=1$$

ja siit

$$1-\frac{x_2^2\cos^2\alpha}{b^2}=\cos^2\alpha$$

ning järelikult $x_2^2=b^2\tan^2\alpha$, mistõttu

$$x_2=b\tan(\pm\alpha).$$

Et $\cos(-\alpha)=\cos(2\pi-\alpha)$ ja $\tan(-\alpha)=\tan(2\pi-\alpha)$ ning $0\leqslant 2\pi-\alpha\leqslant 2\pi$, siis hüperbooli iga punkti (x_1, x_2) jaoks leidub parajasti üks reaalarv α, nii et

$$\begin{gathered} x_1=\frac{a}{\cos\alpha}, \\ x_2=b\tan\alpha, \\ -\pi/2<\alpha<\pi/2, \quad \pi/2<\alpha<3\pi/2. \end{gathered} \tag{77.10}$$

Vastupidi, iga punkt $\left(\frac{a}{\cos\alpha}, b\tan\alpha\right)$, kus $\cos\alpha\neq 0$, on vaadeldaval hüperboolil, nagu on kerge veenduda. Võrrandeid (77.10) nimetatakse hüperbooli *parameetrilisteks võrranditeks*. Kui $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, siis $\cos\alpha>0$ ja seega $x_1>0$; kui $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, siis $\cos\alpha<0$, $x_1<0$. Järelikult kummalegi α muutumise vahemikule vastab hüperbooli üks haru.

Hüperbooli puutuja kohta võib nüüd tõestada järgmised teoreemid.

***Teoreem* 77.2.** *Hüperbooli haru on ühel pool iga oma punktis võetud puutujat, teine haru aga on teisel pool seda puutujat. Punkti liikumisel mööda hüperbooli haru puutuja selles punktis muutub samuti pidevalt, kusjuures tema piirasendiks punkti lõpmatul kaugenemisel on hüperbooli asümptoot.*

Tõestus. Hüperbooli puutujal punktis $\left(\frac{a}{\cos\alpha}, b\tan\alpha\right)$ on (77.5) põhjal võrrand

$$\frac{\frac{a}{\cos\alpha}x_1}{a^2}-\frac{(b\tan\alpha)x_2}{b^2}=1$$

ehk

$$\frac{x_1}{a\cos\alpha}-\frac{x_2\tan\alpha}{b}-1=0.$$

Hüperbooli teise punkti $\left(\frac{a}{\cos\beta},\ b\tan\beta\right)$ koordinaatide asendamisel selle võrrandi vasakusse poolde on tulemuseks

$$\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}-\tan\alpha\tan\beta-1=$$

$$=\frac{1-\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{1-\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Siin lugeja on alati positiivne. Kui $\cos\beta$ on sama märgiga mis $\cos\alpha$, s. t. kui hüperboolil vabalt võetud punkt on samal harul kus puutepunkt, siis on ka tulemus alati positiivne; kui hüperboolil vabalt võetud punkt on teisel harul, siis tulemus on alati negatiivne.

Teoreemi teise lause tõestamiseks anname puutuja võrrandile kuju

$$\frac{x_1}{a}-\frac{x_2\sin\alpha}{b}-\cos\alpha=0. \tag{77.11}$$

Parameetri α muutumisel siin kordajad ja vabaliige muutuvad pidevalt, ning kui $\alpha\to\pm\frac{\pi}{2}$, siis vasaku poole piirväärtuseks on

$$\frac{x_1}{a}\mp\frac{x_2}{b}=0. \blacksquare$$

***Teoreem* 77.3.** *Hüperbooli asümptootidega ja puutujaga piiratud kolmnurga pindala ei sõltu puutepunkti asendist hüperboolil* (joon. 168).

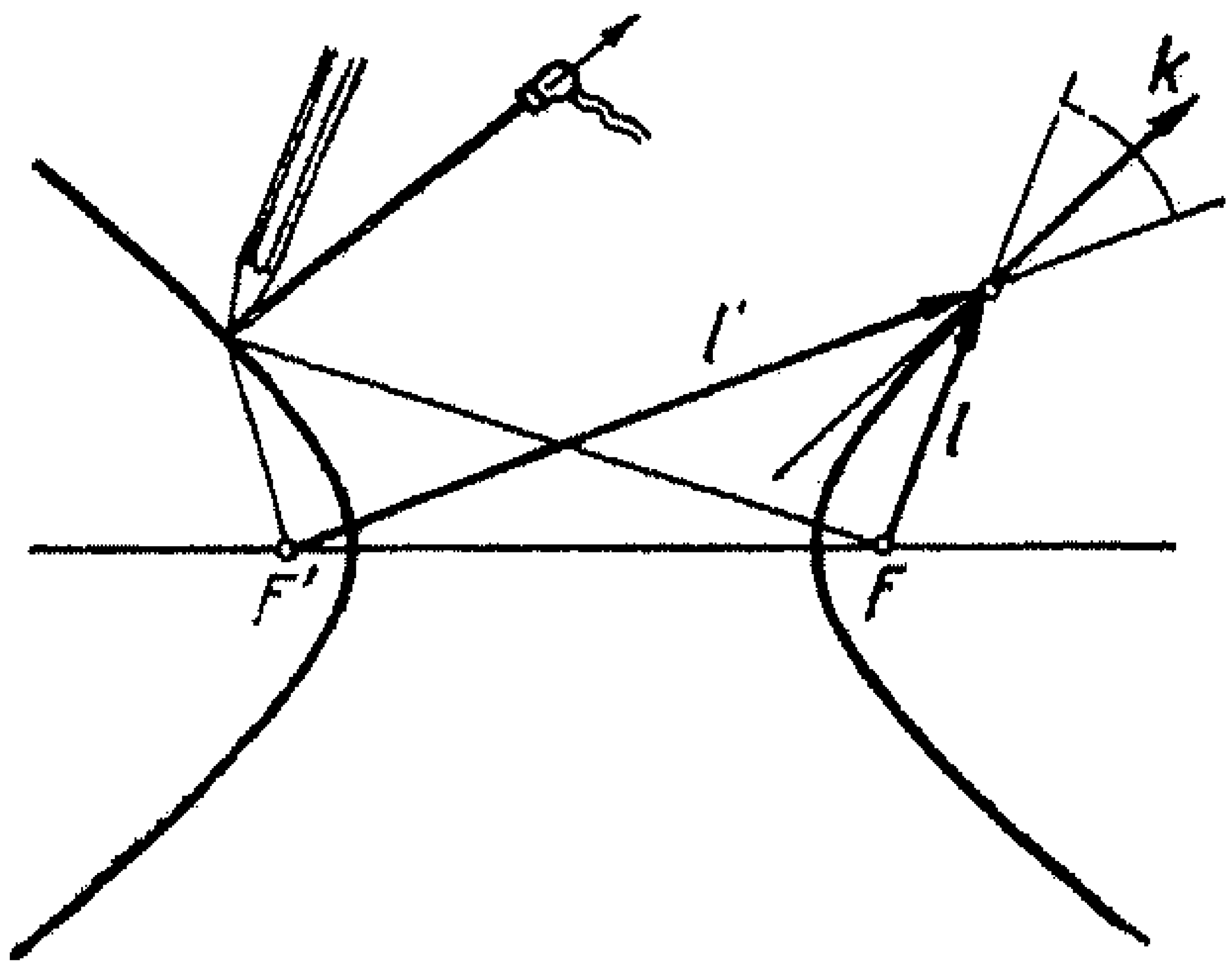
Tõestus. Teeme asümptootide võrrandeist asenduse $\frac{x_1}{a}=\pm\frac{x_2}{b}$ puutuja võrrandisse (77.11):

$$\frac{x_2}{b}(1\mp\sin\alpha)=\pm\cos\alpha.$$

Järelikult puutuja ja asümptootide lõikepunktidel M ja M' on järgmised koordinaadid:

$$M\left(\frac{a\cos\alpha}{1-\sin\alpha},\ \frac{b\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right),\qquad M'\left(\frac{a\cos\alpha}{1+\sin\alpha},\ -\frac{b\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right).$$

Kolmnurga kolmanda tipu O koordinaatideks on (0, 0), mis-



Joon. 169.

tõttu valemi (37.4) põhjal kolmnurga pindala on

$$S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} m_1 & m_2 & 1 \\ m'_1 & m'_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} m_1 & m_2 \\ m'_1 & m'_2\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} a & b \\ -a & b\end{vmatrix}\cdot\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right\|=\frac{1}{2}\cdot 2ab=ab,$$

s. t. see pindala ei sõltu parameetrist α. ∎

Järgmine teoreem väljendab hüperbooli nn. optilist omadust.

***Teoreem* 77.4.** *Hüperbooli puutuja punktis X moodustab võrdsed nurgad sirgetega FX ja $F'X$, kus F ja F' on fookused* (joon. 169).

T õ e s t u s. Hüperbooli puutuja sihivektor on

$$\boldsymbol{k}=(a\sin\alpha, b).$$

Vektoritel $\boldsymbol{l}=\overrightarrow{FX}$ ja $\boldsymbol{l}'=\overrightarrow{F'X}$ on järgmised koordinaadid:

$$\boldsymbol{l}=\left(\frac{a}{\cos\alpha}-c,\ b\tan\alpha\right),$$

$$\boldsymbol{l}'=\left(\frac{a}{\cos\alpha}+c,\ b\tan\alpha\right).$$

Ka siin, samuti nagu teoreemi 77.2 tõestuses, on küllalt, kui näidata, et

$$\frac{\boldsymbol{kl}}{|\boldsymbol{l}|}=\frac{\boldsymbol{kl}'}{|\boldsymbol{l}'|}. \qquad (77.12)$$

Siin

$$kl = a^2 \tan\alpha - ac\sin\alpha + b^2\tan\alpha = c\sin\alpha\left(\frac{c}{\cos\alpha} - a\right),$$

$$kl' = a^2 \tan\alpha + ac\sin\alpha + b^2\tan\alpha = c\sin\alpha\left(\frac{c}{\cos\alpha} + a\right)$$

$$l^2 = \frac{a^2}{\cos^2\alpha} - \frac{2ac}{\cos\alpha} + c^2 + b^2\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{c^2}{\cos^2\alpha} - \frac{2ac}{\cos\alpha} + a^2 = \left(\frac{c}{\cos\alpha} - a\right)^2$$

ning analoogiliselt

$$l'^2 = \left(\frac{c}{\cos\alpha} + a\right)^2.$$

Olgu $\cos\alpha > 0$; siis $\frac{1}{\cos\alpha} \geqslant 1$ ja seega $\frac{c}{\cos\alpha} \geqslant c > a$, s. t. sel korral $\frac{c}{\cos\alpha} - a > 0$ ja $\frac{c}{\cos\alpha} + a > 0$ ning

$$|\overrightarrow{FX}| = |l| = \frac{c}{\cos\alpha} - a,$$
$$|\overrightarrow{F'X}| = |l'| = \frac{c}{\cos\alpha} + a, \qquad \cos\alpha > 0. \tag{77.13}$$

Kui $\cos\alpha < 0$, siis $\frac{1}{\cos\alpha} \leqslant -1$ ja seega $\frac{c}{\cos\alpha} \leqslant -c < -a$, s. t. sel korral $\frac{c}{\cos\alpha} + a < 0$ ja $\frac{c}{\cos\alpha} - a < -2a < 0$ ning

$$|\overrightarrow{FX}| = |l| = a - \frac{c}{\cos\alpha},$$
$$|\overrightarrow{F'X}| = |l'| = -a - \frac{c}{\cos\alpha}, \qquad \cos\alpha < 0. \tag{77.14}$$

Siit järeldubki võrdus (77.12). ∎

Kaugusi (77.13) ja (77.14) nimetatakse hüperbooli punkti $\left(\frac{a}{\cos\alpha}, b\tan\alpha\right)$ **fokaalraadiusteks** ning tähistatakse $r = |\overrightarrow{FX}|$ ja $r' = |\overrightarrow{F'X}|$. Et $\frac{c}{\cos\alpha} = \frac{ea}{\cos\alpha} = ex_1$, siis (77.13) ja (77.14) põhjal

$$r = ex_1 - a, \qquad r' = ex_1 + a, \qquad \text{kui} \quad x_1 > 0, \tag{77.15}$$

ning

$$r = a - ex_1, \quad r' = -a - ex_1, \quad \text{kui} \quad x_1 < 0. \tag{77.16}$$

Hüperbooli üks lihtsamaid joonestusvõtteid tugineb järgmisele olulisele teoreemile.

***Teoreem* 77.5.** *Punktihulk tasandil on hüperbool parajasti siis, kui selle hulga iga punkti X ja tasandi mingi kahe fikseeritud punkti F ja F' vaheliste kauguste vahe absoluutväärtus $||\overrightarrow{FX}| - |\overrightarrow{F'X}||$ on konstantne, nullist erinev ja väiksem kui lõigu FF' pikkus.*

Tõestus. Valemitest (77.13) ja (77.14) järeldub vahetult, et hüperboolil on kirjeldatud omadus.

Tõestame, et iga selle omadusega punktihulk tasandil on hüperbool. Ristreeperi valime nii, et punktidel F ja F' on koordinaadid $F(c, 0)$ ja $F'(-c, 0)$, kus $c > 0$, ning seega $|\overrightarrow{FF'}| = 2c$. Tingimus punkti $X(x_1, x_2)$ asetsemiseks vaadeldavas punktihulgas on järgmine:

$$\sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2} - \sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2^2} = \pm 2a,$$

kus $2a$ on teoreemis mainitud konstant ning järelikult $a < c$. Selle tingimuse teisendamine

$$x_1^2 - 2cx_1 + c^2 + x_2^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x_1+c)^2 + x_2^2} + x_1^2 + 2cx_1 + c^2 + x_2^2,$$

$$a^2 + cx_1 = \mp a\sqrt{(x_1+c)^2 + x_2^2},$$

$$a^4 + 2ca^2x_1 + c^2x_1^2 = a^2(x_1^2 + 2cx_1 + c^2 + x_2^2)$$

annab lõpuks

$$(c^2 - a^2)x_1^2 - a^2x_2^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Et siin $c^2 > a^2$, siis leidub reaalarv $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Tingimusele saame kuju

$$b^2x_1^2 - a^2x_2^2 = a^2b^2$$

ehk

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1,$$

mis on teatava hüperbooli võrrand. Vaadeldava hulga iga punkt on seega sellel hüperboolil. Eespool aga selgus, et hüperbooli iga punkt rahuldab seda hulka iseloomustavat tingimust. ∎

Tõestatud teoreemi põhjal võib hüperboolile anda uue, täiesti iseseisva definitsiooni.

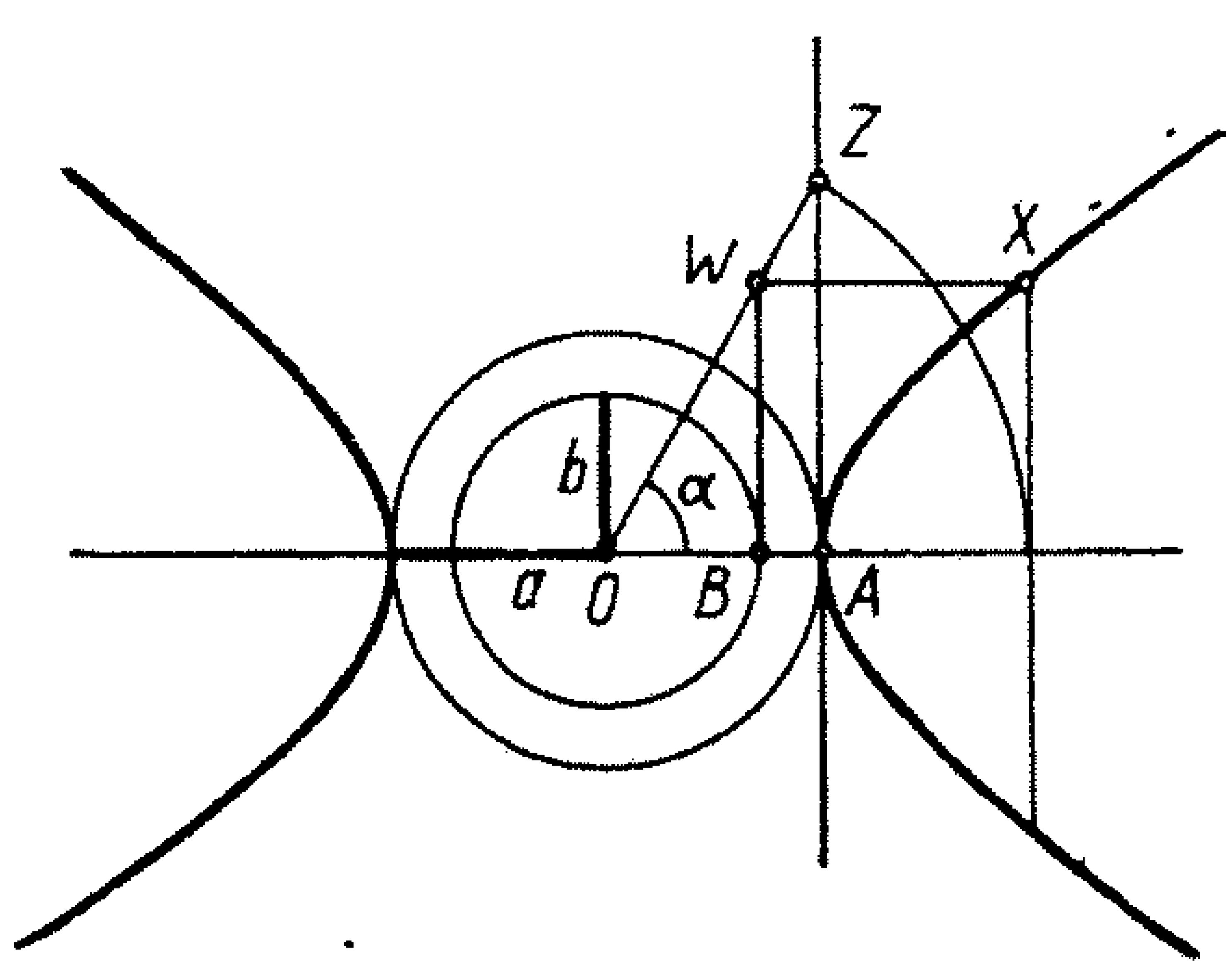
***Def.* 77.1.** Hüperbooliks nimetatakse tasandi kõigi selliste punktide hulka, mille kauguste vahe tasandi mingist kahest fikseeritud punktist F ja F' on absoluutväärtuse poolest konstantne, nullist erinev ning väiksem punktide F ja F' vahelisest kaugusest. Punkte F ja F' nimetatakse hüperbooli fookusteks.

Sageli võetaksegi hüperbooli käsitlemisel aluseks see definitsioon. Ühtlasi järeldub siit lihtne võte hüperbooli joonestamiseks kahe pika niidi abil, mis on kahe nõelaga kinnitatud fookustesse. Niitide teisi otsi tuleb hoida koos nii, et nad teineteise suhtes ei libiseks, ning seejärel tuleb niidid tõmmata pliiatsiteravikuga pingule (joon. 169). Kui pliiatsit vedada nii, et niidid oleksid kogu aeg koos pingul, siis teravik joonestab hüperbooli ühe haru teatava kaare. Teise haru kaare saamiseks tuleb vahetada niitide osad.

Teise joonestusvõtteni võib jõuda, kui parameetrit α hüperbooli parameetrilistes võrrandites

$$x_1 = \frac{a}{\cos \alpha}, \qquad x_2 = b \tan \alpha$$

tõlgendada kahe ringjoone abil, mille ühiseks keskpunktiks on hüperbooli keskpunkt O ja raadiusteks hüperbooli fokaalteljel on vastavalt $OA = a$ ja $OB = b$ (joon. 170). Nendest võrranditest



Joon. 170.

nähtub, et hüperbooli punkti $X(x_1, x_2)$ abstsiss x_1 võrdub absoluutväärtuselt sellise täisnurkse kolmnurga $\triangle OAZ$ hüpotenuusiga, milles $\angle AOZ = \alpha$ ja $\angle OAZ$ on täisnurk. Ordinaadi absoluutväärtust kujutab nurga α vastaskaatet BW kolmnurgas $\triangle OBW$, mille teiseks kaatetiks on lõik OB. Ühtlasi tuleneb siit lihtne meetod parameetri α vabalt võetud väärtusele vastava punkti X konstrueerimiseks hüperboolil: punkt X asetseb fokaaltelje ristsirgel, mille kaugus keskpunktist on OZ, tema enda kaugus fokaalteljest on BW pikkus. Sel viisil saab määrata kuitahes palju hüperbooli punkte. Fookuse kandmisest joonisele oli juttu eespool.

§ 15. KOONUSELÕIKELISED PINNAD

Koonuselõike mõistega on tihedalt seotud teatav klass objekte, mida vaadeldakse ruumi analüütilise geomeetria kursuses ja mida kokkuvõtvalt nimetatakse koonuselõikelisteks pindadeks. Neid iseloomustab see, et nende lõikamisel tasanditega tekivad koonuselõiked. Kõige lihtsamateks näideteks on siin sfäär, pöördkoonus ja pöördsilinder, mis kuuluvad koonuselõikeliste pindade teatavasse alamklassi — koonuselõikeliste pöördpindade hulka. Üldiselt koonuselõikeline pöördpind moodustub kas sirge või koonuselõike pöörlemisel eriliselt valitud sirge ümber. Terve rea koonuselõikelisi pindu saab omakorda moodustada koonuselõikelistest pöördpindadest nende deformeerimisel ruumi lihtsate afiinsete teisendustega. Osutub siiski, et kõiki koonuselõikelisi pindu ei ole võimalik näidatud viisil kätte saada. Seetõttu tuleb allpool võrrandite tuletamisel kasutada ka veel teistsuguseid kaalutlusi.

78. **Koonuselõikelised pöördpinnad.** Eespool art-tes 39, 68 ja 72 selgus, et tasandil saab iga sirge ja iga koonuselõike esitada sobivalt valitud ristreeperi suhtes teatava kaht muutujat sisaldava võrrandiga $F(x_1, x_2) = 0$. Selle võrrandi vasak pool on sirge puhul x_1 ja x_2 suhtes lineaarne avaldis, koonuselõike korral aga sisaldab vähemalt ühe muutuja ruutu ja mõnel puhul (näiteks ringjoone ja parabooli üldvõrrandites) ka muutujate esimesi astmeid.

Samuti on tasandid, sfäärid, pöördsilindrid ja pöördkoonused, nagu selgus art-tes 46, 68, 70 ja 71, esitatavad teatavate kolme muutujat sisaldavate võrranditega $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ kui punktihulgad

$$\{X(x_1, x_2, x_3) \mid F(x_1, x_2, x_3) = 0\}.$$

Tasandi puhul võrrandi vasak pool on lineaarne avaldis, teistel mainitud juhtudel sisaldab ka ruutliikmeid. Vastava punktihulga ehituse ja asendi uurimist antud reeperi suhtes osutus võimalikuks taandada võrrandi $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ omaduste uurimisele.

Viimati mainitud võimaluse süstemaatiline kasutamine on analüütilise geomeetria põhilisemaid võtteid. Siin on välja kujunenud kaks lähenemisviisi. Ühe puhul defineeritakse uuritav punktihulk eespool arendatud geomeetria mõisteid kasutades ning alles seejärel selgub, et seda hulka saab esitada ja uurida teatava võrrandi abil. Selle kohta on meil hulgaliselt näiteid eelmises kolmes paragrahvis. Teisel juhul toimitakse vastupidiselt. Antakse ette teatavat tüüpi võrrand ja võetakse uurimise alla selle võrrandiga ülalkirjeldatud mõttes esitatud punktihulk, mille geomeetrilised omadused selguvad siis alles tagantjärele. Ka selle kohta on eespool üksikuid näiteid. Nii selgus näiteks, et iga võrrand $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$, kus A_1, A_2 ja A_3 pole korraga nullid, esitab tasandi ruumis, iga võrrand

$$a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2b_1x_1+2b_2x_2+2b_3x_3+c=0,$$

kus $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - ac > 0$, aga esitab sfääri ruumis.

Käesolevas paragrahvis läheme sfääri, pöördsilindri ja -koonuse juurest edasi neid erijuhtudena haarava punktihulkade klassi uurimisele analoogiliselt sellega, nagu me ringjoone juurest läksime edasi koonuselõigete uurimisele. Mainitud kahest lähenemisviisist leiavad siin kasutamist mõlemad, kuid juhtiv osa jääb siiski veel esimesele. Uuritavate punktihulkadeni me jõuame konstruktiivselt, rakendades samm-sammult varem tuttavaid mõisteid. Nende hulkade omaduste uurimisel aga tugineme enamasti, samuti nagu koonuselõigete puhul, neid esitavatele võranditele.

Vaatleme ruumis mingit sirget või koonuselõiget. Valime ristreeperi nii, et 1) see sirge või koonuselõige asetseks x_2x_3-tasandil, 2) sirge puhul x_3-telg ei ühtiks sirgega ega oleks sellega risti, koonuselõike puhul aga osutuks selle teljeks, 3) reeperi alguspunktiks O oleks sirget lõikava x_3-telje puhul lõikepunkt (kui x_3-telg on sirgega paralleelne, siis jääb alguspunkti valik vabaks), parabooli puhul selle tipp ja paraboolist erineva koonuselõike korral selle keskpunkt. Teist koordinaatmuutujat tähistame ajutiselt tähega u, s. o. loeme $x_2 \equiv u$. Olgu sirge või koonuselõike võrrandiks ristreeperi $\{O;\ e_2,\ e_3\}$ suhtes

$$F(u, x_3) = 0. \tag{78.1}$$

Tehtud kokkulepetest on selge, et see võrrand peab sisaldama muutujat u; x_3-teljega paralleelse sirge puhul muutuja x_3 puudub.

Valitud ristreeperi x_3-teljega ristuva tasandi lõige vaadeldava sirge või koonuselõikega koosneb kas ühest punktist $M(u,\ x_3)$ või kahest selle telje suhtes sümmeetrilisest punktist $M(u,\ x_3)$ ja $M'(-u,\ x_3)$ või on tühi. Moodustame igal tasandil, mis on risti x_3-teljega ja millel on vaadeldava sirge või koonuselõikega vähemalt üks ühine punkt M, ringjoone, mis läbib punkti M ja mille keskpunkt asetseb x_3-teljel. Kõigi sel viisil saadud ringjoonte punktide hulka esitab süsteem

$$\begin{cases} F(u, x_3) = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = u^2, \end{cases}$$

mis on samaväärne võrrandiga

$$F(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_3) = 0. \tag{78.2}$$

Koonuselõike puhul võrrand (78.1) on üks võrranditest (75.1), (76.4) või (77.2), seepärast ta sisaldab muutujat u ainult teisel astmel. Kui (78.1) on sirge võrrand, siis saab võrrandi (78.2) vabastada irratsionaalsusest juure eraldamise ja võrrandi poolte ruutu tõstmise teel. Seega saab konstrueeritud punktihulka igal juhul esitada võrrandiga

$$\Phi(x_1^2 + x_2^2, x_3) = 0,$$

kus Φ on algebraline avaldis, mis sisaldab muutujat $x_1^2 + x_2^2$ esimesel astmel; muutujat x_3 võib ta aga sisaldada astmetel 0, 1 ja 2; seega üldiselt

$$\Phi \equiv a(x_1^2 + x_2^2) + b x_3^2 + c x_3 + d.$$

Et (78.1) peab sisaldama muutujat u, siis $a \neq 0$ ja võrrandi saab kirjutada taandatult kujul

$$x_1^2 + x_2^2 + s x_3^2 + t x_3 + v = 0. \tag{78.3}$$

Kerge on kindlaks teha, et see võrrand ei muutu, kui ruumis teha pööre ümber x_3-telje mistahes nurga α võrra, sest sel puhul (vt. art. 57)

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \cos\alpha - x'_2 \sin\alpha, \\ x_2 &= x'_1 \sin\alpha + x'_2 \cos\alpha, \\ x_3 &= x'_3 \end{aligned}$$

ning järelikult $x_1^2 + x_2^2 = x'^2_1 + x'^2_2$. Seepärast võib uuritavat punktihulka käsitleda ka kui sellist, mis tekib võrrandiga (78.1) antud sirge või koonuselõike pöörlemisel ümber x_3-telje.

***Def.* 78.1.** Punktihulka, mille määrab ruumis ristreeperi suhtes võrrand (78.3), kus kordajad s, t ja v ei ole korraga nullid, nimetatakse koonuselõikeliseks pöördpinnaks (kui ta ei ole tühi ega koosne ainult ühest punktist). Sirget, mille ümber pöörlemisel see punktihulk jääb muutumatuks, nimetatakse koonuselõikelise pöördpinna teljeks (praegu on selleks x_3-telg). Selle punktihulga lõiget telge läbiva tasandiga nimetatakse meridiaaniks ja lõiget telje risttasandiga — paralleeliks.

***Teoreem* 78.1.** *Iga koonuselõikelist pöördpinda esitab ristreeperi sobiva valiku korral üks järgmistest võranditest:*

$$\mathrm{I}(p) \quad x_1^2+x_2^2=r^2, \tag{78.4}$$

$$\mathrm{II}(p) \quad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=0, \tag{78.5}$$

$$\mathrm{III}(p) \quad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1, \tag{78.6}$$

$$\mathrm{IV}(p) \quad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1, \tag{78.7}$$

$$\mathrm{V}(p) \quad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=-1, \tag{78.8}$$

$$\mathrm{VI}(p) \quad \frac{x_1^2}{p}+\frac{x_2^2}{p}=2x_3. \tag{78.9}$$

T õ e s t u s. Võrrandid $\mathrm{I}(p)$ — $\mathrm{VI}(p)$ tekivad, kui kirjutada välja võrrandi (78.1) kõik kujud, mis on tehtud kokkulepete põhjal võimalikud:

1. $u=r$,
2. $cu=ax_3$,
3. $\frac{u^2}{a^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1$,
4. $\frac{u^2}{a^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1$,
5. $\frac{u^2}{a^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=-1$,
6. $u^2=2px_3$

ja teha igasse neist asendus $u^2=x_1^2+x_2^2$ (juhtudel 1 ja 2 tuleb eelnevalt võrrandi mõlemad pooled tõsta ruutu).

Jääb näidata, et juhud $\mathrm{I}(p)$ — $\mathrm{VI}(p)$ tõepoolest ammendavad võrrandi (78.3) puhul esinevad võimalused.

Et kordajad s, t ja v ei ole eelduse kohaselt kõik korraga nullid, siis on tegemist järgmise seitsme võimalusega:

a	b	c	d	e	f	g
s, t, v	s, t	s, v	t, v	s	t	v

(Tähed tabeli ülemises reas märgivad alajuhte, alumises reas on loetletud kõik sel alajuhul nullist erinevad kordajad.)

Ilmneb aga, et mõnel juhul on erinevus tingitud ainult uuritavate punktihulkade asendist ruumis. Juhud a ja b taandab juhule c või juhule e lüke, mille vektor on $l_1 = \overrightarrow{OO'} = \left(0, 0, -\frac{t}{2s}\right)$; juht d taandub juhule f lükkega $l_2 = \left(0, 0, -\frac{v}{t}\right)$. Niisiis märgitud juhtudel on tegemist lükkega ühtimisele viidavate, seega kongruentsete hulkadega.

Ülevaate kordajate märkidest, mis def. 78.1 põhjal on lubatavad säilinud neljal sõltumatul juhul c, e, f ja g, annab järgnev tabel, mille viimasesse ritta on märgitud vastava koonuselõikelise pöördpinna tüüp.

s: + v: —	— —	— +	s: —	t: —	v: —
III(p)	IV(p)	V(p)	II(p)	VI(p)	I(p)

Siit nähtubki, et leitud on kõik võimalikud koonuselõikelised pöördpinnad. ∎

Iga vaadeldava võrrandi saab kirjutada mõnevõrra teisiti, kui võtta vastava koonuselõikelise pöördpinna telg mõneks teiseks koordinaatteljeks, s. t. kasutada avaldise $\Phi(x_1^2 + x_2^2, x_3)$ asemel kas $\Phi(x_1, x_2^2 + x_3^2)$ või $\Phi(x_1^2 + x_3^2, x_2)$. Midagi oluliselt uut see meie arutlusse ei too.

On selge, et koonuselõikelise pöördpinna paralleeliks on kas ringjoon, punkt või tühi hulk. Meridiaaniks osutub kas sirgete paar — juhtudel I(p) ja II(p) — või koonuselõige, mis on kongruentne pöördpinda tekitava koonuselõikega. Viimast väidet on kerge kontrollida, sooritades reeperi pöörde ümber x_3-telje mingi nurga α võrra ja määrates seejärel vaadeldava pöördpinna lõike $x'_2x'_3$-tasandiga.

***Def.* 78.2.** Koonuselõikelistele pöördpindadele antakse järgmised nimetused: I(p) p ö ö r d s i l i n d e r, II(p) p ö ö r d k o o n u s, III(p) p ö ö r d e l l i p s o i d, IV(p) ü h e k a t t e l i n e p ö ö r d h ü p e r b o l o i d, V(p) k a h e k a t t e l i n e p ö ö r d h ü p e r b o l o i d, VI(p) p ö ö r d p a r a b o l o i d.

Nende nimetuste andmisel on silmas peetud järgmisi asjaolusid:

1) punktihulga I(p) võrrand **(78.4)** ühtib pöördsilindri võrrandiga (70.4);

2) punktihulga II(p) võrrand **(78.5)** ühtib pärast lihtsat teisendust pöördkoonuse võrrandiga (71.3);

3) punktihulk II(p) tekib ellipsi pöörlemisel ümber ühe oma telje; erinevatele telgedele vastavad üldiselt erinevad, kuid üht ja sama tüüpi punktihulgad; **sfäär** on ellipsoidi erijuht, mille puhul võrrandis (78.6) $a = c$;

4) punktihulk IV(p) tekib hüperbooli pöörlemisel ümber oma kaastelje; et pöörleva hüperbooli harud asetsevad igas asendis ühel telge läbival tasandil ja on sellel tasandil telje suhtes sümmeetrilised, siis moodustavad harud pööreldes ühe ja sellesama punktihulga;

5) punktihulk V(p) tekib hüperbooli pöörlemisel ümber oma fokaaltelje; et hüperbooli harud moodustavad pööreldes kaks punktihulka, mis asetsevad kaastelje pöörlemisel tekkiva tasandi suhtes teine teises poolruumis ja seetõttu omavahel ei lõiku, siis öeldakse, et vaadeldav hüperboloid koosneb kahest k a t t e s t;

6) punktihulk VI(p) tekib parabooli pöörlemisel ümber oma ainsa telje.

Et pöördhüperboloidide meridiaanid on kongruentsed hüperboolid, siis saab nende pindadega loomulikul viisil siduda teatavad koonused.

***Def.* 78.3.** Pöördhüperboloidi kõigi meridiaanide asümptootidel olevate punktide hulka nimetatakse pöördhüperboloidi a s ü m p t o o t i l i s e k s k o o n u s e k s. Nii ühekattelise pöördhüperboloidi (78.7) kui ka kahekattelise pöördhüperboloidi (78.8) asümptootilist koonust esitab võrrand (78.5).

79. Koonuselõikeliste pöördpindade afiinsed kujutised. Üldistame nüüd koonuselõikelise pöördpinna mõistet, võttes vaatluse alla ka kõik sellised punktihulgad, mis on saadud koonuselõikelistest pöördpindadest ruumi mistahes afiinse teisenduse toimel. Et isomeetriline teisendus viib koonuselõikelise pöördpinna alati jälle koonuselõikeliseks pöördpinnaks, sest selle võrrand kaasateiseneva ristreeperi suhtes ei muutu, siis teoreemile 64.2 järgnenud märkuse põhjal on tarvis uurida vaid ruumi kokkusurumist või väljavenitamist koordinaattelgede sihtides, kusjuures püsitasandiks sellise teisenduse puhul võib lugeda vaadeldava sihiga ristuva koordinaattasandi.

Ruumi kokkusurumise või väljavenitamise x_2-telje sihis määravad valemid

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = kx_2, \quad x'_3 = x_3 \quad (k > 0,\ k \neq 1). \tag{79.1}$$

Selle teisenduse toimel koonuselõikelisest pöördpinnast (78.3) saadud punktihulka esitab võrrand

$$(x'_1)^2 + \frac{(x'_2)^2}{k^2} + s(x'_3)^2 + tx'_3 + v = 0.$$

Vahetu kontroll näitab, et see võrrand muutub ristreeperi pööramisel ümber x_3-telje. Nagu selgub art-s 82, muutub ta ka siis, kui reeper pöörleb mõne teise telje ümber. Siit tuleneb, et tegemist ei ole enam koonuselõikelise pöördpinnaga: teisenduse (79.1) toimel on saadud uus, koonuselõikelisest pöördpinnast (78.3) erinev punktihulk.

Rakendades teisendust (79.1) kordamööda igale teoreemis 78.1 väljaeraldatud pöördpinnale ja kasutades sobival kohal tähistusi $r^2 = a^2$, $k^2r^2 = b^2$, $k^2a^2 = b^2$, $k^2p = q$, saame punktihulgad, mida esitavad võrrandid

$$\text{I} \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \tag{79.2}$$

$$\text{II} \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0, \tag{79.3}$$

$$\text{III} \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1. \tag{79.4}$$

$$\text{IV} \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1, \tag{79.5}$$

$$\text{V} \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = -1, \tag{79.6}$$

$$\text{VI} \quad \frac{x_1^2}{p} + \frac{x_2^2}{q} = 2x_3. \tag{79.7}$$

***Def.* 79.1.** Võrranditega I—VI esitatud punktihulkadele antakse järgmised nimetused: I elliptiline silinder, II teist järku koonus, III ellipsoid, IV ühekatteline hüperboloid, V kahekatteline hüperboloid, VI elliptiline paraboloid. Nad haaratakse üldnimetusega koonuselõikelised pinnad.

Märgime kohe, et viimane nimetus on pisut üldisema iseloomuga: koonuselõikeliste pindade klass sisaldab def-is 79.1 loetletute kõrval ka veel järgmises artiklis defineeritavad punktihulgad. Sõnastuste lihtsustamiseks jätame edaspidi sageli täiendi «koonuselõikelised» ära.

Parameetrid a, b, c, p ja q võrrandites (79.2) — (79.7) võivad omandada mistahes positiivseid väärtusi; iga fikseeritud väärtuste süsteemi korral saadakse konkreetne vastavat tüüpi pind. Kerge on märgata, et kui ühte võrrandisse kuuluvatest parameetritest kaks esimest on väärtuselt võrdsed, siis on tegemist eespool vaadeldud pöördpinnaga. Üldjuhul on parameetrid igaühes võrranditest (79.2) — (79.7) erinevad.

Viimasest märkusest järeldub, et pindade I—VI afiinne deformeerimine teisendustega, mille valemid on saadud valemeist (79.1) koordinaatide ümbernummerdamisel, midagi uut enam ei lisa; sel puhul toimub (parameetrite fikseeritud väärtuste korral) vaid üleminek antud pinnalt mõnele teisele sama tüüpi pinnale. Niisiis sisaldab def. 79.1 loetelu koonuselõikeliste pöördpindade kõiki afiinseid kujutisi.

Asume järgnevalt koonuselõikeliste pindade I—VI uurimisele. Meile on teada, kuidas pinnad on tekkinud, kuid see annab siiski veel vähe alust nende ehituse selgitamiseks. Viimase puhul on palju lihtsam lähtuda vahetult võrrandeist (79.2) — (79.7).

Olulisemateks järeldusteks mainitud võrranditest on uuritavate pindade nn. sümmeetriaomadused. Nende tuletamiseks tuleb kõigepealt peatuda sümmeetria mõistel ruumis. Sümmeetria tasandi suhtes üldistab analoogilist mõistet eukleidilises planimeetrias: sümmeetriat sirge suhtes, mis on antud def-iga 44.2. Selles definitsioonis ja talle järgnevas käsitluses tuleb vaid sirge a asendada tasandiga α (vt. ka def. 57.3). Kõike seda siin kordamata märgime vaid, et punktid $X(x_1, x_2, x_3)$ ja $X'(x'_1, x'_2, x'_3)$ on sümmeetrilised näiteks x_1x_2-tasandi suhtes parajasti siis, kui

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = -x_3.$$

Punktide sümmeetria sirge suhtes ruumis defineeritakse analoogiliselt: punktid X ja X' loetakse sümmeetrilisteks sirge a suhtes, kui 1) lõigu XX' keskpunkt on sirgel a ning 2) sirgete XX' ja a sihid on risti. Et $X(x_1, x_2, x_3)$ ja $X'(x'_1, x'_2, x'_3)$ puhul lõigu XX' keskpunktil on koordinaadid

$$\left(\frac{x_1+x'_1}{2}, \frac{x_2+x'_2}{2}, \frac{x_3+x'_3}{2}\right)$$

ja sirge XX' sihivektoriks on $\overrightarrow{XX'} = (x'_1 - x_1, x'_2 - x_2, x'_3 - x_3)$, siis X ja X' on sümmeetrilised näiteks x_1-telje suhtes parajasti siis, kui

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = -x_2, \quad x'_3 = -x_3,$$

sest x_1-telje punktide viimased kaks koordinaati on nullid ja sihivektoriks on $e_1 = (1, 0, 0)$.

Punktid X ja X' loetakse sümmeetrilisteks punkti A suhtes, kui A osutub lõigu XX' keskpunktiks. Näiteks reeperi alguspunkti $O(0, 0, 0)$ suhtes on punktid $X(x_1, x_2, x_3)$ ja $X'(x'_1, x'_2, x'_3)$ sümmeetrilised parajasti siis, kui

$$x'_1 = -x_1, \quad x'_2 = -x_2, \quad x'_3 = -x_3.$$

Kujundit (s. t. punktihulka) **ruumis loetakse sümmeetriliseks teatava tasandi, sirge või punkti suhtes, kui ta koos oma iga**

punktiga sisaldab ka sellega sümmeetrilist punkti mainitud tasandi, sirge või punkti suhtes. Viimast nimetatakse siis vastavalt kujundi sümmeetriatasandiks, -teljeks või -keskpunktiks.

Kui kujundil on kaks ristuvat sümmeetriatasandit, siis nende lõikejoon on kujundi sümmeetriateljeks. Tõepoolest, reeperi võib valida nii, et need tasandid on x_1x_2- ja x_1x_3-tasandeiks. Koos punktiga $X(x_1, x_2, x_3)$ kuulub siis kujundile ka punkt $X'(x_1, x_2, -x_3)$ ning koos viimasega ka punkt $X''(x_1, -x_2, -x_3)$. Siin punktid X ja X'' on aga sümmeetrilised tasandite lõikesirge — x_1-telje suhtes.

Analoogiliselt on võimalik tõestada, et kui kujundil on kolm paarikaupa ristuvat sümmeetriatasandit, siis nende lõikepunkt on kujundi sümmeetriakeskpunkt.

Koonuselõikeliste pindade II—V võrrandid sisaldavad, nagu kerge märgata, kõiki koordinaatmuutujaid, kuid üksnes ruudus. Et $(-x)^2 = x^2$, siis võib eelöeldu põhjal kohe väita, et igaühel neist pindadest on kolm paarikaupa ristuvat sümmeetriatasandit, kolm paarikaupa ristuvat sümmeetriatelge ja sümmeetriakeskpunkt. Pinnal VI on samadel põhjustel kaks sümmeetriatasandit ja sümmeetriatelg.

Pinna I võrrandis puudub x_3. Sellest järeldub, et pinnal on lisaks kahele ristuvale sümmeetriatasandile terve ebakimp viimastega ristuvaid paralleelseid sümmeetriatasandeid. Tõepoolest, iga tasandi $x_3 = h$ puhul on koos punktiga $X(x_1, x_2, x_3)$ pinnal ka punkt $X'(x_1, x_2, 2h - x_3)$, mis on sümmeetriline punktiga X selle tasandi suhtes. Selle ebakimbu tasandid, lõikudes esimese kahe sümmeetriatasandiga, tekitavad lõpmata palju sümmeetriatelgi ja sümmeetriakeskpunkte.

Koonuselõikelise pinna sümmeetriatelge, mis on sellesihilistest ainuke, nimetatakse lihtsalt **pinna teljeks**. Pinna sümmeetriakeskpunkti nimetatakse **pinna keskpunktiks**. Pinda, millel on üksainus keskpunkt, nimetatakse **tsentraalseks**, ülejäänud pindu (s. t. neid, millel keskpunkt puudub või millel keskpunkte on rohkem kui üks) aga **mittetsentraalseteks**.

Pinna lõikepunkte oma teljega nimetatakse pinna **tippudeks** ja lõikude pikkusi (ka lõike endid), milleks keskpunkt jaotab pinna kõõlu sümmeetriateljel, pinna **pooltelgedeks**.

Edasi kirjeldame nüüd lähemalt igaüht pindadest, eeskätt defineeritud mõistete seisukohalt. Selle kõrval vaatleme pindade lõikeid tasanditega, mis on paralleelsed mõne sümmeetriatasandiga. Need lõiked osutuvad kõik koonuselõigeteks (üldse koonuselõikelise pinna iga lõige tasandiga on koonuselõige (vt. V ptk.), sellest ka nimetus). See asjaolu võimaldab saada hea ettekujutuse üksikute pindade ehitusest ning neid pindu vajaduse korral ka skitseerida või modelleerida, kasutades teadmisi koonuselõigete kujust ja joonestamisvõtetest.

I. Elliptilisel silindril leidub paralleelsete sümmeetriatasandite ebakimp ja kaks selle kimbu tasanditega ning omavahel ristuvat sümmeetriatasandit, mis koosnevad omavahel paralleelsetest sümmeetriatelgedest. Näiteks elliptilise silindri korral, mida esitab võrrand (79.2):

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1, \tag{79.8}$$

on sümmeetriatasanditeks kõik x_1x_2-tasandiga paralleelsed tasandid ning x_1x_3- ja x_2x_3-tasand, sümmeetriatelgedeks aga kõik x_1-telje ja x_2-teljega paralleelsed sirged viimastel tasanditel. Neist tähelepanekuist järeldub, et vaadeldaval pinnal on ainult üks telg; võrrandi (79.8) korral on selleks x_3-telg. Et telg koosneb siin keskpunktidest, siis pind on mittetsentraalne. Üldiselt on elliptilisel silindril kaks mittevõrdset pooltelge — (79.8) puhul a ja b –, kuid puuduvad tipud. Võrdsete pooltelgede korral on tegemist pöördsilindriga I(p); iga selle telge läbiv tasand on paralleelsetest sümmeetriatelgedest koosnev sümmeetriatasand.

Elliptilise silindri lõiked tasanditega, mis on paralleelsed ühega telge läbivast kahest sümmeetriatasandist, koosnevad kas kahest paralleelsest sirgest või ühest sirgest või on tühjad. Näiteks silindri (79.8) lõige tasandiga $x_2 = k$:

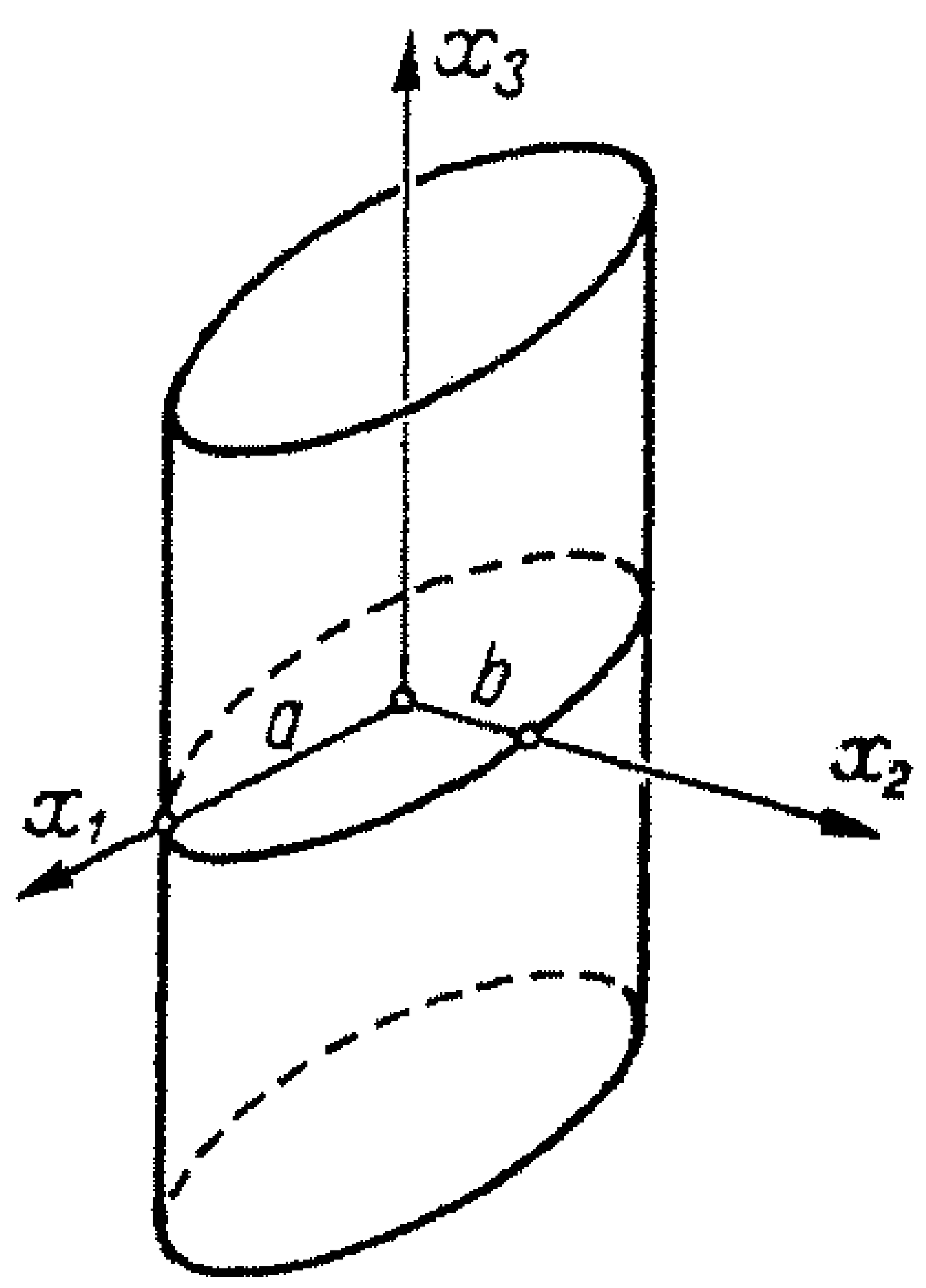
$$\begin{cases} x_1^2=\dfrac{a^2(b^2-k^2)}{b^2}, \\ x_2=k \end{cases}$$

koosneb kahest sirgest, kui $|k| < b$, ühest sirgest, kui $|k| = b$, ja on tühi, kui $|k| > b$.

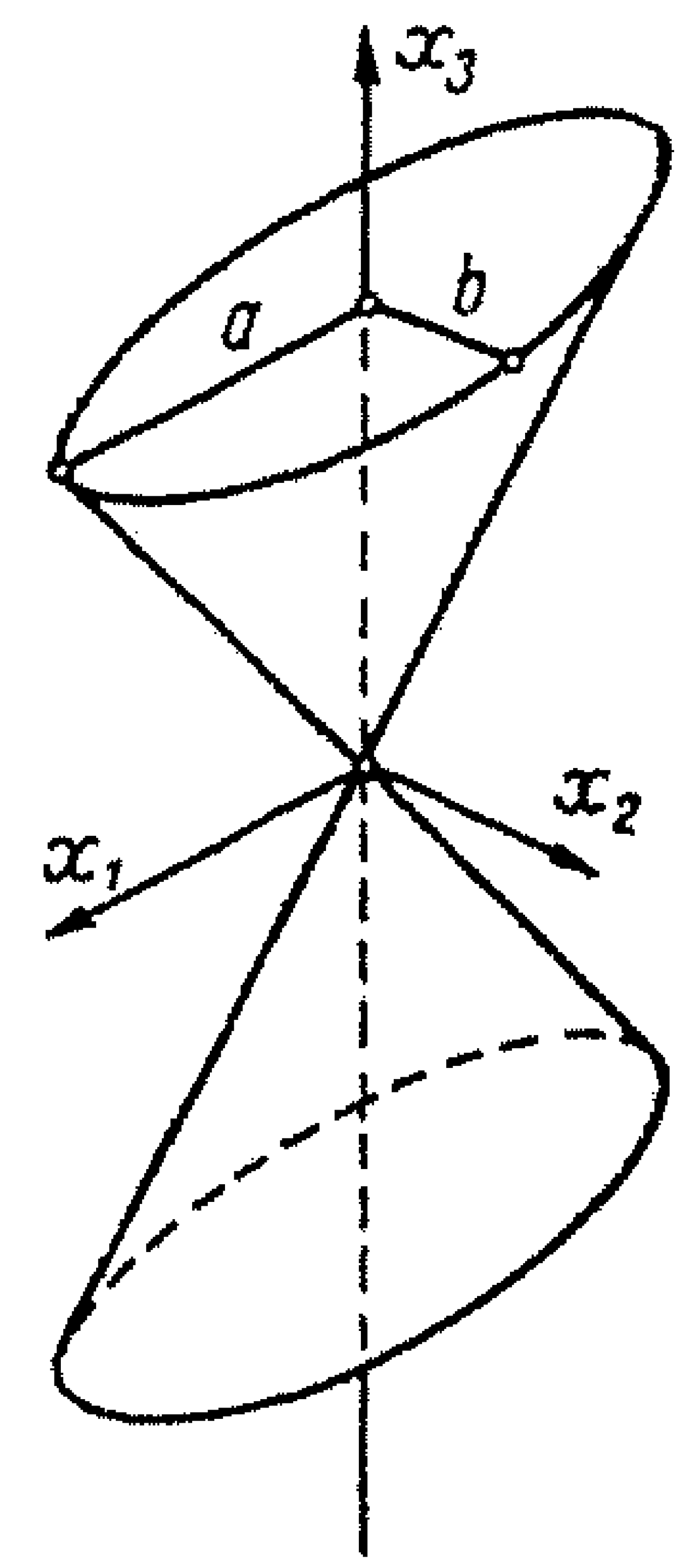
Lõiked teljega ristuvate tasanditega on paralleelsete telgedega kongruentsed ellipsid; võrrandi (79.8) puhul iga sellist esitab süsteem

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}=1, \\ x_3=h. \end{cases}$$

Seetõttu saab elliptilist silindrit vaadelda punktihulgana, mis tekib ellipsi kõigi võimalike lükete tagajärjel risti ellipsi tasandiga (joon. 171). Silindri pooltelgedeks on teda moodustava ellipsi poolteljed.



Joon. 171.



Joon 172

II. Teist järku koonusel on kolm sümmeetriatasandit, kolm sümmeetriatelge ja üks sümmeetriakeskpunkt; kui koonust esitab võrrand (79.3):

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=0, \tag{79.9}$$

siis nendeks on vastavalt koordinaattasandid, -teljed ja reeperi alguspunkt. Koonuse teljeks nimetatakse harilikult seda sümmeetriatelge, mida läbivad sümmeetriatasandid lõikavad koonust rohkem kui ühes punktis; koonuse (79.9) teljeks on x_3-telg. Sellele vastavalt öeldakse, et koonuse telg asetseb koonuse sisepiirkonnas; viimane defineeritakse (79.9) puhul võrratusega

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}<0;$$

vastupidise võrratuse puhul räägitakse koonuse välispiirkonnast. Koonuse (79.9) telg on pöördkoonuse (78.5) pöörlemistelje kujutis teisenduse (79.1) puhul.

Koonus on tsentraalne pind; tema ainus tipp ühtib tema keskpunktiga ja jaotab koonuse ülejäänud punktide hulga kahte klassi, mida nimetatakse koonuse kateteks.

Koonuse lõiked telge läbivate sümmeetriatasanditega on lõikuvate sirgete paarid, teljega paralleelsete tasanditega aga hüperboolid. Näiteks (79.9) puhul lõige tasandiga $x_2=k$:

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=-\frac{k^2}{b^2}, \\ x_2=k \end{cases}$$

on sirgete paar, kui $k = 0$, ülejäänud juhtudel aga hüperbool:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{(a')^2} - \dfrac{x_3^2}{(c')^2} = -1, \\ x_2 = k; \end{cases} \tag{79.10}$$

selle hüperbooli poolteljed on $a' = \dfrac{a|k|}{b}$, $c' = \dfrac{c|k|}{b}$.

Lõiked teljega ristuvate tasanditega on ellipsid. Näiteks tasand $x_3 = h \neq 0$ lõikab koonust (79.9) mööda ellipsit

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{(a')^2} + \dfrac{x_2^2}{(b')^2} = 1, \\ x_3 = h. \end{cases} \quad \left(a' = \frac{a|h|}{c},\ b' = \frac{b|h|}{c}\right) \tag{79.11}$$

Juhul kui $h = 0$, on lõikeks punkt — koonuse tipp.

Kui punkt $P(x_1, x_2, x_3)$ on koonusel (79.9) ja ei ühti selle tipuga, siis asetseb sellel koonusel ka punkt $P'(tx_1, tx_2, tx_3)$ reaalarvulise parameetri t iga väärtuse korral. Koonuse punkt P kuulub mingile ellipsile (79.11). Seetõttu saab öelda, et teist järku koonus on kõigi selliste sirgete hulk, mis lõikavad mingit ellipsit ja läbivad ruumi teatavat punkti, mille ristprojektsiooniks ellipsi tasandil on ellipsi keskpunkt (joon. 172). Ellipsit nimetatakse sel juhul koonuse j u h t j o o n e k s ja sirgeid koonuse (sirgjoonelisteks) m o o d u s t a j a t e k s.

On huvitav, et teist järku koonuse lõikamisel tasandiga võib lõikena saada mitte üksnes hüperboole ja ellipseid, nagu juba selgus, vaid ka paraboole. Selleks tuleb võtta lõige tasandiga, mis on paralleelne parajasti ühe moodustajaga (vrd. art. 72), võrrandi (79.9) puhul näiteks moodustajaga x_1x_3-tasandil:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a} - \dfrac{x_3}{c} = 0, \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

mille sihivektoriks on $\mathbf{k} = (a, 0, c)$. Lõike võrrandi leidmiseks teisendame ristreeperit selliselt, et

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{|\mathbf{k}|}\mathbf{k} = \frac{1}{|\mathbf{k}|}(\mathbf{e}_1 a + \mathbf{e}_3 c),$$

$$\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{e}'_3 = \frac{1}{|\mathbf{k}|}(-\mathbf{e}_1 c + \mathbf{e}_3 a).$$

Tulemuseks on jälle ristreeper $\{O; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, kusjuures (59.1) põhjal

$$x_1 = \frac{1}{|k|}(ax'_1 - cx'_3),$$
$$x_2 = x'_2,$$
$$x_3 = \frac{1}{|k|}(cx'_1 + ax'_3).$$

Siit, kui võtta $x'_3 = h$, saame

$$\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{c} = -\frac{1}{|k|}\frac{c^2+a^2}{ac}h = -\frac{|k|}{ac}h,$$

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{c} = \frac{1}{|k|}\left(2x'_1 + \frac{a^2-c^2}{ac}h\right)$$

ning asendus koonuse võrrandisse (79.9)

$$\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{c}\right)\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{c}\right) + \frac{x_2^2}{b^2} = 0$$

annab tulemuseks võrrandi

$$\frac{x'^2_2}{b^2} + Ax'_1 + B = 0,$$

kus A ja B on teatavad reaalarvud. Saadud võrrand määrab tasandil $x'_3 = h$ tõesti parabooli (vt. art. 75).

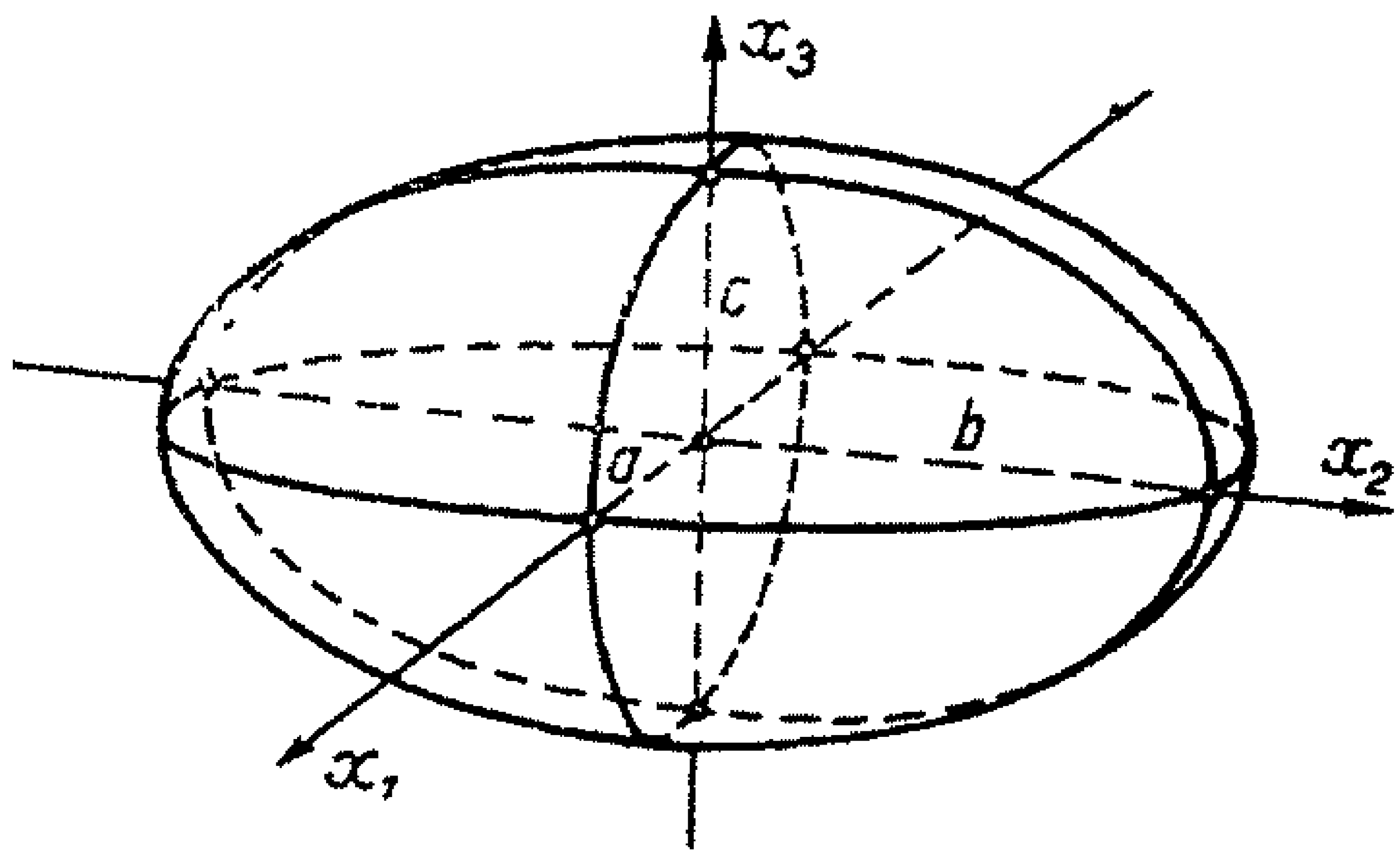
Asjaolu, et vaadeldava koonuse lõikamisel tasanditega võib saada lõigetena kõiki tüüpi koonuselõikeid (ka ringjooni, nagu selgub hiljem art-s 82), ei luba tema nimetuses kajastada seda või teist tüüpi koonuselõiget. Seetõttu kõneldaksegi teist järku koonusest (pidades silmas, et tema võrrandis on ainult teise astme liikmed).

III. E l l i p s o i d on tsentraalne pind, millel on kolm sümmeetriatasandit ja kolm telge, kuus tippu ja kolm pooltelge. Võrrandiga (79.4)

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \tag{79.12}$$

esitatud ellipsoidi sümmeetriatasanditeks on koordinaattasandid, telgedeks on koordinaatteljed ning pooltelgedeks a, b ja c; keskpunktiks on sel korral reeperi alguspunkt. Üldiselt ellipsoidi poolteljed on erinevad; sellisel juhul räägitakse ka kolmeteljelisest ellipsoidist ning tema suur-, kesk- ja väikepoolteljest. Kahe või kolme võrdse pooltelje korral on tegemist erijuhtudega — vastavalt pöördellipsoidi või sfääriga.

Nagu on kerge näha võrrandist (79.12), lõikab iga sümmeetriatasand ellipsoidi mööda ellipsit; sel viisil määratud ellipseid



Joon. 173.

nimetatakse ellipsoidi peaellipsiteks. Lõige sümmeetriatasandiga paralleelse tasandiga on kas samuti ellips, koosneb ühest punktist (ellipsoidi tipust) või on tühi. Näiteks ellipsoidi (79.12) ja tasandi $x_3 = h$ lõige

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \\ x_3=h \end{cases}$$

on peaellipsiga sarnane ellips pooltelgedega $a'=\frac{a\sqrt{c^2-h^2}}{c}$ ja $b'=\frac{b\sqrt{c^2-h^2}}{c}$, kui $|h|<c$ (sarnane seepärast, et $a':b'=a:b$; vt. art. 76); üks tippudest $(0, 0, \pm c)$, kui $|h| = c$, ja tühi, kui $|h| > c$. Vaadeldes veel ellipsoidi (79.12) lõikeid tasanditega $x_2 = k$ ja $x' = l$, saab kergesti veenduda, et see ellipsoid asetseb tervenisti risttahukas, mille määravad võrratused

$$|x_1|\leqslant a, \quad |x_2|\leqslant b, \quad |x_3|\leqslant c$$

ja mille servapikkusteks seega on kahekordsed pooltelјed (joon. 173).

Ellipsoidi (79.12) sisepiirkonna määrab võrratus

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}<1;$$

selles piirkonnas asetseb ellipsoidi keskpunkt; ellipsoidi välispiirkonna määrab vastupidine võrratus.

IV. Ühekatteline hüperboloid on tsentraalne pind kolme sümmeetriatasandi ja kolme teljega; võrrandi (79.5)

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1 \tag{79.13}$$

puhul on nendeks koordinaattasandid ja -teljed, keskpunktiks on sel korral reeperi alguspunkt. Kaks telge lõikavad pinda ja määravad selle neli tippu, kolmas telg pinda ei lõika; (79.13) puhul on mittelõikajaks x_3-telg — lõikepunkte määraval süsteemil

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}-\dfrac{x_3^2}{c^2}=1, \\ x_1=x_2=0 \end{cases}$$

on imaginaarsed lahendid $(0, 0, \pm ic)$. Vastavalt sellele kõneldakse kas r e a a l- või i m a g i n a a r t e l j e s t; räägitakse ka ühest piki- ja kahest põikteljest. Suurused a ja b võrrandis (79.13) on poolteljed; neid nimetatakse ka r e a a l p o o l t e l g e d e k s. Kui võtta imaginaarteljel keskpunkti suhtes sümmeetriline lõik pikkusega $2c$, siis saab geomeetriliselt tõlgendada ka suurust c — nimelt imaginaarse pooltelјena. Konstanti c nimetataksegi i m a g i n a a r p o o l t e l j e k s. Üldisel ühekattelisel hüperboloidil on erinevad reaalpoolteljed. Pooltelgede võrdsuse korral on tegemist erijuhuga — ühekattelise pöördhüperboloidiga.

Lõiked tasanditega, mis on paralleelsed ühega imaginaartelge läbivast kahest sümmeetriatasandist, on hüperboolid või lõikuvate sirgete paarid. Näiteks tasandi $x_2=k$ lõige hüperboloidiga (79.13)

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{x_3^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{b^2}, \\ x_2=k \end{cases}$$

on hüperbool

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{(a')^2}-\dfrac{x_3^2}{(c')^2}=\pm 1, \\ x_2=k, \end{cases} \quad \left(a'=\frac{a\sqrt{|b^2-k^2|}}{b}, \quad c'=\frac{c\sqrt{|b^2-k^2|}}{b}\right),$$

kui $|k| \neq b$, või sirgepaar

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x_1}{a}+\dfrac{x_3}{c}\right)\left(\dfrac{x_1}{a}-\dfrac{x_3}{c}\right)=0 \\ x_2=k, \end{cases}$$

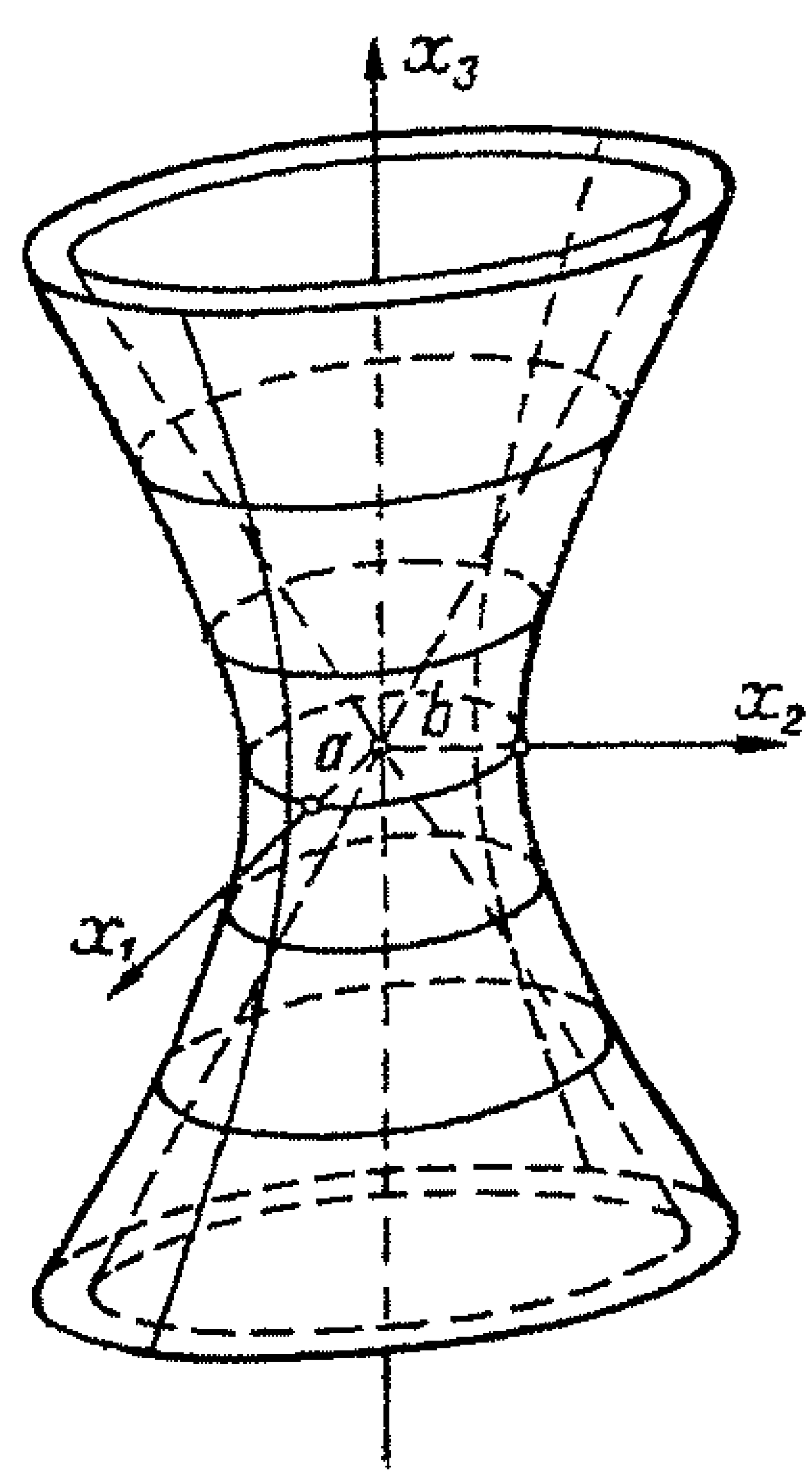
kui $|k|=b$. Erijuhul, kui $k=0$, tekib lõige sümmeetriatasandiga; seda lõiget nimetatakse hüperboloidi p e a h ü p e r b o o l i k s. Pea-hüperboole on seega kaks. Juhul $k \neq 0$ tekkiv lõige on sarnane ühega neist hüperboolidest, sest $a' : c' = a : c$ (vt. art. 77).

Kõik lõiked imaginaarteljega ristuvate tasanditega on omavahel sarnased ellipsid ((79.5) puhul süsteemiga

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{(a')^2}+\frac{x_2^2}{(b')^2}=1 \\ x_3=h \end{cases} \quad \left(a'=\frac{a\sqrt{c^2+h^2}}{c}, \quad b'=\frac{b\sqrt{c^2+h^2}}{c}\right),$$

määratud ellipsid; h — muutuv parameeter). Lõige sümmeetriatasandiga (juht $h = 0$) on ellips, mille pooltelgedeks on hüperboloidi reaalpooltteljed. Seda ellipsit nimetatakse vaadeldava hüperboloidi k a e l e l l i p s i k s.

Ühekattelise pöördhüperboloidi asümptootiline koonus muutub teisenduse (79.1) toimel üldise ühekattelise hüperboloidi a s ü m p t o o t i l i s e k s k o o n u s e k s. Hüperboloidi (79.13) asümptootilist koonust esitab seega võrrand (79.9). Võrrandite (79.13) ja (79.9) võrdlemisest järeldub vahetult, et ühekatteline hüperboloid asetseb oma asümptootilise koonuse välispiirkonnas (joon. 174). Samuti nagu teist järku koonuse puhul saab näidata, et ühekattelise hüperboloidi lõige tasandiga, mis on paralleelne asümptootilise koonuse ühe ja ainult ühe moodustajaga, on parabool.



Joon. 174.

V. K a h e k a t t e l i n e h ü p e r b o l o i d on samuti tsentraalne pind kolme sümmeetriatasandi ja kolme teljega; võrrandi (79.6)

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=-1 \tag{79.14}$$

puhul on nendeks koordinaattasandid ja -teljed. Siin telgedest ainult üks lõikab pinda ((79.14) puhul x_3-telg), mistõttu tippe on ainult kaks ning reaalpooltelgi üks ((79.14) puhul c). Üldisele kahekattelisele hüperboloidile on iseloomulik tema imaginaarpooltelgede — (79.14) korral a ja b — erinevus. Võrdsete imaginaarpooltelgede korral on tegemist kahekattelise pöördhüperboloidiga.

Lõiked tasanditega, mis on paralleelsed reaaltelge läbivate sümmeetriatasanditega, on omavahel sarnased hüperboolid. Näiteks tasandi $x_2 = k$ lõige hüperboloidiga (79.14)

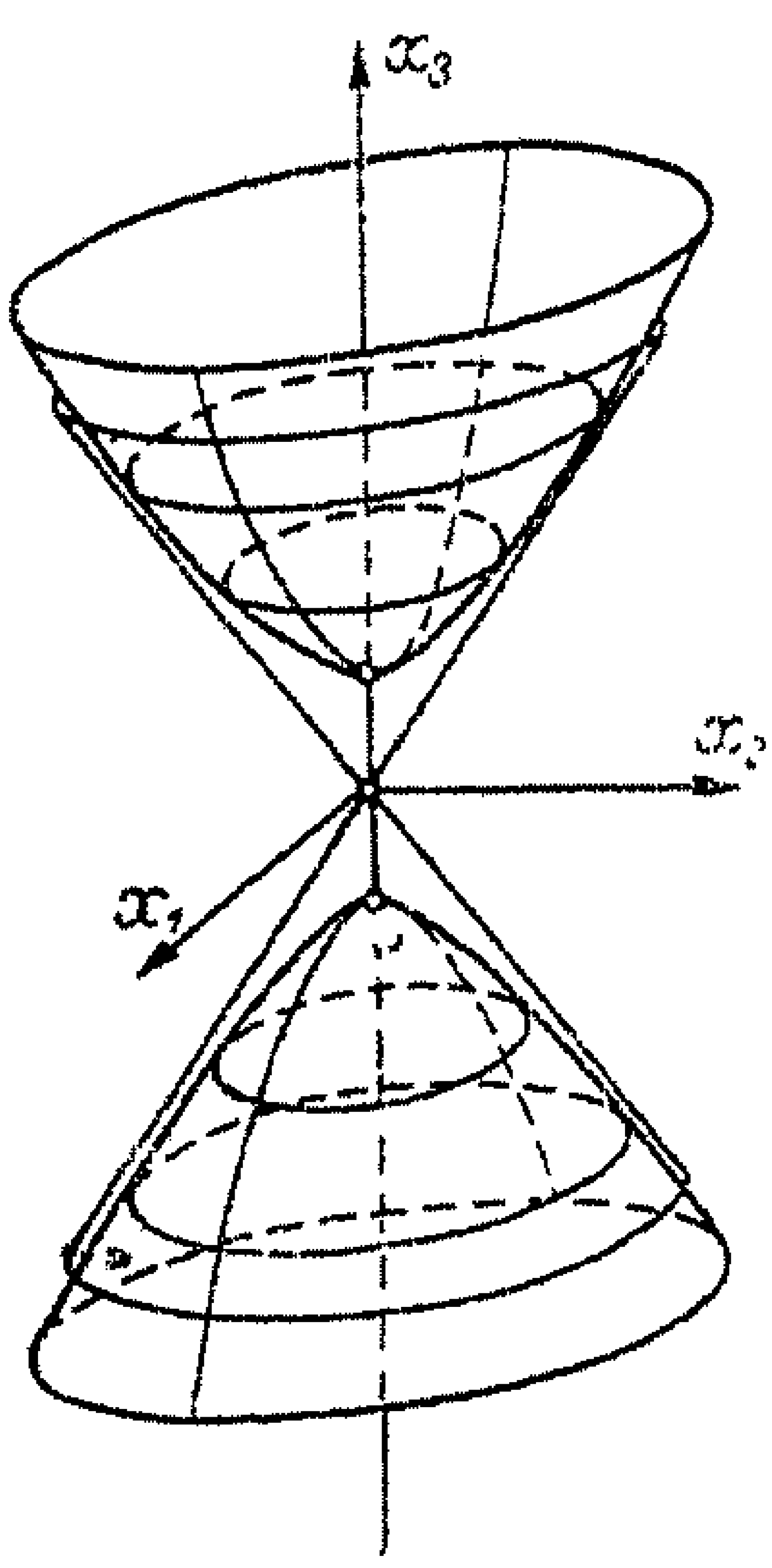
$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{(a')^2} - \dfrac{x_3^2}{(c')^2} = -1, \\ x_2 = k \end{cases} \quad \left(a' = \frac{a\sqrt{b^2+k^2}}{b}, \quad c' = \frac{c\sqrt{b^2+k^2}}{b} \right),$$

on hüperbool konstandi k iga väärtuse korral. Lõiget sümmeetriatasandiga (juht $k = 0$) nimetatakse p e a h ü p e r b o o l i k s. Viimaseid on seega kaks.

Lõige reaalteljega ristuva tasandiga võib osutuda ellipsiks, üheks punktiks (hüperboloidi tipuks) või olla tühi. Nii on hüperboloidi (79.14) lõige tasandiga $x_3 = h$

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1, \\ x_3 = h \end{cases}$$

ellips pooltelgedega $a' = \dfrac{a\sqrt{h^2 - c^2}}{c}$ ja $b' = \dfrac{b\sqrt{h^2 - c^2}}{c}$, kui $|h| > c$; üks tippudest $(0, 0, \pm c)$, kui $|h| = c$, ja tühi, kui $|h| < c$. Seega reaalteljega ristuv sümmeetriatasand hüperboloidi ei lõika. Temast kahele poole jääb uuritava pinna kaks omavahel lõikumatut osa — selle pinna kaks katet.



Joon. 175.

Kahekattelise hüperboloidi (79.14) asümptootilist koonust, mis defineeritakse samal viisil nagu ühekattelise hüperboloidi oma, esitab võrrand (79.9). Nende võrrandite võrdlemisel ilmneb, et kahekatteline hüperboloid asetseb oma asümptootilise koonuse sisepiirkonnas (joon. 175). Ka selle pinna lõikamisel tasandiga võib ellipsite ja hüperboolide kõrval saada parabooie.

Kui ühe- ja kahekatteline pöördhüperboloid on saadud kaashüperboolide pöörlemisel, siis on neil ühine asümptootiline koonus. Samuti on lugu üldise ühe- ja kahekattelise hüperboloidiga, kui nende teljed ühtivad ning ühe reaalpooltelged on teise imaginaarpooltelgedeks ja vastupidi (näiteks kui nad on esitatud võrranditega (79.13) ja (79.14) samade a, b, ja c puhul). Vaadeldes korraga niisugust kaht ühise asümptootilise koonusega hüperboloidi, saab anda «reaalse» tõlgenduse nende kõigile pooltelgedele (vrd. kaashüperboolide käsitlus art-s 77).

VI. **Elliptilisel paraboloidil** on kaks ristuvat sümmeetriatasandit ja seega üks telg; võrrandiga (79.7)

$$\frac{x_1^2}{p}+\frac{x_2^2}{q}=2x_3 \tag{79.15}$$

esitatud paraboloidi korral on nendeks x_1x_3- ja x_2x_3-tasand ning x_3-telg. Keskpunkti siin ei leidu, niisiis on tegemist mittetsentraalse pinnaga. Tippe on ainult üks — (79.15) puhul reeperi alguspunkt; seetõttu pole ka pooltelgi.

Lõige teljega ristuva tasandiga on kas ellips, punkt või tühi hulk. Näiteks võrrandiga (79.7) esitatud pinna lõige tasandiga $x_3=h$

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{p}+\dfrac{x_2^2}{q}=2h, \\ x_3=h \end{cases}$$

on ellips pooltelgedega $a'=\sqrt{\dfrac{p}{2h}}$ ja $b'=\sqrt{\dfrac{q}{2h}}$, kui $h>0$ (kõik sellised ellipsid on sarnased, sest $a':b'=\sqrt{p}:\sqrt{q}$); tipp (0, 0, 0), kui $h=0$, tühi hulk, kui $h<0$. Siit nähtub, et elliptiline paraboloid asetseb tervenisti ühes poolruumis ((79.15) korral $x_3\geqslant 0$), mille ääreks on tippu läbiv ja teljega ristuv tasand. Seetõttu ei või tema lõikamisel tasandiga saada hüperboole.

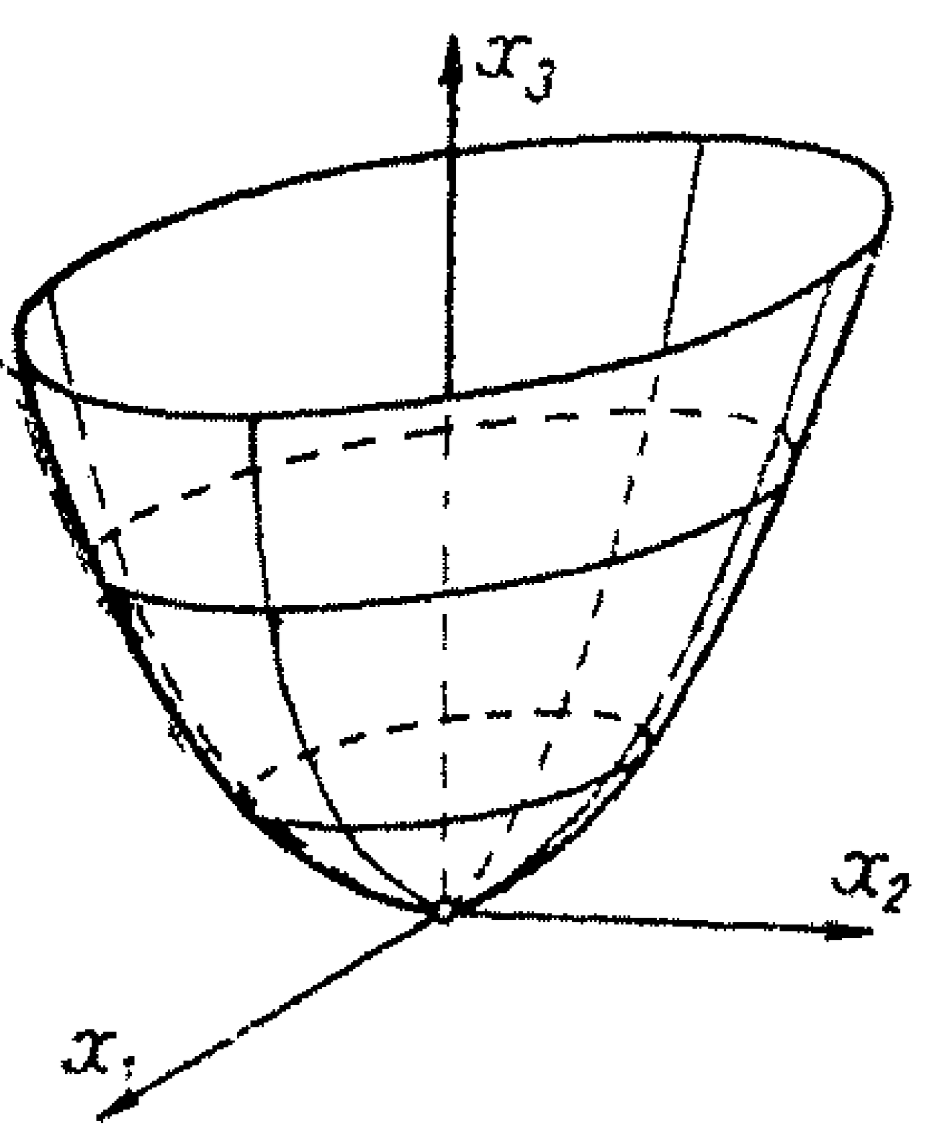
Lõiked kummagi sümmeetriatasandiga paralleelsete tasanditega on omavahel kongruentsed paraboolid. Selles veendumiseks moodustame paraboloidi (79.15) lõiked tasanditega $x_2=s$ ja $x_1=t$:

$$\begin{cases} x_1^2=2p\left(x_3-\dfrac{s^2}{2q}\right), \\ x_2=s, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2^2=2q\left(x_3-\dfrac{t^2}{2p}\right), \\ x_1=t. \end{cases}$$

Kui $s=t=0$, siis tekivad lõiked sümmeetriatasanditega:

$$\begin{cases} x_1^2=2px_3, \\ x_2=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2^2=2qx_3, \\ x_1=0; \end{cases}$$

neid lõikeid nimetatakse elliptilise paraboloidi **peaparaboolideks**. Niisiis leidub elliptilisel paraboloidil kaks ühest parameetrist sõltuvat paraboolide parve. Kummagi parve iga parabool osutub kongruentseks parve kuuluva peaparabooliga. Tõe-



Joon. 176.

poolest, parameetrite s ja t mistahes väärtuste korral saab sooritada sobivad lükked, mille toimel nendele väärtustele vastavad paraboolid satuvad peaparaboolidele. Parabooli jaoks esimesest parvest määrab sellise lükke vektor $l_1 = \left(0, -s, -\frac{s^2}{2q}\right)$, teise parve puhul aga $l_2 = \left(-t, 0, -\frac{t^2}{2p}\right)$.

Märgime lisaks, et 1) esimesse parve kuuluva parabooli tipp $\left(0, s, \frac{s^2}{2q}\right)$ asetseb teisel peaparaboolil ja vastupidi, teisest parvest pärineva parabooli tipp $\left(t, 0, \frac{t^2}{2p}\right)$ kuulub esimesele peaparaboolile, 2) erinevaisse parvedesse kuuluvate paraboolide tasandid on risti ning nende teljed on paralleelsed ja samasuunalised (kui suund parabooli teljel määrata selliselt, et telje positiivne poolsirge on pooltasandil, millel asetseb parabool) (joon. 176).

80. Koonuselõikeliste pindade üldvõrrand. Kõiki eelnevas artiklis uuritud pindu ühendab ühelt poolt see, et neid võib saada koonuselõikelistest pöördpindadest lihtsa afiinse teisendusega (79.1), teiselt poolt aga see, et kõiki neid saab esitada ristreeperi suhtes järgmist tüüpi võrrandiga:

$$x_1^2 + \lambda x_2^2 + s x_3^2 + t x_3 + v = 0, \tag{80.1}$$

kus $\lambda = \frac{1}{k^2} > 0$ ning s, t ja v seas vähemalt üks on nullist erinev (vt. võrrandit (78.3) ja teisendust (79.1)). Teine uuritud pindu ühendav tunnus annab võimaluse lihtsaks üldistamiseks, nimelt sel teel, et kordajal λ lubatakse omandada ka negatiivseid väärtusi ja võrduda nulliga. Seejuures tuleb võrrandi (80.1) kordajate kohta püstitada üks lisatingimus, mille geomeetriline tähendus selgub allpool.

***Def.* 80.1.** Punktihulka, mille määrab ruumis ristreeperi suhtes võrrand (80.1), kus λ ja $sv - t^2$ ei ole korraga nullid ning s, t ja v seas vähemalt üks on nullist erinev, nimetatakse k o o n u s e l õ i k e l i s e k s p i n n a k s (kui ta ei ole tühi ega koosne ainult ühest punktist). Võrrandit (80.1) nimetatakse selle pinna võrrandiks.

Kui kordaja λ võrrandis (80.1) on positiivne, siis see definitsioon määrab kõik koonuselõikelised pöördpinnad ja nende afiinsed kujutised ning ainult need. Tõepoolest, kasutades art-s 78 näidatud rööplükkeid $l_1=\left(0, 0, -\frac{t}{2s}\right)$ ja $l_2=\left(0, 0, -\frac{v}{t}\right)$, saab kordajate s, t ja v jaoks välja eraldada kõik oluliselt erinevad juhud: 1) s ja v erinevad mõlemad nullist, 2) s, t ja v seas erineb nullist vaid üks. Kui $\lambda>0$, siis selleks, et võrrandiga (80.1) määratud punktihulk ei oleks tühi ega koosneks ainult ühest punktist, peab vähemalt üks ülejäänud kordajatest olema negatiivne. Kõik võimalikud juhud positiivse λ korral on näidatud järgmises tabelis, milles on ühtlasi nimetatud pind, mille vaadeldav võrrand määrab.

	s	t	v	
1	+	0	—	ellipsoid
2	—	0	—	ühekatteline hüperboloid
3	—	0	+	kahekatteline hüperboloid
4	—	0	0	teist järku koonus
5	0	—	0	elliptiline paraboloid
6	0	0	—	elliptiline silinder

Uurime nüüd def. 80.1 põhjal lisanduvaid juhte. Kui $\lambda<0$, siis võivad nullist erinevad kordajad hulgast $\{s, t, v\}$ olla nii positiivsed kui ka negatiivsed. Kui aga $\lambda=0$, siis $sv-t^2\neq 0$, mistõttu (kui silmas pidada ka lükke l_1 kasutamist) saab eristada järgmisi juhte: 1) s ja v ei ole nullid, 2) t ei ole null; seejuures peab vähemalt üks nullist erinevaist kordajaist olema negatiivne. Ülevaate kõigist võimalikest juhtudest annab järgmine tabel.

	λ	s	t	v	
7	—	+	0	+	taandub juhule 3, kui vahetada baasivektorid e_2 ja e_3
8	—	+	0	—	taandub juhule 2, kui vahetada e_2 ja e_3
9	—	—	0	—	taandub juhule 3, kui jagada s-ga ning vahetada e_1 ja e_3
10	—	—	0	+	taandub juhule 2, kui jagada s-ga ning vahetada e_1 ja e_3
11	—	+	0	0	taandub juhule 4, kui vahetada e_2 ja e_3
12	—	—	0	0	taandub juhule 4, kui jagada λ-ga ja võtta uueks reeperiks $\{O; e_2, e_3, e_1\}$

	λ	s	t	v	
13	—	0	—	0	e i t a a n d u s e n i v a a d e l d u d j u h t u d e l e
14	—	0	+	0	taandub eelnevale juhule 13, kui jagada λ-ga ning vahetada e_1 ja e_2
15	—	0	0	—	e i t a a n d u e e l n e v a t e l e j u h t u d e l e
16	—	0	0	+	taandub eelnevale juhule 15, kui jagada λ-ga ning vahetada e_1 ja e_2
17	0	+	0	—	taandub juhule 6, kui vahetada e_2 ja e_3
18	0	—	0	—	taandub juhule 15, kui jagada s-ga ja võtta reeperiks $\{O;\ e_3,\ e_2,\ e_1\}$
19	0	—	0	+	taandub juhule 15, kui vahetada e_2 ja e_3
20	0	0	—	0	e i t a a n d u e e l n e v a t e l e j u h t u d e l e

Sellest ülevaatest nähtub, et võrrand (80.1) määrab peale art-s 79 käsitletud pindade veel kolm koonuselõikelist pinda, mis ei osutu ühegi koonuselõikelise pöördpinna afiinseteks kujutisteks, sest vastavad võrrandid ei tulene eespool ammendavalt analüüsitud võrrandist (78.3). Sellised võrrandid saadakse juhtudel 15, 20 ja 13:

$$x_1^2-|\lambda|\,x_2^2-|v|=0,$$
$$x_1^2-|t|\,x_3=0,$$
$$x_1^2-|\lambda|\,x_2^2-|t|\,x_3=0.$$

Kasutades tähiseid $p=\frac{|t|}{2}$, $q=\frac{|t|}{2|\lambda|}$, $a^2=|v|$, $b^2=\frac{|v|}{|\lambda|}$, kirjutame need võrrandid kujul

$$\mathrm{I}' \qquad \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1, \tag{80.2}$$

$$\mathrm{I}'' \qquad x_1^2=2px_3, \tag{80.3}$$

$$\mathrm{VI}' \qquad \frac{x_1^2}{p}-\frac{x_2^2}{q}=2x_3. \tag{80.4}$$

Enne nende võrranditega määratud pindade kirjeldamist märgime, et võrrand (80.1) määrab juhtudel, kui loobuda mõnest definitsioonis (80.1) püstitatud tingimusest, tühja hulga, ühe punkti, ühe sirge või tasandite paari; selline olukord tekib siis, kui lubada, et λ ja $sv-t^2$ on korraga nullid. Tõepoolest, lükke l_1 abil saab alati saavutada, et $t=0$, seepärast võib niisugusel juhul nullist erineda kas ainult s või ainult v; muidugi võib ette tulla ka, et $s=v=0$. Võrrandil (80.1) on vastavalt üks järgmistest kujudest:

$$x_1^2+sx_3^2=0,$$
$$x_1^2+v=0,$$
$$x_1^2=0.$$

Esimesel juhul on tegemist sirgega $x_1=x_3=0$, kui $s>0$, ja tasandipaariga $x_1+\sqrt{|s|}x_3=0$, $x_1-\sqrt{|s|}x_3=0$, kui $s<0$. Teisel juhul esineb tühi hulk, kui $v>0$, ja tasandipaar $x_1=\pm\sqrt{|v|}$, kui $v<0$ Kolmas võrrand määrab kaks ühtivat tasandit $x_1=0$. Analoogiliste tulemusteni saab jõuda ka siis, kui positiivse λ puhul lubada, et kõik ülejäänud nullist erinevad kordajad on positiivsed.

Muidugi saab punktihulki I′, I″ ja VI′ esitada ka mõnevõrra teistsuguste võrranditega; näiteks kui vahetada koordinaatteljed, siis tuleb koordinaatmuutujad võrrandites (80.2) kuni (80.4) vastavalt ümber nummerdada.

Vaatleme nüüd lisandunud koonuselõikelisi pindu.

Def. **80.2.** Punktihulkadele, mida sobivalt valitud ristreeperi korral esitavad võrrandid (80.2—4), antakse järgmised nimetused: I′ — hüperboolne silinder, I″ — paraboolne silinder, VI′ — hüperboolne paraboloid.

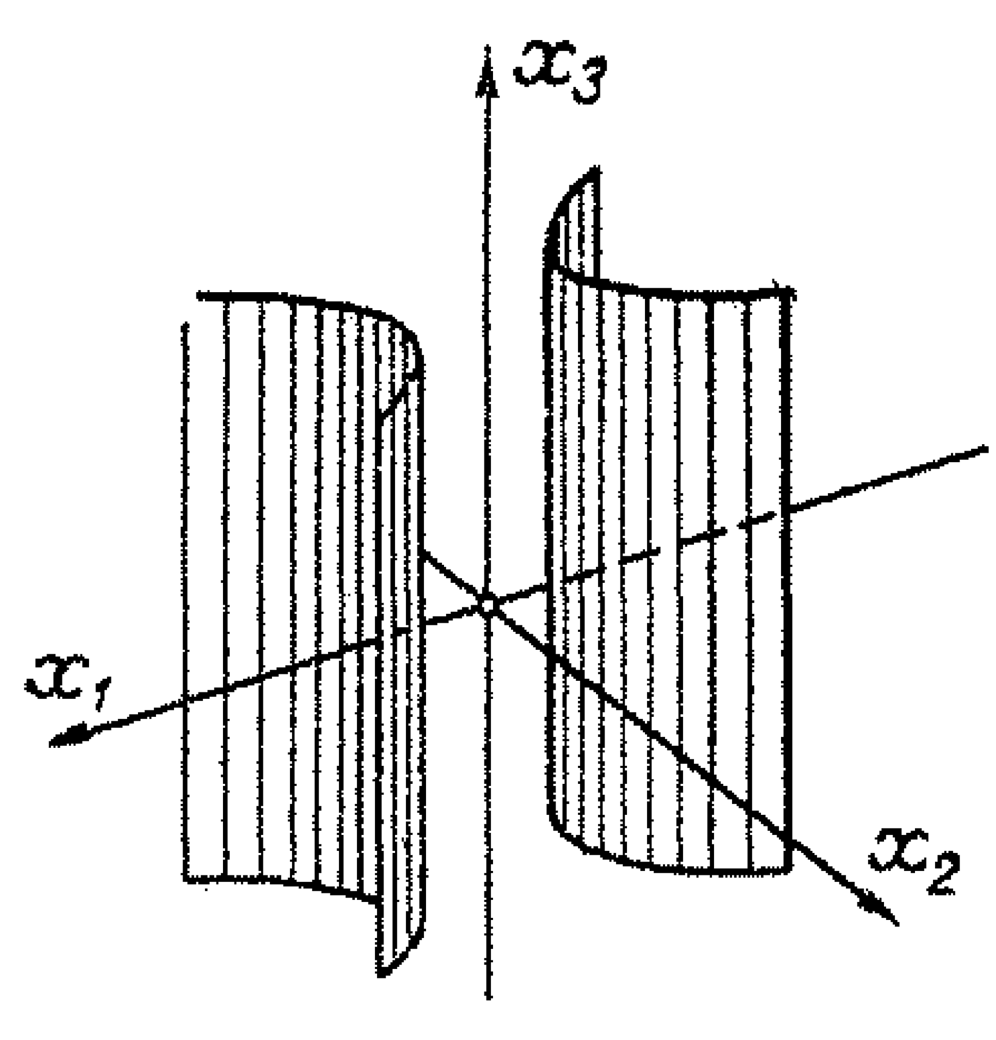
I′. Hüperboolse silindri sümmeetriatasandite hulk on samalaadne elliptilise silindri omaga. Hüperboolsel silindril on üksainus telg; see koosneb keskpunktidest ja ei määra tippe. Teljega ristuvate sümmeetriatelgede ebakimpudest moodustavad ainult ühe kimbu sirged reaalseid kõõle; selliseks kimbuks on võrrandi (80.2)

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1 \tag{80.5}$$

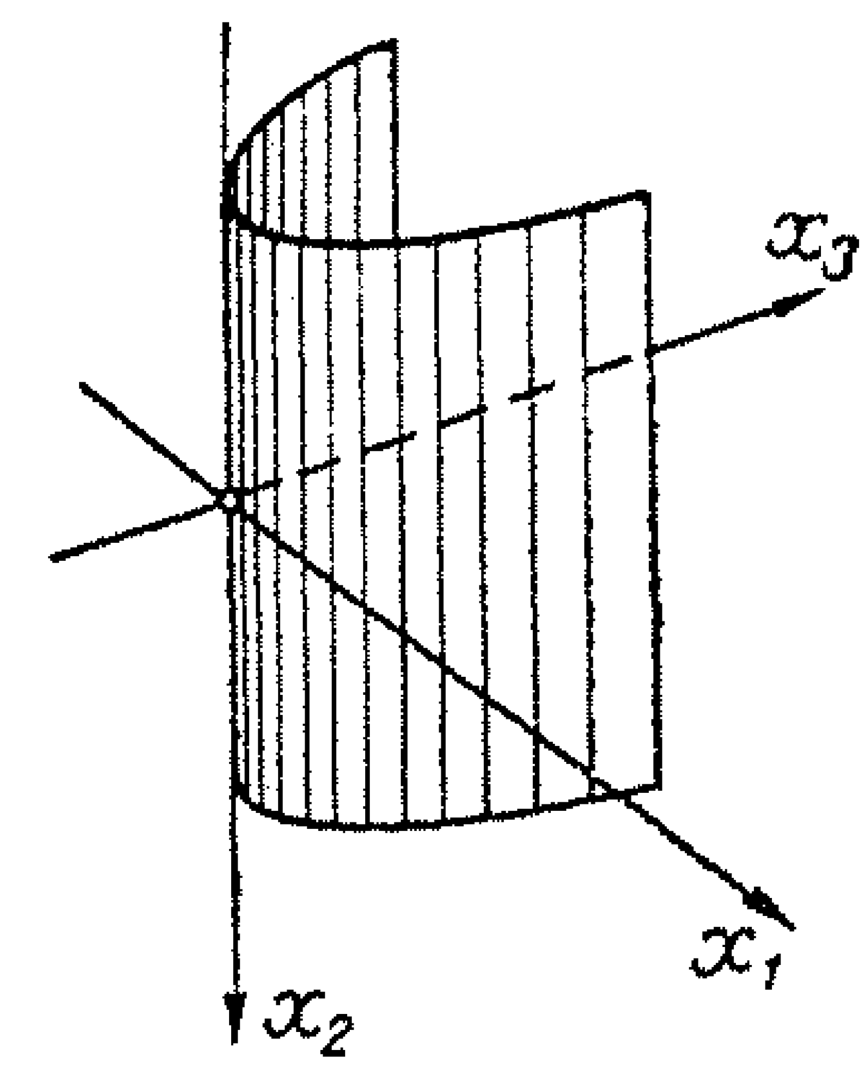
puhul x_1-telje-sihilised sirged x_1x_3-tasandil; sellele kimbule vastab võrrandis (80.5) pooltelg a. Ka suurust b võrrandis (80.5) saab tõlgendada pooltreljena, moodustades x_2x_3-tasandil silindri telje suhtes sümmeetriliselt asetsevad lõigud, mille pikkus on $2b$, ja lugedes neid pinna «imaginaarseteks» kõõludeks. Nendele kõõludele saab omistada reaalse tähenduse, vaadeldes samaaegselt kaashüperbooli abil moodustatud hüperboolset silindrit.

Lõiked tasanditega, mis läbivad hüperboolse silindri telge ja on paralleelsed selle silindri sümmeetriatasanditega, on samalaadsed elliptilise silindri omadega.

Lõiked tasanditega, mis on teljega risti, on paralleelsete telgedega kongruentsed hüperboolid; (80.5) puhul on sellised lõiked määratud süsteemiga



Joon. 177.



Joon 178.

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \\ x_3 = h. \end{cases}$$

Silindri pooltelgedeks on nende hüperboolide poolteljed. Siit nähtub, et hüperboolset silindrit võib vaadelda punktihulgana, mis tekib hüperbooli kõigi võimalike lükete tagajärjel risti hüperbooli tasandiga (joon. 177). Hüperbooli asümptootidest tekib sel puhul kaks tasandit, mida nimetatakse hüperboolse silindri asümptootilisteks tasanditeks.

I″. P a r a b o o l s e l   s i l i n d r i l on terve ebakimp paralleelseid sümmeetriatasandeid ja üks selle ebakimbu tasanditega ristuv sümmeetriatasand, mis koosneb omavahel paralleelsetest sümmeetriatelgedest. Kui paraboolset silindrit esitab võrrand (80.3)

$$x_1^2 = 2px_3, \tag{80.6}$$

siis sümmeetriatasanditeks on x_2x_3-tasandiga paralleelsed tasandid ja x_1x_3-tasand, sümmeetriatelgedeks aga x_3-telje-sihilised sirged. Pinnal puuduvad telg, tipud, keskpunkt ja poolteljed.

Lõiked ebakimpu kuuluvate sümmeetriatasanditega on paralleelsete telgedega kongruentsed paraboolid, (80.6) puhul

$$\begin{cases} x_2^2 = 2px_3, \\ x_1 = h. \end{cases}$$

Niisiis võib pinda I″ vaadelda punktihulgana, mis tekib parabooli kõigi võimalike lükete toimel risti parabooli tasandiga (joon. 178). Parabooli parameeter määrab tekkiva silindri fokaallaiuse $2p$.

Ebakimpu mittekuuluva sümmeetriatasandiga paralleelsetest tasanditest igaüks lõikab pinda mööda üht sirget. Sümmeetriatasanditega ristuvate tasandite lõiked pinnaga on kas tühjad või koosnevad kahest sirgest; ühel juhul on lõikeks sirge.

Elliptilise, hüperboolse ja paraboolse silindri I, I′ ja I″ ühine tunnus on see, et sobiva ristreeperi korral nende võrrandid ühtivad vastavalt ellipsi, hüperbooli ja parabooli võrranditega, mida siin aga tõlgendatakse mitte enam tasandil, vaid ruumis. Igas nendest võrranditest puudub üks koordinaatmuutuja, siin vaadeldavail juhtudel x_3. Sellest järeldub, et kui mõnda nendest võrranditest rahuldavad punkti $X_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ koordinaadid, siis rahuldavad seda ka punkti $X(x_1^0, x_2^0, x_3)$ koordinaadid sõltumatult x_3 väärtusest. Siit nähtub, et nende pindade jaoks on võimalik anda järgmine ühine definitsioon.

***Def.* 80.3.** Kõigi selliste sirgete ühendit, mis on risti mingi tasandiga ja lõikavad sellel tasandil asetsevat koonuselõiget, nimetatakse koonuselõikeliseks silindriks. Koonuselõiget nimetatakse juhtjooneks, sirgeid — moodustajateks. Vastavalt sellele, kas juhtjooneks on ellips, hüperbool või parabool, kõneldakse elliptilisest, hüperboolsest või paraboolsest silindrist.

VI′. Hüperboolne paraboloid on mittetsentraalne pind, millel on kaks sümmeetriatasandit ja seega üks telg. Kui seda pinda esitab võrrand (80.4)

$$\frac{x_1^2}{p}-\frac{x_2^2}{q}=2x_3, \tag{80.7}$$

siis sümmeetriatasanditeks on x_1x_3- ja x_2x_3-tasand ning teljeks x_3-telg, ainsaks tipuks aga on reeperi alguspunkt.

Hüperboolse paraboloidi lõige tasandiga, mis on risti paraboloidi teljega, on kas hüperbool või lõikuvate sirgete paar. Näiteks (80.7) korral lõige

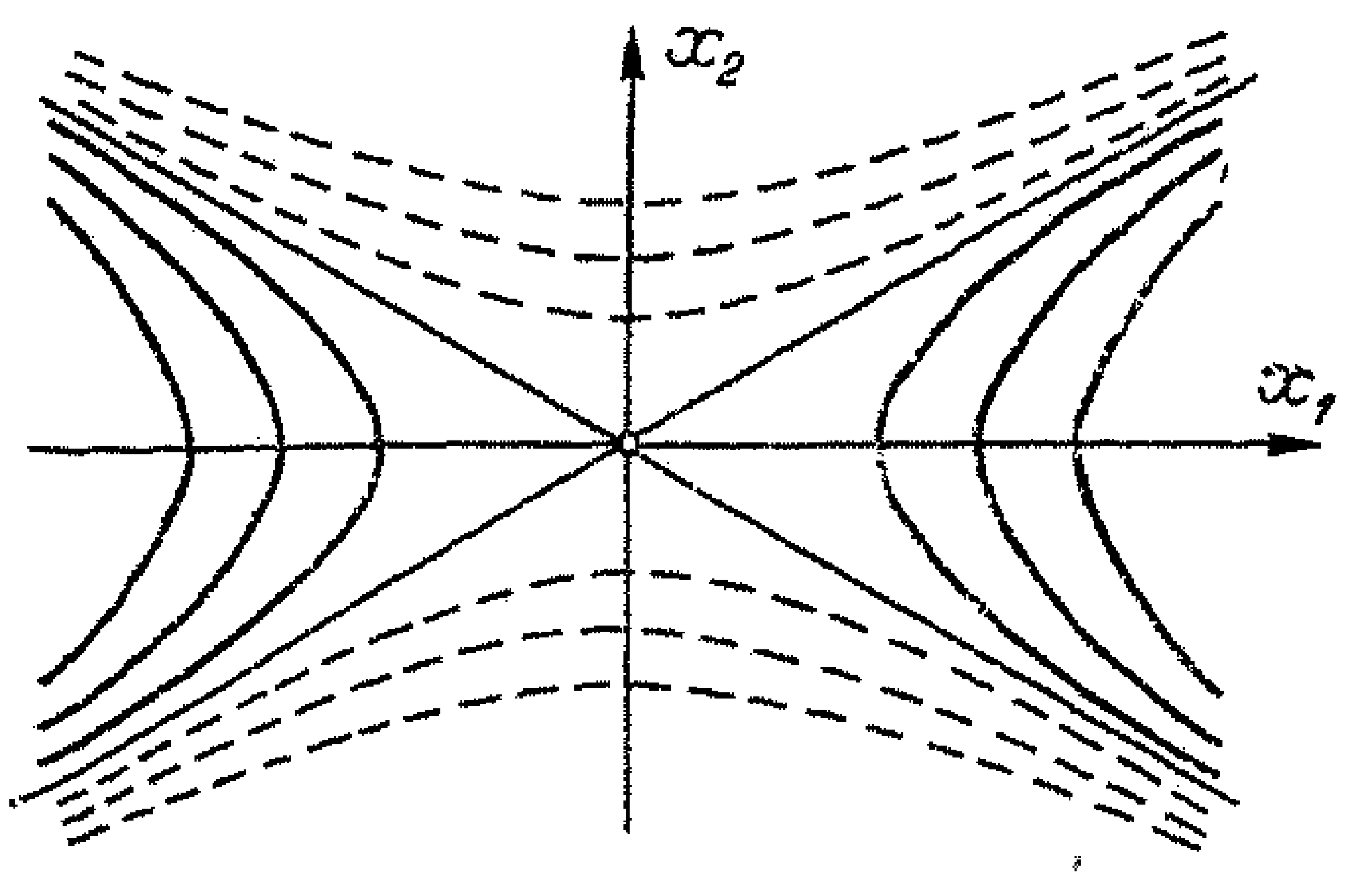
$$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{p}-\dfrac{x_2^2}{q}=2h,\\ x_3=h\end{cases}$$

on üks hüperboolidest

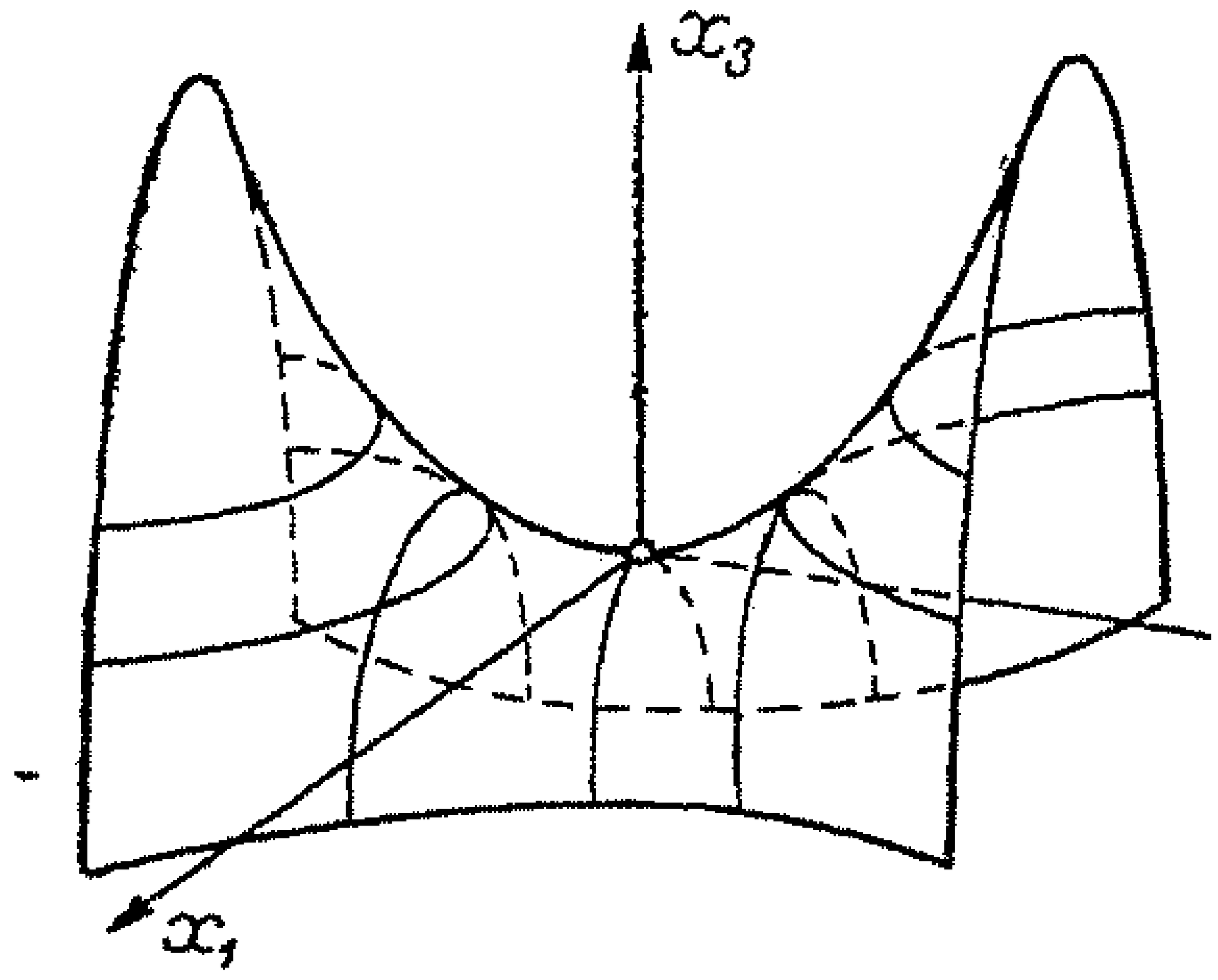
$$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{(a')^2}-\dfrac{x_2^2}{(b')^2}=\pm 1 \qquad \left(a'=\sqrt{\dfrac{p}{2|h|}},\quad b'=\sqrt{\dfrac{q}{2|h|}}\right),\\ x_3=h,\end{cases} \tag{80.8}$$

kui $h\neq 0$, ja sirgepaar

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x_1}{\sqrt{p}}+\dfrac{x_2}{\sqrt{q}}\right)\left(\dfrac{x_1}{\sqrt{p}}-\dfrac{x_2}{\sqrt{q}}\right)=0,\\ x_3=0,\end{cases} \tag{80.9}$$



Joon. 179.



Joon. 180.

kui $h = 0$. Lõigetena saadud hüperboolidel on paralleelsed teljed. Iga kahe erimärgiliste konstantide puhul saadud hüperbooli korral on ühe hüperbooli reaaltelg paralleelne teise hüperbooli imaginaarteljega. Kui projekteerida kõik hüperboolid (80.8) ortogonaalselt x_1x_2-tasandile[99], siis saame ühest parameetrist h sõltuva hüperboolide parve (joon. 179). Selle parve kõigi hüperboolide ühised asümptoodid on sirged (80.9). Seega meenutab hüperboolne paraboloid oma tipu ümbruses sadula pinda (joon. 180).

Paraboloidi lõiked kummagi sümmeetriatasandiga paralleelsete tasanditega on omavahel kongruentsed paraboolid. Selle näitamiseks moodustame paraboloidi (80.7) lõiked tasanditega $x_2 = s$ ja $x_1 = t$:

$$\begin{cases} x_1^2 = 2p\left(x_3 + \dfrac{s^2}{2q}\right), \\ x_2 = s, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2^2 = 2q\left(\dfrac{t^2}{2p} - x_3\right), \\ x_2 = t. \end{cases}$$

Erijuhul, kui $s = t = 0$, tekivad lõiked sümmeetriatasanditega:

$$\begin{cases} x_1^2 = 2px_3, \\ x_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2^2 = -2qx_3, \\ x_2 = 0; \end{cases}$$

neid lõikeid nimetatakse hüperboolse paraboloidi p e a p a r a b o o l i d e k s. Seega leidub ka hüperboolsel paraboloidil kaks ühest parameetrist sõltuvat paraboolide parve. Paraboolid kummastki parvest on kongruentsed peaparaboolidega, sest lükked

$$l_1 = \left(0, -s, \frac{s^2}{2q}\right) \quad \text{ja} \quad l_2 = \left(-t, 0, -\frac{t^2}{2p}\right)$$

[99] Kujundi ortogonaalprojekteerimiseks tasandile nimetatakse tema paralleelprojekteerimist tasandile selle tasandi normaalvektori-sihis (vt. def. 60.2).

viivad paraboolid ühtimisele vastavate peaparaboolidega. Siit on selge, et iga kaks ühte parve kuuluvat parabooli on omavahel kongruentsed.

Märgime lisaks, et 1) iga esimesse parve kuuluva parabooli tipp $\left(0, s, -\frac{s^2}{2q}\right)$ asetseb teisel peaparaboolil ja vastupidi, iga teisest parvest pärineva parabooli tipp $\left(t, 0, \frac{t^2}{2p}\right)$ kuulub esimesele peaparaboolile, 2) erinevatesse parvedesse kuuluvate paraboolide tasandid on risti ning nende teljed on paralleelsed ja vastassuunalised (kui suund parabooli teljel määrata nii, et telje positiivne poolsirge on pooltasandil, millel asetseb parabool).

Pindade VI ja VI′ ehituses on seega suur analoogia, mis lubab anda nende ühise definitsiooni.

***Def.* 80.4.** Kõigi selliste omavahel kongruentsete paraboolide ühendit, mille tasandid on risti antud tasandiga α, tipud asetsevad tasandile α kuuluval paraboolil ja teljed on samasuunalised ning paralleelsed viimati manitud parabooli teljega, nimetatakse p a r a b o l o i d i k s. Vastavalt sellele, kas vaadeldavate kongruentsete paraboloidide teljed on sama- või vastassuunalised tasandil α asetseva parabooli teljega, nimetatakse paraboloidi e l l i p t i l i s e k s või h ü p e r b o o l s e k s.

Näitame, et võrrandid (79.15) ja (80.7) on võimalik saada ka otse def. 80.4 alusel. Olgu antud mingid kaks ühise tipuga parabooli, mille tasandid on risti ja teljed ühtivad nende tasandite lõikesirgega:

$$\begin{cases} x_1^2 = 2px_3, \\ x_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2^2 = \pm 2qx_3, \\ x_1 = 0. \end{cases} \tag{80.10}$$

Kahe märgi olemasolu teise parabooli võrrandis näitab, et selle parabooli telje suund on esialgu jäetud vabalt valitavaks. Viime esimese parabooli lükkega $\boldsymbol{l} = (0,\ s,\ x_3^0)$ tasandile $x_2 = s$:

$$\begin{cases} x_1^2 = 2p\,(x_3 - x_3^0), \\ x_2 = s \end{cases}$$

ja nõuame, et lükke teel saadud parabooli tipp $(0,\ s,\ x_3^0)$ asetseks teisel ettevõetud paraboolil (80.10). Nagu on kerge kontrollida, peab siis olema $x_3^0 = \pm \frac{s^2}{2q}$, s. t. lükke teel saadud parabooli kirjeldab üks võrrandisüsteemidest

$$\begin{cases} x_1^2=2p\left(x_3\mp\dfrac{s^2}{2q}\right), \\ x_2=s. \end{cases}$$

Kõigi selliste paraboolide saamiseks loeme s vabalt muutuvaks, s. o. asendame ta koordinaatmuutujaga x_2. Pärast niisugust asendust saame vastavalt märgi valikule kaks võrrandit, mis määravad kõigi näidatud lükete teel saadud paraboolide ühendid:

$$\text{VI} \quad \frac{x_1^2}{p}+\frac{x_2^2}{q}=2x_3, \qquad \text{VI}' \quad \frac{x_1^2}{p}-\frac{x_2^2}{q}=2x_3.$$

81. Sirgjoonelised moodustajad. Teist järku koonuse kummagi katte iga punkti läbib parajasti üks koonusele kuuluv sirge. Vastupidi, iga sirge koonusel on täielikult määratud, kui on antud üks punkt koonuse kattel. Seetõttu kõigi koonusele (79.9) kuuluvate sirgete hulk on ekvivalentne koonuse ja tasandi $x_3=h\neq 0$ lõikepunktide hulgaga. Punkti asend lõikepunktide hulgas (ellipsil) on määratud ühe parameetriga. Seega koonusel asetsevate sirgete hulk sõltub ühest parameetrist. Analoogilise järelduse saab teha silindrite puhul. Neid asjaolusid üldistab järgmine definitsioon.

***Def.* 81.1.** Kui leidub sirgete hulk, mille iga sirge asetseb antud koonuselõikelisel pinnal, kusjuures pinna iga punkti läbib parajasti üks sirge sellest hulgast, siis seda sirgete hulka nimetatakse antud koonuselõikelise pinna s i r g j o o n e l i s t e m o o d u s t a j a t e parveks, täpsemalt, üheparameetriliseks parveks.

Nii koonusel kui ka silindril on üks parv sirgjoonelisi moodustajaid. Art-s 79 saadud tulemustest järeldub, et ellipsoid, kahekatteline hüperboloid ja elliptiline paraboloid ei sisalda ühtki sirget. Sealsamas ja art-s 80 aga ilmnes vähemalt mõne sirge olemasolu mõlemal ülejäänud pinnal — ühekattelisel hüperboloidil ja hüperboolsel paraboloidil. Olukorda neil pindadel kirjeldavad järgmised teoreemid.

***Teoreem* 81.1.** *Ühekattelise hüperboloidi iga punkti läbib parajasti kaks sellele pinnale kuuluvat sirget.*

T õ e s t u s. Vaatleme sirget parameetriliste võrranditega

$$x_i=a_i+tk_i \quad (i=1,2,3), \tag{81.1}$$

mis läbib ühekattelise hüperboloidi (79.5) mingit antud punkti $A(a_1, a_2, a_3)$ vektori $\boldsymbol{k}=(k_1, k_2, k_3)$ sihis. Teeme võrrandeist (81.1) asendused võrrandisse (79.5):

$$\frac{(a_1+tk_1)^2}{a^2}+\frac{(a_2+tk_2)^2}{b^2}-\frac{(a_3+tk_3)^2}{c^2}=1$$

ning lihtsustame tulemust, arvestades võrdust

$$\frac{(a_1)^2}{a^2}+\frac{(a_2)^2}{b^2}-\frac{(a_3)^2}{c^2}=1, \tag{81.2}$$

mis väljendab punkti A kuuluvust hüperboloidile. Tekib parameetrit t sisaldav tingimus

$$\left(\frac{k_1^2}{a^2}+\frac{k_2^2}{b^2}-\frac{k_3^2}{c^2}\right)t^2+2\left(\frac{a_1k_1}{a^2}+\frac{a_2k_2}{b^2}-\frac{a_3k_3}{c^2}\right)t=0,$$

mis juhul, kui sirge on hüperboloidil, peab osutuma samasuseks. Siit nähtub, et sirge (81.1) asetseb hüperboloidil (79.5) parajasti siis, kui tema sihivektor $\boldsymbol{k}\neq 0$ rahuldab tingimusi

$$\frac{k_1^2}{a^2}+\frac{k_2^2}{b^2}-\frac{k_3^2}{c^2}=0, \tag{81.3}$$

$$\frac{a_1k_1}{a^2}+\frac{a_2k_2}{b^2}-\frac{a_3k_3}{c^2}=0 \tag{81.4}$$

ja kehtib võrdus (81.2).

Tingimuse (81.3) tõttu $k_3\neq 0$. Kasutame asjaolu, et vektori $\boldsymbol{k}$ puhul on oluline vaid siht, ja nõuame seda arvestades, et oleks $k_3=c$. Võtame veel tarvitusele x_1x_2-tasandi vektorid

$$\boldsymbol{h}=\left(\frac{a_1}{a},\ \frac{a_2}{b},\ 0\right),\qquad \boldsymbol{e}=\left(\frac{k_1}{a},\ \frac{k_2}{b},\ 0\right);$$

eelduse järgi esimene neist on antud vektor, teine aga otsitav vektor, mille teadmine võimaldaks arvutada meid huvitava sihivektori $\boldsymbol{k}=(k_1,\ k_2,\ c)$ koordinaadid. Kirjutame (81.3), (81.4) ja (81.2) nende vektorite abil:

$$\boldsymbol{e}^2=1, \tag{81.3'}$$

$$\boldsymbol{eh}=\frac{a_3}{c}, \tag{81.4'}$$

$$\boldsymbol{h}^2-(\boldsymbol{eh})^2=1. \tag{81.2'}$$

Et $\boldsymbol{e}$ on (81.3′) põhjal ühikvektor, siis on tema määramiseks küllalt, kui leida nurk, mille ta moodustab x_1x_2-tasandil vektoriga $\boldsymbol{h}$. Ülesande tingimusi rahuldav nurk eksisteerib, sest (81.2′) tõttu kehtib võrratus

$$\boldsymbol{eh}<|\boldsymbol{h}|,$$

mistõttu võrrand

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{eh}}{|\boldsymbol{h}|},$$

kus $\varphi = \angle(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{h})$, on lahenduv. Võrdusest (81.4′) tuleneb, et lahendi $\angle(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{h})$ puhul

$$\cos\angle(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{h}) = \frac{a_3}{c|\boldsymbol{h}|},$$

mistõttu iga punkti A korral vahemikus $-\pi < \varphi < \pi$ leidub parajasti kaks ülesande tingimusi rahuldavat nurka. Järelikult leidub iga A jaoks kaks teineteisest erinevat sihti, mis on määratud vektoritega $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{k}'$, nii et sirged, mis läbivad punkti A ja on nende sihtidega, asetsevad pinnal. ∎

***Teoreem* 81.2.** *Ühekattelisel hüperboloidil asetsevate sirgete hulk koosneb kahest sirgjooneliste moodustajate parvest* (joon. 181).

Tõestus. Et $k_3 \neq 0$, siis lõikab iga hüperboloidil (79.5) asetsev sirge x_1x_2-tasandit, seega ka hüperboloidi kaelellipsit. Loemegi punkti A kaelellipsile kuuluvaks; sel korral

$$\frac{(a_1)^2}{a^2} + \frac{(a_2)^2}{b^2} = 1,$$

$$a_3 = 0.$$

Järelikult kehtib samaaegselt

$$\boldsymbol{e}^2 = \boldsymbol{h}^2 = 1, \qquad \boldsymbol{eh} = 0, \qquad k_3 = c,$$

s. t. $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{h} \circ \left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$ ehk

$$\frac{k_1}{a} = \mp\frac{a_2}{b}, \qquad \frac{k_2}{b} = \pm\frac{a_1}{a}, \qquad k_3 = c.$$

Iga sirge, mis asetseb hüperboloidil, läbib parajast üht punkti kaelellipsil. Kaelellipsi iga punkti $A(a_1, a_2, 0)$ läbib parajasti kaks sellist sirget; nende sirgete sihivektorid on

$$\boldsymbol{k} = \left(-\frac{a}{b}a_2, \ \frac{b}{a}a_1, \ c\right), \tag{81.5}$$

$$\boldsymbol{k}' = \left(\frac{a}{b}a_2, \ -\frac{b}{a}a_1, \ c\right). \tag{81.6}$$

Kõik hüperboolile kuuluvad sirged saab nüüd jagada kahte hulka: ühte kuuluvad sirged, millest igaühe sihivektoriks on valemiga (81.5) antud $\boldsymbol{k}$ mingi punkti A korral kaelellipsil, teised on $\boldsymbol{k}'$ väärtuste sihilised. Teoreemi 81.1 ja def. 81.1 järgi kumbki hulk on sirgjooneliste moodustajate parv. ∎

Et kaelellipsi punkt sõltub ühest parameetrist, siis def-is 81.1 antud nimetus «üheparameetriline parv» on tõesti õigustatud.

Edaspidi kõneleme lühidalt parvedest k ja k'.

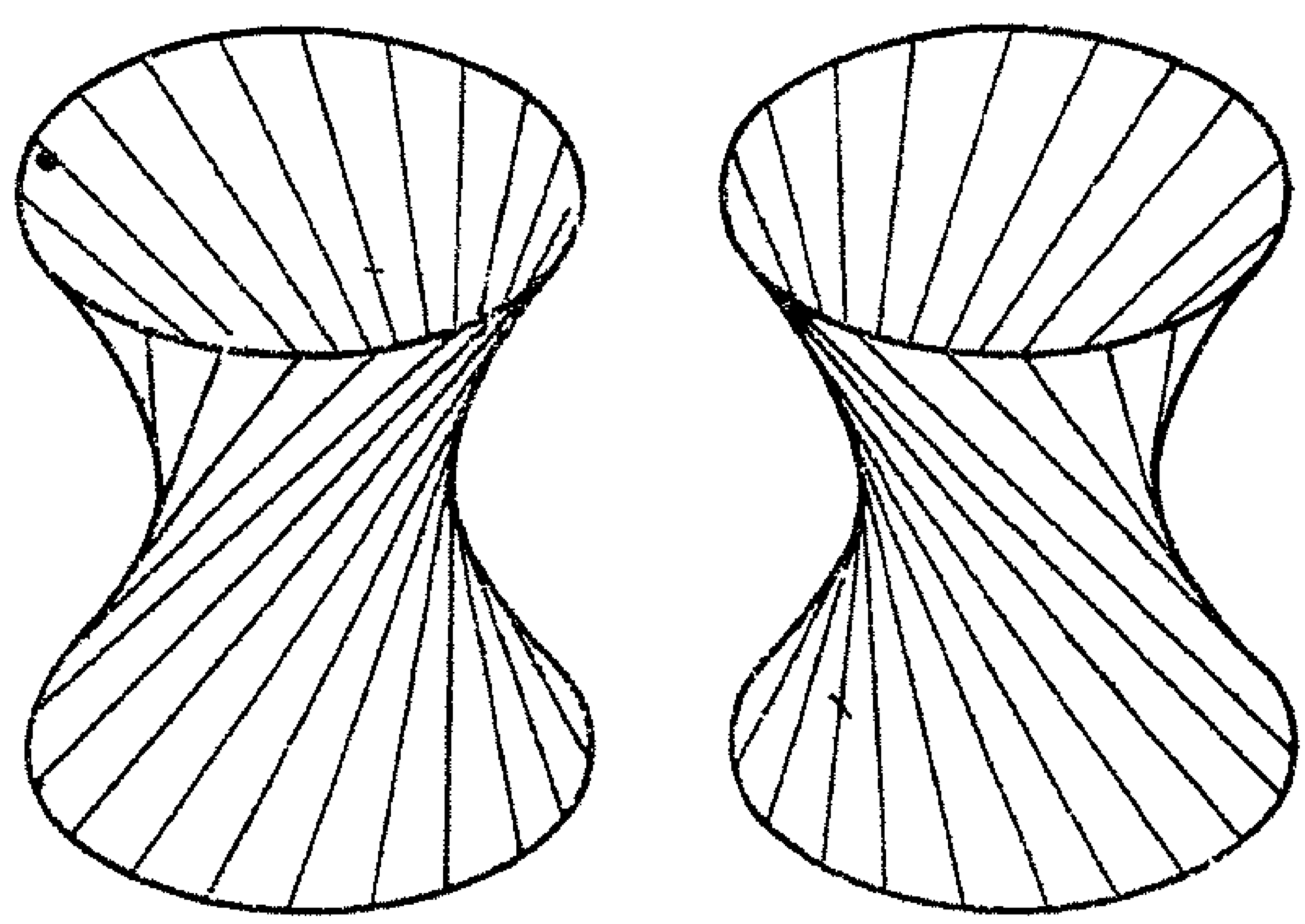
***Teoreem* 81.3.** *Iga kaks erinevat sirget, mis asetsevad ühekattelisel hüperboloidil ja kuuluvad ühte parve, on kiivad.*

T õ e s t u s. Vaatleme kaht sirget, mille määravad punktid $U(u_1, u_2, 0)$ ja $V(v_1, v_2, 0)$ ja mis kuuluvad ühte parve. Et

$$\begin{vmatrix} u_1-v_1 & u_2-v_2 & 0 \\ \mp\frac{a}{b}v_2 & \pm\frac{b}{a}v_1 & c \\ \mp\frac{a}{b}u_2 & \pm\frac{b}{a}u_1 & c \end{vmatrix} = \pm c\left[\frac{b}{a}(u_1-v_1)^2+\frac{a}{b}(u_2-v_2)^2\right]\neq 0,$$

sest erinevate sirgete korral on võrdused $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ samaaegselt lubamatud, siis vektor $\overrightarrow{VU}$ ei ole sirgete sihivektoritega komplanaarne ja sirged on seega tõesti kiivad. ∎

Definitsiooni 81.1 järgi saab teoreemide 81.1, 81.2 ja 81.3 tulemused sõnastada nüüd kokkuvõtlikult järgmise teoreemina.



Joon. 181.

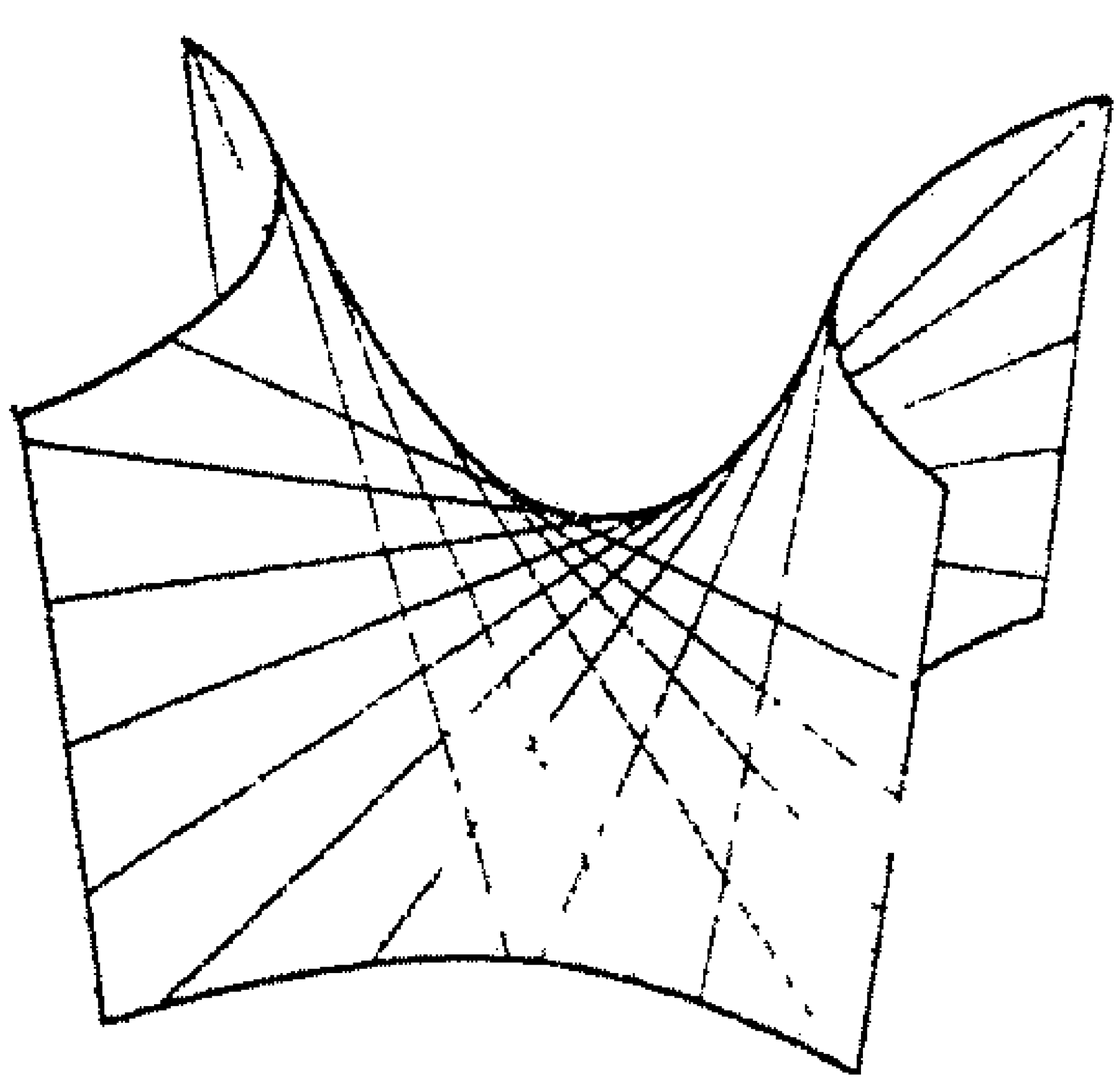
***Teoreem* 81.4.** *Ühekattelise hüperboloidi iga kaks sirgjoonelist moodustajat erinevatest parvedest asetsevad ühel tasandil ja on paralleelsed parajasti siis, kui nad läbivad kaelellipsi diameetri otspunkte.*

Sama võttega, millega tõestasime teoreemi 81.3, saab kergesti näidata ka selle teoreemi kehtivust.

Märgime vaid teoreemi lõpposa kohta, et $\boldsymbol{k}=\left(-\frac{a}{b}u_2, \frac{b}{a}u_1, c\right)$ ja $\boldsymbol{k}'=\left(\frac{a}{b}v_2, -\frac{b}{a}v_1, c\right)$ on kollineaarsed parajasti siis, kui $v_1=-u_1$ ja $v_2=-u_2$. Sellistel tingimustel sirge UV läbib kaelellipsi keskpunkti, s. t. on kaelellipsi diameeter.

***Teoreem* 81.5.** *Ühekattelise hüperboloidi sirgjooneliste moodustajate parves ei leidu kolme sirget, mis oleksid paralleelsed ühe tasandiga.*

Tõestus. Siin on vaja märkida üksnes, et kaelellipsi mingi kolme punktiga U, V ja W parves $\boldsymbol{k}$ määratud sirgete sihivektorid $\boldsymbol{k}_1=\left(-\frac{a}{b}u_2, \frac{b}{a}u_1, c\right)$, $\boldsymbol{k}_2=\left(-\frac{a}{b}v_2, \frac{b}{a}v_1, c\right)$, $\boldsymbol{k}_3=\left(-\frac{a}{b}w_2, \frac{b}{a}w_1, c\right)$ on, nagu kerge kontrollida, mittekomplanaarsed. Samal viisil saab väite tõestada parve k' korral.



Joon. 182.

Pöörame nüüd tähelepanu viimasele koonuselõikelisele pinnale, mis on sirgjooneliste moodustajate seisukohalt seni uurimata.

***Teoreem* 81.6.** *Hüperboolsel paraboloidil on kaks parve sirgjoonelisi moodustajaid* (joon. 182).

Tõestus. Läbigu sirge (81.1) hüperboolse paraboloidi (80.7) punkti $A(a_1, a_2, a_3)$. Teeme võrrandeist (81.1) asendused võrrandisse (80.7) ning lihtsustame tulemust, arvestades võrdust

$$\frac{(a_1)^2}{p}-\frac{(a_2)^2}{q}=2a_3. \tag{81.7}$$

Tekib seos

$$\left(\frac{k_1^2}{p}-\frac{k_2^2}{q}\right)t^2+2\left(\frac{a_1k_1}{p}-\frac{a_2k_2}{q}-k_3\right)t=0,$$

millest ilmneb, et sirge (81.1) on hüperboolsel paraboloidil (80.7) parajasti siis, kui

$$\frac{k_1^2}{p}-\frac{k_2^2}{q}=0, \tag{81.8}$$

$$\frac{a_1k_1}{p}-\frac{a_2k_2}{q}=k_3 \tag{81.9}$$

ja kehtib võrdus (81.7).

Võrrandist (81.8) tuleneb, et

$$k_2=\pm\sqrt{\frac{q}{p}}\,k_1,$$

mistõttu (81.9) põhjal

$$k_3=\left(\frac{a_1}{p}\mp\frac{a_2}{\sqrt{pq}}\right)k_1.$$

Seega tingimusi (81.8) ja (81.9) rahuldavad sihivektorid

$$\boldsymbol{k}=\left(\sqrt{p},\ \sqrt{q},\ \frac{a_1}{\sqrt{p}}-\frac{a_2}{\sqrt{q}}\right), \tag{81.10}$$

$$\boldsymbol{k}'=\left(\sqrt{p},\ -\sqrt{q},\ \frac{a_1}{\sqrt{p}}+\frac{a_2}{\sqrt{q}}\right). \tag{81.11}$$

Siit on selge, et ka hüperboolse paraboloidi iga punkti läbib parajasti kaks pinnale kuuluvat sirget.

Vektorite (81.10) ja (81.11) järgi jagunevad hüperboolsel paraboloidil asetsevad sirged kahte hulka: kõik sirged sihivektoritega $\boldsymbol{k}$ on paralleelsed tasandiga

$$\frac{x_1}{\sqrt{p}}-\frac{x_2}{\sqrt{q}}=0, \tag{81.12}$$

kõik sirged sihivektoritega $\boldsymbol{k}'$ aga paralleelsed tasandiga

$$\frac{x_1}{\sqrt{p}}+\frac{x_2}{\sqrt{q}}=0. \tag{81.13}$$

Läbi paraboloidi iga punkti läheb parajasti üks sirge kummastki hulgast. ∎

Teatavasti x_1x_2-tasand lõikab paraboloidi (81.4) mööda sirgeid (80.9):

$$\frac{x_1}{\sqrt{p}}-\frac{x_2}{\sqrt{q}}=0,\qquad x_3=0, \tag{81.14}$$

$$\frac{x_1}{\sqrt{p}}+\frac{x_2}{\sqrt{q}}=0,\qquad x_3=0. \tag{81.15}$$

Need sirged, nagu näha, kuuluvad erinevatesse parvedesse. Asja aga selgus, et kummagi sirge iga punkti läbib parajasti üks sirge teisest parvest. Et x_1x_2-tasandiga paralleelsed tasandid paraboloidile kuuluvaid sirgeid ei sisalda (lõigeteks on hüperboolid), siis peavad kõik paraboloidil asetsevad sirged lõikama kas sirget (81.14) või sirget (81.15). Punkt kummalgi neist sirgetest sõltub ühest parameetrist. Järelikult kumbki parv on tõepoolest üheparameetriline kooskõlas def-is 81.1 kasutatud nimetusega.

Tähistame neid parvi k ja k' vastavalt sellele, kas nende sirgete sihivektoriks on (81.10) või (81.11).

***Teoreem* 81.7.** *Hüperboolse paraboloidi iga kaks sirgjoonelist moodustajat erinevatest parvedest lõikuvad.*

Tõestus. Selliste moodustajate ortogonaalprojektsioonid x_1x_2-tasandil on vastavalt paralleelsed sirgetega (81.14) ja (81.15) ning seepärast lõikuvad. Sirge, mis on tõmmatud nende lõikepunktist paralleelselt x_3-teljega, peab lõikama mõlemat vaadeldavat moodustajat. Kuid võrrandist (80.7) nähtub, et selline sirge lõikab paraboloidi ainult ühes punktis. Siit järeldubki teoreemi väide. ∎

***Teoreem* 81.8.** *Hüperboolse paraboloidi iga kaks sirgjoonelist moodustajat ühest ja samast parvest on kiivsirged.*

Tõestus. Kuulugu sirged u ja v parve k. Nagu tõestatud, lõikavad nad sirget (81.15) erinevates punktides ja on paralleelsed tasandiga (81.12). Sirge (81.15) lõikab tasandit (81.12), seepärast u ja v asetsevad erinevatel paralleelsetel tasanditel. Kõik sirged parvest k' lõikavad sirgeid u ja v. Et hüperboolne paraboloid erineb tasandist, siis ei saa parv k' kuuluda ühele tasandile, mistõttu u ja v ei või olla paralleelsed. Niisiis on nad kiivsirged. Samale tulemusele on kerge jõuda ka sel juhul, kui u ja v kuuluvad parve k'. ∎

Pinda, millel on vähemalt üks parv sirgjoonelisi moodustajaid, saab sõna tõsises mõttes «moodustada» nende sirgete abil, nimelt vaadelda punktihulgana, mille kirjeldab parves vabalt liikuv sirge. See tõsiasi on vahetult selge koonuse ja silindrite korral, kuid nii on lugu ka ühekattelise hüperboloidi ja hüperboolse paraboloidiga.

Osutub, et ühekatteline hüperboloid on täielikult määratud oma kolme vabalt valitud sirgjoonelise moodustajaga u, v ja w, mis kuuluvad ühte parve. Tõepoolest, teoreemist 81.5 järeldub, et iga teisest parvest valitud moodustaja kas lõikab kõiki kolme sirget või on ühega neist paralleelne (s. o. lõikab seda ebapunktis). Järelikult saab sirgete hulga näol, mis lõikavad sirgeid u, v ja w (erijuhul üht neist ebapunktis), kätte kogu teise moodustajate parve, s. t. terve hüperboloidi.

Seejuures on kiivsirgeid u, v ja w lõikav sirge määratud üheselt, kui on antud punkt ühel neist sirgetest. Selle väite põhjendamiseks märgime, et igast punktist väljaspool kaht kiivsirget saab tõmmata parajasti ühe sirge, mis lõikab mõlemat kiivsirget (erijuhul üht neist ebapunktis). Sellise sirge tekitavad lõikudes tasandid, mille määravad kiivsirged ja vaadeldav punkt.

Saadud tulemus võimaldab vaadelda ühekattelist hüperboloidi punktihulgana, mille moodustab liikudes korraga kolme antud kiivsirget lõikav sirge[100].

Teoreemidest 81.6, 81.7 ja 81.8 järeldub, et ka hüperboolne paraboloid on täielikult määratud oma mistahes kolme ühte parve kuuluva sirgjoonelise moodustajaga. Seetõttu saab ka seda pinda moodustada liikuva sirge abil.[101]

82. Ringjoonelised moodustajad. Koonuselõikelisel pinnal võib peale sirgeparvede leiduda ka ringjoonte selliseid hulki, mille puhul pinna iga punkti läbib parajasti üks ringjoon vaadeldavast hulgast. Nii sisaldab iga pöördpind sellist tingimust rahuldavat ringjoonte hulka — selleks on paralleelide hulk. Sellistel puhkudel räägitakse ringjooneliste moodustajate parvest, mille definitsioon on niisiis järgmine.

***Def.* 82.1.** Koonuselõikelisel pinnal asetsevate ringjoonte hulka nimetatakse r i n g j o o n e l i s t e m o o d u s t a j a t e parveks, kui pinna iga punkti läbib parajasti üks ringjoon vaadeldavast hulgast.

Olgu ülesandeks leida kõigi art-tes 78, 79 ja 80 käsitletud pindade ringjooneliste moodustajate parved, kui need eksisteerivad.

Teeme esmalt mõned probleemi lahendamiskäiku lihtsustavad järeldused.

Nagu nähtub võrrandeist (79.2) kuni (79.7) ja (80.2) kuni (80.4), saab iga uuritava pinna võrrandi sobivalt valitud reeperi korral esitada kujul

$$Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2+Dx_3+E=0, \tag{82.1}$$

kus kordajate iseloom määrab pinna liigi. Nimetame siin ruutosaks vasaku poole ruutliikmete summat ja lineaarosaks ülejäänud liikmete summat.

Selleks et otsustada, kas pinna (82.1) lõige mingi tasandiga α on ringjoon, võib sooritada reeperi sellise pöörde, mille tagajärjel üks koordinaattasanditest, näiteks x_1x_2-tasand, läheb paralleelseks tasandiga α. Pinna võrrand (82.1) seejuures muutub, sest temasse tuleb teha asendused koordinaaditeisendusvalemitest (59.1), mis reeperi pöörde korral on mitte üksnes lineaarsed, vaid ka homogeensed, sest siis on $c_1=c_2=c_3=0$. Tehes pärast asendamist vajalikud tehted ja säilitades lihtsuse mõttes uute koordinaatide jaoks vanad tähised, s. t. jättes ära märgi $'$, saame mingi teise astme kolme muutujaga võrrandi

$$ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2+dx_1x_3+ex_2x_3+fx_3^2+gx_1+hx_2+ix_3+j=0.$$

[100] V peatüki tulemuste põhjal saab näidata, et iga kolm kiivsirget, mis ei ole paralleelsed ühe tasandiga, määravad sel viisil üheselt teatud ühekattelise hüperboloidi.

[101] Siin võib teha eelnevaga analoogilise märkuse. Erinevus ilmneb vaid selles, et kiivsirgetelt tuleb siin nõuda paralleelsust ühe tasandiga.

Et tasandi α võrrand pärast reeperi pööret on $x_3 = k$, siis tuleb lõike uurimisel vaadelda võrrandit

$$ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2+(dk+g)x_1+(ek+h)x_2+(fk^2+ik+j)=0, \qquad (82.2)$$

mis x_1x_2-tasandil esitab lõike ortogonaalprojektsiooni.

Nagu selgus art-s 68, on ringjoone võrrand saadud võrrandi (82.2) niisugune erijuht, mil $a = c \neq 0$, $b = 0$, kusjuures iga erijuht esitab ringjoone, kui ringjoonte hulka arvata ka kidunud ringjooned, s. t. punktid, ja imaginaarsed ringjooned, s. t. tühjad punktihulgad. Seda erijuhtu iseloomustavad tingimused, nagu näha, puudutavad ainult ruutosa kordajaid. Seetõttu on võrrandiga (82.2) seoses oluline tähele panna kaht järgmist asjaolu: 1) selle võrrandi ruutosa ei sõltu konstandist k, 2) selle võrrandi saamisel võrrandist (82.1) teiseneb ruutosa lineaarosast täiesti sõltumatult.

Siit saab teha järgmised järeldused.

***Teoreem* 82.1.** *Kui koonuselõikelise pinna lõige mingi tasandiga on ringjoon, siis on ringjooned ka pinna kõik lõiked selle tasandiga paralleelsete tasanditega.*

***Teoreem* 82.2.** *Kui koonuselõikelise pinna lõige mingi tasandiga on ringjoon, siis on see nii sõltumatult selle pinna võrrandi lineaarosast.*

Teoreemist 82.1 tuleneb, et pinna (82.1) ringjooneliste lõigete olemasolu selgitamisel võib piirduda iga rihi puhul ainult ühe tasandiga, millel on see riht, näiteks sellisega, mis läbib reeperi alguspunkti.

Teoreemi 82.2 põhjal hüperboolsel paraboloidil (80.4) ei ole ringjoonelisi lõikeid, sest neid ei ole võrrandiga

$$\frac{x_1^2}{p} - \frac{x_2^2}{q} = 0$$

esitatud pinnal (mis koosneb kahest lõikuvast tasandist).

On selge, et ringjoonelised lõiked puuduvad ka hüperboolsel ja paraboolsel silindril (80.2) ja (80.3). Tõepoolest, nende pindade lõiked x_3-teljega paralleelsete tasanditega projekteeruvad x_1x_2-tasandile punktiks või punktide paariks, lõiked ülejäänud tasanditega aga lahtisteks joonteks.

Niisiis on tõene selline lause.

***Teoreem* 82.3.** *Koonuselõikelised pinnad, mis ei ole koonuselõikeliste pöördpindade afiinsed kujutised, ei saa sisaldada ringjoonelisi moodustajaid.*

Seega tuleb edaspidi uurida vaid kuut tüüpi pindu (79.2) kuni (79.7), millede hulka erijuhtudena kuuluvad ka kõik koonuselõikelised pöördpinnad (78.4) kuni (78.9). Osutub aga, et uuritavate pindade hulka saab veelgi kitsendada, sest teoreemist 82.2 järeldub, et koonuselõikeliste pindade ringjooneliste lõigete uurimisel võib piirduda ainult pindadega (79.2), (79.4) ja (79.5). Iga ülejäänud pinna võrrandi ruutosa ühtib nimelt ühega mainitud kolme pinna võrrandite ruutosadest.

Esitame need kolm pinda ühise võrrandiga

$$Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2=1, \qquad (82.3)$$

milles $A>0$, $B>0$ ja C on mistahes reaalarv. Viimase kordaja C omadus määrab pinna tüübi:

$C>0$ — ellipsoid,
$C<0$ — ühekatteline hüperboloid,
$C=0$ — elliptiline silinder.

Üldisust kahandamata võib esimesel juhul lugeda, et $A\leqslant B\leqslant C$, teisel ning kolmandal juhul aga võtta, et $A\geqslant B$ (sisuliselt tähendab see reeperi vektorite sobivat järjestamist). Triviaalse juhu $A=B=C$ jätame vaatlusest kõrvale, sest sfääri iga lõige tasandiga on ringjoon. Niisiis loeme, et lisaks kehtib vähemalt üks tingimustest $A\neq B$, $B\neq C$. Ühekattelise hüperboloidi uurimisel saadud tulemused kanduvad, nagu selgus, üle ka kahekattelise hüperboloidi ja teist järku koonuse juhule.

Teoreemi 82.1 järeldust arvestades vaatleme vaid reeperi alguspunkti läbivaid tasandeid. Olgu α selline tasand ja lõigaku ta pinda (82.3) mööda ringjoont, mille raadius on R. Võrrandist (82.3) nähtub, et selle ringjoone keskpunktiks on reeperi alguspunkt O. Ringjoone kõik punktid asetsevad siis nii pinnal (83.3) kui sfääril võrrandiga

$$\frac{x_1^2}{R^2}+\frac{x_2^2}{R^2}+\frac{x_3^2}{R^2}=1, \qquad (82.4)$$

aga siis ka pinnal, mille võrrand on

$$\left(A-\frac{1}{R^2}\right)x_1^2+\left(B-\frac{1}{R^2}\right)x_2^2+\left(C-\frac{1}{R^2}\right)x_3^2=0. \qquad (82.5)$$

See viimane võrrand on saadud võrrandite (82.3) ja (82.4) poolte lahutamisel. Temaga määratud punktihulk sisaldab punkti O ja koos iga oma punktiga $X(x_1, x_2, x_3)$ ka punkti $X'(tx_1, tx_2, tx_3)$, seejuures t iga väärtuse korral, niisiis kogu sirge OX. Silmas pidades selle punktihulga niisugust omadust, nimetame teda tinglikult koonuseks Γ.

Et koonus Γ sisaldab lõikeringjoone ja ka selle keskpunkti O, mis on talle tipuks, siis peab talle kuuluma kogu tasand α. Järelikult Γ sisaldab ka tasandi α lõiked koordinaattasanditega (erijuhul võib α ise olla koordinaattasand, mis sel juhul asetseb koonusel Γ). Seega peavad Γ lõiked koordinaattasanditega

$$\begin{cases} \left(A-\frac{1}{R^2}\right)x_1^2+\left(B-\frac{1}{R^2}\right)x_2^2=0, \\ x_3=0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \left(A-\frac{1}{R^2}\right)x_1^2+\left(C-\frac{1}{R^2}\right)x_3^2=0, \\ x_2=0, \end{cases} \tag{82.6}$$
$$\begin{cases} \left(B-\frac{1}{R^2}\right)x_2^2+\left(C-\frac{1}{R^2}\right)x_3^2, \\ x_1=0 \end{cases}$$

sisaldama vähemalt sirgeid (erijuhul mõni neist koguni tasandit). Siit ilmneb, et vähemalt üks võrrandi (82.5) kordajatest peab võrduma nulliga. Tõepoolest, vastupidisel juhul peaks vähemalt kaks neist kordajaist olema samamärgilised ja (82.6) põhjal koosneks koonuse Γ lõige vähemalt ühe koordinaattasandiga ainult punktist O.

Võrrandi (82.3) kordajate kohta tehtud kokkulepete põhjal

$$A-\frac{1}{R^2}\leqslant B-\frac{1}{R^2}\leqslant C-\frac{1}{R^2}$$

või

$$A-\frac{1}{R^2}\geqslant B-\frac{1}{R^2}\geqslant C-\frac{1}{R^2}.$$

Kui oleks $B-\frac{1}{R^2}\neq 0$, siis peaks nendes võrratustes üks äärmistest liikmetest olema null, mistõttu ülejäänud kaks osutuksid samamärgilisteks. Et see on vastuolus süsteemide (82.6) kohta eespool tehtud järeldustega, siis $B-\frac{1}{R^2}=0$. Seega koonust Γ esitab võrrand

$$\left(A-\frac{1}{R^2}\right)x_1^2+\left(C-\frac{1}{R^2}\right)x_3^2=0$$

ehk

$$(A-B)x_1^2+(C-B)x_3^2=0, \tag{82.7}$$

millest nähtub, et Γ koosneb kahest tasandist. Kui $A\neq B$, saab need tasandid esitada võrrandite paariga

$$x_1=\pm\sqrt{\frac{B-C}{A-B}}\,x_3, \tag{82.8}$$

juhul $B\neq C$ aga võrrandite paariga

$$x_3 = \pm \sqrt{\frac{A-B}{B-C}}\, x_1, \qquad (82.8')$$

juhul $A \neq B \neq C$ ükskõik kumba paariga.

Kõigil juhtudel on juuritavad avaldised positiivsed.

Esitatud arutlustest järeldub kokkuvõttes, et kui reeperi alguspunkti läbiv tasand lõikab pinda (82.3) mööda ringjoont, siis peab ta olema üks kahest tasandist (82.8) (või (82.8′)).

Osutub, et tasandid (82.8) (või (82.8′)) tõepoolest lõikavad pinda (82.3) mööda ringjooni. Selles veendumiseks on küllalt, kui tähele panna, et võrranditest (82.3), (82.4) (kus $\frac{1}{R^2} = B$) ja (82.7) on igaüks ülejäänud kahe järeldus (näiteks esimene tekib kahe teise poolte liitmisel jne.). Siit on selge, et koonuse (82.7), s. t. tasandite paari (82.8) (või (82.8′)) lõige pinnaga (82.3) ühtib sellesama tasandite paari ja sfääri (82.4) (kus $\frac{1}{R^2} = B$) lõikega, seega koosneb ringjoonte paarist

Kui $A = B$, siis tasandid (82.8′) ühtivad x_1x_2-tasandiga ja tekib ainult üks lõikeringjoon; pind (82.3) ise osutub sel puhul pöördpinnaks, mille teljeks on x_3-telg. Analoogiline on olukord juhul, kui $B = C$. Kui aga samaaegselt $A \neq B$ ja $B \neq C$, siis asetsevad tasandid (82.8) sümmeetriliselt x_2x_3-tasandi suhtes ja (82.3) on üldine koonuselõikeline pind (mitte pöördpind).

Uurimise tulemused on kokkuvõetavad kahe teoreemina.

***Teoreem* 82.4.** *Igal koonuselõikelisel pöördpinnal on parajasti üks ringjooneliste moodustajate parv.*

***Teoreem* 82.5.** *Igal koonuselõikelise pöördpinna afiinsel kujutisel leidub parajasti kaks parve ringjoonelisi moodustajaid. Ellipsoidil on mõlema parve ringjoonte tasandid paralleelsed keskteljega, hüperboloididel suurema põikteljega, elliptilisel silindril ja paraboloidil aga teljega risti lõikamisel saadud ellipsi suurteljega. Kõigil juhtudel parvede ringjoonte tasandid on sümmeetrilised pinna sümmeetriatasandi suhtes, mis läbib nimetatud telge.*

Pöördpinna ringjooneliste moodustajate keskpunktid asetsevad muidugi pöörlemisteljel. Selgitame nende keskpunktide hulga ehituse üldjuhul, kui võrranditega (79.2) kuni (79.7) esitatud pinnad ei ole pöördpinnad.

Nagu eespool ilmnes, on kõik ringjoonelised moodustajad sel puhul paralleelsed x_2-teljega, seega risti x_1x_3-tasandiga Et viimane on vaadeldavate pindade sümmeetriatasand, siis kuuluvad talle kõigi ringjooneliste moodustajate keskpunktid. Viimased on ühtlasi keskpunktid paralleelsetele lõikudele, mis on saadud parvede ringjoontest nende ortogonaalprojekteerimisel x_1x_3-tasandile. Seega on tegemist pinna ja x_1x_3-tasandi lõikejoone paralleelsete kõõlude keskpunktidega. Kui jätta kõrvale koonus ja elliptiline silinder, siis saame pinna lõikamisel x_1x_3-tasandiga koonuselõike. Kõigi ringjooneliste moodustajate keskpunktid asetsevad järelikult selle koonuselõike kahel diameetril.

***Def.* 82.2.** Punkte, milles koonuselõikelist pinda lõikavad tema ringjooneliste moodustajate keskpunkte sisaldavad sirged, nimetatakse selle pinna ü m a r u s p u n k t i d e k s.

Eelnevast järeldub, et «kolmeteljelisel» ellipsoidil ja kahekattelisel hüperboloidil on kummalgi neli ja elliptilisel paraboloidil kaks ümaruspunkti, ühekattelisel hüperboloidil aga ümaruspunkte ei ole. Pöördellipsoidil ja samuti kahekattelisel pöördhüperboloidil on ümaruspunkte kaks, pöördparaboloidil aga ainult üks.

V peatükk

TEIST JÄRKU JOONED JA PINNAD

§ 16. ALGEBRALISED JOONED JA PINNAD

Sirgete ja tasandite ning lihtsamate kõverjoonte ja -pindade uurimisel selgus, et kõiki neid saab tasandil või ruumis antud reeperi suhtes esitada teatavate võrranditega. Näiteks sirgeteks tasandil ja tasanditeks ruumis on parajasti nende punktide hulgad, mille koordinaadid rahuldavad üht lineaarset võrrandit, samal ajal kui igaüks eelmises peatükis uuritud joontest ja pindadest koosneb punktidest, mille koordinaadid rahuldavad teatavat teise astme võrrandit. Selgub niisiis, et võrrandi astme kasvamine ühe võrra toob endaga kaasa suure mitmekesisuse. Tekib huvitav küsimus: mida üldse on võimeline esitama teise astme võrrand, kui teda tõlgendada mingi tasandil või ruumis valitud reeperi suhtes. Vastuse sellele küsimusele annab käesolev peatükk, mille kõige üldisemad mõisted ja tulemused — kogu järgneva käsitluse alus — moodustavad algava paragrahvi sisu.

83. **Algebralise joone või pinna mõiste ja järk.** Olgu tasandil või ruumis valitud teatav afiinne reeper $\{O; e_1, \ldots, e_n\}$. Vabalt muutuva punkti X korral selle koordinaadid $(x_1, \ldots, x_n)$ moodustavad kahe või kolme reaalarvulise muutuja süsteemi.

Muutujatest $x_1, \ldots, x_n$ koostatud monoomiks[102] ehk algebraliseks üksliikmeks nimetatakse iga avaldist kujuga

$$ax_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n},$$

kus a on konstantne reaalarv, mida nimetatakse kordajaks, astendajad $k_1, \ldots, k_n$ on aga mittenegatiivsed täisarvud. Seejuures summat $k_1 + \ldots + k_n$ nimetatakse selle üksliikme astmeks. Kui aste on 0, s. t. kui $k_1 = \ldots = k_n = 0$, siis üksliige on lihtsalt konstant a ning teda nimetatakse vabaliikmeks.

Samadest muutujatest $x_1, \ldots, x_n$ koostatud lõpliku arvu

[102] kr k μονοζ — üks, νομοζ — osa, liige.

monoomide summat nimetatakse polünoomiks [103] ehk algebraliseks hulkliikmeks. Suurimat nullist erinevate kordajatega monoomide astmete seas nimetatakse polünoomi astmeks. Iga 0-astme polünoom on seega mingi konstant a. Kui polünoomis pole nullist erineva kordajaga üksliiget, siis loetakse, et ta on 0 ning tema aste jääb määramatuks. Kui kõik polünoomi koostavad üksliikmed on sama astmega m, siis polünoomi nimetatakse homogeenseks ehk m-astme vormiks muutujatest $x_1, \ldots, x_n$. Juhul $m = 1$ kõneldakse ka lineaarvormist (selliseks on näiteks reeperi alguspunkti läbiva tasandi võrrandi vasak pool), juhul $m = 2$ aga ruutvormist. On selge, et iga m-astme polünoomi saab üksliikmete sobiva ümberpaigutamisega esitada 1-, 2-, ..., m-astme vormide summana. Tuleb vaid ühte koguda kõik sama astme üksliikmed selles polünoomis.

Võrrandit

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

kus vasakul on m-astme polünoom muutujatest $x_1, \ldots, x_n$, nimetatakse m-astme algebraliseks võrrandiks nendest muutujatest. Juhul $m = 1$ kõneldakse ka lineaarvõrrandist, juhul $m = 2$ aga ruutvõrrandist.

***Def.* 83.1.** Tasandi või ruumi kõigi selliste punktide hulka, mille koordinaadid antud reeperi suhtes rahuldavad vastavalt kas kahe või kolme muutujaga algebralist võrrandit, nimetatakse vastavalt algebraliseks jooneks tasandil või algebraliseks pinnaks ruumis. Võrrandit nimetatakse selle joone või pinna võrrandiks.

Algebraliste joonte näideteks tasandil on niisiis sirge, ringjoon, ellips, hüperbool, parabool. Algebraliste pindade näideteks on kõik eespool uuritud pinnad. Arusaadavalt on need üpris spetsiaalsed näited — nende joonte või pindade võrrandid, mis on eespool leitud, on kõik kas lineaar- või ruutvõrrandid, samal ajal kui algebralise joone või pinna võrrandi astmeks võib olla mistahes naturaalarv m.

Tuleb rõhutada, et antud algebraline võrrand määrab algebralise joone või pinna ainult antud reeperi suhtes. Joonest või pinnast kui kindlast punktihulgast saab rääkida vaid siis, kui koos võrrandiga on antud ka reeper. Viimase valik tasandil või ruumis on aga küllalt vaba. Tekib küsimus, kuidas on omavahel seotud võrrandid, mis määravad sama joone või pinna, kuid erinevate reeperite suhtes. Vastuse leidmiseks tuleb meenutada, kuidas on omavahel seotud sama punkti X koordinaadid $x_1, \ldots, x_n$

[103] kr. k. πολυ — palju.

ja $x'_1, \ldots, x'_n$ eri reeperite $\{O; e_1, \ldots, e_n\}$ ja $\{O'; e'_1, \ldots, e'_n\}$ suhtes. Need seosed — koordinaatide teisendusvalemid — on leitud art-s 17 (vt. (17.10)):

$$\begin{gathered} x_1 = c_{11}x'_1 + \ldots + c_{1n}x'_n + c_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}x'_1 + \ldots + c_{nn}x'_n + c_n. \end{gathered} \tag{83.1}$$

Seejuures $\det|c_{ij}| \neq 0$, mistõttu siit võib avaldada koordinaadid x'_i ning saada tulemusena (17.9) analoogilised seosed.

Kui nüüd tasandil reeperi $\{O; e_1, e_2\}$ suhtes on antud algebraline joon võrrandiga

$$F(x_1, x_2) = 0, \tag{83.2}$$

siis selle joone iga punkti koordinaadid teise reeperi $\{O'; e'_1, e'_2\}$ suhtes rahuldavad võrrandit

$$F(c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + c_1, \quad c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + c_2) = 0, \tag{83.3}$$

mis saadakse x_1 ja x_2 asendamisel seostest (83.1) esialgsesse võrrandisse. Järelikult võrrand (83.3) määrab sama joone, aga teise reeperi suhtes.

Seejuures võrrandid (83.2) ja (83.3) on alati sama astmega. Tõepoolest, polünoomi $F(x_1, x_2)$ iga üksliige $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}$ annab pärast asendust avaldise

$$a(c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + c_1)^{k_1}(c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + c_2)^{k_2},$$

millest astendamise, sulgude avamise ja sarnaste liikmete koondamise järel tekib teatav polünoom muutujatest x'_1, x'_2, kusjuures selle polünoomi aste ei saa olla suurem kui vaadeldava üksliikme aste $k_1 + k_2$. Järelikult üleminekul ühelt reeperilt teisele joone võrrandi aste ei saa kasvada. Ta ei saa aga ka kahaneda, sest kui ta kahaneks, siis vastupidisel üleminekul teiselt reeperilt esimesele, mil tulemuseks on uuesti esialgne võrrand, peaks aste kasvama, mis eespool öeldu põhjal on võimatu.

Ruumis antud algebralise pinna korral on arutlused täiesti analoogilised.

Def. **83.2.** Algebralise joone või pinna võrrandi astet (mis, nagu selgus, ei sõltu reeperi valikust, mille suhtes võrrand on antud), nimetatakse selle joone või pinna j ä r g u k s.

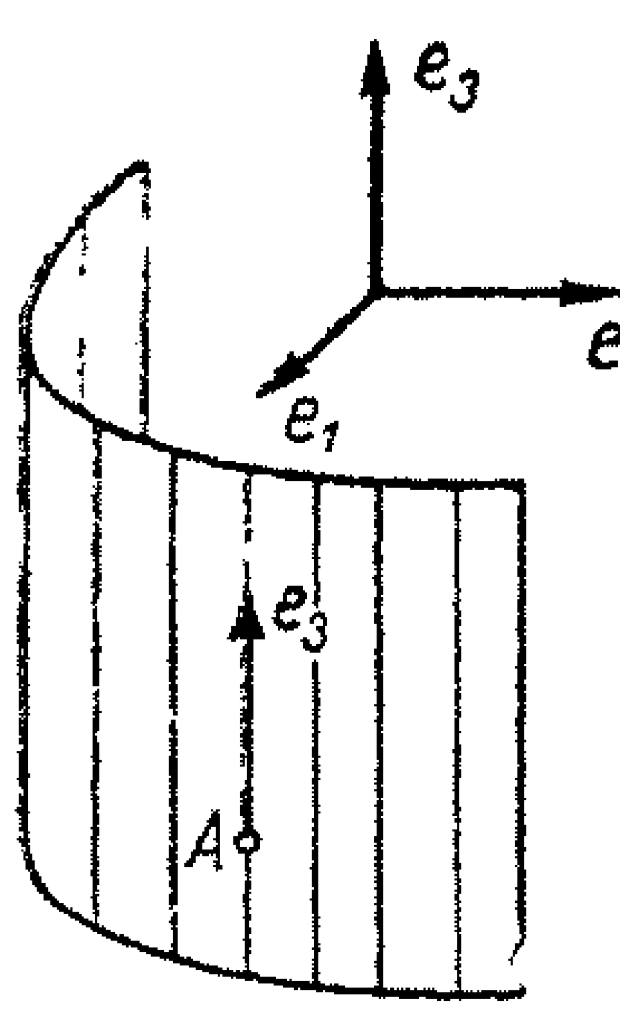
Seega sirge tasandil ja tasand ruumis on vastavalt esimest järku joon ja pind, kusjuures teisi seda järku jooni ja pindu enam pole. Eelmises peatükis uuritud jooned ja pinnad on teist järku, kuid on veel teadmata, kas nendega on ammendatud kõik teist järku jooned ja pinnad.

84. Silindrilised ja koonilised pinnad. Lisaks algebraliste pindade liigitamisele astmete järgi võib mõningad eri tüüpi pinnad välja eraldada ka astmest sõltumatult võrrandi teatavate eriomaduste järgi.

***Def.* 84.1.** Algebralist pinda nimetatakse *silindriliseks*, kui leidub reeper, mille suhtes pinna võrrand ei sisalda üht muutujatest x_1, x_2, x_3, näiteks on kujuga

$$F(x_1, x_2) = 0, \tag{84.1}$$

s. t. ei sisalda muutujat x_3.



Joon. 183.

Algebralist joont, mille sama võrrand määrab x_1x_2-tasandil, nimetatakse sel puhul silindrilise pinna juhtjooneks.

Silindrilise pinna geomeetrilise iseloomustuse annab järgmine teoreem.

***Teoreem* 84.1.** *Algebraline pind on silindriline parajasti siis, kui ta koos oma iga punktiga sisaldab ka sirge, mis läbib seda punkti ja on paralleelne ühe antud sirgega* (joon. 183).

Tõestus. Silindrilisel pinnal on tõesti see omadus. Kui pinna võrrand mingi reeperi suhtes on (84.1), siis pind sisaldab koos iga oma punktiga $A(a_1, a_2, a_3)$ ka seda punkti vektori $e_3 = (0, 0, 1)$ sihis läbiva sirge, sest viimase parameetrilised võrrandid on $x_1 = a_1 + t \cdot 0$, $x_2 = a_2 + t \cdot 0$, $x_3 = a_3 + t \cdot 1$ ning sirge suvalise punkti $(a_1, a_2, a_3 + t)$ koordinaatide asendamisel võrrandisse (84.1) tekib võrdus $F(a_1, a_2) = 0$, mis on rahuldatud, sest A asub pinnal.

Vastupidi, olgu algebralisel pinnal teoreemis kirjeldatud omadus. Reeperi võib valida nii, et antud sirge on x_3-teljeks. Olgu sel korral pinna võrrand $F(x_1, x_2, x_3) = 0$. Kui selle vasakul pool korjata sulgudesse üksliikmed, mis sisaldavad muutujat x_3, ning seejärel võtta sulgudest välja x_3 suurim aste x_3^k, mida nad kõik sisaldavad, siis tekib võrdus

$$F(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2, x_3)\, x_3^k,$$

kus $k \geqslant 1$. Osutub, et siin peab olema $g(x_1, x_2, x_3) = 0$. Nimelt polünoom $g(x_1, x_2, x_3)$, kui ta ei oleks 0, peaks oma konstruktsiooni kohaselt sisaldama nullist erineva kordajaga üksliikme $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}$ ilma muutujata x_3 (vastupidisel juhul x_3^k poleks olnud x_3 suurim aste, mida saab sulgudest välja tuua) ning järelikult võrrand $F(a_1, a_2, x_3) = 0$ ehk

$$f(a_1, a_2) + g(a_1, a_2, x_3)\, x_3^k = 0,$$

kus $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, oleks vähemalt k-astme võrrand muutujast x_3. Sellisel võrrandil on ainult lõplik arv lahendeid. Samal ajal on teada, et pinnal on koos mingile ühele lahendile a_3 vastava punktiga $A(a_1, a_2, a_3)$ ka sirge $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $x_3 = a_3 + t$ ning seega $F(a_1, a_2, a_3 + t) = 0$ on samasus t suhtes, s. t. võrrandil $F(a_1, a_2, x_3) = 0$ on lõpmata palju lahendeid. Tekkiva vastuolu tõttu ongi

$$F(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2)$$

ja pind on silindriline. ∎

Silindriline pind koosneb seega omavahel paralleelsetest (s. t. antud sihiga) sirgetest. Viimaseid nimetatakse silindrilise pinna moodustajateks. Juhtjoone iga punkti läbib parajasti üks selline. Seetõttu räägitakse sageli ka juhtjoonele antud sihis ehitatud silindrilisest pinnast. Eespool oleme tutvunud teatavate teist järku silindriliste pindadega — koonuselõikeliste silindritega (vt def. 80.3).

Silindriliste pindadega mõnevõrra analoogilised on koonilised pinnad.

***Def.* 84.2.** Algebralist pinda nimetatakse kooniliseks, kui leidub reeper, mille suhtes pinna võrrandi $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ vasak pool $F(x_1, x_2, x_3)$ on homogeenne polünoom.

Kui viimase aste on m, s. t. kui ta on m-astme vorm, siis tal on järgmine teda täielikult iseloomustav omadus:

$$F(tx_1, tx_2, tx_3) = t^m F(x_1, x_2, x_3), \tag{84.2}$$

kus t on vabalt võetav reaalarv. Kui siin võtta $t = x_3^{-1}$ ning seejärel korrutada võrduse pooli astmega x_3^m, on tulemuseks

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3^m F(x_3^{-1}x_1, x_3^{-1}x_2, 1)$$

ehk

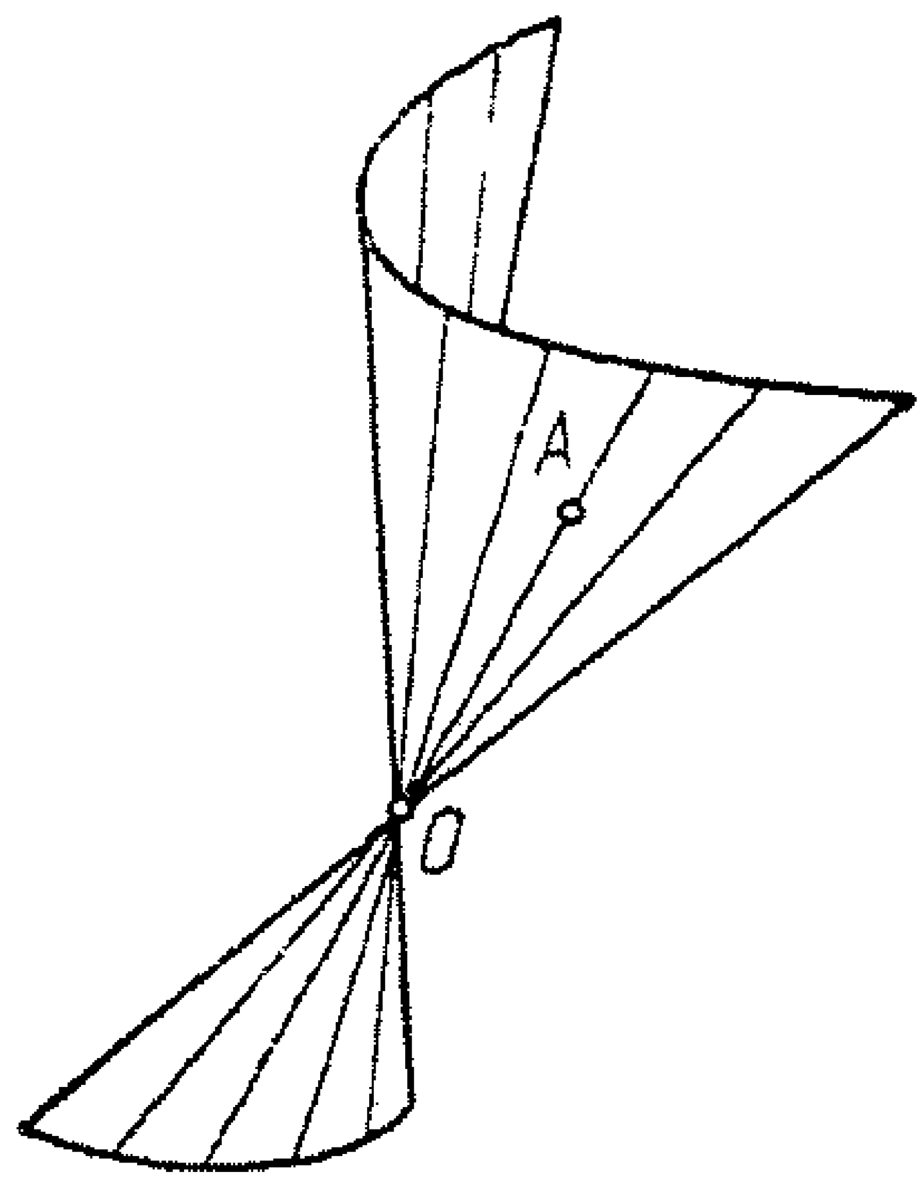
$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3^m f(\xi_1, \xi_2), \tag{84.3}$$

kus $\xi_1 = x_3^{-1}x_1$, $\xi_2 = x_3^{-1}x_2$ ja $f(\xi_1, \xi_2) = F(\xi_1, \xi_2, 1)$. Järelikult koonilise pinna punktideks omadusega $x_3 \neq 0$ on parajasti need punktid, mille koordinaatide suhted $\xi_1 = \frac{x_1}{x_3}$, $\xi_2 = \frac{x_2}{x_3}$ muudavad nulliks teatava hulkliikme kahe muutujaga ξ_1 ja ξ_2.

Seda analoogiat silindriliste pindadega süvendab veelgi järgmine teoreem.

Teoreem 84.2. *Kui algebraline pind on kooniline, siis ta sisaldab koos iga oma punktiga ka sirge, mis läbib seda punkti ja üht fikseeritud punkti* (joon. 184).

Tõestus. Esitagu koonilist pinda võrrand $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, mille vasak pool rahuldagu tingimust (84.2). Siis kõnesolevaks



Joon. 184.

fikseeritud punktiks on reeperi alguspunkt $O(0, 0, 0)$, sest pinna iga punkti $A(a_1, a_2, a_3)$ korral sirge AO koosneb punktidest $X(ta_1, ta_2, ta_3)$, mille koordinaadid rahuldavad tõesti pinna võrrandit, sest (84.2) põhjal

$$F(ta_1, ta_2, ta_3) = t^m F(a_1, a_2, a_3)$$

ja $F(a_1, a_2, a_3) = 0$. ∎

Kooniline pind koosneb seega üht punkti läbivatest sirgetest. Viimaseid nimetatakse koonilise pinna **moodustajateks**, nende ühist punkti **tipuks**.

Võrdusest (84.3), mis on rahuldatud koonilise pinna võrrandi $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ puhul, selgub, et kõige lihtsam on määrata koonilise pinna neid punkte, mille korral $x_3 = 1$: nende koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$f(x_1, x_2) = 0 \tag{84.4}$$

ning moodustavad seega teatava algebralise joone tasandil $x_3 = 1$. Kui selle joone võrrand on antud, siis vaadeldava koonilise pinna kõigi nende punktide koordinaadid, mille korral $x_3 \neq 0$, rahuldavad võrrandit

$$f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = 0. \tag{84.5}$$

Kui koonilisel pinnal ei ole x_1x_2-tasandil (võrrand : $x_3 = 0$) asuvaid moodustajaid, siis võrrand (84.4), ehk teisiti öeldes, võrrandiga (84.4) antud algebraline joon tasandil $x_3 = 1$ määrab täielikult selle koonilise pinna tipuga O. Mainitud joont nimetatakse sel korral koonilise pinna juhtjooneks tasandil $x_3 = 1$. Tal on koonilise pinna iga moodustajaga parajasti üks ühine punkt ning pind koosneb seega sirgetest, mis ühendavad tema punkte tipuga.

Antud koonilisel pinnal võib aga leiduda moodustajaid, mis asuvad tasandil $x_3 = 0$. Sel korral joon võrrandiga (84.4) tasandil $x_3 = 1$ ei ole võimeline määrama koonilist pinda täielikult — ta ei määra mainitud moodustajaid — ning sel korral teda juhtjooneks ei nimetata. Mõnikord võib niisugusel juhul juhtjoone siiski saada, kui eelnevalt nummerdada ümber koordinaadid.

Hea näide on pöördkoonus, mis tekib reeperi alguspunkti läbiva sirge pöörlemisel x_2-telje ümber. Niisuguse pöördkoonuse võrrand erineb võrrandist (71.3) selle poolest, et vahetunud on koordinaatide x_2 ja x_3 osad, seega tegemist on nüüd võrrandiga

$$x_1^2+x_3^2-x_2^2\tan^2\alpha=0. \qquad (84.6)$$

Sellel koonilisel pinnal on moodustajaid tasandil $x_3=0$. Nendeks on võrrandiga

$$x_1^2-x_2^2\tan^2\alpha=0$$

ehk

$$(x_1+x_2\tan\alpha)(x_1-x_2\tan\alpha)=0$$

määratud sirged: $x_1+x_2\tan\alpha=0$, $x_1-x_2\tan\alpha=0$. Järelikult pinna lõige tasandiga $x_3=1$ (selleks on praegu hüperbool võrranditega

$$x_2^2\tan^2\alpha-x_1^2=1, \qquad x_3=1)$$

ei ole juhtjoon. Kui aga võrrand (84.6) viia koordinaatide ümbernummerdamisega tagasi kujju (71.3), siis selle kuju puhul lõige tasandiga $x_3=1$ on juhtjoon — ta osutub pöörleva sirge punkti poolt kirjeldavaks ringjooneks. Märgime, et analoogiline on olukord ka teist järku koonuse (79.3) puhul.

Pärast neid selgitusi võib teatud lisaeeldusel tõestada ka teoreemile 84.2 vastupidise väite.

***Teoreem* 84.3.** *Kui algebraline pind sisaldab koos iga oma punktiga ka sirge, mis ühendab seda punkti ühe fikseeritud punktiga, ning leidub tasand, millel on iga niisuguse sirgega parajasti üks ühine punkt, siis see pind on kooniline pind.*

Tõestus. Reeperi võib valida nii, et alguspunktiks O on fikseeritud punkt, ja tasand, millest on juttu teoreemis, on tasandiks $x_3=1$. Algebralise pinna lõige tasandiga $x_3=1$ on algebraline joon, mis on sellel tasandil esitatav teatava võrrandiga

$$f(x_1, x_2)=0, \qquad (84.7)$$

kus $f(x_1, x_2)$ on m-astme polünoom. Läbi selle joone iga punkti $A(\xi_1, \xi_2, 1)$ läheb esimese eelduse kohaselt pinnale kuuluv sirge AO, mille võrranditeks on

$$x_1=\xi_1 t, \qquad x_2=\xi_2 t, \qquad x_3=t.$$

Seejuures pinna iga punkt asub teise eelduse järgi ühel sellistest sirgetest. Järelikult pind koosneb parajasti nendest punktidest $X(x_1, x_2, x_3)$, mille koordinaatide puhul jagatised

$$\frac{x_1}{x_3}=\xi_1, \qquad \frac{x_2}{x_3}=\xi_2$$

rahuldavad võrrandit (84.7), s. t. pind määratakse võrrandiga

$$f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)=0.$$

Selleks et saada vasakule polünoom muutujatest x_1, x_2, x_3, tuleb võrrandi pooli korrutada astmega x_3^m. Vasakul on tulemuseks homogeenne polünoom

$$F(x_1, x_2, x_3)=x_3^m f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right). \blacksquare$$

Teoreemi 84.3 väide kehtib tegelikult ka ilma teise eelduseta, olles selles mõttes analoogiline teoreemiga 84.1, kuid tõestus on liialt komplitseeritud, selleks et teda esitada käesolevas raamatus.

85. **Laguvad ja imaginaarsed jooned või pinnad.** Algebralise joone või pinna mõiste, nii nagu see on antud def-iga 83.1, on sedavõrd üldine, et lisaks seni tundma õpitud joontele ja pindadele haarab ta endasse ka mitmeid «patoloogilisi» juhte. Et viimastega tuleb tegelda ka juba teist järku joonte ja pindade süstemaatilise uurimise juures, siis on vajalik pöörata neile eraldi tähelepanu.

Polünoomi astmega m nimetatakse taanduvaks, kui teda saab esitada kahe madalama astme polünoomi korrutisena, millest kumbki pole konstant, s. t. kui teda saab lahutada kaheks teguriks, millest kumbki pole astmega 0.

***Def.* 85.1.** Algebralist joont või pinda nimetatakse *laguvaks*, kui tema võrrandi $F(x_1, \ldots, x_n)=0$ vasakul pool olev polünoom on taanduv.

Sel korral on joone või pinna võrrandil kuju

$$F_1(x_1, \ldots, x_n)\cdot F_2(x_1, \ldots, x_n)=0$$

ning ta on rahuldatud kahel juhul: kas $F_1(x_1, \ldots, x_n)=0$ või $F_2(x_1, \ldots, x_n)=0$. Nii esimene kui ka teine võrrand määravad madalamat järku algebralise joone või pinna ning esialgse võrrandiga antud m-järku joon või pind koosneb seega ühest m_1-järku ja ühest m_2-järku joonest või pinnast, kusjuures $m_1+m_2=$ $=m$ (sest polünoomide korrutamisel tegurite astmed ilmselt liituvad). Nii näiteks võrrandiga

$$2x_1^2-x_1x_2-3x_2^2-x_1+4x_2-1=0$$

antud teist järku joon on laguv ja koosneb kahest sirgest, sest võrrandi vasak pool on esitatav kujul

$$(x_1+x_2-1)(2x_1-3x_2+1),$$

nagu on kerge kontrollida. Sirgeteks, millest joon koosneb, on

$$x_1 + x_2 - 1 = 0,$$
$$2x_1 - 3x_2 + 1 = 0.$$

Mõlemad on esimest järku jooned, kuid esialgse võrrandiga antud joon — sirgepaar — on def-ide 83.1 ja 83.2 järgi teist järku joon.

Erijuhul võivad taanduva polünoomi tegurid ka ühtida. See toob endaga muidugi kaasa nende madalamat järku joonte ja pindade ühtimise, millest pind koosneb. Nii on lugu näiteks teist järku joonega, mille võrrandiks on

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 1 = 0,$$

sest selle võrrandi vasak pool on täisruut

$$(x_1 + x_2 - 1)^2$$

ning joon koosneb seega üksnes sirge

$$x_1 + x_2 - 1 = 0$$

punktidest. Et siin taanduva vasaku poole tegurid ühtivad, joon aga def-ide 83.1 ja 83.2 järgi on ikkagi teist järku joon, siis vaadeldaval juhul räägitakse mitte lihtsalt ühest sirgest, vaid ühtivate sirgete paarist.

Analoogilisi näiteid võib tuua teist järku pindadest, mis kujutavad endast tasandipaare, erijuhul koguni ühtivate tasandite paari. Üldiselt on selge, et laguv teist järku joon või pind on alati vastavalt sirgepaar või tasandipaar, sest liidetavateks lahutamine ($2 = m_1 + m_2$, kus $m_1 > 0$ ja $m_2 > 0$) on võimalik ainult ühel viisil: $2 = 1 + 1$.

Kõrgema astme joonte ja pindade puhul on võimalused mitmekesisemad, kuid et edaspidi nendega tegemist teha ei tule, siis me siin detailidesse ei lasku.

Laguvatele algebralistele joontele või pindadele hoopis vastupidine «patoloogiline» juht on imaginaarsed jooned või pinnad, mille uurimist on sobiv alustada näidetest.

Ühe teist järku joone esitab võrrand

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2 = 0,$$

mis on saadud viimati vaadeldud joone võrrandist liidetava 1 lisamisel vabaliikmesse. Järelikult võrrandi vasak pool on esitatav kujul

$$(x_1 + x_2 - 1)^2 + 1.$$

Ükskõik missugused valida reaalarvud x_1, x_2, asendamise tulemuseks on siin alati positiivne reaalarv. Seega puuduvad tasandil hoopiski punktid $X(x_1, x_2)$, mille koordinaadid rahuldavad vaadeldavat võrrandit. Viimasega määratud teist järku joon (sellisest võib def-ide 83.1 ja 83.2 põhjal kõnelda) on tühi punktihulk. Teine analoogiline näide: teist järku joon võrrandiga

$$x_1^2+x_2^2+1=0.$$

Võib esineda ka vähem «patoloogiline» juht. Näiteks teist järku joonel võrrandiga

$$x_1^2+x_2^2=0$$

on siiski üks punkt — selleks on punkt $O(0, 0)$, kuigi rohkem punkte tal enam pole (sest kahe reaalarvu ruutude summa, millest vähemalt üks on nullist erinev, on positiivne).

Sellistel juhtudel, kui võrrandiga antud algebraline joon on kas tühi punktihulk või koosneb ainult ühest punktist või ülimalt lõplikust arvust punktidest, kõneldakse kokkuleppeliselt imaginaarsest[104] joonest. Analoogiliselt käsitletakse ka imaginaarse algebralise pinna mõistet. Et edaspidi tuleb tegemist teha ainult üksikute selliste pinnatüüpidega, siis nimetuse «imaginaarne» sisu on otstarbekas avada igal üksikjuhul eraldi.

Imaginaarse teist järku joone või pinna kujutlus üldistab ühe tundmatuga ruutvõrrandi $x^2+px+q=0$ imaginaarse lahendi kujutlust. Ruutvõrrandi puhul on viimasele täpsema sisu andmiseks võetud kasutusele kompleksarvud. Analoogiliselt saab ka imaginaarse algebralise joone või pinna kujutlust täpsemalt piiritleda kompleksarvude abil. Selleks on vajalikud komplekse tasandi või komplekse ruumi mõisted. Viimaste definitsioonid erinevad def-idest 13.2 ja 13.3 ainult ühe detaili poolest: aksioomides **B1—B5** tuleb λ ja μ all ning aksioomides $\mathbf{C}^{(2)}$ ja $\mathbf{C}^{(3)}$ tuleb x_i all mõista mitte enam reaalarve, vaid kompleksarve. Et tehted — liitmine, lahutamine, korrutamine ja jagamine kompleksarvudega alluvad samadele arvutusseadustele, mis tehted reaalarvudega (ehk, nagu öeldakse, kompleksarvud moodustavad samuti korpuse nii nagu reaalarvudki[105], siis on sel puhul rakendatavad kõik mainitud aksioomidest (§ 3) tehtud järeldused. Nii näiteks on komplekse tasandi iga punkt esitatav antud reeperi suhtes kahe kompleksarvulise koordinaadiga x_1 ja x_2, s. t. reeper korraldab komplekse tasandi 1 : 1-pealekujutuse kõigi järjestatud kompleksarvupaaride (x_1, x_2) hulgale[106].

Kui def. 83.1 rakendada komplekse tasandi või ruumi puhul, on tulemuseks reaalse algebralise joone või pinna mõiste. «Reaalse» sellepärast, et võrrandi vasaku poole kui polünoomi kordajad on jäänud endiselt reaalarvudeks, ainult muutujad võivad reaalarvuliste väärtuste kõrval omandada ka kompleks-

---

[104] lad. k. *imaginarius* — kujuteldav, näiv.

[105] Vt. G. Kangro, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 167—175.

[106] Öeldust selgub, et mõistet «kompleksne tasand» ei tohi segi ajada mõistega «komplekstasand», mida kasutatakse kompleksarvude geomeetrilisel tõlgendamisel. Viimasel juhul on tegemist tasandiga def. 13.2 mõttes, ainult et sellel on fikseeritud ristreeper ja määratud tasandi 1 : 1-pealekujutus kõigi kompleksarvude hulka, selliselt et punktile (x_1, x_2) vastab kompleksarv x_1+ix_2. Teatavas mõttes võib öelda, et kaks komplekstasandit on kompleksel tasandil antud reeperi puhul kaheks «koordinaatteljeks».

arvulisi väärtusi. Nimetuse «reaalne» kasutamine on siin õigustatud ka seetõttu, et komplekssel tasandil kaotab imaginaarse algebralise joone mõiste oma esialgse sisu. Täpsemalt öeldes, reaalne algebraline joon komplekssel tasandil ei ole kunagi imaginaarne varasemas mõttes. Tõepoolest, eespool näidetena vaadeldud võrrandid, millega määratud joonte puhul osutus vajalikuks nimetus «imaginaarne joon», on kompleksarvuliste muutujate x_1 ja x_2 puhul täiesti tavaliste omadustega võrrandid. Näiteks võrrandi $x_1^2+x_2^2+1=0$ puhul võib muutuja x_1 iga kompleksarvulise väärtuse puhul leida muutuja x_2 sellise kompleksarvulise väärtuse, nii et võrrand on rahuldatud: selleks on

$$x_2=\pm\sqrt{-(x_1^2+1)}=\pm i\sqrt{x_1^2+1}.$$

Võrrandi $x_1^2+x_2^2+0$ puhul avaldub x_2 kujul $x_2=\pm\sqrt{-x_1^2}=\pm ix_1$. Seetõttu võib viimase võrrandi esitada järgmiselt:

$$(x_1+ix_2)(x_1-ix_2)=0.$$

Loomulik oleks ka siin kõnelda laguvast joonest, mõistes laguvust muidugi komplekssel tasandil. Selleks peab aga olema õigus nimetada punktihulki, mis on määratud võrranditega $x_1+ix_2=0$ ja $x_1-ix_2=0$ (komplekssel tasandil antud reeperi suhtes), samuti joonteks, vaatamata sellele, et võrrandi kõik kordajad pole enam reaalarvud. Vähemalt antud juhul, kus mõlemad võrrandid on muutujate x_1 ja x_2 suhtes lineaarsed, on seda kindlasti loomulik teha, sest kompleksse tasandi juhule on muu hulgas üle kantav ka kogu § 7 sisu, kui selles kõigi reaalarvuliste suuruste asemel mõelda kompleksarvulisi suurusi. Niisiis võib öelda, et kompleksseteks sirgeteks komplekssel tasandil on parajasti kõik niisugused punktihulgad, mis määratakse antud reeperi suhtes järgmiselt:

$$\{(x_1, x_2)\mid A_1x_1+A_2x_2+A_3=0\},$$

kus A_1, A_2, A_3 on mingid konstantsed kompleksarvud, millest esimesed kaks pole korraga nullid.

Seega võrrandid $x_1+ix_2=0$ ja $x_1-ix_2=0$ määravad kaks komplekset sirget komplekssel tasandil. Need sirged lõikuvad, sest

$$\begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{vmatrix}=-2i\neq 0,$$

kusjuures lõikepunktiks on reeperi alguspunkt $O(0, 0)$, seega punkt reaalsete koordinaatidega, ehk nagu lühemalt öeldakse, reaalne punkt.

Analoogiliselt kaotab kompleksse ruumi puhul tähenduse imaginaarse algebralise pinna kujutlus. Ka siin võib § 8 sisu ülekandmisega jõuda selliste mõisteteni nagu kompleksne sirge või kompleksne tasand komplekses ruumis.

Üldiselt tekib uudne perspektiiv ehitada kõigis detailides üles kompleksse ruumi geomeetria. Nagu juba märgitud, kandub palju eespool käsitletust üle ilma oluliste muudatusteta. Tähelepanuväärne on, et seatud ülesande lahendamine pakub huvi mitte üksnes teooria seisukohalt (kus saavutatakse suurem selgus mitmete «patoloogiliste» juhtude kadumise tõttu), vaid ka rakenduste poolest. Komplekssete ruumide (mitte ainult 3-mõõtmeliste) geomeetriat ja eriti selle aparatuuri, kasutatakse laialdaselt näiteks kaasaja füüsikateooriates. Käesolevas raamatus tuleb aga siiski piirduda eespool antuga.

86. Kvadriku üldvõrrand. Asjaolu, et algebralise joone ja pinna mõistet on võimalik ühtselt defineerida (vt. def. 83.1), annab võimaluse neid ka suures osas üheskoos uurida. Analüütilises geomeetrias, mida käsitletakse käesolevas raamatus, piirdutakse sirgete ja tasandite kõrval ainult teist järku joonte ja pindadega.[107] Viimaste ühisel uurimisel on otstarbekas nende ühtseks haaramiseks kasutusele võtta mõni lühem termin. Sellisena on järjest enam kõlapinda leidmas termin «kvadrik»[108]. Niisiis, teist järku jooni tasandil ja teist järku pindu ruumis nimetatakse edaspidi üheskoos kvadrikuteks.

Koos sellega tekib vajadus ka termini järgi, mis haaraks nii esimest järku jooned tasandil — sirged, kui ka esimest järku pinnad ruumis — tasandid. Selliseks sobib sõna «lineaar»[109]. Seega lineaar tähendab edaspidi punktihulka tasandil või ruumis, mis määratakse afiinse reeperi suhtes lineaarvõrrandiga, s. t. sirget tasandil või tasandit ruumis.

Et kvadriku võrrandi $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ vasak pool on teise astme polünoom, siis võivad temas liidetavatena esineda teise, esimese ja 0-astme üksliikmed, s. t. üksliikmed kujuga $ax_1^{k_1}, \ldots x_n^{k_n}$, kus $k_1 \geqslant 0, \ldots, k_n \geqslant 0$, $k_1 + \ldots + k_n \leqslant 2$. Seejuures loetakse, et $x_i^0 = 1$ ning jäetakse vastav tegur 1 kirjutamata. Seega juhul $n = 2$ (teist järku joone korral) on teise astme üksliikmete (ehk ruutliikmete) osas järgmised võimalused:

$k_1 + k_2 = 2$, $k_1 \geqslant 0,\ k_2 \geqslant 0$	k_1	2	1	0
	k_2	0	1	2
üksliikme kuju		ax_1^2	ax_1x_2	ax_2^2

Peale selle võivad esineda esimese astme üksliikmed (ehk lineaarliikmed) kujuga ax_1, ax_2 ning lõpuks 0-astme üksliige (ehk vabaliige) kujuga a. Seejuures võib reaalarvuline kordaja a olla iga liikme juures erinev. Polünoomi üleskirjutamisel, kus seda asjaolu tuleb kindlasti kajastada, varustatakse kordaja tavaliselt nendesamade indeksitega, mis on talle järgnevatel muutujatel, lugedes, et $x_1^2 = x_1x_1$ ja $x_2^2 = x_2x_2$. Mõningaid neist kordajaist tuleb edaspidi sageli korrutada arvuga $\frac{1}{2}$, seepärast on otstarbekas nende tähis võtta kohe teguriga 2. Teist järku joone võrrandi üldkuju tuleb sel puhul järgmine:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0. \qquad (86.1)$$

[107] Kõrgemat järku algebraliste joonte ja pindade teooriat nimetatakse algebraliseks geomeetriaks.
[108] ing. k. *quadric* — teise astme, teist järku [siin: joon või pind].
[109] ing. k. *linear* — [siin] sirgjooneline.

Teist järku pinna korral, kus ruutliikmete osas on järgmised võimalused

$$\begin{array}{l} k_1+k_2+k_3=2 \\ k_1\geqslant 0,\ k_2\geqslant 0,\ k_3\geqslant 0 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{array} \quad \left\| \begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right| \right.$$

tuleb võrrandi üldkujuks

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3+$$
$$+2a_1x_1+2a_2x_2+2a_3x_3+a=0. \qquad (86.2)$$

Selleks et saaks anda kvadrikute ühtse käsitluse, on vaja leida võimalusi ka võrrandite (86.1) ja (86.2) ühtseks esitamiseks. Seni tarvitatud kokkuleppeline sümbol $+\ldots+$, mis oli eespool kasutusel esimese astme hulkliikmete puhul, on ruutliikmete korral liialt kohmakas. Kõige sobivamaks on siin osutunud reegel, mida tuntakse Einsteini summeerimiskokkuleppe nime all.[110]

Selle puhul kasutatakse süstemaatiliselt tähelisi indekseid, nagu seda mõnel juhul on ka eespool tehtud. Näiteks koordinaate tähistatakse x_i, ruutliikmete kordajaid võrrandeis (86.1) ja (86.2) tähistatakse a_{ij} jne. Sõltuvalt sellest, kas tegemist on tasandi või ruumi juhuga, tuleb tähelistele indeksitele anda kas väärtusi 1 ja 2 või väärtusi 1, 2 ja 3. Reegel ise, nii nagu me teda käesolevas raamatus kasutame, on järgmine.

Kui üksliikmena kirjutatud avaldise kahes teguris esineb indeksina üks ja seesama täht, siis tuleb seda avaldist kirjutada nii mitu korda, kui palju väärtusi võib omandada see indeks, andes indeksile järjest kõik need väärtused, ning seejärel summeerida kõik selliselt saadud üksliikmed. Kui selliseid mingis kahes teguris olevaid tähelisi indekseid on rohkem kui üks, siis tuleb samal viisil summeerida igaühe järgi neist, andes erinevatele tähelistele indeksitele väärtusi üksteisest täiesti sõltumatult.

Näiteks üldvõrrandi, millega on esitatav sirge tasandil või tasand ruumis (vt. (39.3) ja (46.6)), saab selle kokkuleppe järgi kirjutada kujul

$$A_ix_i+A=0,$$

kahe ristkoordinaatidega antud vektori $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ skalaarkorrutise (vt. (27.1) ja (28.10)) kujul

$$\boldsymbol{xy}=x_iy_i$$

jne. Sõltuvalt sellest, kas on tegemist tasandi või ruumi juhuga, tuleb siin summeerimisel indeksile i, nn. summeerimisindeksile

[110] Esmakordselt kasutas seda A. Einstein oma üldrelatiivsusteooriale pühendatud töödes.

anda väärtusi kas 1 ja 2 või 1, 2 ja 3. Nagu näha, summeerimisindeks, kui ta on täitnud oma ülesande, läheb avaldises kaotsi. Lõpptulemuses teda enam ei esine. Seetõttu on ka ükskõik, missugune täht summeerimisindeksi kohal seisab, peaasi et ta esindaks sama indeksiväärtuste hulka.[111]

Eespool on aga esinenud avaldisi, mis selle reegli rakendamise puhul sisaldaksid summeerimisindeksi kõrval ka nn. vaba indeksi. Näiteks koordinaaditeisendusvalemid (17.10) võib nüüd kokkuvõtlikult kirjutada kujul

$$x_i = c_{ij}x'_j + c_i. \tag{86.3}$$

Siin paremal j on summeerimisindeks, i aga vaba indeks. Esimene näitab, et i iga väärtuse korral on paremal tegemist kõiki koordinaate x_j sisaldavate liikmete summaga. Teine näitab, et tegemist pole mitte ühe valemiga, vaid nii mitme valemiga, kui palju väärtusi omandab i.

Kahe sõltumatu summeerimisindeksiga tuleb tegemist teha ruutliikmete osa kompaktsel esitamisel võrrandeis (86.1) ja (86.2) Nimelt kui vaadelda avaldist $a_{ij}x_ix_j$ näiteks juhul, kui i, $j = 1, 2$, siis summeerimiskokkuleppe põhjal on siin kõigepealt

$$a_{ij}x_ix_j = a_{1j}x_1x_j + a_{2j}x_2x_j$$

(summeerimine i järgi) ning edasi

$$a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2$$

(summeerimine j järgi). Võrdlemine võrrandiga (86.1) näitab, et kui siin lugeda $a_{21} = a_{12}$, siis tulemuseks on just selle võrrandi ruutliikmete osa.

Sama avaldis $a_{ij}x_ix_j$ juhul i, $j = 1, 2, 3$ osutub, nagu on kerge veenduda, parajasti võrrandi (86.2) ruutliikmete osaks, kui lugeda, et

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{31} = a_{13}, \quad a_{32} = a_{23}.$$

Niisiis on kvadriku võrrandi üldkuju

$$a_{ij}x_ix_j + 2a_ix_i + a = 0, \tag{86.4}$$

kus $a_{ji} = a_{ij}$. Siinjuures tuleb rõhutada, et kordajatest a_{ij} vähe-

[111] Kui need hulgad käsitluse vältel sageli muutuvad, siis eri hulkade puhul kasutatakse indeksitena eri tähestike või sama tähestiku eri osade tähti. Alati on muidugi rakendatav ka sümbol $\sum_{i=1}^{n}$ (vt. G. Kangro, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 13). Einsteini summeerimiskokkuleppe sisu õieti selles seisnebki, et juhtudel, mida on kirjeldatud reegli sõnastuses, võib selle sümboli ära jätta, ilma et oleks karta arusaamatusi.

malt üks on nullist erinev (sest vastupidisel juhul vasakul ei oleks teise astme hulkliige). Saadud võrrandit nimetatakse kvadriku üldvõrrandiks.

Nagu nähtub artikli algul esitatud tabelist, on selle üldvõrrandi vasakul pool teist järku joone korral $3+2+1=6$ üksliiget, teist järku pinna korral aga $6+3+1=10$ üksliiget. Igal neist on kordaja, kuid kvadriku määramisel ei ole olulised need kordajad üksikult. Tähtsad on vaid nende suhted, sest üldvõrrandi (86.4) pooli võib korrutada ükskõik missuguse nullist erineva reaalarvuga, ilma et võrrandiga seatud tingimus mingil määral muutuks. Nii võib näiteks võrrandi (86.4) ühe nullist erineva kordaja soovi korral normeerida (s. t. teha võrdseks arvuga 1). Järelikult teist järku joon tasandil sõltub viiest, teist järku pind ruumis üheksast reaalarvulisest parameetrist. Võrdluseks meenutame, et esimest järku joone ja pinna — sirge ja tasandi korral on need arvud vastavalt 2 ja 3.

Analoogia põhjal võib arvata, et teist järku joone (pinna) määramiseks on küllalt, kui teada tema viit (üheksat) punkti. Et see tõesti nii on, näitab järgmine teoreem.

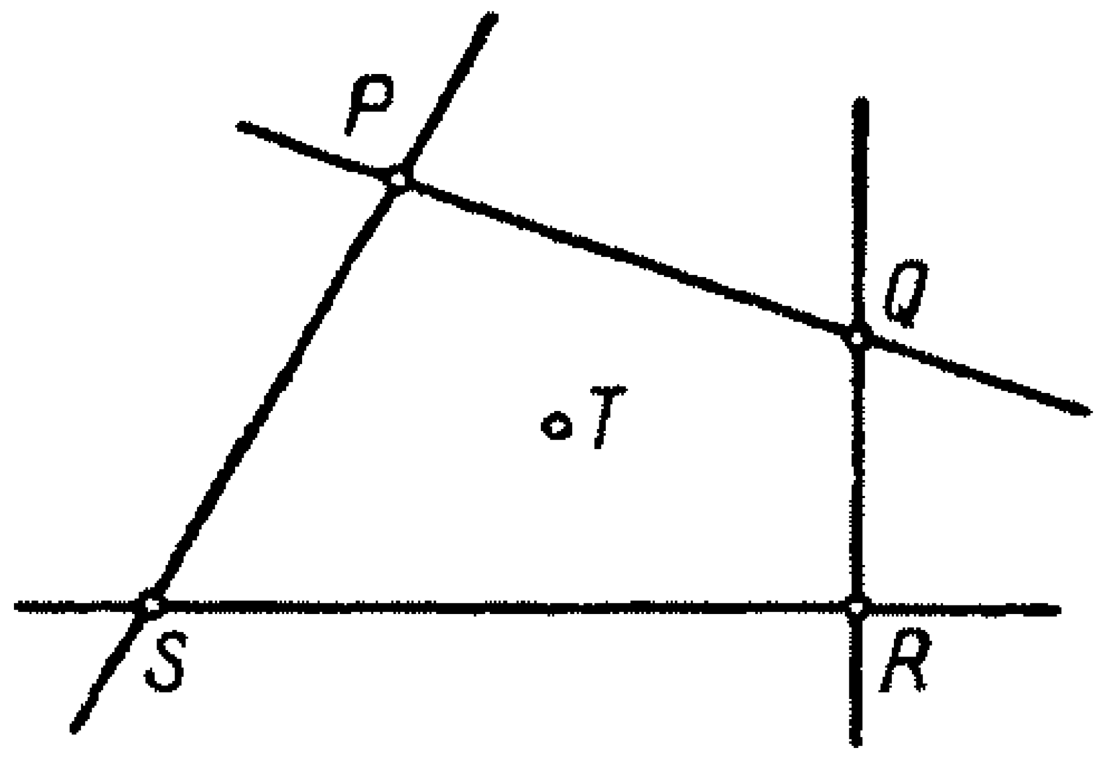
***Teoreem* 86.1.** *Olgu tasandil (ruumis) antud viis (üheksa) punkti, nii et ükski neli ei ole ühel sirgel (ükski k ei ole ühel tasandil, kui samal ajal ülejäänud $9-k$ on ühel sirgel). Sel korral leidub parajasti üks teist järku joon (pind), mis läbib need viis (üheksa) punkti.*

Tõestus. Piirdume üksnes teist järku joonte kohta käiva väite tõestamisega. (Teist järku pindade puhul tuleb kasutada analoogilist võtet.) Olgu antud viis punkti $P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$, $R(r_1, r_2)$, $S(s_1, s_2)$ ja $T(t_1, t_2)$. Nõue, et teist järku joon üldvõrrandiga (86.1) peab läbima need punktid, seab võrrandi kordajatele (praegu tundmatutele) järgmised tingimused:

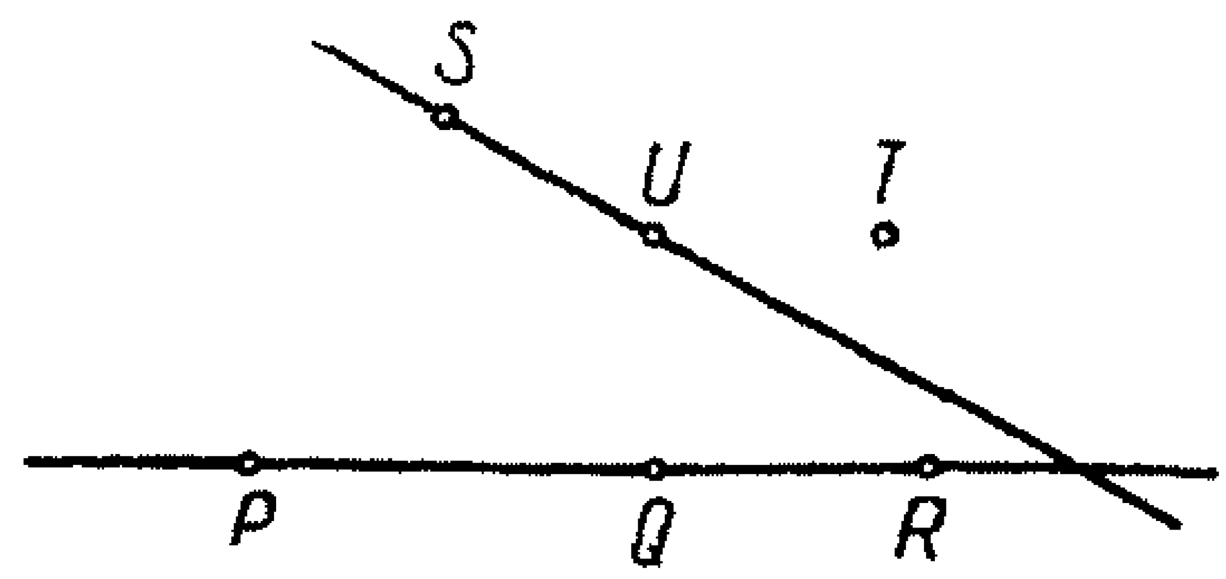
$$\begin{aligned}
&a_{11}p_1^2+2a_{12}p_1p_2+a_{22}p_2^2+2a_1p_1+2a_2p_2+a=0,\\
&a_{11}q_1^2+2a_{12}q_1q_2+a_{22}q_2^2+2a_1q_1+2a_2q_2+a=0,\\
&a_{11}r_1^2+2a_{12}r_1r_2+a_{22}r_2^2+2a_1r_1+2a_2r_2+a=0,\\
&a_{11}s_1^2+2a_{12}s_1s_2+a_{22}s_2^2+2a_1s_1+2a_2s_2+a=0,\\
&a_{11}t_1^2+2a_{12}t_1t_2+a_{22}t_2^2+2a_1t_1+2a_2t_2+a=0.
\end{aligned} \tag{86.5}$$

Kui saadud viie homogeense lineaarse võrrandi süsteem kuue tundmatu a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2 ja a määramiseks koosneb lineaarselt sõltumatutest võrranditest, siis ta määrab nende tundmatute väärtused ühise kordaja täpsusega ning koos sellega ka teist järku joone.

Jääb näidata, et süsteemi võrrandite vahelise lineaarse sõltuvuse olemasolu viiks selleni, et mingid neli antud viie punkti seas asetseksid ühel sirgel. Oletamegi, et üks võrrandeist, näiteks



Joon 185.



Joon 186.

viimane, on ülejäänud nelja võrrandi lineaarkombinatsioon. Sellest järelduks, et iga arvukuuik a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a, mis rahuldab esimest nelja võrrandit, rahuldab ka viiendat, s. t. iga teist järku joon, mis läbib punktid P, Q, R ja S, läbib ka punkti T. Selle järelduse põhjal esimese nelja punkti seas mingid kolm peavad olema ühel sirgel, sest vastupidisel juhul leiduks kaks laguvat teist järku joont, mis läbiksid punkte P, Q, R ja S, ilma et neil oleks viiendat ühist punkti T — sellisteks oleksid sirgepaarid (PQ, RS) ja (PS, QR) (joon. 185). Vajaduse korral punkte ümber tähistades võib seega tehtud oletuse puhul arvestada, et P, Q ja R on ühel sirgel.

Samal sirgel on siis ka üks ülejäänud kahest punktist S ja T, sest vastupidisel juhul oleks võimalik tõmmata läbi punkti S sirge SU, millel ei asu punkt T (joon. 186), järelikult leiduks punkte P, Q, R, S läbiv laguv teist järku joon — sirgepaar (PQ, SU), mis punkti T ei sisalda, see aga on vastuolus oletusest tehtud järeldusega. Niisiis, tehtud oletuse korral on sirgel PQ mingid neli antud viiest punktist.

Kokkuvõttes, kui punktidest P, Q, R, S ja T ükski neli pole ühel sirgel, siis süsteemi (86.5) võrrandid on lineaarselt sõltumatud ja määravad parajasti ühe neid punkte läbiva teist järku joone. ∎

87. Üldvõrrandi teisenemine. Käesoleva peatüki põhiülesandeks on anda kvadrikute täielik klassifikatsioon. Selleks tuleb võrrandit (86.4) maksimaalselt lihtsustada reeperi sobiva valiku teel sõltuvalt võrrandi (86.4) kordajate süsteemi eriomadustest. Seetõttu on tähtis kindlaks teha, kuidas muutuvad need kordajad üleminekul ühelt reeperilt teisele. Iga üksiku punkti koordinaadid teisenevad valemite (86.3) järgi. Kui neid valemeid rakendada võrrandiga (86.4) antud kvadriku punktide puhul, siis selgub, et punkt asub kvadrikul parajasti siis, kui tema uued koordinaadid x'_j rahuldavad võrrandit

$$a_{ij}(c_{ik}x'_k+c_i)\,(c_{jl}x'_l+c_j)+2a_i(c_{ik}x'_k+c_i)+a=0. \qquad (87.1)$$

Viimane on saadud võrrandist (86.4) pärast asenduste $x_i = c^i{}_k x'_k + c_i$, $x_j = c_{jl}x'_l + c_j$ sooritamist, need asendused on aga just sellised, nagu näevad ette teisendusvalemid (86.3). (Siin kohtume Einsteini summeerimiskokkuleppe puhul sageli esineva olukorraga, kus segaduste ärahoidmiseks tuleb summeerimisindeksid ümber tähistada, selleks et sõltumatult muutuvatel indeksitel oleksid alati eri tähised.)

Vajalike tehete sooritamise järel saab tekkinud võrrandile anda samasuguse kuju nagu (86.4):

$$a'_{kl}x'_k x'_l + 2a'_k x'_k + a' = 0, \tag{87.2}$$

sest ka siin on tegemist ruut- ja lineaarliikmetega muutujate x'_k suhtes ning vabaliikmega.

Erilist huvi pakuvad kordajate a'_{kl} avaldised. Et ruutliikmed tekivad ainult võrrandi esimesest üksliikmena kirjutatud summast, kui selles korrutada suluavaldiste esimesed osad (kasutades distributiivsuse ja kommutatiivsuse seadusi), siis

$$a'_{kl} = a_{ij}c_{ik}c_{jl}. \tag{87.3}$$

Paremal tuleb summeerida sõltumatult indeksite i ja j järgi.

Saadud valemeid, mille järgi teisenevad kvadriku üldvõrrandi ruutliikmete osa kordajad, on lihtne kirja panna maatriksite abil, kasutades maatriksite korrutamise tehet. Selleks on vaja mainitud kordajate maatriksile $\|a_{ij}\|$ anda teatav tähis, näiteks A, ning tuletada meelde, et teisendusmaatriksi (58.4) tähiseks on juba eespool valitud C (vt. ka art. 17). Näiteks juhul kui $i, j, \ldots = 1, 2$, on

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}, \qquad C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix}.$$

Kui nüüd arvutada korrutis AC, siis (18.4) põhjal

$$AC = \begin{Vmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{1j}c_{j1} & a_{1j}c_{j2} \\ a_{2j}c_{j1} & a_{2j}c_{j2} \end{Vmatrix}.$$

Seega $b_{il} = a_{ij}c_{jl}$ on maatriksi B = AC element, mis asub i-ndas reas ja l-ndas veerus, ning nagu kerge on veenduda, seda ka üldjuhul, kui indeksid i, j ja k omandavad väärtusi $1, 2, \ldots, n$. Selline element on valemite (87.3) paremal poolel, kus talle lisandub veel tegur c_{ik}. Nimelt korrutamise kommutatiivsuse põhjal (kui seda seadust rakendada iga liidetava puhul eraldi) on (87.3) kirjutatav kujul

$$a'_{kl} = c_{ik}b_{il}. \tag{87.4}$$

Siin parem pool meenutab samuti maatriksite korrutise elemendi avaldist, ainult et seekord on seotud maatriksite C ja B elemendid ning summeerimine ei ole sisemistel kohtadel oleva indeksi järgi, nagu maatriksite korrutise puhul vajalik. Viimasest ebakõlast saab aga üle kergesti, kui maatriksi C asemel võtta tema transponeeritud maatriks C^T, sest sellise ülemineku puhul read ja veerud ning järelikult ka indeksid vahetavad kohad. Niisiis, võrduse (87.4) parem pool on maatriksi $C^T B$ element, mis asub k-ndas reas ja l-ndas veerus. Seega, kui tähistada $\|a'_{kl}\| = A'$, on tulemuseks võrdus $A' = C^T B$, mille võib, kui võtta arvesse, et $B = AC$ ning et maatriksite korrutamine on assotsiatiivne, kirjutada kujul

$$A' = C^T AC. \tag{87.5}$$

Selliselt teiseneb kvadriku üldvõrrandi ruutliikmete osa maatriks, kuid ühtlasi ka ruutvormi $a_{ij}x_i x_j$ kordajate maatriks teisenduse $x_i = c_{ik}x'_k$ korral, ükskõik kui suur on indeksite i, j ja k väärtuste ühine hulk. (Viimast asjaolu on edaspidi hea kasutada kvadriku üldvõrrandi kõikidest kordajatest moodustatud maatriksi teisenemise uurimisel.)

Eriti lihtsa teisenduseeskirja saab võrdusest (87.5) maatriksi A determinandi $|A|$ jaoks. Kui arvestada, et maatriksite korrutamisel korrutuvad ka nende determinandid ning et $|C^T| = |C|$, siis on tulemuseks järgmine oluline võrdus:

$$|A'| = |C|^2 |A|. \tag{87.6}$$

Järelikult kvadriku üldvõrrandi ruutliikmete osa kordajatest moodustatud determinant $\delta = |A|$, näiteks juhul $i, j = 1, 2$ determinant

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

korrutub reeperi teisendamisel baasiteisendusmaatriksi determinandi ruuduga: $\delta' = |C|^2 \delta$. Kui ühe reeperi suhtes $\delta \neq 0$, siis ka iga teise reeperi suhtes $\delta' \neq 0$, sest $|C| \neq 0$. Kui ühe reeperi suhtes $\delta = 0$, siis ka iga teise reeperi suhtes $\delta' = 0$.

Seega kvadrikud jagunevad kahte suurde klassi järgmiste tunnustega:

$$\textbf{\textit{I}} \quad \delta = 0, \qquad \textbf{\textit{II}} \quad \delta = 0.$$

I klassi kvadrikuid nimetatakse sageli t s e n t r a a l s e t e k s kvadrikuteks (nimetuse põhjus selgub art-s 89); ***II*** klassi kvadrikuid nimetatakse m i t t e t s e n t r a a l s e t e k s kvadrikuteks.

Edaspidi on mõnikord vajalikud ka võrrandi (87.2) kordajate a'_k ja vabaliikme a' avaldised. Nende leidmiseks tuleb võrrandi (87.1) vasakul pool avada sulud:

$$a_{ij}c_{ik}c_{jl}x'_k x'_l + a_{ij}c_{ik}c_j x'_k + a_{ij}c_i c_{jl} x'_l +$$
$$+ a_{ij}c_i c_j + 2a_i c_{ik} x'_k + 2a_i c_i + a = 0$$

ja koguda kokku samasuguse astmega liikmed:

$$a_{ij}c_{ik}c_{jl}x'_k x'_l + 2c_{ik}(a_{ij}c_j + a_i)x'_k + a_{ij}c_i c_j + 2a_i c_i + a = 0.$$

(Siin on arvestatud, et $a_{ij}c_i c_{jl}x'_l = a_{ij}c_{ik}c_j x'_k$, sest summeerimisindeksid võib ümber tähistada, vahetades i ja j osad ning võttes k asemele l; samal ajal $a_{ij} = a_{ji}$). Tulemuseks ongi võrrand (87.2), mistõttu lisaks võrdusele (87.3) kehtivad veel

$$a'_k = c_{ik}(a_{ij}c_j + a_i), \tag{87.7}$$
$$a' = a_{ij}c_i c_j + 2a_i c_i + a. \tag{87.8}$$

Erijuhul, kui $c_i = 0$, s. t. kui reeperi alguspunkt jääb samaks ja muutuvad ainult baasivektorid, on

$$a'_k = c_{ik}a_i,$$
$$a' = a.$$

Teisel erijuhul, kui muutub ainult reeperi alguspunkt ning baasivektorid jäävad samaks, on $\boldsymbol{e}'_i = \boldsymbol{e}_i$, s. t. $\boldsymbol{e}_j c_{ji} = \boldsymbol{e}_i$ ehk $\boldsymbol{e}_1 c_{1i} + \ldots + \boldsymbol{e}_n c_{ni} = \boldsymbol{e}_i$. Vektorite $\boldsymbol{e}_i$ lineaarse sõltumatuse tõttu siin $c_{ij} = 1$, kui $i = j$, ja $c_{ij} = 0$, kui $i \neq j$. Üldiselt on selliste juhtude lühemaks kirjeldamiseks kasutusele võetud nn. «Kroneckeri[112] delta» — sümbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kui } i = j, \\ 0, & \text{kui } i \neq j, \end{cases}$$

mis tähistab ühikmaatriksi E üldliiget, $E = \|\delta_{ij}\|$ (vt. art. 18). Niisiis, vaadeldaval juhul

$$c_{ij} = \delta_{ij}.$$

Asendused valemeisse (87.3) ja (87.7) annavad

$$a'_{kl} = a_{ij}\delta_{ik}\delta_{jl},$$
$$a'_k = \delta_{ik}(a_{ij}c_j + a_i)$$

ehk

$$a'_{kl} = a_{kl},$$
$$a'_k = a_{kj}c_j + a_k \tag{87.9}$$

(sest näiteks $n = 2$ puhul

$$a_{ij}\delta_{ik} = a_{1j}\delta_{1k} + a_{2j}\delta_{2k},$$

[112] Leopold Kronecker (1823—1891) — saksa matemaatik, Berliini ülikooli professor.

kusjuures nullist erinev (ja nimelt 1) on ainult see δ_{ik} väärtus, mille korral $k = i$). Seega reeperi alguspunkti ülekandmisel muutumatute baasivektorite korral teisenevad kvadriku võrrandi kordajad valemite (87.8), (87.9) järgi.

Teise klassijaotuse kvadrikute hulgas saab läbi viia üldvõrrandi kõikidest kordajatest moodustatud determinandi abil. Selle determinandi teisenemiseeskirja leidmiseks on kasulik toimida järgmiselt: lülitada nii kvadriku üldvõrrandi (86.4) vasakusse poolde kui ka teisendusvalemite (86.3) parematesse pooltesse täiendav muutuja x_0 või x'_0, nii et need muutuksid homogeenseteks polünoomideks:

$$a_{ij}x_ix_j+2a_ix_ix_0+ax_0^2,$$
$$c_{ij}x'_i+c_jx'_0.$$

Kui sel korral tähistada $a_i = a_{i0} = a_{0i}$, $a = a_{00}$ ja $c_j = c_{j0}$ ning võtta kasutusele indeksid I, J, mis lisaks i, j väärtustele omandavad veel väärtuse 0, siis võib need polünoomid võtta kokku järgmiselt

$$a_{IJ}x_Ix_J,$$
$$c_{Ij}x'_I.$$

Kvadriku võrrandi vasak pool saadakse esimesest asendusega $x_0 = 1$ ning teisendusvalemite (86.3) paremad pooled teisest asendusega $x'_0 = 1$. Kui nüüd neile teisendusvalemeile lisada valem

$$x_0=x'_0,$$

seejärel selliselt saadud teisendus

$$\begin{aligned} x_i&=c_{ij}x'_j+c_ix'_0, \\ x_0&=\qquad\quad\; x'_0 \end{aligned} \tag{87.10}$$

võtta kokku kujju

$$x_I=c_{IJ}x'_J \tag{87.11}$$

ning viia ta läbi ruutvormis $a_{IJ}x_Ix_J$, siis on tulemuseks ühelt poolt $a_{IJ}x_Ix_J = a'_{KL}x'_Kx'_L$, teiselt poolt aga

$$a_{IJ}x_Ix_J=a_{ij}(c_{ik}x'_k+c_ix'_0)(c_{jl}x'_l+c_jx'_0)+2a_i(c_{ik}x'_k+c_ix'_0)+a.$$

Et viimane avaldis, kui selles võtta $x'_0 = 1$ (teisendusvalemi $x_0 = = x'_0$ tõttu asenduse $x_0 = 1$ korral seda tulebki teha), ühtib kvadriku teisendatud üldvõrrandi vasaku poolega, siis võib öelda, et sel viisil teisendatud ruutvormi $a_{IJ}x_Ix_J$ uue kuju $a'_{KL}x'_Kx'_L$ kordajateks a'_{KL} on parajasti kvadriku teisendatud üldvõrrandi (87.2) kordajad: a'_{kl}, $a'_{k0} = a'_{0k} = a'_k$, $a'_{00} = a'$. Viimastest moodustatud maatriks $\mathfrak{A}'$, olles samal ajal ruutvormi kordajate maatriksiks, avaldub eeskirja (87.5) kohaselt kujul

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{C}^T \mathfrak{A} \mathfrak{C}.$$

Järelikult kui tähistada

$$|\mathfrak{A}| = \Delta, \quad |\mathfrak{A}'| = \Delta',$$

siis

$$\Delta' = |\mathfrak{C}|^2 \Delta. \tag{87.12}$$

Seejuures determinandis $|\mathfrak{C}|$ on valemite (87.10) järgi viimases reas ainult viimane element nullist erinev ja nimelt 1 — näiteks juhul $i, j = 1, 2$

$$|\mathfrak{C}| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & c_1 \\ c_{12} & c_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

mistõttu $|\mathfrak{C}| = |C|$. Niisiis saame kokkuvõttes valemi

$$\Delta' = |C|^2 \Delta. \tag{87.13}$$

Nagu siit näha, korrutab kvadriku üldvõrrandi kõikidest kordajatest moodustatud determinant, näiteks juhul $i, j = 1, 2$ determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix},$$

reeperi teisendamisel samuti nagu δ determinandi $|C|$ ruuduga. Seetõttu ka tunnused $\Delta \neq 0$ ja $\Delta = 0$ on invariantsed tunnused.

Kvadrikuid saab seega kahte klassi jagada ka järgmiselt:

$$\boldsymbol{A} \quad \Delta \neq 0, \qquad \boldsymbol{B} \quad \Delta = 0.$$

B klassi kvadrikuid nimetatakse sageli k i d u n u d kvadrikuteks (art-tes 99 ja 100 selgub, et nad on tasandil sirgepaarid, ruumis koonused või silindrid või tasandipaarid); ***A*** klassi kvadrikuid nimetatakse m i t t e k i d u n u d kvadrikuteks.

Klasside lõikeid tähistame edaspidi lühemalt:

$$\boldsymbol{I} \cap \boldsymbol{A} = \boldsymbol{IA}, \quad \boldsymbol{I} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{IB}, \quad \boldsymbol{II} \cap \boldsymbol{A} = \boldsymbol{IIA}, \quad \boldsymbol{II} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{IIB}.$$

Nüüd on ülesandeks anda geomeetrilised mõisted, mis võimaldaksid selgitada eri klasside kvadrikute erinevusi ja, kui võimalik, siis jätkata seda klassijaotust kuni kvadrikute täieliku afiinse või meetrilise klassifikatsioonini. Selle ülesande lahendamisele on pühendatud järgmised kaks paragrahvi.

§ 17. KVADRIKUTE AFIINNE GEOMEETRIA

Kvadrikute üldiste geomeetriliste omaduste käsitlemist on loomulik alustada afiinse geomeetria raames, s. t. üksnes aksioomidele **A1—A4**, **B1—B5** ja **C**$^{(2)}$ või **C**$^{(3)}$ tuginedes ning mitte kasutades selliseid aksioomidest **D1—D6** tulenevaid mõisteid nagu pikkus, nurk, skalaarkorrutis jt., mis lisanduvad alles hiljem, kvadrikute eukleidilises geomeetrias. Põhieesmärgiks on sel puhul kõikide kvadrikute afiinne klassifitseerimine — jagamine omavahel afiinselt ekvivalentsete kvadrikute klassidesse.

Eesmärgi saavutamiseks püütakse afiinne reeper siduda antud kvadrikuga selliselt, et kvadrikul oleks tema suhtes maksimaalselt lihtne võrrand, kasutades selleks kvadrikute afiinses geomeetrias defineeritavaid mõisteid. Viimastest tulebki seetõttu alustada.

88. Asümptootiline siht. Põhiliseks võtteks kvadrikute uurimisel afiinses geomeetrias on kvadriku n.-ö. sondeerimine sirgetega, s. t. antud kvadriku lõigete uurimine mitmesuguselt valitud sirgetega. Olgu kvadrik antud võrrandiga

$$a_{ij}x_ix_j+2a_ix_i+a=0 \tag{88.1}$$

mingi afiinse reeperi suhtes ning olgu lisaks sellele antud sirge parameetriliste võrranditega

$$x_i=p_i+tk_i$$

ehk teisiti öeldes, punktiga $P(p_i)$ ja sihivektoriga $\boldsymbol{k}=(k_i)$. Sirge ja kvadriku lõikepunktide määramiseks tuleb sirge võrrandeist teha asendused kvadriku võrrandisse:

$$a_{ij}(p_i+tk_i)(p_j+tk_j)+2a_i(p_i+tk_i)+a=0$$

ning lahendada tekkiv võrrand t suhtes:

$$(a_{ij}k_ik_j)t^2+2[(a_{ij}p_j+a_i)k_i]t+(a_{ij}p_ip_j+2a_ip_i+a)=0. \tag{88.2}$$

(Sulgude avamisel eelmises võrrandis tuleb t kordajaks esialgu küll $a_{ij}p_ik_j+a_{ij}k_ip_j+2a_ik_i$, kuid esimeses liikmes võib vahetada summeerimisindeksite tähised ning seejärel pärast kordaja 2 väljatoomist korraldada kogu kordaja nurksulgudes näidatud kujju.)

Saadud võrrand (88.2) on üldiselt ruutvõrrand, välja arvatud juht, mil

$$a_{ij}k_ik_j=0. \tag{88.3}$$

Viimane võrdus kujutab endast tingimust mitte niivõrd sirgele kui sirge sihile, sest ta ei sisalda üldse P koordinaate ning kui teda rahuldavad vektori $\boldsymbol{k}$ koordinaadid k_i, siis rahuldavad teda ka selle sirge iga teise sihivektori $\boldsymbol{k}\lambda$ koordinaadid λk_i, sest

$$a_{ij}(\lambda k_i)(\lambda k_j) = \lambda^2(a_{ij}k_ik_j).$$

Def. 88.1. Sihti, mille puhul on rahuldatud tingimus (88.3), nimetatakse kvadriku **asümptootiliseks sihiks.**

Asümptootilise sihiga sirge puhul kujutab võrrand (88 2) endast lineaarvõrrandit $2At + B = 0$, kus

$$A = (a_{ij}p_j + a_i)k_i,$$
$$B = a_{ij}p_ip_j + 2a_ip_i + a.$$

Järelikult on võimalikud järgmised juhud:

1) $A = B = 0$, võrrand (88.2) osutub triviaalseks samasuseks $0 = 0$, mis on rahuldatud t iga väärtuse korral, ning seega sirge iga punkt kuulub kvadrikule;

2) $A = 0$, $B \neq 0$, võrrand (88 2) on vastuoluline ning sirgel pole kvadrikuga ühtegi ühist punkti;

3) $A \neq 0$, võrrand (88.2) määrab parajasti ühe t väärtuse $t = -\frac{B}{2A}$ ning seega sirgel on kvadrikuga parajasti üks ühine punkt.

Kvadriku asümptootilist sihti võib niisiis iseloomustada järgmiselt.

***Teoreem* 88.1.** *Siht on kvadriku asümptootiline siht parajasti siis, kui iga selle sihiga sirge kas kuulub kvadrikule või tal on kvadrikuga mitte rohkem kui üks ühine punkt.*

Asümptootiliste sihtide hulga ehitus on eri tüüpi kvadrikute puhul erinev. Näiteks ellipsil võrrandiga $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ või ellipsoidil võrrandiga $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ asümptootilised sihid puuduvad, sest (88.3) nõuab, et $\boldsymbol{k}$ koordinaadid peaksid muutma nulliks nende võrrandite vasakud pooled, see on aga $\boldsymbol{k} \neq 0$ puhul võimatu. Hüperbool, mille võrrandiks on $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$, omab kaks asümptootilist sihti, sest tingimus $\frac{k_1^2}{a^2} - \frac{k_2^2}{b^2} = 0$ on rahuldatud, kui $\frac{k_2}{k_1} = \pm\frac{b}{a}$, siin on tegemist hüperbooli kahe asümptoodi sihtidega. Paraboolil ja elliptilisel paraboloidil on mõlemal üksainus asümptootiline siht, sest nende võrrandeist $x_2^2 = 2px_1$ ja $\frac{x_2^2}{p} + \frac{x_3^2}{q} = 2x_1$, $p > 0$, $q > 0$, järelduvad tingimused $k_2^2 = 0$ ja

$\frac{k_2^2}{p}+\frac{k_3^2}{q}=0$ on rahuldatud ainult baasivektoriga e_1 kollineaarsete vektorite k korral. Hüperboolsel paraboloidil on võrrand $\frac{x_2^2}{p}-\frac{x_3^2}{q}=2x_1$ ja tema asümptootiliste sihtide hulk koosneb seega kahest rihist, sest tingimuses $\frac{k_2^2}{p}-\frac{k_3^2}{q}=0$ kas $\frac{k_2}{\sqrt{p}}+\frac{k_3}{\sqrt{q}}=0$ või $\frac{k_2}{\sqrt{p}}-\frac{k_3}{\sqrt{q}}=0$, iga lineaarvõrrand vektori koordinaatide jaoks aga määrab teatava rihi.

Selline suur mitmekesisus asümptootiliste sihtide hulga ehituses muudab selle sihi mõiste kasutamise kvadrikute üldisel käsitlemisel väheviljakaks. Pigemini tuleb seda sihti edaspidi arvestada kui üht võimalikku erandit. Kui aga kvadrikul on asümptootilisi sihte, siis kvadriku võrrandi lihtsustamist nende abil võimaldab järgmine tulemus.

***Teoreem* 88.2.** *Reeperi baasivektor e_k on kvadriku asümptootilises sihis parajasti siis, kui kvadriku võrrand selle reeperi suhtes ei sisalda liiget koordinaadi x_k ruuduga, s. t. kui $a_{kk} = 0$.*

T õ e s t u s. Tingimus (88.3) on näiteks tasandi juhul baasivektori $e_1 = (1, 0)$ puhul rahuldatud tõesti parajasti siis, kui $a_{11} = 0$, sest tal on kuju $a_{11}k_1^2 + 2a_{12}k_1k_2 + a_{22}k_2^2 = 0$. Üldiselt baasivektori e_k koordinaatideks on $k_i = \delta_{ik}$, s. t. 0, kui $i \neq k$, ja 1, kui $i = k$. Järelikult tingimus (88.3) on e_k puhul rahuldatud parajasti siis, kui

$$a_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}=0.$$

Siin vasakul i ja j järgi summeerimisel on kõikidele väärtustele $i \neq k$ ja $j \neq k$ vastavad liikmed võrdsed nulliga, väärtustele $i = j = k$ vastav liige aga on a_{kk}. Seega soovitud tingimuseks on tõesti $a_{kk} = 0$. ∎

Asümptootilist sihti omavate kvadrikute juures pakuvad huvi need sirged, mis on tervikuna kvadrikul, s. t. mille korral on tegemist eelmisel leheküljel märgitud juhuga 1).

Teist järku joone korral saab selline olukord leida aset ainult siis, kui joon on laguv ning kujutab endast seega sirgepaari. Tõepoolest, sirge, mille iga punkt on joonel, saab reeperi sobiva valikuga teha näiteks x_1-teljeks. Selle telje kõigi punktide $(x_1, 0)$ koordinaadid peavad siis rahuldama teist järku joone võrrandit ning

$$a_{11}x_1^2+2a_1x_1+a=0 \tag{88.4}$$

peab seega osutuma samasuseks. Võttes siin kord $x_1 = 0$, kord aga $x_1 = \pm 1$, on tulemuseks $a = 0$, $a_{11} \pm 2a_1 = 0$, s. t. $a = a_{11} = a_1 = 0$. Joone võrrandil on seega kuju

$$2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_2x_2 = 0$$

ehk

$$x_2(2a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_2) = 0$$

— joon koosneb kahest sirgest võrranditega $x_2 = 0$, $2a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_2 = 0$.

Teist järku pind võib sisaldada sirgeid, ilma et ta peaks olema laguv (vt. art. 81). Pinnal asuvaid sirgeid nimetatakse sel puhul pinna sirgjoonelisteks moodustajateks.

On selge, et kui sirge asub tervikuna kvadrikul, siis tema siht on kvadriku asümptootiline siht, sest sel korral võrrand (88.2) peab olema samasus t suhtes ning samuti nagu (88.4) puhul võib veenduda, et võrrandi iga kordaja, seega ka $a_{ij}k_ik_j = 0$, peab olema võrdne nulliga.

89. Keskpunkt. Kui siht ei ole kvadriku asümptootiline siht, siis selle sihiga sirgel on kvadrikuga kas kaks erinevat lõikepunkti, üksainus ühine punkt või mitte ühtegi ühist punkti vastavalt sellele, kas ruutvõrrandi (88.2) reaalarvulisi lahendeid on 2,1 või 0.

Esimene juht viib järgmise mõisteni.

***Def.* 89.1.** Iga lõiku, mis ühendab kvadriku kaht punkti ja mille siht ei ole kvadriku asümptootiliseks sihiks (s. t. mis ei ole kvadrikul endal), nimetatakse kvadriku k õ õ l u k s.

Olgu sellise kõõlu otspunktid Q_1 ja Q_2 mingil sirgel määratud parameetri väärtustega t_1 ja t_2, s. t. otspunktide koordinaadid olgu $p_i + t_1k_i$ ja $p_i + t_2k_i$. Kõõlu keskpunkti koordinaadid on siis

$$\frac{1}{2}[(p_i+t_1k_i)+(p_i+t_2k_i)] = p_i + \frac{1}{2}(t_1+t_2)k_i$$

ning see keskpunkt ühtib punktiga $P(p_i)$ parajasti siis, kui

$$t_1 + t_2 = 0.$$

Et t_1 ja t_2 on siin ruutvõrrandi (88.2) lahendid, siis $t_1 + t_2$ on Viete'i teoreemi põhjal võrdne vastava taandatud ruutvõrrandi esimese astme kordaja vastandväärtusega, mistõttu tingimus punkti P asetsemiseks kõõlu Q_1Q_2 keskpunktis omandab kuju

$$(a_{ij}p_j + a_i)k_i = 0. \qquad (89.1)$$

Saadud tingimus on rahuldatud alati, kui suluavaldised on eraldi võrdsed nulliga.

***Def.* 89.2.** Punkti P, mille koordinaadid p_j rahuldavad tingimusi

$$a_{ij}p_j + a_i = 0, \tag{89.2}$$

nimetatakse võrrandiga $a_{ij}x_ix_j + 2a_ix_i + a = 0$ antud kvadriku **keskpunktiks**.

Ülaltoodust järeldub, et keskpunktis poolitub kvadriku iga kõõl, mis seda punkti läbib.

Teoreem 89.1. *Kui tasandi (ruumi) mingit punkti P läbib teist järku joone (pinna) vähemalt kaks mittekollineaarse (kolm mittekomplanaarse) sihivektoriga kõõlu, mis selles punktis poolituvad, siis see punkt P on teist järku joone (pinna) keskpunkt.*

Tõestus. Piirdume tõestamisel teist järku joone juhuga. Teist järku pinna puhul tuleb rakendada analoogilist võtet (me teeme seda allpool teoreemi 90.7 tõestuses).

Teoreemis mainitud kahe kõõlu sihivektoreiks olgu $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2)$ ja $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2)$. Sel korral (89.1) põhjal

$$\begin{aligned} (a_{1j}p_j + a_1)k_1 + (a_{2j}p_j + a_2)k_2 &= 0, \\ (a_{1j}p_j + a_1)l_1 + (a_{2j}p_j + a_2)l_2 &= 0, \end{aligned} \tag{89.3}$$

kusjuures

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 & l_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{89.4}$$

Kui tingimusi (89.3) vaadelda lineaarse homogeense süsteemina suluavaldiste määramiseks, siis sellest, et süsteemi determinant on (89.4) põhjal nullist erinev, järeldub üksnes triviaalse lahendi olemasolu[113], s. t. kõik suluavaldised on nullid ning seega punkti P koordinaadid rahuldavad tingimusi (89.2) — punkt P on teist järku joone keskpunkt. ∎

Keskpunkti iseloomustab ilmekalt ka järgmine teoreem.

Teoreem 89.2. *Kvadrik, millel on olemas keskpunkt, on selle suhtes sümmeetriline.*

Tõestus. Olgu punkt P kvadriku keskpunkt ning olgu Q_1 kvadriku mingi sellest erinev punkt. Tuleb näidata, et kvadrikule kuulub ka punkt Q_2, mis on sümmeetriline punktiga Q_1 punkti P suhtes.

Alustame juhust, mil sirge PQ_1 on asümptootilise sihiga (kui selline eksisteerib). Et P on kvadriku keskpunkt, siis def-ile 88.1 järgnenud analüüsis $A = 0$, mistõttu võimalikud on juhud 1) ja 2). Et sirgel on kvadriku punkt Q_1, siis on tegemist juhuga 1). Sirge PQ_1 iga punkt, seega ka punkt Q_2 on kvadrikul.

Kui sirge PQ_1 ei ole asümptootilise sihiga, siis on mõeldavad

---

[113] Vt. G. Kangro, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 74.

järgmised kaks võimalust: 1) sirgel PQ_1 asub kvadriku mingi kõõl Q_1Q_2 otspunktiga Q_1, 2) sirgel PQ_1 on kvadrikuga üksainus ühine punkt Q_1. Esimesel juhul tuleb rakendada pärast def. 89.2 sõnastatud järeldust: kõõl Q_1Q_2 poolitub punktis P. Teise juhu saab viia vastuoluni, rakendades järgmist arutlust. Et P on keskpunkt, siis võrrandis (88.2) t kordaja on 0. Samal ajal on võrrandil ainult üks kahekordne lahend, kusjuures t^2 kordaja on nullist erinev. Järelikult vabaliige on null, mistõttu P on kvadriku punkt. Seega PQ_1 on kvadriku kõõl, mis punktis P ei poolitu, see on aga võimatu, sest punktis P poolitub iga kõõl, mis teda sisaldab. ∎

Tähtis on ka järgmine tunnus.

***Teoreem* 89.3.** *Reeperi alguspunkt O on kvadriku keskpunktiks parajasti siis, kui kvadriku üldvõrrandis selle reeperi suhtes $a_i = 0$, s. t. kui võrrandis puuduvad lineaarliikmed.*

T õ e s t u s. Punkt O on kvadriku keskpunkt parajasti siis, kui võrrandid (89.2) on rahuldatud juhul $p_j = 0$, selleks on aga tarvilik ja piisav, et $a_i = 0$. ∎

Tulemus on heas kooskõlas valemitega (87.9), millest (89.2) põhjal nähtub veel kord, et kui $c_j = p_j$, s. t. kui uue reeperi alguspunktiks on reeperi keskpunkt, siis $a'_i = 0$.

Keskpunkti ja asümptootilise sihiga on seotud järgmine mõiste.

***Def.* 89.3.** Kui kvadrikul on olemas 1) keskpunkte, mis ei asetse kvadrikul endal, ja 2) asümptootilisi sihte, siis iga sirget, mis läbib keskpunkti ja on asümptootilise sihiga, nimetatakse kvadriku a s ü m p t o o d i k s.

Siin on tegemist hüperbooli asümptoodi mõiste üldistusega, sest hüperbooli asümptoodid läbivad tõesti keskpunkti ja on asümptootilise sihiga (vt. art. 88).

Kui teist järku pinnal on olemas asümptoote, siis need moodustavad teist järku koonilise pinna. Tõepoolest, asümptoodi suvalise punkti X ja kvadrikul mitteasuva keskpunkti P korral vektor $\boldsymbol{k} = \overrightarrow{PX}$ on asümptootilise sihiga, järelikult selle vektori koordinaadid $k_i = x_i - p_i$ rahuldavad asümptootilise sihi tingimust (88.3):

$$a_{ij}(x_i - p_i)(x_j - p_j) = 0.$$

See võrrand määrab teist järku koonilise pinna, sest kui reeper valida nii, et alguspunktiks oleks P, siis $p_i = 0$ ja võrrandi vasak pool on homogeenne teise astme polünoom.

Kui on täidetud def. 89.3 lisaeeldused, nimetatakse koonilist pinda selle võrrandiga antud kvadriku a s ü m p t o o t i l i s e k s k o o n u s e k s. Lihtne on kindlaks teha, et hüperboloidide korral on siin tegemist art-s 79 uuritud asümptootilise koonusega.

Kvadriku keskpunktide hulga ehitus on kõige lihtsam nende kvadrikute puhul, mis kuuluvad *I* klassi tunnusega $\delta \neq 0$. Keskpunkti koordinaate p_i määrava lineaarse süsteemi (89.2) determinandiks det $|a_{ij}|$ on nimelt just δ. Kui $\delta \neq 0$, siis selle süsteemi puhul on tegemist Crameri peajuhuga [114], mil süsteemil on parajasti üks lahend. Järelikult *I* klassi kvadrikutel on olemas parajasti üks keskpunkt. Neid on loomulik nimetada ühe keskpunktiga ehk tsentraalseteks kvadrikuteks, nii nagu seda on juba tehtud art-s 87. Sellised on ellips, hüperbool, ellipsoid, hüperboloidid ning teist järku koonus.

Olukord on keerukam *II* klassi kvadrikute juhul, s. t. siis, kui $\delta = 0$. Analüüsime esialgu selle klassi teist järku jooni. Tingimustel (89.2), mida peavad rahuldama keskpunkti P koordinaadid p_1 ja p_2, on siis kuju

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_1&=0, \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_2&=0, \end{aligned} \tag{89.5}$$

kusjuures

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \tag{89.6}$$

s. t. tundmatute x_1 ja x_2 kordajad süsteemi (89.5) võrrandeis on võrdelised. Kui sama võrdelisus ei laiene vabaliikmetele, siis süsteem on vastuoluline ja vastaval teist järku joonel keskpunkt puudub. Selline on olukord näiteks parabooli korral, sest selle võrrandi $x_2^2 - 2px_1 = 0$ kordajaiks on $a_{11} = a_{12} = a_2 = a = 0$, $a_{22} = 1$, $a_1 = -p$ ning süsteem (89.5) on vastuoluline. Kui aga tingimusest (89.6) järelduv võrdelisus laieneb ka süsteemi (89.5) võrrandite vabaliikmetele, siis need võrrandid on samaväärsed. Et vähemalt ühes neist ei ole x_1 ja x_2 kordajad korraga nullid (vastupidisel juhul oleks $a_{ij} = 0$ ning poleks üldse tegemist teist järku joonega), siis kõigi keskpunktide hulk on sirge. Selline on olukord näiteks võrrandiga $x_1^2 - 1 = 0$ antud laguva teist järku joone puhul, sest siis $a_{12} = a_{22} = a_1 = a_2 = 0$, $a_{11} = 1$, $a = -1$ ning süsteemist (89.5) jääb ainult üks võrrand: $x_1 = 0$.

II klass sisaldab seega kaht liiki teist järku jooni. Esimesel juhul kõneldakse keskpunktita joontest, teisel juhul keskpunktide sirgega joontest. Mõlemad juhud on võimalikud, nagu selgub ülalantud näidetest.

Teist järku pindade puhul, mil keskpunkti koordinaadid peavad rahuldama süsteemi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_1&=0, \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_2&=0, \\ a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3+a_3&=0 \end{aligned} \tag{89.7}$$

[114] G. Kangro, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 53.

võrrandeid, on *II* klassi pindade tunnuseks $\delta = \det |a_{ij}| = 0$. Olukord sõltub siin maatriksite

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \end{Vmatrix}$$

astakutest r ja r', kusjuures alati, nagu teada (vt. art. 51), on $r \leqslant r' \leqslant r+1$, ning lisaks sellele praegu, mil $\delta = 0$, on $r < 3$. Järelikult on võimalikud samasugused neli juhtu nagu art-s 51: 1) $r=2$, $r'=3$, 2) $r=2$, $r'=2$, 3) $r=1$, $r'=2$, 4) $r=1$, $r'=1$. Ka nende juhtude tõlgendused on samasugused. Nimelt juhtudel 1) ja 3), mil Kronecker-Capelli tingimus süsteemi (89.7) lahenduvuseks ei ole täidetud, teist järku pinnal keskpunktid puuduvad. Juhtudel 2) ja 4) on süsteem lahenduv, kusjuures erinevus on sõltumatute võrrandite arvus. Juhul 2) on $r = r' = 2$ lineaarselt sõltumatut võrrandit, kumbki määrab ruumis tasandi ning nende süsteem seega sirge (lahendi olemasolu garanteerib tasandite lõikumise). Järelikult sel juhul teist järku pinna keskpunktid täidavad terve sirge. Kõneldakse keskpunktide sirgega teist järku pinnast. Juhul 4) on lineaarselt sõltumatute võrrandite arv $r = r' = 1$ ning ainus oluline võrrand määrab ruumis tasandi. Seega keskpunktid täidavad sel korral terve tasandi. Kõneldakse keskpunktide tasandiga teist järku pinnast.

Huvitav on see, et kõik need neli juhtu tegelikult realiseeruvad. Igaühe jaoks võib tuua näite:

1) $x_1^2+x_2^2=2x_3$, 2) $x_1^2+x_2^2=1$,

3) $x_2^2=2x_1$, 4) $x_1^2=1$.

Tähelepanuvääriv on ka see, et isegi imaginaarsetel kvadrikutel on reaalseid keskpunkte. Nii näiteks kõlbab juhu 2) illustreerimiseks imaginaarne silindriline pind, mis määratakse võrrandiga $x_1^2+x_2^2+1=0$. Vaatamata sellele, et pinnal endal pole ühtegi reaalset punkti, on tal ometi olemas reaalne keskpunktide sirge. Asja selgitab see, et kõõlu otspunkte määravad parameetri väärtused t_1 ja t_2 kui ruutvõrrandi (88.2) lahendid on kaaskompleksarvud, mistõttu kõõlu keskpunkti määrav parameetri väärtus $\frac{1}{2}(t_1+t_2)$ on reaalarv.

90. Kaasdiameeter ja kaassihid. Tingimusest (89.1) punkti P asetsemiseks kvadriku kõõlu Q_1Q_2 keskpunktis:

$$(a_{ij}p_j+a_i)k_i=0$$

saab teha veel ühe olulise järelduse. Kui fikseerida sihti määrav vektor $\boldsymbol{k} = (k_i)$ ja vaadelda kvadriku kõiki sellesihilisi kõõle, siis nende kõõlude keskpunktide P koordinaadid, nagu selgub mainitud tingimusest, rahuldavad võrrandit

$$(a_{ij}x_j+a_i)k_i=0.$$

Võrrandi vasak pool on polünoom muutujatest x_i, kusjuures selle polünoomi aste ei ole suurem kui 1. Järelikult üldjuhul (erandjuhtu analüüsime allpool) saadud võrrand määrab lineaari (esimest järku joone või pinna [115]) — seega teatava sirge või tasandi.

***Def.* 90.1.** Sirget (tasandit), mis määratakse võrrandiga

$$(a_{ij}x_j+a_i)k_i=0, \tag{90.1}$$

nimetatakse vektori $\boldsymbol{k}=(k_i)$ sihi kaasdiameetriks (kaasdiameetertasandiks) sellise teist järku joone (pinna) suhtes, mis on antud võrrandiga (86.4), sageli aga ka lihtsalt selle joone (pinna) diameetriks (diameetertasandiks).

Edaspidi kõneldes kvadrikust nimetame diameetrit ja diameetertasandit ühiselt diameeterlineaariks. Seega nimetus «diameeterlineaar» (seoses mõistega «kvadrik») tähendab diameetrit, juhul kui kvadrikuks on teist järku joon, ning diameetertasandit, juhul kui tegemist on teist järku pinnaga.

***Def.* 90.2.** Sihti, millel ei ole kaasdiameeterlineaari antud kvadriku suhtes, s. t. mille puhul (90.1) vasakul pool kõikide koordinaatide x_j kordajad on nullid:

$$a_{ij}k_i=0, \tag{90.2}$$

nimetatakse kvadriku iseäraseks sihiks.

Tingimused (90.2) kujutavad endast lineaarset homogeenset süsteemi suuruste k_i leidmiseks. Et sihti määrav vektor $\boldsymbol{k}$ peab olema nullist erinev, siis iseärase sihi olemasolu on samaväärne süsteemi (90.2) mittetriviaalse lahendi k_i olemasoluga. Selleks on aga tarvilik ja piisav, et süsteemi determinant $\delta=\det|a_{ij}|$ oleks võrdne nulliga.

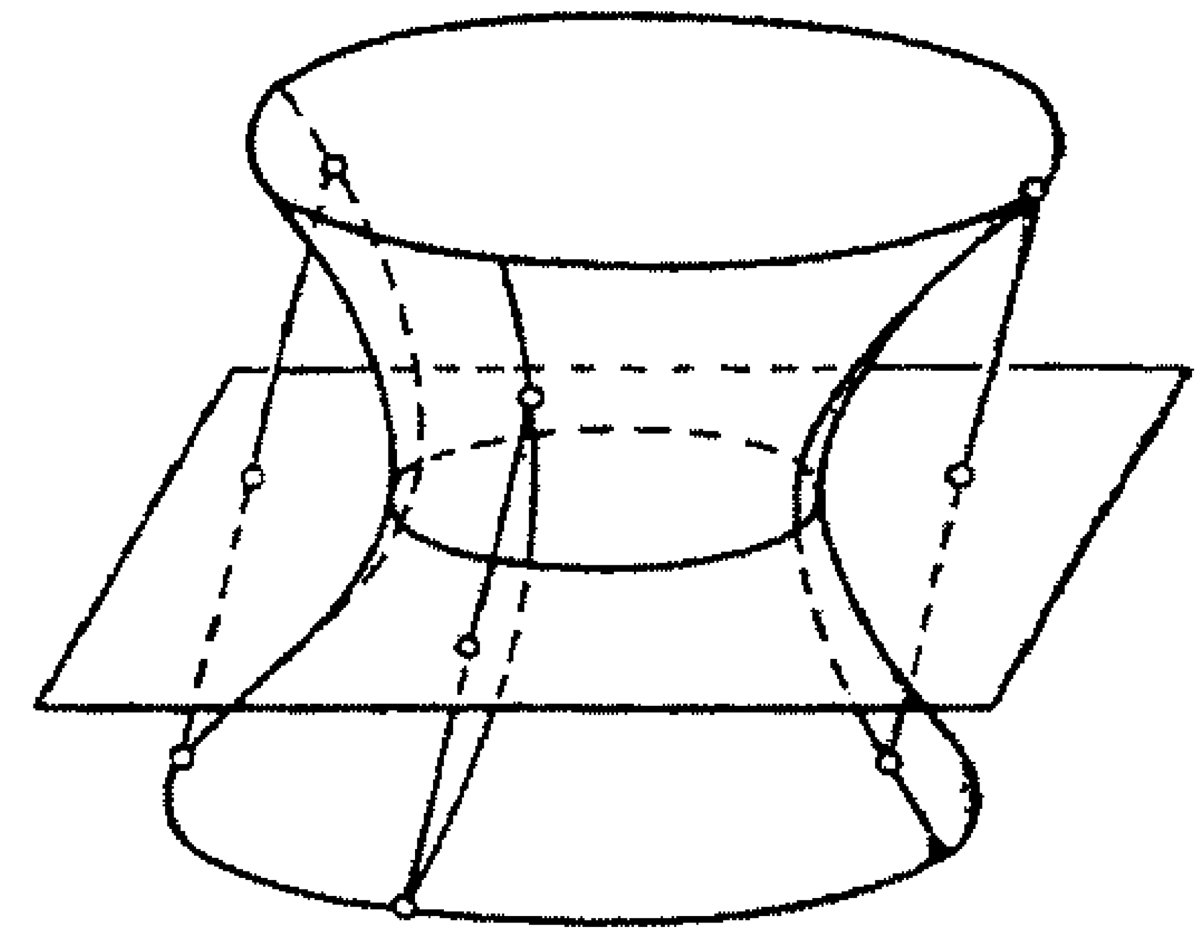
Järelikult iseärane siht on olemas *II* klassi kvadrikutel, mille puhul $\delta=0$, ja ainult nendel. Ta on samal ajal ka asümptootiliseks sihiks, sest võrdustest (90.2) järeldub alati ka asümptootilise sihi tingimus $a_{ij}k_ik_j=0$. Iga asümptootiline siht aga ei tarvitse olla iseärane. Üldiselt on iga kvadriku korral olemas sihte, mis ei ole iseärased, sest kui tingimused (90.2) oleksid rahuldatud iga sihi korral, siis oleks $a_{ij}=0$, see on aga kvadriku korral võimatu.

Def-ile 90.1 eelnenud arutluse põhjal kehtib järgmine teoreem.

[115] Vt. art. 86.

***Teoreem* 90.1.** *Mitteasümptootilise sihi kaasdiameeterlineaar kvadriku suhtes poolitab kvadriku kõik selle sihiga kõõlud.*

Siit järeldub lihtne võimalus mitteasümptootilise sihi kaasdiameeterlineaari konstrueerimiseks. Teist järku joone korral tuleb võtta joone kaks selle sihiga kõõlu ning ühendada nende keskpunktid sirgega. Teist järku pinna korral tuleb võtta pinna kolm selle sihiga kõõlu, mis pole ühel tasandil, ja panna tasand läbi nende keskpunktide (joon. 187).



Joon. 187.

Kaasdiameeterlineaar on määratud ka *I* klassi kvadriku iga asümptootilise sihi jaoks ja *II* klassi kvadriku nende asümptootiliste sihtide jaoks, mis ei ole iseärased. Sel puhul on tal järgmine iseloomulik omadus.

***Teoreem* 90.2.** *Antud siht kuulub oma kaasdiameeterlineaarile siis ja ainult siis, kui see siht on asümptootiline.*

Tõestus. Üldiselt sirge või tasandi puhul, mis on määratud võrrandiga $A_j x_j + A_0 = 0$, on tingimus vektori $\boldsymbol{k} = (k_i)$ kuulumiseks selle sirge või tasandi vektorite hulka järgmine:

$$A_j k_j = 0$$

(vt. (39.4) ja (46.8)). Võrrandiga (90.1) antud kaasdiameeterlineaari puhul $A_j = a_{ij} k_i$. Seega siht kuulub oma kaasdiameeterlineaarile parajasti siis, kui

$$A_j k_j = a_{ij} k_i k_j = 0,$$

s. t. kui ta on asümptootiline. (Selleks et tema kaasdiameeterlineaar oleks määratud, peab ta muidugi olema mitteiseärane.) ∎

Ühtlasi järeldub tõestuses esitatud arutlusest, et tingimus vektori $\boldsymbol{l} = (l_j)$ sihi kuulumiseks vektori $\boldsymbol{k} = (k_i)$ sihi kaasdiameeterlineaarile on järgmine: $A_j l_j = 0$ ehk

$$a_{ij} k_i l_j = 0. \tag{90.3}$$

***Teoreem* 90.3.** *Kui vektori* $\boldsymbol{l}$ *siht kuulub vektori* $\boldsymbol{k}$ *sihi kaasdiameeterlineaarile ja ei ole iseärane, siis ka vastupidi,* $\boldsymbol{k}$ *siht kuulub* $\boldsymbol{l}$ *sihi kaasdiameeterlineaarile. Seejuures iseärane siht, kui selline eksisteerib, kuulub iga sihi kaasdiameeterlineaarile.*

Tõestus. Kui tingimuses (90.3) vahetada summeerimisindeksite i ja j tähised: $a_{ji} k_j l_i = 0$, seejärel aga arvestada võrdust

$a_{ji} = a_{ij}$ ning korrutamise kommutatiivsust, siis saab sellele tingimusele anda kuju $a_{ij}l_ik_j = 0$. Siit ongi näha, et vektorite $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$ osad tingimuses (90.3) on vahetatavad. Kui $\boldsymbol{l}$ siht on iseärane, siis (90.2) põhjal $a_{ij}l_i = 0$ ning (90.3) on rahuldatud iga $\boldsymbol{k}$ korral. ∎

***Def.* 90.3.** Kaht sihti, mille vektorite $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{l}$ koordinaadid rahuldavad tingimust (90.3), nimetatakse k a a s s i h t i d e k s võrrandiga $a_{ij}x_ix_j + 2a_ix_i + a = 0$ antud kvadriku suhtes.

Asümptootilise sihi võib seega defineerida ka kui iseenese kaassihi.

Tingimuse (90.3) lihtsaks järelduseks on selline lause.

***Teoreem* 90.4.** *Olgu kvadriku võrrandiks antud afiinse reeperi suhtes* $a_{ij}x_ix_j + 2a_ix_i + a = 0$. *Selle reeperi mingid kaks baasivektorit* $\boldsymbol{e}_p$ *ja* $\boldsymbol{e}_q$ *on kaassihilised kvadriku suhtes parajasti siis, kui* $a_{pq} = 0$.

T õ e s t u s. Baasivektorite $\boldsymbol{e}_p$ ja $\boldsymbol{e}_q$ koordinaatideks neid sisaldaval baasil on $\boldsymbol{e}_p = (\delta_{pi})$, $\boldsymbol{e}_q = (\delta_{qj})$, s. t. nende koordinaadid on 0 või 1, seejuures 1 ainult juhul, kui koordinaadi indeksi väärtus on võrdne vektori enda indeksi väärtusega. Seega vektorid $\boldsymbol{e}_p$ ja $\boldsymbol{e}_q$ on kaassihilised parajasti siis, kui

$$a_{ij}\delta_{pi}\delta_{qj} = 0.$$

Vasakul indeksi i järgi summeerimisel saab nullist erinev olla ainult üks liidetav, mis vastab väärtusele $i = p$ ja on võrdne $a_{pj}\delta_{qj}$. Sama võib öelda summeerimise kohta j järgi. Seega tulemuseks on tõesti $a_{pq} = 0$. ∎

Siit järeldub, et baasivektori $\boldsymbol{e}_p$ siht on mitteiseärane asümptootiline siht (ehk enese kaassiht) parajasti siis, kui

$$a_{pp} = 0. \tag{90.4}$$

Kui $\boldsymbol{e}_p$ siht on iseärane (see on võimalik ainult *II* klassi kvadrikute puhul), siis (90.2) põhjal $a_{ij}\delta_{pi} = 0$, s. t.

$$a_{pj} = 0 \tag{90.5}$$

(p fikseeritud, j vaba).

Viimaste teoreemide tulemusi on lihtne tõlgendada *I* klassi teist järku joone korral tasandil, näiteks ellipsi või hüperbooli puhul. Teoreemidest 90.3 ja 90.4 järeldub, et kui vektori $\boldsymbol{l}$ sihiline diameeter poolitab vektori $\boldsymbol{k}$ sihilised paralleelsed kõõlud, siis, vastupidi, vektori $\boldsymbol{k}$ sihiline diameeter poolitab vektori $\boldsymbol{l}$ sihilised paralleelsed kõõlud (joon. 188, 189). Selline on kaassihtide geomeetriline tähendus.

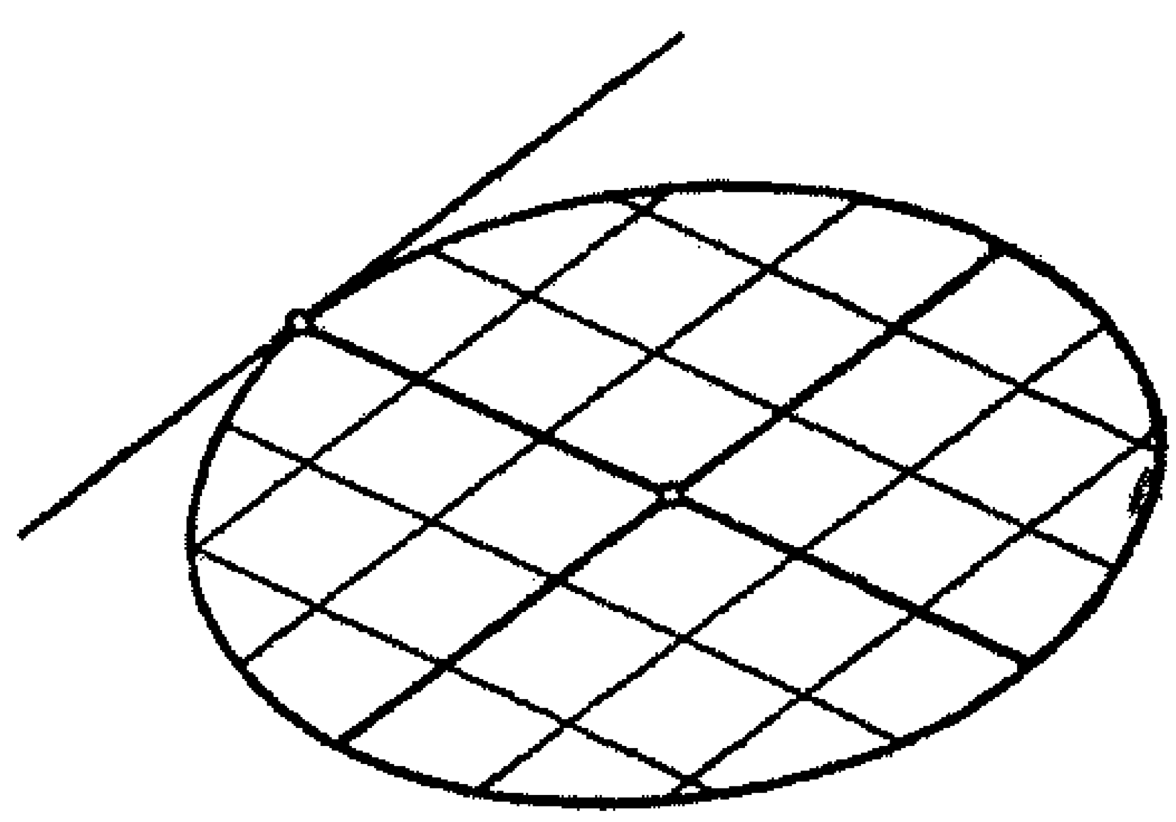
I klassi teist järku joone kõik diameetrid läbivad joone keskpunkti (vrd. (89.2) ja (90.1)) ning moodustavad sirgekimbu, mille baasisirgete võrrandid on

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_1=0, \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_2=0. \end{aligned} \tag{90.6}$$

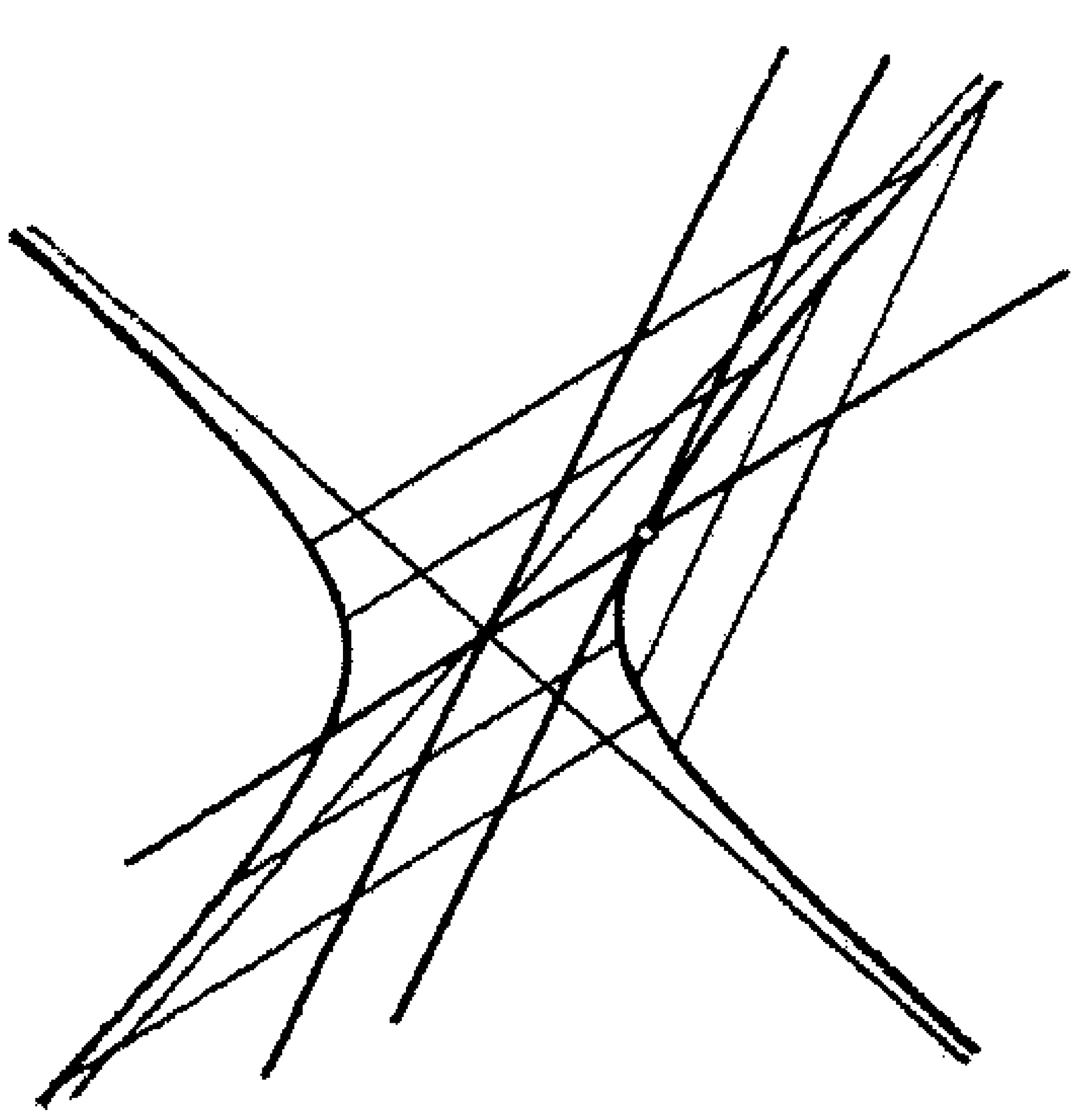
Kaassihilisi diameetreid selles kimbus nimetatakse teineteise **kaasdiameetriteks**. Kumbki neist poolitab teisega paralleelsed kõõlud. Kui üks diameetritest pööreldes keskpunkti ümber läheneb *IA* klassi joone asümptoodile (eeldusel, et selline eksisteerib; vt. def. 89.3), siis teiselt poolt läheneb sellele ka tema kaasdiameeter (joon. 189). Asümptoodil — enese kaasdiameetril — nad kohtuvad.

Mõnevõrra teistsugune on olukord *II* klassi teist järku joonte, näiteks parabooli korral (joon. 190). Iseärasus on selles, et *II* klassi joone kõik diameetrid on omavahel kas paralleelsed või ühtivad Tõepoolest, *II* klassi tunnusest $\delta=0$ järeldub, et baasisirged võrranditega (90.6) on nüüd kas paralleelsed või ühtivad:

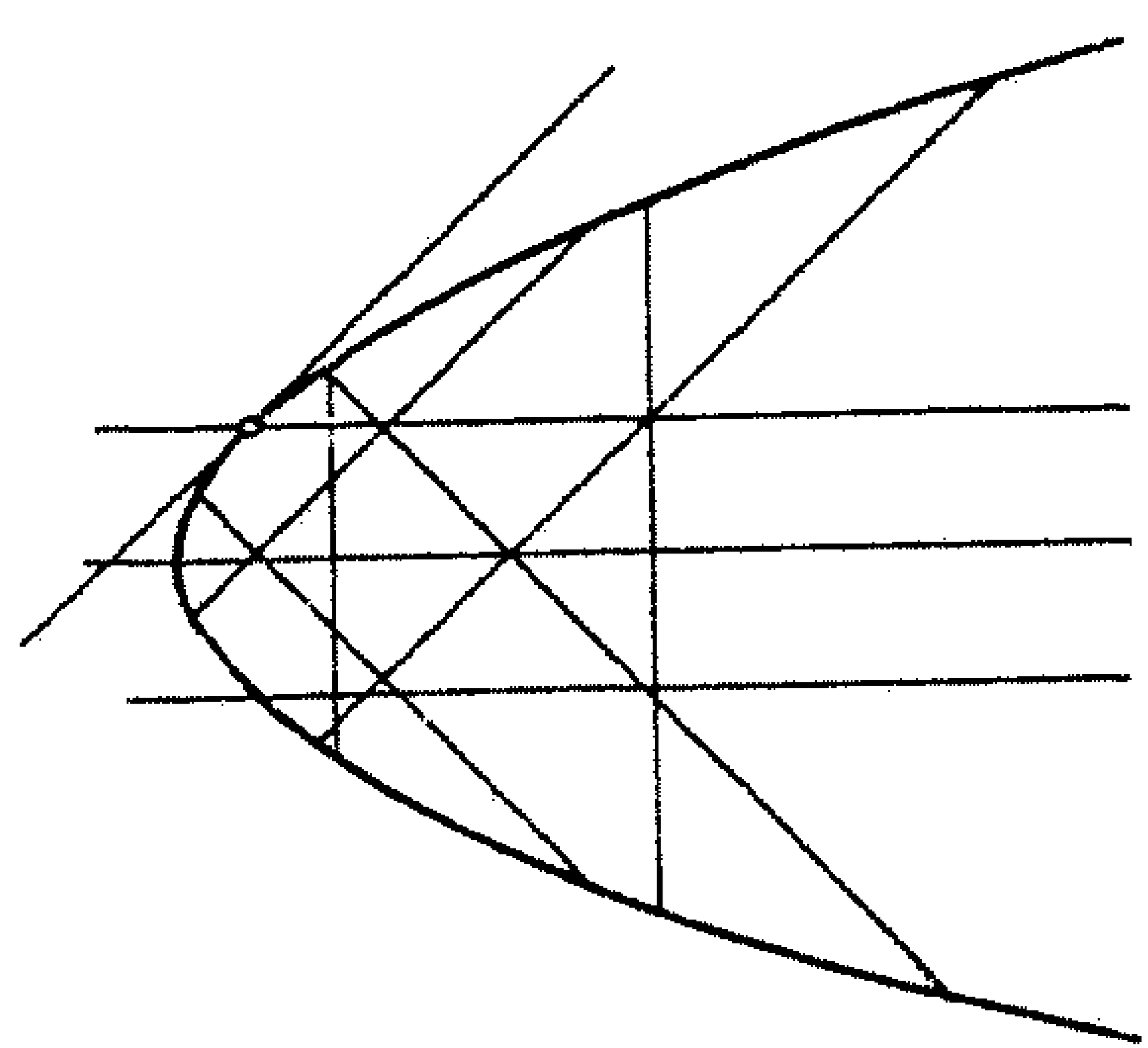
$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}$$



Joon. 188.



Joon. 189



Joon. 190.

ning art. 41 tulemuse põhjal moodustavad kõik diameetrid seega vastavalt kas omavahel paralleelsete või ühtivate sirgete ebakimbu. Seejuures diameetrite ühine siht, mis on määratav vektoriga $\boldsymbol{k}=(k_1, k_2)$, kus kas $k_1=-a_{12}$, $k_2=a_{11}$ või $k_1=-a_{22}$, $k_2=a_{12}$ (vähemalt ühel neist juhtudest $\boldsymbol{k}\neq 0$), osutub iseäraseks sihiks, sest mõlemal juhul

$$a_{11}k_1+a_{12}k_2=0,$$
$$a_{12}k_1+a_{22}k_2=0$$

(vt. (90.2)).

Teist järku pindade korral võib anda analoogilised tõlgendused. Ka siin nimetatakse mingi sihi kaasdiameetertasandit lihtsalt teist järku pinna diameetertasandiks. *I* klassi pindade (näiteks ellipsoidi ja hüperboloidi) korral, milledel on teatavasti olemas parajasti üks keskpunkt, moodustavad diameetertasandid keskpunkti läbivate tasandite sidumi.

***Teoreem* 90.5.** *I klassi teist järku pinna puhul antud rihti kuuluvate sihtide kaasdiameetertasandid moodustavad tasandikimbu, mille telje sihi kaasdiameetertasand on parajasti selle rihiga.*

Tõestus. Olgu riht määratud kahe mittekollineaarse vektoriga $\boldsymbol{l}=(l_i)$ ja $\boldsymbol{m}=(m_i)$. Rihi iga vektor $\boldsymbol{n}=(n_i)$ on siis avaldatav kujul $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{l}\lambda+\boldsymbol{m}\mu$, mistõttu $n_i=\lambda l_i+\mu m_i$. Vektori $\boldsymbol{n}$ sihi kaasdiameetertasandil on võrrand

$$(a_{ij}x_j+a_i)(\lambda l_i+\mu m_i)=0,$$

mis on esitatav kujul

$$\lambda[(a_{ij}x_j+a_i)l_i]+\mu[(a_{ij}x_j+a_i)m_i]=0. \tag{90.7}$$

Siit nähtubki, et λ ja μ suvalisel muutumisel see kaasdiameetertasand kirjeldab tasandikimbu (vt. art. 49), mille baasitasandid määratakse võrranditega

$$\begin{aligned}(a_{ij}x_j+a_i)l_i&=0,\\(a_{ij}x_j+a_i)m_i&=0.\end{aligned} \tag{90.8}$$

Need baasitasandid ei ole paralleelsed ega ühti, sest vastupidisel juhul leiduks reaalarv $\varkappa$, nii et oleks $a_{ij}l_i=\varkappa(a_{ij}m_i)$ ehk $a_{ij}(l_i-\varkappa m_i)=0$, ning et $\det|a_{ij}|\neq 0$, siis siit järelduks $l_i-\varkappa m_i=0$, mis on võimatu, kuna $\boldsymbol{l}\nparallel\boldsymbol{m}$.

Et tasandikimbu teljeks on võrranditega (90.8) antud tasandite lõige ning selle telje siht — olgu see määratud sihivektoriga $\boldsymbol{k}$ — kuulub seega vektorite $\boldsymbol{l}$ ja $\boldsymbol{m}$ sihtide kaasdiameetertasandeile, siis teoreemi 90.3 põhjal kuuluvad vektorite $\boldsymbol{l}$ ja $\boldsymbol{m}$ sihid $\boldsymbol{k}$ sihi kaasdiameetertasandile. Järelikult vektoritega $\boldsymbol{l}$ ja $\boldsymbol{m}$ määratud riht, s. t. antud riht, ühtib $\boldsymbol{k}$ sihi kaasdiameetertasandi rihiga. ∎

Seega I klassi teist järku pinna iga diameetertasand määrab üheselt keskpunkti läbiva sirge, mille sihi kaasdiameetertasandiks ta on. Mõnevõrra teisiti on lugu II klassi pindadega. Siin lisandub üks uus võimalus.

***Teoreem* 90.6.** *Kui antud riht ei sisalda **II** klassi teist järku pinna iseärast sihti, siis tema korral kehtib teoreemi* 90.5 *väide. Kui antud riht, vastupidi, sisaldab iseärase sihi, siis kõigi tema mitteiseäraste sihtide kaasdiameetertasandid on kas paralleelsed, moodustades seega tasandite ebakimbu, või ühtivad.*

T õ e s t u s. Mõlema väite puhul tuleb korrata eelmise teoreemi tõestust kuni võrranditeni (90.8). Esimese väite puhul tuleb jätkata järgmiselt. Kui oletada, et võrranditega (90.8) määratud tasandid on paralleelsed või ühtivad, siis leiduks reaalarv $\varkappa$, nii et oleks $a_{ij}l_i = \varkappa(a_{ij}m_i)$ ehk $a_{ij}(l_i - \varkappa m_i) = 0$. Siin on võimatu nii $\boldsymbol{l} - \boldsymbol{m}\varkappa \neq \boldsymbol{0}$ kui ka $\boldsymbol{l} - \boldsymbol{m}\varkappa = \boldsymbol{0}$. Esimesel juhul antud rihi vektori $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{l} - \boldsymbol{m}\varkappa$ puhul oleks $a_{ij}n_i = 0$ ning see vektor määraks antud rihti kuuluva iseärase sihi, mis on vastuolus eeldusega. Teisel juhul aga oleks $\boldsymbol{l} \parallel \boldsymbol{m}$, mis on vastuolus $\boldsymbol{l}$ ja $\boldsymbol{m}$ valikuga. Järelikult on siin olukord sama nagu eelmise teoreemi tõestuses ning jääb ainult korrata seal tehtud arutlusi.

Teise väite puhul, mil antud rihis leidub iseärase sihiga nullist erinev vektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{l}\varrho + \boldsymbol{m}\sigma$, on $a_{ij}n_i = 0$ ehk $a_{ij}(\varrho l_i + \sigma m_i) = 0$ ehk $\varrho(a_{ij}l_i) + \sigma(a_{ij}m_i) = 0$, kus ϱ ja σ pole korraga nullid. Sellest järeldub, et kui $\boldsymbol{l}$ ja $\boldsymbol{m}$ pole iseärase sihiga, siis võrranditega (90.8) määratud tasandid — nende kaasdiameetertasandid — on kas paralleelsed või ühtivad. Sel korral aga art. 49 tulemuste põhjal ka võrrand (90.7) määrab nendega vastavalt paralleelse või ühtiva tasandi (kui ta üldse mingi tasandi määrab). ∎

II klassi teist järku pinna keskpunktide sirgega või tasandiga (kui selline eksisteerib, vt. art. 89) on pinna diameetertasandid seotud järgmiselt.

***Teoreem* 90.7.** *Teist järku pinna iga diameetertasand läbib pinna kõik keskpunktid. Vastupidi, kui mingi punkt on kolme mittekomplanaarse sihi kaasdiameetertasandite ühine punkt, siis see punkt on pinna keskpunkt.*

T õ e s t u s. Esimese väite puhul tarvitseb vaid võrrelda tingimusi (89.2) ja võrrandit (90.1).

Teine väide kordab teoreemi 89.1 pindu puudutavat osa. Selle tõestamiseks oletame, et mingi punkti $P(p_j)$ koordinaadid rahuldavad kolme mittekomplanaarse vektori $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$ ja $\boldsymbol{m}$ sihtide kaasdiameetertasandite võrrandeid:

$$\begin{aligned}(a_{1j}p_j+a_1)k_1 + (a_{2j}p_j+a_2)k_2 + (a_{3j}p_j+a_3)k_3 &= 0,\\ (a_{1j}p_j+a_1)l_1 + (a_{2j}p_j+a_2)l_2 + (a_{3j}p_j+a_3)l_3 &= 0,\\ (a_{1j}p_j+a_1)m_1 + (a_{2j}p_j+a_2)m_2 + (a_{3j}p_j+a_3)m_3 &= 0.\end{aligned}$$

Vektorite $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$ ja $\boldsymbol{m}$ mittekomplanaarsuse tõttu nende koordinaatidest moodustatud determinant on nullist erinev. Seetõttu saadud kolme võrdust, kui neid vaadelda lineaarse homogeense süsteemina suluavaldiste määramiseks, rahuldavad üksnes nulliga võrduvad suluavaldised, sest süsteemil on ainult triviaalne lahend. Suluavaldiste võrdumisest nulliga järeldub (89.7) põhjal, et P on vaadeldava teist järku pinna keskpunkt. ∎

Järelikult keskpunktide sirgega teist järku pinna diameetertasandid moodustavad tasandikimbu, mille teljeks on keskpunktide sirge, keskpunktita pinna diameetertasandid aga ei saa moodustada tasandikimpu (küll võivad nad moodustada tasandite ebakimbu, näiteks paraboolse silindri korral). Keskpunktide tasandiga teist järku pinna kõik diameetertasandid ühtivad keskpunktide tasandiga.

91. Puutujad. Antud kvadriku ja mingi sirge vastastikuse asendi uurimisel pakuvad erilist huvi need mitteasümptootilise sihiga sirged, mille puhul sirge ja kvadriku lõikepunkte määraval ruutvõrrandil (88.2):

$$(a_{ij}k_ik_j)t^2+2[(a_{ij}p_j+a_i)k_i]t+(a_{ij}p_ip_j+2a_ip_i+a)=0$$

on üksainus lahend. Sel korral sirgel on kvadrikuga üksainus ühine punkt. Selle ühise punkti võib valida sirgel fikseeritud punktiks $P(p_j)$. Et selliselt valitud punkt P asub kvadrikul, siis

$$a_{ij}p_ip_j+2a_ip_i+a=0. \tag{91.1}$$

Järelikult vaadeldava ruutvõrrandi vabaliige on sellisel juhul 0 ning võrrandi üheks lahendiks on $t_1=0$. Sama väärtus 0 peab olema ka võrrandi teiseks lahendiks, mis tuleb määrata lineaarvõrrandist

$$(a_{ij}k_ik_j)t+2[(a_{ij}p_j+a_i)k_i]=0.$$

Seetõttu

$$(a_{ij}p_j+a_i)k_i=0. \tag{91.2}$$

Niisiis, kõigi mitteasümptootilise sihiga sirgete puhul, millel on kvadrikuga üksainus ühine punkt P, rahuldavad nende sihivektorite $\boldsymbol{k}$ koordinaadid k_i võrrandit (91.2). Kui selle võrrandi kordajad (suluavaldised $a_{ij}p_j+a_i$) ei ole korraga nullid, siis võrrand määrab tasandi vektorite hulgas teatava sihi, ruumi vektorite hulgas aga teatava rihi, mida nimetatakse kvadriku vastavalt puutujasihiks või puutujarihiks punktis P. Kvadriku sellise punkti P jaoks, milles puutujasiht või -riht jääb määramatuks, s. t. mille puhul kõik suluavaldised on nullid, on kasutusel eri nimetus.

***Def.* 91.1.** Kvadriku punkti P, mille koordinaadid rahuldavad tingimusi

$$a_{ij}p_j+a_i=0, \tag{91.3}$$

nimetatakse kvadriku **iseäraseks punktiks**.

Võrdlemisel keskpunkti määravate tingimustega (89.2) selgub, et iseärane punkt on alati keskpunktiks, ning vastupidi, iga keskpunkt, mis on samal ajal kvadriku punkt, on iseärane.

Igal kvadrikul ei ole iseärast punkti. Vastava tunnuse leidmiseks tuleb tingimustele (91.3) lisada võrdus (91.1), mis garanteerib, et punkt P on kvadrikul. Selle võrduse saab esitada kujul

$$(a_{ij}p_j+a_i)p_i+a_jp_j+a=0, \tag{91.4}$$

mistõttu ta lisab tingimustele (91.3) üksnes seose

$$a_jp_j+a=0. \tag{91.5}$$

Viimane koos tingimustega (91.3) annab lineaarse võrrandisüsteemi punkti P koordinaatidele p_i, mille võrrandite arv ületab ühe võrra nende koordinaatide arvu. Seejuures iseärase punkti P olemasolu on samaväärne selle süsteemi lahenduvusega. Viimaseks on aga teatavasti tarvilik, et süsteemi laiendatud maatriksi

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} \dots a_{1n} & a_n \\ \dots & \\ a_{n1} \dots a_{nn} & a_n \\ a_1 \;\dots a_n & a \end{matrix} \right\|$$

determinant Δ (vt. art. 87) oleks võrdne nulliga, kusjuures juhul kui süsteemi maatriksi

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \\ a_1 \;\dots a_n \end{matrix} \right\|$$

astak ühtib tundmatute p_i arvuga, näiteks juhul kui maatriksi $\|a_{ij}\|$ determinant δ on nullist erinev, on see tingimus ka piisav.[116] Viimasel korral eksisteerib üksainus lahend, s. t leidub üksainus iseärane punkt.

Järelikult kehtib niisugune teoreem.

***Teoreem* 91.1.** *Iseärane punkt saab eksisteerida ainult **B** klassi kvadrikutel. Seejuures **IB** klassi igal kvadrikul on parajasti üks iseärane punkt, mis ühtib kvadriku ainsa keskpunktiga.*

---

[116] Vt G. K a n g r o, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 72

Nüüd on võimalik käesoleva artikli algul käsitletud sirgete seast välja eraldada teatavad erilised sirged.

***Def.* 91.2.** Antud kvadriku korral mitteasümptootilise sihiga sirget, mis ei läbi kvadriku iseärast punkti ja millel on kvadrikuga üksainus ühine punkt, nimetatakse kvadriku puutujaks. Mainitud ühist punkti nimetatakse sel korral puutepunktiks.

Kui puutepunkti P koordinaadid on p_j, siis puutuja sihivektori $\boldsymbol{k}$ koordinaadid k_i, nagu eespool selgus, rahuldavad tingimust (91.2). Sellest järeldub omakorda tingimus, mida peavad rahuldama puutuja iga punkti X koordinaadid x_i. Viimased on nimelt avaldatavad kujul $x_i = p_i + tk_i$, mistõttu $tk_i = x_i - p_i$. Tarvitseb vaid tingimuse (91.2) pooli korrutada arvuga t, anda talle seejärel kuju $(a_{ij}p_j + a_i)(tk_i) = 0$ ning asendada siia tk_i avaldised. Tulemuseks ongi soovitud tingimus

$$(a_{ij}p_j + a_i)(x_i - p_i) = 0, \tag{91.6}$$

mis on ilmselt tarvilik selleks, et $X(x_i)$ asuks kvadriku puutujal puutepunktiga p_i. Sellele tingimusele saab anda kergemini meeldejääva kuju, kui tema pooltele liita võrduse (91.4) pooled. Tulemus

$$a_{ij}x_ip_j + a_i(x_i + p_i) + a = 0 \tag{91.7}$$

on saadud, nagu näha, puutepunkti P koordinaatide p_i n.-ö. pooliti asendamisega kvadriku võrrandisse

$$a_{ij}x_ix_j + 2a_ix_i + a = 0$$

ning kujutab lineaarvõrrandit koordinaatide x_i jaoks, sest puutuja mõiste kohaselt P ei ole kvadriku iseärane punkt ja seetõttu kõik x_i kordajad ei ole nullid.

Teist järku joone puhul määrab võrrand (91.7) teatava sirge. Tekib küsimus, kas saadud sirge on alati teist järku joone puutuja. Ei ole ju millestki järeldatav, et sellel sirgel on mitteasümptootiline siht. Näiteks laguva teist järku joone korral, mil joon kujutab endast sirgepaari, saab eelnenud arutlust korrates selle paari kummagi sirge samuti esitada võrrandiga (91.7), samal ajal kui need sirged on, nagu teada (vt. art. 88), asümptootilise sihiga ja seetõttu def. 91.2 kohaselt ei ole puutujad.[117]

[117] Diferentsiaalarvutuse geomeetrilistes rakendustes (vt. G. Kangro, Matemaatiline analüüs I. Tallinn, 1965, lk. 170; Ü. Lumiste, Diferentsiaalgeomeetria. Tallinn, 1963, lk. 29) defineeritakse mistahes sileda joone puutuja kui joone kaht punkti läbiva sirge piirseis ühe punkti piiramatul lähenemisel teisele mööda joont. Selle definitsiooni kohaselt on sirge puutujaks see sirge ise, mistõttu puutuja selline mõistmine on teist järku joonte korral mõnevõrra üldisem, kui def. 81.2 järgi. Erinevus ilmneb laguvate joonte juures. Mittelaguva teist järku joone korral on mõlemad definitsioonid samaväärsed. Seda asjaolu on kasutatud koonuselõike puutuja defineerimisel art-s 74.

Teoreem 91.2. *Kui teist järku joon ei ole laguv, siis võrrand* (91.7), *kus p_i on joone mingi mitteiseärase punkti P koordinaadid, määrab alati joone puutuja punktis P.*

T õ e s t u s. Eespool on juba kindlaks tehtud, et teist järku joone puutuja punktis P, kui ta eksisteerib, on määratud võrrandiga (91.7). Vastupidi, kui punkti $X(x_i)$ koordinaadid rahuldavad seda võrrandit, siis vektori $\boldsymbol{k} = \overrightarrow{PX}$ koordinaadid rahuldavad tingimust (91.6) ehk (91.2). Järelikult võrrandiga (91.7) määratud sirge kas pole asümptootilise sihiga ning tema ja joone lõikepunkte määraval võrrandil on üksainus kahekordne lahend $t = 0$, või ta on asümptootilise sihiga ja kuulub tervikuna joonele. Esimesel juhul on tegemist puutujaga, teisel juhul laguva joonega, mille jaoks võrrandiga (91.7) määratud sirge on üheks teda koostavast kahest sirgest. Seega mittelaguva joone korral on võimalik üksnes esimene juht. ∎

Teist järku pinna puhul võrrand (91.7) määrab teatava tasandi, kusjuures on selge, et kui pinnal on olemas puutujaid punktis P, siis need asuvad sellel tasandil. Erandiks on juht, kui selle tasandi igal sirgel, mis läbib punkti P, on asümptootiline siht. Sel korral igaüks neist sirgetest on pinnal ning järelikult ka kogu see tasand kuulub pinnale. Kui reeper valida niiviisi, et vaadeldav tasand on x_1x_2-tasandiks, siis on võimalik näidata, samuti nagu art. 88 lõpus teist järku joonte puhul, et tegemist on laguva teist järku pinnaga — tasandipaariga (vt. ka art. 94).

***Def.* 91.3.** Mittelaguva teist järku pinna korral nimetatakse tasandit, mis määratakse võrrandiga (91.7), kus p_i on pinna mingi mitteiseärase punkti P koordinaadid, pinna p u u t u j a - t a s a n d i k s.

Puutujatasand, nagu selgus, sisaldab teist järku pinna kõik puutujad punktis P.

Kokkuvõttes on sõnastatav järgmine teoreem.

Teoreem 91.3. *Igal mittelaguval kvadrikul on igas mitteiseärases punktis olemas puutuja või puutujatasand. Seejuures ühelgi puutujal ei ole iseärast sihti.*

T õ e s t u s. Esimene väide järeldub ülaltoodud arutelust, sest puutuja või puutujatasandi puudumine mingis punktis on võimalik üksnes laguva kvadriku korral. Teise väite põhjendamiseks on küllalt, kui märkida, et iseärane siht on samal ajal ka asümptootiline siht, puutujal aga ei saa olla asümptootilist sihti. ∎

Puutuja seose diameetriga annab järgmine lause.

Teoreem 91.4. *Puutuja sihi kaasdiameeter läbib puutepunkti* (joon. 188, 189, 190).

T õ e s t u s. Kui puutepunktiks on $P(p_j)$, siis puutuja sihivektori $\boldsymbol{k}$ koordinaadid k_i rahuldavad tingimust (91.2). Samal ajal vektori $\boldsymbol{k}$ sihi kaasdiameetri võrrandiks on (90.1). Lihtne võrdlus näitab, et P koordinaadid p_j rahuldavad seda võrrandit. ▮

Tingimusest (91.2) tuleneb järgmine lihtne järeldus.

Teoreem 91.5. *Olgu kvadriku võrrandiks mingi afiinse reeperi suhtes* $a_{ij}x_ix_j+2a_ix_i+a=0$. *Kui reeperi baasivektor* $\boldsymbol{e}_q$ *on kvadriku mingi puutuja sihivektoriks ja reeperi alguspunkt* O *selle puutuja ja kvadriku puutepunktiks, siis*

$$a_q=a=0 \quad (q \text{ — } \textit{fikseeritud}).$$

Tõestus. Baasivektori $\boldsymbol{e}_q$ koordinaadid on $k_i=\delta_{qi}$, alguspunkti O koordinaadid aga $p_j=0$. Pärast asendust võrdusse (91.2) on tulemuseks

$$a_i\delta_{qi}=0$$

ehk $a_q=0$. Lisaks sellele tuleb arvestada, et puutepunkt O asub kvadrikul, s. t. $a=0$. ▮

Tulemus leiab koos teoreemidega 89.3 ja 90.4 kasutamist järgmises artiklis, kus me lihtsustame kvadriku võrrandit reeperi sobiva valiku teel.

92. Kvadrikute lihtsaimad võrrandid. Nagu selgus juba art-s 87, sõltuvad antud kvadriku võrrandi kordajad, kui neid vaadelda üksikult, oluliselt sellest, missuguse afiinse reeperi suhtes võrrand on koostatud. Kordajate süsteemi teatavad omadused on aga seejuures antud kvadriku puhul püsivad ega sõltu reeperi valikust. Sellisteks on näiteks omadused $\delta\neq 0$ ja $\delta=0$, $\Delta\neq 0$ ja $\Delta=0$, mis olid aluseks kvadrikute jagamisel klassidesse ***I*** ja ***II***, ***A*** ja ***B***. Tekib huvitav ülesanne selgitada, millisel määral saab ühe või teise klassi kvadrikute võrrandeid lihtsustada, kui afiinse reeperi sobiva valikuga muuta maksimaalne arv üksikuid kordajaid võrdseks nulliga ning anda ülejäänud kordajatele võimalikult lihtsad väärtused. Aluseks on seejuures teoreemid 89.3, 90.4 ja 91.5.

Alustame ***I*** klassi kvadrikutest, s. t. juhust, mil $\delta\neq 0$. Igal selle klassi kvadrikuist on olemas parajasti üks keskpunkt. Kui reeperi alguspunkt O paigutada sellesse keskpunkti, siis teoreemi 89.3 põhjal kvadriku võrrandis

$$a_{ij}x_ix_j+2a_ix_i+a=0$$

on $a_i=0$.

Baasivektori $\boldsymbol{e}_1$ võib valida vabalt, baasivektori $\boldsymbol{e}_2$ aga selliselt, et $\boldsymbol{e}_1$ ja $\boldsymbol{e}_2$ sihid oleksid kaassihtideks antud kvadriku suhtes (***I*** klassi kvadrikul puudub iseärane siht ja seetõttu igal sihil on vähemalt üks kaassiht). Teoreemi 90.4 põhjal $a_{12}=0$.

Teist järku joone korral on võrrandi lihtsustamise esimene etapp sellega lõppenud. Võrrand on omandanud kuju

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a=0. \tag{92.1}$$

Et siin *I* klassi tunnuse põhjal

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\,a_{22}\neq 0,$$

siis mõlemad kordajad a_{11} ja a_{22} on nullist erinevad

Teist järku pinna korral on jäänud valida baasivektori $\boldsymbol{e}_3$ siht. Siin võib kasutada teoreemi 90.5, mille kohaselt vektoreid $\boldsymbol{e}_1$ ja $\boldsymbol{e}_2$ sisaldava rihi sihtide kaasdiameetrid moodustavad tasandikimbu. Vektoriks $\boldsymbol{e}_3$ võib valida selle kimbu telje sihivektori. Sel korral $\boldsymbol{e}_1$ ja $\boldsymbol{e}_3$ on kaassihilised ning ka $\boldsymbol{e}_2$ ja $\boldsymbol{e}_3$ on kaassihilised, mistõttu teoreemi 90.4 põhjal $a_{13}=a_{23}=0$. Pinna võrrand on omandanud kuju

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a=0. \tag{92.2}$$

Siin *I* klassi tunnusest $\delta\neq 0$ järeldub võrduse $\delta=a_{11}a_{22}a_{33}$ tõttu samuti kordajate a_{11}, a_{22} ja a_{33} erinevus nullist.

Edasine lihtsustamine on klasside ***A*** ja ***B*** kvadrikute puhul mõnevõrra erinev. Nende klasside tunnusteks on vastavalt $\Delta\neq 0$ ja $\Delta=0$. Seejuures võrrandi (92.1) puhul $\Delta=a_{11}a_{22}a$, võrrandi (92.2) puhul aga $\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}a$, mistõttu nende võrranditega antud kvadrikute kuuluvus klassi ***A*** või ***B*** sõltub sellest, kas $a\neq 0$ või $a=0$.

Esimesel juhul võib võrrandite (92.1) ja (92.2) pooli korrutada arvuga $-a^{-1}$ ning anda neile seejärel vastavalt kuju

$$\begin{aligned} &\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2=1,\\ &\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\lambda_3x_3^2=1, \end{aligned} \tag{92.3}$$

kus $\lambda_i=a^{-1}a_{ii}$ (siin mitte summeerida). Teisel juhul, kui $a=0$, võib võrrandid kirjutada analoogiliselt kujul

$$\begin{aligned} &\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2=0,\\ &\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\lambda_3x_3^2=0, \end{aligned}$$

kus $\lambda_i=a_{ii}$ (mitte summeerida).

Et kõikidel neil juhtudel $\lambda_i\neq 0$, siis on võimalik baasivektorit $\boldsymbol{e}_i$ sobiva arvuga korrutades saavutada, et λ_i asendub arvuga $+1$ või -1 olenevalt sellest, kas ta on positiivne või negatiivne. Tõepoolest, kui iga baasivektorit $\boldsymbol{e}_i$ korrutada arvuga $\varkappa(i)$ (siin $\varkappa(i)$ võib i iga väärtuse korral olla erinev ja seetõttu sõltub naturaalarvust i), siis vabalt võetud punkti X vastav koordinaat x_i korrutub arvuga $[\varkappa(i)]^{-1}$, sest võrdusest $\overrightarrow{OX}=\boldsymbol{e}_ix_i$ järeldub siis $\overrightarrow{OX}=[\boldsymbol{e}_i\varkappa(i)]\left[\frac{1}{\varkappa(i)}x_i\right]$, s.t. toimub teisendus

$$x'_i=\frac{1}{\varkappa(i)}x_i,$$

ehk $x_i=\varkappa(i)x'_i$. Kui nüüd valida $\varkappa(i)=\frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$, siis

$$x_i^2=\frac{1}{|\lambda_i|}x'_i$$

ning näiteks võrrandile (92.1) tuleb kuju

$$\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}x_1'^2+\frac{\lambda_2}{|\lambda_2|}x_2'^2=1.$$

(Analoogiliselt teisenevad ka ülejäänud kolm võrrandit). Sõltuvalt λ_i märgist on $\frac{\lambda_i}{|\lambda_i|}$ kas $+1$ või -1.

Järelikult *I* klassi teist järku joone puhul saab sellele võrrandile anda ühe järgmisest viiest kujust:

IA klassi jooned $\delta\neq0$, $\Delta\neq0$	1. $x_1^2+x_2^2=1$ 2. $x_1^2-x_2^2=1$ 3. $-x_1^2-x_2^2=1$	(92.4)
IB klassi jooned $\delta\neq0$, $\Delta=0$	4. $x_1^2-x_2^2=0$ 5. $x_1^2+x_2^2=0$	

Mõeldavad on veel juhud $-x_1^2+x_2^2=1$, $-x_1^2-x_2^2=0$ ja $-x_1^2+x_2^2=0$, kuid esimene neist erineb juhust 2) ainult koordinaatide x_1 ja x_2 järjekorra poolest, mis on muidugi ebaoluline, ülejäänud kaks on aga samaväärsed vastavalt juhtudega 4) ja 5).

I klassi teist järku pinna võrrandile saab anda ühe järgmisest kuuest kujust:

I A klassi pinnad $\delta\neq0$, $\Delta\neq0$	1. $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 2. $x_1^2+x_2^2-x_3^2=1$ 3. $x_1^2-x_2^2-x_3^2=1$ 4. $-x_1^2-x_2^2-x_3^2=1$	(92.5)
I B klassi pinnad $\delta\neq0$, $\Delta=0$	5. $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ 6. $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$	

Ülejäänud mõeldavad kujud on saadavad neist kas koordinaatide ümbernummerdamisega või pärast läbikorrutamist arvuga -1 või mõlema võtte koosrakendamisega.

II klassi kvadrikute puhul tuleb talitada teisiti. Siin keskpunkt võib hoopis puududa. Seetõttu on otstarbekas alustada baasivektorite valikust, kasutades asjaolu, et igal selle klassi kvadrikul on olemas vähemalt üks iseärane siht. Kui baasivektor e_1 valida iseärasel sihil, siis (90.2) põhjal

$$a_{1j}=0.$$

Edasi tuleb eraldi vaadelda ***A*** ja ***B*** klassi kvadrikuid.

A klassi kvadrikud on mittelaguvad, sest iga laguva kvadriku saab reeperit sobivalt valides esitada ühega võrrandeist $x_1x_2 = 0$, $x_1^2-1=0$, $x_1^2=0$ (vastavalt sellele, kas on tegemist lõikuvate, paralleelsete või ühtivate sirgete või tasandite paariga) ning järelikult on laguva kvadriku korral $\Delta = 0$. Teoreemi 91.2 põhjal on ***A*** klassi kvadriku igas mitteiseärases punktis olemas puutuja või puutujatasand. Reeperi alguspunkti O paigutame nüüd kvadriku ükskõik missugusesse mitteiseärasesse punkti, baasi ülejäänud osa (tasandi juhul e_2, ruumi juhul e_2 ja e_3) aga võtame kvadriku puutuja või puutujatasandi vektorite seast selles punktis O. Sel korral teoreemi 91.5 põhjal tasandi juhul $a_2 = a = 0$, ruumi juhul $a_2 = a_3 = a = 0$.

Seega ***II A*** klassi teist järku joone võrrandil on selliselt valitud reeperi suhtes kuju

$$a_{22}x_2^2+2a_1x_1=0. \tag{92.6}$$

Et siin

$$\Delta= \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =-a_1^2a_{22}\neq 0,$$

siis $a_{22}\neq 0$, $a_1\neq 0$.

II A klassi teist järku pinna korral saab baasivektorite e_2 ja e_3 valikut veelgi täpsustada. Et puutujatasandil leidub kindlasti puutujaid ja ühegi sellise siht ei ole iseärane, siis võib vektori e_2 sihiks valida mingi mitteiseärase sihi puutujatasandi rihis. Sellel sihil on olemas kaasdiameetertasand, mis, läbides teoreemi 91.4 kohaselt puutepunkti O, lõikab puutujatasandit mööda teatavat sirget. Baasivektoriks e_3 võib võtta selle sirge sihivektori. Sel korral e_3 siht on e_2 sihi kaassihiks ja teoreemi 90.4 põhjal $a_{23} = 0$. Seega ***II A*** klassi teist järku pinna võrrandil on selliselt valitud reeperi suhtes kuju

$$a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_1x_1= 0. \tag{92.7}$$

Seejuures

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=a_1^2a_{22}a_{33}\neq 0,$$

mistõttu $a_{22}\neq 0$, $a_{33}\neq 0$, $a_1\neq 0$.

Edasi võib võrranditega (92.6) ja (92.7) talitada järgmiselt: viia üksliige $2a_1x_1$ teisele poole võrdusmärki, jagada seejärel pooli arvuga $-a_1$ ning pärast seda baasivektoreid e_2 ja e_3 sobivalt korrutades muuta x_2^2 ja x_3^2 kordajad võrdseks arvuga $+1$ või -1, olenevalt kordaja esialgsest märgist.

Oluliselt erinevateks on järgmised juhud:

II A klassi jooned $\delta=0,\ \Delta\neq 0$	6. $x_2^2=2x_1$

(92.8)

II A klassi pinnad $\delta=0,\ \Delta\neq 0$	7. $x_2^2+x_3^2=2x_1$ 8. $x_2^2-x_3^2=2x_1$

Teised mõeldavad juhud on viidavad ülal näidatutele. Näiteks juhul $-x_2^2+x_3^2=2x_1$ tuleb võrrandi pooli korrutada arvuga -1, vahetada omavahel baasivektorid e_2 ja e_3 ning baasivektor e_1 asendada vektoriga $-e_1$. Tulemuseks on juht 8.

Lõppeks on jäänud veel ***II B*** klassi kvadrikute võrrandite lihtsaimad kujud. Alustame selle klassi teist järku joontest. Kui valida e_1 iseärases sihis, siis võrrandis

$$a_{1j}=0.$$

Lisaks sellele $\Delta=0$, s. t.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}=-a_1^2\,a_{22}=0.$$

Teist järku joone korral $a_{22}\neq 0$, seega $a_1=0$ ning joone võrrandil on kuju

$$a_{22}x_2^2+2a_2x_2+a=0.$$

Võrrandist on kaotsi läinud koordinaat x_1. Koos sellega jääb ka keskpunkti määravast süsteemist (89.5) järele vaid üksainus võrrand $a_{22}x_2 + a_2 = 0$, mis on lahenduv, sest $a_{22} \neq 0$. Kui koordinaatide alguspunktiks O võtta punkt keskpunktide sirgel, siis $a_2 = 0$ ning joone võrrandiks tuleb

$$a_{22}x_2^2 + a = 0. \tag{92.9}$$

Juhul $a \neq 0$ viime vabaliikme teisele poole võrdusmärki, jagame võrrandi läbi arvuga $-a$ ning baasivektorit e_2 sobivalt korrutades muudame seejärel x_2 kordaja võrdseks arvuga $+1$ või -1. Juhul $a = 0$ piisab ainult viimasest operatsioonist. Lihtsaimad võrrandid on seega järgmised.

II B klassi jooned $\delta=\Delta=0$	7. $x_2^2=1$ 8. $-x_2^2=1$ 9. $x_2^2=0$	(92.10)

Analoogiliselt tuleb talitada *II B* klassi teist järku pindade puhul. Baasivektorite valikuga võib nimelt saavutada, et pinna võrrandist läheb kaotsi koordinaat x_1.

Alustame pindadest, millel on üksainus iseärane siht. Valides baasivektori e_1 selles sihis, saame $a_{1j} = 0$. Arvestame, et praegu

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix} = a_1^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{92.11}$$

Seejuures iseärase sihi tunnuseks (90.2) on nüüd

$$\begin{aligned} a_{22}k_2 + a_{23}k_3 &= 0, \\ a_{23}k_2 + a_{33}k_3 &= 0, \end{aligned} \tag{92.12}$$

ning et teisi iseäraseid sihte peale e_1 sihi ei tohi olla, siis see süsteem saab omada ainult triviaalse lahendi $k_2 = k_3 = 0$. Järelikult süsteemi determinant on nullist erinev ning tingimusest (92.11) tuleneb, et $a_1 = 0$. Pinna võrrandil on seega kuju

$$a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + a = 0. \tag{92.13}$$

Koordinaati x_1 see võrrand, nagu näha, ei sisalda.

Kui pinnal on rohkem kui üks iseärane siht, siis võib ka baasivektori e_2 valida iseärases sihis. Sel korral süsteem (92.12) on rahuldatud, kui $k_2 = 1$, $k_3 = 0$, mistõttu $a_{22} = a_{23} = 0$. Süsteem seab seega ainsa tingimuse: $k_3 = 0$, s. t. vektoreid e_1 ja e_2 sisaldava rihi iga siht on iseärane ehk, nagu öeldakse, see riht on iseärane. Järelikult e_1 ja e_2 sihid on selles rihis vabalt valitavad.

Seda vabadust võib kasutada pinna võrrandi

$$a_{33}x_3+2a_1x_1+2a_2x_2+2a_3x_3+a=0 \qquad (92.14)$$

edasiseks lihtsustamiseks. Viimane on vajalik siis, kui selles võrrandis a_1 ja a_2 on mõlemad nullist erinevad. (Kui $a_1=0$, siis on eesmärk juba saavutatud — võrrandis puudub x_1; kui $a_2=0$, siis piisab x_1 ja x_2 osade vahetamisest.) Võrrandiga (92.14) antud pinna puutujatasand pinna punktis $P(p_1, p_2, p_3)$ määratakse võrrandiga

$$a_{33}p_3x_3+a_1(x_1+p_1)+a_2(x_2+p_2)+a_3(x_3+p_3)+a=0,$$

selle tasandi lõige reeperi alguspunkti O iseärases rihis läbiva x_1x_2-tasandiga aga järelikult võrrandisüsteemiga

$$a_1x_1+a_2x_2+(a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3+a)=0,$$
$$x_3=0.$$

Esimene võrrand määrab x_1x_2-tasandil sirge, mille sihti, s. t. pinna iseärase rihi ja puutujatasandi rihi lõiget, on võimalik määrata selle sirge sihivektoriga $\boldsymbol{k}=(-a_2, a_1, 0)$. Kui baasivektor $\boldsymbol{e}_1=(1, 0, 0)$ valida selles sihis, siis $a_1=0$, s. t. ka vaadeldaval juhul saab pinna võrrandile reeperi sobiva valikuga anda kuju, mis on võrrandi (92.13) erijuhuks.

Järelikult iga *II B* klassi teist järku pind on def. 84.1 kohaselt silindriline pind, kusjuures tema juhtjooneks x_2x_3-tasandil on võrrandi (92.13) poolt sellel tasandil määratud teist järku joon. Võrrandi (92.13) edasine lihtsustamine kordab seega eespool teist järku joone võrrandi puhul tehtut ning annab järelikult ka samasugused tulemused üksnes selle erinevusega, et varasemate koordinaatide x_1 ja x_2 asemel on nüüd vastavalt x_2 ja x_3.

II B klassi pinnad $\delta=\Delta=0$	9.	$x_2^2+x_3^2=1$	(92.15)
	10.	$x_2^2-x_3^2=1$	
	11.	$-x_2^2-x_3^2=1$	
	12.	$x_2^2+x_3^2=0$	
	13.	$x_2^2-x_3^2=0$	
	14.	$x_3^2=2x_2$	
	15.	$x_3^2=1$	
	16.	$-x_3^2=1$	
	17.	$x_3^2=0$	

93. Afiinne klassifikatsioon. Kvadrikute eespool saadud lihtsate võrrandite järgi on võimalik kvadrikuid afiinselt klassifitseerida (vt. art. 67), s. t. jaotada kõik kvadrikud klassidesse selliselt, et ühe klassi iga kaks kvadrikut on saadavad teineteisest teatava afiinse teisendusega (s. t. on afiinselt ekvivalentsed), kahe erineva klassi kvadrikuid aga ei saa viia ühtima afiinse teisendusega.

Suhteliselt lihtne on näidata, et kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 93.1. *Iga kaks kvadrikut, millel on sobivalt valitud reeperite suhtes ühesugused lihtsaimad võrrandid, on afiinselt ekvivalentsed, s. t. leidub afiinne teisendus, mis kujutab ühe kvadriku teiseks.*

Tõestus. Selliste reeperite puhul, mille suhtes kvadrikute võrrandeil on ühesugune lihtsaim kuju, on rahuldatud teoreemi 67.1 eeldused: kvadrikud koosnevad punktidest, milledel on nende reeperite suhtes samasugused koordinaadid, sest ühesuguseid võrrandeid rahuldavad loomulikult ühesuguste koordinaatidega punktid. Teoreem 67.1 põhjal need kvadrikud on afiinselt ekvivalentsed. ∎

Hoopis keerukam on tõestada vastupidist väidet: igal kahel afiinselt ekvivalentsel kvadrikul on ühesugused lihtsaimad võrrandid. Selleks tuleb kõigepealt rõhutada eelnenud käsitluse mõningaid momente, milledele seni ei ole pööratud vajalikku tähelepanu.

Osutub, et sellised eespool kvadrikutega seoses defineeritud mõisted nagu asümptootiline siht, keskpunkt, iseärane siht, kaasdiameeter ja puutuja säilitavad oma tähenduse pärast iga afiinset teisendust, s. t. kvadrik kujutub afiinse teisenduse korral jälle kvadrikuks, kusjuures näiteks kvadriku keskpunkt kujutub selle kvadriku kujutise keskpunktiks, iseärane siht — iseäraseks sihiks jne. Tõepoolest, afiinne teisendus määratakse antud reeperi suhtes lineaarsete teisendusvalemitega (61.5), mille kordajate determinant on nullist erinev. Samuti nagu art-s 83 saab näidata, et iga algebralise võrrandi $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ aste jääb sel puhul püsima. Järelikult kvadrik kujutub kvadrikuks, kusjuures klasside ***IA*, *IB*, *IIA*** ja ***IIB*** kvadrikud kujutuvad samade klasside kvadrikuiks (vt. art. 87). Eespool loetletud mõisted on aga kvadrikuga seotud selliste lihtsate mõistete abil nagu sirge, lõik ja lõigu keskpunkt, mille püsimajäämine afiinse teisenduse korral on tõestatud art-s 61. Sellest järeldubki, et kvadriku asümptootiline siht, keskpunkt, iseärane siht, kaasdiameeter ja puutuja kujutuvad afiinse teisenduse korral selle kvadriku kujutise vastavalt asümptootiliseks sihiks, keskpunktiks, iseäraseks sihiks, kaasdiameetriks ja puutujaks.

Teiseks on oluline tähele panna, et nende reeperite alguspunkt O ja baasivektorite sihid, mille suhtes kvadrikutel on lihtsaimad võrrandid, on täielikult määratavad ülalkirjeldatud afiinses teisenduses püsimajäävate mõistete abil. Nii on ***I*** klassi kvadriku puhul reeperi alguspunktiks O kvadriku keskpunkt, baasivektorite sihid on aga paarikaupa kaassihid kvadriku suhtes.

II A klassi kvadrikute puhul O on kvadriku vabalt võetud punkt, baas aga koosneb punktis O võetud puutuja või puutujatasandi baasist (mis teist järku pinna korral on moodustatud kaassihilistest vektoritest) ja kvadriku iseärases sihis võetud vektorist.

II B klassi teist järku joone korral O on keskpunktide sirgel ning üks baasivektor on iseärase sihiga (keskpunktide sirge sihiga). ***II B*** klassi teist järku pinna korral tuleb ühe baasivektori sihiks valida kas ainus iseärane siht või iseärase rihi ja puutujatasandi rihi lõige või iseärase rihi mingi siht. Pind osutub silindriliseks pinnaks, mille moodustajad on paralleelsed selle baasivektori sihiga ja juhtjooneks on mingi teist järku joon. Reeperi alguspunkt ja kahe ülejäänud baasivektori sihid tuleb nüüd siduda selle teist järku joonega ühel ülalkirjeldatud viisidest olenevalt joone klassist.

Nagu siit selgub, on reeperid, mille suhtes kvadrikutel on lihtsaimad võrrandid, tõesti konstrueeritud selliste kvadrikuga seotud punktide ja sihtide abil, mis pärast afiinset teisendust lähevad kvadriku kujutisega samasuguselt seotud punktideks ja sihtideks. Tuleb rõhutada, et siin on juttu ainult sihtidest, mitte aga baasivektorite konkreetsest valikust nendes sihtides. Viimased valiti eelmises artiklis lihtsaima võrrandi tuletamisel mitte kvadriku kui punktihulga omadustest lähtudes, vaid lihtsaimaile võrrandile vahetult eelnenud võrrandi kordajatele tuginedes.

Pärast neid selgitusi on võimalik tõestada järgmine tähtis tulemus.

***Teoreem* 93.2.** *Kui kaks kvadrikut on afiinselt ekvivalentsed (s. t. leidub afiinne teisendus, mis kujutab esimese kvadriku teiseks) ja esimese kvadriku jaoks on leitud reeper, milles kvadriku võrrandil on lihtsaim kuju, siis teise kvadriku võrrandiks selle reeperi kujutise suhtes on (pärast sobiva arvuga läbikorrutamist) täpselt samasuguse lihtsaima kujuga võrrand.*

Tõestus. Vahetult enne teoreemi sõnastamist selgus, et mainitud reeperi kujutise alguspunkt ja baasivektorite sihid on seotud teise kvadrikuga täpselt samuti nagu nende originaalid esimese kvadrikuga. Et esimese kvadriku võrrandil on kõne all oleva reeperi suhtes lihtsaim kuju, siis teise kvadriku võrrandil on selle reeperi kujutise suhtes lihtsaimale võrrandile vahetult eelnev kuju; ***I*** klassi kvadrikute puhul seega kuju (92.1) või (92.2), ***II A*** klassi kvadrikute puhul kuju (92.6) või (92.7), ***II B*** klassi teist järku joonte korral kuju (92.9) ning ***II B*** klassi teist järku pindade korral üks kujudest (92.1), (92.6) või (92.9), milles x_1 ja x_2 on asendunud vastavalt koordinaatidega x_2 ja x_3.

Edasi tuleb ükshaaval läbi uurida kõik lihtsaimate võrrandite juhud. Piirdume siin mõningate tüüpiliste juhtudega, jättes ülejäänud juhtude analüüsi lugeja hooleks.

I klassi joontest vaatleme näiteks joont, mille lihtsaimaks võrrandiks sobivalt valitud reeperi suhtes on $x_1^2+x_2^2=1$. Selle joone kujutis afiinses teisenduses on määratud teatava võrrandiga, millel on selle reeperi kujutise suhtes kuju (92.1):

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a=0.$$

Teiselt poolt on aga teada, et afiinse teisenduse korral punkti koordinaadid mingi reeperi suhtes on võrdsed selle punkti kujutise koordinaatidega selle reeperi kujutise suhtes. Seega teist järku joone $\{X(x_1,\ x_2)\mid x_1^2+x_2^2=1\}$ kujutiseks, kui see määrata koordinaatide abil reeperi kujutise suhtes, on samuti $\{X(x_1,\ x_2)\mid x_1^2+x_2^2=1\}$. Järelikult ühe ja sellesama kujutise jaoks on teada kaks võrrandit:

$$x_1^2+x_2^2-1=0,$$
$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a=0.$$

Tekib küsimus, millal selliste võrranditega esitatud teist järku jooned ühtivad. (Esimest järku joonte — sirgete korral on analoogiline küsimus lahendatud art-s 39: sirged ühtivad parajasti siis, kui nende üldvõrrandite vasakud pooled erinevad ainult reaalarvulise kordaja poolest.) Esimesest võrrandist nähtub, et joone kirjeldab selline punkt $X(x_1,\ x_2)$, mille teise koordinaadi ruut avaldub esimese koordinaadi kaudu valemiga $x_2^2=1-x_1^2$ ja mille esimene koordinaat muutub vabalt poollõigul $-1<x_1\leqslant 1$. Iga niisuguse punkti koordinaadid peavad rahuldama teist võrrandit, s. t.

$$a_{11}x_1^2+a_{22}(1-x_1^2)+a=0$$

peab osutuma samasuseks poollõigul $(-1,\ 1]$ muutuva x_1 suhtes. Muu hulgas peab ta olema rahuldatud, kui $x_1=0$, järelikult $a_{22}+a=0$ Samuti võib temas võtta $x_1=1$, mispuhul on tulemuseks $a_{11}-a_{22}=0$. Seega

$$a_{11}=a_{22}=-a$$

ning teisel võrrandil on kuju

$$a(x_1^2+x_2^2-1)=0.$$

Pärast läbikorrutamist arvuga a^{-1} ühtib ta esimese kvadriku lihtsaima võrrandiga.

I klassi pindade puhul valime näiteks juhu 3). Tõestuse põhimõtteline külg on siin sama. Tuleb selgitada, millal võrrandid

$$x_1^2-x_2^2-x_3^2-1=0,$$
$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a=0$$

määravad ühe ja sama pinna. Esimesest võrrandist on näha, et pind koosneb sellistest punktidest $X(x_1, x_2, x_3)$, mille puhul $x_3^2 = x_1^2 - x_2^2 - 1$ ning x_1 ja x_2 on vabalt muutuvad reaalarvud ainsa kitsendusega $x_1^2 - x_2^2 - 1 \geqslant 0$. Järelikult

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}(x_1^2 - x_2^2 - 1) + a = 0$$

peab osutuma samasuseks nende x_1 ja x_2 suhtes, mille puhul $x_1^2 - x_2^2 - 1 \geqslant 0$. Võttes siin kord $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, teine kord $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ ning viimaks $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, saame:

$$a_{11} + a = 0,$$
$$4a_{11} + 3a_{33} + a = 0,$$
$$4a_{11} + a_{22} + 2a_{33} + a = 0.$$

Esimesest tingimusest $a_{11} = -a$, teisest $a_{33} = a$, kolmandast $a_{22} = a$. Seega teisel võrrandil on kuju

$$-ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + a = 0$$

ning pärast läbikorrutamist arvuga $-a^{-1}$ ühtib ta esimese kvadriku lihtsaima võrrandiga.

I klassi kvadrikute teistel juhtudel on põhjendused samasugused, välja arvatud nn. imaginaarsete kvadrikute juhud (jooned 3) ja 4), pinnad 4) ja 5)), mil näiteks joonel lihtsaima võrrandiga $-x_1^2 - x_2^2 = 1$ ei ole ühtegi reaalarvuliste koordinaatidega punkti. Siin on võimalik tõestust läbi viia varem kasutatud viisil, võttes appi kompleksarvuliste koordinaatidega punktid, kuid on võimalik arutleda ka järgmiselt. Näiteks joonte puhul saab ülalnäidatud võtte abil teoreemi väite tõestada ilma mingite raskusteta juhtudel 1), 2) ja 5). Ülejäänud kahel juhul kujutub joon teatavaks teist järku jooneks, mille võrrandiks kaasateiseneva reeperi suhtes on $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a = 0$. Kui baasivektorite sobiva korrutamisega viia see viimane võrrand lihtsaimasse kujju, siis tulemuseks ei saa olla ükski juhtudest 1), 2) ja 5), sest kui see nii oleks, siis pärast pöördteisenduse sooritamist peaksime saama tagasi lähtejoone lihtsaima võrrandi ning me satuksime vastuollu varemtõestatuga. Samuti ei ole võimalik, et joon lihtsaima võrrandiga 3) kujutuks jooneks lihtsaima võrrandiga 4), sest esimesel pole ühtegi reaalsete koordinaatidega punkti, teisel aga on üks selline. Analoogiliselt võib arutleda ka pindade korral juhtudel 4) ja 5).

II klassi kvadrikute puhul on kasutatavad samad võtted. Vaatleme näiteks pinda lihtsaima võrrandiga $x_2^2 + x_3^2 = 2x_1$. Tuleb selgitada, millal see võrrand ja võrrand (92.7): $a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_1x_1 = 0$ määravad ühe ja sama pinna. Pind koosneb punktidest $X(x_1, x_2, x_3)$, kus x_2 ja x_3 muutuvad täiesti vabalt ja $x_1 = \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2)$. Järelikult

$$a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_1\cdot\frac{1}{2}(x_2^2+x_3^2)=0$$

peab osutuma samasuseks vabalt muutuvate x_2 ja x_3 suhtes. Piisab, kui võtta $x_2=1$, $x_3=0$ ja $x_2=0$, $x_3=1$, et kohe selguks:

$$a_{22}+a_1=0, \qquad a_{33}+a_1=0,$$

s. t tegemist on võrrandiga

$$-a_1x_2^2-a_1x_3^2+2a_1x_1=0,$$

mis pärast läbikorrutamist arvuga $-a_1^{-1}$ ühtib vaadeldava lihtsaima võrrandiga.

Sama võte on rakendatav kõigi teiste *II* klassi kvadrikute korral. Imaginaarsete kvadrikute juhul (joon. 8, pinnad 11 ja 16) tuleb võtta appi kas kompleksarvuliste koordinaatidega punktid või arutleda nii, nagu arutleti *I* klassi imaginaarsete kvadrikute puhul. ∎

Teoreemidest 93.1 ja 93.2 järeldub, et igaüks art-s 92 kirjeldatud lihtsaimatest kvadrikute võrranditest kirjeldab parajasti üht afiinselt ekvivalentsete kvadrikute klassi. Seetõttu kõik teist järku jooned jagunevad afiinses klassifikatsioonis üheksasse klassi, kõik teist järku pinnad aga seitsmeteistkümnesse klassi. Mõningate nende klasside jooni või pindu, näiteks laguvaid, on lihtne ära tunda, sest on teada, et iga lineaarne võrrand määrab afiinse reeperi suhtes kas sirge või tasandi. Mittelaguvate joonte ja -pindade korral on asi keerulisem, sest seni on teada nende lihtsaimad võrrandid sobivalt võetud afiinse reeperi suhtes, samal ajal kui IV peatükis koonuselõigete ja koonuselõikeliste pindade uurimisel oli kasutusel ristreeper. Seetõttu ei ole veel võimalik selgitada, kas iga mittelaguv teist järku joon või pind on identifitseeritav mõnega varemuurituist. Selle ülesande lahendamiseks tuleb iga afiinse klassi joone või pinna jaoks leida tema lihtsaim võrrand sobivalt valitud ristreeperi suhtes.

Küll aga saab näidata, missugusesse afiinsesse klassi kuuluvad IV peatükis uuritud jooned ja pinnad. Selleks tuleb samuti nagu eespool muuta nende joonte ja pindade võrrandeis, mis on leitud IV peatükis, iga nullist erinev kordaja võrdseks kas arvuga $+1$ või -1, olenevalt kordaja märgist, korrutades selleks baasivektoreid sobivalt valitud arvudega. Iga kord on tulemuseks üks eelmise artikli tabeleis leiduv lihtsaim võrrand. Seega on sõnastatav järgmine tulemus.

Teoreem* 93.3.** IV *peatükis käsitletud teist järku joontest* 1) *ellips kuulub klassi* ***IA*1*, 2) *hüperbool klassi* ***IA****2*, 3) *parabool klassi* ***IIA***. IV *peatükis käsitletud teist järku pindadest* 1) *ellipsoid kuulub klassi* ***IA****1*, 2) *ühekatteline hüperboloid klassi*

*IA*2, 3) *kahekatteline hüperboloid klassi IA*3, 4) *teist järku koonus klassi IB*6, 5) *elliptiline paraboloid klassi IIA*7, 6) *hüperboolne paraboloid klassi IIA*8, 7) *elliptiline, hüperboolne ja paraboolne silinder vastavalt klassi IIB*9, *IIB*10 ja *IIB*14.

Edaspidi (vt. art. 99 ja 100) selgub, et kehtib ka vastupidine väide: iga teist järku joon või pind ühest siin mainitud afiinsest klassist on üks IV peatükis käsitletud joontest või pindadest. Mis puutub mainimata jäänud klassidesse, siis nende jooned või pinnad on kas laguvad (s. t. sirge- või tasandipaarid) või imaginaarsed.

Teoreemist 93.2 saab teha veel ühe olulise järelduse. Võttes selles teoreemis afiinseks teisenduseks samasusteisenduse, on tulemuseks järgmine lause. Kui kaks kvadrikut on ühe ja sama reeperi suhtes antud oma võrranditega, milledest ühel on lihtsaim kuju, siis nende kvadrikute ühtimiseks on tarvilik ja piisav, et ka teise kvadriku võrrand läheks samasse lihtsaimasse kujju pärast läbikorrutamist sobivalt valitud arvuga. Et kvadriku võrrandi lihtsaim kuju saadakse kvadriku üldvõrrandist teatava reeperiteisendusega ning et hulkliige $kF(x_1, \ldots, x_n)$ teiseneb sel puhul ilmselt hulkliikmeks $kF'(x'_1, \ldots, x'_n)$, kui $F(x_1, \ldots, x_n)$ teisendatud kujuks on $F'(x'_1, \ldots, x'_n)$, siis võib öelda järgmist.

***Teoreem* 93.4.** *Kui kaks kvadrikut on antud oma võrranditega ühe ja sama reeperi suhtes, siis nende kvadrikute ühtimiseks on tarvilik ja piisav, et üks võrrand oleks saadav teisest pärast läbikorrutamist sobivalt valitud arvuga.*

Teist järku joonte korral, milledest kumbki ei osutu üheks kahekordseks sirgeks (s. t. ei ole klassist 9), saab tingimuse tarvilikkuse järeldada ka teoreemi 86.1 tõestusest. (Tingimuse piisavus on ilmne.) Tõepoolest, kui kaks sellist joont ühtivad, siis neil võib valida ühed ja needsamad viis punkti, millest ükski neli ei ole ühel sirgel. Sel korral süsteemi (86.5) võrrandid on lineaarselt sõltumatud ja süsteem määrab üldvõrrandi kordajad ühise teguri täpsusega, s. t. vaadeldavate joonte võrrandite vasakud pooled saavad erineda vaid teatava teguri poolest.

94. Teist järku pinna ja tasandi lõige. Antud teist järku pinna ja antud tasandi ühise punkti koordinaadid rahuldavad nii pinna kui tasandi võrrandit ning moodustavad seega nendest võrranditest koostatud süsteemi lahendi. Kõigi selliste lahenditega määratud punktide hulk on seega antud pinna ja tasandi lõige.

Afiinse reeperi sobiva valikuga saab kõnesolevat süsteemi tunduvalt lihtsustada. Reeperi $\{O;\, e_1,\, e_2,\, e_3\}$ võib nimelt valida nii, et e_1 ja e_2 kuuluksid vaadeldava tasandi rihti. Sel korral määratakse see tasand võrrandiga $x_3 = h$, antud teist järku pinna võrrandil on aga, nagu iga reeperi suhtes, kuju

$$a_{ij}x_ix_j+2a_ix_i+a=0. \qquad (94.1)$$

Nendest võrranditest koostatud süsteem on ilmselt samaväärne süsteemiga, mille üheks võrrandiks on seesama $x_3 = h$ ning teine on saadud $x_3 = h$ asendamisel pinna võrrandisse (94.1):

$$x_3=h,$$
$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a'_1x_1+2a'_2x_2+a'=0; \qquad (94.2)$$

siin

$$a'_1=a_{13}h+a_1,$$
$$a'_2=a_{23}h+a_2,$$
$$a'=a_{33}h^2+2a_3h+a.$$

Võrrand (94.2), nagu näha, ei sisalda koordinaati x_3 ja määrab seega silindrilise pinna, mille lõige antud tasandiga paralleelse x_1x_2-tasandiga esitatakse sellel tasandil sama võrrandiga (94.2). Seejuures selle silindrilise pinna lõiked antud tasandiga ja x_1x_2-tasandiga on saadavad teineteisest lükkega vektori e_3h või $e_3(-h_3)$ võrra. Järelikult lõike uurimiseks piisab, kui uurida võrrandit (94.2).

Siin on võimalikud järgmised juhud.

1) Kordajatest a_{11}, a_{12} ja a_{22} mõni on nullist erinev. Sel korral on lõikeks teist järku joon.

2) Kordajad a_{11}, a_{12} ja a_{22} on võrdsed nulliga: $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$. Sel korral lõige on kas sirge, kui a'_1 ja a'_2 ei ole korraga nullid, või tühi hulk, kui $a'_1 = a'_2 = 0$, $a' \neq 0$, või kogu antud tasand, kui $a'_1 = a'_2 = a' = 0$.

Viimane juht on võimalik ainult laguva teist järku pinna korral, s. t. juhul, kui pind on tasandipaar, sest kui sel korral reeperi valikut veelgi kitsendada, valides ka O antud tasandil, siis on lisaks võrdustele $a'_1 = a'_2 = a' = 0$ ka $h = 0$, mistõttu $a_1 = a_2 = a = 0$ ning pinna võrrandi (94.1) vasakul poolel on kuju

$$a_{33}x_3^2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+2a_3x_3=$$
$$=x_3(a_{33}x_3+2a_{13}x_1+2a_{23}x_2+2a_3).$$

Üldjuhul, kui lõikeks on teist järku joon, võib eespool saadud seostest teha mitmeid huvitavaid järeldusi. Kui konstandile h anda erinevaid väärtusi, siis tekivad antud teist järku pinna lõiked omavahel paralleelsete tasanditega. Seejuures lõikejoone võrrandi (94.2) vasakul pool ruutliikmete kordajad üldse ei sõltu h valikust. Üheks järelduseks sellest on, et lõikejooned kuuluvad kõik kas klassi ***I*** või klassi ***II***. (Veelgi kaugemale ulatuvaks järelduseks on allpool tõestatav teoreem 94.2.)

***Teoreem* 94.1.** *Kui teist järku pinda lõigata paralleelsete tasanditega ning lõikamisel tekivad **I** klassi teist järku jooned,* *siis nende joonte keskpunktid on kõik ühel sirgel. I klassi teist järku pinna korral see sirge läbib pinna keskpunkti ning tema sihi kaasdiameetertasand on paralleelne lõiketasandiga. II klassi teist järku pinna korral see sirge on iseärase sihiga.*

Tõestus. Võrrandiga (94.2) antud teist järku joone keskpunkti koordinaadid määratakse süsteemist

$$a_{11}x_1+a_{22}x_2+a'_1=0,$$
$$a_{12}x_1+a_{22}x_2+a'_2=0,$$

mille determinant on *I* klassi joonte korral nullist erinev. Kui siia asendada a'_1 ja a'_2 avaldised, arvestades, et $h=x_3$, on tulemuseks:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_1&=0,\\ a_{12}x_2+a_{22}x_2+a_{23}x_2+a_2&=0. \end{aligned} \tag{94.3}$$

Saadud võrrandid määravadki ruumis teatava sirge, millel asuvad kõigi lõikejoonte keskpunktid. Selle sirge sihivektor $\boldsymbol{k}=(k_1, k_2, k_3)$ kuulub mõlemale võrrandilega (94.3) antud tasandile, seetõttu on (46.8) põhjal

$$\begin{aligned} a_{11}k_1+a_{12}k_2+a_{13}k_3&=0,\\ a_{12}k_1+a_{22}k_2+a_{23}k_3&=0. \end{aligned} \tag{94.4}$$

Võrrandid (94.3) on pinna keskpunkti koordinaate määrava süsteemi kaks esimest võrrandit. Järelikult *I* klassi pinna puhul, millel on üks keskpunkt, läbib nende võrranditega määratud sirge keskpunkti. Sirge sihi kaasdiameetertasandi võrrandis

$$(a_{ij}x_j+a_i)k_i=0$$

koordinaatide x_1 ja x_2 kordajad on (94.4) põhjal võrdsed nulliga ning tasand on seega paralleelne lõiketasandiga.

II klassi pinna korral, mil iseärase sihiga vektori koordinaate määrava süsteemi (90.2) kaks esimest võrrandit ühtivad praegu lineaarselt sõltumatute võrranditega (94.4) ning kolmas võrrand on nende järeldus, on vaadeldava sirge sihivektor $\boldsymbol{k}$ tõesti iseärase sihiga. ∎

Anname nüüd tõlgenduse sellele huvitavale asjaolule, et võrrandis (94.2) ruutliikme kordajad ei sõltu h valikust

Olgu antud kaks mitteimaginaarset teist järku joont, mille võrrandid sama reeperi suhtes erinevad üksnes lineaarliikmete kordajate ja vabaliikme poolest.

$$a_{ij}x_ix_j+2a_ix_i+a=0, \tag{94.5}$$
$$a_{ij}x_ix_j+2a'_ix_i+a'=0. \tag{94.6}$$

Et kvadrikute jaotus klassidesse *I* ja *II* sõltub ainult võrrandi ruutliikmete kordajatest, siis need jooned on kas korraga *I* klassis või korraga *II* klassis.

Seejuures *I* klassi mitteimaginaarsete joonte korral saab tänu δ märgi invariantsusele (vt. art. 87) öelda, et jooned on mõlemad kas afiinses klassis *IA*1 ($\delta > 0$) või afiinsete klasside *IA*2 ja *IB*1 ühendis ($\delta < 0$). Viimasel juhul saab neid klasse eristada selle järgi, kas $\Delta \neq 0$ või $\Delta = 0$.

Näitame, et *IA*1 klassi jooned võrranditega (94.5) ja (94.6) on saadavad teineteisest lükke ja homoteetsusega ning on seetõttu sarnased.

Homoteetsus ja lüke on esitatavad teisendusvalemitega $x_i'' = \lambda x'_i$ ja $x_i = x_i'' + c_i$, mistõttu nende korrutis on määratud teisendusvalemitega

$$x_i = \lambda x'_i + c_i,$$

kus $\lambda \neq 0$. Kui siit teha asendus võrrandisse (94.5), on tulemus

$$a_{ij}(\lambda x'_i + c_i)(\lambda x'_j + c_j) + 2a_i(\lambda x'_i + c_i) + a = 0$$

ehk

$$\lambda^2 a_{ij} x'_i x'_j + 2\lambda(a_{ij}c_j + a_i)x'_i + (a_{ij}c_ic_j + 2a_ic_i + a) = 0. \tag{94.7}$$

Saadud võrrandiga antud joon — esimese joone kujutis — ühtib teise joonega, mille võrrandiks on (94.6), teoreemi 93.4 põhjal parajasti siis, kui (94.7) vasak pool on saadav (94.6) vasakust poolest pärast korrutamist sobivalt valitud arvuga, milleks on praegu muidugi λ^2. Käsitluse lihtsustamiseks on kasulik enne siit tulenevate tingimuste kirjapanekut baasivektorid e_1 ja e_2 valida nii, et nad oleksid antud joone suhtes kaassihilised. Sel korral[1] $a_{12} = 0$ ning tingimustel on kuju

$$\lambda a'_1 = a_1 + a_{11}c_1, \tag{94.8}$$

$$\lambda a'_2 = a_2 + a_{22}c_2, \tag{94.9}$$

$$\lambda^2 a' = a_{11}c_1^2 + a_{22}c_2^2 + 2a_1c_1 + 2a_2c_2 + a. \tag{94.10}$$

I klassi lõikejoone korral $\delta = a_{11}a_{22} \neq 0$, mistõttu esimesest kahest tingimusest

$$c_1 = \frac{1}{a_{11}}(\lambda a'_1 - a_1), \qquad c_2 = \frac{1}{a_{22}}(\lambda a'_2 - a_2). \tag{94.11}$$

Asendused kolmandasse tingimusse annavad võrrandi λ määramiseks:

$$\lambda^2 a' = \frac{1}{a_{11}}(\lambda a'_1 - a_1)^2 + \frac{1}{a_{22}}(\lambda a'_2 - a_2)^2 + \frac{2a_1}{a_{11}}(\lambda a'_1 - a_1) + \frac{2a_2}{a_{22}}(\lambda a'_2 - a_2) + a.$$

Pärast vajalikke koondamisi ja läbikorrutamist arvuga $\delta = a_{11}a_{22}$ on tulemuseks

$$\lambda^2(a'a_{11}a_{22} - a_{22}a_1'^2 - a_{11}a_2'^2) = a_{11}a_{22} - a_{22}a_1^2 - a_{11}a_2^2$$

ehk

$$\lambda^2 \Delta' = \Delta, \tag{94.12}$$

kus

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_1 \\ 0 & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}$$

ja Δ' on samasugune avaldis võrrandiga (94.2) antud joone jaoks.

Art-s 87 selgus, et Δ märk on invariantne koordinaaditeisenduse suhtes. Sellest ja tabelist (92.4) järeldub, et *IA*1 klassi joonte puhul Δ ja Δ' on nullist erinevad samamärgilised arvud. Seetõttu on tingimust (94.12) võimalik rahuldada positiivse arvuga λ. Edasi saab määrata c_1 ja c_2 võrdustest (94.11). Saadud arvude puhul on rahuldatud (94.8), (94.9) ja (94.10). Seega väide *IA*1 klassi joonte kohta on tõestatud.

Samal viisil on võimalik tõestada, et *IB*1 klassi jooned võrranditega (94.5) ja (94.6) on saadavad teineteisest lükkega. Tõepoolest, võrdustes (94.11) võib võtta $\delta = 1$. Asendus tingimusse (94.10) annab samasuse, sest vaadeldaval juhul $\Delta = \Delta' = 0$.

Pisut erinev on olukord *IA*2 klassi joonte korral. Siin on lisaks tabelis (92.4) antud lihtsale võrrandile $x_1^2 - x_2^2 = 1$ mõeldav saada pärast lihtsustamist ka võrrand $x_1^2 - x_2^2 = -1$, mis samuti annab ühe *IA*2 klassi joone. Seetõttu antud joonte (94.5) ja (94.6) korral võivad Δ ja Δ' olla erimärgilised. Sel puhul pole muidugi tingimust (94.12) võimalik rahuldada. Kui aga Δ ja Δ' on samamärgilised, siis jääb kogu eelnev arutlus jõusse.

Analüüsime ka juhtu, mil antud joonte (94.5) ja (94.6) puhul $\delta = a_{11}a_{22} = 0$. Vajaduse korral baasivektoreid ümber nummerdades võib saavutada, et $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$. Sel korral $\Delta = -a_{22}a_1^2$ ja $\Delta' = -a_{22}a'_1{}^2$ on samamärgilised, tingimustel (94.8), (94.9) ja (94.10) on aga kuju

$$\begin{aligned} \lambda a'_1 &= a_1, \\ \lambda a'_2 &= a_2 + a_{22}c_2, \\ \lambda^2 a' &= a_{22}c_2^2 + 2a_1c_1 + 2a_2c_2 + a. \end{aligned} \tag{94.13}$$

Kui mõlemad antud jooned on *IIA* klassis, siis $\Delta \neq 0$, $\Delta' \neq 0$, s. t. $a_1 \neq 0$, $a'_1 \neq 0$. Esimene saadud kolmest võrdusest määrab λ nullist erineva väärtuse, järgmised kaks aga määravad c_2 ja c_1 väärtused. Ka sel korral on jooned saadavad teineteisest lükke ja homoteetsusega.

Kui antud jooned on mõlemad *IIB* klassis, siis $\Delta = \Delta' = 0$, s. t. $a_1 = a'_1 = 0$. Sel korral tingimusest (94.9)

$$c_2 = \frac{1}{a_{22}}(\lambda a'_2 - a_2)$$

ning asendus võrdusse (94.13) annab

$$(a_{22}a' - a_2'^2)\lambda^2 = a_{22}a - a_2. \tag{94.14}$$

Joone võrrandil (94.5) on seejuures kuju

$$a_{22}x_2^2 + 2a_2x_2 + a = 0.$$

Tingimuse (94.14) parem pool on selle võrrandi kui ruutvõrrandi diskriminandi vastandarv. Mitteimaginaarsete joonte korral need diskriminandid on mittenegatiivsed. Kui nad mõlemad on nullist erinevad, siis tingimust (94.11) on võimalik rahuldada positiivse arvuga λ. Kui aga diskriminantidest üks on null ja teine nullist erinev (s. t. kui üks joon on paralleelsete, teine aga ühtivate sirgete paar), siis ei leidu arvu $\lambda \neq 0$, mis rahuldaks vajalikke tingimusi.

Kogu selle analüüsi tulemused võib võtta kokku järgmiseks teoreemiks.

***Teoreem* 94.2.** *Kui teist järku pinda lõigata kahe paralleelse tasandiga ja tekkivad teist järku jooned on samast afiinsest klassist, siis need jooned on saadavad teineteisest lükke ja homoteetsusega, välja arvatud* ***IA*2** *klassi juhul, mil on vaja lisaks eeldada Δ ja Δ' samamärgilisust.*

See teoreem üldistab ja täpsustab art-s 79 koonuselõikeliste pindade uurimisel saadud tulemusi sümmeetriatasandiga paralleelselt tehtud lõigete sarnasuse kohta.

95. Kvadrikute statsionaarsusrühmad. Olgu tasandil või ruumis antud teatav punktihulk ehk, nagu sel puhul sagedamini räägitakse, teatav kujund F. Sel korral saab tasandi või ruumi teatavat tüüpi teisenduste rühmast, näiteks afiinsete teisenduste rühmast, välja eraldada need teisendused, mis jätavad selle kujundi F muutumatuks, s. t. mille korral punktihulga F iga punkti kujutis ja originaal kuuluvad samasse punktihulka F. Teisenduse Φ selle omaduse võib sümboolselt kirja panna järgmiselt: kui $X \in$ F, siis $\Phi(X) \in$ F ja $\Phi^{-1}(X) \in$ F.

Antud rühma kõik niisugused teisendused moodustavad omakorda rühma, sest iga kahe sellise teisenduse korrutamine — järjest sooritamine — annab tulemuseks ilmselt jälle teisenduse, mis jätab kujundi F muutumatuks, ning sama omadus on ka iga sellise teisenduse pöördteisendusel. Tõepoolest, kui iga $X \in$ F puhul $\Phi(X) \in$ F ja $\Phi^{-1}(X) \in$ F ning $\Psi(X) \in$ F ja $\Psi^{-1}(X) \in$ F, siis ka

$$(\Psi\Phi)(X) = \Psi(\Phi(X)) \in \mathrm{F}$$

ja (66.2) järgi

$$(\Psi\Phi)^{-1}(X) = (\Phi^{-1}\Psi^{-1})(X) = \Phi^{-1}(\Psi^{-1}(X)) \in \mathrm{F};$$

seejuures ilmselt $(\Phi^{-1})^{-1} = \Phi$, mistõttu ka $\Phi^{-1}(X) \in$ F ja $(\Phi^{-1})^{-1}(X) \in$ F.

Def. **95.1.** Antud teisenduste rühma G kõigi niisuguste teisenduste hulka, millel on ülalkirjeldatud omadus, nimetatakse kujundi F statsionaarsuserühmaks[118] rühmas G.

Näiteks tasandi pöörete rühm on punkti C statsionaarsuserühm tasandi liikumiste rühmas, olles samal ajal ka iga selle punkti ümber tõmmatud ringjoone statsionaarsuserühm. Vektoritega $\boldsymbol{a}\lambda$ määratud lükete rühm, kus $\boldsymbol{a}$ on konstantne vektor ja λ suvaline reaalarv, on iga vektori $\boldsymbol{a}$ sihis kulgeva sirge statsionaarsuserühm tasandi liikumiste rühmas.

Samal ajal punkti C statsionaarsuserühmaks tasandi afiinsete teisenduste hulgas on tsentroafiinne rühm — üpris avar rühm, mille teisendustega võib näiteks tasandi iga punkti X, mis ei ühti punktiga C, kujutada tasandi igaks teiseks punktiks X', $X' \neq C$.

Ülesandeks on kirjeldada järgnevalt kvadrikute statsionaarsuserühmi tasandi või ruumi afiinsete teisenduste rühmas. Siin saab tugineda teoreemile 93.1, rakendades seda juhul, kui selles mainitud kaks kvadrikut ühtivad omavahel. Nagu selgus art-s 92, on reeper, mille suhtes antud kvadrikul on lihtsaim võrrand, määratud mitte üheselt, vaid teatava vabadusega. Näiteks *I* klassi teist järku joonte korral on reeperi alguspunkt O küll fikseeritud — O on nimelt joone ainsas keskpunktis, kuid $e_1 = (1, 0)$ valik on võrdlemisi vaba: mitteimaginaarsete mittelaguvate joonte 1) ja

[118] lad k. *stationarius* — liikumatu.

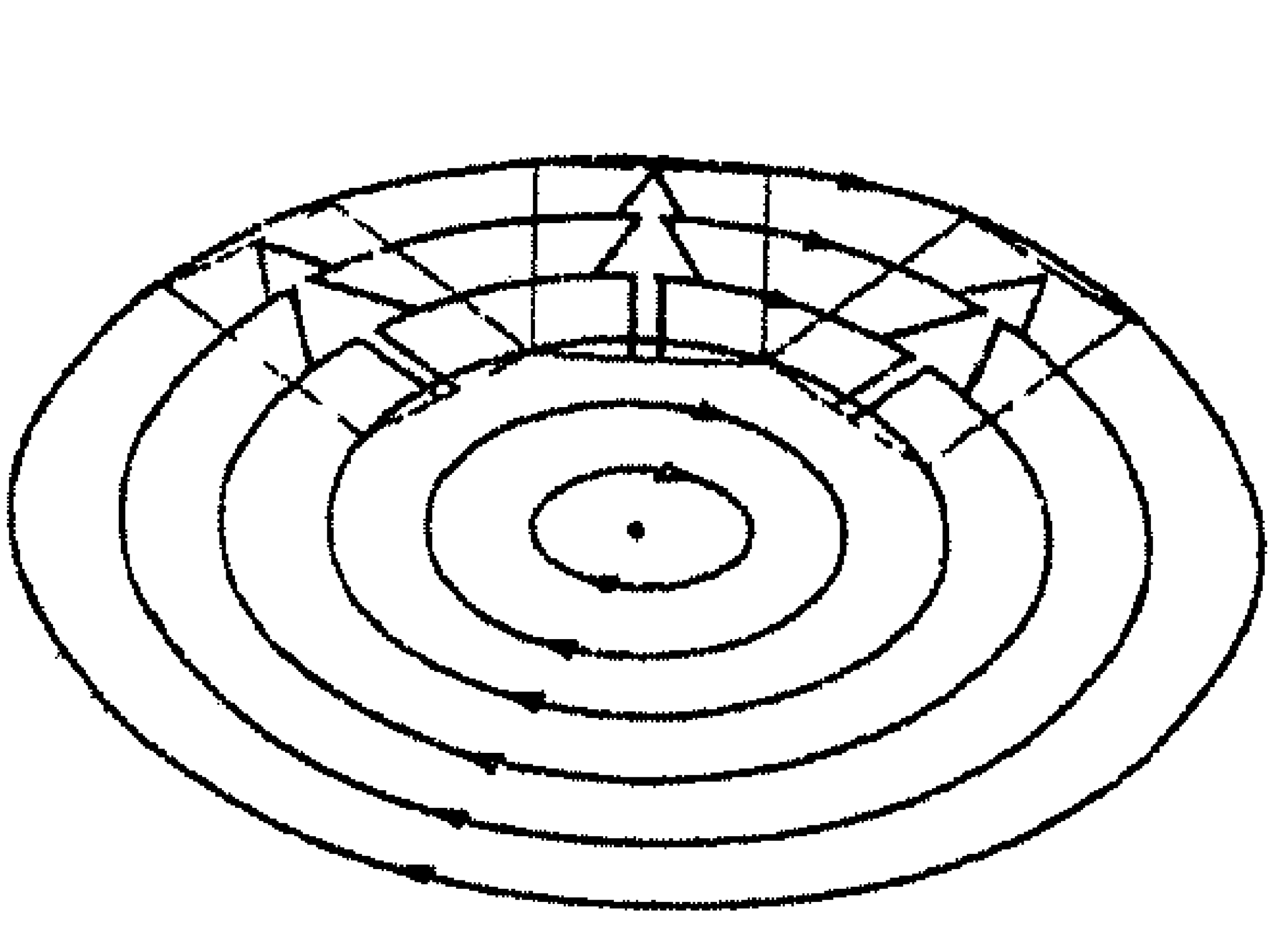
2) (vt. tabel (92.4)) korral, mille lihtsaimad võrrandid on vastavalt $x_1^2+x_2^2=1$ ja $x_1^2-x_2^2=1$, on punkt E_1 kohavektoriga $\overrightarrow{OE_1}=e_1$ joone vabalt võetud punkt. Samal ajal e_1 valiku korral on e_2 määratud kordaja -1 täpsusega: e_2 siht on e_1 sihi kaassihiks, seejuures e_2 korrutamine arvuga λ, $\lambda^2 \neq 1$, on lubamatu, sest x_2^2 kordaja võrrandis peab olema $+1$ või -1. Seega reeperi valikuvabadus ühtib olulises osas punkti E_1 *valikuvabadusega* joonel: antud E_1 korral on lubatav ainult e_2 asendamine vektoriga $-e_2$. Iga kahe selliselt valitud reeperi korral leidub teoreemi 93.1 järgi tasandi afiinne teisendus, mis kujutab antud teist järku joone iseendaks, s. t. kuulub kvadriku statsionaarsuserühma.

Analoogilise tulemuseni võib jõuda ka *II A* klassi teist järku joone korral. Selle lihtsaim võrrand $x_2^2=2x_1$ on saavutatud niisuguse reeperi suhtes, mille alguspunktiks O on joone vabalt võetud punkt, baasivektor e_1 on ainsas iseärases sihis, baasivektor e_2 aga joone puutuja sihis, mis on võetud punktis O. Seejuures vektorite e_1 ja e_2 korrutamine vastavalt arvudega $\lambda \neq 1$ ja $\mu \neq \pm 1$ on lubamatu, sest võrrandis x_1 ja x_2^2 kordajad peavad olema vastavalt 2 ja 1. Fikseeritud punkti O korral on ainus vabadus e_2 asendamine vektoriga $-e_2$.

Kui arvestada ka teoreemis 93.1 sõnastatud tulemust, siis ülalöeldust järeldub niisugune teoreem.

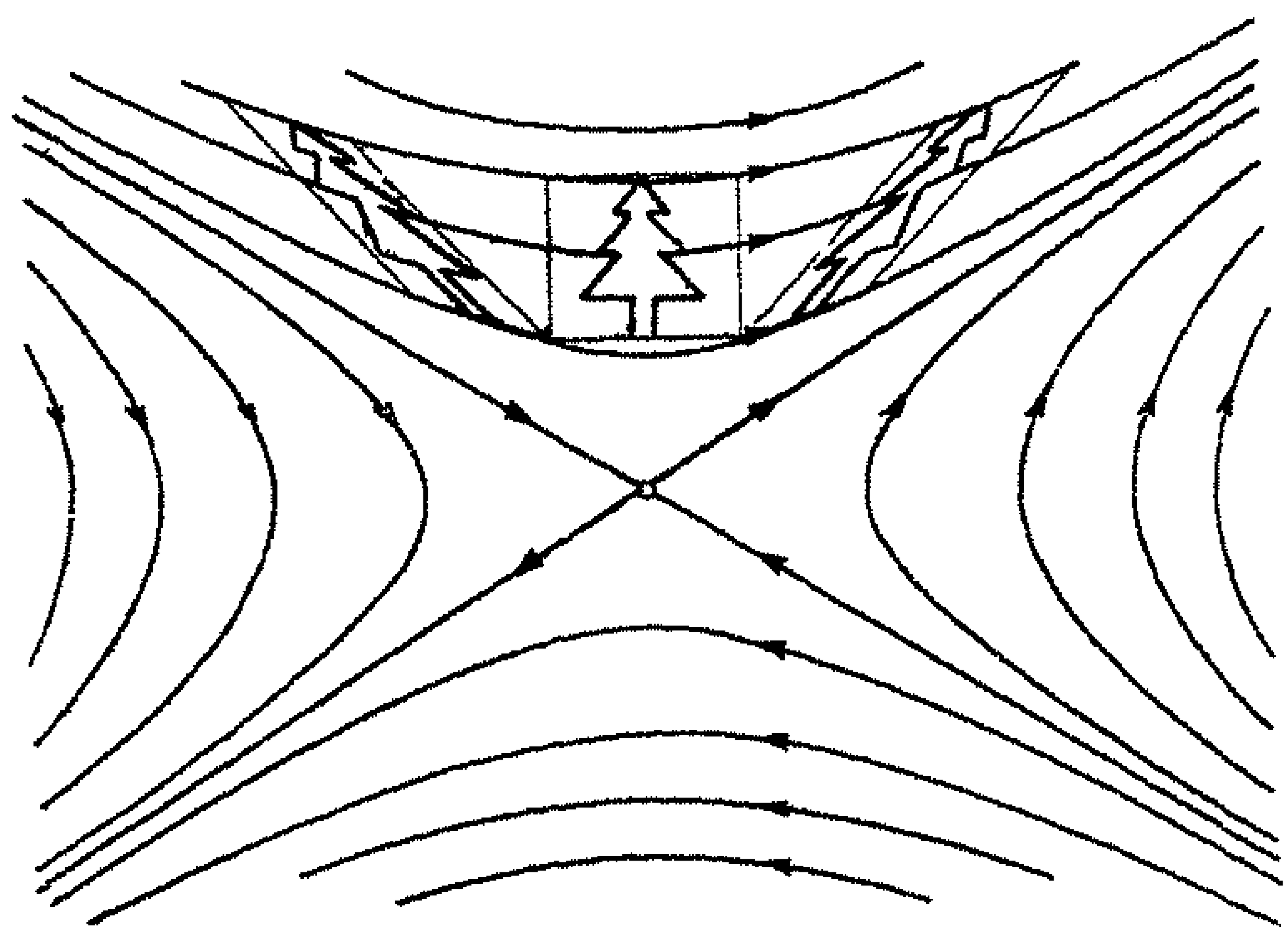
***Teoreem* 95.1.** *Ellipsi, hüperbooli või parabooli statsionaarsuserühm tasandi afiinsete teisenduste rühmas sisaldab selle joone iga kahe punkti korral parajasti kaks teisendust, mis kujutavad esimese punkti teiseks. Orientatsiooni säilitab neist ainult üks.*

T õ e s t u s. Ülaltoodu põhjal leidub kaks sellist teisendust. Üleminekuks ühelt teisele tuleb e_2 asendada vektoriga $-e_2$, see aga muudab orientatsiooni. Rohkem selliseid teisendusi joone kahe antud punkti korral selle joone statsionaarsuserühmas ei ole, sest kui mõni selline veel leiduks, siis esimese punktiga seotud reeper, mille suhtes joonel on lihtsaim võrrand, kujutuks teoreemi 93.2 põhjal teise punktiga samasuguselt seotud reeperiks, mis peaks erinema ülalvaadeldud kahest, see on aga võimatu. ∎



Joon. 191.

Ellipsi, hüperbooli või parabooli statsionaarsuserühma tasandi afiinsete teisenduste rühmas nimetatakse vastavalt e l l i p t i l i s t e (joon. 191), h ü p e r b o o l s e t e (joon. 192) või p a r a b o o l s e t e



Joon. 192.

p ö ö r e t e r ü h m a k s. Eelmisest teoreemist selgub, et ta toimib vastaval joonel sama vabadusega nagu näiteks vektoritega $a\lambda$ määratud lükete rühm a-sihilisel sirgel või pöörete rühm pöördekeskpunkti ümber tõmmatud ringjoonel. Võrdluseks on huvitav märkida, et ellipsi, hüperbooli või parabooli statsionaarsuserühm tasandi liikumiste rühmas koosneb ainult ühikteisendusest E.

Analoogiliste tulemusteni võib jõuda ellipsoidi, hüperboloidide ja paraboloidide korral ehk üldiselt *IA* ja *IIA* klassi mitteimaginaarsete pindade korral. Näiteks *IA* klassi teist järku pinnal on lihtsaim võrrand iga sellise reeperi suhtes, mille alguspunkt O on pinna ainsas keskpunktis, punkt E_1 kohavektoriga $\overrightarrow{OE_1} = \boldsymbol{e}_1$ on pinna vabalt võetud punkt ning baasivektor $\boldsymbol{e}_2$ on $\boldsymbol{e}_1$ sihi kaasdiameetertasandi vabalt võetud sihi vektor. Baasivektori $\boldsymbol{e}_3$ siht on sellega üheselt määratud (vt. art. 92). Osutub, et see kaasdiameetertasand on paralleelne pinna puutujatasandiga punktis E_1. Tõepoolest, *IA* klassi pinnad saab esitada ühise võrrandiga

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1,$$

kus λ_i on nullist erinev. Vektori $\boldsymbol{k}$ kaasdiameetertasandi üldisest võrrandist $(a_{ij}x_j + a_i)k_i = 0$ järeldub praegu $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$ puhul võrrand

$$\lambda_1 x_1 = 0.$$

Samal ajal puutujatasandi võrrand tekib puutepunkti $E_1(1, 0, 0)$ koordinaatide «pooliti» asendamisega pinna võrrandisse:

$$\lambda_1 x_1 \cdot 1 + \lambda_2 x_2 \cdot 0 + \lambda_3 x_3 \cdot 0 = 1,$$

s. t. tulemuseks on $\lambda_1 x_1 = 1$. Mainitud tasandid on paralleelsed. Seetõttu $\boldsymbol{e}_2$ on ka selle puutujatasandi vektor, määrates ühtlasi koos punktiga E_1 pinna puutuja selles punktis ning suuna sellel puutujal ehk, lihtsamalt öeldes, suuna pinnal punktis E_1. Kui viimane on antud, siis reeper, mille suhtes pinna võrrandil on lihtsaim kuju, on määratud asenduse $e_3 \to -e_3$ täpsusega. Seejuures teoreemi 93.1 põhjal iga kahe seda laadi reeperi puhul leidub ruumi afiinne teisendus, mis kujutab antud teist järku pinna iseendaks, s. t. kuulub pinna satsionaarsuserühma.

IIA klassi pinna korral saab arutleda analoogiliselt. Pinnal on lihtsaim võrrand iga sellise reeperi suhtes, mille alguspunktiks O on pinna vabalt võetud punkt, mille baasivektor e_1 on ainsas iseärases sihis ning baasivektoriks e_2 on punktis O võetud puutujatasandi vabalt võetud sihi vektor. Baasivektori e_3 siht on sellega üheselt määratud (vt. art. 92). Valida punkt O ja vektori e_2 suund on sama, mis valida pinna puutuja punktis O ja suund sellel. Vaadeldav reeper on sel korral määratud asenduse $e_3 \to -e_3$ täpsusega.

Samuti nagu eespool võib ülalöeldust ja teoreemist 93.1 järeldada järgmise tulemuse.

***Teoreem* 95.2.** *Ellipsoidi või ühekattelise hüperboloidi või kahekattelise hüperboloidi või elliptilise paraboloidi või hüperboolse paraboloidi statsionaarsuserühm ruumi afiinsete teisenduste rühmas sisaldab pinna iga kahe punkti ja nendes pinnal valitud suundade korral parajasti kaks teisendust, mis kujutavad esimese punkti koos selles valitud suunaga teiseks punktiks ja selles valitud suunaks. Orientatsiooni säilitab nendest ainult üks.*

Mainitud pindade need statsionaarsuserühmad toimivad neil pindadel seega sama vabadusega nagu näiteks liikumiste rühm tasandil või ruumi pöörete rühm sfääril (kuna viimase keskpunkt on paigal). See lubab arvata, et nendel pindadel saab selliste statsionaarsuserühmade abil üles ehitada teatavad omalaadsed geomeetriad. Pinna punkt X koos suunaga pinnal punktis X määrab näiteks seda punkti X läbiva ja antud suunda sisaldava diameetertasandi ning pinna lõikejoone, mida on loomulik käsitleda sirge või suurringjoone analoogina selles geomeetrias. Statsionaarsuserühm võimaldab defineerida kujundite kongruentsuse selles geomeetrias jne. Laskumata siin üksikasjadesse, mis väljuvad käesoleva kursuse raamidest, märgime siiski, et niisugune geomeetria ellipsoidil ühtib geomeetriaga sfääril, et elliptilisel paraboloidil on selliseks geomeetriaks tavaline eukleidiline planimeetria ning et geomeetriaks kahekattelise hüperboloidi kummalgi kattel on Lobatševski planimeetria.[119]

[119] Lobatševski geomeetria arenduse siit tuleneva analüütilise aparaadiga võib asjast huvitatud lugeja leida Jüri Nuudi (1892 –1952) raamatust: З. Ю. Нут, Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении. Изд. АН СССР, Москва, 1961.

§ 18. KVADRIKUTE EUKLEIDILINE GEOMEETRIA

Eukleidilise geomeetria raames lisandub kvadrikute senituntud omadustele rida uusi, mis on seotud eukleidilise geomeetria spetsiifiliste mõistetega. Konkreetsete teist järku joonte ja pindade mõningad sellised omadused selgusid juba IV peatükis, näiteks seoses koonuselõigete fookuste ja juhtsirgete, optiliste omaduste jt. uurimisega. Allpool on seetõttu peatähelepanu pööratud kvadrikute üldistele seda laadi omadustele. Põhimõtteliselt kõige tähtsamaks on tulemus, mille kohaselt kvadrikute seas ei ole ühtegi varem käsitlemata joont ega pinda. Ilmneb nimelt, et kõik võrrandid, mis tekivad kvadriku võrrandi maksimaalsel lihtsustamisel ristreeperi sobiva valikuga, on juba tuttavad kas IV peatükist või §-st 16, kus on ka selgitatud, missugust joont või pinda nad esitavad. Mainitud tulemus võimaldab seega koordinaate kasutamata kirjeldada täielikult kogu kvadrikute hulka. Ühtlasi saab anda lihtsad tunnused, mis lubavad otse üldvõrrandi järgi otsustada, millal antud kvadrik on näiteks ellips või hüperbool või hüperboolne parabool või mõni teine koonuselõige või koonuselõikeline pind.

96. Peasiht. Kvadriku võrrandi lihtsustamiseks ristreeperi sobiva valiku teel on oluline kindlaks teha, kas iga kvadriku korral leidub paarikaupa ristuvaid kaassihte, mida saaks valida baasivektorite sihtideks, nii et oleksid rakendatavad art. 92 tulemused.

Vastuse leidmiseks tuleb esmajoones uurida, millistel tingimustel on kvadriku mingi mitteiseärane siht risti oma kaasdiameeterlineaariga. Olgu kvadrik antud oma võrrandiga

$$a_{ij}x_ix_j+2a_ix_i+a=0$$

mingi ristreeperi suhtes. Selleks et vektoriga $\boldsymbol{k}=(k_i)$ määratud mitteiseärane siht oleks mainitud omadusega, peab ta olema oma kaasdiameeterlineaari normaali sihiks. Et see kaasdiameeterlineaar määratakse võrrandiga

$$(a_{ij}x_j+a_i)k_i=0,$$

siis tema normaali üheks sihivektoriks on vektor $\boldsymbol{n}$ ristkoordinaatidega $a_{ij}k_i$ (viimased on nimelt koordinaatide x_j kordajad selles võrrandis). Järelikult $\boldsymbol{k}$ siht on risti selle kaasdiameeterlineaariga parajasti siis, kui $\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{n}$ ehk $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}\lambda$, ehk koordinaatides

$$a_{ij}k_i=\lambda k_j. \tag{96.1}$$

Mitteiseärase sihi korral $\lambda \neq 0$, sest kui $\lambda=0$, siis tekib iseärast sihti iseloomustav tunnus (90.2). Edaspidi on aga otstarbekas loobuda kitsendusest $\lambda \neq 0$ ning selliselt tuua sisse järgmine mõiste.

***Def.* 96.1.** Tingimust (96.1) mingi reaalarvu λ korral rahuldava vektori $\boldsymbol{k} = (k_i)$ sihti nimetatakse kvadriku peasihiks.

Tingimus (96.1) käib tõesti mitte üheainsa vektori $\boldsymbol{k}$ kohta, vaid terve sihi kohta, sest kui ta on rahuldatud $\boldsymbol{k}$ puhul, siis ta on rahuldatud ka $\boldsymbol{k}\alpha$ puhul, kus α on suvaline reaalarv.

***Teoreem* 96.1.** *Kvadriku peasiht on kas iseärane või risti oma kaasdiameeterlineaariga. Igal teist järku joonel (pinnal) on vahemalt kaks ristuvat (kolm paarikaupa ristuvat) peasihti.*

Tõestus. Esimene väide järeldub vahetult ülaltoodud arutlustest. Teise väite tõestust alustame teist järku joone juhust. Sel korral $i, j = 1, 2$ ning tingimustel (96.1) on kuju

$$a_{11}k_1 + a_{12}k_2 = \lambda k_1.$$
$$a_{12}k_1 + a_{22}k_2 = \lambda k_2.$$

Siit järeldub järgmine süsteem $\boldsymbol{k}$ koordinaatide määramiseks

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) k_1 + a_{12}k_2 &= 0, \\ a_{12}k_1 + (a_{22} - \lambda) k_2 &= 0. \end{aligned} \tag{96.2}$$

Süsteem on, nagu näha, lineaarne ja homogeenne. Nullist erineva vektori $\boldsymbol{k}$ koordinaadid peavad moodustama tema mittetriviaalse lahendi, järelikult süsteemi determinant peab olema võrdne nulliga:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{96.3}$$

Siit tekib λ määramiseks ruutvõrrand

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0,$$

mille diskriminant on

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) =$$
$$= a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{11}a_{22} - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2 = (a_{11} \quad a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geqslant 0.$$

Seega võrrandil on üldjuhul kaks erinevat reaalset lahendit, välja arvatud erandjuht, mil $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ ja võrrandil on ainus lahend $\lambda = a$, kus $a = a_{11} = a_{22}$. Üldjuhul tuleb peasihtide leidmiseks lahendid λ_1 ja λ_2 asendada kordamööda süsteemi (96.2) võrrandeisse ning määrata kummalgi juhul eksisteeriv mittetriviaalne lahend (k_1, k_2). Kumbki sel teel saadav vektor $\boldsymbol{k}$ määrab peasihi, nagu on kerge veenduda, tehes arutlused läbi vastupidises järjekorras. Erandjuhul ainsa lahendi $\lambda = a$ asendamisel süsteemi (96.2) võrrandeisse tekivad (tänu võrdustele $a_{11} = a_{22} = a$, $a_{12} = 0$) triviaalsed samasused $0 = 0$. Järelikult sel juhul rahuldab iga siht peasihi definitsiooni tingimust.

Kokkuvõttes, igal teist järku joonel on kas täpselt kaks peasihti või lõpmata palju peasihte. Viimasel juhul tasandi iga siht on joone peasihiks. Art. 68 tulemuste põhjal võib öelda, et joon on sel korral ringjoon.

Tuleb veel näidata, et üldjuhul, mil joonel on ainult kaks peasihti, on need sihid alati risti. Tõestuseks piisab, kui valida ristreeper selliselt, et baasivektor $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$ oleks ühes peasihis. Sel korral peavad süsteemi (96.2) rahuldama väärtused $k_1 = 1$, $k_2 = 0$. Teisest võrrandist järeldub nüüd, et

$$a_{12}=0. \tag{96.4}$$

Selliselt valitud ristreeperi korral võrrand (96.3) tuleb kujul $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) = 0$, tema lahendeiks on seega

$$\lambda_1=a_{11}, \qquad \lambda_2=a_{22}. \tag{96.5}$$

Süsteemi (96.2) võrrandeil on seejuures kuju

$$(\lambda_1-\lambda)k_1=0, \qquad (\lambda_2-\lambda)k_2=0.$$

Baasivektori $\boldsymbol{e}_1$ siht on siin lahendile λ_1 vastav peasiht, sest selle lahendi korral teisest võrrandist $(\lambda_2-\lambda_1)k_2 = 0$ järeldub tõesti, et $k_2 = 0$ (kuna ainult kaht peasihti omava joone korral $a_{11} \neq a_{22}$, s. t $\lambda_2-\lambda_1 \neq 0$). Teisele lahendile λ_2 vastava peasihi puhul tekib ainus tingimus: $(\lambda_1-\lambda_2)k_1 = 0$, millest $k_1 = 0$. Järelikult teine peasiht määratakse vektoriga $\boldsymbol{k} = (0, k_2)$ ja ta on, nagu näha, risti esimese peasihiga, sest tegemist on ristreeperiga.

Teist järku joone peasihte võib määrata ka vahetult, ilma vahepeal võrrandit (96.3) lahendamata. Piisab näiteks, kui korrutada süsteemi (96.2) võrrandite pooli vastavalt suurustega k_2 ja $-k_1$ ning seejärel liita. Tulemuseks on võrrand vektori $\boldsymbol{k}$ koordinaatide määramiseks:

$$(a_{11}k_1+a_{12}k_2)k_2-(a_{12}k_1+a_{22}k_2)k_1=0$$

ehk

$$a_{12}(k_2^2-k_1^2)+(a_{11}-a_{22})k_1k_2=0.$$

Otsitavaks võib lugeda ühikvektori Sel korral $k_1 = \cos\alpha$, $k_2 = \sin\alpha$, kus $\alpha = \angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{k})$, ning viimane võrrand omandab kuju

$$a_{12}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}(a_{11}-a_{22})\sin 2\alpha=0. \tag{96.6}$$

Kui siin a_{12} ja $a_{11}-a_{22}$ pole korraga nullid (s. t. kui pole tegemist ringjoonega), siis peasihti määrav pöördenurk α on leitav valemist

$$\tan 2\alpha=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}. \tag{96.7}$$

Et $\tan(2\alpha+k\pi) = \tan 2\alpha$, siis 2α määratakse siit liidetava $k\pi$ täpsusega ning α järelikult liidetava $k\frac{\pi}{2}$ täpsusega. Kui $a_{12} = a_{11} - a_{22} = 0$, siis rahuldab tingimust (96.6) iga siht, nagu peabki olema.

Teist järku pinna korral süsteem (96.1) on järgmine

$$\begin{aligned} a_{11}k_1+a_{21}k_2+a_{31}k_3&=\lambda k_1,\\ a_{12}k_1+a_{22}k_2+a_{32}k_3&=\lambda k_2,\\ a_{13}k_1+a_{23}k_2+a_{33}k_3&=\lambda k_3 \end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)k_1+a_{12}k_1+a_{13}k_3&=0,\\ a_{12}k_1+(a_{22}-\lambda)k_2+a_{33}k_3&=0,\\ a_{13}k_1+a_{23}k_2+(a_{33}-\lambda)k_3&=0. \end{aligned} \tag{96.8}$$

Ka siin on mittetriviaalse lahendi olemasoluks (üksnes selline määrab peasihi) tarvilik ja piisav, et süsteemi determinant oleks võrdne nulliga:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{96.9}$$

Tekib kuupvõrrand λ määramiseks:

$$-\lambda^3+(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2-\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{13} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}\right)\lambda+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}=0. \tag{96.10}$$

Igal kuupvõrrandil on teatavasti vähemalt üks reaalne lahend.[120] Kui tähistada see λ_3 ja asendada süsteemi (96.8) võrrandeisse λ asemele, siis tekib lineaarne homogeenne süsteem, mille determinant on võrdne nulliga ja millel on järelikult olemas mittetriviaalne lahend. Viimane määrab sihi, mis osutub peasihiks, nagu on kerge veenduda, tehes eelnenud arutlused läbi vastupidises järjekorras. Olgu nüüd ristbaasi vektorid valitud selliselt, et $e_3 = (0, 0, 1)$ oleks selles peasihis. Sel korral süsteem (96.8), kus $\lambda = \lambda_3$, on rahuldatud väärtuste $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 1$ poolt, mistõttu $a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = \lambda_3$. Süsteem (96.8) omandab niiviisi

---

[120] Vt. G. Kangro, Matemaatiline analüüs, I. Tallinn, 1965, lk. 131.

valitud baasi puhul kujul:

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)k_1+a_{12}k_2&=0,\\ a_{12}k_1+(a_{22}-\lambda)k_2&=0,\\ (\lambda_3-\lambda)k_3&=0,\end{aligned}$$

võrrand (96.9) aga kuju:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}(\lambda_3-\lambda)=0.$$

Mõlemad jagunevad kaheks iseseisvaks osaks: 1) süsteem k_1 ja k_2 määramiseks, mis ühtib süsteemiga (96.2), ja vastav võrrand sobivate λ väärtuste määramiseks, mis ühtib võrrandiga (96.3), 2) võrrandid $(\lambda_3-\lambda)k_3=0$ ja $\lambda_3-\lambda=0$ vastavalt k_3 ja λ määramiseks.

Esimest süsteemi ja võrrandit saab käsitleda täpselt samuti, nagu eespool on uuritud süsteemi (96.2) ja võrrandit (96.3). Järelikult lahendile λ_3 lisandub kas kaks erinevat lahendit λ_1 ja λ_2 või üksainus lahend a (kui $a_{11}=a_{22}=a$, $a_{12}=0$). Esimesel juhul leidub parajasti kaks ristuvat vektorit $(k_1, k_2, 0)$, milledest kummagi koordinaadid rahuldavad süsteemi (96.2) asenduste $\lambda=\lambda_1$ või $\lambda=\lambda_2$ korral ning osutuvad seega peasihilisteks vektoriteks. Et nende vektorite sihid on risti vektori e_3 sihiga, siis sel juhul on teoreemi väide tõestatud. Teisel juhul, kui $a_{11}=a_{22}=a$, $a_{12}=0$, on iga vektor $(k_1, k_2, 0)$ peasihiline, vastates väärtusele $\lambda=a$. Järelikult ka sel juhul teoreemi väide kehtib. ∎

Võrrandit (96.3) või (96.9) nimetatakse **karakteristlikuks võrrandiks** vastavalt teist järku joone või teist järku pinna antud võrrandi jaoks.

***Teoreem* 96.2.** *Ristbaasi vektorid on teist järku pinna peasihtides parajasti siis, kui pinna võrrandis selle ristbaasi suhtes* $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$. *Sel puhul koostatud karakteristlikul võrrandil on kolm reaalset lahendit* λ_1, λ_2 *ja* λ_3, *milledeks on parajasti pinna võrrandi kordajad* a_{11}, a_{22} *ja* a_{33}. *Kui need lahendid on kõik erinevad, siis pinnal on täpselt kolm paarikaupa ristuvat peasihti — baasivektorite sihid. Kui kaks lahendit* $\lambda_1=a_{11}$ *ja* $\lambda_2=a_{22}$ *ühtivad (s. t.* $\lambda_1=\lambda_2$*), kolmas aga on nendest erinev, siis peasihiks on baasivektoritega* e_1 *ja* e_2 *määratud rihi iga siht ning selle rihiga ristuv siht. Kui kõik kolm lahendit ühtivad, siis peasihiks on iga siht.*

Tõestus. Juba eelmise teoreemi tõestuses selgus, et kui ristbaasi vektorid on peasihtides, siis on $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$. Nüüd tuleb tõestada vastupidine väide. Olgu $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$; sel korral süsteemi (96.8) võrrandeil on kuju

$$(a_{11}-\lambda)k_1=0,\quad (a_{22}-\lambda)k_2=0,\quad (a_{33}-\lambda)k_3=0, \tag{96.11}$$

karakteristlikul võrrandil (96.9) aga kuju

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)=0.$$

Siit järeldub kohe, et karakteristliku võrrandi lahendeiks on $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = a_{22}$, $\lambda_3 = a_{33}$, mistõttu võrrandid (96.11) saab kirjutada kujul

$$(\lambda_1-\lambda)k_1=0, \quad (\lambda_2-\lambda)k_2=0, \quad (\lambda_3-\lambda)k_3=0.$$

Olgu $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$. Sel korral asendus $\lambda = \lambda_1$ annab:

$$(\lambda_2-\lambda_1)k_2=0, \quad (\lambda_3-\lambda_1)k_3=0.$$

Et siin $\lambda_2-\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_3-\lambda_1 \neq 0$, siis $k_2 = k_3 = 0$. Tähendab, lahendile λ_1 vastav peasiht on vektorite $(k, 0, 0)$ siht ning ühtib seega baasivektori $\boldsymbol{e}_1$ sihiga. Tulemused on analoogilised asenduste $\lambda = \lambda_2$ ja $\lambda = \lambda_3$ puhul.

Olgu $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Sel korral asendus $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ annab:

$$(\lambda_3-\lambda_1)k_3=0$$

ning siit $k_3 = 0$. Tähendab, kahekordsele lahendile $\lambda_1 = \lambda_2$ vastavaks peasihiks on iga vektori $(k_1, k_2, 0)$ siht, need sihid aga täidavad baasivektoritega $\boldsymbol{e}_1$ ja $\boldsymbol{e}_2$ määratud rihi. Asenduse $\lambda = \lambda_3$ puhul

$$(\lambda_1-\lambda_3)k_1=0, \quad (\lambda_2-\lambda_3)k_2=0$$

ja siit $k_1 = k_2 = 0$, s. t. vastavaks peasihiks on vektorite $(0, 0, k_3)$ siht ehk $\boldsymbol{e}_3$ siht, mis on risti mainitud rihiga.

Kui $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, siis ainus võimalik asendus $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ annab triviaalsed samasused $0 = 0$. Seega iga siht on peasiht. ∎

Teoreemist järeldub, et siht, mis on risti teist järku pinna kahe erineva peasihiga, on ka ise pinna peasiht.

Teoreemis mainitud kolm võimalust leiavad ka tegelikult aset. Kahekordset lahendit omava karakteristliku võrrandiga teist järku pinna näiteks on pöördkoonus, mille võrrandiks sobivalt valitud ristreeperi suhtes on

$$x_1^2+x_2^2-k^2x_3^2=0,$$

sest sel puhul tõesti $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -k^2$. Peasihtideks on pöördkoonuse telje siht ja sellega ristuva rihi iga siht. Kolmekordset lahendit omava karakteristliku võrrandiga pinna näiteks on sfäär

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2\}, \qquad (96.12)$$

sest sel korral $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Sfääri peasihiks on iga siht.

Kvadriku peasihte kasutades on lihtne tõestada teoreemiga 64.2 analoogiline väide ruumi puhul, nn. afiinsete teisenduste põhiteoreem.

***Teoreem* 96.3.** *Ruumi iga afiinse teisenduse võib saada ühe liikumise ja mitte rohkem kui kolme paarikaupa ristuvates sihtides tehtud kokkusurumiste või väljavenitamiste järjest sooritamisel selliselt, et viimaste teisenduste püsitasandeiks on kolm tasandit, mis on risti mainitud sihtidega.*

Tõestus. Samuti nagu teoreemi 64.2 tõestuses on kõige olulisem näidata, et leidub kolm ristuvat sihti, mis kujutuvad jälle ristuvateks sihtideks.

Vaatleme ruumis teatavat sfääri. See kui kvadrik kujutub afiinse teisenduse toimel teatavaks kvadrikuks samast afiinsest klassist.[121] Sellel kvadrikul on, nagu eespool selgus, kolm paarikaupa ristuvat peasihti. Osutub, et nende originaalideks on samuti kolm ristuvat sihti. Tõepoolest, antud afiinse teisenduse pöördteisendus kujutab vaadeldava kvadriku peasihid kui sihid, mis on paarikaupa teineteise kaassihtideks selle kvadriku suhtes, niisuguseks kolmeks sihiks, mis on paarikaupa kaassihid sfääri suhtes. Põhjuseks on asjaolu, et kahe sihi omadus olla kaassihid on invariantne afiinsete teisenduste suhtes. Kaassihid sfääri suhtes on aga risti, nagu selgub tingimuse (90.3) rakendamisel sfääri (96.12) puhul.

Kui nüüd võtta ristreeper $\{O;\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$ nii, et selle baasivektorid oleksid peasihtide originaalideks, siis selle reeperi kujutise $\{O;\ \boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2,\ \boldsymbol{e}'_3\}$ vektorid on peasihtides ja seega paarikaupa risti. Järelikult leidub lähtereeperiga samasuguselt orienteeritud ristreeper $\{O';\ \boldsymbol{e}''_1,\ \boldsymbol{e}''_2,\ \boldsymbol{e}''_3\}$, nii et $\boldsymbol{e}'_1 = k_1\boldsymbol{e}''_1$, $\boldsymbol{e}'_2 = k_2\boldsymbol{e}''_2$, $\boldsymbol{e}'_3 = k_3\boldsymbol{e}''_3$. Edasine kordab nüüd teoreemi 64.2 tõestuse lõpuosa (muidugi vajalike muudatustega).

97. Invariandid. Paarikaupa ristuvate peasihtide olemasolu iga kvadriku korral annab võimaluse lihtsustada kvadriku võrrandit ristbaasi sobiva valiku teel. Kui baasivektorid on pööratud peasihilisteks, siis (96.4) ja teoreemi 96.2 kohaselt kvadriku võrrandis $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, kusjuures kordajateks a_{ii} on selliselt valitud baasi suhtes koostatud karakteristliku võrrandi lahendid. Viimase tulemuse teeb eriti väärtuslikuks järgmine oluline teoreem.

***Teoreem* 97.1.** *Kvadriku karakteristlik võrrand ei sõltu sellest, missuguse ristbaasi suhtes ta on koostatud, s. t. selle võrrandi vasak pool ei muutu ristbaasi teisendamisel.*

Tõestus. Üleminek ühelt ristbaasilt teisele määratakse valemitega

$$\boldsymbol{e}'_j = \boldsymbol{e}_i c_{ij},$$

kus maatriks $C = \|c_{ij}\|$ on ortogonaalmaatriks (vt. art. 59). Sel puhul vektori koordinaadid teisenevad järgmiselt: kui $\boldsymbol{x} = x'_j \boldsymbol{e}'_j = x_i \boldsymbol{e}_i$, siis

$$x_i = c_{ij} x'_j \tag{97.1}$$

(vt. (17.5); tulemuse võib saada vahetu asendusega). Karakteristliku võrrandini jõudmiseks tuleb lisaks kvadriku võrrandiga

[121] Art-s 100 selgub, et iga kvadrik sfääriga samast afiinsest klassist on ellipsoid.

(86.4) antud ruutvormile $a_{ij}x_ix_j$ vaadelda veel erikujulist ruutvormi $x_1^2+\ldots+x_n^2$ ($n=2$ või 3). Karakteristliku võrrandi vasak pool on nimelt ruutvormi

$$a_{ij}x_ix_j-\lambda(x_1^2+\ldots+x_n^2), \tag{97.2}$$

kus $i, j=1, \ldots, n$ ($n=2$ või 3), kordajate determinant. Tõepoolest, näiteks teist järku joone ($n=2$) korral see ruutvorm on korraldatav kujju

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2-\lambda(x_1^2+x_2^2)= \\ &=(a_{11}-\lambda)x_1^2+2a_{12}x_1x_2+(a_{22}-\lambda)x_2^2 \end{aligned}$$

ning tema kordajate determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}$$

ühtib tõesti karakteristliku võrrandi (96.3) vasaku poolega. Analoogiliselt tuleb arutleda ka teist järku pinna puhul ($n=3$). Järelikult on oluline uurida, kuidas teiseneb ristbaasi teisenemise korral erikujuline ruutvorm $x_1^2+\ldots+x_n^2$. Näiteks ruumi juhul ($n=3$) on ortogonaalmaatriksi elementide c_{ij} vahel kehtivate seoste (58.7) tõttu

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2+x_3^2 &= (c_{11}x'_1+c_{12}x'_2+c_{13}x'_3)^2+ \\ &+(c_{21}x'_1+c_{22}x'_2+c_{23}x'_3)^2+ \\ &+(c_{31}x'_1+c_{32}x'_2+c_{33}x'_3)^2= \\ &=(c_{11}^2+c_{21}^2+c_{31}^2)x_1'^2+ \\ &+(c_{12}^2+c_{22}^2+c_{32}^2)x_2'^2+ \\ &+(c_{13}^2+c_{23}^2+c_{33}^2)x_3'^2+ \\ &+2(c_{11}c_{12}+c_{21}c_{22}+c_{31}c_{32})x'_1x'_2+ \\ &+2(c_{11}c_{13}+c_{21}c_{23}+c_{31}c_{33})x'_1x'_3+ \\ &+2(c_{12}c_{13}+c_{22}c_{23}+c_{32}c_{33})x'_2x'_3= \\ &=x_1'^2+x_2'^2+x_3 . \end{aligned} \tag{97.3}$$

Analoogiliselt tasandi juhul

$$x_1^2+x_2^2=x_1'^2+x_2'^2. \tag{97.4}$$

(Tulemus on tihedalt seotud tõsiasjaga, et liikumise korral jääb vektori pikkus muutumatuks, vrd. art. 59.) Saadud võrduste abil on lihtne uurida kvadriku karakteristliku võrrandi teisenemist.

Nii leiame, et pärast ristbaasi teisendust ruutvorm (97.2) omandab seoste (97.1), (97.3) ja (97.4) põhjal kuju

$$a_{ij}(c_{ik}x'_k)(c_{jl}x'_l)-\lambda(x_1'^2+\ldots+x_n'^2)$$

ehk

$$a'_{kl}x'_kx'_l-\lambda(x_1'^2+\ldots+x_n'^2), \tag{97.5}$$

kus

$$a'_{kl}=a_{ij}c_{ik}c_{jl}$$

on (87.3) põhjal kvadriku uue võrrandi kordajad. Järelikult ruutvormi (97.2) teisendatud kuju (97.5) kordajatest moodustatud determinant ühtib kvadriku karakteristliku võrrandi vasaku poolega, mis on seekord moodustatud uue reeperi suhtes.

Eespool (art-s 87) on selgitatud, kuidas muutub baasi teisendamisel ruutvormi kordajatest moodustatud determinant — ta korrutub teisenduse determinandi $|C|$ ruuduga (vt. (87.6)). Praegu, mil selleks determinandiks ruutvormi (97.2) korral on kvadriku karakteristliku võrrandi vasak pool, ning $|C| = \pm 1$, sest maatriks C on ortogonaalmaatriks (vt. art. 58), järeldub mainitud tulemusest, et ristbaasi teisendamisel korrutub karakteristliku võrrandi vasak pool arvuga $|C|^2 = (\pm 1)^2 = 1$, s. t. jääb muutumatuks. ∎

Teist järku joone korral karakteristlik võrrand (96.3) on ruutvõrrand

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=0, \tag{97.6}$$

mille vabaliikmeks on juba varasemast tuttav determinant δ. Kui tähistada

$$s=a_{11}+a_{22},$$

siis saab karakteristliku võrrandi kirja panna kujul

$$\lambda^2-s\lambda+\delta=0.$$

Et selle võrrandi vasak pool ei muutu ristbaasi teisendamisel, siis

$$\lambda^2-s\lambda+\delta=\lambda^2-s'\lambda+\delta', \tag{97.7}$$

kus

$$s'=a'_{11}+a'_{22},$$

$$\delta'=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{vmatrix}.$$

Seejuures kehtib võrdus (97.7) λ iga väärtuse korral, s. t. on samasus λ suhtes. Kui võtta $\lambda = 0$, on tulemuseks

$$\delta=\delta', \tag{97.8}$$

kui aga võtta $\lambda=1$, siis $1-s=1-s'$, s. t.

$$s=s'. \tag{97.9}$$

Järelikult on ristbaasi teisendamisel muutumatud ka järgmised teist järku joone võrrandi kordajatest moodustatud suurused:

$$s=a_{11}+a_{22}.$$

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Neid suurusi nimetatakse teist järku joone võrrandi invariantideks.

Invariantideks on ka teist järku pinna karakteristliku võrrandi (96.10) kordajad:

$$s=a_{11}+a_{22}+a_{33},$$

$$S=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Niisamuti nagu eespool, saab ka siin teoreemist 97.1 järeldada, et kui teist järku pinna võrrandi kordajatest moodustada avaldised s, S ja δ, siis nende väärtused antud pinna korral ei muutu ristbaasi teisendamisel (kuigi eraldi võttes kordajad a_{ij} muutuvad).[122]

Samasuguseks muutumatuks suuruseks mitte üksnes ristbaasi, vaid ka ristreeperi mistahes teisenduse korral on kvadriku võrrandi kõikidest kordajatest moodustatud determinant Δ, s. t. teist järku joone ja pinna korral vastavalt

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}$$

[122] Vrd. def-iga 20.1, milles on antud invariandi mõiste lõpliku arvu vektorite puhul ja baasi mistahes teisenduse korral (võrrandi kordajate asemel on seal vektorite koordinaadid). Käesoleval juhul, kui on tegemist ristbaasidega ja nende teisendamisel seega ortogonaalmaatriksitega, kõneldakse selle asjaolu rõhutamiseks sageli ka teist järku joone või pinna võrrandi *ortogonaalsetest invariantidest*. Märgime täiendavalt, et tasandil on suuruste s ja δ muutumatust ristreeperi teisendamisel võimalik kontrollida ka vahetult, leides valemite (26.11) abil teist järku joone uue võrrandi kordajate avaldised ja arvutades nende järgi s' ja δ' (vt. G. Rägo, Kõrgem matemaatika I. Tallinn, 1962. lk. 310—314).

See on järeldatav vahetult võrdusest (87.13) ja sellest, et ortogonaalmaatriksi C korral $|C| = \pm 1$. (Analoogiliselt järeldub ka δ invariantsus vahetult võrdusest (87.6).)

Eespool leitud suurused s, S, δ ja Δ on järgmise üldise mõiste erijuhud.

***Def.* 97.1.** Iga polünoomi, mis on koostatud kvadriku võrrandi kordajatest ning jääb muutumatuks üleminekul ühelt ristreeperilt teisele, nimetatakse kvadriku võrrandi i n v a r i a n d i k s (täpsemalt ortogonaalseks invariandiks).

Invarianti $F(a_{11}, a_{12}, \ldots, a)$ iseloomustab seega võrdus

$$F(a_{11}, a_{12}, \ldots, a) = F(a'_{11}, a'_{12}, \ldots, a'),$$

kus a'_{kl}, a'_k ja a' avalduvad a_{ij}, a_i ja a kaudu valemitega

$$\begin{aligned} a'_{kl} &= a_{ij}c_{ik}c_{jl}, \\ a'_k &= a_{ij}c_{ik}c_j + a_i c_{ik}, \\ a' &= a_{ij}c_i c_j + 2a_i c_i + a, \end{aligned} \tag{97.10}$$

milles $C = \|c_{ik}\|$ on ortogonaalmaatriks ja c_i suvalised reaalarvud. Need valemid tekivad ristkoordinaatide teisenduse $x_i = c_{ik}x'_k + c_i$ puhul üldjuhul kehtivate valemite (87.3), (87.7) ja (87.8) erijuhtudena.

Sellisteks invariantideks on näiteks järgmised a_{ij}, a_i ja a polünoomid: $s\Delta$, $S + \delta$ jne., üldiselt iga polünoom suurustest s, S, δ ja Δ. Seetõttu tekib küsimus, missugune on omavahel sõltumatute invariantide maksimaalne arv, s. t. kui palju on võimalik leida invariante, millest ükski ei ole ülejäänute polünoom, nii et iga invariant oleks nende kõigi polünoom.

Teist järku joonte ja pindade korral on see arv erinev ning määratud sellega, mitmest parameetrist sõltuvad valemite (97.10) paremates pooltes ortogonaalmaatriksi C elemendid c_{ik}. Iga invarianti võib nimelt vaadelda kui nende parameetrite ja nendest sõltumatute parameetrite c_i elimineerimise tulemust valemeist (97.10).

Tasandi juhul, mil ortogonaalmaatriksi elemendid sõltuvad (58.11) põhjal ainult ühest parameetrist — pöördenurgast α, on valemeid (97.10) kokku 6 ning nende paremates pooltes olevate parameetrite arv 3. Järelikult teist järku joone võrrandil saab olla maksimaalselt $6 - 3 = 3$ sõltumatut invarianti. (Võib näiteks kujutleda, et parameetrid on avaldatud mingist kolmest valemist a_{ij}, a_i, a ja a'_{kl}, a'_k, a' kaudu ning tulemused on asendatud ülejäänud kolme valemisse.) Sellisteks sõltumatuteks invariantideks ongi s, δ ja Δ, sest igaüks neist sisaldab joone võrrandi uusi kordajaid, mis eelmistes veel ei sisaldu.

Ruumi juhul sõltuvad ortogonaalmaatriksi elemendid kolmest parameetrist — näiteks Euleri nurkadest (vt. (58.12)). Seega kümne valemi paremates pooltes on 6 parameetrit, nende elimineerimisel tekib maksimaalselt $10 - 6 = 4$ sõltumatut invarianti. Osutub, et nendeks ongi s, S, δ ja Δ.

Invariantide kõrval tuleb mõnikord kasutada ka nn. semiinvariante[123], s. t. selliseid polünoome kvadriku võrrandi kordajatest, mis jäävad muutumatuks ristbaasi pööramisel sama alguspunkti ümber, kuid mis alguspunkti ülekandmisel üldiselt muutuvad.

Teist järku joone puhul on selline semiinvariant näiteks

$$\sigma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix}. \tag{97.11}$$

Tõepoolest, $\sigma = a_{11}a - a_1^2 + a_{22}a - a_2^2 = as - (a^2_1 + a_2^2)$, seejuures s on invariant, valemite (97.10) põhjal a ei muutu üldse, kui reeperi alguspunkt jääb paigale ning (97.4) põhjal on ortogonaalmaatriksi $C = \|c_{ij}\|$ korral muutumatu ka $a_1^2 + a_2^2$. Analoogiliselt saab põhjendada, et teist järku pinna puhul on semiinvariandiks

$$\sigma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a \end{vmatrix}. \tag{97.12}$$

Nii selle kui ka ühe uue semiinvariandi Σ võib saada, kui rakendada koos art-tes 87 ja 97 kasutatud võtteid. Kui moodustada ruutvorm

$$a_{IJ}x_Ix_J - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \qquad I, J = 0, 1, 2, 3,$$

ja teha selles teisendus (87.10) ehk (87.11), võttes $c_i = 0$ ja maatriksiks $C = \|c_{ij}\|$ ortogonaalmaatriksi, siis tulemuseks on (97.3) põhjal ruutvorm

$$a'_{KL}x'_Kx'_L - \lambda(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2).$$

Et ruutvormi kordajatest moodustatud determinant teiseneb valemi (87.6) järgi ja ortogonaalmaatriksi C korral $|C| = \pm 1$, siis

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a'_{12} & a'_{13} & a'_1 \\ a'_{12} & a'_{22} - \lambda & a'_{23} & a'_2 \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} - \lambda & a'_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a \end{vmatrix}$$

parameetri λ iga väärtuse korral. Siin λ^2 kordajaks on vasakul σ, paremal aga σ', s. t. tõesti $\sigma = \sigma'$. Kui võrrelda λ kordajaid vasakul ja paremal, näeme, et semiinvariant on ka

[123] lad. k. *semi-* — pool-.

$$\Sigma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}. \tag{97.13}$$

98. Telg ja peatasand. Peasihtidega on tihedalt seotud kvadrikute sümmeetriaomadused, teisiti öeldes, sirged ja tasandid, mille suhtes antud kvadrik on sümmeetriline.

***Def.* 98.1.** Kvadriku mitteiseärase peasihi kaasdiameeterlineaari nimetatakse kvadriku pealineaariks.

Vastavalt termini «lineaar» tähendusele (art. 86) on teist järku pinna korral tegemist peatasandiga, teist järku joone korral peasirgega. Viimast nimetatakse ka teist järku joone teljeks.

Kvadriku pealineaari määramiseks on tarvis leida tunnus, mis võimaldaks antud peasihi korral öelda, kas ta on iseärane või mitte.

***Teoreem* 98.1.** *Kvadriku iga iseärane siht, kui selline eksisteerib (s. t. kui on tegemist II klassi kvadrikuga), osutub ühtlasi kvadriku peasihiks, nimelt selliseks peasihiks, mis vastab kvadriku karakteristliku võrrandi lahendile* 0. *Vastupidi, iga seda laadi peasiht on iseärane.*

Tõestus. Vektor $\boldsymbol{k} \neq 0$ ristkoordinaatidega k_i määrab kvadriku iseärase sihi parajasti siis, kui on rahuldatud (90.2):

$$a_{ij}k_i = 0.$$

(Selleks on tarvilik, et det $|a_{ij}| = \delta = 0$.) Sel korral on aga rahuldatud ka peasihi määravad tingimused (96.1):

$$a_{ij}k_i = \lambda k_j \tag{98.1}$$

ja nimelt väärtuse $\lambda = 0$ puhul. Ühtlasi on siit näha, et ka vastupidi, iga peasiht, mis vastab karakteristliku võrrandi lahendile 0, kui selline eksisteerib (s. t. kui $\delta = 0$), on iseärane siht. ▮

Järelikult tuleb kvadriku pealineaaride leidmiseks kõigepealt lahendada kvadriku karakteristlik võrrand (mis, nagu selgus eelmises artiklis, on ühesugune kõikide ristreeperite suhtes) ning määrata seejärel võrrandi nullist erinevatele lahenditele vastavate peasihtide kaasdiameeterlineaarid. Kui mõni sellistest lahenditest tähistada λ, siis vastavas peasihis võetud vektori $\boldsymbol{k}$ korral on rahuldatud süsteem (98.1). Selle peasihi kaasdiameeterlineaari ehk vastava pealineaari võrrandi

$$(a_{ij}x_j + a_i)k_i = 0$$

ehk

$$(a_{ij}k_i)x_j + a_ik_i = 0$$

võib järelikult esitada ka lihtsamalt:

$$\lambda k_j x_j + a_i k_i = 0.$$

Kui siin ka esimeses summas summeerimisindeks tähistada i ning võrrandi pooli jagada arvuga λ, siis vaadeldava pealineaari võrrand omandab eriti lihtsa kuju:

$$k_i\left(x_i + \frac{a_i}{\lambda}\right) = 0.$$

***Teoreem* 98.2.** *Kvadrik on sümmeetriline iga oma pealineaari suhtes.*

T õ e s t u s. Teoreemi 90.1 kohaselt poolitab kvadriku iga mitteasümptootilise sihi kaasdiameeterlineaar kõik selle sihiga kõõlud. Peasiht on definitsiooni kohaselt risti oma kaasdiameeterlineaariga. Järelikult kui peasiht on mitteasümptootiline, siis selle peasihi kaasdiameeterlineaar ehk vastav pealineaar poolitab kõik temaga ristuvad kõõlud ja kvadrik on tema suhtes sümmeetriline. Seega on jäänud selgitada, millal peasiht on asümptootiline, s. t. millal tema sihivektori $\boldsymbol{k}$ korral $a_{ij}k_i k_j = 0$. Et (98.1) põhjal $a_{ij}k_i k_j = \lambda k_j k_j = \lambda \boldsymbol{k}^2$ ning siin $\boldsymbol{k}^2 \neq 0$, siis peasiht on asümptootiline parajasti siis, kui $\lambda = 0$, s. t. kui ta on iseärane. Mitteiseärane peasiht on seega ka mitteasümptootiline. Järelikult pealineaar kui ühe sellise peasihi kaasdiameeterlineaar poolitab kõik temaga ristuvad kõõlud. ∎

Kvadrikute pealineaaride osas on võimalikud järgmised juhud.

Et teist järku joone karakteristliku võrrandi lahendite λ_1 ja λ_2 korral on Viète'i teoreemi järgi $\lambda_1\lambda_2 = \delta$, siis *I* klassi joontel, kui $\delta \neq 0$, on kas täpselt kaks telge (kui $\lambda_1 \neq \lambda_2$) või kõik selle joone diameetrid on ühtlasi ka telgedeks (kui $\lambda_1 = \lambda_2$). Viimane juht, nagu eespool selgus, esineb näiteks ringjoone korral.

II klassi teist järku joone korral, mil $\delta = \lambda_1\lambda_2 = 0$, on karakteristlikul võrrandil ainult üks nullist erinev lahend ning joonel seega ainult üks telg. Viimane kui üks diameetritest omab samuti nagu selle klassi joone kõik omavahel paralleelsed diameetrid iseärase sihi.

Teist järku pinna kahe peatasandi lõikesirget, kui selline eksisteerib, nimetatakse pinna t e l j e k s. Pind on selle suhtes ilmselt sümmeetriline. Telg, olles risti kahe peasihiga, on alati peasihiline (vt. järeldust teoreemist 96.2).

I klassi teist järku pinna korral, mil $\delta \neq 0$, on tänu seosele $\delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ karakteristliku võrrandi kõik lahendid λ_1, λ_2 ja λ_3 nullist erinevad ja pinnal on seega kas kolm paarikaupa ristuvat peatasandit (kui $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$) või peatasandite kimp ja veel üks selle kimbu teljega ristuv peatasand (kui λ_1, λ_2, λ_3 seas on kaks võrdset) või iga keskpunkti läbiv tasand on peatasand (kui $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$). Esimesel juhul pinnal on kolm paarikaupa ristuvat telge, teisel juhul terve kimp telgi ühel peatasandil ja veel üks telg, mis on risti selle peatasandiga, kolmandal juhul on iga keskpunkti läbiv sirge pinna teljeks. Teise ja kolmanda juhu näideteks on, nagu eespool selgus, vastavalt pöördkoonus ja sfäär.

II klassi teist järku pinna korral $\delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$, mistõttu pinna karakteristlikul võrrandil saab olla ülimalt kaks nullist erinevat lahendit λ_1 ja λ_2. Kui nad mõlemad on nullist erinevad ja ei ole omavahel võrdsed, siis pinnal on kaks ristuvat mitteiseärast peasihti ning seega kaks ristuvat peatasandit, millede lõikumisel tekib üksainus telg. Selle siht ühtib kolmanda peasihiga, mis on iseärane, sest $\lambda_3 = 0$. Kui $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, siis pinnal on riht, mille iga siht on peasihiks. Järelikult tekib peatasandite kimp, mille telg on pinna ainsaks teljeks. Viimane kulgeb iseärases peasihis. Kui *II* klassi pinna korral $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$, siis pinnal on üksainus peatasand ning teljed puuduvad.

99. Teist järku joonte kongruentsusklassid. Kvadrikute afiinsest geomeetriast on teada, et kõik teist järku jooned jagunevad üheksasse afiinsesse klassi ***IA***1—3, ***IB***4—5, ***IIA***6 ja ***IIB***7—9. Ühtlasi on iga klassi jaoks teada lihtsaim võrrand, millega saab esitada selle klassi joone sobivalt valitud afiinse reeperi suhtes. Need tulemused aga ei võimalda veel kõikidel juhtudel ära tunda, missuguste joontega on tegemist. Põhjuseks on asjaolu, et reepereiks, mille suhtes on IV peatükis koostatud koonuselõigete — teist järku joone senituntud näidete — kõige lihtsamad võrrandid, olid alati teatavad ristreeperid. Seetõttu on oluline selgitada, missuguse lihtsa võrrandini on üldse võimalik jõuda teist järku joonte puhul, kui tasandil sobivalt valida mitte enam üldisi laadi afiinne reeper, nagu art-s 92, vaid ristreeper.

Igal teist järku joonel on teoreemi 96.1 kohaselt vähemalt kaks peasihti, mis on teineteisega risti. Kui ristreeperi baasivektorid e_1 ja e_2 on pööratud peasihtidesse, siis kehtivad võrdused (96.4) ja (96.5) ning joone võrrandil on kuju

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2a_i x_i + a = 0, \tag{99.1}$$

kus λ_1 ja λ_2 on karakteristliku võrrandi (96.3) lahendid, mistõttu

$$\lambda_1 + \lambda_2 = s, \tag{99.2}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \delta. \tag{99.3}$$

I klassi joonte korral $\delta \neq 0$, mistõttu $\lambda_1 \neq 0$ ja $\lambda_2 \neq 0$. Seejuures joonel on, nagu teada, parajasti üks keskpunkt. Kui reeperi alguspunkt O on paigutatud sellesse keskpunkti, siis $a_i = 0$ ja joone võrrandil on kuju

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + a = 0.$$

Siin

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 a,$$

mistõttu $a = \frac{\Delta}{\delta}$ ning joone võrrandiks selliselt valitud ristreeperi suhtes on seega

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \quad (99.4)$$

Tuleb rõhutada, et selle võrrandi kõik kordajad on arvutatavad joone esialgse võrrandi kordajate järgi, sest λ_1 ja λ_2 on karakteristliku võrrandi

$$\lambda^2 - s\lambda + \delta = 0$$

lahendid, suurused s, δ ja Δ aga on invariandid (vt. art. 97).

I klassi joonte edasine liigitelu on teostatav nende invariantide järgi. Klassi *IA* puhul $\Delta \neq 0$.

IA1. Kui λ_1 ja λ_2 on ühemärgilised, s. t. $\delta = \lambda_1 \lambda_2 > 0$, kuid invariandil Δ ei ole nendega sama märk, siis võrrandile (99.4) saab anda kuju

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1,$$

kus

$$a = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1 \delta}}, \qquad b = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2 \delta}}. \quad (99.5)$$

Ruutjuure märgi all on mõlemas võrduses positiivne arv. Tegemist on ellipsiga, millele a ja b on pooltelgedeks (art. 76). Et $s = \lambda_1 + \lambda_2$ on praegu nullist erinev ja tema märk ühtib λ_1 ja λ_2 ühise märgiga, siis selle juhu tunnusteks on

$$\delta > 0, \quad s\Delta < 0.$$

IA2. Kui λ_1 ja λ_2 on erimärgilised, s. t. $\delta < 0$, siis võib, koordinaate x_1 ja x_2 vajaduse korral ümber nummerdades, saavutada, et λ_1 ja Δ on samamärgilised. Võrrandile (99.4) saab siis anda kuju

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1,$$

kus

$$a=\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1\delta}}, \qquad b=\sqrt{\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}}. \tag{99.6}$$

Tegemist on hüperbooliga (art. 77), mille reaalpooltelg on a ja imaginaarpooltelg b. Selle juhu tunnusteks on

$$\delta<0, \qquad \Delta\neq 0.$$

*IA*3. Olgu λ_1 ja λ_2 jälle ühemärgilised, kuid invariandil Δ olgu, erinevalt juhust *IA*1, nendega sama märk. Sel korral saab võrrandile (99.4) anda kuju

$$-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1,$$

kus

$$a=\sqrt{\frac{\Delta}{\lambda_1\delta}}, \qquad b=\sqrt{\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}}.$$

Tegemist on imaginaarse joonega (vt. art. 85), tühja punktihulgaga, sest ei ole olemas ühtegi reaalarvupaari (x_1, x_2), mis rahuldaks võrrandit. Sel juhul kõneldakse tinglikult, teatavat analoogiat arvestades, imaginaarsest ellipsist. Tunnusteks on

$$\delta>0, \qquad s\Delta>0.$$

Klassi *IB* puhul $\Delta=0$ ning võrrandiks (99.4) on

$$\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2=0.$$

*IB*4. Kui $\delta<0$, siis λ_1 ja λ_2 on erimärgilised ning võrrandile saab anda kuju

$$-k_2x_1^2+x_2^2=0,$$

kus

$$k=\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}. \tag{99.7}$$

Vasak pool on esitatav kujul $(x_2-kx_1)(x_2+kx_1)=0$, mistõttu joon on laguv ja kujutab endast võrranditega $x_2=kx_1$ ja $x_2=-kx_1$ antud lõikuvate sirgete paari. Selle juhu tunnusteks on

$$\delta<0, \qquad \Delta=0.$$

*IB*5. Kui $\delta>0$, siis λ_1 ja λ_2 on ühesuguste märkidega ning võrrandile (99.4) saab anda kuju

$$k^2x_1^2+x_2^2=0,$$

kus $k=\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$. Leidub üksainus reaalarvupaar (0,0), mis rahuldab seda võrrandit. Tegemist on imaginaarse joonega, mida tinglikult nimetatakse, arvestades analoogiat eelmise juhuga, imaginaarsete lõikuvate sirgete paariks (s. t. sirged ise on «imaginaarsed», kuid nad lõikuvad «reaalses» punktis). Tunnusteks on

$$\delta>0, \quad \Delta=0.$$

Sellega on ammendatud kõik *I* klassi teist järku joone puhul esineda võivad juhud.

II klassi joonete korral $\delta=\lambda_1\lambda_2=0$. Järelikult üks arvudest λ_1 või λ_2 on võrdne nulliga. Vajaduse korral koordinaate ümber nummerdades võib alati saavutada, et $\lambda_1=0$. Seejuures $\lambda_2\neq 0$, sest vastupidisel juhul poleks üldse tegemist teist järku joonega. Võrrandil (99.1) on seega kuju

$$\lambda_2 x_2^2+2a_1x_1+2a_2x_2+a=0. \tag{99.8}$$

Siin (99.2) põhjal

$$s=\lambda_2\neq 0,$$

kusjuures

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & \lambda_2 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}=-\lambda_2 a_1^2,$$

s. t.

$$a_1=\pm\sqrt{-\frac{\Delta}{s}}. \tag{99.9}$$

IIA klassi joone korral $\delta=0$, $\Delta\neq 0$, mistõttu $a_1\neq 0$. Järelikult saab võrrandi (99.8) korraldada kujju

$$\lambda_2\left(x_2+\frac{a_2}{\lambda_2}\right)^2+2a_1\left(x_1+\frac{a}{2a_1}-\frac{a_2^2}{2a_1\lambda_2}\right)=0.$$

Kui siin teha reeperi alguspunkti ümberpaigutus, mille puhul koordinaadid teisenevad valemite (17.8):

$$x'_1=x_1+c_1^*, \qquad x'_2=x_2+c_2^*$$

järgi, valides

$$c_1^*=\frac{1}{2a_1\lambda_2}(\lambda_2 a-a_2^2), \qquad c_2^*=\frac{a_2}{\lambda_2},$$

siis viimane võrrand omandab uue reeperi suhtes kuju

$$\lambda_2 x_2'^2+2a_1x'_1=0.$$

Loobudes lihtsuse mõttes märgist $'$ koordinaaditähiste kohal ning muutes vajaduse korral märki koordinaadi x_1 ees (s. t. x_1-telje suunda), saame viimase võrrandi esitada kujul

$$x_2^2=2px_1,$$

kus

$$p=\left|\frac{a_1}{\lambda_2}\right|=\sqrt{-\frac{\Delta}{s^3}}. \tag{99.10}$$

Tegemist on parabooliga, mille parameetriks on p (art. 75). Selle juhu tunnusteks on

$$\delta=0, \quad \Delta\neq 0.$$

IIB klassi joone korral, mil $\delta=\Delta=0$, on (99.9) põhjal ka $a_1=0$ ning võrrandil (99.8) kuju

$$\lambda_2x_2^2+2a_2x_2+a=0 \tag{99.11}$$

ehk

$$s\left(x_2+\frac{a_2}{s}\right)^2+a-\frac{a_2^2}{s}=0.$$

Siin võib reeperi alguspunkti selliselt ümber paigutada, et

$$x'_2=x_2+\frac{a_2}{s},$$

ning kui pärast seda minna tagasi koordinaatide esialgsete tähistuste juurde, on võrrandi uueks kujuks

$$x_2^2+q=0, \tag{99.12}$$

kus

$$q=\frac{1}{s^2}(sa-a_2^2).$$

Kui $q<0$, siis leidub reaalarv p, nii et $q=-p^2$ ning võrrandist $x_2^2-p^2=0$ ehk $(x_2-p)(x_2+p)=0$ järeldub, et $x_2=p$ või $x_2=-p$. Tegemist on kahe paralleelse sirgega.

Kui $q>0$, siis leidub reaalarv p, nii et $q=p^2$. Võrrandit $x_2^2+p^2=0$ ei rahulda ükski reaalarvupaar (x_1, x_2). Tegemist on imaginaarse joonega, mida teatava analoogia tõttu nimetatakse imaginaarsete paralleelsete sirgete paariks.

Kui $q=0$, siis võrrandiks on $x_2^2=0$. Tegemist on ühe kahekordse sirgega ehk kahe ühtinud sirgega.

Niisiis, ristreeperi sobiva valikuga saab iga teist järku joone võrrandile anda ühe järgmistest kujudest:

1. $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}=1$ — ellips,

2. $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1$ — hüperbool,
3. $-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1$ — imaginaarne ellips,
4. $(x_2-kx_1)(x_2+kx_1)=0$ — kaks lõikuvat sirget,
5. $k^2x_1^2+x_2^2=0$ — kaks imaginaarset lõikuvat sirget,
6. $x_2^2=2px_1$ — parabool,
7. $(x_2-p)(x_2+p)=0$ — kaks paralleelset sirget,
8. $x_2^2+p^2=0$ — kaks imaginaarset paralleelset sirget,
9. $x_2^2=0$ — kaks ühtivat sirget.

Samade võtetega nagu art-s 93, kus on antud kvadrikute afiinne klassifikatsioon, on võimalik näidata, et kaks teist järku joont on kongruentsed parajasti siis, kui võrrandid 1 kuni 9, milledega saab esitada need jooned sobivalt valitud ristreeperite suhtes, ühtivad omavahel. (Vastava üksikasjaliku arutluse jätame lugeja hooleks.) Järelikult iga selline võrrand määrab ühe teist järku joonte kongruentsusklassi. Iga afiinne klass 1 kuni 8 jaguneb siin lõpmata paljudeks kongruentsusklassideks, sest vastavad võrrandid sisaldavad kas kaks suurust a ja b või ühe suuruse k või p, millele võib anda ükskõik missuguse positiivse väärtuse.

Viimase kolme juhu 7 kuni 9, s. t. ***II B*** klassi joonte ühiseks tunnuseks on

$$\delta=\Delta=0,$$

kuid praegu puudub veel tunnus, mis võimaldaks ***IIB*** klassi joone esialgse võrrandi järgi määrata, missugusega sellest kolmest juhust on tegemist. Niisuguse tunnuse saamiseks võib kasutada semiinvarianti

$$\sigma=\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix}.$$

Et võrrand (99.11) on saadud ***IIB*** klassi joone esialgsest võrrandist ainult baasivektorite sobiva valikuga, siis σ väärtus on jäänud muutumatuks, kusjuures (99.11) puhul

$$\sigma=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \lambda_2 & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix}=\lambda_2 a-a_2^2=sa-a_2^2.$$

Seega

$$\sigma=s^2q \tag{99.13}$$

ning q märk võrrandis (99.12) ühtib σ märgiga.

Tulemused võib kokku võtta järgmisse tabelisse: (99.14)

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">I klass, $\delta \neq 0$</td><td colspan="3">II klass, $\delta = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">A klass
$\Delta \neq 0$</td><td>$\delta < 0$</td><td colspan="2">$\delta > 0$</td><td colspan="3" rowspan="3">parabool</td></tr>
<tr><td rowspan="2">hüperbool</td><td>$s\Delta < 0$</td><td>$s\Delta > 0$</td></tr>
<tr><td>ellips</td><td>imag. ellips</td></tr>
<tr><td rowspan="2">B klass
$\Delta = 0$</td><td rowspan="2">kaks lõikuvat sirget</td><td colspan="2" rowspan="2">kaks imag. lõikuvat sirget</td><td>$\sigma < 0$</td><td>$\sigma > 0$</td><td>$\sigma = 0$</td></tr>
<tr><td>kaks parall. sirget</td><td>kaks imag. parall. sirget</td><td>kaks ühtinud sirget</td></tr>
</table>

Ühtlasi on teada, kuidas avalduvad esialgse võrrandi kordajate kaudu mitteimaginaarseid teist järku jooni iseloomustavad geomeetrilised suurused: ellipsi ja hüperbooli pooltelјed a ja b (vt. (99.5) ja (99.6)) kahe lõikuva sirge vaheline nurk α (vt. (99.7), kus $k = \tan \alpha$), parabooli parameeter p (99.10) ning kahe paralleelse sirge vaheline kaugus $2p$ (vt. (99.13), kus sel juhul $q = -p^2$, s. t. $p = \sqrt{-\frac{\sigma}{s^2}}$).

Kõik need mainitud suurused avalduvad invariantide s, δ ja Δ, karakteristliku võrrandi $\lambda^2 - s\lambda + \delta = 0$ lahendite λ_1 ja λ_2 ning ühel juhul ka semiinvariandi σ kaudu teatavate suhetena.[124] See ei ole juhuslik. Antud joone võib nimelt esitada mitme võrrandiga, mis erinevad üksteisest teatava nullist erineva arvuga läbikorrutamise poolest. Sel juhul korrutub iga invariant selle arvu niisuguse astmega, mis ühtib invariandi kui võrrandi kordajate polünoomi astmega. Seetõttu eespool vaadeldud invariandid kujutavad endast, nagu juba märgitud def-is 97.1, teist järku joone võrrandi invariante. Joone endaga on invariantselt seotud nende niisugused suhted, millest korrutatava arvu astmed välja taanduvad.

Lisaks ellipsi ja hüperbooli pooltelgede avaldistele saab tuletada ka võrrandiga

$$x_2^2 = (e^2 - 1)x_1^2 + 2px_1$$

[124] Eeltoodust järeldub, et *IIB* klassi teist järku joone korral see semiinvariant osutub tegelikult invariandiks.

antud koonuselõiget määravate suuruste p ja e avaldised invariantide kaudu. Nende saamiseks tuleb võrranditele anda kuju

$$\mu(e^2-1)x_1^2-\mu x_2^2+2\mu p x_1=0.$$

Siin

$$s=\mu(e^2-2), \tag{99.15}$$

$$\delta=\mu^2(1-e^2), \tag{99.16}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} \mu(e^2-1) & 0 & \mu p \\ 0 & -\mu & 0 \\ \mu p & 0 & 0 \end{vmatrix}=\mu^3 p^2. \tag{99.17}$$

Järelikult

$$\frac{1-e^2}{(e^2-2)^2}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}.$$

Kui lahendada see võrrand e^2 suhtes eeldustel $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1<\lambda_2$, on tulemuseks

$$e^2=1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \tag{99.18}$$

Asendus võrdustesse (99.15) ja (99.16) annab nüüd $\mu=-\lambda_2$, mistõttu võrdusest (99.17)

$$p=\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2^3}}. \tag{99.19}$$

Saadud valemid (99.18) ja (99.19) on erijuhul rakendatavad parabooli korral, mil $\lambda_1=0$, $\lambda_2=s$; teine neist ühtib valemiga (99.10).

100. Teist järku pindade kongruentsusklassid. Teist järku pinnad jagunevad teatavasti seitsmeteistkümnesse afiinsesse klassi. Iga üksiku klassi pindade iseloomustamiseks tuleb, samuti nagu eespool joonte puhul, selgitada, missuguse lihtsa võrrandini on teist järku pinna puhul ristreeperi sobiva valikuga võimalik jõuda.

Igal teist järku pinnal on teoreemi 96.1 kohaselt vähemalt kolm paarikaupa ristuvat peasihti. Kui ristreeperi baasivektorid $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ja $\boldsymbol{e}_3$ on pööratud peasihtidesse, siis teoreemi 96.2 järgi pinna võrrandil on kuju

$$\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\lambda_3 x_3^2+2a_i x_i+a=0, \tag{100.1}$$

kus λ_1, λ_2 ja λ_3 on karakteristliku võrrandi (96.10) lahendid, mistõttu

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=s, \tag{100.2}$$

$$\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3=S, \tag{100.3}$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\delta. \tag{100.4}$$

I klassi pindade korral, mil $\delta \neq 0$, on $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Kui sel puhul reeperi alguspunkt O paigutada pinna ainsasse keskpunkti, siis $a_i = 0$. Invariandi Δ kui teatava determinandi avaldises saavad siis nullist erinevad olla ainult peadiagonaali elemendid, s. t. $\Delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 a = \delta a$ ning järelikult $a = \Delta : \delta$. Pinna võrrandil on kuju

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{100.5}$$

IA klassi pindade puhul $\Delta \neq 0$, *IB* klassi pindade puhul aga $\Delta = 0$.

Kui λ_1, λ_2 ja λ_3 on samamärgilised ja $\Delta \neq 0$, siis võrrandile (100.5) saab anda kuju

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = \pm 1, \tag{100.6}$$

kus paremal tuleb võtta märk $+$ või $-$ olenevalt sellest, kas $\frac{\Delta}{\delta}$ on kordajatega λ_1, λ_2 ja λ_3 vastavalt eri- või samamärgiline. Seejuures

$$a = \sqrt{\left|\frac{\Delta}{\lambda_1\delta}\right|}, \quad b = \sqrt{\left|\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}\right|}, \quad c = \sqrt{\left|\frac{\Delta}{\lambda_3\delta}\right|}. \tag{100.7}$$

Ühemärgiliste λ_1, λ_2 ja λ_3 korral on (100.2) ja (100.4) põhjal sama märgiga ka s ja δ ning (100.3) põhjal on $S > 0$. Siit järeldub, et võrrandi (100.6) parema poole märk on vastupidine Δ märgiga. Ülemise märgi korral on tegemist ellipsoidiga, selle juhu tunnusteks on

*IA*1. $s\delta > 0, \quad S > 0, \quad \Delta < 0.$

Alumise märgi korral esitab võrrand (100.6) teatava imaginaarse pinna (tühja punktihulga), mida kokkuleppeliselt nimetatakse imaginaarseks ellipsoidiks. Selle juhu tunnusteks on

*IA*4. $s\delta > 0, \quad S > 0, \quad \Delta > 0.$

Kui λ_1, λ_2 ja λ_3 ei ole samamärgilised ja $\Delta \neq 0$, siis võrrandile (100.5) saab anda, vajaduse korral koordinaate x_i koos kordajatega λ_i ümber nummerdades, kuju

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = \pm 1, \tag{100.8}$$

kus a, b ja c avalduvad endiselt valemitega (100.7).

Siin tuleb eraldi analüüsida kaht võimalust. Kui $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$, siis $\delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0$ ja võrrandi (100.8) parema poole märk ühtib Δ märgiga. Kui $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 > 0$, siis $\delta > 0$ ning parema poole märk ühtib samuti Δ märgiga. Ülemise märgi korral on tegemist ühekattelise hüperboloidiga. Selle juhu tunnusteks on

*IA*2. $\delta \neq 0$, $s\delta \leqslant 0$ või $S \leqslant 0$, $\Delta > 0$.

Alumise märgi korral on tegemist kahekattelise hüperboloidiga ning tunnusteks on

*IA*3. $\delta \neq 0$, $s\delta \leqslant 0$ või $S \leqslant 0$, $\Delta < 0$.

Kui võrrandis (100.5) on $\Delta = 0$, s. t. kui on tegemist ***IB*** klassi pindadega, siis on kaks võimalust: võrrandile (100.5) saab, vajaduse korral koordinaate ümber nummerdades, anda kas kuju

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0 \tag{100.9}$$

või kuju

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 0, \tag{100.10}$$

olenevalt sellest, kas λ_1, λ_2 ja λ_3 vastavalt ei ole või on samamärgilised. Esimesel juhul on tegemist teist järku koonusega, tunnusteks on

*IB*5. $\delta \neq 0$, $s\delta \leqslant 0$ või $S \leqslant 0$, $\Delta = 0$.

Teisel juhul rahuldab võrrandit üksainus reaalarvukolmik $(0, 0, 0)$. Tegemist on imaginaarse pinnaga, mille tinglikuks nimetuseks on imaginaarne teist järku koonus ning tunnusteks on

*IB*6. $s\delta > 0$, $S > 0$, $\Delta = 0$.

Sellega on ***I*** klassi pindade juhud ammendatud.

II klassi pindade korral $\delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$. Vajaduse korral koordinaate x_i koos kordajatega λ_i ümber nummerdades võib saavutada, et $\lambda_3 = 0$. Võrrandil (100.1) on siis kuju

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + a = 0, \tag{100.11}$$

s. t.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \bar{a} \end{vmatrix} = -\lambda_1\lambda_2 a_3^2. \tag{100.12}$$

Järelikult ***IIA*** klassi pindade korral, mil $\Delta \neq 0$, on $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$ ning võrrandi (100.11) võib seega korraldada kujju

$$\lambda_1\left(x_1+\frac{a_1}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(x_2+\frac{a_2}{\lambda_2}\right)^2+2a_3\left(x_3+\frac{a}{2a_3}-\frac{a_1^2}{2a_3\lambda_1}-\frac{a_2^2}{2a_3\lambda_2}\right)=0.$$

Kui siin teha reeperi alguspunkti ümberpaigutus teisendusvalemitega $x'_i = x_i + c_i^*$, valides

$$c_1^*=\frac{a_1}{\lambda_1},\qquad c_2^*=\frac{a_2}{\lambda_2},\qquad c_3^*=\frac{1}{2a_3\lambda_1\lambda_2}(\lambda_1\lambda_2 a-\lambda_2 a_1^2-\lambda_1 a_2^2),$$

siis selle võrrandi kujuks uue reeperi suhtes on

$$\lambda_1 x_1'^2+\lambda_2 x_2'^2+2a_3 x'_3=0. \tag{100.13}$$

Et siin $S = \lambda_1\lambda_2$, siis (100.12) põhjal

$$a_3=\pm\sqrt{-\frac{\Delta}{S}}. \tag{100.14}$$

Kui $\Delta < 0$, siis λ_1 ja λ_2 on samamärgilised. Loobudes lihtsuse mõttes märgist $'$ koordinaaditähiste kohal ning muutes vajaduse korral x_3-telje suunda (s. t. märki x_3 ees), saab võrrandile (100.13) anda kuju

$$\frac{x_1^2}{p}+\frac{x_2^2}{q}=2x_3, \tag{100.15}$$

kus

$$p=\sqrt{-\frac{\Delta}{S|\lambda_1|}},\qquad q=\sqrt{-\frac{\Delta}{S|\lambda_2|}}. \tag{100.16}$$

Tegemist on elliptilise paraboloidiga; tunnusteks on

***IIA*7.** $\delta=0,\quad \Delta<0.$

Kui $\Delta > 0$, siis λ_1 ja λ_2 on erimärgilised ning samal viisil saab võrrandile (100.13) anda kuju

$$\frac{x_1^2}{p}-\frac{x_2^2}{q}=2x_3, \tag{100.17}$$

kus p ja q avalduvad samade valemitega (100.16). Tegemist on hüperboolse paraboloidiga, tunnusteks on

***IIA*8.** $\delta=0,\quad \Delta>0.$

On jäänud liigitada veel ***IIB*** klassi pinnad. Juba afiinses klassifikatsioonis selgus, et selle klassi iga pind on silindriline. Et silindrilise teist järku pinna sirgjooneliste moodustajate ühine siht kui iseärane siht on samal ajal ka peasihiks, siis võib alati saavutada, et e_3 on selles sihis. Sel korral, nagu selgus art-s 92, läheb pinna võrrandis kaotsi koordinaat x_3. (Kui iseärased sihid täidavad terve rihi, s. t. kui $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, siis tuleb baasivektoreid e_2 ja e_3 neid sisaldavas rihis veel täiendavalt pöörata). Sel korral on pinna võrrandil (100.1) kuju

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2a_1 x_1 + 2a_2 x_2 + a = 0. \qquad (100.18)$$

Kui siia lisada võrrand $x_3 = 0$, siis tekkinud süsteem esitab vaadeldava silindrilise pinna juhtjoone x_1x_2-tasandil, mis on teatav teist järku joon ja määrab selle pinna täielikult (sest moodustajad on risti joone tasandiga). Järelikult silindriliste teist järku pindade edasine liigitamine taandub teist järku joonte liigitamisele, mis on eespool juba tehtud.

Jääb ainult tuletada tunnused, mis võimaldaksid pinna esialgse võrrandi abil määrata silindrilise pinna tüübi. Selleks tuleb invariantide s ja S kõrval appi võtta ka semiinvariandid σ ja Σ. Et võrrandini (100.18) jõudmiseks on kasutatud ainult ristreeperi baasivektorite pööramist (alguspunkt jäi samaks), siis nende semiinvariantide väärtused on jäänud muutumatuks ning need saab määrata pinna esialgsest võrrandist. Seejuures võrrandi (100.18) järgi on (97.12) ja (97.13) põhjal

$$\sigma = \begin{vmatrix} \lambda_1 & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_2 & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & a_1 \\ 0 & \lambda_2 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}.$$

Samal ajal

$$s = \lambda_1 + \lambda_2,$$
$$S = \lambda_1 \lambda_2.$$

Nagu näha, s, S ja Σ moodustavad juhtjoone kui teist järku joone invariantide $\tilde{s}$, $\tilde{\delta}$ ja $\tilde{\Delta}$ süsteemi, nimelt

$$s = \tilde{s}, \qquad S = \tilde{\delta}, \qquad \Sigma = \tilde{\Delta}. \qquad (100.19)$$

Lisaks sellele annab σ selle joone sama tähisega semiinvariandi. Seega saab eelmise artikli tulemusi kasutades kohe anda silindriliste teist järku pindade eri tüüpide tunnused, lihtsustatud võrrandid ja nimetused:

IIB klass: $\delta = \Delta = 0$.

9. $S > 0$, $s\Sigma < 0$, $\quad \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1$ — elliptiline silinder,

10. $S < 0$, $\Sigma \neq 0$, $\quad \dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1$ — hüperboolne silinder,

11. $S>0$, $s\Sigma>0$, $-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1$ — imaginaarne elliptiline silinder,

12. $S>0$, $\Sigma=0$, $x_2^2+k^2x_1^2=0$ — kaks imag. lõikuvat tasandit,

13. $S<0$, $\Sigma=0$, $x_2^2-k^2x_1^2=0$ — kaks lõikuvat tasandit,

14. $S=0$, $\Sigma\neq 0$, $x_2^2=2px_1$ — paraboolne silinder,

15. $S=\Sigma=0$, $\sigma<0$, $x_2^2-p^2=0$ — kaks paralleelset tasandit,

16. $S=\Sigma=0$, $\sigma>0$, $x_2^2+p^2=0$ — kaks imag. lõik. tasandit,

17. $S=\Sigma=\sigma=0$, $x_2^2=0$ — kaks ühtivat tasandit

Saadud lihtsatest võrranditest (100.6), (100.8), (100.9), (100.10), (100.15) ja (100.17) igaüks (kui esimeses kahes võrrandeid erimärgiliste paremate pooltega käsitada eri võrranditena) ning samuti iga ülaltoodud tabelis antud võrrand määrab ühe teist järku pindade kongruentsusklassi. (Selle väite üksikasjaliku põhjenduse art-s 93 rakendatud võtetega jätame lugeja hooleks.) Järelikult igaüks teist järku pindade esimesest kuueteistkümnest afiinsest klassist jaguneb lõpmata paljudeks kongruentsusklassideks, sest võrrandid sisaldavad kordajatena veel suurusi, milledele saab anda ükskõik missuguseid positiivseid reaalarvulisi väärtusi.

Parema ülevaate saamiseks esitame afiinsete klasside tunnused järgmises tabelis: (100.20)

		I: $\delta\neq 0$		*II*: $\delta=0$
		$s\delta>0$ ja $S>0$	$s\delta\leqslant 0$ või $S\leqslant 0$	
A: $\Delta\neq 0$	$\Delta<0$	ellipsoid	kahekatteline hüperboloid	elliptiline paraboloid
	$\Delta>0$	imaginaarne ellipsoid	ühekatteline hüperboloid	hüperboolne paraboloid
B: $\Delta=0$		imaginaarne koonus	koonus	silindrilised pinnad (juhtjoonte kohta vt. (100.19) ja tabel (99.14))

101. Kvadriku asendi määramine. Eelmise kahe artikli tulemused annavad küll lihtsad meetodid teist järku joone või pinna tüübi, kuju ja suuruse leidmiseks, s. t. tema paigutamiseks ühte või teise kongruentsusklassi, kuid ei võimalda kindlaks teha joone või pinna asendit selle ristreeperi suhtes, mille alusel on antud joone või pinna esialgne võrrand

$$a_{ij}x_ix_j+2a_ix_i+a=0. \tag{101.1}$$

Osutub aga, et kõik, mis on vajalik niisuguse asendi täielikuks kirjeldamiseks, on samuti eespool juba tuletatud. Siinkohal jääb teha ainult kokkuvõte.

Alustame teist järku joonest. Kui joon on antud võrrandiga (101.1), siis esimeseks ülesandeks on karakteristliku võrrandi

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

koostamine ja lahendamine.

I klassi joonte korral saab selle võrrandi lahendite λ_1 ja λ_2, vabaliikme $\delta=\lambda_1\lambda_2$ ning invariandi Δ abil kohe kirja panna lihtsustatud võrrandi (99.4), mis määrab joone tüübi, kuju ja suuruse. Asendi määramiseks tuleb leida võrrandi (101.1) järgi joone ainus keskpunkt, mille koordinaadid moodustavad teatavasti süsteemi (89.5) lahendi, ning seejärel teha kindlaks joone peasihid. Selleks on vaja lahendid λ_1 ja λ_2 asendada kordamööda süsteemi (96.2) võrranditesse λ asemele ning leida tekkinud lineaarsete homogeensete võrrandisüsteemide mittetriviaalsed lahendid (mis selliste asenduste puhul kindlasti eksisteerivad). Kui asendatud on λ_1, siis vastav lahend annab selle ristreeperi baasivektori e_1 sihi, mille suhtes joonel on lihtsustatud võrrand (99.4); kui asendatud on λ_2, siis lahend annab e_2 sihi.

Keskpunkti ning lahenditele λ_1 ja λ_2 vastavate peasihtide teadmisest piisab, selleks et teha kindlaks võrrandiga antud *I* klassi joone asend.

IIA klassi joone — parabooli — korral tuleb kõigepealt selgitada, kuidas on joonega seotud see ristreeper, mille suhtes joonel on lihtsustatud võrrand

$$x_2^2=2px_1. \tag{101.2}$$

Eelnevast on teada, et e_1 on joone ainsas iseärases sihis, mille määramiseks esialgse võrrandi (101.1) järgi on kasutada süsteem (90.2). Seejuures on seni tõlgendamata e_1 suuna ning samuti reeperi alguspunkti valik, mis art-s 99 on tehtud formaalsetel kaalutlustel, võrrandi lihtsustamise eesmärgil.

Paraboolil võrrandiga (101.2) on, nagu teada (vt. art. 75), üks sümmeetriatelg, mis on seega joone ainsaks teljeks. Eelnevast on aga teada, kuidas tuleb leida teist järku joone telg — selleks on joone mitteiseärase (s. t. karakteristliku võrrandi nullist erinevale lahendile vastava) peasihi kaasdiameeter. Igal *II* klassi joonel on aga just üksainus mitteiseärane peasiht (vt. art. 96).

Parabooli asendi edasiseks täpsustamiseks tuleb leida parabooli tipp — telje ja joone ainus lõikepunkt. Selleks on eelnevalt vaja koostada telje võrrand. Parabooli teljel kui ühel omavahel paralleelsetest diameetritest on sama siht nagu näiteks esialgse reeperi baasivektorite $e_1 = (1, 0)$ ja $e_2 = (0, 1)$ kaasdiameetritel

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_1&=0, \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_2&=0. \end{aligned} \tag{101.3}$$

Need on tõesti paralleelsed, sest parabooli korral

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0. \tag{101.4}$$

Samal ajal telg on temaga ristuva sihi kaasdiameeter, teisiti öeldes, võrranditega (101.3) antud sirgete normaalvektorite

$$\boldsymbol{n} = (a_{11}, a_{12}), \qquad \boldsymbol{n}' = (a_{12}, a_{22})$$

ühise sihi kaasdiameeter. Seejuures vähemalt üks vektoreist $\boldsymbol{n}$ ja $\boldsymbol{n}'$ on nullist erinev, sest kõik kordajad a_{ij} ei saa olla võrdsed nulliga. Järelikult telje saab määrata kas $\boldsymbol{n}$ järgi kui selle sihi kaasdiameetri, s. t. võrrandiga

$$(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_1)a_{11}+(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_2)a_{12}=0$$

ehk

$$a_{11}(a_{11}+a_{22})x_1+a_{12}(a_{11}+a_{22})x_2+a_1a_{11}+a_2a_{12}=0$$

ehk

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\frac{a_1a_{11}+a_2a_{12}}{s}=0, \tag{101.5}$$

või analoogiliselt $\boldsymbol{n}'$ järgi võrrandiga

$$a_{12}x_1+a_{22}x_2+\frac{a_1a_{12}+a_2a_{22}}{s}=0. \tag{101.6}$$

Siin kindlasti $s \neq 0$, sest $s = a_{11} + a_{22}$; (101.4) põhjal $a_{11}a_{22} = a_{12}^2 \geqslant 0$ ning a_{11} ja a_{22} ei saa olla korraga nullid — kui oleks $a_{11} = a_{22} = 0$, siis ka $a_{12} = 0$. Saadud võrrandid on kas samaväärsed või üks neist on triviaalne samasus $0 = 0$.

Parabooli tipu määramiseks tuleb nüüd lahendada süsteem, mis koosneb parabooli enda võrrandist

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_1x_1+2a_2x_2+a=0 \qquad (101.7)$$

ja telje võrrandist (101.5) või (101.6). Selleks on kasulik viimastest võrranditest avaldada

$$\begin{aligned}(a_{11}x_1+a_{12}x_2)^2&=\frac{1}{s^2}(a_{11}a_1+a_{12}a_2)^2,\\ (a_{12}x_1+a_{22}x_2)^2&=\frac{1}{s^2}(a_{12}a_1+a_{22}a_2)^2.\end{aligned} \qquad (101.8)$$

Siin näiteks vasakud pooled on võrdusest (101.4) järelduva seose $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$ põhjal avaldatavad järgmiselt:

$$a_{11}^2x_1^2+2a_{11}a_{12}x_1x_2+a_{12}^2x_2^2=a_{11}(a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2),$$

$$a_{12}^2x_1^2+2a_{12}a_{22}x_1x_2+a_{22}^2x_2^2=a_{22}(a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2).$$

Analoogiliselt saab avaldada ka paremates pooltes suluavaldiste ruudud. Et võrdused $a_{11} = 0$ ja $a_{22} = 0$ ei ole korraga võimalikud, siis (101.8) kui telje võrrandi järeldused annavad ühe ja sama võrrandi:

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=\frac{1}{s^2}(a_{11}a_1^2+2a_{12}a_1a_2+a_{22}a_2^2).$$

Selle arvestamine parabooli võrrandis (101.7) lubab viimase asendada lineaarvõrrandiga

$$2a_1x_1+2a_2x_2+\left[a+\frac{1}{s^2}(a_{11}a_1^2+2a_{12}a_1a_2+a_{22}a_2^2)\right]=0. \qquad (101.9)$$

Selliselt on parabooli tipu määramine taandatud võrrandist (101.9) ning telje võrrandist (101.5) või (101.6) koostatud lineaarvõrrandisüsteemi lahendamisele.

Parabooli asendi lõplikuks määramiseks on jäänud veel näidata pooltasand, milles parabool asetseb. Osutub, et selleks on võrratusega

$$s(2a_1x_1+2a_2x_2+a)\leqslant 0 \qquad (101.10)$$

määratud pooltasand. Põhjenduseks tuleb parabooli võrrand korrutada läbi arvuga $s = a_{11} + a_{22}$. Et

$$\begin{aligned}a_{11}(a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2)&=a_{11}^2x_1^2+2a_{11}a_{12}x_1x_2+a_{12}^2x_2^2=\\ &=(a_{11}x_1+a_{12}x_2)^2\end{aligned}$$

ning täpselt samuti

$$a_{22}(a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2)=(a_{12}x_1+a_{22}x_2)^2,$$

siis

$$s(a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2)\geqslant 0$$

ja parabooli punktide koordinaadid, olles lisaks seotud võrrandiga (101.7), rahuldavad tõesti võrratust (101.10).

IIB klassi mitteimaginaarse joone — paralleelsete või ühtivate sirgete paari asendi selgitamiseks piisab, kui määrata keskpunktide sirge ühega võrrandeist (89.5), mis on sel korral samaväärsed. Võib leida ka paari sirged ise, kasutades asjaolu, et *IIB* klassi joone puhul võrrandi (101.7) vasak pool muutub pärast sobiva arvu C lisamist täisruuduks ning on seega kergesti teisendatav kujju

$$(A_1x_1+A_2x_2+A)^2=C,$$

millest, juhul kui $C \geqslant 0$,

$$A_1x_1+A_2x_2+A=\pm\sqrt{C}.$$

Teist järku pinna asendi määramisel saab kasutada analoogilisi võtteid.

I klassi pinna asend on määratav keskpunkti ja peasihtide abil, kusjuures tuleb samuti arvestada vastavust lihtsustatud võrrandi (100.5) kordajate λ_i — karakteristliku võrrandi lahendite — ja peasihtide vahel.

IIA klassi pinnal keskpunkt puudub, kuid tal on olemas parajasti üks telg — karakteristliku võrrandi kahe nullist erinevale lahendile vastavate peasihtide kaasdiameetertasandite (ehk peatasandite) lõikesirge. Tuleb leida see telg ning seejärel tipp kui pinna ja telje lõikepunkt. Telg ja tipp koos mainitud kahe peasihiga võimaldavadki kirjeldada pinna — kas elliptilise või hüperboolse paraboloidi asendit, jättes lahtiseks ainult suuna teljel. Üldised eeskirjad viimase määramiseks on siin kohmakad, seetõttu on kasulikum pinna asend täpsustada lõplikult sel teel, et leida esialgse võrrandi järgi pinna mingi punkt, näiteks pinna ja mõne koordinaattelje lõikepunkt.

IIB klassi pindade — silindriliste pindade puhul tuleb kõigepealt määrata sirgjooneliste moodustajate ühine siht, mis on kas ainus iseärane siht või iseärase rihi ja pinna mõne puutujatasandi rihi lõige. Pinna asendit on võimalik täpsustada keskpunktide hulga, peasihtide ja peatasandite abil.

VI peatükk

PROJEKTIIVNE GEOMEETRIA

§ 19. PROJEKTIIVNE SIRGE, TASAND JA RUUM

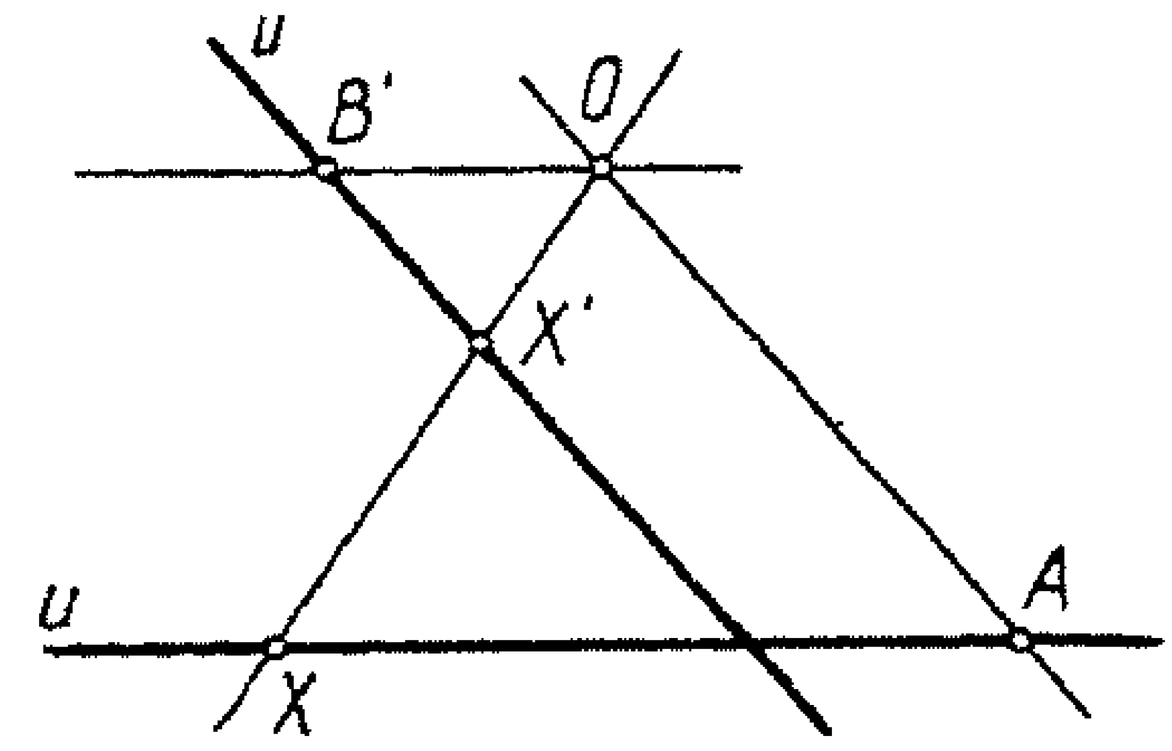
Tasandi paralleelprojekteerimisel teisele tasandile on kõik projekteerivad sirged paralleelsed (vt. def. 60.2). Seepärast öeldakse, et paralleelprojekteerimine toimub sirgete ebasidumi abil. Et tasandi paralleelprojekteerimine on tasandi 1 : 1-kujutus teisele tasandile, siis saab järjestikuste paralleelprojekteerimiste abil moodustada teatavaid tasandi teisendusi. Nagu selgus art-s 60, on iga sel viisil saadud teisendus tasandi afiinne teisendus. Vastupidi, tasandi iga afiinne teisendus, sealhulgas iga liikumine, on ruumis sooritatav ülimalt nelja järjestikuse paralleelprojekteerimisega (teoreem 60.4).

Kui lubada tasandi projekteerimisi mistahes sirgesidumite (erijuhul ebasidumite) abil, siis jõuame tasandi projekteerimise üldmõisteni. Vastavus, mille sirgesidum tekitab kahe tasandi punktide vahel, ei ole üldiselt üksühene. Üksühesuse saavutamiseks täiendame tasandit uute elementide — ebapunktide (vt. art. 41) lisamise teel. Pärast seda saab järjestikuste projekteerimiste abil moodustada tasandi teisendusi, mis üldiselt on keerukamad afiinsetest.

Käesolevas peatükis vaatlemegi sirge, tasandi ja ruumi teisendusi, mida sirge ja tasandi puhul on võimalik sooritada järjestikuste projekteerimiste abil. Nende teisenduste baasil ehitame üles uue, eukleidilisest ja afiinsest üldisema geomeetrilise süsteemi — projektiivse geomeetria.

102. Täiendatud sirge, tasand ja ruum. Käesolevas ja kahes järgnevas artiklis näitame tee uue geomeetria ülesehitamiseks afiinse geomeetria vahendusel. Projektiivse geomeetria sõltumatu käsitlus algab art-st 106; sealtpeale võib artiklites 102—104 kirjeldatud vahekordi lugeda suunavateks kaalutlusteks.

Esimese sammuna täiendame afiinset sirget, tasandit ja ruumi nii, et osutub võimalikuks sirge ja tasandi üksühene projekteerimine vastavalt sirgele ja tasandile.



Joon. 193.

Olgu u ja u' erinevad sirged afiinsel tasandil α ning O tasandi α mingi punkt, mis ei kuulu nendele sirgetele. Punkt O määrab tasandil α sirgekimbu keskpunktiga O; sel juhul räägime lühidalt kimbust O.
Korraldame vastavuse sirgete u ja u' punktide vahel. Selleks eraldame punktipaaride hulgast $u \times u'$ alamhulga $\{(X, X')\}$, nõudes, et sirge XX' kuuluks kimpu O, s. t. $O \in XX'$ (joon. 193). Nüüd öeldakse, et saadud vastavuse (vt. art. 8) korraldab t s e n t r a a l p r o j e k t e e r i m i n e kimbu O abil, ja märgitakse seda $u \overset{O}{\to} u'$.

Kui $u \nparallel u'$, siis vastavus $u \overset{O}{\to} u'$ ei ole kujutus. Tõepoolest, punktile $A \in u$, mille puhul $OA \parallel u'$, ei vasta sirgel u' ühtki punkti; samuti ei võta vastavusest osa punkt $B' \in u'$, mille puhul $B'O \parallel u$ (joon. 193). Sirgete u ja u' ülejäänud punktide puhul on vastavus $u \overset{O}{\to} u'$ üksühene. Kujutuse saamiseks on vajalik kas jätta «erandlikud» punktid A ja B' vaatlusest kõrvale või lisada sirgetele u ja u' mingid uued punktid, mis täidavad märgitud «lüngad». On aga selge, et esimene tee ei kõlba, sest väljajäetavad punktid osutuksid sõltuvateks kimbu O valikust, mistõttu järjestikuste projekteerimiste korral erinevate kimpude abil tekiks tarvidus välja jätta üha uusi punkte. Seepärast talitame teisiti.

Lisame kummalegi sirgele u ja u' kui punktihulgale ühe uue elemendi, mida nimetame e b a p u n k t i k s. Sirgele u lisatud ebapunkti B_∞ loeme vastavaks punktile $B' \in u'$, sirgele u' lisatud ebapunkti A'_∞ aga vastavaks punktile $A \in u$. Hulki $\hat{u} = u \cup \{B_\infty\}$ ja $\hat{u}' = u' \cup \{A'_\infty\}$ nimetame t ä i e n d a t u d s i r g e t e k s; sõnastuste lihtsustamiseks räägime edaspidi lühidalt sirgetest $\hat{u}$ ja $\hat{u}'$.

Vastavus $\hat{u} \overset{O}{\to} \hat{u}'$ on 1 : 1-pealekujutus; nimetame seda s i r g e $\hat{u}$ p e r s p e k t i i v s e k s k u j u t u s e k s s i r g e l e $\hat{u}'$. Leidub parajasti üks punkt, mis selle kujutuse puhul vastab iseendale; selleks punktiks on sirgete u ja u' lõikepunkt. Nimetame seda punkti vaadeldava kujutuse p ü s i p u n k t i k s.

Ebapunktide lisamise eesmärgiks ei ole ainult mõne sõnastuse lihtsustamine nagu art-s 41. Nende kasutuselevõtmine on siin hädavajalik samm, mis teeb võimalikuks perspektiivse kujutuse ja selle kaudu projektiivse geomeetria sirgel. Arutluste käesoleval etapil on ebapunkt veel formaalne, koguni fiktiivne objekt. Tõsi küll, esialgu võib temaga siduda kujutluse «lõpmata kaugest» asendist, sest punkti $X \in u$ lähenemisel punktile $A \in u$ eemaldub tema kujutis $X' \in u'$ tõkestamatult oma lähteasendist (joon. 193). Õigupoolest osutub aga niisugune tõlgendus edaspidi sobimatuks ja sellest tuleb loobuda. Ebapunkti mõiste lakkab olemast fiktiivsus uue geomeetria ülesehitamisel.

Et ebapunktid A'_∞ ja B_∞ kuuluvad punkte A ja B' projekteerivatele sirgetele, siis osutuvad need sirged samuti täiendatud sirgeteks; seejuures $A'_\infty = \widehat{OA} \cap \hat{u}'$ ja $B_\infty = \widehat{OB'} \cap u$. Loeme ebapunktid sõltumatuks kimbu O valikust; siis iga sirge $v' \parallel u'$ korral $\hat{v} \cap \hat{u} = B_\infty$ ja iga sirge $v' \parallel u'$ korral $\hat{v}' \cap \hat{u}' = A'_\infty$. Seega omistame kõigile omavahel paralleelsetele sirgetele ühise ebapunkti. Seepärast võib ebapunkti lugeda sirgete ebakimbu keskpunktiks, afiinse tasandi struktuuri mõttes võib ebapunkti aga samastada sirge sihiga.

Kui $u \parallel u'$, siis ei ole perspektiivse kujutuse moodustamisel otsest vajadust lisada ebapunkte. Et võimaldada mitut järjestikust perspektiivset kujutust erinevatele sirgetele, tuleb seda teha ka siin. Eelneva kokkuleppe põhjal on sirgetel $\hat{u}$ ja $\hat{u}'$ ühine ebapunkt. On selge, et punkt $\hat{u} \cap \hat{u}'$ on sel juhul kujutuse $\hat{u} \xrightarrow{O} \hat{u}'$ püsipunkt.

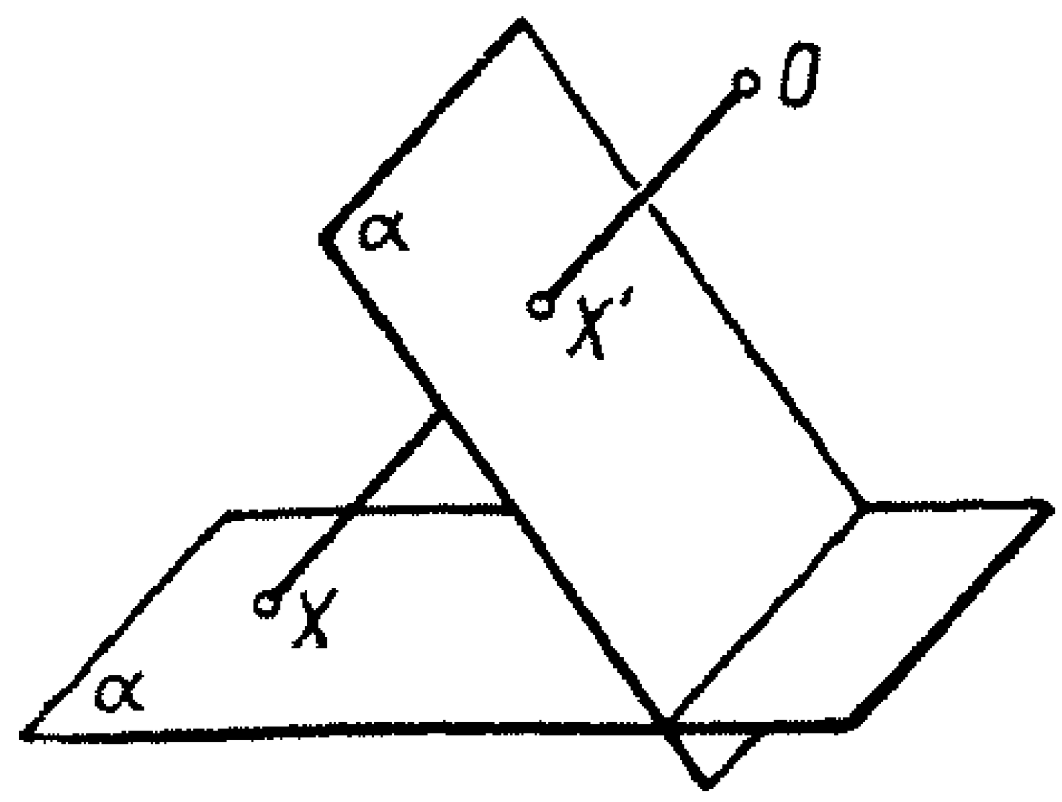
Sirgete perspektiivsete kujutuste käsitlemisel loeme tasandi α kõik sirged täiendatud sirgeteks, omistades α igale ebakimbule parajasti ühe ebapunkti. Sel viisil jõuame täiendatud tasandi mõisteni. Huvitavam on siiski see mõiste sisse tuua tasandite projekteerimise kaudu.

Olgu α ja α' erinevad afiinsed tasandid ja O mingi punkt, mis ei asetse kummalgi neist. Punkt O määrab ruumis sirgesidumi; selle puhul räägime lühidalt sidumist O.

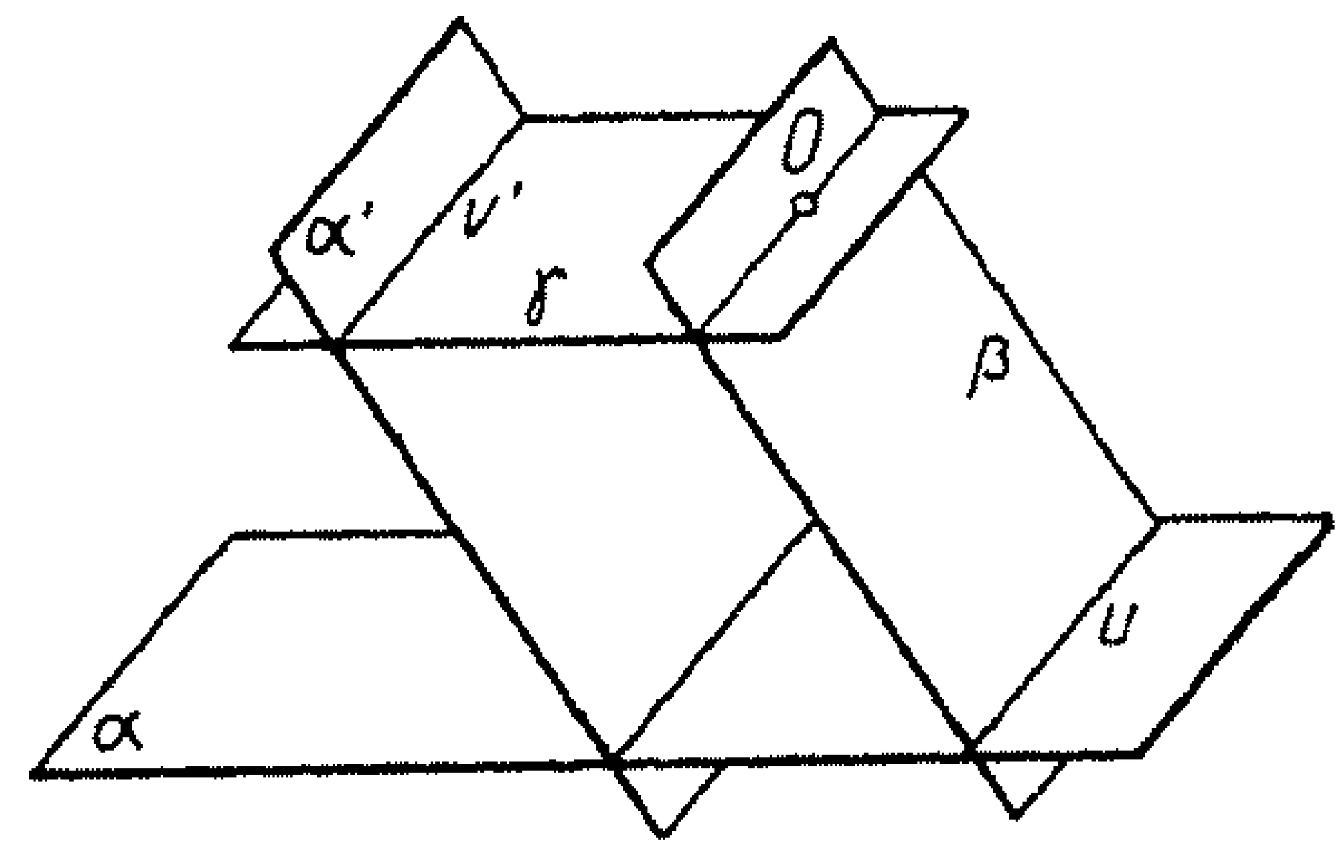
Korraldame vastavuse tasandite α ja α' punktide vahel. Selleks eraldame punktipaaride hulgast $\alpha \times \alpha'$ alamhulga $\{(X, X')\}$, nõudes, et sirge XX' kuuluks sidumisse O, s. t. $O \in XX'$ (joon. 194). Ütleme, et saadud vastavuse korraldab tsentraalprojekteerimine sidumi O abil ja märgime seda $\alpha \xrightarrow{O} \alpha'$.

Kui $\alpha \nparallel \alpha'$, siis vastavus $\alpha \xrightarrow{O} \alpha'$ ei ole kujutus. Tõepoolest, punktidele, mis on sirgel $u = \alpha \cap \beta$, ei vasta tasandil α' ühtki punkti, kui $\beta \ni O$ ja $\beta \parallel \alpha'$; samuti ei võta vastavusest osa punktid sirgel $v' = \alpha' \cap \gamma$, kui $\gamma \ni O$ ja $\gamma \parallel \alpha$ (joon. 195). Tasandite α ja α' ülejäänud punktide puhul on vastavus $\alpha \xrightarrow{O} \alpha'$ üksühene.

Lisame kummalegi tasandile α ja α' teatava hulga, millele omistame nimetuse «sirge» ja mille elemente nimetame «punktideks». Loeme tasandile α lisatud «sirge» v_∞ vastavaks sirgele



Joon. 194.



Joon. 195.

$v' \subset \alpha'$ ja tasandile α' lisatud «sirge» u'_∞ vastavaks sirgele $u \subset \alpha$. Hulki $\hat{\alpha} = \alpha \cup v_\infty$ ja $\hat{\alpha}' = \alpha' \cup u'_\infty$ nimetame **täiendatud tasanditeks** (edaspidi räägime lühidalt tasanditest $\hat{\alpha}$ ja $\hat{\alpha}'$) ning hulki v_∞ ja u'_∞ nende **ebasirgeteks**.

Et sirget $u \subset \alpha$ projekteeriv tasand β ei lõika tasandit $\hat{\alpha}'$, siis tehtud kokkuleppe kohaselt tuleb ka tasandit β täiendada ebasirgega, nimelt võtta $\hat{\beta} \cap \hat{\alpha}' = u'_\infty$, s. t. $u'_\infty \subset \hat{\beta}$. Samuti on tarvis täiendada tasandit γ, mis projekteerib sirget $v' \subset \alpha'$; siin tuleb võtta $\hat{\gamma} \cap \hat{\alpha} = v_\infty$, s. t. $v_\infty \subset \hat{\gamma}$. Selleks et ebasirged v_∞ ja u'_∞ oleksid sõltumatud projekteeriva sidumi O valikust väljaspool sirget $\beta \cap \gamma$, loeme iga tasandi $\sigma \parallel \alpha$ ja iga tasandi $\tau \parallel \alpha'$ korral $\hat{\sigma} \cap \hat{\alpha} = v_\infty$ ja $\hat{\tau} \cap \hat{\alpha}' = v'_\infty$. Nimetame ruumi kõigi omavahel paralleelsete tasandite hulka **tasandite ebakimbuks**. Nüüd võime ütelda, et kummalegi tasandite ebakimbule, millesse kuuluvad vastavalt tasand α ja tasand α', on omistatud parajasti üks ebasirge. Tasandite ebakimbule lisatud ebasirget nimetame selle ebakimbu **teljeks**.

Selleks et vastavus $\hat{\alpha} \to \hat{\alpha}'$ oleks 1 : 1-pealekujutus, on tarvilik ja piisav, kui nõuda, et seda tüüpi oleksid vastavused hulkade u ja u'_∞ ning v' ja v_∞ elementide vahel. Viimased kaks vastavust peavad tekkima tsentraalprojekteerimiste teel vastavalt tasandi β ja tasandi γ sirgekimpudega, mille keskpunktiks on O. Näiteks vastavuse $u \xrightarrow{O} u'_\infty$ puhul peab iga sirge projekteerivas kimbus O tasandil β lõikama ebasirget $u'_\infty \subset \hat{\alpha}'$ parajasti ühes punktis. Kuid selle kimbu ükski sirge ei lõika tasandit $\hat{\alpha}'$. Järelikult tuleb kimbu O iga sirge muuta täiendatud sirgeks ja ebasirge u'_∞ lugeda koosnevaks lisatud ebapunktidest. Ebapunktile P'_∞, mis on lisatud sirgega u paralleelsele projekteerivale sirgele $\beta \cap \gamma$, ei vasta sirgel u ühtki punkti. Seepärast lisame ka sirgele u ebapunkti; olgu see ebapunkt P_∞. Nagu eespool selgus, tuleb sirgete perspektiivsete kujutuste uurimisel iga vaadeldavat sirget täiendada parajasti ühe ebapunktiga. Seda asjaolu silmas pidades loeme sirgele $\beta \cap \gamma$ lisatud ebapunktid ühtivaiks, s. t. võtame $P'_\infty = P_\infty$. Niisiis, $P_\infty \in u'_\infty \subset \hat{\alpha}'$, kusjuures P_∞ on konstrueeritava kujutuse $\hat{\alpha} \xrightarrow{O} \hat{\alpha}'$ suhtes püsipunkt. Et samal ajal $P_\infty \in \hat{u} \subset \hat{\alpha}$, siis $P_\infty \in \hat{\alpha} \cap \hat{\alpha}'$, s. t. P_∞ on püsipunktidest koosnevale sirgele $\alpha \cap \alpha'$ lisatud ebapunkt. Analoogiliselt veendume, et üksühesuse saavutamiseks vastavuses $v_\infty \xrightarrow{O} v'$ tuleb ebapunkt lisada tasandi γ kimbu O igale sirgele ja samuti sirgele v'. Seejuures lisatud ebapunktide hulk ühtib ebasirgega v_∞ ja sirge $\hat{v}'$ ebapunkt täiendab jälle sirget $\hat{\alpha} \cap \hat{\alpha}'$, mistõttu $\hat{u} \cap \hat{v}' \cap u'_\infty \cap v_\infty = P_\infty$.

Kui $\alpha \parallel \alpha'$, siis puudub otsene vajadus ebasirgete lisamiseks, sest vastavus $\alpha \xrightarrow{O} \alpha'$ on juba 1 : 1-pealekujutus. Tasandite järjestikuste tsentraalprojekteerimiste käsitlemiseks võtame siiski ebasirge kasutusele ka siin, nimelt moodustame täiendatud tasandid $\hat{\alpha}$ ja $\hat{\alpha}'$ ühise ebasirge abil. Lisatud ebasirge on kujutuse $\hat{\alpha} \xrightarrow{O} \hat{\alpha}'$ püsisirge.

Üksühest pealekujutust $\hat{\alpha} \xrightarrow{O} \hat{\alpha}'$ (kus α ja α' on vabalt valitud tasandid ja O on ruumi mingi punkt, mis ei kuulu kummalegi neist). nimetame *tasandi* $\hat{\alpha}$ *perspektiivseks kujutuseks tasandile* $\hat{\alpha}'$.

Tasandi $\hat{\alpha}$ iga sirge kujutub perspektiivselt teatavaks sirgeks tasandil $\hat{\alpha}'$. Võib ütelda ka, et tasandi punktide hulga kujutus $\hat{\alpha} \to \hat{\alpha}'$ indutseerib tasandi $\hat{\alpha}$ sirgete hulga 1 : 1-pealekujutuse tasandi $\hat{\alpha}'$ sirgete hulgale. Siinjuures tasandi $\hat{\alpha}$ iga sirgekimbu perspektiivseks kujutiseks on sirgekimp tasandil $\hat{\alpha}'$.

Olgu S tasandi α vabalt valitud punkt, mis ei kuulu sirgele $u = \alpha \cap \beta$ (joon. 195), ja $S' \in \alpha'$ tema kujutis, s. t. $S' = OS \cap \alpha'$. Tasandi α sirgekimpu S projekteerib tasandikimp, mille teljeks on sirge OS. Sirgekimbu S kujutiseks tasandil α' on sirgekimp S', seega tasandi α' mingis punktis lõikuvate sirgete kimp. Kui aga $S \in u$, siis sirgekimp S projekteerub tasandile $\hat{\alpha}'$ sirgekimbuks, mille keskpunkt on ebapunkt : $S' \in u'_\infty$. Et sel juhul $OS \parallel \alpha'$, siis on kimp S' paralleelsete sirgete kimp, s. t. ebakimp. Samalaadse märkuse saab teha tasandi α' iga sirgekimbu kohta, mille keskpunkt on sirgel v': nende kimpude originaalideks on tasandi $\hat{\alpha}$ ebakimbud, mille keskpunktid on ebasirgel v_∞. Tasandite $\hat{\alpha}$ ja $\hat{\alpha}'$ ebakimbud, mis sisaldavad sirgeid u ja v', osutuvad teineteisele vastavaiks, nende kimpude ühine keskpunkt on püsiebapunkt P_∞, sest kumbki kimp sisaldab püsisirget $\hat{\alpha} \cap \hat{\alpha}'$, mille ebapunktiks on $P_\infty = \hat{u} \cap \hat{u}'$. Viimati vaadeldud kimpudesse kuuluvaiks tuleb lugeda ka ebasirged u'_∞ ja v_∞, sest $u'_\infty \cap v_\infty = P_\infty$.

Nendest märkustest järeldub, et kui punkt $S \in \hat{u}$ läbib kogu $\hat{u}$, siis saame vastavate sirgekimpude kujutistena kätte tasandi $\hat{\alpha}'$ kõik ebakimbud ja nende keskpunktidena ebasirge u'_∞ kõik elemendid. Siit nähtub, et tasandi α' täiendamisel ebasirgega u'_∞ lisandub selle tasandi igale paralleelsete sirgete kimbule, seega tasandi α' igale sirgele parajasti üks ebapunkt, kusjuures lisatud ebapunktide hulk ammendab ebasirge u'_∞ elementide hulga. Analoogilise tähelepaneku võib teha ka tasandi α ja seda täiendava ebasirge v_∞ kohta. Niisiis saab täiendatud tasandi tõepoolest defineerida hulgana, mis koosneb afiinsest tasandist ja selle kõigile ebakimpudele lisatud ebapunktidest. Täiendatud tasandi kõigi ebapunktide hulk on selle tasandi ebasirge.

Tasandite perspektiivsete kujutuste uurimisel loeme ruumi kõik tasandid täiendatud tasanditeks, lisades igale tasandite ebakimbule parajasti ühe ebasirge — ebakimbu telje. Tasandi $\hat{\alpha}$ ebasirge on siis samastatav tasandi α rihiga.

Ruumi kõigi omavahel paralleelsete sirgete hulka nimetame sirgete e b a s i d u m i k s. Kerge on mõista, et ruumi kõigi tasandite ebakimpude täiendamisel ebasirgetega lisandub igale sirgete ebasidumile parajasti üks ebapunkt — selle sidumi keskpunkt. Vastupidi, kui ruumi igale sirgete ebasidumile lisatakse üks ebapunkt, mis loetakse kuuluvaks selle sidumi igale sirgele, siis osutub ruumi iga tasand täiendatud tasandiks, kusjuures igale tasandite ebakimbule lisandub parajasti üks ebasirge.

Hulka, mis koosneb afiinsest ruumist A_3 ja selle kõigile ebasidumitele lisatud ebapunktidest, nimetame t ä i e n d a t u d r u u m i k s ja tähistame $\hat{A}_3$. Täiendatud ruumi alamhulki, mis koosnevad afiinsest sirgest ja sellele lisatud ebapunktist või afiinsest tasandist ja sellele lisatud ebasirgest, nimetame vastavalt ruumi $\hat{A}_3$ sirgeteks ja tasanditeks.

Ruumi $\hat{A}_3$ iga sirge lõikab selle ruumi ebapunktide hulka parajasti ühes punktis — oma ebapunktis, iga tasand aga parajasti mööda üht sirget — oma ebasirget. Seepärast on loomulik nimetada ruumi $\hat{A}_3$ ebapunktide hulka selle ruumi e b a t a s a n d i k s.

Lihtne on kontrollida, et täiendatud tasandi ja täiendatud ruumi iga kaht punkti läbib parajasti üks sirge. Iga kaks erinevat sirget täiendatud tasandil lõikuvad parajasti ühes punktis ja iga kaks erinevat tasandit täiendatud ruumis lõikuvad parajasti mööda üht sirget.

Täiendatud tasandi $\hat{\alpha}$ iga kimp O määrab selle tasandi iga kahe sirge $\hat{u} \not\ni O$ ja $\hat{u}' \not\ni O$ puhul perspektiivse kujutuse $\hat{u} \overset{O}{\to} \hat{u}'$. Kui $O \in \alpha$, siis on kujutus $\hat{u} \overset{O}{\to} \hat{u}'$ saadud tsentraalprojekteerimisega; kui aga O on ebapunkt, siis on tegemist paralleelprojekteerimisega. Analoogilise märkuse saab teha ruumi $\hat{A}_3$ iga sidumi O ja perspektiivse kujutuse $\hat{\alpha} \overset{O}{\to} \hat{\alpha}'$, $\hat{\alpha} \not\ni O$, $\hat{\alpha}' \not\ni O$ puhul.

103. Projektiivne sirge ja projektiivne tasand. Täiendatud sirge ja täiendatud tasandi punktide hulki saab seada 1 : 1-vastavusse sirgete hulgaga vastavalt kimbus ja sidumis.

Kui iga sirge x kimbus, mille keskpunkt O ei asetse sirgel $\hat{u}$, on loetud vastavaks punktile $X \in \hat{u}$, mille puhul $\hat{x} \ni X$, siis ütleme, et on korraldatud s i r g e $\hat{u}$ p e r s p e k t i i v n e k u j u t u s k i m b u l e O. Täpselt samuti, kui sidumis keskpunktiga $O \in \hat{\alpha}$ on iga sirge x loetud vastavaks punktile $X \in \hat{\alpha}$, mille puhul $\hat{x} \ni X$, siis ütleme, et on moodustatud t a s a n d i $\hat{\alpha}$ p e r s p e k t i i v n e k u j u t u s s i d u m i l e O.

Selline perspektiivne kujutus ei oleks pealekujutus tervele kimbule või sidumile O, kui sirgele u või tasandile α poleks lisatud ebapunktid, teatavad uued fiktiivsed elemendid. Nagu eespool märgitud, võib ebapunktiga esialgu siduda «lõpmata kauge punkti» kujutluse, samuti võib ebapunkti samastada afiinse sirge sihiga. Seejuures on oluline tähele panna, et ebapunkt «käitub» mitmes suhtes täpselt samal viisil nagu mistahes harilik punkt: 1) perspektiivsel kujutamisel sirgele või tasandile võib ebapunkti kujutiseks olla (ja üldiselt ongi) harilik punkt, 2) iga hariliku punkti kujutiseks võib olla ebapunkt, 3) punkt $\hat{u} \cap \hat{u}'$ on $u \parallel u'$ puhul kujutuse $\hat{u} \overset{O}{\to} \hat{u}'$ püsipunkt, 4) kujutamisel sirgekimbule või -sidumile vastab ebapunktile harilik sirge — samuti nagu igale harilikule punktile. Analoogilised tähelepanekud saab teha ebasirge kohta.

Projektiivse sirge või tasandi mõisteni jõudmiseks tuleb ebapunktid lugeda samaväärseteks harilike punktidega, s. t. täiendatud sirget ja täiendatud tasandit tuleb vaadelda hulkadena, mis koosnevad ühesugustest elementidest. Võib öelda ka nii, et täiendatud sirget ja täiendatud tasandit tuleb vaadelda mistahes perspektiivse kujutuse täpsusega ja lugeda nende hulkade struktuuris oluliseks ainult seda, mis säilib iga perspektiivse kujutuse korral. Seejuures on loomulik uuritav struktuur anda ette abstraktses hulgas, omistamata selle elementidele mitte midagi muud peale antud struktuuris nõutava.

Sel viisil jõuame järgmise definitsioonini.

***Def.* 103.1.** Hulka, mida on võimalik üksüheselt kujutada kas lõikuvate sirgete kimbule afiinsel tasandil või lõikuvate sirgete sidumile afiinses ruumis ja mille struktuur on selle kujutusega määratud täielikult, nimetatakse vastavalt kas projekiivseks sirgeks või projektiivseks tasandiks. Sellise hulga elemente nimetatakse punktideks. Projektiivse tasandi alamhulka, mis osutub projektiivseks sirgeks selle tasandi projektiivset struktuuri määrava kujutuse suhtes, nimetatakse selle tasandi projektiivseks sirgeks.

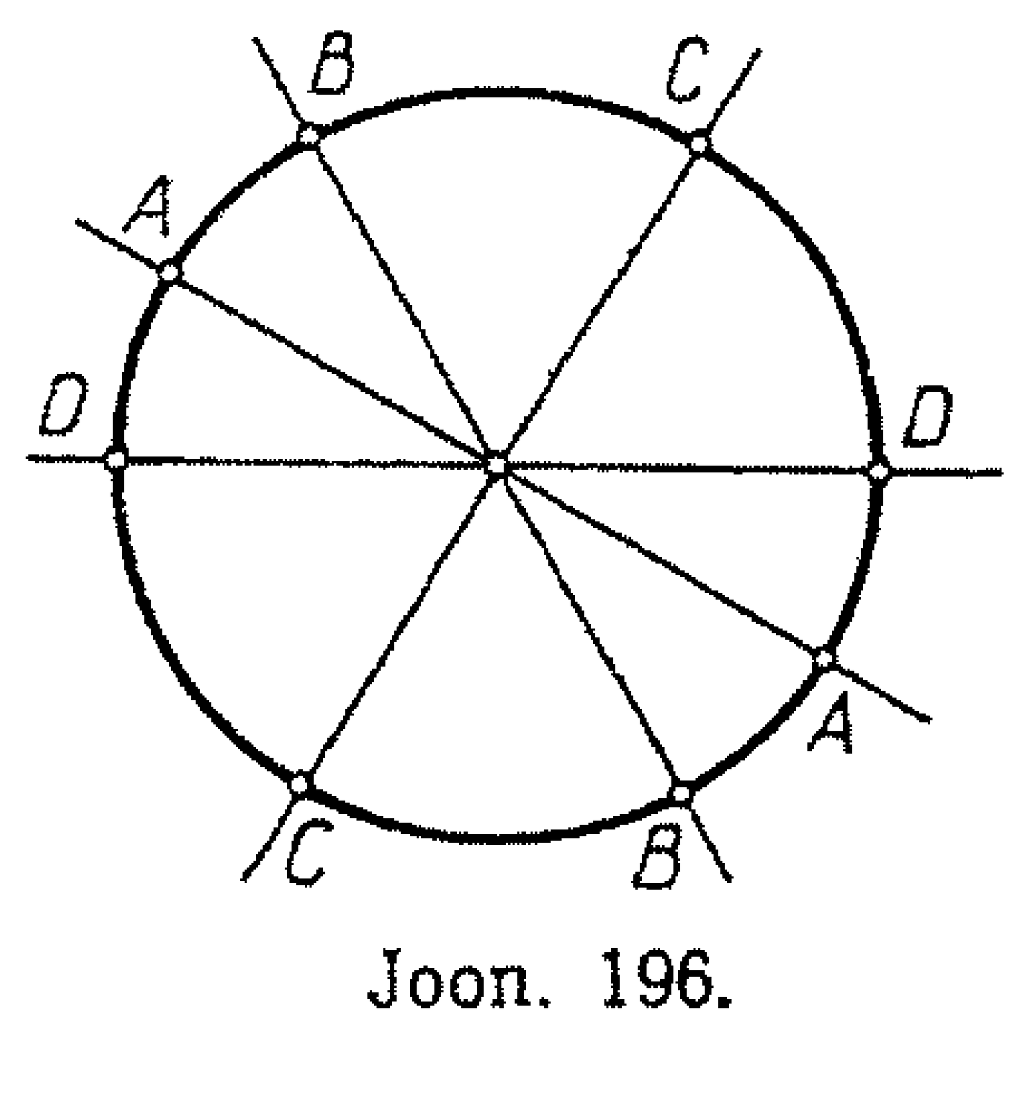
Näiteks hulk $\hat{u} = u \cup \{A_\infty\}$ — täiendatud sirge — on projektiivne sirge, kui tema ebapunkt A_∞ lugeda samaväärseks ülejäänud punktidega. Def. 103.1 järgi võib olla veel teisigi hulki, mis on tõlgendatavad projektiivse sirgena. Seepärast ütleme, et täiendatud sirge on vaadeldav projektiivse sirge ühe võimaliku mudelina. Et afiinsel tasandil oleva sirgekimbu saab üksüheselt kujutada sellele kimbule endale, siis on ka sirgekimp projektiivse sirge mudel.

Täiendatud tasand $\hat{\alpha} = \alpha \cup v_\infty$, mille ebasirge v_∞ on loetud samaväärseks tema ülejäänud (täiendatud) sirgetega, samuti ruumi lõikuvate sirgete sidum, millele tasand $\hat{\alpha}$ on üksüheselt kujutatav, on projektiivse tasandi mudelid. Tasandi $\hat{\alpha}$ iga (täiendatud) sirge, kaasa arvatud sirge v_∞, on projektiivsele tasandile kuuluva projektiivse sirge mudel.

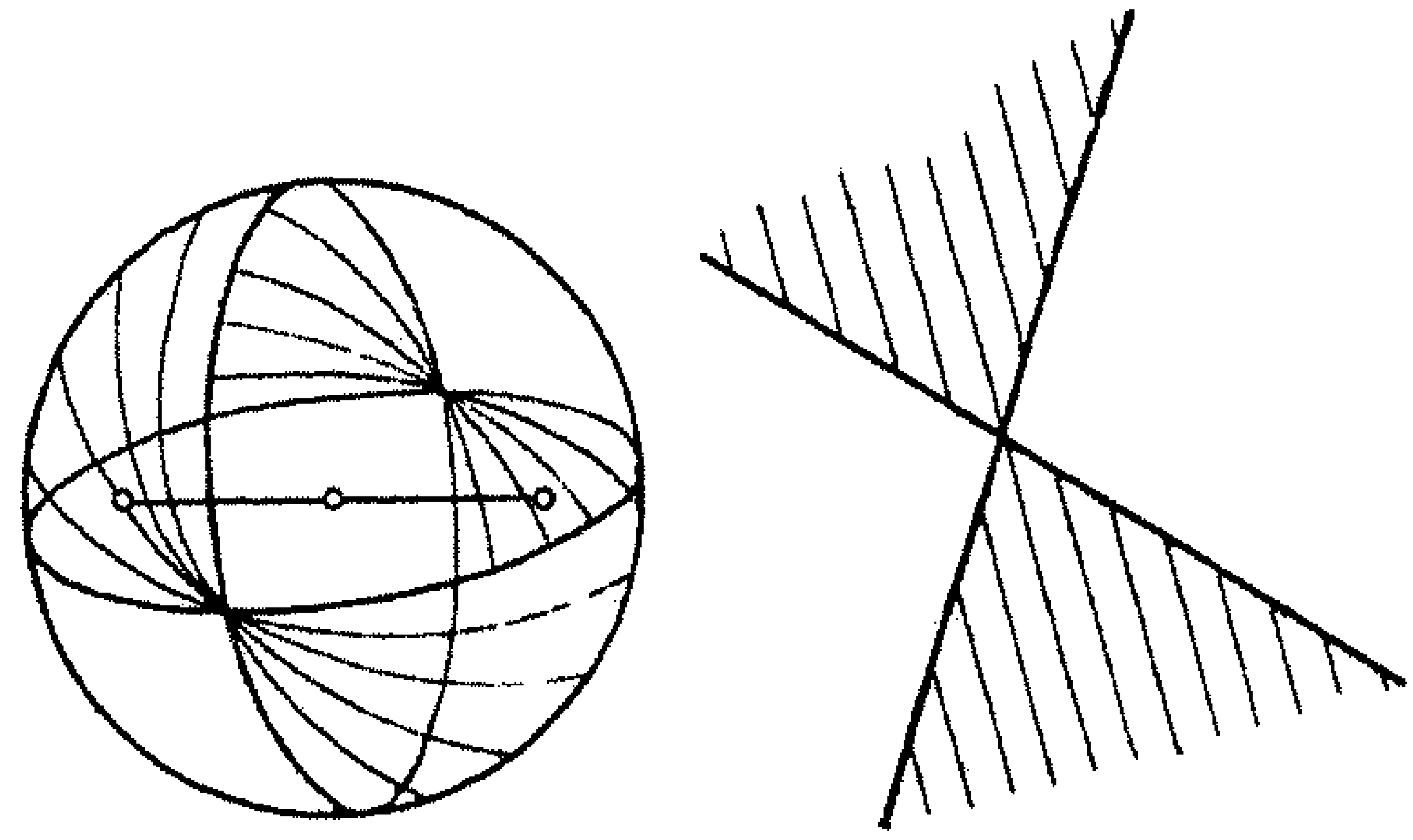
Projektiivset sirget ja projektiivset tasandit võib uurida mitmesuguste mudelite abil; seejuures on lubatud mudelites arvesse võtta ainult selliseid vahekordi, mis ei lisa midagi uut def-is 103.1 püstitatud tingimusele.

Projektiivne sirge ja projektiivne tasand erinevad struktuurilt mitmeti afiinsetest. Lihtsamaid erinevusi on kerge selgitada mudelitel.

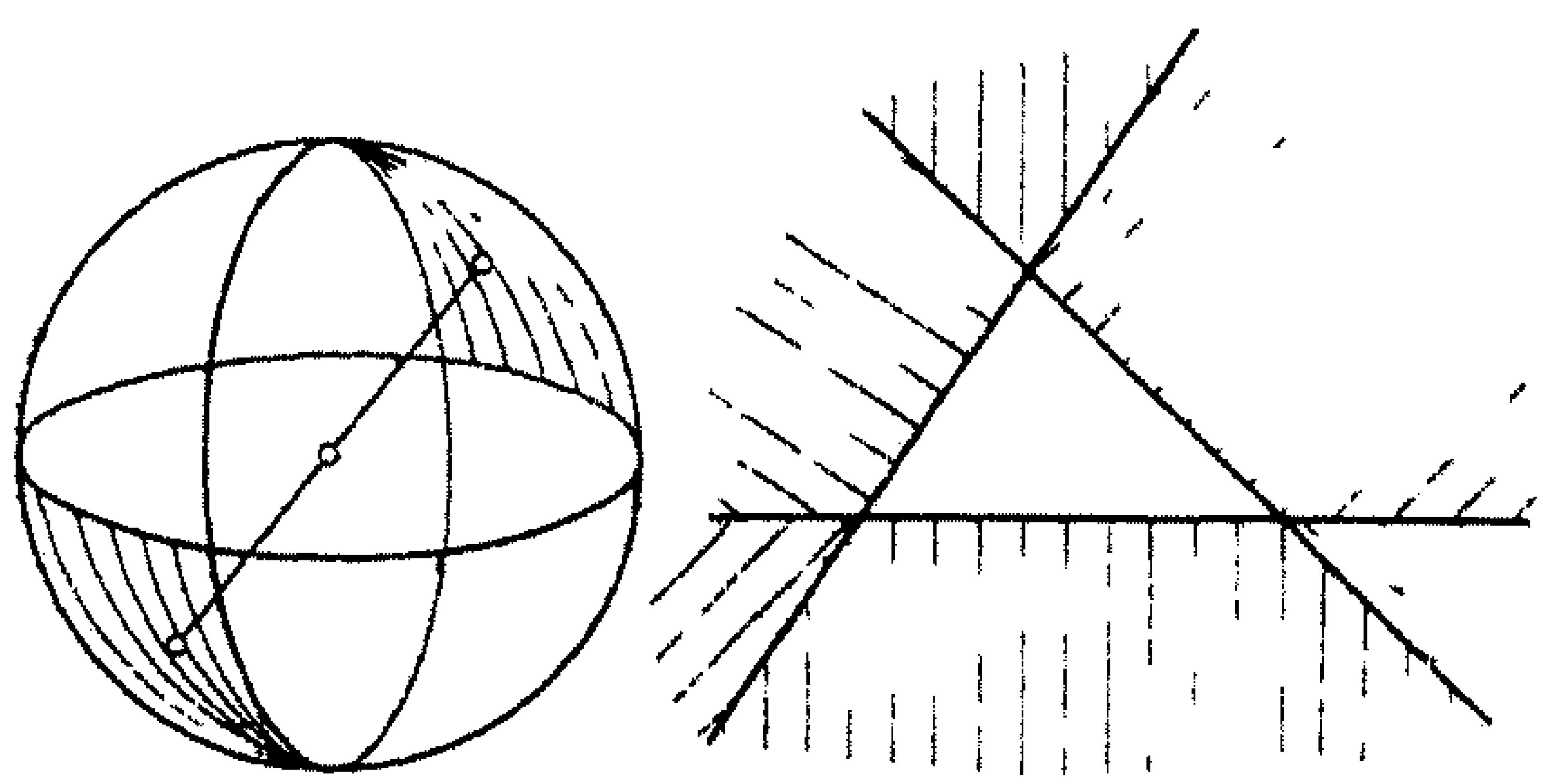
Kui sirge x kimbus O, mis vastab perspektiivselt sirgele u, pöörleb ühes suunas ümber O, siis temale vastav punkt X käib läbi kogu sirge u ja saabub tagasi algasendisse. Seetõttu projektiivne sirge on kinnine: tema mudel $\hat{u}$ n.-ö. sulgub oma ainsas ebapunktis. See tõsiasi ilmneb eriti reljeefselt sirgekimbu keskpunkti ümber tõmmatud ringjoone kaasabil (joon. 196). Kui kimbu igale sirgele seada vastavusse tema lõikepunktide paar selle ringjoonega, siis niisuguste paaride hulk moodustab def. 103.1 põhjal projektiivse sirge uue mudeli,



Joon. 196.



Joon. 197.

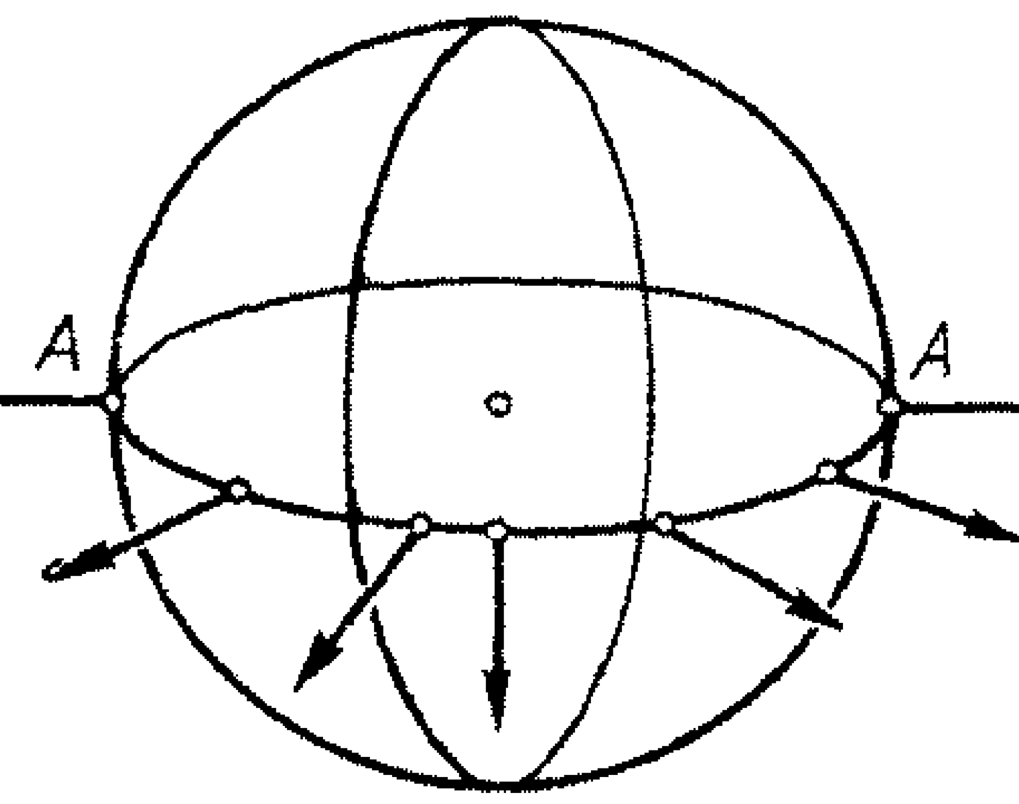


Joon 198.

kusjuures projektiivse sirge kinnisus ja tema punktide samaväärsus on siin hästi nähtavad. Ühtlasi selgub, et ühe punkti eemaldamine projektiivselt sirgelt ei jaota teda veel kaheks lõikumatuks alamhulgaks, küll teeb seda aga kahe punkti eemaldamine. Projektiivse sirge ühegi kolme punkti korral ei saa otsustada, milline neist on kahe ülejäänu vahel. Seetõttu ei saa projektiivse sirge punktide hulka lineaarselt järjestada, s. o. anda eeskirja, mis lubab selle sirge iga kahe punkti korral määrata, milline neist eelneb teisele. Küll on võimalik iga nelja erineva punkti korral otsustada, milline punktipaar lahutab teist ja milline mitte (vt. art. 36). Öeldakse, et punktid projektiivsel sirgel on järjestatavad tsükliliselt (sirge $x \ni O$ pöörlemisel käib vastav punkt X sirge u punktide hulga läbi üha korduvate tsüklite kaupa).

Projektiivse tasandi mudeliks on täiendatud tasand, mille ebasirget ei eristata ülejäänud sirgetest, ja loomulikult ka sirgesidum.

Afiinse ruumi sirgesidumi sirgete lõikamisel keskpunkti ümber võetud sfääriga tekib projektiivse tasandi uus mudel — punktipaaride hulk, kus paarid koosnevad sfääri diameetrite otspunktidest. Siit nähtub, et projektiivne tasand on kinnine. Sirgesidumisse kuuluvatele sirgekimpudele vastavad projektiivsel tasandil projektiivsed sirged. Seega sfääri abil moodustatud mudelil on projektiivseteks sirgeteks sfääri suurringjoonte punktipaaride hulgad. Siit nähtub, et üks sirge projektiivsel tasandil ei jaota viimast kaheks lõikumatuks piirkonnaks, küll teevad seda aga kaks erinevat sirget (joon. 197). Iga kolm erinevat ja mitte ühte kimpu kuuluvat sirget jaotavad projektiivse tasandi neljaks omavahel lõikumatuks piirkonnaks (joon. 198). Samast mudelist nähtub ühtlasi, et projektiivsel tasandil ei ole kaht poolt (selles mõttes nagu näiteks sfääril on välimine pool ja sisemine pool). Sfääriga risti oleva vektori alguspunkti liikumisel mööda projektiivset sirget saabub see vektor sirge samasse punkti A tagasi vastassuunalisena (joon. 199). Seepärast öeldaksegi, et projektiivsel tasandil on üksainus pool.



Joon 199.

Projektiivse ruumi mõistet ei saa käesolevas kursuses defineerida perspektiivse kujutuse abil, sest viimase puhul tuleks kasutada neljamõõtmelise afiinse ruumi geomeetriat, mida me ei ole välja arendanud[125]. Seetõttu jätame projektiivse ruumi defineerimise pisut hilisemaks. Märgime siin vaid, et kolmemõõtmelise projektiivse ruumi mudeliks on ruum $\hat{A}_3$, mille ebatasand loetakse samaväärseks ülejäänud tasanditega.

Iga kaks sirget täiendatud tasandil ja iga kaks tasandit täiendatud ruumis osutuvad, nagu selgus, lõikuvateks. Seetõttu sirgete ja tasandite paralleelsusel puudub projektiivses geomeetrias tähendus. Siit järeldub, et paralleel- ja tsentraalprojekteerimist ei saa projektiivses geomeetrias eristada ja tuleb rääkida projekteerimise üldmõistest.

104. Projektiivsed koordinaadid sirgel ja tasandil. Projektiivse sirge käsitlemisel punktide afiinsetest koordinaatidest ei piisa. Tõepoolest, kõik reaalarvud on juba kasutusel sirge u punktide koordinaatidena, seepärast sirge $\hat{u}'$ ebapunktile ei saa vastavusse seada ühtki reaalarvu. Kuid ebapunkt ei või jääda ka koordinaadita, sest projektiivsel sirgel ei tohi ta millegi poolest erineda sirge u punktidest. On selge, et sama laadi raskus tekib ka projektiivse tasandi puhul. Siit nähtub, et projektiivses geomeetrias tuleb kasutusele võtta mingid uut tüüpi koordinaadid.

Konstrueerime projektiivse sirge jaoks uue mudeli, milles sobivad koordinaadid on määratavad täiesti loomulikul viisil. Selleks lähtume juba tuntud mudelist — lõikuvate sirgete kimbust O afiinsel tasandil. Loeme tasandi vektorile $\boldsymbol{k} \neq 0$ vastavaks kimbu selle sirge, millel on vektoriga $\boldsymbol{k}$ määratud siht. Tekib afiinse tasandi kõigi nullist erinevate vektorite hulga pealekujutus kimbule O. See kujutus ei ole üksühene, sest kimbu antud sirge originaalid moodustavad siin tasandi vektorite alamhulga $\{\boldsymbol{k}\lambda\}$, kus $\boldsymbol{k} \neq \mathbf{0}$ on antud vektor ja $\lambda \neq \mathbf{0}$ mistahes reaalarv.

---

[125] Asjast huvitatud lugeja leiab projektiivse n-ruumi mõiste sellise käsitluse näiteks järgmisest raamatust: Б. А. Розенфельд, Многомерные пространства, глава IX. Москва, 1966.

Tasandi kaht nullist erinevat vektorit nimetatakse ekvivalentseteks, kui nad määravad ühe ja sellesama sihi. Lihtne on kontrollida, et sel viisil defineeritud seos $\boldsymbol{k} \sim \boldsymbol{l}$ jaotab vaadeldava vektorite hulga ekvivalentsusklassidesse (vt. art. 18). Kirjeldatud alamhulk $\{\boldsymbol{k}\lambda\}$ on ekvivalentsusklass. Oleme niisiis korraldanud selliste ekvivalentsusklasside hulga 1 : 1-pealekujutuse sirgekimbule O. See ekvivalentsusklasside hulk on def. 103.1 põhjal projektiivse sirge mudel.

Varasemate mudelitega võrreldes on saadud uuel mudelil mitmeid eeliseid. Tema elemendid on, samuti nagu kimbu O sirged, juba loomult samaväärsed, kuid lisaks sellele on kadunud vajadus fikseerida tasandil mingi punkt O. Eriti oluline on aga see, et vektorite koordinaatide määramine ei valmista mingeid raskusi.

Analoogiliselt saab veenduda, et kui ruumi A_3 samasihilised nullist erinevad vektorid on loetud ekvivalentseteks, siis osutub sel viisil määratud ekvivalentsusklasside hulk projektiivse tasandi mudeliks, sest seda hulka on võimalik üksüheselt kujutada lõikuvate sirgete sidumile ruumis A_3.

Projektiivse sirge ja projektiivse tasandi kirjeldatud mudelites on punktideks vektorite ekvivalentsusklassid vastavalt afiinse tasandi või afiinse ruumi nullist erinevate vektorite hulgas (def. 103.1). Nii nagu seni tähistame punkte ka siin suurte ladina tähtedega $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$. Punkti A esindavas ekvivalentsusklassis vabalt valitud vektorit tähistame $\boldsymbol{A}$ ja nimetame punkti A e s i n d a j a v e k t o r i k s[126], edaspidi räägime sageli ka lühidalt punkti A esindajast $\boldsymbol{A}$.

Projektiivse tasandi sirgeks on ehitatud mudelis ühe rihi vektoritest koosnevate ekvivalentsusklasside hulk. Tõepoolest, sidumisse kuuluva kimbu sirgete sihivektoreiks on just ühe rihi nullist erinevad vektorid. Seega projektiivse tasandi kolm punkti A, B ja C kuuluvad ühele sirgele parajasti siis, kui nende esindajad $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{C}$ on komplanaarsed.

Defineerime nüüd projektiivse tasandi punktide koordinaadid. Selleks kasutame äsjaehitatud mudelit. Valime punktide esindajavektorite hulgas vabalt baasi; selle vektorid tähistame nüüd $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ ja $\boldsymbol{A}_3$. Iga punkti X esindajavektori $\boldsymbol{X}$ saab esitada teatavate koordinaatidega x^1, x^2 ja x^3 sellel baasil[127]:

---

[126] Kirjanduses kasutatakse nimetuse «esindajavektor» asemel sageli nimetust «analüütiline punkt», A puhul räägitakse siis «geomeetrilisest punktist».

[127] Erinevalt varasemast tähistame siin koordinaate ülemiste indeksitega. Viimaseid ei tohi segi ajada astmenäitajatega, näiteks x^2 tuleb siin lugeda mitte «iks ruudus», vaid «iks kaks» jne.

$$X = A_1x^1 + A_2x^2 + A_3x^3.$$

Selle võrduse parema poole kirjutame lühidalt kujul A_ix^i, kus $i = 1, 2, 3$. Niisiis,

$$X = A_ix^i. \tag{104.1}$$

Def. **104.1.** Punkti X esindajavektori $\boldsymbol{X}$ koordinaate nimetatakse punkti X projektiivseteks koordinaatideks.

Projektiivse tasandi punktil on seega kolm projektiivset koordinaati — kolm reaalarvu, mis ei ole korraga nullid, sest $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}$. Iga selline arvukolmik määrab parajasti ühe punkti, kuid vastupidine ei kehti. Et punkti X esindajavektoriks on $\boldsymbol{X}$ kõrval ka $\boldsymbol{X}\lambda$, $\lambda \neq 0$, siis punkti X projektiivseteks koordinaatideks on x^1, x^2, x^3 kõrval ka λx^1, λx^2, λx^3, kus $\lambda \neq 0$ on vabalt võetud reaalarv. Seepärast öeldakse, et projektiivsed koordinaadid on homogeensed — nende abil määratav punkt ei muutu kõikide koordinaatide korrutamisel nullist erineva arvuga. Olulised on seega mitte need koordinaadid üksikult, vaid nende suhted. Seepärast asjaolu, et punktil X on projektiivsed koordinaadid x^1, x^2 ja x^3, s.t. et teda esindab vektor $\boldsymbol{X} = (x^1, x^2, x^3)$ ja samuti vektor $\boldsymbol{X}\lambda = (\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3)$ iga reaalarvu $\lambda \neq 0$ korral, märgitakse võrdusega $X = (x^1 : x^2 : x^3)$. Võrdus $(x^1 : x^2 : x^3) = ('x^1 : 'x^2 : 'x^3)$, mis näitab, et ka arvud $'x^1$, $'x^2$ ja $'x^3$ on punkti X projektiivsed koordinaadid (sest selle puhul $X = ('x^1 : 'x^2 : 'x^3)$), tähendab niisiis seda, et leidub reaalarv λ, mille korral $'x^1 = \lambda x^1$, $'x^2 = \lambda x^2$ ja $'x^3 = \lambda x^3$.

Samaväärseteks nimetatakse iga kaht baasi, mille vahetamisel ühegi punkti projektiivsete koordinaatide suhted ei muutu. Osutub, et baasid $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3\}$ ja $\{\boldsymbol{A}'_1, \boldsymbol{A}'_2, \boldsymbol{A}'_3\}$ on samaväärsed parajasti siis, kui nende vektorid erinevad ainult ühise reaalarvulise teguri poolest, s.t. $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{A}'_i\lambda$ $(i = 1, 2, 3)$. Tõepoolest, kui $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}_ix^i = \boldsymbol{A}'_i{}'x^i$ ja $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{A}'_i\lambda$, siis $(\boldsymbol{A}'_i\lambda)x^i = \boldsymbol{A}'_i(\lambda x^i) = \boldsymbol{A}'_i{}'x^i$, mistõttu $('x^1 : 'x^2 : 'x^3) = (x^1 : x^2 : x^3)$. Vastupidi, kui iga punkti korral kehtib viimane võrdus, s.t. $'x^i = \lambda x^i$, siis $\boldsymbol{A}_ix^i = \boldsymbol{A}'_i(\lambda x^i) = (\boldsymbol{A}'_i\lambda)x^i$, seega $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{A}'_i\lambda$.

Projektiivse sirge puhul saab projektiivsed koordinaadid sisse tuua analoogilisel viisil. Punkti esindavad siin afiinse tasandi vektorid, s.t. seoses (104.1) tuleb võtta $i = 1, 2$. Sirge punktil X on seega kaks suhte täpsusega määratud koordinaati; seda märgitakse võrdusega $X = (x^1 : x^2)$. Ka siin on kaks baasi $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2\}$ ja $\{\boldsymbol{A}'_1, \boldsymbol{A}'_2\}$ samaväärsed parajasti siis, kui $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{A}'_i\lambda$.

Näitame nüüd, et punkti koordinaadid projektiivsel tasandil saab määrata täielikult selle tasandi punktide järjestatud neliku abil, kui see rahuldab teatavaid lihtsaid nõudeid.

Olgu vabalt fikseeritud mingi baas $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3\}$. Selle baasi vektoreile vastavad kolm punkti A_1, A_2 ja A_3, mis ei ole ühel sirgel. Nendest ei piisa veel projektiivsete koordinaatide määramiseks, sest nende punktide esindajateks on ka vektorid $\boldsymbol{A}_1\lambda_1$, $\boldsymbol{A}_2\lambda_2$ ja $\boldsymbol{A}_3\lambda_3$, kus $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ ja $\lambda_3 \neq 0$ on vabalt valitud reaalarvud, samal ajal kui baasid $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3\}$ ja $\{\boldsymbol{A}_1\lambda_1, \boldsymbol{A}_2\lambda_2, \boldsymbol{A}_3\lambda_3\}$ on samaväärsed ainult siis, kui $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. On selge, et üksnes punktide A_1, A_2 ja A_3 etteandmine viimaste võrduste olemasolu ei garanteeri, seega nende punktidega seotud baaside hulk on liialt avar.

Selle hulga vajalikul viisil kitsendamiseks moodustame fikseeritud baasi abil vektori $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3$. See vektor määrab teatava punkti $E = (1:1:1)$, mis ei kuulu ühelegi sirgetest A_1A_2, A_2A_3 ja A_3A_1, sest vektorite $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ ja $\boldsymbol{E}$ hulgas ei ole kolme komplanaarset. Lepime edaspidi kokku kasutada ainult selliseid punktidega A_1, A_2 ja A_3 seotud baase, mille suhtes punktil E on samad projektiivsed koordinaadid, mis tal on fikseeritud baasi suhtes. Seega E projektiivsed koordinaadid lubatava baasi suhtes peavad olema omavahel võrdsed. Olgu $\{\boldsymbol{A}_1\lambda_1, \boldsymbol{A}_2\lambda_2, \boldsymbol{A}_3\lambda_3\}$ lubatav baas. Punkti E üheks esindajaks peab siis olema vektor $\boldsymbol{A}_1\lambda_1 + \boldsymbol{A}_2\lambda_2 + \boldsymbol{A}_3\lambda_3$. Et sama punkti kaks esindajat võivad erineda ainult reaalarvulise kordaja poolest, siis

$$\boldsymbol{A}_1\lambda_1 + \boldsymbol{A}_2\lambda_2 + \boldsymbol{A}_3\lambda_3 = (\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3)\mu, \text{ s. t. } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \mu.$$

Seega iga lubatav baas on samaväärne lähtebaasiga $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3\}$. Jääb veel näidata, et lähtebaasiks võib võtta mistahes teise lubatava baasi.

Valime projektiivsel tasandil vabalt neli punkti, millest ükski kolm ei ole ühel sirgel. Järjestame võetud hulga ja tähistame seda $\{A_1, A_2, A_3, E\}$. Moodustame kolme esimese punkti mingitest esindajatest baasi $\{\boldsymbol{A}'_1, \boldsymbol{A}'_2, \boldsymbol{A}'_3\}$. Olgu punkti E mingi esindajavektor $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}'_i e^i$; eelduse kohaselt $e^i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Kasutame viimast asjaolu selleks, et asendada senised baasivektorid vektoritega $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}'_1 e^1$, $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}'_2 e^2$ ja $\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{A}'_3 e^3$. Baasi $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3\}$ puhul $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3$. Lubame edaspidi ainult selliseid punktidega A_1, A_2 ja A_3 seotud baase, mis on samaväärsed baasiga $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3\}$. Nüüd on tasandi punktide projektiivsed koordinaadid määratud täielikult punktide süsteemiga $\{A_1, A_2, A_3, E\}$. Kolm esimest punkti A_i määravad oma esindajate abil teatava hulga baase, seepärast nimetame punkte A_i *baaspunktideks*. Punkt E eraldab sellest hulgast välja lubatavate baaside hulga, kusjuures iga lubatava baasi $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3\}$ korral leidub punktil E esindaja $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3$, s. t. $E = (1:1:1)$. Viimast võrdust arvestades nimetame E *ühikpunktiks*.

Eelnevad arutlused võtab kokku järgmine lause.

***Teoreem* 104.1.** *Projektiivsed koordinaadid projektiivsel ta-*

sandil on määratud täielikult, kui on antud selle tasandi nelja punkti järjestatud süsteem $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, *mille ükski kolm punkti ei ole ühel sirgel ning mille kolm esimest punkti on võetud baaspunktideks ja neljas punkt ühikpunktiks.*

Süsteemi $\mathfrak{R}$ nimetatakse projektiivseks reeperiks projektiivsel tasandil.

Analoogilise teoreemi saab tõestada projektiivse sirge kohta. Projektiivse reeperi projektiivsel sirgel moodustab iga järjestatud süsteem $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, E\}$, mis koosneb kolmest erinevast punktist. Punktid A_1 ja A_2 on baaspunktid — nende esindajatest moodustatakse lubatavad baasid; punkt E on ühikpunkt — selle üheks esindajaks peab olema vektor $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$.

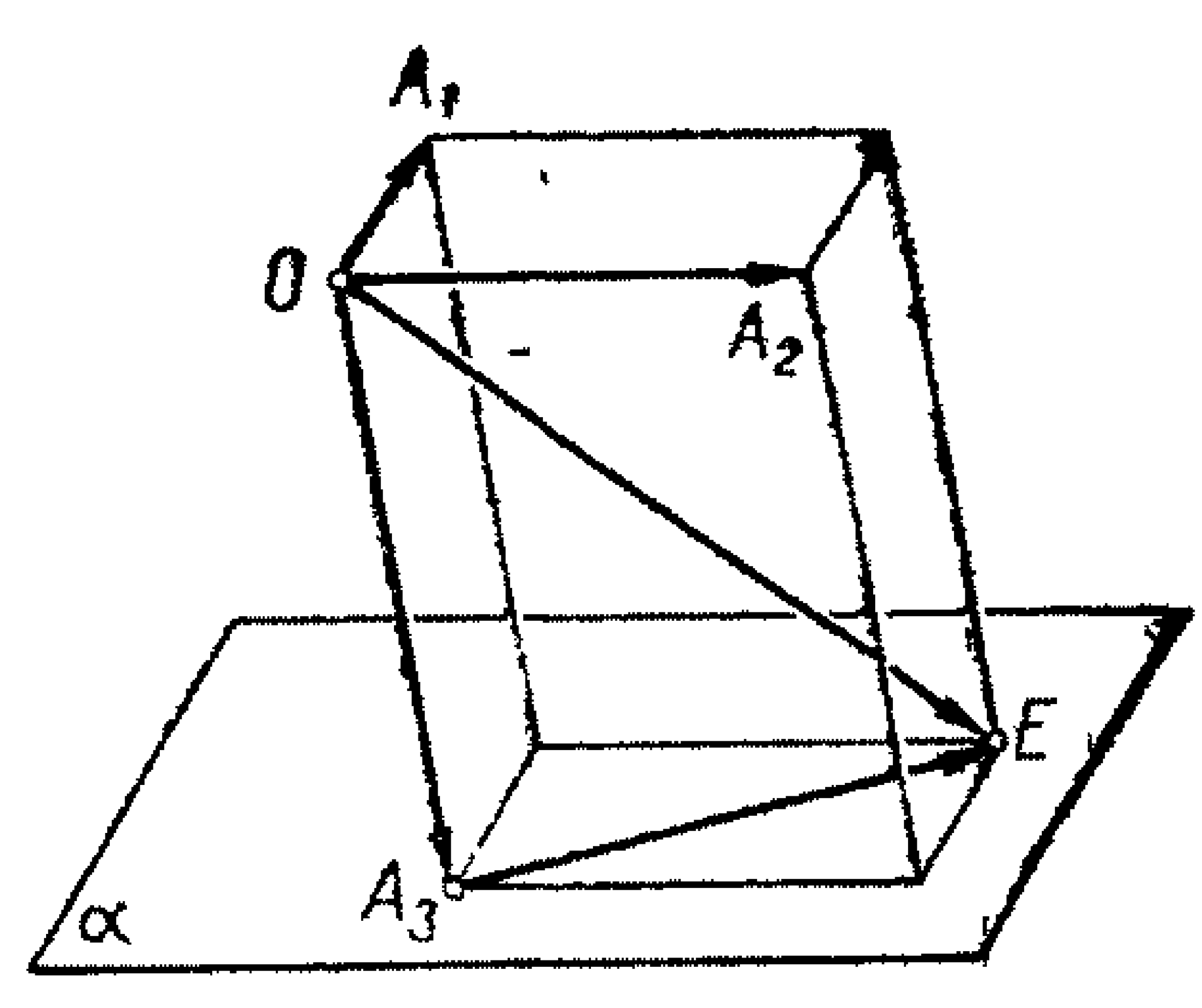
Kui projektiivset tasandit käsitletakse täiendatud tasandi $\hat{\alpha}$ abil, siis on võimalik tasandil α kasutada afiinseid reepereid. Et $\hat{\alpha}$ perspektiivse kujutuse korral sirgesidumile on O ebapunkti kujutiseks sidumi selline sirge, mis on paralleelne seda ebapunkti läbiva sirgega tasandil $\hat{\alpha}$, siis on $\hat{\alpha}$ ebapunktide esindajateks parajasti tasandi α vektorid. Seepärast võib α iga afiinse reeperi lugeda koosnevaks α mingist punktist ja $\hat{\alpha}$ kahe ebapunkti esindajatest. Seose projektiivsete koordinaatide ja afiinsete reeperite vahel selgitab järgnev teoreem.

Teoreem 104.2. *Kui täiendatud tasandi $\hat{\alpha}$ projektiivse reeperi $\{A_1, A_2, A_3, E\}$ kaks esimest baaspunkti on ebapunktid, siis tasandi α punktide korral $x^3 \neq 0$. Seejuures*

$$x_1 = \frac{x^1}{x^3}, \quad x_2 = \frac{x^2}{x^3} \tag{104.2}$$

osutuvad afiinseteks koordinaatideks tasandil α sellise afiinse reeperi $\{A_3; \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2\}$ suhtes, mille puhul $\overrightarrow{A_3E} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$.

T õ e s t u s. Täiendatud tasandi $\hat{\alpha}$ punkti X projektiivsete koordinaatidega x^1, x^2, x^3 esindab vektor $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}_1x^1 + \boldsymbol{A}_2x^2 + \boldsymbol{A}_3x^3$. Kui sel korral $x^3 = 0$, siis $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}_1x^1 + \boldsymbol{A}_2x^2$, mistõttu $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{A}_1$ ja $\boldsymbol{A}_3$ on komplanaarsed ning seega X on $\hat{\alpha}$ ebasirge A_1A_2 punkt. Järelikult tasandi α punktide korral $x^3 \neq 0$. Punkti A_3 üheks esindajaks on vektor $\boldsymbol{A}_3 = \overrightarrow{OA_3}$ (joon. 200). Ebapunktide A_1 ja A_2 esindajavektorid $\boldsymbol{A}_1$ ja $\boldsymbol{A}_2$ võib valida selliselt, et E esindajaks on vek-



Joon. 200.

tor $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3$. Selleks tuleb arvestada, et tasandi α vektor $\overrightarrow{A_3E}$ määrab $\hat{\alpha}$ ühe ebapunkti E', ning lisada viimane ebapunktidele A_1 ja A_2 kui teatava projektiivse reeperi $\{A_1, A_2, E'\}$ ühikpunkt $\hat{\alpha}$ ebasirgel selliselt, et oleks $\overrightarrow{A_3E} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$. Sel korral tõesti $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3E} = \mathbf{A}_3 + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3$.

Punkt A_3 ja selliselt valitud vektorid $\mathbf{A}_1$ ja $\mathbf{A}_2$ moodustavad afiinse reeperi $\{A_3; \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2\}$ tasandil α. Viimase iga punkti X korral $\overrightarrow{A_3X} = \mathbf{A}_1x_1 + \mathbf{A}_2x_2$, kus x_1 ja x_2 on punkti X afiinsed koordinaadid selle reeperi suhtes. Ühtlasi on punkti X üheks esindajaks $X = \mathbf{A}_1x^1 + \mathbf{A}_2x^2 + \mathbf{A}_3x^3$ kõrval ka $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3X} = \mathbf{A}_3 + (\mathbf{A}_1x_1 + \mathbf{A}_2x_2)$. Et punkti X kaks esindajat erinevad ainult reaalarvulise teguri poolest, siis $X = \overrightarrow{OX}\lambda$, s. t. $\mathbf{A}_1x^1 + \mathbf{A}_2x^2 + \mathbf{A}_3x^3 = (\mathbf{A}_1x_1 + \mathbf{A}_2x_2 + \mathbf{A}_3)\lambda$ ning seega $x^1 = x_1\lambda$, $x^2 = x_2\lambda$, $x^3 = \lambda$. Siit

$$x_1 = \frac{x^1}{x^3}, \qquad x_2 = \frac{x^2}{x^3};$$

seega paremates pooltes olevad suhted on tõesti punkti X afiinsed koordinaadid. ∎

Kirjeldatud konstruktsioon pakub huvi selle poolest, et A_1 ja A_2 esindajate (s. t. tasandi α antud sihiga vektorite) $\mathbf{A}_1$ ja $\mathbf{A}_2$ valik ei sõltu üldse O valikust — tuleb vaid silmas pidada, et oleks $\overrightarrow{A_3E} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$; esindajate valik on seotud ainult $\hat{\alpha}$ ebasirgega kui projektiivse sirgega. Järelikult näidatud seos projektiivsete ja afiinsete koordinaatide vahel tuleb ühesugune iga sirgesidumi korral, kui ainult selle keskpunkt O ei kuulu tasandile α.

Seostest (104.2) on veel kord näha, miks afiinsed koordinaadid x_1 ja x_2 on sobimatud projektiivse tasandi käsitlemisel: ebapunkti X korral on $x^3 = 0$, kuid reaalarvu jagamine arvuga 0 pole defineeritav.

105. Vektorruum. Projektiivse sirge ja tasandi esimeste mudelitena, millest on selgesti näha nende kõikide punktide samaväärsus, kasutasime eespool vastavalt lõikuvate sirgete kimpu afiinsel tasandil ja lõikuvate sirgete sidumit afiinses ruumis. Afiinne tasand ja ruum on punktihulgad, mis on aksioomides **A1—A4** kirjeldatud viisil seotud vektorite hulkadega. Eelmises artiklis konstrueeritud uute mudelite puhul aga selgus, et näiteks projektiivse tasandi mõistet ei ole üldse vaja siduda afiinse ruumiga kui punktihulgaga. Selline sidumine on isegi eksitav, tekitades liigse küsimuse, missugune on selle sidumi keskpunkt, mida vaadeldakse projektiivse tasandi mudelina, samal ajal kui piisab täielikult üksnes afiinse ruumi vektoritest. Seetõttu on projektiivse sirge ja tasandi mõiste juures loogiline astuda veel üks samm — vabastada vektorid nende seosest afiinse tasandi või ruumiga.

Teatavasti aksioomides **B1—B5** ja $\mathbf{C}^{(n)}$ ongi tegemist üksnes vektorite ja reaalarvudega (vt. § 2), punktidest on juttu ainult esimestes aksioomides **A1—A4**. Järelikult tuleb asendada üksnes viimased aksioomid. Seejuures peavad uued aksioomid andma aluse vektorite liitmise tehtele (mis art-s 10 defineeritakse punkte kasutades aksioomide **A1—A4** alusel), sest ilma selle tehteta ei ole mõeldav aksioomide **B3**, **B4** ja $\mathbf{C}^{(n)}$ formuleerimine.

Uuteks aksioomideks tuleb võtta järgmised.

$\overline{\mathbf{A}}\mathbf{1}$. *Iga kahe vektori* $\boldsymbol{a}$ *ja* $\boldsymbol{b}$ *puhul on paarile* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *seatud vastavusse parajasti üks vektor* c, *mida nimetatakse* $\boldsymbol{a}$ *ja* $\boldsymbol{b}$ *summaks ja tähistatakse* $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

$\overline{\mathbf{A}}\mathbf{2}$. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

$\overline{\mathbf{A}}\mathbf{3}$. $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$.

$\overline{\mathbf{A}}\mathbf{4}$. *Iga kahe vektori* $\boldsymbol{a}$ *ja* $\boldsymbol{b}$ *korral leidub selline vektor* $\boldsymbol{x}$, *nii et* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}$ *(s. t. võrrand* $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ *on alati lahenduv).*

***Def.* 105.1.** Olgu teatava hulga puhul, mille elemente nimetatakse vektoriteks, rahuldatud aksioomid $\overline{\mathbf{A}}\mathbf{1}$—$\overline{\mathbf{A}}\mathbf{4}$, **B1—B5** ja $\mathbf{C}^{(n)}$. Seda hulka nimetatakse siis n-mõõtmeliseks vektorruumiks V_n.

Afiinsest ruumist sõltumatu vektorruumi käsitlus antakse kõrgema algebra kursuses.[128] Juhime siin tähelepanu ainult nendele vahekordadele ruumis V_n, mis meie edasistes mõttekäikudes osutuvad olulisteks.

Null- ja vastandvektori mõisted ning vektorite lahutamise tehe on art-s 11 defineeritud punktide abil aksioomidele **A1—A4** tuginedes. Need mõisted on aga võimalik ruumi V_n teoorias sisse tuua ka aksioomide $\overline{\mathbf{A}}\mathbf{1}$—$\overline{\mathbf{A}}\mathbf{4}$ alusel.[129]

Ruumi V_n näiteks on afiinse ruumi A_n vektorite hulk. Tõepoolest, selle hulga puhul on def. 13.4 kohaselt rahuldatud aksioomid **B1—B5** ja $\mathbf{C}^{(n)}$. Aksioomide $\overline{\mathbf{A}}\mathbf{1}$—$\overline{\mathbf{A}}\mathbf{4}$ kehtivus selles hulgas järel-

---

[128] Vt. G. Kangro, Kõrgem algebra. Tallinn 1962, § 5, § 7, § 15, §§ 33—36.

[129] Vt. sealsamas, § 12, art. 4. Null- ja vastandelemendi ning lahutamise tehte mõisted on seal sisse toodud Abeli rühma käsitlemisel saadud tulemusi on hiljem (§ 33, art. 2) rakendatud ruumi V_n puhul. Otsese käsitluse vektorite kohta esitab А. И. Мальцев Основы линейной алгебры, арт. 17, Москва, 1956.

dub aga vahetult definitsioonidest 10.1 ja 11.3 ning teoreemidest 10.2, 10.3 ja 11.3.

Osutub, et see näide on universaalne: iga vektorruumi V_n korral leidub afiinne n-ruum A_n, nii et V_n on selle A_n vektorite hulgaks. Enne kui asuda seda väidet tõestama, näitame ühe võimaluse afiinse n-ruumi mõiste defineerimiseks eeldusel, et on antud vektorruum V_n. Olgu tegemist mingi mittetühja hulgaga L, mille elemente nimetatakse punktideks ja tähistatakse X, Y, Z, ..., ning olgu see hulk L seotud vektorruumiga V_n järgmiste aksioomide abil.

𝔄1. *Igale paarile* $(X, \boldsymbol{a})$, $X \in L$, $\boldsymbol{a} \in V_n$ *vastab parajasti üks punkt* $Y \in L$, *mida tähistatakse* $Y = X \square \boldsymbol{a}$.

𝔄2. *Iga järjestatud paari* (X, Y), $X \in L$, $Y \in L$ *jaoks leidub vektor* $\boldsymbol{a} \in V_n$, *nii et* $X \square \boldsymbol{a} = Y$. *Lepime kokku sel puhul kirjutada* $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{XY}$.

𝔄3. *Kui* $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, *siis* $X \square \boldsymbol{a} \neq X$.

𝔄4. $(X \square \boldsymbol{a}) \square \boldsymbol{b} = X \square (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$.

Teoreem 105.1. $X \square \boldsymbol{0} = X$.

T õ e s t u s. Olgu X ja Y vabalt valitud punktid. 𝔄2 põhjal leidub $\boldsymbol{a} \in V_n$, nii et $Y \square \boldsymbol{a} = X$, seepärast ühelt poolt $(Y \square \boldsymbol{a}) \square \square \boldsymbol{0} = X \square \boldsymbol{0}$. Kuid teiselt poolt 𝔄4 põhjal $(Y \square \boldsymbol{a}) \square \boldsymbol{0} = Y \square \square (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0}) = X$. Seega tõesti $X \square \boldsymbol{0} = X$. ∎

Teoreem 105.2. Kui $X \square \boldsymbol{a} = X \square \boldsymbol{b}$, siis $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

T õ e s t u s. Teoreemi 105.1, aksioomi 𝔄4 ja eelduse järgi

$$X = X \square \boldsymbol{0} = X \square [\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a})] = (X \square \boldsymbol{a}) \square (-\boldsymbol{a}) = (X \square \boldsymbol{b}) \square (-\boldsymbol{a}) = \\ = X \square [\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a})] = X \square (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}).$$

Siit järeldub 𝔄3 põhjal, et $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. ∎

Näitame nüüd, et hulk L, mis on kirjeldatud viisil seotud vektorruumiga V_n, osutub afiinseks n-ruumiks A_n def. 13.4 mõttes. Selleks on piisav kontrollida aksioomide **A1**—**A4** kehtivust.

A1 järeldub sellest, et L eeldatakse olevat mittetühi. **A2** järeldub aksioomist 𝔄2 ja teoreemist 105.2. **A3** ühtib aksioomiga 𝔄1. Kontrollime **A4** kehtivust. Kui $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{ZW}$, siis 𝔄2 põhjal leidub selline $\boldsymbol{a} \in V_n$, et $X \square \boldsymbol{a} = Y$ ja $Z \square \boldsymbol{a} = W$. Sama aksioomi tõttu leidub selline $\boldsymbol{b} \in V_n$, et $X \square \boldsymbol{b} = Z$, s. t. $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{XZ}$. Seejuures

$$Y \square \boldsymbol{b} = (X \square \boldsymbol{a}) \square \boldsymbol{b} = X \square (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = X \square (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) = \\ = (X \square \boldsymbol{b}) \square \boldsymbol{a} = Z \square \boldsymbol{a} = W,$$

s. t. $\boldsymbol{b} \in \overrightarrow{YW}$. Järelikult $\overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{YW}$.

Nüüd ongi võimalik antud vektorruumi V_n järgi konstrueerida afiinne ruum A_n selliselt, et V_n on selle A_n vektorite hulgaks. Tuleb võtta mingi ruumiga V_n ekvivalentne hulk L (vt. art. 8; selliseid hulki leidub — üheks on näiteks V_n ise) ja fikseerida 1 : 1-pealekujutus $f: L \to V_n$. Aksioome $\mathfrak{A}1$—$\mathfrak{A}4$ on sel korral võimalik rahuldada järgmiselt.

Igale paarile $(X, \boldsymbol{a})$, $X \in L$, $\boldsymbol{a} \in V_n$, seame vastavusse punkti $X \square \boldsymbol{a} \in L$, mis on vektori $f(X) + \boldsymbol{a}$ originaaliks hulgas L, s. t.

$$f(X \square \boldsymbol{a}) = f(X) + \boldsymbol{a}.$$

Iga paari (X, Y), $X \in L$, $Y \in L$ puhul vektoriks $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{XY}$ on $\boldsymbol{a} = f(X) - f(Y)$, sest tõepoolest:

$$f(X \square \boldsymbol{a}) = f(X) + \boldsymbol{a} = f(X) + [f(Y) - f(X)] = f(Y),$$

mistõttu $X \square \boldsymbol{a} = Y$.

Kui $\boldsymbol{a} \neq 0$, siis iga $X \in L$ korral on $f(X) + \boldsymbol{a} \neq f(X)$, mistõttu $f(X \square \boldsymbol{a}) \neq f(X)$ ja seega $X \square \boldsymbol{a} \neq X$.

Lõpuks selgub, et

$$f[(X \square \boldsymbol{a}) \square \boldsymbol{b}] = f(X \square \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b} = [f(X) + \boldsymbol{a}] + \boldsymbol{b} =$$
$$= f(X) + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = f[X \square (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})];$$

järelikult $(X \square \boldsymbol{a}) \square \boldsymbol{b} = X \square (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$. Niisiis, L on afiinne n-ruum A_n vektorite hulgaga V_n.

Kirjeldatud tihe seos vektorruumide ja afiinsete ruumide vahel võimaldab ruumi V_n puhul kasutada kõiki neid tõsiasju, mis on eespool kindlaks tehtud afiinse ruumi A_n vektorite kohta.

Art-s 15 käsitletud lineaarse sõltuvuse mõiste puudutab ainult ruumi V_n vektoreid. Seejuures saab ruumis V_n lõpmata paljudel viisidel valida alamhulki, mis koosnevad n lineaarselt sõltumatust vektorist, iga $n + 1$ selle ruumi vektorit aga on lineaarselt sõltuvad (vt. art. 15).

Järjestatud hulka $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, mis koosneb ruumi V_n vabalt valitud n lineaarselt sõltumatust vektorist, nimetatakse ruumi V_n b a a s i k s. Antud baas seab igale vektorile $\boldsymbol{x} \in V_n$ vastavusse n reaalarvust koosneva järjestatud süsteemi $(x^1, \ldots, x^n)$ — vektori koordinaatide[130] hulga (def. 17.1), mida võib soovi korral vaadelda näiteks üheveerulise maatriksina. Võrdused (17.2) kirjutame nüüd nii: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i x^i = \boldsymbol{e}'_j x'^j$.

Baasiteisendusvalemid (17.3) tuleb nüüd kirjutada kujul

$$\boldsymbol{e}'_i = \boldsymbol{e}_j c_i^j \qquad (105.1)$$

---

[130] Nagu artiklis 104, nii kasutame ka siin ja edaspidi vektori koordinaatide puhul ülemisi indekseid. Summeerimine toimub ainult nende tähtindeksite paaride puhul, mis koosnevad ühest alumisest ja ühest ülemisest indeksist.

ehk baasivektoritest koosnevate $(1 \times n)$-maatriksite $\varepsilon = \|e_1 \ldots \ldots e_n\|$ ja $\varepsilon' = \|e'_1 \ldots e'_n\|$ ning maatriksi $C = \|c_i^j\|$ abil kujul

$$\varepsilon' = \varepsilon C. \tag{105.2}$$

Vastavateks koordinaaditeisendusvalemiteks on nüüd

$$x^i = c_j^i\, 'x^j, \qquad 'x^j = \overset{*}{c}{}_i^j x^i, \tag{105.3}$$

kus $\overset{*}{c}{}_i^j$ on maatriksi C^{-1} elemendid; kasutades koordinaatide puhul $(n \times 1)$-maatrikseid x ja x′ saab viimased valemid kirjutada ka kujul

$$\mathrm{x} = C\mathrm{x}', \qquad \mathrm{x}' = C^{-1}\mathrm{x}. \tag{105.4}$$

Ruumi V_n rakendustes kasutatakse sageli mudelina kõigist järjestatud reaalarvusüsteemidest koosnevat hulka.[131]

$$R^n = \underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n \text{ korda}} = \{(x^1, \ldots, x^n) \mid x^i \in R,\ i = 1, \ldots, n\},$$

milles on defineeritud lineaartehted järgmiselt:

$$(x^1, \ldots, x^n) + (y^1, \ldots, y^n) = (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n),$$
$$(x^1, \ldots, x^n)\lambda = (\lambda x^1, \ldots, \lambda x^n).$$

Mudel R^n on teatavas mõttes universaalne: iga V_n korral on võimalik 1 : 1-pealekujutus $V_n \to R^n$ selliselt, et vektorite summa kujutiseks on liidetavate vektorite kujutiste summa ning vektori ja reaalarvu korrutise kujutiseks on vektori kujutise korrutis selle reaalarvuga.[132] Ruumi V_n iga baas korraldab niisuguse kujutuse.

See osa afiinsetest teisendustest, mis käib ainult vektorite kohta (art. 60), on aluseks järgmisele mõistele.

***Def.* 105.2.** Vektorruumi V_n teisendust, mille korral on rahuldatud lineaarsusetingimused (60.3) ja (60.4):

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})' = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}', \qquad (\boldsymbol{x}\lambda)' = \boldsymbol{x}'\lambda, \tag{105.5}$$

nimetatakse lineaarteisenduseks.

Tingimustest (105.5) järeldub, et vektorite iga lineaarkombinatsioon kujutub ruumi V_n lineaarteisenduse toimel teatavate vektorite lineaarkombinatsiooniks, kusjuures kordajad ei muutu. Nullvektor on iga lineaarteisenduse korral püsielement, sest $(\boldsymbol{x}0)' =$

---

[131] Vt. G. Kangro, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, § 5, art. 1, § 7, art. 1 ja art. 4.

[132] Vt. sealsamas, § 34, art. 2. Sellist kujutust nimetatakse isomorfismiks. Iga kaks samamõõtmelist vektorruumi (mis on moodustatud üle ühe ja sellesama korpuse) on isomorfsed, s. t. isomorfselt kujutatavad teineteisele (sealsamas, § 34, art. 3). Isomorfsed vektorruumid on oma algebralise struktuuri poolest samastatavad.

$= x'0 = 0$. Üksühese pealekujutusena säilitab lineaarteisendus vektorite lineaarse sõltumatuse. Seetõttu iga baasi ε kujutiseks on jälle teatav baas ε'. Vektori x koordinaadid baasil ε on võrdsed tema kujutise x' koordinaatidega selle baasi kujutisel ε', s. t. kui $x = \varepsilon \mathrm{x} = e_i x^i$, siis $x' = \varepsilon' \mathrm{x} = e'_i x^i$.

Ühtlasi selgub siit, et iga kahe baasi ε ja ε' korral leidub lineaarteisendus, mis kujutab esimese baasi teiseks. Sellise teisenduse saamiseks tuleb igale vektorile $x = \varepsilon \mathrm{x}$ seada vastavusse vektor $x' = \varepsilon' \mathrm{x}$. Saadud teisendusel on lineaarsuseomadused (105.5), sest kui $y = \varepsilon \mathrm{y}$, siis $x + y = \varepsilon \mathrm{x} + \varepsilon \mathrm{y} = \varepsilon(\mathrm{x} + \mathrm{y})$ ja $x\lambda = (\varepsilon \mathrm{x})\lambda = \varepsilon(\mathrm{x}\lambda)$, mistõttu $(x + y)' = \varepsilon'(\mathrm{x} + \mathrm{v}) = \varepsilon'\mathrm{x} + \varepsilon'\mathrm{y} = x' + y'$ ja $(x\lambda)' = \varepsilon'(\mathrm{x}\lambda) = (\varepsilon'\mathrm{x})\lambda = x'\lambda$.

Valemeid, mis võimaldavad antud lineaarteisenduse korral vektori x koordinaatide järgi antud baasil ε arvutada tema kujutise x' koordinaate samal baasil ε, nimetatakse lineaarteisenduse valemeiks baasil ε. Nende saamiseks avaldame vektorid baasi kujutises ε' baasi ε kaudu:

$$e'_j = e_i c_j{}^i, \qquad \text{s. t.} \qquad \varepsilon' = \varepsilon C,$$

kus baasivektorite kujutiste lineaarse sõltumatuse tõttu C on regulaarmaatriks. Olgu nüüd mingi vektori x korral $x = \varepsilon \mathrm{x}$, siis $x' = \varepsilon' \mathrm{x} = (\varepsilon C)\mathrm{x} = \varepsilon(C\mathrm{x})$. Siit järeldub, et kui vektori x' koordinaadid baasi ε suhtes on $'x^i$, s. t. $x' = e_i{}'x^i$ ehk maatriksite kaudu $x' = \varepsilon \mathrm{x}'$, siis

$$\mathrm{x}' = C\mathrm{x} \qquad \text{ehk} \qquad 'x^i = c_j{}^i \mathrm{x}^j. \qquad (105.6)$$

Selliselt on seotud vektori x ja tema kujutise x' koordinaadid baasil ε. Tähendab, seosed (105.6) ongi lineaarteisenduse valemid. Maatriks $C = \|c_j{}^i\|$ on siin, nagu märgitud, regulaarmaatriks [133].

On selge, et ruumi V_n iga kaks baasi, millest üks on loetud teise kujutiseks, määravad parajasti ühe lineaarteisenduse. Seetõttu vabalt võetud seosed (105.6), kus C on regulaarmaatriks, on teatava lineaarteisenduse valemid. Tõepoolest, võtame mingi baasi ε ja moodustame maatriksi C abil teise baasi $\varepsilon' = \varepsilon C$, siis baasidega ε ja ε' määratud lineaarteisendust esitavad just valemid (105.6).

---

[133] Vektorruumi V_n lineaarteisendused moodustavad tähtsa alamhulga ruumi V_n lineaarkujutuste hulgas, mille puhul valemites (105.6) üldiselt ei eeldata kordajate maatriksi C regulaarsust; vt. G. K a n g r o, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, IX ptk. Juhime tähelepanu ühele terminoloogilisele erinevusele: märgitud õpikus nimetatakse kõiki lineaarkujutusi lineaarteisendusteks sõltumata sellest, kas C on regulaarne või mitte; lineaarkujutusi regulaarmaatriksiga C nimetatakse seal regulaarseteks lineaarteisendusteks.

Selliseid afiinse geomeetria käsitlemisel üksnes vektorite kohta käivaid mõisteid nagu siht ja riht üldistab järgmine definitsioon.

Def. **105.3.** Vektorruumi V_n alamhulka U, mis osutub ruumis V_n defineeritud lineaartehete suhtes samuti vektorruumiks, nimetatakse ruumi V_n alamruumiks.

Alamhulk $U \subset V_n$ on alamruum, s. t. rahuldab eraldi võetult ksioome $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{1}$—$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{4}$, **B1**—**B5** ja $\mathbf{C}^{(k)}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, parajasti siis, kui ;a kahe vektori $x \in U$, $y \in U$ ja iga reaalarvu λ korral ka $(x+y) \in U$ ja $(x\lambda) \in U$ (sel puhul öeldakse, et U on kinnine neaartehete suhtes).

Selle väite tõestuseks märgime, et esitatud tingimused on äidetud, kui hulk U — eraldi võetult — rahuldab aksioome $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{1}$ ja **B1**. Vastupidi, kui hulk U rahuldab neid tingimusi, siis rahuldab ta ka aksioome $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{1}$ ja **B1**. Kui $a \in U$, siis sel juhul ka $(a0) \in U$, s. t. $\mathbf{0} \in U$. Võrrand $a + x = \mathbf{0}$ peab olema lahenduv iga $a \in U \subset V_n$ korral ja et $a \in U$ ning $\mathbf{0} \in U$, siis lahend $x = \mathbf{0} + (-a)$ kuulub hulka U, s. t. iga $a \in U$ korral ka $-a \in U$. Siit järeldub, et iga kahe vektori $a \in U$ ja $b \in U$ puhul võrrandi $a + x = b$ lahend $x = b + (-a)$ kuulub hulka U, s. t. U rahuldab aksioomi[134] $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{4}$. Aksioomide $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{2}$, $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{3}$ ja **B2**—**B5** kehtivus hulgas U järeldub vahetult nende kehtivusest ruumis V_n. Mis puutub aksioomi $\mathbf{C}^{(k)}$, siis piisab, kui märkida, et lineaarselt sõltumatute vektorite maksimaalne arv hulgas U on k, kus $0 \leqslant k \leqslant n$. Kui $k \neq 0$, siis iga vektor hulgast U on esitatav hulka U kuuluva k lineaarselt sõltumatu vektori lineaarkombinatsioonina. Kui $k = 0$, siis $U = \{\mathbf{0}\}$; sel puhul räägime nullmõõtmelisest alamruumist. Kui $k = n$, siis $U = V_n$. Niisiis, k igal võimalikul väärtusel alamhulk U, mis on kinnine ruumis V defineeritud lineaartehete suhtes, osutub ruumi k-mõõtmeliseks alamruumiks: $U = V_k \subset V_n$.

Eriti olulised on edaspidi ruumi V_n ühemõõtmelised alamruumid. Sellises alamruumis $V_1 \subset V$ leidub aksioomi $\mathbf{C}^{(1)}$ põhjal vektor $a \neq \mathbf{0}$; iga kaks vektorit selles aga on lineaarselt sõltuvad. Niisiis $V_1 = \{x \mid x = a\lambda\}$, kus λ võib omandada kõiki reaalarvulisi väärtusi.

Afiinse tasandi ja afiinse ruumi vektorite hulgad on vektorruumide, vastavalt V_2 ja V_3 mudelid. Seega nende ruumide ühe-

---

[134] Vektorruumi defineerimisel asendataksegi aksioom $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{4}$ sageli samaväärse aksioomide paariga:

$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{4}'$. Võrrand $a + x = a$ on lahenduv iga a korral (lahendit nimetatakse nullvektoriks ja tähistatakse $\mathbf{0}$);

$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{4}''$. Võrrand $a + x = 0$ on lahenduv iga a korral (lahendit nimetatakse vektori a vastandvektoriks ja tähistatakse $-a$).

mõõtmelised alamruumid on tõlgendatavad sihtidena vastavalt afiinsel tasandil ja afiinses ruumis.

106. Projektiivne ruum. Def-ile 103.1 toetudes võtsime art-s 104 projektiivse sirge või projektiivse ruumi punkti kujutiseks vastavalt afiinse tasandi või afiinse ruumi vektorite ekvivalentsusklassi, s. t. hulga $\{x \mid x = a\lambda\}$, kus $a \neq 0$ on fikseeritud vektor ja λ omandab kõiki nullist erinevaid väärtusi. Seega lugesime projektiivse sirge või tasandi punktide kujutisteks ruumide V_2 ja V_3 afiinsete mudelite ühemõõtmelisi alamruume, mil'lest on välja jäetud nullvektor. Afiinse tasandi ja afiinse ruumi punktide hulki kasutasime siinjuures õigupoolest ainult selleks, et näidata tee niisuguse kujutuse korraldamiseks. Vabastame nüüd projektiivse geomeetria sellest seosest afiinse geomeetriaga.

Ruumi V_2 või ruumi V_3 kaht nullist erinevat vektorit nimetatakse ekvivalentseteks, kui nad kuuluvad ühte ja sellessesamasse ühemõõtmelisse alamruumi, s. t.

$$x \sim y, \quad \text{kui} \quad x \in V_1, \quad y \in V_1 \quad \text{ja} \quad x \neq 0, \quad y \neq 0.$$

Olgu $\bar{V}_1$ alamruumiga V_1 määratud ekvivalentsusklass ning $\tilde{V}_2$ ja $\tilde{V}_3$ sel viisil saadud ekvivalentsusklasside hulgad vastavalt ruumis V_2 ja V_3:

$$\tilde{V}_2 = \{\bar{V}_1 \mid \bar{V}_1 \subset V_2\}, \quad \tilde{V}_3 = \{\bar{V}_1 \mid \bar{V}_1 \subset V_3\}.$$

Et ruume V_2 ja V_3 saab vaadelda vastavalt afiinse tasandi ja afiinse ruumi vektorite hul'kadena [135], siis def. 103.1 põhjal hulgad $\tilde{V}_2$ ja $\tilde{V}_3$ on vastavalt projektiivse sirge ja projektiivse tasandi mudelid.

Nende mudelite puhul saab anda üldistuse, nimelt lugeda kasutatava vektorruumi mõõde n vabalt valituks. Sel teel saab haarata ühtsesse skeemi ka meid huvitava juhu $n = 4$ ja selle kaudu projektiivse ruumi, mille uurimine afiinse geomeetria vahendusel ei ole siin arendatava teooria raamides võimalik.

Def-ist 103.1 järeldub, et projektiivseks sirgeks või projektiivseks tasandiks võib lugeda iga hulka, mida saab üksüheselt kujutada vastavalt kas hulgale $\tilde{V}_2$ või $\tilde{V}_3$. Siinjuures ei ole oluline sellise kujutuse konkreetne eeskiri, vaid ainult võimalikkus. Nimelt see asjaolu ongi käesolevas kursuses võetud projektiivse geomeetria afiinsest geomeetriast sõltumatu käsitluse aluseks. Alustamegi nüüd projektiivse geomeetria käsitlemist.

***Def.* 106.1.** Kaht nullist erinevat vektorit ruumis V_n nimetatakse ekvivalentseteks, kui nad kuuluvad ühte ja sellessesamasse ühemõõtmelisse alamruumi.

---

[135] Vt allmärkus 132, lk. 492.

Olgu $\overline{V}_1$ alamruumiga $V_1 \subset V_n$ määratud ekvivalentsusklass ja $\tilde{V}_n$ kõigi ekvivalentsusklasside hulk ruumis V_n:

$$\tilde{V}_n = \{\overline{V}_1 \mid \overline{V}_1 \subset V_n\}.$$

***Teoreem* 106.1.** *Kui mitteekvivalentsed vektorid $a_i \in \overline{V}_1^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, p)$ on lineaarselt sõltuvad, siis on lineaarselt sõltuvad ka iga p mitteekvivalentset vektorit $x_i \in \overline{V}_1^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, p)$.*

Tõestus. Eelduse kohaselt leiduvad reaalarvud $\mu_1, \ldots, \mu_p$, mis ei ole kõik nullid, nii et kehtib võrdus $a_1\mu_1 + \ldots + a_p\mu_p = 0$. Vabalt valitud vektorite $x_i \in \overline{V}_1^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, p)$ korral $x_i = a_i\lambda_i$. Et $x_i \neq 0$, siis $\lambda_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, p)$, mistõttu $a_i = x_i\lambda_i^{-1}$ ja $x_1(\lambda_1^{-1}\mu_1) + \ldots + x_p(\lambda_p^{-1}\mu_p) = 0$, kus kõik kordajad $\lambda_i^{-1}\mu_i$ ei ole nullid. ∎

Teoreem 106.1 võimaldab defineerida hulga $\tilde{V}_n$ elementide lineaarse sõltuvuse.

***Def.* 106.2.** Vektorite ekvivalentsusklasse $\overline{V}_1^{(1)}, \ldots, \overline{V}_1^{(p)}$ nimetatakse lineaarselt sõltuvaiks, kui leiduvad lineaarselt sõltuvad vektorid $a_i \in \overline{V}_1^{(i)}$, $i = 1, \ldots, p$; kui selliseid vektoreid ei leidu, siis klasse $\overline{V}_1^{(1)}, \ldots, \overline{V}_1^{(p)}$ nimetatakse lineaarselt sõltumatuiks.

Teoreemi 106.1 põhjal ekvivalentsusklasside $\overline{V}_1^{(i)}$ lineaarne sõltuvus ei olene vektorite $a_i \in \overline{V}^{(i)}$ valikust.

Ruumi V_n mõistest, def-ist 106.1 ja teoreemist 106.1 järeldub vahetult järgmine teoreem.

***Teoreem* 106.2.** *Hulga $\tilde{V}_n$ iga kaks elementi on kas lineaarselt sõltumatud või ühtivad; lineaarselt sõltumatute elementide maksimaalne arv hulgas $\tilde{V}_n$ on n; selliseid n lineaarselt sõltumatust elemendist koosnevaid alamhulki on hulgas $\tilde{V}_n$ lõpmata palju* (iga baas ruumis V_n määrab ühe niisuguse alamhulga).

Kui ruumi V_3 tõlgendada afiinse ruumi A_3 vektorite hulgana ja hulka $\tilde{V}_3$ — sihtide hulgana ruumis A_3, siis $\tilde{V}_3$ kolme elemendi lineaarne sõltuvus tähendab, et nad sihtidena kuuluvad ühele rihile.

Def. 103.1, mis määrab projektiivse sirge ja projektiivse tasandi mõisted, on vaadeldav erijuhuna järgmisest üldisest definitsioonist.

***Def.* 106.3.** Hulka P, mida saab üksüheselt kujutada vektorruumi V_n ekvivalentsusklasside hulgale $\tilde{V}_n$, nimetatakse $(n-1)$-mõõtmeliseks p r o j e k t i i v s e k s r u u m i k s ja tähistatakse

P_{n-1}, kui hulgas P ei vaadelda mingeid teisi vahekordi peale nende, mis kanduvad üle nimetatud kujutusega $P \to \tilde{V}_n$.

Selle definitsiooni lõpposa on vajalik järgmistel kaalutlustel. Mingi konkreetse hulga P elemendid võivad olla teatavates vahekordades enne kujutust $P \to \tilde{V}_n$ (näiteks täiendatud sirge punktide seas on üks eriline — ebapunkt). Neid vahekordi ei tohi hulga P kui projektiivse ruumi P_{n-1} uurimisel arvestada (näiteks täiendatud sirge ebapunkt tuleb lugeda samaväärseks tema ülejäänud punktidega).

Def. 106.3 saab sõnastada ka nii (vt. art. 8): Iga hulka P, mis on ekvivalentne hulgaga $\tilde{V}_n$, nimetatakse projektiivseks ruumiks P_{n-1}, kui hulgas P ei vaadelda teisi vahekordi peale nende, mis on seotud selle ekvivalentsusega.

Edaspidi uurime projektiivse sirge P_1 ja projektiivse tasandi P_2 kõrval lähemalt ainult kolmemõõtmelist projektiivset ruumi P_3. Selleks aga, et saaksime anda nende kõigi ühtse käsitluse juhtudel, kus see on võimalik, on otstarbekas mõned mõisted defineerida üldiselt, $(n-1)$-mõõtmelise projektiivse ruumi P_{n-1} jaoks n mistahes väärtuse korral.

***Def.* 106.4.** Ruumi P_{n-1} punkte nimetatakse projektiivselt sõltuvaiks, kui neile vastavad elemendid hulgas $\tilde{V}_n$ on lineaarselt sõltuvad. Vastupidisel juhul kõneldakse, et punktid on projektiivselt sõltumatud.

Teoreemist 15.2 järeldub, et kui punktide lõpliku hulga mingi alamhulk koosneb projektiivselt sõltuvatest punktidest, siis ka selle hulga enda punktid on projektiivselt sõltuvad. Seega hulk koosneb projektiivselt sõltumatutest punktidest parajasti siis, kui selline on tema iga alamhulk.

Teoreemi 106.2 põhjal on tõene järgmine lause.

***Teoreem* 106.3.** *Ruumi P_{n-1} iga kaks punkti on kas projektiivselt sõltumatud või ühtivad; ruumis P_{n-1} leidub lõpmata palju erinevaid punktihulki, mis koosnevad n projektiivselt sõltumatust punktist, iga $n+1$ punkti selles ruumis on aga projektiivselt sõltuvad.*

Edaspidi jätame sageli sõna «projektiivselt» ära ja räägime lühidalt sõltuvaist või sõltumatuist punktidest.

Niisiis: sirgel P_1 leidub lõpmata palju erinevaid sõltumatute punktide paare, iga kolm punkti sirgel P_1 on sõltuvad; tasandil P_2 leidub lõpmata palju erinevaid sõltumatute punktide kolmikuid (muidugi siis ka paare); tasandi kolm punkti on sõltuvad parajasti siis, kui nad on ühel sirgel, iga neli punkti tasandil P_2 on sõltuvad; ruumis P_3 leidub lõpmata palju erinevaid sõltumatute punktide nelikuid (muidugi siis ka paare ja kolmikuid), iga viis punkti ruumis P_3 on sõltuvad.

Ruumi P_{n-1} punkte tähistame $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$. Vabalt võetud nullist erinevat vektorit ruumi V_n sellest ekvivalentsusklassist, mis vastab punktile X hulgas $\tilde{V}_n$, nimetame punkti X esindajavektoriks (lühidalt ka: esindajaks) ja tähistame $\boldsymbol{X}$. Punkti X esindab ka vektor $\boldsymbol{X}\lambda$, kus λ on mistahes reaalarv peale nulli. Punktid on projektiivselt sõltuvad, kui nende esindajavektorid on lineaarselt sõltuvad ja vastupidi.

Def. **106.4.** Järjestatud süsteemi $\mathfrak{R} = \{A_1, \ldots, A_n, E\} \subset P_{n-1}$, milles ükski n punkti ei ole projektiivselt sõltuvad, nimetatakse projektiivseks reeperiks. Esimest n punkti A_i nimetatakse reeperi baaspunktideks, punkti E — ühikpunktiks.

Ruumis P_{n-1} leidub lõpmata palju erinevaid projektiivseid reepereid (teoreem 106.2). Osutub, et igaühe järgi neist on P_{n-1} punktide esindajavektorite jaoks määratav teatav baaside klass, milles iga kahe baasi vastavad vektorid erinevad ainult ühise reaalarvulise kordaja poolest. Näitame seda, minnes mööda art-s 104 kasutatud teed (teoreemi 104.1 üldistus).

Baaspunktide A_i vabalt võetud esindajad $\boldsymbol{A}'_i$ moodustavad baasi $\{\boldsymbol{A}'_1, \ldots, \boldsymbol{A}'_n\}$, sest nad on lineaarselt sõltumatud. Sel viisil saadavate baaside hulk on liialt lai. Selle hulga kitsendamiseks ongi lisatud ühikpunkt E. Olgu $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}'_i e^i$ ühikpunkti mingi esindaja. Siin $e^i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, sest $\boldsymbol{E}$ peab olema lineaarselt sõltumatu igast $n - 1$ baasivektorist. Seetõttu saab esialgu vabalt valitud baasi asendada baasiga $\{\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n\}$, kus $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}'_1 e^1, \ldots, \boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{A}'_n e^n$; sel korral

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_n. \tag{106.1}$$

Edaspidi loeme antud reeperiga $\mathfrak{R} = \{A_1, \ldots, A_n, E\}$ seotuiks ainult sellised baaspunktide esindajatest moodustatud baasid $\{\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n\}$, mille korral ühikpunkti E ühe esindaja määrab võrdus (106.1). Niisuguseid baase nimetatakse reeperi $\mathfrak{R}$ omabaasideks.

Reeperi omabaaside hulk ongi otsitav baaside klass. Tõepoolest, kui $\{\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n\}$ ja $\{\boldsymbol{A}_1\lambda_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n\lambda_n\}$ on ühe reeperi $\mathfrak{R}$ mingid omabaasid, siis punktil E leiduvad esindajad $\boldsymbol{A}_1 + \ldots + \boldsymbol{A}_n$ ja $\boldsymbol{A}_1\lambda_1 + \ldots + \boldsymbol{A}_n\lambda_n$, kusjuures $\boldsymbol{A}_1\lambda_1 + \ldots + \boldsymbol{A}_n\lambda_n = (\boldsymbol{A}_1 + \ldots \boldsymbol{A}_n)\mu$, s. t. $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \mu$.

Def. **106.5.** Punkti $X \in P_{n-1}$ vabalt valitud esindajavektori $\boldsymbol{X}$ koordinaate antud projektiivse reeperi $\mathfrak{R}$ mistahes omabaasil nimetatakse punkti X projektiivseteks koordinaatideks reeperi $\mathfrak{R}$ suhtes.

Punkti $X \in P_{n-1}$ esindajaks $\boldsymbol{X}$ ei saa olla nullvektor, s. t. ühegi

$X \in P_{n-1}$ kõik projektiivsed koordinaadid ei saa olla nullid. Punkti X esindajaks võib võtta vektori $\boldsymbol{X}\lambda$, $\lambda \neq 0$. Omabaasi $\{\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n\}$ võib asendada omabaasiga $\{\boldsymbol{A}_1\mu, \ldots, \boldsymbol{A}_n\mu\}$, $\mu \neq 0$. Kui esialgu esindab punkti X vektor $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}_i x^i$, s. t. X koordinaadid on x^i, siis pärast mainitud asendusi on X esindajaks $\boldsymbol{X}\lambda = (\boldsymbol{A}_i\mu)\mu^{-1}x^i\lambda$, s. t. X koordinaatideks on nüüd arvud $\frac{\lambda}{\mu}x^i$. On selge, et kordaja $\frac{\lambda}{\mu}$ on valitav vabalt. Niisiis, projektiivsed koordinaadid üksikult ei ole olulised — antud reeperi korral osutuvad punktiga muutumatult seotuiks ainult koordinaatide suhted. Seepärast kirjutatakse punkti X projektiivsed koordinaadid $x^1, x^2, \ldots, x^n$ kujul $X = (x^1 : x^2 : \ldots : x^n)$.

107. Täiendatud ruum projektiivse ruumi P_3 mudelina. Sirge P_1 ja tasand P_2 on defineeritud juba art-s 103, seal aga afiinse geomeetria baasil. Ruumi P_{n-1} üldine definitsioon 106.1 haarab endasse ka def. 104.1. Def. 106.1 põhineb kümnele lihtsale aksioomile $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{1}$—$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{4}$, **B1—B5** ja $\mathbf{C}^{(n)}$. Seetõttu võib ütelda, et ruumi P_{n-1} mõiste, erijuhtudena muidugi ka sirge P_1, tasandi P_2 ja ruumi P_3 mõisted on art-s 106 antud sõltumatult afiinsest geomeetriast, täiesti iseseisvatel alustel.

Näitame nüüd, et ruumi P_3 üheks mudeliks on art-s 103 tuletatud täiendatud ruum $\hat{A} = A_3 \cup \alpha_\infty$, kus A_3 on kolmemõõtmeline afiinne ruum ja α_∞ on sellele lisatud ebapunktide hulk. Meenutame, et ebapunkti võib siin käsitleda ruumi A_3 sirgete ebasidumi «lõpmata kauge keskpunktina» ning et teda võib tõlgendada ka selle sidumi sirgete ühise sihina.

Olgu $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ mingi afiinne reeper ruumis A_3 ja $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4\}$ mingi baas ruumis V_4. Konstrueerime nende abil 1 : 1-pealekujutuse $\hat{A}_3 \to \tilde{V}_4$.

Määrame punkti $X(x_1, x_2, x_3) \in A_3$ abil neli reaalarvu x^1, x^2, x^3, x^4, nii et

$$x_1 = \frac{x^1}{x^4}, \qquad x_2 = \frac{x^2}{x^4}, \qquad x_3 = \frac{x^3}{x^4}, \qquad x_4 \neq 0 \qquad (107.1)$$

ja loeme punktile X vastavaks ruumi V_4 iga vektori $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}_i x^i$, mille koordinaadid x^i rahuldavad tingimusi (107.1). Et viimaseid rahuldavad ka arvud $x_i\lambda$ iga $\lambda \neq 0$, $\lambda \in R$ korral, siis on sel viisil igale punktile $X \in A_3$ vastavusse seatud vektorite hulk

$$\{\boldsymbol{X}\lambda = (\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3, \lambda x^4) \mid \lambda \neq 0, \quad x^4 \neq 0, \quad \lambda \in R, \quad x^i \in R\} \in \tilde{V}_4.$$

On selge, et punktidele $X \neq Y$ vastavad vektorid kuuluvad V_4

erinevatesse ühemõõtmelistesse alamruumidesse. Järelikult on korraldatud ruumi A_3 1 : 1-kujutus hulka $\tilde{V}_4$. Tegemist ei ole veel pealekujutusega, sest viimane tingimustest (107.1) ei luba kujutisena saada ühtki hulka $\{X\lambda | \lambda \neq 0\}$, mille korral $x^4 = 0$.

Teisest küljest puuduvad senini kujutised hulga α_∞ elementidel — ebapunktidel. Samastame ebapunkti vastava ebasidumi sihiga ruumis A_3. Ebapunktile vastab siis teatav sihivektor $x = e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3$, samuti ka iga sihivektor $x\lambda = e_1(\lambda x_1) + e_2(\lambda x_2) + e_3(\lambda x_3)$. Seame ruumi igale vektorile $x \neq 0$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ vastavusse ruumi V_4 vektori $X = (x_1, x_2, x_3, 0)$. Loeme $x^4 = 0$ korral $x_i = x^i$ $(i = 1, 2, 3)$, s. o. kirjutame $X = (x^1, x^2, x^3, 0)$. Iga ebapunkt kujutub siis teatud hulgaks $\{X\lambda = (\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3, 0) \mid X \neq 0, \lambda \neq 0, \lambda \in R, x^i \in R\} \in \tilde{V}_4$. Niiviisi saame kätte hulga $\tilde{V}_4$ iga elemendi, mille puhul $x^4 = 0$. Erinevatele ebapunktidele, s. o. erinevatele sihtidele ruumis A_3 vastavad erinevad elemendid hulgas $\tilde{V}_4$. Seega on korraldatud hulga α_∞ 1 : 1-pealekujutus hulga $\tilde{V}_4$ alamhulka, mille eraldab tingimus $x^4 = 0$.

Kokkuvõttes on konstrueeritud 1 : 1-pealekujutus $\hat{A}_3 \to \tilde{V}_4$. Siit järeldub, et kui mitte eristada ruumi $\hat{A}_3$ alamhulka α_∞ tema teistest kahemõõtmelistest alamhulkadest, siis $\hat{A}_3$ on ruumi P_3 mudel (def. 106.1).

Tõlgendame P_3 punktide projektiivse sõltuvuse ja P_3 projektiivse reeperi mõisteid sellel mudelil.

Punkti $X(x_1, x_2, x_3) \in A_3$ esindab V_4 iga vektor $X = A_ix^i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, kus x^i rahuldavad tingimusi (107.1). Järelikult esindab teda ka vektor $X\frac{1}{x^4} = A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4$, s. o. vektor $X' = (x_1, x_2, x_3, 1)$. Ruumi A_3 punktid $X(x_1, x_2, x_3)$, $Y(y_1, y_2, y_3)$ ja $Z(z_1, z_2, z_3)$ on projektiivselt sõltuvad parajasti siis, kui nende esindajad $X' = (x_1, x_2, x_3, 1)$, $Y' = (y_1, y_2, y_3, 1)$ ja $Z' = (z_1, z_2, z_3, 1)$ on lineaarselt sõltuvad, s. t. kui leiduvad reaalarvud λ, μ ja ν, mis pole korraga nullid, nii et

$$\lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i = 0,$$
$$\lambda + \mu + \nu = 0.$$

Seega $\nu = -(\lambda + \mu)$, mistõttu $\lambda(x_i - z_i) + \mu(y_i - z_i) = 0$. Et siin λ ja μ pole korraga nullid, siis $\overrightarrow{ZX} \parallel \overrightarrow{ZY}$. Seega X, Y ja Z on projektiivselt sõltuvad parajasti siis, kui nad on ühel sirgel.

Kaks punkti $X(x_1, x_2, x_3)$ ja $Y(y_1, y_2, y_3)$ ning sihivektoriga $z = (z_1, z_2, z_3)$ määratud ebapunkt on projektiivselt sõltuvad parajasti siis, kui nende esindajad $X' = (x_1, x_2, x_3, 1)$, $Y' =$

$= (y_1, y_2, y_3, 1)$ ja $Z' = (z_1, z_2, z_3, 0)$ on lineaarselt sõltuvad, s. t.

$$\lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i = 0,$$
$$\lambda + \mu = 0,$$

seega $\lambda(x_i - y_i) + \nu z_i = 0$, mis tähendab, et $\overrightarrow{YX} \parallel \boldsymbol{z}$. Sõltuvus esineb siin niisiis parajasti juhul, kui $X = Y$ või $\boldsymbol{z}$ on sirge XY sihivektor.

Analoogiliselt saab kolme punkti korral, millest kaks on ebapunktid, kontrollida, et nad sõltuvad parajasti siis, kui ka kolmas neist on ebapunkt ja need kolm ebapunkti ruumi A_3 sihtidena kuuluvad ühele rihile. Samuti on näidatav, et ruumi $\hat{A}_3$ neli punkti, mis kõik ei ole ebapunktid, on sõltuvad parajasti siis, kui nad kuuluvad ühele tasandile. Iga neli ebapunkti osutuvad sõltuvateks.

Olgu ruumis P_3 võetud mingi projektiivne reeper $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, E\}$. Tõlgendame ruumi P_3 mudelina $\hat{A}_3$, lugedes punktide hulga, mille eraldab tingimus $x^4 = 0$, ebapunktide hulgaks $\alpha_\infty \subset \hat{A}_3$. Ruumi V_4 iga vektori $\boldsymbol{X} = (x^1, x^2, x^3, 1)$ puhul järeldub siis tingimustest (107.1), et $x^i = x_i$ $(i = 1, 2, 3)$; seega selline vektor esindab punkti $X(x_1, x_2, x_3) \in A_3$. Ruumi V_4 iga vektor $\boldsymbol{X} = (x^1, x^2, x^3, 0)$ aga esindab ebapunkti, mille ruumi A_3 sihina määrab vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, kus $x_i = x^i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Olgu $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4\}$ reeperi $\mathfrak{R}$ mingi omabaas. Et $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{A}_j\delta_i^j$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, siis esindavad baaspunkte vektorid $\boldsymbol{A}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{A}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{A}_3 = (0, 0, 1, 0)$ ja $\boldsymbol{A}_4 = (0, 0, 0, 1)$. Ühikpunktil E leidub esindaja $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_4$, s. t. $\boldsymbol{E} = (1, 1, 1, 1)$. Siit nähtub, et $\mathfrak{R}$ kolm esimest baaspunkti on ebapunktid, nimelt afiinse reeperi vektorite $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_j\delta_i^j$ $(i = 1, 2, 3)$ abil määratud sihid ruumis A_3. Punkt A_4 aga kuulub ruumi A_3 ja on seal afiinse reeperi alguspunktiks $O(0, 0, 0)$. Ruumi A_3 kuulub ka ühikpunkt ja esitub seal afiinse reeperi $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ kaudu kujul $E(1, 1, 1)$.

On selge, et reeperi $\mathfrak{R}$ antud tõlgendus on võimalik ainult siis, kui mudelis $\hat{A}_3$ on välja eraldatud ebapunktide hulk α_∞ tingimusega $x^4 = 0$.

108. Alamruumid. Punktide projektiivse sõltuvuse mõiste võimaldab ruumis P_{n-1} välja eraldada teatavad erilised alamhulgad, mille erijuhtudeks on tasandi $\hat{A}_2$ sirged ning ruumi $\hat{A}_3$ sirged ja tasandid.

***Def.* 108.1.** Ruumi P_{n-1} punktide hulka, mis on projektiivselt sõltuvad selle ruumi mingist m sõltumatust punktist, nimetatakse ruumi P_{n-1} $(m-1)$-mõõtmeliseks alamruumiks.

Teoreemi 106.2 põhjal $m \leqslant n$ ja 0-mõõtmeline alamruum on lihtsalt ruumi P_{n-1} punkt. Üldiselt kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 108.1. *Ruumi* P_{n-1} *iga* $(m-1)$*-mõõtmeline alamruum on projektiivne ruum* P_{m-1}.

Tõestus. Selle alamruumi iga punkti X kui teatavast m sõltumatust punktist $B_1, \ldots, B_m$ sõltuva punkti esindajavektor $\boldsymbol{X}$ on definitsioonide 106.2 ja 106.3 põhjal lineaarselt sõltuv punktide $B_1, \ldots, B_m$ esindajavektoreist $\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_m$. Vaadeldav alamruum on kõigi selliste punktide X hulk, mille esindajavektoreil $\boldsymbol{X}$ on see omadus, s. t. alamruumi määrab vektorite hulk

$$\{\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}_1\lambda^1+\ldots+\boldsymbol{B}_m\lambda^m\}. \tag{108.1}$$

See hulk on ruumi V_n m-mõõtmeline alamruum V_m (vt. def. 105.3), millest on välja jäetud nullvektor. Tõepoolest, nagu kerge näha, koos selle hulga kahe vektoriga $\boldsymbol{X}$ ja $\boldsymbol{Y}$ kuuluvad sinna ka vektorid $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$ ja $\boldsymbol{X}\lambda$. Seejuures vektorid $\boldsymbol{X}$ ja $\boldsymbol{X}\lambda$ on endiselt ühe ja sama punkti X esindajavektorid. Järelikult ruumi P_{n-1} vaadeldava $(m-1)$-mõõtmelise alamruumi jaoks on määratud tema 1 : 1-pealekujutus hulgale $\check{V}_m$, s. t. ta on projektiivne ruum P_{m-1}. ▮

Ruumi P_{n-1} ühemõõtmelisi alamruume nimetatakse selle ruumi sirgeteks (juhul $n-1=2$ on tegemist art-s 103 defineeritud tasandi P_2 sirgega). Suurima mõõtmega alamruumi, mis ei ühti kogu ruumiga P_{n-1}, s. t. $(n-2)$-mõõtmelist alamruumi, nimetatakse hüperalamruumiks. Tasandi P_2 juhul, kui $n=3$, on hüperalamruumideks sirged, sest siis on $n-2=1$. Ruumi P_3 korral nimetatakse hüperalamruumi tasandiks[136] (täiendatud ruumis $\hat{A}_3$ on nendeks just A_3 tasandid koos oma ebasirgetega ja ebatasand, vt. art. 103).

Kirjelduses (108.1) sisalduvat võrrandit

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}_1\lambda^1+\ldots+\boldsymbol{B}_m\lambda^m \tag{108.2}$$

nimetatakse vaadeldava $(m-1)$-mõõtmelise alamruumi parameetriliseks võrrandiks. Siin $\lambda^1, \ldots, \lambda^m$ on kõiki reaalarvulisi väärtusi omandavad parameetrid, mis ei tohi korraga saada võrdseks nulliga. Neid võib käsitleda punkti X projektiivsete koordinaatidena $(m-1)$-mõõtmelises alamruumis niisuguse projektiivse reeperi $\{B_1, \ldots, B_m, E'\}$ suhtes, mille ühikpunkti E' üheks esindajavektoriks on $\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2+\ldots+\boldsymbol{B}_m$.

Hüperalamruumi parameetriline võrrand on

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}_1\lambda^1+\ldots+\boldsymbol{B}_{n-1}\lambda^{n-1}. \tag{108.3}$$

Näiteks tasandi P_2 sirge võrrand on $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}_1\lambda^1+\boldsymbol{B}_2\lambda^2$, ruumi P_3 tasandi sirgel aga $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}_1\lambda^1+\boldsymbol{B}_2\lambda^2+\boldsymbol{B}_3\lambda^3$.

---

[136] Üldiselt, P_{n-1} korral nimetatakse hüperalamruumi sageli ka hüpertasandiks, $(m-1)$-mõõtmelist alamruumi aga $(m-1)$-tasandiks.

Esitame ruumi P_{n-1} hüperalamruumi vahetult projektiivsete koordinaatide abil.

Olgu ruumis P_{n-1} antud reeper $\mathcal{R}$ ning olgu $B_\alpha = (b_\alpha^1 : \ldots : b_\alpha^n)$, $\alpha = 1, \ldots, n-1$; siis reeperi $\mathcal{R}$ suhtes väljendab seost (108.3) süsteem

$$\begin{aligned} &b_1^1\lambda^1 + \ldots + b_{n-1}^1\lambda^{n-1} = x^1, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &b_1^n\lambda^1 + \ldots + b_{n-1}^n\lambda^{n-1} = x^n. \end{aligned} \tag{108.4}$$

Elimineerime sellest parameetrid λ^α. Selleks vaatleme (108.4) võrrandisüsteemina λ^α suhtes. Olgu i-nda võrrandi ärajätmisel saadud süsteemi determinant D_i. Osutub, et

$$D_1x^1 - D_2x^2 + \ldots + (-1)^n D_n x^n = 0. \tag{108.5}$$

Tõepoolest, kui sooritada siin näidatud operatsioonid võrrandite (108.4) vasakute pooltega, siis saame iga λ^α kordajaks n-järku determinandi, milles on kaks võrdset veergu ja mis seetõttu võrdub nulliga.

Niisiis rahuldavad vaadeldava hüperalamruumi iga punkti koordinaadid lineaarvõrrandit (108.5). Vastupidi, iga punkt $X \in P_{n-1}$, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit (108.5), kuulub punktidega B_α määratud hüpertasandile. Selles veendumiseks piisab, kui kirjutada võrduse (108.5) vasak pool n-järku determinandina:

$$\begin{vmatrix} b_1^1 & \ldots & b_{n-1}^1 & x^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1^n & \ldots & b_{n-1}^1 & x^n \end{vmatrix} = 0. \tag{108.6}$$

Nende tulemuste põhjal nimetatakse lineaarvõrrandit (108.5) punktidega B_α määratud hüperalamruumi võrrandiks. Võtame selle kordajate jaoks kasutusele tähistused

$$a_i = (-1)^{i+1} D_i \quad \text{(mitte summeerida)} \tag{108.7}$$

ja kirjutame võrrandi (108.5) lühidalt:

$$a_i x^i = 0. \tag{108.8}$$

Kõik kordajad ei ole võrdsed nulliga, sest kui oleks $a_i = 0$, ($i = 1, \ldots, n$), siis ka $D_i = 0$ ($i = 1, \ldots, n$) ning süsteemi (108.4) maatriksi astak oleks väiksem kui $n - 1$, mis sõltumatute B_α korral on võimatu.

Kui summeerimisel lugeda $i = 1, 2, 3$, siis on (108.8) tasandi P_2 sirge võrrand; kui aga võtta $i = 1, 2, 3, 4$, siis ruumi P_3 tasandi võrrand.

Punktidega B_α määratud hüperalamruumi võrrand (108.8) ei sõltu nende punktide esindajavektorite B_α valikust. Tõepoolest, kui võtta $\boldsymbol{B}'_\alpha = \boldsymbol{B}_\alpha \varkappa_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, n-1)$, siis saadud võrrandis $'a_i x^i = 0$ võrduste (108.7) tõttu $'a_i = \varkappa_1 \ldots \varkappa_{n-1} a_i$, s. t. võrrand (108.8) ei muutu oluliselt.

Ilmneb ka, et hüperalamruumi võrrand ei sõltu selle võrrandi koostamisel kasutatud punktidest hüperalamruumis. Näitame seda. Olgu C_β $(\beta = 1, \ldots, n-1)$ $n-1$ vabalt valitud sõltumatut punkti hüperalamruumis, mille määravad punktid B_α. Olgu selle hüperalamruumi punktidega B_α määratud võrrandiks (108.8). Olgu selle hüperalamruumi punktide C_β abil koostatud võrrandiks $'a_i x^i = 0$. Siis kehtivad seostega (108.7) analoogilised $'a_i = (-1)^{i+1} \mathrm{D}'_i$ (mitte summeerida), kus D'_i on punktide C_β koordinaatidest koosnev $(n-1)$-järku determinant, mis on saadud nende punktide i-ndate koordinaatide ärajätmisel. Avaldame punktide C_β esindajad punktide B_α esindajate kaudu; olgu $\boldsymbol{C}_\beta = \boldsymbol{B}_\alpha f^\alpha_\beta$, kus $\boldsymbol{C}_\beta$ sõltumatuse tõttu $\mathrm{Det}\, |f_\beta{}^\alpha| \neq 0$. Kui tähistada $\boldsymbol{C}_\beta = (c_\beta{}^1, \ldots, c_\beta{}^n)$, siis $c_\beta{}^i = b_\alpha{}^i f_\beta{}^\alpha$, mistõttu

$$'a^i = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} c^1_1 & \ldots & c^1_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c^{i-1}_1 & \ldots & c^{i-1}_{n-1} \\ c^{i+1}_1 & \ldots & c^{i+1}_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c^n_1 & \ldots & c^n_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} b^1_1 f^1_1 + \ldots + b^1_{n-1} f^{n-1}_1 & \ldots & b^1_1 f^1_{n-1} + \ldots + b^1_{n-1} f^{n-1}_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b^{i-1}_1 f^1_1 + \ldots + b^{i-1}_{n-1} f^{n-1}_1 & \ldots & b^{i-1}_1 f^1_{n-1} + \ldots + b^{i-1}_{n-1} f^{n-1}_{n-1} \\ b^{i+1}_1 f^1_1 + \ldots + b^{i+1}_{n-1} f^{n-1}_1 & \ldots & b^{i+1}_1 f^1_{n-1} + \ldots + b^{i+1}_{n-1} f^{n-1}_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b^n_1 f^1_1 + \ldots + b^n_{n-1} f^{n-1}_1 & \ldots & b^n_1 f^1_{n-1} + \ldots + b^n_{n-1} f^{n-1}_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\, \mathrm{D}_i \,\mathrm{Det}\, |f^\alpha_\beta| = a_i \,\mathrm{Det}\, |f^\alpha_\beta|.$$

Väide ongi tõestatud.

Lõpuks osutub, et iga võrrand $a_i x^i = 0$, mille kõik kordajad a_i ei ole nullid, osutub teatava hüperalamruumi võrrandiks. Selle tõestamiseks nummerdame vajaduse korral koordinaadid ümber selliselt, et $a_n \neq 0$, ning vaatleme ruumis P_{n-1} punkte

$$B_1 = (1 : 0 : \ldots : 0 : b_1),$$
$$B_2 = (0 : 1 : \ldots : 0 : b_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_{n-1} = (0 : 0 : \ldots : 1 : b_{n-1}),$$

kus $b_\alpha = -\frac{a_\alpha}{a_n}$. Need punktid on sõltumatud ning nendega on seega määratud teatav hüperalamruum. Viimase võrrandiks (108.6) on

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b^1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b^{n-1} \\ x^1 & x^2 & \dots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix} = 0$$

ehk, kui determinant arendada viimase rea järgi,

$$-b_1x^1 - b_2x^2 - \dots - b_{n-1}x^{n-1} + x^n = 0,$$

mis on samaväärne etteantud võrrandiga $a_ix^i = 0$.

Seega hüperalamruumideks ruumis P_{n-1} on parajasti sellised alamhulgad, mille punktide projektiivsed koordinaadid rahuldavad homogeenseid lineaarseid võrrandeid. Seepärast nimetame hüperalamruume edaspidi lihtsamalt l i n e a a r i d e k s, andes niiviisi juba varem esinenud terminile (art 86) mõnevõrra üldisema sisu.

109. Lineaaride ruum ja lineaarisidumid. Olgu Π_{n-1} ruumi P_{n-1} lineaaride hulk. Hulk Π_1 on sirge P_1 nullmõõtmeliste alamruumide — punktide hulk, niisiis see sirge ise: $\Pi_1 = P_1$. Hulk Π_2 on tasandi P_2 sirgete hulk. Hulk Π_3 on ruumi P_3 tasandite hulk. Edaspidi on oluline järgmine lause.

***Teoreem* 109.1.** *Hulk* Π_{n-1} *on ekvivalentne* $(n-1)$*-mõõtmelise projektiivse ruumiga* P_{n-1}.

T õ e s t u s. Vajaliku 1 : 1-pealekujutuse $\Pi_{n-1} \to P_{n-1}$ saab korraldada järgmiselt. Olgu ruumis P_{n-1} antud projektiivne reeper $\mathfrak{R}$. Kui hulga Π_{n-1} elemendil — teataval lineaaril — on reeperi $\mathfrak{R}$ suhtes võrrand $a_ix^i = 0$, siis seame talle vastavusse punkti $X = (a_1 : a_2 : \dots : a_n)$. Et võrrand $(\lambda a_i)x^i = 0$, $\lambda \neq 0$, määrab sama lineaari ja punktiks koordinaatidega λa_i on sama punkt X, siis see vastavus ongi 1 : 1-pealekujutus $\Pi_{n-1} \to P_{n-1}$. ∎

See teoreem lubab hulka Π_{n-1} käsitleda $(n-1)$-mõõtmelise projektiivse ruumina, mille «punktideks» on lineaarid. Tõepoolest kujutuste $\Pi_{n-1} \to P_{n-1}$ ja $P_{n-1} \to \tilde{V}_n$ tagajärjel tekib kujutus $\Pi_{n-1} \to V_n$; jääb vaid rakendada def. 106.1. Kõik eespool P_{n-1} punktide kohta sõnastatud definitsioonid on seega tõlgendatavad ruumis Π_{n-1}, nendes tuleb vaid sümbol P_{n-1} asendada sümboliga Π_{n-1} ja sõna «punkt» sõnaga «lineaar». Def. 106.3 annab siis lineaaride projektiivse sõltuvuse mõiste, teoreem 106.3 aga teeb sellest olulise järelduse. Def. 106.4 määrab ruumi Π_{n-1} projektiivse reeperi mõiste ja def. 106.5 lisab lineaari projektiivsete koordinaatide mõiste (selle reeperi suhtes).

Lineaari võrrand (108.8) on koostatud ruumis P_{n-1} antud teatava projektiivse reeperi suhtes. Sellist projektiivset reeperit ruumis Π_{n-1}, mille suhtes lineaaril võrrandiga $u_i x^i = 0$ on projektiivsed koordinaadid u_i, nimetatakse ruumis P_{n-1} antud reeperi kaasreeperiks. Osutub, et viimase baaslineaarideks on need lineaarid, mis on määratud ruumi P_{n-1} reeperi mingi $n-1$ baaspunktiga. Näiteks esimesel baaslineaaril koordinaatidega $u_1 = 1$, $u_2 = \ldots = u_n = 0$ on võrrand $x^1 = 0$, mida tõepoolest rahuldavad baaspunktid $A_2, \ldots, A_n$. Analoogiline on olukord ka teiste baaslineaaride puhul.

Lineaare, s. t. Π_{n-1} elemente, tähistame suurte ladina tähtedega $S, T, U, \ldots$, nende esindajaid ruumis V_n tähistame vastavalt $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{U}, \ldots$. Seda, et $u_1, \ldots, u_n$ on lineaari U koordinaadid, märgime kirjutisega $U = [u_1 : \ldots : u_n]$. Lineaari U esindajavektori $\boldsymbol{U}$ korrutamisel mingi arvuga λ kirjutame kordaja vasakule: $\lambda \boldsymbol{U}$.

***Def.* 109.1.** Ruumi P_{n-1} selliste lineaaride hulka, mis Π_{n-1} elementidena sõltuvad m sõltumatust lineaarist, nimetatakse $(m-1)$-sidumiks. 1-sidumi puhul räägitakse kimbust.

On selge, et $(m-1)$-sidum on alamruum Π_{m-1} hulgas Π_{n-1} kui $(n-1)$-mõõtmelises projektiivses ruumis ning kujutab endast seega $(m-1)$-mõõtmelist projektiivset ruumi.

Lineaaridega $U^1, \ldots, U^m$ määratud $(m-1)$-sidumit esitab parameetriline võrrand

$$\boldsymbol{V} = \lambda_1 \boldsymbol{U}^1 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{U}^m = \lambda_\alpha \boldsymbol{U}^\alpha, \tag{109.1}$$

kus $\boldsymbol{V} \in V_n$ on selle $(m-1)$-sidumi suvalise lineaari V esindaja, $\boldsymbol{U}^\alpha \in V_n$ on lineaari U^α esindaja ($\alpha = 1, \ldots, m$), λ_α aga on reaalarvulised parameetrid, mis ei või olla korraga nullid. Neid parameetreid võib vaadelda $(m-1)$-sidumi lineaari projektiivsete koordinaatidena selles $(m-1)$-sidumis sobivalt valitud projektiivse reeperi suhtes.

Tasandil P_2 leidub ainult 1-sidumeid — sirgekimpe. Sirgekimbu parameetriline võrrand on

$$\boldsymbol{V} = \lambda_1 \boldsymbol{U}^1 + \lambda_2 \boldsymbol{U}^2 \tag{109.2}$$

(vrd. teoreemiga 41.1). Ruum P_3 sisaldab 1-sidumeid — tasandikimpe — ja 2-sidumeid; viimaste puhul räägitakse tasandisidumitest. Tasandikimpu esitab samuti võrrand (109.2) (vrd. teoreemiga 49.1), tasandisidumit aga võrrand $\boldsymbol{V} = \lambda_1 \boldsymbol{U}^1 + \lambda_2 \boldsymbol{U}^2 + \lambda_3 \boldsymbol{U}^3$ (vrd. teoreemiga 51.1).

***Def.* 109.2.** Kõigi $(m-1)$-sidumisse kuuluvate lineaaride ühiste punktide hulka nimetatakse selle sidumi tuumaks.

Teoreem **109.2.** *Ruumi* P_{n-1} $(m-1)$*-sidumi tuum on ruumi* P_{n-1} $(n-m-1)$*-mõõtmeline alamruum* P_{n-m-1}; *iga selline* P_{n-m-1} *on parajasti ühe* $(m-1)$*-sidumi tuumaks ruumis* P_{n-1}.

Tõestus. Ruumi P_{n-1} $(m-1)$-sidumi tuuma esitab m sõltumatust lineaarsest homogeensest võrrandist (108.8) koosnev süsteem. Selles on $n-m$ vaba tundmatut, mistõttu lahendite fundamentaalsüsteem koosneb $n-m$ lahendist.[137] Seejuures üldlahend on fundamentaalsüsteemi lahendite lineaarkombinatsioon ja avaldub seega kujul (108.2), mistõttu talle vastav punkt tõesti kirjeldab $(n-m-1)$-mõõtmelise alamruumi P_{n-m-1}.

Vastupidi, olgu antud mingi alamruum P_{n-m-1}. Valime vabalt selle $n-m$ sõltumatut punkti $A_\alpha=(a_\alpha^1:\ldots:a_\alpha^n)$ $(\alpha=1,\ldots,n-m)$ ja määrame $(m-1)$-sidumi, mille tuumaks on P_{n-m}. Moodustame lineaari $U=[u_1:\ldots:u_n]$ koordinaatide suhtes võrrandisüsteemi, mis nõuab, et lineaar U sisaldaks punktid A_α:

$$\begin{cases} u_1\overset{1}{a}_1+\ldots+u_n\overset{n}{a}_1=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_1\overset{1}{a}_{n-m}+\ldots+u_n\overset{n}{a}_{n-m}=0. \end{cases}$$

Punktide A_α sõltumatuse tõttu on sellel süsteemil $n-(n-m)=m$ sõltumatut lahendit, s. t. leidub m sõltumatut lineaari $U^1,\ldots,U^m$, mis läbivad punkte A_α. Neid punkte läbib ka viimastega määratud $(m-1)$-sidumi iga lineaar; ükski lineaar aga, mis ei kuulu sellesse $(m-1)$-sidumisse, ei läbi punkte A_α. ∎

Teoreemist 109.2 järeldub vahetult, et ruumi P_{n-1} lineaaride $(n-2)$-sidumi tuum koosneb ühest punktist. Viimast nimetatakse selle $(n-2)$-sidumi keskpunktiks. Seejuures ruumi P_{n-1} iga punkt osutub ühe sellise $(n-2)$-sidumi keskpunktiks. Niisugune on olukord näiteks tasandi P_2 sirgekimbu ja ruumi P_3 tasandisidumi korral.

Ruumi P_3 tasandikimbu tuum on teoreemi 109.2 järgi sirge; seda sirget nimetatakse tasandikimbu teljeks. Ruumi P_3 iga sirge on teatava tasandikimbu teljeks.

Olgu ruumi P_{n-1} lineaaride $(n-2)$-sidum määratud sõltumatute lineaaridega $V^\alpha=[v_1^\alpha:\ldots:v_n^\alpha]$ $(\alpha=1,\ldots,n-1)$. Vabalt võetud lineaar $U=[u_1:\ldots:u_n]$ kuulub (108.6) põhjal sellesse sidumisse parajasti siis, kui

[137] Vt G. Kangro, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, § 8, art. 3.

$$\begin{vmatrix} v_1^1 & \dots & v_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1^{n-1} & \dots & v_n^{n-1} \\ u_1 & \dots & u_n \end{vmatrix} = 0 \qquad (109.3)$$

Arendame determinandi viimase rea järgi ja tähistame U koordinaatide kordajaid saadud lineaarses seoses lühidalt $a_i = (-1)^{i+1}D_i$ $(i = 1, \dots, n)$ (D_i on n-järku determinant, mis on moodustatud lineaaride koordinaatidest i-ndate koordinaatide ärajätmisel). Võrrand (109.3) saab siis kuju

$$u_i a^i = 0. \qquad (109.4)$$

Täpselt samal viisil nagu (108.8) puhul saab kontrollida, et võrrand (109.4) ei muutu oluliselt, kui muuta lineaaride V^α esindajavektoreid või määrata sidum tema mingite teiste lineaaridega; mõlemal juhul korrutuvad kordajad a_i mingi nullist erineva arvuga.

Seost (109.4) nimetatakse $(n-2)$-s i d u m i v õ r r a n d i k s. Kordajad a_i on selle sidumi keskpunkti koordinaadid P_{n-1} niisuguse reeperi suhtes, mille kaasreeperiks on ruumis Π_{n-1} antud reeper.

Kui lugeda $i = 1, 2, 3$, siis (109.4) on P_2 sirgekimbu võrrand; kui aga võtta $i = 1, 2, 3, 4$, siis ta esitab P_3 tasandisidumit.

110. Duaalsuse printsiip. Art. 109 tulemustest saab teha tähtsa järelduse ruumi P_{n-1} struktuuri kohta.

Võrrandite (108.8) ja (109.4) võrdlemisel ilmneb suur analoogia. Võrrandit $a_i x^i = 0$ rahuldavad kõigi nende punktide koordinaadid x_i, mis kuuluvad lineaarile koordinaatidega a_i; võrrandit $u_i a^i = 0$ rahuldavad kõigi nende lineaaride koordinaadid u_i, mis läbivad punkti koordinaatidega a_i. Esimene on lineaari $[a_1 : \dots : a_n]$ võrrand; teist on loomulik käsitleda punkti $(a^1 : \dots : a^n)$ võrrandina.

Punkt $X = (x^1 : \dots : x^n)$ asetseb lineaaril $U = [u_1 : \dots : u_n]$ ehk teisiti — lineaar U läbib punkti X parajasti siis, kui

$$u_i x^i = 0. \qquad (110.1)$$

On otstarbekas selle seosega väljendatavat vahekorda tähistavad rohkearvulised sõnad («asetseb», «kuulub», «sisaldab», «läbib» jt.) asendada üheainsa terminiga.

***Def.* 110.1.** Öeldakse, et punkt ja lineaar, mille koordinaadid mingi reeperi ja selle kaasreeperi suhtes rahuldavad tingimust (110.1), on teineteisega i n t s i d e n t s e d.[138]

---

[138] lad k. *incidens* — kokkujuhtuv.

Meenutame nüüd, et P_{n-1} lineaaride hulk Π_{n-1} on samuti $(n-1)$-mõõtmeline projektiivne ruum. Seetõttu on punkti ja lineaari mõistete vahetamise suhtes sümmeetrilised kõik nende abil defineeritavad uued mõisted ja nende kohta käivad tulemused Pärast termini «intsidentsus» kasutuselevõtmist tuleb see sisuline sümmeetria esile ka sõnastustes.

Oleme jõudnud projektiivse ruumi huvitava omaduseni, mille puhul räägitakse d u a a l s u s e[139] p r i n t s i i b i s t ja mis on väljendatav järgmiselt.

Iga definitsiooni ja teoreemi korral, milles on tegemist projektiivse ruumi punktide ja lineaaridega ning nende sõltuvuse ja intsidentsusega, omab mõtet ka definitsioon ja kehtib samuti teoreem, mis on saadud esialgsest sõnade «punkt» ja «lineaar» vahetamisel. Sel puhul räägitakse duaalselt kaasnevatest definitsioonidest (ka nendega määratud mõistetest) ning teoreemidest.

P_2 puhul tuleb lineaari all mõista sirget, P_3 puhul aga tasandit.

Ruumis P_3 on sirge (kahest erinevast punktist sõltuvate punktide hulga) duaalselt kaasnevaks mõisteks tasandikimp (kahest erinevast tasandist sõltuvate tasandite hulk). Seega sirgega kui punktihulgaga on duaalselt kaasnevaks mõisteks sirge kui teda läbivate tasandite hulk. Seetõttu ruumi P_3 puhul antavates sõnastustes «sirge» ei kuulu muutmisele. Täieliku sümmeetria saavutamiseks tuleb veel väljendid «punkt kuulub sirgele» ja «sirge läbib punkti» asendada ütlusega «punkt ja sirge on intsidentsed» ning väljendid «sirge kuulub tasandile» ja «tasand läbib sirge» asendada ütlusega «sirge ja tasand on intsidentsed»

Duaalsuse printsiip jaotab ruumi P_{n-1} alamruume käsitlevad laused omavahel duaalselt kaasnevate lausete paarideks.[140] Sellised laused võib kirjutada kõrvuti ja anda sel viisil ruumi P_{n-1} omaduste n.-ö. kaheveeruline kirjeldus

Esitame mõned näited ruumi P_3 kohta.

1. *Iga kaks erinevat punkti on intsidentsed parajasti ühe sirgega.*	1.′ *Iga kaks erinevat tasandit on intsidentsed parajasti ühe sirgega.*
2. *Iga kolm punkti, mis ei ole intsidentsed ühe sirgega, on intsidentsed parajasti ühe tasandiga.*	2′. *Iga kolm tasandit, mis ei ole intsidentsed ühe sirgega, on intsidentsed parajasti ühe punktiga.*

[139] lad. k. *dualis* — kahelıne, kahepoolne

[140] Seejuures iga m-mõõtmeline alamruum tuleb asendada $(n-m-1)$-mõõtmelise alamruumiga.

3. *Kui kaks erinevat punkti on intsidentsed nii sirge kui tasandiga, siis ka see sirge ja tasand on intsidentsed.*

3′. *Kui kaks erinevat tasandit on intsidentsed nii sirge kui punktiga, siis ka see sirge ja punkt on intsidentsed.*

4. *Iga kaks erinevat sirget, mis on intsidentsed ühe tasandiga, on intsidentsed parajasti ühe punktiga.*

4′. *Iga kaks erinevat sirget, mis on intsidentsed ühe punktiga, on intsidentsed parajasti ühe tasandiga.*

Lisame siia kaks lauset projektiivse tasandi P_2 kohta.

5. *Punktidega* $A = (a^1 : a^2 : a^3)$ *ja* $B = (b^1 : b^2 : b^3)$ *intsidentse sirge võrrand on*

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (110.2a)$$

5′. *Sirgetega* $S = [s^1 : s^2 : s^3]$ *ja* $T = [t^1 : t^2 : t^3]$ *intsidentse punkti võrrand on*

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (110.2b)$$

Analoogilisteks lauseteks ruumi P_3 puhul on järgmised kaks lauset.

6. *Punktidega* $A = (a^1 : a^2 : a^3 : a^4)$, $B = (b^1 : b^2 : b^3 : b^4)$ *ja* $C = (c^1 : c^2 : c^3 : c^4)$

intsidentse tasandi võrrand on:

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ a^1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ b^1 & b^2 & b^3 & b^4 \\ c^1 & c^2 & c^3 & c^4 \end{vmatrix} = 0. \qquad (110.3a)$$

6′. *Tasanditega* $S = [s_1 : s_2 : s_3 : s_4]$, $T = [t_1 : t_2 : t_3 : t_4]$ *ja* $V = [v_1 : v_2 : v_3 : v_4]$

intsidentse punkti võrrand on:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix} = 0. \qquad (110.3b)$$

Nende lausete tõestamise juhul, kui tõesus pole veel ilmne, jätame lugeja hooleks. Duaalsuse printsiibi tõttu piisab, kui tõestada ainult üks kõrvutiolevatest lausetest; teise tõestus kordab sama mõttekäiku, ainult teiste terminite ja tähistustega.

On selge, et duaalsuse printsiip ei kehti ei afiinses ega eukleidilises geomeetrias.

111. Projektiivsete koordinaatide teisendamine. Selgitame, kuidas teisenevad punkti koordinaadid reeperi vahetamisel ruumis P_{n-1}. Tulemused kanduvad duaalsuse printsiibi põhjal üle ruumi Π_{n-1}.

Võtame ruumis P_{n-1} vabalt kaks reeperit $\mathfrak{R} = \{A_1, \ldots, A_n, E\}$ ja $\mathfrak{R}' = \{A'_1, \ldots, A'_n, E'\}$ ning kummagi omabaaside hulgast ühe, vastavalt $\{\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n\}$ ja $\{\boldsymbol{A}'_1, \ldots, \boldsymbol{A}'_n\}$. Baasiteisenduse määravad siis valemid (105.1), siinkasutatavates tähistustes $\boldsymbol{A}'_j = \boldsymbol{A}_i c_j{}^i$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, kus $C = \|c_j{}^i\|$ on regulaarmaatriks.

Kuid $\mathfrak{R}$ ja $\mathfrak{R}'$ omabaasideks on vastavalt ka $\{\boldsymbol{A}_1\lambda, \ldots, \boldsymbol{A}_n\lambda\}$ ja $\{\boldsymbol{A}'_1\mu, \ldots, \boldsymbol{A}'_n\mu\}$ iga $\lambda \neq 0$ ja $\mu \neq 0$ korral. Seejuures $\boldsymbol{A}'_j\mu = (\boldsymbol{A}_i c_j^i)\mu = (\boldsymbol{A}_i\lambda)(\lambda^{-1}c_j^i\mu)$, s. t. sama teisendust kirjeldab ka maatriks $\|\lambda^{-1}c_j^i\mu\| = \frac{\mu}{\lambda}\|c_j^i\| = \varkappa \mathrm{C}$, kus $\varkappa = \frac{\mu}{\lambda} \neq 0$ on vabalt valitav reaalarv. Järelikult teisendusmaatriks C on antud reeperite järjestatud paariga $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$ määratud nullist erineva reaalarvulise kordajani.

Iga punkti $X \in \mathrm{P}_{n-1}$, selle konkreetse esindaja $\boldsymbol{X}$ ja konkreetsete omabaaside korral $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}_j x^j = \boldsymbol{A}'_j{}'x^j$, seega $\boldsymbol{A}_j x^j = (\boldsymbol{A}_i c_j^i)'x^j = \boldsymbol{A}_j(c_i^j{}'x^i)$, mistõttu (vrd. ka (105.3)) $x^j = c_i^j{}'x^i$. Arvestades projektiivsete koordinaatide ja omabaaside määramise täpsust, saame siit punkti projektiivsete koordinaatide teisendusvalemid

$$\varrho x^i = c_j^i{}'x^j, \tag{111.1}$$

kus $\mathrm{C} = \|c_j^i\|$ on regulaarmaatriks ja $\varrho \neq 0$ vabalt valitav reaalarv.

Pöördteisenduse saamiseks tuleb vahetada reeperite $\mathfrak{R}$ ja $\mathfrak{R}$ osad. Sel puhul seostes $\boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{A}'_i \overset{*}{c}{}_j^i$ kordajate maatriks $\overset{*}{\mathrm{C}} = \|\overset{*}{c}{}_j^i\|$ on maatriksi C pöördmaatriks : $\overset{*}{\mathrm{C}} = \mathrm{C}^{-1}$. Pöördteisendust esitavad valemid

$$\sigma' x^i = \overset{*}{c}{}_j^i x^j, \qquad \sigma \neq 0. \tag{111.2}$$

Valemite (111.1) ja (111.2) võrdlemisel vektorite koordinaatide teisendusvalemitega (105.3) selgub, et erinevus seisneb ainult ühe reaalarvulise parameetri lisandumises x^i või $'x^i$ ette. Sellest erinevusest on võimalik vabaneda, kuid ainult ruumi P_{n-1} teatava lineaari punktidest loobumise hinnaga.

Antud reeperi $\mathfrak{R} = \{A_1, \ldots, A_n, E\}$ puhul piirdume nimelt ainult nende punktidega $X = (x^1 : \ldots : x^n)$, mille korral $x^n \neq 0$. Välja jäetud punktid moodustavad punktidega $A_1, \ldots, A_{n-1}$ määratud lineaari. Iga alles jäänud punkti X jaoks saab määrata reaalarvud

$$\xi^1 = \frac{x^1}{x^n}, \ldots, \quad \xi^{n-1} = \frac{x^{n-1}}{x^n}, \tag{111.3}$$

mida nimetatakse punkti X **mittehomogeenseteks projektiivseteks koordinaatideks** reeperi $\mathfrak{R}$ suhtes. Nende arv võrdub ruumi P_{n-1} mõõtmega ja nad on iga alles jäänud punkti $X \in \mathrm{P}_{n-1}$ jaoks määratud juba üheselt. Nende puuduseks on aga mitteuniversaalsus — välja tuleb jätta teatava lineaari punktid. (Viimaseid saab sellel lineaaril kui ruumis P_{n-2} määrata sel puhul projektiivsete koordinaatidega reeperi $\{A_1, \ldots, A_{n-1}, E'\}$ suhtes, kus E' on sirge A_nE ja lineaari lõikepunkt).

Märgime, et näiteks tasandi $\hat{\alpha}$ (ruumi $\hat{A}_3$) puhul punkti mittehomogeensed projektiivsed koordinaadid sellise reeperi suhtes, mille kaks (kolm) esimest punkti on ebapunktid, osutuvad afiinseteks koordinaatideks tasandil α (ruumis A_3) teatava afiinse reeperi suhtes (vt. teoreem 104.2 ja art. 107).[141] Sellel afiinsel tasandil α (ruumis A_3) on nad juba universaalsed, sest ebasirge (ebatasandi) väljajätmisel tasandist $\hat{\alpha}$ (ruumist $\hat{A}_3$) on tulemuseks just tasand α (ruum A_3).

Mittehomogeensete projektiivsete koordinaatide teisendusvalemid reeperivahetuse $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ korral saab tuletada valemitest (111.1), kui jagada nendest $n-1$ esimese valemi vasakud ja paremad pooled viimase valemi vastavate pooltega:

$$\frac{\varrho x^\alpha}{\varrho x^n} = \frac{c_1^\alpha {}'x^1 + \ldots + c_{n-1}^\alpha {}'x^{n-1} + c_n^\alpha {}'x^n}{c_1^n {}'x^1 + \ldots + c_{n-1}^n {}'x^{n-1} + c_n^n {}'x^n} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n-1).$$

Võrduste (111.3) põhjal on tulemuseks valemid

$$\xi^\alpha = \frac{c_1^\alpha {}'\xi^1 + \ldots + c_{n-1}^\alpha {}'\xi^{n-1} + c_n^\alpha}{c_1^n {}'\xi^1 + \ldots + c_{n-1}^n {}'\xi^{n-1} + c_n^n}. \tag{111.4}$$

Siin tuleb välja jätta juba kaks lineaari — nii $\mathfrak{R}$ kui ka $\mathfrak{R}'$ suhtes, mis erijuhul võivad muidugi ühtida. (Arusaadavalt on võimalikud ka «segateisendused», näiteks homogeensetelt projektiivsetelt koordinaatidelt mittehomogeensetele, kusjuures saab piirduda ainult ühe lineaari väljajätmisega.)

Vastupidised teisendusvalemid (${}'\xi^\alpha$ avaldised ξ^α kaudu) tekivad analoogiliselt valemitest (111.2).

Edaspidi leiavad mittehomogeensed projektiivsed koordinaadid sageli kasutamist sirgel P_1. Sel puhul koosneb (111.4) ainult ühest valemist

$$\xi = \frac{c_1^1 {}'\xi + c_2^1}{c_1^2 {}'\xi + c_2^2}. \tag{111.5}$$

Tähistame punktide mittehomogeenseid projektiivseid koordinaate sirgel väikeste ladina tähtedega $a, b, \ldots, x, x'$ jne., kordajaid valemis (111.5) aga kreeka tähtedega. Üleminek «vanadelt» koordinaatidelt «uutele» määratakse siis valemiga

[141] Seetõttu homogeenseid projektiivseid koordinaate nimetatakse sageli ka homogeenseteks afiinseteks koordinaatideks tasandil α (ruumis A_3). Afiinsete koordinaatidega on nad seotud valemitega (104.2).

$$x'=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \quad \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0. \tag{111.6}$$

Niisiis, $x=\frac{x^1}{x^2}$ ja $'x=\frac{'x^1}{'x^2}$. Juhul kui $x^2=0$ või $'x^2=0$, kirjutame vastavalt $x=\infty$ või $'x=\infty$. Seega jätame vaatluse alla kõik P_1 punktid ja omistame väljajätmisele kuuluvale punktile «mittehomogeense koordinaadina» sümboli ∞.

Vabadust kordajate valimiseks seostes (111.4) ei kitsenda miski peale nõude, et nendest moodustatud determinant ei tohi olla null. See tingimus väljendab baaspunktide lineaarset sõltumatust ja garanteerib, et (111.4) lugejates, samuti ühises nimetajas kõik kordajad ei ole korraga nullid. Kui lugejad ja nimetaja jagada läbi mingi nullist erineva kordajaga, siis seostesse (111.4) jääb n^2-1 olulist kordajat — see on sõltumatute parameetrite arv, millest sõltub projektiivsete koordinaatide teisendus kõige üldisemal juhul. Niisiis sõltub projektiivsete reeperite hulk sirgel P_1 kolmest (vt. (111.6)), tasandil P_2 kaheksast ja ruumis P_3 viieteistkümnest parameetrist.

Kui valemites (111.4) võtta $c^1_n=\ldots=c_n^{n-1}=0$, siis saadud valemid ühtivad afiinsete koordinaatide teisendusvalemitega afiinses ruumis (sest sel puhul $c_n^n\neq 0$). Järelikult parameetrite arv, millest sõltub afiinne reeper, on afiinsel sirgel kaks, afiinsel tasandil kuus ja afiinses ruumis kaksteist, üldiselt — ruumis A_n $n^2+n=n(n+1)$.

§ 20. PROJEKTIIVSED TEISENDUSED JA PROJEKTIIVNE GEOMEETRIA

Projektiivne ruum on siin defineeritud oluliselt erinevalt afiinsest ja eukleidilisest ruumist (art. 13. ja art. 21.). Seos aksioomidega, nimelt vektorruumi V_n aksioomidega, mis siin on arutluste aluseks, on kaudne — vahendatud kujutusega $P\rightarrow\tilde{V}_n$ (def. 106.1.). Seetõttu on tarvis minna erinevat teed ka projektiivse geomeetria defineerimisel. Siinse käsitluse jaoks kõige sobivam on defineerida see geomeetria teatava teisenduste rühma abil. Projektiivse sirge, tasandi ja ruumi teisendustele ongi käesolevas paragrahvis pööratud peatähelepanu.

Enne ruumi P_{n-1} teisenduste uurimist vaatleme lihtsamaid kujundeid selles ruumis ja üldistame liitsuhte (art. 36) mõistet.

112. Konfiguratsioonid. Eukleidilises ja afiinses geomeetrias on kõige lihtsamateks kujunditeks hulknurgad ja hulktahukad. Nende puhul etendavad olulist osa teatavad lõigud — hulknurkadel küljed, hulktahukatel servad Projektiivses geomeetrias tuleb hulknurga ja hulktahuka mõisteid märgatavalt üldistada, sest selles geomeetrias puudub lõigu mõiste (vt. art. 103). Erinevate punktide paar määrab siin ainult ühe punktihulga — sirge. Analoogiliselt kolm mitte ühel sirgel olevat punkti ruumis P_3 ei saa määrata mingit muud punktihulka peale tasandi; kolmnurga mõistel puudub siin sisu. Sedaliiki põhjustel koosnevad ruumi P_{n-1} lihtsamad kujundid tervetest alamruumidest (sealhulgas ka nullmõõtmelistest, s. t. punktidest).

***Def.* 112.1.** Lõplikku hulka, mis koosneb P_2 punktidest ja sirgetest või P_3 punktidest, sirgetest ja tasanditest, ning mille iga element on intsidentne mingi teise elemendiga sellest hulgast, nimetatakse konfiguratsiooniks.

Öeldakse, et ruumi P_{n-1} p punkti (p lineaari) on üldasendis, kui need punktid (lineaarid) on kas ise sõltumatud (juhul $p \leqslant n$) või seda on iga n neist (juhul $p > n$). Näiteks üldasendis oleva $n+1$ punkti järjestamisel saame projektiivse reeperi.

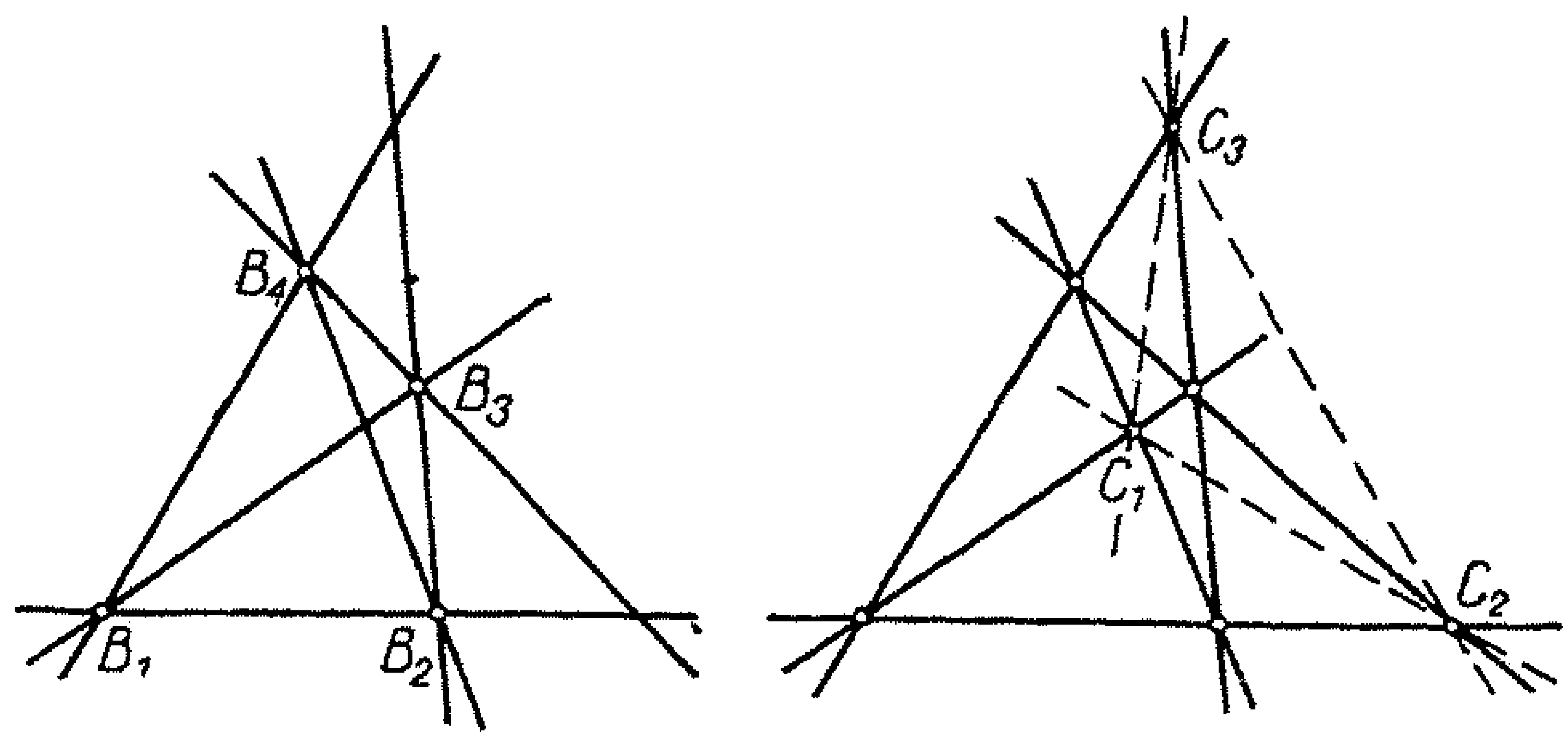
***Def.* 112.2.** Konfiguratsiooni, mis koosneb üldasendis olevast p punktist ja kõigist sirgetest, mis on intsidentsed mingi kahega nendest, ning P_3 puhul veel kõigist tasanditest, mis on intsidentsed mingi kolmega nendest, nimetatakse täielikuks p-tipuks. Punkte, mis määravad täieliku p-tipu, nimetatakse tema tippudeks, nendega märgitud viisil intsidentseid sirgeid P_2 puhul külgedeks ja P_3 puhul servadeks, tasandeid aga tahkudeks.

Täieliku p-tipu külgede (servade) ja tahkude arv on vastavalt C_p^2 ja C_p^3, kus teatavasti $C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$.

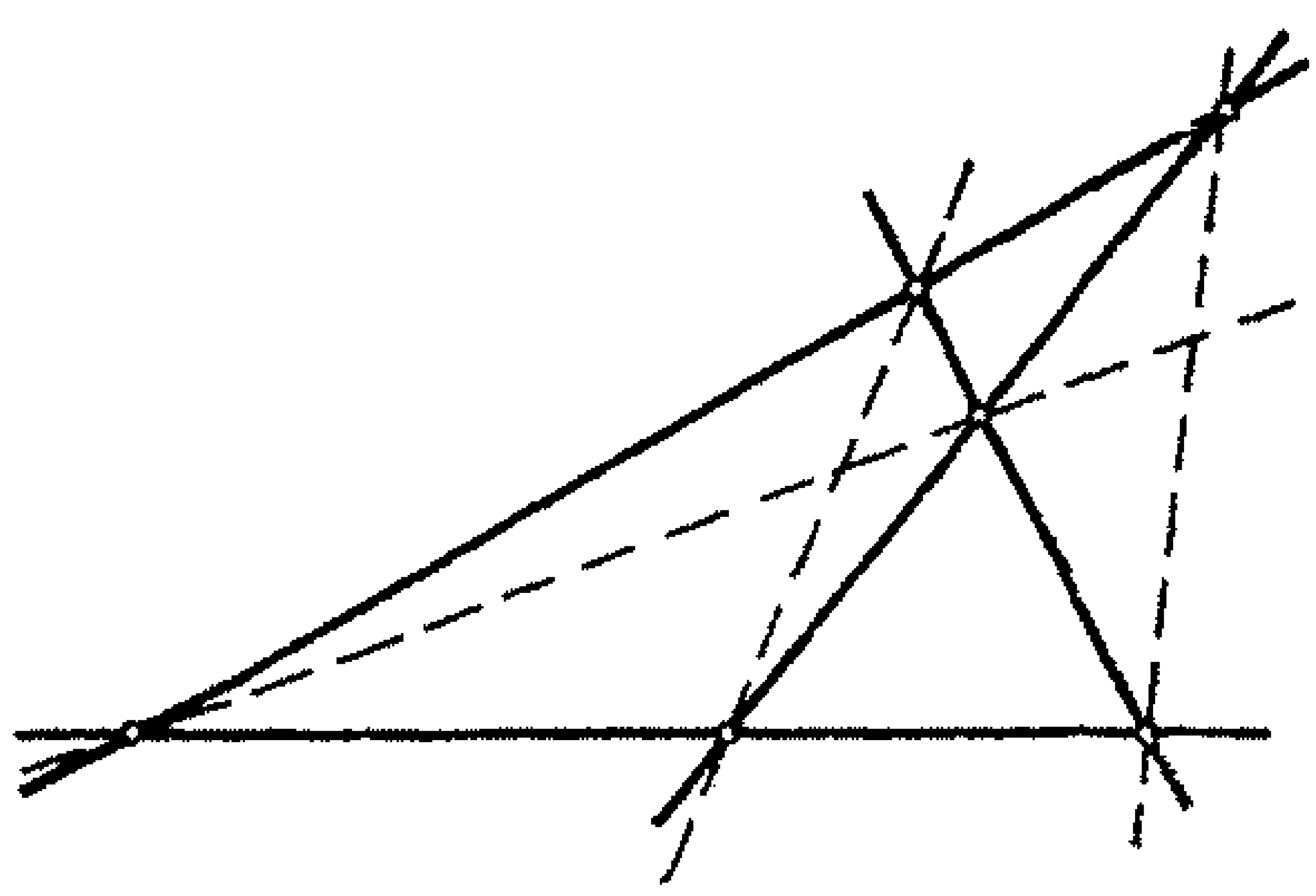
Eriti oluline osa projektiivses geomeetrias on tasandi täielikul nelitipul. See koosneb neljast tipust (joonisel 201 punktid B_i) ja kuuest küljest; iga tipp on intsidentne kolme küljega ja iga külg kahe tipuga. Külgi, mis ei sisalda ühist tippu (näit. B_1B_2 ja B_3B_4), nimetatakse nelitipu vastasküljedeks, vastasküljede lõikepunkte (punktid C_k) aga nelitipu diagonaalpunktideks. Viimased määravad nelitipu diagonaalkolmtipu; selle külgi nimetatakse nelitipu diagonaalideks.

Duaalsuse printsiibi tõttu leidub iga konfiguratsiooni puhul temaga duaalne konfiguratsioon.

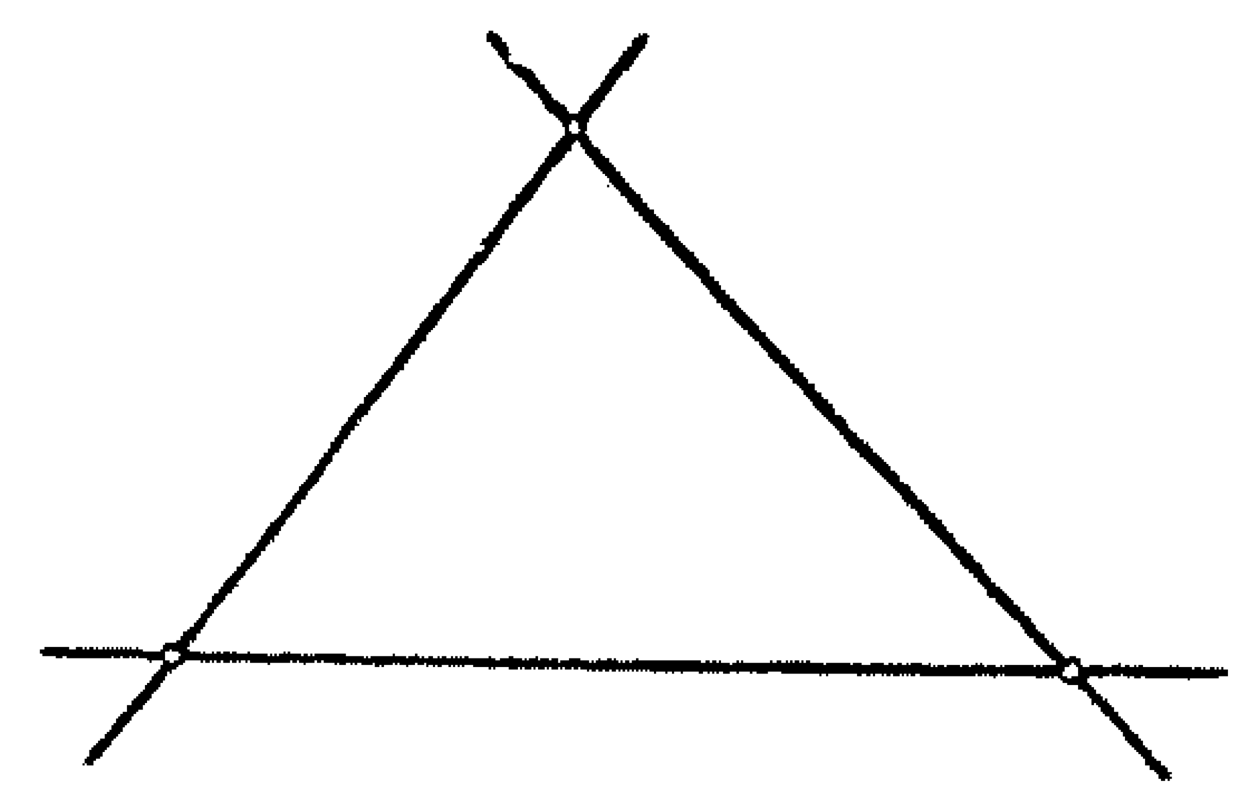
Täieliku p-tipuga duaalset konfiguratsiooni tasandil P_2 nimetatakse täielikuks p-küljeks, ruumis P_3 aga täielikuks p-tahuks. Esimene koosneb p üldasendis olevast sirgest ja nende kõigist lõikepunktidest, teine p üldasendis olevast tasandist, nende kõigist lõikesirgetest ja viimaste lõikepunktidest. Ka



Joon. 201.



Joon. 202.



Joon. 203.

siin räägitakse P_2 puhul k ü l g e d e s t ja t i p p u d e s t (viimaseid on C_p^2) ning P_3 puhul t a h k u d e s t, s e r v a d e s t ja t i p p u d e s t (arvu poolest vastavalt p, C_p^2 ja C_p^3).

Täieliku nelitipuga tasandil P_2 duaalne on t ä i e l i k n e l i k ü l g (joon. 202). Sellel on neli külge ja kuus tippu; iga külg on intsidentne kolme tipuga ja iga tipp kahe küljega. Tippe, mis ei kuulu ühele küljele, nimetatakse nelikülje v a s t a s t i p p u d e k s, vastastippe läbivaid sirgeid aga nelikülje d i a g o n a a l i d e k s. Viimased määravad nelikülje d i a g o n a a l k o l m k ü l j e; selle tippe nimetatakse nelikülje d i a g o n a a l t i p p u d e k s.

***Def.* 112.3.** Konfiguratsiooni tasandil P_2, mis koosneb tsükliliselt järjestatud üldasendis olevast p punktist ja kõigist sirgetest, mille määravad järjestikuste punktide paarid, nimetatakse l i h t s a k s p-t i p u k s.

Lihtsa p-tipuga duaalne on l i h t n e p-k ü l g, mille määravad p sirget, mis on üldasendis ja tsükliliselt järjestatud.

Konfiguratsioon võib osutuda iseendaga duaalseks. Näiteks tasandil P_2 on täielik kolmtipp samal ajal ka täielik kolmkülg (joon. 203). Kolmtippe saab tippude tsüklilise järjestamisega muuta lihtsateks kolmtippudeks. Üldiselt on iga lihtne p-tipp samal ajal ka lihtne p-külg.

Konfiguratsioonide uurimisel on ülesandeks selgitada: 1) kas teatavaid intsidentsusetingimusi rahuldav konfiguratsioon on olemas, 2) milline on minimaalne intsidentsusetingimuste hulk, mis määrab teatavat liiki konfiguratsiooni. Nende probleemide lahendamisel tekivad konfiguratsiooniteoreemid, milles näidatakse, et teatud intsidentsusetingimustest järelduvad kõik seda laadi tingimused uuritavas konfiguratsioonis.

Kui konfiguratsioon on defineeritud konstruktiivselt, näiteks kui on ette antud punktid ja kirjeldatud, kuidas neile tuleb lisada sirged (ja tasandid), siis on tema olemasolu vahetult selge. Kui aga ette on antud mingi veel konstrueerimata konfiguratsiooni täielik kirjeldus, siis tekib küsimus, kas kirjeldatud konfiguratsioon üldse eksisteerib. Esitame ühe näite.

Def. **112.4.** Kaht erinevate tippudega kolmtippu nimetatakse perspektiivseks punkti O suhtes, kui nende tippude vahel saab korraldada 1 : 1-vastavuse nii, et vastavate tippudega intsidentsed sirged on intsidentsed ka punktiga O. Viimast nimetatakse perspektiivsuse keskpunktiks.[142]

Duaalseks mõisteks on kahe erinevate külgedega kolmkülje perspektiivsus mingi sirge o suhtes — olukord, kus külgede vahel on korraldatav 1 : 1-vastavus nii, et punktid, mis on intsidentsed vastavate külgedega, on intsidentsed ka sirgega o. Viimast nimetatakse perspektiivsuse teljeks.

Et kolmtipp on duaalne iseendaga, siis võib ka perspektiivsuse puhul sirge suhtes rääkida kolmtipust. See asjaolu võimaldab sõnastada tähtsa definitsiooni.

Def. **112.5.** Konfiguratsiooni, mis koosneb kahest nii punkti kui sirge suhtes perspektiivsest kolmtipust, vastavaid tippe ühendavatest sirgetest, vastavate külgede lõikepunktidest ning perspektiivsuse keskpunktist ja teljest, nimetatakse Desargues'i[143] konfiguratsiooniks ehk konfiguratsiooniks D.

Kui konfiguratsioon D on olemas, siis koosneb ta 10 tipust (kolmtippude 6 tippu, 3 vastavate külgede lõikepunkti ja perspektiivsuse keskpunkt) ning 10 küljest (kolmtippude 6 külge, 3 vastavaid tippe ühendavat sirget ja perspektiivsuse telg), kusjuures iga külg on intsidentne kolme tipuga ja iga tipp kolme küljega. Vastavalt sellele, kas konfiguratsioon D asetseb ühel tasandil või tema kolmtipud on erinevatel tasanditel, nimetatakse teda kas tasandiliseks või ruumiliseks.

---

[142] Nimelt on tippudevaheline vastavus perspektiivne art. 102 mõttes, kui seal esitatud käsitlus üle kanda projektiivsesse geomeetriasse. Sellise üldistuse teeme art-s 120.

[143] Desargues, Gérard (1593—1662) — prantsuse arhitekt ja matemaatik, projektiivse geomeetria rajaja.

Kerge on veenduda, et vähemalt tasandilised konfiguratsioonid D on olemas. Osutub nimelt, et selleks on ruumi täieliku viistipu lõige tasandiga, mis ei läbi selle viistipu ühtki tippu. Tõepoolest, et täielikul viistipul on 10 serva ja 10 tahku, siis koosneb selline lõige kümnest punktist ja kümnest sirgest. Ühele tahule kuuluvad servad moodustavad kolmtipu, seepärast on lõikamisel saadud konfiguratsiooni iga külg intsidentne kolme tipuga. Iga serv on intsidentne kolme tasandiga; see aga tähendab, et lõikamisel saadud konfiguratsiooni iga tipp on intsidentne kolme küljega. Järelikult lõige on konfiguratsioon D.

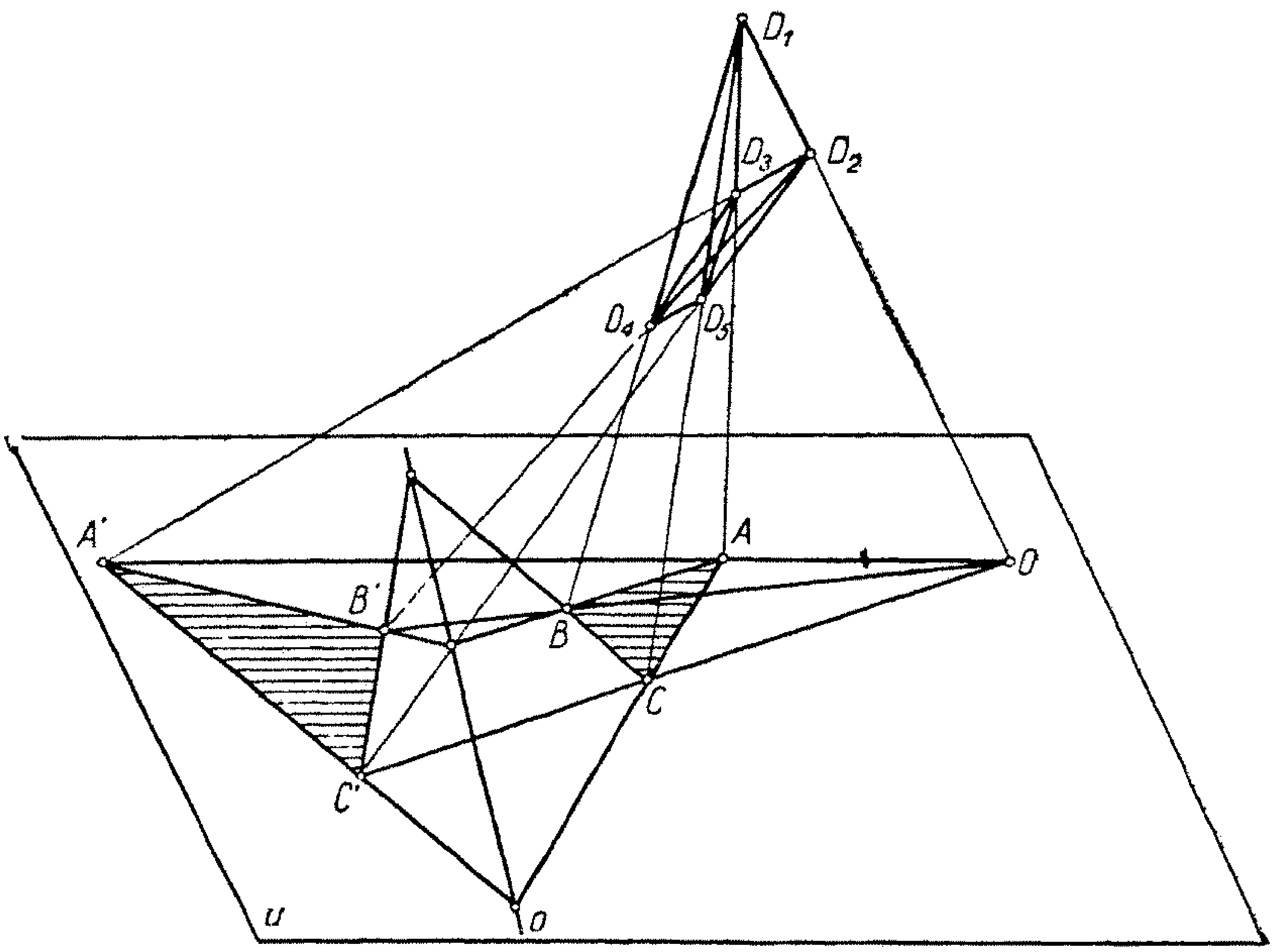
113. Desargues'i teoreem. Eelmises art-s ei selgunud, kas näidatud viisil on leitav iga tasandiline konfiguratsioon D, kas leidub ruumilisi konfiguratsioone D ja millistest andmetest piisab konfiguratsiooni D määramiseks. Nendele küsimustele annab vastuse järgmine tähtis konfiguratsiooniteoreem.

***Teoreem* 113.1.** (Desargues'i teoreem P_3 puhul). *Kaks kolmtippu ruumis P_3 on perspektiivsed punkti suhtes siis ja ainult siis, kui nad on perspektiivsed sirge suhtes.*

T õ e s t u s. Märgime esmalt, et ruumi P_3 ühel tasandil olevate kolmtippude puhul on küllaldane tõestada sõnastatud tingimuse kas ainult tarvilikkus või ainult piisavus, sest vastavad laused on omavahel duaalsed. Ruumilise konfiguratsiooni D puhul tuleb aga tõestada teoreemi mõlemad osad, sest kolmtipp ja kolmtahk ei ole duaalsed kujundid.

Alustame tarvilikkusest. Vaatleme ruumis P_3 kolmtippe ABC ja $A'B'C'$, mis on perspektiivsed mingi punkti O suhtes: $AA' \cap BB' \cap CC' = O$. Eeldame esialgu, et need kolmtipud on erinevatel tasanditel, vastavalt U_1 ja U_2. Olgu $U_1 \cap U_2 = o$. Loeme vastavaiks külgi, mille määravad vastavate tippude paarid. Et AB ja $A'B'$ on ühel tasandil, siis nad lõikuvad; samal põhjusel lõikuvad sirged BC ja $B'C'$ ning CA ja $C'A'$. Olgu $AB \cap A'B' = C_1$, $BC \cap B'C' = A_1$ ja $CA \cap C'A' = B_1$. Et punktid A_1, B_1 ja C_1 kuuluvad nii tasandile U_1 kui ka tasandile U_2, siis kuuluvad nad nende tasandite lõikesirgele o. See aga näitabki, et vaadeldavad kolmtipud on perspektiivsed sirge, nimelt sirge o suhtes. Ühtlasi on nüüd selgitatud, et ruumilised konfiguratsioonid tõepoolest eksisteerivad.

Teoreemi tingimuse tarvilikkuse tõestamiseks juhul, kui $U_1 = U_2 = U$, tuleb eespool tehtud märkuse põhjal näidata, et iga kahe kolmtipu $ABC \subset U$ ja $A'B'C' \subset U$ puhul, mis on perspektiivsed mingi punkti $O \in U$ suhtes, leidub ruumis täielik viistipp, mille lõige tasandiga U sisaldab neid kolmtippe. Selgub, et sobivaid viistippe saab valida õige suure vabadusega (joon. 204). Võtame mingi punkti $D_1 \notin U$ ja sirgel OD_1 mingi punkti D_2, nii



Joon. 204.

et $D_2 \neq D_1$. Olgu $D_3 = AD_1 \cap A'D_2$, $D_4 = BD_1 \cap B'D_2$ ja $D_5 = CD_1 \cap C'D_2$ (punktide D_3, D_4 ja D_5 olemasolu ei tekita kahtlust, sest $O = AA' \cap D_1D_2 = BB' \cap D_1D_2 = CC' \cap D_1D_2$). Oletame nüüd, et punktidest D_i mingid neli on sõltuvad, s. o. kuuluvad ühele tasandile, näiteks $D_5 \in D_1D_3D_4$. Siis peaks $D_1D_5 \subset D_1D_3D_4$, seepärast $C \in D_3D_4$. Kuid $C \in U$ ja $D_1D_3D_4 \cap U = AB$, järelikult peaks $C \in AB$, mis on vastuolus kolmtipu definitsiooniga. Samal viisil saab kontrollida, et iga ülejäänud nelik punktidest D_i on sõltumatu. See aga tähendabki, et konfiguratsioon, mille ruumis määravad punktid D_i, on täielik viistipp.

Duaalsuse printsiibi tõttu on teoreem nüüd tasandilise konfiguratsiooni D jaoks täies ulatuses tõestatud. Jääb näidata teoreemi tingimuse piisavus ka ruumilise konfiguratsiooni D korral. Olgu mingid kaks erinevatel tasanditel asetsevat kolmtippu perspektiivsed teatava sirge o suhtes. Loeme vastavateks nende iga kaht tippu, mida läbivad küljed on paarikaupa vastavad. Et vastavad küljed lõikuvad, siis määravad nad paarikaupa kolm tasandit V_1, V_2 ja V_3. Lõikesirged $V_1 \cap V_2$, $V_1 \cap V_3$ ja $V_2 \cap V_3$ läbivad kolmtippude vastavaid tippe ja lõikuvad punktis $O = V_1 \cap V_2 \cap V_3$.

Järelikult vaadeldavad kolmtipud on perspektiivsed punkti O suhtes. ∎

Tõestuskäigus rakendasime ka tasandilise konfiguratsiooni D puhul ruumi P_3 geomeetriat. Esitame nüüd tõestuse selle osa ainult tasandi P_2 vahekordade abil, kasutades sedapuhku koordinaate.

***Teoreem* 113.1*a*.** (Desargues'i teoreem P_2 puhul). *Kaks kolmtippu tasandil P_2 on perspektiivsed punkti suhtes parajasti siis, kui nad on perspektiivsed sirge suhtes.*

T õ e s t u s. Moodustame tasandil P_2 reeperi $\{A_1, A_2, A_3, E\}$, võttes ühe vaadeldava kolmtipu tipud baaspunktideks ja perspektiivsuse keskpunkti ühikpunktiks. Olgu ABC teine kolmtipp ja vastavus selline, et $A \in A_1E$, $B \in A_2E$ ja $C \in A_3E$. Siis sobivalt valitud esindajavektorite korral $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}_1 a$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}_2 b$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}_3 c$ ja et $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3$, siis

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= (a+1,\ 1,\ 1) = (p,\ 1,\ 1), \\ \boldsymbol{B} &= (1,\ b+1,\ 1) = (1,\ q,\ 1), \\ \boldsymbol{C} &= (1,\ 1,\ c+1) = (1,\ 1,\ r), \end{aligned}$$

kus p, q, r on koordinaatide lühemad tähistused. Arvutame kolmtippude külgede koordinaadid:

$$\begin{aligned} A_1A_2 &= [0:0:1], & AB &= [(1-q):(1-p):(pq-1)], \\ A_1A_3 &= [0:1:0], & BC &= [(qr-1):(1-r):(1-q)], \\ A_2A_3 &= [1:0:0], & CA &= [(1-r):(pr-1):(1-p)]. \end{aligned}$$

Järgnevalt arvutame kolmtippude vastavate külgede lõikepunktide koordinaadid:

$$\begin{aligned} A_2A_3 \cap BC &= \tilde{A} = (0:(q-1):(1-r)), \\ A_1A_3 \cap AC &= \tilde{B} = ((1-p):0:(r-1)), \\ A_1A_2 \cap AB &= \tilde{C} = ((p-1):(1-q):0). \end{aligned}$$

Et nüüd

$$\begin{vmatrix} 0 & q-1 & 1-r \\ 1-p & 0 & r-1 \\ p-1 & 1-q & 0 \end{vmatrix} = (p-1)(q-1)(r-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

siis punktid $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ ja $\tilde{C}$ on sõltuvad, s. t. $\tilde{C} \in \tilde{A}\tilde{B}$. See näitabki, et vaadeldavad kolmtipud on perspektiivsed sirge, nimelt sirge $\tilde{A}\tilde{B}$ suhtes. ∎

Niisiis võimaldab aksioomide süsteem **$\bar{A}$1—$\bar{A}$4. B1—B5, C(3)**, millele tugineb tasandi P_2 geomeetria, tõestada teoreemi 113.1a täiesti sõltumatult ruumi P_3 geomeetriast.

Olukord on erinev, kui P_2 mõiste defineerida teistsugustele aksioomidele tugi- nedes. Projektiivse tasandi kõige üldisem definitsioon on järgmine.

Üldiseks projektiivseks tasandiks nimetatakse hulka, mille punktide teatavaid alamhulki nimetatakse sirgeteks ja mille korral on rahuldatud järgmised aksioomid:

P1. *Iga kaks erinevat punkti kuuluvad ühele ja ainult ühele sirgele.*

P2. *Igal kahel sirgel on ühine punkt.*

P3. *Leidub neli punkti, millest ükski kolm ei kuulu ühele sirgele.*

On selge, et tasandi P_2 (def. 106.1) puhul on need aksioomid rahuldatud. Uus mõiste on aga märksa üldisem kui P_2. Märkimisväärne on, et üldiste projektiivsete tasandite teooria — aksioomidest **P1—P3** tulenevate järelduste süsteem ei sisalda Desargues'i teoreemi, s. t. viimane teoreem ei ole järeldatav aksioomidest **P1—P3**. Esimesena näitas seda 1899. a. saksa matemaatik D. Hilbert, konstrueerides üldise projektiivse tasandi sellise näite, milles lisaks aksioomidele **P1—P3** esineb ka rida tasandi P_2 teisi omadusi, kuid Desargues'i teoreem sellele vaatamata ei kehti. Nimetatud fakt on seda huvipakkuvam, et üldiste projektiivsete ruumide teoorias on Desargues'i teoreem tõestatav. Üldiseks projektiivseks ruumiks nimetatakse seejuures hulka, mille punktide teatavaid alamhulki nimetatakse sirgeteks ja tasanditeks ning mille korral on rahuldatud järgmised aksioomid.

P'1. *Iga tasand on üldine projektiivne tasand.*

P'2. *Iga kolme mitte ühele sirgele kuuluva punkti korral leidub parajasti üks tasand, millele nad kõik kuuluvad.*

P'3. *Igal kahel tasandil on kaks erinevat ühist punkti.*

P'4. *Kui sirge kaks punkti kuuluvad tasandile, siis selle sirge iga punkt kuulub tasandile.*

P'5. *Leidub neli punkti, mis ei kuulu ühele tasandile.*

Desargues'i teoreemi tuletamine nendest aksioomidest **P'1—P'5** toimub põhimõtteliselt samuti nagu teoreemi 113.1 tõestuses, milles analüütilise geomeetria meetodeid otseselt ei rakendatudki.

Eespool öeldust järeldub, et koordinaatide kasutamine teoreemi 113.1a tõestuses on paratamatu. Lihtsate järeldustega **P1—P3**-tüüpi lausetest ei ole võimalik sihile jõuda. Üldiste projektiivsete tasandite teoorias tuntakse nii desargilisi projektiivseid tasandeid, mille alustesse lisatakse aksioomide **P1—P3** kõrvale Desargues'i lause 113.1*a* uue sõltumatu aksioomina, kui ka mittedesargilisi projektiivseid tasandeid, mille puhul 113.1*a* ei pruugi üldse olla tõene. Tasand P_2, nagu näitab teoreem 113.1*a*, on desargiline.

114. Liitsuhe. Projektiivsed koordinaadid ruumis P_{n-1} on art-s 106 defineeritud vektorruumi V_n vahendusel. Näitame nüüd tee nende koordinaatide tõlgendamiseks ruumis P_{n-1} endas valitsevate vahekordade abil.

***Def.* 114.1.** Sirge P_1 nelja erineva järjestatud punkti A, B, C ja D liitsuhteks nimetatakse arvu

$$(AB, CD) = \frac{\lambda}{\varkappa} : \frac{\nu}{\mu}, \tag{114.1}$$

kus reaalarvud $\varkappa$, λ, μ ja ν on määratud võrdustega $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\varkappa + \boldsymbol{B}\lambda$ ja $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}\mu + \boldsymbol{B}\nu$.

Selle definitsiooni puhul on vaja näidata, et (AB, CD) ei sõltu punktide esindajate $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ ja $\boldsymbol{D}$ valikust.

Olgu $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}p$, $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}q$, $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{C}r$ ja $\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{D}s$ punktide A, B,

C ja D mingid teised esindajad; siis

$$C' = (A\varkappa + B\lambda) r = (Ap)\frac{\varkappa r}{p} + (Bq)\frac{\lambda r}{q} = A'\varkappa' + B'\lambda',$$
$$D' = (A\mu + B\nu) s = (Ap)\frac{\mu s}{p} + (Bq)\frac{\nu s}{q} = A'\mu' + B'\nu',$$

kus $\varkappa' = \frac{r}{p}\varkappa$, $\lambda' = \frac{r}{q}\lambda$, $\mu' = \frac{s}{p}\mu$ ja $\nu' = \frac{s}{q}\nu$, mistõttu

$$\frac{\lambda'}{\varkappa'} : \frac{\nu'}{\mu'} = \frac{rp\lambda}{rq\varkappa} : \frac{sp\nu}{sq\mu} = \frac{\lambda}{\varkappa} : \frac{\nu}{\mu}.$$

Siit nähtub, et sirge vabalt võetud nelja järjestatud punkti liitsuhe sõltub ainult nendest punktidest ja nende järjestusest.

Olgu $A = (a^1 : a^2)$, $B = (b^1 : b^2)$, $C = (c^1 : c^2)$ ja $D = (d^1 : d^2)$, siis

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}} \tag{114.2}$$

Selle valemi kontrollimiseks tarvitseb vaid võrdused $C = A\varkappa + B\lambda$ ja $D = A\mu + B\nu$ kirjutada koordinaatide abil ja lahendada tekkinud võrrandisüsteemid $\varkappa$, λ, μ ja ν suhtes Crameri valemite abil.

Kasutades mittehomogeenseid koordinaate $a = \frac{a^1}{a^2}$, $b = \frac{b^1}{b^2}$, $c = \frac{c^1}{c^2}$ ja $d = \frac{d^1}{d^2}$ saab valemile (114.2) lihtsate teisenduste teel anda kuju

$$(AB, CD) = \frac{a - c}{b - c} : \frac{a - d}{b - d}. \tag{114.3}$$

Olgu punktide A, B, C ja D mittehomogeensed koordinaadid sirge mingi teise reeperi suhtes vastavalt a', b', c' ja d', siis (111.6) põhjal

$$a' - c' = \frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta} - \frac{\alpha c + \beta}{\gamma c + \delta} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma a + \delta)(\gamma c + \delta)}(a - c),$$

$$b' - c' = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma b + \delta)(\gamma c + \delta)}(b - c),$$

$$a' - d' = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma a + \delta)(\gamma d + \delta)}(a - d),$$

$$b'-d'=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma b+\delta)(\gamma d+\delta)}(b-d).$$

Siit nähtub, et lõigu pikkuse mõistet projektiivses geomeetrias kasutusele võtta tõepoolest ei saa: punktide koordinaatide vahe sõltub reeperist. Samasuguse otsuse võib teha art-s 34 defineeritud lihtsuhte kohta, sest

$$\frac{a'-c'}{b'-c'}=\frac{\gamma b+\delta}{\gamma a+\delta}\cdot\frac{a-c}{b-c},$$
$$\frac{a'-d'}{b'-d'}=\frac{\gamma b+\delta}{\gamma a+\delta}\cdot\frac{a-d}{b-d}.$$

Liitsuhe aga osutub sõltumatuks reeperi valikust, sest valem (114.3) annab ühesuguse tulemuse nii uute kui ka vanade koordinaatide puhul:

$$\frac{a'-c'}{b'-c'}:\frac{a'-d'}{b'-d'}=\frac{a-c}{b-c}:\frac{a-d}{b-d}.$$

Nüüd on selge, et liitsuhte definitsioon 114.1 on märgatavalt üldisem definitsioonist 36.1, sest esimeses ei kasutata afiinsesse geomeetriasse kuuluvat lihtsuhet, vaid sirge punktide üldisemaid vahekordi. Lihtsuhte mõistele, nagu selgus, siin liitsuhet rajada ei saagi.

Uurime veel liitsuhte sõltuvust punktide järjestusest. Valemist (114.3) tulenevad juba art-s 36 märgitud seosed $(CD, AB) = (AB, CD)$ ja $(BA, CD) = (AB, CD)^{-1}$. Siit järeldub vahetult, et $(AB, DC) = (AB, CD)^{-1}$ ja $(BA, DC) = (AB, CD)$. Lisaks kehtib samasus $(AB, CD) + (AC, BD) = 1$. Tõepoolest,

$$\frac{a-c}{b-c}:\frac{a-d}{b-d}+\frac{a-b}{c-b}:\frac{a-d}{c-d}=$$
$$=\frac{a-c}{b-c}\cdot\frac{b-d}{a-d}+\frac{a-b}{c-b}\cdot\frac{c-d}{a-d}=$$
$$=\frac{(a-c)(b-d)-(a-b)(c-d)}{(a-d)(b-c)}=1,$$

sest lugejas on

$$ab-ad-cb+cd-ac+ad+bc-bd=ab+cd-ac-bd=$$
$$=(a-d)(b-c).$$

Antud nelja punkti puhul punktide järjestusest sõltuvate liitsuhte erinevate väärtuste arvu määramisel võib ühe punkti jätta paigale, näiteks punkti A esimesele kohale. Tõepoolest, kui ta seal ei ole, siis võib ta vahetada sealoleva punktiga ja samaaegselt vahetada ülejäänud kaks punkti — liitsuhe nende vahetuste toimel ei muutu. Seega piisab, kui vaadelda ülejäänud kolme punkti kuut permutatsiooni. Kerge on veenduda, et erinevaid väärtusi üldiselt ongi kuus: σ, $\frac{1}{\sigma}$, $1-\sigma$, $\frac{1}{1-\sigma}$, $\frac{\sigma}{\sigma-1}$, $\frac{\sigma-1}{\sigma}$.

Sirge mistahes kolme erineva punkti A, B ja C ning iga reaalarvu $\sigma \neq 0$ korral leidub sirgel parajasti üks punkt X, nii et $(AB, CX) = \sigma$. Kui $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\varkappa + \boldsymbol{B}\lambda$, siis määrab selle punkti võrdus $X = \boldsymbol{A}\sigma\varkappa + \boldsymbol{B}\lambda$, mis järeldub seostest $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\xi + \boldsymbol{B}\eta$ ja $\frac{\lambda}{\varkappa} : \frac{\eta}{\xi} = \sigma$, kus praegu $\frac{\eta}{\xi} = \frac{\lambda}{\sigma\varkappa}$.

Tulemus on järeldatav ka seosest, mis liitsuhtel on punkti mittehomogeense koordinaadiga sirgel: kui valemis (114.1) võtta $\{A, B, C\} = \{A_1, A_2, E\} = \mathfrak{R}$ ja $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}_1 x^1 + \boldsymbol{A}_2 x^2$, siis $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$, mistõttu $\varkappa = \lambda = 1$, $\mu = x^1$ ja $\nu = x^2$, järelikult

$$(A_1A_2, EX) = \frac{x^1}{x^2} = x. \tag{114.4}$$

Def. 114.1 määrab sirge nelja erineva punkti liitsuhte. Seosest (114.4) nähtub aga, et otstarbekas on lubada vaadeldava neliku kahel punktil ka ühtida. Valemist (114.3) järeldub, et

$$\lim_{X \to B} (AB, CX) = \lim_{x \to b} \left(\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-x}{b-x} \right) = 0,$$

$$\lim_{X \to C} (AB, CX) = \lim_{x \to c} \left(\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-x}{b-x} \right) = 1,$$

$$\lim_{X \to A} (AB, CX) = \lim_{x \to a} \left(\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-x}{b-x} \right) = \infty.$$

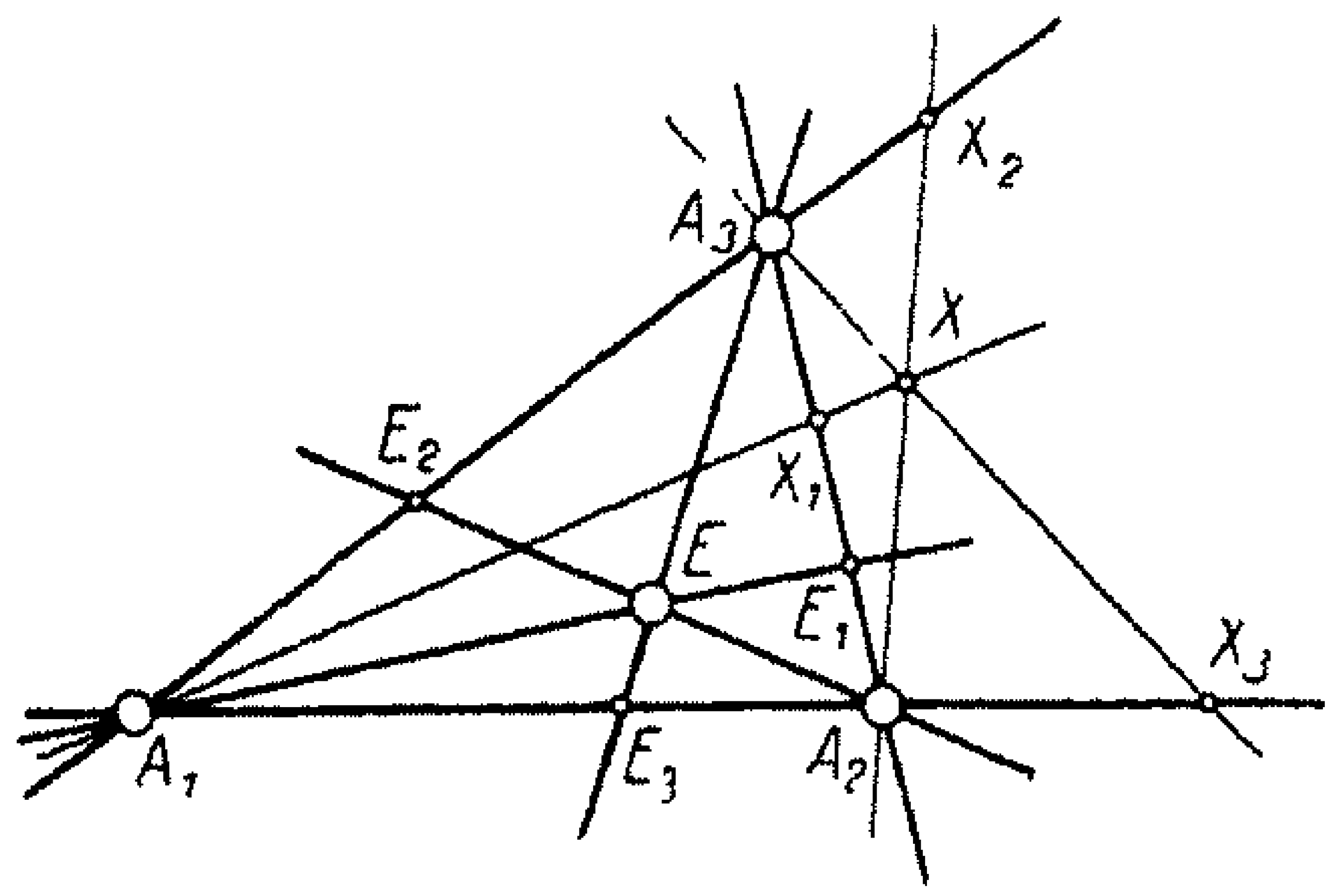
Viimase piirväärtuse saamisel on arvestatud asjaolu, et P_1 punktide varustamisel mittehomogeensete koordinaatidega on täiendav kokkulepe vajalik ainult ühe punkti korral ja sellele punktile on vastavusse seatud sümbol ∞ (vt. art. 111).

Nende tähelepanekute põhjal defineeritakse täiendavalt:

$$(AB, CA) = \infty, \quad (AB, CB) = 0, \quad (AB, CC) = 1. \tag{114.5}$$

Niisiis, $(A_1A_2, EA_1) = \infty$, $(A_1A_2, EA_2) = 0$ ja $(A_1A_2, EE) = 1$, mis on kooskõlas valemiga (114.4).

Nüüd võib ütelda, et sirge nelja järjestatud punkti liitsuhe on arv, mis võrdub neljanda punkti mittehomogeense projektiivse koordinaadiga, kui reeper on näidatud viisil moodustatud kolmest esimesest punktist. Teisest küljest nähtub siit, et punkti mitte-



Joon 205.

homogeenne koordinaat määrab üheselt punkti asendi sirge projektiivse reeperi suhtes.

Ühtlasi on nüüd hõlpus anda geomeetriline tõlgendus ka punkti projektiivsetele koordinaatidele tasandil P_2 ja ruumis P_3. Näiteks tasandi P_2 reeper $\{A_1, A_2, A_3, E\}$ määrab täieliku nelitipu, seega lisaks tippudele veel kuus sirget. Olgu $A_1E \cap A_2A_3 = E_1$, $A_2E \cap A_3A_1 = E_2$ ja $A_3E \cap A_1A_2 = E_3$. Baaskolmtipu $A_1A_2A_3$ külgedel on sel viisil määratud reeperid $\{A_1, A_2, E_3\}$ $\{A_1, A_3, E_2\}$ ja $\{A_2, A_3, E_1\}$ (joon. 205). Tasandi vabalt võetud punktile $X = (x^1 : x^2 : x^3)$, mis ei asetse nelitipu ühelgi küljel, vastavad baaskolmtipu külgedel punktid $X_1 = A_1X \cap A_2A_3$, $X_2 = A_2X \cap A_1A_3$ ja $X_3 = A_3X \cap A_1A_2$. Et (110.2*b*) põhjal $A_2A_3 = [1 : 0 : 0]$, $A_1E = [0 : -1 : 1]$ ja $A_1X = [0 : -x^3 : x^2]$, siis (110.2a) tõttu $E_1 = (0 : 1 : 1)$ ja $X_1 = (0 : x^2 : x^3)$, seega $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3$ ja $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}_2x^2 + \boldsymbol{A}_3x^3$, niisiis $(A_2A_3, E_1X_1) = \frac{x^2}{x^3}$.

Samal viisil saab kontrollida, et

$$(A_1A_3, E_2X_2) = \frac{x^1}{x^3} \text{ ja } (A_1A_2, E_3X_3) = \frac{x^1}{x^2}.$$

Ruumis P_3 reeperi $\{A_1, A_2, A_3, A_4, E\}$ puhul tekib analoogiline pilt igal tasanditest $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$ ja $A_2A_3A_4$.

Duaalsuse printsiibi põhjal saab liitsuhte mõiste sisse tuua ka lineaarikimbus ja sel viisil arendada projektiivse geomeetria «teist veergu» ruumis Π_{n-1}. Et siin tuleb sisuliselt korrata kõike seda, millest oli juttu sirge P_1 puhul, siis peatume põgusalt vaid mõnel asjaolul.

***Def.* 114.2.** Ühe kimbu nelja erineva lineaari S, T, U ja V liitsuhteks nimetatakse arvu

$$(ST, UV) = \frac{\lambda}{\varkappa} : \frac{\nu}{\mu},$$

kus reaalarvud $\varkappa$, λ, μ ja ν on määratud võrdustega $\boldsymbol{U} = \varkappa \boldsymbol{S} + \lambda \boldsymbol{T}$ ja $\boldsymbol{V} = \mu \boldsymbol{S} + \nu \boldsymbol{T}$. Täiendavalt võetakse $(ST, US) = \infty$, $(ST, UT) = 0$ ja $(ST, UU) = 1$.

Lineaaride liitsuhe ei sõltu lineaaride esindajavektoritest, vaid ainult lineaaridest endist ja nende järjestusest. Liitsuhte sõltuvust lineaaride järjestusest kirjeldavad samad valemid, mis punktide puhul.

Kui vaadeldavate lineaaride mittehomogeensed koordinaadid on vastavalt s, t, u, v, siis

$$(ST, UV) = \frac{s-u}{t-u} : \frac{s-v}{t-v}.$$

Sirgete ja lineaarikimpude uurimisel osutub kasulikuks vaadelda ka selliste nelikute liitsuhet, milles kaks elementi on punktid ja kaks lineaarid.

***Def.* 114.3.** Punktide A, B ja lineaaride U, V liitsuhteks nimetatakse punktide A, B, $C = AB \cap U$ ja $D = AB \cap V$ liitsuhet:

$$(AB, UV) = (AB, CD). \tag{114.6}$$

Siinjuures eeldatakse, et vähemalt üks punktidest A, B ei kuulu kummalegi lineaarile U, V.

Väljendame liitsuhte (114.6) koordinaatide kaudu, eeldades, et näiteks $B \notin U$, $B \notin V$. Olgu A, B, U, V, C ja D koordinaadid vastavalt a^i, b^i, u_i, v_i, c^i ja d^i. Et $C \in AB$ ja $D \in AB$, siis sobivate esindajate valiku korral $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\lambda$ ja $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\mu$, s. t. $c^i = a^i + \lambda b^i$ ja $d^i = a^i + \mu b^i$. Et aga $C \in U$ ja $D \in V$, siis $u_i c^i = 0$ ja $v_i d^i = 0$, mistõttu $u_i(a^i + \lambda b^i) = 0$, $v_i(a^i + \mu b^i) = 0$. Siit $\lambda = -\frac{u_i a^i}{u_i b^i}$ ja $\mu = -\frac{v_i a^i}{v_i b^i}$, seega liitsuhet (114.6) väljendab valem

$$(AB, UV) = \frac{v_i a^i}{v_i b^i} : \frac{u_i a^i}{u_i b^i}. \tag{114.7}$$

115. Lahutuvus. Kui sirgel P_1 on võetud mingi reeper, siis baaspunktid $A_1(\infty)$ ja $A_2(0)$ jaotavad sirge ülejäänud punktide hulga kahte klassi vastavalt punkti mittehomogeense koordinaadi märgile. Valemi (114.4) põhjal määrab ühe klassi $\{X_1\}$ tingimus $(A_1A_2, EX_1) > 0$, teise klassi $\{X_2\}$ aga tingimus $(A_1A_2, EX_2) < 0$. Pidev üleminek ühest klassist teise saab toimuda ainult siis, kui liitsuhe (A_1A_2, EX) omandab ühe väärtustest 0 või ∞, s. t. kui punkt X ühtib ühega baaspunktidest.

Punkt E kuulub «positiivsuse» klassi $\{X_1\}$. Kui punktid E ja $X(x)$ kuuluvad erinevatesse klassidesse, s. t. $x < 0$, siis öeldakse, et paar (E, X) lahutab paari (A_1, A_2). Kui aga E ja X on samast klassist, s. o. $x > 0$, siis öeldakse, et paar (E, X) ei lahuta paari

(A_1, A_2). Et klassijaotust tekitav punktipaar (A_1, A_2) ja samuti «positiivsuse» klassi määrav punkt E on valitavad vabalt, siis saab seda vahekorda üldistada.

***Def.* 115.1.** Kui $(AB, CD) < 0$, siis öeldakse, et paar (C, D) lahutab paari (A, B) ja kirjutatakse $CD \,//\, AB$; kui aga $(AB, CD) > 0$, siis öeldakse, et paar (C, D) ei lahuta paari (A, B) ja kirjutatakse $CD \not\!/\!/ AB$

Näiteks sümbolit $CD \,//\, AB$ võib tõlgendada järgmiselt: kui võtta punktikolmik $\{A, B, C\}$ reeperiks, siis punkti D mittehomogeenne koordinaat selle reeperi suhtes on negatiivne, mistõttu C ja D kuuluvad erinevatesse klassidesse baaspunktide paari (A, B) suhtes.

Et $(CD, AB) = (AB, CD)$, siis on kahe punktipaari lahutuvus või mittelahutuvus nende vastastikune omadus, s. t. kui $CD \,//\, AB$, siis ka $AB \,//\, CD$, ja kui $CD \not\!/\!/ AB$, siis ka $AB \not\!/\!/ CD$. Võrduse $(AB, DC) = (AB, CD)^{-1}$ tõttu omakorda paaride lahutuvus või mittelahutuvus ei sõltu punktide järjestusest paarides.

Kui sirgel P_1 vabalt fikseerida reeper ja jätta vaatlusest kõrvale punkt $A_1(\infty)$, siis osutub sirge ülejäänud punktide hulk lineaarselt järjestatavaks selles mõttes, et saab anda eeskirja, mis lubab iga kahe erineva punkti korral sellest hulgast otsustada, kumb eelneb teisele. Näiteks võib lugeda punkti $X(x)$ eelnevaks punktile $Y(y)$, kui $x < y$. Samuti saab nüüd iga kolme erineva punkti mittehomogeensete koordinaatide suurusjärjestuse järgi määrata, milline punkt kolmest on ülejäänud kahe vahel. Seejuures on punkt $A_1(\infty)$ valitav täiesti meelevaldselt.

Sirge P_1 kõigi punktide hulgas lineaarset järjestust sisse tuua ei saa. Tõepoolest, paari (A_1, X) puhul ei saa ühegi punkti $X \in P_1$ kohta otsustada, kas ta eelneb punktile $A_1(\infty)$ või mitte. Vahetades reeperi saab muuta iga kolme erineva punkti mittehomogeensete koordinaatide suurusjärjestuse. Seetõttu reeperit fikseerimata ei ole võimalik sirge P_1 ühestki kolmest punktist välja eraldada vahelmist ja ka fikseeritud reeperi korral säilib üks erandlik punkt — punkt $A_1(\infty)$. Küll osutub koos liitsuhtega reeperist sõltumatuks punktipaaride lahutuvus või mittelahutuvus.

Kui sirge P_1 nelja punkti $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ ja $D(d)$ korral $AC \,//\, BD$, siis kehtib kas üks kahest ahelvõrratusest

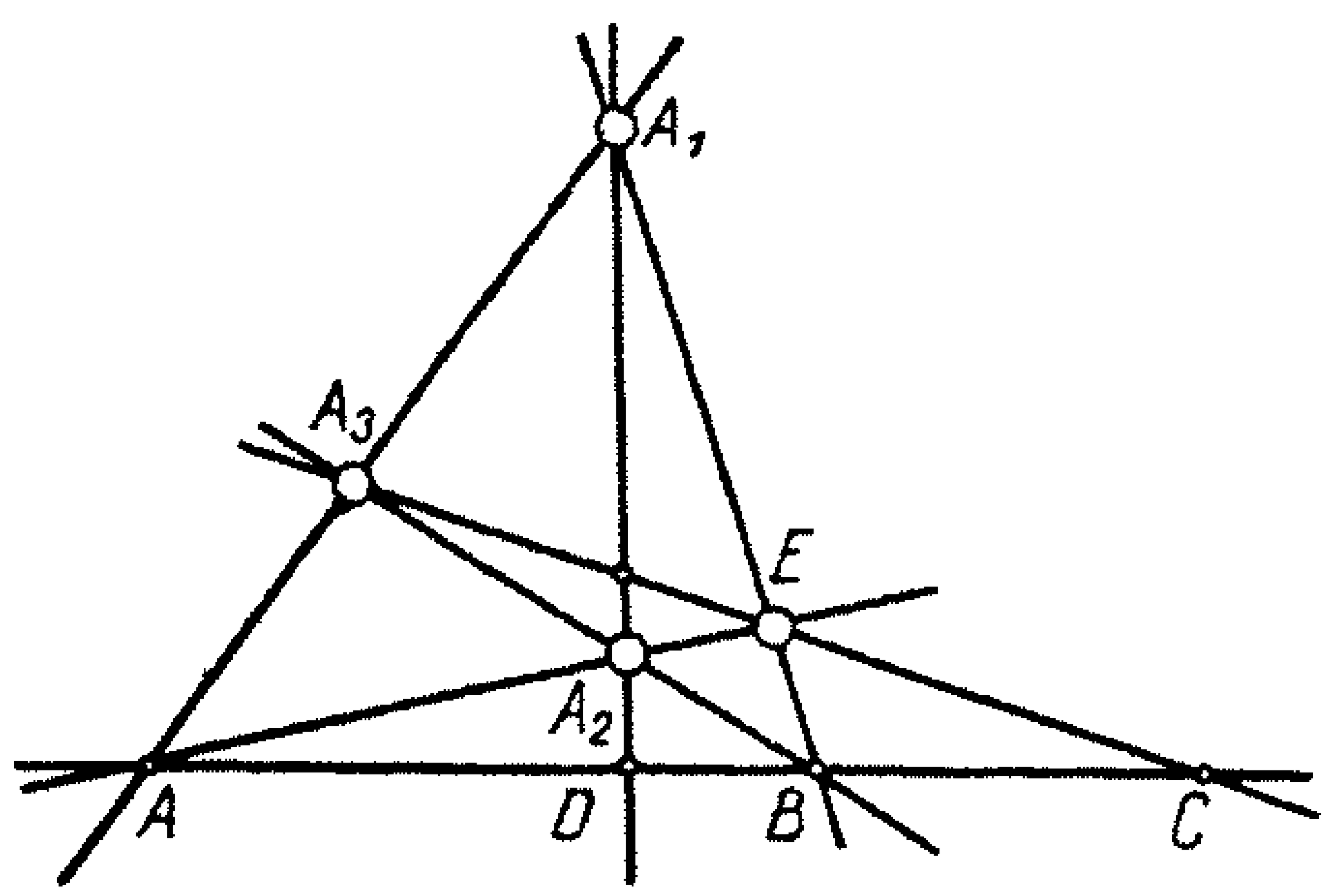
$$a<b<c<d, \qquad a>b>c>d$$

või mõni, mis on nendest saadud arvude tsüklilise ümberpaigutamise teel. Kui näiteks $AC \,//\, A_1D$ ja $BC \,//\, A_1D$, siis, nagu kerge kontrollida,

$$c<d<a<b \quad \text{või} \quad c>d>a>b$$

vastavalt A_2 ja E asenditele.

Nende võrratuste põhjal öeldakse, et projektiivne sirge on jär-



Joon 206.

jestatav tsükliliselt ja nimelt kahel erineval viisil. Tsüklilisele järjestusele iseloomulik on punktipaaride lahutuvuse mõiste, mis siin asendab kahe punkti vahel asetsemise mõistet.

Vahel-seose puudumise tõttu projektiivse sirge kaks punkti ei määra vahemikku. Küll aga määravad vahemiku kolm punkti lahutuvusseose abil. Kolme punkti A, B ja C korral nimetatakse «vahemikuks AB punktita C» punktihulka $\{X \mid AB \,//\, CX\}$. On selge, et kaks punkti jaotavad projektiivse sirge ülejäänud punktide hulga kaheks sel viisil defineeritud vahemikuks. Vahemiku saab omakorda täiendada lõiguks.

116. Harmoonilisus. Vaatleme nüüd mõistet, millel on suur tähtsus projektiivse geomeetria aluste selgitamisel, eriti aga selle geomeetria sõltumatul ülesehitamisel.

Ühe sirge nelja erineva punkti puhul kehtivatest vahekordadest $(AB, CD) = (CD, AB) = (AB, DC)^{-1} \neq 1$ järeldub, et selliste liitsuhete ainsaks väärtuseks, mis ei muutu ka punktide vahetamisel ühes paaris, on väärtus $\sigma = -1$, sest ainult siis $\sigma = \sigma^{-1} \neq 1$.

***Def.* 116.1.** Kui $(AB, CD) = -1$, siis öeldakse, et punktipaarid (A, B) ja (C, D) lahutavad teineteise harmooniliselt. Öeldakse ka, et punktid A, B, C ja D moodustavad harmoonilise punktineliku, ning punkti D nimetatakse neljandaks harmooniliseks punktiks punktide A, B ja C suhtes.

Teoreem 116.1. *Tasandil* P_2 *iga täieliku nelitipu iga diagonaalpunktide paar* (A, B) *lahutab harmooniliselt kolmandat diagonaalpunkti läbivate vastaskülgede ja diagonaali* AB *lõikepunktide paari* (C, D) (joon. 206).

Tõestus. Moodustame vaadeldava nelitipu tippudest reeperi $\{A_1, A_2, A_3, E\}$ nii, et $A = A_2E \cap A_1A_3$, $B = A_1E \cap A_2A_3$, $C =$

$= AB \cap A_3E$ ja $D = AB \cap A_1A_2$. Arvutame järjestikku meid huvitavate sirgete ja punktide koordinaadid:

$$
\begin{array}{ll}
A_1A_2 = [0:0:1], & A = (1:0:1), \\
A_2A_3 = [1:0:0], & B = (0:1:1), \\
A_3A_1 = [0:1:0], & AB = [1:1:1], \\
A_1E = [0:-1:1], & C = (1:1:2), \\
A_2E = [1:0:-1], & D = (1:-1:0). \\
A_3E = [-1:1:0], &
\end{array}
$$

Siit nähtub, et punktidel C ja D leiduvad esindajad $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$, mistõttu (114.1) põhjal tõepoolest $(AB, CD) = -1$. ∎

Kui harmooniline punktinelik on saadud nelitipust teoreemis 116.1 kirjeldatud viisil, siis öeldakse, et ta on seotud selle nelitipuga.

***Teoreem* 116.2.** *Iga harmoonilise punktineliku puhul leidub nelitipp, millega ta on seotud.*

T õ e s t u s. Olgu A, B, C ja D vabalt valitud harmooniline punktinelik, s. t. olgu $(AB, CD) = -1$. Tuleb näidata, et sirget AB sisaldaval tasandil leidub nelitipp, mille jaoks AB on diagonaal ning punktid C ja D on selle diagonaali lõikepunktid nelitipu vastaskülgedega.

Ehitame sirget AB läbival tasandil reeperi (joon. 206). Valime tipu A_1 vabalt väljaspool sirget AB ja tipu A_3 vabalt sirgel A_1A (ainus kitsendus: $A_3 \neq A$). Seejärel võtame $E = A_1B \cap A_3C$ ja $A_2 = A_3B \cap EA$. Nüüd $A = A_2E \cap A_1A_3$, $B = A_1E \cap A_2A_3$ ja $C = A_3E \cap AB$, s. t. A ja B on nelitipu $A_1A_2A_3E$ diagonaalpunktid ja C on diagonaali AB lõikepunkt ühega vabaks jäänud küljedest. Tuleb näidata, et viimane vabaks jäänud külg A_1A_2 läbib punkti D.

Reeper $\{A_1, A_2, A_3, E\}$ rahuldab kõiki eelmise teoreemi tõestuskäigus punktidele A, B ja C seatud tingimusi, seepärast $A = (1:0:1)$, $B = (0:1:1)$ ja punktil C leidub esindaja $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$. Et $(AB, CD) = -1$, siis def. 114.1 põhjal punkti D esindab vektor $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$. Siit järeldub, et $D = (1:-1:0)$. Et aga $A_1A_2 = [0:0:1]$, siis tõepoolest $D \in A_1A_2$. ∎

Teoreemi 116.2 tõestusest ilmneb, et antud harmoonilise punktinelikuga saab igal seda nelikut sisaldaval tasandil siduda lõpmata palju erinevaid täielikke nelitippe.

Sirge P_1 iga kolme vabalt valitud ja järjestatud punkti A, B ja C jaoks leidub parajasti üks neljas harmooniline punkt, s. t. selline punkt D, mille puhul $(AB, CD) = 1$. Lihtne on kontrollida, et kui $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\varkappa + \boldsymbol{B}\lambda$, siis $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}\varrho\varkappa - \boldsymbol{B}\varrho\lambda$, kus $\varrho \in \mathrm{R}$, $\varrho \neq 0$; kui aga $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}p + \boldsymbol{B}$, siis $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}(-p) + \boldsymbol{B}$.

Olgu A, B ja C sirge P_1 mingid punktid. Siis tingimused $(AB, CX_1) = -1$, $(AC, BX_2) = -1$ ja $(BC, AX_3) = -1$ määravad sirgel veel kolm punkti X_1, X_2 ja X_3. Valides punktide A, B, C, X_1, X_2, X_3 ja nende abil määratavate punktide hulgast erinevaid või erinevalt järjestatud kolmikuid, saab sirgel P_1 nende kolmikute neljandate harmooniliste näol välja eraldada järjest uusi punkte. Näidatud viisil väljaeraldatud punktide hulka nimetatakse punktikolmikuga $\{A, B, C\}$ määratud harmoonilisusevõrguks.

Teoreem 116.3. *Projektiivse sirge reeperiga $\mathfrak{R}$ määratud harmoonilisusevõrk koosneb baaspunktist A_1 ja sirge kõigist punktidest, millel on ratsionaalarvulised koordinaadid reeperi $\mathfrak{R}$ suhtes.*

Tõestus. Märgime esmalt, et sirge P_1 iga kolme erineva punkti $X(x)$, $Y(y)$ ja $Z(z)$ korral võrdus $(A_1Z, XY) = -1$ (kus A_1 on esimene baaspunkt) on ekvivalentne võrdusega $z = \frac{x+y}{2}$. Tõepoolest, et $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}_1 z + \boldsymbol{A}_2$, siis $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_1(-z) + \boldsymbol{Z}$, mistõttu $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}_1 x + \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_1(x-z) + \boldsymbol{Z}$, samuti $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}_1(y-z) + \boldsymbol{Z}$. Järelikult juhul, kui $(A_1Z, XY) = -1$, kehtib võrdus $(y-z):(x-z) = -1$, siis aga ka võrdus $z = \frac{x+y}{2}$. Vastupidi, kui tõene on viimane võrdus, siis kehtib ka eelviimane võrdus ning punktide A_1 ja Z kaudu avaldatud punktid $X(x-z)$ ja $Y(y-z)$ rahuldavad tingimust $(A_1Z, XY) = -1$.

Olgu nüüd sirgel P_1 vabalt võetud reeper $\{A_1, A_2, E\}$. Tähistame siin punkti $X(x)$ lühidalt X_x, siis $X_\infty = A_1$, $X_0 = A_2$ ja $X_1 = E$. Ülejäänud naturaalarvuliste koordinaatidega punktid saab eelneva märkuse põhjal määrata tingimustega

$$(A_1X_n, X_{n-1}X) = -1, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Näitame, et võrdustega

$$(A_2X_{\frac{1}{n}}, X_{\frac{1}{n-1}}X) = -1, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

saab määrata punktid, mille koordinaatideks on pöördarvud $\frac{1}{n}$. Kui $n = 1$, siis loeme $X_{\frac{1}{n-1}} = A_1$. Eelneva märkuse põhjal võrdus $(A_2E, A_1X) = (A_1X, A_2E) = -1$ on ekvivalentne võrdusega $x = \frac{1}{2}$, s. t. $X = X_{\frac{1}{2}}$. Üldjuhul

$$X_{\frac{1}{n}}=A_1\frac{1}{n}+A_2, \text{ seepärast } A_1=A_2(-n)+X_{\frac{1}{n}}n,$$

$$X_{\frac{1}{n-1}}=A_1\frac{1}{n-1}+A_2=A_2\frac{1}{1-n}+X_{\frac{1}{n}}\frac{n}{n-1},$$

$$X=A_1x+A_2=A_2(1-nx)+X_{\frac{1}{n}}nx,$$

$$(A_2X_{\frac{1}{n}}, X_{\frac{1}{n-1}}X)=-n\frac{1-nx}{nx}=-1,$$

$$x=\frac{1}{n+1}, \text{ s. t. } X=X_{\frac{1}{n+1}}.$$

Punktid, mille koordinaatideks on positiivsed ratsionaalarvud, saab nüüd leida tingimusest

$$(A_1X_{\frac{m}{n}}, X_{\frac{m-1}{n}}X)=-1, \qquad m=1, 2, 3, \ldots$$
$$n=2, 3, 4, \ldots$$

Lõpuks, iga positiivse ratsionaalarvu r korral määrab punkti, mille koordinaadiks on vastandarv, võrdus

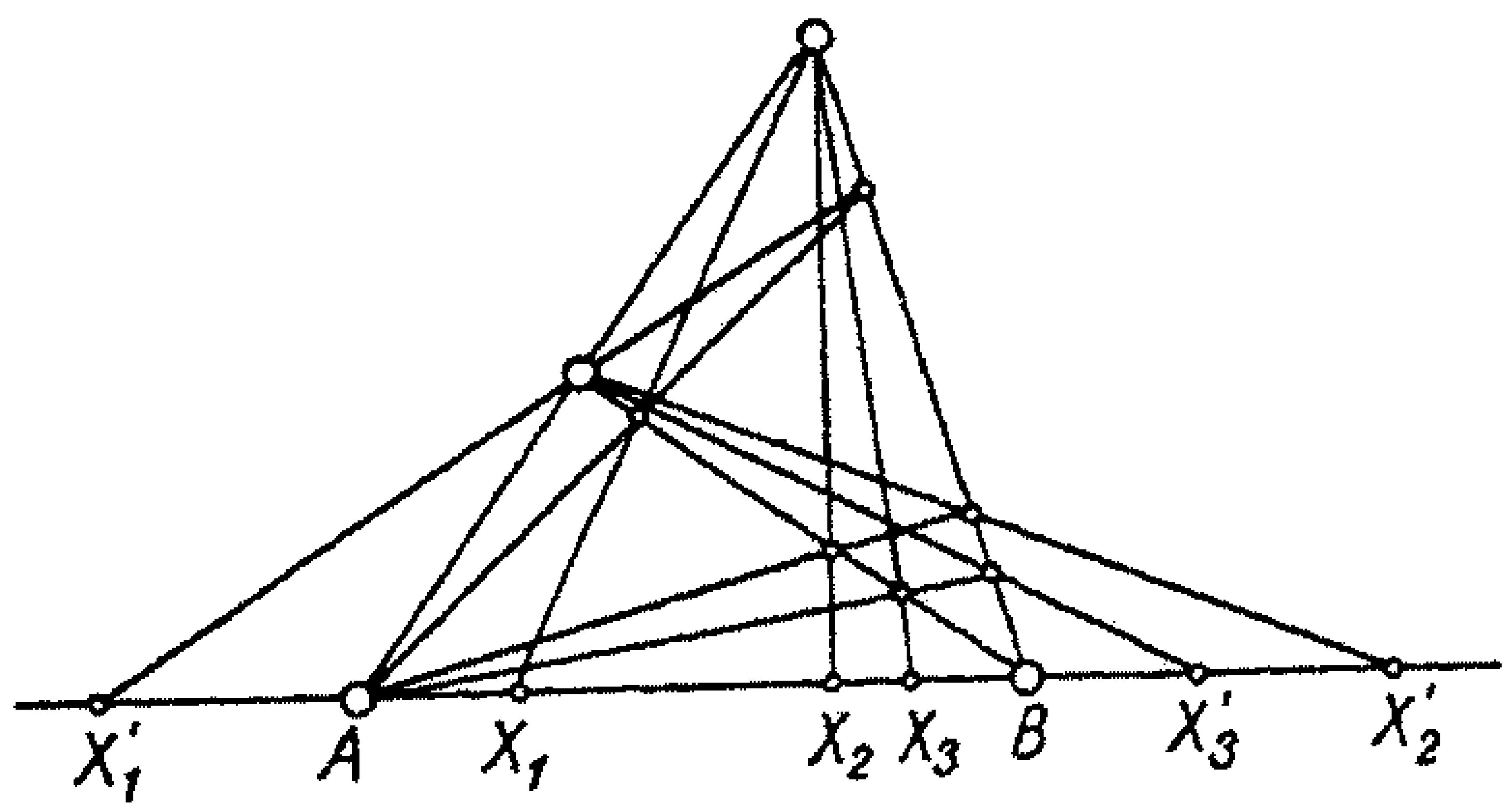
$$(A_1A_2, X_rX)=-1.$$

Nüüd on selge, et harmoonilisusevõrku kuuluvad kõik ratsionaalarvuliste koordinaatidega punktid. Tõestuse lõpetamiseks märgime veel, et ühegi võrku kuuluva punkti koordinaat vaadeldava reeperi suhtes ei saa olla irratsionaalne[144], sest iga punkt võrgus määratakse rekurrentselt ratsionaalsete operatsioonide abil, lähtudes arvudest 0 ja 1. ∎

Huvitav on märkida, et harmoonilisusevõrgu saab ehitada puhtgeomeetriliselt — järjestikuste täielike nelitippude konstrueerimise teel sirget P_1 sisaldaval tasandil (teoreemid 116.1 ja 116.2).

Kui harmoonilist punktinelikut määravas seoses fikseerida punktid ühes paaris ja lugeda punktid teises paaris muutuvateks, siis tekitab sel viisil saadud seos $(AB, XX')=-1$ teatava vastavuse $X \to X'$ sirge P_1 punktide hulgas. Punkti X' nimetatakse sel puhul punkti X k a a s h a r m o o n i l i s e k s p u n k t i k s paari (A, B) suhtes. Et siin $(AB, X'X)=(AB, XX')^{-1}=-1$, siis punktide kaasharmoonilisus mingi paari suhtes on nende vastastikune omadus. Sel puhul räägitakse ka paari (A, B) k a a s h a r m o o n i l i s e s t p a a r i s t (X, X'). On selge, et ka paaride kaashar-

[144] Seepärast kasutatakse sageli ka nimetust r a t s i o n a a l s u s e v õ r k.



Joon. 207.

moonilisus on nende vastastikune omadus: $(XX', AB) = (AB, XX') = -1$.

Kui sirgel on vabalt fikseeritud kaks erinevat punkti A ja B, siis leidub igal punktil X, mis erineb punktidest A ja B, parajasti üks kaasharmooniline punkt X' paari (A, B) suhtes (joon. 207). Kokkulepetest (114.5) liitsuhte väärtuse kohta kahe punkti ühtimisel järeldub, et $X' \neq X$.

Seosega $(AB, XX') = -1$ määratud vastavuse saab laiendada ka fikseeritud punktidele A ja B, tuginedes järgmistele kaalutlustele. Kui võtta A ja B baaspunktideks vastavalt A_1 ja A_2, siis peavad punktide X ja X' koordinaatideks olema vastandarvud $\pm x$. Kui nüüd $x \to \infty$, siis peab $X \to A_1$ ja samuti $X' \to A_1$. Täpselt samal viisil $x \to 0$ puhul $X \to A_2$ ja $X' \to A_2$. Niisiis esimesel juhul punktid X ja X' lähenevad mõlemad punktile A, teisel juhul punktile B.

***Def.* 116.3.** Kui kahe erineva punkti A ja B korral seoses $(AB, XX') = -1$ on $X = A$, siis loetakse ka $X' = A$; kui selles aga $X = B$, siis loetakse ka $X' = B$. Sirge teisendust, mille määrab sel viisil täiendatud seos $(AB, XX') = -1$, nimetatakse sirge h a r m o o n i l i s e k s t e i s e n d u s e k s ja selle teisenduse kaht püsipunkti A ja B h a r m o o n i l i s t e k s e n e s e k a a s p u n k t i d e k s.

Nagu selgus, leidub sirge igal kahel erineval punktil lõpmata palju kaasharmoonilisi paare. Sirge kahe punktipaari ühise kaasharmoonilise paari olemasolu kohta selgitab järgmine lause.

***Teoreem* 116.4.** *Sirgle kahel erineval punktipaaril (B_1, B_2) ja (C_1, C_2) leidub ühine kaasharmooniline paar parajasti siis, kui $B_1B_2 \times C_1C_2$; kahel paaril saab olla ülimalt üks ühine kaasharmooniline paar.*

T õ e s t u s. Olgu vaadeldavatel paaridel ühine kaasharmooniline paar (D_1, D_2), s. t. $(D_1D_2, B_1B_2) = (D_1D_2, C_1C_2) = -1$.

Võtame reeperiks $\mathfrak{R} = \{D_1, D_2, B_1\}$. Punkti B_2 mittehomogeenne koordinaat selle reeperi suhtes on -1. Olgu punkti C_1 koordinaat c, siis punkti C_2 koordinaat on $-c$. Siinjuures $c \neq \pm 1$, sest vastupidisel juhul paarid (B_1, B_2) ja (C_1, C_2) ühtiksid. Et

$$(B_1B_2, C_1C_2) = \frac{1-c}{-1-c} : \frac{1+c}{-1+c} = \left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2 > 0,$$

siis järelikult $B_1B_2 \not\times C_1C_2$.

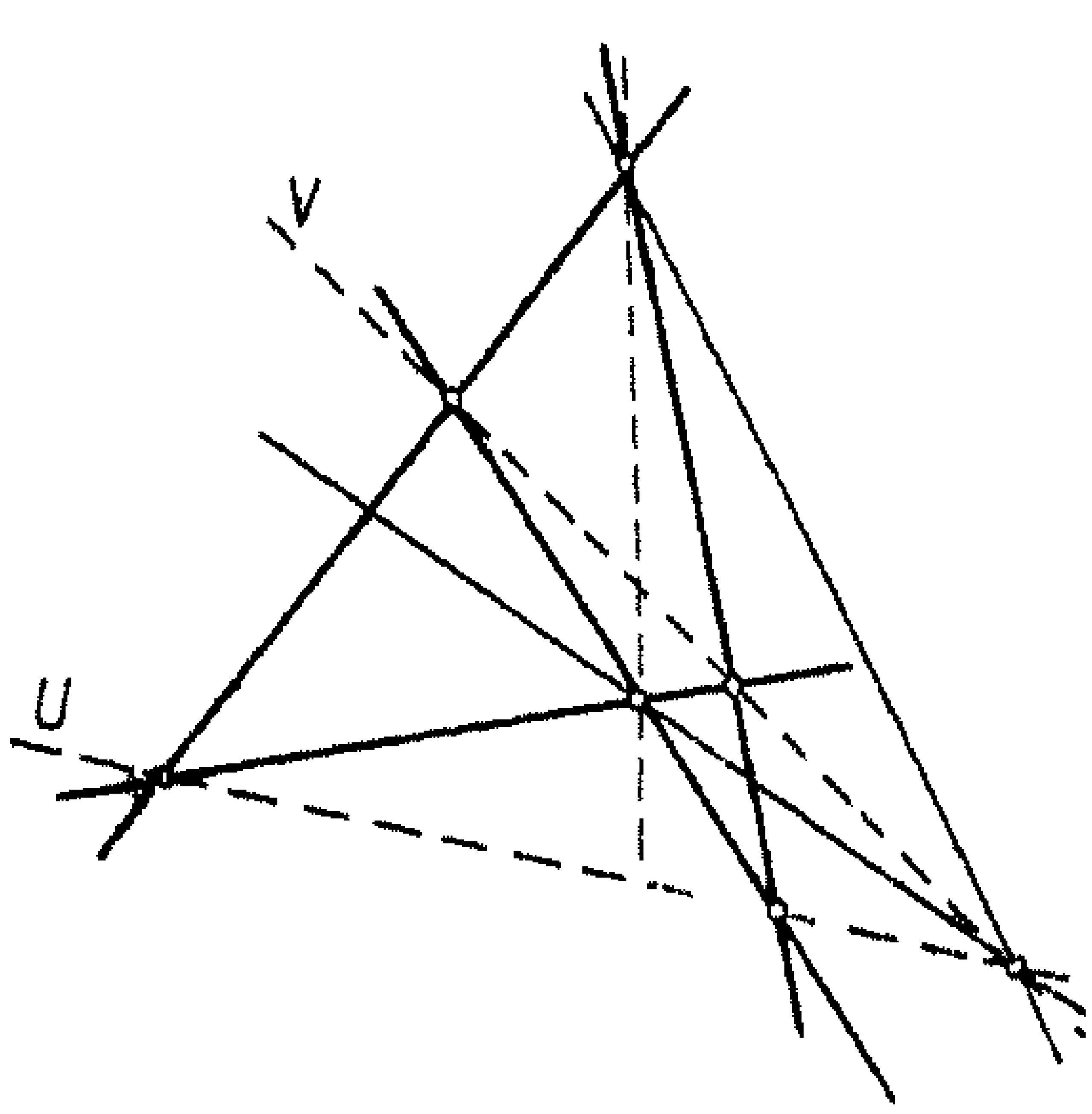
Vastupidi, olgu $B_1B_2 \not\times C_1C_2$. Otsime punkte X_1 ja X_2, mille puhul $(B_1B_2, X_1X_2) = (C_1C_2, X_1X_2) = -1$. Loeme B_1 ja B_2 baaspunktideks, ühikpunkti fikseerime vabalt. Olgu punktide C_1 ja C_2 koordinaadid vastavalt c_1 ja c_2 ning punkti X_1 koordinaat x; punkti X_2 koordinaat peab siis olema $-x$. Paari (X_1, X_2) määrab võrrand

$$\frac{c_1-x}{c_2-x} : \frac{c_1+x}{c_2+x} = -1, \tag{116.1}$$

mis omandab pärast lihtsaid teisendusi kuju $x^2 = c_1c_2$. Eelduse järgi $(B_1B_2, C_1C_2) > 0$, seepärast $\frac{c_1}{c_2} < 0$ ja lahendid $x = \pm\sqrt{c_1c_2}$ on reaalarvud. Niisiis leidub võrrandil (116.1) kaks vastandarvulist lahendit, mis määravad parajasti ühe kaasharmoonilise paari. ∎

Duaalsuse printsiip lubab harmoonilisuse mõiste üle kanda lineaaride kimpu.

***Def.* 116.5.** Kui $(ST, UV) = -1$, siis öeldakse, et lineaaripaarid (S, T) ja (U, V) lahutavad teineteise harmooniliselt ning lineaarid S, T, U, V moodustavad h a r m o o n i l i s e l i n e a a r i n e l i k u; kõneldakse ka, et V on neljas harmooniline lineaaride S, T ja U suhtes ja samuti V on lineaari U kaasharmooniline lineaaripaari (S, T) suhtes.



Joon. 208.

Harmoonilisele sirgepaarile kanduvad vahetult üle ka teoreemid 116.1 ja 116.2, kui neis sooritada duaalsuse printsiibile vastav terminite vahetus.

***Teoreem* 116.5.** *Täieliku nelikülje iga diagonaalide paar (U, V) lahutab harmooniliselt sirgepaari, mille määravad diagonaalide U ja V lõikepunkt ning nelikülje kolmandale diagonaalile kuuluvad vastastipud* (joon. 208).

Harmoonilise sirgeneliku kohta, mida kirjeldab mingi nelikülg teoreemis 116.5 näidatud viisil, öeldakse, et ta on seotud selle neliküljega.

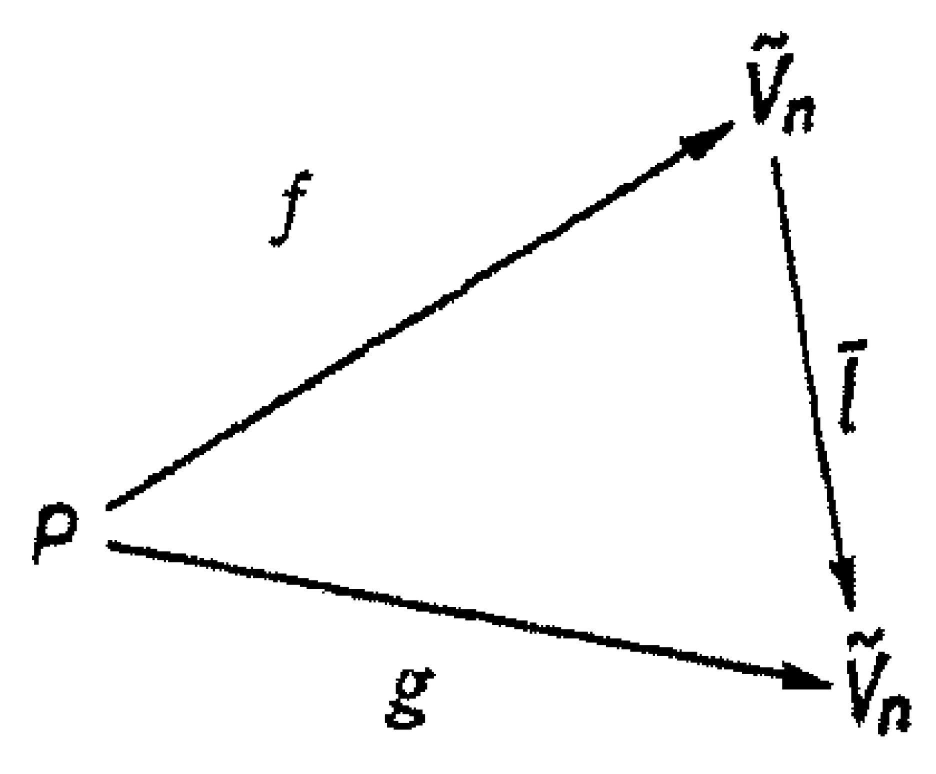
***Teoreem* 116.6.** *Iga harmoonilise sirgeneliku korral leidub täielik nelikülg, millega ta on seotud.*

Selliseid nelikülgi saab tasandil leida lõpmata palju.

Teoreemid 116.1 ja 116.2 on duaalsuse printsiibi järgi ümbersõnastatavad ka harmoonilise tasandineliku jaoks. Jätame siin sel viisil saadavad teoreemid esitamata ja piirdume vaid tekkivate konfiguratsioonide kirjeldamisega. Tasandilise täieliku nelitipu (s. o. sellise, mille tipud on intsidentsed ühe tasandiga) duaalne kujund ei ole muidugi täielik nelitahk (see on ruumilise täieliku nelitipuga duaalne kujund), vaid teatav konfiguratsioon K, mis koosneb ühe sidumi (s. o. ühe punktiga intsidentsest) neljast üldasendis olevast tasandist ja nendega määratud kuuest sirgest. Harmooniline tasandinelik kuulub ühte kimpu k. Iga tasand U, mis ei läbi kimbu k telge, lõikab harmoonilist tasandinelikut mööda nelja ühte kimpu kuuluvat sirget V_i. Tasandi U ja konfiguratsiooni K lõikesirged on üldasendis (tasandil U), seega moodustavad nad nelikülje. Intsidentsuste edasine analüüs näitab, et see nelikülg on seotud sirgetega V_i nii, nagu kirjeldab teoreem 116.5.

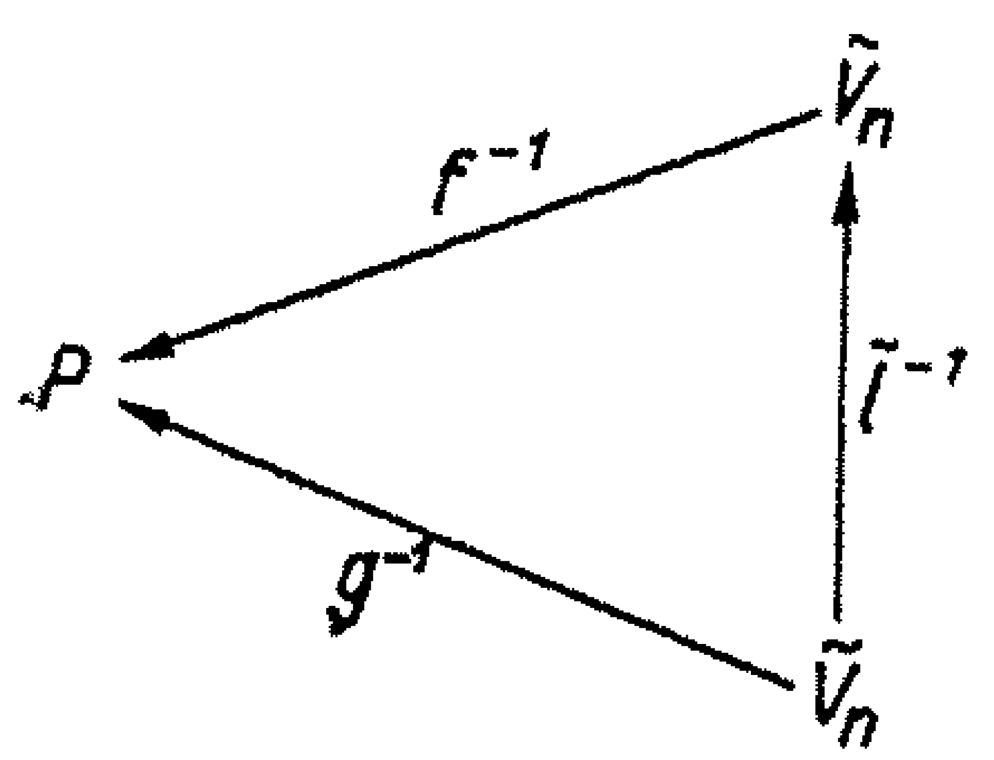
117. Kollineatsioonid. Def. 106.3 kohaselt nimetatakse projektiivseks ruumiks P_{n-1} iga hulka P, mille puhul on võimalik 1 : 1-pealekujutus $P \to \tilde{V}_n$. Et seejuures ei võeta arvesse mingeid muid hulga P elementide vahelisi seoseid peale nende, mis võimaldavad selle kujutuse, siis võib hulka P vaadelda amorfse hulgana, milles alles kujutus $P \to \tilde{V}_n$ tekitab teatava struktuuri. Selles struktuuris on olulised kaks aspekti: 1) seos, mida nimetatakse projektiivseks sõltuvuseks, 2) projektiivse koordinaadistiku, s. o. kujutuse $P \to \tilde{R}^n$ võimalikkus, mistõttu ruumis P_{n-1} esinevate vahekordade kirjeldamisel saab kasutada hulga R järjestust ja pidevust.

Def. 106.3 ei püstita 1 : 1-pealekujutuse $P \to \tilde{V}_n$ moodustamise kohta mingeid kitsendavaid tingimusi. Seetõttu saab ruumi P_{n-1} struktuuri uurimisel lähtuda hulga P erinevatest kujutustest hulgale $\tilde{V}_n$. On loomulik nõuda, et üleminekul ühelt kujutuselt teisele ruumi P_{n-1} struktuur säilib; näiteks alamruum, mille määrab üks kujutus, peab olema alamruum ka iga teise lubatava kujutuse korral. Siit tekib vajadus anda eeskiri lubatavate üleminekute kohta vabalt võetud kujutuselt $P \to \tilde{V}_n$ teisele samalaadsele kujutusele. Nagu kohe selgub, taandub see küsimus ruumi P_{n-1} sobivate teisenduste hulga väljaeraldamisele.



Olgu antud kaks 1 : 1-pealekujutust $f: \mathrm{P} \to \tilde{\mathrm{V}}_n$ ja $g: \mathrm{P} \to \tilde{\mathrm{V}}_n$, s. t. kaks eeskirja, mis seavad igale punktile $X \in \mathrm{P}$ vastavusse ruumi V_n teatavad (nullelemendita) ühemõõtmelised alamruumid $\{X\mu\}$ ja $\{X'\nu\}$, seega $f(X) = \{X\mu\}$ ja $g(X) = \{X'\nu\}$. Kujutused f ja g tekitavad hulga $\tilde{\mathrm{V}}_n$ 1 : 1-pealekujutuse iseendale — teatava teisenduse $\tilde l: \tilde{\mathrm{V}}_n \to \tilde{\mathrm{V}}_n$. Nimelt vastavad teineteisele hulga $\tilde{\mathrm{V}}_n$ elemendid, mis on ühe ja sellesama punkti $X \in \mathrm{P}$ kujutisteks f ja g toimel: $\tilde l[f(X)] = g(X)$. Olukorda kirjeldab lisatud skeem.

Teisest küljest, kui on antud mingi 1 : 1-pealekujutus $f: \mathrm{P} \to \tilde{\mathrm{V}}_n$ ja mingi teisendus $\tilde l: \tilde{\mathrm{V}}_n \to \tilde{\mathrm{V}}_n$, siis määrab kujutuste ahel $\mathrm{P} \xrightarrow{f} \tilde{\mathrm{V}}_n \xrightarrow{\tilde l} \tilde{\mathrm{V}}_n$ teise 1 : 1-pealekujutuse $g: \mathrm{P} \to \tilde{\mathrm{V}}_n$. Kui seejuures $f(X) = \{X\mu\}$ ja $\tilde l(\{X\mu\}) = \{X'\nu\}$, siis $g(X) = \tilde l[f(X)] = \{X'\nu\}$. Sel puhul öeldakse, et kujutus g on saadud kujutusest f hulga $\tilde{\mathrm{V}}_n$ teisenduse toimel, ja kirjutatakse $g = \tilde l f$. Nagu nähtub skeemist, kehtib korrutise $\tilde l f$ puhul harilik pöördkujutuse moodustamise reegel



$$g^{-1} = f^{-1}\tilde l^{-1}, \tag{117.1}$$

kirjutisel $f\tilde l$ aga puudub mõte. Hulga $\tilde{\mathrm{V}}_n$ kahe teisenduse $\tilde l_1$ ja $\tilde l_2$ korral saab kirjutada

$$\tilde l_1(\tilde l_2 f) = (\tilde l_1 \tilde l_2) f = \tilde l_1 \tilde l_2 f. \tag{117.2}$$

Kujutuste paari (f, g) uurimise võib asendada paari $(f, \tilde l)$ uurimisega.

Et 1 : 1-pealekujutusel $f: \mathrm{P} \to \tilde{\mathrm{V}}_n$ leidub pöördkujutus f^{-1}, siis paarile $(f, \tilde l)$ vastab kujutuste ahela $\mathrm{P} \xrightarrow{f} \tilde{\mathrm{V}}_n \xrightarrow{\tilde l} \tilde{\mathrm{V}}_n \xrightarrow{f^{-1}} \mathrm{P}$ kaudu hulga P enda teatav teisendus $\varphi: \mathrm{P} \to \mathrm{P}$, kus $\varphi = f^{-1}(\tilde l f)$. Kui $f(X) = \{X\mu\}$, $\tilde l(\{X\mu\}) = \{X'\nu\}$ ja $f^{-1}(\{X'\nu\}) = X'$, siis $\varphi(X) = X'$. Pöördteisenduse määrab ahel $\mathrm{P} \xrightarrow{f} \tilde{\mathrm{V}}_n \xrightarrow{\tilde l^{-1}} \tilde{\mathrm{V}}_n \xrightarrow{f^{-1}} \mathrm{P}$, s. t. $\varphi^{-1} = f^{-1}(\tilde l^{-1} f)$. Olukorda kirjeldavad järgmised skeemid:

$$\begin{tikzcd} \tilde V_n \arrow[r, "\tilde l"] \arrow[dr, "f^{-1}\tilde l"] & \tilde V_n \arrow[d, "f^{-1}"] \\ P \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\varphi"'] & P \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \tilde V_n \arrow[d, "f^{-1}"'] & \tilde V_n \arrow[l, "\tilde l^{-1}"'] \arrow[dl, "f^{-1}\tilde l^{-1}"'] \\ P & P \arrow[l, "\varphi^{-1}"] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Siit nähtub ühtlasi, et on lubatav kirjutada ka $\varphi = (f^{-1}\tilde l)f$ ja $\varphi^{-1} = (f^{-1}\tilde l^{-1})f$, mistõttu sulud võib ära jätta:

$$\varphi = f^{-1}\tilde l f, \quad \varphi^{-1} = f^{-1}\tilde l^{-1} f.$$

Hulga P iga teisenduse φ saab esitada näidatud kujul. Tõepoolest, kui $P = P_{n-1}$, siis def. 106.3 põhjal leidub kujutus $f: P \to \tilde V_n$, mistõttu igale teisendusele $\varphi: P \to P$ vastab teatav teisendus $\tilde l: \tilde V_n \to \tilde V_n$, kusjuures $\varphi = f^{-1}\tilde l f$.

Niisiis taandub probleem hulga P sobiva teisenduste hulga väljaeraldamisele. Seejuures võib talitada nii: lähtuda def. 106.3 põhjal antud kujutusest $f: P \to \tilde V_n$ ja vaadelda hulga $\tilde V_n$ teisenduste hulka $\tilde L$. Iga $\tilde l \in \tilde L$ korral on paari $(f, \tilde l)$ abil määratud teatav teisendus $\varphi: P \to P$, kus $\varphi = f^{-1}\tilde l f$, seega hulgale $\tilde L$ vastab hulga P teisenduste hulk $\{f^{-1}\tilde l f\}$. Viimasest hulgast tuleb nüüd välja eraldada selline alamhulk, mille elemendid säilitavad hulgale P lähtekujutusega $f: P \to \tilde V_n$ omistatud struktuuri. On selge, et küsimus taandub hulga $\tilde L$ sobiva alamhulga määramisele.

$$\begin{tikzcd} \tilde V_n \arrow[r, "\tilde l"] & \tilde V_n \arrow[d, shift right, "f^{-1}"'] \\ P \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\varphi"'] & P \arrow[u, shift right, "f"'] \end{tikzcd}$$

Iga teisenduse $\varphi = f^{-1}\tilde l f$ korral säilib hulga P seos vektorruumiga V_n, seepärast ka aksioomidega **B1**—**B5**. Seega iga teisendus $\varphi: P_{n-1} \to P_{n-1}$ säilitab hulga P seose reaalarvude hulgaga $\mathfrak{R}$ ja selle pidevusega. Järelikult piisab, kui nõuda igalt lubatavalt teisenduselt φ vaid seda, et ta jätaks muutmata projektiivse sõltuvuse vahekorrad ruumis P_{n-1}. Osutub aga, et seda nõuet saab veelgi kitsendada.

Teisendus $\varphi: P_{n-1} \to P_{n-1}$ säilitab sõltuvusseose parajasti siis, kui ta kujutab iga alamruumi samamõõtmeliseks alamruumiks — iga sirge sirgeks ja iga tasandi tasandiks. Siinjuures piisab, kui nõuda, et teisendus φ viiks iga sirge jälle sirgeks. Tõepoolest, sel juhul säilib punkti intsidentsus sirgega, mistõttu ruumi P_3 iga kolme mitte ühte kimpu kuuluva sirge lõikepunktid kujutuvad vastavate sirgete lõikepunktideks; siit on lihtne järeldada, et tasandi kujutis osutub jälle tasandiks, s. t. säilib ka punkti intsidentsus tasandiga.

Def. **117.1.** Ruumi P_{n-1} ($n \geqslant 3$) teisendust $\varphi = f^{-1}\tilde{l}f$, mille määravad 1 : 1-pealekujutus $f: P \to \tilde{V}_n$ ja teisendus $\tilde{l}: \tilde{V}_n \to \tilde{V}_n$, ning mille toimel selle ruumi iga sirge kujutub sirgeks, nimetatakse ruumi P_{n-1} projektiivseks kollineatsiooniks.

***Teoreem* 117.1.** *Projektiivne kollineatsioon säilitab iga kahe ühele sirgele kuuluva punktipaari lahutuvusseose.*

Tõestus. Olgu sirge $u \subset P_{n-1}$ vabalt valitud erinevate punktide A, B, C ja D kujutisteks kollineatsiooni $\varphi: P_{n-1} \to P_{n-1}$ toimel vastavalt punktid A', B', C' ja D' sirgel $u' \subset P_{n-1}$. Kui $AB \not\!\!\times CD$, siis teoreemi 115.4 põhjal leidub paaridel (A, B) ja (C, D) üheselt määratud ühine kaasharmooniline paar, s. t. paar (F_1, F_2), mis rahuldab tingimusi $(AB, F_1F_2) = -1$ ja $(CD, F_1F_2) = -1$. Ehitame kaks tasandilist täielikku nelitippu, millest üks on teoreemis 116.1 näidatud viisil seotud harmoonilise nelikuga $\{A, B, F_1, F_2\}$, teine aga samal viisil nelikuga $\{C, D, F_1, F_2\}$. Olgu $\varphi(F_i) = F'_i$ $(i = 1, 2)$. Et φ kujutab ehitatud nelitipud nelitippudeks, mis on samal viisil seotud sirgega U', siis peavad kehtima võrdused $(A'B', F'_1F'_2) = -1$ ja $(C'D', F'_1F'_2) = -1$. Seega leidub paaridel (A', B') ja (C', D') ühine kaasharmooniline paar, mistõttu $A'B' \not\!\!\times C'D'$, sest vastupidisel juhul tekiks pöördkollineatsiooni φ^{-1} rakendamisel vastuolu äsjatõestatud seosega. ∎

Ruumi P_{n-1} projektiivne kollineatsioon jaotab selle ruumi sirgete hulga paaridesse ja indutseerib iga paari puhul ühe sirge 1 : 1-pealekujutuse teisele sirgele. Sel viisil sirge jaoks indutseeritud kujutust nimetatakse projektiivseks kujutuseks.

***Teoreem* 117.2.** *Projektiivne kujutus, mille projektiivne kollineatsioon indutseerib ruumi* P_{n-1} $(n \geqslant 3)$ *sirge jaoks, on iga sirge korral täielikult määratud kolme erineva punktipaariga.*

Tõestus. Olgu sirge $u \subset P_{n-1}$ vabalt valitud erinevate punktide A, B ja C kujutisteks mingi kollineatsiooni $\varphi: P_{n-1} \to P_{n-1}$ toimel vastavalt punktid A', B' ja C' sirgel $u' \subset P_{n-1}$. Loeme kolmikud $\{A, B, C\}$ ja $\{A', B', C'\}$ reeperiteks $\mathfrak{R} \subset u$ ja $\mathfrak{R} \subset u'$ ning vaatleme nende reeperitega määratud harmoonilisusevõrke. Seome iga harmoonilise nelikuga võrgust sirgel u ühe tasandilise täieliku nelitipu. Kollineatsioon φ viib kõik need nelitipud nelitippudeks, mis on samal viisil seotud sirgega u'. Järelikult sirgel u moodustatud harmoonilisusevõrk kujutub φ toimel harmoonilisusevõrguks sirgel u'. See aga näitab, et nende võrkude vastavate punktide mittehomogeensed koordinaadid reeperite $\mathfrak{R}$ ja $\mathfrak{R}'$ suhtes on võrdsed. Et koordinaadid on reeperitega määratud üheselt, siis väite tõestamiseks piisab, kui näidata, et ka võrkudesse mittekuuluvate vastavate punktide koordinaadid on võrdsed.

Baaspunktid $A(\infty)$ ja $A'(\infty)$ kuuluvad võrkudesse, seepärast võime nad vaatlusest kõrvale jätta ja kasutada sirgete ülejäänud punktide hulkades koordinaatidega määratud lineaarseid järjestusi (vt. art. 115). Oletame, et mingite vastavate punktide $X(x) \in u$ ja $X'(x') \in u'$ korral $x' \neq x$, näiteks $x' > x$. Et harmoonilisusevõrk koosneb kõigist ratsionaalarvuliste koordinaatidega punktidest, siis leidub võrgus sirgel u punkte, mille koordinaadid erinevad arvust x kuitahes vähe. Nimetame punkti X harmooniliseks ε-ümbruseks võrku kuuluvate punktide hulka $H_\varepsilon(X) = \{P(p) \mid |p - x| < \varepsilon\} \subset \subset u$, kus ε on vabalt valitav positiivne reaalarv. Analoogiliselt defineerime sirgel u' punkti X' harmoonilise ε-ümbruse $H_\varepsilon(X') = \{Q(q) \| q - x' < \varepsilon\}$. Olgu $\varphi(P) = P'$, siis $\varphi[H_\varepsilon(X)] = H'_\varepsilon(X) = \{P'(p) \mid |p - x| < \varepsilon\} \subset u'$. Olgu $\varepsilon = \frac{1}{2}(x' - x)$. Siis võrduse $|x' - p| = |(x' - x) - (p - x)|$ tõttu $|x' - p| \geqslant |x' - x| - |p - x| > > \frac{1}{2}(x' - x) = \varepsilon$, järelikult $H'_\varepsilon(X) \cap H_\varepsilon(X') = \varnothing$. Et $p - x < < \frac{1}{2}(x' - x)$, siis $p < \frac{1}{2}(x' + x) < x'$ iga $P \in H'_\varepsilon(X)$ korral.

Võtame ümbruses $H'_\varepsilon(X)$ punktid $P_1(p_1)$, $P_2(p_2)$ ja $P_3(p_3)$ nii, et $p_1 < p_2 < x < p_3$, siis $P_1X \asymp P_2P_3$. Äsjatõestatu põhjal $p_1 < p_2 < p_3 < x'$, järelikult $P'_1X' \not\asymp P'_2P'_3$. On tekkinud vastuolu teoreemiga 117.1, järelikult $x' \leqslant x$. Kuid ka oletus $x' < x$ viib vastuoluni; selles saab veenduda analoogilise arutlusega. Seepärast $x' = x$. ∎

***Teoreem* 117.3.** (projektiivsete kollineatsioonide põhiteoreem). *Leidub parajasti üks projektiivne kollineatsioon $\varphi : \mathrm{P}_{n-1} \to \mathrm{P}_{n-1}$, mis viib ruumi P_{n-1} $(n \geqslant 3)$ antud reeperi selle ruumi teiseks antud reeperiks.*

T õ e s t u s. Olgu hulk P $(n-1)$-mõõtmeline projektiivne ruum $(n \geqslant 3)$, s. t. leidugu 1 : 1-pealekujutus $f : \mathrm{P} \to \tilde{\mathrm{V}}_n$. Võtame selles ruumis vabalt kaks reeperit $\mathfrak{R} = \{A_1, \ldots, A_n, E\}$ ja $\mathfrak{R}' = \{A'_1, \ldots, A'_n, E'\}$ ning ruumis V_n nende mingid omabaasid $\{\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n\}$ ja $\{\boldsymbol{A}'_1, \ldots, \boldsymbol{A}'_n\}$. Seega loeme, et $f(A_i) = \{\boldsymbol{A}_i\mu\}$ ja $f(A'_i) = \{\boldsymbol{A}'_i\nu\}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Leidub parajasti üks lineaarteisendus $l : \mathrm{V}_n \to \mathrm{V}_n$, mille puhul $l(\boldsymbol{A}_i) = \boldsymbol{A}'_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Et lineaarteisendus l viib ruumi V_n iga alamruumi samamõõtmeliseks alamruumiks, siis tekib teatav teisendus $\tilde{l} : \tilde{\mathrm{V}}_n \to$

$\to \tilde{V}n$, kusjuures $\tilde{l}\{A_i\mu\} = \{A'_i\nu\}$. Sel viisil on määratud kollineatsioon $\varphi = f^{-1}\tilde{l}f$, mille puhul $\varphi(A_i) = A'_i$, ja nagu kerge kontrollida, $\varphi(E) = E'$, seega $\varphi(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}'$. Näitame, et selliseid kollineatsioone on ainult üks.

Kumbki reeper määrab ruumis P_{n-1} ühe täieliku $(n+1)$-tipu. Nende $(n+1)$-tippude iga vastavate servade (tasandi P_2 puhul külgede) paar $(A_iA_j, A'_iA'_j)$ sisaldab kolm vastavate punktide paari (A_i, A'_i), (A_j, A'_j) ja (E_{ij}, E'_{ij}), kus E_{ij} ja E'_{ij} on ülejäänud tippudega määratud lineaaride lõikepunktid vastavalt servadega A_iA_j ja $A'_iA'_j$. Teoreemi 117.2 põhjal on indutseeritud kujutus $A_iA_j \to A'_iA'_j$ iga paari $(A_iA_j, A'_iA'_j)$ puhul vaid üheselt määratav.

Vaatleme nüüd eraldi tasandit P_2. Olgu X selle tasandi mingi punkt, mis ei asetse koordinaatnelitipu $A_1A_2A_3E$ ühelgi küljel. Iga sirge $U \ni X$ lõikab seda nelitippu vähemalt neljas punktis. Et eelneva märkuse põhjal saavad need lõikepunktid kujutuda ainult ühel viisil, siis saab sirge U kujutiseks olla ainult üks sirge $U' \subset P_2$. Teoreemist 117.2 järeldub omakorda, et punktil $X \in U$ saab olla ainult üks kujutis $X' \in U'$. Seega kollineatsioon $\varphi : P_2 \to P_2$ on määratud üheselt.

See mõttekäik on kergesti laiendatav ruumile P_3. Siin tuleb esmalt samal viisil veenduda, et koordinaatviistipu $A_1A_2A_3A_4E$ tahud saavad ainult ühel viisil kujutuda viistipule $A'_1A'_2A'_3A'_4E'$. Näiteks tahu $A_1A_2A_3$ korral kasutame selleks täielikku nelitippu $A_1A_2A_3E_4$, kus $E_4 = A_1A_2A_3 \cap A_4E$. Vaadeldes nüüd suvalist punkti $X \in P_3$ ning mingit seda läbivat sirget, veendume, et punkt $\varphi(X)$ on üheselt määratud. Seega leidub ainult üks esitatud tingimust rahuldav kollineatsioon $\varphi : P_3 \to P_3$. ∎

Tõestatud teoreemis lähtusime $1:1$-pealekujutusest $f : P \to \tilde{V}_n$, mis omistab hulgale P projektiivse struktuuri ja võimaldab selles hulgas välja eraldada reeperid $\mathfrak{R}$ ja $\mathfrak{R}'$. Osutub, et tulemus sõltub kujutuse f valikust.

Kaks erinevat $1:1$-pealekujutust $f : P \to \tilde{V}_n$ ja $g : P \to \tilde{V}_n$ $(n \geqslant 3)$ võivad hulgas P määrata erinevad alamruumide süsteemid. Selles veendumiseks vaatleme kujutusega $f : P \to \tilde{V}_n$ määratud projektiivset ruumi P_{n-1}. Sooritame mingi teisenduse $t : P_{n-1} \to P_{n-1}$, mis ei osutu projektiivseks kollineatsiooniks, s. t. ei kujuta iga sirget sirgeks. Kujutuste korrutis $g = ft^{-1}$ on $1:1$-pealekujutus $g : P \to \tilde{V}_n$, seega muudab hulga P projektiivseks ruumiks P'_{n-1}. Ruumid P_{n-1} ja P'_{n-1} punktihulkadena ühtivad, nende alamruumide süsteemid aga erinevad. Seetõttu on P_{n-1} ja P'_{n-1} erinevad projektiivsed ruumid. Ütleme, et kujutuste f ja g abil on hulgas P kahel erineval viisil defineeritud projektiivne struktuur.

Tõsi, ruume P_{n-1} ja P'_{n-1} nagu iga kaht samamõõtmelist projektiivset ruumi saab üksüheselt kujutada teineteisele, nii et nende alamruumide süsteemides tekib 1 : 1-pealekujutus, mis säilitab iga alamruumi mõõtme. Niisuguse kujutuse saab korraldada sel teel, et fikseeritakse mingid reeperid $\mathfrak{R} \subset P_{n-1}$ ja $\mathfrak{R}' \subset P'_{n-1}$ ning loetakse vastavaiks punktid $X \in P_{n-1}$ ja $X' \in P'_{n-1}$, mille koordinaadid nende reeperite suhtes ühtivad. Näiteks iga sirge kujutub sel juhul tõepoolest sirgeks. Tuleb aga silmas pidada, et sirge kui hulga P punktihulk ühes struktuuris üldiselt ei osutu sirgeks teises struktuuris. Vaadeldavat tüüpi kujutus $P_{n-1} \to P'_{n-1}$, mida nimetatakse ruumi P_{n-1} **projektiivseks kujutuseks** ruumis P'_{n-1}, ei ole seetõttu hulga P projektiivne kollineatsioon.

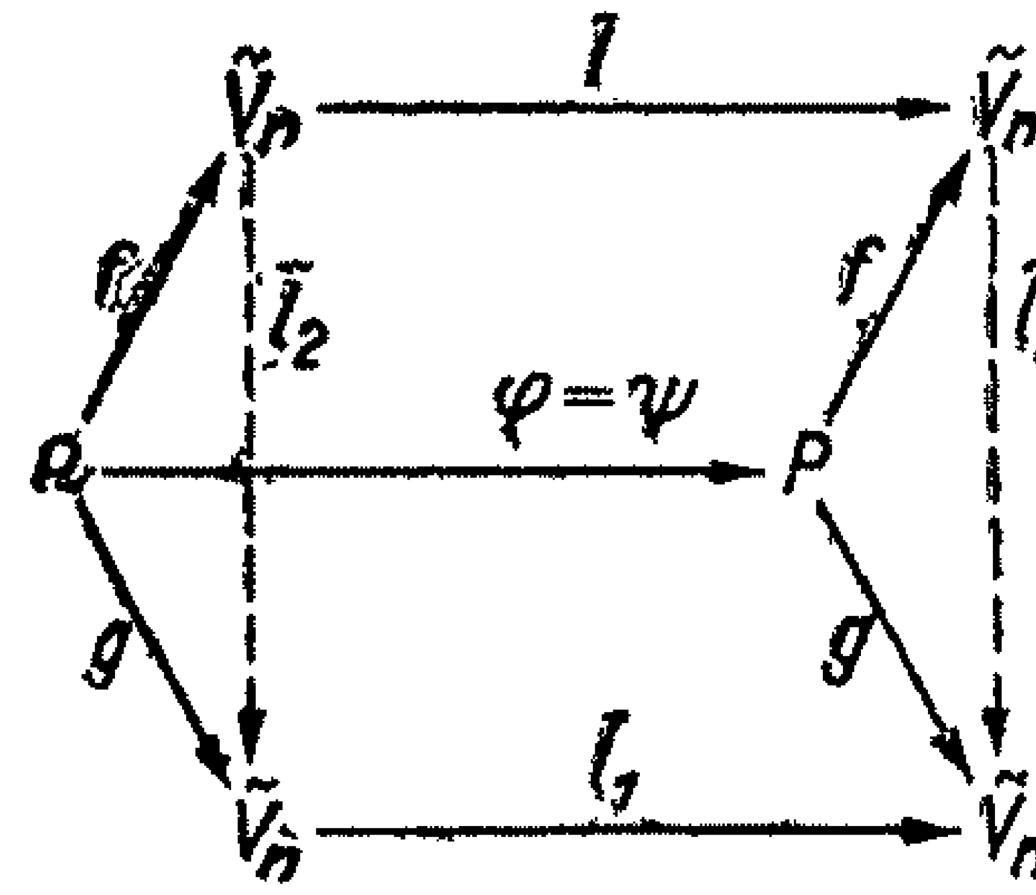
Nimetame kaht kujutust $f: P \to \tilde{V}_n$ ja $g: P \to \tilde{V}_n$ **kooskõlalisteks**, kui nad määravad hulgas P ühe ja sellesama projektiivse struktuuri, s. t. ühe ja sellesama alamruumide süsteemi. Lihtne on kontrollida, et kooskõlalisus on ekvivalentsusseos 1 : 1-pealekujutuste hulgas $\{P \to \tilde{V}_n\}$.

Teoreemi 117.3 üldistab järgmine lause.

***Teoreem* 117.4.** *Ruumi P_{n-1} reeperitega $\mathfrak{R}$ ja $\mathfrak{R}'$ määratud kollineatsioon $\varphi = f^{-1}\tilde{l}f$ ei sõltu kujutuse $f: P \to \tilde{V}_n$ valikust antud ekvivaletsusklassist.*

Tõestus. Olgu f ja g kooskõlalised kujutused ning $\mathfrak{R} = \{A_1, \ldots, A_n, E\}$ ja $\mathfrak{R}' = \{A'_1, \ldots, A'_n, E'\}$ vabalt valitud reeperid nende kujutustega määratud projektiivses struktuuris. Teoreemi 117.3 põhjal leiduvad üheselt määratud kollineatsioonid $\varphi = f^{-1}\tilde{l}f$ ja $\psi = g^{-1}\tilde{l}_1 g$, mille puhul $\varphi(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}'$ ja $\psi(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}'$. Näitame, et $\psi = \varphi$.

Olgu $f(A_i) = \overline{V}_{1i}$, $f(A'_i) = \overline{V}'_{1i}$, $g(A_i) = \overline{W}_{1i}$ ja $g(A'_i) = \overline{W}'_{1i}$, siis $\tilde{l}(\overline{V}_{1i}) = \overline{V}'_{1i}$ ja $\tilde{l}_1(\overline{W}_{1i}) = \overline{W}'_{1i}$ (sümbolitega $\overline{V}_1$ ja $\overline{W}_1$ tähistame siin hulga $\tilde{V}_n$ elemente). Kujutused f ja g tekitavad teisenduse $\tilde{l}_2: \tilde{V}_n \to \tilde{V}_n$, mille puhul $g = \tilde{l}_2 f$.



Et $g(A_i) = \tilde{l}_2 f(A_i) = \tilde{l}_2(\overline{V}_{1i})$ ja $g(A'_i) = \tilde{l}_2 f(A'_i) = \tilde{l}_2(\overline{V}'_{1i})$, siis $\tilde{l}_2(\overline{V}_{1i}) = \overline{W}_{1i}$ ja $\tilde{l}_2(\overline{V}'_{1i}) = \overline{W}'_{1i}$. Järelikult

$$\tilde{l}_1\tilde{l}_2(\overline{V}_{1i}) = \tilde{l}_2(\overline{V}'_{1i}) = \tilde{l}_2\tilde{l}(\overline{V}_{1i}),$$

ning et reeperid $\mathfrak{R}$ ja $\mathfrak{R}'$, seega ka elemendid $\overline{\mathrm{V}}_{1i} \in \tilde{\mathrm{V}}_n$ $(i = 1, \ldots, n)$ on vabalt valitavad, siis

$$\tilde{l}_1\tilde{l}_2 = \tilde{l}_2\tilde{l}, \quad \text{s. t.} \quad \tilde{l}_2^{-1}\tilde{l}_1\tilde{l}_2 = \tilde{l}.$$

Nüüd on lihtne tõestada väide: iga punkti $X \in \mathrm{P}_n$ korral $\psi(X) = g^{-1}\tilde{l}_1 g(X) = (\tilde{l}_2 f)^{-1}\tilde{l}_1(\tilde{l}_2 f)(X) = f^{-1}(\tilde{l}_2^{-1}\tilde{l}_1\tilde{l}_2)f(X) = f^{-1}\tilde{l}f(X) = \varphi(X)$, seega tõepoolest $\psi = \varphi$. ∎

On selge, et kaks kujutust $f: \mathrm{P} \to \tilde{\mathrm{V}}_n$ ja $g: \mathrm{P} \to \tilde{\mathrm{V}}_n$ on kooskõlalised parajasti siis, kui nende toimel tekkiv teisendus $\tilde{l}: \tilde{\mathrm{V}}_n \to \tilde{\mathrm{V}}_n$ säilitab lineaarse sõltuvuse vahekorrad hulgas $\tilde{\mathrm{V}}_n$. Osutub, et selle tingimuse saab esitada vektorruumi V_n kaudu.

***Teoreem* 117.5.** *Teisendus $\tilde{l}: \tilde{\mathrm{V}}_n \to \tilde{\mathrm{V}}_n$ säilitab lineaarse sõltuvuse vahekorrad hulgas $\tilde{\mathrm{V}}_n$ parajasti siis, kui teisenduse $\tilde{l}$ tekitab vektorruumi V_n lineaarteisendus.*

T õ e s t u s. Tingimuse piisavus on vahetult selge ja leidis juba kasutamist teoreemi 117.3 tõestuses. Tõestame tarvilikkuse.

Olgu $\tilde{l}$ hulga $\tilde{\mathrm{V}}_n$ teisendus, mis säilitab lineaarse sõltuvuse vahekorrad hulgas $\tilde{\mathrm{V}}_n$. Valime mingid $n+1$ elementi $\overline{\mathrm{V}}_1, \overline{\mathrm{V}}_{11}, \overline{\mathrm{V}}_{12}, \ldots, \overline{\mathrm{V}}_{1n}$, millest n viimast on lineaarselt sõltumatud. Teoreemi 106.2 põhjal need $n+1$ elementi ja samuti nende kujutised $\overline{\mathrm{V}}'_1 = \tilde{l}(\overline{\mathrm{V}}_1)$, $\overline{\mathrm{V}}'_{11} = \tilde{l}(\overline{\mathrm{V}}_{11}), \ldots, \overline{\mathrm{V}}_{1n} = \tilde{l}(\overline{\mathrm{V}}_{1n})$ on lineaarselt sõltuvad, n viimase elemendi kujutised aga on lineaarselt sõltumatud. Võtame nendest ekvivalentsusklassidest igast mingi ühe vektori, olgu $X \in \overline{\mathrm{V}}_1$, $X_i \in \overline{\mathrm{V}}_{1i}$, $X'' \in \overline{V}'_1$ ja $X''_i \in \overline{\mathrm{V}}'_{1i}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Def. 106.2 ja teoreemi 106.1 põhjal leiduvad reaalarvud σ, σ_i, ϱ ja ϱ_i, nii et kehtivad võrdused

$$X\sigma + X_1\sigma_1 + \ldots + X_n\sigma_n = 0, \quad X''\varrho + X''\varrho_1 + \ldots + X''\varrho_n = 0. \tag{117.3}$$

Et X_i ja X''_i on valitud lineaarselt sõltumatutest ekvivalentsusklassidest, siis $\sigma \neq 0$, $\varrho \neq 0$. Kui hulk $\{\overline{\mathrm{V}}_1, \overline{\mathrm{V}}_{11}, \ldots, \overline{\mathrm{V}}_{1n}\}$ sisaldab alamhulka, mille elemendid on lineaarselt sõltuvad (ilmselt $\overline{\mathrm{V}}_1$ peab kuuluma sellisesse alamhulka), siis valime kordajad nii, et vastavate vektorite lineaarkombinatsioon on null. Selle kokkuleppe põhjal osutuvad ülejäänud kordajad nullideks, sest ülejäänud ekvivalentsusklassid on lineaarselt sõltumatud. Analoogilise kokkuleppe teeme hulga $\{\overline{\mathrm{V}}'_1, \overline{\mathrm{V}}'_{11}, \ldots, \overline{\mathrm{V}}'_{1n}\}$ kohta. Kui mingi

$\sigma_i = 0$, siis $\tilde{l}$ kohta tehtud eelduse põhjal ka vastav $\varrho_i = 0$ ja vastupidi. Määrame reaalarvud τ ja τ_i võrdustega $\tau = \varrho\sigma^{-1}$ ja $\tau_i = \varrho_i\sigma_i^{-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$; siis $\varrho = \tau\sigma$ ja $\varrho_i = \tau_i\sigma_i$. Võtame klassidest $\overline{V}'_1$ ja $\overline{V}'_{1i}$ uued esindajad, vastavalt $X' = X''\tau$ ja $X'_i = X''_i\tau_i$ (kui mingi $\tau_i = 0$, siis vastav klass jääb vaatluse alt välja). Teine võrdustest (117.3) omandab järgmise kuju:

$$X'\sigma + X'_1\sigma_1 + \ldots + X'_n\sigma_n = 0. \tag{117.4}$$

Avaldame saadud võrdustest vektorid X ja X', tähistades $-\sigma_i\sigma^{-1} = x^i$:

$$X = X_1x^1 + \ldots + X_nx^n, \qquad X' = X'_1x^1 + \ldots + X'_nx^n. \tag{117.5}$$

Vektorid X ja X_i on valitud klassidest $\overline{V}_1$ ja $\overline{V}_i$ täiesti vabalt, pärast seda aga klasside $\overline{V}'_1$ ja $\overline{V}'_{1i}$ esindajad X' ja X'_1 on määratud üheselt tingimusega, et vastavad kordajad võrdustes (117 5) on võrdsed. Tõepoolest, kui mõnest viimasest klassist $\overline{V}'_{1i}$ (mis kuulub lineaarselt sõltuvasse alamhulka, kui selline esineb) võtta uus esindaja X_i''', siis $X'_i = X_i'''\omega$, võrdusest (117.4) järeldub aga kordajate kohta tehtud kokkuleppe põhjal, et $\omega\sigma_i = \sigma_i$, s. t. $\omega = 1$ ja paratamatult $X_i''' = X'_i$. Arutledes vastupidiselt, s. t. andes vabalt ette vektorid X' ja X'_i, veendume, et ka vektorid X ja X_i on vastavate kordajate võrdsusega üheselt määratud. Niisiis leidub vähemalt üks 1 : 1-pealekujutus $l : V_n \to V_n$, mille tingib teisendus $\tilde{l}$.

Art-s 105 ilmnes, et iga kujutus $V_n \to V_n$, mille määrab vektori vastavate koordinaatide säilimise nõue üleminekul vektorilt ja reeperilt nende kujutistele, on ruumi V_n lineaarteisendus. Selles pole raske veenduda ka vahetult. Kontrollime lineaarsuse esimest tingimust. Olgu X' ja Y' vektorite X ja Y kujutised äsjakorraldatud vastavuses. Et vektori $X + Y$ koordinaatideks on $x^i + y^i$ $(i = 1, \ldots, n)$, siis kujutiseks on vektor

$$\begin{aligned}(X+Y)' &= X_1(x^1+y^1) + \ldots + X_n(x^n+y^n) = \\ &= (X_1x^1 + \ldots + X_nx^n) + (X_1y^1 + \ldots + X_ny^n) = X' + Y'.\end{aligned}$$

Veelgi lihtsam on kontrollida teist lineaarsuse tingimust (105 5).

Leitud lineaarteisendus $l : V_n \to V_n$ määrabki teisenduse $\tilde{l} : \tilde{V}_n \to \tilde{V}_n$. On selge, et sobivat lineaarteisendust ei saa fikseerida üheselt. Lineaarteisenduse valikuvabaduse piirid selgitame allpool kollineatsiooni valemi tuletamisel. ∎

Teoreemist 117 5 järeldub vahetult uus lause.

Teoreem 117.6. *Ruumi* P_{n-1} *teisendus* $\varphi = f^{-1}\tilde{l}f$ *on projektiivne kollineatsioon parajasti siis, kui teisenduse* $\tilde{l} : \tilde{V}_n \to \tilde{V}_n$ *määrab lineaarteisendus* $l : V_n \to V_n$.

Nüüd saab ütelda, et ruumi P_{n-1} kõigi projektiivsete kollineatsioonide hulga saab moodustada paaride hulga $\{(f, l)\}$ abil, kus f on vabalt fikseeritud kujutus $P \to \tilde{V}_n$ ja l on vektorruumi V_n lineaarteisenduste hulga L vabalt muutuv element. Edaspidi nimetame projektiivset kollineatsiooni lihtsalt kollineatsiooniks ja kasutame tähistust $\varphi = f^{-1}lf$.

Vastavus ruumi P_{n-1} kollineatsioonide hulga K ja ruumi lineaarteisenduste hulga L vahel ei ole üksühene. Kahe lineaarteisenduse l_1 ja l_2 ning antud kujutuse $f : P \to \tilde{V}_n$ korral $l_1f = l_2f$ parajasti siis, kui iga $X \in P$ korral alamruumid $l_1f(X) = \{X'\mu\}$ ja $l_2f(X) = \{X''\mu\}$ ühtivad, s. t. $X'' = X'\sigma$. See tingimus jaotab hulga L ekvivalentsusklassidesse, kusjuures vastavus nende klasside ja kollineatsioonide vahel on üksühene.

Ruumi P_{n-1} kollineatsioonide hulka K võimaldab algebralisest aspektist kirjeldada järgmine definitsiooni 66.1 üldistus

Def. **117.2.** Antud hulga M teisenduste hulka G nimetatakse hulga M t e i s e n d u s t e r ü h m a k s, kui on täidetud järgmised kaks tingimust: 1) kui $\varphi \in G$ ja $\psi \in G$, siis ka $\psi\varphi \in G$, 2) kui $\varphi \in G$, siis ka $\varphi^{-1} \in G$.

Teoreem 117.7. *Ruumi* P_{n-1} *kollineatsioonide hulk* K *on ruumi* P_{n-1} *teisenduste rühm.*

T õ e s t u s. Kui $\varphi \in K$, siis $\varphi = f^{-1}lf$, seepärast $\varphi^{-1} = f^{-1}l^{-1}f$, järelikult ka $\varphi^{-1} \in K$. Kui $\varphi \in K$ ja $\psi \in K$, s. t. $\varphi = f^{-1}l_1f$ ja $\psi = f^{-1}l_2f$, siis $\psi\varphi = (f^{-1}l_2f)(f^{-1}l_1f) = (f^{-1}l_2)(ff^{-1})(l_1f) = (f^{-1}l_2)(l_1f) = f^{-1}(l_2l_1)f$ ja (117.2) tõttu $\psi\varphi = f^{-1}lf$, kus $l = l_2l_1 \in L$. Järelikult $\psi\varphi \in K$. ▮

Seni on vaatlusest kõrvale jäänud sirge P_1 teisendused. Kerge on mõista, et arutlused, mis käesoleva artikli algul viisid kollineatsiooni koordinaadivaba valemini $\varphi = f^{-1}\tilde{l}f$, on rakendatavad ka sirge P_1 puhul, kui vaid lugeda, et f on kujutus $P \to \tilde{V}_2$ ja $\tilde{l}$ on teisendus $\tilde{V}_2 \to \tilde{V}_2$. Sirge P_1 sobivate teisenduste hulga väljaeraldamiseks tuleb nõuda, et P_1 struktuur, mille see teisenduste hulk säilitab, ühtiks struktuuriga, mis sirgel indutseerub siis, kui teda vaadelda kuuluvana mingile tasandile P_2 ja sooritada selle P_2 kõik kollineatsioonid, mis kujutavad vaadeldava P_1 tagasi samale sirgele P_1. Sellise olukorra määrab järgmine definitsioon.

Def. **117.3.** Sirge P_1 teisendust $\varphi = f^{-1}lf$, kus f on 1 : 1-pealekujutus $P \to \tilde{V}_2$ ja l on ruumi V_2 lineaarteisendus, nimetatakse sirge P_1 projektiivseks teisenduseks.

Osutub, et P_1 nii defineeritud teisendus on täielikult määratud kolme järjestatud vastavate punktide paariga, s. t. sirge P_1 kahe reeperiga. Seega esineb sirgel P_1 tema projektiivsete teisenduste puhul tõepoolest teoreemis 117.2 kirjeldatud olukord, kui lugeda $P'_1 = P_1$.

Selle väite tõestamiseks märgime esmalt, et P_1 iga projektiivne teisendus viib tema iga reeperi jälle reeperiks, kusjuures ruumi V_2 lineaarteisenduste hulk jaotub ekvivalentsusklassidesse nii, et iga kaks lineaarteisendust ühest klassist määravad ühe ja sellesama teisenduse $\varphi : P_1 \to P_1$. Lineaarteisendused l_1 ja l_2 kuuluvad ühte klassi parajasti siis, kui iga $X \in V_2$ korral vektorid $X' = l_1(X)$ ja $X'' = l_2(X)$ kuuluvad ühte ühemõõtmelisse alamruumi, s. t. $X'' = X'\sigma$.

Olgu nüüd sirgel P_1 antud kaks reeperit $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, E\}$ ja $\mathfrak{R}' = \{A'_1, A'_2, E'\}$. Valime vabalt esimese reeperi omabaasi $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2\}$ ning teise reeperi kaks omabaasi $\{\boldsymbol{A}'_1, \boldsymbol{A}'_2\}$ ja $\{\bar{\boldsymbol{A}}'_1, \bar{\boldsymbol{A}}'_2\}$. Määrame nende omabaaside abil ruumi V_2 kaks lineaarteisendust l_1 ja l_2; nimelt olgu $\boldsymbol{A}'_j = \boldsymbol{A}_i c_j{}^i$ ja $\bar{\boldsymbol{A}}'_j = \boldsymbol{A}_i \bar{c}_j{}^i$. Vabalt võetud vektorit $X \in V_2$ seovad siis tema kujutistega X' ja $\bar{X}'$ valemid $x^i = c_j{}^i{}'x^j$ ja $x^i = \bar{c}_j{}^i \bar{x}^j$. Et tegemist on antud reeperi $\mathfrak{R}'$ omabaasidega, siis $\bar{\boldsymbol{A}}'_i = \boldsymbol{A}'_i\lambda$, $\lambda \neq 0$, järelikult $\boldsymbol{A}_i\bar{c}_j{}^i = \boldsymbol{A}_i c_j{}^i\lambda$, s. t. $\bar{c}_j{}^i = c_j{}^i\lambda$ ehk $\bar{C} = \lambda C$. Seepärast ka $\bar{C}^{-1} = \varkappa C^{-1}$, $\varkappa \neq 0$ ja $\bar{X}' = \bar{C}^{-1}X = (\varkappa C^{-1})X = (\varkappa C^{-1})(CX') = (C^{-1}C)X'\varkappa = X'\varkappa$, mis näitab, et vektori X kujutised kuuluvad ühte ja samasse ühemõõtmelisse alamruumi. Järelikult osutuvad lineaarteisendused l_1 ja l_2 ekvivalentseteks, mistõttu sirge P_1 projektiivne teisendus φ, mille puhul $\varphi(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}'$, on määratud üheselt.

On selge, et sirge P_1 projektiivsete teisenduste hulk moodustab rühma, sest teoreemi 117.7 tõestuskäik ei sõltu vaadeldava ruumi mõõtmest.

Tuletame kollineatsiooni $\varphi = f^{-1}lf$ valemid, s. t. valemid, mis võimaldavad arvutada iga punkti $X \in P_{n-1}$ kujutise $X' = \varphi(X)$ koordinaate punkti X koordinaatide kaudu. Olgu $\boldsymbol{X}$ ja $\boldsymbol{X}'$ nende punktide mingid esindajad. Valime vabalt reeperi $\mathfrak{R}$. Et φ säilitab punktide sõltumatuse, siis saab ka kujutise $\mathfrak{R}' = \varphi(\mathfrak{R})$ lugeda reeperiks. Põhiteoreemi 117.3 kohaselt kollineatsioon φ on täielikult määratud järjestatud paariga $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$. Olgu $\{\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n\}$ ja $\{\boldsymbol{A}'_1, \ldots, \boldsymbol{A}'_n\}$ nende reeperite mingid omabaasid, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}_i x^i$, $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}_i x'^i$ ja $l(\boldsymbol{A}_j) = \boldsymbol{A}'_j = \boldsymbol{A}_i c_j{}^i$, kus $\|c_j{}^i\| = C$ on lineaarteisenduse maatriks baasil $\{\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n\}$ (art. 105). Et $X' = \varphi(X) = f^{-1}lf(X)$, siis $f(X') = lf(X)$, s. t. $\{\boldsymbol{X}'\mu\} = l(\{\boldsymbol{X}\nu\})$, niisiis

$$A_i\mu'x^i = l(A_i)\nu x^i = A_j c_i^j \nu x^i,$$
$$\mu' x^i = \nu c_j^i x^j,$$
$$'x^i = \sigma c_j^i x^i, \tag{117.6}$$

kus $\sigma = \nu\mu^{-1}$ on vabalt valitav nullist erinev reaalarv. Saadud valemid määravadki kollineatsiooni φ; kirjutame nad maatrikskujus:

$$X' = \sigma CX. \tag{117.7}$$

Regulaarset maatriksit C nimetatakse kollineatsiooni φ maatriksiks reeperi $\mathfrak{R}$ suhtes. Antud kollineatsiooni maatriks on määratud suvalise nullist erineva kordajani; see asjaolu on kooskõlas kollineatsiooni $\varphi = f^{-1}lf$ ja lineaarteisenduse l vahekorraga.

Pöördkollineatsiooni valemite saamiseks võib arutleda analoogiliselt või lahendada (117.6) võrrandisüsteemina punkti X koordinaatide suhtes; tulemuseks on valemid

$$x^i = \tau \overset{*}{c}_j{}^i\, 'x^j \quad \text{ehk} \quad X = \tau C^{-1}X', \quad \tau \neq 0, \quad \tau \in R. \tag{117.8}$$

Kui valemites (117.6) ja (117.8) võtta $i, j = 1, 2$, siis saame sirge P_1 projektiivse teisenduse ja pöördteisenduse valemid. Tegemist on selle rühma erijuhuga, mida $n \geqslant 3$ puhul nimetatakse kollineatsioonide rühmaks. Seepärast edaspidi, rääkides rühmast K, mõistame selle all alati (kui uuritava probleemi sisu seda lubab) ka sirge P_1 projektiivsete teisenduste rühma.

Sirge P_1 uurimisel on sageli otstarbekas kasutada mittehomogeenseid koordinaate. Nagu kerge kontrollida, saab näiteks valemid (117.6) sel juhul kokku võtta ühe valemina (vrd. (111.6.))

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \tag{117.9}$$

See valem kirjeldab ka kujutust $P_1 \to P'_1$, mille indutseerib sirget P_1 sisaldava ruumi kollineatsioon. Kui sirge P'_1 reeperiks võtta sirge P_1 reeperi kujutis, siis (nagu nähtub teoreemist 117.2) peavad koordinaadid sirgetel P_1 ja P'_1 ühtima: $x' = x$. Kui aga nõuda ainult P'_1 baaspunktide ühtimist P_1 baaspunktide kujutistega, siis peab valemis (117.9) $x = \infty$ puhul ka $x' = \infty$, järelikult $\gamma = 0$; samuti peab $x = 0$ puhul ka $x' = 0$, seega $\beta = 0$. Niisiis esitab kujutust $P_1 \to P'_1$ sel juhul valem

$$x' = \lambda x, \quad \lambda \neq 0. \tag{117.10}$$

Duaalsuse printsiip võimaldab sirge P_1 kohta saadud tulemused üle kanda lineaarikimpudele, näiteks rääkida kimbu projektiivsest teisendusest ja ühe kimbu projektiivsest kujutusest teisele kimbule. Kimpude kujutusi kirjeldavad samuti (117.9) ja (117.10) tüüpi valemid.

Märgime veel, et valemite (117.7) põhjal on sirge P_1 projektiivsete teisenduste rühm kolme-, tasandi P_2 ja ruumi P_3 kollineatsioonide rühm aga vastavalt kaheksa- ja viieteistkümneparameetriline (vrd. art. 111).

118. Korrelatsioonid. Vaatleme kaht projektiivset ruumi P_{n-1} ja $\overline{P}_{n-1}$, mille määravad kujutused $f : P \rightarrow \tilde{V}_n$ ja $\bar{f} : \overline{P} = \tilde{V}_n$, kus P ja $\overline{P}$ võivad olla erinevad hulgad. Olgu antud mingi projektiivne kujutus $\hat{\varphi} : P_{n-1} \rightarrow \overline{P}_{n-1}$; esitame selle valemitega.

Märgime esmalt, et projektiivse kujutuse erijuhuks on ruumi P_{n-1} kollineatsioon; sel juhul on täidetud tingimus $\overline{P} = P$ ning f ja $\bar{f}$ on kooskõlalised kujutused. Teatavasti iga kollineatsioon $P_{n-1} \rightarrow P_{n-1}$ on üheselt määratav reeperite järjestatud paariga. See teoreem on kergesti üldistatav: projektiivne kujutus $\hat{\varphi}$ on täielikult määratav ruumide P_{n-1} ja $\overline{P}_{n-1}$ reeperite järjestatud paariga.

Olgu ruumis P_{n-1} vabalt valitud reeper $\mathfrak{R}$ ja olgu $\hat{\varphi}(\mathfrak{R}) = \overline{\mathfrak{R}} \subset \overline{P}_{n-1}$. Kujutuse $\hat{\varphi}$ uurimisel saab nüüd aluseks võtta paari $(\mathfrak{R}, \overline{\mathfrak{R}})$, sest $\overline{\mathfrak{R}}$ võib lugeda ruumi $\overline{P}_{n-1}$ reeperiks. Paarile $(\mathfrak{R}, \overline{\mathfrak{R}})$ vastab teatav alamhulkade paar $(\mathfrak{R}', \overline{\mathfrak{R}}'), = (f(\mathfrak{R}), \bar{f}(\overline{\mathfrak{R}}))$ hulgas $\tilde{V}_n$. Et $\tilde{V}_n$ on $(n-1)$-mõõtmeline projektiivne ruum (def. 106.3), siis $\mathfrak{R}'$ ja $\overline{\mathfrak{R}}'$ võib lugeda reeperiteks selles ruumis Nende reeperite abil on määratud teatav kollineatsioon $\tilde{l} : \tilde{V}_n \rightarrow \tilde{V}_n$, mille saab tekitada sobiva lineaarteisendusega $l : V_n \rightarrow V_n$. Siit ilmneb, et kujutus $\hat{\varphi}$ on esitatav võrdusega $\hat{\varphi} = \bar{f}^{-1} \tilde{l} f$.

$$\begin{tikzcd} \tilde{V}_n \arrow[r, "\tilde{l}"] & \tilde{V}_n \\ P_{n-1} \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\hat{\varphi}"'] & \overline{P}_{n-1} \arrow[u, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

Võtame reeperite $\mathfrak{R}$ ja $\overline{\mathfrak{R}}$ mingid omabaasid $\{\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n\}$ ja $\{\overline{\boldsymbol{A}}_1, \ldots, \overline{\boldsymbol{A}}_n\}$ ning fikseerime teisenduse l tingimustega $l(\boldsymbol{A}_i) = \overline{\boldsymbol{A}}_i = \boldsymbol{A}_j c_i^j$. Olgu suvalise punkti $X \in P_{n-1}$ kujutiseks punkt $\overline{X} = \varphi(X)$ ning $\boldsymbol{X}$ ja $\overline{\boldsymbol{X}}$ nende punktide mingid esindajad. Et $\boldsymbol{X}$ ja $\overline{\boldsymbol{X}}$ on mõlemad ruumi V_n elemendid, siis saab neid avaldada selle baasi $\{\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n\}$ kaudu: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}_i x^i$, $\overline{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}_i \bar{x}^i$.

Kujutuse $\hat{\varphi}$ valemid reeperi $\mathfrak{R}$ suhtes, s. t. valemid, mis võimaldavad arvutada kujutise koordinaate $\bar{x}^i$ originaali koordinaatide x^i kaudu, saab nüüd tuletada täpselt samal viisil nagu kollineatsiooni puhul. Et $\bar{X} = \hat{\varphi}(X) = \bar{f}^{-1}lf(X)$, siis $\bar{f}(\bar{X}) = lf(X)$, seega $\{\bar{X}\mu\} = l(\{X\nu\})$, s. t.

$$\bar{A}_j\mu\bar{x}^j = l(A_i\nu x^i) = l(A_i)\nu x^i = A_j c_i{}^j \nu x^i,$$

$$\bar{x}^j = \sigma c_i{}^j x^i, \qquad \sigma = \mu^{-1}\nu \in \mathrm{R}, \qquad \sigma \neq 0. \tag{118.1}$$

Kuju poolest ühtivad saadud valemid kollineatsiooni valemitega (117.6).

Ruumi P_{n-1} projektiivsete kujutuste hulgast pakub erilist huvi kujutus $\hat{\varphi}: \mathrm{P}_{n-1} \to \Pi_{n-1}$, kus Π_{n-1} on ruumi P_{n-1} lineaaride hulk.

Def. 118.1. Ruumi P_{n-1} $(n \geqslant 3)$ kujutust $\hat{\varphi} = \bar{f}^{-1}lf$, mille määravad 1 : 1-pealekujutused $f: \mathrm{P} \to \tilde{\mathrm{V}}_n$ ja $\bar{f}: \Pi_{n-1} \to \tilde{\mathrm{V}}_n$ ning lineaarteisendus $l: \mathrm{V}_n \to \mathrm{V}_n$, nimetatakse ruumi P_{n-1} k o r r e l a t s i o o n i k s.

$$\begin{tikzcd} \tilde{V}_n \arrow[r, "\tilde{l}"] & \tilde{V}_n \\ P_{n-1} \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\hat{\varphi}"'] & \bar{P}_{n-1} \arrow[u, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

Kerge on mõista, et pöördkorrelatsiooni esitab võrdus $\hat{\varphi}^{-1} = f^{-1}l^{-1}\bar{f}$.

Eespool projektiivse kujutuse kohta tehtud märkuse põhjal kehtib järgmine k o r r e l a t s i o o n i d e p õ h i t e o r e e m: leidub parajasti üks korrelatsioon $\hat{\varphi}: \mathrm{P}_{n-1} \to \Pi_{n-1}$, mis viib ruumi P_{n-1} antud reeperi lineaaride ruumi Π_{n-1} antud reeperiks.

Et korrelatsioon on ruumi P_{n-1} projektiivne kujutus, siis saab teda esitada valemitega (118.1). Võttes arvesse kokkulepped lineaaride koordinaatide tähistamise ja indekssummeerimise kohta, kirjutame korrelatsiooni valemid kujul

$$u_i = \sigma c_{ij} x^j, \qquad \sigma \in \mathrm{R}, \qquad \sigma \neq 0. \tag{118.2}$$

Siin x^i on punkti $X \in \mathrm{P}_{n-1}$ ja u_i vastava lineaari U koordinaadid ruumi P_{n-1} antud reeperi suhtes. Maatrikskujus ei erine valemid (118.2) oluliselt kollineatsiooni valemitest (117.7):

$$\mathrm{U} = \sigma \mathrm{C} \mathrm{X}. \tag{118.3}$$

Korrelatsiooni maatriks $\mathrm{C} = \|c_{ij}\|$ on määratud nullist erineva arvkordajani. Pöördkorrelatsiooni valemid on

$$x^i = \tau c^{ij} u_j \quad \text{ehk} \quad \mathrm{X} = \tau \mathrm{C}^{-1}\mathrm{U}, \qquad \tau \in \mathrm{R}, \qquad \tau \neq 0. \tag{118.4}$$

Kaht korrelatsiooni, samuti nagu kaht pöördkorrelatsiooni, korrutada ei saa. Küll on korrutatav iga korrelatsioon ja iga pöördkorrelatsioon, kusjuures alati on tulemuseks teatav kollineatsioon. Tõepoolest, mistahes $\hat{\varphi} = \bar{\bar{f}}^{-1} l_1 f$ ja $\hat{\psi} = \bar{\bar{f}}^{-1} l_3 f$ korral

$$\hat{\psi}^{-1}\hat{\varphi} = (f^{-1} l_2^{-1} \bar{f})(\bar{f}^{-1} l_1 f) = (f^{-1} l_2^{-1})(\bar{f}\bar{f}^{-1})(l_1 f) = f^{-1}(l_2^{-1} l_1) f = f^{-1} l_3 f,$$

$$\hat{\varphi}\hat{\psi}^{-1} = (\bar{f}^{-1} l_1 f)(f^{-1} l_2^{-1} \bar{f}) = (\bar{f}^{-1} l_1)(f f^{-1})(l_2^{-1} \bar{f}) = \bar{f}^{-1}(l_1 l_2^{-1}) \bar{f} = \bar{f}^{-1} l_4 \bar{f},$$

kus $l_3 = l_2^{-1} l_1$, $l_4 = l_1 l_2^{-1}$, $\hat{\psi}^{-1}\hat{\varphi}$ on ruumi P_{n-1} kollineatsioon ja $\hat{\varphi}\hat{\psi}^{-1}$ on ruumi Π_{n-1} kollineatsioon.

Kollineatsiooni ja korrelatsiooni korrutis on korrelatsioon: kui $\varphi = f^{-1} l_1 f$ ja $\hat{\varphi} = \bar{f}^{-1} l_2 f$, siis $\varphi\hat{\varphi} = \bar{f}^{-1} l_3 f$, kus $l_3 = l_2 l_1$. Tegurite vahetamiseks tuleb $\hat{\varphi}$ asendada pöördkorrelatsiooniga $\hat{\varphi}^{-1}$ või lugeda φ ruumi Π_{n-1} kollineatsiooniks, s. t. võtta $\varphi = \bar{\varphi} = \bar{f}^{-1} l_1 \bar{f}$. Mõlemal juhul on tulemuseks teatav korrelatsioon (pöördkorrelatsioon).

Ruumi P_{n-1} korrelatsioon ei ole ruumi P_{n-1} teisendus Saab aga moodustada hulga, mille teisenduste hulk hõlmab ruumi P_{n-1} kõiki kollineatsioone ja korrelatsioone. Selliseks hulgaks on ühend $P_{n-1} \cup \Pi_{n-1}$, s. t. hulk, mille elementideks on ruumi P_{n-1} kõik punktid ja kõik lineaarid.

Ruumi Π_{n-1} omapäraks on asjaolu, et ta moodustatakse ruumi P_{n-1} abil. Seejuures on oluline mitte ainult see, et ruumi Π_{n-1} «punktideks» on ruumi P_{n-1} maksimaalse mõõtmega alamruumid, vaid ka see, et Π_{n-1} projektiivset struktuuri määrav kujutus $\bar{f}: \Pi_{n-1} \to \tilde{V}_n$ on tekitatud P_{n-1} struktuuri määrava kujutusega $f: P \to \tilde{V}_n$. Tõepoolest, kui hulgas P on defineeritud projektiivne sõltuvus ja projektiivsed koordinaadid (kujutus $P_{n-1} \to \tilde{R}^n$), siis on määratud ka lineaaride hulk Π_{n-1}, projektiivne sõltuvus ning koordinaadid (kujutus $\Pi_{n-1} \to R^n$) selles hulgas. Siit järeldub, et iga kollineatsioon $\varphi: P_{n-1} \to P_{n-1}$, $\varphi = f^{-1} l f$ indutseerib teatava kollineatsiooni $\bar{\varphi}: \Pi_{n-1} \to \Pi_{n-1}$, $\bar{\varphi} \to \bar{f}^{-1} l \bar{f}$, nimelt lineaarile $U \in \Pi_{n-1}$ vastab selle lineaari punktide kujutistest koosnev lineaar. Analoogiliselt tekitab iga korrelatsioon $\hat{\varphi}: P_{n-1} \to \Pi_{n-1}$ teatava 1 : 1-pealekujutuse $\Pi_{n-1} \to P_{n-1}$, nimelt pöördkorrelatsiooni $\hat{\varphi}^{-1}$.

Üldistame kollineatsiooni ja korrelatsiooni mõisteid. Nimetame hulga $P_{n-1} \cup \Pi_{n-1}$ kollineatsiooniks kujutuste paari $(\varphi, \bar{\varphi})$ ja korrelatsiooniks kujutuste paari $(\hat{\varphi}, \hat{\varphi}^{-1})$. On selge, et mõlemal juhul on tegemist hulga $P_{n-1} \cup \Pi_{n-1}$ teatavate teisendustega. Seejuures osutub võimalikuks korrutada iga kaht elementi väljaeraldatud teisenduste hulgast. Kollineatsioonide hulk moodustab rühma, korrelatsioonide hulk aga mitte, sest iga kahe korrelatsiooni korrutis on kollineatsioon. Hulga $P_{n-1} \cup \Pi_{n-1}$ kõigi kollineatsioonide ja kõigi korrelatsioonide hulk on samuti rühm — hulga $P_{n-1} \cup \Pi_{n-1}$ projektiivsete teisenduste rühm.

Et korrelatsiooni maatriksiks võib olla mistahes regulaarne

n-järku maatriks C, siis üldiselt $C^T = C$ ja korrelatsioon, mille määravad valemid

$$u_j = \varrho c'_{ij} x_i \quad \text{ehk} \quad U = \varrho C^T X, \quad \varrho \in R, \quad \varrho \neq 0, \tag{118.5}$$

erineb korrelatsioonist (118.2). Korrelatsioone (118.2) ja (118.5) nimetatakse teineteise kaaskorrelatsioonideks.

Korrelatsiooni toimel tekib teatav vastavus ka ruumi P_{n-1} punktide hulgas: punktile X vastavad kõik punktid tema kujutisel — lineaaril U. Korrelatsiooni (118.2) puhul vastab punktile X iga punkt Y, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$u_i y^i = 0 \quad \text{ehk} \quad c_{ij} x^j y^i = 0.$$

Siit ilmneb omakorda, et igale sellisele punktile Y vastab punkt X kaaskorrelatsioonis (118.5).

Erijuhul võivad kaaskorrelatsioonid ühtida, s.t. $C^T X = \lambda C X$ iga $X \in P_{n-1}$ korral; siis muidugi $C^T = \lambda C$. Viimase võrduse poolte transponeerimisel saame võrduse $C = \lambda C^T$, mistõttu $C = \lambda^2 C$ ja seepärast $\lambda = \pm 1$. Kui $\lambda = 1$, siis korrelatsiooni maatriks on sümmeetriline: $C^T = C$; kui aga $\lambda = -1$, siis C on kaldsümmeetriline maatriks: $C^T = -C$. Esimesel juhul nimetatakse korrelatsiooni polaarseks, teisel — nullpolaarseks.

Korrelatsiooni mõistet üldistavalt uuritakse ka juhte, kui maatriks C valemites (118.2) ja (118.5) on singulaarne, s.t. $|C| = 0$. Sellistel puhkudel korrelatsioon $P_{n-1} \to \Pi_{n-1}$ ei ole kujutus.

Polaarset korrelatsiooni, ka mitteregulaarset, vaatleme järgmises paragrahvis seoses kvadrikute projektiivse teooriaga.

119. Projektiivne geomeetria ja selle põhiinvariant. Kasutades ruumi P_{n-1} struktuuri säilitavate teisenduste hulka, mille eraldasime välja eespool, saab defineerida projektiivse geomeetria. Olulisteks osutuvad siinjuures ainult kollineatsioonid, sest korrelatsioonide võimalikkus sisaldub duaalsuse printsiibi näol ruumi P_{n-1} struktuuris endas.

Projektiivse geomeetria mõisteni viib järgmine definitsioonide ahel.

***Def.* 119.1.** Kujundit M ruumis P_{n-1}, s.o. ruumi P_{n-1} alamhulka M, nimetatakse projektiivselt ekvivalentseks kujundiga $M' \subset P_{n-1}$, kui selle ruumi kollineatsioonide rühmas K leidub teisendus φ, nii et $\varphi(M) = M'$. Sel juhul kirjutatakse $M \overset{K}{\sim} M'$.

Toetudes hulga K rühmaomadustele, on kerge kontrollida, et seos $M \sim M'$ on tõepoolest ekvivalentsusseos def. 18.1 mõttes. Selle seose abil jaotab rühm K ruumi P_{n-1} kõigi kujundite hulga ekvivalentsusklassidesse.

Def. **119.2.** Kujundi $M \subset P_{n-1}$ punktide vahelisi seoseid, mis on ühised kõigi kujundiga M projektiivselt ekvivalentsete kujundite jaoks, nimetatakse kujundi M projektiivselt invariantseteks omadusteks.

Def. **119.3.** Eeskirja, mis seab ruumi P_{n-1} igale p punktist koosnevale süsteemile vastavusse teatud reaalarvu σ, nimetatakse skalaarfunktsiooniks selliste süsteemide hulgal ja tähistatakse $\sigma = \sigma(X_1, \ldots, X_p)$. Süsteemide hulgal $\{(X_1, \ldots, X_p)\}$ defineeritud skalaarfunktsiooni σ nimetatakse rühma K suhtes invariantseks funktsiooniks ehk lühidalt rühma K invariandiks, kui hulk $\{(X_1, \ldots, X_p)\}$ jaotub antud p korral K toimel ekvivalentsusklassidesse ja σ on konstantne igal ekvivalentsusklassil, kuid muutub üleminekul ühest klassist teise.

Def. **119.4.** *Kõigi selliste lausete hulka, mis määravad ruumis P_{n-1} rühma K toimel ekvivalentsusklassidesse jaotuvaid kujundite hulki ja nende projektiivselt invariantseid vahekordi (definitsioonid) või kirjeldavad kujundite projektiivselt invariantseid omadusi ja seoseid rühma K invariantidega (teoreemid), nimetatakse projektiivseks geomeetriaks.*

Samal viisil saab anda uue definitsiooni ka afiinse ja eukleidilise geomeetria jaoks, kasutades rühma K asemel vastavate ruumide afiinsete teisenduste või liikumiste rühmi.

On selge, et kõik eespool ruumi P_{n-1} kohta tehtud tähelepanekud kuuluvad projektiivsesse geomeetriasse.

Kujundite uurimisel on oluline osa selliste lõplikust arvust punktidest (ruumis Π_{n-1} lineaaridest) koosnevate süsteemide väljaeraldamisel, millega kujundid on täielikult määratud. Niisuguste süsteemide abil saab kujunditega siduda vaadeldava teisenduste rühma invariante. Seejuures osutub, et lõplikel punktihulkadel defineeritud invariantide seas leidub selline, mille kaudu saab avaldada antud teisenduste rühma kõik ülejäänud seda tüüpi invariandid. Niisugust lihtsaimat invarianti nimetatakse vaadeldava geomeetria põhiinvariandiks. Eukleidilises geomeetrias on põhiinvariandiks kahe punkti vaheline kaugus, afiinses geomeetrias kolme ühel sirgel asetseva järjestatud punkti lihtsuhe.

Definitsioonist 119.3 ja kollineatsioonide põhiteoreemist 117.3 järeldub, et ruumis P_{n-1} ei leidu rühma K invariante p punktist koosneval süsteemil, kui $p = 1, 2, 3$, sest iga sellise p korral on iga kaks antud süsteemi projektiivselt ekvivalentsed. P_1 puhul nähtub see asjaolust, et punktid igas sellises süsteemis saab võtta sirge reeperi elementideks. Tasandil P_2 saab samuti talitada iga p üldasendis oleva punktiga, kui $p \leqslant 4$, ja ruumis P_3 iga p üldasendis oleva punktiga, kui $p \leqslant 5$. Iga kolme ühele sirgele kuuluva punktiga tasandil P_2 või ruumis P_3 saab aga siduda reeperi nii, et kaks neist on baaspunktid, näiteks A_1 ja A_2, ja kolmas on sirge A_1A_2 lõikepunkt sirgega A_3E (tasandil P_2) või tasandiga A_3A_4E. Siit ilmnebki, et iga kaht sellist punktikolmikut on võimalik sobiva kollineatsiooni teel kujutada teineteisele.

Vastupidi, projektiivses geomeetrias leidub invariant neljal ühele sirgele kuuluval punktil — selleks on nelja sellise punkti liitsuhe. Sirge P_1 puhul ilmnes see asjaolu juba art-s 114. Tõsi küll, seal näitasime, et liitsuhe ei muutu koordinaadistiku vahetamisel sirgel P_1, kuid vastavat koordinaaditeisenduse valemit (111.6) saab alati tõlgendada sirge P_1 projektiivse teisenduse valemina (117.5). Mis puutub tasandisse P_2 ja ruumi P_3, siis siin järeldub liitsuhte invariantsus kollineatsioonide uurimisel tõestatud teoreemist 111.2, mille kohaselt sirge indutseeritud projektiivne kujutus on täielikult määratud juba kolme vastavate punktide paariga. Sirge P_1 iga neljas punkt peab siis kujutuma üheselt määratud punktiks sõltumatult kujutust indutseeriva kollineatsiooni valikust. Siit tuleneb, et neljast ühele sirgele kuuluvast punktist koosnevate järjestatud süsteemide hulk jaotub rühma K toimel projektiivselt ekvivalentsete süsteemide klassidesse, kusjuures skalaarfunktsioon $\sigma(X_1, X_2, X_3, X_4) = (X_1X_2, X_3X_4)$ on igal klassil konstantne, üleminekul teise klassi aga muutub.

Kollineatsioonide põhiteoreemist 117.3 järeldub vahetult, et P_2 igal viiel ja P_3 igal kuuel punktil leidub projektiivne invariant. Kokkuvõttes võib siis öelda, et ruumis P_{n-1} leidub projektiivseid invariante igal p punktist koosneval süsteemil, kui kas 1) nendest punktidest mingid neli erinevat kuuluvad ühele sirgele või 2) mingid viis erinevat nendest kuuluvad ühele tasandile või 3) $p > n+2$.

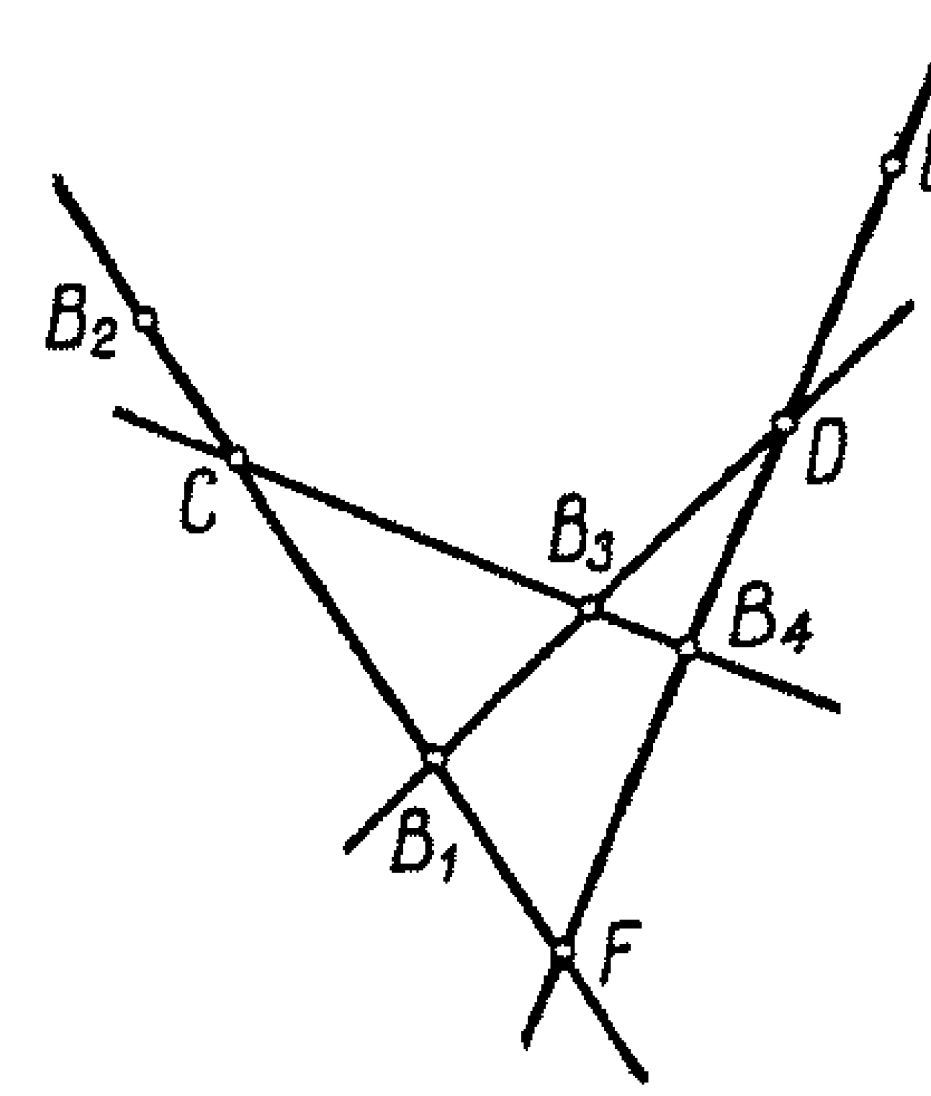
Osutub, et nelja punkti liitsuhe ongi projektiivse geomeetria põhiinvariant, s. t. ruumi P_{n-1} iga lõpliku punktisüsteemi projektiivne invariant on avaldatav liitsuhte kaudu.

Tõestame selle väite kõige lihtsamal erijuhul.

***Teoreem* 119.1.** *Tasandi* P_2 *iga üldasendis* [145] *oleva viie punkti iga projektiivne invariant on avaldatav liitsuhete kaudu.*

Tõestus. Olgu B_i $(i = 1, \ldots, 5)$ tasandi P_2 mingid üldasendis olevad punktid. Moodustame nende abil kaks neljast punktist koosnevat süsteemi, ühe sirgel B_1B_2, teise sirgel B_4B_5: $\{B_1, B_2, C, F\}$ ja $\{B_4, B_5, D, F\}$, kus $C = B_1B_2 \cap B_3B_4$, $F = B_1B_2 \cap B_4B_5$ ja $D = B_4B_5 \cap B_1B_3$, $F\}$ (joon. 209.). Moodustatud nelikute liitsuhted sõltuvad punktide B_i valikust ja on sellega täielikult määratud, s. t. need liitsuhted on punktide B_i skalaarfunktsioonid: $(B_1,B_2, CF) = \sigma_1(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5) \equiv \sigma(B_i)$ ja $(B_4B_5, DF) = \sigma_2(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5) \equiv \sigma_2(B_i)$.

[145] Nõue, et vaadeldavad punktid oleksid üldasendis, on siin lisatud vaid selleks, et ära jätta tülikas erijuhtude analüüs.



Joon. 209.

Näitame esmalt, et σ_1 ja σ_2 on projektiivsed invariandid. (Probleem tekib siin seetõttu, et ei vaadelda liitsuhteid mitte kõigi neljast punktist koosnevate süsteemide hulgal, mille määravad tasandi sirged, vaid viiest punktist koosnevate süsteemide hulgal. Ei ole näiteks põrmugi selge, kas selliste süsteemide $\{B_i\}$ hulk, millel σ ei muutu, kuulub ühte ekvivalentsusklassi.)

Olgu $\{B'_i\}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ mingi teine vaadeldavat tüüpi süsteem ja C', D', F' samal viisil lisatud punktid. Kui $\{B_i\} \overset{K}{\sim} \{B'_i\}$ (kus K on tasandi P_2 kollineatsioonide rühm), s. t. kui leidub $\varphi \in K$, nii et $\varphi : \{B_i\} \to \{B'_i\}$, siis $\varphi(C) = C'$, $\varphi(D) = D'$ ja $\varphi(F) = F'$, sest säilib intsidentsus. Seejuures $(B'_1B'_2, C'F') = (B_1B_2, CF)$ ja $(B'_4B'_5, D'F') = (B_4B_5, DF)$, s. t. $\sigma_\alpha(B'_i) = \sigma_\alpha(B_i)$ $(\alpha = 1, 2)$. Niisiis σ_1 ja σ_2 on ekvivalentsetel süsteemidel muutumatud.

Vastupidi, olgu $\{B'_i\}$ selline süsteem, et σ_α $(B'_i) = \sigma_\alpha(B_i)$. Leidub $\varphi \in K$, nii et $\varphi : \{B_1, B_2, B_4, B_5\} \to \{B'_1, B'_2, B'_4, B'_5\}$ (teoreem 117.3); seejuures $\varphi(F) = F'$. Eelduse järgi $(B'_1B'_2, C'F') = (B_1B_2, CF)$, seepärast ka $\varphi(C) = C'$. Samuti järeldub võrdusest $(B'_4B'_5, D'F') = (B_4B_5, DF)$, et $\varphi(D) = D'$. Nüüd on selge, et $\varphi : B_1D \to B'_1D'$ ja $\varphi : B_4C \to B'_4C'$, mistõttu ka $\varphi(B_3) = B'_3$. Kokkuvõttes $\varphi : \{B_i\} \to \{B'_i\}$, seega $\{B'_i\} \overset{K}{\sim} \{B_i\}$. Siit nähtub, et σ_1 ja σ_2 on võrdsed ainult ekvivalentsetes viie punkti süsteemides. Nad ei saa olla samaselt konstantsed, sest tasandi kõik üldasendis olevad viie punkti süsteemid ei ole K suhtes ekvivalentsed. Järelikult funktsioonid σ_1 ja σ_2 on projektiivsed invariandid.

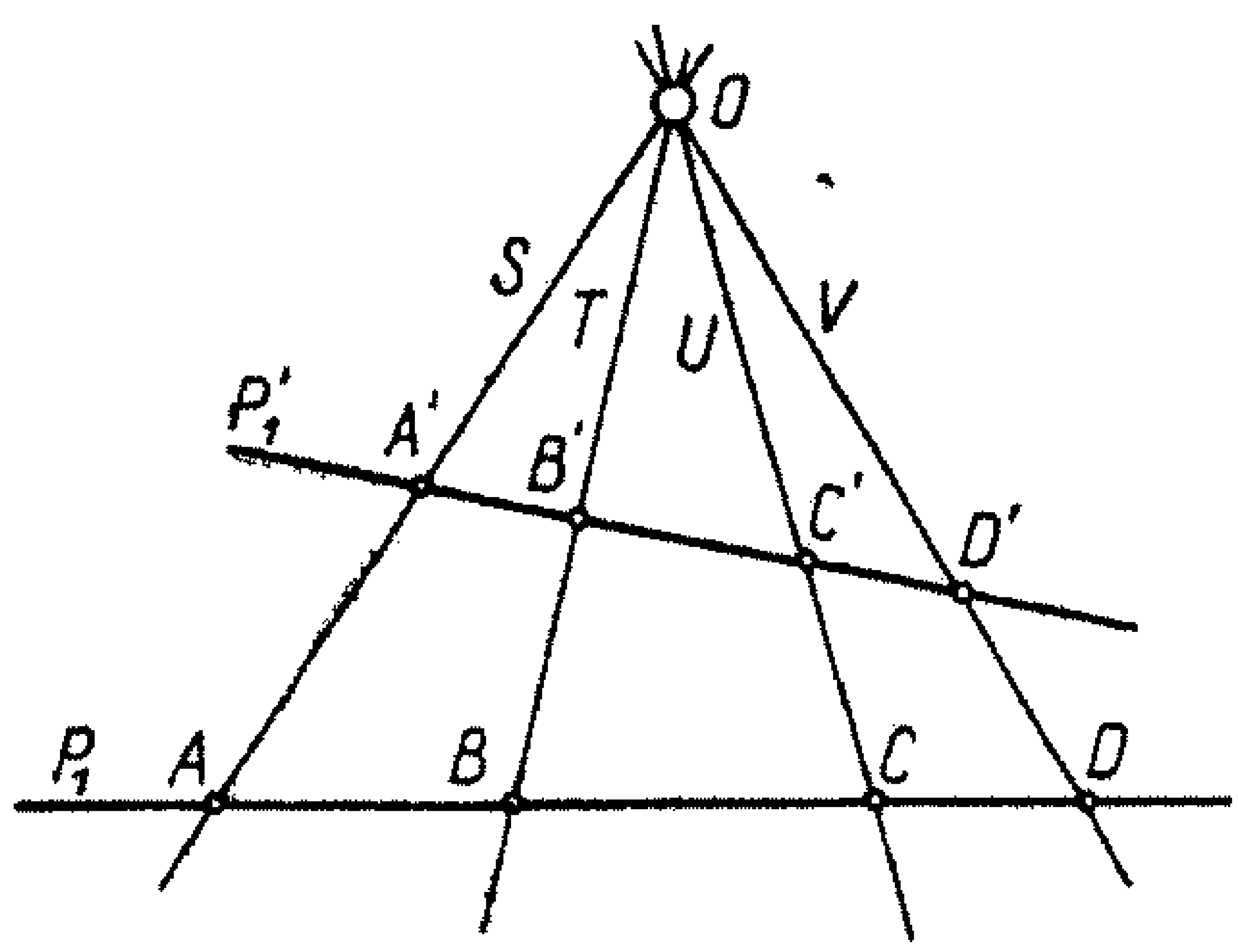
Tõestame nüüd põhiväite. Olgu $\sigma(X_i)$ $(i = 1, \ldots, 5)$ P_2 viie punkti vabalt valitud invariant ja H kõigi selliste viie punkti süsteemide hulk, mille puhul σ_1 ja σ_2 ei muutu. Nagu tõestuse esimeses osas selgus, peavad sellise hulga H kõik elemendid olema K suhtes omavahel ekvivalentsed. Siis peab aga ka invariant σ olema hulgal H konstantne. Kaks viie punkti süsteemi, mille puhul nii σ_1 kui ka σ_2 väärtused on erinevad, ei saa eelneva põhjal olla ekvivalentsed, seepärast peab ka σ väärtus muutuma üleminekul ühelt selliselt süsteemilt teisele. Niisiis vastab σ_1 ja σ_2 igale fikseeritud väärtuste paarile σ kindel väärtus, σ_1 ja σ_2 muutudes peab aga muutuma ka σ. Selline vahekord näitabki, et σ on liitsuhete σ_1 ja σ_2 funktsioon: $\sigma = \sigma(\sigma_1, \sigma_2)$. ∎

Põhimõtteliselt samal viisil saab näidata, et iga p punkti ($p > 5$) projektiivne invariant on avaldatav liitsuhete kaudu.

120. Sirge ja sirgekimbu projektiivsed kujutused. Tõlgendame sirge P_1 projektiivsete teisenduste rühma projekteerimiste abil tasandil P_2.

***Def.* 120.1.** Sirge kujutust sirgele nimetatakse perspektiivseks, kui kõik vastavaid punkte ühendavad sirged kuuluvad ühte kimpu O; sel juhul räägitakse ka sirge projekteerimisest kimbu O abil. Sirge kujutust sirgekimbule nimetatakse perspektiivseks, kui iga punkti kujutiseks on teda läbiv sirge.

***Teoreem* 120.1.** *Sirge perspektiivne kujutus sirgele või sirgekimbule säilitab liitsuhte.*



Joon. 210.

Tõestus. Perspektiivne kujutus $P_1 \to P'_1$ on sooritatav P_1 perspektiivse kujutusega projekteerivale kimbule O ja selle perspektiivse kujutusega sirgele P'_1 (joon. 210). Et kaks viimast kujutust on omavahel duaalsed, siis piisab, kui tõestada väide sirge kimbule kujutamise korral.

Olgu $A(a^i)$, $B(b^i)$, $C(c^i)$ ja $D(d_i)$ punktid sirgel P_1, $S(s_i)$, $T(t_i)$, $U(u_i)$ ja $V(v_i)$ sirged kimbus O ning $A \in S$, $B \in T$, $C \in U$ ja $D \in V$. Sobivate esindajavektorite korral $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U} + \lambda \boldsymbol{V}$ ja $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U} + \mu \boldsymbol{V}$. Et $s_i a^i = 0$ ja $t_i b^i = 0$, siis $u_i a^i + \lambda v_i a^i = 0$ ja $u_i b^i + \mu v_i b^i = 0$. Avaldades siit parameetrid λ ja μ, saab sirgete liitsuhte väljendada koordinaatide kaudu:

$$(UV, ST) = \frac{u_i b^i}{v_i b^i} : \frac{u_i a^i}{v_i a^i} = \frac{v_i a^i}{v_i b^i} : \frac{u_i a^i}{u_i b^i} .$$

Definitsioonist 114.3 ja valemist (114.6) järeldubki nüüd, et $(ST, UV) = (AB, UV) = (AB, CD)$. ∎

***Teoreem* 120.2.** *Iga 1 : 1-pealekujutus* $P_1 \to P'_1$, *mis säilitab liitsuhte, on projektiivne.*

Tõestus. Olgu $[A(a), A'(a')]$, $[B(b), B'(b')]$ ja $[C(c), C'(c')]$ kolm vastavate punktide paari. Eelduse kohaselt iga ülejäänud sellise paari $[X(x), X'(x')]$ korral

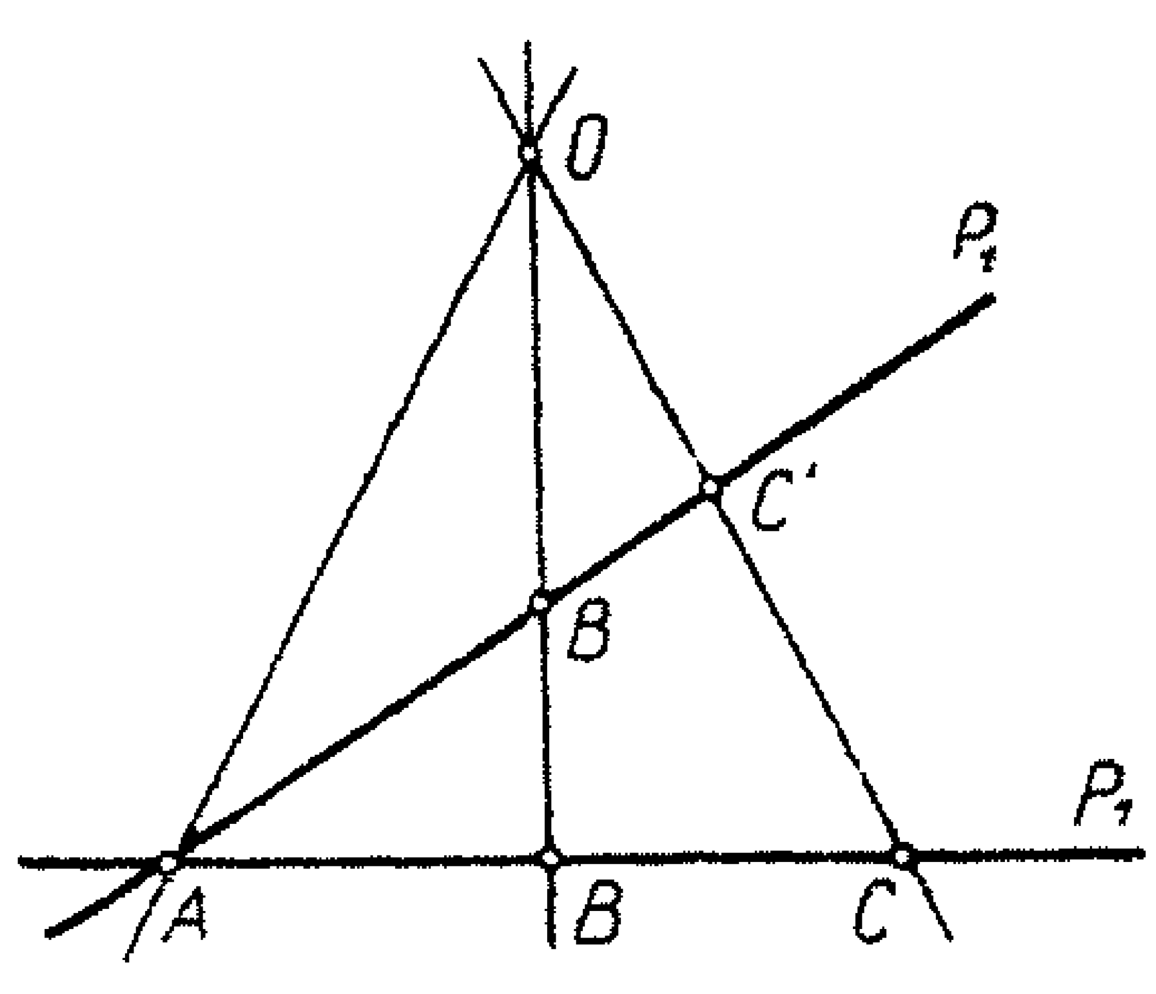
$$\frac{a' - c'}{b' - c'} : \frac{a' - x'}{b' - x'} = \frac{a - c}{b - c} : \frac{a - x}{b - x},$$

seega $\frac{a'-x'}{b'-x'}=\nu\frac{a-x}{b-x}$, kus $\nu=\frac{(a'-c')(b-c)}{(b'-c')(a-c)}\neq 0$, kui vaid punktid kummaski antud kolmikus on erinevad. Siit $x'=$ $=\frac{(\nu a'-b')x+(b'a-\nu a'b)}{(\nu-1)x+(a-\nu b)}=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ (vt. (117.9)), kus

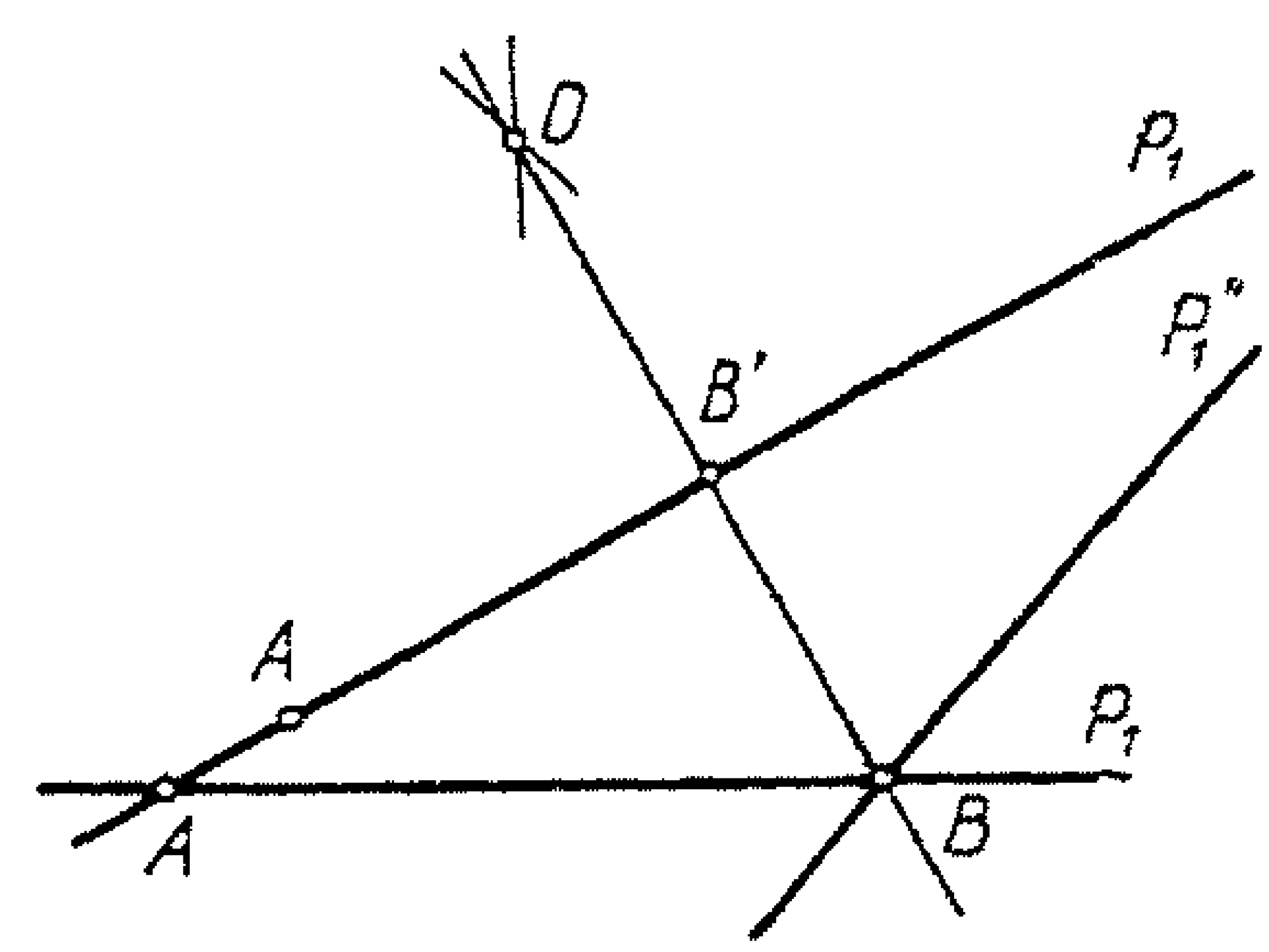
$$\alpha\delta-\beta\gamma=(\nu a'-b')(a-\nu b)-(b'a-\nu a'b)(\nu-1)=$$
$$=\nu(a-b)(a'-b')\neq 0. \blacksquare$$

Teoreem **120.3.** *Projektiivne kujutus* $p:\mathrm{P}_1\to\mathrm{P}'_1$ $(\mathrm{P}'_1\neq\mathrm{P}_1)$, *millel on üks püsipunkt, on sooritatav ühe projekteerimisega.*

T õ e s t u s. Püsipunktiks saab olla vaid punkt $A=\mathrm{P}_1\cap\mathrm{P}'_1$. Niisiis $p(A)=A$. Olgu (B, B') ja (C, C') mingid erinevad vastavate punktide paarid, mis ei sisalda A. Punkt $O=BB'\cap CC'$ ei kuulu sirgetele P_1 ja P'_1, seega määrab ta perspektiivse kujutuse $t:\mathrm{P}_1\to\mathrm{P}'_1$ (joon. 211). Teoreemide 120.1 ja 120.2 põhjal on t samuti projektiivne kujutus. Et $t(A)=A$, $t(B)=B'$ ja $t(C)=C'$, siis kujutustel t ja p on kolm ühist vastavate punktide paari. Teoreemist 117.2 järeldub nüüd, et $p=t$. $\blacksquare$



Joon 211.



Joon 212.

Teoreem **120.4.** *Kujutus* $p:\mathrm{P}_1\to\mathrm{P}'_1$ *on projektiivne parajasti siis, kui ta on esitatav lõpliku arvu perspektiivsete kujutuste korrutisena.*

T õ e s t u s. Teoreemide 120.1 ja 120.2 tõttu vajab tõestamist ainult tingimuse tarvilikkus.

Kui $\mathrm{P}'_1\neq\mathrm{P}_1$ ja $\mathrm{P}_1\cap\mathrm{P}'_1=A$, siis on teoreemi 120.3 põhjal tarvis vaadelda vaid juhtu, mil $p(A)=A'\neq A$. Olgu $p(B)=$ $=B'$. Võtame mingi punkti $O\in BB'$, $O\neq B$, $O\neq B'$ ja mingi sirge $P_1''\ni B$, $\mathrm{P}''_1\neq\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}''_1\neq BB'$ (joon. 212). Kujutuste korrutis $t_1p:\mathrm{P}_1\to\mathrm{P}'_1\to\mathrm{P}''_1$ on projektiivne; seejuures $t_1p(B)=$ $=t_1(B')=B$, s. t. punkt $B=\mathrm{P}_1\cap\mathrm{P}''_1$ on kujutuse t_1p püsipunkt. Teoreemi 120.3 põhjal t_1p on perspektiivne kujutus: $t_1p = t_2$. Järelikult $p = t_1^{-1}t_2$.

Kui $P'_1 = P_1$, s. t. vaadeldav kujutus p on projektiivne teisendus $\varphi : P_1 \to P_1$, siis on eelnev olukord saavutatav lisaperspektiivsusega $t_1 : P_1 \to P'_1$, kus $P'_1 \neq P_1$ on vabalt võetud sirge. Järelikult leiduvad perspektiivsed kujutused t_2 ja t_3, nii et $t_1\varphi = t_2^{-1}t_3$, mistõttu $\varphi = t_1^{-1}t_2^{-1}t_3$. ∎

Teoreemist 120.4 nähtub, et sirge P_1 projektiivset geomeetriat võib vaadelda P_1 kõigi selliste omaduste hulgana, mis ei muutu tema mistahes lõpliku arvu skeemi $P_1 \xrightarrow{O_1} P_1^{(1)} \xrightarrow{O_2} \ldots \xrightarrow{O_{k-1}} P_1^{(k-1)} \xrightarrow{O_k} P_1$ järgi vabalt moodustatud perspektiivsete kujutuste tagajärjel.

Teoreemidest 120.4 ja 120.1 järeldub ühtlasi, et *teisendus* $\varphi : P_{n-1} \to P_{n-1}$ *on projektiivne parajasti siis, kui ta säilitab iga ühele sirgele kuuluva nelja punkti liitsuhte.* Teoreemide 117.2 ja 120.2 põhjal võib koguni ütelda, et *ruumi* P_{n-1} *teisendus on projektiivne parajasti siis, kui ta säilitab punktinelikute harmoonilisuse.*

Projektiivne geomeetria kasvas välja perspektiiviprobleemidest renessansiaegses maalikunstis ja arhitektuuris. Seetõttu oli 17. sajandil selle geomeetria esimeste uurijate D e s a r g u e s'i ja P a s c a l i töödes aluseks kujundite projekteerimine. 18. sajandil projektiivsele geomeetriale tähelepanu ei pööratud. Alles M o n g e'i uurimustel 18. ja 19. saj. vahetusel on oluline tähtsus geomeetria selle suuna edaspidise arendamise jaoks. Projektiivse geomeetria kui iseseisva matemaatilise distsipliini rajas 19. saj. algul P o n c e l e t. Ka temal olid aluseks kujundite perspektiivsed kujutused. S t e i n e r ja C h a s l e s lähtusid oma töödes liitsuhte mõistest. Harmoonilisusele rajas projektiivse geomeetria S t a u d t, kes ühtlasi vabastas selle geomeetria täielikult seosest eukleidilise ja afiinse geomeetriaga. Analüütilised meetodid võttis uues geomeetrias esimesena kasutusele M ö b i u s[146].

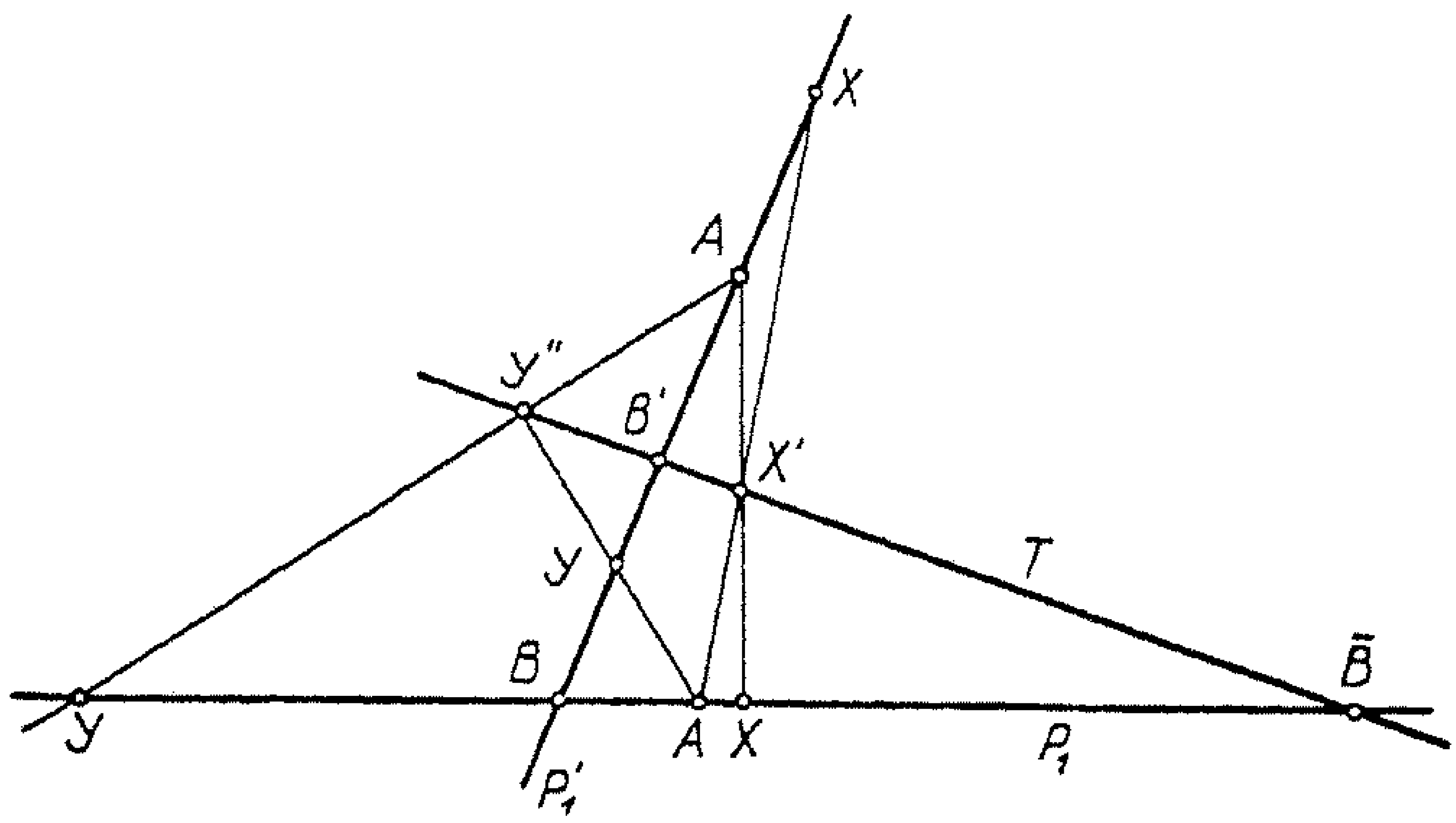
Anname meetodi sirge projektiivse kujutuse konstrueerimiseks.

Teoreem 120.5. *Projektiivne kujutus* $p : P_1 \to P'_1$ $(P'_1 \neq P_1)$ *määrab sirge, mille iga punkt on* P_1 *ja* P'_1 *mingi kahe vastavate punktide paariga* (X, X') *ja* (Y, Y') *määratud sirgete* XX' ja YY' *lõikepunkt.*

T õ e s t u s. Olgu (A, A'), $A' \neq A$ mingi vastavate punktide paar (joon. 213). Sirge P_1 saab perspektiivselt kujutada kimbule A', samuti sirge P'_1 kimbule A. Olgu $X \in P_1$ korral $t_1(X) = A'X$, $p(X) = X'$, $X' \in P'_1$ ja $t_2(X') = AX'$. Vaadeldavad kujutused tekitavad kimbu A' projektiivse kujutuse $q = t_2pt_1^{-1}$ kimbule A. Tõepoolest, $q(A'X) = t_2pt_1^{-1}(A'X) = t_2p(X) = t_2(X') = AX'$.

---

[146] P a s c a l, Blaise (1623—1662), prantsuse matemaatik ja filosoof. M o n g e, Gaspar (1746—1818), prantsuse matemaatik, kujutava geomeetria rajaja; P o n c e l e t, Jean Victor (1788—1862), prantsuse matemaatik; S t e i n e r, Jakob (1796—1863), šveitsi matemaatik; C h a s l e s, Michel (1793—1880), prantsuse matemaatik; S t a u d t, Karl Georg Christian v. (1798—1867), M ö b i u s, August Ferdinand (1790—1868) — saksa matemaatikud.



Joon. 213.

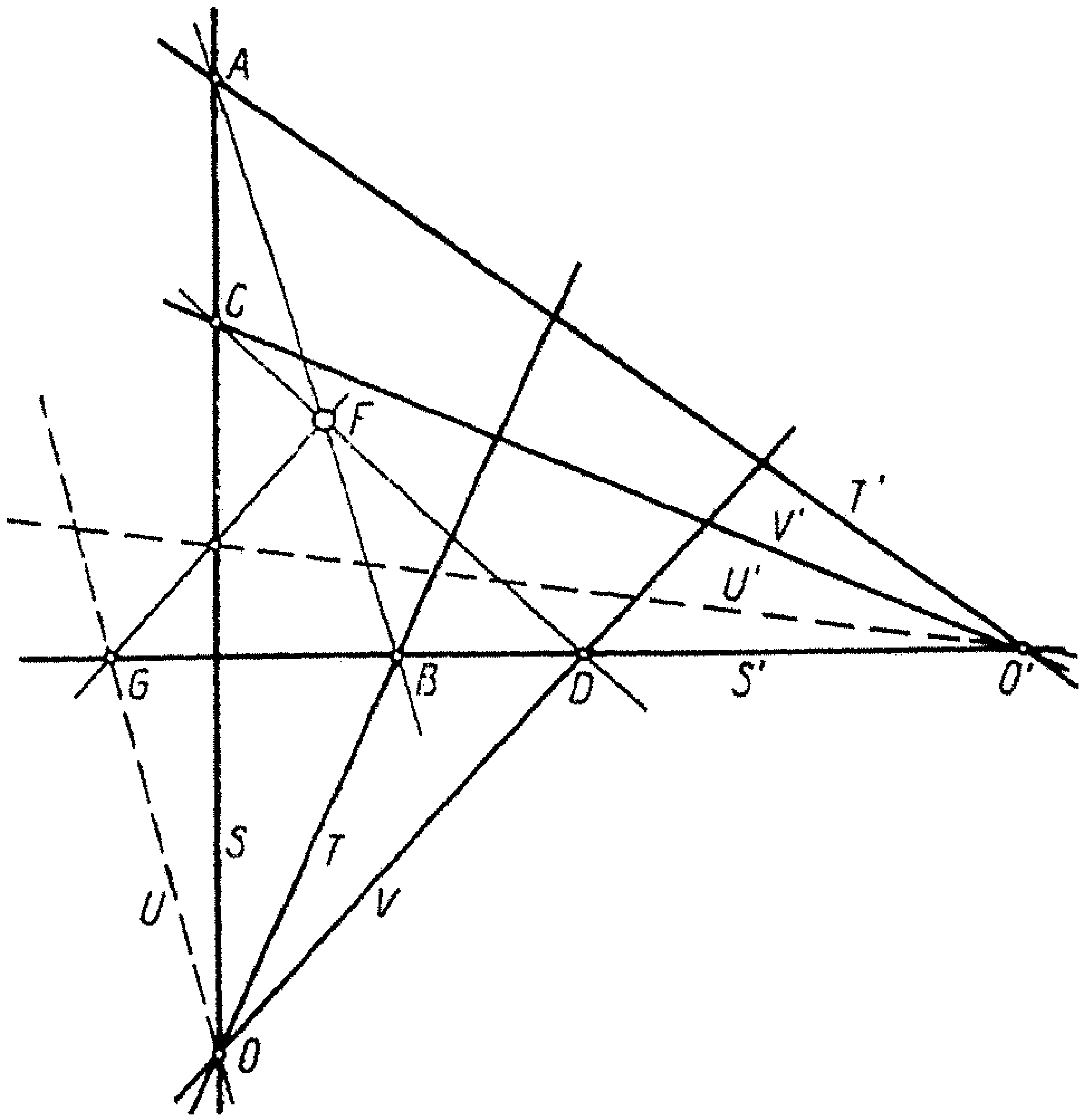
Sirge AA' on selle kujutuse püsisirge. Teoreemi 120.3 duaalsest kujust järeldub seetõttu, et q on kimbu A' perspektiivne kujutus kimbule A, s. t. nende kimpude vastavate sirgete lõikepunktid asetsevad ühel sirgel (def. 120.1 algusosa duaalne kuju). Sellist sirget nimetatakse sirgekimpude perspektiivse kujutuse teljeks. Kui $p(Y)=Y'$, siis kimpude A ja A' perspektiivse kujutuse teljeks on sirge $T=X''Y''$, kus $X''=AX'\cap A'X$ ja $Y''=AY'\cap A'Y$.

Tuleb veel näidata, et sirge T ei sõltu paarist (A,A'). Olgu $B=P_1\cap P'_1$. Et siin pakub huvi vaid üldjuht, siis loeme p mitteperspektiivseks kujutuseks; siis $p^{-1}(B)=B'$ puhul $B'\neq B$. Et $B\in P'_1$, siis leidub tal sirgel P_1 originaal; olgu $p^{-1}(B)=\overline{B}$. Tõestatu põhjal $A'B\cap AB'=B''\in T$ ja $A'\overline{B}\cap AB'=\overline{B}''\in T$, seega $\overline{B}''=$ $=T\cap P_1=\overline{B}$ ja $B''=T\cap P'_1=B'$, s. t. $T=B''\overline{B}''=B'\overline{B}$. Punkti B kujutis ja originaal on määratud üheselt, järelikult on seda ka sirge T. ∎

Projektiivse kujutusega $p: P_1\to P'_1$ määratud sirget T, mis sisaldab iga punkti $XX'\cap YY'$, nimetatakse projektiivse kujutuse p-teljeks. Telje abil on hõlpus konstrueerida vastavat kujutust (joon. 213). Kui p on perspektiivne, siis telg T on intsidentne punktiga $B=P_1\cap P'_1$.

Sõnastame teoreemi 120.5 duaalselt: *sirgekimbu O projektiivne kujutus temast erinevale sirgekimbule O' määrab kolmanda sirgekimbu, mille iga sirge on intsidentne lähtekimpude mingi kahe vastavate sirgete paari (S, S') ja (T, T') abil määratud punktidega $S\cap T'$ ja $S'\cap T$.* Sel viisil määratud kimbu keskpunkti nimetatakse lähtekimpude projektiivse kujutuse keskpunktiks.

Siit tuleneb meetod sirgekimpude projektiivse vastavuse konst-



Joon. 214.

rueerimiseks antud kolme paari (S, S'), (T, T') ja (V, V') järgi (joon. 214). Punktid $A = S \cap T'$ ja $B = S' \cap T$ ning $C = S \cap V'$ ja $D = S' \cap V$ määravad kaks sirget AB ja CD; punkt $F = AB \cap CD$ on projektiivsuse keskpunkt. Iga neljanda sirge $U \ni O$ jaoks saab nüüd leida vastava sirge $U' \ni O'$ järgmise eeskirja järgi: kui $S' \cap U \equiv G$, siis U' läbib punkti $S \cap FG$.

Erijuhul, kui OO' on püsisirge, osutub kimpude projektiivne vastavus perspektiivseks ning punktid $S \cap S'$, $T \cap T'$ ja $V \cap V'$ asetsevad ühel sirgel — perspektiivsuse teljel. Sel juhul $F \in OO'$.

Tuletame kahe kimbu projektiivselt vastavate sirgete lõikepunktide hulga võrrandi. Olgu baassirgeteks valitud vastavad sirged S, T ja S', T'. Siis vabalt võetud paari (U, U') korral $\mathbf{U} = u\mathbf{S} + \mathbf{T}$ ja $\mathbf{U}' = u'\mathbf{S}' + \mathbf{T}'$, kusjuures $u' = \lambda u$ (vt. (117.10)). Järelikult esitab uuritavat hulka võrrandisüsteem

$$u s_i x^i + t_i x^i = 0, \qquad u' s'_i x^i + t'_i x^i = 0, \qquad u' = \lambda u.$$

Elimineerime koordinaadid u ja u'. Selleks asendame u' teises võrrandis, avaldame tulemusest u ja asetame selle esimesse võrrandisse. Tekib võrrand $(\lambda s'_i t_j - s_j t'_i) x^i x^j = 0$. Võtame kordajate jaoks kasutusele uued tähistused $c_{ij} = \lambda s'_i t_j - s_j t'_i$, siis saame võrrandi

$$c_{ij} x^i x^j = 0, \tag{120.1}$$

mille vasak pool on kolme muutuja x^1, x^2 ja x^3 ruutvorm. Nagu selgub art-s 123, on tegemist tasandi P_2 kvadriku projektiivse võrrandiga.

121. Involutsioonid. Kui projektiivne teisendus $\varphi : P_1 \to P_1$ sooritada järjestikku k korda ja $\varphi^k(X) = \varphi^{k-1}(X^{(1)}) = \ldots = \varphi(X^{(k-1)}) = X^{(k)}$, siis üldiselt $X^{(k)} \neq X$. Kui aga φ on selline, et iga $X \in P_1$ korral $X^{(k)} = X$, siis jaotub P_1 punktide hulk tsükliteks $\{X, X^{(1)}, \ldots, X^{(k-1)}\}$.

***Def.* 121.1.** Projektiivset teisendust $\varphi : P_1 \to P_1$, mille puhul φ^k on samasusteisendus, nimetatakse tsükliliseks teisenduseks järguga k. Tsüklilist teisendust, mille järk $k = 2$, nimetatakse involutiivseks projektiivseks teisenduseks ehk projektiivseks involutsiooniks.

Sellest definitsioonist järeldub vahetult, et projektiivne teisendus $\varphi : P_1 \to P_1$ on involutiivne parajasti siis, kui $\varphi^{-1} = \varphi$.

Involutsiooni triviaalseks näiteks on samasusteisendus.

Esitame sirge P_1 projektiivse teisenduse φ mittehomogeensete koordinaatide kaudu valemiga (117.9):

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Lahendades selle seose muutuja x suhtes, saame pöördteisenduse φ^{-1} valemi

$$x = \frac{-\delta x' + \beta}{\gamma x' - \alpha}.$$

Võrdus $\varphi^{-1} = \varphi$ kehtib, s. t. võrdus

$$\frac{-\delta x + \beta}{\gamma x - \alpha} = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

on samasus muutuja x suhtes parajasti kahel juhul: 1) $\alpha = -\delta$, 2) $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma = 0$. Teisel juhul $x' = x$, s. t. tegemist on samasusteisendusega. Järelikult on tõene järgmine lause.

Teoreem 121.1. *Teisendus $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ on mittetriviaalne projektiivne involutsioon parajasti siis, kui $\alpha + \delta = 0$.*

Teoreem 121.2. *Sirge projektiivne teisendus on involutiivne parajasti siis, kui leidub vähemalt üks kahest punktist koosnev tsükkel.*

Tõestus. Vaja on kontrollida vaid tingimuse piisavust. Olgu $A \in P_1$ puhul $\varphi(A) = A' \neq A$ ja $\varphi(A') = A$, s. t.

$$a' = \frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta}, \quad a = \frac{\alpha a' + \beta}{\gamma a' + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \quad a' \neq a,$$

siis $\gamma a a' + \delta a' - \alpha a - \beta = 0$ ja $\gamma a a' + \delta a - \alpha a' - \beta = 0$. Võrduste vastavate poolte lahutamisel saame $(\alpha + \delta)(a' - a) = 0$. Teoreemi 121.1 põhjal järeldub siit võrdus $\varphi^{-1} = \varphi$. ∎

Vastavalt teoreemile 121.1 esitab involutsiooni valem

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha}, \quad \alpha^2 + \beta\gamma \neq 0. \tag{121.1}$$

Et selles esineb kaks sõltumatut parameetrit — kordajate α, β ja γ suhted, siis ei määra üks tsükkel involutsiooni täielikult, küll teevad seda aga kaks tsüklit. Involutsiooni tsüklitega (A, A') ja (B, B') tähistatakse $(AA')(BB')$.

Kui valemis (121.1) võtta $x' = x$, siis tekib involutsiooni püsipunktide võrrand $\gamma x^2 - 2\alpha x - \beta = 0$. Et $\alpha^2 + \beta\gamma \neq 0$, siis on sellel alati kaks erinevat lahendit, mis on mõlemad kas reaalsed või imaginaarsed. Teisel juhul öeldakse, et involutsioonil on imaginaarsed püsipunktid. Eelneva märkuse põhjal on involutsioon täielikult määratud oma püsipunktidega.

***Def.* 121.2.** Involutsiooni nimetatakse elliptiliseks või hüperboolseks vastavalt sellele, kas tema püsipunktid on imaginaarsed $(\alpha^2 + \beta\gamma < 0)$ või reaalsed $(\alpha^2 + \beta\gamma > 0)$.

***Teoreem* 121.3.** *Elliptilise involutsiooni vastavate punktide paarid lahutavad teineteise, hüperboolse omad aga mitte.*

Tõestus. Olgu antud involutsioon $(AA')(BB')$. Võtame reeperiks $\mathfrak{R} = \{A, A', B\}$. Olgu $(AA', BB') = b'$. Et A, A' ja B mittehomogeensed koordinaadid on nüüd vastavalt ∞, 0 ja 1, siis valemis (121.1) $x = \infty$ puhul $x' = 0$ ja $x = 1$ puhul $x' = b'$; järelikult $\alpha = 0$ ja $\frac{\beta}{\gamma} = b'$ Elliptilise involutsiooni korral $\beta\gamma < 0$, seepärast $(AA', BB') < 0$; hüperboolsel juhul aga $\beta\gamma > 0$, mistõttu $(AA', BB') > 0$. Jääb rakendada def. 115.2. ∎

***Teoreem* 121.4.** *Hüperboolse involutsiooni iga vastavate punktide paar lahutab tema püsipunktid harmooniliselt.*

Tõestus. Võtame püsipunktid baaspunktideks, siis valemis (121.1) $x = \infty$ ja $x = 0$ puhul vastavalt $x' = \infty$ ja $x' = 0$, seega $\beta = \gamma = 0$. Niisiis esitab involutsiooni valem $x' = -x$. Siit tuleneb võrdus $\frac{x + x'}{2} = 0$, mis omakorda on samaväärne võrdusega $(A_1A_2, XX') = -1$ (vt. teoreemi 116.3 tõestus). ∎

Siit järeldub, et iga hüperboolne involutsioon $(AA)(BB)$ on P_1 harmooniline teisendus, mille määrab eeskiri $(AB, XX') = -1$ (def. 116.3).

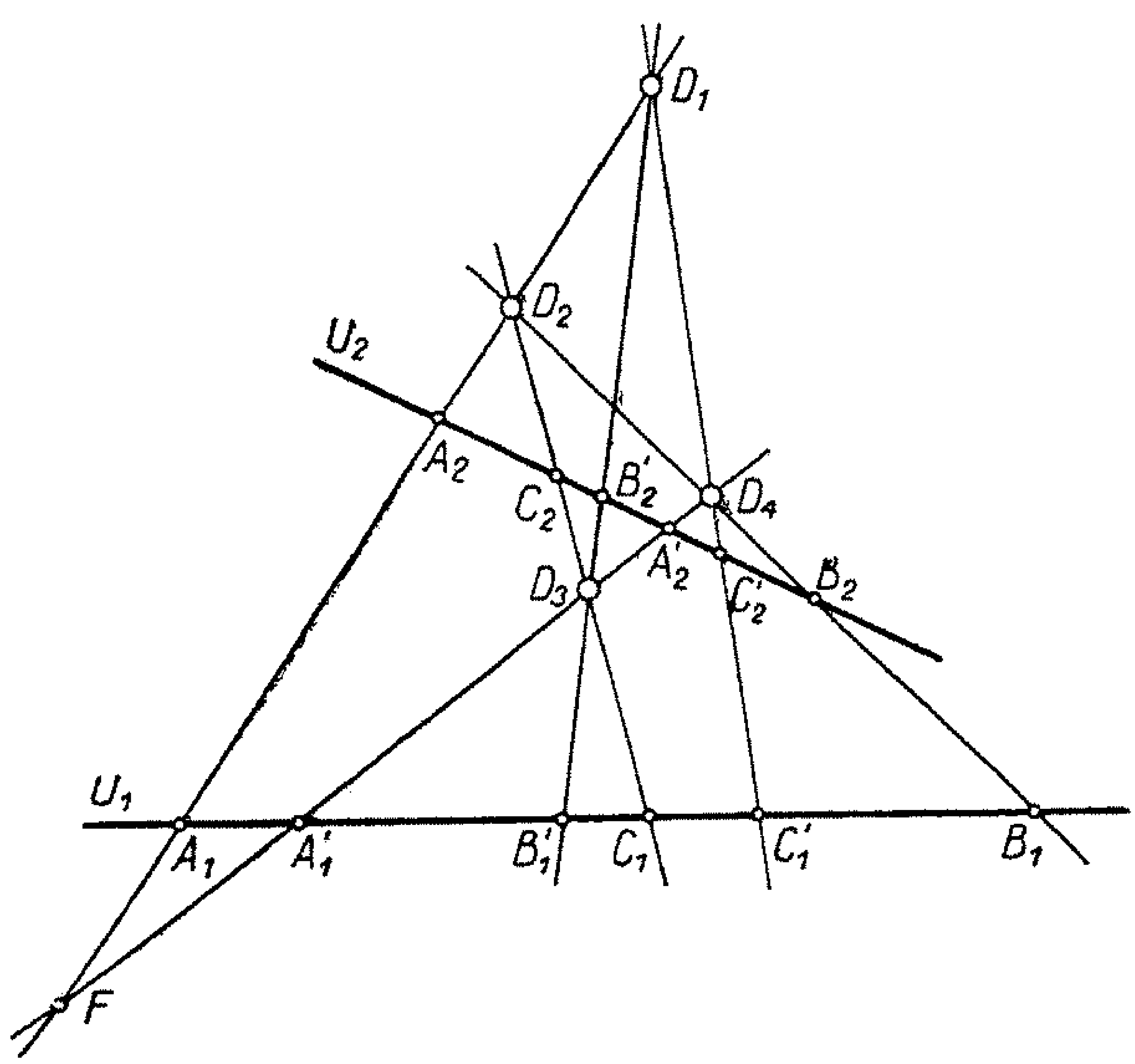
***Teoreem* 121.5.** *Sirge* P_1 *iga projektiivne teisendus on kas involutsioon või on esitatav kahe involutsiooni korrutisena.*

T õ e s t u s. Samasusteisendus on kahe involutsiooni korrutis. Vaatleme projektiivset teisendust $\varphi : \mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_1$, mis ei ole samasusteisendus ega involutsioon. Leidub vähemalt üks punkt $A \in \mathrm{P}_1$, nii et $\varphi(A) = A' \neq A$, $\varphi(A') = A'' \neq A$. Leidub projektiivne teisendus $\varphi_1 : \mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_1$, mille puhul $\varphi_1 : \{A', A, A''\} \to \{A', A'', A\}$. Teoreemi 121.2 põhjal on φ_1 involutsioon. Samuti osutub involutsiooniks teisendus $\varphi_2 = \varphi\varphi_1$, sest $\varphi\varphi_1(A') = \varphi(A') = A''$ ja $\varphi\varphi_1(A'') = \varphi(A) = A'$. Et $\varphi_1^2 = \varepsilon$, kus ε on samasusteisendus, siis $\varphi = \varphi\varepsilon = \varphi\varphi_1^2 = (\varphi\varphi_1)\varphi_1 = \varphi_2\varphi_1$. ∎

Meetodi involutsiooni konstrueerimiseks saab järgmisest teoreemist.

***Teoreem* 121.6** (Desargues'i teine teoreem). *Tasandi* P_2 *täieliku nelitipu vastasküIgede lõikepunktid iga sirgega, mis ei läbi nelitipu ühtki tippu, on ühe ja sellesama involutsiooni tsüklid.*

T õ e s t u s. Vaatleme vabalt võetud nelitippu $D_1D_2D_3D_4$ ja mingeid sirgeid U_i $(i = 1, 2)$, mis ei ole intsidentsed selle ühegi tipuga (joon. 215). Olgu $A_i = U_i \cap D_1D_2$, $B_i = U_i \cap D_2D_4$, $C_i = U_i \cap D_2D_3$, $A'_i = U_i \cap D_3D_4$, $B'_i =$



Joon. 215.

$= U_1 \cap D_1D_3$ ja $C'_1 = U_1 \cap D_1D_4$. Defineerime projektiivsed teisendused $\varphi_1 : U_1 \to U'$, nõudega, et $\varphi_1 : \{A_1, B_1, C_1\} \to \{A'_1, B'_1, C'_1\}$. Olgu $D_1D_2 \cap D_3D_4 = F$. Kimp D_2 määrab sirgete U_1 perspektiivsed kujutused sirgele D_3D_4, nimelt $t_1^{(1)} : \{A_1, B_1, C_1, A'_1\} \to \{F, D_4, D_3, A'_1\}$. Järelikult $(D_4D_3, FA'_1) = (B_1C_1, A_1A'_1)$ (teoreem 120.1). Kimp D_1 määrab sirge D_3D_4 perspektiivsed kujutused sirgetele U_1, nimelt $t_1^{(2)} : \{D_4, D_3, F, A'_1\} \to \{C'_1, B'_1, A_1, A'_1\}$. Järelikult $(D_4D_3, FA'_1) = (C'_1B'_1, A_1A'_1)$. Kokkuvõttes $(B_1C_1, A_1A'_1)$ $(C'_1B'_1, A_1A'_1)$ $(B'_1C'_1, A'_1A_1)$. Siit ilmneb, et $\varphi_1 : (A_1, A'_1) \to (A'_1, A_1)$. Nüüd saab rakendada teoreemi 121.2. ∎

122. Perspektiivsed kollineatsioonid. Ruumi P_{n-1} kollineatsiooni uurimisel on otstarbekas teisendada selle maatriks maksimaalselt lihtsale kujule. Kollineatsiooni maatriks lihtsustub, kui P_{n-1} reeper on seotud kollineatsiooni püsipunktide, -sirgete ja -tasanditega. Näiteks juhul, kui ruumi P_3 kollineatsioonil on neli püsipunkti, mis ei asetse ühel sirgel, saab kollineatsiooni maatriksile anda diagonaalkuju, võttes need püsipunktid baaspunktideks. Tõepoolest, baaspunktidele A_i vastavad siis invariantsed ühemõõtmelised alamruumid ruumis V_4, mistõttu $A_i = CA'_i = A'_i\lambda_i$ (mitte summeerida!), seega

$$C = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{Vmatrix}.$$

Vaadeldavat kollineatsiooni esitavad sel juhul valemid $'x^1 = \lambda_1 x^1$, $'x^2 = \lambda_2 x^2$, $'x^3 = \lambda_3 x^3$, $'x^4 = \lambda_4 x^4$.

Punkt $X \in P_{n-1}$ kujutub kollineatsiooni $\varrho X' = CX$ toimel iseendale parajasti siis, kui $X' = X\lambda$, s. t. $CX = X\lambda$ ehk $(C - \lambda E)X = 0$. Niisiis määrab püsipunktid homogeenne lineaarne võrrandisüsteem $(c_j{}^i - \lambda\delta_j{}^i)x^j = 0$. Sellel süsteemil leidub mittetriviaalne lahend parajasti siis, kui arv λ on lahendiks n-astme algebralisele võrrandile

$$\operatorname{Det}(c_j{}^i - \lambda\delta_j{}^i) = 0. \tag{122.1}$$

Kollineatsiooni $\varrho X' = CX$ püsilineaari määrab analoogiline tingimus $U' = UC = \lambda U$, s. t. $U(C - \lambda E) = 0$. Seega eraldab püsilineaarid ruumis P_{n-1} välja analoogiline võrrandisüsteem $u_i(c_j{}^i - \lambda\delta_j{}^i) = 0$, millel on mittetriviaalne lahend parajasti siis, kui λ on võrrandi (122.1) lahend.

Ruumi V_n baasi vahetamisel lineaarteisenduse $X' = CX$ maatriks C muutub, kuid võrrand (122.1) jääb muutumatuks.[147] Seepärast nimetatakse viimast ruumi V_n lineaarteisenduse *karakteristlikuks võrrandiks* ja tema lahendeid lineaarteisenduse *omaväärtusteks*.

[147] Vt. G. Kangro. Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 376.

Maatrikseid B ja C nimetatakse sarnasteks, kui leidub regulaarmaatriks T, nii et $B = T^{-1}CT$. Et sel viisil on omavahel seotud V_n lineaarteisenduste maatriksid erinevate baaside suhtes [148], siis on kollineatsiooni maatriksid, mille määravad erinevad reeperid, omavahel sarnased. Maatriksite sarnasus on, nagu kerge kontrollida, ekvivalentsusseos sama järku maatriksite hulgas. Maatriksite igas sarnasusklassis leidub teatav erikujuline kastdiagonaalmaatriks, mida nimetatakse vaadeldava klassi esindajate Jordani [149] normaalkujuks. Kollineatsioonide (ja ühtlasi ruumi V_n lineaarteisenduste) klassifitseerimine taandub niisiis maatriksi normaalkuju määramisele. Vastavaid meetodeid uuritakse kõrgemas algebras.[150]

Kollineatsioonide teatavad klassid võtab kokku järgnev mõiste.

***Def.* 122.1.** Ruumi P_{n-1} kollineatsiooni, mille puhul ruumis P_{n-1} leidub püsipunktidest koosnev lineaar, nimetatakse selle ruumi perspektiivseks kollineatsiooniks. Seda lineaari nimetatakse vaadeldava kollineatsiooni põhilineaariks.

***Teoreem* 122.1.** *Sirged, mis ühendavad ruumi punkte nende kujutistega perspektiivse kollineatsiooni puhul, kuuluvad ühte sidumisse.*

Tõestus. Olgu punktid A, B ja C väljaspool põhilineaari ja olgu A', B' ja C' nende kujutised. Sirged AB, AC ja BC lõikavad põhilineaari. Et lõikepunktid on püsipunktid, siis peavad neid vastavalt läbima ka sirged $A'B'$, $A'C'$ ja $B'C'$. Siit nähtub, et kolmtipud ABC ja $A'B'C'$ on perspektiivsed sirge suhtes. Desargues'i (esimesest) teoreemist järeldub nende kolmtippude perspektiivsus ka mingi punkti O suhtes. Punkt O on täielikult määratud mistahes kahe vastavate punktide paariga; iga ülejäänud paari (X, X') korral peab sirge XX' läbima punkti O. ∎

Sel viisil perspektiivse kollineatsiooni abil ruumis P_{n-1} väljaeraldatud punkti O nimetatakse selle kollineatsiooni keskpunktiks. On selge, et kõik sirged, mis läbivad keskpunkti, on püsisirged.

***Def.* 122.2.** Perspektiivset kollineatsiooni, mille keskpunkt on väljaspool põhilineaari, nimetatakse homoloogiaks, kui aga keskpunkt on sellel lineaaril, siis räägitakse elatsioonist.

Perspektiivne kollineatsioon on selliste kollineatsioonide erijuht, millel on $(n-1)$-kordne omaväärtus. Tõepoolest, olgu baaspunktid A_1 ja A_2 põhilineaaril. Sel juhul peavad nad olema püsipunktid, s. t. $CA_1 = A_1\lambda_1$ ja $CA_2 = A_2\lambda_2$. Püsipunkt peab olema

[148] Vt. G. Kangro, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 376.
[149] Jordan, Gamille (1832—1922), prantsuse matemaatik.
[150] Vt. G. Kangro, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 401.

ka iga punkt, mille esindajaks on $X = A_1x^1 + A_2x^2$, seega $CX = A_1\lambda_1x^1 + A_2\lambda_2x^2 = X\lambda$. Siit järeldub, et $\lambda_1 = \lambda_2$. Et lineaarile saab paigutada $n-1$ baaspunkti, näiteks $A_1, \ldots, A_{n-1}$, siis on selle kollineatsiooni $n-1$ omaväärtust võrdsed. Homoloogia puhul ei kuulu keskpunkt O põhilineaarile, seepärast saab keskpunkti valida baaspunktiks A_n. Seejuures $CA_n = A_n\lambda_n$; siin λ_n peab erinema $(n-1)$-kordsest omaväärtusest, sest vastupidisel juhul oleks tegemist samasusteisendusega. Niisiis esitavad homoloogiat baaspunktide näidatud valiku korral valemid

$$'x^\alpha = \lambda_1 x^\alpha, \quad 'x^n = \lambda_2 x^n \quad (\alpha = 1, \ldots, n-1). \tag{122.2}$$

Kerge on kontrollida, et elatsiooni valemid sobivalt võetud reeperi korral on

$$'x^\alpha = \lambda x^\alpha, \quad 'x^{n-1} = \lambda x^{n-1} + x^n \quad (\alpha \neq n-1). \tag{122.3}$$

Def. **122.3.** Kollineatsiooni, mis ühtib oma pöördkollineatsiooniga, nimetatakse i n v o l u t i i v s e k s.

Kui lineaarteisendus $'X = CX$ määrab involutiivse kollineatsiooni, siis $CX' = C^2X = X\lambda$, s. t. $C^2 = \lambda E$. Maatriksi ruudu saab tuua diagonaalkujule parajasti siis, kui maatriksile endale on võimalik anda diagonaalkuju. Järelikult peab involutiivse kollineatsiooni maatriksil leiduma diagonaalkuju. Arv λ võrduses $C^2X = X\lambda$ on maatriksi C^2 omaväärtus, seetõttu maatriksi C omaväärtused on $\pm\sqrt{\lambda}$. Et kollineatsiooni maatriks on määratud reaalarvulise kordaja täpsusega, siis võib eeldada, et vaadeldava maatriksi determinant on ± 1. Sel tingimusel piirdub involutiivse kollineatsiooni omaväärtuste hulk arvudega $1, -1, i$ ja $-i$. Niisiis juhul, kui $\lambda > 0$, esitavad involutiivset kollineatsiooni sobivalt võetud reeperi suhtes valemid

$$'x^k = x^k, \quad 'x^l = -x^l \quad (k = 1, \ldots, m;\ l = m+1, \ldots, n). \tag{122.4}$$

Siit nähtub, et kui $m = 1$ või $m = n-1$, siis on tegemist teatava homoloogiaga. Sel puhul räägitakse i n v o l u t i i v s e s t h o m o l o o g i a s t.

Ruumi P_3 t a s a n d i p e r s p e k t i i v n e k u j u t u s selle ruumi teisele tasandile defineeritakse samuti nagu sirgete korral tasandil P_2 (def. 120.1). Näitame, et iga $P_2 \subset P_3$ projektiivse kujutuse saab sooritada järjestikuste perspektiivsete kujutuste (projekteerimiste) abil.

Alustame juhust, mil sirge $u = P_2 \cap P'_2$ koosneb püsipunktidest projektiivse kujutuse $P_2 \to P'_2$ suhtes. Olgu (A, A') ja (B, B') vabalt võetud vastavate punktide paarid ja $C = AB \cap u$. Et C on püsipunkt, siis $A'B' \cap u = C$. Siit järeldub, et sirged AA' ja BB' on ühel tasandil ja seepärast lõikuvad. Olgu $AA' \cap BB' = O$. Samal viisil arutledes jõuame otsusele, et iga vastavate punktide paariga (X, X') määratud sirge peab lõikama nii sirget AA' kui ka BB'. Juhul kui XX' ei asetse sirgetega AA' ja BB' ühel tasandil, peab $XX' \ni O$. Kuid lugu on nii ka siis, kui AA', BB' ja XX' on ühe tasandi sirged. Selles veendumiseks piisab, kui lisada veel neljas vastavate punktidega määratud sirge YY', mis ei ole eelnevatega ühel tasandil. Et $YY' \ni O$ ja XX' peab lõikama kõiki kolme sirgetest AA', BB' ja YY', siis on selge et $XX' \ni O$. Niisiis on tegemist tasandi P_2 perspektiivse kujutusega tasandile P'_2; perspektiivsuse keskpunkt on O.

Märgime, et $P'_2 = P_2$ korral on siin tegemist tasandi perspektiivse kollineatsiooniga sirge u suhtes. Siit tulenebki selle kollineatsiooni nimetus. Ühtlasi selgub eelnevast, et selle kollineatsiooni saab sooritada ülimalt kahe perspektiivse kujutuse abil.

Vaatleme nüüd üldisemat juhtu, kus sirgel $u = P_2 \cap P'_2$ on ainult üks püsipunkt C. Olgu $v \subset P_2$ vabalt võetud sirge, mille puhul $C \in v$, ning A ja B selle sirge mingid punktid. Arutluse eelneva osa põhjal leidub punkt $O = AA' \cap BB'$. Olgu $P''_2 \neq P_2$ mingi tasand, mis läbib sirget AB. Sooritame perspektiivse kujutuse $P'_2 \to P_2$. Kokkuvõttes saame projektiivse kujutuse $P_2 \to P''_2$, mille puhul sirge $AB = P_2 \cap P''_2$ kõik punktid on püsipunktid. Nagu näitasime, on selline kujutus perspektiivne. Järelikult kujutus $P_2 \to P'_2$ on esitatav kahe perspektiivsuse korrutisena: $P_2 \to P''_2 \to P'_2$.

Kõige üldisemal juhul ei ole sirgel $u = P_2 \cap P'_2$ püsipunkte. Olgu (A, A') mingi vastavate punktide paar ja O sirgel AA' vabalt valitud punkt ($O \neq A$, $O \neq A'$). Võtame veel mingi tasandi $P''_2 \neq P_2$, nii et $P''_2 \ni A$. Perspektiivse kujutuse $P'_2 \to P''_2$ korral kujutub sirge $v = P_2 \cap P''_2$ iseendale ja punkt $A \in v$ on püsipunkt. Äsjatõestatu põhjal saab kujutuse $P_2 \to P''_2$ sooritada kahe perspektiivse kujutuse teel, seega kulub kujutuse $P_2 \to P'_2$ saamiseks vaadeldaval juhul kolm perspektiivsust.

Lõpuks, kui $P'_2 = P_2$, siis saab vaadeldud olukorra alati saavutada ühe lisaperspektiivsusega mingile tasandile, mis erineb tasandist P_2. Siit järeldub, et *projektiivse tasandi iga kollineatsioon on sooritatav ülimalt nelja perspektiivse kujutuse abil.*

§ 21. KVADRIKUTE PROJEKTIIVNE GEOMEETRIA

Projektiivse geomeetria üheks tähtsamaks ülesandeks on välja selgitada kvadrikute projektiivselt invariantsed omadused. Esitame siin kvadrikute projektiivse klassifikatsiooni, s. o. jaotuse projektiivselt ekvivalentsete kvadrikute klassidesse. Samuti nagu afiinses geomeetrias kasutame selleks reeperit, mille suhtes kvadriku võrrandil on lihtsaim kuju. Sellise projektiivse reeperi saab määrata vastavuse abil, mille kvadrik korraldab punktide ja lineaaride vahel.

123. Kvadriku mõiste. Et ruumi P_{n-1} käsitlus on siin sõltumatu afiinsest geomeetriast, siis tuleb kvadriku mõiste sisse tuua uue definitsiooniga.

***Def.* 123.1.** Kvadrikuks ruumis P_{n-1} nimetatakse kõigi selliste punktide hulka, mille homogeensed projektiivsed koordinaadid rahuldavad mingit n muutujaga homogeenset teise astme algebralist võrrandit.

Näiteks tasandil P_2 osutub kvadrikuks iga kahe erineva sirgekimbu projektiivselt vastavate sirgete lõikepunktide hulk (vt. (120.1)).

Iga teist järku joon afiinsel tasandil ja iga teist järku pind afiinses ruumis on kvadrik def. 123.1 mõttes. Tõepoolest, kui näiteks teist järku joone võrrandis (86.4) minna valemite (104.2) abil üle homogeensetele koordinaatidele ning seejärel korrutada võrrandi pooli teguriga $(x^3)^2$, siis on tulemuseks kolme muutujaga homogeenne teise astme algebraline võrrand (vrd. art. 87); homogeensed koordinaadid on aga ühtlasi ka projektiivsed (vt. art. 111). Seega teist järku joone kõik punktid afiinsel tasandil α kuuluvad teatud kvadrikule tasandil $\hat{\alpha}$. Kui leidub arvukolmikuid $(x^1, x^2, 0)$, mis rahuldavad saadud homogeenset võrrandit, siis sisaldab see kvadrik veel tasandi $\hat{\alpha}$ ebapunkte.

Kvadriku võrrandi $F(x^1, \ldots, x_n) = 0$ vasak pool on ruutvorm (vt. art. 83). Selle võrrandi saab sarnaste liikmete koondamise teel kirjutada kujul

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\leq j}}^{n} c_{ij} x^i x^j = 0, \tag{123.1}$$

kus kordajateks c_{ij} on reaalarvud, millest vähemalt üks erineb nullist. Kvadriku uurimisel (samuti nagu ruutvormi uurimisel algebras[151]) on otstarbekas kasutusele võtta uued kordajad, mis tabelisse paigutatult moodustavad sümmeetrilise n-järku ruutmaatriksi. Võrrand (123.1) omandab seejuures jälle koondamata, aga juba teataval viisil korraldatud kuju. Selle saamiseks esitame iga kordaja c_{ij} kahe võrdse arvu (kui $c_{ij} = 0$, siis kahe nulli) summana: $c^{ij} = a_{ij} + a_{ji}$, $a_{ij} = a_{ji}$. Kvadrikut esitab siis võrrand

$$a_{ij}x^ix^j = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{123.2}$$

Maatriksit $A = \|a_{ij}\|$ nimetatakse võrrandiga (123.2) määratud **kvadriku maatriksiks** ja tema determinanti **kvadriku determinandiks**. Eespoolt selgub, et A on sümmeetriline, s. t. $A^T = A$.

On selge, et võrrandid $a_{ij}x^ix^j = 0$ ja $\lambda a_{ij}x^ix^j = 0$ $(\lambda \neq 0)$ määravad ühe ja sellesama kvadriku, seepärast nimetame selliseid võrrandeid **ekvivalentseteks**. Vastupidi, kui võrrandid $a_{ij}x^ix^j = 0$ ja $\bar{a}_{ij}x^ix^j = 0$ määravad ühe ja sellesama punktihulga[152], siis $\bar{a}_{ij} = \lambda a_{ij}$, kus $\lambda \neq 0$, s. t. tegemist on ekvivalentsete võrranditega. Juhtudel $n = 3$ ja $n = 4$ on viimane väide kergesti järeldatav teoreemist 93.4. .

Niisiis on kvadriku uurimisel olulised mitte tema võrrandi

---

[151] Vt. G. Kangro, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, § 11 ja § 43.

[152] Algebras öeldakse sel juhul, et polünoomidel $a_{ij}x^ix^j$ ja $\bar{a}_{ij}x^ix^j$ on ühised kõik nullkohad nii reaalsed kui ka imaginaarsed süsteemid $(x^1, \ldots, x^n)$, mis rahuldavad vastavat võrrandit.

kordajad üksikult, vaid suhted, milledes üks neist on kõigi ülejäänutega. Arvestades veel tingimust $A^T = A$, võib ütelda, et kvadrik ruumis P_{n-1} sõltub $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ parameetrist. Seepärast tuleb kvadriku määramiseks ette anda niisama palju sõltumatuid tingimusi, näiteks selline arv punkte koos nõudega, et kvadrik läbiks viimaseid. Näiteks ruumis P_3 saab kvadriku määrata 9 punkti abil, sest nõuet, et kvadrik läbiks punkte $B_t(b_t^1 : b_t^2 : b_t^3 : : b_t^4)$, $(t = 1, \ldots, 9)$, väljendab võrrandisüsteem $b_t^{ij}x_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2, 3, 4;\ i \leqslant j)$, kus $b_t^{ij} = b_t^i b_t^j$ on antud arvud ja x_{ij} võrrandi (123.1) tundmatud kordajad. Nagu teada, leidub igal sellisel süsteemil mittetriviaalne lahend, mis juhul, kui süsteemi maatriksi $\|b_t^{ij}\|$ $(i, j = 1, 2, 3, 4;\ i \leqslant j;\ t = 1, \ldots, 9)$ astak on maksimaalne (s. t. 9), on määratud kordaja täpsusega. Suurema arvu punktide puhul seda enam väita ei saa, s. t. läbi vabalt valitud 10 punkti ruumis P_3 ei ole üldiselt võimalik asetada kvadrikut. Muidugi võib maatriksi $\|b_t^{ij}\|$ astak osutuda väiksemaks kui 9; sel juhul saab läbi antud 9 punkti B_t asetada lõpmata palju erinevaid kvadrikuid. Märgime, et afiinses geomeetrias analoogilise probleemi kohta tõestatud teoreem 86.1 kuulub õigupoolest projektiivsesse geomeetriasse.

Kvadrikute teooria aluseks on järgmine oluline lause.

***Teoreem* 123.1.** *Projektiivse ruumi kollineatsioon kujutab kvadriku alati kvadrikuks, jättes seejuures kvadriku astaku muutumatuks.*

T õ e s t u s. Ruumi P_{n-1} iga kollineatsioon φ on esitatav koordinaatmuutujate $x^1, \ldots, x^n$ teatava homogeense lineaarse teisendusena (117.6). Sellise teisenduse toimel võrrandi (123.2) homogeensus säilib, aste aga ei saa kasvada. Et φ^{-1} on samuti homogeenne teisendus, siis ei saa kvadriku võrrandi aste kasvada ka selle toimel. Siit on lihtne järeldada, et ka kvadriku võrrandi aste säilib.

Kirjutame võrrandi (123.2) vasaku poole maatriksite abil [153]: $a_{ij}x^ix^j = X^TAX$. Rakendame kollineatsiooni $X = \varrho CX'$, siis

$$X^TAX = \varrho^2(CX')^TA(CX') = \varrho^2[X'^T(C^TAC)X'] .$$

Maatriksi C regulaarsuse tõttu maatriksite A ja $A' = C^TAC$ astakud on võrdsed [154]. Niisiis A' ei ole nullmaatriks, järelikult $X'^TA'X'$ on samuti ruutvorm. Seejuures $A'^T = (C^TAC)^T = C^TA^T(C^T)^T = C^TAC = A'$. ∎

Teoreemist 123.1 ilmneb, et kvadriku mõiste (def. 123.1) on

[153] Vt. G K a n g r o, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, § 11, art. 1

[154] Sealsamas, § 10, art. 3.

projektiivselt invariantne ja kvadriku maatriksi astak on projektiivne invariant (def. 119.3). Viimast nimetame lühidalt **kvadriku astakuks** ja tähistame r. Ruumis P_{n-1} $0 < r \leqslant n$.

Kvadrikute hulk jaotub astaku järgi projektiivselt invariantseteks klassideks, mille jaoks kasutame järgmisi tähiseid:

	P_2	P_3
klass	r	r
A	3	4
$B1$	2	3
$B2$	1	2
$B3$	—	1

Mis puutub sirgesse P_1, siis siin esitab kvadrikut võrrand $a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2 = 0$ ehk mittehomogeensete koordinaatide puhul $a_{11}x^2 + 2a_{12}x + a_{22} = 0$. See ruutvõrrand määrab sirgel kas kaks erinevat reaalset, kaks erinevat imaginaarset või kaks ühtivat reaalset punkti (viimasel juhul kõneleme kahekordsest punktist) vastavalt sellele, kas kvadriku determinant $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ on negatiivne, positiivne või null. A-klassi kuuluvad siin kahest (reaalsest või imaginaarsest) punktist koosnevad kvadrikud, B-klassi aga need, mis osutuvad kahekordseks punktiks. Käesolevas paragrahvis vaatleme järgnevalt vaid kvadrikuid, mis asetsevad kas tasandil P_2 või ruumis P_3.

Selle asjaolu märkimiseks, et ainult A-klassi kuuluvate kvadrikute maatriksid on regulaarsed, nimetatakse A-klassi ka **regulaarsete kvadrikute klassiks**, kõiki ülejäänud kvadrikuid aga mitteregulaarseteks.[155] Number B juures näitab, mitme võrra selle klassi mitteregulaarse kvadriku astak on väiksem regulaarse kvadriku astakust.

[155] Kui teist järku joon (pind) afiinsel tasandil (ruumis) laiendada kvadrikuks täiendatud tasandil (ruumis), siis $|A| = \Delta$ (vt. §§ 16—18). Seetõttu mitteregulaarsed kvadrikud saadakse B-klassist (art. 87 mõttes), regulaarsed aga A-klassist. Järelikult kidunud kvadrik on mitteregulaarne, mittekidunud kvadrik — regulaarne.

Kvadriku determinandi võrdumisel või mittevõrdumisel nulliga on teoreemi 123.1 põhjal geomeetriline tähendus, determinandi märgil on tähendus aga ainult siis, kui ruum on paaritumõõtmeline[1] (vt. eespool P_1 puhul). Determinandi märk ei sõltu küll kollineatsioonist, sest $|A'| = |C|^2|A|$, kuid kvadriku võrrandi asendamisel ekvivalentse võrrandiga võib märk muutuda, kui $n-1$ on paarisarv. Tõepoolest, sel juhul $\bar{a}_{ij} = \lambda a_{ij}$, mistõttu $|\bar{A}| = \lambda^n|A|$.

Kvadrikuga duaalseks kujundiks on lineaaride teist klassi sidum — P_3 puhul tasandite teist klassi sidum, P_2 puhul sirgete teist klassi kimp. See defineeritakse niisuguste lineaaride hulgana, mille koordinaadid rahuldavad (123.3)-tüüpi võrrandit $a^{ij}u_iu_j = 0$. Teist klassi sidum on hariliku ehk esimest klassi sidumi (kimbu) üldistus samas mõttes, nagu kvadrik on üldisem lineaarist (s. t. võib viimast sisaldada, kuid tema võrrandi aste on ühe võrra kõrgem). Duaalsuse printsiibi tõttu on teist klassi sidumite teooria analoogiline kvadrikute teooriaga.

Lineaaride ja kvadrikute (duaalselt: esimest ja teist klassi sidumite) mõistete edasine üldistamine toimub pinna järgu (sidumi klassi) tõstmise teel. Üldiselt uuritakse *m*-järku algebralisi pindu (*m*-klassi sidumeid), mis defineeritakse homogeensete *m*-astme algebraliste võrrandite abil. Seejuures võib muutujaid olla kuitahes palju, kuid lõplik hulk. Sel juhul kõneldakse algebralisest geomeetriast paljumõõtmelistes projektiivsetes ruumides (terminit «paljumõõtmelisus» kasutatakse juhul, kui $n-1>3$).

124. Kvadriku uurimine sirgete abil. Vaatleme koos kvadrikuga vabalt valitud sirget YZ, kus $Y = (y^1 : \ldots : y^n)$ ja $Z = (z^1 : \ldots : z^n)$. Kirjutame selle sirge parameetrilise võrrandi $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}\lambda + \boldsymbol{Z}\mu$ koordinaatide abil:

$$x^i = y^i\lambda + z^i\mu, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{124.1}$$

Sirge YZ ja kvadriku ühiste punktide leidmiseks sooritame asenduse võrranditest (124.1) võrrandisse (123.2) ning teisendame tulemust:

$$(a_{ij}y^iy^j)\lambda^2 + (a_{ij}y^iz^j + a_{ij}z^iy^j)\lambda\mu + (a_{ij}z^iz^j)\mu^2 = 0,$$
$$(a_{ij}y^iy^j)\lambda^2 + 2(a_{ij}y^iz^j)\lambda\mu + (a_{ij}z^iz^j)\mu^2 = 0. \tag{124.2}$$

Teisendamisel on keskmistes sulgudes kasutatud 1) vabadust summeerimisindeksite tähistamisel: $a_{ij}y^jz^i = a_{ji}y^iz^j$ ja 2) maatriksi A sümmeetrilisust: $a_{ji} = a_{ij}$.

Vaatleme nüüd võrrandit (124.2) ruutvõrrandina, milles tundmatuks on parameetrite suhe, nn. mittehomogeenne parameeter $t = \frac{\lambda}{\mu}$ (kui $\mu = 0$, s.t. kui $X = Y$, siis loeme, et $t = \infty$), ja kir-

[156] See märkus teeb mõistetavaks, miks näiteks tabelite (99.14) ja (100.20) puhul Δ märgil ei ole mingit tähtsust esimese, küll aga teise tabeli korral.

jutame ta vastavalt:

$$(a_{ij}y^iy^j)t^2+2(a_{ij}y^iz^j)t+(a_{ij}z^iz^j)=0. \qquad (124.3)$$

See võrrand on muutuja t iga väärtuse puhul rahuldatud parajasti siis, kui võrrandisüsteemil

$$a_{ij}y^iy^j=0, \quad a_{ij}y^iz^j=0, \quad a_{ij}z^iz^j=0 \qquad (124.4)$$

leidub lahend. Sel juhul sirge YZ asetseb kvadrikul. Kui aga süsteem (124.4) on vastuoluline, siis on tegemist kvadrikuga, mis ei sisalda ühtki sirget.

Vaatleme esmalt selliseid sirgeid YZ, mis ei asetse kvadrikul. Eeldame, et näiteks punkt Y ei kuulu kvadrikule. Niisugune eeldus on lubatav, sest kvadrik ei saa sisaldada ruumi kõiki punkte: et vähemalt üks kordajaist a_{ij} erineb nullist, siis ei saa võrdus $a_{ij}y^iy^j = 0$ olla samasus.

Tehtud eeldusel on (124.3) ruutvõrrand ja määrab parameetri t kaks väärtust t_1 ja t_2, mis on kas erinevad reaalarvud, imaginaarsed kaaskompleksarvud või ühtivad reaalarvud vastavalt sellele, kas võrrandi diskriminant $D = (a_{ij}y^iz^j)^2 - (a_{ij}y^iy^j)(a_{ij}z^iz^j)$ on punktide Y ja Z antud koordinaatide korral positiivne, negatiivne või võrdne nulliga.

Lepitakse kokku ütelda alati, kui $D \neq 0$, et sirge YZ l õ i k a b kvadrikut kahes punktis. Kui $D < 0$ ja seega t_1 ja t_2 on imaginaararvud, siis kõneldakse i m a g i n a a r s e t e s t l õ i k e p u n k t i d e s t. Sellise kokkuleppe eesmärk on siin sama mis afiinses geomeetrias (vt. art. 85), nimelt ühtsuse saavutamine sõnastustes — erandjuhtude allutamine ühtsele terminoloogiale. Võib ütelda ka nii, et kuna võrrand (124.3) annab ka juhul, kui $D < 0$, algebraliselt «midagi» — mitte tühja hulga, vaid imaginaararvude paari, siis on kasulik seda kajastada termineis.

Tuleb märkida, et imaginaarsete punktide sissetoomisega ei kaasne olukorda, mille tekitas ebapunktide lisamine käesoleva peatüki algul. Imaginaarsed punktid ei osutu ruumi P_{n-1} kollineatsioonide suhtes ekvivalentseteks reaalsete punktidega, sest ühegi reaalse punkti originaaliks ega kujutiseks ei ole siin imaginaarne punkt. Tõepoolest, imaginaarse punkti «koordinaadid» $a^k + ib^k$ ($k = 1, \ldots, n$; i — imaginaarühik) saab esitada veeruna $X = A + iB$, kollineatsioon $X' = CX$ aga kujutab selle jälle teatava imaginaarse punkti koordinaatide veeruks $X' = CA + iCB$. Seetõttu ei teki mingit probleemi, kuidas «mahutada» imaginaarsed punktid reaalsele sirgele. Projektiivse sirge struktuur imaginaarsete punktide lisamisel ei muutu. Nende lisamine ei ole vältimatult vajalik, vaid ainult otstarbekas, ja kasulike abivahenditena neid tulebki käesolevas kursuses mõista.

Teatavasti võimaldab alles kompleksarvude kasutuselevõtmine üles ehitada algebraliste võrrandite selge ja sisemiselt ühtse teooria. Samadel kaalutlustel uuritakse geomeetrias ruume, mis on moodustatud kompleksarvude abil. K o m p l e k s s e p r o j e k t i i v s e r u u m i P_{n-1} (i) defineerimiseks ei ole meie senises käsitluses vaja muuta midagi muud peale aksioomides **B1—B5** ja $\mathbf{C}^{(n)}$ kasutatavate arvude hulga. Nagu juba märgitud art-s 85, võib selleks hulgaks reaalarvude hulga kõrval võtta ka kompleksarvude hulga. Aksioomid **A1—A4**, **B1—B5** ja $\mathbf{C}^{(n)}$, kui nendes arvude all mõista kompleksarve, määravad n-mõõtmelise kompleksse vektorruumi $V_n(i)$. Ruum $P_{n-1}(i)$ defineeritakse hulgana, mille puhul leidub tema 1 : 1-pealekujutus ruumi $V_n(i)$ ühemõõtmeliste alamruumide hulgale. Et kompleksarvude korpus on algebraliselt kinnine, s. t. sisaldab iga kompleksarvuliste kordajatega algebralise võrrandi kõiki lahendeid, siis osutub «kinniseks» ka geomeetria ruumis $P_{n-1}(i)$: mingeid uusi kokkuleppeid nagu P_{n-1} puhul selles tarvis ei ole.

Reaalarvud moodustavad alamhulga kompleksarvude hulgas, seepärast tuleb ruum P_{n-1} lugeda sisalduvaks ruumis $P_{n-1}(i)$. Viimases kaob eespool märgitud invariantne erinevus imaginaarsete ja reaalsete punktide vahel, sest koordinaadid ja kollineatsioonid on siin saadud kompleksse vektorruumi ja selle lineaarteisenduste abil. Seepärast kaob siin erinevus sama tüüpi reaalsete ja imaginaarsete kujundite vahel. Käesolev projektiivse geomeetria esitus neid lihtsustavaid vahekordi ei kajasta, sest oleme võtnud aluseks reaalarvude hulga, s. t. uurime ainult reaalset ruumi P_{n-1}.

Jätkame kvadriku ja sirge vahekorra analüüsimist võrrandi (124.3) abil. Võtame nüüd vaatluse alla sirged, mille puhul $D = 0$. Iga selline sirge kas kuulub kvadrikule või tal on viimasega parajasti üks ühine punkt.

Olgu $C = (c^1 : . . : c^n)$ vabalt valitud punkt kvadrikul. Et sel puhul $a_{ij}c^ic^j = 0$, siis iga sirge CY korral võrrand (124.3) lihtsustub $(a_{ij}y^iy^j)t^2 + (a_{ij}y^ic^j)t = 0$. Siit nähtub, et tingimus $D = 0$ on sirge CY jaoks täidetud parajasti siis, kui punkti $Y \neq C$ koordinaadid rahuldavad võrrandit $a_{ij}x^ic^j = 0$ ehk $a_{ij} = a_{ji}$ tõttu ka

$$a_{ij}c^ix^j = 0. \tag{124.5}$$

Võib juhtuda, et $a_{ij}c^i = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, siis muidugi ka $a_{ij}c^j = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, s. t punkti C koordinaadid rahuldavad võrrandisüsteemi

$$a_{ij}x^j = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{124.6}$$

Nimelt leidub sellel süsteemil mittetriviaalne lahend parajasti siis, kui $|A| \neq 0$, kus $A = \|a_{ij}\|$. Kui punkt C on kvadrikul niimoodi määratud, siis sidumi C iga sirge puhul $D = 0$.

Def. **124.1.** Kvadriku punkti, millega määratud sidumi (tasandi P_2 puhul kimbu) iga sirge kas asetseb kvadrikul või lõikab kvadrikut parajasti ühes punktis, nimetatakse kvadriku iseäraseks punktiks.

Nagu selgus, on igal mitteregulaarsel kvadrikul vähemalt üks iseärane punkt, regulaarsel kvadrikul aga iseäraseid punkte ei leidu. Kvadriku iga iseärane punkt on reaalne.

Kvadriku iga mitteiseärast punkti C läbib võrrandiga (124.5) määratud lineaar. Iga sirge, mis läbib punkti C ja kas asetseb kvadrikul või lõikab seda ainult ühes punktis, kuulub sellele lineaarile (tasandil P_2 on selliseid sirgeid muidugi ainult üks, sest siin (124.5) on sirge võrrand).

Vaatleme esmalt juhtu, kus mainitud lineaar kuulub kvadrikule.

Selline olukord võib ette tulla, kui kvadriku võrrandi (123.2) vasak pool on lahutatav lineaarteguriteks: $a_{ij}x^ix^j = (b_ix^i)(d_jx^j)$. Võrrand (123.2) on sel juhul samaväärne kahe lineaarvõrrandiga $b_ix^i = 0$ ja $d_jx^j = 0$, niisiis kvadrik koosneb kahest lineaarist. Sellist kvadrikut nimetatakse laguvaks (vrd. art. 85). Siinjuures kehtib järgmine lause.

Teoreem **124.1.** *Laguva kvadriku astak on ülimalt 2 ja laguvale kvadrikule kuuluvate lineaaride lõige ühtib kvadriku iseäraste punktide hulgaga.*

Tõestus. Valime uue reeperi nii, et baaspunktid $A'_1, \ldots, A'_{n-1}$ asetsevad ühel kvadrikule kuuluval lineaaril; viimase võrrand on siis $x^n = 0$. Et kõik punktid $(x^1 : \ldots : x^{n-1} : 0)$ on kvadrikul, siis võrdus $a'_{\alpha\beta}{}'x^\alpha{}'x^\beta = 0$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$ on samasus, mistõttu $a'_{\alpha\beta} = 0$ (vt. art. 88). Baasivahetus on tõlgendatav ruumi P_{n-1} kollineatsioonina, seepärast teoreemi 123.1 põhjal $r \leqslant 2$. Kvadrikut esitab valitud reeperi suhtes võrrand $a'_{ni}{}'x^n{}'x^i = 0$, s. t. ${}'x_n(a'_{ni}{}'x^i) = 0$. Järelikult teise kvadrikule kuuluva lineaari võrrand on ${}'a_{ni}{}'x^i = 0$. Vaadeldav kvadrik on mitteregulaarne, seega tal leidub iseäraseid punkte. Viimaste hulka kirjeldav süsteem (124.6) koosneb siin võrranditest $a'_{ni}{}'x^i = 0$ ja $a'_{\alpha n}{}'x^n = 0$. See süsteem esitab tõepoolest kvadrikut koostavate lineaaride lõike.

Erijuhul ka $a'_{\alpha n} = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, n-1)$. Siis $a'_{nn} \neq 0$, $r = 1$ ja kvadrikut esitab võrrand $({}'x^n)^2 = 0$. Järelikult koosneb kvadrik sel juhul kahest ühtivast (ehk, nagu öeldakse — ühest kahekordsest) lineaarist. On selge, et niisuguse kvadriku iga punkt on iseärane (def. 124.1). ∎

Iga kvadrik, mille astak on 2, ei osutu laguvaks. Tõepoolest, kvadrik, mille võrrand teatud reeperi suhtes on $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$, ei ole laguv, ehkki siin $r = 2$. Olukord on erinev, kui $r = 1$. See selgub järgmisest lausest.

***Teoreem* 124.2.** *Iga kvadrik astakuga 1 on laguv ja koosneb kahekordsest lineaarist, mille iga punkt on kvadriku iseärane punkt.*

Tõestus. Kui $r = 1$, siis süsteemis (124.6) leidub ainult üks sõltumatu võrrand. Seega kvadrik sisaldab iseärastest punktidest koosnevat lineaari, mistõttu ta on tõepoolest laguv. Kvadrikul ei saa olla ühtki punkti väljaspool seda lineaari. Kui selline punkt Y leiduks, siis iga punkti $X \in P_{n-1}$ korral sirge XY, lõigates iseärastest punktidest koosnevat lineaari, peaks def. 124.1 põhjal ise kuuluma sellele lineaarile, s. t. kvadrik peaks sisaldama kogu ruumi P_{n-1}. ∎

Näitame, et kompleksne projektiivne ruum on «korrapärasema» struktuuriga.

***Teoreem* 124.3.** *Tasandil* $P_2(i)$ *ja ruumis* $P_3(i)$ *on iga kvadrik astakuga 2 laguv.*

Tõestus. Kui $r = 2$, siis lahendite arv süsteemi (124.6) fundamentaalsüsteemis on $P_2(i)$ puhul üks, $P_3(i)$ puhul aga kaks. Seega esimesel juhul on kvadrikul üks iseärane punkt, teisel juhul aga iseärastest punktidest koosnev sirge. Kuid $P_2(i)$ kvadrik ei saa koosneda ainult ühest punktist ega $P_3(i)$ oma ainult ühest sirgest, sest iga sirge lõikab siin kvadrikut. Seega leidub kvadrikul mitteiseäraseid punkte. Olgu Y selline punkt. Iga sirge, mis läbib punkti Y ja mingit iseärast punkti, kuulub kvadrikule (def. 124.1), järelikult sisaldab kvadrik lineaari. ∎

Niisiis P_2 ja P_3 mittelaguvad kvadrikud võivad tasandil $P_2(i)$ ja ruumis $P_3(i)$ olla laguvad, s. t. koosneda imaginaarsetest lineaaridest. Et iseärased punktid on reaalsed, siis koosneb selline kvadrik tasandil P_2 ühest punktist ja ruumis P_3 ühest sirgest.

Nüüd on selge, et laguva kvadriku iga mitteiseärane punkt C määrab sidumi (P_2 puhul kimbu), mille iga sirge kas on kvadrikul või lõikab viimast kahes erinevas punktis. Seejuures punkti C läbiv lineaar, mida esitab võrrand (124.5), kuulub kvadrikule. Kui $r = 1$, siis kvadrikul mitteiseäraseid punkte ei ole ja iga sirge kas on kvadrikul või lõikab teda ühes kahekordses punktis; võrrand (124.5) siin lineaari ei määra. Mitteiseärased punktid puuduvad ka kvadrikul, mille puhul $r = 2$ ja mis ei ole laguv. Et selline kvadrik koosneb kahest imaginaarsest lineaarist, siis iga sirge, mis ei läbi iseärast punkti, lõikab teda kahes imaginaarses punktis.

Mittelaguva kvadriku mitteiseärast punkti C läbiv lineaar, mille võrrand on (124.5), ei kuulu kvadrikule. Sidumi C kõik sirged, millel on kvadrikuga ainult üks ühine punkt, asetsevad sellel lineaaril (nagu edaspidi selgub, võib sidumis C mõnel juhul olla ka kvadrikule kuuluvaid sirgeid).

Def. **124.2.** Sirget, millel on mittelaguva kvadrikuga ainult üks ühine mitteiseärane punkt C, nimetatakse selle kvadriku puutujaks punktis C, punkti C aga tema puutepunktiks. Lineaari, millel asetsevad kvadriku kõik puutujad punktis C, nimetatakse kvadriku puutujalineaariks punktis C.

Tasandi P_2 kvadriku puutujalineaari mõiste ühtib puutuja mõistega. Ruumi P_3 kvadriku puutujalineaari nimetatakse puutujatasandiks. Puutujalineaari esitab võrrand (124.5).

Kirjeldame saadud mõistete abil kvadrikute eespool väljaeraldatud klasse.

Tasandi P_2 kvadrikud oleme esialgu jaganud kolme klassi. ***A***-klassi kvadrikul pole iseäraseid punkte, seetõttu pole ta ka laguv; igas punktis on tal puutuja. ***B***1-klassi kvadrikul on üks iseärane punkt C; see kvadrik on kas laguv, koosnedes kahest sirgest lõikepunktiga C, või tal ongi see ainus iseärane punkt C. ***B***2-klassi kvadrik on laguv, koosnedes ainult ühest sirgest, mille kõik punktid on kvadriku iseärased punktid.

Ruumi P_3 kvadrikud on seni jagatud nelja klassi. ***A***-klassi kvadrikul pole iseäraseid punkte, ta pole laguv; igas punktis on tal puutujatasand. ***B***1-klassi kvadrikul on ainult üks iseärane punkt C, ta ei ole laguv; igas mitteiseärases punktis on tal puutujatasand. Koos iga punktiga $Y \neq C$ sisaldab viimane kvadrik ka sirge CY (def. 124.1), seetõttu ***B***1-klassi kvadrikut nimetatakse kooniliseks (vt. art. 84) ja tema iseärast punkti C tipuks. ***B***2-klassi kvadrikul on iseäraste punktide sirge; ta on kas laguv, koosnedes kahest sellel sirgel lõikuvast tasandist, või tal ongi ainult selle sirge punktid. ***B***3-klassi kvadrik on laguv, koosnedes ainult ühest tasandist, mille kõik punktid on kvadriku iseärased punktid.

Seni «sondeerisime» kvadrikut sirgete abil. Ruumis P_3 saab sellel otstarbel kasutada ka tasandeid. Esitame selle kohta kaks teoreemi.

Teoreem **124.3.** *P_3 kvadriku lõige tasandiga on P_2 kvadrik.*

Tõestus. Valime reeperi ruumis P_3 nii, et lõiketasandit esitab võrrand $x^4 = 0$, siis kvadriku $a_{ij}x^ix^j = 0$ $(i, j = 1, \ldots, 4)$ lõige on kvadrik

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^4 = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \blacksquare \tag{124.7}$$

Regulaarse kvadriku lõige tasandiga on üldiselt jälle regulaarne kvadrik. Võib aga ette tulla, et regulaarse kvadriku lõige tasandiga sisaldab (selle lõike jaoks) iseärast punkti, s.t. lõige võib olla mitteregulaarne. Regulaarse kvadriku lõikamisel sirgega tekib viimasel mitteregulaarne kvadrik — ühtivate punktide paar (vt. art. 123) — parajasti siis, kui sirge on puutujaks. Analoogiline on olukord ka ruumi P_3 kvadriku lõikamisel tasandiga, nagu näitab järgmine lause.

***Teoreem* 124.5.** *P_3 regulaarse kvadriku lõige tasandiga on mitteregulaarne kvadrik parajasti siis, kui see tasand on puutujatasandiks.*

T õ e s t u s. Tasandi P_2 kvadrik võrrandiga (124.7) on mitteregulaarne parajasti siis, kui maatriksi $\|a_{\alpha\beta}\|$ determinant on null. Sel korral süsteemil $a_{\alpha\beta}x^\beta = 0$ on olemas mittetriviaalne lahend, s. t. leidub ruumi P_3 punkt $C = (c^1 : c^2 : c^3 : 0)$, nii et $a_{\alpha\beta}c^\beta = 0$. Punkt C on, nagu kerge näha, P_3 kvadrikul, kusjuures kvadriku puutujatasandi võrrandiks (124.5)

$$a_{\alpha\beta}c^\alpha x^\beta + a_{\alpha 4}(c^\alpha x^4 + c^4 x^\alpha) + a_{44}c^4 x^4 = 0 \qquad (124.8)$$

on selle punkti puhul $a_{\alpha 4}c^\alpha x^4 = 0$. Siin $a_{\alpha 4}c^\alpha \neq 0$, sest vastupidisel juhul c^α moodustaksid lineaarse homogeense süsteemi $a_{\alpha\beta}x^\alpha = 0$, $a_{\alpha 4}x^\alpha = 0$ mittetriviaalse lahendi, mistõttu selle süsteemi maatriksi astak oleks $\leqslant 2$. Sel korral aga maatriksi $\|a_{ij}\|$ determinandi arendamisel viimase rea elementide järgi oleks tulemuseks 0, sest kõik kolmandat järku determinandid selles arendises oleksid nullid. P_3 kvadriku regulaarsuse tõttu on selline olukord võimatu. Järelikult $a_{\alpha 4}c^\alpha \neq 0$ ja puutujatasandil on võrrand $x^4 = 0$, s. t. vaadeldav tasand on tõesti puutujatasand.

Vastupidi, olgu tasand võrrandiga $x^4 = 0$ ruumi P_3 kvadriku puutujatasandiks. Sel korral leidub puutepunkt $C = (c^1 : c^2 : c^3 : 0)$, nii et puutujatasand võrrandiga (124.8), kus $c^4 = 0$, ühtib selle tasandi endaga, s.t. nii, et $a_{\alpha\beta}c^\alpha = 0$. Siit järeldub, et maatriksi $\|a_{\alpha\beta}\|$ determinant on 0 ning P_2 kvadrik võrrandiga (124.7) mitteregulaarne. ∎

125. Polaarne vastavus. Art-s 124 antud ülevaatest ei selgu veel küllaldaselt üksikasju kvadrikute klassifitseerimise lõpuleviimiseks ja kvadrikute üksikute liikide kirjeldamiseks. Kõik kvadrikute klassifitseerimisega seotud küsimused on otstarbekas lahendada kvadrikute maksimaalselt lihtsustatud võrrandite abil. Tekib probleem, kuidas valida sobiv reeper. Käesoleva artikli ülesandeks ongi leida meetod, mis võimaldab reeperi otsimist vajalikul viisil suunata.

Vaatleme koos mingi kvadrikuga sirgesidumit, mille keskpunkt C ei kuulu sellele kvadrikule. Olgu $\{CY\}$ selle sidumi kõigi niisuguste sirgete hulk, mille lõikepunktide paarid (X_1, X_2) kvadrikuga koosnevad erinevatest punktidest: $X_1 \neq X_2$. (Eeldame, et sidumis sellised sirged leiduvad; sisuliselt tähendab see, et me jätame esialgu vaatlusest kõrvale kvadrikud, mis koosnevad ainult iseärastest punktidest). Tekib 1:1-vastavus $\{CY\} \to \to \{(X_1, X_2)\}$.

Sirgele CY kuuluv paar (X_1, X_2) määrab sellel sirgel teatava punkti Z — nimelt punkti C kaasharmoonilise punkti selle paari suhtes. Punkti Z kirjeldab tingimus $(X_1X_2, CZ) = -1$. Nii on lugu igal sirgel CY. Võime ütelda, et kvadrik seab paaride hulga $\{(X_1, X_2)\}$ abil sidumi keskpunktile C vastavusse parajasti ühe punkti igal sirgel hulgast $\{CY\}$.

Olgu sirge CZ esitatud parameetriliselt paari (C, Z) abil: kui $X \in CZ$ siis $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}t + \boldsymbol{Z}$. Lõikepunktidele X_1 ja X_2 vastavad parameetri t väärtused t_1 ja t_2 määrab siis võrrand (124.3), mis siin tuleb kirjutada kujul

$$(a_{ij}c^ic^j)\,t^2+2\,(a_{ij}c^iz^j)\,t+a_{ij}z^iz^j=0; \tag{125.1}$$

seejuures $t_1+t_2=a_{ij}c^iz^j$. Et $(X_1X_2, CZ)=\frac{t_1}{t_2}=-1$, siis $t_1+t_2=0$, mistõttu punkti Z koordinaadid peavad rahuldama võrdust

$$a_{ij}c^iz^j=0. \tag{125.2}$$

Vastupidi, iga punkt Z, mis ei ole kvadrikul, s. t. mille puhul $a_{ij}z^iz^j \neq 0$ ja mille koordinaadid rahuldavad võrdust (125.2), on punkti C kaasharmooniline punkt sirge CZ ja kvadriku lõikepunktide paari (X_1, X_2) suhtes. Tõepoolest, seoste (125.1) ja (125.2) tõttu iga sellise punkti puhul $t_1 + t_2 = 0$, seega $(X_1X_2, CZ) = =\frac{t_1}{t_2}=-1$.

Näidatud vahekord kehtib ka imaginaarsete lõikepunktide puhul. Sel juhul, nagu kerge kontrollida, on t_1 ja t_2 puhtimaginaarsed kaaskompleksarvud $\pm\,\sigma i$, mistõttu ka siin on $\frac{t_1}{t_2}=-1$.

Olgu märgitud, et hulk $\{CY\}$ ei ammenda sidumit C ühegi kvadriku korral. Tõepoolest, kui iga sirge CW esitada parameetriliselt paari (C, W) abil, s. t. lugeda $X \in CW$ puhul $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}t + \boldsymbol{W}$, siis lõikepunkte määraval võrrandil $(a_{ij}c^ic^j)\,t^2 + 2(a_{ij}c^iw^j)\,t + a_{ij}w^iw^j) = 0$ leidub alati võrdsete lahendite paare; sellised määrab võrrand $(a_{ij}c^iw^j)^2 - (a_{ij}c^ic^j)\,(a_{ij}w^iw^j) = 0$. On selge, et punktide hulk $\{W\}$, mille esitab viimane võrrand, sisaldab kõik punktid, mis asetsevad punktist C kvadrikule tõmmatud puutujatel, kui selliseid leidub. Niisugust hulka nimetatakse juhul, kui ta sisaldab kvadriku puutujaid, kvadriku **puutujakoonuseks** punkti C jaoks. Laguva kvadriku korral koosneb see hulk sirgetest, mis ühendavad punkti C kvadriku iseäraste punktidega, ning on seetõttu kas lineaar või kogu ruum.

Nagu eelnevatest arutlustest selgus, seab iga kvadrik, mis ei koosne ainult iseärastest punktidest, igale sellele kvadrikule mittekuuluvale punktile C vastavusse teatava üheselt määratud lineaari (125.2). Seda vastavust saab kergesti laiendada nii, et 1) selle määrab iga kvadrik, 2) ka kvadriku enda punktidele seatakse vastavusse teatavad lineaarid. Sel viisil laiendatud vastavus on aluseks järgmisele definitsioonile.

Def. **125.1.** Lineaari, mille antud kvadriku $a_{ij}x^ix^j = 0$ ja antud mitteiseärase punkti $C = c^1 : \ldots : c^n)$ korral määrab võrrand $a_{ij}c^ix^j = 0$, nimetatakse punkti C p o l a a r i k s selle kvadriku suhtes. Kvadriku iseärase punkti polaariks loetakse P_{n-1} iga lineaari. Punkti C polaarile kuuluvaid punkte nimetatakse punktiga C p o l a a r s e l t k o n j u g e e r i t u d p u n k t i d e k s ehk punkti C k a a s p u n k t i d e k s vaadeldava kvadriku suhtes. Punkti C ennast nimetatakse talle vastavusse seatud lineaari või lineaaride hulga p o o l u s e k s. Korraldatud vastavust P_{n-1} punktide ja lineaaride vahel nimetatakse p o l a a r s e k s v a s t a v u s e k s vaadeldava kvadriku suhtes.

Kui punkti $(c^1 : \ldots : c^n)$ koordinaadid rahuldavad üht võranditest $a_{ij}x^ix^j = 0$ ja $a_{ij}c^ix^j = 0$, siis rahuldavad nad ka teist. Siit nähtub, et kvadriku iga punkt on iseendaga polaarselt konjugeeritud ehk e n e s e k a a s p u n k t kvadriku suhtes ja vastupidi — kõik enesekaaspunktid antud kvadriku suhtes kuuluvad sellele kvadrikule. See tõsiasi on kooskõlas võrrandist (124.5) järelduva lausega: *kvadriku iga puutujalineaar on oma puutepunkti polaar ja puutepunkt on tema poolus.* Ühtlasi on selge, et laguva kvadriku korral, mille astak on 2, kumbki temas sisalduv lineaar on iga oma punkti polaar.

Eeskirja punkti polaari määramiseks annab def. 125.1. Antud lineaari pooluse leidmiseks võib arutleda järgmiselt. Olgu $a_{ij}x^ix^j = 0$ antud kvadriku ja $u_jx^j = 0$ vabalt võetud lineaari U võrrand. Punkt $Y = (y^1 : \ldots : y^n)$ on lineaari U poolus parajasti siis, kui U on tema polaar, s. t. kui punkti Y polaari võrrand $a_{ij}y^ix^j = 0$ on ekvivalentne lineaari U võrrandiga, niisiis, kui $a_{ij}y^i = \lambda u_j$. Seega määrab lineaari U pooluse võrrandisüsteem

$$a_{ij}x^i = \lambda u_j \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{125.3}$$

Tehtud märkustest järeldub, et polaarne vastavus on ruumi P_{n-1} punktide hulga 1 : 1-pealekujutus selle ruumi lineaaride hulgale parajasti siis, kui teda määrav kvadrik on regulaarne. Valemitest (118.3) ja (125.3) nähtub, et sel juhul on tegemist ruumi P_{n-1} teatud korrelatsiooniga. Seda korrelatsiooni iseloomustab tingimus $A^T = A$. Maatriksi A sümmeetrias peitubki polaarse vastavuse põhiomadus, mida väljendab järgmine teoreem.

***Teoreem* 125.1.** *Iga punkt on polaarselt konjugeeritud iga punktiga oma polaaril.*

Tõestus. Asjaolu, et punkt $B = (b^1 : \ldots : b^n)$ kuulub punkti $C = (c^1 : \ldots : c^n)$ polaarile kvadriku $a_{ij}x^ix^j = 0$ suhtes, väljendab võrdus $a_{ij}c^ib^j = 0$. Et aga $a_{ij} = a_{ji}$, siis $a_{ij}c^ib^j = a_{ij}b^ic^j$, mistõttu samaaegselt kehtib võrdus $a_{ij}b^ic^j = 0$. Viimane väljendabki punkti C kuuluvust punkti B polaarile. ▮

Niisiis polaarne konjugeeritus on punktide vastastikune omadus. Seepärast nimetatakse regulaarse kvadrikuga määratud polaarset vastavust involutiivseks korrelatsiooniks.

Teoreemist 125.1 ilmneb, et punktid B ja C on teineteise kaaspunktid kvadriku $a_{ij}x^ix^j = 0$ suhtes parajasti siis, kui

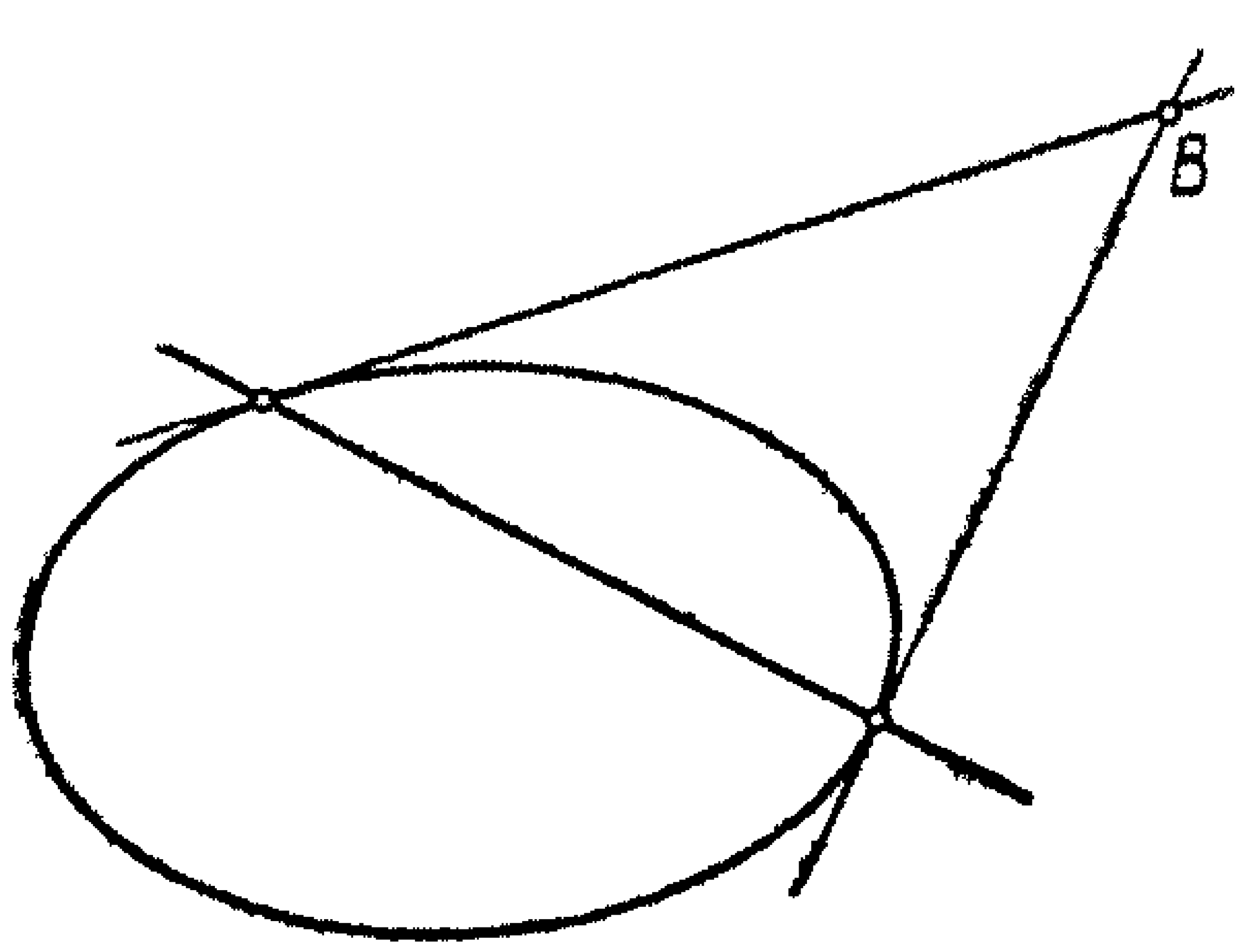
$$a_{ij}b^ic^j = 0. \tag{125.4}$$

Teineteise kaaspunktid B ja C on kaasharmooniline paar sirge BC ja kvadriku lõikepunktide suhtes. Lõikepunktid (s. o. enesekaaspunktid) on püsipunktid harmoonilises kujutuses, mille kvadrik tekitab sirgel BC.

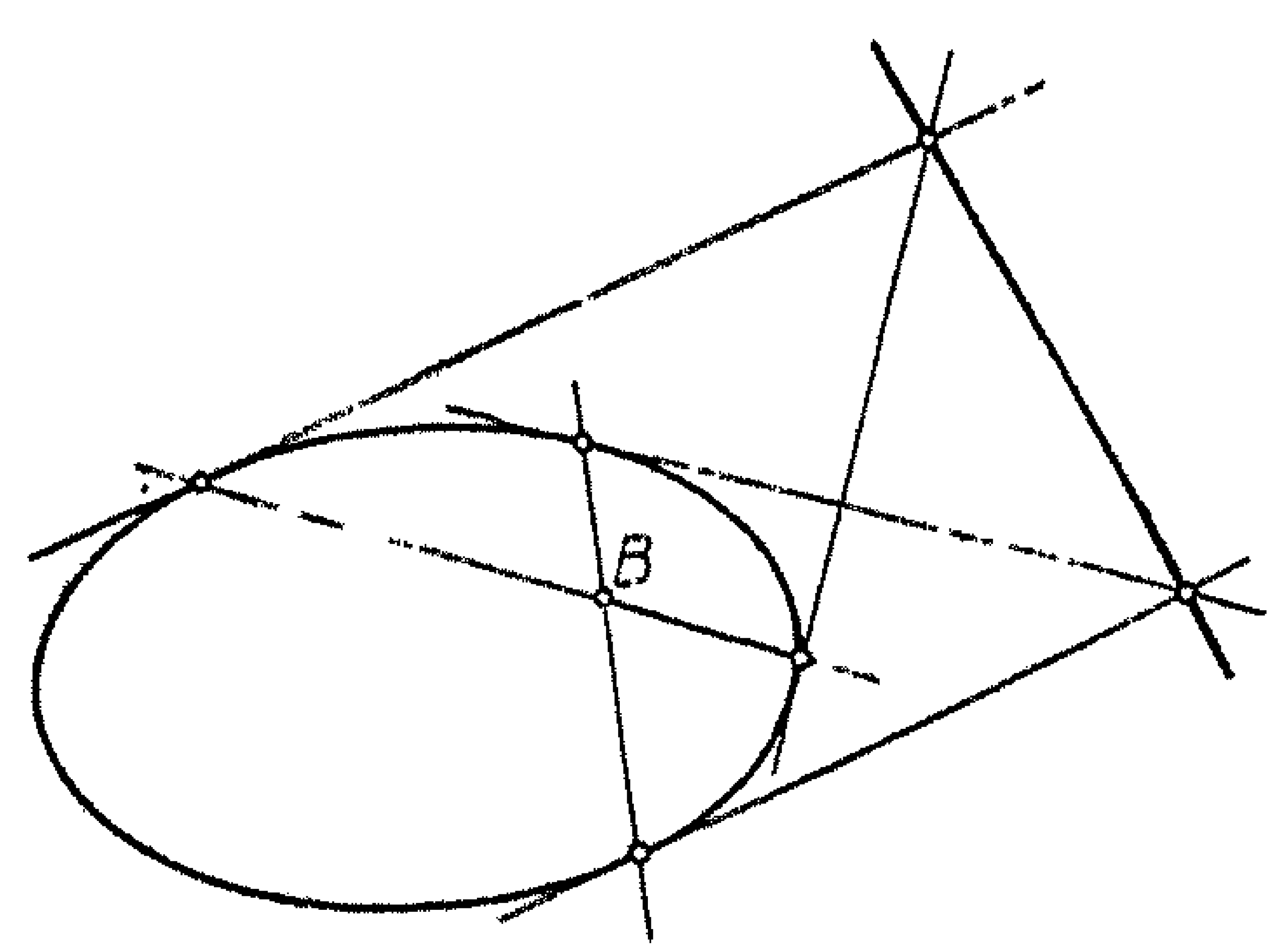
Puutujalineaari iga punkt asetseb puutepunkti polaaril, seega *puutujalineaari kõik punktid on puutepunkti kaaspunktid.*

Puutujalineaari võrrandit (124.5) saab kasutada ainult siis, kui on teada puutepunkt. Polaari mõiste võimaldab puutujalineaari määrata ka üldisemal juhul. Olgu $B = (b^1 : \ldots : b^n)$ mingi kvadrikule mittekuuluv punkt. Kui läbi B saab tõmmata puutuja kvadrikule, siis viimane peab läbima punkti B kaaspunkti kvadrikul. Järelikult asetsevad kõigi punktist B tõmmatud puutujate puutepunktid kvadriku ja punkti B polaari lõikel, s. t. iga puutepunkti koordinaadid peavad rahuldama võrrandisüsteemi $a_{ij}x^ix^j = 0$, $a_{ij}b^ix^j = 0$.

Kui saadud süsteemil leidub erinevaid reaalseid lahendeid (tin-



Joon. 216.



Joon. 217.

gimusel, et $a_{ij}b^ib^j \neq 0$), siis öeldakse, et B on kvadriku suhtes välispunkt, kui aga lahendid on kõik imaginaarsed, siis räägitakse B puhul sisepunktist. Esimesel juhul saab punktist B tõmmata kvadrikule puutujaid, teisel juhul aga mitte.

Siit järeldub lihtne võte punkti B polaari skitseerimiseks regulaarse kvadriku suhtes täiendatud tasandil. Kui B on välispunkt, siis tuleb tõmmata läbi punkti B puutujad kvadrikule ning ühendada puutepunktid sirgega (joon. 216). Kui B on sisepunkt, siis tuleb võtta kaks teda läbivat sirget, tõmmata puutujad kummagi sirge lõikepunktidest kvadrikuga, leida kummagi sirge puhul nende puutujate lõikepunktid ning lõpuks ühendada viimased sirgega (joon. 217).

Polaarne vastavus on siin sisse toodud kvadriku mõiste abil. Kuid kvadrikute teooria saab üles ehitada ka, lähtudes polaarsest vastavusest, mis on defineeritud korrelatsiooni üldistatud mõiste abil Selleks vaadeldakse kõiki võimalikke vastavusi, mille korraldavad valemid (118.3), ja nimetatakse neid korrelatsioonideks ka siis, kui kordajatest moodustatud maatriks C ei ole regulaarne. Ruumi P_{n-1} involutiivset korrelatsiooni (need eraldab välja tingimus $C^T = C$) nimetatakse polaarseks vastavuseks ja viimase enesekaaspunktide hulka — kvadrikuks. Sel juhul tähendab projektiivselt ekvivalentsete kvadrikute klasside määramine kõigi involutiivsete korrelatsioonide klassifitseerimist.

Punktide polaarsele konjugeeritusele vastab duaalselt järgmine mõiste.

***Def.* 125.2.** Lineaari U, mis läbib lineaari V poolust, nimetatakse lineaariga V polaarselt konjugeeritud lineaariks ehk lineaari V kaaslineaariks antud kvadriku suhtes.

Duaalsuse printsiibi põhjal järeldub teoreemist 125.1, et *lineaar on polaarselt konjugeeritud iga lineaariga sidumis, mille määrab tema poolus.* Selles väljendub lineaaride polaarse konjugeerituse sümmeetria.

Lineaar, mis läbib oma poolust, on iseendaga polaarselt konjugeeritud ehk enesekaaslineaar vaadeldava kvadriku suhtes. Enesekaaslineaarideks osutuvad kõik kvadriku puutujalineaarid, samuti lineaarid, mis läbivad iseäraseid punkte.

Et polaarne vastavus regulaarse kvadriku suhtes on ruumi P_{n-1} (involutiivne) korrelatsioon, siis säilitab ta punktide ja lineaaride projektiivse sõltumatuse vahekorrad.

Mitteregulaarse kvadriku korral on olukord teine — toimub korrelatsiooni kidumine. Et iseärane punkt on polaarselt konjugeeritud P_{n-1} iga punktiga, siis peavad P_{n-1} kõigi punktide polaarid läbima iseärast punkti. Regulaarse kvadriku puhul lineaari U punktide polaaride hulk on lineaari U poolusega määratud lineaarisidum, kusjuures erinevatele lineaaridele vastavad erinevad sidumid. Kui aga kvadrikul on üks iseärane punkt C, s. t. kui on tegemist $\boldsymbol{B}$1-klassi kvadrikuga, siis kujutuvad kõik lineaarid üheks ja sellekssamaks sidumiks, mille keskpunkt on C. Iseäraste punktide sirget sisaldava ehk $B2$-klassi kvadriku korral on P_3 puhul kõigi tasandite hulga kujutiseks tasandikimp, mille teljeks on see iseäraste punktide sirge, P_2 puhul aga kujutuvad kõik sirged üheks iseäraste punktide sirgeks. Viimase juhuga analoogiline on olukord $B3$-klassi kvadriku korral ruumis P_n.

Kvadrikute teooria kandub duaalsuse printsiibi abil üle teist klassi sidumitele (art. 123). Näitame, kuidas duaalselt määratakse polaarse vastavuse mõiste.

Teist klassi tasandisidumi määrab võrrand

$$a^{ij}v_i v_j=0, \quad (i, j=1, 2, 3, 4), \tag{125.5}$$

kus u_i on muutuva tasandi koordinaadid ja $A=\|a^{ij}\|$ on sümmeetriline maatriks. Juhul kui $|A| \neq 0$, nimetatakse sidumit regulaarseks.

Ka siin alustatakse sidumi «sondeerimist» sirgetega; nimelt uuritakse, mitmele sidumi (125.5) tasandile saab kuuluda ruumis vabalt valitud sirge u. Kui $u=S(s_i) \cap V(v_i)$, siis sellised tasandid määrab võrrandiga (124.3) analoogiline võrrand

$$a^{ij}s_i s_j t^2+2a^{ij}s_i v_j t+a^{ij}v_i v_j=0. \tag{125.6}$$

Kui sidum (125.5) on täiendatud imaginaarsete tasanditega, siis P_3 iga sirge on kas sidumi kahe tasandi lõige, kuulub tervenisti ainult ühele tasandile selles või eraldab sellest tasandikimbu. Viimasel juhul laguh sidum (125.5) kaheks esimest klassi (s. o. harilikuks) tasandisidumiks, mis erijuhul võivad ühtida.

Olgu $T(t_i)$ P_3 vabalt fikseeritud tasand, mis ei kuulu sidumisse (125.5), ja u selline sirge tasandil T, mida mööda lõikuvad sidumi (125.5) kaks tasandit V_1 ja V_2. Paar (V_1, V_2) lubab leida tasandikimbus, mille telg on u, tasandi T üheselt määratud kaasharmoonilise tasandi $U(u_i)$. Sel juhul $(V_1V_2, TU)=-1$. Samal viisil nagu võrduse (125.2) tuletamisel saab nüüd võrrandist (125.6) leida seose, mida peavad rahuldama tasandi U koordinaadid:

$$a^{ij}t_i u_j=0. \tag{125.7}$$

Olgu $\{u\}$ tasandi T kõigi selliste sirgete hulk, millest igaüht läbib parajasti kaks tasandit sidumist (125.5). Hulk $\{u\}$ eraldab seose (125.7) abil välja ruumi kõigi niisuguste tasandite hulga $\{U\}$, mis on fikseeritud tasandi T kaasharmoonilisteks sidumi (125.5) tasandipaaride suhtes. Kerge on veenduda, et $\{u\}$ ei ammenda T sirgete hulka; jäävad välja näiteks kõik sirged, mida läbib ainult üks tasand sidumist (125.5). Niisuguste sirgete hulk on kvadriku puutujakoonuse suhtes duaalne kujund.

Kui seost (125.7) vaadelda võrrandina tasandi koordinaatide

u, suhtes, siis määrab ta tasandisidumi. Võib ütelda ka, et tegemist on punkti (nimelt sidumi keskpunkti) võrrandiga (vt. 110.3*b*). Siit ilmneb, et teist klassi tasandisidum, mis ei lagu kaheks ühtivaks esimest klassi sidumiks, seab igale temasse mittekuuluvale tasandile vastavusse teatud punkti C, mida esitab võrrand (125.7). Punkti C nimetatakse tasandi T pooluseks ja tasandit T punkti C polaariks vaadeldava teist klassi sidumi suhtes.

Kui $C \in T$, s. t. $a^{ij}t_it_j = 0$, siis tasand T kuulub sidumisse (125.5). Punkti C nimetatakse sel juhul sidumi puutepunktiks tasandil T. Osutub, et T on sidumi (125.5) ainus tasand, mis läbib puutepunkti C. Selles veendumiseks piisab, kui vaadelda sidumist C vabalt valitud tasandit U ja tähele panna, et tasandite T ja U lõikesirge u kuulub ainult ühele sidumi (125.5) tasandile. Tõepoolest, et $a^{ij}t_it_j = 0$ ja $a^{ij}t_iu_j = 0$, siis sirge u jaoks kirjutatud võrrandil (125.6) on ainult üks (kordne) lahend. Kuid $u \in T$, $C \in u$ ja tasand U on suvaline.

Teist klassi sirgekimbu puhul tasandil P_2 on see arutlus korratav oluliste muutusteta: tasandid tuleb vaid asendada sirgetega ja sirged punktidega, kimpu «sondeerida» punktide abil jne.

Huvitava seose selgitab järgmine allpool vajalik teoreem.

***Teoreem* 125.2.** *Regulaarse kvadriku puutujalineaaride hulk on regulaarne teist klassi sidum; regulaarse teist klassi sidumi puutepunktide hulk on regulaarne kvadrik.*

T õ e s t u s. Väide koosneb kahest teineteise suhtes duaalsest lausest; piisab, kui tõestada nendest ainult üks. Tõestame näiteks esimese P_2 kvadriku puhul.

Olgu $u_ix^i = 0$ sirge, mis puutub P_2 kvadrikut $a_{ij}x^ix^j = 0$ punktis $C(c^1 : c^2 : c^3)$, siis kehtib: $u_ic^i = 0$, $a_{ij}c^i = \lambda u_j$ ($j = 1, 2, 3$; $\lambda \neq 0$). Avaldame kolmest viimasest võrdusest punkti C koordinaadid:

$$c^1 = \frac{\lambda \begin{vmatrix} u_1 & a_{21} & a_{31} \\ u_2 & a_{22} & a_{32} \\ u_3 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad c^2 = \frac{\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & u_1 & a_{31} \\ a_{12} & u_2 & a_{32} \\ a_{13} & u_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad c^3 = \frac{\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & u_1 \\ a_{12} & a_{22} & u_2 \\ a_{13} & a_{23} & u_3 \end{vmatrix}}{|A|}.$$

Asendus ja lihtne teisendus annab nüüd esimesest seosest tingimuse

$$\begin{vmatrix} u_1 & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ u_2 & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ u_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ 0 & u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{125.8}$$

mida peavad rahuldama puutuja koordinaadid. Et vaadeldav puutuja on valitud vabalt, siis on (125.8) tarvilik ja piisav tingimus selleks, et tasandi sirge U oleks kvadriku puutuja, s. t. see on kvadriku puutujate hulga võrrand. Tegemist on teise astme homogeense võrrandiga. Siit nähtub, et kvadriku puutujate hulk on tõepoolest teist klassi kimp. Jääb näidata, et see kimp on regulaarne.

Teisendame võrrandit (125.8); selleks arendame determinandi. Teisendatud kujus $A^{ij}u_iu_j=0$ on kordajateks A^{ij} kvadriku maatriksi miinorid. Jagame võrrandit selle maatriksi determinandiga ja tähistame $\frac{A^{ij}}{|A|}=a^{ij}$, siis tulemuses $a^{ij}u_iu_j=0$ moodustavad kordajad maatriksi $\|a^{ij}\|=A^{-1}$. See aga tähendab, et puutujakimp on regulaarne. ∎

Tõestus P_3 kvadriku korral ei erine oluliselt esitatust.

126. Kvadrikute klassifitseerimine. Kasutame polaarset vastavust sellise reeperi väljaeraldamiseks, mis võimaldab kvadrikuid täielikult projektiivselt klassifitseerida.

***Def.* 126.1.** Ruumi P_{n-1} reeperit nimetatakse autopolaarseks reeperiks antud kvadriku jaoks, kui tema iga baaspunkt on kõigi ülejäänud baaspunktidega polaarseit konjugeeritud vaadeldava kvadriku suhtes.

Autopolaarse reeperi määrab iga täielik n-tipp, mille iga tipp on vastastahu (s. o. lineaari, mis läbib ülejäänud $n-1$ tippu) poolus. Sellise reeperi saamiseks tuleb n-tipu tipud järjestada ja võtta baaspunktideks ning lisada ühikpunkt.

Märgitud omadusega n-tippu nimetatakse autopolaarseks vaadeldava kvadriku suhtes. Autopolaarse n-tipu tippude hulgas võib leiduda ka enesekaaspunkte, sealhulgas kvadriku iseäraseid punkte. Autopolaarseks osutub näiteks iga n-tipp, mille mingid k tippu ($k \leqslant n$) on polaarselt konjugeeritud nii igaüks iseendaga kui ka ülejäänud $n-k$ tipuga, viimased aga on paarikaupa omavahel polaarselt konjugeeritud.

Autopolaarse reeperi kirjeldusest ei järeldu veel tema olemasolu. Seepärast vajab eraldi tõestamist vastav teoreem.

Teoreem 126.1. *Iga kvadriku jaoks ruumis P_{n-1} leidub lõpmata palju erinevaid autopolaarseid reepereid.*

Tõestus. Autopolaarse reeperi saamiseks piisab, kui leida mingi autopolaarne n-tipp.

Vaatleme suvalist kvadrikut ja ehitame n-tipu, mis on selle suhtes autopolaarne. Valime vabalt kvadrikule mittekuuluva punkti A. Sellel leidub üheselt määratud polaar U, kusjuures $A \notin U$. Erijuhul, kui U koosneb kvadriku iseärastest punktidest, fikseerime sellel mingid $n-1$ projektiivselt sõltumatut punkti. Sellel erijuhul on eesmärk saavutatud: koos punktiga A moodustavad need $n-1$ punkti autopolaarse n-tipu.

Üldjuhul (kui $r > 1$) ei koosne polaar U üksnes iseärastest punktidest. Samuti ei sisaldu ta kvadrikus, sest vastupidisel juhul oleks kvadrik laguv ja peaks sisaldama ka U pooluse A. Niisiis sisaldab U kvadrikule mittekuuluvaid punkte Olgu B üks selline Punktil B on üheselt määratud polaar $V \ni A$. Seejuures $V \neq U$, sest $A \notin U$. Et B ei ole enesekaaspunkt, siis $B \notin V$.

Tasandi P_2 kvadriku korral lisame veel punkti $C = U \cap V$. Eelnevate märkuste põhjal A, B ja C on üldasendis ja moodustavad autopolaarse kolmtipu.

P_3 kvadriku korral $U \cap V$ võib koosneda kvadriku punktidest. Sel juhul lisame punktidele A ja B mingid kaks punkti sellelt lõikelt; tulemuseks on autopolaarne nelitipp. Kui $U \cap V$ ei kuulu tervenisti kvadrikule, kuid sisaldab selle üht iseärast punkti, siis jõuame samale eesmärgile, lisades mainitud iseärase punkti ja $U \cap V$ vabalt võetud punkti. Lõpuks, kui $U \cap V$ ei sisalda ühtki iseärast punkti, siis fikseerime selle lõikes punkti C vabalt väljaspool kvadrikut. Olgu C polaar W. Punktide A, B ja C sõltumatusest järeldub nende polaaride sõltumatus (art. 125). Seepärast lõige $U \cap V \cap W$ koosneb ühest punktist D Nelitipp $ABCD$ on autopolaarne nelitipp.

Et kõigil juhtudel on punktid, võib-olla peale viimase, valitud teatava vabadusega, siis autopolaarseid reepereid on tõesti lõpmata palju.[157] ∎

***Teoreem* 126.2.** *Kui kvadriku võrrand on koostatud selle kvadriku jaoks autopolaarse reeperi suhtes, siis selles võrrandis puuduvad erinevaid koordinaatmuutujaid sisaldavad liikmed.*

T õ e s t u s. Olgu $\mathfrak{R} = \{A_1, \ldots, A_n, E\}$ autopolaarne reeper kvadriku jaoks, mille võrrand on $a_{ij}x^ix^j = 0$. Et $\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}_i\delta_k^i$ ja $\boldsymbol{A}_l = \boldsymbol{A}_j\delta_l^j$, siis tõsiasja, et iga kaks baaspunkti A_k ja A_l on teineteisega polaarselt konjugeeritud, väljendavad seosest (125.4) tulenevad võrdused $a_{ij}\delta_k^i\delta_l^j = 0$ ($i, j = 1, \ldots, n$; $k \neq l$). Siit järeldubki, et $a_{kl} = 0$ ($k, l = 1, \ldots, n$, $k \neq l$). ∎

Vaatleme nüüd paralleelselt P_2 ja P_3 kõigi kvadrikute hulki, mille jaoks kasutame vastavalt tähiseid K_2 ja K_3. Teoreemide 126.1 ja 126.2 põhjal saab iga nendest hulkadest võetud kvadriku esitada ühega võrranditest

$$\begin{aligned} K_2&: \quad a_{11}(x^1)^2+a_{22}(x^2)^2+a_{33}(x^3)^2=0, \\ K_3&: \quad a_{11}(x^1)^2+a_{22}(x^2)^2+a_{33}(x^3)^2+a_{44}(x^4)^2=0, \end{aligned} \tag{126.2}$$

kus a_{ii} on mingid reaalarvud, mille hulgas peab leiduma vähemalt üks nullist erinev.

[157] Autopolaarse reeperi ehitamisel kasutatud meetod ei sõltu ruumi mõõtmest ja on seetõttu rakendatav ka paljumõõtmelistes ruumides P_{n-1}

Võrrandite edasiseks lihtsustamiseks valime baaspunktidele mingid uued esindajavektorid $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{A}_i\lambda_i$ (paremal summeerimist ei toimu). Arve $\lambda_i \in \mathrm{R}$, $\lambda_i \neq 0$ loeme esialgu määramata kordajateks, mille väärtused tuleb veel otstarbekalt fikseerida. Niisiis sooritame teisenduse $'x^i = \lambda_i x^i$ (paremal mitte summeerida). Toimub ühikpunktide vahetus reeperis; see reeperi autopolaarsust ei muuda. Võrranditel (126.2) on pärast sellist teisendust järgmine kuju:

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_2&: \lambda_1^2 a_{11}('x^1)^2+\lambda_2^2 a_{22}('x^2)^2+\lambda_3^2 a_{33}('x^3)^2=0, \\ \mathrm{K}_3&: \lambda_1^2 a_{11}('x^1)^2+\lambda_2^2 a_{22}('x^2)^2+\lambda_3^2 a_{33}('x^3)^2+\lambda_4^2 a_{44}('x^4)^2=0. \end{aligned} \qquad (126.3)$$

Nüüd fikseerime kordajad λ_i; olgu

$$\lambda_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|a_{ii}|}}, & \text{kui} \quad a_{ii} \neq 0, \\ 1, & \text{kui} \quad a_{ii} = 0. \end{cases} \qquad (i=1, \ldots, n)$$

Nende tingimuste tõttu jäävad võrranditesse kordajate $+1$, -1 ja 0 mingid kombinatsioonid. Kirjutame hulga $\mathrm{K}_2 \cup \mathrm{K}_3$ jaoks järelejäänud võrrandid eraldi, võttes arvesse kordajate $+1$, -1 ja 0 kõik oluliselt erinevad kombinatsioonid. Teeme seda kahes etapis.

Esimesel etapil kasutame asjaolu, et nulliga võrduvate kordajate asend võrrandis on ebaoluline, sest seda saab alati muuta reeperi baaspunktide ümberjärjestamise teel, viimane samm aga reeperi autopolaarsust ei riku. Et nullist erinevate kordajate arv võrrandis määrab nüüd vastava kvadriku maatriksi astaku, siis saab märkida ka klassi, kuhu võrrandiga määratud kvadrik kuulub. Need kaalutlused annavad järgmise loetelu:

	K_2	K_3
$\boldsymbol{A}$	$\pm('x^1)^2 \pm ('x^2)^2 \pm ('x^3)^2 = 0$	$\pm('x^1)^2 \pm ('x^2)^2 \pm ('x^3)^2 \pm ('x^4)^2 = 0$
$\boldsymbol{B}1$	$\pm('x^1)^2 \pm ('x^2)^2 = 0$	$\pm('x^1)^2 \pm ('x^2)^2 \pm ('x^3)^2 = 0$
$\boldsymbol{B}2$	$('x^1)^2 = 0$	$\pm('x^1)^2 \pm ('x^2)^2 = 0$
$\boldsymbol{B}3$		$('x^1)^2 = 0$

(126.4)

Muidugi võib võrrandi iga kordaja olla kas +1 või —1, mitte mõlemad korraga.

Astume nüüd teise sammu ja eraldame välja märkide kõik võimalikud oluliselt erinevad kombinatsioonid. Seejuures võtame arvesse, et märkide järjekord on ebaoluline, sest seda saab muuta reeperi baaspunktide ümberjärjestamisega. Samuti saab korraga muuta kõigi kordajate märke, sest see tähendab vaid üleminekut ekvivalentsele võrrandile. Nende kaalutluste tõttu osutub oluliseks vaid erinevate märkide arv ja tabeli (126.4) saab detailselt kirjutada järgmiselt (kui ära jätta ka «uute» koordinaatide tarbetuks muutunud eristamine märgiga $'$):

K_2		K_3	
Aa	$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=0$	***Aa***	$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2=0$
Ab	$(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2=0$	***Ab***	$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-(x^4)^2=0$
		Ac	$(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2-(x^4)^2=0$
B*1*a	$(x^1)^2+(x^2)^2=0$	***B*1*a***	$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=0$
B*1*b	$(x^1)^2-(x^2)^2=0$	***B*1*b***	$(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2=0$
***B*2**	$(x^1)^2=0$	***B2a***	$(x^1)^2+(x^2)^2=0$
		B2b	$(x^1)^2-(x^2)^2=0$
		***B*3**	$(x^1)^2=0$

(126.5)

Kvadriku definitsioonist (123.1) nähtub, et iga võrrand tabelis (126.5) määrab teatava kvadriku hulgas $K_2 \cup K_3$. See asjaolu lubab väita, et iga märkide kombinatsioon selles õigupoolest täiesti formaalselt moodustatud tabelis leiab tõepoolest aset. Teisest küljest garanteerib teoreem 126.1, et tabel ammendab hulga $K_2 \cup K_3$ järgmises mõttes: iga sellest hulgast võetud kvadriku võrrandi saab sobiva reeperi valikuga teisendada üheks tabelis (126.5) loetletud võrranditeks.

Olgu N_2 tasandi P_2 mingi fikseeritud reeperi $\mathfrak{R}_0$ suhtes tabeli (126.5) esimese viie võrrandiga *Aa* kuni *B2* määratud viiest kvadrikust koosnev hulk ja N_3 ruumi P_3 mingi fikseeritud reeperi $\mathfrak{R}_0$ suhtes tabeli viimase kaheksa võrrandiga *Aa* kuni *B2* määratud kaheksast kvadrikust koosnev hulk. Nende hulkade tähenduse kvadrikute teooria jaoks selgitavad järgnevad neli teoreemi.

***Teoreem* 126.3.** *Tasandi* P_2 *või ruumi* P_3 *iga kvadriku saab projektiivselt kujutada ühele kvadrikule hulgast* N_2 *või* N_3.

T õ e s t u s. Olgu Q tasandi P_2 või ruumi P_3 mingi kvadrik. Valime vabalt reeperi ja kirjutame kvadriku Q võrrandi selle suhtes. Ehitame Q abil mingi autopolaarse reeperi $\mathfrak{R}$. Tabelist (126.5) eraldub võrrand, milleks teiseneb kvadriku Q võrrand üleminekul sellele autopolaarsele reeperile. Teoreemi 117.3 põhjal leidub parajasti üks ruumi P_{n-1} kollineatsioon φ, mille puhul reeper $\mathfrak{R}$ kujutub hulkade N_2 ja N_3 defineerimisel kasutatud fikseeritud reeperiks $\mathfrak{R}_0$. Olgu punkti $X \in P_{n-1}$ koordinaadid reeperi $\mathfrak{R}$ suhtes x^i. Tema kujutisel on siis koordinaadid λx^i reeperi $\mathfrak{R}_0$ suhtes, mistõttu kvadriku Q kujutisel on reeperi $\mathfrak{R}_0$ suhtes sama võrrand, mis kvadrikul Q on reeperi $\mathfrak{R}$ suhtes, s. t. üks tabeli (126.5) võrrandeist. Järelikult Q kujutiseks on üks hulga N_2 või N_3 kvadrikutest. ∎

***Def.* 126.2.** Olgu kvadriku võrrand sobiva reeperi valikuga teisendatud kujule, milles puuduvad erinevaid koordinaatmuutujaid sisaldavad liikmed. Sel korral võrrandi positiivsete ja negatiivsete kordajate arvude vahe absoluutväärtust nimetatakse k v a d r i k u s i g n a t u u r i k s.

Iga kvadriku jaoks on võimalik määrata tema signatuur; selleks tuleb kvadriku võrrand teisendada kujule (126.2).

***Teoreem* 126.4.** *Kvadriku signatuur on projektiivne invariant.*

T õ e s t u s. Kvadriku jaoks saab leida lõpmata palju erinevaid autopolaarseid reepereid, samuti on teisendamisel lähteks võetud võrrandi valimiseks lõpmata palju võimalusi sõltuvalt algreeperi valikust. Seetõttu kordajate süsteemid kvadriku kahes signatuuri määramiseks sobivas võrrandis on üldiselt erinevad. Tuleb näidata, et signatuur ei sõltu sellest, kuidas sobiv võrrand on saadud. Kvadriku astaku invariantsuse tõttu piisab seejuures, kui näidata, et samamärgiliste kordajate arv on projektiivselt invariantne.

Olgu antud mingi kvadrik Q võrrandiga $a_{ij}x^ix^j = 0$ teatava reeperi $\mathfrak{R}$ suhtes ja selle kvadrikuga seotud kaks erinevat autopolaarset reeperit $\overline{\mathfrak{R}} = \{\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n, \bar{E}\}$ ja $\overline{\mathfrak{R}}' = \{\bar{A}'_1, \ldots, \bar{A}'_n, \bar{E}'\}$.

Kui minna reeperilt $\mathfrak{R}$ üle ükskõik kummale kahest viimasest, siis Q võrrandi vasakus pooles säilivad ainult liikmed koordinaatide ruutudega, nimelt r sellist liiget, kui Q astak on r. Võimalus koordinaate ümber nummerdada lubab eeldada, et säilivad liikmed r esimese koordinaadiga, vastavalt $\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^r$ ja $'\overline{x}^1, \ldots, '\overline{x}^r$, kusjuures positiivsed liikmed eelnevad negatiivsetele (kui üldse leidub erinevate märkidega liikmeid). Antud reeperi omabaasi vahetamine ei muuda kordajate märke, sest sel puhul liikmed korrutuvad ühe ja sellesama arvu ruuduga. Olgu vabalt fikseeritud omabaaside puhul

$$a_{ij}x^i x^j = \lambda_1(\overline{x}^1)^2 + \ldots + \lambda_r(\overline{x}^r)^2 = \mu_1('\overline{x}^1)^2 + \ldots + \mu_r('\overline{x}^r)^2, \quad (126.6)$$

kus positiivsed olgu p kordajat $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ja q kordajat $\mu_1, \ldots, \mu_q$. Tarvis on näidata, et $p = q$.

Oletame, et $p > q$. Olgu $n - q = t$, siis $p + t = p - q + n > n$. Järelikult vektorid hulgas $\{\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_p, \overline{A}'_{q+1}, \ldots, \overline{A}'_n\}$ on lineaarselt sõltuvad, mistõttu on võimalik mittetriviaalne võrdus

$$\overline{A}_1\overline{c}^1 + \ldots + \overline{A}_p\overline{c}^p + \overline{A}'_{q+1}\,'\overline{c}^{q+1} + \ldots + \overline{A}_n\,'\overline{c}^n = 0. \quad (126.7)$$

Vektorite sõltumatuse tõttu hulkades $\{\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_p\}$ ja $\{\overline{A}'_{q+1}, \ldots, \overline{A}'_n\}$ vektor $C = \overline{A}_1\overline{c}^1 + \ldots + \overline{A}_p\overline{c}^p = \overline{A}'_{q+1}(-'\overline{c}^{q+1}) + \ldots + \overline{A}'_n(-'\overline{c}^n)$ ei ole nullvektor, sest kui kõik $\overline{c}^k$ $(k = 1, \ldots, p)$ oleksid nullid, siis peaksid seda olema ka kõik $'\overline{c}^l$ $(l = q+1, \ldots, n)$ ja samuti vastupidi, kuid see on vastuolus võrduse (126.7) mittetriviaalsusega. Niisiis $C \in \mathrm{P}_{n-1}$ ja reeperi $\overline{\mathfrak{R}}$ suhtes $C = (\overline{c}^1 : \ldots : \overline{c}^p : 0 : \ldots : 0)$ ning reeperi $\overline{\mathfrak{R}}'$ suhtes $C = (0 : \ldots : 0 : '\overline{c}^{q+1} : \ldots : '\overline{c}^n)$.

Asendame nüüd punkti C koordinaadid c^i, $\overline{c}^i$ ja $'\overline{c}^i$ võrduste (126.6) pooltesse; tulemuseks peaksid olema samasused. Et aga $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ on kõik positiivsed ja $\mu_{q+1}, \ldots, \mu_n$ kõik negatiivsed või nullid, siis $\lambda_1(\overline{c}^1)^2 + \ldots + \lambda_p(\overline{c}^p)^2 > 0$ ja $\mu_{q+1}('\overline{c}^{q+1})^2 + \ldots + \mu_n('\overline{c}^n)^2 \leqslant 0$. Tekkinud vastuolu näitab, et oletus $p > q$ on väär. Samal viisil saab veenduda, et ka võrratus $p < q$ on võimatu. Niisiis $p = q$. Seega positiivsete ja negatiivsete kordajate arvud samasuste (126.6) viimases kahes pooles on võrdsed. Need arvud ei muutu üleminekul teistele antud reeperite omabaasidele. Üleminekul kvadriku Q lihtsaimatele võrranditele on küll lubatav (126.6) pooli korrutada ka negatiivse arvuga, kuid see vahetab vaid positiivsete ja negatiivsete kordajate osad, jättes signatuuri muutumatuks. ∎

***Teoreem* 126.5.** *Iga kaks kvadrikut hulgas* $N_2 \cup N_3$ *on mitteekvivalentsed.*

T õ e s t u s. Järgnevalt on esitatud tabel (126.5), täiendatuna kvadriku üldiseloomustuse ja signatuuriga.

	Üldiseloomustus		ekv.-klass	võrrand	r	s
N_2	regulaarsed	mittelaguvad	Aa	$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=0$	3	3
			Ab	$(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2=0$	3	1
	mitteregulaarsed		$B1a$	$(x^1)^2+(x^2)^2=0$	2	2
		laguvad	$B1b$	$(x^1)^2-(x^2)^2=0$	2	0
			$B2$	$(x^1)^2=0$	1	1
N_3	regulaarsed	mittelaguvad	Aa	$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2=0$	4	4
			Ab	$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-(x^4)^2=0$	4	2
			Ac	$(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2-(x^4)^2=0$	4	0
	mitteregulaarsed		$B1a$	$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=0$	3	3
			$B1b$	$(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2=0$	3	1
			$B2a$	$(x^1)^2+(x^2)^2=0$	2	2
		laguvad	$B1b$	$(x^1)^2 \quad (x^2)^2=0$	2	0
			$B3$	$(x^1)^2=0$	1	1

Sellest tabelist ilmneb, et kvadrikuid hulkades N_2 ja N_3 kirjeldab kummaski täielikult invariantide paar (r, s): igale kahele erinevale kvadrikule kas hulgast N_2 või hulgast N_3 vastavad nende invariantide erinevad väärtuste paarid. Invariandi mõistest järeldub nüüd, et ühtki neist kvadrikutest ei saa kollineatsiooni abil kujutada ühelegi teisele kvadrikule nendest hulkadest. See aga tähendabki, et tegemist on mitteekvivalentsete kvadrikutega. ∎

Et iga kvadrik hulgast K_2 või K_3 on teoreemi 126.3 põhjal projektiivselt ekvivalentne ühe kvadrikuga hulgast N_2 või N_3 ja et ta kahe selle hulga kvadrikuga ekvivalentne olla ei saa, sest muidu oleksid need omavahel ekvivalentsed, mis on vastuolus teoreemiga 126.5, siis jaotub hulk N_n kvadrikute hulga K_n ekvivalentsusklasside vahel. Igas klassis on parajasti üks hulga N_n kvadrik. Tasandi P_2 kvadrikute hulk K_2 jaotub niisiis viieks, ruumi P_3 kvadrikute hulk K_3 aga kaheksaks ekvivalentsusklassiks.

Eelmises tabelis leiduvaid võrrandeid nimetatakse P_2 ja P_3 kvadrikute normaalvõrranditeks.

Et astak r ja signatuur s võimaldavad ruumi P_{n-1} $(n=3, 4)$ kvadrikuid projektiivselt klassifitseerida, siis öeldakse, et need suurused moodustavad selle ruumi kvadrikute täieliku projektiivsete invariantide süsteemi[158]

127. Kvadrikute kirjeldus. Iga kvadrik on esitatav projektiivse normaalvõrrandiga, mis oma lihtsuse tõttu on eriti sobiv kvadriku uurimisel. Siin kasutame normaalvõrrandeid kvadrikute lühidaks kirjeldamiseks, käsitledes kogu klassi ühe esindaja abil.

Anname esmalt ülevaate projektiivse tasandi kvadrikutest.

Aa (3,3) — tasandi nullkvadrik — on regulaarne kvadrik, mille võrrandit ei rahulda P_2 ühegi punkti koordinaadid. Sellest hoolimata määrab nullkvadrik tasandi P_2 (regulaarse) involutiivse korrelatsiooni, seega «toimib» arvestamist vajava faktorina.

Ab (3,1) — tasandi ovaalkvadrik — on regulaarne ja jaotab tasandi P_2 enda suhtes sise- ja välispiirkonnaks. Tõepoolest, punkti $C=(c^1:c^2:c^3)$ polaari võrrand on $c^1x^1+c^2x^2-$ $-c^3x^3=0$; see sirge lõikab ovaalkvadrikut kahes erinevas reaalses punktis parajasti siis, kui $(c^1)^2+(c^2)^2>(c^3)^2$. Saadud võrratus on niisiis tarvilik ja piisav tingimus selleks, et punktist C saaks ovaalkvadrikule tõmmata puutuja, s. t. et C oleks välispunkt ovaalkvadriku suhtes (vt. art. 125). Siit järeldub, et välispiirkonnaks on punktide hulk $\{X|(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2>0\}$, sisepiirkonnaks aga $\{X|(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)<0\}$. Et sirge $x^3=0$ ei lõika ega puutu ovaalkvadrikut, siis saab ovaalkvadriku sisepiirkonnas kasutada mittehomogeenseid koordinaate.

B1a (2,2). Tasandil P_2 koosneb kvadrik ainult ühest iseärasest punktist, tasandil $P_2(i)$ aga kahest imaginaarsest sirgest, mille võrrandid on $x^1+ix^2=0$ ja $x^1-ix^2=0$, ning mis lõikuvad kvadriku ainsas (iseärases) reaalses punktis $(0:0:1)$.

B1b (2,0). Kvadrik lagub kaheks sirgeks, mille võrrandid on $x^1+x^2=0$ ja $x^1-x^2=0$ ning mis lõikuvad kvadriku ainsas iseärases punktis $(0:0:1)$.

B2 (1,1). Kvadrik lagub kaheks ühtivaks sirgeks, mille ühine

---

[8] Lisame, et siin esitatud mõttekäigud on üldistatavad ka paljumõõtmeliste projektiivsete ruumide juhule Muidugi osutub seal kvadrikute klassifikatsioon detailide poolest rikkamaks, kuid põhimõte — taandada liigitamine kahest naturaalarvuliste väärtustega invariandist koosnevale paarile — on realiseeritav ka $n>4$ puhul. Öeldu käib aga ainult kvadrikute kohta. Näiteks juba kolmandat järku joontel tasandil P_2 on pidevad invariandid, mistõttu projektiivselt erinevaid kolmandat järku jooni on lõpmata palju (nii nagu on lõpmata palju näiteks kvadrikute kongruentsusklasse eukleidilisel tasandil).

võrrand on $x^1 = 0$ ja mis koosnevad üksnes kahekordsetest iseärastest punktidest.

Vaatleme nüüd ruumi P_3 kvadrikuid.

Aa (4,4) – ruumi P_3 nullkvadrik on regulaarne, kuid ei sisalda ühtki P_3 punkti.

Ab (4,2) – ruumi P_3 ovaalkvadrik on regulaarne ja eraldab ruumis P_3 enda suhtes sisepiirkonna $\{X \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 < 0\}$ ja välispiirkonna $\{X \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 > 0\}$. Et tasand $x^4 = 0$ ovaalkvadrikut ei lõika ega puutu, siis on sisepiirkonnas võimalikud mittehomogeensed koordinaadid. Mittelõikava tasandi olemasolu näitab, et ovaalkvadrik ei sisalda ühtki sirget. Siit järeldub omakorda, et ovaalkvadrikul on iga oma puutujatasandiga ainult üks ühine punkt.

Ac (4,0) – ruumi P_3 **r õ n g a s k v a d r i k** on regulaarne ja ruumi P_3 piirkondadeks ei jaota. Rõngaskvadriku iga punkti läbib kaks tervenisti kvadrikule kuuluvat sirget — sirgjoonelist moodustajat.

Tõestame viimase väite. Fikseerime rõngaskvadrikul vabalt punkti C ja ehitame selle kvadrikuga seotud autopolaarse reeperi, mille puhul $C \in A_1A_4$. Baaspunkt A_1 olgu valitud selliselt, et ta ei kuulu kvadriku puutujatasandile punktis C; baaspunktiks A_4 aga olgu sirge A_1C lõikepunkt punkti A_1 polaariga; ülejäänus toimugu reeperi ehitamine nii, nagu on näidatud teoreemi 126.1 tõestuses. Nüüd on $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_4\lambda$, s. t. $C = (1:0:0:\lambda)$. Võib lugeda, et kvadrik on selle autopolaarse reeperi suhtes esitatud normaalvõrrandiga, siis $\lambda = \pm 1$. Kvadrikut punktis C puutuva tasandi (punkti C polaari) ja kvadriku lõike määrab süsteem, mis koosneb võrranditest $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = 0$ ja $x^1 - \lambda x^4 = 0$. Et $\lambda^2 = 1$, siis lõikepunktide korral on $(x^1)^2 = (x^4)^2$, seepärast esimene võrrand lihtsustub:

$$(x^2 + x^3)(x^2 - x^3) = 0.$$

Nüüd on selge, et lõige on laguv ja punkti C läbib kvadriku kaks sirgjoonelist moodustajat, mida esitavad süsteemid $x^2 + x^3 = 0$, $x^1 - \lambda x^3 = 0$ ja $x^2 - x^3 = 0$, $x^1 - \lambda x^3 = 0$.

Rõngaskvadriku sirgjooneliste moodustajate määramisel võib kasutada ka nende üldvõrrandeid. Viimaseid on lihtne koostada, kui lahutada eelnevalt pinna võrrandi vasak pool teguriteks: $(x^1 - x^3)(x^1 + x^3) - (x^4 - x^2)(x^4 + x^2)$. Nüüd ei paku mingit raskust kontrollida, et kõik sirged, mille määravad võrrandisüsteemid

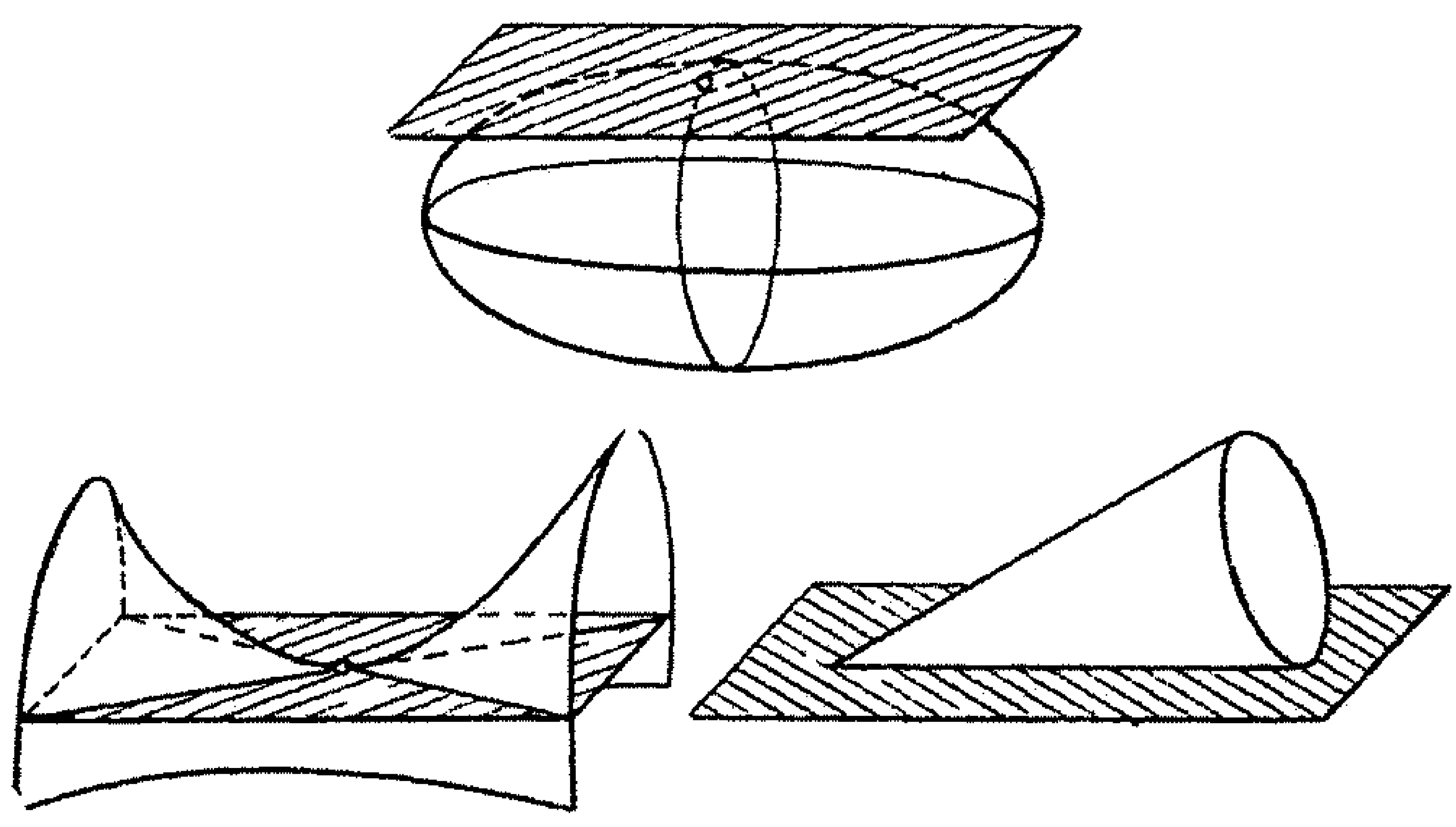
$$\begin{cases} x^1 - x^3 = \mu(x^4 - x^2), \\ \mu(x^1 + x^3) = x^4 + x^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^1 - x^3 = \mu(x^4 + x^2), \\ \mu(x^1 + x^3) = x^4 - x^2 \end{cases}$$

on kvadriku sirgjoonelised moodustajad. Kumbki süsteem esitab kvadriku ühe sirgjooneliste moodustajate parve.

B*1*a (3,3). Kvadrik on mitteregulaarne ja koosneb ruumis P_3 ainult ühest iseärasest punktist $C = (0:0:0:1)$. Ruumis $P_3(i)$ sisaldab see kvadrik veel imaginaarseid punkte. Art-s 124 tehtud tähelepanekute põhjal kuulub iga sellise imaginaarse punktiga Y määratud sirge CY kvadrikule. Seepärast nimetatakse seda kvadrikut imaginaarseks koonuseks ja punkti C tema tipuks.

B*1*b (3,1). Tegemist on koonilise kvadrikuga, mille tipuks on kvadriku ainus iseärane punkt $(0:0:0:1)$.

Klasside ***Ab***, ***Ac*** ja ***B*1*b*** erinevust saab kirjeldada ka kvadriku ja tema puutujatasandi lõike abil (vt. teoreem 124). Ovaalkvadriku puhul on lõikeks lõikuvate imaginaarsete sirgete paar (seega ruumis P_3 üksainus punkt), rõngaskvadriku puhul — lõikuvate reaalsete sirgete paar ja koonuse puhul — kahekordne sirge (joon. 218). Sel korral öeldakse, et ovaalkvadriku iga punkt on elliptiline, rõngaskvadriku iga punkt on hüperboolne ja koonilise kvadriku iga punkt (peale tipu) on paraboolne.



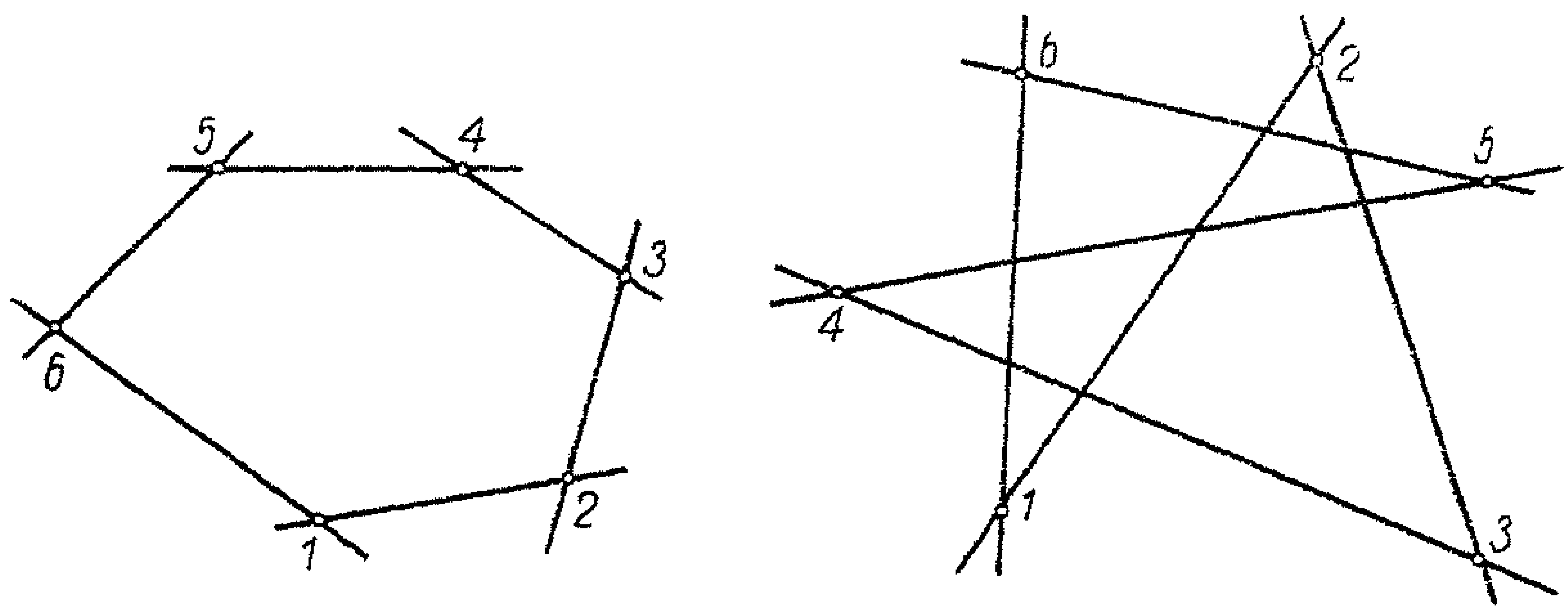
Joon. 218.

B*2*a (2,2). Kvadrik on ruumis $P_3(i)$ laguv — koosneb tasanditest, mille võrrandid on $x^1 + ix^2 = 0$ ja $x^1 - ix^2 = 0$. Nende tasandite lõikesirge on reaalne, sest esitub võrrandiga $x^1 - x^2 = 0$. Ruumis P_3 kvadrik koosnebki ainult sellest sirgest ja tema kõik punktid on iseärased.

B*2*b (2,0). Kvadrik koosneb kahest tasandist, mille lõikesirge on kvadriku iseärane sirge.

***B*3** (1,1). Kvadrik on ühtivate tasandite paar — kahekordne tasand, mis koosneb kvadriku iseärastest punktidest.

128. Pappose-Pascali ja Brianchoni teoreemid. Olles lahendanud täielikult kvadrikute klassifitseerimise ülesande tasandi P_2 ja ruumi P_3 projektiivses geomeetrias, pöörame nüüd tähelepanu kahele huvipakkuvale teoreemile, mis seovad kvadrikuid ja konfiguratsioone projektiivsel tasandil.



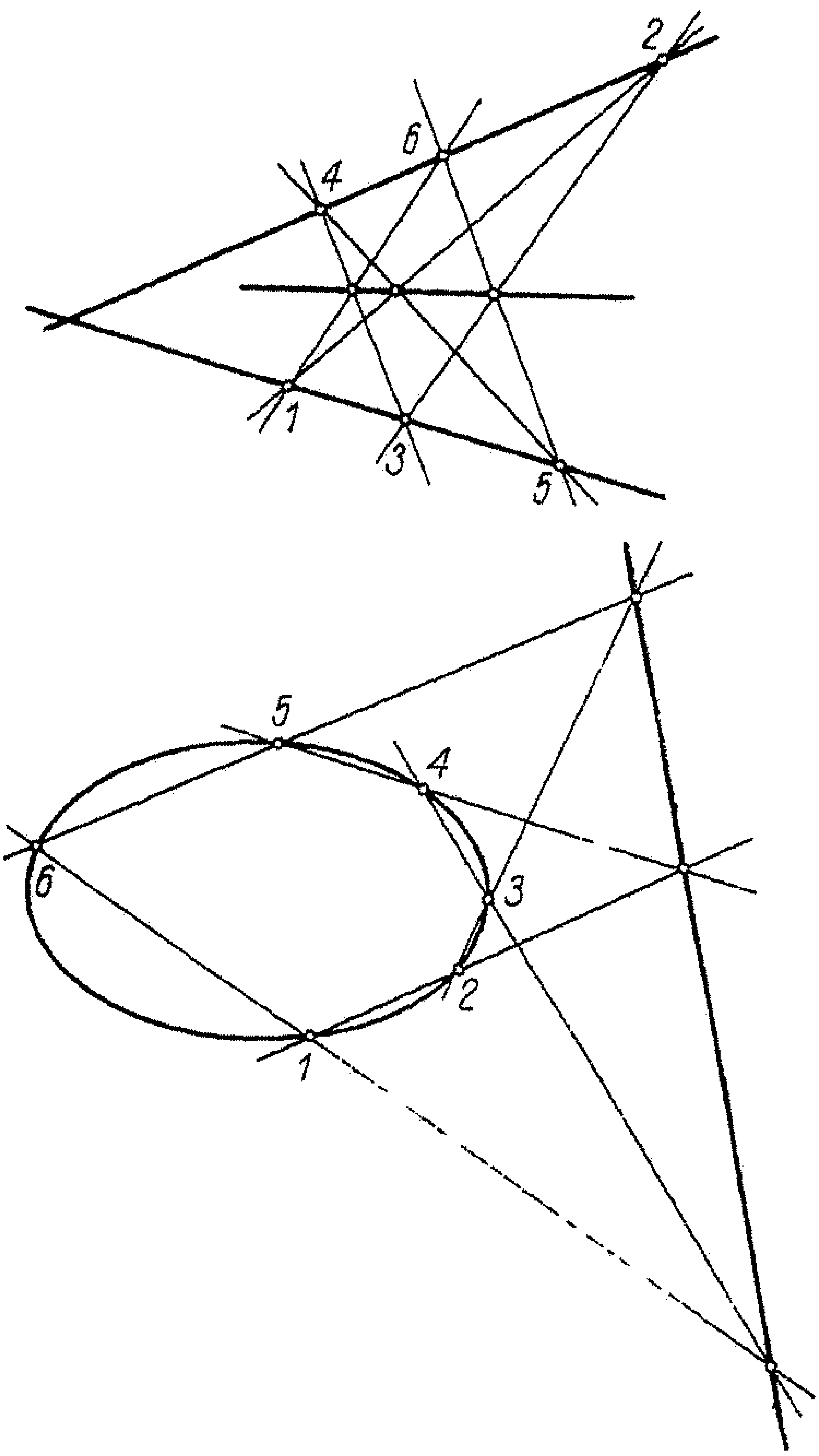
Joon. 219.

Alustame lihtsa kuustipu vaatlemisest (joon. 219). Iga kaht tippu, mida eraldab järjestikuste tippude paar, s. t. tippe üle kahe, nimetatakse lihtsa kuustipu vastastippudeks, iga kaht külge aga, mille määravad kaks vastastippude paari, vastasküljedeks. Lihtsa kuustipuga duaalne kujund on lihtne kuusküljg. Kui kuustipu tipud asetsevad mingil P_2 kvadrikul, siis öeldakse, et see kuustipp on kujundatud kvadrikusse. Kui aga kuustipu küljed on mingi kvadriku puutujateks, siis kõneldakse, et kuustipp on kujundatud kvadriku ümber.

***Teoreem* 128.1.** (Pappose-Pascali[159] teoreem). *Kuus antud punkti kuuluvad tasandi P_2 regulaarsele või kaheks lõikuvaks sirgeks laguvale kvadrikule parajasti siis, kui nende punktidega määratud lihtsa kuustipu vastasküljede lõikepunktid asetsevad ühel sirgel* (joon. 220).

Tõestus. Alustame tingimuse tarvilikkusest. Kuulugu lihtsa kuustipu tipud $B_1, \ldots, B_6$ ühele kvadrikule $a_{ij}x^ix^j = 0$, mis on kas regulaarne või laguv, koosnedes viimasel juhul kahest lõikuvast sirgest. Kvadriku kohta tehtud eelduse järgi võib võtta punktid B_1, B_2 ja B_3 P_2 reeperi baaspunktideks. Sel korral $B_1 =$

[159] Laguva kvadriku, s. o. kahe lõikuva sirge jaoks tõestas sõnastatud teoreemi antiikkreeka matemaatik P a p p o s 4. saj. algul. Üldjuhu, s. t. regulaarse kvadriku jaoks, andis tõestuse P a s c a l 17 sajandil. Teadlane oli selle probleemi lahendamise ajal ainult 16-aastane.



Joon 220

$= (1:0:0)$, $B_2 = (0:1:0)$ ja $B_3 = (0:0:1)$; edasi olgu $B_i = (b_i^1 : b_i^2 : b_i^3)$ $(i = 4, 5, 6)$. Kuustipu küljed on siis määratud järgmiselt:

$B_1B_2 = [0:\ 0:\ 1]$,

$B_2B_3 = [1:\ 0:\ 0]$,

$B_3B_4 = [-b_4^2:\ b_4^1:\ 0]$,

$B_4B_5 = [(b_4^2b_5^3 - b_4^3b_5^2) : (b_4^3b_5^1 - b_4^1b_5^3) : (b_4^1b_5^2 - b_4^2b_5^1)]$,

$B_5B_6 = [(b_5^2b_6^3 - b_5^3b_6^3) : (b_5^3b_6^1 - b_5^1b_6^3) : (b_5^1b_6^2 - b_5^2b_6^1)]$,

$B_6B_1 = [0:\ b_6^3:\ (-b_6^2)]$;

seega vastaskülgede lõikepunktid on

$$B_1B_2 \cap B_4B_5 = ((b_4^1b_5^3 - b_4^3b_5^1):(b_4^2b_5^3 - b_4^3b_5^2):0),$$
$$B_2B_3 \cap B_5B_6 = (0:\ (b_5^2b_6^1 - b_5^1b_6^2):(b_5^3b_6^1 - b_5^1b_6^3)),$$
$$B_3B_4 \cap B_6B_1 = ((-b_4^1b_6^2):(-b_4^2b_6^3):(-b_1^2b_6^3)).$$

Et $a_{ij}\delta_1^i\delta_1^j = a_{ij}\delta_2^i\delta_2^j = a_{ij}\delta_3^i\delta_3^j = 0$, siis $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, mistõttu kvadriku võrrand lihtsustub:

$$a_{12}x^1x^2 + a_{13}x^1x^3 + a_{23}x^2x^3 = 0. \tag{128.1}$$

Järelikult kehtib

$$\begin{cases} a_{12}b_4^1b_4^2 + a_{13}b_4^1b_4^3 + a_{23}b_4^2b_4^3 = 0, \\ a_{12}b_5^1b_5^2 + a_{13}b_5^1b_5^3 + a_{23}b_5^2b_5^3 = 0. \end{cases} \tag{128.2}$$

Sellest süsteemist saab avaldada kvadriku võrrandi kordajate suhted

$$a_{12}:a_{13}:a_{23} = b_4^3b_5^3(b_4^1b_5^2 - b_4^2b_5^1) : b_4^2b_5^2(b_4^3b_5^1 - b_4^1b_5^3) :$$
$$: b_4^1b_5^1(b_4^2b_5^3 - b_4^3b_5^2). \tag{128.3}$$

Seda, et ka punkt B_6 kuulub kvadrikule, väljendab võrdus

$$b_4^3b_5^3(b_4^1b_5^2 - b_4^2b_5^1)b_6^1b_6^2 + b_4^2b_5^2(b_4^3b_5^1 - b_4^1b_5^3)b_6^1b_6^3 +$$
$$+ b_4^1b_5^3(b_4^2b_5^3 - b_4^3b_5^2)b_6^2b_6^3 = 0. \tag{128.4}$$

See võrdus võimaldabki näidata, et vastaskülgede lõikepunktid kuuluvad ühele sirgele:

$$\begin{vmatrix} b_4^1b_5^3 - b_4^3b_5^1 & b_4^2b_5^3 - b_4^3b_5^2 & 0 \\ 0 & b_5^2b_6^1 - b_5^1b_6^2 & b_5^3b_6^1 - b_5^1b_6^3 \\ -b_4^1b_6^2 & -b_4^2b_6^3 & -b_4^2b_6^3 \end{vmatrix} = \tag{128.5}$$

$$= (b_4^3b_5^1 - b_4^1b_5^3)(b_4^2b_5^2b_6^1b_6^3 - b_4^2b_5^1b_6^2b_6^3 - b_4^2b_5^3b_6^1b_6^2 +$$
$$+ b_4^2b_5^1b_6^2b_6^3) + (b_4^2b_5^3 - b_4^3b_5^5)(b_4^1b_5^1b_6^2b_6^3 - b_4^1b_5^3b_6^1b_6^2) =$$
$$= b_4^3b_5^3(b_4^1b_5^2 - b_4^2b_5^1)b_6^1b_6^2 + b_4^2b_5^2(b_4^3b_5^1 - b_4^1b_5^3)b_6^1b_6^3 +$$
$$+ b_4^1b_5^1(b_4^2b_5^3 - b_4^3b_5^2)b_6^2b_6^3 = 0.$$

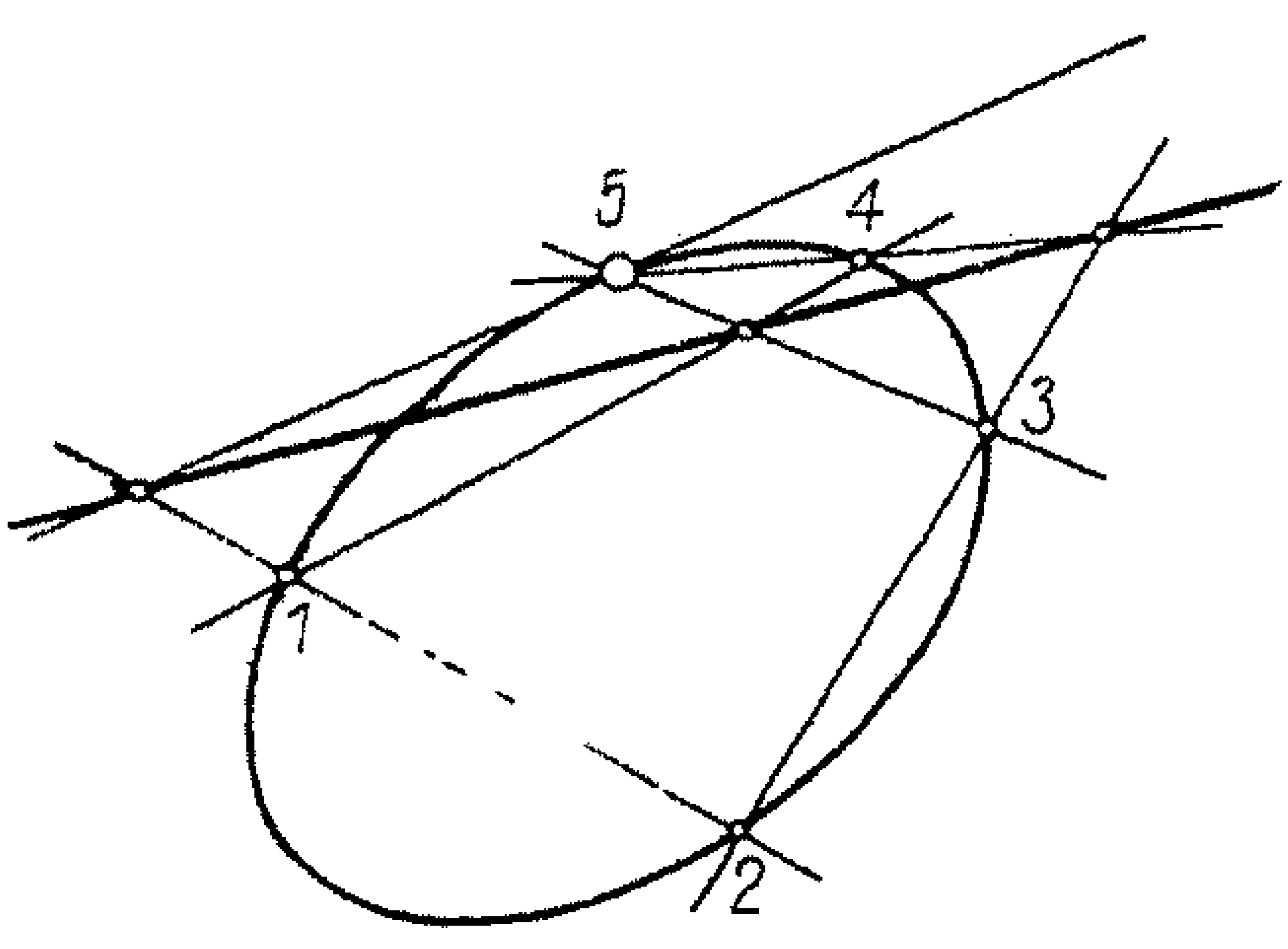
Tõestame nüüd tingimuse piisavuse: kui lihtsa kuustipu vastaskülgede lõikepunktid asetsevad ühel sirgel, siis tema tipud kuuluvad tasandi P_2 kvadrikule.

Olgu kuustipu $B_1 \ldots B_6$ kolm tippu B_1, B_2 ja B_3 jälle võetud baaspunktideks. Iga kvadrik, mis läbib baaspunkte, on esitatav võrrandiga (128.1), milles kordajateks a_{12}, a_{13} ja a_{23} võivad olla mistahes reaalarvud. Need kordajad määrame seostega (128.3), s. t. võrrandisüsteemi (128.2) lahenditena, siis kuuluvad tipud B_4 ja B_5 sel viisil fikseeritud kvadrikule. Eelduse kohaselt on determinant (128.5) null, seega kehtib võrdus (128.4). See aga näitab, et ka kuues tipp B_6 asetseb kvadrikul. Kvadrik seejuures on ***Ab***- või ***B***l***b***-klassi kvadrik, sest vastupidisel juhul temasse ei saaks kujundada lihtsat kuustippu. ∎

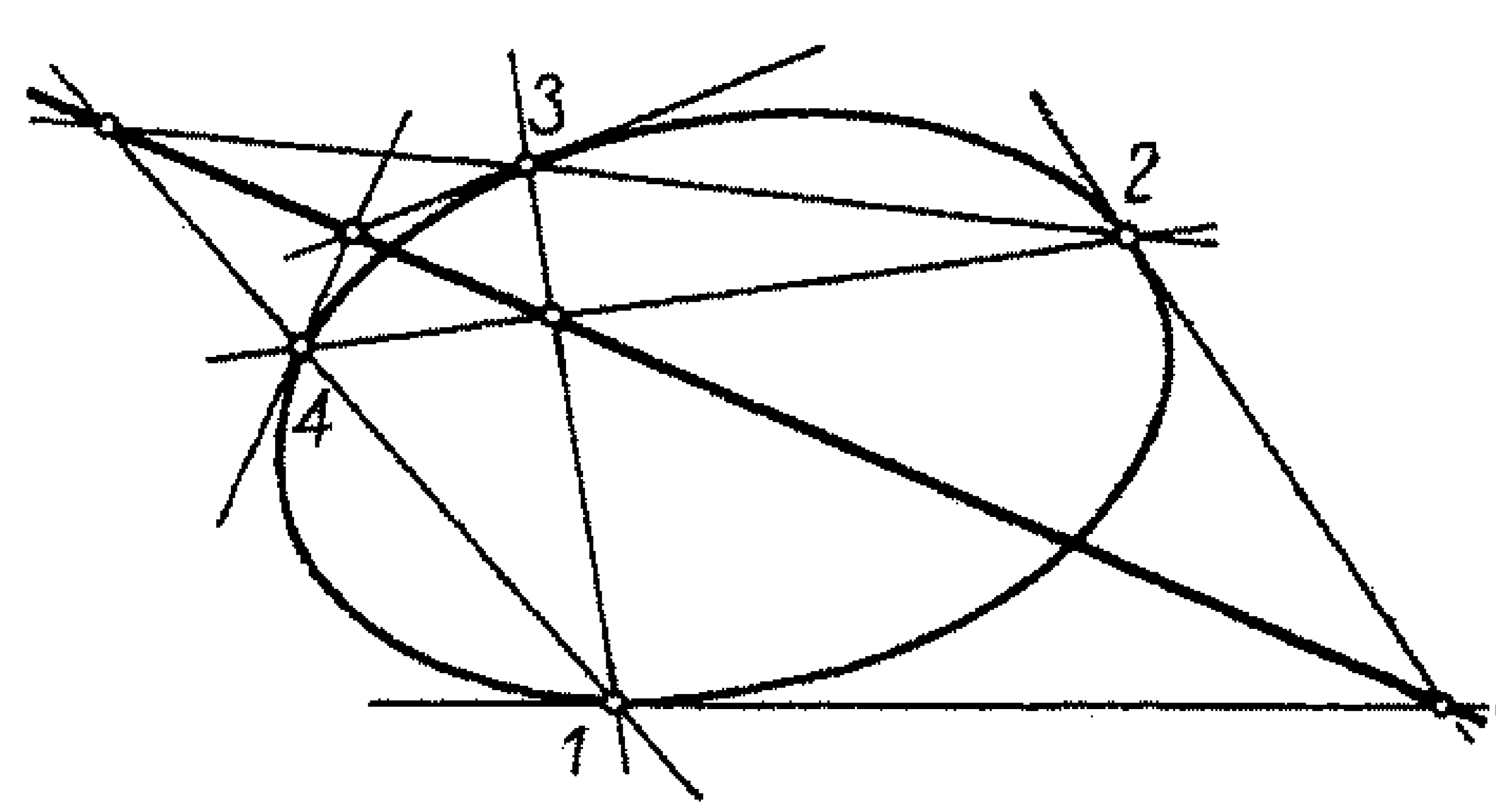
Et kvadrik tasandil P_2 on määratud viie punktiga, siis väljendab Pappose-Pascali teoreem seost, mida peab rahuldama tasandi P_2 kuues punkt selleks, et ta kuuluks samale kvadrikule.

Pascali teoreemist (s. t. teoreemist 128.1 regulaarse kvadriku juhul) saab teha mitmeid järeldusi.

Et P_2 kvadriku puutuja punktide polaarid moodustavad puutepunkti läbivate sirgete kimbu, siis saab puutujat (s. o. enesekaassirget) tõlgendada lõikaja piirseisuna ühe lõikepunkti tõkestamatul lähenemisel teisele mööda kvadrikut. Kui viia regulaarsesse kvadrikusse kujundatud kuustipu kaks tippu ühtima, siis tekib sel viisil kujund, mis koosneb kvadrikusse kujundatud lihtsast viistipust ja kvadriku puutujast selle viistipu ühes tipus. Samal viisil saab kuustipust moodustada kvadrikusse kujundatud lihtsa nelitipu koos kahe selle tippudes võetud puutujaga, samuti kolmtipu ja selle tippudes võetud puutujad. Rakendades nendele kujunditele Pascali teoreemi, võib sõnastada järgmised tasandi P_2 geomeetrias kehtivad laused.



Joon 221.

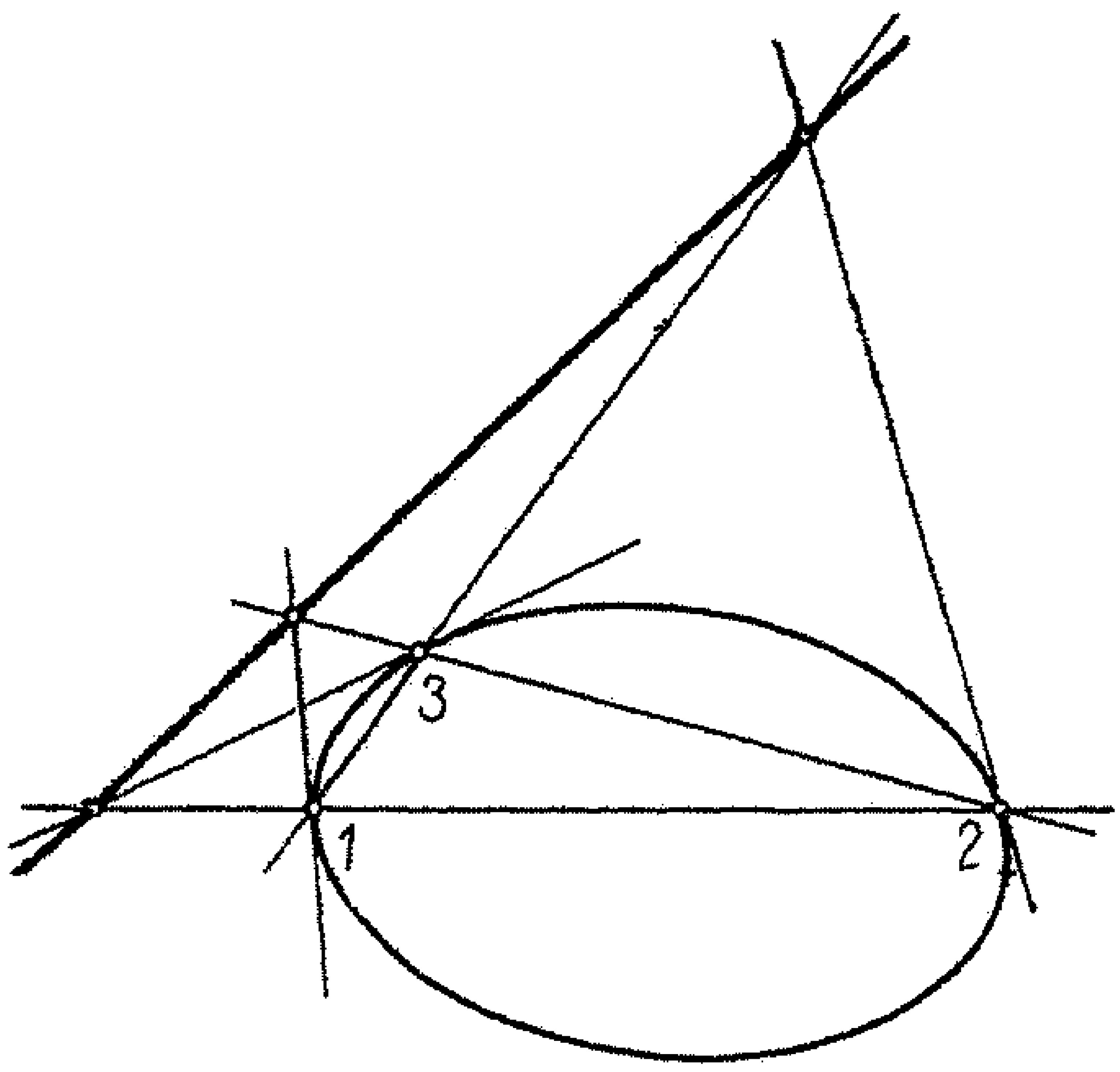


Joon. 222.

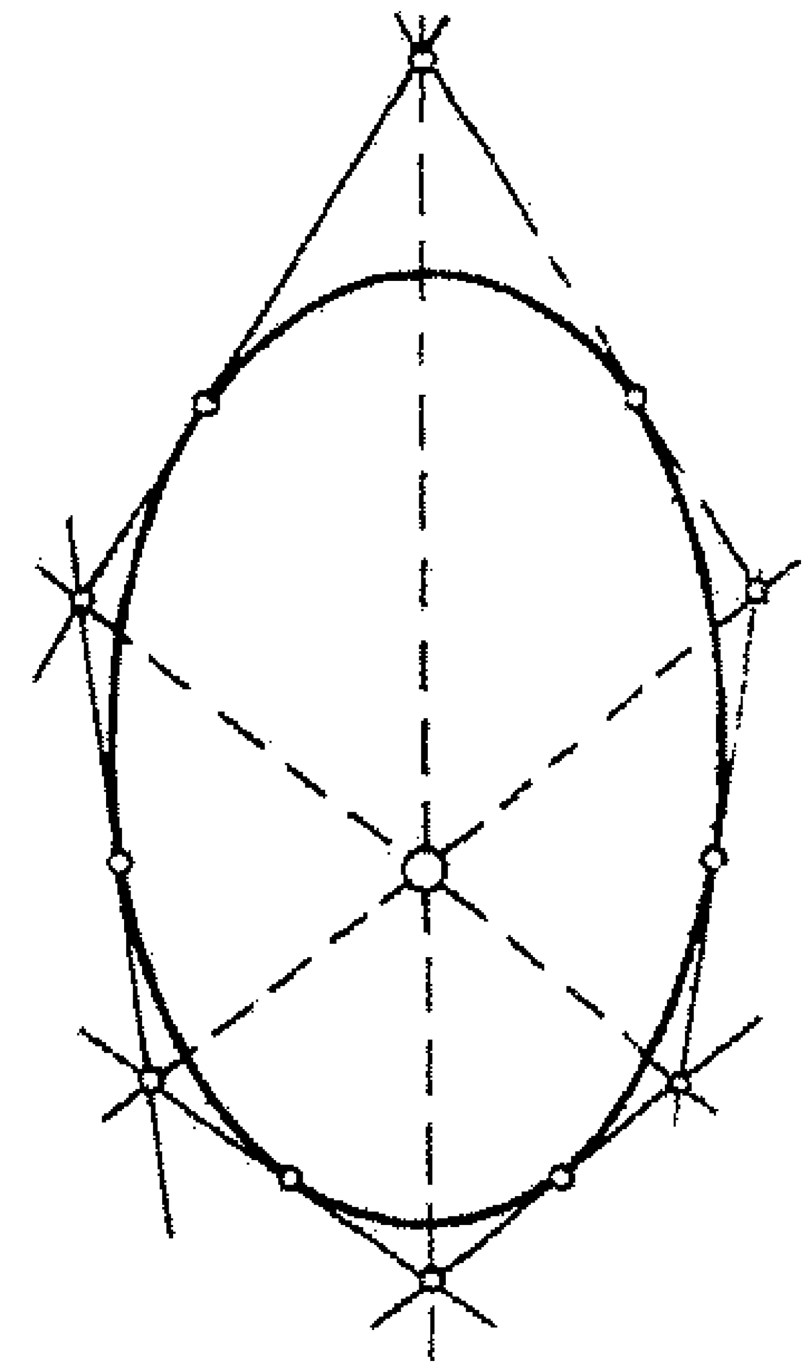
(1) *Regulaarsesse kvadrikusse kujundatud lihtsa viistipu ühes tipus sellele kvadrikule võetud puutuja lõikab iga seda tippu mitteläbivat külge punktis, mis asetseb samal sirgel, millel on ülejäänud ühise tiputa külgede lõikepunktid* (joon. 221).

(2) *Regulaarsesse kvadrikusse kujundatud lihtsa nelitipu kahes vastastipus võetud puutujate lõikepunktid on vastasküIgede lõikepunktidega ühel ja samal sirgel* (joon. 222).

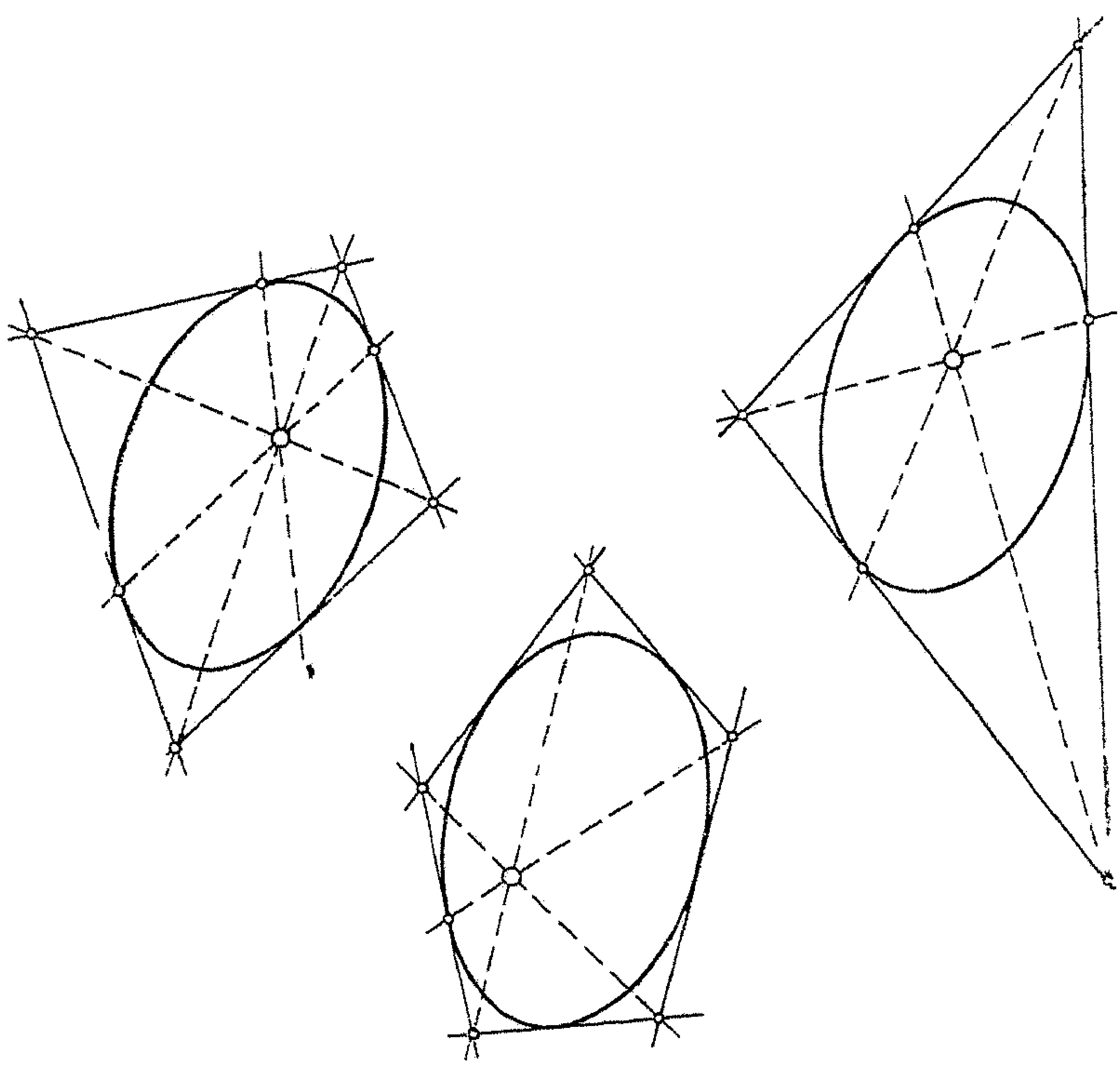
(3) *Regulaarsesse kvadrikusse kujundatud kolmtipu tippudes*



Joon 223



Joon 224



Joon 225

võetud puutujate ja kolmtipu kulgede lõikepunktid asetsevad ühel sirgel (joon. 223).

Teist klassi kimpude teoorias on kesksel kohal Pascali teoreemi suhtes duaalne teoreem.

***Teoreem* 128.2** (Brianchoni[160] teoreem). *Kuus antud sirget, millest ükski kolm ei ole ühes kimbus, on tasandi regulaarse kvadriku puutujateks parajasti siis, kui nende sirgetega määratud lihtsa kuuskülje vastastippe ühendavad sirged lõikuvad ühes punktis* (joon. 224).

Duaalsuse printsiibi tõttu puudub vajadus Brianchoni teoreemi tõestada. Sellest teoreemist saab teha samalaadseid (duaalseid) järeldusi nagu Pascali teoreemist. Näiteks joonisel 225 on kujutatud Pascali teoreemist järeldatud lausetele (1)—(3) analoogilised (duaalsed) vahekorrad, mis tulenevad otseselt Brianchoni teoreemist.

§ 22. TEISENDUSTE RÜHMAD JA GEOMEETRIA

Käesoleva kursuse viimases paragrahvis selgitame, kuidas on omavahel seotud eespool ülesehitatud kolm geomeetrilist süsteemi — afiinne, eukleidiline ja projektiivne geomeetria. Selliste seoste otsimine ja uurimine võimaldab paremini mõista neid geomeetriaid endid. Teisest küljest tekib seejuures perspektiiv uute geomeetriliste süsteemide moodustamiseks ja uurimiseks, mõnele neist on juhitud tähelepanu kahes viimases artiklis. Ühtlasi avaneb selles uurimiskäigus võimalus heita esimene pilk geomeetria kui teadusala struktuurile.

129. Kleini printsiip. Pöördume esmalt tagasi afiinse ja eukleidilise geomeetria juurde, selleks et suhteliselt lihtsas olukorras demonstreerida teatava üldise printsiibi rakendamist, mis võimaldab hiljem nii viimati mainitud kaht kui ka mitmeid uusi geomeetriaid haarata ühtse, projektiivse ruumi mõistele tugineva käsitlusega.

Eukleidilise ruumi E_n ja eukleidilise geomeetria saamiseks tuleb afiinse ruumi A_n aksioomidele **A1**—**A4**, **B1**—**B5** ja **C**$^{(n)}$ lisada aksioomid **D1**—**D6** ning $n > 2$ puhul ka **E1** ja **E2**. Et lisatud aksioomid ei puuduta punktide hulka ning nõuavad vektorite hulga puhul ainult teatavat uut vahekorda $y = x \rho \varphi$ selle igas rihis, siis ruumid A_n ja E_n kui punktihulgad ühtivad, samuti ühtivad nende vektorite hulgad. Kuid afiinne ja eukleidiline geomeetria on erinevad. Üleminekul afiinsest geomeetriast eukleidilisse lisandub uusi mõisteid ja uusi lauseid — nimelt selliseid,

[160] Brianchon, Ch. J (1785—1864) — prantsuse matemaatik

mille tuletamisel peale afiinse geomeetria mõistete ja lausete kasutatakse ka lisatud aksioome. Selles mõttes eukleidiline geomeetria, lähtudes afiinsest, laiendab viimast, sisaldab teda.

Kui eukleidilise geomeetria ülesehitamisel on läbi käidud kogu tee mingi mõiste või lause tuletamiseks, siis on selge, kas see mõiste või lause kuulub afiinsesse geomeetriasse või mitte, s. t. kas tema tuletamine on võimalik ilma aksioomideta **D1**—**D6** (ja $n > 2$ puhul ka aksioomideta **E1**—**E2**). Teisiti on lugu, kui meid huvitab sama küsimus mingi valmiskujul võetud mõiste või lause puhul (näiteks kolmnurga mediaan ja teoreem mediaanide lõikepunktide kohta) ning me ei taha läbi analüüsida kogu tuletuskäiku. Sel juhul lubab küsimusele vastata järgmine kriteerium.

Mõiste või lause kuulub afiinsesse geomeetriasse parajasti siis, kui ta on invariantne afiinsete teisenduste suhtes.

Tõepoolest, algmõisted ja alglaused, mis on ette antud aksioomidega **A1**—**A4**, **B1**—**B5** ja $\mathbf{C}^{(n)}$, on afiinselt invariantsed (vt. art. 60); seda peab siis olema ka iga mõiste ja lause, mis on nendest aksioomidest tuletatav (näiteks kolmnurga mediaani mõiste ja lause mediaanide lõikepunktist). Aksioomid **D1**—**D6** (samuti **E1**—**E2**) aga afiinselt invariantseteks ei osutu. (Näiteks **D1** puhul on selge, et seosest $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \circ \varphi$, $0 < \varphi < \pi$ ei tulene afiinse teisenduse toimel üldiselt seos $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{x}' \circ \varphi$, sest mittekollineaarsed vektorid $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ võivad afiinselt kujutuda mistahes kaheks mittekollineaarseks vektoriks $\boldsymbol{x}'$ ja $\boldsymbol{y}' = (\boldsymbol{x} \circ \psi)\lambda$, $0 < \psi < \pi$, $\lambda \neq 0$.) Iga mõiste või lause, mille tuletamine ilma nende aksioomideta on võimatu ning mis seetõttu kuulub eukleidilisse geomeetriasse, peab järelikult olema samuti afiinselt mitteinvariantne. (Sellised on näiteks kõik mõisted ja laused, mis tuginevad vektorite ristumise mõistele.) Afiinselt invariantsed on seega üksnes afiinse geomeetria mõisted ja laused.

Sõnastatud kriteeriumi järgi saab niisiis afiinse geomeetria eukleidilisest eraldada afiinsete teisenduste rühma abil. Teisenduste rühmade abil saab aga liikuda ka vastupidises suunas: l a i e n d a d a üht geomeetriat teise, teda sisaldava geomeetriani. Näitame järgnevalt, kuidas sel viisil on võimalik afiinset geomeetriat laiendada eukleidilise geomeetriani.

Üldine skeem püstitatud eesmärgi saavutamiseks on järgmine. Kitsendame ruumi A_n afiinsete teisenduste rühma, piirdudes ainult isomeetriliste teisendustega. Laiendame seejärel geomeetriat niisuguste mõistete ja lausetega, mis ei ole invariantsed kõigi afiinsete teisenduste suhtes, küll on aga seda kõigi isomeetriliste teisenduste korral. Osutub, et tulemuseks on eukleidiline geomeetria.

Esitatud skeemi tuleb lisada üks oluline täpsustus. Kui antud on ainult afiinne geomeetria, siis puudub kahe punkti vahelise kauguse mõiste, mis oli võetud aluseks isomeetrilise teisenduse defineerimisel. Seetõttu on vaja isomeetrilise teisenduse mõiste uuesti defineerida, tuginedes üksnes aksioomidele **A1—A4**, **B1—B5** ja $\mathbf{C}^{(n)}$ ning reaalarvude aritmeetikale. Näitame, kuidas seda on võimalik teha.

Nagu selgus art-s 61, saab vabalt fikseeritud afiinse reeperi abil ruumi A_n iga afiinse teisenduse jaoks leida sellise regulaarse n-järku maatriksi $C = \|c_{ij}\|$ ja üheveerulise maatriksi $c = \|c_i\|$, et vaadeldava teisenduse määrab valem

$$x' = Cx + c, \qquad (129.1)$$

kus x ja x′ on vabalt võetud punkti X ja selle kujutise X' koordinaatidest moodustatud üherealised maatriksid. Kirjeldatud maatriksid C ja c on seejuures valitavad täiesti vabalt, s. t. valem (129.1) määrab iga niisuguse paari (C, c) ja antud reeperi korral teatava afiinse teisenduse.

***Def.* 129.1.** Afiinse teisenduse sellist erijuhtu, mille korral maatriks C valemis (129.1) on ortogonaalmaatriks, nimetatakse antud afiinse reeperi suhtes *eukleidiliseks teisenduseks*.

Maatriks C on ortogonaalmaatriks parajasti siis, kui kehtib (58.9): $CC^T = E$ ehk $C^T = C^{-1}$. Kahe ortogonaalmaatriksi C ja C′ korral on $CC^T = E$, $C'C'^T = E$; seega $(CC')(CC')^T = (CC')(C'^T C^T) = C(C'C'^T)C^T = E$. Samal ajal $C^{-1}(C^{1-})^T = C^T(C^T)^T = C^T C = C^{-1}C = E$. Järelikult eukleidilised teisendused moodustavad *rühma* (vt. art. 66). See rühm on teatav alamhulk afiinsete teisenduste rühmas.

Üldiselt mingi teisenduste rühma G alamhulka, mis on samuti rühm, nimetatakse rühma G *alamrühmaks*. Eukleidiliste teisenduste rühm on alamrühmaks ruumi A_n afiinsete teisenduste rühmas.

Teoreemi 66.1 põhjal saab nüüd vaadelda ruumi A_n kujundite ekvivalentsusklasse eukleidiliste teisenduste rühma suhtes ning järelikult ka mõisteid ja lauseid, mis on invariantsed eukleidiliste teisenduste puhul. Toome mõningaid näiteid mõistete kohta, mis ei ole invariantsed kõigi afiinsete teisenduste, küll aga kõigi eukleidiliste teisenduste puhul.

Olgu vabalt võetud punktide X ja Y eukleidilised kujutised X' ja Y' ning vastavad koordinaadiveerud antud afiinse reeperi suhtes x, y, x′ ja y′. Valemi (129.1) põhjal $x' - y' = (Cx + c) - (Cy + c) = C(x - y)$. Kasutame tähistusi $x - y = z$ ja $x' - y' = z'$, siis $z' = Cz$ ja $z'^T = (Cz)^T = z^T C^T$. Järelikult $z'^T z' =$

$= (z^T C^T)(Cz) = z^T(C^T C)z = z^T z$, sest $C^T C = E$. Siit ilmneb, et korrutis $z^T z = z_1^2 + \ldots + z_n^2$ on vektoriga $\boldsymbol{z} = \overrightarrow{XY}$ antud afiinse reeperi abil seotud arv, mis on invariantne eukleidilise teisenduse suhtes. Invariantne on muidugi ka arv $\sqrt{z^T z}$, mida nimetatakse vektori $\boldsymbol{z}$ pikkuseks ehk punktide X ja Y vaheliseks kauguseks.

Mistahes vektorite $\boldsymbol{z}$ ja $\boldsymbol{w}$ ning nende eukleidiliste kujutiste $\boldsymbol{z}'$ ja $\boldsymbol{w}'$ korral $z'^T w' = (Cz)^T(Cw) = (z^T C^T)(Cw) = z(C^T C)w = z^T E w = z^T w$, seega arv $z^T w = z_1 w_1 + \ldots + z_n w_n$ on samuti eukleidiliselt invariantne. Nimetame selle arvu vektorite $\boldsymbol{z}$ ja $\boldsymbol{w}$ skalaarkorrutiseks.

Osutub, et

$$(z^T w)^2 \leqslant (z^T z)(w^T w). \tag{129.2}$$

Tõepoolest, iga $\lambda \in R$ korral $(z - \lambda w)^T (z - \lambda w) = (z_1 - \lambda w_1)^2 + \ldots + (z_n - \lambda w_n)^2 \geqslant 0$, s. t. $z^T z - 2\lambda z^T w + \lambda^2 w^T w \geqslant 0$. Kui $w \neq 0$, siis $w^T w > 0$. Võtame $\lambda = \frac{z^T w}{w^T w}$; pärast asendust ja arvuga $w^T w$ korrutamist saame võrratuse $(z^T z)(w^T w) - 2(z^T w)^2 + (z^T w)^2 \geqslant 0$, mis ongi samaväärne võrratusega (129.2). Viimane kehtib ka siis, kui $w = 0$, sest sel korral on mõlema poole väärtuseks 0.

Võrratust (129.2) nimetatakse Cauchy[161] võrratuseks. Selle võrratuse põhjal $-\sqrt{z^T z}\sqrt{w^T w} \leqslant z^T w \leqslant \sqrt{z^T z}\sqrt{w^T w}$ ehk

$$-1 \leqslant \frac{z^T w}{\sqrt{z^T z}\sqrt{w^T w}} \leqslant 1.$$

Keskmine suurus kui invariantsete arvude jagatis on eukleidiliselt invariantne. Et tema väärtus kuulub lõiku $[-1, 1]$, siis saab leida niisuguse arvu φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, mille korral

$$\cos\varphi = \frac{z^T w}{\sqrt{z^T z}\sqrt{w^T w}}. \tag{129.3}$$

Funktsioon $\cos\varphi$ (samuti $\sin\varphi$) on eespool defineeritud, tuginedes aksioomidele **D1—D6**. Seetõttu tekib küsimus, kas on lubatud teda kasutada praegu, kus lähtume üksnes afiinsest geomeetriast. Vastuse annab art. 25 peenkirjaline tekst. Seal on näidatud, et suurused $\cos\varphi$ ja $\sin\varphi$ saab määrata sõltumatult nende esialgsest definitsioonist lihtsalt kui kaks funktsiooni, mis on pidevad ja rahuldavad tingimusi (25.1)—(25.5). Võrduses (129.3) tuleb funktsiooni $\cos\varphi$ mõista just niimoodi.

---

[161] Cauchy, Augustin (1789—1857), prantsuse matemaatik, Pariisi TA akadeemik, andis selle võrratuse 1821. a. (n mistahes väärtuse korral).

Piirdudes nende näidetega tõestame järgnevalt, et afiinse geomeetria laiendamine eukleidiliselt invariantsete mõistete ja lausetega annab tulemuseks tõepoolest eukleidilise geomeetria. (Tänu sellele võisimegi eespool näidetena konstrueeritud invariantidele omistada juba tuttavad nimetused.) Selleks piisab, kui kontrollida, et lisanduvate lausete hulgas on ka aksioomid **D1**—**D6** (ning juhul $n = 3$ ka aksioomid **E1**—**E2**), sest koos nendega peavad siis lisanduma ka kõik nendele tuginevad mõisted ja laused.

Vaatleme orienteeritud tasandit A_2 ja loeme selle puhul lubatavaiks ainult eukleidilised teisendused. Ortogonaalsusetingimusest $C^T C = E$ ja orienteerituse nõudest $|C| = 1$, s t. võrdustest

$$\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = 1$$

järeldub, et iga lubatav maatriks C peab rahuldama seoseid

$$c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1 \qquad c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1, \qquad c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0, \qquad c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 1.$$

Esimese seose põhjal $-1 \leqslant c_{11} \leqslant 1$, mistõttu leidub $\varphi \in R$, nii et $c_{11} = \cos\varphi$; samast seosest $c_{21}^2 = 1 - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi$, seepärast kas $c_{21} = \sin\varphi$ või $c_{21} = -\sin\varphi$. Teisel juhul võtame φ asemele $-\varphi$ ja niiviisi saame alati $c_{11} = \cos\varphi$ ja $c_{21} = \sin\varphi$. Kolmandast seosest järeldub, et $c_{12} = -\lambda\sin\varphi$, $c_{22} = \lambda\cos\varphi$ ning asendus neljandasse seosesse annab võrduse $\lambda(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 1$, seega $\lambda = 1$. Niisiis leidub selline reaalarv φ, et $C = C_\varphi$, kus

$$C_\varphi = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}. \tag{129.4}$$

Aksioomi **D1** puhul loeme vektoriks $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \circ \varphi$ antud $\boldsymbol{x}$ ja φ korral sellise vektori $\boldsymbol{y}$, mille koordinaadiveeruks on $y = C_\varphi x$. Olgu $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ kujutisteks vastavalt $\boldsymbol{x}'$ ja $\boldsymbol{y}'$, s. t. olgu $x' = C_\psi x$ ja $y' = C_\psi y$, siis $y' = C_\psi(C_\varphi x) = (C_\psi C_\varphi)x$. Seejuures

$$C_\psi C_\varphi = \begin{Vmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi & -(\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi) \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \cos(\psi+\varphi) & -\sin(\psi+\varphi) \\ \sin(\psi+\varphi) & \cos(\psi+\varphi) \end{Vmatrix}$$

s. t.

$$C_\psi C_\varphi = C_{\psi+\varphi}. \tag{129.5}$$

Siin ψ ja φ on vahetatavad, ilma et maatriks muutuks, seega $C_\psi C_\varphi = C_\varphi C_\psi$. Järelikult $y' = (C_\varphi C_\psi)x = C_\varphi(C_\psi x) = C_\varphi x'$, mistõttu $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{x}' \circ \varphi$. Siit ilmneb, et seos $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \circ \varphi$ on invariantne, s. t aksioom **D1** on lisanduv lause.

Aksioomid **D2**—**D6** on invariantse seose $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \circ \varphi$ definitsiooni otsesteks järeldusteks ning on seepärast samuti invariantsed. Tõepoolest, lihtne on veenduda, et $C_\pi = -E$; selleks tarvitseb vaid võrduses (129.4) võtta $\varphi = \pi$. Niisiis, iga $\boldsymbol{x}$ korral $x' = C_\pi x = -Ex = -x$, s. t. $\boldsymbol{x} \circ \pi = -\boldsymbol{x}$, mis näitab, et kehtib **D2**. Koosinuse ja siinuse pidevusest järeldub **D3**. Mis puutub aksioomidesse **D4** ja **D5**, siis need tulenevad võrdustest $C_\varphi(x + y) = C_\varphi x + C_\varphi y$ ja $C_\varphi(x\lambda) = (C_\varphi x)\lambda$. Aksioomis **D6** on $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x} \circ \varphi) \circ \psi$ puhul $y = C_\psi(C_\varphi x) = (C_\psi C_\varphi)x$ ning võrdus $(\boldsymbol{x} \circ \varphi) \circ \psi = \boldsymbol{x} \circ (\varphi + \psi)$ on nüüd otseseks järelduseks võrdusest (129.5).

Nende märkuste põhjal võib tõepoolest kinnitada, et *kui tasandi* A_2 *puhul piirduda eukleidiliste teisendustega, siis tasandi afiinne geomeetria laieneb eukleidiliseks*. Samasugusele otsusele saab jõuda ka ruumi A_3 puhul, kui seal lisada veel aksioomid **E1** ja **E2**. Märgime vaid, et analoogiline kontroll on ruumi korral märksa keerukam.

Niisiis, eukleidilise geomeetria saamiseks piisab, kui kitsendada ruumi A_n afiinsete teisenduste rühm eukleidiliste teisenduste alamrühmani. Kuidas seejuures on moodustatud afiinne geomeetria ise, kas vastava aksiomaatika põhjal (nagu meie eelnevas käsitluses) või oma teisenduste rühma abil (nagu eespool on üles ehitatud projektiivne geomeetria; vt. def. 119.4), see ei ole siinkohal oluline.

Leidub veel teisigi võimalusi uue geomeetria moodustamiseks afiinsete teisenduste rühma alamrühmade abil. Võib vaadelda e k v i a f i i n s e t g e o m e e t r i a t, mis saadakse afiinsete teisenduste rühma kitsendamisel ekviafiinsete teisenduste rühmani (def. 63.1), samal viisil sarnasusteisenduste rühma (def. 63.2) poolt määratud s a r n a s u s g e o m e e t r i a t[162], samuti t s e n t r o a f i i n s e t g e o m e e t r i a t (def. 64.1), l ü k e t e g e o m e e t r i a t jne. Nende kõigi puhul on teisendatavaks hulgaks afiinne tasand või ruum. Afiinsete teisenduste rühma teatava alamrühma poolt määratud geomeetria uurib kujundite neid omadusi, mis jäävad invariantseteks sellesse alamrühma kuuluvate teisenduste korral. Näiteks tasandi ekviafiinses geomeetrias lisandub afiinse geomeetria mõistetele pindala mõiste. Sarnasusgeomeet-

[162] mida nimetatakse ka *ekviformseks* geomeetriaks.

rias läheb pindala mõiste küll kaotsi, kuid selle asemele tulevad näiteks nurga ja mistahes kahe lõigu suhte mõisted.

Nendes lihtsates näidetes ilmneb teatav üldine eeskiri geomeetria kui teadusala uurimisvälja rikastamiseks, avardamiseks ja liigendamiseks. Seda eeskirja nimetatakse Kleini printsiibiks ehk Erlangeni programmiks.[163] Geomeetria on viimase saja aasta jooksul hoogsalt arenenud just tänu sellele printsiibile.

Kleini printsiibi täiesti üldine käsitlemine väljub käesoleva raamatu raamidest. Selle printsiibi selgitamisel piirdume alljärgnevalt peamiselt nende teisenduste rühmadega, mida vaadeldakse analüütilise geomeetria kursuses. Kõige üldisemaks teisenduste rühmaks, mida siin uuritakse, on projektiivsete teisenduste rühm, mis toimib projektiivses ruumis[164] P_n. Ei ole mingeid takistusi eelnevates näidetes arendatud idee laiendamiseks juhule, kus afiinse tasandi või ruumi asemel on projektiivne ruum P_n ning afiinsete teisenduste rühma alamrühmade asemel on projektiivsete teisenduste rühma alamrühmad. Sel juhul saame Kleini printsiibi sõnastada järgmiselt.[165]

Olgu projektiivse ruumi P_n *kõigi projektiivsete teisenduste rühmas antud teatav alamrühm* G. *Seatakse ülesandeks uurida ruumi* P_n *kujundite kõiki neid omadusi, mis on invariantsed kõigi rühma* G *kuuluvate teisenduste suhtes. Sel puhul kujunevate mõistete ja lausete süsteemi nimetatakse rühma* G *poolt määratud geomeetriaks.*

Teisiti öeldes, rühma G poolt määratud geomeetria haarab rühma G kõik invariandid — mõisted ja nende mõistete vahekorrad, mis jäävad püsima pärast iga teisendust rühmas G.

Kleini printsiibi rakendamisel on vaja osata välja eraldada projektiivsete teisenduste rühma alamrühmi. Ühe küllalt üldise võimaluse selleks annab kujundite statsionaarsuserühmade uurimine. Eespool (art-s 95) on nimelt näidatud, et antud kujundi statsionaarsuserühm — käesoleval juhul kõigi nende projektiivsete teisenduste hulk, mis jätavad antud kujundi muutuma-

---

[163] Klein, Felix (1849—1925), nimekas saksa matemaatik, esitas selle printsiibi kui geomeetria arendamise programmi 1872. a oma avaloengus «Võrdlev ülevaade uuematest geomeetria-alastest uurimustest» Erlangeni Kõrgema Polütehnilise Kooli professori kohale asumisel.

[164] Siitpeale kasutame projektiivse ruumi lihtsamat tähistust P_n varasema P_{n-1} asemel.

[165] F. Klein esitas printsiibi mõnevõrra üldisemal kujul, piirdumata üksnes projektiivse ruumi ja projektiivsete teisenduste rühma alamrühmadega. Väärib aga markimist, et lihtsamad geomeetriad, mida siin vaadeldakse, on nimelt need geomeetrilised süsteemid, millega F. Klein ise peamiselt tegeles.

tuks (s. t. teisendavad kujundi iga punkti jälle sellesama kujundi punktiks) osutub alamrühmaks. Antud kujundit erinevalt valides on võimalik määrata erinevaid alamrühmi, millest igaüks määrab Kleini printsiibi järgi teatava geomeetria.

Järgnevates artiklites näitame, et Kleini printsiibist lähtudes saab nii afiinset kui ka eukleidilist geomeetriat käsitleda projektiivselt vaatekohalt, s. t. projektiivsesse geomeetriasse kuuluvate vahekordade abil. Selline lähenemisviis ei tekita loogilist ringi, sest projektiivse ruumi ja projektiivse geomeetria mõisted saab anda, nagu eespool näidatud, täiesti sõltumatult afiinsest (seega ka eukleidilisest) geomeetriast. Ühtlasi näitame Kleini printsiibi abil tee mõnede uute geomeetriliste süsteemide, nn. mitteeukleidiliste geomeetriate ja pseudoeukleidilise geomeetria ülesehitamiseks projektiivse geomeetria baasil. Kõigile mainitud geomeetriatele on ühine see, et igaühe puhul neist saab vastava alamrühma G välja eraldada projektiivsest rühmast ruumi P_n teatava kvadriku või sellega duaalse kujundi — teist klassi sidumi statsionaarsuserühmana.

Def. 129.2. Olgu projektiivses ruumis P_n antud mingi kvadrik või teist klassi sidum. Olgu P_n kollineatsioonide rühmas K väljaeraldatud selle kvadriku või sidumi statsionaarsuserühm. Sel juhul öeldakse, et tegemist on K l e i n i r u u m i g a.[166] Antud kvadrikut või teist klassi sidumit nimetatakse selle ruumi a b s o l u u d i k s. Kleini ruumi geomeetriaks nimetatakse absoluudi statsionaarsuserühma poolt määratud geomeetriat.

Allpool käsitleme lühidalt kolme tüüpi Kleini ruume järgmiste absoluutidega:

1) kvadrik, mille astak on 1 (tasandil P_2 kvadrikute projektiivse ekvivalentsusklassi ***B*2**, ruumis P_3 aga klassi ***B*3** esindaja);

2) kvadrik, mille astak on $n+1$ ja mis on kas imaginaarne või jaotab ruumi P_n ülejäänud punktide hulga kaheks piirkonnaks (ekvivalentsusklassid ***Aa*** ja ***Ab***);

3) teist klassi sidum (P_2 puhul kimp), mille astak on n (vastab duaalselt kvadrikute ekvivalentsusklassile ***B*1*a*** või ***B*1*b***).

130. Afiinne geomeetria. Vaatleme esmajärjekorras sellist Kleini ruumi, mille absoluudiks on mingi kvadrik Q astakuga $r(Q) = 1$.

Kvadriku Q võrrandi $a_{ij}x^ix^j = 0$ vasak pool on siis teatava lineaarvormi ruut: $a_{ij}x^ix^j = (u_ix^i)^2$. Lineaar U, mille määrab võrrand $u_ix^i = 0$, on kvadriku iseärane lineaar ja kvadrik koosneb parajasti selle lineaari punktidest: $Q \equiv U$. Niisiis on vaadeldava Kleini ruumi absoluudiks õigupoolest vabalt valitud

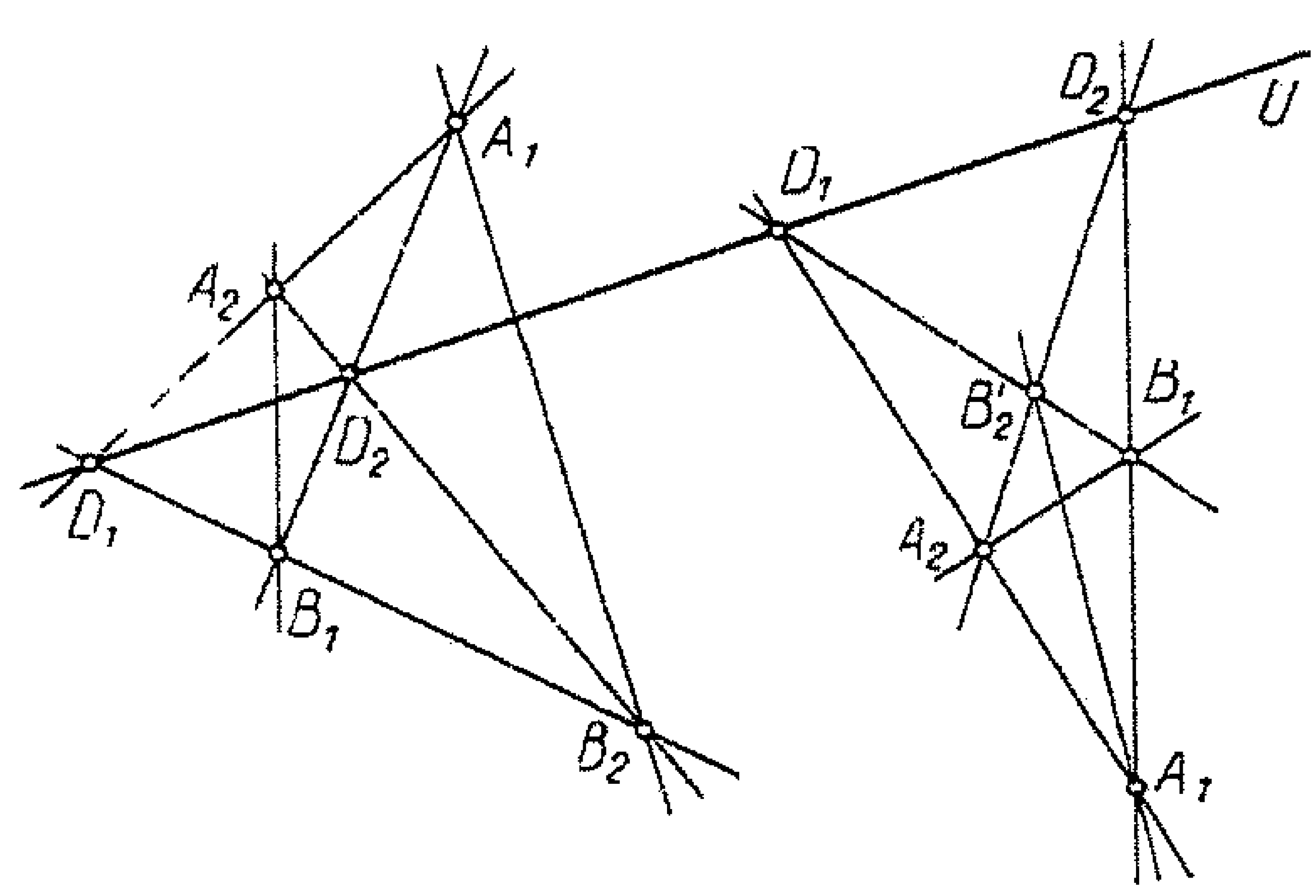
[166] Kaasaja matemaatikas kasutatakse terminit «Kleini ruum» ka üldisemas tähenduses.

lineaar U; seetõttu tähistame seda ruumi $\mathrm{P}_n(U)$. Lineaari U statsionaarsusrühm ruumi P_n kollineatsioonide rühmas K koosneb kõigist kollineatsioonidest, millel on ühine püsilineaar U; tähistame seda rühma $\mathrm{K}(U)$.

Olgu $\overline{\mathrm{P}}_n(U)$ ruumi $\mathrm{P}_n(U)$ kõigi selliste punktide hulk, mis ei kuulu absoluudile U. Seame eesmärgiks siduda punktihulgaga $\overline{\mathrm{P}}_n(U)$ vektorite hulk V_n selliselt, et hulkade $\overline{\mathrm{P}}_n(U)$ ja V_n puhul oleksid täidetud afiinse ruumi aksioomid **A1—A4**, **B1—B5** ja $\mathbf{C}^{(n)}$, seejuures invariantselt rühma $\mathrm{K}(U)$ suhtes. Osutub, et seda on võimalik teha teatud seose abil, mis defineeritakse järjestatud punktipaaride hulgas $\overline{\mathrm{P}}_n(U) \times \overline{\mathrm{P}}_n(U)$ invariantselt $\mathrm{K}(U)$ suhtes.

On selge, et hulga $\overline{\mathrm{P}}_n(U) \times \overline{\mathrm{P}}_n(U)$ iga kaks elementi, s. o. hulga $\overline{\mathrm{P}}n(U)$ iga kaks järjestatud punktipaari on ekvivalentsed rühma $\mathrm{K}(U)$ suhtes selles mõttes, et iga kahe niisuguse paari korral leidub rühmas $\mathrm{K}(U)$ teisendus, mis kujutab ühe paari teisele. Hulga $\overline{\mathrm{P}}_n(U) \times \overline{\mathrm{P}}_n(U)$ vabalt valitud kahe elemendipaari puhul lugu üldiselt enam nii ei ole. Tõepoolest, ühtki hulga $\overline{\mathrm{P}}_n(U)$ punktidest moodustatud süsteemi $\{(A,B), (C,D)\}$, mille puhul sirged AB ja CD lõikuvad U punktis, s. t. $AB \cap CD \in U$, ei saa ühegi teisenduse toimel rühmast $\mathrm{K}(U)$ kujutada ühelegi süsteemile $\{(A',B'), (C',D')\}$, mille puhul sirged $A'B'$ ja $C'D'$ kas ei lõiku või siis lõikuvad, kuid selliselt, et $A'B' \cap C'D' \notin U$.

Olgu $\{(A_1A_2), (B_1B_2)\}$ ja $\{(A'_1, A'_2), (B'_1, B'_2)\}$ sellised hulga $\overline{\mathrm{P}}_n(U)$ punktidest moodustatud süsteemid, nii et tekivad tasandilised nelitipud $A_1A_2B_2B_1$ ja $A'_1A'_2B'_2B'_1$, mille diagonaalpunktid $D_1 = A_1A_2 \cap B_1B_2$, $D_2 = A_1B_1 \cap A_2B_2$, $D'_1 = A'_1A'_2 \cap B'_1B'_2$ ja $D'_2 = A'_1B'_1 \cap A'_2B'_2$ asetsevad absoluudil U (joon. 226). Kolli-



Joon 226

neatsioonide põhiteoreemist 117.3 järeldub, et iga kahe niisuguse süsteemi korral leidub rühmas $K(U)$ teisendus, mis kujutab ühe süsteemi teisele ja iga kirjeldatud süsteemi $\{(A_1, A_2), (B_1, B_2)\}$ kujutiseks iga teisenduse toimel rühmast $K(U)$ on jälle sama tüüpi süsteem. Järjestused süsteemi paarides on kooskõlastatavad: kui punkt A_1 loetakse eelnevaks punktile A_2, siis sirge A_1D_2 eelneb sirgele A_2D_2 ja punkt $B_1 \in A_1D_2$ eelneb punktile $B_2 \in A_2D_2$. Järjestuste kooskõlastus süsteemi paarides on invariantne rühma $K(U)$ suhtes.

Nende tulemuste põhjal saab defineerida järgmise rühma $K(U)$ suhtes invariantse mõiste.

***Def.* 130.1.** Olgu A_1, A_2, B_1 ja B_2 mingid ($n > 2$ puhul ühele tasandile kuuluvad) üldasendis olevad punktid hulgas $\overline{P}_n(U)$. Järjestatud paari (A_1, A_2) nimetatakse v e k t o r v õ r d s e k s järjestatud paariga (B_1, B_2), kui punktid $D_1 = A_1A_2 \cap B_1B_2$ ja $D_2 = A_1B_1 \cap A_2B_2$ kuuluvad absoluudile U.

Tähistame vektorvõrduse sümboliga $\#$. Niisiis kirjutame $(A_1, A_2) \# (B_1, B_2)$ parajasti sel juhul, kui $A_1A_2 \cap B_1B_2 \in U$ ja $A_1B_1 \cap A_2B_2 \in U$. Siit järeldub, et kui $(A_1, A_2) \# (B_1, B_2)$, siis ka $(A_1, B_1) \# (A_2, B_2)$.

Seos $\#$ on sümmeetriline: kui $(A_1, A_2) \# (B_1, B_2)$, siis ka $(B_1, B_2) \# (A_1, A_2)$. Näitame, et see seos on ka transitiivne: kui $(A_1, A_2) \# (B_1, B_2)$ ja $(B_1, B_2) \# (C_1, C_2)$, siis ka $(A_1, A_2) \# (C_1, C_2)$. Tõepoolest, kui $(A_1, A_2) \# (B_1, B_2)$, siis $A_1A_2 \cap B_1B_2 = D_1 \in U$ ja $A_1B_1 \cap A_2B_2 = D_2 \in U$; kui $(B_1, B_2) \# (C_1, C_2)$, siis $B_1B_2 \cap C_1C_2 = E_1 \in U$ ja $B_1C_1 \cap B_2C_2 = E_2 \in U$. Kui kehtivad mõlemad, siis $E_1 = B_1B_2 \cap U = D_1$, mistõttu

$$A_1A_2 \cap C_1C_2 = D_1 \in U. \tag{130.1}$$

Sel juhul kolmtipud $A_1B_1C_1$ ja $A_2B_2C_2$ on perspektiivsed punkti D_1 suhtes. Desargues'i (esimese) teoreemi põhjal peavad need kolmtipud olema perspektiivsed ka mingi sirge v suhtes. Et aga $A_1B_1 \cap A_2B_2 = D_2 \in U$ ja $B_1C_1 \cap B_2C_2 = E_2 \in U$, siis $v = D_2E_2 \subset U$, mistõttu ka

$$A_1C_1 \cap A_2C_2 = F \in U, \tag{130.2}$$

sest $F \in v$. Seostest (130.1) ja (130.2) nähtubki, et $(A_1, A_2) \# (C_1, C_2)$.

Lisame eelnevat täiendava mõiste.

***Def.* 130.2.** Olgu A_1, A_2, B_1 ja B_2 ühe sirge $v \not\subset U$ punktid hulgas $\overline{P}_n(U)$. Järjestatud paari (A_1, A_2) nimetatakse vektorvõrdseks järjestatud paariga (B_1, B_2) ja kirjutatakse $(A_1, A_2) \# (B_1, B_2)$, kui leidub niisugune väljaspool sirget v asetsev järjestatud paar (C_1, C_2), et $(A_1, A_2) \# (C_1, C_2)$ ja $(B_1, B_2) \# (C_1, C_2)$.

Seos $\#$ on sümmeetriline ja transitiivne ka paaride puhul, mis asetsevad ühel sirgel. Def. 130.2 põhjal on seos $\#$ refleksiivne: iga (A_1, A_2) puhul, kus $(A_1, A_2) \subset \overline{\mathrm{P}}_n(U)$, kehtib $(A_1, A_2) \# \# (A_1, A_2)$.

Niisiis jaotab seos $\#$ hulga $\overline{P}_n(U) \times \overline{\mathrm{P}}_n(U)$ ekvivalentsusklassidesse. See klassijaotus on invariantne rühma $\mathrm{K}(U)$ suhtes.

Märgime, et üheks ekvivalentsusklassiks on paaride hulk $\{(X, X)\}$, kus X on mistahes punkt hulgast $\overline{\mathrm{P}}_n(U)$. Tõepoolest, kahe sellise paari (A, A) ja (B, B) korral on definitsioonis 130.1 nõutavateks punktideks $D_1 = AB \cap U$ ja absoluudi mistahes punkt $D_2 \neq D_1$.

***Def.* 130.3.** Ekvivalentsusklasse hulgas $\overline{\mathrm{P}}_n(U) \times \overline{\mathrm{P}}_n(U)$ defineeritud seose $\#$ suhtes nimetatakse v e k t o r i t e k s ja tähistatakse $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ Vektorit $\boldsymbol{x}$, mis ekvivalentsusklassina sisaldab paari (X,Y), tähistatakse ka $\overrightarrow{XY}$. Ekvivalentsusklassi $\{(X, X)\}$ nimetatakse n u l l v e k t o r i k s ja tähistatakse $\mathbf{0}$.

Olgu V defineeritud vektorite hulk. Näitame, et hulgad $\overline{\mathrm{P}}_n(U)$ ja V rahuldavad aksioome **A1—A4**, **B1—B5** ja $\mathbf{C}^{(n)}$.

Hulk $\overline{\mathrm{P}}_n(U)$ ei ole tühi, seega rahuldab aksioomi **A1**.

Hulga $\overline{\mathrm{P}}_n(U) \times \overline{\mathrm{P}}_n(U)$ iga element (X, Y) kuulub parajasti ühte seosega $\#$ määratud ekvivalentsusklassi, s. t. iga järjestatud punktipaari (X, Y) korral leidub üks ja ainult üks vektor $\boldsymbol{x}$, nii et $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{XY}$. Seega aksioom **A2** kehtib.

Vektori $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{XY}$ ja punkti $Z \in \overline{\mathrm{P}}_n(U)$ korral olgu $XY \cap U = W$, $XZ \cap U = W'$ ja $YW' \cap ZW = V$. Siis $W \in ZV$ ja $W' \in YV$, mistõttu $XY \cap ZV = W$ ja $XZ \cap YV = W'$. Järelikult $(Z, V) \# \# (X, Y)$, s. t. leidub parajasti üks punkt $V \in \overline{\mathrm{P}}_n(U)$ nii, et $\overrightarrow{ZV} = \boldsymbol{x}$. Niisiis aksioom **A3** on vaadeldavates hulkades tõene.

Tõene on siin ka aksioom **A4**, sest kui $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{ZV}$, s. t. $(X, Y) \# \# (Z, V)$, siis ka $(X, Z) \# (Y, V)$, s. t. $\overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{YV}$.

Toetudes kontrollitud aksioomidele **A1—A4**, defineerime hulga V elementide liitmise (def. 10.1); vektorite $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ summat tähistame $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$. Et vektorvõrdsus ja aksioomide **A1—A4** kehtivus on rühma $\mathrm{K}(U)$ suhtes invariantsed, siis on seda ka defineeritud liitmine.

Vektori $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{XY}$ ja reaalarvu λ korrutise defineerimiseks määrame sirgel XY punkti Z selliselt, et $(ZY, XW) = \lambda$. Näitame, et vektor $\overrightarrow{XZ}$ sõltub üksnes vektorist $\boldsymbol{x}$ ja reaalarvust λ.

Olgu X' mingi punkt hulgast $\bar{\mathrm{P}}_n(U)$ väljaspool sirget XY ja olgu $\overrightarrow{X'Y'} = \boldsymbol{x}$. Siis $(X', Y') \# (X, Y)$, mistõttu $XY \cap X'Y' = W$ ja $XX' \cap YY' = W' \in U$. Määrame sirgel $X'Y'$ punkti Z' selliselt, et $(Z'Y', X'W) = \lambda$. Esindajavektorite sobival valikul $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{W}$, $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{W}\lambda$, $\mathbf{Y}' = \mathbf{X}' + \mathbf{W}$ ja $\mathbf{Z}' = \mathbf{X}' + \mathbf{W}\lambda$. Olgu $\mathbf{W}' = \mathbf{X}' + \mathbf{X}\mu$, siis $\mathbf{W}' = (\mathbf{Y}' - \mathbf{W}) + (\mathbf{Y} - \mathbf{W})\mu = (\mathbf{Y}' + \mathbf{Y}\mu) - \mathbf{W}(1 + \mu)$; et aga $W' \in YY'$, siis $\mu = -1$, s. t. $\mathbf{W}' = \mathbf{X}' - \mathbf{X}$. Järelikult $\mathbf{Z}' - \mathbf{Z} = (\mathbf{X}' + \mathbf{W}\lambda) - (\mathbf{X} + \mathbf{W}\lambda) = \mathbf{X}' - \mathbf{X} = \mathbf{W}'$. Siit nähtub, et $W' \in ZZ'$, seega $(X', Z') \# (X, Z)$, mistõttu $\overrightarrow{X'Z'} = \overrightarrow{XZ}$. Niisiis vektori $\overrightarrow{XZ}$ määramisel võib lähtuda mistahes punktist X' väljaspool sirget XY.

Olgu nüüd X' sirge XY mingi punkt hulgas $\bar{\mathrm{P}}_n(U)$. Valime vabalt punkti $X'' \in \bar{\mathrm{P}}_n(U)$ väljaspool sirget XY. Olgu $\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{X''Y''} = \boldsymbol{x}$, s. t. $(X'', Y'') \# (X, Y)$ ja $(X', Y') \# (X'', Y'')$, mistõttu ka $(X', Y') \# (X, Y)$. Määrame sirgetel XY ja $X''Y''$ vastavalt punktid Z' ja Z selliselt, et $(Z'Y', X'W) = (Z''Y'', X''W) = \lambda$. Nagu äsja selgus, sel juhul $\overrightarrow{X''Z''} = \overrightarrow{XZ}$, samuti $\overrightarrow{X'Z'} = \overrightarrow{X''Z''}$, järelikult $\overrightarrow{X'Z'} = \overrightarrow{XZ}$. Seega vektor $\overrightarrow{XZ}$ on sõltumatu punkti X asendist ka sirgel XY.

***Def.* 130.4.** Antud vektori $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{XY}$ ja reaalarvu λ korral vektorit $\overrightarrow{XZ}$, mis on määratud tingimustega $(ZY, XW) = \lambda$, $W = XY \cap U$, nimetatakse v e k t o r i $\boldsymbol{x}$ j a r e a a l a r v u λ k o r r u t i s e k s ning tähistatakse $\boldsymbol{x}\lambda$. Nullvektori korrutiseks reaalarvuga loetakse nullvektorit, s. t. võetakse $\mathbf{0}\lambda = \mathbf{0}$.

On selge, et hulga V elementide defineeritud korrutamine reaalarvudega on invariantne rühma $\mathrm{K}(U)$ suhtes.

Selleks et näidata aksioomide **B1**—**B5** ja $\mathbf{C}^{(n)}$ kehtivust, moodustame hulga V 1 : 1-pealekujutuse absoluudi U punktide esindajavektorite sobivalt täiendatud hulgale.

Olgu $\boldsymbol{U}$ ja $\boldsymbol{X}$ vastavalt absoluudi U ja vabalt valitud punkti $X \in \bar{\mathrm{P}}_n(U)$ mingid esindajavektorid. Moodustame vektori $\boldsymbol{U}$ koordinaatidest üherealise, vektori $\boldsymbol{X}$ omadest aga üheveerulise maatriksi, vastavalt U ja X, ning kirjutame absoluudi võrrandi $u_i x^i =$

$= 0$ maatrikskorrutise abil:

$$\mathrm{UX}=0. \tag{130.3}$$

Vabaduse tõttu esindajavektorite valimisel on maatriksid U ja X määratud nullist erinevate arvteguriteni. Fikseerime vabalt absoluudi ühe esindajavektori $\check{U}$ ehk teisiti — maatriksi $\check{\mathrm{U}}$ — ja eraldame selle abil iga punkti $X \in \overline{\mathrm{P}}_n(U)$ jaoks välja parajasti ühe esindaja. Arvestame seda, et $X \in \overline{\mathrm{P}}_n(U)$ korral $\mathrm{UX} \neq 0$, ja võtame punkti X esindajaks sellise $\check{X}$, et vastav maatriks $\check{\mathrm{X}}$ rahuldab tingimust

$$\check{\mathrm{X}}=(\check{\mathrm{U}}\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}. \tag{130.4}$$

Vektor $\check{X}$ ei sõltu esialgse esindaja X valikust, sest kui $X'=X\mu$, siis

$$\check{\mathrm{X}}'=(\check{\mathrm{U}}\mathrm{X}\mu)^{-1}(\mathrm{X}\mu)=(\check{\mathrm{U}}\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}=\check{\mathrm{X}}.$$

Seejuures

$$\check{\mathrm{U}}\check{\mathrm{X}}=\check{\mathrm{U}}[(\check{\mathrm{U}}\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}]=(\check{\mathrm{U}}\mathrm{X})^{-1}(\check{\mathrm{U}}\mathrm{X})=1. \tag{130.5}$$

Absoluudi U punktide esindajavektorite hulk on vektorruumi V_{n+1} n-mõõtmeline alamruum, millest on välja jäetud nullvektor. Tõepoolest, U iga punkti esindaja on U vabalt võetud n projektiivselt sõltumatu punkti mistahes esindajate lineaarkombinatsioon; vastupidi, iga selline mittetriviaalne lineaarkombinatsioon on U mingi punkti esindaja ruumis V_{n+1}. Olgu $\overline{\mathrm{V}}_n \subset \mathrm{V}_{n+1}$ absoluudi punktide esindajate hulk ja $\mathbf{0} \in \mathrm{V}_{n+1}$ nullvektor; tähistame $\overline{\mathrm{V}}_n \cup \{\mathbf{0}\} = \mathrm{V}_n$.

Korraldame nüüd kujutuse $f: \mathrm{V} \to \mathrm{V}_n$. Loeme vektori $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{XY}$ kujutiseks punkti $W = XY \cap U$ esindaja $\boldsymbol{W}_x = \check{\boldsymbol{Y}} - \check{\boldsymbol{X}}$, vektori $\mathbf{0}$ kujutiseks aga vektori $\mathbf{0} \in \mathrm{V}_n$. Niisiis võtame $f(\boldsymbol{x}) = \check{\boldsymbol{Y}} - \check{\boldsymbol{X}}$.

Vektori $\boldsymbol{x}$ kujutis $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{W}_x$ ei sõltu punkti X valikust. Tõepoolest, olgu mingi punkti $X' \neq X$ korral $\overrightarrow{X'Y'} = \boldsymbol{x}$, siis $(X, Y) \# \#(X', Y')$, s. t. $XY \cap X'Y' = W$ ja $XX' \cap YY' = W' \in U$. Seega punktil W leidub esindaja $\boldsymbol{W}_{x'} = \check{\boldsymbol{Y}}' - \check{\boldsymbol{X}}$ ja punktil W' esindajad $\boldsymbol{W}'_x = \check{\boldsymbol{X}}' - \check{\boldsymbol{X}}$ ning $\boldsymbol{W}'_y = \check{\boldsymbol{Y}}' - \check{\boldsymbol{Y}}$. Seejuures $\boldsymbol{W}'_y - \boldsymbol{W}'_x = (\check{\boldsymbol{Y}}' - \check{\boldsymbol{X}}') - (\check{\boldsymbol{Y}} - \check{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{W}_{x'} - \boldsymbol{W}_x$. Kuid vektorid $\boldsymbol{W}'_y - \boldsymbol{W}'_x$ ja $\boldsymbol{W}_{x'} - \boldsymbol{W}_x$ kuuluvad vastavalt punktide W' ja W esindajaid sisaldavatesse ruumi V_n ühemõõtmelistesse alamruumidesse, seepärast viimane võrdus on võimalik ainult siis, kui $\boldsymbol{W}_{x'} - \boldsymbol{W}_x = \mathbf{0}$, s. t.

$\boldsymbol{W}_{x'} = \boldsymbol{W}_x$. Vastupidi, kui kahe vektori $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{x}'$ kujutised ühtivad, siis leiduvad punktid X, Y, X' ja Y' nii, et $\check{Y} - \check{X} = \check{Y}' - \check{X}'$, s. t. $\check{Y}' - \check{Y} = \check{X}' - \check{X}$. Olgu $XY \cap U = W$ ja $XX' \cap U = W'$, siis $XY \cap \cap X'Y' = W$ ja $XX' \cap YY' = W'$, järelikult $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{X'Y'}$, s. t. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$. Neist märkustest nähtub, et defineeritud kujutus $f: \mathrm{V} \to \mathrm{V}_n$ on üksühene. Vahetult on selge, et tegemist on pealekujutusega.

Kujutus f säilitab lineaarteheted vektorite hulgas. Tõepoolest, kui $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{XY}$, $\boldsymbol{y} = \overrightarrow{YZ}$ ja $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \overrightarrow{XZ}$, siis vastavate esindajate $\boldsymbol{W}_x = \check{Y} - \check{X}$, $\boldsymbol{W}_y = \check{Z} - \check{Y}$ ja $\boldsymbol{W}_z = \check{Z} - \check{X}$ korral $\boldsymbol{W}_x + \boldsymbol{W}_y = = (\check{Y} - \check{X}) + (\check{Z} - \check{Y}) = \check{Z} - \check{X} = \boldsymbol{W}_z$. Kui aga $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}\lambda = \overrightarrow{XY}\lambda = = \overrightarrow{XV}$, s. t. $(VY, XW) = \lambda$, siis võrduse $\check{Y} = \check{X} + \boldsymbol{W}_x$ tõttu järeldub liitsuhte definitsioonist, et $\check{V} = \check{X} + \boldsymbol{W}_x\lambda$, seega $\boldsymbol{W}_v = \check{V} - - \check{X} = \boldsymbol{W}_x\lambda$. Niisiis $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ ja $f(\boldsymbol{x}\lambda) = f(\boldsymbol{x})\lambda$.

Nüüd on lihtne veenduda, et aksioomid **B1**–**B5** ja $\mathbf{C}^{(n)}$ kehtivad hulgas V.

Aksioomi **B1** kehtivus tuleneb definitsioonist 130.4.

Aksioomi **B2** kontrollimiseks märgime, et $f[(\boldsymbol{x}\lambda)\mu] = f(\boldsymbol{x}\lambda)\mu = = [f(\boldsymbol{x})\lambda]\mu = f(\boldsymbol{x})(\lambda\mu) = f[\boldsymbol{x}(\lambda\mu)]$, seepärast kujutuse f üksühesuse tõttu $(\boldsymbol{x}\lambda)\mu = \boldsymbol{x}(\lambda\mu)$.

Aksioomi **B3** kehtivus tuleneb võrdustest $f[\boldsymbol{x}(\lambda + \mu)] = = f(\boldsymbol{x})(\lambda + \mu) = f(\boldsymbol{x})\lambda + f(\boldsymbol{x})\mu = f(\boldsymbol{x}\lambda) + f(\boldsymbol{x}\mu) = f(\boldsymbol{x}\lambda + \boldsymbol{x}\mu)$.

Aksioomi **B4** järeldame võrdustest $f[(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\lambda] = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\lambda = = [f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})]\lambda = f(\boldsymbol{x})\lambda + f(\boldsymbol{y})\lambda = f(\boldsymbol{x}\lambda) + f(\boldsymbol{y}\lambda) = f(\boldsymbol{x}\lambda + \boldsymbol{y}\lambda)$.

Aksioomi **B5** kehtivus järeldub võrdustest $f(\boldsymbol{x}1) = f(\boldsymbol{x})1 = = f(\boldsymbol{x})$.

Aksioomi $\mathbf{C}^{(n)}$ kontrollimiseks märgime, et võrdus $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ ehk üldisemalt $f(\boldsymbol{x}\lambda + \boldsymbol{y}\mu) = f(\boldsymbol{x})\lambda + f(\boldsymbol{y})\mu$ on laiendatav mistahes lõplikule arvule liidetavatele. Ruum V_n rahuldab aksioomi $\mathbf{C}^{(n)}$, s. t. selles ruumis leiduvad vektorid $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n$ nii, et iga $\boldsymbol{X} \in \mathrm{V}_n$ korral $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}_1 x^1 + \ldots + \boldsymbol{A}_n x^n$, kusjuures võrdus $\boldsymbol{A}_1 x^1 + \ldots + \boldsymbol{A}_n x^n = \boldsymbol{0}$ on võimalik parajasti siis, kui $x^1 = = \ldots = x^n = 0$. Olgu $\boldsymbol{A}_i = f(\boldsymbol{e}_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, siis $f(\boldsymbol{x}) = = f(\boldsymbol{e}_1)x^1 + \ldots + f(\boldsymbol{e}_n)x^n = f(\boldsymbol{e}_1 x^1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n x^n)$, s. t. $\boldsymbol{x} = = \boldsymbol{e}_1 x^1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n x^n$. Et $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, siis võrdus $\boldsymbol{e}_1 x^1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n x^n = = \boldsymbol{0}$ on võimalik parajasti siis, kui $x^1 = \ldots = x^n = 0$. Siit nähtubki, et $\mathbf{C}^{(n)}$ on tõene ka hulgas V.

Asjaolust, et hulgad $\overline{\mathrm{P}}_n(U)$ ja V rahuldavad aksioome **A1**-

A4, järeldub, et hulgas V kehtivad ka aksioomid $\bar{\mathbf{A}}1$—$\bar{\mathbf{A}}4$ (vt. art. 105). Seepärast võime nüüd ütelda, et **hulk V on n-mõõtmeline vektorruum.** Kujutus $f: V \to V_n$ on vektorruumide V ja V_n **isomorfism**[167]. Et isomorfsetel vektorruumidel on ühesugune struktuur, siis tähistame ka ruumi V sümboliga V_n. Edaspidi me sageli tõlgendamegi koos punktide hulgaga $\bar{P}_n(U)$ vaadeldavaid vektoreid absoluudi U punktide esindajavektoritena.

Teeme kokkuvõtte: *aksioomid* **A1—A4, B1—B5** *ja* $\mathbf{C}^{(n)}$ *on tõesed hulkade* $\bar{P}_n(U)$ *ja* V_n *puhul ning invariantsed rühma* $K(U)$ *suhtes, seega hulk* $\bar{P}_n(U)$ *on n-mõõtmeline afiinne ruum ja rühm* $K(U)$ *säilitab selle ruumi struktuuri.* Järelikult iga teisendus hulgast $K(U)$ toimib hulgas $\bar{P}_n(U)$ selle hulga afiinse teisendusena. See aga tähendab, et rühm $K(U)$ ei saa oma toime poolest hulgale $\bar{P}_n(U)$ olla avaram ruumi A_n afiinsete teisenduste rühmast.

Järgnevalt näitame, et rühm $K(U)$ ei ole afiinsete teisenduste rühmast kitsam.

Eespool fikseerisime absoluudi mingi esindaja $\check{U}$. Täpsustame nüüd oma valikut tingimusega, et vektorile $\boldsymbol{U}$ vastava maatriksi $\check{\mathrm{U}}$ korral

$$\check{\mathrm{U}} = (\mathrm{U}\mathrm{U}^{\mathrm{T}})^{-1/2}\mathrm{U}. \tag{130.6}$$

Maatriks $\check{\mathrm{U}}$ on sõltumatu esialgse esindaja $\boldsymbol{U}$ valikust, sest kui $\boldsymbol{U}' = \lambda \boldsymbol{U}$, siis $\check{\mathrm{U}}' = (\lambda^2 \mathrm{U}\mathrm{U}^{\mathrm{T}})^{-1/2}(\lambda\mathrm{U}) = (\mathrm{U}\mathrm{U}^{\mathrm{T}})^{-1/2}\mathrm{U} = \check{\mathrm{U}}$. Reeperi vahetamisel ruumis $\bar{P}_n(U)$ maatriks U ja samuti punktile $X \in \bar{P}_n(U)$ vastav maatriks X, nagu kerge kontrollida, muutuvad. Edaspidi on aga oluline ainult see, et iga reeperi korral vastab absoluudile parajasti üks maatriks U ning igale punktile $X \in \bar{P}_n(U)$ parajasti üks maatriks X. Eeldame käesoleva artikli lõpuni, et absoluudi ja hulga $\bar{P}_n(U)$ punktide esindajad on kirjeldatud kokkulepetega fikseeritud ning jätame seda osutava märgi $\check{}$ kirjutamata.

Võtame ruumis $\bar{P}_n(U)$ kasutusele afiinsed reeperid.

***Def.* 130.5.** Afiinse ruumi $\bar{P}_n(U)$ **afiinseks reeperiks** nimetatakse Kleini ruumi $P_n(U)$ iga projektiivset reeperit, mille n baaspunkti kuuluvad absoluudile (vrd. art. 110).

Edaspidi kasutame ainult selliseid afiinseid reepereid, milles

[167] G. Kangro, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 156 ja lk. 348.

$A_{n+1} \in \overline{P}_n(U)$. Lihtsustamiseks kirjutame indeksi $n+1$ asemele indeksi 0 ja viime ühtlasi baaspunkti A_0 esikohale. Vastavalt sellele kokkuleppele tähistame punkti $X \in P_n(U)$ koordinaate afiinse reeperi suhtes $x^0, x^1, \ldots, x^n$, s. t. kirjutame $X = \sum_{i=0}^{n} A_i x^i$.

Et afiinse reeperi puhul $A_\alpha \in U$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$, siis absoluudi võrrandiks on sel korral $x^0 = 0$ ja (130.6) tõttu $U = [1, 0, \ldots, 0]$, seepärast iga $X \in \overline{P}_n(U)$ jaoks $x^0 = 1$ (vt. 130.6). Seega

$$X = A_1 x^1 + \ldots + A_n x^n, \quad \text{kui} \quad X \in U, \tag{130.7}$$

$$X = A_0 + A_1 x^1 + \ldots + A_n x^n, \quad \text{kui} \quad X \in \overline{P}_n(U). \tag{130.8}$$

Absoluudi punktide esindajate valik on endiselt vaba; erandi moodustavad vaid baaspunktid A_α, sest ühikpunktile $E \in \overline{P}_n(U)$ vastab üheselt määratud vektor $E = (1, \ldots, 1)$. Vektor A_α määrab sirgel A_0A_α üheselt teatava punkti E_α, nimelt sellise, millele vastab vektor $E_\alpha = A_0 + A_\alpha$, s. t. mille puhul $A_\alpha = \overrightarrow{A_0E_\alpha}$. Sirgeid A_0A_α $(\alpha = 1, \ldots, n)$ nimetame **koordinaattelgedeks** ja punkte E_α nende **ühikpunktideks**. Baaspunktide A_α ülejäänud esindajad vastavad telgede ülejäänud punktidele; nende esindajate vahetamine on samaväärne teatava baasiteisendusega ruumis V_n.

Afiinse reeperi mõiste on invariantne rühma $K(U)$ suhtes. Kollineatsioonide põhiteoreemi 117.3 põhjal määrab iga afiinsete reeperite järjestatud paar parajasti ühe teisenduse rühmas $K(U)$. On selge, et kõigi selliste paaride hulga abil saab ammendada kogu rühma $K(U)$. Olgu $\{\{A_i, E\}, \{A'_i, E'\}\}$ mingi selline paar ja $A'_i = A_j c_i{}^j$. Et $A'_0 \in \overline{P}_n(U)$ ja $A'_\alpha \in U$, siis $c_0{}^0 = 1$ ja $c_\alpha{}^0 = 0$, seega

$$\check{C} = \|c_i{}^j\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_0{}^1 & c_1{}^1 & \ldots & c_n{}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_0{}^n & c_1{}^n & \ldots & c_n{}^n \end{Vmatrix}. \tag{130.9}$$

Siit ilmneb, et rühma $K(U)$ element sõltub kõige üldisemal juhul $n^2 + n = n(n+1)$ parameetrist $c_i{}^\alpha$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, n)$. Valemist (129.1) nähtub, et täpselt niisama suur on vabadus ruumi A_n afiinse teisenduse valimiseks. Selline vahekord lubabki kinnitada, et *rühm* $K(U)$ *ühtib oma toime poolest ruumile* $\overline{P}_n(U)$ *selle ruumi afiinsete teisenduste rühmaga.*

Ruumi $\overline{P}_n(U)$ puhul on kerge üle minna afiinse geomeetria harilikule käsitlusviisile. Et meid huvitab rühma $K(U)$ toime ainult ruumi $\overline{P}_n(U)$ punktidele, siis võib absoluudi punktid jätta vaatlusest kõrvale ja maatriksiga (130.9) määratud kollineatsiooni valemid kirjutada kujul

$$\begin{aligned} 'x^0 &= x^0 = 1, \\ 'x^1 &= c_0^1 + c_1^1 x^1 + \ldots + c_n^1 x^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 'x^n &= c_0^n + c_1^n x^1 + \ldots + c_n^n x^n. \end{aligned} \tag{130.10}$$

Jättes nendest valemitest ära esimese kui ebaolulise, saab rühma $K(U)$ vabalt valitud elemendi toime ruumile $\overline{P}_n(U)$ — selle afiinse teisenduse — avaldada maatriksite abil (vrd. 129.1): $x' = Cx + c$. Siin C on n-järku regulaarmaatriks, mis on seotud absoluudile kuuluvate baaspunktide ja nende esindajate vahetamisega, c aga on vektori $\overrightarrow{A_0A'_0}$ koordinaadiveerg.

Vaatleme absoluudile vastavat alamruumi $V_n \subset V_{n+1}$ — afiinse ruumi $\overline{P}_n(U)$ vektorite hulka — iseseisva n-mõõtmelise vektorruumina. Et ruumi V_{n+1} baasi n viimast vektorit moodustavad (130.7) põhjal ühtlasi alamruumi V_n baasi, siis on viimase «väljalõikamiseks» ruumist V_{n+1} küllalt, kui vektori $\boldsymbol{X} \in V_n$ puhul ära jätta selle esimene koordinaat $x^0 = 0$: kirjutame $\boldsymbol{X} = (0, x^1, \ldots, x^n)$ asemel $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ ja $\boldsymbol{A}_\alpha$ asemel $\boldsymbol{e}_\alpha$. Nimetame punkti A_0 afiinse reeperi alguspunktiks ja punktile $X \in \overline{P}_n(U)$ vastava vektori $\overrightarrow{A_0X} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{x} \in V_n$ punkti X kohavektoriks punkti A_0 suhtes. Alguspunkti kohavektoriks $\overrightarrow{A_0A_0}$ on V_n nullvektor ja võrduse (130.8) saab kirjutada kujul $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_\alpha x^\alpha$. Arve x^α — punkti $X \in \overline{P}_n(U)$ kohavektori koordinaate — nimetame punkti X afiinseteks koordinaatideks reeperi $\{A_0; \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ suhtes.

Afiinse geomeetria edasine ülesehitamine ei paku enam raskusi. Siinjuures on oluline, et afiinse ruumi $\overline{P}_n(U)$ moodustamisel on aluseks projektiivne ruum P_n, selle vabalt valitud lineaar U ja viimase statsionaarsuserühm $K(U)$ ruumi P_n kollineatsioonide rühmas K. Seetõttu *iga afiinne teisendus on ühtlasi ka projektiivne ja igal projektiivsesse geomeetriasse kuuluval mõistel ning teoreemil on invariantne tähendus ka afiinses geomeetrias.*

Huvipakkuv ja afiinsele geomeetriale uut valgust heitev on selle geomeetria käsitlemine projektiivse geomeetria vahekordade abil. Lisame senisele veel mõned tähelepanekud niisuguselt seisukohalt.

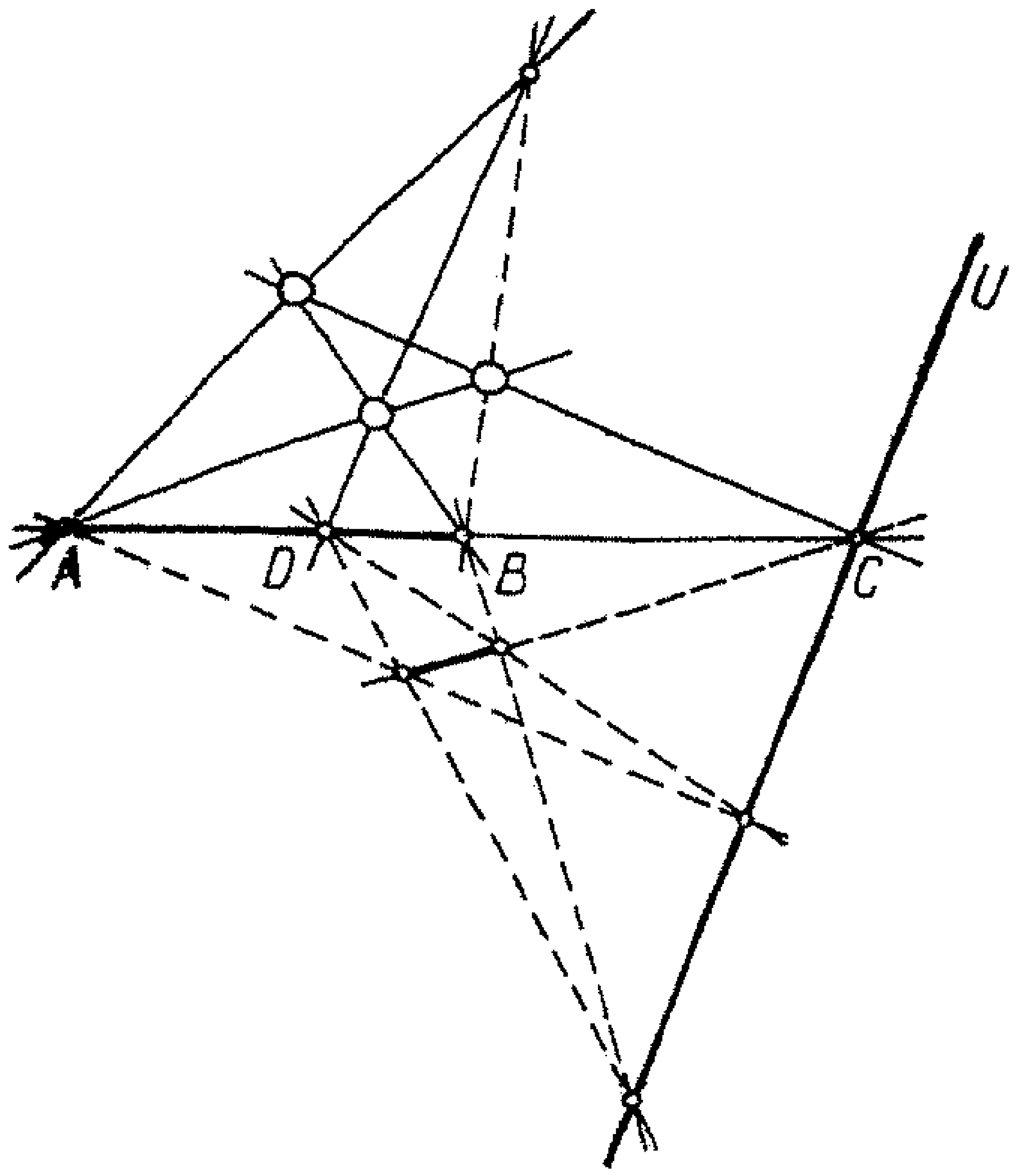
Teatavasti ei saa ruumis P_n defineerida sirgete paralleelsust. Ruumi $\overline{\mathrm{P}}_n(U)$ kaht sirget v ja w aga nimetatakse paralleelseteks ja kirjutatakse $v \parallel w$, kui $v \cap w = A \in U$. Et $A \notin \overline{\mathrm{P}}_n(U)$, siis võib $\overline{\mathrm{P}}_n(U)$ kahe sirge paralleelsuse määrata ka nõudega, et nad kuuluvad ühele tasandile ja ei lõiku. On selge, et sirgete paralleelsus on afiinselt invariantne, s. o. rühma $\mathrm{K}(U)$ suhtes invariantne mõiste. Ühtlasi on kerge mõista, et $\overline{\mathrm{P}}_n(U)$ kaks sirget, mis on paralleelsed kolmandaga, on paralleelsed ka omavahel. Samuti on kergesti järeldatav lause: läbi antud punkti saab ruumis $\overline{\mathrm{P}}_n(U)$ asetada parajasti ühe sirge, mis on paralleelne antud sirgega.

Olgu A ja B ruumi $\overline{\mathrm{P}}_n(U)$ mingid kaks erinevat punkti ning $C = AB \cap U$. Paariga (A, B) määratud vahemikuks nimetatakse hulka $(AB) = \{X \mid AB // CX\}$. Hulka $[AB] = (AB) \cup \{A\} \cup \{B\}$ nimetatakse lõiguks. Lõike $[AB]$ ja $[A'B']$ nimetatakse rööpvõrdseteks, kui $(A, B) \# (A', B')$. Punkti $D \in [AB]$ nimetatakse lõigu $[AB]$ keskpunktiks, kui $(AB, CD) = -1$, kus $C = AB \cap U$. Konstrueerides mingi täieliku nelitipu, mis määrab lõigu keskpunkti (vt. teoreem 116.2), saab veenduda, et viimane jaotab lõigu rööpvõrdseteks lõikudeks (joon. 227).

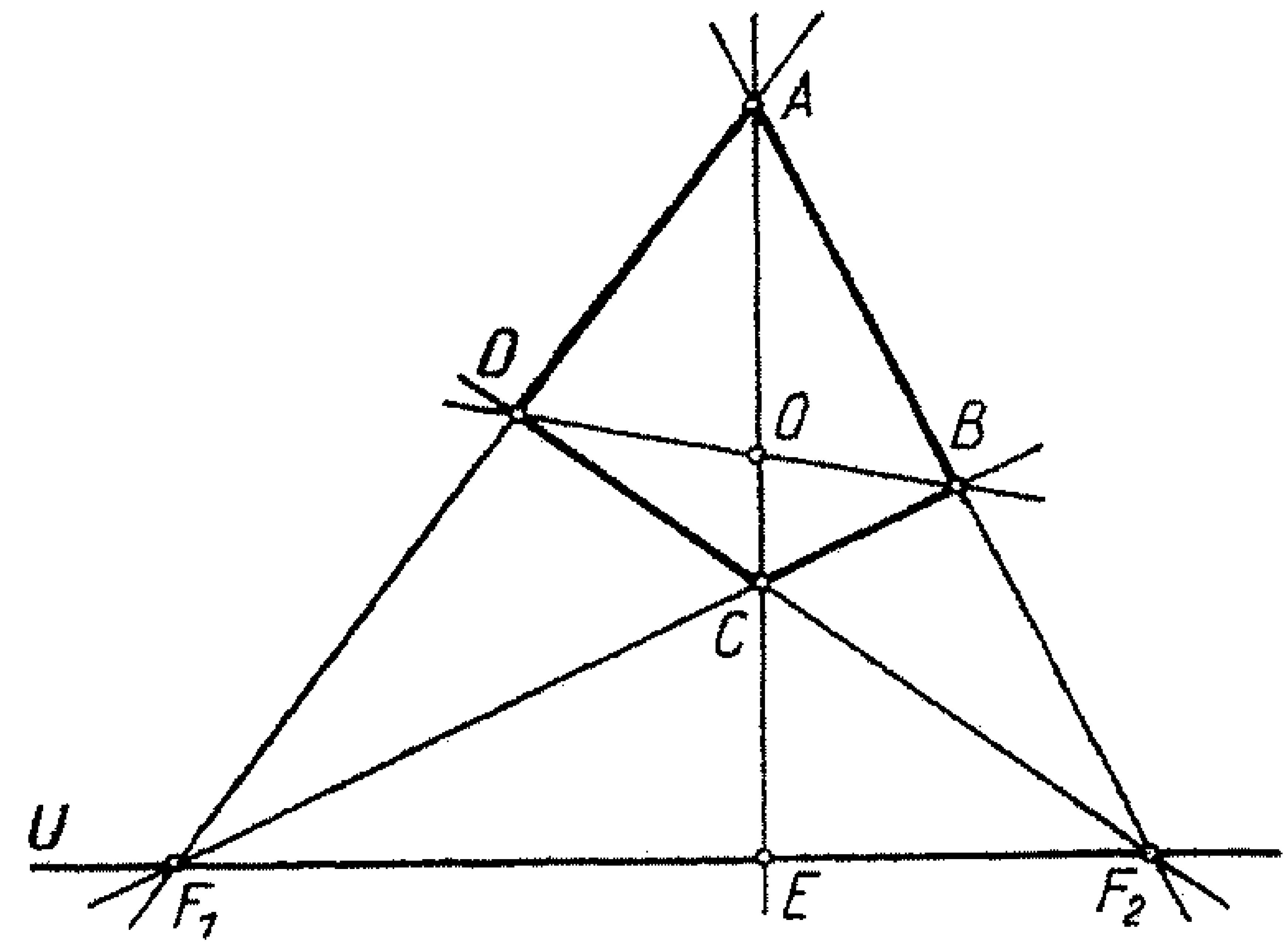
Lihtsat tasandilist nelitippu $ABCD$ nimetatakse rööpkülikuks, kui $[AB]$ ja $[CD]$ on rööpvõrdsed. Siit järeldub, et ka $[AD]$ ja $[BC]$ on rööpvõrdsed ning $AB \parallel CD$ ja $AD \parallel BC$. Lõike $[AC]$ ja $[BD]$ nimetatakse rööpküliku diagonaalideks. Rööpküliku diagonaalidel on ühine keskpunkt. Tõepoolest, olgu $ABCD$ rööpkülik, $AC \cap U = E$, $AD \cap BC \cap U = F_1$, $AB \cap CD \cap U = F_2$ ja $AC \cap BD = O$ (joon. 228). Siis A ja C on täieliku nelitipu BDF_1F_2 diagonaalpunktid ning O ja E on sirge AC lõikepunktid vabaks jäänud vastaskülgede paariga BD ja F_1F_2. Seepärast $(AC, EO) = -1$ (teoreem 116.1). Et $E \in U$, siis O on $[AC]$ keskpunkt. Analoogiliselt saab veenduda, et O on $[BD]$ keskpunkt.

Ruumi P_n perspektiivsed kollineatsioonid (vt. art. 122) jagunevad kahte liiki — homoloogiateks ja elatsioonideks. *Ruumi $\overline{\mathrm{P}}_n(U)$ puhul saab eristada nelja liiki perspektiivseid kollineatsioone.*

1) *Homoloogia, mille põhilineaariks on absoluut.* Valemitest (122.2) ja (130.10) nähtub, et kui ruumis $\overline{\mathrm{P}}_n(U)$ on võetud afiinne reeper, mille puhul $A_\alpha \in U$ ($\alpha = 1, \ldots, n$) ja A_0 on vaadeldava homoloogia keskpunkt, siis seda homoloogiat esitavad valemid $'x^0 = x^0 = 1$, $'x^\alpha = \lambda x^\alpha$. Niisiis, selle homoloogia vastavate punk-



Joon. 227



Joon. 228.

lide puhul $x' = x\lambda$ ehk $\overrightarrow{A_0X'} = \overrightarrow{A_0X}\lambda$. Siit ilmneb, et tegemist on ruumi $\overline{\mathrm{P}}_n(U)$ homoteetsusega, mille keskpunkt on A_0 ja tegur λ (vt. art. 63).

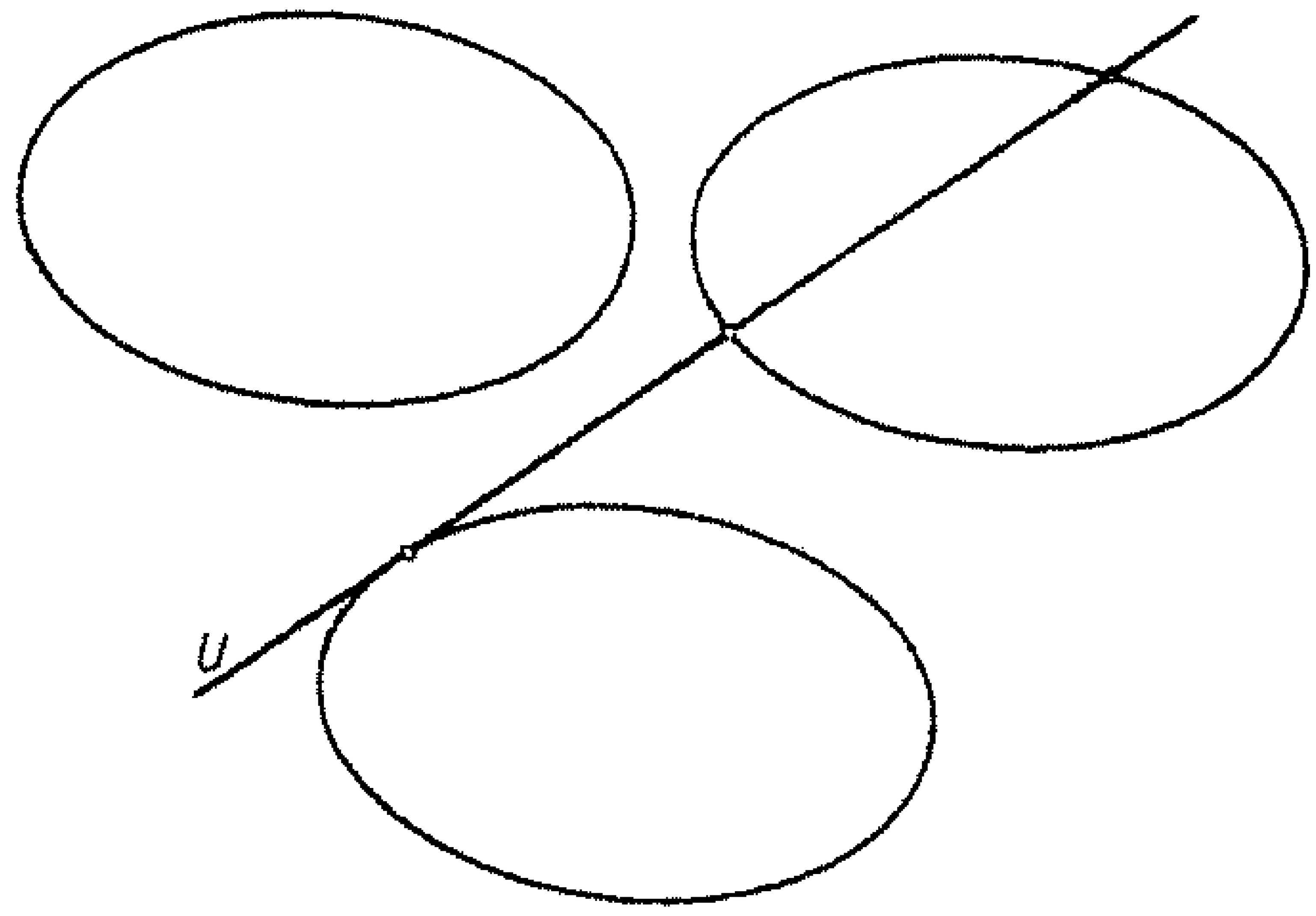
2) *Homoloogia, mille keskpunkt asetseb absoluudil.* Olgu homoloogia põhilineaar V ja keskpunkt $O \in U$. Võtame kasutusele afiinse reeperi, mille puhul $A_1 = O$, $A_a \in V \cap U$ $(a = 2, \ldots, n)$ ja A_0 on vabalt valitud punkt põhilineaaril. Reeperi kõik baaspunktid on siis püsipunktid. Et põhilineaari $V = A_0A_2 \ldots A_n$ iga punkt on püsipunkt, siis ei saa vektorid $\boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_n$ muutuda, seega reeperi kujutis rahuldab tingimusi $A'_0 = A_0$, $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1\lambda$, $\boldsymbol{e}'_a = \boldsymbol{e}_a$ $(a = 2, \ldots, n)$. Järelikult esitavad vaadeldavat homoloogiat kirjeldatud reeperi suhtes valemid $'x^0 = x^0 = 1$, $'x^1 = \lambda x^1$, $'x^a = x^a$ $(a = 2, \ldots, n)$. Sidum A_1 koosneb püsisirgetest, niisiis iga punkti X korral $X' \in A_1X$. Iga punkti $X \in \overline{\mathrm{P}}_n(U)$ puhul aga $A_1X \parallel A_1A_0$. Tasandi $\overline{\mathrm{P}}_2(U)$ niisugune homoloogia on selle tasandi telgafiinne teisendus (def. 64.2). Ruumi $\overline{\mathrm{P}}_3(U)$ puhul räägitakse ruumi tasandafiinsest teisendusest, erijuhtudel $0 < \lambda < 1$ ja $\lambda > 1$ ka vastavalt ruumi kokkusurumisest või väljavenitamisest tasandi V suhtes vektori $\boldsymbol{e}_1$ sihis teguriga λ. Juhul kui $\lambda < 0$, lisandub nimetatud teisendustele (mida esitavad tingimused $0 < |\lambda| < 1$ ja $|\lambda| > 1$) veel ruumi «kaldpeegeldus» tasandi V suhtes.

3) *Elatsioon, mille põhilineaar ühtib absoluudiga.* Kuulugu A_α $(\alpha = 1, \ldots, n)$ jälle absoluudile, siis baaspunktidest ainult A_0 erineb oma kujutisest ja sirge $A_0A'_0$ osutub püsisirgeks. Olgu punkti $X \in \overline{P}_n(U)$ kujutis X' ja $A_0X \cap U = Y_1$. Et Y_1 on püsipunkt, siis $Y_1 \in A'_0X'$. Sirge XX' on püsisirge, sest $Y_2 = XX' \cap U$ on püsipunkt. Sirged $A_0A'_0$ ja XX' on ühel tasandil, mistõttu leidub punkt $Z = A_0A'_0 \cap XX'$. Viimane on püsipunkt, seega kuulub absoluudile. Järelikult $(X, X') \# (A_0, A'_0)$ ja $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{A_0A'_0}$. Olgu $\overrightarrow{A_0A'_0} = \boldsymbol{c} = (c^1, \ldots, c^n)$, siis $\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, seega vaadeldavat elatsiooni esitavad valemid $'x^0 = x^0 = 1$, $'x^\alpha = x^\alpha + c^\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$. Siit on selge, et see elatsioon on l ü k e, mille vektor on $\boldsymbol{c}$.

4) *Elatsioon, mille põhilineaar V ei ühti absoluudiga.* Olgu $A_\alpha \in U$, nii et $A_a \in V \cap U$ $(a = 2, \ldots, n)$ ja $A_0 \in V$, siis baaspunktidest on oma kujutisest erinev ainult A_1. Sirged $A_1A'_1$ ja XX' on ühel tasandil. Et nad on püsisirged, siis $Y = A_1A'_1 \cap XX'$ on püsipunkt, järelikult $Y \in V \cap U$. Punkt Y on sõltumatu punkti $X \in \overline{P}_n(U)$ valikust väljaspool põhilineaari V. Võtame $A_2 = Y$, siis $\boldsymbol{A}'_1 = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2\lambda$, mistõttu seda elatsiooni esitavad valemid $'x^0 = x^0 = 1$, $'x^1 = x^1$, $'x^2 = \lambda x^1 + x^2$, $'x^3 = x^3$, $\ldots$, $'x^n = x^n$. Olgu $Z \in XX'$, $Y \neq X$, siis $Z' \in XX'$, $Z' \neq X'$. Tähistame $A_1X \cap A'_1X' \cap V = Z_1$ ja $A_1Z \cap A'_2Z' \cap V = Z_2$. Nelitippude XZZ_2Z_1 ja $X'Z'Z_2Z_1$ abil on kerge veenduda, et $(X, Z) \# (Z_1, Z_2) \# (X', Z')$, seega $\overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{X'Z'}$, mistõttu ka $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{ZZ'}$. Et $Z \in U$, siis kujutub iga punkt $X \in \overline{P}_n(U)$ sirgele, mis läbib seda punkti vektori $\boldsymbol{e}_2$ sihis. Kõik sellised sirged kuuluvad lineaariga $\overline{V} \subset \overline{P}_n(U)$ paralleelsesse ebasidumisse. Tasandi $\overline{P}_2(U)$ puhul on tegemist n i h k e g a, mille püsisirgeks on $\overline{V} \in \overline{P}_2(U)$ (vt. art. 64). Ruumi $\overline{P}_3(U)$ puhul on uuritav elatsioon n i h e püsitasandiga $\overline{V} \subset \overline{P}_3(U)$.

Toome lõpuks mõned näited kvadrikute afiinselt invariantsete omaduste selgitamisest projektiivse geomeetria vahendusel (vrd. § 17).

Olgu q mingi $\boldsymbol{A}$-klassi kuuluv kvadrik tasandil $P_2(U)$. Tema asendi jaoks absoluudi, s. o. sirge U suhtes on kolm võimalust (vt. art. 124): U kas 1) lõikab kvadrikut kahes imaginaarses punktis või 2) lõikab teda kahes reaalses punktis või 3) on kvadriku puutuja. Kvadrikut q nimetatakse vastavalt kas 1) imagi-



Joon 229

naarseks või reaalseks e l l i p s i k s või 2) h ü p e r b o o l i k s või 3) p a r a b o o l i k s (joon. 229). ***Aa***-klassis sisaldub ainult imaginaarne ellips, ***Ab***-klassis aga kolm afiinselt erinevat reaalset kvadrikut.

Regulaarne kvadrik q määrab üheselt absoluudi pooluse enda suhtes; seda poolust nimetatakse q k e s k p u n k t i k s. Ellipsi ja hüperbooli keskpunktid kuuluvad tasandile $\overline{P}_2(U)$, parabooli oma aga mitte; seepärast nimetatakse kaht esimest kvadrikut t s e n t r a a l s e t e k s, viimast aga m i t t e t s e n t r a a l s e k s.

Absoluudi kaassirget kvadriku suhtes, s. t. sirget, mis läbib kvadriku keskpunkti, nimetatakse kvadriku d i a m e e t r i k s. Ellipsi keskpunkt on tema sisepunkt, seepärast lõikab ellips iga oma diameetrit kahes punktis; niisiis on ellips kinnine joon, mis asetseb tasandi lõplikus osas. Hüperbooli keskpunkt on välispunkt, seepärast sisaldab tema diameetrite kimp peale lõikajate ja mittelõikajate veel kaht puutujat. Hüperbooli diameetreid, mis on samaaegselt tema puutujad, nimetatakse a s ü m p t o o t i d e k s. Et asümptoodid lõikavad hüperbooli absoluudi punktides, siis koosneb hüperbool tasandil $\overline{P}_2(U)$ (s. o afiinses geomeetrias) kahest omavahel mittelõikuvast harust, mida ei saa sulgeda tasandi lõplikku piirkonda. Parabool on tasandil $\overline{P}_2(U)$ lahtine joon — vaatlusest jääb välja puutepunkt absoluudiga. Parabooli kõik diameetrid lõikuvad absoluudi mingis punktis, seega nad on tasandil $\overline{P}_2(U)$ kõik omavahel paralleelsed.

Vaatleme veel ruumi $P_3(U)$ kvadrikut Q, mis ei ole ruumis $P_3(i)$ laguv, seega siis kuulub kas klassi ***A*** või klassi ***B***1. Absoluut — tasand U — lõikab kvadrikut Q mööda teatavat kvadrikut $q \subset U$ (art 124). Viimase uurimise teel saab otsustada, millisesse afiinselt invariantsesse liiki kuulub kvadrik Q. Määravaks osutuvad siin projektiivsed klassid, kuhu kuuluvad Q ja q.

Toetudes art. 127 tulemustele, on kerge selgitada, millised lõiked on võimalikud. Kui Q on nullkvadrik, siis peab seda olema ka q. Ovaalkvadrikut Q võib absoluut mitte lõigata, lõigata mööda tasandi ovaalkvadrikut või puutuda elliptilises punktis. Rõngaskvadrik Q on joonkvadrik, seepärast ei saa ta lõige absoluudiga olla tühi ega elliptiline punkt; Q regulaarsuse tõttu ei saa absoluut teda puutuda ka mööda kahekordset sirget; seega võib q siin olla kas ovaalkvadrik või lõikuvate sirgete paar (puutumine hüperboolses punktis). Imaginaarse koonuse puhul on lõige q kas tühi või koosneb ühest punktist vastavalt sellele, kas koonuse tipp on väljaspool absoluuti või asetseb sellel; viimasel juhul nimetatakse kvadrikut Q imaginaarseks (elliptiliseks) silindriks. Reaalse koonuse puhul ei saa lõige absoluudiga olla tühi, sest tegemist on joonkvadrikuga; kui lõige on mitteregulaarne, siis räägitakse jälle silindrist. Silindreid liigitatakse vastavalt sellele, kas lõige on elliptiline, hüperboolne või paraboolne.

Eelöeldu võtab kokku järgnev tabel. Selles esinevaid nimetusi võib käsitleda kui ruumi $\bar{P}_3(U)$ kvadrikute afiinsete liikide definitsioone, mis on esitatud projektiivse geomeetria vaatekohalt (kui piirduda ruumis $P_3(i)$ mittelaguvate kvadrikutega).

		Q				
		Aa	*Ab*	*Ac*	*B*I*a*	*B*I*b*
q	*Aa*	imaginaarne ellipsoid	ellipsoid	—	imaginaarne koonus	-
	Ab	—	kahekatteline hüperboloid	ühekatteline hüperboloid	—	koonus
	*B*I*a*	—	elliptiline paraboloid	—	imaginaarne silinder	elliptiline silinder
	*B*I*b*	—	—	hüperboolne paraboloid	—	paraboolne silinder

131. Mitteeukleidilised geomeetriad. Kollineatsioonide rühmal ja afiinsete teisenduste rühmal ei ole kahe punkti invariante. Seetõttu ei saa ruumides P_n ja A_n — senikaua kui geomeetria nendes on määratud mainitud rühmadega — defineerida kahe punkti vahelist kaugust. Samuti ei ole võimalik kasutusele võtta nende rühmade suhtes invariantset arvulist karakteristikut nurkade jaoks. Eukleidilises geomeetrias, vastupidi, on meetrika mõisted põhilised. Afiinne ruum nimelt sel teel muudetaksegi eukleidiliseks, et temasse tuuakse teatud lisatingimuste abil meetrika. Nagu selgus, saab seda teha kahel oluliselt erineval viisil: kas laiendades afiinse geomeetria aksiomaatikat uute aksioomide lisamisega (art. 21) või kitsendades afiinsete teisenduste rühma selle sobiva alamrühmani (art. 129).

Kasutame nüüd teist meetodit meetrika sissetoomiseks projektiivsesse ruumi. Osutub, et sobivaid alamrühmi saab kollineatsioonide rühmas valida mitmeti; neile vastavad erinevate meetrikatega geomeetriad. Käesolevas artiklis vaatleme neist kaht.

***Def.* 131.1.** Olgu projektiivse ruumi P_n alamhulgas M määratud geomeetria tema teisenduste rühmaga G, mis osutub alamrühmaks ruumi P_n kollineatsioonide rühmas. Kui rühmal G leidub hulga M kahe elemendi invariant $\varrho(X, Y)$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1° $\varrho(X, Y) \geqslant 0$, kusjuures võrdus leiab aset parajasti siis, kui $X = Y$,

2° $\varrho(Y, X) = \varrho(X, Y)$,

3° $\varrho(X, Y) + \varrho(Y, Z) \geqslant \varrho(Z, X)$,

siis öeldakse, et hulgas M määratud geomeetrias on olemas i n v a r i a n t n e m e e t r i k a. Invarianti $\varrho(X, Y)$ nimetatakse sel juhul rühma G m e e t r i l i s e k s i n v a r i a n d i k s.

Eukleidilises geomeetrias on olemas invariantne meetrika. Meetriliseks invariandiks on siin suurus $\varrho(X, Y) = |y - x| = \sqrt{(y - x)^2}$, kus x ja y on vabalt võetud punktide X ja Y kohavektorid. See suurus on tõesti invariantne isomeetriliste teisenduste rühma suhtes. Tingimuste 1° ja 2° kehtivus on vahetult selge, 3° aga järeldub Cauchy võrratusest: iga kolme punkti X, Y ja Z korral $(x - z)^2 = (x - y + y - z)^2 = (x - y)^2 + 2(x - y)(y - z) + (y - z)^2$, kus (129.2) põhjal $(x - y)(y - z) \leqslant |x - y|\,|y - z|$, mistõttu $(x - z)^2 \leqslant (x - y)^2 + 2|x - y|\,|y - z| + (y - z)^2 = (|x - y| + |y - z|)^2$, seega $|x + y| + |y - z| \geqslant |x - z|$, s. t. $\varrho(X, Y) + \varrho(Y, Z) \geqslant \varrho(Z, X)$.

***Def.* 131.2.** Geomeetriat, mille ruumis P_n määrab nullkvadriku Q_e statsionaarsuserühm $K(Q_e) \subset K$, nimetatakse e l l i p t i l i s e k s g e o m e e t r i a k s. Geomeetriat, mille ruumi P_n ovaalkvadriku Q_h sisepiirkonnas $\tilde{P}_n(Q_h)$ määrab selle kvadriku statsionaarsuserühm $K(Q_h) \subset K$, nimetatakse h ü p e r b o o l s e k s geomeetriaks. Vastavalt nimetatakse Kleini ruumi $P_n(Q_e)$ **elliptiliseks ruumiks** ($n=2$ puhul elliptiliseks tasandiks) ja Kleini ruumi $P_n(Q_h)$ alamhulka $\bar{P}_n(Q_h)$ **hüperboolseks ruumiks** ($n=2$ puhul hüperboolseks tasandiks).

Seame ülesandeks näidata, et hüperboolne ruum ja elliptiline ruum on meetrilised ruumid def. 131.1 mõttes. Selleks selgitame, kuidas nendes ruumides saab defineerida meetrilised invariandid.

Olgu $X(x^i)$ ja $Y(y^i)$ vabalt võetud erinevad punktid kas ruumis $P_n(Q_e)$ või $P_n(Q_h)$. Sirge XY lõikab vastavalt kvadrikut Q_e või Q_h, esimest imaginaarsetes, teist reaalsetes punktides. Lõikepunktid Z_1 ja Z_2 määrab võrrand (124.3). Kasutades tähistusi $F_{XX} \equiv a_{ij}x^ix^j$, $F_{YY} \equiv a_{ij}y^iy^j$ ja $F_{XY} \equiv a_{ij}x^iy^j$, kirjutame selle lühemalt: $F_{XX}t^2+2F_{XY}t+F_{YY}=0$. Lahenditele

$$t_{1,2}=\frac{-F_{XY}\pm\sqrt{F_{XY}^2-F_{XX}F_{YY}}}{F_{XX}} \tag{131.1}$$

vastavad lõikepunktid esindajatega $\mathbf{Z}_1=\mathbf{X}t_1+\mathbf{Y}$ ja $\mathbf{Z}_2=\mathbf{X}t_2+\mathbf{Y}$. Siinjuures

$$(Z_1Z_2,XY)=(XY,Z_1Z_2)=\frac{t_2}{t_1}=\frac{-F_{XY}-\sqrt{F_{XY}^2-F_{XX}F_{YY}}}{-F_{XY}+\sqrt{F_{XY}^2-F_{XX}F_{YY}}},$$

$$(Z_1Z_2,XY)=\frac{F_{XY}+\sqrt{F_{XY}^2-F_{XX}F_{YY}}}{F_{XY}-\sqrt{F_{XY}^2-F_{XX}F_{YY}}}. \tag{131.2}$$

Liitsuhe on invariantne rühma K, seepärast ka selle alamrühmade $K(Q_e)$ ja $K(Q_h)$ suhtes; samuti on nende suhtes invariantne liitsuhte iga funktsioon. Seda asjaolu arvestades seatakse igale punktipaarile vaadeldavaist ruumidest vastavusse (131.2) abil määratav arv

$$\bar{\varrho}(X,Y)=\frac{c}{2i}\ln(Z_1Z_2,XY); \tag{131.3}$$

siin i on imaginaarühik ja c vabalt valitav konstant, mis fikseeritakse nii, et $\bar{\varrho}(X,Y)\in R$.

Kasutame Euleri valemist[168] $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ järelduvat võrdust $\cos\varphi=\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})$. Võtame selles $\varphi=\frac{\bar{\varrho}(X,Y)}{c}$, siis

[168] Vt. G. Kangro, Matemaatiline analüüs II. Tallinn, 1968, lk. 91.

$$\cos\frac{\bar{\varrho}(X, Y)}{c}=\frac{1}{2}(e^{i\frac{\bar{\rho}(X,Y)}{c}}+e^{-i\frac{\bar{\rho}(X,Y)}{c}}). \qquad (131.4)$$

Võrdustest (131.3) ja (131.2) järeldub, et

$$e^{i\frac{\bar{\rho}(X,Y)}{c}}=e^{\frac{1}{2}\ln(Z_1Z_2,XY)}=(Z_1Z_2, XY)^{\frac{1}{2}}=\frac{F_{XY}+\sqrt{F^2_{XY}-F_{XX}F_{YY}}}{\sqrt{F_{XX}F_{YY}}},$$

$$e^{-i\frac{\bar{\rho}(X,Y)}{c}}=\frac{F_{XY}-\sqrt{F^2_{XY}-F_{XX}F_{YY}}}{\sqrt{F_{XX}F_{YY}}}.$$

Siit ilmneb, et seose (131.4) saab kirjutada järgnevalt:

$$\cos\frac{\bar{\varrho}(X, Y)}{c}=\frac{F_{XY}}{\sqrt{F_{XX}F_{YY}}}. \qquad (131.5)$$

Kui $\{X, Y\}\subset \mathrm{P}_n(Q_e)$, siis (Z_1Z_2, XY) on (131 2) põhjal imaginaarsete kaaskompleksarvude suhe. Et seliise suhte moodul on 1, siis leidub $\psi\in \mathrm{R}$, nii et $(Z_1Z_2, XY) = \cos\psi + i\sin\psi$, ja Euleri valemi tõttu

$$(Z_1Z_2, XY)=e^{i\psi}. \qquad (131.6)$$

Seejuures $e^{i(\psi+2k\pi)}=e^{i\psi+2k\pi i}=e^{i\psi}e^{2k\pi i}=e^{i\psi}(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)=e^{i\psi}$, kui $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$ Järelikult arv ψ võrduses (131.6) on määratud liidetavani $2k\pi$. Et sirge ruumis $\mathrm{P}_n(Q_e)$ on kinnine, siis piisab, kui võtta $0\leqslant\psi\leqslant 2\pi$, kusjuures igale paarile $\{X, Y\}$ vastab parajasti kaks arvu ψ ja $2\pi-\psi$.

Seose (131.6) põhjal $\ln(Z_1Z_2, XY)=i\psi$, seega ruumi $\mathrm{P}_n(Q_e)$ jaoks saab valemi (131.3) kirjutada kujul $\bar{\varrho}(X, Y)=\frac{c\psi}{2}$. Siit ilmneb, et igale järjestatud paarile $\{X, Y\}\in \mathrm{P}_n(Q_e)$ vastab parajasti üks rühma $\mathrm{K}(Q_e)$ suhtes invariantne mittenegatiivne reaalarv, kui võtta konstandiks c mingi positiivne reaalarv. Olgu $c = 1$.

***Def.* 131.3.** Ruumi $\mathrm{P}_n(Q_e)$ mistahes kahe punkti X ja Y vaheliseks **k a u g u s e k s** nimetatakse arvu

$$\varrho(X, Y)=\frac{1}{2i}\ln(Z_1Z_2, XY), \qquad (131.7)$$

kus $\{Z_1, Z_2\}=XY\cap Q_e$ ja $0\leqslant\frac{1}{2i}\ln(Z_1Z_2, XY)\leqslant\pi$.

Kui $\{X, Y\}\subset \tilde{\mathrm{P}}_n(Q_h)$, siis (Z_1Z_2, XY) on reaalarv, ja et

$XY \not\asymp Z_1Z_2$, siis $(Z_1Z_2, XY) > 0$, seega $\ln(Z_1Z_2, XY)$ on üheselt määratud reaalarv, mis võib osutuda nii positiivseks kui ka negatiivseks. Seepärast võtame valemis (131.3) $c = i$. Valemi (131.4) saab siis kirjutada järgmiselt:

$$\cos\frac{\bar{\varrho}(X, Y)}{i} = \frac{1}{2}(e^{\bar{\varrho}(X,Y)} + e^{-\bar{\varrho}(X,Y)}) = \operatorname{ch}\bar{\varrho}(X, Y). \qquad (131.8)$$

***Def.* 131.4.** Ruumi $\tilde{P}_n(Q_h)$ mistahes kahe punkti X ja Y vaheliseks kauguseks nimetatakse arvu

$$\varrho(X, Y) = \frac{1}{2}|\ln(Z_1Z_2, XY)|, \qquad (131.9)$$

kus

$$\{Z_1, Z_2\} = XY \cap Q_h.$$

Valemitega (131.7) ja (131.9) määratud suurused osutuvad vastavalt rühma $K(Q_e)$ ja rühma $K(Q_h)$ meetrilisteks invariantideks. Näitame seda rühma $K(Q_h)$ puhul. Esimese rühma korral on põhjendused analoogilised.

Kui $X = Y$, siis $(Z_1Z_2, XY) = 1$, s. t. $\varrho(X, X) = 0$. Kui aga $X \neq Y$, siis $(Z_1Z_2, XY) \neq 1$, mistõttu $\varrho(X, Y) > 0$. Niisiis kehtib def. 131.1 tingimus 1°. Et $(Z_1Z_2, YX) = (Z_1Z_2, XY)^{-1}$, siis $\ln(Z_1Z_2, YX) = -\ln(Z_1Z_2, XY)$ ja (131.9) põhjal $\varrho(Y, X) = \varrho(X, Y)$. Seega on täidetud ka 2°.

Tingimuse 3° kontrollimiseks valime ruumis $\tilde{P}_n(Q_h)$ vabalt erinevad punktid A, B ja C. Ehitame absoluudi Q_h suhtes autopolaarse reeperi nii, et $A_0 = B$ ja $A_0A_1 \ni A$, ning valime ühikpunkti selliselt, et absoluudi võrrandil on normaalkuju

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 0. \qquad (131.10)$$

F_{AB}, F_{BC} ja F_{CA} erinevad nullist, sest ovaalkvadriku sisepiirkonnas ei saa olla polaarselt konjugeeritud punktipaare. Valime sellised esindajad $\boldsymbol{A}(a^i)$, $\boldsymbol{B}(b^i)$ ja $\boldsymbol{C}(c^i)$, mis rahuldavad võrrandi (131.10) suhtes tingimusi $F_{AA} = F_{BB} = F_{CC} = -1$, $F_{AB} > 0$ ja $F_{BC} > 0$.

Tehtud kokkulepete põhjal $A = (a^0, a^1, 0, \ldots, 0)$, $B = (1, 0, \ldots, 0)$, $C = (c^0, c^1, \ldots, c^n)$ ja

$$\begin{aligned} -(a^0)^2 + (a^1)^2 &= -1, \quad a^0 < 0, \\ -(c^0)^2 + (c^1)^2 + \ldots + (c^n)^2 &= -1, \quad c^0 < 0. \end{aligned} \qquad (131.11)$$

Osutub, et $F_{CA} = -a^0c^0 + a^1c^1 < 0$. Tõepoolest, (131.11) tõttu $a^0c^0 > 0$ ja $a^0c^0 = \sqrt{[(a^1)^2 + 1][(c^1)^2 + \ldots + (c^n)^2 + 1]} > |a^1c^1|$.

Seostest (131.8) ja (131.5) tuleneb valem

$$\operatorname{ch} \varrho(X, Y) = \frac{|F_{XY}|}{\sqrt{F_{XX}F_{YY}}}. \qquad (131.12)$$

Püstitatud lisatingimuste tõttu $\operatorname{ch} \varrho(A, B) = F_{AB} = a^0$, $\operatorname{ch} \varrho(B, C) = F_{BC} = c^0$ ja $\operatorname{ch} \varrho(C, A) = -F_{CA} = a^0c^0 - a^1c^1$. Siit järeldub, et $\operatorname{ch}[\varrho(A, B) + \varrho(B, C)] - \operatorname{ch} \varrho(C, A) =$
$= \operatorname{ch} \varrho(A, B) \operatorname{ch} \varrho(B, C) + \operatorname{sh} \varrho(A, B) \operatorname{sh} \varrho(B, C) - \operatorname{ch} \varrho(C, A) =$
$= a^0c^0 + \sqrt{(a^0)^2 - 1}\sqrt{(c^0)^2 - 1} - a^0c^0 + a^1c^1 =$
$= |a^1|(\sqrt{(c^1)^2 + \ldots + (c^n)^2} \pm c^1) \geqslant 0$. Et hüperboolne koosinus on positiivse argumendi korral kasvav, siis ilmneb siit meetrika tingimuse 3⁰ kehtivus: iga $\{A, B, C\} \subset \tilde{P}_n(Q_h)$ korral $\varrho(A, B) + \varrho(B, C) \geqslant \varrho(C, A)$.

Ruumi $P_n(Q_e)$ puhul kehtib (131.5) põhjal valemiga (131.12) analoogiline valem

$$\cos \varrho(X, Y) = \frac{|F_{XY}|}{\sqrt{F_{XX}F_{YY}}}. \qquad (131.13)$$

Kleini ruumis $P_n(Q_e)$ on kaugus sel viisil määratud iga kahe punkti vahel, Kleini ruumis $P_n(Q_h)$ — ainult absoluudi sisepiirkonnas. Viimasel juhul saab meetrikat laiendada[169]. Kui sirge XY ei lõika absoluuti Q_h üheski punktis, siis $F_{XY}^2 - F_{XX}F_{YY} < 0$, mistõttu

$$-1 < \frac{F_{XY}}{\sqrt{F_{XX}F_{YY}}} < 1.$$

Seepärast leidub üheselt määratud arv $\varrho(X, Y)$, mis rahuldab võrdust (131.13). Kui aga välispunktidega X ja Y määratud sirge lõikab absoluuti Q_h kahes punktis Z_1 ja Z_2, siis $\varrho(X, Y) = \varrho(X', Y')$, kus X' ja Y' on punktide X ja Y polaarsed kaaspunktid Q_h suhtes. Tõepoolest, olgu $\mathbf{X} = \mathbf{Z}_1 x + \mathbf{Z}_2$ ja $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}_1 y + \mathbf{Z}_2$, siis võrduste $(Z_1Z_2, XX') = (Z_1Z_2, YY') = -1$ tõttu $\mathbf{X}' = \mathbf{Z}_1(-x) + \mathbf{Z}_2$ ja $\mathbf{Y}' = \mathbf{Z}_1(-y) + \mathbf{Z}_2$, järelikult $(Z_1Z_2, XY) = (Z_1Z_2, X'Y') = \frac{y}{x}$. Seejuures $\{X', Y'\} \subset \tilde{P}_n(Q_h)$.

Kaugust ei saa defineerida ruumi $P_n(Q_h)$ kahe sellise punkti vahel, millest kas 1) üks on absoluudi sise-, teine välispiirkonnas või 2) vähemalt üks kuulub absoluudile või 3) mõlemad on absoluudi puutujal.

---

[169] Ruumi $P_n(Q_h)$ nimetatakse ka **laiendatud hüperboolseks ruumiks** ja punkte tema absoluudi välispiirkonnas **ideaalseteks punktideks**

Valemitega (131.7) ja (131.9) määratud invariantset meetrikat nimetatakse sageli l õ i g u m e e t r i k a k s ruumides $P_n(Q_e)$ ja $P_n(Q_h)$. Osutub, et nendes ruumides on võimalik määrata ka invariantne n u r g a m e e t r i k a.

***Def.* 131.5.** N u r g a k s kahe lineaari vahel elliptilises ruumis või hüperboolses ruumis nimetatakse kaugust nende lineaaride pooluste vahel vaadeldava ruumi absoluudi suhtes.

Et Q_e on regulaarne, siis on temaga määratud polaarne vastavus üksühene, järelikult igale lineaaripaarile $(U, V) \subset$ $\subset P_n(Q_e)$ vastab parajasti üks valemiga

$$\cos\varphi(U, V) = \frac{|F_{XY}|}{\sqrt{F_{XX}F_{YY}}} \tag{131.14}$$

määratud nurk $0 \leqslant \varphi(U, V) \leqslant \frac{\pi}{2}$, kusjuures X ja Y on lineaaride U ja V poolused. Soovi korral võib siit absoluutväärtuse märgid ära jätta, siis vastab lineaaripaarile nurgapaar $(\varphi, \pi - \varphi)$. Erijuhul, kui $F_{XY} = 0$, nimetatakse vastavaid lineaare o r t o g o n a a l s e t e k s. Seega ortogonaalsed on lineaarid, mis on polaarselt konjugeeritud absoluudi suhtes.

Et ruumi $P_n(Q_e)$ absoluut on imaginaarne, siis on kõik punktid ja samuti kõik lineaarid selles ruumis samaväärsed selles mõttes, et rühma $K(Q_e)$ toimel saab kujutada iga punkti $X \in$ $\in P_n(Q_e)$ selle ruumi igale teisele punktile ja iga lineaari $U \subset P_n(Q_e)$ igale teisele lineaarile. Seepärast *lõigu- ja nurgameetrika osutuvad siin teineteise suhtes duaalseteks* — pikkusi ja nurki väljendab siin üks ja seesama invariant. Niisiis projektiivsele ruumile P_n omane duaalsuse printsiip säilib, kui sellesse ruumi tuua elliptiline meetrika tema mingi nullkvadriku statsionaarsuserühma abil.

Ruumi $P_n(Q_h)$ lineaare määravad ainult need Kleini ruumi $P_n(Q_h)$ lineaarid, mis lõikavad absoluuti; neid nimetatakse s i s e m i s t e k s l i n e a a r i d e k s. Ruumi $\tilde{P}_n(Q_h)$ lineaaride poolused on absoluudi suhtes välispunktid. Vabalt valitud lineaaripaari $\{U, V\} \subset \tilde{P}_n(Q_h)$ puhul tuleb eristada kolme juhtu.

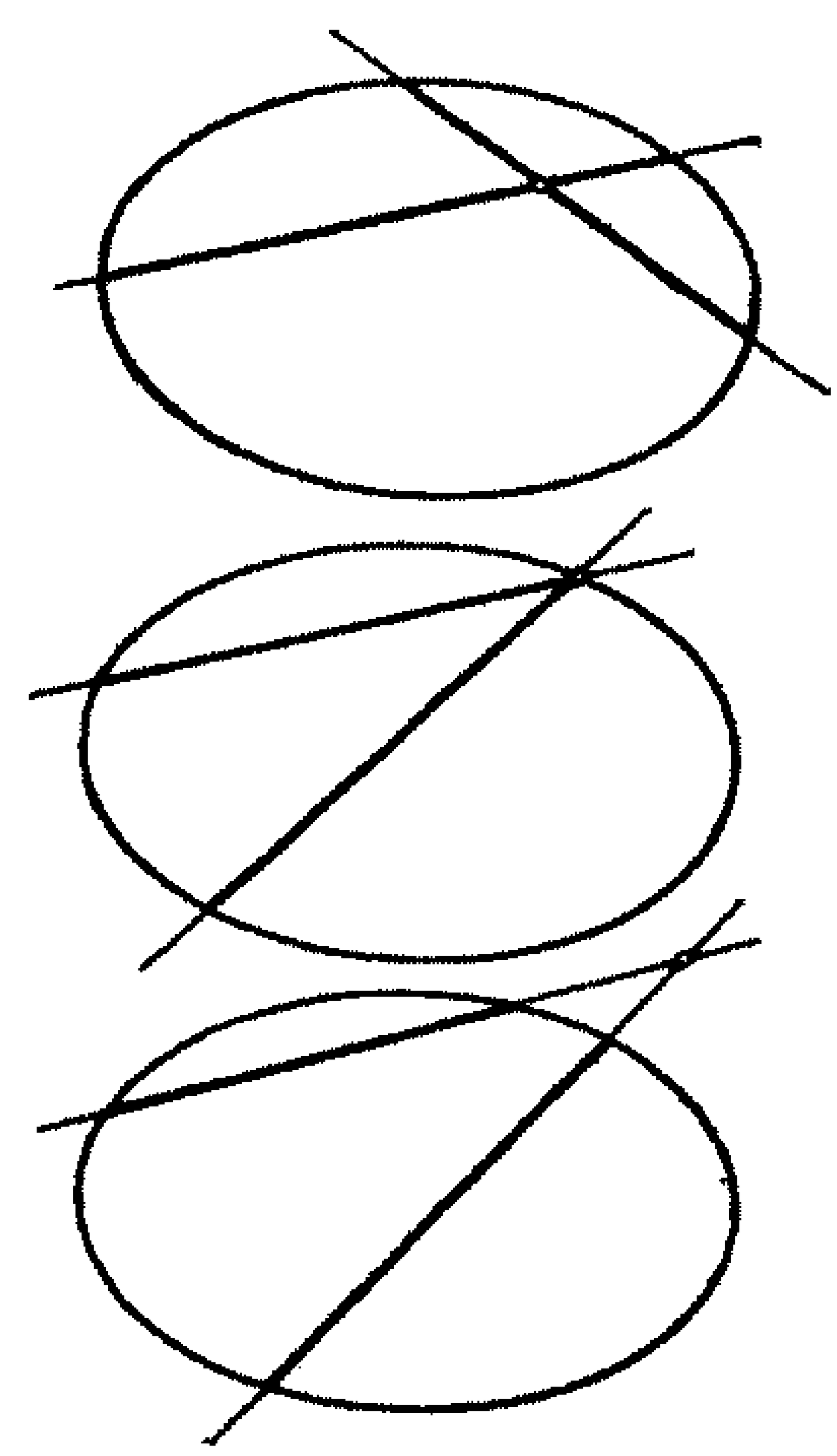
1) Vähemalt üks punkt $Z \in U \cap V$ on sisepunkt. U ja V poolused X ja Y asetsevad siis punkti Z polaaril W, mis on väline Q_h suhtes (näiteks $P_2(Q_h)$ puhul kuuluvad X ja Y punktiga $Z =$ $= U \cap V$ polaarselt konjugeeritud sirgele $u' \in W$). Seega nurga $\varphi(U, V)$ määrab valem (131.14); soovi korral võib vaadelda ka nurgapaari.

2) Lõige $U \cap V$ puutub absoluuti mingis punktis Z (näiteks $P_2(Q_h)$ puhul $Z = U \cap V \in Q_h$). U ja V poolused X ja Y on sel juhul mõlemad polaarselt konjugeeritud punktiga Z ja $\varrho(X, Y)$ on määramata. Sel korral defineeritakse täiendavalt $\varrho(X, Y) = \lim\limits_{\substack{Z_1 \to Z \\ Z_2 \to Z}} \frac{1}{2} |\ln(Z_1Z_2, XY)| = \frac{1}{2} |\ln(ZZ, XY)| = 0$; niisiis $\varrho(U, V) = 0$. Selliseid lineaare U ja V nimetatakse omavahel p a r a l l e e l s e t e k s. Niisiis määrab absoluudi iga punkt paralleelsete sirgete sidumi ruumis $\tilde{P}_n(Q_h)$.

3) Lõige $U \cap V$ kuulub tervenisti välispiirkonda Q_h suhtes, s. t. U ja V ruumis $\tilde{P}_n(Q_h)$ ei lõiku ega ole omavahel paralleelsed. Selliseid lineaare nimetatakse h a j u v a t e k s hüperboolses ruumis. Nende poolused X ja Y on välispunktid ja $\varrho(X, Y) = \varrho(X', Y')$, kus $X' = XY \cap U$ ja $Y' = XY \cap V$. Nurga $\varphi(U, V)$ määrab siin valem

$$\operatorname{ch} \varphi(U, V) = \frac{|F_{XY}|}{\sqrt{F_{XX}F_{YY}}}. \tag{131.15}$$

Joonisel 230 on illustreeritud sirgete asendeid tasandil $\tilde{P}_2(Q_h)$. Ovaalkvadrik on siin kujutatud ellipsina.



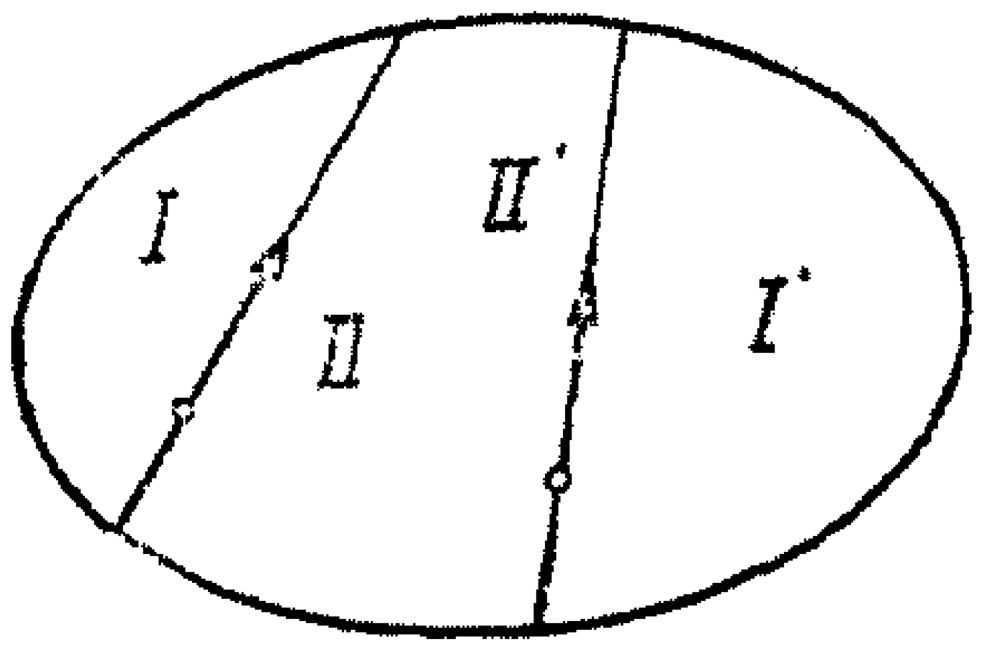
Joon. 230.

Ka hüperboolses ruumi $\tilde{P}_n(Q_h)$, samuti nagu elliptilises ruumis $P_n(Q_e)$, nimetatakse polaarselt konjugeeritud lineaare ortogonaalseteks.

Lineaaride vahel, mis on välised ruumi $P_n(Q_h)$ absoluudi suhtes, saab samuti defineerida nurga, kasutades valemit (131.15). Nurka ei ole võimalik defineerida lineaaride jaoks, millest üks on sisemine ja teine väline või millest vähemalt üks puudutab absoluuti.

Lõigu- ja nurgameetrika ruumis $\tilde{P}_n(Q_h)$ ei ole duaalsed.

Leidub sügav analoogia ühelt poolt rühmade $K(Q_e)$ ja $K(Q_h)$ ning teiselt poolt eukleidiliste teisenduste rühma vahel. Piirdume siin analoogiat väljendava teoreemi sõnastamisega tasandite puhul ja selle tähenduse selgitamisega joonise abil. J o o n e l e m e n d i k s nimetatakse punkti ja seda läbivat suunaga varustatud (s. o. punktihulgana järjestatud) sirget. Siis saab meid huvitava teoreemi sõnastada järgmiselt[170]: *elliptilise tasandi* $P_2(Q_e)$ *ja hüperboolse tasandi* $\tilde{P}_2(Q_h)$ *iga kahe joonelemendi korral leidub vastavalt rühmas* $K(Q_e)$ *ja* $K(Q_h)$ *kummaski parajasti kaks teisendust, mis kujutavad ühe joonelemendi teisele.*



Joon. 231.

Vaatleme ovaalkvadrikut ellipsina (joon. 231). Kumbki joonelement (A, U) ja (A', U') jaotab kvadriku sisepiirkonna — tasandi $\tilde{P}_2(Q_h)$ — kaheks pooltasandiks, vastavalt I, II ja I', II'. Teoreemis mainitud teisendusi kirjeldavad kujutused I → I', II → II' ja I → II', II → I'. Erijuhul, kui joonelemendid (ja nendega määratud pooltasandid) ühtivad, on üks teisendustest samasusteisendus, teine aga vahetab pooltasandid.

Kui eukleidilises geomeetrias üldistada liikumise mõistet sel teel, et liikumine art. 55 mõttes nimetada tasandi e s i m e s t l i i k i ehk p ä r i s l i i k u m i s e k s, tasandi teisendus aga, mis on sooritatav pärisliikumise ja peegelduse teel sirge suhtes, nimetada tasandi t e i s t l i i k i l i i k u m i s e k s, siis sõnastatud teoreem kehtib ka E_2 selliste üldistatud liikumiste rühma suhtes. Seda analoogiat silmas pidades nimetatakse ka rühmade $K(Q_e)$ ja $K(Q_h)$ elemente liikumisteks, nimelt räägitakse vastavalt e l l i p t i l i s t e s t ja h ü p e r b o o l s e t e s t l i i k u m i s t e s t.

Elliptiline ja hüperboolne geomeetria on ajalooliselt esimesed meetrikat sisaldavad geomeetrilised süsteemid, mis erinevad eukleidilisest.[171] Selle asjaolu rõhutamiseks öeldakse nende puhul, et tegemist on m i t t e e u k l e i d i l i s t e g e o m e e t r i a t e g a. Teiste, hiljem moodustatud, seejuures samuti meetrilisi mõisteid sisaldavate geomeetriate puhul seda nimetust ei kasutata.

Hüperboolse geomeetria avastasid möödunud sajandi esimesel veerandil üksteisest sõltumatult mitu nimekat matemaatikut. Prioriteet kuulub siin N. I. Lobatševskile, kes 1829. a. avaldas esimesena oma vastavasisulised uurimused trükis ja kelle hilisemad tööd sisaldavad enamikku tähtsamaid tulemusi, mis on saadud selle esimese mitteeukleidilise geomeetria arendamisel.[172] Seepärast nimetatakse hüperboolset geomeetriat ka L o b a t š e v s k i g e o m e e t r i a k s.

---

[170] Tõestus vt. Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, Москва, 1961, § 168. Analoogilise teoreemi n-mõõtmelise ruumi $P_n(Q_h)$ jaoks võib leida akad. Jüri N u u d i (1892—1952) monograafiast: Ю. Ю. Нут, Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении, Москва, 1961 (lk. 40), milles antakse ruumi $P_n(Q_h)$ geomeetria ulatuslik süstemaatiline käsitlus.

[171] Õigupoolest tuleb eristada E u k l e i d e s e süsteemi eukleidilisest geomeetriast, sest E u k l e i d e s käsitles nii kujundite kongruentsust kui ka sarnasust, mistõttu tema geomeetria on olulisel määral sarnasusgeomeetria.

[172] Sõltumatult jõudsid hüperboolse geomeetriani ka ungarlane Janos B o l y a i (1802—1860) ja 19. saj. esimese poole silmapaistvaim matemaatik sakslane Carl Friedrich G a u s s (1777—1855).

Elliptilise geomeetria rajas B. Riemann[173], mistõttu sageli räägitakse ka emanni elliptilisest geomeetriast. Viimane on kitsas erijuht disest Riemanni geomeetriast, mis teiste analoogiliste erijuhlena hõlmab ka eukleidilise ja hüperboolse geomeetria. Riemanni (üldine) omeetria, mille käsitlemine ei mahu käesoleva raamatu raamidesse, on Ein-ini üldrelatiivsusteooria matemaatiline alus.

Kleini printsiip, mille abil siin on moodustatud elliptilise ja iperboolse ruumi projektiivsed mudelid, võimaldab ehitada proktiivse geomeetria baasil veel teisigi geomeetrilisi süsteeme, mis saldavad meetrika mõisteid. Osutub, et igas Kleini ruumis $_n(Q)$, mille absoluudi astak $r(Q)>1$, saab defineerida rühma $(Q)\subset$K meetrilise invariandi kas kogu ruumis $P_n(Q)$ või ihemalt selle teatud alamhulgas. Rühm $K(Q)$ on meetrilise variandita ainult juhul, kui $r(Q)=1$; nagu selgus art-s 130, iab sel juhul üles ehitada afiinse geomeetria hulgas $\overline{P}_n(Q)$. Samasugune on olukord Kleini ruumis $P_n(\tilde{Q})$, mille absoluuiks on mingi teist klassi lineaarisidum $\tilde{Q}$.

Ruumi P_n kvadriku või teist klassi sidumi abil moodustatud leini ruume, mille absoluudi astak on suurem kui 1, nimetatakse rojektiivse meetrikaga ruumideks, ka Cayley-leini ruumideks.[174]

132. Eukleidiline ja pseudoeukleidiline geomeetria. Meie käsitis raamatu esimestes peatükkides algas eukleidilise geomeetria ärkjärgulise ülesehitamisega sobivalt moodustatud aksiomaatika bil. Pöördume nüüd tagasi selle geomeetria juurde, sedapuhku iba kõrgemalt vaatekohalt, nende geomeetriliste vahekordade audu, mis selgusid käesolevas peatükis.

Olgu $P_n(\tilde{Q})$ Kleini ruum, milles on määratud geomeetria kas maginaarse või reaalse teist klassi lineaarisidumi $\tilde{Q}$ statsionaaruserühmaga $K(\tilde{Q})\subset$K; sidumi $\tilde{Q}$ astak olgu n. Niisiis võtame siin raatluse alla nii $P_2(\tilde{Q})$ kui ka $P_3(\tilde{Q})$ puhul kaks juhtu: sidum $\tilde{Q}$ vastab duaalselt kvadrikule kas klassist ***B*1*a*** või klassist ***B*1*b***.

Olgu sidumi $\tilde{Q}$ võrrand $a^{ij}u_iu_j=0$ $(i, j=0, 1, \ldots, n)$. Et naatriksi $A=\|a^{ij}\|$ astak on n, siis süsteemil

$$a^{0j}u_j=0,\quad a^{1j}u_j=0,\quad \ldots,\quad a^{nj}u_j=0 \qquad (132.1)$$

---

[173] Riemann, Bernhard (1826—1866), saksa matemaatik, kelle ideed osutusid teedrajavaiks matemaatika mitmes valdkonnas.

[174] Cayley, Arthur (1821—1895), inglise matemaatik, algebralise geomeetria rajaja.

on parajasti üks sõltumatu lahend, s. t. sidumis $\tilde{Q}$ sisaldub üks iseärane lineaar $\tilde{U}$ (vrd. 124.6). Viimane on reaalne ka siis, kui $\tilde{Q}$ on imaginaarne. Niisiis, statsionaarsuserühmal $\mathrm{K}(\tilde{Q}) \subset \mathrm{K}$ leidub reaalne püsilineaar $\tilde{U}$. Art. 130 lubab väita, et *iga teisendus rühmas* $\mathrm{K}(\tilde{Q})$ *on hulga* $\overline{\mathrm{P}}_n(\tilde{U}) \subset \mathrm{P}_n$ *afiinne teisendus ja hulgal* $\overline{\mathrm{P}}_n(\tilde{U})$ *on ruumi* A_n *struktuur.*

Oma toime poolest ruumile $\overline{\mathrm{P}}_n(\tilde{U})$ ei ole rühm $\mathrm{K}(\tilde{Q})$ kogu afiinne rühm, vaid selle teatud alamrühm, sest $\tilde{Q}$ statsionaarsus seab ruumi P_n struktuurile veel ühe kitsenduse peale U invariantsuse: rühm $\mathrm{K}(\tilde{Q})$ peab säilitama $\tilde{U}$ lõigete hulga sidumi $\tilde{Q}$ ülejäänud lineaaridega — sidumi tuuma.

Olgu ruumis $\mathrm{P}_n(\tilde{Q})$ võetud mingi afiinne reeper, näiteks nii, et $A_\alpha \in \tilde{U}$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$. Siis $\tilde{U}$ iga esindaja korral $u_\alpha = 0$, mistõttu süsteemist (132.1) järeldub, et $a^{i0} = 0$ $(i = 0, 1 \ldots \ldots, n)$, seega sidumit $\tilde{Q}$ esitab võrrand

$$a^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 0, \tag{132.2}$$

kus maatriks $\bar{\mathrm{A}} = \|a^{\alpha\beta}\|$ on regulaarne.

Tasandil $\mathrm{P}_2(\tilde{Q})$ (132.2) on vaadeldav ruutvõrrandina $u_1 : u_2$ $(u_2 \neq 0)$ suhtes. Et $\operatorname{Det} \bar{\mathrm{A}} = a^{11}a^{22} - (a^{12})^2 \neq 0$, siis on tal kaks lahendit $\lambda_\alpha = u_1^{(\alpha)} : u_2^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2)$. Seega kuuluvad teist klassi kimpu $\tilde{Q}$ kõik sirged $U = [\mu : \lambda_\alpha u_2^{(\alpha)} : u_2^{(\alpha)}]$, kus μ on vabalt muutuv parameeter. Kimpu $\tilde{Q}$ kuuluva sirge saame ka siis, kui võtame $u_2^{(\alpha)} = 0$ — sel juhul $U = \tilde{U} = [\mu : 0 : 0]$. Nii on ammendatud kogu kimp $\tilde{Q}$, sest tingimusest $\operatorname{Det} \bar{\mathrm{A}} \neq 0$ järeldub, et kui võrrandis (132.2) $u_2 = 0$, siis ka $u_1 = 0$. Niisiis koosneb absoluut $\tilde{Q}$ siin kahest esimest klassi kimbust, millel on ühine püsisirge $\tilde{U}$. Viimasel on kaks püsipunkti — mainitud kimpude keskpunktid. Kui $\operatorname{Det} \bar{\mathrm{A}} > 0$, siis need kimbud ja ka nende keskpunktid on imaginaarsed, kui aga $\operatorname{Det} \bar{\mathrm{A}} < 0$, siis reaalsed.

Ruumi $\mathrm{P}_3(\tilde{Q})$ puhul (132.2) määrab tasandil $\tilde{U}$ regulaarse teist klassi sirgekimbu. Teoreemi 125.2 põhjal selle kimbu sirgete puutepunktide hulk on regulaarne kvadrik q. Viimane on reaalne või imaginaarne vastavalt sellele, kas $\tilde{Q}$ on reaalne või imaginaarne. Niisiis tegutseb rühm $\mathrm{K}(\tilde{Q})$ tasandil $\tilde{U}$ kvadriku q statsionaarsuserühmana $K(q)$ tasandi $\tilde{U}$ kollineatsioonide rühmas $K(\tilde{U})$. Kui $\tilde{Q}$ on imaginaarne (sel juhul kirjutame $\tilde{Q} = \tilde{Q}(i)$), siis q on nullkvadrik q_e ja $K(q_e)$ on $\tilde{U}$ elliptiliste liikumiste rühm; kui aga $\tilde{Q}$ on reaalne (kirjutame $\tilde{Q} = \tilde{Q}(r)$), siis q on ovaalkvadrik q_h ja $K(q_h)$ on $\tilde{U}$ hüperboolsete liikumiste rühm. Niisiis, *$\tilde{U}$ on rühma $K(\tilde{Q}(i))$ suhtes elliptiline tasand, rühma $K(\tilde{Q}(r))$ suhtes aga Kleini tasand $P_2(q_h)$, mille alamhulgaks on hüperboolne tasand — kvadriku q sisepiirkond $\tilde{P}_2(q_h)$.*

Afiinses ruumis $\bar{P}_n(\tilde{U})$ saab kasutusele võtta rühma $K(\tilde{Q})$ suhtes invariantse nurgameetrika. Aluseks on siin mitteeukleidiline meetrika lineaaril' $\tilde{U}$.

Pöörame nüüd tähelepanu ruumile $P_3(\tilde{Q})$; tasandi $P_2(\tilde{Q})$ puhul võib tugineda analoogiale. Näiteks ka $P_2(\tilde{Q})$ iseärasel sirgel $\tilde{U}$ on kvadrik — eespool kirjeldatud püsipunktide paar (vt. ka art. 123). See paar määrab sirgel $\tilde{U}$ nn. a b s o l u u t s e i n v o l u t s i o o n i, mis on elliptiline imaginaarse ja hüperboolne reaalse paari puhul (art. 121). Kvadrik $q \subset \tilde{U} \subset P_3(\tilde{Q})$ tekitab absoluutse involutsiooni $\tilde{U}$ igal sirgel, mis ei ole q puutuja.

$P_3(\tilde{Q})$ igale kahele tasandile U ja V, mis erinevad tasandist $\tilde{U}$, vastab sirgete $\tilde{u} = U \cap \tilde{U}$, $\tilde{v} = V \cap \tilde{U}$ paar tasandil $\tilde{U}$. Nurgaks tasandite U ja V vahel nimetatakse nurka sirgete $\tilde{u}$ ja $\tilde{v}$ vahel (art. 131). Seejuures $\tilde{Q}(i)$ puhul on paar (U, V) valitav täiesti vabalt; kui aga $\tilde{Q} = \tilde{Q}(r)$, siis vaadeldakse ainult paare (U, V), mille korral $\tilde{u}$ ja $\tilde{v}$ on mõlemad kas sisemised või välised q suhtes.

Nurgaks sirgete u ja v vahel, mis ei kuulu absoluudile $\tilde{Q}$, nimetatakse punktide $\tilde{X} = u \cap \tilde{U}$ ja $\tilde{Y} = v \cap \tilde{U}$ vahelist kaugust. $\tilde{Q}(i)$ puhul on nurk $\varphi(u, v)$ määratud iga paari (u, v) jaoks, mis ei sisalda $\tilde{U}$ sirgeid, $\tilde{Q}(r)$ korral tuleb aga lisaks nõuda, et $\tilde{X}$ ja $\tilde{Y}$ oleksid mõlemad kas sise- või välispunktid q suhtes.

Kaht tasandit U ja V nimetatakse o r t o g o n a a l s e t e k s, kui sirged $\tilde{u} = U \cap \tilde{U}$ ja $\tilde{v} = V \cap \tilde{U}$ on polaarselt konjugeeritud. Kaht sirget u ja v nimetatakse ortogonaalseteks, kui punktid $\tilde{X} = u \cap \tilde{U}$ ja $\tilde{Y} = v \cap \tilde{U}$ on polaarselt konjugeeritud, s. t. on absoluutse involutsiooni kaaspunktid.

Kahe tasandi vahelise nurga joonnurgaks nimetatakse nurka nendele tasanditele kuuluvate selliste sirgete vahel, mis on ortogonaalsed tasandite lõikesirgega. Olgu nurga $\psi(U, V)$ joonnurk $\varphi(u, v)$, $\tilde{u} = U \cap \tilde{U}$, $\tilde{v} = V \cap \tilde{U}$, $\tilde{X} = u \cap \tilde{U}$, $\tilde{Y} = v \cap \tilde{U}$ ning $\tilde{X}'$ ja $\tilde{Y}'$ vastavalt sirgete $\tilde{u}$ ja $\tilde{v}$ poolused q suhtes. Kerge on kontrollida, et $\tilde{X} \in \tilde{X}'\tilde{Y}'$ ja $\tilde{Y} \in \tilde{X}'\tilde{Y}'$. Kui $u \subset U$ ja $v \subset V$, siis punktid paarides $(\tilde{X}, \tilde{X}')$ ja $(\tilde{Y}, \tilde{Y}')$ on polaarselt konjugeeritud. Siit järeldub (art. 131), et $\varrho(\tilde{X}', \tilde{Y}') = \varrho(\tilde{X}, \tilde{Y})$, mistõttu $\psi(U, V) = \varphi(u, v)$: kahe tasandi vahelist nurka mõõdab seega tema joonnurk.

Ruumiga $P_3(\hat{U})$ on seotud vektorruum V_3 (art. 130). Igale sirgele $u \not\subset \tilde{U}$ vastab punkti $\tilde{X} = u \cap \tilde{U}$ esindajate hulga näol ühemõõtmeline alamruum. Iga vektorit viimasest nimetatakse sirge u sihivektoriks. Igale tasandile $U \neq \tilde{U}$ vastab sirge $\tilde{u} = U \cap \tilde{U}$ punktide esindajate hulga näol kahemõõtmeline alamruum ja sirge u pooluse esindajate hulga näol ühemõõtmeline alamruum. Öeldakse, et iga kaks lineaarselt sõltumatut vektorit esimesest ruumist määravad U rihi, iga vektor teisest aga on U normaalvektor.

Nurgaks kahe vektori vahel nimetatakse nurka sirgete vahel, mille sihid on määratud nende vektoritega (kui nende sirgete vaheline nurk on määratav). See definitsioon ei ole seotud ruumi $P_n(\tilde{Q})$ dimensiooniga.

Et nurk kahe vektori vahel on rühma $K(\tilde{Q})$ invariant, siis jaotub ruumi $P_n(\tilde{Q})$ afiinsete reeperite hulk ekvivalentsusklassidesse. Ühte klassi kuuluvad parajasti sellised reeperid, mille vastavate vektorite vahelised nurgad on võrdsed. Üleminek ühest klassist teise rühma $K(\tilde{Q})$ toimel ei ole võimalik. Kollineatsioonide põhiteoreemi 117.3 põhjal on ühest klassist pärinevate reeperipaaridega ammendatud kogu rühm $K(\tilde{Q})$. Klassid on selles mõttes samaväärsed. Privilegeeritud on siiski klass, mis pakub suurimaid lihtsustusi ja mille määrab järgmine definitsioon.

***Def.* 132.1.** Ruumi $\overline{P}_n(\tilde{U})$ afiinset reeperit $\{A_0, A_1, \ldots, A_n, E\}$ nimetatakse ortogonaalseks, kui lineaari $\tilde{U} \subset \tilde{Q}$ projektiivne reeper $\{A_1, \ldots, A_n, E\}$, kus $E = A_0E \cap \tilde{U}$, on autopolaarne $\tilde{U}$ absoluudi q suhtes. $P_2(\tilde{Q})$ puhul tähendab viimane nõue seda, et baaspunktid A_1 ja A_2 on absoluutse involutsiooni kaaspunktide paar.

Rühma $K(\tilde{Q})$ uurimisel võib piirduda ainult ortogonaalsete reeperite klassiga.

Olgu ruumis $P_n(\tilde{U})$ võetud mingi afiinne reeper, mille puhul $A_\alpha \in \tilde{U}$ ($\alpha = 1, \ldots, n$) ja olgu kvadriku $q \subset \tilde{U}$ võrrand sel puhul $b_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$. Nurga ruumi $\overline{P}_n(\tilde{U})$ vektorite $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ vahel määrab üks valemitest

$$\cos\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{F_{XY}}{\sqrt{F_{XX}F_{YY}}}, \qquad \operatorname{ch}\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{F_{XY}}{\sqrt{F_{XX}F_{YY}}}, \tag{132.3}$$

kus $F_{XX} = b_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$, $F_{YY} = b_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta$ ja $F_{XY} = b_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta$. Kui $\tilde{Q} = \tilde{Q}(i)$, siis tuleb iga paari $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \subset V_n$ korral kasutada esimest valemit, kui aga $\tilde{Q} = \tilde{Q}(r)$, siis osutuvad vajalikuks mõlemad.

Uurime eraldi ruumi $P_n(\tilde{Q}(i))$. Olgu temas võetud selline afiinne reeper, mis on ühtlasi ortogonaalne; siis def. 132.1 kohaselt on kvadriku $q \subset \tilde{U}$ võrrandiks $(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 0$ ehk üheveerulise maatriksi x abil $\mathrm{x}^T\mathrm{x} = 0$. Vektorite koordinaadiveergude abil saab kirjutada ka siin vajaliku esimese valemi (132.3):

$$\cos\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\mathrm{x}^T\mathrm{y}}{\sqrt{\mathrm{x}^T\mathrm{x}}\sqrt{\mathrm{y}^T\mathrm{y}}}.$$

Võrdlus valemiga (129.3) näitab, et on loomulik lugeda arv $\mathrm{x}^T\mathrm{y}$ vektorite $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ *skalaarkorrutiseks* ning arv $\sqrt{\mathrm{x}^T\mathrm{x}}$ vektori $\boldsymbol{x}$ *pikkuseks*. Osutub aga, et siin ei ole tegemist rühma $K(\tilde{Q})$ invariantidega ja see rühm lõigumeetrikat ei määra.

Selle näitamiseks märgime, et iga teisendus rühmast $K(\tilde{Q})$ säilitab ruumi $\overline{P}_n(\tilde{U})$ afiinse struktuuri, seega indutseerib ruumi V_n teatud lineaarteisenduse. Seejuures rühm $K(\tilde{Q})$ ei ammenda kaugeltki V_n lineaarteisenduste hulka, sest teisendusmaatriksiks ei saa siin valida iga n-järku regulaarmaatriksit. Kui C on ruumi $\overline{P}_n(\tilde{U})$ mingi afiinse teisenduse maatriks, siis ruumi V_n vastava lineaarteisenduse toimel kvadriku $q \subset \tilde{U}$ võrrandi $\mathrm{x}^T\mathrm{x} = 0$ vasak pool omandab uue kuju $\mathrm{x}'^T\mathrm{x}' = \mathrm{x}^T\mathrm{C}^T\mathrm{C}\mathrm{x}$. Et aga reeperi ortogonaalsus säilib, siis kvadriku uus võrrand saab erineda esialgsest vaid kordajate ühise teguri poolest: $\mathrm{x}'^T\mathrm{x}' = \lambda\mathrm{x}^T\mathrm{x}$, s. t. $\mathrm{x}^T\mathrm{C}^T\mathrm{C}\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}^T\mathrm{x}$. Siit järeldub, et kollineatsioonid rühmast $K(\tilde{Q})$ indutseerivad selliseid ja ainult selliseid ruumi $\overline{P}_n(\tilde{U})$ afiinseid teisendusi, mille maatriks C rahuldab tingimust $\mathrm{C}^T\mathrm{C} = \lambda\mathrm{E}$.

Nüüd on kerge kirjeldada afiinsete teisenduste rühma alamrühma, mille ruumis $\overline{\mathrm{P}}_n(\tilde{U})$ indutseerib ruumi $\mathrm{P}_n(\tilde{Q}(i))$ absoluudi statsionaarsuserühm $\mathrm{K}(\tilde{Q})(i))$. Iga lubatava teisendusemaatriksi C korral $|\mathrm{C}|^2 = \lambda^n$, s. t. $\lambda = \sqrt[n]{|\mathrm{C}|^2}$, järelikult iga lõigu $[XY] \subset \overline{\mathrm{P}}_n(\tilde{U})$ pikkus — vektori $z = \overrightarrow{XY}$ pikkus $\varrho(X, Y) = \sqrt{\mathrm{z}^{\mathrm{T}}\mathrm{z}}$ — korrutub afiinse teisenduse $\mathrm{x}' = \mathrm{Cx} + \mathrm{c}$ korral ühe ja sellesama arvuga:

$$\varrho(X', Y') = \sqrt[n]{|\mathrm{C}|^2}\,\varrho(X, Y). \tag{132.4}$$

See aga tähendab, et rühm $\mathrm{K}(\tilde{Q}(i))$ toimib afiinses ruumis $\overline{\mathrm{P}}_n(\tilde{U})$ sarnasusteisenduste rühmana (vt. art. 63).

Nüüd on omakorda lihtne püstitada selline lisatingimus, mis eraldab rühmast $\mathrm{K}(Q(i))$ ruumis $\overline{\mathrm{P}}_n(\tilde{U})$ eukleidiliste teisenduste rühmana toimiva alamrühma. Tõepoolest, art. 129 tulemuste ja seose (132.4) põhjal on selleks tarvilik ja piisav nõuda, et lubatava teisenduse maatriks C oleks determinandiga $|\mathrm{C}| = \pm 1$, ortogonaalne: $\mathrm{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{C} = \mathrm{E}$. Seda kitsendust võib iseloomustada ka teisiti: ta nõuab, et ruumi $\overline{\mathrm{P}}_n(\tilde{U})$ lubatav teisendus oleks ekviafiinne (vt. art. 63). Seega eraldub eukleidiliste teisenduste rühm sarnasusteisenduste rühma ja ekviafiinsete teisenduste rühma ühisosana. Pärast sellist kitsendust osutuvad skalaarkorrutis ja vektori pikkus tõepoolest invariantideks, saab välja eraldada ortonormeeritud reeperite klassi jne.

Teeme kokkuvõtte: *kui Kleini ruumi* $\mathrm{P}_n(\tilde{Q}(i))$ *absoluudi statsionaarsuserühma kitsendada, piirdudes temas teisendustega, mis on ühtlasi ekviafiinsed, siis osutub selle ruumi kõigi niisuguste punktide hulk, mis ei kuulu sidumi* $\tilde{Q}(i)$ *iseärasele lineaarile, eukleidiliseks ruumiks ja viimases indutseeritud teisenduste rühm eukleidiliste teisenduste rühmaks.*

Kerge on mõista, et viimase rühma saab välja eraldada ka lubatavate reeperite hulga sobiva kitsendamise teel. Me kasutame sellist meetodit allpool ruumi $\mathrm{P}_n(\tilde{Q}(r))$ puhul.

Eukleidilise geomeetria ülesehitamine mudelis $\overline{\mathrm{P}}_n(\tilde{U})$ ei paku nüüd enam mingit põhimõttelist raskust. Huvitav on seda teha ruumis $\mathrm{P}_n(\tilde{Q}(i))$ kehtivaid vahekordi kasutades — projektiivselt vaatekohalt. Toome siin ainult ühe näite.

H ü p e r s f ä ä r i k s ruumis $\mathrm{P}_n(\tilde{Q}(i))$ nimetatakse selle ruumi iga regulaarset kvadrikut Q, mille lõikeks iseärase lineaariga

$\tilde{U} \subset \tilde{Q}(i)$ on selle lineaari absoluut; kui $n = 3$, siis nimetatakse sellist kvadrikut **sfääriks**, ja kui $n = 2$, siis **ringjooneks**.

Olgu ruumis $P_n(\tilde{Q}(i))$ valitud ortonormeeritud reeper nii, et $\tilde{U}$ võrrand on $x^0 = 0$. Esitagu hüpersfääri Q selle reeperi suhtes võrrand $a_{ij}x^i x^j = 0$. Hüpersfääri definitsiooni kohaselt määrab tema lõike lineaariga $\tilde{U}$ võrrand $(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 0$, seega $a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\lambda$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$. Kvadriku Q kõik lõikepunktid lineaariga $\tilde{U}$ on imaginaarsed, mistõttu iga reaalse punkti $X \in Q$ korral $x^0 = 1$ (vt. art. 130). Kirjutame hüpersfääri võrrandi detailsemalt, arvestades neid märkusi:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (x^\alpha)^2 + 2 \sum_{\alpha=1}^{n} a_{0\alpha} x^\alpha + a_{00} = 0$$

ehk

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (x^\alpha - a^\alpha)^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} (a^\alpha)^2 - a_{00},$$

kus $a^\alpha = -a_{0\alpha}$. Vektorite $\boldsymbol{a} = (a^1, \ldots, a^n)$ ja $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ abil saab selle võrrandi kirjutada kujul $z^T z = r^2$, kus $r^2 = \sum_{n=1}^{n} (a^\alpha)^2 - a_{00}$. Siit on selge, et $P_3(\tilde{Q}(i))$ puhul on vaadeldav kvadrik Q tõepoolest sfäär, sest tema iga punkti X korral on AX konstantse pikkusega lõik: $\varrho(A, X) = \sqrt{z^T z} = r$. Seejuures võib konstant r olla positiivne, negatiivne või null. Esimesel juhul on sfäär Q reaalne, teisel juhul imaginaarne $(r = qi)$ ja kolmandal kidub punktiks $X = A$.

Selline lähenemine ringjoone ja sfääri mõistele võib tunduda formaalsena Tuleb aga märkida, et vastava teooria arendamisel projektiivsest vaatekohast on rida eeliseid. Paljud üksikasjad, mille uurimine eukleidilise geomeetria vahenditega on küllaltki töörohke, osutuvad siin lihtsateks, sageli vahetuteks järeldusteks üldistest projektiivsetest vahekordadest. Näiteks tõsiasjast, et iga viis üldasendis olevat punkti tasandil P_2 määravad regulaarse kvadriku, tuleneb vahetult, et iga kolm mitte ühel sirgel asetsevat punkti määravad ringjoone tasandil E_2. Tõepoolest, def. 132.4 põhjal iga ringjoone $Q \subset P_2(\tilde{Q}(i))$ kaks punkti on sirge $\tilde{U}$ püsipunktid, järelikult ringjoone määramiseks on tarvilik ja piisav anda tasandil $\overline{P}_2(\tilde{U})$ ette ainult kolm üldasendis olevat punkti. See mõttekäik on kergesti üldistatav sfääri jaoks ruumis $\overline{P}_3(\tilde{U})$.

Ruumi $P_n(\tilde{Q}(r))$ käsitlemisel võib minna sama teed nagu ruumi $P_n(\tilde{Q}(i))$ puhul, nimelt selgitada rühmaga $K(\tilde{Q}(r))$ vektorruumis V_n määratud lineaarteisenduste maatriksite omadused ja saadud tulemuste põhjal kitsendada rühma $K(\tilde{Q}(r))$ nii, et ruumis $P_n(\tilde{Q}(r))$ saab kasutusele võtta lõigumeetrika. Kasutame siin siiski teistsugust meetodit lõigumeetrika saamiseks: kitsendame lubatavate reeperite hulka sobival viisil.

Ortogonaalse reeperi korral, mille baaspunkt A_1 kuulub iseärase lineaari $\tilde{U}$ absoluudi q sisepiirkonda, esitab seda absoluuti võrrand $-(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2=0$. Siit nähtub, et $F_{XX}=$ $=-(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2$ ja $F_{XY}=-x^1y^1+x^2y^2+\ldots+$ $+x^ny^n$. Nimetame arvu F_{XY} vektorite x ja y skalaarkorrutiseks ja arvu $\sqrt{F_{XX}}$ vektori x pikkuseks. Baasivektorite e_α ja e_β skalaarkorrutist märgime sümboliga $F_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\ \beta=1,\ \ldots,\ n)$. Et A_1 on sisepunkt kvadriku q suhtes, siis $F_{11}<0$, s. t. vektori e_1 pikkus on imaginaarne. Samal ajal A_a $(a=2,\ \ldots,\ n)$ on välispunktid, järelikult $F_{aa}>0$, niisiis ülejäänud baasivektorite pikkused on reaalsed.

***Def.* 132.2.** Ruumi $P_n(\tilde{Q}(r))$ afiinset reeperit $\{A_0, A_1, \ldots, A_n, E\}$, $A_\alpha \in \tilde{U} \subset \tilde{Q}(r)$, nimetatakse pseudoortonormeeritud reeperiks, kui ruumi V_n vastav baas rahuldab tingimusi $F_{11}=-1$, $F_{aa}=1$, $F_{\alpha\beta}=0$ $(a=2,\ \ldots,\ n;\ \alpha,\ \beta=1,\ \ldots,\ n;$ $\alpha\neq\beta)$.

Olgu edaspidi lubatud ainult pseudoortonormeeritud reeperid. Kollineatsioonide põhiteoreemi 117.3 põhjal see kokkulepe kitsendab rühma $K(\tilde{Q}(r))$: säilivad vaid niisugused teisendused, mis kujutavad iga pseudoortonormeeritud reeperi jälle sama tüüpi reeperiks. Et teisendusmaatriksi $C=\|c_\alpha{}^\beta\|$ korral $e'_\gamma=(c_\gamma{}^1,\ \ldots$ $\ldots,\ c_\gamma{}^n)$, siis osutuvad lubatuiks vaid maatriksid, mis rahuldavad järgmisi tingimusi:

$$F'_{\alpha\beta}=-c_\alpha{}^1c_\beta{}^1+c_\alpha{}^2c_\beta{}^2+\ldots+c_\alpha{}^nc_\beta{}^n=\begin{cases}-1, & \text{kui } \alpha=\beta=1,\\ \ \ 1, & \text{kui } \alpha=\beta=2,\ \ldots,\ n,\\ \ \ 0, & \text{kui } \alpha\neq\beta\end{cases}$$

ehk teisiti

$$\begin{aligned}&(c_1{}^1)^2-(c_1{}^2)^2-\ldots-(c_1{}^n)^2=1,\\ -&(c_a{}^1)^2+(c_a{}^2)^2+\ldots+(c_a{}^n)^2=1, \quad (a=2,\ \ldots,\ n),\\ &c_\alpha{}^1c_\beta{}^1-c_\alpha{}^2c_\beta{}^2-\ldots-c_\alpha{}^nc_\beta{}^n=0, \quad (\alpha\neq\beta).\end{aligned} \tag{132.5}$$

Seame maatriksile C vastavusse uue maatriksi $C^{\overset{*}{T}}$, mis on saadud maatriksist C^T selle esimese rea ja esimese veeru elementide märkide muutmise teel:

$$\overset{*}{C^T}=\left\|\begin{matrix} c_1^1 & -c_1^2 & \dots & -c_1^n \\ -c_2^1 & c_2^2 & \dots & c_2^n \\ . & . & . & . \\ -c_n^1 & c_n^2 & \dots & c_n^n \end{matrix}\right\|.$$

Nimetame näidatud operatsiooni — maatriksi transponeerimist koos märkide muutmisega esimeses reas ja esimeses veerus — maatriksi pseudotransponeerimiseks. Niisiis, $\overset{*}{C^T}$ on maatriksi C pseudotransponeeritud maatriks.

Lihtne on kontrollida, et tingimused (132.5) saab nüüd esitada lühidalt nii:

$$\overset{*}{C^T}C=C\overset{*}{C^T}=E. \tag{132.6}$$

Järelikult osutub ruumi $\overline{P}_n(\tilde{U}) \subset P_n(\tilde{Q}(r))$ teisendus $x'=Cx+$ $+c$ lubatavaks parajasti siis, kui $\overset{*}{C^T}=C^{-1}$, s. t. kui teisendusmaatriksi pseudotransponeerimine annab tema pöördmaatriksi.

Maatriksit C, mis rahuldab tingimust (132.6), nimetatakse pseudoortogonaalmaatriksiks ja ruumi V_n lineaarteisendust, mille määrab selline maatriks, pseudoortogonaalteisenduseks.

Olgu ε_1 ja ε_2 mingid pseudoortonormeeritud baasid. Teoreemi 1.17.3 põhjal leidub parajasti üks maatriks C, mille puhul $\varepsilon_2=$ $=\varepsilon_1 C$. Et ε_2 on pseudoortonormeeritud, siis $\overset{*}{C^T}=C^{-1}$ ja $\varepsilon_1=$ $=\varepsilon_2 C$, s. t. igal pseudoortogonaalteisendusel leidub pseudoortogonaalne pöördteisendus. Kolme sellise baasi ε_1, ε_2 ja ε_3 puhul leiduvad pseudoortogonaalmaatriksid C_1 ja C_2, nii et $\varepsilon_2=\varepsilon_1 C_1$ ja $\varepsilon_3=\varepsilon_2 C_2$, seega $\varepsilon_3=\varepsilon_1 C_1 C_2$, kus $C=C_1 C_2$ peab jälle olema pseudoortogonaalmaatriks. Niisiis, iga kahe pseudoortogonaalteisenduse korrutis on jälle pseudoortogonaalteisendus. Siit ilmneb, et pseudoortogonaalteisenduste hulk on alamrühm rühmas $K(\tilde{Q}(r))$.

Def. **132.3.** Olgu Kleini ruumi $P_n(\tilde{Q}(r))$ absoluudi statsionaarsuserühmast väljaeraldatud selliste teisenduste alamrühm, mis indutseerivad ruumi $\overline{P}_n(\tilde{U})$ vektorite hulgas pseudoortogonaalteisendused. Sellele alamrühmale vastavat ruumi $\overline{P}_n(\tilde{U})$ teisenduste rühma nimetatakse Lorentzi[175] rühmaks, viimasele vastavat geomeetriat pseudoeukleidiliseks geomeetriaks ja selle geomeetriaga hulka $\overline{P}_n(\tilde{U})$ — n-mõõtmeliseks pseudoeukleidiliseks ruumiks.

[175] Lorentz, Hendrik Antoon (1853—1928), hollandi füüsik.

Kerge on veenduda, et vektorite skalaarkorrutis, seega ka vektori pikkus, on invariantne Lorentzi rühma suhtes. See asjaolu võimaldab pseudoeukleidilises ruumis lisaks valemite (132.3) abil defineeritud nurgameetrikale määrata ka kahe punkti X ja Y vahelise kauguse kui vektori $\overrightarrow{XY}$ pikkuse. Et vektori pikkus võib siin olla imaginaarne, nagu selgus enne def. 132.2, siis võib ka X ja Y vaheline kaugus olla imaginaarne, sõltuvalt vektori $\overrightarrow{XY}$ sihist. Kahe punkti vaheline kaugus pseudoeukleidilises ruumis pole seetõttu meetrika def. 131.1 mõttes, vaid on selle teatav üldistus.

Sellise olukorra lähemaks kirjeldamiseks vaatleme koonust, mille tipuks on vabalt valitud punkt $X \in \overline{\mathrm{P}}_n(\tilde{U})$ ja moodustajad lõikavad lineaari $\tilde{U}$ selle absoluudi q punktides. Punkti X läbivate sirgete hulk jaguneb kolme ossa. 1) Sirged, mis kuuluvad koonuse välispiirkonda, lõikavad lineaari $\tilde{U}$ absoluudi q suhtes välispunktides; et iga sellise sirge sihivektori z korral $F_{zz} > 0$, siis on iga sirgele kuuluva lõigu pikkus reaalarvuline. 2) Sirged, mis kuuluvad koonuse sisepiirkonda, lõikavad lineaari $\tilde{U}$ absoluudi q suhtes sisepunktides; vastava vektori z korral $F_{zz} < 0$, mistõttu kaugus sellise sirge iga kahe punkti vahel on imaginaararvuline. 3) Koonuse iga moodustaja sihivektor z rahuldab tingimust $F_{zz} = 0$, järelikult moodustaja iga kahe punkti vaheline kaugus on null.

Kõnesoleva koonuse moodustajaid, nende sihte ja nende sihivektoreid nimetatakse **isotroopseteks** sirgeteks, sihtideks ja vektoriteks, koonust ennast aga **isotroopseks koonuseks.**

Iga punktiga $X \in \overline{\mathrm{P}}_n(\tilde{U}) \subset \mathrm{P}_n(\tilde{Q}(r))$ on seotud isotroopne koonus, mis eraldab välja kõik seda punkti läbivad isotroopsed sirged. Ruumis $\overline{\mathrm{P}}_n(\tilde{U})$ kehtiva afiinse geomeetria vaatekohalt on kõik isotroopsed sirged, mis lõikuvad lineaari $\tilde{U}$ absoluudi q punktis, omavahel paralleelsed. Seepärast võib öelda, et ruumis $\overline{\mathrm{P}}_n(\tilde{U})$ on ainult üks isotroopsete sihtide koonus.

Nagu eespool selgus, saab nurga määrata ainult iga kahe sellise sirge vahel, mis asetsevad mõlemad kas isotroopse koonuse sise- või välispiirkonnas. Sirgete lähenemisel isotroopsetele sirgetele nurk nende vahel kasvab tõkestamatult.

Nimetust «pseudoeukleidiline» õigustavad järgmised kaalutlused. Eukleidilise ja pseudoeukleidilise ruumi mudelid on saadud vastavalt lineaari $\tilde{U}$ null- ja ovaalkvadriku statsionaarsuserühmade abil projektiivse ruumi P_n kollineatsioonide rühmas K.

Ruumi P_n, mille abil need ruumid on moodustatud, nimetatakse kompleksseks ruumiks $P_n(i)$. Sooritame selle ruumi imaginaarse kollineatsiooni

$$x^0 = 'x^0, \quad x^1 = i'x^1, \quad x^2 = 'x^2, \ldots, x^n = 'x^n. \qquad (132.7)$$

See kollineatsioon säilitab, nagu kerge kontrollida, reeperi ortogonaalsuse, kuid muudab ortonormeeritud reeperi pseudoortonormeerituks ja vastupidi. Kui lineaar $\tilde{U}$ on elliptiline, siis tema absoluut — nullkvadrik — teiseneb ovaalkvadrikuks, hüperboolse lineaari absoluut — ovaalkvadrik — aga teiseneb nullkvadrikuks. Järelikult elliptiline lineaar $\tilde{U}$ muutub hüperboolseks ja vastupidi. See aga tähendab, et kui ruumi $P_n(i)$ reaalne piirkond on Kleini ruum $P_n(\tilde{Q}(i))$, siis teiseneb see piirkond Kleini ruumiks $P_n(\tilde{Q}(r))$, samuti kehtib vastupidine. Siit nähtub tihe seos eukleidilise ja pseudoeukleidilise geomeetria vahel: üks on saadav teisest ruumi $P_n(i)$ kollineatsiooni (132.7) toimel.

Füüsika jaoks pakub erilist huvi neljamõõtmeline pseudoeukleidiline ruum, mida sageli nimetatakse ka Minkowski ruumiks.[176] Nimelt osutub see ruum Einsteini erirelatiivsusteoorias käsitletava aegruumi matemaatiliseks mudeliks.

Lõpetuseks lisame, et käesolevas peatükis selgitatud vahekorrad näitavad, kuivõrd keskne osa on projektiivsel geomeetrial mitmesuguste geomeetriliste süsteemide uurimisel. Olukorda iseloomustas möödunud sajandi lõpul ilmekalt A. Cayley: «Projektiivne geomeetria on kogu geomeetria.» Selline vaatekoht oli tõepoolest õige senikaua, kuni erinevate geomeetriate hulk piirdus käesolevas kursuses vaadelduga. Tänapäeval on Cayley seisukoht geomeetria kui teadusala arenemises ammu läbikäidud etapp. Sellest hoolimata säilib projektiivse geomeetria tsentraalne asend ja tähtsus.

[176] Minkowski, Hermann (1864—1909), saksa matemaatik.

REGISTER

SISUKORD

II. SIRGETE JA TASANDITE GEOMEETRIA

III. LIIKUMISED JA AFIINSED TEISENDUSED

IV. LIHTSAMAD KÕVERJOONED JA -PINNAD

V. TEIST JÄRKU JOONED JA PINNAD

VI. PROJEKTIIVNE GEOMEETRIA