TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 375

ТРУДЫ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ

VI

ТАЛЛИН 1975

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 375 1975

УДК 624

ТРУДЫ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ

У1

Таллин 1975

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 375 1975

УДК 624.041.2

Э.М. Иеги

ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИИ С ОПТИМАЛЬНОЙ НАДЕЖНОСТЬЮ

I. Общие положения. В статье развиваются вопросы приложения теории надежности к решению экстремальных задач строительной механики [I], разрабатывается математическая модель задачи оптимизации дискретных систем, в соответствии с общими принципами построения математических моделей задачи теории надежности [2], исходя при этом из общих идей применения методов теории вероятности и теории надежности в расчетах сооружений [3], обобщая их для решения некоторых экстремальных задач строительной механики.

Все увеличивающаяся сложность инженерных систем предъявляет все более жесткие требования в отношении надежности их работы. Теория надежности устанавливает и изучает количественные показатели надежности различных систем, выпущенных в "разное время" или соответствующих "разным планам", учитывая при этом стохастичность факторов и параметров, определяющих свойства системы и поведение ее на осях выбранного пространства.

Теория надежности располагает разработанной методикой установления оптимальных режимов, выбора оптимальных параметров, обеспечивающих оптимальную надежность системы, например, достаточную надежность при минимальных ресурсах.

Количественные показатели надежности имеют вероятностную трактовку, в которой под надежностью понимают вероятность безотказной работы в заданной области: в течение заданного интервала времени и (или) на заданном интервале оси, имеющей иной физический смысл (например, смысл конструктивных или весовых параметров). При этом возможно введение и других количественных показателей, определяющих качество системы (например, объем, вес, стоимость конструкции). Однако многие вопросы, поставленные и сформулированные в общей теории надежности, недостаточно изучены в приложении к проблемам расчета и оптимального проектирования сооружений. К ним относятся, например, вопросы оптимального распределения ограниченного ресурса, вопросы оптимального резервирования, вопросы диагностики, использования теории марковских процессов в решении задач оптимального проектирования.

Очевидно, что обоснованный подход к оценке надежности конструкции требует максимального приближения теоретической модели к реальной конструкции, учета стохастичности процессов изменения внешних воздействий, состояния и качества системы, прогнозируя поведение системы в некотором фазовом пространстве. Исследование влияния фактора времени на строительную конструкцию началось с 20-х годов этого столетия и связано в нашей стране с именами Стрелецкого Н.С, Ржаницына А.Р. и др. Однако лишь с конца 50-х годов теория надежности конструкции, как проблема долговечности ее, становится одной из важнейших проблем современности.

Теория надежности конструкции в современной постановке рассматривает все внешние воздействия, параметры состояния и параметры качества конструкции как случайные процессы, а отказы как случайные выбросы некоторых процессов из области допустимых состояний.

Развитие теории надежности механических систем идет сейчас по пути учета взаимодействия конструкции с окружающей средой, расчета ее стохастического поведения и в получении вероятностных выводов, основанных на анализе этого поведения. Успехи, полученные в этом направлении, связаны с именами Болотина В.В., Гнеденко Б.В., Екимова В.В., Крамера Х., Ржаницына А.Р., Чираса А.А. и многих других советских и зарубежных ученых. Наряду с этим, следует отметить то обстоятельство, что постановка и решение задачи оптимального проектирования строительной конструкции, как правило, осуществляется без учета стохастических свойств поведения системы. Подавляющая часть работ по оптимизации конструкции не рассматривает вероятностного характера оценки надежности системы: надежность трактуется как свойство безотказности в заданный момент времени без учета долговечности системы. Не изучены вопросы связи параметров состояния и параметров качества, вопросы влияния конструктивных (весовых) параметров на надежность конструкции, мало изучены вероятностные законы и характеристики стохастического поведения строительных систем в фазовом пространстве.

В статье излагаются результаты исследований автора в этом направлении, при этом формулируется задача оптимального проектирования как задача проектирования конструкции с оптимальной надежностью (в вероятностном смысле).

2. <u>Постановка задачи</u>. Оптимальное проектирование представляет собой технико-экономическую проблему, для которой, естественно, минимальный объем (или вес) не является единственным признаком оптимальности конструкции, ибо понятие оптимальности включает и требование высокой надежности и долговечности при высоких эксплуатационных качествах. В этом смысле наиболее общей задачей оптимального проектирования является задача о проектировании конструкции с оптимальной надежностью. При этом следует сразу же оговорить, что оптимальное решение может быть определено лишь для конкретной системы, с заданным характером воздействий и заданными условиями эксплуатации.

Обычно задача оптимизации надежности формулируется как задача оптимизации стоимости конструкции при заданном уровне надежности: определить конструкцию, удовлетворяющую требованиям нормативной надежности и, при этом, наилучшим образом удовлетворяющую требованиям качества (функции цели). В общем виде это качество описывается как минимальная стоимость конструкции:

$$C = C_0(R_0) + C_1(R_0)(1 - R_0), \tag{2.I}$$

где C_0 - начальная стоимость,

C_1 - сумма расходов, связанная с восстановлением утерянной надежности в процессе эксплуатации,

R_0 - нормативная надежность.

В такой постановке нормативная надежность обычно рассматривается как некоторое число, при этом не учитывается долговечность конструкции. Очевидно, что задача проектирования конструкции минимального объема (веса) является вырожденным случаем такой постановки, когда функция стоимости конструкции (C) описывается лишь начальной стоимостью (C_0), определяемой как стоимость расхода материала конструкции.

В наиболее общей постановке [3], с учетом долговечности системы (T), полная стоимость конструкции, выходящей из строя в момент времени T , определяется как сумма $C = C_0 + C_1(T)$, где начальная стоимость C_0 и стоимость возмещения отказов C_1 трактуются как функционалы от нормативной надежности $R_0 = R_0(t)$ являющейся функцией времени. При этом C_1 является убывающей функцией долговечности T , которая в свою очередь является величиной случайной

$$C = C_0[R_0(t)] + C_1[R_0(t),T]. \tag{2.2}$$

Математическое ожидание стоимости конструкции определяется здесь для убывающей функции надежности $R(T)$ как разность между математическим ожиданием начальной стоимости конструкции $\langle [C_0 R_0(T)] \rangle = C_0$ и математическим ожиданием "износа" конструкции с долговечностью T:

$$\langle C \rangle = \langle C_0 \rangle - \int_0^{T_0} C_1(T) R_0'(T)\, dT. \tag{2.3}$$

Здесь $R_0(T)$ – нормативная надежность системы с долговечностью T ;

$R_0'(T) = -\dfrac{dR_0(T)}{dT}$ – плотность распределения времени до первого отказа;

$R_0'(T)\, dT$ – вероятность отказа системы в интервале долговечности $T, T+dT$;

$C_1(T)$ – мера"износа" конструкции, определяемая стоимостью ущерба от отказов конструкции с долговечностью T ;

T_0 – установленный срок эксплуатации.

Задача оптимизации сводится к выбору нормативной надежности $R_0(T)$ из условия, чтобы математическое ожидание $\langle C \rangle$ было минимальным, т.е. к определению минимума функционала (2.3), что представляет достаточно серьезные сложности на пути численного решения рассмотренной модели задачи проектирования конструкции с оптимальной надежностью.

В нашей постановке задача проектирования конструкции с оптимальной надежностью может осуществляться без задания нормативной надежности и формулируется как пара двойственных задач [I] следующим образом:

I. Выбрать из множества конструкций систему с нормативным качеством (C_0), которая при этом наилучшим образом удовлетворяла бы требованиям надежности ($\max R$).

2. Выбрать из множества конструкций систему с заданной нормативной надежностью (R_0), которая при этом наилучшим образом удовлетворяла бы требованиям качества конструкции ($\min C$).

Для такой постановки задачи анализ надежности на стадии проектирования и разработки строительной конструкции проводится в некотором многомерном фазовом пространстве с осями весовых параметров (q), описывающих физические и конструктивные свойства системы, стохастически изменяющиеся на оси времени.

Решая задачу оптимального проектирования, приходим к необходимости сравнения показателей надежности различных систем с различными фазовыми пространствами и отбора наилучшей из них по выбранному критерию. Сопоставляются вероятностные оценки различных вариантов конструкций, которые развертывают свои вероятностные свойства в фазовом пространстве качества, при этом сами фазовые пространства изменяют свои свойства на оси времени.

Силы, действующие на конструкции, также развертывают свои вероятностные свойства на оси времени, образуя при этом стационарный процесс, вероятностные свойства которого не зависят от начала отсчета времени. Ограничимся в этой статье рассмотрением статически-переменных нагрузок, когда частота изменения нагрузки значительно меньше собственной частоты колебаний системы.

3. Математическая модель задачи проектирования конструкции с оптимальной надежностью строится как стохастическая модель задачи нелинейного математического программирования.

Общая схема построения модели формулируется в соответствии с принципами построения модели задачи теории надежности.

3.I. Фазовое пространство состояний системы (B) выбирается как пространство векторов усилий $(b \in B)$, различающихся между собой с точки зрения надежности. Если описать уравнение системы в операторном виде

$$L \cdot b = q, \tag{3.I}$$

то элементы пространства состояний (b) могут рассматриваться как случайные элементы пространства выходных параметров, зависящие от времени (t) и весовых параметров системы (g) так, что $b = b(g,t)$.

Элемент из пространства входных параметров (q) характеризует влияние воздействия как стохастического процесса на оси времени $q = q(t)$.

Стохастический оператор системы (L) преобразует входные параметры системы в выходные, описывая случайный процесс в пространстве весовых параметров $g = g(t)$ так, что $L = L[g(t)]$.

3.2. Стохастическое поведение системы полностью описывается элементами пространства B так, что

$$b(g,t) = H(g)\, q(t), \tag{3.2}$$

где $H(g)$ – оператор, обратный к L.

Элементы множества B образуют многомерное эвклидово пространство состояний системы, мерность которого соответствует степени статической неопределенности дискретной системы, а сам элемент (b) определяется для случайного значения времени $t = t_0$ $b = b[g(t_0), t_0]$ и получается как пересечение двух подпространств – статически возможных (B^c) и кинематически возможных (B^k) векторов [4]. При этом метрика пространства, описываемая как скалярное произведение двух векторов $b_i \cdot b_j$ содержит в себе случайные значения весовых параметров $g = g(t)$, стохастически меняющие свои свойства на оси времени.

Каждому случайному моменту времени $t = t_0$ соответствует с некоторой вероятностью элемент входного пространства $q(t_0)$, оператор системы $L[g(t_0)]$ и элемент выходного пространства $b[g(t_0), t_0]$. При изменении параметра времени (t) элементы системы и, следовательно, система в целом переходят из одного состояния в другое, определяя состояние системы как функционал $b[g(t), t]$. Множеству состояний системы соответствует некоторя стохастическая гиперповерхность в пространстве состояний $B \ni b[g(t), t]$.

Таким образом, анализ поведения системы сводится к решению стохастического уравнения (3.2). При этом для дискретных систем оператор $H(g)$ может получить вид:

$$H(g) = [\overleftarrow{b}q + b_1(g)D^{-1}(g)\overline{D}_p(g,q)], \tag{3.3}$$

где матрицы b_q, b_1, D, D_p имеют обычный смысл матричной символики статического расчета дискретных систем.

3.3. Пространство качества системы может быть выбрано существенно не однозначно исходя из технико-экономических соображений оценки качества строительной конструкции.

В задаче оптимального проектирования критерием качества конструкции может быть выбран или объем, или вес, или затраты на ее создание и эксплуатацию, или какой-либо другой функционал от параметров, подлежащих выбору. Каждому качеству системы соответствует элемент из соответствующего пространства качества. При этом роль параметров играют весовые параметры элементов системы, как параметры физических и геометрических свойств элементов конструкции, изменяющихся на оси времени.

Связь между элементами пространства состояния (B) и пространства качества (V) устанавливается операторным соотношением

$$V(g,t) = M(g)b(g,t). \tag{3.4}$$

Оператор $M(g)$ зависит от весовых параметров и, вообще говоря, является сложным вычислительным оператором перевода элементов пространства состояния $b(g,t) \in B$ в элементы пространства качества $v(g,t) \in V$.

Так как изменение состояний системы носит случайный характер, то и изменение качества системы есть случайный процесс, протекающий в фазовом пространстве качества, как пространства, образованного осями весовых параметров (q), меняющих свои свойства во времени $q = q(t)$. При этом каждой гиперповерхности пространства состояний соответствует некоторая стохастическая гиперповерхность пространства качества.

Если рассмотреть задачу оптимального проектирования дискретной системы, то весовыми параметрами будут являться безразмерные параметры жесткостей элементов системы, однозначно определяющие элементы состояния системы в пространстве состояний (B) в фиксированный момент времени (t_0) и соответствующие им элементы качества системы в пространстве качества (V), различающиеся с точки зрения надежности. В этом случае элементы пространства качества образуют многомерное эвклидово пространство, мерность которого определяется числом блоков (элементов) в системе, каждый из которых может обладать различной мерой надежности.

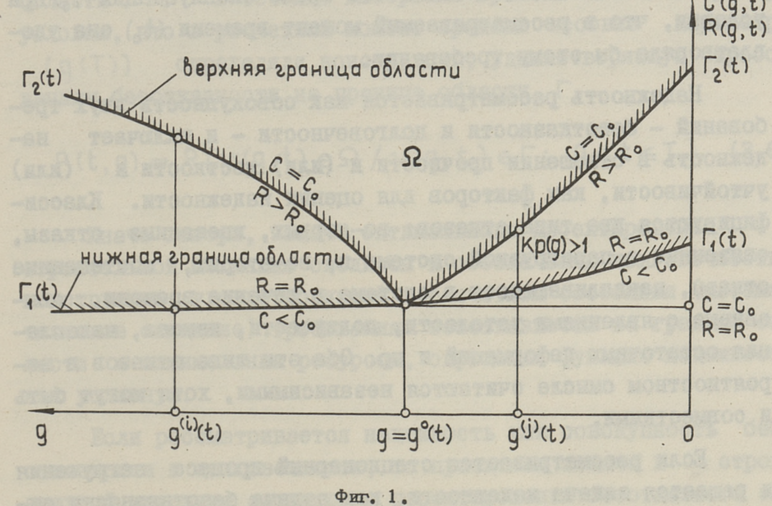
3.4. Область допустимых состояний (Ω) образует множество состояний системы в пространстве качества, допустимых с точки зрения надежности.

Граница области (Γ) допустимых, с точки зрения качества, строительных конструкций будет соответствовать предельным состояниям системы, в смысле исчерпания ее несущей способности (в смысле надежности).

Могут определяться несколько областей допустимых систем $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$, частично пересекающихся или входящих одна в другую, например, область допустимых состояний по прочности (Ω_1), по жесткости (Ω_2) по устойчивости (Ω_3) строительных конструкций. При этом граница облачти (Γ) определяется из условия $\Gamma = \inf \Gamma_i$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Стохастическая модель задачи проектирования конструкции с оптимальной надежностью в некоторый момент времени $t = t_0$, для стационарного процесса приводится на фиг.I.

Если решается задача I - выбора конструкции из множества систем с нормированным качеством (C_0), наилучшим образом удовлетворяющей требованиям надежности ($\max R$), то наилучшей системой с точки зрения максимальной надежности следует считать систему с нормативной надежностью всех элементов, входящих в нее ($R = R_0$), что соответствует задаче проектирования равнопрочной конструкции с нормированным ресурсом (C). Граница области допустимых конструкций будет определяться по нижней границе (Γ_1) из условия безотказности элементов системы (прочности и (или) жесткости и (или) устойчивости), так что $R = R_0$ для всех элементов, не удовлетворяя, при этом, требованию нормированного расхода ресурса (качества) ($C > C_0$), соответственно верхней границе области (Γ_2), для всех точек нижней границы, кроме одной – $g = g_1^0(t_0)$, в которой условие равнопрочности системы ($R = R_0$) удовлетворяется при нормированном ресурсе ($C = C_0$), определяя конструкцию с оптимальной надежностью.



Фиг. 1.

Если решается задача 2 – выбора конструкции из множества систем с нормативной надежностью (R_0), наилучшим образом удовлетворяющей требованиям качества ($\min C$), то граница области допустимых конструкций будет определяться по верхней границе (Γ_2) из условия удовлетворения требований качества $(C = C(q))$ для всех элементов, не удовлетворяя при этом требованию нормативной надежности $(R = R_0)$, соответствующего нижней границе области (Γ_1) для всех точек верхней границы, кроме одной, $q = q_2^\circ(t_o)$, где условие минимума расхода ресурса $(C = C_{min})$ удовлетворяется при условии нормативной надежности для всех элементов, входящих в систему, определяя конструкцию с оптимальной надежностью.

В нашей постановке [5], когда минимизировался объем материала, пара двойственных задач имела совпадающее решение $q_1 = q_2 = q^\circ(t_o)$ и задача проектирования конструкции с оптимальной надежностью представлялась как задача проектирования равнопрочной конструкции, совпадающей с конструкцией минимального объема.

3.5. Показатель надежности конструкции определяется как вероятность пребывания её в допустимой области пространства качества в течение всего срока эксплуатации (T_0) при условии, что в рассматриваемый момент времени (t_o) она удовлетворяла бы этому требованию.

Надежность рассматривается как совокупность двух требований - безотказности и долговечности - и включает надежность в отношении прочности и (или) жесткости и (или) учтойчивости, как факторов для оценки надежности. Классифицируются два типа отказов: во-первых, внезапные отказы, связанные с перегрузкой системы и, во-вторых, постепенные отказы, накапливающиеся в системе в течение времени, связанные с явлениями усталости, ползучести, износа, накопления остаточных деформаций и пр. Оба эти типа отказов в вероятностном смысле считаются независимыми, хотя могут быть и совместными.

Если рассматривается стационарный процесс загружения и решается задача надежности, как задача безотказности системы, применяя методику предельных состояний, то фактор времени на этом этапе может быть исключен путем перехода от функции надежности к гарантии безотказности системы. При этом можно показать, что обе эти характеристики равноправны в смысле оценки надежности системы [6].

Если задача носит поверочный характер, то функция надежности определяется как вероятность пребывания конструкции, как элемента пространства качества $\nu(g,t)$ в допустимой области Ω в течение интервала времени $0 \leq t < T_0$ при условии, что в расчетный момент времени весовые параметры $(g(T))$ определяли конструкцию, удовлетворяющую требованиям безотказности:

$$R(T,g) = P[\nu(g,t) \in \Omega / \nu(g,t_0) \in \Omega; \quad 0 \leq t \leq T_0]. \quad (3.5)$$

Если рассматривается надежность как совокупность двух аспектов вопроса - безотказности и долговечности, то поверочная задача в строительной механике сводится к проверке безотказности каждого элемента и системы в целом по заданному значению гарантии безопасности или коэффициенту безопасности $(\chi \geq \chi_0)$.

Если решается задача проектирования конструкции с оптимальной надежностью, то функция надежности определяется как вероятность пребывания элемента $\nu(g,t)$ в допустимой области Ω в течение интервала времени $0 \leq t \leq T_0$ при условии, что в расчетный момент времени весовые параметры $(g(T))$ определяли конструкцию, удовлетворяющую требованиям безотказности на границе области Γ.

$$R(t,g) = P[\nu(g,t) \in \Omega / \nu(g,t_0) \in \Gamma; \; 0 \leq t \leq T_0]. \quad (3.6)$$

Иначе говоря, задача оптимального проектирования в строительной механике сводится к обеспечению долговечности конструкции, удовлетворяющей в расчетном состоянии (математическое ожидание) требованиям безотказности на границе области с минимальным ресурсом, определяя функцию надежности как условную.

Если рассматривается надежность как совокупность безотказности и долговечности, то проектная задача в строительной механике сводится к проектированию безотказного элемента по заданному значению коэффициента безопасности $(\chi \geq \chi_0)$.

3.6. Метод условных функций надежности [3] разработан для систем, стохастические свойства которых могут быть охарактеризованы конечным числом параметров, и в этом смысле он пригоден для оптимального проектирования дискретных систем. Однако конечное число параметров весовой функции ($g = g_1, g_2, \dots, g_r$ где r – число элементов в системе) определяет лишь конечномерность пространства качества (V) и области допустимых значений (Ω) стохастические свойства которых развертываются на оси времени, образуя фазовые пространства.

Задача определения условной функции надежности расходится на два этапа. На первом этапе рассматривается система с фиксированными параметрами, для которой строится функция надежности как вероятность пребывания системы в допустимой области при условии, что параметры системы и воздействия фиксированы. На втором этапе определяется функция надежности по формуле полной вероятности.

Представляется целесообразным использовать этот подход для решения задачи проектирования конструкции с оптимальной надежностью.

На первом этапе рассматривается пространство качества конструкции (V) в фиксированный момент времени ($t = t_0$) с фиксированными параметрами системы $g = g(t_0)$ и воздействием $q = q(t_0)$. Строится функция надежности $R(g/t_0)$ как вероятность пребывания системы на границе области допустимых систем (Γ) при условии, что параметры системы фиксированы:

$$R(g/t) = P[v(g^{(i)}/t) \in \Gamma_0;\ 0 < g < \infty]. \qquad (3.7)$$

Здесь $R(g/t)$ – условная функция надежности по параметру (g) или функция безотказности,

$v(g^{(i)}/t)$ – элемент из пространства качества, соответствующий (i)-му плану весовых параметров ($g^{(i)}$);

$\Gamma_0(t)$ – граница области, соответствующая оптимальному плану весовых параметров $g(t_0)$, определяемая как пересечение двух границ $\Gamma_1 \wedge \Gamma_2$,

где Γ_1 – граница области, соответствующая условию нормативной прочности ($R = R_0$);

Γ_2 – граница области, соответствующая условию нормированного ресурса ($C = C_0$).

Таким образом, на первом этапе решается задача оптимального проектирования на стохастической модели задачи нелинейного математического программирования (фиг. I) или, иначе, решается задача определения системы с оптимальной надежностью.

На втором этапе вычисляется функция надежности как вероятность пребывания случайно выбранной системы в допустимой области Ω в течение всего периода эксплуатации (T_0):

$$R(q,t) = P[v(q^{\circ},t) \in \Omega \,;\; 0 \leq t \leq T_0] \tag{3.8}$$

или, по формуле полной вероятности:

$$R(q,t) = \int\limits_{\Omega} R(q,t)\, p(T)\, dT, \tag{3.9}$$

где $p(T)$ - плотность распределения времени до первого отказа.

Таким образом, на втором этапе решается вопрос надежности во времени, т.е. вопрос о долговечности конструкции. При этом математическое ожидание долговечности - среднее время жизни конструкции - определяется известным образом

$$\langle T \rangle = \int\limits_{0}^{\infty} R(q,t)\, dt. \tag{3.10}$$

Если показатель качества системы выбирается как показатель долговечности, то задача оптимального проектирования будет решаться на втором этапе.

Рассмотренный подход к решению поставленной проблемы проектирования конструкции с оптимальной надежностью успешно может быть реализован, если известна плотность распределения надежности системы на оси времени - $p(T)$.

3.7. Метод "платежных" функций разработан [2] для рассмотрения экономического аспекта надежности и долговечности. Для этого в каждой точке пространства качества V вводится некоторая платежная функция (C), равная "ущербу" при условии, что система находится в данной точке пространства. Иначе говоря, каждой точке пространства $v(q,t)$ приписывается некоторый вес, а затем за показатель надежности принимается среднее значение этого веса, т.е. взвешенное по пространству качества математическое ожидание суммарного ущерба.

Введем платежную функцию в пространстве качества как некий функционал $K_p(g,t)$, определенный на траекториях процесса $v(g,t)$ тем весомее, чем более удалены в точке границы области Γ_1 и Γ_2 и чем больше "эффект связи", так что

$$K_p(g,t) = \frac{\Gamma_2(g,t)}{\Gamma_1(g,t)}. \qquad (3.II)$$

Тогда в качестве числовой характеристики надежности выбирается математическое ожидание от функционала

$$R(g,t) = \langle K_p(g,t) \rangle . \qquad (3.I2)$$

4. <u>Заключение</u>. Возможны и иные подходы к определению экономического аспекта надежности системы с точки зрения её эффективности. При этом мы приходим к необходимости сравнения показателей различных систем с различными фазовыми пространствами состояний и отбора наилучшей из них по некоторому выбранному критерию. Так, например, задачу оптимального проектирования статически неопределимых систем можно рассматривать как задачу оптимального резервирования [I] без восстановления в случае нагруженного резерва,когда элементы "резерва" находятся в одном и том же режиме и до, и после включения в работу.

В заключение следует еще раз указать на то обстоятельство, что вероятностные суждения не связываются со статистическим толкованием вероятности, а рассматриваются как объективная мера возможности наступления события; эта мера сохраняет свой смысл независимо от того, является это событие многократно воспроизводимым или нет.

Вероятность надежной работы проектируемой конструкции в течение установлённого срока эксплуатации остается объективной мерой надежности и в том случае, если конструкция осуществлена в единственном экземпляре. Эта вероятность используется для сопоставления различных вариантов системы конструкций, развертывающих свои вероятностные свойства на оси конструктивных параметров. При этом силы, действующие на конструкцию, допускают многократное воспроизведение и развертывают свои вероятностные свойства на оси времени.

Сформулированный здесь в общем виде вероятностный подход к решению задачи оптимального проектирования привел к задаче проектирования конструкции с оптимальной надежностью по стохастической модели задачи нелинейного математического программирования. Такая модель обладает требуемой общностью и в этом смысле значительно ближе к физической модели задачи, чем модели детерминированного расчета. Реализация этой модели требует преодоления достаточно больших трудностей на пути получения законов распределения и характеристик надежности.

Литература

I. Иеги Э.М. Приложение теории надежности к решению экстремальных задач строительной механики. "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", № 360, 1974.

2. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М., "Наука". 1965.

3. Болотин В.В. Применение методов теории вероятности и теории надежности в расчетах сооружений, М., Стройиздат, 1971.

4. Иеги Э.М. Оптимальное проектирование статически неопределимых рам как проблема математического программирования. "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", серия А, № 227, 1965.

5. Иеги Э.М. О постановке задачи и построении математической модели расчета рам минимального объема. "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", № 297, 1970.

6. Екимов В.В. Вероятностные методы в строительной механике корабля. Л., "Судостроение", 1966.

E. Jôgi

Allgemeine Fragestellung zur Berechnung der Konstruktionen mit optimaler Zuverlässigkeit

Zusammenfassung

In der Abhandlung werden die Möglichkeiten zur Anwendung der Zuverlässigkeitstheorie für die Lösung der Extremumaufgabe in der Baumechanik gezeigt. Die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnungen und Zuverlässigkeitstheorie in den Berechnungen der Baukonstruktionen werden auch für die Extremumaufgaben verallgemeinert. Laut allgemeinen Prinzipien der mathematischen Modelle in der Zuverlässigkeitstheorie entwickelt man ein mathematisches Modell für die Aufgaben der Optimisierung der diskreten Systeme. Zur Formulierung der Aufgabe werden Termini der Zuverlässigkeitstheorie gebraucht.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 375 1975

УДК 624.041.1

Богданов С.С., Иеги Э.М.,
Назарова Л.Л., Омельяненко Т.И.

ОПТИМИЗАЦИЯ КОНТУРА В РАМЕ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ЗАДАЧИ

В статье излагаются принципы оптимизации контура в раме с учетом деформированной геометрии осей и приводятся результаты по оптимальному проектированию одноконтурных металлических рам для некоторых видов загружений как одно, так и многократных.

При этом в качестве функции цели исследуются объемная функция контура (V) и потенциальная энергия системы (U).

Область существования функции (Ω) определяется из требований прочности и (или) устойчивой прочности при условии невырождения элементов.

Задача формулируется как задача нелинейного математического программирования:

определить r-мерный вектор q

минимизирующий объемную функцию рамы $V(q)$	максимизирующий потенциальную энергию рамы $U(q)$

в области Ω

где $V(q)=\sum\limits_s V_s(q)$	где $U(q)=\sum\limits_s U_s(q)$
при ограничениях:	при ограничениях:
1) $V_s \geqslant [V_s]$;	1) $U_s \leqslant [U_s]$;
$q\in\Omega$ 2) $V_s = K_1[V_s]$;	$q\in\Omega$ 2) $U_s = K_2[U_s]$;
3) $V_s > 0$;	3) $U_s > 0$.

I. <u>Общие положения</u>. Задача оптимального проектирования дискретных систем в общем виде связана с оптимизацией топологической схемы, выбором рациональных сечений, оптимизацией геометрии осей и распределения жесткостей между дискретными элементами. Причем все эти факторы должны учитываться во взаимной связи, взаимном влиянии на множестве некоторых независимых параметров (управления).

В такой самой общей постановке задача оптимального проектирования представляется чрезвычайно сложной и не имеет пока еще ни общей формулировки, ни методов решения. Это объясняется также и тем обстоятельством, что теория нелинейного математического программирования, к которой сводится задача оптимального проектирования, разработана лишь для ограниченного класса задач с жесткими требованиями как в отношении оптимизируемой функции, так и в отношении границ области существования функции.

Поэтому общая задача оптимального проектирования сводится к поэтапной оптимизации по схеме: "рама" - "стержень" - "сечение" так, что на каждом этапе выделяется некоторое подмножество параметров, существенным образом влияющих на оптимизируемую функцию цели, выбранную на этом этапе. Взаимное межэтапное влияние параметров учитывается путем проведения повторных перерасчетов, используя принципы динамического программирования. Именно в такой постановке задача доводится до численного результата.

Если этапы оптимального проектирования "стержень"-"сечение" имеют сегодня достаточно полную разработку, то оптимальное проектирование на этапе "рама" представляет существенный интерес и не имеет пока достаточной разработки, особенно для сложных статически неопределенных систем.

В статье излагаются результаты исследования, полученные на этапе "рама", для решения вопроса об оптимальном распределении параметров жесткостей между элементами рамы при условии, что

- топология рамы (положение опор, геометрия осей) задана;
- оптимизация поперечных сечений проведена ранее;
- в качестве функции цели рассматривается объемная функция и потенциальная энергия конструкции.

Задача решается для класса рам с прямолинейными ортогонально расположенными стержнями.

Действительно, в рамных конструкциях чаще всего приходится иметь дело с заданными размерами осей и положением опор, определенным набором профилированной стали, видом опасного загружения и пр., поэтому введенные ограничения справедливы для большого класса инженерных рамных конструкций.

Инженер-проектировщик, проектируя статически и (или) кинематически неопределимую конструкцию, вынужден задаваться случайными жесткостями или их соотношениями, часто выбранными на основании практического анализа.

Для простых конструкций можно, при этом, достичь довольно хороших результатов, однако при проектировании сложных статически неопределимых конструкций может оказаться, что выбранные жесткости далеко не наилучшим образом удовлетворяют требованиям оптимальности конструкции в целом.

Прямая задача теории сооружений при заданной топологии и весовых параметрах весовой функции (EJ, GJ, EF, GF) решается однозначно, однако при рассмотрении обратной задачи получаем множество решений в пространствах с различной метрикой, зависящей от распределения жесткостей. Из этого множества всегда можно выбрать некоторое решение, удовлетворяющее наперед поставленному дополнительному условию оптимальности, например, условию максимальной энергии или минимального объема, при обеспечении необходимой надежности конструкции.

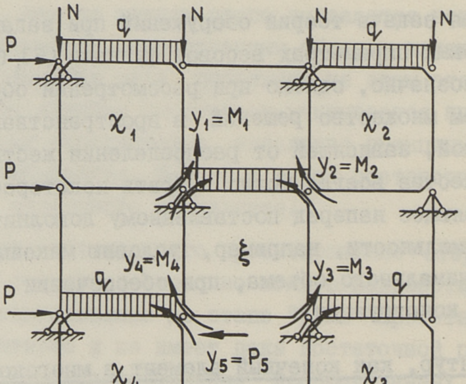
2. <u>Контур, как конечный элемент в многоконтурных рамах</u>. Для оптимизации многоконтурных рам сформулирован [I] приближенный метод статического расчета рам - метод звездочек.

В соответствии с этим методом многоконтурная рама представляется как система, состоящая из жестких дисков, образованных по закону цвета шахматного поля, шарнирно соединенных друг с другом, а также из отдельных элементов, соединяющих их по контуру рамы.

Идея метода звездочек основана на том, что из состава многоконтурной рамы всегда можно выделить группу контуров – звездочку некоторого порядка*, заменив влияние окружающей части рамы на нее граничными условиями. Статический анализ звездочки показывает эффект затухающего изгибного влияния удаленных контуров на некоторый рассматриваемый (центральный) контур звездочки (по аналогии с неразрезными многопролетными балками), что позволяет выделить некоторую достаточно автономную область рамы и при расчете учитывать только близлежащие контуры, существенным образом влияющие на условия работы центрального контура.

Проанализируем метод звездочек при практической его реализации для того, чтобы выявить некоторые закономерности, присущие всякому общему методу.

Предположим, что задана топология рамы и схема нагрузки (фиг. I) и требуется найти вектор q, минимизирующий объемную функцию рамы $V(q)$.



Фиг. 1. Расчетная схема девятиконтурной рамы.

---

* порядок звездочки определяется по количеству контуров в последнем обрамлении. Очевидно, чем больше порядок обрамления, тем больше порядок звездочки, тем точнее решается задача.

На нулевом плане: оптимизируется контур: $\xi(g_{\xi в}, g_{\xi н})$ и всеобрамляющие контуры: $\chi_i(g_{\chi i в}, g_{\chi i н})$, где $i = 1,2,3,4$ независимо друг от друга, при условии нулевого взаимного влияния контуров, объединенных в звездочку.

Здесь $g_в$, $g_н$ – безразмерные параметры жесткостей для ригеля верхнего и нижнего, соответственно;

ξ – центральный контур;

χ_i – обрамляющий контур.

Общее число расчетных контуров равно 5. Полученные на этом плане соотношения жесткостей образуют опорный план.

На первом плане: определяются граничные условия для контура (ξ) на плане параметров жесткостей, найденного из нулевого плана

$$g^{(0)}_{опт} = (g_{\xi опт}, g_{\chi_1 опт}, g_{\chi_2 опт}, g_{\chi_3 опт}, g_{\chi_4 опт}).$$

Вектор неизвестных $y^* = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ найдется из статического расчета звездочки:

$$y^* = -D^{-1}_* D_{p*}, \quad где \quad D_* = (\delta_{ij}), \quad i = j = 1,2,\dots,5$$

$$D_{p*} = (\Delta_{ip}), \quad i = 1,2,\dots,5.$$

Коэффициенты матриц звездочки D_* и D_{p*}, в общем случае, не равны нулю.

На втором этапе: неизвестным y присваиваются символы внешних воздействий так, что $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ и переходят к нулевому плану расчета при уточненных внешних воздействиях с учетом сил взаимодействия контура ξ с контурами $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$.

Этот процесс итерации проводится до тех пор, пока оптимальный вектор весовых параметров не будет найден с заданной точностью (ε)

$$g^{(i+1)}_{опт} - g^{(i)}_{опт} \leq \varepsilon.$$

Таким образом, оптимальное проектирование 9-контурной рамы приводится к оптимальному проектированию отдельных контуров на различные виды загружения.

Контур в многоконтурной раме при оптимизации по методу звездочек является как бы "конечным элементом". Естественно, возникает необходимость изучить работу отдельного контура с учетом различных факторов, влияющих на оптимизацию контура и через него, как через расчетный элемент, на оптимизацию рамы в целом.

3. Базис пространства загружений контура. Поскольку контур в раме является расчетным элементом рамы, необходимо иметь базис видов загружения контура так, чтобы расчет на любое грузовое воздействие мог быть осуществим в пространстве выбранных кодов загружения путем линейного преобразования. Нами разработаны необходимые и достаточные виды загружений, позволяющие осуществить практический расчет многоконтурных рам. При этом нагрузки, действующие в пролетах стержней, заменены узловыми воздействиями для проведения статического расчета контура по алгоритму Аргироса.

4. Оптимизация объемной функции рамы с учетом геометрической нелинейности. Все геометрические параметры сечений и объемная функция рамы вычисляются по алгоритмам, полученным в [2].

Учет геометрической нелинейности задачи осуществляется по расчету на устойчивую прочность. При этом в матрицу податливости контура (F) вводятся коэффициенты податливости, как некоторые сочетания коэффициентов Жуковского (K_1, K_2), которые для практической реализации могут быть представлены в рядах:

$$K_1 = \frac{2t_\nu + S_\nu}{\zeta} = \frac{2}{\nu}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{2}{tg\nu} + \frac{1}{\sin\nu} - 1\right) = 1 + \frac{1}{12}\nu^2 + \frac{1}{120}\nu^4 + \ldots$$

$$K_2 = \frac{tg\nu - \nu}{\nu^2 tg\nu} = 1 + \frac{1}{15}\nu^2 + \frac{2}{315}\nu^4 + \ldots$$

при

$$-\pi - \nu < \pi .$$

Здесь коэффициенты K_1 и K_2 нелинейные функции от ν, где

$$\nu = \sqrt{\frac{N_s l_s^2}{EJ_s}} .$$

Матрицы податливости контура с учетом геометрической нелинейности получают вид:

$$F_\nu = \begin{Vmatrix} f_{\nu р в} & & & 0 \\ & f_{\nu с т} & & \\ 0 & & f_{\nu р н} & \\ & & & f_{\nu с т} \end{Vmatrix}, \quad \text{где } f_{\nu s} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{g_s} K_{1s} & \frac{l_s}{2g_s} K_{1s} \\ \frac{l_s}{2g_s} K_{1s} & \frac{l_s}{3g_s} K_{2s} \end{Vmatrix},$$

Здесь

$f_{\nu s}$ – матрица податливости элемента (S) с учетом поправки на деформированную схему;

$g_s = \frac{i_s}{i_0}$ – безразмерный параметр жесткости;

S – индекс элемента, соответствующий ригелю верхнему, нижнему и стойке, соответственно;

i_s – погонная жесткость элемента-ригеля верхнего, нижнего, соответственно;

i_0 – погонная жесткость опорного элемента-стойки.

Оптимальное проектирование с учетом геометрической нелинейности задачи проводится как итерационный процесс до тех пор, пока значение продольной силы на предыдущем и последующем шаге итерации не совпадут с заданной точностью (ε):

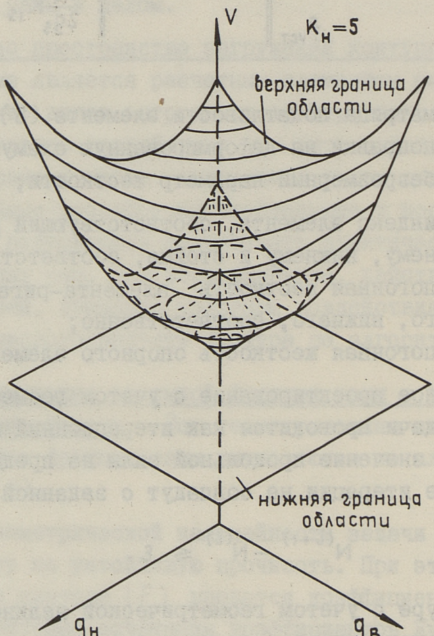
$$N^{(i+1)} - N^{(i)} \leqslant \varepsilon .$$

Усилия в контуре с учетом геометрической нелинейности определяются по известному алгоритму Аргироса:

$$b_\nu = [\bar{b}_p + b_1 (b_1' F_\nu b_1)^{-1} (b_1' F_\nu \bar{b}_p)] \cdot P .$$

Общий вид объемной функции рамы – ее верхняя и нижняя границы – представлен для одного из кодов загружений – ветер слева (код нагрузки $К_н = 5$) на фиг. 2. Здесь с очевидностью устанавливается гладкость отдельных ветвей верхней границы объемной функции, единственность решения в точке наибольшего приближения ($\pm$I %) верхней и нижней границ области в пространстве безразмерных параметров жесткостей($g_в$, $g_н$).

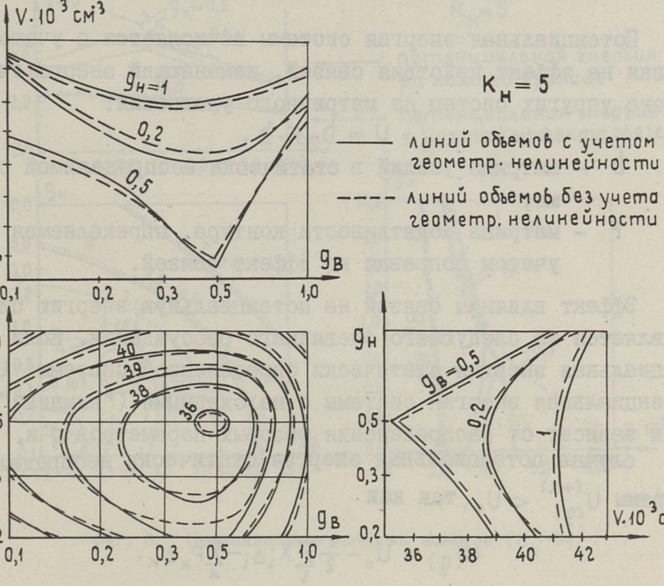
Объемная функция контура без учета и с учетом геометрической нелинейности приводится на фиг. 3 и 4 для кососимметричных силовых воздействий, ветер слева ($к_н = 5$) и косой изгиб верхнего ригеля ($к_н = 7$). При этом следует отметить, что учет геометрической нелинейности для рассматриваемых воздействий существенно не сдвигает оптимальное решение, а лишь уточняет границу области существования объемной функции.



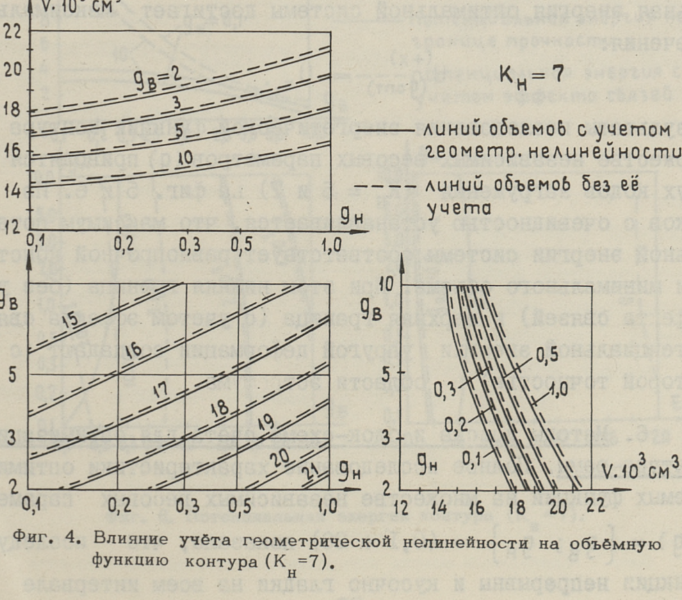
Фиг. 2. Объемная функция контура для $K_н=5$.

Проведенные исследования влияния геометрической нелинейности на объемную функцию контура-рамы показали, что в системах с преобладающим изгибом при малых гибкостях стержней величины коэффициентов устойчивости (ν) колеблются в узком интервале значений в 3 и более раза меньших критических. При этом коэффициенты податливости K_1 и K_2 получаются близкими к единице.

5. <u>Энергетический критерий оптимальности</u>. Оптимальная конструкция соответствует конструкции с максимальным значением потенциальной энергии упругой деформации системы.



Фиг. 3. Влияние учета геометрической нелинейности на объемную функцию контура ($K_н = 5$).



Фиг. 4. Влияние учёта геометрической нелинейности на объёмную функцию контура ($K_н = 7$).

Потенциальная энергия системы вычисляется с учетом поправки на эффект действия связей, изменяющий энергетический баланс упругих систем из матричного уравнения:

$$U = b' \cdot F \cdot b ,$$

где b – матрица усилий в статически неопределимой системе;

F – матрица податливости контура, определяемая с учетом поправки на эффект связей.

Эффект влияния связей на потенциальную энергию системы выявляется из следующего очевидного рассуждения. Если потенциальная энергия статически определенной системы U_o, то потенциальная энергия системы с наложенными ("лишними") связями зависит от распределения весовых параметров g и, в общем случае потенциальная энергия статически неопределенной системы $U^{(+x)}_{(g)} < U_o$, так как

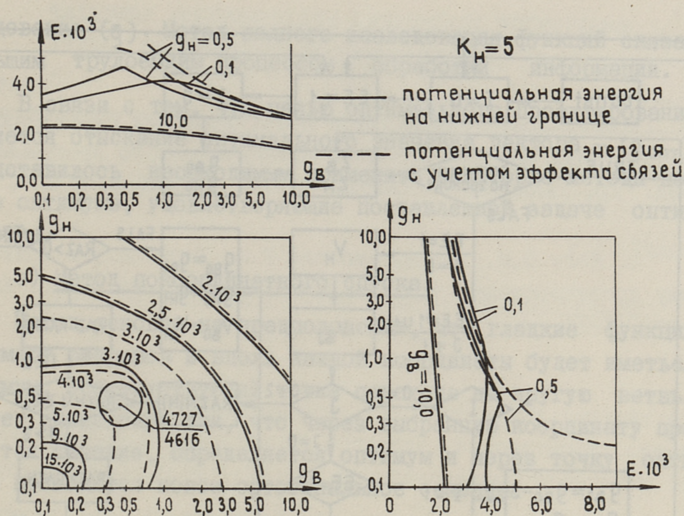
$$U^{(+x)}_{(g)} = U_o - \frac{1}{2}\sum_i X_i \Delta_i - \sum_K P_K \Delta_K .$$

Оптимальная система, удовлетворяющая условию равнопрочности (по крайней мере в одном расчетном сечении элемента), соответствует такому распределению весовых параметров, при котором эффект действия связей исчезает и потенциальная энергия оптимальной системы достигает максимального значения:

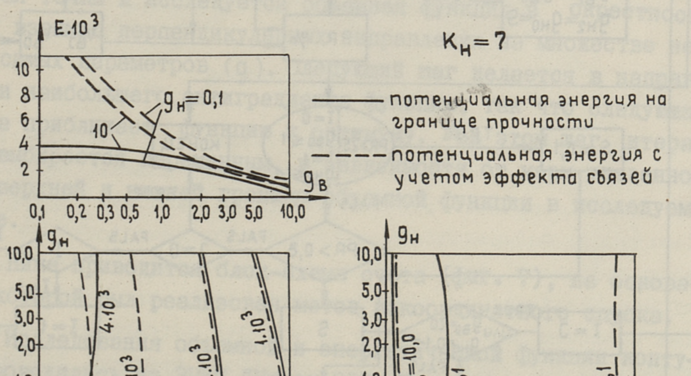
$$U^{(+x)}_{(g\,опт)} = U_o .$$

Результаты исследования энергетической функции контура на множестве независимых весовых параметров (g) приводятся для двух кодов загружения ($K_н$ = 5 и 7) на фиг. 5 и 6. Из графиков с очевидностью устанавливается, что максимум потенциальной энергии системы соответствует равнопрочной конструкции минимального объема. При этом нижняя граница (без учета эффекта связей) и верхняя граница (с учетом эффекта связей) потенциальной энергии упругой деформации совпадают (с некоторой точностью) в области экстремума.

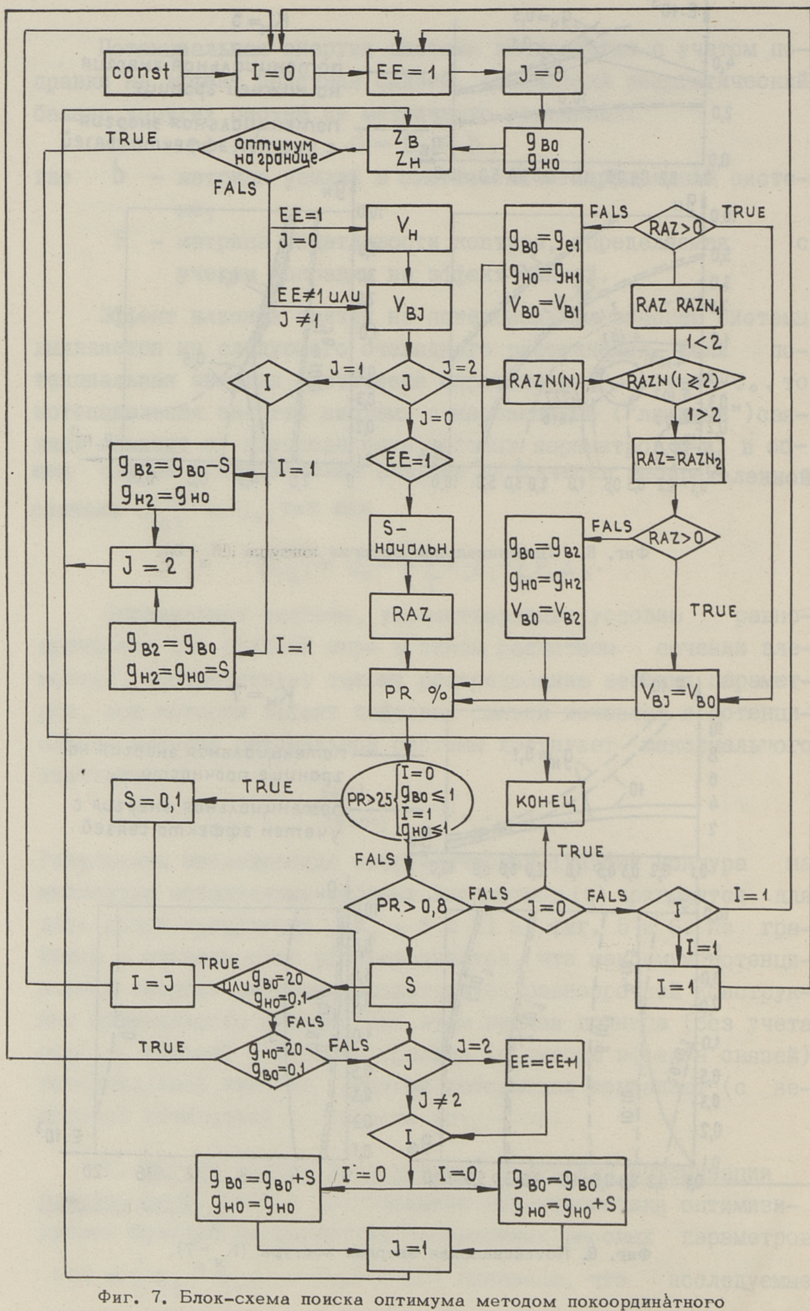
6. Методы поиска и блок-схема счета для оптимизации контура-рамы. Полное исследование характеристики оптимизируемых функций на множестве независимых весовых параметров $(g) = \{g_в;\ g_н\} = (0{,}1 \div 20)$ показало, что исследуемые функции непрерывны и кусочно гладки на всем интервале ис-



Фиг. 5. Потенциальная энергия контура ($K_н=5$).



Фиг. 6. Потенциальная энергия контура ($K_н=7$).



Фиг. 7. Блок-схема поиска оптимума методом покоординатного спуска.

следования (g). Метод полного исследования функций связан с большим трудоемким процессом обработки информации.

В связи с тем, что целью оптимального проектирования является отыскание оптимального значения вектора – ($g_{опт}$), представилось необходимым применить некоторые методы поиска оптимума, удовлетворяющие поставленной задаче оптимизации.

а) Метод покоординатного спуска.

Метод основан на предположении, что гладкие функции не имеют разрывов и вдоль каждой координаты будет иметься минимум, соответствующий точке перехода на другую ветвь. Расчет происходит так, что через выбранную координату проводится сечение, определяется оптимум и через точку оптимума проводится новое ортогональное сечение.

Итерация проводится до тех пор, пока не будет достигнут глобальный оптимум с заданной точностью

б) Антиградиентный метод.

Расчет происходит так, что выбирается произвольная исходная точка и исследуется объемная функция в окрестности двух взаимно перпендикулярных направления на множестве независимых параметров (g). Следующий шаг делается в направлении наибольшего антиградиента функции, так что следующая точка приближает функцию к оптимуму. При этом шаг итерации выбирается переменным, в зависимости от меры удаленности верхней и нижней границы объемной функции в исследуемой точке.

Ниже приводится блок-схема счета (фиг. 7), на основании которой был реализован метод покоординатного спуска.

Исследования объемной и энергетической функции контура проводились на ЭЦВМ "Минск-22". Программа составлена на языке "Малгол". Общее время полного исследования контура для одного загружения – около часа. Реализация поиска оптимального решения составляла от 5 до 20 мин.

Литература

I. Иеги Э.М. Оптимальное проектирование статически неопрецелимых рам как проблема математического программирования. "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", серия А, № 227, 1965.

2. Иеги Э.М., Нурмухамецова Р.М. К расчету и оптимальному проектированию контура."Тр. Таллинск. политехн. ин-та", № 360, 1974.

S. Bogdanov, E. Jõgi,
L. Nazarova, T. Omeljanenko

Die Optimisierung der Kontur des Rahmens als geometrisch nichtlineare Aufgabe

Zusammenfassung

In der Abhandlung wird das Problem der optimalen Kontur als Berechnungselement des vielfeldigen Rahmens behandelt. Die Funktionen des Volumens (Gewichts) und der Energie der elastischen Deformationen werden durch dimensionslose Parameter geäussert. Der Einfluss der Deformationen der Kontur auf die Zielfunktion wird berücksichtigt. Man betrachtet einige Methoden zur optimalen Lösung der Aufgabe und es werden Ergebnisse für zwei Arten der Belastung gegeben. Die Berechnungen wurden auf "Minsk-22" durchgeführt.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

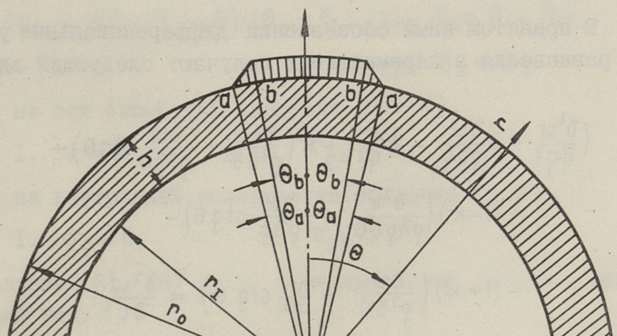
№ 375 1975

УДК 624.074.4

Р.К. Ряямет

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ТОЛСТОСТЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

В статье рассматривается распространения упругих волн в толстостенной сферической оболочке, загруженной осесимметрической быстроменяющейся распрецеленной нагрузкой (фиг. I).



Фиг. 1.

Применяются следующие обозначения: E - моцуль упругости; ν - коэффициент Пуассона; λ, μ - константы Ляме; ρ^* - плотность массы; c_1, c_2 - скорости распространения процольных и поперечных волн; u_1, u_2 - перемещения соответственно в направлениях r и θ; h - толщина оболочки; r_o, r_I - рациусы внешней и внутренней поверхностей оболочки; $\rho = r/h$ - безразмерная коорцината; $\tau = c_1 t/h$ - безразмерное время; $w = u_1/h$, $v = u_2/h$ - безразмерные перемещения;

безразмерные напряжения обозначаются

$$\sigma_\rho=\sigma_r/\lambda,\quad \sigma_\vartheta=\sigma_\theta/\lambda,\quad \sigma_\varphi=\sigma_\beta/\lambda,\quad \tau_{\rho\vartheta}=\tau_{r\theta}/\lambda. \tag{I}$$

Скорости распространения волн c_1 и c_2 могут быть представлены так:

$$c_1^2=\frac{2\mu+\lambda}{\rho^*}=\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho^*},\qquad c_2^2=\frac{\mu}{\rho^*}=\frac{E}{2(1+\nu)\rho^*}. \tag{2}$$

Кроме того, вводятся следующие соотношения:

$$\begin{aligned} K^2&=\frac{c_2^2}{c_1^2}=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}=\frac{\mu}{2\mu-\lambda}\\ 1-K^2&=\frac{1}{2(1-\nu)}=\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\\ 1+K^2&=\frac{3-4\nu}{2(1-\nu)}=\frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}. \end{aligned} \tag{3}$$

В принятом нами обозначении дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях получают следующий вид:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}+2\frac{\partial w}{\rho\partial\rho}-2\frac{w}{\rho^2}\right)+K^2\left(\frac{\partial^2 w}{\rho^2\partial\theta^2}+\frac{\partial w}{\rho^2\partial\theta}\operatorname{ctg}\theta\right)+\\ &+(1-K^2)\left(\frac{\partial^2 v}{\rho\partial\rho\partial\theta}+\frac{\partial v}{\rho\partial\rho}\operatorname{ctg}\theta\right)-\\ &-(1+K^2)\left(\frac{\partial v}{\rho^2\partial\theta}+\frac{v}{\rho^2}\operatorname{ctg}\theta\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2} \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &K^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}+2\frac{\partial v}{\rho\partial\rho}\right)+\left(\frac{\partial^2 v}{\rho^2\partial\theta^2}+\frac{\partial v}{\rho^2\partial\theta}\operatorname{ctg}\theta-\frac{v^2}{\rho^2\sin^2\theta}\right)+\\ &+(1-K^2)\left(\frac{\partial^2 w}{\rho\partial\rho\partial\theta}+\frac{\partial w}{\rho^2\partial\theta}\right)+(1+K^2)\frac{\partial w}{\rho^2\partial\theta}=\frac{\partial^2 v}{\partial\tau^2} \end{aligned}$$

и безразмерные напряжения представляются в перемещениях w, v:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho&=\frac{1-\nu}{\nu}\cdot\frac{\partial v}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\left(2w+\frac{\partial v}{\partial\theta}+v\operatorname{ctg}\theta\right)\\ \sigma_\vartheta&=\frac{1-\nu}{\nu\rho}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}+w\right)+\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}(w+v\operatorname{ctg}\theta) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1-\nu}{\nu\rho}(w + v\,ctg\,\theta) + \frac{\partial w}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\left(w + \frac{\partial v}{\partial\theta}\right)$$

$$\tau_{\rho\vartheta} = \frac{1-2\nu}{2\nu}\left(\frac{\partial w}{\rho\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial\rho} - \frac{v}{\rho}\right).$$

Координаты внешней и внутренней поверхности оболочки отмечаются индексами соответственно $0(\rho=\rho_0)$ и $I(\rho=\rho_I)$.

При интегрировании системы уравнений (4) слецует учесть слецующие краевые условия:

а) на внешней поверхности оболочки $(\rho=\rho_0)$

$$\text{I. } \sigma_\rho = f_x(\tau), (x=a,b,c); \quad 2. \ \tau_{\rho\vartheta} = 0, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} f_a(\tau) &= f(\tau) && \text{при } 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_b \\ f_b(\tau) &= f(\tau)(\theta_a - \theta)/(\theta_a - \theta_b), && \text{при } \theta_b \leqslant \theta \leqslant \theta_a \\ f_c(\tau) &= 0, && \text{при } \theta_a \leqslant \theta; \end{aligned} \tag{7}$$

б) на оси симметрии нагрузки $(\theta = 0)$.

$$\text{I. } v = 0, \qquad 2. \ \tau_{\rho\vartheta} = 0; \tag{8}$$

в) на внутренней поверхности оболочки $(\rho=\rho_I)$

$$\text{I. } \sigma_\rho = 0, \qquad 2. \ \tau_{\rho\vartheta} = 0. \tag{9}$$

Условия (6), (8) и (9) в перемещениях w, v получают слецующий виц:

а) на внешней поверхности оболочки $(\rho=\rho_0)$

$$\begin{aligned} &\text{I. } \frac{1-\nu}{\nu}\cdot\frac{\partial w}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho_0}\left(2w + \frac{\partial w}{\partial\theta} + v\,ctg\,\theta\right) = f_x(\tau), (x=a,b,c) \\ &2. \ \frac{\partial w}{\rho_0\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial\rho} - \frac{v}{\rho_0} = 0; \end{aligned} \tag{I0}$$

б) на оси симметрии нагрузки $(\theta = 0)$

$$\text{I. } v = 0 \qquad 2. \ \frac{\partial w}{\partial\theta} = 0; \tag{II}$$

в) на внутренней поверхности оболочки $(\rho=\rho_I)$,

$$\begin{aligned} &\text{I. } \frac{1-\nu}{\nu}\rho_I\frac{\partial w}{\partial\rho} + 2w + \frac{\partial v}{\partial\theta} + v\,ctg\,\theta = 0, \\ &2. \ \frac{\partial w}{\partial\theta} + \rho_I\frac{\partial v}{\partial\rho} - v = 0. \end{aligned} \tag{I2}$$

На первом фронте перемещения равны нулю

$$1.\ w = 0, \qquad 2.\ v = 0, \tag{13}$$

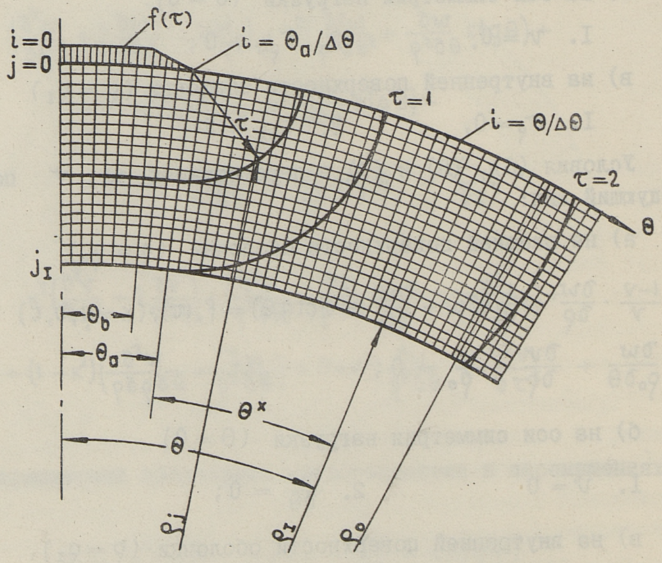
равны нулю также первые производные по координатам, так как предполагаем плавное изменение нагрузки во времени.

Распространение упругой волны рассматриваем в начале движения, когда первый фронт не дошел до края оболочки.

Уравнения (4) интегрируем методом конечных разностей [1]. Применяем трехмерную сетку [2], [3]. Безразмерные шаги сетки по безразмерным координатам ρ, θ, τ обозначаем соответственно l_ρ, l_θ и l_τ. Для обеспечения устойчивости расчетной схемы и для упрощения решения принимаем

$$l_\tau = \frac{1}{2} l_\rho . \tag{14}$$

Шаг l_θ является переменным, зависящим от координаты ρ, поэтому берем $l_\theta \sim l_\rho$ (фиг. 2).



Фиг. 2.

В расчетном алгоритме есть условные нечетные временные слои, для которых τ / l_τ равны нечетным числам, и четные слои, для которых τ / l_τ равны четным числам. Внутренними точками сетки называем все точки за фронтом продольных волн, за исключением тех точек, которые находятся на внешней и внутренней поверхностях оболочки, на оси симметрии нагрузки и непосредственно за фронтом продольных волн. Точки непосредственно за фронтом называем прифронтовыми точками.

Точки сетки обозначены на фиг. 2:

$$i = \theta_i / \Delta\theta, \qquad j = (\rho_0 - \rho_j)\, l_\rho, \tag{I5}$$

где

$$\theta_i = i\Delta\theta, \qquad \rho_j = \rho_0 - j\, l_\rho. \tag{I6}$$

Расчет начинаем со слоя $\tau = 3\, l_\tau$. На слоях $n = \tau / l_\tau = 3$ и $n = \tau / l_\tau = 4$ нет внутренних точек, на всех последующих они имеются.

В первую очередь выписываем расчетные формулы для слоев времени $n = \tau / l_\tau \geqslant 5$.

Формулы для определения перемещений точки ij получаем путем замены производных в дифференциальных уравнениях (4) и в условиях (I0), (II), (I2) конечными разностями в первом приближении. Выражения для определения перемещений во внутренней точке ij имеют вид:

$$w_{ijn} = 2w_{ij,n-1} - w_{ij,n-2} +$$

$$+ \left(\frac{l_\tau}{l_\rho}\right)^2 \left(w_{i,j+1,n-1} - 2w_{ij,n-1} + w_{i,j-1,n-1}\right) +$$

$$+ \frac{l_\tau^2}{\rho_j\, l_\rho}\left(w_{i,j-1,n-1} - w_{i,j+1,n-1}\right) - 2\frac{l_\tau^2}{\rho_j^2} w_{ij,n-1} +$$

$$+ \kappa^2 \left(\frac{l_\tau}{\rho_j \Delta\theta}\right)^2 \left(w_{i+1,j,n-1} - 2w_{ij,n-1} + w_{i-1,j,n-1}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\kappa^2\frac{l_\tau^2}{\rho_j^2\Delta\theta}\operatorname{ctg}\theta_i\left(w_{i+1,j,n-1}-w_{i-1,j,n-1}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}(1-\kappa^2)\frac{l_\tau^2}{\rho_j l_\rho\Delta\theta}\left(v_{i+1,j-1,n-1}-v_{i-1,j-1,n-1}-\right.$$

$$\left.-v_{i+1,j+1,n-1}+v_{i-1,j+1,n-1}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}(1-\kappa^2)\frac{l_\tau^2}{\rho_j l_\rho}\operatorname{ctg}\theta_i\left(v_{i,j-1,n-1}-v_{i,j+1,n-1}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}(1+\kappa^2)\frac{l_\tau^2}{\rho_j^2\Delta\theta}\operatorname{ctg}\theta_i\left(v_{i+1,j,n-1}-v_{i-1,j,n-1}\right)-$$

$$-(1+\kappa^2)\frac{l_\tau^2}{\rho_j^2}\operatorname{ctg}\theta_i v_{ij,n-1}.$$

$$v_{ijn}=2v_{ij,n-1}-v_{ij,n-2}+ \tag{I7}$$

$$+\kappa^2\left(\frac{l_\tau}{l_\rho}\right)^2\left(v_{i,j+1,n-1}-2v_{ij,n-1}+v_{i,j-1,n-1}\right)+$$

$$+\kappa^2\frac{l_\tau^2}{\rho_j l_\rho}\left(v_{i,j-1,n-1}-v_{i,j+1,n-1}\right)+$$

$$+\left(\frac{l_\tau}{\rho_j\Delta\theta}\right)^2\left(v_{i+1,j,n-1}-2v_{ij,n-1}+v_{i-1,j,n-1}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{l_\tau^2}{\rho_j^2\Delta\theta}\operatorname{ctg}\theta_i\left(v_{i+1,j,n-1}-v_{i-1,j,n-1}\right)-\frac{l_\tau^2}{\rho_j^2\sin^2\theta_i}v_{ij,n-1}+$$

$$+\frac{1}{4}(1-\kappa^2)\frac{l_\tau^2}{\rho_j l_\rho\Delta\theta}\left(w_{i+1,j,n-1}-w_{i-1,j-1,n-1}-\right.$$

$$\left.-w_{i+1,j+1,n-1}+w_{i-1,j+1,n-1}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}(1-K^2)\frac{l_\tau^2}{\rho_j^2\Delta\theta}\left(w_{i+1,j,n-1}-w_{i-1,j,n-1}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}(1+K^2)\frac{l_\tau^2}{\rho_j^2\Delta\theta}\left(w_{i+1,j,n-1}-w_{i-1,j,n-1}\right).$$

Перемещения на оси симметрии нагрузки ($i=0$) вычисляем на основе условий (II) по формулам

$$1.\ w_{0jn}=\frac{4}{3}w_{1jn}-\frac{1}{3}w_{2jn}\qquad 2.\ v_{0jn}=0. \tag{18}$$

На первом фронте перемещения равны нулю:

$$1.\ w_{ijn}=0 \qquad\qquad 2.\ v_{ijn}=0. \tag{19}$$

Для точек оболочки, координата i которых удовлетворяет неравенству

$$i\leqslant\theta_a/\Delta\theta, \tag{20}$$

расстояние фронта f от внешней поверхности оболочки равняется безразмерному времени τ, при

$$\tau\leqslant 1. \tag{21}$$

Если

$$i>\theta_a/\Delta\theta \tag{22}$$

и

$$\tau=n l_\tau\leqslant\tau_j, \tag{23}$$

где

$$\tau_j=\left[2(\rho_0-\rho_I)\rho_0-(\rho_0-\rho_I)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[2(\rho_j-\rho_I)\rho_j-(\rho_j-\rho_I)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{24}$$

то расположение фронта на поверхности j внутри стенки оболочки ($\rho\approx\rho_j$) определяем суммой двух углов

$$\theta_{jn}=\theta_a+\theta_{jn}^*, \tag{25}$$

где

$$\theta_{jn}^*=\arcsin\frac{d_{jn}}{\rho_j},\qquad d_{jn}=\left[(n l_\tau)^2-a_{jn}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$a_{jn}=j l_\rho+\left[(n l_\tau)^2-(j l_\rho)^2\right]/2\rho_0. \tag{26}$$

Для точек оболочки, координата i которых удовлетворяет неравенству(22), но и условие (23) не выполнено, т.е.

$$\tau>\tau_j, \tag{27}$$

расположение фронта на поверхности j определяем суммой трех углов

$$\theta_{jn} = \theta_a + \theta_{\tau j} + \theta_{j1n}, \tag{28}$$

где

$$\theta_{\tau j} = \arcsin \frac{d_{\tau j}}{\rho_j}; \qquad d_{\tau j} = (\tau_j^2 - a_{\tau j}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$a_{\tau j} = j l_\rho + \left[\tau_j^2 - (j l_\rho)^2\right]/2\rho_0; \quad \theta_{j1n} = 180(n l_\tau - \tau_j)/\pi\rho_I. \tag{29}$$

В прифронтовых точках, индекс которых удовлетворяет условию $i \leq \theta_a/\Delta\theta$, перемещения w, v вычисляем при помощи уравнений в конечных разностях

$$w_{ijn} = \left(\frac{\alpha_{jn}}{1+\alpha_{jn}}\right)^2 w_{i,j-1,n} + \frac{\alpha_{jn}}{1+\alpha_{jn}} l_\rho \left(\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)_{j+\alpha},$$

$$v_{ijn} = \left(\frac{\alpha_{jn}}{1+\alpha_{jn}}\right)^2 v_{i,j-1,n} + \frac{\alpha_{jn}}{1+\alpha_{jn}} l_\rho \left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)_{j+\alpha}, \tag{30}$$

где α_{jn} обозначает отношение расстояния прифронтовой точки по направлению радиуса к шагу сетки l_ρ. На нечетных слоях $\alpha_{jn} = 0{,}5$, на четных слоях $\alpha_{jn} = 1$.

В формулах (30) последние члены приравниваются к нулю, так как внешняя нагрузка изменяется плавно во времени.

Если $i > \theta_a/\Delta\theta$, то на поверхности j индекс i прифронтовой точки определяем с помощью неравенств

$$\theta_{jn}/\Delta\theta - 1 \leq i \leq \theta_{jn}/\Delta\theta \tag{31}$$

и перемещение по формулам

$$\text{1. } w_{ijn} = \left(\frac{\beta_{ijn}}{1+\beta_{ijn}}\right)^2 w_{i-1,jn} \quad \text{2. } v_{ijn} = \left(\frac{\beta_{ijn}}{1+\beta_{ijn}}\right)^2 v_{i-1,jn}. \tag{32}$$

Здесь

$$\beta_{ijn} = \theta_{jn}/\Delta\theta - i \tag{33}$$

обозначает отношение расстояния прифронтовой точки от фронта к шагу сетки $l_{j\theta}$ на поверхности j.

Но если

$$\theta_a/\Delta\theta < i < \theta_{jn}/\Delta\theta - 1, \tag{34}$$

то перемещения в прифронтовых точках вычисляем по формулам

$$\text{1. } w_{ijn} = \left(\frac{\alpha_{ijn}}{1+\alpha_{ijn}}\right)^2 w_{i,j-1,n}; \quad \text{2. } v_{ijn} = \left(\frac{\alpha_{ijn}}{1+\alpha_{ijn}}\right)^2 v_{i,j-1,n}, \tag{35}$$

где α_{ijn} обозначает отношение расстояния прифронтовой точки по направлению радиуса к шагу сетки l_ρ и вычисляем по выражению

$$\alpha_{ijn} = (\rho_{ij} - \rho_{in})/l_\rho, \tag{36}$$

где

$$\rho_{in} = \rho_o \cos(\theta_i - \theta_a) - [(n l_\tau)^2 - \rho_o^2 \sin^2(\theta_i - \theta_a)]^{\frac{1}{2}}. \tag{37}$$

Перемещения $w_{i,on}, v_{ion}$ точек внешней поверхности оболочки определяются из системы уравнений. Эта система уравнений составлена на основе условий (I0), где производные заменяются конечно-разностными соотношениями. Перемещения точки, находящейся на оси симметрии нагрузки, определяем по формулам (I8), где j принимаем равной нулю.

Расположение фронта на внешней поверхности оболочки определено выражениями:

$$\text{а)}\quad \theta_{on} = \theta_a + \theta^*_{on}; \qquad \theta^*_{on} = \arcsin\frac{d_{on}}{\rho_{on}}$$

$$d_{on} = n l_\tau \left[1 - (n l_\tau / 2\rho_o)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{38}$$

при

$$\tau \leqslant \tau_o = 2\left[2(\rho_o - \rho_I)\rho_o - (\rho_o - \rho_I)^2\right]^{\frac{1}{2}}; \tag{39}$$

$$\text{б)}\quad \theta_{on} = \theta_a + \theta_{\tau_o} + \theta_{o1n}, \quad \text{при} \quad \tau > \tau_o, \tag{40}$$

где

$$\theta_{\tau_o} = \arcsin\frac{d_{\tau_o}}{\rho_o}; \qquad d_{\tau_o} = \tau_o\left[1 - (\tau_o/2\rho_o)^2\right]^{\frac{1}{2}}; \tag{4I}$$

$$\theta_{o1n} = 180(n l_\tau - \tau_o)/\pi\rho_I.$$

В фронтовых точках сохраняют силу условия (I9), где $j = 0$.

Индекс i прифронтовой точки на внешней поверхности оболочки определяем неравенствами (3I) и перемещение по выражениям (32), (33), где $j = 0$.

В промежуточных точках $i = I, 2, \ldots, \theta_{on}/\Delta\theta - \beta_{ion} - 1$ имеют место условия (I0)

$$\text{I.}\quad \frac{1-\nu}{2\nu l_\rho}(3w_{ion} - 4w_{i1n} + w_{i2n}) + \frac{1}{\rho_o}\left[2w_{ion} + \right.$$

$$+\frac{1}{2\Delta\theta}(v_{i+1,0n}-v_{i-1,0n})+v_{i0n}\operatorname{ctg}\theta_i]=f_x(\tau)$$

$$(x=a,b,c). \qquad (42)$$

2. $$\frac{1}{\Delta\theta}(w_{i+1,0n}-w_{i-1,0n})+\frac{\rho_0}{l_\rho}(3v_{i0n}-4v_{i1n}+$$

$$+v_{i2n})-2v_{i0n}=0.$$

Эти уравнения получены из условий на внешней поверхности оболочки (7) и (I0).

По выражениям (I8), (32) и (42) составляется система уравнений, в которой количество неизвестных перемещений внешней поверхности оболочки совпадает с количеством уравнений. Система решается достаточно просто с помощью рекуррентных формул, аналогичных приведенным в [4].

Если фронт продольной волны достигает внутренней поверхности оболочки $(\tau \geqslant 1)$, то необходимо представить расчетные формулы для определения перемещений этих точек. В момент времени $\tau = 1$ фронт достигает точек $i = 0$, I, 2, ..., $\theta_a/\Delta\theta$ на внутренней поверхности оболочки, но перемещения еще равны нулю. При $\tau > 1$ перемещения точек внутренней поверхности оболочки определяются из системы уравнений, которые составляются на основании условий (I2).

Расчетные формулы являются следующими:

а) при $i = 0$ сохраняют силу формулы (I8), где j принимаем j_I;

б) в фронтовых точках сохраняют силу условия (I9), где $j = j_I$; фронт продольной волны на внутренней поверхности оболочки определяем по выражениям

I. $$\theta_{j_I n}=\theta_a+\theta^*_{j_I n} \qquad (43)$$

$$\theta^*_{j_I n} = \arcsin \frac{d_{j_I n}}{\rho_I}; \quad d_{j_I n} = \left[(n l_\tau)^2 - a^2_{j_I n} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$a_{j_I n} = \frac{1}{2\rho_0} \left[\rho_0^2 - \rho_I^2 + (n l_\tau)^2 \right] \tag{44}$$

при

$$1 < \tau \leqslant \tau_{j_I} = \left[2(\rho_0 - \rho_I)\rho_0 - (\rho_0 - \rho_I)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{45}$$

$$2. \quad \theta_{j_I n} = \theta_a + \theta_{\tau j_I} + \theta_{j_I' n} \tag{46}$$

$$\theta_{\tau j_I} = \arcsin \frac{\tau_{j_I}}{\rho_0}; \quad \theta_{j_I' n} = 180(n l_\tau - \tau_{j_I})/\pi \rho_I \tag{47}$$

при $\tau > \tau_{j_I}$;

в) индекс i прифронтовой точки определяем неравенствами (3I), а перемещения по выражениям (32), (33), где $j = j_I$;

г) для промежуточных точек i = I, 2, ..., $\theta_{j_I n}/\Delta\theta - \beta_{i j_I n} - 1$ могут быть выписаны следующие два уравнения из условий (I2)

$$\text{I.} \quad -\frac{1-\nu}{2\nu} \cdot \frac{\rho_I}{l_\rho} \left(3 w_{i j_I n} - 4 w_{i, j_I - 1, n} + w_{i, j_I - 2, n} \right) + 2 w_{i j_I n} +$$

$$+ \frac{1}{2\Delta\theta} \left(v_{i+1, j_I n} - v_{i-1, j_I n} \right) + v_{i j_I n} \operatorname{ctg} \theta_i = 0;$$

$$\tag{48}$$

$$2. \quad \frac{1}{\Delta\theta} \left(w_{i+1, j_I n} - w_{i-1, j_I n} \right) -$$

$$- \frac{\rho_I}{l_\rho} \left(3 v_{i j_I n} - 4 v_{i j_{I-1}, n} + v_{i, j_I - 2, n} \right) - 2 v_{i j_I n} = 0.$$

На основе выражений (I8), 32) и (48) составляется система уравнений. Система уравнений допускает решение в виде рекуррентных формул.

В слоях времени $n = 3$ и $n = 4$ отсутствуют внутренние точки. Рассматриваем только точки внешней поверхности оболочки ($j = 0$) и прифронтовые точки на поверхности $j = 1$.

На оси симметрии нагрузки ($i = 0$) перемещения вычисляются по формулам (I8), в которых считаем $j = 0$, $j = 1$ и $n = 3$, $n = 4$.

Для точек $i = 1, 2, \ldots, \theta_a/\Delta\theta$ принимаем во внимание условия (I0), которые выписываем в конечных разностях в следующем виде:

$$\text{I.}\quad \frac{1-\nu}{\nu}\cdot\frac{\rho_0}{l_\rho}\left(\frac{2+\alpha_n}{1+\alpha_n}w_{i0n}-\frac{1+\alpha_n}{\alpha_n}w_{i1n}\right)+2w_{i0n}+$$

$$+\frac{1}{2\Delta\theta}\left(v_{i+1,0n}-v_{i-1,0n}\right)+v_{i0n}\operatorname{ctg}\theta_i=f_x(\tau)$$

$$(x=a,b) \tag{49}$$

$$2.\quad \frac{1}{2\Delta\theta}\left(w_{i+1,0n}-w_{i-1,0n}\right)-v_{i0n}+$$

$$+\frac{\rho_0}{l_\rho}\left(\frac{2+\alpha_n}{1+\alpha_n}\cdot v_{i0n}-\frac{1+\alpha_n}{\alpha_n}v_{i1n}\right)=0.$$

В уравнениях (49) $\alpha_n = 0{,}5$, при $n = 3$ и $\alpha_n = 1$, при $n = 4$.

Расположение фронта на внешней поверхности оболочки определяется при помощи формул (38) и на поверхности $j = 1$ при помощи формул (25), (26), где $n = 3$ и $n = 4$. Если $\theta_{0n} > \theta_a + \Delta\theta$ и $\theta_{1n} > \theta_a/\Delta\theta$, то прифронтовой точкой будет $i = \theta_a/\Delta\theta + 1$ и перемещения этой точки вычисляются по формулам (32), где

$$\beta_{ijn} = \theta^*_{jn}/\Delta\theta - 1 = (\theta_{jn} - \theta_a)/\Delta\theta - 1$$

$$(j = 0,1;\quad n = 3,4). \tag{50}$$

По вышеприведенным выражениям составляется столько уравнений, сколько неизвестных перемещений есть на слоях времени $n = 3$ и $n = 4$. Полученная система решается подобно предыдущим с помощью рекуррентных формул.

Литература

I. Варвак П.М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. Некоторые задачи прикладной теории упругости в конечных разностях. Ч. I, 1949, ч. 2, Киев,1952.

2. Нигул У. О методах и результатах анализа переходных волновых процессов изгиба упругой плиты. Известия АН ЭССР, серия физ.-мат. и техн.наук, № 3, 1965.

3. Ряямет Р.К., Мянниль А.И. Распространение упругих волн в толстостенной цилиндрической оболочке."Тр.Таллинск. политехн. ин-та",№ 321, 1972.

4. Мянниль А. Программа метода трехмерных сеток для анализа переходного волнового процесса деформации плиты. Известия АН ЭССР, серия физ.-мат. и техн.наук, № 3, 1965.

R. Räämet

Die Fortpflanzung von elastischen Wellen in einer dicken Kugelschale

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der in einer dicken Kugelschale infolge einer sich schnell ändernden Ladung verursachten Fortpflanzung von elastischen Wellen. Die Formänderungen der Schale werden mit Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie beschrieben. Die Gleichungen werden mit Hilfe einer dreidimensionalen Differenzenmethode gelöst.

Литература

1. Варвак П.М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. Некоторые задачи прикладной теории упругости в конечных разностях. Ч. I, 1949, ч. 2, Киев, 1952.

2. Нигул У. Численное решение переходных волновых процессов изгиба упругой плиты. Известия АН ЭССР, серия физ.-мат. и техн.наук, № 3, 1965.

3. Нигул У.К., Мянниль А.И. Распространение упругих волн в толстостенной цилиндрической оболочке. "Тр.Таллинск. политехн. ин-та", № 321, 1972.

4. Мянниль А. Программа метода трехмерных сеток для анализа переходного волнового процесса деформации плиты. Известия АН ЭССР, серия физ.-мат. и техн.наук, № 3, 1965.

A. Männil

Die Fortpflanzung von elastischen Wellen in einer dicken Kugelschale

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der in einer dicken Kugelschale infolge einer sich schnell ändernden Ladung verursachten Fortpflanzung von elastischen Wellen. Die Formänderungen der Schale werden mit Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie beschrieben. Die Gleichungen werden mit Hilfe einer dreidimensionalen Differenzenmethode gelöst.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 375 1975

УДК 624.041

Р.Н. Ээк

УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ И УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ РАМ И СТЕРЖНЕЙ

Массовое применение ЭЦВМ создало возможность перехода к уточненному расчету строительных конструкций с учетом свойств реального материала и геометрии конструкций в деформированном состоянии. Подготовляется переход к новым нормам. Основная работа в этом направлении ведется в ЦНИИСК им. В.А.Кучеренко под руководством профессора, доктора технических наук А.В. Геммерлинга (см. [I], [2], [3], [4]). Разработан алгоритм для расчета упруго-пластических конструкций в нелинейной постановке задачи методом перемещений. Алгоритм является универсальным и позволяет рассчитывать как статически неопределимые, так и определимые рамы, однако применение его связано с довольно громоздкими расчетами. В настоящей статье сделана попытка создания менее трудоемкого способа расчета для статически определимых конструкций.

Обозначения. Большими буквами латинского алфавита обозначены матрицы. Буквы без звездочки обозначают матрицы, состоящие из отвлеченных чисел. Звездочкой обозначены матрицы действительных величин. Например, W^* - матрица действительных перемещений.

Остальные величины обозначены малыми буквами латинского алфавита или греческими буквами. Если эти величины (например, моменты инерции) отличаются друг от друга для осей, проходящих через центр тяжести действительного поперечного сечения и через центр тяжести расчетного поперечного сечения, то они снабжены еще верхним индексом „0" или „p" Например, $m^{(o)}$ - изгибающий момент относительно оси, проходящей через центр тяжести действительного поперечного сечения, а $m^{(p)}$ - изгибающий момент относительно оси, проходящей через центр тяжести расчетного поперечного сечения. "Эталонные", обычно произвольно заданные значения этих величин обозначены нижним индексом „0". Через e_o обозначен модуль упругости при $\varepsilon = 0$.

Некоторые обозначения:

a - эксцентрицитет оси расчетного поперечного сечения относительно оси действительного поперечного сечения;

A - матрица возможной работы продольных сил;

b - ширина поперечного сечения;

B - матрица изгибающих моментов;

c - жесткость упругого шарнира;

d - жесткость при изгибе;

D - матрица возможной работы внутренних сил;

e - модуль упругости;

E - единичная матрица;

f - площадь поперечного сечения;

F - матрица податливости;

i - момент инерции;

l - длина;

m - изгибающий момент (положительный, если растянуты волокна с положительным значением координаты у);

n - продольная сила (положительной считается сжимающая сила);

s - статический момент расчетного сечения относительно оси действительного сечения.

<u>Расчет упруго-пластических рам по методу ЦНИИСК</u>. В общих чертах рекомендуется следующая методика расчета [4].

Расчет рамы совершается при помощи алгоритма "Рама", которая составлена на основе метода перемещений. Канонические уравнения метода перемещений имеют следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{n} r_{ik} z_k + r_{i0} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{I}$$

где n - степень кинематической неопределимости системы;

z_k – неизвестные перемещения;

r_{ik} – реакции основной системы, вызванные единичными перемещениями;

r_{i0} – реакции основной системы от нагрузки.

При расчете упругих рам на поперечную нагрузку реакции r_{ik} и r_{i0} зависят от геометрии рамы и заданной поперечной нагрузки. При неупругом материале или при наличии значительных продольных сил реакции зависят еще от неизвестных перемещений z_k, что требует многократного составления и решения системы уравнений (I).

Определение реакций канонической системы метода перемещений при заданных перемещениях концов стержня выполняется при помощи алгоритма "Стержень". При этом решается дифференциальное уравнение продольно-поперечного изгиба стержня

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{1}{(ei)_x}\left[n(v - v_1) + m_1 + h_1 x + m^{н}\right] \tag{2}$$

путем численноно интегрирования. В уравнении (2) жесткость ei зависит от изгибающих моментов, следовательно, от опорных реакций m_1 и h_1. Это требует многократного интегрирования уравнения (2). После каждой итерации необходимо вновь найти жесткости поперечных сечений. Это осуществляется при помощи алгоритма "Сечение".

Опреление характеристик поперечного сечения при заданном изгибающем моменте и продольной силе необходимо и при расчете неупругой рамы методом единичных сил. Поэтому изложим алгоритм "Сечение" более подробно:

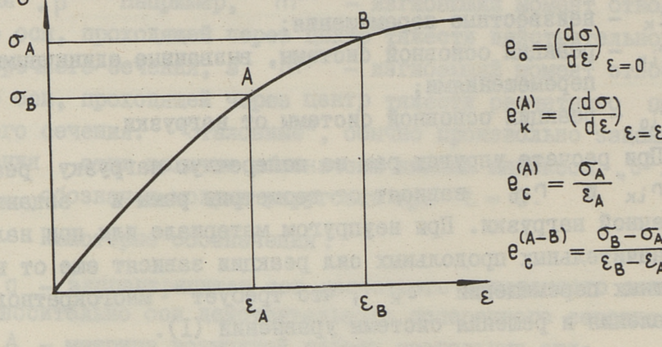
Допустим, что для поперечного сечения известны относительное удлинение $\varepsilon^{(0)}$ волокон на оси стержня (фиг. 2,б) и градиент удлинений (кривизна) α. Тогда удлинение (укорочение) волокон с координатой y выражается формулой

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + \alpha y. \tag{3}$$

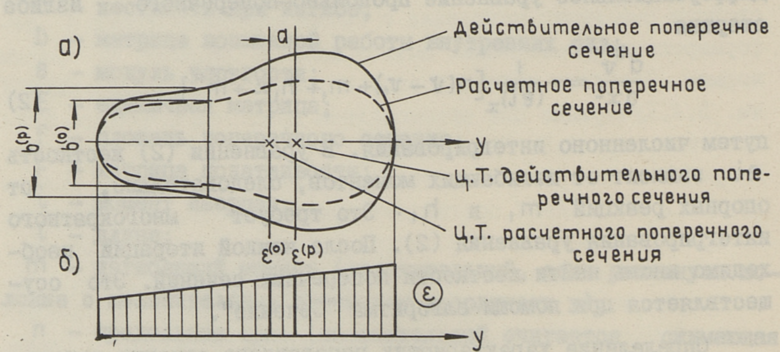
Зная относительное удлинение ε, можем по диаграмме $\sigma - \varepsilon$ (фиг. I) определить напряжение σ,

секущий модуль упругости

$$e_c = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{4}$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

и касательный модуль упругости

$$e_\kappa = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}. \tag{5}$$

Относительный секущий модуль

$$\eta_c = \frac{e_c}{e_o} = \frac{\sigma}{e_o \varepsilon} \tag{6}$$

и относительный касательный модуль

$$\eta_\kappa = \frac{e_\kappa}{e_o} = \frac{d\sigma}{e_o d\varepsilon}, \tag{7}$$

где e_o – модуль упругости при $\varepsilon = 0$.

Пользуемся, далее, понятиями первого и второго расчетных сечений [I]. Расчетные сечения - это фиктивные поперечные сечения, в которых ширина полосы $b(y)$ равняется произведению первоначальной ширины b_0 на относительный модуль η_c или $\eta_к$ (фиг. 2,а).

Для получения первого расчетного сечения принимается относительный секущий модуль n_c, для второго расчетного сечения - относительный касательный модуль $\eta_к$.

Первое расчетное сечение применяется при исследовании продольно-поперечного изгиба, второе - при определении критической нагрузки.

Характеристики первого расчетного сечения следующие:

$$f_\eta = \int_f \eta df; \quad s_\eta = \int_f \eta y df; \quad i_\eta^{(0)} = \int_f \eta y^2 df; \tag{8а}$$

$$a_\eta = \frac{s_\eta}{f_\eta}; \quad i_\eta^{(p)} = i_\eta^{(0)} - a_\eta^2 f_\eta = i_\eta^{(0)} - \frac{s_\eta^2}{f_\eta}. \tag{8б}$$

Жесткости поперечного сечения на сжатие и на изгиб получаем умножением f_η и i_η на первоначальный модуль упругости e_0. Действительные напряжения в поперечном сечении получаем умножением напряжений, найденных для расчетного поперечного сечения, на относительный модуль η.

Если положительная продольная сила - сжимающая, то относительное удлинение у центра тяжести расчетного поперечного сечения

$$\varepsilon^{(p)} = -\frac{n}{e_0 f_\eta}, \tag{9а}$$

относительное удлинение у центра тяжести действительного поперечного сечения

$$\varepsilon^{(0)} = -\frac{n i_\eta^{(0)} + m^{(0)} s_\eta}{e_0 (f_\eta i_\eta^{(0)} - s_\eta^2)} \tag{9б}$$

и градиент относительных деформаций

$$\alpha = \frac{m^{(p)}}{e_0 i^{(p)}_\eta} = \frac{m^{(0)} f_\eta + n s_\eta}{e_0 (f_\eta i_\eta - s_\eta^2)}. \qquad (10)$$

Каждый шаг итерационного процесса основан на исходных значениях $\varepsilon^{(0)}$ и α. Разбивая сечение на достаточное число тонких полос, находим для каждой полосы удлинение ε и по диаграмме $\sigma - \varepsilon$ модуль η. Далее определяем характеристики поперечного сечения по формулам (8а) и новые значения $\varepsilon^{(0)}$ и α по формулам (9б) и (10). Эти значения являются исходными для следующего шага итерации.

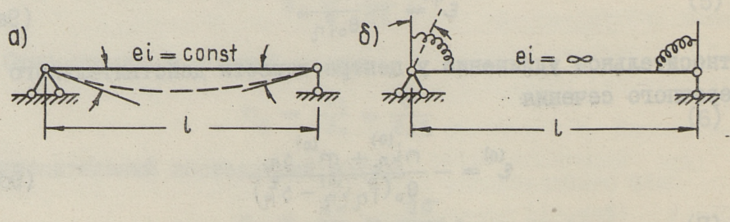
Расчет линейно-упругих рам на продольно-поперечный изгиб методом единичных сил. Расчетные формулы получены обобщением формул статей [5] и [6].

В дальнейшем называем стержнем линейный элемент сооружения с определенными деформативными свойствами, а рамой - совокупность таких элементов. Следовательно, и стержень в обычном смысле этого слова может считаться рамой (например, стержень ступенчато-переменного поперечного сечения).

Выпишем основные матрицы для стержней двух типов:

I. Стержень постоянного поперечного сечения (фиг.3,а). Считаем, что упругая линия этого стержня при продольно-поперечном изгибе остается такой же, как при поперечном изгибе (парабола четвертой степени).

Матрица податливости для этого стержня следующая:



Фиг. 3.

$$F = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} \frac{d_o l_i}{d_i l_o}, \qquad (I1)$$

где $d_o = e_o i_o$ и l_o - "эталонные" значения жесткости и длины.

Матрицы, характеризующие влияние продольной силы

$$G_{VV} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \frac{n_i l_o}{n_o l_i}, \qquad (I2)$$

$$G_{MM} = \begin{Vmatrix} 0{,}8 & 0{,}7 \\ 0{,}7 & 0{,}8 \end{Vmatrix} \frac{n_i l_i^3 d_o^2}{n_o l_o^3 d_i^2}. \qquad (I3)$$

При замене стержня переменной жесткости таким стержнем жесткость

$$d_i = (d_{i1} + d_{i2})/2,$$

где d_{i1} и d_{i2} - жесткости на концах стержня.

2. Абсолютно жесткий стержень с упругими шарнирами на концах (фиг. 3,б) жесткости шарниров (моменты, соответствующие единичным поворотам) c_{i1} и c_{i2}.

Матрица податливости

$$F = \begin{Vmatrix} \frac{c_o}{c_{i1}} & 0 \\ 0 & \frac{c_o}{c_{i2}} \end{Vmatrix}, \qquad (I4)$$

где c_o - "эталонная" жесткость шарнира.

Матрицу G_{VV} находим по формуле (I2), матрица G_{MM} является нулевой.

При замене реального стержня таким стержнем

$$c_{i1} = \frac{2d_{i1}}{l_i}, \quad c_{i2} = \frac{2d_{i2}}{l_i}. \qquad (I5)$$

Обозначаем матрицу изгибающих моментов от единичных сил для создания возможных перемещений через $B_1^* = B_1 l_o$, матрицу изгибающих моментов для определения перемещений характерных точек через $B_2^* = B_2 l_0$, матрицу поперечной нагрузки через $Q^* = Q p_0$ и матрицу изгибающих моментов от внешней нагрузки в недеформированном состоянии рамы (включая и изгибающие моменты, вызванные внецентренным приложением продольных сил) через $B_0^* = B_0 l_0 p_0$.

Находим следующие матрицы

$$D = B_1' F B_1 , \tag{16}$$

$$V = B_2' F B_1 , \tag{17}$$

$$A = V' G_{VV} V + B_1' G_{MM} B_1 . \tag{18}$$

Обозначаем, далее, через $X^* = X p_0$ матрицу коэффициентов, на которые надо умножать единичные поперечные грузы, чтобы они вызывали при чисто поперечном изгибе такие же деформации, как настоящие грузы при продольно-поперечном изгибе.

Приравнивая к нулю сумму работ всех сил при перемещениях, вызванных единичными силами системы B_1, получаем для определения неизвестных X следующее уравнение

$$(D - A \varkappa_0) X = V' Q , \tag{19}$$

где

$$\varkappa_0 = \frac{n_0 l_0^2}{6 d_0} \quad \text{соотв.} \quad \varkappa_0 = \frac{n_0 l_0}{c_0} . \tag{20}$$

Приведенные перемещения

$$W = V X \tag{21}$$

и действительные перемещения

$$W^* = W \frac{p_0 l_0^3}{6 d_0} , \quad \text{соотв.} \quad W^* = W \frac{p_0 l_0^2}{c_0} . \tag{22}$$

Изгибающие моменты

$$M^* = B_1 X p_0 l_0 . \tag{23}$$

Изгибающие моменты можно найти и непосредственно через перемещения; ввиду приближенности решения результаты могут немного отличаться друг от друга.

Если $B_1 = B_2 = B$, то $V = D$ и вместо формулы (I9) можно для определения неизвестных X пользоваться следующей формулой

$$(E - D^{-1} A \varkappa_0) X = Q, \tag{24}$$

где E – единичная матрица.

Поскольку в этом случае

$$X = D^{-1} W, \tag{25}$$

можно из (I9) получить еще следующую формулу для определения приведенных перемещений:

$$(E - A D^{-1} \varkappa_0) W = D Q. \tag{26}$$

Дальнейшие упрощения возможны, если матрица G_{MM} является нулевой. Выражение (I8) принимает следующий вид

$$A = D G_{VV} D. \tag{27}$$

Подставляя (27) в (24), получаем для определения неизвестных X следующую формулу

$$(E - G_{VV} D \varkappa_0) X = Q, \tag{28}$$

а из формулы (26) получаем

$$(E - D G_{VV} \varkappa_0) W = D Q \tag{29}$$

или

$$(D^{-1} - G \varkappa_0) W = Q. \tag{30}$$

Если в начальном (недеформированном) состоянии рамы возникают изгибающие моменты еще от внецентренного приложения сил, то формула (I9) станет непригодной, поскольку при поворотах сечений рамы совершают работу и внецентренно приложенные силы. Тогда находим вначале матрицу изгибающих моментов $B_0^* = B_0 l_0 p_0$ от поперечных и внецентренно приложенных нагрузок в недеформированном состоянии рамы. Приравнивая к нулю сумму работ всех сил на возможных перемещениях, получаем вместо (I9) для определения неизвестных X следующую формулу:

$$(D - A \varkappa_0) X = B_1' F B_0. \tag{31}$$

Если $B_1 = B_2 = B$, можно приведенные перемещения найти вместо (26) по следующей формуле:

$$(E - AD^{-1}\varkappa_0)W = B'FB_0. \tag{32}$$

Если матрица $G_{мм}$ является нулевой, получаем из (32) такую формулу

$$(E - DG_{vv}\varkappa_0)W = B'FB_0. \tag{33}$$

Наконец, если $G_{мм} = 0$ и матрица B – квадратная и имеет обратную матрицу B^{-1}, возможны еще некоторые упрощения. Умножая уравнение (31) слева на $F^{-1}(B')^{-1}$, получаем после некоторых упрощений для определения X следующее уравнение

$$(B - BGD\varkappa_0)X = B_0. \tag{34}$$

Поскольку приведенные изгибающие моменты $M = BX$ получаем, подставив в (34) $B^{-1}M$ вместо X новое уравнение для определения M,

$$(E - GD\varkappa_0)M = B_0. \tag{35}$$

Аналогичная замена X на $D^{-1}W$ дает уравнение для непосредственного определения W:

$$(E - DG\varkappa_0)W = B'FB_0. \tag{36}$$

Параметр критической силы $\lambda = 1/\varkappa$ можно в общем случае найти из векового уравнения

$$\mathrm{Det}(AD^{-1} - E\lambda) = 0, \tag{37}$$

если же $G_{мм} = 0$, можно пользоваться уравнением

$$\mathrm{Det}(DG - E\lambda) = 0. \tag{38}$$

Критическая продольная сила

$$(n_0)_{кр} = \frac{6d_0}{\lambda_{max} l_0^2}, \text{ соотв. } (n_0)_{кр} = \frac{c_0}{\lambda_{max} l_0}. \tag{39}$$

<u>Расчет нелинейно-упругих и упруго-пластичных рам.</u> Расчет таких рам производим методом итерации. На каждом шаге решается соответствующая задача для линейно-упругой рамы.

I. <u>Определение критической силы</u>. Под критической силой понимаем здесь критическую силу по теории Энгессера-Шенли. Применение теории Энгессера-Ясинского не является оправданным. Если диаграмма $\sigma - \varepsilon$ является выпуклой (фиг. I), то даже у изолированных стержней постоянного поперечного сечения происходит потеря устойчивости II рода задолго до достижения критической силы по теории Энгессера-Ясинского.

Допустим, что силы растут пропорционально какому-то параметру κ. Тогда соотношение напряжений в отдельных поперечных сечениях является постоянным. Зная напряжения в одном сечении, можем найти напряжения и во всех других сечениях. Ход расчета следующий:

Находим матрицы B_1, B_2 и G_{VV} (они в дальнейшем не изменяются). Задаемся критическим напряжением первого приближения $\sigma_1^{(1)}$ в каком-то сечении. Находим соответствующие напряжения $\sigma^{(1)}$ и относительные касательные модули $\eta_\kappa^{(1)}$ для всех рассматриваемых сечений. Вычисляем матрицы $F^{(1)}$ и $G_{MM}^{(1)}$ для первого приближения. При этом учитываем, что для стержней типа (а)

$$d_i = d_{i0} \frac{\eta_{\kappa 1}^{(1)} + \eta_{\kappa 2}^{(1)}}{2}, \tag{40}$$

где d_{i0} - жесткость при нулевых напряжениях,

$\eta_{\kappa 1}^{(1)}$ и $\eta_{\kappa 2}^{(1)}$ - относительные касательные модули на одном и другом концах стержня.

Вычисляем критическую силу по формуле (37) или (38). По этой силе находим критическое напряжение $\sigma_1^{(2)}$. Если $\sigma_1^{(2)}$ значительно отличается от напряжения $\sigma_1^{(1)}$, задаемся для нового приближения напряжением $\sigma_1^{(1)} + \Delta\sigma_1$ и повторяем расчет. Приращение напряжений $\Delta\sigma_1$ должно быть меньше, чем допускаемая погрешность. Расчет прекращается, если разность напряжений $\sigma_1^{(2)} - \sigma_1^{(1)}$ меняет знак.

При непосредственной подстановке $\sigma_1^{(2)}$ вместо $\sigma_1^{(1)}$ для нового приближения процесс может расходиться.

2. <u>Продольно-поперечный изгиб нелинейно-упругих рам.</u>

В первом приближении рассчитываем раму как линейно-упругую (формулы (I9)-(30) или (3I)-(36)). Определяем изгибающие моменты. Находим характеристики относительных деформаций $\varepsilon^{(0)}$ и α по формулам (9б) и (I0). Для первого приближения

$\eta_c = 1$ и формулы (9б) и (10) упрощаются:

$$\varepsilon_0 = -\frac{n}{e_0 f_0}; \quad \alpha = \frac{m}{e_0 i_0}. \tag{41}$$

Находим относительные деформации ε (3) отдельных полос поперечных сечений, напряжения $\sigma = \phi(\varepsilon)$ и относительные секущие модули η_c (6). По формулам (8) находим характеристики поперечных сечений и вычисляем уточненные значения матриц F и $G_{мм}$. Выполняем определение изгибающих моментов B_0 с учетом эксцентрицитета a_η и повторяем расчеты рамы. При этом применимы только формулы (31-36), поскольку силы приложены внецентренно. Находим изгибающие моменты и повторяем расчет.

Окончательные значения напряжений получаем по относительным деформациям ε или по формуле

$$\sigma = \eta\left(-\frac{n}{f_\eta} + \frac{m(y - a_\eta)}{i_\eta^{(0)}}\right). \tag{42}$$

3. <u>Расчет упруго-пластических рам</u>. Если напряжения увеличиваются монотонно, то расчет такой рамы не отличается от расчета нелинейно-упругой рамы. Если может происходить и разгружение отдельных волокон, надо расчет выполнять по шагам, увеличивая нагрузки на каждом шаге.

На каждом шаге определяем дополнительные деформации и напряжения. При этом надо обращать внимание на следующие особенности:

1. Для шага, в котором деформации меняются от точки A до точки B (фиг. 1), начальным модулем упругости является касательный модуль упругости $e_к$ в точке A, а секущий модуль упругости, соответствующий данному шагу, равняется

$$e_c^{(A-B)} = \frac{\sigma_B - \sigma_A}{\varepsilon_B - \varepsilon_A}. \tag{43}$$

2. В тех частях рамы, где происходит разгрузка,

$$e = e_0 \quad \text{и} \quad \eta = 1.$$

3. Параметр $\varkappa_0$ определяется абсолютным (окончательным) значением продольных сил.

4. Изгибающие моменты B_0 состоят из моментов дополнительных поперечных и продольных нагрузок. Моменты продольных нагрузок вычисляют в деформированном состоянии рамы в начале нового шага относительно центра тяжести расчетного поперечного сечения.

Литература

I. Геммерлинг А.В. Несущая способность стержневых стальных конструкций. М., Стройиздат, 1958.

2. Геммерлинг А.В. Вопросы прочности и устойчивости строительных конструкций. - В сб. Расчет конструкций, работающих в упруго-пластической стадии. Труды ЦНИИСК, вып.7 М., Стройиздат, 1961.

3. Гемерлинг А.В. Общий метод расчета рам из упруго-пластического материала. "Стр. мех. и расчет сооружений", 1968, № 3.

4. Геммерлинг А.В. Нелинейно упругие стержневые системы. "Справочник проектировщика", т.II, М., Стройиздат, 1973.

5. Ээк Р.Н. Определение критической нагрузки и частот собственных колебаний упругих рам методом единичных сил. "Тр. Таллинс. политехн. ин-та", серия А, № 297, 1970.

6. Ээк Р.Н. Некоторые разновидности метода единичных сил для определения критической нагрузки упругих рам и стержней."Тр. Таллинск.политехн. ин-та," № 321, 1972.

R. Eek

Stability and the Combined Bending and Compression of Statically Determined Frames and Bars of Non-linearly Elastic and Plastic Materials

Summary

The unit force method described in (6) and (7) is generalized for the calculation of statically determined frames and bars of nonelastic materials. At first matrix formulae for the combined bending and compression of elastic frames are derived and then the application of these formulae for non-linearly elastic and plastic frames is described.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 375 1975

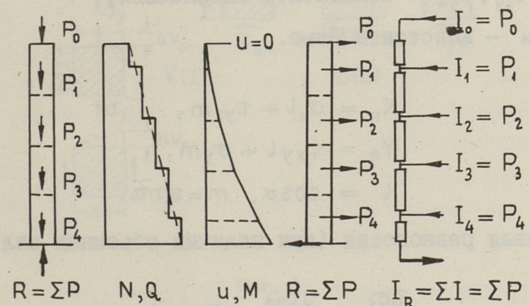
УДК 681.14

О.Т. Роотс

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

При электрическом моделировании задачи поля напряжения применялись различные приемы частично со сложными моделями элементов, или такие модели, при которых определение желаемых величин потребовало сложных вычислительных работ.

Ниже приведена простейшая электрическая модель, электрические токи которой отвечают механическим напряжениям, а разница потенциалов - перемещениям.



Фиг. 1.

Фигура I показывает аналогию, основанную на законе Ома, при растяжении-сжатии и изгибе в сравнении с электрической цепью.

При растяжении-сжатии перемещение проявляется через продольную силу N

$$u = \sum \frac{Nl}{EF}$$

и через напряжение σ

$$u = \sum \frac{\sigma l}{E}.$$

При изгибе изгибающий момент проявляется через поперечную силу Q

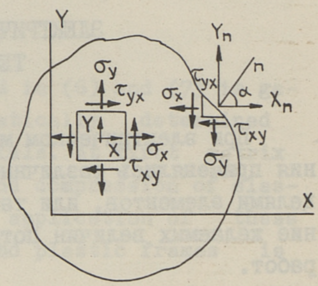
$$M = \sum Ql.$$

В цепи сопротивления ток I дает потенциал

$$U = \sum IR.$$

Таким образом, предлагаемую модель можно использовать при моделировании изгиба.

При плоской задаче (фиг.2) поля напряжения действуют следующие закономерности:



Фиг. 2.

Обозначим:

X, Y – объемные силы,

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ – компоненты напряжения,

λ, μ – константы Ламе.

На грани

$$X_n = \sigma_x l + \tau_{yx} m,$$

$$Y_n = \tau_{xy} l + \sigma_y m,$$

$$l = \cos\alpha, \quad m = \sin\alpha.$$

Условия равновесия (при наличии объемных сил)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0, \qquad (I)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0, \qquad (2)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \qquad (3)$$

Условия непрерывности (при наличии объемных сил)

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y) =$$

$$= -\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right); \tag{4}$$

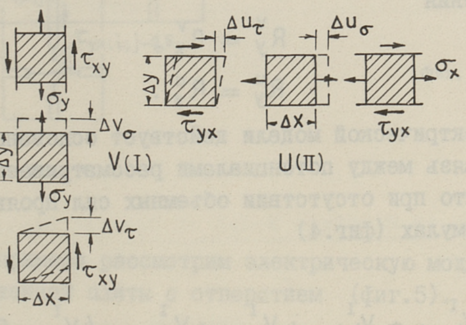
$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}.$$

Условия непрерывности (при отсутствии объемных сил)

$$\nabla^2 = (\sigma_x+\sigma_y) = 0. \tag{5}$$

При моделировании поле напряжения разделено на два поля $V(I)$ и $U(II)$, которые связывают условие равенства касательных напряжений (3).

Оба поля моделируют сети сопротивления, соединяемые трансформаторами тока с равным числом обмоток (фиг. 3).



Фиг. 3.

Деформациям элементов поля напряжения соответствуют разницы потенциалов моделей ΔV и ΔU, причем в поле $V(I)$:

$$\Delta v_\sigma = \frac{\sigma_y \Delta y}{E} = I_y^V R_y^V = \Delta V_y,$$

$$\Delta v_\tau = \frac{\tau_{xy}\Delta x}{H} = I_x^V R_x^V = \Delta V_x; \tag{6}$$

$$\nabla^2 V = 0 \tag{7}$$

и в поле $U(II)$

$$\Delta u_{\sigma} = \frac{\sigma_x \Delta x}{E} = I_x^u R_x^u = \Delta U_x ,$$

$$\Delta u_{\tau} = \frac{\tau_{yx} \Delta y}{H} = I_y^u R_y^u = \Delta U_y ; \tag{8}$$

$$\nabla^2 U = 0 . \tag{9}$$

Модуль $H = 2G$.

При рассмотрении поля деформации не учтены поперечные деформации от нормальных напряжений, которые при хрупких материалах (бетон и пр.) в рассматриваемых позже задачах не имеют существенного значения.

Предполагается, что $\mu \approx 0$, модуль

$$H = E .$$

То, принимая

$$\Delta x = \Delta y ,$$

сопротивления

$$R_y^v = R_x^v ,$$

$$R_y^u = R_x^u . \tag{I0}$$

В электрической модели действует основанная на законе Кирхофа связь между потенциалами рассматриваемой и соседней точками, что при отсутствии объемных сил проявляется в следующих формулах (фиг.4)

$$V_{i-1,j}^{I} + V_{i,j-1}^{I} + V_{i+1,j}^{I} + V_{i,j+1}^{I} - 4V_{i,j}^{I} = 0 ,$$

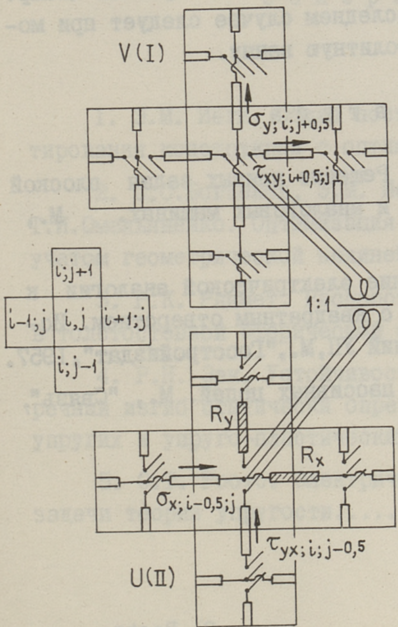
$$U_{i-1,j}^{II} + U_{i,j-1}^{II} + U_{i+1,j}^{II} + U_{i,j+1}^{II} - 4U_{i,j}^{II} = 0 ; \tag{II}$$

$$\nabla^2 V^{I} = 0, \quad \nabla^2 U^{II} = 0 . \tag{I2}$$

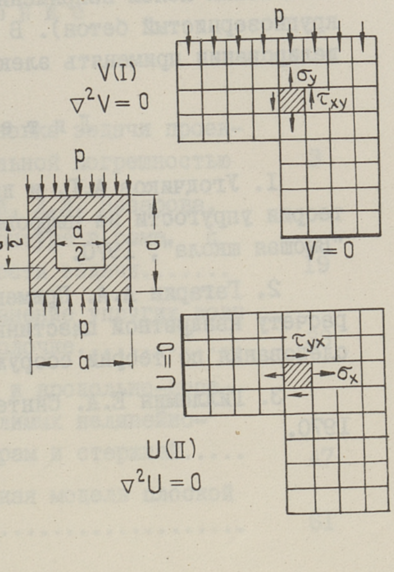
При воздействии вертикальных объемных сил:

$$\nabla^2 V^{II} = q . \tag{23}$$

Эти объемные силы моделируются дополнительными токами.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

В виде примера рассмотрим электрическую модель вертикально нагруженной плиты с отверстием (фиг.5).

При моделировании применена симметрия.

Ввиду того, что энергия, требуемая полем U(II), мала (напряжения $\sigma_x < 0{,}1 \max \sigma_y$), возможно моделирование более существенного компонента σ_y с незначительными ошибками, без трансформаторов, лишь при помощи поля V(I).

Приведенный метод моделирования рекомендуется прежде всего для решения задач, при которых предполагаются главным образом деформации в одном направлении: нагруженные в одном направлении плиты с местными нарушениями (отверстия, включения) поля напряжения, ребристые стенбалки и пр.

Этот метод может оказаться перспективным и при исследовании полей напряжения неоднородных материалов (напр. крупнозернистый бетон). В последнем случае следует при моделировании применять электролитную ванну.

Литература

I. Угодчиков А.Г. и др. Решение кривых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах. М., "Высшая школа", 1970.

2. Гагарин А.А. Применение электрической аналогии к расчету квадратной пластинки с квадратным отверстием. Исследования по теории сооружений УП, М., "Госстройиздат", 1957.

3. Гиллемин Е.А. Синтез пассивных цепей. М., "Связь", 1970.

O. Roots

An Electric Model of Elastic Field

Summary

In this paper the author gives some data on the model of a problem of the theory on structures using an electric analogy model.

С о д е р ж а н и е

Таллинский политехнический институт
Труды ТПИ, № 375
ТРУДЫ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ
Сборник статей У1
Редактор К. Оллик
Техн. редактор Л. Лоопер
Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 11 окт. 1974 года
Подписано к печати 26 февр. 1975 года
Бумага 60x90/16. Печ. л. 4,25 + прил. 0,25. Уч.-изд. л. 3,25
Тираж 350. МВ-02805
Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскла, 2/9. Зак. № 193
Цена 33 коп.

Цена 33 коп.