

Janek Laanearu  
Andres Piirsalu

# NUMBRILISED ARVUTUSSKEEMID VOOLAMISE HÜDRAULIKAS

**TAL  
TECH**

**TALLINNA  
TEHNIKAÜLIKOOL**

Janek Laanearu ja Andres Piirsalu

**NUMBRILISED  
ARVUTUSSKEEMID  
VOOLAMISE  
HÜDRAULIKAS**

**TAL  
TECH**  
KIRJASTUS

Õpik on ilmunud programmi „Eestikeelsete kõrgkooliõpikute  
loomise toetamise põhimõtted 2018–2027“  
ning Haridus- ja Teadusministeeriumi  
ja Eesti Keele Instituudi toel



HARIDUS- JA  
TEADUSMINISTEERIUM

The logo of the Estonian Language Institute, consisting of a stylized dark blue 'J' shape followed by the text 'EESTI KEELE INSTITUUT' in dark blue capital letters.

EESTI  
KEELE  
INSTITUUT

Keeletoimetaja: Saara Hanna Mildeberg  
Retsensioon: Jüri Elken, Rein Kitsing  
Kujundaja: Mirjam Piik

Autoriõigus ©: Janek Laanearu, Andres Piirsalu, 2022

ISBN: 978-9949-83-919-3 (pdf)

# SISUKORD

Tutvustus .....	19
1 Sissejuhatus .....	21
1.1 Stratifitseeritud voolamine .....	21
1.2 Veevarustus ja kanalisatsioon .....	21
1.3 Hüdraulikast Eestis.....	22
1.4 Linna veesüsteemid ja kliima .....	23
1.5 Vihmavee jätkusuutlik käitlemine .....	24
1.6 Insenertehnilisedlahendused.....	25
1.7 Numbrilised arvutusskeemid.....	26
1.8 Integreeritud tehnosüsteemid.....	27
1.9 Võrrandid ja valemid.....	28
1.10 Põhiülesanded.....	28
1.11 Lisad .....	31
1.12 Viited .....	31
<b>I STATIONAARNE VOOLAMINE.....</b>	<b>32</b>
2 Teooria. Hüdraulika printsiibid.....	32
2.1 Põhiprintsiibid .....	32
2.1.1 Voolamise pidevus .....	32
2.1.2 Voolamise liikumishulk.....	32
2.1.3 Voolamise mehaaniline energia .....	33
2.1.4 Bernoulli võrrand.....	35
2.2 Rõhuline voolamine .....	38
2.3 Vabapinnaga voolamine.....	39
2.4 Paisutamine avasängis.....	40
2.5 Survekadude liigitus .....	42
2.6 Takistustegurid.....	44
2.7 Survetoru takistustegurid.....	46
2.8 Avasängi takistustegurid.....	47
2.9 Fanningi takistustegur.....	48
2.10 Suhtelised hüdraulilised suurused.....	49

2.11	Viited .....	50
3	Hõõrdetakistustegur.....	51
3.1	Survevool .....	51
3.1.1	Laminaarne voolamine .....	51
3.1.2	Turbulentne voolamine .....	52
3.1.3	NÄITEÜLESANNE. Hõõrdetakistustegur .....	55
3.1.4	LISAÜLESANNE. Arvutusdiagramm.....	60
3.1.5	Torustike nomogrammid.....	66
3.2	Vabavool .....	72
3.2.1	Laminaarne voolamine .....	72
3.2.2	Turbulentne voolamine .....	73
3.2.3	NÄITEÜLESANNE. Hõõrdetakistustegur .....	75
3.2.4	LISAÜLESANNE. Arvutusdiagramm.....	82
3.2.5	Ümartoru hüdrauliline vabavoolurežiim.....	89
3.3	Hüdrauliste valemite määramatus .....	93
3.4	Viited .....	93
4	Arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod .....	94
4.1	Väikese kordajaga astmerida. Taylori rida .....	94
4.2	Väikese kordajaga astmerida. Nullpunktid.....	95
4.3	Veafunktsioon.....	96
4.4	Newton-Raphsoni iteratsioonmeetod .....	97
4.5	Insenerrakendusi. Veevõrk.....	99
4.6	Numbrilise arvutusskeemi koonduvus.....	101
4.7	Viited .....	102
5	Rõhuline torustik .....	103
5.1	PRAKTILINE OSA. Survetorud.....	103
5.1.1	Ehitis. Veevarustuse- ja kanalisatsioonivõrk .....	103
5.1.2	Voolurežiim. Ülerõhk ja alarõhk.....	104
5.1.3	Sissejuhatus ülesandesse. Põhivalemid.....	105
5.2	PÕHIÜLESANNE. Torustiku dimensioonimine .....	107
5.3	NÄITEÜLESANNE. Torustiku dimensioonimine .....	116
5.4	ISESEISEVA TÖÖ ÜLESANNE. Torustiku dimensioonimine.....	120

5.5	LISAÜLESANNE 1. Torustiku dimensioonimine .....	121
5.6	LISAÜLESANNE 2. Torustiku dimensioonimine .....	124
5.7	LISAÜLESANNE 3. Torustiku dimensioonimine .....	130
5.8	LISAÜLESANNE 4. Torustiku dimensioonimine .....	132
5.9	LISAÜLESANNE 5. Torustiku dimensioonimine .....	136
5.10	Viited .....	139
6	Isevoolne torustik .....	140
6.1	PRAKTILINE OSA. Isevoolne kanalisatsioon .....	140
6.1.1	Ehitis. Sademevee- ja reoveetorustik .....	140
6.1.2	Voolurežiim. Torutäide ja läbilaskevõime .....	141
6.1.3	Sissejuhtus ülesandesse. Põhivalemid .....	142
6.2	PÕHIÜLESANNE. Suhteline ja kriitiline torutäide .....	145
6.3	ISESEISVA TÖÖ ÜLESANNE. Suhteline ja kriitiline torutäide .....	163
6.4	LISAÜLESANNE. Suhteline torutäide ja takistustegurid .....	165
6.5	Viited .....	172
7	Avasäng .....	173
7.1	PRAKTILINE OSA. Tehislikud ja looduslikud voolusängid .....	173
7.1.1	Ehitis. Kraav, kanal, renn, küvett .....	173
7.1.2	Voolurežiim. Läbilaskevõime ja hüdrauliline raadius .....	175
7.1.3	Sissejuhtus ülesandesse. Põhivalemid .....	175
7.2	PÕHIÜLESANNE. Tehissängi veesügavus .....	178
7.3	ISESEISEVA TÖÖ ÜLESANNE. Tehissängi veesügavus .....	192
7.4	LISAÜLESANNE 1. Tehissängi veesügavus .....	194
7.5	LISAÜLESANNE 2. Loodussängi veesügavus .....	198
7.6	LISAÜLESANNE 3. Loodussängi veesügavus .....	207
7.7	LISAÜLESANNE 4. Tehissängi veesügavus .....	209
7.8	Viited .....	210
8	Ehitatud pais .....	211
8.1	PRAKTILINE OSA. Avasängi tõkked .....	211
8.1.1	Ehitis. Hüdrotehniline rajatis .....	211
8.1.2	Voolurežiim. Uputamata ja uputatud ülevool .....	211
8.1.3	Sissejuhtus ülesandesse. Põhivalemid .....	213

8.2	PÕHIÜLESANNE. Müürülevoolu paisutuskõrgus.....	215
8.3	ISESEISEVA TÖÖ ÜLESANNE. Müürülevoolu paisutuskõrgus.....	224
8.4	LISAÜLESANNE 1. Seinülevoolu paisutuskõrgus.....	226
8.5	LISAÜLESANNE 2. Seinülevoolu paisutuskõrgus.....	235
8.6	Viited.....	236
9	Ehitatud ava.....	237
9.1	PRAKTILINE OSA. Suuremõõtmelised avad.....	237
9.1.1	Ehitis. Hüdrotehniline rajatis.....	237
9.1.2	Voolurežiim. Uputamata ja uputatud läbivool.....	237
9.1.3	Sissejuhatus ülesandesse. Põhivalemid.....	238
9.2	PÕHIÜLESANNE. Ruutava dimensioonimine.....	240
9.3	ISESEISVA TÖÖ ÜLESANNE. Ruutava dimensioonimine.....	248
9.4	LISAÜLESANNE 1. Ümarava dimensioonimine.....	250
9.5	LISAÜLESANNE 2. Nelinurkva dimensioonimine.....	255
9.6	LISAÜLESANNE 3. Nelinurkava dimensioonimine.....	262
9.7	Viited.....	268
<b>II KVAASISTATSIONAARNE VOOLAMINE.....</b>		<b>269</b>
10	Teooria. Hüdraulika printsiibid.....	269
10.1	Voolamise liikumishulga kontrollmahu võrrand.....	269
10.2	Vooluprotsessi parameetriseerimine.....	271
10.3	Saint-Venanti võrrandid.....	273
10.4	Voolusüsteemi pidevuse võrrand.....	274
10.5	Voolamise eriolukorrad.....	275
10.5.1	Ühtlane voolamine.....	275
10.5.2	Rõhuline voolamine.....	275
10.5.3	Vabapinnaga voolamine.....	276
10.5.4	Paisuga voolamine.....	277
10.5.5	Vabavoolu paisutamine.....	278
10.5.6	Ideaalse gaasi vooluprotsess.....	280
10.6	Viited.....	281
11	Arvutusmeetod. Runge-Kutta numbriline meetod.....	282
11.1	Hüdrauliline vooluprotsess.....	282

11.2	Harilik diferentsiaalvõrrand. Ajaline muutuja.....	282
11.3	Väikese kordajaga astmerida. Tayloriga ajavahemikule .....	283
11.4	Runge-Kutta 4. järku numbriline arvutusskeem .....	283
11.5	Numbrilise arvutusskeemi koonduvus.....	287
11.6	Viited .....	289
12	Ehitatud bassein .....	290
12.1	PRAKTILINE OSA. Veekogumise süsteemid.....	290
12.1.1	Ehitis. Bassein, mahuti, reservuaar, puhasti, kaev .....	290
12.1.2	Voolurežiim. Basseini tühjenemine ja täitumine .....	290
12.1.3	Sissejuhatus ülesandesse. Põhivalemid.....	291
12.2	PÕHIÜLESANNE. Basseini tühjenemine .....	293
12.3	ISESEISVA TÖÖ ÜLESANNE. Basseini tühjenemine .....	302
12.4	LISAÜLESANNE. Basseini täitumine.....	304
12.5	Viited .....	308
13	Ehitatud mahuti .....	309
13.1	PRAKTILINE OSA. Veekogumise mahutid.....	309
13.1.1	Ehitis. Filtratsioonimahuti, settebassein, aerotank, puhtaveereservuaar, ühtlusti.....	309
13.1.2	Voolurežiim. Mahuti tühjenemine ja täitumine.....	309
13.1.3	Sissejuhatus ülesandesse. Põhivalemid.....	310
13.2	PÕHIÜLESANNE. Mahuti tühjenemine .....	312
13.3	ISESEISVA TÖÖ ÜLESANNE. Mahuti tühjenemine .....	325
13.4	LISAÜLESANNE. Mahuti täitumine.....	327
13.5	Viited .....	346
14	Kahefaasiline torustik.....	347
14.1	PRAKTILINE OSA. Kanalisatsioonivõrk.....	347
14.1.1	Ehitis. Torustik ja kaevud.....	347
14.1.2	Voolurežiim. Vee ja õhu koostoime torustikus.....	347
14.1.3	Sissejuhatus ülesandesse. Põhivalemid.....	348
14.2	PÕHIÜLESANNE. Kaevuga torustiku täitumine.....	350
14.3	ISESEISVA TÖÖ ÜLESANNE. Kaevuga torustiku täitumine.....	361
14.4	LISAÜLESANNE. Suletud torustiku täitumine .....	363



14.5	Viited .....	374
15	Pinnaveekogu.....	375
15.1	PRAKTILINE OSA. Väikeveekogud.....	375
15.1.1	Ehitis. Tiik.....	375
15.1.2	Voolurežiim. Veeringe, veekogu tühjenemine ja täitumine .....	375
15.1.3	Sissejuhatus ülesandesse. Põhivalemid.....	377
15.2	PÕHIÜLESANNE. Veekogu pinnatase.....	378
15.3	ISESEISVA TÖÖ ÜLESANNE. Veekogu pinnatase.....	387
15.4	LISAÜLESANNE. Veekogu pinnatase.....	389
15.5	Viited .....	397
<b>III</b>	<b>MÕÕDUKALT EBAÜHTLANE VOOLAMINE .....</b>	<b>398</b>
16	Teooria. Hüdraulika printsiibid.....	398
16.1	Põhiprintsiibid. Mass, liikumishulk ja energia .....	398
16.1.1	Voolamise pidevus .....	398
16.1.2	Voolamise liikumishulk .....	398
16.1.3	Voolamise mehaaniline energia .....	399
16.2	Paisutamine.....	399
16.2.1	Ülevoolu põhivalem.....	399
16.2.2	Ühtlase voolamise valem.....	401
16.2.3	Tehissängi vabavoolu parameetriseerimine .....	401
16.2.4	Mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand.....	404
16.3	Viited .....	405
17	Arvutusmeetod. Lõplike vahede meetod .....	406
17.1	Numbriline arvutusmeetod hüdraulikas .....	406
17.2	Newton-Leibnizi valem.....	406
17.3	Harilik diferentsiaalvõrrand. Ruumiline muutuja .....	406
17.4	Väikese kordajaga astmerida. Tayloriga rida ruumivahemikule.....	407
17.5	Euleri numbriline arvutusmeetod. Ilmutatud kujuga arvutusskeem .....	407
17.6	Euleri numbriline arvutusmeetod. Ilmutata kujuga arvutusskeem.....	408
17.7	Euleri numbriline arvutusmeetod. Tsentreeritud arvutusskeem .....	409
17.8	Euleri numbriline arvutusskeem. Üldistatud arvutusskeem.....	410

17.9	Numbrilise arvutusskeemi koonduvus.....	411
17.10	Viited .....	413
18	Vooluveekogu.....	414
18.1	PRAKTILINE OSA. Jõevoolu paisutamine.....	414
18.1.1	Ehitis. Hüdrotehniline rajatis .....	414
18.1.2	Voolurežiim. Veetaseme reguleerimine vooluveekogus.....	414
18.1.3	Sissejuhatuse ülesandesse. Põhivalemid.....	416
18.2	PÕHIÜLESANNE. Paisutusulatus.....	418
18.3	ISESEISEVA TÖÖ ÜLESANNE. Paisutusulatus .....	432
18.4	LISAÜLESANNE. Paisutusulatus.....	434
18.5	Viited .....	450
19	Truubid .....	451
19.1	PRAKTILINE OSA. Veeristed.....	451
19.1.1	Ehitis. TRuup, sillaava.....	451
19.1.2	Voolurežiim. Sissevooluava ja väljavooluava voolurežiim .....	451
19.1.3	Sissejuhatuse ülesandesse. Põhivalemid.....	452
19.2	PÕHIÜLESANNE. Surveta ümartruubi voolurežiim .....	454
19.3	ISESEISEVA TÖÖ ÜLESANNE 1. Surveta ümartruubi voolurežiim .....	472
19.4	ISESEISEVA TÖÖ ÜLESANNE 2. Surveta ümartruubi voolurežiim .....	475
19.5	LISAÜLESANNE 1. Surveta ümartruubi voolurežiim.....	478
19.6	LISAÜLESANNE 2. Poolsurvearuubi voolurežiim .....	496
19.7	LISAÜLESANNE 3. Täissurvearuubi voolurežiim .....	501
19.8	Viited .....	506
20	Poolisevoolne torustik.....	507
20.1	PRAKTILINE OSA. Poolisevoolne kanalisatsioon .....	507
20.1.1	Ehitis. Sademevee- ja reoveetorustik.....	507
20.1.2	Voolurežiim. Osaline ja täielik torutäide, läbilaskevõime .....	508
20.1.3	Sissejuhatuse ülesandesse. Põhivalemid.....	509
20.2	PÕHIÜLESANNE. Suhteline torutäide ja täiteulatus .....	511
20.3	ISESEISEVA TÖÖ ÜLESANNE. Suhteline torutäide ja täiteulatus .....	530
20.4	LISAÜLESANNE. Täieliku torutäitega voolamine.....	532
20.5	Viited .....	538

<b>IV TUGEVALT EBAÜHTLANE VOOLAMINE</b> .....	539
21 Arvutusmeetod. Karakteristikute meetod.....	539
21.1 Hüperpoolset tüüpi võrrandid.....	539
21.1.1 Hüdraulilise lööklaine võrrandid.....	539
21.1.2 Madalveelise voolamise võrrandid .....	541
21.2 Voolusüsteemi piiritingimused.....	543
21.2.1 Peegelduvate lainete piiritingimused.....	543
21.2.2 Osaliselt peegelduvate lainete piiritingimused .....	543
21.2.3 Lainetele läbipaistvad piiritingimused.....	544
21.3 Numbrilise arvutusskeemi koonduvus.....	544
21.4 Viited .....	545
22 Hüdrolöök torustikus .....	546
22.1 PRAKTILINE OSA. Hüdrolöök veesüsteemis .....	546
22.1.1 Ehitis. Survetorustik ja isevoolne torustik.....	546
22.1.2 Voolurežiim. Veetiheduse muutumisega määratud rõhk.....	547
22.1.3 Sissejuhatus ülesandesse. Põhivalemid.....	547
22.2 PÕHIÜLESANNE. Tiheduslainega määratud rõhukõrgus .....	549
22.3 ISESEIVA TÖÖ ÜLESANNE. Tiheduslainega määratud rõhukõrgus.....	574
22.4 LISAÜLESANNE. Survetorustiku hõõrdetakistustegur .....	576
22.5 Viited .....	580
23 Teooria. Madalvee võrrandid .....	581
23.1 Voolamise liikumishulga võrrand .....	581
23.2 Lineaariseeritud 1D madalvee võrrandid.....	584
23.3 1D pinnalaine võrrandid .....	586
23.4 2D koguvoolu modelleerimine .....	589
23.5 1D koguvoolu modelleerimine .....	591
23.6 Koordinaatide teisendused.....	593
23.7 Viited .....	594
24 Paisulaine tehiskanalis.....	595
24.1 PRAKTILINE OSA. Ehitatud tammid.....	595
24.1.1 Ehitis. Hüdrotehniline rajatis, pinnastamm, betoontamm .....	595
24.1.2 Voolurežiim. Veepinna kõrguse muutusest sõltuv rõhk.....	596

24.1.3	Sissejuhatus ülesandesse. Põhivalemid.....	597
24.2	PÕHIÜLESANNE. Paisulainega määratud veepinna kõrgus.....	598
24.3	ISESEIVA TÖÖ ÜLESANNE. Paisulainega määratud veepinna kõrgus...	625
24.4	LISAÜLESANNE. Veepinna kõrgus tehissängis.....	627
24.5	Viited.....	630
<b>V KOOSVOOLAMINE.....</b>		<b>631</b>
25	Teooria. Vooluprotsessi võrrandid.....	631
25.1	Liikumise kirjeldamine.....	631
25.2	Vedelikus mõjuvad jõud.....	632
25.3	Liikumishulga jäävus.....	634
25.4	Newtoni vedelik.....	639
25.5	Voolamise liikumishulga võrrand.....	641
25.6	Euleri võrrand.....	643
25.7	Mehaanilise energia jäävus.....	643
25.8	Kineetiline energia.....	644
25.9	Termodünaamika seadused.....	646
25.10	Bernoulli võrrand.....	647
25.11	Vooluhüppe võrrand.....	652
25.12	Voolukeeriste takistus.....	659
25.13	Viited.....	662
26	Arvutuslik vedelike dünaamika.....	663
26.1	Põhivõrrandid.....	663
26.2	Põhivõrrandite erikujud.....	665
26.2.1	Õhuvoolude süsteem. Ventilatsioon.....	665
26.2.2	Vee ja õhu koosvoolamise süsteem. Kanalisatsioon.....	668
26.3	Reynoldsi võrrandid. Turbulents.....	670
26.3.1	Turbulentsi mudel.....	675
26.4	Viited.....	678
27	Alumise bjefi hüdraulika.....	679
27.1	PRAKTILINE OSA. Paisu vooluprotsessid.....	679
27.1.1	Ehitis. Hüdrotehniline rajatis.....	679
27.1.2	Voolurežiim. Hüdrauliline vabavoolurežiim.....	679

27.1.3	Sissejuhatus ülesandesse. Põhivalemid.....	682
27.2	PÕHIÜLESANNE. Uputamata ülevool. CFD modelleerimine .....	684
27.3	ISESEISEVA TÖÖ ÜLESANNE. Uputamata ülevool. CFD modelleerimine..	705
27.4	LISAÜLESANNE 1. Uputatud ülevool. CFD modelleerimine .....	709
27.5	LISAÜLESANNE 2. Ülevool. SPH modelleerimine .....	716
27.6	LISAÜLESANNE 3. Stratifitseeritud ülevool.....	721
27.7	Viited .....	728
LISA A.	Erikujulise ristlõikega ülevoolud .....	729
A.1	Bernoulli võrrand .....	729
A.2	Nelinurkse ristlõikega ülevool.....	729
A.3	Paraboolse ristlõikega ülevool.....	731
A.4	Kolmnurkse ristlõikega ülevool.....	734
A.5	Ruutastmelise ristlõikega ülevool .....	737
LISA B.	Lambert W funktsioon.....	741
B.1	Logaritmivõrrand.....	741
B.2	Turbulentse voolamise hõõrdetakistus täieliku täitumusega ümartorule.....	742
B.3	Turbulentse voolamise hõõrdetakistus osalise täitumusega ümartorule .....	744
LISA C.	Hõõrdetakistus täieliku täitumusega ümartorus .....	746
C.1	Empiirilised võrrandid ja valemid .....	746
C.2	Hõõrdetakistusteguri valemid.....	747
LISA D.	Hõõrdetakistus osalise täitumusega ümartorus.....	749
D.1	Empiirilised võrrandid ja valemid .....	749
D.2	Hõõrdetakistusteguri kloonvalemid.....	751
LISA E.	Hüdraulika valemi määramatus .....	754
E.1	Hüdraulilise voolusüsteemi määramatus .....	754
E.2	1-järku määramatus.....	754
E.3	Standardmääramatus .....	755
E.4	NÄITEÜLESANNE. Veesügavuse määramatus.....	756
E.4.1	Numbriline arvutusmeetod. Normaalsügavus .....	759
E.4.2	Normaalsügavuse määramatus. Vooluhulk.....	760
E.4.3	Normaalsügavuse määramatus. Manningi karedustegur.....	762
E.4.4	Normaalsügavuse määramatus. Voolusängi põhjalang .....	764

E.4.5 Normaalsügavuse määramatus. Vooluhulk, Manningi karedustegur, voolusängi põhjalang .....	767
E.5 Avasängi voolamise kriitiline sügavus .....	768
E.5.1 Kriitilise sügavuse määramatus. Vooluhulk.....	769
LISA F. 2D koguvoolu numbriline arvutuskeem .....	771
LISA G. Verleti integreerimismeetod .....	774
LISA H. Stratifitseeritud voolamise hüdraulika.....	777
H.1 Vaheenergia kõrguse funktsioon .....	777
H.2 Sisevoolamine nelinurkse ristlõikega voolusängis.....	780
H.3 Sisevoolamine paraboolse ristlõikega voolusängis.....	782
H.4 Sisevoolamine kolmnurkse ristlõikega voolusängis.....	785
H.5 Ruutastmelise ristlõikekuju teisendused.....	788
H.6 Ruutastmelise ristlõikekujuga voolusängid.....	789
LISA I. Pöörleva süsteemi hüdraulika. Piirdega kitsendatud ülevool .....	792
I.1 Hüdraulika põhivõrrandid pöörlevale voolukanalile.....	792
I.2 Astmerealine lahendus.....	794
I.3 Madalama-järguline lahendus.....	796
LISA J. Pöörleva süsteemi hüdraulika. Künnisega ülevool.....	798
J.1 Hüdraulika põhivõrrandid pöörlevale voolukanalile.....	798
J.2 Astmerealine lahendus.....	800
J.3 Madalama-järguline lahendus.....	802
Viited.....	803
Tähistused.....	804
Lihttähistused .....	804
Eritähistused .....	804
Suhtarvud.....	806
Kreeka tähistused.....	806
Terminid.....	807
Kasutatud materjalid.....	824
Eestikeelsed raamatud .....	824
Inglisekeelsed raamatud.....	825
Akadeemilised tööd.....	826

Teadustöö publikatsioonid .....	827
Rakenduslikud projektid.....	829
Juhendmaterjalid.....	830
Illustratiivsed materjalid .....	831
Nimelised viited .....	833
Kreeka tähestik.....	835
Inglisekeelsed mõisted .....	836
Tänu sõnad .....	840
Toetajad.....	841
Aineregister .....	842

## EESSÕNA

Ehitiste projekteerimisega seotud tehnilistes ülesannetes võib vooluprotsesside analüüsiks kasutada voolamise hüdraulika valemeid, mille põhjal koostatud numbrilised arvutuskeemid võimaldavad lihtsamalt määrata hüdrauliliste suuruste seoseid tehnosüsteemide funktsioneerimiseks etteantud mõõtmete, ühenduste, paiknemiste ja muuga. Raamatusse on valitud teemasid ehitusvaldkonna erinevatest erialadest, nagu veevarustus ja kanalisatsioon, teedehitus, ja hüdrotehnika, et selgitada üldisemalt numbriliste meetodite kasutamise võimalusi insenersüsteemides. Vee jaotamise ja kogumise süsteemides kasutatakse torustikke, basseine, mahuteid ja muud säärast. Tee-ehitusega seotud veesüsteemides aga näiteks truupe ja sillaavasid. Hüdrotehnikas kasutatakse näiteks avasänge, ehitatakse paise, tamme ja seonduvaid rajatisi. Veevarustust ja kanalisatsiooni kasutatakse linnaruumis integreeritud vee jaotamise ja kogumise süsteemina, mille toimimine sõltub nii veevarustuse välisvõrgu, väliskanalisatsioonivõrgu, hoone veevärgi kui ka hoone kanalisatsiooni olukorrast. Planeeritud veesüsteem, kus veehaardest vee-töötlusjaama ja sealt veevarustusvõrgu kaudu tarbijateni juhitud vesi suunatakse pärast kasutamist vee kogumise süsteemi kaudu puhastisse (see tähendab reoveepuhastisse ja sealt edasi heitvee suublasse), tagab vee säästliku kasutamise ja keskkonnanohiu ning hoiab ära elupaikade kahjustamise. Veevarustuse ja kanalisatsiooni nõuetekohane projekteerimine tagab veeteenuste kättesaadavuse ja majandusliku ökonoomsuse. Vastavates standardites esitatud soovitude täitmine tagab veesüsteemi pideva ja ohutu töö. Tuleb arvestada ka sellega, et standardid on reeglina vabatahtlikud dokumendid, mille järgimine ei ole olemuselt kohustuslik. Standardis ettenähtud juhiste järgimise on võimalik teha kohustuslikuks kui standardile viidatakse õigusaktis. Ehitusstandardite kasutajalt eeldatakse tänapäeval lisaks oma valdkonna erialasele ettevalmistusele ka arvutuslike töövahendite, st insenertarkvara kasutamise oskust. See võib olla vajalik, et optimeerida näiteks vee jaotamise ja kogumise süsteemi tööolukordade energiakulu, et suurendada tehnosüsteemide energiatõhusust. Insenertarkvarad kasutavad reeglina numbrilisi arvutuskeeme, et integreerida voolamise hüdraulika valemeid tehnosüsteemi vajalike funktsioonide määramiseks. Samuti on voolamise hüdraulika valemid kasutusel veevarustuse ja kanalisatsiooni standardites, et võimaldada lihtsaid kontrollarvutusi kõigile, kellel tekib selleks vajadus. Tehnosüsteemide projekteerimise eesmärgil on hüdraulika valemite alusel koostatud veesüsteemide funktsioneerimise graafilised lahendused, näiteks läbilaskevõime nomogrammide, mis võimaldavad dimensioonida survetorustikke, avatud ja pealtkaetud voolusänge (isevoolseid torustikke) ja muud. Voolamise hüdraulika valemite numbrilised arvutuskeemid võimaldavad määrata lahendused lihtsamalt nii ühefaasilise vedeliku (nt veevoolu või õhuvoolu) kui ka mitmeefaasilise vedeliku (nt õhu ja vee koosvoolamise) vooluprotsessidele nii linnaruumi integreeritud vee jaotamise ja



kogumise süsteemis kui ka hoone tehnosüsteemis. Mitme vooluprotsessiga hüdraulilises süsteemis ei ole keerulisemate ülesannete lahendamine ainult voolamise hüdraulika valemite standardlahendusi kasutades lihtsalt võimalik. Seetõttu on vajalik selgitada ka arvutusliku vedelike dünaamika (ingl. *Computational Fluid Dynamics*) numbrilise modelleerimise meetodikat kasutatavaid ülesannete lahendamise võimalusi, mille kohta on raamatus toodud ka näiteid.

Voolamise hüdraulika ülesannete numbrilised arvutustulemused on olulised, et tutvustada tuntud empiiriliste valemite uusi kasutamise võimalusi. Ehitatud keskkonna vooluprotsesside ülesannetes ei peeta tavaliselt oluliseks tutvustada hüdraulika valemite lahenduste matemaatilist seadet ning see on ka üks põhjus, miks pööratakse selles raamatus rohkem tähelepanu ülesannete numbriliste lahenduste selgitamisele. Samuti pööratakse õpikus tähelepanu vedelike dünaamika teoreetilistele küsimustele, mis on seotud näiteks turbulentsse voolamise ja mitte-statsionaarse voolamisega (nagu seda on veepinnalained ja tiheduslained) vee-süsteemides. Torustike, voolusängide, paisude, basseinate, mahutite ja teiste süsteemi elementide kohta käivates ülesannetes on kasutatud vormistust, mis võimaldab ülesandes esitatud numbrilise arvutusskeemi seadega iseseisvalt tutvuda ning vajadusel arvutustulemusi erinevate sisendandmetega kontrollida.

## HEA LUGEJA!

Õpik on koostatud autorite pikaajalise akadeemilise ja erialase töö käigus valminud Tallinna Tehnikaülikooli hüdraulika kursuste ja täienduskoolituste loengumaterjalide põhjal. Kasutatud on mitmeid originaallikmeid. Raamat on hea õppematerjal üliõpilastele, kes peavad omandama arvutuslik-metoodilised alused vedelike toime kohta hüdraulilistes voolusüsteemides. Autorid soovivad raamatut lugeda inseneritööga seotud õppijatel, spetsialistidel, ekspertidel ja teistel, kellel on huvi tutvuda voolamise hüdraulika valemite kasutamisega praktiliste ülesannete lahendamisel ning omandada hüdrauliliste voolusüsteemide analüüsiks vajalik numbriline arvutusmetoodika. Hüdrauliliste voolusüsteemide numbrilised arvutus-skeemid võimaldavad veevoolu protsessidega seotud keerulistele inseneritehnilistele probleemidele leida lihtsamalt vastuseid ka neil, kellel puudub erialane ettevalmistus ja pikaajaline kogemus vee ja keskkonnatehnikas. Vastava erialase ettevalmistusega inseneridele on käesolev õppematerjal hea võimalus enesetäiendamiseks.

Autorid peavad oluliseks täpsustada hüdraulika mõisteid lähtudes voolamise hüdraulika kaasaegsetest lahendustest, ning tekkinud vajadusest uusi mõisteid kasutada. Selgituseks on erinevates peatükkides märkustena viidatud varasemates hüdraulika õpikutes kasutatud väljenditele, millele on pakutud alternatiiv. Raamatus kasutatakse hüdrauliliste suuruste täiendatud tähistusi ja peamiselt SI-süsteemi mõõtühikuid. Õpik on soovituslik ka neile, kes kasutavad oma erialases töös vedelike süsteemidega seotud oskussõnu. Raamatu koostamise üheks põhjuseks on vajadus eestikeelse rakendusliku suunitlusega ja kaasajastatud hüdraulika õppematerjali järele, mis oma sisu terviklikkuse, terminoloogia kasutamise, teoreetilise taseme ja ülesannete lahendamise metoodika poolest oleks loogiliseks täienduseks olemasolevatele hüdraulika õpikutele ja õppematerjalidele ning vastaks ühtlasi ka ülikooli õppetöö tasemele. Tänapäeva avatud õppe tingimustes seatakse ülikooli õppematerjali teoreetilisele tasemele ja näiteülesannetele *a priori* kõrged nõudmised, sest nende sisulist kvaliteeti on lihtne hinnata ka rahvusvahelise õppe kontekstis.

Ülesannetes on esitatud lähtevõrrandid ja valemite tuletuskäigud, kus lahenduste saamiseks kasutatakse ära nii harilike diferentsiaalvõrrandite numbrilist integreerimist kui ka põhivõrranditest tuletatud integraalseid valemeid. Samuti on välja toodud arvutuslikud tulemused. Autorite arvates on numbriliste arvutus-skeemide lisamine õpikusse oluline, et selgitada arvutusmeetoditega kaasnevaid täiendavaid võimalusi lisaks olemasolevale. Rakenduslikust seisukohast omavad tulevikus kindlasti olulist tähtsust arvutusliku vedelike dünaamika matemaatilised töövahendid, aga väga oluline on tunda ka hüdrauliliselt määratud vooluprotsesside lahendusi, et koostada reaalselt funktsioneerivaid projekteerimislahendusi. Teoreetilise abimaterjaliga varustatud ja laiendatud ülesannete formaadiga õppematerjal võimaldab tutvuda hüdrauliliste voolusüsteemide numbrilise analüüsiga kõigil õppureil, kellele pakub huvi vedeliku voolamisega seotud protsesside arvutamine nii

ehitatud kui ka looduslikes süsteemides. Raamatu autorid arvavad, et lisaks teadusliku suunitlusega töödele võivad voolamise hüdraulika numbrilised arvutuskeemid leida laialdasemat kasutamist vooluprotsessidega seotud insenertehniliste probleemide lahendamisel ning pakkuda esinduslikke arvutusnäiteid ehitatud keskkonna kasutamise juhendmaterjalidesse.

Autorid tänavad raamatu retsensente, kaasamõtlejaid ja toetajaid.

## TUTVUSTUS

Raamat on mõeldud kasutamiseks nii akadeemilise õppematerjalina kui ka inseneritöö juhendmaterjalina. Akadeemilises õppeprotsessis võib raamatut kasutada õppevahendina, mis selgitab voolamise hüdraulika põhialuseid, kus on võetud kasutusele mitmed hästi tuntud empiirilised valemid ning mille põhjal on koostatud lihtsamad võrrandid ülesannete lahendamiseks erinevate arvutusmeetoditega. Ehitatud keskkonna veesüsteemide projekteerimisel on tegemist väärtusliku abivahendi ja käsiraamatuga, mis seostab praktilised ülesanded voolamise hüdraulika alustega. Samuti on ülesannete lahenduskäigud varustatud numbriliste arvutuskeemidega.

Hüdraulika ülesannete sisulisel mõistmisel on oluline seostada nende lahendamine praktiliste küsimustega, millega insener igapäevatoos kokku puutub. Sageli kujuneb praktilise ülesande lahendus mitme osapoole otsusena, mistõttu on oluline mõista avatud teostusega inseneritehnilise ülesande loogikat. See loob õppijale arusaama inseneritöö väljakutsetest, millega ehitusvaldkonna tööturul igapäevaselt kokku puututakse.

Igapäevases tööprotsessis on olulisel kohal arvutitarkvara. Voolamise hüdraulika valemeid kasutatakse arvutusprogrammides, mis võimaldavad simuleerida hüdrauliliste suuruste seoseid ja samuti dimensioonida erinevaid hüdraulilisi voolusüsteeme, nagu vee jaotamise ja kogumise süsteemi integreeritud survetorud, avasängid, paisud ja teised süsteemi elemendid, milles esineb nii rõhuline kui vabapinnaga voolamine ning vooluhüpped. Arvutusprogrammid annavad kiire ja täpse tulemuse, kui sisendandmed vastavad nõutud arvutustingimustele – näiteks on valitud õiged mõõtühikud ja arvukordajad. Tuleb arvestada ka sellega, et empiirilise valemi arvutuslik tulemus võib sõltuda mõõtühikute süsteemist. Seetõttu on käesolevas raamatus kasutatud peamiselt SI mõõtühikute süsteemiga määratud empiirilisi valemeid. Olgu tegemist tarkvaraettevõtete poolt välja töötatud või inseneride loodud tabelarvutusprogrammiga, peab insener programmi arvutatud lahenduste loogilisuses veendumiseks tundma hästi hüdraulika aluseid ning oskama hinnata võimalikku kõrvalekallet hästi tuntud tööolukordadest. Üldjuhul kujuneb see oskus töökogemuse käigus ja on individuaalse oskustöö saavutus. Raamat aitab tegevinseneril seostada esitatud näidete varal konkreetse tööülesande taga peituvaid teoreetilisi mõttekäike ja uute lahenduste kasutamise võimalusi. Samuti võib teoreetilisi arvutustulemusi kasutada kontrollarvutuste tegemiseks ekspertiisitoos. Selleks on raamatus põhjalikult tutvustatud numbrilisi arvutuskeeme, mis võimaldavad arvutuskäike lihtsamalt erinevate sisendandmetega korrata. Lisaks on raamatus esitatud materjal hea meelespea tegevinseneridele, kellel on kõrgkooli lõpetamisest möödunud aastaid. Seega tuleks käesolevat raamatut käsitleda ka kui täiendusõppe vahendit. Volitatud inseneri kutse eeldab mitmeid aastaid pidevat erialast tööd. Ilma inseneritöota ei ole kvaliteetne teadliku ekspluateerimise

eesmärgiga ehitustegevuse tulemus hästi võimalik. Raamatus on selgitatud insener-tarkvara koostamise aluseid, mis annab insenerile võimaluse ennast iseseisvalt täiendada ja omandada esinduslike ülesannete põhjal hüdrauliliste voolusüsteemide numbriliste arvutusskeemide kasutamise oskus.

Raamatu autorid soovivad anda oma panuse ka ehitusteaduses kasutatud väljendite, terminite ja muu korrastamisesse. Hüdraulikaalast kirjandust ja õppevahendeid on välja antud erinevatel aegadel. Tulenevalt kirjastamise ajast ja autoritest on käibel erinevaid mõisteid, millest võib aru saada mitmeti, sest inseneri sõnavara areneb pidevalt koos uute teoreetiliste võimaluste loomisega. Samuti on alati püütud akadeemilisest keelest pärit mõisteid suupärasemaks muuta. Sellesse võib suhtuda kui inseneride erialasesse kõnekeelde, kuid erialavaldkonna väliselt võib töökeele kasutamisel tekkida terminoloogilisi vastuolusid. Tuleb sellega arvestada, et uued teoreetilised vahendid loovad ainult võimalused, mida saab ära kasutada insenerlahendustes. Rohelepe majanduses eeldab muutusi väljakujunenud insenervalikutes, et vältida pöördumatuid ökoloogilisi muutuseid. Samuti on jätkusuutlikkus ja innovatsioon ehitatud keskkonnas kaks peamist võimalust loodussäästlike lahenduste kasutamisele võtmiseks. Kaasaegsed majanduse väljakutsed on oluliselt seotud energiatõhususe suurendamise, säästliku energiatarbimise, kliimamuutustega kohanemise ja valmisoleku suurendamisega, ringmajanduse ja roheinnovatsiooniga, linnapiirkondade säästva liikuvusega, veemajandusega jne.

# 1 SISSEJUHATUS

## 1.1 STRATIFITSEERITUD VOOLAMINE

Vee ja õhu koosvoolamise protsessid ehitatud keskkonnas võivad olla keerulise iseloomuga mitmel põhjusel: voolamine võib olla turbulentne ning vesi ja õhk võivad mehaaniliselt ehk ilma lahustumata seguneda. Näiteks isevooles torustikus on raskusväli vee- ja õhukihi vahelise sisepinnaga mitteristi, mistõttu arenevad välja veepinna kaldega määratud vooluprotsessid, milles vahepind võib õhu ja vee voolukiiruste teatud erinevuse puhul murduda. Samuti toimub vee ja õhu segunemine kanalisatsiooni astangkaevus, kus tekib valgevesi ja eralduvad vees lahustunud gaasid, mis on inimesele ebameeldivad ja võivad olla tervisele ohtlikud. Praktilisi näiteid vee ja õhu koosvoolamise protsessidest võib tuua veel, aga voolamise hüdraulika valemite matemaatilise lihtsustamise põhjustel eelistatakse hüdraulilistes voolusüsteemides kasutada vabapinda, mis on õhurõhu all ja millele ei avalda õhu liikumine mõju. Tavaliselt ongi avasängis õhuvoolu toime võrreldes pealtkaetud voolusängiga, nagu seda on isevoolne torustik, suhteliselt väike.

## 1.2 VEEVARUSTUS JA KANALISATSIOON

Hüdraulikaalased teadmised on vajalikud erinevates inseneriteaduse valdkondades. Raamat keskendub eelkõige hüdraulilistele voolusüsteemidele, millega puutuvad kokku ehitusvaldkonnas tegutsevad veevarustuse- ja kanalisatsiooni-insenerid (VK-insenerid), hüdrotehnika ning teedehituse insenerid. VK-inseneride kompetents on oluliselt seotud nii erinevat tüüpi hoonete veevärgi ja kanalisatsiooni kui ka veevarustuse ja kanalisatsiooni välisvõrgu ehitiste ja seadmete valimise ning rajamisega. VK-ehitiste tehniliste lahenduste väljatöötamisel tuleb lisaks insener-tehnilistele arvutustele pidada silmas ka sotsiaalseid ja majanduslikke aspekte ning keskkonnahoidu. Praktikas tuleb sageli voolamise hüdraulika ülesandeid käsitleda kui optimeerimisülesandeid, milles seostatakse teoreetilised teadmised toor-, joogi-, reo-, sademe-, дренаaži- ja heitvee vastava kasutamise, tootmise, juhtimise, tarbimise, kogumise, puhastamise ja ärajuhtimise kohta nende tegevuste erinevate sotsiaalsete, majanduslike ja keskkonnamõjudega. Näiteks ei pruugi kõrge põhjavee taseme või geotehniliste tingimuste tõttu olla võimalik sademevett immutada või kinnistu piiratud ala tõttu seda suuremahuliselt akumuloida. Seega tuleb kaaluda ka muid variante, et leida osapooli rahuldav lahendus. Optimaalse lahenduse leidmine on vajalik ka keskkonna- ja sotsiaalsest aspektist, kuna immutamine ebasobivas kohas võib põhjustada põhjavee saastumist või uputusi naaberkiinnistutel. Isevoolse kanalisatsiooni projekteerimisel tuleb võrrelda kaeviku rajamissügavuse suurenemisega kaasnevaid ehituskulusid pumpla paigaldamise ja sellega kaasnevate

eksploatatsioonikuludega. Voolamise hüdraulikat rakendatakse ka loodusliku veeringluse käigus vihmana linna valgalale langenud vee ehk vihmavee kasutamisel ehitatud keskkonnas. Voolamise hüdraulikat rakendatakse veevarustuses ja kanalisatsioonis alates veehaardest kuni heitvee väljalasuni. Veevarustuses kasutatakse Eestis joogiveena kas põhjavett (Tartu, Pärnu ja teised linnad) või pinnavett (Tallinn ja Narva). Nii põhja- kui pinnaveehaardest võetud vesi pumbatakse veetöötlusjaama, kus see läbib olenevalt toorvee kvaliteedist erinevaid puhastusetappe. Veetöötlusjaamast, milles toimub joogivee tootmine toorveest, pumbatakse vesi läbi vee jaotamise süsteemi tarbijateni, kust see peale kasutamist vee kogumise süsteemi ehk kanalisatsiooni juhitakse. Joogivee kvaliteediga vesi kogutakse puhtaveereservuaaridesse, millest see pumbatakse välisveevõrgu kaudu hooneteni ning sisevõrgu kaudu tarbijateni. Reovesi (tarbijate poolt kasutatud vesi) juhitakse üldjuhul isevoolselt kanalisatsiooni, mille kaudu see läbi peapumpla reoveepuhastisse juhitakse. Vee kogumise süsteemis võib reovesi seguneda sademeveega. Kanalisatsiooni välisvõrgus kasutatakse vajadusel ka kanalisatsioonipumplaid, et vähendada torustike rajamissügavust. Veepuhastusjaamades kasutatakse nii surve- kui ka vabavoolseid puhastusseadmeid või puhastusprotsessi etappe. Ka reoveepuhastis läbib reovesi erinevaid puhastusetappe, kus vee puhastamine on seotud erinevate hüdrauliliste süsteemidega. Pärast puhastusprotsessi juhitakse heitvesi tagasi loodusesse. Seda võib teha näiteks läbi süvamerelasi, veekogusse juhtimise või pinnasesse immutamise kaudu. Looduslikes voolu- ja seisuveekogudes muutub heitvesi elupaikade veeks. Heitvee koguse suurenemisega karmistuvad ka nõuded heitveekvaliteedile reoveepuhastuses, mis on seotud suubla reostuskoormuse vähendamisega.

### 1.3 HÜDRAULIKAST EESTIS

Eestis on hüdraulika arendamisega olnud seotud peamiselt Tallinna Tehnikaülikool ja Eesti Maaülikool. Esimese eestikeelse hüdraulikakäsitluse „Tallinna Tehnikumi loengukonspekt“ (1923) (VIIDE 1.1) kirjutas ja emakeelsele terminoloogiale pani aluse August Velner (1884–1952). 1967. aastal ilmunud raamatu „Hüdraulika“ koostajaks on Leo Tepaks (VIIDE 1.2). Mahuka õpiku hüdraulikast „Hüdraulika ja pumbad“ (1995) autoriteks on Aleksander Maastik, Heiti Haldre, Tiit Koppel ja Leopold Paal (VIIDE 1.3). Ilmunud on eestikeelseid teoreetilise sisuga raamatuid, mis on olulisel määral seotud hüdraulika erinevate teemadega, nt „Hüdromehaanika“ (1997), mille autoriks on Kustav Laigna (VIIDE 1.4). Voolamise hüdraulika teemasid on selgitatud samuti TTÜ Mereakadeemia hüdromehaanika õpikus „Rakenduslik hüdromehaanika“ (2019) (VIIDE 1.5).

Veevarustuse ja kanalisatsiooniga seotud lahendusi ja hüdraulilisi arvutusi on kajastatud mitmes eestikeelses raamatus. Erialane õpik kõrgematele õppeasutustele ilmus 1968. aastal, mille autoriteks on Ain Aitsam, Arnold Kõiv, Leopold Paal, Harri

Tibar ja Harald Velner (VIIDE 1.6). Hilisem õpik „Veevarustus ja kanalisatsioon“ ilmus 1981. aastal, mille autoriteks on Leopold Paal, Harald Mölder ja Harri Tibar (VIIDE 1.7). Käesolev raamat selgitab voolamise hüdraulika lahendusi olemasoleva (või olemas olnud) veevarustuse ja kanalisatsiooni, teedeehituse ja hüdrotehniliste ehitiste funktsioneerimise põhiselt. Uudne lähenemine on vajalik ka seetõttu, et tänapäeva hüdraulilised voolusüsteemid on muutunud kompleksemaks ning keskkonnatingimused on ajas muutunud. Numbrilise modelleerimise võimalusi hüdraulikas on oluline tutvustada, et lihtsustada hüdrauliliste voolusüsteemide analüüsis tuntud empiiriliste valemite kasutamist.

## 1.4 LINNA VEESÜSTEEMID JA KLIIMA

Linnastumisega seoses on aegade jooksul kasvanud vett mitteläbilaskvate pindade osakaal tiheasustusega aladel, peamiselt linnades. Taolisteks pindadeks on näiteks linnatänavad, parkimisplatsid, väljakud ja hoonete katused, aga ka muud ehitustegevuse tõttu kas kaetud või tihendatud pinnasega alad. Võrreldes looduslike tingimustega, kus valdav osa langenud sademetest kas liigub seis- või vooluveekogudesse, imbub pinnasesse või aurustub tagasi atmosfääri, moodustab linnatingimustes valdava osa pinnaärvool. Linnastumine on oluliselt muutnud looduslikku veeringlust, mille tagajärjel on märkimisväärselt tõusnud hüdrauliline koormus sademeveetorustikele ja -pumplatele. Kliimamuutuste tõttu koguneb linnatingimustes rohkem sademevett, mis võib mõjutada nii õhu niiskusraamitu kui ka pinnase küllastumist veega. Kaetud pindade tõttu on muutunud loodusliku vee dünaamika linnades ning see on mõjutanud ka bioloogilist mitmekesisust. Stratifitseeritud voolamise hüdraulika võimaldab kasutusele võtta erinevate omadustega vee (näiteks soolasema ja magedama vee, ingl. *saline water and fresh water*) koosvoolamise süsteeme, mis lubab looduslikku vett linnas paremini käidelda, näiteks kasutada hoonete kaugjahutuses. Sademeveetorustike läbimõõdud on piiratud ja intensiivse vihmaaju korral võivad tekkida lokaalsed uputused, mille tagajärjeks on linnaalade üleujutused. Torustike läbilaske võime võib oluliselt muutuda suuremate veehulkade tingimustes, kus torustikus toimub õhu ja vee koosvoolamine. Samuti võib eeldada, et mida suurem on kõvakattega alade osakaal linnaalast, seda suurem on ka torude uputuste ja linnaalade üleujutuste oht. Kaasaegse arusaama järgi on Eesti territooriumil eriti ohtlik sademete hulk 30 mm või rohkem ühe tunni või lühema aja jooksul ning 50 mm või rohkem 12 tunni või lühema aja vältel (VIIDE 1.8, „Eesti ilma riskid“). Eesti territooriumi kliimastenaariumide (VIIDE 1.9, „Eesti tuleviku kliimastenaariumid aastani 2100“) alusel sademete hulgad on kasvutrendis. Vastavalt Eesti Maaülikooli uuringule (VIIDE 1.10, „Sademeveesüsteemide projekteerimise aluste kaasajastamine“), on valingvihmad Eestis intensiivistumas, keskmiselt 4% kümnendis olenemata vihma kestusest. Oluline on vältida pöördumatuid ökoloogilisi



muutuseid, mis võivad linnaaladel olla seotud kõvakattega alade suurenemisega. Kaasaegsed väljakutsed ehitatud keskkonnas on samuti oluliselt seotud kliimamuutustega kohanemise ja valmisoleku suurendamisega, ringmajanduse ja roheinnovatsiooniga, linnapiirkondade säästva liikuvusega, veemajandusega jne.

## 1.5 VIHMAVEE JÄTKUSUUTLIK KÄITLEMINE

Kliimamuutused võimendavad linnastumise jätkumisega kaasnevaid keskkonna, majanduse ja sotsiaalseid probleeme ning vastavaid mõjusid, mis on seotud sademevee käitlemisega. Näiteks on linnades kasutusel ühisvoolised vee kogumise süsteemid, milles voolab nii reovesi kui ka sademevesi. Lahkvoolse kanalisatsiooni rajamine on lihtsam linna uutes arenduspiirkondades. Seetõttu tuleb kliimamuutustega seotud ohtude vähendamiseks ja riskide maandamiseks ümber mõtestada sademevee ärajuhtimise põhimõtted. Eesmärgid linnakeskkonnas on:

- Vähendada sademetest põhjustatud hüdraulilist koormust rajatistele;
- Muuta veeringlus linnakeskkonnas võimalikult looduslähedaseks.

Kujunenud olukorra leevendamiseks annavad juhised Eesti Vabariigi standardid (VIIDE 1.11, „Väliskanalisatsioonivõrk“), milles on esitatud tingimused sademevee käitlemiseks vastavalt võimalustele:

- sademevee kogumine ja kasutamine;
- sademevee immutamine samal alal, kus sademevesi tekib;
- sademeveest vabanemine, kasutades looduslähedasi lahendusi nagu rohealad, viibeitiigid, vihmaaiad, imbakraavid ja muud lahendused, mis võimaldavad sademeveest vabaneda eelkõige maastikukujundamise kaudu, vältides sademevee reostumist;
- sademevee äravoolu aeglustamine, viivitamine (viibeaja pikendamine) enne selle ärajuhtimist;
- sademevee juhtimine torustikku, rakendades vajaduse korral enne suublasse juhtimist äravoolu aeglustust ja puhastust;
- valingvihmadest põhjustatud sademevee üleujutuste vältimine ja vähendamine.

Looduslähedasteks meetoditeks on rohepindade kasutamine ehitistes, näiteks katusehaljastus, tiigid, tehismärgalad, imbsüsteemid, filtersüsteemid, avatud kanalid, kraavid, vihmaaiad ja vett läbilaskvad pinnakatted. Riskide maandamiseks linnaruumis võivad vajalikuks osutada äravooluteede kavandamine tulvavete kontrollitud ärajuhtimiseks, multifunktsionaalsete alade kavandamine vihmavee kontrollitud paisutamiseks vms. Linnaala ja veesüsteemide lahenduste integreerimiseks võib kasutada insenertarkvara (VIIDE 1.12).

Integreeritud sademevee süsteemid koosnevad torustikest ja eelpool mainitud looduslähedastest käsitusviisidest või sademevee äravoolu aeglustavatest ja akumuleerivatest rajatistest. Modelleerimine on vajalik tehislake ja looduslike

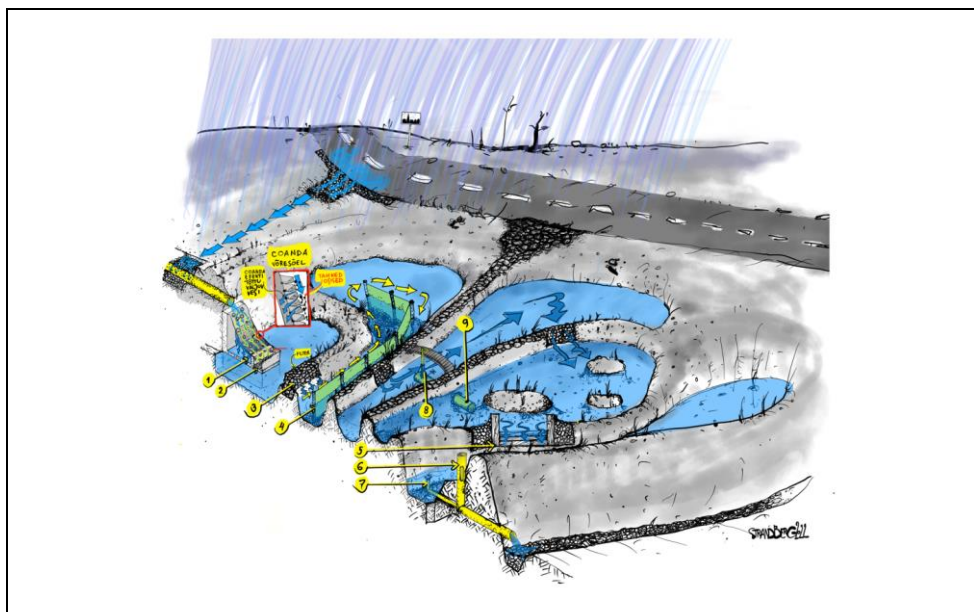
voolusüsteemide koosfunktsioneerimise puhul, kuid hüdraulilisi kontrollarvutusi tehakse ka üksikutele objektidele.

Integreeritud lahenduste osad võivad olla:

- voolamine mittekõvapinnaga kraavis (koos imbumisega);
- voolamine kraavides läbi takistuste (taimed, kaskaadid);
- aeglustustiigid, kuhu vesi koguneb ja hiljem aeglaselt ära voolab;
- väljavool torust kraavi või tiiki;
- sisse- ja väljavoolud akumulatsioonirajatistes;
- avad ja ülevoolud.

## 1.6 INSENERTEHNILISED LAHENDUSED

Raamatus on esitatud mitmeid voolamise hüdraulika lahendusi, mis on seotud ehitatud veesüsteemide tehnilise arvutamisega. Oluline täiendus võrreldes varasemate raamatutega on numbriliste arvutuskeemide loomine tuntud survevoolu, vabavoolu, ülevoolu, läbivoolu, lainete, vooluhüppe ja muude valemite põhjal.



JOONIS 1-1 Sademevee ärajuhtimise integreeritud lahendus. 1. Coanda võrekaev, 2. Prahikogumise süvend, 3. Jämedast puistematerjalist filter, 4. Vee liikumisteed pikendav membraan, 5. Veenivood reguleeriv pais, mis on muudetava kõrgusega (šandoor), 6. Ülevoolutoru juhuks, kui märgalapuhasti vee reservuaar on liigtäitunud, 7. Ühtlast väljavoolu tagav äravoolutoru, 8. Siiber ja 9. Tiikide veetasemeid reguleeriv muldkehast läbivoolutoru. (Illustratsioon: Marek Strandberg)

Õpikus on igale põhiülesandele lisatud kirjeldus, mis selgitab ülesande tulemuste seost praktiliste küsimustega, mis kerkivad veevarustuse, kanalisatsiooni, tee-ehituse, hüdrotehnilise ehitise projekteerimisel, renoveerimisel ja ekspertiisis. Näiteks ehitatud veesüsteemi võib siduda: vee tootmisega – nagu toorveest joogivee tootmine, mis toimub veepuhastusjaamas; vee jaotamisega – nagu vee pumpamine läbi joogivee võrgu, milles kasutatakse survetorustikke joogivee tarnimiseks tarbijateni; vee tarbimisega – nagu seda on joogivee kasutamine olmeveeks hoonetes, nt soojaks dušiveeks (kasutamisejärgselt hallvesi) või WC-s (kasutamisejärgselt mustvesi) või nt tööstuses, mille käigus toimub vee reostumine; vee kogumisega – nagu reo- ja sademevee ärajuhtimine hoonetest, linna valgalalt (nt katused, parklad, teed) vms ühisvoolusse või lahkvoolusse kanalisatsiooni, milles kasutatakse peamiselt vabavoolu torustikke, et vesi läbi peapumpla reoveepuhastisse juhtida; vee puhastamisega – nagu reovee töötlemine heitveeks, mis toimub reoveepuhastis ning millest heitvesi juhitakse suublasse. Samuti on ehitatud veesüsteemiga seotud drenaaži vee juhtimine torustikega eelvoolu ja kuivendusvee juhtimine kraavidega eesvoolu.

## 1.7 NUMBRILISED ARVUTUSSKEEMID

Hüdraulilise voolusüsteemi analüüsis on oluline kasutada numbrilisi arvutusskeeme, mis võimaldavad oluliselt laiendada ja lihtsustada voolamise hüdraulikas hästi tuntud empiiriliste valemite rakendust. Empiirilised valemid on piisavalt keerulised astmefunktsioonid muutujatest, nagu seda on hüdraulilised suurused: normaalsügavus, paisutuskõrgus ja muud, ning seetõttu ei ole võimalik voolamise hüdraulika ülesandeid sageli igale muutujale lahendada ehk empiirilistes valemites esinevad otsitavad hüdraulilised suurused ilmutamata kujul. See teebki hüdraulilise voolusüsteemi inseneritehnilise analüüsi just matemaatiliseks keeruliseks. Tehnosüsteemide vooluprotsesside jaoks koostatud arvutitarkvara on hea töövahend juhul, kui tarkvara on lihtsalt kättesaadav ja mudellahendused võimaldavad genereerida vajalike vastuseid vastavalt esitatud tehnilistele tingimustele. Tehnosüsteemide integreeritud ülesannete lahendamiseks tuleb reeglina kasutada mitut voolamise hüdraulika valemit, mille teeb just keeruliseks alg- ja piiritingimuste kasutamine. Mitme vooluprotsessiga seotud ülesande lahendamine ilma numbrilise arvutusskeemita ei ole lihtsalt võimalik. Hästi tuntud empiirilised valemid võimaldavad reeglina lahendada voolamise hüdraulika ülesandeid standardtingimustel, see tähendab etteantud matemaatilises seades, milles määratakse otsitav hüdrauliline suurus vastavalt olemasolevatele andmetele. Kui olemasolevaid andmeid ei ole võimalik hüdraulilise suuruse määramiseks ilmutatud kujul otseselt kasutada, siis kasutatakse ka proovimismeetodit. Hüdraulilise voolusüsteemi numbrilised arvutusskeemid on peamiselt vajalikud empiiriliste valemite lahendamiseks ning lihtsamate

võrrandite süsteemide integreerimiseks. Ehitatud keskkonna süsteemi toimimise kohta võib olla vajalik tekitada informatsiooni (nt numbriline modelleerimine) ka mittestandardtingimustel (eritingimustel). Tehnosüsteemide vooluprotsesside arvutamiseks on vajalikud insenerarvutuste töövahendid, mis ei nõua suurt arvutusvõimsust ja kasutavad olemasolevaid tarkvaralisi rakendusprogramme, nagu näiteks tabelarvutusprogramm.

## 1.8 INTEGREERITUD TEHNOSÜSTEEMID

Veevarustuse ja kanalisatsiooni, hüdrotehnika, tee-ehituse, ja teiste insenererialade õppijatel on tehniliste voolusüsteemide analüüsiks võimalik kasutada õppematerjalides olemasolevate akadeemiliste demonstratsioonülesannete lahendustest tuntuid veevoolu hüdraulika valemeid või oma olemasolevat töökogemust. Voolamise hüdraulika valemeid on keerulisem kasutada mittestandardsetel tingimustel, mis on seotud tehnosüsteemi integreeritud ülesandega (nt torustikus vee juhtimine klapi), erinevate vooluprotsesside koostoimega (nt õhu ja vee koosvoolamine kanalisatsioonitorustikus või sise- ja välisõhu segunemine ventilatsioonitorustikus). Tehnosüsteemide keerukamate vooluprotsesside tarvis arendatakse tänapäeval arvutusliku vedelikedünaamika (ingl. *Computational Fluid Dynamics – CFD*) matemaatilisi töövahendeid, mis kasutavad kontrollmahtude võrguga seotud numbrilisteks arvutusteks peamiselt hüdro- ja aeromehaanika teoreetilisi võrrandeid. Hüdraulika valemite koefitsientide – nagu hõõrdetakistustegur, kohttakistustegur, vooluhulgategur, ülevoolutegur ja muud – määramisel tuleb kasutada turbulentsimudeleid, mis sõltuvad oluliselt vooluprotsessi piiritingimustest ja mõõtmetest. Näiteks võib hüdraulilise voolusüsteemi täieliku toruäitega survevoolu puhul kasutada nn piirdeturbulentsi mudeleid, aga vabapinnaga voolamisele tehnosüsteemis tuleb kasutada nn keeristurbulentsi mudeleid. Hüdraulika valemite koefitsiendid ei ole alati seotud hõõrdejõu toimega hüdraulilises voolusüsteemis ning see võib teha keerukaks takistustegurite kasutamise juhtudel, mida ei ole määratud eksperimentaalselt. Arvutusliku vedelike dünaamika mudelite kasutamine sõltub arvutusvõimsusest, paralleelarvutuse võimalusest, kobararvuti olemasolust, pilvelahendusest ja muust. Kui voolamise hüdraulikas kasutatavad empiirilised valemid võimaldavad peamiselt lahendada ülesandeid piiretega tugevalt suunatud statsionaarse voolamise kohta – nagu näiteks voolamine survetorus või avasängis –, siis arvutusliku vedelike dünaamika mudelid võimaldavad selgitada ka tehnosüsteemides piiretega vähem suunatud vooluprotsesside dünaamikat, nagu näiteks stratifitseeritud vedeliku keerisvoolusid sademevee süsteemi settebasseinis. Siinkohal tuleb märkida, et arvutusliku vedelike dünaamika mudelid võimaldavad lahendada hüdraulilise voolusüsteemi ülesandeid, mille puhul empiiriliste valemite kasutamine on problemaatiline. Näiteks kui avasängi rajatud paisu puhul on

uputamata ülevoolu kohta võimalik kasutada maksimaalse vooluhulga valemist tuletatud ülevoolu põhivalemit, milles on kasutusele võetud ülevoolutegur, siis uputatud ülevool, milles toimub voolamine kogu paisu ulatuses hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga, ei ole hästi määratud ülevoolu põhivalemiga. Samuti võib veeosale mõjuvate erinevate jõudude tõttu esineda olukord, kus paisul puudub statsionaarne ülevoolu juht ehk esineb pooluputatud ülevoolu olukord.

## 1.9 VÕRRANDID JA VALEMID

Raamatus esitatud teooria on jaotatud mitmesse ossa. Voolamise hüdraulika valemite ja võrrandite tutvustatakse vastavalt vooluolukorrale veesüsteemis: statsionaarne voolamine, kvaasistatsionaarne voolamine, mõõdukalt ebahühtlane voolamine, tugevalt ebahühtlane voolamine ja koosvoolamine. Lühidalt selgitatakse hüdrodünaamika põhivõrrandi, voolamise liikumishulga võrrandi kasutamist hüdraulikaülesannete lahendamisel. Raamatu metoodilises osas keskendutakse numbriliste arvutusmeetodite kasutamisele ning insenertarkvara kasutamise võimalustele, sealjuures selgitatakse insenertarkvara koostamise arvutuslikke aluseid. Õpikus esitatud hüdrauliliste voolusüsteemide numbrilised arvutuskeemid võimaldavad testida ka tavakasutuses olevates tarkvarades esitatud lahendusi. Lisaks tutvustatakse arvutusliku vedelikudünaamika teoreetilisi võrrandeid, mille abil on võimalik modelleerida segunevate, lahustuvate vedelike (nt soe ja külm vesi) ja mittelahustuvate vedelike (vesi ja õhk) koosvoolamist.

## 1.10 PÕHIÜLESANDED

Termodünaamika ja mehaanika printsiibid on oma olemuselt lihtsad ja üheselt mõistetavad, kuid nende kasutamine ehitatud keskkonna vooluprotsesside modelleerimisel võib olla keeruline ülesanne, kui tehnosüsteem ise on keeruline – suuremastaabiline, liigendatud, sisaldab liikuvaid tehnilisi detaile (nt klapp või tiivik) või soojuselemente (nt soojusvaheti või küttekeha). Seetõttu on hüdraulilise voolusüsteemi analüüsis oluline kasutada numbrilisi arvutuskeeme, mis võimaldavad laiendada voolamise hüdraulika valemite rakendusala. Astmefunktsiooniga määratud valemülesandeid, milles otsitavad hüdraulilised suurused esinevad ilmutamata kujul, lahendatakse käesolevas raamatus peamiselt iteratsioonimeetodiga. Osatulemistega diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendamine ei ole üldjuhul matemaatiliselt lihtne ülesanne. Seetõttu tuleb paljude ülesannete teoreetilised seaded lihtsustada tasemele, mis võimaldavad integreerida harilikke diferentsiaalvõrrandeid ja kasutada saadud tulemusi vajalike valemite tuletamiseks. Näiteks võib hüperboolset tüüpi diferentsiaalvõrrandite süsteemi numbrilise lahenduse määrata alg- ja piirtingimustel, mis

vastavad vaba- ja survevoolu süsteemides liikuvatele lainetele. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteemi võib teisendada harilikuks diferentsiaalvõrrandiks, kasutades karakteristikute meetodit, mida selgitatakse õpikus muutuva vabapinnaga lainete ning muutuva tihedusega lainete abil. Oluline on teada, et voolamise tehnosüsteemi mõnede elementide nagu reservuaarid ja klapid lisamiseks numbrilisse arvutusskeemi võib kasutada vastavaid piirtingimusi. Samuti on selgitatud viskoelastsete vooluprotsesside modelleerimise võimalusi, kasutades selleks nn kunstliku viskoossusega määratud vastasmõjus olevate veosade teoreetilist mudelit, mida rakendatakse ülevooluga paisu alumise bjeffi vooluhüppe dünaamika visualiseerimiseks. Raamatus esitatud numbriliste arvutusskeemide põhjal võivad õppijad iseseisvalt koostada hästituntud hüdraulikavalemite või -võrrandite süsteemide kohta uusi arvutusskeeme, analüüsivaks hüdrauliliste voolusüsteemide funktsioneerimist nii standard- kui ka eritingimustel. Õpikus esitatud hüdrauliliste voolusüsteemide numbrilisi arvutusskeeme võib kasutada ka insenerarvutuse tarkvaraarenduses. Raamatus keskendutakse siiski voolamise hüdraulika esinduslike ülesannete lahendamisele, mis on vajalik õppetöö läbiviimiseks ülikoolis.

Õpikus esitatud ülesanded on jaotatud viide ossa, kus ülesannete põhivalemite lahendamiseks kasutatakse erinevaid numbrilisi arvutusskeeme. Statsionaarse voolamise ülesannetes on arvestatud peamiselt viskoossuse toimega. Mittestatsionaarse voolamise ülesannetes on eraldi arvestatud nii veepinna deformatsiooni kui ka kokkusurutavuse ajalise muutustega. Voolamise hüdraulika valemite väärtustamisel andmetega on eelistatud SI-mõõtühikute süsteemi.

**I STATSIONAARNE VOOLAMINE.** Numbriliste arvutusskeemide ülesannete esimeses põhiosas kasutatakse Newton-Raphsoni iteratsioonmeetodit. Numbrilises analüüsis on see meetod tuntud kui funktsiooni nullpunktide („juurte“) määramise matemaatiline algoritm, mis annab reaalarvulise funktsiooni nullpunktide asukohale järjest ligilähedasemaid tulemusi. Numbriliste arvutusskeemidega selgitatakse peamiselt hüdrauliliste voolusüsteemide dimensioonimist, nagu seda on sise-diaametri valimine täieliku torutäitega survevoolule, normaalsügavuse valimine tehnikule ja looduslikule avasängile, suhtelise torutäite valimine kanalisatsioonitorule, paisutus kõrguse valimine ülevoolule, ava mõõtme valimine suuremastaabilisele läbivoolule ja muud.

**II KVAASISTATSIONAARNE VOOLAMINE.** Numbriliste arvutusskeemide ülesannete teises osas kasutatakse Runge-Kutta iteratsioonmeetodit. Numbrilises analüüsis rakendatakse seda meetodit ülesannetes, kus on vajalik arvutada suurusi, mis on määratud harilike diferentsiaalvõrrandite ajalise muutusega. Numbriliste arvutusskeemidega on esitatud lahendused basseini üle seina tühjenemise ja täitumise, tiigi läbivoolu ning mahuti läbi toru täitumise ja tühjenemise kohta. Selles osas on selgitatud ka kanalisatsiooni täitumise ülesannet kahel erineval algingimusel, mille määrab kaevukaane asend. Dünaamilist algingimust on kasutatud

Bernoulli võrrandi ülesannetes ning staatilist algingimust on kasutatud integraalse voolamise liikumishulga võrrandi ülesannetes.

**III MÕÕDUKALT EBAÜHTLANE VOOLAMINE.** Numbriliste arvutusskeemide ülesannete kolmandas osas on kasutatud ilmutatud kujuga lõplike vahede meetodit ehk üht Euleri valemi matemaatiliselt lihtsamat arvutusskeemi. Peamiselt selgitatakse numbrilise arvutusmeetodi rakendamist hüdraulilise voolusüsteemi valemite või võrrandite kasutamisel ruumiliselt muutuvate vooluprotsesside arvutamisel. Numbriliste arvutusskeemidega esitatakse lahendused, arvutamaks välja paisutuse mõjuulatust põhjaastmega avasängis, veeriste truubi veepinna kõrgust erinevate nõlvustega avasängis, ning kanalisatsioonitoru täitumust erinevatel juhtudel nagu seda on iseoolne ja pooliseoolne toru ning täieliku torutäitega voolamine.

**IV TUGEVALT EBAÜHTLANE VOOLAMINE.** Numbriliste arvutusskeemide ülesannete neljandas osas on kasutatud karakteristikute meetodit osatuletistega diferentsiaalvõrrandite integreerimisel kokkusurumatu, st muutumatu tihedusega ja kokkusurutava, st muutuva tihedusega vedeliku mittestatsionaarsetele vooluprotsessidele vastavates tehnosüsteemides, nagu seda on vabavoolu lained avasängis ja survevoolu lained täieliku täitumusega torus. Numbrilises analüüsis on karakteristikute meetod tuntud kui osatuletistega diferentsiaalvõrrandite lahendamise meetod, milles võetakse kasutusele harilik diferentsiaalvõrrand laineparameetritega määratud karakteristiklikele joontele. Numbriliste arvutusskeemidega on esitatud lahendused vabapinna laine liikumise arvutamiseks avasängi lüüsi avamisele ja hüdraulilise lööklaine liikumise arvutamiseks survetorus väljavooluava klapi avamisele.

**V KOOSVOOLAMINE.** Numbriliste arvutusskeemide ülesannete viiendas osas kasutatakse fikseeritud kontrollmahtudega arvutusvõrgu puhul arvutusliku vedeliku dünaamika (CFD) vabavaralist mudelit, et selgitada ehitatud paisu ülevooluprotsessi ehk paisu ülemise ja alumise bjefi veesööstudega ning nendega kaasneva vooluhüppe kujunemist etteantud vooluhulga ja voolusängi paigutatud põhjaastme puhul. Paisu alumise bjefi veesööstuga tekkiva vooluhüppe modelleerimisel kasutatakse vastasmõjus olevate veosade dünaamika (ingl. *Smoothed Particles Hydrodynamics* – SPH) käsitõomudelit ilma arvutusvõrguta. Numbrilise arvutusmudeliga lahendusi esitatakse lailävi ülevoolu näitel. Lisaülesandena selgitatakse stratifitseeritud voolamise hüdraulika valemite kasutamist soolasema ja magedama veemassi jõesuudme künnisest koosülevoolamise ülesandes.

Ülesannete lahendustes kasutatakse eritähistusi põhjusel, et hüdraulilistele suurustele oleks võimalik omistada erinevad tähendusi ka ühe ülesande raames. Näiteks basseini vabapinna paisutuskõrgus üle madala seinaga määratud läve on esitatud maksimaalse vooluhulga valemi kaudu.

## 1.11 LISAD

Raamatus on olemas lisad numbrilistest, analüütilistest ja empiirilistest meetoditest, mida on kasutatud voolamise hüdraulika standard- ja eriülesannetes. Näiteks on selgitatud Lambert W funktsiooni kasutamist hõõrdetakistusteguri määramisel Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrandiga nii täieliku torutäitega survevoolule kui ka osalise torutäitega vabavoolule. Takistustegurite määramiseks on koostatud vastavad graafilised lahendused, nt Moody diagrammid. Samuti on selgitatud looduslike avasängide geomeetria lihtsustamist ruutastmelise ristlõikega ülevoolude arvutamisel. Olemas on empiirilised valemid hõõrdetakistusteguri määramiseks erinevate Reynoldsi arvu vahemikes. Selgitatud on hüdraulika valemite määramatuse arvutamist Manningi vooluhulga valemi hüdrauliliste suuruste kaudu. Olemas on stratifitseeritud voolamise hüdraulika võrrandid, millele lahendamisel on kasutatud arendusi astmerekaks (Taylor ja Maclaurin astmerekad). Raamatus on lisatud mõned olulised ingliskeelsed mõisted, kreeka tähestik, oskussõnad ja enamkasutatud tähistused.

## 1.12 VIITED

1.1 Velner, A. (1923). *Tallinna Tehnikumi loengukonspekt*.

1.2 Tepaks, L. (1967). *Hüdraulika*. Valgus.

1.3 Maastik, A., Haldre, H., Koppel, T. & Paal, L. (1995). *Hüdraulika ja pumbad*. OÜ Greif.

1.4 Laigna, K. (1997). *Hüdromehaanika*. Eesti Merehariduskeskus.

1.5 Laanearu, J. (2019). *Rakenduslik hüdromehaanika*. Tallinna Tehnikaülikooli kirjastus.

1.6 Paal, L., Tibar, H., Kõiv, A., Aitsam, A. & Velner, H. (1968). *Veevarustus ja kanalisatsioon*. Valgus.

1.7 Paal, L., Mölder, H. & Tibar, H. (1981). *Veevarustus ja kanalisatsioon*. Valgus.

1.8 Tammets, T. (koost.), Kallis, A. (toim.). (2008). *Eesti ilma riskid*. Eesti Entsüklopeediakirjastus.

1.9 Luhamaa, A., Kallis, A., Mändla, K., Männik, A., Pedusaar, T. & Rosin, K. (2014). *Eesti tuleviku kliimastenaariumid aastani 2100*. Keskkonnaagentuur.

1.10 Tamm, T., Tamm, O. & Saaremäe, E. (2020). *Sademeveesüsteemide projekteerimise aluste kaasajastamine*. Eesti Maaülikool.

1.11 *Väliskanaliseerimisvõrk. EVS 848:2021*.

1.12 *Stormwater Wet Pond and Wetland Management Guidebook*. (2009). US EPA.



# I STATIONAARNE VOOLAMINE

## 2 TEOORIA. HÜDRAULIKA PRINTSIIBID

### 2.1 PÕHIPRINTSIIBID

#### 2.1.1 VOOLAMISE PIDEVUS

Vooluprotsessi, nagu survevool, vabavool, ülevool, läbivool vms stationaarse voolamise pidevus on määratud võrrandiga

$\rho_{sv} Q_{sv} = \rho_{vv} Q_{vv} ,$	2-1
---	-----

milles hüdraulilisse voolusüsteemi, nagu survetoru, avasäng, ehitatud pais, ehitatud ava vms siseneva vedeliku tihedus on  $\rho_{sv}$  ja vooluhulk on  $Q_{sv}$ , ning sellest väljuva vedeliku tihedus on  $\rho_{vv}$  ja vooluhulk on  $Q_{vv}$ . Vooluhulga võib määrata valemiga:

$Q = u A_e ,$	2-2
---------------	-----

milles voolukiirus on  $u$  ja elavlõige on  $A_e$  valitud hüdraulilise voolusüsteemi lõikes.

Kokkusurumatu vedeliku eeldusel  $\rho_{sv} = \rho_{vv}$  võib voolamise pidevuse lihtsustada võrrandiks:

$Q_{sv} = Q_{vv} ,$	2-3
---------------------	-----

milles hüdraulilise voolusüsteemi sissevooluhulk  $Q_{sv} = u_{sv} A_{esv}$  ja väljavooluhulk  $Q_{vv} = u_{vv} A_{evv}$ . Seda matemaatilist seost tuntakse kui kokkusurumatu vedeliku pidevuse võrrandit stationaarsele voolamisele. See võrrand sobib hästi veevoolu iseloomustamiseks hüdraulilises voolusüsteemis, milles kasutatakse voolamise hüdraulika valemeid.

#### 2.1.2 VOOLAMISE LIIKUMISHULK

Hüdraulilisele voolusüsteemile võib voolamise liikumishulga määrata vastavalt valemitele:

$u_{sv} m_{sv} = u_{sv} (\rho Q) \Delta t,$ $u_{vv} m_{vv} = u_{vv} (\rho Q) \Delta t,$	2-4
---	-----

milles siseneva vedeliku voolukiirus on  $u_{sv}$  ja vedelikuosa mass on  $m_{sv}$ , ning sellest väljuva vedeliku voolukiirus on  $u_{vv}$  ja vedelikuosa mass on  $m_{vv}$ . Vooluprotsessiga

määratud massivoog  $\dot{m} = \rho Q$ , milles vedeliku tihedus on  $\rho$  ja vooluhulk on  $Q$ . Kokkusurumatu voolamise eeldusel  $\rho_{sv} = \rho_{vv} = \rho$ , siseneb ja väljub nõ lekketa hüdraulilisest voolusüsteemist vooluhulk  $Q_{sv} = Q_{vv} = Q$ . Vooluhulga võib määrata vastavalt hüdraulilise voolusüsteemi sissevoolule  $Q_{sv} = u_{sv} A_{esv}$  ja väljavoolule  $Q_{vv} = u_{vv} A_{evv}$ , milles üldjuhul voolukiirused ei ole samad, st  $u_{sv} \neq u_{vv}$ , seda näiteks põhjusel, et elavlõiked muutuvad, st  $A_{esv} \neq A_{evv}$ . Voolukiiruse muutusest sõltuva voolujõu võib määrata valemiga:

$ \vec{F}_F  = u_{sv} \{-\rho u_{sv} A_{esv}\} + u_{vv} \{\rho u_{vv} A_{evv}\} .$	2-5
--	-----

Statsionaarse voolamise määrab hüdraulilises voolusüsteemis voolujõu ( $\vec{F}_F$ ), massijõudude ( $\vec{F}_M$ ) ja pinnajõudude ( $\vec{F}_S$ ) summa:

$\vec{F}_F + \vec{F}_M + \vec{F}_S = 0$	2-6
---	-----

Matemaatilist vektorvõrrandit VALEM (2-6) tuntakse ka kui voolamise liikumishulga võrrandit statsionaarsele voolamisele. Vooluprotsessile puudub voolujõud ühtlase voolamise olukorras, nagu näiteks ühtlane voolamine muutumatu sisemõõtmega survetorus või prismaatilises avasängis.

### 2.1.3 VOOLAMISE MEHAANILINE ENERGIA

Vooluprotsessi mehaaniline energia on määratud valemitega

$PE_{asend} = \rho A_e L g z ,$ $PE_{rõhk} = p A_e L ,$ $KE = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} \rho A_e L u^2 ,$	2-7
---	-----

kus hüdraulilises voolusüsteemis liikuva vedelikuosa potentsiaalne asendienergia on  $PE_{asend}$ , potentsiaalne rõhuenergia on  $PE_{rõhk}$  ja kineetiline energia on  $KE$ . Vedeliku tihedus on  $\rho$ , vooluristlõikega määratud elavlõige on  $A_e$ , vedelikuosa pikkusmõõde on  $L$ , st ajavahemikus liikumiskiirusega läbitud teepikkus, raskuskiirendus on  $g$ , veeosa vertikaalse asendi kõrgus on  $z$  ja voolukiirus on  $u$ . Eeldusel, et hüdraulilises voolusüsteemis vedelikuosa liikumise mehaaniline energia ei muutu võib voolamise mehaanilise energia määrata võrrandiga:

$PE_{asend sv} + PE_{rõhk sv} + KE_{sv} = PE_{asend vv} + PE_{rõhk vv} + KE_{vv} .$	2-8
---	-----

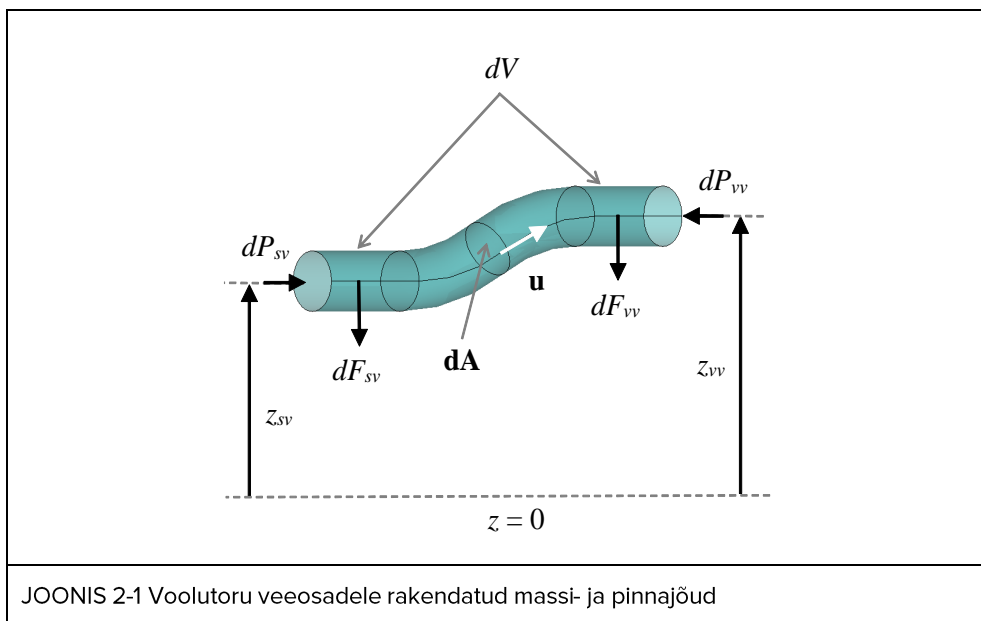
Jagades voolamise mehaanilise energia läbi vedelikuosa kaaluga:  $m g = \rho A_e L g$ , võib voolamise mehaanilise energia määrata võrrandiga, mis on ideaalvoolu Bernoulli võrrand:

$z_{sv} + \frac{p_{sv}}{\rho g} + \frac{u_{sv}^2}{2g} = z_{vv} + \frac{p_{vv}}{\rho g} + \frac{u_{vv}^2}{2g},$	2-9
--	-----

milles voolujoontega moodustatud abstraktne toru, st voolutoru teljega määratud kõrgus, rõhk ja voolukiirus voolutoru sissevoolus on vastavalt  $z_{sv}$ ,  $p_{sv}$  ja  $u_{sv}$  ja väljavoolus on vastavalt  $z_{vv}$ ,  $p_{vv}$  ja  $u_{vv}$ . Matemaatilist avaldist VALEM (2-9) tuntakse ka kui voolamise mehaanilise energia võrrandit veeposa kaaluühiku ( $mg$ ) kohta statsionaarsele voolamisele.

**MÄRKUS.** Mehaanilise energia võrrandit vedeliku voolamisele tuntakse Daniel Bernoulli (1700–1782) perekonnanime järgi kui Bernoulli võrrandit. Bernoulli publitseeris selle tulemuse hüdromehaanikaalases raamatus 1738.a. (VIIDE 2.1, „Hydrodynamica“).

Nii voolamise pidevuse, liikumishulga kui ka mehaanilise energia võrrandit kasutatakse hüdrauliliste voolusüsteemide arvutamises. Statsionaarse voolamise matemaatiliste avaldiste abil võib lahendada mitmeid piirdega suunatud voolamise praktilisi ülesandeid. Kasutatakse ka ajaliselt muutuvate hüdrauliliste suurustega kvaasistatsionaarse voolamise matemaatilisel lihtsustatud lahendusi, nagu näiteks basseini veega täitumine või veest tühjenemine. Voolamise hüdraulika ülesannetes kasutatakse sageli ka voolamise pidevuse võrrandit koos voolamise liikumishulga võrrandiga, mis koos määravadki voolamise mehaanilise energia. Seda on lihtne näidata kineetilise energia muutuse teoreemiga (VIIDE 2.2, „Rakenduslik hüdro-mehaanika“).



Statsionaarse voolamise pidevuse tingimus voolutorule tähendab, et igas ajavahemikus  $dt$  siseneb ja väljub hüdraulilise voolusüsteemi voolutoru otstest sama suur veehulk, st vooluhulk  $dQ = \vec{u} \cdot \vec{dA}$ . Mööda voolutoru liikuva veosa, mille materiaalne ruumala on  $d\vartheta$ , määrab igas ajavahemikus vooluhulga  $dQ = d\vartheta/dt$ .

Summaarne raskusjõu töö voolutorus on määratud massi  $dm = \rho d\vartheta$  liikumisest kõrguste  $z_1$  ja  $z_2$  vahel kui  $g dm (z_{sv} - z_{vv}) = g \rho d\vartheta (z_{sv} - z_{vv})$ .

Summaarne rõhujõudude töö voolutorus on määratud rõhujõudude tööde  $dP_1$  ja  $dP_2$  vahega  $dP_{sv} u_{sv} dt - dP_{sv} u_{sv} dt = p_{sv} dA_{sv} ds_{sv} - p_{vv} dA_{vv} ds_{vv} = (p_{sv} - p_{vv}) d\vartheta$ .

Voolutoru lõiguga määratud kineetilise energia muutus on

$$dm \left( \frac{u_{vv}^2}{2} - \frac{u_{sv}^2}{2} \right) = \rho d\vartheta \left( \frac{u_{vv}^2}{2} - \frac{u_{sv}^2}{2} \right).$$

Massi- ja pinnajõudude tööde, st vastavalt raskus- ja rõhujõudude tööde summa on määratud vedelikuosa kineetilise energia muutusega

$$g \rho d\vartheta (z_{sv} - z_{vv}) + d\vartheta (p_{sv} - p_{vv}) = \rho d\vartheta \left( \frac{u_{vv}^2}{2} - \frac{u_{sv}^2}{2} \right).$$

Võrrandi taandamisel vedelikuosa kaaluühikuga  $g dm = g \rho d\vartheta$  ja peale liikmete grupeerimist indeksite järgi saame tulemuseks ideaalvoolu Bernoulli võrrandi (VALEM (2-9)).

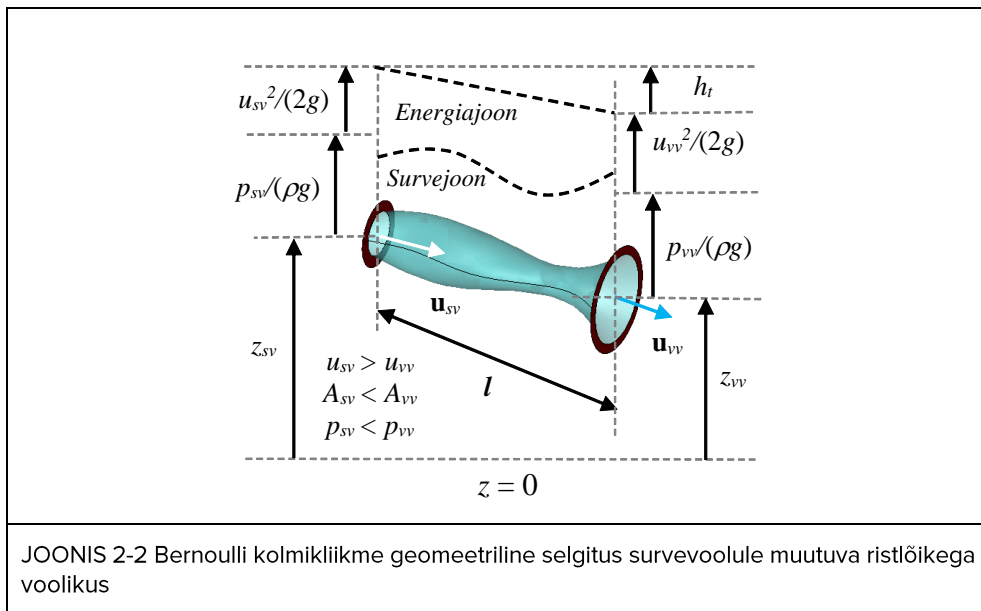
## 2.1.4 BERNOULLI VÖRRAND

Voolamise hüdraulika valemitega arvutatakse hüdraulilise voolusüsteemi osade, nagu survetoru, voolusäng, ehitatud pais, ehitatud ava vms vastavaid vooluprotsesse, nagu survevool, vabavool, ülevool, läbivool vms. Piirdega suunatud reaalvedeliku voolamisel arvestatakse viskoossusega kaasneva piirikihi ja keeriste täiendavat mõju voolamise dünaamikale. Takistusjõu ületamiseks kulub energiat ning seetõttu Bernoulli kolmikliige ei ole konstantne suurus reaalvedeliku voolamise puhul. Voolamise energiakulu määratakse survekaoga  $h_t$ , mis võtab arvesse hüdraulilise voolusüsteemi energiakao voolulõigu ulatuses. Reaalvoolu Bernoulli võrrand vedeliku statsionaarsele voolamisele hüdraulilises voolusüsteemis on

$z_{sv} + \frac{p_{sv}}{\rho g} + \frac{u_{sv}^2}{2g} = z_{vv} + \frac{p_{vv}}{\rho g} + \frac{u_{vv}^2}{2g} + h_t,$	2-10
--	------

milles  $z_{sv}$ ,  $p_{sv}$  ja  $u_{sv}$  on vastavalt kõrgus, rõhk ja voolukiirus hüdraulilise voolusüsteemi sissevoolus (sv) ning  $z_{vv}$ ,  $p_{vv}$  ja  $u_{vv}$  on vastavalt kõrgus, rõhk ja voolukiirus hüdraulilise voolusüsteemi väljavoolus (vv). Vee tihedus on  $\rho$  ja raskuskiirendus on  $g$ .

Ühtlasele voolamisele horisontaalses survetorus vabaneb rõhujõudude tööga salvestunud potentsiaalne energia (rõhuenergia), mis muutub kineetiliseks energiaks. Sarnaselt vabaneb ühtlasel voolamisel avasängis veosa kõrguse vähenemisel potentsiaalne energia (asendienergia), mis muutub kineetiliseks energiaks. Reaalvedeliku voolamisel muutub kineetiline energia vedeliku siseenergiaks voolukiiruse gradientväljaga määratud viskoosel dissipatsioonil, st voolukiiruse jaotusega nii rõhulise kui ka vabapinnaga voolamise korral kaasnevad hõõrdejõud, mis kaotavad vabanenud potentsiaalset energiat (pöördumatu protsess termodünaamikas). Bernoulli võrrandi kasutamisele on oluline, et voolamine oleks statsionaarne ja vedelik ei oleks stratifitseeritud, st tiheduse järgi kihistunud. Mittestatsionaarse reaalvedeliku voolamise teoreetilistele ülesannete lahendamiseks kasutatakse diferentsiaalset voolamise liikumishulga võrrandit, st Navier-Stokesi võrrandit. Mittestatsionaarse voolamise lihtsamate ülesannete lahendamiseks kasutatakse integraalset voolamise liikumishulga võrrandit kontrollmahule. Siinkohal tuleb märkida, et sisehõõrde mõju vedeliku voolamise dünaamikale on oluliselt seotud füüsilise piirde olemasoluga, st vedeliku nõ kleepumisel piirdega kaasneva voolukiiruse jaotusega nii rõhulisele kui ka vabapinnaga voolamise puhul. Voolamise füüsilisel piirdel arenevad välja hõõrdejõud, mis kaotavad vabanenud potentsiaalset energiat veosa liikumisele survetorus või avasängis.



Reaalvoolu Bernoulli võrrandi (VALEM (2-10)) kõik liikmed on pikkuse mõõtühikuga, millest võib järeldada, et need liikmed väljendavad nii kõrgust kui ka voolava vedeliku energiat kaaluühiku ( $m g = \rho A_e L g$ ) kohta ehk erienergiat.

Bernoulli võrrandi liikmeid võib geomeetriselt esitada ja energeetiliselt selgitada järgmiselt:

- $z$  – raskuskõrgus (määrab potentsiaalse asendierenergia),
- $p/(\rho g)$  – rõhukõrgus (määrab potentsiaalse rõhuerienergia),
- $\bar{u}^2/(2g)$  – kiiruskõrgus (määrab kineetilise erienergia).

Vedelikuosa asendierenergia ja rõhuenergia summa määrab potentsiaalse energia  $E_{pot}$ , mis koos kineetilise energiaga  $E_{kin}$  määrab voolamise mehaanilise energia  $E_{meh} = E_{pot} + E_{kin}$ . Bernoulli kolmikliikmega määratud raskus-, rõhu- ja kiiruskõrgus kokku määravad samuti suuruse, mis vastab voolamise mehaanilisele erienergiale. Raskusväljas oleva vedelikuosa vertikaalse liikumisega kaasneb potentsiaalse asendierenergia muutus. Rõhujõudude tööga kaasnev potentsiaalse energia muutus vedelikus vastab pööratavale protsessile termodünaamikas. Seetõttu ongi vedelikuosa potentsiaalne energia määratud asendierenergia ja rõhuenergia summaga.

Voolamise raskus- ja rõhukõrguse resultant fikseeritud võrdlustasandil  $z = 0$  määrab survejoone kõrguse voolulõikes. Ühtlasel voolamisel avasängis sõltub survejoone muutus vabapinna asendist. Statsionaarsel voolamisel survetorus saab survejoone kõrgust (rõhukõrgust) manomeeterrõhu järgi visualiseerida piesomeetri abil. Piesomeeter on rõhukõrguse mõõtur, mille läbipaistva vertikaaloru/vooliku ülemine ots on avatud ja alumine ots on ühendatud madalarõhulise survesüsteemiga. Kiiruskõrgust saab mõõta nn kõvertoriga, mille uputatud otsaava on pööratud vastuvoolu ja läbipaistva osa ava on tõstetud vabapinnast kõrgemale (tuntud ka kui Pitot' voolukiiruse mõõtur).

Energiajoon iseloomustab voolamise mehaanilist erienergiat fikseeritud võrdlustasandi  $z = 0$  suhtes, mis on valitud hüdraulilise voolusüsteemi lõigule. Energiajoone lang voolulõigul  $l$  määrab hüdraulilise langu:

$I_h = \frac{E_{sv} - E_{vv}}{l} = \frac{\left( z_{sv} + \frac{p_{sv}}{\rho g} + \frac{u_{sv}^2}{2g} \right) - \left( z_{vv} + \frac{p_{vv}}{\rho g} + \frac{u_{vv}^2}{2g} \right)}{l},$	2-11
--	------

milles mehaanilise erienergia voolutoru sissevoolus (sv) on

$$E_{sv} = z_{sv} + \frac{p_{sv}}{\rho g} + \frac{u_{sv}^2}{2g},$$

ja mehaanilise erienergia voolutoru väljavoolus (vv) on

$$E_{vv} = z_{vv} + \frac{p_{vv}}{\rho g} + \frac{u_{vv}^2}{2g}.$$

Reaalvoolu Bernoulli võrrandist (VALEM (2-10)) ja hüdraulilise langu avaldisest (VALEM (2-11)) järeldub seos:

$I_h = \frac{h_t}{l}.$	2-12
------------------------	------

Hüdraulilisest seosest VALEM (2-12) järeldub, et hüdrauliline lang on määratud survekaoga voolulõigu pikkuse kohta.

Idealvedeliku voolamisel on hüdraulilises voolusüsteemis energijoon horisontaaljoon ning reaalvedeliku voolamise energijoon saab voolusuunas geodeetiliselt ainult alaneda, põhjusel, et voolutakistustega kaasnevad jõud kulutavad hüdraulilises voolusüsteemis mehaanilist energiat. Järelikult saab hüdrauliline lang olla ainult positiivne suurus:  $I_h > 0$ . Hüdraulilise voolusüsteemi piirdega suunatud muutuva elavlõikega voolamisel muutub ka voolukiirus ning seetõttu muutub ka kineetilise ja potentsiaalse energia suhe voolamises. Näiteks kui voolutoru elavlõige suureneb ja voolukiirus seetõttu väheneb, võib hüdraulilise voolusüsteemi survejoon (ingl. *Hydraulic Grade Line* – HGL), mis kulgeb energijoonest (ingl. *Energy Grade Line* – EGL) kiiruskõrguse võrra allpool, võib ka geodeetiliselt tõusta voolamise suunas. Survejoon ühtib energijaonega tasakaalulise vedeliku olekus, st kui vedelik ei voola.

Hüdraulilise voolusüsteemi survekadu  $h_t$  iseloomustab erienergiat, mis kulub voolutakistustele voolulõigu pikkusele. Kui hüdraulilises voolusüsteemis on vooluhulk  $Q$  teada, siis energiakaoga seotud võimsuse kilovattides (kW-des) võib määrata valemiga:

$P_{ht} = \frac{\rho g Q h_t}{1000}.$	2-13
---------------------------------------	------

Hüdraulilise voolusüsteemi energiakadu (mõõdtühikuga  $[E_{kadu}] = \text{kWh}$ ) ajavahemikus  $\Delta t$  (mõõdtühikuga  $[\Delta t] = \text{tund}$ ) määratakse kui  $E_{kadu} = P_{ht} \Delta t$ . Siinkohal tuleb märkida, et voolutakistus võib olla seotud ka voolujõuga hüdraulilises voolusüsteemis.

## 2.2 RÕHULINE VOOLAMINE

Reaalvedeliku rõhulise voolamise võrrand survetorule, mis ühendab vee-süsteemi osad I ja II, on määratud võrrandiga VALEM (2-10), mis on reaalvedeliku Bernoulli võrrand survevoolule:

$z_{sv} + \frac{p_{sv}}{\rho g} + \frac{u_{sv}^2}{2g} = z_{vv} + \frac{p_{vv}}{\rho g} + \frac{u_{vv}^2}{2g} + h_t,$	2-14
--	------

milles torutelje kõrgus, rõhk ja voolukiirus täieliku täitumusega survetoru sissevoolus on vastavalt  $z_{sv}$ ,  $p_{sv}$  ja  $u_{sv}$ , st hüdraulilise voolusüsteemi anuma I välja-

voolus. Torutelje kõrgus, rõhk ja voolukiirus täieliku täitumusega survetoru väljavoolumis on vastavalt  $z_{vv}$ ,  $p_{vv}$  ja  $u_{vv}$ , st hüdraulilise voolumisüsteemi anuma II sissevoolumis.  $h_t$  on survekadu, mis jagatakse hõrdesurvekaoks  $h_l$  ja kohtsurvekaoks  $h_k$ .

Kui rõhulise voolumise kohttakistust survetoru sisse- ja väljavoolumis mitte arvestada, siis vabapinna kõrgused  $h_1$  ja  $h_2$  hüdraulilise voolumisüsteemi anumates I ja II on vastavalt

$$h_1 = z_{sv} + \frac{p_{sv}}{\rho g} + \frac{u_{sv}^2}{2g},$$

$$h_2 = z_{vv} + \frac{p_{vv}}{\rho g} + \frac{u_{vv}^2}{2g}.$$

Horisontaalses torus on veosa raskuskõrgus määratud seosega:  $z_{sv} = z_{vv}$ . Vastavalt kokkusurumatu vedeliku voolumise pidevuse võrrandile VALEM (2-3) on ilma lekketa ja muutumatu vooluristlõikega, st elavlõikega torus voolukiirus muutumatu hüdrauliline suurus:  $u_{sv} = u_{vv}$ .

Rõhukõrguste vahe ehk rõhuvahekõrgus:

$$\frac{p_{sv}}{\rho g} - \frac{p_{vv}}{\rho g} = \frac{p_{sv} - p_{vv}}{\rho g} = h_{rvk}.$$

Reaalvedeliku Bernoulli võrrandist survevoolumis (VALEM (2-14)) jäeldub seos  $h_{rvk} = h_l$ , milles survekadu  $h_t$  on määratud kui hõrdesurvekadu  $h_l$ .

Hüdraulilise voolumisüsteemi anumaid I ja II ühendava pika toru voolumisüsteemi põhivalem on

$\Delta h = h_l,$	2-15
-------------------	------

milles on kasutusele võetud vabapinna kõrguste  $h_1$  ja  $h_2$  vahe hüdraulilise voolumisüsteemi anumates I ja II:  $\Delta h = h_1 - h_2$ .

## 2.3 VABAPINNAGA VOOLAMINE

Reaalvedeliku energiavõrrand vabapinnaga voolumiselle avasängis või ka pealt kaetud voolumisängis (nt isevoolumis toru), mis on määratud reaalvoolumis Bernoulli võrrandi (VALEM (2-10)) teisendatud kujuga, on reaalvedeliku Bernoulli võrrand vabavoolumis

$z_{sv} + d_0 + \frac{u_{sv}^2}{2g} = z_{vv} + d_0 + \frac{u_{vv}^2}{2g} + h_t,$	2-16
--	------

milles torupõhja kõrgus võrdlustasandi suhtes, normaalsügavus ja voolukiirus isevoolumis toru sissevoolumis osas on vastavalt  $z_{sv}$ ,  $d_0$  ja  $u_{sv}$ . Torupõhja kõrgus võrdlustasandi suhtes, normaalsügavus ja voolukiirus toru väljavoolumis osas on



vastavalt  $z_{vv}$ ,  $d_0$  ja  $u_{vv}$ . Statsionaarse voolamise olukorra  $h_t$  on survekadu, mis jagatakse hõrdesurvekaoks  $h_l$  ja kohtsurvekaoks  $h_k$ . Võrdlustasand isevoolese kaldtorule on valitud tinglikult, mis asetseb tavaliselt torupõhjast allpool.

Kui isevoolese toru kohttakistusi ja mõõdukalt ebaühtlast voolamist (ingl. *gradually varying flow*) toru sisse- ja väljavoolu osades mitte arvestada, siis vabapinna kõrgused tinglikult valitud võrdlustasandi suhtes on vastavalt

$$h_{sv} = z_{sv} + d_0,$$

$$h_{vv} = z_{vv} + d_0.$$

Positiivse languga isevoolesele torule ühtlase voolamise olukorras on  $z_{sv} > z_{vv}$ .

Vastavalt kokkusurumatu vedeliku voolamise pidevuse võrrandile VALEM (2-3) on ilma lekketa ja muutumatu sisemõõtmega pealtkaetud voolusängis, milles vabavoolu ristlõige, st elavlõige ei muutu, on voolukiirused süsteemi sisse- ja väljavoolus seotud kui  $u_{sv} = u_{vv}$ .

Reaalvedeliku Bernoulli võrrandist vabavoolule (VALEM (2-16)) järeldeb seos:  $z_{sv} - z_{vv} = h_l$ , milles survekadu  $h_t$  on määratud kui hõrdesurvekadu  $h_l$ .

Isevoolese toru põhivalem on

$\Delta h = h_l,$	2-17
-------------------	------

milles  $\Delta h = h_{sv} - h_{vv}$ .

## 2.4 PAISUTAMINE AVASÄNGIS

Ideaalvedeliku energiavõrrand vabapinnaga voolamisele üle paisu, st ülevoolele on määratud võrrandi VALEM (2-9) teisendatud kujuga, on ideaalvedeliku Bernoulli võrrand ülevoolele

$h_{pais} + PK \approx h_{pais} + d + \frac{u^2}{2g},$	2-18
--	------

milles  $h_{pais}$  on paisu kõrgus,  $PK$  on paisutuskõrgus ja  $d$  on veekihi sügavus paisu lävel,  $g$  on raskuskiirendus ja  $u$  on voolukiirus paisu lävel. Ideaalvedeliku Bernoulli võrrandis ülevoolele VALEM (2-18) on eeldatud, et paisu ülemises bjefis on voolamise kineetiline energia oluliselt väiksem potentsiaalsest energiast. Potentsiaalne erienergia paisu ülemises bjefis on määratud suurusega  $h_{pais} + PK$ .

Hüdraulilise vabavoolu režiimil, mis vastab kriitilisele voolamisele ( $Fr = 1$ ), määratakse voolukiirus nelinurkristlõikega voolusängis valemiga, mis vastab madalvee kiirusele:

$u = \sqrt{g d}$ .	2-19
--------------------	------

Paisutuskõrguse  $PK$  võib määrata ideaalvedeliku Bernoulli võrrandist ülevoolule (VALEM (2-18)) ja madalveelaine liikumiskiiruse valemist (VALEM (2-19)):

$$h_{pais} + PK = h_{pais} + d + \frac{g d}{2 g},$$

$$PK = d + \frac{d}{2} = \frac{3}{2} d,$$

$$d = \frac{2}{3} PK.$$

Vastavalt vooluhulga valemile VALEM (2-2) määratakse nelinurkrislõikega voolusängis laiusena  $w$  vooluhulk valemiga:

$Q = u d w$ .	2-20
---------------	------

Nelinurkrislõikega voolamise ehk nelinurkelavlõikega ülevoolu voolukiirus paisul määratakse valemiga:

$u = \sqrt{g d} = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} (PK)^{\frac{1}{2}}$ .	2-21
--	------

Nelinurkse rislõikega voolusängi paigutatud paisule võib määrata paisutamise vooluhulga kui nelinurkelavlõikega voolamisele. Ideaalvoolu maksimaalse vooluhulga valem on

$Q = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w$ .	2-22
---	------

Paisutuskõrguse järgi vooluhulga määramise valemit nimetatakse maksimaalse vooluhulga valemiks juhul kui paisu lävel vastab hüdrauliline vabavoolu režiim kriitilise voolamise tingimusele  $Fr = 1$ . Reaalvedeliku voolamise paisutamisel täiendatakse maksimaalse vooluhulga valemit VALEM (2-22) vooluhulgateguriga  $C_d < 1$ . Ideaalvedeliku voolamise tingimisel on vooluhulgategur  $C_d = 1$ .

Nelinurkse elavlõikega ülevoolu maksimaalse vooluhulga valem reaalvoolule on

$Q = C_d g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w$ ,	2-23
---	------

milles  $Q$  on vooluhulk,  $C_d$  on vooluhulgategur,  $g$  on raskuskiirendus,  $PK$  on paisutuskõrgus ja  $w$  on nelinurkava laius voolusängi paisu asukohas.

Ülevoolu põhivalemi võib esitada teisendusega:

$$Q = C_d g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}} w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}} = C_d^* w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}},$$

$Q = C_d^* w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}},$	2-24
---	------

milles ülevoolutegur on

$$C_d^* = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}}.$$

**MÄRKUS.** *Ideaalvedelik voolamisele vastavas ülevooluteguris valitakse  $C_d = 1$ , millest järeldub, et vastav ülevoolutegur on*

$$C_d^* = \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0,385.$$

## 2.5 SURVEKADUDE LIIGITUS

Reaalvoolu Bernoulli võrrand (VALEM (2-10)) määrab survekadu  $h_t$  voolutakistusteks kuluva mehaanilise erienergia ehk energiakao. Sõltuvalt voolutakistusest liigitatakse survekaod hõrdesurvekaoks  $h_l$  ja kohtsurvekaoks  $h_k$ .

**MÄRKUS.** *Hüdraulilise voolusüsteemi energiakao määramiseks on kasutusel ka mõiste rõhukadu  $\Delta p_t$ , mis sõltuvalt voolutakistusest liigitatakse kas hõrderõhukadu  $\Delta p_l$  ja kohtsurvekaoks  $\Delta p_k$ . Vt raamat „Veevarustus ja kanalisatsioon“ (1968), mille autorid on Ain Aitsam, Arnold Kõiv, Leopold Paal, Harri Tibar ja Harald Velner (VIIDE 2.3).*

Vedeliku voolamisega pikas survetorus või voolusängis kaasneb vedeliku viskoosne „kleepumine“ piirdega ja sisehõõrdumine vedelikukihtide vahel. Turbulentses voolamises lisandub energiakulu voolupiirde turbulentses piirikihis. Need vedeliku voolamise protsessid määravad hõrdesurvekaid  $h_l$ . Reaalvedeliku voolamisega kaasnevad hõrdejõud, mis kaotavad hüdraulilise voolusüsteemi mehaanilist energiat. Sisehõõrde mõju vedeliku voolamise dünaamikale on oluliselt seotud füüsilise piirde olemasoluga, st hüdraulilise voolusüsteemi piirdega kaasneb voolukiiruse jaotus, mis tekitab voolamisele sisetakistuse.

Piirdega suunatud voolamise ristlõike või voolusuuna järsul muutumisel võib voolamine piirdelt eralduda ja sellega kaasnevad keerised (pöörise ja pöörisevabad keerised), mis põhjustavad samuti voolamises energiakadu, mis on seotud turbulentsi ja lainetega. Tavaliselt määravad turbulentsi keerised kohtsurvekaid  $h_k$ . Kusjuures kohttakistuse mõju hüdraulilises voolussüsteemis ei pruugi

olla lokaalne, seda põhjusel, et kohttakistuse asukohas võivad välja areneda pöörisevabad keerised, mis muudavad voolamise mittestatsionaarseks, st laineliseks.

Voolamise energiajoon alaneb hõõrdetakistuse toimel püsivalt, mida pikem on voolulõik, seda suurem on hõõrdesurvekao arvuline väärtus. Kohttakistus muudab aga energiajoont nõ astmelisemalt (JONIS 2-2).

Hüdraulilises voolusüsteemis määratakse survekadu kõigi voolusüsteemi osade survekadude, st hõõrde- ja kohtsurvekadude summana:

$h_t = \sum h_l + \sum h_k .$	2-25
-------------------------------	------

Hüdraulilise voolusüsteemi survekao valemite VALEM (2-25) kasutatakse nii surve- kui ka- vabavoolu energiakao määramiseks. Pealt avatud voolusängis (avasängis) või pealt kaetud voolusängis (isevoolne toru) võib kohttakistuse mõju esineda lainena (nõ pöörisevaba keerisena) ja olla seega ajaliselt muutuva toimega. Hüdraulilises voolusüsteemis võib kaasneda voolamise mittestatsionaarsus, kui kohttakistused on süsteemis paigutatud üksteisele liiga lähedale. Näiteks veesõlmes tuleb survetoru seadmete, nt vooluhulgamõõtur, ventiilid vms vahele valida vähemalt viis toru diameetrit. Survekadu sõltub oluliselt Reynoldsi arvust. Voolamisele täieliku täitumusega ümartorus määratakse Reynoldsi arv valemiga:

$Re = \frac{u d_s}{\nu} ,$	2-26
----------------------------	------

milles  $u$  on voolamise ruumkiirus (VALEM (2-2)),  $d_s$  on ümartoru sisemõõde, st sisediameeter ja  $\nu$  on kinemaatiline laminaarne viskoossustegur.

Hõõrdesurvekadu ümartorus võib määrata Darcy survekao valemiga

$h_l = \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g} ,$	2-27
--	------

milles  $\lambda$  on hõõrdetakistustegur,  $l$  on täistäitumusega survetorule valitud lõigu pikkus,  $d_s$  on toru sisediameeter ja  $u$  on voolamise keskkiirus.

**MÄRKUS.** *Hõõrdetakistustegur on mõõtühikuta suurus  $[\lambda] = 1$ .*

Kohtsurvekadu võib määrata Weisbachi survekao valemiga

$h_k = k_L \frac{u^2}{2g} ,$	2-28
------------------------------	------

milles  $k_L$  on kohttakistustegur.

**MÄRKUS.** *Kohttakistustegur on mõõtühikuta suurus  $[k_L] = 1$ .*

Hõõrdetakistusteguri ja kohttakistusteguri väärtused sõltuvad voolamise tingimustest, millest üks tähtsamaid on voolamise režiim, st laminaarne ja turbulente voolamine.

## 2.6 TAKISTUSTEGURID

Hüdraulilise voolusüsteemi survekadu  $h_t$  määratakse valemiga VALEM (2-25), milles võib hõõrdesurvekao määrata Darcy valemiga VALEM (2-27) ja kohtsurvekao määrata Weisbachi valemiga (VALEM (2-28)). Pika torustiku (või ka avasängi) energiakadu on peamiselt määratud hõõrdesurvekaoga (ingl. *major loss*, *major head loss*) võrreldes seda kohtsurvekaoga (ingl. *minor loss*, *minor head loss*). Hüdraulilise langu  $I_h$  kaudu võib voolukiiruse täistäitumusega survetorus määrata valemiga:

$u = \sqrt{\frac{2g}{\lambda} d_s I_h},$	2-29
--	------

milles  $d_s$  survetoru sisediaameeter,  $g$  on raskuskiirendus,  $\lambda$  on hõõrdetakistustegur ja  $I_h$  on hüdrauliline lang.

Täieliku torutäitega ümartoru hüdrauliline raadius on määratud valemiga

$R_h = \frac{A_e}{\chi} = \frac{\pi (d_s^2 / 4)}{\pi d_s} = \frac{d_s}{4},$	2-30
---	------

milles  $A_e$  on elavlõige ja  $\chi$  on märgpiire.

Vastavalt voolukiiruse valemile VALEM (2-29) ja hüdraulilise raadiuse valemile VALEM (2-30) võib voolukiiruse täieliku torutäitega survetorus määrata valemiga:

$u = \sqrt{\frac{8g}{\lambda} R_h I_h}.$	2-31
--	------

Chézy tegur määratakse valemiga:

$C_{Ch} = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}.$	2-32
---------------------------------------	------

Võttes kasutusele Chézy teguri valemi VALEM (2-32) täieliku täitumisega survetoru voolukiiruse valemis VALEM (2-31) võib voolukiiruse määrata valemiga:

$u = C_{Ch} \sqrt{R_h I_h}.$	2-33
------------------------------	------

Hüdrauliliselt karedale voolamisele hüdraulilises voolusüsteemis võetakse kasutusele Manningi karedusskaala valem:

$C_{Ch} = \frac{R_h^{1/6}}{n_M},$	2-34
-----------------------------------	------

milles  $R_h$  on hüdrauliline raadius ja  $n_M$  on Manningi karedustegur.

**MÄRKUS.** *Hüdraulika valemities kasutatakse ka hüdraulilist diameetrit:  $D_h = 4 R_h$ .*

Voolukiiruse täistaitumusega survetorus võib määrata Manningi voolukiiruse valemiga:

$u = \frac{R_h^{2/3} I_h^{1/2}}{n_M}.$	2-35
--	------

Manningi vooluhulga valem määratakse kui Manningi voolukiiruse (VALEM (2-35)) ja elavlõike ( $A_e$ ) korrutis:

$Q = u A_e = \frac{R_h^{2/3} A_e I_h^{1/2}}{n_M}.$	2-36
--	------

Manningi voolukiiruse valemit VALEM (2-35) ja Manningi vooluhulga valemit VALEM (2-36) kasutatakse peamiselt eeldusel, et voolamine toimub hüdrauliliselt kareda piirdega torus, ning seejuures hõõrdetakistustegur ei sõltu otseselt Reynoldsi arvust (VALEM (2-26)). Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna jaoks võib Manningi karedusteguri määrata valemiga:

$n_M = \sqrt{\frac{\lambda}{8g}} R_h^{1/6}.$	2-37
--	------

Täielikult turbulentsel voolamisele hüdraulilises voolusüsteemis võib kasutada kriteeriumit:

$n_M^6 \sqrt{R_h I_h} \geq 1,1 \cdot 10^{-13}.$	2-38
---	------

**MÄRKUS.** *Takistustegurite valemid VALEM (2-32, 2-33, 2-34, 2-35, 2-37, 2-38) ja valemitele esitatud kriteeriumuid kehtivad SI mõõtühikute süsteemis.*

Turbulentsel voolamisel ümartorus sõltub hõõrdetakistustegur lisaks Reynoldsi arvule ka toru sisepinna materjali omadustest, mis määrabki hüdrauliliselt kareda või hüdrauliliselt sileda piirdega voolamise tingimused uuele torule. Vee keemilistest omadustest sõltub oluliselt torupiirde füüsiliste tingimuste muutumine.

Torustiku sisepindade karedus võib ajas tundmatuseni muutuda, millega võib kaasneda torustiku läbilaskevõime vähenemine. Korrosioon, setted, biokile vms suurendavad reeglina toru sisepiirde karedust. Seetõttu võetakse hõõrdetakistuse määramisel turbulentsele voolamisele kasutusele suhteline karedus  $k_s/d_s$  (või suhteline siledus  $d_s/k_s$ ).  $k_s$  on torupiirde absoluutkaredus (ka nõ liivatera mõõde, millega kaasneb voolupiirde pinna takistus uues torus,  $[k_s] = \text{m}$ ). Hõõrdetakistusteguri võib määrata graafiliselt Reynoldsi arvu ja suhtelise kareduse kaudu (vt Moody diagrammi joonist (JOONIS 3-2)).

Voolamise hõõrdesurvekao ja kiiruskõrguse suhtarvu võib esitada torustiku konstruktsiooniliste mõõtmetega määratud kordaja (torulõigu pikkus / toru sisedia-meeter) ning Reynoldsi arvu ja suhtelise kareduse funktsioonina:

$\frac{h_l}{u^2} = \frac{l}{d_s} \text{funktsioon} \left( \text{Re}, \frac{k_s}{d_s} \right),$	2-39
--	------

milles funktsioon Reynoldsi arvust (**Re**) ja suhtelisest karedusest ( $k_s/d_s$ ) määrab Darcy hõõrdetakistusteguri:

$$\lambda = \text{funktsioon} \left( \text{Re}, \frac{k_s}{d_s} \right).$$

**MÄRKUS.** Darcy hõõrdetakistusteguri tähenduses kasutatakse käesolevas raamatus mõistet hõõrdetakistustegur.

## 2.7 SURVETORU TAKISTUSTEGURID

Erinevate Reynoldsi arvude ja täieliku täitumusega ümartoru piirde suhtelise kareduse väärtustele võib hõõrdetakistusteguri määrata Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrandiga:

$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right),$	2-40
--	------

mis kehtib hästi Reynoldsi arvu vahemikus  $4 \cdot 10^3 < \text{Re} < 1 \cdot 10^9$ .

**MÄRKUS.** Colebrook-White'i võrrandit (VALEM (2-40)) kasutatakse toru sise-diaameetri ( $d_s$ ) asemel ka hüdraulilist diameetrit ( $D_h$ ). Täieliku täitumusega ümar-torule kehtib seos:

$$D_h = 4 R_h = \frac{4 A_e}{\chi} = 4 \left( \frac{\pi d_s^2}{4} \right) \left( \frac{1}{\pi d_s} \right) = d_s,$$

milles survevoolu elavloige on  $A_e$  ja märgpiire on  $\chi$ .

Hõõrdetakistusteguri määramiseks rõhulisele voolamisele sileda piirdega täistäitumusega torus (ka isevoolesele täieliku torutäitega juhul) võib kasutada Blasiuse hõõrdetakistuse valemit:

$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}},$	2-41
--	------

mis kehtib hästi ümartoru Reynoldsi arvu vahemikus  $4 \cdot 10^3 < Re < 1 \cdot 10^5$ .

Hõõrdetakistusteguri määramiseks kareda piirdega täieliku täitumusega torus (ka isevoolesele täieliku torutäitega juhul) võib kasutada Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valemit:

$\lambda = \frac{0,25}{\left[ \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,7} + \frac{5,74}{Re^{(9/10)}} \right) \right]^2},$	2-42
--	------

mis kehtib hästi ümartoru Reynoldsi arvu vahemikus  $5 \cdot 10^3 < Re < 1 \cdot 10^8$  ja suhtelise kareduse vahemikus  $1 \cdot 10^{-6} < k_s/d_s < 1 \cdot 10^{-2}$ .

Hõõrdetakistusteguri määramiseks hüdrauliliselt kareda piirdega täieliku torutäitega ümartorus (ka isevoolesele täieliku torutäitega juhul) võib kasutada Manningi kloonvalemit:

$\lambda = 12,6992 \frac{g n_M^2}{d_s^{5/6}},$	2-43
--	------

mis vastab hästi hõõrdetakistusteguri väärtustele Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnas.

## 2.8 AVASÄNGI TAKISTUSTEGURID

Vabapinnaga voolamise puhul võib hõõrdetakistusteguri määrata samuti erinevate empiiriliste valemiga, milles toru sisediaameeter ( $d_s$ ) on asendatud hüdraulilise raadiusega ( $R_h$ ). Ümartoru hüdrauliline raadius  $R_h = d_s/4$ , millest järeldub ümartoru sisediaameetri jaoks valem  $d_s = 4 R_h$  ja Reynoldsi arv  $Re = 4 u R_h/\nu = 4 Re_{vs}$ .

Vabavoolule erinevate voolusängi Reynoldsi arvu ( $Re_{vs}$ ) ja voolusängi piirde, millest on välja jäetud vabapind, suhtelise kareduse, st voolusängi suhtelise kareduse ( $k_s/R_h$ ) väärtustele võib hõõrdetakistusteguri määrata Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonvõrrandiga:



$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{\mathbf{Re}_{vs} \sqrt{\lambda}} \right),$	2-44
--	------

mis kehtib hästi voolusängi Reynoldsi arvu vahemikus  $1,0 \cdot 10^3 < \mathbf{Re}_{vs} < 0,25 \cdot 10^9$ .

Hõõrdetakistusteguri määramiseks hüdrauliliselt sileda piirdega voolusängis, millest on välja jäetud vabapind, võib kasutada Blasiuse hõõrdetakistuse kloonvalemit:

$\lambda = \frac{0,2237}{\sqrt[4]{\mathbf{Re}_{vs}}},$	2-45
--	------

mis kehtib hästi voolusängi Reynoldsi arvu vahemikus  $1,0 \cdot 10^3 < \mathbf{Re}_{vs} < 0,25 \cdot 10^5$ .

Hõõrdetakistusteguri määramiseks hüdrauliliselt kareda piirdega voolusängis, millest on välja jäetud vabapind, võib kasutada Swamee-Jaini hõõrdetakistuse kloonvalemit:

$\lambda = \frac{0,25}{\left[ \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,8} + \frac{1,6484}{\mathbf{Re}_{vs}^{9/10}} \right) \right]^2},$	2-46
---	------

mis kehtib hästi voolusängi Reynoldsi arvu vahemikus  $1,25 \cdot 10^3 < \mathbf{Re}_{vs} < 0,25 \cdot 10^8$ .

Hõõrdetakistusteguri määramiseks hüdrauliliselt kareda piirdega voolusängis (ka isevoolese osalise torutäitega juhul), millest on välja jäetud vabapind, võib kasutada Manningi valemit:

$\lambda = \frac{8 g n_M^2}{R_h^{\frac{2}{3}}},$	2-47
--	------

mis vastab hästi hõõrdetakistusteguri väärtustele Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnas.

## 2.9 FANNINGI TAKISTUSTEGUR

Takistusjõud voolamisele ümartorus sõltub kiirusjaotusest piirde lähedal, mis on määratud hõõrdepingega. Hõõrdesurvekao määramiseks hõõrdepinge kaudu võib kasutada ühtlase voolamise kontrollmahu ülesande valemit. Hõõrdepinge võime määrata kiiruskõrguse kaudu:

$\tau_0 = f \gamma \frac{u^2}{2g} = f \frac{\rho u^2}{2},$	2-48
--	------

milles Fanningi hõõrdetakistustegur on  $f$ , vedeliku erikaal on  $\gamma = \rho g$  ja dünaamiline rõhk on  $\rho g u^2 / (2g) = \rho u^2 / 2$ .

**MÄRKUS.** Fanningi hõõrdetakistustegur on mõõtühikuta suurus  $[f] = 1$ .

Hõõrdesurvekao määramiseks kasutatakse peamiselt Darcy valemit (VALEM (2-27)). Fanningi hõõrdetakistusteguri võib määrata seosega  $f = \lambda/4$ , milles Darcy hõõrdetakistustegur on  $\lambda$ . Täieliku torutäitega voolamise hõõrderõhukao, mis määrab rõhukõrguse ( $h_{rk}$ ) vähenemise torustikus pikki survevoolu veeosa erikaalu ( $\gamma = \rho g$ ) ühiku kohta, võib määrata torustiku piirdele toimiva hõõrdepinge kaudu valemiga:

$\Delta p_l = \tau_0 l \frac{4}{d_s} = \tau_0 l \frac{\chi}{A_e},$	2-49
--	------

mis vastab torule valitud kontrollmahuga määratud ühtlase voolamise gradientrõhujõu ja hõõrdejõu tasakaalu tingimusele:  $\Delta p_l A_e = \tau_0 l \chi$ , st  $\sum \vec{F}_S = 0$  (VALEM (2-6)).

VALEM (2-49) teisenduses on kasutatud hüdraulilise raadiuse ( $R_h$ ) pöördväärtuse seost (VALEM (2-30)):

$R_h^{-1} = \left(\frac{A_e}{\chi}\right)^{-1} = \frac{\chi}{A_e} = \frac{\pi d_s}{\pi (d_s^2/4)} = \frac{4}{d_s}$ , milles toru sisediaameeter on  $d_s$ , elavlõige on  $A_e$  ja märgpiire on  $\chi$ .

**MÄRKUS.** Darcy hõõrdetakistustegurit tähistatakse ka  $\lambda = f_D$ , ning seetõttu võib tähistada ka  $f = f_D/4$ .

## 2.10 SUHTELISED HÜDRAULILISED SUURUSED

Osalise täitumusega torustiku arvutustes eeldatakse, et turbulentsse voolamise hõõrdetakistustegur on määratud Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna tingimustel. Vabapinnaga voolamise pealtkaetud voolusängis, nagu näiteks osalise torutäitega (ott) kanalisatsioon, võib määrata ümartoru suhteliste hüdrauliliste suurustega:

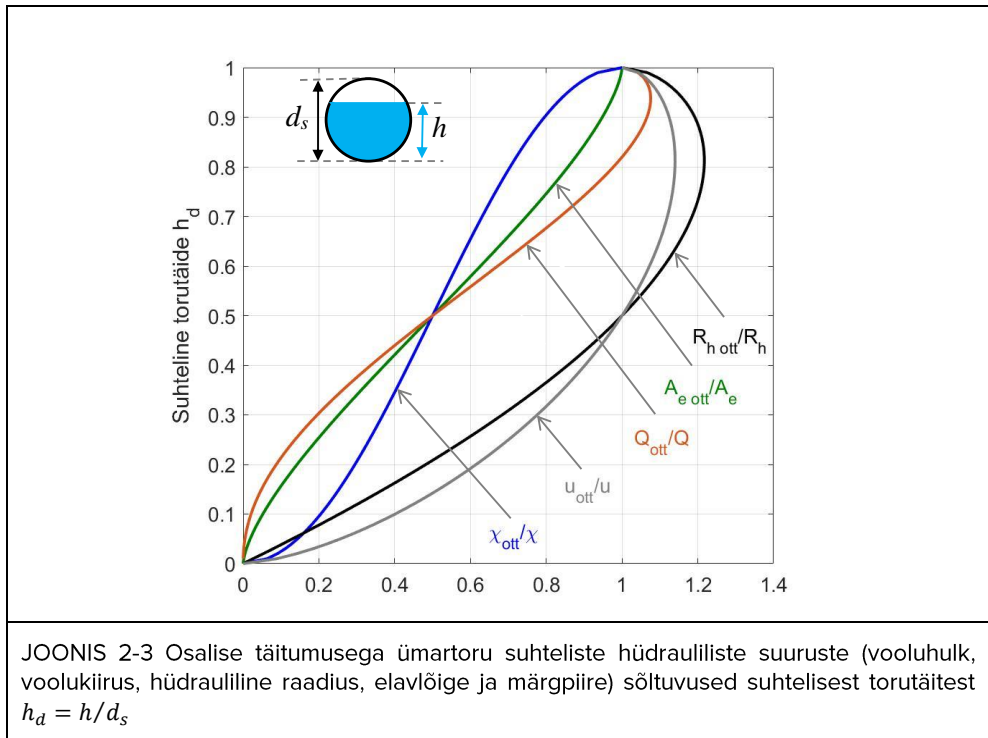
$Q_{ott}/Q$  suhteline vooluhulk ( $Q = A_e C_{Ch} \sqrt{R_h i_0}$ ,  $C_{Ch} = (1/n_M) R_h^{1/6}$ ),

$u_{ott}/u$  suhteline voolukiirus ( $u = Q/A_e = C_{Ch} \sqrt{R_h i_0}$ ),

$A_{e\ ott}/A_e$  suhteline elavlõige ( $A_e = \pi d_s^2/4$ ),

$\chi_{ott}/\chi$	suhteline märgpiire ( $\chi = \pi d_s$ ),
$R_{h\ ott}/R_h$	suhteline hüdrauliline raadius ( $R_h = d_s/4$ ),
$h_d$	suhteline torutäide ( $h_d = h/d_s$ ),

milles osalise täitumusega ümartoru vooluhulk on  $Q_{ott}$ , voolukiirus on  $u_{ott}$ , elavlõige on  $A_{e\ ott}$ , märgpiire on  $\chi_{ott}$  ja hüdrauliline raadius on  $R_{h\ ott}$ , ning täieliku täitumusega ümartoru vooluhulk on  $Q$ , voolukiirus on  $u$ , elavlõige on  $A_e$ , märgpiire on  $\chi$  ja hüdrauliline raadius on  $R_h$ . Chézy tegur  $C_{Ch}$  on määratud Manningi teguri  $n_M$  ja hüdraulilise raadiuse  $R_h$  astmefunktsiooniga, st Manningi kareduskaalaga (VALEM (2-34)).



## 2.11 VIITED

2.1 Bernoulli, D. (1738). *Hydrodynamica*.

2.2 Laanearu, J. (2019). *Rakenduslik hüdroomehaanika*. Tallinna Tehnikaülikooli kirjastus.

2.3 Paal, L., Tibar, H., Kõiv, A., Aitsam, A. & Velner, H. (1968). *Veevarustus ja kanalisatsioon*. Valgus.

### 3 HÕÖRDE TAKISTUSTEGUR

#### 3.1 SURVEVOOL

##### 3.1.1 LAMINAARNE VOOLAMINE

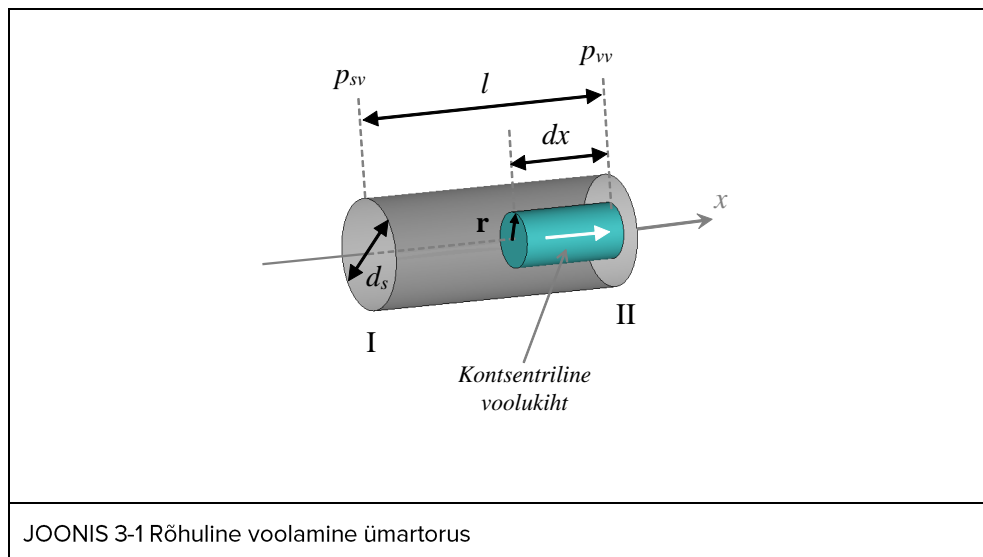
Reaalvedeliku Bernoulli võrrandist survevoolule (VALEM (2-14)), milles survekadu  $h_t = h_l$  ja  $h_k = 0$ , võib määrata hõordesurvekao ühtlasele horisontaalvoolule:

$h_l = \frac{p_{sv} - p_{vv}}{\rho g} = \frac{\Delta p}{\rho g},$	3-1
---	-----

milles  $\Delta p$  on rõhu muutumine survetoru, st rõhkude vahe hüdraulilise voolusüsteemi sissevoolu (sv) ja väljavoolu (vv) ristlõigete vahel.

Fikseerides hüdraulilises voolusüsteemis silindrilise kujuga mahuelemendi, horisontaalse survetoru telje suhtes, võib hõõrdejõu sellele määrata kui  $dF_{Dx} = -\mu (du_x/dr) dS$ , milles silinderkujundi pindala  $dS = 2 \pi r dx$ . Rõhu muutumisega kaasnev resultantjõud määratakse kui  $dP_{Rx} = (-dp/dx) dV$ , milles silinderkujundi ruumala  $dV = \pi r^2 dx$ . Ühtlasele laminaarsele voolamisele ( $Re < 2000$ ) ümartorus võib rõhu- ja hõõrdejõu tasakaalu tingimusest (VALEM (2-6)) tuletada kiirusjaotuse valemi:

$u(r) = -\frac{dp}{dx} \frac{(d_s/2 - r)}{4 \mu} = -\frac{dp}{dx} \frac{(r_s - r)}{4 \mu}.$	3-2
---	-----



JOONIS 3-1 Rõhuline voolamine ümartorus

Poiseuille'i valem võimaldab voolukiiruse  $u$  kaudu määrata rõhu muutumise laminaarsele voolamisele survetorus kui

$\Delta p = 32 \frac{l}{d_s} \frac{\mu u}{d_s},$	3-3
--	-----

milles  $d_s$  on toru sisediaameeter,  $l$  on voolulõigu pikkus ja  $\mu$  on dünaamiline molekulaarne viskoossustegur.

Eespool esitatud valemitest järeldub valem hõõrdesurvekao määramiseks:

$h_l = 32 \frac{l}{d_s} \frac{\mu u}{d_s \rho g} = \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g} \left( 64 \frac{\nu}{u d_s} \right) = \frac{64}{\mathbf{Re}} \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g},$	3-4
---	-----

milles  $\mathbf{Re}$  on Reynoldsi arv survevoolule täieliku torutäitega ümartorus ja  $\nu = \mu/\rho$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur (ka kinemaatiline laminaarne viskoossustegur).

Darcy survekao valemist järeldub, et laminaarsel voolamisel täieliku täitumusega ümartorus on hõõrdetakistustegur määratud Poiseuille'i valemiga:

$\lambda = \frac{64}{\mathbf{Re}}.$	3-5
-------------------------------------	-----

**MÄRKUS.** Fanningi hõõrdetakistustegur ( $f = \lambda/4$ ) on määratud Poiseuille'i valemiga:

$$f = \frac{64/4}{\mathbf{Re}} = \frac{16}{\mathbf{Re}}.$$

Järelikult on laminaarse voolamise hõõrdetakistustegur survevoolule täieliku täitumusega ümartorus pöördvõrdeline Reynoldsi arvuga.

**MÄRKUS.** Mittehorisontaalses survetorus tuleb reaalvoolusuunalist rõhugradienti  $dp/dx'$  täiendada vastavalt toru kaldenurgale  $\Theta$ , raskusjõuga määratud vedeliku erikaaluga  $\rho g$ . Nt positiivse languga torus on rõhu muutus voolusuunalisel lõigul määratud kui  $-dp/dx' + \rho g \sin(\Theta)$ , milles  $x'$  on toru kaldteljesuunaline koordinaat.

### 3.1.2 TURBULENTNE VOOLAMINE

Turbulentsele voolamisele on hõõrdetakistustegur keeruline funktsioon Reynoldsi arvust  $\mathbf{Re}$ , ning torupiirde absoluutkaredusest  $k_s$  ja ümartoru sisediaameetrist  $d_s$ , mis koos määravad torule suhtelise kareduse  $k_s/d_s$ . Erinevate Reynoldsi arvu ( $\mathbf{Re}$ ) ja täieliku täitumusega ümartoru suhtelise kareduse ( $k_s/d_s$ )

väärtustele võib hõõrdetakistusteguri ilmutamata kujul määrata Colebrook-White'i võrrandiga (VALEM (2-40)):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right).$$

Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrandi lahendamiseks kasutatakse numbrilist arvutusskeemi, kuna logaritmivõrrandis on  $\lambda$  ilmutamata kujul, ning seetõttu ei ole hõõrdetakistustegurit võimalik lihtsalt määrata.

Colebrook-White'i võrrandi (VALEM (2-40)) lahendamiseks võib kasutada Lambert W funktsiooni. Selleks võetakse kasutusel uued muutujad:

$$y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

$$b = \frac{k_s/d_s}{3,71},$$

$$a = \frac{2,51}{Re}.$$

**MÄRKUS.** *Vt teadustöö Brkić, Dejan; Praks, Pavel (2019). „Accurate and efficient explicit approximations of the Colebrook flow friction equation based on the Wright  $\omega$ -function“. Mathematics 7 (1): article 34. <https://doi.org/10.3390/math7010034>. ISSN 2227-7390. (VIIDE 3.1).*

Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrand uute muutujatega:

$$y = -2 \log_{10}(b + a y).$$

→

$$-\frac{y}{2} = \log_{10}(b + a y)$$

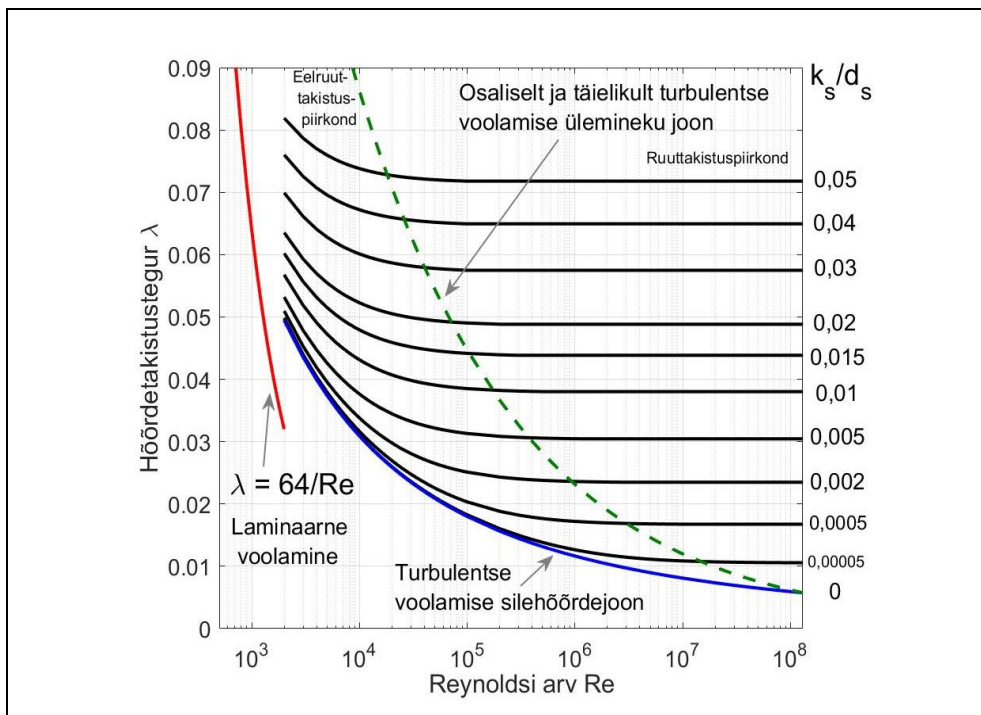
→

$$10^{-\frac{y}{2}} = b + a y$$

$$c = 10^{-\frac{1}{2}}$$

→

$$c^y = b + a y$$



JOONIS 3-2 Moody diagrammi rekonstruktsioon täieliku torutäitega voolamise hõõrdetakistusteguri määramiseks laminaarsele ja turbulentssele voolamisele, mis vastab voolamisele ümardorus. Joonisel on näidatud laminaarse voolurežiimi hõõrdetakistusteguri kõverjoon, ning osaliselt ja täielikult turbulentsse voolamise ülemineku katkendjoon, mis eraldab hõõrdetakistusteguri eelruut- ja ruuttakistuspiirkonda.

Colebrook-White'i võrrandi (VALEM (2-40)) võib esitada Lambert W funktsiooni kaudu:

$$y = -\frac{\text{LambertW}\left(-\frac{\ln(c)}{a} c^{-\frac{b}{a}}\right)}{\ln(c)} - \frac{b}{a}.$$

$$\rightarrow$$

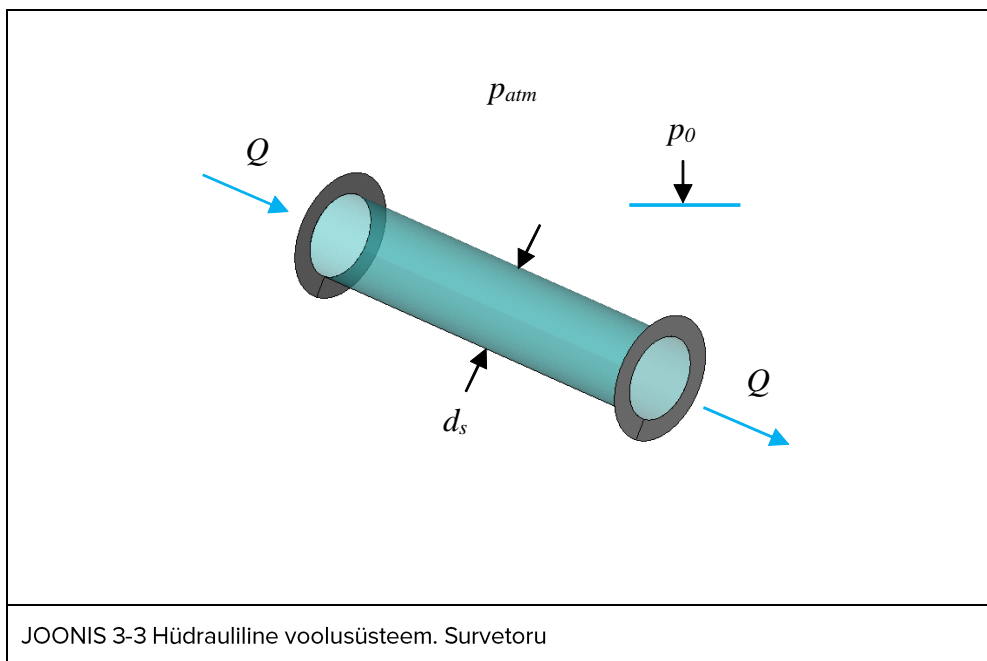
$$\lambda = \left(-\frac{\text{LambertW}\left(-\frac{\ln(c)}{a} c^{-\frac{b}{a}}\right)}{\ln(c)} - \frac{b}{a}\right)^{-2}$$

Vt LISA 2 (Lambert W funktsioon).

### 3.1.3 NÄITEÜLESANNE. HÖÖRDEKISTUSTEGUR

ANTUD. Ümartoruga juhitakse vett hüdraulilises voolusüsteemis. Täieliku täitumusega survetorus sisediameetriga  $d_s = 0,1299$  m, vooluhulk  $Q = 10$  l·s<sup>-1</sup> ning vastav Reynoldsi arv  $Re = 0,9804 \cdot 10^5$ . Toru sisepinna absoluutkaredus  $k_s = 0,0015$  mm. Hüdraulilises voolusüsteemis on 20 °C vesi, mille tihedus  $\rho = 998,2$  kg·m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu = 1,002 \cdot 10^{-3}$  kg·m<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,0 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>. Hüdrauliline voolusüsteem on õhurõhu all  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Määrata proovimismeetodi ja numbrilise arvutusskeemiga hüdraulilise voolusüsteemi hõõrdetakistustegur. Kasutada hõõrdetakistusteguri määramisel Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrandit. Võrrelda hõõrdetakistusteguri väärtust Blasiuse hõõrdetakistuse valemi ja Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valemiga määratud hõõrdetakistustegurite väärtustega.



EELDUSED. Hüdraulilises voolusüsteemis kasutatakse pikka muutumatu ristlõikega ümartoru. Hüdraulilises voolusüsteemis on vee voolamine statsionaarne, survetorus on voolamine ühtlane. Survevoolu kohttakistust toru sisse- ja väljavoolus mitte arvestada, st rõhulise voolamise survekadu on määratud hõõrdesurvekaoga.



## LAHENDUS

### PÕHIVALEMID. Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrand, Blasiusse hõõrdetakistuse valem, Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valem

#### VALEMID

Erinevate Reynoldsi arvu ja täieliku täitumusega toru piirde suhtelise kareduse väärtustele võib hõõrdetakistusteguri määrata Colebrook-White'i võrrandiga (VALEM (2-40)):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right).$$

Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrandi võib teisendada kujule:

$$CW(\lambda) = -2 \sqrt{\lambda} \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right),$$

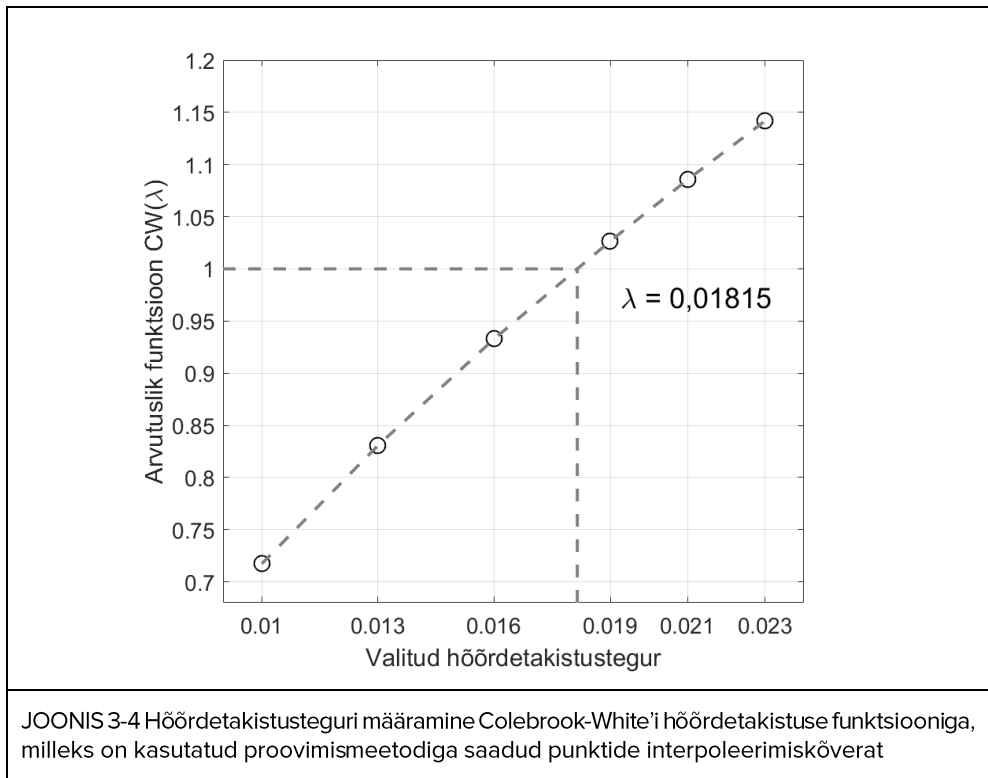
et võtta kasutusele nn Colebrook-White'i hõõrdetakistuse funktsioon  $CW(\lambda)$ .

*Proovimise arvutusmeetod*

ARVUTUS. Hõõrdetakistustegur

Colebrook-White'i hõõrdetakistuse funktsiooniga määratud suurused

	$\lambda$	$Re$	$d_s$ (m)	$Q$ ( $l \cdot s^{-1}$ )	$CW(\lambda)$
i	0,01	$0,9804 \cdot 10^5$	0,1299	10	0,7173
ii	0,013	—   —	—   —	—   —	0,8307
iii	0,016	—   —	—   —	—   —	0,9328
iv	0,019	—   —	—   —	—   —	1,0266
v	0,021	—   —	—   —	—   —	1,0855
vi	0,023	—   —	—   —	—   —	1,1419



Hõõrdetakistustegur Blasiuse valemiga (VALEM (2-41)):

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{0,9804 \cdot 10^5}} = 0,0179 .$$

Hõõrdetakistustegur Swamee-Jaini valemiga (VALEM (2-42)):

$$\lambda = \frac{0,25}{\left( \log_{10} \left( \frac{(0,0015 \text{ mm}/1000)/0,1299 \text{ m}}{3,7} + \frac{5,74}{(0,9804 \cdot 10^5)^{9/10}} \right) \right)^2} = 0,0180 .$$

*Numbriline arvutusskeem. Hõõrdetakistustegur*

*Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod*

**VALEMID**

Veafunktsioon:

$$ERF(z_j) = CW_j - CW ,$$

milles  $z_j$  on arvutuslik hõõrdetakistustegur,  $CW_j$  on arvutuslik Colebrook-White'i hõõrdetakistuse funktsioon ja  $CW$  on etteantud Colebrook-White'i hõõrdetakistuse funktsioon.

Veafunktsiooni tuletis:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{dCW_j}{dz_j},$$

milles on eeldatud, et  $CW = konstant (= 1)$ .

Arvutuslik Colebrook-White'i hõõrdetakistuse funktsioon on määratud kui

$$CW(z_j) = -2 \sqrt{z_j} \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}} \right),$$

milles  $k_s$ ,  $d_s$  ja  $Re$  on konstantsed suurused.

→

$$\begin{aligned} \frac{dERF(z_j)}{dz_j} &= \frac{d}{dz_j} \left( -2 \sqrt{z_j} \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{z_j}} \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}} \right) + \frac{\sqrt{z_j} \frac{2,51}{Re z_j^{3/2}}}{\left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}} \right) \ln(10)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{z_j}} \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}} \right) + \frac{\frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}}}{\left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}} \right) \ln(10)} \end{aligned}$$

Veafunktsioonist suunatud tuletise võtmise reegel:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{0 - ERF(z_j)}{z_{j+1} - z_j},$$

võimaldab kasutusele võtta Taylori valemi 1-järgu tuletise täpsusega:

$$z_{j+1} = z_j - \frac{ERF(z_j)}{\frac{dERF(z_j)}{dz_j}}.$$

Numbrilise arvutuskeemi põhivalemi üldkuju on

$$z_{j+1} = z_j - \frac{CW_j - CW}{-\frac{1}{\sqrt{z_j}} \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}} \right) + \frac{\frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}}}{\left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}} \right) \ln(10)}}.$$

ARVUTUSSKEEM (Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrand)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku hõõrdetakistusteguri valem (iteratsioonmeetodi põhivalem):

$$y_{j+1} = y_j - \frac{CW_j - CW}{-\frac{1}{\sqrt{y_j}} \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{y_j}} \right) + \frac{\frac{2,51}{Re \sqrt{y_j}}}{\left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{y_j}} \right) \ln(10)}},$$

milles  $CW = 1$ .

Arvutusliku Colebrook-White'i hõõrdetakistuse funktsioon:

$$CW(y_j) = -2 \sqrt{y_j} \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{y_j}} \right).$$

ARVUTUS. Hõõrdetakistustegur

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$y_j$ (1)	0,0100	0,0178	0,0182	0,0181	0,0181	0,0181
$CW_j$ (1)	0,7173	0,9896	1,0010	0,9999	1,0000	1,0000

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$y_j$ (1)	0,0181	0,0181	0,0181	0,0181
$CW_j$ (1)	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

VASTUSED

Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrand:  $\lambda = 0,0181$

Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valem:  $\lambda = 0,0180$

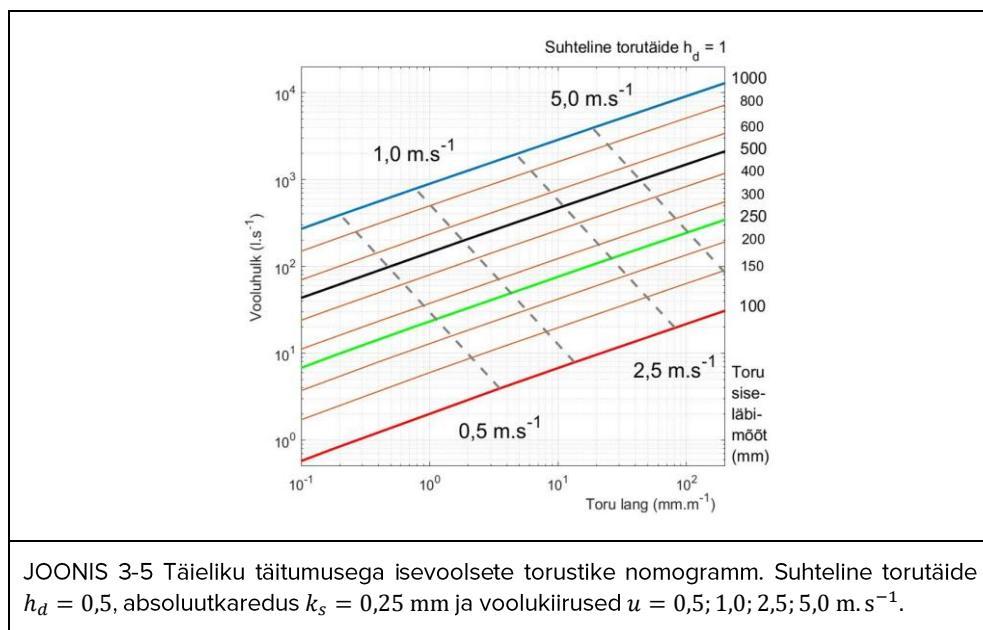
Blasiuse hõõrdetakistuse valem:  $\lambda = 0,0179$

**MÄRKUS.** Turbulentse voolamise takistusele torustikus võib Moodi diagrammi silehõõrdejoone (JOONIS 3-2) lahendite asemel kasutada hõõrdetakistusteguri määramisele Blasiuse valemit (VALEM (2-41)). Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valemis (VALEM (2-42)) tuleb lisaks ümartoru Reynoldsi arvule kasutada ka torustiku sisepiirde suhtelist karedust, mis on hästi teda nõuetele torudele ja hinnanguline nõuetele vanadele torudele.

### 3.1.4 LISAÜLESANNE. ARVUTUSDIAGRAMM

ANTUD. Kanalisatsiooni välisvõrgu ümartorude sisediameeter muutub vahemikus  $d_s = (100 \dots 1000) \text{ mm}$  ja torude lang muutub vahemikus  $i_0 = (0,1 \dots 200) \text{ mm} \cdot \text{m}^{-1}$ . Toru sisepinna materjali absoluutkaredus  $k_s = 0,25 \text{ mm}$ . Hüdraulilises voolusüsteemis on  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Hüdrauliline voolusüsteem on õhurõhu all  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Koostada vastavate skaaladega arvutusdiagramm, st nomogramm isevoolesele täieliku torutäitega voolamisele ümartorudes. Ümartorude sisediameetriteks valida  $d_s = 100 \text{ mm}, 150 \text{ mm}, 200 \text{ mm}, 250 \text{ mm}, 300 \text{ mm}, 400 \text{ mm}, 500 \text{ mm}, 600 \text{ mm}, 800 \text{ mm}$  ja  $1000 \text{ mm}$ . Nomogrammi abstsissitelje langud ja ordinaattelje vooluhulgad on vastavalt  $i_0 = (0,1, 1,0, 10, 100) \text{ mm} \cdot \text{m}^{-1}$  ja  $Q = (1, 10, 100, 1000, 10\ 000) \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ . Lisada joonisele voolukiirused väärtustega  $u = (0,5, 1,0, 2,5, 5,0) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Kontrollida iseseisvalt nomogrammi arvutus tulemust Manningi valemiga.



EELDUSED. Isevoolese täieliku torutäitega voolamisele määrata hõõrdetakistustegur Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrandiga, mille lahendamiseks kasutada vastavat Newtoni iteratsioonmeetodile koostatud numbrilist arvutusskeemi. Manningi valemiga arvutada vooluhulk Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnas.

**PÕHIVALEMID. Darcy hõõrdekao valem, Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrand, Manningi hõõrdetakistuse valem**

## VALEMID

Hõõrdesurvekadu ümartorus on määratud Darcy valemiga VALEM (2-27)

$$h_l = \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g},$$

milles  $\lambda$  on hõõrdetakistustegur,  $l$  on täieliku täitumusega toru pikkus,  $d_s$  on toru sisediameeter ja  $u$  on voolamise keskkiirus. Hõõrdetakistustegur on mõõtühikuta suurus  $[\lambda] = 1$ .

Täieliku torutäitega voolamise hüdrauliline lang on määratud valemiga:

$$\frac{h_l}{l} = I_h = \frac{\lambda}{d_s} \frac{u^2}{2g}.$$

Isevoelse täieliku torutäitega voolamise hüdrauliline lang on määratud toru languga

$$I_h = i_0.$$

→

$$i_0 = \frac{\lambda}{d_s} \frac{u^2}{2g}$$

Voolukiiruse voolamisele ümartorus võib määrata Reynoldsi arvu (VALEM (2-26)) kaudu

$$u = \frac{Re \nu}{d_s}.$$

Vooluhulk (VALEM (2-2)):

$$Q = u A_e,$$

milles elavlõige täieliku täitumusega ümartorule on

$$A_e = \pi \left( \frac{d_s}{2} \right)^2.$$

Erinevate Reynoldsi arvu ja täieliku torutäitega ümartoru suhtelise kareduse väärtustele võib hõõrdetakistusteguri määrata Colebrook-White'i võrrandiga (VALEM (2-40)):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right),$$

milles  $\lambda$  on hõõrdetakistustegur,  $k_s$  on toru sisepinna materjaliga määratud absoluutkaredus,  $d_s$  on toru sisediameeter ja  $Re$  on ümartoru Reynoldsi arv.

Numbriline arvutusskeem. Hõõrdetakistustegur

Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod

ARVUTUSSKEEM (Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrand)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku hõõrdetakistusteguri valem (iteratsioonmeetodi põhivalem):

$$z_{j+1} = z_j - \frac{CW_j - CW}{-\frac{1}{\sqrt{z_j}} \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}} \right) + \frac{\frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}}}{\left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}} \right) \ln(10)}},$$

milles  $CW = 1$ .

Arvutusliku Colebrook-White'i hõõrdetakistuse funktsioon:

$$CW(z_j) = -2 \sqrt{z_j} \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}} \right).$$

Arvutusnäide. Hõõrdetakistustegur

Etteantud hüdraulilised suurused:

$$\nu = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$d_s = 100 \text{ mm}$$

$$Re = 1\,000\,000 = 10 \cdot 10^5$$

$$k_s = 0,25 \text{ mm}$$

ARVUTUS. Hõõrdetakistustegur

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (1)	0,0100	0,0216	0,0249	0,0250	0,0250	0,0250
$CW_j$ (1)	0,6311	0,9308	0,9977	1,0000	0,9999	1,0000

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (1)	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250
$CW_j$ (1)	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000

$$\lambda = 0,025015077994044 \approx 0,0250$$

Voolukiirus

$$u = \frac{(10 \cdot 10^5) \cdot (1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1})}{100 \text{ mm} / 1000} = \frac{(10 \cdot 10^5) \cdot (1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1})}{0,1 \text{ m}} = 13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Elavlõige

$$A_e = \pi \left( \frac{100 \text{ mm} / 1000}{2} \right)^2 = \pi \left( \frac{0,1 \text{ m}}{2} \right)^2 = 0,00785 \text{ m}^2$$

Vooluhulk

$$Q = 13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 0,00785 \text{ m}^2 = 0,102 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 102 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$$

Täieliku täitumusega toru hüdrauliline lang

$$I_h = \frac{0,0250}{100 \text{ mm} / 1000} \cdot \frac{(13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = \frac{0,0250}{0,1 \text{ m}} \cdot \frac{(13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 2,1547 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$$

VASTUSED

$$\lambda = 0,0250$$

$$u = 13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$Q = 102 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$A_e = 0,00785 \text{ m}^2$$

$$I_h = 2,1547 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$$

*Kontrollvalem. Manningi valem*

Hõõrdetakistusteguri määramiseks kareda piirdega täieliku täitumusega ümartorus võib kasutada Manningi valemit (VALEM (2-37)):

$$\lambda = 12,6992 \frac{g n_M^2}{d_s^{\frac{2}{3}}},$$

mis kehtib hästi Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnas (JONIS 3-2). Täieliku täitumusega survetoru hüdrauliline raadius on määratud valemiga:

$$R_h = \frac{d_s}{4}.$$

Manningi karedusteguri võime määrata valemiga:

$$n_M = \sqrt{\frac{\lambda d_s^{\frac{2}{3}}}{12,6992 g}}.$$



Täieliku torutäitega voolamise hüdrauliline lang ( $I_h = h_l/l$ ) on määratud valemiga:

$$I_h = \frac{\lambda}{d_s} \frac{u^2}{2g}.$$

Voolukiiruse isevoelses täieliku täitumusega torus võib määrata Manningi voolukiiruse valemiga VALEM (2-35):

$$u = \frac{R_h^{2/3} I_h^{1/2}}{n_M}.$$

Isevoelsele voolamisele on hüdrauliline lang määratud toru languga, st  $I_h = i_0$ .

Vooluhulga täieliku täitumusega torus võib määrata valemiga:

$$Q = u A_e,$$

milles elavlõige on

$$A_e = \pi \left( \frac{d_s}{2} \right)^2.$$

Voolurežiimi survetoru voolamisele iseloomustatakse Reynoldsi arvuga VALEM (2-26):

$$Re = \frac{u d_s}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $d_s$  on toru sisediaameeter ja  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur. Veevoolule täieliku täitumusega ümartorus vastav kriitiline Reynoldsi arv on 2000, mille juures toimub üleminek laminaarselt voolamiselt turbulentsse voolamisele. Täielikult turbulentsse voolamise, mille juures hõõrdetakistustegur vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnale, määramiseks võib kasutada kriteeriumit (VALEM (2-38)):

$$n_M \sqrt[6]{R_h I_h} \geq 1,1 \cdot 10^{-13}.$$

#### ARVUTUS

Etteantud Reynoldsi arv, hõõrdetakistustegur, voolukiirus ja toru lang:

$$Re = 1\,000\,000 = 10 \cdot 10^5$$

$$d_s = 100 \text{ mm} = 100/1000 \text{ m} = 0,1 \text{ m}$$

$$\lambda = 0,025015077994044$$

$$I_h = 2,1547 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$$

**MÄRKUS.** Kui Reynoldsi arv ja toru sisediameeter on etteantud hüdraulilised suurused, siis on täieliku täitumusega toru voolukiirus teada (näiteülesandes:  $u = 13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

Manningi karedustegur

$$n_M = \sqrt{\frac{0,025015077994044 \cdot (0,1 \text{ m})^{\frac{2}{6}}}{12,6992 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} = 0,0097 \approx 0,01$$

Hüdrauliline raadius

$$R_h = \frac{0,1 \text{ m}}{4} = 0,025 \text{ m}$$

Manningi voolukiirus:

$$u = \frac{(0,025 \text{ m})^{2/3} \cdot (2,1547 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1})^{1/2}}{0,0097} = 13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna kriteerium (VALEM (2-38)):

$$n_M^6 \sqrt{R_h I_h} = 0,0097^6 \cdot \sqrt{0,025 \text{ m} \cdot 2,1547 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}} = 1,879 \cdot 10^{-13} > 1,1 \cdot 10^{-13}.$$

**JÄRELDUS.** Manningi valemit võib kasutada võrdlemisi suurearvuliste Reynoldsi arvu väärtusetega isevoolsele täieliku täitumusega torustikule. Manningi valem kehtib hüdrauliliselt karedale voolamisele survetorustikus.

### 3.1.5 TORUSTIKE NOMOGRAMMID

Hõrderõhukaod erinevast materjalist torustiku osadele võib määrata dünaamilise rõhu, voolukiiruse ja vooluhulga kaudu.

Rõhukõrguse kadu võib survevoolule ümartorus määrata Darcy valemiga VALEM (2-27):

$\Delta h_{rk} = \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g},$	3-6
---	-----

milles  $\lambda$  on hõrdetakistustegur,  $l$  on täieliku täitumusega survetoru pikkus,  $d_s$  on toru sisediameeter ja  $u$  on voolamise keskkiirus. Hõrdetakistustegur on mõõtühikuta suurus  $[\lambda] = 1$ .

Hõrderõhukadu määratakse valemiga:

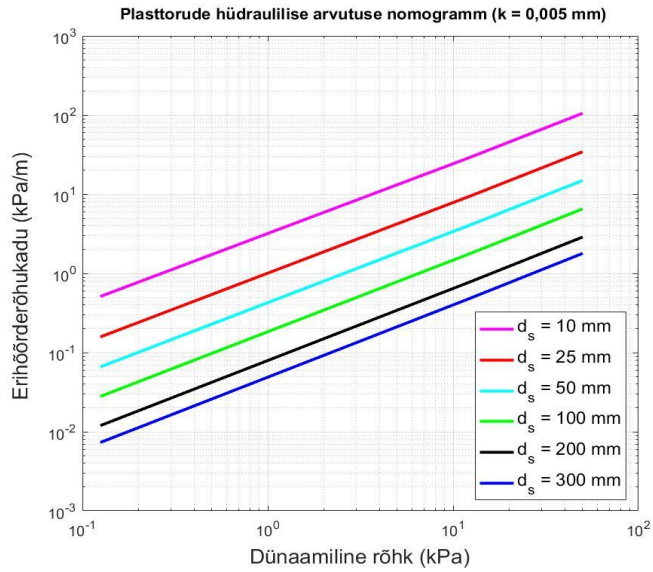
$\Delta p_l = \lambda \frac{l}{d_s} \frac{\rho u^2}{2},$	3-7
--	-----

milles  $\rho$  on vedeliku tihedus ja  $\rho u^2/2$  on dünaamiline rõhk. Hõrdetakistusteguri survevoolule võib määrata Colebrook-White'i võrrandiga (VALEM (2-40)):

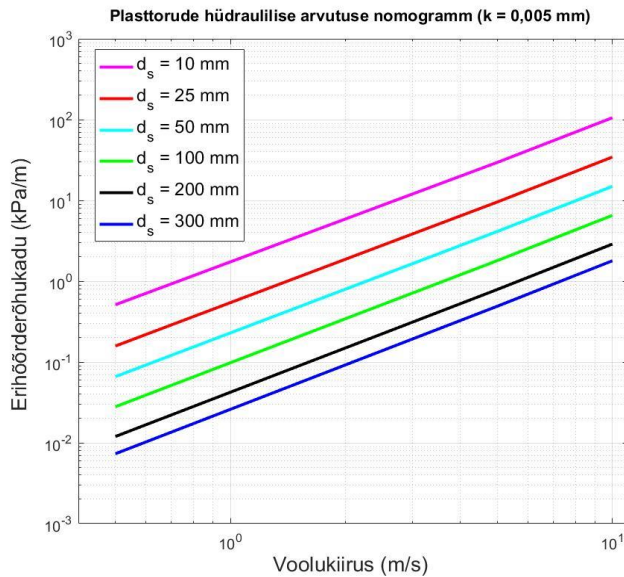
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{\mathbf{Re} \sqrt{\lambda}} \right),$$

milles  $k_s$  on toru sisepinna materjaliga määratud absoluutkaredus,  $d_s$  on toru sisediameeter ja  $\mathbf{Re}$  on ümartoru Reynoldsi arv.

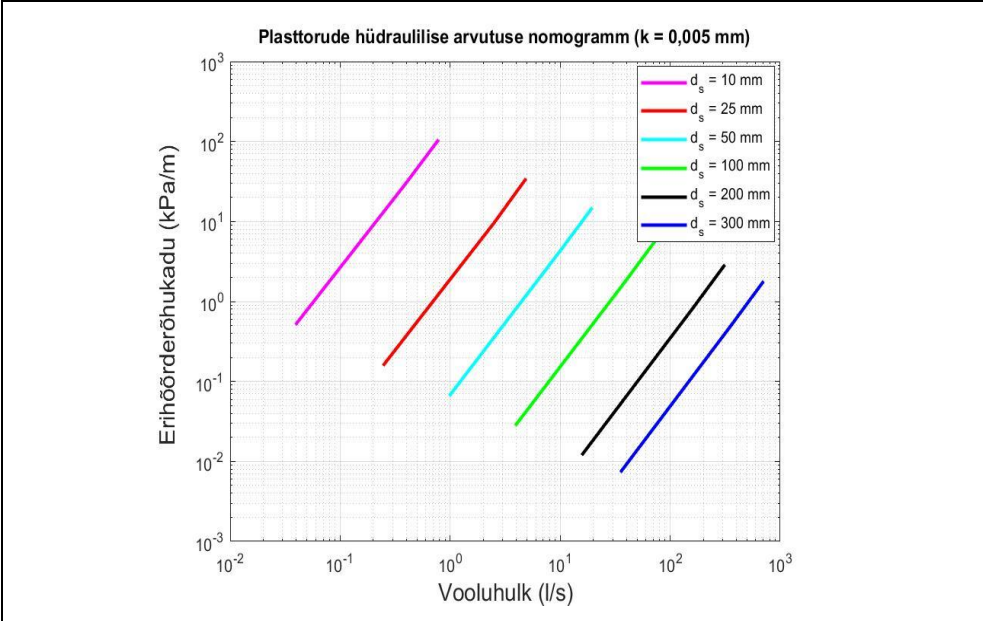
Survetorude arvutamine jaotatakse voolamise rõhukao alusel lühikesteks ja pikkadeks. Pikkades survetorustikes on hõrderõhukadu oluliselt suurem koht rõhukaost. Veevarustuse välisvõrgus võetakse koht rõhukaod arvesse hõrderõhukao suurenemisena (5%...10%).



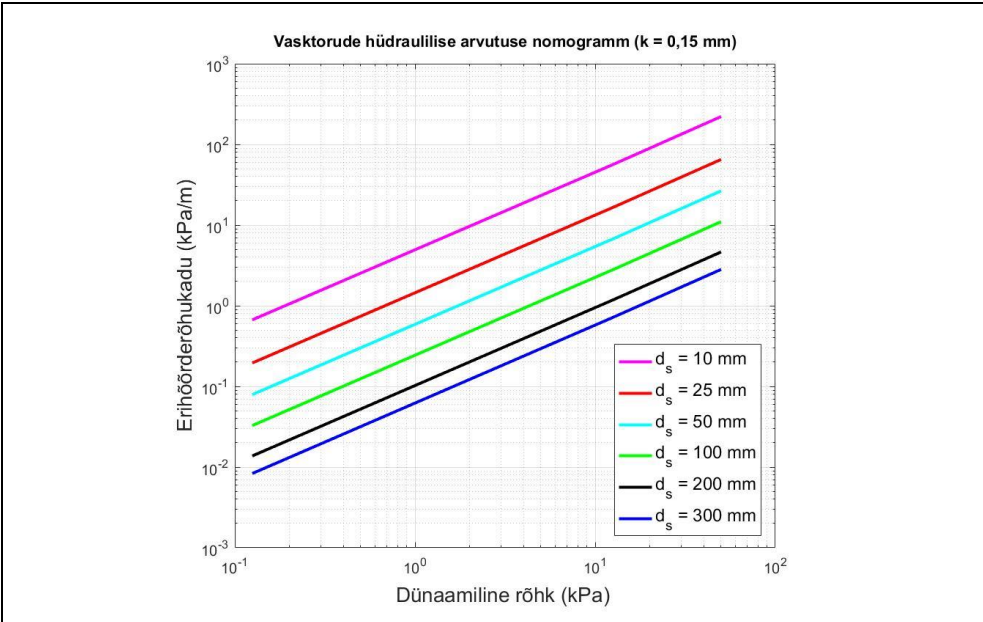
JOONIS 3-6 Täieliku täitumusega rõhuliste plasttorude nomogramm. Erihõõderõhkao sõltuvus dünaamilisest rõhust. Torupiirde absoluutkaredus  $k_s = 0,005 \text{ mm}$  ja torudele valitud sisediameetrid  $d_s = 10; 25; 50; 100; 200; 300 \text{ mm}$ .



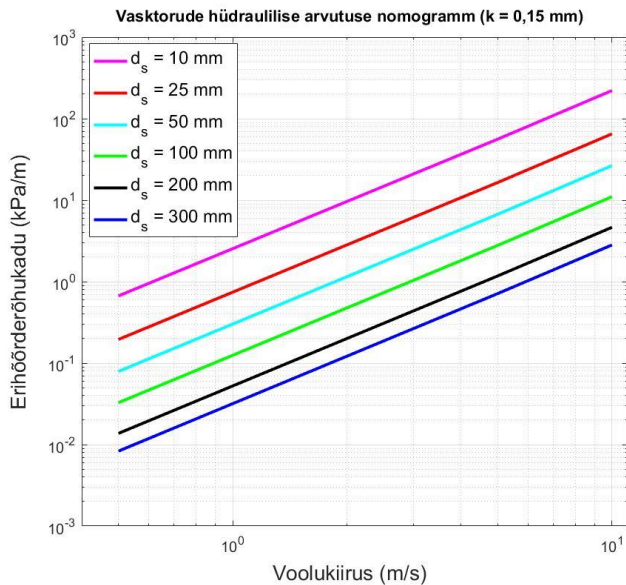
JOONIS 3-7 Täieliku täitumusega rõhuliste plasttorude nomogramm. Erihõõderõhkao sõltuvus voolukiirusest. Torupiirde absoluutkaredus  $k_s = 0,005 \text{ mm}$  ja torudele valitud sisediameetrid  $d_s = 10; 25; 50; 100; 200; 300 \text{ mm}$ .



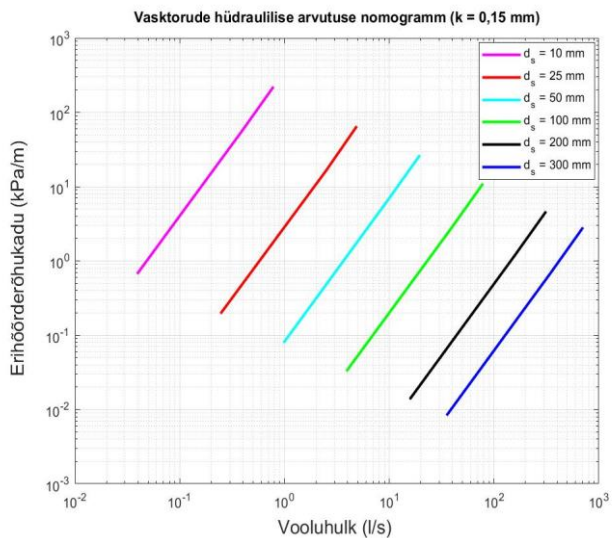
JOONIS 3-8 Täieliku täitumusega rõhuliste plasttorude nomogramm. Erihõõderõhukao sõltuvus vooluhulgast. Torupiirde absoluutkaredus  $k_s = 0,005 \text{ mm}$  ja torudele valitud sisediameetrid  $d_s = 10; 25; 50; 100; 200; 300 \text{ mm}$ .



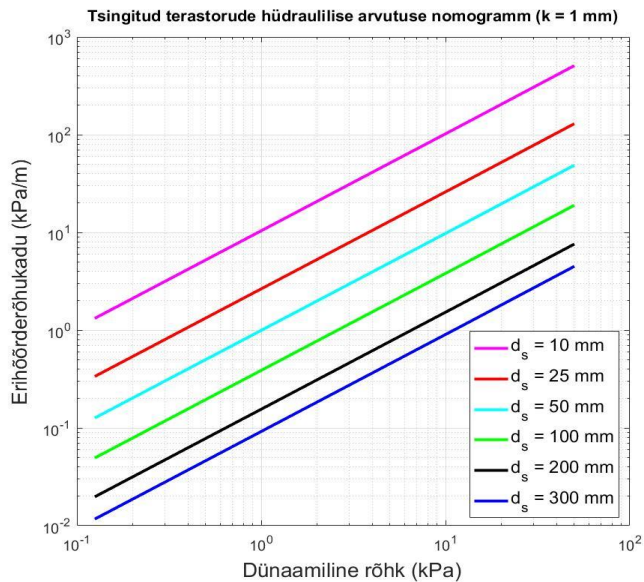
JOONIS 3-9 Täieliku täitumusega rõhuliste vasktorude nomogramm. Erihõõderõhukao sõltuvus dünaamilisest rõhust. Torupiirde absoluutkaredus  $k_s = 0,15 \text{ mm}$  ja torudele valitud sisediameetrid  $d_s = 10; 25; 50; 100; 200; 300 \text{ mm}$ .



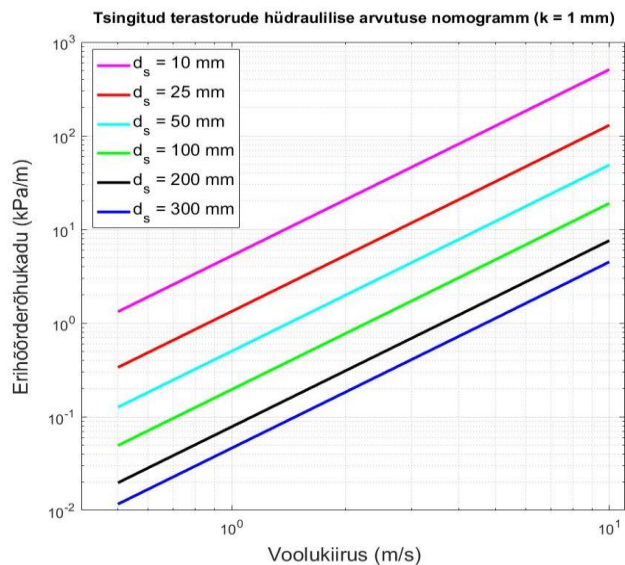
JOONIS 3-10 Täieliku täitumusega rõhuliste vasktorude nomogramm. Erihõrderõhukao sõltuvus voolukiirusest. Torupiirde absoluutkaredus  $k_s = 0,15 \text{ mm}$  ja torudele valitud sise-diaameetrid  $d_s = 10; 25; 50; 100; 200; 300 \text{ mm}$ .



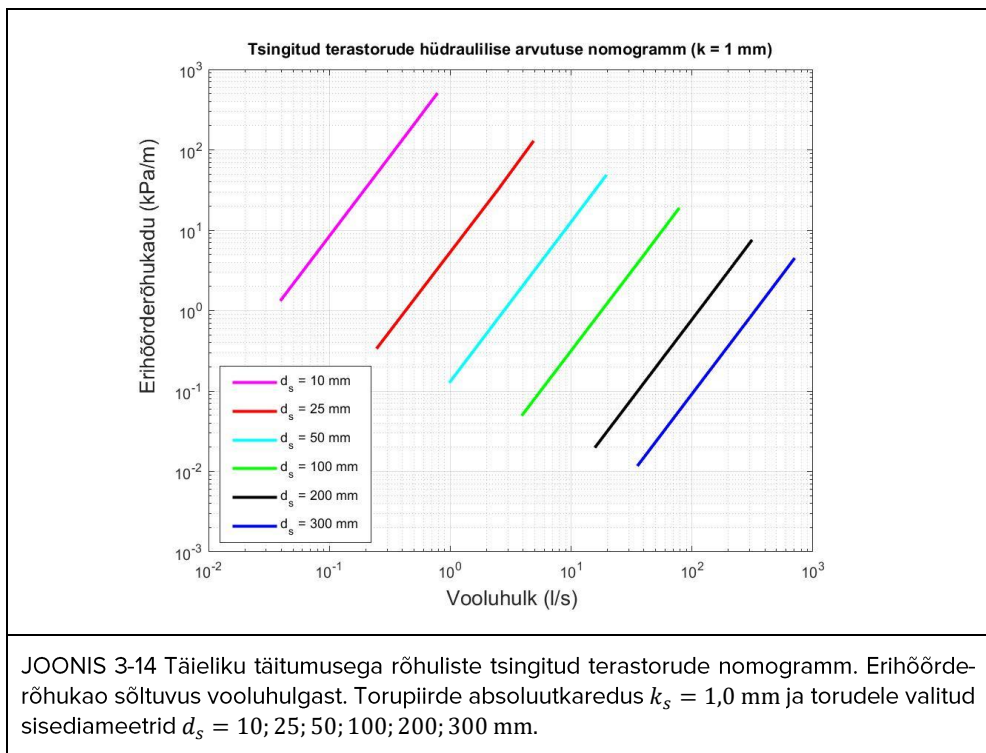
JOONIS 3-11 Täieliku täitumusega rõhuliste vasktorude nomogramm. Erihõrderõhukao sõltuvus vooluhulgast. Torupiirde absoluutkaredus  $k_s = 0,15 \text{ mm}$  ja torudele valitud sise-diaameetrid  $d_s = 10; 25; 50; 100; 200; 300 \text{ mm}$ .



JOONIS 3-12 Täieliku täitumusega rõhuliste tsingitud terastorude nomogramm. Erihõõderõhukao sõltuvus dünaamilisest rõhust. Torupiirde absoluutkaredus  $k_s = 1,0 \text{ mm}$  ja torudele valitud sisediameetrid  $d_s = 10; 25; 50; 100; 200; 300 \text{ mm}$ .



JOONIS 3-13 Täieliku täitumusega rõhuliste tsingitud terastorude nomogramm. Erihõõderõhukao sõltuvus voolukiirusest. Torupiirde absoluutkaredus  $k_s = 1,0 \text{ mm}$  ja torudele valitud sisediameetrid  $d_s = 10; 25; 50; 100; 200; 300 \text{ mm}$ .



Vee keemilistest omadustest sõltub oluliselt torustiku kasutamise aeg. Torustiku sisepindade karedus võib ajas tundmatuseni muutuda. Korrosioon, setted, biokile vms suurendavad tavaliselt toru sisepiirde karedust. Seetõttu survevoolule torustikus rõhukaod suurenevad ning energiakulu pumpamiseks samuti suureneb. Kasutuses oleva torustiku absoluutkaredust võib hinnata mõõtmiste kaudu, ning torustiku sisepinna kareduse muutust saab määrata vastava hüdraulilise arvutusega, milles mõõdetud rõhukõrguse kadu määrab hõõrdesurvekao vastavalt voolukiirusele (või vooluhulgale) erinevatel hõõrdetakistuse väärtustel. Survevoolu hõõrdetakistustegur on funktsioon Reynoldsi arvust ja täieliku torutäitega ümartoru suhtelise karedusest (vt Colebrook-White'i võrrand (VALEM (2-40))), milles hõõrdetakistustegur esineb ilmutamata kujul). Reeglina pikalt kasutuses olnud torustiku sisemõõde väheneb. Torustiku amortiseerumisega võib kaasneda selle läbilaskevõime vähenemine. Survetorude ühendustega kaasnevate rõhukadude suurenemise võib samuti arvestada kui torustiku absoluutkareduse suurenemine. Praktikas on kasutusel ka nõ pikkade torude meetodika, milles kohttakistustega määratud rõhukaod võetakse arvesse, lisades torule pikkust juurde protsendiliselt (5%...10%). Hüdraulilise võrgu reguleerimiseks, mõõtmiseks vms kasutatavate seadmete ja masinate kohttakistustest tekitatud rõhukaod tuleb samuti arvesse võtta.



## 3.2 VABAVOOL

Vabapinnaga voolamise puhul võib hõõrdetakistusteguri määrata samuti erinevate empiiriliste valemiga, milles toru sisediaameter ( $d_s$ ) on asendatud hüdraulilise raadiusega ( $R_h$ ). Ümartoru hüdrauliline raadius  $R_h = d_s/4$ , millest järeldub täieliku täitumusega ümartoru sisediaametri jaoks valem  $d_s = 4 R_h$  ja Reynoldsi arv  $Re = u d_s/\nu = 4 u R_h/\nu = 4 Re_{vs}$ , milles voolusängi Reynoldsi arv on

$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu} = \frac{Q}{\chi \nu},$	3-8
---	-----

milles  $u$  on voolukiirus,  $\nu$  on kinemaatiline laminaarne viskoossustegur,  $Q$  on vooluhulk ja  $\chi$  on märgpiire, millest on välja jäetud vabapind. Voolusängi Reynoldsi arvu valemis VALEM (3-8) on kasutatud voolukiiruse definitsioonseost (VALEM (2-2)):

$$Q = u A_e$$

→

$$u = \frac{Q}{A_e},$$

ning hüdraulilise raadiuse definitsioonseost (VALEM (2-30)):

$$R_h = \frac{A_e}{\chi} \left( = \frac{\pi (d_s^2/4)}{\pi d_s} = \frac{d_s}{4} \right),$$

milles  $A_e$  on elavlõige ja  $\chi$  on märgpiire, millest on välja jäetud vabapind.

Kuna veevoolule täieliku täitumusega ümartorus vastav kriitiline Reynoldsi arv on 2000, siis järelikult hüdraulilise raadiusega määratud kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on neljakordselt erinev,  $Re_{vs} = Re/4$ , st  $Re = 4 Re_{vs}$ . Laminaarse ja turbulentsse voolamise ülemineku kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on 500.

### 3.2.1 LAMINAARNE VOOLAMINE

Darcy survekao valemist järeldub, et laminaarsele voolamisele ümartorus on hõõrdetakistustegur määratud nõ kloovalemiga:

$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{16}{Re_{vs}},$	3-9
---	-----

millest selgub, et laminaarse voolamise hõõrdetakistustegur on pöördvõrdeline voolusängi Reynoldsi arvuga.

**MÄRKUS.** *Voolusängide hüdraulilises arvutustes jäetakse arvestamata takistus vabapinna ulatuses, st märgpiire on määratud vedeliku ja voolusängi piirde kokkupuutejoone pikkusega. Seetõttu tehakse ka lihtsustus voolamise piirikihile voolusängis.*

### 3.2.2 TURBULENTNE VOOLAMINE

Turbulentsele voolamisele on hõõrdetakistustegur keeruline funktsioon Reynoldsi arvust  $Re = 4 Re_{vs}$  ja suhtelisest karedusest  $k_s/d_s = k_s/(4 R_h)$ , milles täieliku täitumusega ümartoru sisediaameeter  $d_s = 4 R_h$ . Voolusängi Reynoldsi arvu vahemikus  $1,0 \cdot 10^3 < Re_{vs} < 0,25 \cdot 10^9$  ja erinevate voolusängi suhtelise kareduse ( $k_s/R_h$ ) väärtustele võib hõõrdetakistusteguri ilmutamata kujul määrata Colebrook-White'i kloonsvõrrandiga (VALEM (2-44)) :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right) = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{Re_{vs} \sqrt{\lambda}} \right).$$

Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonsvõrrandi lahendamiseks kasutatakse numbrilist arvutusskeemi, seda põhjusel, et võrrandis on hõõrdetakistustegur  $\lambda$  ilmutamata logaritmifunktsioon, ning seetõttu ei ole hõõrdetakistustegurit võimalik lihtsalt määrata. Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonsvõrrandi lahendamiseks võib kasutada Lambert W funktsiooni. Selleks võtame kasutusele uued muutujad:

$$y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

$$b = \frac{k_s/R_h}{14,84},$$

$$a = \frac{0,6275}{Re_{vs}}.$$

**MÄRKUS.** *Vt teadustöö Brkić, Dejan; Praks, Pavel (2019). „Accurate and efficient explicit approximations of the Colebrook flow friction equation based on the Wright  $\omega$ -function“. Mathematics 7 (1): article 34. <https://doi.org/10.3390/math7010034>. ISSN 2227-7390. (VIIDE 3.1).*

Colebrook-White'i kloonsvõrrand (VALEM (2-44)) uute muutujatega on

$$y = -2 \log_{10}(b + a y).$$

→

$$-\frac{y}{2} = \log_{10}(b + a y)$$

→

$$10^{-\frac{y}{2}} = b + a y$$

$$c = 10^{-\frac{1}{2}}$$

→

$$c^y = b + a y$$

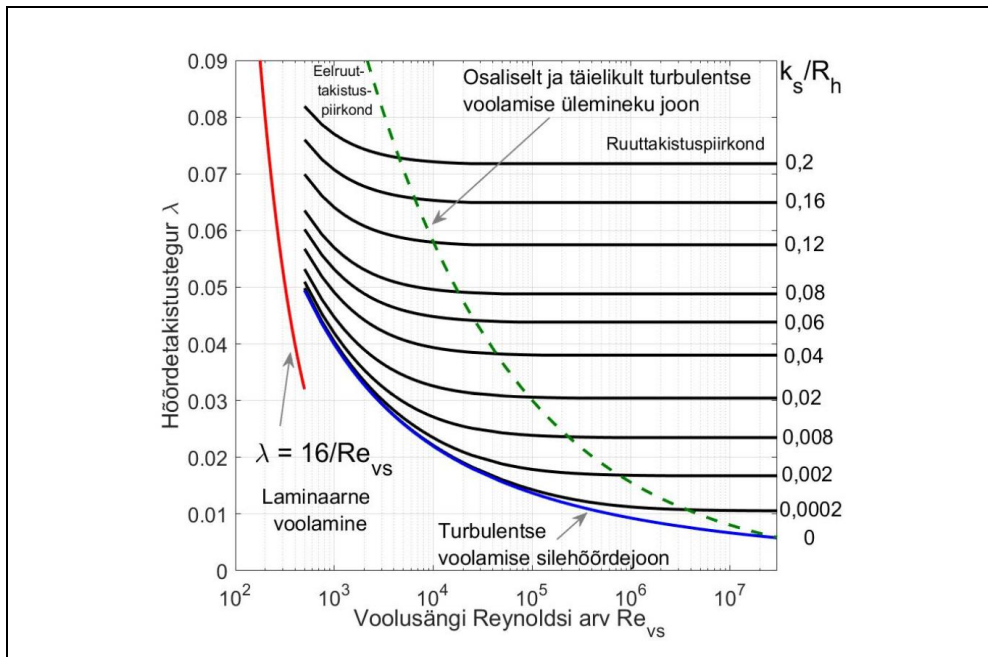
Võtame kasutusele Lambert W funktsiooni Coebrook-White'i kloonvõrrandis VALEM (2-44):

$$y = -\frac{\text{LambertW}\left(-\frac{\ln(c)}{a} c^{-\frac{b}{a}}\right)}{\ln(c)} - \frac{b}{a}.$$

→

$$\lambda = \left( -\frac{\text{LambertW}\left(-\frac{\ln(c)}{a} c^{-\frac{b}{a}}\right)}{\ln(c)} - \frac{b}{a} \right)^{-2}$$

Vt. LISA 2 (Lambert W funktsioon).

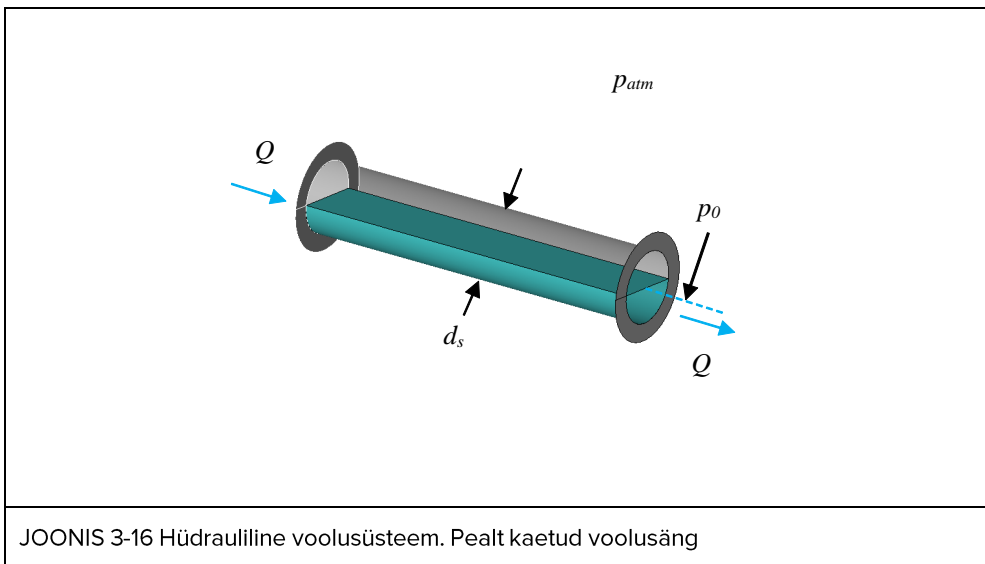


JONIS 3-15 Moody diagrammi rekonstruktsioon vabavoolu hõõrdetakistusteguri määramiseks laminaarsele ja turbulentsse voolamisele, mis vastab osalise täitumusega voolamisele ümartorus, st pealt kaetud voolusängis. Joonisel on näidatud laminaarse voolurežiimi hõõrdetakistusteguri kõverjoon, ning osaliselt ja täielikult turbulentsse voolamise ülemineku katkendjoon, mis eraldab hõõrdetakistusteguri eelruut- ja ruuttakistuspiirkonda.

### 3.2.3 NÄITEÜLESANNE. HÕÖRDETAKISTUSTEGUR

ANTUD. Hüdraulilise voolusüsteemi ümarristlõikega torule, sisediameetriga  $d_s = 236$  mm, pikkusega  $l = 100$  m, põhjalanguga (pealt kaetud voolusängi pikikaldega)  $i_0 = 1 \text{ mm} \cdot \text{m}^{-1} = 0,001 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$ , on valitud vooluhulk  $Q = Q_{pv} + Q_{kv}$ , milles  $Q_{pv} = 10 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$  ja  $Q_{kv} = 5 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ . Kanalisatsioonitoru piirde absoluutkaredus  $k_s = 0,0015$  mm ja torutäide  $h_d = 0,6050$ , st normaalsügavus  $d_0 = h_d d_s = 0,1428$  m. Isevoelses kanalisatsioonis voolab  $10$  °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Määrata proovimismeetodi ja numbrilise arvutuskeemiga hüdraulilise voolusüsteemi hõõrdetakistustegur. Kasutada hõõrdetakistusteguri määramisel Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonvõrrandit. Võrrelda takistusteguri väärtust Blasiuse hõõrdetakistuse kloonvalemi ja Swamee-Jaini hõõrdetakistuse kloonvalemiga määratud hõõrdetakistustegurite väärtustega.



EELDUSED. Voolamine isevoelses kanalisatsioonis (osalise täitumusega torustikus) on statsionaarne, igas torus on vabavool ühtlane. Eeldada, et kanalisatsioonitorustik töötab Moody diagrammi eelruuttakistuspiirkonnas. Normaalsügavus määrata Bernoulli võrrandiga kasutades Darcy-Weisbachi survekao valemit.

**PÕHIVALEMID. Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonvõrrand, Blasiuse hõõrdetakistuse kloonvalem, Swamee-Jaini hõõrdetakistuse kloonvalem**

## VALEMID

Erinevate voolusängi Reynoldsi arvu ja osalise täitumusega toru piirde suhtelise kareduse väärtustel võib hõõrdetakistusteguri määrata Colebrook-White'i kloonvõrrandiga (VALEM (2-44)):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{\mathbf{Re}_{vs} \sqrt{\lambda}} \right).$$

Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonvõrrandi võib teisendada kujule:

$$CW(\lambda) = -2 \sqrt{\lambda} \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{\mathbf{Re}_{vs} \sqrt{\lambda}} \right),$$

et võtta kasutusele nn Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonfunktsioon  $CW(\lambda)$ .

Elavlõige osalise täitumusega ümartorule on

$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{d_0}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{d_0}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{d_0}{d_s} - \left( \frac{d_0}{d_s} \right)^2} \right),$	3-10
---	------

milles  $d_s$  on ümartoru sisediaameeter ja  $d_0$  on normaalsügavus, mis vastab ühtlase voolamise maksimaalsele kõrgusele sisepõhjast ümartoru ristlõikes.

Osalise täitumusega ümartoru voolamise märgpiire, millest on välja jäetud vabapind, on

$\chi = \pi d_s \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{d_0}{d_s} - 1 \right) \right),$	3-11
---	------

milles  $d_s$  on ümartoru sisediaameeter ja  $d_0$  on normaalsügavus, mis vastab ühtlase voolamise maksimaalsele kõrgusele sisepõhjast ümartoru ristlõikes.

Hüdrauliline raadius osalise torutäitega voolamisele on

$$R_h = \frac{A_e}{\chi}.$$

## ARVUTUS

Elavlõige

$$A_e = \pi \cdot \frac{(236 \text{ mm}/1000)^2}{4} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \text{asin} \left( 2 \cdot \frac{0,1428 \text{ m}}{0,236 \text{ m}} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \cdot \left( 2 \cdot \frac{0,1428 \text{ m}}{0,236 \text{ m}} - 1 \right) \cdot \sqrt{\frac{0,1428 \text{ m}}{0,236 \text{ m}} - \left( \frac{0,1428 \text{ m}}{0,236 \text{ m}} \right)^2} \right) = 0,02767 \text{ m}^2$$

Märgpiire

$$\chi = \pi \cdot \left( \frac{236 \text{ mm}}{1000} \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \text{asin} \left( 2 \cdot \frac{0,1428 \text{ m}}{0,236 \text{ m}} - 1 \right) \right) = 0,4206 \text{ m}$$

Hüdrauline raadius

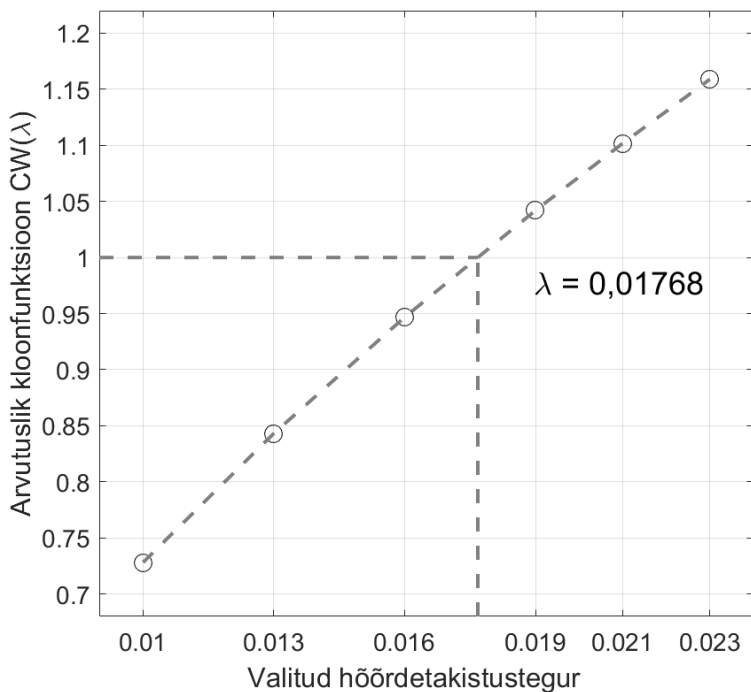
$$R_h = \frac{0,02767 \text{ m}^2}{0,4206 \text{ m}} = 0,06579 \text{ m}$$

*Proovimise arvutusmeetod*

ARVUTUS. Hõõrdetakistustegur

Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonsfunktsiooniga määratud suurused

	$\lambda$	$Re_{vs}$	$d_0$ (m)	$Q$ (l·s <sup>-1</sup> )	$CW(\lambda)$
i	0,01	$0,27431 \cdot 10^5$	0,1428	15	0,7280
ii	0,013	—   —	—   —	—   —	0,8431
iii	0,016	—   —	—   —	—   —	0,9467
iv	0,019	—   —	—   —	—   —	1,0419
v	0,021	—   —	—   —	—   —	1,1017
vi	0,023	—   —	—   —	—   —	1,1589



JOONIS 3-17 Hõõrdetakistusteguri määramine Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonfunktsiooniga, milleks on kasutatud proovimismeetodiga saadud punktide interpoleerimiskõverat

Blasiuse kloonvalem (VALEM (2-45)) hõõrdetakistuse määramiseks on

$$\lambda = \frac{0,2237}{\sqrt[4]{0,27431 \cdot 10^5}} = 0,0174.$$

Hõõrdetakistustegur Swamee-Jaini kloonvalemiga (VALEM (2-46)):

$$\lambda = \frac{0,25}{\left( \log_{10} \left( \frac{(0,0015 \text{ mm}/1000)/0,06579 \text{ m}}{14,8} + \frac{1,6484}{(0,27431 \cdot 10^5)^{9/10}} \right) \right)^2} = 0,0176.$$

Numbriline arvutusskeem. Hõõrdetakistustegur

Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod

#### VALEMID

Veafunktsioon:

$$ERF(z_j) = CW_j - CW,$$

milles  $z_j$  on arvutuslik hõõrdetakistustegur,  $CW_j$  on arvutuslik Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonfunktsioon ja  $CW$  on etteantud Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonfunktsioon.

Veafunktsiooni tuletis:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{dCW_j}{dz_j},$$

milles on eeldatud, et  $CW = konstant (= 1)$ .

Arvutusliku Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonfunktsioon:

$$CW(z_j) = -2 \sqrt{z_j} \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{\mathbf{Re}_{vs} \sqrt{z_j}} \right),$$

milles  $k_s$ ,  $d_s$  ja  $\mathbf{Re}_{vs}$  on konstantsed suurused.

→

$$\begin{aligned} \frac{dERF(z_j)}{dz_j} &= \frac{d}{dz_j} \left( -2 \sqrt{z_j} \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{\mathbf{Re}_{vs} \sqrt{z_j}} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{z_j}} \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{\mathbf{Re}_{vs} \sqrt{z_j}} \right) + \frac{\sqrt{z_j} \frac{0,6275}{\mathbf{Re}_{vs} z_j^{3/2}}}{\left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{\mathbf{Re}_{vs} \sqrt{z_j}} \right) \ln(10)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{z_j}} \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{\mathbf{Re}_{vs} \sqrt{z_j}} \right) + \frac{\frac{0,6275}{\mathbf{Re}_{vs} \sqrt{z_j}}}{\left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{\mathbf{Re}_{vs} \sqrt{z_j}} \right) \ln(10)} \end{aligned}$$

Veafunktsioonist suunatud tuletise võtmise reegel:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{0 - ERF(z_j)}{z_{j+1} - z_j},$$

võimaldab kasutusele võtta Taylori valemi 1-järgu tuletise täpsusega:

$$z_{j+1} = z_j - \frac{ERF(z_j)}{\frac{dERF(z_j)}{dz_j}}.$$



Numbrilise arvutusskeemi põhivalemi üldkuju on

$$z_{j+1} = z_j - \frac{CW_j - CW}{-\frac{1}{\sqrt{z_j}} \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{Re_{vs} \sqrt{z_j}} \right) + \frac{0,6275}{Re_{vs} \sqrt{z_j}} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{Re_{vs} \sqrt{z_j}} \right) \ln(10)}$$

ARVUTUSSKEEM (Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloovõrrand)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku hõõrdetakistusteguri valem (iteratsioonmeetodi põhivalem):

$$y_{j+1} = y_j - \frac{CW_j - CW}{-\frac{1}{\sqrt{y_j}} \log_{10} \left( \frac{k_s}{R_h} + \frac{0,6275}{Re_{vs} \sqrt{y_j}} \right) + \frac{0,6275}{Re_{vs} \sqrt{y_j}} \left( \frac{k_s}{R_h} + \frac{0,6275}{Re_{vs} \sqrt{y_j}} \right) \ln(10)},$$

milles  $CW = 1$ .

Arvutuslik Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloovfunktsioon:

$$CW(y_j) = -2 \sqrt{y_j} \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{Re_{vs} \sqrt{y_j}} \right).$$

ARVUTUS. Hõõrdetakistustegur

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$y_j$ (1)	0,0100	0,0174	0,0177	0,0176	0,0177	0,0177
$CW_j$ (1)	0,7280	0,9915	1,0008	0,9999	1,0000	1,0000

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$y_j$ (1)	0,0177	0,0177	0,0177	0,0177
$CW_j$ (1)	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

## VASTUSED

Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonvõrrand:  $\lambda = 0,0177$

Swamee-Jaini hõõrdetakistuse kloonvalem:  $\lambda = 0,0176$

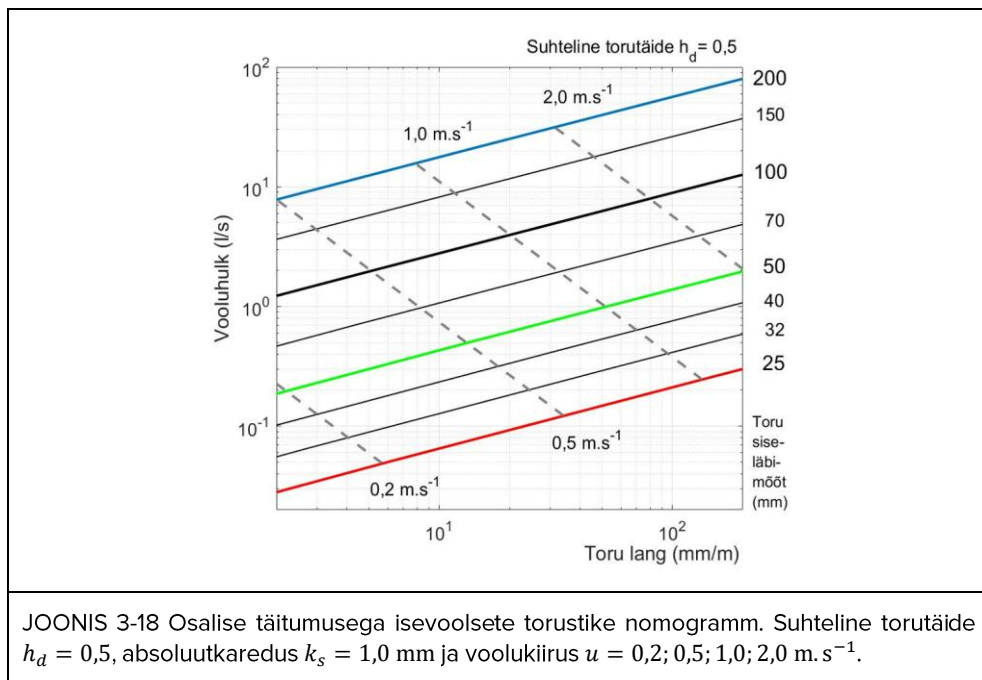
Blasiuse hõõrdetakistuse kloonvalem:  $\lambda = 0,0174$

**MÄRKUS.** *Turbulentse voolamise takistusele pealtkaetud voolusängis võib Moodi diagrammi nõ silehõõrdejoone lahendite asemel kasutada hõõrdetakistusteguri määramisele Blasiuse kloonvalemit (VALEM (2-45)). Swamee-Jaini hõõrdetakistuse kloonvalemis (VALEM (2-46)) tuleb lisaks voolusängi Reynoldsi arvule kasutada ka hüdraulilist raadiust ja torustiku sisepiirde absoluutkaredust, mis on hästi teada nõ uutele torudele ja hinnanguline vanadele torudele.*

### 3.2.4 LISAÜLESANNE. ARVUTUSDIAGRAMM

ANTUD. Kanalisatsiooni sisevõrgu ümartorude sisediameeter (siseläbimõõt) muutub vahemikus  $d_s = 25 \text{ mm} \dots 200 \text{ mm}$  ja torude lang muutub vahemikus  $i_0 = 2 \text{ mm} \cdot \text{m}^{-1} \dots 200 \text{ mm} \cdot \text{m}^{-1}$ . Toru sisepinna materjali absoluutkaredus  $k_s = 1,0 \text{ mm}$ . Hüdraulilises voolusüsteemis on  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Hüdrauliline voolusüsteem on õhurõhu all  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Koostada nomogramm isevoolsele osalise torutäitega  $h_d = 0,5$  voolamisele ümartorudes. Nomogrammi graafikul valida ümartorude sisediameetriteks  $d_s = 25 \text{ mm}, 32 \text{ mm}, 40 \text{ mm}, 50 \text{ mm}, 70 \text{ mm}, 100 \text{ mm}, 150 \text{ mm}$  ja  $200 \text{ mm}$ . Nomogrammi abstsissitelje toru langud  $i_0 = (10, 100) \text{ mm} \cdot \text{m}^{-1}$  ja ordinaattelje vooluhulgad  $Q = (0,1, 10, 100) \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ . Lisada JOONISEle voolukiirused väärtustega  $u = (0,2, 0,5, 0,7, 1,0, 2,0) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Määrata hüdrauliline vabavoolu režiim valitud ümartorude sisediameetritele.



EELDUSED. Kasutada osalise torutäitega voolamisele hõõrdetakistusteguri määramiseks Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloovõrrandit, mille lahendamiseks võib kasutada vastavat Newtoni iteratsioonmeetodiga koostatud numbrilist arvutus-skeemi.

**PÕHIVALEMID. Darcy survekao valem, Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonvõrand, Manningi hõõrdetakistuse valem**

## VALEMID

Hõõrdesurvekadu ümartorus on määratud Darcy valemiga VALEM (2-27)

$$h_l = \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g},$$

milles  $\lambda$  on hõõrdetakistustegur,  $l$  on täieliku täitumusega ümartoru pikkus,  $d_s$  on toru sisediaameeter ja  $u$  on voolamise keskkiirus. Hõõrdetakistustegur on mõõõtühikuta suurus  $[\lambda] = 1$ .

Täieliku torutäitega voolamise hüdrauliline lang on määratud valemiga

$$\frac{h_l}{l} = I_h = \frac{\lambda}{d_s} \frac{u^2}{2g}.$$

Ümartoru hüdrauliline raadius  $R_h = d_s/4$ , millest järeldub täieliku täitumusega ümartoru sisediaameetri jaoks valem  $d_s = 4 R_h$  ja Reynoldsi arv  $Re = 4 u R_h/\nu = 4 Re_{vs}$ , milles voolusängi Reynoldsi arv on  $Re_{vs}$ .

Osalise torutäitega voolamise hüdrauliline lang on määratud valemiga

$$I_h = \frac{\lambda}{4 R_h} \frac{u^2}{2g} = \frac{\lambda}{R_h} \frac{u^2}{8g}.$$

Isevoelse osalise torutäitega ühtlase voolamise hüdrauliline lang on määratud toru languga

$$I_h = i_0.$$

→

$$i_0 = \frac{\lambda}{R_h} \frac{u^2}{8g}$$

Voolukiiruse võib voolamise Reynoldsi arvu valemi kaudu määrata kui

$$u = \frac{Re_{vs} \nu}{R_h}.$$

Vooluhulk:

$$Q = u A_e,$$

milles elavlõige osalise täitumusega ümartorule on

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h_{rlm}}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h_{rlm}}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h_{rlm}}{d_s} - \left( \frac{h_{rlm}}{d_s} \right)^2} \right),$$

milles  $d_s$  on ümartoru sisediameeter ja  $h_{rlm}$  on vabapinna maksimaalne kõrgus sisepõhjast ümartoru ristlõikes.

Osalise täitumusega ümartoru voolamise märgpiire, millest on välja jäetud vabapind, on

$$\chi = \pi d_s \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h_{rlm}}{d_s} - 1 \right) \right),$$

milles  $d_s$  on ümartoru sisediameeter ja  $h_{rlm}$  on vabapinna maksimaalne kõrgus sisepõhjast ümartoru ristlõikes.

Hüdrauliline raadius määratakse valemiga VALEM (2-30):

$$R_h = \frac{A_e}{\chi}.$$

Erinevate voolusängi Reynoldsi arvude ( $Re_{vs}$ ) ja voolusängi suhtelise kareduse ( $k_s/R_h$ ) väärtustel võib hõõrdetakistusteguri ( $\lambda$ ) määrata Colebrook-White'i kloonvõrrandiga (VALEM (2-44)):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{Re_{vs} \sqrt{\lambda}} \right).$$

*Numbriline arvutuskeem. Hõõrdetakistustegur*

*Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod*

ARVUTUSSKEEM (Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonvõrrand)

Numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku hõõrdetakistusteguri valem (iteratsioonmeetodi põhivalem):

$$z_{j+1} = z_j - \frac{CW_j - CW}{-\frac{1}{\sqrt{z_j}} \log_{10} \left( \frac{k_s}{R_h} + \frac{0,6275}{Re_{vs} \sqrt{z_j}} \right) + \frac{\frac{0,6275}{Re_{vs} \sqrt{z_j}}}{\left( \frac{k_s}{R_h} + \frac{0,6275}{Re_{vs} \sqrt{z_j}} \right) \ln(10)}},$$

milles  $z_j$  on arvutuslik hõõrdetakistustegur ja  $CW = 1$ .

Arvutuslik Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonfunktsioon:

$$CW(z_j) = -2 \sqrt{z_j} \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{Re_{vs} \sqrt{z_j}} \right).$$

Arvutusnäide. Hõõrdetakistustegur

Etteantud hüdraulilised suurused:

$$v = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$d_s = 100 \text{ mm}$$

$$h_d = \frac{h_{rlm}}{d_s} = 0,5$$

$$Re_{vs} = 1\,000\,000 / 4 = 250\,000 = 2,5 \cdot 10^5$$

$$k_s = 1,0 \text{ mm}$$

Elavlõige

$$A_e = \pi \cdot \frac{\left(\frac{100 \text{ mm}}{1000}\right)^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \text{asin}(2 \cdot 0,5 - 1) + \frac{2}{\pi} \cdot (2 \cdot 0,5 - 1) \cdot \sqrt{0,5 - (0,5)^2}\right) = 0,003926 \text{ m}^2$$

Märgpiire

$$\chi = \pi \cdot \left(\frac{100 \text{ mm}}{1000}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \text{asin}(2 \cdot 0,5 - 1)\right) = 0,15707 \text{ m}$$

Hüdrauliline raadius

$$R_h = \frac{0,003926 \text{ m}^2}{0,15707 \text{ m}} = 0,025 \text{ m}$$

ARVUTUS. Hõõrdetakistustegur

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (1)	0,0100	0,0290	0,0373	0,0379	0,0379	0,0379
$CW_j$ (1)	0,5131	0,8740	0,9921	1,0000	1,0000	1,0000

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (1)	0,0379	0,0379	0,0379	0,0379
$CW_j$ (1)	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

$$\lambda = 0,037930274052256 \approx 0,0379$$

Voolukiirus

$$u = \frac{(2,5 \cdot 10^5) \cdot (1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1})}{0,025 \text{ m}} = \frac{(250\,000) \cdot (1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1})}{0,025 \text{ m}} \\ = 13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Vooluhulk

$$Q = 13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 0,003926 \text{ m}^2 = 5,1050 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 51,050 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \\ = 51,050 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1} = 51,05 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$$

Isevoolse osalise täitumusega toru lang

$$i_0 = \frac{0,0379}{0,025 \text{ m}} \cdot \frac{(13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{8 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 3,2671 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$$

VASTUSED

$$\lambda = 0,0379$$

$$u = 13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$Q = 51,05 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$A_e = 0,003926 \text{ m}^2$$

$$i_0 = 3,2671 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$$

*Kontrollvalem. Manningi valem*

Manningi karedusteguri võime määrata valemiga VALEM (2-37):

$$n_M = \sqrt{\frac{\lambda}{8g} R_h^{2/6}} = \sqrt{\frac{\lambda}{8g} R_h^{1/6}}.$$

Järelikult hõõrdetakistusteguri määramiseks kareda piirdega osalise täitumusega ümartorus võib kasutada Manningi hõõrdetakistuse valemit:

$\lambda = \frac{8g n_M^2}{R_h^{\frac{2}{6}}},$	3-12
---	------

mis kehtib hästi Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnas (JONIS 3-15).

Osalise täitumusega toru hüdrauliline raadius määratakse valemiga VALEM (2-30):

$$R_h = \frac{A_e}{\chi},$$

milles elavlöige osalise täitumusega ümartorule on määratud valemiga VALEM (3-10)

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h_{rlm}}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h_{rlm}}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h_{rlm}}{d_s} - \left( \frac{h_{rlm}}{d_s} \right)^2} \right),$$

milles  $d_s$  on ümartruubi sisediaameeter ja  $h_{rlm}$  on vabapinna maksimaalne kõrgus sisepõhjust ümartoru ristlõikes (suhteline torutäide  $h_d = h_{rlm}/d_s$ ), ning osalise täitumusega ümartoru voolamise märgpiire, millest on välja jäetud vabapind, on määratud valemiga VALEM (3-11)

$$\chi = \pi d_s \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h_{rlm}}{d_s} - 1 \right) \right).$$

Osalise torutäiega voolamise hüdrauliline lang on määratud valemiga:

$$\frac{h_l}{l} = I_h = \frac{\lambda}{d_s} \frac{u^2}{2g} = \frac{\lambda}{R_h} \frac{u^2}{8g}.$$

Voolukiiruse isevooles osalise täitumusega torus võib määrata Manningi voolukiiruse valemiga VALEM (2-35):

$$u = \frac{R_h^{2/3} I_h^{1/2}}{n_M}.$$

Ühtlasele voolamisele isevooles torus on hüdrauliline lang määratud toru languga, st  $I_h = i_0$ .

Vooluhulga osalise täitumusega torus võib määrata valemiga VALEM (2-2):

$$Q = u A_e,$$

milles elavlõige osalise täitumusega ümartorule on määratud valemiga VALEM (3-10).

Survevoolu hüdraulilist voolurežiimi iseloomustatakse voolusängi Reynoldsi arvuga VALEM (3-8):

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $R_h$  on hüdrauliline raadius ja  $\nu$  on kinemaatiline laminaarne viskoossustegur. Veevoolule osalise täitumusega ümartorus vastav kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on 500, mille juures toimub üleminek laminaarselt voolamiselt turbulentsse voolamisele.

Täielikult turbulentsse voolamise, mille juures hõõrdetakistustegur vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnale, määramiseks võib kasutada kriteeriumit VALEM (2-38):

$$n_M \sqrt[6]{R_h I_h} \geq 1,1 \cdot 10^{-13}.$$



## ARVUTUS

Etteantud voolusängi Reynoldsi arv, torutäide, hüdrauliline raadius, hõõrdetakistus-  
tegur ja hüdrauliline lang:

$$Re_{vs} = 1\,000\,000 / 4 = 250\,000 = 2,5 \cdot 10^5$$

$$h_d = 0,5$$

$$R_h = 0,025$$

$$\lambda = 0,037930274052256$$

$$I_h = 3,2671 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$$

**MÄRKUS.** Kui voolusängi Reynoldsi arv ja hüdrauliline raadius on etteantud hüdraulilised suurused, siis on osalise täitumusega torus voolukiirus teada (näiteülesandes on  $u = 13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

Hüdrauliline raadius

$$R_h = \frac{0,1 \text{ m}}{4} = 0,025 \text{ m}$$

Manningi karedustegur

$$n_M = \sqrt{\frac{0,037930274052256}{8 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} (0,025 \text{ m})^{1/6} = 0,0119$$

Manningi voolukiirus:

$$u = \frac{(0,025 \text{ m})^{2/3} \cdot (3,2671 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1})^{1/2}}{0,0119} = 13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna kriteerium VALEM (2-38):

$$n_M^6 \sqrt{R_h I_h} = 0,0119^6 \cdot \sqrt{0,025 \text{ m} \cdot 3,2671 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}} = 8,0664 \cdot 10^{-13} > 1,1 \cdot 10^{-13} .$$

**JÄRELDUS.** Manningi valemit võib kasutada võrdlemisi suurearvuliste voolusängi Reynoldsi arvu väärtusetega isevoolese osalise täitumusega torustikule. Manningi valem kehtib nõ hüdrauliliselt kareda piirdega voolamisele avasängis või pealtkaetud voolusängis.

### 3.2.5 ÜMARTORU HÜDRAULILINE VABAVOOLUREŽIIM

#### VALEMID

Vastavalt ideaalvoolu Bernoulli võrrandile VALEM (2-9) võib vabavoolu olukorras võtta kasutusel Bernoulli kolmikliikme:

$B = \frac{u^2}{2g} + h + h_s,$	3-13
---------------------------------	------

milles  $u$  on voolukiirus,  $g$  on raskuskiirendus,  $h (= h_{r\text{tm}})$  on vabapinna maksimaalne kõrgus ümartoru sisepõhjast ja  $h_s$  on ümartoru sisepõhja kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult.

Kasutades osalise täitumusega ümartoru vabapinnaga voolamise (osalise torutäitega voolamise) voolukiiruse määramiseks voolamise ruumkiiruse valemit:

$$u = \frac{Q}{A_e} = \frac{Q}{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right)},$$

milles  $d_s$  on ümartoru sisediameeter ja  $h (= h_{r\text{tm}})$  on vabapinna maksimaalne kõrgus ümartoru sisepõhjast. (Ühtlasel voolamisel  $h = d_0$ , milles  $d_0$  on normaal-sügavus.)

Bernoulli kolmikliikme VALEM (3-13) vabapinnaga voolamisele võime esitada kujul:

$$B = \frac{Q^2}{2g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right)^2} + h + h_s.$$

Hüdraulilist vabavoolurežiimi iseloomustatakse Froude'i arvuga:

$Fr = f(u, g, h, \dots) = f(Q/A, g, h, \dots).$	3-14
---	------

Kui kasutada funktsiooni ekstreemumi määramise teoreem Bernoulli kolmikliikmega määratud funktsiooni muutuja  $h$  järgi:

$\frac{dB}{dh} = 0,$	3-15
----------------------	------

siis järeldub Bernoulli funktsioonist  $B = f(h)$ , milles  $Q$ ,  $g$ ,  $d_s$  ja  $h_s$  on konstantsed suurused, järgmine avaldis:

$$\begin{aligned}
& \frac{2 Q^2 \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2}} \right)}{2 g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} \right)^3 + 1} \\
& = - \frac{Q^2 \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2}} \right)}{g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} \right)^3 + 1} = 0.
\end{aligned}$$

Osalise täitumusega ümartoru vabavoolu Froude'i arv astmes 2 on määratud valemitega:

$ Fr^2 = \frac{Q^2}{g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} \right)^3 \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2}} \right)^2} $	3-16
$ Fr^2 = \frac{u^2}{g \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} \right)^2 \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2}} \right)^2} $	

milles on kasutatud osalise täitumusega ümartoru voolukiiruse ja vooluhulga seost:

$$u = \frac{Q}{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} \right)}.$$

Hüdraulilise vabavoolurežiimi määramiseks osalise torutäitega voolamisele kasutatakse Froude'i suhtarvu kriteeriumit. Kriitilise vabapinnaga voolamisele pealt kaetud voolusängis (ümartorus) on  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule vastab  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

Pooltäitumusega ümartoru ( $h = d_s/2, h/d_s = 0,5$ ) vabavoolu Froude'i arv astmes 2 on määratud valemiga:

$Fr^2 = \frac{u^2}{g \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right)}$ $= \frac{u^2}{g \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} - \frac{\frac{1}{\pi d_s} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2}} \right)}$ $= \frac{u^2}{g \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(1 - 1) + \frac{2}{\pi} (1 - 1) \sqrt{\frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \right)^2} \right)}$ $= \frac{u^2}{g \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - (1 - 1)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \right)^2} - \frac{\frac{1}{\pi d_s} (1 - 1)^2}{\sqrt{\frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \right)^2}} \right)}$ $= \frac{u^2}{g \left( \frac{2}{\pi d_s} + \frac{2}{\pi d_s} \right)} = \frac{u^2}{g \left( \frac{4}{\pi d_s} \right)}$ $= \frac{4}{\pi} \frac{u^2}{g (d_s/2)}$	3-17
---	------

**MÄRKUS.** Toru sisediaameeter osalise täitumusega ümartorule, st pealt kaetud voolusängile Froude'i arvu valemis on toru sisemõõde, mis ei iseloomusta otseselt vooluprotsessi.

Hüdraulilisel vabavoolurežiimil, mis vastab kriitilisel voolamisele  $Fr = 1$ , määratakse voolukiirus poolümarristlõikega tehissängis erijuhul ( $h_{rlm} = d_s/2$ ) valemiga (vt LISA I):

$$1 = \frac{4}{\pi} \frac{u^2}{g (d_s/2)}$$

→

$$u = \frac{\pi}{4} g \frac{d_s}{2} = \frac{\pi}{4} g h_{rlm}$$

→

$$u = \sqrt{\frac{\pi}{4} g \frac{d_s}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{4} g h_{rlm}} .$$

#### ARVUTUS

Toru sisediameeter

$$d_s = 100 \text{ mm} = 100 \text{ mm} / 1000 = 0,1 \text{ m}$$

Kriitiline voolukiirus vabapinnaga voolamisele ümartorus

$$u = \sqrt{\frac{\pi}{4} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \frac{0,1 \text{ m}}{2}} = 0,6206 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

#### VASTUS

Voolukiirused torus, sisediameetriga  $d_s = 100 \text{ mm}$  ja suhtelise torutäitega  $h_d = 0,5$ , vastavad rahulikule hüdraulilisele vabavoolu režiimile ( $Fr < 1$ ) kui  $u < 0,6206 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### 3.3 HÜDRAULISTE VALEMITE MÄÄRAMATUS

Hüdraulika valemid rõhulisele ja vabapinnaga voolamisele on seotud määramatusega. Voolamisele hüdrauliliselt kareda piirdega torustikus, mis vastab Moody diagrammil ruuttakistuspiirkonna hõõrdetakistusteguri lahenditele, võib kasutada Manningi karedusteguri valemit. Hõõrdetakistusteguri võib anda SI-mõõtühikute süsteemi Manningi karedusskaala valemiga, mis määrab hõõrdetakistusteguri valemiga, mille arvutustulemus ei sõltu otseselt Reynoldsi arvust. Manningi karedusteguri kasutamine voolusüsteemi takistuse määramisele on seotud vee omaduste määramatusega. Vee temperatuur määrab vee tiheduse ja dünaamilise molekulaarse viskoossusteguri, mille järgi määratakse kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur. Reynoldsi arvu väärtus sõltub oluliselt kinemaatilisest molekulaarsest viskoossustegurist.

Manningi kloovalemiga määratud hõõrdetakistustegur (VALEM (2-43)) rõhulisele voolamise peab vastama Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna lahenditele (JONIS 3-2). Täielikult turbulentsel voolamise, mille juures hõõrdetakistustegur vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnale, määramiseks võib kasutada kriteeriumit (VALEM (2-38)):

$$n_M^6 \sqrt{d_s I_h} \geq 2,2 \cdot 10^{-13} .$$

Manningi valemiga määratud hõõrdetakistustegur (VALEM (2-47)) vabapinnaga voolamise peab vastama Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna lahenditele (JONIS 3-15). Täielikult turbulentsel voolamise, mille juures hõõrdetakistustegur vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnale, määramiseks võib kasutada kriteeriumit (VALEM (2-38)):

$$n_M^6 \sqrt{R_h I_h} \geq 1,1 \cdot 10^{-13} .$$

### 3.4 VIITED

3.1 Brkić, Dejan; Praks, Pavel (2019). Accurate and efficient explicit approximations of the Colebrook flow friction equation based on the Wright  $\omega$ -function, *Mathematics* 7 (1): article 34. <https://doi.org/10.3390/math7010034>. ISSN 2227-7390.

## 4 ARVUTUSMEETOD. NEWTONI ITERATSIOONMEETOD

Numbrilise arvutusmeetodi kasutamine on vajalik, kui hüdraulilises voolusüsteemis otsitava suuruse arvutamisel osutub voolamise hüdraulika valemite või võrrandite kasutamine matemaatiliselt keeruliseks. Voolamise hüdraulika valemid – nagu ülevoolu põhivalem või Manningi vooluhulga valem – on hüdrauliliste suuruste (nt paisutuskõrgus või hüdrauliline raadius, elavlõige ja hüdrauliline lang) keerulised astmefunktsioonid. Praktikas on hüdraulilise voolusüsteemi ülesannetes empiiriliste valemite juures kasutusel nn proovimismeetod, kus hüdraulilise suuruse määramiseks väärtustatakse voolamise hüdraulika valem(id) etteantud tingimustel arvuliselt ning kasutatakse proovimise arvutusmeetodiga saadud punktide interpoleerimiskõverat. Proovimismeetodi asemel soovitatakse tänapäeval kasutada numbrilist arvutusskeemi (VIITED 4.1 ja 4.2), mille võib vabalt seadistada olemasoleva tarkvaraga nii, et seda oleks lihtne kasutada. Selleks võib kasutada näiteks tabelarvutustarkvara. Hüdraulilise voolusüsteemi numbrilist arvutusskeemi on mõistlik kasutada olukorras, kus hüdraulilist suurust on vajalik arvutada hüdraulilise voolusüsteemi – nagu survetoru, isevoolne toru, avasäng, pealtkaetud voolusäng, truupe, ehitatud pais, ehitatud ava vms – töötingimuste täpsustamiseks, see tähendab juhul, kui tegemist ei ole ühekordse arvutustööga.

### 4.1 VÄIKESE KORDAJAGA ASTMERIDA. TAYLORI RIDA

Newtoni iteratsioonimeetod on üks lihtsam versioon Newton-Raphsoni iteratsioonimeetodist, mida kasutatakse funktsiooni nullpunkti määramisel. Funktsioon  $f(z)$  arendatakse Taylori ritta argumenti  $z = z_0 + \epsilon$  ümbruses väikesele parameetrile  $\epsilon$ :

$f(z_0 + \epsilon) = f(z_0) + \epsilon \frac{\partial f(z_0)}{\partial z} + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 f(z_0)}{\partial z^2} + \dots,$	4-1
---	-----

milles  $\epsilon = z - z_0$ .

Määrame funktsioonile Taylori valemi 1-järgu tuletise täpsusega:

$f(z_0 + \epsilon) = f(z_0) + \epsilon \frac{\partial f(z_0)}{\partial z}.$	4-2
---	-----

Funktsiooni Taylori valemit võib kasutada funktsiooni argumentide muudu  $z - z_0$  määramiseks tingimusel:  $f(z_0 + \epsilon) = 0$ .

## 4.2 VÄIKESE KORDAJAGA ASTMERIDA. NULLPUNKTID

Valides funktsioonile väärtuse  $f(z_0)$ , võime leida väikese parameetri  $\epsilon_0$  valemiga:

$$\epsilon_0 = - \left. \frac{f(z)}{\frac{\partial f(z)}{\partial z}} \right|_{z=z_0} = - \frac{f(z_0)}{\frac{\partial f(z_0)}{\partial z}},$$

mis näitab funktsiooni nullpunkti asukoha esmast (nullindat) korrektsiooni. Funktsiooni nullpunkti asukoha järgmise (esimese) korrektsiooni võib arvutada valemiga:

$$\epsilon_1 = - \left. \frac{f(z)}{\frac{\partial f(z)}{\partial z}} \right|_{z=z_1} = - \frac{f(z_1)}{\frac{\partial f(z_1)}{\partial z}}.$$

Järelikult võib funktsiooni nullpunktile läheneva asukoha korrektsiooni arvutada valemiga:

$$\epsilon_j = - \left. \frac{f(z)}{\frac{\partial f(z)}{\partial z}} \right|_{z=z_j} = - \frac{f(z_j)}{\frac{\partial f(z_j)}{\partial z}},$$

milles  $j = 0, 1, 2 \dots$

Funktsiooni nullpunkti numbriliseks arvutamiseks kasutada iteratsioonvalemit:

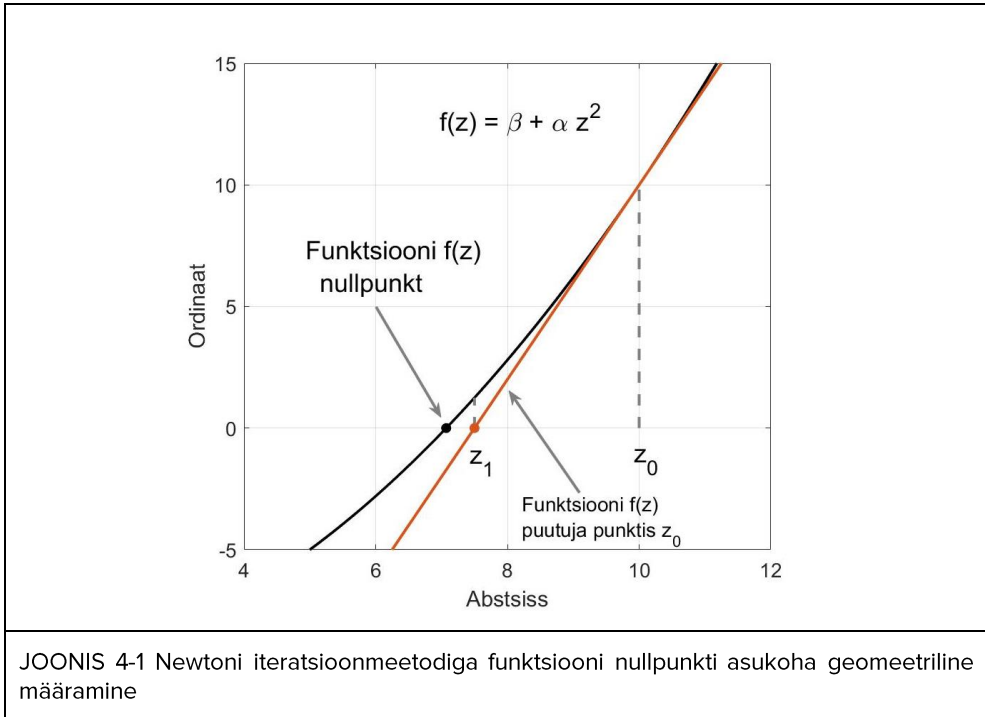
$z_{j+1} = z_j - \frac{f(z_j)}{\frac{\partial f(z_j)}{\partial z}}.$	4-3
--	-----

Newtoni iteratsioonmeetodi valemi lahendust saab ka geomeetriliselt hästi selgitada. Iga iteratsiooniga määratakse funktsiooni argumenti valitud väärtusele funktsioonikõvera puutuja, mis annab uue funktsiooni argumenti. Iga järgmine funktsiooni argument on funktsiooni nullpunktis asukohale lähemal.

**MÄRKUS.** Newtoni iteratsioonmeetodi koondumus sõltub valitud valemiga etteantud funktsiooni ekstreemumite asukohtadest. Kui valida funktsioonile esimene argument nullpunktist liiga kaugelt, siis võib arvutusskeem mitte koonduda, st iteratsiooni protsessis ei muutu funktsiooni argument konstantseks suuruseks, vaid võib muutuda võnkumiseks, kaoseks vms. Iteratsiooni protsessi koondumist saab muuta, kui muuta funktsiooni argumenti algväärtust. Kandes vastavad koondumise ja hajumise punktid kompleksstasandile, et määrata kas protsess hajub või koondub teatud



iteratsioonide arvu järel. Selle protsessiga võib saada väga keerulise struktuuriga kujundeid: fraktaalse struktuuriga kujundid, mille korral mingi väikese ala suurendamine toob ikka uuesti ja uuesti esile algse kujundiga sarnased jooned, elemendid või algkujundi enda (VIIDE 4.3, „Mittelineaarne dünaamika ja kaos“). Et vältida funktsiooni iteratsiooniprotsessi koonduvuse uurimist mingi funktsiooni argumenti algväärtusele, võetakse voolamise hüdraulika valemiga lahendamise numbrilises ülesandes kasutusele veafunktsioon, et garanteerida funktsiooni nullpunkti olemasolu.



### 4.3 VEAFunktsioon

Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilises arvutusskeemis võetakse kasutusele voolamise hüdraulika valemiga määratud veafunktsioon (ingl. *error function*):

$ERF(z_j) = Z_j - Z$ ,	4-4
------------------------	-----

milles  $z_j$  on hüdraulilise voolusüsteemi otsitav arvutuslik suurus,  $Z_j$  on empiirilise valemiga määratud arvutuslik hüdrauliline suurus ja  $Z$  on nt voolamise hüdraulika valemiga määratud etteantud hüdrauliline suurus.

Veafunktsiooni tuletis määratakse kui

$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{dZ_j}{dz_j},$	4-5
---	-----

milles on eeldatud, et hüdraulika valemiga määratud etteantud hüdrauliline suurus  $Z = \textit{konstant}$ .

Veafunktsioonist suunatud tuletise võtmise reegel:

$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{0 - ERF(z_j)}{z_{j+1} - z_j},$	4-6
--	-----

võimaldab kasutusele võtta Tayloriga valemiga 1-järgu tuletise täpsusega:

$z_{j+1} = z_j - \frac{ERF(z_j)}{\frac{dERF(z_j)}{dz_j}}.$	4-7
--	-----

ARVUTUSSKEEM (Veafunktsioon)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Hüdraulilise voolusüsteemi otsitav arvutuslik suuruse valem (iteratsioonmeetodi põhivalem):

$z_{j+1} = z_j - \frac{z_j - Z}{\frac{dZ_j}{dz_j}} = z_j - \frac{Z(z_j) - Z}{\frac{dZ(z_j)}{dz_j}}.$	4-8
--	-----

Hüdraulika valemiga määratud arvutusliku hüdraulilise suuruse valem:

$Z_j = f(z_j).$	4-9
-----------------	-----

## 4.4 NEWTON-RAPHSONI ITERATSIOONMEETOD

Iteratsioonmeetodit on võimalik kasutada ka algebraalsete võrrandite süsteemi lahendamiseks. Newton-Raphsoni iteratsioonmeetod kasutab sama põhimõtet, st funktsioonide süsteemi nullpunktide määramist, mida kasutab Newtoni iteratsioonmeetod ühe funktsiooni nullpunkti määramisel, selle erinevusega, et ühe otsitava suuruse asemel on otsitavaks suuruste vektor.

Voolamise hüdraulika algebraalsete võrrandite ülesande võib vormistada süsteemina:  $f(\mathbf{z}) = 0$ , milles hüdrauliliste suuruste vektor on  $\mathbf{z} = (Q_i, h_i, Q_{ii}, h_{ii}, Q_{iii}, h_{iii}, \dots)$ .

Algebraalsete võrrandite süsteemi võib lahendada siis iteratsioonmeetodi põhivalemiga:

$$\mathbf{z}_{j+1} = \mathbf{z}_j - J(\mathbf{z}_j)^{-1} f(\mathbf{z}_j),$$

milles hüdrauliliste suuruste  $j$  – iteratsioon on  $\mathbf{z}_j = (Q_j, h_j, Q_{j2}, h_{j2}, Q_{j3}, h_{j3}, \dots)_j$  ja  $J(\mathbf{z}_j)$  on Jacobian, mis määratakse kui  $j$  – iteratsiooni tegurite maatriks funktsiooni  $f(\mathbf{z}_j)$  1-järgu tuletistest hüdrauliliste suuruste vektori järgi.

Näiteks, kui voolamise hüdraulika ülesanne koosneb kahest võrrandist:

$$f_1(Q, h) = 0,$$

$$f_2(Q, h) = 0,$$

milles hüdrauliliste suuruste vektor on  $\mathbf{z} = (Q, h)$ , siis võib kahest algebraalisest võrrandist koosneva süsteemi lahendada iteratsioonmeetodi põhivalemiga esimesele iteratsioonile:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0 \\ h_0 \end{pmatrix} - J(\mathbf{z}_0)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(Q_0, h_0) \\ f_2(Q_0, h_0) \end{pmatrix},$$

milles  $(Q_0, h_0)$  on voolamise hüdraulika võrrandite argumentide algväärtused,  $(Q_1, h_1)$  on voolamise hüdraulika võrrandite argumentide esimesed iteratsioonväärtused, ning Jacobian

$$J(\mathbf{z}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Q} & \frac{\partial f_1}{\partial h} \\ \frac{\partial f_2}{\partial Q} & \frac{\partial f_2}{\partial h} \end{pmatrix}_{(Q_0, h_0)}.$$

Iteratsioonmeetodi põhivalemiga määratakse algebraalsete võrrandite süsteemi argumendid  $(j + 1)$  – iteratsioonile:

$\begin{pmatrix} Q_{j+1} \\ h_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_j \\ h_j \end{pmatrix} - J(\mathbf{z}_j)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(Q_j, h_j) \\ f_2(Q_j, h_j) \end{pmatrix},$	4-10
--	------

milles  $(Q_j, h_j)$  on voolamise hüdraulika võrrandite argumentide  $j$  – iteratsiooniväärtused,  $(Q_{j+1}, h_{j+1})$  on voolamise hüdraulika võrrandite argumentide  $(j + 1)$  – iteratsioonväärtused, ning funktsiooni tuletiste Jacobian

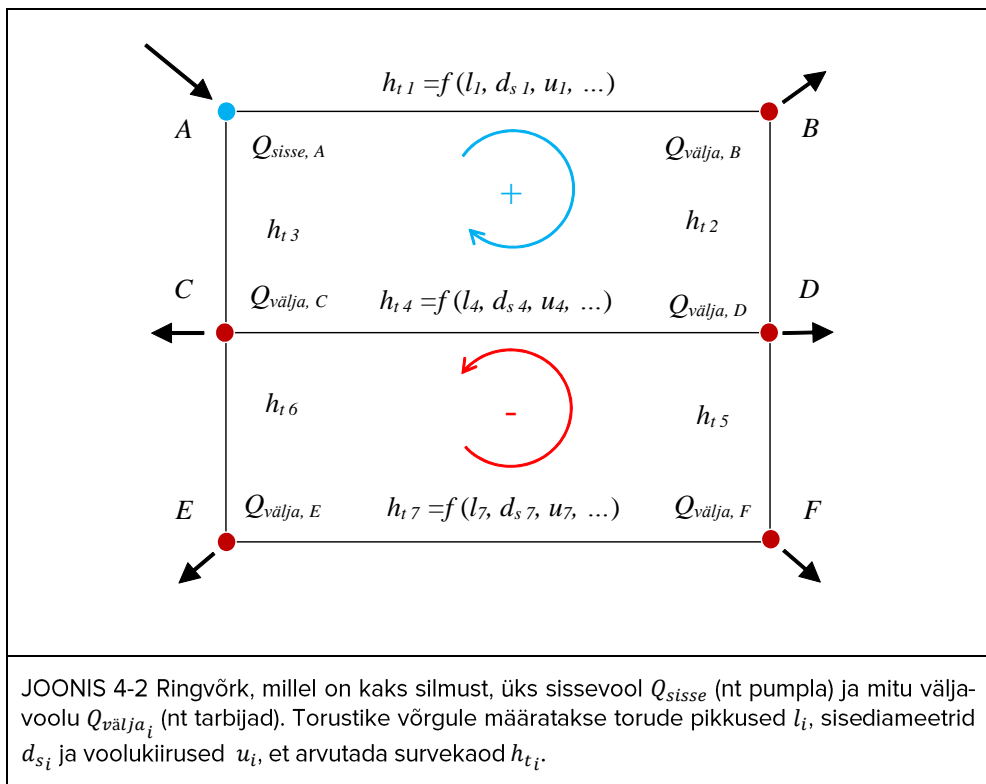
$$J(\mathbf{z}_j) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Q} & \frac{\partial f_1}{\partial h} \\ \frac{\partial f_2}{\partial Q} & \frac{\partial f_2}{\partial h} \end{pmatrix}_{(Q_j, h_j)}.$$

## 4.5 INSENERRAKENDUSI. VEEVÕRK

Newton-Raphsoni iteratsioonmeetodit kasutatakse nii veevarustuse kui ka kanalisatsiooni võrgu mudelite numbrilistes arvutusskeemides. Linna veevärgi numbrilise mudeli põhieelduseks on see, et võrgu sisse- ja väljavool on koondunud võrgu sõlmedesse, ning see on teada mõõtmistest vms andmetest, nt arvestuslik veetarbimine. Suuremastaapsed veevarustuse süsteemid on olulised linnarajatised, ning hüdraulilise mudeli kasutamine on süsteemi projekteerimise, renoveerimise, kasutamise, kulude optimeerimise jaoks oluline. Hüdraulilise voolusüsteemi analüüs hõlmab võrgutorude sõlmede rõhukõrguste ja sõlmede-vahelistes torudes voolukiiruste arvutamist kvaasistatsionaarsele voolamise puhul. Rõhukõrguse ja voolukiiruse seoseid määravad võrrandid on mittelineaarsed, ning ka seetõttu on veevarustuse ja kanalisatsiooni võrgu võrrandite süsteemi lahendamise üks levinum meetod Newton-Raphsoni meetod. See meetod on kasutusel nii survealise veevarustuse kui ka isevoolse kanalisatsiooni tarkvaralistes insenermudelites. Veevarustuse välisvõrk võib olla nii ring- kui ka hargvõrk. Veevõrk koosneb pea- ja jaotustorustikust. Sademevee- ja reoveekanaliseerimise võrgud koosnevad tänava- ja peatorustikust. Veevõrgu numbrilises mudelis minimiseeritakse torude voolukiiruse vektori järgi võrgu torude integraalset takistust:

$$\sum h_{t_i} \rightarrow \text{miinimum},$$

milles toru survekadu  $h_{t_i}$  jagatakse toru hõõrdesurvekaoks  $h_{l_i}$  ja toruühenduste kohtsurvekaoks  $h_{k_i}$ . Veevarustuse välisvõrk arvutatakse reeglina kui pikk surve- torustik, st kohttakistuse osa lisatakse torustikule vastava pikkusega. (VIIDE 4.4).



Siinjuures tuleb märkida, et nii täieliku täitumusega survetorustikus kui ka osalise täitumusega isevooles torustikus võivad esineda nõ järsud voolukiiruse muutused, mis levivad veepinna või tihedusega määratud rõhulainetena. Nt elektrikatkestusel võivad automaatklapid või ka pööreteregulaatorita pumbad peatada praktiliselt hetkeliselt veevoolu survetorustikus, millega kaasneb hüdrauliline lööklaine. Voolukiiruse järsu muutusega kaasneb survetorus rõhu järsk muutumine (selle vähenemine või suurenemine) elastsel veeosa ja torupiirde deformatsioonil. Elastse veeosa deformatsiooniga kaasneb veetiheduse muutus. Kusjuures plasttorudes võib hüdroloögiga kaasneda ka torupiirde plastne deformatsioon. Samuti võib isevooles torustikus teatud tingimustel, nt toru sisemõõtmel muutumisel, moodustuda liikuv vooluhüpe, millega kaasneb samuti voolukiiruse järsk muutus ning rõhukõrguse muutus. Kusjuures pealtkaetud voolusängis võib toimuda üleminek osalise torutäitega voolamiselt rõhulisele täieliku torutäitega voolamisele. See võib põhjustada sademeveekanalisisatsiooni kaevudes veetaseme ülemäärase tõusu. Voolukiiruse järsu muutusega soetud vooluprotsesse torustikus nimetatakse tugevalt ebaühtlaseks voolamiseks, mis on mittestatsionaarse voolamise üks erijuhte. Hüdraulilise lööklaine ja liikuva vooluhüppe modelleerimisülesannetes kasutatakse karakteristikute arvutusmeetodid, mida tutvustatakse raamatu osas IV: TUGEVALT EBAÜHTLANE VOOLAMINE.

## 4.6 NUMBRILISE ARVUTUSSKEEMI KOONDUVUS

Kasutades ära absoluutse vea definitsiooni (VIIDE 4.5, „Arvutusmeetodid“), võib igale iteratsioonile ( $j$ ) esitada vastavalt otsitava hüdraulilise suuruse täpse väärtuse ( $r$ ) kui arvutatud suuruse ( $z_j$ ) ja vea ( $\epsilon_j$ ) summana:

$$r = z_j + \epsilon_j,$$

$$r = z_{j+1} + \epsilon_{j+1},$$

→

$r = z_{j+n} + \epsilon_{j+n}.$	4-11
---------------------------------	------

Newtoni iteratsioonmeetodi põhivalem, Taylori valem 1-järgu tuletise täpsusega (VALEM (4-8)), võimaldab määrata ligikaudselt arvutatud suuruse kui

$$z_{j+1} = r - \epsilon_{j+1} = r - \epsilon_j - \frac{Z(z_j)}{\frac{dZ(z_j)}{dz_j}} = r - \epsilon_j - \frac{Z(r - \epsilon_j)}{\frac{dZ(r - \epsilon_j)}{dz_j}},$$

mille võib teisendada valemiks

$\epsilon_{j+1} = \epsilon_j + \frac{Z(r - \epsilon_j)}{\frac{dZ(r - \epsilon_j)}{dz_j}},$	4-12
--	------

milles hüdraulilise voolusüsteemi otsitav arvutuslik suurus  $z_j$  on asendatud hüdraulilise suuruse täpse väärtuse ja absoluutse vea vahega  $r - \epsilon_j$ , mis määrab empiirilise valemiga arvutusliku hüdrauliline suuruse  $Z_j$ .

Arendades empiirilise valemiga määratud arvutusliku hüdrauliline suuruse  $Z_j$  funktsiooni Taylori ritta 2-järgu täpsusega:

$$Z(r - \epsilon_j) = Z_j(r) - \epsilon_j Z_j'(r) + \left(\frac{\epsilon_j^2}{2}\right) Z_j''(r),$$

milles on kasutatud tähistust  $\partial Z_j / \partial \epsilon_j = Z_j'$  ja  $\partial^2 Z_j / \partial \epsilon_j^2 = Z_j''$ .

Arendades empiirilise valemiga määratud arvutusliku hüdrauliline suuruse tuletise  $\partial Z_j / \partial \epsilon_j = Z_j'$  funktsiooni Taylori ritta 2-järgu täpsusega:

$$Z'(r - \epsilon_j) = Z_j'(r) - \epsilon_j Z_j''(r) + (\epsilon_j^2 / 2) Z_j'''(r).$$

Asendades empiirilise valemiga määratud arvutusliku hüdrauliline suuruse  $Z_j$  ja suuruse tuletise  $\partial Z_j / \partial z_j$  funktsiooni Taylori read 2-järgu täpsusega valemisse (VALEM (4-12)), saab näidata, et iteratsiooniarvutuse viga on määratud ligikaudse valemiga:

$\epsilon_{j+1} \approx -\frac{\epsilon_j^2 Z_j''(r)}{2 Z_j'(r)}.$	4-13
--	------

Newtoni-Raphson iteratsioonimeetod on seotud vastava hüdraulika ülesande arvutuskeemi põhivalemi ja hüdraulika valemi koonduvusega (VIIDE 4.6).

## 4.7 VIITED

- 4.1 Chadwick, A., Morfett, J. & Borthwick, M. (2004). *Hydraulics in Civil and Environmental Engineering*. Spon Press.
- 4.2 Chow, V. T., Maidment, D. R. & Mays, L. W. (1988). *Applied Hydrology*. McGraw-Hill Education.
- 4.3 Engelbrecht, J. & Uus, A. (1993). *Mittelineaarne dünaamika ja kaos*. Eesti Teaduste Akadeemia Küberneetika Instituut.
- 4.4 Cross, H. (1936). Analysis of flow in networks of conduits or conductors, *University of Illinois Bulletin*, XXXIV(22).
- 4.5 Tamme, E., Vöhandu, L. & Luht, L. (1986). *Arvutusmeetodid*. Valgus.
- 4.6 Vreugdenhil, C. B. (1994). *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Kluwer Academic Publisher.

## 5 RÕHULINE TORUSTIK

### 5.1 PRAKTILINE OSA. SURVETORUD

#### 5.1.1 EHITIS. VEEVARUSTUSE- JA KANALISATSIOONIVÕRK

Survetorustikku kasutatakse eelkõige veevarustuses, kuid ka kanalisatsioonis, kui vee isevoolne ärajuhtimine ei ole võimalik. Veevarustuse välisvõrk ja hoone veevõrk on survesüsteemid, mille abil juhitakse vesi tarbijateni. Veevarustuse välisvõrk on veevarustussüsteemi ehk veevärgi osa, mis koosneb torustikuliinidest ja on vahetult seotud pumbajaamade ja reguleerimisseadmetega (veetornid, veemahutid, jne). Joogivesi pumbatakse peatorustiku kaudu veevarustuse jaotusvõrku, mis on üldjuhul ringvõrk. Ringvõrk tagab veevarii korral võrreldes tupikvõrguga (hargvõrguga) suurema varustuskindluse. Veevarustuse välisvõrgu hüdrauliline arvutus seisneb veevärgi põhielementide (torustikud, pumplad, mahutid vms) dimensioonimises ja survekadude määramises vastavalt arvestuslikule veetarbimisele. Veevõrgu hüdraulilise arvutuse aluseks on tiptunni veetarbimine, mis peab arvestama ka tuletõrjeevajadusega.

Survetorustiku läbimõõdu määramine on optimeerimisülesanne, mille eesmärk on leida majanduslikult soodsaim lahendus, mis oleneb vee voolukiirusest ja vee viibeajast torustikus. Mida väiksem on voolukiirus, seda suurem peaks olema toru siseläbimõõt. See mõjutab ehitusmaksumust. Mida suurem on voolukiirus, seda suuremad on rõhukaod torustikus. See omakorda mõjutab vee pumpamise käituskulusid. Standardis (VIIDE 5.1, „Veevarustuse välisvõrk“, VIIDE 5.2, „Hoone kanalisatsioon“) loetakse optimaalseks voolukiiruseks 0,5 m/s kuni 2,0 m/s, mis eritingimustes võib olla kuni 3,5 m/s. Eelkõige tuleb lähtuda sellest, et tarbijale on tagatud vajaliku ning õigusaktidega määratud kvaliteedile vastava joogivee kättesaadavus.

Pumbajaama peatoru kohta tuleb koostada majandushinnang, kus tuuakse välja torustiku läbimõõt, mis tagab optimaalseimad ehitus- ja käituskulud. Pumpamisega kaasnevad kulud elektrienergiale, mistõttu on pumpade valik ja pumpla töö optimeerimine olulise tähtsusega. Olenevalt sellest, kuidas arvutatakse rõhukaodu, jagunevad survetorustikud lühikesteks ja pikkadeks. Tehnilisest lahendusest lähtuvalt on lühikese torustiku liini ja ühenduste rõhukaod (vastavalt vooluprotsessile hõõrde- ja kohtsurvekaod) ühes suurusjärgus. Neid võetakse torustiku (ka rõhukaoga pumba imitorustiku puhul) arvutamisel arvesse. Pikas survetorustikus on hõõrdesurvekadu kohtsurvekaost tunduvalt suurem. Kohtsurvekadu välja ei arvutata, vaid seda märgitakse hõõrdesurvekao 5%...10% suurendamisega (VIIDE 5.3, „Hüdraulika ja pumbad“). Pumba survetorustikku ja veevarustuse välisvõrku arvutatakse reeglina pika survetorustikuna, kus kohttakituse osa võib märkida vastava ekvivalentpikkusega (VIIDE 5.1, „Veevarustuse välisvõrk“).



## 5.1.2 VOOLUREŽIIM. ÜLERÕHK JA ALARÕHK

Vältimaks majanduslikku kahju tarbijatele, ei tohi veevarustussüsteemi maksimaalne töö rõhk ületada 600 kPa (VIIDE 5.1, „Veevarustuse välisvõrk“). Kui süsteemi staatiline rõhk ületab 600 kPa, tuleb kas jaotus- või tarnetorustikel kasutada rõhualandamise seadmeid. Torustiku projekteerimisel tuleb arvestada torusiseseid rõhke, mis esinevad nii suurima vooluhulga ehk arvestusvooluhulga, nii mittestatsionaarse voolamise kui ka tasakaalulises olukorras. Torustik tuleb projekteerida nii, et see peaks vastu vaakumile, st rõhule 80 kPa alla atmosfäärirõhu (ligikaudu 20 kPa absoluutrõhku). Määrata tuleb nii arvutus rõhk kui ka suurim arvutus rõhk (nt rõhk hüdroloogi puhul) ning valida proovirõhk torustiku survetestiks (VIIDE 5.1, „Veevarustuse välisvõrk“).

Veevõrk peab olema projekteeritud, tehniliselt varustatud ja ehitatud nii, et alarõhu korral oleks süsteemis välistatud vee tagasivool torustikku (VIIDE 5.1, „Veevarustuse välisvõrk“). Tagatud peab olema veevahetus ja vesi ei tohi torustikus ületada kriitilist viibeaga, mis võib halvendada joogivee kvaliteeti, st muuta vee joogikõlbmatuks. Alarõhu korral toimuv tagasivool torustikku või liigpikk viibeag võrgus võivad põhjustada antisanitaarseid tingimusi ja sellest johtuvalt ohtu tarbijate tervisele. Tarbimisest sõltumatu veekadu oleneb veevõrgu leketest ja võib mõjutada veevõrgu funktsioneerimist. Veekadudeks hinnatakse 2%...5% ööpäeva keskmisest veetarbimisest (VIIDE 5.4). Joogivee torustiku ühendamine kanalisatsiooniga mistahes eesmärgil on lubamatu, sest see võib kaasa tuua veejaotussüsteemi reostumise.

Veevärgi põhielementide dimensioonimisel ja hüdraulilistes arvutustes peab arvestama võimalike riskidega, näiteks torustiku automaatklapi sulgumisega elektrikatkestuse tagajärjel ja/või pumba seiskumisega, mille tõttu tekib hüdroloök survetorustikus. Hüdraulilise lööklaine tekkimise põhjuseks võib olla ka pumba kiire käivitamine või seiskumine, siibri kiire avamine või sulgemine vms. Hüdroloöki torustikus saab vältida näiteks pumba juhtimisel sagedusmuunduriga, pumba pehmekäivitusega ja/või -peatamisega, surveventiili aeglase avamisega, õhupaagi paigaldamisega pumplasse, survetorule „hingamistoru“ paigaldamisega või ülerõhu klapi paigaldamisega.

Rõhuline voolamine ei esine ainult veevarustuse ja kanalisatsiooni survetorustikes. Eriolukorras, kus isevoolne torustik töötab täieliku torutäitega, võib samuti tekkida rõhulise voolamise olukord. Erijuhuna saab käsitleda voolamist nii sifoonis kui ka düükris (pööratud sifoon), kus ühe elemendina kasutatakse survetoru ehk toru, mille sisene rõhk erineb toruvälisest rõhust. Düükrit kasutatakse tavaliselt isevoolse torustiku osana, kui tekib vajadus vee juhtimiseks rajatise (nt maantee) või loodusliku barjääri (nt jõgi) alt. Sifoon kujutab endast tavaliselt vertikaaltasapinnas U-kujulist toru, millega juhitakse vett üle geodeetilisel kõrgema koha, või L-kujulist toru, millega juhitakse vett toruteljest geodeetilisel madalamale. Sifooni arvutatakse kui vastavakujulist survetorustikku põhimõttel, et vee voolamisel madalamalt tasemelt

kõrgemale muutub rõhk hüdraulilises voolusüsteemis madalamaks ning võib tekkida vaakumi olukord. Sifooni arvutamisel tuleb tähelepanu pöörata sellele, kas veejuga torus katkeb ehk kas torustikku siseneb õhku väljastpoolt survesüsteemi. See võib suurendada torustikus takistust voolamisele. Düükrit arvutatakse kui vastavakujulist survetorustikku põhimõttel, et vee voolamisel geodeetilisel kõrgemalt tasemelt madalamale muutub täieliku torutäitega osas rõhk suuremaks. Düükri arvutamisel tuleb tähelepanu pöörata sellele, et torustikus oleks tagatud isepuhastumiseks vajalik voolukiirus ja välditakse suurte vooluhulkade puhul uputusi. Linnaala üleujutusega võib düükrisse koguneda setteid (nt tänavate karestamiseks kasutatavaid puistematerjale), mis võivad kuhjumisel põhjustada torustiku ummistuse. Torustiku ummistuse vältimiseks tuleb regulaarselt teostada torustiku hooldust, milleks võib näiteks olla läbipesu.

### 5.1.3 SISSEJUHATUS ÜLESANDESSE. PÕHIVALEMID

Hüdraulilise voolusüsteemi torustiku sisediameetrit on võimalik määrata proovimismeetodil ja numbrilise arvutusskeemi abil, kasutades selleks ülesande põhivalemeid – reaalvoolu Bernoulli võrrandit, reaalvedeliku Bernoulli võrrandit survevoolule, voolutakistuse empiirilisi valemeid, ümartoru Reynoldsi arvu, vooluhulga valemil vms. Proovimise arvutusmeetodit võib kasutada nii hüdrauliliselt sileda kui ka kareda sisepiirdega torustiku sisediameetri määramiseks. Torustiku voolamise hõõrdetakistustegur määratakse vastavalt toru sisepiirde absoluutkaredusele ja ümartoru Reynoldsi arvule empiirilise valemiga nagu Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrand, Blasiuse hõõrdetakistuse valem, Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valem või Manningi hõõrdetakistuse valem. Survetoru sisediameetri ülesande proovimismeetodis võib voolamise hõõrdetakistusteguri määrata Moody diagrammi silehõõrdejoonele vastava takistusteguriga. Sama ülesande numbrilises lahenduses on kasutatud Newtoni iteratsioonmeetodit, mille abil on koostatud numbriline arvutusskeem survetoru sisediameetri arvutamiseks vastavalt Blasiuse hõõrdetakistuse valemile. Hüdrauliliselt sileda sisepiirdega torustiku hõõrdetakistusteguri võib määrata Blasiuse hõõrdetakistuse valemiga, mille lahend vastab Moody diagrammi silehõõrdejoonele, kui ümartoru Reynoldsi arv on vahemikus  $Re = (0,04 \dots 1) \cdot 10^5$ . Hüdrauliliselt kareda sisepiirdega torustiku (ka amortiseerunud torustiku) Darcy-Weisbach-tüüpi hõõrdetakistusteguri määramiseks võib samuti kasutada empiirilist valemit. Nn kareda piirdega torule võib hõõrdetakistusteguri määrata Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valemiga, mis kohaldub hästi ümartoru Reynoldsi arvu suurema vahemiku puhul. Voolamise puhul hüdrauliliselt kareda piirdega torustikus, mis vastab Moody diagrammil ruuttakistuspiirkonna hõõrdetakistusteguri lahenditele, võib kasutada Manningi karedusteguri valemit. Hõõrdetakistusteguri võib määrata SI-mõõtühikute süsteemi Manningi kareduskaala valemiga, mille arvutustulemus ei sõltu otseselt Reynoldsi arvust. Manningi

karedusteguri kasutamine voolusüsteemi takistuse määramisel on seotud vee omaduste määramatusega. Vee temperatuur määrab vee tiheduse ja dünaamilise molekulaarse viskoossusteguri, mille järgi määratakse kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur. Reynoldsi arvu väärtus sõltub olulisel määral kinemaatilistest molekulaarsest viskoossustegurist.

Nii proovimismeetodit kui numbrilist arvutusskeemi võib kasutada ka hüdraulilise voolusüsteemi mittehorizontaalse torustiku dimensioonimiseks. Torustiku sisediaimeetri määramisel võib arvestada lisaks hõordesurvekaole ka kohtsurvekadu, mis sõltub nii toru sisse- ja väljavoolust kui ka toruühenduste takistustest. Ühtlase voolamise hõordepinge torustiku sisepiirdele võib määrata hõordesurvekao kaudu. Kui  $Re > 1 \cdot 10^5$ , siis ei vasta Blasiuse hõordetakistuse valemiga arvatud hõordekistustegurite väärtused hästi Moody diagrammi silehõordejoone hõordetakistustegurite väärtustele, sest tegemist on valemi määramatusega.

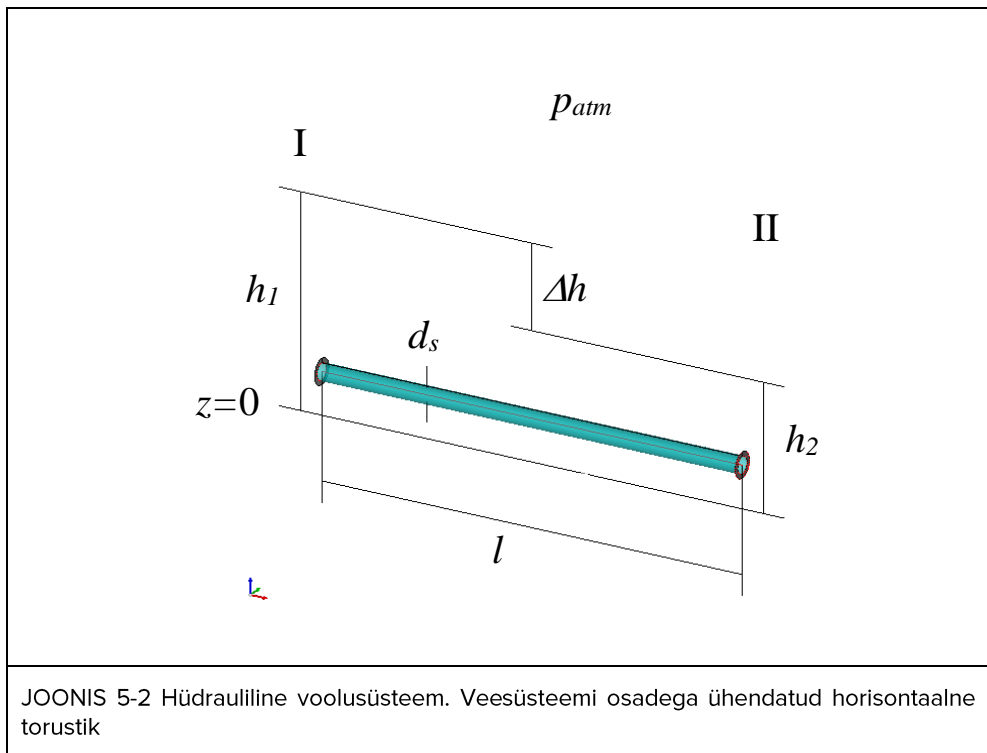


JOONIS 5-1 Pumpla survesüsteem, Tallinn. (Foto: Andres Piirsalu, 2021)

## 5.2 PÕHIÜLESANNE. TORUSTIKU DIMENSIOONIMINE

ANDMED. Horisontaalne ümartoru pikkusega  $l = 250$  m ühendab veesüsteemi kahte osa I ja II, milles vabapinna kõrgused võrdlusnivoost on erinevad ( $h_1 > h_2$ ). Vee juhtimisele kasutatakse süsteemiosade vabapinnakõrguste vahet  $h_1 - h_2 = \Delta h = 4$  m. Hüdraulilises voolusüsteemis on 20 °C vesi, mille tihedus  $\rho = 998,2$  kg·m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu = 1,002 \cdot 10^{-3}$  kg·m<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,0 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>. Süsteemiosade vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Määrata vastavalt survetorus toimuvale voolamisele kehtivale reaalvedeliku Bernoulli võrrandile pika toru ühtlase voolamise valem. Valida takistus-  
tegurile vastavalt ümartoru Reynoldsi arvule Moody diagrammi silehõõrdejoone lahendused. Arvutada veega täielikult täitunud torustiku sisediaameeter ja seda täitva vee voolukiirus ja -hulk. Määrata numbrilise arvutusskeemiga hüdraulilise voolusüsteemi horisontaaltoru sisediaameeter. Arvutada vastavalt etteantud vooluhulgale numbrilise arvutusskeemiga horisontaaltoru sisediaameeter.



EELDUSED. Veesüsteemi osasid ühendab pikk muutumatu ristlõikega ümartoru. Hüdraulilises voolusüsteemis on vee voolamine statsionaarne, torustikus on voolamine ühtlane. Survevoolu kohttakistust toru sisse- ja väljavoolus mitte arvestada ehk hüdraulilise voolusüsteemi kogu survekadu on hõõrdesurvekaoga määratud. Vee juhtimisel kasutatud süsteemiosade vabapinnakõrguste vahe määrab hästi rõhukõrguste vahe hüdraulilise voolusüsteemi torustiku osas. Takistusteguri määramiseks kasutada Moody diagrammi silehõõrdejoone lahendusi. Hüdrauliliselt sileda sisepiirdega torustiku hõõrdetakistusteguri määramiseks võib kasutada Blasiuse turbulentsse voolamise hõõrdetakistuse valemit  $Re < 1 \cdot 10^5$ . Numbrilise arvutuskeemi koostamisel kasutada Newtoni iteratsioonmeetodit.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Reaalvedeliku Bernoulli võrrand survevoolule, pika torustiku voolamise põhivalem, Darcy survekao valem, ümartoru Reynolds'i arvu valem, vooluhulga valem, Blasiuse hõõrdetakistuse valem, Blasiuse toru sisediameetri valem, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem**

## VALEMID

Reaalvedeliku Bernoulli võrrand survevoolule, st voolamisele survetorustikus on

$$z_{sv} + \frac{p_{sv}}{\rho g} + \frac{u_{sv}^2}{2g} = z_{vv} + \frac{p_{vv}}{\rho g} + \frac{u_{vv}^2}{2g} + h_t,$$

milles torutelje kõrgus, rõhk ja voolukiirus täieliku torutäitega sissevoolus on vastavalt  $z_{sv}$ ,  $p_{sv}$  ja  $u_{sv}$ , st süsteemiosa I väljavoolus. Torutelje kõrgus, rõhk ja voolukiirus täieliku torutäitega väljavoolule on vastavalt  $z_{vv}$ ,  $p_{vv}$  ja  $u_{vv}$ , st süsteemiosa II sissevoolus. Survekadu on  $h_t$ , mis jagatakse hõõrdesurvekaoks  $h_l$  ja kohtsurvekaoks  $h_k$ . Vee erikaal on  $\rho g$ , milles  $\rho$  on vee tihedus ja  $g$  on raskuskiirendus.

Kui rõhulise voolamise kohttakistusi survetorustiku sisse- ja väljavoolus mitte arvestada ( $h_k = 0$ ), siis vabapinna kõrgus süsteemiosades I ja II on vastavalt

$$h_1 = z_{sv} + \frac{p_{sv}}{\rho g} + \frac{u_{sv}^2}{2g},$$

$$h_2 = z_{vv} + \frac{p_{vv}}{\rho g} + \frac{u_{vv}^2}{2g}.$$

Horisontaalses torus on

$$z_{sv} = z_{vv}.$$

Ilma lekketa ja muutumatu siseristlõikega, st elavlõikega torus on

$$u_{sv} = u_{vv}.$$

Rõhukõrguste vahe ehk rõhuvahekõrgus:

$$\frac{p_{sv}}{\rho g} - \frac{p_{vv}}{\rho g} = \frac{p_{sv} - p_{vv}}{\rho g} = h_{rvk}.$$

Reaalvedeliku Bernoulli võrrandist survevoolule horisontaalses torus järeldeb seos

$$h_{rvk} = h_l,$$

milles survekadu  $h_t$  on määratud kui hõordesurvekadu  $h_l$ .

Veesüsteemi osasid ühendava pika torustiku voolamise põhivalem on

$$\Delta h = h_l,$$

milles  $\Delta h = h_1 - h_2$ .

Darcy survekao valem on

$$h_l = \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g},$$

milles  $\lambda$  on hõõrdetakistustegur (mõõtühikuta suurus  $[\lambda] = 1$ ),  $l$  on täistäitumusega torustiku pikkus,  $d_s$  on toru sisediameeter ja  $u$  ( $= u_{sv} = u_{vv}$ ) on voolamise keskkiirus torus.

Ümartoru Reynoldsi arv voolamisele on määratud valemiga:

$$Re = \frac{u d_s}{\nu},$$

milles  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur. Ümartoru Reynoldsi arvu valemist võib voolukiiruse määrata valemiga:

$$u = \frac{Re \nu}{d_s}.$$

Kasutades veesüsteemi osadega ühendatud pika torustiku voolamise põhivalemit, Darcy survekao valemit ja ümartoru Reynoldsi arvu valemit, saab veega täistäitumusega torule tuletada sisediameetri valemi.

$$\Delta h = \frac{\lambda l Re^2 \nu^2}{2 g d_s^3}$$

→

$$d_s^3 = \frac{\lambda l Re^2 \nu^2}{2 g \Delta h}$$

→

$$d_s = \sqrt[3]{\frac{\lambda l Re^2 \nu^2}{2 g \Delta h}}$$

Vooluhulk torus on määratud valemiga

$$Q = u A_e,$$

milles voolukiirus torus on  $u$  ja täistäitumusega ümartoru sisemõõtmega määratud ristlõike pindala ehk elavlõike pindala on

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4}.$$

*Proovimise arvutusmeetod*

ARVUTUS. Toru sisediameeter

Moody diagrammi silehõõrdejoonele valitud ja vastavalt arvatud hüdraulilised suurused.

	$\lambda$	<b>Re</b>	$d_s$ (m)	$u$ (m·s <sup>-1</sup> )	$Q$ (m <sup>3</sup> ·s <sup>-1</sup> )
i	0,020	$\sim 0,6 \cdot 10^5$	0,0612	0,9802	0,0029
ii	0,015	$\sim 2,5 \cdot 10^5$	0,1440	1,7360	0,0283
iii	0,013	$\sim 25,0 \cdot 10^5$	0,5839	4,2814	1,1465
iv	0,008	$\sim 90,5 \cdot 10^5$	1,5087	6,0010	10,7279

*Numbriline arvutusskeem. Toru sisediameeter*

*Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod*

VALEMID

Veafunktsioon:

$$ERF(y_j) = Q_j - Q,$$

milles  $y_j$  on arvutuslik toru sisediameeter,  $Q_j$  on arvutuslik vooluhulk ja  $Q$  on etteantud vooluhulk.

Veafunktsiooni tuletis:

$$\frac{dERF(y_j)}{dy_j} = \frac{dQ_j}{dy_j},$$

milles on eeldatud, et etteantud vooluhulk  $Q = \textit{konstant}$ .

Arvutuslik vooluhulk on määratud valemiga

$$Q_j = u_j A_{e_j},$$

milles  $u_j$  on arvutuslik voolukiirus ja  $A_{e_j}$  on arvutuslik elavlöige.

→

$$\frac{dERF(y_j)}{dy_j} = A_{e_j} \frac{du_j}{dy_j} + u_j \frac{dA_{e_j}}{dy_j} = Q_j \left( \frac{1}{u_j} \frac{du_j}{dy_j} + \frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dy_j} \right)$$

Veafunktsioonist suunatud tuletise võtmise reegel:

$$\frac{dERF(y_j)}{dy_j} = \frac{0 - ERF(y_j)}{y_{j+1} - y_j},$$

võimaldab kasutusele võtta Taylori valemi 1-järgu tuletise täpsusega:

$$y_{j+1} = y_j - \frac{ERF(y_j)}{\frac{dERF(y_j)}{dy_j}}.$$

Numbrilise arvutusskeemi põhivalemi üldkuju on

$$y_{j+1} = y_j - \frac{Q_j - Q}{Q_j \left( \frac{1}{u_j} \frac{du_j}{dy_j} + \frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dy_j} \right)} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left( \frac{1}{u_j} \frac{du_j}{dy_j} + \frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dy_j} \right)}.$$

Määrame hüdraulilise voolusüsteemi valemi numbrilise arvutusskeemi põhivalemi liikmele:

$$\frac{1}{u_j} \frac{du_j}{dy_j}.$$

Blasiuse hõõrdetakistuse valem takistusteguri määramisele on

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}}.$$

→

$$\lambda^4 = \frac{(0,3164)^4}{Re}$$

Määrame numbrilise arvutusskeemi põhivalemi *esimese* liikme valemi.

$$y_j^3 = \frac{\lambda l Re_j^2 v^2}{2 g \Delta h}$$

→

$$y_j^{12} = \frac{\lambda^4 l^4 Re_j^8 v^8}{(2 g \Delta h)^4} = \frac{(0,3164)^4 l^4 Re_j^8 v^8}{Re_j (2 g \Delta h)^4} = (0,3164)^4 \frac{l^4 Re_j^7 v^8}{(2 g \Delta h)^4}$$

→

$$Re_j^7 = \frac{y_j^{12} (2 g \Delta h)^4}{(0,3164)^4 l^4 v^8}$$



→

$$Re_j = \frac{y_j^{\frac{12}{7}} (2 g \Delta h)^{\frac{4}{7}}}{l^{\frac{4}{7}} v^{\frac{8}{7}} (0,3164)^{\frac{4}{7}}}$$

→

$$u_j = \frac{Re_j v}{y_j} = \frac{y_j^{\frac{12}{7}} (2 g \Delta h)^{\frac{4}{7}}}{l^{\frac{4}{7}} v^{\frac{8}{7}} (0,3164)^{\frac{4}{7}}} \frac{v}{z_j} = \frac{y_j^{\frac{5}{7}} (2 g \Delta h)^{\frac{4}{7}}}{l^{\frac{4}{7}} v^{\frac{1}{7}} (0,3164)^{\frac{4}{7}}}$$

→

$$\frac{du_j}{dy_j} = \frac{d}{dy_j} \left( \frac{y_j^{\frac{5}{7}} (2 g \Delta h)^{\frac{4}{7}}}{l^{\frac{4}{7}} v^{\frac{1}{7}} (0,3164)^{\frac{4}{7}}} \right) = \frac{5}{7} \frac{y_j^{-\frac{2}{7}} (2 g \Delta h)^{\frac{4}{7}}}{l^{\frac{4}{7}} v^{\frac{1}{7}} (0,3164)^{\frac{4}{7}}}$$

→

$$\frac{1}{u_j} \frac{du_j}{dy_j} = \frac{l^{\frac{4}{7}} v^{\frac{1}{7}} (0,3164)^{\frac{4}{7}} 5}{y_j^{\frac{5}{7}} (2 g \Delta h)^{\frac{4}{7}}} \frac{y_j^{-\frac{2}{7}} (2 g \Delta h)^{\frac{4}{7}}}{l^{\frac{4}{7}} v^{\frac{1}{7}} (0,3164)^{\frac{4}{7}}} = \frac{5}{7} \frac{1}{y_j}$$

Määrame hüdraulilise voolusüsteemi valemi numbrilise arvutusskeemi põhivalemi liikmele

$$\frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dy_j}.$$

Määrame numbrilise arvutusskeemi põhivalemi *teise* liikme valemi.

$$A_{e_j} = \pi \frac{y_j^2}{4}$$

→

$$\frac{dA_{e_j}}{dy_j} = 2 \frac{\pi y_j}{4} = \frac{\pi y_j}{2}$$

→

$$\frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dy_j} = \frac{4}{\pi y_j^2} \frac{\pi y_j}{2} = \frac{2}{y_j}$$

ARVUTUSSKEEM (Blasiuse toru sisediaimeetri valem)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku toru sisediaimeetri valem (iteratsioonmeetodi põhivalem)

$$y_{j+1} = y_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left(\frac{5}{7} \frac{1}{y_j} + \frac{2}{y_j}\right)}$$

Arvutusliku vooluhulga valem

$$Q_j = u_j A_{e_j} = u_j \frac{\pi y_j^2}{4} = \frac{y_j^{\frac{5}{7}} (2 g \Delta h)^{\frac{4}{7}}}{l^{\frac{4}{7}} \nu^{\frac{1}{7}} (0,3164)^{\frac{4}{7}}} \frac{\pi y_j^2}{4} = \frac{\pi}{4} \frac{y_j^{\frac{19}{7}} (2 g \Delta h)^{\frac{4}{7}}}{l^{\frac{4}{7}} \nu^{\frac{1}{7}} (0,3164)^{\frac{4}{7}}}$$

ARVUTUS. Toru sisediaameeter

i) Etteantud vooluhulk  $Q = 0,0029 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.	7 iter.
$y_j$ (m)	1	0,6318	0,3994	0,2532	0,1619	0,1066	0,0761
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	5,6270	1,6178	0,4661	0,1352	0,0402	0,0129	0,0052

	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$y_j$ (m)	0,0638	0,0615	0,0615
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	0,0032	0,0029	0,0029

VASTUSED

$$d_s = 0,0615 \text{ m}$$

$$\mathbf{Re} = 0,6007 \cdot 10^5$$

$$\lambda = 0,0202$$

JÄRELDUS. Blasiuse toru sisediaameetri valemiga määratud hõõrdetakistusteguri väärtus vastab hästi Moody diagrammi silehõõrdejoonega määratud takistusteguri väärtusele kuna  $0,04 \cdot 10^5 < \mathbf{Re} < 1 \cdot 10^5$ .

**MÄRKUS.** Blasiuse valemiga määratud hõõrdetakistuse väärtustele Reynolds'i arvu vahemikus  $0,04 \cdot 10^5 < \mathbf{Re} < 1 \cdot 10^5$  võib survetoru sisediaameetri arvutada valemiga, st Blasiuse toru sisediaameetri valemiga

$$d_s = \left( \frac{4 Q}{\pi} \frac{l^{\frac{4}{7}} \nu^{\frac{1}{7}} (0,3164)^{\frac{4}{7}}}{(2 g \Delta h)^{\frac{4}{7}}} \right)^{\frac{7}{19}}$$

ARVUTUS. Toru sisediaameeter

ii) Etteantud vooluhulk  $Q = 0,0283 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.	7 iter.
$y_j$ (m)	1	0,6334	0,4041	0,2640	0,1849	0,1502	0,1426
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	5,6270	1,6294	0,4811	0,1515	0,0576	0,0328	0,0285

	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$y_j$ (m)	0,1423	0,1423	0,1423
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	0,0283	0,0283	0,0283

VASTUSED

$$d_s = 0,1423 \text{ m}$$

$$Re = 2,5323 \cdot 10^5$$

$$\lambda = 0,0141$$

JÄRELDUS. Blasiuse toru sisediaameetri valemiga määratud hõõrdetakistusteguri väärtus ei vasta hästi Moody diagrammi silehõõrdejoone takistusteguri väärtustele kuna  $Re > 1 \cdot 10^5$ . Tegemist on empiirilise valemiga määratusega.

### MÄRKUSED. Torustiku dimensioonimine

- Blasiuse toru sisediaameetri valemiga määratud hõõrdetakistustegur, mis vastab Moody diagrammi silehõõrdejoonega määratud takistustegurile kehtib hästi ümartoru Reynoldsi arvu vahemikus  $0,04 \cdot 10^5 < Re < 1 \cdot 10^5$ .
- Proovimise arvutusmeetodit võib kasutada ka hüdrauliliselt mittesileda sisepiirdega torustiku sisediaameetri määramisele. Torustiku hõõrdetakistusteguri määramisel võib samuti kasutada Moody diagrammi lahendeid. Esitatud Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilises arvutusskeemis tuleb nõ silehõõrde takistusteguri empiirilise valem (nt Blasiuse hõõrdetakistuse valem) asendada sobiva takistusteguri määramise empiirilise valemiga, nagu näiteks Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valemiga, mis kehtib suuremas ümartoru Reynoldsi arvu vahemikus.

- Hüdrauliliselt kareda sisepiirdega torustikus toimuva voolamise puhul, mis vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna hõõrdetakistuse lahenditele, võib kasutada Manningi hõõrdetakistuse valemite, milles Darcy hõõrdetakistustegur  $\lambda$  on määratud Manningi karedusteguriga  $n_M$ . Hõõrdetakistusteguri võib anda SI-möödühikute süsteemi Manningi karedusskaala valemiga, mis määrab hõõrdetakistusteguri valemiga, milles  $R_h$  on hüdrauliline raadius ja see on määratud ümartorule  $R_h = d_s/4$ . Manningi karedusteguri kasutamine voolusüsteemi takistuse määramisele on seotud vee omaduste määramatusega. Vee temperatuur määrab vee tiheduse ja dünaamilise molekulaarse viskoossusteguri, mille järgi määratakse kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur. Reynoldsi arvu väärtus sõltub oluliselt kinemaatilise laminaarsest viskoossustegurist.
- Esitatud proovimismeetodit ja numbrilist arvutusskeemi võib kasutada hüdraulilise voolusüsteemi mittehoriintaalse torustiku dimensioonimisele.
- Torustiku sisediameetri määramise proovimismeetodis ja numbrilises arvutusskeemis võib arvestada lisaks hõõrdesurvekaole ka kohtsurvekaoga, mis sõltub nii toru sisse- ja väljavoolu kui ka toruühenduste takistustest.
- Vastavalt reaalvoolu Bernoulli võrrandile võib veesüsteemi osade vabapinna kõrguste vahe hüdraulilises voolusüsteemis määrata lühikese torustiku voolamise valemiga:

$$\Delta h = \left( k_{LSV} + 12,7 \frac{g n_M^2 l}{d_s^{8/5}} + k_{LVV} \right) \frac{8 Q^2}{g \pi^2 d_s^4},$$

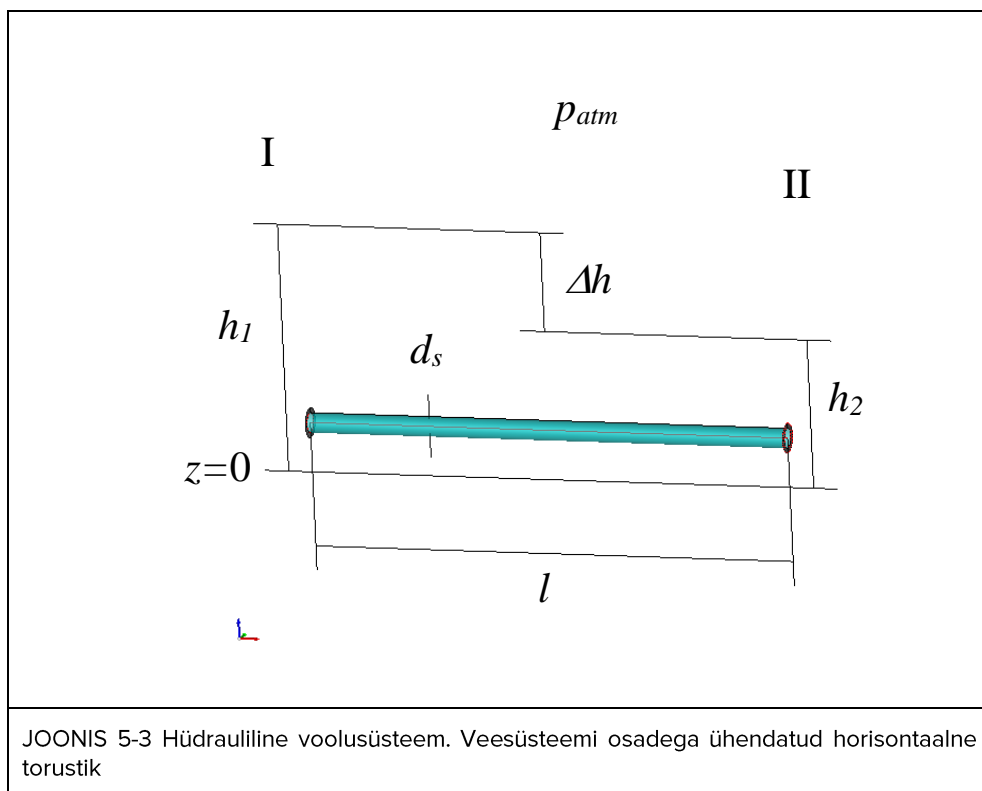
milles  $g$  on raskuskiirendus,  $d_s$  on ümartoru sisediameeter,  $l$  on torustiku pikkus,  $n_M$  on Manningi karedustegur,  $Q$  on vooluhulk,  $k_{LSV}$  on kohttakistustegur toru sissevoolule ja  $k_{LVV}$  on kohttakistustegur toru väljavoolule. Toruühenduste kohttakistused võib lühikese torustiku voolamise valemis lisada näiteks torustiku vastava pikendamise kaudu.

- Ühtlase voolamise hõõrdepinge torustiku sisepiirdele määratakse valemiga:  $\tau_0 = \rho g R_h I_h$ , milles  $\rho$  on vedeliku tihedus,  $g$  on raskuskiirendus,  $R_h$  on hüdrauliline raadius ja  $I_h$  on hüdrauliline lang.
- Kui  $Re > 1 \cdot 10^5$ , siis ei vasta Blasiuse hõõrdetakistuse valemiga arvatud takistustegurite väärtused Moody diagrammi silehõõrdejoone takistustegurite väärtustele, sest tegemist on empiirilise valemi määramatusega.

### 5.3 NÄITEÜLESANNE. TORUSTIKU DIMENSIOONIMINE

ANDMED. Horisontaalne ümartoru pikkusega  $l = 250$  m ühendab veesüsteemi kahte osa I ja II, milles vabapinna kõrgused võrdlusnivoost on erinevad ( $h_1 > h_2$ ). Vee juhtimisel kasutatakse süsteemiosade vabapinnakõrguste vahet  $h_1 - h_2 = \Delta h = 4$  m. Etteantud vooluhulk  $Q = 10$  l.s<sup>-1</sup>. Hüdraulilises voolusüsteemis on 10 °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000$  kg.m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu = 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg.m<sup>-1</sup>.s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>. Süsteemiosade vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Määrata proovimismeetodiga ja numbrilise arvutuskeemiga hüdraulilise voolusüsteemi torule sisediameeter. Arvutada hüdraulilise voolusüsteemi veega täistäitumusega torustiku sisediameeter etteantud vooluhulgale. Arvutada ümartoru Reynoldsi arv ja hõõrdetakistustegur rõhulisele voolamisele horisontaalorus.



JOONIS 5-3 Hüdrauliline voolusüsteem. Veesüsteemi osadega ühendatud horisontaalne torustik

## LAHENDUS

### PÕHIVALEMID. Blasiuse toru sisediaometri valem, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem

#### VALEMID

Täistäitumusega torule võib kasutada sisediaometri valemit:

$$d_s = \sqrt[3]{\frac{\lambda l Re^2 \nu^2}{2 g \Delta h}},$$

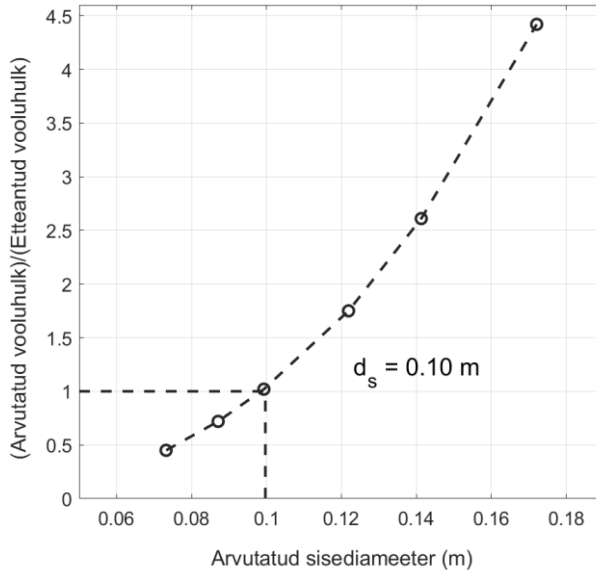
milles  $\lambda$  on hõõrdetakistustegur,  $l$  on torustiku pikkus,  $Re$  on ümartoru Reynoldsi arv,  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur,  $g$  on raskuskiirendus ja  $\Delta h$  on süsteemiosade vabapinnakõrguste vahe.

#### Proovimise arvutusmeetod

#### ARVUTUS. Toru sisediaameeter

Moody diagrammi silehõõrdejoonelt valitud ja vastavalt arvatud hüdraulilised suurused.

	$\lambda$	$Re$	$d_s$ (m)	$u$ (m.s <sup>-1</sup> )	$Q$ (m <sup>3</sup> .s <sup>-1</sup> )
i	0,02	$\sim 0,6 \cdot 10^5$	0,0732	1,0717	0,0045
ii	0,019	$\sim 0,8 \cdot 10^5$	0,0871	1,1999	0,0072
iii	0,018	$\sim 1,0 \cdot 10^5$	0,0993	1,3161	0,0102
iv	0,017	$\sim 1,4 \cdot 10^5$	0,1219	1,5006	0,0175
v	0,016	$\sim 1,8 \cdot 10^5$	0,1413	1,6650	0,0261
vi	0,015	$\sim 2,5 \cdot 10^5$	0,1721	1,8981	0,0442



JOONIS 5-4 Torustiku sisediaameetri määramine, milleks on kasutatud proovimise arvutusmeetodiga saadud punktide interpoleerimisköverat

VASTUSED

$$d_s = 0,1 \text{ m}$$

$$Re = 1,0 \cdot 10^5$$

$$\lambda = 0,018$$

*Numbriline arvutuskeem. Toru sisediaameeter*

*Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod*

ARVUTUSSKEEM (Blasiuse toru sisediaameetri valem)

Numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku toru sisediaameetri valem (iteratsioonmeetodi põhivalem)

$$y_{j+1} = y_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left(\frac{5}{7} \frac{1}{y_j} + \frac{2}{y_j}\right)}$$

Arvutusliku vooluhulga valem

$$Q_j = u_j A_{e_j} = u_j \frac{\pi y_j^2}{4} = \frac{y_j^5 (2 g \Delta h)^4}{l^{\frac{4}{7}} v^{\frac{1}{7}} (0,3164)^{\frac{4}{7}}} \frac{\pi y_j^2}{4} = \frac{\pi}{4} \frac{y_j^{\frac{19}{7}} (2 g \Delta h)^4}{l^{\frac{4}{7}} v^{\frac{1}{7}} (0,3164)^{\frac{4}{7}}}$$

ARVUTUS. Toru sisediaameeter

Etteantud vooluhulk  $Q = 0,01 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.	7 iter.
$y_j$ (m)	1	0,6323	0,4008	0,2564	0,1690	0,1210	0,1018
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	5,4159	1,5604	0,4528	0,1347	0,0434	0,0176	0,0110

	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$y_j$ (m)	0,0985	0,0984	0,0984
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	0,0100	0,0100	0,0100

VASTUSED

$$d_s = 0,0984 \text{ m}$$

$$Re = 0,9903 \cdot 10^5$$

$$\lambda = 0,0178$$

JÄRELDUS. Blasiuse toru sisediaameetri valemiga määratud hõõrdetakistusteguri väärtus vastab hästi Moody diagrammi silehõõrdejoone takistusteguri väärtusele kuna  $Re \approx 1 \cdot 10^5$ .

**MÄRKUS.** Kui valida horisontaalorule etteantud vooluhulk  $Q = 10 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ , siis hüdraulilises voolusüsteemis kus on  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  vesi, mille tihedus  $\rho = 998,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu = 1,002 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ , ning vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , oleks torustiku arvutuslik sisediaameeter  $d_s = 0,097 \text{ m}$ . Vastav ümardoru Reynoldsi arv  $Re = 1,313 \cdot 10^5$  ja hõõrdetakistustegur  $\lambda = 0,017$ . Blasiuse toru sisediaameetri valemiga määratud hõõrdetakistusteguri väärtus ei vasta hästi Moody diagrammi silehõõrdejoone takistusteguri väärtustele kuna  $Re > 1 \cdot 10^5$ . Tegemist on empiirilise valemi määramatusega.



## 5.4 ISESEISEVA TÖÖ ÜLESANNE. TORUSTIKU DIMENSIOONIMINE

ANDMED. Horisontaalne ümartoru pikkusega  $l = 250$  m ühendab veesüsteemi kahte osa I ja II, milles vabapinna kõrgused võrdlusnivoost on erinevad ( $h_1 > h_2$ ). Vee juhtimisele kasutatakse süsteemiosade vabapinnakõrguste vahet  $h_1 - h_2 = \Delta h = 4$  m. Etteantud vooluhulk  $Q = 5$  l. s<sup>-1</sup>. Hüdraulilises voolusüsteemis on 20 °C vesi, mille tihedus  $\rho = 998,2$  kg. m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu = 1,002 \cdot 10^{-3}$  kg. m<sup>-1</sup>. s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,0 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>. s<sup>-1</sup>. Süsteemiosade vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Määrata hüdraulilise voolusüsteemi torule sisediaameeter. Arvutada hüdraulilise voolusüsteemi veega täistäitumusega torustikule sisediaameeter etteantud vooluhulgale. Arvutada ümartoru Reynoldsi arv ja hõõrdetakistustegur survevoolule.

VASTUSED

$$d_s = 0,0751 \text{ m}$$

$$Re = 0,8473 \cdot 10^5$$

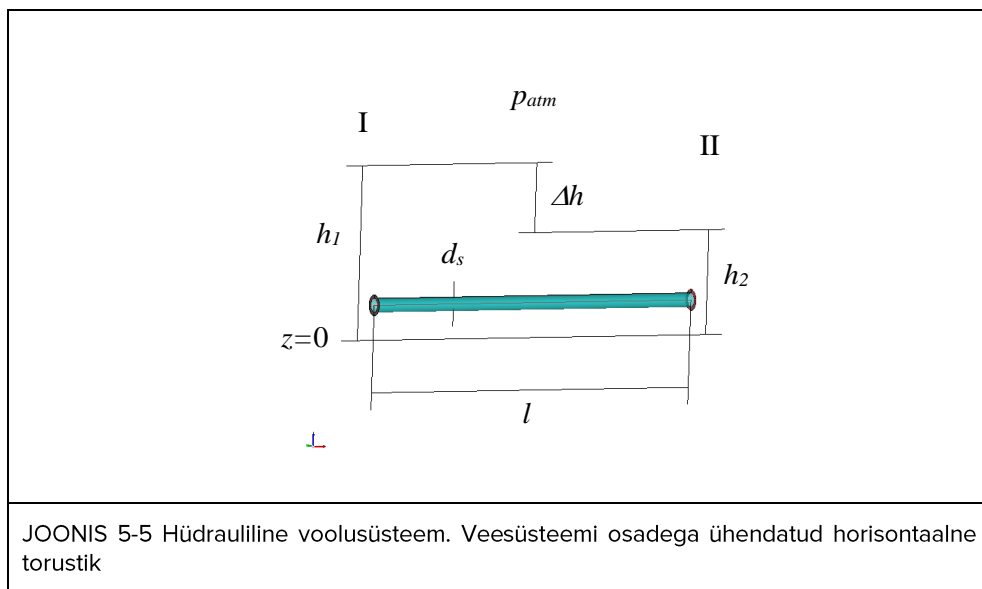
$$\lambda = 0,0185$$

JÄRELDUS. Blasiuse hõõrdetakistuse valemiga määratud takistusteguri väärtus vastab hästi Moody diagrammi turbulentsse voolamise silehõõrdejoone takistusteguri väärtusele kuna  $Re < 1 \cdot 10^5$ .

## 5.5 LISAÜLESANNE 1. TORUSTIKU DIMENSIOONIMINE

ANDMED. Horisontaalne ümartoru pikkusega  $l = 250$  m ühendab veesüsteemi kahte osa I ja II, milles vabapinna kõrgused võrdlusnivoost on erinevad ( $h_1 > h_2$ ). Vee juhtimisel kasutatakse süsteemiosade vabapinnakõrguste vahet  $h_1 - h_2 = \Delta h = 4$  m. Torule etteantud vooluhulgad:  $Q = 1,1465 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  ja  $10,7279 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Torustiku sisepiirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,011$ . Hüdraulilises voolusüsteemis on  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  vesi, mille tihedus  $\rho = 998,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu = 1,002 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Süsteemiosade vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata hüdraulilise voolusüsteemi horisontaaltoru sisedia-meeter. Arvutada veesüsteemi torustiku sisedia-meeter etteantud vooluhulkadele. Arvutada ümartoru Reynoldsi arv ja hõõrdetakistustegur rõhulisele voolamisele torustikus.



EELDUSED. Veesüsteemi osasid ühendab pikk muutumatu ristlõikega ümartoru. Hüdraulilises voolusüsteemis on vee voolamine statsionaarne, torustikus on voolamine ühtlane. Survevoolu kohttakistust toru sisse- ja väljavoolus mitte arvestada, st hüdraulilise voolusüsteemi survekadu on praktiliselt määratud hõõrdesurvekaoga. Vee juhtimisele kasutatud süsteemiosade vabapinnakõrguste vahe määrab hästi hüdraulilise voolusüsteemi torustiku osas rõhukõrguste vahe. Kasutada survetoru takistusteguri määramisele Manningi karedustegurit.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Pika torustiku voolamise põhivalem, Darcy survekao valem, vooluhulga valem, Manningi hõõrdetakistuse valem, ümartoru Reynolds'i arvu valem**

### VALEMID

Reaalvedeliku Bernoulli võrrandist survevoolule horisontaalses torus jäeldub seos:

$$h_{rvk} = h_l,$$

milles rõhuvahekõrgus on  $h_{rvk}$  ja hõõrdesurvekadu on  $h_l$ .

Veesüsteemi osasid ühendava pika torustiku voolamise põhivalem on

$$\Delta h = h_l,$$

milles veesüsteemi osade vabapinnakõrguste vahe on  $\Delta h$ .

Darcy survekao valem on

$$h_l = \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g},$$

milles  $\lambda$  on hõõrdetakistustegur (mõõtühikuta suurus  $[\lambda] = 1$ ),  $l$  on täistaitumusega torustiku pikkus,  $d_s$  on toru sisediameeter,  $u$  ( $= u_{sv} = u_{vv}$ ) on voolukiirus torus ja  $g$  on raskuskiirendus.

Vooluhulk torustikus on määratud valemiga

$$Q = u A_e,$$

milles voolukiirus torus on  $u$  ja täistaitumusega ümartoru sisemõõtmega määratud ristlõike pindala ehk elavlõige pindala on

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4}.$$

→

$$u = \frac{Q}{A_e} = \frac{4Q}{\pi d_s^2}$$

Voolamisele hüdrauliliselt kareda sisepiirdega torustikus, mis vastab Moody diagrammil ruuttakistuspiirkonna takistusteguri lahenditele, võib kasutada Darcy hõõrdetakistusteguri  $\lambda$  määramiseks Manningi karedustegurit  $n_M$ . Seetõttu peab Manningi hõõrdetakistuse valemiga arvatud takistusteguri väärtus vastama Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna hõõrdetakistusteguri väärtusele, seda vastavalt ümartoru Reynolds'i arvu väärtusele.

Manningi hõõrdetakistuse valem on

$$\lambda = \frac{8g n_M^2}{R_h^{2/6}},$$

milles  $R_h$  on hüdrauliline raadius. Ümartorule  $R_h = d_s/4$ .

→

$$\lambda = \frac{8 g n_M^2}{(d_s/4)^{2/6}}$$

$$\lambda = 4^{2/6} \frac{8 g n_M^2}{d_s^{2/6}}$$

$$\lambda = \frac{12,7 g n_M^2}{d_s^{2/6}}$$

Kasutades veesüsteemi osasid ühendava pika torustiku voolusüsteemi põhivalemit, Darcy survekao valemit, vooluhulga valemit ja Manningi hõõrdetakistuse valemit, saab tuletada valemi täistäitumusega toru sisediameetri määramisele:

$$\Delta h = \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g},$$

$$\Delta h = 4^{2/6} \frac{8 g n_M^2 l}{d_s^{2/6}} \frac{1}{d_s} \frac{1}{2g} \left( \frac{4Q}{\pi d_s^2} \right)^2,$$

$$\Delta h = \frac{4^{2/6} \cdot 8 \cdot 4^2 n_M^2 l Q^2}{2 \pi^2 d_s^{32/6}},$$

$$\Delta h = 10,3 \frac{n_M^2 l Q^2}{d_s^{16/3}}$$

→

$$d_s = \left( 10,3 \frac{n_M^2 l Q^2}{\Delta h} \right)^{3/16}.$$

Reynoldsi arv voolamisele ümartorus on määratud valemiga

$$Re = \frac{u d_s}{\nu},$$

milles  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur.

ARVUTUS. Etteantud vooluhulgad ja arvutustulemused

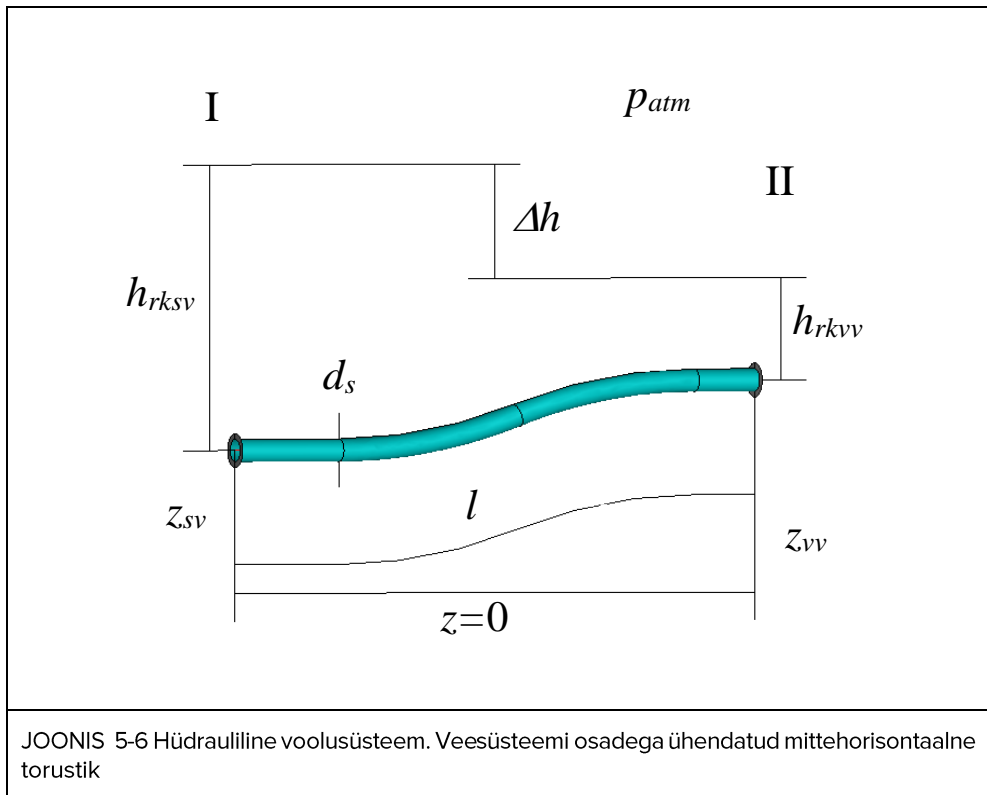
	$Q$ (m <sup>3</sup> ·s <sup>-1</sup> )	$d_s$ (m)	$\lambda$	$u$ (m·s <sup>-1</sup> )	$Re$
i	1,1465	0,6523	0,0174	3,4312	22,380 · 10 <sup>5</sup>
ii	10,7279	1,5087	0,0131	6,0010	90,537 · 10 <sup>5</sup>

**MÄRKUS.** Kontrollida iseseisvalt, kas Darcy hõõrdetakistusteguri  $\lambda$  arvutatud väärtused vastavad Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna tingimustele.

## 5.6 LISAÜLESANNE 2. TORUSTIKU DIMENSIOONIMINE

ANTUD. Ümartoruga, mille pikkus  $l = 1$  km, juhitakse veetornist (veesüsteemi osa I) vett hoonesse (veesüsteemi osa II), tarbijale. Mittehorrizontaalse torustiku teljega määratud kõrguste vahe  $\Delta z = z_{sv} - z_{vv} = -1$  m ja rõhukõrguste vahe  $h_{rk_{sv}} - h_{rk_{vv}} = h_{rk} = 5$  m. Arvestuslik vooluhulk  $Q = 10$  l. s<sup>-1</sup>. Toru sisepinna absoluutkaredus  $k_s = 0,0015$  mm. Hüdraulilises voolusüsteemis on 20 °C vesi, mille tihedus  $\rho = 998,2$  kg. m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu = 1,002 \cdot 10^{-3}$  kg. m<sup>-1</sup>. s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,0 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>. s<sup>-1</sup>. Hüdrauliline voolusüsteem on õhurõhu all  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Määrata proovimismeetodiga ja numbrilise arvutusskeemiga hüdraulilise voolusüsteemi torule sisediameeter. Arvutada hüdraulilise voolusüsteemi veega täistaitumusega torustikule sisediameeter etteantud vooluhulgale (arvestuslikule vooluhulgale). Arvutada ümartoru Reynoldsi arv, hõõrdetakistustegur ja hõõrdepinge voolamisele survetorus. Võrrelda Blasiuse hõõrdetakistuse valemiga ja Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valemiga määratud takistustegurite väärtuseid.



JOONIS 5-6 Hüdrauliline voolusüsteem. Veesüsteemi osadega ühendatud mittehorrizontaalne torustik

EELDUSED. Veetorni ja hoonet ühendab mittehorigontaalne pikk muutumatu ristlõikega ümartoru. Hüdraulilises voolusüsteemis on vee voolamine statsionaarne, torustikus on voolamine ühtlane. Survevoolu kohttakistust toru sisse- ja väljavoolus mitte arvestada, st rõhulise voolamise survekadu on määratud hõõrdesurvekaoga. Turbulentsele voolamisele  $Re < 1 \cdot 10^5$  võib Moodi diagrammi silehõõrdejoonele vastavate hõõrdetakistustegurite määramisele kasutada Blasiuse hõõrdetakistuse valemit.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Reaalvedeliku Bernoulli võrrand survevoolule, Darcy survekao valem, ümartoru Reynoldsi arvu valem, Blasiuse hõõrdetakistuse valem, Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valem, pika torustiku voolamise põhivalem, Blasiuse toru sisediameetri valem, vooluhulga valem, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem**

## VALEMID

Reaalvedeliku Bernoulli võrrand rõhulisele voolamisele torustikus on

$$z_{sv} + \frac{p_{sv}}{\rho g} + \frac{u_{sv}^2}{2g} = z_{vv} + \frac{p_{vv}}{\rho g} + \frac{u_{vv}^2}{2g} + h_t,$$

milles torutelje kõrgus, rõhk ja voolukiirus torustiku sissevoolus on vastavalt  $z_{sv}$ ,  $p_{sv}$  ja  $u_{sv}$ , st veetorni I väljavoolus. Torutelje kõrgus, rõhk ja voolukiirus torustiku väljavoolus on vastavalt  $z_{vv}$ ,  $p_{vv}$  ja  $u_{vv}$ , st veetorni II sissevoolus.  $h_t$  on survekadu, mis jagatakse hõõrdesurvekaoks  $h_l$  ja kohtsurvekaoks  $h_k$ . Vee erikaal on  $\rho g$ , milles  $\rho$  on vee tihedus ja  $g$  on raskuskiirendus.

Kui rõhulise voolamise kohttakistust torustiku sisse- ja väljavoolus mitte arvestada, siis vabapinna kõrgus veesüsteemi osades, st veetornis (veesüsteemi osa I) ja hoones (veesüsteemi osa II) on vastavalt

$$h_1 = z_{sv} + \frac{p_{sv}}{\rho g} + \frac{u_{sv}^2}{2g},$$

$$h_2 = z_{vv} + \frac{p_{vv}}{\rho g} + \frac{u_{vv}^2}{2g}.$$

Mittehorigontaalses torus on

$$z_{sv} \neq z_{vv}.$$

Ilma lekketa, muutumatu toru siseristlõikega, st elavlõikega voolamisele on

$$u_{sv} = u_{vv}.$$

Rõhukõrguste vahe:

$$\frac{p_{sv}}{\rho g} - \frac{p_{vv}}{\rho g} = h_{rksv} - h_{rkvv} = h_{rvk}.$$

Reaalvedeliku Bernoulli võrrandist survevoolule kõvertorus järeldub seos

$$\Delta z + h_{rvk} = h_l,$$

milles  $\Delta z = z_{sv} - z_{vv}$  ja survekadu  $h_l$  on määratud kui hõõrdesurvekadu  $h_l$ .

Pika torustiku voolamise põhivalem on

$$\Delta h = h_l,$$

milles  $\Delta h = \Delta z + h_{rvk}$ .

Darcy survekao valem on

$$h_l = \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g},$$

milles  $\lambda$  on hõõrdetakistustegur (mõõtühikuta suurus  $[\lambda] = 1$ ),  $l$  on täistaitumusega torustiku pikkus,  $d_s$  on toru sisediameeter ja  $u (= u_{sv} = u_{vv})$  on voolukiirus torus.

Reynoldsi arv voolamisele ümartorus on määratud valemiga

$$Re = \frac{u d_s}{\nu},$$

milles  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur. Voolukiiruse võib määrata valemiga:

$$u = \frac{Re \nu}{d_s}$$

Kasutades pika torustiku voolamise põhivalemit, Darcy survekao valemit ja ümartoru Reynoldsi arvu valemit, saab tuletada seose, millest järeldub veega täistaitumusega torule sisediameetri valem:

$$\Delta h = \frac{\lambda l Re^2 \nu^2}{2 g d_s^3}.$$

→

$$d_s^3 = \frac{\lambda l Re^2 \nu^2}{2 g \Delta h}$$

→

$$d_s = \sqrt[3]{\frac{\lambda l Re^2 \nu^2}{2 g \Delta h}}$$

Vooluhulk torustikus on määratud valemiga

$$Q = u A_e,$$

milles voolukiirus torus on  $u$  ja täistäitumusega ümartoru sisemõõtmega määratud ristlõike pindala ehk elavlõike pindala on

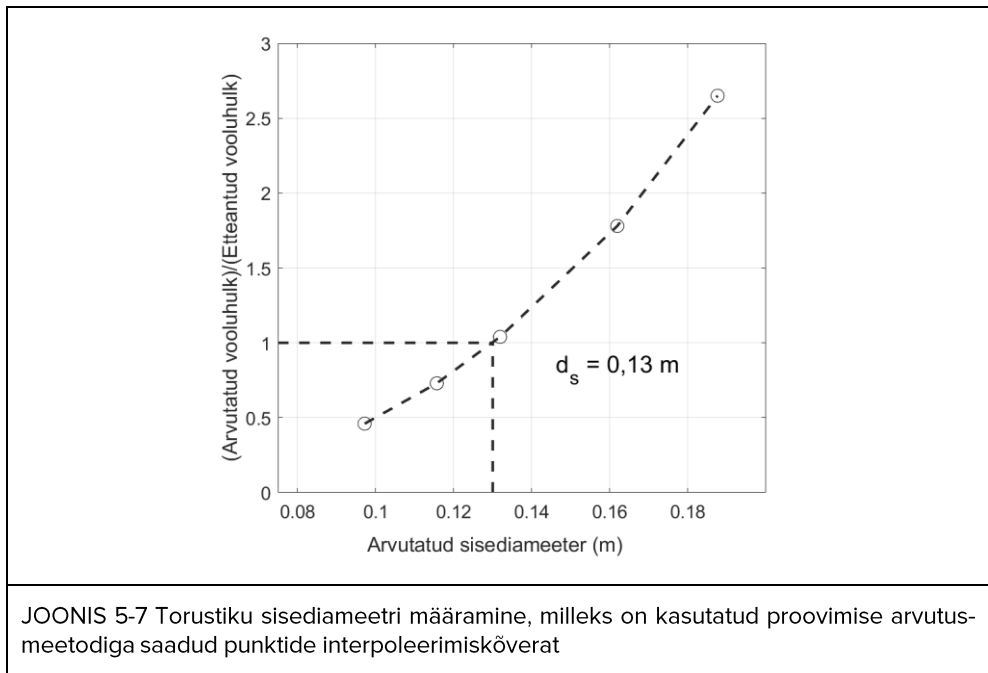
$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4}.$$

*Proovimise arvutusmeetod*

ARVUTUS. Toru sisediaameeter

Moody diagrammilt valitud ja vastavalt arvatatud hüdraulilised suurused.

	$\lambda$	$Re$	$d_s$ (m)	$u$ (m·s <sup>-1</sup> )	$Q$ (m <sup>3</sup> ·s <sup>-1</sup> )
i	0,02	$\sim 0,6 \cdot 10^5$	0,0972	0,6175	0,0046
ii	0,019	$\sim 0,8 \cdot 10^5$	0,1157	0,6914	0,0073
iii	0,018	$\sim 1,0 \cdot 10^5$	0,1319	0,7583	0,0104
iv	0,017	$\sim 1,4 \cdot 10^5$	0,1619	0,8646	0,0178
v	0,016	$\sim 1,8 \cdot 10^5$	0,1876	0,9593	0,0265



JOONIS 5-7 Torustiku sisediaameetri määramine, milleks on kasutatud proovimise arvutusmeetodiga saadud punktide interpoleerimiskõverat



Numbriline arvutusskeem. Toru sisediameeter

Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod

ARVUTUSSKEEM (Blasiuse toru sisediameetri valem)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku sisediameetri valem (iteratsioonmeetodi põhivalem)

$$z_{j+1} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left(\frac{5}{7} \frac{1}{z_j} + \frac{2}{z_j}\right)}$$

Arvutusliku vooluhulga valem

$$Q_j = u_j A_{e_j} = u_j \frac{\pi z_j^2}{4} = \frac{z_j^{\frac{5}{7}} (2 g \Delta h)^{\frac{4}{7}}}{l^{\frac{4}{7}} v^{\frac{1}{7}} (0,3164)^{\frac{4}{7}}} \frac{\pi z_j^2}{4} = \frac{\pi}{4} \frac{z_j^{\frac{19}{7}} (2 g \Delta h)^{\frac{4}{7}}}{l^{\frac{4}{7}} v^{\frac{1}{7}} (0,3164)^{\frac{4}{7}}}$$

ARVUTUS. Toru sisediameeter ( $Q = 0,01 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.	7 iter.
$z_j$ (m)	1	0,6330	0,4030	0,2614	0,1795	0,1408	0,1306
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	2,5483	0,7366	0,2162	0,0668	0,0241	0,0125	0,0102

	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (m)	0,1299	0,1299	0,1299
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	0,0100	0,0100	0,0100

VASTUSED

$$d_s = 0,1299 \text{ m}$$

$$Re = 0,9804 \cdot 10^5$$

$$\lambda = 0,0179$$

JÄRELDUS. Blasiuse toru sisediameetri valemiga määratud hõõrdetakistusteguri väärtus vastab hästi Moody diagrammi silehõõrdejoone takistusteguri väärtusele kuna  $Re \approx 1 \cdot 10^5$ .

Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valemiga määratud takistustegur:

$$\lambda = \frac{0,25}{\left( \log_{10} \left( \frac{(0,0015 \text{ mm}/1000)/0,1299 \text{ m}}{3,7} + \frac{5,74}{(0,9804 \cdot 10^5)^{9/10}} \right) \right)^2} = 0,0180 .$$

Hüdrauliline raadius

$$R_h = \frac{0,1299 \text{ m}}{4} = 0,0325 \text{ m}$$

Hüdrauliline lang

$$I_h = \frac{4 \text{ m}}{1000 \text{ m}} = 0,0040$$

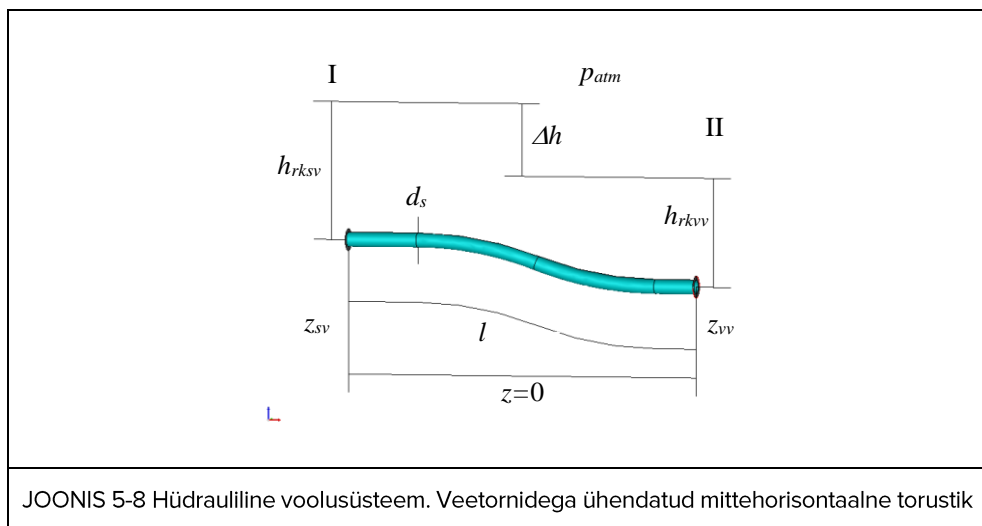
Hõõrdepinge torustikus

$$\tau_0 = 998,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,0325 \text{ m} \cdot 0,0040 = 1,2717 \text{ Pa}$$

## 5.7 LISAÜLESANNE 3. TORUSTIKU DIMENSIOONIMINE

ANTUD. Ümartoruga, mille pikkus  $l = 1$  km, juhitakse veetornist (veesüsteemi osa I) vett hoonesse (veesüsteemi osa II), tarbijale. Mittehorrizontaalse torustiku teljega määratud kõrguste vahe  $\Delta z = z_{sv} - z_{vv} = 1$  m ja rõhukõrguste vahe  $h_{rksv} - h_{rkvv} = h_{rkv} = 3$  m. Arvestuslik vooluhulk  $Q = 10$  l·s<sup>-1</sup>. Toru sisepinna absoluutkaredus  $k_s = 0,0015$  mm. Hüdraulilises voolusüsteemis on 20 °C vesi, mille tihedus  $\rho = 998,2$  kg·m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu = 1,002 \cdot 10^{-3}$  kg·m<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,0 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>. Hüdrauliline voolusüsteem on õhurõhu all  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Määrata proovimismeetodiga ja numbrilise arvutusskeemiga hüdraulilise voolusüsteemi torule sisediameeter. Arvutada hüdraulilise voolusüsteemi veega täistaitumusega torustikule sisediameeter etteantud vooluhulgale (arvestuslikule vooluhulgale). Arvutada ümartoru Reynoldsi arv, hõõrdetakistustegur ja hõõrdepinge voolamisele surveorus. Võrrelda Blasiuse hõõrdetakistuse valemiga ja Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valemiga määratud takistustegurite väärtuseid.



JOONIS 5-8 Hüdrauliline voolusüsteem. Veetornidega ühendatud mittehorrizontaalne torustik

EELDUSED. Veetorni ja hoonet ühendab mittehorrizontaalne pikk muutumatu ristlõikega ümartoru. Hüdraulilises voolusüsteemis on vee voolamine statsionaarne, torustikus on voolamine ühtlane. Survevoolu kohttakistust toru sisse- ja väljavoolus mitte arvestada, st rõhulise voolamise survekadu on määratud hõõrdesurvekaoga. Turbulentsele voolamisele  $Re < 1 \cdot 10^5$  võib Moodi diagrammi silehõõrdejoonele vastavate hõõrdetakistustegurite määramisel kasutada Blasiuse hõõrdetakistuse valemit.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID.** Reaalvedeliku Bernoulli võrrand survevoolule, Darcy survekao valem, ümartoru Reynoldsi arvu valem, Blasiuse hõõrdetakistuse valem, Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valem, pika torustiku voolamise põhivalem, Blasiuse toru sisediameetri valem, vooluhulga valem, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem

## VASTUSED

$$d_s = 0,1299 \text{ m}$$

$$Re = 0,9804 \cdot 10^5$$

$$\lambda = 0,0179$$

**JÄRELDUS.** Blasiuse hõõrdetakistuse valemiga määratud takistusteguri väärtus vastab hästi Moody diagrammi silehõõrdejoone takistusteguri väärtusele kuna  $Re \approx 1 \cdot 10^5$ .

Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valemiga määratud takistustegur:

$$\lambda = \frac{0,25}{\left( \log_{10} \left( \frac{(0,0015 \text{ mm}/1000)/0,1299 \text{ m}}{3,7} + \frac{5,74}{(0,9804 \cdot 10^5)^{9/10}} \right) \right)^2} = 0,0180.$$

Hüdrauliline raadius

$$R_h = \frac{0,1299 \text{ m}}{4} = 0,0325 \text{ m}$$

Hüdrauliline lang

$$I_h = \frac{4 \text{ m}}{1000 \text{ m}} = 0,0040$$

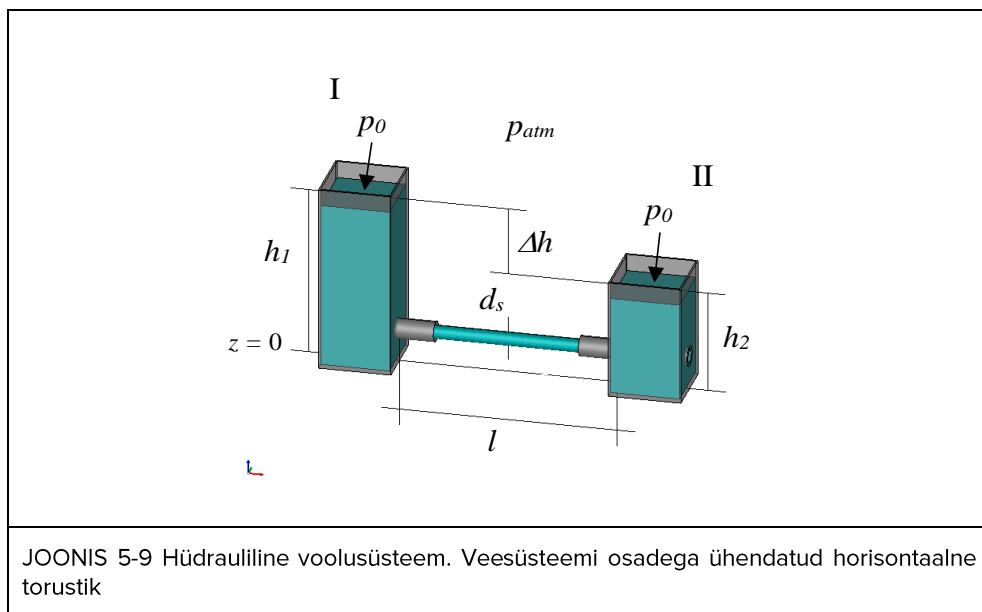
Hõõrdepinge torustikus

$$\tau_0 = 998,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,0325 \text{ m} \cdot 0,0040 = 1,2717 \text{ Pa}$$

## 5.8 LISAÜLESANNE 4. TORUSTIKU DIMENSIOONIMINE

ANDMED. Horisontaalne ümartoru pikkusega  $l = 60$  m ühendab veesüsteemi kahte osa I ja II, milles vabapinna kõrgused võrdlusnivoost on erinevad ( $h_1 > h_2$ ). Vee juhtimisele kasutatakse süsteemiosade vabapinnakõrguste vahet  $h_1 - h_2 = \Delta h = 1$  m. Etteantud vooluhulk  $Q = 10$  l·s<sup>-1</sup>. Hüdraulilises voolusüsteemis on 10 °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000$  kg·m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu = 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg·m<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>. Süsteemiosade vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Määrata hüdraulilise voolusüsteemi horisontaaltoru sisedia-meeter. Arvutada veega täistäitumusega torustikule sisedia-meeter etteantud voolu-hulgale. Arvutada ümartoru Reynoldsi arv ja hõõrdetakistustegur survevoolule.



EELDUSED. Hüdraulilises voolusüsteemis on vee voolamine statsionaarne, torustikus on voolamine ühtlane. Arvestada survevoolu kohttakistust toru sisse- ja välja-voolule, st hüdraulilise voolusüsteemi survekadu on määratud hõõrde- ja kohtsurve-kaosummaga. Proovimise arvutusmeetodis kasutada hõõrdetakistusteguri määra-misele Moody diagrammil silehõõrdejoone takistusteguri lahendeid. Turbulentsele voolamisele  $Re < 1 \cdot 10^5$  võib hüdrauliliselt sileda sisepiirdega toru hõõrde-takistusteguri määramisele kasutada Blasiuse hõõrdetakistuse valemit. Kasutada numbrilise arvutusskeemi koostamisel Newtoni iteratsioonmeetodit.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Reaalvoolu Bernoulli võrrand, Darcy survekao valem, Weisbachi survekao valem, ümartoru Reynoldsi arvu valem, Blasiuse hõõrdetakistuse valem, lühikese torustiku voolamise põhivalem, vooluhulga valem**

### VALEMID

Reaalvoolu Bernoulli võrrand voolamisele hüdraulilises voolusüsteemis on

$$z_I + \frac{p_I}{\rho g} + \frac{u_I^2}{2g} = z_{II} + \frac{p_{II}}{\rho g} + \frac{u_{II}^2}{2g} + h_t,$$

milles veesüsteemi osa I veepinna kõrgus, rõhk ja voolukiirus on vastavalt  $z_I$ ,  $p_I$  ja  $u_I$ , st süsteemiosa I vabapinnaga määratud lõikes. Veesüsteemi osa II veepinna kõrgus, rõhk ja voolukiirus on vastavalt  $z_{II}$ ,  $p_{II}$  ja  $u_{II}$ , st süsteemiosa II vabapinnaga määratud lõikes.  $h_t$  on survekadu, mis jagatakse hõõrdesurvekaoks  $h_l$  ja kohtsurvekaoks  $h_k$ . Vee erikaal on  $\rho g$ , milles  $\rho$  on vee tihedus ja  $g$  on raskuskiirendus.

Vabapinna kõrgus veesüsteemi osades I ja II on vastavalt

$$z_I = h_1,$$

$$z_{II} = h_2.$$

Rõhk veesüsteemi osade vabapinnal on määratud õhurõhuga

$$p_I = p_{II} = p_0.$$

Rõhukõrguste vahe ehk rõhuvahekõrgus:

$$\frac{p_I}{\rho g} - \frac{p_{II}}{\rho g} = \frac{p_I - p_{II}}{\rho g} = h_{rvk}.$$

→

$$h_{rvk} = 0$$

Veesüsteemi osade fikseeritud vabapinnaga voolusüsteemis on voolukiirused

$$u_I = u_{II} = u_{vp},$$

milles veepinna liikumisega määratud voolukiirus on

$$u_{vp} = 0$$

Reaalvoolu Bernoulli võrrandist järeldub hüdraulilisele voolusüsteemile seos, mis on lühikese torustiku voolamise põhivalem:

$$\Delta h = h_{ksv} + h_l + h_{kvv},$$

milles  $\Delta h = h_1 - h_2$  on veesüsteemi osade I ja II vabapinnakõrguste vahe,  $h_{ksv}$  on kohtsurvekadu torustiku sissevoolule,  $h_l$  on hõõrdesurvekadu torustikus ja  $h_{k_{sv}}$  on kohtsurvekadu torustiku väljavoolule.

Darcy survekao valem on

$$h_l = \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g},$$

milles  $\lambda$  on hõõrdekistustegur (mõõtühikuta suurus  $[\lambda] = 1$ ),  $l$  on täistaitumusega torustiku pikkus,  $d_s$  on toru sisediameeter ja  $u (= u_{sv} = u_{vv})$  on voolukiirus torus.

Weisbachi survekao valem on

$$h_k = k_L \frac{u^2}{2g},$$

milles  $k_L$  on kohttakistustegur (mõõtühikuta suurus  $[k_L] = 1$ ),  $u (= u_{sv} = u_{vv})$  on voolukiirus torus. Voolamise ahenemise olukorras torustiku sissevoolu osas on kohttakistus  $k_{L_{sv}} \approx 0,44$ . Torustiku väljavoolu osas on kohttakistus  $k_{L_{vv}} \approx 1$ .

Reynoldsi arv voolamisele ümartorus on määratud valemiga

$$Re = \frac{u d_s}{\nu},$$

milles  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur.

Vooluhulk torustikus on määratud valemiga

$$Q = u A_e,$$

milles voolukiirus torus on  $u$  ja täistaitumusega ümartoru sisediameetriga määratud ristlõike pindala ehk elavlõige pindala on

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4}.$$

→

$$u = \frac{Q}{A_e} = \frac{4Q}{\pi d_s^2}$$

Kasutades lühikese torustiku voolamise põhivalemit, Darcy survekao valemit, Weisbachi survekao valemit ja vooluhulga valemit, saab tuletada valemi toru sisediameetri määramisele ilmutamata kujul.

$$\Delta h = h_{ksv} + h_l + h_{k_{vv}}$$

$$\Delta h = k_{L_{sv}} \frac{u^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g} + k_{L_{vv}} \frac{u^2}{2g}$$

$$\Delta h = \left( k_{Lsv} + \lambda \frac{l}{d_s} + k_{Lvv} \right) \frac{u^2}{2g}$$

→

$$\Delta h = \left( k_{Lsv} + \lambda \frac{l}{d_s} + k_{Lvv} \right) \frac{8 Q^2}{g \pi^2 d_s^4}$$

Blasiuse hõõrdetakistuse valem on

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}}$$

→

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\frac{u d_s}{\nu}}} = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\frac{4 Q}{\nu \pi d_s}}} = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\frac{4 Q}{\nu \pi}}} \sqrt[4]{d_s}$$

→

$$\Delta h = \left( k_{Lsv} + \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\frac{4 Q}{\nu \pi}}} \sqrt[4]{d_s} \frac{l}{d_s} + k_{Lvv} \right) \frac{8 Q^2}{g \pi^2 d_s^4}$$

$$\Delta h = \left( k_{Lsv} + \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\frac{4 Q}{\nu \pi}}} \frac{l}{d_s^{\frac{3}{4}}} + k_{Lvv} \right) \frac{8 Q^2}{g \pi^2 d_s^4}$$

VASTUSED

$$d_s = 0,1 \text{ m}$$

$$Re = 0,9742 \cdot 10^5$$

$$\lambda = 0,0179$$

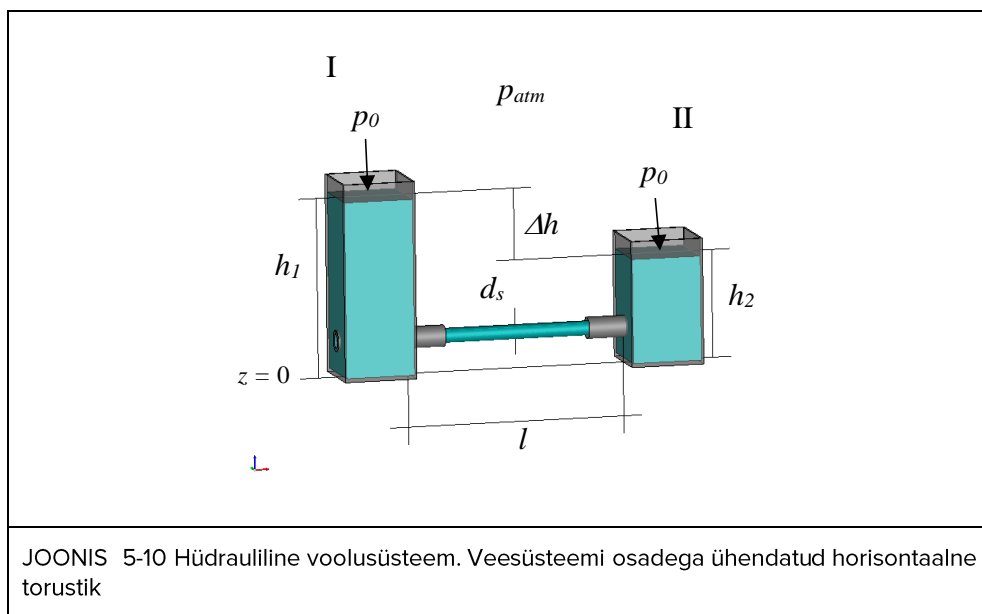
JÄRELDUS. Blasiuse hõõrdetakistuse valemiga määratud takistusteguri väärtus vastab hästi Moody diagrammi turbulentsse voolamise silkehõõrdejoone takistusteguri väärtusele kuna  $Re \approx 1 \cdot 10^5$ .



## 5.9 LISAÜLESANNE 5. TORUSTIKU DIMENSIOONIMINE

ANDMED. Horisontaalne ümartoru pikkusega  $l = 110$  m ühendab veesüsteemi kahte osa I ja II, milles vabapinna kõrgused võrdlusnivoost on erinevad ( $h_1 > h_2$ ). Vee juhtimisele kasutatakse süsteemiosade vabapinnakõrguste vahet  $h_1 - h_2 = \Delta h = 5$  m. Etteantud vooluhulk  $Q = 10$  l·s<sup>-1</sup>. Torupiirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,014$ . Hüdraulilises voolusüsteemis on 20 °C vesi, mille tihedus  $\rho = 998,2$  kg·m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu = 1,002 \cdot 10^{-3}$  kg·m<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,0 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>. Süsteemiosade vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Määrata hüdraulilise voolusüsteemi horisontaaltoru sisedia-meeter. Arvutada täistäitumusega torustikule sisedia-meeter etteantud vooluhulgale. Arvutada ümartoru Reynoldsi arv ja hõõrdetakistustegur survevoolule.



EELDUSED. Hüdraulilises voolusüsteemis on vee voolamine statsionaarne, torustikus on voolamine ühtlane. Arvestada survevoolu kohttakistust toru sisse- ja väljavoolule, st hüdraulilise voolusüsteemi survekadu on määratud hõõrde- ja kohtsurvekao summaga. Proovimise arvutusmeetodis kasutada hõõrdetakistusteguri määramisele ruuttakistuspiirkonda Moody diagrammil. Hüdrauliliselt kareda sisepiirdega toru hõõrdetakistusteguri määramisele võib kasutada ka Manningi hõõrdetakistuse valemit. Kasutada numbrilise arvutusskeemi koostamisel Newtoni iteratsioonmeetodit.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Reaalvoolu Bernoulli võrrand, Darcy survekao valem, Weisbachi survekao valem, ümartoru Reynoldsi arvu valem, Manningi hõõrdetakistuse valem, lühikese torustiku voolamise põhivalem, vooluhulga valem**

### VALEMID

Reaalvoolu Bernoulli võrrand voolamisele hüdraulilises voolusüsteemis on

$$z_I + \frac{p_I}{\rho g} + \frac{u_I^2}{2g} = z_{II} + \frac{p_{II}}{\rho g} + \frac{u_{II}^2}{2g} + h_t,$$

milles veesüsteemi osa I veepinna kõrgus, rõhk ja voolukiirus on vastavalt  $z_I$ ,  $p_I$  ja  $u_I$ , st süsteemiosa I vabapinnaga määratud lõikes. Veesüsteemi osa II veepinna kõrgus, rõhk ja voolukiirus on vastavalt  $z_{II}$ ,  $p_{II}$  ja  $u_{II}$ , st süsteemiosa II vabapinnaga määratud lõikes.  $h_t$  on survekadu, mis jagatakse hõõrdesurvekaoks  $h_l$  ja kohtsurvekaoks  $h_k$ . Vee erikaal on  $\rho g$ , milles  $\rho$  on vee tihedus ja  $g$  on raskuskiirendus.

Vabapinna kõrgus veesüsteemi osades I ja II on vastavalt

$$\begin{aligned} z_I &= h_1, \\ z_{II} &= h_2. \end{aligned}$$

Rõhk veesüsteemi osade vabapinnal on määratud õhurõhuga

$$p_I = p_{II} = p_0.$$

Rõhukõrguste vahe ehk rõhuvahekõrgus:

$$\frac{p_I}{\rho g} - \frac{p_{II}}{\rho g} = \frac{p_I - p_{II}}{\rho g} = h_{rvk}.$$

→

$$h_{rvk} = 0$$

Veesüsteemi osade fikseeritud vabapinnaga voolusüsteemis on voolukiirused

$$u_I = u_{II} = u_{vp},$$

milles veepinna liikumisega määratud voolukiirus on

$$u_{vp} = 0$$

Reaalvoolu Bernoulli võrrandist jäeldub hüdraulilisele voolusüsteemile seos, mis on lühikese torustiku voolamise põhivalem:

$$\Delta h = h_{ksv} + h_l + h_{kvv},$$

milles  $\Delta h = h_1 - h_2$  on veesüsteemi osade I ja II vabapinnakõrguste vahe,  $h_{ksv}$  on kohtsurvekadu torustiku sissevoolule,  $h_l$  on hõõrdesurvekadu torustikus ja  $h_{kvv}$  on kohtsurvekadu torustiku väljavoolule.

Darcy survekao valem on

$$h_l = \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g},$$

milles  $\lambda$  on hõõrdetakistustegur (mõõtühikuta suurus  $[\lambda] = 1$ ),  $l$  on täistaitumusega torustiku pikkus,  $d_s$  on toru sisediameeter ja  $u$  ( $= u_{sv} = u_{vv}$ ) on voolukiirus torus.

Weisbachi survekao valem on

$$h_k = k_L \frac{u^2}{2g},$$

milles  $k_L$  on kohttakistustegur (mõõtühikuta suurus  $[k_L] = 1$ ),  $u$  ( $= u_{sv} = u_{vv}$ ) on voolukiirus torus. Voolamise ahenemise olukorras torustiku sissevoolu osas on kohttakistus  $k_{Lsv} \approx 0,44$ . Torustiku väljavoolu osas on kohttakistus  $k_{Lvv} \approx 1$ .

Reynoldsi arv voolamisele ümartorus on määratud valemiga

$$Re = \frac{u d_s}{\nu},$$

milles  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur.

Vooluhulk torustikus on määratud valemiga

$$Q = u A_e,$$

milles voolukiirus torus on  $u$  ja täistaitumusega ümartoru sisediameetriga määratud ristlõike pindala ehk elavlõige pindala on

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4}.$$

→

$$u = \frac{Q}{A_e} = \frac{4Q}{\pi d_s^2}$$

Kasutades lühikese torustiku voolamise põhivalemit, Darcy survekao valemit, Weisbachi survekao valemit ja vooluhulga valemit, saab tuletada valemi toru sisediameetri määramisele ilmutamata kujul.

$$\Delta h = h_{k_{sv}} + h_l + h_{k_{vv}}$$

$$\Delta h = k_{Lsv} \frac{u^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g} + k_{Lvv} \frac{u^2}{2g}$$

$$\Delta h = \left( k_{Lsv} + \lambda \frac{l}{d_s} + k_{Lvv} \right) \frac{u^2}{2g}$$

→

$$\Delta h = \left( k_{Lsv} + \lambda \frac{l}{d_s} + k_{Lvv} \right) \frac{8Q^2}{g \pi^2 d_s^4}$$

Manningi hõõrdetakistuse valem voolamise kistusteguri määramisele on

$$\lambda = \frac{8 g n_M^2}{R_h^{2/6}},$$

milles ümartoru hüdrauliline raadius  $R_h = d_s/4$ .

→

$$\lambda = \frac{8 g n_M^2}{(d_s/4)^{2/6}} = 4^{2/6} \frac{8 g n_M^2}{d_s^{2/6}}$$

$$\lambda = \frac{12,7 g n_M^2}{d_s^{2/6}}$$

→

$$\Delta h = \left( k_{LSv} + 12,7 \frac{g n_M^2 l}{d_s^{2/6} d_s} + k_{Lvv} \right) \frac{8 Q^2}{g \pi^2 d_s^4}$$

$$\Delta h = \left( k_{LSv} + 12,7 \frac{g n_M^2 l}{d_s^{8/6}} + k_{Lvv} \right) \frac{8 Q^2}{g \pi^2 d_s^4}$$

VASTUSED

$$d_s = 0,1 \text{ m}$$

$$Re = 1,2732 \cdot 10^5$$

$$\lambda = 0,0526$$

**MÄRKUS.** Kontrollida iseseisvalt, kas Darcy hõõrdetakistusteguri  $\lambda$  arvutatud väärtus vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna tingimustele.

## 5.10 VIITED

5.1 Veevarustuse välisvõrk. EVS 921:2014.

5.2 Hoone kanalisatsioon. EVS 846:2021.

5.3 Maastik, A., Haldre, H., Koppel, T. & Paal, L. (1995). *Hüdraulika ja pumbad*. OÜ Greif.

5.4 Vesihuoltoverkkojen suunnittelu. *Perusteet ja toiminnallisuus*. RIL 237-1-2010.

## 6 ISEVOOLNE TORUSTIK

### 6.1 PRAKTIILINE OSA. ISEVOOLNE KANALISATSIOON

#### 6.1.1 EHITIS. SADEMEVEE- JA REOVEETORUSTIK

Kanalisatsioon on ehitiste ja seadmete süsteem, mille abil kogutakse reo- ja sademevett ja puhastatakse reovett ning juhitakse heitvesi suublasse. Kanalisatsiooniehitised on näiteks kanalisatsioonitorustik, reoveepumpla ja reoveepuhasti. Kanalisatsiooni projekteerimisel on oluline ära kasutada looduslikke tingimusi, et isevoolsete lahenduste abil energiakulusid vähendada. Samuti tuleb tagada kanalisatsioonitorustiku hoolduseks vajalikud tingimused. Nõuetekohaselt rajatud ja hästi toimiva kanalisatsiooniga välditakse inimese terviseriske ja tagatakse puhas looduskeskkond.

Tavaliselt on isevoolse kanalisatsiooni torustiku projekteerimisel teadaolevaks suuruseks vooluhulk, mida soovitakse ära juhtida, ning otsitavateks hüdraulilisteks suurusteks torustiku sisediaameeter ja torustiku lang (pikikalle). Ümartoru sisemõõtme ja pikikalde määramisel tuleb arvesse võtta nii lubatud voolukiiruse vahemikku kui ka suhtelist torutäidet. Uute torustike planeerimisel lähtutakse võimalusel toru minimaalsest langust, järgides eelvoolu sügavust ja maapinna geodeetilisi kõrgusmärke. Kanalisatsioonitorustiku dimensioonimine on optimeerimisülesanne, mille eesmärk on tagada majanduslikult soodsaim lahendus. Mida väiksem on torustiku rajamissügavus ja torustiku läbimõõt, seda soodsam on lahendus. Veesüsteemi optimeerimisel tuleb arvestada, et väiksem läbimõõt võib tähendada torustiku suuremat langust, mis mõjutab ehituse maksumust ja materjalikulu. Kui maapinna kalle ja eelvoolu sügavus ei luba rajada isevoolset kanalisatsiooni, tuleb rajada kanalisatsioonipumpla. Sügavate rajamistingimuste juures võib toru ehitamine olenevalt pinnase geoloogilistest tingimustest ja maapinna kaldest osutada majanduslikult ebamõistlikuks, mistõttu võib vajalik olla pumpla paigaldamine. Sealjuures tuleb omakorda hinnata pumpla käitamiskulusid nagu kulud elektrienergiale, hooldamisele, jne. Kuigi isevoolse torustiku puhul käitamiskulud peaaegu puuduvad, tuleb kanalisatsioonikaevusid perioodiliselt kontrollida ja vajadusel koos torustike läbipesuga puhastada.

Olemasolevate torustike puhul saab hinnata nende läbilaskevõimet ja selle alusel otsustada kanalisatsioonisüsteemi rekonstrueerimise vajaduse üle. Kanalisatsioonitorustike elueaks võib pidada 50–100 aastat ja nende dimensioonimisel tuleks aluseks võtta 20–40 aastase perioodi jooksul esinev maksimaalne tunnivoolum (VIIDE 6.1).

## 6.1.2 VOOLUREŽIIM. TORUTÄIDE JA LÄBILASKEVÕIME

Sademevee ja reovee voolamisele torustikus on standardite ja juhendmaterjalidega seatud tingimused ning nõuded, millega tuleb kanalisatsioonisüsteemi projekteerimisel ja ehitamisel arvestada. Peamised hüdraulilised suurused, mis kanalisatsioonitorustiku tööolukorda iseloomustavad, on vooluhulk torus  $Q$ , toru nominaalmõõtmega määratud sisemõõde (sisediameter)  $DN/DI$  ( $d_s$ ), toru lang  $i_0$ , torus voolava vee voolukiirus  $u$  ja suhteline torutäide  $h_d = h/d_s$ , milles  $h$  on veepinna maksimaalne kõrgus toru sisepõhjust. Kanalisatsioonitorud on reeglina ümarristlõikega, mille eripäraks on hüdraulilise raadiuse vähenemine, kui torus voolava vee suhteline torutäide ületab täielikule torutäitele lähenedes teatava väärtuse. Selle asjaolu tõttu on isevoolse toru läbilaskevõime suurim, kui toru ei tööta täielikul torutäitel. Olenemata maksimaalsest läbilaskevõimest, tuleb kanalisatsioonisüsteemi arvutamisel võtta aluseks hüdraulilised suurused, mis iseloomustavad toru täitumust. Reaalselt peaks toru veega täituvuse määr tagama õhu liikumise torustikus ventileerimise eesmärgil. Samuti tuleks tagada torustikus piisav varu juhaks, kui tulevikus vooluhulgad muutuvad, ja torustiku mahu kasutamiseks eriolukorras. Kui torustik projekteeritakse mingis osas täielikule torutäitele, siis võetakse sellega ära kanalisatsioonivõrgu laiendamise võimalused ehk torustikuga ei saa tulevikus liita uusi arenduspiirkondi, valgalasid vms. Kanalisatsioonitorustiku rajamissügavuse juures tuleb vältida külmumist ja läbivajumist. Vajadusel tuleb torustik pinnases ankurdata, et vältida torustiku vees või pinnases mõjuvate jõudude (nt üleslükkejõud) tõttu liikumist.

Reoveekanaliseerimise soovitavlikud hüdraulilised parameetrid on esitatud standardis EVS 848:2021 „Väliskanalisatsioonivõrk“ (VIIDE 6.2). Vastavalt standardile on lubatud voolamine täieliku torutäitega ( $h_d = 1$ ) ainult sademevee- ja ühisvoolse kanalisatsiooni torudes ja ka kuivendusdrenis (vt raamat „Hüdraulika ja pumbad“ (1995), mille autoriks on Aleksander Maastik, Heiti Haldre, Tiit Koppel ja Leopold Paal, VIIDE 6.3). Täieliku torutäite lubamist võib selgitada see, et sademeveekanaliseerimise suure tõenäosusega ventileerimist vajavat haisuhäiringut või ohtlikke gaase ei esine ning ühisvoolse kanalisatsioonis toimub täieliku torutäitega voolamine ainult sajuperioodil. Sageli esineb sajuperioode, kus üks vihm järgneb teisele. Valingvihm võib põhjustada vooluhulga järsu suurenemise kanalisatsioonis ning seetõttu võib tekkida torustiku uputus. Kui vihmavett koguneb linna valgalale – nagu parklatesse, sõidu- või kõnniteedele, murupindadele või mujale – sellistes kogustes, et vesi ei jõua pinnalt ära voolata ega ka piisavalt kiiresti pinnasesse infiltreeruda, võivad sajuperioodidel esineda linnaalal üleujutused.

Kanaliseerimise torustik tuleb hüdrauliliselt arvutada nii, et tööolukorras ei kuhjuks sellesse tahkeid osakesi. Projekteerimisega tagatakse torustiku sobiv lang olenevalt toru sisediametrist. Tahkete osakeste, nagu näiteks tänava libeduse tõrjumisele kasutatud puistematerjal, kuhjumist torustikus väldib voolukiirus, mis ei

tohi olla väiksem kui isepuhastuskiirus. Vastavalt standardile (VIIDE 6.2, „Väliskanaliseerimisvõrk“) on alla DN 300 torustikes isepuhastus üldjuhul tagatud, kui voolukiirus on vähemalt kord ööpäevas  $\geq 0,7$  m/s või kui torustiku lang on vähemalt 1:DN (mm.mm<sup>-1</sup>). Tuleb samuti arvestada sellega, et liiga suure voolukiirusega kaasneb torustiku ühenduste, kaevude vms kulumis- ja purunemisoht. Standardi (VIIDE 6.2, „Väliskanaliseerimisvõrk“) kohaselt ei tohiks voolukiirus kanalisatsiooni torus ületada 5 m/s, kuid piiratud tehnilistes tingimustes (astangkaevudes, lühikestes torulõikudes vms), arvestades torumaterjali, on lubatud ka suurem voolukiirus. Erinevates erialaväljaannetes (VIIDE 6.3, „Hüdraulika ja pumbad“; VIIDE 6.4, „Veevarustus ja kanalisatsioon“) on suurimaks lubatud voolukiiruseks valitud ka 8 m/s metalltorule ning 4 m/s plastitoru puhul.

Kui isevoolse kanalisatsioonitoru normaalsügavus on ümartoru voolamise kriitilisest sügavusest väiksem, siis võib pealt kaetud voolusängis tekkida vooluhüpe, mis muudab järsult torus veega täitumise tingimusi. Vooluhüppega kaasnev turbulentsus (VIIDE 6.5) võib blokeerida õhu vaba liikumise, samuti põhjustada vee- ja õhu segunemisprotsessi käigus gaaside eraldumise reoveest, mille tulemuseks on haisuhäiring. Isevoolse torustikus võib vooluhüpe amortiseerunud torustikus tekkida nõ kareda piirde tõttu ning uues torustikus toruühenduste tõttu (VIIDE 6.5).

### 6.1.3 SISSEJUHTUS ÜLESANDESSE. PÕHIVALEMID

Isevoolsete torustike arvutus voolamise hüdraulika valemitega on aeganõudev ning seetõttu on kanalisatsioonitorude dimensionimisele kasutusel nomogramm, mis esitavad graafiliselt seosed hüdrauliliste suuruste nagu torustiku sisediameeter, suhtelise torutäite, vooluhulk, lang ja suhteline karedus vahel. Osalise täitumusega ümartoru voolamise hüdraulilised suurused – nagu vooluhulk, voolukiirus, hüdrauliline raadius, elavlõige ja märgpiire – sõltuvad suhtelisest torutäitest. Osalise täitumusega torustiku voolamisele võib koostada nomogramm, mis vastavalt Colebrooki-White'i hõõrdetakistusteguri kloonvõrrandile, milles kasutatakse hüdraulilist raadiust ja voolusängi Reynoldsi arvu. Isevoolse torustiku nomogrammi abil valitakse suhtelise torutäite järgi ümartorule siseläbimõõt ja sellele vastav lang, mis võtab vastu vajaliku vooluhulga. Toru läbimõõdu ja piki- kalde valimisel tuleb arvestada lubatud voolukiirust torustikus, et vältida selle kiiret amortiseerumist.

Hüdraulilise voolusüsteemi torustiku suhtelist torutäidet on võimalik määrata, kasutades proovimismeetodis ja numbrilises arvutusskeemis ülesande põhivalemeid, näiteks Manningi vooluhulga valemit, osalise täitumusega ümartoru elavlõike ja märgpiirde valemeid või voolusängi Reynoldsi arvu valemit. Proovimise arvutusmeetodit võib kasutada nii hüdrauliliselt sileda kui ka kareda sisepiirdega torustiku suhtelise torutäite määramiseks. Osalise täitumusega ümartorus ühtlasele ja kriitilisele voolamisele vastavad suhtelise torutäite numbrilised arvutusskeemid,

kus on kasutatud Newtoni iteratsioonmeetodit, koonduvad hästi suhtelise torutäite teatud algväärtuste vahemike puhul. Numbrilisesse arvutusskeemi valitud valemitest (matemaatilisest astmefunktsioonist) sõltub iteratsioonarvutuse koonduvus.

Bernoulli funktsioon on määratud vabapinnaga voolamise kolmikliikmega, mis koosneb voolukiirusega, vabapinna maksimaalne kõrgusega voolusängi ristlõike sisepõhjust ja sisepõhja kõrgusega võrdlusnivoo suhtes määratud liikmetest. Kasutades Bernoulli funktsiooni ekstreemumi määramise teoreemi vee pinna kõrguse muutuja järgi eeldusel, et teised funktsiooni hüdraulilised suurused on muutumatud, on võimalik tuletada valem ümartoru Froude'i arvule. Vabavoolule määratud Bernoulli funktsiooni kaudu kasutusele võetud ümartoru Froude'i suhtarvu kriteerium võimaldab määrata vabavoolu hüdraulilist režiimi ümarristlõikega isevooles torustikus. Kriitilisele vabavoolurežiimile vastab  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja karedale vabavoolurežiimile on vastavalt  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

Isevoole torustiku arvutuste matemaatiliseks lihtsustamiseks eeldatakse, et voolamise hõõrdetakistusteguri võib määrata Moody diagrammi ruuttakistuse piirkonnas. Hüdrauliliselt karedale voolamisele torustikus määratakse hõõrdetakistustegur valemiga, mis ei sõltu otseselt Reynoldsi arvust. Manningi karedusteguri kasutamine voolusüsteemi takistuse määramisel on seotud vee omaduste määramatusega. Vee temperatuur määrab vee tiheduse ja dünaamilise molekulaarse viskoossusteguri, mille järgi määratakse kinemaatiline laminaarne viskoossustegur. Reynoldsi arvu väärtus sõltub oluliselt kinemaatilise molekulaarsest viskoossustegurist. Ühtlase voolamise hõõrdepinge pealtkaetud voolusängis määratakse valemiga, milles hüdrauliline lang asendatakse põhja languga ja mis eeldab, et hõõrdejõud tasakaalustab raskusjõu voolamisele. Isevoole torustiku eritingimusel võib pikikaldega torus olla täieliku torutäitega voolamine, milles hüdrauliline lang on määratud Darcy hõõrdetakistuse erivalemiga. Kui isevoole torustiku takistustegur ei vasta Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna tingimustele, siis võib takistusteguri määramiseks kasutada nii Swamee-Jaini hõõrdetakistuse kloonvalemit kui ka Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonvõrrandit. Mainitud nn mittekaredate torude hõõrdetakistuse valemid tuleb väärtustada vastavalt torustiku sisepiirde absoluutkaredusele, hüdraulilisele raadiusele ja voolusängi Reynoldsi arvule.



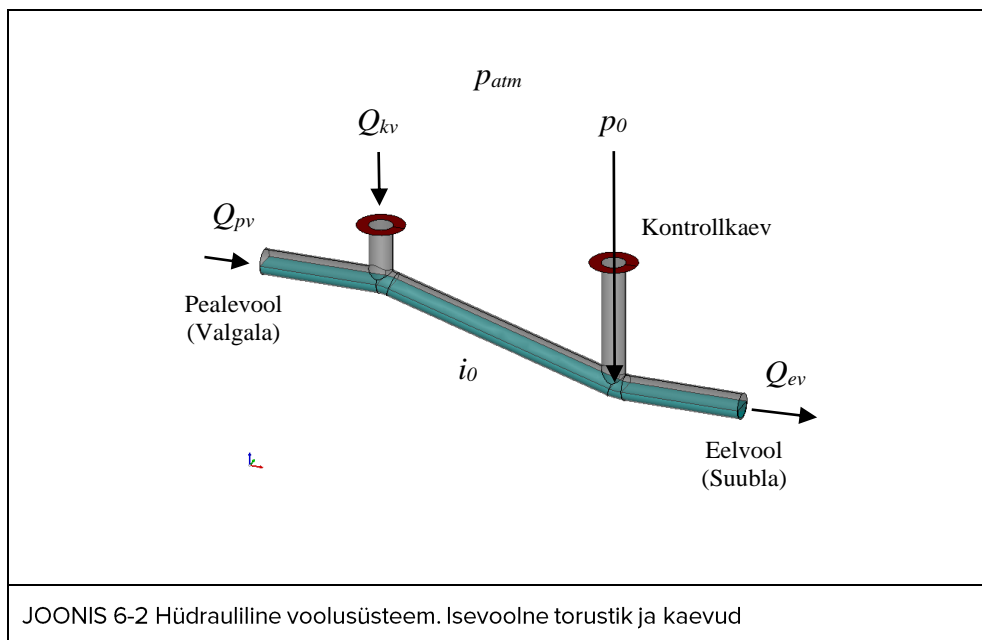


JONIS 6-1 Sademeveekollektor, Tallinn 2010 (Foto: Andres Piirsalu)

## 6.2 PÕHIÜLESANNE. SUHTELINE JA KRIITILINE TORUTÄIDE

ANTUD. Linna valgalalt vihmavee ärajuhtimiseks on rajatud sademeveekanalisatsiooni torustik. Ümarristlõikega torus, sisediameetriga  $d_s = 236$  mm, languga  $i_0 = 0,005$  ( $= 0,005 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1} = 5 \text{ mm} \cdot \text{m}^{-1}$ ), on valitud vooluhulk  $Q = Q_{pv} + Q_{kv}$ , milles  $Q_{pv} = 20 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$  ja  $Q_{kv} = 5 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ . Torustiku sisepiirdele on Manningi karedustegur  $n_M = 0,015$ . Isevoolse torustikus voolab  $10^\circ\text{C}$  vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata hüdraulilise voolusüsteemi kaldtorule proovimismeetodi ja numbrilise arvutuskeemiga suhteline torutäide, mis vastab normaalsügavusele pealtkaetud voolusängis. Arvutada vastavalt Froude'i suhtarvu kriteeriumile isevoolse torustiku suhteline torutäide ja sellele vastav normaalsügavus, voolusängi Reynoldsi arv ja hüdrauliline vabavoolurežiim. Määrata proovimismeetodi ja numbrilise arvutuskeemiga hüdraulilise voolusüsteemi kaldtorule kriitiline suhteline torutäide, mis vastab kriitilisele sügavusele pealtkaetud voolusängis. Arvutada kriitilisele voolamisele vastav suhteline torutäide ja sellele vastav kriitiline sügavus. Arvutada hõõrdetakistustegur ja hõõrdepinge.



EELDUSED. Voolamine osalise täitumusega torustikus on statsionaarne, kaevudevahelises kaldtorus on vabavool ühtlane. Eeldada, et torustiku sisepiire on hüdrauliliselt kare, st torustiku takistusteguri määramisele võib kasutada Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna tingimusi. Normaalsügavus määrata Manningi vooluhulga valemiga ja kriitiline sügavus määrata Froude'i suhtarvu kriteeriumiga, kasutades selleks Newtoni iteratsioonmeetodit.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Manningi vooluhulga valem, Manningi hõõrdetakistuse valem, osalise täitumusega ümartoru elavlõike valem, osalise täitumusega ümartoru märgpiire valem, ümartoru Reynoldsi arvu valem, voolusängi Reynoldsi arvu valem, ümartoru isevoolu Froude'i arvu valem, torustiku voolamise hõõrdepinge valem, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem**

### VALEMID

Manningi vooluhulga valem on

$$Q = \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e I_h^{\frac{1}{2}}}{n_M},$$

milles  $n_M$  on Manningi karedustegur ja  $I_h$  on hüdrauliline lang.

Hüdrauliline raadius on

$$R_h = \frac{A_e}{\chi},$$

milles  $A_e$  on elavlõige ja  $\chi$  on märgpiire.

Osalise täitumusega ümartorus on elavlõige määratud valemiga

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(2 h_d - 1) + \frac{2}{\pi} (2 h_d - 1) \sqrt{h_d - h_d^2} \right),$$

milles suhteline torutäide  $h_d = h_{rlm}/d_s$ . Toru sisediameeter on  $d_s$  ja maksimaalne vabapinna kõrgus sisepõhjast ümartoru ristlõikes on  $h_{rlm}$ . Ühtlasele voolamisele  $h_{rlm} = d_0$ , milles  $d_0$  on normaalsügavus. Täieliku torutäitega voolamisele on elavlõige määratud valemiga

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4}.$$

Osalise täitumusega ümartoru märgpiire, millest on välja jäetud vabapind, on määratud valemiga

$$\chi = \pi d_s \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(2 h_d - 1) \right).$$

Täieliku torutäitega voolamisele on ümartoru märgpiire määratud valemiga

$$\chi = \pi d_s .$$

Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnas võib takistusteguri määrata Manningi hõõrdetakistuse valemiga:

$$\lambda = \frac{8 g n_M^2}{R_h^{2/6}} .$$

Ühtlasele vabapinnaga voolamisele pealtkaetud voolusängis on hüdrauliline lang määratud põhjalanguga, st  $I_h = i_0$ .

Ümartoru Reynoldsi arv on määratud valemiga

$$\mathbf{Re} = \frac{u d_s}{\nu} ,$$

milles  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur.

Voolamisele täieliku täitumusega ümartorus määratakse hüdrauliline raadius valemiga:

$$R_h = \frac{A_e}{\chi} = \frac{\pi (d_s/2)^2}{\pi d_s} = \frac{d_s}{4} .$$

→

$$d_s = 4 R_h$$

→

$$\mathbf{Re} = \frac{u d_s}{\nu} = \frac{u 4 R_h}{\nu} = 4 \mathbf{Re}_{vs}$$

Voolusängi Reynoldsi arv määratakse valemiga

$$\mathbf{Re}_{vs} = \frac{u R_h}{\nu}$$

$$\mathbf{Re}_{vs} = \frac{Q A_e}{A_e \chi \nu}$$

$$\mathbf{Re}_{vs} = \frac{Q}{\chi \nu}$$

**MÄRKUS.** Kuna täieliku torutäitega veevoolule on kriitiline ümartoru Reynoldsi arv 2000, siis järelikult hüdraulilise raadiusega määratud kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on neljakordselt erinev,  $\mathbf{Re}_{vs} = \mathbf{Re}/4$ . Laminaarse ja turbulentsse veevoolu ülemineku kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on 500. Ümartoru Reynoldsi arvu valemis võib toru sisediameetri ( $d_s$ ) asemel kasutada ka hüdraulilist diameetrit ( $D_h$ ). Täieliku täitumusega ümartorule kehtib seos:

$$D_h = 4 R_h = \frac{4 A_e}{\chi} = 4 \left( \frac{\pi d_s^2}{4} \right) \left( \frac{1}{\pi d_s} \right) = d_s ,$$

milles survevoolu elavldõige on  $A_e$  ja märgpiire on  $\chi$ .

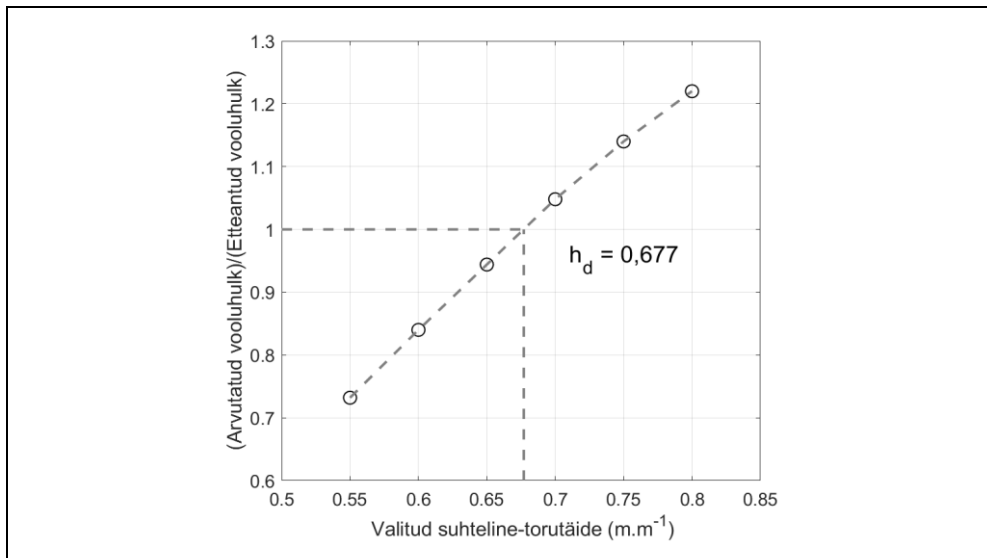
Proovimise arvutusmeetod

Ühtlane voolamine osalise täitumusega ümartorus

ARVUTUS. Suhteline torutäide

Valitud ja arvatud hüdraulilised suurused

	$h_d$ (m. m <sup>-1</sup> )	$A_e$ (m <sup>2</sup> )	$\chi$ (m)	$R_h$ (m)	$Re_{vs}$	$Q$ (m <sup>3</sup> . s <sup>-1</sup> )
I	0,55	0,0247	0,3943	0,0625	$0,35706 \cdot 10^5$	0,0183
II	0,6	0,0274	0,4182	0,0655	$0,38618 \cdot 10^5$	0,0210
III	0,65	0,0301	0,4426	0,0680	$0,41083 \cdot 10^5$	0,0236
IV	0,7	0,0327	0,4678	0,0699	$0,43023 \cdot 10^5$	0,0262
V	0,75	0,0352	0,4943	0,0712	$0,44350 \cdot 10^5$	0,0285
VI	0,8	0,0375	0,5226	0,0718	$0,44966 \cdot 10^5$	0,0305



JOONIS 6-3 Isevoelse torustiku suhtelise torutäite määramine, milleks on kasutatud proovimise arvutusmeetodiga saadud punktide interpoleerimiskõverat

VASTUSED

$$h_d = 0,677 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$d_0 = h_d d_s = 0,160 \text{ m}$$

$$Re_{vs} = 0,42184 \cdot 10^5$$

$$\lambda = 0,043$$

$$Fr = 0,671$$

Numbriline arvutusskeem. Suhteline torutäide

Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod

VALEMID

Veafunktsioon:

$$ERF(z_j) = Q_j - Q,$$

milles  $z_j$  on torustiku arvutuslik suhteline torutäide,  $Q_j$  on arvutuslik vooluhulk ja  $Q$  on etteantud vooluhulk.

Veafunktsiooni tuletis:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{dQ_j}{dz_j},$$

milles on eeldatud, et  $Q = \text{konstant}$ .

Arvutuslik vooluhulk on määratud valemiga

$$Q_j = \frac{R_{hj}^{\frac{2}{3}} A_{ej} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M},$$

milles  $R_{hj}$  on arvutuslik hüdrauliline raadius ja  $A_{ej}$  on arvutuslik elavlõige.

→

$$\begin{aligned} \frac{dERF(z_j)}{dz_j} &= \frac{d}{dz_j} \left( \frac{R_{hj}^{\frac{2}{3}} A_{ej} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} \right) = \frac{i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} \left( \frac{2 A_{ej} R_{hj}^{-\frac{1}{3}}}{3} \frac{dR_{hj}}{dz_j} + R_{hj}^{\frac{2}{3}} \frac{dA_{ej}}{dz_j} \right) \\ &= Q_j \left( \frac{2}{3} \frac{dR_{hj}}{R_{hj} dz_j} + \frac{1}{A_{ej}} \frac{dA_{ej}}{dz_j} \right) \end{aligned}$$

Veafunktsioonist suunatud tuletise võtmise reegel:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{0 - ERF(z_j)}{z_{j+1} - z_j},$$

võimaldab kasutusele võtta Tayloriga 1-järgu tuletise täpsusega:

$$z_{j+1} = z_j - \frac{ERF(z_j)}{\frac{dERF(z_j)}{dz_j}}.$$

Numbrilise arvutuskeemi põhivalemi üldkuju on

$$z_{j+1} = z_j - \frac{Q_j - Q}{Q_j \left( \frac{2}{3} \frac{dR_{h_j}}{dz_j} + \frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} \right)} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left( \frac{2}{3} \frac{dR_{h_j}}{dz_j} + \frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} \right)}.$$

Määrame hüdraulilise voolusüsteemi valemi numbrilise arvutuskeemi põhivalemi liikmele

$$\frac{2}{3} \frac{dR_{h_j}}{dz_j}.$$

Osalise täitumusega ümartoru hüdrauliline raadius on

$$\begin{aligned} R_{h_j} = \frac{A_{e_j}}{\chi_j} &= \frac{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2 z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2 z_j - 1) \sqrt{z_j - z_j^2} \right)}{\pi d_s \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2 z_j - 1) \right)} \\ &= \left( \frac{d_s}{4} \right) \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2 z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2 z_j - 1) \sqrt{z_j - z_j^2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2 z_j - 1)}. \end{aligned}$$

**MÄRKUS.** Täieliku täitumusega torustiku suhteline torutäide  $h_d = 1$ , millele vastab elavlõige  $A_e = \pi d_s^2/4$ , märgpiire  $\chi = \pi d_s$  ja hüdrauliline raadius  $R_h = d_s/4$ , milles on vooluprotsessile kasutatud toru sisediaimetrit  $d_s$ .

Määrame numbrilise arvutuskeemi põhivalemi esimese liikme valemi.

$$\begin{aligned} \frac{dR_{h_j}}{dz_j} &= \frac{d}{dz_j} \left( \left( \frac{d_s}{4} \right) \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2 z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2 z_j - 1) \sqrt{z_j - z_j^2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2 z_j - 1)} \right) \\ &= \frac{d_s}{4} \frac{d}{dz_j} \left( \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2 z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2 z_j - 1) \sqrt{z_j - z_j^2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2 z_j - 1)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d_s}{4} \left( \frac{\frac{1}{\pi} \frac{2}{\sqrt{1-(2z_j-1)^2}} + \frac{2}{\pi} 2\sqrt{z_j-z_j^2} + \frac{2}{\pi} (2z_j-1) \frac{1}{\sqrt{z_j-z_j^2}} \frac{1}{2} (1-2z_j)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j-1)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j-1) + \frac{2}{\pi} (2z_j-1) \sqrt{z_j-z_j^2}\right) \frac{1}{\pi} \frac{2}{\sqrt{1-(2z_j-1)^2}}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j-1)\right)^2} \right) \\
&= \frac{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1-(2z_j-1)^2}} + \frac{4}{\pi} \sqrt{z_j-z_j^2} - \frac{1}{\pi} \frac{(2z_j-1)^2}{\sqrt{z_j-z_j^2}} \right)}{\pi d_s \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j-1)\right)} \\
&\quad - \frac{\pi \frac{d_s^2}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j-1) + \frac{2}{\pi} (2z_j-1) \sqrt{z_j-z_j^2}\right) \frac{2}{\pi}}{\pi d_s \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j-1)\right)^2 \sqrt{1-(2z_j-1)^2}} \\
&= \frac{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1-(2z_j-1)^2}} + \frac{4}{\pi} \sqrt{z_j-z_j^2} - \frac{1}{\pi} \frac{(2z_j-1)^2}{\sqrt{z_j-z_j^2}} \right)}{\chi_j} \\
&\quad - \frac{A_{e_j} \frac{2}{\pi}}{\chi_j \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j-1)\right) \sqrt{1-(2z_j-1)^2}}
\end{aligned}$$

→

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3} \frac{dR_{h_j}}{R_{h_j} dz_j} &= \frac{2}{3} \frac{\chi_j}{A_{e_j}} \frac{dR_{h_j}}{dz_j} \\
&= \frac{\frac{2}{3} \left( \frac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1-(2z_j-1)^2}} + \frac{4}{\pi} \sqrt{z_j-z_j^2} - \frac{1}{\pi} \frac{(2z_j-1)^2}{\sqrt{z_j-z_j^2}} \right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j-1) + \frac{2}{\pi} (2z_j-1) \sqrt{z_j-(z_j)^2}} \\
&\quad - \frac{\frac{4}{3\pi}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j-1)\right) \sqrt{1-(2z_j-1)^2}}
\end{aligned}$$



Määrame hüdraulilise voolusüsteemi valemi numbrilise arvutuskeemi põhivalemi liikmele

$$\frac{1}{A_{ej}} \frac{dA_{ej}}{dz_j}$$

Osalise täitumusega ümartoru vabapinnaga voolamise arvutuslik elavlõige on

$$A_{ej} = \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2z_j - 1) \sqrt{z_j - z_j^2} \right).$$

→

$$\frac{dA_{ej}}{dz_j} = \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1 - (2z_j - 1)^2}} + \frac{4}{\pi} \sqrt{z_j - z_j^2} - \frac{\frac{1}{\pi} (2z_j - 1)^2}{\sqrt{z_j - z_j^2}} \right)$$

Määrame numbrilise arvutuskeemi põhivalemi *teise* liikme valemi.

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_{ej}} \frac{dA_{ej}}{dz_j} &= \frac{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1 - (2z_j - 1)^2}} + \frac{4}{\pi} \sqrt{z_j - z_j^2} - \frac{\frac{1}{\pi} (2z_j - 1)^2}{\sqrt{z_j - z_j^2}} \right)}{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2z_j - 1) \sqrt{z_j - z_j^2} \right)} \\ &= \frac{\frac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1 - (2z_j - 1)^2}} + \frac{4}{\pi} \sqrt{z_j - z_j^2} - \frac{\frac{1}{\pi} (2z_j - 1)^2}{\sqrt{z_j - z_j^2}}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2z_j - 1) \sqrt{z_j - z_j^2}} \end{aligned}$$

ARVUTUSSKEEM (Manningi valem, ümarristolõikega pealtkaetud voolusäng)

Numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku suhtelise torutäite valem (iteratsioonmeetodi põhivalem):

$$z_{j+1} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left( \frac{5}{3} \frac{ABI1_j}{ABI2_j} - \frac{4}{3\pi} \left( ABI3_j \sqrt{1 - (2z_j - 1)^2} \right)^{-1} \right)},$$

milles

$$ABI1_j = \frac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1 - (2z_j - 1)^2}} + \frac{4}{\pi} \sqrt{z_j - z_j^2} - \frac{\frac{1}{\pi} (2z_j - 1)^2}{\sqrt{z_j - z_j^2}},$$

$$ABI2_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2z_j - 1) \sqrt{z_j - z_j^2},$$

$$ABI3_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j - 1).$$

Arvutusliku vooluhulga valem:

$$Q_j = \frac{R_{hj}^{\frac{2}{3}} A_{ej} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} A_{ej}^{\frac{5}{3}}}{n_M \chi_j^{\frac{2}{3}}} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} \left( \pi \frac{d_s^2}{4} ABI2_j \right)^{\frac{5}{3}}}{n_M \left( \pi d_s ABI3_j \right)^{\frac{2}{3}}}.$$

ARVUTUS. Suhteline torutäide

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (1)	0,5	0,6767	0,6766	0,6766	0,6766	0,6766
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	0,0156	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (1)	0,6766	0,6766	0,6766	0,6766
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	0,0250	0,0250	0,0250	0,0250

VASTUSED

$$h_d = 0,6766 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$d_0 = h_d d_s = 0,1597 \text{ m}$$

$$\operatorname{Re}_{vs} = \frac{u R_h}{\nu} = 0,42184 \cdot 10^5$$

$$\lambda = 0,0430$$

$$\operatorname{Fr} = 0,6709$$

$$\tau_0 = 3,3889 \text{ Pa}$$

JÄRELDUS. Numbrilisest arvutustulemusest selgub, et ühtlane voolamine osalise täitumusega ümartorus on turbulentne ( $\operatorname{Re}_{vs} > 500$ ) ja hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $\operatorname{Fr} < 1$ ). Ühtlane voolamine ümarristlõikega pealtkaetud voolusängis vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna tingimustele.

**MÄRKUS.** Kontrollida iseseisvalt, kas hõõrdetakistusteguri arvutatud väärtus vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna tingimustele.

Froude'i suhtarvu kriteeriumi määramine osalise täitumusega ümartorus

**PÕHIVALEMID. Bernoulli funktsioon, Bernoulli kolmikliige vabavoolule, ümartoru isevoolu Froude'i arvu valem, Froude'i suhtarvu kriteerium**

VALEMID

Bernoulli funktsioon on määratud vabapinnaga voolamise tingimustel kolmikliikmega:

$$B = \frac{u^2}{2g} + h + h_s,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $g$  on raskuskiirendus,  $h$  on vabapinna maksimaalne kõrgus voolusängi ristlõike sisepõhjust ja  $h_s$  on sisepõhja kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult.

Kasutades vabapinnaga voolamisele osalise täitumusega ümartorus voolukiiruse määramiseks voolamise ruumkiiruse valemit:

$$u = \frac{Q}{A_e} = \frac{Q}{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right)},$$

milles vooluhulk on  $Q$ , elavlõige on  $A_e$ , toru sisediaameeter on  $d_s$  ja vabapinna maksimaalne kõrgus sisepõhjust ümartoru ristlõikes on  $h (= h_{rlm})$ . (Ühtlasele voolamisele  $h = d_0$ , milles  $d_0$  on normaalsügavus.)

Bernoulli funktsiooni vabapinnaga voolamisele võime teisendada kujule:

$$\begin{aligned} B &= \frac{Q^2}{2g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right)^2 + h + h_s} \\ &= \frac{Q^2}{2g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right)^2 + h + h_s}. \end{aligned}$$

Kui kasutada funktsiooni ekstreemumi määramise teoreemi veepinna kõrguse  $h$  järgi:

$$\frac{dB}{dh} = 0,$$

siis järeldub Bernoulli funktsioonist  $B = f(h, Q, g, d_s, z_s)$ , milles  $h$  on muutuja ja  $Q, g, d_s, h_s$  on konstantsed suurused, järgmine avaldis:

$$\begin{aligned}
& \frac{2 Q^2 \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} - \frac{\frac{1}{\pi d_s} \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2}} \right)}{2 g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} \right)^3 + 1} \\
& = \frac{Q^2 \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} - \frac{\frac{1}{\pi d_s} \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2}} \right)}{g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} \right)^3 + 1} = 0.
\end{aligned}$$

Osalise täitumusega ümartoru isevoolu Froude'i arv astmes 2 on määratud valemiga

$$\mathbf{Fr}^2 = \frac{Q^2}{g \frac{\left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} \right)^3}{\left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} - \frac{\frac{1}{\pi d_s} \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2}} \right)}}$$

Froude'i suhtarvu kriteeriumit kasutatakse vabavoolu hüdraulilise voolurežiimi määramisele. Kriitilisele vabavoolule vastab  $\mathbf{Fr} = 1$ , ning rahulikule ja käre dale vabavoolule on vastavalt  $\mathbf{Fr} < 1$  ja  $\mathbf{Fr} > 1$ .

**MÄRKUS.** Ümartoru isevoolu Froude'i arvu astmes 2 võib määrata ka valemiga:

$$\mathbf{Fr}^2 \approx \frac{2 Q^2}{g A_e^3} \sqrt{h(d_s - h)}.$$

(VIIDE 6.6)

Kriitilisele voolamisele vastava suhtelise torutäite määramine osalise täitumusega ümartorus

**PÕHIVALEMID. Ümartoru isevoolu Froude'i arv astmes 2 valem, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem**

VALEMID

Osalise täitumusega ümartoru isevoolu Froude'i arv astmes 2 on määratud valemiga:

$$Fr^2 = \frac{u^2}{g \frac{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} a \sin(2 h_d - 1) + \frac{2}{\pi} (2 h_d - 1) \sqrt{h_d - h_d^2} \right)}{\left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - (2 h_d - 1)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{h_d - h_d^2} - \frac{\frac{1}{\pi d_s} (2 h_d - 1)^2}{\sqrt{h_d - h_d^2}} \right)}}$$

milles suhteline torutäide  $h_d = h/d_s$  (ümartoru sisediaameter on  $d_s$  ja vabapinna maksimaalne kõrgus sisepõhjust ümartoru ristlõikes on  $h(= h_{rlm})$ ) ja voolukiirus

$$u = \frac{Q}{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} a \sin(2 h_d - 1) + \frac{2}{\pi} (2 h_d - 1) \sqrt{h_d - h_d^2} \right)}$$

Froude'i suhtarvu kriteerium kriitilisele vabapinnaga voolamisele on

$$Fr^2 = 1$$

→

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{u^2}{g \frac{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} a \sin(2 h_d - 1) + \frac{2}{\pi} (2 h_d - 1) \sqrt{h_d - h_d^2} \right)}{\left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - (2 h_d - 1)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{h_d - h_d^2} - \frac{\frac{1}{\pi d_s} (2 h_d - 1)^2}{\sqrt{h_d - h_d^2}} \right)}} \\ &= \frac{Q^2}{g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} a \sin(2 h_d - 1) + \frac{2}{\pi} (2 h_d - 1) \sqrt{h_d - h_d^2} \right)^3} \end{aligned}$$

## Proovimise arvutusmeetod

ARVUTUS. Kriitiline suhteline torutäide

Valitud ja arvatud hüdraulilised suurused etteantud vooluhulgale  $Q = 0,025 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

	$h_d \text{ (m} \cdot \text{m}^{-1}\text{)}$	$A_e \text{ (m}^2\text{)}$	$\chi \text{ (m)}$	$R_h \text{ (m)}$	$Re_{vs}$	$Fr$
I	0,45	0,0191	0,3471	0,0550	$0,55409 \cdot 10^5$	1,4662
II	0,5	0,0219	0,3707	0,0590	$0,51876 \cdot 10^5$	1,1988
III	0,55	0,0247	0,3943	0,0625	$0,48766 \cdot 10^5$	0,9993
IV	0,6	0,0274	0,4182	0,0655	$0,45981 \cdot 10^5$	0,8461
V	0,65	0,0301	0,4426	0,0680	$0,43448 \cdot 10^5$	0,7253

## VASTUSED

$$h_{dk} \approx 0,55$$

$$Fr \approx 1$$

$$d_k = h_{dk} d_s = 0,13 \text{ m}$$

JÄRELDUS. Numbrilisest arvutustulemusest selgub, et osalise täitumusega ümartorus on kriitilisele voolamisele vastav suhteline torutäide väiksem kui ühtlasele voolamisele vastav suhteline torutäide, st kriitiline sügavus on väiksem kui normaalsügavus ( $d_k < d_0$ ). Järelikult on ühtlane voolamine osalise täitumusega ümartorus hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ).

*Numbriline arvutusskeem. Kriitiline suhteline torutäide  
Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod*

## VALEMID

Veafunktsioon:

$$ERF(z_j) = Fr^2_j - Fr^2,$$

milles  $z_j$  on osalise täitumusega ümartoru arvutuslik kriitilisele voolamisel vastav suhteline torutäide,  $Fr^2_j$  on arvutuslik Froude'i arv astmes 2 ja  $Fr^2$  on etteantud Froude'i arv astmes 2.

Veafunktsiooni tuletis:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{dFr^2_j}{dz_j},$$

milles on eeldatud, et  $\mathbf{Fr}^2 = \textit{konstant} (= 1)$ .

Arvutusliku Froude'i arv astmes 2 on määratud valemiga:

$$\begin{aligned} \mathbf{Fr}^2_j &= \frac{Q^2}{g \frac{\left(\pi \frac{d_s^2}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{asin}(2 z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2 z_j - 1) \sqrt{z_j - z_j^2}\right)^3}{\left(\frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - (2 z_j - 1)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{z_j - z_j^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{(2 z_j - 1)^2}{\sqrt{z_j - z_j^2}}\right)}} \\ &= \frac{Q^2 \left(\frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - (2 z_j - 1)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{z_j - z_j^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{(2 z_j - 1)^2}{\sqrt{z_j - z_j^2}}\right)}{g \left(\pi \frac{d_s^2}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{asin}(2 z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2 z_j - 1) \sqrt{z_j - z_j^2}\right)^3}, \end{aligned}$$

milles  $g$ ,  $Q$  ja  $d_s$  on konstantsed suurused.

→

$$\begin{aligned} \frac{d\text{ERF}(z_j)}{dz_j} &= \frac{d}{dz_j} \left( \frac{Q^2 \left(\frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - (2 z_j - 1)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{z_j - z_j^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{(2 z_j - 1)^2}{\sqrt{z_j - z_j^2}}\right)}{g \left(\pi \frac{d_s^2}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{asin}(2 z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2 z_j - 1) \sqrt{z_j - z_j^2}\right)^3} \right) \\ &= \frac{Q^2 d}{g d_s dz_j} \left( \frac{\left(\frac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1 - (2 z_j - 1)^2}} + \frac{4}{\pi} \sqrt{z_j - z_j^2} - \frac{1}{\pi} \frac{(2 z_j - 1)^2}{\sqrt{z_j - z_j^2}}\right)}{\left(\pi \frac{d_s^2}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{asin}(2 z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2 z_j - 1) \sqrt{z_j - z_j^2}\right)^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{Q^2}{g d_s} \left( \frac{-\frac{1}{2} \frac{\frac{2}{\pi}}{(1 - (2z_j - 1)^2)^{\frac{3}{2}}} (-2(2z_j - 1)2)}{\left(\pi \frac{d_s^2}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2z_j - 1)\sqrt{z_j - z_j^2}\right)^3} \right. \\
&\quad + \frac{\frac{1}{2} \frac{\frac{4}{\pi}}{\sqrt{z_j - z_j^2}} (1 - 2z_j)}{\left(\pi \frac{d_s^2}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2z_j - 1)\sqrt{z_j - z_j^2}\right)^3} \\
&\quad - \frac{\frac{1}{2} \frac{(2z_j - 1)2}{\sqrt{z_j - z_j^2}}}{\left(\pi \frac{d_s^2}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2z_j - 1)\sqrt{z_j - z_j^2}\right)^3} \\
&\quad - \frac{-\frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\pi} (2z_j - 1)^2}{(z_j - z_j^2)^{\frac{3}{2}}} (1 - 2z_j)}{\left(\pi \frac{d_s^2}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2z_j - 1)\sqrt{z_j - z_j^2}\right)^3} \\
&\quad - \frac{3 \left( \frac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1 - (2z_j - 1)^2}} + \frac{4}{\pi} \sqrt{z_j - z_j^2} - \frac{\frac{1}{\pi} (2z_j - 1)^2}{\sqrt{z_j - z_j^2}} \right)^2}{\left(\pi \frac{d_s^2}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2z_j - 1)\sqrt{z_j - z_j^2}\right)^4} \left. \right)
\end{aligned}$$

**MÄRKUS.** Hüdrauliliselt rahuliku või käreda vabavoolurežiimiga voolamisele pealt kaetud voolusängis võib numbrilises arvutusskeemis vastavalt valida  $\mathbf{Fr}^2 = \text{konstant} (< 1)$  või  $\mathbf{Fr}^2 = \text{konstant} (> 1)$ . Hüdrauliliselt rahuliku või käreda vabavoolurežiimile vastava iteratsioonrea koondumine sõltub suhtelise torutäitega voolamise algtingimusest.

Veafunktsioonist suunatud tuletise võtmise reegel:

$$\frac{d\operatorname{ERF}(z_j)}{dz_j} = \frac{0 - \operatorname{ERF}(z_j)}{z_{j+1} - z_j},$$

võimaldab kasutusele võtta Tayloriga valemiga 1-järgu tuletise täpsusega:



$$z_{j+1} = z_j - \frac{ERF(z_j)}{\frac{dERF(z_j)}{dz_j}}.$$

Numbrilise arvutuskeemi põhivalemi üldkuju on

$$z_{j+1} = z_j - \frac{\mathbf{Fr}^2_j - \mathbf{Fr}^2}{\frac{Q^2}{g d_s} \left( \frac{\frac{4}{\pi}(2z_j - 1)}{(1 - (2z_j - 1)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{3}{\pi}(1 - 2z_j)}{\sqrt{z_j - z_j^2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \frac{(2z_j - 1)^3}{(z_j - z_j^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3 \text{ABI1}_j^2}{\left(\pi \frac{d_s^2}{4}\right)^2 \text{ABI2}_j^4} \right)},$$

milles

$$\text{ABI1}_j = \frac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1 - (2z_j - 1)^2}} + \frac{4}{\pi} \sqrt{z_j - z_j^2} - \frac{1}{\pi} \frac{(2z_j - 1)^2}{\sqrt{z_j - z_j^2}},$$

$$\text{ABI2}_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{asin}(2z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2z_j - 1) \sqrt{z_j - z_j^2}.$$

ARVUTUSSKEEM (Froude'i arv, ümarristolõikega pealtkaetud voolusäng)

Numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku kriitilisele voolamisele vastava suhtelise torutäite valem (iteratsioonmeetodi põhivalem):

$$z_{j+1} = z_j - \frac{\mathbf{Fr}^2_j - \mathbf{Fr}^2}{\frac{Q^2}{g d_s} \left( \frac{\frac{4}{\pi}(2z_j - 1)}{(1 - (2z_j - 1)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{3}{\pi}(1 - 2z_j)}{\sqrt{z_j - z_j^2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \frac{(2z_j - 1)^3}{(z_j - z_j^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3 \text{ABI1}_j^2}{\left(\pi \frac{d_s^2}{4}\right)^2 \text{ABI2}_j^4} \right)},$$

Arvutusliku Froude'i arvu astmes 2 valem:

$$\mathbf{Fr}^2_j = \frac{\frac{Q^2}{d_s} \left( \frac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1 - (2z_j - 1)^2}} + \frac{4}{\pi} \sqrt{z_j - z_j^2} - \frac{1}{\pi} \frac{(2z_j - 1)^2}{\sqrt{z_j - z_j^2}} \right)}{g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{asin}(2z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2z_j - 1) \sqrt{z_j - z_j^2} \right)^3}$$

$$= \frac{(Q^2/d_s) \text{ABI1}_j}{g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 (\text{ABI2}_j)^3},$$

milles

$$ABI1_j = \frac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1 - (2z_j - 1)^2}} + \frac{4}{\pi} \sqrt{z_j - z_j^2} - \frac{\frac{1}{\pi} (2z_j - 1)^2}{\sqrt{z_j - z_j^2}},$$

$$ABI2_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2z_j - 1) \sqrt{z_j - z_j^2}.$$

ARVUTUS. Kriitiline suhteline torutäide ( $Fr^2 = 1$ )

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (1)	0,3000	0,3653	0,4371	0,5022	0,5407	0,5496
$Fr^2_j$ (1)	10,2491	4,7875	2,4042	1,4128	1,0659	1,0014

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (1)	0,5498	0,5498	0,5498	0,5498
$Fr^2_j$ (1)	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

VASTUSED

$$h_{dk} = 0,5498$$

$$Fr = 1$$

$$d_k = h_{dk} d_s = 0,1298 \text{ m}$$

JÄRELDUS. Numbrilisest arvutustulemusest selgub, et osalise täitumusega ümartorus on kriitilisele voolamisele vastav suhteline torutäide väiksem kui ühtlasele voolamisele vastav suhteline torutäide, st kriitiline sügavus on väiksem kui normaal-sügavus ( $d_k < d_0$ ). Järelikult on ühtlane voolamine osalise täitumusega ümartorus hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ).

## MÄRKUSED. Suhteline torutäide

- Osalise täitumusega ümartoru kriitilisele voolamisele vastav suhtelise torutäite numbriline arvutuskeem, mis on koostatud Newtoni iteratsioonmeetodiga, koondub hästi suhtelise torutäite algväärtustel  $0,2 < z_{j=1} < 0,6$  m. Numbrilisele arvutuskeemile valitud valemitest sõltub iteratsioon-arvutuse koonduvust piiravad nõ singulaarsused.
- Kui pealtkaetud voolusängi normaalsügavus on ümartoru voolamise kriitilisest sügavusest väiksem, siis võib vabavooluga torus tekkida vooluhüpe. See võib blokeerida õhu vaba liikumise isevooles kanalisatsioonis.
- Vooluhüpe horisontaalses torustikus võib tekkida nõ kareda piirde tõttu amortiseerunud torustikus ning toruühenduste tõttu uues torustikus.
- Torustiku arvutuste matemaatiliseks lihtsustamiseks eeldatakse, et voolamise hõõrdetakistusteguri võib määrata Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna tingimustel. Hõõrdetakistustegur määratakse valemiga:

$$\lambda = \frac{8 g n_M^2}{R_h^{2/6}},$$

milles  $g$  on raskuskiirendus,  $R_h$  on hüdrauliline raadius ja  $n_M$  on Manningi karedustegur. Täieliku torutäitega ümartorule  $R_h = d_s/4$ . Manningi karedusteguri kasutamine voolusüsteemi takistuse määramisele on seotud nõ vee omaduste määramisega. Vee temperatuur määrab vee tiheduse ja dünaamilise molekulaarse viskoossusteguri, mille järgi määratakse kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur. Reynolds'i arvu väärtus sõltub oluliselt kinemaatilise molekulaarsest viskoossustegurist.

- Ühtlase voolamise hõõrdepinge voolusängis määratakse valemiga:

$$\tau_0 = \rho g R_h I_h = \rho g R_h i_0,$$

milles  $\rho$  on vedeliku tihedus,  $g$  on raskuskiirendus,  $R_h$  on hüdrauliline raadius,  $I_h$  on hüdrauliline lang ja  $i_0$  on põhjalang. Ühtlasele vabavoolule  $I_h = i_0$ .

- Isevoole torustiku eritingimusel võib pikikaldega torus olla täieliku torutäitega voolamine, milles hüdrauliline lang on määratud Darcy survekao valemiga:

$$h_{hõõre} = \frac{l_{toru}}{d_s} \frac{u^2}{2 g}.$$

→

$$I_h = \frac{h_{hõõre}}{l_{toru}} = \frac{1}{d_s} \frac{u^2}{2 g}$$

Täieliku täitumisega ümarristlõikega torule võib vooluhulga määrata valemiga:

$$Q = u A_e = u \pi \left(\frac{d_s}{2}\right)^2 = u \pi \frac{d_s^2}{4}.$$

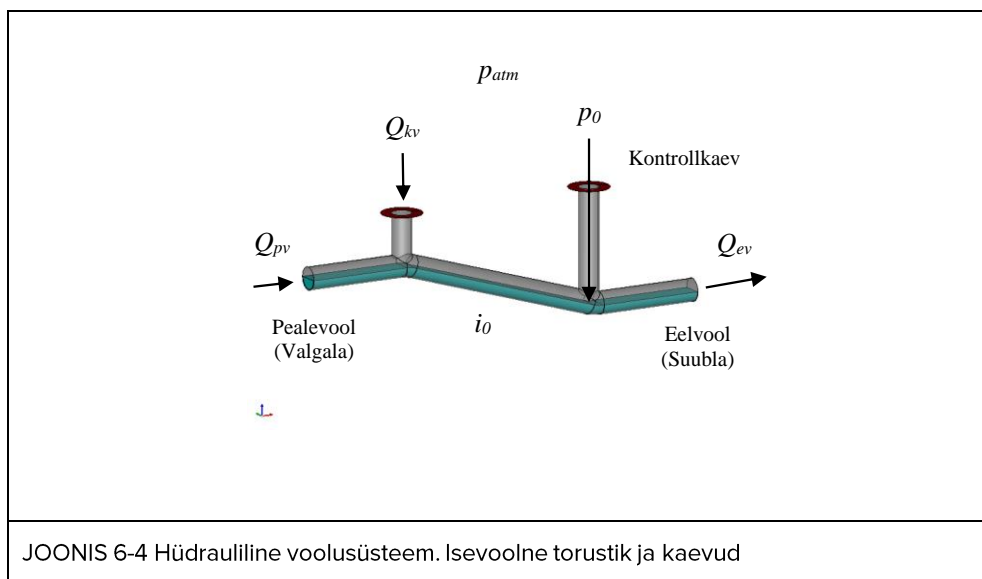
→

$$I_h = \frac{1}{d_s} \frac{u^2}{2 g} = \frac{8 Q^2}{\pi^2 d_s^5 g}$$

## 6.3 ISESEISVA TÖÖ ÜLESANNE. SUHTELINE JA KRIITILINE TORUTÄIDE

ANTUD. Linna valgalalt vihmavee ärajuhtimiseks on rajatud sademeveekanaliseerimise torustik. Ümarristlõikega torus, sisediameetriga  $d_s = 236$  mm, languga  $i_0 = 0.005$ , on valitud vooluhulk  $Q = Q_{pv} + Q_{kv}$ , milles  $Q_{pv} = 20 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$  ja  $Q_{kv} = 10 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ . Torustiku sisepiirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,015$ . Isevooles torustikus voolab  $10$  °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Arvutada isevoole torustiku suhteline torutäide ja sellele vastav normaalsügavus, voolusängi Reynoldsi arv ja hüdrauliline vabavoolurežiim vastavalt Froude'i suhtarvu kriteeriumile. Arvutada kriitilisele voolamisele vastav suhteline torutäide ja sellele vastav kriitiline sügavus. Arvutada hõõrdetakistustegur ja hõõrdepinge.



EELDUSED. Voolamine isevooles torustikus on statsionaarne, kaevudevahelises kaldtorus on vabavool ühtlane. Eeldada, et torustiku sisepiire on hüdrauliliselt kare, st torustiku takistusteguri määramisele võib kasutada Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna tingimusi. Normaaletsügavus määrata Manningi vooluhulga valemiga ja kriitiline sügavus määrata Froude'i suhtarvu kriteeriumiga, kasutades selleks Newtoni iteratsioonmeetodit.

VASTUSED

$$h_d = 0,7858$$

$$d_0 = h_d d_s = 0,1854 \text{ m}$$

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu} = 0,44871 \cdot 10^5$$

$$\lambda = 0,0425$$

$$Fr = 0,5953$$

$$\tau_0 = 3,5168 \text{ Pa}$$

$$h_{dk} = 0,6048$$

$$Fr = 1$$

$$d_k = h_{dk} d_s = 0,1427 \text{ m}$$

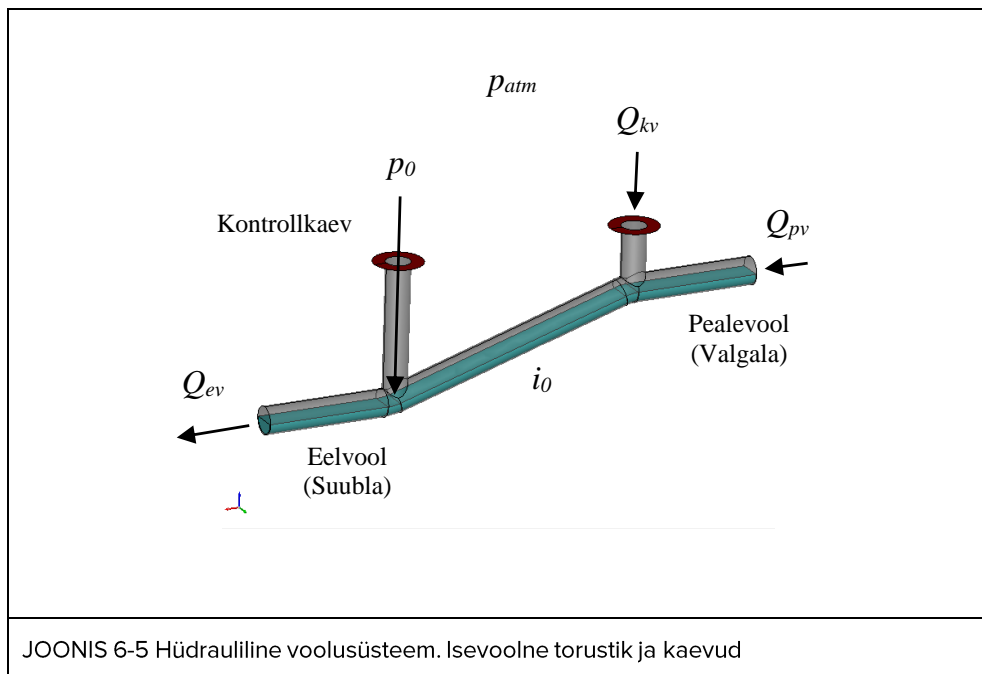
**JÄRELDUS.** Arvutustulemusest selgub, et ühtlane voolamine osalise täitumusega ümartorus on turbulentne ( $Re_{vs} > 500$ ). Osalise täitumusega ümartorus on kriitilisele voolamisele vastav suhteline torutäide väiksem kui ühtlasele voolamisele vastav suhteline torutäide, st kriitiline sügavus väiksem kui normaalsügavus ( $d_k < d_0$ ). Järelikult on ühtlane voolamine osalise täitumusega ümartorus hüdrauliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ).

**MÄRKUS.** Kontrollida iseseisvalt, kas hõõrdetakistusteguri arvutatud väärtus vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna tingimustele.

## 6.4 LISAÜLESANNE. SUHTELINE TORUTÄIDE JA TAKISTUSTEGURID

ANTUD. Linna valgalalt vihmavee ärajuhtimiseks on rajatud sademeveekanaliseerimise torustik. Ümarristlõikega torus, sisediameetriga  $d_s = 236$  mm, languga  $i_0 = 0,005$ , on valitud vooluhulk  $Q = Q_{pv} + Q_{kv}$ , milles  $Q_{pv} = 20 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$  ja  $Q_{kv} = 5 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ . Torustiku sisepiirde absoluutkaredus  $k_s = 3,85$  mm. Isevooles torustikus voolab  $10^\circ\text{C}$  vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Määrata proovimise arvutusmeetodiga (arvutuskõveratega) hüdraulilisele voolusüsteemile suhteline torutäide, mis vastab normaalsügavusele ümartorus. Arvutada isevoole torustiku suhteline torutäide ja sellele vastav normaalsügavus, voolusängi Reynoldsi arv ja hüdrauliline vabavoolurežiim vastavalt Froude'i suhtarvu kriteeriumile. Arvutada kriitilisele voolamisele vastav suhteline torutäide ja sellele vastav kriitiline sügavus. Arvutada hõõrdetakistustegur ja hõõrdepinge. Kontrollida tulemusi numbrilise arvutuskeemiga.



JOONIS 6-5 Hüdrauliline voolusüsteem. Isevoolne torustik ja kaevud

EELDUSED. Voolamine osalise täitumusega torustikus on statsionaarne, kaevudevahelises kaldtorus on vabavool ühtlane. Eeldada, et torustiku sisepiire on hüdrauliselt kare, st torustiku takistusteguri määramisele võib kasutada Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna tingimusi. Normaalsügavus määrata reaalvoolu Bernoulli võrrandiga kasutades Darcy-Weisbach'i hõõrdetakistuse valemit. Kriitiline sügavus ümartorus voolamisele määrata Froude'i suhtarvu kriteeriumiga. Hõõrdetakistusteguri määramiseks võib kasutada Swamee-Jaini hõõrdetakistuse kloonvalemit ja Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonvõrrandit.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Reaalvedeliku Bernoulli võrrand vabavoolule, isevoelse torustiku põhivalem, Darcy survekao valem, Darcy-Weisbach'i hõõrdetakistuse valem, osalise täitumusega ümartorus elavlõike valem, osalise täitumusega ümartoru märgpiirde valem, voolusängi Reynoldsi arvu valem, Swamee-Jaini hõõrdetakistuse kloonvalem, Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonvõrrand, ümartoru isevoolu Froude'i arvu valem, Froude'i suhtarvu kriteerium, torustiku voolamise hõõrdepinge valem**

## VALEMID

Reaalvedeliku Bernoulli võrrand vabavoolule torus on määratud valemiga

$$z_{sv} + d_0 + \frac{u_{sv}^2}{2g} = z_{vv} + d_0 + \frac{u_{vv}^2}{2g} + h_t,$$

milles torupõhja kõrgus võrdlustasandi suhtes, normaalsügavus ja voolukiirus isevoelse toru sissevoolu osas on vastavalt  $z_{sv}$ ,  $d_0$  ja  $u_{sv}$ . Torupõhja kõrgus võrdlustasandi suhtes, normaalsügavus ja voolukiirus toru väljavoolu osas on vastavalt  $z_{vv}$ ,  $d_0$  ja  $u_{vv}$ .  $h_t$  on survekadu, mis jagatakse hõõrdesurvekaoks  $h_l$  ja kohtsurvekaoks  $h_k$ . Võrdlustasand isevoelsele pikikaldega torule (kaldtorule) on valitud tinglikult. Raskuskiirendus on  $g$ .

Kui isevoelse toru kohttakistusi ja mõõdukalt ebahühtlast voolamist (ingl. *gradually varying flow*) toru sisse- ja väljavoolu osades mitte arvestada, siis vabapinna kõrgused võrdlustasandi suhtes on vastavalt

$$\begin{aligned} h_{sv} &= z_{sv} + d_0, \\ h_{vv} &= z_{vv} + d_0. \end{aligned}$$

Positiivse languga torus on

$$z_{sv} > z_{vv}.$$

Ilma lekketa ja muutumatu ristlõikega torus, milles ühtlase vabavoolu elavlõige ei muutu, on

$$u_{sv} = u_{vv}.$$

Reaalvedeliku Bernoulli võrrandist vabavoolule järeldub seos:

$$z_{sv} - z_{vv} = h_l,$$

milles survekadu  $h_t$  on määratud kui hõõrdesurvekadu  $h_l$ .

Isevoelse torustiku põhivalem on

$$\Delta h = h_l,$$

milles  $\Delta h = h_{sv} - h_{vv}$ .

Voolusängi Reynoldsi arv on määratud valemiga

$$\mathbf{Re}_{vs} = \frac{u R_h}{\nu} = \frac{Q}{\chi \nu},$$

milles  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur,  $u = (u_{sv} = u_{vv})$  on voolukiirus pealtkaetud voolusängis ja  $Q$  on vooluhulk.

Hüdrauliline raadius määratakse valemiga:

$$R_h = \frac{A_e}{\chi},$$

milles  $A_e$  on elavlõige ja  $\chi$  on märgpiire.

**MÄRKUS.** Kuna veevoolule täistäitumusega ümartorus vastav kriitiline Reynoldsi arv on 2000, siis järelikult hüdraulilise raadiusega määratud kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on neljakordselt erinev,  $\mathbf{Re}_{vs} = \mathbf{Re}/4$ . Laminaarse ja turbulentsse voolamise ülemineku kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on 500.

Darcy survekao valem on

$$h_l = \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g},$$

milles  $\lambda$  on hõõrdetakistustegur (mõõtühikuta suurus [ $\lambda$ ] = 1),  $l$  on täieliku täitumusega survetoru pikkus,  $d_s$  on toru sisediaameeter ja  $u$  on voolamise keskkiirus voolamisele täieliku täitumusega torustikus. Täieliku täitumusega torustikus  $d_s = 4 R_h$ .

→

$$h_l = \lambda \frac{l}{4 R_h} \frac{u^2}{2g}$$

$$h_l = \lambda \frac{l}{R_h} \frac{u^2}{8g}$$

→

$$\lambda = \frac{8g R_h h_l}{u^2 l}$$



**MÄRKUS.** Ühtlasele voolamisel pealtkaetud voolusängis on lang määratud hüdraulilise languga:  $i_0 = I_h$ . Hüdrauliline lang on määratud hõõrdesurvekao ja nõ voolulõigu pikkuse suhtega:  $I_h = h_l/l$ .

→

$$\lambda = \frac{8 g R_h i_0}{u^2}$$

$$\lambda = \frac{8 g A_e i_0 A_e^2}{\chi Q^2}$$

$$\lambda = \frac{8 g i_0 A_e^3}{\chi Q^2}$$

→

$$u^2 = \frac{8 g A_e i_0}{\lambda \chi}$$

$$u = \sqrt{\frac{8 g R_h i_0}{\lambda}}$$

$$u^2 = \frac{8 g R_h h_l}{\lambda l}$$

$$u = \sqrt{\frac{8 g R_h h_l}{\lambda l}}$$

Vabavoolu takistusteguri võib määrata Swamee-Jaini hõõrdetakistuse kloonvalemiga:

$$\lambda = \frac{0,25}{\left( \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,8} + \frac{1,65}{\mathbf{Re}_{vs}^{9/10}} \right) \right)^2}.$$

Osalise täitumusega ümartoru ühtlase voolamise vooluhulga võib määrata valemiga:

$$Q = u A_e,$$

$$Q = \sqrt{\frac{8 g R_h i_0}{\lambda}} A_e,$$

$$Q = \sqrt{\frac{8 g A_e i_0}{\lambda \chi}} A_e,$$

$$Q = \sqrt{\frac{8 g i_0}{\lambda} \frac{A_e^{3/2}}{\chi^{1/2}}},$$

milles tuleb kasutada vastavalt osalise täitumusega torustiku elavlõike ja märgpiirde, ning hõõrdetakistusteguri ja voolusängi Reynoldsi arvu valemeid:

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2 h_d - 1) + \frac{2}{\pi} (2 h_d - 1) \sqrt{h_d - h_d^2} \right),$$

$$\chi = \pi d_s \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2 h_d - 1) \right),$$

$$\lambda = \frac{0,25}{\left( \log_{10} \left( \frac{k_s \chi / A_e}{14,8} + \frac{1,65}{\operatorname{Re}_{vs}^{9/10}} \right) \right)^2},$$

$$\operatorname{Re}_{vs} = \frac{Q}{\chi v}.$$

Proovimise arvutusmeetod

### VALEMID

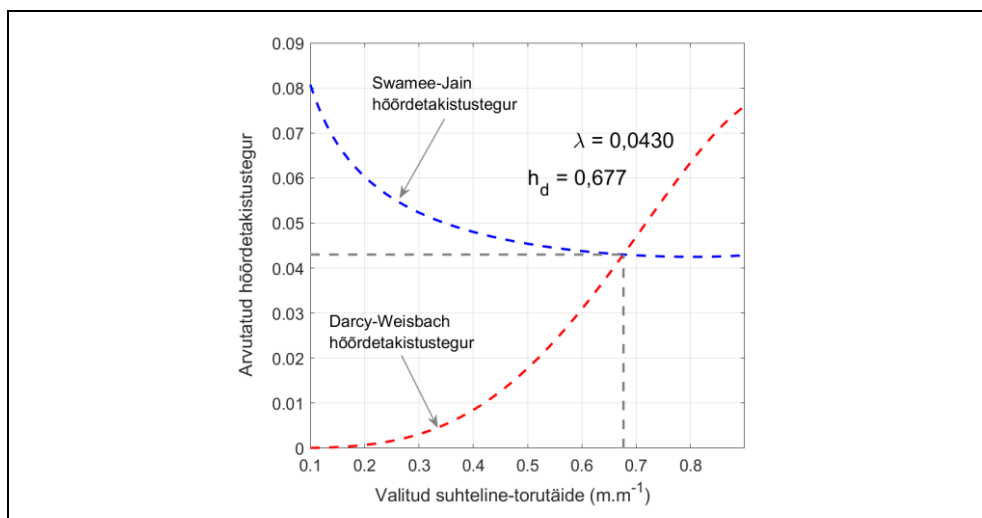
Darcy-Weisbach'i hõõrdetakistuse valem

$$\lambda = \frac{8 g i_0 A_e^3}{Q^2 \chi}$$

Swamee-Jaini hõõrdetakistuse kloovalem

$$\lambda = \frac{0,25}{\left( \log_{10} \left( \frac{k_s \chi / A_e}{14,8} + \frac{1,65}{(Q/(\chi v))^{9/10}} \right) \right)^2}$$

ARVUTUS. Arvutuskõverad Darcy-Weisbach'i hõõrdetakistuse valemiga ja Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valemiga koostatud arvutuskõverad



JOONIS 6-6 Isevoelse torustiku suhtelise torutäide ja hõõrdetakistusteguri määramine, milleks on kasutatud hõõrdetakistusteguri valemite arvutuskõveraid

## VASTUSED

$$h_d = 0,677$$

$$d_0 = h_d d_s = 0,16 \text{ m}$$

$$\mathbf{Re}_{vs} = \frac{u R_h}{\nu} = 0,42182 \cdot 10^5$$

$$\lambda = 0,0430$$

$$\mathbf{Fr} = 0,671$$

$$\tau_0 = 3,3890 \text{ Pa}$$

$$h_{dk} = 0,55$$

$$\mathbf{Fr} = 1$$

$$d_k = h_{dk} d_s = 0,13 \text{ m}$$

**JÄRELDUS.** Arvutustulemusest selgub, et ühtlane voolamine osalise täitumusega ümartorus on turbulentne ( $\mathbf{Re}_{vs} > 500$ ). Osalise täitumusega ümartorus on kriitilisele voolamisele vastav suhteline torutäide väiksem kui normaalsügavusele vastav suhteline torutäide, st kriitiline sügavus väiksem kui normaalsügavus ( $d_k < d_0$ ). Järelikult on ühtlane voolamine osalise täitumusega ümartorus hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $\mathbf{Fr} < 1$ ).

**MÄRKUS.** Kontrollida iseseisvalt, kas hõõrdetakistusteguri arvatud väärtus vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna tingimustele.

*Kontrollvalem. Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloovõrrand*

## VALEMID

Erinevate ümartoru Reynoldsi arvu ja osalise täitumusega ümartoru piirde suhtelise kareduse väärtustele võib takistusteguri määrata Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrandiga või vastavalt teisendatud Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloovõrrandiga:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{\mathbf{Re} \sqrt{\lambda}} \right) = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{\mathbf{Re}_{vs} \sqrt{\lambda}} \right),$$

milles Reynoldsi arv

$$\mathbf{Re} = \frac{u d_s}{\nu},$$

ja toru sisediaameeter

$$d_s = 4 R_h$$

on asendatud vastavalt voolusängi Reynoldsi arvu ja hüdraulilise raadiusega:

$$\mathbf{Re}_{vs} = \frac{u R_h}{\nu} = \frac{Q}{\chi \nu},$$

$$R_h = \frac{d_s}{4}.$$

Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonvõrrandi võib teisendada kujule:

$$CW(\lambda) = -2 \sqrt{\lambda} \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{Re_{vs} \sqrt{\lambda}} \right),$$

et võtta kasutusele nõ Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonfunktsioon  $CW(\lambda)$ .

*Numbriline arvutusskeem. Hõõrdetakistustegur*

*Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod*

ARVUTUSSKEEM (Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonvõrrand)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku hõõrdetakistusteguri valem (iteratsioonmeetodi põhivalem):

$$z_{j+1} = z_j - \frac{CW_j - CW}{-\frac{1}{\sqrt{z_j}} \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{Re_{vs} \sqrt{z_j}} \right) + \frac{\frac{0,6275}{Re_{vs} \sqrt{z_j}}}{\left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{Re_{vs} \sqrt{z_j}} \right) \ln(10)}},$$

milles  $z_j$  on arvutuslik hõõrdetakistustegur ja  $CW = 1$ .

Arvutuslik Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonfunktsioon:

$$CW(z_j) = -2 \sqrt{z_j} \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{Re_{vs} \sqrt{z_j}} \right).$$

ARVUTUS. Hõõrdetakistustegur ( $Re_{vs} = 0,42182 \cdot 10^5$ ,  $k_s = 3,9$  mm,  $h_d = 0,677$ )

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (1)	0,0100	0,0316	0,0421	0,0430	0,0430	0,0430
$CW_j$ (1)	0,4806	0,8569	0,9901	1,0000	1,0000	1,0000

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (1)	0,0430	0,0430	0,0430	0,0430
$CW_j$ (1)	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

## VASTUSED

Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloovõrrandi lahend

Hõõrdetakistustegur:  $\lambda = 0,042980032864206 \approx 0,0430$

**MÄRKUS.** *Kontrollida iseseisvalt, kas hõõrdetakistusteguri arvutatud väärtus vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna tingimustele.*

## 6.5 VIITED

6.1 *Vesihuoltoverkkojen suunnittelu. Mitoitus ja suunnittelu. RIL 237-2-2010.*

6.2 *Väliskanalisatsioonivõrk. EVS 848:2021.*

6.3 Maastik, A., Haldre, H., Koppel, T. & Paal, L. (1995). *Hüdraulika ja pumbad.* OÜ Greif.

6.4 Paal, L., Mölder, H. & Tibar, H. (1981). *Veevarustus ja kanalisatsioon.* Valgus.

6.5 Laanearu, J. & Kaur, K. (2018). Two-phase CFD modelling of air-water flow transition in a horizontal circular pipe and comparisons with experimental results. A. S. Tijsseling (toim)., *Pressure Surges 2018: The 13th International Conference on Pressure Surges* (p. 937–948). BHR Group.

6.6 Kaur, K. (2022). *Dynamical Processes of Air-Water Flow in Urban Water Systems (Õhu ja vee koosvoolamise dünaamilised protsessid linna vee süsteemides).* Doktoritöö, inseneriteaduskond, ehituse ja arhitektuuri instituut, Tallinna Tehnikaülikool, Tallinn.

## 7 AVASÄNG

### 7.1 PRAKTIILINE OSA. TEHISLIKUD JA LOODUSLIKUD VOOLUSÄNGID

#### 7.1.1 EHITIS. KRAAV, KANAL, RENN, KÜVETT

Selles osas käsitletakse peamiselt avatud vooluveekogusid (va pealtkaetud voolusängid ehk isevoolsed torud). Avasängi peamised hüdraulilised suurused on vooluhulk, voolukiirus, elavlõige, hüdrauliline raadius, märgpiire ja lang.

Prismaatilised ja languga (ka pikikaldega) kraavid, kanalid, rennid ja küvetid on avasängid, milles vesi liigub vabavoolselt ehk raskusjõu toimel. Nii tehislikku kui ka looduslikku voolusängi on võimalik kasutada sademe- ja tulvavee ärajuhtimiseks ning intensiivsete sadude korral voolamise aeglustamiseks. Tehissängides kasutatakse valdavalt trapetsikujulist ristlõiget ja tuleb arvestada sellega, et loodussängi ristlõige on keerulisema kujuga. Looduslikus avasängis aset leidva voolamise elavlõige võib hüdrauliliselt sarnaneda nelinurksele ristlõikekujule laias avasängis, kus veepinna laius on vee sügavusest oluliselt suurem.

Valides avasängi sügavuse, ristlõike kuju ja pikikalde on võimalik kujundada vabapinnaga voolamise rajatis kasutusotstarbe järgi kas äravoolusängiks või muuks sääraseks. Eritingimustel on võimalik kujundada ka kombineeritud rajatis, millel on kõik kolm eelpoolmainitud otstarvet. Kuna tulvavete ärajuhtimisega võib kaasned a voolusängi piirde erosioon ja nõlvade varingud (vooluveekogu kalda maalihked), siis tuleb voolusängi kavandamisel ja hüdraulilisel arvutamisel seda arvesse võtta ning vajadusel ette näha sängipõhja ja kallaste püsivust tagavad meetmed (nt haljastus). Soovituslik on valida tehisliku voolusängi pikikalle selliselt, et voolamine ei ületaks kriitilist voolukiirust, mis muidu põhjustab setete uhtumist ja sellega kaasnevat avasängi kallaste erosiooni. Kui looduslikus voolusängis on setete kuhjumine ja uhtumine tasakaalus, siis ei kaasne (jõe)vooluga avasängi piirde muutuseid. Voolukiiruse ülempiir sõltub peamiselt avasängi piirde pinnasest ja kasutatavast sängikindlustusest. Mida madalam on vesi (väiksem veesügavus), seda väiksem on lubatav voolukiirus avasängis. Voolukiiruse alampiir oleneb sellest, missugust suspendeerunud setete fraktsiooni ehk uhtainet voolamine kannab. Mida suurema tihedusega on uhtaine teramaterjal, seda suurem peab olema voolukiirus, et vältida suspendeerunud setete kuhjumist avasängis. Setete kuhjumisel väheneb voolusängi ristlõike pindala ja koos sellega muutub lokaalselt ka veevoolu dünaamika.

Avasängi kasutamisel sademeveesüsteemi osana, veeteena või muus funktsioonis tuleb ette näha hooldamistööd. Näiteks võib setete kuhjumine tehislikus voolusängis aja jooksul tekitada loodusmoodustise (settekünnise nagu düün), mis põhjustab veepinna paisutuse, mis omakorda võib mõjutada lähialade veerežiimi

(nt äravoolu). Olenevalt pinnasest ja kalda kõrgusest võiks avasängi soovituslik nõlvus olla maksimaalselt 1:1, ning selle valikuga tuleks ette näha sängikindlustus. Avasängi soovituslikud nõlvustegurid Eestis esinevatele pinnastele on teada füüsilisest modelleerimisest (VIIDE 7.1, „Hüdraulika ja pumbad“).

Tehissängi nõlvusteguri ja välisnurga arvutusnäited:

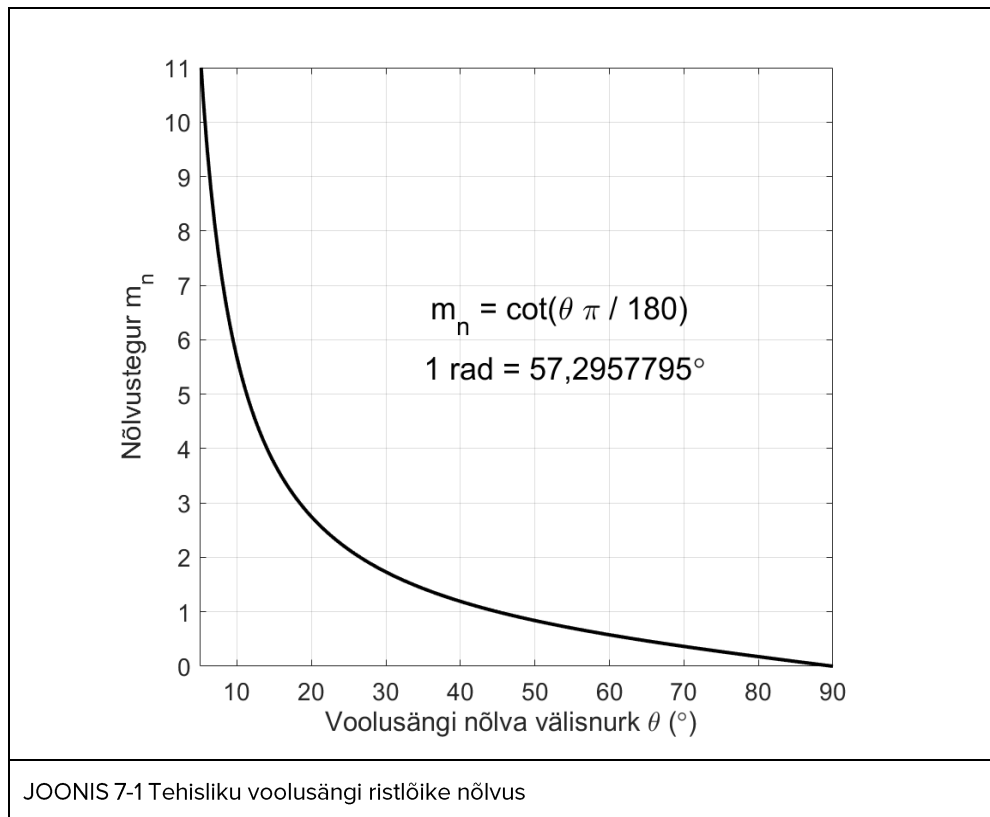
Nõlvusele 1:1 vastab nõlvustegur  $m_n = 1$  ( $\text{atan}(1/m_n) = \text{acot}(m_n) = \pi / 4 \text{ rad} = 45^\circ$ );

Nõlvusele 1:2 vastab nõlvustegur  $m_n = 2$  ( $\text{acot}(m_n) = \pi / 6,73 \text{ rad} = 26,75^\circ$ );

Nõlvusele 1:3 vastab nõlvustegur  $m_n = 3$  ( $\text{acot}(m_n) = \pi / 9,75 \text{ rad} = 18,4364^\circ$ );

Nõlvusele 1:4 vastab nõlvustegur  $m_n = 4$  ( $\text{acot}(m_n) = \pi / 12,8229 \text{ rad} = 14,0374^\circ$ ).

**MÄRKUS.** Nõlvustegurile kehtib samasustehe:  $\cot(\text{atan}(1/m_n)) = m_n$ ).



JOONIS 7-1 Tehisliku voolusängi ristlõike nõlvus

## 7.1.2 VOOLUREŽIIM. LÄBILASKEVÕIME JA HÜDRAULILINE RAADIUS

Avasängi optimeerimisülesandes tuleb määrata voolamisele ristlõige, millele vastava avasängi sisepiirde kareduse ja pikikalde puhul on avasängi läbilaskevõime ettemääratud veehulk. Praktikas võib ette tulla olukordi, kus läbilaskevõime on vajalik määrata juba olemasolevale avasängile või kavandada uus voolusäng, mis tagaks kõvakattega pindadelt kogutava vee ärajuhtimise. Avasäng peab olema projekteeritud stabiilsena, rajamisel minimaalse kaevetööde mahuga ning nii, et selle ristlõige vastaks nõutud läbilaskevõimele. Avasängide arvutamiseks on antud standardiga juhised (VIIDE 7.2, „Vesiehitised sisevetel“) ning seda on käsitletud ka eestikeelsetes hüdraulikaõpikutes (VIITED 7.3, „Hüdraulika“ ja 7.1, „Hüdraulika ja pumbad“). Geomeetriselt on võimalik avasängile määrata hüdrauliliselt soodsaim ristlõige. Näiteks täieliku täitumusega toru hüdrauliliselt soodsaim ristlõige on ümarakujuline, kusjuures ristlõike märgpiirde pikkus on vastava elavlõike suhtes võimalikult minimaalne. Mida väiksem on avasängi ristlõikepiirdega geomeetriselt määratud voolutakistus ehk sängipiirde ja veevoolu kokkupuutejoon, seda suurem on avasängi läbilaskevõime voolamisele. Voolutakistuse geomeetiline vähendamine, mis vastab veevoolu ja avasängi piirde minimaalsele kokkupuutejoonele elavlõike suhtes, vastab maksimaalsele hüdraulilisele raadiusele, mis määratakse voolamise elavlõike pindala ja märgpiirde pikkuse suhtena. Siinkohal tuleb märkida, et voolamisele avasängis ei arvestata vabapinna takistusi, mis tekivad õhu ja vee dünaamilisest koostoimest (peamiselt hõõrdest). Voolusängi hüdraulilise raadiuse määramisel eeldatakse, et vee vabapind on ainult õhurõhu all (mille määrab atmosfääri rõhk veepinnal) ning puudub õhu liikumise (nõ tuules põhjustatud vee kaasahaaramise) hõõrde toime. Sisevoolamise hüdraulikas arvestatakse erineva tihedusega vedelike/gaaside sisepindade puhul lisaks rõhule (survepinge) ka hõõrde toimet (hõõrdepinge). Tehisliku voolusängi saab rajada näiteks looduslähedasena, kindlustades vajadusel nõlvad, või betoon-konstruksioonist piiretega. Voolukanaleid on võimalik kasutada vee kiireks ärajuhtimiseks, aga ka äravoolu aeglustamiseks, kujundades neisse või kombineerides nendega kaskaade, paise ja muud.

## 7.1.3 SISSEJUHATUS ÜLESANDESSE. PÕHIVALEMID

Avasängide hüdrauliline arvutus voolamise hüdraulika valemitega on aega-võttev ülesanne. Hüdraulilise voolusüsteemi normaalsügavust on võimalik määrata ülesande põhivalemite (nt Manningi vooluhulga valem või voolusängi Reynoldsi arvu valem) kaudu numbrilise arvutusskeemiga proovimismeetodil. Avasängide puhul kasutatakse peamiselt hüdrauliliselt kareda sisepiirdega voolamise tingimusi, mis võimaldavad arvutuste matemaatilist lihtsustamist. Sealjuures eeldatakse, et voolamise hõõrdetakistusteguri võib määrata Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonna tingimustel. Hüdrauliliselt karedale voolamisele vabapinnaga voolusängis



määratakse hõõrdetakistustegur valemiga, mis ei sõltu otseselt Reynolds'i arvust. Manningi karedusteguri kasutamine voolusüsteemi takistuse määramisel on seotud vee omaduste määramatusega. Vee temperatuur määrab vee tiheduse ja dünaamilise molekulaarse (nõ laminaarse) viskoossusteguri, mille järgi määratakse kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur. Reynolds'i arvu väärtus sõltub kinemaatilise laminaarsest viskoossustegurist.

Hüdraulilise voolusüsteemi kriitilist sügavust on võimalik määrata avasängile valitud ristlõikekuju valemite kaudu, nagu vastav avasängi vabavoolu Froude'i arvu valem. Avasängis toimuvale ühtlasele ja kriitilisele voolamisele vastavad veesügavuse numbrilised arvutusskeemid koonduvad veesügavuse teatud algväärtuste vahemikes ja Newtoni iteratsioonimeetodit kasutades hästi. Numbrilisele arvutusskeemile valitud valemite (matemaatilise astmefunktsioonist) sõltub iteratsiooniarvutuse koonduvus.

Bernoulli funktsioon määratakse vabapinnaga voolamise kolmikliikmega, mis koosneb voolukiiruse, vabapinna maksimaalne kõrgusega voolusängi ristlõike sisepõhja ja sisepõhja kõrguse võrdlusnivoo suhtes määratud liikmetest. Kasutades veepinna kõrguse muutuja järgi Bernoulli funktsiooni ekstreemumi määramise teoreemi ja eeldades, et teised funktsiooni hüdraulilised suurused on muutumatud, on võimalik tuletada valem vastava avasängi ristlõikekujuga vabavoolu Froude'i arvule. Vabavoolule määratud Bernoulli funktsiooni kaudu kasutusele võetud avasängi Froude'i suhtarvu kriteerium võimaldab määrata hüdraulilise vabavoolurežiimi nii nelinurkse kui ka mittenelinurkse ristlõikega avasängile. Froude'i suhtarvu kriteeriumit kasutatakse vabavoolu hüdraulilise voolurežiimi määramisele. Kriitilisele vabavoolule vastab  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule on vastavalt  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

Kui avasängi voolamise normaalsügavus on kriitilisest sügavusest väiksem, siis on tegemist hüdrauliliselt käreale vabavoolurežiimiga ( $Fr > 1$ ) ning avasängis võib vooluühtlus olla häiritud, seda juhul kui vabapinnaga voolamine avasängis on ka turbulents ( $Re_{vs} > 500$ ). Vabapinnaga voolamine, mis vastab hüdrauliliselt käreale vabavoolurežiimile, ei ole madalvee pinnalainete suhtes stabiilne, mis tähendab, et avasängis võib vabavoolamine olla ajast sõltuva dünaamikaga ehk mittestatsionaarne. Kriitilisest langust suurema sängipõhja languga ( $i_0 > i_k$ ) voolamise puhul võib vabapind murduda, ning seetõttu moodustuda vooluhüpe, lainetus vms avasängis.

Trapetsikujulise ristlõikega voolusängi iseloomustavad aluspõhja laius  $w$ , veepinna kõrgus üle aluspõhja  $h$  ja nõlvustegur  $m_n = \cot(\theta)$ , milles  $\theta$  on avasängi nõlva välisnurk. Hüdrauliliselt soodsaima trapetskujulise ristlõikega veetäitumusele vastab hüdrauliline raadius  $R_h$ , mis on määratud poole veesamba sügavusega  $d$  ehk  $R_h = d/2$ . Samade nõlvustega trapetsristlõikega avasängis toimuvale voolamisele kohaldatava proovimismeetodi ja numbrilise arvutusskeemi valemiteid võib mate-

maatiliselt lihtsustada nelinurkse või kolmnurkse ristlõikega vabavoolu normaal-sügavuse määramise valemiteks tingimusel, et vastavalt nõlvustegur  $m_n = 0$  või tehissängi aluspõhja laius  $w = 0$ . Ruutparaboolse ristlõikega voolusängi iseloomustatakse sängi ristlõike sisepiirde geomeetriaga määratud ruutastmelise kõverjoone teguriga  $\alpha = 4h_{rlm}/W^2$ , kus  $W$  on vabapinna laius avasängis ja  $h_{rlm}$  vabapinna maksimaalne kõrgus avasängi ristlõike perimeetri sügavamast punktis. Vabavool loodussängi ristlõikes on sarnane ristlõikega, kus elavlõikele on olemas üks veesügavuse maksimum ja veepinnaga määratud laiuse maksimum, nagu seda on ruutparaboolkujuline kõverjoon. Liitprofiiliga ristlõikele võib hüdraulilises arvutuses kasutada Manningi ekvivalentkaredust. Samuti võib avasängi hüdraulilistes arvutustes ühtlase vabavoolu puhul eeldada, et hüdrauliline lang on määratud voolusängi põhjalanguga. Seetõttu võib ka avasängi sisepiirdel esineva vabavoolu hõrdepinge määrata valemiga, milles hüdrauliline lang on asendatud põhja languga. Pavlovski valem võimaldab määrab Chézy mooduli kaudu Manningi karedusteguri ja hüdraulilise raadiuse.

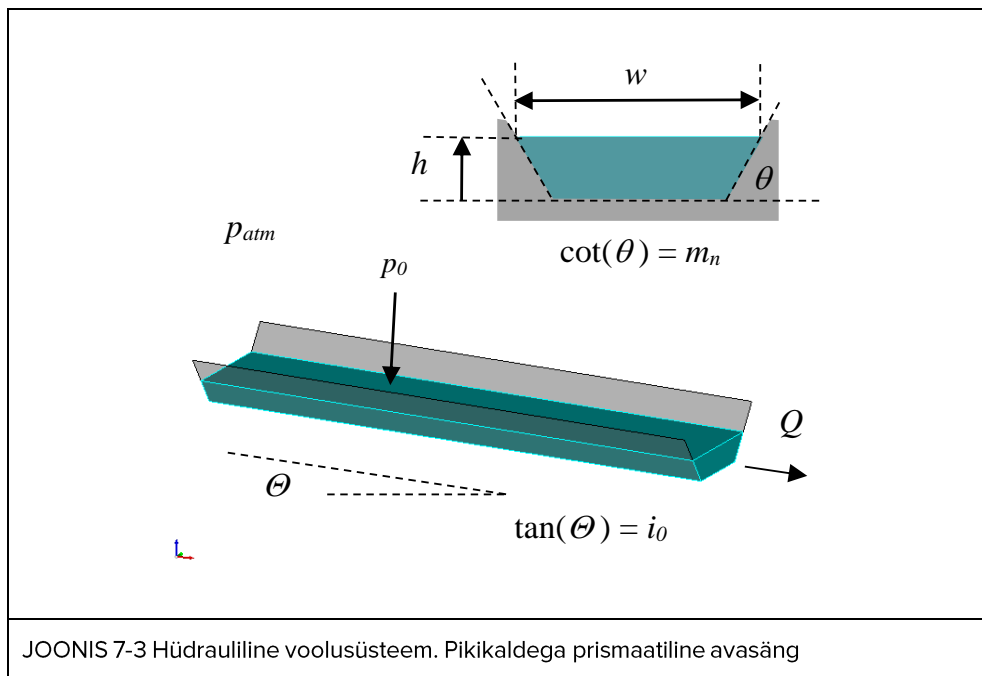


JOONIS 7-2 Voolamine looduslikus avasängis. Pärnu jõgi, Tori sild. (Foto: Janek Laanearu, 2021)

## 7.2 PÕHIÜLESANNE. TEHISSÄNGI VEESÜGAVUS

ANTUD. Kruusapinnasesse rajatud tehissängile on etteantud vooluhulk  $Q = 5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Tehisliku voolusängi piirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,02$ . Trapetsristlõikega voolusängi aluspõhja laius  $w = 1 \text{ m}$  ja nõlvustegur  $m_n = 1$  (nõlvus 1:1). Vee juhtimisel kasutatakse põhjalangu  $i_0 = 0,0025$  ( $= 0,0025 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1} = 2,5 \text{ mm} \cdot \text{m}^{-1}$ ). Murepinnasesse rajatud prismaatilises avasängis voolab  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekularne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekularne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata proovimismeetodi ja numbrilise arvutusskeemiga ühtlasele vabapinnaga voolamisele normaalsügavus. Arvutada normaalsügavus trapetsristlõikega voolusängile etteantud vooluhulgale. Arvutada voolusängi Reynoldsi arv ja Froude'i suhtarvu kriteeriumiga hüdrauliline vabavoolurežiim. Määrata ühtlasele vabapinnaga voolamisele proovimismeetodi ja numbrilise arvutusskeemiga kriitiline sügavus. Arvutada trapetsristlõikega voolusängile etteantud vooluhulgale kriitiline sügavus. Võrrelda normaalsügavust ja kriitilist sügavust, mis kehtivad vabavoolule prismaatilises avasängis.



EELDUSED. Vee voolamine mittehorisontaalses tehislikus voolusängis on statsionaarne, ühtlane. Prismaatilise avasängi, st sirge ja muutumatu ristlõikega avasängi piirde takistuse määrab hüdrauliliselt kare voolamine. Voolutakistuse määramisele kasutada Manningi karedusskaala valem, milles Chézy teguri võib asendatud sängipiirde Manningi karedusteguriga. Normaalsügavus määrata Manningi vooluhulga valemiga ja kriitilise sügavuse määramisele võib kasutada Froude'i suhtarvu kriteeriumit. Normaalsügavuse ja kriitilise sügavuse numbrilises arvutuskeemi koostamisele kasutada Newtoni iteratsioonmeetodit.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Chézy vooluhulga valem, SI-mõõtühikute süsteemi Manningi karedusskaala valem, Manningi vooluhulga valem, voolusängi Reynoldsi arvu valem, trapetsristlõikega avasängi vabavoolu Froude'i arvu valem, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem**

### VALEMID

Vooluhulga avasängis võib määrata Chézy vooluhulga valemiga:

$$Q = C_{Ch} A_e \sqrt{R_h I_h},$$

milles  $C_{Ch}$  on Chézy tegur ja  $A_e = h^2 (\beta + m_n)$  on trapetsristlõikega avasängi voolamise elavlõige. Elavlõike lamedus  $\beta = w/h$ , milles  $w$  on voolusängi aluspõhja laius ja  $h$  on vabapinna kõrgus tehisliku voolusängi aluspõhjast. (Ühtlasele voolamisele  $h = d_0$ , milles  $d_0$  on normaalsügavus.) Nõlvustegur  $m_n = \cot(\theta)$ , milles  $\theta$  on tehissängi nõlva välisnurk. Hüdrauliline raadius  $R_h = A_e/\chi$ , milles  $\chi = h (\beta + 2 \sqrt{1 + m_n^2})$  on trapetsristlõikega avasängi voolamisele märgpiire. Hüdrauliline lang on  $I_h$ .

Võtame kasutusele SI-mõõtühikute süsteemi Manningi karedusskaala valem. Määrame Chézy teguri valemiga:

$$C_{Ch} = \frac{1}{n_M} R_h^{\frac{1}{6}},$$

milles  $n_M$  on Manningi karedustegur. Vooluhulk määratakse empiirilise valemiga, mis on Manningi vooluhulga valem:

$$Q = \frac{1}{n_M} R_h^{\frac{1}{6}} A_e R_h^{\frac{1}{2}} I_h^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n_M} R_h^{\left(\frac{1}{6} + \frac{3}{6}\right)} A_e I_h^{\frac{1}{2}} = \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e I_h^{\frac{1}{2}}}{n_M}.$$

**MÄRKUS.** Manningi vooluhulga erinevates valemites on vajalik kasutada hüdraulilisi suuruseid vastavalt mõõtühikute süsteemile. Eelistatakse SI-mõõtühikute süsteemi valemiteid.

Ühtlasele vabapinnaga voolamisele avasängis on hüdrauliline lang määratud põhjatanguga, st  $I_h = i_0$ .

Reynoldsi arv vabapinnaga voolamisele on määratud voolusängi Reynoldsi arvu valemiga

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus ja  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur.

**MÄRKUS.** Kui veevoolule täieliku täitumusega ümartorus vastav kriitiline Reynoldsi arv on 2000, siis hüdraulilise raadiusega määratud kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on neljakordselt erinev,  $Re_{vs} = Re/4$ . Laminaarse ja turbulentsse vabavoolamise ülemineku kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on 500.

Bernoulli kolmikliikmega määratakse Bernoulli funktsioon vabapinnaga voolamisele:

$$B = \frac{u^2}{2g} + h + h_s,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $g$  on raskuskiirendus,  $h$  on vabapinna kõrgus voolusängi aluspõhjast ja  $h_s$  on aluspõhja kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult.

Kasutades samade nõlvustega trapetsristlõikega voolusängile voolukiiruse määramisel valemit:

$$u = \frac{Q}{A_e} = \frac{Q}{h^2 (\beta + m_n)} = \frac{Q}{(h w + h^2 m_n)},$$

võime Bernoulli funktsiooni vabapinnaga voolamisele teisendada kujule:

$$B = \frac{Q^2}{2g h^4 (\beta + m_n)^2} + h + h_s = \frac{Q^2}{2g (h w + h^2 m_n)^2} + h + h_s.$$

Kui kasutada funktsiooni ekstreemumi määramise teoreemi veepinna kõrguse  $h$  järgi:

$$\frac{dB}{dh} = 0,$$

siis järeldub Bernoulli funktsioonist  $B = f(h, Q, g, w, m_n, h_s)$ , milles  $h$  on muutuja ja  $Q, g, w, m_n$  ja  $h_s$  on konstantsed suurused, järgmine avaldis:

$$-\frac{2Q^2(w + 2hm_n)}{2g(hw + h^2m_n)^3} + 1 = -\frac{Q^2(w + 2hm_n)}{g(hw + h^2m_n)^3} + 1 = 0.$$

Samade nõlvustega trapetsristlõikega avasängi vabavoolu Froude'i arv astmes 2 on määratud valemiga:

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g \frac{(hw + h^2m_n)^3}{(w + 2hm_n)}} = \frac{u^2}{g \frac{(hw + h^2m_n)}{(w + 2hm_n)}},$$

milles on kasutatud voolukiirusele valemit  $u = Q/(h w + h^2 m_n)$ .

Froude'i suhtarvu kriteeriumit kasutatakse vabavoolu hüdraulilise voolurežiimi määramisele. Kriitilisele vabavoolule vastab  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule on vastavalt  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

Trapetsristlõikega avasängi vabavoolu Froude'i arv astmes 2 valem teiseneb nii nelinurk- kui ka kolmnurkristlõikega avasängi vabavoolu Froude'i arv ruudus valemiks vastavalt nõlvusteguri ja avasängi aluspõhja tingimusele  $m_n = 0$  või  $w = 0$ .

$$m_n = 0$$

→

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g h^3 w^2} = \frac{u^2}{g h}$$

$$w = 0$$

→

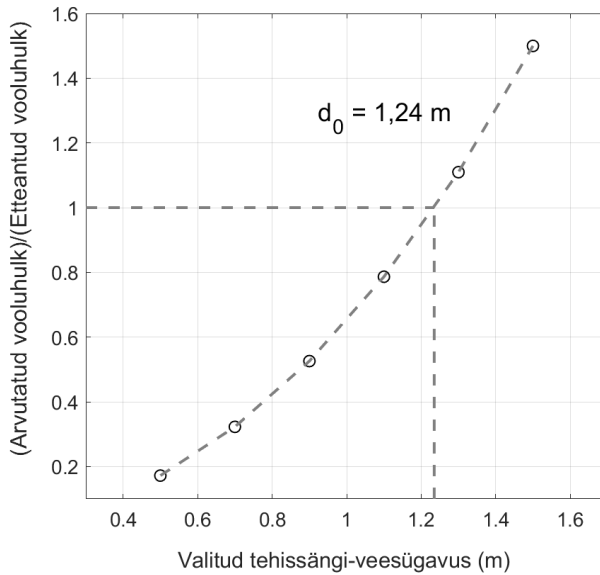
$$Fr^2 = 2 \frac{Q^2}{g h^5 m_n^2} = 2 \frac{u^2}{g h}$$

*Proovimise arvutusmeetod*

ARVUTUS. Normaalsügavus

Valitud ning Chézy, Manningi, voolusängi Reynoldsi arvu ja trapetsristlõikega avasängi voolamise Froude'i arvu valemitega arvatatud hüdraulilised suurused.

	$h$ (m)	$C_{Ch}$ ( $\sqrt{m} \cdot s^{-1}$ )	$R_h$ (m)	$Q$ ( $m^3 \cdot s^{-1}$ )	$Re_{vs}$	$Fr$
i	0,5	41,1482	0,3107	0,8601	$2,7403 \cdot 10^5$	0,5979
ii	0,7	42,9069	0,3993	1,6133	$4,1646 \cdot 10^5$	0,6147
iii	0,9	44,2780	0,4823	2,6291	$5,7040 \cdot 10^5$	0,6281
iv	1,1	45,4195	0,5619	3,9323	$7,3574 \cdot 10^5$	0,6397
v	1,3	46,4075	0,6393	5,5473	$9,1238 \cdot 10^5$	0,6500
vi	1,5	47,2843	0,7153	7,4982	$11,002 \cdot 10^5$	0,6593



JOONIS 7-4 Trapetsristlõikega avasängi vabavoolu normaalsügavuse määramine, milleks on kasutatud proovimise arvutusmeetodiga saadud punktide interpoleerimiskõverat

**JÄRELDUS.** Vooluhulga  $Q = 5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  puhul vastab vabapinnaga voolamine avasängis turbulentssele voolamisele, st  $Re_{vs} > 500$  ja hüdrauliliselt rahulikule vabavoolurežiimile ( $Fr < 1$ ). (Edaspidi selgub, et voolamise kriitiline sügavus  $d_k \approx 1,0 \text{ m}$ . Seega vastab vabapinnaga voolamisele kriitiline sügavus, mis on väiksem kui normaalsügavus ( $d_k < d_0$ )).

*Numbriline arvutusskeem. Normaalsügavus*

*Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod*

#### VALEMID

Veafunktsioon:

$$ERF(z_j) = Q_j - Q,$$

milles  $z_j$  on tehissängi arvutuslik veesügavus,  $Q_j$  on arvutuslik vooluhulk ja  $Q$  on etteantud vooluhulk.

Veafunktsiooni tuletis:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{dQ_j}{dz_j},$$

milles on eeldatud, et  $Q = \text{konstant}$ .

Arvutuslik vooluhulk on määratud valemiga

$$Q_j = \frac{R_{h_j}^{\frac{2}{3}} A_{e_j} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M},$$

milles  $R_{h_j}$  on arvutuslik hüdrauliline raadius ja  $A_{e_j}$  on arvutuslik elavlöige.

→

$$\begin{aligned} \frac{dERF(z_j)}{dz_j} &= \frac{d}{dz_j} \left( \frac{R_{h_j}^{\frac{2}{3}} A_{e_j} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} \right) = \frac{i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} \left( \frac{2 A_{e_j} R_{h_j}^{-\frac{1}{3}} dR_{h_j}}{3 dz_j} + R_{h_j}^{\frac{2}{3}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} \right) \\ &= Q_j \left( \frac{2}{3 R_{h_j}} \frac{dR_{h_j}}{dz_j} + \frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} \right) \end{aligned}$$

Veafunktsioonist suunatud tuletise võtmise reegel:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{0 - ERF(z_j)}{z_{j+1} - z_j},$$

võimaldab kasutusele võtta Tayloriga valemiga 1-järgu tuletise täpsusega:

$$z_{j+1} = z_j - \frac{ERF(z_j)}{\frac{dERF(z_j)}{dz_j}}.$$

Numbrilise arvutuskeemi põhivalemi üldkuju on

$$z_{j+1} = z_j - \frac{Q_j - Q}{Q_j \left( \frac{2}{3 R_{h_j}} \frac{dR_{h_j}}{dz_j} + \frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} \right)} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left( \frac{2}{3 R_{h_j}} \frac{dR_{h_j}}{dz_j} + \frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} \right)}.$$

Määrame hüdraulilise voolusüsteemi valemiga numbrilise arvutuskeemi põhivalemi liikmele:

$$\frac{2}{3 R_{h_j}} \frac{dR_{h_j}}{dz_j}.$$

Trapetsristlõikega voolusängi arvutuslik hüdrauliline raadius on

$$R_{h_j} = \frac{A_{e_j}}{\chi_j} = \frac{z_j w + z_j^2 m_n}{w + 2 z_j \sqrt{1 + m_n^2}}.$$

Määrame numbrilise arvutuskeemi põhivalemi esimese liikme valemiga.

$$\frac{dR_{h_j}}{dz_j} = \frac{d}{dz_j} \left( \frac{z_j w + z_j^2 m_n}{w + 2 z_j \sqrt{1 + m_n^2}} \right) = \frac{w + 2 z_j m_n}{w + 2 z_j \sqrt{1 + m_n^2}} - \frac{z_j w + z_j^2 m_n}{(w + 2 z_j \sqrt{1 + m_n^2})^2} 2 \sqrt{1 + m_n^2}$$

→



$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \frac{dR_{h_j}}{R_{h_j}} \frac{dz_j}{dz_j} &= \frac{2}{3} \frac{\chi_j}{A_{e_j}} \left( \frac{w + 2 z_j m_n}{\chi_j} - \frac{A_{e_j}}{\chi_j^2} 2 \sqrt{1 + m_n^2} \right) \\ &= \frac{2}{3} \frac{(w + 2 z_j m_n)}{(z_j w + z_j^2 m_n)} - \frac{2}{3} \frac{2 \sqrt{1 + m_n^2}}{(w + 2 z_j \sqrt{1 + m_n^2})} \\ &= \frac{2}{3} \frac{(w + 2 z_j m_n)}{(z_j w + z_j^2 m_n)} - \frac{4}{3} \frac{\sqrt{1 + m_n^2}}{(w + 2 z_j \sqrt{1 + m_n^2})} \end{aligned}$$

Määrame hüdraulilise voolusüsteemi valemi numbrilise arvutuskeemi põhivalemi liikmele:

$$\frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j}.$$

Trapetsristlõikega voolusängi arvutuslik elavlõige on

$$A_{e_j} = z_j w + z_j^2 m_n.$$

→

$$\frac{dA_{e_j}}{dz_j} = w + 2 z_j m_n$$

Määrame numbrilise arvutuskeemi põhivalemi *teise* liikme valem.

$$\frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} = \frac{w + 2 z_j m_n}{z_j w + z_j^2 m_n}$$

ARVUTUSSKEEM (Manningi valem, samade nõlvustega trapetsristlõikega avasäng)

Numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku veesügavuse valem (iteratsioonmeetodi põhivalem)

$$z_{j+1} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left( \frac{5}{3} \frac{(w + 2 z_j m_n)}{(z_j w + z_j^2 m_n)} - \frac{4}{3} \frac{\sqrt{1 + m_n^2}}{(w + 2 z_j \sqrt{1 + m_n^2})} \right)}$$

Arvutusliku vooluhulga valem

$$Q_j = \frac{R_{h_j}^{\frac{2}{3}} A_{e_j} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} A_{e_j}^{\frac{5}{3}}}{n_M \chi_j^{\frac{2}{3}}} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} \frac{(z_j w + z_j^2 m_n)^{\frac{5}{3}}}{(w + 2 z_j \sqrt{1 + m_n^2})^{\frac{2}{3}}}$$

## ARVUTUS. Normaalsügavus

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (m)	2	1,4186	1,2509	1,2367	1,2366	1,2366
$Q_j$ ( $m^3 \cdot s^{-1}$ )	13,9963	6,6626	5,1207	5,0008	5,0000	5,0000

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (m)	1,2366	1,2366	1,2366	1,2366
$Q_j$ ( $m^3 \cdot s^{-1}$ )	5,0000	5,0000	5,0000	5,0000

### VASTUSED

$$d_0 = 1,2366 \text{ m}$$

$$Re_{vs} = 8,5516 \cdot 10^5$$

$$Fr = 0,6468$$

$$\lambda = 0,0369$$

JÄRELDUS. Arvutustulemustest selgub, et vabapinnaga voolamine on turbulentne ( $Re_{vs} > 500$ ) ja hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ). Ühtlase vabavoolu hõõrdetakistustegur vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnale.

*Kriitilisele sügavuse määramine vabavoolule trapetsristlõikega avasängis*

**PÕHIVALEMID. Trapetsristlõikega avasängi vabavoolu Froude'i arvu valem, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem**

Samade nõlvustega trapetsristlõikega avasängi vabavoolu Froude'i arv on

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{g \frac{(h w + h^2 m_n)}{(w + 2 h m_n)}}},$$

milles vabapinna kõrgus tehissängi aluspõhjast on  $h$  ja voolukiirus

$$u = Q / (h w + h^2 m_n).$$

Samade nõlvustega trapetsristlõikega avasängi vabavoolu Froude'i arv astmes 2 on määratud valemiga

$$Fr^2 = \frac{u^2}{g \frac{(h w + h^2 m_n)}{(w + 2 h m_n)}}.$$

**MÄRKUS.** Froude'i suhtarvu kriteeriumit kasutatakse vabavoolu hüdraulilise voolurežiimi määramisele. Kriitilisele vabavoolule vastab  $Fr^2 = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule vastavad  $Fr^2 < 1$  ja  $Fr^2 > 1$ .

Froude'i suhtarvu kriteerium kriitilisele voolamisele on

$$Fr^2 = 1$$

→

$$1 = \frac{u^2}{g \frac{(h w + h^2 m_n)}{(w + 2 h m_n)}} = \frac{Q^2}{g \frac{(h w + h^2 m_n)^3}{(w + 2 h m_n)}}.$$

Nelinurkristlõikega voolusäng

$$m_n = 0$$

→

$$1 = \frac{u^2}{g h} = \frac{Q^2}{g h^3 w^2}$$

Kolmnurkristlõikega voolusäng

$$w = 0$$

→

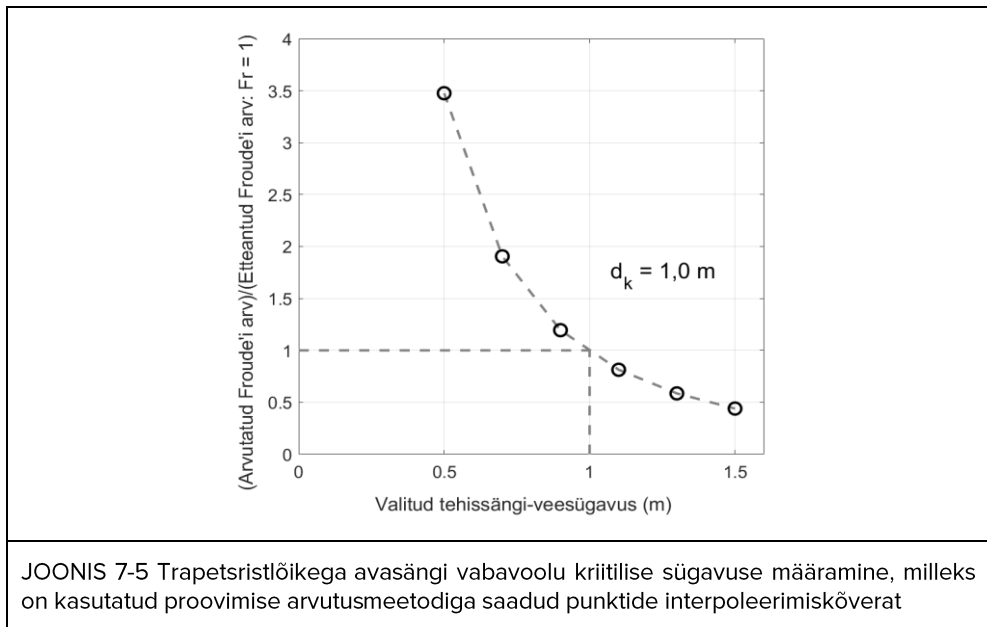
$$1 = \frac{2 u^2}{g h} = \frac{2 Q^2}{g h^5 m_n^2}$$

Proovimise arvutusmeetod

ARVUTUS. Kriitiline sügavus

Valitud ning voolusängi Reynoldsi arvu ja trapetsristlõikega avasängi voolamise Froude'i arvu valemitega arvatatud hüdraulilised suurused.

	$h$ (m)	$Q$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	$Re_{vs}$	$Fr^2$	$Fr$
i	0,5	5,0	$15,931 \cdot 10^5$	12,0814	3,4758
ii	0,7	5,0	$12,907 \cdot 10^5$	3,6295	1,9051
iii	0,9	5,0	$10,848 \cdot 10^5$	1,4271	1,1946
iv	1,1	5,0	$9,3551 \cdot 10^5$	0,6616	0,8134
v	1,3	5,0	$8,2236 \cdot 10^5$	0,3432	0,5858
vi	1,5	5,0	$7,3363 \cdot 10^5$	0,1933	0,4397



JÄRELDUS. Vooluhulga  $Q = 5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  puhul on trapetsristlõikega avasängi vabavoolu kriitiline sügavus  $d_k = 1,0 \text{ m}$  väiksem kui normaalsügavus  $d_0 = 1,24 \text{ m}$ , st  $d_k < d_0$ .

Numbriline arvutusskeem. Kriitiline sügavus

Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod

VALEMID

Veafunktsioon:

$$ERF(z_j) = Fr^2_j - Fr^2,$$

milles  $z_j$  on arvutuslik tehissängi vabavoolu kriitiline sügavus,  $Fr^2_j$  on arvutuslik Froude'i arv astmes 2 ja  $Fr^2$  on etteantud Froude'i arv astmes 2.

Veafunktsiooni tuletis:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{dFr^2_j}{dz_j},$$

milles on eeldatud, et  $Fr^2 = \text{konstant} (= 1)$ .

Arvutusliku Froude'i arvu astmes 2 on määratud valemiga:

$$Fr^2_j = \frac{Q^2}{g \frac{(z_j w + z_j^2 m_n)^3}{(w + 2 z_j m_n)}} = \frac{Q^2 (w + 2 z_j m_n)}{g (z_j w + z_j^2 m_n)^3},$$

milles  $g$ ,  $Q$ ,  $w$  ja  $m_n$  on konstantsed suurused.

→

$$\begin{aligned} \frac{dERF(z_j)}{dz_j} &= \frac{d}{dz_j} \left( \frac{Q^2 (w + 2 z_j m_n)}{g (z_j w + z_j^2 m_n)^3} \right) = \frac{Q^2}{g} \left( \frac{2 m_n}{(z_j w + z_j^2 m_n)^3} - \frac{3 (w + 2 z_j m_n)^2}{(z_j w + z_j^2 m_n)^4} \right) \\ &= \frac{Q^2 (w + 2 z_j m_n)}{g (z_j w + z_j^2 m_n)^3} \left( \frac{2 m_n}{w + 2 z_j m_n} - \frac{3 (w + 2 z_j m_n)}{(z_j w + z_j^2 m_n)} \right) \\ &= Fr^2_j \left( \frac{2 m_n}{w + 2 z_j m_n} - \frac{3 (w + 2 z_j m_n)}{(z_j w + z_j^2 m_n)} \right) \end{aligned}$$

Veafunktsioonist suunatud tuletise võtmise reegel:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{0 - ERF(z_j)}{z_{j+1} - z_j},$$

võimaldab kasutusele võtta Taylori valemi 1-järgu tuletise täpsusega:

$$z_{j+1} = z_j - \frac{ERF(z_j)}{\frac{dERF(z_j)}{dz_j}}.$$

Numbrilise arvutusskeemi põhivalemi üldkuju on

$$z_{j+1} = z_j - \frac{Fr^2_j - Fr^2}{Fr^2_j \left( \frac{2 m_n}{w + 2 z_j m_n} - \frac{3 (w + 2 z_j m_n)}{(z_j w + z_j^2 m_n)} \right)} = z_j - \frac{1 - Fr^2 / Fr^2_j}{\left( \frac{2 m_n}{w + 2 z_j m_n} - \frac{3 (w + 2 z_j m_n)}{(z_j w + z_j^2 m_n)} \right)}.$$

ARVUTUSSKEEM (Froude'i arv, samade nõlvustega trapetsristlõikega avasäng)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku trapetsristlõikega avasängi vabavoolu kriitilise sügavuse valem (iteratsioonmeetodi põhivalem)

$$z_{j+1} = z_j - \frac{1 - Fr^2 / Fr_j^2}{\left( \frac{2 m_n}{w + 2 z_j m_n} - \frac{3 (w + 2 z_j m_n)}{(z_j w + z_j^2 m_n)} \right)}$$

Arvutusliku Froude'i arvu astmes 2 valem

$$Fr_j^2 = \frac{Q^2 (w + 2 z_j m_n)}{g (z_j w + z_j^2 m_n)^3}$$

ARVUTUS. Kriitiline sügavus ( $Fr^2 = 1$ )

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (m)	0,5000	0,6310	0,7731	0,8990	0,9709	0,9875
$Fr_j^2$ (1)	12,0814	5,2873	2,5197	1,4328	1,0698	1,0027

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (m)	0,9882	0,9882	0,9882	0,9882
$Fr_j^2$ (1)	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

VASTUSED

$$d_k = 0,9882 \text{ m}$$

$$Fr = 1$$

JÄRELDUS. Numbrilisest arvutustulemusest selgub, et samade nõlvustega trapetsristlõikega avasängi vabavoolu kriitiline sügavus on väiksem kui normaalsügavus ( $d_k < d_0$ ). Järelikult on ühtlane vabapinnaga voolamine samade nõlvustega trapetsristlõikega avasängis hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga.

## MÄRKUSED. Tehislik voolusäng

- Määramaks voolamise takistust hüdrauliliselt kareda piirdega survetorus, mis vastab Moody diagrammil ruuttakistuspiirkonna hõõrdetakistusteguri lähenditele, võib kasutada Manningi karedustegurit  $n_M$ . Hõõrdetakistusteguri võib esitada SI-mõõtühikute süsteemi Manningi karedusskaala kaudu, mis määrab hõõrdetakistusteguri valemiga:

$$\lambda = \frac{8 g n_M^2}{R_h^{2/6}},$$

milles  $g$  on raskuskiirendus,  $R_h$  on hüdrauliline raadius. Manningi karedusteguri kasutamine voolusüsteemi takistuse määramisele on seotud vee omaduste määramatusega. Vee temperatuur määrab vee tiheduse ja dünaamilise molekulaarse viskoossusteguri, mille järgi määratakse kinemaatilise molekulaarne viskoossustegur. Reynoldsi arvu väärtus sõltub oluliselt kinemaatilisest molekulaarsest viskoossustegurist.

- Hüdrauliliselt kareda piirdega avasängile võib hõõrdetakistusteguri määrata Swamee-Jaini hõõrdetakistuse kloonvalemiga:

$$\lambda = \frac{0,25}{\left( \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,8} + \frac{1,65}{Re_{vs}^{9/10}} \right) \right)^2},$$

milles  $k_s$  on absoluutkaredus, ning avasängi vabavoolu elavlõikega  $A_e = h^2 (\beta + m_n)$  ja märgpiirdega  $\chi = h (\beta + 2 \sqrt{1 + m_n^2})$  määratud hüdrauliline raadius on

$$R_h = \frac{A_e}{\chi},$$

ja voolusängi Reynoldsi arv on

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu} = \frac{Q R_h}{A_e \nu} = \frac{Q}{\chi \nu}.$$

- Samade nõlvustega trapetsristlõikega avasängi proovimismeetodi ja numbrilise arvutusskeemi valemide võib matemaatiliselt lihtsustada nelinurkse ristlõikega avasängi vabavoolu normaalsügavuse määramisele tingimusel, et nõlvustegur  $m_n = 0$ .
- Samade nõlvustega trapetsristlõikega avasängi vabavoolu proovimismeetodi ja numbrilise arvutusskeemi valemide võib matemaatiliselt lihtsustada kolmnurkse ristlõikega avasängi vabavoolu normaalsügavuse määramisele tingimusel, et aluspõhja laius  $w = 0$ .
- Liitprofiiliga avasängi ristlõikele võib kasutada proovimismeetodis ja numbrilises arvutusskeemis Manningi ekvivalentkaredustegurit

$$n_{Me} = \sqrt{\frac{\sum \chi_i n_{Mi}^2}{\sum \chi_i}} = \sqrt{\frac{\sum \chi_i n_{Mi}^2}{\chi}},$$

milles  $n_{Mi}$  on vabavoolu elavlõike märgpiirde osale  $\chi_i$  vastav Manningi karedustegur ja  $\chi$  on elavlõike pikkusega määratud märgpiire, millest on välja jäetud vabapind.

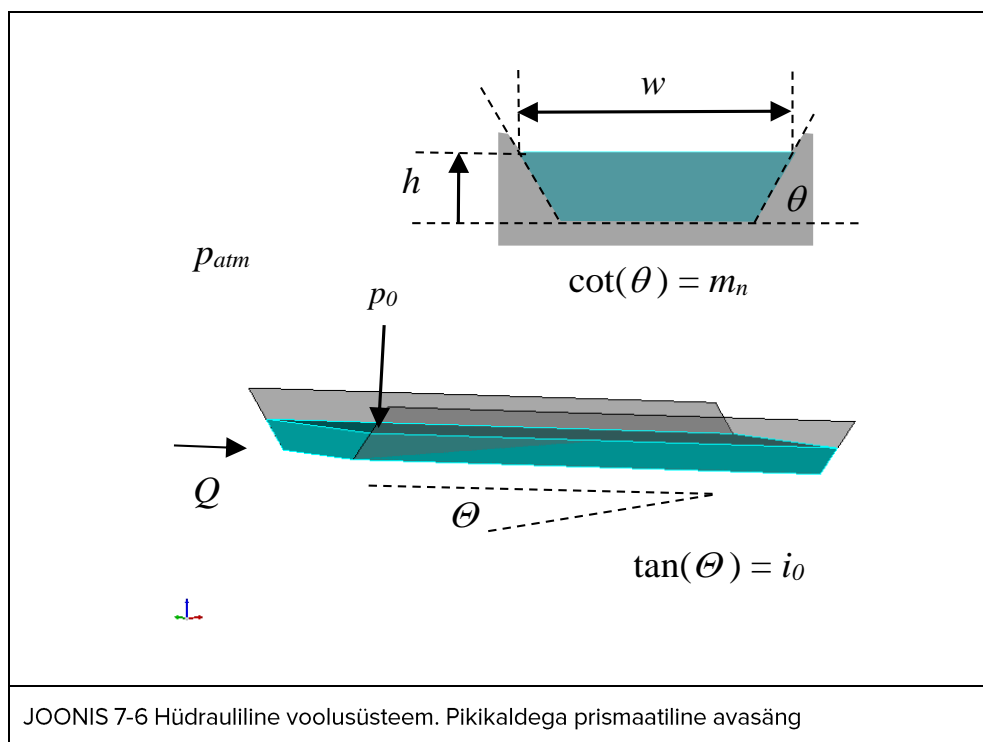
- Ühtlasele vabavoolule prismaatilises avasängis on hüdrauliline lang määratud voolusängi põhjalanguga  $I_h = i_0$ ;
- Ühtlase vabavoolule prismaatilises avasängis on hõõrdepinge piiridel määratud valemiga:  $\tau_0 = \rho g R_h I_h = \rho g R_h i_0$ , milles  $\rho$  on vedeliku tihedus ja  $g$  on raskuskiirendus.
- Pavlovski valem Chézy mooduli määramisele on  $C_{Ch} = R_h^a / n_M$ ,  $a = 2,5 \sqrt{n_M} - 0,13 - 0,75 \sqrt{R_h} (\sqrt{n_M} - 0,1)$ .  
Nõ Pavlovski karedusteguri kasutamine voolusüsteemi takistuse määramisele on seotud vee omaduste määramisega. Vee temperatuur määrab vee tiheduse ja dünaamilise molekulaarse viskoossusteguri, mille järgi määratakse kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur. Reynoldsi arvu väärtus sõltub oluliselt kinemaatilises molekulaarsest viskoossustegurist. Kui hüdraulilise voolusüsteemi takistus vastab Moody diagrammi eelruuttakistuse piirkonnale, siis võib vabapinnaga voolamisele kasutada takistusteguri võrrandit, mis sõltub Reynoldsi arvust, nagu näiteks Colebrook-White'i kloonvõrrand 
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right) = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{Re_{vs} \sqrt{\lambda}} \right)$$
.
- Trapetsristlõikega avasängi vabavoolu normaalsügavuse numbrilise arvutuskeemi valemite süsteemi, mis koosneb kahest valemist; arvutusliku veesügavuse valem (iteratsioonmeetodi põhivalem) ja arvutusliku vooluhulga valem, võib kasutada vastavalt ka nelinurkristlõikega ja kolmnurkristlõikega avasängi vabavoolu normaalsügavuse määramisele, kui numbrilises arvutuskeemis valida vastavalt nõlvusteguri ja avasängi aluspõhja tingimusele  $m_n = 0$  või  $w = 0$ .
- Trapetsristlõikega avasängi vabavoolu kriitilise sügavuse numbrilise arvutuskeemi valemite süsteemi, mis koosneb kahest valemist; arvutusliku avasängi vabavoolu kriitilise sügavuse (veesügavuse) valem (iteratsioonmeetodi põhivalem) ja arvutusliku Froude'i arv astmes 2 valem, võib kasutada vastavalt ka nelinurkristlõikega ja kolmnurkristlõikega avasängi vabavoolu rahuliku ( $Fr^2 = \text{konstant} (< 1)$ ), kriitilise ( $Fr^2 = \text{konstant} (= 1)$ ) ja käre ( $Fr^2 = \text{konstant} (> 1)$ ) vabavoolu sügavuse määramiseks, kui vastavalt valida nõlvusteguri ja avasängi aluspõhja tingimusele  $m_n = 0$  või  $w = 0$ .
- Loodussängi ristlõige ei ole reeglina trapetsi-, nelinurga- või kolmnurga kujuline, vaid sarnaneb parabooli kujule. Seetõttu kasutatakse hüdraulilises arvutuses avasängi ruutparaboolikujulist ristlõiget. Ruutparaboolse ristlõikega voolusängi iseloomustatakse sängi ristlõike sisepiirde geomeetriaga määratud ruutastmelise kõverjoone teguriga  $\alpha = 4h_{rlm}/W^2$ , kus  $W$  on vabapinna laius avasängis ja  $h_{rlm}$  vabapinna maksimaalne kõrgus avasängi ristlõike perimeetri sügavamast punktist. Looduslikus avasängis toimuva voolamise elavlõige võib hüdrauliliselt sarnaneda nelinurksele ristlõikekujule laias avasängis, kus vee-pinna laius on vee sügavusest oluliselt suurem.



## 7.3 ISESEISEVA TÖÖ ÜLESANNE. TEHISSÄNGI VEESÜGAVUS

ANTUD. Kruusapinnasesse rajatud tehissängile on valitud vooluhulk  $Q = 5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Tehisliku voolusängi piirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,02$ . Trapetsristlõikega avasängi aluspõhja laius  $w = 1 \text{ m}$  ja nõlvustegur  $m_n = 1$  (nõlvus 1:1). Vee juhtimisele kasutatakse langu  $i_0 = 2,5 \text{ cm} \cdot \text{m}^{-1}$ . Murepinnasesse rajatud prismaatilises avasängis voolab  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Arvutada normaalsügavus trapetsristlõikega voolusängile etteantud vooluhulgale. Arvutada voolusängi Reynoldsi arv ja hüdrauliline vabavoolurežiim Froude'i suhtarv kriteeriumiga. Arvutada kriitiline sügavus trapetsristlõikega voolusängile etteantud vooluhulgale. Võrrelda normaalsügavust ja kriitilist sügavust vabavoolule prismaatilises avasängis.



EELDUSED. Vee voolamine mittehorisontaalses tehissängis on statsionaarne, ühtlane. Prismaatilise avasängi, st sirge ja muutumatu ristlõikega avasängi piirde takistuse määrab hüdrauliliselt kare voolamine. Voolutakistuse määramisele kasutada Manningi karedusskaala valemit, milles Chézy teguri võib asendatud sängipiirde Manningi karedusteguriga. Normaalsügavus määrata Manningi vooluhulga valemiga ja kriitilise sügavuse määramisele võib kasutada Froude'i suhtarvu kriteeriumit. Normaalsügavuse ja kriitilise sügavuse numbrilises arvutuskeemi koostamisele kasutada Newtoni iteratsioonmeetodit.

#### VASTUSED

$$d_0 = 0,6927 \text{ m}$$

$$Re_{vs} = 12,998 \cdot 10^5$$

$$Fr = 1,9422$$

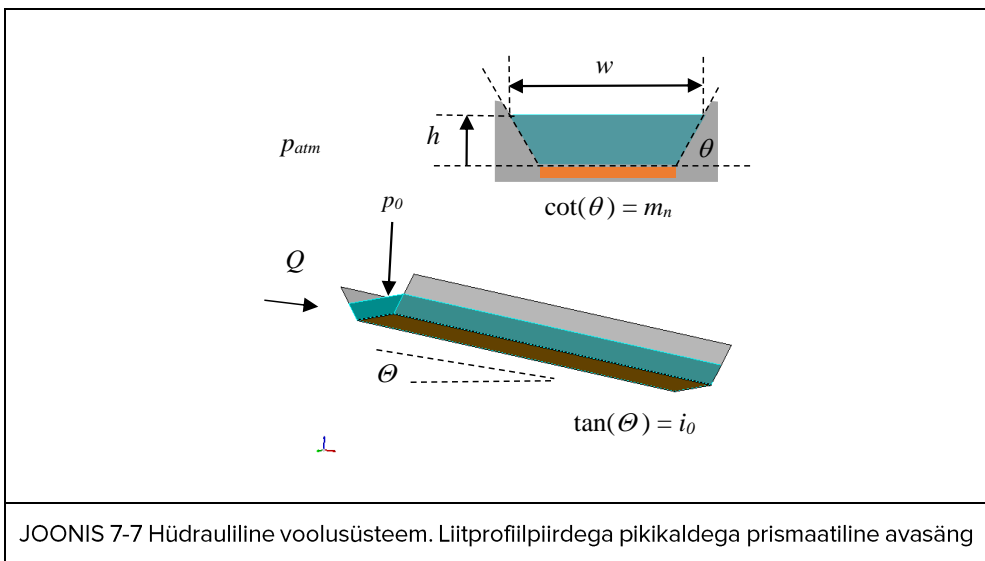
$$d_k = 0,9882 \text{ m}$$

JÄRELDUS. Arvutustulemustest selgub, et vabapinnaga voolamine prismaatilises avasängis on turbulentne ( $Re_{vs} > 500$ ) ja hüdrauliliselt käre vabavoolurežiimiga ( $Fr > 1$ ). Samade nõlvustega trapetsristlõikega avasängis on vabapinnaga voolamise kriitiline sügavus suurem kui normaalsügavus ( $d_k > d_0$ ). Vabapinnaga voolamine, mis vastab hüdrauliliselt käre vabavoolurežiimile ei ole madalvee pinnalainete suhtes stabiilne, st avasängis võib vabavoolamine olla muutuva dünaamikaga, st mittestatsionaarne. Kriitilisest langust suurema sängipõhja languga ( $i_0 > i_k$ ) voolamisele võib vabapind murduda, ning seetõttu moodustuda vooluhüpe, lainetus vms avasängis.

## 7.4 LISAÜLESANNE 1. TEHISSÄNGI VEESÜGAVUS

ANTUD. Samade nõlvustega trapetsristlõikega avasängi vabavoolule on valitud normaalsügavus  $d_0 = 1,2366$  m. Tehissängi nõlvad on kindlustatud betooniga, mille Manningi karedustegur  $n_{M1} = 0,012$ . Tehissängi aluspõhi (horisontaalne osa tehissängi ristlõikest) on kruus (nö murepinnas), mille Manningi karedustegur  $n_{M2} = 0,02$ . Trapetsristlõikega avasängi aluspõhja laius  $w = 1$  m ja nõlvustegur  $m_n = 1$  (nõlvus 1:1). Vee juhtimisele kasutatakse sängipõhja langu  $i_0 = 2,5$  m.km<sup>-1</sup>. Liitprofiilpiirdega prismaatilises avasängis voolab 10 °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000$  kg.m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg.m<sup>-1</sup>.s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>. Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Arvutada vooluhulk trapetsristlõikega avasängis etteantud normaalsügavusele. Arvutada voolusängi Reynoldsi arv ja hüdrauliline vabavoolurežiim Froude'i suhtarvu kriteeriumiga. Võrrelda vabavoolu normaalsügavust ja kriitilist sügavust.



JOONIS 7-7 Hüdrauliline voolusüsteem. Liitprofiilpiirdega pikikaldega prismaatiline avasäng

EELDUSED. Vee voolamine mittehorisontaalses avasängis on statsionaarne, ühtlane. Prismaatilise tehissängi, st sirge ja muutumatu ristlõikega avasängi piirde takistuse määrab hüdrauliliselt kare voolamine. Voolutakistuse määramisele kasutada liitprofiiliga sängipiirdele koostatud Manningi ekvivalentkareduse valem, milles liitprofiiliga sängipiirde Chézy teguri võib asendatud Manningi ekvivalentkaredusteguriga. Normaalsügavus määrata Manningi vooluhulga valemiga ja kriitilise sügavuse määramisele kasutada vastavat Froude'i arvu valem.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Manningi vooluhulga valem, Manningi hõõrdetakistuse valem, Manningi ekvivalentkaredusteguri valem, voolusängi Reynoldsi arvu valem, trapetsristlõikega avasängi vabavoolu Froude'i arvu valem**

### VALEMID

SI-mõõtühikute süsteemi Manningi vooluhulga valem on

$$Q = \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e I_h^{\frac{1}{2}}}{n_{Me}},$$

milles  $R_h$  on hüdrauliline raadius,  $A_e$  on elavlõige,  $I_h$  on hüdrauliline lang ja  $n_{Me}$  on Manningi ekvivalentkaredustegur.

Manningi hõõrdetakistuse valem

$$\lambda = \frac{8 g n_M^2}{R_h^{2/6}}$$

Voolamise hüdrauliline raadius määratakse valemiga:

$$R_h = \frac{A_e}{\chi},$$

milles trapetsristlõikega määratud elavlõige on

$$A_e = d_0 w + d_0^2 m_n$$

ja märgpiire on

$$\chi = w + 2 d_0 \sqrt{1 + m_n^2},$$

milles  $w$  on trapetsristlõike aluspõhi,  $d_0$  on normaalsügavus ja  $m_n$  on nõlvustegur.

Manningi ekvivalentkaredustegur määratakse valemiga:

$$n_{Me} = \sqrt{\frac{\chi_1 n_{M1}^2 + \chi_2 n_{M2}^2}{\chi_1 + \chi_2}},$$

milles  $n_{M1}$  on liitprofiiliga sängipiirde betoonpinna märgpiirde osale  $\chi_1$  vastav Manningi karedustegur ja  $n_{M2}$  on kruusapinna märgpiirde osale  $\chi_2$  vastav Manningi karedustegur.

Voolukiirus määratakse valemiga:

$$u = \frac{Q}{A_e}.$$

Voolusäingi Reynoldsi arv määratakse valemiga:

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu} = \frac{Q R_h}{A_e \nu} = \frac{Q \chi}{\nu} = \frac{Q (\chi_1 + \chi_2)}{\nu}.$$

Samade nõlvustega trapetsristlõikega avasäingi vabavoolu Froude'i arvu valem on

$$Fr = \sqrt{\frac{u^2}{g \frac{(d_0 w + d_0^2 m_n)}{(w + 2 d_0 m_n)}}}.$$

## ARVUTUS

Hüdrauliline raadius

$$R_h = \frac{1,2366 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} + (1,2366 \text{ m})^2 \cdot 1}{1 \text{ m} + 2 \cdot 1,2366 \text{ m} \cdot \sqrt{1 + 1^2}} = 0,6149 \text{ m}$$

Tehissäingi betoonpinnaga märgpiirde osa pikkus

$$\chi_1 = 2 \cdot 1,2366 \text{ m} \cdot \sqrt{1 + 1^2} = 3,4976 \text{ m}$$

Tehissäingi kruusapinnasega märgpiirde osa pikkus

$$\chi_1 = 1 \text{ m}$$

Manninigi ekvivalentkaredustegur

$$n_{Me} = \sqrt{\frac{3,4976 \text{ m} \cdot 0,012^2 + 1 \text{ m} \cdot 0,02^2}{3,4976 \text{ m} + 1 \text{ m}}} = 0,0142$$

Trapetsristlõikega avasäingi elavlõike pindala

$$A_e = 1,2366 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} + (1,2366 \text{ m})^2 \cdot 1 = 2,7658 \text{ m}^2$$

Märgpiirde pikkus

$$\chi = \frac{A_e}{R_h} = \frac{2,7658 \text{ m}^2}{0,6149 \text{ m}} = 4,4976 \text{ m}$$

$$\chi = 3,4976 \text{ m} + 1 \text{ m} = 4,4976 \text{ m}$$

Vooluhulk

$$Q = \frac{(0,6149 \text{ m})^{\frac{2}{3}} \cdot 2,7658 \text{ m}^2 \cdot 0,0025^{\frac{1}{2}}}{0,0142} = 7,0550 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

Voolusängi Reynoldsi arv

$$Re_{vs} = \frac{7,0550 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot 0,6149 \text{ m}}{2,7658 \text{ m}^2 \cdot 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} = 12,066 \cdot 10^5$$

Voolukiirus

$$u = \frac{7,0550 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{2,7658 \text{ m}^2} = 2,5508 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Froude'i arv

$$Fr = \sqrt{\frac{(2,5508 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \frac{(1,2366 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} + (1,2366 \text{ m})^2 \cdot 1)}{(1 \text{ m} + 2 \cdot 1,2366 \text{ m} \cdot 1)}}}} = 0,9126$$

VASTUSED

$$Q = 7,0550 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$Re_{vs} = 12,066 \cdot 10^5$$

$$Fr = 0,9126$$

$$d_k = 1,1804 \text{ m}$$

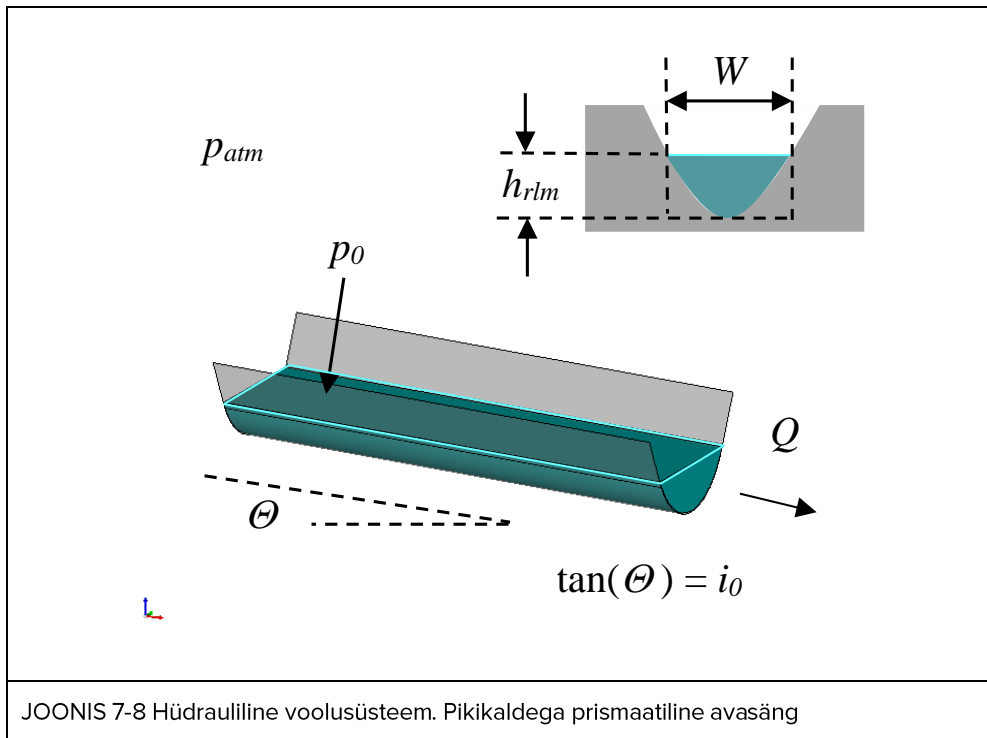
$$\lambda = 0,0186$$

JÄRELDUS. Arvutustulemustest selgub, et vabapinnaga voolamine avasängis on turbulentne ( $Re_{vs} > 500$ ) ja hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ). Samade nõlvustega trapetsristlõikega avasängis on voolamise kriitiline sügavus väiksem kui normaalsügavus, ( $d_k < d_0$ ). Ühtlase vabavoolu hõõrdetakistustegur vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnale.

## 7.5 LISAÜLESANNE 2. LOODUSSÄNGI VEESÜGAVUS

ANTUD. Looduslikus avasängis on reguleeritud vooluhulk  $Q = 5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  ja piirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,035$ . Loodussängi ristlõike sisepiirde geometriaga määratud ruutastmelise kõverjoone tegur  $\alpha = 4 h_{rlm}/W^2 = 0,05$ . Voolusängi põhjalang  $i_0 = 0,0025$  ( $= 2,5 \text{ mm} \cdot \text{m}^{-1}$ ). Avasängis voolab  $10^\circ\text{C}$  vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata proovimismeetodi ja numbrilise arvutuskeemiga ühtlasele vabapinnaga voolamisele avasängis normaalsügavus. Arvutada normaal-sügavus ruutparaboolse ristlõikega loodussängile reguleeritud vooluhulgale. Arvutada voolusängi Reynoldsi arv ja hüdrauliline vabavoolurežiim Froude'i suhtarvu kriteeriumiga. Määrata ühtlasele vabapinnaga voolamisele avasängis kriitiline sügavus. Võrrelda normaalsügavust ja kriitilist sügavust vabapinnaga voolamisele loodussängis.



JOONIS 7-8 Hüdrauliline voolusüsteem. Pikikaldega prismaatiline avasäng

EELDUSED. Vee voolamine mittehoriintaalses avasängis on statsionaarne, ühtlane. Eeldada, et looduslik voolusäng on praktiliselt sirge ja muutumatu ristlõikega ning voolusängi sisepiirde takistuse määrab hüdrauliliselt kare voolamine. Voolutakistuse määramisele kasutada Manningi karedusskaala valemit, milles Chézy teguri võib asendatud sängipiirde Manningi karedusteguriga. Normaalsügavus määrata Manningi vooluhulga valemiga ja kriitilise sügavuse määramisele kasutada vastavat Froude'i arvu valemit. Normaalsügavuse numbrilise arvutusskeemi koostamisele kasutada Newtoni iteratsioonmeetodit.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Chézy vooluhulga valem, SI-möötüühikute süsteemi Manningi karedusskaala valem, Manningi vooluhulga valem, voolusängi Reynolds'i arvu valem, ruutparaboolse ristlõikega avasängi vabavoolu Froude'i arvu valem, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem**

### VALEMID

Chézy vooluhulga valem on

$$Q = C_{Ch} A_e \sqrt{R_h I_h},$$

milles  $C_{Ch}$  on Chézy tegur,  $A_e$  on elavlõige ja  $I_h$  on hüdrauliline lang, mis määratakse ühtlasele vabavoolule avasängi languga, st  $I_h = i_0$ . (Ühtlasele voolamisele  $h = d_0$ , milles  $d_0$  on normaalsügavus.)

Hüdrauliline raadius määratakse valemiga

$$R_h = \frac{A_e}{\chi},$$

milles ruutparaboolse ristlõikega voolamise elavlõike võib määrata valemiga:

$$A_e \approx \frac{2}{3} W h_{rlm}$$

milles  $W$  on vabavoolu pealtlaius (vabapinna laius avasängis) ja  $h_{rlm}$  on vabapinna maksimaalne kõrgus avasängi ristlõike perimeetri sügavamast punktist, ning märgpiire võib määrata valemiga

$$\chi \approx W + \frac{8}{3} \frac{h_{rlm}^2}{W}.$$

**MÄRKUS.** Ruutparaboolse ristlõike märgpiirde lihtsustatud valem kehtib hästi tingimusel:

$$0 < \sqrt{4 \alpha h_{rlm}} < 1.$$



Võtame kasutusele SI-mõõtühikute süsteemi Manningi karedusskaala valemi. Määrame Chézy teguri valemiga:

$$C_{ch} = \frac{1}{n_M} R_h^{\frac{1}{6}},$$

milles  $n_M$  on Manningi karedustegur. Vooluhulk määratakse empiirilise valemiga, mis on Manningi vooluhulga valem:

$$Q = \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e I_h^{\frac{1}{2}}}{n_M}.$$

Reynoldsi arv vabapinnaga voolamisele on määratud voolusängi Reynoldsi arvu valemiga

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus ja  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur.

**MÄRKUS.** Kui veevoolule täieliku täitumusega ümartorus vastav kriitiline Reynoldsi arv on 2000, siis hüdraulilise raadiusega määratud kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on neljakordselt erinev,  $Re_{vs} = Re/4$ . Laminaarse ja turbulentsse vabavoolamise ülemineku kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on 500.

Bernoulli kolmikliikmega määratud Bernoulli funktsioon vabapinnaga voolamisele on

$$B = \frac{u^2}{2g} + h + h_s,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $g$  on raskuskiirendus,  $h(=h_{rlm})$  on vabapinna maksimaalne kõrgus loodussängi põhjast ja  $h_s$  on aluspõhja kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult.

Kasutades ruutparaboolse ristlõikega voolusängile voolukiiruse määramisel valemit:

$$u = \frac{Q}{A_e} = \frac{Q}{(2/3) W h} = \frac{Q}{(2/3) h} \left(\frac{\alpha}{4h}\right)^{1/2} = \frac{Q}{(4/3) h^{3/2} \alpha^{-1/2}} = \frac{3Q \alpha^{1/2}}{4 h^{3/2}},$$

võime Bernoulli funktsiooni vabapinnaga voolamisele teisendada kujule:

$$B = \frac{Q^2}{2g \left((4/3) h^{3/2} \alpha^{-1/2}\right)^2} + h + h_s = \frac{9 Q^2 \alpha}{2g 16 h^3} + h + h_s.$$

Kui kasutada funktsiooni ekstreemumi määramise teoreemi veepinna kõrguse  $h$  järgi:

$$\frac{dB}{dh} = 0,$$

siis järeldub Bernoulli funktsioonist  $B = f(h, Q, g, \alpha, h_s)$ , milles  $h$  on muutuja ja  $Q, g, \alpha, h_s$  on konstantsed suurused, järgmine avaldis:

$$\frac{9 Q^2 \alpha (-3)}{2 g 16 h^4} + 1 = -\frac{9 \alpha 3}{2 g 16 h^4} Q^2 + 1 = -\frac{9 \alpha 3}{2 g 16 h^4} u^2 \frac{16 h^3}{9 \alpha} + 1 = -\frac{3 u^2}{2 g h} + 1 = 0,$$

milles on kasutatud vooluhulga ja voolukiiruse seost ruutparaboolse ristlõikega voolusängile:

$$Q = u \frac{4 h^{3/2}}{3 \alpha^{1/2}}.$$

Ruutparaboolse ristlõikega voolusängi vabavoolu Froude'i arv astmes 2 on määratud valemiga

$$Fr^2 = \frac{u^2}{\frac{2}{3} g h} = \frac{9 \alpha 3 Q^2}{2 g 16 h^4} = \frac{27 \alpha Q^2}{32 g h^4},$$

milles on kasutatud voolukiiruse ja vooluhulga vastavat seost:

$$u = Q \frac{3 \alpha^{1/2}}{4 h^{3/2}} = \frac{3 Q}{2 W h}$$

→

$$u^2 = Q^2 \frac{9 \alpha}{16 h^3} = \frac{9 Q^2}{4 W^2 h^2},$$

milles  $\alpha = 4 h/W^2$ .

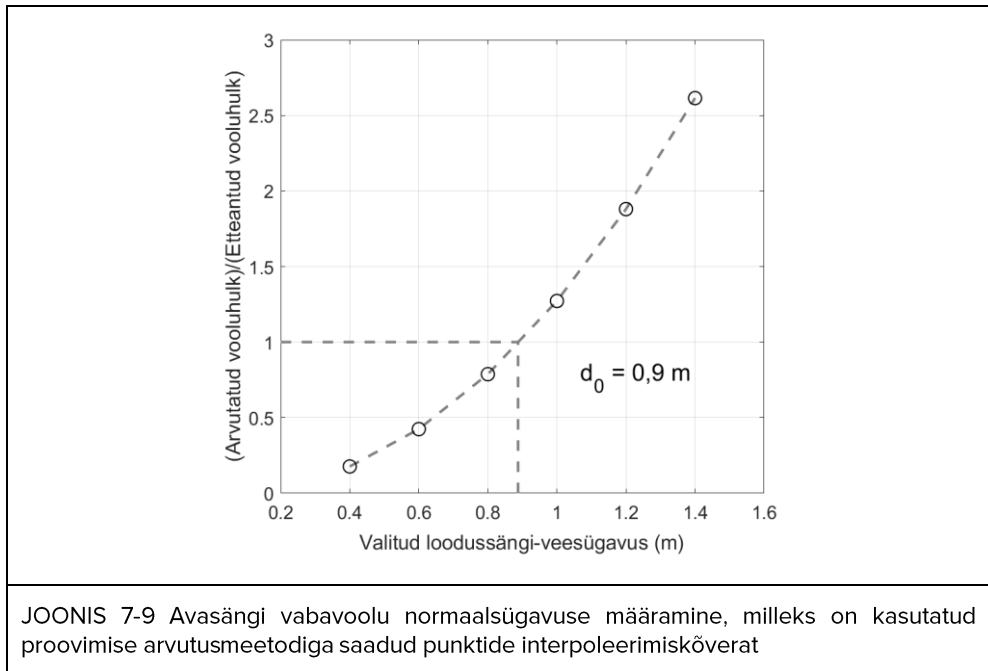
Froude'i suhtarvu kriteeriumit kasutatakse vabavoolu hüdraulilise voolurežiimi määramisele. Kriitilisele vabavoolule vastab  $Fr^2 = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule vastavad  $Fr^2 < 1$  ja  $Fr^2 > 1$ .

Proovimise arvutusmeetod

ARVUTUS. Normaalsügavus

Valitud ning Chézy, Manningi, voolusängi Reynoldsi arvu ja ruutparaboolse ristlõikega vabavoolu Froude'i arvu valemitega arvatatud hüdraulilised suurused.

	$h$ (m)	$C_{Ch}$ ( $\sqrt{m} \cdot s^{-1}$ )	$R_h$ (m)	$Q$ ( $m^3 \cdot s^{-1}$ )	$Re_{vs}$	$Fr$
i	0,4	22,8719	0,2632	0,8850	$1,1876 \cdot 10^5$	0,3627
ii	0,6	24,4442	0,3922	2,1211	$2,3088 \cdot 10^5$	0,3864
iii	0,8	25,6169	0,5195	3,9389	$3,6890 \cdot 10^5$	0,4036
iv	1,0	26,5589	0,6452	6,3602	$5,2935 \cdot 10^5$	0,4171
v	1,2	27,3490	0,7692	9,4008	$7,0966 \cdot 10^5$	0,4281
vi	1,4	28,0309	0,8917	13,0727	$9,0783 \cdot 10^5$	0,4374



Kriitilise sügavus määratakse ruutparaboolse ristlõikega avasängi vabavoolule tingimusel, et  $Fr^2 = 1$ , millest jäeldub valem:

$$d_k = \sqrt[4]{\frac{27 \alpha Q^2}{32 g}}.$$

## ARVUTUS

Kriitiline sügavus

$$d_k = \sqrt[4]{\frac{27 \cdot 0,05 \text{ m}^{-1} \cdot (5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1})^2}{32 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} = 0,5726 \text{ m}$$

JÄRELDUS. Vooluhulga  $Q = 5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  puhul selgub, et avasängi voolamise kriitiline sügavus on väiksem kui normaalsügavus ( $d_k < d_0$ ). Järelikult on ühtlane vabapinnaga voolamine loodussängis hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ).

*Numbriline arvutuskeem. Normaalsügavus*

*Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod*

## VALEMID

Veafunktsioon:

$$ERF(z_j) = Q_j - Q,$$

milles  $z_j$  on loodussängi arvutuslik veesügavus,  $Q_j$  on arvutuslik vooluhulk ja  $Q$  on etteantud vooluhulk.

Veafunktsiooni tuletis:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{dQ_j}{dz_j},$$

milles on eeldatud, et  $Q = \text{konstant}$ .

Arvutuslik vooluhulk on määratud valemiga

$$Q_j = \frac{R_{h_j}^{\frac{2}{3}} A_{e_j} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M},$$

milles  $R_{h_j}$  on arvutuslik hüdrauliline raadius ja  $A_{e_j}$  on arvutuslik elavlõige.

→

$$\begin{aligned} \frac{dERF(z_j)}{dz_j} &= \frac{d}{dz_j} \left( \frac{R_{h_j}^{\frac{2}{3}} A_{e_j} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} \right) = \frac{i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} \left( \frac{2 A_{e_j} R_{h_j}^{-\frac{1}{3}} dR_{h_j}}{3 dz_j} + R_{h_j}^{\frac{2}{3}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} \right) \\ &= Q_j \left( \frac{2}{3} \frac{dR_{h_j}}{R_{h_j} dz_j} + \frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} \right) \end{aligned}$$

Veafunktsioonist suunatud tuletise võtmise reegel:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{0 - ERF(z_j)}{z_{j+1} - z_j},$$

võimaldab kasutusele võtta Taylori valemi 1-järgu tuletise täpsusega:

$$z_{j+1} = z_j - \frac{ERF(z_j)}{\frac{dERF(z_j)}{dz_j}}.$$

Numbriilise arvutusskeemi põhivalemi üldkuju on

$$z_{j+1} = z_j - \frac{Q_j - Q}{Q_j \left( \frac{2}{3} \frac{dR_{h_j}}{dz_j} + \frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} \right)} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left( \frac{2}{3} \frac{dR_{h_j}}{dz_j} + \frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} \right)}.$$

Määrame hüdraulilise voolusüsteemi valemi numbrilise arvutusskeemi põhivalemi liikmele:

$$\frac{2}{3} \frac{dR_{h_j}}{dz_j}.$$

Ruutparaboolse ristlõikega avasängi arvutuslik hüdrauliline raadius on

$$R_{h_j} = \frac{A_{e_j}}{\chi_j} = \frac{(2/3) W_j z_j}{W_j + (8/3) z_j^2 / W_j} = \frac{(2/3) z_j}{1 + (8/3) z_j^2 / W_j^2} \approx \frac{2}{3} z_j.$$

Määrame numbrilise arvutusskeemi põhivalemi *esimese* liikme valemi.

$$\frac{dR_{h_j}}{dz_j} = \frac{d}{dz_j} \left( \frac{2}{3} z_j \right) = \frac{2}{3}$$

→

$$\frac{2}{3} \frac{dR_{h_j}}{dz_j} = \frac{2}{3} z_j$$

Määrame hüdraulilise voolusüsteemi valemi numbrilise arvutusskeemi põhivalemi liikmele:

$$\frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j}.$$

Ruutparaboolristlõikega voolusängi arvutuslik elavlõige on

$$A_{e_j} = \frac{2}{3} W_j z_j = \frac{4}{3} \frac{z_j^{3/2}}{\alpha^{1/2}},$$

milles  $W_j = (4 z_j / \alpha)^{1/2}$ .

→

$$\frac{dA_{e_j}}{dz_j} = \frac{4 z_j^{1/2}}{3 \alpha^{1/2}} \frac{3}{2} = 2 \frac{z_j^{1/2}}{\alpha^{1/2}}$$

Määrame numbrilise arvutuskeemi põhivalemi *teise* liikme valem.

$$\frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} = \frac{\frac{4 z_j^{1/2}}{3 \alpha^{1/2}} \frac{3}{2}}{\frac{4 z_j^{3/2}}{3 \alpha^{1/2}}} = \frac{3}{2 z_j}$$

ARVUTUSSKEEM (Manningi valem, avatud paraboolristlõikega voolusäng)

Numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku loodussängi veesügavuse valem (iteratsioonmeetodi põhivalem)

$$z_{j+1} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left(\frac{2}{3z_j} + \frac{3}{2z_j}\right)} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\frac{1}{z_j} \frac{13}{6}} = z_j \left(1 - \frac{6}{13} \left(1 - \frac{Q}{Q_j}\right)\right)$$

Arvutusliku vooluhulga valem

$$Q_j = \frac{A_{e_j}^{5/3} i_0^{1/2}}{\chi_j^{2/3} n_M} \approx \frac{R_{h_j}^{2/3} A_{e_j} i_0^{1/2}}{n_M} = \frac{i_0^{1/2}}{n_M} R_{h_j}^{2/3} A_{e_j} = \frac{i_0^{1/2}}{n_M} \left(\frac{2}{3} z_j\right)^{2/3} \left(\frac{4}{3} \frac{1}{\alpha^{1/2}} z_j^{3/2}\right)$$

ARVUTUS. Normaalsügavus

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (m)	2	1,2420	0,9520	0,8965	0,8940	0,8939
$Q_j$ (m <sup>3</sup> .s <sup>-1</sup> )	27,9581	10,1193	5,7232	5,0305	5,0003	5,0000

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (m)	0,8939	0,8939	0,8939	0,8939
$Q_j$ (m <sup>3</sup> .s <sup>-1</sup> )	5,0000	5,0000	5,0000	5,0000

## VASTUSED

$$d_0 = 0,8939 \text{ m}$$

$$\mathbf{Re}_{vs} = 4,5481 \cdot 10^5$$

$$\mathbf{Fr} = 0,4103$$

$$d_k = 0,5726 \text{ m}$$

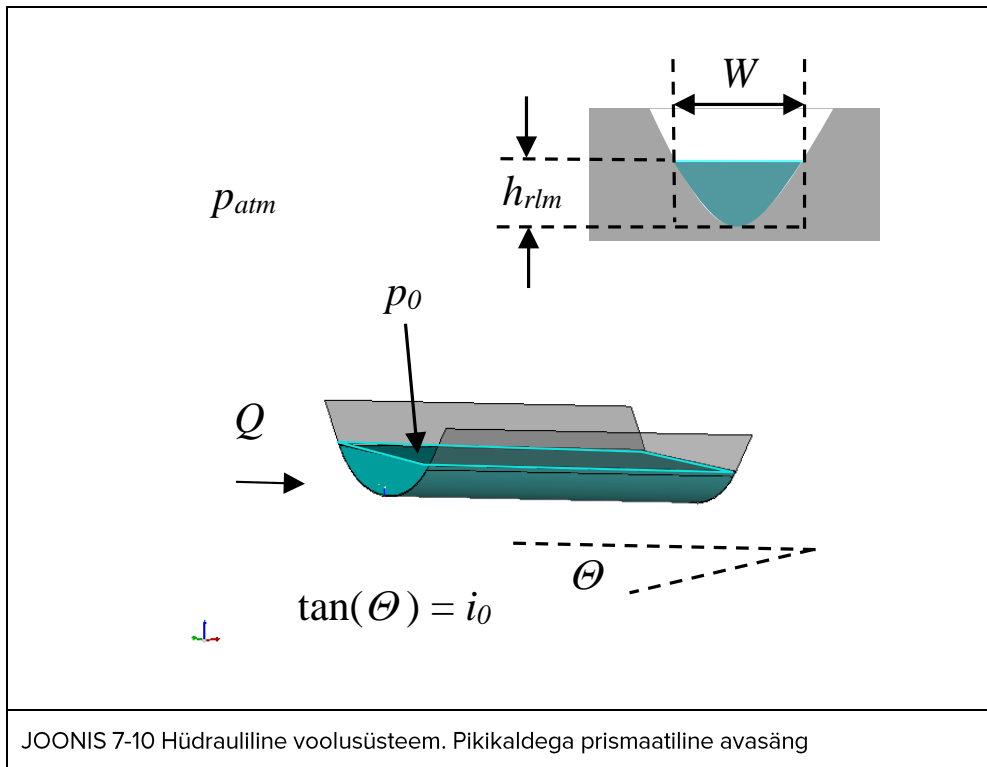
$$\lambda = 0,1146$$

JÄRELDUS. Arvutustulemustest selgub, et vabapinnaga voolamine on turbulentne ( $\mathbf{Re}_{vs} > 500$ ) ja hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $\mathbf{Fr} < 1$ ). Ruutparaboolse ristlõikega loodussängis on voolamise kriitiline sügavus väiksem kui normaalsügavus ( $d_k < d_0$ ). Ühtlase vabavoolu hõõrdetakistustegur vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnale.

## 7.6 LISAÜLESANNE 3. LOODUSSÄNGI VEESÜGAVUS

ANTUD. Looduslikus avasängis on reguleeritud vooluhulk  $Q = 5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  ja piirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,035$ . Loodussängi ristlõike sisepiirde geometriaga määratud ruutastmelise kõverjoone tegur  $\alpha = 0,05$  ( $\alpha = 4 h_{rlm}/W^2$ ). Voolusängi põhjalang  $i_0 = 25 \text{ m} \cdot \text{km}^{-1}$ . Avasängis voolab  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata proovimismeetodi ja numbrilise arvutuskeemiga ühtlasele vabapinnaga voolamisele avasängis normaalsügavus. Arvutada normaalsügavus ruutparaboolse ristlõikega loodussängile reguleeritud vooluhulgale. Arvutada voolusängi Reynoldsi arv ja hüdrauliline vabavoolurežiim Froude'i suhtarvu kriteeriumiga. Määrata ühtlasele vabapinnaga voolamisele avasängis kriitiline sügavus. Võrrelda normaalsügavust ja kriitilist sügavust vabapinnaga voolamisele loodussängis.





EELDUSED. Vee voolamine mittehorisontaalses avasängis on statsionaarne, ühtlane. Eeldada, et looduslik voolusäng on praktiliselt sirge ja muutumatu ristlõikega ning voolusängi sisepiirde takistuse määrab hüdrauliliselt kare voolamine. Voolutakistuse määramisele kasutada Manningi karedusskaala valemit, milles Chézy teguri võib asendatud sängipiirde Manningi karedusteguriga. Normaalsügavus määrata Manningi vooluhulga valemiga ja kriitilise sügavuse määramisele kasutada vastavat Froude'i arvu valemit. Normaalsügavuse numbrilise arvutusskeemi koostamisele kasutada Newtoni iteratsioonmeetodit.

#### VASTUSED

$$d_0 = 0,5207\text{m}$$

$$Re_{vs} = 5,9590 \cdot 10^5$$

$$Fr = 1,2092$$

$$d_k = 0,5726\text{ m}$$

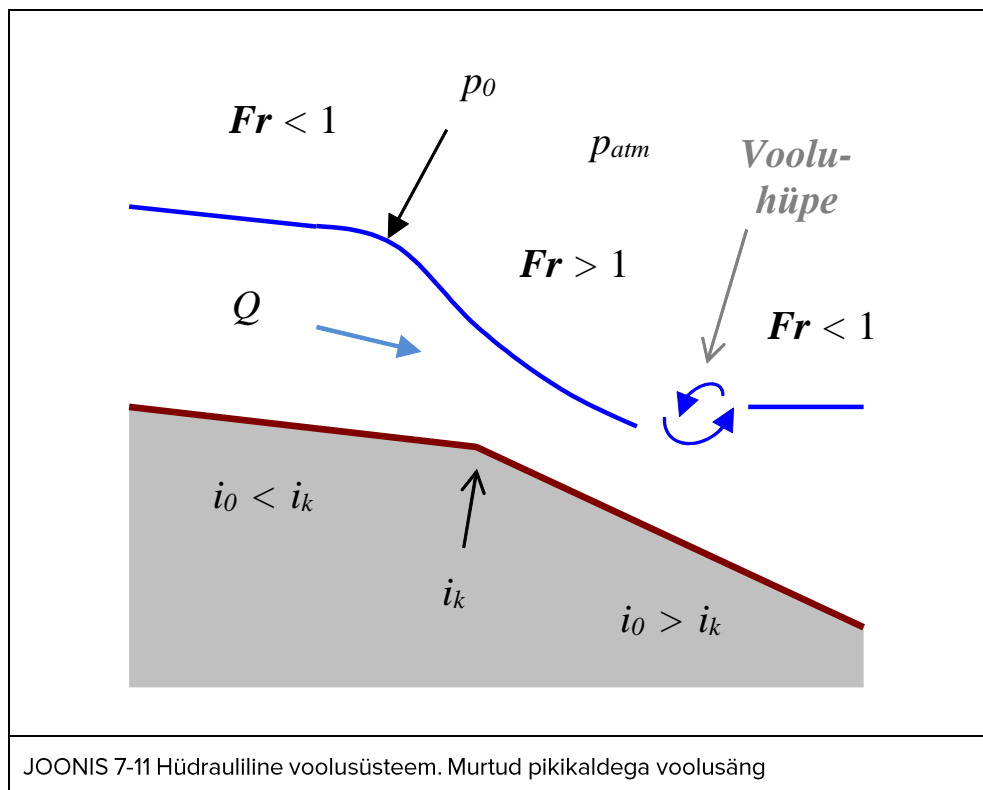
$$\lambda = 0,1368$$

JÄRELDUS. Arvutustulemustest selgub, et vabapinnaga voolamine avasängis on turbulentne ( $Re_{vs} > 500$ ) ja hüdrauliliselt kareda vabavoolurežiimiga ( $Fr > 1$ ). Ühtlase vabavoolu hõõrdetakistustegur vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnale. Ruutparaboolse ristlõikega avasängis on voolamise kriitiline sügavus suurem kui normaalsügavus ( $d_k > d_0$ ). Vabapinnaga voolamine, mis vastab hüdrauliliselt karedale vabavoolurežiimile ei ole madalvee pinnalainete suhtes stabiilne, st avasängis võib voolamine olla mittestatsionaarne. Kriitilisest langust suurema põhjalanguga ( $i_0 > i_k$ ) avasängis võib vabapind murduda, ning moodustub vooluhüpe, lainetus vms.

## 7.7 LISAÜLESANNE 4. TEHISSÄNGI VEESÜGAVUS

ANDMED. Rohtunud/kruusapinnasest/killustikust nõlvadega tehissängis, mille aluspõhja laius  $w = 0,4$  m, nõlvustegurid  $m_{n1} = 3$  (nõlvus 1:3) ja  $m_{n2} = 4$  (nõlvus 1:4), ning sängipõhja lang  $i_0 = 0,005$ , on etteantud vooluhulk  $Q = 1 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Prismaatilises erinevate nõlvustega trapetskujulise ristlõikega avasängis voolab  $10^\circ \text{C}$  vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Avasängi piirde Manningi ekvivalentkaredustegur  $n_M = 0,03$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Arvutada normaalsügavus ja kriitiline sügavus erinevate nõlvustega trapetsristlõikega avasängi vabavoolule. Arvutada voolusängi Reynoldsi arv ja määrata hüdrauliline vabavoolurežiim Froude'i suhtarvu kriteeriumiga. Arvutada hõõrdepinge ja kriitiline lang avasängile.



JOONIS 7-11 Hüdrauliline voolusüsteem. Murtud pikikaldega voolusäng

## VASTUSED

$$d_0 = 0,4905 \text{ m}$$

$$\mathbf{Re}_{vs} = 1,9361 \cdot 10^5$$

$$\mathbf{Fr} = 0,5519$$

$$d_k = 0,3767 \text{ m}$$

$$\tau_0 = 12,8156 \text{ Pa}$$

$$i_k = 1,77 \text{ cm} \cdot \text{m}^{-1} = 0,0177 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$$

LISAKÜSIMUSED. Kui suur on voolamise Chézy moodul? (Kasutada Pavlovski valemit.) Milline on võimalik vooluhüppe kõrgus juhul kui tehissängi pikikallet muuta 25% kriitilisest põhjalangust?

## 7.8 VIITED

7.1 Maastik, A., Haldre, H., Koppel, T. & Paal, L. (1995). *Hüdraulika ja pumbad*. OÜ Greif.

7.2 *Vesiehitised sisevetel. EVS 924:2015*.

7.3 Tepaks, L. (1967). *Hüdraulika*. Valgus.

## 8 EHITATUD PAIS

### 8.1 PRAKTILINE OSA. AVASÄNGI TÖKKED

#### 8.1.1 EHITIS. HÜDROTEHNILINE RAJATIS

Tehislikku voolusängi on võimalik kasutada vee kiireks ärajuhtimiseks, aga ka voolamise aeglustamiseks, peatamiseks või suunamiseks (rajades voolamise tõkestamiseks vesiehitise, nt betoon-, kivi- või pinnaspaisu). Looduslikus voolusängis võib veevoolu takistada loodusmoodustis (settekünnis, mis moodustub setete kuhjumisel jõe suudmes). Veevoolu tõkestamine põhjustab paisutuse ehk veetõusu, mis levib paisulainena ülesvoolu. Sademeveesüsteemides reguleeritakse voolamist, et vältida suure veehulga kiiret kogunemist, mis põhjustab torustike uputusi ning linnaalade üleujutust. Avasängitõkete praktiline näide on veetiikide äravoolu aeglustamise kombineeritud lahendused, nagu kaskaadid vms. Pikliku tiigi rajamine ei ole ruumikasutuse mõttes otstarbekas, seetõttu pikendatakse tiigis vee vooluteed otsevoolu takistavate tõketega (VIIDE 8.1, „Alternatiivsete sademevee äravoolu- ja kogumissüsteemide uurimustöö“). Sademevee ärajuhtimist voolusängi kaudu on võimalik tõkestada mitmesuguste seadmetega, nagu näiteks varjade, šandooride või kilpsiibriga. Võimalikult suure koguse sademevee kinnipidamiseks saab püsiva veetasemega kraavide juurde rajada täiendava mahuga veetasku, tiigi, multifunktsionaalse sügavapõhjalise pargiala või muu maastikukujunduse elemendi.

Sademevee aeglane ärajuhtimine peab olema hüdrauliliselt kontrollitud, kuna paisutamine võib mõjutada lähialade veerežiimi (nt äravoolu). See sõltub paisutuskõrgusest, pinnamoest ja geoloogilistest tingimustest. Paisutamine ei tohi takistada sademevee väljavoolu alalt, millelt sademevett ära juhitakse. Seetõttu tuleb sademevee aeglase ärajuhtimisel, millega kaasneb paisutamine, arvestada lähialade iseärasustega. Tuleb arvestada sellega, et kontrollimatu vihmavee kogunemine võib üleujutuste näol tekitada kahju ka naaberkinnistutele.

#### 8.1.2 VOOLUREŽIIM. UPUTAMATA JA UPUTATUD ÜLEVOOL

**MÄRKUS.** *Varasemates eesti keelsetes hüdraulika raamatutes on liigitatud ülevoolud läve laiuse alusel lailäviülevooluks (VIIDE 8.2, „Hüdraulika ja pumbad“) või laialäveliseks ülevooluks (VIIDE 8.3, „Hüdraulika“), õhukeseks ülevooluks või õhukeseseinaliseks ülevooluks ning eriprofiilülevooluks või praktilise profiiliga ülevooluks. Käesolevas raamatus käsitletakse ülevooluna vooluprotsessi paisul olenevalt läve või harja konstruktsioonilisest lahendusest. Sellest lähtuvalt on ülevoolude terminoloogiat täpsustatud.*

Ülevool on vabapinnaga voolamise protsess, mida põhjustab avasängi tõke (nt põhjakõrgendus), millest vesi üle voolab, või avasängi külgekitsendus, millest vesi läbi voolab. Avasängi tõkete hulka kuuluvad näiteks liigveelaskmed, lüüsregulaatorid, väikese avaga sillad, surveta truubid jms. Ülevoolupais koos läbivoolukitsusega või nende kombineeritud voolutõkke põhjustatud paisutus moodustab ülemises bjefis paisjoonega määratud vabapinna kõrguse muutuse. Paisud liigitatakse avasängis selle pikisuunas paikneva läve pikkuse (harja paksuse) järgi: pika lävega paisud – nagu müürülevool (lailäviülevool), eriprofiilülevoolud ja lühikese lävega paisud (seinülevool). Voolusängi seda osa, mis asub paisu nõlval ülesvoolu, nimetatakse ülemiseks bjefiks ning voolusängi osa, mis asub paisu nõlval allavoolu, nimetatakse alumiseks bjefiks. Paisu ülemise bjefi veosa nimetatakse ülaveeks ja paisu alumise bjefi veosa nimetatakse alaveeks (vrld VIIDE 8.4, „Vesiehitised sisevetel, põhialused“).

Jõesängis võib setete kuhjumisel moodustuda loodusmoodustis (setete kuhi), mis võib oluliselt muuta jõevoolu dünaamikat, näiteks paisutada künnisest ülesvoolu vee vabapinda. Settekünnis moodustub tavaliselt jõe estuaaris (ingl. *river estuary*), kus merevee tiheduse ja merepinna mõjude tõttu voolamine aeglustub. Jõesängil on tavaliselt olemas tasakaaluprofiil ehk setete kuhjumine ja uhtumine avasängi lõigus on sama intensiivsusega (kui ei toimu sängipiirde erosiooni). Mere vabapinna kõrguse suurenemisel ja jõevee koguse vähenemisel võib tekkida stratifitseeritud voolamine, mille tulemusena siseneb merevesi jõepõhja lähedase hoovusena jõesängi (Pärnu jõgi, Narva jõgi). Merevee voolamine mõjutab setete liikumist jõesängis, mis võib samuti põhjustada setete kuhjumist jõesuudmesse.

Pika lävega paisul on reeglina rõhtne hari, mille paksus voolusängis määratletakse tingimusega  $l_{pais} = (2 \dots 10)PK$ , kus  $PK$  on paisutuskõrgus ehk paisu ülavee vabapinna kõrguse ja paisu läve maksimaalne kõrguse vahe. Pika lävega pais on hüdrotehnikas laialt kasutusel mitmesuguste vesiehitiste elemendina. Ülevoolu sarnase vooluprotsessina arvutatakse ka voolamist kitsendavaid ilma läteta ehitisi, nagu näiteks teetruupe ja väikest sillaava, mis võivad olla avasängi laiuks oluliselt kitsamad. Suhteliselt lühikeste voolujoonelise kujuga eriprofiilülevoolude harja paksus jääb vahemikku  $(0,5 \dots 0,67)PK \leq l_{pais} \leq 2PK$ . Lühikese lävega paisu harja paksus piki voolusängi määratletakse tingimusega  $l_{pais} < 0,5PK$  (VIIDE 8.2, „Hüdraulika ja pumbad“).

Ülevoolu abil saab määrata voolamist iseloomustavaid hüdraulilisi suuruseid *in situ*. Näiteks kolmnurkse ristlõikega ülevoolupaisu (kolmnurk-ülevoolu) paisutuskõrguse abil on väiksemate veekoguste vooluhulka määrata lihtsam kui nelinurkse ristlõikega ülevoolupaisu (nelinurkülevoolu) abil. Mõõteülevoolu puhul kasutatakse tavaliselt õhukese harjaga paisu (seinülevoolu). Ülevool on uputamata, kui alavee vabapind ei mõjuta voolamist paisul. Vastasel korral on ülevool uputatud. Olenevalt sellest, kas voolutõkke ülevoolule avatud osa on avasängi omaga sama lai või sellest kitsam, on tegemist vastavalt kas kitsendamata või kitsendatud ülevooluga.

### 8.1.3 SISSEJUHATUS ÜLESANDESSE. PÕHIVALEMID

Ülevoolu valemite koostamise eesmärk on määrata seos veevoolule avatud osa läbilaskevõime ja paisutuskõrguse vahel olenevalt ülevooluava laiusest, paisu kõrgusest ja voolupiirde kujust. Tavaliselt ehitatakse trapetskujulise profiiliga paise ehk trapetspaise, mille otsanõlvad ei ole vertikaalsed. Ülevooluava võib olla nelinurkse, ruutparaboolse, kolmnurkse või muu ruutastmelise ristlõike kujuga. Ümartruubi puhul võib sissevoolu ristlõike ava olla ka osalise torutäite kujuga, mis ei vasta hästi ruutastmelise ristlõike kujule. Ülevoolu vooluhulga valemite kasutamisel on oluline määrata vooluhulgategur (vooluhulga koefitsient), mis sõltub lävekõrguse, avalaiuse ja ristlõikekuju muutustega (ehk teravaservalise, ümardatud servaga vms geomeetrilise piirdestruktuuriga) määratud takistusest. Ülevoolu vooluhulgategur määratakse tavaliselt eksperimentaalselt ja mõõdukalt ebaühtlasele voolamisele, kus hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga veesööst paisu ülemises bjefis muutub paisu alumises bjefis hüdrauliliselt kärede vabavoolurežiimiga veesööstuks ja vastab paisu lävel kriitilisele voolamisele. Maksimaalse vooluhulga valemi matemaatiline kuju määratakse voolujõu ja horisontaalvoolu rõhugradientjõu tasakaalu tingimisel ja hüdrostaatilise rõhu eeldusel, mille puhul võetakse kasutusele Froude'i suhtarvu kriteerium, mis vastab kriitilisele vabavoolule paisu lävel. Maksimaalse vooluhulga valemi asemel kasutatakse vesiehitiste puhul ülevoolu põhivalemit, kus on kasutusele võetud ülevoolutegur (ülevoolu koefitsient) (VIIDE 8.5, „Hüdraulika erikursuse ülesannete kogu“). Reaalvedeliku voolamisele on ülevoolutegur  $C_d^* < 0,385$ . Ülevoolutegur  $C_d^* = 0,385$  vastab ideaalvoolu tingimustele (VIITED 8.2, „Hüdraulika ja pumbad“, 8.3, „Hüdraulika“ ja 8.5, „Hüdraulika erikursuse ülesannete kogu“). Ülevooluteguri defineerimine ülevoolu põhivalemile on seotud empiirilise valemi määramatusega, sest ideaalvoolu vooluhulk sõltub koefitsiendist, mis ei ole üheselt määratud. Põhi- ja lisaülesandes on ülevoolutegur määratud empiiriliste valemitega, mis sõltuvad paisu ülemise bjefi ja läve laiustest, läve kõrgusest ülemises bjefis ja ülavee paisutuskõrgusest uputamata ülevoolule. Uputatud ülevoolu puhul võetakse ülevooluteguri empiirilistes valemites kasutusele ka alumise bjefi laius ja paisuläve kõrgus alumises bjefis (VIIDE 8.5, „Hüdraulika erikursuse ülesannete kogu“).



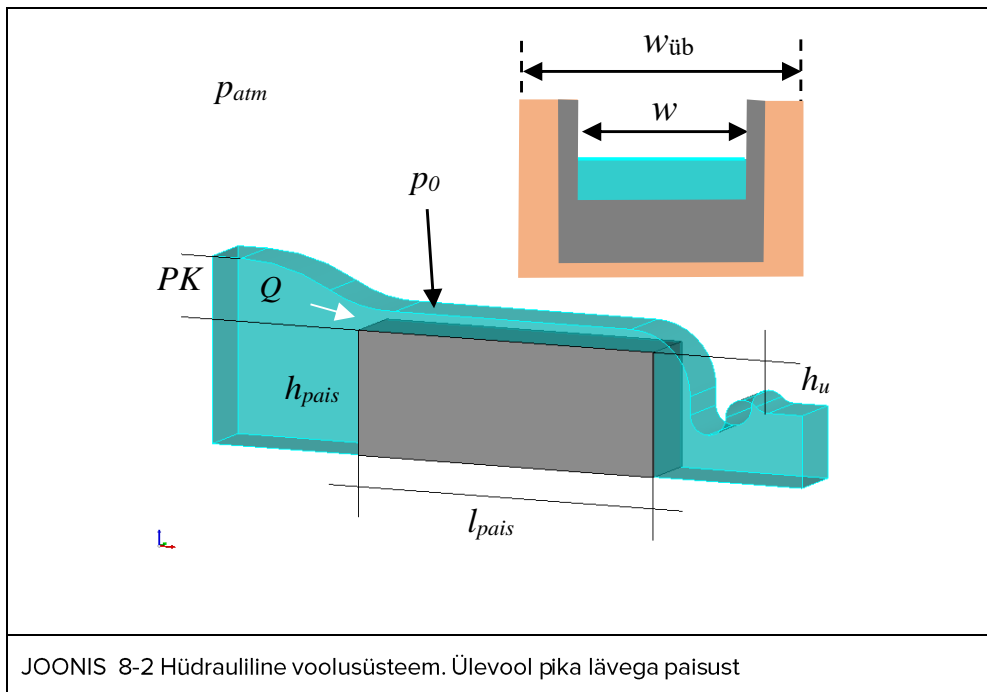
JOONIS 8-1 Sillakonstruktsioonid avasängi külgkitsendusena, Põltsamaa. (Foto: Ülar Jõesaar, 2014)

**MÄRKUS.** Hüdraulika õppematerjalides (VIITED 8.2, „Hüdraulika ja pumbad“, 8.3, „Hüdraulika“, 8.5, „Hüdraulika erikursuse ülesannete kogu“) on kasutusel mõiste lailävi ülevool ja õhukese seinaga ülevool. Käesolevas raamatus on kasutatud sünonüümidena ka mõisteid vastavalt pika lävega pais ja paksu harjaga pais ning lühikese lävega ülevool ja õhukese harjaga ülevool.

## 8.2 PÕHIÜLESANNE. MÜÜRÜLEVOOLU PAISUTUSKÕRGUS

ANTUD. Tehislikus voolusängis paisutatakse vett, st veepinna kõrgust reguleeritakse paisuga, mis on pika läve ja külgkitsendusega. Läve kõrgus  $h_{pais} = 1$  m ja läve pikkus  $l_{pais} = 3$  m. Etteantud vooluhulk  $Q = 0,5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vee vabapind paisu alumises bjefis on oluliselt madalamal paisu lävest. Nelinurkristlõikega tehissängi laius paisu ülemises bjefis  $w_{\text{üb}} = 5$  m, lävel  $w = 1$  m ja alumises bjefis  $w_{\text{ab}} = 10$  m. Hüdraulilises voolusüsteemis on  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu = 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{\text{atm}}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{\text{atm}} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata proovimismeetodi ja numbrilise arvutusskeemiga hüdraulilisele voolusüsteemile paisutuskõrgus. Arvutada paisutuskõrgus etteantud vooluhulga tehissängis, milles on pika läve ja külgkitsendusega pais. Arvutada vabavoolu Reynoldsi arv ja Froude'i suhtarvu kriteeriumiga hüdrauliline vabavoolurežiim paisu ülemises bjefis.



JOONIS 8-2 Hüdrauliline voolusüsteem. Ülevool pika lävega paisust



EELDUSED. Voolamine paisul, st ülevool on statsionaarne, mõõdukalt ebäühtlane. Vooluhulga määramisele kasutada ülevoolu põhivalemit. Eeldada, et paisul on rõhtne lävi, mille horisontaalne ulatus on oluliselt suurem paisutuskõrgusest, st tegemist on pika lävega paisuga ( $2 < h_{pais}/PK < 10$ ). Nelinurkristlõikega tehislikku voolusängi paigutatud paksu harjaga pais on risti voolamisega. Alavee vabapind on oluliselt madalamal tasemel võrreldes paisu lävega, st ülevool on uputamata ( $h_u < 0$ ).

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Ideaalvedeliku Bernoulli võrrand ülevoolule, paisutamise Bernoulli võrrand, maksimaalse vooluhulga valem, ülevoolu põhivalem, trapetsristlõikega avasängi vabavoolu Froude'i arvu valem, pika lävega paisu ülevooluteguri valem, voolusängi Reynolds'i arv, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem**

### VALEMID

Ideaalvedeliku Bernoulli võrrand ülevoolule on

$$h_{pais} + PK \approx h_{pais} + d + \frac{u^2}{2g},$$

milles  $h_{pais}$  on paisuläve kõrgus,  $PK$  on paisutuskõrgus ja  $d$  on veekihi sügavus paisu lävel,  $g$  on raskuskiirendus ja  $u$  on voolukiirus paisu lävel. Paisutamise Bernoulli võrrandis on eeldatud, et paisu ülemises bjefis on voolamise kineetiline energia oluliselt väiksem potentsiaalsest energiast. Potentsiaalne erienergia paisu ülemises bjefis on määratud suurusega  $h_{pais} + PK$ .

Hüdraulilisel vabavoolurežiimil, mis vastab nõ kriitilisele voolamisele, st Froude'i suhtarvu kriteeriumile  $Fr = 1$ , määratakse voolukiirus nelinurkristlõikega avasängis tingimusel:

$$u = \sqrt{gd}.$$

→

$$h_{pais} + PK = h_{pais} + d + \frac{u^2}{2g}$$

$$PK = d + \frac{d}{2} = \frac{3}{2}d$$

$$d = \frac{2}{3} PK$$

Nelinurkristlõikega ülevoolule laiusena  $w$  määratakse vooluhulk valemiga:

$$Q = u d w.$$

→

$$u = \sqrt{g d} = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} (PK)^{\frac{1}{2}}$$

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w$$

Paisutuskõrguse järgi määratud vooluhulga valemit nimetatakse maksimaalse vooluhulga valemiks juhul kui ülevoolule paisu lävel  $Fr = 1$ . Reaalvedeliku voolamise paisutamisele täiendatakse maksimaalse vooluhulga valemit vooluhulgateguriga  $C_d < 1$ . Ideaalvedeliku voolamise tingimustel on vooluhulgategur  $C_d = 1$ .

Reaalvoolu maksimaalse vooluhulga valem nelinurkse ristlõikega ülevoolule on

$$Q = C_d g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w,$$

milles  $C_d$  on vooluhulgategur ( $C_d < 1$ ).

Ülevoolu põhivalemi võib esitada teisendusega:

$$Q = C_d g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}} w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}} = C_d^* w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}},$$

milles ülevoolutegur on

$$C_d^* = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}}.$$

Pika lävega paisule võib ülevooluteguri määrata empiirilise valemiga:

$$C_d^* = 0,320 + 0,065 \sigma^2,$$

milles nelinurkse ülemise bjefi kitsendustegur on

$$\sigma = \frac{w PK}{w_{\text{üb}} (PK + h_{\text{pais}})}$$

(VIIDE 8.5, „Hüdraulika erikursuse ülesannete kogu“).

Reaalvedeliku voolamisele  $C_d^* < 0,385$ . Ülevoolutegur  $C_d^* = 0,385$  vastab ideaalvedeliku voolamise tingimustele.

Voolusängi Reynolds'i arv on määratud valemiga

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur ja  $R_h$  on hüdrauliline raadius. Hüdrauliline raadius  $R_h = A_e/\chi$ , milles  $A_e$  on voolamise ristlõike pind ehk elavlõige, ning  $\chi$  on voolamise ristlõike perimeeter ehk märgpiire, millest on välja jäetud vabapind. Madalveelisele voolamisele laias voolusängis on  $R_h \approx d$ , milles  $d$  on veesügavus.

**MÄRKUS.** Laminaarse ja turbulentse veevoolu ülemineku voolusängi Reynoldsi arvu kriitiline väärtus on 500. (Rõhulisele voolamisele ümartorus on ümartoru Reynoldsi arv  $Re = 4 Re_{vs}$ . Täistäitumusega ümartorule on  $R_h = d_s/4$ , milles  $d_s$  on toru sisediaameeter.)

Nelinurkristlõikega voolusängi Reynoldsi arv paisu ülemises bjefis määratakse valemiga:

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu} = \frac{u A_e}{\nu \chi} = \frac{u}{\nu} \frac{w_{\text{üb}} (h_{\text{pais}} + PK)}{(w_{\text{üb}} + 2 (h_{\text{pais}} + PK))},$$

milles  $u$  on ülavee voolukiirus,  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur ja  $R_h$  on hüdrauliline raadius paisu ülemises bjefis. Hüdrauliline raadius paisu ülemises bjefis on määratud elavlõike pindala  $A_e = w_{\text{üb}} (h_{\text{pais}} + PK)$  ja märgpiirde pikkuse  $\chi = w_{\text{üb}} + 2 (h_{\text{pais}} + PK)$  jagatisega. Laiale avasängile võib kasutada voolusängi Reynoldsi arvu valemit

$$Re_{vs} \approx \frac{u (h_{\text{pais}} + PK)}{\nu}.$$

Vabapinnaga voolamisele samade nõlvustega trapetsristlõikega avasängis on Froude'i arv määratud valemiga

$$Fr = \sqrt{\frac{Q^2}{g \frac{(h w_{\text{üb}} + h^2 m_n)^3}{(w_{\text{üb}} + 2 h m_n)}}} = \sqrt{\frac{u^2}{g \frac{(h w_{\text{üb}} + h^2 m_n)}{(w_{\text{üb}} + 2 h m_n)}}},$$

milles  $h$  on vabapinna kõrgus voolusängi aluspõhjast ( $h = -(-d) = d$ ),  $w_{\text{üb}}$  on voolusängi põhjalaius ja  $m_n = \cot(\theta)$  on nõlvustegur, milles  $\theta$  on nõlva välisnurk. Trapetsristlõikega avasängi vabavoolu Froude'i arvu valemis on kasutatud voolukiiruse ja vooluhulga seost  $u = Q/(h w_{\text{üb}} + h^2 m)$ . Vastavalt Froude'i suhtarvu kriteeriumile vastab rahulikule voolamisele  $Fr < 1$ , kriitilisele voolamisele  $Fr = 1$  ja kärealele voolamisele  $Fr > 1$ .

Vabavoolule nelinurkristlõikega tehissängis ( $m_n = 0$ ) on Froude'i arv paisu ülemises bjefis määratud valemiga

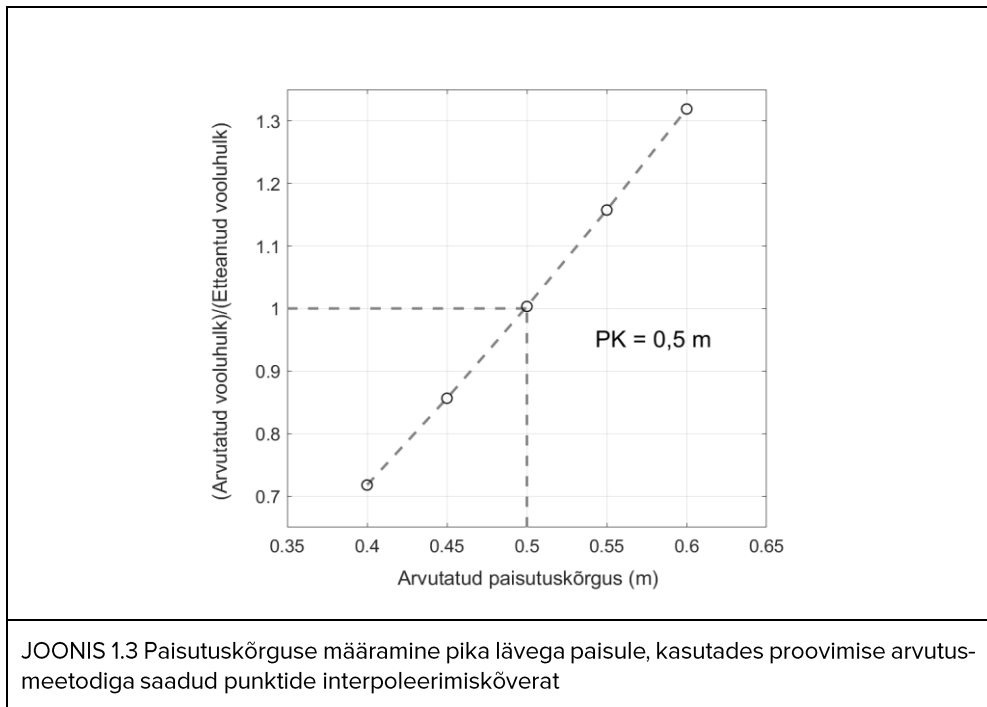
$$Fr = \sqrt{\frac{u^2}{g (h_{\text{pais}} + PK)}} = \sqrt{\frac{Q^2}{g (h_{\text{pais}} + PK)^3 w_{\text{üb}}^2}},$$

milles  $u$  on voolukiirus paisu ülemises bjefis ja  $Q = u w_{\text{üb}} (h_{\text{pais}} + PK)$  on vooluhulk.

Proovimise arvutusmeetod

ARVUTUS. Paisutuskõrgus

	$PK$ (m)	$C_d^*$	$R_h$ (m)	$Q$ ( $m^3 \cdot s^{-1}$ )	$Re_{vs}$	$Fr$
i	0,4	0,3202	0,8974	0,3588	$0,35387 \cdot 10^5$	0,0138
ii	0,45	0,3203	0,9177	0,4282	$0,41695 \cdot 10^5$	0,0157
iii	0,5	0,3203	0,9375	0,5016	$0,48230 \cdot 10^5$	0,0174
iv	0,55	0,3203	0,9568	0,5787	$0,54962 \cdot 10^5$	0,0192
v	0,6	0,3204	0,9756	0,6595	$0,61868 \cdot 10^5$	0,0208



JÄRELDUS. Vooluhulgale  $Q = 0,5 m^3 \cdot s^{-1}$  vastab voolusängi Reynoldsi arv  $Re_{vs} = 0,482 \cdot 10^5$  ja Froude'i arv  $Fr = 0,0174$  voolamisele paisu ülemises bjefis. Järelikult on statsionaarne, mõõdukalt ebäühtlane vabapinnaga voolamine paisu ülemises bjefis turbulents (  $Re_{vs} > 500$  ) ja hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga (  $Fr < 1$  ).

Numbriline arvutusskeem. Paisutuskõrgus

Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod

VALEMID

Veafunktsioon:

$$ERF(PK_j) = Q_j - Q,$$

milles  $PK_j$  on ülevoolu arvutuslik paisutuskõrgus,  $Q_j$  on arvutuslik vooluhulk ja  $Q$  on etteantud vooluhulk.

Veafunktsiooni tuletis:

$$\frac{dERF(PK_j)}{dPK_j} = \frac{dQ_j}{dPK_j},$$

milles on eeldatud, et  $Q = \text{konstant}$ .

Arvutuslik vooluhulk määratakse valemiga:

$$Q_j = C_{d_j}^* w \sqrt{2g} (PK_j)^{\frac{3}{2}},$$

milles

$$C_{d_j}^* = 0,320 + 0,065 \left( \frac{w PK_j}{w_{\text{üb}} (PK_j + h_{\text{pais}})} \right)^2,$$

→

$$\begin{aligned} \frac{dERF(PK_j)}{dPK_j} &= \frac{d}{dPK_j} \left( \left( 0,320 + 0,065 \left( \frac{w PK_j}{w_{\text{üb}} (PK_j + h_{\text{pais}})} \right)^2 \right) \left( w \sqrt{2g} (PK_j)^{\frac{3}{2}} \right) \right) \\ &= L_{1j} + L_{2j} + L_{3j}, \end{aligned}$$

milles

$$L_{1j} = \left( 2 \cdot 0,065 \left( \frac{w PK_j}{w_{\text{üb}} (PK_j + h_{\text{pais}})} \right) \left( \frac{w}{w_{\text{üb}} (PK_j + h_{\text{pais}})} \right) \right) \left( w \sqrt{2g} (PK_j)^{\frac{3}{2}} \right),$$

$$L_{2j} = \left( 2 \cdot 0,065 \left( \frac{w PK_j}{w_{\text{üb}} (PK_j + h_{\text{pais}})} \right) \left( - \frac{w PK_j}{w_{\text{üb}} (PK_j + h_{\text{pais}})^2} \right) \right) \left( w \sqrt{2g} (PK_j)^{\frac{3}{2}} \right),$$

$$L_{3j} = \left( 0,320 + 0,065 \left( \frac{w PK_j}{w_{\text{üb}} (PK_j + h_{\text{pais}})} \right)^2 \right) \left( w \sqrt{2g} \frac{3}{2} (PK_j)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Veafunktsioonist suunatud tuletise võtmise reegel:

$$\frac{dERF(PK_j)}{dPK_j} = \frac{0 - ERF(PK_j)}{PK_{j+1} - PK_j},$$

võimaldab kasutusele võtta Tayloriga väärtuse 1-järgu tuletise täpsusega:

$$PK_{j+1} = PK_j - \frac{ERF(PK_j)}{\frac{dERF(PK_j)}{dPK_j}}.$$

Numbrilise arvutuskeemi põhivalemi üldkuju on

$$PK_{j+1} = PK_j - \frac{C_{d_j}^* w \sqrt{2g} (PK_j)^{\frac{3}{2}} - Q}{L_{1j} + L_{2j} + L_{3j}},$$

milles arvutuslikud funktsioonid  $C_{d_j}^*$ ,  $L_{1j}$ ,  $L_{2j}$  ja  $L_{3j}$  on eelnevalt esitatud valemitega.

### ARVUTUSSKEEM (Müürülevoolu põhivalem)

Numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku paisutuskõrguse valem (iteratsioonmeetodi põhivalem)

$$PK_{j+1} = PK_j - \frac{Q_j - Q}{L_{1j} + L_{2j} + L_{3j}},$$

milles

$$L_{1j} = \left( 2 \cdot 0,065 \left( \frac{w PK_j}{w_{\text{üb}} (PK_j + h_{\text{pais}})} \right) \left( \frac{w}{w_{\text{üb}} (PK_j + h_{\text{pais}})} \right) \right) \left( w \sqrt{2g} (PK_j)^{\frac{3}{2}} \right),$$

$$L_{2j} = \left( 2 \cdot 0,065 \left( \frac{w PK_j}{w_{\text{üb}} (PK_j + h_{\text{pais}})} \right) \left( - \frac{w PK_j}{w_{\text{üb}} (PK_j + h_{\text{pais}})^2} \right) \right) \left( w \sqrt{2g} (PK_j)^{\frac{3}{2}} \right),$$

$$L_{3j} = \left( 0,320 + 0,065 \left( \frac{w PK_j}{w_{\text{üb}} (PK_j + h_{\text{pais}})} \right)^2 \right) \left( w \sqrt{2g} \frac{3}{2} (PK_j)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Arvutusliku vooluhulga valem:

$$Q_j = C_{d_j}^* w \sqrt{2g} (PK_j)^{\frac{3}{2}},$$

milles

$$C_{d_j}^* = 0,320 + 0,065 \left( \frac{w PK_j}{w_{\text{üb}} (PK_j + h_{\text{pais}})} \right)^2.$$

ARVUTUS. Paisutuskõrgus

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.
$PK_j$ (m)	1	0,5686	0,5008	0,4986	0,4986
$Q_j$ ( $m^3 \cdot s^{-1}$ )	1,4203	0,6090	0,5034	0,5000	0,5000

	6 iter.	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$PK_j$ (m)	0,4986	0,4986	0,4986	0,4986	0,4986
$Q_j$ ( $m^3 \cdot s^{-1}$ )	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

VASTUSED

$$PK = 0,4986 \text{ m}$$

$$C_d^* = 0,3206$$

$$C_d = 0,8331$$

$$Re_{vs} = 0,48094 \cdot 10^5$$

$$Fr = 0,0174$$

JÄRELDUS. Arvutustulemustest selgub, et statsionaarne, mõõdukalt ebäühtlane vabapinnaga voolamine paisu ülemises bjefis on turbulentne ( $Re_{vs} > 500$ ) ja hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ). Vabapinnaga voolamine vastab reaalvedeliku voolamise tingimusele, millele ülevoolutegur  $C_d^* < 0,385$ , vooluhulgategur  $C_d < 1$ .

**MÄRKUS.** Kontrollida kas ülevool vastab pika lävega paisu voolamise tingimusele.

## MÄRKUSED. Müürülevool

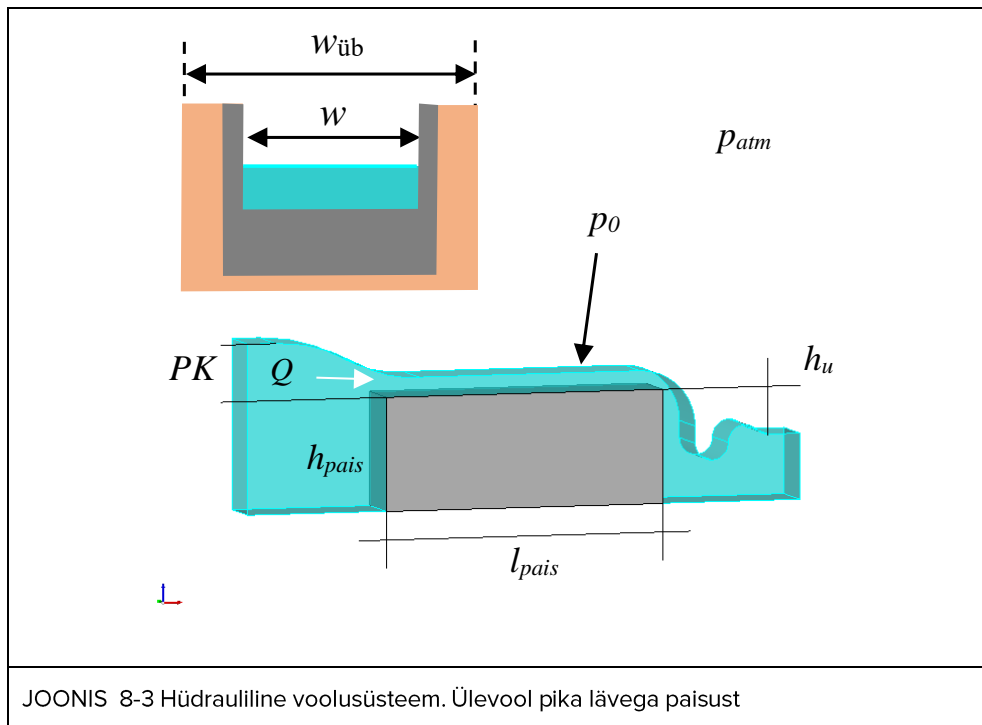
- Hüdraulika õppematerjalides (VIITED 8.2, „Hüdraulika ja pumbad“, 8.3, „Hüdraulika“, 8.5, „Hüdraulika erikursuse ülesannete kogu“) on kasutusel mõiste *lailävi ülevool*. Käesolevas raamatus on kasutatud sünonüümidenä ka mõisteid *pika lävega pais* ja *paksu harjaga pais*.
- Reaalvedeliku voolamisele paisul on ülevoolu koefitsient  $C_d^* < 0,385$ . Ülevoolutegur  $C_d^* = 0,385$  vastab ideaalvedeliku voolamise tingimustele. Ülevooluteguri defineerimine ülevoolu põhivalemile on seotud empiirilise valemi määramatusega, sest ideaalvedeliku vooluhulk sõltub koefitsiendist, mis ei ole üheselt määratud.
- Voolusängi Reynoldsi arvu ja Froude'i arvu võib arvutada ka voolamisele tehissängi paisu asukohas. Tuleb märkida, et kriitilise voolamise ristlõike asukoht pikal lävel ei ole hästi määratud. Statsionaarne, mõõdukalt ebahütlane vabapinnaga voolamine läve asukohas on turbulentsne ( $Re_{vs} > 500$ ) ja kriitilise hüdraulilise voolurežiimiga ( $Fr = 1$ ).
- Uputamata ülevoolu puhul on voolamine paksu harjaga paisul hüdraulilise vabavoolurežiimiga, mis vastab kriitilisele voolamisele ( $Fr = 1$ ). Seetõttu on maksimaalse vooluhulga valemi kasutamine vabavoolu paisutamise ülesandes hästi põhjendatud. Uputatud ülevoolu puhul, milles vee vabapind paisu alumises bjefis on oluliselt kõrgem paisu lävest ( $h_u > 0$ ), on voolamine paisu lävel hüdraulilise vabavoolurežiimiga, mis vastab rahulikule voolamisele ( $Fr < 1$ ). Kuna paisu ülemises bjefis, lävel ja alumises bjefis on voolamine rahuliku hüdraulilise vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ), siis ideaalvoolu Bernoulli võrrandiga ei ole võimalik voolamise hüdraulilist olekut üheselt määrata. Hüdraulika õppematerjalis (VIIDE 8.5, „Hüdraulika erikursuse ülesannete kogu“, mille autoriks on Harri Tibar) on uputatud ülevoolu puhul kasutatud paisule Toricelli tüüpi vooluhulga valemit, mida on täiendatud uputusteguriga. Ülevoolu paisutuskõrguse arvutamisele võib kasutada arvutusliku vedelikudünaamika (ingl. *Computational Fluid Dynamics – CFD*) rakendusi madalvee tingimustel.
- Ülevool on uputamata kui paisu alumises bjefis on vabapind oluliselt madalamal läve kõrgusest ( $h_u < 0$ ). Ülevool võib olla uputamata ka eritingimusel ( $h_u > 0$ ). Uputamata ülevoolu vooluhulga määramisele kasutatakse ideaalvedeliku Bernoulli võrrandiga määratud valemeid, mis vastavad Froude'i suhtarvu kriteeriumile  $Fr = 1$ . Uputamata ja uputatud ülevoolude eristamise tingimuste määramisele kasutatakse kriteeriumit, mis seob alavee vabapinna ja lävepinna kõrguste erinevuse ( $h_u$ ) nn kriitilise voolamise kõrgusega ( $h_k$ ) paisul. Uputatud ülevoolu vooluhulga määramisele kasutatakse empiirilisi valemeid, mis ei vasta Froude'i suhtarvu kriteeriumile  $Fr = 1$ .



### 8.3 ISESEISEVA TÖÖ ÜLESANNE. MÜÜRÜLEVOOLU PAISUTUSKÕRGUS

ANTUD. Tehislikus voolusängis paisutatakse vett, st veepinna kõrgust reguleeritakse paisuga, mis on pika läve ja külgkitsendusega. Läve kõrgus  $h_{pais} = 1$  m ja läve pikkus  $l_{pais} = 4,75$  m. Etteantud vooluhulk  $Q = 1,0 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vee vabapind paisu alumises bjefis on oluliselt madalamal paisu lävest. Nelinurkristlõikega tehissängi laius paisu ülemises bjefis  $w_{\text{üb}} = 5$  m, lävel  $w = 1$  m ja alumises bjefis  $w_{\text{ab}} = 10$  m. Hüdraulilises voolusüsteemis on  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu = 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{\text{atm}}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{\text{atm}} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata proovimismeetodi ja numbrilise arvutuskeemiga hüdraulilisele voolusüsteemile paisutuskõrgus. Arvutada paisutuskõrgus etteantud vooluhulgale tehissängis, milles on pika läve ja külgkitsendusega pais. Arvutada vabavoolu Reynoldsi arv ja Froude'i suhtarvu kriteeriumiga hüdrauliline vabavoolurežiim paisu ülemises bjefis.



JOONIS 8-3 Hüdrauliline voolusüsteem. Ülevool pika lävega paisust

EELDUSED. Voolamine paisul, st ülevool on statsionaarne, mõõdukalt ebaühtlane. Vooluhulga määramisele kasutada ülevoolu põhivalemit. Eeldada, et paisul on rõhtne lävi, mille horisontaalne ulatus on oluliselt suurem paisutuskõrgusest, st tegemist on pika lävega paisuga ( $2 < h_{pais}/PK < 10$ ). Nelinurkristlõikega tehislukku voolusängi paigutatud paksu harjaga pais on risti voolamisega. Alavee vabapind on oluliselt madalamal tasemel võrreldes paisu lävega, st ülevool on uputamata ( $h_u < 0$ ).

VASTUSED

$$PK = 0,7914 \text{ m}$$

$$C_d^* = 0,3206$$

$$C_d = 0,8331$$

$$Re_{vs} = 0,89624 \cdot 10^5$$

$$Fr = 2,66 \cdot 10^{-2}$$

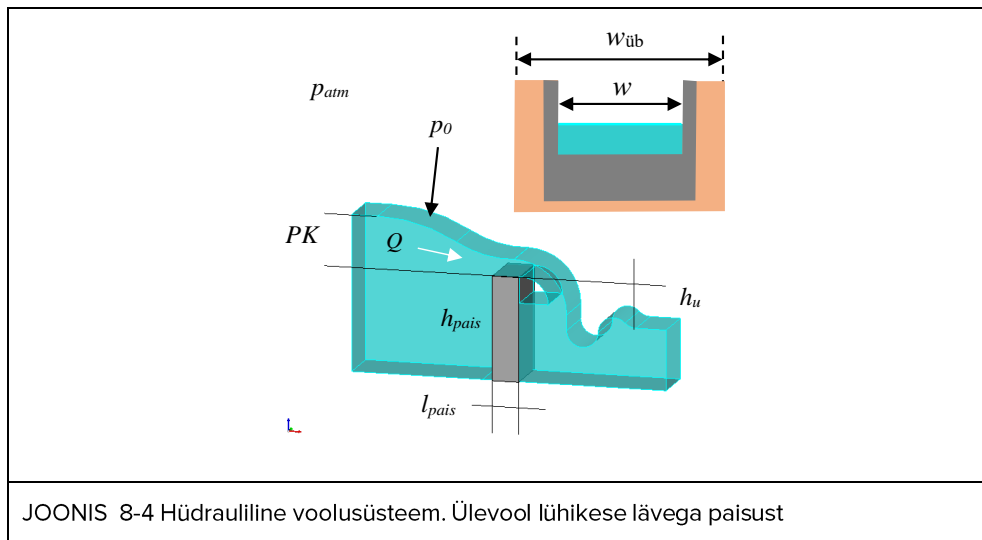
JÄRELDUS. Arvutustulemustest selgub, et statsionaarne, mõõdukalt ebaühtlane vabapinnaga voolamine paisu ülemises bjefis on turbulentne ( $Re_{vs} > 500$ ) ja hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ) paisu ülemises bjefis. Vabapinnaga voolamine vastab reaalvedeliku voolamise tingimusele, millele ülevoolutegur  $C_d^* < 0,385$ , vooluhulgategur  $C_d < 1$ .

**MÄRKUS.** Kontrollida kas ülevool vastab pika lävega paisu voolamise tingimusele.

## 8.4 LISAÜLESANNE 1. SEINÜLEVOOLU PAISUTUSKÕRGUS

ANTUD. Tehislikus voolusängis paisutatakse vett, st veepinna kõrgust reguleeritakse paisuga, mis on lühikese läve ja külgkitsendusega. Läve kõrgus  $h_{pais} = 2$  m ja läve pikkus  $l_{pais} = 0,33$  m. Etteantud vooluhulk  $Q = 0,6 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vee vabapind paisu alumises bjefis on oluliselt madalamal paisu lävest. Nelinurkristlõikega tehissängi laius paisu ülemises bjefis  $w_{\text{üb}} = 5$  m, lävel  $w = 1$  m ja alumises bjefis  $w_{\text{ab}} = 10$  m. Hüdraulilises voolusüsteemis on  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu = 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{\text{atm}}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{\text{atm}} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata proovimismeetodi ja numbrilise arvutusskeemiga hüdraulilisele voolusüsteemile paisutuskõrgus. Arvutada paisutuskõrgus etteantud vooluhulgale tehissängis, milles on lühikese läve ja külgkitsendusega pais. Arvutada vabavoolu Reynoldsi arv ja Froude'i suhtarvu kriteeriumiga hüdrauliline vabavoolu-režiim paisu ülemises bjefis.



JOONIS 8-4 Hüdrauliline voolusüsteem. Ülevool lühikese lävega paisust

EELDUSED. Voolamine paisul, st ülevool on statsionaarne, mõõdukalt ebahütlane. Vooluhulga määramisele kasutada ülevoolu põhivalemit. Eeldada, et paisul on rõhtne lävi, mille horisontaalne ulatus on oluliselt väiksem paisutuskõrgusest, st tegemist on lühikese lävega paisuga ( $h_{pais}/PK < 1$ ). Nelinurkristlõikega tehislikku voolusängi paigutatud õhukese harjaga pais on risti voolamisega. Alavee vabapind on oluliselt madalamal tasemel paisu lävest, st ülevool on uputamata ( $h_u < 0$ ).

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID.** Ideaalvedeliku Bernoulli võrrand ülevoolule, paisutamise Bernoulli võrrand, maksimaalse vooluhulga valem, ülevoolu põhivalem, trapetsristlõikega avasängi vabavoolu Froude'i arvu valem, lühikese lävega paisu ülevooluteguri valem, voolusängi Reynoldsi arv, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem

### VALEMID

Ideaalvedeliku Bernoulli võrrand ülevoolule on

$$h_{p\text{pais}} + PK \approx h_{p\text{pais}} + d + \frac{u^2}{2g},$$

milles  $h_{p\text{pais}}$  on paisuläve kõrgus,  $PK$  on paisutuskõrgus ja  $d$  on veekihi sügavus paisu lävel,  $g$  on raskuskiirendus ja  $u$  on voolukiirus paisu lävel. Paisutamise Bernoulli võrrandis on eeldatud, et paisu ülemises bjeffis on voolamise kinetiline energia oluliselt väiksem potentsiaalsest energiast. Potentsiaalne erienergia paisu ülemises bjeffis on määratud suurusega  $h_{p\text{pais}} + PK$ .

Hüdraulilisel vabavoolurežiimil, mis vastab nõ kriitilisele voolamisele, st Froude'i suhtarvu kriteeriumile  $Fr = 1$ , määratakse voolukiirus nelinurkristlõikega avasängis tingimusel:

$$u = \sqrt{gd}.$$

→

$$h_{p\text{pais}} + PK = h_{p\text{pais}} + d + \frac{u^2}{2g}$$

$$PK = d + \frac{d}{2} = \frac{3}{2}d$$

$$d = \frac{2}{3} PK$$

Nelinurkristlõikega ülevoolule laiusega  $w$  määratakse vooluhulk valemiga:

$$Q = u d w.$$

→

$$u = \sqrt{gd} = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} (PK)^{\frac{1}{2}}$$

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w$$

Paisutuskõrguse järgi määratud vooluhulga valemit nimetatakse maksimaalse vooluhulga valemiks juhul kui ülevoolule paisu lävel  $Fr = 1$ . Reaalvedeliku voolamise paisutamisele täiendatakse maksimaalse vooluhulga valemit vooluhulgateguriga  $C_d < 1$ . Ideaalvedeliku voolamise tingimustel on vooluhulgategur  $C_d = 1$ .

Reaalvoolu maksimaalse vooluhulga valem nelinurkse ristlõikega ülevoolule on

$$Q = C_d g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w,$$

milles  $C_d$  on vooluhulgategur ( $C_d < 1$ ).

Ülevoolu põhivalemi võib esitada teisendusega:

$$Q = C_d g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}} w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}} = C_d^* w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}},$$

milles ülevoolutegur on

$$C_d^* = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}}.$$

Lühikese lävega ja külkitsendusega paisule võib ülevooluteguri määrata empiirilise valemiga:

$$C_d^* = C_1^* C_2^*,$$

milles

$$C_1^* = 0,405 + \frac{0,0027}{PK} - 0,03 \frac{w_{\text{üb}} - w}{w_{\text{üb}}},$$

$$C_2^* = 1 + 0,55 \left(\frac{w}{w_{\text{üb}}}\right)^2 \left(\frac{PK}{PK + h_{\text{pais}}}\right)^2$$

(VIIDE 8.5, „Hüdraulika erikursuse ülesannete kogu“).

Reaalvedeliku voolamisele  $C_d^* < 0,385$ . Ülevoolutegur  $C_d^* = 0,385$  vastab ideaalvedeliku voolamise tingimustele.

Voolusängi Reynoldsi arv on määratud valemiga

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur ja  $R_h$  on hüdrauliline raadius. Hüdrauliline raadius  $R_h = A_e/\chi$ , milles  $A_e$  on voolamise ristlõike pind ehk elavlõige, ning  $\chi$  on voolamise ristlõike perimeeter ehk märgpiire, millest on välja jäetud vabapind. Madalveelisele voolamisele laias voolusängis on  $R_h \approx d$ , milles  $d$  on veesügavus.

**MÄRKUS.** Laminaarse ja turbulentse veevoolu ülemineku voolusängi Reynoldsi arvu kriitiline väärtus on 500. (Rõhulisele voolamisele ümartorus on ümartoru Reynoldsi arv  $Re = 4 Re_{vs}$ . Täistäitumusega ümartorule on  $R_h = d_s/4$ , milles  $d_s$  on toru sisediaameeter.)

Nelinurkristlõikega voolusängi Reynoldsi arv paisu ülemises bjefis määratakse valemiga:

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu} = \frac{u A_e}{\nu \chi} = \frac{u}{\nu} \frac{w_{\text{üp}} (h_{\text{pais}} + PK)}{(w_{\text{üp}} + 2 (h_{\text{pais}} + PK))},$$

milles  $u$  on ülavee voolukiirus,  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur ja  $R_h$  on hüdrauliline raadius paisu ülemises bjefis. Hüdrauliline raadius paisu ülemises bjefis on määratud elavlõike pindala  $A_e = w_{\text{üp}} (h_{\text{pais}} + PK)$  ja märgpiirde pikkuse  $\chi = w_{\text{üp}} + 2 (h_{\text{pais}} + PK)$  jagatisega. Laiale avasängile võib kasutada voolusängi Reynoldsi arvu valemit

$$Re_{vs} \approx \frac{u (h_{\text{pais}} + PK)}{\nu}.$$

Vabapinnaga voolamisele samade nõlvustega trapetsristlõikega avasängis on Froude'i arv määratud valemiga

$$Fr = \sqrt{\frac{Q^2}{g \frac{(h w_{\text{üp}} + h^2 m_n)^3}{(w_{\text{üp}} + 2 h m_n)}}} = \sqrt{\frac{u^2}{g \frac{(h w_{\text{üp}} + h^2 m_n)}{(w_{\text{üp}} + 2 h m_n)}}},$$

milles  $h$  on vabapinna kõrgus voolusängi aluspõhjast ( $h = -(-d) = d$ ),  $w_{\text{üp}}$  on voolusängi põhjalaius ja  $m_n = \cot(\theta)$  on nõlvustegur, milles  $\theta$  on nõlva välisnurk. Trapetsristlõikega avasängi vabavoolu Froude'i arvu valemis on kasutatud voolukiiruse ja vooluhulga seost  $u = Q / (h w_{\text{üp}} + h^2 m)$ . Vastavalt Froude'i suhtarvu kriteeriumile vastab rahulikule voolamisele  $Fr < 1$ , kriitilisele voolamisele  $Fr = 1$  ja kärealele voolamisele  $Fr > 1$ .

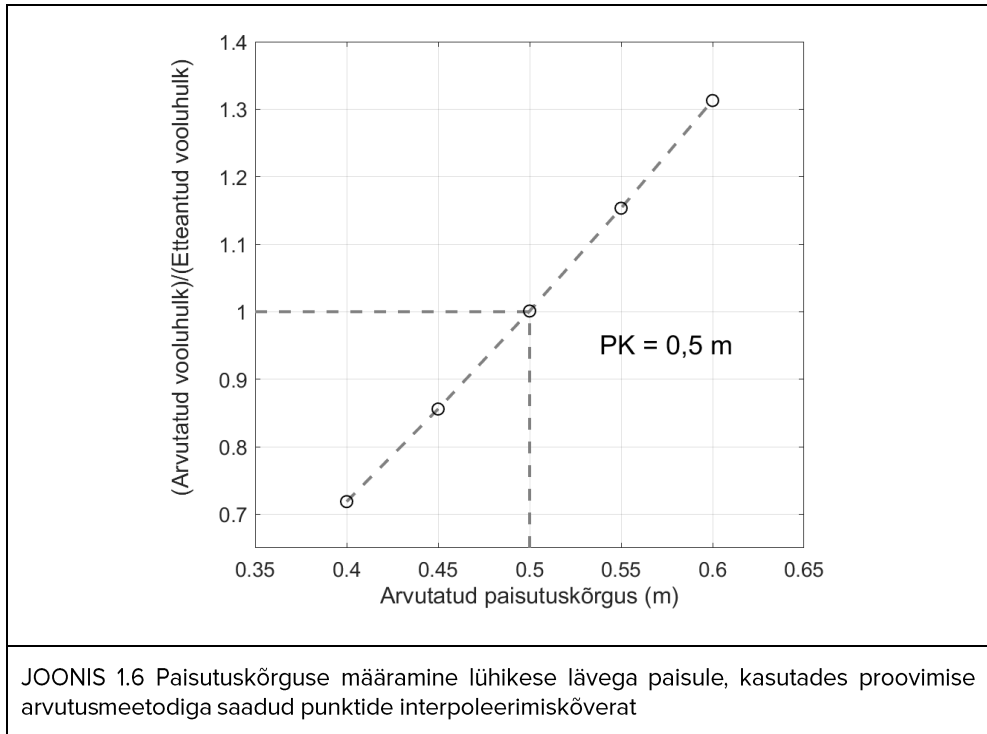
Vabavoolule nelinurkristlõikega tehissängis ( $m_n = 0$ ) on Froude'i arv paisu ülemises bjefis määratud valemiga

$$Fr = \sqrt{\frac{u^2}{g (h_{\text{pais}} + PK)}} = \sqrt{\frac{Q^2}{g (h_{\text{pais}} + PK)^3 w_{\text{üp}}^2}},$$

milles  $u$  on voolukiirus paisu ülemises bjefis ja  $Q = u w_{\text{üp}} (h_{\text{pais}} + PK)$  on vooluhulk.

ARVUTUS. Paisutuskõrgus

	$PK$ (m)	$C_d^*$	$R_h$ (m)	$Q$ ( $m^3 \cdot s^{-1}$ )	$Re_{vs}$	$Fr$
i	0,4	0,3848	1,6216	0,4312	$0,22412 \cdot 10^5$	0,0037
ii	0,45	0,3841	1,6443	0,5135	$0,26512 \cdot 10^5$	0,0043
iii	0,5	0,3835	1,6667	0,6006	$0,30798 \cdot 10^5$	0,0049
iv	0,55	0,3830	1,6887	0,6920	$0,35252 \cdot 10^5$	0,0054
v	0,6	0,3826	1,7105	0,7877	$0,39861 \cdot 10^5$	0,0060



JOONIS 1.6 Paisutuskõrguse määramine lühikese lävega paisule, kasutades proovimise arvutusmeetodiga saadud punktide interpoleerimiskõverat

JÄRELDUS. Vooluhulgale  $Q = 0,6 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  on voolusängi Reynoldsi arv  $Re_{vs} = 0,31 \cdot 10^5$  ja Froude'i arv  $Fr = 0,0049$  paisu ülemises bjefis. Järelikult on statsionaarne, mõõdukalt ebaühtlane vabapinnaga voolamine paisu ülemises bjefis turbulentne ( $Re_{vs} > 500$ ) ja hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ).

Numbriline arvutusskeem. Paisutuskõrgus

Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod

### VALEMID

Veafunktsioon:

$$ERF(PK_j) = Q_j - Q,$$

milles  $PK_j$  on ülevoolu arvutuslik paisutuskõrgus,  $Q_j$  on arvutuslik vooluhulk ja  $Q$  on etteantud vooluhulk.

Veafunktsiooni tuletis:

$$\frac{dERF(PK_j)}{dPK_j} = \frac{dQ_j}{dPK_j},$$

milles on eeldatud, et etteantud vooluhulk  $Q = \textit{konstant}$ .

Arvutusliku vooluhulga määrame valemiga:

$$Q_j = C_{d_j}^* w \sqrt{2g} (PK_j)^{\frac{3}{2}},$$

milles

$$C_{d_j}^* = \left( 0,405 + \frac{0,0027}{PK_j} - 0,03 \frac{w_{\text{üb}} - w}{w_{\text{üb}}} \right) \left( 1 + 0,55 \left( \frac{w}{w_{\text{üb}}} \right)^2 \left( \frac{PK_j}{PK_j + h_{\text{pais}}} \right)^2 \right).$$

→

$$\begin{aligned} \frac{dERF(PK_j)}{dPK_j} = \frac{d}{dPK_j} & \left( \left( 0,405 + \frac{0,0027}{PK_j} - 0,03 \frac{w_{\text{üb}} - w}{w_{\text{üb}}} \right) \left( 1 + 0,55 \left( \frac{w}{w_{\text{üb}}} \right)^2 \left( \frac{PK_j}{PK_j + h_{\text{pais}}} \right)^2 \right) \right. \\ & \left. \left( w \sqrt{2g} (PK_j)^{\frac{3}{2}} \right) \right) = L_{1j} + L_{2j} + L_{3j}, \end{aligned}$$

milles

$$L_{1j} = \left( -\frac{0,0027}{PK_j^2} \right) \left( 1 + 0,55 \left( \frac{w}{w_{\text{üb}}} \right)^2 \left( \frac{PK_j}{PK_j + h_{\text{pais}}} \right)^2 \right) \left( w \sqrt{2g} (PK_j)^{\frac{3}{2}} \right),$$

$$\begin{aligned} L_{2j} = & \left( 0,405 + \frac{0,0027}{PK_j} - 0,03 \frac{w_{\text{üb}} - w}{w_{\text{üb}}} \right) \left( 2 \right. \\ & \cdot 0,55 \left( \frac{w}{w_{\text{üb}}} \right)^2 \left( \frac{PK_j}{PK_j + h_{\text{pais}}} \right) \left( \frac{1}{PK_j + h_{\text{pais}}} \right. \\ & \left. \left. - \frac{PK_j}{(PK_j + h_{\text{pais}}}^2 \right) \right) \left( w \sqrt{2g} (PK_j)^{\frac{3}{2}} \right), \end{aligned}$$

$$L_{3j} = \left( 0,405 + \frac{0,0027}{PK_j} - 0,03 \frac{w_{\text{üb}} - w}{w_{\text{üb}}} \right) \left( 1 + 0,55 \left( \frac{w}{w_{\text{üb}}} \right)^2 \left( \frac{PK_j}{PK_j + h_{\text{pais}}} \right)^2 \right) \left( w \sqrt{2g} \frac{3}{2} (PK_j)^{\frac{1}{2}} \right).$$



Veafunktsioonist suunatud tuletise võtmise reegel:

$$\frac{dERF(PK_j)}{dPK_j} = \frac{0 - ERF(PK_j)}{PK_{j+1} - PK_j}$$

võimaldab kasutusele võtta Tayloriga väärtuse 1-järgu tuletise täpsusega:

$$PK_{j+1} = PK_j - \frac{ERF(PK_j)}{\frac{dERF(PK_j)}{dPK_j}}.$$

Numbrilise arvutuskeemi põhivalemi üldkuju on

$$PK_{j+1} = PK_j - \frac{C_{d_j}^* w \sqrt{2g} (PK_j)^{\frac{3}{2}} - Q}{L_{1j} + L_{2j} + L_{3j}},$$

milles arvutuslikud funktsioonid  $C_{d_j}^*$ ,  $L_{1j}$ ,  $L_{2j}$  ja  $L_{3j}$  on eelnevalt esitatud valemitega.

ARVUTUSSKEEM (Seinülevoolu põhivalem)

Numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku paisutuskõrguse valem (iteratsioonmeetodi põhivalem):

$$PK_{j+1} = PK_j - \frac{Q_j - Q}{L_{1j} + L_{2j} + L_{3j}},$$

milles

$$L_{1j} = \left( -\frac{0,0027}{PK_j^2} \right) \left( 1 + 0,55 \left( \frac{w}{w_{\text{üb}}} \right)^2 \left( \frac{PK_j}{PK_j + h_{\text{pais}}} \right)^2 \right) \left( w \sqrt{2g} (PK_j)^{\frac{3}{2}} \right),$$

$$L_{2j} = \left( 0,405 + \frac{0,0027}{PK_j} - 0,03 \frac{w_{\text{üb}} - w}{w_{\text{üb}}} \right) \left( 2 \cdot 0,55 \left( \frac{w}{w_{\text{üb}}} \right)^2 \left( \frac{PK_j}{PK_j + h_{\text{pais}}} \right) \left( \frac{1}{PK_j + h_{\text{pais}}} - \frac{PK_j}{(PK_j + h_{\text{pais}})^2} \right) \right) \left( w \sqrt{2g} (PK_j)^{\frac{3}{2}} \right),$$

$$L_{3j} = \left( 0,405 + \frac{0,0027}{PK_j} - 0,03 \frac{w_{\text{üb}} - w}{w_{\text{üb}}} \right) \left( 1 + 0,55 \left( \frac{w}{w_{\text{üb}}} \right)^2 \left( \frac{PK_j}{PK_j + h_{\text{pais}}} \right)^2 \right) \left( w \sqrt{2g} \frac{3}{2} (PK_j)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Arvutusliku vooluhulga valem:

$$Q_j = C_{d_j}^* w \sqrt{2g} (PK_j)^{\frac{3}{2}},$$

milles

$$C_d^* = C_1^* C_2^* ,$$

milles

$$C_1^* = 0,405 + \frac{0,0027}{PK} - 0,03 \frac{w_{\text{üb}} - w}{w_{\text{üb}}} ,$$

$$C_2^* = 1 + 0,55 \left( \frac{w}{w_{\text{üb}}} \right)^2 \left( \frac{PK}{PK + h_{\text{pais}}} \right)^2 .$$

ARVUTUS. Paisutuskõrgus

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.
$PK_j$ (m)	1	0,5686	0,5018	0,4997	0,4997
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	1,6873	0,7271	0,6038	0,6000	0,6000

	6 iter.	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$PK_j$ (m)	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	0,6000	0,6000	0,6000	0,6000	0,6000

VASTUSED

$$PK = 0,4997 \text{ m}$$

$$C_d^* = 0,3835$$

$$C_d = 0,9963$$

$$Re_{vs} = 0,30771 \cdot 10^5$$

$$Fr = 9,7 \cdot 10^{-3}$$

JÄRELDUS. Arvutustulemustest selgub, et statsionaarne, mõõdukalt ebaühtlane vabapinnaga voolamine paisu ülemises bjefis on turbulentne ( $Re_{vs} > 500$ ) ja hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ). Vabapinnaga voolamine vastab reaalvedeliku voolamise tingimusele, millele ülevoolutegur  $C_d^* < 0,385$ , vooluhulgategur  $C_d < 1$ .

**MÄRKUS.** Kontrollida kas ülevool vastab lühikese lävega ülevoolu tingimusele.

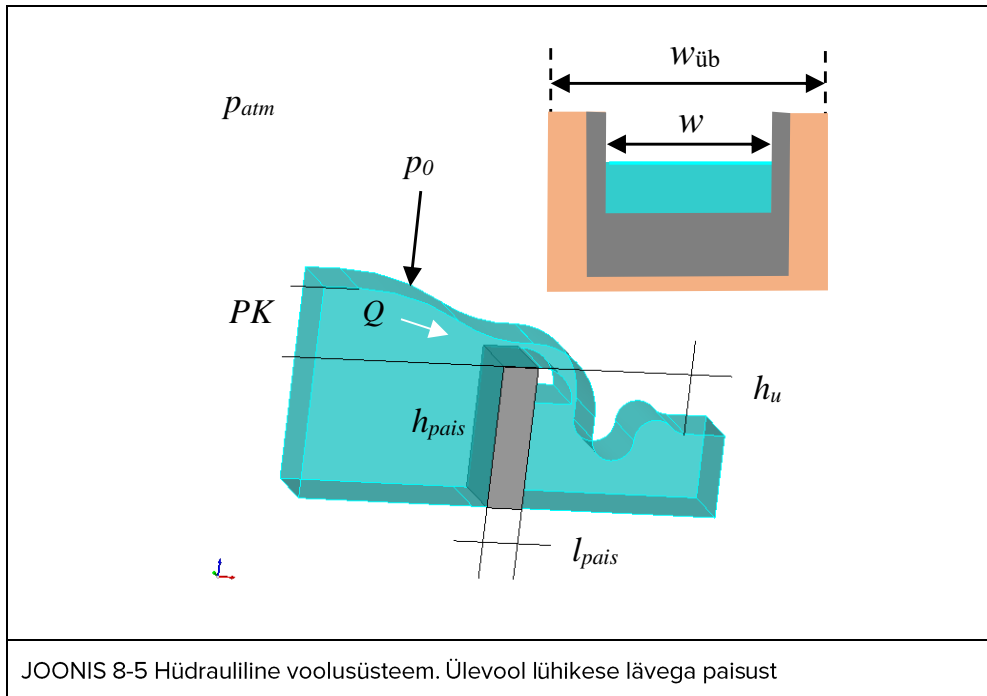
## MÄRKUSED. Seinülevool

- Hüdraulika õppematerjalides (VIITED 8.2, „Hüdraulika ja pumbad“, 8.3, „Hüdraulika“, 8.5, „Hüdraulika erikursuse ülesannete kogu“) on kasutusel mõiste *õhukese seinaga ülevool*. Käesolevas töös on kasutatud ka mõisteid *lühikese lävega ülevool ja õhukese harjaga ülevool*.
- Reaalvedeliku voolamisele on ülevoolu koefitsient  $C_d^* < 0,385$ . Ülevoolutegur  $C_d^* = 0,385$  vastab ideaalvedeliku voolamise tingimustele, vt hüdraulika õppematerjalid (VIITED 8.2, „Hüdraulika ja pumbad“, 8.3, „Hüdraulika“, 8.5, „Hüdraulika erikursuse ülesannete kogu“). Ülevooluteguri defineerimine ülevoolu põhivalemile on seotud empiirilise valemi määramatusega, sest ideaalvedeliku vooluhulk sõltub koefitsiendist, mis ei ole üheselt määratud.
- Voolusängi Reynoldsi arvu ja Froude'i arvu võib arvutada ka voolamise tehissängi paisu asukohas. Tuleb märkida, et kriitilise voolamise ristlõike asukoht lühikesel lävel on hästi määratud. Statsionaarne, mõõdukalt ebahürtlane vabapinnaga voolamine läve asukohas on turbulentne ( $Re_{vs} > 500$ ) ja kriitilise hüdraulilise voolurežiimiga ( $Fr = 1$ ).
- Uputamata ülevoolu puhul on voolamine õhukese harjaga paisul hüdraulilise vabavoolurežiimiga, mis vastab kriitilisele voolamisele ( $Fr = 1$ ). Seetõttu on maksimaalse vooluhulga valemi kasutamine reaalvoolu paisutamise ülesandes hästi põhjendatud. Uputatud ülevoolu puhul, milles vee vabapind paisu alumises bjefis on oluliselt kõrgem paisu lävest ( $h_u > 0$ ), on voolamine paisu lävel hüdraulilise vabavoolurežiimiga, mis vastab rahulikule voolamisele ( $Fr < 1$ ). Kuna paisu ülemises bjefis, lävel ja alumises bjefis on voolamine rahuliku hüdraulilise vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ), siis ideaalvoolu Bernoulli võrrandiga ei ole võimalik voolamise hüdraulilist olekut üheselt määrata. Hüdraulika õppematerjalid (VIIDE 8.5, „Hüdraulika erikursuse ülesannete kogu“) on uputatud ülevoolu puhul kasutatud õhukese harjaga paisule paisutamise põhivalemit, mida on täiendatud uputusteguriga. Ülevoolu paisutuskõrguse arvutamisele võib kasutada arvutusliku vedelikudünaamika (ingl. *Computational Fluid Dynamics – CFD*) rakendusi madalvee tingimustel.
- Ülevool on uputamata kui paisu alumises bjefis on vabapind oluliselt madalamal läve kõrgusest ( $h_u < 0$ ). Ülevool võib olla uputamata ka eritingimusel ( $h_u > 0$ ). Uputamata ülevoolu vooluhulga määramisele kasutatakse ideaalvedeliku Bernoulli võrrandiga määratud valemeid, mis vastavad Froude'i suhtarvu kriteeriumile  $Fr = 1$ . Uputamata ja uputatud ülevoolude eristamise tingimuste määramisele kasutatakse kriteeriumit, mis seob alavee vabapinna ja lävepinna kõrgusete erinevuse ( $h_u$ ) nn kriitilise voolamise kõrgusega ( $h_k$ ) paisul. Uputatud ülevoolu vooluhulga määramisele kasutatakse empiirilisi valemeid, mis ei vasta Froude'i suhtarvu kriteeriumile  $Fr = 1$ .

## 8.5 LISAÜLESANNE 2. SEINÜLEVOOLU PAISUTUSKÕRGUS

ANTUD. Tehislikus voolusängis paisutatakse vett, st veepinna kõrgust reguleeritakse paisuga, mis on lühikese läve ja külgkitsendusega. Läve kõrgus  $h_{pais} = 2$  m ja läve pikkus  $l_{pais} = 0,47$  m. Etteantud vooluhulk  $Q = 1,0 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vee vabapind paisu alumises bjefis on oluliselt madalamal paisu lävest. Nelinurkristlõikega tehissängi laius paisu ülemises bjefis  $w_{\text{üb}} = 10$  m, lävel  $w = 1$  m ja alumises bjefis  $w_{\text{ab}} = 15$  m. Hüdraulilises voolusüsteemis on  $10$  °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu = 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{\text{atm}}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{\text{atm}} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata proovimismeetodi ja numbrilise arvutusskeemiga hüdraulilisele voolusüsteemile paisutuskõrgus. Arvutada paisutuskõrgus etteantud vooluhulgale tehissängis, milles on lühikese läve ja külgkitsendusega pais. Arvutada vabavoolu Reynoldsi arv ja Froude'i suhtarvu kriteeriumiga määrata hüdrauliline vabavoolurežiim paisu ülemises bjefis.



EELDUSED. Voolamine paisul, st ülevool on statsionaarne, mõõdukalt ebahühtlane. Vooluhulga määramisele kasutada ülevoolu põhivalemit. Eeldada, et paisul on rõhtne lävi, mille horisontaalne ulatus on oluliselt väiksem paisutuskõrgusest, st tegemist on lühikese lävega paisuga- ( $h_{pais}/PK < 1$ ). Nelinurkristlõikega tehislükku voolusängi paigutatud õhukese harjaga pais on risti voolamisega. Alavee vabapind on oluliselt madalamal tasemel paisu lävest, st ülevool on uputamata ( $h_u < 0$ ).

VASTUSED

$$PK = 0,7043 \text{ m}$$

$$C_d^* = 0,3820$$

$$C_d = 0,9924$$

$$Re_{vs} = 0,49922 \cdot 10^5$$

$$Fr = 0,0072$$

JÄRELDUS. Arvutustulemustest selgub, et statsionaarne, mõõdukalt ebahühtlane vabapinnaga voolamine paisu ülemises bjeffis on turbulentne ( $Re_{vs} > 500$ ) ja hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ). Vabapinnaga voolamine vastab reaalvedeliku voolamise tingimusele, millele ülevoolutegur  $C_d^* < 0,385$ , vooluhulgategur  $C_d < 1$ .

**MÄRKUS.** *Kontrollida kas ülevool vastab lühikese lävega paisu voolamise tingimusele.*

## 8.6 VIITED

8.1 OÜ Alkranel. (2005). *Alternatiivsete sademevee äravoolu- ja kogumissüsteemide uurimustöö.*

8.2 Maastik, A., Haldre, H., Koppel, T. & Paal, L. (1995). *Hüdraulika ja pumbad.* OÜ Greif.

8.3 Tepaks, L. (1967). *Hüdraulika.* Valgus.

8.4 *Vesiehitised sisevetel.* EVS 924:2015.

8.5 Tibar, H. (1985). *Hüdraulika erikursuse ülesannete kogu.* Tallinna Polütehniline Instituut, Sanitaartehnika kateeder.

## 9 EHITATUD AVA

### 9.1 PRAKTILINE OSA. SUUREMÕÕTMELISED AVAD

#### 9.1.1 EHITIS. HÜDROTEHNILINE RAJATIS

Suuremõõtmelist ava kasutatakse hüdrotehnilise rajatise juures, et võimaldada veekogu vabapinna kõrgust kiiresti reguleerida. Väikesemõõtmeliseks nimetatakse ava, mille kõrgusmõõde on 5...10 korda väiksem rõhukõrgusest, mis on avale selle pinnakeskme suhtes määratud (VIIDE 9.1, „Maaparanduse käsiraamat. Maaparanduse alused“). Vastasel juhul nimetatakse ava suuremõõtmeliseks. Ava pinnakeskme sügavus vabapinnast määrab ära ka rõhukõrguse pinnakeskme suhtes. Erinevalt väikesemõõtmelisest avast ei ole suuremõõtmelise ava puhul voolamise kiirusjaotus ava erinevates sügavuspunktidest rõhukõrgusest sõltumatu. Suuremõõtmelise ava ülaseriv on alumisest oluliselt väiksema veerõhu all ning seetõttu on veerõhust sõltuv voolukiirus ava ülemises osas väiksem kui voolukiirus ava sügavamas osas. Suuremõõtmelises avas kehtib rõhukõrguse järgi määratud voolukiiruse vertikaaljaotus.

#### 9.1.2 VOOLUREŽIIM. UPUTAMATA JA UPUTATUD LÄBIVOOL

Avad võivad olla kas uputamata või uputatud, olenevalt sellest, kas veepind ava väljavoolu osas on allpool ava ülemist serva (uputamata ava) või ulatub vähemalt ava ülemise servani (uputatud ava). Kui ava taga on õhuruum, siis on ava uputamata. Uputatud ava puhul on määrav ava läbivoolu alavee vabapinna kõrgus.

Ava läbivooluga määratud liikuvate vedelikuosade trajektoorid (mis vastavad voolukiiruse väljaga määratud voolujoontele) võivad kõverduda nii, et aheneb avast väljavoolav vedelikujuuga. See tähendab, et voolamist avas ei määrata ainult selle sisemõõtmega. Kõige väiksem on joa ristlõige ligikaudu ava sisemõõtme kaugusel mahuti sisepinnast ning seda nimetatakse ahasristlõikeks. Ahasristlõikes on voolujooned praktiliselt paralleelsed. Mida lähemal asub ava mahuti seintele (kaasa arvatud aluspõhi ja vabapind), mis piirnevad avaga seinaga, seda rohkem mõjutavad need läbivoolu avast, vähendades joa ahenemist. Kui ava paikneb voolamist suunava pinna lähedal, siis kõverduvad voolujooned vähem ning vooluhulk avast sõltub rohkem hõõrdest piirdel. Ava läbilaskevõime võib olla suurem, kui ava paikneb anuma nurgas või külgselina ääres, kus ahenemine on mittetäielik. Voolamise ahenemisel avas tekib voolusuunaga vastupidine voolujoud, mis määrab avale kohttakistuse (vt Borda survekao valem avale, VIIDE 9.2, „Hüdraulika ja pumbad“).

Ehitatud ava võib täielikult või osaliselt sulgeda varjaga. Varja liigutamisega reguleeritakse vooluhulka või veetaset. Konstruksiooni poolest on varjasid mitmesuguseid (VIIDE 9.3, „Vooluveekogu paisutamiseks nõutava vee erikasutusloa koostamise juhend“). Sõltuvalt rajatise funktsioonist juhitakse veevool kas üle varja või varja alt. Tavaliselt dimensioonitakse vooluhulgale avad, et tagada vajalik läbivool. Ava optimeeritakse lähtuvalt selle kasutamisetstarbest hüdraulilise voolusüsteemi elemendina (nt reservuaaride täitmine/tühjendamine teatud kriitilise aja jooksul). Sõltuvalt sellest, kas hüdrotehnilise rajatise alumises bjefis olev alavesi tõkestab oluliselt avast läbivoolu või mitte, võib suuremõõtmeline ava (varja-ava) olla uputatud (mittevaba-ava) või uputamata (vaba-ava). Varja alt voolamise puhul on tegemist uputatud avaga, kui vooluhüpe alumises bjefis on kaetud, ning uputamata avaga, kui vooluhüpe tekib otse ava taga või eemaldub sellest (VIIDE 9.2, „Hüdraulika ja pumbad“). Varja asendiga on võimalik reguleerida jao voolamise liikumishulka (ka vooluhoogu), mis määrab ära vooluhüppe tekkimise asukoha.

### 9.1.3 SISSEJUHATUS ÜLESANDESSE. PÕHIVALEMID

Ehitatud ava hüdrauliline arvutus voolamise hüdraulika valemitega on eriülesanne. Ava sisemõõdet on võimalik määrata ülesande põhivalemite – nagu reaalvoolu Bernoulli võrrand, Weisbachi survekao valem, ava Reynoldsi arvu valem või teised valemid – kaudu proovimismeetodi ja numbrilise arvutusskeemiga. Avade puhul kasutatakse peamiselt seinavaa kujuga määratud kohaliku takistusega voolamise tingimusi. Ristküliku- ja ümarakujulise avade dimensioonimiseks kasutatakse suuremõõtmelise ava vooluhulga valemit, kuhu on integreeritud üle sügavuse muutuv voolukiirus. Ava vooluhulga ja veekihtide kõrguse seose integraalvõrrandi puhul kasutatakse muutuva kõrgusega pinnaelementi. Suuremõõtmelise ava arvutamisel eeldatakse, et vabapind ava alumises bjefis ei mõjuta oluliselt voolamise dünaamikat hüdraulilises voolusüsteemis ehk tegemist on uputamata avaga, kus alavee vabapind on madalamal ava alumisest servast. Uputatud ava puhul võib kasutada sarnast suuremõõtmelise ava valemit, milles vooluhulk sõltub veepindade kõrguste erinevusest kummalgi pool ava. Ehitatud ava hüdraulilise arvutuse puhul eeldatakse, et voolujooned on praktiliselt paralleelsed ja voolamise rõhk on hüdrostaatiline.



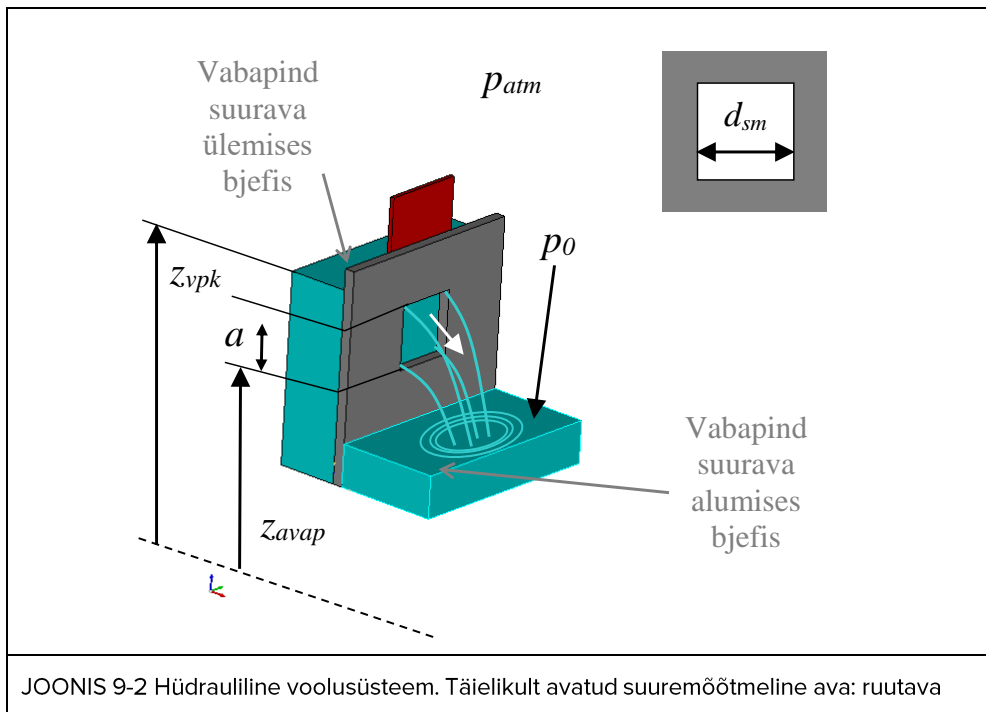
JOONIS 9-1 Paisu regulaatorsõlm varjadega avadel, Põltsamaa. (Foto: Ülar Jõesaar, 2014)



## 9.2 PÕHIÜLESANNE. RUUTAVA DIMENSIOONIMINE

ANTUD. Veekogu kaitseehitise, tammi seinava kaudu veevoolu reguleerimisele kasutatakse kilpsiibrit. Läbivoolu veehulga määrab suuremõtmeline ava, mille ristlõige on võrdsete külgedega nelinurk ehk ava on ruutristlõikega. Ruutava aluspõhja fikseeritud kõrgus  $z_{avap} = 13$  m võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult. Veekogu vabapinna fikseeritud kõrgus  $z_{vkp} = 15$  m võrdlusnivoost, mis on seda ka suletud kilpsiibriga olukorras. Täielikult avatud kilpsiibriga avale on etteantud vooluhulk  $Q = 5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Ruutava vooluhulgategur  $C_d = 0,926$ . Hüdraulilises voolusüsteemis on  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Veekogu vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata proovimismeetodi ja numbrilise arvutusskeemiga hüdraulilise voolusüsteemi suuremõtmelise ava sisemõõde. Arvutada ruutava sisemõõde etteantud vooluhulgale, kui veekogu vabapinna kõrgus on muutumatu ja kilpsiiber on täielikult avatud. Arvutada ruutava läbivoolule ava Reynoldsi arv.



EELDUSED. Voolamine veekogu ja suuremõõtmelise ava voolusüsteemis on statsionaarne, selle määrab kukkuv juga ava alumises bjefis. Vooluhulga määramisel kasutada suuremõõtmelise ava vooluhulga valemit, milles rõhk ja voolukiirus muutub oluliselt vertikaalsihis. Suuremõõtmeline ava on risti veekogu vabapinnaga. Ruutava alumises bjefis on vabapind oluliselt madalamal ava aluspõhjast, st väljavool avast on täielikult uputamata. Joaaluses ruumis on atmosfääri rõhk, õhurõhk ei moonuta joa kuju ava alumises bjefis. Ava sisemõõtmelise määramisele kasutada Newtoni iteratsioonmeetodit.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Reaalvoolu Bernoulli võrrand, reaalvedeliku Bernoulli võrrand läbivoolule täielikult uputamata avale, Weisbachi survekao valem, ava Reynoldsi arvu valem, suuremõõtmelise ava vooluhulga valem, ava vooluhulgateguri valem, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem**

## VALEMID

Veekogu vabapinnaga ja sellega risti oleva avaga määratud voolutorule võib koostada reaalvoolu Bernoulli võrrandi:

$$z_{vkp} + \frac{p_{vkp}}{\rho g} + \frac{u_{vkp}^2}{2g} = z_{ava} + \frac{p_{ava}}{\rho g} + \frac{u_{ava}^2}{2g} + h_t,$$

milles veekogu vabapinna kõrgus, rõhk veepinnal ja voolukiirus ava ülemises bjefis on vastavalt  $z_{vkp}$ ,  $p_{vkp}$  ja  $u_{vkp}$ , mis vastab fikseeritud vabapinna kõrgusega veekogu tingimustele. Suuremõõtmelise ava veekihi kõrgus, rõhk ja voolukiirus on vastavalt  $z_{ava}$ ,  $p_{ava}$  ja  $u_{ava}$ , mis vastab veekogu väljavoolu tingimustele avas. Vee erikaal on  $\rho g$ , milles vee tihedus on  $\rho$  ja raskuskiirendus on  $g$ . Survekadu on  $h_t$ , mis jagatakse hõõrdesurvekaoks  $h_l$  ja kohtsurvekaoks  $h_k$ .

Rõhukõrguste vahe ehk rõhuvahekõrgus:

$$\frac{p_{vkp}}{\rho g} - \frac{p_{ava}}{\rho g} = \frac{p_{vkp} - p_{ava}}{\rho g} = h_{rvk}.$$

Kuna nii ava ülavee kui ka alavee vabapinnal on rõhk määratud õhurõhuga, st  $p_{vkp} = p_0$  ja  $p_{ava} \approx p_0$ , siis sellest järeldub, et rõhuvahekõrgus  $h_{rvk} \approx 0$ .

Reaalvoolu Bernoulli võrrandist järeldub seos, mis on reaalvedeliku Bernoulli võrrand läbivoolule täielikult uputamata avast:

$$z_{vkp} \approx z_{ava} + \frac{u_{ava}^2}{2g} + h_k,$$

milles veekogu vabapinnale liikumiskiirus määrab voolukiiruse  $u_{vpk} \rightarrow 0$  ja survekadu  $h_t$  on määratud kui kohtsurvekadu  $h_k$ .

Weisbachi survekao valem kohtsurvekao määramisele on

$$h_l = k_L \frac{u^2}{2g},$$

milles  $k_L$  on kohttakistustegur (mõõdühikuta suurus  $[k_L] = 1$ ) ja  $u (= u_{ava})$  on voolamise ruumkiirus veekogu väljavoolus. Voolamisele veekogust avasse toimub nõ voolujoonte tihenemine. Vastavalt valitud vooluhulgategurile on voolamise ahenemise olukorras avale kohttakistus  $k_{Lava} \approx 0,1662$ .

Reynoldsi arvu läbivoolule avast võib määrata kui ava Reynoldsi arvu:

$$Re_{ava} = \frac{u R_h}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur ja  $R_h$  on hüdrauliline raadius.

Voolamisele täistäitumusega ruustristolõikega veejuhtmes, sisemõõtmega  $d_{sm}$ , võib hüdraulilise raadiuse määrata valemiga:

$$R_h = \frac{A_e}{\chi} = \frac{d_{sm}^2}{4 d_{sm}} = \frac{d_{sm}}{4},$$

milles  $A_e$  on elavlõige ja  $\chi$  on märgpiire.

**MÄRKUS.** Voolamisele täistäitumusega ümartorus, sisediameetriga  $d_s = 4 R_h$ , määratakse Reynoldsi arv valemiga, mis on ümartoru Reynoldsi arvu valem:

$$Re = \frac{u d_s}{\nu} = \frac{u 4 R_h}{\nu}.$$

Kuna veevoolule ümartorus vastab kriitiline Reynoldsi arv 2000, siis järelikult laminaarse ja turbulentsse veevoolu ülemineku kriitiline ava Reynoldsi arv on 500.

Reaalvedeliku Bernoulli võrrand läbivoolule täielikult uputamata avast on

$$z_{vkp} = z_{ava} + \frac{u_{ava}^2}{2g} + h_k$$

→

$$z_{vkp} = z_{ava} + \frac{u^2}{2g} + k_{Lava} \frac{u^2}{2g}$$

$$z_{vkp} = z_{ava} + (1 + k_{Lava}) \frac{u^2}{2g}$$

$$u^2(1 + k_{Lava}) = 2g(z_{vkp} - z_{ava})$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{1 + k_{Lava}}} \sqrt{2g(z_{vkp} - z_{ava})}$$

$$u = C_u \sqrt{2g(z_{vkp} - z_{ava})}$$

Ava kiirustegur on määratud valemiga

$$C_u = \frac{1}{\sqrt{1 + k_{Lava}}}$$

Suuremõõtmelise ava vooluhulga valem on

$$Q = \int C_u \sqrt{2g(z_{vkp} - z_{ava})} dA,$$

milles veekogu fikseeritud vabapinna kõrgus  $z_{vkp} = \textit{konstant}$ , nelinurkava ristlõike veekihi kõrgus  $z_{ava} = z_{avap} + a$ , milles ava aluspõhja (sisepiirde alumine horisontaalne osa) fikseeritud kõrgus  $z_{avap} = \textit{konstant}$  ja veekihi paksus ava aluspõhjast, ava ristlõikes,  $a = 0 \dots h_{km}$ . Ava kõrgusmõõde on  $h_{km}$ , mis ruutavale on  $h_{km} = d_{sm}$  ning veekihi pinnaelement on  $dA$  (mõõtühikuga  $[dA] = \text{m}^2$ ).

Ruutkujulise ristlõikega avale võib lihtsalt määrata veekihi pinnaelemendi  $dA$ . Ruutava veekihi pinnaelement  $dA = d_{sm} dh$ , milles  $dh$  on nn elementaarne kõrgusvahemik. Ruutavas võib vooluhulga määrata integraalse valemiga:

$$Q = C_d d_{sm} \int_{h = z_{vkp} - (z_{avap} + d_{sm})}^{h = z_{vkp} - z_{avap}} \sqrt{2gh} dh,$$

milles veekogu vabapinna kõrgus ava veekihi kõrguse suhtes, ehk veekihi rõhukõrgus muutub vahemikus  $h = (z_{vkp} - (z_{avap} + d_{sm})) \dots (z_{vkp} - z_{avap})$ . ( $h \neq a$ ).

Suuremõõtmelise ava vooluhulga võib ruutava puhul määrata valemiga:

$$Q = C_d d_{sm} \sqrt{2g} \left( \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{h_1}^{h_2} = \frac{2 C_d \sqrt{2g}}{3} d_{sm} \left( h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}} \right),$$

milles veekihi rõhukõrgusele integreerimisrajad on  $h_1 = (z_{vkp} - z_{avap}) - d_{sm}$  ja  $h_2 = (z_{vkp} - z_{avap})$ . Nii veekogu vabapinna kõrguse erinevus ruutava aluspõhja kõrgusest kui ka ülemise serva kõrgusest on konstantsed suurused.

→

$$Q = \frac{2 C_d \sqrt{2g}}{3} d_{sm} \left( (h_1 + d_{sm})^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$Q = \frac{2 C_d \sqrt{2g}}{3} d_{sm} \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - d_{sm})^{\frac{3}{2}} \right)$$

Ava vooluhulgategur on määratud valemiga

$$C_d = C_a C_u^*,$$

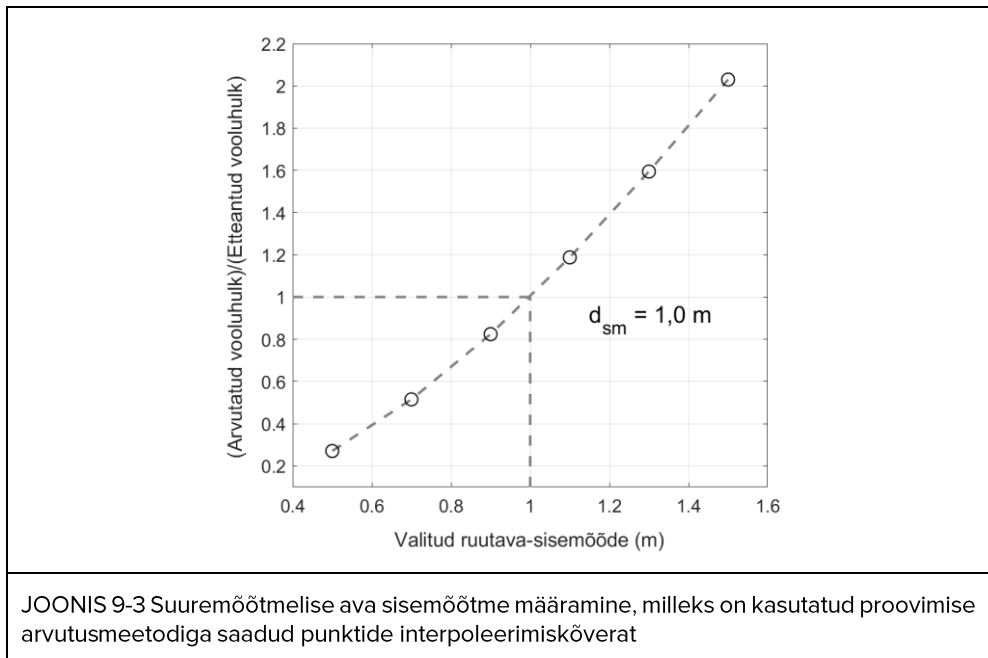
milles  $C_a$  on ahenemistegur ja  $C_u^*$  on voolamise ruumkiirusega määratud kiirustegur.

Proovimise arvutusmeetod

ARVUTUS. Ruutava sisemõõde

Suuremõõtmelise ava vooluhulga valemi arvatud hüdrauilised suurused

	$d_{sm}$ (m)	$A_e$ (m <sup>2</sup> )	$\chi$ (m)	$R_h$ (m)	$Q$ (m <sup>3</sup> ·s <sup>-1</sup> )	$Re_{ava}$
i	0,5	0,2500	2,0000	0,1250	1,3553	$5,2129 \cdot 10^5$
ii	0,7	0,4900	2,8000	0,1750	2,5768	$7,0791 \cdot 10^5$
iii	0,9	0,8100	3,6000	0,2250	4,1215	$8,8067 \cdot 10^5$
iv	1,1	1,2100	4,4000	0,2750	5,9394	$10,384 \cdot 10^5$
v	1,3	1,6900	5,2000	0,3250	7,9725	$11,794 \cdot 10^5$
vi	1,5	2,2500	6,0000	0,3750	10,1511	$13,014 \cdot 10^5$



JÄRELDUS. Vooluhulga  $Q = 5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  puhul on ruutava sisemõõde  $d_{sm} = 1,0 \text{ m}$ . Voolamine läbi suuremõõtmelise ava on turbulentne ( $Re_{ava} > 500$ ).

Numbriline arvutusskeem. Ruutava sisemõõde

Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod

#### VALEMID

Veafunktsioon:

$$ERF(y_j) = Q_j - Q,$$

milles  $y_j$  on arvutuslik ruutava sisemõõde,  $Q_j$  on arvutuslik vooluhulk ja  $Q$  on etteantud vooluhulk.

Veafunktsiooni tuletis:

$$\frac{dERF(y_j)}{dy_j} = \frac{dQ_j}{dy_j},$$

milles on eeldatud, et  $Q = \textit{konstant}$ .

Arvutuslik vooluhulk on määratud valemiga:

$$Q_j = \frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} y_j \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - y_j)^{\frac{3}{2}} \right),$$

milles  $C_d$ ,  $g$  ja  $h_2 = (z_{vkp} - z_{avap})$  on konstantsed suurused.

→

$$\begin{aligned} \frac{dERF(z_j)}{dz_j} &= \frac{d}{dy_j} \left( \frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} y_j \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - y_j)^{\frac{3}{2}} \right) \right) \\ &= \frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} \frac{d}{dy_j} \left( y_j \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - y_j)^{\frac{3}{2}} \right) \right) \\ &= \frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} \left( \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - y_j)^{\frac{3}{2}} \right) + y_j \left( -\frac{3}{2} (h_2 - y_j)^{\frac{1}{2}} \right) (-1) \right) \\ &= \frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} \left( \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - y_j)^{\frac{3}{2}} \right) + \frac{3 y_j}{2} (h_2 - y_j)^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

Veafunktsioonist suunatud tuletise võtmise reegel:

$$\frac{dERF(y_j)}{dy_j} = \frac{0 - ERF(y_j)}{y_{j+1} - y_j},$$

võimaldab kasutusele võtta Taylori valemi 1-järgu tuletise täpsusega:

$$y_{j+1} = y_j - \frac{ERF(y_j)}{\frac{dERF(y_j)}{dy_j}}.$$

Numbrilise arvutusskeemi põhivalemi üldkuju on

$$y_{j+1} = y_j - \frac{Q_j - Q}{\frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} \left( \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - y_j)^{\frac{3}{2}} \right) + \frac{3 y_j}{2} (h_2 - y_j)^{\frac{1}{2}} \right)}$$

ARVUTUSSKEEM (Rutava vooluhulk)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku rutava sisemõõtmise valem (iteratsioonmeetodi põhivalem)

$$y_{j+1} = y_j - \frac{Q_j - Q}{\frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} \left( \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - y_j)^{\frac{3}{2}} \right) + \frac{3 y_j}{2} (h_2 - y_j)^{\frac{1}{2}} \right)}$$

Arvutusliku vooluhulga valem

$$Q_j = \frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} y_j \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - y_j)^{\frac{3}{2}} \right)$$

ARVUTUS. Rutava sisemõõde

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$y_j$ (m)	2	0,6465	1,0739	1,0017	1,0000	1,0000
$Q_j$ (m <sup>3</sup> .s <sup>-1</sup> )	15,4684	2,2163	5,6884	5,0151	5,0000	5,0000

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$y_j$ (m)	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$Q_j$ (m <sup>3</sup> .s <sup>-1</sup> )	5,0000	5,0000	5,0000	5,0000

VASTUSED

$$k_{Lava} = 0,1662$$

$$A_e = 1,0001 \text{ m}^2$$

$$\chi = 4,0001 \text{ m}$$

$$R_h = 0,2500 \text{ m}$$

$$d_{sm} = 1,0001 \text{ m}$$

$$Re_{ava} = 9,6151 \cdot 10^5$$

JÄRELDUS. Arvutustulemustest selgub, et voolamine suuremõõtmelises võrdsete külgedega nelinurkse ristlõikega avas on turbulentne ( $Re_{ava} > 500$ ).

### MÄRKUSED. Ruutava dimensioonimine

- Suuremõõtmelise ava vooluhulga võib ruutava puhul määrata erinevate valemiga:

$$Q = \frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} d_{sm} \left( (h_1 + d_{sm})^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$Q = \frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} d_{sm} \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - d_{sm})^{\frac{3}{2}} \right),$$

milles  $h_1$  on veekogu veepinna kõrgus üle ruutava ülemise serva, st  $h_1 = (z_{vkp} - z_{avap}) - d_{sm}$  ja  $h_2$  on veekogu veepinna kõrgus üle ruutava aluspõhja, st  $h_2 = (z_{vkp} - z_{avap})$ .

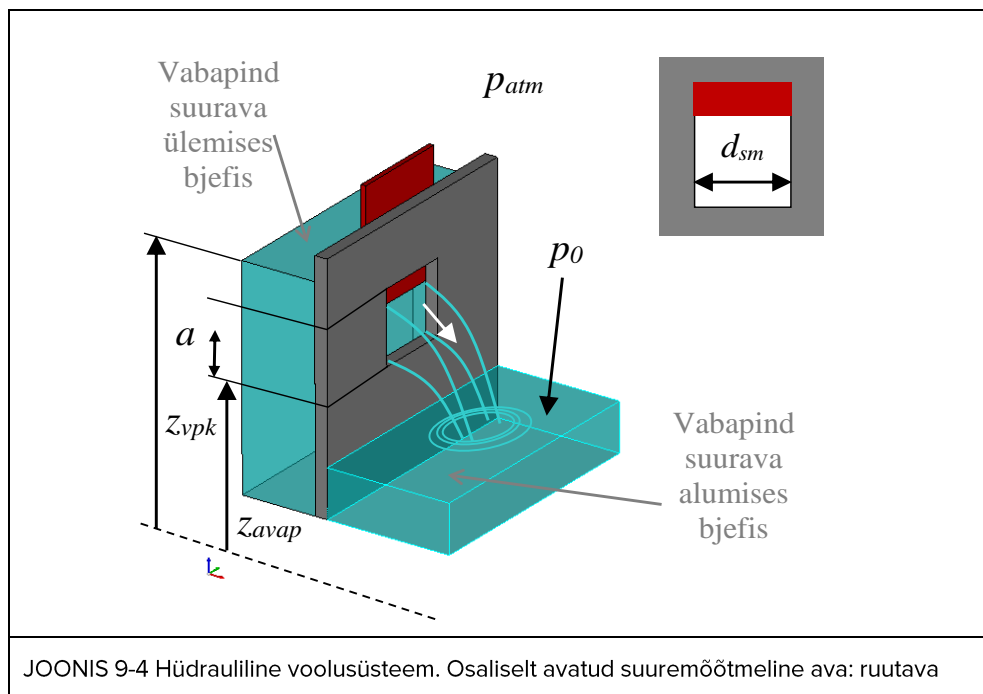
- Vooluhulga integraalvalemi kasutamisel muutub ümartoru veekihi integreerimisparameeter vahemikus 0...1,0 m.
- Suuremõõtmelise ava arvutamisel on eeldatud, et vabapind ava alumises bjeffis ei mõjuta voolamise dünaamikat hüdraulilises voolusüsteemis, st läbivool avast on täielikult uputamata.
- Sarnaselt ruutavale võib sisemõõtmelise valida ka ümaravale sisediaameetri järgi, ning nelinurkavale kõrgusmõõtmelise ja laiusmõõtmelise järgi.
- Bernoulli võrrandit võib rakendada iga voolujoone puhul. Kui voolujooned on paralleelsed, siis on rõhk voolamises hüdrostaatiline. Veekogu voolamise voolujooned läbivoolule avasse on praktiliselt paralleelsed.
- Veekogu ava läbivate veeosade liikumise voolujooni loetakse piisavalt paralleelseks ning seetõttu võib vooluhulga arvutamisel kasutada ideaalvoolu Bernoulli võrrandiga määratud Torricelli-tüüpi valemit.



### 9.3 ISESEISVA TÖÖ ÜLESANNE. RUUTAVA DIMENSIOONIMINE

ANTUD. Veekogu kaitseehitise, tammi seinavast veevoolu reguleerimisele kasutatakse kilpsiibrit. Läbivoolu veehulga määrab suuremõõtmeline ava, millel on võrdsete külgedega nelinurkne ristlõige, st ruutristlõikega ava. Ruutava aluspõhja fikseeritud kõrgus  $z_{avap} = 13$  m võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult. Veekogu vabapinna fikseeritud kõrgus  $z_{vkp} = 15$  m võrdlusnivoost, mis on seda ka suletud kilpsiibriga olukorras. Osaliselt avatud kilpsiibriga avale etteantud vooluhulk  $Q = 4 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Ruutava vooluhulgategur  $C_d = 0,741$ . Hüdraulilises voolusüsteemis on  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  vesi, mille tihedus  $\rho = 998,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu = 1,002 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Veekogu vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Arvutada muutumatu veekogu vabapinna kõrguse puhul, osaliselt avatud kilpsiibriga olukorras suuremõõtmelise ava, ruutava sisemõõde etteantud vooluhulgale. Arvutada ava Reynoldsi arv läbivoolule ruutavast.



EELDUSED. Voolamine veekogu ja suuremõõtmelise ava voolusüsteemis on statsionaarne, mille määrab kukkuv juga ava alumises bjefis. Vooluhulga määramisele kasutada suuremõõtmelise ava vooluhulga valemit, milles rõhk ja voolukiirus muutub oluliselt vertikaalsihis. Suuremõõtmeline ava on risti veekogu vabapinnaga. Ruutava alumises bjefis on vabapind oluliselt madalamal ava aluspõhjast, st väljavool avast on täielikult uputamata. Joaaluses ruumis on atmosfääri rõhk, õhurõhk ei moonuta joa kuju ava alumises bjefis. Ava sisemõõtme määramisele kasutada Newtoni iteratsioonmeetodit.

#### VASTUSED

$$k_{Lava} = 0,8212$$

$$A_e = 0,9998 \text{ m}^2$$

$$\chi = 3,9995 \text{ m}$$

$$R_h = 0,2500 \text{ m}$$

$$d_{sm} = 0,9999 \text{ m}$$

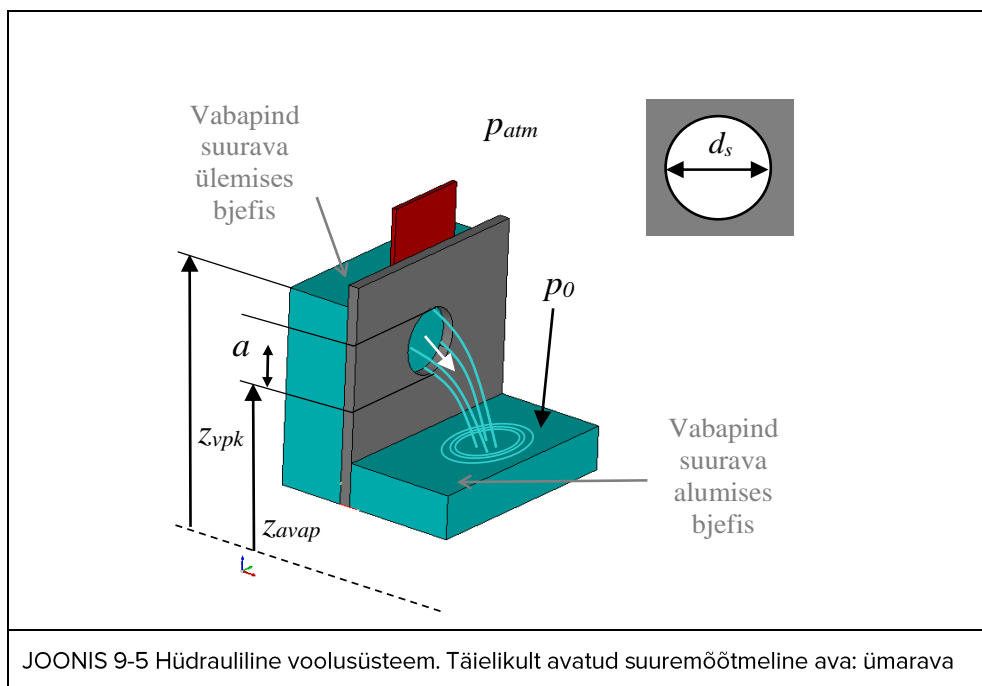
$$\mathbf{Re}_{ava} = 10,001 \cdot 10^5$$

JÄRELDUS. Arvutustulemustest selgub, et voolamine ruutavas on turbulentne ( $\mathbf{Re}_{ava} > 500$ ).

## 9.4 LISAÜLESANNE 1. ÜMARAVA DIMENSIOONIMINE

ANTUD. Veekogu kaitsehitise, tammi seinavast veevoolu reguleerimisele kasutatakse kilpsiibrit. Läbivoolu veehulga määrab suuremõõtmeline ava mis on täielikult avatud. Ümara ristlõikega ava sisediameeter  $d_s = 1,0$  m. Ümarava sisepõhja alumise punkti fikseeritud kõrgus  $z_{avap} = 13$  m võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult. Veekogu vabapinna fikseeritud kõrgus  $z_{vkp} = 15$  m võrdlusnivoost, mis on seda ka suletud kilpsiibriga olukorras. Hüdraulilises voolusüsteemis on  $10$  °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000$  kg·m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg·m<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>. Veekogu vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Määrata hüdraulilise voolusüsteemi ümarristlõikega avale vooluhulk. Arvutada vooluhulk suuremõõtmelisele avale vastavalt etteantud ava sisediameetrile, ning muutumatule veepinna kõrgustele ava ülemises bjefis ja ümarava sisepiirde alumise punkti fikseeritud kõrgusele. Võrrelda ümarava ja ruutava vooluhulkasid tingimusel, et ümarava sisediameeter on sama suur kui ruutava sisemõõde. Arvutada ava Reynoldsi arv läbivoolule ümaravast.



EELDUSED. Voolamine veekogu ja suuremõõtmelise ava voolusüsteemis on statsionaarne, mille määrab kukkuv juga ava alumises bjefis. Vooluhulga määramisele kasutada suuremõõtmelise ava vooluhulga valemit, milles rõhk ja voolukiirus muutub oluliselt vertikaalsihis. Suuremõõtmeline ava on risti veekogu vabapinnaga. Ümarava alumises bjefis on vabapind oluliselt madalamal ava aluspõhjast, st väljavool avast on täielikult uputamata. Joaaluses ruumis on atmosfääri rõhk, õhurõhk ei moonuta joa kuju ava alumises bjefis. Ava vooluhulga määramisele võib kasutada ideaalvoolu tingimusi.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Ideaalvoolu Bernoulli võrrand, ideaalvedeliku Bernoulli võrrand läbivoolule täielikult uputamata avast, ava Reynolds'i arvu valem, suuremõõtmelise ümarava vooluhulga valem**

### VALEMID

Veekogu vabapinnaga ja sellega risti oleva avaga määratud voolutorule võib koostada ideaalvoolu Bernoulli võrrandi:

$$z_{vkp} + \frac{p_{vkp}}{\rho g} + \frac{u_{vkp}^2}{2g} = z_{ava} + \frac{p_{ava}}{\rho g} + \frac{u_{ava}^2}{2g},$$

milles veekogu vabapinna kõrgus, rõhk veepinnal ja voolukiirus ava ülemises bjefis on vastavalt  $z_{vkp}$ ,  $p_{vkp}$  ja  $u_{vkp}$ , mis vastab fikseeritud vabapinna kõrgusega veekogu tingimustele. Suuremõõtmelise ruutava veekihi kõrgus, rõhk ja voolukiirus on vastavalt  $z_{ava}$ ,  $p_{ava}$  ja  $u_{ava}$ , mis vastab veekogu väljavoolu tingimustele avas. Vee erikaal on  $\rho g$ , milles vee tihedus on  $\rho$  ja raskuskiirendus on  $g$ .

Rõhukõrguste vahe ehk rõhuvahekõrgus:

$$\frac{p_{vkp}}{\rho g} - \frac{p_{ava}}{\rho g} = \frac{p_{vkp} - p_{ava}}{\rho g} = h_{rvk}.$$

Kuna nii ava ülavee kui ka alavee vabapinnal on rõhk määratud õhurõhuga, st  $p_{vkp} = p_0$  ja  $p_{ava} \approx p_0$ , siis sellest järeldub, et rõhuvahekõrgus  $h_{rvk} \approx 0$ .

Ideaalvoolu Bernoulli võrrandist järeldub seos, mis on ideaalvedeliku Bernoulli võrrand läbivoolule täielikult uputamata avast:

$$z_{vkp} \approx z_{ava} + \frac{u_{ava}^2}{2g},$$

milles veekogu vabapinnale liikumiskiirus määrab voolukiiruse  $u_{vpk} \rightarrow 0$ .

Reynoldsi arvu läbivoolule avast võib määrata kui ava Reynoldsi arvu:

$$Re_{ava} = \frac{u R_h}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur ja  $R_h$  on hüdrauliline raadius.

**MÄRKUS.** Ümarava puhul on ava sisemõõde määratud ava sisediameetriga, st  $d_{sm} = d_s$ . Voolamisele täistaitumusega ümartorus, sisediameetriga  $d_s = 4 R_h$ , määratakse Reynoldsi arv valemiga, mis on ümartoru Reynoldsi arvu valem:

$$Re = \frac{u d_s}{\nu} = \frac{u 4 R_h}{\nu}.$$

Kuna veevoolule ümartorus vastab kriitiline Reynoldsi arv 2000, siis järelikult laminaarse ja turbulentsse veevoolu ülemineku kriitiline ava Reynoldsi arv on 500.

Ümarava Reynoldsi arvu valemis võib ava sisemõõtme ( $d_{sm}$ ) asemel kasutada ka hüdraulilist diameetrit ( $D_h$ ). Täieliku täitumusega ümaravale kehtib seos:

$$D_h = 4 R_h = \frac{4 A_e}{\chi} = 4 \left( \frac{\pi d_{sm}^2}{4} \right) \left( \frac{1}{\pi d_{sm}} \right) = d_{sm},$$

milles voolamise elavlõige on  $A_e$  ja märgpiire on  $\chi$ .

Ideaalvedeliku Bernoulli võrrand läbivoolule täielikult uputamata avast on

$$z_{vkp} = z_{ava} + \frac{u_{ava}^2}{2g}$$

→

$$z_{vkp} = z_{ava} + \frac{u^2}{2g}$$

$$u^2 = 2g(z_{vkp} - z_{ava})$$

$$u = \sqrt{2g(z_{vkp} - z_{ava})}$$

Suuremõõtmelise ava vooluhulga valem on

$$Q = \int \sqrt{2g(z_{vkp} - z_{ava})} dA,$$

milles veekogu fikseeritud vabapinna kõrgus  $z_{vkp} = \text{konstant}$ , ümarava ristlõike veekihi kõrgus  $z_{ava} = z_{avap} + a$ , milles ava aluspõhja punktist (sisepiirde alumise punkti) fikseeritud kõrgus  $z_{avap} = \text{konstant}$  ja veekihi paksus ava aluspõhja punktist, ava ristlõikes,  $a = 0 \dots d_{sm}$ . Veekihi pinnaelement on  $dA$  (mõõtühikuga  $[dA] = m^2$ ).

**MÄRKUS.** Kui arvestada ava läbivoolule kohttakistust, siis suuremõõtmelise ava puhul määratakse vooluhulk valemiga:

$$Q = \int C_u \sqrt{2g(z_{vkp} - z_{ava})} dA,$$

milles kiirusteguri on määratud valemiga

$$C_u = \frac{1}{\sqrt{1 + k_{Lava}}}.$$

$k_L$  on kohttakistustegur (möötüühikuta suurus [ $k_L$ ] = 1).

**MÄRKUS.** Ava vooluhulgategur on määratud valemiga

$$C_d = C_a C_u^*,$$

milles  $C_a$  on ahenemistegur ja  $C_u^*$  on voolamise ruumkiirusega määratud kiirustegur.

Ümara ristlõikega avale võib määrata veekihi pinnaelemendi  $dA$ . Osalise täitumusega ümarava voolamise elavlõike pindala võib arvutada valemiga:

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right),$$

milles  $d_s$  on ümarava sisediaameeter ja  $h$  on ava ristlõikes veekihi maksimaalne kõrgus ava sisepõhja alumisest punktist.

Täieliku täitumusega ümarava sisediaameetriga määratud ristlõike pindala ehk elavlõike pindala on

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4}.$$

Ümarava veekihi pinnaelemendi võib määrata valemiga

$$dA = \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} - \frac{\frac{1}{\pi d_s} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2}} \right) dh.$$

Suuremõõtmelise ümarava vooluhulga võib arvutada integraalse valemiga:

$$Q_{svk} = \int_0^{d_s} C_u \sqrt{2g \left( (z_{vkp} - z_{avap}) - h \right)} \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} - \frac{\frac{1}{\pi d_s} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2}} \right) dh.$$

$$Q_{svk} = C_d \pi \frac{d_s^2}{4} \int_0^{d_s} \sqrt{2g \left( (z_{vkp} - z_{avap}) - h \right)} \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} - \frac{\frac{1}{\pi d_s} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2}} \right) dh,$$

milles  $C_d$ ,  $d_s$  ja  $(z_{vpk} - z_{avap})$  on konstantsed suurused.

#### ARVUTUS

Fikseeritud veekogu vabapinna kõrguse erinevus ümarristlõikega ava sisepõhja alumise punkti kõrgusest on

$$z_{vpk} - z_{avap} = 15 \text{ m} - 13 \text{ m} = 2 \text{ m}.$$

Suuremõõtmelise ümarava vooluhulk ideaalvedeliku voolamisele

$$Q_{ava} = 4,2470 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

Ava Reynoldsi arv

$$Re_{ava} = 10,399 \cdot 10^5$$

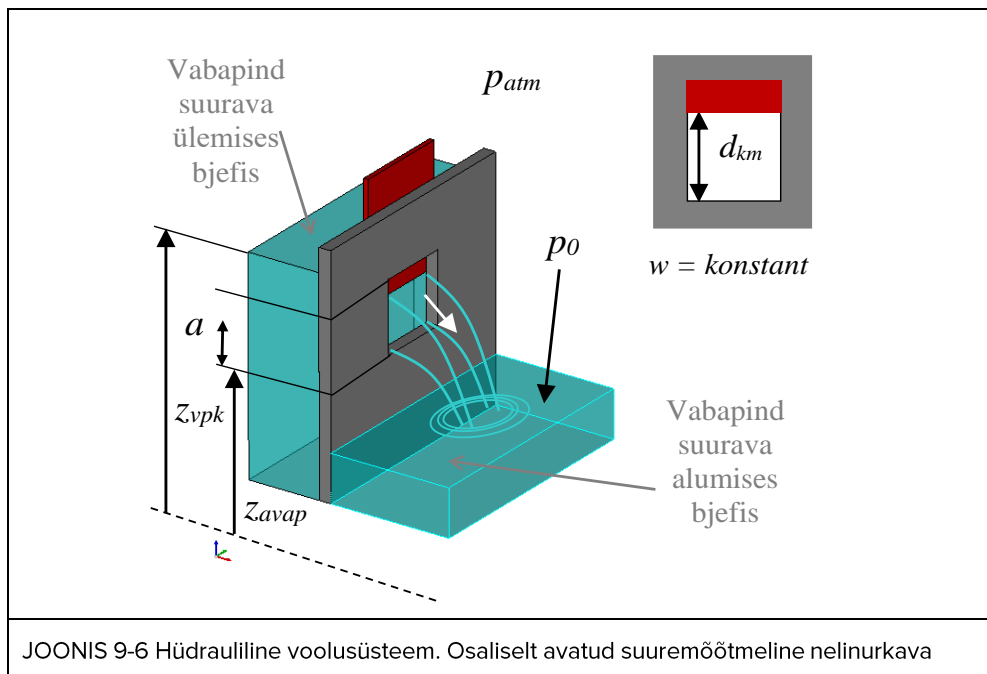
JÄRELDUS. Suuremõõtmelise ümarava integraalse valemiga arvatud vooluhulgast ideaalvedeliku läbivoolule selgub, et see erineb oluliselt suuremõõtmelise ruutava vooluhulgast ideaalvoolule, millele on valitud sisemõõde  $d_{sm\_ruutava} = d_{s\_ümarava}$ :

$$Q_{ümarava} / Q_{ruutava} = \frac{4,2470 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{(5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} / 0,926)} = 0,7865.$$

## 9.5 LISAÜLESANNE 2. NELINURKVA DIMENSIOONIMINE

ANTUD. Veekogu kaitseehitise, tammi seinavast veevoolu reguleerimisele kasutatakse kilpsiibrit. Läbivoolu veehulga määrab suuremõtmeline ava, nelinurkava, millel on fikseeritud laius  $w = 1,0$  m. Nelinurkse ristlõikega ava aluspõhja fikseeritud kõrgus  $z_{avap} = 13$  m võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult. Veekogu vabapinna fikseeritud kõrgus  $z_{vpk} = 15$  m võrdlusnivoost, mis on seda ka suletud kilpsiibriga olukorras. Osaliselt avatud kilpsiibriga nelinurkavale on etteantud vooluhulk  $Q = 5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Suuremõtmelise ava vooluhulgategur  $C_d = 0,926$ . Hüdraulilises voolusüsteemis on  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Veekogu vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata proovimismeetodi ja numbrilise arvutusskeemiga hüdraulilise voolusüsteemi suuremõtmelisele avale sisemõõde. Arvutada muutumatu veekogu vabapinna kõrguse puhul, osaliselt avatud kilpsiibriga olukorras nelinurkava kõrgusmõõde etteantud vooluhulgale ja ava laiusele. Arvutada ava Reynoldsi arv läbivoolule nelinurkse ristlõikega avast.





EELDUSED. Voolamine veekogu ja suuremõõtmelise ava voolusüsteemis on statsionaarne, mille määrab kukkuv juga ava alumises bjefis. Vooluhulga määramisele kasutada suuremõõtmelise ava vooluhulga valemit, milles rõhk ja voolukiirus muutub oluliselt vertikaalsihis. Suuremõõtmeline ava on risti veekogu vabapinnaga. Nelinurkava alumises bjefis on vabapind oluliselt madalamal ava aluspõhjast, st väljavool avast on täielikult uputamata. Joaaluses ruumis on atmosfääri rõhk, õhurõhk ei moonuta joa kuju ava alumises bjefis. Ava sisemõõtmelise määramisele kasutada Newtoni iteratsioonmeetodit.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Reaalvedeliku Bernoulli võrrand läbivoolule täielikult uputamata avast, Weisbachi survekao valem, ava Reynoldsi arvu valem, suuremõõtmelise ava vooluhulga valem, ava vooluhulgateguri valem, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem**

### VALEMID

Reaalvedeliku Bernoulli võrrand läbivoolule täielikult uputamata avast on

$$z_{vkp} \approx z_{ava} + \frac{u_{ava}^2}{2g} + h_k,$$

milles veekogu vabapinna kõrgus ava ülemises bjefis on  $z_{vkp}$  ning suuremõõtmelise ava veekihi kõrgus ja voolukiirus on vastavalt  $z_{ava}$  ja  $u_{ava}$ . Bernoulli võrrandis avale on eeldatud, et nii ava ülavee kui ka alavee vabapinnal on rõhk määratud õhurõhuga, st  $p_{vkp} = p_0$  ja  $p_{ava} \approx p_0$ , mis vastab hästi ka veekogu väljavoolu tingimustele avas ning veekogu vabapinnale liikumiskiirus määrab voolukiiruse  $u_{vpk} \rightarrow 0$ . Raskuskiirendus on  $g$  ja kohtsurvekadu on  $h_k$ .

Weisbachi survekao valem kohtsurvekao määramisele on

$$h_l = k_L \frac{u^2}{2g},$$

milles  $k_L$  on kohttakistustegur (mõõtühikuta suurus  $[k_L] = 1$ ) ja  $u (= u_{ava})$  on voolamise ruumkiirus veekogu väljavoolus. Voolamisele veekogust avasse toimub nõ voolujoonte tihenemine. Vastavalt valitud vooluhulgategurile on voolamise ahenemise olukorras avale kohttakistus  $k_{L,ava} \approx 0,1662$ .

Ava Reynoldsi arvu valem on

$$Re_{ava} = \frac{u R_h}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur (kinemaatiline laminaarne viskoossustegur) ja  $R_h$  on hüdrauliline raadius.

Voolamisel täistaitumusega nelinurkristlõikega veejuhtmes, millel on muutumatu laiusmõõde  $w = \textit{konstant}$  ja kõrgusmõõde  $d_{km}$ , võib hüdraulilise raadiuse määrata valemiga:

$$R_h = \frac{A_e}{\chi} = \frac{d_{km} w}{2 d_{km} + 2 w}.$$

Laminaarse ja turbulentsse voolamise ülemineku kriitiline ava Reynolds'i arv on 500.

Reaalvedeliku Bernoulli võrrand läbivoolule täielikult uputamata avale on

$$z_{vkp} = z_{ava} + \frac{u_{ava}^2}{2g} + h_k.$$

Voolukiiruse avas võib määrata valemiga:

$$u = C_u \sqrt{2g(z_{vkp} - z_{ava})}$$

milles ava kiirustegur on

$$C_u = \frac{1}{\sqrt{1 + k_{Lava}}}.$$

Suuremõõtmelise ava vooluhulga valem on

$$Q = \int C_u \sqrt{2g(z_{vkp} - z_{ava})} dA,$$

milles veekogu fikseeritud vabapinna kõrgus  $z_{vkp} = \textit{konstant}$ , nelinurkava ristlõike veekihi kõrgus  $z_{ava} = z_{avap} + a$ , milles ava alapõhja fikseeritud kõrgus  $z_{avap} = \textit{konstant}$  ja veekihi paksus ava ristlõikes  $a = 0 \dots d_{km}$ . Veekihi pinnaelement on  $dA$  (mõõtühikuga  $[dA] = \text{m}^2$ ).

Nelinurkse ristlõikega avale võib määratud veekihi pinnaelemendi  $dA$ . Nelinurkava veekihi pinnaelement  $dA = w dh$ , milles  $dh$  on elementaarne kõrgusvahemik ja ava laius  $w = \textit{konstant}$ . Suuremõõtmelises avas võib vooluhulga nelinurkava puhul määrata valemiga:

$$Q = C_d w \int_{h = z_{vkp} - (z_{avap} + d_{km})}^{h = z_{vkp} - z_{avap}} \sqrt{2gh} dh,$$

milles veekogu vabapinna kõrgus ava veekihi kõrguse suhtes, ehk veekihi kõrgus muutub vahemikus  $h = (z_{vkp} - (z_{avap} + d_{km})) \dots (z_{vkp} - z_{avap})$ .

Suuremõõtmelise ava vooluhulga võib nelinurkava puhul määrata valemiga:

$$Q = C_d w \sqrt{2g} \left( \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{h_1}^{h_2} = \frac{2 C_d \sqrt{2g}}{3} w \left( h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}} \right),$$

milles veekihi rõhukõrgusele integreerimisrajad on  $h_1 = (z_{vkp} - z_{avap}) - d_{km}$  ja  $h_2 = (z_{vkp} - z_{avap})$ . Nii veekogu vabapinna kõrguse erinevus ruutava aluspõhja kõrgusest kui ka ülemise serva kõrgusest on konstantsed suurused.

→

$$Q = \frac{2 C_d \sqrt{2g}}{3} w \left( (h_1 + d_{km})^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$Q = \frac{2 C_d \sqrt{2g}}{3} w \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - d_{km})^{\frac{3}{2}} \right)$$

Ava vooluhulgategur on määratud valemiga

$$C_d = C_a C_u^*,$$

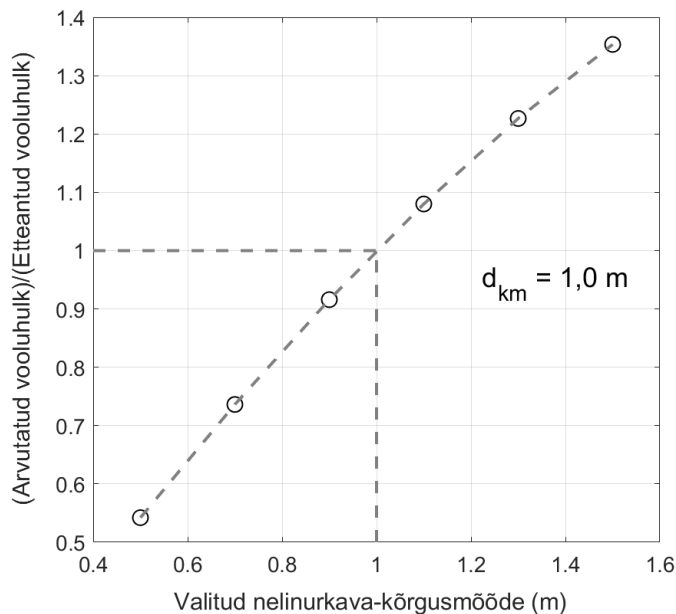
milles  $C_a$  on ahenemistegur ja  $C_u^*$  on voolamise ruumkiirusega määratud kiirustegur.

*Proovimise arvutusmeetod*

ARVUTUS. Nelinurkava kõrgusmõõde

Muutumatu laiuselga nelinurkava vooluhulga valemiga arvatud hüdraulilised suurused

	$d_{km}$ (m)	$A_e$ (m <sup>2</sup> )	$\chi$ (m)	$R_h$ (m)	$Q$ (m <sup>3</sup> ·s <sup>-1</sup> )	$Re_{ava}$
i	0,5	0,5000	3,0000	0,1667	2,7107	$6,9505 \cdot 10^5$
ii	0,7	0,7000	3,4000	0,2059	3,6811	$8,3283 \cdot 10^5$
iii	0,9	0,9000	3,8000	0,2368	4,5795	$9,2702 \cdot 10^5$
iv	1,1	1,1000	4,2000	0,2619	5,3995	$9,8891 \cdot 10^5$
v	1,3	1,3000	4,6000	0,2826	6,1327	$10,255 \cdot 10^5$
vi	1,5	1,5000	5,0000	0,3000	6,7674	$10,411 \cdot 10^5$



JOONIS 9-7 Muutmata laiusmõõtmega suuremõõtmelise nelinurkava kõrgusmõõtmelise määramine, milleks on kasutatud proovimise arvutusmeetodiga saadud punktide interpoleerimiskõverat

JÄRELDUS. Vooluhulga  $Q = 5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  puhul on suuremõõtmelise ava kõrgusmõõde  $d_{km} = 1,0 \text{ m}$ . Voolamine läbi nelinurkava on turbulentne ( $Re_{ava} > 500$ ).

Numbriline arvutusskeem. Nelinurkava kõrgusmõõde  
 Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod

#### VALEMID

Veafunktsioon:

$$ERF(y_j) = Q_j - Q,$$

milles  $y_j$  on arvutuslik nelinurkava kõrgusmõõde,  $Q_j$  on arvutuslik vooluhulk ja  $Q$  on etteantud vooluhulk.

Veafunktsiooni tuletis:

$$\frac{dERF(y_j)}{dy_j} = \frac{dQ_j}{dy_j},$$

milles on eeldatud, et  $Q = \text{konstant}$ .

Arvutuslik vooluhulk on määratud valemiga:

$$Q_j = \frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} w \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - y_j)^{\frac{3}{2}} \right),$$

milles  $C_d$ ,  $g$ ,  $w$  ja  $h_2 = (z_{vkp} - z_{avap})$  on konstantsed suurused.

→

$$\begin{aligned} \frac{dERF(y_j)}{dy_j} &= \frac{d}{dy_j} \left( \frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} w \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - y_j)^{\frac{3}{2}} \right) \right) = \frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} w \frac{d}{dy_j} \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - y_j)^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} w \left( \left( -\frac{3}{2} (h_2 - y_j)^{\frac{1}{2}} \right) (-1) \right) = \frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} w \left( \frac{3}{2} (h_2 - y_j)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= C_d \sqrt{2 g} w (h_2 - y_j)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Veafunktsioonist suunatud tuletise võtmise reegel:

$$\frac{dERF(y_j)}{dy_j} = \frac{0 - ERF(y_j)}{y_{j+1} - y_j},$$

võimaldab kasutusele võtta Taylori valemi 1-järgu tuletise täpsusega:

$$y_{j+1} = y_j - \frac{ERF(y_j)}{\frac{dERF(y_j)}{dy_j}}.$$

Numbrilise arvutusskeemi põhivalemi üldkuju on

$$y_{j+1} = y_j - \frac{Q_j - Q}{C_d \sqrt{2 g} w (h_2 - y_j)^{\frac{1}{2}}}.$$

ARVUTUSSKEEM (Nelinurkava vooluhulk, kõrgusmõõde)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku nelinurkava (muutumatu laiusega) kõrgusmõõtmise valem (iteratsioonmeetodi põhivalem)

$$y_{j+1} = y_j - \frac{Q_j - Q}{C_d \sqrt{2 g} w (h_2 - y_j)^{\frac{1}{2}}}$$

Arvutusliku vooluhulga valem

$$Q_j = \frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} w \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - y_j)^{\frac{3}{2}} \right)$$

ARVUTUS. Nelinurkava kõrgusmõõde

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$y_j$ (m)	1,5	0,8906	0,9973	1,0001	1,0000	1,0000
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	6,7674	4,5390	4,9887	5,0000	5,0000	5,0000

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$y_j$ (m)	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	5,0000	5,0000	5,0000	5,0000

VASTUSED

$$k_{Lava} = 0,1662$$

$$A_e = 1,0001 \text{ m}^2$$

$$\chi = 4,0001 \text{ m}$$

$$R_h = 0,2500 \text{ m}$$

$$d_{sm} = 1,0001 \text{ m}$$

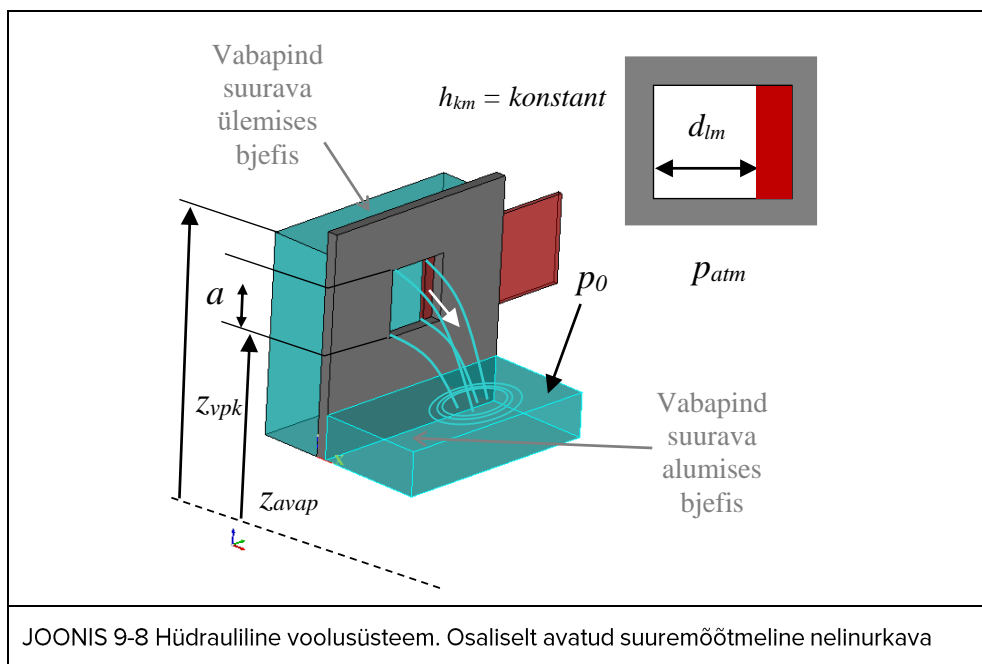
$$\mathbf{Re}_{ava} = 9,6151 \cdot 10^5$$

JÄRELDUS. Arvutustulemustest selgub, et voolamine muutumatu laiusega nelinurkse ristlõikega avas on turbulentne ( $\mathbf{Re}_{ava} > 500$ ).

## 9.6 LISAÜLESANNE 3. NELINURKAVA DIMENSIOONIMINE

ANTUD. Veekogu kaitseehitise, tammi seinavast veevoolu reguleerimisele kasutatakse kilpsiibrit. Läbivoolu veehulga määrab suuremõtmeline ava, nelinurkava, millel on fikseeritud kõrgus  $h_{km} = 1,0$  m. Nelinurkse ristlõikega ava aluspõhja fikseeritud kõrgus  $z_{avap} = 13$  m võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult. Veekogu vabapinna fikseeritud kõrgus  $z_{vkp} = 15$  m võrdlusnivoost, mis on seda ka suletud kilpsiibriga olukorras. Osaliselt avatud kilpsiibriga nelinurkavale on etteantud vooluhulk  $Q = 5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Suuremõtmelise ava vooluhulgategur  $C_d = 0,926$ . Hüdraulilises voolusüsteemis on  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Veekogu vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata proovimismeetodi ja numbrilise arvutusskeemiga hüdraulilise voolusüsteemi suuremõtmelisele avale sisemõõde. Arvutada muutumatu veekogu vabapinna kõrguse puhul, osaliselt avatud kilpsiibriga olukorras nelinurkava kõrgusmõõde etteantud vooluhulgale ja ava kõrgusele. Arvutada ava Reynoldsi arv läbivoolule nelinurkse ristlõikega avast.



EELDUSED. Voolamine veekogu ja suuremõõtmelise ava voolusüsteemis on statsionaarne, mille määrab kukkuv juga ava alumises bjefis. Vooluhulga määramisele kasutada suuremõõtmelise ava vooluhulga valemit, milles rõhk ja voolukiirus muutub oluliselt vertikaalsihis. Suuremõõtmeline ava on risti veekogu vabapinnaga. Nelinurkava alumises bjefis on vabapind oluliselt madalamal ava aluspõhjast, st väljavool avast on täielikult uputamata. Joaaluses ruumis on atmosfääri rõhk, õhurõhk ei moonuta joa kuju ava alumises bjefis. Ava sisemõõtmelisele kasutada Newtoni iteratsioonmeetodit.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Reaalvedeliku Bernoulli võrrand läbivoolule täielikult uputamata avast, Weisbachi survekao valem, ava Reynoldsi arvu valem, suuremõõtmelise ava vooluhulga valem, ava vooluhulgateguri valem, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem**

### VALEMID

Reaalvedeliku Bernoulli võrrand läbivoolule täielikult uputamata avast on

$$z_{vkp} \approx z_{ava} + \frac{u_{ava}^2}{2g} + h_k,$$

milles veekogu vabapinna kõrgus ava ülemises bjefis on  $z_{vkp}$  ning suuremõõtmelise ava veekihi kõrgus ja voolukiirus on vastavalt  $z_{ava}$  ja  $u_{ava}$ . Bernoulli võrrandis avale on eeldatud, et nii ava ülavee kui ka alavee vabapinnal on rõhk määratud õhurõhuga, st  $p_{vkp} = p_0$  ja  $p_{ava} \approx p_0$ , mis vastab hästi ka veekogu väljavoolu tingimustele avas ning veekogu vabapinnale liikumiskiirus määrab voolukiiruse  $u_{vpk} \rightarrow 0$ . Raskuskiirendus on  $g$  ja kohtsurvekadu on  $h_k$ .

Weisbachi survekao valem kohtsurvekao määramisele on

$$h_l = k_L \frac{u^2}{2g},$$

milles  $k_L$  on kohttakistustegur (mõõtühikuta suurus  $[k_L] = 1$ ) ja  $u$  ( $= u_{ava}$ ) on voolamise ruumkiirus veekogu väljavoolus. Voolamisele veekogust avasse toimub nõ voolujoonte tihenemine. Vastavalt valitud vooluhulgateguritele on voolamise ahenemise olukorras avale kohttakistus  $k_{Lava} \approx 0,1662$ .

Ava Reynoldsi arvu valem on

$$Re_{ava} = \frac{u R_h}{\nu},$$



milles  $u$  on voolukiirus,  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur ja  $R_h$  on hüdrauliline raadius.

Voolamisel täistäitumusega nelinurkristlõikega veejuhtmes, millel on muutumatu kõrgusmõõde  $h_{km} = \textit{konstant}$  ja laiusmõõde  $d_{lm}$ , võib hüdraulilise raadiuse määrata valemiga:

$$R_h = \frac{A_e}{\chi} = \frac{h_{km} d_{lm}}{2 h_{km} + 2 d_{lm}}.$$

Laminaarse ja turbulentsse voolamise ülemineku kriitiline ava Reynoldsi arv on 500.

Reaalvedeliku Bernoulli võrrand läbivoolule täielikult uputamata avale on

$$z_{vkp} = z_{ava} + \frac{u_{ava}^2}{2g} + h_k.$$

Voolukiiruse avas võib määrata valemiga:

$$u = C_u \sqrt{2g(z_{vkp} - z_{ava})}$$

milles ava kiirustegur on

$$C_u = \frac{1}{\sqrt{1 + k_{Lava}}}.$$

Suuremõõtmelise ava vooluhulga valem on

$$Q = \int C_u \sqrt{2g(z_{vkp} - z_{ava})} dA,$$

milles veekogu fikseeritud vabapinna kõrgus  $z_{vkp} = \textit{konstant}$ , nelinurkava ristlõike veekihi kõrgus  $z_{ava} = z_{avap} + a$ , milles ava alapõhja fikseeritud kõrgus  $z_{avap} = \textit{konstant}$  ja veekihi paksus ava ristlõikes  $a = 0 \dots d_{km}$ . Veekihi pinnaelement on  $dA$  (mõõtühikuga  $[dA] = \text{m}^2$ ).

Nelinurkse ristlõikega avale võib määratud veekihi pinnaelemendi  $dA$ . Nelinurkava veekihi pinnaelement  $dA = d_{lm} dh$ , milles  $dh$  on elementaarne kõrgusvahemik. Ava kõrgus  $h_{km} = \textit{konstant}$ . Suuremõõtmelises avas võib vooluhulga nelinurkava puhul määrata valemiga:

$$Q = C_d d_{lm} \int_{h = z_{vkp} - (z_{avap} + d_{km})}^{h = z_{vkp} - z_{avap}} \sqrt{2gh} dh,$$

milles veekogu vabapinna kõrgus ava veekihi kõrguse suhtes, ehk veekihi kõrgus muutub vahemikus  $h = (z_{vkp} - (z_{avap} + d_{km})) \dots (z_{vkp} - z_{avap})$ .

Suuremõõtmelise ava vooluhulga võib nelinurkava puhul määrata valemiga:

$$Q = C_d d_{lm} \sqrt{2g} \left( \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{h_1}^{h_2} = \frac{2 C_d \sqrt{2g}}{3} d_{lm} \left( h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}} \right),$$

milles veekihi rõhukõrgusele integreerimisrajad on  $h_1 = (z_{vkp} - z_{avap}) - h_{km}$  ja  $h_2 = (z_{vkp} - z_{avap})$ . Nii veekogu vabapinna kõrguse erinevus ruutava aluspõhja kõrgusest kui ka ülemise serva kõrgusest on konstantsed suurused.

→

$$Q = \frac{2 C_d \sqrt{2g}}{3} d_{lm} \left( (h_1 + h_{km})^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$Q = \frac{2 C_d \sqrt{2g}}{3} d_{lm} \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - h_{km})^{\frac{3}{2}} \right)$$

Ava vooluhulgategur on määratud valemiga

$$C_d = C_a C_u^*,$$

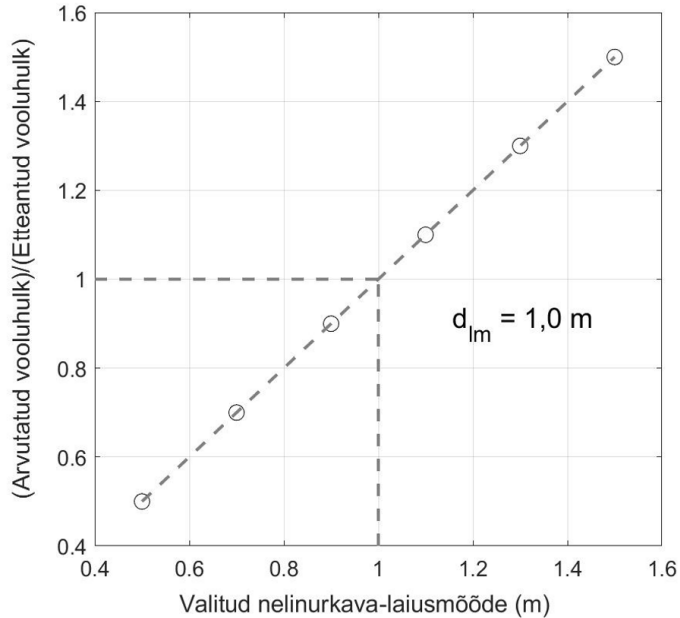
milles  $C_a$  on ahenemistegur ja  $C_u^*$  on voolamise ruumkiirusega määratud kiirustegur.

*Proovimise arvutusmeetod*

ARVUTUS. Nelinurkava laiusmõõde

Muutumatu kõrgusega nelinurkava vooluhulga valemiga arvatud hüdraulilised suurused

	$d_{lm}$ (m)	$A_e$ (m <sup>2</sup> )	$\chi$ (m)	$R_h$ (m)	$Q$ (m <sup>3</sup> ·s <sup>-1</sup> )	<b><math>Re_{ava}</math></b>
i	0,5	0,5000	3,0000	0,1667	2,4999	$6,4099 \cdot 10^5$
ii	0,7	0,7000	3,4000	0,2059	3,4998	$7,9181 \cdot 10^5$
iii	0,9	0,9000	3,8000	0,2368	4,4998	$9,1088 \cdot 10^5$
iv	1,1	1,1000	4,2000	0,2619	5,4997	$10,073 \cdot 10^5$
v	1,3	1,3000	4,6000	0,2826	6,4997	$10,869 \cdot 10^5$
vi	1,5	1,5000	5,0000	0,3000	7,4996	$11,538 \cdot 10^5$



JOONIS 9-9 Muutumatu kõrgusmõõtmega suuremõõtmelise nelinurkava laiusmõõtmelise määramine, milleks on kasutatud proovimismeetodiga saadud punktide interpoleerimiskõverat

JÄRELDUS. Vooluhulga  $Q = 5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  puhul on nelinurkava laiusmõõde  $d_{lm} = 1,0 \text{ m}$ . Voolamine läbi suuremõõtmelise ava on turbulentne ( $Re_{ava} > 500$ ).

Numbriline arvutusskeem. Nelinurkava laiusmõõde

Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod

#### VALEMID

Veafunktsioon:

$$ERF(y_j) = Q_j - Q,$$

milles  $y_j$  on arvutuslik nelinurkava laiusmõõde,  $Q_j$  on arvutuslik vooluhulk ja  $Q$  on etteantud vooluhulk.

Veafunktsiooni tuletis:

$$\frac{dERF(y_j)}{dy_j} = \frac{dQ_j}{dy_j},$$

milles on eeldatud, et  $Q = \text{konstant}$ .

Arvutuslik vooluhulk on määratud valemiga

$$Q_j = \frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} y_j \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - h_{km})^{\frac{3}{2}} \right),$$

milles  $C_d$ ,  $g$ ,  $h_{km}$  ja  $h_2 = (z_{vkp} - z_{avap})$  on konstantsed suurused .

→

$$\begin{aligned} \frac{dERF(y_j)}{dy_j} &= \frac{d}{dy_j} \left( \frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} y_j \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - h_{km})^{\frac{3}{2}} \right) \right) \\ &= \frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - h_{km})^{\frac{3}{2}} \right) \frac{d}{dy_j} (y_j) \\ &= \frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - h_{km})^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{Q_j}{y_j} \end{aligned}$$

Veafunktsioonist suunatud tuletise võtmise reegel:

$$\frac{dERF(y_j)}{dy_j} = \frac{0 - ERF(y_j)}{y_{j+1} - y_j},$$

võimaldab kasutusele võtta Tayloriga valemiga 1-järgu tuletise täpsusega:

$$y_{j+1} = y_j - \frac{ERF(y_j)}{\frac{dERF(y_j)}{dy_j}}.$$

Numbrilise arvutuskeemi põhivalemi üldkuju on

$$y_{j+1} = y_j - \frac{Q_j - Q}{\frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - h_{km})^{\frac{3}{2}} \right)} = y_j - \frac{Q_j - Q}{\frac{Q_j}{y_j}} = y_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\frac{1}{y_j}}.$$

**ARVUTUSSKEEM** (Nelinurkava vooluhulk, laiusmõõde)

Numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku nelinurkava (muutumatu laiusega) sisemõõdme valem (iteratsioonmeetodi põhivalem)

$$y_{j+1} = y_j \frac{Q}{Q_j}$$

Arvutusliku vooluhulga valem

$$Q_j = \frac{2 C_d \sqrt{2 g}}{3} y_j \left( h_2^{\frac{3}{2}} - (h_2 - h_{km})^{\frac{3}{2}} \right)$$

## ARVUTUS. Nelinurkava laiusmõõde

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$y_j$ (m)	2,0	1,0001	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	9,9995	5,0000	5,0000	5,0000	5,0000	5,0000

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$y_j$ (m)	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	5,0000	5,0000	5,0000	5,0000

### VASTUSED

$$k_{Lava} = 0,1662$$

$$A_e = 1,0001 \text{ m}^2$$

$$\chi = 4,0001 \text{ m}$$

$$R_h = 0,2500 \text{ m}$$

$$d_{sm} = 1,0001 \text{ m}$$

$$Re_{ava} = 9,6151 \cdot 10^5$$

JÄRELDUS. Arvutustulemustest selgub, et voolamine muutumatu kõrgusega nelinurkse ristlõikega suuremõõtmelises avas on turbulentne ( $Re_{ava} > 500$ ).

## 9.7 VIITED

9.1 Kurkus, J., Karus, G., Pant, R., Rimmel, A., Tomingas, E., Vei, E. jt. (1962). *Maaparanduse käsiraamat. Maaparanduse alused*. Eesti Riiklik Kirjastus.

9.2 Maastik, A., Haldre, H., Koppel, T. & Paal, L. *Hüdraulika ja pumbad*. OÜ Greif.

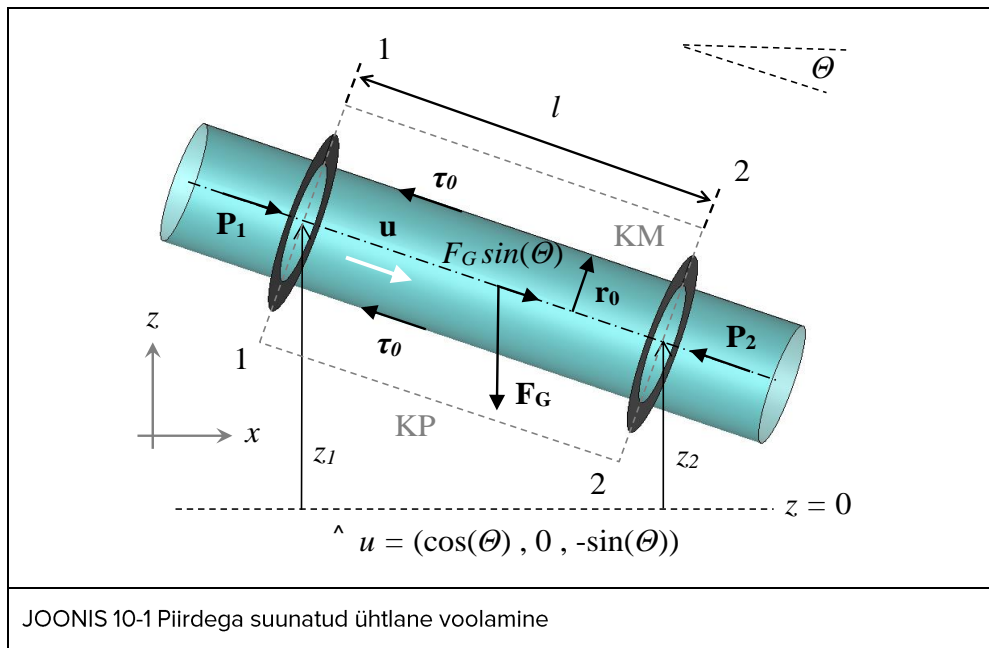
9.3 *Vooluveekogu paisutamiseks nõutava vee erikasutusloa koostamise juhend*. (2008). Keskkonnaministeerium/AS Maves. <https://envir.ee/media/569/download>

## II KVAASISTATSIONAARNE VOOLAMINE

### 10 TEOORIA. HÜDRAULIKA PRINTSIIBID

#### 10.1 VOOLAMISE LIIKUMISHULGA KONTROLLMAHU VÕRRAND

Kasutame integraalset voolamise liikumishulga võrrandit rõhulisele voolamisele täieliku torutäitega lõigus toimivate jõudude analüüsiks. Pinnajõududest mõjuvad voolulõiguga määratud kontrollmahus rõhujõud ja hõrdejõud. Massijõududest mõjub kontrollmahus raskusjõud. Fikseerime lõplike mõõtmetega kontrollmahu mittehorizontaalse torupiirdega suunatud ühtlase voolamisega lõigus. Ühtlane voolamine on võimalik muutumatu ristlõikega sirges torus või prismaatilises voolusängis. (Looduslikes voolusängides, st loodussängis puudub ühtlane voolamine põhjusel, et vooluveekogude sängid ei ole prismaatilised.)



Pinnajõududest mõjub kontrollpinna voolamisele avatud osades (voolulõigu otstes) rõhujõud:  $|\vec{P}_1| = P_1 = p_1 A$  ja  $|\vec{P}_2| = P_2 = p_2 A$ , milles  $p_1$  ja  $p_2$  on keskmised rõhud vastavalt toru ristlõigetel 1-1 ja 2-2. (Survepinge on määratud mehaanilise rõhuga valitud pinnal.) Pinnajõududest mõjub ka toru seinale hõrdejõud:  $|\vec{F}_D| = F_D = \tau_0 \chi l$ , milles  $\tau_0$  on hõrdepinge torupiirdele (muutumatu pinge piirdele lähedase

voolamise viskoosses aluskihis),  $\chi$  on märgpiire elavlõike  $A$  kohta (toru ristlõike siseperimeetri pikkus) ja  $l$  on voolulõigu pikkus. (Hõõrdejõud sõltub hõõrdepingest valitud orientatsiooniga pinnal.) Massijõududest mõjub voolulõigus raskusjõud:  $\vec{F}_G = (0, 0, -\rho g A l)$ , milles  $\rho$  on vedeliku tihedus ja  $g$  on raskuskiirendus.

Voolusuund on määratud toru pikikalde nurgaga  $\theta$ , millele vastab ühikvektor  $(\cos(\theta), 0, -\sin(\theta))$ . Statsionaarse voolamise liikumishulga võrrand kontrollmahule on

$P_1 - P_2 + F_G \sin(\theta) - F_D = u_1 \{-\rho u_1 A\} + u_2 \{\rho u_2 A\}.$	10-1
--	------

Kasutades vastavaid asendusi võrrandis (VALEM (10-1)) ning geomeetrilist seost  $\sin(\theta) = (z_1 - z_2)/l$ , võib voolamise liikumishulga võrrandit ühtlase voolamise puhul ( $u_1 = u_2$ ) oluliselt lihtsustada:

$p_1 A - p_2 A + \rho g A (z_1 - z_2) - \tau_0 \chi l = 0.$	10-2
---	------

Voolamise liikumishulk kontrollmahus ei muutu ühtlasel voolamisel ja seetõttu ei ole voolukiiruse muutusega kaasnevat voolujõudu:  $|\vec{F}_F| = u_1 \{-\rho u_1 A\} + u_2 \{\rho u_2 A\}.$

Lihtsustatud võrrandi (VALEM (10-2)) taandamisel arvutusliku suurusega  $\rho g A$  ja pärast võrrandi liikmete rühmitamist indeksite järgi järeldub võrrand:

$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right) = \frac{\tau_0 \chi l}{\rho g A}.$	10-3
---	------

Reaalvoolu Bernoulli võrrand (VALEM (2-10)) lihtsustub ühtlasel voolamisel ( $u_1 = u_2$ ) järgmiselt:

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}\right) = h_l,$$

→

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right) = h_l,$$

milles  $h_l$  on hõõrdesurvekadu JOONIS 1.1 voolulõigus 1-2.

Taandatud voolamise liikumishulga võrrandist (VALEM (10-3)) ja reaalvoolu Bernoulli võrrandist (VALEM (2-10)) järeldub seos:

$\frac{\tau_0 \chi l}{\rho g A} = h_l.$	10-4
---	------

Ühtlasel voolamisel täieliku torutäitega ümartorus saame hõõrdepinge piirdel määrata kui

$\tau_0 = \rho g \frac{A h_l}{\chi l} = \rho g R_h I_h = \rho g \frac{r_0}{2} I_h,$	10-5
---	------

milles  $R_h = \frac{A}{\chi}$  on hüdrauliline raadius ja  $I_h = \frac{h_l}{l}$  on hüdrauliline lang. Täieliku torutäitega ümartorus on hüdrauliline raadius määratud kui pool toru raadiusest:  $R_h = \frac{r_0}{2}$ . Normaaalsügavuseks  $d_0$  nimetatakse ühtlase voolamise sügavust voolusängis. Vabapinnaga voolamisel laias voolusängis (vooluveekogus) võib hüdraulilise raadiuse määrata normaalsügavusega:  $R_h \approx B d_0 / (B + 2 d_0) \approx d_0$ . Ühtlasel vabapinnaga voolamisel võib hüdraulilise langu määrata voolusängi aluspõhja languga ehk põhjalanguga  $l \approx i_0$ . Hõõrdepinge on  $\tau_0 \approx \rho g d_0 i_0$  (VIIDE 10.1, „Hüdraulika ja pumbad“).

Bernoulli kolmikliikmes on potentsiaalne erienergia määratud kui  $z + p/(\rho g)$  ja kineetiline erienergia kui  $\bar{u}^2/(2g)$ . Mehaaniline energia on

$E_{meh} = E_{pot} + E_{kin}.$	10-6
--------------------------------	------

Kui võrdlusnivooga  $z = 0$  määrata voolamise aluspõhi, vabapinna kõrgus aluspõhjast on  $h_{vp}$ , siis sügavus vabapinnast on  $d = h_{vp} - z$ , milles  $0 > z > h_{vp}$ . Vabapinnaga voolamisel, mille puhul vertikaalne voolukiiruse komponent ei ole oluline, võib võtta kasutusele hüdrostaatilise rõhu:  $p = p_0 + \rho g (h_{vp} - z)$ . Madalvee voolamise võrrandites eeldatakse, et pinnalaine pikkus on tunduvalt suurem kui keskmine veesügavus, ning võetakse kasutusele hüdrostaatiline rõhk, st rõhu muut asendatakse modelleerimisülesandes vabapinna kõrguse muuduga. Potentsiaalne energia  $E_{pot}$  vastab veesamba kõrgusele  $h_{vp}$  tingimusel, et rõhku vabapinnal ei võeta arvesse, st  $p_0 = 0$ . Arvestades õhurõhuga  $p_0$  vabapinnal, tuleb vedeliku sügavuse määramisel potentsiaalset erienergiat vähendada nn õhurõhukõrguse  $p_0/(\rho g)$  võrra. Vedelikusamba kõrguse määramisele kinnises surveanumas või horisontaalses suuremõtmelises survetorus kasutatakse diferentsiaalrõhku, mis sõltub hüdrostaatilise rõhu vertikaalsest muutusest.

## 10.2 VOOLUPROTSSESSI PARAMEETRISEERIMINE

Survevoolu voolurežiimi ümartorus iseloomustatakse Reynoldsi arvuga (VALEM (2-26)):

$$Re = \frac{u d_s}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $d_s$  on toru sisediaameeter (täieliku torutäitega voolamise veesamba mõõde) ja  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur. Veevoolule



täistaitumusega ümartorus vastav kriitiline Reynolds'i arv on 2000, mille juures toimub üleminek laminaarselt voolamiselt turbulentselt voolamisele.

Voolamisel täieliku torutäitega ümartorus, sisediameetriga  $d_s$ , määratakse hüdrauliline raadius valemiga:

$$R_h = \frac{A_e}{\chi} = \frac{\pi (d_s/2)^2}{\pi d_s} = \frac{d_s}{4}.$$

→

$$d_s = 4 R_h$$

→

$$Re = \frac{u d_s}{\nu} = \frac{u 4 R_h}{\nu} = 4 Re_{vs}$$

Kuna veevoolule täistaitumusega ümartorus vastav kriitiline Reynolds'i arv on 2000, siis järelikult hüdraulilise raadiusega määratud kriitiline voolusängi Reynolds'i arv on neljakordselt erinev,  $Re_{vs} = Re/4$ . Laminaarse ja turbulentselt voolamise ülemineku kriitiline voolusängi Reynolds'i arv on 500.

Hüdraulilist vabavoolurežiimi nelinurkse ristlõikega voolusängis ehk vabapinnaga voolamise energeetilist olekut vastavas avasängis iseloomustakse Froude'i arvuga (VALEM (3-14)):

$Fr = \frac{u}{\sqrt{g h}},$	10-7
------------------------------	------

milles  $u$  on voolukiirus,  $h$  on veepinna kõrgus voolusängi aluspõhjast (avasängi või pealtkaetud voolusängi voolamise veesamba kõrgusmõõde) ja  $g$  on raskuskiirendus.

Rahulik voolamine vastab Froude'i arvule  $Fr < 1$  ja käre voolamine  $Fr > 1$ . Pidevat üleminekut rahulikust voolamisest käre voolamiseks iseloomustatakse kriitilise voolamisega, mille jaoks  $Fr = 1$ . Froude'i arvu kasutatakse vabapinnaga voolamise nn mehaanilise energia muutuse iseloomustamiseks, seda näiteks vee paisutamisele, milles voolujõud, st voolukiiruse muutusega määratud jõud, on oluline.

Täieliku torutäitega voolamise üleminekut nõ osalise torutäitega voolamiseks iseloomustatakse Zhukoski arvu (Žukoski arvu) valemiga:

$Zu = \frac{c_{kavern}}{\sqrt{g d_s}},$	10-8
---	------

milles  $c_{kavern}$  on gaasikaverni liikumiskiirus,  $d_s$  on toru sisediameeter ja  $g$  on raskuskiirendus. Zhukoski arvu kasutatakse tööstuslike mõõtmetega torude tühjendamise- ja täitmisdünaamika iseloomustamisel, milles gaasi ja vedeliku voolamise koostoime on oluline. Näiteks väikese diameetriga horisontaalse toru täitmisel või tühjendamisel moodustab vee ja õhu eralduspind liikumisel vertikaalse

vahepinna toru ristlõikes, mille puhul  $c_{kavern} = 0$ . Suurema diameetriga toru täitmisel või tühjendamisel tekib stratifitseeritud voolamine, mille puhul  $c_{kavern} \neq 0$  (VIIDE 10.2, „Rakenduslik hüdromehaanika“).

### 10.3 SAINT-VENANTI VÖRRANDID

Torustiku täieliku torutäitega osa „vesiõhkfrondi“ liikumisel, viskoosse vedeliku voolamisele võib esitada voolamise liikumishulga võrrandiga:

$\frac{du}{dt} = -u \frac{du}{dx} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \Delta u,$	10-9
---	------

milles „vesiõhkfrondi“ liikumiskiirus on määratud vee voolukiirusega, st  $u = u_{vesi}$  ja  $u_{vesi} = v_{vesiõhkfront}$ , rõhk on  $p$ , vee tihedus on  $\rho = \rho_{vesi}$ , kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur on  $\nu = \nu_{vesi}$  ja Laplace'i skalaaroperaator on

$$\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \text{ (VIIDE 10.3)}$$

Voolujõudu muutuva suurusega kontrollmahu massiühikule ei arvesta põhjusel, et voolamine toimub muutumatu sisemõõtmega (sisediameetriga) torus ja praktiliselt vertikaalse „vesiõhkfrondi“ liikumisega:

$$-u \frac{du}{dx} = 0.$$

Samuti eeldame, et mahuti ja horisontaaltoru ühendusava kohttakistustegur  $k_{L1} \rightarrow 0$ . See võimaldab ka rõhukõrguse torustiku sissevoolus hästi määrata ühtlustusmahuti ülevoolu kõrguse ja õhurõhukõrguse summaga.

Tingimusel, et  $\rho = \rho_{vesi} = \textit{konstant}$ , st õhk ja vesi ei segune torustiku täitmisel veega vertikaalse „vesiõhkfrondi“ liikumisel, võib võtta kasutusele rõhukõrguse:

$$h_{rk} = \frac{p}{\rho g},$$

milles  $p$  on termodünaamiline rõhk.

Rõhugradientjõu muutuva suurusega kontrollmahu massiühikule määrame torustiku täieliku torutäitega osale rõhukõrguste vahega:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = g \frac{(h_{\delta hk} - h_{sv})}{l} = -g \frac{(h_{sv} - h_{\delta hk})}{l},$$

milles  $h_{sv}$  on rõhukõrgus torustiku sissevoolus ja  $h_{\delta hk}$  on torustikus lukustunud õhuosa rõhukõrgus.

Hõõrdejõu muutuva suurusega kontrollmahu massiühikule määrame torustiku täieliku torutäitega osale Saint-Venant'i valemiga:

$$\nu \Delta u = -\frac{\chi}{A_e} \frac{\tau_0}{\rho},$$

milles toru sisepinna märgperimeeter on  $\chi$ , elavlõige on  $A_e$ , hõrdepinge toru sisepinnal on  $\tau_0$  ja vee tihedus on  $\rho$ . Ümartorule võib hõrdejõu määrata empiirilise valemiga:

$$v \Delta u = -\frac{f}{2 d_s} u|u|,$$

milles Fanningi hõrdetakistustegur on  $f(= \lambda/4)$ , toru sisediameeter on  $d_s$  ja vee voolukiirus on  $u$ .

Esimeses lähenduses võib viskoosse vedeliku voolamise Fanningi hõrdetakistusteguri määrata konstandiga:  $f = \textit{konstant}$ .

Suletud kaevuluugiga torustiku klapi avamisel, mis vastab voolamisele paigalseisust, on torustiku täitmisprotsess määratud voolamise liikumishulga võrrandiga viskoosse vedeliku voolamisel ja pidevuse võrrandiga ideaalsele gaasile, vastavalt:

$$\frac{du_{vesi}}{dt} = -g \frac{(h_{\delta hk} - h_{sv})}{l} - \frac{f}{2 d_s} u_{vesi} |u_{vesi}|,$$

$$\frac{d p_{\delta hk}}{dt} = \frac{p_{\delta hk}}{V_{\delta hk}} A_e u_{vesi},$$

milles rõhukõrgus torustiku sissevoolus on

$$h_{sv} = (z_1 - z_2) + \frac{p_0}{\rho g} = \textit{konstant},$$

milles õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$  on atmosfääri rõhk, st  $p_{atm} = 101,325$  kPa, ning torustikus lukustunud õhuosa rõhukõrgus on

$$h_{\delta hk} = \frac{p_{\delta hk}}{\rho g}.$$

## 10.4 VOOLUSÜSTEEMI PIDEVUSE VÕRRAND

Hüdraulilises voolusüsteemi muutuva veehulga võime määrata hariliku diferentsiaalvõrrandiga, mis vastab kvaasistatsionaarse voolamise pidevuse võrrandile:

$\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^n Q_n,$	10-10
-------------------------------------	-------

milles  $V(t)$  on hüdraulilise voolusüsteemi veehulk (vee kogus) ja  $Q(t)$  on vooluhulk. Ajas muutuv veehulk hüdraulilises voolusüsteemis sõltub selle sisse- ja väljavooluhulkadest, mille arv on  $n$ .

Kvaasistatsionaarse voolamisele, kui igal ajahetkel on voolamine mitte-statsionaarne ja igas ajavahemikus statsionaarne, võib kasutada hüdraulilise voolusüsteemi välja- ja sissevoolule statsionaarse voolamise, st nii ühtlase kui ka mõõdukalt ebaühtlase voolamise valemeid.

## 10.5 VOOLAMISE ERIOLUKORRAD

### 10.5.1 ÜHTLANE VOOLAMINE

Hüdraulilise voolusüsteemi ühtlase turbulentse voolamise vooluhulga võib määrata Chézy vooluhulga valemiga

$Q = C_{Ch} A_e \sqrt{R_h I_h},$	10-11
----------------------------------	-------

milles  $C_{Ch}$  on Chézy tegur ja  $A_e$  on elavlõige,  $R_h$  on hüdrauliline raadius ja  $I_h$  on hüdrauliline lang.

Võtame kasutusele SI-mõõtühikute süsteemi Manningi karedusskaala. Määrame Chézy teguri valemiga (VALEM (2-34)):

$$C_{Ch} = \frac{1}{n_M} R_h^{\frac{1}{6}},$$

milles  $n_M$  on Manningi karedustegur. Vooluhulk määratakse empiirilise valemiga (VALEM (2-36)), mis on Manningi vooluhulga valem:

$$Q = \frac{1}{n_M} R_h^{\frac{1}{6}} A_e R_h^{\frac{1}{2}} I_h^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n_M} R_h^{\left(\frac{1}{6} + \frac{3}{6}\right)} A_e I_h^{\frac{1}{2}} = \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e I_h^{\frac{1}{2}}}{n_M}.$$

**MÄRKUS.** Manningi vooluhulga valem (VALEM (2-36)) on kasutusel SI-mõõtühikute süsteemis.

Voolusängi Reynoldsi arv on määratud valemiga (VALEM (3-8))

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus (st voolamise ruumkiirus),  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur ja  $R_h$  on hüdrauliline raadius. Turbulentne voolamine vastab kriitilisele voolusängi Reynoldsi arvu väärtusele  $Re_{vs} = 500$ .

### 10.5.2 RÕHULINE VOOLAMINE

Ühtlase laminaarse voolamise vooluhulga horisontaalses survetorus, mis on täieliku täitumusega ümartoru, võib määrata Poiseuille'i vooluhulga valemiga:

$Q = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{8 \mu l} \left(\frac{d_s}{2}\right)^4,$	10-12
---	-------

milles  $\mu$  on dünaamiline molekulaarne viskoossustegur,  $d_s$  on ümartoru sisediaameeter,  $l$  on ümartoru pikkus ja  $(p_1 - p_2)$  on ümartoru pikkusele vastav rõhu muutus.

Ühtlase turbulentsse voolamise vooluhulga survetorus, mis on täieliku täitumusega ümartoru, võib määrata Manningi vooluhulga kloonvalemiga (VALEM (2-36)):

$Q = \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e I_h^{\frac{1}{2}}}{n_M} = \left(\frac{d_s}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \pi \left(\frac{d_s}{2}\right)^2 \frac{I_h^{\frac{1}{2}}}{n_M} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\pi I_h^{\frac{1}{2}}}{n_M} \left(\frac{d_s}{2}\right)^{\frac{8}{3}}.$	10-13
--	-------

milles voolamisel täistaitumusega ümartorus, sisediaameetriga  $d_s$ , määratakse hüdrauliline raadius valemiga:

$$R_h = \frac{A_e}{\chi} = \frac{\pi (d_s/2)^2}{\pi d_s} = \frac{d_s}{4}.$$

→

$$d_s = 4 R_h$$

Poiseuille'i vooluhulga kloonvalem:

$Q = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{8 \mu l} (2 R_h)^4 = \frac{2 \pi (p_1 - p_2)}{\mu l} R_h^4.$	10-14
--	-------

### 10.5.3 VABAPINNAGA VOOLAMINE

Ühtlasele vabapinnaga voolamisele pealt avatud voolusängis on hüdrauliline lang määratud põhjalanguga, st  $I_h = i_0$ .

Ühtlase laminaarse voolamise vooluhulga mittehorisontaalses prismaatilises, nelinurkristlõikega voolusängis võib määrata vooluhulga valemiga:

$Q = \frac{W g d_0^3}{3 \nu} \sin(\alpha),$	10-15
---	-------

milles  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur,  $W$  on nelinurkristlõikega voolusängi laius,  $g$  on raskuskiirendus ja  $\sin(\alpha) = (z_1 - z_2)/l \approx i_0$  on voolusängi põhjalang.

Ühtlase turbulentsse voolamise vooluhulga voolusängis võib määrata Manningi vooluhulga valemiga (VALEM (2-36)):

$$Q = \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M},$$

milles  $i_0$  on põhjalang.

## 10.5.4 PAISUGA VOOLAMINE

Voolusängi tõkkega, st paisuga tekkivat statsionaarset ülevoolu avasängis võib kõige lihtsamal juhul iseloomustada 1D ideaalvedeliku voolamise liikumishulga võrrandiga (VALEM (10-9)):

$$0 = -u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

milles voolukiirus on  $u$ , rõhk on  $p$  ja vee tihedus on  $\rho$ . Kuna 1D statsionaarne voolamine on risti raskusväljaga, mis on määratud raskuskiirenduse vektoriga  $\vec{g} = (g_x, g_y, g_z) = (0, 0, -g)$ , siis on veerõhk hüdrostaatiline:

$$p = p_0 + \rho g d,$$

milles  $p_0$  on õhurõhk veepinnal ja  $d$  on veesügavus (VIIDE 10.2, „Rakenduslik hüdromehaanika“). Horisontaalsele madalveelisele voolamisele on 1D ideaalvedeliku voolamise liikumishulga võrrand määratud kui

$$0 = -u \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial (h + h_{pais})}{\partial x} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial x} - g \frac{\partial h_{pais}}{\partial x},$$

milles on eeldatud, et  $p_0 = \textit{konstant}$ . Vabapinna kõrgus tehissängi aluspõhjast määrab tehissängi aluspõhja sügavuse vabapinnast ( $h = -(-d) = d$ ) ning  $h_{pais}$  on avasängi aluspõhja kõrgus üle võrdlusnivoo, mis on valitud tinglikult.

Statsionaarsele voolamisele nelinurkse ristlõikega avasängis on voolamise pidevus ( $Q = h w u = \textit{konstant}$ ) (VALEM (2-3)) määratud diferentsiaalse avaldisega:

$$h w \frac{\partial u}{\partial x} + w u \frac{\partial h}{\partial x} + u h \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

milles  $w$  on nelinurkse ristlõike aluspõhja laius (ka pealtlaius  $w = W$ ).

Ideaalvedeliku mõõdukalt ebaühtlase voolamise diferentsiaalvõrrand nelinurkse ristlõikega voolusängile, milles voolamist mõjutab pais, on määratud võrrandiga

$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\frac{\partial h_{pais}}{\partial x} - Fr^2 \frac{h}{w} \frac{\partial w}{\partial x}}{Fr^2 - 1},$	10-16
---	-------

milles  $h(x)$  on veepinna kõrgus aluspõhjast,  $h_{pais}(x)$  on aluspõhja kõrgus (ka paisu nõlvade ja läve kõrgus) võrdlusnivoo suhtes, mis on valitud tinglikult, ja  $w(x)$  avasängi laius (ka voolamise pealtlaius) ja  $Fr^2$  on Froude'i arv astmes 2 nelinurksele voolamisele. Vabapinnaga kriitilise voolamise  $Fr^2 = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule vastavad  $Fr^2 < 1$  ja  $Fr^2 > 1$ . Ideaalvedeliku mõõdukalt ebaühtlase voolamise diferentsiaalvõrrand (VALEM (10-16)) võimaldab määrata paisuga voolamisele vabapinna kõrguse  $h(x)$  pidevalt avasängi koordinaadile  $x$ , mis määrab

aluspõhja kõrguse  $h_{pais}(x)$  ja avasängi laiuse  $w(x)$  muutuse pidevalt. Sõltuvalt Froude'i arv astmes 2 väärtusest ideaalvedeliku mõõdukalt ebaühtlase voolamise diferentsiaalvõrrandis (VALEM (10-16)), on võimalik määrata täielikult rahuliku ja käredu voolamise, ning rahulikust voolamiselt käreduks voolamisele ülemineku voolamise, milles on kriitilise voolamise ristlõige, veepinna jooned paisutusele ja veesööstule. Siinkohal tuleb märkida, et käredust voolamiselt rahulikule voolamisele ülemineku voolamine, milles on kriitilise voolamise ristlõige, ei ole madalveeliste pinnalainete suhtes stabiilne olukord.

Vabapinnaga voolamise mehaaniline energia jagunemine potentsiaalse ja kineetilise energia vahel määrab Froude'i suhtarvu kriteerium. Samade nõlvustega trapetsristlõikega voolusängi Froude'i arv astmes 2 on määratud valemiga:

$Fr^2 = \frac{u^2}{g \frac{(h w + h^2 m_n)}{(w + 2 h m_n)'}}$	10-17
---	-------

milles voolukiirus on  $u$  ja nõlvustegur  $m_n = \cot(\theta)$ , ning  $\theta$  on tehissängi nõlva välisnurk. Trapetsristlõikega voolusängi vabavoolu Froude'i arv ruudus valem teiseneb nelinurkristlõikega voolusängi vabavoolu Froude'i arv ruudus valemiks vastavalt tingimusel  $m_n = 0$ . Nelinurkse ristlõikega voolusängi Froude'i arv astmes 2 valem (VALEM (10-7)):

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g h^3 w^2} = \frac{u^2}{g h}$$

**MÄRKUS.** *Iseseisva tööna tuletada ideaalvedeliku mõõdukalt ebaühtlase voolamise diferentsiaalvõrrand kolmnurkse ristlõikega voolusängile, milles voolamist mõjutab pais. Kasutada kolmnurkse ristlõikega voolamise sügavuse ja pealtlaiuse geomeetrilist seost:  $d = \beta W / 2$ . Kolmnurkne elavlõige on pool nelinurksest elavlõikest, mille on samad sügavuse ja laiuse mõõtmed.*

### 10.5.5 VABAVOOLU PAISUTAMINE

Ideaalvedeliku Bernoulli võrrand ülevoolule VALEM (2-18) on

$$h_{pais} + PK \approx h_{pais} + d + \frac{u^2}{2g},$$

milles  $h_{pais}$  on paisu kõrgus,  $PK$  on paisutuskõrgus ja  $d$  on veekihi sügavus paisu lävel,  $g$  on raskuskiirendus ja  $u$  on voolukiirus paisu lävel. Ideaalvedeliku Bernoulli võrrandis ülevoolule VALEM (2-18) on eeldatud, et paisu ülemises bjefis on voolamise kineetiline energia oluliselt väiksem potentsiaalsest energiast. Potentsiaalne erienergia paisu ülemises bjefis on määratud suurusega  $h_{pais} + PK$ .

Ideaalvedeliku Bernoulli võrrandi ülevoolule VALEM (2-18) võib esitada dimensioontaandatud kujul võrrandiga

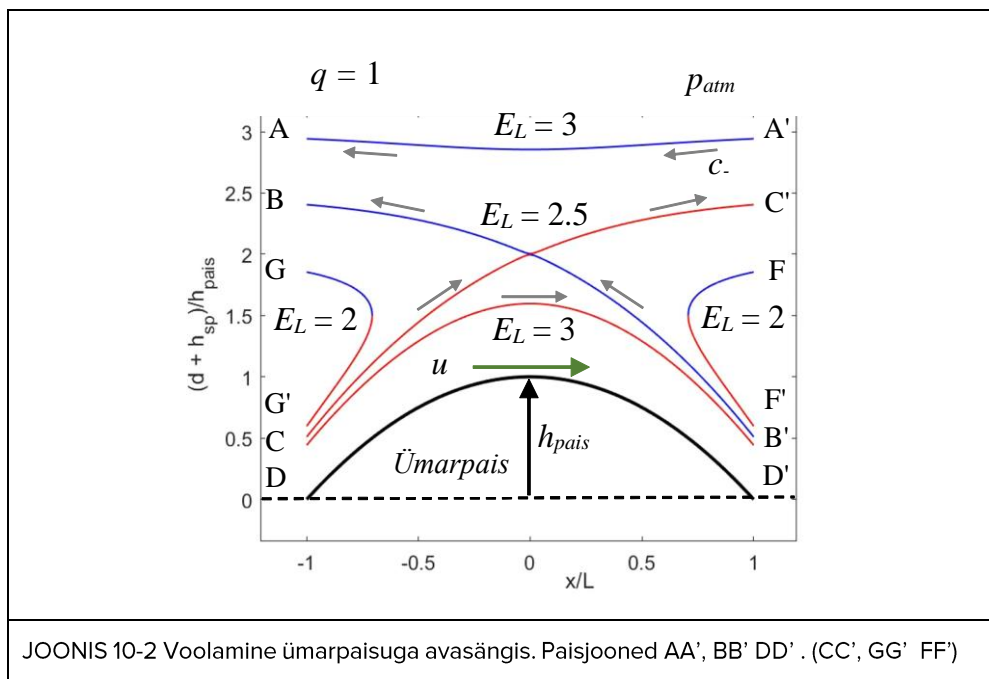
$$E_L \approx \left( \frac{h_{sp}}{h_{pais}} \right) + \left( \frac{d}{h_{pais}} \right) + \frac{q^2}{2} \left( \frac{h_{pais}}{d} \right)^2,$$

milles  $h_{sp}$  on paisu sisepõhja kõrgus võrdlustasemest, mis on valitud tinglikult,  $h_{pais}$  on paisu läve kõrgus ehk paisu aluspõhja maksimaalne kõrgus ( $h_{pais} = \max(h_{sp}) = \text{konstant}$ ),  $d$  on veekihi sügavus paisul,  $Q (= u w d)$  on vooluhulk,  $w$  on nelinurkse ristlõike aluspõhja laius, ning võrrandi dimensioonitud konstandid on

$$q = \frac{Q}{g^{1/2} h_{pais}^{3/2} w},$$

$$E_L = \frac{h_{pais} + PK}{h_{pais}}.$$

**MÄRKUS.** Madalveelaine liikumiskiirus vastuvoolu  $c_- = u - \sqrt{g d}$ .



JOONIS 10-2 Voolamine ümarpaisuga avasängis. Paisjooned AA', BB' DD'. (CC', GG' FF')

(VIIDE 10.4)

Hüdraulilise vabavoolu režiimil, mis vastab kriitilisel voolamisele  $Fr = 1$  (VALEM (10-7)), määratakse voolukiirus nelinurkristlõikega voolusängis tingimusel:

$$u = \sqrt{g d}.$$



→

$$h_{p\text{ais}} + PK = h_{p\text{ais}} + d + \frac{u^2}{2g}$$

$$PK = d + \frac{d}{2} = \frac{3}{2}d$$

$$d = \frac{2}{3}PK$$

Nelinurkristlõikega voolusängis laiusega  $w$  määratakse vooluhulk valemiga (VALEM (2-2)):

$$Q = u d w.$$

→

$$u = \sqrt{g d} = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} (PK)^{\frac{1}{2}}$$

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w$$

Paisutuskõrguse järgi vooluhulga määramise valemit nimetatakse maksimaalse vooluhulga valemiks juhul kui paisu lävel  $Fr = 1$ . Reaalvedeliku paisutamisele täiendatakse maksimaalse vooluhulga valemit vooluhulgateguriga  $C_d < 1$ . Ideaalvedeliku voolamise tingimustel on vooluhulgategur  $C_d = 1$ .

Nelinurkse ristlõikega reaalvedeliku maksimaalse vooluhulga valem ülevoolule (VALEM (2-23)) on

$$Q = C_d g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w.$$

Ülevoolu põhivalemi (VALEM (2-24)) võib esitada teisendusega:

$$Q = C_d g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}} w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}} = C_d^* w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}},$$

milles ülevoolutegur on määratud seosega

$$C_d^* = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}}.$$

## 10.5.6 IDEAALSE GAASI VOOLUPROTSCESS

Polütroopses protsessis on ideaalse gaasi rõhu ja ruumala seos määratud valemiga:

$p_{\text{õhk}} V_{\text{õhk}}^{k_{es}} = \text{konstant},$	10-18
---	-------

milles õhule erisoojuste suhtetegur  $k_{es} = 1,401$  (VIIDE 10.2, „Rakenduslik hüdro-mehaanika“).

Suletud hüdraulilises voolusüsteemis on õhuosa ruumala ajaline muutus määratud ideaalse gaasi polütroopsele protsessile koostatud hariliku diferentsiaalvõrrandiga:

$$V_{\delta hk}^{k_{es}} \frac{\partial p_{\delta hk}}{\partial t} + p_{\delta hk} V_{\delta hk}^{(k_{es}-1)} \frac{\partial V_{\delta hk}}{\partial t} = 0,$$

$$V_{\delta hk}^{k_{es}} \frac{\partial p_{\delta hk}}{\partial t} + p_{\delta hk} \frac{V_{\delta hk}^{k_{es}}}{V_{\delta hk}} \frac{\partial V_{\delta hk}}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial p_{\delta hk}}{\partial t} + p_{\delta hk} \frac{1}{V_{\delta hk}} \frac{\partial V_{\delta hk}}{\partial t} = 0,$$

$$V_{\delta hk} \frac{\partial p_{\delta hk}}{\partial t} + p_{\delta hk} \frac{\partial V_{\delta hk}}{\partial t} = 0$$

→

$\frac{\partial V_{\delta hk}}{\partial t} = - \frac{V_{\delta hk}}{p_{\delta hk}} \frac{\partial p_{\delta hk}}{\partial t}.$	10-19
--	-------

Suletud hüdraulilise voolusüsteemi olukorras võib õhuosa rõhu määrata kvaasistatsionaarse voolamise pidevuse võrrandiga:

$\frac{\partial p_{\delta hk}}{\partial t} = \frac{p_{\delta hk}}{V_{\delta hk}} Q_{vesi} = \frac{p_{\delta hk}}{V_{\delta hk}} u_{vesi} A_e.$	10-20
--	-------

Avatud hüdraulilises voolusüsteemis  $V_{\delta hk} = V_{\delta hk}'$  ja  $p_{\delta hk} = p_{atm}$ . Suletud hüdraulilise voolusüsteemi täitmisel veega muutuvad nii „lukustunud“ õhuosa ruumala kui ka termodünaamiline rõhk vastavalt ideaalse gaasi polütroopse protsessi võrrandile.

## 10.6 VIITED

10.1 Maastik, A., Haldre, H., Koppel, T. & Paal, L. *Hüdraulika ja pumbad*. OÜ Greif.

10.2 Laanearu, J. (2019). *Rakenduslik hüdro-mehaanika*. Tallinna Tehnikaülikooli kirjastus.

10.3 Vreugdenhil, C. B. (1994). *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Kluwer Academic Publisher.

10.4 Pratt, L. J. (1986). Hydraulic control of sill flow with bottom friction, *J. Phys. Oceanogr* 16(11), 1970–1980.

# 11 ARVUTUSMEETOD. RUNGE-KUTTA NUMBRILINE MEETOD

## 11.1 HÜDRAULILINE VOOLUPROTSESS

Numbrilise arvutusmeetodi kasutamine võimaldab hüdraulilise voolusüsteemi valemeid või võrrandeid kasutada ka ajas muutuvate vooluprotsesside arvutamisele. Näiteks võib tuua hüdraulilise voolusüsteemi veest tühjenemise ja veega täitumise arvutamise, milles kanalisatsiooni veehulk sõltub välja- ja sissevooluhulga erinevusest. Hüdraulilise voolusüsteemi numbrilist arvustuskeemi on lihtsam kasutada voolamise tingimustel, mis vastab kvaasistatsionaarse voolamise olukorrale, näiteks mahuti, basseini, kuivendustiigi vms aeglane tühjenemine ja täitumine läbi toru, ava, paisu, pinnase vms. Kvaasistatsionaarsel voolamisel on hüdraulilises voolusüsteemis, mis on määratud voolujoontest koosneva voolutoruga, vooluhulk igas ajavahemikus statsionaarne ja igal ajahetkel mittestatsionaarne (VIIDE 11.1, „Rakenduslik hüdromehaanika“).

## 11.2 HARILIK DIFERENTSIAALVÖRRAND. AJALINE MUUTUJA

Funktsiooni (nagu voolamise hüdraulika valemi) ajast sõltuva muutuja, st funktsiooni argumendi (hüdraulilise suuruse) järgi integreerimisel koos selle algväärtusega, kasutatakse numbrilist arvutusmeetodit. Määrame mittevektormuutuja ajalise muudu (diferentsiaali) hariliku diferentsiaalvõrrandiga ja algväärtusega:

$\frac{dz(t)}{dt} = f(z(t), t),$ $z(t_0) = z_0,$	11-1
--	------

milles  $z(t)$  on ajast  $t$  sõltuv muutuja (näiteks vabapinna kõrgus mahutis, paagis, kuivendustiigis vms) ja  $z_0$  on selle algväärtus (näiteks vabapinna kõrgus suletud mahutis, kinnises paagis, avamata kuivendustiigis vms). Diferentsiaalvõrrandis määratakse muutuja ajaline muut (diferentsiaal) diferentsiaalselt väikesele ajavahemikule, st ajaühikule.

## 11.3 VÄIKESE KORDAJAGA ASTMERIDA. TAYLORI RIDA AJAVAHEMIKULE

Numbrilises ülesandes võetakse kasutusele arvutusskeem diskreetsete ajahetkedega ja ajavaheemikuga:

$$t_j = t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$$

$$\Delta t = t_{j+1} - t_j.$$

Numbrilisel integreerimisel reeglina eeldatakse, et ajavaheemik ei muutu, st  $\Delta t = \textit{konstant}$ . Valemite süsteemi iteratsioonprotsessi koondumise tagamiseks võib kasutada ka muutuvat ajavaheemikku numbrilises arvutusskeemis.

Ajast  $t$  sõltuva muutuja  $z(t + \Delta t)$  võib arendada Tayloriga ritta:

$z(t + \Delta t) = z(t) + \frac{\Delta t^1}{1!} z'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} z''(t) + \frac{\Delta t^3}{3!} z'''(t) + \dots + \frac{\Delta t^n}{n!} z^{(n)}(t) ,$	11-2
--	------

et määrata muutuja väärtus ajavaheemiku  $\Delta t$  möödumisel. Tayloriga reast võib koostada Tayloriga valemit ritta arenduse järguga  $n$ . Näiteks Tayloriga valem 1-järgu ( $n = 1$ ) tuletise täpsusega on

$z(t + \Delta t) = z(t) + \Delta t z'(t) .$	11-3
---	------

**MÄRKUS.** Lõpliku-ajavaheemikuga numbriline valem (VALEM (11-3)) on Euleri valem, mis vastab hariliku diferentsiaalvõrrandi integreerimisele ilmutatud kujul (ingl. Euler's explicit rule).

## 11.4 RUNGE-KUTTA 4. JÄRKU NUMBRILINE ARVUTUSSKEEM

Tayloriga valemit 1-järgu ( $n = 1$ ) tuletise täpsusega kasutatakse Euleri valemit koostamiseks numbrilisele arvutusskeemile, mis vastab ühe-tõusuga valemile ilmutatud kujul:

$z_{j+1} = z_j + f(z_j, t_j) \Delta t ,$	11-4
--	------

milles  $f(z_j, t_j)$  määrab muutuja ajalise tuletise  $z'(t_j)$  ajahetkel  $t_j$ . Muutuja ajaline tuletis Euleri valemis määrab muutuja funktsioonkõvera puutuja, st tõusu ajahetkel  $t_j$ :  $k = z'(t_j)$ .

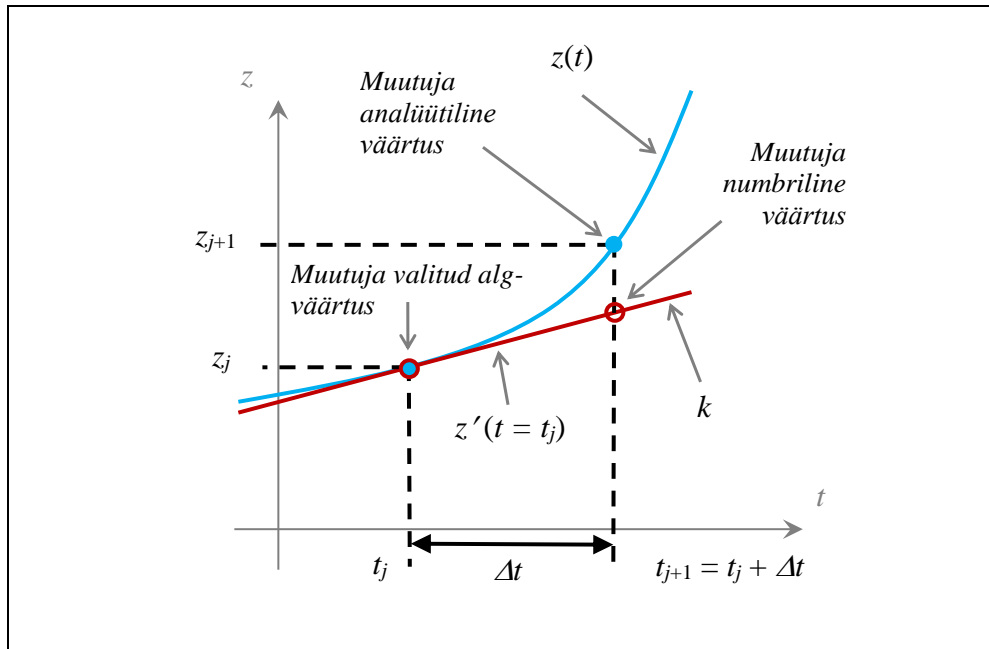
Runge-Kutta numbrilistest valemitest on üks levinum Runge-Kutta 4-tõusuga valem (nelja-tõusuga valem ilmutamata kujul). Määrame hüdraulilise suuruse (muutuja  $z(t)$ ) ajalise muudu hariliku diferentsiaalvõrrandiga ja algtingimusega:

$\frac{dz(t)}{dt} = f(z(t), t),$ $z(t = t_j) = z_j,$	11-5
--	------

milles  $j = 0$ .

Ajast sõltuva muutuja  $z(t)$  funktsioonkõvera puutujad, st tõusud ajahetketel  $t = t_j$ ,  $t = t_j + \Delta t/2$  ja  $t = t_j + \Delta t$  määratakse vastavalt valemitega:

$k_1 = f(z(t_j), t_j),$ $k_2 = f\left(z(t_j) + k_1 \frac{\Delta t}{2}, t_j + \frac{\Delta t}{2}\right),$ $k_3 = f\left(z(t_j) + k_2 \frac{\Delta t}{2}, t_j + \frac{\Delta t}{2}\right),$ $k_4 = f(z(t_j) + k_3 \Delta t, t_j + \Delta t).$	11-6
---	------



JOONIS 11-1 Ajast sõltuva muutuja  $z(t)$  funktsioonkõver ja selle tõus  $z'(t_j) = k$ . Euleri valemis (ühe-tõusuga valem ilmutatud kujul) muutuja valitud algväärtus, analüütiline väärtus ja numbriline väärtus ajavahemiku  $\Delta t$  möödumisel.

Hüdraulilise suuruse väärtuse ajavahemiku  $\Delta t$  möödumisel määratakse valemiga:

$$z(t_j + \Delta t) = z(t_0) + \frac{k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4}{6} \Delta t ,$$

$$z(t_j + \Delta t) = z(t_0) + \left( \frac{1}{6} k_1 + \frac{1}{3} k_2 + \frac{1}{3} k_3 + \frac{1}{6} k_4 \right) \Delta t ,$$

$$z(t_j + \Delta t) = z(t_j) + k \Delta t ,$$

milles vastavate kaaludega  $(1/6, 1/3, 1/3, 1/6)$  keskmine tõus on

$k = \frac{1}{6} k_1 + \frac{1}{3} k_2 + \frac{1}{3} k_3 + \frac{1}{6} k_4 .$	11-7
---	------

Runge-Kutta 4-tõusuga valemi üldkuju on järgmine

$$z(t_j + \Delta t) = z(t_j) + (c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 + c_4 k_4) \Delta t ,$$

milles tõusud on järgmised:

$$k_1 = f(z(t_j), t_j) ,$$

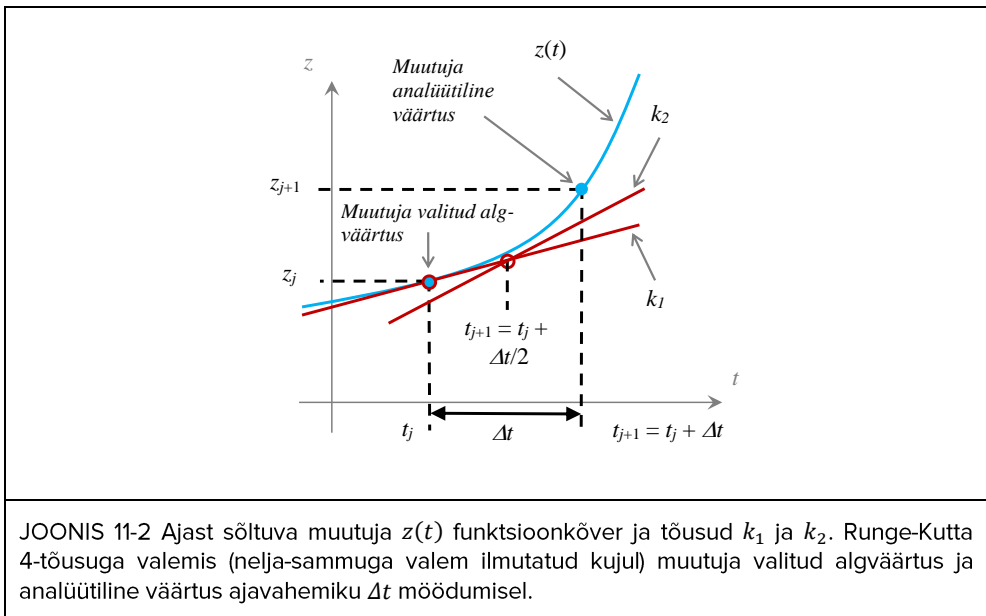
$$k_2 = f(z(t_j) + b_{21} k_1 \Delta t, t_j + a_2 \Delta t) ,$$

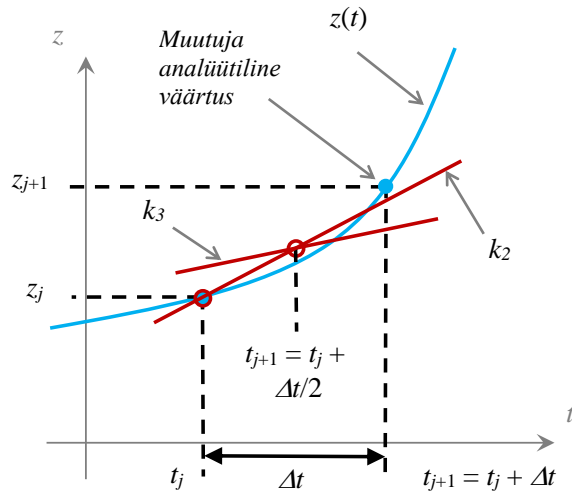
$$k_3 = f(z(t_j) + b_{31} k_1 \Delta t + b_{32} k_2 \Delta t, t_j + a_3 \Delta t) ,$$

$$k_4 = f(z(t_j) + b_{41} k_1 \Delta t + b_{42} k_2 \Delta t + b_{43} k_3 \Delta t, t_j + a_4 \Delta t) .$$

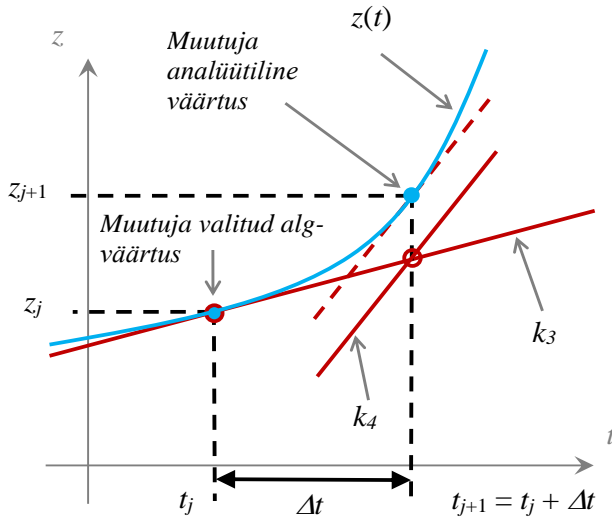
Ülalpool esitatud nn klassikalises Runge-Kutta 4-tõusuga valemis on kasutatud kordajaid

$$c_1 = c_4 = 1/6 , c_2 = c_3 = 1/3 , a_2 = a_3 = b_{21} = b_{32} = 1/2 , a_4 = b_{43} = 1 , a_1 = b_{31} = b_{41} = b_{42} = 0 .$$

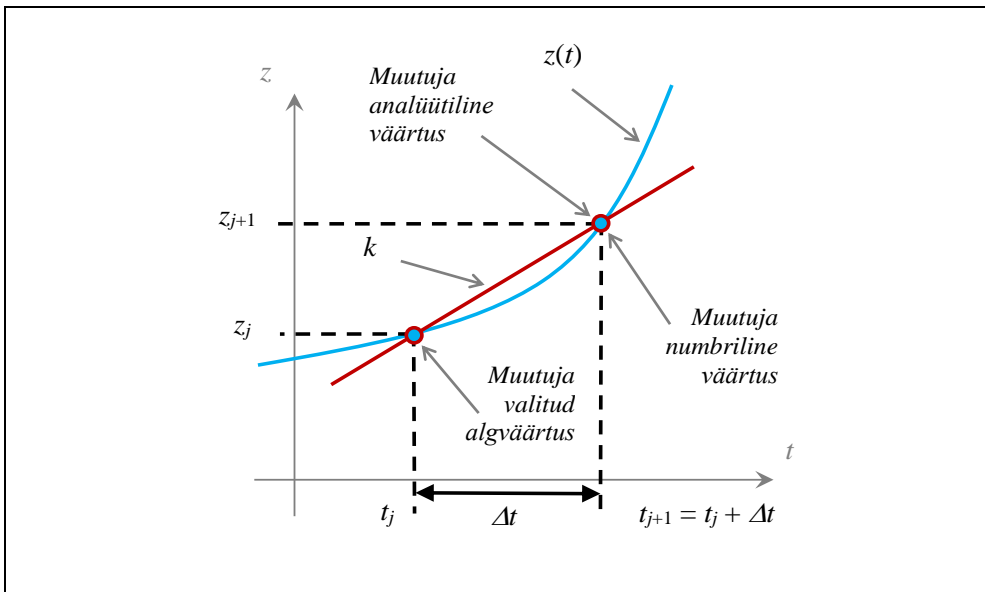




JOONIS 11-3 Ajast sõltuva muutuja  $z(t)$  funktsioonkõver ja tõusud  $k_2$  ja  $k_3$ . Runge-Kutta 4-tõusuga valemis (nelja-sammuga valem ilmutatud kujul) muutuja valitud algväärtus ja analüütiline väärtus ajavahemiku  $\Delta t$  möödumisel.



JOONIS 11-4 Ajast sõltuva muutuja  $z(t)$  funktsioonkõver ja tõusud  $k_3$  ja  $k_4$ . Runge-Kutta 4-tõusuga valemis (nelja-sammuga valem ilmutatud kujul) muutuja valitud algväärtus ja analüütiline väärtus ajavahemiku  $\Delta t$  möödumisel.



JOONIS 11-5 Ajast sõltuva muutuja  $z(t)$  funktsioonkõver ja kaalutud keskmine tõus  $k = k_1/6 + k_2/3 + k_3/3 + k_4/6$ . Runge-Kutta 4-tõusuga valemis (nelja-sammuga valem ilmutatud kujul) muutuja valitud algväärtus ja analüütiline väärtus ajavahemiku  $\Delta t$  möödumisel.

Runge-Kutta 4-tõusuga valemi kordajad esitatakse Butcheri tabeliga, mis nn klassikalises Runge-Kutta 4-tõusuga valemile on järgmine:

$a_1$	–	–	–	–	0,0	–	–	–	–
$a_2$	$b_{21}$	–	–	–	1/2	1/2	–	–	–
$a_3$	$b_{31}$	$b_{32}$	–	–	1/2	0,0	1/2	–	–
$a_4$	$b_{41}$	$b_{42}$	$b_{43}$	–	1,0	0,0	0,0	1,0	–
–	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	–	1/6	1/3	1/3	1/6

(VIIDE 11.2).

## 11.5 NUMBRILISE ARVUTUSSKEEMI KOONDUVUS

Euleri valemi, mis vastab hariliku diferentsiaalvõrrandi integreerimisele ilmutatud kujul (VALEM (11-3)), võib teisendada lõpliku-ajavahemikuga numbrilise valemi kujule (ingl. *Euler's explicit rule*):

$\frac{z_{j+1} - z_j}{\Delta x} = f(z_j) = f_j .$	11-8
---	------



**MÄRKUS.** Vajalik tingimus, et numbrilise valemiga saadud lahend vastaks diferentsiaalvõrrandi lahendile on see, et numbrilise arvutustulemuse väärtus vastab diferentsiaalvõrrandi integreerimisel saadud arväärtusele igas arvutusvõrgu punktis, kui lõplik ajavahemik  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Euleri valemi (VALEM (11-3)) kasutamise vajalik tingimus on määratud piirväärtusega:

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} - f(z(t)) \right] = 0 .$	11-9
--	------

Numbrilise valemiga (VALEM (11-9)) saadud lahendi koonduvuse tingimuse võib esitada valemiga:

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right] - f(z(t)) = 0 .$	11-10
--	-------

Euleri valemiga (VALEM (11-8)) määratud suurused võib arendada Taylori ritta:

$z(t + \Delta t) = z(t) + \Delta t z(t)' + \frac{\Delta t^2}{2!} z(t)'' + \frac{\Delta t^3}{3!} z(t)''' + \dots ,$	11-11
--	-------

milles on kasutatud tähistust

$$z(t)^{(n)} = \frac{\partial^{(n)} z}{\partial x^k} ,$$

$(n) = ', ', ', \dots$

Numbrilisele valemile, mis vastab Euleri valemi ilmutatud kujule (VALEM (11-8)), määratakse astmerea liikme järguga määratud viga (ingl. *truncation error*) valemiga:

$TE = \frac{\Delta t}{2} z(t)'' + O(\Delta t^2) .$	11-12
--	-------

Euleri valemile ilmutatud kujul, astmerea liikme järguga määratud viga (VALEM (11-12)), numbrilise arvutuse stabiilsus on määratud koefitsiendiga:

$SC = 1 + \mu \Delta t ,$	11-13
---------------------------	-------

milles  $-2 < \text{Reaalosa}(\mu \Delta t) < 0$  ja  $-1 < \text{Imaginaarosa}(\mu \Delta t) < 1$ .

Runge-Kutta 4. järgu valemi numbrilise arvutuse stabiilsus on määratud koefitsiendiga:

$SC = 1 + \mu \Delta t + \frac{1}{2} (\mu \Delta t)^2 + \frac{1}{6} (\mu \Delta t)^3 + \frac{1}{24} (\mu \Delta t)^4 ,$	11-14
---	-------

milles  $-2,8 < \text{Reaalosa}(\mu \Delta t) < 0,2$  ja  $-3 < \text{Imaginaarosa}(\mu \Delta t) < 3$ .

(VIITED 11.3, 11.4, 11.5, 11.6, 11.7, 11.8)

## 11.6 VIITED

11.1 Laanearu, J. (2019). *Rakenduslik hüdromehaanika*. Tallinna Tehnikaülikooli kirjastus.

11.2 Vreugdenhil, C. B. (1994). *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Kluwer Academic Publisher.

11.3 Lambert, J. D. (1992). *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: The Initial Value Problem*. John Wiley & Sons, Inc.

11.4 Mitchell, A. R. & Griffiths, D. F. (1980). *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons, Inc.

11.5 Richtmyer, R. D. & Morton, K. W. (1994). *Difference Method for Initial Value Problems*. Krieger Publishing Company. (Esmatrükk 1967).

11.6 Godunov, S. K. & Ryabenki, V. S. (1964). *Theory of Difference Schemes*. North Holland Publishing Company.

11.7 Chadwick, A., Morfett, J. & Borthwick, M. (2004). *Hydraulics in Civil and Environmental Engineering*. Spon Press.

11.8 Chow, V. T., Maidment, D. R. & Mays, L. W. (1988). *Applied Hydrology*. McGraw-Hill Education.

## 12 EHITATUD BASSEIN

### 12.1 PRAKTIILINE OSA. VEEKOGUMISE SÜSTEEMID

#### 12.1.1 EHITIS. BASSEIN, MAHUTI, RESERVUAAR, PUHASTI, KAEV

Basseine kasutatakse avalikes hoonetes, nagu näiteks ujulad ja veekeskused, aga ka veevarustuse- ja kanalisatsioonisüsteemis. Nii veetöötusjaamades kui ka reoveepuhastites toimuvad puhastusprotsessid erinevates mahutites, olgu nendeks filtratsioonimahutid, settebasseinid, aerotankid või puhta vee reservuaarid. Puhastusprotsessis voolab vesi ühest basseinist teise kas torustike või kanalite kaudu. Olenevalt valitud tehnoloogilisest skeemist võib vee voolamine olla kas vabapinnaga või rõhuline. Basseini dimensioonimisel tuleb lähtuda selle kasutusotstarbest, mille puhul on tavaliselt määratavateks parameetriteks basseini pindala, maht, vee viibeaeg jms. Basseinide ületäituvuse vältimiseks on ette nähtud ülevoolud, millega on võimalik reguleerida vee kogust ja seekaudu vabapinna kõrgust. Sademeveesüsteemides kasutatakse mahuteid sademevee kogumiseks ja äravoolu puhverdamiseks või viivitamiseks.

Linnaaladelt kogutud sademevesi ei ole reovesi, kuna selles puudub inimtekkeline orgaaniline aine. Sademevesi võib sisaldada tänavalt uhitud saasteaineid. (Saasteaine võib olemuselt olla nii tahke, vedel kui ka gaasiline.) Reovesi on näiteks tööstuses või olmes tekkinud vesi, mis ületab riiklikult kehtestatud heite piirväärtusi ja mis tuleb enne suublasse juhtimist puhastada. Samuti ühisvoolusse kanalisatsiooni juhitud sademevesi peab läbima puhastusprotsessi. Reovee kogumiseks ja puhastamiseks kasutatakse basseini, puhastusseadet, omapuhastit vms. Pinnasesse rajatud biopuhasti peab paikneb kohas, kus see ei ohusta põhjavett. Omapuhastiks oleva imbsüsteemi ja salvkaevu vaheline kaugus sõltub suublaks olevast pinnasest ja selle omadustest, maapinna langusest vms. Seetõttu on omapuhastile ette nähtud kuja, mis väldib reostuse levimist joogiveeks kasutatavasse süsteemi, näiteks pinnaveekogusse, kaevu või mujale. Vee liikumine pinnases sõltub oluliselt pinnase materjalist ja maapinna kaldest.

#### 12.1.2 VOOLUREŽIIM. BASSEINI TÜHJENEMINE JA TÄITUMINE

Hooldustöödeks on vajalik bassein kas tühjendada või selle veepinda alandada. Suurte basseinide puhul on oluliseks faktoriks aeg ehk milliseks perioodiks on võimalik näiteks üht puhastusprotsessis kasutatavat basseini tööolukorrast välja lülitada. Hoolduses oleva puhastussüsteemi basseini töö kompenseerimiseks töötavad süsteemi teised basseinid erirežiimil, mis tavaliselt tähendab ülekoormust. Samuti võib basseini kasutamine olla piiratud avariiolukorras. Seega

on oluline võimalikult kiire hooldus- või avariitööde läbiviimine, basseini täitmine ning uuesti töösse rakendamine. Tagamaks basseini optimaalne tühjenemis- ja täitumisrežiim, on vajalik dimensionida torustikud ja/või voolukanalid. Sademeveesüsteemides on võimalik basseini/mahutitega (ka suuremõtmelise torustikuga) tekitada viivitusmaht, mida saab sõltuvalt vihmade intensiivsusest kasutada erinevate veehulkade juhtimiseks. Vihmadega täituvad sademeveetorustikud veega ning kuival perioodil on need tavaliselt tühjad, kui neid ei kasutata teistel eesmärkidel (nt drenaaživee ärajuhtimiseks).

Olenevalt tehnilisest lahendusest võib basseini ava sulgeda näiteks siibri või varjaga, mille liigutamise reguleeritakse basseini sisse või sealt välja voolava vee koguseid. Nii on võimalik sulgeda basseini vooluava kas osaliselt või täielikult. Tavaliselt dimensionitakse basseini ava arvestuslikule vooluhulgale, et tagada basseini kui hüdraulilise voolusüsteemi elemendi optimaalne kasutamine lähtuvalt selle otstarbest (nt reservuaaride täitmine/tühjendamine teatud kriitilise ajaperioodi jooksul). Kui jõgi ei ole ühenduses järvega, kasutatakse jõesängi veehulga reguleerimisel paisu, reservuaari või muud hüdrotehnilist rajatist. Veehulga reguleerimine on oluline, kuna looduslikus vooluveekogus, mis ei alga kõrgmäestikust, sõltub veehulk oluliselt vihmadest ja lume sulamisest. Looduslikes tingimustes võib kuival aastaajal (näiteks põua ajal) jõesäng veest tühjeneda ning sellega kaasnevad kuivusriskid (ingl. *drought risk*).

Kliimamuutustega on kaasnenud aastase sajuhulga tõus ning selle mõjudega kohanemine on üks Eesti olulisemaid keskkonnaprobleeme (VIIDE 12.1, „Sademeveesüsteemide projekteerimise aluste kaasajastamine“). Joogivee kvaliteedi tagamiseks on veeseaduse alusel kehtestatud nõuded, millega tuleb arvestada puhtaveereservuaaride kasutamisel (VIIDE 12.3, „Veeseadus“). Ujulute ja veekestuste basseini ja basseini veele on kehtestatud rahvatervise seaduse alusel tervisekaitsenõuded (VIIDE 12.2, „Tervisekaitsenõuded ujulatele, basseini veele ja veekestustele“). Basseini ja mahuteid kasutatakse ka kastmis- ja kustutusvee tagamiseks. Kustutusvee allikaks võib olla ühisveevärk koos tuletõrjehüdrantidega, tuletõrjervee reservuaar, tehisveekogu või looduslik veekogu.

### 12.1.3 SISSEJUHATUS ÜLESANDESSE. PÕHIVALEMID

Hüdraulilist voolusüsteemi, mis koosneb basseini ja avaga ülevoolust, saab täita ja tühjendada läbi ava. Uputamata seinülevoolu puhul on voolamine paisul hüdraulilise vabavoolurežiimiga, mis vastab kriitilisele voolamisele. See põhjendab hästi maksimaalse vooluhulga valemiga kasutamist reaalvoolu paisutamise ülesandes. Ülesande põhivalemitega – nagu maksimaalse vooluhulga valem, ülevoolu põhivalem, kvaasistatsionaarse voolamise pidevuse võrrand jne – on võimalik lahendada basseini veest tühjendamise ja veega täitumise ülesandeid. Basseini tühjendamise ülesande lahendamiseks on koostatud diferentsiaalvõrrand, mis on lahendatud Runge-Kutta

4-tõusulise numbrilise arvutusskeemi valemite süsteemiga. Basseini täitumise ülesande lahendamiseks on koostatud diferentsiaalvõrrand, mida on võimalik lahendada muutumatu vooluhulga puhul.

Põhiülesandes (basseini tühjenemise ülesandes) kasutatakse hüdraulilist suurust, mis on määratud kui vabapinna kõrgus üle basseini ava läve. Basseini tühjenemise kvaasistatsionaarsele voolamisele on sama hüdrauliline suurus valitud võrduma paisutuskõrgusega. Basseini tühjenemise ajavahemik on määratud tingimusel, et basseini vabapind ei lange madalamale kui basseini ava lävi.

Lisaülesandes (basseini täitumise ülesandes) kasutatakse hüdraulilist suurust, mille tähendust on võrreldes põhiülesandega muudetud. Basseini täitumise ülesandes on sama hüdrauliline suurus määratud kui vabapinna kõrgus basseini aluspõhjast. Basseini täitumise ajavahemik on määratud tingimusel, et basseini vabapind tõuseb basseini aluspõhjast kuni basseini avaga antud läve kõrguseni, kusjuures vabapinna kõrgus basseinist väljaspool ei muutu.

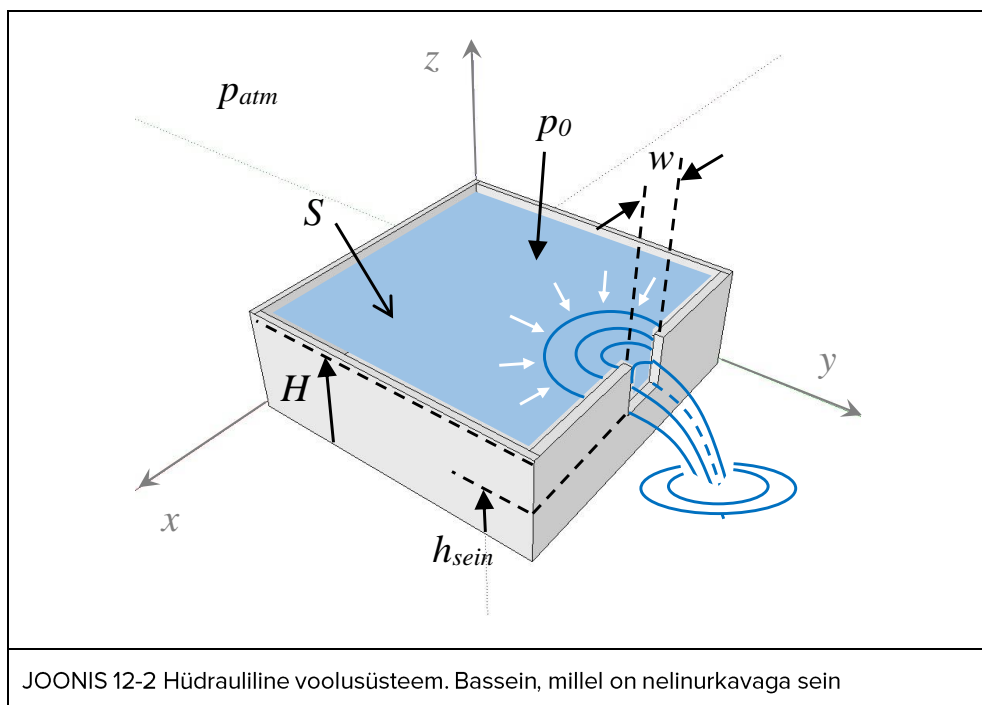


JOONIS 12-1 Reoveepuhastusjaama aerotank, Tallinn. (Foto: Janek Laanearu, 2020)

## 12.2 PÕHIÜLESANNE. BASSEINI TÜHJENEMINE

ANTUD. Bassein, sisepõhja pindalaga  $S = 5 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 25 \text{ m}^2$ , on täidetud veega kõrguseni  $H = 2 \text{ m}$ . Basseini on võimalik tühjendada läbi nelinurkse ristlõikega ava (ka nelinurkava), mille laius  $w = 0,2 \text{ m}$ . Lühikese läve, st seina kõrgus  $h_{sein} = 1 \text{ m}$  ja sellele vastav ülevoolutegur  $C_d^* = 0,25$ . Vee temperatuur basseinis on  $10 \text{ }^\circ\text{C}$ , tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu / \rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata basseini ülevoolu põhivõrrandite integraalse valemiga ja numbrilise arvutusskeemiga basseini tühjenemise ajavahemik, voolamisele läbi nelinurkava. Arvutada basseini tühjenemise ajavahemik, kui basseini vabapind langeb kõrguselt  $2 \text{ m}$  kuni kõrguseni  $1,05 \text{ m}$ , st  $h = H - h_{sein} = 1 \text{ m} \rightarrow 0,05 \text{ m}$ . Võrrelda reaal- ja ideaalvedeliku voolamisele lahendusi basseini tühjenemisele. Määrata ajavahemike erinevus reaal- ja ideaalvedeliku voolamisele ning põhivõrrandite integraalse valemi ja numbrilise arvutusskeemi ajavahemike erinevusele metoodiline viga.



EELDUSED. Vee väljavool basseinist on hästi määratud kvaasistatsionaarse voolamisega, st igal ajahetkel on voolamine mittestatsionaarne ja igas ajavahemikus statsionaarne. Vooluhulk on määratud ülevoolu põhivalemiga reaalvedelikule. Ideaalvedeliku voolamisele kasutada ülevoolu põhivalemit, milles ülevoolutegur  $C_d^* = 0,385$  (see vastab maksimaalse vooluhulga valemile, milles vooluhulgategur  $C_d = 1$ ). Kasutada Runge-Kutta numbrilist arvutuskeemi basseini tühjenemise ajavahemiku määramisele ning võrrelda tulemusi matemaatiliselt täpsema tulemusega, st basseini ülevoolu põhivõrrandite integreerimisel saadud valemi arvutustulemusega.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Maksimaalse vooluhulga valem, ülevoolu põhivalem, kvaasistatsionaarse voolamise pidevuse võrrand, basseini tühjenemise diferentsiaalvõrrand, Runge-Kutta 4-tõusuga numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem**

### VALEMID

Nelinurkse ristlõikega ülevoolu maksimaalse vooluhulga valem on

$$Q = C_d g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w,$$

milles  $Q$  on vooluhulk,  $C_d$  on vooluhulgategur,  $g$  on raskuskiirendus,  $PK$  on paisutuskõrgus ja  $w$  on nelinurkava laius.

Ülevoolu põhivalemi võib esitada teisendusega:

$$Q = C_d g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}} w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}} = C_d^* w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}},$$

milles ülevoolutegur on

$$C_d^* = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}}.$$

Hüdraulilises voolusüsteemis võime muutuva vabapinna kõrgusega basseinist väljavoolu määrata hariliku diferentsiaalvõrrandiga, mis vastab kvaasistatsionaarse voolamise pidevuse võrrandile:

$$-\frac{dh}{dt} S = Q,$$

milles  $h(t) = H(t) - h_{sein}$  on basseinis vabapinna kõrgus üle avaga seina, st lühikese paisu,  $S$  on basseini sisepõhja pindala ja  $Q(t)$  on vooluhulk basseini avas.

Funktsiooni integreerimine. Basseini tühjenemise ajavahemik (reaal- ja ideaalvool)

Vabapinna kõrguse ajalise muudu basseinis võime määrata hariliku diferentsiaalvõrrandiga, mis on basseini tühjenemise diferentsiaalvõrrand:

$$-\frac{dh}{dt} S = C_d^* w \sqrt{2g} h^{\frac{3}{2}},$$

milles  $PK = h$ .

Eraldame muutujad harilikus diferentsiaalvõrrandis:

$$dt = -\frac{S}{C_d^* w \sqrt{2g}} \frac{dh}{h^{\frac{3}{2}}}.$$

Integreerimine

$$\int \left( dt = -\frac{S}{C_d^* w \sqrt{2g}} \frac{dh}{h^{\frac{3}{2}}} \right)$$

→

$$t = -\frac{S}{C_d^* w \sqrt{2g}} (-2) \frac{1}{\sqrt{h}} + \textit{konstant} = \frac{2S}{C_d^* w \sqrt{2g}} \frac{1}{\sqrt{h}} + \textit{konstant}.$$

Ajahetkel  $t = 0$  võime integreerimiskonstandi määrata vastavalt algtingimusele, mis on määratud vabapinna kõrgusega suletud nelinurkavaga basseinis:

$$h(t = 0) = H(t = 0) - h_{sein} = h_0$$

→

$$0 = \frac{2S}{C_d^* w \sqrt{2g}} \frac{1}{\sqrt{h_0}} + \textit{konstant}$$

→

$$\textit{konstant} = -\frac{2S}{C_d^* w \sqrt{2g}} \frac{1}{\sqrt{h_0}},$$

milles  $h_0$  on vabapinna kõrgus üle nelinurkava läve, basseini tühjenemise alghetkel.

Basseini tühjenemise ajavahemik reaalvedeliku voolamisele läbi nelinurkava on määratud valemiga:

$$\Delta t_{\textit{reaal}} = \frac{2S}{C_d^* w \sqrt{2g}} \left( \frac{1}{\sqrt{h_1}} - \frac{1}{\sqrt{h_0}} \right),$$

milles  $h_1$  on vabapinna kõrgus üle nelinurkava läve, basseini tühjenemise lõpphetkel.



Basseini tühjenemise ajavahemik ideaalvedeliku voolamisele läbi nelinurkava on määratud valemiga:

$$\Delta t_{\text{ideaal}} = \frac{6\sqrt{3}S}{2w\sqrt{2g}} \left( \frac{1}{\sqrt{h_1}} - \frac{1}{\sqrt{h_0}} \right) = \sqrt{\frac{27}{2}} \frac{S}{w} \left( \frac{1}{\sqrt{h_1}} - \frac{1}{\sqrt{h_0}} \right),$$

milles on kasutatud maksimaalse vooluhulga valemi vooluhulgategurit tingimusel:

$$C_d = 1,$$

$$C_d^* = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}}$$

→

$$C_d^* = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Ajavahemike erinevus ideaal- ja reaalvedeliku voolamisel on

$$\Delta t_{\text{reaal}} - \Delta t_{\text{ideaal}}.$$

#### ARVUTUS

Basseini tühjenemise ajavahemik reaalvedeliku voolamisele läbi nelinurkava on

$$\Delta t_{\text{reaal}} = \frac{2 \cdot 25 \text{ m}^2}{0,25 \cdot 0,2 \text{ m} \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{0,05 \text{ m}}} - \frac{1}{\sqrt{1,0 \text{ m}}} \right) = 783,88 \text{ s} = 0,2177 \text{ tundi}.$$

Maksimaalse vooluhulga valemi vooluhulgategur on

$$C_d = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 0,25 = 0,65.$$

Basseini tühjenemise ajavahemik ideaalvedeliku voolamisele läbi nelinurkava on

$$\Delta t_{\text{ideaal}} = \sqrt{\frac{27}{2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} \cdot \frac{25 \text{ m}^2}{0,2 \text{ m}} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{0,05 \text{ m}}} - \frac{1}{\sqrt{1,0 \text{ m}}} \right) = 509,14 \text{ s} = 0,1414 \text{ tundi}.$$

Ülevoolu põhivalemis on ideaalvedeliku voolamise tingimusel, ülevoolutegur määratud väärtusega

$$C_d^* = \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0,385,$$

mis vastab vooluhulgateguri väärtusele  $C_d = 1$ .

Ajavahemike erinevus reaal- ja ideaalvedeliku voolamisele on

$$\Delta t_{\text{reaal}} - \Delta t_{\text{ideaal}} = 783,88 \text{ s} - 509,14 \text{ s} = 274,74 \text{ s} = 0,0763 \text{ tundi}.$$

Numbriline arvutusskeem. Basseini vabapinna kõrgus (reaalvool)  
Numbriline arvutusmeetod. Runge-Kutta iteratsioonmeetod

#### VALEMID

Kasutame Runge-Kutta 4-tõusuga valemit numbrilises arvutusskeemis, mis võimaldab muutuva basseini voolusüsteemi vabapinna kõrguse ajalise muudu määrata vooluhulgaga.

Vabapinna kõrguse ajaline muut basseinis on määratud hariliku diferentsiaalvõrrandiga

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{C_d^* w \sqrt{2g} h^{\frac{3}{2}}}{S},$$

milles  $C_d^*$  on ülevoolu põhivalemiga määratud ülevoolutegur,  $w$  on nelinurkava laius ja  $S$  on basseini sisepõhja ning ka veepeegli pindala.

#### ARVUTUSSKEEM

Runge-Kutta 4-tõusuga numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem:

$$ARV_1 = h_i, \quad k_1 = -\frac{C_d^* w \sqrt{2g} ARV_1^{\frac{3}{2}}}{S},$$

$$ARV_2 = h_i + k_1 \frac{\Delta t}{2}, \quad k_2 = -\frac{C_d^* w \sqrt{2g} ARV_2^{\frac{3}{2}}}{S},$$

$$ARV_3 = h_i + k_2 \frac{\Delta t}{2}, \quad k_3 = -\frac{C_d^* w \sqrt{2g} ARV_3^{\frac{3}{2}}}{S},$$

$$ARV_4 = h_i + k_3 \Delta t, \quad k_4 = -\frac{C_d^* w \sqrt{2g} ARV_4^{\frac{3}{2}}}{S},$$

$$h_{i+1} = h_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \Delta t.$$

ARVUTUS. Basseini vabapinna kõrgus (reaalvool) ( $C_d^* = 0,25$ )

Algtingimus ja ajasamm

$$t = 0$$

$$h_{i=1} = h_0 = 1 \text{ m}$$

$$\Delta t = 60 \text{ s} \cdot 0,1 = 6 \text{ s}$$

	Algt.	10 samm	20 samm	30 samm	40 samm	50 samm
$h$ (m)	1	0,6512	0,4415	0,3189	0,2411	0,1887
$t$ (s)	0	54	114	174	234	294

	60 samm	70 samm	80 samm	90 samm	100 samm	110 samm
$h$ (m)	0,1516	0,1245	0,1041	0,0883	0,0758	0,0659
$t$ (s)	354	414	474	534	594	654

	120 samm	130 samm	132 samm
$h$ (m)	0,0577	0,0510	0,0498
$t$ (s)	714	774	786

#### VASTUSED

$$\Delta t_{\text{reaal}} = 786 \text{ s} = 0,2183 \text{ tundi}$$

$$h(t = 786 \text{ s}) = 0,0498 \text{ m}$$

*Numbriline arvutuskeem. Basseini vabapinna kõrgus (ideaalvool)*

*Numbriline arvutusmeetod. Runge-Kutta iteratsioonmeetod*

#### VALEMID

Kasutame Runge-Kutta 4-tõusuga valemit numbrilises arvutuskeemis, mis võimaldab muutuva vooluhulga määrata basseini voolusüsteemi vabapinna kõrguse ajalise muuduga.

Vabapinna kõrguse ajaline muutus basseinis on määratud hariliku diferentsiaalvõrrandiga:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{C_d^* w \sqrt{2g} h^{\frac{3}{2}}}{S},$$

milles  $C_d^*$  on ülevoolu põhivalemiga määratud ülevoolutegur,  $w$  on nelinurkava laius ja  $S$  on basseini sisepõhja ning ka veepeegli pindala.

## ARVUTUSSKEEM

Runge-Kutta 4-tõusuga valemi numbriline arvutusskeem:

$$ARV_1 = h_i, \quad k_1 = -\frac{C_d^* w \sqrt{2g} ARV_1^{\frac{3}{2}}}{S},$$

$$ARV_2 = h_i + k_1 \frac{\Delta t}{2}, \quad k_2 = -\frac{C_d^* w \sqrt{2g} ARV_2^{\frac{3}{2}}}{S},$$

$$ARV_3 = h_i + k_2 \frac{\Delta t}{2}, \quad k_3 = -\frac{C_d^* w \sqrt{2g} ARV_3^{\frac{3}{2}}}{S},$$

$$ARV_4 = h_i + k_3 \Delta t, \quad k_4 = -\frac{C_d^* w \sqrt{2g} ARV_4^{\frac{3}{2}}}{S},$$

$$h_{i+1} = h_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \Delta t.$$

ARVUTUS. Basseini vabapinna kõrgus (ideaalvool) ( $C_d^* = 0,385$ )

Algtingimus ja ajasamm

$$t = 0$$

$$h_{i=1} = h_0 = 1 \text{ m}$$

$$\Delta t = 60 \text{ s} \cdot 0,1 = 6 \text{ s}$$

	Algt.	10 samm	20 samm	30 samm	40 samm	50 samm
$h$ (m)	1	0,5342	0,3165	0,2092	0,1484	0,1107
$t$ (s)	0	54	114	174	234	294

	60 samm	70 samm	80 samm	86 samm
$h$ (m)	0,0858	0,0684	0,0558	0,0499
$t$ (s)	354	414	474	510

VASTUSED

$$\Delta t_{ideaal} = 510 \text{ s} = 0,1417 \text{ tundi}$$

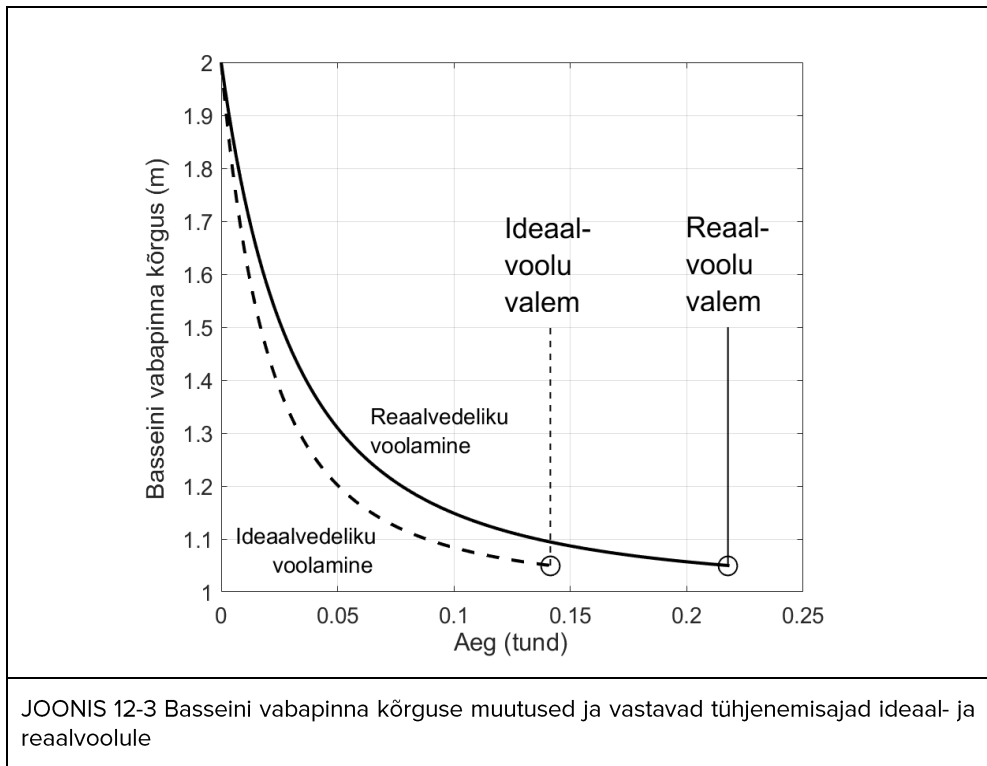
$$h(t = 510 \text{ s}) = 0,0499 \text{ m}$$

Ajavahemike erinevus reaal- ja ideaalvedeliku voolamisele on

$$\Delta t_{\text{reaal}} - \Delta t_{\text{ideaal}} = 786 \text{ s} - 510 \text{ s} = 276 \text{ s} = 0,0767 \text{ tundi}$$

Basseini ülevoolu põhivõrrandite integraalse valemiga ja numbrilise arvutus-  
skeemiga määratud metoodiline viga reaal- ja ideaalvedeliku voolamise ajavahemike  
erinevusele on

$$|276 \text{ s} - 274,74 \text{ s}| = 1,26 \text{ s}.$$



**JÄRELDUS.** Ideaalvedeliku voolamise paisutamisel ( $C_d^* = 0,385$ ) basseini tühjenemisel muutub (langeb) basseini vabapinna kõrgus kiiremini võrreldes seda reaalvedeliku voolamise paisutamisega ( $C_d^* < 0,385$ ).

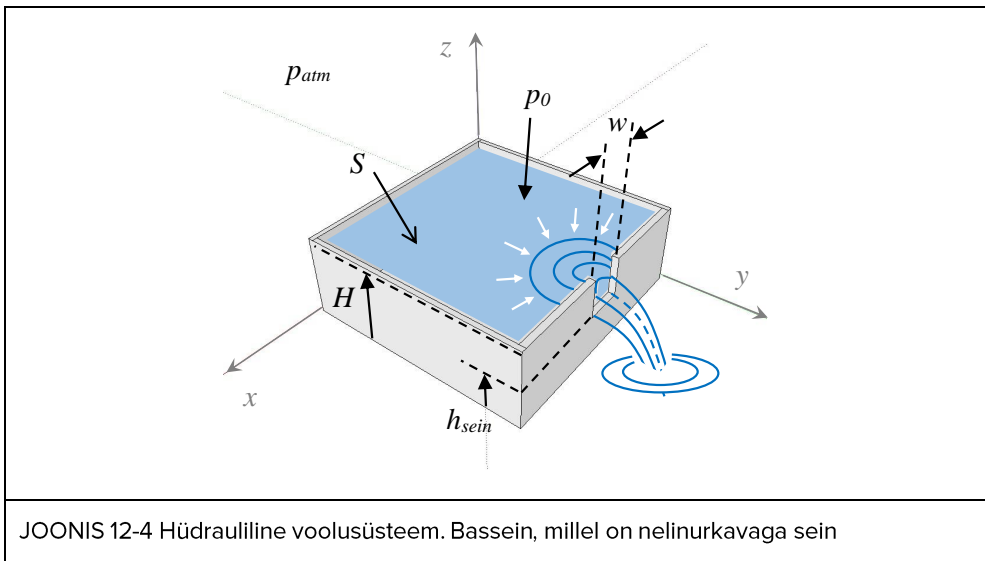
## MÄRKUSED. Basseini tühjenemine

- Hüdraulilises voolusüsteemis võib lisada veel ülevooluavasid, mis suurendavad vooluhulka muutuva vabapinna kõrgusega. Kui lisaava seina kõrgus on sama, mis on olemasoleval aval, siis võib näiteks kahe avaga hüdraulilise voolusüsteemi vabapinna kõrguse määrata ka kvaasistatsionaarse voolamise pidevuse võrrandiga, mis on harilik diferentsiaalvõrrand. Basseini ja ülevooluavade voolusüsteemi põhivõrrandid võib analüütiliselt integreerida basseini tühjenemise ajavahemiku määramisega.
- Hüdraulilises voolusüsteemis võib lisada veel ülevooluavasid, mis suurendavad vooluhulka muutuva vabapinna kõrgusega. Kui lisaava seina kõrgus ei ole sama, mis on olemasoleval aval, siis võib näiteks kahe avaga hüdraulilise voolusüsteemi vabapinna kõrguse määrata ka kvaasistatsionaarse voolamise pidevuse võrrandiga, mis on harilik diferentsiaalvõrrand. Basseini voolusüsteemi põhivõrrandi võib numbriliselt integreerida basseini tühjenemise ajavahemiku määramisega.
- Hüdraulilises voolusüsteemis võib kasutada mittelineurkse ristlõikega avasid, nagu ruutparaboolne, kolmnurkne vms ruutastmelise ristlõikekujuga ava, mis muudavad muutuva vabapinna kõrgusega voolamise vooluhulka. Hüdraulilise voolusüsteemi vabapinna kõrguse võib määrata ka kvaasistatsionaarse voolamise pidevuse võrrandiga, mis on harilik diferentsiaalvõrrand. Basseini voolusüsteemi põhivõrrandi võib integreerida nii analüütiliselt kui ka numbriliselt basseini tühjenemise ajavahemiku määramisega.
- Mittelineurkse ristlõike ava ülevoolutegur erineb oluliselt nelinurkse ava ülevoolutegurist. Ülevoolu põhivalemi ülevooluteguri ( $C_d^*$ ) määramisele võib kasutada arvutusliku vedelikudünaamika (ingl. *Computational Fluid Dynamics – CFD*) rakendusi, milles on olemas vabapind, st vee ja õhu koosvoolamine ei ole väga oluline.
- Uputamata seinülevoolu puhul on voolamine paisul hüdraulilise voolurežiimiga, mis vastab nõ kriitilisele voolamisele ( $Fr = 1$ ). Seetõttu on maksimaalse vooluhulga valemi kasutamine reaalvoolu paisutamise ülesandes hästi põhjendatud. Uputatud seinülevoolu puhul, milles vee vabapind (veepind) paisu alumises bjefis on oluliselt kõrgem paisu lävest ( $h_u > 0$ ), on voolamine paisu lävel, st ülevool hüdraulilise voolurežiimiga, mis vastab rahulikule voolamisele ( $Fr < 1$ ). Ülevoolu paisutuskõrguse arvutamisele võib kasutada arvutusliku vedelikudünaamika (ingl. *Computational Fluid Dynamics – CFD*) rakendusi madalvee tingimustel.
- Ülevool on uputamata, kui paisu alumises bjefis on vabapind lävest oluliselt madalamal ehk  $h_u < 0$ . Ülevool võib olla uputamata ka eritingimusel  $h_u > 0$ . Uputamata ülevoolu vooluhulga määramiseks kasutatakse Bernoulli võrrandiga määratud valemeid, mis vastavad Froude'i suhtarvu kriteeriumile  $Fr = 1$ . Uputamata ja uputatud ülevoolude eristamise tingimuste määramiseks kasutatakse kriteeriumit, mis seob paisu alumise bjefi vabapinna ja lävepinna kõrguste erinevuse ( $h_u$ ) kriitilise voolamisega paisul. Uputatud ülevoolu vooluhulga määramiseks kasutatakse empiirilisi valemeid, mis ei vasta Froude'i suhtarvu kriteeriumile  $Fr = 1$ .

## 12.3 ISESEISVA TÖÖ ÜLESANNE. BASSEINI TÜHJENEMINE

ANTUD. Bassein, sisepõhja pindalaga  $S = 5 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 25 \text{ m}^2$ , on täidetud veega kõrguseni  $H = 2 \text{ m}$ . Basseini on võimalik tühjendada läbi nelinurkse ristlõikega ava (ka nelinurkava), mille laius  $w = 0,2 \text{ m}$ . Lühikese lävega, st õhukese seinaga ülevoolu kõrgus  $h_{sein} = 1 \text{ m}$  ja sellele vastav ülevoolutegur  $C_d^* = 0,25$ . Vee temperatuur basseinis on  $10 \text{ }^\circ\text{C}$ , mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu / \rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata basseini ülevoolu põhivõrrandite integraalse valemiga ja numbrilise arvutusskeemiga basseini tühjenemise ajavahemik voolamisele läbi nelinurkava. Arvutada basseini tühjenemise ajavahemik, kui basseini vabapind langeb kõrguselt  $2 \text{ m}$  kuni kõrguseni  $1,5 \text{ m}$ , st  $h = H - h_{sein} = 1 \text{ m} \rightarrow 0,5 \text{ m}$ . Võrrelda reaal- ja ideaalvedeliku voolamise lahendusi basseini tühjenemisele. Määrata arvutusviga.



EELDUSED. Vee väljavool basseinist on hästi määratud kvaasistatsionaarse voolamisega, st igal ajahetkel on voolamine mittestatsionaarne ja igas ajavahemikus statsionaarne. Vooluhulk on määratud ülevoolu põhivalemiga reaalvedelikule. Ideaalvedeliku voolamisele kasutada ülevoolu põhivalemit, milles ülevoolutegur  $C_d^* = 0,385$  (see vastab maksimaalse vooluhulga valemile, milles vooluhulgategur  $C_d = 1$ ). Kasutada Runge-Kutta numbrilist arvutusskeemi basseini tühjenemise ajavahemiku määramisel ja võrrelda tulemusi matemaatiliselt täpsema tulemusega.

## VASTUSED

Basseini ülevoolu põhivõrrandite integraalne valem reaalvoolule

$$\Delta t_{\text{reaal}} = 93,5136 \text{ s} = 0,0260 \text{ tundi}$$

$$h(t = 93,5136 \text{ s}) = 0,5 \text{ m}$$

Basseini ülevoolu põhivõrrandite integraalne valem ideaalvoolule

$$\Delta t_{\text{ideaal}} = 60,7389 \text{ s} = 0,0169 \text{ tundi}$$

$$h(t = 60,7389 \text{ s}) = 0,5 \text{ m}$$

Ajavahemike erinevus reaal- ja ideaalvedeliku voolamisele on

$$\Delta t_{\text{reaal}} - \Delta t_{\text{ideaal}} = 93,5136 \text{ s} - 60,7389 \text{ s} = 32,7747 \text{ s} = 0,0091 \text{ tundi}$$

*Numbriline arvutustulemus. Basseini tühjenemise ajavahemik (reaalvool)*

Basseini ülevoolu põhivõrrandite integraalne valem reaalvoolule

$$\Delta t_{\text{reaal}} = 96 \text{ s} = 0,0267 \text{ tundi}$$

$$h(t = 96 \text{ s}) = 0,4923 \text{ m}$$

Basseini ülevoolu põhivõrrandite integraalne valem ideaalvoolule

$$\Delta t_{\text{ideaal}} = 60 \text{ s} = 0,0167 \text{ tundi}$$

$$h(t = 60 \text{ s}) = 0,5036 \text{ m}$$

Ajavahemike erinevus reaal- ja ideaalvedeliku voolamisele on

$$\Delta t_{\text{reaal}} - \Delta t_{\text{ideaal}} = 96 \text{ s} - 60 \text{ s} = 36 \text{ s} = 0,0100 \text{ tundi}$$

Arvutusviga

$$|36 \text{ s} - 32,7747 \text{ s}| = 3,2253 \text{ s}$$

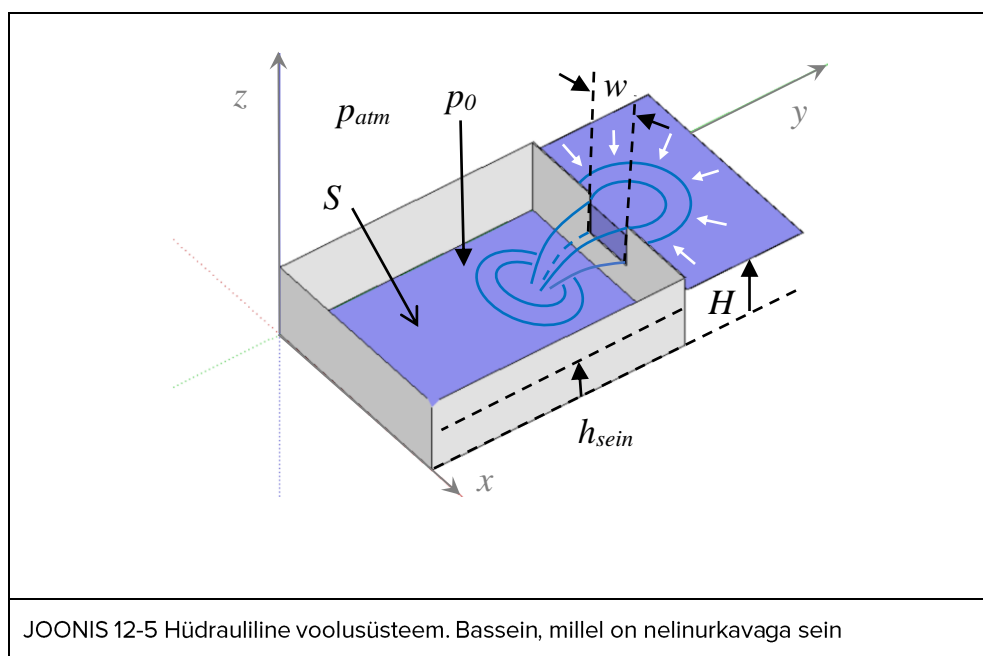
**MÄRKUS.** Põhiülesandes (basseini tühjendamise ülesandes) on hüdrauliline suurus  $h$  määratud, kui vabapinna kõrgus üle seina kõrguse, st  $h = H - h_{\text{sein}}$ , milles  $H$  on vabapinna kõrgus üle basseini aluspõhja ja  $h_{\text{sein}}$  on seina kõrgus. Põhiülesandes on hüdrauliline suurus  $h$  määratud paisutus kõrgusega, st  $h = PK$ . Basseini tühjenemise ajavahemik on määratud tingimusel, et basseini vabapind ei lange madalamale kui seina kõrgus, st  $H > h_{\text{sein}}$ .



## 12.4 LISAÜLESANNE. BASSEINI TÄITUMINE

ANTUD. Tühi bassein, sisepõhja pindalaga  $S = 5 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 25 \text{ m}^2$ , on ümbritsetud veega kõrguseni  $H = 2 \text{ m}$  basseini aluspõhjast. Basseini on võimalik täita läbi nelinurkse ristlõikega ava (ka nelinurkava), mille laius  $w = 0,2 \text{ m}$ . Lühikese läve, st seina kõrgus  $h_{sein} = 1 \text{ m}$  ja sellele vastav ülevoolutegur  $C_d^* = 0,25$ . Vee temperatuur on  $10 \text{ }^\circ\text{C}$ , tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu / \rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata basseini ülevoolu põhivõrrandite integraalse valemiga basseini täitumise ajavahemik, voolamisele läbi nelinurkava. Arvutada basseini täitumise ajavahemik, kui basseini vabapind tõuseb basseini aluspõhja kõrguselt 0 kuni kõrguseni 1,0 m, st  $h = 0 \rightarrow 1,0 \text{ m}$ . Võrrelda reaal- ja ideaalvedeliku voolamisele lahendusi basseini täitumisele kuni ava seina ehk lühikese läve kõrguseni. Määrata ajavahemike erinevus reaal- ja ideaalvedeliku voolamise puhul.



EELDUSED. Vee sissevool basseini on hästi määratud statsionaarse voolamisega. Vooluhulk on määratud ülevoolu põhivalemiga reaalvedelikule. Ideaalvedeliku voolamisele kasutada ülevoolu põhivalemit, milles ülevoolutegur  $C_d^* = 0,385$  (see vastab maksimaalse vooluhulga valemile, milles vooluhulgategur  $C_d = 1$ ).

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID.** Maksimaalse vooluhulga valem, ülevoolu põhivalem, kvaasistatsionaarse voolamise pidevuse võrrand, basseini täitumise diferentsiaalvõrrand

### VALEMID

Nelinurkse ristlõikega ülevoolu maksimaalse vooluhulga valem on

$$Q = C_d g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w,$$

milles  $Q$  on vooluhulk,  $C_d$  on vooluhulgategur,  $g$  on raskuskiirendus,  $PK$  on paisutuskõrgus ja  $w$  on nelinurkava laius.

Ülevoolu põhivalemi võib esitada teisendusega:

$$Q = C_d g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}} w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}} = C_d^* w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}},$$

milles ülevoolutegur on

$$C_d^* = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}}.$$

Hüdraulilises voolusüsteemis võime muutuva vabapinna kõrgusega basseini sissevoolu määrata hariliku diferentsiaalvõrrandiga, mis vastab samuti statsionaarse voolamise pidevuse võrrandile:

$$\frac{dh}{dt} S = Q,$$

milles  $h(t)$  on basseinis vabapinna kõrgus üle basseini aluspõhja,  $S$  on basseini sisepõhja pindala ja  $Q(t)$  on vooluhulk basseini avas. Eeldusel, et vabapind basseinis ei tõuse kõrgemale ava seina ehk lühikese läve kõrgusest  $h_{sein}$  võime  $Q = konstant$ .

*Funktsiooni integreerimine. Basseini täitumise ajavahemik (reaal- ja ideaalvool)*

Vabapinna kõrguse ajalise muudu basseinis võime määrata hariliku diferentsiaalvõrrandiga, mis on basseini täitumise diferentsiaalvõrrand:

$$\frac{dh}{dt} S = C_d^* w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}},$$

milles  $PK = H - h_{sein}$  on paisutuskõrgus.

**MÄRKUS.** Lisäülesandes on hüdraulilise suuruse  $h$  tähendust muudetud võrreldes põhiülesandega (basseini tühjenemise ülesandega).

Eraldame muutujad harilikus diferentsiaalvõrrandis:

$$dt = \frac{S}{C_d^* w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}}} dh.$$

Leiame ajavahemiku diferentsiaalvõrrandi integreerimisele üle kõrgusvahemiku  $(0, h_{sein})$ :

$$\Delta t = \int_0^{h_{sein}} \frac{S}{C_d^* w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}}} dh$$

→

$$\Delta t = \frac{S}{C_d^* w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}}} h_{sein}.$$

Basseini täitumise ajavahemik reaalvedeliku voolamisele läbi nelinurkava on määratud valemiga:

$$\Delta t_{reaal} = \frac{S}{C_d^* w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}}} h_{sein},$$

mis vastab hästi vooluhulga määramise valemile:

$$Q_{reaal} = \frac{V}{\Delta t_{reaal}} = \frac{S h_{sein}}{\Delta t_{reaal}}$$

→

$$\Delta t_{reaal} = \frac{S h_{sein}}{Q_{reaal}}.$$

Basseini täitumise ajavahemik ideaalvedeliku voolamisele läbi nelinurkava on määratud valemiga:

$$\Delta t_{ideaal} = \frac{3\sqrt{3}S}{2w\sqrt{2g}(PK)^{\frac{3}{2}}} h_{sein} = \frac{S}{g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w} h_{sein},$$

mis vastab hästi vooluhulga määramise valemile:

$$Q_{ideaal} = \frac{V}{\Delta t_{ideaal}} = \frac{S h_{sein}}{\Delta t_{ideaal}}$$

→

$$\Delta t_{ideaal} = \frac{S h_{sein}}{Q_{ideaal}}.$$

Ideaalvoolule on kasutatud maksimaalse vooluhulga valemi vooluhulgategurit tingimusel:

$$C_d = 1,$$

$$C_d^* = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}}$$

→

$$C_d^* = \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0,385.$$

Ajavahemike erinevus reaal- ja ideaalvedeliku voolamisele on

$$\Delta t_{\text{reaal}} - \Delta t_{\text{ideaal}}.$$

### ARVUTUS

Paisutuskõrgus

$$PK = 2 \text{ m} - 1 \text{ m} = 1 \text{ m}$$

Basseini täitumise ajavahemik, st veepinna tõusmisel basseini aluspõhjast kuni lühikese läve ehk seina kõrguseni, reaalvedeliku voolamisele läbi nelinurkava on

$$\Delta t_{\text{reaal}} = \frac{5 \text{ m}^2}{0,25 \cdot 0,2 \text{ m} \sqrt{2 \cdot 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} \cdot (1 \text{ m})^{\frac{3}{2}}} \cdot 1 \text{ m} = 112,8809 \text{ s} = 0,0314 \text{ tundi}.$$

Maksimaalse vooluhulga valemi vooluhulgategur on

$$C_d = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 0,25 = 0,65.$$

$$\Delta t_{\text{reaal}} = \frac{5 \text{ m}^2}{0,65 \cdot (9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot (1 \text{ m})^{\frac{3}{2}} \cdot 0,2 \text{ m}} \cdot 1 \text{ m} = 112,8809 \text{ s} = 0,0314 \text{ tundi}.$$

Basseini täitumise ajavahemik, st veepinna tõusmisel basseini aluspõhjast kuni ava seina ehk lühikese läve kõrguseni, ideaalvedeliku voolamisele läbi nelinurkava on

$$\Delta t_{\text{ideaal}} = \frac{5 \text{ m}^2}{0,385 \cdot 0,2 \text{ m} \sqrt{2 \cdot 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} \cdot (1 \text{ m})^{\frac{3}{2}}} \cdot 1 \text{ m} = 73,3183 \text{ s} = 0,0204 \text{ tundi}.$$

Maksimaalse vooluhulga valemi vooluhulgategur on

$$C_d = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 0,385 = 1,0.$$

$$\Delta t_{ideaal} = \frac{5 \text{ m}^2}{1,0 \cdot (9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot (1 \text{ m})^{\frac{3}{2}} \cdot 0,2 \text{ m}} \cdot 1 \text{ m} = 73,3183 \text{ s} = 0,0204 \text{ tundi.}$$

Ajavahemike erinevus reaal- ja ideaalvedeliku voolamisele

$$\Delta t_{reaal} - \Delta t_{ideaal} = 112,8809 \text{ s} - 73,3183 \text{ s} = 39,5626 \text{ s} = 0,0110 \text{ tundi}$$

**JÄRELDUS.** Ideaalvedeliku voolamisele paisutamisel ( $C_d^* = 0,385$ ) basseini täitmisele muutub (tõused) basseini vabapinna kõrgus kiiremini võrreldes seda reaalvedeliku voolamisele paisutamisel ( $C_d^* < 0,385$ ).

**MÄRKUS.** Lisaiülesandes (basseini täitumise ülesandes) on hüdraulilise suuruse  $h$  tähendust muudetud võrreldes põhiülesandega. Basseini täitumise ülesandes on hüdrauliline suurus  $h$  määratud, kui vabapinna kõrgus basseini aluspõhjust. Basseini täitumise ajavahemik on määratud tingimusel, et basseini vabapind tõuseb basseini aluspõhja kuni kõrguseni  $h_{sein}$ , kusjuures vabapinna kõrgus basseinist väljaspool ei muutu, st  $H = \text{konstant}$ .

## 12.5 VIITED

12.1 Tamm, T., Tamm, O. & Saaremäe, E. (2020). *Sademeveesüsteemide projekteerimise aluste kaasajastamine*. Eesti Maaülikool.

12.2 Tervisekaitseõudud ujulatele, basseinidele ja veekeskustele. (2007). *RT I, 2007, 26, 149*. <https://www.riigiteataja.ee/akt/13250854>

12.3 Veeseadus. (2020). *RT I, 10.12.2020, 36*.  
<https://www.riigiteataja.ee/akt/110122020036>

## 13 EHITATUD MAHUTI

### 13.1 PRAKTIILINE OSA. VEEKOGUMISE MAHUTID

#### 13.1.1 EHITIS. FILTRATSIOONIMAHUTI, SETTEBASSEIN, AEROTANK, PUHTAVEERESERVUAAR, ÜHTLUSTI

Veeavarustuse ja kanalisatsioonisüsteemides kasutatakse laialdaselt mahuteid. Veetöötlusjaamades ja reoveepuhastites toimuvad puhastusprotsessid erinevates mahutites – nagu näiteks filtratsioonimahutites, settebasseinides või aerotankides. Kanalisatsioonisüsteemides kasutatakse kogumismahuteid – nagu näiteks reoveepumplates.

Mahuteid kasutatakse ka vihmavee kogumiseks, et seda näiteks kastmisveeks tarvitada. Samuti lühiajaliseks kogumiseks ja seejärel ärajuhtimiseks, et vältida õhu ja vee koosvoolamisega kaasneva löökkoormuse (hetkelise ülekoormuse) teket sademeveekanalisatsioonis. Vastavad akumulatsioonimahutid on kasutusel sademevee ühtlustitena tippkoormuse tasandamiseks. Ühtlustite kasutamisel tuleb arvestada, et need intensiivse saju korral üle ei täituks ja pikema aja jooksul tühjeneks. Ekstreemolukordi ei ole siiski võimalik sisse arvutada, mistõttu ei ole pikema korduvusperioodiga vihmade korral uputused välistatud. Ühtlustite tehnilised erilahendused võimaldavad rakendada tühjendusrežiime nii valingvihmadega kui ka peale vihmasadu. Vooluhulka on vaja ühtlustada ka purgimissõlmes reovee juhtimisel väikepuhastisse.

Vajadusel tuleb mahuti pinnases ankurdata, et vältida vees või pinnases mõjuvate jõudude (nt üleslükkejõud) tõttu liikumist.

#### 13.1.2 VOOLUREŽIIM. MAHUTI TÜHJENEMINE JA TÄITUMINE

Tavapäraselt valitakse ühtlusti tühjendamiseks sobiva läbimõõduga horisontaalne ümartoru, mille kaudu juhitakse kogunenud sademevesi olenevalt tingimustest kas sademeveekanalisatsiooni või avasängi. Ühtlusti tühjenemise aeg sõltub ühtlusti mahust ja valitud toru läbimõõdust. Mahuti tühjendamiseks võib kasutada ka sifooni, mis tuleb eelnevalt mahutiveega täita ja mille väljavooluotsik tuleb mahuti vabapinnast madalamale viia. Sifooni kasutamine vee juhtimiseks on levinud muuhulgas maaviljeluses.

Olenevalt mahuti konstruktsioonist, väljavoolutoru läbimõõdust ja pealevoolu intensiivsusest võib väljavoolutoru töötada isevoolsena (nt ülevoolutoru) või rõhu all (nt tühjendustoru). Vastavalt mahuti kasutusotstarbele kasutatakse vajadusel ka ülevoolu, mille eesmärgiks on liigtäitumise vältimine. Mahutite tühjendus- ja ülevoolutorude dimensioonimisel tuleb lähtuda mahuti tehnoloogilisest lahendusest

ja torude töörežiimist. Kui tegemist on lühikese torulõigu ehk jätkuga, siis tuleb vooluhulga arvutustes lähtuda samadest valemitest, mis ava puhul. Kuna läbilaskevõime oleneb jätku kujust, tuleb kasutada vastavat vooluhulgategurit.

Mahutite kasutamise ja eksploatatsiooni puhul tuleb järgida ohutusnõudeid. Reoveega täitunud mahutisse võivad koguneda ohtlikud gaasid, mistõttu on oluline tõhusa ventileerimise tagamine. Sama puudutab ka veetöötlusjaamade mahuteid, milles kasutatakse kemikaale. Reoveemahutite ülevoolude kavandamisel tuleb arvestada abinõusid, mis vähendavad keskkonnasaaste ohtu.

### 13.1.3 SISSEJUHATUS ÜLESANDESSE. PÕHIVALEMID

Mahutite ülesanne on raamatusse lisatud põhjusel, et TTÜ raamatus „Rakenduslik hüdromehaanika“ (2019) (VIIDE 13.1) (vt „Veemahuti täitumine“, lk 124–132 ning „Veemahuti tühjenemine“, lk 136–143) on ülesanne lahendatud valemite kaudu ning vastavaid numbrilisi arvutusskeeme ei ole otseselt kasutatud. Siin on mahuti ülesande põhivõrrandid ja valemid esitatud uues võtmes ehk muudetud on hüdrauliliste suuruste tähendusi ning lisatud on numbrilised arvutusskeemid. TTÜ raamatus (VIIDE 13.1, „Rakenduslik hüdromehaanika“) on selgitatud numbriliste mudelite kasutamise eeliseid. Siinse raamatu lugejal on võimalus mahutite ülesande lahendamiseks kasutada ka vastavaid numbrilisi arvutusskeeme, mida on võimalik valemite kaudu kontrollida (VIITED 13.2 ja 13.3).

Lisaülesandes kasutatakse hüdraulilist suurust, mis on määratud mahutisise vabapinna kõrgusena üle selle aluspõhja – nagu erinevalt põhiülesandest, kus sama tähistusega hüdrauliline suurus määrab mahutisise vabapinna kõrguse üle ümartoru telje. Põhiülesande hüdrauliline suurus, mis on tähistatud suletud anuma veepinna kõrgusena üle torutelje kõrguse, muudab oma tähendust, sest lisaülesandes kasutatakse anuma täitmise juures konstantset hüdraulilist suurust, mis on määratud välise veepinna kõrguse ja torutelje kõrguse konstantse vahega kogu anuma veega täitmise protsessi kestusel.

Mahuti ja horisontaalse toru voolusüsteemi tühjenemise ülesannet on matemaatiliselt lihtne lahendada valemiga, mis on saadud põhivõrrandi integreerimisel, ja ideaalvedeliku voolamise numbrilise arvutusskeemiga, kui ei tule arvestada hüdraulilise voolusüsteemi takistust. Sama kehtib ka reaalvedeliku voolamise puhul, kui hüdraulilise voolusüsteemi takistustegur on konstantne.

Kuna mahuti tühjenemisel muutub voolukiirus pidevalt, siis võib voolamine olla nii laminaarse kui ka turbulentsse voolurežiimiga. Laminaarse voolamise puhul võib täistäitumusega torus hõõrdetakistusteguri määramiseks kasutada Poiseuille'i hõõrdetakistuse valemit ning turbulentsse voolamise puhul Blasiuse hõõrdetakistuse valemit, Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valemit või Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrandit.

Manningi valemiga on hõõrdetakistustegur konstantne ehk hõõrdetakistustegur ei sõltu otseselt Reynoldsi arvust. Seega, kui muuta vooluhulka, tuleb muuta ka avasāngi pikikallet. Manningi valemi kasutamisel tuleb eeldada, et reaalvoolamise olukord vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnale.

Mahuti ja horisontaalse toru voolusüsteemi tühjenemise ülesannet on võimalik lahendada ka ilma ventilatsioonita ehk õhuvoolule suletud olukorra puhul. Mahutis lukustunud õhuosa termodünaamilise rõhu võib määrata ideaalse gaasi polütroopse protsessiga. Polütroopses protsessis on ideaalse gaasi rõhu ja ruumala seos valemiga määratud.

Bernoulli võrrandiga ei ole võimalik täpselt määrata voolamise algtingimusi, kuna Bernoulli kolmikliige ei võimalda arvestada mittestatsionaarse voolamise erijuhuga seotud ebāühtlase voolamise (ingl. *unsteady flow*) olukorda, kus täieliku torutāitega hüdraulilises voolusüsteemis algab voolamine paigalseisus.



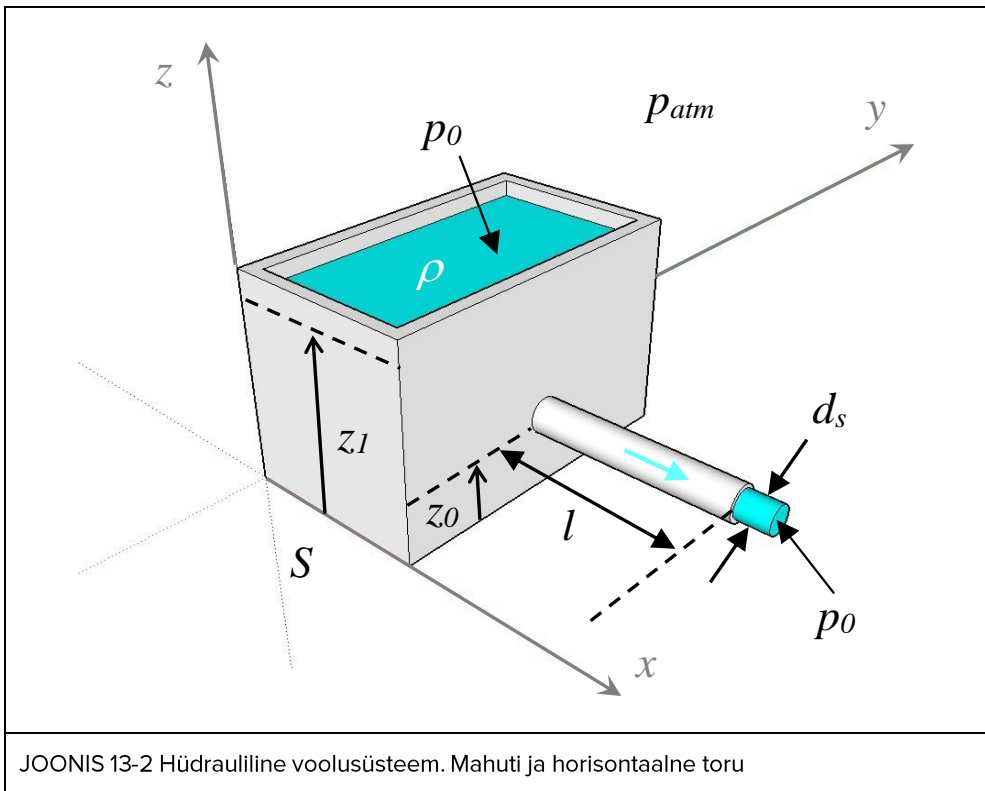
JOONIS 13-1 Maa-alune veemahuti, Kiia. (Foto: Georg Eero, 2017)



## 13.2 PÕHIÜLESANNE. MAHUTI TÜHJENEMINE

ANTUD. Mahuti, aluspõhja (horisontaalne osa sisepõhjust) pindalaga  $S = 5 \text{ m}^2$ , on täidetud veega kõrguseni  $z_1 = 10 \text{ m}$  mahuti sisepõhja horisontaalsest osast. Mahutit on võimalik veest tühjendada läbi horisontaalse ümartoru, mille sisediaameeter  $d_s = 50 \text{ mm}$ , pikkus  $l = 5 \text{ m}$  ja telje kõrgus  $z_0 = 2 \text{ m}$  mahuti aluspõhjust. Vee temperatuur mahutis on  $10 \text{ }^\circ\text{C}$ , tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ . Nii mahutisisesel vabapinnal kui ka survetoru väljavoolus on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata põhivõrrandi integraalse valemiga ja numbrilise arvutuskeemiga mahutile pool-tühjenemise ajavahemik, ideaalvedeliku voolamisele läbi horisontaalse ümartoru. Kui palju erinevad veemahuti pool-tühjenemise ajavahemikud ideaal- ja reaalvedeliku voolamisele? Määrata põhivõrrandite integraalse valemi ja numbrilise arvutuskeemi ajavahemike erinevusele metoodiline viga ja arvutusviga.



EELDUSED. Vee väljavool mahutist on hästi määratud kvaasistatsionaarse voolamisega, st igal ajahetkel on voolamine mittestatsionaarne ja igas ajavahemikus statsionaarne. Kasutada Runge-Kutta numbrilist arvutuskeemi mahuti tühjenemise ajavahemiku määramisele, ning võrrelda tulemusi matemaatiliselt täpsema valemiga, mis on saadud põhivõrrandite integreerimisel. Reaalvedeliku voolamise puhul võtta mahuti ja horisontaaltoru ühendusava kohttakistustegur  $k_{L1} = 0,45$ , täieliku täitumusega voolamisele torus määrata hõõrdetakis-tustegur  $\lambda$  konstandiga ( $\lambda = 0,03$ ) või empiirilise valemiga (näiteks laminaarse voolamise Poiseuille'i valemiga, ning turbulentssele voolamisele Blasiusse hõõrdetakistuse valemiga, Manningi hõõrdetakistuse valemiga, Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valemiga või Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrandiga, ning toru väljavooluava kohttakistustegur  $k_{L0} = 2$ .

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Reaalvoolu Bernoulli võrrand, Darcy survekao valem, Weisbachi survekao valem, Darcy-Weisbach-tüüpi voolusüsteemi survekao valem, ümartoru Reynolds'i arvu valem, Runge-Kutta 4-tõusuga numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem**

## VALEMID

Mahutisisesse vabapinnaga ja väljavoolutoru avaga määratud voolutorule võib koostada reaalvoolu Bernoulli võrrandi (VALEM (2-10)):

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{u_0^2}{2g} + h_t.$$

Eeldusel, et voolukiirus torus on oluliselt suurem voolukiirusest mahutis ehk  $u_0 \gg u_1$ , võime Reaalvoolu Bernoulli võrrandit (VALEM (2-10)) lihtsustada:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \approx z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{u_0^2}{2g} + h_t.$$

Survekadu on määratud Darcy-Weisbachi survekao valemiga

$$h_t = \Pi \frac{u_0^2}{2g},$$

milles hüdraulilise voolusüsteemi takistustegur:

$$\Pi = k_{L1} + \lambda \frac{l}{d_s} + k_{L0}.$$

Esimeses lähenduses võib hõõrdetakistusteguri kvaasistatsionaarsele voolamisele määrata konstandiga:

$$\lambda = \textit{konstant}.$$

Reynoldsi arv täieliku torutäitega voolamisele ümartorus on

$$Re = \frac{u d_s}{\nu}.$$

Mahuti tühjenemisele läbi horisontaalse ümartoru võib muutuva veetäitumusega osa määrata ajas muutuva veesamba kõrgusega  $z_1(t)$ , kusjuures  $z_1(t) \rightarrow z_0$ . Tähistame muutuva mahutisisesese vabapinna kõrguse väljavoolutoru teljest  $h(t) = z_1(t) - z_0$ . Võtame kasutusele konstantse suuruse  $H = z_1 - z_0$  suletud väljavoolutoruga juhule, st  $h = H$ .

→

$$\frac{u_0^2}{2g} + \Pi \frac{u_0^2}{2g} = h(t) + \frac{p_1 - p_0}{\rho g}$$

Rõhuvahekõrgus

$$h_{rvk} = \frac{p_1 - p_0}{\rho g}$$

Mahuti väljavoolutorus määratakse voolukiirus ( $u = u_0$ ) valemiga:

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \Pi}} \sqrt{2g(h(t) + h_{rvk})}.$$

Muutuva vabapinna kõrgusega mahutis on veehulga  $V(t)$  ( $= h(t) S$ ) ajaline muutus määratud kvaasistatsionaarse voolamise pidevuse võrrandiga:

$$-\frac{dV}{dt} = Q,$$

$$-\frac{dh}{dt} S = Q,$$

milles  $h(t)$  on mahutisisesese vabapinna kõrgus üle väljavoolutoru telje,  $S$  on vertikaalsete seintega mahuti aluspõhja pindala ja  $Q(t)$  on vooluhulk täieliku täitumusega horisontaalses ümartorus, mis sõltub vabapinna kõrgusest  $z_1(t)$  mahutis.

Kvaasistatsionaarsele voolamisele on vooluhulk mahuti väljavoolutorus määrata valemiga:

$$Q = A_e u,$$

milles täieliku täitumusega ümartoru sisepindalaga määratud voolamise ristlõige ehk elavlõige on

$$A_e = \pi \left(\frac{d_s}{2}\right)^2.$$

Funktsiooni integreerimine. Mahuti tühjenemise ajavahemik (ideaalvool)

### VALEMID

Ideaalvoolu matemaatiliselt lihtsustatud juhul ( $\Pi = 0$ ) ja eeldusel, et nii mahutisisesel vabapinnal kui ka täieliku täitumusega horisontaalse ümartoru väljavooluavas on õhurõhk (millest järeldub, et  $h_{rvk} = 0$ ) võib mahutisisesel vabapinna kõrguse üle horisontaalse ümartoru telje määrata hariliku diferentsiaalvõrrandiga:

$$-\frac{dh}{dt} S = A_e \sqrt{2gh}.$$

Muutujate eraldamine harilikus diferentsiaalvõrrandis:

$$dt = -\frac{S}{A_e \sqrt{2g}} \frac{dh}{h^{\frac{1}{2}}}.$$

Integreerimine

$$\int \left( dt = -\frac{S}{A_e \sqrt{2g}} \frac{dh}{h^{\frac{1}{2}}} \right)$$

→

$$t = -\frac{S}{A_e \sqrt{2g}} 2\sqrt{h} + \text{konstant}$$

Ajahetkel  $t = 0$  määratakse integreerimiskonstant nõ maksimaalse täitumusega mahutile veeosa ruumala järgi:

$$h(t = 0) = H$$

→

$$0 = -\frac{S}{A_e \sqrt{2g}} 2\sqrt{H} + \text{konstant}$$

→

$$\text{konstant} = \frac{S}{A_e \sqrt{2g}} 2\sqrt{H}.$$

Mahuti veest tühjenemise ajavahemik ideaalvedeliku voolamisele läbi ümartoru on määratud valemiga:

$$\Delta t_{\text{ideaal}} = \frac{2S}{A_e \sqrt{2g}} \left( \sqrt{H} - \sqrt{h_{l\ddot{o}pp}} \right),$$

milles  $h_{l\ddot{o}pp}$  on mahutisisesel vabapinna kõrgus üle väljavoolutoru telje, selle tühjenemise valitud lõpphetkel, st hetkel kui ümartoru suletakse näiteks liblikklapiga.

Funktsiooni integreerimine. Mahuti tühjenemise ajavahemik (reaalvool)

### VALEMID

Reaalvoolule ( $\Pi > 0$ ), kui nii mahutisisesel vabapinnal ja samuti täieliku täitumusega horisontaalse ümartoru väljavooluavas on õhurõhk (millest järeldub, et  $h_{rvk} = 0$ ), võib mahutisisesel vabapinna kõrguse üle horisontaalse väljavoolutoru telje määrata hariliku diferentsiaalvõrrandiga:

$$-\frac{dh}{dt} S = \frac{A_e \sqrt{2 g h}}{\sqrt{1 + \Pi}},$$

milles hüdraulilise voolusüsteemi takistustegur on

$$\Pi = k_{L1} + \lambda \frac{l}{d_s} + k_{L0}.$$

Seejuures on eeldatud, et mahuti ja horisontaaltoru ühendusava kohttakistustegur  $k_{L1}$ , täieliku torutäitega voolamise hõõrdetakistustegur  $\lambda$  ja toru väljavoolu kohttakistustegur  $k_{L0}$  on konstantsed suurused, st ka hüdraulilise voolusüsteemi takistustegur  $\Pi = \text{konstant}$ .

**MÄRKUS.** Mahuti ülesande põhivõrrandi integreerimine on võimalik juhul kui reaalvedeliku voolamisele on valitud konstantne hüdraulilise voolusüsteemi takistustegur.

Eraldame muutujad harilikus diferentsiaalvõrrandis:

$$dt = -\frac{S \sqrt{1 + \Pi}}{A_e \sqrt{2 g}} \frac{dh}{h^{\frac{1}{2}}}.$$

Integreerimine

$$\int \left( dt = -\frac{S \sqrt{1 + \Pi}}{A_e \sqrt{2 g}} \frac{dh}{h^{\frac{1}{2}}} \right)$$

→

$$t = -\frac{S \sqrt{1 + \Pi}}{A_e \sqrt{2 g}} 2 \sqrt{h} + \text{konstant}$$

Ajahetkel  $t = 0$  määratakse integreerimiskonstant nõu maksimaalse täitumusega mahutile veepõhise ruumala järgi, st  $h(t = 0) = H$ .

→

$$0 = -\frac{S \sqrt{1 + \Pi}}{A_e \sqrt{2 g}} 2 \sqrt{H} + \text{konstant}$$

→

$$\text{konstant} = \frac{S \sqrt{1 + \Pi}}{A_e \sqrt{2g}} 2 \sqrt{H}$$

Mahuti veest tühjenemise ajavahemik reaalvedeliku voolamisele läbi ümartoru on määratud valemiga

$$\Delta t_{\text{reaal}} = \frac{2 S \sqrt{1 + \Pi}}{A_e \sqrt{2g}} \left( \sqrt{H} - \sqrt{h_{\text{lõpp}}} \right),$$

milles  $h_{\text{lõpp}}$  on mahutisisesse vabapinna kõrgus üle horisontaalse toru telje, selle tühjenemise valitud lõpphetkel, st hetkel kui ümartoru suletakse näiteks kuulventiiliga.

*Idealvedeliku voolamine. Mahuti pool-tühjenemise ajavahemik*

#### ARVUTUS

$$H = 10 \text{ m} - 2 \text{ m} = 8 \text{ m}$$

$$h_{\text{lõpp}} = \frac{10 \text{ m}}{2} - 2 \text{ m} = 3 \text{ m}$$

$$A_e = \pi \cdot \left( \frac{0,05 \text{ m}}{2} \right)^2 = 0,002 \text{ m}^2$$

$$\Pi = 0$$

Mahuti pooltühjenemise ajavahemik ideaalvedeliku voolamisele läbi täieliku täitumusega horisontaalse ümartoru on

$$\Delta t_{\text{ideaal}} = \frac{2 \cdot 5 \text{ m}^2}{0,002 \text{ m}^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} (\sqrt{8 \text{ m}} - \sqrt{3 \text{ m}}) = 1260,6 \text{ s} = 0,3502 \text{ tundi.}$$

*Numbriline arvutusskeem. Mahuti vabapinna kõrgus (ideaalvool)*

*Numbriline arvutusmeetod. Runge-Kutta iteratsioonmeetod*

#### VALEMID

Runge-Kutta 4-tõusuga valemit võib kasutada numbrilise arvutusskeemi koostamisel, et määrata mahuti ja survetoru voolusüsteemi vabapinna kõrguse ajaline muutus. Ideaalvedeliku voolamise matemaatiliselt lihtsustatud eeldusel ei arvestada hüdraulilise voolusüsteemi takistust, st  $\Pi = 0$ .

Mahutisisesse vabapinna kõrguse ajaline muutus üle horisontaalse ümartoru telje on määratud hariliku diferentsiaalvõrrandiga:

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{A_e \sqrt{2g h}}{S},$$

milles  $A_e$  on täistäitumusega ümartoru elavlöige ja  $S$  on mahuti aluspõhja pindala.

## ARVUTUSSKEEM

Runge-Kutta 4-tõusuga valemi numbriline arvutusskeem:

$$\begin{aligned} ARV_1 &= h_i, & k_1 &= -\frac{A_e \sqrt{2g} ARV_1^{\frac{1}{2}}}{S}, \\ ARV_2 &= h_i + k_1 \frac{\Delta t}{2}, & k_2 &= -\frac{A_e \sqrt{2g} ARV_2^{\frac{1}{2}}}{S}, \\ ARV_3 &= h_i + k_2 \frac{\Delta t}{2}, & k_3 &= -\frac{A_e \sqrt{2g} ARV_3^{\frac{1}{2}}}{S}, \\ ARV_4 &= h_i + k_3, & k_4 &= -\frac{A_e \sqrt{2g} ARV_4^{\frac{1}{2}}}{S}, \\ h_{i+1} &= h_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \Delta t. \end{aligned}$$

ARVUTUS. Mahuti vabapinna kõrgus (ideaalvool) ( $\Pi = 0$ )

Algtingimus ja ajasamm

$$t = 0$$

$$h_{i=0} = H = 8 \text{ m}$$

$$\Delta t = 60 \text{ s} \cdot 0,1 = 6 \text{ s}$$

	Algt.	20 samm	40 samm	60 samm	80 samm	100 samm
$h$ (m)	8	7,4490	6,8902	6,3532	5,8379	5,3445
$t$ (s)	0	114	234	354	474	594

	120 samm	140 samm	160 samm	180 samm	200 samm	211 samm
$h$ (m)	4,8728	4,4229	3,9949	3,5885	3,2040	3,0018
$t$ (s)	714	834	954	1074	1194	1260

VASTUSED

$$\Delta t_{\text{ideaal}} = 1260 \text{ s} = 0,35 \text{ tundi}$$

$$h(t = 1260 \text{ s}) = 3,0018 \text{ m}$$

*Metoodiline viga. Mahutisese vabapinna kõrgus üle väljavoolutoru telje*

Numbrilise arvutusskeemiga määratud ja mahuti tühjenemise ajavahemiku valemis lõpptingimusena kasutatud mahuti vabapinna kõrguse erinevus ideaalvedeliku voolamisele:

$$|h_{RK} - h_V| = |3,0018 \text{ m} - 3,0 \text{ m}| = 0,0018 \text{ m}.$$

*Arvutusnäide. Mahuti pool-tühjenemise ajavahemik (reaalvool)*

#### ARVUTUS

$$H = 10 \text{ m} - 2 \text{ m} = 8 \text{ m}$$

$$h_{lõpp} = \frac{10 \text{ m}}{2} - 2 \text{ m} = 3 \text{ m}$$

$$A_e = \pi \cdot \left(\frac{0,05 \text{ m}}{2}\right)^2 = 0,002 \text{ m}^2$$

$$\Pi = 0,45 + 0,03 \cdot \frac{5 \text{ m}}{0,05 \text{ m}} + 2 = 5,45$$

Mahuti pooltühjenemise ajavahemik reaalvedeliku voolamisele läbi horisontaalse ümartoru on

$$\Delta t_{\text{reaal}} = \frac{2 \cdot \sqrt{1 + 5,45} \cdot 5 \text{ m}^2}{0,002 \text{ m}^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} (\sqrt{8 \text{ m}} - \sqrt{3 \text{ m}}) = 3201,5 \text{ s} = 0,8893 \text{ tundi}.$$

*Numbriline arvutusskeem. Mahuti vabapinna kõrgus (reaalvool)*

*Numbriline arvutusmeetod. Runge-Kutta arvutusmeetod*

#### VALEMID

Runge-Kutta 4-tõusuga valemit võib kasutada numbrilise arvutusskeemi koostamisel, et määrata veemahuti ja survetoru voolusüsteemi vabapinna kõrguse ajaline muutus. Reaalvedeliku voolamise eeldusel arvestatakse hüdraulilise voolusüsteemi takistust, st  $\Pi > 0$ .

Mahutisese vabapinna kõrguse ajaline muutus üle horisontaalse ümartoru telje on määratud hariliku diferentsiaalvõrrandiga:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_e \sqrt{2 g h}}{S \sqrt{1 + \Pi}},$$

milles  $A_e$  on täistäitumusega ümartoru elavlõige,  $S$  on mahuti aluspõhja pindala ja  $\Pi$  on hüdraulilise voolusüsteemi takistustegur.



## ARVUTUSSKEEM

Runge-Kutta 4-tõusuga valemi numbriline arvutusskeem:

$$ARV_1 = h_i, \quad k_1 = -\frac{A_e \sqrt{2g} ARV_1^{\frac{1}{2}}}{S \sqrt{1 + \Pi}},$$

$$ARV_2 = h_i + k_1 \frac{\Delta t}{2}, \quad k_2 = -\frac{A_e \sqrt{2g} ARV_2^{\frac{1}{2}}}{S \sqrt{1 + \Pi}},$$

$$ARV_3 = h_i + k_2 \frac{\Delta t}{2}, \quad k_3 = -\frac{A_e \sqrt{2g} ARV_3^{\frac{1}{2}}}{S \sqrt{1 + \Pi}},$$

$$ARV_4 = h_i + k_3, \quad k_4 = -\frac{A_e \sqrt{2g} ARV_4^{\frac{1}{2}}}{S \sqrt{1 + \Pi}},$$

$$h_{i+1} = h_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \Delta t.$$

ARVUTUS. Mahuti vabapinna kõrgus (reaalvool) ( $\Pi = 5,45$ )

Algtingimus ja ajasamm

$$t = 0$$

$$h_{i=0} = H = 8 \text{ m}$$

$$\Delta t = 60 \text{ s} \cdot 0,1 = 6 \text{ s}$$

	Algt.	20 samm	40 samm	60 samm	80 samm	100 samm
$h$ (m)	8	7,7807	7,5531	7,3289	7,1081	6,8907
$t$ (s)	0	114	234	354	474	594

	120 samm	140 samm	160 samm	180 samm	200 samm	220 samm
$h$ (m)	6,6766	6,4659	6,2586	6,0547	5,8541	5,6570
$t$ (s)	714	834	954	1074	1194	1314

	240 samm	260 samm	280 samm	300 samm	320 samm	340 samm
$h$ (m)	5,4632	5,2727	5,0857	4,9020	4,7218	4,5449
$t$	1434	1554	1674	1794	1914	2034

(s)						
	360 samm	380 samm	400 samm	420 samm	440 samm	460 samm
$h$ (m)	4,3713	4,2012	4,0344	3,8710	3,7110	3,5544
$t$ (s)	2154	2274	2394	2514	2634	2754

	480 samm	500 samm	520 samm	534 samm
$h$ (m)	3,4011	3,2512	3,1047	3,0042
$t$ (s)	2874	2994	3114	3198

#### VASTUSED

$$\Delta t_{\text{reaal}} = 3198 \text{ s} = 0,8883 \text{ tundi}$$

$$h(t = 3198 \text{ s}) = 3,0042 \text{ m}$$

*Metoodiline viga. Mahuti vabapinna kõrgus üle väljavoolutoru telje*

Numbrilise arvutuskeemiga määratud ja mahuti tühjenemise ajavahemiku valemis lõpptingimusena kasutatud mahuti vabapinna kõrguse erinevus reaalvedeliku voolamisele:

$$|h_{RK} - h_V| = |3,0042 \text{ m} - 3,0 \text{ m}| = 0,0042 \text{ m}.$$

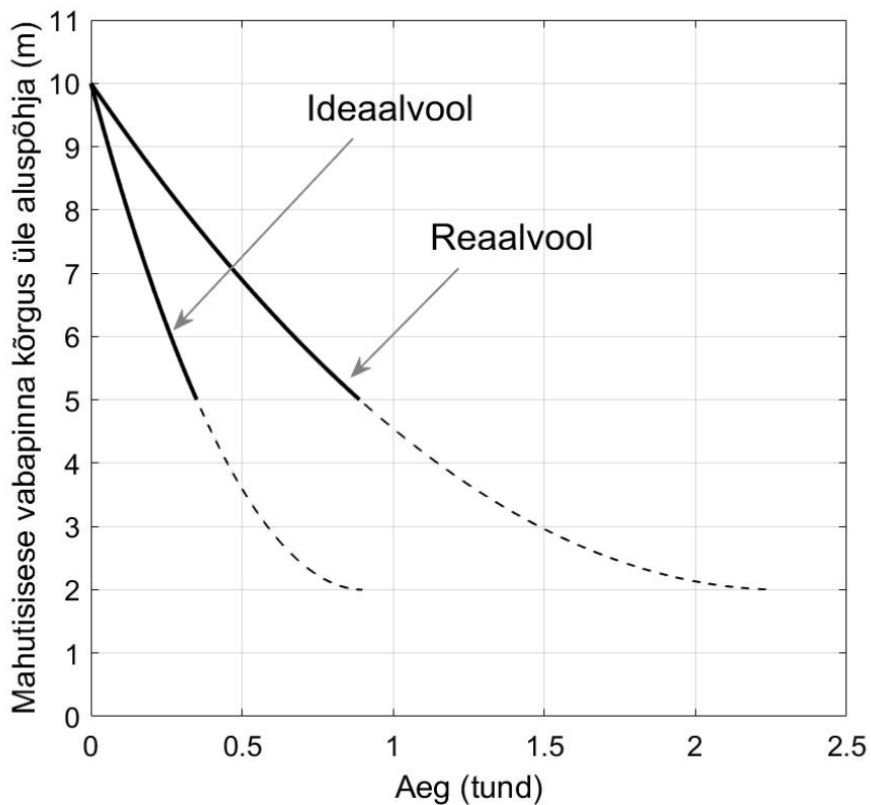
Ajavahemike erinevus reaal- ja ideaalvedeliku voolamisele

$$|\Delta t_{\text{reaal}} - \Delta t_{\text{ideaal}}| = |3198 \text{ s} - 1261 \text{ s}| = 1937 \text{ s} = 0,5381 \text{ tundi}$$

*Arvutusviga*

Mahuti tühjenemise põhivõrrandite integraalse valemiga ja numbrilise arvutuskeemiga arvatud ajavahemike erinevuste summa ideaal- ja reaalvedeliku voolamisele on

$$|0,6 \text{ s} + 3,5 \text{ s}| = 4,1 \text{ s}.$$



JOONIS 13-3 Mahuti vabapinna kõrguse muutused pooltühjenemise olukorras ideaal- ja reaalvoolule (pidevad jooned). Ideaalvedeliku voolamise hüdraulilise voolusüsteemi takistustegur  $\Pi = 0$ , ning reaalvedeliku voolamisele hüdraulilise voolusüsteemi takistustegur  $\Pi = 5,45$ . Punktiirjoontega on näidatud vastavalt ideaal- ja reaalvoolu puhul mahuti tühjenemisajad horisontaalvalu teljeni.

**JÄRELDUS.** Ideaalvedeliku voolamisele mahuti tühjenemisele muutub (langeb) mahutisese vabapinna kõrgus kiiremini võrreldes seda reaalvedeliku voolamisega.

## MÄRKUSED. Mahuti tühjenemine

- Kui ei tule arvestada hüdraulilise voolusüsteemi takistust, on mahuti ja horisontaalse toru voolusüsteemi tühjenemise ülesannet matemaatiliselt lihtne lahendada põhivõrrandi integreerimisel saadud valemi ja ideaalvedeliku voolamisele vastava numbrilise arvutuskeemiga.
- Mahuti ja horisontaalse toru voolusüsteemi tühjenemise ülesannet on matemaatiliselt lihtne lahendada põhivõrrandi integraalse valemiga ja numbrilise arvutuskeemiga reaalvedeliku voolamisele, milles hüdraulilise voolusüsteemi takistustegur on konstantne.
- Kuna mahuti tühjenemisele muutub voolukiirus pidevalt, siis võib voolamine olla nii laminaarse kui ka turbulentsse voolurežiimiga. Hõõrdetakistusteguri määramisel täistäitumusega torus laminaarsele voolamisele võib kasutada Poiseuille'i valemit:

$$\lambda = \frac{64}{Re},$$

mis kehtib hästi ümartoru Reynoldsi arvudele  $Re < 0.02 \cdot 10^5$ , ning turbulentssele voolamisele Blasiuse hõõrdetakistuse valemit:

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}},$$

mis kehtib hästi ümartoru Reynoldsi arvu vahemikus  $Re = (0.04 \dots 1) \cdot 10^5$ , või Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valemit (VALEM (2-42)):

$$\lambda = \frac{0,25}{\left[ \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,7} + \frac{5,74}{Re^{(9/10)}} \right) \right]^2},$$

mis kehtib hästi ümartoru Reynoldsi arvu vahemikus  $Re = (0,05 \dots 1000) \cdot 10^5$  või Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrandit (VALEM (2-40)):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right),$$

mis kehtib hästi ümartoru Reynoldsi arvu vahemikus  $Re = (0,04 \dots 10000) \cdot 10^5$ .

- Ümartoru Reynoldsi arvu valemis võib toru sisediaimeetri ( $d_s$ ) asemel kasutada ka hüdraulilist diameetrit ( $D_h$ ). Täieliku täitumusega ümartorule kehtib seos:

$$D_h = 4 R_h = \frac{4 A_e}{\chi} = 4 \left( \frac{\pi d_s^2}{4} \right) \left( \frac{1}{\pi d_s} \right) = d_s,$$

milles survevoolu elavlöige on  $A_e$  ja märgpiire on  $\chi$ .

- Manningi valemiga on hõõrdetakistustegur konstant, st hõõrdetakistustegur ei sõltu Reynoldsi arvust. Manningi valemi kasutamisele tuleb eeldada, et reaalvoolamise olukord vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnale.

- Mahuti ja horisontaalse toru voolusüsteemi tühjenemise ülesannet on võimalik lahendada ka ilma ventilatsioonita, st õhuvoolule suletud olukorras. Mahutis lukustunud õhuosa termodünaamilise rõhu võib määratud ideaalse gaasi polütroopse protsessiga. Polütroopses protsessis on ideaalse gaasi rõhu ja ruumala seos määratud valemiga:

$$p_{\delta hk} V_{\delta hk}^{k_{es}} = \textit{konstant} ,$$

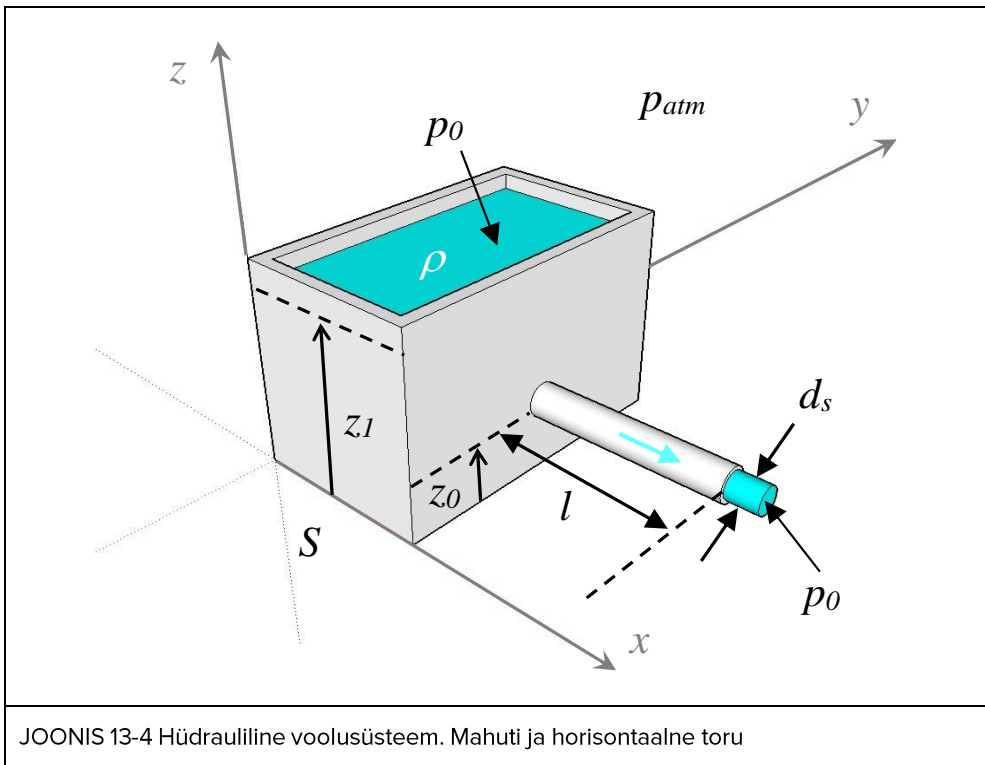
milles õhule erisoojuste suhtetegur  $k_{es} = 1,401$ .

- Bernoulli võrrandiga ei ole võimalik määrata voolamise algtingimusi täpselt põhjusel, sest Bernoulli kolmikliige ei võimalda kasutada mittestatsionaarse voolamise erijuhuga seotud ebaühtlase voolamise (ingl. *unsteady flow*) olukorda hüdraulilise voolusüsteemi täieliku torutäitega voolamise paigalseisust.

### 13.3 ISESEISVA TÖÖ ÜLESANNE. MAHUTI TÜHJENEMINE

ANTUD. Mahuti, aluspõhja (horisontaalne osa sisepõhjust) pindalaga  $S = 5 \text{ m}^2$ , on täidetud veega kõrguseni  $z_1 = 10 \text{ m}$  mahuti sisepõhja horisontaalsest osast. Mahutit on võimalik veest tühjendada läbi horisontaalse ümartoru, mille sisediaameeter  $d_s = 50 \text{ mm}$ , pikkus  $l = 5 \text{ m}$  ja telje kõrgus  $z_0 = 2 \text{ m}$  mahuti aluspõhjust. Vee temperatuur mahutis on  $10 \text{ }^\circ\text{C}$ , tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ . Nii mahutisisesel vabapinnal kui ka survetoru väljavoolus on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata põhivõrrandi integraalse valemiga ja numbrilise arvutusskeemiga mahutile veerand-tühjenemise ajavahemik, ideaalvedeliku voolamisele läbi horisontaalse ümartoru. Kui palju erinevad veemahuti veerand-tühjenemise ajavahemikud ideaal- ja reaalvedeliku voolamise puhul?



EELDUSED. Vee väljavool mahutist on hästi määratud kvaasistatsionaarse voolamisega, st igal ajahetkel on voolamine mittestatsionaarne ja igas ajavahemikus statsionaarne. Kasutada Runge-Kutta numbrilist arvutuskeemi mahuti tühjenemise ajavahemiku määramisele, ning võrrelda tulemusi matemaatilisel täpsema valemiga, mis on saadud põhivõrrandite integreerimisel. Reaalvedeliku voolamise puhul võtta mahuti ja horisontaaltoru ühendusava kohttakistustegur  $k_{L1} = 0,45$ , täieliku täitumusega voolamisele torus määrata hõõrdetakistustegur  $\lambda$  konstandiga ( $\lambda = 0,03$ ) või empiirilise valemiga (näiteks laminaarse voolamise Poiseuille'i valemiga, ning turbulentsse voolamisele Blasiusse hõõrdetakistuse valemiga, Manningi hõõrdetakistuse valemiga, Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valemiga või Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrandiga, ning toru väljavooluava kohttakistustegur  $k_{L0} = 2$ ).

#### VASTUSED

Mahuti veerand-tühjenemise ajavahemik ja vabapinna kõrgus (ideaalvool)

$$\Delta t_{\text{ideaal}} = 552 \text{ s} = 0,1533 \text{ tundi}$$

$$h(t = 552 \text{ s}) = 5,5147 \text{ m}$$

Mahuti veerand-tühjenemise ajavahemik ja vabapinna kõrgus (reaalvool)

$$\Delta t_{\text{reaal}} = 1410 \text{ s} = 0,3916 \text{ tundi}$$

$$h(t = 1410 \text{ s}) = 5,5016 \text{ m}$$

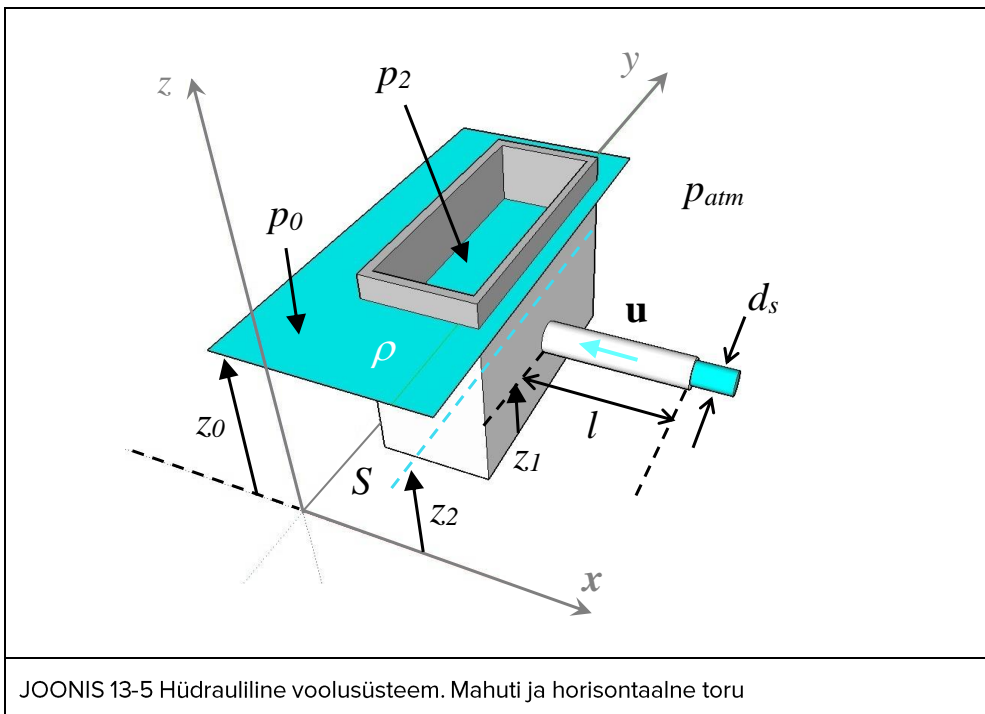
Ajavahemike erinevus reaal- ja ideaalvedeliku voolamisele

$$\Delta t_{\text{reaal}} - \Delta t_{\text{ideaal}} = 1410 \text{ s} - 552 \text{ s} = 858 \text{ s} = 0,2383 \text{ tundi}$$

## 13.4 LISAÜLESANNE. MAHUTI TÄITUMINE

ANTUD. Mahuti on osalise kõrgusega uputatud vette. Mahutivälise vabapinna fikseeritud kõrgus  $z_0 = 10$  m mahuti sisepõhja horisontaalsest osast. Mahuti täitmiseks veega kasutatakse ümartoru, mille sisediaameeter  $d_s = 50$  mm, pikkus  $l = 5$  m ja telje kõrgus  $z_1 = 3$  m mahuti aluspõhjust. Mahuti aluspõhja (horisontaalne osaga sisepõhjust) pindala  $S = 5$  m<sup>2</sup>. Mahuti muutuva veetäitumusega osa on määratud veesamba kõrgusega  $h(t) = z_2$ , seda nii ülevalpool kui ka allpool horisontaalse ümartoru telge. Vee temperatuur on 10 °C, tihedus  $\rho \approx 1000$  kg·m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg·m<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu / \rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>. Nii mahutisisisel vabapinnal (ka mahuti gaasilises osas) on rõhk  $p_2 = p_{atm}$ , kui ka rõhk mahutivälisel vabapinnal  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Määrata põhivõrrandite integraalse valemiga ja numbrilise arvutusskeemiga mahutile pooltäitumuse ajavahemik, ideaalvedeliku voolamisele läbi horisontaalse ümartoru. Kui palju erinevad veemahuti pooltäitumuse ajavahemikud ideaal- ja reaalvedeliku voolamise puhul? Määrata meetodiline viga ja arvutusviga.



JOONIS 13-5 Hüdrauliline voolusüsteem. Mahuti ja horisontaalne toru



EELDUSED. Mahuti täitumine jagada kahele ajavahemikule: i) voolamine muutumatu rõhu all ja ii) voolamine muutuva rõhu all. Perioodil i) on vee sissevool mahutisse statsionaarne ja perioodil ii) on vee sissevool mahutisse hästi määratud kvaasistatsionaarse voolamisega, st igal ajahetkel on voolamine mittestatsionaarne ja igas ajavahemikus statsionaarne. Kasutada Runge-Kutta numbrilist arvutuskeemi mahuti täitumise ajavahemiku määramisele, ning võrrelda tulemusi matemaatiliselt täpsema valemiga, mis on saadud põhivõrrandite integreerimisel. Reaalvoolu puhul võtta toru sissevooluava kohttakistustegur  $k_{L1} = 2$ , toru hõõrdetakistustegur  $\lambda$  määrata konstandiga ( $\lambda = 0,03$ ) või empiirilise valemiga (näiteks laminaarse voolamise Poiseuille'i valemiga, ning turbulentsse voolamisele Blasiusse hõõrdetakistuse valemiga, Manningi hõõrdetakistuse valemiga, Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valemiga või Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrandiga, ning horisontaaloru ja mahuti ühendusava kohttakistusteguri  $k_{L2} = 1$ ).

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Reaalvoolu Bernoulli võrrand, Darcy survekao valem, Weisbachi survekao valem, Darcy-Weisbach-tüüpi voolusüsteemi survekao valem, ümartoru Reynoldsi arvu valem, Runge-Kutta 4-tõusuga numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem**

### VALEMID

Mahutivälise vabapinnaga ja sissevoolutoru avaga määratud voolutorule võib koostada reaalvoolu Bernoulli võrrandi (VALEM (2-10)):

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{u_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} + h_t.$$

Eeldusel, et voolukiirus torus on oluliselt suurem voolukiirusest mahutist väljaspool ehk  $u_1 \gg u_0$ , võime Reaalvoolu Bernoulli võrrandist (VALEM (2-10)) lihtsustada:

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} \approx z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} + h_t.$$

Bernoulli võrrandi lihtsustamisel on eeldatud, et osalise kõrgusega vette uputatud mahutist väline vabapind ei muuda kõrgusnivood mahuti täitumisel, st ei liigu vertikaalselt ( $u_0 = 0$ ).

Survekadu on määratud Darcy-Weisbachi survekao valemiga

$$h_t = \Pi \frac{u_1^2}{2g},$$

millele hüdraulilise voolusüsteemi survekadu mahuti täitumisele muutumatu rõhu all on

$$h_t = \Pi_i \frac{u_1^2}{2g},$$

milles hüdraulilise voolusüsteemi takistustegur:

$$\Pi_i = k_{L1} + \lambda \frac{l}{d_s},$$

ning mahuti täitumisele muutuva rõhu all on survekadu

$$h_t = \Pi_{ii} \frac{u_1^2}{2g},$$

milles hüdraulilise voolusüsteemi takistustegur:

$$\Pi_{ii} = k_{L1} + \lambda \frac{l}{d_s} + k_{L2}.$$

Esimeses lähenduses võib hõõrdetakistusteguri kvaasistatsionaarsele voolamisele määrata konstandiga:  $\lambda = \textit{konstant}$ .

Reynoldsi arv täieliku torutäitega voolamisele ümartorus on

$$Re = \frac{u d_s}{\nu}.$$

Mahuti täitumisel veega läbi horisontaalse ümartoru võib muutuva täitumusega osa määrata ajas muutuva veesamba kõrgusega  $z_2(t)$ , kusjuures  $z_2(t) \rightarrow z_0$ . Tähistame muutuva mahutisise vabapinna kõrguse  $h(t) = z_2(t)$ . Vee juhtimine mahutisse toimub rõhuga, mis on määratud horisontaalse toru sissevooluava sügavusega  $d = -(z_1 - z_0) = \textit{konstant}$ . Võtame kasutusele konstantse suuruse  $H = z_0 - z_1$ .

**MÄRKUS.** *Lisaülesandes on hüdrauliline suurus  $h(t) = z_2(t)$ , st mahutisise vabapinna kõrgus üle selle aluspõhja, aga põhiülesandes on  $h(t) = z_1(t) - z_0$ , st mahutisise vabapinna kõrgus üle ümartoru telje. Lisaülesande hüdrauliline suurus  $H = z_0 - z_1$  muudab tähendust, sest põhiülesandes on võetud kasutusele konstantne suurus  $H = z_1 - z_0$  ainult suletud väljavoolutoruga juhule, st  $h = H$  ainult ajahetkel  $t = 0$ .*

→

$$\frac{u_1^2}{2g} + \Pi \frac{u_1^2}{2g} = (z_0 - z_1) + \frac{p_0 - p_1}{\rho g} = H + \frac{p_0 - p_1}{\rho g}$$

Rõhuvahekõrgus

$$h_{rvk} = \frac{p_0 - p_1}{\rho g}$$

Mahuti sissevoolutorus määratakse voolukiirus ( $u = u_1$ ) valemiga:

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \Pi}} \sqrt{2 g (H + h_{rvk})} .$$

Hüdraulilises voolusüsteemis võib muutuva vabapinna kõrgusega mahutis, selle veehulga  $V(t)$  ( $= h(t) S$ ) ajalise muutuse määrata kvaasistatsionaarse voolamise pidevuse võrrandiga:

$$\frac{dV}{dt} = Q ,$$

$$\frac{dh}{dt} S = Q ,$$

milles mahutisisesse vabapinna kõrgus üle selle aluspõhja on  $h(t)$ , vertikaalsete seintega mahuti aluspõhja pindala on  $S$  ja vooluhulk täieliku täitumusega horisontaalses ümartorus mahuti täitumisele konstantse rõhu all on  $Q = \textit{konstant}$  ja mahuti täitumisele muutuva rõhu all on  $Q = Q(t)$ .

Nii statsionaarsele kui ka kvaasistatsionaarsele voolamisele võib vooluhulga mahuti sissevoolutorus määrata valemiga:

$$Q = A_e u ,$$

milles täieliku täitumusega ümartoru sisepindalaga määratud voolamise ristlõige ehk elavlõige on

$$A_e = \pi \left( \frac{d_s}{2} \right)^2 .$$

*Voolamine muutumatu rõhu all (ideaalvedelik)*

*Funktsiooni integreerimine. Mahuti alumise osa täitumise ajavahemik (ideaalvool)*

#### VALEMID

Ideaalvoolu matemaatiliselt lihtsustatud juhul ( $\Pi_i = 0$ ) võib mahutisisesse vabapinna kõrguse üle mahuti aluspõhja, voolamisele muutumatu rõhu all, määrata hariliku diferentsiaalvõrrandiga:

$$\frac{dh}{dt} S = A_e \sqrt{2 g H} ,$$

milles  $H = z_0 - z_1 = \textit{konstant}$  ja  $A_e = \textit{konstant}$ . Vabapinna vertikaalsele liikumisele mahuti aluspõhjast kuni horisontaaltoru teljeni on mahuti sissevoolu avas õhurõhk, millest järeldub, et  $h_{rvk} = 0$ .

Muutujate eraldamine harilikus diferentsiaalvõrrandis:

$$dt = \frac{S}{A_e \sqrt{2g}} \frac{dh}{H^{\frac{1}{2}}}.$$

Integreerimine

$$\int \left( dt = \frac{S}{A_e \sqrt{2g}} \frac{dh}{H^{\frac{1}{2}}} \right)$$

→

$$t = \frac{S}{A_e \sqrt{2g}} \frac{h}{H^{\frac{1}{2}}} + \textit{konstant}$$

Ajahetkel  $t = 0$  määrame integreerimiskonstandi tühjale mahutile:

$$h(t = 0) = 0$$

→

$$\textit{konstant} = 0.$$

Mahuti veega täitumise ajavahemik ideaalvedeliku voolamisele läbi ümartoru, muutumatu rõhu all, on määratud valemiga

$$\Delta t_{\textit{ideaal } i} = \frac{S}{A_e \sqrt{2g}} \frac{h_{\textit{lõppi } i}}{H^{\frac{1}{2}}},$$

milles  $h_{\textit{lõppi } i}$  on mahutisisesse vabapinna kõrgus, mis on määratud sissevoolutoru teljega üle vertikaalseintega mahuti sisepõhja horisontaalse osa.

*Voolamine muutumatu rõhu all (reaalvedelik)*

*Funktsiooni integreerimine. Mahuti alumise osa täitumise ajavahemik (reaalvool)*

VALEMID

Reaalvoolu puhul ( $\Pi_i > 0$ ) võib mahutisisesse vabapinna kõrguse üle mahuti aluspõhja, voolamisele muutumatu rõhu all, määrata hariliku diferentsiaalvõrrandiga:

$$\frac{dh}{dt} S = \frac{A_e}{\sqrt{1 + \Pi_i}} \sqrt{2gH},$$

milles  $H = z_0 - z_1 = \textit{konstant}$  ja  $A_e = \textit{konstant}$ . Vabapinna vertikaalsele liikumisele mahuti aluspõhjast kuni horisontaaltoru teljeni on mahuti sissevoolu avas õhurõhk, millest järeldub et  $h_{rvk} = 0$ .

Muutujate eraldamine harilikus diferentsiaalvõrrandis:

$$dt = \frac{S \sqrt{1 + \Pi_i}}{A_e \sqrt{2g}} \frac{dh}{H^{\frac{1}{2}}}.$$

Integreerimine

$$\int \left( dt = \frac{S \sqrt{1 + \Pi_i}}{A_e \sqrt{2g}} \frac{dh}{H^{\frac{1}{2}}} \right)$$

→

$$t = \frac{S \sqrt{1 + \Pi_i}}{A_e \sqrt{2g}} \frac{h}{H^{\frac{1}{2}}} + \textit{konstant}$$

Ajahetkel  $t = 0$  määrame integreerimiskonstandi tühjale mahutile:

$$h(t = 0) = 0$$

→

$$\textit{konstant} = 0.$$

Mahuti veega täitumuse ajavahemik reaalvedeliku voolamisele läbi ümartoru, muutumatu rõhu all, on määratud valemiga

$$\Delta t_{\textit{reaal}i} = \frac{S \sqrt{1 + \Pi_i}}{A_e \sqrt{2g}} \frac{h_{\textit{lõppi}}}{H^{\frac{1}{2}}},$$

milles  $h_{\textit{lõppi}}$  on mahutisisese vabapinna kõrgus, mis on määratud sissevoolutoru teljega üle vertikaalseintega mahuti sisepõhja horisontaalse osa.

*Ideaalvedeliku voolamine muutumatu rõhu all. Mahuti osalise täitumise ajavahemik*

**ARVUTUS**

$$H = 10 \text{ m} - 3 \text{ m} = 7 \text{ m}$$

$$h_{\textit{lõppi}} = 3 \text{ m}$$

$$A_e = \pi \cdot \left( \frac{0,05 \text{ m}}{2} \right)^2 = 0,002 \text{ m}^2$$

$$\Pi_i = 0$$

Mahuti osalise täitumise ajavahemik, muutumatu rõhu all ideaalvedeliku voolamisele läbi täieliku täitumusega horisontaalse ümartoru on

$$\Delta t_{\textit{ideaal}i} = \frac{5 \text{ m}^2}{0,002 \text{ m}^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} \cdot \frac{3 \text{ m}}{(7 \text{ m})^{\frac{1}{2}}} = 651,8728 \text{ s} = 0,1811 \text{ tundi}.$$

Numbriline arvutusskeem. Mahuti veepinna kõrgus allpool torutelge (ideaalvool)

Numbriline arvutusmeetod. Runge-Kutta iteratsioonmeetod

#### VALEMID

Runge-Kutta 4-tõusuga valemit võib kasutada numbrilise arvutusskeemi koostamisel, et määrata veemahuti ja survetoru voolusüsteemi vabapinna kõrguse ajaline muutus. Ideaalvedeliku voolamise matemaatiliselt lihtsustatud eeldusel ei arvestada hüdraulilise voolusüsteemi takistust, st  $\Pi_i = 0$ .

Mahutisise vabapinna kõrguse ajaline muutus üle mahuti aluspõhja, voolamisele muutumatu rõhu all, on määratud hariliku diferentsiaalvõrrandiga

$$\frac{dh}{dt} = \frac{A_e \sqrt{2gH}}{S},$$

milles  $H = z_0 - z_1 = \text{konstant}$ ,  $A_e = \text{konstant}$  on täistaitumusega ümartoru elavlõige ja  $S = \text{konstant}$  on mahuti aluspõhja pindala.

#### ARVUTUSSKEEM

Runge-Kutta 4-tõusuga valemi numbriline arvutusskeem:

$$ARV_1 = h_i, \quad k_1 = \frac{A_e \sqrt{2gH}^{\frac{1}{2}}}{S},$$

$$ARV_2 = h_i + k_1 \frac{\Delta t}{2}, \quad k_2 = \frac{A_e \sqrt{2gH}^{\frac{1}{2}}}{S},$$

$$ARV_3 = h_i + k_2 \frac{\Delta t}{2}, \quad k_3 = \frac{A_e \sqrt{2gH}^{\frac{1}{2}}}{S},$$

$$ARV_4 = h_i + k_3, \quad k_4 = \frac{A_e \sqrt{2gH}^{\frac{1}{2}}}{S},$$

$$h_{i+1} = h_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \Delta t.$$

ARVUTUS. Mahuti veepinna kõrgus allpool torutelge (ideaalvool) ( $\Pi_i = 0$ )

Algtingimus ja ajasamm

$$t = 0$$

$$h = 0 \text{ m}$$

$$\Delta t = 60 \text{ s} \cdot 0,1 = 6 \text{ s}$$

	Algt.	10 samm	20 samm	30 samm	40 samm	50 samm
$h$ (m)	0	0,2209	0,4970	0,7732	1,0493	1,3254
$t$ (s)	0	54	114	174	234	294

	60 samm	70 samm	80 samm	90 samm	100 samm	111 samm
$h$ (m)	1,6015	1,8776	2,1538	2,4299	2,7060	3,0098
$t$ (s)	354	414	474	534	594	660

## VASTUSED

$$\Delta t_{ideaal\ i} = 660\text{ s} = 0,1833\text{ tundi}$$

$$h(t = 660\text{ s}) = 3,0098\text{ m}$$

*Metoodiline viga. Mahutisese vabapinna kõrgus üle aluspõhja (ideaalvool)*

Numbrilise arvutusskeemiga määratud ja mahuti täitumise ajavahemiku valemis lõpptingimusena kasutatud mahuti vabapinna kõrguse erinevus ideaalvedeliku voolamisele:

$$|h_{RK} - h_V| = |3,0098\text{ m} - 3,0\text{ m}| = 0,0098\text{ m}.$$

*Arvutusnäide. Reaalvedeliku voolamine muutumatu rõhu all. Mahuti osalise täitumise ajavahemik*

## ARVUTUS

$$H = 10\text{ m} - 3\text{ m} = 7\text{ m}$$

$$h_{lõppi} = 3\text{ m}$$

$$A_e = \pi \cdot \left(\frac{0,05\text{ m}}{2}\right)^2 = 0,002\text{ m}^2$$

$$\Pi_i = 2 + 0,03 \cdot \frac{5\text{ m}}{0,05\text{ m}} = 5$$

Mahuti osalise täitumise ajavahemik, muutumatu rõhu all reaalvedeliku voolamisele läbi täieliku täitumusega horisontaalse ümardoru on

$$\Delta t_{real\ i} = \frac{5\text{ m}^2 \cdot \sqrt{1+5}}{0,002\text{ m}^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} \cdot \frac{3\text{ m}}{(7\text{ m})^{\frac{1}{2}}} = 1596,8\text{ s} = 0,4435\text{ tundi}.$$

Runge-Kutta 4-tõusuga valemit võib kasutada numbrilise arvutusskeemi koostamisel, et määrata veemahuti ja survetoru voolusüsteemi vabapinna kõrguse ajaline muutus. Reaalvedeliku voolamise eeldusel arvestatakse hüdraulilise voolusüsteemi takistust, st  $\Pi_i > 0$ .

Numbriline arvutusskeem. Mahuti veepinna kõrgus allpool torutelge (reaalvool)

Numbriline arvutusmeetod. Runge-Kutta iteratsioonmeetod

### VALEMID

Mahutisese vabapinna kõrguse ajaline muutus üle mahuti aluspõhja, voolamisele muutumatu rõhu all, on määratud hariliku diferentsiaalvõrrandiga:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{A_e \sqrt{2 g H}}{S \sqrt{1 + \Pi_i}},$$

milles  $H = z_0 - z_1 = \textit{konstant}$ ,  $A_e = \textit{konstant}$  on täistäitumusega ümartoru elavlõige,  $S = \textit{konstant}$  on mahuti aluspõhja pindala ja  $\Pi_i = \textit{konstant}$  on hüdraulilise voolusüsteemi takistus.

### ARVUTUSSKEEM

Runge-Kutta 4-tõusuga valemi numbriline arvutusskeem:

$$\text{ARV}_1 = h_i, \quad k_1 = \frac{A_e \sqrt{2 g H^2}}{S \sqrt{1 + \Pi_i}},$$

$$\text{ARV}_2 = h_i + k_1 \frac{\Delta t}{2}, \quad k_2 = \frac{A_e \sqrt{2 g H^2}}{S \sqrt{1 + \Pi_i}},$$

$$\text{ARV}_3 = h_i + k_2 \frac{\Delta t}{2}, \quad k_3 = \frac{A_e \sqrt{2 g H^2}}{S \sqrt{1 + \Pi_i}},$$

$$\text{ARV}_4 = h_i + k_3, \quad k_4 = \frac{A_e \sqrt{2 g H^2}}{S \sqrt{1 + \Pi_i}},$$

$$h_{i+1} = h_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4) \Delta t.$$

ARVUTUS. Mahuti veepinna kõrgus allpool torutelge (reaalvool) ( $\Pi_i = 5$ )

Algtingimus ja ajasamm

$$t = 0$$

$$h = 0 \text{ m}$$

$$\Delta t = 60 \text{ s} \cdot 0,1 = 6 \text{ s}$$

	Algt.	20 samm	40 samm	60 samm	80 samm	100 samm
$h$ (m)	0	0,2029	0,4284	0,6538	0,8793	1,1047
$t$ (s)	0	114	234	354	474	594



	120 samm	140 samm	160 samm	180 samm	200 samm	220 samm
$h$ (m)	1,3302	1,5557	1,7811	2,0066	2,2320	2,4574
$t$ (s)	714	834	954	1174	1194	1314

	240 samm	260 samm	269 samm
$h$ (m)	2,6829	2,9084	3,0099
$t$ (s)	1434	1554	1608

#### VASTUSED

$$\Delta t_{\text{reaal } i} = 1608 \text{ s} = 0,4467 \text{ tundi}$$

$$h(t = 1608 \text{ s}) = 3,0099 \text{ m}$$

*Metoodiline viga. Mahutisese vabapinna kõrgus üle aluspõhja (reaalvool)*

Numbrilise arvutusskeemiga määratud ja mahuti täitumise ajavahemiku valemis lõpptingimusena kasutatud mahuti vabapinna kõrguse erinevus reaalvedeliku voolamisele:

$$|h_{RK} - h_V| = |3,0099 \text{ m} - 3,0 \text{ m}| = 0,0099 \text{ m}.$$

Ajavahemike erinevus reaal- ja ideaalvedeliku voolamisele

Ajavahemike erinevus reaal- ja ideaalvedeliku voolamisele muutumatu rõhu all mahuti täitumisele aluspõhjast kuni sissevoolutoru teljeni on

$$|\Delta t_{\text{reaal}} - \Delta t_{\text{ideaal}}| = |1608 \text{ s} - 660 \text{ s}| = 948 \text{ s} = 0,2633 \text{ tundi}$$

*Arvutusviga. Põhivõrrandite integraalse valemiga ja numbrilise arvutusskeemiga summa*

Põhivõrrandite integraalse valemiga ja numbrilise arvutusskeemiga määratud ajavahemike erinevuste summa ideaal- ja reaalvedeliku voolamisele muutumatu rõhu all mahuti täitumisele aluspõhjast kuni sissevoolutoru teljeni on

$$|8,1 \text{ s} + 11,2 \text{ s}| = 19,3 \text{ s}.$$

Arvutusnäide. Voolamine muutuva rõhu all (ideaalvedelik)  
 Funktsiooni integreerimine. Mahuti ülemise osa täitumise ajavahemik  
 (ideaalvool)

#### VALEMID

Ideaalvoolu matemaatiliselt lihtsustatud juhul ( $\Pi_{ii} = 0$ ) võib mahutisese vabapinna kõrguse üle mahuti aluspõhja, voolamisele muutuva rõhu all, määrata hariliku diferentsiaalvõrrandiga:

$$\frac{dh}{dt} S = A_e \sqrt{2 g (H + h_{rvk})},$$

milles  $H = z_0 - z_1 = \textit{konstant}$  ja rõhuvahekõrgus  $h_{rvk} = (p_0 - p_1)/\rho g$  sõltub rõhust mahuti sissevoolutoru uputatud avas, st  $p_1 = p_0 + \rho g (h - z_1)$ , milles  $h$  on mahutisese vabapinna kõrgus üle aluspõhja, eritingimusega  $h > z_1$ .

$$h_{rvk} = \frac{p_0 - p_1}{\rho g} = \frac{p_0 - (p_0 + \rho g (h - z_1))}{\rho g} = -(h - z_1)$$

→

$$\frac{dh}{dt} S = A_e \sqrt{2 g (H - (h - z_1))}$$

Mahutisese vabapinna vertikaalsele liikumisele kuni valitud vabapinna kõrguseni, mis on suurem kui mahuti horisontaalse ümartoru telg, on  $h_{rvk} < 0$  ( $h > z_1$ ).

Võtame kasutusele integreerimismuutuja:

$$h^* = H - (h - z_1) = -h + (H + z_1).$$

Muutuja vahetus harilikus diferentsiaalvõrrandis

$$\frac{dh}{dt} S = A_e \sqrt{2 g (H - (h - z_1))}$$

$$h = -h^* + (H + z_1)$$

→

$$-\frac{dh^*}{dt} S = A_e \sqrt{2 g h^*}$$

$$\frac{dh^*}{dt} S = -A_e \sqrt{2 g h^*}$$

Muutujate eraldamine harilikus diferentsiaalvõrrandis

$$dt = -\frac{S}{A_e \sqrt{2 g}} \frac{dh^*}{h^{*\frac{1}{2}}}.$$

Integreerimine

$$\int \left( dt = -\frac{S}{A_e \sqrt{2 g}} \frac{dh^*}{h^{*\frac{1}{2}}} \right)$$

→

$$t = -\frac{S}{A_e \sqrt{2g}} 2\sqrt{h^*} + \text{konstant}$$

→

$$t = -\frac{S}{A_e \sqrt{2g}} 2\sqrt{H - (h - z_1)} + \text{konstant}$$

Ajahetkel  $t = 0$  määrame integreerimiskonstandi osalise täitumusega mahutile:

$$h(t = 0) = z_1.$$

→

$$\text{konstant} = \frac{S}{A_e \sqrt{2g}} 2\sqrt{H}.$$

**MÄRKUS.** Ajahetke  $t = 0$  valimine tähendab, et alustame arvutamist osaliselt täidetud mahuti vabapinna kõrguselt, mis vastab olukorrale kui mahuti on eelnevalt täitunud horisontaalse ümartoru telje kõrguseni. Ajahetke  $t = 0$  võib valida põhjusel, et arvutame mahuti täitumise ajavahemikud muutumatu ja muutuva rõhu all erinevate põhivõrranditega.

Mahuti veega täitumise ajavahemiku ideaalvedeliku voolamisele läbi ümartoru, muutuva rõhu all, on määratud valemiga

$$\Delta t_{\text{ideaal ii}} = \frac{2S}{A_e \sqrt{2g}} \left( \sqrt{H} - \sqrt{H - (h_{\text{lõpp ii}} - z_1)} \right),$$

milles  $h_{\text{lõpp ii}}$  on mahutisiseses vabapinna kõrgus, mis on määratud üle vertikaalseintega mahuti sisepõhja horisontaalse osa, ning vastab vabapinna kõrgusele, mis on suurem kui mahuti sissevoolutoru telg, st  $h_{\text{lõpp ii}} > z_1$ .

*Voolamine muutuva rõhu all (reaalvedelik)*

*Funktsiooni integreerimine. Mahuti ülemise osa täitumise ajavahemik (reaalvool)*

#### VALEMID

Reaalvoolu puhul ( $\Pi_{ii} > 0$ ) võib mahutisiseses vabapinna kõrguse üle mahuti aluspõhja, voolamisele muutumatu rõhu all, määrata harilikku diferentsiaalvõrrandiga:

$$\frac{dh}{dt} S = \frac{A_e}{\sqrt{1 + \Pi_{ii}}} \sqrt{2g(H + h_{rvk})},$$

milles  $H = z_0 - z_1 = \text{konstant}$  ja rõhuvahekõrgus  $h_{rvk} = (p_0 - p_1)/\rho g$  sõltub rõhust mahuti sissevoolutoru uputatud avas, st  $p_1 = p_0 + \rho g(h - z_1)$ , milles  $h$  on mahutisiseses vabapinna kõrgus üle aluspõhja, eritingimusega  $h > z_1$ .

$$h_{rvk} = \frac{p_0 - p_1}{\rho g} = \frac{p_0 - (p_0 + \rho g (h - z_1))}{\rho g} = -(h - z_1)$$

→

$$\frac{dh}{dt} S = \frac{A_e}{\sqrt{1 + \Pi_{ii}}} \sqrt{2 g (H - (h - z_1))}$$

Mahutisese vabapinna vertikaalsele liikumisele kuni valitud vabapinna kõrguseni, mis on suurem kui mahuti sissevoolutoru telg, on  $h_{rvk} < 0$  ( $h > z_1$ ).

Võtame kasutusele integreerimismuutuja

$$h^* = H - (h - z_1) = -h + (H + z_1).$$

Muutuja vahetus harilikus diferentsiaalvõrrandis

$$\frac{dh}{dt} S = \frac{A_e}{\sqrt{1 + \Pi_{ii}}} \sqrt{2 g (H - (h - z_1))}$$

$$h = -h^* + (H + z_1)$$

→

$$-\frac{dh^*}{dt} S = \frac{A_e}{\sqrt{1 + \Pi_{ii}}} \sqrt{2 g h^*}$$

$$\frac{dh^*}{dt} S = -\frac{A_e}{\sqrt{1 + \Pi_{ii}}} \sqrt{2 g h^*}$$

Muutujate eraldamine harilikus diferentsiaalvõrrandis

$$dt = -\frac{S \sqrt{1 + \Pi_{ii}}}{A_e \sqrt{2 g}} \frac{dh^*}{h^{*\frac{1}{2}}}.$$

Integreerimine

$$\int \left( dt = -\frac{S \sqrt{1 + \Pi_{ii}}}{A_e \sqrt{2 g}} \frac{dh^*}{h^{*\frac{1}{2}}} \right)$$

→

$$t = -\frac{S \sqrt{1 + \Pi_{ii}}}{A_e \sqrt{2 g}} 2 \sqrt{h^*} + \textit{konstant}$$

→

$$t = -\frac{2 S \sqrt{1 + \Pi_{ii}}}{A_e \sqrt{2 g}} \sqrt{H - (h - z_1)} + \textit{konstant}$$

Ajahetkel  $t = 0$  määrame integreerimiskonstandi osalise täitumusega mahutile:

$$h(t = 0) = z_1.$$

→

$$\text{konstant} = \frac{2 S \sqrt{1 + \Pi_{ii}}}{A_e \sqrt{2 g}} \sqrt{H}$$

**MÄRKUS.** Ajahetke  $t = 0$  valimine tähendab, et alustame arvutamist osaliselt täidetud mahuti vabapinna kõrguselt, mis vastab olukorrale kui mahuti on eelnevalt täitunud horisontaalse ümartoru telje kõrguseni. Ajahetke  $t = 0$  võib valida põhjusel, et arvutame mahuti täitumise ajavahemikud muutumatu ja muutuva rõhu all erinevate põhivõrranditega.

Mahuti veega täitumise ajavahemik reaalvedeliku voolamisele läbi ümartoru, muutuva rõhu all, on määratud valemiga

$$\Delta t_{\text{reaal ii}} = \frac{2 S \sqrt{1 + \Pi_{ii}}}{A_e \sqrt{2 g}} \left( \sqrt{H} - \sqrt{H - (h_{l\text{öpp ii}} - z_1)} \right),$$

milles  $h_{l\text{öpp ii}}$  on mahutisisese vabapinna kõrgus, mis on määratud üle vertikaalseintega mahuti sisepõhja horisontaalse osa, ning vastab vabapinna kõrgusele, mis on suurem kui mahuti sissevoolutoru telg, st  $h_{l\text{öpp ii}} > z_1$ .

*Ideaalvedeliku voolamine muutuva rõhu all. Mahuti osalise täitumise ajavahemik*

#### ARVUTUS

$$H = 10 \text{ m} - 3 \text{ m} = 7 \text{ m}$$

$$h_{l\text{öpp ii}} = \frac{10 \text{ m}}{2} = 5 \text{ m}$$

$$A_e = \pi \cdot \left( \frac{0,05 \text{ m}}{2} \right)^2 = 0,002 \text{ m}^2$$

$$\Pi_{ii} = 0$$

Osaliselt eeltäidetud mahuti osalise täitumise ajavahemik, muutuva rõhu all ideaalvedeliku voolamisele läbi täieliku täitumusega horisontaalse ümartoru on

$$\begin{aligned} \Delta t_{\text{ideaal ii}} &= \frac{2 \cdot 5 \text{ m}^2}{0,002 \text{ m}^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} \cdot \left( \sqrt{7 \text{ m}} - \sqrt{7 \text{ m} - (5 \text{ m} - 3 \text{ m})} \right) = \\ &= 471,0521 \text{ s} = 0,1308 \text{ tundi.} \end{aligned}$$

Runge-Kutta 4-tõusuga valemit võib kasutada numbrilise arvutusskeemi koostamisel, et määrata veemahuti ja survetoru voolusüsteemi vabapinna kõrguse ajaline muutus. Ideaalvedeliku voolamise matemaatiliselt lihtsustatud eeldusel ei arvestada hüdraulilise voolusüsteemi takistust, st  $\Pi_i = 0$ .

Numbriline arvutusskeem. Mahuti veepinna kõrgus ülevalpool torutelge (ideaalvool)

Numbriline arvutusmeetod. Runge-Kutta arvutusmeetod

### VALEMID

Mahutisise vabapinna kõrguse ajaline muutus üle mahuti aluspõhja, voolamisele muutuva rõhu all, on määratud hariliku diferentsiaalvõrrandiga

$$\frac{dh}{dt} = \frac{A_e \sqrt{2 g (H - (h - z_1))}}{S},$$

milles  $H = z_0 - z_1 = \text{konstant}$ ,  $A_e = \text{konstant}$  on täistäitumusega ümartoru elavlõige ja  $S = \text{konstant}$  on mahuti aluspõhja pindala.

### ARVUTUSSKEEM

Runge-Kutta 4-tõusuga valemi numbriline arvutusskeem:

$$ARV_1 = h_i, \quad k_1 = \frac{A_e \sqrt{2 g (H - (ARV_1 - z_1))}}{S},$$

$$ARV_2 = h_i + k_1 \frac{\Delta t}{2}, \quad k_2 = \frac{A_e \sqrt{2 g (H - (ARV_2 - z_1))}}{S},$$

$$ARV_3 = h_i + k_2 \frac{\Delta t}{2}, \quad k_3 = \frac{A_e \sqrt{2 g (H - (ARV_3 - z_1))}}{S},$$

$$ARV_4 = h_i + k_3, \quad k_4 = \frac{A_e \sqrt{2 g (H - (ARV_4 - z_1))}}{S},$$

$$h_{i+1} = h_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4) \Delta t.$$

ARVUTUS. Mahuti veepinna kõrgus ülevalpool torutelge (ideaalvool) ( $\Pi_{ii} = 0$ )

Algtingimus ja ajasamm

$$t = 0$$

$$h = 3 \text{ m}$$

$$\Delta t = 60 \text{ s} \cdot 0,1 = 6 \text{ s}$$

	Algt.	10 samm	20 samm	30 samm	40 samm	50 samm
$h$ (m)	0	3,2192	3,4882	3,7518	4,0100	4,2627
$t$ (s)	0	54	114	174	234	294

	60 samm	70 samm	80 samm	81 samm
$h$ (m)	4,5099	4,7518	4,9881	5,0115
$t$ (s)	354	414	474	480

## VASTUSED

$$\Delta t_{\text{ideaal ii}} = 480 \text{ s} = 0,1333 \text{ tundi}$$

$$h(t = 480 \text{ s}) = 5,0115 \text{ m}$$

*Metoodiline viga. Mahutisese vabapinna kõrgus üle aluspõhja*

Numbrilise arvutusskeemiga määratud ja mahuti täitumise ajavahemiku valemis lõpptingimusena kasutatud mahuti vabapinna kõrguse erinevus ideaalvedeliku voolamisele:

$$|h_{RK} - h_V| = |5,0115 \text{ m} - 5,0 \text{ m}| = 0,0115 \text{ m}.$$

*Reaalvedeliku voolamine muutuva rõhu all. Mahuti osalise täitumise ajavahemik*

## ARVUTUS

$$H = 10 \text{ m} - 3 \text{ m} = 7 \text{ m}$$

$$h_{\text{lõpp ii}} = \frac{10 \text{ m}}{2} = 5 \text{ m}$$

$$A_e = \pi \cdot \left(\frac{0,05 \text{ m}}{2}\right)^2 = 0,002 \text{ m}^2$$

$$\Pi_{ii} = 2 + 0,03 \cdot \frac{5 \text{ m}}{0,05 \text{ m}} + 1 = 6$$

Osaliselt eeltäidetud mahuti osalise täitumise ajavahemik, muutuva rõhu all reaalvedeliku voolamisele läbi täieliku täitumusega horisontaalse ümartoru on

$$\begin{aligned} \Delta t_{\text{reaal ii}} &= \frac{2 \cdot 5 \text{ m}^2 \cdot \sqrt{1+6}}{0,002 \text{ m}^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} \cdot \left(\sqrt{7 \text{ m}} - \sqrt{7 \text{ m} - (5 \text{ m} - 3 \text{ m})}\right) = \\ &= 1246,3 \text{ s} = 0,3462 \text{ tundi.} \end{aligned}$$

Numbriline arvutusskeem. Mahuti veepinna kõrgus ülevalpool torutelge (reaalvool)

Numbriline arvutusmeetod. Runge-Kutta arvutusmeetod

#### VALEMID

Runge-Kutta 4-tõusuga valemit võib kasutada numbrilise arvutusskeemi koostamisel, et määrata veemahuti ja survetoru voolusüsteemi vabapinna kõrguse ajaline muutus. Reaalvedeliku voolamise eeldusel arvestame hüdraulilise voolusüsteemi takistust, st  $\Pi_i > 0$ .

Mahutisisesse vabapinna kõrguse ajaline muutus üle mahuti aluspõhja, voolamisele muutuva rõhu all, on määratud hariliku diferentsiaalvõrrandiga

$$\frac{dh}{dt} = \frac{A_e \sqrt{2g(H - (h - z_1))}}{S \sqrt{1 + \Pi_{ii}}},$$

milles  $H = z_0 - z_1 = \textit{konstant}$ ,  $A_e = \textit{konstant}$  on täistäitumusega ümartoru elavlöige ja  $S = \textit{konstant}$  on mahuti aluspõhja pindala ja  $\Pi_{ii} = \textit{konstant}$  on hüdraulilise voolusüsteemi takistus.

#### ARVUTUSSKEEM

Runge-Kutta 4-tõusuga valemi numbriline arvutusskeem:

$$\begin{aligned} \text{ARV}_1 &= h_i, & k_1 &= \frac{A_e \sqrt{2g(H - (\text{ARV}_1 - z_1))}}{S \sqrt{1 + \Pi_{ii}}}, \\ \text{ARV}_2 &= h_i + k_1 \frac{\Delta t}{2}, & k_2 &= \frac{A_e \sqrt{2g(H - (\text{ARV}_2 - z_1))}}{S \sqrt{1 + \Pi_{ii}}}, \\ \text{ARV}_3 &= h_i + k_2 \frac{\Delta t}{2}, & k_3 &= \frac{A_e \sqrt{2g(H - (\text{ARV}_3 - z_1))}}{S \sqrt{1 + \Pi_{ii}}}, \\ \text{ARV}_4 &= h_i + k_3, & k_4 &= \frac{A_e \sqrt{2g(H - (\text{ARV}_4 - z_1))}}{S \sqrt{1 + \Pi_{ii}}}, \\ h_{+1} &= h_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \Delta t. \end{aligned}$$

ARVUTUS. Mahuti veepinna kõrgus ülevalpool torutelge (reaalvool) ( $\Pi_{ii} = 6$ )

Algtingimus ja ajasamm

$$t = 0$$

$$h_{ii=0} = 3 \text{ m}$$

$$\Delta t = 60 \text{ s} \cdot 0,1 = 6 \text{ s}$$



	Algt.	20 samm	40 samm	60 samm	80 samm	100 samm
$h$ (m)	0	3,1866	3,3910	3,5922	3,7904	3,9854
$t$ (s)	0	114	234	354	474	594

	120 samm	140 samm	160 samm	180 samm	200 samm	210 samm
$h$ (m)	4,1774	4,3662	4,5519	4,7345	4,9139	5,0025
$t$ (s)	714	834	954	1074	1194	1254

#### VASTUSED

$$\Delta t_{\text{reaal ii}} = 1254 \text{ s} = 0,3483 \text{ tundi}$$

$$h(t = 1254 \text{ s}) = 5,0025 \text{ m}$$

*Metoodiline viga. Mahutisese vabapinna kõrgus üle aluspõhja*

Numbrilise arvutusskeemiga määratud ja mahuti täitumise ajavahemiku valemis lõpp-tingimusena kasutatud mahuti vabapinna kõrguse erinevus reaalvedeliku voolamisele:

$$|h_{RK} - h_V| = |5,0025 \text{ m} - 5,0 \text{ m}| = 0,0025 \text{ m}.$$

Ajavahemike erinevus reaal- ja ideaalvedeliku voolamisele

Ajavahemike erinevus reaal- ja ideaalvedeliku voolamisele muutuva rõhu all mahuti pooltäitumisele üle sissevoolutoru telje on

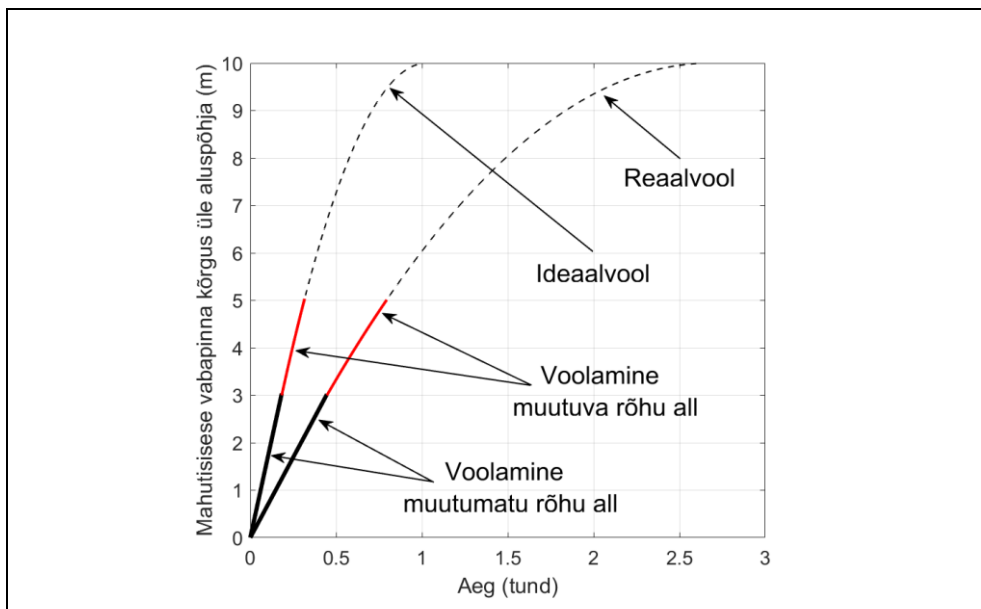
$$|\Delta t_{\text{reaal}} - \Delta t_{\text{ideaal}}| = |1254 \text{ s} - 480 \text{ s}| = 774 \text{ s} = 0,2150 \text{ tundi}$$

*Arvutusviga: Põhivõrrandite integraalse valemiga ja numbrilise arvutusskeemiga arvatud summa*

Põhivõrrandite integraalse valemiga ja numbrilise arvutusskeemiga määratud ajavahemike erinevuste summa ideaal- ja reaalvedeliku voolamisele muutuva rõhu all mahuti pooltäitumisele üle sissevoolutoru telje on

$$|8,95 \text{ s} + 7,7 \text{ s}| = 16,45 \text{ s}.$$

**JÄRELDUS.** Ideaalvedeliku voolamisele mahuti täitumisele muutub (tõuseb) mahutisese vabapinna kõrgus kiiremini võrreldes seda reaalvedeliku voolamisega.



JOONIS 13-6 Mahuti vabapinna kõrguse muutused pool-täitumise ideaal- ja reaalvoolule (pidevad jooned). Eraldi on näidatud voolamine muutumatu rõhu all, st mahutisese vabapinna liikumine mahuti aluspõhjast kuni horisontaalse ümartoru teljeni, ning voolamine muutuva rõhu all, st mahutisese vabapinna liikumine mahuti sissevoolutoru teljest kuni mahuti pooltäte kõrguseni. Ideaalvedeliku voolamise hüdrauilise voolusüsteemi takistustegur  $\Pi = 0$ , ning hüdrauilisele voolusüsteemile reaalvedeliku voolamisele muutumatu rõhu all on takistustegur  $\Pi_{ii} = 5$  ja muutuva rõhu all on takistustegur  $\Pi_{ii} = 6$ . Punktirjoontega on näidatud vastavalt ideaal- ja reaalvoolu puhul mahuti täitumisaeg mahutivälise vabapinnani.

**MÄRKUS.** Mahuti veega täitmise lisaülesandes on mahutisese vabapinna liikumine pidevalt määratud põhjusel, et horisontaalse ümartoru telje kõrgusel on voolukiirused ümartorus samade väärtustega nii voolamisele muutumatu rõhu all kui ka voolamisele muutuva rõhu all. Lisaülesandes on mahuti täitumise aja-vahemikud muutumatu ja muutuva rõhu all määratud erinevate põhivõrranditega. Mahuti veega täitumise lisaülesande saab lahendada ka ühe põhivõrrandiga, mis vastab voolamisele muutuva rõhu all, ning milles rõhuvahekõrgus ja hüdrauilise voolusüsteemi takistus on vastavalt mahuti täitumisele muutumatu rõhu all faasis:

$$h_{rvk} = 0 \quad (0 > h > z_1),$$

$$\Pi = \Pi_i = k_{L1} + \lambda \frac{l}{d_s},$$

ning on vastavalt mahuti täitumisele muutuva rõhu all faasis:

$$h_{rvk} < 0 \quad (z_1 > h > h_{lõpp}),$$

$$\Pi = \Pi_{ii} = k_{L1} + \lambda \frac{l}{d_s} + k_{L2}.$$

## 13.5 VIITED

13.1 Laanearu, J. (2019). *Rakenduslik hüdromehaanika*. Tallinna Tehnikaülikooli kirjastus.

13.2 Tepaks, L. (1967). *Hüdraulika*. Valgus.

13.3 Maastik, A., Haldre, H., Koppel, T. & Paal, L. *Hüdraulika ja pumbad*. OÜ Greif.

# 14 KAHEFAASILINE TORUSTIK

## 14.1 PRAKTILINE OSA. KANALISATSIOONIVÕRK

### 14.1.1 EHITIS. TORUSTIK JA KAEVUD

Kanalisatsioonivõrk on rajatiste ja seadmete süsteem reo-, sademe- ja dreanaaživee vastuvõtmiseks, ärajuhtimiseks ning puhastamiseks ja/või suublasse suunamiseks. Kanalisatsioonivõrk koosneb peamiselt torustikest ja kaevudest ning vajadusel ka pumplatest. Kanalisatsiooni toimimise kontrollimiseks ja hooldustööde teostamiseks rajatakse torustikele hooldus- ja kontrollkaevud. Kanalisatsioonikaevud rajatakse torustike ühinemiskohtadesse, kohtadesse, kus muutub torustiku suund, lang või läbimõõt, ja torustike sirgetele lõikudele, üldjuhul maksimaalselt 100-meetriste vahedega (VIIDE 14.1). Kaevude vahekaugused olenevad toru läbimõõdust ja kasutatavast hooldustehnikast.

Sujuva voolamise tagamiseks varustatakse reoveekanalisatsiooni kaevupõhjad voolurenniga. Voolurenni sügavus peab arvestama kaevu läbivate torude mõõtmega. Kaevu läbimõõt sõltub kaevuga ühendatava suurima toru nimiläbimõõdust (VIIDE 14.2, „Väliskanalisatsioon. Kanalisatsioonivõrgu projekteerimine. Võrgu elemendid – kaevud: planeerimise ja valiku kriteeriumid, tähelepanekuid praktikast“).

Suuremõõtmeliste torude ühinemiskohal on vajalik kasutada erikonstruktsiooniga hoolduskaevusid, mille hüdraulilisi tingimusi tuleb kontrollida järgnevalt: voolurennid kaevupõhjades tuleb kujundada nii, et erinevatest liituvatest torustikest voolava vee tasapinnad oleksid ühinemiskohtades keskmise vooluhulga korral samal kõrgusel; kõikide liituvate torustike langud peavad olema sellised, et tulvavee äkkkoormuse ehk ülekoormuse korral, millega kaasneb liigtäide ühes liituvatest torustikest, ei ulatuks vesi liiga kaugele teistesse torustikesse; vältimaks setete kuhjumist, gaaside vabanemist veest ja asjatut survekadu, ei tohi voolukiirus olulisel määral langeda ega põhjustada turbulentset voolamist; torustike ühinemiskohtades tuleb T-ühenduste asemel kasutada Y-ühendusi, et voolusuuna muutused oleksid sellise nurga all, mis ei tekita suubivas voolurennis turbulentset voolamist (VIIDE 14.1).

### 14.1.2 VOOLUREŽIIM. VEE JA ÕHU KOOSTOIME TORUSTIKUS

Oluliselt erineva rajamissügavusega torustike ühinemiskohtades tuleb rajada astangkaev (ingl. *ramp manhole*) või kukkumiskaev (ingl. *drop shaft, backdrop manhole*).

Astangkaevud on hoolduskaevud, mille erineva rajamissügavusega sisse- ja väljavoolutorud (maksimaalne kõrguste vahe 2,5 m) on ühendatud kas kaskaadi-

kanali- või järsult kaldu toruga (VIIDE 14.3, „Väliskanalisatsioonivõrk“). Astang-kaevude projekteerimisel tuleb tähelepanu pöörata kaevu põhjalemendile või näha ette nn veepadi, ning asjakohasel juhul voolurahustusse. Kaldtoruga astang-kaevudes võib esineda turbulentsed voolamine, mis haarab õhku veevooluga kaasa, ning seetõttu haisuühendusi ei pruugi kaasuda.

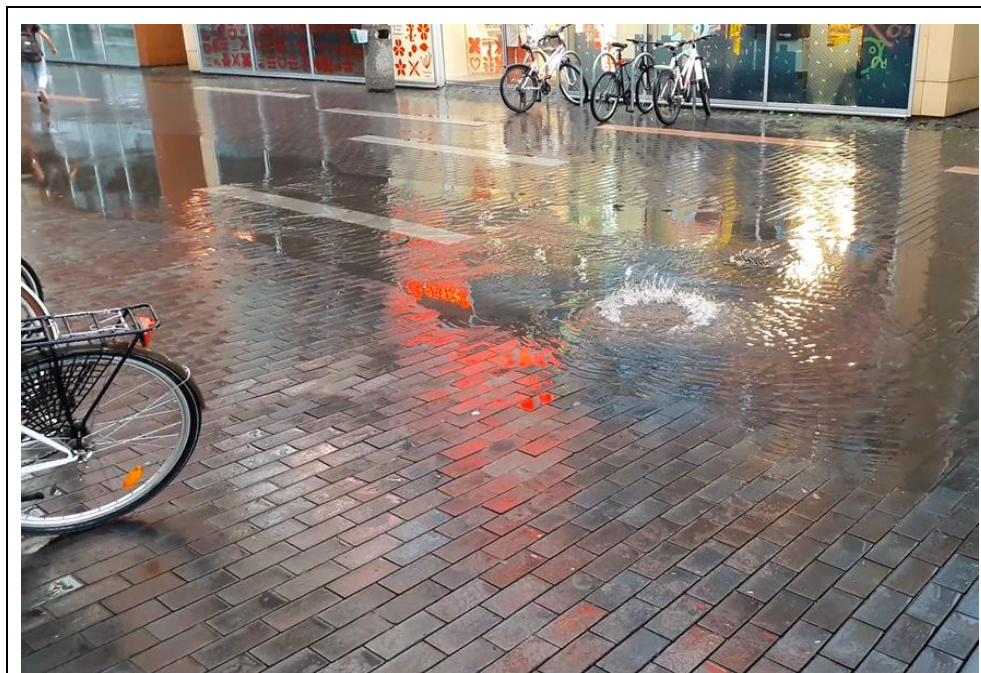
Kukkumiskaevud on kontrollkaevud, mille sisse- ja väljavoolutorud on ühendatud kaevus asuva vertikaalse püstikuga  $DN/ID \leq 200$  (VIIDE 14.3, „Väliskanalisatsioonivõrk“). Kukkumiskaevudes tavaliselt vesi ja õhk segunevad, millega võib kaasuda haisuühendus. Kanalisatsioonikaevud kaetakse kaevuluukidega. Kaevuluugid peavad vastu pidama välistele koormustele ja olema püsivad, st et luuk peab asetsema luugikorpuse kraes stabiilselt. Kanalisatsioonis kasutatakse umbluugiga varustatud kaevu. Umbluuk blokeerib õhu sisse- ja väljalikumise kanalisatsioonis. Sademevee kogumiseks kasutatakse restluugiga varustatud kaevu, mis toimivad ka ventilatsiooni avadena. Sademeveega kanalisatsiooni kaevu sattunud liiv ja muda kogutakse voolupiirist allpool asuvasse settetkotti, mida peab olema võimalik hoolduse käigus puhastada (VIIDE 14.3, „Väliskanalisatsioonivõrk“). Parklatest kogutud sademevee puhastamiseks kasutatakse õlipüüduid.

### 14.1.3 SISSEJUHATUS ÜLESANDESSE. PÕHIVALEMID

Voolamise aeglustumine, kus voolukiirus torustikus väheneb dünaamilisest olukorrast paigalseisuni, vastab kvaasistatsionaarsele voolamisele (ingl. *quasi-stationary flow*). Bernoulli võrrandiga ei ole võimalik täpselt määrata voolamise algtingimusi, mille puhul voolamine torustikus kiireneb paigalseisust mitetasakaalulise olukorrani. Voolamise kiirenemine paigalseisult ja voolamise aeglustumine paigalseisuni, millega kaasneb lukustunud õhuosa, on mittestatsionaarse voolamise erijuhud ehk ebahetlane voolamine (ingl. *unsteady flow*). Mittestatsionaarse voolamise ülesande lahendamiseks kasutatakse voolamise liikumishulga vektorvõrrandit.

Hüdraulilise voolusüsteemi takistus on kvaasistatsionaarsel voolamisel ajaliselt muutuv suurus. Torustiku täitumisel veega võib esineda stratifitseeritud voolamine, milles õhukavern liigub veeõhufrondi liikumisele vastassuunas. Täieliku torutäitega voolamise (mittestratifitseeritud voolamine) üleminekuid osalise torutäitega voolamisele (stratifitseeritud voolamine) parameteriseeritakse torustikule Zhukoski arvuga, mis on määratud suhtelise voolukiiruse ja toru sisediaameteriga määratud nõrka madalveelaine liikumiskiiruse suhtega (VIIDE 14.4, „Rakenduslik hüdromehaanika“).

Suletud kaevuga toru kiirel täitumisel veega võivad esineda õhuosa elastsusega seotud rõhulised võnkumised, mille amplituudiga määratud rõhukõrgus võib olla suurem vee rõhuga määratud rõhukõrgusest torustikus (VIITED 14.5 ja 14.6).

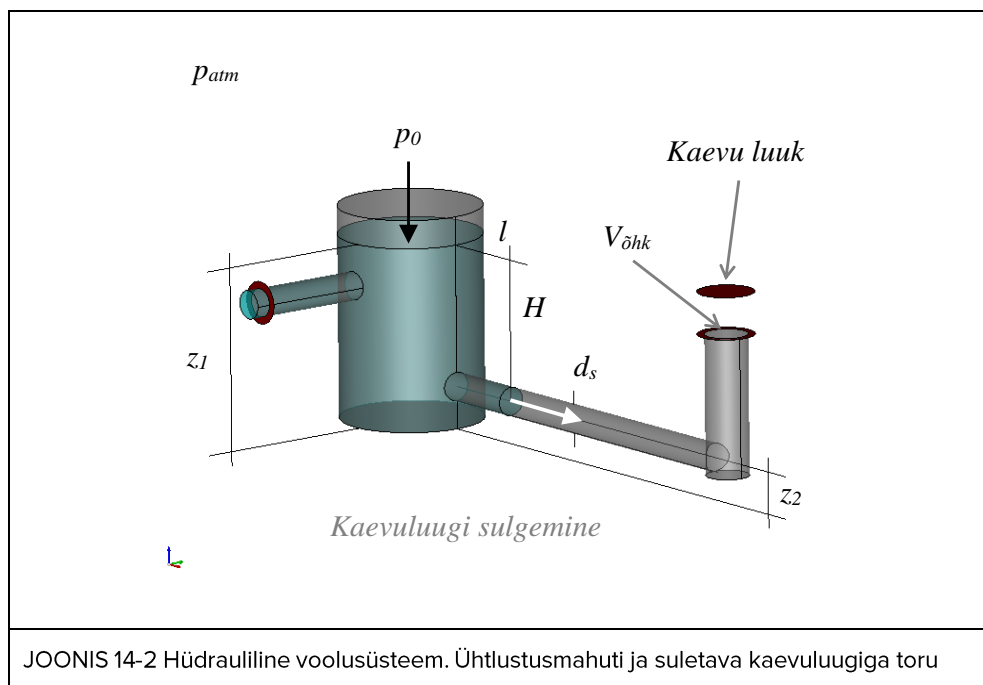


JOONIS 14-1 Tänava kaevuluuk, Pärnu. (Foto: Janek Laanearu, 2018)

## 14.2 PÕHIÜLESANNE. KAEVUGA TORUSTIKU TÄITUMINE

ANTUD. Hüdraulilise voolusüsteemi ühtlustusmahutit täidetakse veega torustiku ülevoolu kõrguseni  $z_1 = 3$  m, mahuti aluspõhjast (sisepõhja horisontaalne osa). Mahutist on võimalik täita kanalisatsiooniharu tühja osa läbi horisontaalse ümartoru, mille sisediameeter  $d_s = 100$  mm ja telje kõrgus  $z_2 = 1$  m, mahuti aluspõhjast. Torustiku veega täitumuse osa pikkus  $L = 100$  m. Õhuosa ruumala avatud kaevuluugiga kanalisatsiooniharu torus  $V_{\text{õhk}}' = 5$  m<sup>3</sup>. Vee temperatuur mahutis on 10 °C, tihedus  $\rho \approx 1000$  kg·m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg·m<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu / \rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>. Mahutisisesel vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{\text{atm}}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{\text{atm}} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Määrata valemiga maksimaalne õhuosa rõhk suletud kaevuluugiga torustikus, ning numbrilise arvutusskeemiga õhuosa rõhk kaevuluugi sulgemisele, reaalvedeliku voolamisele torus. Kui palju erinevad suletud kaevuluugiga toru täitumise ajavahemikud turbulentse ja laminaarse voolamise puhul? Arvutada kinnitusjõud kaevuluugile.



JOONIS 14-2 Hüdrauliline voolusüsteem. Ühtlustusmahuti ja suletava kaevuluugiga toru

EELDUSED. Fikseeritud vabapinnaga mahutist on vee väljavool torustikku hästi määratud kvaasistatsionaarse voolamisega, st igal ajahetkel on voolamine mittestatsionaarne ja igas ajavahemikus statsionaarne. Kasutada Runge-Kutta iteratsioonmeetodit, et koostada numbriline arvutuskeemi torustiku veega täitmisel õhuosa rõhu määramisele. Mahuti ja toru ühendusava kohtkistustegur  $k_{L1} = 0,45$  ja täistäitumusega toru hõõrdetakistustegur  $\lambda$  määrata turbulentssele voolamisele, kasutades Blasiuse hõõrdetakistuse valemit, ning laminaarsele voolamisele, kasutades Poiseuille'i hõõrdetakistuse valemit. Horisontaalorule valida stratifitseeritud voolamise „vesiõhkfrondiga“ määratud algtäide vastavalt  $l(t = 0) = L > 0$ . Torustiku veega täitumisel eeldada, et kaevuluugi (umbluugi) sulgemine isoleerib torustiku õhuosa atmosfäärist. Torustikus lukustunud õhuosa termodünaamiline rõhk on määratud ideaalse gaasi polütroopse protsessiga.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Reaalvoolu Bernoulli võrrand, Blasiuse hõõrdetakistuse valem, Darcy-Weisbachi survekao valem, ümartoru Reynoldsi arvu valem, Poiseuille'i hõõrdetakistuse valem, kvaasistatsionaarse voolamise pidevuse võrrand, ideaalse gaasi polütroopse protsessi valem, Runge-Kutta 4-tõusuga numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem**

## VALEMID

Mahutisese vabapinnaga ja kaevuga toru täieliku torutäitega osa „vesi-õhkfrondiga“ määratud voolutorule võib koostada reaalvoolu Bernoulli võrrandi (VALEM (2-10)):

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_t,$$

milles mahutisese vee vabapinnaga (veepinnaga) määratud kõrgus, rõhk ja voolukiirus voolutoru sissevoolus on vastavalt  $z_1$ ,  $p_1$  ja  $u_1$ . Torustiku teljega määratud kõrgus, rõhk ja voolukiirus voolutoru stratifitseeritud osa „vesiõhkfrondile“ on vastavalt  $z_2$ ,  $p_2$  ja  $u_2$ . Survekadu on  $h_t$ , mis jagatakse hõõrdesurvekaoks  $h_l$  ja kohtsurvekaoks  $h_k$ .

Eeldusel, et hüdraulilise voolusüsteemi ühtlustusmahuti vabapinna asend on fikseeritud, st  $u_1 = 0$ , võib reaalvoolu Bernoulli võrrandi (VALEM (2-10)) lihtsustada vastavalt:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_t.$$



Survekadu on määratud hüdraulilise voolusüsteemi survekao valemiga

$$h_t = \Pi \frac{u_2^2}{2g},$$

milles hüdraulilise voolusüsteemi takistustegur on

$$\Pi = k_{L1} + \lambda \frac{l}{d_s}.$$

Fikseeritud vabapinnaga mahutist, torustiku veega täitmisele muutub voolutoru stratifitseeritud osa „vesiõhkfrondiga“ määratud täieliku torutäitega osa pikkus:

$$l = L + \int_{t=0}^{t=\Delta t} u_2 dt.$$

Turbulentse voolamise hõõrdetakistusteguri võib määrata Blasiuse hõõrdetakistuse valemiga:

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}},$$

mis kehtib hästi Reynoldsi arvu vahemikus  $2 \cdot 10^3 < Re < 1 \cdot 10^5$ .

Hõõrdetakistusteguri laminaarsele voolamisele võib määrata Poiseuille'i hõõrdetakistuse valemiga:

$$\lambda = \frac{64}{Re},$$

mis kehtib hästi Reynoldsi arvule  $Re < 2 \cdot 10^3$ .

Reynoldsi arv täistäitumusega ümartorus vee voolamisele on määratud valemiga

$$Re = \frac{u d_s}{\nu},$$

milles vee voolukiirus  $u = u_2$  ja kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \nu_{vesi}$ .

Ühtlustusmahuti ja horisontaaltoru voolusüsteemile saab koostada võrrandi:

$$\frac{u_2^2}{2g} + \Pi \frac{u_2^2}{2g} = H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g},$$

milles

$$H = z_1 - z_2 = \textit{konstant}.$$

Rõhuvahekõrgus on määratud valemiga:

$$h_{rvk} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g},$$

milles rõhk  $p_1 = p_0$  on määratud atmosfääri rõhuga mahutisisesele vabapinnale ja rõhk  $p_2 = p_{\delta hk}$  sõltub suletud kaevuluugiga torustikus „lukustunud“ õhuosa termodünaamilisest rõhust, mis määrab hästi mehaanilise rõhu täistäitumusega horisontaaltoru „vesiõhkfrondi vertikaalpinnale“ ja samuti mehaanilise rõhu torustikusesele kaevuluugi pinnale, millega määratakse nõ üleslükkejõud.

Voolukiirus torustikus ( $u_2 = u_{vesi}$ ) on määratud valemiga:

$$u_{vesi}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \Pi(t)}} \sqrt{2 g (H + h_{rvk}(t))}.$$

Avatud ja suletud kaevuluugiga, muutuva veetäitumusega torus võib selle õhuosa ruumala määrata kvaasistatsionaarse voolamise pidevuse võrrandiga, mis on harilik diferentsiaalvõrrand, vastavalt:

$$\frac{dV_{\delta hk}}{dt} = -Q_{vesi},$$

milles vee vooluhulk on määratud valemiga

$$Q_{vesi} = A_e u_{vesi}.$$

Täistäitumusega ümartoru sisepindala määrab voolamise elavlõike:

$$A_e = \pi \left( \frac{d_s}{2} \right)^2.$$

Polütroopses protsessis on ideaalse gaasi rõhu ja ruumala seos määratud valemiga:

$$p_{\delta hk} V_{\delta hk}^{k_{es}} = \text{konstant},$$

milles õhule erisoojuste suhtetegur  $k_{es} = 1,401$ .

**MÄRKUS.** *Ideaalse gaasi polütroopse protsessi rõhu ja ruumala seos vastab hästi suletud kaevuluugiga torustiku voolamise olukorrale.*

Suletud kaevuluugiga torustikus on õhuosa ruumala ajaline muutus määratud ideaalse gaasi polütroopsele protsessile koostatud hariliku diferentsiaalvõrrandiga:

$$V_{\delta hk}^{k_{es}} \frac{d p_{\delta hk}}{dt} + p_{\delta hk} V_{\delta hk}^{(k_{es}-1)} \frac{d V_{\delta hk}}{dt} = 0,$$

$$V_{\delta hk}^{k_{es}} \frac{d p_{\delta hk}}{dt} + p_{\delta hk} \frac{V_{\delta hk}^{k_{es}}}{V_{\delta hk}} \frac{d V_{\delta hk}}{dt} = 0,$$

$$\frac{d p_{\delta hk}}{dt} + p_{\delta hk} \frac{1}{V_{\delta hk}} \frac{d V_{\delta hk}}{dt} = 0,$$

$$V_{\delta hk} \frac{d p_{\delta hk}}{dt} + p_{\delta hk} \frac{d V_{\delta hk}}{dt} = 0.$$

→

$$\frac{dV_{\bar{o}hk}}{dt} = -\frac{V_{\bar{o}hk}}{p_{\bar{o}hk}} \frac{dp_{\bar{o}hk}}{dt}$$

Suletud kaevuluugiga torustikus võib muutuva veetäitumusega torus, õhuosa rõhu määrata kvaasistatsionaarse voolamise pidevuse võrrandiga:

$$\frac{dp_{\bar{o}hk}}{dt} = \frac{p_{\bar{o}hk}}{V_{\bar{o}hk}} Q_{vesi} = \frac{p_{\bar{o}hk}}{V_{\bar{o}hk}} u_{vesi} A_e .$$

Avatud kaevuluugiga torustikule  $V_{\bar{o}hk} = V_{\bar{o}hk}'$  ja  $p_{\bar{o}hk} = p_{atm}$ , milles  $V_{\bar{o}hk}'$  on nõ algruumala ja  $p_{atm}$  on nõ algrõhk, vastavalt. Suletud kaevuluugiga torustiku täitmisele veega muutub hüdraulilises voolusüsteemis nii torus „lukustunud“ õhuosa ruumala kui ka termodünaamiline rõhk vastavalt ideaalse gaasi polütroopse protsessi võrrandile.

*Numbriline arvutusskeem. Torustiku õhuosa rõhk*

*Numbriline arvutusmeetod. Runge-Kutta iteratsioonmeetod*

#### VALEMID

Suletud kaevuluugiga torustiku „aeglasel“ täitumisele, mis vastab kvaasistatsionaarsele voolamisele võib maksimaalse õhuosa rõhu määrata valemiga:

$$p_{\bar{o}hk} = p_0 + \rho_{vesi} g (z_1 - z_2) ,$$

milles  $\rho_{vesi} (= \rho)$  on vee tihedus,  $g$  on raskuskiirendus ja hüdraulilise voolusüsteemi ühtlustusmahuti ülevooluga määratud veepinna kõrgus üle toru telje on  $z_1 - z_2$ .

Kasutame Runge-Kutta 4-tõusuga valemit numbrilises arvutusskeemis ühtlustusmahuti ja suletud kaevuluugiga torustiku voolusüsteemi õhuosa termodünaamilise rõhu määramisele. Suletud kaevuluugiga torustiku õhuosa rõhu ajaline muutus on määratud hariliku diferentsiaalvõrrandiga:

$$\frac{dp_{\bar{o}hk}}{dt} = \frac{p_{\bar{o}hk}}{V_{\bar{o}hk}} \frac{A_e}{\sqrt{1+\Pi}} \sqrt{2g \left( H + \frac{(p_0 - p_{\bar{o}hk})}{\rho_{vesi} g} \right)} ,$$

milles

$$\rho_{vesi} = \rho ,$$

$$\Pi = k_{L1} + \lambda \frac{l}{d_s} ,$$

$$l = L + \int_{t=0}^{t=\Delta t} u_{vesi} dt ,$$

$$V_{\bar{o}hk} = V_{\bar{o}hk}' - A_e \int_{t=0}^{t=\Delta t} u_{vesi} dt .$$

## ARVUTUSSKEEM

Runge-Kutta 4-tõusu valemiga numbriline arvutusskeem:

$$\begin{aligned}ARV_1 &= p_{\text{õhk}_i}, & k_1 &= \frac{ARV_1}{V_{\text{õhk}}} \frac{A_e}{\sqrt{1+\Pi}} \sqrt{2g \left( H + \frac{(p_0 - ARV_1)}{\rho_{\text{vesi}} g} \right)}, \\ARV_2 &= p_{\text{õhk}_i} + k_1 \frac{\Delta t}, & k_2 &= \frac{ARV_2}{V_{\text{õhk}}} \frac{A_e}{\sqrt{1+\Pi}} \sqrt{2g \left( H + \frac{(p_0 - ARV_2)}{\rho_{\text{vesi}} g} \right)}, \\ARV_3 &= p_{\text{õhk}_i} + k_2 \frac{\Delta t}, & k_3 &= \frac{ARV_3}{V_{\text{õhk}}} \frac{A_e}{\sqrt{1+\Pi}} \sqrt{2g \left( H + \frac{(p_0 - ARV_3)}{\rho_{\text{vesi}} g} \right)}, \\ARV_4 &= p_{\text{õhk}_i} + k_3 \Delta t, & k_4 &= \frac{ARV_4}{V_{\text{õhk}}} \frac{A_e}{\sqrt{1+\Pi}} \sqrt{2g \left( H + \frac{(p_0 - ARV_4)}{\rho_{\text{vesi}} g} \right)}, \\p_{\text{õhk}_{i+1}} &= p_{\text{õhk}_i} + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \Delta t.\end{aligned}$$

Numbrilises arvutusskeemis on kasutatud turbulentsele voolamisele vastavaid Reynoldsi arve  $Re > 2 \cdot 10^3$ , mille korral hüdraulilise voolusüsteemi takistustegur on määratud valemiga:

$$\Pi = \frac{0,3164 l}{\sqrt[4]{Re} d_s} + k_{L1},$$

ning laminaarsele voolamisele vastavad Reynoldsi arvud  $Re < 2 \cdot 10^3$ , mis määravad hüdraulilise voolusüsteemi takistusteguri valemiga:

$$\Pi = \frac{64 l}{Re d_s} + k_{L1}.$$

ARVUTUS. Torustiku õhuosa rõhk

Maksimaalne õhuosa rõhk suletud kaevuluugiga torustikus on

$$p_{\text{õhk}} = 101\,325 \text{ Pa} + 1000 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (3 \text{ m} - 1 \text{ m}) = 120\,945 \text{ Pa} = 120,945 \text{ kPa}.$$

ARVUTUS. Torustiku õhuosa rõhk ja aeg (turbulentne voolamine)

Algtingimus ja ajasamm

$$t = 0$$

$$p_{\text{õhk}} = 101\,325 \text{ Pa}$$

$$\Delta t = 60 \text{ s} \cdot 0,01 = 0,6 \text{ s}$$

	Algt.	30 samm	60 samm	90 samm	120 samm	150 samm
$p_{\text{öhk}}$ (kPa)	101,325	105,0063	108,3193	111,1789	113,6277	115,6894
$t$ (s)	0	17,4	35,4	53,4	71,4	89,4

	180 samm	210 samm	240 samm	270 samm	300 samm	360 samm
$p_{\text{öhk}}$ (kPa)	117,3801	118,7148	119,7107	120,3901	120,7835	120,9450
$t$ (s)	107,4	125,4	143,4	161,4	179,4	215,4

#### VASTUSED

$$\Delta t_{\text{turbulentne}} = 215,4 \text{ s} = 3,59 \text{ minutit}$$

$$p_{\text{öhk}} (t = 215,4 \text{ s}) = 120,945 \text{ kPa} = 120\,945 \text{ Pa}$$

ARVUTUS. Torustiku õhuosa rõhk ja aeg (laminaarne voolamine)

$$\lambda = \frac{64}{\mathbf{Re}}$$

Algtingimus ja ajasamm

$$t = 0$$

$$p_{\text{öhk}} = 101\,325 \text{ Pa}$$

$$\Delta t = 60 \text{ s} \cdot 0,01 = 0,6 \text{ s}$$

	Algt.	10 samm	20 samm	30 samm	40 samm	50 samm
$p_{\text{öhk}}$ (kPa)	101,325	105,0306	109,2835	113,0116	116,0665	118,3442
$t$ (s)	0	5,4	11,4	17,4	23,4	29,4

	60 samm	70 samm	80 samm	90 samm	100 samm	110 samm
$p_{\text{öhk}}$ (kPa)	119,8195	120,5840	120,8640	120,9310	120,9428	120,9447
$t$ (s)	35,4	41,4	47,4	53,4	59,4	65,4

	120 samm	130 samm	140 samm
$p_{\delta hk}$ (kPa)	120,9449	120,9450	120,9450
$t$ (s)	71,4	77,4	83,4

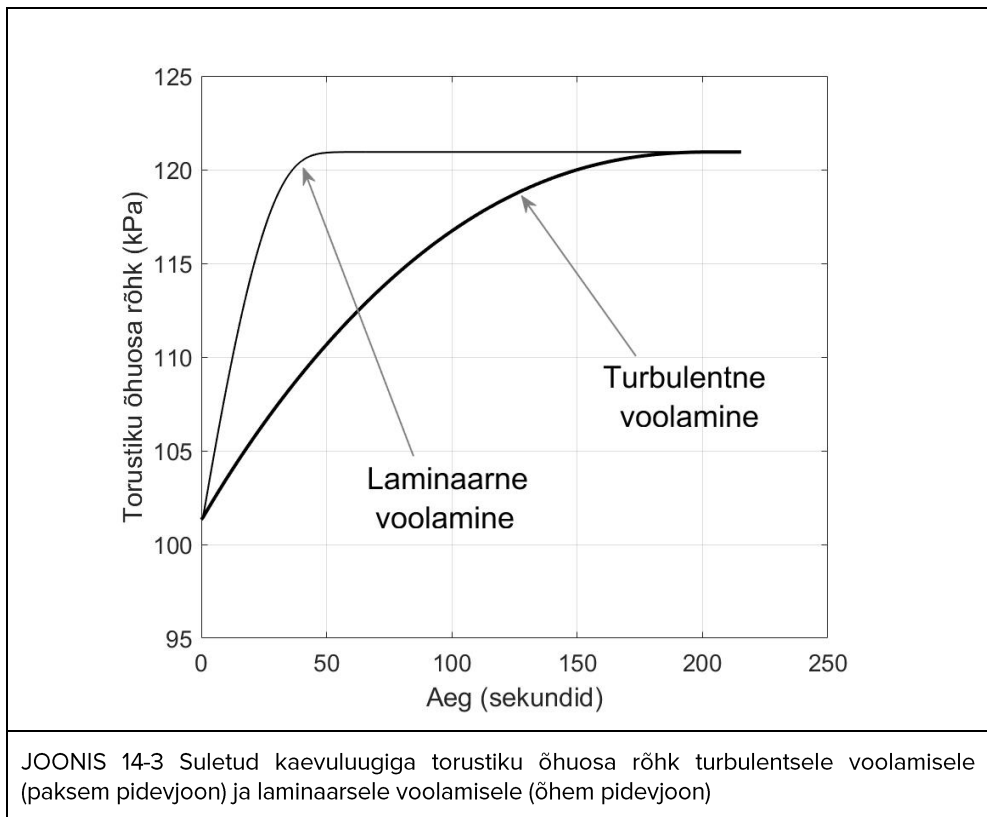
#### VASTUSED

$$\Delta t_{\text{laminaarne}} = 83,4 \text{ s} = 1,39 \text{ minutit}$$

$$p_{\delta hk} (t = 83,4 \text{ s}) = 120,945 \text{ kPa} = 120\,945 \text{ Pa}$$

Turbulentsele ja laminaarsele voolamisele suletud kaevuluugiga torustiku tasakaalu olekuni täitumise ajavahemike erinevus on

$$\Delta t_{\text{turbulentne}} - \Delta t_{\text{laminaarne}} = 215,4 \text{ s} - 83,4 \text{ s} = 132 \text{ s} = 2,2 \text{ minutit.}$$



## Kanalisatsiooni kaevuluuk

### SELGITUS

Tüüpilised kaevuluugi parameetrid on

- Malm ja betoon kaevuluugid, kaaluga 40 kuni 70 kg, olemas ka 115 kg;
- Toodetakse ka plastikust ja komposiitmaterjalist kaevuluuke;
- Kanalisatsioonikaevude sisediaameetrid on vahemikus 50 kuni 100 cm;
- Tänavatel kasutatakse nii rest- kui ka umbluuke.

ARVUTUS. Kinnitusjõud kaevuluugile

$$m = 115 \text{ kg}$$

$$d_{luuk} = 75 \text{ cm}$$

Kaevuluugi pindala

$$A_{luuk} = \pi \left( \frac{d_{luuk}}{2} \right)^2$$

$$A_{luuk} = \pi \cdot \left( \frac{0,75 \text{ m}}{2} \right)^2 = 0,4418 \text{ m}^2$$

Kaevuluugi kaal

$$K_{luuk} = m g$$

$$K_{luuk} = 115 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 1128,2 \text{ N}$$

Üleslükkejõud suletud nõ õhutihedale kaevuluugile (umbluugile)

$$\vec{P}_{luuk} = (0, 0, p_{\delta hk} A_{luuk})$$

$$\vec{P}_{luuk} = (0, 0, 120\,945 \text{ Pa} \cdot 0,4418 \text{ m}^2) = (0, 0, 53\,434 \text{ N}) = (0, 0, 53,434 \text{ kN})$$

Kinnitusjõud umbluugile

$$\vec{F}_{luuk} = -(0, 0, (p_{\delta hk} - p_{atm}) A_{luuk}) = (0, 0, p_{atm} A_{luuk}) - \vec{P}_{luuk}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{luuk} &= (0, 0, 101\,325 \text{ Pa} \cdot 0,4418 \text{ m}^2) - (0, 0, 120\,945 \text{ Pa} \cdot 0,4418 \text{ m}^2) \\ &= (0, 0, 44\,765 \text{ N}) - (0, 0, 53\,434 \text{ N}) = (0, 0, -8669 \text{ N}) \\ &= (0, 0, -8,669 \text{ kN}) \end{aligned}$$

## MÄRKUSED. Torustiku täitumine

- Ühtlustusmahuti ja horisontaaloru voolusüsteemi algtingimusega määratud Reynoldsi arvu maksimum  $Re = 1,0691 \cdot 10^5$  vastab turbulentssele voolamisele torustikus enne kaevuluugi sulgemist. Ühtlustusmahuti ülevoolu vabapinna kõrgusega määratud Reynoldsi arv vastab enam-vähem turbulentssele voolamise tingimustele vastavalt Blasiuse hõõrdetakistuse valemile, millele soovitatud Reynoldsi arvu vahemik on  $0,04 \cdot 10^5 < Re < 1 \cdot 10^5$ .
- Ümartoru Reynoldsi arvu valemis veevoolule võib toru sisediaametri ( $d_s$ ) asemel kasutada ka hüdraulilist diameetrit ( $D_h$ ). Täieliku täitumusega ümartorule kehtib seos

$$D_h = 4 R_h = \frac{4 A_e}{\chi} = 4 \left( \frac{\pi d_s^2}{4} \right) \left( \frac{1}{\pi d_s} \right) = d_s,$$

milles survevoolu elavldõige on  $A_e$  ja märgpiire on  $\chi$ .

- Bernoulli võrrandiga on võimalik hästi määrata vooluprotsessi alg- ja lõpptingimusi, milles voolamine torustikus peetakse kaevuluugi sulgemisega. Voolamise aeglustumisel torustikus, milles voolukiirus väheneb dünaamiliselt olukorralt kuni paigalseisuni, st  $u_{vesi}(t) = konstant \rightarrow 0$ , vastab hästi kvaasistatsionaarsele voolamise puhul.
- Bernoulli võrrandiga ei ole võimalik hästi määrata voolamise algtingimusi, milles voolamine torustikus kiireneb paigalseisust kuni mittetasakaalulise olukorrani, st  $u_{vesi}(t) = 0 \rightarrow konstant$ . Torustiku voolamise kiirenemisel paigalseisult ja samuti voolamise aeglustamisele paigalseisuni torustikus lukustunud õhuosaga on tegemist mittestatsionaarse voolamise erijuhuga, st ebaühtlase voolamisega (ingl. *unsteady flow*). Mittestatsionaarse voolamise ülesande lahendamisele kasutatakse voolamise liikumishulga vektorvõrrandit.
- Turbulentssele ja laminaarsele voolamisele on hõõrdetakistustegur pöördvõrdeline Reynoldsi arvuga, vastavalt astmes  $1/4$  ja  $1$ . Seetõttu on hüdraulilise voolusüsteemi takistus ka kvaasistatsionaarsel voolamisel ajaliselt muutuv suurus. Numbrilise arvutusest võib järeldada, et laminaarse voolamise osa suletud kaevuluugiga torustiku veega täitumisel on tühine. Numbrilises arvutusskeemis on vajalik kasutada täiendavat tingimust, mis võimaldab ühtlustusmahutist väljavoolava vooluhulga viia vastavusse vooluhulgaga kaevuga kanalisatsiooniharu torus, mis sõltub ajaliselt hüdraulilise voolusüsteemi takistusest.
- Torustiku täitumisel veega võib esineda stratifitseeritud voolamine, milles õhukavern liigub veeõhufrondi liikumisele vastassuunas. Stratifitseeritud voolamine ei muuda torustiku õhuosa rõhu maksimaalset väärtust, aga võib muuta toru täitumise protsessi põhjusel, et lisaks nõ voolupiirde turbulentsile esineb ka nõ õhu ja vee vahepinna turbulents.

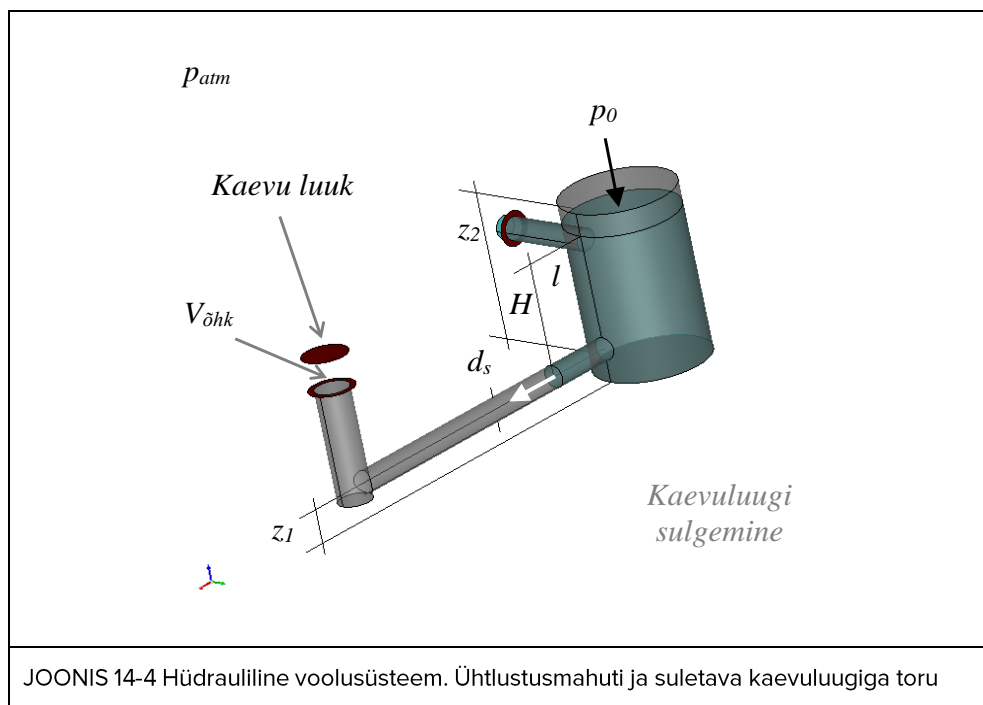


- Suletud kaevuga toru kiirel täitumisel veega võivad esineda õhuosa elastsusega seotud rõhulised võnkumised, mille amplituudiga määratud rõhukõrgus võib olla suurem ühtlustusmahuti veesamba kõrgusega määratud rõhukõrgusest. Rõhu võnkumisi hüdraulilises survesüsteemis ei ole analüüsitud põhjusel, et selle lahendamisele kasutatakse voolamise liikumishulga vektorvõrrandit (vt LISAÜLESANNE).
- PÕHIÜLESANDES ei ole kasutatud integraalse 1D voolamise liikumishulga võrrandit ka põhjusel, et see ei vasta kvaasistatsionaarse voolamise tingimustele. 1D voolamise liikumishulga võrrandiga võib määrata õhuosa elastsusega seotud rõhulisi võnkumisi ja selle lahendamisele võib samuti kasutada Runge-Kutta iteratsioonmeetodit (vt LISAÜLESANNE).
- Torustiku kaevu kinnitamata umbluugi, mille mass on 115 kg ja diameeter on 75 cm, liigutamisele piisab torustiku õhu termodünaamilisest rõhust ligikaudu 104 kPa.

## 14.3 ISESEISVA TÖÖ ÜLESANNE. KAEVUGA TORUSTIKU TÄITUMINE

ANTUD. Hüdraulilise voolusüsteemi ühtlustusmahutit täidetakse veega torustikust ülevoolu kõrguseni  $z_1 = 3$  m, mahuti aluspõhjast (sisepõhja horisontaalne osa). Mahutist on võimalik täita kanalisatsiooniharu tühja osa läbi horisontaalse ümartoru, mille sisediaameeter  $d_s = 100$  mm ja telje kõrgus  $z_2 = 1$  m, mahuti aluspõhjast. Torustiku veega täitumuse osa pikkus  $L = 100$  m. Õhuosa ruumala avatud kaevuluugiga kanalisatsiooniharu torus  $V_{\text{õhk}}' = 10$  m<sup>3</sup>. Vee temperatuur mahutis on 10 °C, tihedus  $\rho \approx 1000$  kg·m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg·m<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>. Mahutisesisel vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{\text{atm}}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{\text{atm}} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Määrata valemiga maksimaalne õhuosa rõhk suletud kaevuluugiga torustikus, ning numbrilise arvutusskeemiga õhuosa rõhk kaevuluugi sulgemisele, reaalvedeliku voolamisele torus. Kui palju erinevad suletud kaevuluugiga toru täitumise ajavahemikud turbulentsel ja laminaarsele voolamisele? Arvutada kinnitusjõud kaevuluugile.



JOONIS 14-4 Hüdrauliline voolusüsteem. Ühtlustusmahuti ja suletava kaevuluugiga toru

EELDUSED. Fikseeritud vabapinnaga mahutist on vee väljavool torustikku hästi määratud kvaasistatsionaarse voolamisega, st igal ajahetkel on voolamine mitte-statsionaarne ja igas ajavahemikus statsionaarne. Kasutada Runge-Kutta iteratsioonmeetodit, et koostada numbriline arvutuskeem torustiku veega täitmisel õhuosa rõhu määramisele. Mahuti ja toru ühendusava kohttakistustegur  $k_{L1} = 0,45$  ja täistäitumusega toru hõõrdetakistustegur  $\lambda$  määrata turbulentssele voolamisele, kasutades Blasiuse hõõrdetakistuse valemit, ning laminaarsele voolamisele, kasutades Poiseuille'i hõõrdetakistuse valemit. Horisontaalitorule valida stratifitseeritud voolamise „vesiõhkfrondiga“ määratud algtäide vastavalt  $l(t = 0) = L > 0$ . Torustiku veega täitumisel eeldada, et kaevuluugi (umbluugi) sulgemine isoleerib torustiku õhuosa atmosfäärist. Torustikus lukustunud õhuosa termodünaamiline rõhk on määratud ideaalse gaasi polütroopse protsessiga.

## VASTUSED

Maksimaalne õhuosa rõhk suletud kaevuluugiga torustikus

$$p_{\text{õhk}} = 101\,325 \text{ Pa} + 1000 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (3 \text{ m} - 1 \text{ m}) = 120\,945 \text{ Pa} = 120,945 \text{ kPa}.$$

Turbulentne voolamine: Torustiku õhuosa rõhk ja täitumise ajavahemik

$$\Delta t_{\text{turbulentne}} = 539,4 \text{ s} = 8,99 \text{ minutit}$$

$$p_{\text{õhk}}(t = 539,4 \text{ s}) = 120,945 \text{ kPa} = 120\,945 \text{ Pa}$$

Laminaarne voolamine: Torustiku õhuosa rõhk ja täitumise ajavahemik

$$\Delta t_{\text{laminaarne}} = 191,4 \text{ s} = 3,19 \text{ minutit}$$

$$p_{\text{õhk}}(t = 191,4 \text{ s}) = 120,945 \text{ kPa} = 120\,945 \text{ Pa}$$

Turbulentsel ja laminaarsel voolamisel kaevuga toru täitmise ajavahemike erinevus

$$\Delta t_{\text{turbulentne}} - \Delta t_{\text{laminaarne}} = 539,4 \text{ s} - 191,4 \text{ s} = 348 \text{ s} = 5,8 \text{ minutit}$$

**MÄRKUS.** Hüdraulilise voolusüsteemi valitud algtingimusele vastab Reynolds'i arv  $Re = 1,0726 \cdot 10^5$ , mis enam-vähem vastab turbulentssele voolamise Blasiuse hõõrdetakistusteguri valemiga soovitatud Reynolds'i arvu vahemikule  $0,04 \cdot 10^5 < Re < 1 \cdot 10^5$ .

Kinnitusjõud suletud nõ õhutihedale kaevuluugile (umbluugile)

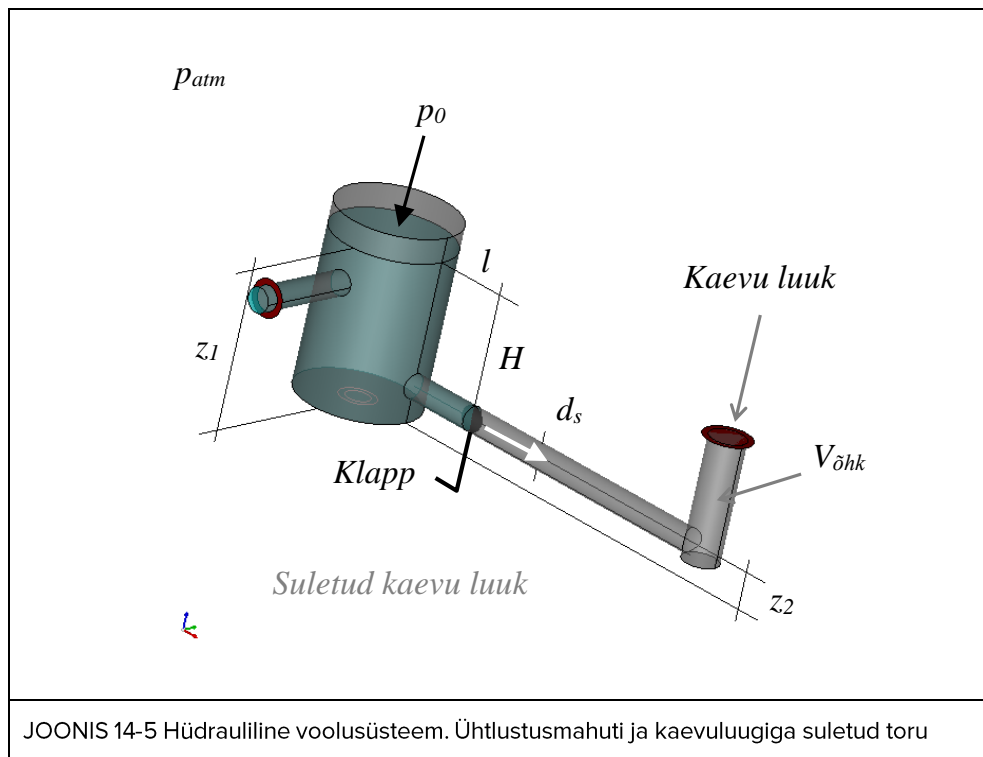
$$\vec{F}_{\text{luuk}} = -(0, 0, (p_{\text{õhk}} - p_{\text{atm}}) A_{\text{luuk}}) = (0, 0, p_{\text{atm}} A_{\text{luuk}}) - \vec{P}_{\text{luuk}}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{luuk}} &= (0, 0, 101\,325 \text{ Pa} \cdot 0,4418 \text{ m}^2) - (0, 0, 120\,945 \text{ Pa} \cdot 0,4418 \text{ m}^2) \\ &= (0, 0, 44\,765 \text{ N}) - (0, 0, 53\,434 \text{ N}) = (0, 0, -8669 \text{ N}) \\ &= (0, 0, -8,669 \text{ kN}) \end{aligned}$$

## 14.4 LISAÜLESANNE. SULETUD TORUSTIKU TÄITUMINE

ANTUD. Hüdraulilise voolusüsteemi ühtlustusmahutit täidetakse veega torustikust ülevoolu kõrguseni  $z_1 = 3$  m mahuti aluspõhjast (sisepõhja horisontaalne osa). Mahutist on võimalik täita klapi abil kanalisatsiooniharu tühja osa läbi horisontaalse ümartoru, mille sisediaameeter  $d_s = 100$  mm ja telje kõrgus  $z_2 = 1$  m. Torustiku veega täitumise osa pikkus  $L = 100$  m. Õhuosa ruumala avatud kaevuluugiga kanalisatsiooniharu torus  $V_{\text{õhk}} = 5$  m<sup>3</sup>. Vee temperatuur mahutis on 10 °C, tihedus  $\rho \approx 1000$  kg·m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg·m<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>. Mahutisisisel vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{\text{atm}}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{\text{atm}} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Määrata numbrilise arvutusskeemiga torustikus lukustunud õhuosa rõhk suletud kaevuluugiga toru täitumisele veega liblikklapi avamisel, st paigalseisust voolamisele torustikus. Kui palju erinevad suletud kaevuluugiga torustiku veega täitumise maksimaalne voolukiirus ja rõhk mitteviskoosse ja viskoosse vedeliku voolamise puhul?



EELDUSED. Ülevooluga fikseeritud vabapinnaga mahutist on vee väljavool torustikku määratud mittestatsionaarse voolamisega. Kasutada Runge-Kutta iteratsioonmeetodit, et koostada numbriline arvutuskeem torustiku veega täitmisel õhuosa rõhu määramisele. Viskoosse voolamise puhul määrata hüdraulilise voolusüsteemi takistus täistäitumusega toru Fanningi hõõrdetakistusteguriga  $f = 0,0025$ . Horisontaalitorule valida algtäide pikkusega vastavalt  $l(t = 0) = L > 0$ . Suletud kaevuluugiga torustiku veega täitmisel eeldada, et puudub voolamise stratifikatsioon, st survetorus liigub vertikaalne vesiõhkfront, ning suletud kaevuluuk isoleerib õhuosa atmosfäärist. Torustikus lukustunud õhuosa termodünaamiline rõhk on määratud ideaalse gaasi polütroopse protsessiga.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Voolamise liikumishulga võrrand, Siant-Venanti hõõrdejõu valem, Fanningi hõõrdetakistustegur, mittestatsionaarse voolamise pidevuse võrrand, ideaalse gaasi polütroopse protsessi valem**

## VALEMID

Torustiku täieliku torutäitega osa „vesiõhkfronti“ liikumisele, viskoosse vedeliku voolamisele võib esitada voolamise liikumishulga võrrandiga:

$$\frac{du}{dt} = -u \frac{du}{dx} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \Delta u,$$

milles „vesiõhkfronti“ liikumiskiirus on määratud vee voolukiirusega, st  $u = u_{vesi}$  ja  $u_{vesi} = v_{vesiõhkfront}$ , rõhk on  $p$ , vee tihedus on  $\rho = \rho_{vesi}$ , kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur on  $\nu = \nu_{vesi}$  ja Laplace'i skalaaroperaator on

$$\Delta = \frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{\partial^2 u}{dz^2}.$$

Muutuva suurusega kontrollmahu massiühiku voolujõuga ei arvesta põhjusel, et voolamine toimub muutumatu sisemõõtmega (sisediameetriga) torus ja tegemist on praktiliselt vertikaalse „vesi-õhkfronti“ liikumisega:

$$-u \frac{du}{dx} = 0.$$

Samuti eeldame, et mahuti ja horisontaalitoru ühendusava kohttakistustegur  $k_{L1} \rightarrow 0$ . See võimaldab ka rõhukõrguse torustiku sissevoolus hästi määrata ühtlustusmahuti ülevooluga fikseeritud veepinna kõrguse ja õhurõhukõrguse sumмага.

Tingimusel, et  $\rho = \rho_{vesi} = \textit{konstant}$ , st õhk ja vesi ei segune torustiku täitumisele vertikaalse „vesi-õhkfrondi“ liikumisel, võib võtta kasutusele rõhukõrguse:

$$h = \frac{p}{\rho g},$$

milles  $p$  on termodünaamiline rõhk.

Rõhugradientjõu muutuva suurusega kontrollmahu massiühikule määrame torustiku täieliku torutäitega osale rõhukõrguste vahega:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = g \frac{(h_{\delta hk} - h_{sv})}{l} = -g \frac{(h_{sv} - h_{\delta hk})}{l},$$

milles  $h_{sv}$  on rõhukõrgus torustiku sissevoolus ja  $h_{\delta hk}$  on torustikus lukustunud õhuosa rõhukõrgus.

Hõrdejõu muutuva suurusega kontrollmahu massiühikule määrame torustiku täieliku torutäitega osale Siant-Venanti valemiga:

$$v \Delta u = -\frac{\chi}{A_e} \frac{\tau_0}{\varrho},$$

milles toru sisepinna märgperimeeter on  $\chi$ , elavlõige on  $A_e$ , hõrdepinge toru sisepinnal on  $\tau_0$  ja vee tihedus on  $\varrho$ . Ümartorule võib hõrdejõu määrata empiirilise valemiga:

$$v \Delta u = -\frac{f}{2 d_s} u|u|,$$

milles Fanningi hõrdetakistustegur on  $f(= \lambda/4)$ , toru sisediameeter on  $d_s$  ja vee voolukiirus on  $u$ .

Esimeses lähenduses võib viskoosse vedeliku voolamise Fanningi hõrdetakistusteguri määrata konstandiga:

$$f = \textit{konstant}.$$

Suletud kaevuluugiga, muutuva veetäitumusega torus võib selle õhuosa ruumala määrata pidevuse võrrandiga, mis on harilik diferentsiaalvõrrand:

$$\frac{dV_{\delta hk}}{dt} = -Q_{vesi},$$

milles vee vooluhulk on määratud valemiga:

$$Q_{vesi} = A_e u_{vesi}.$$

Täistäitumusega ümartoru sisepindala määrab voolamise elavlõike:

$$A_e = \pi \left(\frac{d_s}{2}\right)^2.$$

Polütroopses protsessis on ideaalse gaasi rõhu ja ruumala seos määratud valemiga:

$$p_{\delta hk} V_{\delta hk}^{k_{es}} = \textit{konstant} ,$$

milles õhule erisoojuste suhtetegur  $k_{es} = 1,401$ .

Suletud kaevuluugiga torustikus on õhuosa ruumala ajaline muutus määratud ideaalse gaasi polütroopsele protsessile koostatud hariliku diferentsiaalvõrrandiga:

$$V_{\delta hk}^{k_{es}} \frac{d p_{\delta hk}}{dt} + p_{\delta hk} V_{\delta hk}^{(k_{es}-1)} \frac{d V_{\delta hk}}{dt} = 0 ,$$

$$V_{\delta hk}^{k_{es}} \frac{d p_{\delta hk}}{dt} + p_{\delta hk} \frac{V_{\delta h}^{k_{es}}}{V_{\delta hk}} \frac{d V_{\delta hk}}{dt} = 0 ,$$

$$\frac{d p_{\delta hk}}{dt} + p_{\delta hk} \frac{1}{V_{\delta hk}} \frac{d V_{\delta hk}}{dt} = 0 ,$$

$$V_{\delta hk} \frac{d p_{\delta hk}}{dt} + p_{\delta hk} \frac{d V_{\delta hk}}{dt} = 0 .$$

→

$$\frac{d V_{\delta hk}}{dt} = - \frac{V_{\delta hk}}{p_{\delta hk}} \frac{d p_{\delta hk}}{dt}$$

Suletud kaevuluugiga torustikus võib muutuva veetäitumusega torus, õhuosa rõhu määrata voolamise pidevuse võrrandiga:

$$\frac{d p_{\delta hk}}{dt} = \frac{p_{\delta hk}}{V_{\delta hk}} Q_{vesi} = \frac{p_{\delta hk}}{V_{\delta hk}} u_{vesi} A_e .$$

Suletud kaevuluugiga torustiku täitmisele veega muutub hüdraulilises voolusüsteemis nii torus „lukustunud“ õhuosa ruumala kui ka termodünaamiline rõhk vastavalt ideaalse gaasi polütroopse protsessi võrrandile.

*Numbriline arvutusskeem. Vee voolukiirus ja õhuosa rõhk torustikus*

*Numbriline arvutusmeetod. Runge-Kutta arvutusmeetod*

## VALEMID

Suletud kaevuluugiga torustiku klapi järsul avamisel, mis vastab voolamisele paigalseisust, on kanalisatsiooniharu toru täitumine veega määratud voolamise liikumishulga võrrandiga viskoosse vedeliku voolamisele ja pidevuse võrrandiga ideaalsele gaasile, vastavalt:

$$\frac{d u_{vesi}}{dt} = - g \frac{(h_{\delta hk} - h_{sv})}{l} - \frac{f}{2 d_s} u_{vesi} |u_{vesi}| ,$$

$$\frac{d p_{\delta hk}}{dt} = \frac{p_{\delta hk}}{V_{\delta hk}} A_e u_{vesi} ,$$

milles rõhukõrgus torustiku sissevoolus on

$$h_{sv} = (z_1 - z_2) + \frac{p_0}{\rho g} = \text{konstant},$$

milles õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$  on atmosfääri rõhk, st  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ , ning torustikus lukustunud õhuosa rõhukõrgus on

$$h_{\delta hk} = \frac{p_{\delta hk}}{\rho g}.$$

Runge-Kutta 4-tõusuga valemi kasutamisele ühtlustusmahuti ja suletud kaevuluugiga torustiku voolusüsteemi numbrilises arvutusskeemis tuleb kombineerida voolukiiruse määramise liikumishulga võrrandit ja õhuosa termodünaamilise rõhu võrrandit igale lõplikule ajavahemikule. Nii 1D voolamise liikumishulga võrrand kui ka õhuosa termodünaamiliste rõhu võrrand on harilikud diferentsiaalvõrrandid.

*Arvutusnäide. Mitteviskoosse vedeliku voolamine torustikus*  
*Numbriline arvutusskeem. Vee voolukiirus ja õhuosa rõhk*  
*Numbriline arvutusmeetod. Runge-Kutta arvutusmeetod*

## VALEMID

Suletud kaevuluugiga torustiku voolukiiruse ajaline muutus nõ paigalseisust mitteviskoosse veevool kiirendusega on määratud hariliku diferentsiaalvõrrandiga

$$\frac{du_{vesi}}{dt} = -g \frac{(h_{\delta hk} - h_{sv})}{l},$$

milles

$$l = L + \int_{t=0}^{t=\Delta t} u_{vesi} dt,$$

$$h_{\delta hk} = \frac{p_{\delta hk}}{\rho g}.$$

## ARVUTUSSKEEM. Voolukiirus

Runge-Kutta 4-tõusu valemiga numbriline arvutusskeem:

$$uARV_1 = u_{vesi_i}, \quad uk_1 = -g \frac{(h_{\delta hk_i} - h_{sv})}{l},$$

$$uARV_2 = u_{vesi_i} + uk_1 \frac{\Delta t}{2}, \quad uk_2 = -g \frac{(h_{\delta hk_i} - h_{sv})}{l},$$

$$uARV_3 = u_{vesi_i} + uk_2 \frac{\Delta t}{2}, \quad uk_3 = -g \frac{(h_{\delta hk_i} - h_{sv})}{l},$$

$$uARV_4 = u_{vesi_i} + uk_3 \Delta t, \quad uk_4 = -g \frac{(h_{\delta hk_i} - h_{sv})}{l},$$

$$u_{vesi_{i+1}} = u_{vesi_i} + \frac{1}{6} (uk_1 + 2 uk_2 + 2 uk_3 + uk_4) \Delta t.$$



Suletud kaevuluugiga torustiku õhuosa rõhu ajaline muutus algtingimuse atmosfääri rõhust kanalisatsiooniharu toru veega täitumisele muutuva õhurõhuga on määratud hariliku diferentsiaalvõrrandiga

$$\frac{d p_{\delta hk}}{dt} = \frac{p_{\delta hk}}{V_{\delta hk}} A_e u_{vesi} ,$$

milles

$$V_{\delta hk} = V_{\delta hk}' - A_e \int_{t=0}^{t=\Delta t} u_{vesi} dt ,$$

$$V_{\delta hk}' = \textit{konstant} .$$

ARVUTUSSKEEM. Rõhk

Runge-Kutta 4-tõusu valemiga numbriline arvutusskeem:

$$pARV_1 = p_{\delta hk_i}, \quad pk_1 = \frac{pARV_1}{V_{\delta hk}} A_e u_{vesi_{i+1}} ,$$

$$pARV_2 = p_{\delta hk_i} + pk_1 \frac{\Delta t}{2}, \quad pk_2 = \frac{pARV_2}{V_{\delta hk}} A_e u_{vesi_{i+1}} ,$$

$$pARV_3 = p_{\delta hk_i} + pk_2 \frac{\Delta t}{2}, \quad pk_3 = \frac{pARV_3}{V_{\delta hk}} A_e u_{vesi_{i+1}} ,$$

$$pARV_4 = p_{\delta hk_i} + pk_3 \Delta t, \quad pk_4 = \frac{pARV_4}{V_{\delta hk}} A_e u_{vesi_{i+1}} ,$$

$$p_{\delta hk_{i+1}} = p_{\delta hk_i} + \frac{1}{6} (pk_1 + 2 pk_2 + 2 pk_3 + pk_4) \Delta t .$$

ARVUTUS. Voolukiirus ja rõhk (mitteviskoosse vedeliku voolamine torustikus)

Algtingimus ja ajasamm

$$t = 0$$

$$p_{\delta hk} = 101\,325 \text{ Pa}$$

$$u = u_{vesi} = 0$$

$$\Delta t = 60 \text{ s} \cdot 0,01 = 0,6 \text{ s}$$

	Algt.	75 samm	150 samm	225 samm	300 samm	375 samm
$p_{\delta hk}$ (kPa)	101,325	127,3724	160,6245	127,8192	101,3657	127,6233
$u$ (m.s <sup>-1</sup> )	0	3,9544	0,0575	-3.9312	-0.0860	3,9512
$t$ (s)	0	44,4	89,4	134,4	179,4	224,4

	450 samm	525 samm	600 samm	675 samm	750 samm	825 samm
$p_{\text{õhk}}$ (kPa)	160,5782	127,5320	101,4082	128,0882	160,5236	127,0337
$u$ (m. s <sup>-1</sup> )	0,0254	-3.9436	-0.0116	3,9414	-0.0321	-3.9618
$t$ (s)	269,4	314,4	359,4	404,4	449,4	494,4

	900 samm	975 samm	1050 samm	1125 samm	1200 samm
$p_{\text{õhk}}$ (kPa)	101,4602	128,7701	160,4462	126,3265	101,5341
$u$ (m. s <sup>-1</sup> )	0,1062	3,9238	-0.1154	-3.9846	0,2679
$t$ (s)	539,4	584,4	629,4	674,4	719,4

#### VASTUSED

Vee voolukiiruse maksimumid

$$u_{\text{vesi}}(t = 38 \text{ s}, 218 \text{ s}, 398 \text{ s}, 578 \text{ s}, \dots) = 4,050 \text{ m. s}^{-1}$$

Vee voolukiiruse miinimumid

$$u_{\text{vesi}}(t = 142 \text{ s}, 322 \text{ s}, 502 \text{ s}, 682 \text{ s}, \dots) = -4,050 \text{ m. s}^{-1}$$

Õhuosa rõhu maksimumid

$$p_{\text{õhk}}(t = 90 \text{ s}, 270 \text{ s}, 450 \text{ s}, 630 \text{ s}, \dots) = 160,625 \text{ kPa} = 160\,625 \text{ Pa}$$

Õhuosa rõhu miinimumid

$$p_{\text{õhk}}(t = 180 \text{ s}, 360 \text{ s}, 540 \text{ s}, 720 \text{ s}, \dots) = 101,365 \text{ kPa} = 101\,365 \text{ Pa}$$

JÄRELDUS. Numbrilisest arvutustulemusest selgub, et torustiku täitumisele mitteviskoosse vedelikuga tekib vooluprotsessi võnkumine, mis ei koonu tasakaalulisele olekule, st nõ seisvale veemassile torustikus.

Arvutusnäide. Viskoosse vedeliku voolamine torustikus  
 Numbriline arvutusskeem. Vee voolukiirus ja õhuosa rõhk  
 Numbriline arvutusmeetod. Runge-Kutta arvutusmeetod

### VALEMID

Suletud kaevuluugiga torustiku voolukiiruse ajaline muutus vee paigalseisust viskoosse voolamise kiirendusega on määratud hariliku diferentsiaalvõrrandiga:

$$\frac{du_{vesi}}{dt} = -g \frac{(h_{\delta hk} - h_{sv})}{l} - \frac{f}{2 d_s} u_{vesi} |u_{vesi}|,$$

milles

$$l = L + \int_{t=0}^{t=\Delta t} u_{vesi} dt,$$

$$h_{\delta hk} = \frac{p_{\delta hk}}{\rho g}.$$

### ARVUTUSSKEEM. Voolukiirus

Runge-Kutta 4-tõusu valemiga numbriline arvutusskeem:

$$uARV_1 = u_{vesi_i}, \quad uk_1 = -g \frac{(h_{\delta hk_i} - h_{sv})}{l},$$

$$uARV_2 = u_{vesi_i} + uk_1 \frac{\Delta t}{2}, \quad uk_2 = -g \frac{(h_{\delta hk_i} - h_{sv})}{l},$$

$$uARV_3 = u_{vesi_i} + uk_2 \frac{\Delta t}{2}, \quad uk_3 = -g \frac{(h_{\delta hk_i} - h_{sv})}{l},$$

$$uARV_4 = u_{vesi_i} + uk_3 \Delta t, \quad uk_4 = -g \frac{(h_{\delta hk_i} - h_{sv})}{l},$$

$$u_{vesi_{i+1}} = u_{vesi_i} + \frac{1}{6} (uk_1 + 2 uk_2 + 2 uk_3 + uk_4) \Delta t - \frac{f}{2 d_s} u_{vesi_i} |u_{vesi_i}| \Delta t.$$

Suletud kaevuluugiga torustiku õhuosa rõhu ajaline muutus algtingimuse atmosfääri rõhust kanalisatsiooniharu toru täitumisele muutuva õhurõhuga on määratud hariliku diferentsiaalvõrrandiga:

$$\frac{d p_{\delta hk}}{dt} = \frac{p_{\delta hk}}{V_{\delta hk}} A_e u_{vesi},$$

milles

$$V_{\delta hk} = V_{\delta hk}' - A_e \int_{t=0}^{t=\Delta t} u_{vesi} dt,$$

$$V_{\delta hk}' = \text{konstant}.$$

## ARVUTUSSKEEM. Rõhk

Runge-Kutta 4-tõusu valemiga numbriline arvutusskeem:

$$pARV_1 = p_{\delta hk_i}, \quad pk_1 = \frac{pARV_1}{V_{\delta hk}} A_e u_{vesi_{i+1}},$$

$$pARV_2 = p_{\delta hk_i} + pk_1 \frac{\Delta t}{2}, \quad pk_2 = \frac{pARV_2}{V_{\delta hk}} A_e u_{vesi_{i+1}},$$

$$pARV_3 = p_{\delta hk_i} + pk_2 \frac{\Delta t}{2}, \quad pk_3 = \frac{pARV_3}{V_{\delta hk}} A_e u_{vesi_{i+1}},$$

$$pARV_4 = p_{\delta hk_i} + pk_3 \Delta t, \quad pk_4 = \frac{pARV_4}{V_{\delta hk}} A_e u_{vesi_{i+1}},$$

$$p_{\delta hk_{i+1}} = p_{\delta hk_i} + \frac{1}{6} (pk_1 + 2pk_2 + 2pk_3 + pk_4) \Delta t.$$

ARVUTUS. Voolukiirus ja rõhk (viskoosse vedeliku voolamine torustikus)

Algtingimus ja ajasamm

$$t = 0$$

$$p_{\delta hk} = 101\,325 \text{ Pa}$$

$$u = u_{vesi} = 0$$

$$\Delta t = 60 \text{ s} \cdot 0,01 = 0,6 \text{ s}$$

	Algt.	75 samm	150 samm	225 samm	300 samm	375 samm
$p_{\delta hk}$ (kPa)	101,325	118,2360	130,4705	124,3698	116,5232	118,6137
$u$ (m. s <sup>-1</sup> )	0	2,0722	0,2320	-0,9967	-0,3475	0,6264
$t$ (s)	0	44,4	89,4	134,4	179,4	224,4

	450 samm	525 samm	600 samm	675 samm	750 samm	825 samm
$p_{\delta hk}$ (kPa)	124,2779	123,3568	118,8529	118,9318	122,5656	122,9505
$u$ (m. s <sup>-1</sup> )	0,3010	-0,4131	-0,3058	0,2978	0,2777	-0,2034
$t$ (s)	269,4	314,4	359,4	404,4	449,4	494,4

## VASTUSED

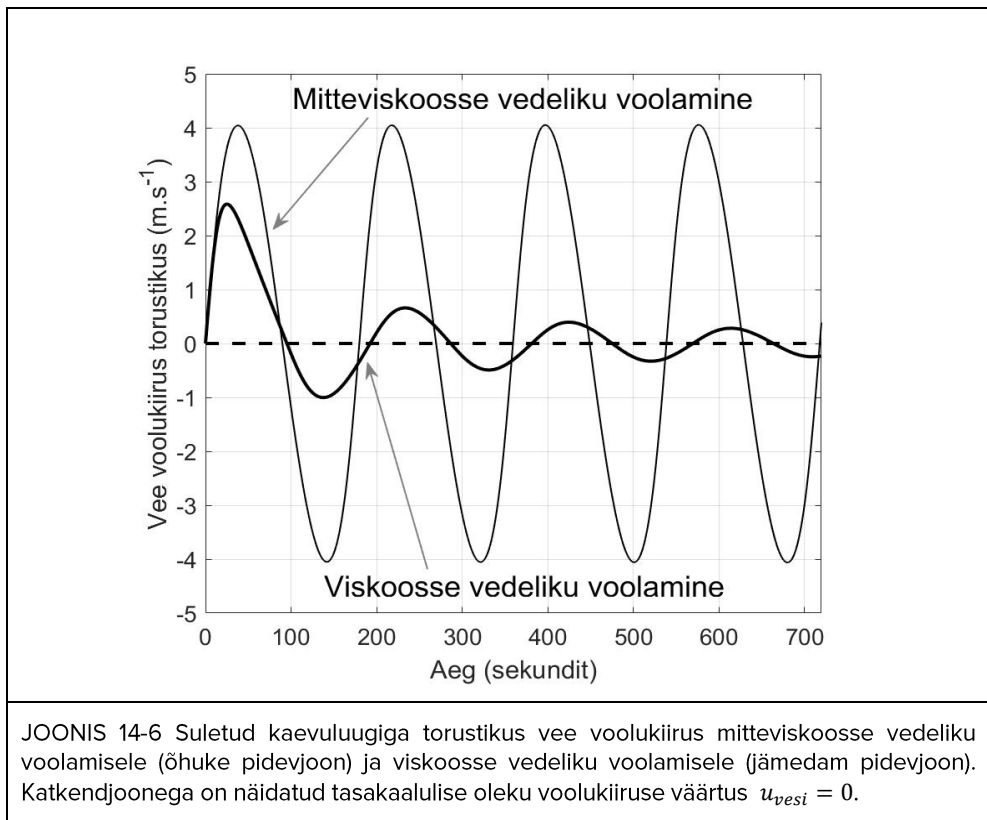
Vee voolukiiruse maksimum

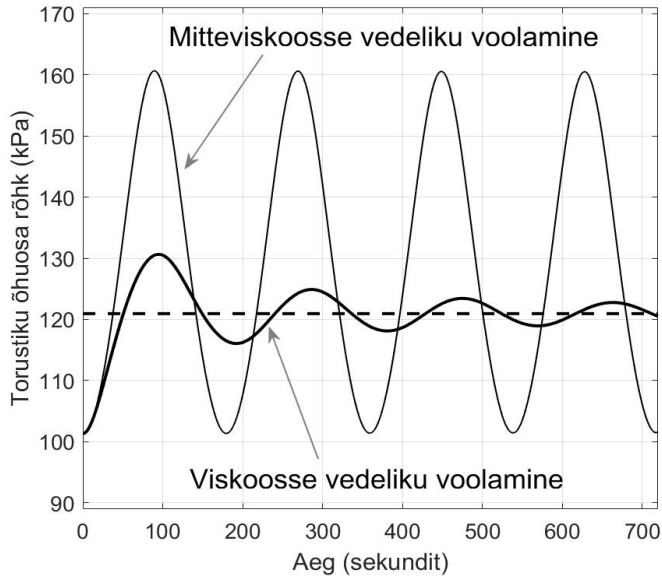
$$u_{vesi}(t = 25 \text{ s}) = 2,5835 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Õhuosa rõhu maksimum

$$p_{\text{õhk}}(t = 95 \text{ s}) = 130,635 \text{ kPa} = 1390 \text{ 635 Pa}$$

**JÄRELDUS.** Arvutuse tulemusest selgub, et torustiku täitumisele viskoosse vedelikuga tekib voolukiiruse ja rõhu võnkumine, mis koondud tasakaalulisele olekule vee voolukiirusega  $u_{vesi} = 0$  ja õhuosa rõhuga  $p_{\text{õhk}} = 120 \text{ 945 Pa} = 120,945 \text{ kPa}$ .





JOONIS 14-7 Suletud kaevuluugiga torustiku õhuosa rõhk mitteviskoosse vedeliku voolamisele (õhuke pidevjoon) ja viskoosse vedeliku voolamisele (jämedam pidevjoon). Katkendjoonega on näidatud tasakaalulise oleku termodünaamiline õhuosa rõhk  $p_{\text{õhk}} = 120\,945 \text{ Pa} = 120,945 \text{ kPa}$ .

### MÄRKUSED. Suletud torustiku täitumine

- Torustikus hüdrostaatilise rõhu tasakaalu olukorras jätkub vee ja õhu koosvoolamine kuni saavutatakse ka tiheduse järgi kihistunud tasakaalu olukord.
- Poltühendusega fikseeritud kaevuluuk ei saa vertikaalselt liikuda, ning seetõttu esineb õhuosa rõhu perioodiline muutus.
- Poltühendusega fikseerimata kaevuluuk saab vertikaalselt liikuda, ning seetõttu sõltub kanalisatsiooniharu toru veega täitmisele õhuosa termodünaamiline rõhk ka õhu sisse- ja väljavoolust kaevu avas. Sellel põhjusel täitub torustik kiiremini veega. Fikseerimata kaevuluugiga juhul toimub torustiku täitumine peamiselt ühtlustusmahuti hüdrostaatilise rõhu toimele, mis vähendab stratifitseeritud voolamise dünaamikat torustikus.

## 14.5 VIITED

14.1 Vesihuoltoverkkojen suunnittelu. Mitoitus ja suunnittelu. RIL 237-2-2010.

Vürmer, T. (2020). *Väliskanalisatsioon. Kanalisatsioonivõrgu projekteerimine.*

14.2 *Võrgu elemendid – kaevud: planeerimise ja valiku kriteeriumid, tähelepanekuid praktikast.*

14.3 *Väliskanalisatsioonivõrk. EVS 848:2021.*

14.4 Laanearu, J. (2019). *Rakenduslik hüdromehaanika.* Tallinna Tehnikaülikooli kirjastus.

14.5 Laanearu, J., Annus, I., Koppel, T., Bergant, A., Vučković, S., Hou, Q., Tijsseling, A. S., Anderson, A. & van 't Westende, J. M. C. (2012). Emptying of large-scale pipeline by pressurized air, *Journal of Hydraulic Engineering*, 138(12), 1090–1100. DOI: 10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000631

14.6 Hou, Q., Tijsseling, A. S., Laanearu, J., Annus, I., Koppel, T., Bergant, A., Vučković, S., Anderson, A. & van 't Westende, J. M. C. (2014). Experimental Investigation on Rapid Filling of a Large-Scale Pipeline, *Journal of Hydraulic Engineering*, 140(11), 1–14.

## 15 PINNAVEEKOGU

### 15.1 PRAKTIILINE OSA. VÄIKEVEEKOGUD

#### 15.1.1 EHITIS. TIIK

Tiigid on enamasti inimeste poolt rajatud väikeveekogud või looduslikult tekkinud väikesed isoleeritud mageveekogud. Veeseaduse alusel nimetatakse inimtegevuse tulemusena tekkinud veekogu tehisveekoguks (VIIDE 15.1, „Veeseadus“). Tiik võib olla ka karjäär, mis on veega täitunud. Veetaseme ja hapnikusisalduse kõikumine, ajutine kuivamine ja läbikülmumine on tiikide puhul tavapärased nähtused (VIIDE 15.2, „Tiigid. Tiikide rajamine ja taastamine“). Tiikide täitumine veega ja kuivamine on seotud veeringega. Vihmaperioodil tiigid täituvad ning kuival perioodil toimub seoses aurumisega veeruumala vähenemine. Tiigi veeseisu mõjutavad ka hüdrogeoloogilised tingimused, näiteks põhjavee tase, maapinna kalle või muud tegurid. Kui inimtegevusega seotud veekogu lähedale rajatakse kanalisatsiooniehitist, näiteks immutusväljak, tuleb seetõttu ette näha kuja. Kujade toimimine sõltub oluliselt pinnasest ja pinnamoest.

#### 15.1.2 VOOLUREŽIIM. VEERINGE, VEEKOGU TÜHJENEMINE JA TÄITUMINE

Veeseaduse kohaselt on veekogu püsiv või ajutine voolava, aeglaselt liikuva või seisva veega täidetud süvend, nagu jõgi, oja, paisjärv, allikas, peakraav, kanal, järv või meri. Maaparandusseaduse järgi on veekogu ka maaparandussüsteemi eesvool (VIIDE 15.1, „Veeseadus“). Veekogu veevahetuse ehk hüdrooloogilise tsükli olulisteks elementideks on aurumine, sademed ja vee liikumine. Aurumine on füüsikaline protsess, mida väljendab osakeste väljumine vedelikust läbi tema vabapinna protsesside. Tuulega kaasneb õhu vertikaalne segunemine, veeauruga küllastunud õhukihti ei teki ning aurumise intensiivsus kasvab märgatavalt. Tingituna maapinna ebaühtlusest on ka aurumise ruumiline jaotus ebaühtlane (VIITED 15.3, „Merefüüsika ja hüdroloogia“, 15.4, „Füüsikaline okeanograafia. Läänemeri“).

Atmosfääri kandudes paigutuvad aurunud veemassid ümber, jahtudes kondenseeruvad need ning langevad sademetena maapinnale. Rünkpilved liiguvad atmosfääri piirikihis, 1–2 km kõrgusel maapinnast. Rünkpilve ruumala on suurusjärgus  $1 \text{ km}^3 = 1000000000 \text{ m}^3$  ning kui pilves on vee osakeste kontsentratsioon ligikaudu  $0,5 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$ , siis sisaldab pilv ligikaudu 500 tonni vett (VIIDE 15.5, VIIDE 15.6, „Õhutemperatuur Eestis“).



Maismaale langenud vihmavesi osaliselt infiltreerub, osaliselt liigub ära mööda maapinda ja osaliselt aurub. Sademeveebilanss on oluliselt erinev mereäärsetes ja kõrgendike piirkondades ning võib varieeruda samuti tihe- ja hajaasustustes, metsades ja põllumaa del. Linnades iseloomustab veeringet ebaloomulikult suur pinnavee voolamine, mis juhitakse sademeveekanaliseerimisele. See on seotud vett mitteläbilaskvate pindade ehk kõvakatendite laialdase kasutamise ga, mille arvelt väheneb olulisel määral infiltratsioon ja aurumine. Sellega kaasneb loodusliku veeringe muutus, ärajuhitava sademevee suur hüdrauliline koormus ja suurenev saastumise risk (VIITED 15.7, „Vihmavee-, ühisvoolne ja poollahkvoolne kanalisatsioon: õppevahend“, 15.8, „Hoonete küte“, 15.9, „Sademevee kanalisatsiooni perspektiivsed lahendused“).

Kuna kliimamudelid prognoosivad tulevikuks Eestis õhutemperatuuri jätkuvat tõusu, jätkub eeldatavasti ka valingvihmade intensiivistumine (VIIDE 15.10, „Sademeveesüsteemide projekteerimise aluste kaasajastamine“).

Mõistet tiik kasutatakse ka rajatiste nagu setitustiik, biotiik, järelduhaustustiik, kalakasvatustiik puhul. Tiike saab kasutada ka sademevee ärajuhtimisel selle akumulatsiooniks, et aeglustada voolamist, või kogumiseks, et vältida intensiivsete sadude korral uputusi. Sademevee kogumise tiigid kujutavad endast mitmeosalisi püsiva veetasemega basseini ning mõnikord madalate, märgalasarnaste alade komplekse. Tavalisest tiigilaadsest veekogust eristab sademevee kogumise tiike ka eelbasseini olemasolu, kus settivad välja sademeveega tiiki sattuv liiv jms tahked osakesed. Sademevee kogumise tiigid suudavad ajutiselt mahutada paduvihmaga tiigi valgasse sadanud veehulga ning äravool tiigist toimub pikema (kuni mõnepäevase) perioodi jooksul, mille vältel osa veest aurub ja tiigi märgalalaadsetes osades infiltreerub. Seega aitavad sellised tiigid osaliselt vähendada kanaliseeritava sademevee mahtu ning alandada äravoolu maksimume. Sademevee kogumise tiigi kuju tuleb projekteerida vastavalt selle rakendamise eesmärgile ning hüdroloogilisele ja saastekoormusele. Ebamääraselt projekteeritud kuju võib põhjustada vee voolamist ning kogunemist vaid osal tiigi pinnast, mis vähendab tiigi puhastusefektiivsust, kuna tiiki juhitud sademevee puhastamine toimub siis samuti vaid osal tiigi kogupinnast. Saavutamaks maksimaalset puhastusefektiivsust peab vee voolutee pikkus tiigis olema vähemalt kolm korda pikem voolutee laiuselt. Kui sellise pikliku tiigi rajamine ei ole ruumikasutuse mõttes otstarbekas, tuleks tiigis vee vooluteed pikendada otsevoolu takistavate tõketega. Tiigi dimensioonimisel tuleb selle suurus ja sügavus valida vee juurdevoolu suhtes nii, et tiigi püsiva veetasemega osad sadudevahelisel perioodil ära ei kuivaks. Tiigi minimaalne pindala peab olema vähemalt 1% selle valgala pindalast. Sademevee kogumise tiigid vajavad regulaarset ülevaatus- ja väljavoolu puhastust. Perioodiliselt on vaja teostada setete ärastamist, vajadusel vooluteede süvendust ja sõltuvalt tiigi seisukorrast parandusteid (VIIDE 15.11, „Alternatiivsete sademevee äravoolu- ja kogumissüsteemide uurimustöö“).

### 15.1.3 SISSEJUHATUS ÜLESANDESSE. PÕHIVALEMID

Väikeveekogu läbivoolu põhiülesandes on Bernoulli võrrandi eeldused hästi täidetud, sest tiigi veepeegli vertikaalne liikumiskiirus on oluliselt väiksem voolukiirusest tiigi tühjendustorus.

Vabapinnaga hüdraulilises voolusüsteemis, kus vesi voolab tiigist uputatud torusse, võib tekkida madala tiigi veepeegli kõrgusest sõltuvalt veepinna keeris. See muudab hüdraulilist takistust ümartoru läbivoolule, kuna veepinna liikumisega haaratakse keerise silmast kaasa õhku.

Prahiresti kasutamine võimaldab vältida voolamise ahenemist tiigi uputatud toru sissevoolus ja veepinna keerisega õhu haaramist tiigi vabapinnalt.

Aurumine vähendab statsionaarse voolamise olukorras tiigi veepeegli dünaamilist kõrgust, kuna väikeveekogu ja tühjendustoru voolusüsteemist eemaldatakse lisaks äravoolule vett tiigi vabapinnalt ka uputatud ümartorust. Kui aurumine veepinnalt vähendab (alandab) tiigi veepeegli dünaamilist kõrgust, siis statsionaarse voolamise olukorras suurendavad (tõstavad) sademed tiigi veepeegli dünaamilist kõrgust, kuna kuivendustiigi ja tühjendustoru voolusüsteemile lisandub vett lisaks tiigi kaldapinna infiltratsioonivee juurdevoolule ka tiigi vabapinnalt.

Tiiginõlva kalle muudab ajavahemikku, mille jooksul väikeveekogu vabapind liigub vertikaalselt ehk suletud toruga staatiliselt kõrguselt avatud toruga dünaamilise kõrgusele. Vee kogus kaldega nõlvadega tiigis erineb veehulgast vertikaalsete nõlvadega tiigis ehk nõlvaga tiigis toimub tavaliselt väiksem vee akumulatsioon. Tiiginõlva kalle võib muuta tiigi veepeegli statsionaarse voolamise dünaamilist kõrgust, kui tiigi veepeegli perimeetriga määratud kaldajoone pikkus erineb tiigi aluspõhja perimeetriga määratud kaldajoone pikkusest.

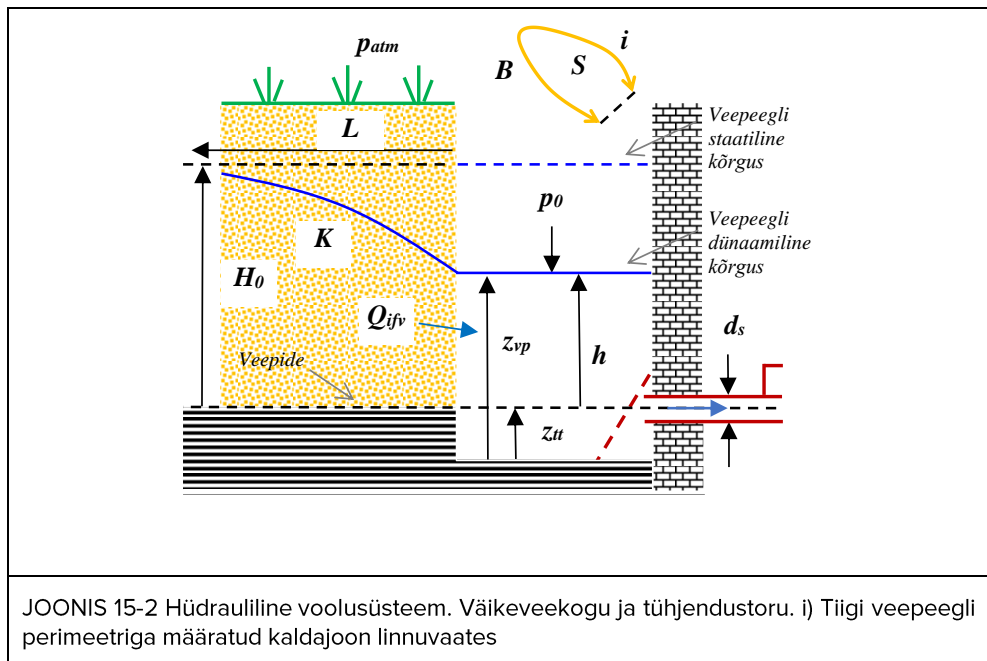


JOONIS 15-1 Biotiik, Ääsmäe. (Foto: Peeter Eero, 2019)

## 15.2 PÕHIÜLESANNE. VEEKOGU PINNATASE

ANTUD. Väikeveekogu, nt tiik, sisepõhja pindalaga  $S = 0,1 \text{ km}^2$ , on täidetud veega. Tiiki on võimalik tühjendada läbi ümartoru, mille sisediaameter  $d_s = 0,5 \text{ m}$  ja torutelje kõrgus  $z_{tt} = 1 \text{ m}$  tiigi sisepõhjast (aluspõhjast), mis on võetud võrdlusnivooks. Tiigi tühjendustoru on varustatud prahirestiga, mille kohttakistustegur  $\zeta = 2$ . Tiigi kallus, kaldajoone pikkusega  $B = 1,46 \text{ km}$ , on murepinnas, mille horisontaalvoolu filtratsioonimoodul  $K = 600 \text{ m.ööpäev}^{-1}$  ja kuivenduse mõjuulatus  $L = 0,4 \text{ km}$ . Murepinnases on staatiline põhjaveetase veepidemest  $H_0 = 15 \text{ m}$ . Suletud tühjendustoruga on tiik täidetud veega staatilise kõrguseni, st  $h = H_0$ , ümartoru teljest. Vee temperatuur on  $10 \text{ }^\circ\text{C}$ , tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg.m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata proovimismeetodiga väikeveekogu vabapinna dünaamiline kõrgus ja tühjendustoru voolusüsteemis. Määrata numbrilise arvutuskeemiga väikeveekogu vabapinna dünaamiline kõrgus hüdraulilises voolusüsteemis. Arvutada ajavahemik, mille jooksul väikeveekogu vabapind liigub vertikaalselt, st suletud-toruga tiigi veepeegli staatiliselt kõrguselt kuni avatud-toruga dünaamilise kõrguseni. Määrata erinevate arvutusmeetodiga saadud tiigi veepeegli dünaamilise kõrguse arvutusviga.



EELDUSED. Uputamata väljavool väikeveekogust on hästi määratud kvaasi-statsionaarse voolamisega, st igal ajahetkel on voolamine mittestatsionaarne ja igas ajavahemikus statsionaarne. Survekadu tiigi tühjendustorus on määratud prahiresti läbivoolu takistusega. Väikeveekogu ja ümartoru voolusüsteemi kiirustegur võtta võrdseks vooluhulgateguriga. Põhjavee filtratsiooni vooluhulk tiigi ümbristes murepinnases määrab hästi põhjavee infiltratsiooni vooluhulga tiigi kaldapinna läbimisel. Aurumist ja sademeid tiigi vabapinnal mitte arvestada (tuulevaikne ja ilma vihmata olukord). Kasutada Runge-Kutta iteratsioonmeetodit, et koostada numbriline arvutuskeem tiigi tühjenemise ajavahemiku määramisele.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Reaalvoolu Bernoulli võrrand, Weisbachi survekao valem, Toricelli valem, kvaasistatsionaarse voolamise pidevuse võrrand, ümartoru Reynoldsi arvu valem, Runge-Kutta 4-tõusuga numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem**

## VALEMID

Reaalvoolu Bernoulli võrrand tiigi ja selle tühjendustoru voolusüsteemile:

$$z_{vp} + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{u_{vp}^2}{2g} = z_{tt} + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{u_{tt}^2}{2g} + h_t,$$

milles  $z_{vp}$  on vabapinna kõrgus väikeveekogu aluspõhjast (võrdlusnivoo),  $u_{vp}$  on tiigi veepeegli vertikaalne liikumiskiirus,  $z_{tt}$  on horisontaalse ümartoru telje kõrgus võrdlusnivoost,  $u_{tt}$  on voolukiirus tiigi tühjendustorus ja  $h_t$  on survekadu.

Survekadu tehistiigi ja ümartoru voolusüsteemile on määratud Weisbachi-tüüpi survekao valemiga:

$$h_t = \zeta \frac{u_{tt}^2}{2g},$$

milles  $\zeta$  on prahiresti läbivoolu takistusega määratud kohttakistustegur (mõõtühikuta suurus  $[\zeta] = 1$ ).

Eeldusel, et tiigi veepeegli vertikaalne liikumiskiirus on oluliselt väiksem voolukiirusest tiigi tühjendustorus ( $u_{vp} \ll u_{tt}$ ), võime voolukiiruse tühjendustorus määrata valemiga:

$$u_{tt} = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}} \sqrt{2g(z_{vp} - z_{tt})} = \varphi \sqrt{2gh},$$

milles  $\varphi$  on kiirustegur ja  $h = z_{vp} - z_{tt}$  on väikeveekogu vabapinna kõrgus üle ümartoru telje.

Tühjenemistoru Reynolds'i arv on määratud ümartoru Reynolds'i arvuga

$$Re = \frac{u_{tt} d_s}{\nu},$$

milles  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur.

Vooluhulk tiigi tühjendustorus on määratud Toricelli-tüüpi ava valemiga:

$$Q_{tt} = A_e C_d \sqrt{2 g h},$$

milles  $C_d (= \varphi)$  on vooluhulgategur ja  $A_e$  on täieliku täitumusega ümartoru sise-pindala ehk elavlõige:

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4}.$$

Vooluhulk põhjavee horisontaalsele filtratsioonivoolule on määratud valemiga

$$Q_{fv} = K \frac{(H_0^2 - h^2)}{2 L} B,$$

milles  $K$  on murepinnase horisontaalne filtratsioonimoodul,  $H_0$  on staatiline põhjaveetase veepidemest,  $h$  on tiigi veepeegli kõrgus tiigi tühjendustoru teljest,  $L$  on kuivenduse mõjuulatus ja  $B$  on tiigi murepinnasest kaldajoone pikkus.

Muutuva tiigi veepeegli kõrgusega võime veehulga (vee koguse) ajalise muutuse määrata kvaasistatsionaarse voolamise pidevusele koostatud hariliku diferentsiaalvõrrandiga:

$$\frac{dV}{dt} = Q_{fv} - Q_{tt},$$

milles  $Q_{fv}(t) (= Q_{fv}(t))$  on põhjavee horisontaalsele infiltratsioonile vooluhulk ja  $Q_{tt}(t)$  on vooluhulk tiigi tühjendustorus.

Vee kogus tiigis ei muutu statsionaarse voolamise olukorras.

$$\frac{dV}{dt} = 0$$

→

$$0 = Q_{fv} - Q_{tt}$$

## Proovimise arvutusmeetod

### VALEMID

Statsionaarsele voolamisele, kuivendustiigi ja tühjendustoru voolusüsteemis, võib tiigi veepeegli dünaamilise kõrguse määrata proovimismeetodiga võrrandist:

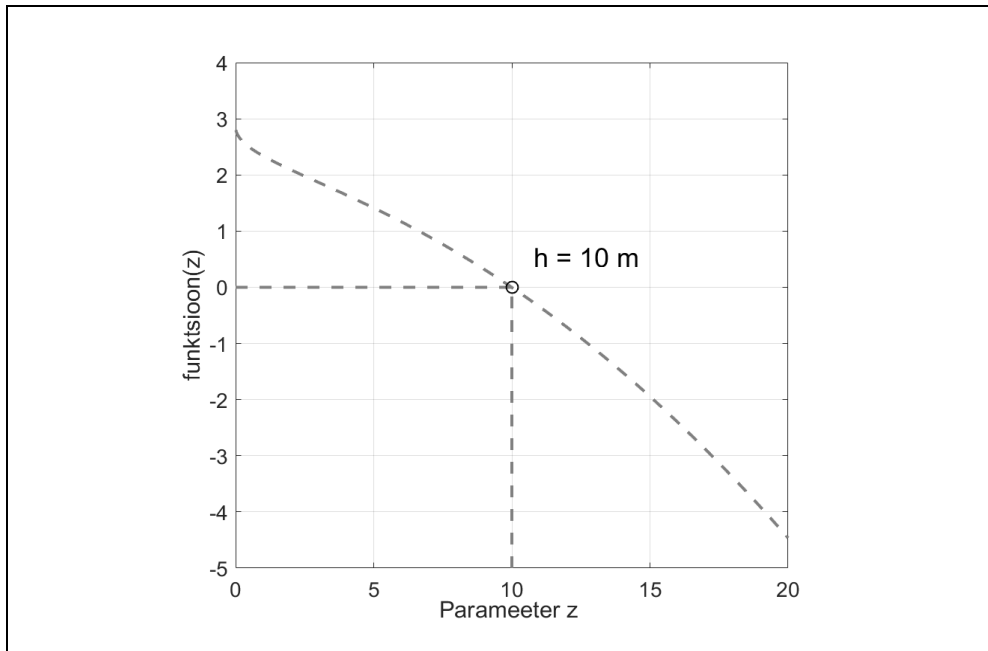
$$0 = K \frac{(H_0^2 - h^2)}{2L} B - C_d A_e \sqrt{2gh}.$$

Võtame kasutusele proovimismeetodile funktsiooni:

$$funkttsioon(z) = K \frac{(H_0^2 - z^2)}{2L} B - A_e C_d \sqrt{2gz},$$

milles  $z$  on parameeter, ning  $K = 0,00694 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $H_0 = 15 \text{ m}$ ,  $L = 400 \text{ m}$ ,  $B = 1460 \text{ m}$ ,  $A_e = 0,1963 \text{ m}^2$ ,  $\varphi = 0,5774$  ja  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  on konstantsed suurused.

ARVUTUS. Väikeveekogu vabapinna dünaamiline kõrgus



JOONIS 15-3 Proovimismeetodi funktsiooni kasutamine tiigi veepeegli dünaamilise kõrguse määramisele

JÄRELDUS. Proovimise parameetri vahemikus  $z = 0 \dots 20 \text{ m}$ , saavutab  $funkttsioon(z) = 0$  selle argumendi väärtusel  $z \approx 10,0 \text{ m}$ . Proovimismeetodiga arvatud tiigi veepeegli dünaamiline kõrgus üle väikeveekogu uputatud ümartoru telje  $h = 10,0 \text{ m}$ .

Numbriline arvutusskeem. Tiigi veepeegli dünaamiline kõrgus  
 Numbriline arvutusmeetod. Runge-Kutta iteratsioonmeetod

#### VALEMID

Kasutame Runge-Kutta 4-tõusuga valemi numbrilist arvutusskeemi tiigi vabapinna kõrguse ajalise muutuse määramisele.

Vabapinna kõrguse ajaline muutus kuivendustiigi ja tühjendustoru voolusüsteemis on määratud hariliku diferentsiaalvõrrandiga

$$S \frac{dh}{dt} = K \frac{(H_0^2 - h^2)}{2L} B - A_e C_d \sqrt{2gh}$$

→

$$\frac{dh}{dt} = \frac{K \frac{(H_0^2 - h^2)}{2L} B - A_e C_d \sqrt{2gh}}{S}.$$

#### ARVUTUSSKEEM

Runge-Kutta 4-tõusuga numbriline arvutusskeem:

$$ARV_1 = h_i, \quad k_1 = \frac{K \frac{(H_0^2 - ARV_1^2)}{2L} B - C_d A_e \sqrt{2g ARV_1}}{S},$$

$$ARV_2 = h_i + k_1 \frac{\Delta t}{2}, \quad k_2 = \frac{K \frac{(H_0^2 - ARV_2^2)}{2L} B - C_d A_e \sqrt{2g ARV_2}}{S},$$

$$ARV_3 = h_i + k_2 \frac{\Delta t}{2}, \quad k_3 = \frac{K \frac{(H_0^2 - ARV_3^2)}{2L} B - C_d A_e \sqrt{2g ARV_3}}{S},$$

$$ARV_4 = h_i + k_3 \Delta t, \quad k_4 = \frac{K \frac{(H_0^2 - ARV_4^2)}{2L} B - C_d A_e \sqrt{2g ARV_4}}{S},$$

$$h_{i+1} = h_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \Delta t.$$

ARVUTUS. Tiigi veepeegli dünaamiline kõrgus  
 Algtingimus ja ajasamm

$$t = 0$$

$$h_{i=1} = H_0 = 15 \text{ m}$$

$$\Delta t = 1 \text{ minut} = 60 \text{ s}$$

	Algt.	1440 samm	2880 samm	4320 samm	5760 samm	7200 samm
$h$ (m)	15	13,5994	12,6195	11,9209	11,4159	11,0472
$t$ (tund)	0	24	48	72	96	120

	8640 samm	10 080 samm	11 520 samm	12 960 samm	14400 samm
$h$ (m)	10,7761	10,5758	10,4271	10,3165	10,2340
$t$ (tund)	144	168	192	216	240

	15 840 samm	17 280 samm	18 720 samm	20 160 samm	21 600 samm
$h$ (m)	10,1725	10,1264	10,0920	10,0662	10,0468
$t$ (tund)	264	288	312	336	360

VASTUSED

$\Delta t \approx 360$  tundi = 15 päeva

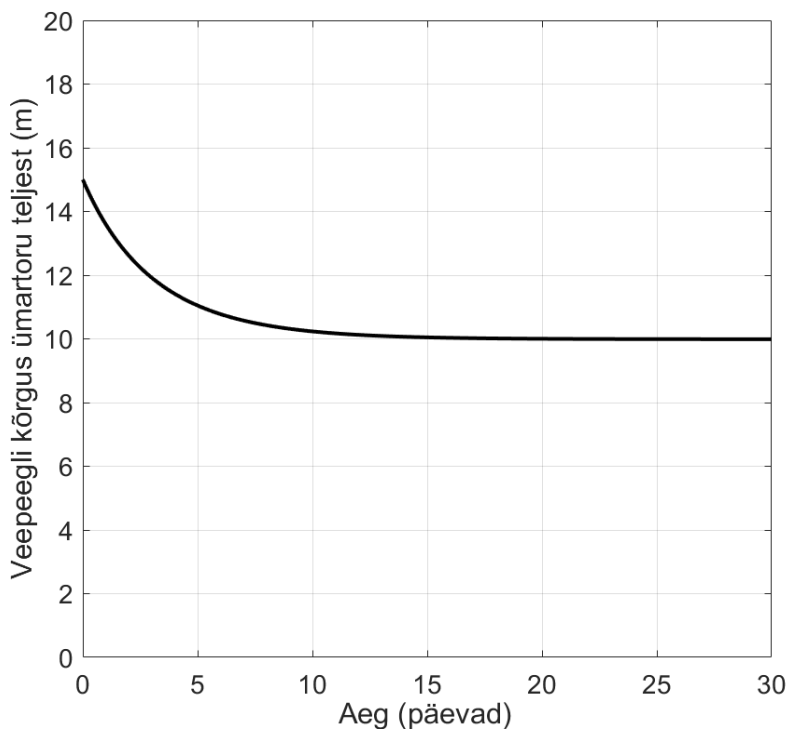
$h(t = 21\ 600 \text{ minutit}) = 10,0468 \text{ m}$

ARVUTUSVIGA

Numbrilise arvutusskeemiga ja proovimismeetodiga määratud väikeveekogu vabapinna statsionaarse voolamise dünaamiliste kõrguste erinevus:

$$|h_{RK} - h_{PM}| = |10,0468 \text{ m} - 10,0 \text{ m}| = 0,0468 \text{ m}.$$





JOONIS 15-4 Väikeveekogu tühjenemine, veepinna vertikaalsel liikumisel suletud-toruga tiigi veepeegli staatiliselt kõrguselt kuni selle avatud-toruga dünaamilise kõrguseni

**JÄRELDUS.** Numbrilisest arvutustulemusest selgub, et väikeveekogu vabapind (tiigi veepeegel) muutub (langeb) kõrguseni, millele filtratsioonivee sissevooluhulk tiiki vastab torustiku väljavooluhulgale, st avatud-toruga dünaamilise kõrguseni (proovimismeetodiga arvatud tiigi veepeegli dünaamilise kõrguseni).

## MÄRKUSED. Veekogu vabapinna tase

- Väikeveekogu läbivoolu põhiülesandes on Bernoulli võrrandi eeldused hästi täidetud, sest tiigi veepeegli vertikaalne liikumiskiirus on oluliselt väiksem voolukiirusest tiigi tühjendustorus ( $u_{vp} \ll u_{tt}$ ), ning seega võib ignoreerida kineetilist energiat voolutoru kuivendustiigi osas.
- Hüdraulilises voolusüsteemis, kus vesi voolab tiigist uputatud torusse, võib tekkida voolamise ahenemine uputatud toru sissevoolus või vabapinnaga voolamine toru väljavoolupoolses osas. See muudab toru läbivoolu hüdraulilist takistust ning sellisel juhul ei ole vooluhulgategur kiirusteguriga antud ehk  $C_d \neq \varphi$ .
- Uputamata väljavoolu tiigist iseloomustab statsionaarne voolamine ehk igal ajahetkel on voolukiirus uputatud torus muutumatu, aga voolutoru ise võib tiigis ajaliselt ümber paikneda. Selle eelduseks on, et tiigi vabapinnal ei moodustu pöörisevaba keerist, mille kaudu võib toimuda vee lokaalne sissevool tiigist väljavoolutorusse.
- Vabapinnaga hüdraulilises voolusüsteemis, kus vesi voolab tiigist uputatud torusse, võib tekkida madala tiigi veepeegli kõrgusest sõltuvalt veepinna keeris (pöörisevaba keeris). See muudab ümartoru läbivoolu hüdraulilist takistust, kuna veepinna liikumisega haaratakse kaasa õhku keerise silmast ning tiigi tühjenemistoru sissevoolu osas tekib vee ja õhu koosvoolamine.
- Prahiresti kasutamine võimaldab vältida voolamise ahenemist tiigi uputatud toru sissevoolus ja veepinna keerisega õhu haaramist tiigi vabapinnalt.
- Väikeveekogu ja tühjendustoru voolusüsteemi prahirest tuleb paigutada uputatud toru tiigipoolsesse osasse ehk toru sissevoolu ette. Prahiresti ei paigutata uputatud toru väljavoolu ette, kuna see võib tekitada torus ummistuse. Toru väljavoolu ette võib paigutada kottvõrgu, et tiigist torusse liikuvat prahti koguda.
- Sademete puudumisel toimub suvistes tingimustes aurumine tiigi veepinnalt. Statsionaarse voolamisel vähendab aurustumine tiigi veepeegli dünaamilist kõrgust, sest väikeveekogu ja tühjendustoru voolusüsteemist eemaldub vett tiigi vabapinnalt lisaks äravoolule ka uputatud ümartorust.
- Sademete esinemisel suvistes tingimustes toimub vee juurdevool tiigi veepinnalt, mis võib kompenseerida ka aurustumise. Kui aurustumine veepinnalt vähendab (alandab) tiigi veepeegli dünaamilist kõrgust, siis sademed suurendavad (tõstavad) tiigi veepeegli dünaamilist kõrgust statsionaarse voolamise olukorras, kuna kuivendustiigi ja tühjendustoru voolusüsteemile lisandub lisaks tiigi kaldapinna infiltratsioonivee juurdevoolule vett ka tiigi vabapinnalt.

- Tiiginõlva kalle muudab ajavahemikku, mille jooksul väikeveekogu vabapind liigub veepeegli vertikaalselt ehk suletud toruga staatiliselt kõrguselt avatud toruga dünaamilise kõrguseni, kuna vee kogus tiigis on võrreldes vertikaalsete nõlvadega tiigi veehulgaga erinev ehk nõlvaga tiigil on tavaliselt väiksem vee akumulatsioon.
- Tiiginõlva kalle võib muuta tiigi veepeegli statsionaarse voolamise olukorra dünaamilist kõrgust põhjusel, et tiigi veepeegli perimeetriga määratud kaldajoone pikkus võib erineda tiigi aluspõhja perimeetriga määratud kaldajoone pikkusest.
- Vooluhulk põhjavee horisontaalsele filtratsioonivoolule on määratud valemiga:

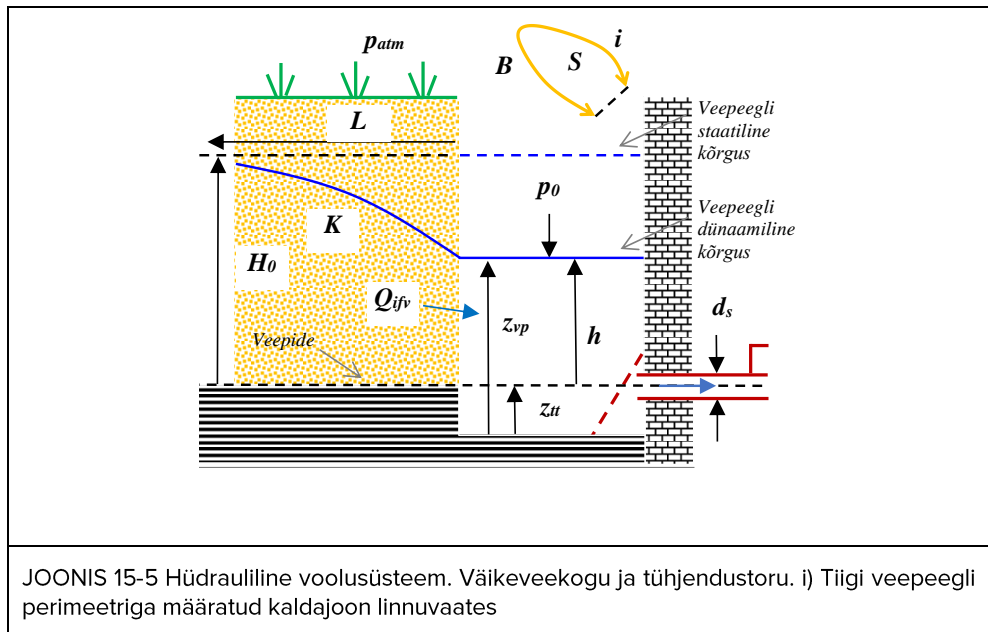
$$Q_{fv} = K \frac{(H_0^2 - h^2)}{2L} B,$$

milles  $K$  on murepinnase horisontaalne filtratsioonimoodul,  $H_0$  on staatiline põhjaveetase veepidemest,  $h$  on tiigi veepeegli kõrgus tiigi tühjendustoru teljest,  $L$  on kuivenduse mõjuulatus ja  $B$  on tiigi murepinnasest kaldajoone pikkus. Tiigi veepeegli kõrgus tuleb üldjuhul valida samaks võrdlustasemega, mille suhtes määratakse staatiline põhjavee tase.

### 15.3 ISESEISVA TÖÖ ÜLESANNE. VEEKOGU PINNATASE

ANTUD. Väikeveekogu, nt tiik, sisepõhja pindalaga  $S = 0,1 \text{ km}^2$ , on täidetud veega. Tiiki on võimalik tühjendada läbi ümartoru, mille sisediaameter  $d_s = 0,5 \text{ m}$  ja torutelje kõrgus  $z_{tt} = 1 \text{ m}$  tiigi sisepõhjast (aluspõhjast), mis on võetud võrdlusnivooks. Tiigi tühjendustoru on varustatud prahirestiga, mille kohttakistustegur  $\zeta = 2$ . Tiigi kallus, kaldajoone pikkusega  $B = 1,46 \text{ km}$ , on murepinnas, mille horisontaalvoolu filtratsioonimoodul  $K = 600 \text{ m.ööpäev}^{-1}$  ja kuivenduse mõjuulatus  $L = 0,4 \text{ km}$ . Murepinnases on staatiline põhjaveetase veepidemest  $H_0 = 11,5 \text{ m}$ . Suletud tühjendustoruga on tiik täidetud veega staatilise kõrguseni, st  $h = H_0$ , ümartoru teljest. Vee temperatuur on  $10 \text{ }^\circ\text{C}$ , tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg.m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata proovimismeetodiga väikeveekogu vabapinna dünaamiline kõrgus tiigi ja tühjendustoru voolusüsteemis. Määrata numbrilise arvutusskeemiga väikeveekogu vabapinna dünaamiline kõrgus hüdraulilises voolusüsteemis. Arvutada ajavahemik, mille jooksul väikeveekogu vabapind liigub vertikaalselt, st suletud-toruga tiigi veepeegli staatiliselt kõrguselt kuni avatud-toruga dünaamilise kõrguseni. Määrata erinevate arvutusmeetodiga saadud tiigi veepeegli dünaamilise kõrguse arvutusviga.



EELDUSED. Uputamata väljavool väikeveekogust on hästi määratud kvaasistatsionaarse voolamisega, st igal ajahetkel on voolamine mittestatsionaarne ja igas ajavahemikus statsionaarne. Survekadu tiigi tühjendustorus on määratud prahiresti läbivoolu takistusega. Väikeveekogu ja ümartoru voolusüsteemi kiirustegur võtta võrdseks vooluhulgateguriga. Põhjavee filtratsiooni vooluhulk tiiki ümbritsevas murepinnases määrab hästi põhjavee infiltratsiooni vooluhulga tiigi kaldapinna läbimisel. Aurumist ja sademeid tiigi vabapinnal mitte arvestada (tuulevaikne ja ilma vihmata olukord). Kasutada Runge-Kutta iteratsioonmeetodit, et koostada numbriline arvutuskeem tiigi tühjenemise ajavahemiku määramisele.

## VASTUSED

Proovimismeetodiga arvatud, väikeveekogu ja tühjendamistoru voolusüsteemi statsionaarse voolamise olukorrale vastav tiigi veepeegli dünaamiline kõrgus üle ümartoru telje:

$$h = 6,0 \text{ m} .$$

Numbrilise arvutuskeemiga arvatud, väikeveekogu ja tühjendamistoru voolusüsteemi statsionaarse voolamise olukorrale vastav tiigi veepeegli dünaamiline kõrgus üle ümartoru telje:

$$h (t = 28\,800 \text{ minutit} = 480 \text{ tundi}) = 6,0178 \text{ m} ,$$

ning vastav väikeveekogu tühjenemise ajavahemik peale tühjendustoru avamist, st kui tiigi veepeegel liigub vertikaalselt (langeb) murepinnase staatilise põhjaveetaseme kõrguselt kuni dünaamilise tiigi veepeegli kõrguseni:

$$\Delta t \approx 480 \text{ tundi} = 20 \text{ päeva} .$$

## ARVUTUSVIGA

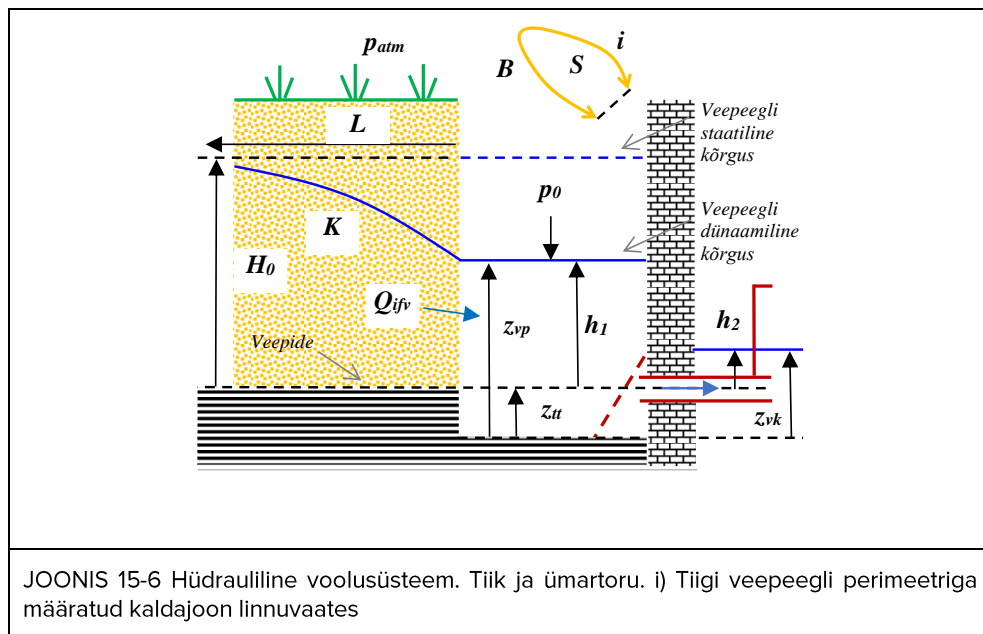
Numbrilise arvutuskeemiga ja proovimismeetodiga määratud tiigi veepeegli statsionaarse voolamise dünaamiliste kõrguste erinevus:

$$|h_{RK} - h_{PM}| = |6,0178 \text{ m} - 6,0 \text{ m}| = 0,0178 \text{ m} .$$

## 15.4 LISAÜLESANNE. VEEKOGU PINNATASE

ANTUD. Väikeveekogu, nt tiiki, sisepõhja pindalaga  $S = 0,1 \text{ km}^2$ , tühjendatakse läbi horisontaalse ümartoru, mille sisediaameter  $d_s = 0,5 \text{ m}$ , pikkus  $l = 100 \text{ m}$  ja torutelje kõrgus  $z_{tt} = 1 \text{ m}$  tiigi sisepõhjast (aluspõhjast), mis on võetud võrdlusnivoos. Tiigi tühjendustoru on varustatud prahirestiga, mille kohttakistustegur  $\zeta = 2$ , ning toru väljavoolu osa on uputatud vooluveekogusse, milles veepinna kõrgus voolusüsteemi võrdlusnivoost  $z_{vk} = 3 \text{ m}$ . Toru hõõrdetakistustegur  $\lambda = 0,02$  ja väljavoolu kohttakistustegur  $k_L = 1$ . Tehistiigi kallas, kaldajoone pikkusega  $B = 1,46 \text{ km}$ , on murepinnas, mille horisontaalvoolu filtratsioonimoodul  $K = 600 \text{ m} \cdot \text{ööpäev}^{-1}$  ja kuivenduse mõjuulatus  $L = 0,4 \text{ km}$ . Murepinnases on staatiline põhjaveetase veepidemest  $H_0 = 15 \text{ m}$ . Tiigi veepinna „suve“ tingimuste aurumise intensiivsus  $INT_{vaur} = 0,0036 \text{ l} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$  ja vihma intensiivsus  $INT_{vihm} = 0,12 \text{ l} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ . Vee temperatuur on  $10 \text{ }^\circ\text{C}$ , tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata tiigi veepeegli dünaamiline kõrgus hüdraulilise voolusüsteemi, tiigi ja survetoru statsionaarsele voolamise puhul. Määrata Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrandiga ümartoru suhteline karedus ja sisepinna absoluutne karedus hüdraulilise voolusüsteemi ühtlase voolamise osas.



EELDUSED. Uputatud väljavool väikeveekogust (tiigist) on hästi määratud statsionaarse voolamisega, st igal ajahetkel on voolukiirus ümartorus muutumatu, aga voolutoru tiigis võib ajaliselt ümber paikneda. Eeldame, et väikeveekogu vabapinnal ei moodustu lokaalset pöörisvaba keerist. Kohtsurvekadu tiigi uputatud ümartorule on määratud prahiresti läbivoolu takistusega ja toru väljavoolu takistusega. Hüdraulilise voolusüsteemi ühtlase voolamise osas määrab hõõrdetakistuse ümartoru sisepinna absoluutne karedus. Tiigi ja ümartoru voolusüsteemi kiirustegur võtta võrdseks vooluhulgateguriga. Hüdraulilises voolusüsteemis on vee voolamine statsionaarne, ning ümartorus on voolamine ühtlane. Põhjavee horisontaalne filtratsiooni vooluhulk tiiki ümbritsevas murepinnases määrab hästi põhjavee infiltratsioonile vooluhulga tiigi kaldapinna läbimisel. Arvestada aurumise ja sademetega tiigi veepeegli „suve“ tingimustes. Kasutada Newtoni iteratsioonmeetodit, et koostada numbriline arvutuskeem ümartoru suhtelise kareduse määramisel hüdraulilise voolusüsteemi ühtlase voolamise osas.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Reaalvoolu Bernoulli võrrand, Darcy survekao valem, Weisbachi survekao valem, Darcy-Weisbachi survekao valem, Toricelli-tüüpi ava valem, kvaasistatsionaarse voolamise pidevuse võrrand, ümartoru Reynolds'i arvu valem, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem**

## VALEMID

Reaalvoolu Bernoulli võrrand voolamisele uputatud ümartorus:

$$z_{sv} + \frac{p_{sv}}{\rho g} + \frac{u_{sv}^2}{2g} = z_{vv} + \frac{p_{vv}}{\rho g} + \frac{u_{vv}^2}{2g} + h_t,$$

milles torutelje kõrgus, rõhk ja voolukiirus ümartoru sissevoolus on vastavalt  $z_{sv} = z_{tt}$ ,  $p_{sv}$  ja  $u_{sv}$ , st tiigi (väikeveekogu) väljavoolus. Torutelje kõrgus, rõhk ja voolukiirus uputatud ümartoru väljavoolus on vastavalt  $z_{vv} = z_{tt}$ ,  $p_{vv}$  ja  $u_{vv}$ , st jõe (vooluveekogu) sissevoolus. Survekadu on  $h_t$ , mis jagatakse hõõrdesurvekaoks  $h_l$  ja kohtsurvekaoks  $h_k$ .

Vabapinna kõrgused võib väikeveekogule ja vooluveekogule määrata torutelje kõrguse suhtes vastavalt rõhule ja voolukiirusele uputatud ümartoru sisse- ja väljavoolu osas, vastavalt:

$$h_1 + z_{tt} = z_{sv} + \frac{p_{sv}}{\rho g} + \frac{u_{sv}^2}{2g} + \zeta \frac{u_{tt}^2}{2g},$$

$$h_2 + z_{tt} = z_{vv} + \frac{p_{vv}}{\rho g} + \frac{u_{vv}^2}{2g} - \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u_{tt}^2}{2g} - k_L \frac{u_{tt}^2}{2g}.$$

Horisontaalses torus on

$$z_{sv} = z_{vv} .$$

Ilma lekketa ja muutumatu vooluristlõikega, st elavlõikega torus on

$$u_{sv} = u_{vv} .$$

Rõhukõrguste vahe ehk rõhuvahekõrgus on

$$\frac{p_{sv}}{\rho g} - \frac{p_{vv}}{\rho g} = \frac{p_{sv} - p_{vv}}{\rho g} = h_{rvk} .$$

Reaalvoolu Bernoulli võrrandist järeldub seos:

$$h_{rvk} = h_t ,$$

milles survekadu on määratud Darcy-Weisbachi survekao valemiga:

$$h_t = \Pi \frac{u_{tt}^2}{2g} ,$$

milles voolukiirus uputatud ümartorus on  $u_{tt}$  ja hüdraulilise voolusüsteemi takistus-  
tegur on

$$\Pi = \lambda \frac{l}{d_s} + \zeta + k_L .$$

Survekadu tiigi ja ümartoru voolusüsteemile on määratud nii hõõrdesurvekaoga

$$h_l = \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u_{tt}^2}{2g} ,$$

milles  $\lambda$  on hõõrdetakistustegur (mõõtühikuta suurus  $[\lambda] = 1$ ),  $l$  on täistaitumusega  
ümartoru pikkus,  $d_s$  on toru sisediaameeter ja  $u_{tt}$  ( $= u_{sv} = u_{vv}$ ) on voolamise  
keskkiirus torus, kui ka kohtsurvekaoga:

$$h_k = \zeta \frac{u_{tt}^2}{2g} + k_L \frac{u_{tt}^2}{2g} ,$$

milles  $\zeta$  on prahiresti läbivoolu takistusega määratud kohttakistustegur (mõõtühikuta  
suurus  $[\zeta] = 1$ ) ja  $k_L$  on tiigi tühjendustoru väljavoolu kohttakistustegur  
(mõõtühikuta suurus  $[k_L] = 1$ ).

Tiigi ja ümartoru voolusüsteemi põhivalem on

$$\Delta h = h_t ,$$

milles

$$\Delta h = h_1 - h_2 ,$$

$$h_t = \Pi \frac{u_{tt}^2}{2g} = \left( \lambda \frac{l}{d_s} + \zeta + k_L \right) \frac{u_{tt}^2}{2g} .$$



Reynoldsi arv on

$$Re = \frac{u_{tt} d_s}{\nu},$$

milles  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur.

Eeldusel, et tiigi veepegli vertikaalne liikumiskiirus on oluliselt väiksem voolukiirusest tiigi tühjendustorus ( $u_{vp} \ll u_{tt}$ ), ning vooluveekogus on peavool aeglane ja selle voolukiirus on praktiliselt risti ümartoru väljavooluga, võime voolukiiruse tühjendustorus määrata valemiga:

$$u_{tt} = \sqrt{\frac{2g}{\Pi} \Delta h} = \sqrt{\frac{2g}{\Pi} ((h_1 + z_{tt}) - (h_2 + z_{tt}))} = \sqrt{\frac{2g}{\Pi} (z_{vp} - z_{vk})},$$

milles hüdraulilise voolusüsteemi takistustegur  $\Pi = \lambda l/d_s + \xi + k_L$ , tiigi veepegli kõrgus üle vooluveekogu vabapinna kõrguse  $\Delta h = h_1 - h_2$ , ning tiigi veepegli kõrguse ja vooluveekogu vabapinna kõrguse vahe on ( $z_{vp} - z_{vk}$ ).

Vooluhulk tiigi uputatud ümartorus on määratud valemiga

$$Q_{tt} = A_e \sqrt{\frac{2g}{\Pi} \Delta h},$$

milles  $A_e$  on täieliku täitumusega ümartoru sisepindala ehk elavlõige:

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4}.$$

Vooluhulk põhjavee horisontaalsele filtratsioonivoolule määratakse valemiga:

$$Q_{fv} = K \frac{(H_0^2 - h_1^2)}{2L} B,$$

milles  $K$  on murepinnase horisontaalne filtratsioonimoodul,  $H_0$  on staatiline põhjaveetase veepidemest,  $h_1$  on tiigi veepegli kõrgus uputatud toru teljest,  $L$  on kuivenduse mõjuulatus ja  $B$  on tiigi murepinnasega määratud kaldajoone pikkus.

Muutuva veepegli kõrgusega tiigile, arvestades ka vee aurumise ja sademetega, võib veehulga (vee koguse) ajalise muutuse määrata hariliku diferentsiaalvõrrandiga:

$$\frac{dV}{dt} = Q_{ifv} + Q_{vihm} - Q_{tt} - Q_{vaur},$$

milles  $Q_{ifv}(t)$  ( $= Q_{fv}(t)$ ) on põhjavee infiltratsiooni vooluhulk,  $Q_{vihm}$  ( $= INT_{vihm} S$ ) on vihmavee vooluhulk tiigi vabapinnale,  $Q_{tt}(t)$  on vooluhulk tiigi tühjendustorus ja  $Q_{vaur}$  ( $= INT_{vaur} S$ ) on aurumise vooluhulk tiigi vabapinnalt. Tiigi veepegli pindala on  $S$ .

Vee kogus väikeveekogus ei muutu statsionaarse voolamise olukorras, st

$$\frac{dV}{dt} = 0$$

→

$$0 = Q_{ifv} + Q_{vihm} - Q_{tt} - Q_{vaur}.$$

*Proovimise arvutusmeetod*

#### VALEMID

Statsionaarsele voolamise puhul, tiigi ja ümartoru voolusüsteemis, võib veepeegli dünaamilise kõrguse  $h_1$  määrata võrrandiga:

$$0 = K \frac{(H_0^2 - h_1^2)}{2L} B + INT_{vihm} S - A_e \sqrt{\frac{2g}{\Pi}} (h_1 - h_2) - INT_{vaur} S,$$

milles

$$\Pi = \lambda \frac{l}{d_s} + \zeta + k_L,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right).$$

Võtame kasutusele proovimismeetodile funktsiooni:

$$funkttsioon(z) = K \frac{(H_0^2 - z^2)}{2L} B + INT_{vihm} S - A_e \sqrt{\frac{2g}{\Pi}} (z - h_2) - INT_{vaur} S,$$

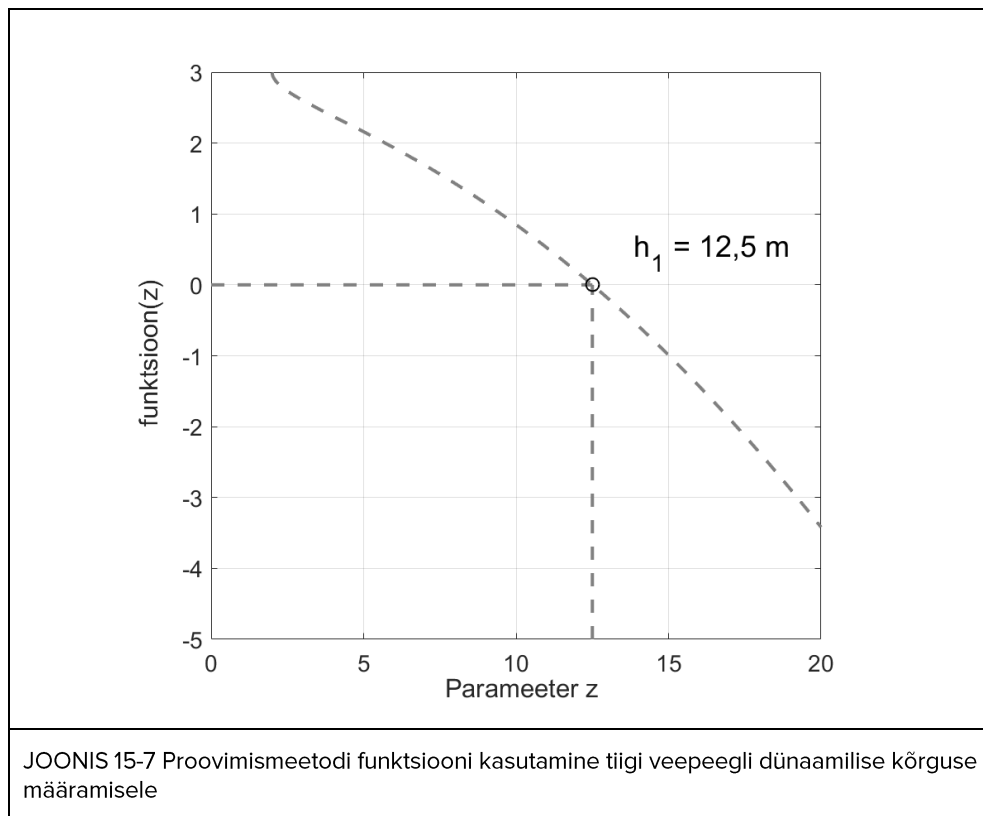
milles  $z$  on otsitav parameeter, ning suurused  $K = 0,00694 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $H_0 = 15 \text{ m}$ ,  $L = 400 \text{ m}$ ,  $B = 1460 \text{ m}$ ,  $INT_{vihm} = 0,12 \text{ l} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} = 2,0 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $S = 100\,000 \text{ m}^2$ ,  $A_e = 0,1963 \text{ m}^2$ ,  $\Pi = 7$ ,  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $h_2 = z_{vk} - z_{tt} = 2 \text{ m}$  ja  $INT_{vaur} = 0,0036 \text{ l} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} = 6,0 \cdot 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  on konstantsete väärtustega.

Hüdraulilise voolusüsteemi takistus on

$$\Pi = \lambda \frac{l}{d_s} + \zeta + k_L,$$

milles konstantsed suurused  $\lambda = 0,02$ ,  $d_s = 0,5 \text{ m}$ ,  $l = 100 \text{ m}$ ,  $\zeta = 2$  ja  $k_L = 1$ .

## ARVUTUS. Tiigi veepeegli dünaamiline kõrgus



Proovimise parameetri vahemikus  $z = 2 \dots 20$  m, saavutab  $funktsioon(z) = 0$  selle argumendi väärtusel  $z \approx 12,5$  m. Proovimismeetodiga arvutatud tiigi veepeegli dünaamiline kõrgus üle uputatud ümartoru telje  $h_1 = 12,5$  m. ( $h_2 = 2$ ).

*Hübriidarvutusmeetod. Uputatud ümartoru suhteline karedus*

### ARVUTUS

Väikeveekogu (tiigi) vabapinna kõrgus üle ümartoru telje:

$$h_1 = 12,5 \text{ m}$$

Vooluveekogu (jõe) vabapinna kõrgus üle ümartoru telje:

$$h_2 = z_{vk} - z_{tt} = 2 \text{ m}$$

Tiigi veepeegli kõrgus üle vooluveekogu vabapinna kõrguse:

$$\Delta h = h_1 - h_2 = 12,5 \text{ m} - 2 \text{ m} = 10,5 \text{ m}$$

Voolukiirus uputatud ümartorus

$$u_{tt} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{7}} \cdot 10,5 \text{ m} = 5,4249 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Reynoldsi arv

$$Re = \frac{5,4249 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 0,5 \text{ m}}{1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} = 20,865 \cdot 10^5$$

Reynoldsi arvu ja täieliku täitumusega suhtelise kareduse erinevatele väärtustele võib hõõrdetakistusteguri määrata Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrandiga:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right).$$

*Numbriline arvutusskeem. Hõõrdetakistustegur*

*Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod*

ARVUTUSSKEEM (Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrand)

Hõõrdetakistusteguri määramise numbriline arvutusskeem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku hõõrdetakistusteguri valem (iteratsioonmeetodi põhivalem):

$$z_{j+1} = z_j - \frac{CW_j - CW}{-\frac{1}{\sqrt{z_j}} \log_{10} \left( \frac{k_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}} \right) + \frac{\frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}}}{\left( \frac{k_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}} \right) \ln(10)}},$$

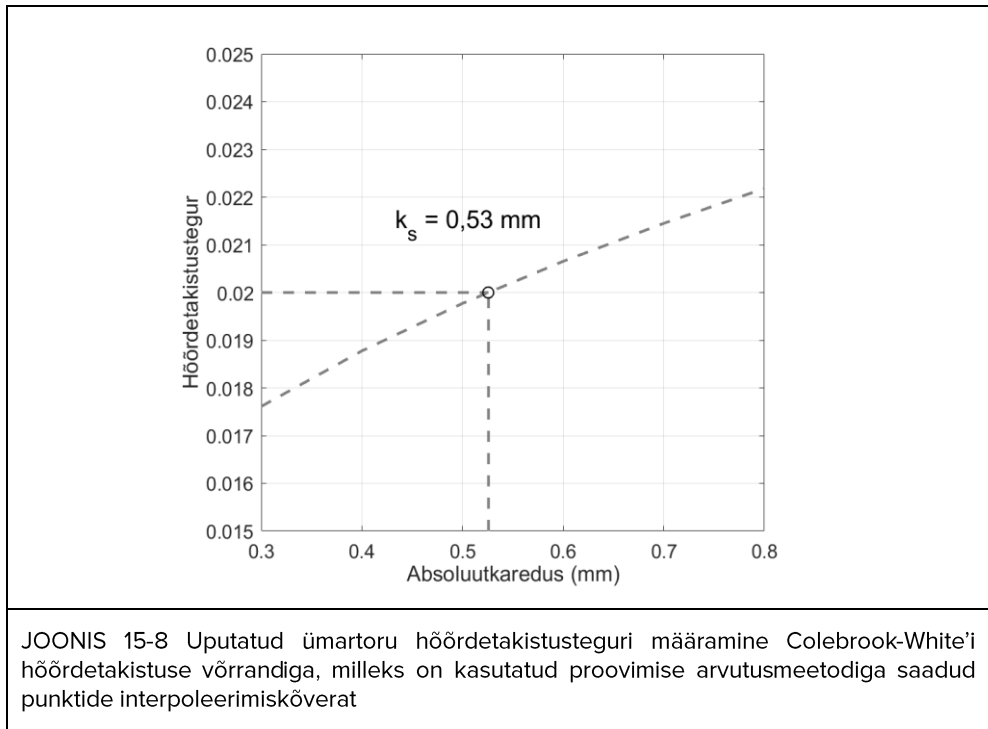
milles  $CW = 1$ .

Arvutusliku Colebrook-White'i hõõrdetakistusteguri funktsiooni valem:

$$CW(z_j) = -2 \sqrt{z_j} \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}} \right).$$

Proovimise arvutusmeetod

ARVUTUS. Täistäitumusega ümartoru absoluutkaredus



ARVUTUS. Numbriliselt arvatud hõõrdetakistusteguri väärtused

	<b>Re</b>	$d_s$ (m)	$k_s$ (mm)	$k_s/d_s$ (m. m <sup>-1</sup> )	$\lambda$
I	$20,865 \cdot 10^5$	0,5	0,3	$6,0 \cdot 10^{-4}$	0,0176
II	$20,865 \cdot 10^5$	0,5	0,4	$8,0 \cdot 10^{-4}$	0,0188
III	$20,865 \cdot 10^5$	0,5	0,5	$10,0 \cdot 10^{-4}$	0,0198
IV	$20,865 \cdot 10^5$	0,5	0,6	$12,0 \cdot 10^{-4}$	0,0207
V	$20,865 \cdot 10^5$	0,5	0,7	$14,0 \cdot 10^{-4}$	0,0215
VI	$20,865 \cdot 10^5$	0,5	0,8	$16,0 \cdot 10^{-4}$	0,0222

VASTUSED

$$\lambda = 0,02$$

$$k_s = 0,53 \text{ mm}$$

$$\frac{k_s}{d_s} = \frac{0,53 \text{ mm}}{0,5 \text{ m}} = 1,06 \text{ mm. m}^{-1} = \frac{1,06}{1000} \text{ m. m}^{-1} = 10,6 \cdot 10^{-4} \text{ m. m}^{-1}$$

**MÄRKUS.** Kui tiigi ja ümartoru voolusüsteemis sisse- ja väljavoolu vee koguste bilansis vihmaga mitte arvestada, st „suve“ tingimuste aurumise intensiivsus  $INT_{vaur} = 0,0036 \text{ l. min}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$  ja vihma intensiivsus  $INT_{vihm} = 0,0$ , siis proovimise parameetri vahemikus  $z = 2 \dots 20 \text{ m}$ , saavutab funktsioon( $z$ ) = 0 selle argumendi väärtusel  $z \approx 11,95 \text{ m}$ . Proovimismeetodiga arvatud tiigi veepeegli dünaamiline kõrgus üle uputatud ümartoru telje  $h_1 = 11,95 \text{ m}$ . ( $h_2 = 2$ ).

**MÄRKUS.** Vihma intensiivsuse mõõtühikute teisendused:

$$INT_{vihm} = 1 \text{ mm. min}^{-1} \equiv 1 \text{ l. min}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} = 166,7 \text{ l. s}^{-1} \cdot \text{ha}^{-1}$$

$$1 \text{ mm. min}^{-1} \equiv 60 \text{ mm. h}^{-1} = 166,7 \text{ l. s}^{-1} \cdot \text{ha}^{-1}$$

$$1 \text{ mm. h}^{-1} = \frac{166,7}{60} \text{ l. s}^{-1} \cdot \text{ha}^{-1} = 2,7783 \text{ l. s}^{-1} \cdot \text{ha}^{-1}$$

## 15.5 VIITED

- 15.1 Veeseadus. (2020). *RT I, 10.12.2020, 36.*  
<https://www.riigiteataja.ee/akt/110122020036>
- 15.2 Rannap, V., Rannap, R., Lepik, I. *Tiigid. Tiikide rajamine ja taastamine.* Keskkonnaamet. <https://keskkonnaamet.ee> › media › download
- 15.3 Elken, J. (2000). *Merefüüsika ja hüdroloogia.* MLF 1161
- 15.4 Elken, J., Lips, U., Keevallik, S., Lips, I. & Raudsepp, U. (2018). *Füüsikaline okeanograafia. Läänemeri.* Tallinna Tehnikaülikooli Kirjastus.
- 15.5 Water Science School. (2019, 7. juuli). *How Much Does a Cloud Weigh?*  
[https://www.usgs.gov/special-topic/water-science-school/science/how-much-does-a-cloud-weigh?qt-science\\_center\\_objects=0#qt-science\\_center\\_objects](https://www.usgs.gov/special-topic/water-science-school/science/how-much-does-a-cloud-weigh?qt-science_center_objects=0#qt-science_center_objects)
- 15.6 Karing, P. (1992). *Õhutemperatuur Eestis.* Eesti Teaduste Akadeemia, Eesti Geograafia Selts, Valgus.
- 15.7 Tibar, H. (1988). *Vihmavee-, ühisvoolne ja poollahkvoolne kanalisatsioon: õppevahend.* Tallinna Polütehniline Instituut, Sanitaartehnika kateeder.15.10.
- 15.8 Kõiv, T.-A. & Rant, A. (2013). *Hoonete küte.* Tallinna Tehnikaülikooli kirjastus.
- 15.9 Pachel, K. (2014). *Sademevee kanalisatsiooni perspektiivsed lahendused.* Tallinna Tehnikaülikool.
- 15.10 Tamm, T., Tamm, O. & Saaremäe, E. (2020). *Sademeveesüsteemide projekteerimise aluste kaasajastamine.* Eesti Maaülikool.
- 15.11 OÜ Alkranel. (2005). *Alternatiivsete sademevee äravoolu- ja kogumis-süsteemide uurimustöö.*

# III MÕÕDUKALT EBAÜHTLANE VOOLAMINE

## 16 TEOORIA. HÜDRAULIKA PRINTSIIBID

### 16.1 PÕHIPRINTSIIBID. MASS, LIIKUMISHULK JA ENERGIA

#### 16.1.1 VOOLAMISE PIDEVUS

Kokkusurumatu vedeliku eeldusel, milles hüdraulilise voolusüsteemi sissevoolu vedeliku tihedus on sama, mis süsteemist väljavoolava vedeliku tihedus, st  $\rho_{sv} = \rho_{vv}$ , võib voolamise pidevuse võrrand (VALEM (2-1)) lihtsustada seoseks süsteemi vooluhulkadele (VALEM (2-3)):

$$Q_{sv} = Q_{vv} ,$$

milles hüdraulilisse voolusüsteemi sissevooluhulk  $Q_{sv} = u_{sv} A_{esv}$  ja väljavooluhulk  $Q_{vv} = u_{vv} A_{evv}$ . Seda matemaatilist seost tuntakse kui voolamise pidevuse võrrandit statsionaarsele voolamisele. Voolamise pidevuse võrrand ühtlasele voolamisele on

$u_{sv} = u_{vv} .$	16-1
---------------------	------

(VIIDE 16.1, „Rakenduslik hüdromehaanika“.)

#### 16.1.2 VOOLAMISE LIIKUMISHULK

Hüdraulilise voolusüsteemi, nagu survetoru, voolusäng, ülevool vms voolamise liikumishulk on määratud valemiga (VALEM (2-4))

$u m = u (\rho Q) \Delta t,$	16-2
------------------------------	------

milles hüdraulilises voolusüsteemis oleva vedelikuosa kiirus on  $u$  ja mass on  $m$ . Voolusüsteemi massivoog  $\dot{m} = \rho Q$ , milles vedeliku tihedus on  $\rho$  ja vooluhulk on  $Q$ . Statsionaarse voolamise puhul määrab voolujõud ( $\vec{F}_F$ ) hüdraulilises voolusüsteemis massijõudude ( $\vec{F}_M$ ) ja pinnajõudude ( $\vec{F}_S$ ) summa (VALEM (2-6)):

$$\vec{F}_F + \vec{F}_M + \vec{F}_S = 0 ,$$

milles voolujõud on määratud valemiga (VALEM (2-5))

$$|\vec{F}_F| = u_{sv} \{-\rho u_{sv} A_{esv}\} + u_{vv} \{\rho u_{vv} A_{evv}\} .$$

**MÄRKUS.** Mõõdukalt ebäühtlasele voolamisele hüdraulilises voolusüsteemis arvestatakse ainult voolamise liikumishulga ruumilist muutust ning jäetakse arvestamata voolamise liikumishulga ajaline muutus. (VIITED 16.2, 16.3, 16.4)

### 16.1.3 VOOLAMISE MEHAANILINE ENERGIA

Hüdraulilise voolusüsteemi, nagu survetoru, voolusäng, ülevool vms ideaalvedeliku mehaaniline energia süsteemi sisse- ja väljavoolule on määratud võrrandiga (VALEM (2-9)):

$$z_{sv} + \frac{p_{sv}}{\rho g} + \frac{u_{sv}^2}{2g} = z_{vv} + \frac{p_{vv}}{\rho g} + \frac{u_{vv}^2}{2g},$$

milles hüdraulilise voolusüsteemi voolutoru teljega määratud kõrgus, rõhk ja voolukiirus voolutoru sissevoolus on vastavalt  $z_{sv}$ ,  $p_{sv}$  ja  $u_{sv}$ . Hüdraulilise voolusüsteemi voolutoru teljega määratud kõrgus, rõhk ja voolukiirus voolutoru väljavoolus on vastavalt  $z_{vv}$ ,  $p_{vv}$  ja  $u_{vv}$ . Ideaalvedeliku mehaanilise energia võrrandit (VALEM (2-9)) kasutatakse reaalvoolule (VALEM (2-10)) kui lisaks hüdraulilise voolusüsteemi sisse- ja väljavoolu Bernoulli kolmikliikmele võetakse kasutusele  $h_t$ , mis on survekadu, ning see jagatakse hõordesurvekaoks  $h_l$  ja kohtsurvekaoks  $h_k$  (VALEM(2-25)).

**MÄRKUS.** Reaalvedeliku mehaanilise energia võrrandit (VALEM (2-10)) tuntakse kui reaalvoolu Bernoulli võrrandit. (VIITED 16.2, 16.3, 16.4)

## 16.2 PAISUTAMINE

### 16.2.1 ÜLEVOOLU PÕHIVALEM

Ideaalvedeliku Bernoulli võrrand ülevoolule VALEM (2-18) on

$$h_{pais} + PK \approx h_{pais} + d + \frac{u^2}{2g},$$

milles  $h_{pais}$  on paisu kõrgus,  $PK$  on paisutuskõrgus ja  $d$  on veekihi sügavus paisu lävel,  $g$  on raskuskiirendus ja  $u$  on voolukiirus paisu lävel. Ideaalvedeliku Bernoulli võrrandis ülevoolule (VALEM (2-18)) on eeldatud, et paisu ülemises bjefis on voolamise kineetiline energia oluliselt väiksem potentsiaalsest energiast. Potentsiaalne erienergia paisu ülemises bjefis on määratud suurusega  $h_{pais} + PK$ .

Vabapinnaga voolamise mehaaniline energia jagunemine potentsiaalse ja kineetilise energia vahel määrab Froude'i arvu  $Fr$ , mis vastab kriitilisele voolamise kui  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule vastavalt kui  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .



Paisutuskõrguse  $PK$  järgi vooluhulga määramise valem  $Q = u A_e$ , milles  $u$  on voolukiirus ja  $A_e$  on elavlõige, nimetatakse maksimaalse vooluhulga valemiks juhul kui paisu lävel  $F_r = 1$ . Reaalvedeliku paisutamisel täiendatakse maksimaalse vooluhulga valem  $C_d < 1$ . Ideaalvedeliku voolamise tingimustel on vooluhulgategur  $C_d = 1$ .

Maksimaalse vooluhulga valemi võib üldistada ruutastmelise ristlõike perimeetriaga voolusängi voolamiste juhule, milles võetakse kasutusele ristlõike kujutegur  $\xi$  ja voolusängi aluspõhja laius  $w$  asendatakse maksimaalse voolulaiusega, st vee pealtlaiusega  $W$  (vt LISA I).

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2 PK}{1 + 2 \xi} \right)^{\frac{3}{2}} W$$

**MÄRKUS.** Ruutastmeline kõverjoone ordinaat sõltub abstsissist kui  $z = y^{2/(2\xi-2)}$ , milles  $\xi$  on vooluristlõike kujutegur.  $\xi = 1, 3/2, 2$  vastab nelinurkse, ruutparaboolse, kolmnurkse ristlõike perimeetritele.

Nelinurkse ristlõikega ( $\xi = 1$ ) ülevoolu maksimaalse vooluhulga valem ideaalvoolule (VALEM (2-22)) on

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w,$$

milles  $Q$  on vooluhulk,  $g$  on raskuskiirendus,  $PK$  on paisutuskõrgus ja  $w$  on nelinurkava laius tehiskanali paisu asukohas. Kui võtta kasutusele ülevoolule vooluhulgategur  $C_d$ , siis võib nelinurkse ristlõikega ( $\xi = 1$ ) ülevoolu maksimaalse vooluhulga valem  $C_d < 1$  reaalvoolule (VALEM (2-23)) kasutada ülevoolu põhivalemi (VALEM (2-24)) tuletamisele:

$$Q = C_d g^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}} w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}} = C_d^* w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}},$$

milles ülevoolutegur on

$$C_d^* = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}}.$$

## 16.2.2 ÜHTLASE VOOLAMISE VALEM

Ühtlasele voolamisele võib kasutada Manningi vooluhulga valemit (VALEM (2-36)):

$$Q = \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e I_h^{\frac{1}{2}}}{n_M},$$

milles  $Q$  on vooluhulk,  $n_M$  on Manningi karedustegur,  $A_e = h w$  on nelinurkristlõikega tehissängi elavlõige, milles  $h$  on vabapinna kõrgus tehissängi aluspõhjast (horisontaalne ristlõike perimeetri osa) ja  $w$  on tehissängi laius. Hüdrauliline raadius  $R_h = A_e/\chi$ , milles  $\chi = w + 2h$  on voolamise ristlõikega (voolulõikega) antud märgpiirde pikkus, millest on välja jäetud vabapind.  $I_h$  on hüdrauliline lang.

Ühtlasele vabapinnaga voolamisele prismaatilises tehissängis on hüdrauliline lang määratud põhjalanguga, st  $I_h = i_0$ .

Reynoldsi arv vabapinnaga voolamise puhul ehk voolusängi Reynoldsi arv (VALEM (3-8)) on

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur ja  $R_h$  on hüdrauliline raadius. Voolamisel täistäitumusega ümartorus, sisediameetriga  $d_s = 4 R_h$ , määratakse Reynoldsi arv valemiga:

$$Re = \frac{u d_s}{\nu} = \frac{u 4 R_h}{\nu} = 4 Re_{vs}$$

Kuna veevoolule ümartorus vastav kriitiline Reynoldsi arv on 2000, siis järelikult laminaarse ja turbulentsse voolamise ülemineku kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on 500.

Vabapinna kõrgus tehissängi aluspõhjast määrab tehissängi aluspõhja sügavuse vabapinnast:

$$h = -(-d) = d.$$

## 16.2.3 TEHISSÄNGI VABAVOOLU PARAMEETRISEERIMINE

Bernoulli funktsioon vabapinnaga voolamisele on

$$B = \frac{u^2}{2g} + h + h_s,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $g$  on raskuskiirendus,  $h$  on veepinna kõrgus tehissängi aluspõhjast ja  $h_s$  on tehissängi aluspõhja kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult.

Erinevate nõlvustega  $m_{n1}$  ja  $m_{n2}$  trapetsristlõikega tehissängile võib voolukiiruse määramisele kasutada voolamise ruumkiiruse valemit:

$$u = \frac{Q}{A_e} = \frac{Q}{h w + h^2 m_{n1}/2 + h^2 m_{n2}/2} = \frac{Q}{h^2 (\beta + m_{n1}/2 + m_{n2}/2)},$$

milles  $A_e = h^2 (\beta + m_{n1}/2 + m_{n2}/2)$  on erinevate nõlvustega trapetsristlõikega voolusängi elavlõige. Voolamise ristlõike lamedus  $\beta = w/h$ , milles  $w$  on tehissängi aluspõhja laius ja  $h$  on vabapinna kõrgus tehissängi aluspõhjast. (Ühtlasele voolamisele  $h = d_0$ , milles  $d_0$  on normaalsügavus.) Nõlvustegurid  $m_{n1} = \cot(\theta_1)$  ja  $m_{n2} = \cot(\theta_2)$ , milles  $\theta_1$  ja  $\theta_2$  on vastavalt tehissängi erinevate nõlvade välisnurgad. Hüdrauliline raadius  $R_h = A_e/\chi$ , milles  $\chi = h (\beta + \sqrt{1 + m_{n1}^2} + \sqrt{1 + m_{n2}^2})$  on erinevate nõlvustega trapetsristlõike märgpiire.

Bernoulli funktsiooni vabapinnaga voolamisele võime teisendada kujule:

$$B = \frac{u^2}{2g} + h + h_s = \frac{Q^2}{2g h^4 (\beta + m_{n1}/2 + m_{n2}/2)^2} + h + h_s$$

$$= \frac{Q^2}{2g (h w + h^2 m_{n1}/2 + h^2 m_{n2}/2)^2} + h + h_s.$$

Kui kasutada funktsiooni ekstreemumi määramise teoreemi veepinna kõrguse  $h$  järgi:

$$\frac{dB}{dh} = 0,$$

siis järeldub Bernoulli funktsioonist  $B = f(h, Q, g, w, m_{n1}, m_{n2}, h_s)$ , milles  $h$  on muutuja ja  $Q, g, w, m_{n1}, m_{n2}, h_s$  on konstantsed suurused, järgmine avaldis:

$$-\frac{2Q^2(w + h m_{n1} + h m_{n2})}{2g \left(h w + h^2 \frac{m_{n1}}{2} + h^2 \frac{m_{n2}}{2}\right)^3} + 1 = -\frac{Q^2(w + h m_{n1} + h m_{n2})}{g \left(h w + h^2 \frac{m_{n1}}{2} + h^2 \frac{m_{n2}}{2}\right)^3} + 1 = 0.$$

Erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängi vabavoolu Froude'i arv astmes 2 on määratud valemiga:

$\mathbf{Fr}^2 = \frac{Q^2}{g \frac{\left(h w + h^2 \frac{m_{n1}}{2} + h^2 \frac{m_{n2}}{2}\right)^3}{(w + h m_{n1} + h m_{n2}) u^2}}$ $= \frac{\left(h w + h^2 \frac{m_{n1}}{2} + h^2 \frac{m_{n2}}{2}\right)'}{g (w + h m_{n1} + h m_{n2})}$	16-3
--	------

milles on kasutatud seost  $u = Q/(h w + h^2 m_{n1}/2 + h^2 m_{n2}/2)$ . Kriitilisele vabavoolule vastab  $\mathbf{Fr} = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule vastavad  $\mathbf{Fr} < 1$  ja  $\mathbf{Fr} > 1$ .

Erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängi vabavoolu Froude'i arv ruudus valem teiseneb samade nõlvustega trapetsristlõikega, nelinurk- ja erinevate nõlvustega kolmnurkristlõikega tehiskanali Froude'i arv ruudus valemiks vastavalt tingimusel  $m_{n1} = m_{n2} = m_n$ ,  $m_{n1} = m_{n2} = 0$  ja  $w = 0$ .

$$m_{n1} = m_{n2} = m_n \text{ (VALEM (10-17))}$$

→

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g \frac{(h w + h^2 m_n)^3}{(w + 2 h m_n)}} = \frac{u^2}{g \frac{(h w + h^2 m_n)}{(w + 2 h m_n)}}$$

$$m_{n1} = m_{n2} = 0 \text{ VALEM (10-7)}$$

→

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g h^3 w^2} = \frac{u^2}{g h}$$

$$w = 0$$

→

$Fr^2 = \frac{Q^2}{g \frac{\left(h^2 \frac{m_{n1}}{2} + h^2 \frac{m_{n2}}{2}\right)^3}{(h m_{n1} + h m_{n2})}} = \frac{u^2}{g \frac{\left(h^2 \frac{m_{n1}}{2} + h^2 \frac{m_{n2}}{2}\right)}{(h m_{n1} + h m_{n2})}}$	16-4
--	------

Erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängi vabavoolu Froude'i arv ruudus valemit on võimalik lihtsustada ka tehissängi liitprofiilidega voolamiste erijuhtudele, milles on kombineerid tingimusi:  $m_{n1} = 0$ ,  $m_{n2} = 0$  ja  $w = 0$ . Näiteks püstise ja kaldes nõlvadega ristlõikega, millel on rõhtne aluspõhi, tehissängi vabavoolu Froude'i arv ruudus valem:

$Fr^2 = \frac{Q^2}{g \frac{(h w + h^2 \frac{m_{n2}}{2})^3}{(w + h m_{n2})}} = \frac{u^2}{g \frac{(h w + h^2 \frac{m_{n2}}{2})}{(w + h m_{n2})}}$	16-5
--	------

**MÄRKUS.** Nii erinevate nõlvustega trapetsristlõikega, samade nõlvustega trapetsristlõikega vms kriitilise vabapinnaga voolamisele  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule vastavad  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

## 16.2.4 MÕÕDUKALT EBAÜHTLASE VABAVOOLU DIFERENTSIAALVÖRRAND

Bernoulli kolmikliikme voolusuunaline muutus puudub ideaalvedeliku voolamise puhul. Mõõdukalt ebaühtlasele reaalvoolule on Bernoulli kolmikliikme tehissängi aluspõhja suunaline ( $x'$  – pööratud koordinaattelje suunaline) diferentsiaalne muutus (vähenemine) määratud hüdraulilise languga:

$\frac{\partial B}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{u^2}{2g} + h + h_s \right) = -I_h,$	16-6
---	------

milles  $I_h$  on hüdrauliline lang ja  $x'$  on tähissängi pikikalde nurgaga  $\theta$  määratud koordinaat.

Voolamise erienergia on määratud kui

$E_s = \frac{u^2}{2g} + h = \frac{Q^2}{2g A_e^2} + h,$	16-7
--	------

milles on võetud kasutusele vooluhulk  $Q$  ja elavlõige  $A_e$ .  $A_e = h^2 (\beta + m_n)$ .  $\beta = w/h$ .

Mõõdukalt ebaühtlase reaalvoolu puhul on voolamise erienergia voolusängi aluspõhja suunaline ( $x'$  – pööratud koordinaattelje suunaline) diferentsiaalne muutus määratud põhja langu (voolusängi pikikalde) ja hüdraulilise langu vahega:

$\frac{\partial E_s}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{u^2}{2g} + h \right) = -\frac{\partial h_s}{\partial x'} - I_h \approx i_0 - I_h,$	16-8
--	------

milles  $\partial h_s / \partial x'$  on määratud põhjalanguga  $i_0$  eeldusel, et  $(\cos(\theta))^2 \approx 1$ .

Voolamise erienergia funktsioonist  $E_s = f(h)$  tuleb muutuja  $h$  järgi, eeldusel et parameetrid  $Q, g, w$  ja  $m_n$  on konstantsed suurused, määrab avaldise:

$\begin{aligned} \frac{\partial E_s}{\partial h} &= \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{Q^2}{2g A_e^2} + h \right) = \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{Q^2}{2g (hw + h^2 m_n)^2} + h \right) \\ &= -\frac{(w + 2hm_n) Q^2}{g (hw + h^2 m_n)^3} + 1. \end{aligned}$	16-9
--	------

Mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand on

$\frac{dh}{dx'} \approx \frac{i_0 - I_h}{1 - Fr^2},$	16-10
--	-------

milles  $I_h$  on hüdrauliline lang,  $i_0$  on põhjalang ja  $Fr$  on Froude'i arv.

## 16.3 VIITED

- 16.1 Laanearu, J. (2019). *Rakenduslik hüdromehaanika*. Tallinna Tehnikaülikooli kirjastus.
- 16.2 Vreugdenhil, C. B. (1994). *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Kluwer Academic Publisher.
- 16.3 Chadwick, A., Morfett, J. & Borthwick, M. (2004). *Hydraulics in Civil and Environmental Engineering*. Spon Press.
- 16.4 Chow, V. T., Maidment, D. R. & Mays, L. W. (1988). *Applied Hydrology*. McGraw-Hill Education.

# 17 ARVUTUSMEETOD. LÕPLIKE VAHEDE MEETOD

## 17.1 NUMBRILINE ARVUTUSMEETOD HÜDRAULIKAS

Numbrilise arvutusmeetodi kasutamine on vajalik kui hüdraulilise voolusüsteemi valemeid või võrrandeid kasutatakse ruumiliselt muutuvate vooluprotsesside arvutamiseks. Näiteks võib tuua hüdraulilise voolusüsteemi veepinna muutuse statsionaarsele voolamisele voolusängis. Lihtsamat numbrilist arvustuskeemi on võimalik kasutada voolamise tingimustel, mis vastab ühtlasele voolamisele, kuid on vajalik arvutada ka mõõdukalt ebaühtlast voolamist hüdraulilises voolusüsteemis, milles vooluhulk on funktsioon hüdraulilistest suurustest:

$Q = f(h_1, h_2, \dots),$	17-1
---------------------------	------

## 17.2 NEWTON-LEIBNIZI VALEM

Ühe muutujaga funktsiooni määratud integraali arvutamisele kasutatakse Newton-Leibnizi valemit:

$\int_a^b f(z) dz = F(z) _a^b = F(b) - F(a),$	17-2
---	------

milles  $F(z)$  on funktsiooni  $f(z)$  algfunktsioon, st  $F'(z) = dF(z)/dz = f(z)$  on määratud lõigul  $(a, b)$ . Newton-Leibnizi integreerimisvalemit on võimalik kasutada kui algfunktsioon on määratud elementaarfunktsioonidega, mille tuletised on üheselt määratud. Üldiselt tuleb siiski funktsioonide integreerimisele kasutada ligikaudseid valemeid, st numbrilisi arvutusmeetodeid (VIIDE 17.1, „Arvutusmeetodid“).

## 17.3 HARILIK DIFERENTSIAALVÖRRAND. RUUMILINE MUUTUJA

Funktsiooni (nagu voolamise hüdraulika võrrandi) ruumilise muutuja, st funktsiooni argumendi (hüdraulilise suuruse) integreerimisele koos selle algväärtusega, kasutatakse numbrilist arvutusmeetodit. Määrame mittevektormuutuja ruumilise muudu (diferentsiaali) hariliku diferentsiaalvõrrandiga ja algväärtusega:

$\frac{dz(x)}{dx} = f(z(x), x),$ $z(x_0) = z_0,$	17-3
--	------

milles  $z(x)$  on ruumilisest koordinaadist  $x$  sõltuv muutuja (näiteks vabapinna kõrgus voolusängis) ja  $z_0$  on selle algväärtus (näiteks vabapinna kõrgus voolusängis, paisu ülemises bjefis vms). Diferentsiaalvõrrandis määratakse muutuja ruumiline muut (diferentsiaal) diferentsiaalselt väikesele ruumivahemikule  $dx$ . (VIIDE 17.2)

## 17.4 VÄIKESE KORDAJAGA ASTMERIDA. TAYLORI RIDA RUUMIVAHEMIKULE

Numbrilises ülesandes võetakse kasutusele arvutusskeem diskreetsete ruumipunktide ja ruumivahemikuga:

$x_j = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ $\Delta x = x_{j+1} - x_j.$	17-4
---	------

Numbrilisel integreerimisel reeglina eeldatakse, et ruumivahemik  $\Delta x = \textit{konstant}$ .

Ruumikoordinaadist  $x$  sõltuva muutuja  $z(x + \Delta x)$  võib arendada Taylori ritta (VALEM (11-2)):

$$z(x + \Delta x) = z(x) + \frac{\Delta x^1}{1!} z'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} z''(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} z'''(x) + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} z^{(n)}(x),$$

et määrata muutuja väärtus ruumivahemiku  $\Delta x$  täpsusega. Taylori reast võib koostada Taylori valemi ritta arenduse järguga  $n$ . Näiteks Taylori valem 1-järgu ( $n = 1$ ) tuletise täpsusega (VALEM (11-3)) on

$$z(x + \Delta x) = z(x) + \Delta x z'(x).$$

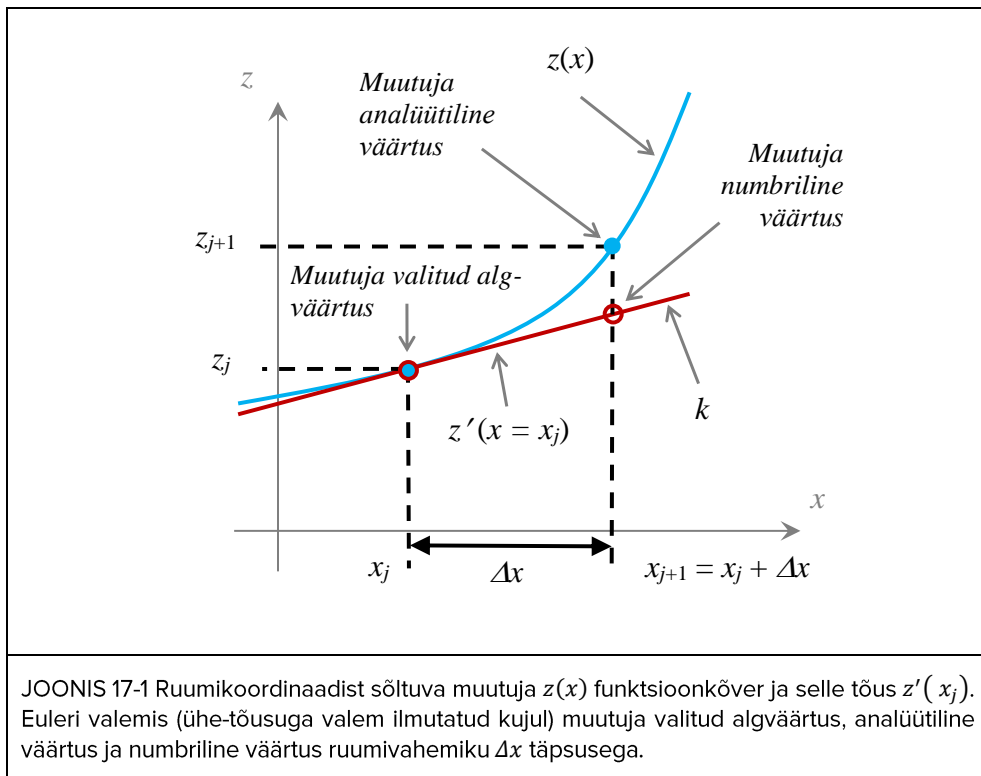
## 17.5 EULERI NUMBRILINE ARVUTUSMEETOD. ILMUTATUD KUJUGA ARVUTUSSKEEM

Taylori valemit 1-järgu ( $n = 1$ ) tuletise täpsusega kasutatakse Euleri valemi koostamiseks numbrilisele arvutusskeemile, mis vastab ühe-tõusuga valemile ilmutatud kujul:

$z_{j+1} = z_j + f(z_j) \Delta x,$	17-5
------------------------------------	------



milles  $f(z_j)$  määrab muutuja ruumilise tuletise  $z'(x_j)$  ruumikoordinaatidega  $x_j$ . Muutuja ruumiline tuletis Euleri valemis määrab muutuja funktsioonkõvera puutuja, st tõusu ruumipunktis  $x_j : k = z'(x_j)$ .

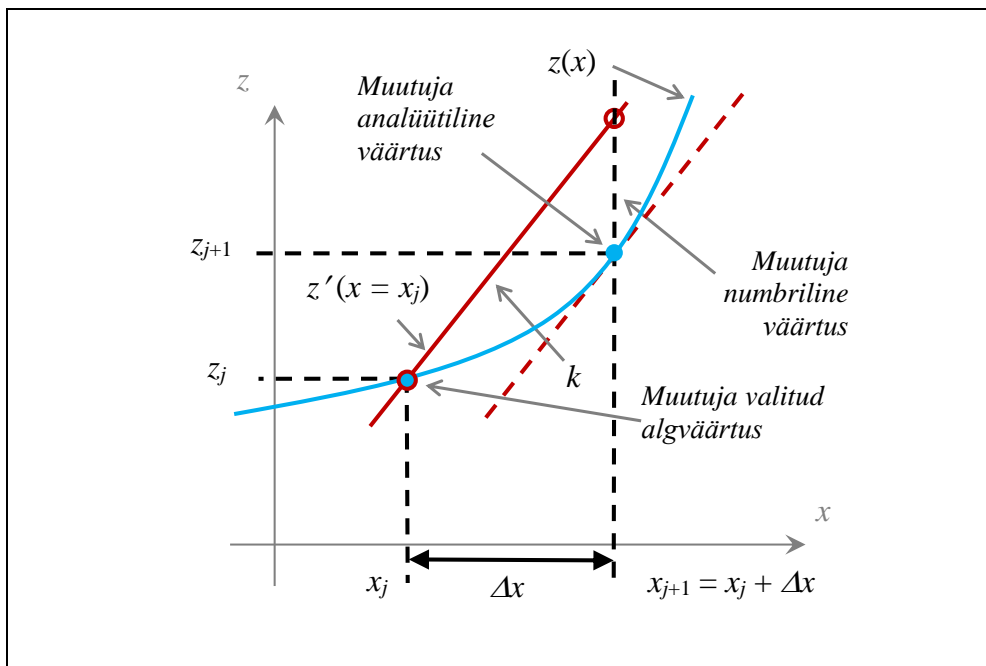


## 17.6 EULERI NUMBRILINE ARVUTUSMEETOD. ILMUTATA KUJUGA ARVUTUSSKEEM

Taylori valemit 1-järgu ( $n = 1$ ) tuletise täpsusega kasutatakse Euleri valemi koostamiseks numbrilisele arvutusskeemile, mis vastab ühe-tõusuga valemile ilmutamata kujul:

$z_{j+1} = z_j + f(z_{j+1}) \Delta x,$	17-6
--	------

milles  $f(z_{j+1})$  määrab muutuja ruumilise tuletise  $z'(x_{j+1})$  ruumikoordinaatidega  $x_{j+1}$ . Muutuja ruumiline tuletis Euleri valemis määrab muutuja funktsioonkõvera puutuja, st tõusu ruumipunktis  $x_{j+1} : k = z'(x_{j+1})$ .



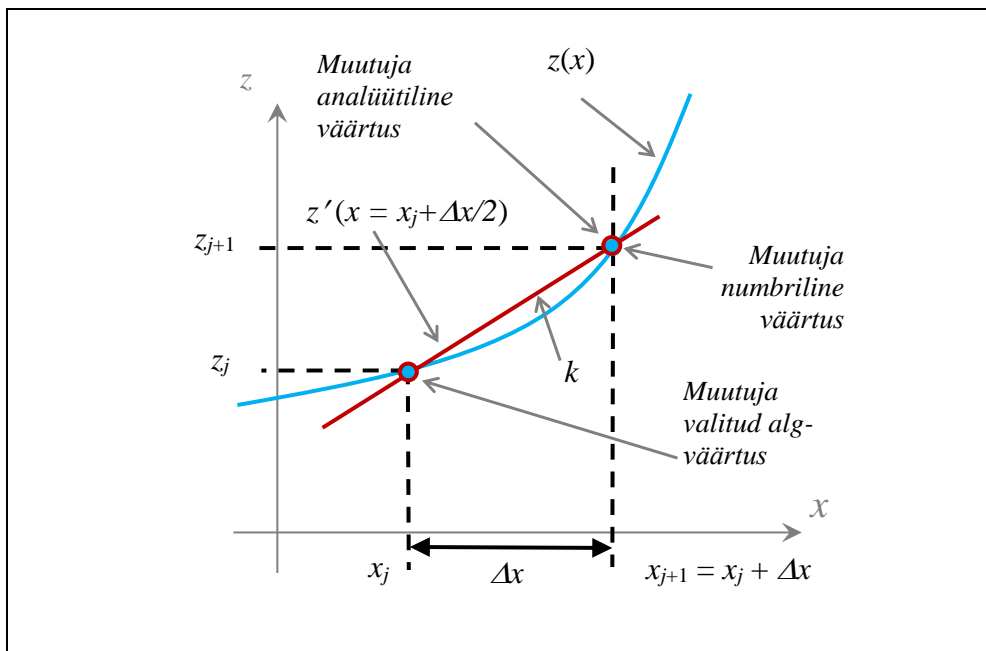
JOONIS 17-2 Ruumikoordinaadist sõltuva muutuja  $z(x)$  funktsioonkõver ja selle tõus  $z'(x_{j+1})$ . Euleri valemis (ühe-tõusuga valem ilmutamata kujul) muutuja valitud algväärtus, analüütiline väärtus ja numbriline väärtus ruumivahemiku  $\Delta x$  täpsusega.

## 17.7 EULERI NUMBRILINE ARVUTUSMEETOD. TSENTREERITUD ARVUTUSSKEEM

Taylori valemit 1-järgu ( $n = 1$ ) tuletise täpsusega kasutatakse Euleri valemi koostamiseks numbrilisele arvutusskeemile, mis vastab tsentreeritud ühe-tõusuga valemile ilmutamata kujul:

$z_{j+1} = z_j + z' \left( x_{j+1} + \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta x,$	17-7
--	------

milles  $z' \left( x_{j+1} + \frac{\Delta x}{2} \right)$  määrab muutuja  $z$  ruumilise tuletise ruumikoordinaatidega  $x_{j+1} + \frac{\Delta x}{2}$ . Muutuja ruumiline tuletis Euleri valemis määrab muutuja funktsioonkõvera puutuja, st tõusu ruumipunkti  $x_{j+1} + \frac{\Delta x}{2}$ :  $k = z' \left( x_{j+1} + \frac{\Delta x}{2} \right)$ .



JOONIS 17-3 Ruumikoordinaadist sõltuva muutuja  $z(x)$  funktsioonkõver ja selle tõus  $z'(x_{j+1} + \Delta x/2)$ . Euleri valemis (tsentreeritud ühe-tõusuga valem ilmutamata kujul) muutuja valitud algväärtus, analüütiline väärtus ja numbriline väärtus ruumivahemiku  $\Delta x$  täpsusega.

## 17.8 EULERI NUMBRILINE ARVUTUSSKEEM. ÜLDISTATUD ARVUTUSSKEEM

Euleri valemite asemel kasutatakse kai ruumilise muutuja  $z(x)$  funktsioonkõvera kaalutud keskmist tõusu:

$$k = \left( \frac{\sum_{i=1}^n a_i k_i^b}{\sum_{i=1}^n a_i} \right)^{\frac{1}{b}} = \left( \frac{a_1 k_1^b + a_2 k_2^b + \dots + a_n k_n^b}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \right)^{\frac{1}{b}}, \quad 17-8$$

milles  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  tähistab funktsioonkõvera tõusude vektorit, ning  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  tähistab tõusude kaalude vektorit tingimusel, et igale tõusude vektori liikme kordaja  $a_i > 0$  indeksiga  $i = 1, 2, \dots, n$ .  $b > 0$  on fikseeritud reaalarv. Näiteks kui  $b = 1$ , siis nimetatase kaalutud keskmist aritmeetiliseks kaalutud keskmiseks. Runge-Kutta 4-tõusuga valemis (nelja-sammuga valem ilmutatud kujul) kasutatakse ajalise muutuja  $z(t)$  funktsioonkõvera nelja tõusu kaalutud keskmist tõusu (VALEM (11-7)):

$$k = \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6},$$

mida võib kasutada ka ruumilise muutuja  $z(x)$  funktsioonkõvera nelja tõusu kaalutud keskmise tõusu määramisele kui teha muutuja asendus  $t \rightarrow x$ .

**MÄRKUS.** Vedelike vooluprotsessi (nt õhu ja vee koosvoolamise) numbrilises mudelis, milles muutujad  $\mathbf{z}(x, t)$  (voolukiirus, rõhk, tihedus vms) on nii ajalised kui ka ruumilised funktsioonid, kasutatakse ajaliste ja ruumiliste funktsioonkõverate kombineeritud keskmist tõusu.

## 17.9 NUMBRILISE ARVUTUSSKEEMI KOONDUVUS

Euleri valemi, mis vastab hariliku diferentsiaalvõrrandi integreerimisele ilmutatud kujul (VALEM (17-5)), võib teisendada lõpliku-vahega numbrilise valemi kujule (ingl. *Euler's explicit rule*):

$\frac{z_{j+1} - z_j}{\Delta x} = f(z_j) = f_j .$	17-9
---	------

**MÄRKUS.** Vajalik tingimus, et numbrilise valemiga saadud lahend vastaks diferentsiaalvõrrandi lahendile on see, et numbrilise arvutustulemuse väärtus vastab diferentsiaalvõrrandi integreerimisel saadud arväärtusele igas arvutusvõrgu punktis, kui lõplik vahe  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Euleri valemi (VALEM (17-9)) kasutamise vajalik tingimus on määratud piirväärtusega:

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{z(x + \Delta x) - z(x)}{\Delta x} - f(z(x)) \right] = 0 .$	17-10
--	-------

Numbrilise valemiga (VALEM (17-9)) saadud lahendi koonduvuse tingimuse võib esitada valemiga:

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{z(x + \Delta x) - z(x)}{\Delta x} \right] - f(z(x)) = 0 .$	17-11
--	-------

Euleri valemiga (VALEM (17-9)) määratud suurused võib arendada Tayloriga ritta:

$z(x + \Delta x) = z(x) + \Delta x z(x)' + \frac{\Delta x^2}{2!} z(x)'' + \frac{\Delta x^3}{3!} z(x)''' + \dots,$	17-12
---	-------

milles on kasutatud tähistust

$$z(x)^{(n)} = \frac{\partial^{(n)} z}{\partial x^{(n)}},$$

$$(n) = ', ', ', ', \dots$$

Numbrilisele valemile, mis vastab Euleri valemi ilmutatud kujule (VALEM (17-9)), määratakse astmerea liikme järguga määratud viga (ingli. *truncation error*) valemiga:

$TE = \frac{\Delta x}{2} z(x)'' + O(\Delta x^2).$	17-13
---	-------

Euleri valemi, mis vastab hariliku diferentsiaalvõrrandi integreerimisele ilmutamata kujul (VALEM (17-6)) (ingl. *Euler's implicit rule*), võib teisendada lõpliku-vahega numbrilise valemi kujule:

$\frac{z_{j+1} - z_j}{\Delta x} = f(z_{j+1}) = f_{j+1}.$	17-14
--	-------

Numbrilise valemiga (VALEM (17-19)) saadud lahendi koonduvuse tingimuse võib esitada valemiga:

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{z(x + \Delta x) - z(x)}{\Delta x} \right] - f(z(x + \Delta x)) = 0.$	17-15
--	-------

Numbrilisele valemile, mis vastab Euleri valemile ilmutata kujul (VALEM (17-14)), määratakse astmerea liikme järguga määratud viga (ingl. *truncation error*) valemiga:

$TE = -\frac{\Delta x}{2} z(x)'' + O(\Delta x^2).$	17-16
--	-------

Lõpliku-vahega numbrilise valemi, mis vastab hariliku diferentsiaalvõrrandi integreerimisele keskmistamise reegluga (ingl. *midpoint rule*) (vrd VALEM (17-7)), võib teisendada lõpliku-vahega numbrilise valemi kujule:

$\frac{z_{j+1} - z_j}{2 \Delta x} = f(z_{j+1}) = f_{j+1}.$	17-17
--	-------

Numbrilisele valemile, mis vastab numbrilise valemi keskmistamise reeglile (VALEM (17-19)), määratakse astmerea liikme järguga määratud viga (ingl. *truncation error*) valemiga:

$TE = \frac{\Delta x^2}{6} z(x)''' + O(\Delta x^3).$	17-18
--	-------

Lõpliku-vahega numbrilise valemi, mis vastab hariliku diferentsiaalvõrrandi integreerimisele trapetsreegliga (ingl. *trapezoidal rule*), võib teisendada lõpliku-vahega numbrilise valemi kujule:

$\frac{z_{j+1} - z_j}{\Delta x} = \frac{1}{2}f(z_j) + \frac{1}{2}f(z_{j+1}) = \frac{1}{2}f_j + \frac{1}{2}f_{j+1}.$	17-19
---	-------

Numbrilisele valemile, mis vastab numbrilise valemi trapetsreeglile (VALEM (17-19)), määratakse astmerea liikme järguga määratud viga (ingl. *truncation error*) valemiga:

$TE = -\frac{\Delta x^2}{12} z(x)''' + O(\Delta x^3).$	17-20
--	-------

Lõplike vahede meetod on seotud vastava hüdraulika ülesande arvutuskeemi koonduvusega. (VIITED 17.3, 17.4, 17.5, 17.6, 17.7, 17.8)

## 17.10 VIITED

- 17.1 Tamme, E., Võhandu, L. & Luht, L. (1986). *Arvutusmeetodid*. Valgus.
- 17.2 Vreugdenhil, C. B. (1994). *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Kluwer Academic Publisher.
- 17.3 Lambert, J. D. (1992). *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: The Initial Value Problem*. John Wiley & Sons, Inc.
- 17.4 Mitchell, A. R. & Griffiths, D. F. (1980). *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons, Inc.
- 17.5 Richtmyer, R. D. & Morton, K. W. (1994). *Difference Method for Initial Value Problems*. Krieger Publishing Company. (Esmatrükk 1967).
- 17.6 Godunov, S. K. & Ryabenki, V. S. (1964). *Theory of Difference Schemes*. North Holland Publishing Company.
- 17.7 Chadwick, A., Morfett, J. & Borthwick, M. (2004). *Hydraulics in Civil and Environmental Engineering*. Spon Press.
- 17.8 Chow, V. T., Maidment, D. R. & Mays, L. W. (1988). *Applied Hydrology*. McGraw-Hill Education.

## 18 VOOLUVEEKOGU

### 18.1 PRAKTIILINE OSA. JÕEVOOLU PAISUTAMINE

#### 18.1.1 EHITIS. HÜDROTEHNILINE RAJATIS

Loodusliku voolusängi veepinna kõrguse muutmiseks võib rajada paisu või peatamiseks/suunamiseks ka tammi (VIITED 18.1, „Hüdraulika erikursuse ülesannete kogu“, 18.2, „Hüdraulika ja pumbad“). Veevoolu tõkestamine tekitab paisutuse ehk vabapinna taseme vertikaalse muutuse, st paisuvee, mis levib paisulainena vastu- voolu. Avasängi võib rajada erinevast materjalist paise (nt pinnasest, kivist või betoonist). Jõevee voolamist on võimalik tõkestada ka teiste tehniliste vahenditega, nagu näiteks vari (ka kilpsiiber) või šandoor. Jõevee kogumiseks võib rajada veehoidla, millega saab reguleerida veehulka jões, et vältida pikaajaliste vihmadega kaasnevate suurte vooluhulkade ja põuaga kaasnevate väikeste vooluhulkade tõttu tekkivaid veepinna suuri muutuseid. Vooluveekogus tuleb tagada sanitaarvooluhulk, mis on ökosüsteemi toimimiseks hädavajalik.

#### 18.1.2 VOOLUREŽIIM. VEETASEME REGULEERIMINE VOOLUVEEKOGUS

Ülevooluga saab määrata voolamist iseloomustavaid hüdraulilisi suuruseid *in situ*. Näiteks võib kolmnurkse ristlõikega ülevoolu (kolmnurkülevoolu) paisutus- kõrguse kaudu määrata väiksemate veekoguste vooluhulka lihtsamini kui nelinurkse ristlõikega ülevoolu (nelinurkülevoolu) kaudu. Mõõteülevoolu puhul kasutatakse tavaliselt kitsaharjalist ülevoolu (seinülevoolu).

Ülevool on uputamata, kui paisu alumise bjefi vee vabapind (veepind) ei mõjuta voolamist paisul, vastasel korral on ülevool uputatud. Olenevalt sellest, kas ülevooluava on sama lai kui juurdevoolusängi oma või sellest kitsam, on tegemist vastavalt kas kitsendamata või kitsendatud ülevooluga. Ülevooluvalemi koostamise eesmärk on määrata seos ülevooluava läbilaskevõime (vooluhulga  $Q$ ) ja paisutus- kõrguse ( $PK$ ) vahel olenevalt ülevooluava laiusel, kõrgusel ja kujust. Ülevooluava võib olla nelinurkse, ruutparaboolse, kolmnurkse või muu ruutastmelise ristlõike kujuga. Ümartruubi sissevoolu ristlõike ava võib olla ka osalise ümartorutäite kujuga, mis ei vasta kõrgemate torutäidete puhul hästi ruutastmelise ristlõike kujule. Kasutatakse ka trapetsristlõikega ülevooluava. Ülevoolu vooluhulga valemite kasutamisel on oluline määrata vooluhulga koefitsient, mis sõltub ülevooluläve kõrguse, avalaiuse ja ristlõike kuju muutustega ehk terava, ümardatud vms servaga geomeetrilise pinnastruktuuri kaudu määratud takistusest. Vooluhulgategur määratakse mõõdukalt ebaühtlasele voolamisele tavaliselt eksperimentaalselt, kui

hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga veesööst paisu ülemises bjefis muutub paisu alumises bjefis hüdrauliliselt käreteks vabavoolurežiimiga veesööstuks ja vastab paisu lävel hüdrauliliselt kriitilise vabavoolurežiimiga voolamise puhul. Horisontaalvoolu ruumilise kiirendusega kaasneva voolujõu ja rõhu gradientjõu tasakaalutingimus määrab ära hüdrostaatilise rõhu eeldusel maksimaalse vooluhulga valemi matemaatilise kuju, milles kasutatakse ristlõikeava puhul Froude'i suhtarvu kriteeriumit  $Fr = 1$ , mis vastab kriitilisele voolamisele paisu lävel. Maksimaalse vooluhulga valemi asemel kasutatakse vesiehitiste puhul sageli ka ülevoolu põhivalemit, milles on kasutusele võetud ülevoolu koefitsient (VIIDE 18.1, „Hüdraulika erikursuse ülesannete kogu“). Maksimaalse vooluhulga valemi vooluhulgateguri ( $C_d$ ) või ülevoolu põhivalemi ülevooluteguri ( $C_d^*$ ) määramiseks võib kasutada ka arvutusliku vedelike dünaamika (CFD) vabapinna puhul kehtivaid rakendusi, kus vee ja õhu koostoime ei ole väga oluline. Ülevool võib olla uputatud, kui paisu alumise bjefi veepind seda oluliselt mõjutab. Uputatud ülevoolu puhul ei ole otseselt võimalik kasutada maksimaalse vooluhulga valemit, sest rahuliku voolamise olukorras ( $Fr < 1$ ) ei vasta veesügavus paisu mis tahes ristlõikes kriitilisele sügavusele ning seetõttu ei saa kasutada hüdrauliliselt kriitilise vabavoolurežiimiga voolamise tingimusi. Uputamata ja uputatud ülevoolu eristamise tingimuste määramiseks kasutatakse kriteeriumit, mis seob paisu alumise bjefi vabapinna ja lävepinna kõrguste erinevuse ( $h_u$ ) kriitilise voolamisega paisul. Ülevool võib olla uputamata ka eritingimusel  $h_u > 0$ . Uputatud ülevoolu vooluhulga määramiseks kasutatakse empiirilisi valemeid, mis ei vasta Froude'i suhtarvu kriteeriumile  $Fr = 1$ .

Jõevee paisutamine peab olema hüdrauliliselt kontrollitud, kuna veepinna kõrguse muutumine võib mõjutada lähialade veerežiimi (nt äravoolu jõestiku valgalalt). Veepinna kõrguse muutumine sõltub paisutuskõrgusest, pinnamoest, geoloogilistest tingimustest, veelahkmest jne. Jõevee paisutamisel tuleb arvestada jõesängi lähialade iseärasustega. Nendega mitteamvestamine võib tekitada kahju maa-alade üleujutamise näol. Samuti võib jõevoolu paisutamine muuta põhjavee voolurežiimi ja seetõttu mõjutada vee kättesaadavust salv- ja puurkaevudest.

Jõesängis võib setete kuhjumisel moodustuda settekünnis (setete künnis), mis võib künnisest ülesvoolu vabapinna paisutamise tõttu jõevoolu oluliselt aeglustada. Setete künnis moodustub tavaliselt jõe estuaaris (jõesuudmes), kus jõevool aeglustub merevee tiheduse ja mere vabapinna (merepinna) mõjude tõttu. Jõesängil on tavaliselt olemas tasakaaluprofiil ehk on kujunenud olukord, kus setete kuhjumine ja uhtumine voolulõigis on sama intensiivsusega (kui ei toimu sängipiirde muutuseid veevoolu sekundaartsirkulatsiooni tõttu). Merepinna kõrguse suurenemise ja jõevee koguse vähenemise tõttu võib tekkida stratifitseeritud voolamine, mille tulemusena siseneb merevesi jõepõhjalähedase hoovusena jõesängi (Pärnu jõgi, Narva jõgi). Merevee voolamine jõesängis takistab setete jõevoolusuunalist liikumist, mis võib samuti põhjustada setete kuhjumist jõesuudmes.



### 18.1.3 SISSEJUHATUS ÜLESANDESSE. PÕHIVALEMID

Bernoulli võrrandi kaudu maksimaalse vooluhulga valemi tuletamine eeldab, et paisu ülemises bjefis on voolamise kineetiline energia oluliselt väiksem potentsiaalsest energiast. Muutumatu laiusega tehissängis hinnatakse paisutuskõrgust nii põhjaastme kui külgkitsendusega ülevoolu puhul kiiruskõrguse võrra üle. Voolamine ülevoolulävel või avasängi külgkitsendusega osas peab vastama Froude'i arvu kriitilise voolamise tingimustele vastava suhtarvu kriteeriumile.

Põhjaastme või külgkitsendusega voolusängis määratakse voolamise paisutuskõrgus sarnase ülevoolu põhivalemiga (või maksimaalse vooluhulga valemiga), kuna põhiülesandes ja lisaülesandes on eeldatud, et paisu ülemises bjefis on voolamise kineetiline energia oluliselt väiksem potentsiaalsest energiast. Nii põhjaastme kui külgkitsendusega nelinurkse ristlõikega voolusängis on potentsiaalne erienergia paisu ülemises bjefis määratud sarnaselt. Paisu ülemise bjefi kineetilise energiaga arvestamisel on siiski vajalik kasutada paisutuskõrguse määramise numbrilist arvutusskeemi, mis võtab arvesse voolukiirust põhjaastme või külgkitsendusega voolusängi ülemises bjefis (VIITED 18.3, 18.4).

Kui avasängi põhjalang paisu ülemisest bjefist ülesvoolu on kriitilisest langust väiksem, tekib põhjaastmega voolusängis mõõdukalt ebaühtlase voolamise paisutus. Veepinna paisutusega määratud vabapind, mis ulatub paisu ülemises bjefis vastuvoolu avasängis, on sängipõhja kaldest erineva kaldega. Juhul kui avasängi põhjalang paisu ülemisest bjefist ülespoole on suurem kui kriitiline lang, siis moodustub põhjaastmel surutud vooluhüpe. Taoline vooluolukord on iseloomulik mägijõgedele.

Uputamata juhul (kui alavee vabapind on madalamal kui paisu lävi) on paisutuskõrgust võimalik hästi määrata ülevoolu põhivalemiga. Selmet kasutada uputatud ülevoolu puhul empiirilisi ülevoolu valemeid, võib kasutada arvutusliku vedelike dünaamika (CFD) teoreetiliste võrrandite numbrilisi lahendusi, milles vee ja õhu koostoime ei ole oluline.

Bernoulli võrrandit võib rakendada iga voolujoone puhul. Rõhk vedelikus on hüdrostaatiline, kui voolujooned on paralleelsed sõltumata orientatsioonist. Mõõdukalt ebaühtse voolamise puhul on voolujooned praktilisest seisukohast võetuna eeldatud olema paralleelsed.

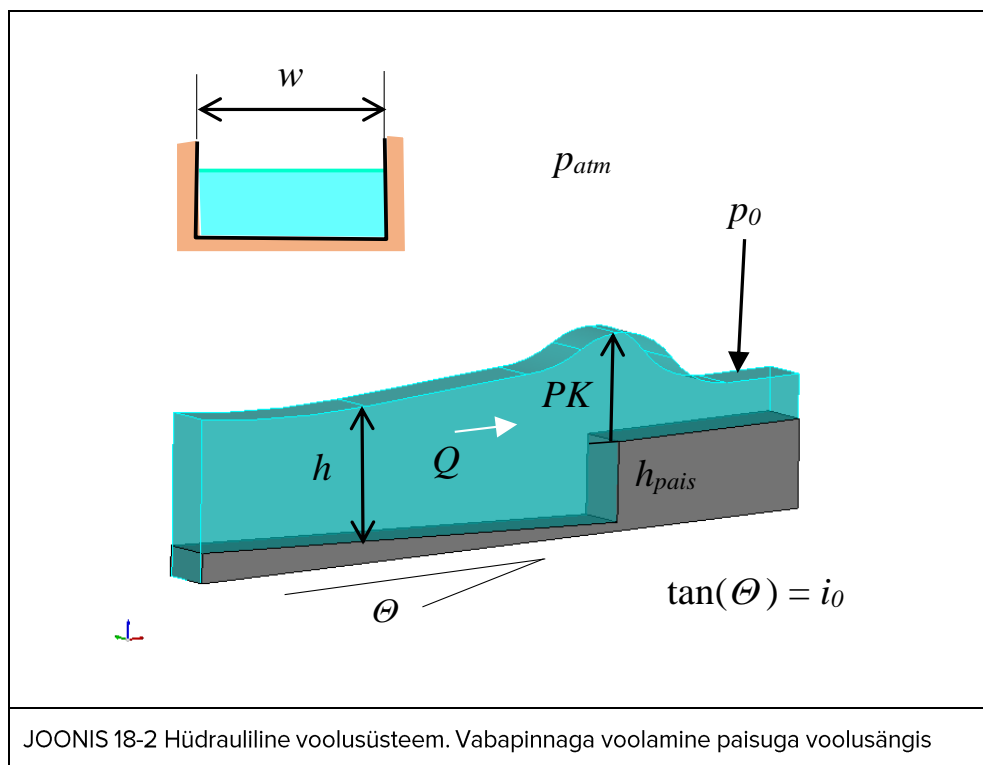


JOONIS 18-1 Ülevool paisust jõesängis, Pärnu jõgi, Sindi pais. (Foto: Marko Šorin, 2015)

## 18.2 PÕHIÜLESANNE. PAISUTUSULATUS

ANTUD. Looduslikku voolusängi on ehitatud pais, mille läve kõrgus  $h_{pais} = 2,5$  m ja ülevoolutegur  $C_d^* = 0,3387$ . Avasängis, laiusega  $w = 50$  m ja põhjalanguga  $i_0 = 2$  mm. $m^{-1}$ , on vooluhulk  $Q = 600$  m<sup>3</sup>.s<sup>-1</sup>. Voolusängi piirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,04$ . Praktiliselt nelinurkristlõikega voolusängis voolab 10 °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000$  kg. $m^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg. $m^{-1}$ .s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>. Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Määrata voolamisele avasängis normaalsügavus ja kriitiline sügavus, ning voolusängi Reynoldsi arv ja Froude'i suhtarvu kriteeriumiga hüdrauliline vabavoolurežiim. Arvutada paisutamiseega kaasneva vabapinna maksimaalne kõrgus üle lävepinna ehk paisutuskõrgus ja sellele vastav veesügavus paisu ülemises bjefis. Arvutada mõõdukalt ebaühtlasele voolamisele paisutamise mõjuulatus, sellele vastav hüdrauliline lang ja Froude'i arv.



JOONIS 18-2 Hüdrauliline voolusüsteem. Vabapinnaga voolamine paisuga voolusängis

EELDUSED. Veevool paisuga voolusängis on statsionaarne, mõõdukalt ebäühtlane. Praktiliselt nelinurkse ristlõikega loodusliku voolusängi piirde takistuse määrab hüdrauliliselt kare voolamine. Normaalsügavus määrata Manningi vooluhulga valemiga, kasutades selleks Newtoni iteratsioonmeetodit. Kriitilise sügavuse määramisele kasutada Froude'i suhtarvu kriteeriumit. Paisutuskõrgus määrata ülevoolu põhivalemiga uputamata juhule. Paisutamise mõjuulatus (ka paisutusulatus) määrata mõõdukalt ebäühtlase vabapinnaga voolamise diferentsiaalvõrrandiga kasutades selleks numbrilist arvutuskeemi ilmutatud kujul.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID.** Manningi vooluhulga valem, voolusängi Reynoldsi arv, Bernoulli kolmikliige, Bernoulli funktsioon, trapetsristlõikega voolusängi vabavoolu Froude'i arvu valem, nelinurkristlõikega voolusängi maksimaalse vooluhulga valem, ülevoolu põhivalem, mõõdukalt ebäühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem

### VALEMID

Manningi vooluhulga valem on

$$Q = \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e I_h^{\frac{1}{2}}}{n_M},$$

milles  $Q$  on vooluhulk,  $n_M$  on Manningi karedustegur,  $A_e = h w$  on nelinurkristlõikega voolusängi elavlõige, milles  $h$  on vabapinna kõrgus voolusängi aluspõhjast (horisontaalne ristlõike perimeetri osa) ja  $w$  on voolusängi laius. Hüdrauliline raadius  $R_h = A_e/\chi$ , milles  $\chi = w + 2h$  on voolamise ristlõikega (vooluristlõikega) antud märgpiirde pikkus, millest on välja jäetud vabapind.  $I_h$  on hüdrauliline lang.

**MÄRKUS.** Vabapinna kõrgus voolusängi aluspõhjast määrab voolusängi aluspõhja sügavuse vabapinnast:  $h = -(-d) = d$ .

Mõõdukalt ebäühtlasele vabapinnaga voolamisele prismaatilises voolusängis ei ole hüdrauliline lang määratud põhjalanguga, st  $I_h \neq i_0$ .

Voolusängi Reynoldsi arv on

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur ja  $R_h$  on hüdrauliline raadius. Laminaarse ja turbulentsse voolamise ülemineku kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on 500.

Bernoulli kolmikliige vabapinnaga voolamisele on

$$B = \frac{u^2}{2g} + h + h_s,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $g$  on raskuskiirendus,  $h$  on veepinna kõrgus voolusängi aluspõhjast ja  $h_s$  on aluspõhja kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult.

Kasutades trapetsristlõikega voolusängile voolukiiruse määramisel voolamise ruumkiiruse valemit:

$$u = \frac{Q}{A_e} = \frac{Q}{(hw + h^2 m_n)} = \frac{Q}{h^2 (\beta + m_n)},$$

milles  $A_e = h^2 (\beta + m_n)$  on trapetsristlõikega voolusängi elavlõige. Voolamise ristlõike lamedus  $\beta = w/h$ , milles  $w$  on voolusängi aluspõhja laius ja  $h$  on vabapinna kõrgus voolusängi aluspõhjast. (Ühtlasele voolamisele  $h = d_0$ , milles  $d_0$  on normaalsügavus.) Nõlvustegur  $m_n = \cot(\theta)$ , milles  $\theta$  on sama nõlvusega voolusängi nõlva(de) välisnurk. Hüdrauliline raadius  $R_h = A_e/\chi$ , milles  $\chi = h (\beta + 2\sqrt{1 + m_n^2})$  on trapetsristlõike märgpiire, millest on välja jäetud vabapind.

Bernoulli kolmikliikme vabapinnaga voolamisele võime teisendada kujule:

$$B = \frac{Q^2}{2g h^4 (\beta + m_n)^2} + h + h_s = \frac{Q^2}{2g (hw + h^2 m_n)^2} + h + h_s.$$

**MÄRKUS.** Trapetsristlõikega voolusängi vabavoolu Froude'i arv astmes 2 on määratud valemiga:

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g \frac{(hw + h^2 m_n)^3}{(w + 2hm_n)}} = \frac{u^2}{g \frac{(hw + h^2 m_n)}{(w + 2hm_n)}},$$

milles on kasutatud seost  $u = Q/A_e = Q/(hw + h^2 m_n)$ . Kriitilisele vabavoolule vastab  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja kärealelele vabavoolule vastavad  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

Ideaalvedeliku Bernoulli võrrand ülevoolule on

$$h_{pais} + PK \approx h_{pais} + d + \frac{u^2}{2g},$$

milles  $h_{pais}$  on paisu läve kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult,  $PK$  on paisutuskõrgus ja  $d$  on veekihi sügavus üle paisu läve (veekihi paksus paisul),  $g$  on raskuskiirendus ja  $u$  on voolukiirus paisu lävel. Ideaalvedeliku Bernoulli võrrandis ülevoolule on eeldatud, et paisu ülemises bjefis on voolamise kineetiline energia oluliselt väiksem potentsiaalsest energiast. Potentsiaalne erienergia paisu ülemises bjefis on määratud suurusega  $h_{pais} + PK$ , eeldusel et voolusängis on põhjaaste kõrgusega  $h_{pais}$ .

Hüdraulilisel vabavoolurežiimil, mis vastab Froude'i suhtarvu kriteeriumile  $Fr = 1$  (nö kriitiline voolamine), määratakse voolukiirus nelinurkristlõikega voolusängile valemiga:

$$u = \sqrt{g d}.$$

Nelinurkristlõikega voolusängis laiusega  $w$  määratakse vooluhulk valemiga:

$$Q = u d w.$$

→

$$u = \sqrt{g d} = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} (PK)^{\frac{1}{2}}$$

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w$$

Paisutuskõrguse järgi vooluhulga määramise valemil nimetatakse maksimaalse vooluhulga valemiks juhul kui paisu lävel  $Fr = 1$ . Reaalvedeliku voolamise paisutamisele täiendatakse maksimaalse vooluhulga valemil vooluhulgateguriga  $C_d < 1$ . Ideaalvedeliku voolamise tingimustel on vooluhulgategur  $C_d = 1$ .

Bernoulli kolmikliige vabapinnaga voolamisele on

$$B = \frac{u^2}{2g} + h + h_s,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $g$  on raskuskiirendus,  $h$  on veepinna kõrgus voolusängi aluspõhjast ja  $h_s$  on aluspõhja kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult. Bernoulli kolmikliikme voolusuunaline muutus puudub ideaalvedeliku voolamise puhul. Mõõdukalt ebäühtlasele reaalvoolule on Bernoulli kolmikliikme voolusängi aluspõhja suunaline ( $x'$  – pööratud koordinaattelje suunaline) diferentsiaalne muutus (vähenemine) määratud hüdraulilise languga:

$$\frac{\partial B}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{u^2}{2g} + h + h_s \right) = -I_h,$$

milles  $I_h$  on hüdrauliline lang ja  $x'$  on voolusängi pikikalde nurgaga  $\theta$  määratud koordinaat.

Voolamise erienergia on määratud kui

$$E_s = \frac{u^2}{2g} + h = \frac{Q^2}{2g A_e^2} + h,$$

milles on võetud kasutusele vooluhulk  $Q$  ja elavlõige  $A_e$  vastavalt seosele  $u = Q/A_e$ . Trapetsristlõikega voolamise elavlõige  $A_e = h^2 (\beta + m_n)$ , milles ristlõike lamedus  $\beta = w/h$ . Nelinurkristlõikega voolamisele on nõlvustegur  $m_n = 0$ , millest järeldub, et  $A_e = h w$ .

Mõõdukalt ebaühtlase reaalvoolu puhul on voolamise erienergia voolusängi aluspõhja pikikalde suunaline ( $x'$  – pööratud koordinaattelje suunaline) diferentsiaalne muutus määratud põhjalangu (voolusängi pikikalde) ja hüdraulilise langu vahega:

$$\frac{\partial E_s}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{u^2}{2g} + h \right) = -\frac{\partial h_s}{\partial x'} - I_h \approx i_0 - I_h,$$

milles  $\partial h_s / \partial x'$  on määratud põhjalanguga  $i_0$  eeldusel, et  $(\cos(\theta))^2 \approx 1$ .

Voolamise erienergia funktsioonist  $E_s = f(h, Q, g, w, m_n)$  tuleb muutuja  $h$  järgi, milles  $Q, g, w$  ja  $m_n$  on konstantsed suurused, määrab avaldise:

$$\frac{\partial E_s}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{Q^2}{2g A_e^2} + h \right) = \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{Q^2}{2g (h w + h^2 m_n)^2} + h \right) = -\frac{(w + 2 h m_n) Q^2}{g (h w + h^2 m_n)^3} + 1.$$

Trapetsristlõikega voolusängi vabavoolu Froude'i arv astmes 2

$$Fr^2 = \frac{(w + 2 h m_n) Q^2}{g (h w + h^2 m_n)^3}$$

$$m_n = 0$$

→

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g h^3 w^2} = \frac{u^2}{g h}.$$

Mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{dh}{dx'} \approx \frac{i_0 - I_h}{1 - Fr^2},$$

milles  $I_h$  on hüdrauliline lang,  $i_0$  on põhjalang ja  $Fr$  on Froude'i arv.

*Arvutusnäide. Normaalsügavuse määramine nelinurkristlõikega voolusängis*

*Numbriline arvutusskeem. Normaalsügavus*

*Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod*

#### VALEMID

Normaalsügavuse määramise numbrilise arvutusskeemina kasutame Newtoni iteratsioonmeetodit. Veafunktsioon:

$$ERF(z_j) = Q_j - Q,$$

milles  $z_j$  on arvutuslik veesügavus voolusängis,  $Q_j$  on arvutuslik vooluhulk ja  $Q$  on etteantud vooluhulk.

Veafunktsiooni tuletis:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{dQ_j}{dz_j},$$

milles on eeldatud, et  $Q = \textit{konstant}$ .

Arvutusliku vooluhulga määrame valemiga:

$$Q_j = \frac{R_{h_j}^{\frac{2}{3}} A_{e_j} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M},$$

milles  $R_{h_j}$  on arvutuslik hüdrauliline raadius ja  $A_{e_j}$  on arvutuslik elavlõige.

→

$$\begin{aligned} \frac{dERF(z_j)}{dz_j} &= \frac{d}{dz_j} \left( \frac{R_{h_j}^{\frac{2}{3}} A_{e_j} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} \right) = \frac{i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} \left( \frac{2 A_{e_j} R_{h_j}^{-\frac{1}{3}} dR_{h_j}}{3 dz_j} + R_{h_j}^{\frac{2}{3}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} \right) \\ &= Q_j \left( \frac{2}{3 R_{h_j}} \frac{dR_{h_j}}{dz_j} + \frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} \right) \end{aligned}$$

Veafunktsioonist suunatud tuletise võtmise reegel:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{0 - ERF(z_j)}{z_{j+1} - z_j},$$

võimaldab kasutusele võtta Tayloriga valemiga 1-järgu tuletise täpsusega:

$$z_{j+1} = z_j - \frac{ERF(z_j)}{\frac{dERF(z_j)}{dz_j}}.$$

Numbrilise arvutusskeemi põhivalemi üldkuju on

$$z_{j+1} = z_j - \frac{Q_j - Q}{Q_j \left( \frac{2}{3 R_{h_j}} \frac{dR_{h_j}}{dz_j} + \frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} \right)},$$

milles  $z_j$  on arvutuslik vee sügavus,  $Q_j$  on arvutuslik vooluhulk,  $Q$  on etteantud vooluhulk,  $R_{h_j}$  on arvutuslik hüdrauliline raadius ja  $A_{e_j}$  on arvutuslik elavlõige.

→

$$z_{j+1} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left( \frac{2}{3 R_{h_j}} \frac{dR_{h_j}}{dz_j} + \frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} \right)}$$

Määrame valemi numbrilise arvutusskeemi põhivalemi nimetaja *esimesele* liikmele:

$$\frac{2}{3 R_{h_j}} \frac{dR_{h_j}}{dz_j}.$$



Nelinurkristlõikega voolusängi voolamise hüdrauliline raadius on

$$R_{hj} = \frac{A_{ej}}{\chi_j} = \frac{z_j w}{w + 2 z_j}.$$

→

$$\frac{dR_{hj}}{dz_j} = \frac{d}{dz_j} \left( \frac{z_j w}{w + 2 z_j} \right) = \frac{w}{w + 2 z_j} - \frac{z_j w}{(w + 2 z_j)^2} \cdot 2 = \frac{w}{\chi_j} - \frac{A_{ej}}{\chi_j^2} \cdot 2$$

→

$$\begin{aligned} \frac{2}{3 R_{hj}} \frac{dR_{hj}}{dz_j} &= \frac{2}{3 A_{ej}} \left( \frac{w}{\chi_j} - \frac{A_{ej}}{\chi_j^2} \cdot 2 \right) = \frac{2}{3} \frac{w}{z_j w} - \frac{2}{3} \frac{2}{(w + 2 z_j)} = \frac{2}{3} \frac{1}{z_j} - \frac{4}{3} \frac{1}{(w + 2 z_j)} \\ &= \frac{2(w + 2 z_j) - 4 z_j}{3 z_j (w + 2 z_j)} = \frac{2w + 4 z_j - 4 z_j}{3 z_j (w + 2 z_j)} = \frac{2w}{3 z_j (w + 2 z_j)} \end{aligned}$$

Määrame valemi numbrilise arvutuskeemi põhivalemi nimetaja *teisele* liikmele:

$$\frac{1}{A_{ej}} \frac{dA_{ej}}{dz_j}.$$

Nelinurkristlõikega voolusängi voolamise arvutuslik elavlõige on

$$A_{ej} = z_j w.$$

→

$$\frac{dA_{ej}}{dz_j} = w$$

Põhivalemi liikme valem on

$$\frac{1}{A_{ej}} \frac{dA_{ej}}{dz_j} = \frac{w}{z_j w} = \frac{1}{z_j}$$

→

$$\frac{1}{A_{ej}} \frac{dA_{ej}}{dz_j} = \frac{1}{z_j} \cdot \frac{3(w + 2 z_j)}{3(w + 2 z_j)} = \frac{3w + 6 z_j}{3 z_j (w + 2 z_j)}.$$

Järelikult on numbrilise arvutuskeemi põhivalemi nimetaja avaldis:

$$\frac{2}{3 R_{hj}} \frac{dR_{hj}}{dz_j} + \frac{1}{A_{ej}} \frac{dA_{ej}}{dz_j} = \frac{2w}{3 z_j (w + 2 z_j)} + \frac{3w + 6 z_j}{3 z_j (w + 2 z_j)} = \frac{5w + 6 z_j}{3 z_j (w + 2 z_j)}.$$

ARVUTUSSKEEM (Manningi valem, avatud nelinurkristlõikega voolusäng)

Numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku sügavuse valem (iteratsioonmeetodi põhivalem)

$$z_{j+1} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left( \frac{5w + 6z_j}{3z_j(w + 2z_j)} \right)}$$

Arvutuslik vooluhulga valem

$$Q_j = \frac{R_{hj}^{\frac{2}{3}} A_{ej} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} A_{ej}^{\frac{5}{3}}}{n_M \chi_j^{\frac{2}{3}}} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} (z_j w)^{\frac{5}{3}}}{n_M (w + 2z_j)^{\frac{2}{3}}}$$

ARVUTUS. Normaalsügavus

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (m)	1	7,1044	4,6865	4,4375	4,4340	4,4340
$Q_j$ (m <sup>3</sup> .s <sup>-1</sup> )	54,4590	1242,2828	654,2772	600,7375	600,0001	600,0000

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (m)	4,4340	4,4340	4,4340	4,4340
$Q_j$ (m <sup>3</sup> .s <sup>-1</sup> )	600,0000	600,0000	600,0000	600,0000

VASTUSED

$$d_0 = 4,4340 \text{ m}$$

$$Re_{vs} = 78,402 \cdot 10^5$$

$$Fr = 0,4103$$

JÄRELDUS. Numbrilistest arvutustulemustest selgub, et ühtlane voolamine nelinurkristlõikega voolusängis on turbulentne ja hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga.

LISAKÜSIMUS. Iseseisvalt kontrollida kas ühtlase voolamise lahendus vastab hüdrauliliselt karedale voolamisele avasängis?

Hüdrauliline raadius

$$R_h = \frac{A_e}{\chi} = \frac{d_0 w}{w + 2 d_0} = \frac{4,4340 \text{ m} \cdot 50 \text{ m}}{50 \text{ m} + 2 \cdot 4,4340 \text{ m}} = 3,7661 \text{ m}$$

Hõõrdetakistustegur

$$\lambda = \frac{8 g n_M^2}{R_h^{\frac{2}{3}}} = \frac{8 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} (0,04)^2}{(3,7661 \text{ m})^{\frac{2}{3}}} = 0,0807$$

JÄRELDUS. Arvutustulemustest selgub, et ühtlase voolamise hõõrdetakistustegur vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnale.

*Kriitilise sügavuse määramine*

VALEMID

Trapetsristlõikega voolusängi vabavoolu Froude'i arv astmes 2 valem teiseneb nelinurkristlõikega voolusängi Froude'i arv ruudus valemiks vabavoolule vastavalt tingimusel:

$$m_n = 0$$

→

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g h^3 w^2} = \frac{u^2}{g h}$$

Nelinurkristlõikega voolusängi voolamise Froude'i arv on

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{g h}}$$

Kriitilisele vabavoolule vastab  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule on vastavalt  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

Froude'i suhtarvu kriteerium kriitilisele voolamisele on

$$Fr^2 = 1$$

→

$$1 = \frac{u^2}{g d_k} = \frac{Q^2}{g d_k A_k^2} = \frac{Q^2}{g d_k^3 w^2}$$

→

$$d_k = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g w^2}}$$

## ARVUTUS

$$d_k = \sqrt[3]{\frac{(600 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1})^2}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (50 \text{ m})^2}} = 2,4485 \text{ m}$$

## VASTUSED

$$d_k = 2,4485 \text{ m}$$

$$Fr = 1$$

$$d_k < d_0$$

**JÄRELDUS.** Arvutustulemusest selgub, et nelinurkristlõikega voolusängis on kriitilise voolamisega määratud veesügavus ehk kriitiline sügavus väiksem kui normaalsügavus. Järelikult on ühtlane voolamine nelinurkristlõikega voolusängis hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga.

*Paisutuskõrguse määramine*

## VALEMID

Ülevoolu põhivalemi võib esitada teisendusega:

$$Q = C_d g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}} w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}} = C_d^* w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}},$$

milles ülevoolutegur on

$$C_d^* = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}}.$$

Ülevoolu põhivalemist saab tuletada valemi paisutuskõrguse määramisele:

$$Q = C_d^* w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}}$$

→

$$PK = \left( \frac{Q}{C_d^* w \sqrt{2g}} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

## ARVUTUS

$$PK = \left( \frac{600 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{0,3378 \cdot 50 \text{ m} \cdot (2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}} = 4 \text{ m}.$$

Vabapinna kõrguse määramine paisu ülemises bjefis

VALEMID

$$h_{vp} = h_{pais} + PK$$

ARVUTUS

$$h_{vp} = 2,5 \text{ m} + 4 \text{ m} = 6,5 \text{ m}$$

VASTUS

$$h = 6,5 \text{ m}$$

*Arvutusnäide. Paisutamise mõjuulatuse määramine*

*Numbriline arvutusskeem. Paiustusulatus*

*Numbriline arvutusmeetod. Euleri lõplike vahede valem ilmutatud kujul*

VALEMID

Mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i_0 - I_h}{1 - Fr^2},$$

milles  $x' \rightarrow l$ ,  $I_h$  on hüdrauliline lang,  $i_0$  on põhjalang ja  $Fr$  on Froude'i arv.

Mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrandis võtame kasutusele lõplikud vahed vabapinna kõrguse ja voolupikkuse muutustele:

$$\frac{dh}{dl} \rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta l}.$$

ARVUTUSSKEEM (Paisutusulatus nelinurkse ristlõikega voolusängis, mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrandiga)

Numbrilises arvutusskeemis, milles diferentsiaalvõrrand lõplikele vahedele on

$$\Delta l = \Delta h \frac{1 - Fr^2}{i_0 - I_h},$$

võime kasutusele võtta Euleri valemi ilmutatud kujul paisutamise mõjuulatuse määramisele:

$$l_{i-1} = l_i - \Delta h \frac{1 - Fr^2}{i_0 - I_h}.$$

ARVUTUS. Paisutamise mõjuulatus

Numbrilises arvutusskeemis on kasutatud algtingimust:

$$l_1 = 0$$

ja veepinna kõrguse muutuse puhul konstantset lõpliku vahet:

$$\Delta h = 0,2 \text{ m} .$$

$h_i$ (m)	$A_e$ (m <sup>2</sup> )	$\chi$ (m)	$Fr$	$I_h$	$l_i$ (m)
6,5	325,0	63,0	0,2312	$0,6118 \cdot 10^{-3}$	0
6,3	315,0	62,6	0,2423	$0,6732 \cdot 10^{-3}$	-136,4
6,1	305,0	62,2	0,2543	$0,7433 \cdot 10^{-3}$	-278,3
5,9	295,0	61,8	0,2673	$0,8235 \cdot 10^{-3}$	-427,1
5,7	285,0	61,4	0,2815	$0,9159 \cdot 10^{-3}$	-585,0
5,5	275,0	61,0	0,2970	$1,0227 \cdot 10^{-3}$	-754,8
5,3	265,0	60,6	0,3140	$1,1470 \cdot 10^{-3}$	-941,4
5,1	255,0	60,2	0,3327	$1,2925 \cdot 10^{-3}$	-1152,8
4,9	245,0	59,8	0,3532	$1,4638 \cdot 10^{-3}$	-1404,1
4,7	235,0	59,4	0,3760	$1,6669 \cdot 10^{-3}$	-1730,6
4,5	225,0	59,0	0,4014	$1,9096 \cdot 10^{-3}$	-2246,1

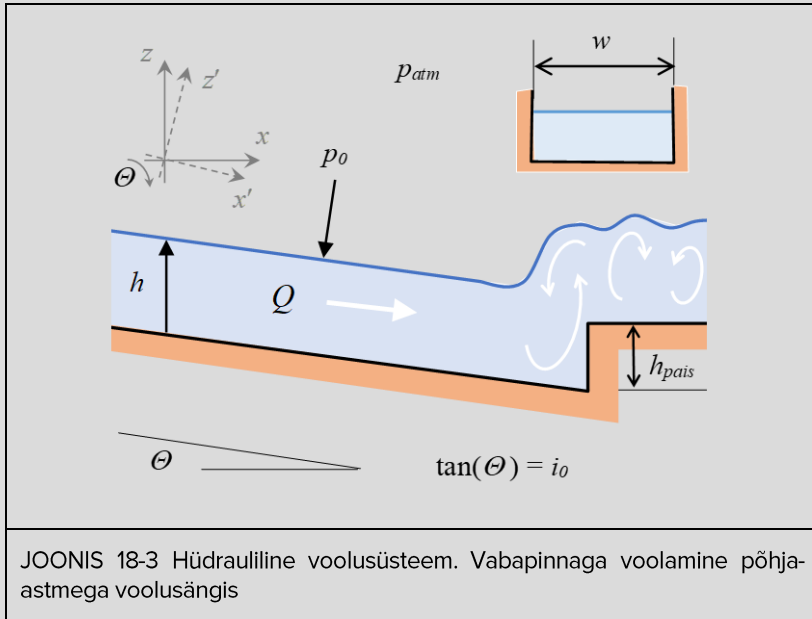
VASTUS

Paisutamise mõjuulatus on ligikaudu 2500 m = 2,5 km paisu ülemises bjefis.

**MÄRKUS.** Kui paisutusulatuse vastuse vormistamisel kasutatud veepinna kõrguse muutuse puhul konstantset lõpliku vahet  $\Delta h = 5 \text{ cm}$ , paisutamise mõjuulatus on ligikaudu 3070 m = 3,07 km paisu ülemises bjefis.

## MÄRKUSED. Paisutamise mõjuulatus

- Põhjaastmega voolusängis tekib mõõdukalt ebaühtlase voolamise paisutus juhul kui voolusängi põhjalang vastab paisu ülemises bjefis nõ rahulikule voolamisele, st  $Fr < 1$ . Juhul kui voolusängi põhjalang vastab paisu ülemises bjefis nõ käreale voolamisele, st  $Fr > 1$ , siis moodustub põhjaastmel vooluhüpe, mis on surutud vooluhüpe.



- Voolamisele hüdrauliliselt kareda piirdega survetorus, mis vastab Moody diagrammil ruuttakistuspiirkonna hõõrdetakistusteguri lahenditele, võib kasutada Manningi karedustegurit  $n_M$ . Hõõrdetakistustegur määratakse siis valemiga

$$\lambda = \frac{8g n_M^2}{R_h^{2/6}},$$

milles  $g$  on raskuskiirendus,  $R_h$  on hüdrauliline raadius. Manningi karedusteguri kasutamine voolusüsteemi takistuse määramisele on seotud vee omaduste määramatusega. Vee temperatuur määrab vee tiheduse ja dünaamilise molekulaarse viskoossusteguri, mille järgi määratakse kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur. Reynoldsi arvu väärtus sõltub oluliselt kinemaatilistest molekulaarsetest viskoossustegurist.

- Maksimaalse vooluhulga valemi tuletamisele Bernoulli võrrandist on eeldatud, et paisu ülemises bjefis on voolamise kinetiline energia oluliselt väiksem potentsiaalsest energiast. Potentsiaalne erienergia paisu ülemises bjefis on määratud suurusega  $h_{pais} + PK$ . Voolamisele muutumatu laiusega avasängis on seetõttu paisutuskõrguse ülehinnatud kiiruskõrguse võrra.

- Reaalvedeliku voolamise paisutamisele täiendatakse maksimaalse vooluhulga valemil vooluhulgateguriga (vooluhulga koefitsiendiga)  $C_d < 1$ . Ideaalvedeliku voolamisele vastab  $C_d = 1$ .
- Ideaalvedeliku voolamise paisutamisele vastab ülevoolu põhivalemis ülevoolutegur väärtusele  $C_d^* = 0,385$ . Reaalvedeliku voolamisele vastab  $C_d^* < 0,385$ .
- Paisutuskõrgust on võimalik hästi määrata ülevoolu põhivalemiga uputamata juhule. Uputatud ülevoolu puhul selmet kasutada empiirilisi valemeid, võib kasutada arvutusliku vedeliku dünaamika (CFD) teoreetiliste võrrandite numbrilisi lahendusi.
- Bernoulli võrrandit võib rakendada igale voolujoonele. Rõhk vedelikus on hüdrostaatiline kui voolujooned on paralleelsed sõltumata orientatsioonist. Mõõdukalt ebahühtsele voolamisele on voolujooned praktiliselt paralleelsed.
- Numbriline arvutusskeem normaalsügavuse määramisele trapetsristlõikega voolusängis, milles on kasutatud Manningi vooluhulga valemil ja Newtoni iteratsioonmeetodit, taandub nelinurkristlõikega voolusängi numbrilise arvutusskeemi valemite süsteemiks kui nõlvustegur  $m_n = 1$ .

ARVUTUSSKEEM (Manningi valem, samade nõlvustega trapetsristlõikega voolusäng)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku veesügavuse valem (iteratsioonmeetodi põhivalem)

$$z_{j+1} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left( \frac{5}{3} \frac{(w + 2 z_j m_n)}{(z_j w + z_j^2 m_n)} - \frac{4}{3} \frac{\sqrt{1 + m_n^2}}{(w + 2 z_j \sqrt{1 + m_n^2})} \right)}$$

Arvutusliku vooluhulga valem

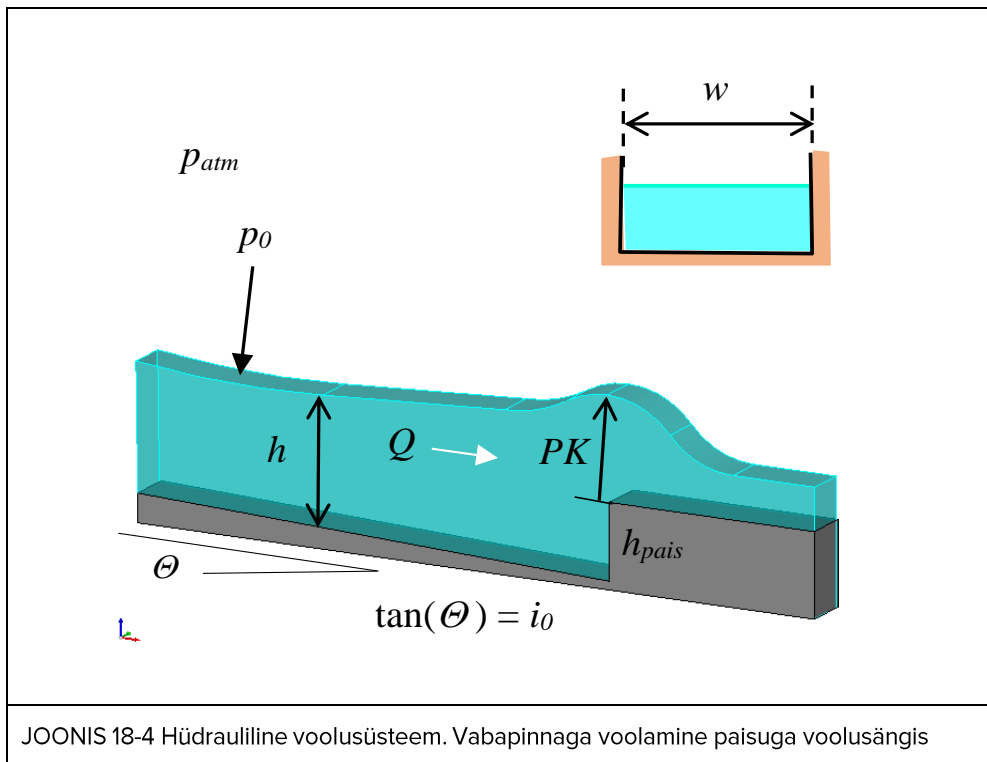
$$Q_j = \frac{R_{hj}^{\frac{2}{3}} A_{ej} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} A_{ej}^{\frac{5}{3}}}{n_M \chi_j^{\frac{2}{3}}} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} (z_j w + z_j^2 m_n)^{\frac{5}{3}}}{n_M (w + 2 z_j \sqrt{1 + m_n^2})^{\frac{2}{3}}}$$



### 18.3 ISESEISEVA TÖÖ ÜLESANNE. PAISUTUSULATUS

ANTUD. Loodussängi on paigutatud pais, mille läve kõrgus  $h_{pais} = 2,5$  m ja ülevoolutegur  $C_d^* = 0,3387$ . Avasängis, laiusega  $w = 50$  m ja põhjalanguga  $i_0 = 2$  mm·m<sup>-1</sup>, on vooluhulk  $Q = 400$  m<sup>3</sup>·s<sup>-1</sup>. Praktiliselt nelinurkristlõikega voolusängis voolab 10 °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000$  kg·m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg·m<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>. Voolusängi piirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,04$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Määrata voolamisele avasängis normaalsügavus ja kriitiline sügavus, ning voolusängi Reynoldsi arv ja Froude'i suhtarvu kriteeriumiga hüdrauliline vabavoolurežiim. Arvutada paisutamisele kaasneva vabapinna maksimaalne kõrgus üle lävepinna ehk paisutuskõrgus ja sellele vastav veesügavus paisu ülemises bjefis. Arvutada mõõdukalt ebaühtlasele voolamisele paisutamise mõjuulatus, sellele vastav hüdrauliline lang ja Froude'i arv.



EELDUSED. Veevool paisuga voolusängis on statsionaarne, mõõdukalt ebahütlane. Praktiliselt nelinurkse ristlõikega voolusängi piirde takistuse määrab hüdrauliliselt kare voolamine. Normaalsügavus määrata Manningi vooluhulga valemiga, kasutades selleks Newtoni iteratsioonmeetodit. Kriitilise sügavuse määramisele kasutada Froude'i suhtarvu kriteeriumit. Paisutuskõrgus määrata ülevoolu põhivalemiga uputamata juhule. Paisutamise mõjuulatus (ka paisutusulatus) määrata mõõdukalt ebahütlase vabapinnaga voolamise diferentsiaalvõrrandiga kasutades selleks numbrilist arvutuskeemi ilmutatud kujul.

#### VASTUSED

Normaalsügavus

$$d_0 = 3,4285 \text{ m}$$

Voolusängi Reynoldsi arv

$$Re_{vs} = 54,117 \cdot 10^5$$

Hüdrauliline raadius

$$R_h = 3,0150 \text{ m}$$

Hõõrdetakistustegur

$$\lambda = 0,0869$$

JÄRELDUS. Arvutustulemustest selgub, et ühtlase voolamise hõõrdetakistustegur vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnale.

Ühtlase vabavoolu Froude'i arv

$$Fr = 0,4023$$

JÄRELDUS. Numbrilistest arvutustulemustest selgub, et ühtlane voolamine nelinurkse ristlõikega voolusängis on turbulentne ja hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga.

Ühtlase voolamise kriitiline sügavus

$$d_k = 1,8685 \text{ m}$$

Paisutuskõrgus

$$PK = 3,0522 \text{ m}$$

Vabapinna kõrgus paisu ülemises bjefis

$$h_{vp} = 5,5522 \text{ m}$$

Paisutamise mõjuulatus

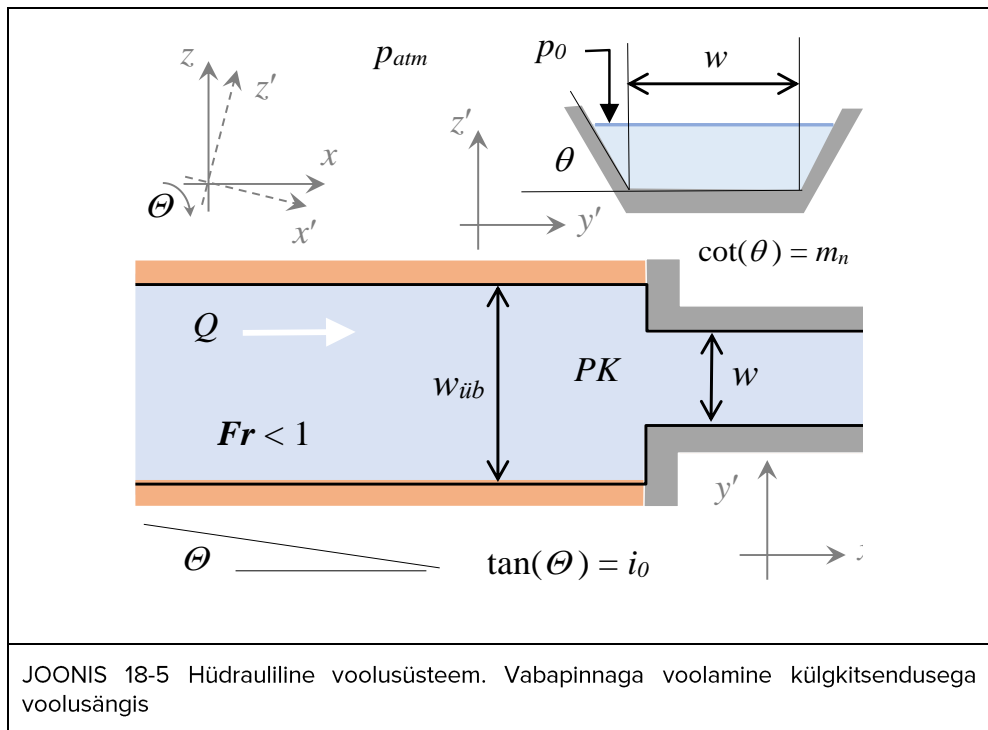
$$1800 \text{ m} = 1,8 \text{ km}$$

**MÄRKUS.** Kui paisutusulatuse vastuse vormistamisel kasutatud veepinna kõrguse muutuse puhul konstantset lõpliku vahet  $\Delta h = 20 \text{ cm}$ .

## 18.4 LISAÜLESANNE. PAISUTUSULATUS

ANTUD. Looduslikku voolusängi on paigutatud ilma põhjaastmeta tehislik külgkitsendus, mille põhjalaius  $w = 50$  m ja vooluhulgategur  $C_d = 0,91$ . Trapetsristlõikega tehissängi osa nõlvustegur  $m_n = 1$  (nõlvusega 1:1). Loodussängis, laiusega  $w_{\text{üb}} = 300$  m ( $w_{\text{üb}} \gg w$ ) ja põhjalanguga  $i_0 = 2$  mm·m<sup>-1</sup>, on vooluhulk  $Q = 600$  m<sup>3</sup>·s<sup>-1</sup>. Loodussängi piirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,04$ . Prismaatilises loodussängis voolab 10 °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000$  kg·m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg·m<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>. Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{\text{atm}}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{\text{atm}} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Määrata voolamisele loodussängis normaalsügavus ja kriitiline sügavus, ning voolusängi Reynoldsi arv ja Froude'i suhtarvu kriteeriumiga hüdrauliline vabavoolurežiim. Arvutada paisutamisele kaasneva vabapinna maksimaalne kõrgus üle külgkitsenduse aluspõhja ehk paisutuskõrgus ja sellele vastav veesügavus külgkitsendusega tehissängi osa (nagu sillaava) ülemises bjefis. Arvutada mõõdukalt ebahürtlasele voolamisele paisutamise mõjuulatus, sellele vastav hüdrauliline lang ja Froude'i arv.



EELDUSED. Külgkitsendusega tehissängi osa aluspõhi on külgkitsenduseeta loodusängi aluspõhjaga tasa, st ilma põhjaastmeta. Veevool külgkitsendusega voolusängis on statsionaarne, mõõdukalt ebaühtlane. Laia loodusliku voolusängi (ka loodussängi) piirde takistuse määrab hüdrauliliselt kare voolamine. Normaalsügavus määrata Manningi vooluhulga valemiga, kasutades selleks Newtoni iteratsioonmeetodit. Kriitilise sügavuse määramisele kasutada Froude'i suhtarvu kriteeriumit. Paisutuskõrgus määrata ülevoolu põhivalemiga uputamata juhule. Paisutamise mõjuulatus määrata mõõdukalt ebaühtlase vabapinnaga voolamise diferentsiaalvõrrandiga kasutades selleks numbrilist arvutuskeemi ilmutatud kujul. Nõlvusele 1:1 vastab nõlvustegur  $m_n = 1$  ( $\text{atan}(1/m_n) = \text{acot}(m_n) = \pi/2 \text{ rad} = 45^\circ$ ,  $\text{cot}(\text{atan}(1/m_n)) = m_n$ ).

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID.** Manningi vooluhulga valem, voolusängi Reynoldsi arv, Bernoulli kolmikliige, Bernoulli funktsioon, trapetsristlõikega voolusängi vabavoolu Froude'i arvu valem, maksimaalse vooluhulga valem, ülevoolu põhivalem, mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem

## VALEMID

Manningi vooluhulga valem on

$$Q = \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e I_h^{\frac{1}{2}}}{n_M},$$

milles  $Q$  on vooluhulk,  $n_M$  on Manningi karedustegur,  $A_e$  on voolusängi elavlõige ja  $I_h$  on hüdrauliline lang.

Nõ laias voolusängis võib kasutada nelinurkset elavlõiget, milles voolusängi põhjalaius on praktiliselt sama mis pealtlaius, st  $w_{\text{üb}} \approx W_{\text{üb}}$  ( $m_n \approx 0$ ) ning  $A_e \approx h w$  on praktiliselt sama mis nelinurkristlõikega voolusängi elavlõige, milles  $h (= h_{\text{üb}})$  on vabapinna kõrgus voolusängi aluspõhjast (horisontaalne ristlõike perimeetri osa) ja  $w (= w_{\text{üb}})$  on voolusängi laius. Hüdrauliline raadius  $R_h = A_e/\chi$ , milles  $\chi \approx w + 2h$  on voolamise ristlõikega (vooluristlõikega) antud märgpiirde pikkus, millest on välja jäetud vabapind.

**MÄRKUS.** Vabapinna kõrgus voolusängi aluspõhjast määrab voolusängi aluspõhja sügavuse vabapinnast:  $h = -(-d) = d$ .

Mõõdukalt ebäühtlasele vabapinnaga voolamisele prismaatilises voolusängis ei ole hüdrauliline lang määratud põhjalanguga, st  $I_h \neq i_0$ .

Voolusängi Reynoldsi arv on

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur ja  $R_h$  on hüdrauliline raadius. Laminaarse ja turbulentsse voolamise ülemineku kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on 500.

Bernoulli kolmikliige vabapinnaga voolamisele on

$$B = \frac{u^2}{2g} + h + h_s,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $g$  on raskuskiirendus,  $h$  on veepinna kõrgus voolusängi aluspõhjast ja  $h_s$  on aluspõhja kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult.

Kasutades trapetsristlõikega voolusängile voolukiiruse määramisel voolamise ruumkiiruse valemit:

$$u = \frac{Q}{A_e} = \frac{Q}{(h w + h^2 m_n)} = \frac{Q}{h^2 (\beta + m_n)},$$

milles  $A_e = h^2 (\beta + m_n)$  on trapetsristlõikega voolusängi elavlõige. Voolamise ristlõike lamedus  $\beta = w/h$ , milles  $w$  on voolusängi aluspõhja laius ja  $h$  on vabapinna kõrgus voolusängi aluspõhjast. (Ühtlasele voolamisele  $h = d_0$ , milles  $d_0$  on normaalsügavus.) Nõlvustegur  $m_n = \cot(\theta)$ , milles  $\theta$  on sama nõlvusega voolusängi nõlva(de) välisnurk. Hüdrauliline raadius  $R_h = A_e/\chi$ , milles  $\chi = h (\beta + 2 \sqrt{1 + m_n^2})$  on trapetsristlõike märgpiire, millest on välja jäetud vabapind.

Nõ laia voolusängi puhul, milles  $w \gg h$ , võib hüdraulilise raadiuse määrata valemiga:

$$R_h = \frac{A_e}{\chi} = \frac{h^2 (\beta + m_n)}{h (\beta + 2 \sqrt{1 + m_n^2})} \approx h.$$

Bernoulli kolmikliikme vabapinnaga voolamisele võime teisendada kujule:

$$B = \frac{Q^2}{2g h^4 (\beta + m_n)^2} + h + h_s = \frac{Q^2}{2g (h w + h^2 m_n)^2} + h + h_s.$$

Kui kasutada funktsiooni ekstreemumi määramise teoreemi veepinna kõrguse  $h$  järgi:

$$\frac{dB}{dh} = 0,$$

siis järeldub Bernoulli funktsioonist  $B = f(h, Q, g, w, m_n, h_s)$ , milles  $h$  on muutuja ja  $Q, g, w, m_n, h_s$  on konstantsed suurused, järgmine avaldis:

$$-\frac{2 Q^2 (w + 2 h m_n)}{2 g (h w + h^2 m_n)^3} + 1 = -\frac{Q^2 (w + 2 h m_n)}{g (h w + h^2 m_n)^3} + 1 = 0.$$

Trapetsristlõikega voolusängi vabavoolu Froude'i arv ruudus on määratud valemiga:

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g \frac{(h w + h^2 m_n)^3}{(w + 2 h m_n)}} = \frac{u^2}{g \frac{(h w + h^2 m_n)}{(w + 2 h m_n)'}}$$

milles on kasutatud seost  $u = Q/(h w + h^2 m_n)$ . Kriitilisele vabavoolule vastab  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule vastavad  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

Ideaalvedeliku Bernoulli võrrand ülevoolule on

$$h_s + PK \approx h_s + h + \frac{u^2}{2g},$$

milles  $h_s$  on voolusängi aluspõhja kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult,  $PK$  on paisutuskõrgus ja  $h$  on veepinna kõrgus kitsendusega tehissängi osa aluspõhjast (sissevoolu osas),  $g$  on raskuskiirendus ja  $u$  on voolukiirus kitsendusega tehissängi osas. Paisutamise Bernoulli võrrandis on eeldatud, et paisu ülemises bjefis on voolamise kineetiline energia oluliselt väiksem potentsiaalsest energiast. Potentsiaalne eriennergia paisu ülemises bjefis on määratud suurusega  $h_s + PK$ .

Hüdrauliliselt kriitilisel vabavoolurežiimil, mis vastab Froude'i suhtarvu kriteeriumile  $Fr = 1$  (nö kriitiline voolamine), määratakse voolukiirus trapetsristlõikega voolusängis voolukiirus valemiga:

$$u = \sqrt{g \frac{(h w + h^2 m_n)}{(w + 2 h m_n)}}.$$

Ideaalvedeliku Bernoulli võrrand ülevoolule on

$$h_s + PK = h_s + h + \frac{u^2}{2g} = h_s + h + \frac{1}{2} \frac{(h w + h^2 m_n)}{(w + 2 h m_n)}$$

Paisutuskõrgus (ideaalvedeliku voolamine)

$$PK = h + \frac{1}{2} \frac{(h w + h^2 m_n)}{(w + 2 h m_n)} = h + \frac{h w + h^2 m_n}{2 w + 4 h m_n} = \frac{3 h w + 5 h^2 m_n}{2 w + 4 h m_n}$$

Maksimaalne vooluhulk (ideaalvedeliku hüdrauliliselt kriitiline vabavoolurežiim)

$$Q = \sqrt{g \frac{(h w + h^2 m_n)^3}{(w + 2 h m_n)}}$$

**MÄRKUS.** *Trapetsristlõikega ülevoolule on veepinna kõrgus üle aluspõhja, ehk veesamba paksus  $h$  ilmutamata funktsioon paistuskõrgusest  $PK$ . Seetõttu ei ole olemas nõ matemaatiliselt lihtsat lahendust määrata maksimaalse vooluhulga valem, millega oleks võimalik paistuskõrguse ( $PK$ ) kaudu määrata vooluhulk ( $Q$ ) hüdrauliliselt kriitilise ( $Fr = 1$ ) vabavoolurežiimi olukorras. Seetõttu tuleb maksimaalse vooluhulga valem ülevoolule lahendada kas proovimismeetodil või numbrilise arvutusskeemiga algebraliste võrrandite süsteemile, mis garanteerib nõ kriitilise voolamise tingimused külgekitsendusega voolusängi osas.*

**MÄRKUS.** *Maksimaalse vooluhulga valemi trapetsristlõikega ülevoolule võib üldistada ruutastmelise ristlõikega voolusängi olukorrale, milles võetakse kasutusele ristlõike kujutegur  $\xi \geq 1$  vastavalt trapetsristlõike elavlõikele, milles voolusängi aluspõhja laius  $w$  asendatakse vabavoolu pealtlaiusega  $W$ . Siinkohal tuleb märkida, et ruutastmelise kõverjoone ordinaat ( $z$ ) sõltub abstsissist ( $y$ ) kui  $y = 0$  järgi tsentreeritud koordinaatide funktsioon  $z = y^{2/(2\xi-2)}$ , milles  $\xi > 1$  on vooluristlõike kujutegur. Seetõttu ei ole võimalik trapetsristlõikega avasängile võtta kasutusele veesügavusest sõltumatut kujutegurit  $\xi = \text{konstant}$ . Näiteks praktiliselt nelinurkse, täpselt ruutparaboolse ja täpselt kolmnurkse ristlõikega avasängile on vastavalt  $\xi \approx 1, \xi = 3/2, 2$ .*

Paisutuskõrguse järgi vooluhulga määramise valemit nimetatakse maksimaalse vooluhulga valemiks juhul kui voolusängi kitsendatud osas  $Fr = 1$ . Reaalvedeliku voolamise paisutamisele täiendatakse maksimaalse vooluhulga valemit vooluhulgateguriga  $C_d < 1$ . Ideaalvedeliku voolamise tingimustel on vooluhulgategur  $C_d = 1$ .

Bernoulli kolmikliige vabapinnaga voolamisele on

$$B = \frac{u^2}{2g} + h + h_s,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $g$  on raskuskiirendus,  $h$  on veepinna kõrgus voolusängi aluspõhjast ja  $h_s$  on aluspõhja kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult.

Bernoulli kolmikliikme voolusuunaline muutus puudub ideaalvedeliku voolamise puhul. Mõõdukalt ebaühtlasele reaalvoolule on Bernoulli kolmikliikme voolusängi aluspõhja pikikalde suunaline ( $x'$  – pööratud koordinaattelje suunaline) diferentsiaalne muutus (vähenemine) määratud hüdraulilise languga:

$$\frac{\partial B}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{u^2}{2g} + h + h_s \right) = -I_h,$$

milles  $I_h$  on hüdrauliline lang ja  $x'$  on voolusängi pikikalde nurgaga  $\theta$  määratud koordinaat.

Voolamise erienergia on määratud kui

$$E_s = \frac{u^2}{2g} + h = \frac{Q^2}{2gA_e^2} + h,$$

milles on võetud kasutusele vooluhulk  $Q$  ja elavlõige  $A_e$ . Trapetsristlõikega voolamise elavlõige  $A_e = h^2(\beta + m_n)$ , milles ristlõike lamedus  $\beta = w/h$ . Nelinurkristlõikega voolamisele on nõlvustegur  $m_n = 0$ , millest järeldub et  $A_e = hw$ .

Mõõdukalt ebaühtlase reaalvoolu puhul on voolamise erienergia voolusängi aluspõhja pikikalde suunaline ( $x'$  – pööratud koordinaattelje suunaline) diferentsiaalne muutus määratud põhjalangu (voolusängi pikikalde) ja hüdraulilise langu vahega:

$$\frac{\partial E_s}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{u^2}{2g} + h \right) = -\frac{\partial h_s}{\partial x'} - I_h \approx i_0 - I_h,$$

milles  $\partial h_s / \partial x'$  on määratud põhjalanguga  $i_0$  eeldusel, et  $(\cos(\theta))^2 \approx 1$ .

Voolamise erienergia funktsioonist  $E_s = f(h, Q, g, w, m_n)$  tuleb muutuja  $h$  järgi, milles  $Q, g, w$  ja  $m_n$  on konstantsed suurused, määrab avaldise:

$$\frac{\partial E_s}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{Q^2}{2gA_e^2} + h \right) = \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{Q^2}{2g(hw + h^2 m_n)^2} + h \right) = -\frac{(w + 2hm_n)Q^2}{g(hw + h^2 m_n)^3} + 1,$$

milles

$$Fr^2 = \frac{(w + 2hm_n)Q^2}{g(hw + h^2 m_n)^3} = \frac{Q^2}{g \frac{(hw + h^2 m_n)^3}{(w + 2hm_n)}} = \frac{u^2}{g \frac{(hw + h^2 m_n)}{(w + 2hm_n)}}$$

Mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{dh}{dx'} \approx \frac{i_0 - I_h}{1 - Fr^2},$$

milles  $I_h$  on hüdrauliline lang,  $i_0$  on põhjalang ja  $Fr$  on Froude'i arv.

*Arvutusnäide. Normaalsügavuse määramine nelinurkristlõikega ehk nõ laias trapetsristlõikega voolusängis*

*Numbriline arvutusskeem. Normaalsügavus*

*Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod*

## VALEMID

ARVUTUSSKEEM (Manningi valem, avatud nelinurkristlõikega voolusäng)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku sügavuse valem (iteratsioonmeetodi põhivalem)

$$z_{j+1} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left( \frac{5w + 6z_j}{3z_j(w + 2z_j)} \right)}$$



Arvutuslik vooluhulga valem

$$Q_j = \frac{R_{hj}^{\frac{2}{3}} A_{ej} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} A_{ej}^{\frac{5}{3}}}{n_M \chi_j^{\frac{2}{3}}} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} (z_j w)^{\frac{5}{3}}}{n_M (w + 2 z_j)^{\frac{2}{3}}}$$

ARVUTUS. Normaalsügavus

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (m)	1	1,4793	1,4236	1,4229	1,4229	1,4229
$Q_j$ ( $m^3 \cdot s^{-1}$ )	333,9277	640,0076	600,4966	600,0001	600,0000	600,0000

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (m)	1,4229	1,4229	1,4229	1,4229
$Q_j$ ( $m^3 \cdot s^{-1}$ )	600,0000	600,0000	600,0000	600,0000

VASTUSED

$$d_0 = 1,4229 \text{ m}$$

$$Re_{vs} = 15,240 \cdot 10^5$$

$$Fr = 0,3762$$

JÄRELDUS. Numbrilistest arvutustulemustest selgub, et ühtlane voolamine nelinurkristlõikega voolusängis (nö laias trapetsristlõikega avasängis) on turbulentne ( $Re_{vs} > 500$ ) ja hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ).

Arvutusnäide. Kriitilise sügavuse määramine

VALEM

$$d_k = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g w^2}}$$

ARVUTUS

$$d_k = \sqrt[3]{\frac{(600 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1})^2}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (300 \text{ m})^2}} = 0,7415 \text{ m}$$

## VASTUSED

$$d_k = 0,7415 \text{ m}$$

$$Fr = 1$$

$$d_k < d_0$$

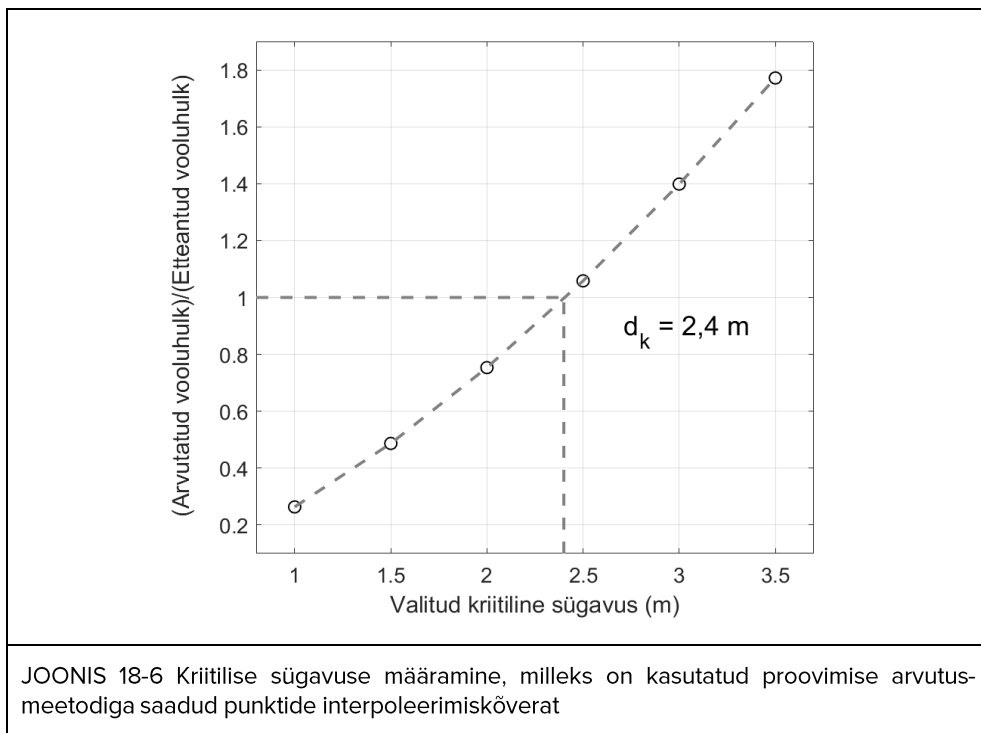
JÄRELDUS. Arvutustulemusest selgub, et nelinurkristlõikega voolusängis (nõ laias trapetsristlõikega avasängis) on kriitiline sügavus väiksem kui normaalsügavus. Järelikult on ühtlane voolamine nelinurkristlõikega voolusängis hüdrauliselt rahuliku vabavoolurežiimiga.

*Arvutusnäide. Paisutuskõrguse määramine  
Proovimise arvutusmeetod*

ARVUTUS. Kriitiline sügavus (ideaalvedeliku voolamine)

Bernoulli võrrandiga ülevoolule nõ kriitilisele voolamisele määratud arvutuslikud suurused.

	$h$ (m)	$u$ (m·s <sup>-1</sup> )	$PK$ (m)	$Q$ (m <sup>3</sup> ·s <sup>-1</sup> )	$Re_{vs}$	$Fr$
i	1,0	3,1018	1,4904	158,1933	$23,034 \cdot 10^5$	1
ii	1,5	3,7813	2,2288	292,1086	$41,425 \cdot 10^5$	1
iii	2,0	4,3466	2,9630	452,0512	$62,478 \cdot 10^5$	1
iv	2,5	4,8384	3,6932	635,0415	$85,594 \cdot 10^5$	1
v	3,0	5,2776	4,4196	839,1434	$110,37 \cdot 10^5$	1
vi	3,5	5,6769	5,1425	1063,0	$136,51 \cdot 10^5$	1



JÄRELDUS. Vooluhulga  $Q = 600 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  puhul vastab vabapinnaga voolamise hüdrauliliselt kriitilisele vabavoolurežiimile, st  $Fr = 1$ , kui trapetsristlõikega tehissängi osas on kriitiline sügavus  $d_k = 1,24 \text{ m}$  ja ideaalvedeliku voolamise avasängi paisutuskõrgus  $PK = 3,56 \text{ m}$ .

*Numbriline arvutusskeem. Kriitiline sügavus*

*Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod*

#### VALEMID

Veafunktsioon:

$$ERF(z_j) = Fr^2_j - Fr^2,$$

milles  $z_j$  on arvutuslik voolusängi kriitiline sügavus,  $Fr^2_j$  on arvutuslik Froude'i arv astmes 2 ja  $Fr^2$  on etteantud Froude'i arv astmes 2.

Veafunktsiooni tuletis:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{dFr^2_j}{dz_j},$$

milles on eeldatud, et  $Fr^2 = \textit{konstant} (= 1)$ .

Arvutusliku Froude'i arvu astmes 2 on määratud valemiga:

$$\mathbf{Fr}^2_j = \frac{Q^2}{g \frac{(z_j w + z_j^2 m_n)^3}{(w + 2 z_j m_n)}} = \frac{Q^2 (w + 2 z_j m_n)}{g (z_j w + z_j^2 m_n)^3},$$

milles  $g$ ,  $Q$ ,  $w$  ja  $m_n$  on konstantsed suurused.

→

$$\begin{aligned} \frac{dERF(z_j)}{dz_j} &= \frac{d}{dz_j} \left( \frac{Q^2 (w + 2 z_j m_n)}{g (z_j w + z_j^2 m_n)^3} \right) = \frac{Q^2}{g} \left( \frac{2 m_n}{(z_j w + z_j^2 m_n)^3} - \frac{3 (w + 2 z_j m_n)^2}{(z_j w + z_j^2 m_n)^4} \right) \\ &= \frac{Q^2 (w + 2 z_j m_n)}{g (z_j w + z_j^2 m_n)^3} \left( \frac{2 m_n}{w + 2 z_j m_n} - \frac{3 (w + 2 z_j m_n)}{(z_j w + z_j^2 m_n)} \right) \\ &= \mathbf{Fr}^2_j \left( \frac{2 m_n}{w + 2 z_j m_n} - \frac{3 (w + 2 z_j m_n)}{(z_j w + z_j^2 m_n)} \right) \end{aligned}$$

Veafunktsioonist suunatud tuletise võtmise reegel:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{0 - ERF(z_j)}{z_{j+1} - z_j},$$

võimaldab kasutusele võtta Tayloriga valem 1-järgu tuletise täpsusega:

$$z_{j+1} = z_j - \frac{ERF(z_j)}{\frac{dERF(z_j)}{dz_j}}.$$

Numbrilise arvutusskeemi põhivalemi üldkuju on

$$z_{j+1} = z_j - \frac{\mathbf{Fr}^2_j - \mathbf{Fr}^2}{\mathbf{Fr}^2_j \left( \frac{2 m_n}{w + 2 z_j m_n} - \frac{3 (w + 2 z_j m_n)}{(z_j w + z_j^2 m_n)} \right)} = z_j - \frac{1 - \mathbf{Fr}^2 / \mathbf{Fr}^2_j}{\left( \frac{2 m_n}{w + 2 z_j m_n} - \frac{3 (w + 2 z_j m_n)}{(z_j w + z_j^2 m_n)} \right)}.$$

ARVUTUSSKEEM (Froude'i arv, trapetsristlõikega avatud voolusäng)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku trapetsristlõikega voolusängi kriitilise sügavuse valem (iteratsioonmeetodi põhivalem)

$$z_{j+1} = z_j - \frac{1 - \mathbf{Fr}^2 / \mathbf{Fr}^2_j}{\left( \frac{2 m_n}{w + 2 z_j m_n} - \frac{3 (w + 2 z_j m_n)}{(z_j w + z_j^2 m_n)} \right)}$$

Arvutusliku Froude'i arvu astmes 2 valem

$$\mathbf{Fr}^2_j = \frac{Q^2 (w + 2 z_j m_n)}{g (z_j w + z_j^2 m_n)^3}$$

ARVUTUS. Kriitiline sügavus ( $Fr^2 = 1$ )

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (m)	1,0000	1,3081	1,6726	2,0420	2,3074	2,4003
$Fr^2_j$ (1)	14,3855	6,3871	3,0324	1,6537	1,1400	1,0107

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (m)	2,4086	2,4087	2,4087	2,4087
$Fr^2_j$ (1)	1,0001	1,0000	1,0000	1,0000

VASTUSED

$$d_k = 2,4087 \text{ m}$$

$$Fr = 1$$

JÄRELDUS. Numbrilisest arvutustulemusest selgub, et samade nõlvustega trapetsristlõikega voolusängi külgkitsendusega tehissängi osas on hüdrauliliselt kriitiline vabavoolurežiim määratud sügavusega  $d_k = 2,4087 \text{ m}$ .

*Arvutusnäide. Paisutuskõrgus*

*Ruutastmelise ristlõikega ülevoolu erijuht (vt LISA A)*

VALEMID

Ruutastmelise ristlõikega maksimaalse vooluhulga valem reaalvoolule on

$$Q = C_d g^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2 PK}{1 + 2 \xi} \right)^{\frac{3}{2}} W,$$

milles  $C_d$  on vooluhulgategur,  $g$  on raskuskiirendus,  $PK$  on paisutuskõrgus,  $\xi$  on ristlõike kujutegur ja  $W$  on vabavoolu pealtlaius.

**MÄRKUS.** Ülevoolu põhivalemi võib esitada teisendusega:

$$Q = C_d g^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2 PK}{1 + 2 \xi} \right)^{\frac{3}{2}} W = \frac{C_d * 3 \sqrt{3}}{2} g^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2 PK}{1 + 2 \xi} \right)^{\frac{3}{2}} W = \frac{C_d * 3 \sqrt{3} \sqrt{2}}{2 \sqrt{2}} g^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2 PK}{1 + 2 \xi} \right)^{\frac{3}{2}} W$$

$$Q = \frac{C_d * 3 \sqrt{3} \sqrt{2}}{2 \sqrt{2}} g^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2 PK}{1 + 2 \xi} \right)^{\frac{3}{2}} W = C_d * W \sqrt{2} g \left( \frac{6 PK}{2 + 4 \xi} \right)^{\frac{3}{2}},$$

milles on võetud kasutusele ülevoolutegur:

$$C_d^* = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}}.$$

Nelinurkse ristlõike erijuhul  $\xi = 1$  ja  $W = w$ , järeldub ülevoolu põhivalem:

$$Q = C_d^* W \sqrt{2g} \left( \frac{6PK}{2+4\xi} \right)^{\frac{3}{2}} = C_d^* w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}}.$$

Trapetsristlõikega voolusängi kujuteguri määramine

Veesügavus

$$d = d_k$$

$$d = 2,4087 \text{ m}$$

Veepinna kõrgus üle külgkitsendusega tehissängi osa aluspõhja (läve)

$$h = d$$

$$h = 2,4087 \text{ m}$$

Trapetsristlõikega voolamise elavlõige

$$A_e = h^2 (\beta + m_n) = h w + h^2 m_n$$

$$A_e = 126,2368 \text{ m}^2$$

Trapetsristlõikega vabavoolu pealtlaius

$$W = w + 2 m_n h$$

$$W = 54,8174 \text{ m}$$

Ekvivalentelavlõige ( $A_{ek}$ ), mis vastab nelinurkristlõikega elavlõikele, mille puhul on laius trapetsristlõikega vabavoolu pealtlaius  $W$  ning veepinna kõrguse üle aluspõhja ehk veekihi paksuseks  $h$  on trapetsristlõikega vabavoolu veekihi maksimaalne paksus.

$$A_{ek} = W h$$

$$A_{ek} = 132,0387 \text{ m}^2$$

Kujutegur

$$\xi = \frac{A_{ek}}{A_e}$$

$$\xi = 1,0460$$

Ruutastmelise ristlõikega ülevoolu maksimaalse vooluhulga valemiga saab määrata paisutuskõrguse:

$$Q = C_d g^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2 PK}{1 + 2 \xi} \right)^{\frac{3}{2}} W$$

→

$$PK = \frac{(1 + 2 \xi)}{2} \left( \frac{Q}{C_d \sqrt{g} W} \right)^{\frac{2}{3}}$$

ARVUTUS

$$C_d = 0,91$$

$$PK = \frac{(1 + 2 \cdot 1,0460)}{2} \left( \frac{600 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{0,9 \cdot (9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})^{\frac{1}{2}} \cdot 54,8174 \text{ m}} \right)^{\frac{2}{3}} = 3,7911 \text{ m}$$

JÄRELDUS. Vooluhulga  $Q = 600 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  puhul vastab vabapinnaga voolamine hüdrauliliselt kriitilisele vabavoolurežiimile, st  $Fr = 1$ , kui külgkitsendusega tehissängi osas (trapetsristlõikega voolusängi osas) kriitiline sügavus  $d_k = 1,24087 \text{ m} \approx 1,24 \text{ m}$  ja avasängi osas reaalvedeliku voolamise paisutuskõrgus  $PK = 3,7911 \text{ m} \approx 3,8 \text{ m}$ .

Vabapinna kõrguse määramine külgkitsendusega tehissängi osa ülemises bjefis

$$h = PK$$

$$h = 3,7911 \text{ m} \approx 3,80 \text{ m}$$

Normaalsügavus nelinurkse ristlõikega voolusängis (nö laias trapetsristlõikega voolusängis)

$$d_0 = 1,4229 \text{ m} \approx 1,42 \text{ m}$$

**MÄRKUS.** Ruutastmelise ristlõikega ülevoolu paistuskõrgus ideaalvoolule ( $C_d = 1$ ) on

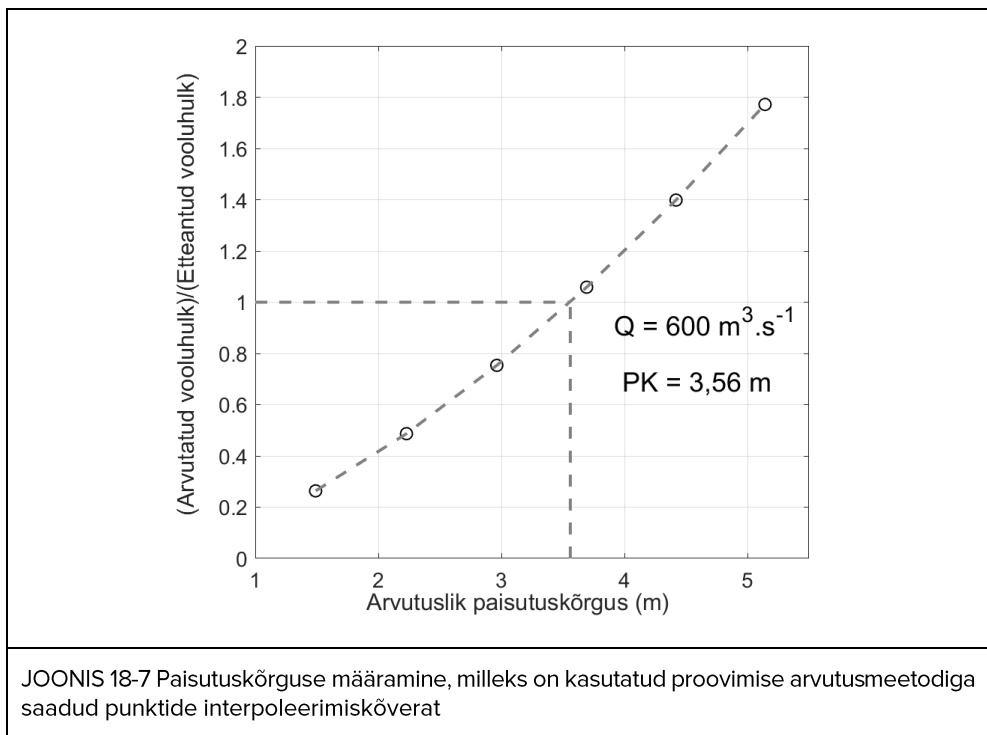
$$PK = \frac{(1 + 2 \cdot 1,0460)}{2} \left( \frac{600 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{1 \cdot (9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})^{\frac{1}{2}} \cdot 54,8174 \text{ m}} \right)^{\frac{2}{3}} = 3,5601 \text{ m}$$

JÄRELDUS. Vooluhulga  $Q = 600 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  puhul vastab vabapinnaga voolamine hüdrauliliselt kriitilisele vabavoolurežiimile, st  $Fr = 1$ , kui külgkitsendusega tehissängi osas (trapetsristlõikega voolusängi osas) on kriitiline sügavus  $d_k = 1,24087 \text{ m} \approx 1,24 \text{ m}$  ja ideaalvedeliku voolamise avasängi paisutuskõrgus  $PK = 3,5601 \text{ m} \approx 3,56 \text{ m}$ .

## KONTROLLARVUTUS. Proovimise arvutusmeetod (ideaalvedeliku voolamine)

Ideaalvedeliku Bernoulli võrrandis ülevoolule on nõ kriitilise voolamise ristlõikega tehissängi trapetsristlõike asukohaga määratud paisutuskõrgus.

	$h$ (m)	$u$ (m·s <sup>-1</sup> )	$PK$ (m)	$Q$ (m <sup>3</sup> ·s <sup>-1</sup> )	$Re_{vs}$	$Fr$
i	1,0	3,1018	1,4904	158,1933	$23,034 \cdot 10^5$	1
ii	1,5	3,7813	2,2288	292,1086	$41,425 \cdot 10^5$	1
iii	2,0	4,3466	2,9630	452,0512	$62,478 \cdot 10^5$	1
iv	2,5	4,8384	3,6932	635,0415	$85,594 \cdot 10^5$	1
v	3,0	5,2776	4,4196	839,1434	$110,37 \cdot 10^5$	1
vi	3,5	5,6769	5,1425	1063,0	$136,51 \cdot 10^5$	1



JOONIS 18-7 Paisutuskõrguse määramine, milleks on kasutatud proovimise arvutusmeetodiga saadud punktide interpoleerimiskõverat



Arvutusnäide. Paisutamise mõjuulatuse määramine

Numbriline arvutusskeem. Paisutusulatuse määramine

Numbriline arvutusmeetod. Euleri lõplike vahede valem ilmutatud kujul

#### VALEMID

Mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i_0 - I_h}{1 - Fr^2},$$

milles  $x' \rightarrow l$ ,  $I_h$  on hüdrauliline lang,  $i_0$  on põhjalang ja  $Fr$  on Froude'i arv.

Mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrandis võtame kasutusele lõplikud vahed vabapinna kõrguse ja voolupikkuse muutustele:

$$\frac{dh}{dl} \rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta l}.$$

ARVUTUSSKEEM (Paisutusulatus ruutastmelise ristlõikega voolusängis, mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand)

Numbrilises arvutusskeemis, milles diferentsiaalvõrrand lõplikele vahedele on

$$\Delta l = \Delta h \frac{1 - Fr^2}{i_0 - I_h},$$

võime kasutusele võtta Euleri valemi lõplikele vahedele ilmutatud kujul paisutamise mõjuulatuse määramisele:

$$l_{i-1} = l_i - \Delta h \frac{1 - Fr^2}{i_0 - I_h}.$$

ARVUTUS. Paisutusulatus

Numbrilises arvutusskeemis on kasutatud algtingimust:

$$l_1 = 0$$

ja veepinna kõrguse muutuse puhul konstantset lõpliku vahet:

$$\Delta h = 0,17 \text{ m}.$$

$h_i$ (m)	$A_e$ (m <sup>2</sup> )	$\chi$ (m)	$Fr$	$I_h$	$l_i$ (m)
3,80	1140	307,6	0,0862	$0,0773 \cdot 10^{-3}$	0
3,63	1089	307,3	0,0923	$0,0899 \cdot 10^{-3}$	-87,8
3,46	1038	306,9	0,0992	$0,1053 \cdot 10^{-3}$	-176,0
3,29	987	306,6	0,1070	$0,1244 \cdot 10^{-3}$	-264,8
3,12	936	306,2	0,1159	$0,1482 \cdot 10^{-3}$	-354,4
2,95	885	305,9	0,1260	$0,1784 \cdot 10^{-3}$	-445,0
2,78	834	305,6	0,1378	$0,2171 \cdot 10^{-3}$	-536,9
2,61	783	305,2	0,1514	$0,2675 \cdot 10^{-3}$	-630,4
2,44	732	304,9	0,1675	$0,3344 \cdot 10^{-3}$	-726,3
2,27	681	304,5	0,1867	$0,4247 \cdot 10^{-3}$	-825,5
2,10	630	304,2	0,2098	$0,5498 \cdot 10^{-3}$	-929,6
1,93	579	303,9	0,2382	$0,7273 \cdot 10^{-3}$	-1041,7
1,76	528	303,5	0,2735	$0,9876 \cdot 10^{-3}$	-1167,7
1,59	477	303,2	0,3185	$1,3834 \cdot 10^{-3}$	-1323,0
1,42	426	302,8	0,3774	$2,0138 \cdot 10^{-3}$	-1570,8

## VASTUS

Paisutamise mõjuulatus on ligikaudu 1571 m = 1,571 km voolusängi tehisliku külgkitsendusega osast ülesvoolu .

**MÄRKUS.** Voolamise paisutuskõrgus põhjaastmega või külgkitsendusega voolusängis määratakse sarnase ülevoolu põhivalemiga (või ka maksimaalse vooluhulga valemiga) põhjusel, et põhiülesandes ja lisaülesandes on eeldatud, et paisu ülemises bjefis on voolamise kineetiline energia oluliselt väiksem potentsiaalsest energiast. Potentsiaalne erienergia paisu ülemises bjefis on määratud suurusega  $h_{\text{pais}} + PK$  nii põhjaastmega kui ka külgkitsendusega nelinurkse ristlõikega voolusängis. Ülemise bjefi kineetilise energiaga arvestamisel on siiski vajalik kasutada numbrilist arvutusskeemi paisutuskõrguse määramisele, mis võtab arvesse ka voolukiirust põhjaastmega või külgkitsendusega voolusängi ülemises bjefis.

## 18.5 VIITED

18.1 Tibar, H. (1985). *Hüdraulika erikursuse ülesannete kogu*. Tallinna Polütehniline Instituut, Sanitaartechnika kateeder.

18.2 Maastik, A., Haldre, H., Koppel, T. & Paal, L. *Hüdraulika ja pumbad*. OÜ Greif.

18.3 Chadwick, A., Morfett, J. & Borthwick, M. (2004). *Hydraulics in Civil and Environmental Engineering*. Spon Press.

18.4 Chow, V. T., Maidment, D. R. & Mays, L. W. (1988). *Applied Hydrology*. McGraw-Hill Education.

# 19 TRUUBID

## 19.1 PRAKTILINE OSA. VEERISTED

### 19.1.1 EHITIS. TRUUP, SILLAAVA

Truup on veejuhe, mida kasutatakse vee juhtimiseks läbi sõidutee või muldkeha. Truup koosneb sissevooluavast (ingl. *culvert inlet*), torust (ingl. *culvert barrel*) ja väljavooluavast (ingl. *culvert outlet*). Truupide puhul kasutatakse erinevaid sissevooluavasid, mis võivad olla teravaservalised, nurktiibadega (tiibmüüridega), kaldnõlvaga vms. Truubi ristlõige on tavaliselt kas ümara, ristküliku, ellipsi või kaare kujuga. Truubi toruosa valmistatakse terasest, betoonist või plastmaterjalist. Truupe on laotud ka kivist. Kasutatakse ka erinevatest materjalidest kombineeritud konstruktsioone, milles truubi põhi on betoonist ja kaarterasest vms. Ehitiste sillaavadena kasutatakse ka looduslike voolusängide põhju.

Tavaliselt on truubi sissevooluava sisemõõde võrreldes voolusängi ristlõike laiuse ja kõrgusega väiksem. Kui voolusängi kõrgusmõõde ei võimalda kasutada veehulga juhtimiseks suuremõõtmelist toru, võib sõidutee või muldkeha alla paigutada ka mitu truupi. Tagasitäite nõuetekohaseks tegemiseks ja tihendamiseks peab paralleelsete truubitorude vahekaugus olema piisavalt suur (VIIDE 19.1, „Juhend truupide projekteerimiseks – truubitoru dimensioneerimine“).

### 19.1.2 VOOLUREŽIIM. SISSEVOOLUAVA JA VÄLJAVOOLUAVA VOOLUREŽIIM

Truubi sissevooluava, mis on väiksema mõõtmega kui voolusängi ristlõige, võib suurema veehulga tõttu põhjustada voolamise paisutuse, mille tõttu veepinna kõrgus truubi ülemises bjefis oluliselt suureneb. Voolusängi nõlvade kindlustamisel on oluline arvestada paisutamise mõjuulatusega. Olenevalt keskkonnatingimustest seatakse veepinna kõrgusele voolusängis piirid. Seetõttu on vajalik kasutada truupe, mis juhivad vett sõidutee või muldkeha all minimaalse paisutuskõrgusega, vähendades sellega ka teetammi muldkeha purunemise riske. Tehnilistes lahendustes on tehniliku põhjaastme ja külgekitsendusega avasängis vaja hüdrauliliselt vähendada nii paisutust kui ka truubivoolu survekadu. Majanduslikult ei ole alati võimalik tagada hüdrauliliselt kontrollitud lahendusi ning seetõttu tuleb ette näha ka veepinna voolusängis paisutamise ja truubi uputamise avariiolekorrad. Truubi projekteerimisel tuleb tagada, et veepinna tõus truubi ülemises bjefis ei oleks lubamatult kõrge, mis võib põhjustada filtratsioonivoolu teetammi muldkehas. Truubid võivad olla surveta (vabavoolu truup), poolsurvelise (üleminekuvoolu truup) või survelise (survevoolu

truup) voolurežiimiga. Surveta truubi voolurežiim on sarnane lailäviülevoolu (müürülevoolu) voolamisega. Poolsurvetruubi voolurežiim on sarnane voolamisega varja alt. Survetruubi voolurežiim on sarnane voolamisega lühikeses survetorus.

Truubivoolu projekteeritud tööolukord määratakse kahe arvutusliku voolurežiimiga: sissevooluava voolurežiim (sissevoolukontroll) või väljavooluava voolurežiim (väljavoolukontroll). Tavaliselt on sissevoolukontroll truubi projekteerimisel määrav olukord, mida iseloomustab hüdrauliliselt kontrollitud voolamine, kus truubi alumise bjefi veepinna kõrgus või truubi torutäide võimaldavad truubi läbivoolule suuremat vooluhulka kui seda võimaldab sissevooluava. Truubile valitud voolamisele projekteeritud tööolukorras on truubi sissevooluava hüdrauliline kontrolltava või vooluhulka reguleeriv ristlõige, mis kontrollib vee läbivoolu. Väljavoolukontroll erineb selle poolest, et torutäide või veetase truubi alumises bjefis ei võimalda hüdrauliliselt kontrollitud vooluhulka vastu võtta. Truubi projekteeritud tööolukordi võib määrata vaba- ja survevoolu hüdraulika valemitega, millele on vajalik anda hüdraulilise voolusüsteemi sisendid (truubi ülemise bjefi veetase, truubitoru ristlõike kuju, pikikalle jms) ja materjali omadused ning alumise bjefi veetase. (VIITED 19.2, „Veeristed“, 19.3, „Hüdraulika ja pumbad“).

Truubi ehitusprojekti koostamisel tuleb arvestada põhimõtetega, mis võimaldavad sõiduki ohutu ja sujuva liiklemise, teerajatise töökindluse, pikaajalise ja pideva kasutamise, suurvee ohutu läbilaskmise, materjalide ja energiaressursside ökonoomse kasutamise ning loodushoiu nõuete täitmise (VIIDE 19.1, „Juhend truupide projekteerimiseks – truubitoru dimensioneerimine“).

### 19.1.3 SISSEJUHATUS ÜLESANDESSE. PÕHIVALEMID

Külgekitsendusega voolusängis tekib mõõdukalt ebahürtlase voolamise paisutus juhul, kui voolusängi põhjalang vastab truubi ülemises bjefis rahulikule vabavoolurežiimi ( $Fr < 1$ ). Juhul, kui voolusängi põhjalang vastab truubi ülemises bjefis käreale vabavoolurežiimi ( $Fr > 1$ ), moodustub truubi sissevoolule vooluhüpe.

Maksimaalse vooluhulga valemi tuletamisel Bernoulli võrrandist on eeldatud, et truubi ülemises bjefis on voolamise kinetiline energia oluliselt väiksem potentsiaalsest energiast. Voolamisel muutuva laiusega tehissängis hinnatakse paisutuskõrgus kiiruskõrguse võrra üle. Reaalvedeliku voolamise paisutamisel täiendatakse maksimaalse vooluhulga valemit vooluhulgateguriga. Ideaalvedeliku voolamise paisutamisel võib paisutuskõrguse määrata valemiga.

Truubi tööolukorra võib seadistada nii vabapinnaga, poolsurvelisele kui ka survelisele voolamise puhul. Truubi sissevoolu osas toimub poolümaristlõikega määratud kriitilise voolamise kaudu üleminek erinevate nõlvuste ja trapetsristlõikega rahulikult vabavoolult käreteks voolamiseks. Seetõttu võib truubis esineda vooluhüpe, mis blokeerib osaliselt või täielikult ära õhu liikumise truubis. Põhjaaste erinevate nõlvustega trapetsristlõikelise tehissängi ja ümartruubi voolusüsteemis

(põhjaastme ja külgkitsendusega voolusängis) suurendab paisutuse mõjuulatust. Truubi voolamise kontrollarvutuses on lisaks valitud tööolukorrale (pooltäitumusega ümartruubi sissevool) vajalik hinnata truubi sisediameetri, pikkuse, langu (voolusängi pikikalde) ning truubi ülemisele ja alumisele bjeffile lubatud vabapinna kõrguste vooluhulgad. Vajalik on arvutada truubi sisse- ja väljavooluava voolurežiimi kontrolli vooluhulgad.

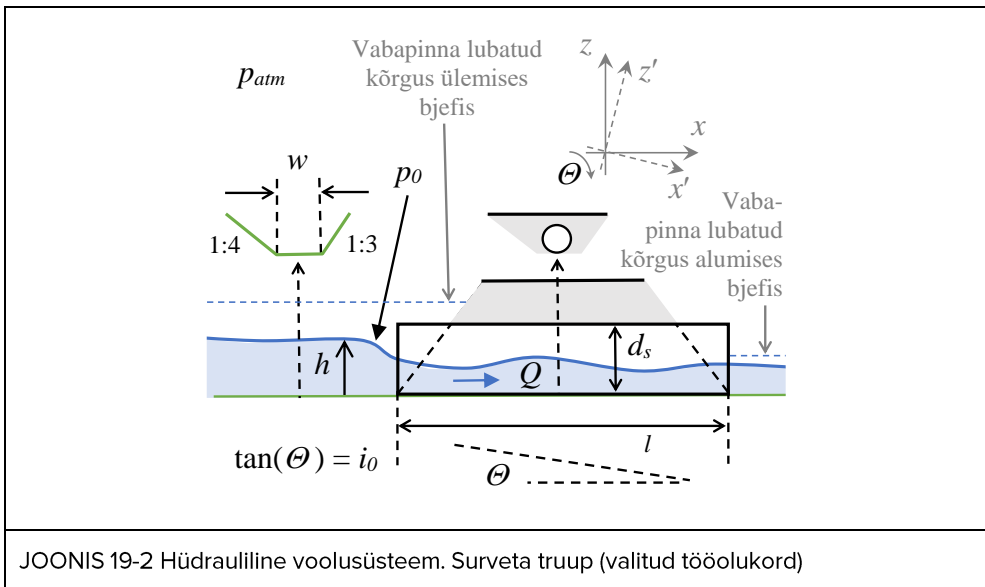


JOONIS 19-1 Truup, Praha. (Foto: Janek Laanearu, 2009)

## 19.2 PÕHIÜLESANNE. SURVETA ÜMARTRUUBI VOOLUREŽIIM

ANTUD. Rohtunud/kruuspinnasest/killustikust nõlvadega tehisliku voolusängiga (tehissängiga) ristuvast maanteetammi muldkehast vee läbijuhtimiseks on rajatud otsakindlustustega ümartruup, mis on voolusängi aluspõhjaga tasa (ilma põhjaastmeta). Ümartruubi sissevoolu vooluhulgategur  $C_d = 0,9$ . Tehissängis, aluspõhja laiusega  $w = 0,4$  m, nõlvusteguritega  $m_{n1} = 3$  (nõlvusega 1:3) ja  $m_{n2} = 4$  (nõlvusega 1:4), ning põhjalanguga (voolusängi pikikaldega)  $i_0 = 5$  mm. m<sup>-1</sup>, on valitud (arvestuslik) vooluhulk  $Q = 1$  m<sup>3</sup>. s<sup>-1</sup>. Prismaatilises erinevate nõlvustega trapetskujulise ristlõikega tehissängis voolab 10 °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000$  kg. m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg. m<sup>-1</sup>. s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>. s<sup>-1</sup>. Tehissängi piirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,03$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Arvutada voolamisele tehissängis normaalsügavus (ühtlase voolamise sügavus, mis on ristlõike maksimaalne sügavus, st sügavus vabapinnast kuni tehissängi aluspõhjani) ja sellele vastav hüdrauliline vabavoolurežiim Froude'i suhtarvu kriteeriumiga. Arvutada voolamise kriitiline sügavus. Valida surveta ümartruubile (vabavoolulisele ümartruubile) siseläbimõõt. Arvutada hüdraulilise voolusüsteemi külgekitsendusega kaasnevale paisutamisele vabapinna maksimaalne kõrgus (paisutuskõrgus) truubi ülemises bjefis. Arvutada mõõdukalt ebaühtlase voolamise paisutamise mõjuulatus, sellele vastav hüdrauliline lang ja Froude'i arv.



JOONIS 19-2 Hüdrauliline voolusüsteem. Surveta truup (valitud tööolukord)

EELDUSED. Veevool truubiga tehissängis on statsionaarne, mõõdukalt ebahütlane. Tehisliku voolusängi piirde takistuse määrab hüdrauliliselt kare voolamine. Normaalsügavus määrata Manningi vooluhulga valemiga ja kriitilise sügavus määrata Froude'i arvuga, kasutades selleks Newtoni iteratsioonmeetodit. Paisutuskõrgus määrata ülevoolu põhivalemiga uputamata juhule tingimusel, mis vastab ümartruubi pooltäitele truubi sissevoolu osas. Vabapinna lubatud kõrgus ülemises bjefis on  $2,0 d_s$  ja alumise bjefis on  $0,5 d_s$ , milles  $d_s$  on ümartruubi sisediameeter. Paisutamise mõjuulatus (paisutusulatus) määrata mõõdukalt ebahütlase vabapinnaga voolamise diferentsiaalvõrrandiga kasutades selleks numbrilist arvutuskeemi ilmutatud kujul.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Manningi vooluhulga valem, voolusängi Reynoldsi arv, Bernoulli kolmikliige, Bernoulli funktsioon, erinevate nõlvustega trapetsristlõikega voolusängi vabavoolu Froude'i arvu valem, maksimaalse vooluhulga valem, ülevoolu põhivalem, mõõdukalt ebahütlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem**

## VALEMID

Manningi vooluhulga valem on

$$Q = \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e I_h^{\frac{1}{2}}}{n_M},$$

milles  $Q$  on vooluhulk,  $n_M$  on Manningi karedustegur,  $A_e = h w + h^2 m_{n1}/2 + h^2 m_{n2}/2$  on erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehiskanali elavlõige, milles  $h$  on vabapinna kõrgus tehissängi aluspõhjast (ristlõike perimeetri horisontaalne osa),  $w$  on tehissängi aluspõhja laius, ning  $m_{n1}$  ja  $m_{n2}$  on vastavad nõlvustegurid. Hüdrauliline raadius  $R_h = A_e/\chi$ , milles  $\chi = w + h\sqrt{1 + m_{n1}^2} + h\sqrt{1 + m_{n2}^2}$  on voolamise ristlõikega (voolulõikega) antud märgpiirde pikkus, millest on välja jäetud vabapind.  $I_h$  on hüdrauliline lang.

**MÄRKUS.** Vabapinna kõrgus voolusängi aluspõhjast määrab voolusängi aluspõhja sügavuse vabapinnast:

$$h = -(-d) = d.$$

Mõõdukalt ebahütlasele vabapinnaga voolamisele prismaatilises tehissängis ei ole hüdrauliline lang määratud põhjalanguga, st  $I_h \neq i_0$ .

Voolusängi Reynoldsi arv on

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu},$$



milles  $u$  on voolukiirus,  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur ja  $R_h$  on hüdrauliline raadius. Voolamisele täistaitumusega ümartorus, sisediametriiga  $d_s = 4 R_h$ , määratakse ümartoru Reynoldsi arv valemiga:

$$Re = \frac{u d_s}{\nu} = \frac{u 4 R_h}{\nu} = 4 Re_{vs}$$

**MÄRKUS.** Kuna veevoolule ümartorus vastav kriitiline Reynoldsi arv on 2000, siis järelikult laminaarse ja turbulentse voolamise ülemineku kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on 500.

Bernoulli kolmikliige vabapinnaga voolamisele on

$$B = \frac{u^2}{2g} + h + h_s,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $g$  on raskuskiirendus,  $h$  on veepinna kõrgus tehissängi aluspõhjast ja  $h_s$  on tehissängi aluspõhja kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult.

Erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängile voolukiiruse määramisele kasutame voolamise ruumkiiruse valemit:

$$u = \frac{Q}{A_e} = \frac{Q}{h w + h^2 m_{n1}/2 + h^2 m_{n2}/2} = \frac{Q}{h^2 (\beta + m_{n1}/2 + m_{n2}/2)},$$

milles  $A_e = h^2 (\beta + m_{n1}/2 + m_{n2}/2)$  on erinevate nõlvustega trapetsristlõikega voolusängi elavlõige. Voolamise ristlõike lamedus  $\beta = w/h$ , milles  $w$  on tehissängi aluspõhja laius ja  $h$  on vabapinna kõrgus tehissängi aluspõhjast. (Ühtlasele voolamisele  $h = d_0$ , milles  $d_0$  on normaalsügavus.) Nõlvustegurid  $m_{n1} = \cot(\theta_1)$  ja  $m_{n2} = \cot(\theta_2)$ , milles  $\theta_1$  ja  $\theta_2$  on vastavalt tehissängi erinevate nõlvade välisnurgad. Hüdrauliline raadius  $R_h = A_e/\chi$ , milles  $\chi = h (\beta + \sqrt{1 + m_{n1}^2} + \sqrt{1 + m_{n2}^2})$  on erinevate nõlvustega trapetsristlõike märgpiire.

Bernoulli kolmikliikme vabapinnaga voolamisele võime teisendada kujule:

$$\begin{aligned} B &= \frac{u^2}{2g} + h + h_s = \frac{Q^2}{2g h^4 (\beta + m_{n1}/2 + m_{n2}/2)^2} + h + h_s \\ &= \frac{Q^2}{2g (h w + h^2 m_{n1}/2 + h^2 m_{n2}/2)^2} + h + h_s. \end{aligned}$$

Kui kasutada funktsiooni ekstreemumi määramise teoreemi veepinna kõrguse  $h$  järgi:

$$\frac{dB}{dh} = 0,$$

siis järeldub Bernoulli funktsioonist  $B = f(h, Q, g, w, m_{n1}, m_{n2}, h_s)$ , milles  $h$  on muutuja ja  $Q, g, w, m_{n1}, m_{n2}, h_s$  on konstantsed suurused, järgmine avaldis:

$$-\frac{2 Q^2 (w + h m_{n1} + h m_{n2})}{2 g \left( h w + h^2 \frac{m_{n1}}{2} + h^2 \frac{m_{n2}}{2} \right)^3} + 1 = -\frac{Q^2 (w + h m_{n1} + h m_{n2})}{g \left( h w + h^2 \frac{m_{n1}}{2} + h^2 \frac{m_{n2}}{2} \right)^3} + 1 = 0.$$

Erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängi vabavoolu Froude'i arv astmes 2 (ka ruudus) on määratud valemiga:

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g \frac{\left( h w + h^2 \frac{m_{n1}}{2} + h^2 \frac{m_{n2}}{2} \right)^3}{(w + h m_{n1} + h m_{n2})}} = \frac{u^2}{g \frac{\left( h w + h^2 \frac{m_{n1}}{2} + h^2 \frac{m_{n2}}{2} \right)}{(w + h m_{n1} + h m_{n2})}},$$

milles on kasutatud seost  $u = Q / (h w + h^2 m_{n1} / 2 + h^2 m_{n2} / 2)$ . Kriitilisele vabavoolule vastab  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule vastavad  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

Erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängi vabavoolu Froude'i arv ruudus valem teiseneb samade nõlvustega trapetsristlõikega, nelinurk- ja erinevate nõlvustega kolmnurkristlõikega tehiskanali Froude'i arv ruudus valemiks vastavalt tingimusel  $m_{n1} = m_{n2} = m_n$ ,  $m_{n1} = m_{n2} = 0$  ja  $w = 0$ .

$$m_{n1} = m_{n2} = m_n$$

→

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g \frac{(h w + h^2 m_n)^3}{(w + 2 h m_n)}} = \frac{u^2}{g \frac{(h w + h^2 m_n)}{(w + 2 h m_n)}}$$

$$m_{n1} = m_{n2} = 0$$

→

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g h^3 w^2} = \frac{u^2}{g h}$$

$$w = 0$$

→

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g \frac{\left( h^2 \frac{m_{n1}}{2} + h^2 \frac{m_{n2}}{2} \right)^3}{(h m_{n1} + h m_{n2})}} = \frac{u^2}{g \frac{\left( h^2 \frac{m_{n1}}{2} + h^2 \frac{m_{n2}}{2} \right)}{(h m_{n1} + h m_{n2})}}$$

Erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängi vabavoolu Froude'i arv ruudus valemit on võimalik lihtsustada ka tehissängi liitprofiilidega voolamiste erijuhtudele, milles on kombineerid tingimusi:  $m_{n1} = 0$ ,  $m_{n2} = 0$  ja  $w = 0$ . Näiteks püstise ja kaldes nõlvadega ristlõikega, millel on rõhtne aluspõhi, tehissängi vabavoolu Froude'i arv ruudus valem:

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g \frac{(h w + h^2 \frac{m_{n2}}{2})^3}{(w + h m_{n2})}} = \frac{u^2}{g \frac{(h w + h^2 \frac{m_{n2}}{2})}{(w + h m_{n2})}},$$

milles  $m_{n1} = 0$ .

Ideaalvedeliku Bernoulli võrrand ülevoolule on

$$h_s + PK \approx h_s + h + \frac{u^2}{2g},$$

milles  $h_s$  on tehissängi aluspõhja kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult,  $PK$  on paisutuskõrgus ja  $h$  on veepinna kõrgus ümartoru sisepõhja alumisest punktist (truubi sissevoolu osas),  $g$  on raskuskiirendus ja  $u$  on voolukiirus ümartorus (truubi sissevoolu osas). Ideaalvedeliku Bernoulli võrrandis ülevoolule on eeldatud, et truubi ülemises bjeffis on voolamise kinetiline energia oluliselt väiksem potentsiaalsest energiast. Potentsiaalne erienergia paisu ülemises bjeffis on määratud suurusega  $h_s + PK$  tingimisel, et kitsendusega voolusängis on trupp tehissängi põhjaga tasa.

Hüdraulilisel vabavoolurežiimil, mis vastab kriitilisele voolamisele  $Fr = 1$ , määratakse voolukiirus pooltäitumusega ümartruubis valemiga:

$$u = \sqrt{\frac{\pi}{4} g h_{rlm}},$$

milles  $h_{rlm}$  on poolümarristlõike maksimaalne veepinna kõrgus pealt kaetud tehissängi põhjast, st  $h_{rlm} = d_s/2$ , milles  $d_s$  on ümartruubi sisediaameeter.

→

$$h_s + PK = h_s + h_{rlm} + \frac{u^2}{2g}$$

$$PK = h_{rlm} + \frac{\pi}{8} h_{rlm} = h_{rlm} \left(1 + \frac{\pi}{8}\right) = h_{rlm} \left(\frac{8 + \pi}{8}\right)$$

Eeldusel, et voolamine vastab ümartruubi pooltäitumusele (truubi sissevoolu osas  $h_{rlm} = d_s/2$ ) võime ideaalvedeliku vabavoolu kriitilise kõrguse määrata valemiga:

$$h_{rlm} = \left(\frac{8}{8 + \pi}\right) PK.$$

Pooltäitumusega ümartruubis määratakse vooluhulk valemiga:

$$Q = u A_e,$$

milles elavlõige  $A_e = \pi h_{rlm}^2/2$  (ümartruubi poolristlõike pindala), milles  $h_{rlm} = d_s/2$ .

$$Q = \sqrt{\frac{g}{2} \frac{\pi}{2}} h_{r1m} \frac{\pi}{2} h_{r1m}^2 = \left(\frac{g}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} h_{r1m}^{5/2} = \left(\frac{2g}{\pi^2}\right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{2} \frac{8}{8+\pi} PK\right)^{5/2}$$

$$Q = \left(\frac{2g}{\pi^2}\right)^{1/2} \left(\frac{4\pi}{8+\pi} PK\right)^{5/2}$$

Paisutuskõrguse järgi vooluhulga määramise valemit nimetatakse maksimaalse vooluhulga valemiks juhul kui minimaalse külgekitsendusega voolamise osas (truubi sissevoolu osas)  $Fr = 1$ . Reaalvoolu paisutamisel täiendatakse maksimaalse vooluhulga valemit vooluhulgateguriga  $C_d < 1$ . Ideaalvedeliku voolamisele on vooluhulgategur  $C_d = 1$ .

Bernoulli kolmikliige vabapinnaga voolamisele on

$$B = \frac{u^2}{2g} + h + h_s,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $g$  on raskuskiirendus,  $h$  on veepinna kõrgus tehissängi aluspõhjast ja  $h_s$  on tehissängi aluspõhja kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult. Bernoulli kolmikliikme voolusuunaline muutus puudub ideaalvedeliku voolamise puhul. Mõõdukalt ebaühtlasele reaalvoolule on Bernoulli kolmikliikme tehissängi aluspõhja suunaline ( $x'$  – pööratud koordinaattelje suunaline) diferentsiaalne muutus (vähenemine) aga määratud hüdraulilise languga:

$$\frac{\partial B}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{u^2}{2g} + h + h_s \right) = -I_h,$$

milles  $I_h$  on hüdrauliline lang ja  $x'$  on voolusängi pikikalde nurgaga  $\theta$  määratud koordinaat.

Voolamise erienergia on määratud kui

$$E_s = \frac{u^2}{2g} + h = \frac{Q^2}{2g A_e^2} + h,$$

milles on võetud kasutusele vooluhulk  $Q$  ja elavlõige  $A_e$ .

Mõõdukalt ebaühtlase reaalvoolu puhul on voolamise erienergia tehissängi aluspõhja suunaline ( $x'$  – pööratud koordinaattelje suunaline) diferentsiaalne muutus (vähenemine) määratud põhjalangu ja hüdraulilise langu vahega:

$$\frac{\partial E_s}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{u^2}{2g} + h \right) = -\frac{\partial h_s}{\partial x'} - I_h \approx i_0 - I_h,$$

milles  $\partial h_s / \partial x'$  määrab põhjalanguga  $i_0$  tingimusel, et  $(\cos(\theta))^2 \approx 1$ .

Erienergia funktsioonist  $E_s = f(h, Q, g, w, m_{n1}, m_{n2})$  tuleks muutuja  $h$  järgi, eeldusel et parameetrid  $Q, g, w, m_{n1}, m_{n2}$  on konstantsed suurused, määrab avaldise:

$$\frac{\partial E_s}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{Q^2}{2gA_e^2} + h \right) = -\frac{Q^2(w + h m_{n1} + h m_{n2})}{g(hw + h^2 m_{n1}/2 + h^2 m_{n2}/2)^3} + 1 = -Fr^2 + 1.$$

Mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{dh}{dx'} \approx \frac{i_0 - I_h}{1 - Fr^2},$$

milles  $I_h$  on hüdrauliline lang,  $i_0$  on põhjalang ja  $Fr$  on Froude'i arv.

*Arvutusnäide. Normaalsügavuse määramine erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis*

*Numbriline arvutusskeem. Normaalsügavus*

*Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod*

## VALEMID

Veafunktsioon:

$$ERF(z_j) = Q_j - Q,$$

milles  $z_j$  on tehissängi arvutuslik veesügavus,  $Q_j$  on arvutuslik vooluhulk ja  $Q$  on etteantud vooluhulk.

Veafunktsioonist tuleks on

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{dQ_j}{dz_j},$$

milles on eeldatud, et  $Q = \text{konstant}$ .

Arvutuslik vooluhulk on määratud valemiga:

$$Q_j = \frac{R_{hj}^{\frac{2}{3}} A_{ej} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M},$$

milles  $R_{hj}$  on arvutuslik hüdrauliline raadius ja  $A_{ej}$  on arvutuslik elavlõige.

→

$$\begin{aligned} \frac{dERF(z_j)}{dz_j} &= \frac{d}{dz_j} \left( \frac{R_{hj}^{\frac{2}{3}} A_{ej} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} \right) = \frac{i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} \left( \frac{2 A_{ej} R_{hj}^{-\frac{1}{3}} dR_{hj}}{3 dz_j} + R_{hj}^{\frac{2}{3}} \frac{dA_{ej}}{dz_j} \right) \\ &= Q_j \left( \frac{2}{3 R_{hj}} \frac{dR_{hj}}{dz_j} + \frac{1}{A_{ej}} \frac{dA_{ej}}{dz_j} \right) \end{aligned}$$

Veafunktsioonist suunatud tuletise võtmise reegel:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{0 - ERF(z_j)}{z_{j+1} - z_j},$$

võimaldab kasutusele võtta Taylori valemi 1-järgu tuletise täpsusega:

$$z_{j+1} = z_j - \frac{ERF(z_j)}{\frac{dERF(z_j)}{dz_j}}.$$

Numbriilise arvutuskeemi põhivalemi üldkuju on

$$z_{j+1} = z_j - \frac{Q_j - Q}{Q_j \left( \frac{2}{3} \frac{dR_{h_j}}{R_{h_j}} \frac{dz_j}{dz_j} + \frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} \right)} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left( \frac{2}{3} \frac{dR_{h_j}}{R_{h_j}} \frac{dz_j}{dz_j} + \frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} \right)}.$$

Määrame hüdraulilise voolusüsteemi valemi numbrilise arvutuskeemi põhivalemi liikmele:

$$\frac{2}{3} \frac{dR_{h_j}}{R_{h_j}} \frac{dz_j}{dz_j}.$$

Erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängi hüdrauliline raadius on

$$R_{h_j} = \frac{A_{e_j}}{\chi_j} = \frac{z_j w + z_j^2 m_{n1}/2 + z_j^2 m_{n2}/2}{w + z_j \sqrt{1 + m_{n1}^2} + z_j \sqrt{1 + m_{n2}^2}}.$$

Määrame numbrilise arvutuskeemi põhivalemi *esimese* liikme valemi.

$$\begin{aligned} \frac{dR_{h_j}}{dz_j} &= \frac{d}{dz_j} \left( \frac{z_j w + z_j^2 m_{n1}/2 + z_j^2 m_{n2}/2}{w + z_j \sqrt{1 + m_{n1}^2} + z_j \sqrt{1 + m_{n2}^2}} \right) \\ &= \frac{w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2}}{w + z_j \sqrt{1 + m_{n1}^2} + z_j \sqrt{1 + m_{n2}^2}} \\ &\quad - \frac{z_j w + z_j^2 m_{n1}/2 + z_j^2 m_{n2}/2}{(w + z_j \sqrt{1 + m_{n1}^2} + z_j \sqrt{1 + m_{n2}^2})^2} (\sqrt{1 + m_{n1}^2} + \sqrt{1 + m_{n2}^2}) \end{aligned}$$

→

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \frac{dR_{h_j}}{R_{h_j}} \frac{dz_j}{dz_j} &= \frac{2}{3} \frac{\chi_j}{A_{e_j}} \left( \frac{w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2}}{\chi_j} - \frac{A_{e_j}}{\chi_j^2} (\sqrt{1 + m_{n1}^2} + \sqrt{1 + m_{n2}^2}) \right) \\ &= \frac{2}{3} \frac{(w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2})}{(z_j w + z_j^2 m_{n1}/2 + z_j^2 m_{n2}/2)} \\ &\quad - \frac{2}{3} \frac{(\sqrt{1 + m_{n1}^2} + \sqrt{1 + m_{n2}^2})}{(w + z_j \sqrt{1 + m_{n1}^2} + z_j \sqrt{1 + m_{n2}^2})} \end{aligned}$$

Määrame hüdraulilise voolusüsteemi valemi numbrilise arvutuskeemi põhivalemi liikmele:

$$\frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j}.$$

Erinevate nõlvustega trapetsristlõikega vabapinnaga voolamise arvutuslik elavlõige on

$$A_{e_j} = z_j w + z_j^2 \frac{m_{n1}}{2} + z_j^2 \frac{m_{n2}}{2}$$

ja selle tuletis muutuja  $z_j$  järgi on

$$\frac{dA_{e_j}}{dz_j} = w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2}.$$

Määrame numbrilise arvutuskeemi põhivalemi *teise* liikme valemi.

$$\frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} = \frac{w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2}}{z_j w + z_j^2 m_{n1}/2 + z_j^2 m_{n2}/2}$$

ARVUTUSSKEEM (Manningi valem, avatud erinevate-nõlvustega trapetsristlõikega voolusäng)

Numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku normaalsügavuse valem (iteratsioonmeetodi põhivalem)

$$z_{j+1} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left( \frac{5}{3} \frac{(w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2})}{(z_j w + z_j^2 m_{n1}/2 + z_j^2 m_{n2}/2)} - \frac{2}{3} \frac{(\sqrt{1 + m_{n1}^2} + \sqrt{1 + m_{n2}^2})}{(w + z_j \sqrt{1 + m_{n1}^2} + z_j \sqrt{1 + m_{n2}^2})} \right)}$$

Arvutusliku vooluhulga valem

$$Q_j = \frac{R_{h_j}^{\frac{2}{3}} A_{e_j} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} A_{e_j}^{\frac{5}{3}}}{n_M \chi_j^{\frac{2}{3}}} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} (z_j w + z_j^2 m_{n1}/2 + z_j^2 m_{n2}/2)^{\frac{5}{3}}}{n_M (w + z_j \sqrt{1 + m_{n1}^2} + z_j \sqrt{1 + m_{n2}^2})^{\frac{2}{3}}}$$

Ühtlasel vabapinnaga voolamisele tehissängis on hüdrauliline lang määratud põhjalinguga

$$I_h = i_0.$$

## ARVUTUS. Normaalsügavus

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (m)	1	0,6724	0,5262	0,4923	0,4905	0,4905
$Q_j$ ( $m^3 \cdot s^{-1}$ )	5,8483	2,1646	1,1861	1,0089	1,0000	1,0000

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (m)	0,4905	0,4905	0,4905	0,4905
$Q_j$ ( $m^3 \cdot s^{-1}$ )	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

### VASTUSED

$$d_0 = 0,4905 \text{ m}$$

$$Re_{vs} = 1,9361 \cdot 10^5$$

$$Fr = 0,5519$$

$$\lambda = 0,1105$$

JÄRELDUS. Numbrilisest arvutustulemusest selgub, et ühtlane voolamine erinevate nõlvustega trapetsristlõikega voolusängis on turbulentne ( $Re_{vs} > 500$ ) ja Froude'i suhtarvu kriteeriumi järgi on hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ). Ühtlane voolamine trapetsristlõikega voolusängis vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnale.

*Arvutusnäide. Kriitilise sügavuse määramine erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis*

*Numbriline arvutusskeem. Kriitiline sügavus*

*Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod*

### VALEMID

Erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängi vabavoolu Froude'i arv astmes 2 on määratud valemiga

$$Fr^2 = \frac{u^2}{g \frac{\left( d w + d^2 \frac{m_{n1}}{2} + d^2 \frac{m_{n2}}{2} \right)}{(w + d m_{n1} + d m_{n2})}}$$



milles vee sügavus on  $d$  ja voolukiirus  $u = Q/(d w + d^2 m_{n1}/2 + d^2 m_{n2}/2)$ .

Erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängi vabavoolu Froude'i arv on

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{g \frac{(d w + d^2 \frac{m_{n1}}{2} + d^2 \frac{m_{n2}}{2})}{(w + d m_{n1} + d m_{n2})}}}$$

Kriitilisele vabavoolule vastab  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule vastavad  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

Froude'i suhtarvu kriteerium kriitilisele voolamisele on

$$Fr^2 = 1$$

→

$$1 = \frac{u^2}{g \frac{(d w + d^2 \frac{m_{n1}}{2} + d^2 \frac{m_{n2}}{2})}{(w + d m_{n1} + d m_{n2})}} = \frac{Q^2}{g \frac{(d w + d^2 \frac{m_{n1}}{2} + d^2 \frac{m_{n2}}{2})^3}{(w + d m_{n1} + d m_{n2})}}$$

Newtoni iteratsioonmeetod ja numbriline arvutuskeem

Veafunktsioon:

$$ERF(z_j) = Fr^2_j - Fr^2,$$

milles  $z_j$  on tehissängile arvutuslik kriitiline sügavus,  $Fr^2_j$  on arvutuslik Froude'i arv astmes 2 ja  $Fr^2$  on etteantud Froude'i arv astmes 2.

Veafunktsiooni tuletis:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{dFr^2_j}{dz_j},$$

milles on eeldatud, et  $Fr^2 = konstant (= 1)$ .

Arvutuslik Froude'i arv ruudus on määratud valemiga:

$$Fr^2_j = \frac{Q^2}{g \frac{(z_j w + z_j^2 \frac{m_{n1}}{2} + z_j^2 \frac{m_{n2}}{2})^3}{(w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2})}} = \frac{Q^2 (w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2})}{g (z_j w + z_j^2 \frac{m_{n1}}{2} + z_j^2 \frac{m_{n2}}{2})^3},$$

milles  $g, Q, w, m_{n1}$  ja  $m_{n2}$  on konstantsed suurused.

→

$$\begin{aligned}
\frac{dERF(z_j)}{dz_j} &= \frac{d}{dz_j} \left( \frac{Q^2 (w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2})}{g \left( z_j w + z_j^2 \frac{m_{n1}}{2} + z_j^2 \frac{m_{n2}}{2} \right)^3} \right) \\
&= \frac{Q^2}{g} \left( \frac{m_{n1} + m_{n2}}{\left( z_j w + z_j^2 \frac{m_{n1}}{2} + z_j^2 \frac{m_{n2}}{2} \right)^3} - \frac{3 (w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2})^2}{\left( z_j w + z_j^2 \frac{m_{n1}}{2} + z_j^2 \frac{m_{n2}}{2} \right)^4} \right) \\
&= \frac{Q^2 (w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2})}{g \left( z_j w + z_j^2 \frac{m_{n1}}{2} + z_j^2 \frac{m_{n2}}{2} \right)^3} \left( \frac{m_{n1} + m_{n2}}{w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{3 (w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2})}{\left( z_j w + z_j^2 \frac{m_{n1}}{2} + z_j^2 \frac{m_{n2}}{2} \right)} \right) \\
&= Fr^2_j \left( \frac{m_{n1} + m_{n2}}{w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2}} - \frac{3 (w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2})}{\left( z_j w + z_j^2 \frac{m_{n1}}{2} + z_j^2 \frac{m_{n2}}{2} \right)} \right)
\end{aligned}$$

Veafunktsioonist suunatud tuletise võtmise reegel:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{0 - ERF(z_j)}{z_{j+1} - z_j},$$

võimaldab kasutusele võtta Taylori valemi 1-järgu tuletise täpsusega:

$$z_{j+1} = z_j - \frac{ERF(z_j)}{\frac{dERF(z_j)}{dz_j}}.$$

Numbrilise arvutuskeemi põhivalemi üldkuju on

$$\begin{aligned}
z_{j+1} &= z_j - \frac{Fr^2_j - Fr^2}{Fr^2_j \left( \frac{m_{n1} + m_{n2}}{w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2}} - \frac{3 (w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2})}{\left( z_j w + z_j^2 \frac{m_{n1}}{2} + z_j^2 \frac{m_{n2}}{2} \right)} \right)} \\
&= z_j - \frac{1 - Fr^2/Fr^2_j}{\left( \frac{m_{n1} + m_{n2}}{w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2}} - \frac{3 (w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2})}{\left( z_j w + z_j^2 \frac{m_{n1}}{2} + z_j^2 \frac{m_{n2}}{2} \right)} \right)}.
\end{aligned}$$

ARVUTUSSKEEM (Froude'i arv, avatud erinevate-nõlvustega trapetsristlõikega voolusäng)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku kriitilise sügavuse valem (iteratsioonmeetodi põhivalem)

$$z_{j+1} = z_j - \frac{1 - Fr^2 / Fr^2_j}{\left( \frac{m_{n1} + m_{n2}}{w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2}} - \frac{3(w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2})}{\left( z_j w + z_j^2 \frac{m_{n1}}{2} + z_j^2 \frac{m_{n2}}{2} \right)} \right)}$$

Arvutusliku Froude'i arvu astmes 2 valem

$$Fr^2_j = \frac{Q^2 (w + z_j m_{n1} + z_j m_{n2})}{g \left( z_j w + z_j^2 \frac{m_{n1}}{2} + z_j^2 \frac{m_{n2}}{2} \right)^3}$$

ARVUTUS. Kriitiline sügavus ( $Fr^2 = 1$ )

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (m)	0,5	0,2157	0,2627	0,3116	0,3522	0,3728
$Fr^2_j$ (1)	0,2790	11,1804	4,8342	2,3105	1,3478	1,0470

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (m)	0,3766	0,3767	0,3767	0,3767
$Fr^2_j$ (1)	1,0011	1,0000	1,0000	1,0000

VASTUSED

$$d_k = 0,3767 \text{ m}$$

$$Fr = 1$$

$$d_k < d_0$$

JÄRELDUS. Numbrilisest arvutustulemusest selgub, et erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis on kriitiline sügavus väiksem kui normaalsügavus. Järelikult on Froude'i suhtarvu kriteeriumi järgi ühtlane voolamine erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga.

Arvutusnäide. Paisutuskõrguse määramine truubi ülemises bjefis

#### VALEMID

Maksimaalse vooluhulga valem reaalvedeliku voolamisele on

$$Q = C_d \left( \frac{2g}{\pi^2} \right)^{1/2} \left( \frac{4\pi}{8+\pi} PK \right)^{5/2},$$

milles on eeldatud, et trapetsristlõikega vooluängist reaalvedeliku voolamisele pealt kaetud tehissängis, st ümartruupi on maksimaalne veepinna kõrgus  $h_{rlm} = d_s/2$ , milles  $d_s$  on ümartruubi sisediaameeter.

Maksimaalse vooluhulga valemist saab tuletada valemi paisutuskõrguse määramisele:

$$PK = \left( \frac{8+\pi}{4\pi} \right) \left( \frac{Q}{C_d \sqrt{2g/\pi^2}} \right)^{\frac{2}{5}}.$$

ARVUTUS. Paisutuskõrgus

$$PK = \left( \frac{8+\pi}{4\pi} \right) \cdot \left( \frac{1 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{0,9 \cdot (2 * 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} / \pi^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{2}{5}} = 0,8060 \text{ m}$$

Arvutusnäide. Paisutuse kriitilise sügavuse määramine truubi sissevoolu osas

#### VALEMID

$$u = \sqrt{\frac{\pi}{4} g h_{rlm}}$$

$$A_e = \frac{\pi h_{rlm}^2}{2}$$

$$Q = u A_e = \sqrt{\frac{\pi}{4} g h_{rlm}} \frac{\pi h_{rlm}^2}{2} = \sqrt{\frac{\pi^3}{16} g} h_{lm}^{\frac{5}{2}}$$

$$h_{rlm} = \left( Q / \sqrt{\frac{\pi^3}{16} g} \right)^{\frac{2}{5}}$$

$$d_k = h_{rlm}$$

ARVUTUS

$$d_k = \left( 1 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} / \sqrt{\frac{\pi^3}{16} 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} \right)^{\frac{2}{5}} = 0,5549 \text{ m}$$

Arvutusnäide. Ümartruubi sisediameetri valimine

VALEM

$$d_s = 2 d_k$$

ARVUTUS

$$d_s = 2 \cdot 0,5549 \text{ m} = 1,1098 \text{ m}$$

Arvutusnäide. Vabapinna kõrguse määramine truubi ülemises bjefis

VALEMID

$$h_{vp} = PK$$

$$h = h_{vp}$$

VASTUS

$$h = 0,8060 \text{ m}$$

Arvutusnäide. Paisutuse mõjuulatuse määramine erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis

Numbriline arvutusskeem. Paisutusulatus

Numbriline arvutusmeetod. Euleri valem lõplikele vahedele ilmutatud kujul

VALEMID

Mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i_0 - I_h}{1 - Fr^2},$$

milles  $x' \rightarrow l$ ,  $I_h$  on hüdrauliline lang,  $i_0$  on põhjalang ja  $Fr$  on Froude'i arv.

Mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrandis võtame kasutusele lõplikud vahed vabapinna kõrguse ja voolupikkuse muutudele:

$$\frac{dh}{dl} \rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta l}.$$

Kasutades numbrilist arvutusskeemi diferentsiaalvõrrandi lõplikele vahedele ilmutatud kujul:

$$\Delta l = \Delta h \frac{1 - Fr^2}{i_0 - I_h},$$

saame kasutusel võtta Euleri valemi paisutuse ruumilise mõjuulatuse määramisele:

$$l_{i-1} = l_i - \Delta h \frac{1 - Fr^2}{i_0 - I_h}.$$

ARVUTUS. Paisutamise mõjuulatus

Numbrilises arvutusskeemis on kasutatud algingimust

$$l_1 = 0$$

ja veepinna kõrguse muutuse puhul konstantset lõpliku vahet

$$\Delta h = 0,02 \text{ m} .$$

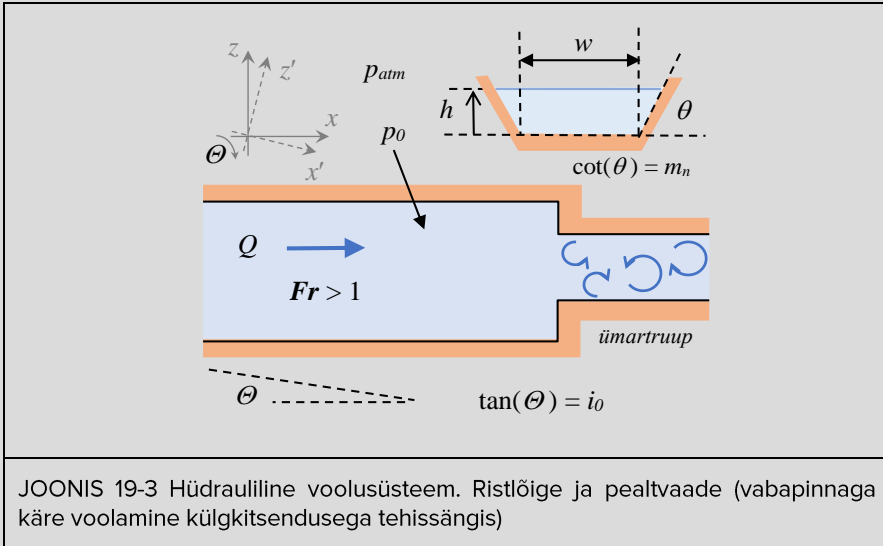
$h_i$ (m)	$A_e$ (m <sup>2</sup> )	$\chi$ (m)	$Fr$	$I_h$	$l_i$ (m)
0,81	2,6204	6,3012	0,1726	$0,4223 \cdot 10^{-3}$	0
0,79	2,5004	6,1555	0,1831	$0,4785 \cdot 10^{-3}$	-4,2388
0,77	2,3832	6,0097	0,1944	$0,5439 \cdot 10^{-3}$	-8,5139
0,75	2,2687	5,8640	0,2068	$0,6202 \cdot 10^{-3}$	-12,8324
0,73	2,1571	5,7183	0,2203	$0,7096 \cdot 10^{-3}$	-17,2036
0,71	2,0484	5,5726	0,2351	$0,8147 \cdot 10^{-3}$	-21,6388
0,69	1,9423	5,4269	0,2513	$0,9388 \cdot 10^{-3}$	-26,1533
0,67	1,8391	5,2812	0,2691	$1,0860 \cdot 10^{-3}$	-30,7669
0,65	1,7387	5,1355	0,2888	$1,2615 \cdot 10^{-3}$	-35,5067
0,63	1,6411	4,9898	0,3105	$1,4718 \cdot 10^{-3}$	-40,4103
0,61	1,5463	4,8441	0,3346	$1,7252 \cdot 10^{-3}$	-45,5326
0,59	1,4543	4,6984	0,3613	$2,0321 \cdot 10^{-3}$	-50,9562
0,57	1,3651	4,5527	0,3912	$2,4062 \cdot 10^{-3}$	-56,8151
0,55	1,2787	4,4070	0,4247	$2,8651 \cdot 10^{-3}$	-63,3456
0,53	1,1951	4,2613	0,4624	$3,4320 \cdot 10^{-3}$	-71,0240
0,51	1,1143	4,1155	0,5049	$4,1375 \cdot 10^{-3}$	-81,0526
0,49	1,0363	3,9698	0,5531	$5,0225 \cdot 10^{-3}$	-98,3311

VASTUS

Paisutamise mõjuulatus on ligikaudu 100 m = 0,1 km truubi ülemises bjefis.

## MÄRKUSED. Surveta ümartruubi voolurežiim

- Erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängi ja ümartruubi voolusüsteemis, ehk külgekitsendusega voolusängis tekib mõõdukalt ebaühtlase voolamise paisutus juhul kui voolusängi põhjalang vastab truubi ülemises bjefis rahulikule voolamisele, st  $Fr < 1$ . Juhul kui voolusängi põhjalang vastab truubi ülemises bjefis käredele voolamisele, st  $Fr > 1$ , siis moodustub vooluhüpe truupi sissevoolu puhul.



- Voolamisele hüdrauliliselt kareda piirdega survetorus, mis vastab Moody diagrammil ruuttakistuspiirkonna hõõrdetakistusteguri lahenditele, võib kasutada Manningi karedustegurit  $n_M$ . Hõõrdetakistustegur määratakse siis valemiga

$$\lambda = \frac{8g n_M^2}{R_h^{\frac{2}{3}}}$$

milles  $g$  on raskuskiirendus,  $R_h$  on hüdrauliline raadius. Kui voolamisele pealt kaetud tehissängis, st ümartruubis on maksimaalne veepinna kõrgus  $h_{r_{lm}} = d_s/2$ , milles  $d_s$  on ümartruubi sisediameeter, siis  $R_h = d_s/4$ . Manningi karedusteguri kasutamine voolusüsteemi takistuse määramisele on seotud vee omaduste määramatusega. Vee temperatuur määrab vee tiheduse ja dünaamilise molekulaarse viskoossusteguri, mille järgi määratakse kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur. Reynoldsi arvu väärtus sõltub oluliselt kinemaatilisest molekulaarsest viskoossustegurist.

- Maksimaalse vooluhulga valemi tuletamisel Bernoulli võrrandist on eeldatud, et truubi ülemises bjefis on voolamise kineetiline energia oluliselt väiksem potentsiaalsest energiast. Potentsiaalne erienergia truubi ülemises bjefis on määratud suurusega  $h_s + PK$ . Voolamisel muutuva laiusega tehissängis on seetõttu paisutuskõrgus ülehinnatud kiiruskõrguse võrra.

- Reaalvedeliku voolamise paisutamisel täiendatakse maksimaalse vooluhulga valemit vooluhulgateguriga  $C_d < 1$ . Ideaalvedeliku voolamisele  $C_d = 1$ .
- Ideaalvedeliku voolamise paisutamisel võib paisutuskõrguse määrata valemiga  $PK = \left(\frac{8 + \pi}{8}\right) h_{rlm}$ , milles  $PK$  on paisutuskõrgus ja  $h_{rlm}$  on maksimaalne veepinna kõrgus pooltäitumusega ümartruubis, st  $h_{rlm} = d_s/2$ , milles  $d_s$  on ümartruubi sisediaameeter.
- Valitud tööolukorra voolamise võib seadistada ka ümartoru täitumusele truubi sissevoolu osas, mis vastab kriitilistele sügavustele  $d_k > d_s/2$  (või  $d_k < d_s/2$ ), milles  $d_s$  on ümartruubi sisediaameeter. Selleks on vajalik kasutada keerulisemat kriitilise vabavoolu tingimust ( $Fr = 1$ ), kui see on olemas pooltäitumusega ümartruubile

$$u = \sqrt{\frac{\pi}{4} g h_{rlm}}$$

(vt LISAÜLESANNE 1 või LISA I).

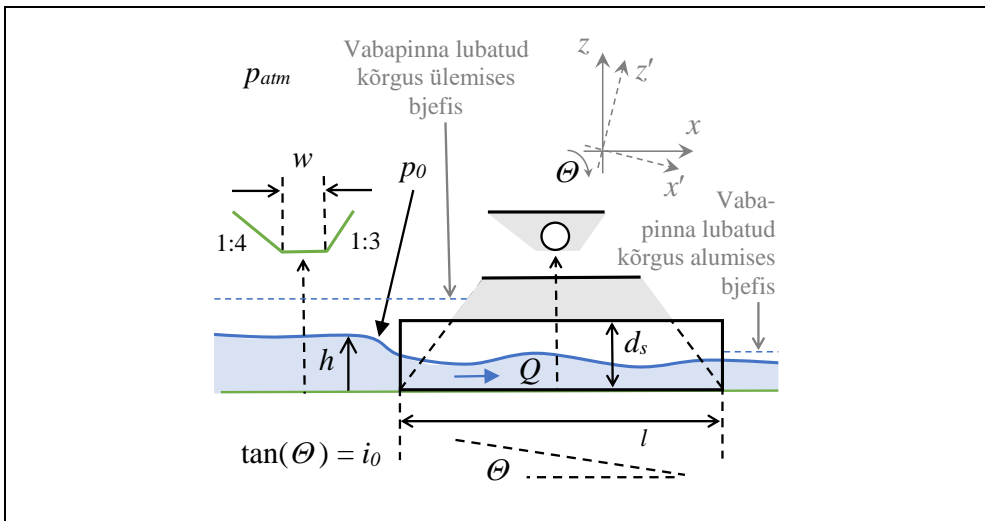
- Erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängi kriitilise sügavuse numbriline arvutusskeem (Newtoni iteratsioonmeetod) koondub hästi sügavuse algväärtustel  $0 < z_{j=1} \leq 0,5$  m.
- Truubi sissevoolu osas toimub üleminek erinevate nõlvustega trapetsristlõikega rahulikult vabavoolult ( $Fr < 1$ ) käreteks voolamisele ( $Fr > 1$ ) läbi poolümarristlõikega määratud kriitilise voolamise ( $Fr = 1$ ). Seetõttu võib truubis esineda vooluhüpe, mis osaliselt või täielikult blokeerib ära õhu liikumise truubis.
- Põhjaaste erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängi ja ümartruubi voolusüsteemis, ehk põhjaastme ja külgekitsendusega voolusängis suurendab paisutuse mõjuulatust (vt ISESEISVA TÖÖ ÜLESANNE 2).
- Truubi voolamise kontrollarvutuses on lisaks valitud tööolukorrale (pooltäitumusega ümartruubi sissevoolu osas) vajalik hinnata vooluhulgad valitud truubi sisediaameetri, pikkuse, langu (voolusängi pikikalde) ning lubatud vabapinna kõrgustele truubi ülemises ja alumises bjefis. Vajalik on teha truubi sissevoolu- ja väljavoolukontrolli vooluhulkade arvutused (vt LISAÜLESANDED 2 ja 3).
- Kui truubi voolamise töörežiimile valitud ümartoru diameeter ei vasta veeristme muldkeha püstmõõtmele, siis tuleb vee läbijuhtimisel paigutada mitu väiksema diameetriga truupi. Vajadusel tuleb loobuda põhjaastmest ja suurendada truubi langu.
- Erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängi vabavoolu Froude'i arv ruudus valemit on võimalik lihtsustada tehissängi liitprofiilide erijuhtudele, kui kombineerida tingimusi:  $m_{n1} = 0$ ,  $m_{n2} = 0$  ja  $w = 0$ .
- Bernoulli võrrandit võib rakendada igale voolujoonele. Rõhk vedelikus on hüdrostaatiline kui voolujooned on paralleelsed. Mõõdukalt ebahütsel voolamisel on voolujooned praktiliselt paralleelsed.



## 19.3 ISESEISEVA TÖÖ ÜLESANNE 1. SURVETA ÜMARTRUUBI VOOLUREŽIIM

ANTUD. Rohtunud/kruuspinnasest/killustikust nõlvadega tehisliku voolusängiga (tehissängiga) ristuvast maanteetammi muldkehast vee läbijuhtimiseks on rajatud otsakindlustustega ümartruup, mis on voolusängi aluspõhjaga tasa (ilma põhjaastmeta). Ümartruubi sissevoolu vooluhulgategur  $C_d = 0,9$ . Tehissängis, aluspõhja laiusega  $w = 0,4$  m, nõlvusteguritega  $m_{n1} = 3$  (nõlvusega 1:3) ja  $m_{n2} = 4$  (nõlvusega 1:4), ning põhjalanguga (voolusängi pikikaldega)  $i_0 = 5$  mm. m<sup>-1</sup>, on valitud (arvestuslik) vooluhulk  $Q = 2$  m<sup>3</sup>. s<sup>-1</sup>. Prismaatilises erinevate nõlvustega trapetskujulise ristlõikega tehissängis voolab 10 °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000$  kg. m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg. m<sup>-1</sup>. s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>. s<sup>-1</sup>. Tehissängi piirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,03$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Arvutada voolamisele tehissängis normaalsügavus (ühtlase voolamise sügavus, mis on ristlõike maksimaalne sügavus, st sügavus vabapinnast kuni tehissängi aluspõhjani) ja sellele vastav hüdrauliline vabavoolurežiim Froude'i suhtarvu kriteeriumiga. Arvutada voolamise kriitiline sügavus. Valida surveta ümartruubi (vabavoolulise ümartruubi) siseläbimõõt. Arvutada hüdraulilise voolusüsteemi külgekitsendusega kaasnevale paisutamisele vabapinna maksimaalne kõrgus (paisutuskõrgus) truubi ülemises bjefis. Arvutada mõõdukalt ebaühtlase voolamise paisutamise mõjuulatus, sellele vastav hüdrauliline lang ja Froude'i arv.



JOONIS 19-4 Hüdrauliline voolusüsteem. Surveta truup (valitud tööolukord)

EELDUSED. Veevool truubiga tehissängis on statsionaarne, mõõdukalt ebahütlane. Tehisliku voolusängi piirde takistuse määrab hüdrauliliselt kare voolamine. Normaalsügavus määrata Manningi vooluhulga valemiga ja kriitilise sügavus määrata Froude'i arvuga, kasutades selleks Newtoni iteratsioonmeetodit. Paisutus-kõrgus määrata ülevoolu põhivalemiga uputamata juhule tingimusel, mis vastab ümartruubi pooltäitele truubi sissevoolu osas. Vabapinna lubatud kõrgus ülemises bjefis on  $2,0 d_s$  ja alumise bjefis on  $0,5 d_s$ , milles  $d_s$  on ümartruubi sisediaameeter. Paisutamise mõjuulatus (paisutusulatus) määrata mõõdukalt ebahütlase vabapinnaga voolamise diferentsiaalvõrrandiga kasutades selleks numbrilist arvutuskeemi ilmutatud kujul.

#### VASTUSED

Normaalsügavus erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis

$$d_0 = 0,6512 \text{ m}$$

Ühtlase vabapinnaga voolamise voolusängi Reynoldsi arv erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis

$$Re_{vs} = 2,9906 \cdot 10^5$$

Ühtlase vabapinnaga voolamise Froude'i arv erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis

$$Fr = 0,5750$$

Hõõrdetakistustegur

$$\lambda = 0,1013$$

JÄRELDUS. Numbrilisest arvutustulemusest selgub, et ühtlane voolamine erinevate nõlvustega trapetsristlõikega voolusängis on turbulentne ( $Re_{vs} > 500$ ) ja Froude'i suhtarvu kriteeriumi järgi on hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ). Ühtlane voolamine trapetsristlõikega voolusängis vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnale.

Ühtlase vabapinnaga voolamise Froude'i suhtarvu kriteeriumiga ( $Fr = 1$ ) määratud kriitiline sügavus erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis

$$d_k = 0,5122 \text{ m}$$

JÄRELDUS. Numbrilisest arvutustulemusest selgub, et erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis on kriitiline sügavus väiksem kui normaalsügavus. Järelikult on Froude'i suhtarvu kriteeriumi järgi ühtlane voolamine erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga.

Mõõdukalt ebäühtlase vabapinnaga voolamise paisutuskõrgus pealtkaetud voolusängi, st ümartruubi ülemises bjefis

$$PK = 1,0636 \text{ m}$$

Mõõdukalt ebäühtlase vabapinnaga voolamise Froude'i suhtarvu kriteeriumiga ( $Fr = 1$ ) määratud kriitiline sügavus ümartruubi sissevoolu osas

$$d_k = 0,7322 \text{ m}$$

Ümartruubi sisediameeter

$$d_s = 1,4643 \text{ m}$$

Mõõdukalt ebäühtlase vabapinnaga voolamisele paisutuse maksimaalne kõrgus ümartruubi ülemises bjefis

$$h_{vp} = 1,0636 \text{ m}$$

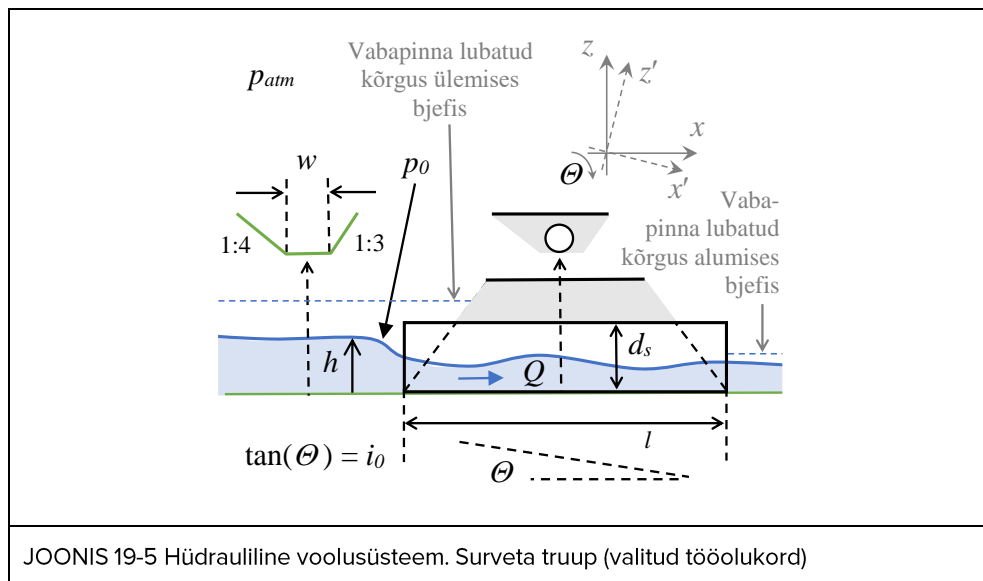
Mõõdukalt ebäühtlase vabapinnaga voolamise paisutuse mõjuulatus ümartruubi ülemises bjefis, st erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis

$$145 \text{ m} = 0,145 \text{ km}$$

## 19.4 ISESEISEVA TÖÖ ÜLESANNE 2. SURVETA ÜMARTRUUBI VOOLUREŽIIM

ANTUD. Rohtunud/kruuspinnasest/killustikust nõlvadega tehisliku voolusängiga (tehissängiga) ristuvast maanteetammi muldkehast vee läbijuhtimiseks on rajatud otsakindlustustega ümartruup, põhja-astmega  $h_s = 0,5$  m. Ümartruubi sissevoolu vooluhulgategur  $C_d = 0,9$ . Tehissängis, aluspõhja laiusega  $w = 0,4$  m, nõlvusteguritega  $m_{n1} = 3$  (nõlvusega 1:3) ja  $m_{n2} = 4$  (nõlvusega 1:4), ning põhjalanguga (voolusängi pikikaldega)  $i_0 = 5$  mm. m<sup>-1</sup>, on valitud (arvestuslik) vooluhulk  $Q = 1$  m<sup>3</sup>. s<sup>-1</sup>. Prismaatilises erinevate nõlvustega trapetskujulise ristlõikega tehissängis voolab 10 °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000$  kg. m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg. m<sup>-1</sup>. s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>. s<sup>-1</sup>. Tehissängi piirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,03$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Arvutada voolamisele tehissängis normaalsügavus (ühtlase voolamise sügavus, mis on ristlõike maksimaalne sügavus, st sügavus vabapinnast kuni tehissängi aluspõhjani) ja sellele vastav hüdrauliline vabavoolurežiim Froude'i suhtarvu kriteeriumiga. Arvutada voolamise kriitiline sügavus. Valida surveta ümartruubi (vabavoolulise ümartruubi) siseläbimõõt. Arvutada hüdraulilise voolusüsteemi külgekitsendusega kaasnevale paisutamisele vabapinna maksimaalne kõrgus (paisutuskõrgus) truubi ülemises bjefis. Arvutada mõõdukalt ebaühtlase voolamise paisutamise mõjuulatus, sellele vastav hüdrauliline lang ja Froude'i arv.



JOONIS 19-5 Hüdrauliline voolusüsteem. Surveta truup (valitud tööolukord)

EELDUSED. Veevool truubiga tehissängis on statsionaarne, mõõdukalt ebahühtlane. Tehisliku voolusängi piirde takistuse määrab hüdrauliliselt kare voolamine. Normaalsügavus määrata Manningi vooluhulga valemiga ja kriitilise sügavus määrata Froude'i arvuga, kasutades selleks Newtoni iteratsioonmeetodit. Paisutuskõrgus määrata ülevoolu põhivalemiga uputamata juhule tingimusel, mis vastab ümartruubi pooltäitele truubi sissevoolu osas. Vabapinna lubatud kõrgus ülemises bjefis on  $2,0 d_s$  ja alumise bjefis on  $0,5 d_s$ , milles  $d_s$  on ümartruubi sisediameeter. Paisutamise mõjuulatus (paisutusulatus) määrata mõõdukalt ebahühtlase vabapinnaga voolamise diferentsiaalvõrrandiga kasutades selleks numbrilist arvutuskeemi ilmutatud kujul.

#### VASTUSED

Normaalsügavus erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis

$$d_0 = 0,4905 \text{ m}$$

Ühtlase vabapinnaga voolamise voolusängi Reynoldsi arv erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis

$$Re_{vs} = 1,9361 \cdot 10^5$$

Ühtlase vabapinnaga voolamise Froude'i arv erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis

$$Fr = 0,5519$$

Hõõrdetakistustegur

$$\lambda = 0,1105$$

JÄRELDUS. Numbrilisest arvutustulemusest selgub, et ühtlane voolamine erinevate nõlvustega trapetsristlõikega voolusängis on turbulentne ( $Re_{vs} > 500$ ) ja Froude'i suhtarvu kriteeriumi järgi on hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ). Ühtlane voolamine trapetsristlõikega voolusängis vastab Moody diagrammi ruut-takistuspiirkonnale.

Ühtlase vabapinnaga voolamise Froude'i suhtarvu kriteeriumiga ( $Fr = 1$ ) määratud kriitiline sügavus erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis

$$d_k = 0,3767 \text{ m}$$

JÄRELDUS. Numbrilisest arvutustulemusest selgub, et erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis on kriitiline sügavus väiksem kui normaalsügavus. Järelikult on Froude'i suhtarvu kriteeriumi järgi ühtlane voolamine erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga.

Mõõdukalt ebäühtlase vabapinnaga voolamise paisutuskõrgus pealtkaetud voolusängi, st ümartruubi ülemises bjefis

$$PK = 0,8060 \text{ m}$$

Mõõdukalt ebäühtlase vabapinnaga voolamise Froude'i suhtarvu kriteeriumiga ( $Fr = 1$ ) määratud kriitiline sügavus ümartruubi sissevoolu osas

$$d_k = 0,5549 \text{ m}$$

Ümartruubi sisediaameeter

$$d_s = 1,1098 \text{ m}$$

Mõõdukalt ebäühtlase vabapinnaga voolamisele paisutuse maksimaalne kõrgus ümartruubi ülemises bjefis

$$h_{vp} = 0,8060 \text{ m} + 0,5 \text{ m} = 1,3060 \text{ m}$$

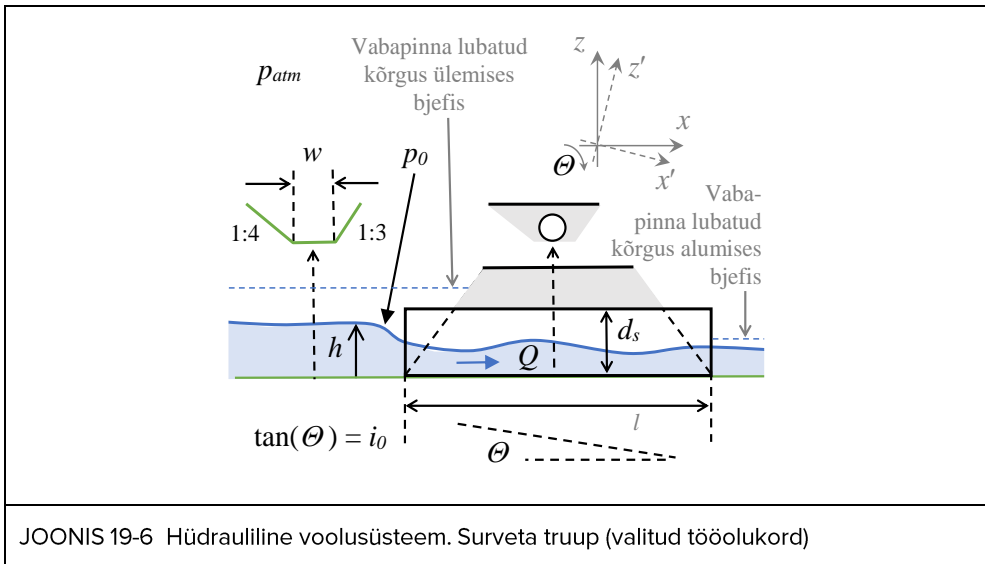
Mõõdukalt ebäühtlase vabapinnaga voolamise paisutuse mõjuulatus ümartruubi ülemises bjefis, st erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis

$$200 \text{ m} = 0,2 \text{ km}$$

## 19.5 LISAÜLESANNE 1. SURVETA ÜMARTRUUBI VOOLUREŽIIM

ANTUD. Rohtunud/kruuspinnasest/killustikust nõlvadega tehisliku voolusängiga (tehissängiga) ristuvast maanteetammi muldkehast vee läbijuhtimiseks on rajatud otsakindlustustega ümartruup, mis on voolusängi aluspõhjaga tasa (ilma põhjaastmeta). Ümartruubis, sisediameetriga  $d_s = 1,1098$  m, pikkusega  $l = 22$  m, põhjalanguga (voolusängi pikikaldega)  $i_0 = 5$  mm·m<sup>-1</sup>, on vooluhulk  $Q = 1$  m<sup>3</sup>·s<sup>-1</sup>. Prismaatilises erinevate nõlvustega trapetskujulise ristlõikega tehissängis voolab 10 °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000$  kg·m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg·m<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>. Gofreeritud metallist ümartruubi piirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,022$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Arvutada voolamisele ümartruubis normaalsügavus ja sellele vastav voolusängi Reynoldsi arv ja hüdrauliline vabavoolurežiim vastavalt Froude'i suhtarvu kriteeriumile. Arvutada voolamise kriitiline sügavus ümartruubis.



EELDUSED. Voolamine osalise täitumusega ümartruubis on statsionaarne, ühtlane. Normaalsügavus määrata Manningi vooluhulga valemiga ja kriitiline sügavus määrata Froude'i suhtarvu kriteeriumiga ( $Fr = 1$ ), kasutades selleks Newtoni iteratsioonmeetodit. Vabapinna lubatud kõrgus ülemises bjefis on  $2,0 d_s$  ja alumise bjefis on  $0,5 d_s$ , milles  $d_s$  on ümartruubi sisediameeter.

**PÕHIVALEMID.** Manningi vooluhulga valem, voolusängi Reynoldsi arv, Bernoulli kolmikliige, Bernoulli funktsioon, ümartoru vabavoolu Froude'i arvu valem, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem

## VALEMID

Manningi vooluhulga valem on

$$Q = \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e I_h^{\frac{1}{2}}}{n_M},$$

milles  $Q$  on vooluhulk,  $n_M$  on Manningi karedustegur ja  $I_h$  on hüdrauliline lang.

Hüdrauliline raadius on

$$R_h = \frac{A_e}{\chi},$$

milles  $A_e$  on elavlõige ja  $\chi$  on märgpiire.

Osalise täitumusega ümartruubi voolamise elavlõige on

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h_{rlm}}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h_{rlm}}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h_{rlm}}{d_s} - \left( \frac{h_{rlm}}{d_s} \right)^2} \right),$$

milles  $d_s$  on ümartruubi sisediaameeter ja  $h_{rlm}$  on vabapinna maksimaalne kõrgus sisepõhja alumisest punktist ümartruubi ristlõikes.

**MÄRKUS.** Ümartoru ristlõike sisepõhi on horisontaalne ainult ühes punktis, st sisepõhja alumises punktis. Ümartoru ristlõike sisepind on horisontaalne kahes punktis, st selle alumises punktis (ingl. invert) ja ülemises punktis (ingl. obvert, pipe crown).

Osalise täitumusega ümartruubi voolamise märgpiire, millest on välja jätud vabapind, on

$$\chi = \pi d_s \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h_{rlm}}{d_s} - 1 \right) \right).$$



Arvutusnäide. Normaalsügavuse määramine osalise täitumusega ümartruubis

Numbriline arvutusskeem. Normaalsügavus

Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod

## VALEMID

Veafunktsioon:

$$ERF(z_j) = Q_j - Q,$$

milles  $z_j$  on ümartruubi arvutuslik sügavuse maksimum,  $Q_j$  on arvutuslik vooluhulk ja  $Q$  on etteantud vooluhulk.

Veafunktsiooni tuletis:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{dQ_j}{dz_j},$$

milles on eeldatud, et  $Q = \text{konstant}$ .

Arvutuslik vooluhulk on määratud valemiga

$$Q_j = \frac{R_{h_j}^{\frac{2}{3}} A_{e_j} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M},$$

milles  $R_{h_j}$  on arvutuslik hüdrauliline raadius ja  $A_{e_j}$  on arvutuslik elavlõige.

→

$$\begin{aligned} \frac{dERF(z_j)}{dz_j} &= \frac{d}{dz_j} \left( \frac{R_{h_j}^{\frac{2}{3}} A_{e_j} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} \right) = \frac{i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} \left( \frac{2 A_{e_j} R_{h_j}^{-\frac{1}{3}} dR_{h_j}}{3 dz_j} + R_{h_j}^{\frac{2}{3}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} \right) \\ &= Q_j \left( \frac{2}{3 R_{h_j}} \frac{dR_{h_j}}{dz_j} + \frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} \right) \end{aligned}$$

Veafunktsioonist suunatud tuletise võtmise reegel:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{0 - ERF(z_j)}{z_{j+1} - z_j},$$

võimaldab kasutusele võtta Taylori valemi 1-järgu tuletise täpsusega:

$$z_{j+1} = z_j - \frac{ERF(z_j)}{\frac{dERF(z_j)}{dz_j}}.$$

Numbrilise arvutusskeemi põhivalemi üldkuju on

$$z_{j+1} = z_j - \frac{Q_j - Q}{Q_j \left( \frac{2}{3 R_{h_j}} \frac{dR_{h_j}}{dz_j} + \frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} \right)} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left( \frac{2}{3 R_{h_j}} \frac{dR_{h_j}}{dz_j} + \frac{1}{A_{e_j}} \frac{dA_{e_j}}{dz_j} \right)}.$$

Määrame hüdraulilise voolusüsteemi valemi numbrilise arvutuskeemi põhivalemi liikmele:

$$\frac{2}{3} \frac{dR_{h_j}}{R_{h_j}} \frac{dz_j}{dz_j}.$$

Osalise täitumusega ümartruubi hüdrauliline raadius on

$$\begin{aligned} R_{h_j} = \frac{A_{ej}}{\chi_j} &= \frac{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left( \frac{z_j}{d_s} \right)^2} \right)}{\pi d_s \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) \right)} \\ &= \left( \frac{d_s}{4} \right) \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left( \frac{z_j}{d_s} \right)^2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right)}. \end{aligned}$$

**MÄRKUS.** Täistäitumusega ümartoru elavlõige  $A_e = \pi d_s^2 / 4$ , märgpiire  $\chi = \pi d_s$  ja hüdrauliline raadius  $R_h = d_s / 4$ , milles  $d_s$  on toru sisediaameeter.

Määrame numbrilise arvutuskeemi põhivalemi esimese liikme valemi.

$$\begin{aligned} \frac{dR_{h_j}}{dz_j} &= \frac{d}{dz_j} \left( \left( \frac{d_s}{4} \right) \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left( \frac{z_j}{d_s} \right)^2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right)} \right) \\ &= \frac{d_s}{4} \frac{d}{dz_j} \left( \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left( \frac{z_j}{d_s} \right)^2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right)} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d_s}{4} \left( \frac{\frac{1}{\pi} \frac{2}{d_s} + \frac{2}{\pi} \frac{2}{d_s} \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} + \frac{2}{\pi} \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d_s} - 2 \frac{z_j}{d_s} \frac{1}{d_s}\right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right) + \frac{2}{\pi} \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2}\right) \frac{1}{\pi} \frac{2}{d_s}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)\right)^2 \sqrt{1 - \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}} \right) \\
&= \frac{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2}} \right)}{\pi d_s \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)\right)} \\
&\quad - \frac{\pi \frac{d_s^2}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right) + \frac{2}{\pi} \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2}\right) \frac{2}{\pi d_s}}{\pi d_s \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)\right)^2 \sqrt{1 - \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}} \\
&= \frac{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2}} \right)}{\chi_j} \\
&\quad - \frac{A_{e_j} \frac{2}{\pi d_s}}{\chi_j \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)\right) \sqrt{1 - \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}} \\
&\rightarrow
\end{aligned}$$

$$\frac{2}{3} \frac{dR_{hj}}{R_{hj}} \frac{dz_j}{dz_j} = \frac{2}{3} \frac{\chi_j}{A_{ej}} \frac{dR_{hj}}{dz_j}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2}} \right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right) + \frac{2}{\pi} \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2}} - \frac{\frac{4}{3\pi d_s}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)\right) \sqrt{1 - \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}}$$

Määrame hüdraulilise voolusüsteemi valemi numbrilise arvutuskeemi põhivalemi liikmele:

$$\frac{1}{A_{ej}} \frac{dA_{ej}}{dz_j}$$

Ümartruubi vabapinnaga voolamise arvutuslik elavlõige on

$$A_{ej} = \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right) + \frac{2}{\pi} \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} \right).$$

→

$$\frac{dA_{ej}}{dz_j} = \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2}} \right)$$

Määrame numbrilise arvutuskeemi põhivalemi *teise* liikme valemi.

$$\frac{1}{A_{ej}} \frac{dA_{ej}}{dz_j} = \frac{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2}} \right)}{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} \right)} \\ = \frac{\frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2}}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2}}$$

ARVUTUSSKEEM (Manningi valem, ümartruup)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku veesügavuse valem (iteratsioonmeetodi põhivalem):

$$z_{j+1} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left( \frac{5}{3} \frac{ABI1_j}{ABI2_j} - \frac{4}{3 \pi d_s} \left( ABI3_j \sqrt{1 - \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2} \right)^{-1} \right)},$$

milles

$$ABI1_j = \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2}},$$

$$ABI2_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2},$$

$$ABI3_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right).$$

Arvutusliku vooluhulga valem:

$$Q_j = \frac{R_{nj}^{\frac{2}{3}} A_{ej} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} A_{ej}^{\frac{5}{3}}}{n_M \chi_j^{\frac{2}{3}}} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} \left( \pi \frac{d_s^2}{4} ABI2_j \right)^{\frac{5}{3}}}{n_M \left( \pi d_s ABI3_j \right)^{\frac{2}{3}}}.$$

Ühtlasele vabapinnaga voolamisel osalise täitumusega ümartruubis on hüdrauliline lang määratud põhjalanguga:

$$I_h = i_0.$$

ARVUTUS. Normaal sügavus

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (m)	1	0,2713	0,9225	0,6453	0,7201	0,7212
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	1,4103	0,1733	1,3389	0,8465	0,9979	1,0000

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (m)	0,7212	0,7212	0,7212	0,7212
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

VASTUSED

$$d_0 = 0,7212 \text{ m}$$

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu} = 3,6965 \cdot 10^5$$

$$Fr = 0,6053$$

$$\lambda = 0,0555$$

JÄRELDUS. Numbrilisest arvutustulemusest selgub, et ühtlane voolamine ümarristlõikega pealt kaetud voolusängis (surveta truubis) on turbulentne ( $Re_{vs} > 500$ ) ja Froude'i suhtarvu kriteeriumi järgi on hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ). Ühtlane voolamine surveta truubis vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnale.

Arvutusnäide. Voolukriiruse määramine osalise täitumusega ümartruubis

### VALEMID

Bernoulli kolmikliige vabapinnaga voolamisel on

$$B = \frac{u^2}{2g} + h + h_s,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $g$  on raskuskiirendus,  $h(= h_{rlm})$  on vabapinna maksimaalne kõrgus sisepõhja alumisest punktist ümartruubi ristlõikes ja  $h_s$  on ümartoru sisepõhja alumise punkti kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult.

Kasutades osalise täitumusega ümartruubi vabapinnaga voolamise voolukiiruse määramisele voolamise ruumkiiruse valemit:

$$u = \frac{Q}{A_e} = \frac{Q}{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right)},$$

milles  $d_s$  on ümartruubi sisediameeter ja  $h(= h_{rlm})$  on vabapinna maksimaalne kõrgus ümartoru sisepõhja alumisest punktist. (Ühtlasel voolamisel  $h = d_0$ , milles  $d_0$  on normaalsügavus.)

Bernoulli kolmikliikme vabapinnaga voolamisele võime teisendada kujule:

$$B = \frac{Q^2}{2g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right)^2} + h + h_s.$$

Kui kasutada funktsiooni ekstreemumi määramise teoreemi veepinna kõrguse  $h$  järgi:

$$\frac{dB}{dh} = 0,$$

siis järeldub Bernoulli funktsioonist  $B = f(h, Q, g, d_s, h_s)$ , milles  $h$  on muutuja ja  $Q, g, d_s, h_s$  on konstantsed suurused, järgmine avaldis:

$$\begin{aligned}
& \frac{2 Q^2 \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2}} \right)}{2 g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} \right)} + 1 \\
& = \frac{Q^2 \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2}} \right)}{g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} \right)} + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Osalise täitumusega ümarduubi vabavoolu Froude'i arv astmes 2 on määratud valemiga:

$$\begin{aligned}
Fr^2 &= \frac{Q^2}{g \frac{\left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} \right)}{\left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2}} \right)^2} \\
&= \frac{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} \right)}{g \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2}} \right)^2}
\end{aligned}$$

milles on kasutatud osalise täitumusega ümartruubi voolukiiruse ja vooluhulga seost:

$$u = \frac{Q}{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} \right)}.$$



Kriitilise vabavoolule vastab  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule vastab  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

Pooltäitumusega ümartruubi ( $h = d_s/2$ ) vabavoolu Froude'i arv astmes 2 on määratud valemiga:

$$\begin{aligned}
 Fr^2 &= \frac{u^2}{g \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right)} \\
 &= \frac{u^2}{g \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2}} \right)} \\
 &= \frac{u^2}{g \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(1 - 1) + \frac{2}{\pi} (1 - 1) \sqrt{\frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \right)^2} \right)} \\
 &= \frac{u^2}{g \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - (1 - 1)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{(1 - 1)^2}{\sqrt{\frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \right)^2}} \right)} \\
 &= \frac{u^2}{g \frac{\left( \frac{1}{2} \right)}{\left( \frac{2}{\pi d_s} + \frac{2}{\pi d_s} \right)}} = \frac{u^2}{g \frac{\left( \frac{1}{2} \right)}{\left( \frac{4}{\pi d_s} \right)}} = 2 \frac{4}{\pi} \frac{u^2}{g d_s} = \frac{4}{\pi} \frac{u^2}{g (d_s/2)}
 \end{aligned}$$

Hüdraulilisel vabavoolurežiimil, mis vastab Froude'i suhtarvu kriteeriumile  $Fr = 1$  (nö kriitiline vabavool), määratakse voolukiirus poolümarristlõikega tehissängis erijuhul ( $h_{rlm} = d_s/2$ ) valemiga:

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{4}{\pi} \frac{u^2}{g (d_s/2)} \\
 \rightarrow \\
 u &= \frac{\pi}{4} g \frac{d_s}{2} = \frac{\pi}{4} g h_{rlm} \\
 \rightarrow \\
 u &= \sqrt{\frac{\pi}{4} g \frac{d_s}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{4} g h_{rlm}} .
 \end{aligned}$$

Arvutusnäide. Kriitilise sügavuse määramine osalise täitumusega ümartruubis

Numbriline arvutuskeem. Kriitiline sügavus

Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod

#### VALEMID

Osalise täitumusega ümartruubi vabavoolu Froude'i arv astmes 2 on määratud valemiga:

$$Fr^2 = \frac{u^2}{g \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{d}{d_s} - \left(\frac{d}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \left(2 \frac{d}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{d}{d_s} - 1\right)^2}} \right)},$$

milles osalise täitumusega ümartruubi vee sügavuse maksimum on  $d = (d_{rlm})$ , so on sisepõhja alumise punkti sügavus vabapinnast ümartruubi ristlõikes, ning voolukiirus:

$$u = \frac{Q}{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{d}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{d}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{d}{d_s} - \left(\frac{d}{d_s}\right)^2} \right)}.$$

Osalise täitumusega ümartruubi vabavoolu Froude'i arv on

$$Fr = \frac{u}{g \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{d}{d_s} - \left(\frac{d}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \left(2 \frac{d}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{d}{d_s} - 1\right)^2}} \right)}.$$

Kriitilisele vabavoolule vastab  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja kärealele vabavoolule vastab  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

Froude'i suhtarvu kriteerium kriitilisele voolamisele on

$$Fr^2 = 1$$

→

$$1 = \frac{u^2}{g \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{d}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{d}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{d}{d_s} - \left( \frac{d}{d_s} \right)^2} \right)^2}$$

$$= \frac{Q^2}{g \left( \frac{2}{\pi d_s} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{d}{d_s} - \left( \frac{d}{d_s} \right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \left( 2 \frac{d}{d_s} - 1 \right)^2 \right)^2}$$

$$= \frac{\left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{d}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{d}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{d}{d_s} - \left( \frac{d}{d_s} \right)^2} \right)^3}{g \left( \frac{2}{\pi d_s} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{d}{d_s} - \left( \frac{d}{d_s} \right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \left( 2 \frac{d}{d_s} - 1 \right)^2 \right)^2}$$

Newtoni iteratsioonmeetod ja numbriline arvutuskeem

Veafunktsioon:

$$ERF(z_j) = Fr^2_j - Fr^2,$$

milles  $z_j$  on osalise täitumusega ümartruubi arvutuslik kriitiline sügavus,  $Fr^2_j$  on arvutuslik Froude'i arv astmes ja  $Fr^2$  on etteantud Froude'i arv astmes 2.

Veafunktsiooni tuletis:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{dFr^2_j}{dz_j},$$

milles on eeldatud, et  $Fr^2 = \textit{konstant}$  (= 1).

Arvutusliku Froude'i arvu astmes 2 on määratud valemiga:

$$Fr_j^2 = \frac{Q^2}{g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left( \frac{z_j}{d_s} \right)^2} \right)^3}$$

$$= \frac{Q^2 \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left( \frac{z_j}{d_s} \right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right)^2}{\sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left( \frac{z_j}{d_s} \right)^2}} \right)}{g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left( \frac{z_j}{d_s} \right)^2} \right)^3},$$

milles  $g$ ,  $Q$  ja  $d_s$  on konstantsed suurused.

→

$$\begin{aligned}
\frac{dERF(z_j)}{dz_j} &= \frac{d}{dz_j} \left( \frac{Q^2 \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2}} \right)}{g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} \right)^3} \right) \\
&= \frac{Q^2}{g} \left( \frac{-\frac{1}{2} \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\left(1 - \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left(-2 \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right) \frac{2}{d_s}\right)}{\left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} \right)^3} \right. \\
&\quad + \frac{\frac{1}{2} \frac{\frac{4}{\pi d_s}}{\sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2}} \left(\frac{1}{d_s} - 2 \frac{z_j}{d_s} \frac{1}{d_s}\right)}{\left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} \right)^3} \\
&\quad - \frac{\frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\pi d_s} \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right) \frac{2}{d_s}}{\sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2}}}{\left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} \right)^3} \\
&\quad \left. - \frac{-\frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\pi d_s} \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}{\left(\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{d_s} - 2 \frac{z_j}{d_s} \frac{1}{d_s}\right)}{\left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} \right)^3} \right)
\end{aligned}$$

$$- \frac{3 \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2}} \right)^2}{\left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} \right)^4}$$

Veafunktsioonist suunatud tuletise võtmise reegel:

$$\frac{dERF(z_j)}{dz_j} = \frac{0 - ERF(z_j)}{z_{j+1} - z_j},$$

võimaldab kasutusele võtta Tayloriga väärtuse 1-järgu tuletise täpsusega:

$$z_{j+1} = z_j - \frac{ERF(z_j)}{\frac{dERF(z_j)}{dz_j}}.$$

Numbrilise arvutusskeemi põhivalemi üldkuju on

$$z_{j+1} = z_j - \frac{\mathbf{Fr}^{2j} - \mathbf{Fr}^2}{\frac{Q^2}{g} \left( \frac{\frac{4}{\pi d_s^2} \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right) + \frac{3}{\pi d_s^2} \left(1 - 2 \frac{z_j}{d_s}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{\pi d_s^2} \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^3}{\left(1 - \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} \frac{\left(z_j - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \operatorname{ABI}2_j^3 - \frac{3 \operatorname{ABI}1_j^2}{\left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \operatorname{ABI}2_j^4} \right)},$$

milles

$$\operatorname{ABI}1_j = \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2}},$$

$$\operatorname{ABI}2_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{z_j}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2}.$$

ARVUTUSSKEEM (Froude'i arv, ümartruup)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku kriitilise sügavuse valem (iteratsioonmeetodi põhivalem):

$$z_{j+1} = z_j - \frac{Fr^2_j - Fr^2}{\frac{Q^2}{g} \left( \frac{\frac{4}{\pi d_s^2} (2 \frac{z_j}{d_s} - 1) - \frac{3}{\pi d_s^2} (2 \frac{z_j}{d_s} - 1) + \frac{1}{2} \frac{1}{\pi d_s^2} (2 \frac{z_j}{d_s} - 1)^3}{\left(1 - \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} \left(\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3 ABI1_j^2}{\left(\pi \frac{d_s^2}{4}\right)^2 ABI2_j^4} \right)}$$

Arvutusliku Froude'i arvu astmes 2 valem:

$$Fr^2_j = \frac{Q^2 \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2}} \right)}{g \left(\pi \frac{d_s^2}{4}\right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right) + \frac{2}{\pi} \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} \right)^3} = \frac{Q^2 ABI1_j}{g \left(\pi \frac{d_s^2}{4}\right)^2 (ABI2_j)^3},$$

milles

$$ABI1_j = \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2}},$$

$$ABI2_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}\left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right) + \frac{2}{\pi} \left(2 \frac{z_j}{d_s} - 1\right) \sqrt{\frac{z_j}{d_s} - \left(\frac{z_j}{d_s}\right)^2}.$$

ARVUTUS. Kriitiline sügavus ( $Fr^2 = 1$ )

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (m)	0,5000	0,5421	0,5541	0,5549	0,5549	0,5549
$Fr^2_j$ (1)	1,4890	1,0927	1,0051	1,0000	1,0000	1,0000

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (m)	0,5549	0,5549	0,5549	0,5549
$Fr^2_j$ (1)	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

VASTUSED

$$d_k = 0,5549 \text{ m}$$

$$Fr = 1$$

$$d_k < d_0$$

JÄRELDUS. Numbrilisest arvutustulemusest selgub, et osalise täitumusega ümartruubis on vabavoolu kriitiline sügavus väiksem kui normaalsügavus. Järelikult on Froude'i suhtarvu kriteeriumi järgi ühtlane voolamine osalise täitumusega ümartruubis hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga.

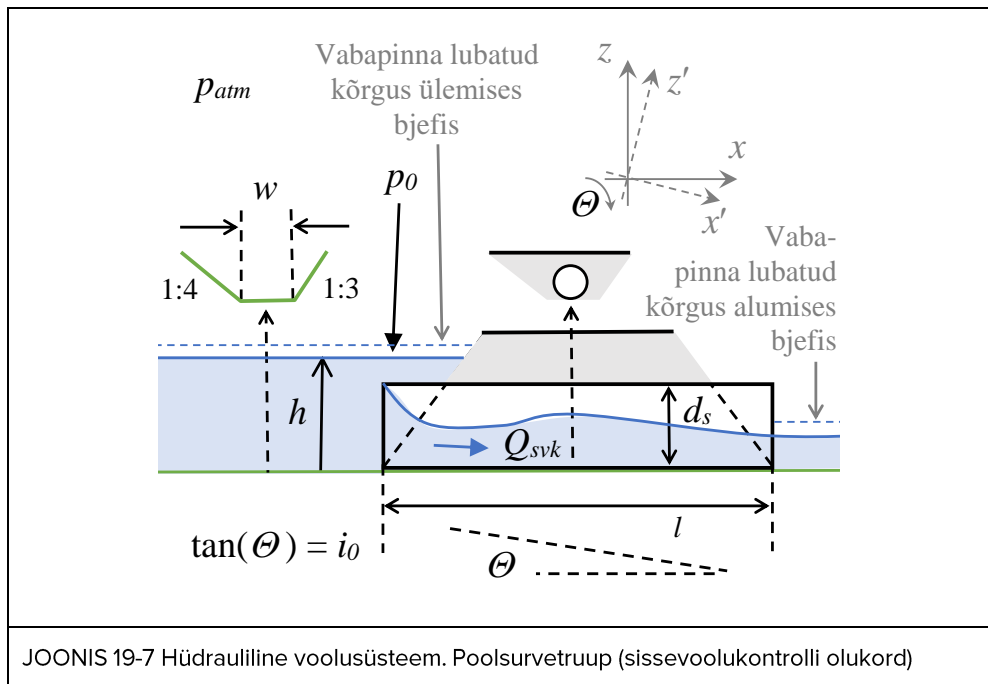
**MÄRKUS.** Osalise täitumusega ümartroru kriitilise sügavuse numbriline arvutusskeem (Newtoni iteratsioonmeetod) koondud hästi sügavuse algväärtustel  $0,2 < z_{j=1} < 0,75 \text{ m}$ . Kuna erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängi ja osalise täitumusega ümartruubi voolusüsteemis on ümartroru voolamise kriitiline sügavus väiksem kui normaalsügavus, siis moodustub vooluhüpe. See võib blokeerida õhu vaba liikumise truubis. Vooluhüppe vältimiseks tuleb suurendada truubi langu (voolusängi pikikallet).



## 19.6 LISAÜLESANNE 2. POOLSURVETRUUBI VOOLUREŽIIM

ANTUD. Rohtunud/kruuspinnasest/killustikust nõlvadega tehisliku voolusängiga (tehissängiga) ristuvast maanteetammi muldkehast vee läbijuhtimiseks on rajatud otsakindlustustega ümartruu, mis on voolusängi aluspõhjaga tasa (ilma põhjaastmeta). Ümartruu, sisediaimeetriga  $d_s = 1,1098$  m, pikkusega  $l = 22$  m, põhjalanguga (voolusängi pikikaldega)  $i_0 = 5$  mm. $\cdot$ m $^{-1}$ , on valitud vooluhulk  $Q = 1$  m $^3$ .s $^{-1}$ . Prismaatilises erinevate nõlvustega trapetskujulise ristlõikega tehissängis voolab 10 °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000$  kg.m $^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg.m $^{-1}$ .s $^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m $^2$ .s $^{-1}$ . Gofreeritud metallist ümartruu piirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,022$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Arvutada vooluhulk truu tööolukorrale valitud sisediaimeetri, pikkuse, langu (voolusängi pikikalde) ning lubatud vabapinna kõrguste truu ülemises ja alumises bjefis. Hinnata truu sissevoolukontrolli olukorda (voolamine poolsurve truu). Võrrelda truu sissevoolukontrolli ja valitud tööolukorra (ümaroru pooltäite truu sissevoolu osas) vooluhulkasid.



JOONIS 19-7 Hüdrauliline voolusüsteem. Poolsurve truu (sissevoolukontrolli olukord)

EELDUSED. Voolamine erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängi ja ümartuubi voolusüsteemis on statsionaarne, nii rõhuline kui ka mõõdukalt ebahühtlane voolamine. Truubi sissevoolukontrolli olukorras on vabapind truubi ülemises bjefis määratud vabapinna lubatud kõrgusega  $2,0 d_s$ , milles  $d_s$  ümartruubi sisediameeter, ning truubi väljavool on vabavooline. Truubi alumises bjefis määratud vabapinna lubatud kõrgus ( $0,5 d_s$ ) ei mõjuta voolamise dünaamikat hüdraulilises voolusüsteemis.

## LAHENDUS

### PÕHIVALEMID. Beroulli võrrand, Weisbachi survekao valem, Reynolds'i arv, suuremõõtmelise ava vooluhulga valem

#### VALEMID

Reaalvedeliku Bernoulli võrrand survevoolule on

$$z_{ts} + \frac{p_{ts}}{\rho g} + \frac{u_{ts}^2}{2g} = z_{sv} + \frac{p_{sv}}{\rho g} + \frac{u_{sv}^2}{2g} + h_t,$$

milles vabapinna kõrgus, rõhk veepinnal ja voolukiirus truubi ülemises bjefis on vastavalt  $z_{ts}$ ,  $p_{ts}$  ja  $u_{ts}$ , st erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis. Ümartoru sissevooluava veekihi kõrgus, rõhk ja voolukiirus ümartruubis on vastavalt  $z_{sv}$ ,  $p_{sv}$  ja  $u_{sv}$ , st truubi sissevoolu osas. Vee tihedus on  $\rho$ , raskuskiirendus on  $g$  ja survekadu on  $h_t$ , mis jagatakse hõordesurvekaoks  $h_l$  ja kohtsurvekaoks  $h_k$ .

Rõhukõrguste vahe võib määrata kui rõhuvahekõrguse:

$$\frac{p_{ts}}{\rho g} - \frac{p_{sv}}{\rho g} = \frac{p_{ts} - p_{sv}}{\rho g} = h_{rvk}.$$

Kuna poolsurve truubi ülemise bjefi vabapinnal ja sisemisel vabapinnal on rõhk määratud õhurõhuga, siis  $p_{ts} = p_0$  ja  $p_{sv} \approx p_0$ , ning sellest jäeldub et rõhuvahekõrgus  $h_{rvk} \approx 0$ .

Reaalvoolu Bernoulli võrrandist jäeldub seos:

$$z_{ts} \approx z_{sv} + \frac{u_{sv}^2}{2g} + h_k,$$

milles tehissängi voolukiirus  $u_{ts} \rightarrow 0$  ja survekadu  $h_t$  on määratud kui kohtsurvekadu  $h_k$ .

Weisbachi survekao valem kohtsurvekao määramisel on

$$h_l = k_L \frac{u^2}{2g},$$

milles  $k_L$  on nn kohttakistustegur (mõõdtühikuta suurus [ $k_L$ ] = 1) ja  $u$  ( $= u_{sv}$ ) on voolamise ruumkiirus torus (truubi sissevoolu avas). Voolamisel erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängist ümartruupi toimub voolujoonte tihenemine. Voolamise ahenemise olukorras ümartruubi sissevoolu osas on kohttakistus  $k_{LSv} \approx 0,44$ .

Reynoldsi arv on

$$Re = \frac{u d_s}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $d_s$  on ümartruubi sisediaameeter ja  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur (kinemaatiline laminaarne viskoossustegur).

→

$$z_{ts} = z_{sv} + \frac{u^2}{2g} + k_{LSv} \frac{u^2}{2g}$$

$$z_{ts} = z_{sv} + (1 + k_{LSv}) \frac{u^2}{2g}$$

$$u^2(1 + k_{LSv}) = 2g(z_{ts} - z_{sv})$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{1 + k_{LSv}}} \sqrt{2g(z_{ts} - z_{sv})}$$

$$u = C_u \sqrt{2g(z_{ts} - z_{sv})}$$

Poolsurve truubi sissevoolu ava kiirustegur on

$$C_u = \frac{1}{\sqrt{1 + k_{LSv}}}.$$

Suuremõõtmelise ava puhul määratakse vooluhulk valemiga:

$$Q = \int C_u \sqrt{2g(z_{ts} - z_{sv})} dA,$$

milles erinevate nõlvustega trapetsristlõike vabapinna kõrgus  $z_{ts}$  = konstant, toruava ristlõike veekihi kõrgus  $z_{sv} = z_{sv0} + h$ , milles ümartruubi sissevoolu toruava sisepõhja alumise punkti kõrgus on  $z_{sv0}$  ja veekihi kõrgus toruavas ristlõikes  $h = 0 \dots d_s$ . Ümarristlõikelise toruavaga määratud veekihi pindalaelement on  $dA$ .

Erinevate nõlvustega trapetsristlõikega vabapinna kõrguse erinevus truubi ülemises bjefis võrreldes ümartruubi sissevooluava sisepõhja alumise punkti kõrgusega, määratakse valemiga:

$$z_{ts} - z_{sv0} = 1,5 d_s.$$

Osalise täitumusega ümartruubi voolamise elavlõige on

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right),$$

milles  $d_s$  on ümartruubi sisediameeter ja  $h$  on vabapinna maksimaalne kõrgus sisepõhja alumisest punktist ümartruubi ristlõikes. Täistäitumusega ümartruu sisediameetriga määratud ristlõike pindala ehk elavlõige on

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4}.$$

Ümarristlõikelise toru avaga määratud veekihi pindalaelement:

$$dA = \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} - \frac{\frac{1}{\pi d_s} \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2}} \right) dh.$$

Ümartruubi sissevoolukontrolli olukorra (poolsurve truubi) vooluhulga võib arvutada integraalse valemiga:

$$\begin{aligned} Q_{svk} &= \int_0^{d_s} C_u \sqrt{2g((z_{ts} - z_{sv0}) - h)} \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\frac{1}{\pi d_s} \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2}} \right) dh \\ &= C_d \pi \frac{d_s^2}{4} \int_0^{d_s} \sqrt{2g((z_{ts} - z_{sv0}) - h)} \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} - \frac{\frac{1}{\pi d_s} \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2}} \right) dh, \end{aligned}$$

milles  $C_d$ ,  $d_s$  ja  $(z_{ts} - z_{sv0})$  on konstantsed suurused.

Truubi sissevoolu ava vooluhulgategur on

$$C_d = C_a C_u^*,$$

milles  $C_a$  on ahenemistegur ja  $C_u^*$  on voolamise ruumkiirusega määratud kiirustegur.

## ARVUTUS

Erinevate nõlvustega trapetsristlõikega vabapinna kõrguse erinevus truubi ülemises bjefis võrreldes ümartruubi sissevooluava sissepõhja alumise punkti kõrgusega:

$$z_{ts} - z_{sv0} = 1,5 \cdot 1,1098 \text{ m} = 1,6633 \text{ m}.$$

Vabapinna kõrgus üle ümartruubi väljavooluava sissepõhja alumise punkti kõrgusega truubi alumises bjefis on

$$0,5 d_s - \sin(\text{atan}(\theta)) l \approx 0,5 d_s - i_0 l = 0,5 \cdot 1,1098 \text{ m} - 0,005 \cdot 22 \text{ m} = 0,4445 \text{ m}.$$

Vooluhulgategur

$$C_d = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,44}} = 0,8333$$

Reynoldsi arv

$$Re = 32,896 \cdot 10^5$$

Poolsurvetruubi vooluhulk

$$Q_{svk} = 3,7245 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

## VASTUS

Hüdraulilise voolusüsteemi rõhulise voolamise ümarava integraalsest vooluhulga valemist jäeldub, et truubi sissevoolukontrolli (poolsurve truubi) olukorras ületab vooluhulk oluliselt ümartruubile valitud tööolukorra (ümaroru pooltäitele truubi sissevoolu osas) vooluhulka:

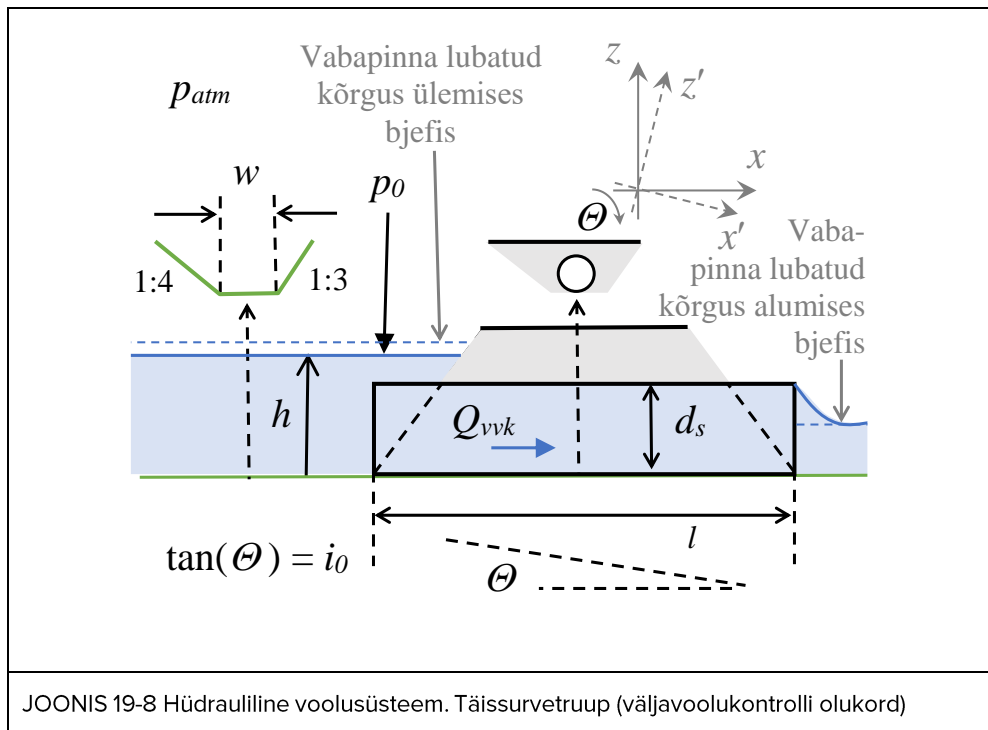
$$Q_{svk}/Q = 3,7245$$

**MÄRKUS.** *Vooluhulga integraalvalem kasutamisel muutub ümartruubi veekihi integreerimisparameeter vahemikus  $h = 0 \rightarrow 1,1098 \text{ m}$ . Truubi sissevoolukontrolli (poolsurve truubi) hindamisel on eeldatud, et vabapind truubi alumises bjefis ei mõjuta voolamise dünaamikat hüdraulilises voolusüsteemis. Bernoulli võrrandit võib rakendada iga voolujoone puhul. Kui voolujooned on paralleelsed, siis on rõhk voolamises hüdrostaatiline. Mõõdukalt ebahühtlase voolamise voolujooned ei ole paralleelsed.*

## 19.7 LISAÜLESANNE 3. TÄISSURVETRUUBI VOOLUREŽIIM

ANTUD. Rohtunud/kruuspinnasest/killustikust nõlvadega tehisliku voolusängiga (tehissängiga) ristuvast maanteetammi muldkehast vee läbijuhtimiseks on rajatud otsakindlustustega ümartruup, mis on voolusängi aluspõhjaga tasa (ilma põhjaastmeta). Ümartruubis, sisediameetriga  $d_s = 1,1098$  m, pikkusega  $l = 22$  m, põhjalanguga (voolusängi pikikaldega)  $i_0 = 5$  mm. $\cdot$ m $^{-1}$ , on valitud vooluhulk  $Q = 1$  m $^3$ .s $^{-1}$ . Prismaatilises erinevate nõlvustega trapetskujulise ristlõikega tehissängis voolab 10 °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000$  kg. $\cdot$ m $^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg. $\cdot$ m $^{-1}$ .s $^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m $^2$ .s $^{-1}$ . Gofreeritud metallist ümartruubi piirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,022$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Arvutada vooluhulk truubi tööolukorrale valitud sisediameetri, pikkuse, langu (voolusängi pikikalde) ning lubatud vabapinna kõrgustele truubi ülemises ja alumises bjefis. Hinnata truubi väljavoolukontrolli olukorda (voolamine täissurve truubis). Võrrelda truubi väljavoolukontrolli ja valitud tööolukorra (ümartoru pooltäitele truubi sissevoolu osas) vooluhulkasid.



EELDUSED. Voolamine erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängi voolu-süsteemi veeriste muldkehasse rajatud ümartruubis on statsionaarne, rõhuline voolamine. Truubi väljavoolukontrolli olukorras on vabapind truubi ülemises ja alumises bjefis määratud vabapinna lubatud kõrgusega vastavalt  $2,0_s$  ja  $0,5 d_s$ , milles  $d_s$  on ümartruubi sisediaameter. Truubi ülemise bjefi vabapind võib mõjutada voolamise dünaamikat hüdraulilises voolusüsteemis.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Reaalvedeliku Bernoulli võrrand survevoolule, Darcy survekao valem, Weisbachi survekao valem, ümarтору Reynoldsi arvu valem, suuremõõtmelise ava vooluhulga valem**

### VALEMID

Reaalvedeliku Bernoulli võrrand survevoolule on

$$z_{ts} + \frac{p_{ts}}{\rho g} + \frac{u_{ts}^2}{2g} = z_{vv} + \frac{p_{vv}}{\rho g} + \frac{u_{vv}^2}{2g} + h_t,$$

milles vabapinna kõrgus, rõhk veepinnal ja voolukiirus truubi ülemises bjefis on vastavalt  $z_{ts}$ ,  $p_{ts}$  ja  $u_{ts}$ , st erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängis. Toru väljavooluava veekihi kõrgus, rõhk ja voolukiirus ümartruubis on vastavalt  $z_{vv}$ ,  $p_{vv}$  ja  $u_{vv}$ , st truubi väljavoolu osas. Vee tihedus on  $\rho$ , raskuskiirendus on  $g$  ja survekadu on  $h_t$ , mis jagatakse hõordesurvekaoks  $h_l$  ja kohtsurvekaoks  $h_k$ .

Rõhukõrguste vahe võib määrata kui rõhuvahekõrguse:

$$\frac{p_{ts}}{\rho g} - \frac{p_{vv}}{\rho g} = \frac{p_{ts} - p_{vv}}{\rho g} = h_{rvk}.$$

Kuna rõhk nii täissurve truubi ülemise kui ka alumise bjefi vabapinnal on määratud õhurõhuga, siis  $p_{ts} = p_0$  ja  $p_{vv} \approx p_0$ , ning sellest järeldub, et rõhuvahekõrgus  $h_{rvk} \approx 0$ .

Reaalvoolu Bernoulli võrrandist (VALEM (2-10)) järeldub seos:

$$z_{ts} \approx z_{vv} + \frac{u_{vv}^2}{2g} + h_t,$$

milles tehissängi voolukiirus  $u_{ts} \rightarrow 0$  ja survekadu  $h_t$  on määratud hõordesurvekaoga  $h_l$ , ning nii survetoru sisse- kui ka väljavoolu summaarse kohtsurvekaoga  $h_k$ .

Darcy survekao valem hõordesurvekao määramisele on

$$h_l = \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g},$$

milles  $\lambda$  on hõõrdetakistustegur (mõõdühikuta suurus  $[\lambda] = 1$ ),  $l$  on täistaitumusega survetoru pikkus,  $d_s$  on toru sisediameeter ja  $u$  ( $= u_{sv} = u_{vv}$ ) on voolamise keskkiirus torus.

Voolamisele hüdrauliliselt kareda piirdega survetorus, mis vastab Moody diagrammil ruuttakistuspiirkonna hõõrdetakistusteguri lahenditele, võib kasutada Manningi karedustegurit  $n_M$ . Hõõrdetakistusteguri hüdrauliliselt karedale voolamisele võib määrata valemiga:

$$\lambda = \frac{8 g n_M^2}{R_h^{2/6}},$$

milles  $g$  on raskuskiirendus,  $R_h$  on hüdrauliline raadius. Ümartorule  $R_h = d_s/4$ .

→

$$\lambda = \frac{8 g n_M^2}{(d_s/4)^{2/6}}$$

Weisbachi survekao valem kohtsurvekao määramisele on

$$h_l = k_L \frac{u^2}{2 g},$$

milles  $k_L$  on nn kohttakistustegur (mõõdühikuta suurus  $[k_L] = 1$ ). Voolamisel erinevate nõlvustega trapetsristlõikega tehissängist ümartruupi toimub voolujoonte tihenemine. Voolamise ahenemise olukorras ümartruubi sissevoolu osas on kohttakistus  $k_{Lsv} \approx 0,44$ . Ümartruubi väljavoolu osas on kohttakistus  $k_{Lvv} \approx 1$ .

Ümartoru Reynoldsi arv on

$$Re = \frac{u d_s}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $d_s$  on ümartruubi sisediameeter ja  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur.

→

$$z_{ts} = z_{vv} + \frac{u^2}{2 g} + k_{Lsv} \frac{u^2}{2 g} + \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2 g} + k_{Lvv} \frac{u^2}{2 g}$$

$$z_{ts} = z_{vv} + \left(1 + k_{Lsv} + \lambda \frac{l}{d_s} + k_{Lvv}\right) \frac{u^2}{2 g}$$

$$u^2 \left(1 + k_{Lsv} + \lambda \frac{l}{d_s} + k_{Lvv}\right) = 2 g (z_{ts} - z_{vv})$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{1 + k_{Lsv} + \lambda \frac{l}{d_s} + k_{Lvv}}} \sqrt{2 g (z_{ts} - z_{vv})}$$

$$u = C_u \sqrt{2 g (z_{ts} - z_{vv})}$$



Täissurvearuubi sissevoolu ava kiirustegur on

$$C_u = \frac{1}{\sqrt{1 + k_{Lsv} + \lambda \frac{l}{d_s} + k_{Lvv}}}$$

→

$$C_u = \frac{1}{\sqrt{1 + k_{Lsv} + \frac{8 g n_M^2 l}{(d_s/4)^{2/6} d_s} + k_{Lvv}}}.$$

Suuremõõtmelise ava puhul määratakse vooluhulk valemiga:

$$Q = \int C_u \sqrt{2 g (z_{ts} - z_{vv})} dA,$$

milles erinevate nõlvustega trapetsristlõike vabapinna kõrgus  $z_{ts}$  = konstant, toruava ristlõike veekihi kõrgus  $z_{vv} = z_{vv0} + h$ , milles truubi väljavoolu toruava sisepõhja kõrgus on  $z_{vv0}$  ja veekihi kõrgus toruavas ristlõikes  $h = 0 \dots d_s$ . Ümarristlõikelise toruavaga määratud veekihi pindalaelement on  $dA$ .

Erinevate nõlvustega trapetsristlõikega vabapinna kõrguse erinevus truubi ülemises bjeffis võrreldes ümartruubi väljavooluava sisepõhja alumise punkti kõrgusega, määratakse valemiga:

$$z_{ts} - z_{vv0} = 1,5 d_s + \sin(\text{atan}(\theta)) l \approx 1,5 d_s + i_0 l.$$

Osalise täitumusega ümartruubi voolamise elavlõige on

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right),$$

milles  $d_s$  on ümartruubi sisediameeter ja  $h$  on vabapinna maksimaalne kõrgus sisepõhja alumisest punktist ümartruubi ristlõikes. Täistäitumusega ümartoru sisediameetriga määratud ristlõike pindala ehk elavlõige on

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4}.$$

Ümarristlõikelise toru avaga määratud veekihi pindalaelement:

$$dA = \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} - \frac{\frac{1}{\pi d_s} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2}} \right) dh.$$

Ümartruubi väljavoolukontrolli olukorra (täissurve truubi) vooluhulga võib arvutada integraalse valemiga:

$$\begin{aligned}
 Q_{vvk} &= \int_0^{d_s} C_u \sqrt{2g((z_{ts} - z_{vv0}) - h)} \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\frac{1}{\pi d_s} \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2}} \right) dh \\
 &= C_d \pi \frac{d_s^2}{4} \int_0^{d_s} \sqrt{2g((z_{ts} - z_{vv0}) - h)} \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} - \frac{\frac{1}{\pi d_s} \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2}} \right) dh,
 \end{aligned}$$

milles  $C_d$ ,  $d_s$  ja  $(z_{ts} - z_{vv0})$  on konstantsed suurused.

## ARVUTUS

Erinevate nõlvustega trapetsristlõikega vabapinna kõrguse erinevus truubi ülemises bjefis võrreldes ümartruubi väljavooluava sisepõhja alumise punkti kõrgusega on  $z_{ts} - z_{vv0} = 1,5 \cdot 1,1098 \text{ m} + 0,005 \cdot 22 \text{ m} = 1,7733 \text{ m}$ .

Vabapinna kõrgus üle ümartruubi väljavooluava sisepõhja alumise punkti kõrguse truubi alumises bjefis on

$$0,5 d_s - \sin(\text{atan}(\theta)) l \approx 0,5 d_s - i_0 l = 0,5 \cdot 1,1098 \text{ m} - 0,005 \cdot 22 \text{ m} = 0,4445 \text{ m}.$$

Vooluhulgategur

$$C_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + 0,44 + \frac{8 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (0,022)^2}{(1,1098 \text{ m}/4)^{2/6}} \cdot \frac{22 \text{ m}}{1,1098 \text{ m}} + 1\right)}} = 0,5274$$

Ümartoru Reynoldsi arv

$$Re = 21,858 \cdot 10^5$$

Hõõrdetakistustegur

$$\lambda = 0,0583$$

**JÄRELDUS.** Numbrilisest arvutustulemusest selgub, et ühtlane voolamine täieliku täitumusega ümartorus (survetruup) on turbulentne  $Re > 2000$  ( $Re_{vs} > 500$ ). Ühtlane voolamine survetruubis vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnale.

**MÄRKUS.** Ümartoru Reynolds'i arvu valemis võib truubi sisediaometri ( $d_s$ ) asemel kasutada ka hüdraulilist diameetrit ( $D_h$ ). Täieliku täitumusega ümartruubile kehtib seos:

$$D_h = 4 R_h = \frac{4 A_e}{\chi} = 4 \left( \frac{\pi d_s^2}{4} \right) \left( \frac{1}{\pi d_s} \right) = d_s,$$

milles survevoolu elavloige on  $A_e$  ja märgpiire on  $\chi$ .

Täissurvetruubi vooluhulk

$$Q_{svk} = 2,4747 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

VASTUS

Hüdraulilise voolusüsteemi rõhulise voolamise ümarava integraalsest vooluhulga valemist järeldub, et truubi väljavoolukontrolli (täissurve truubi) olukorra vooluhulk ületab oluliselt ümartruubile valitud tööolukorra (ümartoru pooltäitele truubi sissevoolu osas) vooluhulka:

$$Q_{svk}/Q = 2,4747$$

**MÄRKUS.** Vooluhulga integraalvalemil kasutamisel muutub ümartruubi veekihi integreerimisparameeter vahemikus  $h = 0 \rightarrow 1,1098 \text{ m}$ . Truubi väljavoolukontrolli (täissurve truubi) hindamisel on eeldatud, et vabapind truubi alumises bjefis võib mõjutada voolamise dünaamikat hüdraulilises voolusüsteemis.

## 19.8 VIITED

19.1 Timmusk, T. & Lulla, T. (2020). *Juhend truupide projekteerimiseks – truubitoru dimensioneerimine*.

19.2 Metsvahi, T. & Romandi, I. (2022). *Veeristed*. Tallinna Tehnikaülikool.

19.3 Maastik, A., Haldre, H., Koppel, T. & Paal, L. *Hüdraulika ja pumbad*. OÜ Greif.

## 20 POOLISEVOOLNE TORUSTIK

### 20.1 PRAKTIINE OSA. POOLISEVOOLNE KANALISATSIOON

#### 20.1.1 EHITIS. SADEMEVEE- JA REOVEETORUSTIK

Kanalisatsioon on ehitiste ja seadmete süsteem, mille abil kogutakse sademe- ja reovett ning juhitakse heitvesi loodusesse. Kanalisatsiooni ehitist on ka reoveepuhasti, kus puhastatakse reovett. Kanalisatsiooni projekteerimisel tuleb maksimaalsel määral ära kasutada looduslike tingimusi, et isevoolsete lahenduste abil energiakulusid vähendada. Samuti tuleb tagada kanalisatsioonitorustiku hoolduseks vajalikud tingimused. Nõuetekohaselt rajatud ja hästi toimiva kanalisatsiooniga välditakse terviseriske ja tagatakse puhas looduskeskkond – nagu seda on elupaigad. Kanalisatsioonitorud võivad sattuda surve alla, kui väljavool torustikust on takistatud, näiteks kui kanalisatsiooni väljavoolutoru on uputatud olekus.

Reovee ja sademevee voolamisele torustikus on standardite ja juhendmaterjalidega seatud tingimused ja nõuded, millega tuleb nende projekteerimisel ja ehitamisel arvestada. Peamised hüdraulilised suurused, mis kanalisatsioonitorustiku tööolukorda iseloomustavad, on vooluhulk torus  $Q$ , toru nominaalmõõduga määratud sisemõõde (sisediameter)  $DN/DI$  ( $d_s$ ), toru lang  $i_0$ , torus voolava vee voolukiirus  $u$  ja suhteline torutäide  $h_d = h/d_s$ , kus  $h$  on veepinna maksimaalne kõrgus toru sisepõhjust. Kanalisatsioonitorud on reeglina ümarristlõikega, mille eripäraks on hüdraulilise raadiuse vähenemine, kui torus voolava vee suhteline torutäide ületab täielikule torutäitele lähenedes teatava väärtuse. Selle asjaolu tõttu on isevoolse toru läbilaskevõime suurim, kui toru ei tööta täielikule torutäitele. Olenemata maksimaalsest läbilaskevõimest, tuleb reoveekanaliseerimise arvutamisel arvestada suhtelise torutäitega ehk toru reoveega täituvuse määr selliselt, et oleks tagatud õhu liikumine torustikus ventileerimise eesmärgil. Samuti tuleks tagada piisav varu juhaks, kui tulevikus vooluhulgad muutuvad, ja torustiku mahu kasutamiseks eriolukorras. Kui kanalisatsioonitorustik projekteeritakse mingis osas täielikule torutäitele, siis võetakse sellega ära kanalisatsioonivõrgu laiendamise võimalused ehk torustikuga ei saa tulevikus liita uusi arenduspiirkondi, valgalasid vms. Kanalisatsioonitorustiku rajamissügavuse juures tuleb vältida külmumist ja läbivajumist. Vajadusel tuleb torustik pinnases ankurdada, et vältida torustiku vees või pinnases mõjuvate jõudude (nt üleslükkejõud) tõttu liikumist.

Reoveekanaliseerimise soovituslikud hüdraulilised parameetrid on esitatud Eesti Vabariigi standardis EVS 848:2021 (VIIDE 20.1, „Väliskanaliseerimisvõrk“).

Vastavalt standardile on lubatud voolamine täieliku torutäitega ( $h_d = 1$ ) ainult sademevee- ja ühisvoolse kanalisatsiooni torudes ja hüdraulikaraamatu järgi ka kuivendusdreenides (VIIDE 20.2, „Hüdraulika ja pumbad“). Täieliku torutäite lubamist võib selgitada see, et sademeveekanaliseerimise suure tõenäosusega ventileerimist vajavat haisuhäiringut või ohtlikke gaase ei esine ning ühis-kanalisatsioonis toimub täieliku torutäitega voolamine ainult sajuperioodil. Arvestades kliimamuutustega kaasneva sademete intensiivsuse kasvuga, ei soovitata vastavaid torustikke projekteerida täistäitele, vaid varuga. Eesti territooriumil võib vihm kesta rohkem kui kaks päeva (VIITED 20.3, „Vihmavee-, ühisvoolne ja poollahkvoolne kanalisatsioon: õppevahend“, 20.4, „Eesti kliima minevikus ja tänapäeval“). Sageli esineb sajuperioode, kus üks vihm järgneb teisele. Valingvihm võib põhjustada vooluhulga kiire suurenemise kanalisatsioonis ning seetõttu võib tekkida torustikus uputus. Kui vihmavett koguneb linna valgalale – nagu parklatesse, sõidu- või kõnniteedele, murupindadele või mujale – sellistes kogustes, et see ei jõua pinnalt ära voolata ega jõua ka pinnasesse infiltreeruda, esinevad sajuperioodidel linnaalal üleujutused. Poolisevoolse sademeveekanaliseerimise, mille väljavool on uputatud veekogus, võib vesi kaevudes tõusta kuni paisutustasemini.

## 20.1.2 VOOLUREŽIIM. OSALINE JA TÄIELIK TORUTÄIDE, LÄBILASKEVÕIME

Kanaliseerimistoru tuleb hüdrauliliselt arvutada nii, et tööolukorras ei kuhjuks sellesse tahkeid osakesi (näiteks tänava puistematerjali). See tagatakse toru sisediameetrist olenevalt torustiku sobiva languga. Tahkete osakeste kuhjumist torustikus väldib voolukiirus, mis ei tohi olla väiksem kui isepuhastuskiirus. Vastavalt standardile (VIIDE 20.1, „Väliskanaliseerimise võrk“) on alla DN 300 torustikes isepuhastus üldjuhul tagatud, kui voolukiirus on vähemalt kord ööpäevas  $\geq 0,7$  m/s või kui torustiku lang on vähemalt 1:DN. Liiga suure voolukiirusega kaasneb torustiku elementide purunemis- ja kulumisoht. EVS standardi (VIIDE 20.1, „Väliskanaliseerimise võrk“) kohaselt on maksimaalne lubatud voolukiirus kanalisatsioonitorus alla 5 m/s, kuid piiratud tehnilistes tingimustes (astangkaevudes, lühikestes torulõikudes) on lubatud ka suurem voolukiirus, arvestades torumaterjali. Erinevates erialaväljaannetes (VIITED 20.2, „Hüdraulika ja pumbad“, 20.3, „Vihmavee-, ühisvoolne ja poollahkvoolne kanalisatsioon: õppevahend“) on maksimaalseks lubatud voolukiiruseks pakutud ka 8 m/s metalltorule ning 4 m/s plastiktorule.

Isevoolse kanalisatsioonitorustiku projekteerimisel on tavapäraselt teadaolevaks suuruseks vooluhulk, mida soovitakse ära juhtida, ning otsitavateks suurusteks torustiku sisediameeter ja torustiku pikikalle (lang). Sisediameetri ja langu määramisel tuleb arvesse võtta nii lubatud voolukiiruse vahemikku kui ka suhtelist torutäidet. Uute torustike planeerimisel lähtutakse võimalusel toru

minimaalsest langust, järgides maapinna geodeetilisi kõrgusmärke ning eelvoolu sügavust. Kanalisatsioonitorustiku dimensioonimine on optimeerimisülesanne, mille eesmärk on tagada majanduslikult soodsaim lahendus. Mida väiksem on torustiku rajamissügavus ja torustiku läbimõõt, seda soodsam on lahendus. Optimeerimisel tuleb arvestada, et väiksem läbimõõt võib tähendada torustiku suuremat langu ehk rajamissügavust, mis mõjutab ehituse maksumust. Kaaluda tuleb ehituse ja materjali maksumust. Kui maapinna kalle ja eelvoolu sügavus ei luba rajada iseoolset kanalisatsiooni, tuleb rajada kanalisatsioonipumpla. Olenevalt pinnase geotehnilistest tingimustest ja maapinna kaldest võib sügavate rajamistingimuste juures toru ehitamine majanduslikult ebamõistlikuks osutuda. Selle võib üles kaaluda pumpla paigaldamine. Sealjuures tuleb omakorda hinnata pumpla käitamiskulusid – nagu elektrienergia- ja hooldamise kulud jms.

Olemasolevate torustike puhul saab hinnata nende läbilaskevõimet ja selle alusel otsustada kanalisatsioonisüsteemi rekonstrueerimise vajaduse.

Soome Ehitusinseneride Liidu väljaande „Vesihuoltoverkkojen suunnittelu. Mitoitus ja suunnittelu.“ („Veevarustusvõrgustiku projekteerimine. Dimensioneerimine ja projekteerimine”) (RIL 237-2-2010, VIIDE 20.5) kohaselt võib kanalisatsioonitorustike elueaks pidada 50–100 aastat ja nende dimensioonimisel tuleks aluseks võtta 20–40 aastase perioodi jooksul esinev maksimaalne tunnivoolum.

Kuna kanalisatsioonitorustike hüdrauliline arvutus valemite abil on aeganõudev, siis kasutatakse kanalisatsioonitorude dimensioonimise lihtsustamiseks vastavaid numbrilisi algoritme (arvutiprogramme) või nomogramme. Üheks levinumaks on Colebrook-White'i nomogramm. Nomogrammi abil valitakse arvutusliku vooluhulga järgi toru siseläbimõõt ja sellele vastav lang, mis võtab vajaliku vooluhulga vastu. Toru läbimõõdu ja pikikalde valimisel tuleb arvestada lubatud voolukiiruse ja suhtelise torutäitega.

### 20.1.3 SISSEJUHTUS ÜLESANDESSE. PÕHIVALEMID

Pikikaldega torustikus võib voolamine olla nii iseoolne kui ka pooliseoolne ehk torustiku teatud ulatuses on voolamine vabapinnaga ning teatud ulatuses täieliku torutäitega. Täieliku täitega voolamine torustikus võib olla seotud nii väljavoolu takistusega kui ka vee juurdevooluga sademeveekanaliseerimise kaevudest. Torustiku arvutuste matemaatiliseks lihtsustamiseks eeldatakse, et voolamise hõõrdetakistustegurit võib määrata Moody diagrammi ruuttakistuse piirkonna abil. Manningi valemi juures kasutatakse suhtelist torutäidet, mis on defineeritud hüdraulilise suurusena ja võrdub veepinna maksimaalne kõrgus toru sisepõhjast jagatud toru sisediaameetriga.

Kui iseoolse kanalisatsioonitoru (pealtkaetud tehniliku voolusängi) normaalsügavus on ümართორუ voolamise kriitilisest sügavusest väiksem, siis võib vabavooluga torus tekkida vooluhüpe. See võib blokeerida õhu vaba liikumise

isevoolses kanalisatsioonis. Vooluhüpe horisontaalses torustikus võib tekkida amortiseerunud torustikus kareda piirde ning uues torustikus toruühenduste tõttu (VIIDE 20.6). Kui pealtkaetud voolusängis on osalise täitumusega toru lang kriitilisest langust väiksem, siis vooluhüpet ei teki, aga toru ühenduste tõttu võivad esineda keerulisema iseloomuga vooluprotsessid – nagu lained ja muu (VIIDE 20.7, „Veevarustus ja kanalisatsioon“). Vooluhüpet pealtkaetud voolusängis ei teki, kui osalise täitumusega toru lang on väiksem kriitilisest langust.

Isevoolse torustiku eritingimusel võib pikikaldega torus olla täieliku torutäitega voolamine, kus hüdrauliline lang on määratud Darcy survekao valemiga. Hõõrdepinge ühtlasele vabapinnaga voolamisele pealtkaetud voolusängis (osalise torutäitega voolamise puhul) võib määrata valemiga, milles hüdrauliline lang on asendatud torustiku põhja languga.

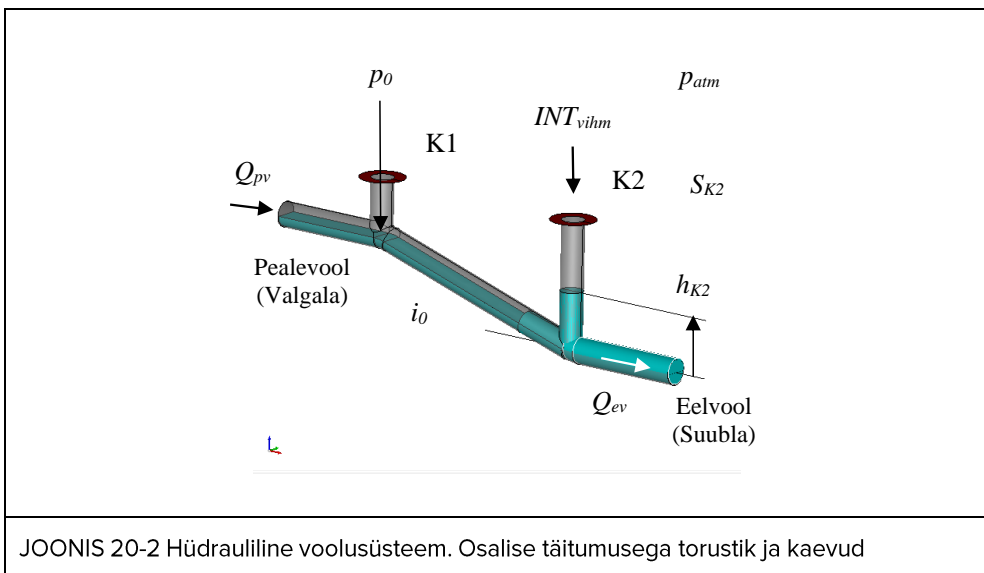


JOONIS 20-1 Sademeveekanaliseerimise väljavool, Tartu. (Foto: Andres Piirsalu, 2020)

## 20.2 PÕHIÜLESANNE. SUHTELINE TORUTÄIDE JA TÄITEULATUS

ANTUD. Linna valgalalt vihmavee ärajuhtimiseks on rajatud sademeveekanalisatsiooni torustik. Ümarristlõikega torus, sisediameetriga  $d_s = 236$  mm, pikkusega  $l = 1$  km, põhjalanguga (pealt kaetud voolusängi pikikaldega)  $i_0 = 0,002$  ( $= 0,002 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$ ), on pealevoolu vooluhulk  $Q_{pv} = 10 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ . Osalise torutäite üleminek täielikule torutäitele vastab sademeveekanalisatsiooni kaevu K2 rõhukõrgusele  $h_{K2} = 0,318$  m üle eelvoolutoru telje. Torustiku piirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,018$ . Poolisevoolse torustikus voolab  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata proovimismeetodi ja numbrilise arvutuskeemiga hüdraulilisele voolusüsteemile normaalsügavusele vastav suhteline torutäide: i) isevoolne torustik, st ilma vihmata olukord, milles sademeveekanalisatsiooni kaevude K1 ja K2 vahel on ühtlane voolamine, ii) poolisevoolne torustik, st vihmaga olukord, milles kaevude K1 ja K2 vahel toimub voolamise üleminek osalise torutäitega olukorralt täielikule torutäitele. Arvutada ise- ja poolisevoolsele torustikule suhteline torutäide ja sellele vastav voolusängi Reynoldsi arv ja hüdrauliline vabavoolurežiim vastavalt Froude'i suhtarvu kriteeriumile. Arvutada kriitilisele voolamise vastav suhteline torutäide, hõõrdetakistustegur ja hõõrdepinge.





EELDUSED. i) Isevooles torustikus on ühtlane voolamine, ii) poolisevooles torustikus (osalise ja täieliku täitumusega positiivse languga torus) on voolamine mõõdukalt ebahütlane, st kaevudevahelises pikikaldega torus toimub voolamise üleminek osalise torutäitega olukorralt täielikule torutäitele. Eeldada, et torustik töötab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnas. Normaalsügavus määrata Manningi vooluhulga valemiga ja kriitiline sügavus määrata Froude'i arvu valemiga, kasutades selleks Newtoni iteratsioonmeetodit.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Manningi vooluhulga valem, voolusängi Reynoldsi arv, voolamise elavlõike ja märgpiirde valemid osalise täitumusega ümartorule, Manningi hõõrdetakistuse valem, Bernoulli kolmikliige, Bernoulli funktsioon, ümartoru vabavoolu Froude'i arvu valem, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem**

### VALEMID

Manningi vooluhulga valem on

$$Q = \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e I_h^{\frac{1}{2}}}{n_M},$$

milles  $Q$  on vooluhulk,  $n_M$  on Manningi karedustegur ja  $I_h$  on hüdrauliline lang.

Hüdrauliline raadius on

$$R_h = \frac{A_e}{\chi},$$

milles  $A_e$  on elavlõige ja  $\chi$  on märgpiire.

Voolamise elavlõige osalise täitumusega ümartorule on

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(2 h_d - 1) + \frac{2}{\pi} (2 h_d - 1) \sqrt{h_d - h_d^2} \right),$$

milles suhteline torutäide  $h_d = h_{rlm}/d_s$ . Ümartoru sisediaameeter on  $d_s$  ja vabapinna maksimaalne kõrgus sisepõhjust ümartoru ristlõikes on  $h_{rlm}$ . Ühtlasele voolamisele  $h_{rlm} = d_0$ , milles  $d_0$  on normaalsügavus. Täieliku torutäitega voolamisele on ümartoru elavlõige

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4}.$$

Osalise täitumusega ümartoru voolamise märgpiire, millest on välja jäetud vabapind, on

$$\chi = \pi d_s \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2 h_d - 1) \right)$$

ja täieliku torutäitega voolamisele ümartorus on märgpiire

$$\chi = \pi d_s .$$

Hõõrdetakistusteguri Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnas võib määrata valemiga:

$$\lambda = \frac{8 g n_M^2}{R_h^{2/6}} .$$

Ühtlasele vabapinnaga voolamisele pealtkaetud voolusängis on hüdrauliline lang määratud põhjalanguga, st  $I_h = i_0$ .

Reynoldsi arv on

$$Re = \frac{u d_s}{\nu} ,$$

milles voolukiirus on  $u$ , ümartoru sisediaameeter on  $d_s$ , kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur on  $\nu$ .

**MÄRKUS.** Voolamisele täieliku täitumusega ümartorus (täistäitumusega ümartorus), sisediaameetriga  $d_s$ , määratakse hüdrauliline raadius valemiga:

$$R_h = \frac{A_e}{\chi} = \frac{\pi (d_s/2)^2}{\pi d_s} = \frac{d_s}{4} .$$

→

$$d_s = 4 R_h$$

→

$$Re = \frac{u d_s}{\nu} = \frac{u 4 R_h}{\nu} = 4 Re_{vs}$$

Kuna veevoolule täieliku täitumusega ümartorus vastav kriitiline Reynoldsi arv on 2000, siis järelikult hüdraulilise raadiusega määratud kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on neljakordselt erinev,  $Re_{vs} = Re/4$ . Laminaarse ja turbulentsse veevoolu ülemineku kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on 500.

→

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu}$$

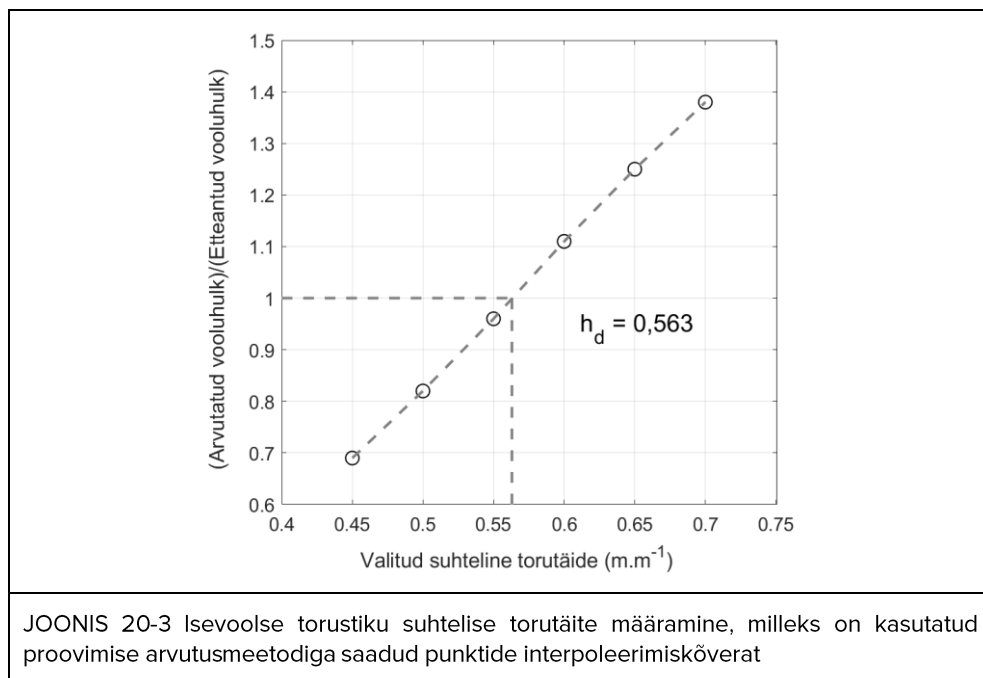
$$Re_{vs} = \frac{Q A_e}{A_e \chi \nu}$$

$$Re_{vs} = \frac{Q}{\chi \nu}$$

i) Ühtlane voolamine pikikaldega ümartorus  
 Proovimise arvutusmeetod

ARVUTUS. Suhteline torutäide  
 Etteantud ja arvutuslikud suurused.

	$h_d$ (m. m <sup>-1</sup> )	$A_e$ (m <sup>2</sup> )	$\chi$ (m)	$R_h$ (m)	$Re_{vs}$	$Q$ (m <sup>3</sup> . s <sup>-1</sup> )
I	0,45	0,0191	0,3471	0,0550	$0,15206 \cdot 10^5$	0,0069
II	0,5	0,0219	0,3707	0,0590	$0,17089 \cdot 10^5$	0,0082
III	0,55	0,0247	0,3943	0,0625	$0,18819 \cdot 10^5$	0,0096
IV	0,6	0,0274	0,4182	0,0655	$0,20353 \cdot 10^5$	0,0111
V	0,65	0,0301	0,4426	0,0680	$0,21653 \cdot 10^5$	0,0125
VI	0,7	0,0327	0,4678	0,0699	$0,22675 \cdot 10^5$	0,0138



JOONIS 20-3 Isevoolse torustiku suhtelise torutäide määramine, milleks on kasutatud proovimise arvutusmeetodiga saadud punktide interpoleerimiskõverat

VASTUSED

$$h_d = 0,563 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$d_0 = h_d d_s = 0,1329 \text{ m}$$

$$Re_{vs} = 0,19238 \cdot 10^5$$

$$\lambda = 0,0638$$

$$Fr = 0,3829$$

*Numbriline arvutusskeem. Suhteline torutäide*

*Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod*

ARVUTUSSKEEM (Manningi valem, pealtkaetud ümarristlõikega voolusäng)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku suhtelise torutäite valem (iteratsioonmeetodi põhivalem):

$$z_{j+1} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left( \frac{5}{3} \frac{ABI1_j}{ABI2_j} - \frac{4}{3\pi} \left( ABI3_j \sqrt{1 - (2z_j - 1)^2} \right)^{-1} \right)},$$

milles

$$ABI1_j = \frac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1 - (2z_j - 1)^2}} + \frac{4}{\pi} \sqrt{z_j - z_j^2} - \frac{1}{\pi} \frac{(2z_j - 1)^2}{\sqrt{z_j - z_j^2}},$$

$$ABI2_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2z_j - 1) \sqrt{z_j - z_j^2},$$

$$ABI3_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j - 1).$$

Arvutusliku vooluhulga valem:

$$Q_j = \frac{R n_j^{\frac{2}{3}} A_{e_j} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} A_{e_j}^{\frac{5}{3}}}{n_M \chi_j^{\frac{2}{3}}} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} \left( \pi \frac{d_s^2}{4} ABI2_j \right)^{\frac{5}{3}}}{n_M \left( \pi d_s ABI3_j \right)^{\frac{2}{3}}}.$$

ARVUTUS. Suhteline torutäide

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (1)	0,5	0,5631	0,5624	0,5624	0,5624	0,5624
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	0,0082	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (1)	0,5624	0,5624	0,5624	0,5624
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100

VASTUSED

$$h_d = 0,5624 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$d_0 = h_d d_s = 0,1327 \text{ m}$$

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu} = 0,19219 \cdot 10^5$$

$$\lambda = 0,0638$$

$$Fr = 0,3830$$

$$\tau_0 = 1,2421 \text{ Pa}$$

JÄRELDUS. Numbrilisest arvutustulemusest selgub, et ühtlane voolamine osalise täitumusega ümartorus on turbulentne ( $Re_{vs} > 500$ ) ja hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ).

**MÄRKUS.** Kontrollida iseseisvalt, kas hõõrdetakistusteguri arvatatud väärtus vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnale.

VALEMID

Bernoulli kolmikliige vabapinnaga voolamisele on

$$B = \frac{u^2}{2g} + h + h_s,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $g$  on raskuskiirendus,  $h(= h_{rlm})$  on vabapinna maksimaalne kõrgus ümartoru sisepõhjust ja  $h_s$  on ümartoru sisepõhja kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult.

Vabapinnaga voolamisele osalise täitumusega ümartorus võib kasutada voolukiiruse määramisel voolamise ruumkiiruse valemit:

$$u = \frac{Q}{A_e} = \frac{Q}{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right)},$$

milles ümartoru sisediaameeter on  $d_s$  ja vabapinna maksimaalne kõrgus sisepõhjust ümartoru ristlõikes on  $h(= h_{rlm})$ . (Ühtlasel voolamisel  $h = d_0$ , milles  $d_0$  on normaalsügavus.)

Bernoulli kolmikliikme vabapinnaga voolamisele võime teisendada kujule:

$$\begin{aligned} B &= \frac{Q^2}{2g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right)^2 + h + h_s} \\ &= \frac{Q^2}{2g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right)^2 + h + h_s}. \end{aligned}$$

Kui kasutada funktsiooni ekstreemumi määramise teoreemi veepinna kõrguse  $h$  järgi:

$$\frac{dB}{dh} = 0,$$

siis järeldub Bernoulli funktsioonist  $B = f(h, Q, g, d_s, z_s)$ , milles  $h$  on muutuja ja  $Q, g, d_s, h_s$  on konstantsed suurused, järgmine avaldis:

$$\begin{aligned}
& \frac{2 Q^2 \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2}} \right)}{2 g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} \right)^3 + 1} \\
&= \frac{Q^2 \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2}} \right)}{g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} \right)^3} \\
&+ 1 = 0.
\end{aligned}$$

Osalise täitumusega ümartoru vabavoolu Froude'i arv astmes 2 (Froude'i arv ruudus) on määratud valemiga:

$$\begin{aligned}
Fr^2 &= \frac{Q^2}{g \frac{\left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} \right)^3}{\left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2}} \right)^2}} \\
&= \frac{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} \right)^3}{g \frac{\left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left(2 \frac{h}{d_s} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2}} \right)^2}{u^2}},
\end{aligned}$$

milles on kasutatud osalise täitumusega ümartoru voolukiiruse ja vooluhulga seost:

$$u = \frac{Q}{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left(\frac{h}{d_s}\right)^2} \right)}.$$

→

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g \frac{\left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right)^3}{\left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2}} \right)^2} = \frac{u^2}{g \frac{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right)^2}{\left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2}} \right)^2}}$$

milles on kasutatud osalise täitumusega ümartoru voolukiiruse ja vooluhulga seost:

$$u = \frac{Q}{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right)}$$

**MÄRKUS.** Kriitilisele vabavoolule vastab  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule on vastavalt  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

Arvutusnäide. Kriitilisele voolamisele vastava suhtelise torutäite määramine osalise täitumusega ümartorus

#### VALEMID

Osalise täitumusega ümartoru vabavoolu Froude'i arv astmes 2 on määratud valemiga:

$$Fr^2 = \frac{u^2}{g \frac{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 h_d - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 h_d - 1 \right) \sqrt{h_d - h_d^2} \right)^2}{\left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left( 2 h_d - 1 \right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{h_d - h_d^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left( 2 h_d - 1 \right)^2}{\sqrt{h_d - h_d^2}} \right)^2}}$$

milles suhteline torutäide  $h_d = h/d_s$  (ümartoru sisediameeter on  $d_s$  ja vabapinna maksimaalne kõrgus sisepõhjast ümartoru ristlõikes on  $h(= h_{rlm})$ ) ja voolukiirus:



$$u = \frac{Q}{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2 h_d - 1) + \frac{2}{\pi} (2 h_d - 1) \sqrt{h_d - h_d^2} \right)}.$$

Osalise täitumusega ümartoru vabavoolu Froude'i arv on

$$\mathbf{Fr} = \frac{u}{\sqrt{g \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - (2 h_d - 1)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{h_d - h_d^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{(2 h_d - 1)^2}{\sqrt{h_d - h_d^2}} \right)}}.$$

**MÄRKUS.** Kriitilisele vabavoolule vastab  $\mathbf{Fr} = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule on vastavalt  $\mathbf{Fr} < 1$  ja  $\mathbf{Fr} > 1$ .

Froude'i suhtarvu kriteerium kriitilisele vabapinnaga voolamisele on

$$\mathbf{Fr}^2 = 1$$

→

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{u^2}{g \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - (2 h_d - 1)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{h_d - h_d^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{(2 h_d - 1)^2}{\sqrt{h_d - h_d^2}} \right)} \\ &= \frac{\left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2 h_d - 1) + \frac{2}{\pi} (2 h_d - 1) \sqrt{h_d - h_d^2} \right)^3}{g \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - (2 h_d - 1)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{h_d - h_d^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{(2 h_d - 1)^2}{\sqrt{h_d - h_d^2}} \right)} \end{aligned}$$

Proovimise arvutusmeetod

ARVUTUS. Kriitiline suhteline torutäide

Etteantud ja arvutuslikud suurused ( $Q = 0,01 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )

	$h_d \text{ (m} \cdot \text{m}^{-1}\text{)}$	$A_e \text{ (m}^2\text{)}$	$\chi \text{ (m)}$	$R_h \text{ (m)}$	$Re_{vs}$	$Fr$
I	0,25	0,0086	0,2471	0,0346	$0,31125 \cdot 10^5$	1,8251
II	0,3	0,0110	0,2736	0,0403	$0,28116 \cdot 10^5$	1,2806
III	0,35	0,0136	0,2988	0,0457	$0,25744 \cdot 10^5$	0,9505
IV	0,4	0,0163	0,3232	0,0506	$0,23801 \cdot 10^5$	0,7351
V	0,45	0,0191	0,3471	0,0550	$0,22164 \cdot 10^5$	0,5865

VASTUSED

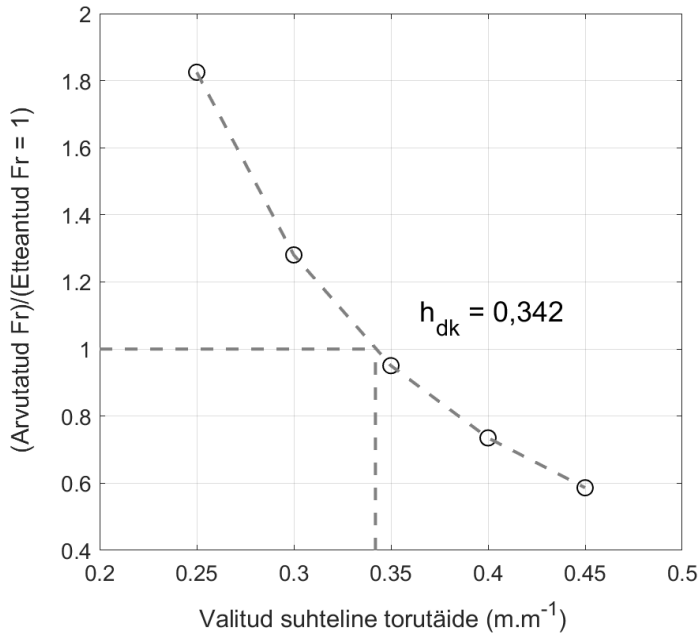
$$h_{dk} = 0,342$$

$$Fr = 1$$

$$d_k = h_{dk} d_s = 0,0807 \text{ m}$$

$$d_k < d_0$$

JÄRELDUS. Numbrilisest arvutustulemusest selgub, et osalise täitumusega ümartorus on kriitilisele voolamisele vastav suhteline torutäide väiksem kui normaalsügavusele vastav suhteline torutäide, st kriitiline sügavus on väiksem kui normaalsügavus. Järelikult on ühtlane voolamine osalise täitumusega ümartorus hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ).



JOONIS 20-4 Isevoole torustiku kriitilisele voolamisele vastava suhtelise torutäite määramine, milleks on kasutatud proovimise arvutusmeetodiga saadud punktide interpoleerimiskõverat

Numbriline arvutusskeem. Kriitiline suhteline torutäide  
 Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod

ARVUTUSSKEEM (Froude'i arv, pealtkaetud ümarristlõikega voolusäng)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku kriitilisele voolamisele vastava suhtelise torutäite valem (iteratsioonmeetodi põhivalem):

$$z_{j+1} = z_j - \frac{Fr^2_j - Fr^2}{\frac{Q^2}{g d_s} \left( \frac{\frac{4}{\pi} (2z_j - 1)}{(1 - (2z_j - 1)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{\pi} \frac{(1 - 2z_j)}{\sqrt{z_j - z_j^2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \frac{(2z_j - 1)^3}{(z_j - z_j^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3 ABI_j^2}{\left(\pi \frac{d_s^2}{4}\right)^2 ABI_j^4} \right)}$$

Arvutusliku Froude'i arvu astmes 2 valem:

$$Fr^2_j = \frac{\frac{Q^2}{d_s} \left( \frac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1 - (2z_j - 1)^2}} + \frac{4}{\pi} \sqrt{z_j - z_j^2} - \frac{1}{\pi} \frac{(2z_j - 1)^2}{\sqrt{z_j - z_j^2}} \right)}{g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2z_j - 1) \sqrt{z_j - z_j^2} \right)^3} = \frac{(Q^2/d_s) ABI1_j}{g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 (ABI2_j)^3},$$

milles

$$ABI1_j = \frac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1 - (2z_j - 1)^2}} + \frac{4}{\pi} \sqrt{z_j - z_j^2} - \frac{1}{\pi} \frac{(2z_j - 1)^2}{\sqrt{z_j - z_j^2}},$$

$$ABI2_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2z_j - 1) + \frac{2}{\pi} (2z_j - 1) \sqrt{z_j - z_j^2}.$$

ARVUTUS. Kriitiline suhteline torutäide ( $Fr^2 = 1$ )

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (1)	0,3000	0,3282	0,3392	0,3408	0,3409	0,3409
$Fr^2_j$ (1)	1,6399	1,1576	1,0201	1,0013	1,0001	1,0000

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (1)	0,3409	0,3409	0,3409	0,3409
$Fr^2_j$ (1)	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

VASTUSED

$$h_{dk} = 0,3409$$

$$Fr = 1$$

$$d_k = h_{dk} d_s = 0,0805 \text{ m}$$

$$d_k < d_0$$

JÄRELDUS. Numbrilisest arvutustulemusest selgub, et osalise täitumusega ümartorus on kriitilisele voolamisele vastav suhteline torutäide väiksem kui normaalsügavusele vastav suhteline torutäide, st kriitiline sügavus on väiksem kui normaalsügavus. Järelikult on ühtlane voolamine osalise täitumusega ümartorus hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ).

ii) Mõõdukalt ebäühtlane voolamine pikikaldega ümartorus  
Suhteline torutäide pikikaldega ümartorus

#### VALEMID

Bernoulli kolmikliige vabapinnaga voolamisele on

$$B = \frac{u^2}{2g} + h + h_s,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $g$  on raskuskiirendus,  $h$  on veepinna kõrgus pealt kaetud voolusängi aluspõhjast ja  $h_s$  on aluspõhja kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult. Bernoulli kolmikliikme voolusuunaline muutus puudub ideaalvedeliku voolamise puhul. Mõõdukalt ebäühtlasele reaalvoolule on Bernoulli kolmikliikme tehissängi aluspõhja suunaline ( $x'$  – pööratud koordinaattelje suunaline) diferentsiaalne muutus (vähenemine) määratud hüdraulilise languga:

$$\frac{\partial B}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{u^2}{2g} + h + h_s \right) = -I_h,$$

milles  $I_h$  on hüdrauliline lang ja  $x'$  on pealt kaetud voolusängi pikikalde nurgaga  $\theta$  määratud koordinaat.

Voolamise erienergia on määratud kui

$$E_s = \frac{u^2}{2g} + h = \frac{Q^2}{2g A_e^2} + h,$$

milles on võetud kasutusele vooluhulk  $Q$  ja elavlõige  $A_e$  vastavalt voolukiirusele  $u = Q/A_e$ .

Osalise täitumusega ümartorus voolamise elavlõige on

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2 h_d - 1) + \frac{2}{\pi} (2 h_d - 1) \sqrt{h_d - h_d^2} \right),$$

milles suhteline torutäide  $h_d = h_{rlm}/d_s$ . Ümartoru sisediameeter on  $d_s$  ja vabapinna maksimaalne kõrgus sisepõhjast ümartoru ristlõikes on  $h_{rlm}$ . Täieliku torutäitega voolamisele on ümartoru elavlõige:

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4}.$$

Osalise täitumusega ümartoru voolamise märgpiire, millest on välja jäetud vabapind, on

$$\chi = \pi d_s \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2 h_d - 1) \right)$$

ja täieliku torutäitega voolamisel on ümartoru märgpiire:

$$\chi = \pi d_s.$$

Mõõdukalt ebäühtlase reaalvoolu puhul on voolamise erienergia pealt kaetud voolusängi aluspõhja pikikalde suunaline ( $x'$  – pööratud koordinaattelje suunaline) diferentsiaalne muutus määratud põhjalangu (pealt kaetud voolusängi pikikalde) ja hüdraulilise langu vahega:

$$\frac{\partial E_s}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{u^2}{2g} + h \right) = -\frac{\partial h_s}{\partial x'} - I_h \approx i_0 - I_h,$$

milles  $\partial h_s / \partial x'$  on määratud põhjalanguga  $i_0$  eeldusel, et  $(\cos(\theta))^2 \approx 1$ .

Kasutades vabapinnaga voolamisele osalise täitumusega ümartorus voolukiiruse määramisele voolamise ruumkiiruse valemit:

$$u = \frac{Q}{A_e} = \frac{Q}{\pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right)},$$

milles ümartoru sisediaameeter on  $d_s$  ja vabapinna maksimaalne kõrgus sisepõhjust ümartoru ristlõikes on  $h (= h_{rlm})$ .

Vabapinnaga voolamise erienergia võime teisendada kujule:

$$E_s = \frac{Q^2}{2g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right)^2} + h.$$

Kui kasutada funktsiooni ekstreemumi määramise teoreemi veepinna kõrguse  $h$  järgi:

$$\frac{d E_s}{d h} = 0,$$

siis järeldub voolamise erienergia funktsioonist  $E_s = f(h, Q, g, d_s)$ , milles  $h$  on muutuja ja  $Q, g, d_s$  on konstantsed suurused, järgmine avaldis:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_s}{\partial h} &= \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{Q^2}{2gA_e^2} + h \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{Q^2}{2g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} (2h_d - 1) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right)^2 + h} \right) \\
&= - \frac{2Q^2 \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2}} \right)}{2g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right)^3 + 1} \\
&= - \frac{Q^2 \left( \frac{\frac{2}{\pi d_s}}{\sqrt{1 - \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right)^2}} + \frac{4}{\pi d_s} \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} - \frac{1}{\pi d_s} \frac{\left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right)^2}{\sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2}} \right)}{g \left( \pi \frac{d_s^2}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \left( 2 \frac{h}{d_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{h}{d_s} - \left( \frac{h}{d_s} \right)^2} \right)^3 + 1}.
\end{aligned}$$

Mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{dh}{dx'} \approx \frac{i_0 - I_h}{1 - \mathbf{Fr}^2},$$

milles  $I_h$  on hüdrauliline lang,  $i_0$  on põhjalang ja  $\mathbf{Fr}$  on Froude'i arv.

*Mõõdukalt ebaühtlase voolamise suhtelise torutäite ulatuse määramine*

#### VALEMID

Mõõdukalt ebaühtlase voolamise diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i_0 - I_h}{1 - \mathbf{Fr}^2},$$

milles  $x' \rightarrow l$ ,  $I_h$  on hüdrauliline lang,  $i_0$  on põhjalang ja  $\mathbf{Fr}$  on Froude'i arv.

Mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrandis võtame kasutusele lõplikud vahed vabapinna kõrguse ja voolupikkuse muutustele:

$$\frac{dh}{dl} \rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta l}.$$

Kasutades numbrilist arvutusskeemi diferentsiaalvõrrandi lõplikele vahedele ilmutatud kujul:

$$\Delta l = \Delta h \frac{1 - Fr^2}{i_0 - I_h},$$

võib kasutusele võtta Euleri valemi ilmutatud kujul mõõdukalt ebäühtlase voolamise vabapinna muutuse määramisele ümartorus:

$$l_{i-1} = l_i - \Delta h \frac{1 - Fr^2}{i_0 - I_h}.$$

## ARVUTUS

Täieliku torutäitega osa positiivse languga torustiku kaevude K1 ja K2 vahel

$$l_{tt} = \frac{h_{K2}}{i_0} - \frac{d_s}{2 i_0} = \frac{0,318 \text{ m}}{0,002} - \frac{0,236 \text{ m}}{2 \cdot 0,002} = 159 \text{ m} - 59 \text{ m} = 100 \text{ m}$$

Täieliku torutäitega vabapinna maksimaalne kõrgus üle ümartoru aluspõhja punkti on

$$h_{rlm} \approx d_s = 0,236 \text{ m}$$

Numbriline arvutusskeem, milles on kasutatud järgmiseid algtingimusi:

Suhteline torutäide

$$h_d = 0,99$$

Täieliku täitumusega pikikaldega toru pikkus

$$l_1 = -100 \text{ m}$$

Veepinna kõrguse muutuse puhul konstantset lõpliku vahet

$$\Delta h = 0,0052 \text{ m},$$

mis vastab suhteline torutäite vahele

$$\Delta h_d = \frac{\Delta h}{d_s} = \frac{0,0052 \text{ m}}{0,236 \text{ m}} = 0,021875.$$



$h_{d_i}$ (m)	$A_e$ (m <sup>2</sup> )	$\chi$ (m)	<b>Fr</b>	$I_h$	$l_i$ (m)
0,9999	0,0437	0,7367	0,0240	$0,7309 \cdot 10^{-3}$	-100,0000
0,9780	0,0435	0,6712	0,0926	$0,6576 \cdot 10^{-3}$	-117,2273
0,9562	0,0431	0,6418	0,1110	$0,6405 \cdot 10^{-3}$	-133,3826
0,9343	0,0425	0,6190	0,1245	$0,6372 \cdot 10^{-3}$	-149,2745
0,9124	0,0419	0,5996	0,1361	$0,6427 \cdot 10^{-3}$	-165,0773
0,8905	0,0411	0,5822	0,1469	$0,6551 \cdot 10^{-3}$	-180,8955
0,8687	0,0404	0,5664	0,1573	$0,6737 \cdot 10^{-3}$	-196,8103
0,8468	0,0395	0,5516	0,1677	$0,6983 \cdot 10^{-3}$	-212,8960
0,8249	0,0386	0,5376	0,1783	$0,7289 \cdot 10^{-3}$	-229,2281
0,8030	0,0376	0,5244	0,1894	$0,7659 \cdot 10^{-3}$	-245,8900
0,7812	0,0367	0,5116	0,2009	$0,8100 \cdot 10^{-3}$	-262,9801
0,7593	0,0356	0,4994	0,2132	$0,8619 \cdot 10^{-3}$	-280,6201
0,7374	0,0346	0,4875	0,2263	$0,9228 \cdot 10^{-3}$	-298,9673
0,7155	0,0335	0,4759	0,2404	$0,9940 \cdot 10^{-3}$	-318,2345
0,6937	0,0324	0,4646	0,2556	$1,0772 \cdot 10^{-3}$	-338,7221
0,6718	0,0312	0,4535	0,2721	$1,1746 \cdot 10^{-3}$	-360,8786
0,6499	0,0301	0,4426	0,2902	$1,2890 \cdot 10^{-3}$	-385,4195
0,6280	0,0289	0,4318	0,3100	$1,4238 \cdot 10^{-3}$	-413,5960
0,6062	0,0277	0,4212	0,3319	$1,5832 \cdot 10^{-3}$	-447,9095
0,5843	0,0265	0,4107	0,3561	$1,7730 \cdot 10^{-3}$	-494,6154
0,5624	0,0253	0,4002	0,3830	$2,0001 \cdot 10^{-3}$	-578,7470

## VASTUS

Sademeveekanaliseerimise kaevude K1 ja K2 vahelises pikikaldega torustikus on 100 m ulatuses täieliku täitumusega voolamine ja  $578,7 \text{ m} - 100 \text{ m} = 478,7 \text{ m}$  ulatuses mõõdukalt ebahühtlane voolamine.

## MÄRKUSED. Suhteline torutäide ja täiteulatus

- Osalise täitumusega ümartoru kriitilisele voolamisele vastav suhtelise torutäite numbriline arvutuskeem (Newtoni iteratsioonmeetod) koondub hästi suhtelise torutäite algväärtustel  $0,2 < z_{j=1} < 0,6$  m. Iteratsioonarvutuse koonduvust piiravad singulaarsused sõltuvad numbrilisse arvutuskeemi valitud valemitest.
- Kui isevoolse kanalisatsioonitoru (pealt kaetud tehisliku voolusängi) normaalsügavus on ümartoru voolamise kriitilisest sügavusest väiksem, siis võib vabavooluga torus tekkida vooluhüpe. See võib blokeerida õhu vaba liikumise isevoolse kanalisatsioonis.
- Vooluhüpe horisontaalses torustikus võib tekkida nõ kareda piirde tõttu amortiseerunud torustikus ning toruühenduste tõttu uues torustikus.
- Torustiku arvutuste matemaatilisel lihtsustamisel eeldatakse, et voolamise hõõrdetakistusteguri võib määrata Moody diagrammi ruuttakistuse piirkonnas. Hõõrdetakistustegur määratakse valemiga:

$$\lambda = \frac{8 g n_M^2}{R_h^{2/6}},$$

milles  $g$  on raskuskiirendus,  $R_h$  on hüdrauliline raadius ja  $n_M$  on Manningi karedustegur. Täieliku torutäitega ümartorule  $R_h = d_s/4$ . Manningi karedusteguri kasutamine voolusüsteemi takistuse määramisele on seotud vee omaduste määramisega. Vee temperatuur määrab vee tiheduse ja dünaamilise molekulaarse viskoossusteguri, mille järgi määratakse kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur. Reynoldsi arvu väärtus sõltub oluliselt kinemaatilistest molekulaarsest viskoossustegurist.

- Ühtlase voolamise hõõrdepinge voolusängis määratakse valemiga:  
 $\tau_0 = \rho g R_h I_h = \rho g R_h i_0$ ,  
milles  $\rho$  on vedeliku tihedus,  $g$  on raskuskiirendus,  $R_h$  on hüdrauliline raadius,  $I_h$  on hüdrauliline lang ja  $i_0$  on põhjalang.
- Isevoolse torustiku eritingimusel võib pikikaldega torus olla täieliku torutäitega voolamine, milles hüdrauliline lang on määratud Darcy survekao valemiga:

$$h_{hõõre} = \frac{l_{toru}}{d_s} \frac{u^2}{2 g}.$$

→

$$I_h = \frac{h_{hõõre}}{l_{toru}} = \frac{1}{d_s} \frac{u^2}{2 g}$$

Täieliku täitumisega ümarristlõikega torule võib vooluhulga määrata valemiga:

$$Q = u A_e = u \pi \left(\frac{d_s}{2}\right)^2 = u \pi \frac{d_s^2}{4}.$$

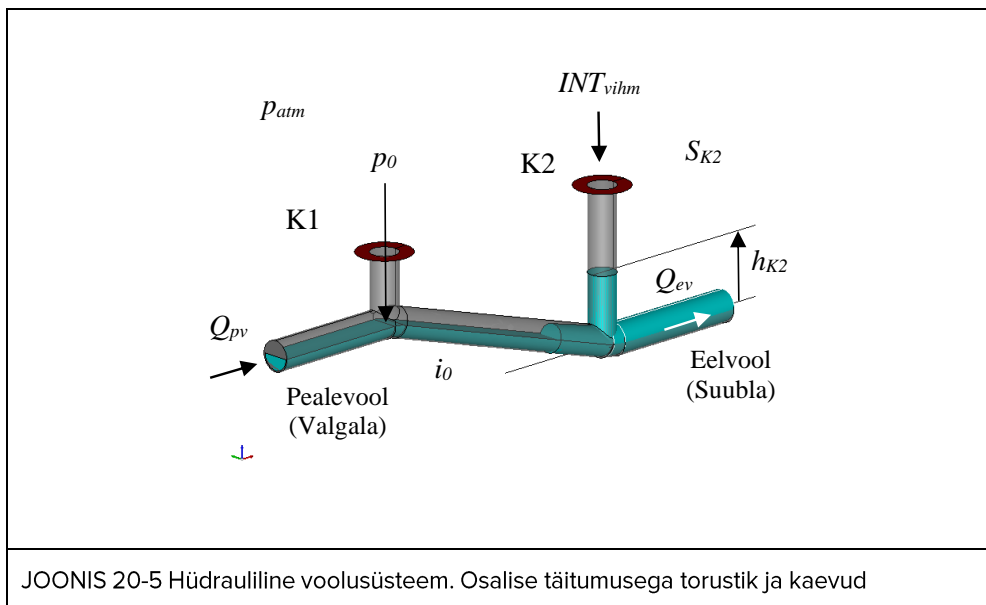
→

$$I_h = \frac{1}{d_s} \frac{u^2}{2 g} = \frac{8 Q^2}{\pi^2 d_s^5 g}$$

## 20.3 ISESEISVA TÖÖ ÜLESANNE. SUHTELINE TORUTÄIDE JA TÄITEULATUS

ANTUD. Linna valgalalt vihmavee ärajuhtimiseks on rajatud sademeveekanalisatsiooni torustik. Ümarristlõikega torus, sisediameetriga  $d_s = 236$  mm, pikkusega  $l = 1$  km, põhjalanguga (pealt kaetud voolusängi pikikaldega)  $i_0 = 0,002$ , on pealevoolu vooluhulk  $Q_{pv} = 15 \text{ l.s}^{-1}$ . Osalise torutäite üleminek täielikule torutäitele vastab sademeveekanalisatsiooni kaevu K2 rõhukõrgusele  $h_{K2} = 0,318$  m üle eelvoolutoru telje. Torustiku piirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,018$ . Poolisevoolse torustikus voolab  $10$  °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg.m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata proovimismeetodi ja numbrilise arvutuskeemiga hüdraulilisele voolusüsteemile normaalsügavusele vastav suhteline torutäide: i) isevoolne torustik, st ilma vihmata olukord, milles sademeveekanalisatsiooni kaevude K1 ja K2 vahel on ühtlane voolamine, ii) poolisevoolne torustik, st vihmaga olukord, milles kaevude K1 ja K2 vahel toimub voolamise üleminek osalise torutäitega olukorralt täielikule torutäitele. Arvutada ise- ja poolisevoolsele torustikule suhteline torutäide ja sellele vastav voolusängi Reynoldsi arv ja hüdrauliline vabavoolurežiim vastavalt Froude'i suhtarvu kriteeriumile. Arvutada kriitilisele voolamise vastav suhteline torutäide, hõõrdetakistustegur ja hõõrdepinge.



JOONIS 20-5 Hüdrauliline voolusüsteem. Osalise täitumusega torustik ja kaevud

EELDUSED: i) Isevooles torustikus on ühtlane voolamine, ii) poolisevooles torustikus (osalise ja täieliku täitumusega positiivse languga torus) on voolamine mõõdukalt ebäühtlane, st kaevudevahelises pikikaldega torus toimub voolamise üleminek osalise torutäitega olukorralt täielikule torutäitele. Eeldada, et torustik töötab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnas. Normaalsügavus määrata Manningi vooluhulga valemiga ja kriitiline sügavus määrata Froude'i arvu valemiga, kasutades selleks Newtoni iteratsioonmeetodit.

## VASTUSED

i) Ühtlane voolamine pikikaldega ümartorus

$$h_d = 0,7492$$

$$d_0 = h_d d_s = 0,1768 \text{ m}$$

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu} = 0,23366 \cdot 10^5$$

$$\lambda = 0,0614$$

$$Fr = 0,3287$$

$$\tau_0 = 1,3966 \text{ Pa}$$

$$h_{dk} = 0,4186$$

$$Fr = 1$$

$$d_k = h_{dk} d_s = 0,0988 \text{ m}$$

$$d_k < d_0$$

JÄRELDUS. Arvutustulemusest selgub, et ühtlane voolamine osalise täitumusega ümartorus on turbulentne ( $Re_{vs} > 500$ ). Osalise täitumusega ümartorus on kriitilisele voolamisele vastav suhteline torutäide väiksem kui normaalsügavusele vastav suhteline torutäide, st kriitiline sügavus väiksem kui normaalsügavus. Järelikult on ühtlane voolamine osalise täitumusega ümartorus hüdrauliliselt rahuliku vabavoolu-režiimiga ( $Fr < 1$ ).

**MÄRKUS.** Kontrollida iseseisvalt, kas hõõrdetakistusteguri arvatud väärtus vastab Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnale.

ii) Mõõdukalt ebäühtlane voolamine pikikaldega ümartorus

Täieliku torutäitega osa positiivse languga torus kaevude K1 ja K2 vahel

$$l_{tt} = \frac{h_{K2}}{i_0} - \frac{d_s}{2 i_0} = \frac{0,318 \text{ m}}{0,002} - \frac{0,236 \text{ m}}{2 \cdot 0,002} = 159 \text{ m} - 59 \text{ m} = 100 \text{ m}$$

Täieliku torutäitega vabapinna maksimaalne kõrgus üle ümartoru sisepinna on

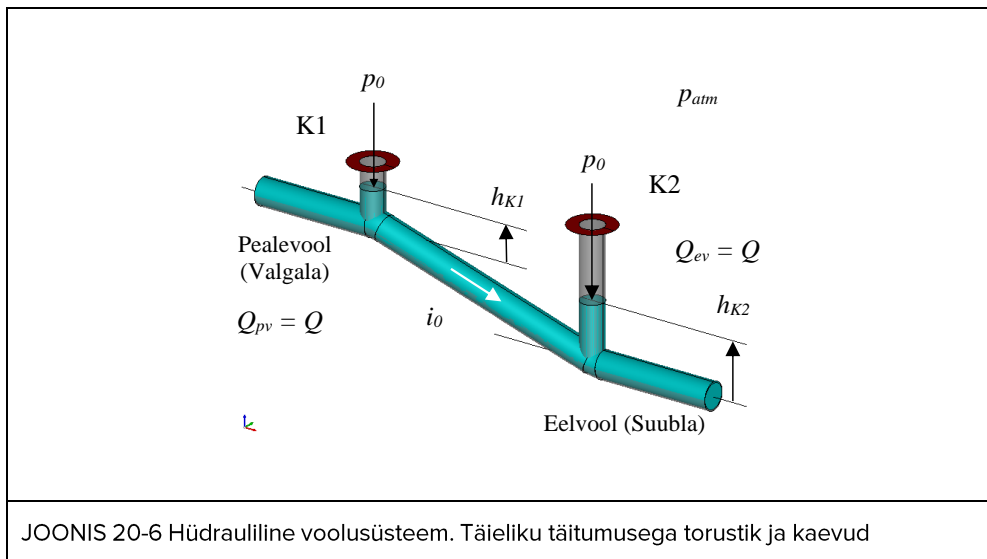
$$h_{rlm} = d_s = 0,236 \text{ m}$$

Kaevude K1 ja K2 vahelises pikikaldega torustikus on 100 m ulatuses täieliku täitumusega voolamine ja  $842,0 \text{ m} - 100 \text{ m} = 742,0 \text{ m}$  ulatuses mõõdukalt ebäühtlane voolamine.

## 20.4 LISAÜLESANNE. TÄIELIKU TORUTÄITEGA VOOLAMINE

ANTUD. Linna valgalalt vihmavee ärajuhtimiseks on rajatud sademevee-kanalisatsiooni torustik. Ümarristlõikega torus, sisediameetriga  $d_s = 236$  mm, pikkusega  $l = 1$  km, põhjalanguga (pealt kaetud voolusängi pikikaldega)  $i_0 = 0,002 = 2$  mm. m<sup>-1</sup>, on voolamine täieliku torutäitega, mis vastab sademevee-kanalisatsiooni kaevu K1 rõhukõrgusele  $h_{K1} = 0,5$  m üle pealevoolutoru telje, ning kaevu K2 rõhukõrgusele  $h_{K2} = 1,0$  m üle eelvoolutoru telje. Torustiku piirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,018$ . Rõhulise voolamisega torustikus on 10 °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000$  kg. m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg. m<sup>-1</sup>. s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>. s<sup>-1</sup>. Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Määrata valemiga vooluhulk survelele voolamisele positiivse languga (pikikaldega) torustikus. Arvutada Reynoldsi arv ja hõõrdetakistustegur survevoolule.



EELDUSED. Hüdraulilises voolusüsteemis on vee voolamine statsionaarne, survetorustikus on voolamine ühtlane. Arvestada survevoolu kohttakistusi toru peale- ja eelvoolule kui hüdraulilise voolusüsteemi hõõrdesurvekao suurenemine. Proovimise arvutusmeetodis kasutada hõõrdetakistusteguri määramisel ruuttakistuspiirkonda Moody diagrammil. Kareda piirdega toru hõõrdetakistusteguri määramisele võib kasutada ka Manningi karedusskaala valemit.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Bernoulli võrrand, Darcy survekao valem, Weisbachi survekao valem, ümartoru Reynolds'i arv, Manningi karedusskaala valem, toru sisediameetri valem**

### VALEMID

Reaalvedeliku Bernoulli võrrand rõhulisele voolamisele VALEM (2-14) torustikus on

$$z_{pv} + \frac{p_{pv}}{\rho g} + \frac{u_{pv}^2}{2g} = z_{ev} + \frac{p_{ev}}{\rho g} + \frac{u_{ev}^2}{2g} + h_t,$$

milles pealevoolutoru telje kõrgus, rõhk ja voolukiirus on vastavalt  $z_{pv}$ ,  $p_{pv}$  ja  $u_{pv}$ , ning eelvoolutoru telje kõrgus, rõhk ja voolukiirus on vastavalt  $z_{ev}$ ,  $p_{ev}$  ja  $u_{ev}$ .  $h_t$  on survekadu, mis jagatakse hõordesurvekaoks  $h_l$  ja kohtsurvekaoks  $h_k$ .

Sademeveekanalisisiooni kaevude K1 ja K2 rõhukõrgused on vastavalt

$$h_{K1} = \frac{p_{pv}}{\rho g},$$

$$h_{K2} = \frac{p_{ev}}{\rho g}.$$

Rõhk kaevude K1 ja K2 vabapinnal on määratud õhurõhuga  $p_0$ .

Rõhukõrguste vahe ehk rõhuvahekõrgus:

$$\frac{p_{pv}}{\rho g} - \frac{p_{ev}}{\rho g} = \frac{p_{pv} - p_{ev}}{\rho g} = h_{rvk}.$$

→

$$h_{rvk} = h_{K1} - h_{K2}$$

Sademeveekanalisisiooni torustikus on peale- ja eelvoolu voolukiirused:

$$u_{pv} = u_{ev} = u.$$

Reaalvoolu Bernoulli võrrandist järeldub seos:

$$\Delta h = h_t = h_{kpv} + h_l + h_{kev},$$

milles  $\Delta h = (z_{pv} + h_{K1}) - (z_{ev} + h_{K2})$  on kaevude K1 ja K2 vabapinnakõrguste vahe,  $h_{kpv}$  on kohtsurvekadu pealevoolu toruühendusele,  $h_l$  on hõordesurvekadu ja  $h_{kev}$  on kohtsurvekadu eelvoolu toruühendusele.

Darcy survekao valem hõordesurvekao määramisele on

$$h_l = \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g},$$

milles  $\lambda$  on hõõrdetakistustegur (mõõtühikuta suurus  $[\lambda] = 1$ ),  $l$  on täistäitumusega survetoru pikkus,  $d_s$  on toru sisediaameeter ja  $u$  ( $= u_{pv} = u_{ev}$ ) on voolamise keskkiirus torus.

Weisbachi survekao valem kohtsurvekao määramisele on

$$h_k = k_L \frac{u^2}{2g},$$

milles  $k_L$  on kohttakistustegur (mõõtühikuta suurus  $[k_L] = 1$ ),  $u$  ( $= u_{pv} = u_{ev}$ ) on voolamise keskkiirus torus. Peale ja eelvoolu toruühenduste kohtsurvekaod, vastavalt  $h_{kpv}$  ja  $h_{kev}$ , on oluliselt väiksemad kui torustiku hõõrdesurvekadu  $h_l$ . Pikas survetorustikus võib kohttakistusi toru peale- ja eelvoolule hüdraulilises voolusüsteemis arvestada hõõrdesurvekado suurenemisena.

Ümartoru Reynoldsi arv on

$$Re = \frac{u d_s}{\nu},$$

milles  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur.

Vooluhulk on

$$Q = u A_e,$$

milles voolamise ruumkiirus torus on  $u$  ja täistäitumusega ümartoru sisediaameetriga määratud ristlõike pindala ehk elavlõige on

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4}.$$

→

$$u = \frac{Q}{A_e}$$

$$u = \frac{4Q}{\pi d_s^2}$$

Kasutades hüdraulilise voolusüsteemi põhivalemit, Darcy survekao valemit, Weisbachi survekao valemit ja vooluhulga valemit, saab tuletada valemi toru sisediaameetri määramisele ilmutatud kujul.

$$\Delta h = h_{kpv} + h_l + h_{kev}$$

$$\Delta h = k_{Lpv} \frac{u^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g} + k_{Lev} \frac{u^2}{2g}$$

$$\Delta h = \left( k_{Lpv} + \lambda \frac{l}{d_s} + k_{Lev} \right) \frac{u^2}{2g}$$

→

$$\Delta h = \lambda^* \frac{l}{d_s} \frac{8 Q^2}{g \pi^2 d_s^4}$$

Manningi karedusskaala valem hõõrdetakistusteguri määramisele on

$$\lambda^* = \frac{8 g n_M^2}{R_h^{2/6}},$$

milles ümartoru hüdrauliline raadius  $R_h = d_s/4$ .

→

$$\lambda^* = \frac{8 g n_M^2}{(d_s/4)^{2/6}}$$

$$\lambda^* = 4^{2/6} \frac{8 g n_M^2}{d_s^{2/6}}$$

$$\lambda^* = \frac{12,7 g n_M^2}{d_s^{2/6}}$$

→

$$\Delta h = \left( 12,7 \frac{g n_M^2 l}{d_s^{2/6} d_s} \right) \frac{8 Q^2}{g \pi^2 d_s^4}$$

$$\Delta h = \left( 12,7 \frac{g n_M^2 l}{d_s^{8/6}} \right) \frac{8 Q^2}{g \pi^2 d_s^4}$$

$$Q^2 = \frac{\Delta h g \pi^2 d_s^4}{8 \left( 12,7 \frac{g n_M^2 l}{d_s^{8/6}} \right)}$$

$$\Delta h = (z_{pv} + h_{K1}) - (z_{ev} + h_{K2})$$

$$Q = \sqrt{\frac{((z_{pv} + h_{K1}) - (z_{ev} + h_{K2})) g \pi^2 d_s^4}{8 \left( 12,7 \frac{g n_M^2 l}{d_s^{8/6}} \right)}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{((z_{pv} - z_{ev}) + (h_{K1} - h_{K2})) g \pi^2 d_s^{16/3}}{8 (12,7 g n_M^2 l)}}$$



## ARVUTUS

Torustiku raskuskõrguste vahe

$$(z_{pv} - z_{ev}) = 0,001 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 1000 \text{ m} = 1 \text{ m}$$

Vooluhulk

$$Q = \sqrt{\frac{(1 \text{ m} + (0,5 \text{ m} - 1,0 \text{ m})) \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \pi^2 \cdot (236/1000 \text{ m})^{\frac{16}{3}}}{8 \cdot (12,7 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot (0,018)^2 \cdot 1000 \text{ m})}} = 0,0143 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

Elavlõige

$$A_e = \pi \cdot \frac{\left(\frac{236}{1000} \text{ m}\right)^2}{4} = 0,0437 \text{ m}^2$$

$$\pi = 3,141592653589793$$

Voolukiirus

$$u = \frac{0,0143 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{0,0437 \text{ m}^2} = 0,3261 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Reynoldsi arv

$$Re = \frac{0,3261 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot (236 \text{ mm}/1000)}{1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} = 0,59197 \cdot 10^5$$

Hõõrdetakistustegur

$$\lambda^* = \frac{12,7 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot (0,018)^2}{(236/1000 \text{ m})^{\frac{2}{5}}} = 0,0653$$

VASTUSED

$$Q = 0,0143 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 14,3 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$Re = 0,59197 \cdot 10^5$$

$$\lambda^* = 0,0653$$

## MÄRKUSED. Täieliku torutäitega voolamine

- Manningi karedusteguri kasutamine voolusüsteemi takistuse määramisele on seotud vee omaduste määramatusega. Vee temperatuur määrab vee tiheduse ja dünaamilise molekulaarse viskoossusteguri, mille järgi määratakse kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur. Reynoldsi arvu väärtus sõltub oluliselt kinemaatilise molekulaarsest viskoossustegurist.
- Kareda piirdega torule võib hõrdetakistusteguri määrata Swamee-Jaini hõrdetakistuse valemiga:

$$\lambda = \frac{0,25}{\left(\log_{10}\left(\frac{k_s/d_s}{3,7} + \frac{5,74}{Re^{9/10}}\right)\right)^2},$$

milles  $k_s$  on absoluutkaredus,  $d_s$  on ümartoru sisediameeter ja  $Re$  on ümartoru Reynoldsi arv. Ümartoru Reynoldsi arv  $Re = u d_s / \nu$ , milles  $u$  on voolukiirus ja  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur.

Voolukiiruse võib määrata valemiga  $u = Q/A_e$ , milles  $Q$  on vooluhulk ja  $A_e$  on elavlõige. Swamee-Jaini hõrdetakistuse valem (VALEM (2-42)) kehtib hästi Reynoldsi arvu vahemikus  $Re = (0,05 \dots 1000) \cdot 10^5$ .

- Ümartoru Reynoldsi arvu valemis võib toru sisediameetri ( $d_s$ ) asemel kasutada ka hüdraulilist diameetrit ( $D_h$ ). Täieliku täitumusega ümartorule kehtib seos:

$$D_h = 4 R_h = \frac{4 A_e}{\chi} = 4 \left(\frac{\pi d_s^2}{4}\right) \left(\frac{1}{\pi d_s}\right) = d_s,$$

milles survevoolu elavlõige on  $A_e$  ja märgpiire on  $\chi$ .

- Ühtlase voolamise hõrdepinge survetoru piirdele määratakse valemiga:

$$\tau_0 = \rho g R_h I_h,$$

milles  $\rho$  on vedeliku tihedus,  $g$  on raskuskiirendus,  $R_h$  on hüdrauliline raadius ja  $I_h$  on hüdrauliline lang.

## 20.5 VIITED

20.1 *Väliskanalisisatsioonivõrk. EVS 848:2021.*

20.2 Maastik, A., Haldre, H., Koppel, T. & Paal, L. (1995). *Hüdraulika ja pumbad*. OÜ Greif.

20.3 Tibar, H. (1988). *Vihmavee-, ühisvoolne ja poollahkvoolne kanalisatsioon: õppevahend*. Tallinna Polütehniline Instituut, Sanitaartechnika kateeder.

20.4 Tarand, A., Jaagus, J. & Kallis, A. (2013). *Eesti kliima minevikus ja tänapäeval*. Tartu Ülikooli kirjastus.

20.5 *Vesihuoltoverkkojen suunnittelu. Mitoitus ja suunnittelu. RIL 237-2-2010.*

20.6 Laanearu, J. & Kaur, K. (2018). Two-phase CFD modelling of air-water flow transition in a horizontal circular pipe and comparisons with experimental results. A. S. Tijsseling (toim)., *Pressure Surges 2018: The 13th International Conference on Pressure Surges* (lk 937–948). BHR Group.

20.7 Paal, L., Mölder, H. & Tibar, H. (1981). *Veevarustus ja kanalisatsioon*. Valgus.

# IV TUGEVALT EBAÜHTLANE VOOLAMINE

## 21 ARVUTUSMEETOD. KARAKTERISTIKUTE MEETOD

### 21.1 HÜPERPOOLSET TÜÜPI VÖRRANDID

Hüperpoolset tüüpi 1D võrrandite süsteemi võib teisendada karakteristiklike kujule:

$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + c_{\pm} \frac{\partial}{\partial x} \right] R_{\pm} = \mathcal{F},$	21-1
---	------

milles Riemanni invarianti  $R_{\pm}$  on reaalarvulised suurused piki karakteristiklike jooni:

$\frac{dx}{dt} = c_{\pm}$	21-2
---------------------------	------

tingimusel, et hüdraulilises voolusüsteemis dissipatsioon puudub, st  $\mathcal{F} = 0$ . (VIITED 21.1, 21.2)

### 21.1.1 HÜDRAULILISE LÖÖKLAINE VÖRRANDID

1D hüdroloogi võrrandite süsteem:

$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} = \mathcal{F},$	21-3
---	------

$\frac{\partial h_{rk}}{\partial t} + u \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} + c_{ll}^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$	21-4
---	------

milles  $u$  on voolukiirus,  $h_{rk}$  on rõhukõrgus,  $g$  on raskuskiirendus,  $c_{ll}$  on hüdraulilise lööklaine liikumiskiirus ja  $\mathcal{F}$  on massiühiku hõõrdejõud.

Kasutame järgmist lineaarteisendust 1D hüdroloogi võrranditele:

$DV_1 = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} - \mathcal{F},$	21-5
--	------

$DV_2 = \frac{\partial h_{rk}}{\partial t} + u \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} + \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial u}{\partial y},$	21-6
--	------

$DV_1 + \alpha_{\pm} DV_2 = 0,$	21-7
---------------------------------	------

milles  $\alpha_{\pm}$  on integreerimise parameeter.

$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} - \mathcal{F} + \alpha_{\pm} \left( \frac{\partial h_{rk}}{\partial t} + u \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} + \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$	21-8
---	------

1D hüdroloogi võrrandite karakteristiklik kuju:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} + \alpha_{\pm} \frac{\partial h_{rk}}{\partial t} + \alpha_{\pm} u \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} + \alpha_{\pm} \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial u}{\partial y} = \mathcal{F},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_{\pm} \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_{\pm} \frac{\partial h_{rk}}{\partial t} + \alpha_{\pm} u \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} + g \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} = \mathcal{F},$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_{\pm} \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial}{\partial y} \right) u + \alpha_{\pm} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial y} + \frac{g}{\alpha_{\pm}} \frac{\partial}{\partial y} \right) h_{rk} = \mathcal{F},$$

$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \left[ u + \alpha_{\pm} \frac{c_{ll}^2}{g} \right] \frac{\partial}{\partial y} \right) u + \alpha_{\pm} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \left[ u + \frac{g}{\alpha_{\pm}} \right] \frac{\partial}{\partial y} \right) h_{rk} = \mathcal{F},$	21-9
---	------

milles määrame integreerimisparameetri vastavalt seosele:

$$u + \alpha_{\pm} \frac{c_{ll}^2}{g} = u + \frac{g}{\alpha_{\pm}},$$

$$\alpha_{\pm}^2 = \frac{g^2}{c_{ll}^2},$$

$\alpha_{\pm} = \pm \frac{g}{c_{ll}}.$	21-10
--	-------

→

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + [u \pm c_{ll}] \frac{\partial}{\partial y} \right) u \pm \frac{g}{c_{ll}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + [u \pm c_{ll}] \frac{\partial}{\partial y} \right) h_{rk} = \mathcal{F}$$

Hüdraulilise lööklaine karakteristiklik lainekiirus ja lainefaas on määratud vastavalt

$c_{\pm} = u \pm c_{ll},$	21-11
---------------------------	-------

$R_{\pm} = u \pm \frac{g}{c_u} h_{rk} .$	21-12
--	-------

1D hüdroloogi võrrandite karakteristikliku kuju on

$\left( \frac{\partial}{\partial t} + [u \pm c_u] \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( u \pm \frac{g}{c_u} h_{rk} \right) = \mathcal{F}$	21-13
--	-------

Rõhulise tiheduslaine Riemanni invariandil  $R_{\pm} = u \pm (g/c_u)h_{rk}$  on konstantsed suurused piki karakteristikke jooni:

$\frac{dx}{dt} = u \pm c_u$	21-14
-----------------------------	-------

tingimusel, et hüdraulilises voolusüsteemis dissipatsioon puudub, st  $\mathcal{F} = 0$ .

## 21.1.2 MADALVEELISE VOOLAMISE VÕRRANDID

1D madalvee võrrandite süsteem:

$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = \mathcal{F} ,$	21-15
---	-------

$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial u}{\partial y} = 0 ,$	21-16
---	-------

milles  $u$  on voolukiirus,  $h$  on veepinna kõrgus,  $g$  on raskuskiirendus ja  $\mathcal{F}$  on massiühiku hõõrdejõud. Voolusängi sisepõhi on horisontaalne, st  $h_{vp} = \textit{konstant}$ .

Kasutame järgmist lineaarteisendust 1D madalvee võrranditele

$DV_1 = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} - \mathcal{F} ,$	21-17
--	-------

$DV_2 = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial u}{\partial y} ,$	21-18
--	-------

$DV_1 + \alpha_{\pm} DV_2 = 0 ,$	21-19
----------------------------------	-------

milles  $\alpha_{\pm}$  on integreerimise parameeter.

$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} - \mathcal{F} + \alpha_{\pm} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$	21-20
---	-------

1D paisulaine võrrandite karakteristiklik kuju:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} + \alpha_{\pm} \frac{\partial h}{\partial t} + \alpha_{\pm} u \frac{\partial h}{\partial y} + \alpha_{\pm} h \frac{\partial u}{\partial y} = \mathcal{F},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_{\pm} h \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_{\pm} \frac{\partial h}{\partial t} + \alpha_{\pm} u \frac{\partial h}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = \mathcal{F},$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_{\pm} h \frac{\partial}{\partial y} \right) u + \alpha_{\pm} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial y} + \frac{g}{\alpha_{\pm}} \frac{\partial}{\partial y} \right) h = \mathcal{F},$$

$\left( \frac{\partial}{\partial t} + [u + \alpha_{\pm} h] \frac{\partial}{\partial y} \right) u + \alpha_{\pm} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \left[ u + \frac{g}{\alpha_{\pm}} \right] \frac{\partial}{\partial y} \right) h = \mathcal{F},$	21-21
--	-------

milles määrame integreerimisparameetri vastavalt seosele:

$$u + \alpha_{\pm} h = u + \frac{g}{\alpha_{\pm}},$$

$$\alpha_{\pm}^2 = \frac{g}{h},$$

$\alpha_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{g}{h}}.$	21-22
--	-------

→

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + [u \pm \sqrt{gh}] \frac{\partial}{\partial y} \right) u \pm \sqrt{\frac{g}{h}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + [u \pm \sqrt{gh}] \frac{\partial}{\partial y} \right) h = \mathcal{F}$$

Rõhulise pinnalaine karakteristiklik lainekiirus ja lainefaas madalveele on määratud vastavalt

$c_{\pm} = u \pm \sqrt{gh},$	21-23
------------------------------	-------

$R_{\pm} = u \pm 2\sqrt{gh}.$	21-24
-------------------------------	-------

1D madalvee võrrandite karakteristiklik kuju on

$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm \sqrt{gh}) \frac{\partial}{\partial y} \right] (u \pm 2\sqrt{gh}) = \mathcal{F}.$	21-25
--	-------

Madalveelise pinnalaine Riemanni invarianti  $R_{\pm} = u \pm \sqrt{g h}$  on konstantsed suurused piki karakteristiklike jooni:

$\frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{g h}$	21-26
------------------------------------	-------

tingimusel, et voolusüsteemis dissipatsioon puudub, st  $\mathcal{F} = 0$ .

## 21.2 VOOLUSÜSTEEMI PIIRITINGIMUSED

Hüperpoolset tüüpi 1D võrrandite süsteemi (VALEM (21-1)) laine protsesside piiritingimusi võib valida vastavalt Riemanni invariantide väärtustele.

### 21.2.1 PEEGELDUVATE LAINETE PIIRITINGIMUSED

Peegelduvatele 1D lainetele võib kasutada täieliku peegeldamise tingimusi:

$R_{\pm} = 0$ .	21-27
-----------------	-------

→

Rõhulise tiheduslaine peegeldumine piirdel on määratud hüdraulilise löök-  
laine karakteristikliku laine faasiga (VALEM (21-12)):

$$u \pm \frac{g}{c_{ll}} h_{rk} = 0.$$

Rõhulise pinnalaine peegeldumine piirdel on määratud madalveelise pinna-  
laine karakteristikliku laine faasiga (VALEM (21-24)):

$$u \pm 2 \sqrt{g h} = 0.$$

### 21.2.2 OSALISELT PEEGELDUVATE LAINETE PIIRITINGIMUSED

Peegelduvatele 1D lainetele võib kasutada osalise peegeldamise tingimusi:

$R_{\pm} = \textit{konstant}$ .	21-28
---------------------------------	-------

→

Rõhulise tiheduslaine peegeldumine piirdel on määratud hüdraulilise löök-  
laine karakteristikliku laine faasiga (VALEM (21-12)):



$$u \pm \frac{g}{c_{ll}} h_{rk} = \textit{konstant} .$$

Rõhulise pinnalaine peegeldumine piirdel on määratud madalveelise pinnalaine karakteristikliku lainefaasiga (VALEM (21-24)):

$$u \pm 2 \sqrt{g h} = \textit{konstant} .$$

### 21.2.3 LAINETELE LÄBIPAISTVAD PIIRITINGIMUSED

Tsüklilistele 1D lainetele võib kasutada tingimusi:

$R_{\pm vp} = R_{\pm pp}$	21-29
---------------------------	-------

milles lainekarakteristiku tähistus (*vp*) ja (*pp*) on vastavalt tähenduses vasakpiire ja parempiire.

→

Rõhulise tiheduslaine tsüklilisus piiretel on määratud hüdraulilise lööklaine karakteristikliku lainefaasiga (VALEM (21-12)):

$$u_{vp} \pm \frac{g}{c_{ll}} h_{rkvp} = u_{pp} \pm \frac{g}{c_{ll}} h_{rkpp} .$$

Rõhulise pinnalaine tsüklilisus piiretel on määratud madalveelise pinnalaine karakteristikliku lainefaasiga (VALEM (21-24)):

$$u_{vp} \pm 2 \sqrt{g h_{vp}} = u_{pp} \pm 2 \sqrt{g h_{pp}} .$$

### 21.3 NUMBRILISE ARVUTUSSKEEMI KOONDUVUS

Karakteristikute meetod on seotud vastava hüdraulika ülesande arvutuskeemi koonduvusega (VIIDE 21.3).

1D hüdraulilise lööklaine karakteristikliku võrrandi (VALEM (21-13)) ja 1D madalveeliste pinnalainete karakteristikliku võrrandi (VALEM (21-25)) numbriline integreerimine on arvutuslikult stabiilne kui

$ c_{\pm}  \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$	21-30
--	-------

milles  $c_{\pm}$  on vastavalt hüdroloogi liikumiskiirus torustikus  $c_{\pm} = u \pm c_{ll}$  või madalvee pinnalainete liikumiskiirus avasängis  $c_{\pm} = u \pm \sqrt{g h}$  (ingl. *Courant number*).

**MÄRKUS.** *Vedeliku mudelite diferentsiaalvõrrandite numbrilise integreerimise stabiilsuse tagamisele kasutatakse üldist tingimust, mis eeldab, et numbrilise arvutusskeemi valitud lõplik ajavahemik ei tohi olla nii kestev, et vooluprotsessile iseloomulik laine liiguks üle lõpliku ruumivahemiku. Seda tingimust tuntakse ka kui Courant-Friedrich-Lewy (CFL) tingimust numbriliste võrrandite integreerimisele.*

## 21.4 VIITED

21.1 Chadwick, A., Morfett, J. & Borthwick, M. (2004). *Hydraulics in Civil and Environmental Engineering*. Spon Press.

21.2 Chow, V. T., Maidment, D. R. & Mays, L. W. (1988). *Applied Hydrology*. McGraw-Hill Education.

21.3 Vreugdenhil, C. B. (1994). *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Kluwer Academic Publisher.

## 22 HÜDROLÖÖK TORUSTIKUS

### 22.1 PRAKTIINE OSA. HÜDROLÖÖK VEESÜSTEMIS

#### 22.1.1 EHITIS. SURVETORUSTIK JA ISEVOOLNE TORUSTIK

Voolukiirust survetorus on võimalik reguleerida pumba, sulge- või muu tehnilise seadmega. Siibri ja automaatklapi äkilisel sulgemisel või avamisel muutub voolukiirus sulgeseadme asukohas praktiliselt hetkeliselt. Kui survesüsteemis puudub vedelikule sisepind, nt vee ja õhu vahepind, siis kaasneb voolukiiruse äkilise muutumisega veerõhu äkiline muutumine. Sellist äkilist rõhu suurenemist või vähenemist torustikus nimetatakse hüdroloögiks (VIIDE 22.1, „Hüdraulika ja pumbad“). Kuna siibrite sulgumine toimub tavaliselt aeglaselt, siis võib praktikas kujuneda ohtlikuks olukorraks pumba (nt tsentrifugaalpumba) ja sulgeseadme (nt automaatklapi) kontrollimatu seiskumine elektrikatkestusel. Lisaks ülerõhule võib torustikus esineda ka alarõhk (vaakum), mis võib tekitada vedeliku gaasilist ja aurulist kavitatsiooni. Kui pumba töörratta seiskumisega kaasneb kavitatsioon, võib veesamba pidevus katkeda. Hüdroloök võib esineda rõhulise voolamise puhul nii joogivee torustikus – nagu veevarustuse välisvõrk, kui ka reovee torustikus – nagu survekalisatsioonitõustik. Sademeveekalisatsioonitõustikus võib rõhk ootamatult suureneda ekstreemsetes oludes, kui näiteks valingvihmaga toimub tõustiku hoogne veega täitumine. Sademeveesüsteemis on rõhu ebaloõmulikult kiire muutumise põhjuseks tavaliselt õhk, mis ei saa tõustiku veega täitumisel sellest väljuda või vabalt ümber paikneda. Tõustikku lukustunud õhuosa ruumala muutusega kaasneb tiheduse muutus tekib lihtsamalt kui veesamba tiheduse muutus. Seetõttu võib rõhukõrgus vee ja õhuga täidetud kalisatsioonitõustikus muutuda oluliselt suuremal määral kui veerõhuga määratud veesamba kõrgus. Kalisatsioonitõustik koosneb tõustikest ja kaevudest, kusjuures restluugiga kaevust saab õhk vabalt kalisatsioonitõustikus siseneda ja sealt väljuda, aga umbluugiga kaevud lukustavad õhu tõustikku. Õhuvoõlu väljumist kalisatsioonitõustikus võib takistada ka väikesemõõtmelise avaga restkaev või luugile kogunenud veepadi. Kalisatsioonitõustiku toimimise kontrollimiseks ja hoõdustõõdeks rajatakse tõustikele vastavalt kontroll- ja hoõduskaevud, mis võivad muuta tõustiku ventilatsioonitõustiku tingimusi.

Tõustike projekteerimisel tuleb ette näha abinõud hüdraulilise löõklaine vältimiseks ja leevendamiseks. Selleks tuleb valida optimaalsed voolukiirused, sobilik tõustiku profiil, toru materjal ja liitmikud ning vastavad tehnoseadmed, mis reguleerivad üle- ja alarõhku tõustikus. Hüdroloõgi leevendamiseks kasutatakse sagedusmuunduritega pumbasid, üle- ja alarõhu kaitseklappe ja survepaake.

## 22.1.2 VOOLUREŽIIM. VEETIHEDUSE MUUTUMISEGA MÄÄRATUD RÕHK

Klapi äkilisel sulgemisel täieliku veetäitumusega torustikus muutub voolamise kineetiline energia praktiliselt hetkeliselt potentsiaalseks energiaks, millega kaasneb vedeliku tiheduse järsk suurenemine ja torumaterjali deformatsioon. Kuna vedelikuga täidetud torustik ei ole jäik, siis seiskub klapi sulgemisel voolamine esmalt klapi lähedases vooluristlõikes (elavlõikes), kuid ülejäänud vedelik torustikus jätkab voolamist. Kuna klapi lähedases osas muutuvad korraka toru ristlõige ja vedeliku tihedus, siis muutub selles torustikuosas ka rõhk ning veetiheduse muutusega tekkiv rõhuline ehk hüdrauliline lööklaine liigub veetorustikus edasi ning seiskab järk-järgult vedeliku voolamise ka seal. Torustikus toimuva voolamise kiirusprofiili tõttu toimub sisevoolamine ka seiskunud vedelikus, mille „keskmine“ voolukiirus ehk hüdrauliline voolukiirus on kontrollmahu ulatuses nullväärtusega. Klapi sulgemisel rõhulise veepaagiga töötavas torustikus järgneb rõhu ülerõhufaasile selle alarõhufaas. Veega täidetud torustiku vibratsiooni tõttu esinevad torustikus rõhuenergiakaod ning seepärast hüdrauliline lööklaine sumbub teatud aja jooksul. Survesüsteemis esinevad hüdrauliline otselöök, mille puhul klapi ava on voolamisele täielikult avatud süsteemi käivitamisel või suletud süsteemi peatamisel, ning hüdrauliline kaudlöök, mille puhul osa klapi avast on hüdraulilise lööklaine frondi naastes veel avatud (hüdraulilise lööklainega kaasnevad vahelduvad ala- ja ülerõhufaasid survetorus). Nii hüdraulilise otse- kui ka kaudlöögi kaasnev veesamba vibratsioon on ebaühtlase voolamise (ingl. *unsteady flow*) olukord, mis võib tekkida näiteks pumpade käivitamisel ja seiskumisel, aga ka klappide (siibrite) avamisel ja sulgemisel.

Survesüsteemi modelleerimistarkvaraga on võimalik insenertehnilises arvutuses voolukiiruse ja vedelikutiheduse koosmuutusega kaasnevate rõhulainete (ka tiheduslainete) levikut veevarustuse võrgus lihtsamalt analüüsida. Keerulisem on arvutada veevooluga määratud õhuosa rõhu muutustega kaasnevaid rõhulaineid sademeveevõrgus. Seda mitmel põhjusel, millest üheks peamiseks on turbulentsed segunemine vee ja õhu koosvoolamisel. Arendatud on erinevaid veevarustustorustike dünaamilisi olukordi käsitlevaid numbrilisi arvutuskeeme, millega on võimalik analüüsida hüdraulilise lööklaine amplituudi maksimume ning erinevate hüdrolööki leevendavate tehnoseadmete toimimist hüdraulilistes voolusüsteemides.

## 22.1.3 SISSEJUHATUS ÜLESANDESSE. PÕHIVALEMID

Hüdraulilise lööklaine liikumisel muutuvad voolamise potentsiaalse ja kineetilise energia väärtused torustikus. Hüdrolöök võib tekkida nii survetorustiku klapi sulgemisel kui ka avamisel. Voolava vedeliku tööolukorras muutub kineetiline energia klapi sulgemise hetkel potentsiaalseks energiaks. Põhi- ja lisäülesannetes on

survetoru klapi avamisega tekitatud hüdrauliline lööklaine, kus rõhukõrgusega määratud potentsiaalne energia muutub voolukiirusega määratud kineetiliseks energiaks. Ideaalvedeliku voolamise matemaatilisel lihtsustamisel ei muutu mehaaniline energia siseenergiaks. Realvoolu juhul on kasutatud Rayleigh' hõõrdetakistustegurit hüdraulilise lööklaine viskoosel dissipatsioonis. Hüdroloogi viskoossele dissipatsiooni lihtsustatud mudelite puhul võib kasutada ka Fanningi või Darcy hõõrdetegurit (VIIDE 22.2).

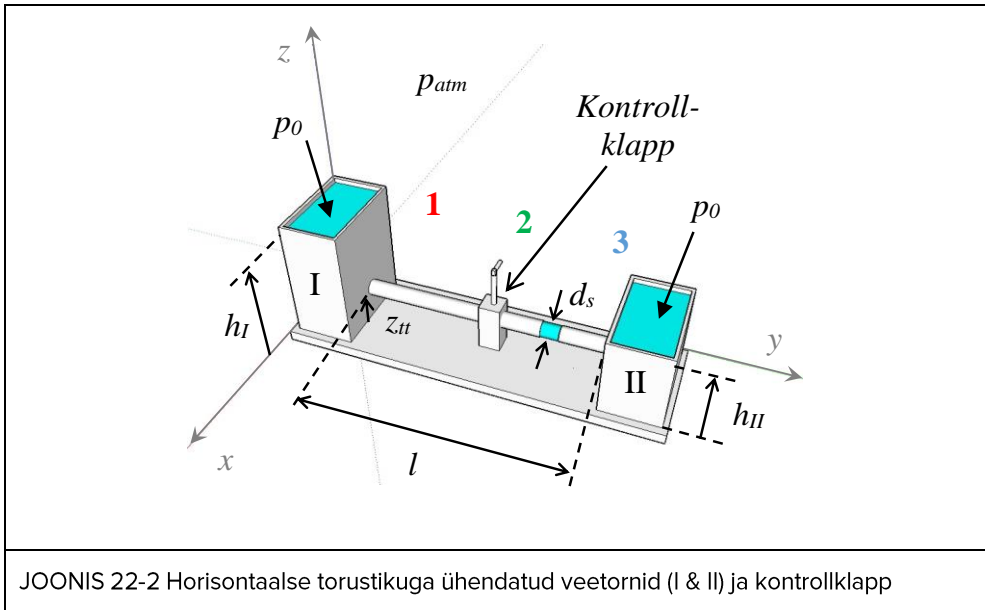


JOONIS 22-1 Hüdroloogiga purunenud torustik, Delft. (Foto: Janez Gale, 2008)

## 22.2 PÕHIÜLESANNE. TIHEDUSLAINEGA MÄÄRATUD RÕHUKÕRGUS

ANTUD. Horisontaalne ümartoru, sisediameetriga  $d_s = 236 \text{ mm}$  ( $= 250 \text{ mm} - 2 \cdot 7 \text{ mm}$ , milles toru diameeter on  $250 \text{ mm}$  ja toruseina paksus on  $7 \text{ mm}$ ) ja pikkusega  $l = 1050 \text{ m}$ , ühendab veetorne, milles vabapinna kõrgused horisontaalpõhjast on vastavalt  $h_I = 25 \text{ m}$  ja  $h_{II} = 15 \text{ m}$ . Torutelje kõrgus horisontaalpõhjast  $z_{tt} = 5 \text{ m}$ . Vee juhtimisele kasutatakse klappi horisontaaltoru keskel. Rõhulises voolusüsteemis on  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  temperatuuriga vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Veetornide vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ . Hüdraulilise lööklaine liikumiskiirus plasttorus  $c_{II} = 350 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata valemitega ja numbrilise arvutusskeemiga maksimaalne ja minimaalne rõhukõrgus hüdraulilises voolusüsteemis, torustikus kontrollklapi praktiliselt hetkelisel avamisel. Selgitada mehaanilise energia muutumist hüdraulilise lööklaine liikumisele torustikus. Arvutada ideaal- ja reaalvedeliku voolukiiruse, ning rõhukõrguse diagrammid veetorni I poolses torustiku osas, koordinaadiga  $y = -0,4 \cdot (l/2)$  (asukohas 1, JOONIS 22-2), torustiku keskel, koordinaadiga  $y = 0$  (asukohas 2, JOONIS 22-2) ja veetorni II poolses torustiku osas, koordinaadiga  $y = 0,4 \cdot (l/2)$  (asukohas 3, JOONIS 22-2).



EELDUSED. Veetorne ühendab pikk muutumatu ristlõikega plastmaterjalist ümartoru. Avatud klapiga olukorras on vee voolamine hüdraulilises voolusüsteemis ühtlane. Vee sisse- ja väljavoolu ning kontrollklapi kohttakistused on oluliselt väiksemad hõõrdetakistusest torus. Ideaalvedeliku matemaatiliselt lihtsustatud juhu puhul rõhulise voolamise hõõrdetakistust mitte arvestada. Numbrilises arvutuskeemis kasutada hüdroloogi võrrandite karakteristliku kuju, mis võimaldab lõplike vahede meetodiga ilmutatud kujul määrata voolukiiruse ja rõhukõrguse muutused vedeliku ja toru koostoimele elastsel deformatsioonil.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Reaalvoolu Bernoulli võrrand, Darcy survekao valem, Fanningi hõõrdetakistustegur, Žukovski rõhu valem, 1D hüdroloogi võrrandid**

### VALEMID

Reaalvoolu Bernoulli võrrand VALEM (2-10) statsionaarsele voolamisele torustikus on

$$z_{sv} + \frac{p_{sv}}{\rho g} + \frac{u_{sv}^2}{2g} = z_{vv} + \frac{p_{vv}}{\rho g} + \frac{u_{vv}^2}{2g} + h_t,$$

milles  $z_{sv}$  on torutelje kõrgus sissevoolus, st veetorni (I) väljavoolutorus, ning  $p_{sv}$  ja  $u_{sv}$  on vastavalt rõhk ja voolukiirus torustiku sissevoolus.  $z_{vv}$  on torutelje kõrgus väljavoolus, st veetorni (II) sissevoolutorus.  $p_{vv}$  ja  $u_{vv}$  on vastavalt rõhk ja voolukiirus torustiku väljavoolus.  $h_t$  on survekadu, mis jagatakse torustikus hõõrdesurvekaoks  $h_l$  ja kohtsurvekaoks  $h_k$ .

Kui rõhulise voolamise kohttakistusi pika torustiku sisse- ja väljavoolus, ning samuti kontroll-klapis, mitte arvestada, siis vabapinna kõrgused veetornides on määratud vastavalt:

$$h_I = z_{sv} + \frac{p_{sv}}{\rho g} + \frac{u_{sv}^2}{2g},$$

$$h_{II} = z_{vv} + \frac{p_{vv}}{\rho g} + \frac{u_{vv}^2}{2g}.$$

Horisontaalses torus on

$$z_{sv} = z_{vv} = z_{tt}.$$

Ilma lekketa, muutumatu ristlõikega torus on ühtlane voolamine, milles:

$$u_{sv} = u_{vv}.$$

Rõhuvahekõrgus

$$\frac{p_{sv}}{\rho g} - \frac{p_{vv}}{\rho g} = \frac{p_{sv} - p_{vv}}{\rho g} = h_{rvk}$$

Reaalvoolu Bernoulli võrrandist (VALEM (2-10)) järeldub seos:

$$h_{rvk} = h_t = h_l,$$

milles  $h_l$  on hõõrdesurvekadu.

Pika torustiku ühtlase voolamise valem on

$$h_l - h_{ll} = \Delta h = h_l.$$

Darcy survekao valem hõõrdesurvekao määramisele on

$$h_l = \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g},$$

milles  $\lambda$  on hõõrdetakistustegur,  $l$  on täistäitumusega torustikus pikkus,  $d_s$  on toru sisediameeter ja  $u$  ( $= u_{sv} = u_{vv}$ ) on voolamise keskkiirus torus. Hõõrdetakistustegur on mõõtühikuta suurus  $[\lambda] = 1$ .

Fanningi hõõrdetakistustegur

$$f = \frac{\lambda}{4}$$

Žukovski rõhk (Zhukovski rõhk) on

$$\Delta p = -\rho c_{ll} \Delta u,$$

milles  $\Delta p$  ja  $\Delta u$  on vastavalt rõhu ja voolukiiruse muudud hüdraulilise lööklaine liikumisele.

Žukovski rõhule vastav rõhukõrgus:

$$\Delta h_{rk} = \left| \frac{\Delta p}{\rho g} \right| = \left| \frac{c_{ll} \Delta u}{g} \right|.$$

1D hüdroloogi võrrandite süsteem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} = \mathcal{F},$$

$$\frac{\partial h_{rk}}{\partial t} + u \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} + \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $h_{rk}$  on rõhukõrgus,  $g$  on raskuskiirendus,  $c_{ll}$  on hüdraulilise lööklaine liikumiskiirus ja  $\mathcal{F}$  on massiühiku hõõrdejõud.



Hüdroloogi võrrandite karakteristikud. Reaalvedeliku olukord ( $\mathcal{F} \neq 0$ )

Nõ lineaarteisendus 1D hüdroloogi võrranditele:

$$DV_1 = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} - \mathcal{F},$$

$$DV_2 = \frac{\partial h_{rk}}{\partial t} + u \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} + \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$DV_1 + \alpha_{\pm} DV_2 = 0,$$

milles  $\alpha_{\pm}$  on integreerimise parameeter.

→

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} - \mathcal{F} + \alpha_{\pm} \left( \frac{\partial h_{rk}}{\partial t} + u \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} + \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

1D hüdroloogi võrrandite karakteristik kuju:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} + \alpha_{\pm} \frac{\partial h_{rk}}{\partial t} + \alpha_{\pm} u \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} + \alpha_{\pm} \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial u}{\partial y} = \mathcal{F},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_{\pm} \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_{\pm} \frac{\partial h_{rk}}{\partial t} + \alpha_{\pm} u \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} + g \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} = \mathcal{F},$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_{\pm} \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial}{\partial y} \right) u + \alpha_{\pm} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial y} + \frac{g}{\alpha_{\pm}} \frac{\partial}{\partial y} \right) h_{rk} = \mathcal{F},$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \left[ u + \alpha_{\pm} \frac{c_{ll}^2}{g} \right] \frac{\partial}{\partial y} \right) u + \alpha_{\pm} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \left[ u + \frac{g}{\alpha_{\pm}} \right] \frac{\partial}{\partial y} \right) h_{rk} = \mathcal{F},$$

milles integreerimisparameeter on määratud vastavalt seosele

$$u + \alpha_{\pm} \frac{c_{ll}^2}{g} = u + \frac{g}{\alpha_{\pm}},$$

$$\alpha_{\pm}^2 = \frac{g^2}{c_{ll}^2},$$

$$\alpha_{\pm} = \pm \frac{g}{c_{ll}}.$$

→

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + [u \pm c_{ll}] \frac{\partial}{\partial y} \right) u \pm \frac{g}{c_{ll}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + [u \pm c_{ll}] \frac{\partial}{\partial y} \right) h_{rk} = \mathcal{F}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + [u \pm c_{ll}] \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( u \pm \frac{g}{c_{ll}} h_{rk} \right) = \mathcal{F}$$

Hüdraulilise lööklaine karakteristiklik laineikiirus ja lainefaas on määratud vastavalt

$$c_{\pm} = u \pm c_{ll} ,$$

$$R_{\pm} = u \pm \frac{g}{c_{ll}} h_{rk} .$$

1D hüdroloogi võrrandite karakteristiklik kuju:

$$\frac{d_{\pm} u}{dt} \pm \frac{g}{c_{ll}} \frac{d_{\pm} h_{rk}}{dt} = \mathcal{F} ,$$

$$\frac{d_{\pm} R_{\pm}}{dt} = \mathcal{F} ,$$

milles on kasutusele võetud järgmine diferentsiaaloperaator

$$\frac{d_{\pm}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + [u \pm c_{ll}] \frac{\partial}{\partial y} .$$

1D hüdroloogi võrrandite karakteristikud on

$$c_{\pm} = u \pm c_{ll} ,$$

milles

$$c_{+} = u + c_{ll} ,$$

$$c_{-} = u - c_{ll}$$

ning

$$R_{\pm} = u \pm \frac{g}{c_{ll}} h_{rk} ,$$

milles

$$R_{+} = u + \frac{g}{c_{ll}} h_{rk} ,$$

$$R_{-} = u - \frac{g}{c_{ll}} h_{rk} .$$

Voolukiiruse võime määrata teisendusega:

$$R_{+} + R_{-} = u + \frac{g}{c_{ll}} h_{rk} + u - \frac{g}{c_{ll}} h_{rk} ,$$

$$u = \frac{1}{2} (R_{+} + R_{-}) .$$

Rõhukõrguse võime määrata teisendusega:

$$R_{+} - R_{-} = u + \frac{g}{c_{ll}} h_{rk} - \left( u - \frac{g}{c_{ll}} h_{rk} \right) ,$$

$$h_{rk} = \frac{c_{ll}}{2g} (R_{+} - R_{-}) .$$

Analüütiline lahendus. Ideaalvedeliku olukord ( $\mathcal{F} = 0$ )

Dekomponeerime voolukiiruse ja rõhukõrguse vastavalt:

$$u = U + u',$$

$$h_{rk} = H_{rk} + h_{rk}',$$

milles hüdraulilise lööklainega kaasnev voolukiirus  $u' = \Delta u$  ja rõhukõrgus  $h_{rk}' = \Delta p / (\rho g)$ . Žukovski rõhk  $\Delta p = -\rho c_{ll} \Delta u$ , milles  $\rho$  on vee tihedus ja  $c_{ll}$  on hüdraulilise lööklaine liikumise kiirus (liikumiskiirus).

Muutujate vahetused ideaalvoolu 1D hüdroloogi võrrandites.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial h_{rk}}{\partial t} + u \frac{\partial h_{rk}}{\partial y} + \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

→

$$\frac{\partial(U + u')}{\partial t} + (U + u') \frac{\partial(U + u')}{\partial y} + g \frac{\partial(H_{rk} + h_{rk}')}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial(H_{rk} + h_{rk}')}{\partial t} + (U + u') \frac{\partial(H_{rk} + h_{rk}')}{\partial y} + \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial(U + u')}{\partial y} = 0$$

Võrrandeid on lihtsustatud tingimustel, et

$$U = \text{konstant},$$

$$|u'| \ll |U|$$

ning

$$H_{rk} = \text{konstant} \left( [H_{rk}] = \left[ \frac{c_{ll}^2}{g} \right] = \text{m} \right),$$

$$|h_{rk}'| \ll |H_{rk}|.$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial y} + g \frac{\partial h_{rk}'}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial h_{rk}'}{\partial t} + U \frac{\partial h_{rk}'}{\partial y} + \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial u'}{\partial y} = 0$$

Torustiku suletud klapi olukorras  $U = 0$ .

→

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + g \frac{\partial h_{rk}'}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial h_{rk}'}{\partial t} + \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial u'}{\partial y} = 0$$

Nö lineariseeritud ideaalvedeliku voolamise 1D hüdroloogi võrrandite lahendus on määratud rõhukõrguse ja voolukiiruse analüütiliste funktsioonidega, mis kirjeldavad muutumatu kujuga hüdraulilise lööklaine liikumist torustikus.

Rõhukõrguse funktsioon on

$$h_{rk}'(y, t) = f_+(y - c_+t) + f_-(y - c_-t).$$

Voolukiiruse funktsioon on

$$u'(y, t) = \frac{g}{c_{ll}} [f_+(y - c_+t) - f_-(y - c_-t)].$$

Hüdraulilise lööklaine liikumiskiirused positiivses ja negatiivses  $y$  –koordinaadi suunas on vastavalt

$$c_+ = +c_{ll},$$

$$c_- = -c_{ll}.$$

*Mehaanilise energia muutus ideaalvedelikule ( $\mathcal{F} = 0$ ) ( $U = 0$ )*

Määrame hüdroloogi diferentsiaalse energiavõrrandi, mis kirjeldab mehaanilise energia muutuse torustikus hüdraulilise lööklaine liikumisele. Kuidas muutub hüdroloogi kineetiline ja potentsiaalne energia veetornidega ühendatud torustiku klapi avamisel? Energia võrrandi koostamine lihtsustatud ( $U = 0$  &  $H_{rk} = \text{konstant}$ ) 1D hüdroloogi võrrandite süsteemile.

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + g \frac{\partial h_{rk}'}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial h_{rk}'}{\partial t} + \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial u'}{\partial y} = 0$$

→

$$DV_3 = \frac{\partial u'}{\partial t} + g \frac{\partial h_{rk}'}{\partial y}$$

$$DV_4 = \frac{\partial h_{rk}'}{\partial t} + \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial u'}{\partial y}$$

$$\frac{c_{ll}^2}{g} u' DV_3 + g h_{rk}' DV_4 = 0$$

→

$$\frac{c_{ll}^2}{g} u' \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{c_{ll}^2}{g} u' g \frac{\partial h_{rk}'}{\partial y} + g h_{rk}' \frac{\partial h_{rk}'}{\partial t} + g h_{rk}' \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial u'}{\partial y} = 0$$

$$\frac{c_{ll}^2}{g} u' \frac{\partial u'}{\partial t} + g h_{rk}' \frac{\partial h_{rk}'}{\partial t} = -\frac{c_{ll}^2}{g} u' g \frac{\partial h_{rk}'}{\partial y} - g h_{rk}' \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial u'}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{c_{ll}^2 u'^2}{2g} + \frac{g h_{rk}'^2}{2} \right) = -c_{ll}^2 \frac{\partial}{\partial y} (u' h_{rk}')$$

Hüdroloogi diferentsiaalse energiavõrrandi integreerimine lõigus  $[-y_0, y_0]$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{y=-y_0}^{y=y_0} \frac{c_{ll}^2 u'^2}{2g} dy + \int_{y=-y_0}^{y=y_0} \frac{g h_{rk}'^2}{2} dy \right) = -c_{ll}^2 (u' h_{rk}') \Big|_{y=-y_0}^{y=y_0}.$$

Hüdroloogi energiavõrrandi integreerimine ajavahemikus  $[0, \tau]$ :

$$\left( \int_{y=-y_0}^{y=y_0} \frac{c_{ll}^2 u'^2}{2g} dy + \int_{y=-y_0}^{y=y_0} \frac{g h_{rk}'^2}{2} dy \right) \Big|_{t=0}^{t=\tau} = - \int_{t=0}^{t=\tau} c_{ll}^2 (u' h_{rk}') \Big|_{y=-y_0}^{y=y_0} dt.$$

Hüdroloogi kineetiline erienergia lõigus  $[-y_0, y_0]$  määratakse igal ajahetkel kui

$$KE' = \int_{y=-y_0}^{y=y_0} \frac{c_{ll}^2 u'^2}{2g} dy.$$

Hüdroloogi potentsiaalne erienergia lõigus  $[-y_0, y_0]$  määratakse igal ajahetkel kui

$$PE' = \int_{y=-y_0}^{y=y_0} \frac{g h_{rk}'^2}{2} dy.$$

*Hüdroloogi energiavõrrand. Ideaalvedeliku olukord ( $\mathcal{F} = 0$ )*

Veetorne ühendava torustikuga suletud klapiga olukorras on rõhukõrguse ja voolukiiruse algväärtused järgmised:

$$h_{rk} = H_{rk} + h_{rk}',$$

milles

$$h_{rk}' = +a \quad (-y_0 < y < 0),$$

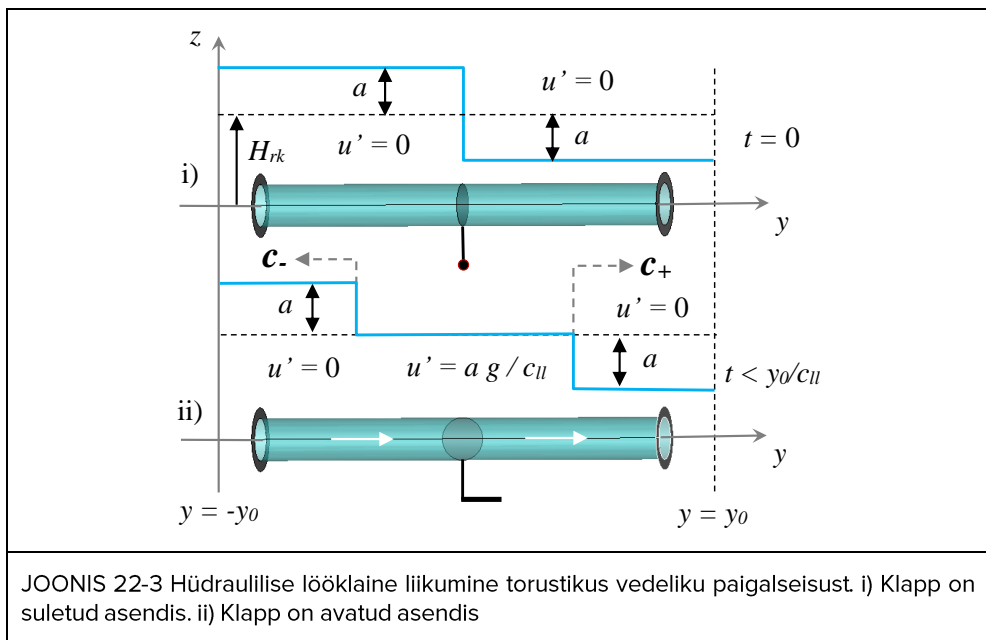
$$h_{rk}' = -a \quad (0 < y < y_0)$$

ning

$$u = 0 + u',$$

milles samuti

$$u' = 0 \quad (-y_0 < y < y_0).$$



**MÄRKUS.** Hüdraulilise lööklaine liikumisega kaasnev rõhukõrgus veetorne ühendavas torustikus peab vastama nõo absoluutsele rõhule, st  $H_{rk} > a$ .  $a = (h_I - h_{II})/2 = 5 \text{ m}$  ja  $H_{rk} = (h_I + h_{II})/2 - z_{tt} = 15 \text{ m}$ .

Torustiku klapi avamisega kaasneb rõhukõrguse muutus:

$$\Delta h_{rk} = -a, \text{ kui } -y_0 < y < 0,$$

$$\Delta h_{rk} = a, \text{ kui } 0 < y < y_0$$

ja voolukiiruse muutus:

$$\Delta u = \frac{a g}{c_{II}},$$

mis on seotud Žukovski rõhuga  $\Delta p = -\rho c_{II} \Delta u$ , ning milles vee tihedus on  $\rho$  ja hüdraulilise lööklaine liikumiskiirus on  $c_{II}$ . Raskuskiirendus  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Hüdraulilise lööklaine amplituud on antud muutumatu rõhukõrgusega torustikus st  $|\Delta h_{rk}| = a$ .

Rõhukõrgus on määratud funktsiooniga

$$h_{rk}'(y, t) = -\frac{1}{2} a [\text{sgn}(y - c_+t) + \text{sgn}(y - c_-t)],$$

milles on kasutatud nõo märgifunktsiooni

$$\text{sgn}(y - c_{\pm}t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } (y - c_{\pm}t) > 0 \\ -1, & \text{kui } (y - c_{\pm}t) < 0 \end{cases}$$

Voolukiirus on määratud funktsiooniga

$$u'(y, t) = \frac{1}{2} a \frac{g}{c_{ll}} [-sgn(y - c_+ t) + sgn(y - c_- t)].$$

Suletud klapiga torustikus pikkusega  $l = 1050$  m on hüdroloogi mehaaniline erienergia ( $ME'$ ) antud vedeliku ja toru koostoime elastse deformatsiooniga määratud energiaga, st hüdroloogi potentsiaalse erienergiaga ( $PE'$ ) lõigus  $[-y_0, y_0] = [-l/2, l/2]$ :

$$ME' = KE' + PE' = 0 + g a^2 y_0 = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (5 \text{ m})^2 \frac{1050 \text{ m}}{2} = 128 756 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-2}.$$

Avatud klapiga torustikus on hüdroloogi mehaaniline erienergia ( $ME'$ ) ajahetkel  $t = y_0/c_{ll}$ , milles  $y_0 = l/2$ , antud hüdraulilise lööklaine liikumisega kaasneva voolamise energiaga, st hüdroloogi kineetilise erienergiaga ( $KE'$ ) lõigus  $[-l/2, l/2]$ :

$$ME' = KE' + PE' = g a^2 y_0 + 0 = 128 756 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-2}.$$

Näiteks ajahetkel  $t = 1$  s, peale torustiku klapi avamist, on hüdraulilise lööklaine liikumisega kaasnevad rõhuastmed liikunud asukohtadesse  $\pm y_{ra} = \pm 350 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 1 \text{ s} = \pm 350 \text{ m}$ , st veetorni I poolse koordinaadiga  $y = -y_{ra} = -350 \text{ m}$  ning veetorni II poolse koordinaadiga  $y = +y_{ra} = +350 \text{ m}$ .

Kineetiline, potentsiaalne ja mehaaniline erienergia on torustikus antud vastavalt

$$KE' = \int_{y=-y_{ra}}^{y=y_{ra}} \frac{c_{ll}^2 u'^2}{2g} dy = \frac{g a^2}{2} \int_{y=-y_{ra}}^{y=y_{ra}} dy = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (5 \text{ m})^2 \cdot 350 \text{ m} = 85 837 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-2},$$

$$\begin{aligned} PE'_1 &= \int_{y=-l/2}^{y=-y_{ra}} \frac{g h_{rk}'^2}{2} dy = \frac{g a^2}{2} \int_{y=-l/2}^{y=-y_{ra}} dy \\ &= \frac{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (5 \text{ m})^2}{2} \cdot \left( -350 \text{ m} + \frac{1050 \text{ m}}{2} \right) = 24 519 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PE'_2 &= \int_{y=y_{ra}}^{y=l/2} \frac{g h_{rk}'^2}{2} dy = \frac{g a^2}{2} \int_{y=y_{ra}}^{y=l/2} dy \\ &= \frac{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (5 \text{ m})^2}{2} \cdot \left( \frac{1050 \text{ m}}{2} - 350 \text{ m} \right) = 24 519 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-2}, \end{aligned}$$

$$ME' = 85 837 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-2} + 2 \cdot 24 519 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-2} = 128 756 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-2}.$$

## MÄRKUSED. Hüdroloogi mehaaniline energia

- Vedeliku ja toru koostoime elastse deformatsiooniga antud energia, st hüdroloogi potentsiaalne energia lõigus  $[-y_0, y_0]$  on määratud tingimustel  $U = 0$  ja  $H_{rk} = \textit{konstant}$ , et selgitada ainult hüdraulilise lööklaine liikumisega kaasnevat mehaanilise energia muutust.
- Hüdraulilise lööklaine liikumisel muutuvad potentsiaalse ja kineetilise energia väärtused torustiku lõigus  $[-y_0, y_0]$ , kusjuures hüdroloogi mehaaniline energia ei muutu ideaalvoolu eeldusele, st  $ME' = KE' + PE' = \textit{konstant}$ .
- Vastavalt termodünaamika esimesele seadusele muutub reaalvedeliku voolamisele osa hüdroloogi energiast ka siseenergiaks, millega kaasnevad vedeliku ja piirde „soojustikud“ muutused. Siseenergia muutusega kaasneb ka survesüsteemi entroopia muutus. Lisaks siseenergia muutusele võib lööklaine energia muutuda ka vedelikus paikneva tahke osakeste (terade) liikumise energiaks, näiteks torustikus kuhjunud sette ümberpaiknemisel suspensiooniga või nõ torupiirdele kleepunud kile lahtimurdmisele. Seetõttu võib veevõrgu klapi praktiliselt hetkelise sulgemisega või avamisega kaasneda ka veekvaliteedi muutus.

Hüdroloogi võrrandite karakteristikud. Ideaalvedeliku olukord ( $\mathcal{F} = 0$ )

Nõ lineaarteisendus 1D hüdroloogi võrranditele:

$$DV_5 = \frac{\partial u'}{\partial t} + g \frac{\partial h_{rk}'}{\partial y},$$

$$DV_6 = \frac{\partial h_{rk}'}{\partial t} + \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial u'}{\partial y},$$

$$DV_5 + \alpha_{\pm} DV_6 = 0,$$

milles  $\alpha_{\pm}$  on integreerimise parameeter.

→

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + g \frac{\partial h_{rk}'}{\partial y} + \alpha_{\pm} \left( \frac{\partial h_{rk}'}{\partial t} + \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial u'}{\partial y} \right) = 0$$

1D hüdroloogi võrrandite karakteristiklik kuju:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + g \frac{\partial h_{rk}'}{\partial y} + \alpha_{\pm} \frac{\partial h_{rk}'}{\partial t} + \alpha_{\pm} \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial u'}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \alpha_{\pm} \frac{c_{ll}^2}{g} \frac{\partial u'}{\partial y} + \alpha_{\pm} \frac{\partial h_{rk}'}{\partial t} + g \frac{\partial h_{rk}'}{\partial y} = 0,$$



$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_{\pm} \frac{c_u^2}{g} \frac{\partial}{\partial y}\right) u' + \alpha_{\pm} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{g}{\alpha_{\pm}} \frac{\partial}{\partial y}\right) h_{rk}' = 0,$$

milles eeldame, et

$$\alpha_{\pm} \frac{c_u^2}{g} = \frac{g}{\alpha_{\pm}},$$

$$\alpha_{\pm}^2 = \frac{g^2}{c_u^2},$$

$$\alpha_{\pm} = \pm \frac{g}{c_u}.$$

→

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \pm c_u \frac{\partial}{\partial y}\right) u' \pm \frac{g}{c_u} \left(\frac{\partial}{\partial t} \pm c_u \frac{\partial}{\partial y}\right) h_{rk}' = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \pm c_u \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(u' \pm \frac{g}{c_u} h_{rk}'\right) = 0$$

Hüdraulilise lööklaine karakteristiklik lainekiirus ja lainefaas on määratud vastavalt

$$c_{\pm} = \pm c_u,$$

$$R'_{\pm} = u' \pm \frac{g}{c_u} h_{rk}'.$$

1D hüdroloogi võrrandite karakteristiklik kuju:

$$\frac{d_{\pm} u'}{dt} \pm \frac{g}{c_u} \frac{d_{\pm} h_{rk}'}{dt} = 0,$$

$$\frac{d_{\pm} R'_{\pm}}{dt} = 0,$$

milles on kasutanud järgmist diferentsiaaloperaatorit

$$\frac{d_{\pm}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \pm c_u \frac{\partial}{\partial y}.$$

Lihtsustatud 1D hüdroloogi võrrandite karakteristikud on

$$c_{\pm} = \pm c_u,$$

milles

$$c_+ = +c_u,$$

$$c_- = -c_u$$

ning

$$R'_{\pm} = u' \pm \frac{g}{c_u} h_{rk}',$$

milles

$$R'_+ = u' + \frac{g}{c_{ll}} h_{rk}' ,$$

$$R'_- = u' - \frac{g}{c_{ll}} h_{rk}' .$$

Voolukiiruse võime määrata teisendusega:

$$R'_+ + R'_- = u' + \frac{g}{c_{ll}} h_{rk}' + u' - \frac{g}{c_{ll}} h_{rk}' ,$$

$$u' = \frac{1}{2} (R'_+ + R'_-) .$$

Rõhukõrguse võime määrata teisendusega:

$$R'_+ - R'_- = u' + \frac{g}{c_{ll}} h_{rk}' - \left( u' - \frac{g}{c_{ll}} h_{rk}' \right) ,$$

$$h_{rk}' = \frac{c_{ll}}{2g} (R'_+ - R'_-) .$$

*Arvutusnäide. Hüdraulilise lööklaine karakteristiklikud valemid*

*Numbriline arvutuskeem. Hüdraulilise lööklaine karakteristikud*

*Numbriline arvutusmeetod. Karakteristikute meetod*

#### VALEMID

1D hüdroloogi osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteemi võib esitada kahe hariliku diferentsiaalvõrrandite paarina:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dR'_+}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = +c_{ll} \end{array} \right. ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dR'_-}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = -c_{ll} \end{array} \right. .$$

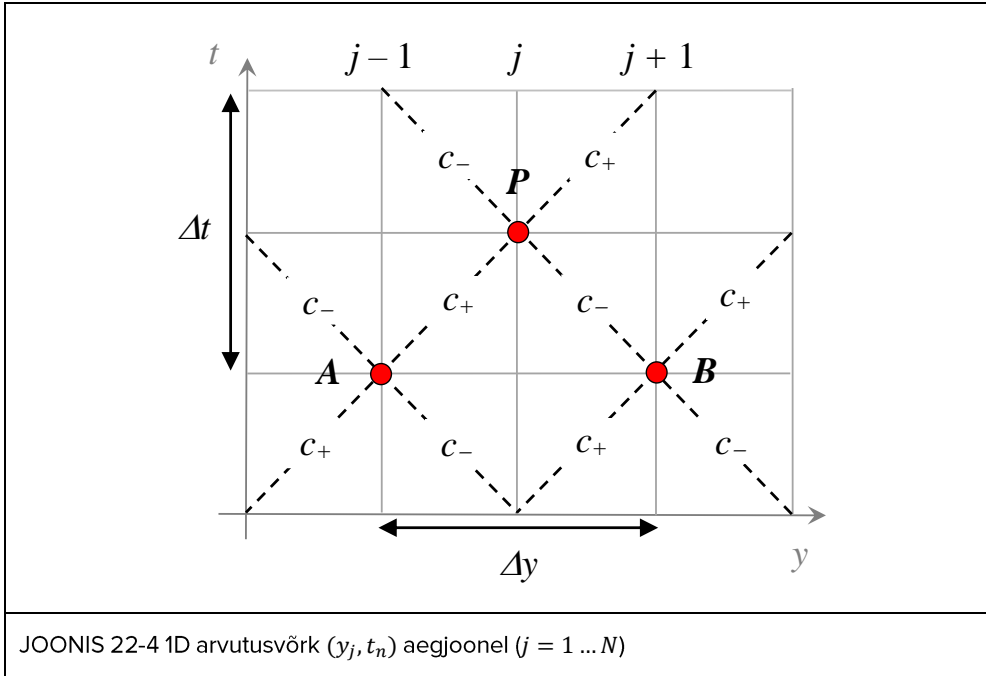
Lõplike vahedega arvutuskeemis jagame torustiku pikkuse paarisarvuliseks  $(N - 1)$  lõplikuks vaheks, mille pikkus on  $\Delta y/2$ . Arvutusvõrgu  $y -$  teljel on paaritu arv punkte  $N$ . Arvutusliku ajavahemiku võib määrata seosega:

$$\Delta t = \frac{\Delta y}{c_{ll}} ,$$

mille arvutuskeemis jagame kaheks integraalseks sammuks:  $0 \rightarrow \Delta t/2$  ja  $\Delta t/2 \rightarrow \Delta t$ .

Numbrilises arvutuskeemis väärtustatakse algtingimustega (voolukiirus ja rõhukõrgus) arvutusvõrgu punktid  $j = 1, 3, 5 \dots N$  ajahetkel  $t = 0$ , mille kaudu arvutatakse voolukiiruse  $u'$  ja rõhukõrguse  $h_{rk}'$  väärtused ajasammul  $0 \rightarrow \Delta t/2$

arvutusvõrgu punktides  $j = 2, 4, \dots, N - 1$ . Seejärel arvutatakse voolukiiruse  $u'$  ja rõhukõrguse  $h_{rk}'$  uued väärtused ajasammul  $\Delta t/2 \rightarrow \Delta t$  arvutusvõrgu punktides  $j = 3, 5, \dots, N - 2$  koos piiritingimustega. Arvutustsükli korratakse vajalik arv  $n$  korda integreerimisperioodil  $\Delta T = n \Delta t$ .



Numbrilise integreerimise teisendused:

$$\frac{dR'_+}{dt} = \frac{du'}{dt} + \frac{g}{c_{ll}} \frac{dh_{rk}'}{dt} = 0 \cdot \frac{c_{ll}}{g},$$

$$\frac{c_{ll}}{g} dR'_+ = \frac{c_{ll}}{g} du' + dh_{rk}' = 0,$$

$$\frac{c_{ll}}{g} \int_{R'_+A}^{R'_+P} dR_+ = \frac{c_{ll}}{g} \int_{u'_A}^{u'_P} du' + \int_{h_{rk}'_A}^{h_{rk}'_P} dh_{rk}' = 0$$

ning

$$\frac{dR'_-}{dt} = \frac{du'}{dt} - \frac{g}{c_{ll}} \frac{dh_{rk}'}{dt} = 0 \cdot \frac{c_{ll}}{g},$$

$$\frac{c_{ll}}{g} dR'_- = \frac{c_{ll}}{g} du' - dh_{rk}' = 0,$$

$$\frac{c_{ll}}{g} \int_{R'_-B}^{R'_-P} dR_- = \frac{c_{ll}}{g} \int_{u'_B}^{u'_P} du' - \int_{h_{rk}'_B}^{h_{rk}'_P} dh_{rk}' = 0.$$

1D arvutusvõrk  $(y_j, t_n)$  numbriliste arvutusvalemite süsteem voolukiiruse määramisele:

$$\frac{c_{ll}}{g}(R'_{+P} - R'_{+A}) = \frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_A) + (h'_{rk'_P} - h'_{rk'_A}) = 0,$$

$$\frac{c_{ll}}{g}(R'_{-P} - R'_{-B}) = \frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_B) - (h'_{rk'_P} - h'_{rk'_B}) = 0.$$

→

$$NV_1 = \frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_A) + (h'_{rk'_P} - h'_{rk'_A})$$

$$NV_2 = \frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_B) - (h'_{rk'_P} - h'_{rk'_B})$$

$$NV_1 + NV_2 = 0$$

→

$$\frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_A) + (h'_{rk'_P} - h'_{rk'_A}) + \frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_B) - (h'_{rk'_P} - h'_{rk'_B}) = 0$$

$$\frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_A) + \frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_B) - h'_{rk'_A} + h'_{rk'_B} = 0$$

$$\frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_A) + \frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_B) - h'_{rk'_A} + h'_{rk'_B} = 0 \cdot \frac{g}{2 c_{ll}}$$

$$\frac{1}{2}(u'_P - u'_A) + \frac{1}{2}(u'_P - u'_B) - \frac{1}{2} \frac{g h'_{rk'_A}}{c_{ll}} + \frac{1}{2} \frac{g h'_{rk'_B}}{c_{ll}} = 0$$

→

$$u'_P = \frac{1}{2} \left( u'_A + \frac{g h'_{rk'_A}}{c_{ll}} + u'_B - \frac{g h'_{rk'_B}}{c_{ll}} \right)$$

$$u'_P = \frac{1}{2} (R'_{+A} + R'_{-B})$$

**MÄRKUS.** Voolukiiruse  $u'_P$  valemite rakendatakse arvutusskeemis nii ajasammule  $0 \rightarrow \Delta t/2$  kui ka  $\Delta t/2 \rightarrow \Delta t$ .

1D arvutusvõrk  $(y_j, t_n)$  numbriliste arvutusvalemite süsteem rõhukõrguse määramisele:

$$\frac{c_{ll}}{g}(R'_{+P} - R'_{+A}) = \frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_A) + (h'_{rk'_P} - h'_{rk'_A}) = 0,$$

$$\frac{c_{ll}}{g}(R'_{-P} - R'_{-B}) = \frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_B) - (h'_{rk'_P} - h'_{rk'_B}) = 0.$$

→

$$NV_1 = \frac{c_{ll}}{g} (u'_P - u'_A) + (h_{rk}'_P - h_{rk}'_A)$$

$$NV_2 = \frac{c_{ll}}{g} (u'_P - u'_B) - (h_{rk}'_P - h_{rk}'_B)$$

$$NV_1 - NV_2 = 0$$

→

$$\frac{c_{ll}}{g} (u'_P - u'_A) + (h_{rk}'_P - h_{rk}'_A) - \frac{c_{ll}}{g} (u'_P - u'_B) + (h_{rk}'_P - h_{rk}'_B) = 0$$

$$\frac{c_{ll}}{g} (u'_P - u'_A) - \frac{c_{ll}}{g} (u'_P - u'_B) + 2 h_{rk}'_P - h_{rk}'_A - h_{rk}'_B = 0$$

$$\frac{c_{ll}}{g} (u'_P - u'_A) - \frac{c_{ll}}{g} (u'_P - u'_B) + 2 h_{rk}'_P - h_{rk}'_A - h_{rk}'_B = 0 \cdot \frac{g}{2 c_{ll}}$$

$$\frac{1}{2} (u'_P - u'_A) - \frac{1}{2} (u'_P - u'_B) + \frac{g h_{rk}'_P}{c_{ll}} - \frac{1}{2} \frac{g h_{rk}'_A}{c_{ll}} - \frac{1}{2} \frac{g h_{rk}'_B}{c_{ll}} = 0$$

→

$$h_{rk}'_P = \frac{c_{ll}}{2g} \left( u'_A + \frac{g h_{rk}'_A}{c_{ll}} - u'_B + \frac{g h_{rk}'_B}{c_{ll}} \right)$$

$$h_{rk}'_P = \frac{c_{ll}}{2g} (R'_{+A} - R'_{-B})$$

**MÄRKUS.** Rõhukõrguse  $h_{rk}'_P$  valemite rakendatakse arvutusskeemis nii ajasammude  $0 \rightarrow \Delta t/2$  kui ka  $\Delta t/2 \rightarrow \Delta t$ .

Arvutusnäide. Hüdraulilise lööklaine dünaamika

Numbriline arvutusskeem. Voolukiirus ja rõhukõrgus

Numbriline arvutusmeetod. Karakteristikute meetod

#### VALEMID

Numbrilises arvutusskeemis väärtustatakse algtingimustega (voolukiirus ja rõhukõrgus) arvutusvõrgu punktid  $j = 1, 3, 5 \dots N$  ajahetkel  $t = 0$ .

Arvutusskeemi integreerimine vastab algebraliste valemite paari väärtustamisele torustiku  $(N - 1)/2$  arvutusvõrgu punktides  $j = 2, 4, \dots N - 1$  ajasammul  $0 \rightarrow \Delta t/2$ :

$$u'_P(t = \Delta t/2) = \frac{1}{2} (R'_{+A}(t = 0) + R'_{-B}(t = 0)),$$

$$h_{rk}'_P(t = \Delta t/2) = \frac{c_{ll}}{2g} (R'_{+A}(t = 0) - R'_{-B}(t = 0)).$$

Algebraalste valemite paari väärtustamine torustiku  $(N - 1)/2 - 1$  arvutusvõrgu punktides  $j = 3, 5, \dots, N - 2$  toimub ajasammul  $\Delta t/2 \rightarrow \Delta t$ :

$$u'_p(t = \Delta t) = \frac{1}{2} (R'_{+A}(t = \Delta t/2) + R'_{-B}(t = \Delta t/2)),$$

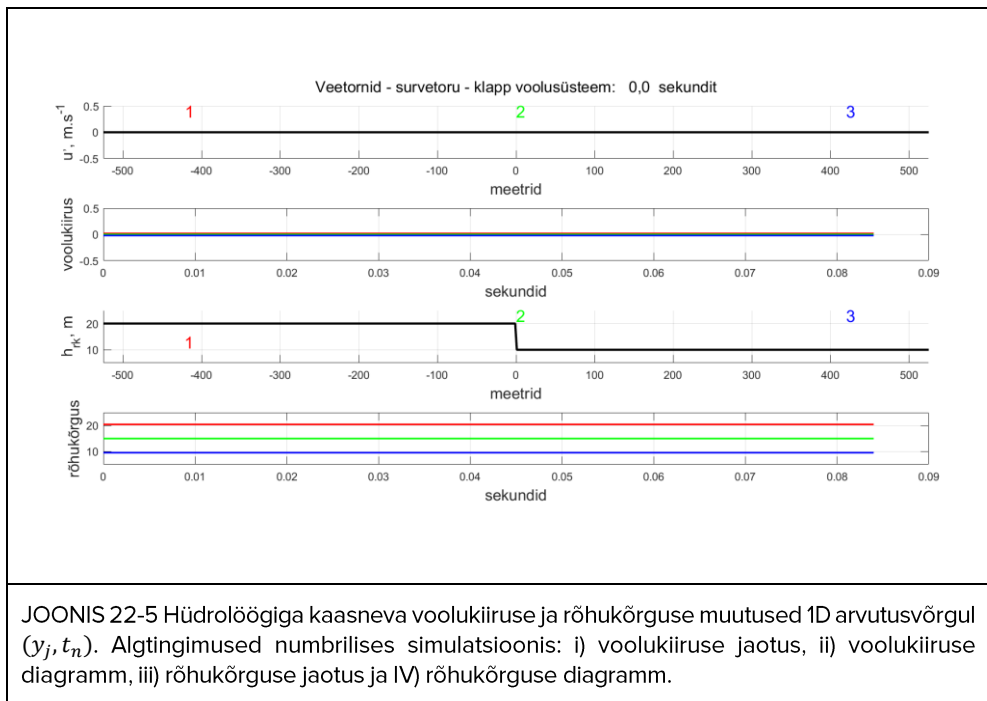
$$h'_{rk\ p}(t = \Delta t) = \frac{c_{II}}{2g} (R'_{+A}(t = \Delta t/2) - R'_{-B}(t = \Delta t/2)).$$

Hüdroloogi piiritingimused tehnosüsteemile määratakse arvutusvõrgu punktides

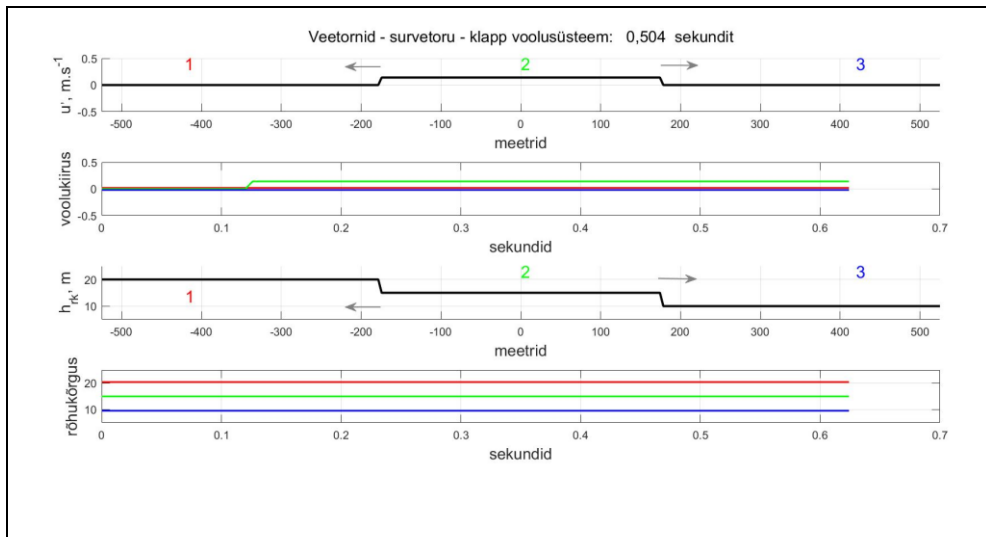
$$j = 1 : h'_{rk\ I} = h_I - z_{tt} \rightarrow u'(t = \Delta t) = R'_{-A}(t = \Delta t/2) + (g/c_{II}) h'_{rk\ I},$$

$$j = N : h'_{rk\ II} = h_{II} - z_{tt} \rightarrow u'(t = \Delta t) = R'_{+B}(t = \Delta t/2) - (g/c_{II}) h'_{rk\ II},$$

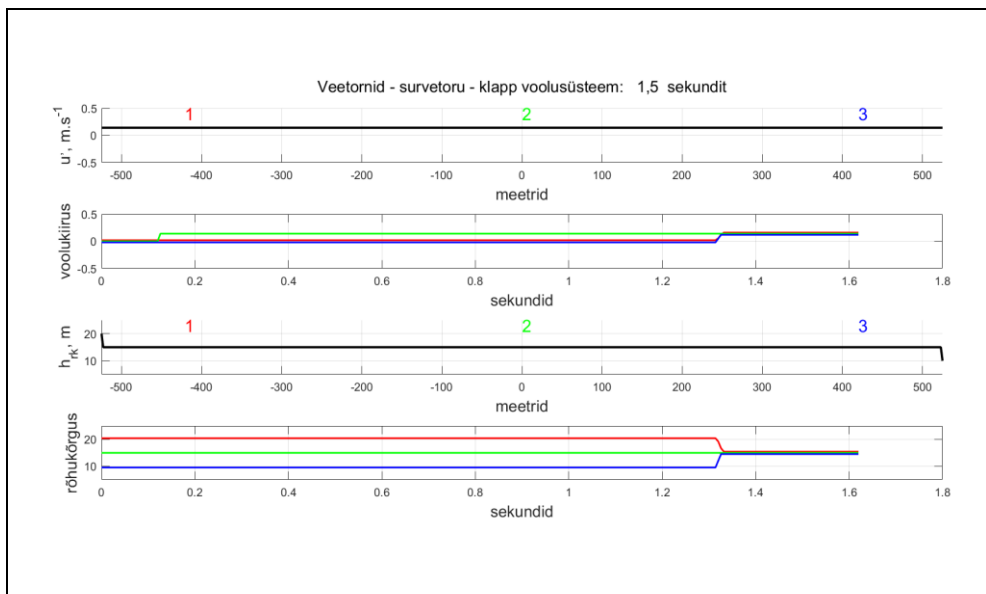
mis vastavad hüdraulilise lööklaine peegeldumisele veetornide ja torustiku ühendustelt.



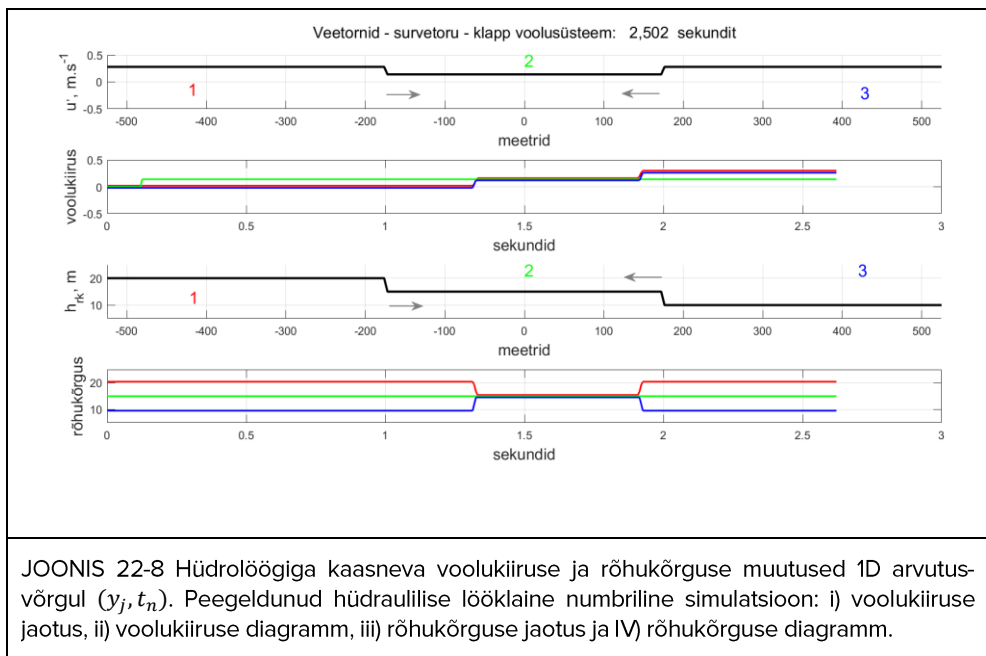
JOONIS 22-5 Hüdroloogiga kaasneva voolukiiruse ja rõhukõrguse muutused 1D arvutusvõrgul  $(y_j, t_n)$ . Algtingimused numbrilises simulatsioonis: i) voolukiiruse jaotus, ii) voolukiiruse diagramm, iii) rõhukõrguse jaotus ja iv) rõhukõrguse diagramm.



JOONIS 22-6 Hüdrolöögiga kaasneva voolukiiruse ja rõhukõrguse muutused 1D arvutusvõrgul ( $y_j, t_n$ ). Hüdraulilise lööklaine numbriline simulatsioon: i) voolukiiruse jaotus, ii) voolukiiruse diagramm, iii) rõhukõrguse jaotus ja iv) rõhukõrguse diagramm.



JOONIS 22-7 Hüdrolöögiga kaasneva voolukiiruse ja rõhukõrguse muutused 1D arvutusvõrgul ( $y_j, t_n$ ). Hüdraulilise lööklaine peegeldumine numbrilises simulatsioonis: i) voolukiiruse jaotus, ii) voolukiiruse diagramm, iii) rõhukõrguse jaotus ja iv) rõhukõrguse diagramm.



Arvutusnäide. Hüdroloogi reaalvedeliku olukord ( $\mathcal{F} \neq 0$ ) ( $U = 0$ )  
 Numbriline arvutusskeem. Voolukiirus ja rõhukõrgus  
 Numbriline arvutusmeetod. Karakteristikute meetod

#### VALEMID

1D hüdroloogi osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteemi võib esitada kahe hariliku diferentsiaalvõrrandite paarina:

$$\begin{cases} \frac{dR'_+}{dt} = \mathcal{F} \\ \frac{dy}{dt} = +c_u \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{dR'_-}{dt} = \mathcal{F} \\ \frac{dy}{dt} = -c_u \end{cases}.$$

Massiühiku hõõrdejõud on määratud kui  $\mathcal{F} = -r u'$ , milles  $r$  on Rayleigh' hõõrde-  
 tegur.

**MÄRKUS.** Hüdroloogi viskoossele dissipatsioonile võib kasutada hõõrde-  
 ruutastmelist funktsiooni (VIIDE 22.2).



Numbrilise integreerimise teisendused:

$$\frac{dR'_+}{dt} = \frac{du'}{dt} + \frac{g}{c_{ll}} \frac{dh_{rk}'}{dt} = -r u' \cdot \frac{c_{ll}}{g},$$

$$\frac{c_{ll}}{g} dR'_+ = \frac{c_{ll}}{g} du' + dh_{rk}' = -\frac{r}{g} u' c_{ll} dt,$$

$$c_{ll} dt = dy,$$

→

$$\frac{c_{ll}}{g} dR'_+ = \frac{c_{ll}}{g} du' + dh_{rk}' = -\frac{r}{g} u' dy,$$

$$\frac{c_{ll}}{g} \int_{R'_{+A}}^{R'_{+P}} dR'_+ = \frac{c_{ll}}{g} \int_{u'_A}^{u'_P} du' + \int_{h_{rk}'_A}^{h_{rk}'_P} dh_{rk}' = -\frac{r}{g} \int_A^P u' dy$$

ja

$$\frac{dR'_-}{dt} = \frac{du'}{dt} - \frac{g}{c_{ll}} \frac{dh_{rk}'}{dt} = -r u' \cdot \frac{c_{ll}}{g},$$

$$\frac{c_{ll}}{g} dR'_- = \frac{c_{ll}}{g} du' - dh_{rk}' = -\frac{r}{g} u' c_{ll} dt,$$

$$c_{ll} dt = dy,$$

→

$$\frac{c_{ll}}{g} dR'_- = \frac{c_{ll}}{g} du' - dh_{rk}' = -\frac{r}{g} u' dy,$$

$$\frac{c_{ll}}{g} \int_{R'_{-B}}^{R'_{-P}} dR'_- = \frac{c_{ll}}{g} \int_{u'_B}^{u'_P} du' - \int_{h_{rk}'_B}^{h_{rk}'_P} dh_{rk}' = -\frac{r}{g} \int_B^P u' dy.$$

Hõrdejõu liikmete integreerimine trapetsreegliga:

$$\frac{r}{g} \int_A^P u' dy \approx \frac{r(u'_P + u'_A)}{2g} \Delta y^*,$$

$$\frac{r}{g} \int_B^P u' dy \approx \frac{r(u'_P + u'_B)}{2g} \Delta y^*.$$

**MÄRKUS.** Hõrdejõu integreeritud liikmeid rakendatakse arvutusskeemis vastavalt ruumisammule  $0 \rightarrow \Delta y/2$  kui ka  $\Delta y/2 \rightarrow \Delta y$ .

1D arvutusvõrk  $(y_j, t_n)$  numbriliste arvutusvalemite süsteem voolukiiruse määramisele:

$$\frac{c_{ll}}{g} (R'_{+P} - R'_{+A}) = \frac{c_{ll}}{g} (u'_P - u'_A) + (h_{rk}'_P - h_{rk}'_A) = -\frac{r(u'_P + u'_A)}{2g} \Delta y^*,$$

$$\frac{c_{ll}}{g} (R'_{-P} - R'_{-B}) = \frac{c_{ll}}{g} (u'_P - u'_B) - (h_{rk}'_P - h_{rk}'_B) = -\frac{r(u'_P + u'_B)}{2g} \Delta y^*.$$

→

$$NV_3 = \frac{c_{ll}}{g} (u'_P - u'_A) + (h_{rk'_P} - h_{rk'_A}) + \frac{r}{g} \frac{(u'_P + u'_A)}{2} \Delta y^*$$

$$NV_4 = \frac{c_{ll}}{g} (u'_P - u'_B) - (h_{rk'_P} - h_{rk'_B}) + \frac{r}{g} \frac{(u'_P + u'_B)}{2} \Delta y^*$$

$$NV_3 + NV_4 = 0$$

→

$$\begin{aligned} \frac{c_{ll}}{g} (u'_P - u'_A) + (h_{rk'_P} - h_{rk'_A}) + \frac{r}{g} \frac{(u'_P + u'_A)}{2} \Delta y^* + \frac{c_{ll}}{g} (u'_P - u'_B) \\ - (h_{rk'_P} - h_{rk'_B}) + \frac{r}{g} \frac{(u'_P + u'_B)}{2} \Delta y^* = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{ll}}{g} (u'_P - u'_A) + (h_{rk'_P} - h_{rk'_A}) + \frac{c_{ll}}{g} (u'_P - u'_B) - (h_{rk'_P} - h_{rk'_B}) + \frac{r}{g} u'_P \Delta y^* \\ + \frac{r}{2g} (u'_A + u'_B) \Delta y^* = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{ll}}{g} (u'_P - u'_A) + \frac{c_{ll}}{g} (u'_P - u'_B) - h_{rk'_A} + h_{rk'_B} + \frac{r}{g} u'_P \Delta y^* + \frac{r}{2g} (u'_A + u'_B) \Delta y^* = 0 \\ \frac{c_{ll}}{g} (u'_P - u'_A) + \frac{c_{ll}}{g} (u'_P - u'_B) - h_{rk'_A} + h_{rk'_B} + \frac{r}{g} u'_P \Delta y^* + \frac{r}{2g} (u'_A + u'_B) \Delta y^* \\ = 0 \cdot \frac{g}{2 c_{ll}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (u'_P - u'_A) + \frac{1}{2} (u'_P - u'_B) - \frac{1}{2} \frac{g h_{rk'_A}}{c_{ll}} + \frac{1}{2} \frac{g h_{rk'_B}}{c_{ll}} + \frac{1}{2} \frac{r}{c_{ll}} u'_P \Delta y^* \\ + \frac{1}{4} \frac{r}{c_{ll}} (u'_A + u'_B) \Delta y^* = 0 \end{aligned}$$

→

$$u'_P + \frac{1}{2} \frac{r}{c_{ll}} u'_P \Delta y^* = \frac{1}{2} \left( u'_A + \frac{g h_{rk'_A}}{c_{ll}} + u'_B - \frac{g h_{rk'_B}}{c_{ll}} - \frac{r}{2 c_{ll}} (u'_A + u'_B) \Delta y^* \right)$$

$$u'_P \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{r}{c_{ll}} \Delta y^* \right) = \frac{1}{2} \left( u'_A + \frac{g h_{rk'_A}}{c_{ll}} + u'_B - \frac{g h_{rk'_B}}{c_{ll}} - \frac{r}{2 c_{ll}} (u'_A + u'_B) \Delta y^* \right)$$

$$u'_P = \frac{1}{2} \left( R'_{+A} + R'_{-B} - \frac{r}{2 c_{ll}} (u'_A + u'_B) \Delta y^* \right) / \left( 1 + \frac{r}{2 c_{ll}} \Delta y^* \right)$$

**MÄRKUS.** Voolukiiruse  $u'_P$  valemite rakendatakse arvutusskeemis nii ajasammule  $0 \rightarrow \Delta t/2$  kui ka  $\Delta t/2 \rightarrow \Delta t$ . Numbrilises arvutusskeemis  $\Delta y^* = c_{ll} \Delta t/2$ .

1D arvutusvõrk  $(y_j, t_n)$  numbriliste arvutusvalemite süsteem rõhukõrguse määramisele:

$$\frac{c_{ll}}{g}(R'_{+P} - R'_{+A}) = \frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_A) + (h_{rk}'_P - h_{rk}'_A) = -\frac{r}{g} \frac{(u'_P + u'_A)}{2} \Delta y^*,$$

$$\frac{c_{ll}}{g}(R'_{-P} - R'_{-B}) = \frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_B) - (h_{rk}'_P - h_{rk}'_B) = -\frac{r}{g} \frac{(u'_P + u'_B)}{2} \Delta y^*.$$

→

$$NV_3 = \frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_A) + (h_{rk}'_P - h_{rk}'_A) + \frac{r}{g} \frac{(u'_P + u'_A)}{2} \Delta y^*$$

$$NV_4 = \frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_B) - (h_{rk}'_P - h_{rk}'_B) + \frac{r}{g} \frac{(u'_P + u'_B)}{2} \Delta y^*$$

$$NV_3 - NV_4 = 0$$

→

$$\begin{aligned} \frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_A) + (h_{rk}'_P - h_{rk}'_A) + \frac{r}{g} \frac{(u'_P + u'_A)}{2} \Delta y^* - \frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_B) \\ + (h_{rk}'_P - h_{rk}'_B) - \frac{r}{g} \frac{(u'_P + u'_B)}{2} \Delta y^* = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_A) + (h_{rk}'_P - h_{rk}'_A) - \frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_B) + (h_{rk}'_P - h_{rk}'_B) \\ + \frac{r}{2g}(u'_A - u'_B) \Delta y^* = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_A) - \frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_B) + 2 h_{rk}'_P - h_{rk}'_A - h_{rk}'_B + \frac{r}{2g}(u'_A - u'_B) \Delta y^* = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_A) - \frac{c_{ll}}{g}(u'_P - u'_B) + 2 h_{rk}'_P - h_{rk}'_A - h_{rk}'_B + \frac{r}{2g}(u'_A - u'_B) \Delta y^* \\ = 0 \cdot \frac{g}{2 c_{ll}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(u'_P - u'_A) - \frac{1}{2}(u'_P - u'_B) + \frac{g h_{rk}'_P}{c_{ll}} - \frac{1}{2} \frac{g h_{rk}'_A}{c_{ll}} - \frac{1}{2} \frac{g h_{rk}'_B}{c_{ll}} \\ + \frac{r}{4 c_{ll}}(u'_A - u'_B) \Delta y^* = 0 \end{aligned}$$

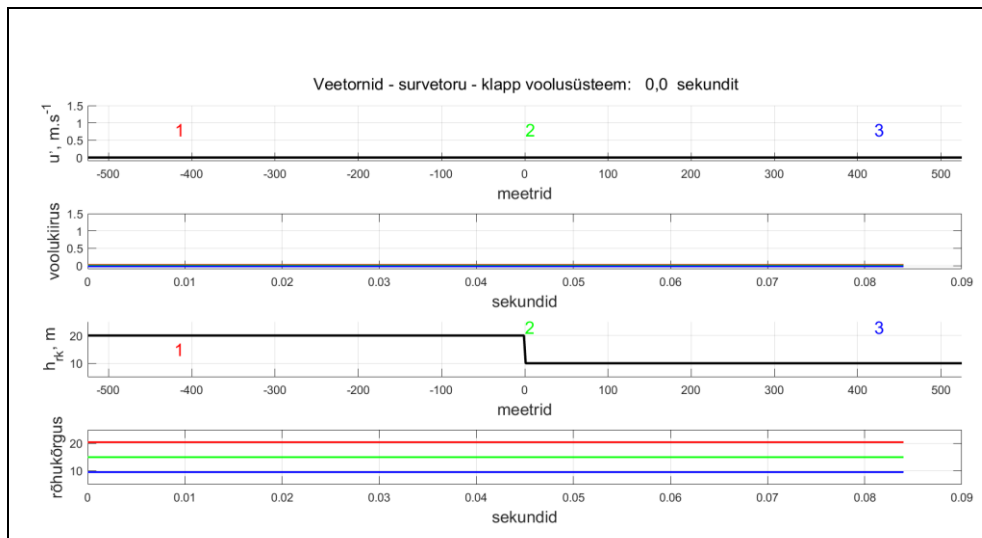
→

$$h_{rk}'_P = \frac{c_{ll}}{2g} \left( u'_A + \frac{g h_{rk}'_A}{c_{ll}} - u'_B + \frac{g h_{rk}'_B}{c_{ll}} - \frac{r}{2c_{ll}}(u'_A - u'_B) \Delta y^* \right)$$

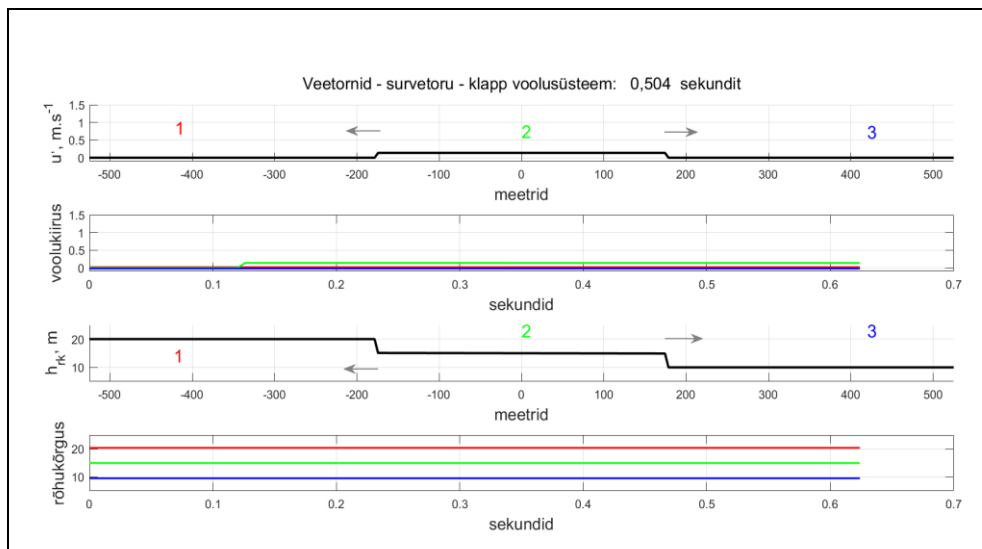
$$h_{rk}'_P = \frac{c_{ll}}{2g} \left( R'_{+A} - R'_{-B} - \frac{r}{2c_{ll}}(u'_A - u'_B) \Delta y^* \right)$$

**MÄRKUS.** Rõhukõrguse  $h_{rkP}'$  valemite rakendatakse arvutusskeemis nii ajasammule  $0 \rightarrow \Delta t/2$  kui ka  $\Delta t/2 \rightarrow \Delta t$ . Numbrilises arvutusskeemis  $\Delta y^* = c_{ll} \Delta t/2$ .

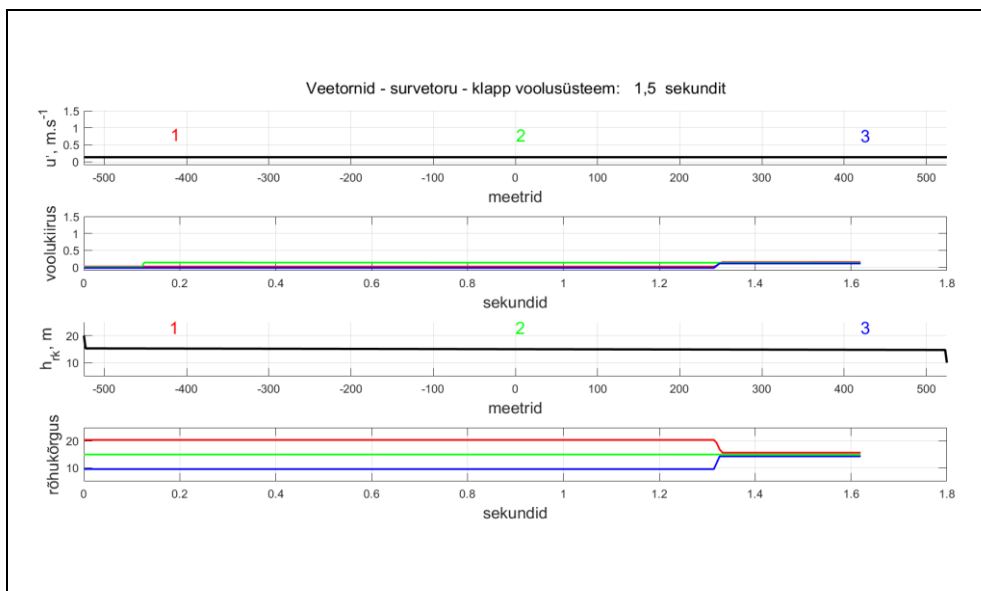
Numbrilise arvutuskeemi voolukiiruse  $u'_P$  ja rõhukõrgus  $h'_{rkP}$  valemid väärtustatakse vastavalt 1D arvutusvõrgu  $(y_j, t_n)$  punktides A, B ja P (JOONIS 22-4).



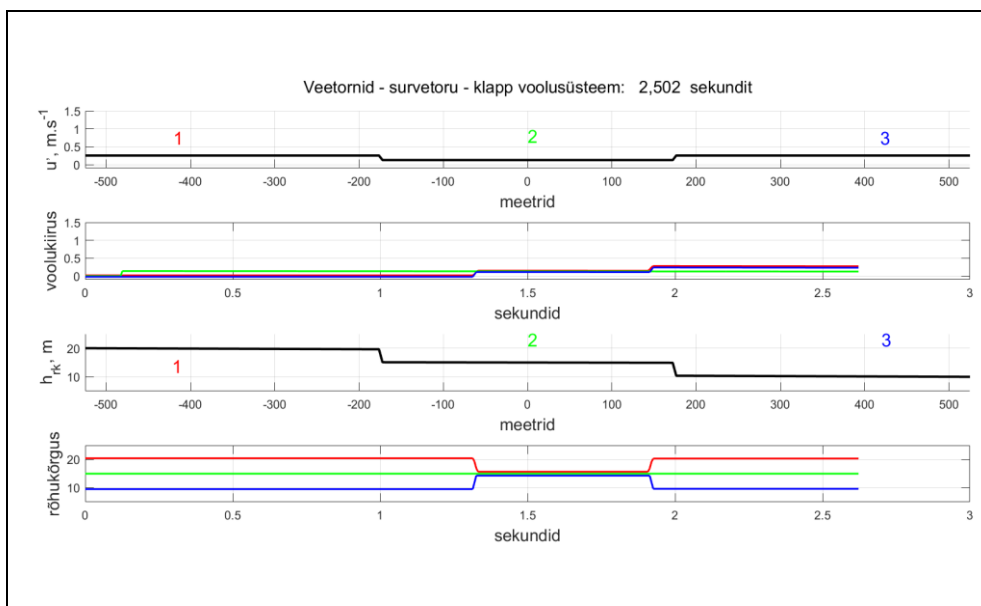
JOONIS 22-9 Hüdrolöögiga kaasneva voolukiiruse ja rõhukõrguse muutused 1D arvutusvõrgul  $(y_j, t_n)$ . Algingimused numbrilises simulatsioonis: i) voolukiiruse jaotus, ii) voolukiiruse diagramm, iii) rõhukõrguse jaotus ja IV) rõhukõrguse diagramm.



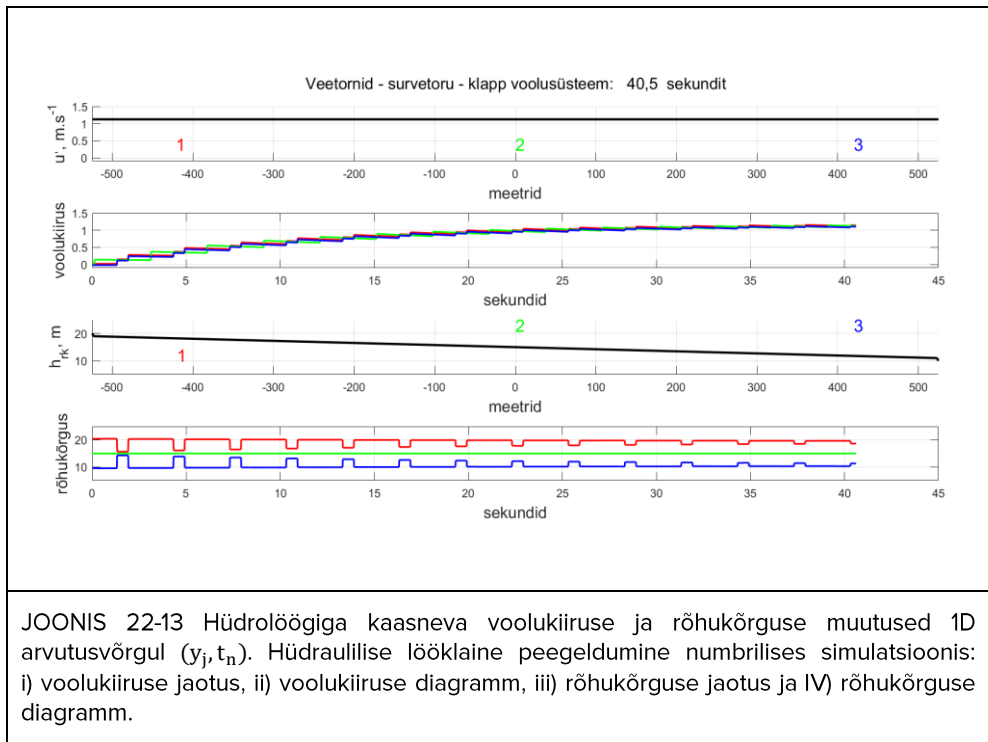
JOONIS 22-10 Hüdrolöögiga kaasneva voolukiiruse ja rõhukõrguse muutused 1D arvutusvõrgul  $(y_j, t_n)$ . Hüdraulilise lööklaine numbriline simulatsioon: i) voolukiiruse jaotus, ii) voolukiiruse diagramm, iii) rõhukõrguse jaotus ja IV) rõhukõrguse diagramm.



JOONIS 22-11 Hüdrolöögiga kaasneva voolukiiruse ja rõhukõrguse muutused 1D arvutusvõrgul ( $y_j, t_n$ ). Hüdraulilise lööklaine peegeldumine numbrilises simulatsioonis: i) voolukiiruse jaotus, ii) voolukiiruse diagramm, iii) rõhukõrguse jaotus ja IV) rõhukõrguse diagramm.



JOONIS 22-12 Hüdrolöögiga kaasneva voolukiiruse ja rõhukõrguse muutused 1D arvutusvõrgul ( $y_j, t_n$ ). Peegeldunud hüdraulilise lööklaine numbriline simulatsioon: i) voolukiiruse jaotus, ii) voolukiiruse diagramm, iii) rõhukõrguse jaotus ja IV) rõhukõrguse diagramm.



Numbrilise arvutustulemuse järgi vastab torustiku rõhukõrguste vahele:

$$h_{rvk} = \frac{p_{sv} - p_{vv}}{\rho g} = \frac{p_{sv}}{\rho g} - \frac{p_{vv}}{\rho g} = 20 \text{ m} - 10 \text{ m} = 10 \text{ m}$$

Reaalvedeliku voolukiirus  $u_{NA} \approx 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  peale numbrilist integreerimist 7,5 s. Vastavalt pika toru ühtlase voolamise põhivalemile:

$$h_I - h_{II} = h_l$$

ja Darcy survekao valemile:

$$h_l = \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g}$$

võib voolukiiruse määrata valemiga:

$$u = \sqrt{\frac{2g d_s}{\lambda l} h_l} = \sqrt{\frac{2g d_s}{\lambda l} (h_I - h_{II})}.$$

ARVUTUS

$$u = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (236/1000) \text{ m}}{0,0306 \cdot 1050 \text{ m}}} (25 \text{ m} - 15 \text{ m}) = 1,2005 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

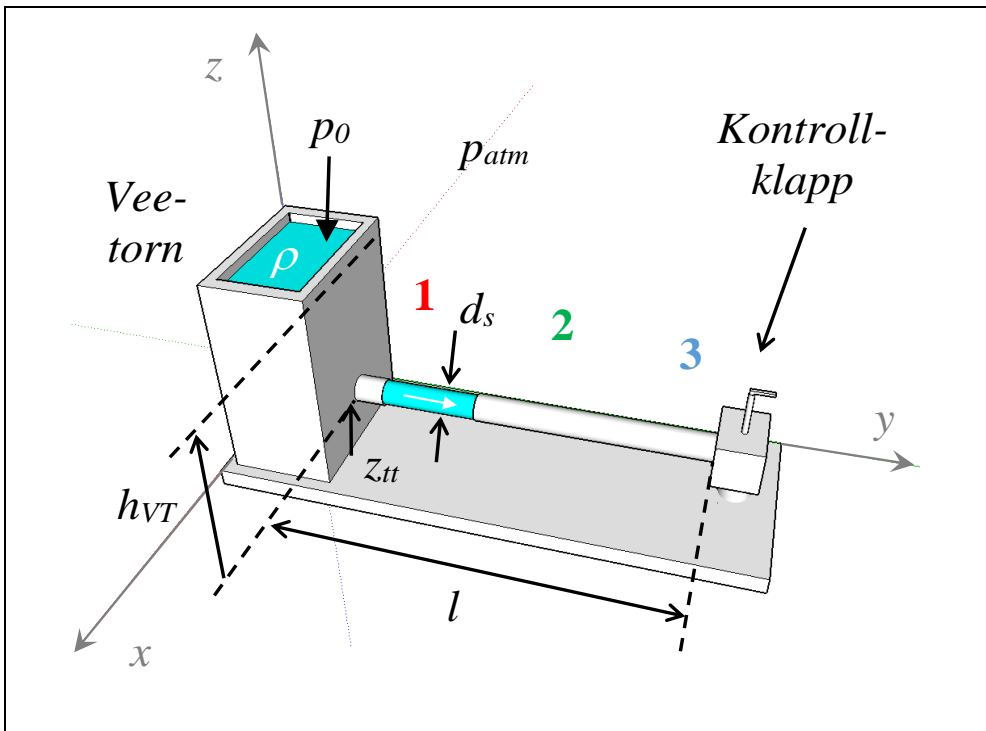
## 22.3 ISESEIVA TÖÖ ÜLESANNE. TIHEDUSLAINEGA MÄÄRATUD RÕHUKÕRGUS

ANTUD. Horisontaalne ümartoru, sisediameetriga  $d_s = 236 \text{ mm}$  ( $= 250 \text{ mm} - 2 \cdot 7 \text{ mm}$ , milles toru diameeter on  $250 \text{ mm}$  ja toruseina paksus on  $7 \text{ mm}$ ) ja pikkusega  $l = 1050 \text{ m}$ , on ühendatud veetorniga, milles vabapinna kõrgus horisontaalpõhjast on  $h_{VT} = 25 \text{ m}$ . Torutelje kõrgus horisontaalpõhjast  $z_{tt} = 5 \text{ m}$ . Vee juhtimisele kasutatakse kontrollklappi horisontaaltoru väljavoolu poolses otsas. Rõhulises voolusüsteemis on  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  temperatuuriga vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Veetornide vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ . Hüdraulilise lööklaine liikumiskiirus plasttorus  $c_{ll} = 350 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### KÜSIMUSED

- Määrata numbrilise arvutusskeemiga maksimaalne ja minimaalne rõhukõrgus hüdraulilises voolusüsteemis torustiku kontrollklapi praktiliselt hetkelisel avamisel;
- Selgitada mehaanilise energia muutumist hüdraulilise lööklaine liikumisel torustikus, mille kaudu juhitakse vett veetornist välja;
- Arvutada ideaalvedeliku voolukiiruse ja rõhukõrguse diagrammid veetorniga ühendatud torustikus, koordinaadiga  $y = -0,4 \cdot (l/2)$  (asukohas 1, JOONIS 24-14), torustiku keskel, koordinaadiga  $y = 0$  (asukohas 2, JOONIS 22-14) ja koordinaadiga  $y = 0,4 \cdot (l/2)$  (asukohas 3, JOONIS 22-14);
- Arvutada reaalvedeliku voolukiiruse ja rõhukõrguse diagrammid veetorniga ühendatud torustikus, koordinaadiga  $y = -0,4 \cdot (l/2)$  (asukohas 1, JOONIS 22-14), torustiku keskel, koordinaadiga  $y = 0$  (asukohas 2, JOONIS 22-14) ja koordinaadiga  $y = 0,4 \cdot (l/2)$  (asukohas 3, JOONIS 22-14);
- Määrata voolukiiruse ja rõhukõrguse diagrammid, milles on kasutatud massiühiku hõõrdejõu määramisele Fanningi ( $f = \lambda/4$ ) või Darcy ( $\lambda$ ) hõõrdeteguri valemit vastavalt:

$$\mathcal{F} = -\frac{f}{2 d_s} u|u| = -\frac{\lambda}{8 d_s} u|u| .$$



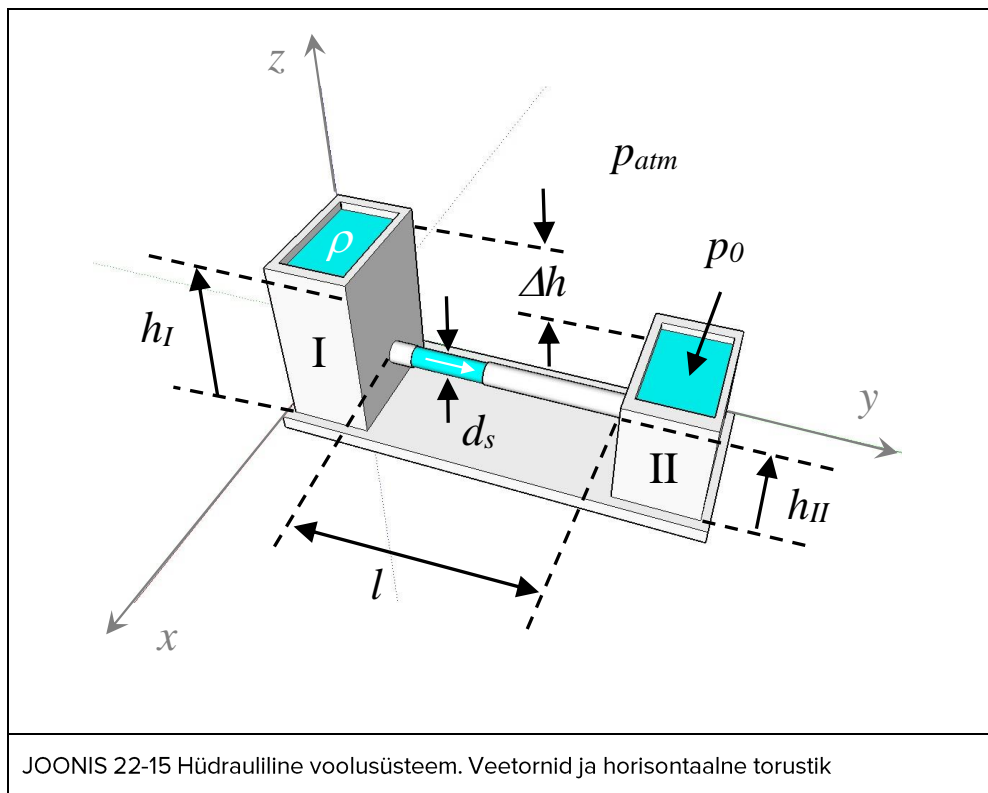
JOONIS 22-14 Veetorniga survesüsteem, horisontaaltoru ja klapp



## 22.4 LISAÜLESANNE. SURVETORUSTIKU HÕORDETAKISTUSTEGUR

ANDMED. Horisontaalne ümartoru, sisediameetriga  $d_s = 236 \text{ mm}$  ( $= 250 \text{ mm} - 2 \cdot 7 \text{ mm}$ , milles toru diameeter on  $250 \text{ mm}$  ja toruseina paksus on  $7 \text{ mm}$ ) ja pikkusega  $l = 1050 \text{ m}$ , ühendab kahte veetorni I ja II, milles vabapinna kõrgused horisontaalpõhjast on erinevad ( $h_I > h_{II}$ ). Vee juhtimisele kasutatakse veetornide I ja II vabapinnakõrguste vahet  $h_I - h_{II} = \Delta h = 10 \text{ m}$ . Valitud vooluhulk  $Q = 52,5 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ . Torumaterjali absoluutkaredus  $k_s = 1,16 \text{ mm}$ . Hüdraulilises voolusüsteemis on  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  temperatuuriga vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Veetornide vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Määrata horisontaalse ümartoru hõordetakistustegur. Arvutada täistäitumusega torustikule valitud vooluhulgale vastav hõordetakistustegur ja Reynoldsi arv.



JOONIS 22-15 Hüdrauliline voolusüsteem. Veetornid ja horisontaalne torustik

EELDUSED. Hüdraulilises voolusüsteemis on vee voolamine statsionaarne, torustikus on voolamine ühtlane. Hüdraulilise voolusüsteemi kohttakistused toru sisse- ja väljavoolule on oluliselt väiksemad hõõrdetakistusest, st hüdraulilise voolusüsteemi survekadu on määratud hõõrdesurvekaoga. Kasutada hõõrdetakistusteguri määramisel Moody diagrammi. Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrandi (VALEM (2-40)) hõõrdetakistusteguri numbrilises arvutusskeemis võib kasutada Newtoni iteratsioonmeetodit.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Reaalvoolu Bernoulli võrrand, Darcy survekao valem, Reynoldsi arv, Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrand, Newtoni iteratsioonmeetodi numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem**

### VALEMID

Reaalvoolu Bernoulli võrrandist (VALEM (2-10)) voolamisele veetornide ja torustiku voolusüsteemile on

$$z_I + \frac{p_I}{\rho g} + \frac{u_I^2}{2g} = z_{II} + \frac{p_{II}}{\rho g} + \frac{u_{II}^2}{2g} + h_t,$$

milles veetorni I lõike kõrgus, rõhk ja voolukiirus on vastavalt  $z_I$ ,  $p_I$  ja  $u_I$ , st veetorni I vabapinnaga määratud lõikes. Veetorni II lõike kõrgus, rõhk ja voolukiirus on vastavalt  $z_{II}$ ,  $p_{II}$  ja  $u_{II}$ , st veetorni II vabapinnaga määratud lõikes.  $h_t$  on survekadu, mis jagatakse hõõrdesurvekaoks  $h_l$  ja kohtsurvekaoks  $h_k$ .

Vabapinna kõrgus veetornides I ja II on vastavalt:

$$z_I = h_I,$$

$$z_{II} = h_{II}.$$

Rõhk veetornide vabapinnal on määratud õhurõhuga:

$$p_I = p_{II} = p_0.$$

Rõhukõrguste vahe ehk rõhuvahekõrgus:

$$\frac{p_I}{\rho g} - \frac{p_{II}}{\rho g} = \frac{p_I - p_{II}}{\rho g} = h_{rvk}.$$

→

$$h_{rvk} = 0$$

Veetorni fikseeritud vabapinnaga voolusüsteemis on voolukiirused

$$u_I = u_{II} = 0.$$

Reaalvoolu Bernoulli võrrandist (VALEM (2-10)) järeldub seos:

$$\Delta h = h_I,$$

milles  $\Delta h = h_I - h_{II}$  on süsteemiosade I ja II vabapinnakõrguste vahe ja  $h_I$  on hõõrdesurvekadu. Oleme eeldanud, et kohtsurvekaod torustiku sissevoolule ( $h_{k_{sv}}$ ) ja väljavoolule ( $h_{k_{vv}}$ ) on oluliselt väiksemad hõõrdesurvekaost.

Darcy survekaod valem hõõrdesurvekaod määramisele on

$$h_I = \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g},$$

milles  $\lambda$  on hõõrdetakistustegur (mõõtühikuta suurus [ $\lambda$ ] = 1),  $l$  on täistäitumusega torustiku pikkus,  $d_s$  on toru sisediameeter ja  $u$  ( $= u_{sv} = u_{vv}$ ) on voolamise keskkiirus torus.

Reynoldsi arv on

$$Re = \frac{u d_s}{\nu},$$

milles  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur.

Vooluhulk on

$$Q = u A_e,$$

milles voolamise ruumkiirus torus on  $u$  ja täistäitumusega ümartoru sisediameetriga määratud ristlõike pindala ehk elavlõige on

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4}.$$

→

$$u = \frac{Q}{A_e}$$

$$u = \frac{4Q}{\pi d_s^2}$$

Erinevate Reynoldsi arvu ja täieliku täitumusega toru piirde suhtelise kareduse väärtustel võib hõõrdetakistusteguri määrata Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrandiga (VALEM (2-40)):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right).$$

Numbriline arvutusskeem. Hõõrdetakistustegur

Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod

ARVUTUSSKEEM (Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrand)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku hõõrdetakistusteguri valem (iteratsioonmeetodi põhivalem):

$$z_{j+1} = z_j - \frac{CW_j - CW}{-\frac{1}{\sqrt{z_j}} \log_{10} \left( \frac{\frac{k_s}{d_s}}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}} \right) + \frac{\frac{k_s}{d_s}}{\left( \frac{\frac{k_s}{d_s}}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}} \right)} \ln(10)},$$

milles  $CW = 1$ .

Arvutusliku Colebrook-White'i hõõrdetakistusteguri funktsiooni valem:

$$CW(z_j) = -2 \sqrt{z_j} \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{z_j}} \right).$$

ARVUTUS. Voolukiirus ja ümartoru Reynoldsi arv

Täieliku täitumusega ümartoru elavlõige

$$A_e = \pi \cdot \frac{(236 / 1000 \text{ m})^2}{4} = 0,04374 \text{ m}^2$$

Voolukiirus ümartorus

$$u = \frac{4 \cdot (52,5/1000) \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{\pi \cdot (236 / 1000 \text{ m})^2} = 1,2002 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ümartoru Reynoldsi arv

$$Re = \frac{1,2116 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot (236 / 1000) \text{ m}}{1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} = 2,1787 \cdot 10^5$$

ARVUTUS. Hõõrdetakistustegur ( $CW = 1$ )

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (1)	0,0100	0,0252	0,0304	0,0306	0,0306	0,0306
$CW_j$ (1)	0,5683	0,9058	0,9962	1,0000	0,9999	1,0000

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (1)	0,0306	0,0306	0,0306	0,0306
$CW_j$ (1)	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000

VASTUSED

$$u = 1,2002 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$Re = 2,1787 \cdot 10^{-5}$$

$$\lambda = 0,030633001492277 \approx 0,031$$

## 22.5 VIITED

22.1 Maastik, A., Haldre, H., Koppel, T. & Paal, L. (1995). *Hüdraulika ja pumbad*. OÜ Greif.

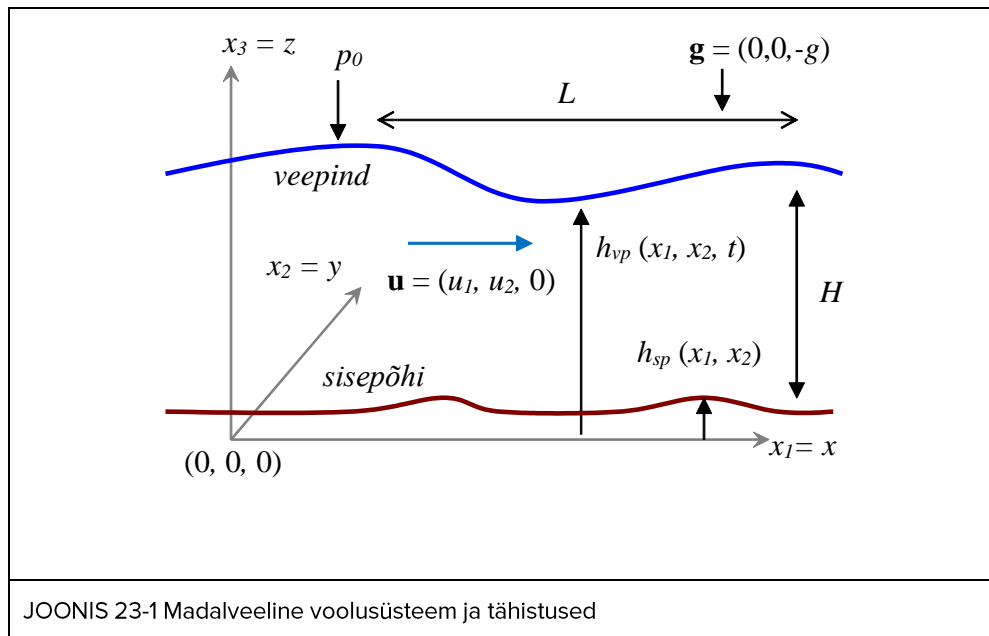
22.2 Wiley, B., Streeter, V. L. & Suo, L. (1993). *Fluid Transients in Systems*. Prentice Hall, Inc.

## 23 TEOORIA. MADALVEE VÖRRANDID

### 23.1 VOOLAMISE LIIKUMISHULGA VÖRRAND

Madalveelise voolamise kirjeldamiseks kasutatakse kokkusurumatu vedeliku mudelit, milles eeldatakse, et vabapinna kõrgus üle veekogu sisepõhja on tunduvalt väiksem voolamise horisontaalsest mastaabist (pikkusmõõtmest), näiteks madalveelise vabapinnalaine pikkusest. Kui homogeenise veekihi vertikaalne iseloomulik mõõde (keskmine kõrgus) on  $H$  ja voolamise horisontaalne iseloomulik mõõde (näiteks vabapinnalaine lainepikkus) on  $L$ , siis madalveelisele voolusüsteemile on täidetud tingimus:

$\delta = \frac{H}{L} \ll 1.$	23-1
-------------------------------	------



Voolamise liikumishulga võrrand, milles ei arvestata erinevatel põhjustel hõõrdejõuga vedelikus ja selle piirdel, on Euleri vektorvõrrand

$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g},$	23-2
--	------

milles voolukiiruse vektor on  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ , vee tihedus on  $\rho$ , Hamiltoni vektoroperaator on  $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$ , termodünaamiline rõhk on  $p$  ja massijõu kiirendusvektor on  $\vec{g} = (0, 0, -g)$ . Raskuskiirendus  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Euleri vektorvõrrandi komponendid:

$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1},$	23-3
--	------

$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2},$	23-4
--	------

$\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} - g.$	23-5
--	------

Kui kasutada madalavee tingimust  $H/L \ll 1$  Euleri vektorvõrrandi komponentide dimensioontaandamiseks, siis võib näidata, et Euleri vektorvõrrandi komponentide liikmed, mis arvestavad vertikaalkiirusega  $u_3$  on suhteliselt väiksemad võrreldes võrrandite teiste liikmetega. Eeldusel, et vee vertikaalkiirus on väike, st  $u_3 \rightarrow 0$ , järeldeb Euleri vektorvõrrandi vertikaalkomponendist (VALEM (23-5)) hüdrostaatika tingimus:

$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} - g.$	23-6
--	------

Järelikult võime madalveelisele voolamisele rõhu määrata valemiga:

$p = -\rho g x_3 + \textit{konstant} (x_1, x_2, t).$	23-7
--	------

Piirtingimusel  $p(x_1, x_2, x_3 = h_{vp}, t) = p_0$  võime rõhu veesambas, st vabapinna all määrata valemiga:

$p = \rho g (h_{vp} - x_3) + p_0.$	23-8
------------------------------------	------

Hüdrostaatilise rõhu valemi järgi sõltub rõhk madalveelises süsteemis lineaarselt vee sügavusest ( $d = -(-h)$ ), ning seetõttu on see sarnane rõhujaotusega tasakaalulises vedelikus. Hüdrostaatiline rõhk garanteerib, et madalveelises süsteemis on horisontaalne voolukiirus praktiliselt sõltumatu vertikaalkoordinaadist. Eeldus, et rõhu madalas vees määrame hüdrostaatika valemiga, lubab Euleri vektorvõrrandi horisontaalkomponendid (VALEM (23-3) ja VALEM (23-4)) määrata diferentsiaalvõrranditega:

$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -g \frac{\partial h_{vp}}{\partial x_1},$	23-9
--	------

$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -g \frac{\partial h_{vp}}{\partial x_2}.$	23-10
--	-------

**MÄRKUS.** *Euleri vektorvõrrandi horisontaalkomponendid lihtsustatakse eeldustel, et  $u_3 = 0$  ja  $p = \rho g (h_{vp} - x_3) + p_0$ , milles  $\rho = \text{konstant}$ ,  $g = \text{konstant}$  ja  $p_0 = \text{konstant}$ .*

Eeldusel, et horisontaalkiiruse komponendid  $(u_1, u_2)$  on vertikaalkoordinaadist  $x_3$  sõltumatud, võime muutumatu tihedusega, st kokkusurumatu vedeliku pidevuse võrrandi:

$\nabla \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0,$	23-11
---	-------

integreerida  $x_3$  – koordinaadi järgi:

$$u_3(x_1, x_2, x_3, t) = -x_3 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + O(x_1, x_2, t).$$

Kinemaatiline piiritingimus veekogu muutumatu kujuga siseõhjala on määratud kui

$$u_3(x_1, x_2, x_3 = h_{sp}, t) = u_1 \frac{\partial h_{sp}}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial h_{sp}}{\partial x_2}.$$

Vertikaalkiiruse võrrandis võib integreerimiskonstandi  $O(x_1, x_2, t)$  määrata valemiga:

$$O(x_1, x_2, t) = u_1 \frac{\partial h_{sp}}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial h_{sp}}{\partial x_2} + h_{sp} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right).$$

Võttes kasutusele kinemaatilise piiritingimuse veesamba muutumatu kujuga siseõhjala, võib vertikaalkiiruse määrata võrrandiga:

$$u_3(x_1, x_2, x_3, t) = (h_{sp} - x_3) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + u_1 \frac{\partial h_{sp}}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial h_{sp}}{\partial x_2}.$$

Kinemaatiline piiritingimus veekogu ajaliselt muutuva kujuga vabapinnale on määratud kui

$$u_3(x_1, x_2, x_3 = h_{vp}, t) = \frac{\partial h_{vp}}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h_{vp}}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial h_{vp}}{\partial x_2}.$$

Madalveelise voolamise pidevuse võrrand on

$\frac{\partial h_{vp}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \{u_1 (h_{vp} - h_{sp})\} + \frac{\partial}{\partial x_2} \{u_2 (h_{vp} - h_{sp})\} = 0.$	23-12
---	-------



Madalveelise voolamise pidevuse võrrandile võetakse kasutusele koguvoolu komponendid:

$$UK_1 = u_1 (h_{vp} - h_{sp}),$$

$$UK_2 = u_2 (h_{vp} - h_{sp}),$$

millest järeldub diferentsiaalvõrrand:

$\frac{\partial h_{vp}}{\partial t} + \frac{\partial UK_1}{\partial x_1} + \frac{\partial UK_2}{\partial x_2} = 0.$	23-13
---	-------

**MÄRKUS.** Madalvee võrrandis kasutatakse muutuvate veesammaste kõrguste muutusi horisontaalse koguvoolu vektori  $\vec{UK} = (UK_1, UK_2)$  muutuse määramisel.

## 23.2 LINEAARISEERITUD 1D MADALVEE VÕRRANDID

1D madalvee võrrandid:

$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h_{vp}}{\partial x},$	23-14
--	-------

$\frac{\partial h_{vp}}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$	23-15
---	-------

milles  $h = h_{vp} - h_{sp}$ ,  $u = u_1$  ja  $x = x_1$ .

Voolusängi horisontaalse sisepõhjaga juhule  $h_{sp} = \text{konstant}$ :

$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x},$	23-16
---	-------

$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$	23-17
--	-------

Voolukiiruse ja vabapinna kõrguse võib dekomponeerida vastavalt:

$$u = U + u',$$

$$h = H + \eta,$$

milles  $u'$  on voolukiiruse „laineline häiritus“ ja hoovuskiirus  $U = \text{konstant}$ , ning  $\eta$  on vabapinna kõrguse „laineline häiritus“ ja keskmine vabapinna kõrgus  $H = \text{konstant}$ .

Muutujate asendused 1D madalvee võrrandites:

$$\frac{\partial}{\partial t}(U + u') + (U + u') \frac{\partial}{\partial x}(U + u') = -g \frac{\partial}{\partial x}(H + \eta),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(H + \eta) + (U + u') \frac{\partial}{\partial x}(H + \eta) + (H + \eta) \frac{\partial}{\partial x_1}(U + u') = 0.$$

Eeldusel, et  $|U = \textit{konstant}| \gg |u'|$  ja  $|H = \textit{konstant}| \gg |\eta|$ , järelduvad nõ lineariseeritud 1D madalvee voolamise liikumishulga ja pidevuse võrrandid vastavalt:

$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x},$	23-18
--	-------

$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} + H \frac{\partial u'}{\partial x} = 0.$	23-19
---	-------

Lineariseeritud 1D madalvee võrranditele on olemas üldlahend, milles vabapinna „lainelise häirituse“ funktsioon on

$\eta(x, t) = f_+(x - c_+t) + f_-(x - c_-t) = \eta_+(x, t) + \eta_-(x, t),$	23-20
---	-------

ning voolukiiruse „lainelise häirituse“ funktsioon on

$u'(x, t) = \sqrt{\frac{g}{H}} [f_+(x - c_+t) - f_-(x - c_-t)] = \sqrt{\frac{g}{H}} [\eta_+(x, t) - \eta_-(x, t)].$	23-21
---	-------

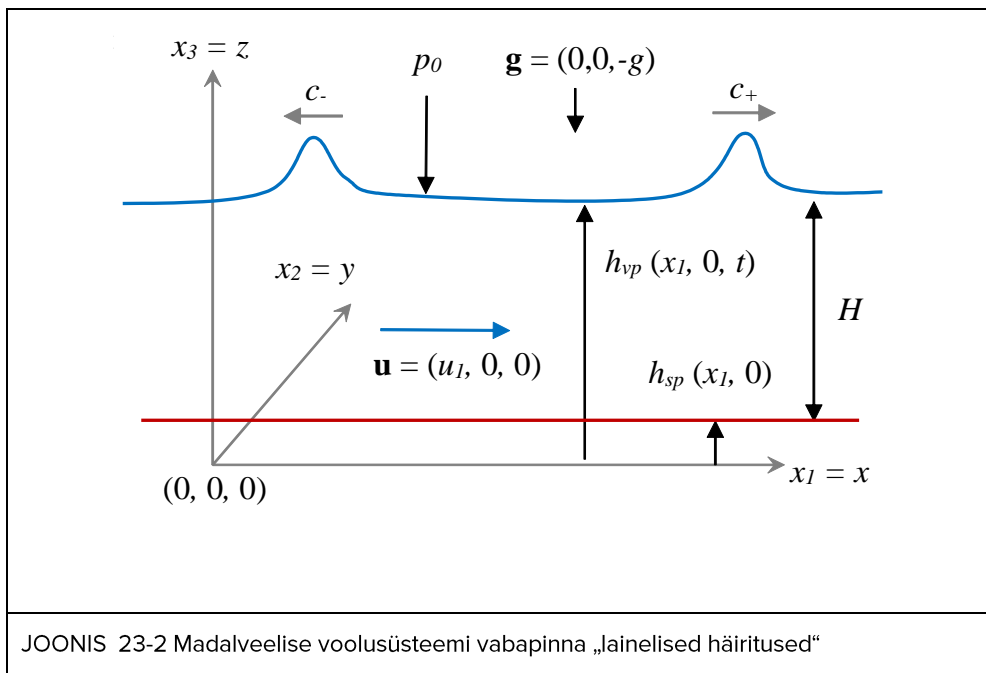
Vabapinnalaine liikumiskiirus horisontaalse sisepõhjaga voolusängi positiivses ja negatiivses  $x$  –koordinaadi suunas on vastavalt:

$$c_{\pm} = U + \sqrt{gH},$$

ehk

$$c_+ = U + \sqrt{gH},$$

$$c_- = U - \sqrt{gH}.$$



### 23.3 1D PINNALAINE VÖRRANDID

Negatiivses  $x$  – koordinaadi suunas liikuva madalveelise laine vabapinna kõrguse „lainelise häirituse“ funktsioon (VALEM (23-20)) on

$$\eta_-(x, t) = f_-(x - c_-t),$$

ning voolukiiruse „lainelise häirituse“ funktsioon (VALEM (23-21)) on

$$u'_-(x, t) = -\sqrt{\frac{g}{H}} f_-(x - c_-t) = -\sqrt{\frac{g}{H}} \eta_-(x, t).$$

Kui asendada voolukiiruse „lainelise häirituse“ muutuja  $u'_-(x, t)$  lineariseeritud 1D madalvee voolamise liikumishulga võrrandis (VALEM (23-18)):

$$\frac{\partial u'_-}{\partial t} + U \frac{\partial u'_-}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta_-}{\partial x}$$

→

$$-\sqrt{\frac{g}{H}} \frac{\partial \eta_-}{\partial t} - U \sqrt{\frac{g}{H}} \frac{\partial \eta_-}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta_-}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \eta_-}{\partial t} + U \frac{\partial \eta_-}{\partial x} = \sqrt{gH} \frac{\partial \eta_-}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \eta_-}{\partial t} + (U - \sqrt{gH}) \frac{\partial \eta_-}{\partial x} = 0,$$

ning diferentseerides tulemuse  $\partial/\partial x$  järg, siis järeldub 2-järku osatuletistega diferentsiaalvõrrand:

$\frac{\partial^2 \eta_-}{\partial t \partial x} + (U - \sqrt{gH}) \frac{\partial^2 \eta_-}{\partial x^2} = 0.$	23-22
---	-------

Kui asendada voolukiiruse „lainelise häirituse“ muutuja  $u'_-(x, t)$  lineariseeritud 1D madalvee pidevuse võrrandis (VALEM (23-19)):

$$\frac{\partial \eta_-}{\partial t} + U \frac{\partial \eta_-}{\partial x} + H \frac{\partial u'_-}{\partial x} = 0,$$

→

$$\frac{\partial \eta_-}{\partial t} + U \frac{\partial \eta_-}{\partial x} - H \sqrt{\frac{g}{H}} \frac{\partial \eta_-}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta_-}{\partial t} + U \frac{\partial \eta_-}{\partial x} - \sqrt{gH} \frac{\partial \eta_-}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta_-}{\partial t} + (U - \sqrt{gH}) \frac{\partial \eta_-}{\partial x} = 0,$$

ning diferentseerides tulemuse  $\partial/\partial t$  järg, siis järeldub 2-järku osatuletistega diferentsiaalvõrrand:

$\frac{\partial^2 \eta_-}{\partial t^2} + (U - \sqrt{gH}) \frac{\partial^2 \eta_-}{\partial x \partial t} = 0.$	23-23
---	-------

Elimineerides segatuletise liikme  $\partial^2/\partial t \partial x$  lineariseeritud 1D madalvee voolamise liikumishulga võrrandis (VALEM (23-22)) ja pidevuse võrrandis (VALEM (23-23)), järeldub hüperboolset tüüpi võrrand, mis on negatiivses  $x$  – koordinaadi suunas liikuva madalveelise vabapinnalaine võrrand:

$\frac{\partial^2 \eta_-}{\partial t^2} - (U - \sqrt{gH})^2 \frac{\partial^2 \eta_-}{\partial x^2} = 0$	23-24
---	-------

→

$$\frac{\partial^2 \eta_-}{\partial t^2} - c_-^2 \frac{\partial^2 \eta_-}{\partial x^2} = 0,$$

milles

$$c_- = U - \sqrt{gH}.$$

Positiivses  $x$  – koordinaadi suunas liikuva madalveelise laine vabapinna kõrguse „lainelise häirituse“ funktsioon (VALEM (23-20)) on

$$\eta_+(x, t) = f_+(x - c_+ t),$$

ning voolukiiruse „lainelise häirituse“ funktsioon (VALEM (23-21)) on

$$u'_+(x, t) = +\sqrt{\frac{g}{H}} f_+(x - c_+ t) = +\sqrt{\frac{g}{H}} \eta_+(x, t).$$

Kui asendada voolukiiruse „lainelise häirituse“ muutuja  $u'_+(x, t)$  lineariseeritud 1D madalvee voolamise liikumishulga võrrandis (VALEM (23-18)):

$$\frac{\partial u'_+}{\partial t} + U \frac{\partial u'_+}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta_+}{\partial x},$$

→

$$+ \sqrt{\frac{g}{H}} \frac{\partial \eta_+}{\partial t} + U \sqrt{\frac{g}{H}} \frac{\partial \eta_+}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta_+}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \eta_+}{\partial t} + U \frac{\partial \eta_+}{\partial x} = -\sqrt{gH} \frac{\partial \eta_+}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \eta_+}{\partial t} + (U + \sqrt{gH}) \frac{\partial \eta_+}{\partial x} = 0,$$

ning diferentseerides tulemuse  $\partial/\partial x$  järg, siis järeldub 2-järku osatuletistega diferentsiaalvõrrand:

$\frac{\partial^2 \eta_+}{\partial t \partial x} + (U + \sqrt{gH}) \frac{\partial^2 \eta_+}{\partial x^2} = 0.$	23-25
---	-------

Kui asendada voolukiiruse „lainelise häirituse“ muutuja  $u'_+(x, t)$  lineariseeritud 1D madalvee pidevuse võrrandis (VALEM (23-19)):

$$\frac{\partial \eta_+}{\partial t} + U \frac{\partial \eta_+}{\partial x} + H \frac{\partial u'_+}{\partial x} = 0,$$

→

$$\frac{\partial \eta_+}{\partial t} + U \frac{\partial \eta_+}{\partial x} + H \sqrt{\frac{g}{H}} \frac{\partial \eta_+}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta_+}{\partial t} + U \frac{\partial \eta_+}{\partial x} + \sqrt{gH} \frac{\partial \eta_+}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta_+}{\partial t} + (U + \sqrt{gH}) \frac{\partial \eta_+}{\partial x} = 0,$$

ning diferentseerides tulemuse  $\partial/\partial t$  järg, siis järeldub 2-järku osatuletistega diferentsiaalvõrrand:

$\frac{\partial^2 \eta_+}{\partial t^2} + (U + \sqrt{gH}) \frac{\partial^2 \eta_+}{\partial x \partial t} = 0.$	23-26
---	-------

Elimineerides segatuletise liikme  $\partial^2/\partial t \partial x$  lineariseeritud 1D madalvee voolamise liikumishulga võrrandis (VALEM (23-25)) ja pidevuse võrrandis (VALEM (23-26)), järeldub hüperboolset tüüpi võrrand, mis on positiivses  $x$  – koordinaadi suunas liikuva madalveelise vabapinnalaine võrrand:

$\frac{\partial^2 \eta_+}{\partial t^2} + (U + \sqrt{gH})^2 \frac{\partial^2 \eta_+}{\partial x^2} = 0$	23-27
---	-------

→

$$\frac{\partial^2 \eta_+}{\partial t^2} + c_+^2 \frac{\partial^2 \eta_+}{\partial x^2} = 0,$$

milles

$$c_+ = U + \sqrt{gH}.$$

Lineariseeritud 1D madalvee voolamise liikumishulga ja pidevuse võrrandite süsteemid negatiivses ja positiivses  $x$  – koordinaadi suunas liikuva madalveelise vabapinnalainele, (VALEM (23-24) ja VALEM (23-27)) teiseneb hüperboolset tüüpi võrrandiks, mis on madalveelise vabapinnalaine võrrand:

$\frac{\partial^2 \eta_{\pm}}{\partial t^2} \pm (U \pm \sqrt{gH})^2 \frac{\partial^2 \eta_{\pm}}{\partial x^2} = 0$	23-28
---	-------

→

$$\frac{\partial^2 \eta_{\pm}}{\partial t^2} \pm c_{\pm}^2 \frac{\partial^2 \eta_{\pm}}{\partial x^2} = 0,$$

milles

$$c_{\pm} = U \pm \sqrt{gH}.$$

## 23.4 2D KOGUVOOLU MODELLEERIMINE

Koguvoolu komponendid määratakse vastavalt kui vertikaalselt integreeritud voolukiiruse komponendid:

$$UK_1 = \int_{h_{sp}}^{h_{vp}} u_1 dx_3,$$

$$UK_2 = \int_{h_{sp}}^{h_{vp}} u_2 dx_3.$$

2D koguvoolu diferentsiaalvõrrandite süsteem veekogu muutumatu kujuga sisepõhjale on

$$\frac{\partial UK_1}{\partial t} = -gh \frac{\partial h_{vp}}{\partial x_1} + (\tau_{vp} - \tau_{sp})_1,$$

$$\frac{\partial UK_2}{\partial t} = -gh \frac{\partial h_{vp}}{\partial x_2} + (\tau_{vp} - \tau_{sp})_2,$$

$$\frac{\partial h_{vp}}{\partial t} + \frac{\partial UK_1}{\partial x_1} + \frac{\partial UK_2}{\partial x_2} = 0,$$

milles  $h = h_{vp} - h_{sp}$ , raskuskiirendus on  $g$ , ning hõrdepinge vee- ja õhukihi sisepinnal on  $\tau_{vp}$ , ja hõrdepinge veekogu sisepõhjale on  $\tau_{sp}$ . Kui võtta kasutusele veesamba kõrgusega  $h$  määratud madalvee kiirus:

$$c = \sqrt{gh},$$

siis võib 2D koguvoolu diferentsiaalvõrrandite süsteemi esitada kui

$\frac{\partial UK_1}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial h_{vp}}{\partial x_1} + (\tau_{vp} - \tau_{sp})_1,$	23-29
---	-------

$\frac{\partial UK_2}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial h_{vp}}{\partial x_2} + (\tau_{vp} - \tau_{sp})_2,$	23-30
---	-------

$\frac{\partial h_{vp}}{\partial t} + \frac{\partial UK_1}{\partial x_1} + \frac{\partial UK_2}{\partial x_2} = 0.$	23-31
---	-------

Hõrdepinged koguvoolu võrrandites võib parameetriseerida nii Rayleigh' valemiga:

$$\tau_1 = r UK_1,$$

$$\tau_2 = r UK_2,$$

kui ka Fanningi valemiga:

$$\tau_1 = \frac{f}{2h} UK_1 |UK_1|,$$

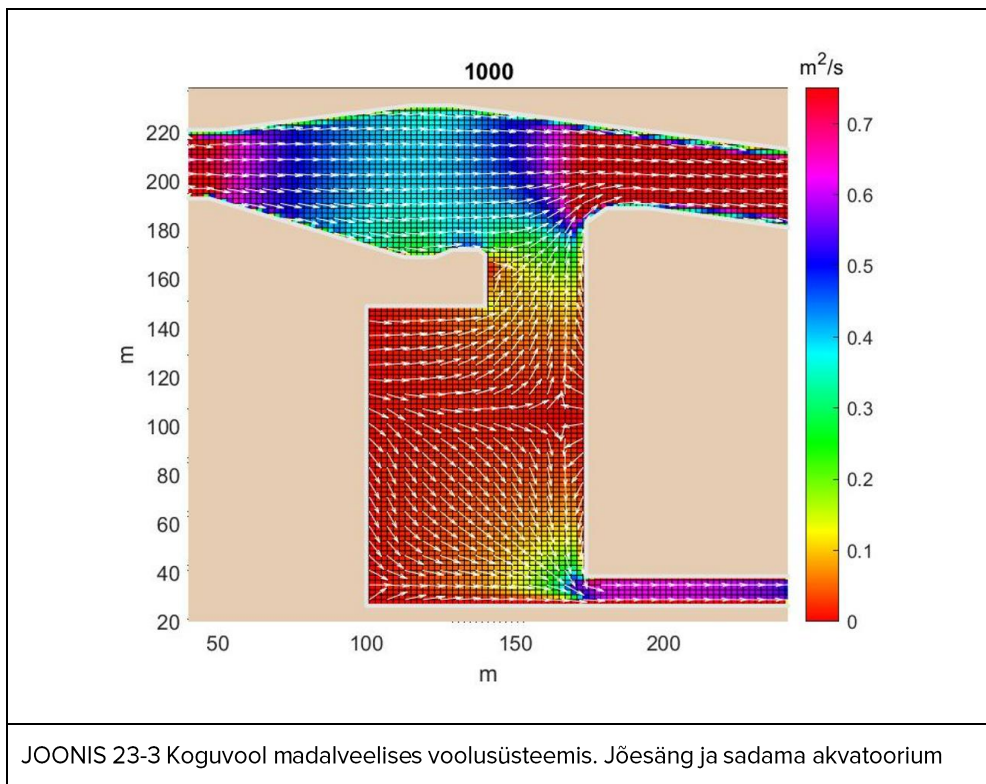
$$\tau_2 = \frac{f}{2h} UK_2 |UK_2|,$$

milles Fanningi hõõrdetakistustegur  $f = \lambda/4$ , kui ka empiirilise valemiga:

$$\tau_1 = \frac{c_p UK_1}{h^2} \sqrt{UK_1^2 + UK_2^2},$$

$$\tau_2 = \frac{c_p UK_2}{h^2} \sqrt{UK_1^2 + UK_2^2},$$

milles  $c_p = \textit{konstant}$ . Veekogu horisontaalsele sisepõhjale  $c_p = 2,5 \cdot 10^{-3}$  (VIIDE 23.1).



**MÄRKUS.** 2D madalvee võrrandite numbriline skeem on esitatud LISA 6.

## 23.5 1D KOGUVOOLU MODELLEERIMINE

1D koguvoolu võrrandid veekogu muutumatu kujuga sisepõhjale ( $h_{sp} = f(x)$ ) on

$$\frac{\partial UK}{\partial t} = -gh \frac{\partial h}{\partial x} - gh \frac{\partial h_{sp}}{\partial x}, \quad 23-32$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial UK}{\partial x} = 0, \quad 23-33$$

milles  $h = h_{vp} - h_{sp}$ ,  $UK = UK_1$  ja  $x = x_1$ .

1D koguvoolu võrrandid veekogu horisontaalsele sisepõhjale on

$$\frac{\partial UK}{\partial t} = -gh \frac{\partial h}{\partial x}, \quad 23-34$$



$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial UK}{\partial x} = 0,$	23-35
---	-------

milles on võetud kasutusele suurused  $h = h_{vp}$  ja  $h_{sp} = \text{konstant} = 0$ .

Diferentseerides koguvoolu liikumishulga võrrandit (VALEM (23-34)) aja järgi, st  $\partial/\partial t$  järgi, ja koguvoolu pidevuse võrrandit (VALEM (23-35)) koordinaadi järgi, st  $\partial/\partial x$  järgi, ning elimineerides 2-järku võrrandite süsteemis segatuletisega liikmed, st  $\partial^2 h/\partial t \partial x = \partial^2 h/\partial x \partial t$ , järeldub hüperboolset tüüpi võrrand, mis on koguvoolu lainevõrrand:

$\frac{\partial^2 UK}{\partial t^2} - gH \frac{\partial^2 UK}{\partial x^2} = 0.$	23-36
---	-------

Otsime koguvoolu lainevõrrandile (VALEM (23-36)) lahendit „perioodilise signaali“ kujul:

$UK = UK_0 e^{i_m(k_{kv} x - \omega_{kv} t)},$	23-37
--	-------

milles koguvoolu laineotsessi amplituud  $UK_0 = \text{konstant}$ , ringsagedus on  $\omega_{kv} = \text{konstant}$  ja lainearv on  $k_{kv} = \text{konstant}$ . Imaginaarühik on  $i_m = \sqrt{-1}$ . Koguvoolu lainevõrrandist järeldub seos:

$\omega_{kv}^2 - g H k_{kv}^2 = 0,$	23-38
-------------------------------------	-------

mida tuntakse kui 1D koguvoolu laineotsessi dispersiooni võrrandit.

1D koguvoolu laineotsessi dispersiooni võrrandist (VALEM (23-38)) selgub koguvoolu lainete ringsagedus:

$\omega_{kv} = \sqrt{g H} k_{kv}.$	23-39
------------------------------------	-------

1D koguvoolu laineotsessi dispersiooni võrrandist (VALEM (23-38)) võib määrata laine liikumiskiiruse:

$c = \frac{\omega_{kv}}{k_{kv}} = \sqrt{g H}$	23-40
---	-------



JOONIS 23-4 Pinnalained lainerenni kaldpõhjal, TTÜ hüdromehaanika labor, Tallinn.  
(Foto: Janek Laanearu, 2018)

## 23.6 KOORDINAATIDE TEISENDUSED

Voolamise liikumishulga võrrandite ja pidevuse võrrandite süsteemi võib esitada ortogonaalsetes kõverjoonelistes koordinaatides (VIIDE 23.2). Kõverjooneliste koordinaatide kasutamine tehnosüsteemide analüüsis on suhteliselt vähe kasutatud leidnud. Vooluprotsesside kirjeldamisel, mis toimuvad kõverpinnal – nagu voolamine laevakere pinnal – võib näiteks kasutada sfäärilisi koordinaate, ringsümmeetriliste vooluprotsesside jaoks – nagu voolamine survetorus – võib kasutada silindrilisi koordinaate. Kõverjoonelised koordinaatsüsteemid on ajast sõltumatud ning lokaalselt ortogonaalsed ning hüdromehaanika võrrandite esitused nendes süsteemides on hästi tuntud. Peamine erinevus Cartesiuse ristkoordinaatide vahendusel ja ortogonaalsete kõverjooneliste koordinaatide – nagu seda on sfääriline ja silindriline koordinaatsüsteem – on see, et Cartesiuse süsteemis määratakse tuletised mööda sirgjooni, aga kõverjooneliste koordinaatide süsteemis määratakse tuletised mööda kõverjooni. Eukleidiline ruum on lõplikumõõtmeline vektorruum, kus on defineeritud vektortehted – nagu skalaarkorrutus, vektorkorrutus ja muud (VIITED 23.3, „Vektor- ja tensoranalüüs“ ja 23.4, „Loengukonspekt aines Atmosfääridünaamika I“). Ortogonaalsete vektorite süsteemi võivad moodustada madalveelise voolamise vektorid – nagu horisontaalne voolukiirus ja muud (VIIDE 23.5).

## 23.7 VIITED

- 23.1 Pratt, L. J. (1986). Hydraulic control of sill flow with bottom friction, *J. Phys. Oceanogr* 16(11), 1970–1980.
- 23.2 Cuming, H. G. (1955). The Secondary Flow in Curved Pipe. R. & M. No. (13,979) 2880 A.R.C. Technical Report. Ministry of Supply. *Aeronautical Research Council and Memoranda*.
- 23.3 Laas, T. & Tammelo, R. (2000-2004). *Vektor- ja tensoranalüüs*, Tartu Ülikool, Teoreetilise Füüsika Instituut.
- 23.4 Rõõm, R. (2009). *Loengukonspekt aines Atmosfääridünaamika I*. Tartu Ülikool, Füüsika Instituut. <http://meteo.physic.ut.ee/~room/DYNNMET-I-2013/dmI.pdf>
- 23.5 Vreugdenhil, C. B. (1994). *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Kluwer Academic Publisher.

## 24 PAISULAINE TEHISKANALIS

### 24.1 PRAKTIILINE OSA. EHITATUD TAMMID

#### 24.1.1 EHITIS. HÜDROTEHNILINE RAJATIS, PINNASTAMM, BETOONTAMM

Ehitatud tammid võivad olla nii tehislikud (nt betoon- või pinnastamm) kui ka looduslikud moodustised (nt mägijärve pinnasnõlv). Ehitatud tamm on hüdrotehniline kaitserajatis, millega takistatakse pinnavee voolamist. Ehitatud tammi kasutatakse paisjärvedes äravoolu piiramiseks, et vähendada madalamate maa-alade üleujutusi, aga ka veehoidlates, et kasutada vett niisutamiseks, joogiks, tööstuses, vesiviljeluses vms ning samuti põua mõjude (ka kuivusriskide) leevendamiseks. Veekogude tammid (nt jõetamm) on peamiselt kasutusel elektri tootmisel hüdroenergiast ehk veepindade kõrguste erinevusega määratud potentsiaalsest asendenergiast. Ehitatud tammiga on võimalik reguleerida vee voolamist, aga ka kaitsta maa-alasid üleujutuste eest. Varaseim teadaolev inimtekkeline tamm on Jawa tamm Jordaania, mis pärineb aastast 3000 eKr (VIIDE 24.1, „Tamm ehitis“).

Ehitatud tammi rike on kontrollimatu veehulga väljumine reservuaarist hüdrotehnilise rajatise ehitusvigade, pinnase struktuuri muutuste või muu ettenägematu puuduse tagajärjel. See võib olla katastroofiliste tagajärgedega. Ehitatud tammid võivad puruneda mitmesugustel põhjustel, näiteks maalihke, maavärina, intensiivse vihma või muu ettenägematu sündmuse tõttu. Purunemine on inimestele ja -taristule väga ohtlik. Ehitatud tammi purunemisel tekkinud üleujutus võib olla suurema hävitusjõuga kui intensiivse vihma puhul tekkinud üleujutus jõe valgalal.

Ehitatud tamm on rahvusvahelise humanitaarõiguse kohaselt „ohtlikke jõude sisaldav rajatis“ (VIIDE 24.2). Ehitatud tammi purunemisele võib järgneda olemasoleva taristu kasutuskõlbmatuks muutumine. Samuti võivad hävineda elupaigad. Ehitatud tammi amortiseerumine sõltub rajatise vanusest ja selle hooldustasemest. Vananenud tehnoloogiaga ehitatud ja hooldamata hüdrotehniliste rajatiste purunemise potentsiaal on suurem. Arvutuslike töövahenditega on võimalik optimeerida ressursitõhusaid konstruktsioonilisi lahendusi. Ehitatud tammi purunemise võimalikud põhjused:

- kriitilise paisutuskõrguse ületamine. See rike ilmneb väikesemõõtmelise läbi- või ülevooluavaga juhtudel, kui vee vabapind tammiga veehoidlas tõuseb lubatud paisutuskõrgusest ülespoole. See rike võib esineda intensiivse vihmaga, kui paisu ülevoolulävi on settinud, tammi läbivooluava on ummistunud vms;
- ehitatud tammi vundamendi defektid. See rike ilmneb ehitatud tammi põhjakonstruktsiooni vajumise, hüdrotehnilist rajatist ümbritsevate nõlvade ebastabiilsuse, veepinna kõrgusega seonduva ülerõhu, vee imbumise vundamendi

materjali vms tagajärjel. See rike põhjustab vesiehitise konstruktsiooni ja pinnasestruktuuri ebastabiilsust;

- torustiku ja ehitusmaterjali defektid. Selle rikke põhjustaja on sisemine erosioon, mis on seotud hüdraulilises voolusüsteemis vee imbumise ja erosiooniga. Rikke näiteks on ülevoolu läve mõranemine. Samuti võivad mainitud rikke tekkele kaasa aidata loomade urud ja vundamendipraad, mis reageerivad temperatuuri muutustele;
- veejuhtimise vead. See rike ilmneb varjade, kanalite vms tehnosüsteemide tööolukordade reguleerimisel.

Ehitatud tammide rikked võivad tekkida erinevate põhjuste tagajärjel, milleks on loodusõnnetused, ekstreemsed tormid, terrorism jne.

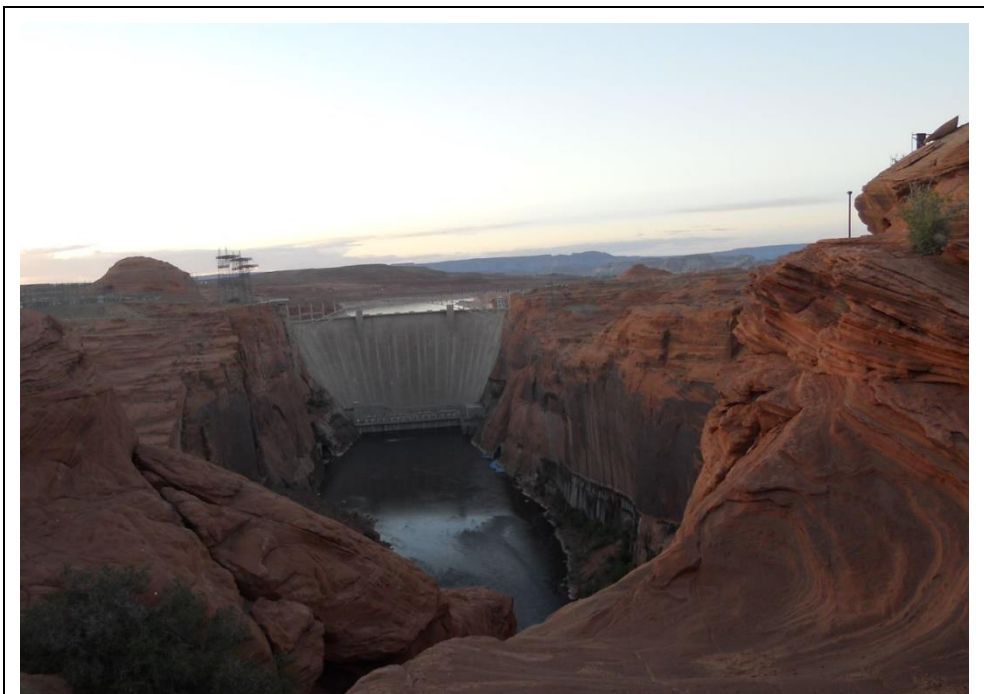
## 24.1.2 VOOLUREŽIIM. VEEPINNA KÕRGUSE MUUTUSEST SÕLTUV RÕHK

Ehitatud tammi purunemisega (ingl. *dam break*) kaasneva paisulaine – nagu vooluhüppelaine – tekkimisel eeldatakse, et algtingimusel erineb veepinna kõrgus eraldusseina erinevatel pooltel oluliselt. Veepindade eraldusseina eemaldamisel tekkiv vooluhüppelaine vastab ebaühtlase voolamise tingimustele, mille puhul vabapinna kõrgus ja voolukiirus voolusängis praktiliselt nagu katkevad, näiteks veevaltsi moodustumisel voolutsooni peal. Vooluprotsessi keerukuse tõttu on paisulainet hüdraulikavalemite lahendustega keeruline selgitada. Ideaalvedeliku matemaatiliselt lihtsustatud juhul on võimalik voolukiiruse ja veepinna muutustel tekkiva paisulaine lahendusi esitada analüütiliste funktsioonidena. Vooluhüppelaine lahenduste esitamisel on üldjuhul lihtsam rakendada numbrilisi arvutusskeeme, mis kasutavad karakteristikute meetodit (VIIDE 24.3).

Hüdrotehniliste rajatiste juures kasutatakse suuremõtmelisi avasid, et reguleerida veepinda. Need avad on üldjuhul riskülikukujulise läbivooluga ning suuremõtmelised, st kõrgus on rõhukõrgusest vähemalt 5...10 korda suurem, vastupidisel juhul nimetatakse ava väikesemõtmeliseks. Avast voolamisel nimetatakse rõhukõrguseks ava pinnakeskme sügavust veepinnast (VIIDE 24.4, „Maaparanduse käsiraamat. Maaparanduse alused“). Erinevalt väikesemõtmelisest avast ei saa suuremõtmelise ava puhul voolamise kiirusjaotust ava erinevates sügavuspunktides käsitleda rõhukõrgusest sõltumatuna. Ava ülaseriv on alumisest servast oluliselt väiksema rõhu all ning seetõttu on vee raskusest sõltuv voolukiirus ava ülemises osas väiksem.

### 24.1.3 SISSEJUHATUS ÜLESANDESSE. PÕHIVALEMID

Paisulaine liikumisel muutuvad potentsiaalse ja kineetilise energia väärtused voolusängis. Paisulaine võib tekkida nii lüüsi sulgemisel kui ka avamisel. Voolava vedeliku tööolukorras muutub kineetiline energia lüüsi sulgemisel võrdlemiselt lühikese ajavahemiku jooksul potentsiaalseks energiaks. Põhi- ja lisaülesannetes tekitatakse voolusängi lüüsi avamisega paisulaine, mille puhul muutub veepinna kõrgus voolukiiruseks. Ideaalvedeliku voolamise matemaatilisel lihtsustamisel ei muutu mehaaniline energia siseenergiaks. Reaalvoolu puhul on kasutatud Rayleigh' hõõrdetakistustegurit paisulaine viskoosel dissipatsioonis. Paisulaine liikumise viskoosse dissipatsiooni lihtsamatel juhtudel võib kasutada ka Fanningi või Darcy hõõrdetegurit.



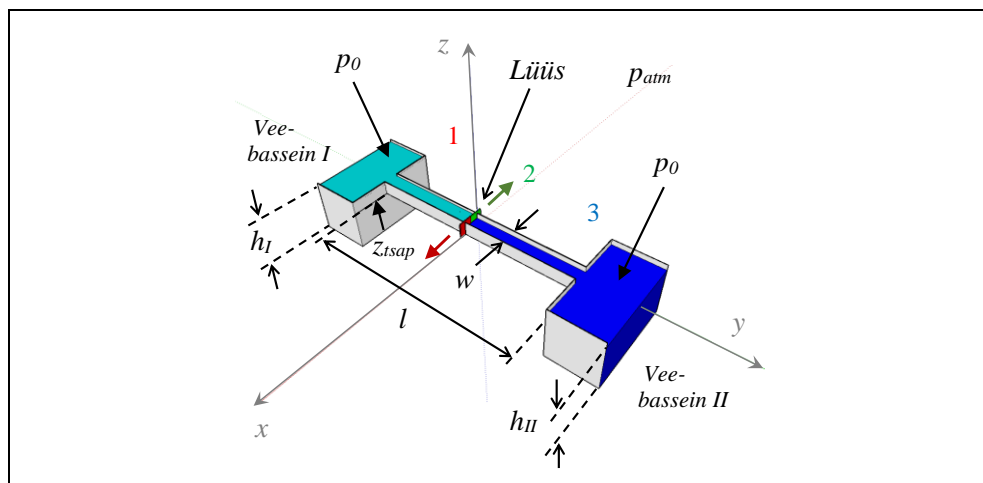
JOONIS 24-1 Paisutus Colorado jõel, Glen Canyon Dam. (Foto: Andres Piirsalu, 2012)

**MÄRKUS.** Käesolevas raamatus on kasutatud mõisteid ehitatud tamm ja ehitatud pais tavapärasel erinevas tähenduses, et erinevat tüüpi vesiehitisi seostada voolamise hüdraulika olukordadega – nagu voolu- ja seisuvee paisutamine.

## 24.2 PÕHIÜLESANNE. PAISULAINEGA MÄÄRATUD VEEPINNA KÕRGUS

ANTUD. Horisontaalse aluspõhjaga tehislükus voolusängis, mille pikkus  $l = 100$  m ja vabapinna laius  $W = 5$  m, on lüüsi muudetud veepinna kõrgust veebasseinide I ja II vahel. Vabapinna kõrgus võrdlusnivoost veebasseini I poolses osas, ühel pool lüüsi  $h_I = 5,0$  m ja veebasseini II poolses osas, teisel pool lüüsi  $h_{II} = 3,0$  m. Nelinurkristlõikega tehissängi ( $W = w$ , milles  $w$  on voolusängi aluspõhja laius) horisontaalpõhja kõrgus võrdlusnivoost  $z_{tsap} = 1,45$  m. Veebasseini I vee juhtimisele veebasseini II kasutatakse lüüsi, mille avamisel moodustuvad suure amplituudiga vabapinna lained. Vabapinnaga voolusüsteemis on  $10$  °C temperatuuriga vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000$  kg·m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg·m<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>. Voolusüsteemi vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Määrata valemiga ja numbrilise arvutusskeemiga maksimaalne ja minimaalne veepinna kõrgus madalveelises voolusüsteemis, tehissängi lüüsi praktiliselt hetkelisele avamisele. Selgitada mehaanilise energia muutumist madalveelise vabapinna laine liikumisel. Arvutada ideaal- ja reaalvedeliku voolukiirused, ning vabapinna kõrguse diagrammid veebasseini I poolses tehissängi osas, koordinaadiga  $y = -0,4 \cdot (l/2)$  (asukohas 1, JOONIS 24-2), tehissängi keskel, koordinaadiga  $y = 0$  (asukohas 2, JOONIS 24-2) ja veebasseini II poolses tehissängi osas, koordinaadiga  $y = 0,4 \cdot (l/2)$  (asukohas 3, JOONIS 24-2).



JOONIS 24-2 Hüdrauliline voolusüsteem. Horisontaalse tehissängiga ühendatud veebasseinid I ja II, mille vabapinna kõrguste erinevust reguleerib lüüs

EELDUSED. Veebasseine I ja II ühendab pikk muutumatu ristlõikega, st prismaatiline tehissäng. Avatud lüüsiga olukorras on vee voolamine tehissängis statsionaarne, mõõdukalt ebahütlane. Hüdraulilise voolusüsteemi kohttakistused tehissängi sisse- ja väljavoolus, ning lüüsil on olulised, ning need arvestada kui tehissängi piirdega määratud hõõrdetakistuse suurenemine, st valida vastav Manningi karedustegur. Ideaalvedeliku voolamise matemaatiliselt lihtsustatud juhul, hüdraulilise voolusüsteemi takistust mitte arvestada, ning reaalvoolu pinnalainetele kasutada Reyleigh' takistustegurit  $r = \textit{konstant}$ . Numbrilises arvutusskeemis kasutada madalvee võrrandite karakteristikliku kuju, mis võimaldab lõplike vahede meetodiga ilmutatud kujul määrata voolukiiruse ja veepinna kõrguse muutused kokkusurumatu (konstantse tihedusega vedeliku) voolamise puhul. Madalveelises voolusüsteemis  $H/l \ll 1$ , milles tehissängi pikkus on  $l (= 100 \text{ m})$  ja veepinna keskmine kõrgus tehissängis on  $H = \left( (h_I - z_{\textit{tasap}}) + (h_{II} - z_{\textit{tasap}}) \right) / 2 = (h_I + h_{II}) / 2 - z_{\textit{tasap}} (= 2,55 \text{ m})$ . Madalveelise voolusüsteemi paisuline liikumiskiirus  $c_{pl} = \sqrt{gH} = \textit{konstant}$ .

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Chézy valem, Manningi valem, voolusängi Reynolds'i arv, Bernoulli kolmiklõige, Froude'i arv, mõõdukalt ebahütlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand, 1D paisuline võrrandite süsteem**

### VALEMID

Chézy vooluhulga valem on

$$Q = C_{Ch} A_e \sqrt{R_h I_h},$$

milles  $Q$  on vooluhulk,  $C_{Ch}$  on Chézy tegur,  $A_e = h^2 (\beta + m_n)$  on trapetsristlõikega tehislõike voolusängi elavlõige, milles  $h$  on vabapinna kõrgus tehissängi aluspõhjast,  $\beta = w/h$  on ristlõike lamedus, milles  $w$  on aluspõhja laius, ning  $m_n = \cot(\theta)$  on nõlvustegur, milles  $\theta$  on sänginõlva välisnurk,  $R_h = A_e/\chi$  on hüdrauliline raadius, milles  $\chi = h (\beta + 2\sqrt{1 + m_n^2})$  on märgpiire, ning  $I_h$  on hüdrauliline lang. Nelinurkristlõikega voolusängile  $m_n = 1$ .

Määrame Chézy teguri Manningi karedusskaala valemiga

$$C_{Ch} = \frac{1}{n_M} R_h^{\frac{1}{6}},$$

milles  $n_M$  on Manningi karedustegur.

Vooluhulga võib määrata empiirilise valemiga:

$$Q = \frac{1}{n_M} R_h^{\frac{1}{6}} A_e R_h^{\frac{1}{2}} I^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n_M} R_h^{\left(\frac{1}{6} + \frac{3}{6}\right)} A_e I^{\frac{1}{2}} = \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e I^{\frac{1}{2}}}{n_M} = \frac{1}{n_M} \frac{A_e^{\frac{5}{3}} I^{\frac{1}{2}}}{\chi^{\frac{2}{3}}},$$



mida nimetatakse ka Manningi vooluhulga valemiks.

Manningi vooluhulga valem on

$$Q = \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e I_h^{\frac{1}{2}}}{n_M},$$

milles  $Q$  on vooluhulk,  $n_M$  on Manningi karedustegur,  $A_e = h w$  on nelinurkristlõikega tehissängi elavlõige, milles  $h$  on vabapinna kõrgus tehissängi aluspõhjast (voolusängi ristlõike perimeetri horisontaalne osa) ja  $w$  on tehissängi aluspõhja laius. Hüdrauliline raadius  $R_h = A_e / \chi$ , milles  $\chi = w + 2 h$  on voolamise ristlõikega (vooluristlõikega) määratud perimeetri pikkus (märgpiire), millest on välja jäetud vabapind.  $I_h$  on hüdrauliline lang.

Vabapinna kõrgus tehissängi aluspõhjast määrab tehissängi aluspõhja sügavuse vabapinnast:

$$h = -(-d) = d.$$

Mõõdukalt ebäühtlase vabapinnaga voolamisele prismaatilises tehissängis ei ole hüdrauliline lang määratud põhjalanguga:

$$I_h \neq i_0.$$

Voolusängi Reynoldsi arv on

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur ja  $R_h$  on hüdrauliline raadius. Voolamisele täistaitumusega ümartorus, sisediameetriga  $d_s = 4 R_h$ , määratakse Reynoldsi arv valemiga:

$$Re = \frac{u d_s}{\nu} = \frac{u \cdot 4 R_h}{\nu} = 4 Re_{vs}.$$

Kuna veevoolule ümartorus vastav kriitiline Reynoldsi arv on 2000, siis järelikult laminaarse ja turbulentsse voolamise ülemineku kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on 500.

Bernoulli kolmikliige vabapinnaga voolamisele on

$$B = \frac{u^2}{2g} + h + h_s,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $g$  on raskuskiirendus,  $h$  on veepinna kõrgus tehissängi aluspõhjast ja  $h_s (= z_{tsap})$  on aluspõhja kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult.

Trapetsristlõikega tehissängile määratakse voolukiirus valemiga:

$$u = \frac{Q}{A_e} = \frac{Q}{(h w + h^2 m_n)} = \frac{Q}{h^2 (\beta + m_n)}.$$

Bernoulli kolmikliikme vabapinnaga voolamisele võime teisendada kujule:

$$B = \frac{Q^2}{2 g h^4 (\beta + m_n)^2} + h + h_s = \frac{Q^2}{2 g (h w + h^2 m_n)^2} + h + h_s.$$

Kui kasutada funktsiooni ekstreemumi määramise teoreemi veepinna kõrguse  $h$  järgi:

$$\frac{dB}{dh} = 0,$$

siis järeldub Bernoulli funktsioonist  $B = f(h, Q, g, w, m_n, h_s)$ , milles  $h$  on muutuja ja  $Q, g, w, m_n$  ja  $h_s$  on konstantsed suurused, järgmine avaldis:

$$-\frac{2 Q^2 (w + 2 h m_n)}{2 g (h w + h^2 m_n)^3} + 1 = -\frac{Q^2 (w + 2 h m_n)}{g (h w + h^2 m_n)^3} + 1 = 0.$$

Trapetsristlõikega tehissängi vabavoolu Froude'i arv astmes 2 (ruudus) on määratud valemiga:

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g \frac{(h w + h^2 m_n)^3}{(w + 2 h m_n)}} = \frac{u^2}{g \frac{(h w + h^2 m_n)}{(w + 2 h m_n)'}}$$

milles on kasutatud seost  $u = Q/A_e = Q/(h w + h^2 m_n)$ . Kriitilisele vabavoolule vastab  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja kärealele vabavoolule vastavad  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

Trapetsristlõikega tehissängi vabapinnaga voolamise Froude'i arv ruudus valem teiseneb nelinurkristlõikega tehiskanali voolamise Froude'i arv ruudus valemiks tingimusel:

$$m_n = 0$$

→

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g h^3 w^2} = \frac{u^2}{g h},$$

milles vooluhulk  $Q = u h w$  ja tehissängi aluspõhja laius määrab ka vabapinna laiuse  $w = W$ .

Bernoulli kolmikliikme vabapinnaga voolamisele on

$$B = \frac{u^2}{2 g} + h + h_s,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $g$  on raskuskiirendus,  $h$  on veepinna kõrgus tehissängi aluspõhjast ja  $h_s$  on aluspõhja kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult. Bernoulli kolmikliikme voolusuunaline muutus puudub ideaalvedeliku voolamise puhul. Mõõdukalt ebaühtlasele reaalvoolule on Bernoulli kolmikliikme tehissängi aluspõhja suunaline ( $x'$  – pööratud koordinaattelje suunaline) diferentsiaalne muutus (vähenemine) määratud hüdraulilise languga:

$$\frac{\partial B}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{u^2}{2g} + h + h_s \right) = -I_h,$$

milles  $I_h$  on hüdrauliline lang ja  $x'$  on tähissängi pikikalde nurgaga  $\theta$  määratud koordinaat.

Voolamise erienergia on määratud kui

$$E_s = \frac{u^2}{2g} + h = \frac{Q^2}{2g A_e^2} + h,$$

milles on võetud kasutusele vooluhulk  $Q$  ja elavlõige  $A_e$  vastavalt seosele  $u = Q/A_e$ . Trapetsristlõikega voolamise elavlõige  $A_e = h^2 (\beta + m_n)$ , milles ristlõike lamedus  $\beta = w/h$ . Nelinurkristlõikega voolamisele on nõlvustegur  $m_n = 0$ , millest järeldub et  $A_e = h w$ .

Mõõdukalt ebäühtlase reaalvoolu puhul on voolamise erienergia tehissängi aluspõhja pikikalde suunaline ( $x'$  – pööratud koordinaattelje suunaline) diferentsiaalne muutus määratud põhjalangu (tehissängi pikikalde) ja hüdraulilise langu vahega:

$$\frac{\partial E_s}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{u^2}{2g} + h \right) = -\frac{\partial h_s}{\partial x'} - I_h \approx i_0 - I_h,$$

milles  $\partial h_s / \partial x'$  on määratud põhjalanguga  $i_0$  eeldusel, et  $(\cos(\theta))^2 \approx 1$ .

Voolamise erienergia funktsioonist  $E_s = f(h, Q, g, w, m_n)$  tuletis muutuja  $h$  järgi, milles  $Q, g, w$  ja  $m_n$  on konstantsed suurused, määrab avaldise:

$$\frac{\partial E_s}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{Q^2}{2g A_e^2} + h \right) = \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{Q^2}{2g (h w + h^2 m_n)^2} + h \right) = -\frac{(w + 2h m_n) Q^2}{g (h w + h^2 m_n)^3} + 1.$$

Mõõdukalt ebäühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{dh}{dx'} \approx \frac{i_0 - I_h}{1 - Fr^2},$$

milles  $I_h$  on hüdrauliline lang,  $i_0$  on põhjalang ja  $Fr$  on Froude'i arv.

Kasutades voolamise liikumishulga võrrandit ja nelinurkristlõikega tehissängile pidevuse võrrandi  $Q = u h w = \text{konstant}$  diferentsiaalset kuju vastavalt ideaalvedeliku voolamise matemaatiliselt lihtsustatud juhule,

$$u \frac{du}{dy} = -g \frac{dh}{dy},$$

$$h w \frac{du}{dy} + u w \frac{dh}{dy} + u h \frac{dw}{dy} = 0,$$

võib madalveelisele voolusüsteemile tuletada mõõdukalt ebäühtlase voolamise diferentsiaalvõrrandi:

$$\frac{dh}{dy} = \frac{\frac{dh_s}{dy} - Fr \frac{h}{w} \frac{dw}{dy}}{Fr^2 - 1}.$$

**MÄRKUS.** Kui tehissängis puudub aluspõhja kõrguse muutus, st  $dh_s/dy = 0$ , ning puudub ka aluspõhja laiuse muutus, st  $dw/dy = 0$ , siis ei saa muutuda ka veepinna kõrgus tehissängi ideaalvedeliku voolamisele, st  $dh/dy = 0$ . Järelikult ei ole võimalik ideaalvedeliku voolamise matemaatiliselt lihtsustatud juhul, madalveelisele voolusüsteemile tuletada mõõdukalt ebaihtlase voolamise diferentsiaalvõrrandit, ning seda kasutada statsionaarse voolamise ülesande lahendamisele.

1D paisulaine võrrandite süsteem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = \mathcal{F},$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $h$  on veepinna kõrgus,  $g$  on raskuskiirendus ja  $\mathcal{F}$  on massiühiku hõõrdejõud.

Kasutame järgmist lineaarteisendust 1D paisulaine võrranditele:

$$DV_1 = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} - \mathcal{F},$$

$$DV_2 = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$DV_1 + \alpha_{\pm} DV_2 = 0,$$

milles  $\alpha_{\pm}$  on integreerimise parameeter.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} - \mathcal{F} + \alpha_{\pm} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

1D paisulaine võrrandite karakteristiklik kuju:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} + \alpha_{\pm} \frac{\partial h}{\partial t} + \alpha_{\pm} u \frac{\partial h}{\partial y} + \alpha_{\pm} h \frac{\partial u}{\partial y} = \mathcal{F},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_{\pm} h \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_{\pm} \frac{\partial h}{\partial t} + \alpha_{\pm} u \frac{\partial h}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = \mathcal{F},$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_{\pm} h \frac{\partial}{\partial y} \right) u + \alpha_{\pm} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial y} + \frac{g}{\alpha_{\pm}} \frac{\partial}{\partial y} \right) h = \mathcal{F},$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + [u + \alpha_{\pm} h] \frac{\partial}{\partial y} \right) u + \alpha_{\pm} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \left[ u + \frac{g}{\alpha_{\pm}} \right] \frac{\partial}{\partial y} \right) h = \mathcal{F},$$

milles määrame integreerimisparameetri vastavalt seosele:

$$u + \alpha_{\pm} h = u + \frac{g}{\alpha_{\pm}},$$

$$\alpha_{\pm}^2 = \frac{g}{h},$$

$$\alpha_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

→

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + [u \pm \sqrt{g h}] \frac{\partial}{\partial y} \right) u \pm \sqrt{\frac{g}{h}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + [u \pm \sqrt{g h}] \frac{\partial}{\partial y} \right) h = \mathcal{F}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + [u \pm \sqrt{g h}] \frac{\partial}{\partial y} \right) (u \pm 2 \sqrt{g h}) = \mathcal{F}$$

Madalveelise pinnalaine karakteristiklik laine kiirus ja lainefaas on määratud vastavalt

$$c_{\pm} = u \pm \sqrt{g h},$$

$$R_{\pm} = u \pm 2 \sqrt{g h}.$$

1D paisulaine võrrandite karakteristiklik kuju:

$$\frac{d_{\pm} u}{dt} \pm \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{d_{\pm} h}{dt} = \mathcal{F},$$

$$\frac{d_{\pm} R_{\pm}}{dt} = \mathcal{F},$$

milles oleme kasutanud järgmist diferentsiaaloperaatorit:

$$\frac{d_{\pm}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + [u \pm \sqrt{g h}] \frac{\partial}{\partial y}.$$

1D paisulaine võrrandite karakteristikud on

$$c_{\pm} = u \pm \sqrt{g h},$$

milles

$$c_{+} = u + \sqrt{g h},$$

$$c_{-} = u - \sqrt{g h}$$

ja

$$R_{\pm} = u \pm 2 \sqrt{g h},$$

milles

$$R_{+} = u + 2 \sqrt{g h},$$

$$R_{-} = u - 2 \sqrt{g h}.$$

Voolukiiruse tehissängis võime määrata teisendusega:

$$R_+ + R_- = u + 2\sqrt{gh} + u - 2\sqrt{gh},$$

$$u = \frac{1}{2}(R_+ + R_-).$$

Veepinna kõrguse tehissängis võime määrata teisendusega:

$$R_+ - R_- = u + 2\sqrt{gh} - (u - 2\sqrt{gh}),$$

$$h = \frac{1}{16g}(R_+ - R_-)^2.$$

*Analüütiline lahendus. Ideaalvedeliku voolamise tingimused ( $\mathcal{F} = 0$ )*

Võtame kasutusele voolukiiruse ja veepinna kõrguse muutujad vastavalt:

$$u = U + u',$$

$$h = H + \eta,$$

milles madalveelise pinnalainega ehk paisulainega kaasnev voolukiirus on  $u'$  ja veepinna häiritus on  $\eta$ . Nn hoovuse voolukiirus on  $U = \textit{konstant}$  ja veepinna kõrgus  $H = \textit{konstant}$ . Veepinna keskmine kõrgus tehissängi horisontaalsest sisepõhjast on  $H$ .

Teeme muutujate vahetused ideaalvoolu 1D paisulaine võrrandites.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

→

$$\frac{\partial(U + u')}{\partial t} + (U + u') \frac{\partial(U + u')}{\partial y} + g \frac{\partial(H + \eta)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial(H + \eta)}{\partial t} + (U + u') \frac{\partial(H + \eta)}{\partial y} + (H + \eta) \frac{\partial(U + u')}{\partial y} = 0$$

Lihtsustame võrrandeid tingimustel:

$$U = \textit{konstant},$$

$$|u'| \ll |U|$$

ja

$$H = \textit{konstant},$$

$$|\eta| \ll |H|.$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial y} + H \frac{\partial u'}{\partial y} = 0$$

Tehissängi suletud lüüsiga juhul puudub nõ transiitvool ehk hoovus, st  $U = 0$ .

Tehissängi lüüsi avamisega kaasnevale vooluprotsessile võib kasutada võrrandite süsteemi:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \frac{\partial u'}{\partial y} = 0.$$

Lihtsustatud (nn lineaarseks muudetud) ideaalvedeliku voolamise 1D paisulaine võrrandite lahendus on määratud veepinna häirituse ja voolukiiruse analüütiliste funktsioonidega, mis kirjeldavad muutumatu kujuga paisulaine liikumist prismaatilises tehissängis.

Veepinnahäirituse funktsioon on

$$\eta(y, t) = f_+(y - c_+t) + f_-(y - c_-t).$$

Voolukiiruse funktsioon on

$$u'(y, t) = \sqrt{\frac{g}{H}} [f_+(y - c_+t) - f_-(y - c_-t)].$$

Paisulaine liikumiskiirus tehissängi positiivses ja negatiivses  $y$  –koordinaadi suunas on vastavalt:

$$c_+ = +c_{pl},$$

$$c_- = -c_{pl}.$$

*Mehaanilise energia muutus tingimustel ( $\mathcal{F} = 0$ ) ( $U = 0$ )*

Võtame kasutusele paisulaine diferentsiaalse energiavõrrandi, mis kirjeldab mehaanilise energia muutus tehissängis. Määrame muutused paisulaine kineetilisele ja potentsiaalsele energiale veebasseine ühendava tehissängi lüüsi avamisel. Mehaanilise energia võrrandi tuletame lihtsustatud ( $U = 0$ ) 1D paisulaine võrrandite süsteemile.

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \frac{\partial u'}{\partial y} = 0$$

→

$$DV_3 = \frac{\partial u'}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$DV_4 = \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \frac{\partial u'}{\partial y}$$

$$H u' DV_3 + g \eta DV_4 = 0$$

→

$$H u' \frac{\partial u'}{\partial t} + H u' g \frac{\partial \eta}{\partial y} + g \eta \frac{\partial \eta}{\partial t} + g \eta H \frac{\partial u'}{\partial y} = 0$$

$$H u' \frac{\partial u'}{\partial t} + g \eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = -H u' g \frac{\partial \eta}{\partial y} - g \eta H \frac{\partial u'}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H u'^2}{2} + \frac{g \eta^2}{2} \right) = -g H \frac{\partial}{\partial y} (u' \eta)$$

Integreerime paisulaine diferentsiaalse energiavõrrandi lõigus  $[-y_0, y_0]$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{y=-y_0}^{y=y_0} \frac{H u'^2}{2} dy + \int_{y=-y_0}^{y=y_0} \frac{g \eta^2}{2} dy \right) = -g H (u' \eta) \Big|_{y=-y_0}^{y=y_0}$$

Integreerime paisulaine energiavõrrandi ajavahemikus  $[0, \tau]$

$$\left( \int_{y=-y_0}^{y=y_0} \frac{H u'^2}{2} dy + \int_{y=-y_0}^{y=y_0} \frac{g \eta^2}{2} dy \right) \Big|_{t=0}^{t=\tau} = - \int_{t=0}^{t=\tau} g H (u' \eta) \Big|_{y=-y_0}^{y=y_0} dt$$

Paisulaine kineetiline erienergia lõigus  $[-y_0, y_0]$  määratakse igal ajahetkel kui

$$KE' = \int_{y=-y_0}^{y=y_0} \frac{H u'^2}{2} dy .$$

Paisulaine potentsiaalne erienergia lõigus  $[-y_0, y_0]$  määratakse igal ajahetkel kui

$$PE' = \int_{y=-y_0}^{y=y_0} \frac{g \eta^2}{2} dy .$$

*Paisulaine energiavõrrandi lahendamise*

Veebasseine ühendava tehissängi suletud lüüsiga olukorras on veepinna kõrguse ja voolukiiruse väärtused järgmised:

$$h = H + \eta ,$$

milles

$$\eta = +a \quad (-y_0 < y < 0) ,$$

$$\eta = -a \quad (0 < y < y_0)$$

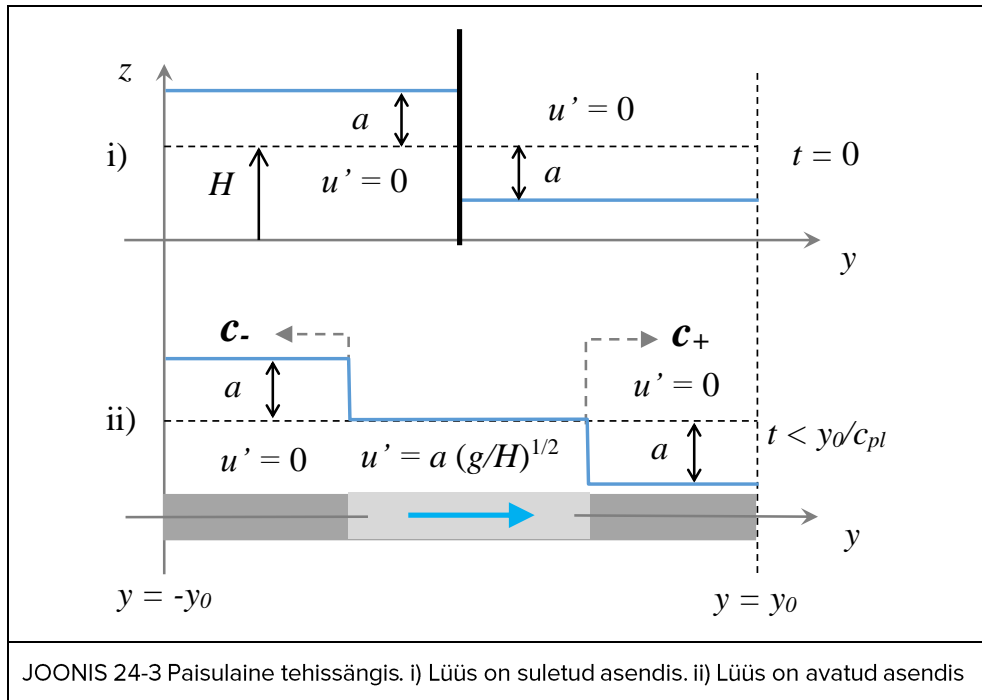


ja

$$u = 0 + u',$$

milles samuti

$$u' = 0 \quad (-y_0 < y < y_0).$$



**MÄRKUS.** Paisulaine liikumisega kaasneva veepinna muutus veebasseine ühendavas tehissängis peab vastama olukorrale, milles vabapind ei lange aluspõhja kõrgusele, st  $H > a$ .  $a = (h_I - h_{II})/2 = 1,0 \text{ m}$  ja  $H = (h_I + h_{II})/2 - z_{kp} = 2,55 \text{ m}$ .

Tehissängi lüüsi avamisega kaasneb veepinna kõrguse muutus

$$\Delta h = -a, \text{ kui } -y_0 < y < 0,$$

$$\Delta h = a, \text{ kui } 0 < y < y_0$$

ja voolukiiruse muutus

$$\Delta u = a \sqrt{\frac{g}{H}},$$

Madalveelise pinnalaine amplituud on määratud muutumatu kõrgusega tehissängis, st  $|\Delta h| = a$ . Raskuskiirendus  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Veepinna häiritus on määratud funktsiooniga:

$$\eta(y, t) = -\frac{1}{2} a [\operatorname{sgn}(y - c_+ t) + \operatorname{sgn}(y - c_- t)],$$

milles on kasutatud märgifunktsiooni:

$$\operatorname{sgn}(y - c_{\pm} t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } (y - c_{\pm} t) > 0 \\ -1, & \text{kui } (y - c_{\pm} t) < 0 \end{cases}$$

Voolukiirus on määratud funktsiooniga:

$$u'(y, t) = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{g}{H}} [-\operatorname{sgn}(y - c_+ t) + \operatorname{sgn}(y - c_- t)].$$

Suletud lüüsiga tehissängis pikkusega  $l = 100$  m on paisuline mehaaniline erienergia ( $ME'$ ) antud veepindade vahega määratud energiaga, st paisuline potentsiaalse erienergiaga ( $PE'$ ) lõigus  $[-y_0, y_0] = [-l/2, l/2]$ :

$$ME' = KE' + PE' = 0 + g a^2 y_0 = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (1,0 \text{ m})^2 \frac{100 \text{ m}}{2} = 490,5 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-2}.$$

Avatud lüüsiga tehissängis on paisuline mehaaniline erienergia ( $ME'$ ) ajahetkel  $t = y_0/c_{pl}$ , milles  $y_0 = l/2$  ja  $c_{pl} = \sqrt{gH}$  antud madalvee pinnalaine liikumisega kaasneva voolamise energiaga, st paisuline kineetilise erienergiaga ( $KE'$ ) lõigus  $[-l/2, l/2]$ :

$$ME' = KE' + PE' = g a^2 y_0 + 0 = 490,5 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-2}.$$

Näiteks ajahetkel  $t = 5$  s, peale tehissängi lüüsi avamist, on paisulainega kaasnevad madalveelised laineastmed liikunud asukohtadesse  $\pm y_{la} = \pm 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 5 \text{ s} = \pm 25,0 \text{ m}$ .

Kineetiline, potentsiaalne ja mehaaniline erienergia on tehissängis antud vastavalt kui

$$KE' = \int_{y=-y_{la}}^{y=y_{la}} \frac{H u'^2}{2} dy = \frac{g a^2}{2} \int_{y=-y_{la}}^{y=y_{la}} dy = g a^2 y_{la} = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (1,0 \text{ m})^2 \cdot 25,0 \text{ m} \\ = 245,25 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-2},$$

$$PE'_1 = \int_{y=-l/2}^{y=-y_{la}} \frac{g \eta^2}{2} dy = \frac{g a^2}{2} \int_{y=-l/2}^{y=-y_{la}} dy \\ = \frac{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (1,0 \text{ m})^2}{2} \cdot \left( -25,0 \text{ m} + \frac{100 \text{ m}}{2} \right) = 122,625 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-2},$$

$$PE'_2 = \int_{y=y_{la}}^{y=l/2} \frac{g \eta^2}{2} dy = \frac{g a^2}{2} \int_{y=y_{la}}^{y=l/2} dy = \frac{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (1,0 \text{ m})^2}{2} \cdot \left( \frac{100 \text{ m}}{2} - 25,0 \text{ m} \right) \\ = 122,625 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-2},$$

$$ME' = 245,25 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-2} + 2 \cdot 122,625 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-2} = 490,5 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-2}.$$

## MÄRKUSED. Mehaanilise energia võrrand

- Veepindade vahega määratud mehaaniline energia, st paisulaine potentsiaalne energia lõigus  $[-y_0, y_0]$  on antud tingimustel  $U = 0$ , et selgitada ainult madalveelise pinnalaine liikumisega kaasnevat mehaanilise energia muutust.
- Madalveelise pinnalaine liikumisel muutuvad potentsiaalse ja kineetilise energia väärtused tehissängi lõigus  $[-y_0, y_0]$ , kusjuures paisulaine mehaaniline energia ei muutu ideaalvoolu tingimusel, st  $ME' = KE' + PE' = \textit{konstant}$ .
- Vastavalt termodünaamika esimesele seadusele muutub reaalvedeliku voolamise tingimusel osa paisulaine energiast ka siseenergiaks, millega kaasnevad vedeliku füüsikaliste omaduste muutused, mis on vee suure soojusmahtuvuse tõttu praktiliselt olematud. Siseenergia muutusega kaasneb ka madalveelise voolusüsteemi entroopia muutus. Lisaks siseenergia muutusele võib paisulaine energia muutuda ka vedelikus paikneva keha liikumise energiaks, mis näiteks on seotud laine liikumisel haaratud kivi veeremisega tehissängi aluspõhjal.

Kasutame järgmist lineaarteisendust lihtsustatud 1D paisulaine võrranditele:

$$DV_5 = \frac{\partial u'}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$DV_6 = \frac{\partial \eta}{\partial t} + H_{vk} \frac{\partial u'}{\partial y},$$

$$DV_5 + \alpha_{\pm} DV_6 = 0,$$

milles  $\alpha_{\pm}$  on integreerimise parameeter.

→

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \alpha_{\pm} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \frac{\partial u'}{\partial y} \right) = 0$$

1D paisulaine võrrandite karakteristiklik kuju:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \alpha_{\pm} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \alpha_{\pm} H \frac{\partial u'}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \alpha_{\pm} H \frac{\partial u'}{\partial y} + \alpha_{\pm} \frac{\partial \eta}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_{\pm} H \frac{\partial}{\partial y} \right) u' + \alpha_{\pm} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{g}{\alpha_{\pm}} \frac{\partial}{\partial y} \right) \eta = 0,$$

milles määrame integreerimisparameetri vastavalt seosele:

$$\alpha_{\pm} H = \frac{g}{\alpha_{\pm}},$$

$$\alpha_{\pm}^2 = \frac{g}{H},$$

$$\alpha_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{g}{H}}.$$

→

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \pm \sqrt{gH} \frac{\partial}{\partial y} \right) u' \pm \sqrt{\frac{g}{H}} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} \pm \sqrt{gH} \frac{\partial}{\partial y} \right) \eta = 0$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \pm \sqrt{gH} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( u' \pm \sqrt{\frac{g}{H}} \eta \right) = 0$$

$$\sqrt{gH} = c_{pl}$$

$$\sqrt{\frac{g}{H}} = \frac{g}{c_{pl}}$$

Madalveelise pinnalaine karakteristiklik lainekiirus ja lainefaas on määratud vastavalt

$$c_{\pm} = \pm \sqrt{gH} = \pm c_{pl},$$

$$R'_{\pm} = u' \pm \sqrt{\frac{g}{H}} \eta = u' \pm \frac{g}{c_{pl}} \eta.$$

Lineaarsete 1D madalvee võrrandite karakteristiklik kuju:

$$\frac{d_{\pm} u'}{dt} \pm \frac{g}{c_{pl}} \frac{d_{\pm} \eta}{dt} = 0,$$

$$\frac{d_{\pm} R'_{\pm}}{dt} = 0,$$

milles oleme kasutanud järgmist diferentsiaaloperaatorit:

$$\frac{d_{\pm}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \pm c_{pl} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Lihtsustatud 1D paisulaine võrrandite karakteristikud on

$$c_{\pm} = \pm c_{pl},$$

milles

$$c_{+} = +c_{pl},$$

$$c_{-} = -c_{pl}$$

ja

$$R'_{\pm} = u' \pm \frac{g}{c_{pl}} \eta,$$

milles

$$R'_+ = u' + \frac{g}{c_{pl}} \eta ,$$

$$R'_- = u' - \frac{g}{c_{pl}} \eta .$$

Voolukiiruse tehissängis võime määrata teisendusega:

$$R'_+ + R'_- = u' + \frac{g}{c_{pl}} \eta + u' - \frac{g}{c_{pl}} \eta ,$$

$$u' = \frac{1}{2}(R'_+ + R'_-).$$

Veepinna häirituse tehissängis võime määrata teisendusega:

$$R'_+ - R'_- = u' + \frac{g}{c_{pl}} \eta - \left( u' - \frac{g}{c_{pl}} \eta \right) ,$$

$$\eta = \frac{c_{pl}}{2g}(R'_+ - R'_-).$$

*Arvutusnäide. Paisuline voolukanalis*

*Numbriline arvutusskeem. Ideaalvedeliku voolamise tingimused*

$(\mathcal{F} = 0)$   $(U = 0)$

*Numbriline arvutusmeetod. Euleri valem lõplike vahedega ilmutamata kujul*

## VALEMID

Esitame 1D paisuline osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteemi kahe hariliku diferentsiaalvõrrandite paarina:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dR'_+}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = +c_{pl} \end{array} \right. ,$$

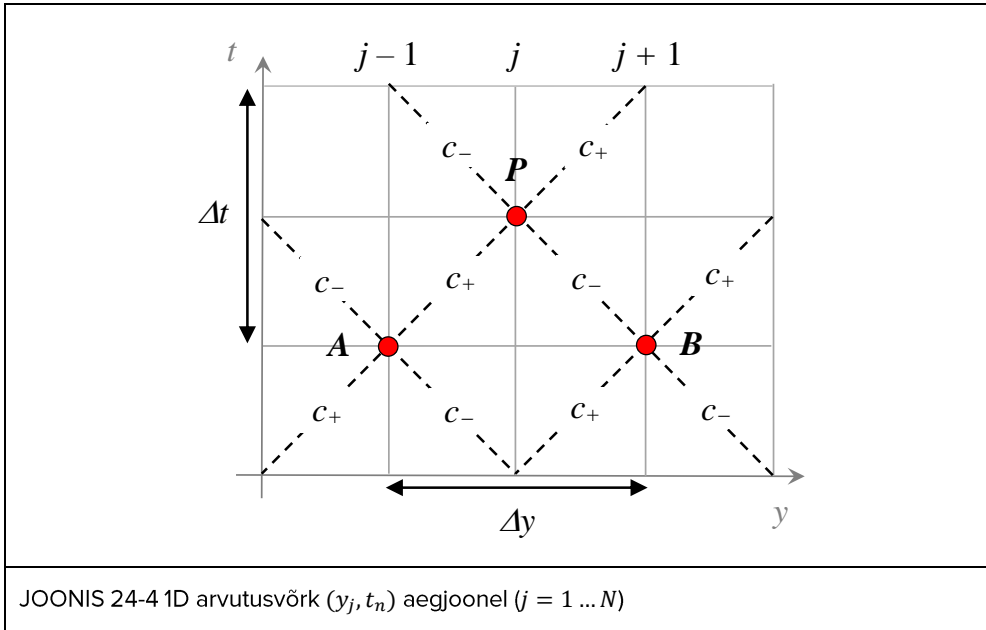
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dR'_-}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = -c_{pl} \end{array} \right. .$$

Jagame tehissängi pikkuse paarisarvuliseks  $(N - 1)$  lõplikuks vaheks, mille pikkus on  $\Delta y/2$ . Arvutusvõrgu  $y -$  teljel on paaritu arv punkte  $N$ . Arvutusliku ajavahemiku määrame seosega:

$$\Delta t = \frac{\Delta y}{c_{pl}},$$

mille arvutusskeemis jagame kaheks integreerimise sammuks:  $0 \rightarrow \Delta t/2$  ja  $\Delta t/2 \rightarrow \Delta t$ .

Numbrilises arvutusskeemis väärtustatakse algtingimustega (voolukiirus ja veepinna häiritus) arvutusvõrgu punktid  $j = 1, 3, 5 \dots N$  ajahetkel  $t = 0$ , mille kaudu arvutatakse voolukiiruse  $u'$  ja veepinna häirituse  $\eta$  väärtused ajasammul  $0 \rightarrow \Delta t/2$  arvutusvõrgu punktides  $j = 2, 4, \dots N - 1$ . Seejärel arvutatakse voolukiiruse  $u'$  ja veepinna häirituse  $\eta$  uued väärtused ajasammul  $\Delta t/2 \rightarrow \Delta t$  arvutusvõrgu punktides  $j = 3, 5, \dots N - 2$  koos piiritingimustega. Arvutustsükli korratakse vajalik arv  $n$  korda integreerimisperioodil  $\Delta T = n \Delta t$ .



Numbrilisele integreerimisele on kasutatud teisendusi:

$$\frac{dR'_+}{dt} = \frac{du'}{dt} + \frac{g}{c_{pl}} \frac{d\eta}{dt} = 0 \cdot \frac{c_{pl}}{g} dt,$$

$$\frac{c_{pl}}{g} dR'_+ = \frac{c_{pl}}{g} du' + d\eta = 0,$$

$$\frac{c_{pl}}{g} \int_{R'_+A}^{R'_+P} dR'_+ = \frac{c_{pl}}{g} \int_{u'_A}^{u'_P} du' + \int_{\eta_A}^{\eta_P} d\eta = 0$$

ja

$$\frac{dR'_-}{dt} = \frac{du'}{dt} - \frac{g}{c_{pl}} \frac{d\eta}{dt} = 0 \cdot \frac{c_{pl}}{g} dt,$$

$$\frac{c_{pl}}{g} dR'_- = \frac{c_{pl}}{g} du' - d\eta = 0,$$

$$\frac{c_{pl}}{g} \int_{R'_-B}^{R'_-P} dR'_- = \frac{c_{pl}}{g} \int_{u'_B}^{u'_P} du' - \int_{\eta_B}^{\eta_P} d\eta = 0.$$

1D arvutusvõrk  $(y_j, t_n)$  numbriliste arvutusvalemite süsteem voolukiiruse määramisele:

$$\frac{c_{pl}}{g}(R'_{+P} - R'_{+A}) = \frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_A) + (\eta_P - \eta_A) = 0,$$

$$\frac{c_{pl}}{g}(R'_{-P} - R'_{-B}) = \frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_B) - (\eta_P - \eta_B) = 0.$$

→

$$NV_1 = \frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_A) + (\eta_P - \eta_A)$$

$$NV_2 = \frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_B) - (\eta_P - \eta_B)$$

$$NV_1 + NV_2 = 0$$

→

$$\frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_A) + (\eta_P - \eta_A) + \frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_B) - (\eta_P - \eta_B) = 0$$

$$\frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_A) + \frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_B) - \eta_A + \eta_B = 0$$

$$\frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_A) + \frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_B) - \eta_A + \eta_B = 0 \cdot \frac{1}{2} \frac{g}{c_{pl}}$$

$$\frac{1}{2}(u'_P - u'_A) + \frac{1}{2}(u'_P - u'_B) - \frac{1}{2} \frac{g}{c_{pl}} \eta_A + \frac{1}{2} \frac{g}{c_{pl}} \eta_B = 0$$

→

$$u'_P = \frac{1}{2} \left( u'_A + \frac{g}{c_{pl}} \eta_A + u'_B - \frac{g}{c_{pl}} \eta_B \right)$$

$$u'_P = \frac{1}{2} (R'_{+A} + R'_{-B})$$

**MÄRKUS.** Voolukiiruse  $u'_P$  valemite rakendatakse arvutusskeemis nii ajasammule  $0 \rightarrow \Delta t/2$  kui ka  $\Delta t/2 \rightarrow \Delta t$ .

1D arvutusvõrk  $(y_j, t_n)$  numbriliste arvutusvalemite süsteem rõhukõrguse määramisel:

$$\frac{c_{pl}}{g}(R'_{+P} - R'_{+A}) = \frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_A) + (\eta_P - \eta_A) = 0,$$

$$\frac{c_{pl}}{g}(R'_{-P} - R'_{-B}) = \frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_B) - (\eta_P - \eta_B) = 0.$$

→

$$NV_1 = \frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_A) + (\eta_P - \eta_A)$$

$$NV_2 = \frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_B) - (\eta_P - \eta_B)$$

$$NV_1 - NV_2 = 0$$

→

$$\frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_A) + (\eta_P - \eta_A) - \frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_B) + (\eta_P - \eta_B) = 0$$

$$\frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_A) - \frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_B) + 2\eta_P - \eta_A - \eta_B = 0$$

$$\frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_A) - \frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_B) + 2\eta_P - \eta_A - \eta_B = 0 \cdot \frac{1}{2} \frac{g}{c_{pl}}$$

$$\frac{1}{2}(u'_P - u'_A) - \frac{1}{2}(u'_P - u'_B) + \frac{g}{c_{pl}}\eta_P - \frac{1}{2} \frac{g}{c_{pl}}\eta_A - \frac{1}{2} \frac{g}{c_{pl}}\eta_B = 0$$

→

$$\eta_P = \frac{1}{2} \frac{c_{pl}}{g} \left( u'_A + \frac{g}{c_{pl}}\eta_A - u'_B + \frac{g}{c_{pl}}\eta_B \right)$$

$$\eta_P = \frac{c_{pl}}{2g} (R'_{+A} - R'_{-B})$$

**MÄRKUS.** Veepinna häirituse  $\eta_P$  valemite rakendatakse arvutusskeemis nii ajasammude  $0 \rightarrow \Delta t/2$  kui ka  $\Delta t/2 \rightarrow \Delta t$ .

Arvutusnäide. Voolukiirus ja veepinna häiritus (ideaalvoolu tingimused)

Numbrilises arvutusskeemis väärtustatakse algtingimustega (voolukiirus ja veepinna häiritus) arvutusvõrgu punktid  $j = 1, 3, 5 \dots N$  ajahetkel  $t = 0$ .

Arvutusskeemi integreerimine vastab algebraliste valemite paari väärtustamisele tehissängi  $(N - 1)/2$  arvutusvõrgu punktides  $j = 2, 4, \dots N - 1$  ajasammul  $0 \rightarrow \Delta t/2$ :

$$u'_P(t = \Delta t/2) = \frac{1}{2} (R'_{+A}(t = 0) + R'_{-B}(t = 0)),$$

$$\eta_P(t = \Delta t/2) = \frac{c_{pl}}{2g} (R'_{+A}(t = 0) - R'_{-B}(t = 0)).$$

Algebraliste valemite paari väärtustamine tehissängi  $(N - 1)/2 - 1$  arvutusvõrgu punktides  $j = 3, 5, \dots N - 2$  toimub ajasammul  $\Delta t/2 \rightarrow \Delta t$ :

$$u'_P(t = \Delta t) = \frac{1}{2} (R'_{+A}(t = \Delta t/2) + R'_{-B}(t = \Delta t/2)),$$

$$\eta_P(t = \Delta t) = \frac{c_{pl}}{2g} (R'_{+A}(t = \Delta t/2) - R'_{-B}(t = \Delta t/2)).$$

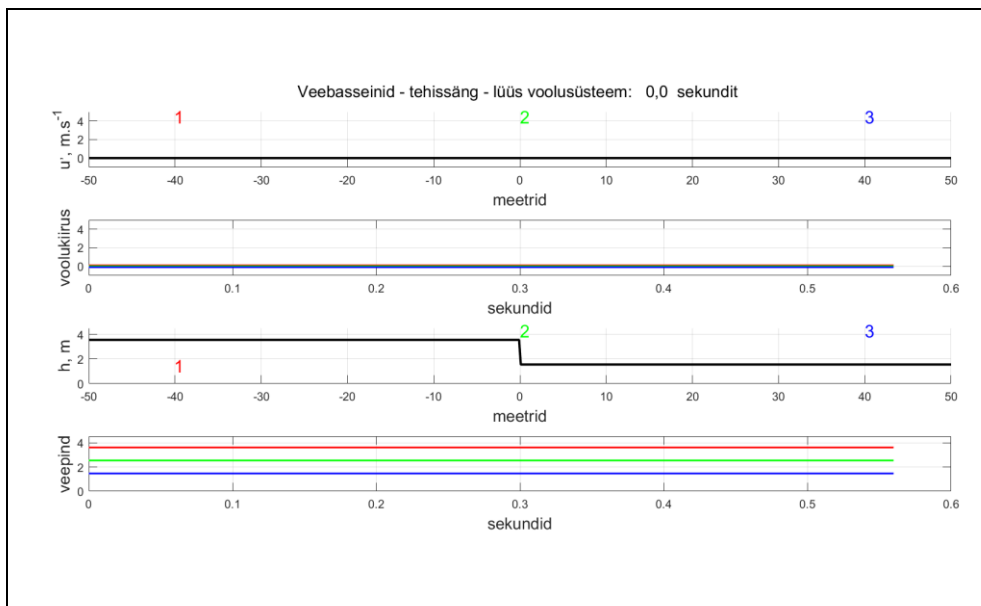
Paisuline piirtingimused tehissängile määratakse arvutusvõrgu punktides:

$$j = 1 : \eta_I = h_I - z_{kp} \rightarrow u'(t = \Delta t) = R'_{-A}(t = \Delta t/2) + \sqrt{g/H} \eta_I,$$

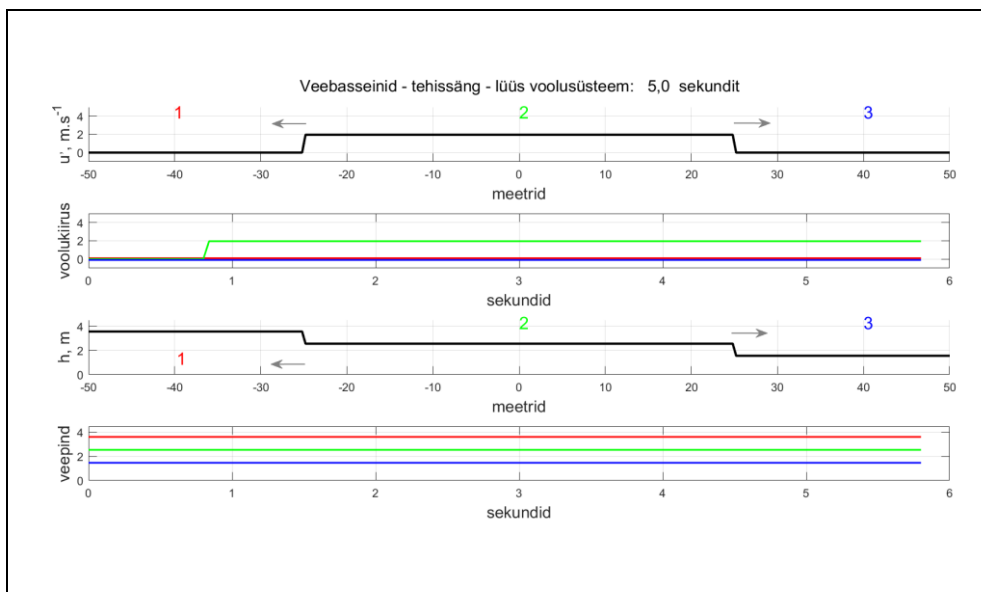
$$j = N : \eta_{II} = h_{II} - z_{kp} \rightarrow u'(t = \Delta t) = R'_{+B}(t = \Delta t/2) - \sqrt{g/H} \eta_{II},$$

mis vastavad madalvee pinnalaine peegeldumisele veebasseinide ja tehissängi ühendustelt.

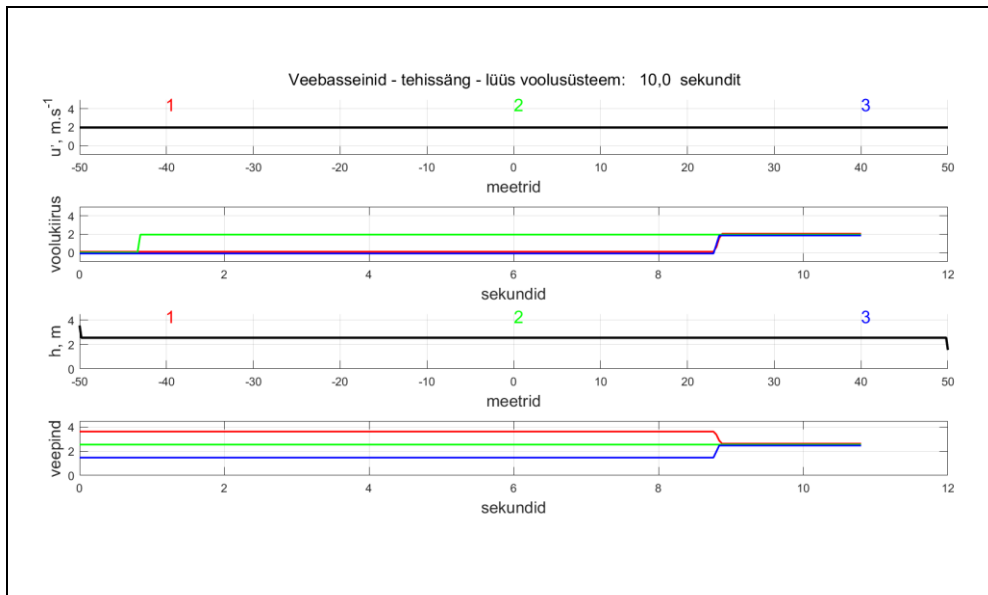




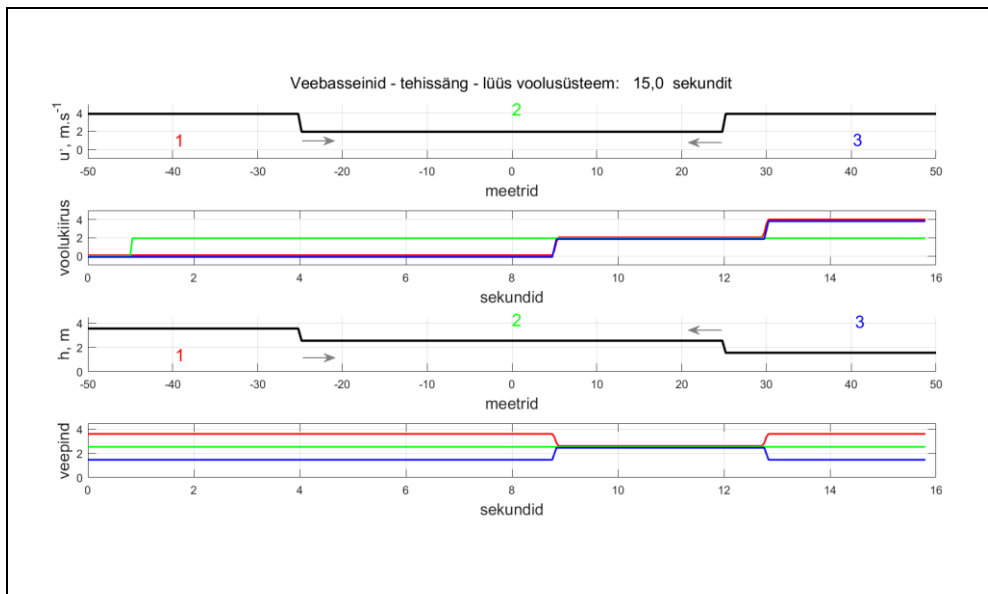
JOONIS 24-5 Pinnalainega kaasneva voolukiiruse ja veepinnakõrguse muutused 1D arvutusvõrgu  $(y_j, t_n)$  aegjoonel. Algtingimused numbrilises simulatsioonis: i) voolukiiruse jaotus, ii) voolukiiruse diagramm, iii) veepinna jaotus ja IV) veepinna diagramm.



JOONIS 24-6 Paisulainega kaasneva voolukiiruse ja veepinnakõrguse muutused 1D arvutusvõrgu  $(y_j, t_n)$  aegjoonel. Laine liikumise numbriline simulatsioon: i) voolukiiruse jaotus, ii) voolukiiruse diagramm, iii) veepinna jaotus ja IV) veepinna diagramm.



JOONIS 24-7 Paisulainega kaasneva voolukiiruse ja veepinnakõrguse muutused 1D arvutusvõrgus ( $y_j, t_n$ ). Laine peegeldumine numbrilises simulatsioonis: i) voolukiiruse jaotus, ii) voolukiiruse diagramm, iii) veepinna jaotus ja IV) veepinna diagramm.



JOONIS 24-8 Paisulainega kaasneva voolukiiruse ja veepinnakõrguse muutused 1D arvutusvõrgus ( $y_j, t_n$ ). Peegeldunud laine liikumise numbriline simulatsioon: i) voolukiiruse jaotus, ii) voolukiiruse diagramm, iii) veepinna jaotus ja IV) veepinna diagramm.

Arvutusnäide. Paisuline voolukanalis

Numbriline arvutusskeem. Reaalvedeliku voolamise tingimused

( $\mathcal{F} \neq 0$ ) ( $U = 0$ )

Numbriline arvutusmeetod. Euleri valem lõplike vahedega ilmutamata kujul

## VALEMID

Esitame 1D paisuline osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteemi kahe hariliku diferentsiaalvõrrandite paarina:

$$\begin{cases} \frac{dR'_+}{dt} = \mathcal{F} \\ \frac{dy}{dt} = +c_{pl} \end{cases},$$
$$\begin{cases} \frac{dR'_-}{dt} = \mathcal{F} \\ \frac{dy}{dt} = -c_{pl} \end{cases}.$$

Massiühiku hõõrdejõud on määratud kui  $\mathcal{F} = -r u'$ , milles  $r$  on Rayleigh' takistus-egur.

Numbrilisel integreerimisel on kaustatud teisendusi:

$$\frac{dR'_+}{dt} = \frac{du'}{dt} + \frac{g}{c_{pl}} \frac{d\eta}{dt} = -r u' \cdot \frac{c_{pl}}{g} dt,$$

$$\frac{c_{pl}}{g} dR'_+ = \frac{c_{pl}}{g} du' + d\eta = -\frac{r}{g} u' c_{pl} dt,$$

$$c_{pl} dt = dy, \text{ milles } c_{pl} = \sqrt{gH}$$

→

$$\frac{c_{pl}}{g} dR'_+ = \frac{c_{pl}}{g} du' + d\eta = -\frac{r}{g} u' dy,$$

$$\frac{c_{pl}}{g} \int_{R'_{+A}}^{R'_{+P}} dR'_+ = \frac{c_{pl}}{g} \int_{u'_A}^{u'_P} du' + \int_{\eta_A}^{\eta_P} d\eta = -\frac{r}{g} \int_A^P u' dy$$

ja

$$\frac{dR'_-}{dt} = \frac{du'}{dt} - \frac{g}{c_{pl}} \frac{d\eta}{dt} = -r u' \cdot \frac{c_{pl}}{g} dt,$$

$$\frac{c_{pl}}{g} dR'_- = \frac{c_{pl}}{g} du' - d\eta = -\frac{r}{g} u' c_{pl} dt,$$

$$c_{pl} dt = dy, \text{ milles } c_{pl} = \sqrt{gH}$$

→

$$\frac{c_{pl}}{g} dR'_- = \frac{c_{pl}}{g} du' - d\eta = -\frac{r}{g} u' dy,$$

$$\frac{c_{pl}}{g} \int_{R'_{-B}}^{R'_{-P}} dR'_- = \frac{c_{pl}}{g} \int_{u'_B}^{u'_P} du' - \int_{\eta_B}^{\eta_P} d\eta = -\frac{r}{g} \int_B^P u' dy.$$

Hõõrdejõu liikmete integreerimisele on kasutatud trapetsreeglit:

$$\frac{r}{g} \int_A^P u' dy \approx \frac{r(u'_P + u'_A)}{2g} \Delta y^*,$$

$$\frac{r}{g} \int_B^P u' dy \approx \frac{r(u'_P + u'_B)}{2g} \Delta y^*.$$

**MÄRKUS.** Hõõrdejõu integreeritud liikmeid rakendatakse arvutusskeemis vastavalt nii ruumisammule  $0 \rightarrow \Delta y/2$  kui ka  $\Delta y/2 \rightarrow \Delta y$ .

1D arvutusvõrk  $(y_j, t_n)$  numbriliste arvutusvalemite süsteem voolukiiruse määramisel:

$$\frac{c_{pl}}{g} (R'_{+P} - R'_{+A}) = \frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_A) + (\eta_P - \eta_A) = -\frac{r(u'_P + u'_A)}{2g} \Delta y^*,$$

$$\frac{c_{pl}}{g} (R'_{-P} - R'_{-B}) = \frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_B) - (\eta_P - \eta_B) = -\frac{r(u'_P + u'_B)}{2g} \Delta y^*.$$

→

$$NV_3 = \frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_A) + (\eta_P - \eta_A) + \frac{r(u'_P + u'_A)}{2g} \Delta y^*$$

$$NV_4 = \frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_B) - (\eta_P - \eta_B) + \frac{r(u'_P + u'_B)}{2g} \Delta y^*$$

$$NV_3 + NV_4 = 0$$

→

$$\begin{aligned} \frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_A) + (\eta_P - \eta_A) + \frac{r(u'_P + u'_A)}{2g} \Delta y^* + \frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_B) - (\eta_P - \eta_B) \\ + \frac{r(u'_P + u'_B)}{2g} \Delta y^* = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_A) + (\eta_P - \eta_A) + \frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_B) - (\eta_P - \eta_B) + \frac{r}{g} u'_P \Delta y^* \\ + \frac{r}{2g} (u'_A + u'_B) \Delta y^* = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_A) + \frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_B) - \eta_A + \eta_B + \frac{r}{g} u'_P \Delta y^* + \frac{r}{2g} (u'_A + u'_B) \Delta y^* = 0$$

$$\frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_A) + \frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_B) - \eta_A + \eta_B + \frac{r}{g} u'_P \Delta y^* + \frac{r}{2g} (u'_A + u'_B) \Delta y^* = 0 \cdot \frac{1}{2} \frac{g}{c_{pl}}$$

$$\frac{1}{2}(u'_P - u'_A) + \frac{1}{2}(u'_P - u'_B) - \frac{1}{2} \frac{g}{c_{pl}} \eta_A + \frac{1}{2} \frac{g}{c_{pl}} \eta_B + \frac{1}{2} \frac{r}{c_{pl}} u'_P \Delta y^* + \frac{1}{4} \frac{r}{c_{pl}} (u'_A + u'_B) \Delta y^* = 0$$

→

$$u'_P + \frac{1}{2} \frac{r}{c_{pl}} u'_P \Delta y^* = \frac{1}{2} \left( u'_A + \frac{1}{2} \frac{g}{c_{pl}} \eta_A + u'_B - \frac{1}{2} \frac{g}{c_{pl}} \eta_B - \frac{r}{2 c_{pl}} (u'_A + u'_B) \Delta y^* \right)$$

$$u'_P \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{r}{c_{pl}} \Delta y^* \right) = \frac{1}{2} \left( u'_A + \frac{1}{2} \frac{g}{c_{pl}} \eta_A + u'_B - \frac{1}{2} \frac{g}{c_{pl}} \eta_B - \frac{r}{2 c_{pl}} (u'_A + u'_B) \Delta y^* \right)$$

$$u'_P = \frac{1}{2} \left( R'_{+A} + R'_{-B} - \frac{r}{2 c_{pl}} (u'_A + u'_B) \Delta y^* \right) / \left( 1 + \frac{r}{2 c_{pl}} \Delta y^* \right)$$

**MÄRKUS.** Voolukiiruse  $u'_P$  valemite rakendatakse arvutusskeemis nii ajasammule  $0 \rightarrow \Delta t/2$  kui ka  $\Delta t/2 \rightarrow \Delta t$ . Numbrilises arvutusskeemis  $\Delta y^* = c_{pl} \Delta t/2$ , milles  $c_{pl} = \sqrt{g H}$ .

1D arvutusvõrk  $(y_j, t_n)$  numbriliste arvutusvalemite süsteem veepinna häirituse määramisel:

$$\frac{c_{pl}}{g} (R'_{+P} - R'_{+A}) = \frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_A) + (\eta_P - \eta_A) = -\frac{r}{g} \frac{(u'_P + u'_A)}{2} \Delta y^*,$$

$$\frac{c_{pl}}{g} (R'_{-P} - R'_{-B}) = \frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_B) - (\eta_P - \eta_B) = -\frac{r}{g} \frac{(u'_P + u'_B)}{2} \Delta y^*.$$

→

$$NV_3 = \frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_A) + (\eta_P - \eta_A) + \frac{r}{g} \frac{(u'_P + u'_A)}{2} \Delta y^*$$

$$NV_4 = \frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_B) - (\eta_P - \eta_B) + \frac{r}{g} \frac{(u'_P + u'_B)}{2} \Delta y^*$$

$$NV_3 - NV_4 = 0$$

→

$$\frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_A) + (\eta_P - \eta_A) + \frac{r}{g} \frac{(u'_P + u'_A)}{2} \Delta y^* - \frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_B) + (\eta_P - \eta_B) - \frac{r}{g} \frac{(u'_P + u'_B)}{2} \Delta y^* = 0$$

$$\frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_A) + (\eta_P - \eta_A) - \frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_B) + (\eta_P - \eta_B) + \frac{r}{2g} (u'_A - u'_B) \Delta y^* = 0$$

$$\frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_A) - \frac{c_{pl}}{g} (u'_P - u'_B) + 2 \eta_P - \eta_A - \eta_B + \frac{r}{2g} (u'_A - u'_B) \Delta y^* = 0$$

$$\frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_A) - \frac{c_{pl}}{g}(u'_P - u'_B) + 2\eta_P - \eta_A - \eta_B + \frac{r}{2g}(u'_A - u'_B)\Delta y^* = 0 \cdot \frac{g}{2c_{pl}}$$

$$\frac{1}{2}(u'_P - u'_A) - \frac{1}{2}(u'_P - u'_B) + \frac{g\eta_P}{c_{pl}} - \frac{1}{2}\frac{g\eta_A}{c_{pl}} - \frac{1}{2}\frac{g\eta_B}{c_{pl}} + \frac{r}{4c_{pl}}(u'_A - u'_B)\Delta y^* = 0$$

→

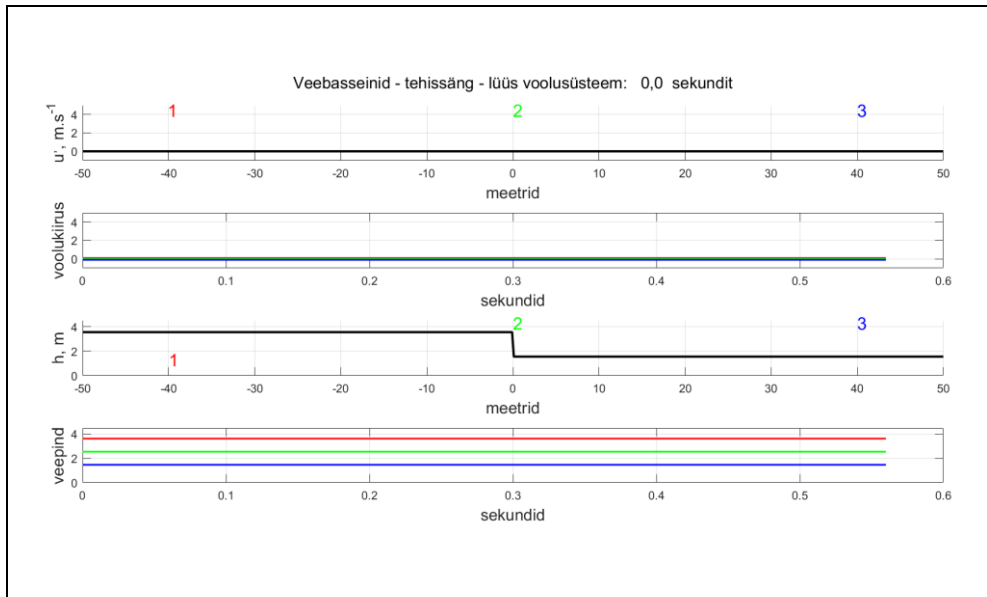
$$\eta_P = \frac{c_{pl}}{2g}\left(u'_A + \frac{g\eta_A}{c_{pl}} - u'_B + \frac{g\eta_B}{c_{pl}} - \frac{r}{2c_{pl}}(u'_A - u'_B)\Delta y^*\right)$$

$$\eta_P = \frac{c_{pl}}{2g}\left(R'_{+A} - R'_{-B} - \frac{r}{2c_{pl}}(u'_A - u'_B)\Delta y^*\right)$$

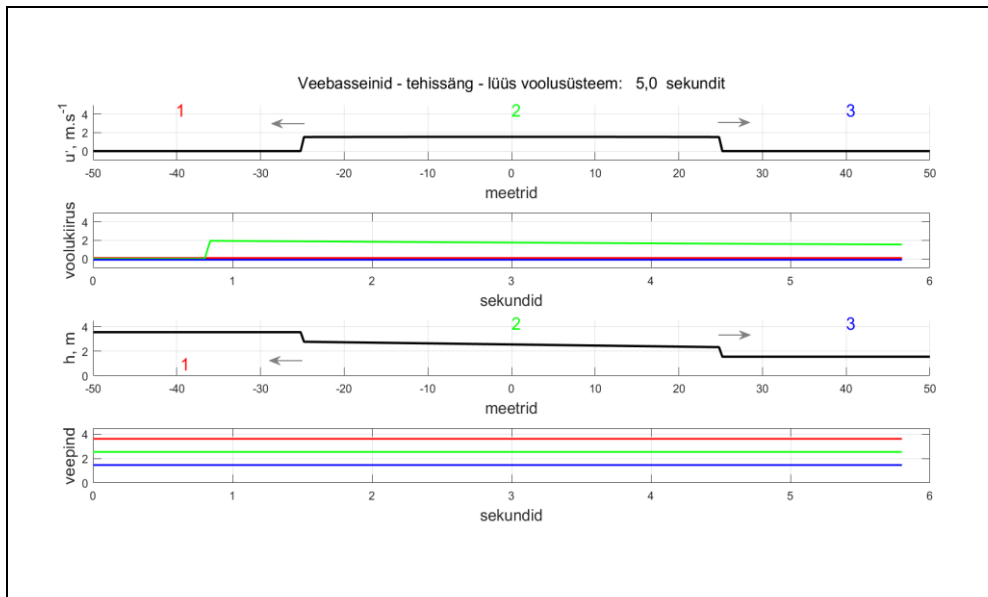
**MÄRKUS.** Rõhukõrguse  $h_{rkP}'$  valemite rakendatakse arvutusskeemis nii ajasammule  $0 \rightarrow \Delta t/2$  kui ka  $\Delta t/2 \rightarrow \Delta t$ . Numbrilises arvutusskeemis  $\Delta y^* = c_{pl} \Delta t/2$ , milles  $c_{pl} = \sqrt{gH}$ .

Arvutusnäide. Voolukiirus ja veepinna häiritus (reaalvoolu tingimused)

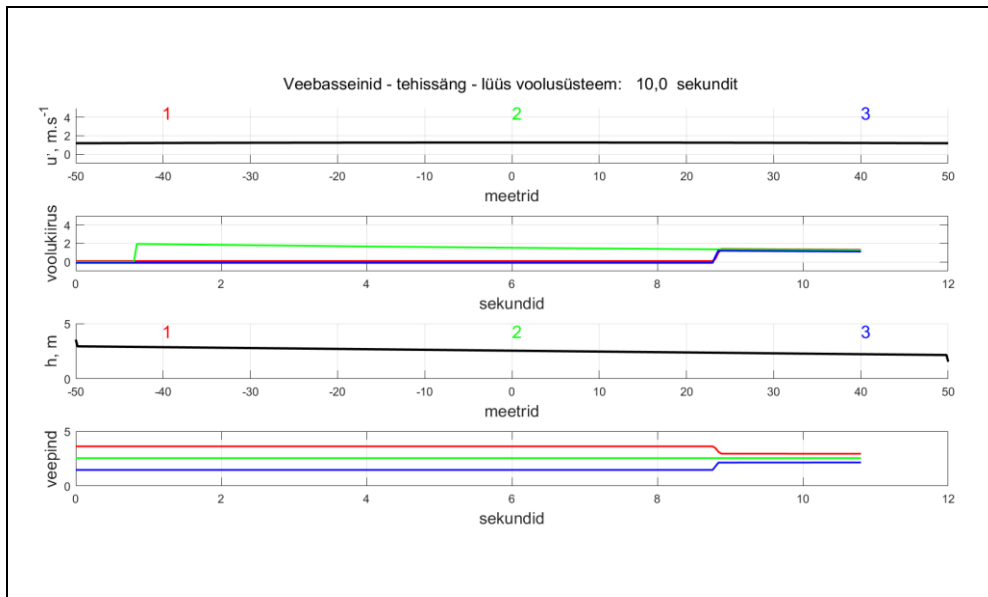
Numbrilise arvutusskeemi voolukiiruse  $u'_P$  ja veepinna häiritus  $\eta_P$  valemid väärtustatakse vastavalt 1D arvutusvõrgu  $(y_j, t_n)$  punktides A, B ja P (JOONIS 24-4).



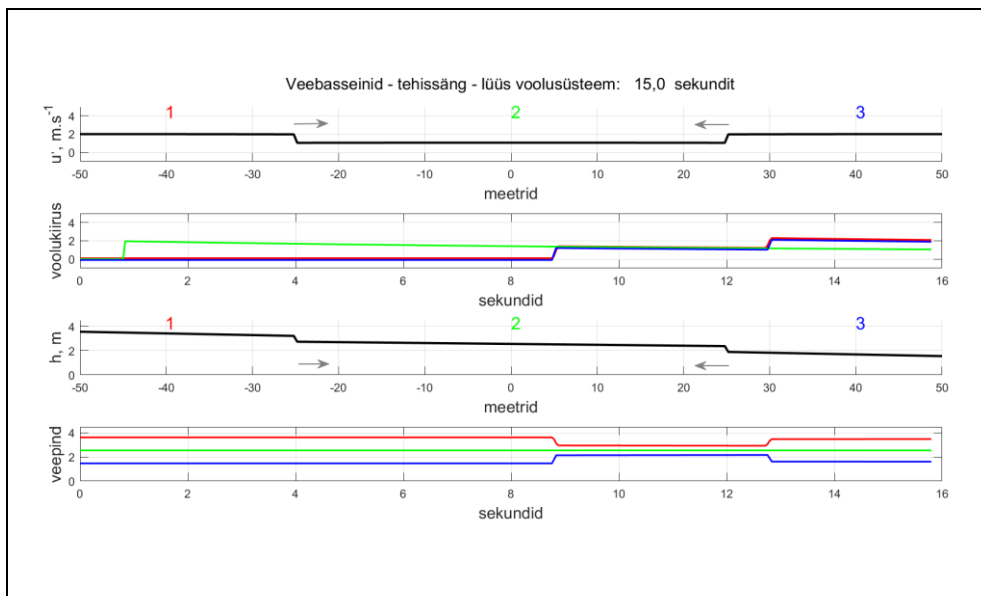
JOONIS 24-9 Paisulainega kaasneva voolukiiruse ja veepinnakõrguse muutused 1D arvutusvõrgu  $(y_j, t_n)$  aegjoonel. Algtingimused numbrilises simulatsioonis: i) voolukiiruse jaotus, ii) voolukiiruse diagramm, iii) veepinna jaotus ja iv) veepinna diagramm.



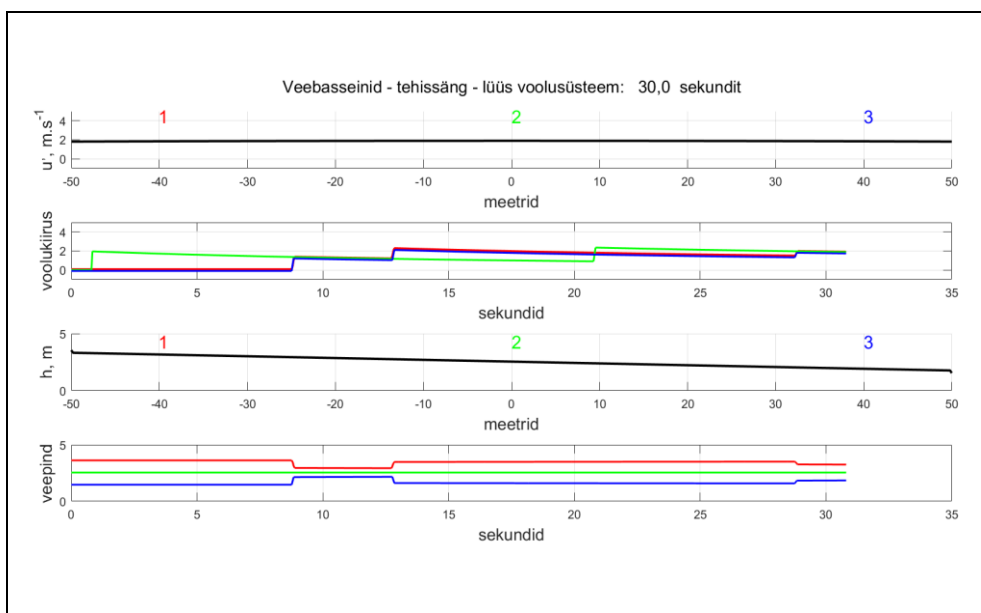
JOONIS 24-10 Paisulainega kaasneva voolukiiruse ja veepinnakõrguse muutused 1D arvutusvõrgu ( $y_j, t_n$ ) aegjoonel. Laine liikumise numbriline simulatsioon: i) voolukiiruse jaotus, ii) voolukiiruse diagramm, iii) veepinna jaotus ja IV) veepinna diagramm.



JOONIS 24-11 Paisulainega kaasneva voolukiiruse ja veepinnakõrguse muutused 1D arvutusvõrgus ( $y_j, t_n$ ). Laine peegeldumine numbrilises simulatsioonis: i) voolukiiruse jaotus, ii) voolukiiruse diagramm, iii) veepinna jaotus ja IV) veepinna diagramm.



JOONIS 24-12 Paisulainega kaasneva voolukiiruse ja veepinnakõrguse muutused 1D arvutusvõrgus ( $y_j, t_n$ ). Peegeldunud laine liikumise numbriline simulatsioon: i) voolukiiruse jaotus, ii) voolukiiruse diagramm, iii) veepinna jaotus ja iv) veepinna diagramm.



JOONIS 24-13 Paisulainega kaasneva voolukiiruse ja veepinnakõrguse muutused 1D arvutusvõrgus ( $y_j, t_n$ ). Laine peegeldumine numbrilises simulatsioonis: i) voolukiiruse jaotus, ii) voolukiiruse diagramm, iii) veepinna jaotus ja iv) veepinna diagramm.



## VASTUSED

Numbrilise arvutustulemuse järgi vastab statsionaarne voolamine veebasseinide vahel veepinna kõrguste vahele:

$$h_I - h_{II} = 5 \text{ m} - 3 \text{ m} = 2 \text{ m} ,$$

ja reaalvedeliku voolukiirusele:

$$u_{NA} = 1,9222 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} .$$

Numbrilise arvutustulemusele vastav statsionaarse voolamise vooluhulk:

$$Q_{NA} = H w u_{NA} = 2,55 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} \cdot 1,9222 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 24,5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

**MÄRKUS.** *Voolukiirus muutuva veepinna kõrgusega voolamisele on peaaegu konstantne.*

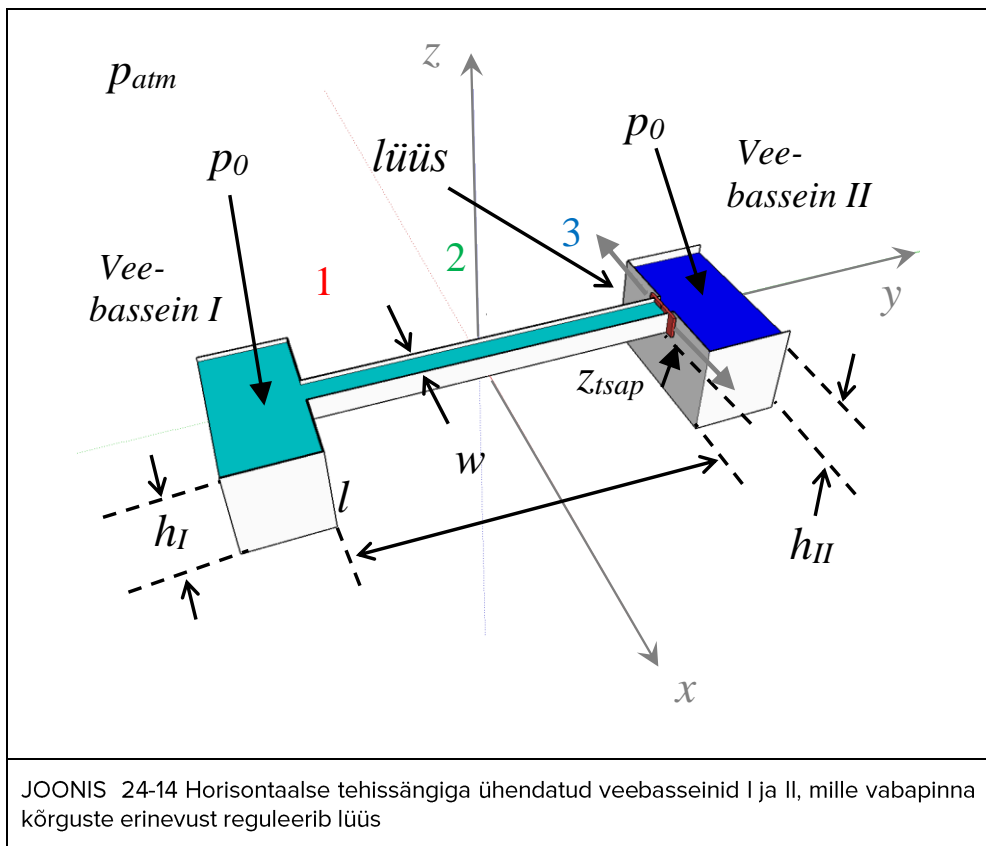
## 24.3 ISESEIVA TÖÖ ÜLESANNE. PAISULAINEGA MÄÄRATUD VEEPINNA KÕRGUS

ANTUD. Horisontaalse aluspõhjaga tehiskanalilise voolusängi, mille pikkus  $l = 100$  m ja vabapinna laius  $W = 5$  m, on lüüsigaga muudetud veepinna kõrgust veebasseinide I ja II vahel. Vabapinna kõrgus võrdlusnivoost veebasseini I poolses osas, ühel pool lüüsi  $h_I = 5,0$  m ja veebasseini II poolses osas, teisel pool lüüsi  $h_{II} = 3,0$  m. Nelinurkristlõikega tehissängi ( $W = w$ , milles  $w$  on voolusängi aluspõhja laius) horisontaalpõhja kõrgus võrdlusnivoost  $z_{tsap} = 1,45$  m. Veebasseini I vee juhtimisele veebasseini II kasutatakse lüüsi, mille avamisel moodustuvad suure amplituudiga vabapinna lained. Vabapinnaga voolusüsteemis on  $10$  °C temperatuuriga vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000$  kg·m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg·m<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>. Voalusesteemi vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

### KÜSIMUSED

- Määrata numbrilise arvutuskeemiga maksimaalne ja minimaalne vabapinna kõrgus hüdraulilises voalusesteemis lüüsi praktiliselt hetkelisel avamisel;
- Selgitada mehaanilise energia muutumist vabapinnalaine liikumisel tehissängis, mille kaudu juhitakse vett veebasseinist I välja;
- Arvutada ideaalvedeliku voolukiiruse ja rõhukõrguse diagrammid veebasseini I poolses tehiskanali osas, koordinaadiga  $y = -0,4 \cdot (l/2)$  (asukohas 1, JOONIS 24-14), tehiskanali keskel, koordinaadiga  $y = 0$  (asukohas 2, JOONIS 24-14) ja veebasseini II poolses tehiskanali osas, koordinaadiga  $y = 0,4 \cdot (l/2)$  (asukohas 3, JOONIS 24-14);
- Arvutada reaalvedeliku voolukiiruse ja rõhukõrguse diagrammid veebasseini I poolses tehiskanali osas, koordinaadiga  $y = -0,4 \cdot (l/2)$  (asukohas 1, JOONIS 24-14), tehiskanali keskel, koordinaadiga  $y = 0$  (asukohas 2, JOONIS 24-14) ja veebasseini II poolses tehiskanali osas, koordinaadiga  $y = 0,4 \cdot (l/2)$  (asukohas 3, JOONIS 24-14);
- Määrata voolukiiruse ja vabapinna kõrguse diagrammid, milles on kasutatud massiühiku hõõrdejõu määramisel Fanningi ( $f = \lambda/4$ ) või Darcy ( $\lambda$ ) hõõrde-teguri valemit vastavalt:

$$\mathcal{F} = -\frac{f}{8 R_h} u|u| = -\frac{\lambda}{32 R_h} u|u| \approx -\frac{f}{8 H} u|u| = -\frac{\lambda}{32 H} u|u|.$$



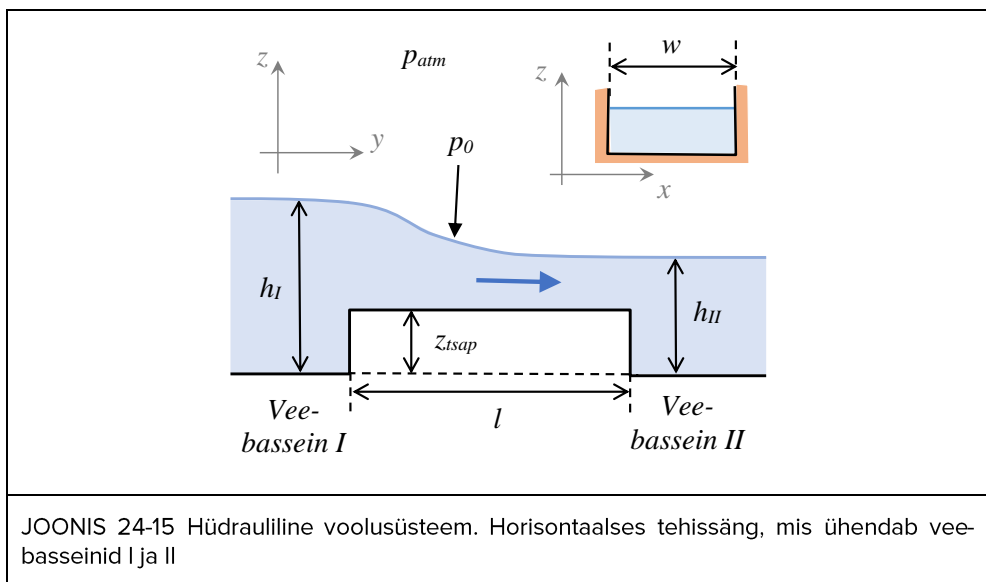
JOONIS 24-14 Horisontaalse tehissängiga ühendatud veebasseinid I ja II, mille vabapinna kõrguste erinevust reguleerib lüks

EELDUSED. Veebasseine I ja II ühendab pikk muutumatu ristlõikega, st prismaatiline tehissäng. Avatud lüksiga olukorras on vee voolamine tehissängis statsionaarne, mõõdukalt ebahütlane. Hüdraulilise voolusüsteemi kohttakistused tehissängi sisse- ja väljavoolus, ning lüksil on olulised, ning need arvestada kui tehissängi piirdega määratud hõõrdetakistuse suurenemine. Numbrilises arvutusskeemis kasutada madalvee võrrandite karakteristikliku kuju, mis võimaldab lõplike vahede meetodiga ilmutatud kujul määrata voolukiiruse ja veepinna kõrguse muutused kokkusurumatu (konstantse tihedusega vedeliku) voolamise puhul. Madalveelises voolusüsteemis  $H/l \ll 1$ , milles tehissängi pikkus on  $l$  ja veepinna keskmine kõrgus tehissängis on  $H$ . Madalveelise voolusüsteemi paisulaine liikumiskiirus  $c_{pl} = \sqrt{gH} = \text{konstant}$ .

## 24.4 LISAÜLESANNE. VEEPINNA KÕRGUS TEHISSÄNGIS

ANTUD. Horisontaalse aluspõhjaga tehisliskus voolusängis, mille pikkus  $l = 100$  m ja vabapinna laius  $W = 5$  m, on statsionaarne voolamine veebasseinide I ja II vahel. Vabapinna kõrgus võrdlusnivoost veebasseinis I on  $h_I = 5,0$  m ja veebasseinis II on  $h_{II} = 3,0$  m. (Veebasseinide I ja II vaheline lüüs on täielikult avatud.) Nelinurkristlõikega tehissängi ( $W = w$ , milles  $w$  on voolusängi aluspõhja laius) horisontaalpõhja kõrgus võrdlusnivoost  $z_{tsap} = 1,45$  m. Veebasseini I vee juhtimisel veebasseini II kasutatav lüüsi on täielikult avatud. Vabapinnaga voolusüsteemis on  $10$  °C temperatuuriga vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000$  kg·m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg·m<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>. Voolusüsteemi vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Arvutada vabapinna kõrgus, ning sellele vastav hüdrauliline lang ja Froude'i arv mõõdukalt ebaühtlasele voolamisele tehissängis.



EELDUSED. Veebasseini I ja II ühendab pikk muutumatu ristlõikega, st prismaatiline tehissäng. Avatud lüüsiga olukorras on vee voolamine tehissängis statsionaarne, mõõdukalt ebaühtlane. Hüdraulilise voolusüsteemi kohtkistused tehissängi sisse- ja väljavoolus, ning lüüsil on olulised, ning need arvestada kui tehissängi piirdega määratud hõõrdetakistuse suurenemine, st valida vastav Manningi karedustegur  $n_M = 0,0864$ . Vabapinna kõrgus määrata mõõdukalt ebaühtlase vabapinnaga voolamise diferentsiaalvõrrandiga kasutades selleks numbrilist arvutuskeemi ilmutatud kujul.

## LAHENDUS

### PÕHIVALEMID. Mõõdukalt ebahürtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand, Euleri valem

#### VALEMID

Mõõdukalt ebahürtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i_0 - I_h}{1 - Fr^2},$$

milles tehiskanali pikkus on  $l$ , hüdrauliline lang on  $I_h$ , põhjalang on  $i_0$  ja Froude'i arv on  $Fr$ . Mõõdukalt ebahürtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrandis võtame kasutusele lõplikud vahed vabapinna kõrguse ja voolupikkuse muutustele:

$$\frac{dh}{dl} \rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta l}.$$

#### ARVUTUSSKEEM

Kasutades numbrilist arvutusskeemi diferentsiaalvõrrandi lõplikule vahedele ilmutatud kujul:

$$\Delta l = \Delta h \frac{1 - Fr^2}{i_0 - I_h},$$

saame kasutusel võtta Euleri valemi ilmutatud kujul paisutuse mõjuulatuse määramisele:

$$l_{i-1} = l_i - \Delta h \frac{1 - Fr^2}{i_0 - I_h}.$$

#### ANDMED

Tehissängi aluspõhja laius:  $w = 5$  m

Tehissängi veepinna laius:  $W = 5$  m

Tehissängi pikkus:  $l = 100$  m

Voolusängi pikikalle, st tehissängi põhjalang:  $i_0 = 0$

Manningi karedustegur:  $n_M = 0,0864$

Vooluhulk:  $Q = 24,5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

Veepinna kõrgus üle tehissängi aluspõhja sissevoolus:  $h_I - z_{tsap} = h_{sv} = 3,55$  m

Veepinna kõrgus tehissängi aluspõhja väljavoolus:  $h_{II} - z_{tsap} = h_{vv} = 1,55$  m

ARVUTUS. Vabapinna kõrgus (mõõdukalt ebäühtlane voolamine)

Numbrilises arvutusskeemis on kasutatud algtingimust

$$l_1 = -50 \text{ m}$$

ja veepinna kõrguse muutuse puhul konstantset lõpliku vahet

$$\Delta h = 0,1 \text{ m} .$$

$h_i$ (m)	$A_e$ (m <sup>2</sup> )	$\chi$ (m)	$Fr$	$I_h$	$l_i$ (m)
3,5500	17,7500	12,1000	0,2339	$8,5326 \cdot 10^{-3}$	-50,0000
3,4500	17,2500	11,9000	0,2441	$9,1789 \cdot 10^{-3}$	-38,9213
3,3500	16,7500	11,7000	0,2551	$9,8982 \cdot 10^{-3}$	-28,6762
3,2500	16,2500	11,5000	0,2670	$10,7015 \cdot 10^{-3}$	-19,2311
3,1500	15,7500	11,3000	0,2798	$11,6019 \cdot 10^{-3}$	-10,5528
3,0500	15,2500	11,1000	0,2937	$12,6151 \cdot 10^{-3}$	-2,6085
2,9500	14,7500	10,9000	0,3088	$13,7601 \cdot 10^{-3}$	4,6347
2,8500	14,2500	10,7000	0,3252	$15,0599 \cdot 10^{-3}$	11,2093
2,7500	13,7500	10,5000	0,3431	$16,5426 \cdot 10^{-3}$	17,1474
2,6500	13,2500	10,3000	0,3627	$18,2427 \cdot 10^{-3}$	22,4810
2,5500	12,7500	10,1000	0,3842	$20,2032 \cdot 10^{-3}$	27,2417
2,4500	12,2500	9,9000	0,4080	$22,4778 \cdot 10^{-3}$	31,4608
2,3500	11,7500	9,7000	0,4343	$25,1340 \cdot 10^{-3}$	35,1692
2,2500	11,2500	9,5000	0,4635	$28,2585 \cdot 10^{-3}$	38,3975
2,1500	10,7500	9,3000	0,4963	$31,9626 \cdot 10^{-3}$	41,1759
2,0500	10,2500	9,1000	0,5330	$36,3917 \cdot 10^{-3}$	43,5341
1,9500	9,7500	8,9000	0,5745	$41,7379 \cdot 10^{-3}$	45,5013
1,8500	9,2500	8,7000	0,6217	$48,2591 \cdot 10^{-3}$	47,1064
1,7500	8,7500	8,5000	0,6758	$56,3064 \cdot 10^{-3}$	48,3775
1,6500	8,2500	8,3000	0,7381	$66,3668 \cdot 10^{-3}$	49,3425
1,5500	7,7500	8,1000	0,8107	$79,1287 \cdot 10^{-3}$	50,0283

JÄRELDUS. Lineaarsete madalvee võrranditega määratud veepinna muutus statsionaarsele voolamisele erineb oluliselt mõõdukalt ebaühtlase voolamise diferentsiaalvõrrandiga määratud vabapinna muutusest statsionaarsele voolamisele veebasseine ühendavas pikas horisontaalses, muutumatu ristlõikega, st prismaatilises tehissängis. Rayleigh' takistustegurit on lihtne kasutada vabapinnaga reaalvoolu numbrilises arvutusskeemis, aga see sobib pinnalainete modelleerimisele hüdraulilise voolusüsteemi lühikeses elemendis, nagu voolusäng milles võib konstantse voolukiiruse määrata väikese veepinna erinevusega.

**MÄRKUS.** Reaalvedeliku voolamise vabapinna lainetele võib kasutada samuti Fanningi takistustegurit, mis määrab takistusjõu  $\mathcal{F}$  sõltuvuse voolukiirusele astmes 2. Rayleigh' takistustegur määrab takistusjõu  $\mathcal{F}$  sõltuvuse voolukiirusele astmes 1. (VIIDE 24.3)

## 24.5 VIITED

- 24.1 Tamm ehitis. (2022, 25. jaanuar). *Wikipedia*. [https://et.wikipedia.org/wiki/Tamm\\_ehitis](https://et.wikipedia.org/wiki/Tamm_ehitis)
- 24.2 Dam failures. (2019, 4. jaanuar). *Energy Education*. [https://energyeducation.ca/encyclopedia/Dam\\_failures](https://energyeducation.ca/encyclopedia/Dam_failures)
- 24.3 Pratt, L. J. & Whitehead, J. A. (2007). *Rotating Hydraulics. Nonlinear Topographic Effects in the Ocean and Atmosphere*. Springer.
- 24.4 Kurkus, J., Karus, G., Pant, R., Remmel, A., Tomingas, E., Vei, E. jt. (1962). *Maaparanduse käsiraamat. Maaparanduse alused*. Eesti Riiklik Kirjastus.

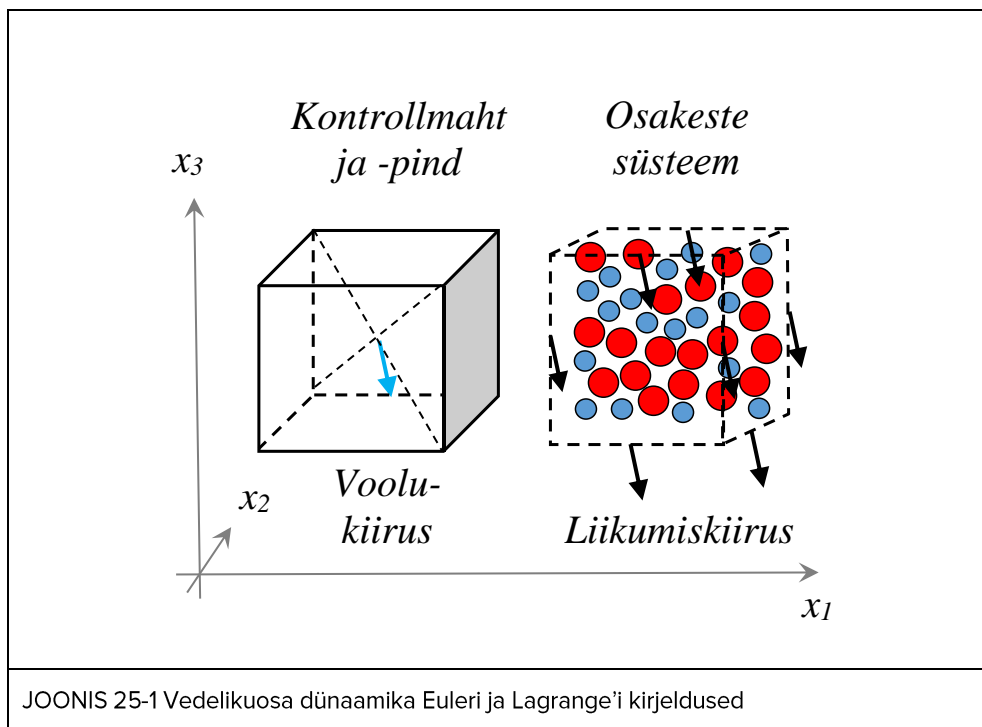
# V KOOSVOOLAMINE

## 25 TEOORIA. VOOLUPROTSSESSI VÖRRANDID

### 25.1 LIIKUMISE KIRJELDAMINE

Hüdromehaanika seadused arvestavad nii massi, voolamise liikumishulga kui ka energia jäävusega. Jäävusseadused võib esitada nii diferentsiaalsel kui ka integraalsel kujul. Seaduse diferentsiaalne kuju on rakendatav näiteks vedeliku „punktis“ ehk elementaarmahu juures ja integraalne kuju suurema, lõplike mõõtmetega vedeliku osas ehk kontrollmahus. Jäävusseaduste integraalsed kujud on määratud seaduste diferentsiaalsete kujudega. Integraalse seaduse matemaatiline kuju sõltub sellest, kas vaadata vedeliku fikseeritud mõõtmetega kontrollmahtu, millest vedelik (vesi) läbi voolab, või vedeliku liikuvat osa (pinnaga suletud vedelikuosakeste süsteemi). Vedeliku siseliikumise juures võib kasutada vedelikuosakeste süsteemiga kirjeldatud liikuvat vedeliku osa (vedeliku materiaalselt osa), mille liikumine on määratud vedelikuosa trajektoori raadiusvektoriga, mis on aja funktsioon. See on Lagrange'i meetod ehk nn liikuvate ja vastasmõjus olevate osakeste meetod. Samas võib arvutada ka kontrollmahu kiiruse, millega vedelikuosakeste süsteem fikseeritud ruumiosa läbib. See on Euleri meetod ehk nn kiirusvälja meetod. Fikseeritud elementaarmahu kohta arvatud kiirus defineerib voolukiiruse välja pidevalt. Materiaalne ruumala omistatakse vedeliku osale, mis on suletud pinnaga ja liigub abstraktselt koos vedelikuga. Vedelikemehaanika teoreetilistes ülesannetes kasutatakse fikseeritud ruumpunkti ehk elementaarmahtu ning praktilistes ülesannetes peamiselt ruumiosa ehk kontrollmahtu ja seda sulgevat pinda ehk kontrollpinda (VIITED 25.1 ja 25.2).





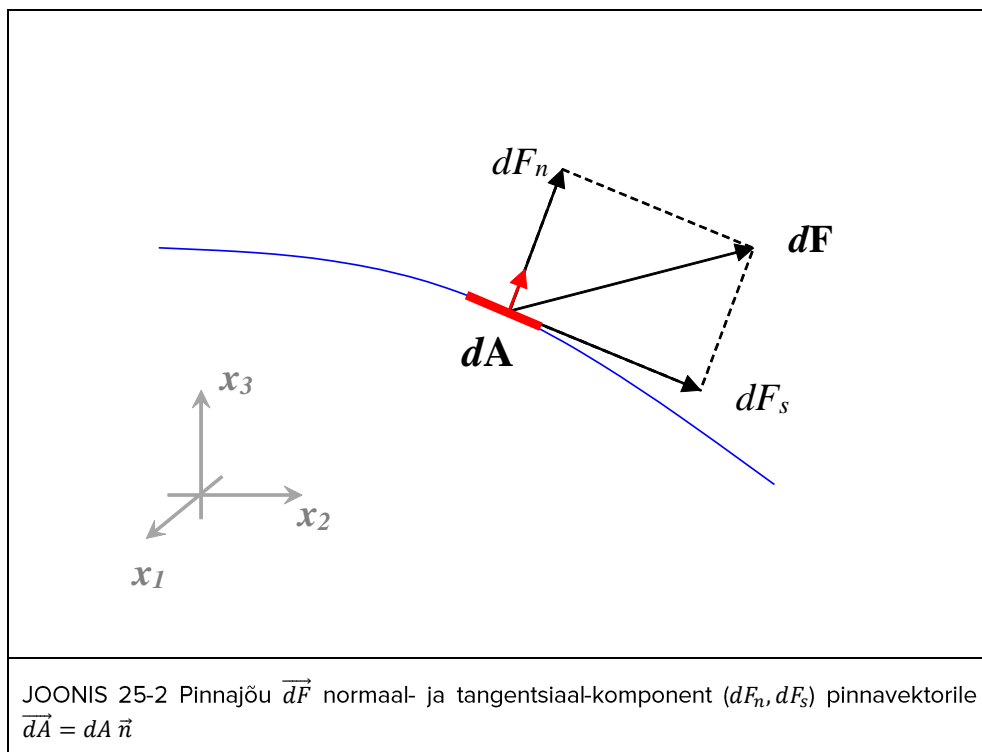
## 25.2 VEDELIKUS MÕJUVAD JÕUD

Massijõud on jõud, mis tungivad vedeliku igas osas ja on võrdelised vedeliku või gaasi massiga. Need jõud mõjuvad „eemalt“, st eksisteerivad tänu „globaalsele“ potentsiaali väljale, milles vedelik või gaas paikneb. Massijõu tiheduse võib anda kui gradiendi jõuvälja potentsiaalset, nagu näiteks raskuskiirenduse vektori, mis on määratud gradiendiga gravitatsioonivälja potentsiaalset  $\Phi$ :

$$\vec{g} = -\nabla\Phi.$$

25-1

Pinnajõud on jõud, mis eksisteerib vedelikus tänu „kokkupuutele“, st mõjuvad igale valitud pinnale vedelikus. Pinnajõud on antud mõjupinna suurusega ja seetõttu määratakse pindala ühikule. Pinnajõu moodulit  $|\vec{dF}|$  pindalaühikule nimetatakse pingeks. Pinnajõu  $\vec{dF}$  mingile vedelikus valitud pinnale, mis on määratud vektoriga  $\vec{dA}$ , võib esitada  $dF_n$  normaal- ja  $dF_s$  tangentsiaal-komponentide kaudu valitud koordinaatsüsteemis.



Normaal- ja tangentsiaalpinge on defineeritud vastavalt kui

$\tau_n = \frac{dF_n}{dA},$	25-2
-----------------------------	------

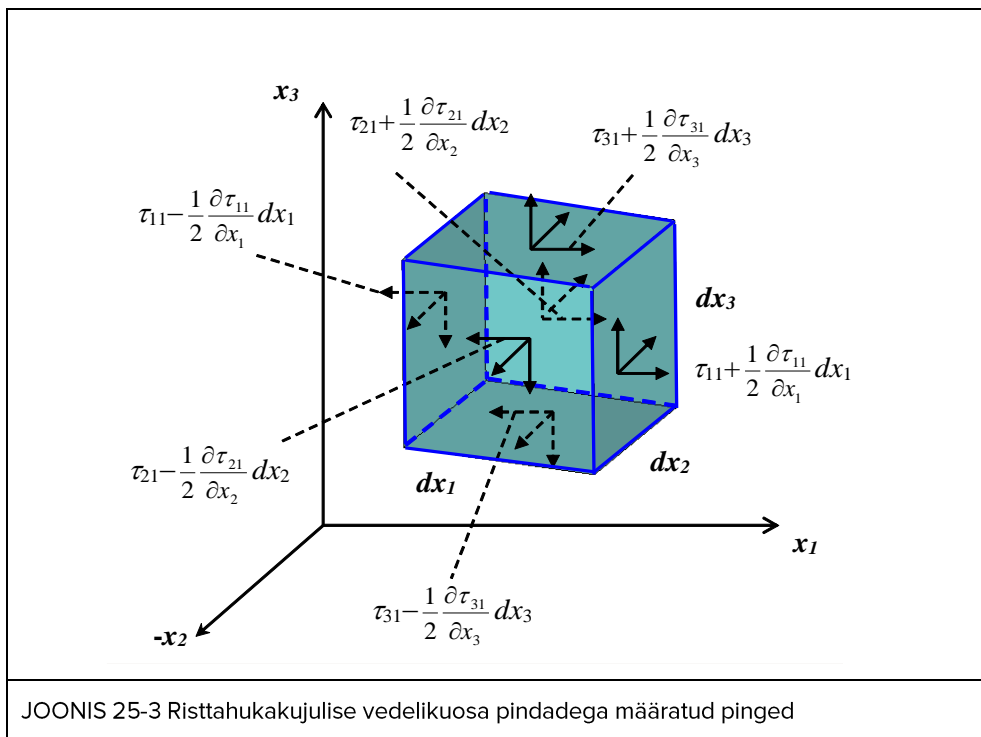
$\tau_s = \frac{dF_s}{dA}.$	25-3
-----------------------------	------

Pinged on skalaarsed pinnajõu komponendid pindala ühikule. Tasakaalulise vedeliku (ja ka „liikumatu“ gaasi) olukorras on pinnajõuvektor alati risti mistahes suunas orienteeritud pinnaga, st tasakaalulisele vedelikule puuduvad tangentsiaalpinge komponendid. Kui normaalpinge toimel surutakse vedeliku osa kokku, siis nimetatakse integraalset survepinget rõhuks  $p$  ( $[p] = \text{N} \cdot \text{m}^2 = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} = \text{Pa}$ ). Gaasides on normaalpinge alati suunatud aine sisse, ning seetõttu on tegemist termodünaamilise rõhuga  $p$  ( $[p] = \text{J}/\text{m}^3 = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} = \text{Pa}$ ). Tahkeid aineid võib „sisejõu“ mõjul nii kokku suruda kui ka venitada, viimasel juhul võib normaalpinget nimetada tõmbepingeks (integraalne tõmbepinge on „negatiivne rõhk“). Vedelikus on tänu sisepindade pindpinevuse nähtusele võimalik tekitada nn negatiivset rõhku. Pindpinevusjõud on nn joonejõud, mis toimib vedeliku pinna ja gaasi, ning tahke piirde kokkupuute joonel, ning jõud ise on võrdeline kontaktjoone pikkusega. Pindpinevusjõud vedelikus eksisteerib tänu üksteisele lähedal asetsevate

molekulide vahelistele tõmbejõududele. Kauguse kasvades vedeliku molekulidevaheline mõju üksteisele väheneb suhteliselt kiiresti. Seetõttu vedeliku vabapind tahke keha pinna lähedal kõverdub suhteliselt väikeses ulatuses ( $\sim 1$  cm). Pindpinevusjõudu kontaktjooneühikule nimetatakse pindpinevusteguriks  $\delta$ . Pindpinevusjõu toimed tekivad ka erinevate vedelike vahepindade kõverdumised, näiteks moodustuvad „kergema“ (väiksema tihedusega) vedeliku mullid „raskema“ (suurema tihedusega) vedeliku sees, või „raskema“ (suurema tihedusega) vedeliku tilgad „kergema“ (väiksema tihedusega) vedeliku sees. Tuleb märkida, et vedelike sisepindade kõverdumised, st segunemise tingimused sõltuvad oluliselt vedeliku osakeste elektrilistest omadustest. Vedelike ja gaaside lahustuvus nende segunemisel sõltub molekulide polaarsusest, mis määrab molekulide vahelised mõjud, st kas molekulide liikumisele on olemas nn vabateepikkus või see puudub. Sellel põhjusel sõltub ka vedeliku (vee) ja gaaside segu (õhu) viskoossustegur temperatuurist erinevalt. Samades termodünaamilistes tingimustes asetsevad molekulid vees üksteisele tunduvalt lähedamal kui õhus. Näiteks vee viskoossus on eelkõige molekulaarsetest tõmbejõududest. Soojendamisel vee molekulide vahelised tõmbejõud nõrgenevad, ning seetõttu väheneb ka sisehõõrdumise toime voolamise puhul. Õhus sõltub viskoossus molekulide korrapärase liikumisega seotud omavaheliste põrgete intensiivsusest. Temperatuuri kasvades õhu molekulide põrgete intensiivsus suureneb, ning seetõttu suureneb ka sisehõõrdumise toime voolamisele. Vedelike (vee) ja gaaside (maagaas) voolamise sõltuvus temperatuurist on üks põhjus, miks Maakera paras- ja polaarvöötme linnade ja nende vahelised tehnovõrkude veetrassid isoleeritakse väliskeskkonnast soojuslikult, aga gaasitrassid ei isoleerita. Erinevate vedelike ja gaaside lahustuvuse tingimused nende segunemisel on otseselt seotud ka emulsiooni tekkimisega.

### 25.3 LIIKUMISHULGA JÄÄVUS

Tuletame liikumishulga jäävusseaduse diferentsiaalse kuju kasutades Newtoni II seadust elementaarselt väikse vedeliku nn materiaalse osa liikumisele. Selleks vaatame liikuvast vedelikust eraldatud elementaarristtahukat, mis on määratud materiaalse ruumalaga.



Newtoni II seadus väidab, et vedelikuosa massi ja selle liikumiskiirenduse korrutis on määratud vedelikuosale mõjuvate jõudude summaga. Pinnajõudude summa  $x_1$  –telje suunas:

$$\begin{aligned} & \left( \tau_{11} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} dx_1 - \tau_{11} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 + \\ & \left( \tau_{21} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} dx_2 - \tau_{21} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 + \\ & \left( \tau_{31} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} dx_3 - \tau_{31} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 = \\ & \left( \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial \tau_{j1}}{\partial x_j} d\vartheta, \end{aligned}$$

milles  $d\vartheta$  tähistab elementaarristtahuka (diferentsiaalselt väikese vedeliku osa) ruumala.

Vastavalt saab tuletada pinnajõudude resultandi ka  $x_2$  – telje suunas:

$$\begin{aligned} & \left( \tau_{22} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} dx_2 - \tau_{22} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_3 dx_1 + \\ & \left( \tau_{32} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} dx_3 - \tau_{32} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 + \end{aligned}$$

$$\left(\tau_{12} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} dx_1 - \tau_{12} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 dx_3 =$$

$$\left(\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial \tau_{j2}}{\partial x_j} d\vartheta,$$

ning  $x_3$  –telje suunas

$$\left(\tau_{33} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} dx_3 - \tau_{33} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 dx_2 +$$

$$\left(\tau_{13} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} dx_1 - \tau_{13} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 dx_3 +$$

$$\left(\tau_{23} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} dx_2 - \tau_{23} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_3 dx_1 =$$

$$\left(\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial \tau_{j3}}{\partial x_j} d\vartheta.$$

Üldjuhul on pinnajõudude resultant vedeliku osale määratud kui

$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} d\vartheta,$	25-4
---	------

milles on kasutanud pingetensori sümmeetria omadust  $\tau_{ji} = \tau_{ij}$ . Raskusjõud massiühikule on massijõu kiirendusvektor  $\vec{g} = (0, 0, -g)$ , milles  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , ning seega on ruumalaühiku massijõud  $\rho \vec{g}$ , milles vedeliku tihedus on  $\rho$ .

Fikseeritud elementaarsele kontrollmahule, st elementaarmahule on Newtoni II seaduse diferentsiaalne kuju määratud kui

$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j},$	25-5
--	------

milles on kasutatud nn materiaalse tuletise reeglit:

$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}.$	25-6
---	------

**MÄRKUS.** Kontrollmahu ülesandes ei sõltu pinnajõud sarnsaelt raskusjõuga taustsüsteemi valikust ehk suhtelisest kiirusest.

Voolukiiruse vektor ja selle komponendid on

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3).$$

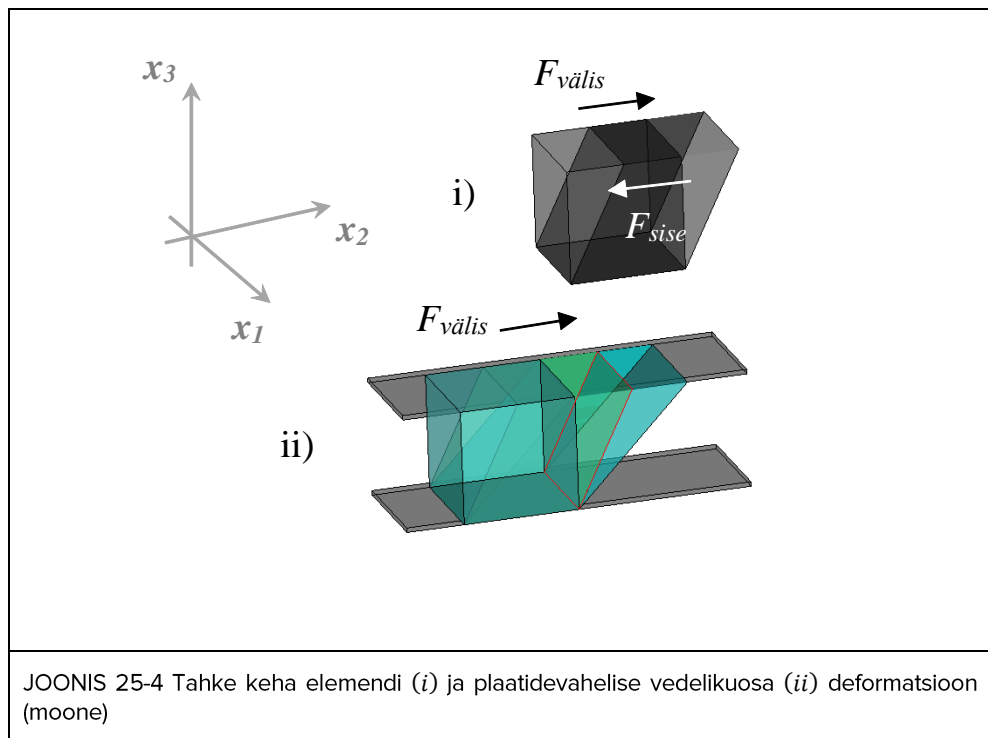
Voolukiirenduse vektor ja selle komponendid on

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3),$$

milles

$a_1 = \frac{Du_1}{Dt} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) u_1$ $= \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3},$ $a_2 = \frac{Du_2}{Dt} = \frac{\partial u_2}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) u_2$ $= \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3},$ $a_3 = \frac{Du_3}{Dt} = \frac{\partial u_3}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) u_3$ $= \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$	25-7
---	------

Voolamise liikumishulga diferentsiaalvõrrand seob vedelikuosa lokaalse liikumiskiirenduse, st voolukiirenduse pidevas keskkonnas nn vedelikuosale „lokaalselt“ mõjuvate jõudude resultandiga, ning see kehtib nii vedelikule kui ka gaasile sõltumata pingetensori seosest deformatsiooni väljaga. Newtoni II seaduse liikumisvõrrandit, mis kehtib lisaks vedelikul ja gaasile, samuti tahkele pidevale keskkonnale tuntakse kui Cauchy' liikumisvõrrandit, VIITED 25.3 ja 25.4).



JOONIS 25-4 Tahke keha elemendi (i) ja plaatidevahelise vedelikuosa (ii) deformatsioon (moone)

Erinevalt tahke keha elemendi deformatsioonist, milles element deformeerub seni kuni „sisejõud“ tasakaalustab „välisjõu“, võib vedelikuosa moonuda lõpmatuseni. Erinevalt tahkest kehast, puudub vedelikuosal kujuelastsus, näiteks vesi võtab alati täidetud anuma kuju. Sarnaselt tahke kehaga on vedelikuosal olemas mahuelastsus, st vedelikuosa ruumala on „raske“ muuta.

Voolamise liikumishulga jäävusseaduse integraalkuju tuletamisel peab lisaks vedeliku kontrollmahus  $V$  toimivale massijõule määrama ka pinnajõudude summa ruumiosa sulgeval pinnal  $A$ , st kontrollpinnal. Pinnajõudu pindalaühikule võib arvutada kui  $\vec{n} \cdot \tau$ , milles  $\vec{n}$  on kontrollmahu pinnaosa välisnormaal. Elementaarselt väiksele pinnale vektoriga  $\vec{dA}$  mõjuv pinnajõud määratakse kui  $\vec{dA} \cdot \tau$ , milles  $\vec{dA} = dA \vec{n}$ . Newtoni II ja III seaduste järgi võime väita, et liikumishulga muutus koordinaatsüsteemi suhtes fikseeritud kontrollmahule  $V$  peab olema määratud ruumiosa massile mõjuva massijõudude ja ruumiosa sulgeval pinnal mõjuvate pinnajõudude summaga:

$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_i dV = \int_V \rho g_i dV + \int_A \tau_{ij} dA_j .$	25-8
--	------

Vedelikus fikseeritud kontrollmahule rakendub reegel:

$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_i dV = \int_V \frac{D}{Dt} (\rho u_i) dV .$	25-9
---	------

Kasutades Gaussi teoreemi:

$\oint_S (\vec{F})_n dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV ,$	25-10
---	-------

võib integraalses voolamise liikumishulga võrrandi viimases liikmes nn pinnajõudude liikmes pindintegraali asendada ruumintegraaliga, ning voolamise liikumishulga võrrandi integraalse kuju esitada kui

$\int \left[ \rho \frac{Du_i}{Dt} - \rho g_i - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right] dV = 0 ,$	25-11
--	-------

milles Cauchy' liikumisvõrrand on

$\rho \frac{Du_i}{Dt} - \rho g_i - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 .$	25-12
---	-------

Integraalse voolamise liikumishulga võrrandi põhjal võib väita, et vedelikuosale kontrollmahus  $V$  on integraalne voolamise liikumishulga ajalise muutuse ja voolamisel liikumishulga integraalse voo summa kontrollpinnale määratud sellele mõjuvate integraalsete massi- ja pinnajõudude resultandiga ainult

siis, kui ka elementaarmahule  $dV$  on voolamise liikumishulga ajalise muutuse, voolamisel liikumishulga voo summa elementaarmahu kontrollpinnale ja sellele mõjuvate massi- ja pinnajõudude resultant nullväärtusega, st kontrollmahule integreeritav funktsioon on nullväärtusega iga vedeliku „punktile“. Kui vedelik on tasakaaluline, ning massijõududest mõjub ainult raskusjõud, siis Cauchy' liikumisvõrrandi ( $u_i = 0$ ) järgi mõjub ühel ja samal sügavusel olevale vedelikuosale sama rõhk. Pascali seadus väidab, et vabapinnale mõjuv rõhk kandub muutumatuna edasi vedeliku igasse ossa. Pascali seadus jääb kehtima ka voolavas vedelikus, st voolukiirusega määratud rõhk kandub vedelikus muutumatuna edasi.

## 25.4 NEWTONI VEDELIK

Newtoni vedelikule on pinged ja vastavad vedelikuosa moonetega seotud kiirusnihked lineaarses sõltuvuses. Kui vedelik ei voola, siis mõjuvad vedelikus ainult normaalpinged, mis ei sõltu valitud pinna orientatsioonist vedelikus. Pingetensor  $\tau$  on siis isotroopne tensor. (Isotroopseks tensoriks nimetatakse tensorit, mille komponendid ei muutu koordinaatsüsteemi orientatsiooni muutmisel.) Ainuke võimalik 2-järku isotroopne tensor on Kroneckeri delta:

$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$	25-13
--	-------

Tasakaalulisele vedelikule on normaalpingetega määratud rõhk isotroopne, ning pingetensori võib esitada Kroneckeri delta kaudu järgmiselt:

$\tau_{ij} = -p \delta_{ij},$	25-14
-------------------------------	-------

milles  $p$  on termodünaamiline rõhk. Näiteks tasakaalulises gaasis sõltub rõhk ainult tihedusest  $\rho$  ja temperatuurist  $T$ . Termodünaamikast on teada ideaalse gaasi olekuvõrrand  $p = \rho R T$ , milles  $R = R_u/m = 287 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  on ideaalse gaasi konstant kuivale õhule. Universaalne gaasi konstant on  $R_u = 8314,36 \text{ J} \cdot \text{kmol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ja õhu molaarmass  $m = 28,966 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$ .

Seoses vedeliku (ka gaasi) sisehõrdele, st viskoossusele, mis on seotu molekulaarset tüüpi difusiooniga, tekivad voolavas vedelikus peale normaalpingete ka tangentsiaalpinged. Seetõttu on pingetensoril kaks liiget, millest esimene on normaalpingeid kirjeldav liige  $-p\delta_{ij}$  ja teine liige  $\sigma_{ij}$  määrab tangentsiaalpinged:

$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma_{ij}.$	25-15
---	-------



Pingetensori mitteisotroopsed komponendid  $\sigma_{ij}$  võib siduda vedelikuosa moonde kiirusnihetega, st voolukiiruse gradiendi tensoriga  $\partial u_i / \partial x_j$ . Kiirusnihetest koosneva tensori võib jagada sümmeetriliseks ja mittesümmeetriliseks liikmeks:

$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = S_{ij} - \varepsilon_{kij} \Omega_k,$	25-16
--	-------

milles voolamise kiirusvälja rootor (nn keeriste pööriselisus) määrab nurkkiiruse:

$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = 2 \vec{\Omega},$	25-17
--	-------

ning permutatsioonkordaja on

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \\ -1 & (1,3,2), (3,2,1), (2,1,3) \\ 0 & i = j, k \quad j = k \quad k = i = j \end{cases}.$$

Oleme eeldanud, et Newtoni vedelikule on pingetensor igale „punktile“ sümmeetriline ( $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ), ning seetõttu seome pingetensori komponendid ainult kiirusgradiendi tensori sümmeetrilise osaga. Kiirusgradiendi mittesümmeetriline osa määrab kiirusvälja pööriselisuse (ingl. *vorticity*).

Kiirusgradiendi tensori sümmeetriline osa on

$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$	25-18
--	-------

Pideva kokkusurumatu vedeliku eeldusel

$\nabla \cdot \vec{u} = 0$	25-19
----------------------------	-------

võime Newtoni vedeliku pingetensori esitada kujul:

$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2 \mu S_{ij}.$	25-20
--	-------

milles  $\mu$  on dünaamiline molekulaarne viskoossustegur, mõõtühikuga  $[\mu] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Homogeense vedeliku (nagu ühtlase temperatuuri ja sama keemilise koostisega vesi) puhul võib kasutada kinemaatilist molekulaarset viskoossustegurit  $\nu = \mu / \rho$ , mis on määratud dünaamilise viskoossusteguri ja tiheduse suhtega, mõõtühikuga  $[\nu] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Newtoni vedeliku põhiseose järgi võime kiirusnihetest sõltuva pinge ehk pingetensori mitteisotroopse osa määrata valemiga:

$\sigma_{ij} = 2 \mu S_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$	25-21
--	-------

mis näitab, et viskoosses vedelikus on hõõrdepinge määratud vedeliku elementaarselt väikese osa normaal- ja nihkedeformatsiooniga, ning selles ei kasutata otseselt kiirusvälja roortorit ( $\omega_k = \epsilon_{kji} \partial u_i / \partial x_j$ ). See on üks peamisi eeldusi Newtoni vedeliku voolamisele, mis matkib jäiga keha pöörlemist, ning matemaatiliselt vastab pöörisvaba keerisvoolu tingimustele. Viskoossuse olemasolu vedelikus on määratud kiirusvälja pööriselisusega ( $\vec{\omega} \neq 0$ ). Tuleb märkida, et hõõrdepinge tensor sisaldab nii nihke- kui ka normaalviskoossuse komponente. Näiteks madalveelisele voolamisele, milles on olemas vabapind ja seetõttu praktiliselt puudub vedelikuosa kokkusurutavus, st normaalviskoossus, jagatakse nihkeviskoossuse komponendid nii vertikaal- kui ka horisontaalviskoossuse komponentideks.

## 25.5 VOOLAMISE LIIKUMISHULGA VÖRRAND

Newtoni vedeliku liikumisvõrrandid saadakse Cauchy' liikumisvõrrandist, milles pingeid kirjeldav liige antakse Newtoni vedeliku põhiseosega:

$\rho \frac{Du_i}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (2 \mu S_{ij}),$	25-22
---	-------

milles on kasutatud seost  $(\partial p / \partial x_j) \delta_{ij} = \partial p / \partial x_i$ . Homogeense vedeliku eeldusel, milles dünaamiline molekulaarne viskoossustegur ( $\mu = konstant$ ) ja tihedus ( $\rho = konstant$ ) on konstantsed suurused kogu vedeliku ulatuses, võime voolamise liikumishulga diferentsiaalvõrrandi teisendada kujule:

$\rho \frac{Du_i}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + 2 \mu \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \nabla^2 u_i,$	25-23
---	-------

milles on kasutatud Laplace'i skalaaroperaatorit:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Hamiltoni vektoroperaator on

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

Voolamise liikumishulga võrrandi hõrdejõu liikmes on Laplace'i skalaaroperatorit rakendatud kiirusvektori komponendile  $u_i$ , ning korrutatud see dünaamilise molekulaarse viskoossusteguriga:

$$\Delta u_i \equiv \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2},$$

$\mu \Delta u_i$ .

**MÄRKUS.** Gradient skalaarsest funktsioonist  $\phi$  on vektorfunktsioon, ning seetõttu võib rakendada divergentsi ja rootori operaatoreid vastavalt:  $\text{div}(\text{grad } \phi) = \nabla(\nabla\phi) = \nabla \cdot \nabla\phi = \Delta\phi$  ja  $\text{rot}(\text{grad } \phi) = [\nabla, \nabla\phi] = \nabla \times \nabla\phi = 0$ .

Kokkusurumatu vedeliku Navier-Stokesi võrrandi vektorkuju on järgmine

$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \nu \Delta \vec{u},$	25-24
---	-------

milles  $\nu = \mu/\rho$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur. Temperatuuril 10 °C on puhta vee tihedus  $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu = 1,307 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . (Temperatuuril 10 °C on kuiva õhu tihedus  $\rho \approx 1,247 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu = 1,76 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,41 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .) Puhta vee (ja kuiva õhu) tihedused on antud atmosfääri rõhul  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

Tasakaalulise vedeliku, st raskusväljas fikseeritud vedeliku osa välispinnal toimivat integraalset pinnajõudu survele nimetatakse üleslükkejõuks. Archimedese seadus väidab, et liikumatu vedeliku osa kaal määrab üleslükkejõu samale vedeliku osale. Kui vedeliku osa soojendada, siis selle kaal oleks väiksem kui üleslükkejõud samale vedeliku osale, st vedeliku osa „hõljuks“, ning kui vedeliku osa jahutada, siis selle kaal oleks suurem kui üleslükkejõud samale vedeliku osale, st vedeliku osa „upuks“. Nn seisev vedelik on liikuva vedeliku erijuht kiirusväljaga  $\vec{u} = 0$ . Tasakaalulise vedeliku erijuhul  $\vec{u} = 0$ :

$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g},$	25-25
---	-------

milles massijõu kiirendusvektori ja tiheduse korrutis määrab vedeliku rõhugradiendi. Erijuhul, kui massijõududest esineb ainult raskusjõud, st  $\vec{g} = (0, 0, -g)$ , on vedeliku rõhk määratud hüdrostaatika tingimusega:

$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g.$	25-26
--	-------

## 25.6 EULERI VÖRRAND

Kui vedeliku voolamisele ühel või teisel põhjusel jätta arvestamata hõõrdejõud  $\mu \Delta u_i$ , siis võib voolamise liikumishulga võrrandi esitada kujul:

$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g},$	25-27
--	-------

milles voolukiirenduse vektor on

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}.$$

Ideaalvedeliku voolamise liikumisvõrrandit tuntakse kui Euler'i võrrandit. Ideaalvoolu matemaatiliselt lihtsustatud juhul arvestatakse normaalpingeid vedelikus, ning jäetakse arvestamata viskoossusest sõltuvad tangentsiaalpinged vedelikus ühel või teisel põhjusel, mis on seotud nii füüsikalise tingimuse  $\nu = 0$  kui ka kiirusvälja omadustega  $\Delta \vec{u} = 0$ .

## 25.7 MEHAANILISE ENERGIA JÄÄVUS

Võrrandi kineetilise energia muutuse määramisele saab tuletada Cauchy' liikumisvõrrandi ja kiirusvektori  $u = (u_1, u_2, u_3)$  skalaarkorrutise kaudu:

$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} u_i^2 \right) = u_i \rho g_i + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j},$	25-28
--	-------

milles  $u_i^2$  on summa  $u_i u_i = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ . Esitatud skalaarvõrrandit tuntakse kui kineetilise energia muutuse teoreemi, mille järgi on massiühiku kineetilise energia muutus määratud ruumalaühiku massijõu  $\rho \vec{g}$  ja pinnajõu  $\nabla \tau$  „tööde“ summaga. Kui rakendada Cauchy' liikumisvõrrandi ja kiirusvektori  $u = (u_1, u_2, u_3)$  skalaarkorrutise võrrandit pöörlevas taustsüsteemis, siis tuleks arvestada täiendavate mitteinertsiaalse taustsüsteemi jõududega, so Coriolise jõud ja tsentrifugaaljõud. Coriolise jõud, mis mõjub alati voolusuunaga risti tööd ei tee, kuid tsentrifugaaljõud muudab vedelikuosas salvestunud rõhuenergiat.

Massijõu (raskusjõu) võimsuse kineetilise energia muutuse teoreemis võib interpreteerida kui vedeliku osa „kõrguse“ muutuse ehk materiaalse ruumalaga määratud nn potentsiaalse asendienergia muutust. Olgu massijõu tihedus antud skalaarse potentsiaali  $\Phi$  gradiendiga:  $-\nabla \Phi = -\nabla(gz)$ , milles  $z = x_3$ . Kineetilise energia muutuse teoreemis võime massijõu võimsuse esitada kui  $u_i g_i = -u_i \partial(gz)/\partial x_i$ . Eeldame, et skalaarne potentsiaal ei sõltu ajast, st  $\partial(gz)/\partial t$ , ning

seetõttu võime rakendada materiaalse tuletise võtmise reeglit:  $u_i g_i = -D(gz)/Dt$ . Kineetilise energia muutuse teoreem teiseneb siis kujule:

$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} u_i^2 + g z \right) = u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}.$	25-29
---	-------

Pinnajõudude töö kineetilise energia muutuse teoreemis on antud kui rõhujõu ja hõõrdejõu võimsuste summa

$u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}.$	25-30
---	-------

Statsionaarsele voolamisele on rõhk vedeliku iga „punkti“ jaoks muutumatu, st  $\partial p / \partial t = 0$ , ning seetõttu võime kasutada materiaalse tuletise võtmise reeglit:

$$\frac{Dp}{Dt} = u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Homogeense vedeliku eeldusel teiseneb kineetilise energia muutuse teoreem kujule:

$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} u_i^2 + g z + \frac{p}{\rho} \right) = u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j},$	25-31
--	-------

milles Bernoulli kolmikliikme  $B = u_i^2 / 2 + g z + p / \rho$  võimsuse täismuutus määrab mehaanilise erienergia muutuse sõltuvalt hõõrdejõu võimsusest (nn survekadu voolutorus).

## 25.8 KINEETILINE ENERGIA

Defineerime voolamise kineetilise energia ruumalaühikule  $E \equiv \rho u_i^2 / 2$ . Kineetilise energia võrrandi võib tuletada voolamise liikumishulga võrrandist, mida on kombineeritud pidevuse võrrandiga. Korrutame ruumalaühiku kineetilise energia voolamise pidevuse võrrandiga:

$\frac{1}{2} \rho u_i^2 \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) \right] = 0.$	25-32
--	-------

Liites saadud võrrandi kineetilise energia teoreemi avaldisega komponentide kaupa, järeldub skalaarvõrrand:

$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho u_i^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ u_j \frac{1}{2} \rho u_i^2 \right] = \rho u_i g_i + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}.$	25-33
---	-------

Kineetilise energia võrrand vektorkujul:

$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} E) = \vec{u} \cdot \vec{g} \rho + \vec{u} \cdot (\nabla \cdot \tau),$	25-34
--	-------

milles

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (u E) = \frac{DE}{Dt} + E (\nabla \cdot \vec{u}),$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i E) = \frac{\partial E}{\partial t} + u_i \frac{\partial E}{\partial x_i} + E \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Kineetilise energia võrrandi järgi saavad massi- ja pinnajõud suurendada või vähendada vedeliku ruumalaühiku kineetilist energiat, kui jõuvektor  $\vec{F}$  ei ole risti kiirusvektoriga  $\vec{u}$ , st massi- ja pinnajõudude projektsioonid voolamise suunas on vastavalt positiive või negatiivse väärtusega.

Kineetilise energia võrrandis määrab vektori  $\vec{u} E$  divergents  $\nabla \cdot (\vec{u} E)$  Gaussi teoreemi järgi integraalselt kineetilise energia voo  $(\vec{u} \cdot \vec{dA}) E$  läbi fikseeritud ( $\vec{u} = \vec{u}_r$ ) ruumiosa sulgeva pinna  $A$ , st annab kineetilise energia koguvoo kontrollmahule. Kui kineetilise energia muutuse nn allikad/need puuduksid, st ruumalaühiku massijõud  $\vec{g} \rho$  ja pinnajõud  $\nabla \cdot \tau$  tööd ei teeks, siis kineetilise energia võrrandi järgi saaks ruumalaühiku kineetiline energia vedeliku „punktis“ ajas muutuda kui selle voog elementaarruumala jaoks samuti mingil põhjusel muutub.

Esitame kineetilise energia võrrandi integraalse kuju kontrollmahule, mis on fikseeritud. Ruumalaühiku kineetilise energia muutus kontrollmahus on

$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{1}{2} \rho u_i^2 \right) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho u_i^2 \right) dV,$	25-35
--	-------

milles integraalavaldise ajaline tuletis ruumalaühiku kineetilisest energiast  $E \equiv \rho u_i^2 / 2$  on võetud integraali sees, kuna rakendub reegel fikseeritud kontrollmahu suurusele. Kineetilise energia voog läbi ruumis fikseeritud kontrollpinna  $S$  on määratud vedeliku voolukiirusega

$\int_A E \vec{u} \cdot \vec{dA} = \int_V \nabla \cdot (\vec{u} E) dV,$	25-36
---	-------

milles on Gaussi teoreemi kaudu on kineetilise energia integraalavaldises pindintegraali asemel võetud kasutusele ruumalaintegraal.

Kineetilise energia võrrandi integraalne kuju on

$\int_V \left[ \frac{DE}{Dt} + E (\nabla \cdot \vec{u}) \right] dV = \int_V \rho \vec{g} \cdot \vec{u} dV + \int_A u_i \tau_{ij} dA_j.$	25-37
---	-------

Kineetilise energia integraalvõrrand kehtib kontrollmahule tingimusel, et kineetilise energia diferentsiaalvõrrand on kehtiv vedeliku igale „punktile“. Pinnajõudude võimsuse võib jagada vastavalt rõhu- ja hõõrdejõu võimsuseks:

$u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j},$	25-38
---	-------

ning kokkusurumatu vedeliku eeldusel ( $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ ) saab seda kasutada ainult kineetilise energia  $0,5 u^2 \rho$  muutmisele vedelikus.

## 25.9 TERMODÜNAAMIKA SEADUSED

Pinnajõudude töö sidumisel vedeliku siseenergia  $w$  muutusega eeldame, et vedelik on kokkusurutav, st  $\nabla \cdot \vec{u} \neq 0$ . Kokkusurutava vedeliku eeldusel võib kineetilise energia vähenemine olla põhjuslikult seotud ka siseenergia  $w$  juurdekasvuga. Kineetilise energia muutuse teoreemis on pinnajõudude võimsus määratud kui rõhu- ja hõõrdejõu võimsus  $u_i \partial \tau_{ij} / \partial x_j$ . See ei ole aga pinnajõude koguvõimsus, sest osa võimsusest võib energia liikumise kaskaadis muutuda ka vedeliku ruumiosa deformatsiooni võimsuseks, st lineaar- ja nihkedeformatsiooni võimsuseks. Seetõttu on pinnajõudude kogutöö määratud kui

$\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \tau_{ij}) = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$	25-39
---	-------

mille esimene liige näitab vedeliku osa deformatsiooni võimsust ja teine liige on tuttav pinnajõudude võimsus. Kuidas on deformatsiooni võimsus seotud Poissoni efektiga?

Vedeliku osa deformatsiooni võimsuse võib esitada kiirusnihete sümmeetrilise tensori kaudu:

$\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \tau_{ij} S_{ij},$	25-40
---	-------

milles  $S_{ij}$  on kiirusnihete tensori sümmeetriline liige. Esitatud deformatsiooni võimsuse valemi järgi on eeldatud, et kiirusnihete tensori mittesümmeetriline osa tööd ei tee. Näidata iseseisvalt, et mittesümmeetrilise ja sümmeetrilise 2-järku tensorite korrutis on alati sümmeetriline 2-järku tensor.

Kokkusurutava Newtoni vedeliku jaoks esitatakse pingetensori komponendid järgmiselt:

$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2 \mu S_{ij} + \left( \mu_\vartheta - \frac{2}{3} \mu \right) (\nabla \cdot \vec{u}) \delta_{ij}.$	25-41
--	-------

Vedeliku osa deformatsiooni võimsus määratakse avaldisega:

$\begin{aligned}\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \tau_{ij} S_{ij} = -p (\nabla \cdot \vec{u}) + 2 \mu S_{ij} S_{ij} + \left( \mu_\vartheta - \frac{2}{3} \mu \right) (\nabla \cdot \vec{u})^2 \\ &= -p (\nabla \cdot \vec{u}) + \varphi,\end{aligned}$	25-42
--	-------

milles on kasutanud samasust  $S_{ij} \delta_{ij} = S_{ii} = \nabla \cdot \vec{u}$ . Vedeliku osa viskoosne dissipatsioon on defineeritud suurusega

$\varphi = 2 \mu S_{ij} S_{ij} + \left( \mu_\vartheta - \frac{2}{3} \mu \right) (\nabla \cdot \vec{u})^2,$	25-43
--	-------

mille liikmetes  $\mu$  on dünaamiline (tangentsiaal) molekulaarne viskoossustegur (ingl. *shear viscosity*), mõõtühikuga  $[\mu] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  ja  $\mu_\vartheta$  on dünaamiline (normaal) molekulaarne viskoossustegur (ingl. *bulk viscosity*), mõõtühikuga  $[\mu_\vartheta] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Homogeense vedeliku (nagu ühtlase temperatuuri ja sama keemilise koostisega vesi) puhul võib kasutada kinemaatilist molekulaarset viskoossustegurit  $\nu = \mu/\rho$ , mis on määratud dünaamilise molekulaarse viskoossusteguri ja tiheduse suhtega, mõõtühikuga  $[\nu] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Kokkusurutava vedeliku kineetilise energiavõrrandi võib esitada kui

$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} u_i^2 \right) &= \rho u_i g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \tau_{ij}) - \tau_{ij} S_{ij} \\ &= \rho u_i g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \tau_{ij}) + p (\nabla \cdot \vec{u}) - \varphi.\end{aligned}$	25-44
---	-------

Termodünaamika I seadus, mis seob vedeliku osa kineetilise energia ja siseenergia summa ( $0,5 u^2 + w$ ) muutuse, sellele rakendatud jõudude võimusega ja soojusvahetusega kaasab samuti kahte viimast liiget, kuid vastupidise märgiga. Liige  $p(\nabla \cdot \vec{u})$  võib siseenergiat kas suurendada või vähendada, st on termodünaamiliselt *pööratav protsess*, ning liige  $\varphi$  võib siseenergiat ainult suurendada, st on termodünaamiliselt *pöördumatu protsess*.

## 25.10 BERNOULLI VÕRRAND

Euleri võrrand on määratud kui osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteem

$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (gz) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i},$	25-45
---	-------

milles massijõu tihedus on määratud gradiendiga skalaarsest potentsiaalist:  $\vec{g} = -\nabla(gz)$ . Nn voolamise adveksioonliikme ehk voolukiiruse ruumilisest



muutusest sõltuva voolukiirenduse liikme võime esitada tensorteisenduse kaudu järgmiselt:

$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = u_j r_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} u_j u_j \right)$	25-46
--	-------

milles  $r_{ij}$  on kiirusnihete tensori mittesümmeetriline kahekordne osa, ning see on määratud kiirusvälja rootori  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \nabla \times (u_1, u_2, u_3)$  komponentidega. Tensori  $r_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \omega_k$ , milles permutatsioonkordaja on

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \\ -1 & (1,3,2), (3,2,1), (2,1,3) \\ 0 & i=j, k \quad j=k \quad k=i=j \end{cases} .$$

Kiirusnihete tensori mittesümmeetrilise kahekordne osa diagonaalelemendid on nullid ja mittediagonaalelemendid on paari kaupa absoluutväärtuselt võrdsed kuid vastasmärgilised

$r = 2 \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} .$	25-47
--	-------

Nn voolamise adveksioonliikme võib teisendada kujule:

$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -(\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}))_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} u_j^2 \right),$	25-48
---	-------

milles  $|\vec{u}|^2 = u_j^2$ -ga on tähistatud vektorsumma:  $u_j u_j = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ .

Euleri võrrandi teisendatud kuju on

$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2}  \vec{u} ^2 \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (gz) = (\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}))_i .$	25-49
---	-------

Kui vedeliku tihedus  $\rho = \rho(p)$  on ainult funktsioon rõhust  $p$  (st rõhk vedelikus on määratud hüdrostaatika seosega või koordinaatsüsteemi valikust sõltuvata inertsi jõudude tõttu antud keerulisema seosega, kuid üldjuhul barotroopne), siis saame kasutada nn ideaalset diferentsiaali  $dp/\rho$ :

$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{dp}{\rho},$	25-50
--	-------

milles  $dp$  iseloomustab rõhu täismuutust, ning ei sõltu integreerimise teest.

Euleri võrrandi teisendatud kuju on

$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{1}{2}  \vec{u} ^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz \right] = (\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}))_i.$	25-51
--	-------

Bernoulli funktsioon on skalaarne funktsioon ja defineeritakse kui kolmikliige

$B = \frac{1}{2}  \vec{u} ^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz.$	25-52
--	-------

Bernoulli funktsiooni erijuhtu  $B = \textit{konstant}$  kasutatakse kui Bernoulli võrrandi koostamisele ideaalvedeliku voolamisele hüdraulilises voolusüsteemis. Kokkusurumatu ideaalvedeliku ajaliselt muutumatule voolamisele, st statsionaarsele voolamisele on  $B = 0,5 |\vec{u}|^2 + p/\rho + g z$  universaalne konstant. Selle järgi vastab ideaalvedeliku voolamine voolutorus, nagu näiteks survetorus või prismaatilises voolusängis, mehaanilise energia muutumisele ühest tüübist teise ilma kadudeta, st kineetilise, rõhu ja asendi erienergiate summa on vooluprotsessis muutumatu. Bernoulli võrrandit kasutatakse samuti rõhulise ja vabapinnaga voolamise ülesannetes, mis on suhteliselt aeglased, st ajaliselt vastavad hästi kvaasistatsionaarsele voolamisele, milles eeldatakse, et igal ajahetkel on voolamine mittestatsionaarne ja igas ajavahemikus statsionaarne.

Võttes kasutusele Bernoulli kolmikliikme, võib Euleri võrrandi esitada vektorkujul:

$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla B = \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}).$	25-53
--	-------

Statsionaarsele voolamisele lihtsustub Euleri võrrand kujule:

$\nabla B = \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}).$	25-54
--	-------

Järelikult on Bernoulli funktsioon ( $B = \textit{konstant}$ ) statsionaarsele, st ajaliselt muutumatule ideaalvoolule konstantse väärtusega voolujoonte ( $\psi = \textit{const.}$ ) ja kiiruspotentsiaaljoonte ( $\phi = \textit{const.}$ ) pindadel. Statsionaarsele voolamisele lihtsustatud Euleri võrrandile vastava vektorvõrrandi järgi on Bernoulli funktsiooni gradient  $\nabla B$  vastavalt vektorkorrutise definitsioonile risti nii kiirusvektoriga  $\vec{u}$  kui ka selle rooriga  $\nabla \times \vec{u}$ . Kui voolamine on pöörisvaba, st  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = 0$  vedeliku igas „punktis“, siis Bernoulli funktsioon on konstantse väärtusega kogu vedeliku ulatuses. Kuidas eristada ideaal- ja reaalvoolu keeriseid vastavalt kiirusvälja pööriselisusele?

Mittestatsionaarse ideaalvoolu Bernoulli ülesanne määratakse kiirusvälja pöörisvabale ( $\vec{\omega} = 0$ ) voolamise puhul. Pöörisvabale voolamisele võib kiirusvektori esitada gradiendina skalaarsest potentsiaalist  $\phi$  (kiiruspotentsiaal). Kui Euleri

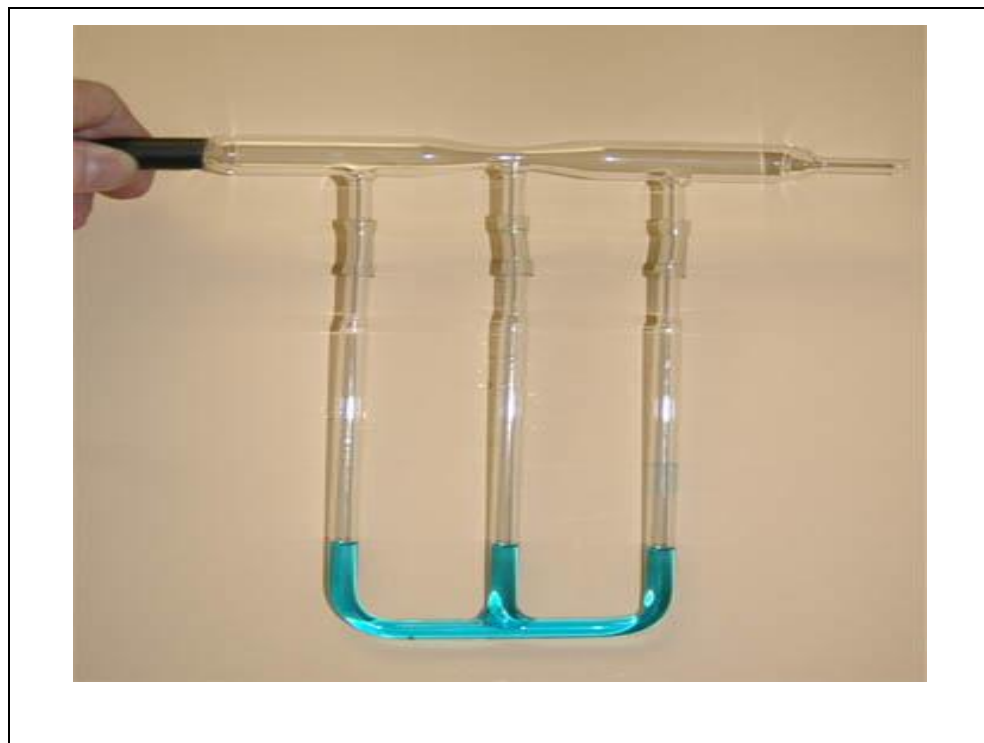
võrrandis asendada kiirusvektor gradiendiga kiiruspotentsiaalset  $\vec{u} = \nabla\phi$ , siis saame võrrandi:

$\nabla \left[ \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}  \vec{u} ^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz \right] = 0.$	25-55
--	-------

Kiiruspotentsiaali võrrand määratakse kui

$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}  \vec{u} ^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz = F(t),$	25-56
---	-------

milles ajast sõltuv funktsioon  $F(t)$  on ise sõltumatu asukohast ruumis, ning seda kasutatakse väikese amplituudiga ehk lineaarsete lainete teoorias ühe põhivõrrandina.





JOONIS 25-5 Bernoulli toru staatiline ja dünaamiline voolurežiim. (Erakogu)

Tuleb märkida, et kineetilise energia võrrandid ei ole voolamise liikumishulga ja energia jäävuse seadustest eraldiseisvad võrrandid, kuna need on tuletatud Cauchy' liikumisvõrrandi integreerimisel erinevatel tingimustel, ning on lihtsamad versioonid energia võrrandist, mis on hüdromehaanikas võetud kasutusele kontrollmahule. Temperatuuri toime arvestamisel vedeliku voolamisele on vajalik eraldi printsiipi, milleks võib olla näiteks Termodünaamika I seadus. Võtame kasutusele soojusvoo:

$q_i = \kappa \frac{\partial T}{\partial x_i},$	25-57
---	-------

milles  $\kappa$  tähistab (soojusliku) termodifusioonitegurit ja  $T$  temperatuuri. Seda valemit tuntakse Fourieri soojusvalemit.

Vedeliku siseenergia massiühikus on

$w = C_V T,$	25-58
--------------	-------

milles  $C_V$  on vedeliku soojusmahtuvustegur jääval ruumalal. Suurust  $w + |\vec{u}|^2/2$  tuntakse kui energiat, mis on salvestunud vedeliku osas. Kokkusurutavale voolamisele on vedelikus salvestunud energia muutus määratud massi- ja pinnajõudude võimsusega, ning vedeliku osa soojusvahetuse summaga:

$\rho \frac{D}{Dt} \left( w + \frac{1}{2}  \vec{u} ^2 \right) = \rho g_i u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} u_i) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}.$	25-59
--	-------

See võrrand on üks hüdromehaanikas kasutatav Termodünaamika I seaduse üks kujudest, mis sisaldab nii jõudude võimsust kui ka soojusenergia ülekannet. Nn energia jäävuse seadust diferentsiaalselt väikesele kontrollmahule võib lihtsustada Boussinesq' tingimusel, mis eeldab et vedeliku temperatuuri muutused vedeliku ulatuses on väikesed.

Statsionaarsele voolamisele, milles puuduvad nii vedeliku osade soojusvahetus ( $q = 0$ ) kui ka hõõrdepinged, st  $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$ , võime nn energia jäävuse seaduse elementaarmahule esitada kujul:

$\rho u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( w + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}  \vec{u} ^2 + gz \right) = 0,$	25-60
--	-------

mis on tuntud kui soojusliku energia võrrand. Ilma soojusvahetuseta ja hõõrdepingetega voolamise tingimusest selgub, et voolamisele mööda voolujooni säilib energia Bernoulli kolmikliige  $B' = \check{h} + 0.5|\vec{u}|^2 + gz = \textit{konstant}$ , mille liige  $\check{h} = w + p/\rho$  on entalpia. Muutumatu entroopiaga vedeliku voolamine on isoentropne, st *adiabaatiline ja pööratav vooluprotsess*, ning nn barotroopse vedeliku ideaalse diferentsiaali jaoks kehtib seos  $dp/\rho = d\check{h}$ .

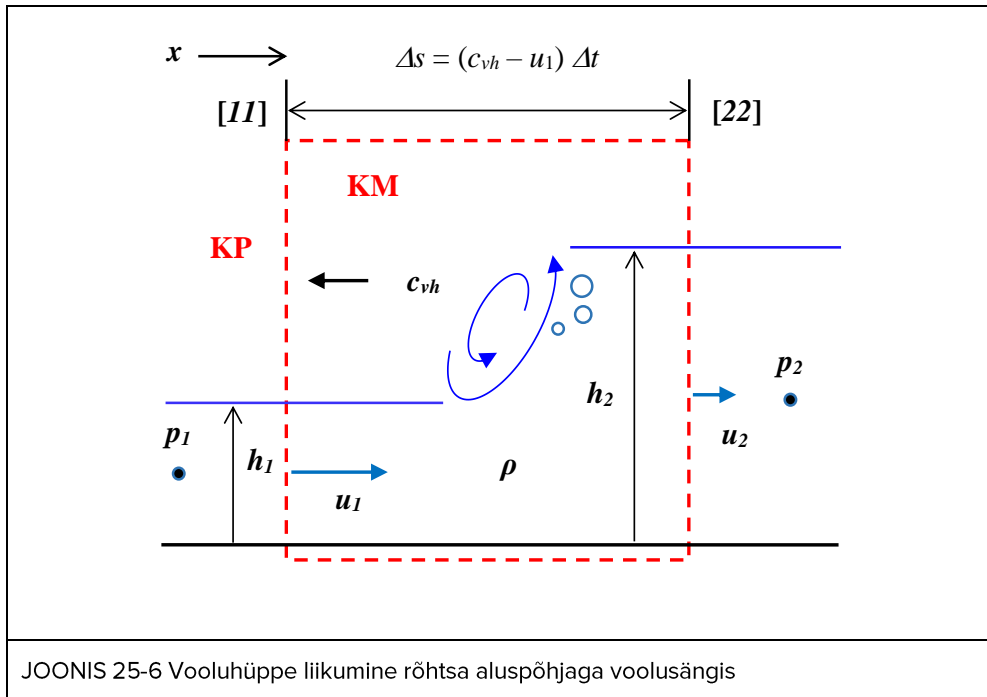
Termodünaamika II seadus (nn entroopi kasvu seadus) väidab, et entroopia saab ainult kasvada *mittepööratava protsessiga*, st vedeliku fundamentaalsed tegurid nagu  $\mu, \kappa > 0$ .

## 25.11 VOOLUHÜPPE VÖRRAND

Voolamise liikumishulga muutuse määramisele lõpliku suurusega ruumi osale, st kontrollmahule koostatud integraalset voolamise liikumishulga võrrandit:

$\frac{d}{dt} \int_{V(t)}^{ruumala \textit{ int.}} \vec{u} \rho dV + \int_{A(t)}^{pindala \textit{ int.}} \vec{u} \rho \vec{u}_r \cdot d\vec{A} = \sum \vec{F}_{KM},$	25-61
---	-------

milles voolamise liikumishulga ajaline muutus kontrollmahus ja voolamise liikumishulga integraalne voog läbi kontrollpinna on määratud kontrollmahule rakendatud jõudude resultandiga. Vedeliku tihedus  $\rho$  sõltub segunemisest ja KM muutumisest. Fikseeritud kontrollmahule on suhteline voolukiirus kontrollpinna suhtes määratud voolukiirusega, st  $\vec{u}_r = \vec{u}$ . Kontrollmahu (KM) ruumala on  $V$  ja kontrollpinna (KP) pindala on  $A$ , ning kontrollmahule rakendatud jõudude summa on  $\vec{F}_{KM}$ .



Liikuva vooluhüppega kaasneb voolamise liikumishulga järsk muutus voolusängiga määratud kontrollmahus fikseeritud pikkusega  $\Delta s$ , sest voolukiirus muutub suuruselt  $u_1$  suurusel  $u_2$ . Eeldame seejuures, et rõhtsa voolusängi laius ei muutu. Horisontaalsele voolamisele võime keskmise rõhu määrata hüdrostaatiliselt, st vabapinna kõrgusele  $h_1$  vastab keskmine rõhk  $p_1 = \rho g h_1/2$  ja vabapinna kõrgusele  $h_2$  vastab keskmine rõhk  $p_2 = \rho g h_2/2$ . Seda ka põhjusel, et horisontaalvoolule on voolukiiruse vektor ortogonaalne raskuskiirenduse vektoriga:  $\vec{u} \cdot \vec{g} = 0$ .

Vooluhüppele, mis liigub kiirusega  $c_{vh}$  võib koostada voolamise liikumishulga võrrandi:

$\frac{\rho(c_{vh} - u_1)\Delta t}{\Delta t} (A_2 u_2 - A_1 u_1) + \rho A_2 u_2^2 - \rho A_1 u_1^2 = p_1 A_1 - p_2 A_2,$	25-62
--	-------

milles ajavahemik  $\Delta t$  vastab kontrollmahus vabapinna täielikule muutusele kõrguselt  $h_1$  kõrgusele  $h_2$ . Vooluhüppe kaaskõrgustega  $h_1$  ja  $h_2$  määratud elavlõiked on vastavalt  $A_1 = w_1 h_1$  ja  $A_2 = w_2 h_2$ , milles nelinurkse ristlõikega prismaatilise voolusängi laius on  $w = w_1 = w_2$ . Erijuhul, kui vooluhüpe liigub vastuvoolu kiirusega  $c_{vh} = u_1$ , lihtsustub voolamise liikumishulga võrrand kujule, mis vastab voolusängis seisvale vooluhüppele:

$\rho A_2 u_2^2 - \rho A_1 u_1^2 = p_1 A_1 - p_2 A_2 .$	25-63
---	-------

→

$$-\rho A_1 u_1^2 - p_1 A_1 = -\rho A_2 u_2^2 - p_2 A_2$$

$$\rho A_1 u_1^2 + p_1 A_1 = \rho A_2 u_2^2 + p_2 A_2$$

Eeldusel, et vooluhüppes vesi ja õhk oluliselt ei segune, st veevoolule säilib vooluhulk (VALEM (2-2)):

$$Q = A_1 u_1 = A_2 u_2 ,$$

lihtsustub voolamise liikumishulga võrrand (VALEM (25-63)) kujule:

$\frac{\rho Q^2}{A_1} + p_1 A_1 = \frac{\rho Q^2}{A_2} + p_2 A_2 .$	25-64
---	-------

Tingimusel, et rõhtne voolusäng on prismaatiline ( $w_1 = w_2 = w = \textit{konstant}$ ), võime nelinurksele ristlõikega voolusängile võtta kasutusele voolamise elavlõiked  $A_1 = h_1 w$  ja  $A_2 = h_2 w$ . Voolamise liikumishulga võrrand (VALEM (25-64)) lihtsustub seetõttu kujule:

$\frac{\rho Q^2}{h_1 w} + p_1 h_1 w = \frac{\rho Q^2}{h_2 w} + p_2 h_2 w .$	25-65
---	-------

→

$$\frac{\rho Q^2}{h_1 w} + \frac{\rho g h_1}{2} h_1 w = \frac{\rho Q^2}{h_2 w} + \frac{\rho g h_2}{2} h_2 w$$

$$\frac{Q^2}{h_1 w} + \frac{g h_1}{2} h_1 w = \frac{Q^2}{h_2 w} + \frac{g h_2}{2} h_2 w$$

$$\frac{Q^2}{h_1 w^2} + \frac{g h_1}{2} h_1 = \frac{Q^2}{h_2 w^2} + \frac{g h_2}{2} h_2$$

$$\frac{Q^2}{g h_1 w^2} + \frac{h_1^2}{2} = \frac{Q^2}{g h_2 w^2} + \frac{h_2^2}{2}$$

Liikumatu vooluhüppe võrrand rõhtsale nelinurkse ristlõikega voolusängile on

$\frac{q^2}{g h_1} + \frac{h_1^2}{2} = \frac{q^2}{g h_2} + \frac{h_2^2}{2},$	25-66
--	-------

milles on võetud kasutusele vooluhulk voolusängi laiusele ehk erivooluhulk:  $q = Q / w$ .

Matemaatilise teisendusega on võimalik liikumatu vooluhüppe võrrand (VALEM (25-66)) rõhtsale nelinurkse ristlõikega voolusängile esitada järgmise ruutvõrrandiga:

$$\left( \frac{q^2}{g h_1} + \frac{h_1^2}{2} \right) 2 h_1 h_2 = \left( \frac{q^2}{g h_2} + \frac{h_2^2}{2} \right) 2 h_1 h_2,$$

$$\frac{2 h_2 q^2}{g} + h_1^3 h_2 = \frac{2 h_1 q^2}{g} + h_2^3 h_1,$$

$$\frac{2 q^2}{g} (h_2 - h_1) = h_2^3 h_1 - h_1^3 h_2,$$

$$\frac{2 q^2}{g} (h_2 - h_1) = h_1 h_2 (h_2^2 - h_1^2),$$

$$\frac{2 q^2}{g} (h_2 - h_1) = h_1 h_2 (h_2 - h_1)(h_2 + h_1),$$

$$\frac{2 q^2}{g} = h_1 h_2 (h_2 + h_1),$$

$$\frac{2 q^2}{g} = h_1 h_2^2 + h_2 h_1^2.$$

→

$h_2 h_1^2 + h_1 h_2^2 - \frac{2 q^2}{g} = 0$	25-67
---	-------

**MÄRKUS.** Liikumatu vooluhüppe võrrandiga rõhtsale nelinurkse ristlõikega voolusängile määratud ruutvõrrandi lahendamise. Ruutvõrrand, st 2 astme algebraline võrrand üldkujuul on

$$a z^2 + b z + c = 0,$$

milles  $z$  on muutuja,  $a (\neq 0)$  on võrrandi ruutliikme kordaja,  $b (\neq 0)$  on võrrandi lineaarliikme kordaja ja  $c (\neq 0)$  on võrrandi vabaliige. Ruutvõrrandi lahendite valemid on



$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

→

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Taandatud ruutvõrrand üldkujul on

$$z^2 + pz + q = 0,$$

milles  $z$  on muutuja,  $p = b/a$  ( $\neq 0$ ) on võrrandi lineaarliikme kordaja ja  $q = c/a$  ( $\neq 0$ ) on võrrandi vabaliige. Taandatud ruutvõrrandi lahendite valemid on

$$z_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$z_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

→

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Liikumatu vooluhüppe võrrandiga rõhtsale nelinurkse ristlõikega voolusängile määratud ruutvõrrandi lahendamine kaaskõrgusele  $h_1$ , st veepinna kõrgusele üle voolusängi aluspõhja enne vooluhüppe valtsi. Esitame 2 astme algebralise võrrandi taandatud kujul, milles võtame kasutusele konstantsed suurused:  $p = h_2$  ja  $q = -2q^2/g h_2$ .

$$h_2 h_1^2 + h_1 h_2^2 - \frac{2q^2}{g} = 0$$

→

$h_1^2 + h_2 h_1 - \frac{2q^2}{g h_2} = 0$	25-68
--	-------

Taandatud ruutvõrrandi lahendi valem kaaskõrgusele enne vooluhüppe valtsi on

$h_1 = -\frac{h_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 + \frac{2q^2}{gh_2}} = -\frac{h_2}{2} + \frac{h_2}{2} \sqrt{1 + \frac{8q^2}{gh_2^3}}$ $= \frac{h_2}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{8q^2}{gh_2^3}} \right).$	25-69
--	-------

Liikumatu vooluhüppe võrandiga rõhtsale nelinurkse ristlõikega voolusängile määratud ruutvõrrandi lahendamisel ei kasutata ära teist matemaatiliselt võimaliku lahendust põhjusel, et kaaskõrgus on vooluhüppe veekihi kõrgusmõõde:  $h_1 > 0$ .

Liikumatu vooluhüppe võrandiga rõhtsale nelinurkse ristlõikega voolusängile määratud ruutvõrrandi lahendamine kaaskõrgusele  $h_2$ , st veepinna kõrgusele üle voolusängi aluspõhja peale vooluhüppe valtsi. Esitame 2 astme algebralise võrrandi taandatud kujul, milles võtame kasutusele konstantsed suurused:  $p = h_1$  ja  $q = -2q^2/g h_1$ .

$$h_2 h_1^2 + h_1 h_2^2 - \frac{2q^2}{g} = 0$$

→

$h_2^2 + h_1 h_2 - \frac{2q^2}{gh_1} = 0$	25-70
---	-------

Taandatud ruutvõrrandi lahendi valem kaaskõrgusele peale vooluhüppe valtsi on

$h_2 = -\frac{h_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 + \frac{2q^2}{gh_1}} = -\frac{h_1}{2} + \frac{h_1}{2} \sqrt{1 + \frac{8q^2}{gh_1^3}}$ $= \frac{h_1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{8q^2}{gh_1^3}} \right).$	25-71
--	-------

Liikumatu vooluhüppe võrandiga rõhtsale nelinurkse ristlõikega voolusängile määratud ruutvõrrandi lahendamisel ei kasutata ära teist matemaatiliselt võimaliku lahendust põhjusel, et kaaskõrgus on vooluhüppe veekihi kõrgusmõõde:  $h_2 > 0$ .

Liikumatu vooluhüppe võrrandiga (VALEM (25-67)) rõhtsale nelinurkse ristlõikega voolusängile määratud ruutvõrrandil on järgmised lahendid vooluhüppe kaaskõrguste määramisele:

$h_1 = \frac{h_2}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{8 q^2}{g h_2^3}} \right),$	25-72
---	-------

$h_2 = \frac{h_1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{8 q^2}{g h_1^3}} \right).$	25-73
---	-------

Liikumatu vooluhüppe võrrandiga rõhtsale nelinurkse ristlõikega voolusängile määratud ruutvõrrandil on järgmised alternatiivsed lahendid vooluhüppe kaaskõrguste määramisele:

$h_1 = \frac{h_2}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8 Fr_2^2} \right),$	25-74
--	-------

milles on kasutusele võetud Froude'i arv astmes 2 kontrollpinnal [22]:

$Fr_2^2 = \frac{u_2^2}{g h_2} = \frac{Q^2}{g h_2 A_2^2} = \frac{Q^2}{g h_2^3 w^2} = \frac{q^2}{g h_2^3},$	25-75
---	-------

ning

$h_2 = \frac{h_1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8 Fr_1^2} \right),$	25-76
--	-------

milles on kasutusele võetud Froude'i arv astmes 2 kontrollpinnal [11]:

$Fr_1^2 = \frac{u_1^2}{g h_1} = \frac{Q^2}{g h_1 A_1^2} = \frac{Q^2}{g h_1^3 w^2} = \frac{q^2}{g h_1^3}.$	25-77
---	-------

Liikumatu vooluhüppe võrrandiga rõhtsale nelinurkse ristlõikega voolusängile määratud ruutvõrrandil on järgmised alternatiivsed lahendid vooluhüppe kaaskõrguste määramisele:

$h_1 = \frac{h_2}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8 \left( \frac{h_{2k}}{h_2} \right)^3} \right),$	25-78
---	-------

milles on kasutusele võetud voolamise kriitiline kõrgus ( $Fr_2 = 1$ ) kontrollpinnal [22]:

$1 = \frac{u_2^2}{g d_{2k}} = \frac{Q^2}{g d_{2k} A_2^2} = \frac{Q^2}{g d_{2k}^3 w^2} = \frac{q^2}{g d_{2k}^3},$	25-79
--	-------

milles on kasutatud samasust ( $h = -(-d)$ ):

$$h_{2k} = d_{2k},$$

ning

$h_2 = \frac{h_1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8 \left( \frac{h_{1k}}{h_1} \right)^3} \right).$	25-80
---	-------

milles on kasutusele võetud voolamise kriitiline kõrgus ( $Fr_1 = 1$ ) kontrollpinnal [11]:

$1 = \frac{u_1^2}{g d_{1k}} = \frac{Q^2}{g d_{1k} A_1^2} = \frac{Q^2}{g d_{1k}^3 w^2} = \frac{q^2}{g d_{1k}^3},$	25-81
--	-------

milles on kasutatud samasust ( $h = -(-d)$ ):

$$h_{1k} = d_{1k}.$$

**MÄRKUS.** Vooluhüppel muutub hüdrauliliselt käre voolamine rahulikuks, aga mitte vastupidi. Seetõttu areneb uputamata paisu puhul, selle alumise bjefti järsul nõlval välja veesööst, mis vastab kärelele voolamise puhul. Kiirevoolulise veesööstuga kaasnevad vabapinna häiritused võivad oluliselt muuta vabapinnaga voolamise stabiilsust, ning seetõttu võib moodustuda liikuv vooluhüpe voolusängis. Kui voolusängi rajatud pais ongi takistuseks vooluhüppe liikumisele ülesvoolu, siis areneb välja nn seisev murdlaine paisu alumises bjeftis (VIIDE 25.5).

## 25.12 VOOLUKEERISTE TAKISTUS

Voolamise liikumishulga võrrandit võib kasutada ka nõ kohttakistuse määramisele survekorustiku järsule voolulaiendile, milles väiksema sisemõõtmega toru on ühendatud suurema sisemõõtmega toruga. See on Borda valem kohtsurvekao määramisele. Voolulaiendis voolujooned kõverduvad nii, et sellele ei saa rakendada Bernoulli võrrandit. Voolamise liikumishulga võrrand statsionaarsele, mitteühtlasele horisontaalvoolule on

$\rho A_2 u_2^2 - \rho A_1 u_1^2 = p_1 A_1 - p_2 A_2,$	25-82
--	-------

milles  $u_1$ ,  $A_1$  ja  $p_1$  on vastavalt voolukiirus, elavlõige ja rõhk torustiku väiksema sisemõõtmega osas, ning  $u_2$ ,  $A_2$  ja  $p_2$  on vastavalt voolukiirus, elavlõige ja rõhk torustiku suurema sisemõõtmega osas.

Voolamise liikumishulga võrrandi võib lihtsustada vastavalt voolamise pidevusele ristlõigetes:

$\rho A_2 u_2^2 - \rho A_1 u_1^2 = \rho Q (u_2 - u_1),$	25-83
---	-------

milles vooluhulk (VALEM (2-2)) on

$$Q = u_1 A_1 = u_2 A_2 .$$

Torustiku ühendusele määratud kontrollmahu integraalse rõhujõu võib lihtsustada eeldusel, et rõhk ei muutu vahetult torustiku laienemisasukohas, st rõhk kontrollmahu sisse- ja väljavoolule on määratud torustiku suurema sisemõõtmega osa elavlõikega:

$p_1 A_1 - p_2 A_2 \approx (p_1 - p_2) A_2 .$	25-84
---	-------

Torustiku voolulaiendile võib voolamise liikumishulga võrrandi lihtsustada kujule:

$\rho Q (u_2 - u_1) = (p_1 - p_2) A_2 .$	25-85
--	-------

Jagades lihtsustatud voolamise liikumishulga võrrandi suurusega  $\rho g A_2$ :

$\frac{u_2}{g} (u_2 - u_1) = \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g},$	25-86
--	-------

milles

$$u_2 = \frac{Q}{A_2},$$

järeldub nõ torustiku voolulaiendi võrrand.

Torustiku voolulaiendi võrrand (VALEM (25-86)) i *esimese* liikme algebraline teisendus:

$$\frac{u_2}{g} (u_2 - u_1) = \frac{1}{g} (u_2^2 - u_2 u_1) = \frac{1}{2g} (2 u_2^2 - 2 u_2 u_1 + u_1^2 - u_1^2),$$

$$\frac{1}{2g} (2 u_2^2 - 2 u_2 u_1 + u_1^2 - u_1^2) = \frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} + \frac{1}{2g} (u_2^2 - 2 u_2 u_1 + u_1^2),$$

$$\frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} + \frac{1}{2g} (u_2^2 - 2 u_2 u_1 + u_1^2) = \frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} + \frac{(u_2 - u_1)^2}{2g}.$$

Kui rühmitada torustiku voolulaiendi võrrandi (VALEM (25-86)) liikmed vastavalt indeksile, siis järeldub võrrand:

$$\frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} + \frac{(u_2 - u_1)^2}{2g} = \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g},$$

→

$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{(u_2 - u_1)^2}{2g}.$	25-87
---	-------

Reaalvoolu Bernoulli võrrandi (VALEM (2-10)) horisontaalvoolule ( $z_1 = z_2$ ):

$$z_1 + \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_k,$$

→

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_k.$$

Voolamise liikumishulga võrrandist survetorustiku järsule voolulaiendile järeldub Borda valem:

$h_k = \frac{(u_2 - u_1)^2}{2g}.$	25-88
-----------------------------------	-------

**MÄRKUS.** Borda valemist võib kasutada nõ lühikese valtsiga vooluhüppe energiakao hindamisele, milles raskuskõrguse muutus ei ole oluline. Borda valemi tuletamisele on kasutatud voolamise liikumishulga võrrandit nõ kohttakistuse määramisele survetorustiku järsule voolulaiendile, milles voolusuunas on väiksema sisemõõtmega toru ühendatud suurema sisemõõtmega toruga. Vabapinnaga voolamisele rõhtses avasängis on nõ lühikese valtsiga vooluhüppe seotud veesügavuse järsu muutusega, st vooluhüppe kaaskõrguste erinevusega, mis määrab voolukiiruse järsu muutuse avasängis. Sarnaselt survetoru voolulaiendiga kõverduvad voolujooned ka veepinna järsu muutusega vooluhüppel nii, et sellele ei saa rakendada Bernoulli võrrandit.

**MÄRKUS.** Takistustegurite väärtused hüdraulika valemistes võivad sõltuda oluliselt vedeliku koostisest, mille määravad vedelikus olevad tahkemed osad, gaasid vms. Mitte-Newtoni vedelik on vedelik, mis ei järgi hästi Newtoni sisehõrde seadust, mille järgi laminaarvoolu hõõrdepinge on määratud muutumatu molekulaarse viskoossusteguriga. Mitte-Newtoni vedelikes võib viskoossus välisjõu mõjul muutuda, st vedelik võib voolates muutuda nõ veel vedelamaks või nõ tahkemaks. Näiteks

verekude võib raputamisel muutuda vedelamaks ja seega käitub nagu mitte-Newtoni vedelik. Ka ei vasta õlid hästi Newtoni vedeliku eeldustele. Samuti kanalisatsiooni reovesi, mille on tahkete ainete kontsentratsioon suhteliselt suur, võib rõhk absorbeeruda vedeliku sisestruktuuris. Seetõttu anaeroobsetesse käärititesse suunduvate ja sealt väljuvate mudavedelike takistused hüdraulilisele voolusüsteemile ei ole hästi teada.

## 25.13 VIITED

25.1 Fox, R. W., McDonald, A. T. & Pritchard, P. J. (2006). *Introduction to Fluid Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc. (Esmatrükk 1973).

25.2 Munson, B. R., Rothmayer, A. P. & Okiishi, T. H. (1990). *Fundamentals of Fluid Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc.

25.3 Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press.

25.4 Kundu, P. K., Cohen, I. M. & Dowling, D. R. (2012). *Fluid Mechanics*. 5th Edition. Academic Press is an imprint of Elsevier, 875 p.

25.5 Lawrence G.A. & Armi L. (2022) Stationary internal hydraulic jumps, *Journal of Fluid Mechchanics* 936 (A25): 1–31.

## 26 ARVUTUSLIK VEDELIKE DÜNAAMIKA

Arvutuslik vedelike dünaamika (ingl. *Computational Fluid Dynamics* – CFD) on hüdro- ja aeromehaanika rakendusliku suunitlusega teema, kus kasutatakse vedelike ja gaaside voolamise teoreetilismate võrrandite ehk diferentsiaalvõrrandite süsteemide lahendamisel 1D, 2D või 3D arvutusvõrgus erinevaid numbrilisi arvutusmeetodeid (VIIDE 26.1). Arvutitarkvara abil koostatakse tehnosüsteemi tarbeks vedeliku vooluprotsessi simuleerimiseks vajalikud geomeetriad ja antakse neile piiritingimused. Numbriline arvutusskeem käivitatakse algtingimustest. Arvutusskeemide tõhusamaks integreerimiseks on reeglina vajalik kasutada kobararvutit, mis võimaldab paralleelarvutusega saavutada kvaliteetsemaid lahendusi ning kiirendab suuremate arvutusvõrkude arvutamise protsessi. Suuremate arvutusvõrkude kasutamine on eelkõige vajalik vooluprotsesside täpsemaks integreerimiseks, näiteks turbulentsimudelite kasutamiseks ehitusliku keskkonna väiksemate mõõtmetega osades. Tänapäeval on suure arvutusvõrgu kasutamine seotud ka tehnosüsteemide mastaapsuse ja liigendatusega. Arvutusliku vedelike dünaamika numbrilisi lahendusi on võimalik valideerida olemasolevate arvutustulemustega, eksperimentaalsete tulemustega või nende kombineerimisel.

Ehitusliku keskkonna projekteerimiseks, renoveerimiseks, ekspertisiiks vms tööks arendatakse tehnosüsteemide vooluprotsesside paremaks tundmiseks tänapäeval välja arvutusliku vedelike dünaamika (CFD) matemaatilisi töövahendid, mis kasutavad hüdro- ja aeromehaanika põhivõrrandite asemel põhivõrrandite lihtsustatud erikujusid koos vastavate protsessivõrranditega, nagu näiteks sooja ja jaheda õhu koosvoolamine ventilatsioonis, vee ja õhu koosvoolamine kanalisatsioonis vms (VIIDE 26.2). Üheks oluliseks tööks arvutusliku vedelike dünaamika mudelite arendamisel on ka empiiriliste valemite asendamine teoreetilismate võrranditega ning selle kaudu insenertarkvara kasutamise võimaluste laiendamine.

### 26.1 PÕHIVÕRRANDID

Arvutusliku vedeliku dünaamika numbrilised mudelid kasutavad nii massi, voolamise liikumishulga kui ka energia võrrandeid. Hüdro- ja aeromehaanika põhivõrrandeid võib esitada nii diferentsiaalsel kui ka integraalsel kujul. Seaduse diferentsiaalne kuju on rakendatav näiteks vedeliku „punktis“, st elementaarmahus ja integraalne kuju suuremale, lõplike mõõtmetega vedeliku osas, st kontrollmahus. Kontrollmahu kasutamine vedeliku voolamise puhul võimaldab ajas ja ruumis fikseeritud elementaarmahu asendada fikseeritud või fikseerimata kontrollpindadega, geomeetriliselt hästi määratud ruumi osaga. Diferentsiaalselt väikest fikseeritud kontrollmahtu nimetatakse elementaarmahuks. Põhivõrrandite integraalsed kujud on



määratud seaduste diferentsiaalsete kujudega. Arvutusliku vedeliku dünaamika mudelid kasutavad voolamise massi võrrandit:

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0,$	26-1
--	------

milles  $\rho$  on vedeliku tihedus ja  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  on voolukiiruse vektor, ning voolamise liikumishulga võrrandit:

$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( 2\mu S_{ij} + \left( \mu_\vartheta - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \delta_{ij} \right),$	26-2
--	------

milles

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) u_i,$$

$$\vec{u} \cdot \nabla = \langle u_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} = u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

ja  $\vec{g} = (0, 0, -g)$  on massijõu kiirenduse vektor,  $\mu$  on dünaamiline (tangentsiaal) molekulaarne viskoossustegur (ingl. *shear viscosity*), mõõtühikuga  $[\mu] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  ja  $\mu_\vartheta$  on dünaamiline (normaal) molekulaarne viskoossustegur (ingl. *bulk viscosity*), mõõtühikuga  $[\mu_\vartheta] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ , ning voolamise energia võrrandit:

$\rho \frac{D}{Dt} \left( w + \frac{1}{2}  \vec{u} ^2 \right) = \rho g_i u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} u_i) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i},$	26-3
--	------

milles

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu S_{ij} + \left( \mu_\vartheta - \frac{2}{3}\mu \right) (\nabla \cdot \vec{u}) \delta_{ij},$$

$$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$$

ja  $q_i$  on soojusvoo vektor, mis sõltub temperatuuri gradiendist ja vedeliku soojusjuhtivusest.

## 26.2 PÕHIVÕRRANDITE ERIKUJUD

Arvutusliku vedeliku dünaamika põhivõrrandeid võib esitada erikujudel, kui võetakse kasutusele vooluprotsessi matemaatilised lihtsustused. Voolamise hüdraulikas kasutatakse Bernoulli võrrandit, mis kehtib hästi ideaalvedeliku statsionaarsele voolamise puhul. Konstantse Bernoulli kolmikliikme järgi vastab ideaalvedeliku voolamine voolutorus, nagu näiteks survetorus või prismaatilises voolusängis, mehaanilise energia muutumisele ühest tüübist teise ilma kadudeta, st kineetilise, rõhu ja asendi erienergiate summa on vooluprotsessis muutumatu. Bernoulli võrrandit kasutatakse samuti rõhulise ja vabapinnaga voolamise ülesannetes, mis muutuvad suhteliselt aeglaselt, st vooluprotsessiga ei kaasne oluliselt kiiruse muutuseid. Sellised vooluprotsessid vastavad hästi kvaasistatsionaarsele voolamise puhul, milles eeldatakse, et igal ajahetkel on voolamine mittestatsionaarne ja igas ajavahemikus statsionaarne. Voolamise liikumishulga võrrandit võib kasutada kokkusurumatu vedeliku eeldusel, kui eeldada, et vedeliku tihedus vooluprotsessis muutub suhteliselt vähe. Praktiliselt väikese tiheduse muutusega voolamise matemaatilisel lihtsustatud võrrandeid nimetatakse ka Boussinesq' võrranditeks (VIIDE 26.3). Arvutusliku vedeliku dünaamika põhivõrrandeid võib lihtsustada vedelike ja gaaside segunemise protsessidele nii lahustumatule kui ka lahustuvale juhule.

### 26.2.1 ÕHUVOOLUDE SÜSTEEM. VENTILATSIOON

Arvutusliku vedeliku dünaamika põhivõrrandid sooja ja jaheda õhu koosvoolule, milles arvestatakse temperatuuri muutusi lahustuval segunemisel, on kasutusel voolamise pidevuse võrrand:

$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,$	26-4
--	------

milles  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  on voolukiiruse vektor, voolamise liikumishulga võrrand:

$\rho_0 \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho_0 g_i [1 + \alpha_{süt} (T - T_0)] + \frac{\partial}{\partial x_j} (2 \mu S_{ij})$	26-5
--	------

milles

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) u_i,$$

$$\vec{u} \cdot \nabla = \langle u_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} = u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

ja  $\vec{g} = (0, 0, -g)$  on massijõu kiirendusvektor,  $\rho_0 = \textit{konstant}$  on õhu tihedus normaaltingimustel,  $T$  on õhu temperatuur,  $T_0 = \textit{konstant}$  on õhu temperatuur normaaltingimustel,  $\alpha_{\text{süt}}$  on soojuslik ülekandetegur ja  $\mu$  on dünaamiline molekulaarne viskoossustegur, mõõtühikuga  $[\mu] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ , ning temperatuuri difusiooni võrrand:

$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2},$	26-6
---	------

milles  $\kappa$  on termodifusioonitegur.

Ventilatsiooni õhuvoolule ei arvestata tiheduse muutust massi ja voolamise liikumishulga võrrandite liikmetes, väljaarvatud raskusjõu liikmes. See võimaldab õhuvooluga kaasneva temperatuuri muutustele arvestada õhuosa raskuse muutumise. Ventilatsiooni õhu tihedus määratakse empiirilise valemiga:

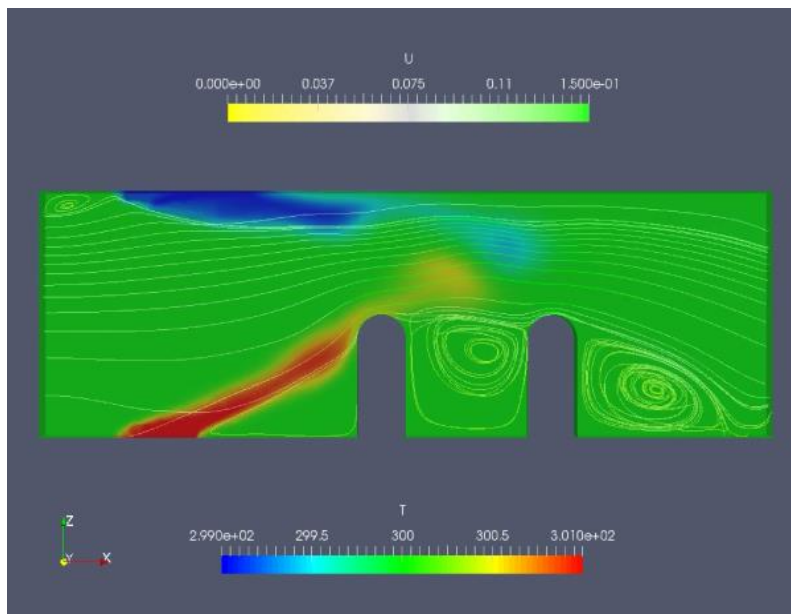
$\rho = \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)],$	26-7
---	------

milles nn normaaltingimuste tihedus määratakse ideaalse gaasi olekuvõrrandiga:

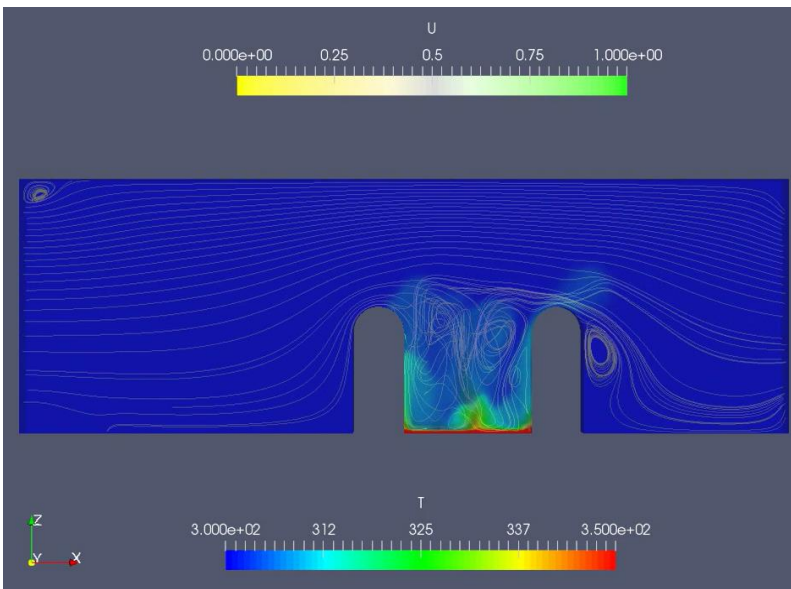
$\rho_0 = \frac{p_0}{R T_0},$	26-8
-------------------------------	------

milles  $R = R_u/m$  on ideaalse gaasi konstant õhule. Universaalne gaasi konstant on  $R_u$  ja õhu molaarmass  $m$ .

**MÄRKUS.** *Õhuvoolu võrrandid võimaldavad modelleerida ka vedeliku omaduste, nagu sooluse muutuseid estuaarides, milles segunevad magedam jõevesi ja soolasem merevesi.*



JOONIS 26-1 Turbulentne soojema ja jahedama õhu koosvoolamine ventileeritud ruumis. Temperatuuri ja voolukiiruse (voolujoonte) CFD simulatsioon (OpenFOAM ver 1706, GNU General Public License, Copyright 2016-2017 OpenCFD Ltd)



JOONIS 26-2 Piirde soojusega kütmine ventileeritud ruumis (põrandaküte). Temperatuuri ja voolukiiruse (voolujoonte) CFD simulatsioon

## 26.2.2 VEE JA ÕHU KOOSVOOLAMISE SÜSTEEM. KANALISATSIOON

Arvutusliku vedeliku dünaamika põhivõrrandid vee ja õhu koosvoolule, milles toimub nn seguvedeliku tiheduse muutus mittelahustuval segunemisel, on kasutusel voolamise pidevuse võrrand:

$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,$	26-9
--	------

milles  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  on voolukiiruse vektor, voolamise liikumishulga võrrand:

$\frac{D(\rho u_i)}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (2 \mu S_{ij}) + F_{si}$	26-10
--	-------

milles

$$\frac{D(\rho u_i)}{Dt} = \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \nabla(\rho u_i u_i),$$

$$\rho = \alpha_{vst} \rho_v + (1 - \alpha_{vst}) \rho_\delta,$$

$$\mu = \alpha_{vst} \mu_w + (1 - \alpha_{vst}) \mu_\delta,$$

$$u_i = \alpha u_{vi} + (1 - \alpha_{vst}) u_{\delta i},$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

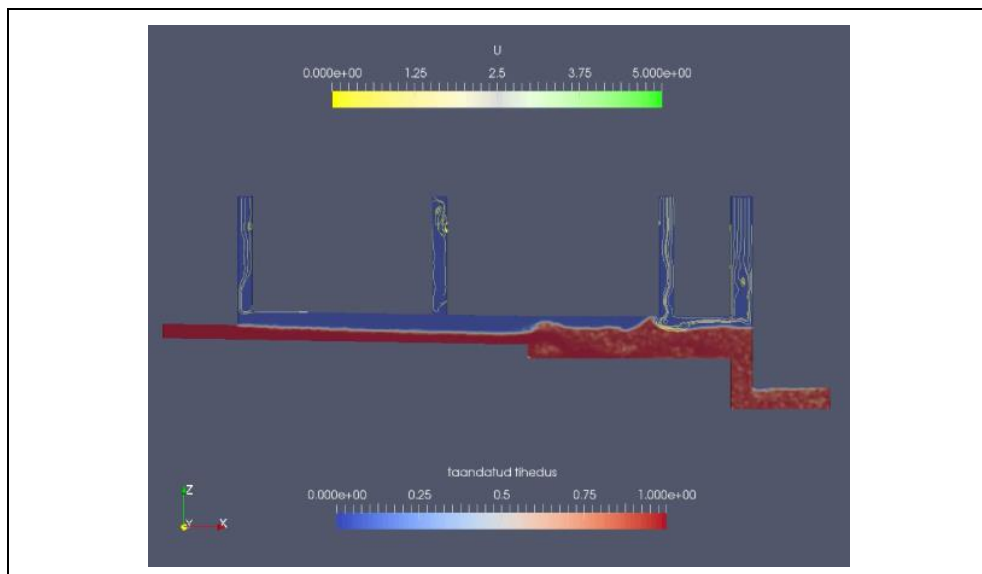
$$\vec{F}_s = \sigma \kappa_{sp} \frac{\nabla \alpha_{vst}}{|\nabla \alpha_{vst}|}$$

ja  $\vec{g} = (0, 0, -g)$  on massijõu kiirendusevektor,  $\mu$  on dünaamiline molekulaarne viskoossustegur, mõõtühikuga  $[\mu] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\alpha_{vst}$  on segunemisprotsessi normeeritud muutuja ( $0 \leq \alpha_{vst} \leq 1$ , milles  $\alpha_{vst} = 1$  vastab täielikule veetäitele elemetaarmahus ja  $\alpha_{vst} = 0$  vastab täielikule õhutäitele elemetaarmahus),  $(\rho_v, \mu_w, \vec{u}_v)$  on vastavalt vee tihedus, dünaamiline molekulaarne viskoossustegur, voolukiiruse vektor, ja  $(\rho_\delta, \mu_\delta, \vec{u}_\delta)$  on vastavalt õhu tihedus, dünaamiline molekulaarne viskoossustegur, voolukiiruse vektor, ning „vedelike“ segunemisprotsessi võrrand:

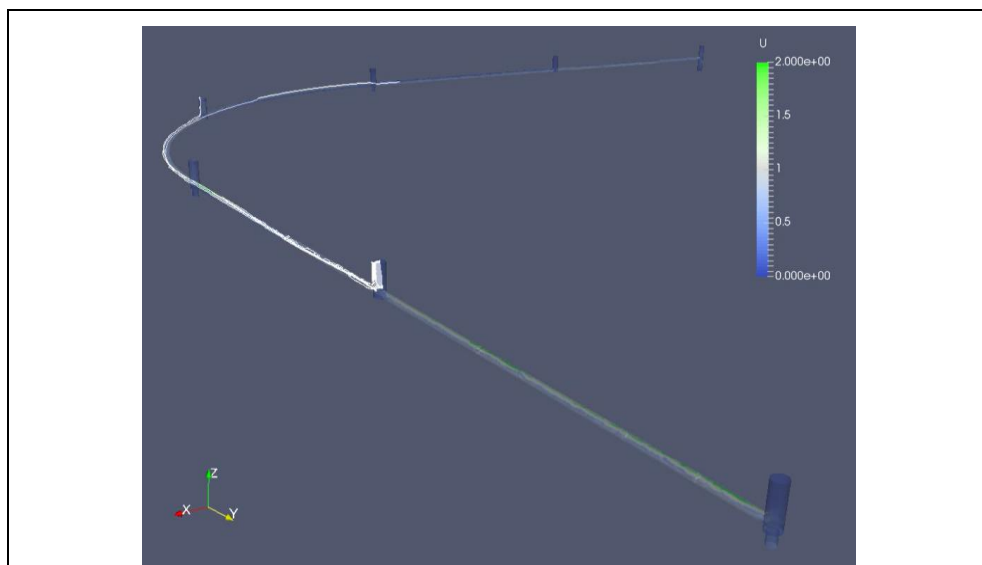
$\frac{\partial \alpha_{vst}}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_{vst} \vec{u}) + \nabla \cdot (\alpha_{vst} (1 - \alpha_{vst}) \vec{u}_r) = 0,$	26-11
--	-------

milles  $\vec{u}_r$  on suhteline kiirusvektor  $\vec{u}_r = \vec{u}_v - \vec{u}_\delta$ . Pindpinevustegur on  $\sigma$ ,  $\kappa_{sp} = \nabla \cdot \vec{n}$  on nn seguvedeliku tiheduse sisepindade kõverus, milles  $\vec{n} = \nabla \alpha_{vst} / |\nabla \alpha_{vst}|$ .

**MÄRKUS.** Torustiku vee ja õhu koosvoolamises ignoreeritakse lahustumist, st kasutatakse ära ainult mehaanilise segunemise tingimusi, milles muutuva tihedusega vedeliku pindpinevus määrab vee ja õhu vahepinna kõverdumise.



JOONIS 26-3 Vee ja õhu koosvoolamine (torustiku täitmine veega). Taandatud tiheduse ja voolukiiruse (voolujoonte) CFD simulatsioon



JOONIS 26-4 Vee ja õhu koosvoolamine (kanalisatsioonitoru täitmine veega). Voolukiiruse (voolujoonte) CFD simulatsioon

## 26.3 REYNOLDSI VÖRRANDID. TURBULENTS

Arvutusliku vedeliku dünaamika põhivõrrandid lihtsustuvad matemaatiliselt oluliselt kokkusurumatu vedeliku voolamisele. Voolamise pidevuse võrrand:

$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,$	26-12
--	-------

milles on eeldatud, et vedeliku tihedus  $\rho = \textit{konstant}$  ja  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  on voolukiiruse vektor, voolamise liikumishulga võrrand:

$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (2 \nu S_{ij}),$	26-13
---	-------

milles

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) u_i,$$

$$\vec{u} \cdot \nabla = \langle u_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} = u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

ja  $\vec{g} = (0, 0, -g)$  on massijõu kiirendusvektor,  $\nu$  on nn laminaarse voolamise kinemaatiline viskoossustegur, mõõtühikuga  $[\nu] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , ning voolamise energia võrrand:

$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2}  \vec{u} ^2 \right) = g_i u_i + \frac{u_i}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}),$	26-14
---	-------

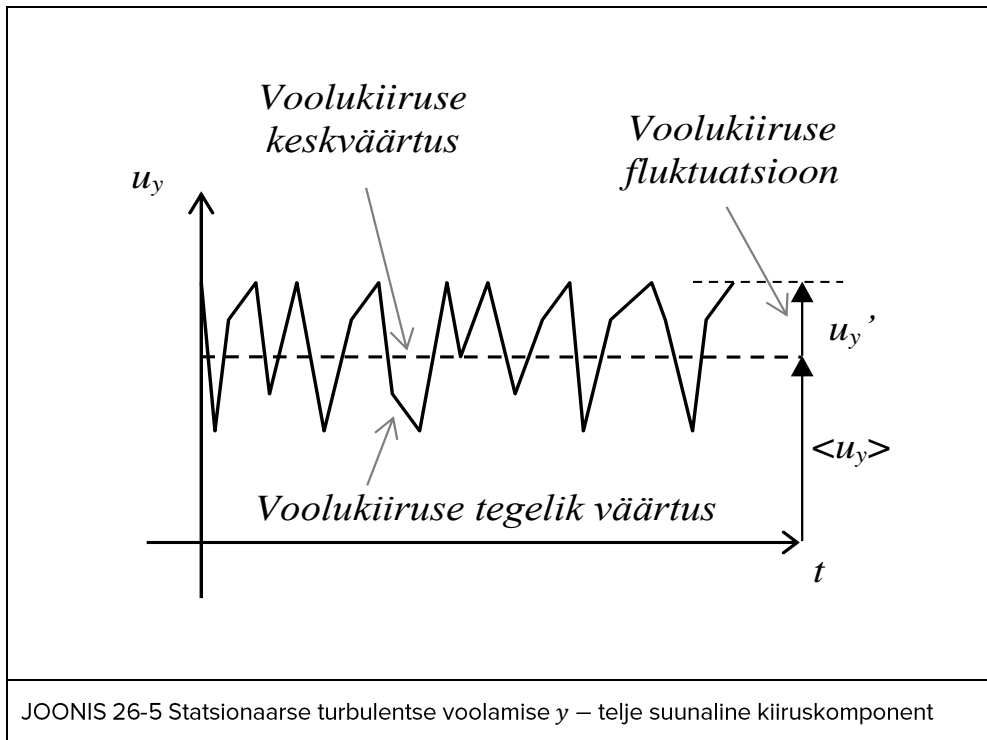
milles

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2 \mu S_{ij},$$

$$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$$

**MÄRKUS.** Voolamise energia võrrandit kokkusurumatule voolamisele tuntakse kui kineetilise energia muutuse teoreemi. See ei ole sõltumatu võrrand põhjusel, et kineetilise energia võrrandi kokkusurumatule voolamisele võib tuletada massi ja voolamise liikumishulga võrrandite kombineerimisel.

Turbulentssele voolamisele on vedelikuosakeste süsteemi liikumine keerulisema iseloomuga võrreldes laminaarse voolamisega, milles sisetakistus on määratud dünaamilise molekulaarse viskoossusteguriga ehk nn laminaarse voolamise dünaamilise viskoossusteguriga. Statsionaarsele turbulentssele voolamisele muutub voolukiirus igas vedeliku punktis pidevalt nii mooduli kui ka suuna poolest, fluktueerides seejuures ajaliselt muutumatu keskvärtusega voolukiiruse ümbruses. Turbulentssele voolamisele ei saa koostada pidevaid voolujooni ilma voolukiiruse keskvärtuse määramiseta. Seetõttu võetakse kasutusele keskmistatud Navier-Stokesi võrrand ehk Reynolds'i võrrand (ingl. *Reynolds Averaged Navier-Stokes* – RANS). (VIITED 26.4 ja 26.5).



Turbulentsse voolamise kiirusvektori  $\vec{u}$  komponendid, rõhu  $p$  ja tiheduse  $\rho$  võib esitada kui nende suuruste ajaliste keskvärtuste ja fluktuatsioonide/pulsatsioonide summad:

$u_1 = \langle u_1 \rangle + u_1'$ $u_2 = \langle u_2 \rangle + u_2'$ $u_3 = \langle u_3 \rangle + u_3'$ $p = \langle p \rangle + p'$ $\rho = \langle \rho \rangle + \rho' = \langle \rho \rangle .$	26-15
--	-------



Ajavahemikus  $\Delta t$  keskmistatud voolukiiruse 1 – telje suunaline komponent määratakse kui

$\langle u_1 \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} u_1 dt \rightarrow \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^N u_{1i} \Delta t_i \rightarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_{1i} .$	26-16
---	-------

Ajavahemikus  $\Delta t$  keskmistatud fluktuatsioonkiiruse 1 – telje suunaline komponent:

$\begin{aligned} \langle u_1' \rangle &= \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} (u_1 - \langle u_1 \rangle) dt = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} u_1 dt - \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \langle u_1 \rangle dt \\ &= \langle u_1 \rangle - \frac{1}{\Delta t} \langle u_1 \rangle (\Delta t - 0) = \langle u_1 \rangle - \langle u_1 \rangle = 0 . \end{aligned}$	26-17
---	-------

Järelikult on ajavahemikus  $\Delta t$  keskmistatud fluktuatsioonkiiruse komponendid

$\langle u_1' \rangle = \langle u_2' \rangle = \langle u_3' \rangle = 0 .$	26-18
--	-------

Turbulentne voolamine kiirusvektoriga  $\vec{u} = (u_1, 0, u_3)$ , mille keskmistatud voolukiirus on määratud vektoriga  $\langle \vec{u} \rangle = (\langle u_1 \rangle, 0, 0)$  ja fluktuatsioonkiirus on määratud vektoriga  $\vec{u}' = (u_1', 0, u_3')$ , vastab 1D horisontaalse piirdega suunatud voolamisele. Piirdega „kleepunud“ voolamisele on 0 –väärtusest erinev keskmistatud voolukiiruse gradiendi komponent  $\partial \langle u_1 \rangle / \partial x_3 \neq 0$ , ning turbulentse voolamise hõõrdepinge (tangentsiaalpinge) on määratud kui

$\tau_{13} = \mu \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_3} - \rho \langle u_1' u_3' \rangle ,$	26-19
--	-------

milles  $\mu$  on nn laminaarse voolamise dünaamiline viskoossustegur, mõõtühikuga  $[\mu] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Horisontaalse hõõrdepinge valemi esimene liige on molekulaarset päritolu hõõrdepinge ja teine liige  $\rho \langle u_1' u_3' \rangle$  on Reynoldsi pinge, mille osatähtsus vedeliku voolamisele on suurem voolupiirdest kaugenedes.

Kiiruse fluktuatsioonid suurendavad voolamises sisehõõrdejõu toimet ning seetõttu on võetud kasutusele turbulentse viskoossuse hüpotees, mis määrab Reynoldsi pinge valemiga:

$-\rho \langle u_1' u_3' \rangle = \mu_{tur} \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_3} ,$	26-20
---	-------

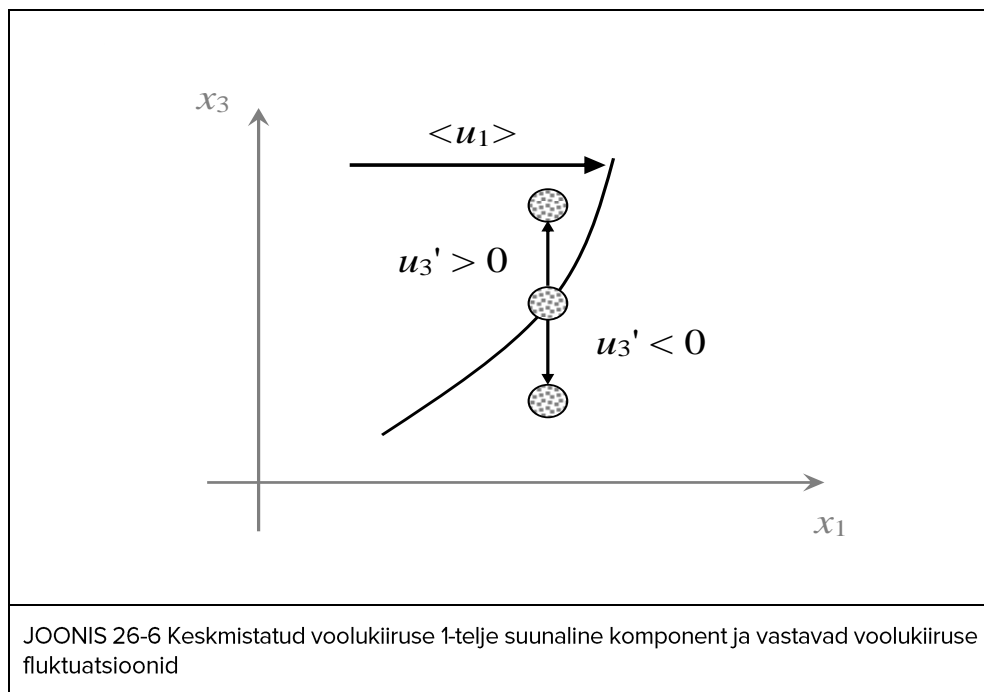
milles  $\mu_{tur} > 0$  on nn turbulentse voolamise dünaamiline viskoossustegur, mõõtühikuga  $[\mu_{tur}] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Kiirusvektori flukteerumise toime vedeliku turbulentsetes voolamises on ühtlustada keskkiiruse jaotust, st vähendada keskmistatud voolukiiruse gradienti.

Vaatame turbulentset voolamist kiirusvektoriga  $\vec{u} = (u_1, 0, 0)$ , mille keskmistatud voolukiirus on antud vektoriga  $\langle \vec{u} \rangle = (\langle u_1 \rangle, 0, 0)$  ja fluktuatsioonikiirus on antud vektoriga  $\vec{u}' = (u_1', u_2', u_3')$ . Kui voolamises võtta 0-väärtuset erinev voolukiiruse gradiendi komponent  $\partial \langle u_1 \rangle / \partial x_1 \neq 0$ , siis normaalpinge on määratud kui

$\tau_{11} = -\langle p \rangle + \mu_{n\grave{a}iv} \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_1} - \rho \frac{2}{3} k_{tur},$	26-21
---	-------

milles on kasutatud Reynoldsi pinge avaldist  $-\rho \langle u_1' u_1' \rangle = \mu_{tur} \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_1} - \rho \frac{2}{3} k_{tur}$ , ning nn laminaarse ja turbulentsse voolamise lineaarselt kombineeritud dünaamilist viskoossus-tegurit  $\mu_{n\grave{a}iv} = \mu + \mu_{tur}$ , mõõtühikuga  $[\mu_{n\grave{a}iv}] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ .



Turbulentsse voolamise kineetiline erienergia:

$k_{tur} = \frac{1}{2} \langle \vec{u}' \cdot \vec{u}' \rangle = \frac{1}{2} (\langle (u_1')^2 \rangle + \langle (u_2')^2 \rangle + \langle (u_3')^2 \rangle),$	26-22
---	-------

milles on kasutatud fluktuatsioonikiiruse vektori  $\vec{u}' = (u_1', u_2', u_3')$  skalaarkorrutise  $[\vec{u}']^2 = \vec{u}' \cdot \vec{u}' = (u_1')^2 + (u_2')^2 + (u_3')^2$  keskmistatud suurus. Turbulentsse voolamise dünaamiline rõhk (kiirusvälja fluktuatsioonides salvestunud energia) on määratud turbulentsi kineetilise erienergia ja tiheduse korrutisega:  $k_{tur} \rho$ .

Turbulentse kokkusurumatu voolamise kehtib pidevuse võrrand:

$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0,$	26-23
---	-------

milles on eeldatud, et vedeliku keskmistatud tihedus  $\langle \rho \rangle = \rho = \textit{konstant}$ , ning  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\langle \vec{u} \rangle = (\langle u_1 \rangle, \langle u_2 \rangle, \langle u_3 \rangle)$  ja  $\vec{u}' = (u_1', u_2', u_3')$  on vastavalt aktuaal, keskmistatud ja fluktuatsioon voolukiiruse vektorid.

Keskmistatud Navier-Stokesi võrrand, mis arvestab kokkusurumatu turbulentse voolamise pidevuse võrrandiga, on järgmine

$\rho \frac{D \langle u_i \rangle}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\langle p \rangle \delta_{ij} + \mu \langle S_{ij} \rangle - \rho \langle u_i' u_j' \rangle),$	26-24
--	-------

milles

$$\frac{D \langle u_i \rangle}{Dt} = \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + (\langle \vec{u} \rangle \cdot \nabla) \langle u_i \rangle,$$

$$\langle \vec{u} \rangle \cdot \nabla = \langle u_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} = \langle u_1 \rangle \frac{\partial}{\partial x_1} + \langle u_2 \rangle \frac{\partial}{\partial x_2} + \langle u_3 \rangle \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\langle S_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right),$$

ja  $\vec{g} = (0, 0, -g)$  on massijõu kiirendusvektor,  $\mu$  on nn laminaarse voolamise dünaamiline viskoossustegur, mõõtühikuga  $[\mu] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  ja  $-\rho \langle u_i' u_j' \rangle$  on Reynoldsi pingete tensor.

Reynoldsi pingete tensor

$-\rho \langle u_i' u_j' \rangle = \begin{pmatrix} -\rho \langle u_1' u_1' \rangle & -\rho \langle u_1' u_2' \rangle & -\rho \langle u_1' u_3' \rangle \\ -\rho \langle u_2' u_1' \rangle & -\rho \langle u_2' u_2' \rangle & -\rho \langle u_2' u_3' \rangle \\ -\rho \langle u_3' u_1' \rangle & -\rho \langle u_3' u_2' \rangle & -\rho \langle u_3' u_3' \rangle \end{pmatrix}$	26-25
---	-------

Kui võtta kasutusele turbulentse viskoossuse hüpotees, siis võib Reynoldsi pingete erinevuse turbulentsest kineetilisest energiast esitada voolamise keskkiiruse gradiendiga määrata keskkiirusnihete tensoriga:

$-\rho \langle u_i' u_j' \rangle + \rho \frac{2}{3} k_{tur}$ $= \begin{pmatrix} \rho v_{tur} 2 \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_1} & \rho v_{tur} \left( \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_2} + \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x_1} \right) & \rho v_{tur} \left( \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_3} + \frac{\partial \langle u_3 \rangle}{\partial x_1} \right) \\ \rho v_{tur} \left( \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x_1} + \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_2} \right) & \rho v_{tur} 2 \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x_2} & \rho v_{tur} \left( \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x_3} + \frac{\partial \langle u_3 \rangle}{\partial x_2} \right) \\ \rho v_{tur} \left( \frac{\partial \langle u_3 \rangle}{\partial x_1} + \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_3} \right) & \rho v_{tur} \left( \frac{\partial \langle u_3 \rangle}{\partial x_2} + \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x_3} \right) & \rho v_{tur} 2 \frac{\partial \langle u_3 \rangle}{\partial x_3} \end{pmatrix},$	26-26
---	-------

mis määrab nn turbulentse voolamise kinemaatilise viskoossusteguri (ingl. *eddy viscosity*), mõõtühikuga  $[v_{tur}] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , valemiga:

$v_{tur} = \frac{\mu_{tur}}{\rho},$	26-27
-------------------------------------	-------

milles  $\mu_{tur}$  on nn turbulentse voolamise dünaamiline viskoossustegur, mõõtühikuga  $[\mu_{tur}] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### 26.3.1 TURBULENTSI MUDEL

Kui võtta kasutusele turbulentse viskoossuse hüpotees, siis võib Reynoldsi võrrandi esitada kujul:

$\frac{D\langle u_i \rangle}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \langle p \rangle \delta_{ij} + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right) + g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} [2 v_{näiv} \langle S_{ij} \rangle],$	26-28
--	-------

milles

$$\frac{D\langle u_i \rangle}{Dt} = \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + (\langle \vec{u} \rangle \cdot \nabla) \langle u_i \rangle,$$

$$\langle \vec{u} \rangle \cdot \nabla = \langle u_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} = \langle u_1 \rangle \frac{\partial}{\partial x_1} + \langle u_2 \rangle \frac{\partial}{\partial x_2} + \langle u_3 \rangle \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\langle S_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right),$$

ja  $\vec{g} = (0, 0, -g)$  on massijõu kiirendusvektor, ning nn laminaarse ja turbulentse voolamise linearselt kombineeritud kinemaatilist viskoossustegurit  $v_{näiv} = \nu + v_{tur}$ , mõõtühikuga  $[v_{näiv}] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Reynoldsi võrrand, milles on kasutatud nn laminaarse ja turbulentse voolamise linearselt kombineeritud kinemaatilist viskoossustegurit  $v_{näiv} = \nu + v_{tur}$ , mõõtühikuga  $[v_{näiv}] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , ei ole muutujate järgi suletud. Seetõttu on vajalik võtta kasutusele turbulentsi mudelid.

Nn piirdeturbulentsi mudel on  $k_{tur} - \varepsilon_{tur}$  mudel, mis koosneb vastavalt turbulentse kineetilise energia ( $k_{tur}$ ) muudu võrrandist:

$\frac{Dk_{tur}}{Dt} = \frac{\mu_{tur}}{\rho} 2 \langle S_{ij} \rangle^2 - \varepsilon_{tur} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{1}{\rho} \left( \mu + \frac{\mu_{tur}}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k_{tur}}{\partial x_j} \right],$	26-29
--	-------

milles

$$\frac{Dk_{tur}}{Dt} = \frac{\partial k_{tur}}{\partial t} + (\langle \vec{u} \rangle \cdot \nabla) k_{tur},$$

$$\langle \vec{u} \rangle \cdot \nabla = \langle u_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} = \langle u_1 \rangle \frac{\partial}{\partial x_1} + \langle u_2 \rangle \frac{\partial}{\partial x_2} + \langle u_3 \rangle \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\langle S_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right)$$

ja konstant  $\sigma_k = 1,0$ , ning turbulentsse viskoosse kao ( $\varepsilon_{tur}$ ) muudu võrrandist:

$\frac{D\varepsilon_{tur}}{Dt} = \frac{\varepsilon_{tur}}{k_{tur}} \left( C_{1\varepsilon} \frac{\mu_{tur}}{\rho} 2 \langle S_{ij} \rangle^2 - C_{2\varepsilon} \varepsilon_{tur} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{1}{\rho} \left( \mu + \frac{\mu_{tur}}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_{tur}}{\partial x_j} \right],$	26-30
---	-------

milles

$$\frac{D\varepsilon_{tur}}{Dt} = \frac{\partial \varepsilon_{tur}}{\partial t} + (\langle \vec{u} \rangle \cdot \nabla) \varepsilon_{tur},$$

$$\langle \vec{u} \rangle \cdot \nabla = \langle u_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} = \langle u_1 \rangle \frac{\partial}{\partial x_1} + \langle u_2 \rangle \frac{\partial}{\partial x_2} + \langle u_3 \rangle \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\langle S_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right),$$

ja konstandid  $C_{1\varepsilon} = 1,44$ ,  $C_{2\varepsilon} = 1,92$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1,3$ .

Reynoldsi võrrandi nn turbulentsse voolamise kinemaatilise viskoossustegur (ingl. *eddy viscosity*), mõõtühikuga  $[v_{tur}] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , määratakse valemiga:

$v_{tur} = C_\mu \frac{k_{tur}^2}{\varepsilon_{tur}},$	26-31
--	-------

milles konstant  $C_\mu = 0,09$ .

Nn keeristurbulentsi mudel (ingl. *Large Eddy Simulation* – LES), milles Reynoldsi võrrandi nn turbulentsse voolamise kinemaatilise viskoossustegur (ingl. *eddy viscosity*), mõõtühikuga  $[v_{tur}] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , määratakse Smagorinsky valemiga:

$v_{tur} = l^2 \sqrt{2 \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle},$	26-32
---	-------

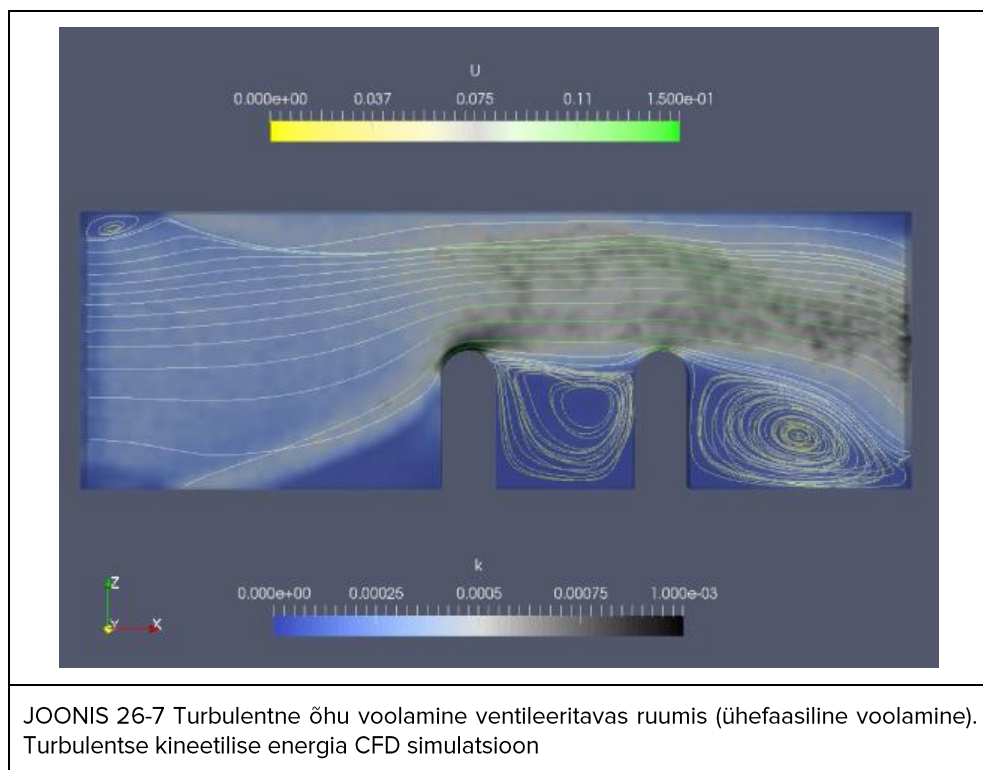
milles arvutusvõrgu parameeter määratakse valemiga:

$l = C_s^2 \Delta s,$	26-33
-----------------------	-------

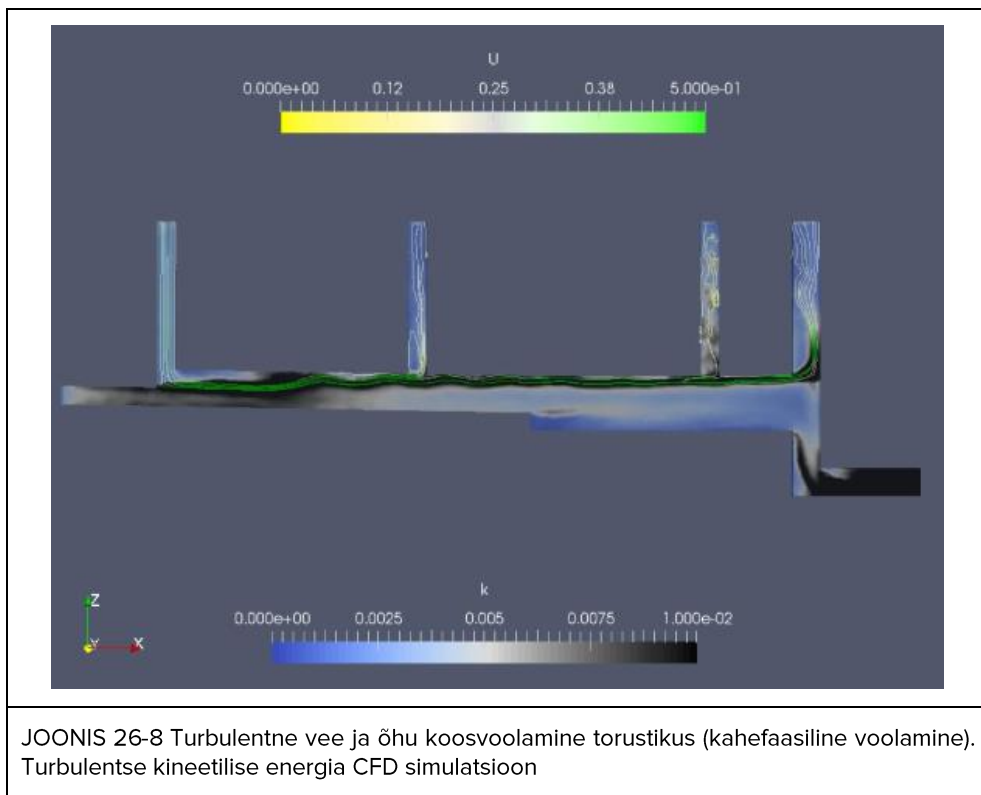
$$C_s = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{3 C_K} \right)^{3/4}.$$

Kolmogorovi konstant  $C_K = 1,5$  ja arvutusvõrgu mõõde  $\Delta s = \sqrt[3]{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}$ .

**MÄRKUS.** Navier-Stokesi võrrand määrab voolukiiruse ja rõhuväljade seosed hüdraulilises voolusüsteemis hästi laminaarsele voolamisele. Keskmistatud Navier-Stokesi võrrand ehk Reynoldsi võrrand määrab keskmistatud voolukiiruse ja rõhuväljade seosed hüdraulilises voolusüsteemis turbulentssele voolamisele tingimusel, et turbulentsne viskoossustegur on määratud turbulentsi mudeliga. Turbulentsi mudelid võib jagada nn piirdeturbulentsi ( $k_{tur} - \varepsilon_{tur}$ ) ja keeristurbulentsi (LES) mudeliteks. Arvutusliku vedeliku dünaamika rakendused kasutavad ka hübriidmudelid, mis kombineerivad piirde- ja keeristurbulentsi mudeleid. Nn erinevate aja- ja ruumimõõtmetega numbrilise integreerimise (ingl. Direct Numerical Simulation – DNS) meetodiga lahendatakse Navier-Stokesi võrrand ilma turbulentsse viskoossuseta tingimusel, et turbulentsse voolamise ruumiline ja ajaline mastaap on arvutusvõrgule lahendatud, alates kõige väiksematest, nn Kolmogorovi mikromõõtmest, kuni voolusüsteemi suurima mastaabini.



JOONIS 26-7 Turbulentne õhu voolamine ventileeritavas ruumis (ühefaasiline voolamine). Turbulentsse kineetilise energia CFD simulatsioon



## 26.4 VIITED

26.1 Moukalled, F., Mangani, L. & Darwish, M. (2016). *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics. An Advanced Introduction with OpenFOAM and Matlab*. Springer.

26.2 Andersson, B. (Editor) (2012). *Computational fluid Dynamics for engineers*. Cambridge University Press.

26.3 Kundu, P. K., Cohen, I. M. & Dowling, D. R. (2012). *Fluid Mechanics*. 5th Edition. Academic Press is an imprint of Elsevier, 875 p.

26.4 Launder, B. E. & Spalding, D. B. (1972). *The numerical computation of turbulent flows. Numerical prediction of flow, heat transfer, turbulence and combustion* (lk 96-116). Pergamon.

26.5 Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press.

## 27 ALUMISE BJEFI HÜDRAULIKA

### 27.1 PRAKTILINE OSA. PAISU VOOLUPROTSESSID

#### 27.1.1 EHITIS. HÜDROTEHNILINE RAJATIS

Veevoolu tõkestamine tekitab paisutuse ehk vabapinna taseme vertikaalse tõusu ehk tõusuvee, mis levib tõusulainena ülesvoolu. Avasängi võib rajada näiteks pinnas-, kivi- või betoonpaise. Jõevee voolamist on võimalik tõkestada ka teiste tehniliste vahenditega, nagu näiteks varjad (või kilpsiibrid) ja šandoorid. Jõevee kogumiseks võib rajada veehoidla, millega saab reguleerida veehulka jões, et vältida veepinna suuri muutuseid, mida tekitavad pikaajaliste vihmadega kaasnevad suured vooluhulgad ja põuaga kaasnevad väikesed vooluhulgad. Vooluveekogus tuleb tagada sanitaarvooluhulk, mis on hädavajalik ökosüsteemi toimimiseks. Põuaga tekivad kuivusriskid (ingl. *drought risk*), mis on ohtlikud elupaikadele.

Ülevoolu tekitab voolusängi tõke, näiteks põhjakõrgendusega pais, millest vesi üle voolab, või voolusängi külgekitsendus, millest vesi läbi voolab. Voolusängi tõkete hulka kuuluvad näiteks liigveelaskmed, lüüsregulaatorid, kitsa avaga sillad, surveta truubid (vabavoolutruubid) jne. Ülevoolupaisu ja läbivoolukitsuse või nende kombineeritud voolutõkke põhjustatud paisutus tekitab paisjoonega määratud vabapinna kõrguse muutuse ülemises bjefis (ülavees). Ülevoolud liigitatakse voolusängi läve pikkuse ehk harja paksuse järgi: lailäviülevoolud (nt müürülevool), eriprofiilülevoolud ja õhukese harjaga paisud (nt seinülevool). Voolusängi osa, mis asub paisu nõlval ülesvoolu nimetatakse ülemiseks bjefiks (ka ülavee osa), ja voolusängi osa, mis asub paisu nõlval allavoolu, nimetatakse alumiseks bjefiks (ka alavee osa). Voolamise tõkestamisega kaasneb paisu alumises bjefis vooluhüpe.

#### 27.1.2 VOOLUREŽIIM. HÜDRAULILINE VABAVOOLUREŽIIM

Ülevool on uputamata, kui paisu alumise bjefi vee vabapind (veepind) ei mõjuta voolamist paisul, vastasel korral on ülevool uputatud. Olenevalt sellest, kas ülevooluava on sama lai kui juurdevoolusängi oma või sellest kitsam, on tegemist vastavalt kas kitsendamata või kitsendatud ülevooluga. Ülevooluvalemi koostamise eesmärk on määrata seos ülevooluava läbilaskevõime (vooluhulga) ja paisutus-kõrguse ( $PK$ ) vahel olenevalt ülevooluava laiusel, kõrgusel ja kujust. Ülevooluava võib olla nelinurkse, ruutparaboolse, kolmnurkse või muu ruutastmelise ristlõike kujuga. Ümartruubi sissevoolu ristlõike ava võib olla ka osalise ümartrüüsi ristlõike kujuga, mis ei vasta hästi ruutastmelise ristlõike kujule. Kasutatakse ka trapets-ristlõikega ülevooluava. Ülevoolu vooluhulga valemite kasutamisel on oluline määrata vooluhulgategur, mis sõltub ülevooluläve kõrguse, avalaiuse ja ristlõike



kuju muutustega (teravaservalise, ümardatud servaga vms geomeetrilise pinnastruktuuriga) seonduvatel takistustel. Tavaliselt määratakse vooluhulga koefitsient mõeldukalt ebaühtlasele voolamisele eksperimentaalselt, kusjuures hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga veesööst paisu ülemises bjefis muutub paisu alumises bjefis hüdrauliliselt käreda vabavoolurežiimiga veesööstuks, mis paisu lävel vastab hüdrauliliselt kriitilise vabavoolurežiimiga voolamisele. Maksimaalse vooluhulga valemi matemaatiline kuju määratakse horisontaalvoolule kehtiva voolujõu ja rõhugradientjõu tasakaalutingimusel ning hüdrostaatilise rõhu eeldusel, mille korral võetakse ristlõikeava puhul kasutusele Froude'i suhtarvu kriteerium  $Fr = 1$ , mis vastab kriitilisele voolamisele paisu lävel. Maksimaalse vooluhulga valemi asemel kasutatakse vesiehitiste puhul sageli ka ülevoolu põhivalemit, kus kasutatakse ülevoolutegurit (VIIDE 27.1, „Hüdraulika erikursuse ülesannete kogu“). Maksimaalse vooluhulga valemi vooluhulgateguri ( $C_d$ ) või ülevoolu põhivalemi ülevooluteguri ( $C_d^*$ ) määramiseks võib kasutada ka arvutusliku vedelike dünaamika (CFD) rakendusi, kus vee ja õhu koosvoolamine ei ole väga oluline. Ülevool võib olla uputatud, mis tähendab, et paisu alumise bjefi veepind mõjutab oluliselt ülevoolu. Uputatud ülevoolu korral ei ole võimalik otseselt kasutada maksimaalse vooluhulga valemit, kuna see ei käsitle hüdrauliliselt kriitilise vabavoolurežiimiga voolamist paisul, vaid ülevoolu  $Fr < 1$ , mis vastab rahulikule vabavoolurežiimile. Uputamata ja uputatud ülevoolude eristamise tingimuste määramiseks kasutatakse kriteeriumit, mis seob paisu alumise bjefi vaba- ja lävepinna kõrguste erinevuse ( $h_u$ ) kriitilise voolamisega paisul, st kriitilise sügavusega ( $d_k$ ). Ülevool võib olla uputamata ka eritingimusel  $h_u > 0$ . Uputatud ülevoolu vooluhulga määramiseks kasutatakse empiirilisi valemeid, mis ei vasta Froude'i suhtarvu kriteeriumile  $Fr = 1$ .

Üleminekul käredate voolamiselt rahulikule voolamisele paisu alumises bjefis moodustub vooluhüpe, milles pöörleb tavaliselt voolutsooni peal veevalts – nagu seda on kaetud vooluhüpe. Veevaltsis haaratakse õhku veepinnalt ja vett voolutsoonist ning seetõttu muutub valtsimassi tihedus pidevalt. Veevaltsiga vooluhüpet nimetatakse täielikuks vooluhüppeks, aga on olemas ka mittetäielik vooluhüpe, mis koosneb lainejadast. Uputamata ülevoolul areneb selle alumise bjefi järsul nõlval välja käre voolamine, millega kaasnevad vabapinnahäired võivad oluliselt muuta voolamise stabiilsust ning põhjustada samuti liikuvat vooluhüpet. Kui vooluhüppe liikumist ülevoolu takistab pais, siis areneb alumises bjefis välja seisev murdlaine. Vooluhüppes on voolamise liikumishulk (vooluhoog) praktiliselt määratud rõhugradient jõuga, st sisehõõrde toime on väike, aga oluliselt muutub voolamise mehaaniline energia (VIIDE 27.2).

Vabavoolu olukorras kaasneb voolukiiruse järsu muutusega voolamise liikumishulga järsk muutus. Üldjuhul kasutatakse voolamise liikumishulga (ka hoo) muutuse määramiseks lõpliku suurusega ruumi osale ehk kontrollmahule koostatud integraalset voolamise liikumishulga võrrandit, milles ajavahemik  $\Delta t$  vastab

vabapinna täielikule muutusele kõrguselt  $h_1$  kõrgusele  $h_2$  ehk vooluhüppelaine liikumisele kontrollmahu ulatuses. Kui vooluhüppelaine liigub vastuvoolu kiirusega, mis on määratud hüdrauliliselt käreda vabavoolurežiimiga, on vooluhüppe kaaskõrgustega  $h_1$  ja  $h_2$  määratud paisu vooluprotsessi näol tegemist muutumatu vooluhulga olukorraga. Fikseerimata (liikuva) ja fikseeritud (liikumatu) vooluhüppe puhul muutub veepinna kõrgus hüppe-eelselt kõrguselt  $h_1 < h_{kr}$  hüppe-järgsele kõrgusele  $h_2 > h_{kr}$ , milles voolamise kriitiline kõrgus on  $h_{kr}$ . Vooluhüppe kõrgus määratakse kui  $h_2 - h_1$ .

Vooluhüppega kaasneb ka voolamise mehaanilise energia muutus, sest voolamine peab järsult muutuma hüppe-eelselt rahuliku voolamise kõrguselt ( $h_1 < h_{kr}$ ) hüppe-järgsele käreda voolamise kõrgusele  $h_2 > h_{kr}$ , milles voolamise kriitiline kõrgus on  $h_{kr}$ . Kui veesööstuga kaasnev veepinna kõrgus muutub kõrguselt  $h_1$  kõrguseni  $h_2 (< h_1)$  pidevalt (ehk ilma singulaarsuseta), muutub ristlõike mehaaniline energia mööda energiajoont (ingl. *energy grade line*). See on võimalik kuni ülevoolutingimustega määratud mehaanilise energia minimaalse väärtuseni. Kui mehaanilise energia miinimumväärtus on saavutatud, siis ei ole võimalik veepinna kõrgust suurendada ning selle asemel moodustub vooluhüpe. Olenevalt vooluhüppe kaassügavuste ( $h_1, h_2$ ) erinevusest võib moodustuda erinevaid hüppevorme – nagu surutud vooluhüpe, lainejada, kaetud vooluhüpe või pinnahüpe (VIIDE 27.3, „Hüdraulika ja pumbad“). Hüppevorm, mis projekteeritakse vesiehitistele, on kaetud vooluhüpe ehk paisu alumise bjefi põhjalähedase voolutsooniga vooluhüpe, mille voolutsooni peal pöörleb veevalts. Enamiku hüppevormide voolutsoon on sängipõhja lähedal ning veevalts või lainejada selle kohal. Seetõttu on sängipõhja lähedased voolukiirused suured ja voolusäng uhtumisohus. Eelpool mainitud pinnahüppe voolutsoon on veepinna lähedal ning hüppekeerised selle all. Pinnahüpe tekib tavaliselt vesiehitise alumises bjefis trampliinprofiiliga otsnõlvvalt eralduva jugavoolu langemiskohas. Kui voolutsoonialused hüppekeerised on orienteeritud pöörisega vesiehitise poole, siis on sängipõhja uhtumine vähem ohus.

Vesiehitiste (nt paisude) projekteerimisel on vajalik määrata vooluhüppe kaaskõrgused ja hüppepikkus. Vooluhüppe kaassügavuste vahelise seose määramiseks ei saa kasutada Bernoulli võrrandit, kuna voolutoru pind katkeb voolukiiruse järsul muutumisel (esineb veepinna kõrguse singulaarsus) ning voolamine on tugevalt ebäühtlane. Seetõttu kasutatakse integraalset voolamise liikumishulga võrrandit, milles määratakse voolamise liikumishulga täismuutus fikseeritud kontrollmahule rakendatud pinna- ja massijõudude resultandiga. Fikseerimata kontrollmahu puhul tuleb voolamise liikumishulga võrrandis kasutada suhtelisi voolukiiruseid, mis sõltuvad kontrollpindade liikumiskiirustest (VIIDE 27.4).

Jõevee paisutamine peab olema hüdrauliliselt kontrollitud, kuna veepinna kõrguse muutmine võib mõjutada lähialade veerežiimi (äravoolu) (VIIDE 27.5). See sõltub paisutuskõrgusest, pinnamoest ja geoloogilistest tingimustest. Jõevee paisutamisel tuleb arvestada jõesängi lähialade iseärasustega. Nendega mitteamvestamine

võib tekitada kahju maa-alade üleujutamise näol. Samuti võib paisutamine parandada põhjavee voolurežiimi ja seetõttu ka veetaseme tõusu salvkaevudes.

Jõesängis võib setete kuhjumisel moodustuda settekünnis (ka setete künnis), mis võib oluliselt aeglustada jõevoolu ning paisutada vabapinda künnisest ülesvoolu. Setete künnis moodustub tavaliselt jõesuudmes (jõe estuaaris), kus jõevool aeglustub merevee tiheduse ja merepinna mõjude tõttu. Jõesängil on tavaliselt olemas tasakaaluprofiil ehk on kujunenud olukord, kus voolulõigu setete kuhjumine ja uhtumine on sama intensiivsusega (juhul kui ei toimu sängipiirde erosiooni). Merepinna kõrguse suurenemisel ja jõevee koguse vähenemisel võib tekkida stratifitseeritud voolamine, mille tulemusena merevesi siseneb jõepehjalähedase hoovusena jõesängi (Pärnu jõgi, Narva jõgi). Merevee voolamine jõesängis takistab setete jõevoolusuunalist liikumist, mis võib samuti olla üks setete jõesuudmesse kuhjumise põhjuseid.

### 27.1.3 SISSEJUHATUS ÜLESANDESSE. PÕHIVALEMID

Voolamise puhul hüdrauliliselt kareda piirdega voolusängis, millest on välja jäetud vabapind ning mis vastab Moody diagrammil ruuttakistuspiirkonna hõõrdetakistusteguri lahenditele, võib kasutada Manningi karedustegurit. Hõõrdetakistusteguri võib määrata siis lihtsama valemiga kui Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrand. Manningi karedusteguri kasutamine voolusüsteemi takistuse määramisel on seotud vee omaduste määramatusega vee temperatuuri järgi.

Tuletamaks maksimaalse vooluhulga valemit, mille aluseks on Bernoulli võrrand, on eeldatud, et paisu ülemises bjefis on voolamise kineetiline energia oluliselt väiksem potentsiaalsest energiast. Muutumatu laiusega voolusängis voolamise puhul on paisutuskõrgus kiiruskõrguse võrra üle hinnatud. Reaalvedeliku voolamise paisutamisel täiendatakse maksimaalse vooluhulga valemit vooluhulgateguriga.

Paisutuskõrgust on võimalik hästi määra ülevoolu põhivalemiga uputamata juhule. Alumise bjefi veetase mõjutab oluliselt paksu harjaga paisule voolamist. Veetase paisu alumises bjefi võib ülevoolu uputamata olukorras olla lävest mõnevõrra kõrgem. Ülevool on uputatud, kui veesügavus kogu läve ulatuses on suurem kriitilisest sügavusest. Ülevoolu veesööstuga voolujooned kõverduvad ja lävel tekib voolamisele ahassügavus, milles veesügavus on kriitilisest sügavusest väiksem. Vabapinna edasine kulg oleneb läve pikkuse ja paisutuskõrguse suhtest. Uputatud paisu olukorras võib kasutada arvutusliku vedelike dünaamika (CFD) lahendusi.

Bernoulli võrrandit võib rakendada igale voolujoonele. Rõhk vedelikus on hüdrostaatiline, kui voolujooned on paralleelsed. Mõõdukalt ebahühtse voolamise voolujooned on peaaegu paralleelsed ehk mittehüdrostaatiline rõhk ei mõjuta voolamist oluliselt.



JOONIS 27-1 Stratifitseeritud voolamine jõe estuaaris, Pärnu sadam. (Erakogu)

## 27.2 PÕHIÜLESANNE. UPUTAMATA ÜLEVOOL. CFD MODELLEERIMINE

ANTUD. Looduslikku voolusängi on rajatud ilma külgkitsendusega trapetskujuline pais, mille läve kõrgus  $h_{pais} = 1,3$  m ja läve pikkus  $l_{pais} = 8$  m. Jõesängi paisu ülemise ja alumise bjefi nõlvused on 1,3 : 2,21, mis vastab nõlvustegurile  $m_n = 1,7$ . Loodussängis, põhjalaiusega  $w = 16$  m ja põhjalanguga  $i_0 = 2,5$  m.km<sup>-1</sup>, on 86% vooluhulk  $Q = 15,7624$  m<sup>3</sup>.s<sup>-1</sup>. Jõesängi piirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,035$ . Loodussängis voolab 10 °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000$  kg.m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg.m<sup>-1</sup>.s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>. Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Arvutada voolamisele loodussängis normaalsügavus, kriitiline sügavus ja hõõrdepinge piiridel ning määrata voolusängi Reynoldsi arv ja Froude'i suhtarvu kriteeriumiga hüdrauliline vabavoolurežiim. Arvutada paisu ülemises bjefis vabapinna maksimaalne kõrgus üle lävepinna (paisutuskõrgus) ning paisutamise mõjuulatus. Arvutada paisu alumises bjefis vooluhüppe kaaskõrgused ja neile vastava valtsi kõrgus.



JOONIS 27-2 Vabapinnaga voolamine jõesängis (Nehatu pais, Pirita jõgi, 2010.a. kevad)

EELDUSED. Veevool paisuga loodussängis on statsionaarne ja mõõdukalt ebaühtlane. Looduslik voolusäng (loodussäng) on praktiliselt nelinurkse ristlõikega ning piirde takistuse määrab hüdrauliliselt kare voolamine. Normaalsügavus määrata Manningi vooluhulga valemiga, kasutades selleks Newtoni iteratsioonmeetodit. Kriitilise sügavuse määramiseks kasutada Froude'i suhtarvu kriteeriumit. Paisutuskõrgus määrata ülevoolu põhivalemiga uputamata juhule. Paisutamise mõjuulatus (paisutusulatus) määrata mõõdukalt ebaühtlase vabapinnaga voolamise diferentsiaalvõrrandiga, kasutades selleks numbrilist arvutuskeemi ilmutatud kujul. Kasutada arvutusliku vedelike dünaamika (CFD) mudelit, et visualiseerida paisu ülevooluga määratud veepind ja voolukiirus uputamata juhule.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Manningi vooluhulga valem, voolusängi piirde hõõrdepinge valem, voolusängi Reynoldsi arv, Bernoulli kolmikliige, Bernoulli funktsioon, trapetsristlõikega voolusängi vabavoolu Froude'i arvu valem, maksimaalse vooluhulga valem, ülevoolu põhivalem, mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand**

### VALEMID

Manningi vooluhulga valem on

$$Q = \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e I_h^{\frac{1}{2}}}{n_M},$$

milles  $Q$  on vooluhulk,  $n_M$  on Manningi karedustegur,  $A_e = h^2 (\beta + m_n)$  on trapetsristlõikega voolusängi elavlõige. Voolamise ristlõike lamedus  $\beta = w/h$ , milles  $w$  on voolusängi aluspõhja laius ja  $h$  on vabapinna kõrgus voolusängi aluspõhjast. (Ühtlasele voolamisele  $h = d_0$ , milles  $d_0$  on normaalsügavus.) Nõlvustegur  $m_n = \cot(\theta)$ , milles  $\theta$  on sama nõlvusega voolusängi nõlva(de) välisnurk. Hüdrauliline raadius  $R_h = A_e/\chi$ , milles  $\chi = h(\beta + 2\sqrt{1 + m_n^2})$  on trapetsristlõike märgpiire, st voolamise ristlõikega (vooluristlõikega) antud märgpiirde pikkus, millest on välja jäetud vabapinna pikkus.  $I_h$  on hüdrauliline lang.

Jõesängile, mis on järskude kallastega, st praktiliselt vertikaalsete nõlvadega, millele nõlvustegur  $m_n \approx 0$ , võib kasutusele võtta nelinurkse veevoolu ristlõike, mille hüdrauliline raadius  $R_h = A_e/\chi$ , milles elavlõige  $A_e = h w$  ja märgpiire  $\chi = w + 2 h$  on määratud nelinurksele elavlõikele. Kui vee sügavus jõesängis on oluliselt väiksem jõepõhja laiusest ( $d \ll w$ ), siis jõevoolu hüdrauliline raadius on praktiliselt määratud veepinna kõrgusega aluspõhjast:  $R_h \approx h$ .

Vabapinna kõrgus voolusängi aluspõhjast määrab voolusängi aluspõhja sügavuse vabapinnast:

$$h = -(-d) = d.$$

Ühtlasele vabapinnaga voolamisele prismaatilises voolusängis on hüdrauliline lang määratud põhjalanguga, st  $I_h = i_0$ .

Voolusängi hõõrdepinge piirdele võib määrata valemiga:

$$\tau_0 = \rho g R_h I_h.$$

Mõõdukalt ebahühtlasele vabapinnaga voolamisele prismaatilises voolusängis ei ole hüdrauliline lang määratud põhjalanguga, st  $I_h \neq i_0$ .

Voolusängi Reynoldsi arv on

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur ja  $R_h$  on hüdrauliline raadius. Laminaarse ja turbulentsse voolamise ülemineku kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on 500.

Bernoulli kolmikliige vabapinnaga voolamisele on

$$B = \frac{u^2}{2g} + h + h_s,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $g$  on raskuskiirendus,  $h$  on veepinna kõrgus voolusängi aluspõhjast ja  $h_s$  on aluspõhja kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult.

Trapetsristlõikega voolusängile voolukiiruse määramisel võib kasutada voolamise ruumkiiruse valemit:

$$u = \frac{Q}{A_e} = \frac{Q}{(h w + h^2 m_n)} = \frac{Q}{h^2 (\beta + m_n)},$$

võib Bernoulli funktsiooniga vabapinnaga voolamisele teisendada kujule:

$$B = \frac{Q^2}{2g h^4 (\beta + m_n)^2} + h + h_s = \frac{Q^2}{2g (h w + h^2 m_n)^2} + h + h_s.$$

Kui kasutada funktsiooni ekstreemumi määramise teoreemi veepinna kõrguse  $h$  järgi:

$$\frac{dB}{dh} = 0,$$

siis järeldub Bernoulli funktsioonist  $B = f(h, Q, g, w, m_n, h_s)$ , milles  $h$  on muutuja ja  $Q, g, w, m_n, h_s$  on konstantsed suurused, järgmine avaldis:

$$-\frac{2 Q^2 (w + 2 h m_n)}{2 g (h w + h^2 m_n)^3} + 1 = -\frac{Q^2 (w + 2 h m_n)}{g (h w + h^2 m_n)^3} + 1 = 0.$$

Trapetsristlõikega voolusängi vabavoolu Froude'i arv astmes 2 on määratud valemiga

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g \frac{(h w + h^2 m_n)^3}{(w + 2 h m_n)}} = \frac{u^2}{g \frac{(h w + h^2 m_n)}{(w + 2 h m_n)'}}$$

milles on kasutatud seost  $u = Q/A_e = Q/(h w + h^2 m_n)$ . Kriitilisele vabavoolule vastab  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule vastavad  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

Ideaalvedeliku Bernoulli võrrand ülevoolule on

$$h_{pais} + PK \approx h_{pais} + d + \frac{u^2}{2 g},$$

milles  $h_{pais}$  on paisu läve kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult,  $PK$  on paisutuskõrgus ja  $d$  on veekihi sügavus üle paisu läve (veekihi paksus paisul),  $g$  on raskuskiirendus ja  $u$  on voolukiirus paisu lävel. Ideaalvoolu Bernoulli võrrandis ülevoolule VALEM (2-18) on eeldatud, et paisu ülemises bjefis on voolamise kineetiline energia oluliselt väiksem potentsiaalsest energiast. Potentsiaalne erienergia paisu ülemises bjefis on määratud suurusega  $h_{pais} + PK$ , eeldusel et voolusängis on suhteliselt kõrge voolujooneline põhjaaste.

Hüdraulilisel vabavoolurežiimil, mis vastab Froude'i suhtarvu kriteeriumile  $Fr = 1$  (kriitiline vabapinnaga voolamine), määratakse voolukiirus nelinurkristlõikega voolusängile valemiga:

$$u = \sqrt{g d}.$$

→

$$h_{pais} + PK = h_{pais} + d + \frac{u^2}{2 g}$$

$$PK = d + \frac{d}{2} = \frac{3}{2} d$$

$$d = \frac{2}{3} PK$$

Nelinurkristlõikega voolusängile laiusena  $w$  määratakse vooluhulk valemiga:

$$Q = u d w.$$

→

$$u = \sqrt{g d} = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} (PK)^{\frac{1}{2}}$$

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w$$



Paisutuskõrguse järgi vooluhulga määramise valemite nimetatakse maksimaalse vooluhulga valemiks juhul kui ülevoolule paisu lävel  $Fr = 1$ . Reaalvedeliku voolamise paisutamisel täiendatakse maksimaalse vooluhulga valemite vooluhulgateguriga  $C_d < 1$ . Ideaalvedeliku voolamise tingimustel on vooluhulgategur  $C_d = 1$ .

Nelinurkse vooluristlõikega trapetskujuga paisule võib vooluhulgateguri määrata valemiga:

$$C_d = \frac{3\sqrt{3}}{2} (0,43 + 0,06 \sin[\pi(\epsilon - 0,55)] - 0,0396\theta + 0,0029),$$

milles paisu läve suhteline pikkus on

$$\epsilon = \frac{PK}{(PK + l_{\text{pais}})},$$

ning paisu ülemise bjefi otsnõlva kaldenurk (radiaanides) on  $\theta = \text{acot}(m_n)$ .

**MÄRKUS.** Maksimaalse vooluhulga valemite võib üldistada ruutastmelise ristlõike perimeetriaga loodussängi voolamiste olukorrale, milles võetakse kasutusele ristlõike kujutegur  $\xi \geq 1$  ning voolusängi aluspõhja laius  $w$  asendatakse vabavoolu pealtlaiusega  $W$  (vt LISA I). Ruutastmelise ristlõikega ülevoolule määratakse vooluhulk valemiga:

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2PK}{1 + 2\xi} \right)^{\frac{3}{2}} W$$

Ruutastmelise kõverjoone ordinaat ( $z$ ) sõltub abstsissist ( $y$ ) kui  $y = 0$  järgi tsentreeritud koordinaatide funktsioon  $z = y^{2/(2\xi-2)}$ , milles  $\xi > 1$  on vooluristlõike kujutegur.  $\xi \approx 1, \xi = 3/2, 2$  vastab praktiliselt nelinurkse, täpselt ruutparaboolse ja täpselt kolmnurkse ristlõikega perimeetritele.

Bernoulli kolmikliige vabapinnaga voolamisele on

$$B = \frac{u^2}{2g} + h + h_s,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $g$  on raskuskiirendus,  $h$  on veepinna kõrgus voolusängi aluspõhjast ja  $h_s$  on aluspõhja kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult. Bernoulli kolmikliikme voolusuunaline muutus puudub ideaalvedeliku voolamise puhul. Mõõdukalt ebaühtlasele reaalvoolule on Bernoulli kolmikliikme voolusängi aluspõhja suunaline ( $x'$  – pööratud koordinaattelje suunaline) diferentsiaalne muutus (vähenemine) määratud hüdraulilise languga:

$$\frac{\partial B}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{u^2}{2} + h + h_s \right) = -I_h,$$

milles  $I_h$  on hüdrauliline lang ja  $x'$  on tähissängi pikikalde nurgaga  $\theta$  määratud koordinaat.

Voolamise erienergia on määratud kui

$$E_s = \frac{u^2}{2g} + h = \frac{Q^2}{2g A_e^2} + h,$$

millele on võetud kasutusele vooluhulk  $Q$  ja elavlõige  $A_e$  vastavalt seosele  $u = Q/A_e$ . Trapetsristlõikega voolamise elavlõige  $A_e = h^2 (\beta + m_n)$ , milles ristlõike lamedus  $\beta = w/h$ .

Nelinurkristlõikega voolamisele on nõlvustegur  $m_n = 0$ , millest järeldeb et  $A_e = h w$ .

Mõõdukalt ebaühtlase reaalvoolu puhul on voolamise erienergia voolusängi aluspõhja pikikalde suunaline ( $x'$  – pööratud koordinaattelje suunaline) diferentsiaalne muutus määratud põhjalangu ja hüdraulilise langu vahega:

$$\frac{\partial E_s}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{u^2}{2g} + h \right) = -\frac{\partial h_s}{\partial x'} - I_h \approx i_0 - I_h,$$

milles  $\partial h_s / \partial x'$  on määratud põhjalanguga  $i_0$  eeldusel, et  $(\cos(\theta))^2 \approx 1$ .

Voolamise erienergia funktsioonist  $E_s = f(h, Q, g w, m_n)$  tuletis muutuja  $h$  järgi, milles  $Q, g w$  ja  $m_n$  on konstantsed suurused, määrab avaldise:

$$\frac{\partial E_s}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{Q^2}{2g A_e^2} + h \right) = \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{Q^2}{2g (h w + h^2 m_n)^2} + h \right) = -\frac{(w + 2 h m_n) Q^2}{g (h w + h^2 m_n)^3} + 1.$$

Trapetsristlõikega voolusängi vabavoolu Froude'i arv astmes 2 on määratud valemiga:

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g \frac{(h w + h^2 m_n)^3}{(w + 2 h m_n)}} = \frac{(w + 2 h m_n) Q^2}{g (h w + h^2 m_n)^3}.$$

Mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{dh}{dx'} \approx \frac{i_0 - I_h}{1 - Fr^2},$$

milles  $I_h$  on hüdrauliline lang,  $i_0$  on põhjalang ja  $Fr$  on Froude'i arv.

Arvutusnäide. Normaalsügavuse määramine nelinurkristlõikega voolusängis

Numbriline arvutusskeem. Normaalsügavus

Numbriline arvutusmeetod. Newtoni iteratsioonmeetod

ARVUTUSSKEEM (Manningi valem, avatud nelinurkristlõikega voolusäng)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku sügavuse valem (iteratsioonmeetodi põhivalem)

$$z_{j+1} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left( \frac{5w + 6z_j}{3z_j(w + 2z_j)} \right)}$$

Arvutusliku vooluhulga valem

$$Q_j = \frac{R_{n_j}^{\frac{2}{3}} A_{e_j} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} A_{e_j}^{\frac{5}{3}}}{n_M \chi_j^{\frac{2}{3}}} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} (z_j w)^{\frac{5}{3}}}{n_M (w + 2z_j)^{\frac{2}{3}}}$$

Jõevoolu hüdraulika (voolamine ilma paisuta)

ARVUTUS. Normaalsügavus

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (m)	1	0,8405	0,8325	0,8324	0,8324	0,8324
$Q_j$ (m <sup>3</sup> .s <sup>-1</sup> )	21,1310	16,0068	15,7631	15,7624	15,7624	15,7624

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (m)	0,8324	0,8324	0,8324	0,8324
$Q_j$ (m <sup>3</sup> .s <sup>-1</sup> )	15,7624	15,7624	15,7624	15,7624

VASTUSED

$$d_0 = 0,8324 \text{ m}$$

$$Re_{vs} = 6,8639 \cdot 10^5$$

$$Fr = 0,4141$$

$$\lambda = 0,1056$$

JÄRELDUS. Arvutustulemustest selgub, et vabapinnaga voolamine on turbulentne ( $Re_{vs} > 500$ ) ja hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga ( $Fr < 1$ ). Ühtlase vabavoolu hõõrdetaktustegur vastab Moody diagrammi ruuttaktustuspiirkonnale.

*Kriitiline sügavus*

#### VALEMID

Trapetsristlõikega voolusängi vabavoolu Froude'i arv ruudus valem teiseneb nelinurkristlõikega voolusängi vabavoolu Froude'i arv ruudus valemiks vastavalt tingimusele:

$$m_n = 0,$$

→

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g h^3 w^2} = \frac{u^2}{g h}.$$

Nelinurkristlõikega voolusängile on Froude'i arv määratud valemiga:

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{g h}}.$$

Kriitilisele vabavoolule vastab  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule on vastavalt  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

Froude'i suhtarvu kriteerium kriitilisele voolamisele on

$$Fr^2 = 1.$$

→

$$1 = \frac{u^2}{g d_k} = \frac{Q^2}{g d_k A_k^2} = \frac{Q^2}{g d_k^3 w^2}$$

→

$$d_k = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g w^2}}$$

#### ARVUTUS

$$d_k = \sqrt[3]{\frac{(15,7624 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1})^2}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (16 \text{ m})^2}} = 0,4625 \text{ m}$$

#### VASTUSED

$$d_k = 0,4625 \text{ m}$$

$$Fr = 1$$

$$d_k < d_0$$

JÄRELDUS. Arvutustulemusest selgub, et nelinurkristlõikega voolusängis on kriitilise voolamise veesügavus väiksem kui normaalsügavus. Järelikult on ühtlane voolamine nelinurkristlõikega voolusängis hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga.

*Hõõrdepinge voolusängi piirdele*

#### VALEMID

Ühtlasele vabapinnaga voolamisele prismaatilises voolusängis on hüdrauliline lang määratud põhjalanguga, st  $I_h = i_0$ .

Voolusängi hõõrdepinge piirdele võib määrata valemiga:

$$\tau_0 = \rho g R_h I_h .$$

#### ARVUTUS

$$R_h = \frac{0,8324 \text{ m} \cdot 16 \text{ m}}{16 \text{ m} + 2 \cdot 0,8324 \text{ m}} = 0,7540 \text{ m}$$

$$\tau_0 = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,7540 \text{ m} \cdot 0,0025 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1} = 18,4916 \text{ Pa}$$

#### VASTUS

$$\tau_0 = 18,4916 \text{ Pa}$$

*Paisu ülemise bjefi hüdraulika (jõevoolu paisutamine)*

*Paisutuskõrguse määramine*

#### VALEMID

Ülevoolu põhivalemi võib esitada teisendusega:

$$Q = C_d g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} w = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}} w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}} = C_d^* w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}},$$

milles ülevoolutegur on

$$C_d^* = \frac{2}{3} \frac{C_d}{\sqrt{3}}.$$

Ülevoolu põhivalemist saab tuletada valemi paisutuskõrguse määramisele:

$$Q = C_d^* w \sqrt{2g} (PK)^{\frac{3}{2}},$$

→

$$PK = \left( \frac{Q}{C_d^* w \sqrt{2g}} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

ARVUTUS

$$PK = \left( \frac{15,7624 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{0,352 \cdot 16 \text{ m} \cdot (2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}} = 0,7363 \text{ m}$$

$$C_d^* = 0,43 + 0,06 \cdot \sin \left[ \pi \cdot \left( \frac{0,7363 \text{ m}}{(0,7363 \text{ m} + 8 \text{ m})} - 0,55 \right) \right] - 0,0396 \cdot \text{acot}(1,7) + 0,0029 = 0,3522$$

VASTUSED

$$PK = 0,7363 \text{ m}$$

$$C_d^* = 0,3522$$

*Vabapinna kõrgus paisu ülemises bjefis*

VALEMID

$$h_{vp} = h_{pais} + PK$$

ARVUTUS

$$h_{vp} = 1,3 \text{ m} + 0,7363 \text{ m} = 2,0363 \text{ m}$$

VASTUS

$$h = 2,0363 \text{ m}$$

*Paisutusulatuse määramine*

VALEMID

Mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i_0 - I_h}{1 - Fr^2},$$

milles  $x' \rightarrow l$ ,  $I_h$  on hüdrauliline lang,  $i_0$  on põhjalang ja  $Fr$  on Froude'i arv. Mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrandis võtame kasutusele lõplikud vahed vabapinna kõrguse ja voolupikkuse muutustele:

$$\frac{dh}{dl} \rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta l}.$$

Kasutades numbrilist arvutusskeemi diferentsiaalvõrrandi lõplikele vahedele ilmutatud kujul:

$$\Delta l = \Delta h \frac{1 - Fr^2}{i_0 - I_h},$$

võib kasutusele võtta Euleri valemi ilmutatud kujul paisutuse mõjuulatuse määramisele:

$$l_{i-1} = l_i - \Delta h \frac{1 - Fr^2}{i_0 - I_h}.$$

ARVUTUS: Numbriline arvutusskeem, milles on kasutatud algtingimust

$$l_1 = 0$$

ja veepinna kõrguse muutuse puhul konstantset lõpliku vahet:

$$\Delta h = 0,1338 \text{ m}.$$

$h_i$ (m)	$A_e$ (m <sup>2</sup> )	$\chi$ (m)	$Fr$	$I_h$	$l_i$ (m)
2,0363	32,5808	20,0726	0,1082	$0,1503 \cdot 10^{-3}$	0
1,9025	30,4405	19,8051	0,1199	$0,1852 \cdot 10^{-3}$	-56,3
1,7688	28,3003	19,5375	0,1337	$0,2319 \cdot 10^{-3}$	-113,2
1,6350	26,1600	19,2700	0,1504	$0,2959 \cdot 10^{-3}$	-171,1
1,5012	24,0197	19,0025	0,1710	$0,3860 \cdot 10^{-3}$	-230,5
1,3675	21,8795	18,7349	0,1967	$0,5170 \cdot 10^{-3}$	-291,9
1,2337	19,7392	18,4674	0,2295	$0,7148 \cdot 10^{-3}$	-356,7
1,0999	17,5989	18,1999	0,2727	$1,0277 \cdot 10^{-3}$	-427,7
0,9662	15,4587	17,9323	0,3312	$1,5524 \cdot 10^{-3}$	-511,8
0,8324	13,3184	17,6648	0,4142	$2,5005 \cdot 10^{-3}$	-637,5

## VASTUS

Paisutamise mõjuulatus ülesvoolu on ligikaudu  $637,5 \text{ m} = 0,6375 \text{ km}$  paisu ülemises bjefis.

*Paisu alumise bjefi hüdraulika (vooluhüpe)*

*Normaalsügavuse määramine paisu nõlval*

*Numbriline arvutusskeem. Normaalsügavus*

## VALEMID

Manningi vooluhulga valem on

$$Q = \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e I_h^{\frac{1}{2}}}{n_M},$$

milles  $Q$  on vooluhulk,  $n_M$  on Manningi karedustegur,  $A_e = h w$  on nelinurkristlõikega voolusängi elavlõige, milles  $h$  on vabapinna kõrgus voolusängi

aluspõhjast (horisontaalne ristlõike perimeetri osa) ja  $w$  on voolusängi laius. Hüdrauliline raadius  $R_h = A_e/\chi$ , milles  $\chi = w + 2h$  on voolamise ristlõikega (vooluristlõikega) antud märgpiirde pikkus, millest on välja jäetud vabapind.  $I_h$  on hüdrauliline lang.

Voolusängi Reynoldsi arv on

$$Re_{vs} = \frac{u R_h}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur ja  $R_h$  on hüdrauliline raadius. Laminaarse ja turbulentsse voolamise ülemineku kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on 500.

Nelinurkristlõikega avasängi vabavoolule on Froude'i arv ruudus valem

$$Fr^2 = \frac{u^2}{g h} = \frac{Q^2}{g h^3 w^2},$$

milles vabapinna kõrgus voolusängi aluspõhjast määrab voolusängi aluspõhja sügavuse vabapinnast:

$$h = -(-d) = d.$$

→

$$Fr = \sqrt{\frac{Q^2}{g d^3 w^2}}.$$

ARVUTUSSKEEM (Manningi valem, avatud nelinurkristlõikega voolusäng)

Numbrilise arvutusskeemi valemite süsteem koosneb kahest valemist.

Arvutusliku sügavuse valem (iteratsioonmeetodi põhivalem)

$$z_{j+1} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left(\frac{5w + 6z_j}{3z_j(w + 2z_j)}\right)}$$

Arvutusliku vooluhulga valem

$$Q_j = \frac{R_{hj}^{\frac{2}{3}} A_{ej} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} A_{ej}^{\frac{5}{3}}}{n_M \chi_j^{\frac{2}{3}}} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} (z_j w)^{\frac{5}{3}}}{n_M (w + 2z_j)^{\frac{2}{3}}}$$

Ühtlasele vabapinnaga voolamisele paisu positiivse languga nõlval on hüdrauliline lang määratud põhjalanguga, st  $I_h = i_0$ .



ARVUTUS. Numbriline arvutusskeem

Põhjalang paisu nõlvale:  $i_0 = 0,5882 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$

Manningi karedustegur paisule:  $n_M = 0,035$

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (m)	1	0,4026	0,2084	0,1610	0,1567	0,1567
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	324,1252	74,4912	25,2558	16,4770	15,7685	15,7624

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (m)	0,1567	0,1567	0,1567	0,1567
$Q_j$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )	15,7624	15,7624	15,7624	15,7624

VASTUSED

$$d_0 = 0,1567 \text{ m}$$

$$Re_{vs} = 7,4325 \cdot 10^5$$

$$Fr = 5,0709$$

JÄRELDUS. Numbrilistest arvutustulemustest selgub, et ühtlane voolamine nelinurkristlõikega ülevooluga paisu alumises bjefis on turbulentne ja hüdrauliliselt kareda vabavoolurežiimiga.

*Kriitilise sügavuse määramine*

VALEMID

Trapetsristlõikega voolusängi vabavoolu Froude'i arv ruudus valem teiseneb nelinurkristlõikega avasängi vabavoolu Froude'i arv astmes 2 valemiks vastavalt tingimusel:

$$m_n = 0$$

→

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g h^3 w^2} = \frac{u^2}{g h}$$

Nelinurkristlõikega tehissängi voolamise Froude'i arv on

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{g h}}$$

**MÄRKUS.** Kriitilisele vabavoolule vastab  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule on vastavalt  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

Froude'i suhtarvu kriteerium kriitilisele voolamisele on

$$Fr^2 = 1$$

→

$$1 = \frac{u^2}{g d_k} = \frac{Q^2}{g d_k A_k^2} = \frac{Q^2}{g d_k^3 w^2}$$

→

$$d_k = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g w^2}}$$

ARVUTUS

$$d_k = \sqrt[3]{\frac{(15,7624 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1})^2}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (16 \text{ m})^2}} = 0,4625 \text{ m}$$

VASTUSED

$$d_k = 0,4625 \text{ m}$$

$$Fr = 1$$

$$d_k > d_0$$

JÄRELDUS. Arvutustulemusest selgub, et nelinurkristlõikega ülevooluga paisu alumises bjefis on kriitilise voolamise veesügavus suurem kui normaalsügavus. Järelikult on ühtlane voolamine nelinurkristlõikega ülevooluga paisu alumises bjefis hüdrauliliselt käreda vabavoolurežiimiga.

*Hõõrdepinge määramine paisu otsnõlvale*

VALEMID

Ühtlasele vabapinnaga voolamisele prismaatilises voolusängis on hüdrauliline lang määratud põhjalanguga, st  $I_h = i_0$ .

Voolusängi hõõrdepinge piirdele määratakse valemiga:

$$\tau_0 = \rho g R_h I_h.$$

ARVUTUS

$$R_h = \frac{0,1567 \text{ m} \cdot 16 \text{ m}}{16 \text{ m} + 2 \cdot 0,1567 \text{ m}} = 0,1537 \text{ m}$$

$$\tau_0 = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,1537 \text{ m} \cdot 0,5882 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1} = 886,7970 \text{ Pa}$$

VASTUS

$$\tau_0 = 886,7970 \text{ Pa}$$

## Vooluhüppe kõrguse määramine

### VALEMID

Uputamata trapetskujulise paisu puhul, selle alumise bjeffi järsul nõlval areneb välja käre voolamine, millega kaasnevad vabapinna häiritused võivad oluliselt muuta voolamise stabiilsust, ning seetõttu võib moodustuda liikuv vooluhüpe. Kui pais ongi takistuseks vooluhüppe liikumisele ülesvoolu, siis areneb välja nn seisev murdlaine paisu alumises bjeffis.

Voolukiiruse järsu muutusega vabapinnaga voolamisele kaasneb voolamise liikumishulga järsk muutus. Üldjuhul kasutatakse voolamise liikumishulga muutuse määramisele lõpliku suurusega ruumi osale, st kontrollmahule koostatud integraalset voolamise liikumishulga võrrandit. Vooluhüppele, mis liigub kiirusega  $c_{vh}$  võib koostada voolamise liikumishulga võrrandi:

$$\frac{\rho(c_{vh} - u_1)\Delta t}{\Delta t}(A_2 u_2 - A_1 u_1) + \rho A_2 u_2^2 - \rho A_1 u_1^2 = p_1 A_1 - p_2 A_2,$$

milles ajavahemik  $\Delta t$  vastab kontrollmahus vabapinna täielikule muutusele kõrguselt  $h_1$  kõrgusele  $h_2$ . Vooluhüppe kaaskõrgustega  $h_1$  ja  $h_2$  määratud elavlõiked on vastavalt  $A_1 = w_1 h_1$  ja  $A_2 = w_2 h_2$ , milles nelinurkse ristlõikega prismaatilise voolusängi laius on  $w = w_1 = w_2$ . Erijuhul, kui vooluhüpe liigub vastuvoolu kiirusega  $c_{vh} = u_1$ , lihtsustub voolamise liikumishulga võrrand kujule, mis vastab voolusängis seisvale vooluhüppele:

$$\rho A_2 u_2^2 - \rho A_1 u_1^2 = p_1 A_1 - p_2 A_2.$$

→

$$\rho A_1 u_1^2 + p_1 A_1 = \rho A_2 u_2^2 + p_2 A_2$$

Eeldusel, et vooluhüppes vesi ja õhk oluliselt ei segune, st veevoolule säilib vooluhulk:

$$Q = A_1 u_1 = A_2 u_2,$$

lihtsustub voolamise liikumishulga võrrand kujule:

$$\frac{\rho Q^2}{A_1} + p_1 A_1 = \frac{\rho Q^2}{A_2} + p_2 A_2.$$

Tingimusel, et rõhtne voolusäng on prismaatiline ( $w_1 = w_2 = w = \text{konstant}$ ), võime nelinurksele ristlõikega voolusängile võtta kasutusele voolamise elavlõiked  $A_1 = h_1 w$  ja  $A_2 = h_2 w$ . Liikumatu vooluhüppe võrrand rõhtsale nelinurkse ristlõikega voolusängile on

$$\frac{q^2}{g h_1} + \frac{h_1^2}{2} = \frac{q^2}{g h_2} + \frac{h_2^2}{2},$$

milles on võetud kasutusele vooluhulk voolusängi laiusele ehk erivooluhulk:  $q = Q / w$ .

Matemaatilise teisendusega on võimalik liikumatu vooluhüppe võrrand rõhtsale nelinurkse ristlõikega voolusängile esitada järgmise ruutvõrrandiga:

$$h_2 h_1^2 + h_1 h_2^2 - \frac{2 q^2}{g} = 0.$$

Taandatud ruutvõrrand üldkujul on

$$z^2 + p z + q = 0,$$

milles  $z$  on muutuja,  $p$  ( $\neq 0$ ) on võrrandi lineaarliikme kordaja ja  $q$  ( $\neq 0$ ) on võrrandi vabaliige. Taandatud ruutvõrrandi lahendite valemid on

$$z_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$z_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

→

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Liikumatu vooluhüppe võrrandiga rõhtsale nelinurkse ristlõikega voolusängile määratud ruutvõrrandi lahendamine kaaskõrgusele  $h_1$ , st veepinna kõrgusele üle voolusängi aluspõhja enne vooluhüppe valtsi. Esitame 2 astme algebralise võrrandi taandatud kujul, milles võtame kasutusele konstantsed suurused:  $p = h_2$  ja  $q = -2 q^2 / g h_2$ .

$$h_2 h_1^2 + h_1 h_2^2 - \frac{2 q^2}{g} = 0$$

→

$$h_1^2 + h_2 h_1 - \frac{2 q^2}{g h_2} = 0$$

Taandatud ruutvõrrandi lahendi valem kaaskõrgusele enne vooluhüppe valtsi on

$$h_1 = -\frac{h_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 + \frac{2 q^2}{g h_2}} = -\frac{h_2}{2} + \frac{h_2}{2} \sqrt{1 + \frac{8 q^2}{g h_2^3}} = \frac{h_2}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8 q^2}{g h_2^3}}\right).$$

Liikumatu vooluhüppe võrrandiga rõhtsale nelinurkse ristlõikega voolusängile määratud ruutvõrrandi lahendamisel ei kasutata ära teist matemaatiliselt võimaliku lahendust põhjusel, et kaaskõrgus on vooluhüppe veekihi kõrgusmõõde:  $h_1 > 0$ .

Liikumatu vooluhüppe võrrandiga rõhtsale nelinurkse ristlõikega voolusängile määratud ruutvõrrandi lahendamine kaaskõrgusele  $h_2$ , st veepinna kõrgusele üle voolusängi aluspõhja peale vooluhüppe valtsi. Esitame 2 astme algebralise võrrandi taandatud kujul, milles võtame kasutusele konstantsed suurused:  $p = h_1$  ja  $q = -2 q^2 / g h_1$ .

$$h_2 h_1^2 + h_1 h_2^2 - \frac{2 q^2}{g} = 0$$

→

$$h_2^2 + h_1 h_2 - \frac{2 q^2}{g h_1} = 0$$

Taandatud ruutvõrrandi lahendi valem kaaskõrgusele peale vooluhüppe valtsi on

$$h_2 = -\frac{h_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 + \frac{2 q^2}{g h_1}} = -\frac{h_1}{2} + \frac{h_1}{2} \sqrt{1 + \frac{8 q^2}{g h_1^3}} = \frac{h_1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8 q^2}{g h_1^3}}\right).$$

Liikumatu vooluhüppe võrrandiga rõhtsale nelinurkse ristlõikega voolusängile määratud ruutvõrrandi lahendamisel ei kasutata ära teist matemaatiliselt võimaliku lahendust põhjusel, et kaaskõrgus on vooluhüppe veekihi kõrgusmõõde:  $h_2 > 0$ .

Liikumatu vooluhüppe võrrandiga rõhtsale nelinurkse ristlõikega voolusängile määratud ruutvõrrandil on olemas järgmised lahendid vooluhüppe kaaskõrguste määramisele:

$$h_1 = \frac{h_2}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8 q^2}{g h_2^3}}\right),$$

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8 q^2}{g h_1^3}}\right).$$

Liikumatu vooluhüppe võrrandiga rõhtsale nelinurkse ristlõikega voolusängile määratud ruutvõrrandil on nõ alternatiivsed lahendid vooluhüppe kaaskõrguste määramisele:

$$h_1 = \frac{h_2}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8 Fr_2^2}\right),$$

milles on kasutusele võetud Froude'i arv astmes 2 kontrollpinnal [22]:

$$Fr_2^2 = \frac{u_2^2}{g h_2} = \frac{Q^2}{g h_2 A_2^2} = \frac{Q^2}{g h_2^3 w^2} = \frac{q^2}{g h_2^3},$$

ning

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8 Fr_1^2} \right),$$

milles on kasutusele võetud Froude'i arv astmes 2 kontrollpinnal [11]:

$$Fr_1^2 = \frac{u_1^2}{g h_1} = \frac{Q^2}{g h_1 A_1^2} = \frac{Q^2}{g h_1^3 w^2} = \frac{q^2}{g h_1^3}.$$

Liikumatu vooluhüppe võrrandiga rõhtsale nelinurkse ristlõikega voolusängile määratud ruutvõrrandil on nöö alternatiivsed lahendid vooluhüppe kaaskõrguste määramisele:

$$h_1 = \frac{h_2}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8 \left( \frac{h_{2k}}{h_2} \right)^3} \right),$$

milles on kasutusele võetud voolamise kriitiline kõrgus ( $Fr_2 = 1$ ) kontrollpinnal [22]:

$$1 = \frac{u_2^2}{g d_{2k}} = \frac{Q^2}{g d_{2k} A_2^2} = \frac{Q^2}{g d_{2k}^3 w^2} = \frac{q^2}{g d_{2k}^3},$$

$$h_{2k} = d_{2k},$$

ning

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8 \left( \frac{h_{1k}}{h_1} \right)^3} \right).$$

milles on kasutusele võetud voolamise kriitiline kõrgus ( $Fr_1 = 1$ ) kontrollpinnal [11]:

$$1 = \frac{u_1^2}{g d_{1k}} = \frac{Q^2}{g d_{1k} A_1^2} = \frac{Q^2}{g d_{1k}^3 w^2} = \frac{q^2}{g d_{1k}^3},$$

$$h_{1k} = d_{1k}.$$

**MÄRKUS.** Vooluhüppel muutub hüdrauliliselt käre vabapinnaga voolamine rahulikuks, aga mitte vastupidi.

ARVUTUS

$$h_1 = d_0$$

$$h_1 = 0,1567 \text{ m}$$

$$h_{1k} = d_k$$

$$h_{1k} = 0,4625 \text{ m}$$

$$h_2 = \frac{0,1567 \text{ m}}{2} \cdot \left( -1 + \sqrt{1 + 8 \left( \frac{0,4625 \text{ m}}{0,1567 \text{ m}} \right)^3} \right) = 1,0481 \text{ m}.$$

## VASTUS

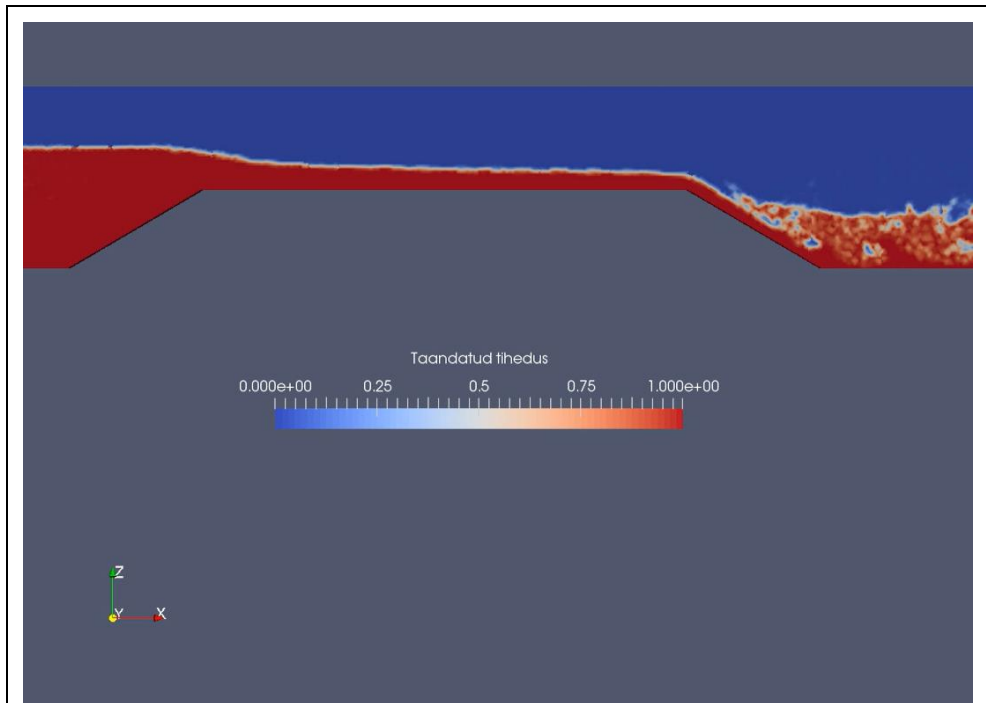
$$h_2 = 1,0481 \text{ m}$$

Vooluhüppe valtsi kõrgus

$$h_2 - h_1 = 1,0481 \text{ m} - 0,1567 \text{ m} = 0,8914 \text{ m}$$

*Arvutuslik vedelike dünaamika. Uputamata ülevoolu CFD simulatsioon*

Arvutusliku vedeliku dünaamika (CFD) mudel on koostatud voolusängi paigutatud külgkitsenduseta trapetskujulisele paisule, mille läve kõrgus  $h_{pais} = 1,3 \text{ m}$  ja läve pikkus  $l_{pais} = 8 \text{ m}$ . Voolusängi paisu ülemise ja alumise bjefi nõlvused on 1,3:2,21, mis vastab nõlvustegurile  $m_n = 1,7$ . CFD mudeli erivooluhulk  $q = Q/w = 15,7624 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} / 16 \text{ m} = 0,9851 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} / 0,1 \text{ m} = 0,9851 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .



JOONIS 27-3 Arvutusliku vedeliku dünaamika lahendus trapetskujulisest paisust ülevoolule. Taandatud tihedus. Erivooluhulk  $q = Q/w = 0,9851 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

## MÄRKUSED. Paisu vooluprotsessid

- Põhjaastmega looduslikus voolusängis tekib mõõdukalt ebaühtlase voolamise paisutus juhul kui voolusängi põhjalang vastab paisu ülemises bjefis rahulikule voolamisele, st  $Fr < 1$ . Juhul kui voolusängi põhjalang vastab paisu ülemises bjefis käreale voolamisele, st  $Fr > 1$ , siis moodustub põhjaastmel vooluhüpe. See on surutud vooluhüpe.
- Voolamisele hüdrauliliselt kareda piirdega voolusängis, millest on välja jäetud vabapind, ning mis vastab Moody diagrammil ruuttakistuspiirkonna hõõrdetakistusteguri lahenditele, võib kasutada Manningi karedustegurit  $n_M$ . Hõõrdetakistustegur määratakse siis valemiga:

$$\lambda = \frac{8 g n_M^2}{R_h^{2/6}},$$

milles  $g$  on raskuskiirendus,  $R_h$  on hüdrauliline raadius. Manningi karedusteguri kasutamine voolusüsteemi takistuse määramisele on seotud vee omaduste määramatusega.

- Moody diagrammil ruuttakistuspiirkonna hõõrdetakistustegur survevoolule ei sõltu Reynoldsi arvust. Moody diagrammil ruuttakistuspiirkonna hõõrdetakistustegur ühtlasele vabavoolule sõltub voolusängi Reynoldsi arvust. Muutumatu Manningi karedustegurile Moody diagrammil ruuttakistuspiirkonna tuleb muuta voolusängi Reynoldsi arvule ka voolusängi kallet.
- Manningi karedusteguri mõned tüüpiväärtused hüdraulilistes voolusüsteemides

Hüdrauliline voolusüsteem	Voolusäng ja sängipiirde materjal	Manningi karedustegur
Säng	Looduslik, sirgem avasäng	0,018 – 0,035
	Looduslik, looklev avasäng	0,03 – 0,05
	Kruus (75 mm – 150 mm), sirgem avasäng	0,03 – 0,04
	Kruus (75 mm – 150 mm), looklev avasäng	0,04 – 0,08
	Paas, sirgem avasäng	0,035 – 0,045



Kanal	Tehislik, sirgem voolukanal	0,018 – 0,025
	Kivisillutis, sirgem voolukanal	0,025 – 0,045
	Betoon, sirge voolukanal	0,012 – 0,017
Renn	Mört, sirgem voolurenn	0,011 – 0,013
	Pleksiklaas, sirgem voolurenn	0,009

- Maksimaalse vooluhulga valemi tuletamisel Bernoulli võrrandist on eeldatud, et paisu ülemises bjefis on voolamise kineetiline energia oluliselt väiksem potentsiaalsest energiast. Potentsiaalne erienergia paisu ülemises bjefis on määratud suurusega  $h_{pais} + PK$ . Voolamisel muutumatu laiusega tehissängis on seetõttu paisutuskõrgus ülehinnatud kiiruskõrguse võrra.
- Reaalvedeliku voolamise paisutamisel täiendatakse maksimaalse vooluhulga valemit vooluhulgateguriga  $C_d < 1$ . Ideaalvedeliku voolamisele vastab  $C_d = 1$ .
- Ideaalvedeliku voolamise paisutamisel vastab ülevoolu põhivalemis ülevoolutegur väärtusele  $C_d^* = 0,385$ . Reaalvedeliku voolamisele vastab  $C_d^* < 0,385$ .
- Paisutuskõrgust on võimalik hästi määrata ülevoolu põhivalemiga uputamata juhule. Uputatud paisu juhul tuleks kasutada arvutusliku vedeliku dünaamika (CFD) teoreetilisi võrrandeid;
- Bernoulli võrrandit võib rakendada igale voolujoonele. Rõhk vedelikus on hüdrostaatiline kui voolujooned on paralleelsed. Mõõdukalt ebahühtsele voolamisele on voolujooned peaaegu paralleelsed.

## 27.3 ISESEISEVA TÖÖ ÜLESANNE. UPUTAMATA ÜLEVOOL. CFD MODELLEERIMINE

ANTUD. Looduslikku voolusängis (loodussängi) on rajatud ilma külgkitsenduseeta trapetskujuline pais, mille läve kõrgus  $h_{pais} = 1,3$  m ja läve pikkus  $l_{pais} = 8$  m. Jõesängi paisu ülemise ja alumise bjefi nõlvused on  $1,3 : 2,21$ , mis vastab nõlvustegurile  $m_n = 1,7$ . Looduslikus voolusängis, põhjalaiusega  $w = 16$  m ja põhjalanguga  $i_0 = 2,5$  m.km<sup>-1</sup>, on 90% vooluhulk  $Q = 10,2236$  m<sup>3</sup>.s<sup>-1</sup>. Jõesängi piirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,035$ . Loodussängis voolab 10 °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000$  kg.m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg.m<sup>-1</sup>.s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>. Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Arvutada voolamisele loodussängis normaalsügavus, kriitiline sügavus ja hõõrdepinge piirdel, ning määrata voolusängi Reynoldsi arv ja hüdrauliline vabavoolurežiim Froude'i suhtarvu kriteeriumiga. Arvutada paisu ülemises bjefis vabapinna maksimaalne kõrgus üle lävepinna ehk paisutuskõrgus, ning paisutamise mõjuulatus. Arvutada paisu alumises bjefis vooluhüppe kaas-kõrgused ja sellele vastav valtsi kõrgus.



JOONIS 27-4 Vabapinnaga voolamine jõesängis (Nehatu pais, Pirita jõgi, 2010.a. suvi). Pirita jõe nõ Nehatu lõigule sanitaarvooluhulk  $Q_{95\%} = 3,3$  m<sup>3</sup>.s<sup>-1</sup>.

EELDUSED. Veevool paisuga loodussängis on statsionaarne, mõõdukalt ebaühtlane. Looduslik voolusäng (loodussängi) on praktiliselt nelinurkse ristlõikega, ning piirde takistuse määrab hüdrauliliselt kare voolamine. Normaalsügavus määrata Manningi vooluhulga valemiga, kasutades selleks Newtoni iteratsioonmeetodit. Kriitilise sügavuse määramisele kasutada Froude'i suhtarvu kriteeriumit. Paisutuskõrgus määrata ülevoolu põhivalemiga uputamata juhule. Paisutamise mõjuulatus (paisutusulatus) määrata mõõdukalt ebaühtlase vabapinnaga voolamise diferentsiaalvõrrandiga kasutades selleks numbrilist arvutusskeemi ilmutatud kujul. Kasutada arvutusliku vedeliku dünaamika (CFD) mudelit paisu ülevooluga määratud veepinna ja voolukiiruse visualiseerimisel uputamata juhule.

## VASTUSED

*Jõevoolu hüdraulika (voolamine ilma paisuta)*

Normaalsügavus

$$d_0 = 0,6363 \text{ m}$$

Voolusängi Reynoldsi arv

$$Re_{vs} = 4,5531 \cdot 10^5$$

Ühtlase vabavoolu Froude'i arv

$$Fr = 0,4020$$

Ühtlase voolamise kriitiline sügavus

$$d_k = 0,3466 \text{ m}$$

Voolusängi hõõrdepinge piirdele määratakse valemiga:

$$\tau_0 = 14,4549 \text{ Pa}$$

*Paisu ülemise bjefi hüdraulika (jõevoolu paisutamine)*

Paisutuskõrgus

$$PK = 0,5386 \text{ m}$$

Ülevoolutegur

$$C_d^* = 0,3519$$

Vabapinna kõrgus paisu ülemises bjefis

$$h_{vp} = 1,8517 \text{ m}$$

Paisutuse mõjuulatus

$$0,5923 \text{ km}$$

*Paisu alumise bjefi hüdraulika (vooluhüpe)*

Põhjalang paisu nõlvale:  $i_0 = 0,5882 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$

Manningi karedustegur paisule:  $n_M = 0,035$

Normaalsügavus paisu nõlval

$$d_0 = 0,1206 \text{ m}$$

$$Re_{vs} = 4,8422 \cdot 10^5$$

$$Fr = 4,8690$$

Kriitiline sügavus

$$d_k = 0,3466 \text{ m}$$

Hüdrauliline raadius ja hõõrdepinge paisu alumise bjefi nõlval

$$R_h = 0,1188 \text{ m}$$

$$\tau_0 = 685,7529 \text{ Pa}$$

Vooluhüppe kaaskõrgused ja vastavalt valtsi kõrgus

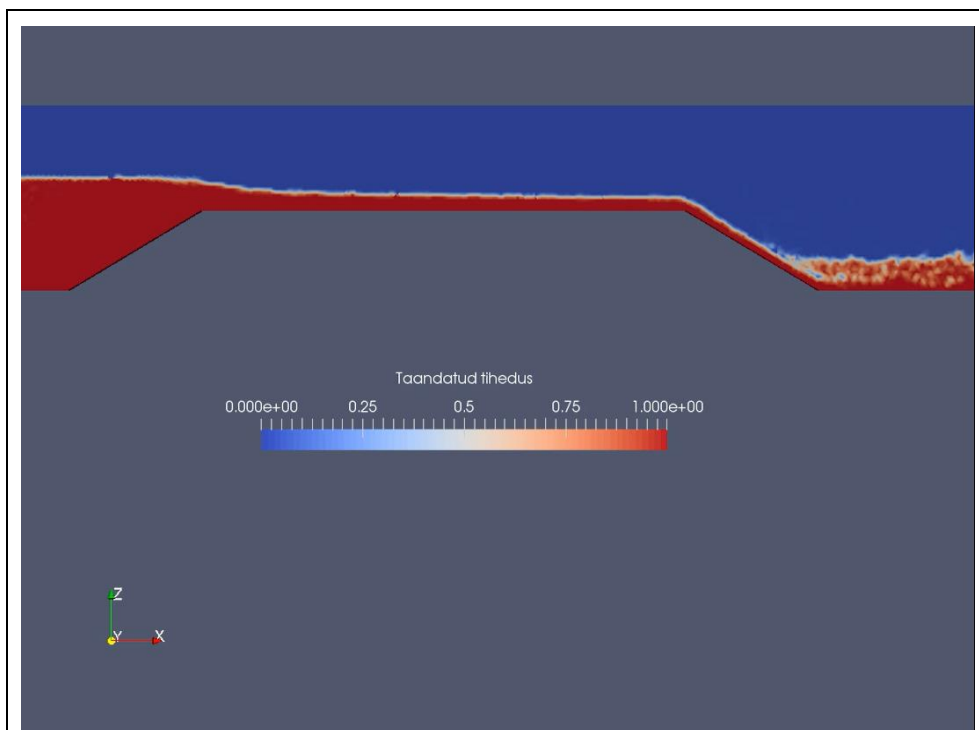
$$h_1 = 0,1206 \text{ m}$$

$$h_2 = 0,7725 \text{ m}$$

$$h_2 - h_1 = 0,7725 \text{ m} - 0,1206 \text{ m} = 0,6519 \text{ m}$$

*Arvutuslik vedelike dünaamika. Uputamata ülevoolu CFD simulatsioon*

Arvutusliku vedeliku dünaamika (CFD) mudel on koostatud voolusängi paigutatud külgekitsendusega trapetskujulisele paisule, mille läve kõrgus  $h_{pais} = 1,3 \text{ m}$  ja läve pikkus  $l_{pais} = 8 \text{ m}$ . Voolusängi paisu ülemise ja alumise bjefi nõlvused on 1,3:2,21, mis vastab nõlvustegurile  $m_n = 1,7$ . CFD mudeli erivooluhulk  $q = Q/w = 10,2236 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} / 16 \text{ m} = 0,6390 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} / 0,1 \text{ m} = 0,6390 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Paisu alumise bjefi voolusängis puudub takistus .



JOONIS 27-5 Arvutusliku vedeliku dünaamika lahendus trapetspaisust ülevoolule: Taandatud tihedus. Erivooluhulk  $q = Q/w = 0,6390 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

## 27.4 LISAÜLESANNE 1. UPUTATUD ÜLEVOOL. CFD MODELLEERIMINE

ANTUD. Looduslikku voolusängi (loodussängi) on rajatud ilma külgkitsenduseeta trapetskujuline pais, mille läve kõrgus  $h_{pais} = 1,3$  m ja läve pikkus  $l_{pais} = 8$  m. Jõesängi paisu ülemise ja alumise bjefi nõlvused on 1,3:2,21, mis vastab nõlvustegurile  $m_n = 1,7$ . Looduslikus voolusängis, põhjalaiusega  $w = 16$  m ja põhjalanguga  $i_0 = 2,5$  m.km<sup>-1</sup>, on 86% vooluhulk  $Q = 15,7624$  m<sup>3</sup>.s<sup>-1</sup>. Jõesängi piirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,035$ . Loodussängis voolab 10 °C vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000$  kg.m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}$  kg.m<sup>-1</sup>.s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>. Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Arvutada voolamisele loodussängis normaalsügavus, kriitiline sügavus ja hõõrdepinge piirdel, ning määrata voolusängi Reynoldsi arv ja hüdrauliline vabavoolurežiim Froude'i suhtarvu kriteeriumiga. Arvutada uputamata juhul paisu ülemises bjefis vabapinna maksimaalne kõrgus üle lävepinna ehk paisutuskõrgus, ning paisutamise mõjuulatus. Võrrelda uputamata paisu ülemises bjefi arvutustulemusi CFD arvutustulemusi uputatud paisuga ülevoolule.



JOONIS 27-6 Vabapinnaga voolamine jõesängis. Pirita jõe Nehatu lõigule suurvee vooluhulk  $Q_{10\%} = 121$  m<sup>3</sup>.s<sup>-1</sup>. (Foto: Postimees, 2010)

EELDUSED. Veevool paisuga loodussängis on statsionaarne, mõõdukalt ebahühtlane. Looduslik voolusäng (loodussängi) on praktiliselt nelinurkse ristlõikega, ning piirde takistuse määrab hüdrauliliselt kare voolamine. Normaalsügavus määrata Manningi vooluhulga valemiga, kasutades selleks Newtoni iteratsioonmeetodit. Kriitilise sügavuse määramisele kasutada Froude'i suhtarvu kriteeriumit. Paisutuskõrgus määrata ülevoolu põhivalemiga uputamata juhule. Paisutamise mõjuulatus (paisutusulatus) määrata mõõdukalt ebahühtlase vabapinnaga voolamise diferentsiaalvõrrandiga kasutades selleks numbrilist arvutusskeemi ilmutatud kujul. Kasutada arvutusliku vedeliku dünaamika (CFD) mudelit paisu ülevooluga määratud veepinna ja voolukiiruse visualiseerimisel nii uputamata kui ka uputatud juhtudele.

## VASTUSED

*Jõevoolu hüdraulika (voolamine ilma paisuta)*

Normaalsügavus

$$d_0 = 0,8324 \text{ m}$$

Voolusängi Reynoldsi arv

$$Re_{vs} = 6,8639 \cdot 10^5$$

Ühtlase vabavoolu Froude'i arv

$$Fr = 0,4141$$

Ühtlase voolamise kriitiline sügavus

$$d_k = 0,4625 \text{ m}$$

Voolusängi hõõrdepinge piirdele määratakse valemiga:

$$\tau_0 = 18,4916 \text{ Pa}$$

*Paisu ülemise bjefi hüdraulika (jõevoolu paisutamine)*

Paisutuskõrgus paisu uputamata ülevoolule

$$PK = 0,7363 \text{ m}$$

Ülevoolutegur paisu uputamata ülevoolule

$$C_d^* = 0,3522$$

Vabapinna kõrgus paisu ülemises bjefis uputamata ülevoolule

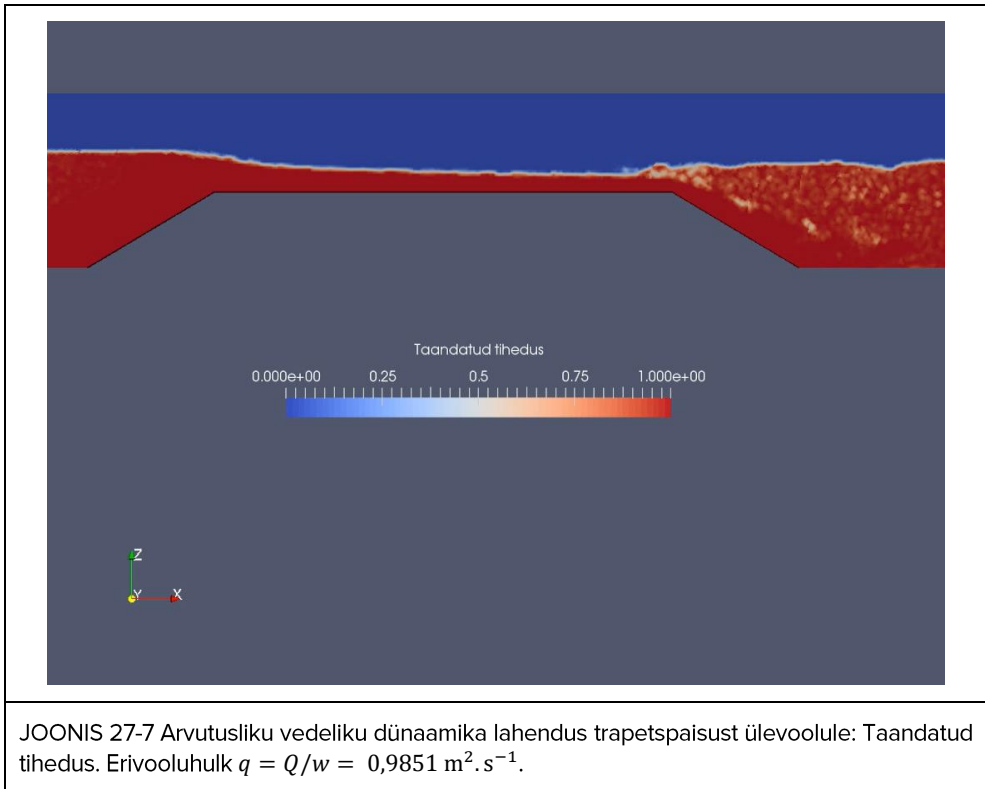
$$h = 2,0363 \text{ m}$$

Paisutuse mõjuulatus paisu uputamata ülevoolule

$$0,6375 \text{ km}$$

### Arvutuslik vedelike dünaamika. Uputamata ülevoolu CFD simulatsioon

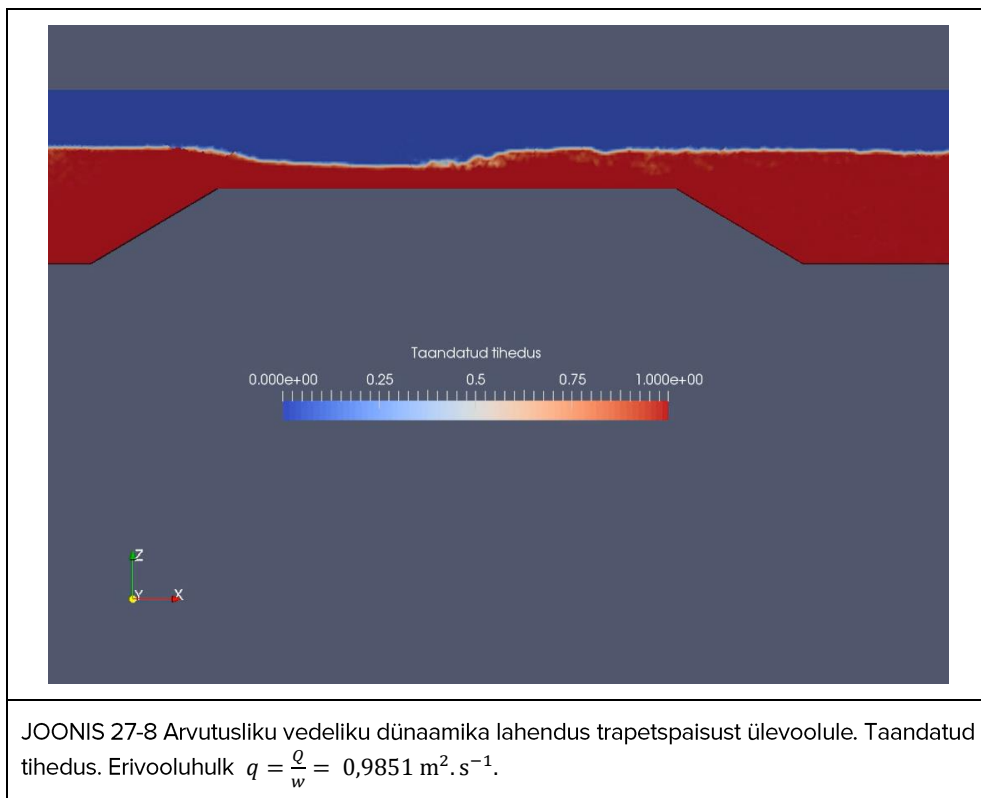
Arvutusliku vedeliku dünaamika (CFD) mudel on koostatud voolusängi paigutatud külgsuunaseta trapetskujulisele paisule, mille läve kõrgus  $h_{pais} = 1,3$  m ja läve pikkus  $l_{pais} = 8$  m. Voolusängi paisu ülemise ja alumise bjefi nõlvused on 1,3:2,21, mis vastab nõlvustegurile  $m_n = 1,7$ . CFD mudeli erivooluhulk  $q = Q/w = 15,7624 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} / 16 \text{ m} = 0,9851 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} / 0,1 \text{ m} = 0,9851 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Paisu alumise bjefi voolusängi on paigutatud põhjaaste kõrgusega  $h_{paste} = h_{pais} = 1,3$  m.



### Arvutuslik vedelike dünaamika. Osaliselt uputatud ülevoolu CFD simulatsioon

Arvutusliku vedeliku dünaamika (CFD) mudel on koostatud voolusängi paigutatud külgsuunaseta trapetskujulisele paisule, mille läve kõrgus  $h_{pais} = 1,3$  m ja läve pikkus  $l_{pais} = 8$  m. Voolusängi paisu ülemise ja alumise bjefi nõlvused on 1,3:2,21, mis vastab nõlvustegurile  $m_n = 1,7$ . CFD mudeli erivooluhulk  $q = Q/w = 15,7624 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} / 16 \text{ m} = 0,9851 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} / 0,1 \text{ m} = 0,9851 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Paisu alumise bjefi voolusängi on paigutatud põhjaaste kõrgusega  $h_{paste} = h_{pais} = 1,5$  m.

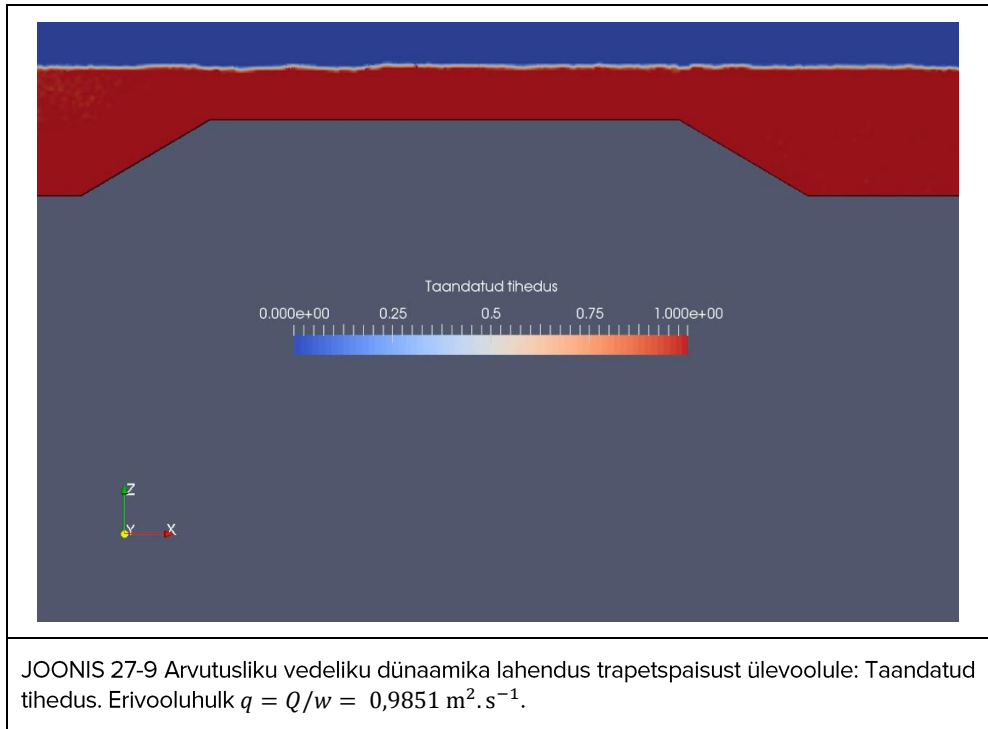




**MÄRKUS.** Paisu alumise bjefi voolusängi paigutatud põhjaastmega, mille kõrgus  $h_{paste} = h_{pais} = 1,5 \text{ m}$ , areneb erivooluhulgaga  $q = Q/w = 0,9851 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  välja vooluhüpe, mille allavoolu kaaskõrgus on suurem kui veepinna kõrgus valitud võrdlusnivoo suhtes, paisu ülevoolu käreda voolamisega osas. Tekkinud vooluhüpe liigub perioodiliselt nii vastu- kui ka allavoolu, ning seetõttu ei vasta voolamine paisu alumise bjefi voolusängis statsionaarsele voolamisele. Vooluhüppe liikumisel vastuvoolu paisu lävel on voolusängi kontrollmahule valitud sissevooluhulk suurem kui voolusängi kontrollmahu vaba väljavooluhulk. Vooluhüppe liikumisel allavoolu paisu lävel on voolusängi kontrollmahule valitud sissevooluhulk väiksem kui voolusängi kontrollmahu vaba väljavooluhulk. Vooluhüppe perioodilist liikumist nii vastu- kui ka allavoolu, mis vastab mittestatsionaarsele voolamisele paisu alumise bjefi voolusängis reguleerib osaliselt ka sinna paigutatud põhjaaste.

*Arvutuslik vedelike dünaamika. Uputatud ülevoolu CFD simulatsioon*

Arvutusliku vedeliku dünaamika (CFD) mudel on koostatud voolusängi paigutatud külgkitsenduseta trapetskujulisele paisule, mille läve kõrgus  $h_{pais} = 1,3$  m ja läve pikkus  $l_{pais} = 8$  m. Voolusängi paisu ülemise ja alumise bjefi nõlvused on 1,3:2,21, mis vastab nõlvustegurile  $m_n = 1,7$ . CFD mudeli erivooluhulk  $q = Q/w = 15,7624 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}/16 \text{ m} = 0,9851 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}/0,1 \text{ m} = 0,9851 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Paisu alumise bjefi basseini on paigutatud põhjaaste kõrgusega  $h_{paste} = h_{pais} = 1,7$  m.



**MÄRKUS.** Paisu alumise bjefi voolusängi paigutatud põhjaastmega, mille kõrgus  $h_{paste} = h_{pais} = 1,7$  m, areneb erivooluhulgaga  $q = Q/w = 0,9851 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  välja vooluhüpe, mille ülesvoolu kaaskõrgus vastab hüdrauliliselt rahulikule vabavoolurežiimile paisu kontrollmahus.

## Ülavee vooluprotsess

Paisutuskõrgus paisu uputatud ülevoolule

$$PK = 1,0 \text{ m}$$

Vabapinna kõrgus paisu ülemises bjefis uputatud ülevoolule

VALEMID

$$h_{vp} = h_{pais} + PK$$

ARVUTUS

$$h_{vp} = 1,3 \text{ m} + 1,0 \text{ m} = 2,3 \text{ m}$$

VASTUS

$$h = 2,3 \text{ m}$$

Paisutusulatuse määramine

VALEMID

Mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i_0 - I_h}{1 - Fr^2},$$

milles  $x' \rightarrow l$ ,  $I_h$  on hüdrauliline lang,  $i_0$  on põhjalang ja  $Fr$  on Froude'i arv.

Mõõdukalt ebaühtlase vabavoolu diferentsiaalvõrrandis võtame kasutusele lõplikud vahed vabapinna kõrguse ja voolupikkuse muutustele:

$$\frac{dh}{dl} \rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta l}.$$

Kasutades numbrilist arvutusskeemi diferentsiaalvõrrandi lõplikele vahedele ilmutatud kujul:

$$\Delta l = \Delta h \frac{1 - Fr^2}{i_0 - I_h},$$

saame kasutusel võtta Euleri valemi ilmutatud kujul paisutuse mõjuulatuse määramisele:

$$l_{i-1} = l_i - \Delta h \frac{1 - Fr^2}{i_0 - I_h}.$$

ARVUTUS: Numbriline arvutusskeem, milles on kasutatud algingimust

$$l_1 = 0$$

ja veepinna kõrguse muutuse puhul konstantset lõpliku vahet

$$\Delta h = 0,1631 \text{ m} .$$

$h_i$ (m)	$A_e$ (m <sup>2</sup> )	$\chi$ (m)	$Fr$	$I_h$	$l_i$ (m)
2,3	36,8000	20,6000	0,0902	$0,1037 \cdot 10^{-3}$	0
2,1369	34,1909	20,2739	0,1007	$0,1297 \cdot 10^{-3}$	-67,5
1,9739	31,5819	19,9477	0,1134	$0,1654 \cdot 10^{-3}$	-135,6
1,8108	28,9728	19,6216	0,1291	$0,2156 \cdot 10^{-3}$	-204,5
1,6477	26,3637	19,2955	0,1487	$0,2888 \cdot 10^{-3}$	-274,7
1,4847	23,7547	18,9693	0,1739	$0,3996 \cdot 10^{-3}$	-346,9
1,3216	21,1456	18,6432	0,2070	$0,5755 \cdot 10^{-3}$	-422,1
1,1585	18,5365	18,3171	0,2522	$0,8718 \cdot 10^{-3}$	-503,2
0,9955	15,9275	17,9909	0,3167	$1,4113 \cdot 10^{-3}$	-597,0
0,8324	13,3184	17,6648	0,4142	$2,5005 \cdot 10^{-3}$	-731,8

VASTUS

Paisutamise mõjuulatus ülesvoolu on ligikaudu 731,8 m = 0,7318 km paisu ülemises bjefis.

## 27.5 LISAÜLESANNE 2. ÜLEVOOL. SPH MODELLEREERIMINE

ANTUD. Läbipaistvate külgeinadega voolurenni, pikkusega 22 m, laiusega 0,6 m ja kõrgusega 0,6 m, on paigutatud trapetskujuline pais, mille läve kõrgus  $h_{pais} = 0,395$  m ja läve pikkus  $l_{pais} = 1,370$  m. Füüsilise mudeli paisu ülemise ja alumise bjefi nõlvused on 1,3:2,21, mis vastab nõlvustegurile  $m_n = 1,7$ . Tehislikus voolusängis, põhjalaiusega  $w = 0,6$  m ja põhjalanguga  $i_0 = 2,5$  mm.m<sup>-1</sup>, on valitud vooluhulk  $Q = 23,1570$  l.s<sup>-1</sup>, millele vastab paisutuskõrgus  $PK = 8,4907$  cm ja vooluhulgategur  $C_d = 0,9150$ . Tehissängis voolab 20 °C vesi, mille tihedus  $\rho = 998,2$  kg.m<sup>-3</sup> ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu = 1,002 \cdot 10^{-3}$  kg.m<sup>-1</sup>.s<sup>-1</sup>. Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,0 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>. Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325$  kPa.

LÄHTEÜLESANNE. Kasutada arvutusliku vedeliku dünaamika (CFD) mudelit ülevooluga määratud veepinna ja voolukiiruse kvalitatiivsele visualiseerimisele. Visualiseerida vastasmõjus olevate veeosadega paisu alumises bjefis vooluhüppe keeriste struktuuri.



JOONIS 27-10 Nehatu paisu füüsiline mudel Tallinna Tehnikaülikooli hüdromehaanika teadus- ja katselaboratooriumis, Tallinn. (Foto: Janek Laanearu, 2010)

EELDUSED. Veevool paisuga tehissängis on statsionaarne, mõõdukalt ebahütlane. Tehislik voolusäng (tehissängi) on nelinurkse ristlõikega, ning voolupiirde takistus määrata Lennard-Jonesi potentsiaaliga, mis määrab piirdele nii tõmbava kui ka tõukava jõu sõltuvalt veeosa kaugusest. Modelleerimisülesandes taandada hüdrodünaamilised väljad (veeosade liikumiskiirus, keskmistamiskerneli tihedus ja rõhk jms) vertikaalpinnale pikki voolurenni. Kasutada vastasmõjus olevate vedeliku osade numbrilist mudelit (ingl. *Smoothed Particles Hydrodynamics* – SPH) ruumiliselt fikseerimata arvutusvõrgule.

## VALEMID

Trapetskujulise paisu alumisse bjefi uputatud veesööstuga tekkiva vooluhüppe modelleerimisele võib kasutada vastasmõjus olevate veeosade numbrilist mudelit SPH, nõrgalt kokkusurutavale vedelikule, mille tiheduse fluktuatsioonid ei ületa 1–2%. Vedeliku liikumise kirjeldamiseks võib kasutada Hamiltoni-tüüpi liikumishulga võrrandeid, mis määravad vastasmõjus olevate vedeliku osade (masspunktide) asukohtade ja kiiruste muutused ruumis. SPH meetodi modelleerimises kasutatakse ruumis fikseerimata arvutusvõrku (nn liikuvaid arvutusvõrgu punkte), ning Lagrange'i meetodil määratakse masspunktide liikumise trajektoorid (st koordinaadid ja kiirused).

Ümbritsevate vedelikuosadega vastasmõjus oleva vedelikuosa  $a$  liikumishulga võrrand on

$$\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} = - \sum_b m_b \left( \frac{p_a}{\rho_a^2} + \frac{p_b}{\rho_b^2} + \Pi_{ab} \right) \nabla_a W_{ab} + \vec{f}_a,$$

milles  $\vec{v}_a$  on vedelikuosa  $a$  liikumiskiirus,  $p$  on rõhk vedelikuosa  $a$  lähiümbruses,  $\rho$  on tihedus vedelikuosa  $a$  lähiümbruses,  $\Pi_{ab}$  on vedelikuosade  $a$  ja  $b$  interaktsiooniga määratud arvutuslik viskoossus,  $W_{ab}$  on vedelikuosade  $a$  ja  $b$  vahelise kaugusega määratud kernelfunktsioon,  $\vec{f}_a$  vedelikuosale  $a$  rakendatud massijõud  $(0, 0, -g)$ , milles raskuskiirendus  $g = 0,981 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , ning  $\nabla$  on Hamiltoni vektoroperaator

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

Vedelikuosaga  $a$  vastasmõjus olevate vedelikuosade liikumishulga võrrandis summeeritakse selle liikmed üle vedelikuosade  $b$  arvu, ning eeldatakse, et kernelfunktsioon on sümmeetriline, st vastasmõjus olevate vedelikuosadel säilib liikumishulk ja liikumishulga moment korrelatsiooniraadiuse ulatuses. Liikumishulga võrrandi integreerimisel vabapinnaga voolamisele eeldatakse, et liikuv reaalvedelik on nõrgalt kokkusurutav, kusjuures vedelikuosade liikumiskiirused on tunduvalt väiksemad kui rõhufluktuatsioonide levimiskiirused, mis on määratud helikiirusega vees, näiteks  $c_{hl} = 1481 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  vedeliku temperatuuril  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Gaussi-tüüpi kernelfunktsioon on määratud valemiga:

$$W_{ab} = \frac{1}{(2\pi r_k)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(r_a - r_b)^2}{r_k^2}\right),$$

milles vedelikuosa  $a$  raadiusvektor on  $r_a$ , vastasmõjus oleva vedelikuosa  $b$  raadiusvektor on  $r_b$ , ning vedelikuosade  $a$  ja  $b$  korrelatsiooniraadius on  $\vec{r}_k$  (korrelatsioonidiaameeter on vastavalt  $d_k = 2|\vec{r}_k|$ ). Gaussi-tüüpi kernelfunktsioon vastab normeerimistingimusele:

$$\int W(r, r_k) = 1,$$

$$\lim_{r_k \rightarrow 0} W(r, r_k) = \delta(r),$$

milles on kasutatud Diraci deltafunktsiooni

$$\delta(r) = \begin{cases} +\infty & r = 0 \\ 0 & r \neq 0 \end{cases}.$$

Vedelikuosade  $a$  ja  $b$  interaktsiooniga seotud viskoossusfunktsioon on määratud valemiga:

$$\Pi_{ab} = \begin{cases} \frac{-\alpha c_{ab} \mu_{ab} + \beta \mu_{ab}^2}{\rho_{ab}} & \vec{v}_{ab} \cdot \vec{r}_{ab} < 0, \\ 0 & \vec{v}_{ab} \cdot \vec{r}_{ab} > 0 \end{cases},$$

milles on kasutatud dünaamilist kunstliku viskoossustegurit:

$$\mu_{ab} = \frac{r_k \vec{v}_{ab} \cdot \vec{r}_{ab}}{\vec{r}_{ab}^2 + \nu^2}.$$

Dünaamilise kunstliku viskoossusteguri valemis on kasutatud tangentsiaalviskoossustegurit  $\nu$ , mis vastab kinemaatilise molekulaarne viskoossusteguri väärtusele  $\nu = \mu/\rho \approx 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  temperatuuril 20 °C. Ümbritsevate vedelikuosadega vastasmõjus oleva vedelikuosa  $a$  liikumishulga võrrand viskoossusfunktsiooni konstandid  $\alpha$  ja  $\beta$  on määratud „peaaegu“ kokkusurumatu vedelikule, mis arvestab nii tangentsiaal- kui ka normaalviskoossust integraalselt.

Iga vedelikuosa rõhk on määratud vedeliku kokkusurutavusega kaasneva rõhu  $p$  (füüsikalistes atmosfäärides) ja tiheduse  $\rho$  vahelise empiirilisel seosega, Cole'i valemiga:

$$\frac{p + B}{1 + B} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n,$$

milles  $\rho_0$  on vedeliku tihedus atmosfääri rõhul 1 atm = 101,325 kPa, ning vee puhul on valemi tiheduste suhteteguri astendaja  $n = 7$  ja rõhuteguris olev tegur  $B = 3000$  atm.

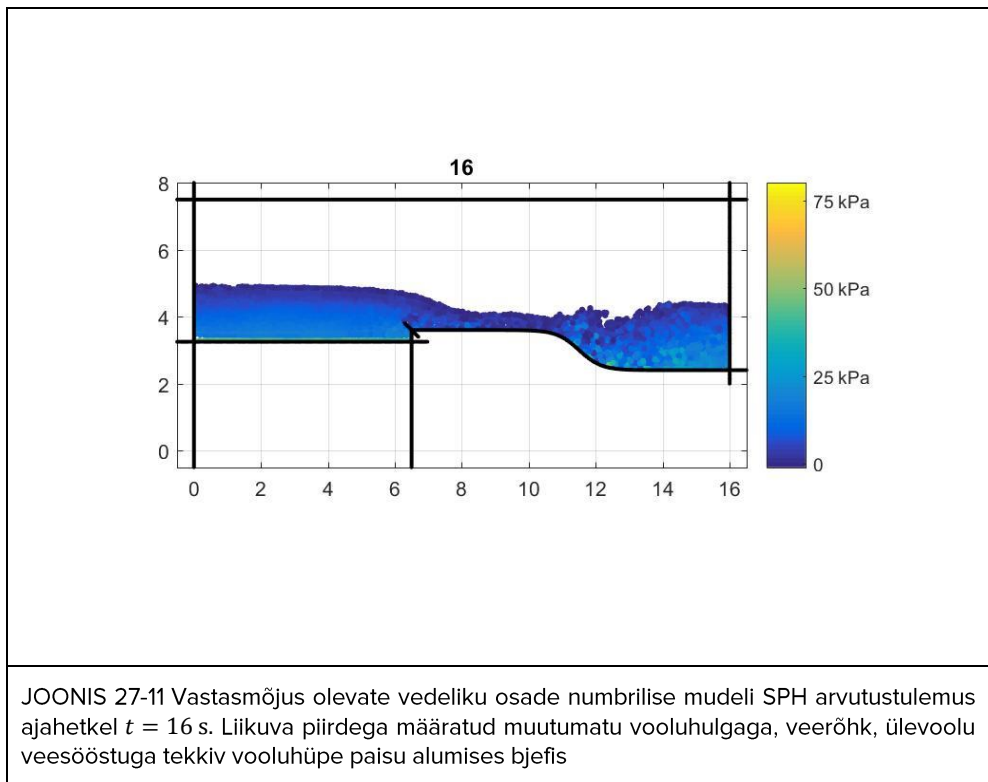
Lennard-Jonesi potentsiaal on määratud funktsiooniga:

$$V_{LJ} = 4 \epsilon \left[ \left( \frac{\sigma_{ab}}{r_{ab}} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma_{ab}}{r_{ab}} \right)^6 \right],$$

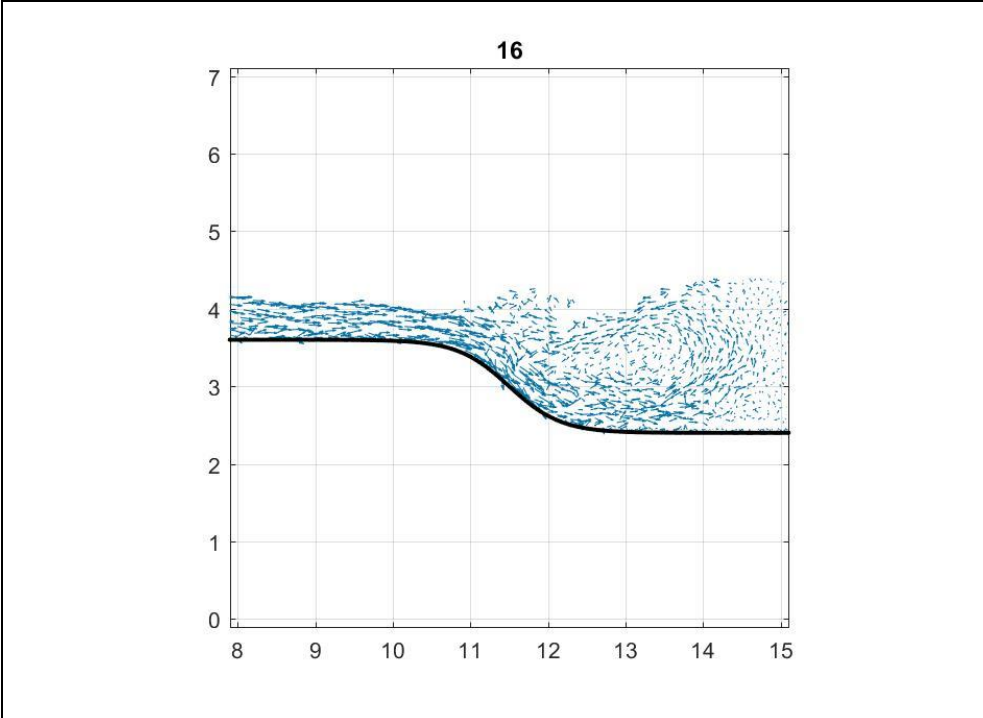
milles  $\epsilon$  on nn potentsiaali tugevus („potentsiaalikaevu sügavus“),  $r_{ab}$  on vastasmõjus olevate vedelikuosade  $a$  ja  $b$  kaugus,  $\sigma_{ab}$  on kaugus, millele Lennard-Jonesi potentsiaaliga määratud funktsioon  $V_{LJ} = 0$  (see määratud tavaliselt vedelikuosa sisemõõtmel). Lennard-Jonesi potentsiaali miinimum  $V_{LJ} = -\epsilon$  on määratud valemiga:  $r_{ab} = 2^{1/6} \sigma_a$ .

Ümbritsevate vedelikuosadega vastasmõjus oleva vedelikuosaga  $a$  liikumishulga võrrandit on võimalik numbriliselt integreerida Verleti meetodil (vt LISA G).

*Arvutuslik vedelike dünaamika. Vooluhüppe SPH simulatsioon*







JOONIS 27-12 Vastasmõjus olevate vedeliku osade numbrilise mudeli SPH arvutustulemus ajahetkel  $t = 16$  s. Veeosade liikumiskiirus vooluhüpe paisu alumises bjefis

## 27.6 LISAÜLESANNE 3. STRATIFITSEERITUD ÜLEVOOL

ANTUD. Magedama veega täidetud 13 m läbimõõduga basseini on paigutatud läbipaistvate külgeinadega voolurenn, mille pikkus on 10,0 m, laius on 2,0 m ja kõrgus on 1,0 m. Läbipaistvate külgeinadega voolurenni on paigutatud trapetskujuline pais, mille läve kõrgus  $h_{pais} = 0,5$  m ja läve pikkus  $l_{pais} = 6,5$  m. Füüsilise mudeli paisu ülemise ja alumise bjefi nõlvused on 0,5:1,0 (= 1:2), mis vastab nõlvustegurile  $m_n = \cot(26,5651^\circ) = 2$  ( $\text{atan}(1/2) = \text{acot}(2) = 0,4636 \text{ rad} = 26,5651^\circ$ ,  $\cot(\text{atan}(1/2)) = 2$ ). Tehislikus voolusängis on valitud kergema vee, st väiksema tihedusega  $\rho_1 = 998,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , vooluhulgaks  $Q_1 = 20 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ , ning raskema vee, st suurema tihedusega  $\rho_2 = 1008,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , vooluhulgaks  $Q_2 = 40 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ . Tehissängis voolavad 20 °C erineva tihedusega veemassid, mille kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu = \mu/\rho \approx 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Kasutada arvutusliku vedeliku dünaamika (CFD) mudelit ülevooluga määratud sisepinna (vahepinna) ja voolukiiruse visualiseerimisele. Visualiseerida numbrilise mudeliga sisevooluprotsessi sisepinna ja voolukiirust kahesuunalisele voolamisele paisul. Kasutada kahekihilise stratifitseeritud voolamise hüdraulika valemeid veekihtide kriitiliste kõrguste määramisele.



JOONIS 27-13 Jõesuudme paisu füüsiline mudel LEGI, Grenoble'i Ülikooli hüdromehaanika teadus ja katselaboratooriumis, Grenoble. (Foto: Janek Laanearu, 2014)

EELDUSED. Veevool paisuga tehissängis on statsionaarne, mõõdukalt ebahütlane. Tehislik voolusäng (tehissängi) on nelinurkse ristlõikega, ning voolupiirde takistus määrata turbulentsel voolamisel seinafunktsioonidega, millel on viskoosne aluskiht. Modelleerimisülesandes taandada hüdrodünaamilised väljad (veeosade liikumiskiirus, keskmistamiskerneli tihedus ja rõhk jms) vertikaalpinnale pikki voolurenni. Kasutada arvutusliku vedelikudünaamika sisepinna meetodit (ingl. *Volume of Fluid method – VOF method*) vee tiheduste erinevusega määratud sisevoolamise dünaamika visualiseerimisele.

### Sisevoolamise rõhukõrgus

#### VALEMID

Magedama ja soolasema vee piirdega suunatud tiheduse järgi määratud stratifitseeritud voolamisele on tiheduse erinevus väike suurus, st  $(1 - \Gamma) \ll 1$ , milles  $\Gamma = \rho_1/\rho_2$ , ning  $\rho_1$  ja  $\rho_2$  on vastavalt kergema, st väiksema tihedusega, ülemise veekihi tihedus ja raskema, st suurema tihedusega, alumise veekihi tihedus. Kahekihilisele stratifitseeritud voolamisele võib koostada nn energia funktsioonid. Ülemise veekihi erienergia funktsioon on

$$E_1 = \frac{1}{2} \rho_1 u_1(x)^2 + p_0 + \rho_1 g [h_1(x) + h_2(x) + h_s(x)],$$

ja alumise veekihi erienergia funktsioon on

$$E_2 = \frac{1}{2} \rho_2 u_2(x)^2 + p_0 + \rho_1 g h_1(x) + \rho_2 g [h_2(x) + h_s(x)],$$

milles  $u_1$  ja  $u_2$  on vastavalt ülemise ja alumise veekihi voolukiirused,  $h_1$  ja  $h_2$  on vastavalt ülemise ja alumise kihi kõrgus vahepinnast ja voolusängi aluspinnast,  $h_s$  on paisu kõrgus,  $p_0$  on õhurõhk vabapinnal, mis on määratud atmosfäärirõhuga merepinnal ja  $g$  on raskuskiirendus. Erienergia liige  $0,5 \rho_j u_j^2$  määrab dünaamilise rõhu vastavalt veekihile indeksiga  $j = 1, 2$ . Veekihtide kõrguste summa määrab kogu veekihi kõrguse:  $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$ , mis esindab ka maksimaalset veekihi kõrgust tehissängi voolamise ristlõikes.

Sisevoolamise rõhukõrgus on määratud valemiga:

$$h_{svrk} = \frac{E_2 - E_1}{\rho_2 g'},$$

milles on kasutusele võetud taandatud raskuskiirendus:

$$g' = g(1 - \Gamma).$$

Kui võtta kasutusele kahekihilise stratifitseeritud voolamise ülemise ja alumise veekihi energiafunktsioonid sisevoolamise rõhukõrguse valemis, siis järeldub funktsioon:

$$h_{svrk} = \left( \frac{u_2(x)^2}{2g'} - \frac{u_1(x)^2}{2g'} \right) + h_2(x) + h_s(x),$$

mis sõltub voolusängi suunalisest koordinaadist  $x$ .

Kahekihilise stratifitseeritud voolamise ülemise ja alumise veekihi vooluhulgad on vastavalt määratud valemitega:

$$Q_1 = u_1(x) A_1(x),$$

$$Q_2 = u_2(x) A_2(x),$$

milles elavlõiked on  $A_j$  vastavalt veekihile indeksiga  $j = 1, 2$ .

Sisevoolamise rõhukõrgus on määratud valemiga:

$$h_{svrk} = \left( \frac{Q_2^2}{2g' A_2(x)^2} - \frac{Q_1^2}{2g' A_1(x)^2} \right) + h_2(x) + h_s(x),$$

milles on kasutusele võetud vooluhulgad  $Q_j$  ja elavlõiked on  $A_j$  vastavalt veekihile indeksile  $j = 1, 2$ .

Sisevoolamise rõhukõrguse valemi võib teisendada kujule:

$$h_{svrk} = K \left( \frac{1}{A_2(x)^2} - \frac{q^2}{(A(x) - A_2(x))^2} \right) + h_2(x) + h_s(x),$$

milles on kasutusele võetud alumise veekihi vooluhulgaga määratud tegur

$$K = Q_2^2 / (2g'),$$

ning ülemise ja alumise veekihi vooluhulga suhtega määratud tegur astmes 2:

$$q^2 = \frac{Q_1^2}{Q_2^2}.$$

Veekihtide elavlõigete summa määrab kogu veekihi elavlõike:  $A(x) = A_1(x) + A_2(x)$ .

### *Nelinurkse ristlõikega voolusäng*

Kahekihilise stratifitseeritud voolamise ülemise ja alumise veekihi vooluhulgad on vastavalt määratud valemitega:

$$Q_1 = u_1 A_1 = u_1 h_1 w_1,$$

$$Q_2 = u_2 A_2 = u_2 h_2 w_2,$$

milles voolukiirused on  $u_j$ , veekihi kõrgused on  $h_j$  ja elavlõiked on  $A_j$  vastavalt veekihile indeksile  $j = 1, 2$ .

Prismaatilisele nelinurkse ristlõikega voolusängile, mille elavlõike laius ei muutu, st  $w = w_1 = w_2$ , võib sisevoolamise rõhukõrguse valemi teisendada kujule:

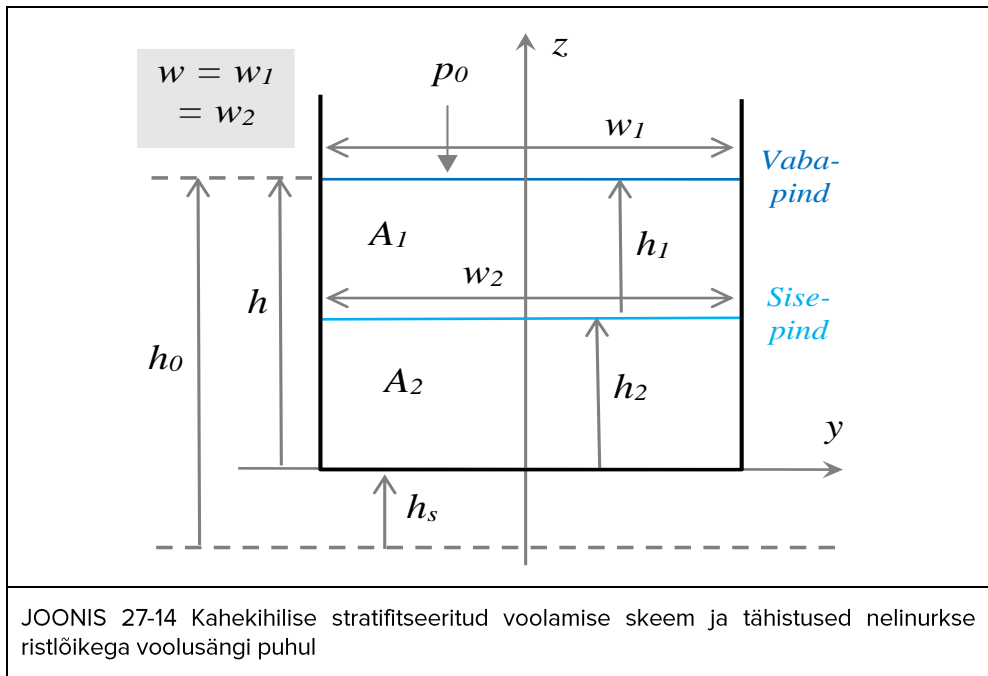
$$h_{svrk} = K \left( \frac{1}{A_2^2} - \frac{q^2}{(A - A_2)^2} \right) + h_2(x) + h_s(x) ,$$

$$h_{svrk} = K \left( \frac{1}{A_2^2} - \frac{q^2}{A_1^2} \right) + h_2(x) + h_s(x) ,$$

$$h_{svrk} = K \left( \frac{1}{h_2^2 w_2^2} - \frac{q^2}{h_1^2 w_1^2} \right) + h_2(x) + h_s(x) ,$$

$$h_{svrk} = K \left( \frac{1}{h_2^2 w^2} - \frac{q^2}{h_1^2 w^2} \right) + h_2(x) + h_s(x) ,$$

$$h_{svrk} = \frac{K}{w^2} \left( \frac{1}{h_2^2} - \frac{q^2}{h_1^2} \right) + h_2(x) + h_s(x) .$$



Kahekihilise stratifitseeritud voolamise hüdrauliline sisevoolurežiim määratakse kombineeritud Froude'i arvuga astmes 2:

$$G^2 = Fr_1^2 + Fr_2^2 ,$$

milles ülemise veekihi Froude'i arv astmes 2 on

$$Fr_1^2 = \frac{u_1^2}{g' h_1} ,$$

ning alumise veekihi Froude'i arv astmes 2 on

$$Fr_2^2 = \frac{u_2^2}{g' h_2} .$$

## ARVUTUS

Taandatud raskuskiirendus

$$g' = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \left(1 - \frac{998,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}{1008,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}\right) = 0,0973 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Alumise veekihi vooluhulgaga määratud tegur

$$K = \frac{40/1000 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{2 \cdot 0,0973 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 0,0020 \text{ m}^2 \cdot \text{s}$$

Ülemise ja alumise veekihi vooluhulga suhtega määratud tegur astmes 2

$$q^2 = \frac{(20/1000 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1})^2}{(40/1000 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1})^2} = 0,25$$

*Sissevoolu esimene kriitiline lõige*

Ülemise ja alumise veekihi kõrgused

$$h_1 = 0,10678 \text{ m}$$

$$h_2 = 0,30322 \text{ m}$$

→

$$h_1 + h_2 = 0,41 \text{ m}$$

Ülemise ja alumise veekihi elavlõiked

$$A_1 = 0,10678 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 0,2136 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 0,30322 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 0,6064 \text{ m}^2$$

Ülemise ja alumise veekihi voolukiirused

$$u_1 = \frac{0,02 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{0,2136 \text{ m}^2} = 0,0937 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$u_2 = \frac{0,04 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{0,6064 \text{ m}^2} = 0,0660 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ülemise ja alumise veekihi Froude'i arvud astmes 2

$$Fr_1^2 \approx \frac{(0,0937 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{0,0973 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,10678 \text{ m}} = 0,8450$$

$$Fr_2^2 \approx \frac{(0,0660 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{0,0973 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,30322 \text{ m}} = 0,1475$$

→

$$G^2 = 0,8441 + 0,1475 = 1,0$$

Kahekihilise tiheduse järgi stratifitseeritud voolamise teine kriitiline lõige  
Ülemise ja alumise veekihi kõrgused

$$h_1 = 0,24574 \text{ m}$$

$$h_2 = 0,16426 \text{ m}$$

→

$$h_1 + h_2 = 0,41 \text{ m}$$

Ülemise ja alumise veekihi elavlõiked

$$A_1 = 0,24574 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 0,4915 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 0,16426 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 0,3285 \text{ m}^2$$

Ülemise ja alumise veekihi voolukiirused

$$u_1 = \frac{0,02 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{0,4915 \text{ m}^2} = 0,0407 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$u_2 = \frac{0,04 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{0,3285 \text{ m}^2} = 0,1218 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ülemise ja alumise veekihi Froude'i arvud astmes 2

$$Fr_1^2 \approx \frac{(0,0407 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{0,0973 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,24574 \text{ m}} = 0,0693$$

$$Fr_2^2 \approx \frac{(0,1218 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{0,0973 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,16426 \text{ m}} = 0,9276$$

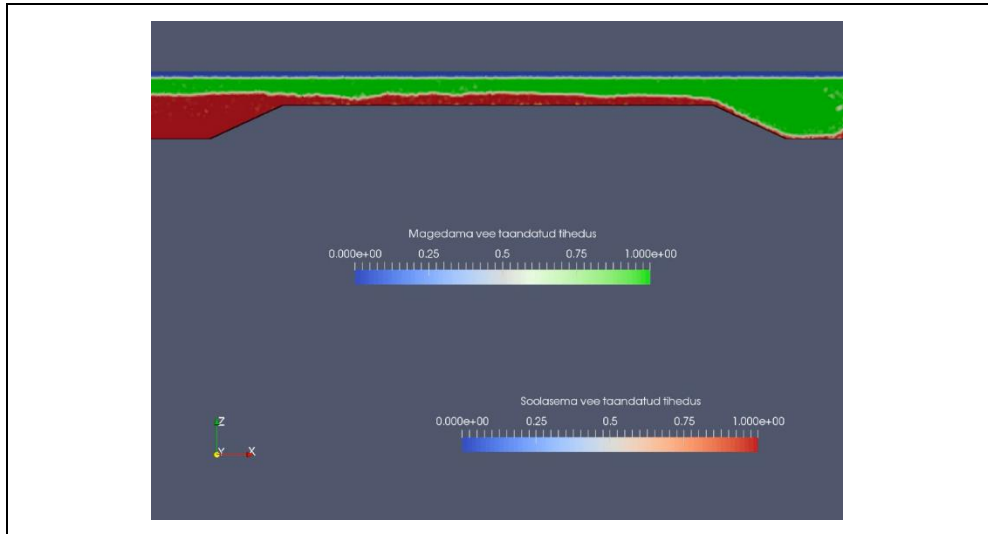
→

$$G^2 = 0,0693 + 0,9276 = 1,0$$

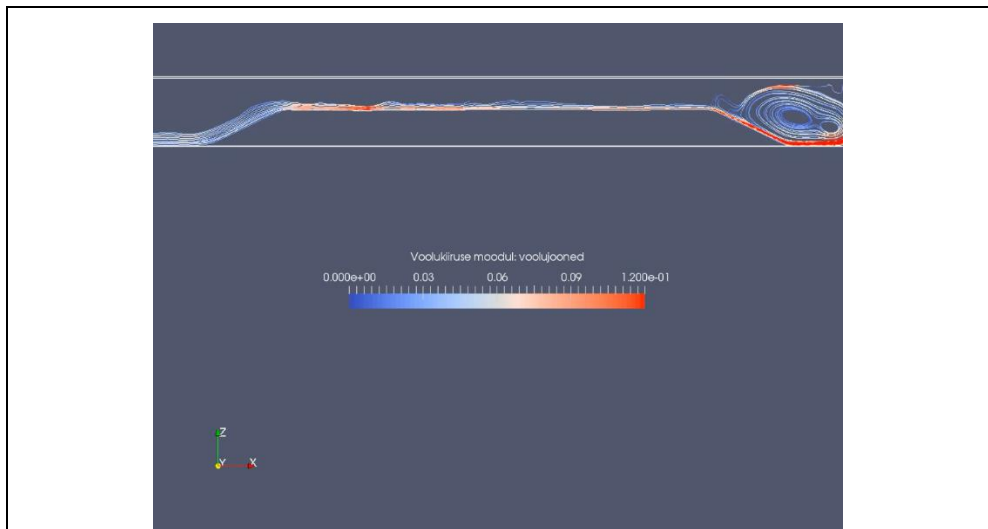
**MÄRKUS.** Kahekihiline stratifitseeritud voolamine vastab täielikule kriitilisele sisevoolule (ingl. maximal flow, maximal two-layer flow), kui eksisteerib kaks kriitilise voolamise lõiget stratifitseeritud ülevoolule. Kahekihiline stratifitseeritud voolamine vastab osaliselt täielikule kriitilisele sisevoolule (ingl. sub-maximal flow, sub-maximal two-layer flow), kui eksisteerib üks kriitilise voolamise lõige stratifitseeritud ülevoolule.

Kahekihiline stratifitseeritud voolamise hüdraulika valemid võib üldistada ruutastmelise ristlõike perimeetriaga voolusängi juhule, milles võetakse kasutusele ristlõike kujutegur  $\xi$  ja loodussängi aluspõhja laius  $w$  asendatakse vabapinna pealtlausega  $W$  (vt LISA H).

Arvutuslik vedelike dünaamika. Stratifitseeritu ülevoolu CFD simulatsioon



JOONIS 27-15 Arvutusliku vedeliku dünaamika lahendus jõesuudme paisu kahekihilise stratifitseeritud ülevoolule: Taandatud tihedus. Magedam veemass (näidatud rohelise värviga) voolab paremalt vasakule, mille erivooluhulk  $q_1 = Q_1/w = 0,02 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} / 2 \text{ m} = 0,01 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} / 0,1 \text{ m} = 0,01 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Soolasem veemass (näidatud punase värviga) voolab vasakult paremale, mille vooluhulk  $q_2 = Q_2/w = 0,04 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} / 2 \text{ m} = 0,02 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} / 0,1 \text{ m} = 0,02 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . (Õhumass on näidatud sinise värviga.)



JOONIS 27-16 Arvutusliku vedeliku dünaamika lahendus jõesuudme paisu kahekihilise stratifitseeritud ülevoolule. Tihedam (soolasema) veeallika voolujooned



## 27.7 VIITED

- 27.1 Tibar, H. (1985). *Hüdraulika erikursuse ülesannete kogu*. Tallinna Polütehniline Instituut, Sanitaartechnika kateeder.
- 27.2 Lawrence G.A. & Armi L. (2022) Stationary internal hydraulic jumps, *J Fluid Mech* 936 (A25): 1–31.
- 27.3 Maastik, A., Haldre, H., Koppel, T. & Paal, L. (1995). *Hüdraulika ja pumbad*. OÜ Greif.
- 27.4 Chadwick, A., Morfett, J. & Borthwick, M. (2004). *Hydraulics in Civil and Environmental Engineering*. Spon Press.
- 27.5 Chow, V. T., Maidment, D. R. & Mays, L. W. (1988). *Applied Hydrology*. McGraw-Hill Education.

# LISA A. ERIKUJULISE RISTLÕIKEGA ÜLEVOOLUD

## A.1 BERNOULLI VÕRRAND

Voolamise hüdraulika valemitega arvutatakse hüdraulilisi vooluprotsesse, millel on vabapind, nagu vabavool, ülevool vms. Ideaalvedeliku voolamisel ei võeta arvesse viskoossusega kaasneva piirikihi ja turbulentsete keeriste täiendavat mõju voolamise dünaamikale. Ideaalvoolu Bernoulli võrrand (VALEM (2-9)) statsionaarsele voolamisele on

$$z_{sv} + \frac{p_{sv}}{\rho g} + \frac{u_{sv}^2}{2g} = z_{vv} + \frac{p_{vv}}{\rho g} + \frac{u_{vv}^2}{2g},$$

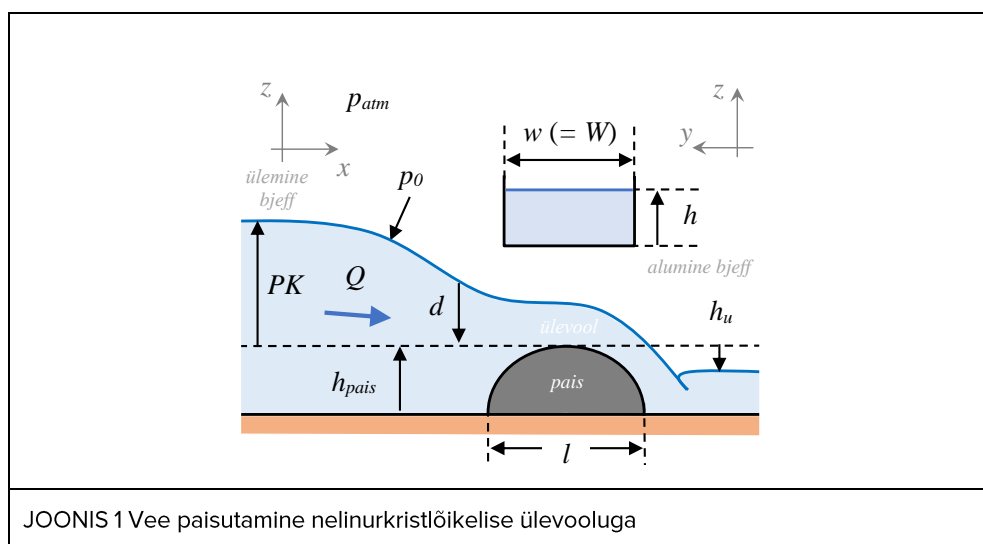
milles  $z_{sv}$ ,  $p_{sv}$  ja  $u_{sv}$  on vastavalt kõrgus, rõhk ja voolukiirus hüdraulilise voolusüsteemi sissevoolus ( $sv$ ) ja  $z_{vv}$ ,  $p_{vv}$  ja  $u_{vv}$  on vastavalt kõrgus, rõhk ja voolukiirus hüdraulilise voolusüsteemi väljavoolus ( $vv$ ). Vee tihedus on  $\rho$  ja raskuskiirendus on  $g$ .

## A.2 NELINURKSE RISTLÕIKEGA ÜLEVOOL

Ideaalvedeliku Bernoulli võrrand ülevoolule on

$$h_{pais} + PK \approx h_{pais} + d + \frac{u^2}{2g},$$

milles  $h_{pais}$  on paisu kõrgus,  $PK$  on paisutuskõrgus ja  $d$  on veekihi sügavus paisu lävel,  $g$  on raskuskiirendus ja  $u$  on voolukiirus paisu lävel.



JOONIS 1 Vee paisutamine nelinurkristlõikelise ülevooluga

Ideaalvedeliku Bernoulli võrrandis ülevoolule VALEM (2-18) on eeldatud, et paisu ülemises bjefis on voolamise kineetiline energia oluliselt väiksem potentsiaalsest energiast. Potentsiaalne erienergia paisu ülemises bjefis on määratud suurusega  $h_{pais} + PK$ .

Vooluhulga (VALEM (2-2)) nelinurkristlõikega voolusängis võib määrata valemiga:

$$Q = u A_e = u W h ,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $A_e$  on elavlõige,  $h$  on veepinna kõrgus voolusängi aluspõhjast ja  $w$  on voolusängi aluspõhja laius, mis nelinurkse ristlõikega voolusängis määrab ka vabapinna laiuse (elavlõike pealtlaiuse), st  $w = W$ .

Voolukiiruse võib määrata voolamise ruumkiiruse valemiga:

$$u = \frac{Q}{A_e} = \frac{Q}{h W} .$$

Bernoulli kolmiklikme vabapinnaga voolamisele paisu piirkonnas võib teisendada kujule:

$$B = \frac{Q^2}{2 g h^2 W^2} + h + h_{pais} .$$

Kui kasutada funktsiooni ekstreemumi määramise teoreemi muutuja  $h$  järgi:

$$\frac{d B}{d h} = 0 ,$$

siis järeldub Bernoulli funktsioonist  $B = f(h)$ , milles  $Q$ ,  $g$ ,  $W$  ja  $h_{pais}$  on konstantsed suurused, järgmine avaldis:

$$-\frac{Q^2}{2 g W^2 h^3} + 1 = -\frac{Q^2}{g W^2 h^3} + 1 = 0 .$$

Vabavoolu Froude'i arv astmes 2 on määratud valemiga:

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g W^2 h^3} = \frac{u^2}{g h} ,$$

milles on kasutatud nelinurkelavlõikega voolukiiruse ja vooluhulga seost:

$$u = \frac{Q}{W h} .$$

→

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{g h}}$$

Kriitilisele vabapinnaga voolamisele vastab  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule vastab  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

Hüdraulilise vabavoolu režiimil, mis vastab kriitilisele voolamisele  $Fr = 1$ , määratakse voolukiirus nelinurkristlõikega voolusängile valemiga:

$$u = \sqrt{g d}.$$

→

$$h_{pais} + PK = h_{pais} + d + \frac{u^2}{2g}$$

$$PK = d + \frac{d}{2} = \frac{3}{2}d$$

$$d = \frac{2}{3} PK$$

Nelinurkristlõikega voolusängis laiusega  $w (= W)$  võib vooluhulga määrata valemiga:

$$Q = u d w.$$

→

$$u = \sqrt{g d} = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} (PK)^{\frac{1}{2}}$$

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} W = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} PK\right)^{\frac{3}{2}} W$$

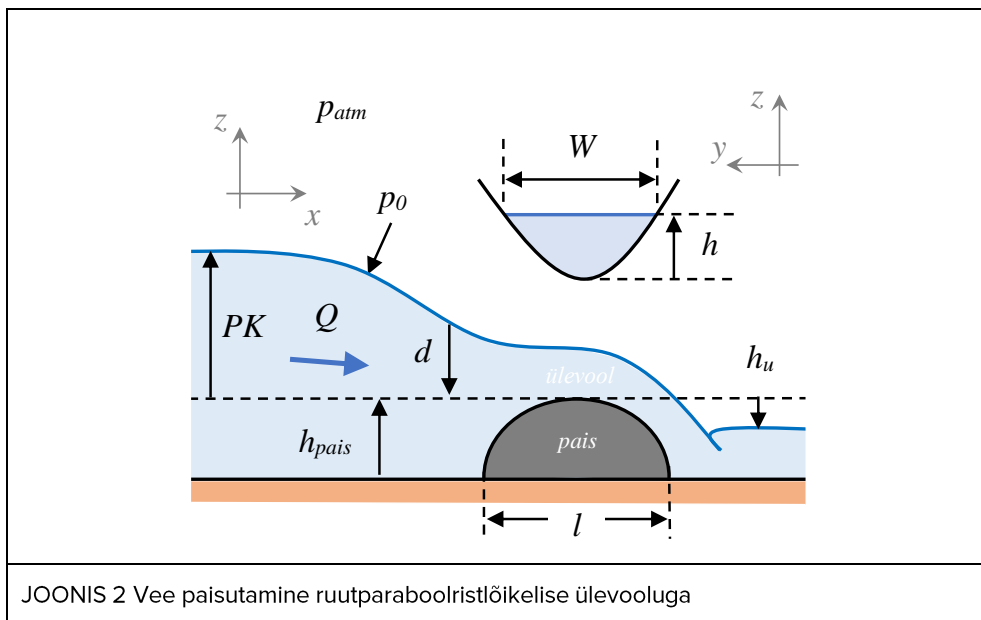
Paisutuskõrguse järgi vooluhulga määramise valemit nimetatakse maksimaalse vooluhulga valemiks juhul kui paisu lävel  $Fr = 1$ . Reaalvedeliku voolamise paisutamisele täiendatakse maksimaalse vooluhulga valemit vooluhulgateguriga  $C_d < 1$ . Ideaalvedeliku voolamise tingimustel on vooluhulgategur  $C_d = 1$ .

### A.3 PARABOOLSE RISTLÕIKEGA ÜLEVOOL

Ideaalvedeliku Bernoulli võrrand ülevoolele on

$$h_{pais} + PK \approx h_{pais} + d + \frac{u^2}{2g},$$

milles  $h_{pais}$  on paisu kõrgus,  $PK$  on paisutuskõrgus ja  $d$  on veekihi sügavus paisu lävel,  $g$  on raskuskiirendus ja  $u$  on voolukiirus paisu lävel. Ideaalvedeliku Bernoulli võrrandis ülevoolele VALEM (2-18) on eeldatud, et paisu ülemises bjefis on voolamise kineetiline energia oluliselt väiksem potentsiaalsest energiast. Potentsiaalne erienergia paisu ülemises bjefis on määratud suurusega  $h_{pais} + PK$ .



Vooluhulga (VALEM (2-2)) ruutparaboolristlõikega voolusängis võib määrata valemiga:

$$Q = u A_e = u \frac{2}{3} W h ,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $A_e$  on elavlõige,  $h$  on veepinna maksimaalne kõrgus voolusängi põhjast ja  $W$  on elavlõike pealtlaius.

Kasutades ruutparaboolse ristlõikega voolusängile voolukiiruse määramiseks valemit:

$$u = \frac{Q}{A_e} = \frac{Q}{(2/3) W h} = \frac{Q}{(2/3) h} \left( \frac{\alpha}{4 h} \right)^{1/2} = \frac{Q}{(4/3) h^{3/2} \alpha^{-1/2}} = \frac{3 Q \alpha^{1/2}}{4 h^{3/2}} ,$$

võib Bernoulli kolmikliikme vabapinnaga voolamisele teisendada kujule:

$$B = \frac{Q^2}{2 g \left( (4/3) h^{3/2} \alpha^{-1/2} \right)^2} + h + h_s = \frac{9 Q^2 \alpha}{2 g 16 h^3} + h + h_s .$$

Kui kasutada funktsiooni ekstreemumi määramise teoreemi muutuja  $h$  järgi:

$$\frac{dB}{dh} = 0 ,$$

siis järeldub Bernoulli funktsioonist  $B = f(h)$ , milles parameetrid  $Q, g, \alpha$  ja  $h_s$  on konstantsed suurused, järgmine avaldis:

$$\frac{9 Q^2 \alpha (-3)}{2 g 16 h^4} + 1 = -\frac{9 \alpha 3}{2 g 16 h^4} Q^2 + 1 = -\frac{9 \alpha 3}{2 g 16 h^4} u^2 \frac{16 h^3}{9 \alpha} + 1 = -\frac{3 u^2}{2 g h} + 1 = 0 ,$$

milles on kasutatud vooluhulga ja voolukiiruse seost ruutparaboolse ristlõikega voolusängile:

$$Q = u \frac{4 h^{3/2}}{3 \alpha^{1/2}}.$$

Ruutparaboolse ristlõikega voolusängi voolamisele võib Froude'i arv astmes 2 määrata valemiga:

$$Fr^2 = \frac{u^2}{\frac{2}{3} g h} = \frac{9 \alpha^3 Q^2}{2 g 16 h^4} = \frac{27 \alpha Q^2}{32 g h^4},$$

milles on kasutatud voolukiiruse ja vooluhulga seost ruutparaboolse ristlõikega voolusängile:

$$u = Q \frac{3 \alpha^{1/2}}{4 h^{3/2}} = \frac{3 Q}{2 W h}$$

→

$$u^2 = Q^2 \frac{9 \alpha}{16 h^3} = \frac{9 Q^2}{4 W^2 h^2},$$

milles  $\alpha = 4 h/W^2$ .

Kriitilisele vabapinnaga voolamisele vastab  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule vastab  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

Hüdraulilise vabavoolu režiimil, mis vastab kriitilisele voolamisele  $Fr = 1$ , võib voolukiiruse määrata ruutparaboolristlõikega voolusängile valemiga:

$$u = \sqrt{\frac{2}{3} g d}.$$

→

$$h_{pais} + PK = h_{pais} + d + \frac{u^2}{2 g}$$

$$PK = d + \frac{d}{3} = \frac{4}{3} d$$

$$d = \frac{3}{4} PK$$

Ruutparaboolristlõikega voolusängis, voolamise pealtlaiusega  $W$ , võib vooluhulga määrata valemiga:

$$Q = u \frac{2}{3} W d.$$

→

$$u = \sqrt{\frac{2}{3} g d} = \sqrt{\frac{2}{3} g \frac{3}{4} PK} = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (PK)^{\frac{1}{2}}$$

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (PK)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3} W d = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (PK)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3} W \frac{3}{4} PK = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} W$$

→

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} W = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{4d}{\alpha}\right)^{1/2} = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{4}{\alpha} \frac{3}{4} PK\right)^{1/2}$$

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{\alpha} PK\right)^{1/2} = \left(\frac{3g}{8\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} (PK)^2$$

→

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} W = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{4} PK\right)^{\frac{3}{2}} W$$

Paisutuskõrguse järgi vooluhulga määramise valemite nimetatakse maksimaalse vooluhulga valemiks juhul kui paisu lävel  $Fr = 1$ . Reaalvedeliku voolamise paisutamisele täiendatakse maksimaalse vooluhulga valemite vooluhulgateguriga  $C_d < 1$ . Ideaalvedeliku voolamise tingimustel on vooluhulgategur  $C_d = 1$ .

## A.4 KOLMNURKSE RISTLÕIKEGA ÜLEVOOL

Ideaalvedeliku Bernoulli võrrand ülevoolule on

$$h_{pais} + PK \approx h_{pais} + d + \frac{u^2}{2g},$$

milles  $h_{pais}$  on paisu kõrgus,  $PK$  on paisutuskõrgus ja  $d$  on veekihi sügavus paisu lävel,  $g$  on raskuskiirendus ja  $u$  on voolukiirus paisu lävel. Ideaalvedeliku Bernoulli võrrandis ülevoolule VALEM (2-18) on eeldatud, et paisu ülemises bjefis on voolamise kineetiline energia oluliselt väiksem potentsiaalsest energiast. Potentsiaalne eriennergia paisu ülemises bjefis on määratud suurusega  $h_{pais} + PK$ .

Vooluhulga (VALEM (2-2)) kolmnurkristlõikega voolusängis võib määrata valemiga:

$$Q = u A_e = u \frac{1}{2} W h,$$

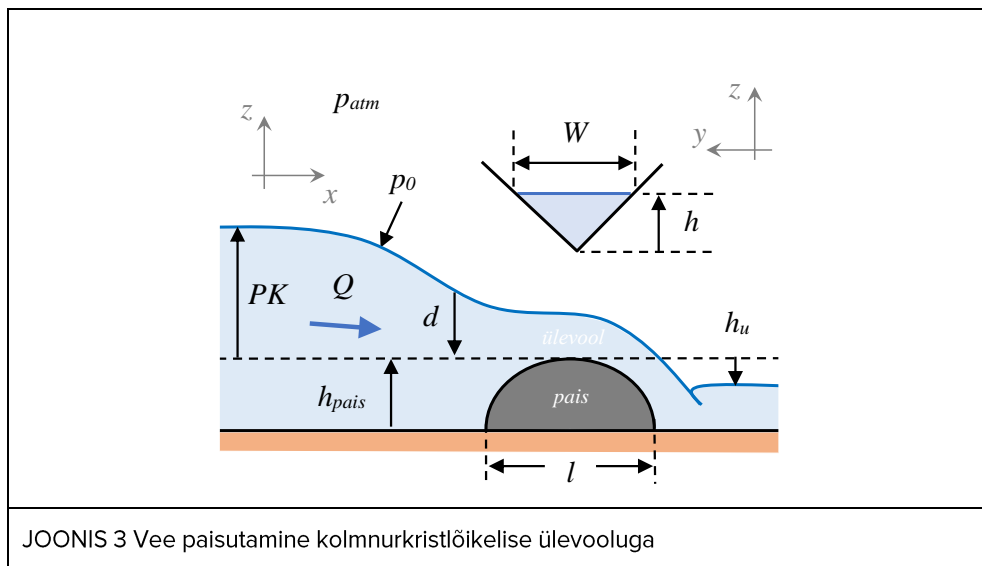
milles  $u$  on voolukiirus,  $A_e$  on elavlõige,  $h$  on veepinna maksimaalne kõrgus voolusängi põhjast ja  $W$  on elavlõike pealtlaius.

Kasutades kolmnurkristlõikega voolusängile voolukiiruse määramiseks valemit:

$$u = \frac{Q}{A_e} = \frac{Q}{(1/2) W h} = \frac{Q}{(1/2) h} \frac{\beta}{2 h} = \frac{Q \beta}{h^2},$$

võib vabapinnaga voolamise Bernoulli kolmikliikme teisendada kujule:

$$B = \frac{Q^2 \beta^2}{2 g h^4} + h + h_s.$$



Kui kasutada funktsiooni ekstreemumi määramise teoreemi muutuja  $h$  järgi:

$$\frac{dB}{dh} = 0,$$

siis järeldub Bernoulli funktsioonist  $B = f(h)$ , milles parameetrid  $Q, g, \beta$  ja  $h_s$  on konstantsed suurused, järgmine avaldis:

$$\frac{\beta^2 Q^2 (-4)}{2 g h^5} + 1 = -\frac{\beta^2 Q^2 2}{g h^5} + 1 = -\frac{2 u^2}{g h} + 1 = 0,$$

milles on kasutatud vooluhulga ja voolukiiruse seost kolmnurkse ristlõikega voolusängile:

$$Q = u \frac{h^2}{\beta}.$$

Kolmnurkse ristlõikega voolusängi voolamisele võib Froude'i arv astmes 2 määrata valemiga:

$$Fr^2 = \frac{u^2}{\frac{1}{2} g h} = \frac{\beta^2 Q^2}{\frac{1}{2} g h h^4} = \frac{2 \beta^2 Q^2}{g h^5},$$



milles on kasutatud voolukiiruse ja vooluhulga seost kolmnurkse ristlõikega voolusängile:

$$u = \frac{\beta Q}{h^2}$$

→

$$u^2 = Q^2 \frac{\beta^2}{h^4} = \frac{4 h^2 Q^2}{W^2 h^4} = \frac{4 Q^2}{W^2 h^2},$$

milles  $\beta = 2 h/W$ .

Kriitilisele vabapinnaga voolamisele vastab  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule vastab  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

Hüdraulilise vabavoolu režiimil, mis vastab kriitilisele voolamisele  $Fr = 1$ , võib voolukiiruse kolmnurkristlõikega voolusängile määrata valemiga:

$$u = \sqrt{\frac{1}{2} g d}.$$

→

$$h_{pais} + PK = h_{pais} + d + \frac{u^2}{2g}$$

$$PK = d + \frac{d}{4} = \frac{5}{4} d$$

$$d = \frac{4}{5} PK$$

Kolmnurkristlõikega voolusängis voolamise pealtlaiusega  $W$  võib vooluhulga määrata valemiga:

$$Q = u \frac{1}{2} W d.$$

→

$$u = \sqrt{\frac{1}{2} g d} = \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{4}{5} PK} = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}} (PK)^{\frac{1}{2}}$$

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}} (PK)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} W d = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}} (PK)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} W \frac{4}{5} PK = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} W$$

→

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} W = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} \frac{2d}{\beta} = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\beta} \frac{4}{5} PK$$

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} \frac{4}{\beta} \frac{2}{5} PK = g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{5} PK\right)^{\frac{5}{2}} \frac{4}{\beta}$$

→

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{5} PK \right)^{\frac{3}{2}} W$$

Paisutuskõrguse järgi vooluhulga määramise valemite nimetatakse maksimaalse vooluhulga valemiks juhul kui paisu lävel  $F_r = 1$ . Reaalvedeliku voolamise paisutamisele täiendatakse maksimaalse vooluhulga valemite vooluhulgateguriga  $C_d < 1$ . Ideaalvedeliku voolamise tingimustel on vooluhulgategur  $C_d = 1$ .

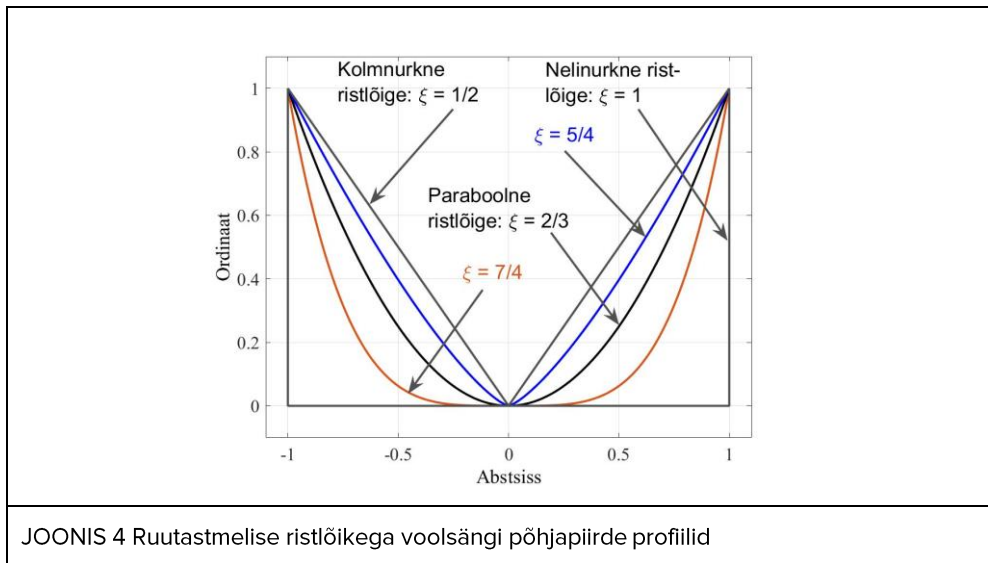
## A.5 RUUTASTMELISE RISTLÕIKEGA ÜLEVOOL

Defineerime vabapinnaga voolamise ristlõike kujuteguri valemiga:

$$\xi = \frac{\text{ruutastmelise elavlõike pindala}}{\text{nelinurkse elavlõike pindala}},$$

eeldusel, et ruutastmelise ristlõikega voolusängi elavlõike maksimaalne veepinna kõrgus voolusängi põhjast ja elavlõike pealtlaius on vastavalt samad, mis nelinurkse ristlõikega voolusängi elavlõike maksimaalne veepinna kõrgus voolusängi aluspõhjust ja elavlõike laius.

Vastavalt avasängi voolamise ristlõike kujuteguri definitsioonivalemile on nelinurksele ristlõikele kujutegur  $\xi = 1$ , paraboolsele ristlõikele kujutegur  $\xi = 3/2$  ja kolmnurksele ristlõikele kujutegur  $\xi = 2$ . Üldiselt võib avasängi ristlõike kujutegur  $\xi$  võtta mis tahes positiivsed väärtused, mis on suuremad kui  $\xi = 1$ , seda eeldusel, et madalaveelise voolamise tingimused kehtivad hästi.



JOONIS 4 Ruutastmelise ristlõikega voolusängi põhjapiirde profiilid

Nelinurkse, paraboolse ja kolmnurkse ristlõikega voolusäangi kriitilise voolamise ( $Fr = 1$ ) tingimus on vastavalt määratud valemiga:

Nelinurkne elavlõige:

$$\xi = 1$$

→

$$u^2 = g h$$

→

$$Fr^2 = (1) \frac{u^2}{g h} = \xi \frac{u^2}{g h}$$

Paraboolne elavlõige:

$$\xi = \frac{3}{2}$$

→

$$u^2 = \left(\frac{2}{3}\right) g h$$

→

$$Fr^2 = \left(\frac{3}{2}\right) \frac{u^2}{g h} = \xi \frac{u^2}{g h}$$

Kolmnurkne elavlõige:

$$\xi = 2$$

→

$$u^2 = \left(\frac{1}{2}\right) g h$$

→

$$Fr^2 = (2) \frac{u^2}{g h} = \xi \frac{u^2}{g h}$$

Nelinurkse, paraboolse ja kolmnurkse ristlõikega voolusäangi kriitilise voolamise ( $Fr = 1$ ) sügavus paisul on vastavalt määratud valemiga:

Nelinurkne elavlõige:

$$\xi = 1$$

→

$$d = \left(\frac{2}{3}\right) PK$$

→

$$d = \frac{2\xi}{2\xi + 1} PK$$

Paraboolne elavlõige:

$$\xi = \frac{3}{2}$$

→

$$d = \binom{3}{4} PK$$

→

$$d = \frac{2\xi}{2\xi + 1} PK$$

Kolmnurkne elavlõige:

$$\xi = 2$$

→

$$d = \binom{4}{5} PK$$

→

$$d = \frac{2\xi}{2\xi + 1} PK$$

Nelinurkse, paraboolse ja kolmnurkse ristlõikega voolusängi kriitilise voolamise ( $Fr = 1$ ) maksimaalne vooluhulk on vastavalt määratud valemiga:

Nelinurkne elavlõige:

$$\xi = 1$$

→

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left( \binom{2}{3} PK \right)^{\binom{3}{2}} W,$$

milles

$$g^{\frac{1}{2}} \left( \binom{2}{3} \right)^{\binom{3}{2}} = 1,705.$$

Paraboolne elavlõige:

$$\xi = \frac{3}{2}$$

→

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left( \left( \frac{2}{4} \right) PK \right)^{\left( \frac{3}{2} \right)} W ,$$

milles

$$g^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{4} \right)^{\left( \frac{3}{2} \right)} = 1,107 .$$

Kolmnurkne elavlõige:

$$\xi = 2$$

→

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left( \left( \frac{2}{5} \right) PK \right)^{\left( \frac{3}{2} \right)} W ,$$

milles

$$g^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{5} \right)^{\left( \frac{3}{2} \right)} = 0,792 .$$

Ruutastmelise ristlõikega voolusängi kriitilise voolamise Froude'i arv astmes 2 on

$$Fr^2 = \xi \frac{u^2}{g h} .$$

Kriitilise voolamise ( $Fr = 1$ ) sügavus paisul on

$$d = \frac{2 \xi}{2 \xi + 1} PK .$$

Maksimaalne vooluhulk on

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{1 + \xi} PK \right)^{\frac{3}{2}} W ,$$

milles  $g$  on raskuskiirendus,  $\xi$  on ruutastmelise ristlõike kujutegur,  $PK$  on paisutuskõrgus,  $W$  on voolamise pealtlaius voolusängis.

**MÄRKUS.** Ruutastmeline ristlõige (ingl. *quadratic-shape cross-section*) ja ruutastmeline voolusäng (ingl. *quadratic-type channel*).

# LISA B. LAMBERT W FUNKTSIOON

## B.1 LOGARITMVÖRRAND

**MÄRKUS.** Lambert  $W$  funktsiooni koostas XVIII sajandil matemaatik Johann Heinrich Lambert (1728–1777) ja seda täiendas Leonhard Paul Euler (1707–1783). Matemaatik Edward Maitland Wright (1906–2005) selgitas erinevaid Lambert  $W$  funktsiooni aspektidele, näiteks uuris esimesena funktsiooni kompleksseid väärtusi, mille tõttu on tähel  $W$  nimeline tähendus.

Lambert  $W$  funktsioon on defineeritud kui funktsioon, mis rahuldab võrrandit:

$$z = W(z) e^{W(z)},$$

milles

$$z \in (-1/e, \infty).$$

Järelikult on Lambert  $W$  funktsioon pöördfunktsioonide hulk funktsioonile

$$f(z') = z' e^{z'},$$

milles

$$z' \in \mathbb{R}.$$

Lambert  $W$  funktsioon ei ole argumentidele  $z$  üheselt määratud. Argumentide väärtustele  $z \in (-1/e, \infty)$  on funktsioonil  $W(z)$  kaks reaalselt väärtust, ning see on üheselt määratud kui  $z \in (0, \infty)$ . Kuna funktsioonil  $W(z)$  esineb samale argumentile  $z$  mitu väärtust, siis on järelikult olemas funktsiooni harud. Tähistame edaspidi peaharu  $W_0(z)$  ja kõrvalharu  $W_{-1}(z)$ , milles vastavalt  $W(z) \geq -1$  ja  $W(z) \leq -1$ . Peaharu  $W_0(z)$  väärtused muutuvad aeglaselt ja on tõkestamata, kui  $z \rightarrow \infty$ . Kui  $z \rightarrow 0_-$ , siis kõrvalharu  $W_{-1}(z) \rightarrow \infty$ .

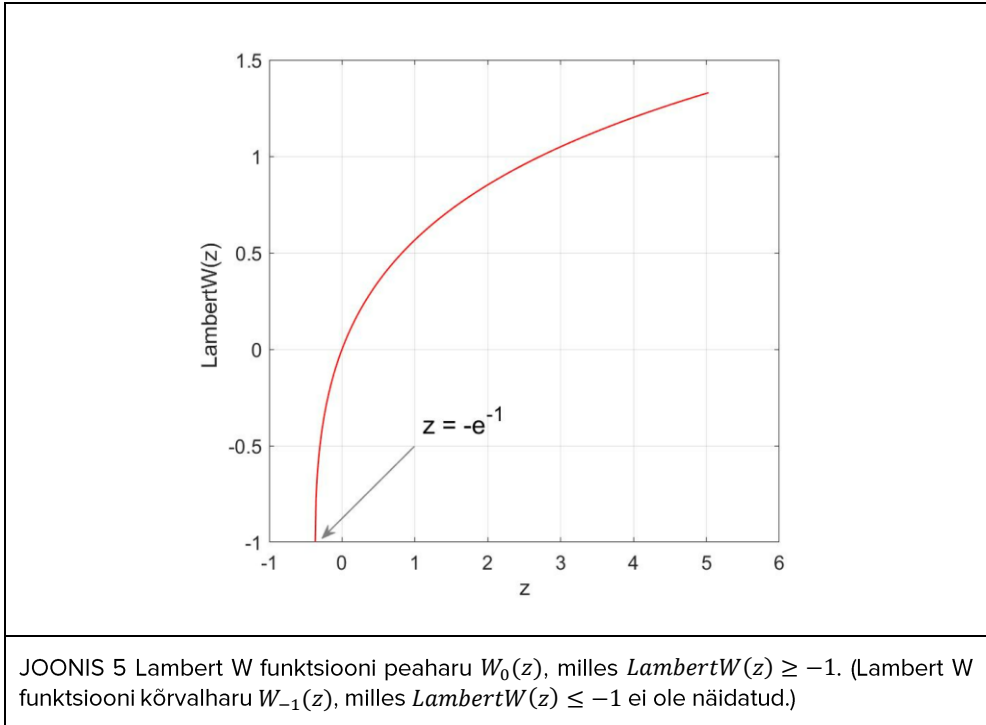
Üldjuhul on Lambert  $W$  funktsioon defineeritud nii reaalarvuliste kui ka kompleksarvuliste argumentidele, ning Lambert  $W$  funktsiooni rahuldaval võrrandil on lõpmatult palju lahendeid, millest enamik on kompleksed. Argumentide väärtustele  $z \in (-\infty, -1/e)$  on funktsioonil  $W(z)$  ainult kompleksarvulised lahendused. Samuti kui  $z$  on reaalarv, siis kõik teised funktsiooni harud lisaks peaharule  $W_0(z)$  ja kõrvalharule  $W_{-1}(z)$  on kompleksed.

Lambert  $W$  funktsiooni ei ole võimalik avaldada elementaarfunktsioonide kaudu. Funktsioon  $W(z)$  võimaldab lahendada erinevaid eksponentfunktsioone, järelikult ka logaritmfunktsioone, sisaldavaid võrrandeid. Ilmutamata kujul võrrandi lahendamiseks tuleb kõik selle otsitavat muutujat sisaldavad komponendid viia ühele võrrandi poolele, et saada ilmutamata võrrandile üldistatud kuju:

$$Y = X e^X,$$

mille lahend avaldub Lambert W funktsiooni kaudu kujul:

$$X = \text{LambertW}(Y).$$



## B.2 TURBULENTSE VOOLAMISE HÕÖRDEKISTUS TÄIELIKU TÄITUMUSEGA ÜMARTORULE

Turbulentsse voolamisele on hõõrdetakistustegur keeruline funktsioon Reynoldsi arvust  $Re$  ja suhtelisest karedusest  $k_s/d_s$ . Erinevate Reynoldsi arvu ja täieliku täitumusega ümartoru piirde suhtelise kareduse väärtustele võib hõõrdetakistusteguri määrata Colebrook-White'i võrrandiga (VALEM (2-40)), mis on ilmutamata logaritmifunktsioon hüdraulilistest suurustest  $Re$  ja  $k_s/d_s$ :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right).$$

Colebrook-White'i võrrandi (VALEM (2-40)) lahendamiseks võib kasutada numbrilist arvutuskeemi, seda põhjusel, et võrrandis on  $\lambda$  ilmutamata kujul, ning seetõttu ei ole hõõrdetakistustegurit võimalik lihtsalt määrata. Colebrook-White'i

hõõrdetakistuse võrrandi lahendamiseks võib kasutada Lambert W funktsiooni. Selleks võtame kasutusele muutujad:

$$z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

$$b = \frac{k_s/d_s}{3,71},$$

$$a = \frac{2,51}{Re}.$$

Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrand uute muutujatega:

$$z = -2 \log_{10}(b + a z).$$

→

$$-\frac{z}{2} = \log_{10}(b + a z)$$

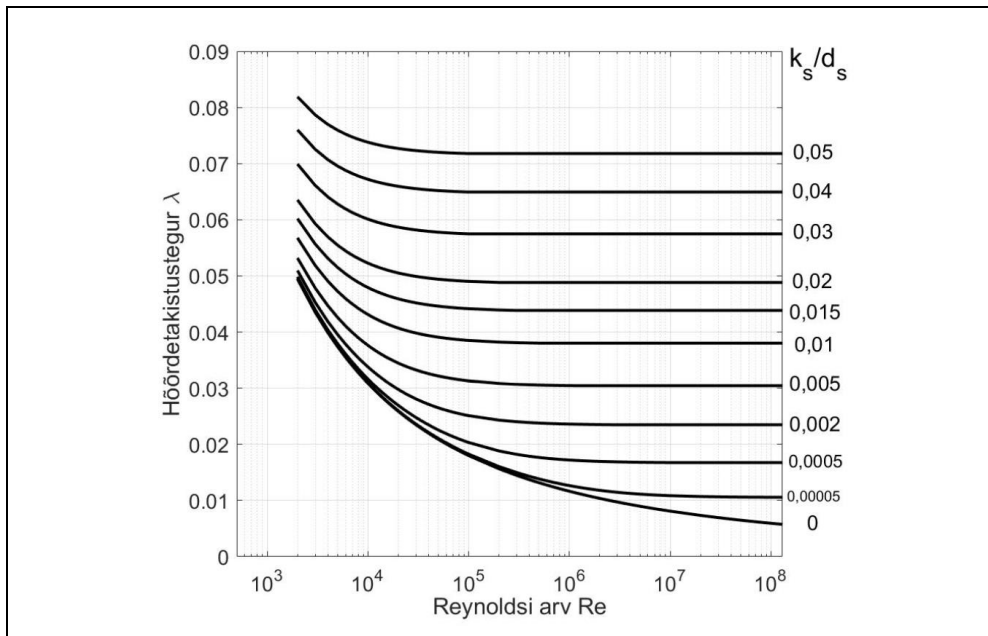
→

$$10^{-\frac{z}{2}} = b + a z$$

$$c = 10^{-\frac{1}{2}}$$

→

$$c^z = b + a z$$



JOONIS 6 Lambert W funktsiooniga koostatud Moody diagrammi rekonstruktsioon Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrandiga täieliku täitumusega voolamisele ümartorus



Võtame kasutusele Lambert W funktsiooni Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrandis:

$$z = -\frac{\text{LambertW}\left(-\frac{\ln(c)}{a} c^{-\frac{b}{a}}\right)}{\ln(c)} - \frac{b}{a}.$$

→

$$\lambda = \left( -\frac{\text{LambertW}\left(-\frac{\ln(c)}{a} c^{-\frac{b}{a}}\right)}{\ln(c)} - \frac{b}{a} \right)^{-2}$$

### B.3 TURBULENTSE VOOLAMISE HÕÕRDETAKISTUS OSALISE TÄITUMUSEGA ÜMARTORULE

Turbulentsele voolamisele on hõõrdetakistustegur keeruline funktsioon Reynoldsi arvust  $Re = 4 Re_{vs}$  ja suhtelisest karedusest  $k_s/d_s = k_s/(4 R_h)$ . Täieliku täitumusega ümartoru sisediameeter  $d_s = 4 R_h$ . Erinevate Reynoldsi arvu ja täieliku täitumusega ümartoru piirde suhtelise kareduse väärtustele võib hõõrdetakistusteguri määrata Colebrook-White'i kloonvõrrandiga (VALEM (2-44)), mis on ilmutamata logaritmifunktsioon hüdraulilistest suurustest  $Re_{vs}$  ja  $k_s/R_h$ :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right) = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{Re_{vs} \sqrt{\lambda}} \right).$$

Colebrook-White'i hõõrdetakistusteguri kloonvõrrandi lahendamiseks kasutatakse numbrilist arvutuskeemi, seda põhjusel, et võrrandis on  $\lambda$  ilmutamata kujul, ning seetõttu ei ole hõõrdetakistustegurit võimalik lihtsalt määrata. Colebrook-White'i hõõrdetakistusteguri kloonvõrrandi lahendamiseks võib kasutada Lambert W funktsiooni. Selleks võtame kasutusel muutujad:

$$z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

$$b = \frac{k_s/R_h}{14,84},$$

$$a = \frac{0,6275}{Re_{vs}}.$$

Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrand uute muutujatega on

$$z = -2 \log_{10}(b + a z).$$

→

$$-\frac{z}{2} = \log_{10}(b + a z)$$

→

$$10^{-\frac{z}{2}} = b + a z$$

$$c = 10^{-\frac{1}{2}}$$

→

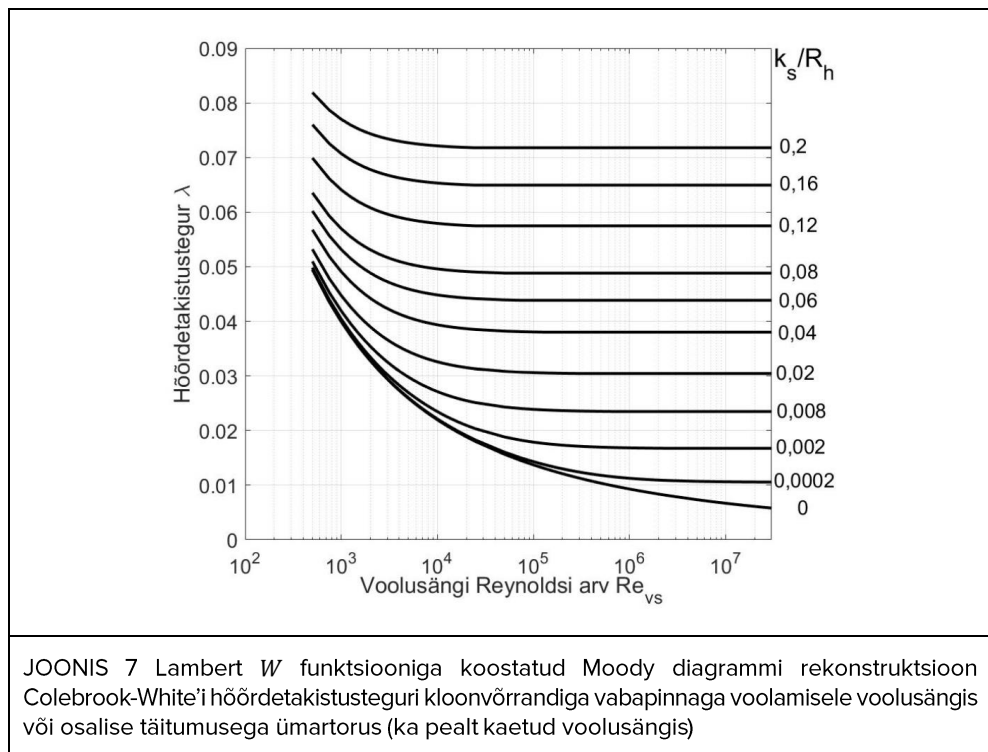
$$c^z = b + a z$$

Võtame kasutusele Lambert W funktsiooni Coebrook-White'i hõõrdetakistusteguri kloonvõrrandis:

$$z = -\frac{\text{Lambert}W\left(-\frac{\ln(c)}{a} c^{-\frac{b}{a}}\right)}{\ln(c)} - \frac{b}{a}.$$

→

$$\lambda = \left( -\frac{\text{Lambert}W\left(-\frac{\ln(c)}{a} c^{-\frac{b}{a}}\right)}{\ln(c)} - \frac{b}{a} \right)^{-2}$$



(VIIDE L 1)

# LISA C. HÕÖRDETAKISTUS TÄIELIKU TÄITUMUSEGA ÜMARTORUS

## C.1 EMPIIRILISED VÕRRANDID JA VALEMID

**PÕHIVALEMID. Darcy survekao valem, ümartoru Reynoldsi arv, Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrand**

Voolamise hõõrdesurvekao ja kiiruskõrguse suhtarvu võib esitada kordaja (torulõigu pikkus / toru sisediaameeter) ning Reynoldsi arvu ja suhtelise kareduse funktsioonina:

$$\frac{h_l 2g}{u^2} = \frac{l}{d_s} \text{funktsioon}\left(\mathbf{Re}, \frac{k_s}{d_s}\right),$$

milles funktsioon Reynoldsi arvust ja suhtelisest karedusest määrab hõõrdetakistusteguri:

$$\lambda = \text{funktsioon}\left(\mathbf{Re}, \frac{k_s}{d_s}\right).$$

Täieliku täitumusega ümartoru voolamise statsionaarset voolurežiimi iseloomustatakse Reynoldsi arvuga, mis on ümartoru Reynoldsi arv:

$$\mathbf{Re} = \frac{u d_s}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $d_s$  on toru sisediaameeter ja  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur. Veevoolule täieliku täitumusega ümartorus vastav kriitiline Reynoldsi arv on 2000, mille juures on üleminek laminaarselt voolamiselt turbulentselt voolamisele.

Erinevate Reynoldsi arvu ja täieliku täitumusega toru piirde suhtelise kareduse väärtustele võib hõõrdetakistusteguri määrata Colebrook-White'i võrrandiga (VALEM (2-40)):

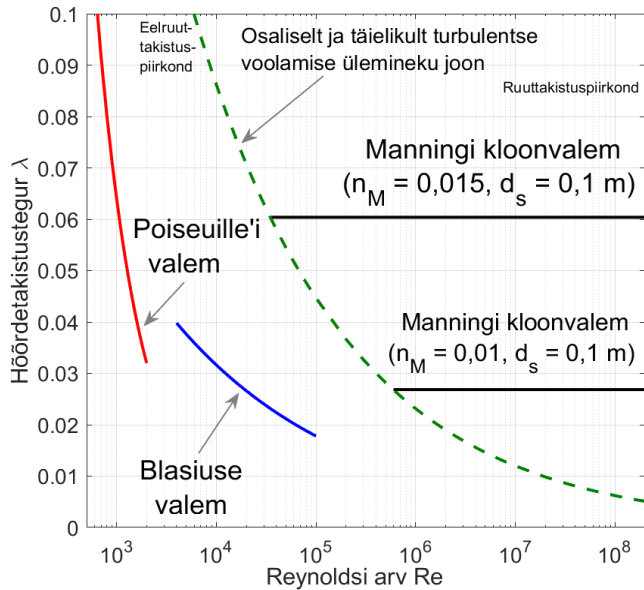
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{\mathbf{Re} \sqrt{\lambda}} \right),$$

mis kehtib hästi Reynoldsi arvu vahemikus  $4 \cdot 10^3 < \mathbf{Re} < 1 \cdot 10^9$ .

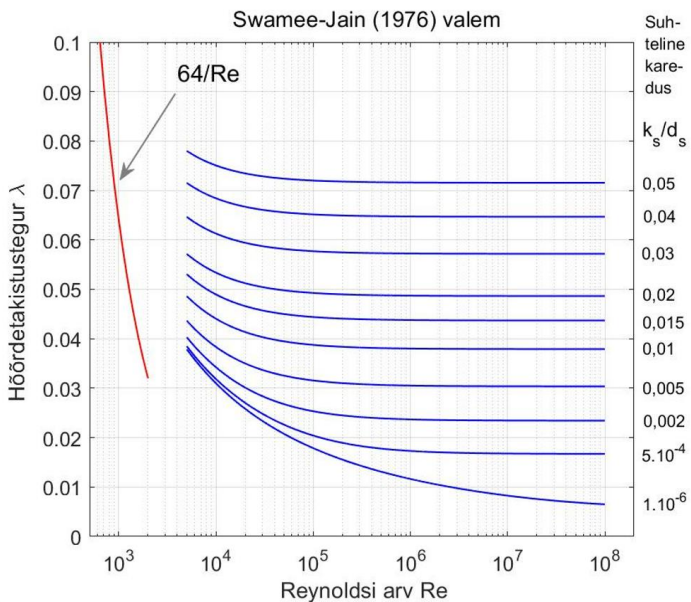
Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrandis on takistustegur ilmutamata kujul, ning selle määramisele võib kasutada numbrilist arvutusskeemi. Seetõttu kasutatakse empiirilisi valemeid, nagu Blasiuse hõõrdetakistuse valem, Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valem, Manningi hõõrdetakistuse valem, Moody hõõrdetakistuse valem, Woodi valem, Cheni valem, Manadilli valem vms, milles hõõrdetakistustegur on esitatud ilmutatud kujul, aga nende rakenduspiirkond on piiratum võrreldes Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrandiga. Laminaarsele voolamise hõõrdetakistustegur on määratud Hagen-Poiseuille'i valemiga.

## C.2 HÖÖRDEKISTUSTEGURI VALEMID

Tabel 1. Hõõrdetakistustegurite valemid täieliku täitumusega ümartoru voolamisele			
#	Valemid ja kloonvalem	Nimeviide	Tingimused
i	$\lambda = \frac{64}{\mathbf{Re}}$	Poiseuille (1840)	$0 < \mathbf{Re} < 2 \cdot 10^3$
ii	$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\mathbf{Re}}}$	Blasius (1913)	$4 \cdot 10^3 < \mathbf{Re} < 1 \cdot 10^5$
iii	$\lambda = \frac{0,25}{\left[ \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,7} + \frac{5,74}{\mathbf{Re}^{(9/10)}} \right) \right]^2}$	Swamee- Jain (1976)	$5 \cdot 10^3 < \mathbf{Re} < 1 \cdot 10^8$ $k_s/d_s = 1 \cdot 10^{-6} \dots 1 \cdot 10^{-2}$
iv	$\lambda = 12,6992 \frac{g n_M^2}{d_s^{5/6}}$	Manning (1890)	Moody diagrammi ruuttakistuspiirkond, st $\lambda \neq f(\mathbf{Re})$
v	$\lambda = 0,0055 \left[ 1 + \left( 2 \cdot 10^4 \frac{k_s}{d_s} + \frac{10^6}{\mathbf{Re}} \right)^{(1/3)} \right]$	Moody (1947)	$4 \cdot 10^3 < \mathbf{Re} < 5 \cdot 10^8$ $k_s/d_s = 0 \dots 1 \cdot 10^{-2}$
vi	$\lambda = 0,094 \left( \frac{k_s}{d_s} \right)^{0,225} + 0,53 \left( \frac{k_s}{d_s} \right) + \frac{88}{\mathbf{Re}^n} \left( \frac{k_s}{d_s} \right)^{0,44}$ $n = 1,62 \left( \frac{k_s}{d_s} \right)^{0,134}$	Wood (1966)	$4 \cdot 10^3 < \mathbf{Re} < 5 \cdot 10^7$ $k_s/d_s = 1 \cdot 10^{-5} \dots 4 \cdot 10^{-2}$
vii	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,7065} - \frac{5,0452}{\mathbf{Re}} \log_{10} \left( \frac{1}{2,8257} \left( \frac{k_s}{d_s} \right)^{1,1098} + \frac{5,8506}{\mathbf{Re}^{0,8981}} \right) \right)$	Chen (1979)	$4 \cdot 10^3 < \mathbf{Re} < 4 \cdot 10^8$
viii	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,7} + \frac{95}{\mathbf{Re}^{0,983}} - \frac{96,82}{\mathbf{Re}} \right)$	Manadilli (1997)	$4 \cdot 10^3 < \mathbf{Re} < 1 \cdot 10^8$ $k_s/d_s = 0 \dots 5 \cdot 10^{-2}$



JOONIS 8 Poiseuille'i, Blasiuse ja Manningi hõõrdetakistustegurid voolamisele täieliku täitumisega ümartorus



JOONIS 9 Swamee-Jaini hõõrdetakistustegur voolamisele täieliku täitumisega ümartorus

# LISA D. HÕÖRDETAKISTUS OSALISE TÄITUMUSEGA ÜMARTORUS

## D.1 EMPIIRILISED VÕRRANDID JA VALEMID

**PÕHIVALEMID.** Darcy survekao valem, voolusängi Reynoldsi arv, Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonvõrrand

Voolamise hõõrdesurvekao ja kiiruskõrguse suhtarvu võib esitada kordaja (sängilõigu pikkus / hüdrauliline raadius) ning voolusängi Reynoldsi arvu, ning osalise täitumusega toru, st pealt kaetud voolusängi parameetri (voolupiirde karedus / hüdrauliline raadius) funktsioonina:

$$\frac{h_l 8 g}{u^2} = \frac{l}{R_h} \text{funktsioon} \left( \mathbf{Re}_{vs}, \frac{k_s}{R_h} \right),$$

milles funktsioon voolusängi Reynoldsi arvust ( $\mathbf{Re}_{vs}$ ), absoluutkaredusest ( $k_s$ ) ja hüdraulilisest raadiusest ( $R_h$ ) määrab hõõrdetakistusteguri:

$$\lambda = \text{funktsioon} \left( \mathbf{Re}, \frac{k_s}{d_s} \right).$$

Kasutatud on hõõrdetakistusteguri kloonvalemit:

$$h_l = \lambda \frac{l}{d_s} \frac{u^2}{2g} = \lambda \frac{l}{R_h} \frac{u^2}{8g},$$

milles  $\lambda$  on hõõrdetakistustegur,  $l$  on osalise täitumusega ümartoru pikkus,  $d_s (= 4 R_h)$  on täieliku täitumusega ümartoru sisediaameeter,  $R_h$  on vastav hüdrauliline raadius ja  $u$  on voolamise keskkiirus. Hõõrdetakistustegur on mõõtühikuta suurus  $[\lambda] = 1$ .

**MÄRKUS.** Osalise täitumusega toru on pealt kaetud voolusäng.

Täieliku täitumusega ümartoru hüdrauliline raadius määratakse valemiga:

$$R_h = \frac{d_s}{4},$$

millest järeldub täieliku täitumusega ümartoru sisediaameetri valem  $d_s = 4 R_h$  ja Reynoldsi arv:

$$\mathbf{Re} = \frac{u d_s}{\nu} = 4 \frac{u R_h}{\nu} = 4 \mathbf{Re}_{vs},$$

milles  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur.

Voolusängi Reynoldsi arv on

$$\mathbf{Re}_{vs} = \frac{u R_h}{\nu} = \frac{Q}{\chi},$$

milles voolukiirus  $u$  on elimineeritud vooluhulga valemi kaudu:

$$Q = u A_e,$$

milles toru voolamisele avatud osa, ehk elavlõige on

$$A_e = R_h \chi,$$

milles  $\chi$  on märgpiire.

Osalise täitumusega ümartoru voolamise statsionaarset voolurežiimi iseloomustatakse voolusängi Reynoldsi arvuga:

$$\mathbf{Re}_{vs} = \frac{u R_h}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $R_h$  on hüdrauliline raadius ja  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur. Veevoolule osalise täitumusega ümartorus vastav kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on 500, mille juures toimub üleminek laminaarselt voolamiselt turbulentsse voolamisele.

Funktsioon voolusängi Reynoldsi arvust, ning osalise täitumusega toru, st pealt kaetud voolusängi parameetrist (voolupiirde karedus / hüdraulilise raadius) määrab hõõrdetakistusteguri:

$$\lambda = \text{funktsioon} \left( \mathbf{Re}_{vs}, \frac{k_s}{R_h} \right).$$

Erinevate voolusängi Reynoldsi arvu ja osalise täitumusega toru, st pealt kaetud voolusängi parameetri (voolupiirde karedus / hüdraulilise raadius) väärtustele võib hõõrdetakistusteguri määrata Colebrook-White'i kloonvõrrandiga (VALEM (2-44)):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/d_s}{3,71} + \frac{2,51}{\mathbf{Re} \sqrt{\lambda}} \right) = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{0,6275}{\mathbf{Re}_{vs} \sqrt{\lambda}} \right),$$

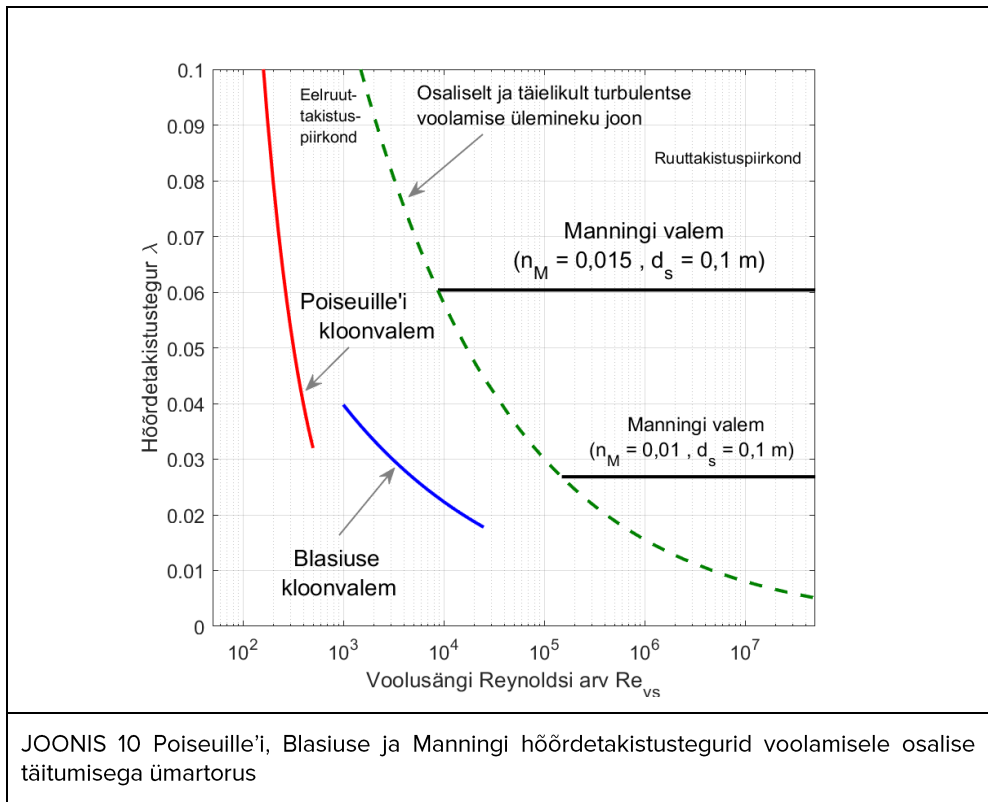
mis kehtib hästi voolusängi Reynoldsi arvu vahemikus  $0,5 \cdot 10^3 < \mathbf{Re}_{vs} < 0,25 \cdot 10^9$ .

Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonvõrrandis on takistustegur ilmutamata kujul, ning selle määramisele võib kasutada numbrilist arvutusskeemi. Seetõttu kasutatakse empiirilisi kloonvalemeid, nagu Blasiuse hõõrdetakistuse kloonvalem, Swamee-Jaini hõõrdetakistuse kloonvalem, Manningi hõõrdetakistuse kloonvalem, Moody hõõrdetakistuse kloonvalem, Woodi hõõrdetakistuse kloonvalem, Cheni hõõrdetakistuse kloonvalem, Manadilli hõõrdetakistuse kloonvalem vms, milles hõõrdetakistustegur on esitatud ilmutatud kujul, aga nende rakenduspiirkond on piiratum võrreldes Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonvalemiga. Laminaarsele voolamise hõõrdetakistustegur on määratud Hagen-Poiseuille'i kloonvalemiga.

## D.2 HÖÖRDETAKISTUSTEGURI KLOONVALEMID

Tabel 2. Hõõrdetakistustegurite valemid osalise täitumusega ümartoru voolamiseks			
#	Kloonvalemid ja valem	Nimeviide	Tingimused
i	$\lambda = \frac{16}{\mathbf{Re}_{vs}}$	Poiseuille (1840)	$0 < \mathbf{Re}_{vs} < 0,5 \cdot 10^3$
ii	$\lambda = \frac{0,2237}{\sqrt[4]{\mathbf{Re}_{vs}}}$	Blasius (1913)	$1 \cdot 10^3 < \mathbf{Re}_{vs} < 0,25 \cdot 10^5$
iii	$\lambda = \frac{0,25}{\left[ \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,84} + \frac{1,6484}{\mathbf{Re}_{vs}^{(9/10)}} \right) \right]^2}$	Swamee- Jain (1976)	$1,25 \cdot 10^3 < \mathbf{Re}_{vs} < 0,25 \cdot 10^8$ $k_s/R_h = 4 \cdot 10^{-6} \dots 4 \cdot 10^{-2}$
iv	$\lambda = \frac{8 g n_M^2}{R_h^{\frac{2}{6}}}$	Manning (1890)	Moody diagrammi ruuttakistuspiirkond, st $\lambda \neq f(\mathbf{Re}_{vs})$
v	$\lambda = 0,0055 \left[ 1 + \left( 0,5 \cdot 10^4 \frac{k_s}{R_h} + 0,25 \frac{10^6}{\mathbf{Re}_{vs}} \right)^{(1/3)} \right]$	Moody (1947)	$1 \cdot 10^3 < \mathbf{Re}_{vs} < 1,25 \cdot 10^8$ $k_s/R_h = 0 \dots 4 \cdot 10^{-4}$
vi	$\lambda = 0,0688 \left( \frac{k_s}{R_h} \right)^{0,225} + 0,1325 \left( \frac{k_s}{R_h} \right) + \frac{47,8163}{(4 \mathbf{Re}_{vs})^n} \left( \frac{k_s}{R_h} \right)^{0,44}$ $n = 1,3454 \left( \frac{k_s}{R_h} \right)^{0,134}$	Wood (1966)	$1 \cdot 10^3 < \mathbf{Re}_{vs} < 1,25 \cdot 10^7$ $k_s/R_h = 4 \cdot 10^{-5} \dots 20 \cdot 10^{-2}$
vii	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,8260} - \frac{1,2613}{\mathbf{Re}_{vs}} \log_{10} \left( \frac{1}{1,2613} \left( \frac{k_s}{R_h} \right)^{1,1098} + \frac{13,1611}{\mathbf{Re}_{vs}^{0,8981}} \right) \right)$	Chen (1979)	$1 \cdot 10^3 < \mathbf{Re}_{vs} < 1 \cdot 10^8$
viii	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s/R_h}{14,8} + \frac{24,3164}{\mathbf{Re}_{vs}^{0,983}} - \frac{24,2050}{\mathbf{Re}} \right)$	Manadilli (1997)	$1 \cdot 10^3 < \mathbf{Re}_{vs} < 0,2 \cdot 10^8$ $k_s/R_h = 0 \dots 20 \cdot 10^{-2}$





**MÄRKUS.** Osalise täitumisega ümartorus voolamise elavlõige on

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2 h_d - 1) + \frac{2}{\pi} (2 h_d - 1) \sqrt{h_d - h_d^2} \right),$$

milles suhteline torutäide  $h_d = h_{rlm}/d_s$ . Ümartoru sisediameeter on  $d_s$  ja vabapinna maksimaalne kõrgus sisepõhjast ümartoru ristlõikes on  $h_{rlm}$ . Ühtlasele voolamisele  $h_{rlm} = d_0$ , milles  $d_0$  on normaalsügavus. Täieliku torutäitega voolamisele on ümartoru elavlõige:

$$A_e = \pi \frac{d_s^2}{4}.$$

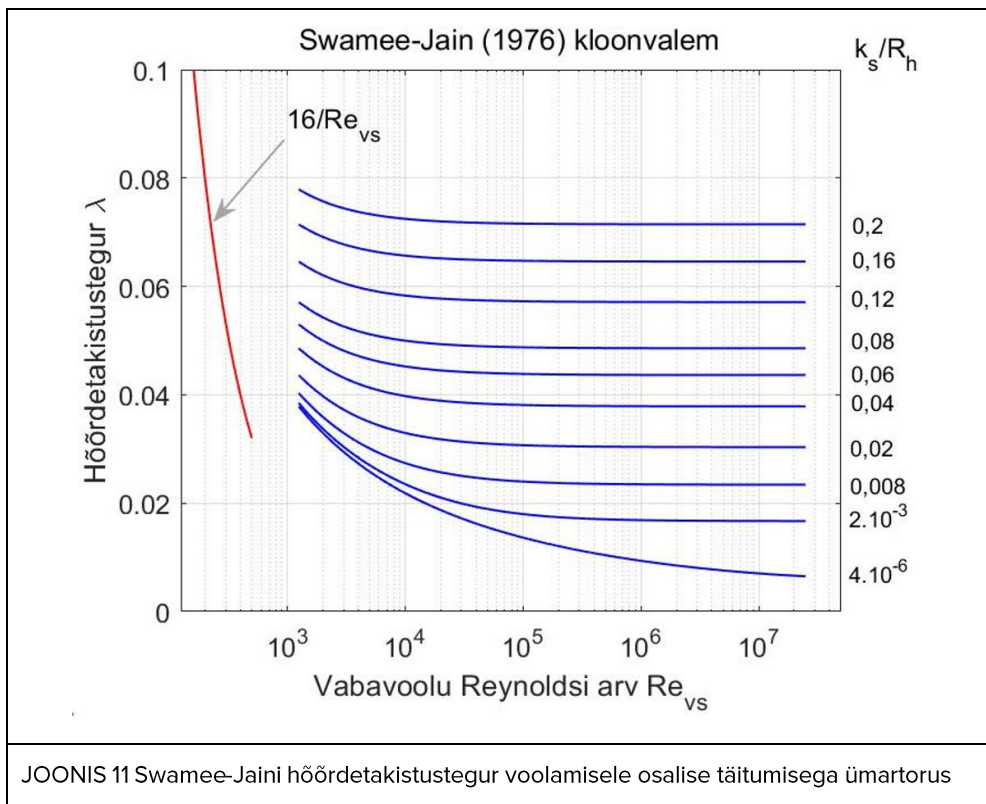
Osalise täitumisega ümartoru voolamise märgpiire, millest on välja jäetud vabapind, on

$$\chi = \pi d_s \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{asin}(2 h_d - 1) \right)$$

ja täieliku torutäitega voolamisele on ümartoru märgpiire

$$\chi = \pi d_s.$$

(VIIDE L 2)



**MÄRKUS.**  $Re_{vs}$  vahemiku absoluutväärtused peavad vähenema, ning  $k_s/R_h$  väärtuste vahemikud peavad suurenema, siis on  $\lambda$  väärtused nõ hõõrdetakistuse originaalvalemitele ja kloonvalemitele on samad.

# LISA E. HÜDRAULIKA VALEMI MÄÄRAMATUS

## E.1 HÜDRAULILISE VOOLUSÜSTEEMI MÄÄRAMATUS

Hüdraulilise voolusüsteemi funktsioneerimist häirivad tingimused ei ole alati kvantitatiivselt selged. Näiteks, kui kanalisatsiooni satuvad jäätmed, siis võib juhuslike sündmustega kaasneda torustiku ummistus, mis on üks kanalisatsiooni funktsioneerimise rike, mida ei ole võimalik voolamise hüdraulika valemitega lihtsalt määrata. Kvantitatiivselt on hüdraulilise voolusüsteemi modelleerimise määramatus seotud nii valitud empiirilise valemi kui ka otsitava hüdraulilise suuruse arvutamisel vajalike sisendandmete hajumisega (sisendandmete ligikaudsete arvuliste väärtustega). Arvutusmodeli määramatus võib olla seotud näiteks hõõrdetakistusteguri valemi kasutamisega Reynolds'i arvule, mis ei vasta valemi koostamisele valitud Reynolds'i arvude kasutamiskiirkonnale (vt PÕHIÜLESANNE Isevolne torustik, milles suhtelise torutäite arvutamisele Manningi valemiga tuleb voolamise Reynolds'i arv valida Moody diagrammi ruuttakistuspiirkonnas). Eeldusel, et arvutusmodel on sobivalt valitud vooluprotsessile, st tehnilised valikud vastavad hüdraulilise voolusüsteemi tööolukorrale (näiteks ainult prismaatilises pealt kaetud pikikaldega avasängis (sirges kaldtorus) on võimalik ühtlane vabapinnaga voolamine), on voolamise hüdraulika valemi (näiteks Manningi vooluhulga valemi) kasutamine hüdraulilise suuruse (näiteks normaalsügavuse) arvutamisele seotud peamiselt sisendandmete (nagu näiteks vooluhulk, Manningi karedustegur ja toru lang) arvuliste väärtuste hajumisega.

**MÄRKUS.** Hüdraulilise voolusüsteemi valemiga määratud hüdraulilise suuruse 1-järku määramatus esitatakse tavaliselt sisendandmete standardhälvete kaudu.

## E.2 1-JÄRKU MÄÄRAMATUS

Funktsioonile, mille määrab voolamise hüdraulikas tuntud empiiriline valem, võib arvutada 1-järku määramatuse. Empiirilise valemiga määratud hüdrauliline suurus  $X$  on määratud kui funktsioon argumentist  $x$ :

$$X = f(x),$$

milles  $x$  on nõ etteantud hüdrauliline suurus.

**MÄRKUS.** Funktsiooni ja selle argumenti tähistused, mis muudavad tähendust võrreldes nõ matemaatiliste muutujate üldistatud tähistustega, selgitatakse eraldi. Vt numbrilise arvutusmeetodi osa: Newtoni iteratsioonmeetod, milles on kasutusel  $z_j$  kui hüdraulilise voolusüsteemi otsitav arvutuslik suurus,  $Z_j$  kui empiirilise

valemiga määratud arvutuslik hüdrauliline suurus ja  $Z$  kui empiirilise valemiga määratud etteantud hüdrauliline suurus.

Eeldusel, et hüdraulilise voolusüsteemi valemiga määratud funktsioon  $f(x)$  on valitud õigesti, st vastab hüdraulilise voolusüsteemi tööolukorrale, võib valitud sisendandmete hajumisega seotud hüdraulilise suuruse  $\bar{X}$  määrata kui funktsiooni arvuliselt ligikaudselt etteantud argumentist  $\bar{x}$ :

$$\bar{X} = f(\bar{x}),$$

milles  $\bar{X}$  erineb vooluprotsessi tegelikust hüdraulilisest suurusest  $X$ .

Argumentist  $x$  sõltuva funktsiooni  $X$  võib arendada Taylori ritta:

$$X = f(\bar{x}) + \frac{1}{1!} \frac{df}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x - \bar{x})^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3f}{dx^3}(x - \bar{x})^3 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(x - \bar{x})^n,$$

et määrata suuruse  $X$  väärtus vea  $\Delta x = x - \bar{x}$  täpsusega. Taylori reast võib koostada Taylori valemi ritta arenduse järguga  $n$ . Taylori valem 1-järgu ( $n = 1$ ) täpsusega on

$$X - \bar{X} = \frac{df}{dx}(x - \bar{x}).$$

### E.3 STANDRARDMÄÄRAMATUS

Hüdraulilise suuruse standardhälve (nõ tõenäosusfunktsiooni dispersiooniga määratud sisendandmete hajumise mõõt) astmes 2 on määratud valemiga:

$$s_X^2 = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 s_x^2,$$

milles  $s_x$  on funktsiooni argumenti  $x$  hajumisega seotud standardhälve.

**MÄRKUS.**  $s_X^2$  valemil võib põhjendada eraldi tõenäosuse tihedus- ja jaotusfunktsiooni kaudu. Standardhälve on hinnang ruutjuurele dispersioonist. Mõõdetava suuruse standardhälbe mõõtühikuks on selle sama mõõdetava suuruse mõõtühik.

Kui otsitav hüdrauliline suurus  $X = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  on määratud kui funktsioon mitmest argumentist  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , siis hüdraulilise suuruse standardhälve astmes 2 on määratud summa valemiga:

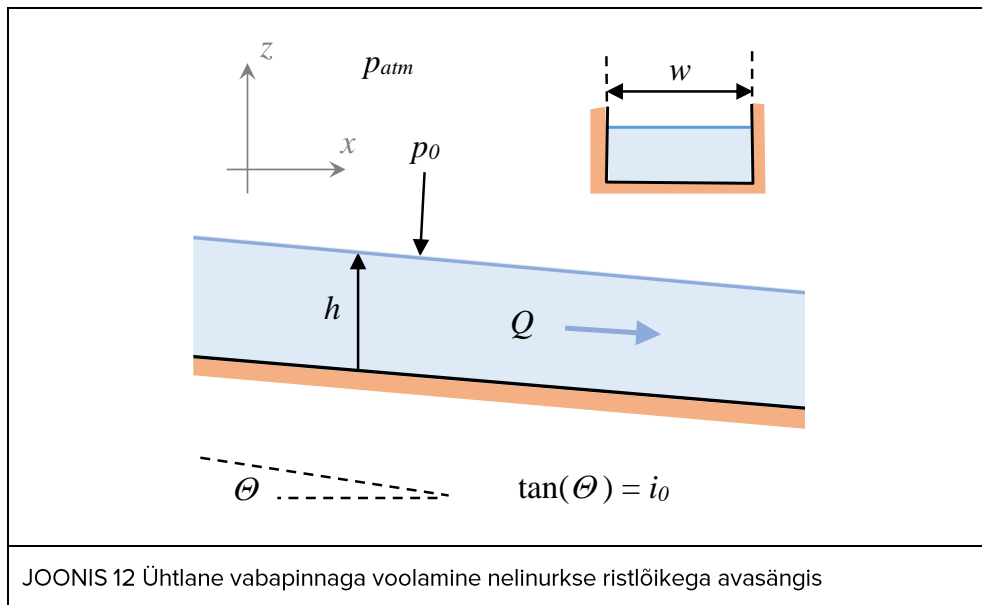
$$s_X^2 = \left(\frac{df}{dx_1}\right)^2 s_{x_1}^2 + \left(\frac{df}{dx_2}\right)^2 s_{x_2}^2 + \left(\frac{df}{dx_3}\right)^2 s_{x_3}^2 + \dots + \left(\frac{df}{dx_n}\right)^2 s_{x_n}^2,$$

milles  $s_{x_j}$  on vastava sisendandme  $x_j$  hajumisega seotud standardhälve, milles  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ .

## E.4 NÄITEÜLESANNE. VEESÜGAVUSE MÄÄRAMATUS

ANTUD. Nelinurkristlõikega avasängis voolab  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$  vesi, mille tihedus  $\rho \approx 1000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  ja dünaamiline molekulaarne viskoossustegur  $\mu \approx 1,307 \cdot 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ . Vastav kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur  $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ . Voolusängis, laiusega  $w = 50\text{ m}$  ja põhjalanguga  $i_0 = 2\text{ mm}\cdot\text{m}^{-1}$ , on vooluhulk  $Q = 600\text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$ . Voolusängi piirde Manningi karedustegur  $n_M = 0,04$ . Vabapinnal on õhurõhk  $p_0 = p_{atm}$ , milles atmosfääri rõhk  $p_{atm} = 101,325\text{ kPa}$ .

LÄHTEÜLESANNE. Arvutada voolamisele avasängis normaalsügavus ja sellele vastav hüdrauliline voolurežiim. Arvutada normaalsügavuse määramatus sisendandmete variatsiooniteguritega, mis vooluhulgale on 5%, Manningi karedustegurile on 10% ja voolusängi põhjalangule on 15%. Arvutada voolamise kriitiline sügavus ja selle määramatus.



EELDUSED. Veevool avasängis on statsionaarne, ühtlane. Nelinurkse ristlõikega voolusängi piirde takistuse määrab hüdrauliliselt kare voolamine. Normaalsügavus määrata Manningi vooluhulga valemiga, kasutades selleks Newtoni iteratsioonmeetodit, milles kaudu on kasutusele võetud numbrilise arvutuskeemi valemite süsteem. See koosneb kahest valemist: arvutusliku sügavuse valem (ehk iteratsioonmeetodi põhivalem) ja arvutusliku vooluhulga valem. Vt PÕHIÜLESANNE Paisutusulatus (Vooluveekogu), milles määratakse paisu ülemise bjefi veepinna kõrgus ja mõjuulatus. Kriitilise sügavuse määramisele kasutada Froude'i suhtarvu kriteeriumit.

## LAHENDUS

**PÕHIVALEMID. Manningi vooluhulga valem, Bernoulli kolmikliige, Bernoulli funktsioon, trapetsristlõikega tehissängi vabavoolu Froude'i arvu valem**

### VALEMID

Manningi vooluhulga valem on

$$Q = \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e I_h^{\frac{1}{2}}}{n_M},$$

milles  $Q$  on vooluhulk,  $n_M$  on Manningi karedustegur,  $A_e = h w$  on nelinurkristlõikega voolusängi elavlõige, milles  $h$  on vabapinna kõrgus voolusängi aluspõhjast (horisontaalne ristlõike perimeetri osa) ja  $w$  on voolusängi laius.

Hüdrauliline raadius  $R_h = A_e/\chi$ , milles  $\chi = w + 2h$  on voolamise ristlõikega (voolulõikega) antud märgpiirde pikkus, millest on välja jäetud vabapind.  $I_h$  on hüdrauliline lang.

Vabapinna kõrgus voolusängi aluspõhjast määrab voolusängi aluspõhja sügavuse vabapinnast:

$$h = -(-d) = d.$$

Ühtlasele vabapinnaga voolamisele prismaatilises voolusängis on hüdrauliline lang määratud voolusängi põhjalanguga, st  $I_h = i_0$ .

Reynoldsi arv vabapinnaga voolamise puhul ehk voolusängi Reynoldsi arv on

$$\mathbf{Re}_{vs} = \frac{u R_h}{\nu},$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $\nu$  on kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur ja  $R_h$  on hüdrauliline raadius.

Voolamisele täistaitumusega ümartorus, sisediameetriga  $d_s = 4 R_h$ , määratakse Reynoldsi arv valemiga:

$$\mathbf{Re} = \frac{u d_s}{\nu} = \frac{u 4 R_h}{\nu} = 4 \mathbf{Re}_{vs}.$$

Kuna veevoolule ümartorus vastav kriitiline Reynoldsi arv on 2000, siis järelikult laminaarse ja turbulentsse voolamise ülemineku kriitiline voolusängi Reynoldsi arv on 500.

Bernoulli kolmikliige vabapinnaga voolamisele on

$$B = \frac{u^2}{2g} + h + h_s,$$

milles  $u$  on voolukiirus,  $g$  on raskuskiirendus,  $h$  on veepinna kõrgus tehissängi aluspõhjast ja  $h_s$  on aluspõhja kõrgus võrdlusnivoost, mis on valitud tinglikult.

Kasutades trapetsristlõikega tehiskule voolusängile (tehissängile) voolukiiruse määramiseks voolamise ruumkiiruse valemit:

$$u = \frac{Q}{A_e} = \frac{Q}{(h w + h^2 m_n)} = \frac{Q}{h^2 (\beta + m_n)},$$

milles  $A_e = h^2 (\beta + m_n)$  on samade nõlvustega trapetsristlõikega tehissängi elavlõige. Voolamise ristlõike lamedus  $\beta = w/h$ , milles  $w$  on tehissängi aluspõhja laius ja  $h$  on vabapinna kõrgus tehissängi aluspõhjast. (Ühtlasele voolamisele  $h = d_0$ , milles  $d_0$  on normaalsügavus.) Nõlvustegur  $m_n = \cot(\theta)$ , milles  $\theta$  on tehissängi nõlva(de) välisnurk. Hüdrauliline raadius  $R_h = A_e/\chi$ , milles  $\chi = h (\beta + 2 \sqrt{1 + m_n^2})$  on trapetsristlõike märgpiire.

Bernoulli kolmikliikme vabapinnaga voolamisele võime teisendada kujule:

$$B = \frac{Q^2}{2g h^4 (\beta + m_n)^2} + h + h_s = \frac{Q^2}{2g (h w + h^2 m_n)^2} + h + h_s.$$

Kui kasutada funktsiooni ekstreemumi määramise teoreemi muutuja  $h$  järgi:

$$\frac{dB}{dh} = 0,$$

siis järeldub Bernoulli funktsioonist  $B = f(h)$ , milles  $Q, g, w, m_n$  ja  $h_s$  on konstantsed suurused, järgmine avaldis:

$$-\frac{2Q^2(w + 2hm_n)}{2g(hw + h^2m_n)^3} + 1 = -\frac{Q^2(w + 2hm_n)}{g(hw + h^2m_n)^3} + 1 = 0.$$

Trapetsristlõikega tehissängi vabavoolu Froude'i arv ruudus on määratud valemiga:

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g \frac{(hw + h^2m_n)^3}{(w + 2hm_n)}} = \frac{u^2}{g \frac{(hw + h^2m_n)}{(w + 2hm_n)}},$$

milles on kasutatud seost  $u = Q/(hw + h^2m_n)$ . Kriitilise vabapinnaga voolamisele vastab  $Fr = 1$ , ning rahulikule ja käreale vabavoolule vastavad  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

## E.4.1 NUMBRILINE ARVUTUSMEETOD. NORMAALSÜGAVUS

Newtoni iteratsioonimeetod ja numbriline arvutusskeem (vt PÕHIÜLESANNE Paisutusulatus (Vooluveekogu), milles määratakse paisu ülemises bjefis veepinna kõrgus ja mõjuulatus)

### VALEMID

Normaalsügavuse määramisele võib kasutada Newtoni iteratsioonimeetodiga koostatud numbrilise arvutusskeemi valemite süsteemi, mis koosneb kahest valemist.

Arvutusliku sügavuse valem (iteratsioonimeetodi põhivalem):

$$z_{j+1} = z_j - \frac{1 - Q/Q_j}{\left( \frac{5w + 6z_j}{3z_j(w + 2z_j)} \right)}.$$

Arvutusliku vooluhulga valem:

$$Q_j = \frac{R_{hj}^{\frac{2}{3}} A_{ej} i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} A_{ej}^{\frac{5}{3}}}{n_M \chi_j^{\frac{2}{3}}} = \frac{i_0^{\frac{1}{2}} (z_j w)^{\frac{5}{3}}}{n_M (w + 2z_j)^{\frac{2}{3}}}.$$

ARVUTUS. Numbriline arvutusskeem

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.
$z_j$ (m)	1	7,1044	4,6865	4,4375	4,4340	4,4340
$Q_j$ ( $m^3 \cdot s^{-1}$ )	54,4590	1242,2828	654,2772	600,7375	600,0001	600,0000

	7 iter.	8 iter.	9 iter.	10 iter.
$z_j$ (m)	4,4340	4,4340	4,4340	4,4340
$Q_j$ ( $m^3 \cdot s^{-1}$ )	600,0000	600,0000	600,0000	600,0000

VASTUSED

$$d_0 = 4,4340 \text{ m}$$

$$Re_{vs} = 78,402 \cdot 10^5$$

$$Fr = 0,4103$$



JÄRELDUS. Numbrilistest arvutustulemustest selgub, et ühtlane voolamine nelinurkristlõikega voolusängis on turbulentne ja hüdrauliliselt rahuliku vabavoolu-režiimiga.

#### E.4.2 NORMAALSÜGAVUSE MÄÄRAMATUS. VOOLUHULK

Määrame vooluhulga muutuse normaalsügavusele vastavalt muutuja  $x_1 = d_0$  järgi valemiga:

$$\frac{df}{dx_1} = \frac{dQ}{dx_1} = \frac{d}{dx_1} \left( \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} \right) = \frac{i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} \left( \frac{2 A_e R_h^{-\frac{1}{3}} dR_h}{3} + R_h^{\frac{2}{3}} \frac{dA_e}{dx_1} \right) = Q \left( \frac{2}{3R_h} \frac{dR_h}{dx_1} + \frac{1}{A_e} \frac{dA_e}{dx_1} \right),$$

milles empiirilise valemiga määratud hüdrauliline suurus  $X = Q \cdot n_M$  ja  $i_0$  on konstantsed.

Ühtlasele vabapinnaga voolamisele vastava normaalsügavusega määratud muutuja standardhälve astmes 2 valem, mis on määratud vooluhulga standardhällbega:

$$s_{x_1}^2 = \left( \frac{dx_1}{dQ} \right)^2 s_Q^2,$$

milles normaalsügavus on määratud muutuajaga  $d_0 = x_1$  ja vooluhulga standardhälve on  $s_Q (= s_X)$ .

Vooluhulga arvulise väärtuse ligikaudsusega seotud variatsioonitegur (vooluhulga variatsioonitegur) on määratud valemiga:

$$CV_Q = \frac{s_Q}{Q}.$$

Elavlõige on määratud valemiga

$$A_e = d_0 w,$$

milles

$$d_0 w = x_1 w,$$

ning tuletis elavlõikest normaalsügavusega seotud muutuja  $x_1$  järgi on määratud valemiga

$$\frac{dA_e}{dx_1} = \frac{d}{dx_1} (x_1 w) = w.$$

Hüdrauliline raadius on

$$R_h = \frac{A_e}{\chi} = \frac{d_0 w}{w + 2 d_0},$$

milles

$$\frac{d_0 w}{w + 2 d_0} = \frac{x_1 w}{w + 2 x_1},$$

ning tuletis hüdraulilisest raadiusest normaalsügavusega määratud muutuja  $x_1$  järgi on määratud valemiga

$$\frac{dR_h}{dx_1} = \frac{d}{dx_1} \left( \frac{x_1 w}{w + 2 x_1} \right) = \frac{w}{w + 2 x_1} - \frac{x_1 w}{(w + 2 x_1)^2} \cdot 2.$$

→

$$\frac{w}{w + 2 x_1} - \frac{x_1 w}{(w + 2 x_1)^2} \cdot 2 = \frac{w}{w + 2 d_0} - \frac{d_0 w}{(w + 2 d_0)^2} \cdot 2.$$

Ühtlasele vabapinnaga voolamisele vastava normaalsügavusega määratud muutuja standardhälve astmes 2 valem, milles on kasutatud vooluhulga variatsioonitegurit:

$$s_{x_1}^2 = \frac{s_Q^2}{\left( Q \left( \frac{2}{3R_h} \frac{dR_h}{dx_1} + \frac{1}{A_e} \frac{dA_e}{dx_1} \right) \right)^2} = \frac{CV_Q^2}{\left( \frac{2}{3R_h} \frac{dR_h}{dx_1} + \frac{1}{A_e} \frac{dA_e}{dx_1} \right)^2},$$

milles

$$s_{x_1}^2 = s_{d_0}^2.$$

## ARVUTUS

Vooluhulga variatsioonitegur

$$CV_Q = 0,05$$

Elavlõige

$$A_e = 4,4340 \text{ m} \cdot 50 \text{ m} = 221,7020 \text{ m}^2$$

Elavlõike tuletis normaalsügavusega seotud muutuja  $x_1$  järgi

$$\frac{dA_e}{dx_1} = 50 \text{ m}$$

Hüdrauliline raadius

$$R_h = \frac{4,4340 \text{ m} \cdot 50 \text{ m}}{50 \text{ m} + 2 \cdot 4,4340 \text{ m}} = 3,7661 \text{ m}$$

Hüdraulilise raadiuse tuletis normaalsügavusega seotud muutuja  $x_1$  järgi on

$$\frac{dR_h}{dx_1} = \frac{50 \text{ m}}{50 \text{ m} + 2 \cdot 4,4340 \text{ m}} - \frac{4,4340 \text{ m} \cdot 50 \text{ m}}{(50 \text{ m} + 2 \cdot 4,4340 \text{ m})^2} \cdot 2 = 0,7214.$$

Ühtlasele vabavoolule vastava normaalsügavuse standardhälve astmes 2 valem, milles on kasutatud vooluhulga variatsioonitegurit:

$$s_{d_0}^2 = \frac{0,05^2}{\left(\frac{2}{3 \cdot 3,7661 \text{ m}} \cdot 0,7214 + \frac{1}{221,7020 \text{ m}^2} \cdot 50 \text{ m}\right)^2} = 0,0200 \text{ m}^2.$$

Normaalsügavuse standardmääramatus etteantud vooluhulga hajuvuse järgi on

$$s_{d_0} = \sqrt{0,0200 \text{ m}^2} = 0,1416 \text{ m}.$$

### E.4.3 NORMAALSÜGAVUSE MÄÄRAMATUS. MANNINGI KAREDUSTEGUR

Määrame vooluhulga muutuse normaalsügavusele vastavalt muutuja  $x_1 = d_0$  järgi valemiga:

$$\frac{df}{dx_1} = \frac{dQ}{dx_1} = \frac{d}{dx_1} \left( \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} \right) = \frac{i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} \left( \frac{2 A_e R_h^{-\frac{1}{3}} dR_h}{3} + R_h^{\frac{2}{3}} \frac{dA_e}{dx_1} \right) = Q \left( \frac{2}{3R_h} \frac{dR_h}{dx_1} + \frac{1}{A_e} \frac{dA_e}{dx_1} \right),$$

milles empiirilise valemiga määratud hüdrauliline suurus  $X = Q$ .  $n_M$  ja  $i_0$  on konstantsed.

Määrame vooluhulga muutuse Manningi karedustegurile vastava muutuja  $x_2 = n_M$  järgi valemiga:

$$\frac{df}{dx_2} = \frac{dQ}{dx_2} = \frac{d}{dx_2} \left( \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e i_0^{\frac{1}{2}}}{x_2} \right) = - \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e i_0^{\frac{1}{2}}}{x_2^2} = Q \left( -\frac{1}{x_2} \right),$$

milles  $R_h, A_e, i_0$  on konstantsed hüdraulilised suurused.

Ühtlasele vabapinnaga voolamisele vastava normaalsügavuse muutuja standardhälve astmes 2 valem, mis on määratud Manningi karedusteguri standardhällbega, on

$$s_{x_1}^2 = \left( \frac{dx_1}{dx_2} \right)^2 s_{x_2}^2 = \left( \frac{dx_1}{dQ} \frac{dQ}{dx_2} \right)^2 s_{x_2}^2,$$

milles normaalsügavus  $d_0 = x_1$ , Manningi karedustegur  $n_M = x_2$  ja Manningi karedusteguri standardhälve  $s_{n_M} = s_{x_2}$ .

→

$$s_{d_0}^2 = s_{x_1}^2$$

Manningi karedusteguri arvulise väärtuse ligikaudsusega seotud variatsioonitegur (Manningi karedusteguri variatsioonitegur) on määratud valemiga:

$$CV_{n_M} = \frac{s_{n_M}}{n_M}.$$

Elavlõige on määratud valemiga

$$A_e = d_0 w,$$

milles

$$d_0 w = x_1 w,$$

ning tuletis elavlõikest normaalsügavusega seotud muutuja  $x_1$  järgi on määratud valemiga

$$\frac{dA_e}{dx_1} = \frac{d}{dx_1}(x_1 w) = w.$$

Hüdrauliline raadius on

$$R_h = \frac{A_e}{\chi} = \frac{d_0 w}{w + 2 d_0},$$

milles

$$\frac{d_0 w}{w + 2 d_0} = \frac{x_1 w}{w + 2 x_1},$$

ning tuletis hüdraulilisest raadiusest normaalsügavusega määratud muutuja  $x_1$  järgi on määratud valemiga

$$\frac{dR_h}{dx_1} = \frac{d}{dx_1} \left( \frac{x_1 w}{w + 2 x_1} \right) = \frac{w}{w + 2 x_1} - \frac{x_1 w}{(w + 2 x_1)^2} 2.$$

→

$$\frac{w}{w + 2 x_1} - \frac{x_1 w}{(w + 2 x_1)^2} 2 = \frac{w}{w + 2 d_0} - \frac{d_0 w}{(w + 2 d_0)^2} 2$$

Ühtlasele vabapinnaga voolamisele vastava normaalsügavusega määratud muutuja standardhälve ruudus valem, milles on kasutatud Manningi karedusteguri variatsioon-tegurit:

$$\begin{aligned} s_{x_1}^2 &= \frac{s_{n_M}^2}{\left( Q \left( \frac{2}{3R_h} \frac{dR_h}{dx_1} + \frac{1}{A_e} \frac{dA_e}{dx_1} \right) \left( \frac{1}{Q} (-n_M) \right) \right)^2} = \frac{s_{n_M}^2}{\left( (-n_M) \left( \frac{2}{3R_h} \frac{dR_h}{dx_1} + \frac{1}{A_e} \frac{dA_e}{dx_1} \right) \right)^2} \\ &= \frac{CV_{n_M}^2}{\left( \frac{2}{3R_h} \frac{dR_h}{dx_1} + \frac{1}{A_e} \frac{dA_e}{dx_1} \right)^2}, \end{aligned}$$

milles

$$s_{x_1}^2 = s_{d_0}^2.$$

## ARVUTUS

Manningi karedusteguri variatsioonitegur

$$CV_{n_M} = 0,10$$

Elavlõige

$$A_e = 4,4340 \text{ m} \cdot 50 \text{ m} = 221,7020 \text{ m}^2$$

Elavlõike tuletis normaalsügavusega seotud muutuja  $x_1$  järgi on

$$\frac{dA_e}{dx_1} = 50 \text{ m}.$$

Hüdrauliline raadius

$$R_h = \frac{4,4340 \text{ m} \cdot 50 \text{ m}}{50 \text{ m} + 2 \cdot 4,4340 \text{ m}} = 3,7661 \text{ m}$$

Hüdraulilise raadiuse tuletis normaalsügavusega seotud muutuja  $x_1$  järgi on

$$\frac{dR_h}{dx_1} = \frac{50 \text{ m}}{50 \text{ m} + 2 \cdot 4,4340 \text{ m}} - \frac{4,4340 \text{ m} \cdot 50 \text{ m}}{(50 \text{ m} + 2 \cdot 4,4340 \text{ m})^2} \cdot 2 = 0,7214.$$

Ühtlase vabapinnaga voolamise normaalsügavuse standardhälve astmes 2, milles on kasutatud Manningi karedusteguri variatsioonitegurit:

$$s_{d_0}^2 = \frac{0,10^2}{\left(\frac{2}{3 \cdot 3,7661 \text{ m}} \cdot 0,7214 + \frac{1}{221,7020 \text{ m}^2} \cdot 50 \text{ m}\right)^2} = 0,0801 \text{ m}^2.$$

Normaalsügavuse standardmääramatus etteantud Manningi karedusteguri hajuvuse järgi on

$$s_{d_0} = \sqrt{0,0801 \text{ m}^2} = 0,2831 \text{ m}.$$

## E.4.4 NORMAALSÜGAVUSE MÄÄRAMATUS. VOOLUSÄNGI PÕHJALANG

Määrame vooluhulga muutuse normaalsügavusele vastavalt muutuja  $x_1 = d_0$  järgi valemiga:

$$\frac{df}{dx_1} = \frac{dQ}{dx_1} = \frac{d}{dx_1} \left( \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} \right) = \frac{i_0^{\frac{1}{2}}}{n_M} \left( \frac{2 A_e R_h^{-\frac{1}{3}} dR_h}{3} + R_h^{\frac{2}{3}} \frac{dA_e}{dx_1} \right) = Q \left( \frac{2}{3 R_h} \frac{dR_h}{dx_1} + \frac{1}{A_e} \frac{dA_e}{dx_1} \right),$$

milles empiirilise valemiga määratud hüdrauliline suurus  $X = Q$ .  $n_M$  ja  $i_0$  on konstantsed.

Määrame vooluhulga muutuse voolusängi põhjalanguga seotud muutuja  $x_3 = i_0$  järgi valemiga:

$$\frac{df}{dx_3} = \frac{dQ}{dx_3} = \frac{d}{dx_3} \left( \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e x_3^{\frac{1}{2}}}{n_M} \right) = \frac{1}{2} \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e x_3^{-\frac{1}{2}}}{n_M} = \frac{1}{2} \frac{R_h^{\frac{2}{3}} A_e}{n_M x_3^{\frac{1}{2}}} = Q \left( \frac{1}{2 x_3} \right).$$

milles  $R_h, A_e, n_M$  on konstantsed hüdraulilised suurused.

Ühtlasele vabapinnaga voolamisele vastava normaalsügavuse muutuja standardhälve ruudus valem, mis on määratud Manningi karedusteguri standardhällbega, on

$$s_{x_1}^2 = \left( \frac{dx_1}{dx_3} \right)^2 s_{x_3}^2 = \left( \frac{dx_1}{dQ} \frac{dQ}{dx_3} \right)^2 s_{x_3}^2,$$

milles normaalsügavus  $d_0 = x_1$ , voolusängi põhjalang  $i_0 = x_3$  ja voolusängi põhjalangu standardhälve  $s_{i_0} = s_{x_3}$ .

→

$$s_{d_0}^2 = s_{x_1}^2$$

Voolusängi põhjalangu arvulise väärtuse ligikaudsusega seotud variatsioonitegur (voolusängi põhjalangu variatsioonitegur) on määratud valemiga

$$CV_{i_0} = \frac{s_{i_0}}{i_0}.$$

Elavlõige on määratud valemiga

$$A_e = d_0 w,$$

milles

$$d_0 w = x_1 w,$$

ning tuletis elavlõikest normaalsügavusega seotud muutuja  $x_1$  järgi on määratud valemiga

$$\frac{dA_e}{dx_1} = \frac{d}{dx_1} (x_1 w) = w.$$

Hüdrauliline raadius on

$$R_h = \frac{A_e}{\chi} = \frac{d_0 w}{w + 2 d_0},$$

milles

$$\frac{d_0 w}{w + 2 d_0} = \frac{x_1 w}{w + 2 x_1},$$

ning tuletis hüdraulilisest raadiusest normaalsügavusega määratud muutuja  $x_1$  järgi on määratud valemiga

$$\frac{dR_h}{dx_1} = \frac{d}{dx_1} \left( \frac{x_1 w}{w + 2 x_1} \right) = \frac{w}{w + 2 x_1} - \frac{x_1 w}{(w + 2 x_1)^2} \cdot 2.$$

→

$$\frac{w}{w + 2 x_1} - \frac{x_1 w}{(w + 2 x_1)^2} \cdot 2 = \frac{w}{w + 2 d_0} - \frac{d_0 w}{(w + 2 d_0)^2} \cdot 2$$

Ühtlasele vabapinnaga voolamisele vastava normaalsügavusega määratud muutuja standardhälve ruudus valem, milles on kasutatud voolusängi põhjalangu variatsioon-tegurit:

$$s_{x_1}^2 = \frac{s_{i_0}^2}{\left( Q \left( \frac{2}{3R_h} \frac{dR_h}{dx_1} + \frac{1}{A_e} \frac{dA_e}{dx_1} \right) \left( \frac{1}{Q} (2 i_0) \right) \right)^2} = \frac{s_{i_0}^2}{\left( (2 i_0) \left( \frac{2}{3R_h} \frac{dR_h}{dx_1} + \frac{1}{A_e} \frac{dA_e}{dx_1} \right) \right)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{CV_{i_0}^2}{\left( \frac{2}{3R_h} \frac{dR_h}{dx_1} + \frac{1}{A_e} \frac{dA_e}{dx_1} \right)^2} = \frac{CV_{i_0}^2 / 4}{\left( \frac{2}{3R_h} \frac{dR_h}{dx_1} + \frac{1}{A_e} \frac{dA_e}{dx_1} \right)^2},$$

milles

$$s_{x_1}^2 = s_{d_0}^2.$$

## ARVUTUS

Voolusängi põhjalangu variatsioontegur

$$CV_{i_0} = 0,15$$

Elavlõige

$$A_e = 4,4340 \text{ m} \cdot 50 \text{ m} = 221,7020 \text{ m}^2$$

Elavlõike tuletis normaalsügavusega seotud muutuja  $x_1$  järgi on

$$\frac{dA_e}{dx_1} = 50 \text{ m}.$$

Hüdrauliline raadius

$$R_h = \frac{4,4340 \text{ m} \cdot 50 \text{ m}}{50 \text{ m} + 2 \cdot 4,4340 \text{ m}} = 3,7661 \text{ m}$$

Hüdraulilise raadiuse tuletis normaalsügavusega seotud muutuja  $x_1$  järgi on

$$\frac{dR_h}{dx_1} = \frac{50 \text{ m}}{50 \text{ m} + 2 \cdot 4,4340 \text{ m}} - \frac{4,4340 \text{ m} \cdot 50 \text{ m}}{(50 \text{ m} + 2 \cdot 4,4340 \text{ m})^2} \cdot 2 = 0,7214.$$

Ühtlase vabapinnaga voolamise normaalsügavuse standardhälve astmes 2, milles on kasutatud voolusängi põhjalangu variatsioonitegurit:

$$s_{d_0}^2 = \frac{0,15^2 \cdot 0,25}{\left(\frac{2}{3 \cdot 3,7661 \text{ m}} \cdot 0,7214 + \frac{1}{221,7020 \text{ m}^2} \cdot 50 \text{ m}\right)^2} = 0,0451 \text{ m}^2.$$

Normaalsügavuse standardmääramatus etteantud voolusängi põhjalangu hajuvuse järgi on

$$s_{d_0} = \sqrt{0,0451 \text{ m}^2} = 0,2123 \text{ m}.$$

#### E.4.5 NORMAALSÜGAVUSE MÄÄRAMATUS. VOOLUHULK, MANNINGI KAREDUSTEGUR, VOOLUSÄNGI PÕHJALANG

Ühtlase vabavoolu normaalsügavuse standardhälve ruudus valem, milles on kasutatud vooluhulga, Manningi karedusteguri ja voolusängi põhjalangu variatsioonitegureid:

$$s_{d_0}^2 = \frac{CV_Q^2 + CV_{n_M}^2 + CV_{i_0}^2 / 4}{\left(\frac{2}{3R_h} \frac{dR_h}{dx_1} + \frac{1}{A_e} \frac{dA_e}{dx_1}\right)^2}.$$

#### ARVUTUS

Vooluhulga variatsioonitegur

$$CV_Q = 0,05$$

Manningi karedusteguri variatsioonitegur

$$CV_{n_M} = 0,10$$

Voolusängi põhjalangu variatsioonitegur

$$CV_{i_0} = 0,15$$

Elavlõige

$$A_e = 4,4340 \text{ m} \cdot 50 \text{ m} = 221,7020 \text{ m}^2$$

Elavlõike tuletis normaalsügavusega seotud muutuja  $x_1$  järgi on

$$\frac{dA_e}{dx_1} = 50 \text{ m}.$$

Hüdrauliline raadius

$$R_h = \frac{4,4340 \text{ m} \cdot 50 \text{ m}}{50 \text{ m} + 2 \cdot 4,4340 \text{ m}} = 3,7661 \text{ m}$$



Hüdraulilise raadiuse tuletis normaalsügavusega seotud muutuja  $x_1$  järgi on

$$\frac{dR_h}{dx_1} = \frac{50 \text{ m}}{50 \text{ m} + 2 \cdot 4,4340 \text{ m}} - \frac{4,4340 \text{ m} \cdot 50 \text{ m}}{(50 \text{ m} + 2 \cdot 4,4340 \text{ m})^2} \cdot 2 = 0,7214.$$

Ühtlase vabavoolu normaalsügavuse standardhälve astmes 2, milles on kasutatud vooluhulga, Manningi karedusteguri ja voolusängi põhjalangu variatsioonitegureid:

$$s_{d_0}^2 = \frac{0,05^2 + 0,10^2 + (0,15^2 \cdot 0,25)}{\left(\frac{2}{3 \cdot 3,7661 \text{ m}} \cdot 0,7214 + \frac{1}{221,7020 \text{ m}^2} \cdot 50 \text{ m}\right)^2} = 0,1453 \text{ m}^2$$

Normaalsügavuse standardmääramatus etteantud vooluhulga, Manningi karedusteguri ja voolusängi põhjalangu vastavate hajuvuste järgi on

$$s_{d_0} = \sqrt{0,1453 \text{ m}^2} = 0,3811 \text{ m}.$$

**MÄRKUS.** Ühtlase vabavoolu normaalsügavuse määramatus ei ole arvatav normaalsügavuse määramatuste summaga vooluhulgale, Manningi karedustegurile ja voolusängi põhjalangule:

$$s_{d_0}(CV_Q, CV_{n_M}, CV_{i_0}) \neq s_{d_0}(CV_Q) + s_{d_0}(CV_{n_M}) + s_{d_0}(CV_{i_0}),$$

milles

$$s_{d_0}(CV_Q, CV_{n_M}, CV_{i_0}) = 0,3811 \text{ m},$$

$$s_{d_0}(CV_Q) + s_{d_0}(CV_{n_M}) + s_{d_0}(CV_{i_0}) = 0,1416 \text{ m} + 0,2831 \text{ m} + 0,2123 \text{ m} = 0,6370 \text{ m}.$$

## E.5 AVASÄNGI VOOLAMISE KRIITILINE SÜGAVUS

### LAHENDUS

**PÕHIVALEMID.** Trapetsristlõikega tehissängi vabavoolu Froude'i arvu valem

### VALEMID

Trapetsristlõikega tehissängi vabavoolu Froude'i arv ruudus valem teiseneb nelinurkristlõikega avasängi vabavoolu Froude'i arv ruudus valemiks vastavalt tingimusel:

$$m_n = 0$$

→

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g h^3 w^2} = \frac{u^2}{g h}.$$

Nelinurkristlõikega avasängi voolamise Froude'i arvu valem on

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{g h}}$$

Kriitilisele vabapinnaga voolamisele vastab  $Fr = 1$ , ning nõ rahulikule ja käreale vabavoolule vastavalt  $Fr < 1$  ja  $Fr > 1$ .

Hüdrauliliselt kriitilisele vabavoolurežiimile vastab Froude'i suhtarvu kriteerium:

$$Fr^2 = 1$$

→

$$1 = \frac{u^2}{g d_k} = \frac{Q^2}{g d_k A_k^2} = \frac{Q^2}{g d_k^3 w^2}$$

→

$$d_k = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g w^2}}$$

ARVUTUS

$$d_k = \sqrt[3]{\frac{(600 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1})^2}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (50 \text{ m})^2}} = 2,4485 \text{ m}$$

VASTUSED

$$d_k = 2,4485 \text{ m}$$

$$Fr = 1$$

$$d_k < d_0$$

JÄRELDUS. Arvutustulemusest selgub, et nelinurkristlõikega voolusängis on nõ kriitilisele voolamisele vastav veesügavus väiksem kui normaalsügavus. Järelikult on ühtlane voolamine nelinurkristlõikega voolusängis hüdrauliliselt rahuliku vabavoolurežiimiga.

### E.5.1 KRIITILISE SÜGAVUSE MÄÄRAMATUS. VOOLUHULK

Funktsioonile, mille määrab voolamise hüdraulikas tuntud valem, võib arvutada 1-järku määramatuse. Valemiga määratud hüdrauliline suurus  $X$  on määratud kui funktsioon argumendist  $x$ :

$$X = f(x),$$

milles  $x$  on nõ etteantud hüdrauliline suurus. Eeldame, et eksisteerib ka pöörd-funktsioon:

$$x = F(X),$$

milles  $X$  on etteantud hüdrauliline suurus.

Määrame kriitilise sügavuse muutuse vooluhulgaga seotud muutuja  $X = Q$  järgi valemiga:

$$\frac{dF}{dX} = \frac{d}{dX} \left( \sqrt[3]{\frac{X^2}{g w^2}} \right) = \frac{d}{dX} \left( \frac{X^{2/3}}{\sqrt[3]{g w^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt[3]{g w^2}} \left( \frac{2}{3} X^{-1/3} \right) = \frac{X^{2/3}}{\sqrt[3]{g w^2}} \left( \frac{2}{3 X} \right) = \sqrt[3]{\frac{X^2}{g w^2}} \left( \frac{2}{3 X} \right) = d_k \left( \frac{2}{3 X} \right).$$

Ühtlasele vabapinnaga voolamisele vastava kriitilise sügavusega määratud muutuja standardhälve ruudus valem, mis on määratud vooluhulga standardhällbega:

$$s_x^2 = \left( \frac{dF}{dX} \right)^2 s_X^2,$$

milles kriitilise sügavusega seotud muutuja standardhälve on  $s_x = s_{d_k}$  ja vooluhulgaga seotud muutuja standardhälve  $s_X = s_Q$ .

Vooluhulga variatsioonitegur on määratud valemiga

$$CV_Q = \frac{s_Q}{Q}.$$

Ühtlasele vabapinnaga voolamisele vastava kriitilise sügavuse standardhälve ruudus valem, milles on kasutatud vooluhulga variatsioonitegurit:

$$s_{d_k}^2 = \left( d_k \left( \frac{2}{3 Q} \right) \right)^2 s_Q^2 = \left( \frac{2 d_k}{3} \right)^2 CV_Q^2.$$

## ARVUTUS

Vooluhulga variatsioonitegur

$$CV_Q = 0,05$$

Ühtlase vabavoolu kriitilise sügavuse standardhälve astmes 2, milles on kasutatud vooluhulga variatsioonitegurit

$$s_{d_k}^2 = \left( \frac{2 \cdot 2,4485 \text{ m}}{3} \right)^2 \cdot (0,05^2) = 0,0067 \text{ m}^2.$$

Kriitilise sügavuse standardmääramatus etteantud vooluhulga hajuvuste järgi on

$$s_{d_k} = \sqrt{0,0067 \text{ m}^2} = 0,0816 \text{ m}.$$

**MÄRKUS.** Erinevalt ühtlase voolamise normaalsügavusest  $d_0$  ei ole kriitiline sügavus  $d_k$  mõõdetav hüdrauliline suurus.

# LISA F. 2D KOGUVOOLU NUMBRILINE ARVUTUSKEEM

2D koguvoolu diferentsiaalvõrrandite süsteem on

$$\frac{\partial UK_1}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial h_{vp}}{\partial x_1} + (\tau_{vp} - \tau_{sp})_1,$$

$$\frac{\partial UK_2}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial h_{vp}}{\partial x_2} + (\tau_{vp} - \tau_{sp})_2,$$

$$\frac{\partial h_{vp}}{\partial t} + \frac{\partial UK_1}{\partial x_1} + \frac{\partial UK_2}{\partial x_2} = 0,$$

milles hõõrdepinge vee- ja õhukihi sisepinnal on  $\tau_{vp}$ , ja hõõrdepinge veekogu sisepõhjale on  $\tau_{sp}$ . Koguvoolu vektori  $\vec{UK} = (UK_1, UK_2)$  komponendid on määratud kui vertikaalselt integreeritud voolukiiruse komponendid:

$$UK_1 = \int_{h_{sp}}^{h_{vp}} u_1 dx_3,$$

$$UK_2 = \int_{h_{sp}}^{h_{vp}} u_2 dx_3,$$

ning veesamba kõrgusega  $h$  määratud madalvee kiirus on

$$c = \sqrt{gh}.$$

**MÄRKUS.** Hariliku diferentsiaalvõrrandi:

$$\frac{d\Gamma}{dt} + \Gamma = 0,$$

milles  $\Gamma$  on muutujate vektor võib integreerida numbrilise arvutuskeemiga ilmutatud kujul:

$$(\Gamma^{n+1} - \Gamma^n) + \Delta t \Gamma^n = 0.$$

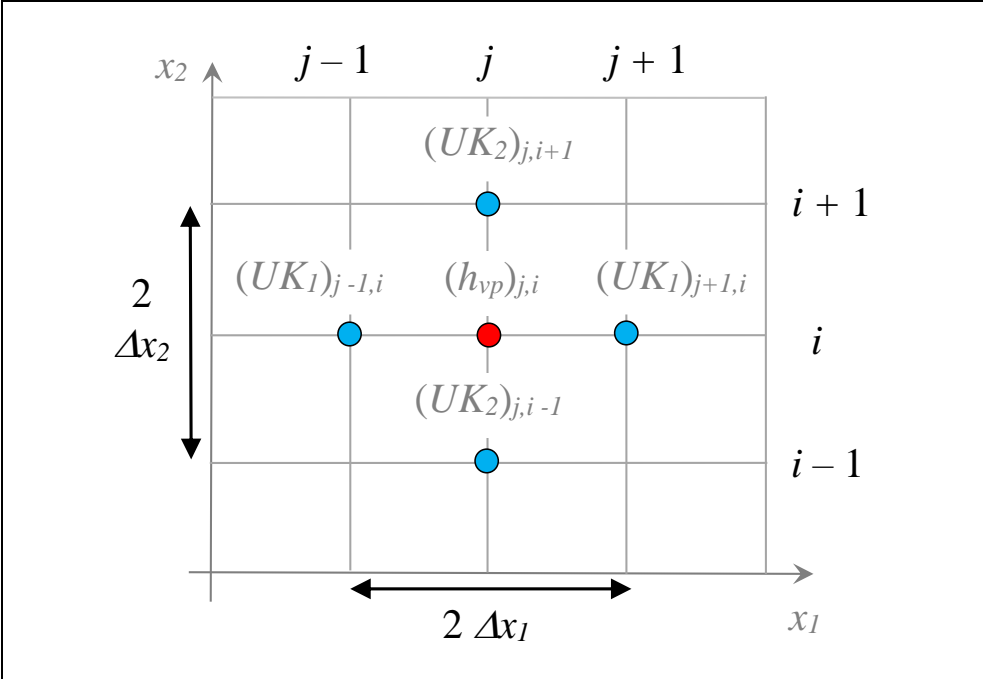
2D koguvoolu võrrandite süsteemi numbrilise arvutuskeem Arakawa-C võrgule:

$$\frac{UK_{1,j,i}^{n+1} - UK_{1,j,i}^n}{\Delta t} = -(c_{j,i}^n)^2 \frac{h_{vp,j+1,i}^n - h_{vp,j-1,i}^n}{2 \Delta x_1} + (\tau_{vp,j,i}^n - \tau_{sp,j,i}^n)_1,$$

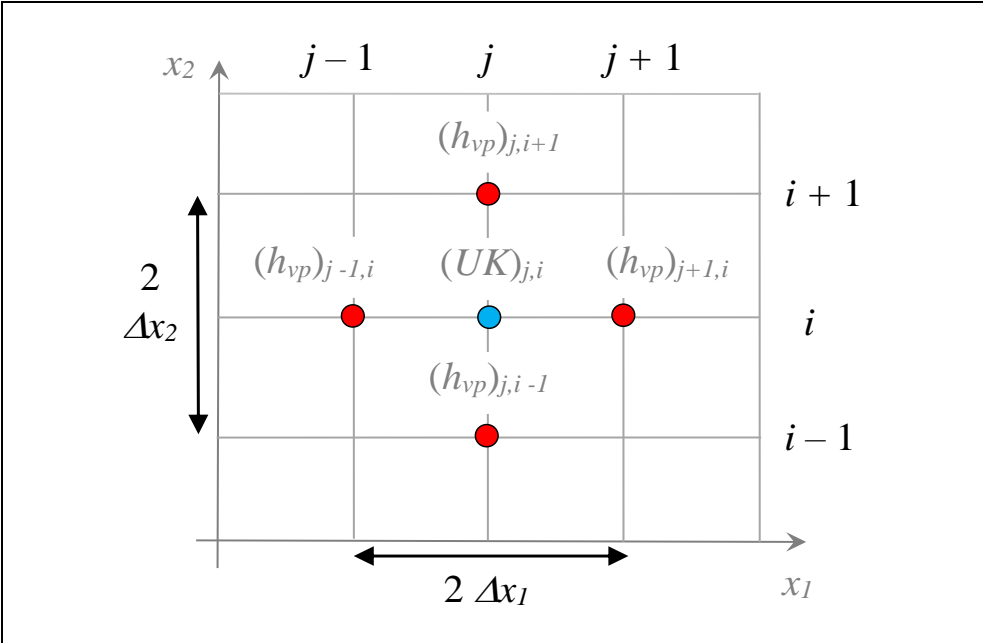
$$\frac{UK_{2,j,i}^{n+1} - UK_{2,j,i}^n}{\Delta t} = -(c_{j,i}^n)^2 \frac{h_{vp,j,i+1}^n - h_{vp,j,i-1}^n}{2 \Delta x_2} + (\tau_{vp,j,i}^n - \tau_{sp,j,i}^n)_2,$$

$$\frac{h_{vp,j,i}^{n+1} - h_{vp,j,i}^n}{\Delta t} + \frac{UK_{1,j+1,i}^{n+1} - UK_{1,j-1,i}^{n+1}}{2 \Delta x_1} + \frac{UK_{2,j,i+1}^{n+1} - UK_{2,j,i-1}^{n+1}}{2 \Delta x_2} = 0,$$

milles  $n$  on ajatelje indeks, st  $(n, n + 1)$  vastab ajavahemikule  $\Delta$ ,  $j$  on  $x_1$  – koordinaadi indeks, st  $(j, j + 1)$  vastab ruumisammule  $\Delta x_1$  ja  $i$  on  $x_2$  – koordinaadi indeks, st  $(i, i + 1)$  vastab ruumisammule  $\Delta x_2$ .



JOONIS 13 Arakawa-C võrk: Koguvoolu komponentide muutused



JOONIS 14 Arakawa-C võrk: Veepinna kõrguse muutused

2D koguvoolu võrrandite süsteemi numbrilise arvutusskeemi valemid ajavahemikule  $\Delta t$  koguvoolu komponentide ja veepinna kõrguse määramiseks Arakawa-C võrgu punktis  $(j, i)$ :

$$UK_{1,j,i}^{n+1} = UK_{1,j,i}^n - \frac{(c_{j,i}^n)^2 \Delta t}{2 \Delta x_1} (h_{vp_{j+1,i}}^n - h_{vp_{j-1,i}}^n) + (\tau_{vp_{j,i}}^n - \tau_{sp_{j,i}}^n)_1 \Delta t,$$

$$UK_{2,j,i}^{n+1} = UK_{2,j,i}^n - \frac{(c_{j,i}^n)^2 \Delta t}{2 \Delta x_2} (h_{vp_{j,i+1}}^n - h_{vp_{j,i-1}}^n) + (\tau_{vp_{j,i}}^n - \tau_{sp_{j,i}}^n)_2 \Delta t,$$

$$h_{vp_{j,i}}^{n+1} = h_{vp_{j,i}}^n + \frac{\Delta t}{2 \Delta x_1} (UK_{1,j+1,i}^{n+1} - UK_{1,j-1,i}^{n+1}) \\ + \frac{\Delta t}{2 \Delta x_2} (UK_{2,j,i+1}^{n+1} - UK_{2,j,i-1}^{n+1}).$$

Arvutusskeemi stabiilsuse Arakawa-C võrgu punktis  $(j, i)$  garanteerivad tingimused:

$$\left( \frac{\Delta t}{2 \Delta x_1}, \frac{\Delta t}{2 \Delta x_2} \right) \geq c_{j,i},$$

milles madalvee kiirus Arakawa-C võrgu punktis  $(j, i)$  on

$$c_{j,i} = \sqrt{g (h_{vp_{j,i}} - h_{sp_{j,i}})}.$$

**MÄRKUS.** 2D koguvoolu võrrandite süsteemi numbrilises arvutusskeemis sõltub madalvee kiirus  $c_{j,i}$  veekogu vabapinnna ja sisepõhja kõrguste vahest, mis muutub nii ruumiliselt kui ka ajaliselt. Selmet võib madalvee kiiruse  $c_{j,i}$  Arakawa-C võrgu igas võrgupunktis  $(j, i)$  määrata veekogu tasakaalulise, st horisontaalse vabapinnna ja muutumatu kujuga sisepõhja kõrguste vahega, st madalvee kiiruse  $c_{j,i}$  muutub ruumiliselt, aga on ajaliselt muutumatu. Funktsioon  $c_{j,i} = \text{konstant}(x_1, x_2)$  võimaldab 2D koguvoolu numbrilise arvutusskeemi seadistust olulist lihtsustada, ning samuti garanteerib koguvoolu laineotsessi seose veekogu sisepõhja kõrgusega määratud muutuva madalvee kiirusega, st veesamba lainejuhi omadustega.

## LISA G. VERLETI INTEGREERIMISMEETOD

Verleti integreerimine on numbriline arvumeetod, mida võib kasutada kehade liikumisvõrrandite integreerimiseks, et määrata jõudude toimel kehade trajektoore. Verleti arvutuskeem on tavaliselt stabiilsem võrreldes Euleri arvutuskeemiga.

**MÄRKUS.** Osakeste liikumise numbrilist arvutuskeemi kasutas esmakordselt Jean-Baptiste-Joseph Delambre aastal 1791, ning on molekulaardünaamikas kasutas seda meetodit prantsuse füüsik Loup Verlet aastal 1967.

Newtoni liikumisvõrrand on

$$M \ddot{\mathbf{r}}(t) = F(\mathbf{r}(t)),$$

milles kehade masside maatriks on  $M$ ,  $N$  keha asukohtade vektor on

$$\mathbf{r}(t) = \vec{r}(t) = (\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)),$$

ning potentsiaali  $\mathcal{R}(\mathbf{r}(t))$  negatiivse gradiendiga määratud jõud kehadele on

$$F(\mathbf{r}(t)) = -\nabla \mathcal{R}(\mathbf{r}(t)),$$

milles on kasutatud 3D ruumi, koordinaatidega  $(x_1, x_2, x_3)$ , Hamiltoni vektoroperaatorit:

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

Kehade liikumiskiirenduse võib esitada funktsiooniga:

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathcal{H}(\mathbf{r}(t)),$$

millega võib määrata algtingimustel  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 = \vec{r}_0$  ja  $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}_0 = \vec{v}_0$ .

Kehade liikumise määramisel algtingimustele võib kasutusele võtta lõpliku ajavahemiku  $\Delta t > 0$ , ning arvutada kehade asukohad aegreale  $t_n = n \Delta t$ , milles  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Kehade asukohad on siis määratud asukohtade ridadega  $\mathbf{r}(t_n) = \vec{r}_n$ , mis vastab kehade liikumiste trajektooreidele.

Kui Euleri tõusude valemis kasutakse nii ilmutatud kui ka ilmutamata 1-järju ( $n = 1$ ) tuletisega määratud arvutusvalemit, siis Verleti tõusude valemis kasutatakse keha asukoha suhtes tsentreeritud 2-järju ( $n = 2$ ) tuletisega määratud arvutusvalemit:

$$\frac{\Delta^2 \vec{r}_n}{\Delta t^2} = \frac{\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_n - \frac{\vec{r}_n - \vec{r}_{n-1}}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{n+1} - 2\vec{r}_n + \vec{r}_{n-1}}{\Delta t^2}.$$

Kehade liikumiskiirenduse vektor  $\ddot{\mathbf{x}}(t) = \vec{a}(t) = \mathcal{H}(\mathbf{r}(t))$  on määratud numbrilise arvutusvalemiga:

$$\vec{a}_n = \frac{\Delta^2 \vec{r}_n}{\Delta t^2}.$$

Verleti numbriline arvutusvalem võimaldab kehade asukoha vektori järgmise väärtuse lõpliku ajavahemiku  $\Delta t$  möödumisele määrata valemiga:

$$\vec{r}_{n+1} = 2 \vec{r}_n - \vec{r}_{n-1} + \vec{a}_n \Delta t^2,$$

milles  $\vec{a}_n = \mathcal{H}(\vec{r}_n)$ . Verleti numbriline arvutusvalem kehade asukoha vektori määramisel ei kasuta kehade liikumiskiiruse vektorit  $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t)$ .

Ajast  $t$  sõltuva kehade asukoha vektori  $\vec{r}(t + \Delta t)$  võib arendada Taylori ritta:

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \frac{\Delta t^1}{1!} \vec{r}'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} \vec{r}''(t) + \frac{\Delta t^3}{3!} \vec{r}'''(t) + \dots \frac{\Delta t^n}{n!} \vec{r}^{(n)}(t),$$

et määrata muutuja väärtus ajavahemiku  $\Delta t$  möödumisel. ( $\vec{r}'(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ ,  $\vec{r}''(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$ , ...) Taylori reast võib koostada Taylori valemi ritta arenduse järguga  $n$ . Näiteks Taylori valem 1-järgu ( $n = 1$ ) tuletise täpsusega on

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t \vec{r}'(t),$$

2-järgu ( $n = 2$ ) tuletise täpsusega on

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t \vec{r}'(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \vec{r}''(t),$$

3-järgu ( $n = 3$ ) tuletise täpsusega on

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t \vec{r}'(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \vec{r}''(t) + \frac{1}{6} \Delta t^3 \vec{r}'''(t),$$

...

Võtame kasutusel kehade asukohtade vektorid vastavalt enne ja pärast ajavahemiku  $\Delta t$  möödumist 3-järku ( $n = 3$ ) tuletise täpsusega:

$$\vec{r}(t - \Delta t) = \vec{r}(t) - \Delta t \vec{r}'(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \vec{r}''(t) - \frac{1}{6} \Delta t^3 \vec{r}'''(t) + \mathbf{O}(\Delta t^4),$$

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t \vec{r}'(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \vec{r}''(t) + \frac{1}{6} \Delta t^3 \vec{r}'''(t) + \mathbf{O}(\Delta t^4),$$

→

$$\vec{r}(t - \Delta t) = \vec{r}(t) - \Delta t \vec{v}(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \vec{a}(t) - \frac{1}{6} \Delta t^3 \vec{b}(t) + \mathbf{O}(\Delta t^4),$$

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t \vec{v}(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \vec{a}(t) + \frac{1}{6} \Delta t^3 \vec{b}(t) + \mathbf{O}(\Delta t^4),$$

milles keha liikumiskiiruse vektor  $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ , keha liikumiskiirenduse vektor  $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$ ,  $\vec{b}(t) = \dddot{\vec{r}}(t)$  ja astmerea lõikamisviga  $\mathbf{O}(\Delta t^4)$ .



Liites keha asukohtade vektorid vastavalt enne ja pärast ajavahemiku  $\Delta t$  möödumist 3-järku ( $n = 3$ ) tuletise täpsusega, võime keha asukohta vektori järgmise väärtuse lõpliku ajavahemiku  $\Delta t$  möödumisele määrata valemiga:

$$\vec{r}(t + \Delta t) = 2 \vec{r}(t) - \vec{r}(t - \Delta t) + \Delta t^2 \vec{a}(t) + \mathbf{O}(\Delta t^4).$$

Selgub, et Taylori astmeridade 1-järku ( $n = 1$ ) ja 3-järku ( $n = 3$ ) tuletistega määratud liikmed taanduvad välja keha asukohtade vektorite, vastavate enne ja pärast ajavahemiku  $\Delta t$  möödumist, astmeridade liitmistehtes. Sellise Taylori astmeridade liitmistehtega muutub Verleti numbrilise arvutusvalem matemaatiliselt täpsemaks võrreldes seda Euleri numbrilise arvutusvalemiga, milles kasutatakse ainult Taylori ühte astmerida.

Verleti numbrilises arvutusvalemites ei ole kehade liikumiskiirused määratud ilmutatud kujul. Kehade liikumisvõrrandite ülesandes on sageli vajalik määrata füüsikalised suurused, mis sõltuvad keha liikumiskiirusest, nagu näiteks keha kineetiline energia. Verleti numbrilisele arvutusmeetodile võib kehade liikumiskiiruse määrata keha asukohta suhtes tsentreeritud 1-järku ( $n = 1$ ) tuletisega määratud arvutusvalemiga:

$$\frac{\Delta \vec{r}_n}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_{n-1}}{2 \Delta t}.$$

Kehade liikumiskiiruse vektor  $\vec{r}'(t) = \vec{v}(t)$  on määratud numbrilise arvutusvalemiga:

$$\vec{v}_n = \frac{\Delta \vec{r}_n}{\Delta t}.$$

Verleti numbrilisele arvutusmeetodile saab kehade liikumiskiiruse määrata ka keha asukohta suhtes mittetsentreeritud 1-järku ( $n = 1$ ) tuletisega määratud arvutusvalemiga:

$$\frac{\Delta \vec{x}_n}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_n}{\Delta t}.$$

Kehade liikumiskiiruse vektor  $\vec{r}'(t) = \vec{v}(t)$  on määratud siis väiksema matemaatilise täpsusega numbrilise arvutusvalemiga:

$$\vec{v}_n = \frac{\Delta \vec{x}_n}{\Delta t}.$$

# LISA H. STRATIFITSEERITUD VOOLAMISE HÜDRAULIKA

## H.1 VAHEENERGIA KÕRGUSE FUNKTSIOON

Sarnaselt jõe-estuaari (mereranniku jõesuudme) magedama jõevee ja soolasema merevee mitmesuunalisele koosvoolamisele, eeldame, et kahekihilisele sisevoolamisele on vedelike tiheduste erinevus suhteliselt väike, st  $(1 - \Gamma) \ll 1$ , milles vedelike tiheduste suhe on  $\Gamma = \rho_1/\rho_2$ , ning  $\rho_1$  on nn kergema vedeliku (jõevee) tihedus ja  $\rho_2$  on nn raskema vedeliku (merevee) tihedus.

Sisehõõrdumiseta ja pöörisevabale voolamisele kahele vedelikukihile eraldi võib kasutusele võtta ülemise veekihi mehaanilise energia funktsiooni:

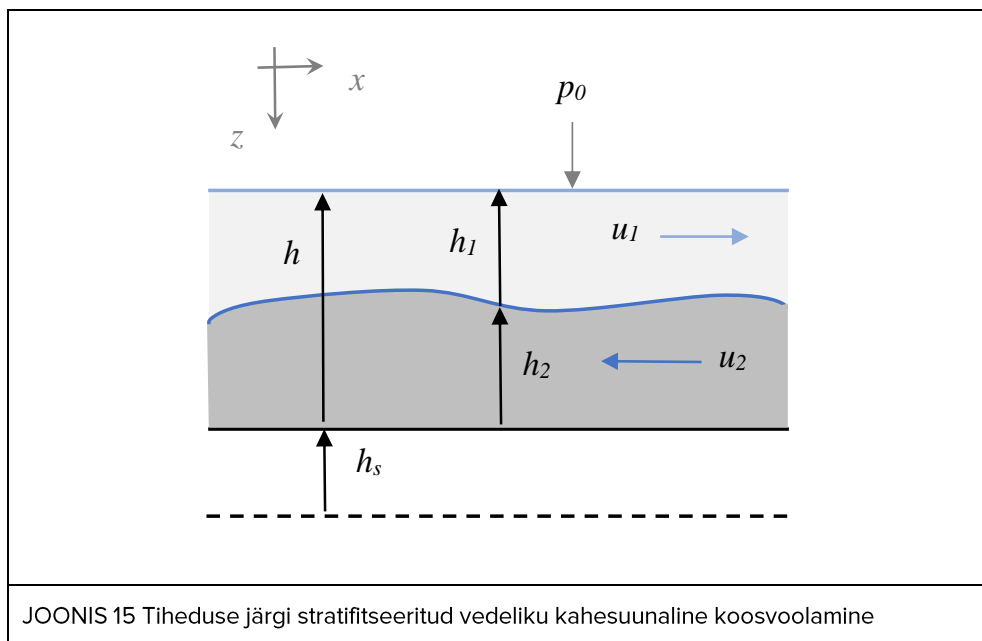
$$E_1 = \frac{1}{2} \rho_1 u_1(x)^2 + p_0 + \rho_1 g [h_1(x) + h_2(x) + h_s(x)],$$

ja alumise veekihi mehaanilise energia funktsiooni:

$$E_2 = \frac{1}{2} \rho_2 u_2(x)^2 + p_0 + \rho_1 g h_1(x) + \rho_2 g [h_2(x) + h_s(x)],$$

milles  $u_1$  ja  $u_2$  on vastavalt ülemise ja alumise veekihi voolukiirused,  $h_1$  ja  $h_2$  on vastavalt ülemise ja alumise veekihi kõrgused,  $h_s$  on voolusängi aluspõhja kõrgus üle võrdlusnivoo,  $p_0$  on õhurõhk vabapinnal ja  $g$  on raskuskiirendus. Ülemise ja alumise veekihi mehaanilise energia võrrandi liige  $0.5 \rho_i u_i^2$  on dünaamiline rõhk vastavalt indeksiga  $i = 1, 2$ . Ülemise ja alumise vedelikukihi kõrguste summa määrab mitme tihedusega vedeliku kõrguse:

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x).$$



JOONIS 15 Tiheduse järgi stratifitseeritud vedeliku kahesuunaline koosvoolamine

Vedeliku tiheduse muutusega määratud sisevoolamisele (ingl. *buoyancy-driven flow*) võetakse kasutusele hüdrauliline suurus, mis määrab nn vaheenergia kõrguse (ingl. *internal-flow head*) valemiga:

$$H = \frac{E_2 - E_1}{\rho_2 g'}$$

milles  $\rho_2$  on nn raskema vedeliku (merevee) tihedus ja  $g' = g(1 - \Gamma)$  on tiheduse järgi taandatud raskuskiirendus.

Asendades kahele vedelikukihile eraldi kasutusele võetud ülemise ja alumise veekihi mehaanilise energia funktsioonid  $E_1$  ja  $E_2$  vaheenergia kõrguse valemisse, võib vaheenergia funktsiooni määrata igas voolusängi ristlõikes koordinaadiga  $x$ :

$$H(x) = \left( \frac{u_2(x)^2}{2g'} - \frac{u_1(x)^2}{2g'} \right) + h_2(x) + h_s(x).$$

Ideaalvedeliku mitmesuunalise voolamise eeldusel, milles ei toimu erinevate vedelike segunemist (nn jõevesi ei lahustu merevees), võib ülemise ja alumise veekihi vooluhulgad määrata vastavalt valemitega:

$$Q_1 = u_1(x) A_1(x),$$

milles  $u_1$  ja  $A_1$  on vastavalt ülemise veekihi voolukiirus ja elavlõige, ning

$$Q_2 = u_2(x) A_2(x),$$

milles  $u_2$  ja  $A_2$  on vastavalt alumise veekihi voolukiirus ja elavlõige.

Vaheenergia funktsiooni võib määrata kui

$$H(x) = \left( \frac{Q_2^2}{2 g' A_2(x)^2} - \frac{Q_1^2}{2 g' A_1(x)^2} \right) + h_2(x) + h_s(x),$$

milles on eeldatud, et ülemise ja alumise vedelikukihtide vooluhulgad ei muutu, st  $Q_1 = \text{konstant}$  ja  $Q_2 = \text{konstant}$ .

Vaheenergia funktsiooni võib määrata kujul:

$$H(x) = K \left( \frac{1}{A_2(x)^2} - \frac{q^2}{(A(x) - A_2(x))^2} \right) + h_2(x) + h_s(x),$$

milles on kasutusele võetud alumise vedelikukihti vooluhulgast sõltuv koefitsient:

$$K = \frac{Q_2^2}{2 g'},$$

ülemise ja alumise vedelikukihtide vooluhulkade suhtetegur astmes 2:

$$q^2 = \frac{Q_1^2}{Q_2^2},$$

ning mitme vedeliku koosvoolamise elavlõige:

$$A(x) = A_1(x) + A_2(x).$$

Vaheenergia funktsiooni võib määrata dimensioonitult kujul:

$$\frac{H}{w_0} = \frac{K}{w_0 A(x)^2} \left( \frac{A(x)^2}{A_2(x)^2} - \frac{q^2 A(x)^2}{(A(x) - A_2(x))^2} \right) + \frac{h_2(x)}{w_0} + \frac{h_s(x)}{w_0},$$

milles on kasutusele võetud voolusängi nn laiusmõõde  $w_0$ , milleks võib olla näiteks vabapinna laius voolukitsuses vms konstant. Sarnaselt võib vaheenergia funktsiooni esitada dimensioonitult kujul:

$$\frac{H}{h_0} = \frac{K}{h_0 A(x)^2} \left( \frac{A(x)^2}{A_2(x)^2} - \frac{q^2 A(x)^2}{(A(x) - A_2(x))^2} \right) + \frac{h_2(x)}{h_0} + \frac{h_s(x)}{h_0},$$

milles on kasutusele võetud nn kõrgusmõõde  $h_0$ , milleks võib olla näiteks horisontaalse vabapinna kõrgus üle võrdlusnivoo:

$$h_0 = h(x) + h_s(x),$$

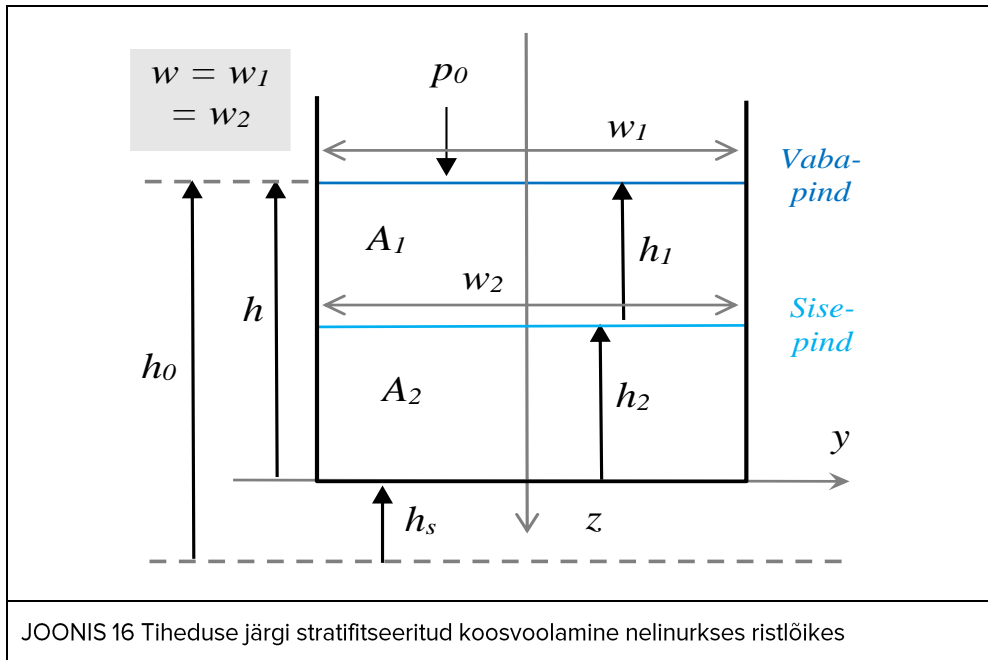
milles

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x).$$

## H.2 SISEVOOLAMINE NELINURKSE RISTLÕIKEGA VOOLUSÄNGIS

Asendades kahele vedelikukihile eraldi kasutusele võetud ülemise ja alumise veekihi mehaanilise energia funktsioonid  $E_1$  ja  $E_2$  vaheenergia kõrguse valemisse, võib vaheenergia funktsiooni määrata igas voolusängi ristlõikes koordinaadiga  $x$ :

$$H = \left( \frac{u_2^2}{2 g'} - \frac{u_1^2}{2 g'} \right) + h_2 + h_s .$$



JOONIS 16 Tiheduse järgi stratifitseeritud koosvoolamine nelinurkses ristlõikes

Ülemise ja alumise vedelikukihi vooluhulgad ja vastavad voolukiirused on

$$Q_1 = u_1 h_1 w_1 = u_1 h_1 w \quad \rightarrow \quad u_1 = Q_1 / (h_1 w) ,$$

$$Q_2 = u_2 h_2 w_2 = u_2 h_2 w \quad \rightarrow \quad u_2 = Q_2 / (h_2 w) .$$

Vaheenergia funktsiooni võib määrata kui

$$H = \left( \frac{Q_2^2}{2 g' h_2^2 w^2} - \frac{Q_1^2}{2 g' h_1^2 w^2} \right) + h_2 + h_s .$$

→

$$H = \frac{Q_2^2}{2 g' w^2} \left( \frac{1}{h_2^2} - \frac{Q_1^2 / Q_2^2}{h_1^2} \right) + h_2 + h_s$$

→

$$H = K \frac{1}{w^2} \left( \frac{1}{h_2^2} - \frac{q^2}{h_1^2} \right) + h_2 + h_s,$$

milles on kasutusele võetud alumise vedelikukihti vooluhulgast sõltuv koefitsient:

$$K = \frac{Q_2^2}{2 g'},$$

ülemise ja alumise vedelikukihtide vooluhulkade suhtetegur astmes 2:

$$q^2 = \frac{Q_1^2}{Q_2^2},$$

ning ülemise ja alumise vedelikukihti elavlõiked vastavalt:

$$A_1 = h_1 w,$$

$$A_2 = h_2 w.$$

Nelinurkse ristlõikega voolusängi vaheenergia funktsiooni võib määrata dimensioonitul kujul:

$$\frac{H}{w_0} = \frac{Q_2^2}{2 g' w_0^5} \left( \frac{w_0}{w} \right)^2 \left( \left( \frac{w_0}{h_2} \right)^2 - q^2 \left( \frac{w_0}{h_1} \right)^2 \right) + \frac{h_2}{w_0} + \frac{h_s}{w_0},$$

milles on kasutusele võetud voolusängi nn laiusmõõde  $w_0 = \textit{konstant}$ .

Dimensioonitu vaheenergia kõrgus on määratud valemiga

$$H^* = \frac{E_2 - E_1}{\rho_2 g' w_0}.$$

Dimensioonitu nelinurkse ristlõikega voolusängi vaheenergia funktsiooni võib määrata kujul:

$$H^* = K^* \left( \frac{w_0}{w} \right)^2 \left( \left( \frac{w_0}{h_2} \right)^2 - q^2 \left( \frac{w_0}{h_1} \right)^2 \right) + \frac{h_2}{w_0} + \frac{h_s}{w_0},$$

milles

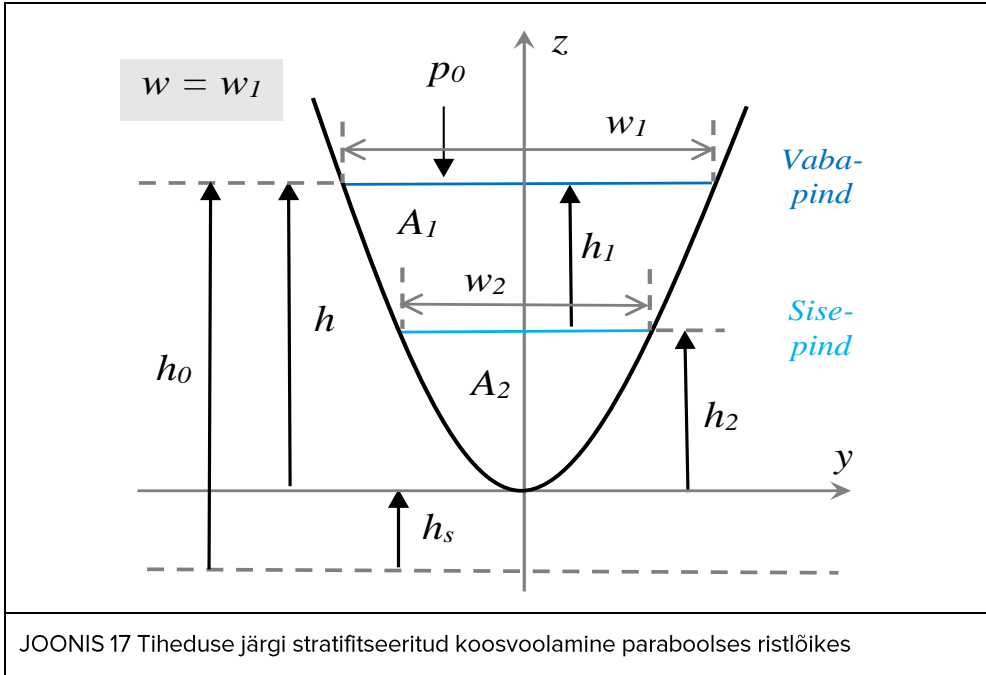
$$K^* = \frac{Q_2^2}{2 g' w_0^5} = \frac{K}{w_0^5},$$

$$K = \frac{Q_2^2}{2 g'}.$$

### H.3 SISEVOOLAMINE PARABOOLSE RISTLÕIKEGA VOOLUSÄNGIS

Asendades kahele vedelikukihile eraldi kasutusele võetud ülemise ja alumise veekihi mehaanilise energia funktsioonid  $E_1$  ja  $E_2$  vaheenergia kõrguse valemisse, võib vaheenergia funktsiooni määrata igas voolusängi ristlõikes koordinaadiga  $x$ :

$$H = \left( \frac{u_2^2}{2g'} - \frac{u_1^2}{2g'} \right) + h_2 + h_s.$$



Ülemise ja alumise vedelikukihi vooluhulgad ja vastavad voolukiirused on vastavalt

$$\begin{aligned} Q_1 = u_1 A_1 &\rightarrow u_1 = Q_1/A_1, \\ Q_2 = u_2 A_2 &\rightarrow u_2 = Q_2/A_2. \end{aligned}$$

Mitme ja alumise vedelikukihi kõrgused ja vastavad vabapinna ja sisepinna laiused on vastavalt:

$$h_1 + h_2 = \alpha (w_1/2)^2 = \alpha w_1^2/4 \quad \rightarrow \quad w_1 = 2\sqrt{(h_1 + h_2)/\alpha},$$

$$h_2 = \alpha (w_2/2)^2 = \alpha w_2^2/4 \quad \rightarrow \quad w_2 = 2\sqrt{h_2/\alpha},$$

milles  $\alpha$  on ruutparabooli ruutliikme kordaja, mille mõõtühik  $[\alpha] = \text{m}^{-1}$ .

Ülemise ja alumise vedelikukihi elavlõiked on vastavalt

$$A_1 = \frac{2}{3} (h_1 + h_2) w_1 - \frac{2}{3} h_2 w_2 = \frac{2}{3} (h_1 + h_2) 2 \sqrt{\frac{(h_1 + h_2)}{\alpha}} - \frac{2}{3} h_2 2 \sqrt{\frac{h_2}{\alpha}}$$

$$= \frac{4}{3} \frac{(h_1 + h_2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{3} \frac{h_2^{\frac{3}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{3 \alpha^{\frac{1}{2}}} \left( (h_1 + h_2)^{\frac{3}{2}} - h_2^{\frac{3}{2}} \right),$$

$$A_2 = \frac{2}{3} h_2 w_2 = \frac{4}{3 \alpha^{\frac{1}{2}}} h_2^{\frac{3}{2}}.$$

Ülemise ja alumise vedelikukihi vooluhulgad ja vastavad voolukiirused on vastavalt

$$Q_1 = u_1 A_1 = u_1 \frac{4}{3 \alpha^{\frac{1}{2}}} \left( (h_1 + h_2)^{\frac{3}{2}} - h_2^{\frac{3}{2}} \right).$$

→

$$u_1^2 = \frac{9 Q_1^2 \alpha}{16} \frac{1}{\left( (h_1 + h_2)^{\frac{3}{2}} - h_2^{\frac{3}{2}} \right)^2}$$

$$Q_2 = u_2 A_2 = u_2 \frac{4}{3 \alpha^{\frac{1}{2}}} h_2^{\frac{3}{2}}$$

→

$$u_2^2 = \frac{9 Q_2^2 \alpha}{16 \left( h_2^{\frac{3}{2}} \right)^2} = \frac{9 Q_2^2 \alpha}{16 h_2^3}$$

Vaheenergia funktsiooni võib määrata kui

$$H = \left( \frac{9 Q_2^2 \alpha}{32 g' h_2^3} - \frac{9 Q_1^2 \alpha}{32 g' \left( (h_1 + h_2)^{\frac{3}{2}} - h_2^{\frac{3}{2}} \right)^2} \right) + h_2 + h_s,$$

→

$$H = \frac{9 Q_2^2 \alpha}{32 g'} \left( \frac{1}{h_2^3} - \frac{Q_1^2 / Q_2^2}{\left( (h_1 + h_2)^{\frac{3}{2}} - h_2^{\frac{3}{2}} \right)^2} \right) + h_2 + h_s,$$

→

$$H = \frac{9 \alpha}{16} K \left( \frac{1}{h_2^3} - \frac{q^2}{\left( (h_1 + h_2)^{\frac{3}{2}} - h_2^{\frac{3}{2}} \right)^2} \right) + h_2 + h_s,$$

milles on kasutusele võetud alumise vedelikukihti vooluhulgast sõltuv koefitsient:

$$K = \frac{Q_2^2}{2 g'},$$



ülemise ja alumise vedelikukihtide vooluhulkade suhtetegur astmes 2 on

$$q^2 = \frac{Q_1^2}{Q_2^2},$$

ning ülemise ja alumise vedelikukihti elavlõiked on vastavalt

$$A_1 = \frac{4}{3 \alpha^{\frac{1}{2}}} \left( (h_1 + h_2)^{\frac{3}{2}} - h_2^{\frac{3}{2}} \right),$$

$$A_1 = \frac{4}{3 \alpha^{\frac{1}{2}}} h_2^{\frac{3}{2}}.$$

Paraboolse ristlõikega voolusäangi vaheenergia funktsiooni võib määrata dimensioonitult kujul:

$$\frac{H}{w_0} = \frac{9 Q_2^2}{32 g' w_0^5} (\alpha w_0) \left( \left( \frac{w_0}{h_2} \right)^3 - \frac{q^2}{\left( \left( \frac{h_1 + h_2}{w_0} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{h_2}{w_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right)^2} \right) + \frac{h_2}{w_0} + \frac{h_s}{w_0},$$

milles on kasutusele võetud voolusäangi nn laiusmõõde  $w_0 = \textit{konstant}$ .

Dimensioonitu vaheenergia kõrgus on määratud valemiga

$$H^* = \frac{E_2 - E_1}{\rho_2 g' w_0}.$$

Dimensioonitu nelinurkse ristlõikega voolusäangi vaheenergia funktsiooni võib määrata kujul:

$$H^* = \frac{9 Q_2^2}{32 g' w_0^5} (\alpha w_0) \left( \left( \frac{w_0}{h_2} \right)^3 - \frac{q^2}{\left( \left( \frac{h_1 + h_2}{w_0} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{h_2}{w_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right)^2} \right) + \frac{h_2}{w_0} + \frac{h_s}{w_0},$$

$$H^* = \frac{9 K^*}{16} (\alpha w_0) \left( \left( \frac{w_0}{h_2} \right)^3 - \frac{q^2}{\left( \left( \frac{h_1 + h_2}{w_0} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{h_2}{w_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right)^2} \right) + \frac{h_2}{w_0} + \frac{h_s}{w_0},$$

milles

$$K^* = \frac{Q_2^2}{2 g' w_0^5} = \frac{K}{w_0^5},$$

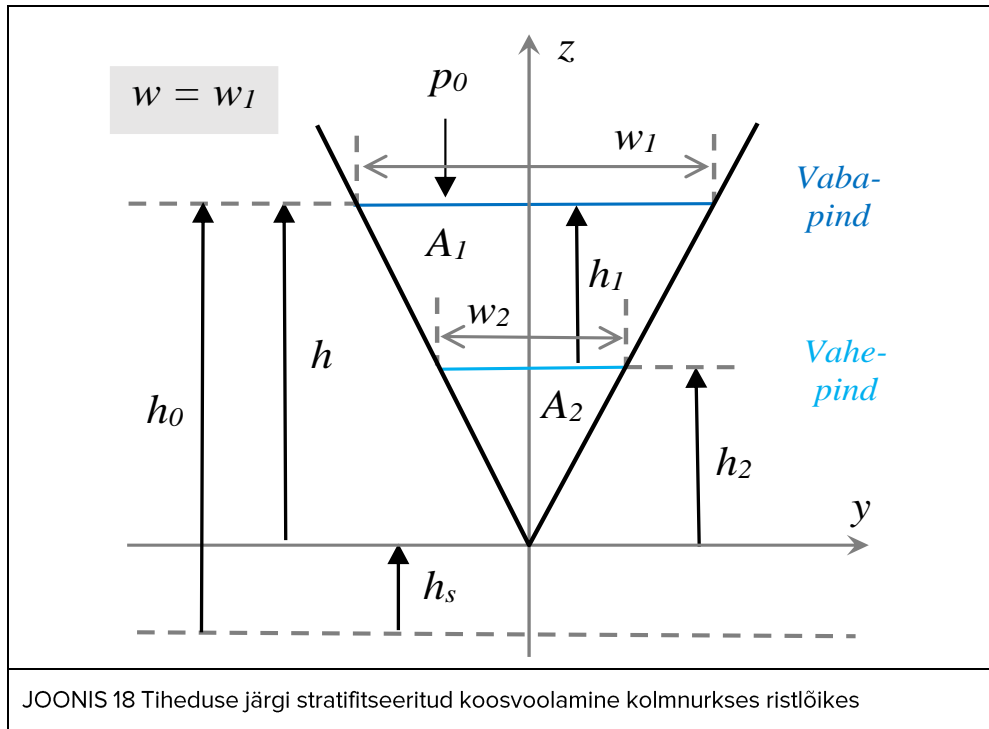
$$K = \frac{Q_2^2}{2 g'}.$$

**MÄRKUS.** Teisendus:  $h_1 + h_2 = \alpha w_1^2/4$ , ( $w_1 = w$ ) ja  $h_2 = \alpha w_2^2/4$ .

## H.4 SISEVOOLAMINE KOLMNURKSE RISTLÕIKEGA VOOLUSÄNGIS

Asendades kahele vedelikukihile eraldi kasutusele võetud ülemise ja alumise veekihi mehaanilise energia funktsioonid  $E_1$  ja  $E_2$  vaheenergia kõrguse valemisse, võib vaheenergia funktsiooni määrata igas voolusängi ristlõikes koordinaadiga  $x$ :

$$H = \left( \frac{u_2^2}{2g'} - \frac{u_1^2}{2g'} \right) + h_2 + h_s .$$



Ülemise ja alumise vedelikukihi vooluhulgad ja vastavad voolukiirused on vastavalt

$$Q_1 = u_1 A_1 \quad \rightarrow \quad u_1 = Q_1 / A_1 ,$$

$$Q_2 = u_2 A_2 \quad \rightarrow \quad u_2 = Q_2 / A_2 .$$

Mitme ja alumise vedelikukihi kõrgused ja vastavad vabapinna ja sisepinna laiused on vastavalt:

$$h_1 + h_2 = \gamma w_1 / 2 \quad \rightarrow \quad w_1 = 2 (h_1 + h_2) / \gamma ,$$

$$h_2 = \gamma w_2 / 2 \quad \rightarrow \quad w_2 = 2 h_2 / \gamma ,$$

milles  $\gamma$  on nõ nõlvjoone lineaarliikme kordaja, mille mõõtühik  $[\gamma] = 1$ .

Ülemise ja alumise vedelikukihi elavlõiked on vastavalt

$$A_1 = \frac{1}{2} (h_1 + h_2) w_1 - \frac{1}{2} h_2 w_2 = \frac{1}{2} (h_1 + h_2) 2 \frac{(h_1 + h_2)}{\gamma} - \frac{1}{2} h_2 2 \frac{h_2}{\gamma}$$

$$= \frac{(h_1 + h_2)^2}{\gamma} - \frac{h_2^2}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} ((h_1 + h_2)^2 - h_2^2),$$

$$A_2 = \frac{1}{2} h_2 w_2 = \frac{1}{2} h_2 2 \frac{h_2}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} h_2^2.$$

Ülemise ja alumise vedelikukihi vooluhulgad ja vastavad voolukiirused on vastavalt

$$Q_1 = u_1 A_1 = u_1 \frac{1}{\gamma} ((h_1 + h_2)^2 - h_2^2),$$

→

$$u_1^2 = Q_1^2 \gamma^2 \frac{1}{((h_1 + h_2)^2 - h_2^2)^2}.$$

$$Q_2 = u_2 A_2 = u_2 \frac{1}{\gamma} h_2^2,$$

→

$$u_2^2 = Q_2^2 \gamma^2 \frac{1}{(h_2^2)^2} = Q_2^2 \gamma^2 \frac{1}{h_2^4}.$$

Vaheenergia funktsiooni võib määrata kui

$$H = \left( \frac{Q_2^2 \gamma^2}{2 g' h_2^4} - \frac{Q_1^2 \gamma^2}{2 g' ((h_1 + h_2)^2 - h_2^2)^2} \right) + h_2 + h_s,$$

→

$$H = \frac{Q_2^2 \gamma^2}{2 g'} \left( \frac{1}{h_2^4} - \frac{Q_1^2 / Q_2^2}{((h_1 + h_2)^2 - h_2^2)^2} \right) + h_2 + h_s,$$

→

$$H = \gamma^2 K \left( \frac{1}{h_2^4} - \frac{q^2}{((h_1 + h_2)^2 - h_2^2)^2} \right) + h_2 + h_s,$$

milles on kasutusele võetud alumise vedelikukihti vooluhulgast sõltuv koefitsient:

$$K = \frac{Q_2^2}{2 g'},$$

ülemise ja alumise vedelikukihtide vooluhulkade suhtegur astmes 2:

$$q^2 = \frac{Q_1^2}{Q_2^2},$$

ning ülemise ja alumise vedelikukihti elavlõiked vastavalt on

$$A_1 = \frac{1}{\gamma} ((h_1 + h_2)^2 - h_2^2),$$

$$A_2 = \frac{1}{\gamma} h_2^2.$$

Kolmnurkse ristlõikega voolusängi vaheenergia funktsiooni võib määrata dimensioonitult kujul:

$$\frac{H}{w_0} = \frac{Q_2^2}{2 g' w_0^5} (\gamma^2) \left( \left( \frac{w_0}{h_2} \right)^4 - \frac{q^2}{\left( \left( \frac{h_1 + h_2}{w_0} \right)^2 - \left( \frac{h_2}{w_0} \right)^2 \right)^2} \right) + \frac{h_2}{w_0} + \frac{h_s}{w_0},$$

milles on kasutusele võetud voolusängi nn laiusmõõde  $w_0 = \textit{konstant}$ .

Dimensioonitu vaheenergia kõrgus on määratud valemiga

$$H^* = \frac{E_2 - E_1}{\rho_2 g' w_0}.$$

Dimensioonitu nelinurkse ristlõikega voolusängi vaheenergia funktsiooni võib määrata kujul:

$$H^* = \frac{Q_2^2}{2 g' w_0^5} (\gamma^2) \left( \left( \frac{w_0}{h_2} \right)^4 - \frac{q^2}{\left( \left( \frac{h_1 + h_2}{w_0} \right)^2 - \left( \frac{h_2}{w_0} \right)^2 \right)^2} \right) + \frac{h_2}{w_0} + \frac{h_s}{w_0},$$

$$H^* = K^* (\gamma^2) \left( \left( \frac{w_0}{h_2} \right)^4 - \frac{q^2}{\left( \left( \frac{h_1 + h_2}{w_0} \right)^2 - \left( \frac{h_2}{w_0} \right)^2 \right)^2} \right) + \frac{h_2}{w_0} + \frac{h_s}{w_0},$$

milles

$$K^* = \frac{Q_2^2}{2 g' w_0^5} = \frac{K}{w_0^5},$$

$$K = \frac{Q_2^2}{2 g'}.$$

**MÄRKUS.** *Teisendus:*  $h_1 + h_2 = \gamma w_1/2$ , ( $w_1 = w$ ) ja  $h_2 = \gamma w_2/2$ .

## H.5 RUUTASTMELISE RISTLÕIKEKUJU TEISENDUSED

Dimensioonitus vaheenergia kõrguse funktsioonis esinev dünaamilise rõhu liikme, mis sisaldab alumise veekihi vooluhulka  $Q_2$ , võib teisendada astmelisele kujule.

Dimensioonitu nelinurkse ristlõikekujuga vaheenergia võrrand

$$\frac{H}{w_0} = \frac{Q_2^2}{2 g' w_0^5} \left(\frac{w_0}{w}\right)^2 \left(\left(\frac{w_0}{h_2}\right)^2 - q^2 \left(\frac{w_0}{h_1}\right)^2\right) + \frac{h_2}{w_0} + \frac{h_s}{w_0}$$

→

$$\frac{Q_2^2}{2 g' w_0^5} \left(\frac{w_0}{w}\right)^2 = (1)^2 K^* \left(\frac{h_1 + h_2}{w_0}\right)^0 \left(\frac{w_0}{w}\right)^2$$

Dimensioonitu parabolse ristlõikekujuga vaheenergia võrrand

$$\frac{H}{w_0} = \frac{9 Q_2^2}{32 g' w_0^5} (\alpha w_0) \left( \left(\frac{w_0}{h_2}\right)^3 - \frac{q^2}{\left(\left(\frac{h_1 + h_2}{w_0}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{h_2}{w_0}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^2} \right) + \frac{h_2}{w_0} + \frac{h_s}{w_0}$$

→

$$\frac{9 Q_2^2}{32 g' w_0^5} (\alpha w_0) = \frac{9}{16} \left(\frac{Q_2^2}{2 g' w_0^5}\right) \left(\frac{(h_1 + h_2)^4}{w^2} w_0\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 K^* \left(\frac{h_1 + h_2}{w_0}\right)^1 \left(\frac{w_0}{w}\right)^2,$$

milles on kasutatud valemit:

$$\alpha = \frac{(h_1 + h_2)^4}{w^2}.$$

Dimensioonitu kolmnurkse ristlõikekujuga vaheenergia võrrand

$$\frac{H}{w_0} = \frac{Q_2^2}{2 g' w_0^5} (\gamma^2) \left( \left(\frac{w_0}{h_2}\right)^4 - \frac{q^2}{\left(\left(\frac{h_1 + h_2}{w_0}\right)^2 - \left(\frac{h_2}{w_0}\right)^2\right)^2} \right) + \frac{h_2}{w_0} + \frac{h_s}{w_0},$$

→

$$\frac{Q_2^2}{2 g' w_0^5} (\gamma^2) = \frac{Q_2^2}{2 g' w_0^5} \left(\frac{(h_1 + h_2)^2 4}{w^2}\right) = (2)^2 K^* \left(\frac{h_1 + h_2}{w_0}\right)^2 \left(\frac{w_0}{w}\right)^2$$

milles on kasutatud valemit:

$$\gamma = \frac{(h_1 + h_2)^2}{w}.$$

Ruutparabolse kujuga ristlõikega stratifitseeritud voolamise dünaamilise rõhu liikme valemities on kasutatud tegurit:

$$K^* = \frac{Q_2^2}{2 g' w_0^5} = \frac{K}{w_0^5}, \quad K = \frac{Q_2^2}{2 g'}.$$



milles

$$h = h_1 + h_2 ,$$

$$H^* = \frac{H}{w_0} = \frac{E_2 - E_1}{\rho_2 g' w_0} ,$$

$$\xi = 1, \frac{2}{3}, 2,$$

$$K^* = \frac{Q_2^2}{2 g' w_0^5} = \frac{K}{w_0^5} ,$$

$$K = \frac{Q_2^2}{2 g' } ,$$

$$q^2 = \frac{Q_1^2}{Q_2^2} ,$$

$$h_2^* = \frac{h_2}{w_0} ,$$

$$h_s^* = \frac{h_s}{w_0} ,$$

$$\frac{h}{w_0} = h^* ,$$

$$\frac{(h_1 + h_2)}{w_0} = (h_1 + h_2)^* .$$

Stratifitseeritud voolamise ruutastmelise ristlõikega voolusängis parameteriseeritakse voolukihtide kombineeritud Froude'i arvuga:

$$G^2 = F_1^2 + F_2^2 ,$$

milles ülemise voolukihi Froude'i arv on

$$F_1^2 = \xi \frac{u_1^2}{g'} \frac{(h_1 + h_2)^{(\xi-1)}}{(h_1 + h_2)^\xi - h_2^\xi}$$

ja ülemise voolukihi Froude'i arv on

$$F_2^2 = \xi \frac{u_2^2}{g' h_2} .$$

(VIITED L 3 ja L 4).

**MÄRKUS.** Ruutastmeline ristlõige (ingl. *quadratic-shape cross-section*) ja ruutastmeline voolusäng (ingl. *quadratic-type channel*).

**MÄRKUS.** Dimensioonitu nelinurkse ristlõikega voolusäangi vaheenergia funktsiooni võib teisendada kujule:

$$\frac{H}{w_0} = \frac{Q_2^2}{2 g' w_0^5} \left(\frac{w_0}{w}\right)^2 \left( \left(\frac{w_0}{h_2}\right)^2 - q^2 \left(\frac{w_0}{h_1}\right)^2 \right) + \frac{h_2}{w_0} + \frac{h_s}{w_0}$$

→

$$\frac{H}{w_0} = \frac{Q_2^2}{2 g' w_0^5} \left(\frac{w_0}{w}\right)^2 \left( \left(\frac{w_0}{h_2}\right)^2 - \frac{q^2}{\left(\frac{h_1}{w_0}\right)^2} \right) + \frac{h_2}{w_0} + \frac{h_s}{w_0},$$

$$\frac{H}{w_0} = \frac{Q_2^2}{2 g' w_0^5} \left(\frac{w_0}{w}\right)^2 \left( \left(\frac{w_0}{h_2}\right)^2 - \frac{q^2}{\left( \left(\frac{h_1 + h_2}{w_0}\right) - \left(\frac{h_2}{w_0}\right) \right)^2} \right) + \frac{h_2}{w_0} + \frac{h_s}{w_0},$$

$$\frac{H}{w_0} = \frac{Q_2^2}{2 g' w_0^5} \left(\frac{w_0}{w}\right)^2 \left( \frac{1}{\left(\frac{h_2}{w_0}\right)^2} - \frac{q^2}{\left( \left(\frac{h_1 + h_2}{w_0}\right) - \left(\frac{h_2}{w_0}\right) \right)^2} \right) + \frac{h_2}{w_0} + \frac{h_s}{w_0},$$

$$\frac{H}{w_0} = \frac{Q_2^2}{2 g' w_0^5} \left(\frac{w_0}{w}\right)^2 \left( \frac{1}{\left(\frac{h_2}{w_0}\right)^2} - \frac{q^2}{\left( \left(\frac{h}{w_0}\right) - \left(\frac{h_2}{w_0}\right) \right)^2} \right) + \frac{h_2}{w_0} + \frac{h_s}{w_0}.$$



# LISA I. PÖÖRLEVA SÜSTEEMI HÜDRAULIKA. PIIRDEGA KITSENDATUD ÜLEVOOL

## I.1 HÜDRAULIKA PÕHIVÖRRANDID PÖÖRLEVALE VOOLUKANALILE

Voolamise hüdraulika põhivõrrandid pöörlevas süsteemis on matemaatiliselt keerulised põhjusel, et puudub ühesuunaline voolamine, st madalveelise voolamise voolukiiruse vektoril pöörlevas kanalis on kaks horisontaalvoolu komponenti. Pöörleva kanalivoolu dünaamikat iseloomustatakse kanalivoolule kohandatud potentsiaalse pööriselisuse võrrandiga (ingl. *potential vorticity equation*), mis võtab arvesse ka pöörlemise nurkkiirust:

$$PV = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + 2 \Omega_3 \rightarrow \frac{f_c}{D_\infty},$$

milles  $u_2$  on madalveelise voolukiiruse kanali-pikisuunaline komponent 2D voolukiiruse vektoris  $\vec{u} = (u_1, u_2, 0)$ ,  $\Omega_3$  on nurkkiiruse vertikaalsuunaline komponent nurkkiiruse vektoris  $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega_3)$  ja  $d$  on kanalipõhja sügavus veepinnast, st veekihi paksus. Pööriselisuse võrrandis on kasutatud voolukiiruse tuletist koordinaatkomponendi  $x_1$  järgi, mis on kanali-ristisuunaline komponent kohavektoril  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Pööriselisuse võrrandi suurus  $f_c = 2 \Omega_3$  on hästi tuntud füüsikalises okeanograafias, mis on Coriolise parameeter, ning  $D_\infty$  on potentsiaalne sügavus, mille juures horisontaalne kiirusvälja pööriselisuse komponent  $\omega_3 = \partial u_2 / \partial x_1 - \partial u_1 / \partial x_2$  läheneb praktiliselt 0 –väärtusele kiirusvälja pööriselisuse vektoris  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = (0, 0, \omega_3) \rightarrow (0, 0, 0)$ , st  $PV \rightarrow \textit{konstant}$ .

Pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandite süsteem koosneb kahest võrrandist:

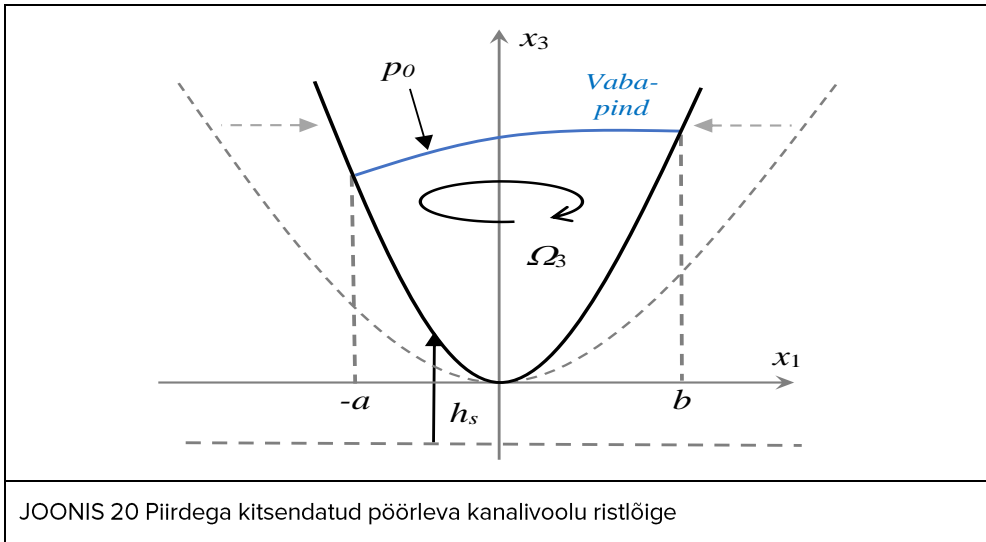
$$a^{*2} = r \left( 1 - \frac{\Delta}{\bar{D}_\infty} \right) - \frac{r}{\bar{D}_\infty^2} \left( \hat{\psi}_i + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2r} \left\{ (2+r) \tanh \left( \frac{a^* + b^*}{2} \right) - 2 a^* \right\}^2,$$

$$b^{*2} = r \left( 1 - \frac{\Delta}{\bar{D}_\infty} \right) - \frac{r}{\bar{D}_\infty^2} \left( \hat{\psi}_i - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2r} \left\{ (2+r) \tanh \left( \frac{a^* + b^*}{2} \right) - 2 b^* \right\}^2,$$

milles  $x_1 = -a$  ja  $x_1 = b$  on vabapinna lõikepunktid ruutparaboolse ristlõikega kanali põhjajoonega. Ruutparaboolse ristlõike põhjajoon on määratud valemiga  $h_s = \alpha x_1^2 + \beta$ . Põhivõrrandites on hüdrauliline suurus  $r = f_c^2 / (g \alpha)$  määratud kui Coriolise parameeter  $f_c$  astmes 2 (ruudus), mis on jagatud raskuskiirendusega  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ja ristlõike ruutparabooli joonevõrrandi ruutliikme kordajaga  $\alpha$ , mille pöördväärtus  $1/\alpha$  iseloomustab nõ kanali ristlõike laiust. Põhivõrrandide dimensioonitu kuju põhineb geostroofilise voolamise valemiga määratud voolamise mastaapsuuruste: vertikaalmastaap  $D_s$ , horisontaalmastaap ehk Rossby deformatsiooni-raadius  $R_s$  ja kiirusmastaap  $V_s$  seostelega:

$$D_s = \sqrt{\frac{f_c Q}{g}}, R_s = \frac{\sqrt{g D_\infty}}{f_c}, V_s = \sqrt{\frac{f_c Q}{D_\infty}}.$$

Dimensioonitu potentsiaalne sügavus  $\widehat{D}_\infty = D_\infty/D_s$ , voolamise vabapinna dimensioonitud lõikepunktid ruutparaboolse ristlõikelise kanali põhjajoonega  $x_1^* = -a^* = -a/D_s$  ja  $x_1^* = b^* = b/D_s$  ja dimensioonitu künnise maksimaalne kõrgus  $\Delta = \beta/D_s$ , milles  $\beta = \{h_s(x_1 = 0)\}_{max}$ . Vooluhulga määratud dimensioonitu voolufunktsioon  $\widehat{\psi}_i = \psi_i/Q$  vastab hoovuste struktuurile väljavoolu basseinis, millest vesi siseneb pöörlevasse kanalisse.



Pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandite süsteemi võib lahendada numbriliselt. Numbrilise arvutuskeemi asemel võib kasutada ka astmerea lahendusi lihtsamate valemite tuletamisel. Pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandite astmerealist lahendust saab kasutada mittepöörleva voolusängiga ülevoolu lahenduse selgitamisel.

**MÄRKUS.** Funktsiooni  $f(z)$  astmerekas nimetatakse funktsionaalrida:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - c)^k = a_0 + a_1 (z - c)^1 + a_2 (z - c)^2 + a_2 (z - c)^2 + a_3 (z - c)^3 + \dots$$

Üldjuhul nimetatakse funktsiooni astmerida Taylori reaks. Kui astmerea üldjuhtu vastavalt lihtsustada, näiteks valida parameeter  $c = 0$ , siis nimetatakse astmerida Maclaurini reaks:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

## I.2 ASTMEREALINE LAHENDUS

Pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandite süsteemi astmerealine lahenduse võib esitada potentsiaalse sügavuse  $\widehat{D}_\infty$  kaudu, milles eeldatakse, et  $\widehat{D}_\infty$  sõltub Coriolise parameetrist  $f_c$ , mis on seotud hüdraulilise suurusega  $r = f_c^2 / (g \alpha)$ . Eeldame, et eksisteerib seos  $\widehat{D}_\infty^{-2} = r^{1/2} \mu$ , milles  $\mu = \textit{konstant}$  on nõ proportsionaalsuse parameeter. Võtame lineaarteisendusega kasutusele voolamise vabapinna dimensioonitud lõikepunktid ruutparaboolse ristlõikelise kanali põhjajoonega  $(a, b) = r^{-1/2}(a^*, b^*)$ , milles on kasutatud kordajat  $r^{1/2} = \gamma$ . Arendame pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandid astmeritta väikese parameetri  $\gamma$  järgi vastavalt:

$$2 \gamma^2 a^2 = 2 \gamma^2 \left( 1 - \frac{\Delta}{\widehat{D}_\infty} \right) - 2 \gamma^3 \mu \left( \widehat{\psi}_i - \frac{1}{2} \right) - \{ (\gamma^2 + 2)(C_1 a + b) + C_3 \gamma^2 (a + b)^3 + \dots \} + 2 a^2,$$

$$2 \gamma^2 b^2 = 2 \gamma^2 \left( 1 - \frac{\Delta}{\widehat{D}_\infty} \right) - 2 \gamma^3 \mu \left( \widehat{\psi}_i + \frac{1}{2} \right) - \{ (\gamma^2 + 2)(C_1 a + b) + C_3 \gamma^2 (a + b)^3 + \dots \} + 2 b^2.$$

Astmerea võrrandites on trigonomeetiline funktsioon: hüperboolne tangens arendatud Maclaurini astmeritta, mille koonduvusraadius on  $|a + b| < \pi$ :

$$\tanh\left(\frac{a + b}{2}\right) = - \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k-1} (a + b)^{2k-1},$$

milles kordajad on määratud rekursiivse valemiga:

$$C_{2k-1} = \frac{-2(2^{2k} - 1)}{(2k)!} B_{2k},$$

milles  $B_n$  on  $n$ -järku Bernoulli arv:

$$\frac{x}{e^x - 1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}.$$

Esitades pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandite lahendid astmerealistele suurustele:

$$(a, b) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_k, b_k) \gamma^k,$$

võib välja kirjutada järgmised lahendid astmetele  $\gamma^k$ , milles  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ . Esitame astmetele  $\gamma^k$  lahendid vastavalt pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandite lahendite summade ( $\sigma$ ) ja vahede ( $\delta$ ) kaudu:

$$\delta(0): \text{---}, \delta(1): \text{---}, \delta(2): \text{---},$$

$$\sigma(0): a_0 = b_0, \sigma(1): \text{---},$$

$$\sigma(2): (a_1 - b_1)^2 = 2 \left( 1 - \frac{\Delta}{\bar{D}_\infty} - a_0^2 \right),$$

$$\delta(3): 2\mu + \frac{1}{3}(a_1 - b_1)(a_0 + b_0)^3 = 0,$$

$$\sigma(3): \mu \hat{\psi}_i + a_0(a_1 + b_1) + (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) = 0,$$

$$\delta(4): (a_2 - b_2) 8 a_0^3 + 12 a_0^2 (a_1 - b_1)(a_1 + b_1) = 0,$$

$$\sigma(4): a_1^2 + b_1^2 + 2 a_0 (a_2 + b_2) + (a_2 - b_2)^2 + 2 (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) + a_0^2 - 32 a_0^4 C_3 + 256 a_0^6 C_3^2 = 0.$$

Rekursiivsed valemid pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandite lahendite summade ( $\sigma$ ) ja vahede ( $\delta$ ) kaudu, mis on esitatud astmetele  $\gamma^k$ , milles  $k \geq 5$  on vastavalt:

$$\begin{aligned} & 8 a_0^3 (a_{N-2} - b_{N-2}) + 12 a_0^2 \{ (a_1 + b_1)(a_{N-3} - b_{N-3}) + (a_1 - b_1)(a_{N-3} + b_{N-3}) \} \\ & + 2 a_0 (a_1 - b_1) \sum_{k=1}^{N-4} (a_k + b_k)(a_{N-3-k} + b_{N-3-k}) + \\ & + 4 a_0 (a_1 + b_1) \sum_{k=1}^{N-4} (a_k - b_k)(a_{N-3-k} + b_{N-3-k}) + \\ & + 4 a_0^2 \sum_{k=2}^{N-4} (a_k - b_k)(a_{N-2-k} + b_{N-2-k}) + \\ & + \sum_{l=2}^{N-4} \left\{ \sum_{k=0}^l (a_k - b_k)(a_{l-k} + b_{l-k}) \right\} \times \sum_{k=0}^{N-2-l} (a_k + b_k)(a_{N-2-l-k} + b_{N-2-l-k}) \} + \\ & + C_3^{-1} \sum_{q=4,6,\dots}^Q \{ C_{q+1} \Phi(N - q, q + 1) + C_{q-1} \Phi(N - q, q + 1) \} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2 (a_1 - b_1)(a_{N-1} - b_{N-1}) + 2(a_2 - b_2 + a_0)(a_{N-2} - b_{N-2}) + \\ & + \sum_{q=4,6,\dots}^Q \{ \Omega(N - q, q - 2)\theta_1 + \Omega(N - q, q)\theta_2 + 4\Omega(N - q, q + 1)\theta_3 \} + \\ & + \sum_{q=4,6,\dots}^Q \{ 2C_{q-1}\Omega(N - q, q) + 4C_{q+1}\Omega(N - q, q + 2) \} + \sum_{k=1}^{N-3} (a_k a_{N-2-k} + b_k b_{N-2-k}) \\ & + \sum_{k=3}^{N-3} (a_k - b_k)(a_{N-k} - b_{N-k}) = 0, \end{aligned}$$

milles

$$\theta_1 = \sum_{k=1,3,\dots}^{q-3} C_k C_{q-2-k},$$

$$\theta_2 = \sum_{k=1,3,\dots}^{q-1} C_k C_{q-k},$$

$$\theta_3 = \sum_{k=1,3,\dots}^{q+1} C_k C_{q+2-k}.$$

Kordajad  $\Phi(j, k)$  ja  $\Omega(j, k)$  määravad funktsiooni  $r^{j/2}$  koefitsiendid vastavalt rittaarendustele  $(a-b)(a+b)^k$  ja  $(a+b)^k$ . Nende ridade summerimise piiri määrab reaalarvulise osa funktsioonist  $N/2$ , mis tuleb korrutada arvuga 2, rekursiivsetes valemities  $N \geq 5$ . (VIIDE L 5)

### I.3 MADALAMA-JÄRGULINE LAHENDUS

Võttes kasutusele rekursiivsed valemities pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandite lahendite summadele  $\sigma(0)$ ,  $\sigma(2)$  ja vahele  $\delta(3)$ , järeldub 8-järgu algebraline võrrand:

$$a_0^8 - \left(1 - \frac{\Delta}{\widehat{D}_\infty}\right) a_0^6 + \frac{9}{32} \mu^2 = 0.$$

Kui kasutada funktsiooni ekstreemumi määramise teoreemi suuruse  $a_0$  järgi:

$$\frac{d f}{d a_0} = \frac{d}{d a_0} \left( a_0^8 - \left(1 - \frac{\Delta}{\widehat{D}_\infty}\right) a_0^6 + \frac{9}{32} \mu^2 \right) = 0,$$

siis järeldub funktsioonist

$$f = a_0^8 - \left(1 - \frac{\Delta}{\widehat{D}_\infty}\right) a_0^6 + \frac{9}{32} \mu^2,$$

milles  $a_0$  on muutuja ja  $\widehat{D}_\infty, \Delta$  ja  $\mu$  on konstantsed suurused, järgmine avaldis:

$$\mu_c^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{\Delta}{\widehat{D}_\infty}\right),$$

milles

$$\widehat{D}_\infty^{-2} = r^{1/2} \mu_c.$$

Pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandite madalamajärguline lahendus:

$$a_{0,c}^2 = \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{\Delta}{\widehat{D}_\infty} \right),$$

vastab ruutparaboolse ristlõikega ülevoolu maksimaalse vooluhulga valemile:

$$Q = g^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} (PK)^{\frac{3}{2}} W = g^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{4} PK \right)^{\frac{3}{2}} W,$$

milles

$$W = 2 a_{0,c},$$

$$PK = D_\infty - \{h_s(x_1 = 0)\}_{max}.$$

(VIITED L 5 ja L 6).

# LISA J. PÖÖRLEVA SÜSTEEMI HÜDRAULIKA. KÜNNISEGA ÜLEVOOL

## J.1 HÜDRAULIKA PÕHIVÕRRANDID PÖÖRLEVALE VOOLUKANALILE

Voolamise hüdraulika põhivõrrandid pöörlevas süsteemis on matemaatiliselt keerulised põhjusel, et puudub ühesuunaline voolamine, st madalveelise voolamise voolukiiruse vektoril pöörlevas kanalis on kaks horisontaalvoolu komponenti. Pöörleva kanalivoolu dünaamikat iseloomustatakse kanalivoolule kohandatud potentsiaalse pööriselisuse võrrandiga (ingl. *potential vorticity equation*), mis võtab arvesse ka pöörlemise nurkkiirust:

$$PV = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + 2 \Omega_3 \rightarrow \frac{f_c}{D_\infty},$$

milles  $u_2$  on madalveelise voolukiiruse kanali-pikisuunaline komponent 2D voolukiiruse vektoris  $\vec{u} = (u_1, u_2, 0)$ ,  $\Omega_3$  on nurkkiiruse vertikaalsuunaline komponent nurkkiiruse vektoris  $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega_3)$  ja  $d$  on kanalipõhja sügavus veepinnast, st veekihi paksus. Pööriselisuse võrrandis on kasutatud voolukiiruse tuletist koordinaatkomponendi  $x_1$  järgi, mis on kanali-ristisuunaline komponent kohavektoris  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Pööriselisuse võrrandi suurus  $f_c = 2 \Omega_3$  on hästi tuntud füüsikalises okeanograafias, mis on Coriolise parameeter, ning  $D_\infty$  on potentsiaalne sügavus, mille juures horisontaalne kiirusvälja pööriselisuse komponent  $\omega_3 = \partial u_2 / \partial x_1 - \partial u_1 / \partial x_2$  läheneb praktiliselt 0 –väärtusele kiirusvälja pööriselisuse vektoris  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = (0, 0, \omega_3) \rightarrow (0, 0, 0)$ , st  $PV \rightarrow \text{konstant} \rightarrow 0$ .

Pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandite süsteem koosneb kahest võrrandist:

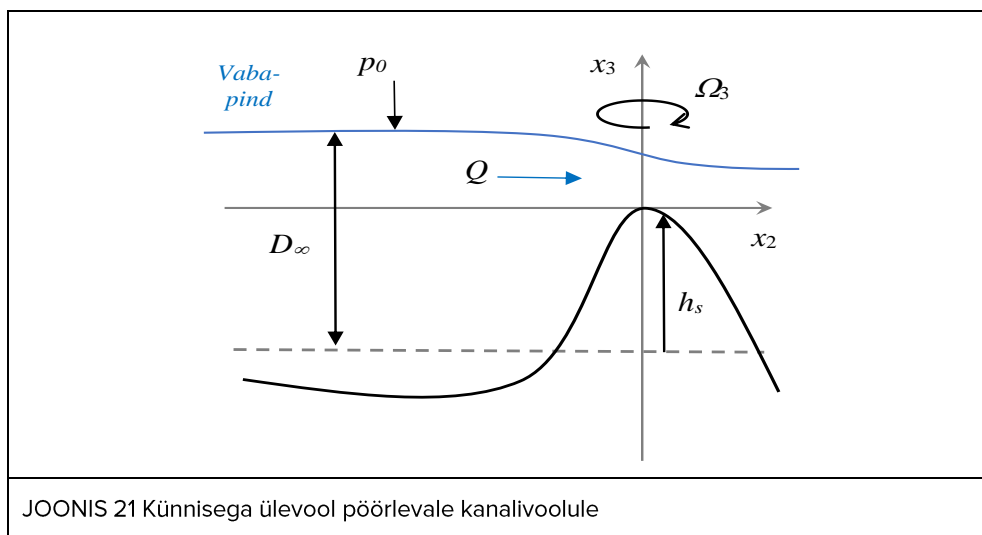
$$a^{*2} = r \left( 1 - \frac{\Delta}{\widehat{D}_\infty} \right) - \frac{r}{\widehat{D}_\infty^2} \left( \widehat{\psi}_i + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2r} \left\{ (2+r) \tanh \left( \frac{a^* + b^*}{2} \right) - 2 a^* \right\}^2,$$

$$b^{*2} = r \left( 1 - \frac{\Delta}{\widehat{D}_\infty} \right) - \frac{r}{\widehat{D}_\infty^2} \left( \widehat{\psi}_i - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2r} \left\{ (2+r) \tanh \left( \frac{a^* + b^*}{2} \right) - 2 b^* \right\}^2,$$

milles  $x_1 = -a$  ja  $x_1 = b$  on vabapinna lõikepunktid ruutparaboolse ristlõikega kanali põhjajoonega. Ruutparaboolse ristlõike põhjajoon on määratud valemiga  $h_s = \alpha x_1^2 + \beta$ . Põhivõrrandites on hüdrauliline suurus  $r = f_c^2 / (g \alpha)$  määratud kui Coriolise parameeter  $f_c$  astmes 2 (ruudus), mis on jagatud raskuskiirendusega  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ja ristlõike ruutparabooli joonevõrrandi ruutliikme kordajaga  $\alpha$ , mille pöördväärtus  $1/\alpha$  iseloomustab nõ kanali ristlõike laiust. Põhivõrrandide dimensioonitu kuju põhineb geostroofilise voolamise valemiga määratud voolamise mastaapsuuruste: vertikaalmastaap  $D_s$ , horisontaalmastaap ehk Rossby deformatsiooniraadius  $R_s$  ja kiirusmastaap  $V_s$  seoste:

$$D_s = \sqrt{\frac{f_c Q}{g}}, R_s = \frac{\sqrt{g D_\infty}}{f_c}, V_s = \sqrt{\frac{f_c Q}{D_\infty}}.$$

Dimensioonitu potentsiaalne sügavus  $\widehat{D}_\infty = D_\infty/D_s$ , voolamise vabapinna dimensioonitud lõikepunktid ruutparaboolse ristlõikelise kanali põhjajoonega  $x_1^* = -a^* = -a/D_s$  ja  $x_1^* = b^* = b/D_s$  ja dimensioonitu künnise maksimaalne kõrgus  $\Delta = \beta/D_s$ , milles  $\beta = \{h_s(x_1 = 0)\}_{max}$ . Vooluhulga määratud dimensioonitu voolufunktsioon  $\widehat{\psi}_i = \psi_i/Q$  vastab hoovuste struktuurile väljavoolu basseinis, millest vesi siseneb pöörlevasse kanalisse.



Pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandite süsteemi võib lahendada numbriliselt. Numbrilise arvutuskeemi asemel võib kasutada ka astmerea lahendusi lihtsamate valemite tuletamisel. Pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandite astmerealist lahendust saab kasutada pöörleva voolusängiga ülevoolu lahenduse selgitamisel, kui potentsiaalne pööriselisus  $PV \rightarrow konstant$ . (VIIDE L 7).

**MÄRKUS.** Funktsiooni  $f(z)$  astmerekaks nimetatakse funktsionaalrida:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - c)^k = a_0 + a_1 (z - c)^1 + a_2 (z - c)^2 + a_2 (z - c)^2 + a_3 (z - c)^3 + \dots$$

Üldjuhul nimetatakse funktsiooni astmerida Tayloriga reaks. Kui astmerea üldjuhtu vastavalt lihtsustada, näiteks valida parameeter  $c = 0$ , siis nimetatakse astmerida Maclaurin reaks:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$



## J.2 ASTMEREALINE LAHENDUS

Pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandite süsteemi astmerealise lahenduse võib esitada tingimusele, et dimensioonitu potentsiaalse sügavuse ja künnise kõrguste vahe, st paistuskõrgus  $\hat{D}_\infty - \Delta$  võetud parameetrik. Võtame lineaarteisendusega kasutusele voolamise vabapinna dimensioonitud löikepunktid ruutparaboolse ristlõikelise kanali põhjajoonega  $(a, b) = \varepsilon^{1/2}(a^*, b^*)$ , milles on kasutatud kordajat  $\varepsilon = 1/\hat{D}_\infty$ . Arendame pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandid astmeritta väikese parameetri  $\varepsilon$  järgi vastavalt:

$$\frac{r^2(\hat{D}_\infty - \Delta)}{(2+r)} - \varepsilon \frac{r^2(\hat{\psi}_i + 1/2)}{(2+r)} - \frac{(2+r)}{2} \left( \hat{C}_3(a+b)^2 + \varepsilon \hat{C}_5(a+b)^4 + \varepsilon^2 \hat{C}_7(a+b)^6 + \dots \right) +$$

$$+ ab + 2a \left( \varepsilon C_3(a+b)^3 + \varepsilon^2 C_5(a+b)^5 + \varepsilon^3 C_7(a+b)^7 + \dots \right) = 0$$

$$\frac{r^2(\hat{D}_\infty - \Delta)}{(2+r)} - \varepsilon \frac{r^2(\hat{\psi}_i - 1/2)}{(2+r)} - \frac{(2+r)}{2} \left( \hat{C}_3(a+b)^2 + \varepsilon \hat{C}_5(a+b)^4 + \varepsilon^2 \hat{C}_7(a+b)^6 + \dots \right) +$$

$$+ ab + 2b \left( \varepsilon C_3(a+b)^3 + \varepsilon^2 C_5(a+b)^5 + \varepsilon^3 C_7(a+b)^7 + \dots \right) = 0$$

Astmerea võrrandites on trigonomeetiline funktsioon: hüperboolne tangens arendatud Maclaurini astmeritta, mille koonduvusraadius on  $|a + b| < \pi$ :

$$\tanh\left(\frac{a+b}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k-1} (a+b)^{2k-1},$$

milles kordajad on määratud rekursiivse valemiga:

$$C_{2k-1} = \frac{2(2^{2k} - 1)}{(2k)!} B_{2k},$$

ning

$$\tanh^2\left(\frac{a+b}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{C}_{2k+1} (a+b)^{2k},$$

milles kordajad on määratud rekursiivse valemiga:

$$\hat{C}_{2k+1} = -2k C_{2k+1},$$

milles  $B_n$  on  $n$ -järku Bernoulli arv:

$$\frac{x}{e^x - 1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}.$$

Väikese parameetri  $\varepsilon$  järgi, pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandite astmerealiste lahendite summad ( $\sigma$ ) ja vahed ( $\delta$ ) on vastavalt:

$$\delta: \frac{r^2}{2(2+r)} + C_3(a+b)^3(b-a) + \varepsilon C_5(a+b)^5(b-a) + \varepsilon^2 C_7(a+b)^7(b-a) + \varepsilon^3 C_9(a+b)^9(b-a) + \varepsilon^4 C_{11}(a+b)^{11}(b-a) + \dots = 0,$$

$$\sigma: \frac{r^2(\hat{D}_\infty - \Delta)}{(2+r)} - \varepsilon \frac{r^2 \hat{\psi}_i}{(2+r)} - \frac{1}{4}(b-a)^2 - \frac{r}{8}(a+b)^2 + \varepsilon[(2+r)5C_5 + C_3](a+b)^4 + \varepsilon^2[(2+r)7C_7 + C_5](a+b)^6 + \varepsilon^3[(2+r)9C_9 + C_7](a+b)^8 + \dots = 0$$

Esitades pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandite astmerealised lahendid omakorda astmerealistele suurustele:

$$(a, b) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n, b_n) \varepsilon^n,$$

võib välja kirjutada järgmised lahendid astmetele  $\varepsilon^k$ , milles  $k = 0, 1$ .  $N$ -järku algebralased võrrandid, mis on tuletatud väikese parameetri  $\varepsilon$  järgi, pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandite astmerealiste lahendite summadele ( $\sigma$ ) ja vahedele ( $\delta$ ) on vastavalt järgmised:

$$\delta_0: \frac{r^2}{(2+r)} - \frac{1}{12}(a_0 + b_0)^3(b_0 - a_0) = 0,$$

$$\sigma_0: \frac{r^2(\hat{D}_\infty - \Delta)}{(2+r)} - \frac{1}{4}(b_0 - a_0)^2 - \frac{r}{8}(a_0 + b_0)^2 = 0,$$

$$\delta_1: \frac{(a_0 + b_0)^3}{30} - \frac{(a_0 + b_0)}{3(b_0 - a_0)}(b_1 - a_1) - (a_1 + b_1) = 0,$$

$$\sigma_1: \frac{r^2 \hat{\psi}_i}{(2+r)} + \frac{1}{2}(b_0 - a_0)(b_1 - a_1) + \frac{r}{4}(a_0 + b_0)(a_1 + b_1) - \frac{r}{48}(a_0 + b_0)^4 = 0,$$

ja rekursiivsed võrrandid, mille järk  $N \geq 2$  on järgmised:

$$\begin{aligned} & (a_0 + b_0)^3(b_N - a_N) + 3(a_0 + b_0)^2(a_N + b_N)(b_0 - a_0) = \\ & = -(b_0 - a_0)(a_0 + b_0) \sum_{i=1}^{N-1} (a_i + b_i)(a_{N-i} + b_{N-i}) - \\ \delta_N: & -(b_0 - a_0) \sum_{i=1}^{N-1} (a_i + b_i) \sum_{j=0}^{N-i} (a_j + b_j)(a_{N-i-j} + b_{N-i-j}) - \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} A_{3,i}(b_{N-i} - a_{N-i}) + 24 \sum_{k=1}^N C_{3+2k} B_{3+2k, N-k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (b_0 - a_0)(b_N - a_N) + \frac{r}{2}(a_0 + b_0)(a_N + b_N) = \\
\sigma_N: & = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (b_i - a_i)(b_{N-i} - a_{N-i}) - \frac{r}{4} \sum_{i=1}^{N-1} (a_i + b_i)(a_{N-i} + b_{N-i}) + \\
& + 2 \sum_{k=1}^N [(2+r)(3+2k)C_{3+2k} + C_{1+2k}] A_{2+2k, N-k} \quad .
\end{aligned}$$

Rekursiivsetes võrrandites, mille järk  $N \geq 2$  on kordajaid  $A_{j,k}$  ja  $B_{j,k}$  määratud vastavalt astmetele  $\varepsilon^k$  astmeridades  $(a+b)^j$  ja  $(a+b)^j(b-a)$ .  $N$  –järku lahendi, st lineaar-teisendusega muudetud voolamise vabapinna dimensioonitud löikepunktid ruutparaboolse ristlõikelise kanali põhjajoonega  $(a_N, b_N)$ , määratakse vastavalt pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandite astmerealiste lahendite summadele ( $\sigma_N$ ) ja vahele ( $\delta_N$ ), seda ainult kui astmeridade matemaatiline ülesanne on lahendatud järguni  $N - 1$ .

### J.3 MADALAMA-JÄRGULINE LAHENDUS

Võttes kasutusele rekursiivsed valemid pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandite lahendite summale  $\sigma_0$  ja vahele  $\delta_0$ , järeldub 8-järgu algebraline võrrand muutujale  $(a_0 + b_0)$ :

$$(a_0 + b_0)^8 - \frac{8r}{(2+r)}(\widehat{D}_\infty - \Delta)(a_0 + b_0)^6 + \frac{288r^3}{(2+r)^2} = 0.$$

Kui kasutada funktsiooni ekstreemumi määramise teoreemi suuruse  $(a_0 + b_0)$  järgi:

$$\frac{df}{da_0} = \frac{d}{da_0} \left( (a_0 + b_0)^8 - \frac{8r}{(2+r)}(\widehat{D}_\infty - \Delta)(a_0 + b_0)^6 + \frac{288r^3}{(2+r)^2} \right) = 0,$$

siis järeldub funktsioonist

$$f = (a_0 + b_0)^8 - \frac{8r}{(2+r)}(\widehat{D}_\infty - \Delta)(a_0 + b_0)^6 + \frac{288r^3}{(2+r)^2},$$

milles  $(a_0 + b_0)$  on muutuja ja  $\widehat{D}_\infty - \Delta$  ja  $r$  on konstantsed suurused, järgmine avaldis:

$$\frac{3r(\widehat{D}_\infty - \Delta)^4}{2(2+r)^2} = 1.$$

See tulemus vastab ruutparaboolse ristlõikega ülevoolu maksimaalse vooluhulga valemile pöörlevas voolukanalis, millele potentsiaalne pööriselisus  $PV = 0$ :

$$Q = \frac{PK^2}{(2+r)} \left( \frac{3g}{2\alpha} \right)^{1/2},$$

milles paisutuskõrgus on

$$PK = D_\infty - \{h_s(x_1 = 0)\}_{max}.$$

Pöörleva kanalivoolu hüdraulika võrrandite analüütilist lahendust saab kasutada pöörleva voolusängiga ülevoolu arvutamise puhul, kui potentsiaalne sügavus  $D_\infty \rightarrow \infty$ , st potentsiaalne pööriselisus  $PV \rightarrow 0$  (VIIDE L 8).

## VIITED

- L 1 Brkić, D. (2011). W solutions of the CW equation for flow friction, *Applied Mathematics Letters* 24(8), 1379–1383.
- L 2 Chadwick, A., Morfett, J. & Borthwick, M. (2004). *Hydraulics in Civil and Environmental Engineering*. Spon Press.
- L 3 Laanearu, J. & Davies, P. (2007). Hydraulic control of two-layer flow in „quadratic“-type channels, *Journal of Hydraulic Research*, 45(1), 3–12.
- L 4 Laanearu, J. & Cuthbertson, P. (2022). Hydraulics of stratified sill flows within varying channel geometries: investigating energy loss and mixing of maximal two-layer Exchange, *Environmental Fluid Mechanics* (Submitted to Special Issue).
- L 5 Borenäs, K. & Lundberg, P. (1988). On the deep-water flow through the Faroe Bank Channel, *Journal of Geophysical Research*, 93(C2), 1281–1292. <https://doi.org/10.1029/JC093iC02p01281>.
- L 6 Lundberg, P. & Laanearu, J. (2017). Improvements of series convergence to the rotating-channel flow problem using hydraulic solutions for a parabolic passage, *Journal of Hydraulic Research*, 56(3), 1–11. DOI: 10.1080/00221686.2017.1354929
- L 7 Laanearu, J. & Lundberg, P. (2005). Analysis and improvement of a perturbation solution for hydraulic flow in a rotating parabolic channel, *Zamm-Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 85(7), 490–498.
- L 8 Borenäs, K. & Lundberg, P. (1988). On the deep-water flow through the Faroe Bank Channel, *Journal of Geophysical Research*, 93(C2), 1281–1292. <https://doi.org/10.1029/JC093iC02p01281>.

# TÄHISTUSED

## LIHTTÄHISTUSED

- $l$  – pikkus ( $[l] = \text{m}$ ) (mõõde)  
 $w$  – laius ( $[l] = \text{m}$ ) (mõõde)  
 $f$  – Fanningi hõõrdetakistustegur ( $[f] = 1$ )  
 $h$  – kõrgus ( $[l] = \text{m}$ ) (mõõde)  
 $d$  – sügavus ( $[l] = \text{m}$ ) (mõõde)  
 $u$  – voolukiirus ( $[u] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )  
 $v$  – liikumiskiirus ( $[v] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )  
 $a$  – kiirendus ( $[a] = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )  
 $g$  – raskuskiirendus ( $[g] = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )  
 $m$  – mass ( $[m] = \text{kg}$ )  
 $p$  – rõhk ( $[p] = \text{Pa}$ )  
 $t$  – aeg ( $[t] = \text{s}$ )  
 $S$  – tasapinna pindala ( $[S] = \text{m}^2$ )  
 $V$  – vedelikuosa ruuma ( $[V] = \text{m}^3$ )  
 $B$  – Bernoulli kolmikliige ( $[B] = \text{m}$ )  
 $E$  – mehaaniline erienergia ( $[E] = \text{m}$ )

## ERITÄHISTUSED

- $A_e$  – elavlõige ( $[A_e] = \text{m}^2$ )  
 $h_t$  – survekadu ( $[h_t] = \text{m}$ )  
 $h_l$  – hõõrdesurvekadu ( $[h_l] = \text{m}$ )  
 $h_k$  – kohtsurvekadu ( $[h_k] = \text{m}$ )  
 $h_{p_{ais}}$  – paisu kõrgus ( $[h_p] = \text{m}$ )  
 $h_u$  – uputuskõrgus paisu alumises bjefis ( $[h_p] = \text{m}$ )  
 $d_s$  – toru sisediameeter ( $[d_s] = \text{m}$ )  
 $d_0$  – ühtlase vabavoolu normaalsügavus ( $[d_n] = \text{m}$ )  
 $z_{sv}$  – süsteemi sissevoolu raskuskõrgus ( $[z_{sv}] = \text{m}$ )  
 $z_{vv}$  – süsteemi väljavoolu raskuskõrgus ( $[z_{sv}] = \text{m}$ )  
 $u_{sv}$  – süsteemi sissevoolu voolukiirus ( $[u_{sv}] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )  
 $u_{vv}$  – süsteemi väljavoolu voolukiirus ( $[u_{sv}] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )  
 $p_{sv}$  – rõhk süsteemi sissevoolus ( $[p_{sv}] = \text{Pa}$ )

$p_{vv}$  – rõhk süsteemi väljavoolus ( $[p_{vv}] = \text{Pa}$ )  
 $p_{atm}$  – atmosfääri rõhk ( $[p_{atm}] = \text{J} \cdot \text{m}^{-3} = \text{Pa}$ ) (termodünaamiline rõhk, 101 325 Pa = 101,325 kPa)  
 $p_{\text{õhk}}$  – õhurõhk ( $[p_{\text{õhk}}] = \text{J} \cdot \text{m}^{-3} = \text{Pa}$ ) (termodünaamiline rõhk)  
 $p_0$  – vabapinna rõhk ( $[p_0] = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} = \text{Pa}$ ) (mehaaniline rõhk)  
 $h_{rvk}$  – rõhuvahekõrgus ( $[h_{rvk}] = \text{m}$ )  
 $h_d$  – suhteline torutäide ( $[h_d] = 1$ )  
 $D_h$  – hüdrauliline diameeter ( $[D_h] = \text{m}$ )  
 $R_h$  – hüdrauliline raadius ( $[R_h] = \text{m}$ )  
 $n_M$  – Manningi karedustegur ( $[n_M] =$  )  
 $n_{Me}$  – ekvivalent Manningi karedustegur ( $[n_{Me}] =$  )  
 $m_n$  – nõlvustegur ( $[m_n] = 1$ )  
 $l_{pais}$  – paisu läve pikkus, paisu harja paksus ( $[l_{pais}] = \text{m}$ )  
 $h_{pais}$  – paisu läve kõrgus ( $[h_{pais}] = \text{m}$ )  
 $DN/ID$  – toru nimimõõt, mis on määratud toru siseläbimõõduga ( $[DN/ID] = \text{mm}$ )  
 $DN/OD$  – toru nimimõõt, mis on määratud toru välisläbimõõduga ( $[DN/OD] = \text{mm}$ )  
 $I_h$  – hüdrauliline lang ( $[I_h] = 1$ )  
 $\tau_0$  – voolupiirde hõrdepinge ( $[\tau_0] = \text{Pa}$ )  
 $C_d$  – vooluhulgategur ( $[C_d] = 1$ ) (Maksimaalse vooluhulga valemi koefitsient)  
 $C_d^*$  – ülevoolutegur ( $[C_d^*] = 1$ ) (Ülevoolu põhivalemi koefitsient)  
 $i_0$  – lang, põhjalang, voolusäangi põhja lang ( $[i_0] = \text{m} \cdot \text{m}^{-1}$ )  
 $k_L$  – kohttakistustegur ( $[k_L] = 1$ )  
 $x, y, z$  – horisontaalsed ja vertikaalsed koordinaadid ( $[x, y, z] = \text{m}$ )  
 $\Delta t$  – ajavahemik ( $[t] = \text{s}$ )  
 $PK$  – paisutuskõrgus ( $[PK] = \text{m}$ )  
 $ME$  – mehaaniline energia ( $[ME] = \text{J}$ )  
 $PE$  – potentsiaalne energia ( $[PE] = \text{J}$ )  
 $KE$  – kineetiline energia ( $[KE] = \text{J}$ )  
 $KP$  – kontrollpind ( $[KP] = \text{m}^2$ )  
 $KM$  – kontrollmaht ( $[KM] = \text{m}^3$ )  
 $TE$  – Astmerealise lahebnduse järguga määratud viga  
 $SC$  – numbrilise arvutuskeemi stabiilsustegur  
 $LambertW$  – Lambert W funktsioon  
 $CW$  – Colebrook-White'i hõõrdetakistusteguri funktsioon

*ERF* – Newtoni iteratsioonmeetodi veafunktsioon

$J(\mathbf{z}_0)$  – Jacobian argumenti vektorist  $\mathbf{z}_0$

$y$  – funktsiooni argumenti vektor

$\mathbf{z}$  – funktsiooni argumenti vektor

$\epsilon$  – Tayloriga reas parameeter

## SUHTARVUD

**Re** – Reynoldsi arv ( $[Re] = 1$ )

**Fr** – Froude'i arv ( $[Fr] = 1$ )

**Re<sub>vs</sub>** – voolusängi Reynoldsi arv ( $[Re_{vs}] = 1$ )

**Zu** – Zhukoski arv (ka Žukoski arv) ( $[Zu] = 1$ )

## KREEKA TÄHISTUSED

$\lambda$  – Darcy hõõrdetakistustegur ( $[\lambda] = 1$ )

$\nu$  – kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur ( $[\nu] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )

$\mu$  – dünaamiline molekulaarne viskoossustegur ( $[\mu] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ )

$\rho$  – vedeliku (ka gaasi) tihedus ( $[\rho] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )

$\chi$  – märgpiire ( $[\chi] = \text{m}$ )

$Q$  – vooluhulk ( $[Q] = \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )

$\vartheta$  – materiaalne ruumala ( $[\vartheta] = \text{m}^3$ )

$\Pi$  – Hüdraulilise voolusüsteemi takistustegur ( $[\Pi] = 1$ )

## TERMINID

### A

Aerotank – reovee puhastusprotsessis kasutatava aktiivmudapuhasti õhustuskamber, kus toimub reovee rikastamine õhuhapnikuga;

Aeroobne protsess – hapniku tõttu toimuv keemiline või bioloogiline protsess (anaeroobne protsess on õhuta toimuv protsess)

Anaeroobne keskkond – keskkond, kus puudub nii vaba hapnik kui ka keemilisse ühendesse seotud hapnik. Hapniku täielik puudumine eristabki anaeroobset keskkonda aeroobsest keskkonnast.

Ahasristlõige – joa vähim ristlõige piirdest eraldunud voolamisel (nt avas)

Ajaühik – diferentsiaalselt väike ajavahemik

Akumuleerimine – kogumine (sademevee korral võib olla ka lühiajaline hetkekoormuse reguleerimiseks)

Alarõhk – atmosfääri rõhust madalam rõhk

Alavesi – vesiehitise (nt paisu) alumises bjefis olev vesi (kasutusel ka termin alumine bjeff)

Altjuhe – vt düüker

Alumine bjeff – vahetult vesiehitisest (nt paisust) allavoolu paiknev vooluveekogu osa (ka paisu nõlvaga allavoolu määratud konstruktsiooniline piire)

Aluspõhi – voolusängi ristlõike põhja horisontaalne osa (olemas trapets-, nelinurkristlõikega voolusängis) (termin kasutusel ka geoloogias, kus aluspõhi tähendab mingi ala maapõue tard-, moonde- ja settekivimeid nende looduslikus ladestuses)

Antisanitaarsed tingimused – tervishoiuunõuetele mittevastavad tingimused

Anum – avatud ese, milles on võimalik hoida vedelas ja tahkes olekus aineid või õhukindel suletud ese gaasilises olekus ainete hoidmiseks

Archimedese seadus – keha ujuvust vedelikus selgitav printsiip

Arteesia vesi – survealine põhjavesi

Arvestuslik vooluhulk – valitud või etteantud vooluhulk

Arvutuslik vooluhulk – numbrilises arvutusskeemis kasutusel olev vooluhulga muutuja

Arvutusrõhk – rõhutsooni või süsteemi suurim määratud töö rõhk, mis arvestab süsteemi arengut tulevikus, kuid ei arvesta hüdraulilist lööki (EVS 921:2014)

Arvutusvooluhulk – vooluhulk, mida kasutatakse süsteemi elementide (torustikud, pumbad, mahutid jms) dimensioonimiseks

Astangkaev – kaev, mille erineva rajamissügavusega sisse- ja väljavooluava on ühendatud järsult kaldu toru või kanali või kaskaadiga (EVS 848:2021)

Atmosfääri rõhk – termodünaamiline rõhk väärtusega  $101\,325\text{ Pa} = 101,325\text{ kPa}$

Auruline kavitatsioon – rõhu alanemisega aurustuv vesi hüdraulilises voolusüsteemis

Aurumine – aurumine on füüsikaline protsess, mida väljendab osakeste väljumine vedeliku jahtumisel läbi tema vabapinna protsesside



Automaatklapp – tööstusautomaatikaga juhitud klapp  
Avariolukord – hüdraulilise voolusüsteemi mittefunktsioneerimine tehnilistel põhjustel  
Avasäng – pealt avatud vabavoolu suunav füüsiline piire (nt jõesäng või tehiskanali)

## B

Bassein – vett akumulatsiooniv füüsiline piire (nt veereservuaar)  
Bernoulli arv – ratsionaalarvude jada  
Bernoulli kolmikliige – veosa raskus-, rõhu- ja kiiruskõrgusega määratud summa  
Bernoulli võrrand – mehaanilise erienergia võrrand  
Betonikanal – betoonist tehiskanal voolusäng  
Betonipais – veevoolu tõkestav ja vett paisutav vesiehitus, mis on rajatud betoonist / üldjuhul veevoolu paisutamiseks  
Betonitamm – vesiehitus veevoolu suunamiseks või üleujutuste vältimiseks, mis on rajatud betoonist / üldjuhul veevoolu peatamiseks  
Biotiik – tehiskanal väikeveekogu reovee puhastamiseks mikroobide ja vetikate toimel

## C

Colebrook-White'i võrrand – torustiku voolamisele hõõrdetakistuse määramise võrrand, milles ilmutamata kujul hõõrdetakistustegur sõltub voolurežiimist ja toru piirdematerjalist (vt Colebrook-White'i võrrand numbriline arvutuskeem hõõrdetakistuse arvutamiseks sõltuvalt turbulentsel voolamise Reynoldsi arvust ja suhtelisest karedusest)  
Coriolise parameeter – pöörleva süsteemi nurkkiirusega määratud parameeter  
Couranti arv – numbrilises arvutuskeemi stabiilsust iseloomustav arv

## D

Darcy-Weisbach-tüüpi hõõrdetakistustegur – kiirussurvega parametrizeeritud takistus-  
tegur  
Dimensioneerimine – empiirilise valemi järgi hüdraulilise voolusüsteemi, tehnosüsteemi mõõtme arvutamine  
DN/ID - toru nimimõõt (ingl. *nominal size*) – torude iseloomustamiseks kasutatav mõõde, milleks on kokkuleppeliselt täisarv, ligikaudu võrdne valmistamismõõtmega millimeetrites. Seda võib rakendada ka siseläbimõõdule (DN/ID) või välisläbimõõdule (DN/OD) (EVS-EN 476)  
Düüker – pööratud sifoontoru, mida kasutatakse vee juhtimiseks tõkete (nt jõe, tee) alt läbiminevale torustikule või voolusängile (kasutusel ka termin altjuhe)

## E

Ebastatsionaarse voolamine – ajaliselt muutuva voolukiiruse jaotusega voolamine  
Ebaühtlane voolamine – kiirenev või aeglustuv voolamine (nt torustiku klapi avamisel kiirenev voolamine paigalseisust) (ingl. *unsteady flow*)

Eelvool – toru või torustikusüsteem, mis on vastuvõtjaks ärajuhitavale veele (nt kanalisatsioonitoru, kuhu juhitakse reoveed)

Eesvool – suubla, kuhu juhitakse kuivendusvesi

Ehitis – aluspinnasega kohtkindlalt ühendatud ja inimtekkeline ehitatud terviklik asi (ehitis jagatakse hooneks ja rajatiseks)

Ekvivalentpikkus – torustiku kogurõhukao arvutamisel kasutatav torustiku tegelikule pikkusele lisatav pikkus, mis arvestab rõhukadu kohttakistustes

Elavlõige – tehnosüsteemis voolamisele avatud pind (vektor, mõõtühikuga  $m^2$ )

Elementaarimaht – vedelikus (ka gaasis) fikseeritud diferentsiaalselt väikene ruumi osa

Empiiriline valem – mõõtühikute süsteemist sõltuv astmefunktsioon hüdraulilistest suurustest

Eriprofiilüle vool – erikujuga pais, mille läve ristlõige võib olla kandiline või voolujooneline

Erirežiim – tavapärasest töörežiimist erinev ajutine tööolukord

Erosioon – voolava vee, tuule või lainete kulutus, mille tagajärjel pinnas ära kandub

## F

Filtratsioonimahuti – mahuti veepuhastusprotsessis, kus vesi juhitakse läbi täitematerjali

Funktsioon – matemaatiline tehe, mis teisendab argumendi väljundarvuks. Näiteks  $f(z) = z^{-1}$  teisendab iga argumendi  $z$ , mis ei võrdu nullväärtusega  $z = 0$ , selle pöördarvuks

Funktsiooni argument – matemaatikas muutuja, mis omab väärtuseid funktsiooni määramispiirkonnas. Näiteks funktsiooni  $f(z) = z^{-1}$  argument on  $z$

## G

Gaasiline kavitatsioon – rõhu alanemisel gaasi eraldumine vedelikus (vees)

Geodeetiliselt – kõrguslikult maapinna suhtes

Geostroofiline voolamine – voolamine, mis sõltub maakera pöörlemise nurkkiirusest

## H

Haisuhäiring – olukord, kui lõhnaaine esinemise häiringutase on ületatud

Harja paksus – paisu läve pikkus

Heitvesi – suublasse juhitud kasutusel olnud vesi (heitveeks ei peeta sademevett, kaevandusvett, karjäärivett, jahutusvett, maaparandussüsteemis voolavat vett ega vesiviljeluses ja hüdroenergia tootmises kasutatavat vett [vt veeseadus (VeeS) § 10])

Heljum – suspendeerunud setete fraktsioon

Hooldamistööd – rajatise või seadme toimimise tagamiseks tehtav korraline töö

Hoolduskaev – kanalisatsiooni võrgu hoolduseks ja kontrolliks torustikule ehitatud kaev, läbimõõduga DN 1000 ja suurem

Hoone – katuse, siseruumi ja välispiiretega ehitis

Horisontaalne toru – toru, mille telje geodeetiline kõrgus ei muutu ehk puudub kõrguste vahe

Hõõrdekiirus – hõõrdepingega määratud kiirus

Hõõrdepinge – tangentsiaalpingega määratud hõõrdejõud pinnauhikule

Hõõrdepinge piiridel – hõõrdejõu pindtihedus piirdelähedases voolukihis

Hõõrdesurvekadu – vedeliku ja gaasi tehnosüsteemis hõõrdejõuga määratud voolutakistus

Hõõrdetakistustegur – hüdraulilise voolusüsteemi valemiga määratud voolutakistuse tegur (näiteks Darcy valemiga, mõõtühikuta suurus  $[\lambda] = 1$ )

Hüdrauliline diameeter – hüdraulilise raadiusega määratud hüdrauliline suurus ( $D_h = 4 R_h$ )

Hüdrauliline kaudlõök - hüdroloogi olukord, kui torustiku sulgemise aeg on pikem lõõgi ülerrõhu/alarõhu faasist (siibri aeglane sulgemine)

Hüdrauliline lööklaine – vedeliku elastsusest tingitud veesamba vibratsioon, kus voolukiiruse äkiline muutus põhjustatud rõhu järsu muutumise torustikus

Hüdrauliline otselõök – hüdroloogi olukord, kui torustiku sulgemise aeg on lühem lõõgi ülerrõhu/alarõhu faasist (siibri kiire sulgemine)

Hüdrauliline raadius – vedeliku voolusüsteemi elavlõike ja märgpiirde suhe

Hüdrauliline suurus – hüdraulilises valemis kasutatav suurus, nagu normaalsügavus, paisutuskõrgus vms

Hüdrauliline vabavoolurežiim – Froude'i suhtarvuga kriteeriumiga määratud vabavoolurežiim (käre, kriitiline ja rahulik vabavool)

Hüdrauliline voolusüsteem – tehnilistest elementidest (toru, ava säng, mahuti vms) koosnev voolamisele avatud tehnosüsteem, mida on võimalik arvutada voolamise hüdraulika valemitega

Hüdraulilise voolusüsteemi element - tehniline element (toru, avasäng, mahuti vms), milles toimub voolamine

Hüdrauliliselt kontrollitud voolamine – hüdraulika valemitega määratud vooluprotsess

Hüdrauliliselt kriitiline vabavoolurežiim – vabavoolu Froude'i arvuga  $Fr = 1$  määratud voolamine

Hüdrauliliselt käre vabavoolurežiim – vabavoolu Froude'i arvuga  $Fr > 1$  määratud voolamine

Hüdrauliliselt rahulik vabavoolurežiim – vabavoolu Froude'i arvuga  $Fr < 1$  määratud voolamine

Hüdrauliliselt soodsaim ristlõige – ristlõige, mis teatava pindala, kareduse ja sängi langu korral laseb läbi suurima vooluhulga, ehk ristlõige, mis teatava vooluhulga, langu ja kareduse juures on väikseim

Hüdroelektrijaam – veejõul elektrienergia tootmise jaam, milles kasutakse Kaplani, Francis'e või Peltoni turbiini

Hüdrogeoloogilised tingimused – tunnused, mis iseloomustavad põhjavee leviku- ja lasumistingimusi, vettkandvate kivimite litoloogilist koostist ja hüdroomadusi, vee liikumist, selle hulka ja omadusi, tehistegurite mõju jne.

Hüdroloök – sama, mis hüdrauliline löökaine ehk voolukiiruse äkilisest muutumisest põhjustatud rõhu järsk muutumine torustikus, millega kaasneb rõhulaine levimine

Hüdrostaatiline rõhk – veeraskusega määratud rõhk

Hüdrotehnika – tehnikaharu, vesiehitusteadus, mis käsitleb veekogude kasutamist ja vee kahjuliku mõju vältimist vesiehitiste abil (Võõrsõnade leksikon 2006)

Hüdrotehniline rajatis – vt vesiehitis

Hüppekeeris – vooluhüppe veevaltsi keeris

Hüppepikkus – vooluhüppe veevaltsi pikkusmõõde

## I

Ideaalvool – ideaalvedeliku voolamine

Infiltratsioon (kanalisatsiooni) – põhja- või muu võõrvee tungimine kanalisatsioonivõrku

Integraalne voolamise liikumishulga võrrand – voolamise kontrollmahule koostatud liikumisvõrrand

Vihma intensiivsus (ka sademete intensiivsus) – ajaühikus pinnaühikule sadanud vihma hulk. Väljendatakse kas kihi paksuse järgi  $INT = \Delta h / \Delta t$ , mõõtühikuga  $[INT] = \text{mm} \cdot \text{min}^{-1} / \text{m}^{-2}$  või mahu järgi  $q = 166,7 \cdot INT$ , mõõtühikuga  $[q] = \text{l} \cdot \text{s}^{-1} / \text{ha}$

Iteratsioonarvutus – iteratsioonvalemi tehted

Ilmutatud kuju arvutusskeemile – (ingl. *explicit computational scheme*)

Ilmutamata kuju arvutusskeemile – (ingl. *implicit computational scheme*)

Isepuhastuskiirus – reovee voolamise kriitiline kiirus, millega välditakse tahkete lisandite settimist torustikus

Isevoolne kanalisatsioon (isevoolukanalisatsioon) – kanalisatsioonivõrk, milles vesi voolab raskusjõu toimele ja mis on projekteeritud nii, et torustikud on tavaolukorras osalise täitega

## J

Jaotustorustik – veetorustik, mis ühendab peatorustiku tarbijate tarnetorudega

Jawa tamm – Jordaania asuv varaseim teadaolev tamm, mis pärineb 3000 eKr

Jõe vool – voolamine avasängis (jões)

Järeldu puhastustiik – täiendava puhastusastmena kasutatav biotiik

Järve pinnasnõlv – vabavoolusängi piire

Jätk (lühike torulõik) – lühike toru, mis olenevalt liigist kujundab veejuga

## K

Kaetud vooluhüpe – vooluhüpe, mille peal on voolutsoon

Kaitseehitis – veevoolu suunav või takistav rajatis (nt tamm)

Kalakasvatustiik – vesiviljeluseks rajatud tiik, kus kasvatatakse kalu

Kalapääs – rajatis, mille kaudu kudemisrändel olevad kalad ületavad veekogus oleva loodusliku või tehiskõrge

Kaldtoru – toru, mille telje geodeetiline kõrgus muutub

Kanal – pinnasesse kaevatud avasäng vee juhtimiseks tarbijani, kahe veekogumi ühendamiseks või veeliikluse tarbeks

Kanaliseerimise kontrollkaev – võrgu hoolduseks ja kontrolliks torustikule ehitatud kaev, läbimõõduga DN 400 kuni 800

Kanaliseerimise võrk – torustikud ja rajatised reovee ja/või sademevee, sh drenaazhi-vee juhtimiseks reoveepuhastisse või suublasse

Kaskaad (treppveelase) – trepina ehk astanguliselt ehitatud rahustuskaevudest koosnev veelase liigvee juhtimiseks paisust mööda või järsust nõlvast alla

Kastmisvesi – vesi, mida kasutatakse kastmiseks

Kavitatsioon – vedeliku keemise olukord, mis tekib absoluutrõhu langemisel pumbas alla vedeliku küllastunud auru rõhu pumpamistemperatuuril.

Kiiruskõrgus – (ingl. *velocity head*)

Kiirustegur – voolutakistust määrav tegur voolukiiruse valemis

Kilpsiiber – sulgeseade torustiku või avade sulgemiseks

Kohttakistus – voolusängi ristlõike või voolu suuna muutusest põhjustatud energiakuuallikad (nt armatuur, põlved jms torustikul)

Kogusurve – raskuskõrguse, rõhukõrguse ja kiiruskõrguse summa Bernoulli võrrandis

Kolmnurkülevool – kolmnurga kujulise ülevooluavaga õhukeseseinaline ülevool. Kasutatakse ka mõõtülevooluna

Kontrollarvutus – kavandatud või realiseeritud lahenduse õigsuse kontrollimine arvutuste teel

Kontrollmaht – vedelikus (ka gaasis) fikseeritud või fikseerimata kontrollpindadega, geomeetriliselt määratud ruumi osa

Kontrollmahu pinna ehk kontrollpinna tangentsiaalpinge – vedelikule valitud pinna puutujaga määratud rõhk

Kontrollpinna normaalpinge – vedelikule valitud pinna normaaliga määratud rõhk

Koosvoolamine – mitme vedeliku koostoime voolamisel (nt vee ja õhu voolamine torustikus)

Korduvusperiood (vihmade) – keskmine ajavahemik kahe võrdse intensiivsusega vihma kordumise vahel

Kraav – pealt avatud voolusäng (pinnasesse kaevatud tehissäng niisutusvee juurdejuhtimiseks või kuivendus- või pinnavee ärajuhtimiseks)

Kriitiline sügavus – Froude'i suhtarvu kriteeriumiga  $Fr = 1$  määratud vabavoolu sügavus voolusängis

Kriitiline voolukiirus – Froude'i suhtarvu kriteeriumiga  $Fr = 1$  määratud vabavoolukiirus voolusängis

Kuja – vähim lubatud kaugus ohutuse tagamiseks. Nt kanalisatsiooniehitise kaugus joogivee salv- või puurkaevust

Kukkumiskaev – kaev, mille sisse- ja väljavooluavade rajamissügavuste erinevus on suurem kui 1 m

Kvaasistatsionaarne voolamine – aeglaselt muutuv voolamine, mis igal ajahetkel on mittestatsionaarne ja igas ajaühikus on statsionaarne

Kõrgus – hüdraulilise voolusüsteemi vertikaalne mõõde (veekõrgus mahutis, ingl. *height*)

Käituskulud – ehitise või seadme kasutamiseks tehtavad kulud

Käre voolukiirus – Froude'i suhtarvu kriteeriumiga  $Fr > 1$  määratud vabavoolukiirus voolusängis

Küvett – teeäärne kraav vee ärajuhtimiseks teekattelt, muldkehalt ja nõlvadelt

## L

Lailäviülevoov – horisontaalse pika lävega tõke (kasutusel olev termin, mille alternatiivideks on käesolevas raamatus pakutud – pika lävega pais, paksu harjaga pais, müürülevoov)

Lainejada – mitmest lainest koosnev laineprotsess

Lainetuse keerised – pöörisevabad keerised, st keerised mille kiirusväljaga määratud rootor on nullväärtusega

Laius – hüdraulilise voolusüsteemi horisontaalne mõõde (voolamisega ristsuunaline, ingl. *width*)

Lang – hüdraulilise voolusüsteemi kõrguse muutus, mis vastab geodeetilise kõrguse vähenemisele (voolamisega samasuunaline) (mõõtühikuga  $m \cdot m^{-1}$ ,  $mm \cdot mm^{-1}$ ,  $mm \cdot m^{-1}$  vms)

Liigtäide – arvutuslikku suhtelist torutäidet ületav torutäide

Liigveelase – veelase, mille kaudu juhitakse ära tulvaveed

Liikumiskiirendus – vedeliku (ka gaasi) osa liikumiskiiruse muutus ajavahemikus (vektor, mõõtühikuga  $[a] = m \cdot s^{-2}$ ) (ingl. *motion acceleration*)

Liikumiskiirus – vedeliku (ka gaasi) osa liikumise trajektoori pikkus ajavahemikus (vektor, mõõtühikuga  $[v] = m \cdot s^{-1}$ ) (ingl. *motion velocity*)

Looduslik veekogu – veekogu, mis ei ole tekkinud inimtegevuse tagajärjel

Loodusmoodustis – looduslik ehk mitte inimtegevuse tulemusel loodud

Loodussäng – looduslik voolusäng

Lõpliku suurusega ruumi osale, st kontrollmahule koostatud integraalset voolamise liikumishulga võrrand – vedelikuosade pidevale liikumisele koostatud integraalvõrrand

Läbilaskevõime – vooluhulk, mida torustik (voolusäng) on võimeline vastu võtma Läve pikkus (harja paksus) – paisu läve pikkus või harja paksus (kasutusel ka termin läve laius)

Lüüsregulaator – veepinna kõrgust või vooluhulka reguleeriv rajatis (ka laevanduses kasutatav termin, milles lüüs, laevasõidulüüs on tuntud kui erisuguse veetasemega veekogude vahel paiknev laevasõitu võimaldav rajatis)

## M

Maalihe – pinnasekihi nihkumine nõlval raskusjõu mõjul

Maclaurini rida – astmerida

Mageveekogu – veekogu, mille soolsus on väiksem kui 0,5 ‰

Magistraaltorustik (veevarustus) - peatorustik, mis toimib veevarustuse piirkonnas kui põhiline jaotustorustik, harilikult ilma otseühendusega tarbijaga

Maht – piirdega määratud ruumiosa (nt ruumi maht)

Mahuti – anum, mis võimaldab koguda reovett, vihmavett, tehnilist vett jms (kohtkindlalt ühendatud, näiteks septik, veetorn jms)

Maksimaalse vooluhulga valem – kriitilise vabavoolu režiimiga määratud vooluhulk ülevoolule, ka vooluhulga valem, milles on kasutusele võetud vooluhulga koefitsient

Manningi karedusskaala – empiiriline takistusteguri skaala

Manningi karedustegur – empiiriline voolutakistuse koefitsient

Massijõud – vedelikuosa massile mõjuv jõud

Mehaaniline rõhk – rõhk mõõtühikuga  $[p] = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} = \text{Pa}$

Merepind – mereveega määratud pind, mis on atmosfääri rõhu all (ka mere vabapind)

Mitte-Newtoni vedelik – vedelik, milles ei kehti hästi Newtoni sisehõõrde seadus

Mittestatsionaarne voolamine – ajaliselt ja ruumilisel muutuv voolukiiruse jaotusega voolamine

Mittetäielik vooluhüpe – vooluhüpe, millel puudub veevalts

Mõõde – hüdraulilise voolusüsteemi geometriat iseloomustav suurus (pikkus, laius, kõrgus, sügavus vms)

Mõõdukalt ebaühtlane voolamine – muutuva voolukiirusega, vooluhulgaga, vabapinnakõrgusega statsionaarne voolamine

Märgala (tehis) – aeglase vooluga madalaveelised veetaimestikuga vooluveekogu laiendatud osad, mille viibeaeg peab tagama taimetoitainete sisalduse vähendamise veevoolus

Märgpiire – vedeliku või gaasi kokkupuute joonperimeeter tehnosüsteemi piirdega

Müürülevool – vt lailäviülevool

## N

Nelinurkülevool – nelinurkse kujulise ülevooluavaga õhukeseseinaline ülevool. Kasutatakse ka mõõtülevooluna

Normaalsügavus – vabavoolu veesügavus (vertikaalne mõõde) muutumatu languga prismaatilises tehiskanalis, mille määrab hõrdejõu ja raskusjõu tasakaalutingimus (ingl. *normal depth*)

Numbriline arvutusskeem – matemaatilise meetodi lahendus valemite ja võrrandite muutujate määramiseks

## O

Otsustusülesanne – mitme hüdraulika valemiga määratud ülesanne, millel on mitu lahendust

## P

Paak – anum, mis võimaldab koguda reovett, vihmavett, tehnilist vett jms (mittekohtkindel, näiteks autopaak)

Pascali seadus – hüdrostaatilise rõhu ülekandumise printsiip vedelikule

Pais – veevoolu tõkestav ja vett paisutav vesiehitis, millest võib vesi üle voolata või toimub voolamine läbi vastava regulaatori

Paisu lävi (hari) – paisu osa, millest vesi üle voolab

Paisu ülevooluava – paisu osa, läbi mille vesi üle paisu lastakse

Paisulaine – veepinna kõrguse muutusega määratud laine front

Paisutamine – vabapinnaga voolamine hüdraulilises voolusüsteemis, mille määrab paisuga tehiskanalis kontrollmahu voolujõu ja rõhugradientjõud tasakaalutingimus

Paisutuskõrgus – paisu ülavee pinna ja paisu läve kõrguste vahega määratud kõrgusmõõde

Paisutustase – kõrgeim lubatud veetase ühiskanalisatsioonis uputuse või ummistuse korral. (Mõistet paisutustase kasutatakse ka hüdrotehnikas – veevoolu tõkestamisest põhjustatud vabapinna tase veekogus.)

Paisutusulatus – paisutamise mõjuulatus on määratud vabapinna kõrguse muutusega ülesvoolule paisust kuni ühtlase voolamise vabapinna kõrguseni või veepinna kõrgust tõstva avasängi osani (nt suure pikikaldega kärestik)

Paksu harjaga pais – vt lailäviülevool

Pealt kaetud tehislik voolusäng – kinnine voolusüsteem või toru

pH – vesinikekspONENT, mille arvuline väärtus iseloomustab vesinikioonide sidemete intensiivsust teiste ainete ionidega lahuses. pH skaala järgi võib lahused jaotada happeliseks ( $\text{pH} < 7$ ), neutraalseks ( $\text{pH} = 7$ ) ja aluseliseks ( $\text{pH} > 7$ ). Kuna pH skaalas vaadeldav lahuse vesinikioonide arv võrreldes lahuse molekulide koguarvuga muutub väga suures ulatuses, siis kasutatakse 10-nd logaritmi skaalat. Veelahuste



pH väärtused on vahemikku 0 ... 14. Näiteks puhta vee pH on 7, joogivee pH on ca 7, vihmavee pH on ca 5,5, reovee pH on ca 7,7.

Pika lävega pais – vt lailäviülevool

Pikkus – hüdraulilise voolusüsteemi horisontaalne mõõde (voolamisega sama-suunaline, ingl. *length*)

Pinnahüpe – veepinna järsk muutus vooluhüppele

Pinnajõud – vedeliku pinnale mõjuvad jõud

Pinnaspais – pinnasest rajatud veevoolu tõkestav ning vett paisutav vesiehitis

Pinnastamm – pinnasest ehitatud rajatis, mille eesmärk on veevoolu suunata või tõkestada (kaitseehitis)

Poolisevooluses kanalisatsiooni – kanalisatsioon, kus isevooles torustikus võib esineda rõhuline voolamine

Potentsiaalne asendienergia – veosa kõrgusega määratud mehaaniline energia

Potentsiaalne sügavus – veesamba kõrgus, mille juures kiirusvälja pööriselisus kaob

Potentsiaalse pööriselisus – veesamba kõrgusega normeeritud pööriselisus

Potentsiaalse pööriselisuse võrrand – pööriselisuse võrrand, mis on normeeritud veesamba kõrgusega

Prismaatiline tehiskanal – muutumatu ristlõikega ja suunaga tehiskanal

Proovirõhk – rõhk veetorustiku terviklikkuse ja veetiheduse katsetamiseks

Puhastusefektiivsus – reoainete eraldamise tõhusus

Puhtaveereservuaar – mahuti, kuhu kogutakse veetöötuse läbinud ja tarbijatele juhitud vesi

Põhjalase – läbi või ümber paisu ehitatud veelase paisjärve (veehoidla) tühjendamiseks või veetaseme alandamiseks kuni veehoidla põhjani

Põud (põuaaeg) – pikk sademeteta ajavahemik või erakordne kuivus piirkonnas, kus tavaliselt on sademeid rohkem ja õhuniiskus suurem (ingl. *drought*)

Pööriselisus – kiirusväljaga määratud pöördliikumise nurkkiirus

## R

Rahulik voolukiirus – Froude'i suhtarvu kriteeriumiga  $Fr < 1$  määratud vabavoolu-kiirus voolusängis

Rajatise – ehitise, mis ei ole hoone. Rajatiseks loetakse muu hulgas mere või siseveekogu põhja süvendamise teel rajatud laevakanalit

Raskuskõrgus – veosa asendiga määratud kõrgus

Reaalvool – reaalvedeliku voolamine

Regulaator - rajatis veevoolu reguleerimiseks

Renn – pealt avatud suhteliselt väikese ristlõikega veejuhe

Reoveepuhasti – seadmete kompleks reovee puhastamiseks

Reoveepumpla – ehitise koos seadmetikuga kanalisatsioonivee teisaldamiseks

Reovesi – olmes, tööstuses või muus tootmises tekkinud vesi, mis ületab kehtestatud heite piirväärtusi ja mida tuleb enne suublasse juhtimist puhastada

Reservuaar – mahuti

Restkaev – kanalisatsioonikaev sademevee kogumiseks ning kanalisatsiooni juhtimiseks

Restluuk – kanalisatsioonikaevu luugi tüüp, millest sademevesi läbi voolab

Ringvõrk – veevarustuse välisvõrgu kuju, millega tagatakse tarbijale vesi kahest suunast

Ruutastmelise kujuline ristlõige – avasängi ristlõige, mille piirdekõver on määratud ruutvõrrandiga

Rõhugradientjõud – rõhu muutusega määratud jõud kontrollmahus

Rõhukadu – rõhu muutusega määratud mehaanilise energia kadu (vt ka survekadu), mõõtühikuga

Rõhukõrgus – hüdraulilise voolusüsteemi rõhuga määratud kõrgus (ingl. *pressure head*)

## S

Saasteaine – aine, mille esinemisega keskkonnas võib kaasneda reostus

Saastekoormus – mingi ajavahemiku kestel keskkonda sattuv saasteainete hulk

Sademed – atmosfäärist vedelas või tahkes olekus maapinnale langev vesi

Sademevee kokkuvoolu aeglustamine – sademeveesüsteemi (nt tiikide) kombineeritud äravoolu aeglustamislahendus

Sademeveesüsteem – rajatised sademevee kogumiseks, ärajuhtimiseks ja puhastamiseks

Salvkaev – madal põhjaveehaare

Sanitaarvooluhulk – vähim vooluhulk looduslikus avasängis, millega ei kahjustata vee-elustikku ja jõe ökosüsteemi

Seinülevool – õhukese harjaga pais (lühikese lävega pais)

Setete kuhjumine – setteterade kogunemine voolusängis

Setete uhtumine – setteterade kadumine voolusängist

Setitustiik – tiik tahkise eraldamiseks reoveest

Settebassein – mahuti tahkise eraldamiseks reoveest

Settekott – voolupiirist allpool asuv süvend sademevee restkaevus liiva ja muda kinnipüüdmiseks

Settekünnis – settinud osakestest voolusängi moodustunud kuhjatis

Sifoon – hüdrauliline voolusüsteem vedeliku juhtimiseks üle tõkke kõrgemalt tasemelt madalamale (täisimetav hüdrotehniline seade hüdroelektrijaamas)

Sisepind – kahte vedelikku eraldav mittejäik pind (ingl. *interface*), ka vahepind

Sisevoolamise hüdraulika – mitme vedeliku koosvoolamise hüdraulika

Sissevooluava voolurežiim (sissevoolukontroll) – hüdraulilise voolusüsteemi ülavee tasemega määratud lahendus

Staatiline rõhk – hüdraulilise voolusüsteemi staatilise osa rõhk

Statsionaarne voolamine – ajaliselt muutumatu voolukiiruse jaotusega voolamine (erijuht on ühtlane voolamine)

Stratifitseeritud voolamine – tiheduse järgi kihistunud voolamine

Suhteline torutäide – vabapinna maksimaalne kõrgus sisepõhjast ümartoru ristlõikes suhe toru sisediameetriga ( $h_d = h_{rlm}/d_s$ )

Sumbumine (lööklaine energia vähenemine) – energiakadude tõttu lööklainete hääbumine

Surutud vooluhüpe – kriitilise vabavoolurežiimiga avasängi põhjaastme ülavees moodustuv vooluhüpe

Survekadu – rõhukõrguse kadu (vt ka rõhukadu)

Surveta truu – vabavoolutruu

Survetoru – kinnine toru, milles rõhk ei ole määratud välisrõhuga (atmosfääri rõhuga)

Survevool – rõhuline voolamine hüdraulilises voolusüsteemis, mille määrab horisontaalses muutumatu ristlõikega torus kontrollmahu hõõrdejõu ja rõhugradientjõu tasakaalu tingimus (ingl. *pressurized flow*)

Survevoolu truu – täieliku veetäitumusega truu

Suunatud tuletis – tuletisreegli kasutamine etteantud tuletisväärtuse määramiseks

Swamee-Jaini hõõrdetakistuse kloonvalem – hõõrdetakistuse valem osalise torutäitega või avasängi voolamisele

Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valem – hõõrdetakistuse valem täieliku torutäitega voolamisele

Sügavapõhjaline pargiala – ala pargis, kuhu saab kontrollitult koguda sademevett intensiivsete sadude korral

Sügavus – hüdraulilise voolusüsteemi vertikaalne mõõde (veesügavus mahutis, ingl. *depth*)

## Š

Šandoor – puit-, teras- või raudbetootala, mida kasutatakse vesiehitise ava sulgemiseks

## T

Tagasilöögiklapp – voolusuunda torustikus reguleeriv klapp

Tamm – rajatis, mille eesmärk on veevoolu suunata või tõkestada (ka kaitseehitis üleujutuste vältimiseks, nt ka poldritamm piki jõe- või järvekallast või mereranda)

Tarnetorustik – torustik veevarustuse tänavatorust tarbija veemõõdusõlmeni

Tasakaaluprofiil – setteterade tasakaalulise kogunemise ja kadumisega määratud voolusängi profiil

Taylori rida – astmerida

Teetruu – vee (või loomade) tee alt läbijuhkimiseks tee muldkehas olev rajatis, mille puhas ava on alla kolme meetri

Tehissäng – tehislik voolusäng (inimtekkeline voolukanal)

Tehissängi kriitilise sügavus – kriitilise vabavoolurežiimiga määratud arvutuslik suurus ehk vertikaalne mõõde

Tehisveekogu – inimtegevuse tulemusena tekkinud pinnaveekogu

Tehniline voolusüsteem – tehnilistest elementidest (toru, kanal, säng, paak, mahuti vms) koosnev voolamisele avatud tehnosüsteem

Tehnosüsteem – joogivee-, sademevee-, reovee-, kütte-, soojavee-, jahutus-, ventilatsiooni- vms süsteem

Termodünaamiline rõhk – rõhk mõõtühikuga  $[p] = \text{J} \cdot \text{m}^{-3} = \text{Pa}$

Tiheduslaine – laine protsess, millega kaasneb tiheduse muutumine

Tiik – väikeveekogu

Tipptunni veetarbimine – maksimaalse veetarbimisega tunni veevajadus, mis on aluseks veevõrgu hüdraulilistele arvutustele

Toru – pealtkaetud voolusäng

Torustik – ühendatud torude süsteem

Torustiku ummistus – torustiku läbilaskevõime vähenemine tahkete osakeste settimise või võõrkehade sattumise tõttu kanalisatsioonivõrku

Trapetskujuline ristlõige – kaldnõlvade ja horisontaalse aluspõhjaga avasängi ristlõige

Trapetsristlõikega ülevooluava – kaldnõlvade ja horisontaalse aluspõhjaga ülevooluava

Truubivoolu projekteeritud tööolukord – hüdraulika valemitega määratud voolamise olukord

Tsentrifugaalpump – pump tsentrifugaaljõuga vee juhtimiseks hüdraulilises voolusüsteemis

Tugevalt ebaühtlane voolamine – laine protsessiga määratud voolamine (nt hüdroloöklaine, vooluhüppelaine vms)

Tuletõrjehüdrant – paikne seadis kustutusvee võtmiseks veevarustuse välisveevõrgust

Tuletõrjeveereservuaar – veemahuti, mis on ettenähtud vajaliku kustutusvee hulga hoidmiseks

Tulvavee äkk-koormus – kriitiline voolurežiimi olukord kanalisatsioonis, mis võib põhjustada uputusi

Tulvavesi – intensiivsete sadude või lume kiire sulamise tagajärjel kiiret, enamasti lühiajalist veetaseme tõusu ja üleujutusi põhjustav vesi

Tupikvõrk – veevarustuse välisvõrgu kuju, millega tagatakse tarbijale vesi ühest suunast

Turbulentne voolamine – keerisstruktuuridega vooluprotsess

Turbulentsed keerised – pööriseaga keerised, st keerised mille kiirusväljaga määratud rootor erineb nullväärtusest

Tõus – hüdraulilise voolusüsteemi kõrguse muutus, mis vastab geodeetilise kõrguse suurenemisele (voolamisega samasuunaline) (mõõtühikuga  $\text{m} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $\text{mm} \cdot \text{m}^{-1}$ , ...)

Tõusulaine – veepinna kõrguse muutusega määratud laine (nt kinemaatiline laine)

Tõusuvesi – muutuva vabapinna tasemega vesi

Täielik vooluhüpe – veevaltsiga vooluhüpe

Täitmine – hüdraulilise voolusüsteemi ühe vedeliku asendamine teise vedelikuga

Töörõhk – hüdraulilise süsteemi normaalseks toimimiseks seadistatud rõhk

T-ühendus – torude ristühendus

Tühjendustoru – suletav toru, mille kaudu tühjendatakse erinevaid veega täidetud rajatisi

## U

Uhteaine – liikuvate setteteradega aine (nt liiv)

Uhtekiirus – setete liikumisega määratud voolukiirus

Uhteaine materjal – liikuvate setteterade materjal (nt liiva tera materjal)

Ujula – sportimiseks veebassein

Umbluuk – õhuvoolu peatav luuk

Uputamata ava – osaliselt veega täidetud ava

Uputatud ava – täielikult veega täidetud ava

Uputustegur – rahuliku hüdraulilise voolurežiimiga ülevoolu valemi koefitsient

## V

Vaakum – hüdraulilise süsteemi olukord, kui absoluutrõhk on väiksem atmosfääri-  
rõhust

Vabarõhk – hüdraulilise voolusüsteemi kohttakistuse ületamiseks vajalik rõhk

Vabapind – vedeliku pind, millel on atmosfääri rõhk (ingl. *free surface*) (ka õhu ja  
vee kokkupuutepind, st õhurõhu all olev veepind)

Vabapinna kõrgus – õhurõhu all oleva veepinna kõrgus võrdlusnivoost

Vabavool – vabainnaga voolamine hüdraulilises voolusüsteemis, mille määrab  
muutumatu languga prismaatilises tehiskanalis kontrollmahu raskusjõu ja hõõrdejõu  
tasakaalutingimus (ingl. *open-channel flow*)

Vabavoolutruup – osalise veetäitega truup, mille ulatuses on vabapinnaga voolamine

Vahepind – vedeliku pind, mille määrab teine vedelik (ingl. *interface*)

Valemi määramatus – atmosfääri rõhu all oleva veega määratud pinna kõrgus valitud  
võrdlusnivoost

Valitud tööolukord – hüdraulilise süsteemi normaalseks toimimiseks seadistatud  
olukord

Vari – vooluava sulgeseade (nt kilp)

Veafunktsioon – etteantud ja arvutusliku suuruse vahe iteratsioonarvutuses (ingl.  
*error function*)

Vedelik – vesi (ka õhk)

Vedeliku sisepind (vahepind) – stratifitseeritud vedeliku pind

Vee kriitiline viibeag – veekvaliteedi muutusega määratud ajavahemik

Vee jaotamise süsteem – nt joogivee torustiku võrk

Vee ruumala – vee täitumusega määratud ruumala (nt mahuti vee ruumala)

Veejuhe – vee juhtimise rajatis

Veekeskus – veesportimis- ja vabaajaveetmisvõimalusi pakkuv keskus

Veekogu tamm – vee peatamiseks või juhtimiseks rajatud tamm

Veekogumise maht – vee ruumalaga määratud maht

Vee kogumise süsteem – nt sademe- ja reovee torustike võrk, ühisvoolne ja lahkvoolne kanalisatsioon (ka tiik tuletõrjervee kogumiseks)  
 Veepind – veega määratud vabapind  
 Veepinna kõrgus – veega määratud pinna kõrgus valitud võrdlusnivoost  
 Veerežiim – vee kvalitatiivsete ja kvantitatiivsete näitajate muutumine ajas looduslike või tehnilike tingimuste mõjul  
 Veeringe – vee pidev ringlemine Maal, mille määrab Päikeselt saadav energia ja raskusjõu toime  
 Veeruumala – veega täidetud ruumiosa ruumala  
 Veesööst – kiirevooluline osa vooluprotsessis (nt ruumiliselt kiirenev voolamine paisu ülemisest bjefist lävele, ruumiliselt kiirenev voolamine paisu lävelt ülemisse bjefi vms)  
 Veetõus – veepinna vertikaalne liikumine  
 Veetõotlusjaam – veepuhastusjaam  
 Veevalts – vee ja õhu koosvoolamisega kaasnev segunemine  
 Vertikaalne toru – toru, mille telje geodeetiline kõrgus muutub (puudub pikkus ja laius)  
 Vesi – joogivesi  
 Vesiehitis – jõe-, järve-, mere- või põhjavee kasutamist võimaldav või vee purustavat toimet tõkestav rajatis  
 Vesinikeksponent (ka pH) – keemiline suurus, millega hinnatakse lahuse happelisust või aluselisust  
 Vesioinas – hüdraulilise lööklainega töötav veepump  
 Vihmavesi – vihmamana langenud ning ehitiste, sealhulgas kraavide kaudu kogutav ja ärajuhitud vesi  
 Viivitusmaht – viivitusrajatise dimensioonidega määratud veemaht, mida on võimalik ajutiselt koguda, et vähendada koormust sademeveetorustikele ja vältida üleujutust  
 Voolamise hüdraulika – voolamise suurustega, nagu voolukiirus ja vooluhulk seotud hüdraulika valemid  
 Voolamise keskkiirus – kiirusejaotuse järgi keskmistatud voolukiirus (vektor, mõõtühikuga  $m \cdot s^{-2}$ )  
 Voolamise liikumishulga täismuutus – ajalise ja ruumilise muutumisega määratud liikumishulga muut  
 Voolamise ruumikiirus – vooluhulga ja elevlõike suhtega määratud voolukiirus (vektor, mõõtühikuga  $m \cdot s^{-2}$ )  
 Voolamise tehnosüsteem – vedeliku või gaasi tehnosüsteem  
 Vooluhoog – voolamise liikumishulk  
 Vooluhulgategur – voolutakistust määrav tegur vooluhulga valemis  
 Vooluhulk – voolavas vedelikus (ka gaasis) fikseeritud tasapinda ajavahemikus läbinud vedelikuosa ruumala (mõõtühikuga  $[Q] = m^3 \cdot s^{-1}$ ,  $l \cdot s^{-1}$ ,  $m^3 \cdot h^{-1}$ ) (ingl. *volumetric rate of flow*)

Vooluhüpe – veekeeristega või veepinna murdumisega määratud vooluprotsess  
 Vooluhüppe kaaskõrgus – veepinna murdumisega määratud vabapinna kõrgus  
 Vooluhüppelaine – avasängis liikuv vooluhüpe  
 Voolujõud – voolukiiruse muutusega määratud jõud kontrollmahus  
 Voolukiirendus – voolukiiruse muutus ajavahemikus (vektor, mõõtühikuga  $[a] = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ) (ingl. *flow acceleration*)  
 Voolukiirus – voolavas vedelikus (ka gaasis) fikseeritud tasapinda ajavahemikus läbinud vedelikuosa ruumala ja pindala suhe (vektor, mõõtühikuga  $[u] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ) (ingl. *flow velocity*)  
 Voolulõige – voolamise ristlõige  
 Voolurahustussein – tõke keeriste vähendamiseks ning veevoolu ühtlustamiseks  
 Voolurenn – pealt lahtine voolusäng (nt kanalisatsioonikaevu põhjas olev voolukanal)  
 Voolurežiim – hüdrauliliste suuruste suhtarvuga määratud voolutingimused  
 Voolusäng – vooluprotsessiga määratud piire  
 Voolusängi piirde erosioon – avasängi piirde kulumine  
 Voolusängi piire – vooluprotsessi ja loodussängi või tehissängi kokkupuute pind  
 Voolutsoon – voolukiirusega määratud vedeliku osa  
 Vooluveekogu – looduslik või tehisveekogu, milles vesi voolab raskusjõu toimele (nt jõgi)  
 Väike sillaava – mittelaevatav sillaava  
 Väljavooluava voolurežiim (väljavoolukontroll) – hüdraulilise voolusüsteemi alavee tasemega määratud lahendus

## Õ

Õhk – gaaside segu (lämmastik, hapnik, süsihappegaas ja teised gaasid)  
 Õhukese harjaga pais – lühikese lävega pais (seinülevool)  
 Õhupaak – õhuga täidetud surveanum  
 Õhupadi – konstruktsiooni ja veega lukustatud õhuosa  
 Õhurõhk – mehaaniline rõhk veepinnal (merepinnal väärtusega  $101\,325 \text{ Pa} = 101,325 \text{ kPa}$ )

## Ä

Äravool – ärajuhitud vooluhulk  
 Äravoolusäng – veevoolusäng

## Ö

Ööpäev – ajavahemiku mittestandardne mõõtühik (24 tundi, 1440 minutit, 86400 sekundit)

## Ü

Ühisveevärk – ehitiste ja seadmete süsteem, mille kaudu toimub kinnistute veega varustamine ning mis on vee-ettevõtja hallatav või teenindab vähemalt 50 elanikku

Ühtlane voolamine – ajaliselt ja ruumiliselt muutumatu voolukiiruse jaotusega voolamine (statsionaarse voolamise erijuht)

Ühtlusti – hüdraulilise voolusüsteemi ühtlustusmahuti, mida kasutatakse kanalisatsioonivee vooluhulga, ainesisalduse, temperatuuri vm ühtlustamiseks

Ülavesi – vesiehitise (nt paisu) ülemises bjefis olev vesi (kasutusel ka termin ülemine bjeff)

Ülekoormus – süsteemi normkoormusest suurem koormus

Ülemine bjeff – vahetult vesiehitisest (nt paisust) ülesvoolu paiknev vooluveekogu osa (ka paisu nõlvaga ülesvoolu määratud konstruktsiooniline piire)

Üleminekuvoolu trupp – trupp, milles esineb korraga osalise ja täieliku torutäitega voolamine

Ülemineku voolamine (ebastatsionaarne voolamine) – osalise vabapinnaga voolamine (nt voolamisele torustikus toimub üleminek osalise torutäitega voolamiselt täieliku torutäitega voolamisele)

Ülerõhk – atmosfääri rõhust suurem rõhk (ka manomeeterrõhk)

Üleslükkejõud – uputatud veosa välispinnale mõjuv integraalne rõhujõud

Ülesvool – paisu ülemises bjefi voolav vesi

Ülevool – vabapinnaga voolamise protsess paisul (ingl. *weir flow*)

Ülevoolu põhivalem – kriitilise vabavoolu režiimiga määratud vooluhulk ülevoolule, ka maksimaalse vooluhulga valemi hüdrotehniline versioon, milles on vooluhulgateguri asemel võetud kasutusele ülevoolutegur

Ülevoolupais – pais, millest liigvesi üle paisu harja voolab

Ülevoolutegur – ülevoolu põhivõrrandi koefitsient

Ülevoolutoru – sifoontoru

Ümartoru – ringikujulise siseavaga toru

## Y

Y-ühendus – torude mitteristühendus

## Z

Zhukoski arv (ka Žukoski arv) – kahefaasilise voolamise stratifikatsiooni torustikus iseloomustav suhtarv, milles kasutatakse veekihtide suhtelist kiirust

Zhukovski rõhk (ka Žukovski rõhk) – hüdraulilise lööklainega torustikus vee ja torumaterjali elastsel deformatsioonil tekkiv rõhk



# KASUTATUD MATERJALID

## EESTIKEELSE RAAMATUD

- Elken, Jüri; Lips, Urmas; Keevallik, Sirje; Lips, Inga; Raudsepp, Urmas. Füüsikaline okeanograafia. Läänemeri. Tallinna Tehnikaülikooli Kirjastus, Tallinn 2018, 413 lk.
- Engelbrecht, Jüri; Uus, Anu. Mittelineaarne dünaamika ja kaos. Eesti Teaduste Akadeemia Küberneetika Instituut, Tallinn 1993.
- Hääl, Maire-Liis; Koppel, Tiit; Suurkask, Valdu. Hüdraulika ülesannete kogu. Tallinna Polütehniline Instituut, Sanitaartechnika kateeder, Tallinn 1980, 84 lk.
- Järvekülg, Arvi (koostaja). Eesti jõed. EPMÜ zooloogia ja botaanika instituut. Tartu 2001, lk 750.
- Järvekülg, A., Veldre, I. Elu Läänemeres. Eesti Riiklik Kirjastus, Tallinn 1963, 251 lk .
- Jürimäe, Endel. Kompleksmuutuja funktsioonide teooria lühikursus. Valgus, Tallinn 1983.
- Karik, H. Üldine keemia. Valgus, Tallinn 1984, 267 lk.
- Karing, Peeter. Õhutemperatuur Eestis. Eesti Teaduste Akadeemia, Eesti Geograafia Selts, Tallinn „VALGUS“, 1992, 78 lk.
- Keres, Harald. Vektor ja tensorruumid. ENSV Teaduste Akadeemia 1989.
- Kurkus, G. Karus, R. Pant, A. Remmel, E. Tomingas, E. Vei jt. Maaparanduse käsiraamat. Maaparanduse alused, Eesti Riiklik Kirjastus, Tallinn 1962.
- Kõiv, Teet-Andrus; Rant, Aivar. Hoonete küte. Tallinna Tehnikaülikooli Kirjastus, Tallinn 2013, 394 lk.
- Laanearu, Janek. Rakenduslik hüdromehaanika. Tallinna Tehnikaülikooli kirjastus, Tallinn 2019, 236 lk.
- Laas, Tõnu ja Tammelo, Risto. Vektor- ja tensoranalüüs. Tartu Ülikool, Teoreetilise Füüsika Instituut, Tartu (2000–2004).
- Laigna, Kustav. Hüdromehaanika. Eesti Merehariduskeskus, Tallinn 1997, 719 lk.
- Lukason, Tanel (koostaja). Hüdroelektrijaama rajaja käsiraamat. EL infokeskus, Rõuge Vallavalitsusm 2004, lk 51.
- Maastik, Aleksander; Haldre, Heiti; Koppel, Tiit; Paal, Leopold. Hüdraulika ja pumbad. OÜ Greif, Tartu 1995, 468 lk.
- Paal, Leopold; Aitsam, Ain. Hüdraulika ülesannete kogu. Tallinna Polütehniline Instituut, Tallinn, 1969, 3. trükk, 106 lk.
- Paal, Leopold; Mölder, Heino; Tibar, Harri. Veevarustus ja kanalisatsioon. Valgus, Tallinn 1981.
- Paal, Lepold; Tibar, Harry; Kõiv, Arnold; Aitsam, Ain; Verner, Harald. Veevarustus ja kanalisatsioon. Valgus, Tallinn 1968.

- Rõõm, Rein Loengukonspekt aines Atmosfääridünaamika I. Tartu Ülikool, Füüsika Instituut, Tartu 2009. <http://meteo.physic.ut.ee/~room/DYNMET-I-2013/dmI.pdf>
- Tamme, Enn; Võhandu, Leo; Luht, Lembit. Arvutusmeetodid. Valgus, Tallinn 1986.
- Tarand, Andres; Jaagus, Jaak; Kallis, Ain. Eesti kliima minevikus ja tänapäeval. Tartu Ülikooli Kirjastus, Tartu 2013, lk 631.
- Tepaks, Leo. Hüdraulika. Valgus, Tallinn 1967.
- Tibar, Harri. Hüdraulika erikursuse ülesannete kogu. Sanitaartechnika kateeder. Tallinna Polütehniline Instituut. Tallinn 1985.
- Tibar, Harri. Vihmavee-, ühisvoolne ja poollahkvoolne kanalisatsioon: õppevahend. Tallinna Polütehniline Instituut, Sanitaartechnika kateeder, Tallinn 1988, 60 lk.
- Vainikko, Gennadi. Harilikud diferentsiaalvõrrandid. Valgus, Tallinn 1986.
- Vooluveekogu paisutamiseks nõutava vee erikasutusloa koostamise juhend. Keskkonnaministeerium, Tallinn 2008.

## INGLISKEELSESED RAAMATUD

- Batchelor, George Keith. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press. Cambridge 1967.
- Chadwick, Andrew; Morfett, John; Borthwick, Martin. Hydraulics in Civil and Environmental Engineering. Spon Press, Printed in London and New York 2004.
- Fox, Robert W.; McDonald, Alan T., Pritchard, Philip J. Introduction to Fluid Mechanics. 6th ed. John Wiley & Sons, Inc. 2006, 779 p.
- Gill, Adrian. Atmosphere-Ocean Dynamics, Volume 30. Academic Press 1982, 680 p.
- Godunov, S.K.; Ryabenki, V.S. Theory of Difference Schemes. North Holland Publishing Company, 1964, 289 p.
- Hager, Willi H. Wastewater Hydraulics. Theory and Practice. 2nd ed. Springer, 2010, 625 p.
- Heinloo, Jaak. Turbulence Mechanics. Introduction to the General Theory of Turbulence (in Russian). Tallinn University of Technology. 1999, 270 p.
- Kundu, Pijush K.; Cohen, Ira M.; Dowling, David R. Fluid Mechanics. 5th ed. Academic Press is an imprint of Elsevier, 2012, 875 p.
- Lambert, J.D. Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: The Initial Value Problem. John Wiley and Sons, 1992, 304 p.
- Mitchell, A.R.; Griffiths, D.F. The Finite Difference Method in Partial Differential Equations. John Wiley and Sons, 1980, 268 p.

- Munson, Bruce R.; Rothmayer, Alric P.; Okiishi, Theodore H. Fundamentals of Fluid Mechanics. John Wiley & Sons, Inc. 1990, 834 p.
- Pedlosky, Joseph. Geophysical Fluid Dynamics. Springer-Verlag. 1979, 619 p.
- Pope, Stephen B. Turbulent Flows. Cambridge University Press. 2000, 754 p.
- Pratt, Lawrence L.J., Whitehead, John A., Rotating Hydraulics. Nonlinear Topographic Effects in the Ocean and Atmosphere, 2007.
- Richtmyer, R.D.; Morton, K.W. Difference Method for Initial Value Problems. Krieger Pub Co, 2nd edition, 1994, 420 p.
- Turns, Stephen R. Thermal Fluid Sciences. Cambridge University Press. 2006, 1159 p.
- Valentine, H.R. Applied Hydrodynamics. Butterworths, London, 1st ed. 1965, 272 p.
- Van Te Chow, David R. Maidment, Larry W. Mays. Applied Hydrology. McGraw-Hill Series in Water Resources and Environmental Engineering. A Division of The McGraw-Hill Companies, Printed in San Francisco, California 1988.
- Wiley, Benjamin; Streeter, Victor L.; Suo, Lisheng. Fluid Transients in Systems. Prentice-Hall, Inc. 1993. A Simon & Schuster Company.
- Vreugdenhil, C.B. Numerical Methods for Shallow-Water Flow. Water Science and Technology Library, Volume 13. Kluwer Academic Publisher, 1994. Printed in The Netherlands.

## AKADEEMILISED TÖÖD

- Janek Laanearu, doktorikraad, (juh) Hanno Ohvril; Urmas Lips. „Topographically constrained deep-water flows in channels (Rotating-channel flow modelling, Baltic straits overflows)“ („Süvavee voolamine läbi topograafilise kitsusega kanali (pöörleva kanali mudel, süvahoovused Läänemere väinades“), Tartu Ülikool, Füüsika-keemiateaduskond, Tartu 2001.
- Janek Laanearu, filosoofia litsentsiaat (fil.lic. - filosofie licenciat) (juh) Peter Lundberg. „Some aspects of topographically constrained flow in rotating channel“ („Topograafiliselt määratud ja Coriolise jõu poolt mõjutatud süvavee voolu eriaspektid“). IMI Report DM-84, 44 pp, Stockholmi Ülikool, Meteoroloogia/Füüsikalise okeanograafia osakond, Stockholm 2000.
- Kaur, Katrin. „Dynamical Processes of Air-Water Flow in Urban Water Systems“ („Õhu ja vee koosvoolamise dünaamilised protsessid linna vee süsteemides“). Doktoritöö, inseneriteaduskond, ehituse ja arhitektuuri instituut, Tallinna Tehnikaülikool, Tallinn 2022.
- Kollo, Monika. „Uni-and Bidirectional Stratified Flows in Submerged Openings of Built Environment“ („Ühe ja kahesuunaline stratifitseeritud voolamine

konstruktsioonipiiride uputatud avades“). Doktoritöö, inseneriteaduskond, ehituse ja arhitektuuri instituut, Tallinna Tehnikaülikool, Tallinn 2018, 162 lk.

- Oldekop, Nelly. „Investigation of the eddy viscosity for a breaking wave in the surf zone“ („Turbulentse viskoossusteguri määramine murdlaine piirkonnas ranna-alal“). Doktoritöö, inseneriteaduskond, ehituse ja arhitektuuri instituut, Tallinna Tehnikaülikool, Tallinn 2019, ca 150 lk.
- Tiit Metsvahi ja Inna Romandi. Veeristed, TTÜ õppematerjal (2022).

## TEADUSTÖÖ PUBLIKATSIOONID

- Abbas, Abbas Hadi; A. Hassan, Mohammed (2015). New approach for calculating hydraulic radius for partially filled circular conduit by using integration. *International Journal of Engineering and Technical Research (IJETR)* ISSN: 2321-0869 (O) 2454-4698 (P), Volume-3, Issue-8, August 2015.
- Arita M, Jirka GH (1987) Two-layer model of saline wedge. I: Entrainment and interfacial friction. *ASCE J Hydraul Eng* 113(10): 1229–1248.
- Armi L (1986) The hydraulics of two flowing layers with different densities. *J Fluid Mech* 163: 27–58.
- Armi L.; Farmer DM (1986) Maximal two-layer exchange through a contraction with barotropic net flow. *J Fluid Mech* 164: 27–51.
- Borenäs K, Lundberg P (1986) Rotating hydraulics of flow in a parabolic channel. *J Fluid Mech* 167: 309–326.
- Borenäs, K.; Lundberg, P. (1988). On the deep-water flow through the Faroe Bank Channel. *AGU Journal OCEANS: Journal of Geophysical Research*, 93, C2, 1281–1292. <https://doi.org/10.1029/JC093iC02p01281>.
- Bozkus, Z.; Wiggert, D.C. (1997). Liquid slug motion in a voided line. *Journal of Fluids and Structures* 11: 947–963.
- Brkić, Dejan (2011). W solutions of the CW equation for flow friction. *Applied Mathematics Letters* 24(8), 1379-1383.).
- Brkić, Dejan; Praks, Pavel (2019). Accurate and efficient explicit approximations of the Colebrook flow friction equation based on the Wright  $\omega$ -function. *Mathematics* 7 (1): article 34. <https://doi.org/10.3390/math7010034>. ISSN 2227-7390.
- Colebrook, C.F. (1939). Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition Region between the Smooth and Rough Pipe Laws. *Journal of the Institution of Civil Engineers*, 11, 133–156. <http://dx.doi.org/10.1680/ijoti.1939.13150>.
- Cuming, H.G. The Secondary Flow in Curved Pipe. R. & M. No. (13,979) 2880 A.R.C. Technical Report. Ministry of Supply. Aeronautical Research Council and Memoranda. 1955.

- Fritz, Hermann M.; Hager, Willi H. (1998). Hydraulics of embankment weirs. *Journal of Hydraulic Engineering*, 124, 9, 963–971.
- Heydari, A., Narimani, E., Pakniya, F. (2015). Explicit determination of the Colebrook equation for the flow friction factor by statistical analysis. *Chemical Engineering Technology*, 38 (8), 1387–1396.
- Hou, Q.; Tijsseling, A. S.; Laanearu, J.; Annus, I.; Koppel, T.; Bergant, A.; Vučković, S.; Anderson, A.; van 't Westende, J. M. C. (2014). Experimental Investigation on Rapid Filling of a Large-Scale Pipeline. *Journal of Hydraulic Engineering*, 140 (11), 1–14.
- Koppel, T.; Vassiljev, A.; Puust, R.; Laanearu, J. (2014). Modelling of stormwater discharge and quality in urban area. *International Journal of Ecological Science and Environmental Engineering*, 1 (3), 80–90.
- Krawcewicz, Wieslaw. Dramatic Story of Algebraic Equations. *Math Stories*, 2001, 12-14. In  $\pi$  in the Sky, which is semiannual publication of The Pacific Institute for the Mathematical Sciences.
- Laanearu, J.; Annus, I.; Koppel, T.; Bergant, A.; Vučković, S.; Hou, Q.; Tijsseling, A. S.; Anderson, A.; van 't Westende, J. M. C. (2012). Emptying of large-scale pipeline by pressurized air. *Journal of Hydraulic Engineering*, 138 (12), 1090–1100. DOI: 10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000631.
- Laanearu, J.; Cuthbertson A. (2022). Hydraulics of stratified sill flows within varying channel geometries: investigating energy loss and mixing of two-layer maximal exchange. Submitted to *Environmental Fluid Dynamics*, Special Issue.
- Laanearu, J.; Hou, Q.; Annus, I.; Tijsseling, A.S. (2015). Water-Column Mass Losses During Emptying Of A Large-Scale Pipeline By Pressurized Air. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, 64 (1), 8–16. DOI: 10.3176/proc.2015.1.02.
- Laanearu, J.; Kaur, K. (2018). Two-phase CFD modelling of air-water flow transition in a horizontal circular pipe and comparisons with experimental results. In: Dr Arris S. Tijsseling (Ed.). *Pressure Surges 2018: The 13th International Conference on Pressure Surges* (937–948). BHR Group.
- Laanearu, Janek.; Davies, Peter. (2007). Hydraulic control of two-layer flow in „quadratic“-type channels. *Journal of Hydraulic Research*, 45 (1), 3–12.
- Laanearu, Janek.; Lundberg, Peter. (2005). Analysis and improvement of a perturbation solution for hydraulic flow in a rotating parabolic channel. *Zamm-Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, 85 (7), 490–498.
- Lundberg, Peter.; Laanearu, Janek. (2017). Improvements of series convergence to the rotating-channel flow problem using hydraulic solutions for a parabolic passage. *Journal of Hydraulic Research*, 1–11.10.1080/00221686.2017.1354929.
- Martin, C.S. (1976). Entrapped air in pipelines. *Proc., 2nd Int. Conf. on Pressure Surges*, British Hydromechanics Research Association, Bedford, UK, 15–27.

- Pratt, L.J. (1986). Hydraulic control of sill flow with bottom friction. *J. Phys. Oceanogr* 16(11): 1970–1980.
- Sargent, F.E.; Jirka, G.H. (1987) Experiments on Saline Wedge. *ASCE Journal of Hydraulic Engineering* 113(10): 1307–1323.
- Sargison, Jane E.; Percy, Aaron (2009). Hydraulics of broad-crested weirs with varying side slopes. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, vol. 135, no. 1 , pp. 115–118, doi: 10.1061/(ASCE)0733-9437(2009)135:1(115).
- Zhou, Ling; Liu, Deyou; Karney, Bryan; Zhang, Qinfen (2011). Influence of Entrapped Air Pockets on Hydraulic Transients in Water Pipelines. *Journal of Hydraulic Engineering*. Vol. 137, pp. 1686–1692. DOI: 10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000460.
- Zhu, D.Z.; Lawrence, D.A. (2000) Hydraulics of exchange flows. *ASCE Journal of Hydraulic Engineering* 126(12): 921–928.

## RAKENDUSLIKUD PROJEKTID

- CFD analüüs konteinerlajaama kesk- ja madalpinge lülitusseadmete ruumidele (ingl. *CFD analysis of the container substation medium and low voltage switchgear rooms*), 2022. Janek Laanearu, Ülar Palmiste, Jarek Kurnitski. Ehituse ja arhitektuuri instituut, Tallinna Tehnikaülikooli. AS Harju Elekter Elektrotehnika.
- CFD analüüs konteinerlajaama traforuumile (ingl. *CFD analysis of the container substation transformer room*), 2022. Janek Laanearu, Ülar Palmiste, Jarek Kurnitski. Ehituse ja arhitektuuri instituut, Tallinna Tehnikaülikool. AS Harju Elekter Elektrotehnika.
- Ehitise audit ja eskiislahenduste koostamine Paljassaare reoveepuhastusjaama aerotankide nr 1-4 rekonstrueerimiseks, 2020. Andres Piirsalu, Entec Eesti OÜ ja Karl Õiger, Janek Laanearu. Ehituse ja arhitektuuri instituut, Tallinna Tehnikaülikool. AS Tallinna Vesi.
- Kose, Ravila maantee kanalisatsioon, kanalisatsioonist leviva haisu häiringu audit, 2019. Andres Piirsalu, Entec Eesti OÜ. Janek Laanearu, Ehituse ja arhitektuuri instituut, Tallinna Tehnikaülikool. OÜ Kose Vesi.
- Mustvee rajatava jahisadama basseini veeringluse analüüs, 2010. Tiit Koppel, Janek Laanearu. Hüdro- ja aeromehaanika õppetool, Tallinna Tehnikaülikool. Insenerihituse AS.
- Naftasaaduste meretranspordi riskide minimiseerimine holistilist turvalisusstrateegiat kasutades (1.05.2011–31.12.2013). Kristjan Tabri, Martin Heinvee, Janek Laanearu, Monika Kollo. Tallinna Tehnikaülikool, Mehaanikainstituut, Rakendusmehaanika õppetool. Euroopa Regionaalarengu Fond INTERREG IVA programm.

- Narva jõe suudmeala ja Narva lahe kompleksed keskkonnaseisundi uuringud – lähteandmed Narva-Jõesuu kaitsemuuli renoveerimiseks, laevatee süvendamiseks ja ammutatava pinnase puisteks. Hüdroloogia ja meteoroloogia uurimistööd 2002. Janek Laanearu, Jüri Elken. Meresüsteemide instituut, Tallinna Tehnikaülikool.
- Nehatu pais: Veemajanduse programmi „Kalapääsude efektiivsuse hindamine“. Keskkonnaagentuuri ja Eesti Loodushoiu Keskuse vaheline töövõtuleping Nr 3.-3/63; Nehatu tammi füüsiline ja matemaatiline modelleerimine (1.09.2010–31.10.2010), Tiit Koppel, Toomas Liiv, Janek Laanearu, Ivar Annus, Kaspar Alles. Hüdro- ja aeromehaanika õppetool, Tallinna Tehnikaülikool.
- Põlemisgaaside ja CO<sub>2</sub> kasutamine vetikate kasvatamiseks: vetikate liikumise modelleerimine kaldrennis, 2008. Tiit Koppel, Rein Ruubel, Janek Laanearu, Endel Kask, Mihkel Krusberg, Triin Leetmaa. Hüdro- ja aeromehaanika õppetool, Tallinna Tehnikaülikool. Qcell OÜ.
- Seewaldi valgala äravoolu isevoolne lahendus, eksperthinnang kollektori vastuvõtuvõimele, 2019. Andres Piirsalu, OÜ Entec Eesti. Karl Öiger, Janek Laanearu, Ehituse ja arhitektuuri instituut, Tallinna Tehnikaülikool. K-Projekt.
- Tori vana silla lammutamise ja uue silla ehitamise ehituskava KMH täiendavad hüdraulilised arvutused, eksperthinnang, 2021. Janek Laanearu, Ehituse ja arhitektuuri instituut, Tallinna Tehnikaülikool. AS TREF Nord.
- Ülemiste vihmavee ärajuhtimise kontrollarvutus: Kadrioru pargi kanalid ja kaskaad, 2010. Janek Laanearu, Hüdro- ja aeromehaanika õppetool, Tallinna Tehnikaülikool. K-Projekt.

## JUHENDMATERJALID

- EVS 846:2021 „Hoone kanalisatsioon“.
- EVS 848:2021 „Väliskanalisatsioonivõrk“.
- EVS 921:2014 „Veevarustuse välisvõrk“.
- EVS 924:2015 „Vesiehitised sisevetel“, Põhialused.
- RIL 237-1-2010. Vesihuoltoverkkojen suunnittelu. Perusteet ja toiminnallisuus. Suomen Rakennusinsinöörien Liitto RIL ry.
- RIL 237-2-2010. Vesihuoltoverkkojen suunnittelu. Mitoitus ja suunnittelu. Suomen Rakennusinsinöörien Liitto RIL ry.
- Toomas Timmusk, Taavi Lulla. Juhend truupide projekteerimiseks – truibitoru dimensioneerimine, Tartu, 2020.
- Tõnu Vürmer, „Väliskanalisatsioon. Kanalisatsioonivõrgu projekteerimine. Võrgu elemendid – kaevud: planeerimise ja valiku kriteeriumid, tähelepanekuid praktikast“, Tallinn 11.12.2020.
- Voldemar Rannap, Riinu Rannap, Ilona Lepik. „Tiigid. Tiikide rajamine ja taastamine“. Keskkonnaamet. <https://keskkonnaamet.ee> › media › download

## ILLUSTRATIIVSED MATERJALID

- CFD simulatsioonid on koostatud arvutusliku vedelike dünaamika vabavaraga OpenFOAM ver 1706 (GNU General Public License, Copyright 2016-2017 OpenCFD Ltd)  
Ingl. # About OpenFOAM
- OpenFOAM is a free, open source CFD software [released and developed primarily by OpenCFD Ltd](<http://www.openfoam.com>) since 2004. It has a large user base across most areas of engineering and science, from both commercial and academic organisations. OpenFOAM has an extensive range of features to solve anything from complex fluid flows involving chemical reactions, turbulence and heat transfer, to acoustics, solid mechanics and electromagnetics.
- OpenFOAM+ is professionally released every six months to include customer sponsored developments and contributions from the community, including the OpenFOAM Foundation. Releases designated OpenFOAM+ contain several man years of client-sponsored developments of which much has been transferred to, but not released in the OpenFOAM Foundation branch.  
# Copyright
- OpenFOAM is free software: you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or (at your option) any later version. See the file COPYING in this directory for a description of the GNU General Public License terms under which you can copy the files.  
# OpenFOAM Trademark
- OpenCFD Ltd grants use of the OpenFOAM trademark by Third Parties on a licence basis. ESI Group and the OpenFOAM Foundation Ltd are currently permitted to use the Name and agreed Domain Name. For information on trademark use, please refer to the trademark policy guidelines.  
Copyright 2016–2017 OpenCFD Ltd
- Funktsionaalsed graafikud on koostatud numbrilise ja graafilise andmetöötluskeskkonna tarkvaraga MATLAB R2016b – academic versioon, Tallinna Tehnikaülikooli akadeemiline versioon, mille arendaja on MathWorks.  
Ingl. MATLAB® combines a desktop environment tuned for iterative analysis and design processes with a programming language that expresses matrix and array mathematics directly. It includes the Live Editor for creating scripts that combine code, output, and formatted text in an executable notebook. MATLAB toolboxes are professionally developed, rigorously tested, and fully documented. MATLAB apps let you see how different algorithms work with your data. Iterate until you've got the results you want, then automatically generate a MATLAB program to reproduce or automate your work.
- 3D joonised on koostatud tehnilise joonistamise vabavaraga Salome MECA 8.3.0.



Ingl. SALOME is a multi-platform open source (LGPL-2.1-or-later) scientific computing environment, allowing the realization of industrial studies of physics simulations. This platform, developed by a partnership between EDF and CEA, sets up an environment for the various stages of a study to be carried out: from the creation of the CAD model and the mesh to the post-processing and visualization of the results, including the sequence of calculation schemes. Other functionalities such as uncertainty treatment, data assimilation are also implemented.

- 3D joonised on koostatud tehnilise joonistamise vabavaraga Google SketchUp. Ingl. Free 3D modeling software.

## NIMELISED VIITED

Archimedese seadus: üleslükkejõu määramise printsiip

Bernoulli arv: astmerealine funktsioon

Bernoulli võrrand: mehaanilise energia võrrand

Blasiuse hõõrdetakistuse valem: empiiriline valem, milles kasutatakse hõõrdetakistustegurit (hõõrdetakistuse koefitsienti) turbulentsele voolamisele

Butcheri tabel: Runge-Kutta 4-järgu meetodi lahend

Cheni valem: empiiriline valem, milles kasutatakse hõõrdetakistustegurit (hõõrdetakistuse koefitsienti) turbulentsele voolamisele

Chézy moodul: funktsioon takistustegurist (takistuse koefitsientist)

Chézy valem: empiiriline valem, milles kasutatakse Chézy moodulit

Colebrook-White'i võrrand: hõõrdetakistusteguri (hõõrdetakistuse koefitsienti) määramise võrrand turbulentsele voolamisele

Courant-Friedrich-Lewy tingimus: numbrilise arvutusskeemi koonduvustingimus

Couranti arv: numbrilise arvutusskeemi stabiilsustingimus

Darcy valem: empiiriline valem, milles kasutatakse hõõrdetakistustegurit (hõõrdetakistuse koefitsienti)

Darcy-Weisbachi valem: empiiriline valem, milles kasutatakse hüdraulilise voolusüsteemi takistustegurit

Euleri valem: Tayloriga 1-järgu tuletise täpsusega määratud valem

Hardi Crossi meetod: ringvõru arvutamise meetod, milles minimiseeritakse hüdraulilise voolusüsteemi takistust

Hazen-Williamsi valem: empiiriline valem, milles kasutatakse Reynoldsi arvust sõltumatut takistustegurit (takistuse koefitsienti)

Lambert W funktsioon: funktsioon, mis rahuldab astmevõrrandit

Lennard-Jonesi potentsiaal: piiritingimus

Maclaurini rida: astmerida

Manadilli valem: empiiriline valem, milles kasutatakse hõõrdetakistustegurit (hõõrdetakistuse koefitsienti) turbulentsele voolamisele

Manningi karedusskaala: empiiriline takistusteguri skaala

Manningi karedustegur: empiiriline voolutakistuse koefitsient, mis ei sõltu Reynoldsi arvust

Manningi valem: empiiriline valem, mis kasutab Manningi karedustegurit

Moody diagramm: hõõrdetakistusteguri (hõõrdetakistuse koefitsienti) määramise graafiline lahendus

Newtoni iteratsioonmeetod: numbriline meetod

Newtoni vedelik: vedelik, milles vedeliku osa deformatsioon (kiirusnihe) on lineaarne funktsioon hõõrdepingest (hõõrdejõu ja mõjupindala suhtest), nt vesi

Newton-Raphsoni iteratsioonmeetod: numbriline meetod

Pascali seadus: rõhu määramise printsiip

Pavlovski valem: empiiriline valem, mis kasutab Chézy moodulit ja Manningi karedustegurit  
Poiseuille'i valem: empiiriline valem, milles kasutatakse hõõrdetakistustegurit (hõõrdetakistuse koefitsienti) laminaarsele voolamisele  
Prandtl'i teooria valem: voolamise piirikihi valem  
Runge-Kutta numbriline meetod: numbriline meetod  
Siant-Venanti valem: hõõrdejõu määramise valem  
Siant-Venanti võrrandid: madalvee võrrandid, milles kasutatakse hüdraulilist langu  
Smagorinsky valem: turbulentsse viskoossuse valem  
Swamee-Jaini valem: empiiriline valem, mis kasutab hõõrdetakistustegurit (hõõrdetakistuse koefitsienti) turbulentssele voolamisele  
Zhkovski valem: suhtarv  
Žukovski valem: lööklaine rõhu valem  
Tayloriga valem: astmerida  
Toricelli valem: Bernoulli võrrandi lahend avast läbivoolule  
Weisbachi valem: empiiriline valem, mis kasutab hõõrdetakistustegurit (hõõrdetakistuse koefitsienti) turbulentssele voolamisele  
Woodi valem: empiiriline valem, mis kasutab hõõrdetakistustegurit (hõõrdetakistuse koefitsienti) turbulentssele voolamisele

## KREEKA TÄHESTIK

A, α - alfa	H, η - eeta	N, ν - nüü	T, τ - tau
B, β - beeta	Θ, θ - teeta	Ξ, ξ - ksii	Υ, υ - üpsilon
Γ, γ - gamma	I, ι - ioota	O, ο - omikron	Φ, φ - fii
Δ, δ - delta	K, κ - kapa	Π, π - pii	X, χ - hii
E, ε - epsilon	Λ, λ - lambda	P, ρ - roo	Ψ, ψ - psii
Z, ζ - dzeeta	M, μ - müü	Σ, σ - sigma	Ω, ω - oomega

## INGLISKEELSED MÕISTED

- Absolute pressure* – absoluutne rõhk  
*Acceleration due to gravity* – raskuskiirendus  
*Archimedes' Law* – Archimedese seadus  
*Back pressure* – vabarõhk  
*Backdrop Manhole* – kukkumiskaev  
*Black water* – mustvesi  
*Body force* – massijõud  
*Boundary-layer thickness* – piirikihi paksus  
*Bulk Viscosity* – dünaamiline (normaal) molekulaarne viskoossustegur  
*Buoyancy force* – üleslükkejõud, ujuvusjõud  
*Buoyancy-driven flow* – vedeliku tiheduse muutusega kaasneva jõuga määratud sisevoolamine  
*Brackish water* – riimvesi  
*Centrifugal force* – tsentrifugaaljõud  
*Centrifugal pump* – tsentrifugaalpump  
*Channel bottom depth* – avasängipõhja sügavus  
*Check valve* – tagasivooluklapp  
*Complex potential* – kompleksne potentsiaal  
*Compressible flow* – kokkusurutav voolamine  
*Compressive stress* – survepinge  
*Computational Fluid Dynamics (CFD)* – arvutuslik vedelike dünaamika  
*Control surface* – kontrollpind  
*Control volume* – kontrollmaht  
*Coriolis force* – Coriolise jõud  
*Critical flow* – kriitiline voolamine  
*Culvert barrel* – truubi toruosa  
*Culvert inlet (outlet)* – truubi sissevooluava (väljavooluava)  
*Culvert invert (obvert)* – truubi põhi (lagi)  
*Dam* – pais  
*Differential pressure* – diferentsiaalrõhk  
*Direct Numerical Simulation (DNS)* – voolamise liikumishulga võrrandi numbriline integreerimine  
*Drinking water* – joogivesi  
*Drop Shaft* – kukkumiskaev  
*Dynamic eddy viscosity coefficient* – dünaamiline turbulentne viskoossustegur  
*Dynamic molecular viscosity coefficient* – dünaamiline molekulaarne viskoossustegur (dünaamiline laminaarne viskoossustegur)

*Dynamic pressure* – dünaamiline rõhk  
*Eddy viscosity* – turbulentse voolamise viskoossustegur  
*Embankment* – tamm  
*Energy Grade Line (EGL)* – hüdraulilise voolusüsteemi energiajoon  
*Error function* – veafunktsioon  
*Euler's explicit rule* – Euleri valemi ilmutatud kuju reegel  
*Euler's implicit rule* – Euleri valemi ilmutamata kuju reegel  
*Excess pressure of flow* – voolamisega määratud rõhk  
*Explicit computational scheme* – arvutusskeemi ilmutatud kuju  
*Explicit numerical scheme* – ilmutatud numbriline arvutusskeem  
*Finite Volume Method (FVM)* – lõpliku suurusega mahuelementide (kontrollmahtude) meetod  
*Flow acceleration* – voolukiirendus  
*Flow force* – voolukiiruse muutusega määratud jõud, voolamise jõud, voolujõud  
*Flow hydraulics* – voolamise hüdraulika  
*Flow momentum* – voolamise liikumishulk, vooluhoog  
*Flow velocity* – voolamise kiirus, voolukiirus  
*Fluid* – vedelik  
*Fluids interface* – vedelike vahepind, vedelike sisepind  
*Fresh water* – toorvesi  
*Friction force* – hõõrdejõud  
*Friction velocity* – hõõrdekiirus  
*Gradually varying flow* – mõõdukalt ebaühtlane voolamine  
*Gravity head* – raskuskõrgus  
*Gravity sewer* – iseoolne kanalisatsioon  
*Gray water* – hallvesi  
*Quadratic-type cross section* – ruutastmelise kujuga ristlõige  
*Head loss* – survekadu  
*Hydraulic flow system* – hüdrauliline voolusüsteem  
*Hydraulic Grade Line (HGL)* – hüdraulilise voolusüsteemi survejoon  
*Hydraulic gradient* – hüdrauliline lang  
*Hydraulic ram* – vesioinas  
*Hydrostatic pressure* – hüdrostaatiline rõhk  
*Hydroelectric power station* – hüdroelektrijaam  
*Implicit computational scheme* – arvutusskeemi ilmutamata kuju  
*Implicit numerical scheme* – ilmutamata numbriline arvutusskeem  
*Incompressible flow* – kokkusurumatu voolamine  
*Inertia force* – inertsjõud  
*Internal-flow head* – vaheenergiaga määratud rõhukõrgus

*Invert (obvert, crown) of pipe* – toru sisepiirde alumine (ülemine) punkt  
*Irrotational vortex* – pöörivaba keeris  
*Kinematic eddy viscosity coefficient* – kinemaatiline turbulentne viskoossustegur  
*Kinematic molecular viscosity coefficient* – kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur (kinemaatiline laminaarne viskoossustegur)  
*Laminar flow* – laminaarne voolamine  
*Large Eddy Simulation (LES)* – keeristurbulentsi mudel  
*Marine water* – merevesi  
*Major head loss (major loss)* – hõõrdesurvekadu  
*Material derivative* – materiaalne tuletis  
*Material volume* – materiaalne ruumala  
*Maximal flow (maximal two-layer exchange)* – stratifitseeritud voolamine, mis vastab täielikule kriitilisele sissevoolule, nt kahekihilisele voolamisele on olemas kaks kriitilise voolamisega elavlõiget  
*Mechanical pressure* – mehaaniline rõhk  
*Midpoint rule* – keskmistatud valemi reegel  
*Minor head loss (Minor loss)* – kohtsurvekadu  
*Motion acceleration* – liikumiskiirendus  
*Motion velocity* – liikumiskiirus  
*Multi-phase flow* – mitmefaasiline voolamine  
*Newtonian fluid* – Newtoni vedelik  
*Non-Newtonian fluid* – mitte-Newtoni vedelik  
*Non-stationary flow* – mittestatsionaarne voolamine  
*Normal depth* – normaalsügavus  
*Normal stress* – normaalpinge  
*Pascal's Law* – Pascali seadus  
*Potential flow* – potentsiaalne voolamine  
*Potential vorticity equation* – potentsiaalse pööriselisuse võrrand  
*Pressure force* – rõhujõud  
*Pressure head* – rõhukõrgus  
*Pressure gradient force* – rõhugradientjõud  
*Quasi-stationary flow* – kvaasistatsionaarne voolamine  
*Ramp manhole* – astangkaev  
*Raynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) equation* – keskmistatud Navier-Stokesi võrrand (ka Reynoldsi võrrand)  
*Reynolds transport theorem* – Reynoldsi ülekande teoreem  
*River estuary* – jõe estuaar  
*Rotational vortex* – pöörisega keeris  
*Sewer* – kanalisatsioon

*Shallow-water flow* – madalveeline voolamine  
*Shear stress* – tangentsiaalpinge  
*Shear viscosity* – dünaamiline (tangentsiaalne) molekulaarne viskoossustegur  
*Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH)* – osakeste vastasmõjuga määratud koosliikumine  
*Stationary flow (steady flow)* – statsionaarne voolamine  
*Stormwater Sewer* – sademeveekanaliseerimine  
*Stratified flow* – stratifitseeritud voolamine  
*Stream function; streamline; streamtube* – voolufunktsioon; voolujoon; voolutoru  
*Sub-critical flow* – rahulik voolamine  
*Sub-maximal flow (sub-maximal two-layer exchange)* – stratifitseeritud voolamine, mis vastab osaliselt kriitilisele sissevoolule, nt kahekihilisele voolamisele on olemas üks kriitilise voolamisega elavloige  
*Super-critical flow* – käre voolamine  
*Surface force* – pinnajõud  
*Thermodynamic pressure* – termodünaamiline rõhk  
*Transient flow* – tugevalt ebühtlane voolamine  
*Transitional flow* – ülemineku voolamine (ebastatsionaarne voolamine)  
*Trapezoidal rule* – trapetsvalemi reegel  
*Truncation error* – astmerea järguga määratud viga  
*Turbulent flow* – turbulentne voolamine  
*Two-phase flow* – kahefaasiline voolamine  
*Uniform flow (specific case of stationary flow)* – ühtlane voolamine (statsionaarse voolamise erijuht)  
*Unsteady flow* – ebahühtlane voolamine  
*Wastewater sewer* – reoveekanaliseerimine  
*Water surface height* – veepinna kõrgus  
*Water surface width* – veepinna laius  
*Weir flow* – ülevool  
*Velocity head* – kiiruskõrgus  
*Velocity potential; velocity-potential line* – kiiruspotentsiaal; kiiruspotentsiaali joon  
*Volume of Fluid Method (VOF method)* – vedelikdünaamika sisepindade meetod  
*Volumetric rate of flow (discharge)* – vooluhulk  
*Vorticity* – kiirusvälja pööriselisus  
*Vorticity of velocity vectorfield* – kiiruse vektorvälja pööriselisus  
*Waste water* – reovesi  
*Water Distribution System (WDS)* – vee jaotamise süsteem  
*Waste Collection System (WCS)* – vee kogumise süsteem  
*White water* – valgevesi



## TÄNUSÕNAD

Autorid soovivada avaldada tänu raamatu retsensentidele, kaasamõtlejatele ja toetajatele. Õpiku valmimisele on kaasa aidanud mitmed oma ala professionaalid.

Autorid on tänulikud kõikidele isikutele ja ettevõtetele, kes on andnud oma sisendi läbi arutelude ja praktilise koostöö ning sellega aidanud kaasa õpiku sisu koostamisele.

## TOETAJAD

Õpiku digiversioon on valminud SA Archimedes riikliku programmi „Eestikeelsete kõrgkooliõpikute koostamine ja väljaandmine 2018–2027“ toel. Õpiku koostamisel on osalenud Eesti Haridus- ja Teadusministeerium, Haridus- ja noorteamet (HARNO) ning Eesti Keele Instituut.

Õpiku paberversiooni valmimisele on võimalik anda sisend kaasrahastajatel. Selleks tuleb võtta ühendust autoritega.

# AINEREGISTER

## A

Aerotank  
Aeroobne  
Ahasistlõige  
Ahenemine  
Ahenemistegur (ahenemise koefitsient)  
Ajäühik  
Akumuleerimine (nt vee kogunemine sademevee torustikus)  
Alarõhk  
Alarõhk (nõ negatiivne ülerõhk)  
Alavesi (alumise bjefi vesi)  
Alumine bjeff  
Aluspõhi  
Aluspõhja laius  
Antisanitaarsed tingimused  
Anaeroobne  
Anum  
Archimedese seadus  
Arteesia vesi  
Arvestusrõhk (arvestuslik rõhk)  
Arvestusvooluhulk (arvestuslik vooluhulk)  
Arvutatud hüdrauliline suurus  
Arvutatud vooluhulk  
Arvutuslik voolurežiim  
Arvutusrõhk  
Arvutusskeem  
Arvutusskeemi ilmutamata kuju  
Arvutusskeemi ilmutatud kuju  
Astangkaev  
Atmosfääri rõhk  
Auruline kavitatsioon  
Aurumine  
Automaatklapp  
Avariolukord  
Avasäng

## B

Bassein  
Bernoulli arv  
Bernoulli kolmikliige  
Bernoulli võrrand  
Betoonkanal  
Betoonpais  
Betoontamm  
Biotiik  
Blasiuse hõõrdetakistuse kloonvalem  
Blasiuse hõõrdetakistuse valem  
Blasiuse hõõrdetakistustegur (Blasiuse takistustegur)  
Blasiuse valem

## C

Colebrook-White'i hõõrdetakistuse kloonvõrrand  
Colebrook-White'i hõõrdetakistuse võrrand  
Colebrook-White'i hõõrdetakistustegur (Colebrook-White'i takistustegur)  
Coriolise jõud  
Coriolise kiirendus  
Coriolise parameeter

## D

Darcy-Weisbach-tüüpi hõõrdetakistustegur  
Diferentsiaal  
Diferentsiaalne suurus  
Dimensioonimine  
Dünaamiline molekulaarne viskoossustegur (dünaamiline laminaarne viskoossustegur)  
Dünaamiline turbulentne viskoossustegur  
Düüker (pööratud sifoon)

## E

Ebastatsionaarse voolamine (ülemineku voolamine)  
Ebaühtlane voolamine  
Eelbassein (nt tiik)  
Eelvool  
Ehitatud tamm  
Ehitis  
Ekvivalentpikkus  
Elavlõige

Elementarmaht  
Empiiriline valem  
Eriprofiilülevool  
Eriprofiilülevoolu läve pikkus  
Eriprofiilülevoolu harja paksus  
Erirežiim  
Erosioon

## F

Filtratsioonimahuti  
Froude'i arv  
Froude'i suhtarvu kriteerium  
Funktsioon  
Funktsiooni argument

## G

Gaas  
Gaasiline kavitatsioon  
Geodeetiliselt  
Geostroofiline voolamine  
Gravitatsioonitamm

## H

Haisuhäiring  
Hallvesi  
Harja paksus  
Heitvesi  
Heljum  
Hooldamistööd  
Hoolduskaev  
Hoone  
Horisontaalne toru  
Hõõrdepinge  
Hõõrdepinge piirdel  
Hõõrdesurvekadu  
Hõõrdetakistustegur (hõõrdetakistuse koefitsient)  
Hüdrauliline diameeter  
Hüdrauliline kaudlõök  
Hüdrauliline lang  
Hüdrauliline lööklaine

Hüdrauliline otselöök  
Hüdrauliline raadius  
Hüdrauliline suurus  
Hüdrauliline vabavoolurežiim  
Hüdrauliline voolukiirus  
Hüdrauliline voolusüsteem  
Hüdraulilise voolusüsteemi element  
Hüdrauliliselt kontrollitud  
Hüdrauliliselt kriitiline vabavoolurežiim  
Hüdrauliliselt käre vabavoolurežiim  
Hüdrauliliselt rahulik vabavoolurežiim  
Hüdrauliliselt soodsaim ristlõige  
Hüdroelektrijaam  
Hüdrogeoloogilised tingimused  
Hüdroloogiline koormus  
Hüdrolöök  
Hüdrostaatiline rõhk  
Hüdrotehnika  
Hüdrotehnilised rajatised  
Hüppekeeris  
Hüppepikkus

## I

Ideaalvool  
Infiltratsioon  
Inimtekkeline tamm  
Integraal  
Integraalne suurus  
Integraalne voolamise liikumishulk  
Intensiivne sadu  
Intensiivne uhtumine  
Intensiivsus  
Isepuhastuskiirus  
Isevoolne (vabavoolne)  
Iteratsioonarvutus

## J

Jaotustorustik  
Jawa tamm  
Joogivesi (vesi)  
Juga

Jõevesi  
Jõevool  
Järepuhastustiik  
Järve pinnasnõlv  
Järvevesi  
Jätk (lühike torulõik)

## K

Kaetud vooluhüpe  
Kaitsehitis  
Kalakasvatustiik  
Kalapääsuava  
Kaldtoru  
Kanal  
Kanalisatsioonivõrk  
Kaskaad  
Kastmisvesi  
Kavitatsioon  
Keskendi  
Kiiruskõrgus  
Kiirustegur, kiiruse koefitsient  
Kilpsiiber  
Kinemaatiline molekulaarne viskoossustegur (kinemaatiline laminaarne viskoossustegur)  
Kinemaatiline turbulentne viskoossustegur  
Kitsa avaga sillad  
Kogusurve  
Kohttakistus  
Kolmnurkülevool  
Kolmnurkse ristlõikekujuga ülevoolupais  
Kolmogorovi mikromõõde  
Kontrollarvutus  
Kontrollkaev  
Kontrollmaht  
Kontrollmahu pinna ehk kontrollpinna tangentsiaalpinge  
Kontrollpinna normaalpinge  
Korduvusaeg (esinemise aeg vihmadele)  
Korrosioon  
Kraav  
Kriitiline sügavus  
Kriitiline voolukiirus

Kriitilisele voolamisele vastav suhteline torutäide

Kuja

Kukkumiskaev

Kustutusvesi

Kvaasistatsionaarne voolamine

Kõrgus

Käituskulud

Käre voolukiirus

Kääritamine

Küvett

## L

Lailäviülevoov (pika lävega pais, paksu harjaga pais, müürülevoov)

Lainejada

Lainetuse keerised

Laius

Lang

Lennard-Jonesi potentsiaal

Liigtäide

Liigveelask

Liikumishulga võrrand

Liikumiskiirendus

Liikumiskiirus

Loodusmoodustis (nt settekünnis, setete kuhi)

Loodussäng (looduslik voolusäng)

Loodusveekogu (looduslik vooluveekogu (nt jõgi) või looduslik seisuveekogu (nt järv))

L-toru

Läbilaskevõime

Lühike survetoru

Lühikese lävega pais (õhukese harjaga pais, seinülevoov)

Lüüsregulaator

## M

Maalihe

Maht

Maclaurini rida

Mageveekogud

Magistraalliin

Mahuti

Maksimaalse vooluhulga valem



Manningi hõõrdetakistuse kloonvalem  
Manningi hõõrdetakistuse valem  
Manningi hõõrdetakistustegur (Manningi takistustegur)  
Manningi karedusskaala  
Manningi karedustegur  
Manningi vooluhulga valem  
Manningi voolukiiruse valem  
Massijõud  
Mehaaniline rõhk  
Merepind  
Merevesi  
Mitte-Newtoni vedelik  
Mittetatsionaarne voolamine  
Mittetäielik vooluhüpe  
Mustvesi  
Mõõde  
Mõõdukalt ebaühtlane voolamine  
Määratud hüdrauliline suurus  
Märgala  
Märgpiire  
Müürülevool (lailäviülevool, pika lävega pais, paksu harjaga pais)

## N

Navier-Stokesi võrrand  
Nelinurkkujuline ristlõige  
Nelinurkkujulise ristlõikega voolusäng (nelinurkristlõikega voolusäng)  
Nelinurkristlõikega ülevooluava  
Nelinurkülevool  
Normaalsügavus  
Numbriline arvutusskeem

## O

Optimaalne  
Optimeerimine

## P

Paak  
Pais  
Paisu lävi (paisu hari)  
Paisu ülevooluava

Paisulaine  
Paisutamine  
Paisutuskõrgus  
Paisutustase  
Paisutusulatus  
Paksu harjaga pais, paksuharjaline pais  
Paraboolkujuline ristlõige  
Paraboolkujulise ristlõikega voolusäng  
Paraboolristlõikega voolusäng  
Pascali seadus  
Pavlovski valem  
Pealtkaetud voolusäng (isevoolne torustik)  
pH  
Pika lävega pais (lailäviülevool, paksu harjaga pais, müürülevool)  
Pikkus  
Pinnahüpe  
Pinnajõud  
Pinnaspais  
Pinnastamm  
Pinnaveekogu (nt jõgi, järv)  
Polütroopne protsess  
Poolisevoolne kanalisatsioon  
Potentsiaalne asendienergia  
Potentsiaalne sügavus  
Potentsiaalse pööriselisus  
Potentsiaalse pööriselisuse võrrand  
Prismaatiline tehiskanal  
Proovirõhk  
Puhastusefektiivsus  
Puhtaveereservuaar  
Purgimissõlm  
Põhjalase  
Põu (põuaaeg)  
Pööriselisus  
Püsikulud

## R

Rahulik voolukiirus  
Rajatis  
Raskuskõrgus  
Renn

Reoveepuhasti  
Reoveepumpla  
Reovesi  
Reservuaar  
Restkaev  
Restluuk  
Reynoldsi arv  
Reynoldsi võrrandid  
Ringvõrk  
Ruutastmekujuline ristlõige  
Ruutastmelise kujuga ristlõige  
Ruutastmekujulise ristlõikega voolusäng  
Ruutparaboolkujuline ristlõige  
Ruutparaboolkujulise ristlõikega voolusäng  
Ruutparaboolristlõikega voolusäng  
Rõhuepüür  
Rõhugradientjõud  
Rõhukõrgus

## S

Saastekoormus  
Saasteaine  
Sademed  
Sademevee süsteem  
Sademeveetiikide kombineeritud äravoolu aeglustamislahendused  
Sademevesi  
Salvkaev  
Sanitaarvooluhulk  
Seinülevoov (lühikese lävega pais, õhukese harjaga pais)  
Seisuveekogu (nt järv, tiik vms)  
Setete kuhjumine  
Setete uhtumine  
Setitustiik  
Settebassein  
Settekott  
Settekünnis, Setete kuhi  
Sifoon  
SI-mõõtühik  
Sisepind (vahepind)  
Sisevoolamise hüdraulika  
Sissevooluava voolurežiimi kontroll

Sissevoolukontroll  
Staatiline rõhk  
Stationsaarne voolamine  
Stratifitseeritud voolamine  
Suhteline torutäide  
Sumbumine (nt lööklaine sumbumine torustikus)  
Surutud vooluhüpe  
Survekadu  
Surveta truubid  
Survetoru  
Survevool  
Survevoolu truup  
Suspendeerunud setete fraktsioon  
Suunatud tuletis  
Swamee-Jaini hõõrdetakistus  
Swamee-Jaini hõõrdetakistuse kloonvalem  
Swamee-Jaini hõõrdetakistuse valem  
Swamee-Jaini hõõrdetakistustegur (Swamee-Jaini takistustegur)  
Sängipiire  
Sügavapõhjaline pargiala  
Sügavus

## Š

Šandoor

## T

Tagasilöögiklapp  
Tamm  
Tarnetorustik  
Tasakaaluprofiil  
Tasku (nt tiik, sügavapõhjaline pargiala vms)  
Taylori rida  
Teetruup  
Tehissäng (tehislik voolusäng)  
Tehissängi kriitilise sügavuse valem  
Tehisveekogu (tehislik vooluveekogu (nt kraav), tehislik seisuveekogu (nt tiik))  
Tehniline voolusüsteem  
Tehnosüsteem  
Termodünaamiline rõhk  
Tiheduslaine  
Tiik

Tiipturni veetarbimine  
Toru  
Torustik  
Torustiku ummistus  
Trapetskujuline ristlõige  
Trapetskujulise ristlõikega voolusäng (trapetsristlõikega voolusäng)  
Truubivoolu projekteeritud tööolukord  
Tsentrifugaalpump  
Tugevalt ebäühtlane voolamine  
Tuletõrjehüdrant  
Tuletõrjereservuaar  
Tulvavee äkk-koormus  
Tulvaveed  
Tupikvõrk  
Turbulentne voolamine  
Turbulentsed keerised  
Tõus  
Tõusulaine  
Tõusuvesi  
Täielik vooluhüpe  
Täitmine  
Töörõhk  
T-ühendus  
Tühjendustoru

## U

Uhteaine  
Uhtekiirus  
Uhteaine materjal  
Ujula  
Umbluuk  
Uputamata ava  
Uputatud ava  
Uputustegur  
U-toru

## V

Vaakum  
Vabapind  
Vabapinna kõrgus  
Vabarõhk

Vabavool  
Vabavoolutruup  
Vahepind (sisepind)  
Valemi määramatus  
Valingvihm  
Valitud tööolukord  
Valgevesi  
Vari  
Veafunktsioon  
Vedelik  
Vedlike sisepind (vedlike vahepind)  
Vee kriitiline viibeag  
Veejuhe  
Veekeskus  
Veekogu tamm  
Veekogumise maht  
Veepadi  
Veepind (vee vabapind)  
Veepinna kõrgus  
Veerežiim  
Veeringe  
Veeruumala  
Veetõus  
Veetõotlusjaam  
Veevalts  
Veevoolu pind  
Veesööst  
Vertikaalne toru  
Vesi (ka joogivesi)  
Vesiehitis  
Vesinikeksponent (ka pH)  
Vihmavesi  
Vesioinas  
Viivitusmaht  
Voolamise hüdraulika  
Voolamise keskkiirus  
Voolamise liikumishulk  
Voolamise liikumiskiirus  
Voolamise ruumkiirus  
Voolamise tehnosüsteem  
Vooluhulgategur (vooluhulga koefitsient)  
Vooluhulk

Vooluhüpe  
Vooluhüppe kaaskõrgus  
Vooluhüppelaine  
Voolujõud  
Voolukiirendus  
Voolukiirus  
Voolulõige  
Voolurahustussein  
Voolurenn  
Voolusäng  
Voolusäangi piirde erosioon  
Voolusäangi piire  
Voolusäangi Reynolds'i arv  
Voolutsoon  
Vooluveekogu (nt jõgi)  
Väike sillaava  
Väikepuhasti  
Väljavooluava voolurežiimi kontroll  
Väljavoolukontroll

## Õ

Õhk  
Õhukese harjaga pais, Õhukeseharjaline pais (lähikese lävega pais, seinülevool)  
Õhupaak  
Õhupadi  
Õhurõhk

## Ä

Äravool  
Äravoolusäng

## Ö

Ööpäev

## Ü

Ühisveevärk  
Ühtlane voolamine  
Ülavesi (ülemise bjefi vesi)  
Ülekoormus  
Ülemine bjeff

Ülemineku voolamine (ebastatsionaarse voolamine)

Üleminekuvoolu truuup

Ülerõhk

Üleslükkejõud (ujuvusjõud)

Ülesvool

Ülevool

Ülevoolu põhivalem

Ülevooluava

Ülevoolupais

Ülevoolutegur (ülevoolu koefitsient)

Ülevoolutoru

Ümarristlõikega ava

Ümartoru

Ümartoru Reynoldsi arv

Y

Y-ühendus

Z

Zhukoski arv (Žukoski arv)

Zhukovski rõhk (Žukovski rõhk)





Janek Laanearu (sünd 1972 Pärnumaal) on 2022. aastast Tallinna Tehnikaülikooli ehituse ja arhitektuuri instituudi kaasprofessor teneuris. Ta on lõpetanud Tartu Ülikooli 2001. aastal doktorikraadiga (PhD keskkonnafüüsikas). Aastatel 1997–2000 täiendas ennast Rootsis, kus arendas arvutusmeetodeid looduslike voolusüsteemide hüdraulikas ning omandas Stockholmi Ülikooli filosoofialitsentsiaadikraadi (PhLic). Aastatel 2004–2005 töötas stratifitseeritud ülevoolude hüdraulikaga seotud teadusprojekti täitjana Dundee Ülikoolis (Šotimaa, ÜK). Aastast 2010 Rahvusvahelise Hüdrokeskkonnatehnika ja Uuringute Seltsi (IAHR) ning aastast 2021 Ameerika Ehitusinseneride Seltsi (ASCE EWRI) liige. Ta on olnud EL projektide koordinaator ja täitja, riikidevaheliste tööruhmade ja konverentsikomiteede liige ning juhendaja.



Andres Piirsalu (sünd 1963) on Entec Eesti OÜ veevarustuse ja kanalisatsiooni- ning keskkonnaekspert. Ta on lõpetanud Tallinna Polütehnilise Instituudi (praegu Tallinna Tehnikaülikool) 1986. aastal diplomeeritud ehitusinsenerina veevarustuse ja kanalisatsiooni erialal. 1992–1993 täiendas end Tampere Tehnikaülikoolis (Soome) magistriõppes vee- ja keskkonnakorralduse erialal. Ta on Eesti Veevarustuse ja Kanalisatsiooni Inseneride Seltsi (EVKIS) asutajaliige ja aastatel 2008–2016 selle volikogu esimees. Perioodil 2016–2018 oli Euroopa Ehitusinseneride Nõukogu (ECCE) juhataste liige ja aastast 2022 on Eesti Ehitusinseneride Liidu esimees.

