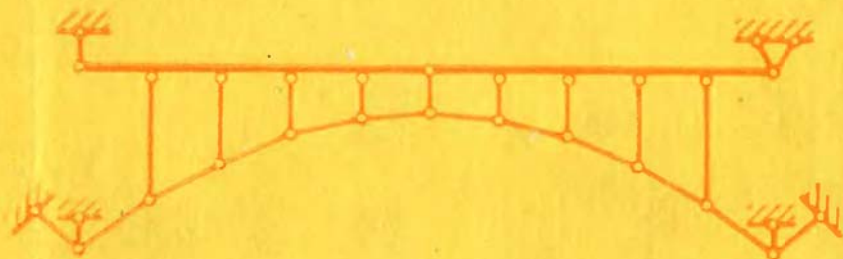


R. Räämet

EHITUS- MEHAANIKA



R. RÄÄMET
tehnikakand. dots.

EHITUSMEHAANIKA

VARRASKONSTRUKTSIOONIDE
STAATIKA

TEINE, ÜMBERTÖÖTATUD JA TÄIENDATUD TRÜKK

 «VALGUS»
TALLINN 1975

Kaane kujundanud T. Aru

Eesti NSV Kõrgema ja Kesk-erihariduse Min
kasutamiseks õpikuna Eesti NSV kõrgemates

1. EHITUSMEHAANIKA PÕHIALUSED

1.1. Ülesanded ja eesmärk

Ehitusmehaanika on teadus, mis uurib ehituskonstruksioonide tugevust, jäikust ja püsivust.

Uute projekteeritavate ehitiste tugevus- ja püsivusarvutuse eesmärgiks on kindlustada nende vastupanu mõjuvatele koormustele ning selgitada ehitise võimet säilitada oma kuju deformeerunud tasakaaluolukorras. Jäikusarvutus taotleb suurte paigutiste ja vibratsioonide vältimist, kuigi need konstruktsiooni seisukohalt oleksid küll ohutud, kuid on ebasoovitavad või takistavad ehitise normaalset eksploatatsiooni. Lisaks tugevusele, püsivusele ja jäikusele hinnatakse ehitist veel majandusliku efekti ja eksploatatsioonikõlblikkuse järgi, mis olenevad konstruktsiooni materjalist, kujust ja mõõtmetest. Tugeva, püsiva ja otstarbeka ehitise kuju ja mõõtmete määramine ning materjali valik nõuab tehnilist ja majanduslikku arvutust. Ka olemasolevate ehitiste eksploatatsioonitingimuste muutus tingib tugevuse ja püsivuse kontrollarvutust, mis näitab, kas ehitist on vaja tugevdada või mitte.

Ehitise tugevus, püsivus ja jäikus sõltuvad selle materjalist ning elementide kujust ja mõõtmetest, samuti sisejõududest, mis tekivad ehitises koormuse mõjumisel. Sisejõudude kaudu arvutatakse ka ehitise elementide deformatsioonid ja paigutised. Seepärast on ehitusmehaanika üheks põhiülesandeks sisejõudude arvutus.

Ehitusmehaanika on tihedalt seotud tugevusõpetuse ja elastsusteooriaga. Sageli mõistetakse ehitusmehaanika all kõiki nimetatud teadusharusid. Kõigi nende ühiseks eesmärgiks on anda arvutusmeetodid pingete ja deformatsioonide leidmiseks.

Tugevusõpetus käsitleb pingete ja deformatsioonide arvutust peamiselt ehitise üksikutes elementides. Ehitus-

mehaanika uurib nende leidmist elementidest koosnevates konstruktsioonides. Tugevusõpetus ja ehitusmehaanika püüavad saavutada eesmärgi suhteliselt lihtsamate matemaatiliste meetoditega. Elastsusteorია nõuab oma eeldustes ja järeldustes suuremat rangust ja täpsust ning peab seepärast kasutama täpsemaid ja keerukamaid matemaatilisi meetodeid.

Ehitusmehaanikas on palju usaldusväärseid arvutusmeetodeid, mis on ehituspraktikas kontrollitud. Kuid nagu iga teinegi teadusharu, nii areneb ja täiustub pidevalt ka ehitusmehaanika uute arvutusmeetoditega. Uus arvutusmeetod saab usaldusväärseks siis, kui sellega saadud tulemused leiavad kinnitust eksperimentaalsete uurimustega mudelitel ja ehitistel.

Ehituskonstruktsioonid arvutatakse piirulukorra meetodiga.

Piirulukorraks nimetatakse niisugust olukorda, milles konstruktsioon koormuse mõjul muutub ekspluaatsioonikõlbmatuks. Konstruktsiooni arvutamisel piirulukorra järgi ei tohi jõudude suurused, pinged, deformatsioonid või kohalikud vigastused ületada normidega kindlaksmääratud piirväärtusi.

Piirkoormuseks nimetatakse vähimat koormust, mille mõjul konstruktsioonis tekib piirulukord. Piirkoormuse käsitlemine ainult tugevuse seisukohalt ei ole täielik. Koormuse mõjul võib konstruktsioon minna esialgselt tasakaaluolukorrast kvalitatiivselt teise tasakaaluolukorda (näiteks sirgjoonelisest kõverjoonelisse, tasandilisest mittetasandilisse jne.); seda üleminekut nimetatakse konstruktsiooni püsivuse kaotuseks. Sel juhul määrab konstruktsiooni piirkoormuse püsivuse kaotus.

Kriitiliseks koormuseks nimetatakse vähimat koormust, mille saavutamisel on konstruktsioonil peale esialgse tasakaaluolukorra veel vähemalt üks kvalitatiivselt erinev tasakaaluolukord, mis erineb algolukorrast väga vähe. Kriitilisest suurema koormuse puhul muutub senine püsiv tasakaal mittepüsivaks ja konstruktsioon kas puruneb või omandab mingi uue tasakaaluvormi. Püsivuse kaotuse puhul on kriitiline koormus tavaliselt ka piirkoormuseks. Mõningail juhtudel lubatakse ka kriitilisest suuremaid koormusi.

Liikuvate koormuste puhul ei tohi ehitised sattuda dünaamiliste mõjude alla mis võivad põhjustada

resonantsi, ja peavad olema küllalt jäigad ka löökide suhtes.

Ehitiste projekteerimisel arvutatakse konstruktsioonid kolme piirulukorra järgi:

1) esimese piirulukorra määrab kandevõime (tugevus, ja püsivus);

2) teise piirulukorra määravad deformatsioonid;

3) kolmanda piirulukorra määrab pragude või kohalike vigastuste tekkimine.

Ehitise tugevuse, püsivuse ja jäikuse hindamisel on vaja teada konstruktsioonide pinge- ja paigutusolukordi. Pingeolukord on osaliselt tingitud konstruktsiooni valmistamise tehnoloogiast (omapinged), kuid põhiliselt siiski konstruktsioonile rakendatud koormustest ja toereaktsioonidest, s. t. välisjõududest.

Seega on ehitusmehaanika ülesanneteks:

1) anda arvutusmeetodid ja eeskirjad välismõjude poolt põhjustatud sisejõudude, paigutiste ja omavõnkearvude leidmiseks;

2) anda konstruktsioonile otstarbekohane kuju.

1.2. Eeldused ja printsiibid

Ehitusmehaanika on teadus, mis uurib konstruktsioonide kandevõimet sõltuvalt ehitusmaterjalide füüsikalistest omadustest ja lähtub järgmistest eeldustest:

1) konstruktsiooni materjal on ühtlaselt ja pidevalt jaotatud üle kogu mahu;

2) materjal on elastne;

3) materjal on homogeenne, s. t. materjali kõikides punktides on füüsikalised omadused ühesugused;

4) materjal on isotroopne, s. t. kõikides suhtes ühesuguste omadustega;

5) koormamata olukorras on konstruktsioon pingevaba (kui ei esine eelpingeid);

6) kehtib Hooke'i seadus: elastses kehas on deformatsioonid võrdelised koormusega;

7) konstruktsioonelementide paigutised on võrreldes elementide mõõtmatega väikesed.

Kahe viimase eelduse kehtimisel võib rakendada jõudude mõju sõltumatuse printsiipi: jõudude süsteemi poolt tingitud sisejõud ja deformatsioonid on

võrdsed iga jõu poolt eraldi põhjustatud sisejõudude ja deformatsioonide algebralise summaga.

Kaks viimast eeldust lubavad kasutada ka *Lagrange'i* võimalike paigutiste printsiipi: kehale rakendatud jõudude tööde summa lõpmata väikestel võimalikel paigutistel tasakaaluasendist võrdub nulliga.

Lagrange'i ja jõudude mõju sõltumatus printsiibile tuginevad ehitusmehaanika arvutusmeetodid.

Katsed on näidanud, et konstruktsioonide koormamisel mõõdetud deformatsioonid ja paigutised ühtivad praktiliselt nende eelduste alusel saadud arvutuste tulemustega. See asjaolu põhjendab eeltoodud printsiipide ja eelduste kasutatavust.

1.3. Arvutusskeem

Arvutusskeem on ehituskonstruktsiooni lihtsustatud kujutis, mille alusel tehakse konstruktsiooni projekteerimis- või kontrollarvutus. Arvutamisel pole võimalik täpselt arvestada konstruktsiooni geomeetrilist kuju, talle mõjuvaid koormusi ja materjali füüsikalisi omadusi, seepärast tegelikke tingimusi lihtsustatakse ja konstruktsioon asendatakse teoreetilise arvutusskeemiga.

Näiteks jäikade sõlmedega keevitatud sõrestiku arvutus on väga tülikas. Lähtudes sõrestiku varraste sisejõudude leidmisel arvutusskeemist, milles tegelike varraste asemel on kujutatud nende teljed ja jäikade sõlmede asemel liigendid, muutub arvutus tunduvalt lihtsamaks. Teoreetilised uurimused ja katsed näitavad, et selline asendus on lubatud, kui sõrestiku vardad on saledad, s.t. kui paindejäikused $i = EI/l$ on väikesed. Sel juhul erinevad liigendsõlmedega sõrestiku varraste sisejõud vähe jäikade sõlmedega sõrestiku varraste sisejõududest. Varda jäikuse i avaldises tähistab E materjali normaal-elastsusmoodulit, I — varda ristlõike inertsmomenti ja l — varda geomeetrilist pikkust. Kui sõrestik koosneb lühikestest ja suure ristlõikega varrastest, siis on jäikused ($i = EI/l$) suured ja liigendsõlmedega arvutusskeem ei ole õigustatud.

Sageli kasutatakse ühe konstruktsiooni arvutamisel mitut arvutusskeemi — esialgsete mõõtmete valikul suhteliselt lihtsamat, lõplikul arvutusel aga täpsemat.

1.4. Ehituskonstruktsioonide liigitus

Ehituskonstruktsioone liigitatakse nende arvutamisel mitmesuguste erinevate omaduste järgi.

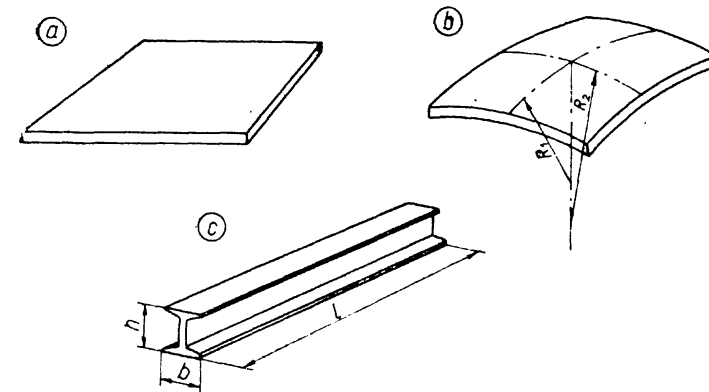
Ehituskonstruktsioonide liigitus **geomeetriliste tunnuste** põhjal on järgmine.

Massiivkonstruktsioonil on kõik kolm mõõdet ühes ja samas suurusjärgus (paksud joetammid ja tugiseinad, massiivsed vundamendid jne.).

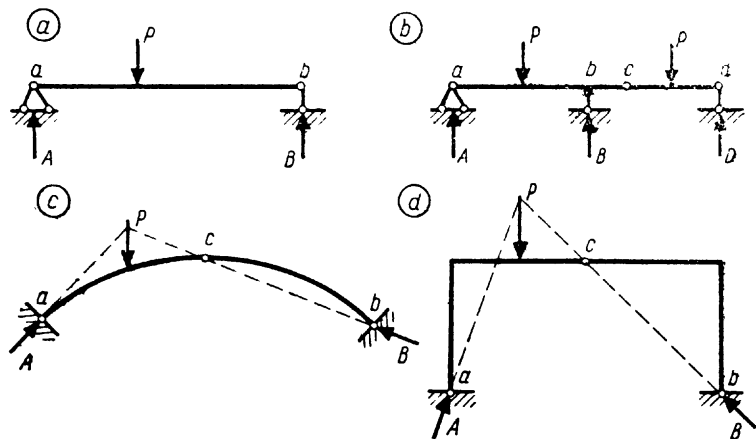
Plaat- ja koorikkonstruktsioonide (pindkandurite) elementidel on kaks mõõdet (pikkus ja laius) tunduvalt suuremad kui kolmas (paksus); kahe tasandiga piiratud elementi (joon. 1.1 *a*) nimetatakse **plaadiks**, kõverpindadega piiratud elementi (joon. 1.1, *b*) **koorikuks**.

Varraskonstruktsioonil on elementide üks mõõde (pikkus) tunduvalt suurem kahest teisest (ristlõike) mõõtmest (joon. 1.1, *c*). Ristlõigete raskuskeskmed kujundavad varda telje, mis on sirge, murtud või kõver.

Varraskonstruktsioonid liigitatakse tasandilisteks ja ruumilisteks. Tasandkonstruktsioonil asuvad varraste teljed ühes tasandis, mis läbib ristlõigete üht peatelge. Varraste telgjoontega samas tasandis mõjuva, kriitilisest väiksema arvutuskoormuse puhul jäävad deformeerunud varraste telgjooned samasse tasandisse.



Joon. 1.1



Joon. 1.2

Ruumkonstruktsioonil asuvad varraste teljed mitmes tasandis. Ruumiliste ehituskonstruktsioonide arvutuskeem lahutatakse võimaluse korral tasandilisteks, mis arvutust tunduvalt lihtsustab (näiteks katuse- ja sillasõrestike puhul). Kui seda ei saa teha, käsitletakse konstruktsiooni arvutuskeemi ruumilisena (kuplid, tornid, koorikud, laeva- ja lennukikered).

Toereaktsioonide mõjumisviisi järgi liigitatakse varras-konstruktsioonid taladeks, raamideks ja kaarteks. Talas põhjustab vertikaalne koormus ainult vertikaalseid toereaktsioone (joon. 1.2, a ja b). Kaares ja raamis tingib vertikaalkoormus peale vertikaalreaktsioonide ka horisontaalreaktsioone (joon. 1.2 c ja d).

Kinemaatiliste tunnuste järgi on konstruktsioonid kas geomeetriselt muutumatud või geomeetriselt muutuvad. Ehitistes kasutatakse geomeetriselt muutumatuid konstruktsioone. Geomeetrisel muutumatus on tagatud, kui konstruktsiooni elementide vastastikust asetust ei saa muuta ilma elemente deformeermata.

Arvutuskeemid on staatikaga määratavad või staatikaga määramatud. Staatikaga määratavas arvutuskeemis piisab suvalisest koormusest põh-

justatud toereaktsioonide ja sisejõudude leidmiseks staatika tasakaaluvõrranditest. Staatikaga määramatus arvutuskeemis pole toereaktsioonid ja sisejõud arvutatavad üksnes tasakaaluvõrrandite abil ja ülesande lahendamine nõuab veel geomeetrisel tingimuste alusel koostatud võrrandite lahendamist.

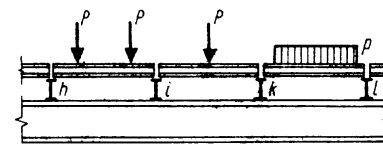
1.5. Koormused

Konstruktsiooni elementide sisejõudude, pingete ja deformatsioonide arvutamiseks tuleb esmalt kindlaks määrata konstruktsioonile mõjuvad koormused.

Koormus on kas püsiv (omakaal, paiksed seadmed), ajutine (lumi, tuul) või liikuv ajutine (kraanad, autod, traktorid, rongid). Omakaal koosneb vaadeldava konstruktsiooni enda kaalust ja teistelt konstruktsioonidelt ülevõetavatest omakaaludest. Eksploatatsioonikoormust on nimetatud ka kasulikuks koormuseks (seadmete, aparatuuride, kaupade ja inimeste kaal).

Vahetult konstruktsioonile mõjuvat koormust nimetatakse otseseks koormuseks. Vahekandurite kaudu konstruktsiooni kindlaksmääratud punktidesse — sõlm-punktidesse (joon. 1.3, punktid *h, i, k, l*) ülekantavat koormust nimetatakse sõlmkoormuseks.

Ajas muutuvat koormust nimetatakse üldiselt dünaamiliseks, ajas muutumatut staatiliseks koormuseks. Praktiliselt võib koormust käsitleda staatiliseks, kui deformatsioonide suurenemise kiirused koormuse aeglasel kasvamisel nullist kuni oma lõpliku suuruseni on nii väikesed, et konstruktsiooni deformeermisel tekkivad inertsjõud on teiste mõjuvate jõududega võrreldes hüljatavad. Dünaamiline koormus võib muutuda kas ainult väärtuselt või nii väärtuselt, suunalt kui ka asukohalt. Liikuvad koormused võetakse reeglina dünaamilisena. Ainult erandjuhul, kui liikuv koormus rakendatakse konst-



Joon. 1.3

ruksioonile väga aeglaselt, võib teda arvestada staatilisena. Dünaamiliste koormuste hulka kuuluvad löögid (auruhaamer, maa-alused tõuked, plahvatuslained). Dünaamilistest koormustest eriti olulised on perioodiliselt muutuvad koormused. Niisugused koormused tekivad pöörlevate osadega masinate töötamisel. Ohtlikud on need koormused seepärast, et teatavil tingimustel võivad nad tekitada konstruktsioonis sisejõudusid ja deformatsioone, mis on mitu korda suuremad kui koormuse staatilisel mõjumisel ning põhjustada konstruktsiooni purunemise.

Staatikaga määramatutes konstruktsioonides võivad tekkida pinged ja deformatsioonid temperatuuri muutusest, tugele nihkumisest või mõnede elementide sunnitud paigutistest.

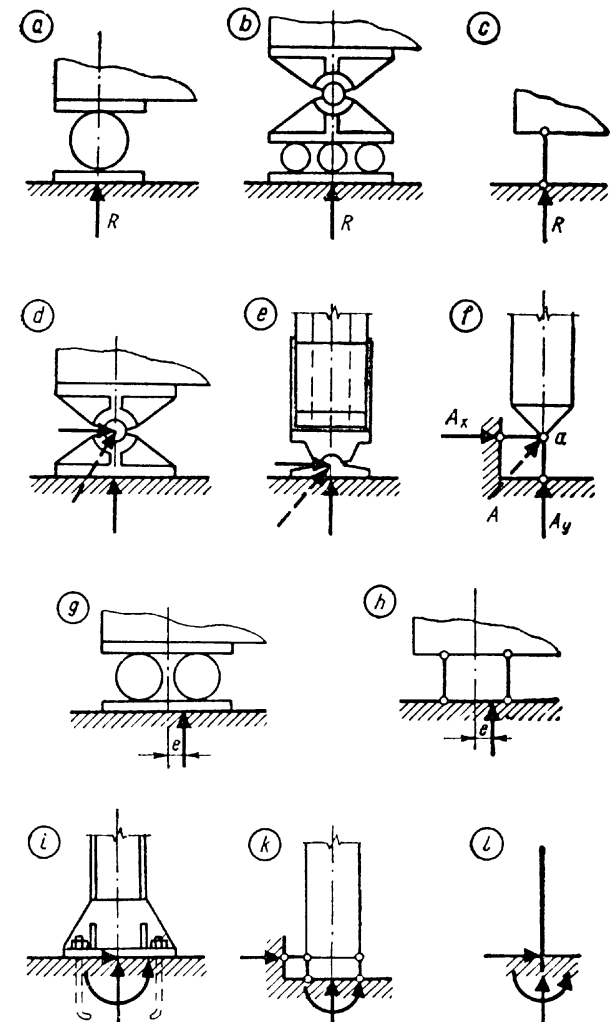
1.6. Tasandkonstruktsioonide toed

Konstruktsioonid toetuvad alusele või on kinnitatud selle külge tugiosade abil. Konstruktsioonilt erinevate tuge tüüpide kinemaatilisi omadusi iseloomustavad toetingsuused. Arvutusskeemi koostamisel asendatakse iga tugi kinemaatiliselt ekvivalentse toereaktsiooniga, mis realiseeritakse toevarraste või toesidemetega. Tasandkonstruktsiooni toele vastab kinemaatiliselt kas 1, 2 või 3 toevarrast.

Liikuv liigendtugi võimaldab pööret ja ühes sihis siiret. Tundmatuks on ainult toereaktsiooni suurus. Joonisel 1.4, *a* kujutatud liikuv tugi koosneb kahest plaadist ja nende vahel asuvast silindrilisest rullist. Suurema toereaktsiooni puhul konstrueeritakse tugi balanssiirtoena (joon. 1.4, *b*). Niisugused toed võimaldavad pööret ja paralleelselt plaatidega ka siiret.

Arvutusskeemis kujutatakse neid tugesid ühe vardana, mille mõlemas otsas on liigend (joon. 1.4, *c*). Reaktsiooni sihiks on varda siht.

Paigalseisev liigendtugi võimaldab pööret ümber liikumatu telje (joon. 1.4, *d*). Niisuguse toe reaktsioonil on kaks tundmatut komponenti: vertikaalne A_y ja horisontaalne A_x , ehk teisiti öeldult suurus ja siht. Arvutusskeemis kujutatakse sellist tuge kahe vardaga, mille ühist liigendit a läbib toereaktsioon. Tundmatuteks toereaktsioonikomponentideks on nendes varrastes tekkivad jõud (A_x, A_y). Niisuguseks võib lugeda ka joonisel 1.4, *e*



Joon 1.4

esitatud tuge, kui hõõrdumine ülemise nõgusa sfääri ja alumise kumera sfääri vahel on väike.

Liikuv kahe rulliga tugi võimaldab siiret ühes sihis. Tugi koosneb kahest plaatide vahel asuvast rullist (joon. 1.4, *g*). Tundmatuteks on toereaktsiooni suurus ja

ekstsentrilisus e . Arvutuskeemis kujutatakse niisugust tuge kahe paralleelse ja võrdse pikkusega vardaga (joon. 1.4, h).

Jäik tugi ei võimalda siiret ega pööret. Niisugust tuge kujutab näiteks järgalt kinnitatud metallposti jalg (joon. 1.4, i). Toereaktsioonil on kolm tundmatut: suurus, siht ja rakenduspunkt. Toereaktsioon võib olla esitatud ka kahe jõukomponendi ja momendiga. Arvutuskeemis kujutatakse niisugust tuge kas kolme vardaga (joon. 1.4, k) või nagu näidatud joonisel 1.4, l .

1.7. Sisejõud

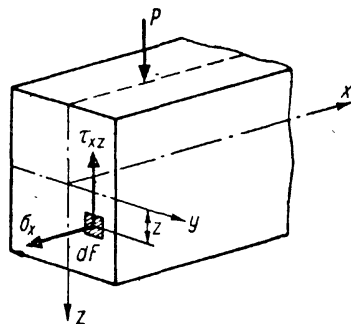
Lihtsaim ehituskonstruksioon on mõlemast otsast vabalt toetatud varras. Vaadeldavas ristlõikes kujutatakse täisnurkne koordinaatide süsteem algpunktiga ristlõike raskuskeskmes. Koordinaattelg x ühtib varda telgjoonega ja koordinaatteljed y, z ristlõike peattelgedega, järelikult

$$\int_F y dF = 0, \quad \int_F z dF = 0, \quad \int_F yz dF = 0 \quad (1.1)$$

milles F on varda ristlõikepindala.

Järgnevalt vaadeldakse tasand-varraskonstruksioone, mille varraste ristlõigetel on vähemalt üks sümmeetria-telg, ja eeldatakse, et välisjõud mõjuvad sümmeetria-tasandis xz (joon. 1.5, z -telg).

Sisejõudude arvutamisel kasutatakse üldist võtet: lõigatakse varras vaadeldavas ristlõikes tinglikult läbi ja jäetakse ära varda üks osa koos temale mõjuvate jõu-



Joon. 1.5

dudega. Ärajäetud vardaosa mõju allesjäänud osale asendatakse läbilõigatud ristlõikes elementaarjõududega $\sigma_x dF$ ja $\tau_{xz} dF$, mis on jaotatud pidevalt üle ristlõike pinna. Nende elementaarjõudude $\sigma_x dF$ ja $\tau_{xz} dF$ positiivne suund määratakse ristlõike normaali ja koordinaattelgedega x, z suundadega: kui vaadeldava ristlõike normaali suund ühtib x -telje positiivse suunaga, siis elementaarjõudude $\sigma_x dF$ ja $\tau_{xz} dF$ positiivne suund ühtib vastavalt telje x või z positiivse suunaga ning vastupidi — kui vaadeldava ristlõike normaali suund ühtib telje x negatiivse suunaga, siis ka elementaarjõudude $\sigma_x dF$ ja $\tau_{xz} dF$ positiivne suund ühtib vastavalt telje x või z negatiivse suunaga (joon. 1.5).

Elementaarjõudude $\sigma_x dF$ resultanti ristlõikepinna nimetatakse pikijõuks

$$N_x = \int_F \sigma_x dF \quad (1.2)$$

Elementaarsete pikijõudude $\sigma_x dF$ momentide summat ristlõike nulljoone (y -telje) suhtes nimetatakse paindemomentiks

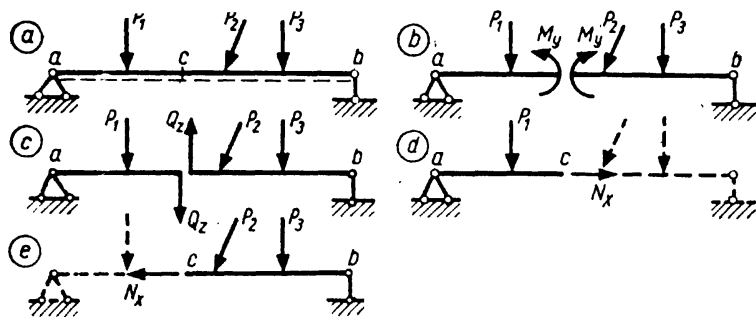
$$M_y = \int_F \sigma_x z dF. \quad (1.3)$$

Elementaarsete nihkejõudude $\tau_{xz} dF$ resultanti ristlõikes nimetatakse põikjõuks

$$Q_z = \int_F \tau_{xz} dF. \quad (1.4)$$

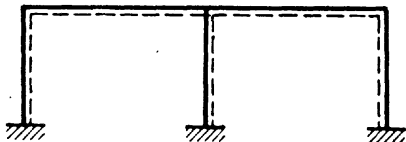
Paindemoment, põik- ja pikijõud on arvutatavad ka välisjõudude kaudu. **Paindemoment on arvuliselt võrdne ühel pool vaadeldavat ristlõiget konstruktsiooni osale mõjuvate välisjõudude, kaasa arvatud toereaktsioonid ja ärajäetud sidemeid asendavad sisejõud, momentide algebralise summaga ristlõike nulljoone suhtes. Põikjõud on arvuliselt võrdne ühel pool lõiget konstruktsiooni osale mõjuvate jõudude projektsioonide algebralise summaga varda teljega risti olevale teljele. Pikijõud on arvuliselt võrdne ühel pool lõiget konstruktsiooni osale mõjuvate jõudude projektsioonide algebralise summaga varda teljele.**

Sisejõudude M, Q, N positiivsed suunad tala lõikes c on näidatud joonisel 1.6. Paindemoment on positiivne, kui tala alumine pool (joonisel punktiiriga) on tõm-



Joon. 1.6

matud, s. t. varras on painutatud kumerusega alla (joon. 1.6, b); negatiivse paindemomendi puhul on tõmmatud tala ülemised kiud ja surutud alumised kiud. Põikjõud on positiivne, kui ta püüab vardaosu pöörata päripäeva (joon. 1.6, c). Positiivne pikijõud on tõmbejõud (joon. 1.6, d ja e).



Joon. 1.7

Paljudest varrastest koosneva raami puhul märgitakse varda üks pool punktiirjoonega (joon. 1.7). Horisontaalsetel varrastel märgitakse alumine pool. Äärmistel postidel (vertikaalsed vardad) märgitakse sisemine pool ja teistel vahepealsetel postidel parem pool. Paindemoment on positiivne, kui varda märgitud pool on tõmmatud, ja negatiivne, kui märgitud pool on surutud.

STAATIKAGA MÄÄRATAVAD VARRAS-KONSTRUKTSIOONID

2. TOEREAKTSIOONIDE JA SISEJÕUDUDE ARVUTUS TASAKAALUTINGIMUSTE ABIL

2.1. Staatikaga määratav arvutuskeem

Käsitletavate konstruktsioonide varrastel on ühine sümmeetriatasand ja eeldatakse, et koormus mõjub selles tasandis. Varraskonstruktsiooni arvutuskeemi elemendid on üksteisega ühendatud liigenditega ja aluse või toepinna külge kinnitatud tugivarrastega. Kahte elementi ühendavat liigendit nimetatakse lihtliigendiks. Liigendis on paindemoment null ja selles lõikes saab esineda ainult põikjõud ja pikijõud. Kui liigend ühendab m elementi, siis selle liigendi geomeetrilisel teljel on $m-1$ lihtliigendit.

Olgu arvutuskeemi toesidemete arv t ja üldine lihtliigendite arv l . Arvutuskeemi elemente ühendavates liigendites tekkivate tundmatute sisejõudude ja toesidemete tekkivate tundmatute toereaktsioonide arv on $2l+t$. Tasandil saab iga elemendi kohta koostada kolm tasakaalutingimust. Kuna käsitletakse staatikaga määratavate konstruktsioonide arvutust, siis arvutuskeemi iga element peab olema staatikaga määratav, s. t. arvutuskeemis ei tohi olla elementi, mis moodustab suletud kontuuri. Kui staatikaga määratavate kujundite arv on k , siis on üldine tasakaalutingimuste arv $3k$.

Varraskonstruktsioon on staatikaga määratav, kui suvalise koormuse mõjumisel kõik toereaktsioonid ja sisejõud on arvutatavad tasakaalutingimuste abil.

Toereaktsioonid ja sisejõud on staatikaga määratavad, kui tasakaaluvõrrandite arv võrdub tundmatute arvuga:

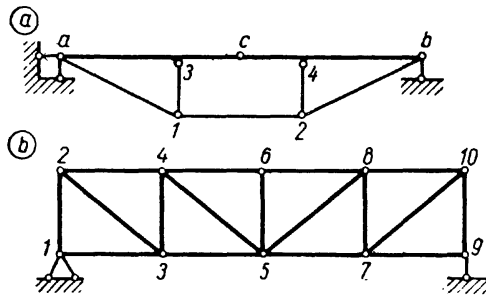
$$3k = 2l + t \quad (2.1)$$

Sõrestik on konstruktsioon, mille arvutuskeemis on vardad ühendatud üksteisega ainult varraste otstes

asuvate liigenditega. Tasandsõrestiku iga sõlme kohta saab koostada kaks tasakaaluvõrrandit. Tundmatuteks on varraste pikijõud ja toesidemetes tekkivad reaktsioonid. Sõrestik on staatikaga määratav, kui tasakaaluvõrrandite ja tundmatute arv on võrdne:

$$2s = v + t \quad (2.2)$$

milles s on sõlmede, v — varraste ja t — toesidemete arv.



Joon. 2.1

Näide 2.1. Kontrollida joonisel 2.1, a kujutatud spregeltala staatikaga määratavust.

Elementide arv $k=7$, lihtliigendite arv $l=9$ ja toesidemete arv $t=3$. Tingimus (2.1): $3 \cdot 7 = 2 \cdot 9 + 3$ on rahuldatud. Joonisel 2.1, a kujutatud spregeltala on staatikaga määratav.

Näide 2.2. Kontrollida joonisel 2.1, b esitatud sõrestiku staatikaga määratavust.

Sõrestiku sõlmede arv $s=10$, varraste arv $v=17$ ja toesidemete arv $t=3$. Tingimus (2.2): $2 \cdot 10 = 17 + 3$ on rahuldatud.

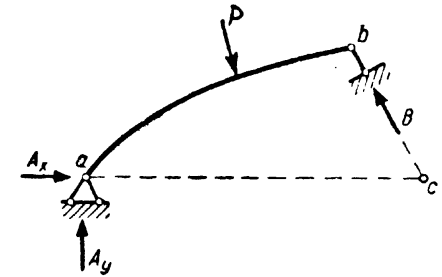
2.2. Toereaktsioonide arvutus

Staatikaga määratava tasandkonstruktsiooni iga elemendi kohta, mis on temale rakendatud jõudude mõjul tasakaalus, saab kirjutada tundmatute jõudude leidmiseks kolm tasakaalutingimust:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma M = 0 \quad (2.3)$$

Tingimuste (2.3) asemel võib kirjutada kaks momentide ja ühe projektsioonide võrrandi:

$$\Sigma M_a = 0, \quad \Sigma M_b = 0, \quad \Sigma U = 0 \quad (2.4)$$



Joon. 2.2

kusjuures telg U ei tohi olla risti punkte a ja b läbiva sirgega, või kolm momentide võrrandit:

$$\Sigma M_a = 0, \quad \Sigma M_b = 0, \quad \Sigma M_c = 0 \quad (2.5)$$

Otstarbekohane on võtta punktid a , b ja c tundmatute jõudude suhtel (joon. 2.2).

Tasakaalutingimuste alusel koostatakse lineaarne võrrandisüsteem $n=3k$ võrrandiga:

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1i}X_i + \dots + a_{1n}X_n + C_1 &= 0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2i}X_i + \dots + a_{2n}X_n + C_2 &= 0 \\ \dots & \dots \\ a_{ji}X_1 + a_{j2}X_2 + \dots + a_{ji}X_i + \dots + a_{jn}X_n + C_j &= 0 \quad (2.6) \\ \dots & \dots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots + a_{ni}X_i + \dots + a_{nn}X_n + C_n &= 0 \end{aligned}$$

milles kordajad a_{ji} on kas tundmatute jõudude X_i õlad momendipunktide suhtes või jõudude ja telgede vaheliste nurkade koosinused (olenevalt sellest, kas võrrand on koostatud vastavalt momentide või projektsioonide tasakaalu tingimusele). Võrrandisüsteemi vabaliikmed C_j on tuntud välisjõudude momentide või projektsioonide summad. Vabaliikmed C_j on proportsionaalsed mõjuva koormusega ja on nullid, kui konstruktsioon on koormamata.

Võrrandisüsteemi (2.6) lahend leitakse valemiga

$$X_i = D_i / D \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.7)$$

Murru (2.7) nimetaja D on võrrandisüsteemi tundmatute ees olevatest kordajatest moodustatud determinant:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

ja lugeja determinant D_i erineb nimetaja determinandist sellega, et veeru i asemel on vabaliikmete veerg vastupidise märgiga.

Võrrandisüsteemi (2.6) lahend on üheselt määratav, kui determinant (2.8) ei võrdu nulliga:

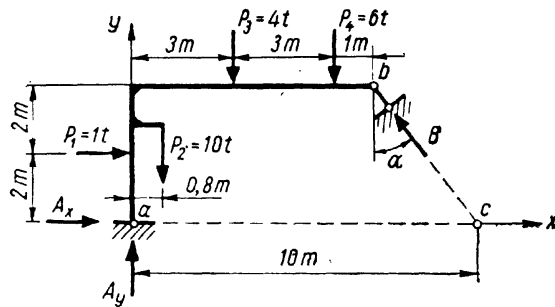
$$D \neq 0 \quad (2.9)$$

Suvalise koormuse mõjumisel on reaktsioonid ja jõud elementide vahel (liigendites) lõplikud ja staatika tasakaalutingimustega üheselt määratavad, kui tingimused (2.1) ja (2.9) on täidetud ($3k=2l+t$, $D \neq 0$). Kui tingimus (2.1) on rahuldatud ($3k=2l+t$), kuid murru (2.7) nimetaja determinant $D=0$, siis tundmatud ei ole kas üheselt määratavad või lõplikud ning arvutuskeem on staatikaga määratav. Niisugust arvutuskeemi nimetatakse hetkmuutuvasks. Avaldisest (2.7) järeldub, et lõplik koormus võib põhjustada hetkmuutuvas konstruktsioonis teoreetiliselt lõpmata suuri, praktiliselt aga väga suuri sisejõude ja reaktsioone.

Ülesande lahendamine on tavaliselt lihtsam, kui algul leitakse toereaktsioonid ja järgnevalt arvutatakse sisejõud.

Näide 2.3. Arvutada raami (joon. 2.3) toereaktsioonid.

Liikuv tugi b võtab reaktsiooni vastu toepinnaga risti, s.t. toevarda b sihis. Liikumatu toe a reaktsiooni A (komponendid A_x ja A_y) siht ei ole teada.



Joon. 2.3

Tasakaalutingimuste (2.3) järgi koostatud võrrandid

$$\begin{aligned} \Sigma X=0; & \quad A_x - B \sin \alpha + P_1 = 0 \\ \Sigma Y=0; & \quad A_y + B \cos \alpha - P_2 - P_3 - P_4 = 0 \\ \Sigma M_a=0; & \quad -B \cdot 10 \cos \alpha + P_1 \cdot 2 + P_2 \cdot 0,8 + P_3 \cdot 3 + P_4 \cdot 6 = 0 \end{aligned} \quad (a)$$

kui nendesse viia jõudude ja trigonomeetriliste funktsioonide arvused ($\sin \alpha = 0,6$ ja $\cos \alpha = 0,8$), on järgmised:

$$\begin{aligned} A_x - 0,6B + 1 &= 0 \\ A_y + 0,8B - 20 &= 0 \\ -8B + 58 &= 0 \end{aligned} \quad (b)$$

Võrrandisüsteemi (b) lahend on:

$$A_x = 3,35 \text{ t}; \quad A_y = 14,20 \text{ t}; \quad B = 7,25 \text{ t} \quad (c)$$

Tundmatute positiivsed väärtused osutuvad, et reaktsioonid on joonisel 2.3 märgitud suundadega. Võrrandisüsteemi (b) determinandi

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -0,6 \\ 0 & 1 & 0,8 \\ 0 & 0 & -8,0 \end{vmatrix}$$

avamisel saadakse $D = -8$. Kuna determinant $D \neq 0$, siis arvutuskeem on geomeetriliselt muutumatu ja leitud lahend (c) ühene.

Võrrandite koostamisel tasakaalutingimuste (2.5) järgi saadakse kolm võrrandit, milles igas on ainult üks tundmatu:

$$\begin{aligned} \Sigma M_a=0; & \quad -B \cdot 10 \cos \alpha + P_1 \cdot 2 + P_2 \cdot 0,8 + P_3 \cdot 3 + P_4 \cdot 6 = 0 \\ \Sigma M_b=0; & \quad A_y \cdot 10 + P_1 \cdot 2 - P_2 \cdot 9,2 - P_3 \cdot 7 - P_4 \cdot 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\Sigma M_d=0; \quad -A_x \cdot 13 \frac{1}{3} - P_1 \cdot 11 \frac{1}{3} + P_2 \cdot 0,8 + P_3 \cdot 3 + P_4 \cdot 6 = 0$$

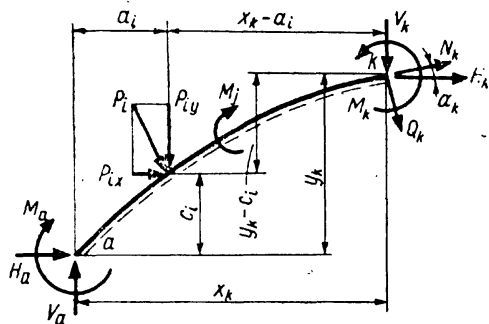
ehk

$$-8B + 58 = 0; \quad 10A_y - 142 = 0; \quad -13 \frac{1}{3} A_x + 44 \frac{2}{3} = 0$$

mildest $A_x = 3,35 \text{ t}$; $A_y = 14,20 \text{ t}$; $B = 7,25 \text{ t}$. Kolmas võrrand on koostatud toereaktsiooni B ja telje y sihtide lõikepunkti d suhtes.

2.3. Sisejõudude arvutus

Olgu varras lõigete a ja k vahel koormatud jõududega $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots$ ja momentidega $M_1, M_2, \dots, M_j, \dots$. Varda algristlõikes mõjuvad jõud V_a, H_a, M_a (joon. 2.4) on kas toereaktsioonid või varrast eelneva osaga ühendavad jõud ja nad leitakse tasakaalutingimustest. Jaotatud koormust ei vaadelda, kuna suvalises lõikes sisejõudude arvutamisel ühel pool seda lõiget mõjuv jaotatud koormus asendatakse resultantjõuga. Suvalise sihiga jõud P_i lahutatakse horisontaalseks ja vertikaalseks komponendiks P_{ix}, P_{iy} . Sisejõudude arvutamisel lõikes k on ots-



Joon. 2.4

tarbekohane leida selles lõikes esmalt sisejõudude peavektori horisontaal- ja vertikaalkomponent

$$H_k = -H_a - \sum_i P_{ix}; \quad V_k = V_a - \sum_i P_{iy} \quad (2.10)$$

ning seejärel arvutada sisejõud valemitega

$$M_k = M_a + V_a x_k - H_v y_k + \sum_j M_j - \sum_i P_{iy} (x_k - a_i) - \sum_i P_{ix} (y_k - c_i) \quad (2.11)$$

$$N_k = H_k \cos \alpha_k - V_k \sin \alpha_k \quad (2.12)$$

$$Q_k = H_k \sin \alpha_k + V_k \cos \alpha_k \quad (2.13)$$

2.4. Sisejõudude epüürid

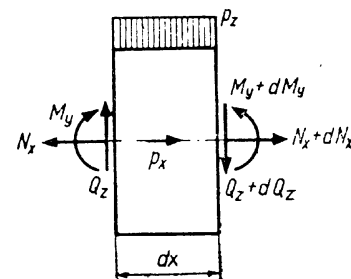
Painutatud varraste dimensioonimisel vajalike suurimate normaal- ja tangentsiaalpingete leidmiseks on tarvis teada suurimat paindemomenti ja suurimat põikjõudu ning lõikeid, milles nad tekivad. Nende nn. ohtlike lõigete leidmine on lihtsam, kui paindemomendi ja põikjõu suurused varda ulatusel on kujutatud graafiliselt. Paindemomendi M ja põikjõu Q suurused esitatakse graafiliselt valitud mõõtkavas ordinaatide kujul varda telje vastavate lõigete kohal. Neid graafikuid nimetatakse paindemomendi ja põikjõu epüürideks.

Paindemomendi epüür kujutatakse varda tõmmatud poolele. Positiivne paindemoment kantakse varda katkendjoonega märgitud poolele ja negatiivne paindemoment vastaspoolele.

Epüüride ordinaadid arvutatakse analüütiliselt, esitades paindemomendi M ja põikjõu Q avaldised piki

varda telje ristlõike asukoha abstsissi x funktsioonina. Epüüri ordinaatide arvutamisel jaotatakse varras osadeks nii, et ristlõiked, milles mõjuvad koondatud jõud või momendid, on osade vahekohtadeks. Osa ulatusel koormus kas puudub või mõjub jaotatud koormus, mis on väljendatud abstsissi x pideva funktsioonina. Varda elementaarse osa (joon. 2.5) tasakaalu tingimustest tulevad sisejõudude seosed

$$\begin{aligned} \frac{dM_y}{dx} &= Q_z \\ \frac{d^2M_y}{dx^2} &= \frac{dQ_z}{dx} = -p_z \\ \frac{dN_x}{dx} &= -p_x \end{aligned} \quad (2.14)$$



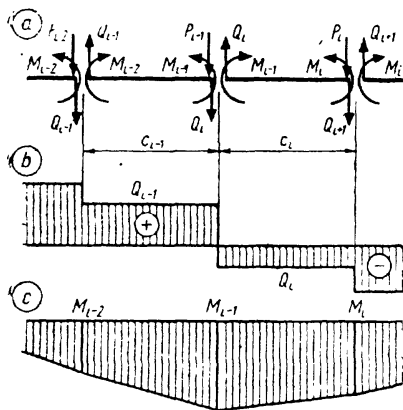
Joon. 2.5

Esimest nendest seostest nimetatakse *Zuravski* teoreemiks ja sellest on näha, et põikjõud on paindemomendi tuletis. Teoreemi geomeetrisest tõlgendusest tuleneb, et põikjõu epüüri ordinaadid on proportsionaalsed paindemomendi epüüri puutuja ja nulljoone vahelise nurga tangensiga. Kahest viimasest seosest järeldeb, et vardale mõjuva jaotatud koormuse komponendid varda telje sihiga sellega risti on proportsionaalsed pikijõu ja põikjõu epüüri puutuja ja nulljoone vahelise nurga tangensiga, kuid vastupidise märgiga. Seosed (2.14) võimaldavad väga kergelt kontrollida epüüride õigsust.

Vertikaalsete koondatud jõududega P_i koormatud horisontaalne varras jaotatakse osadeks niimoodi, et koondatud jõud on rakendatud osa parempoolsel otsal (joon. 2.6, a). Põikjõud on ühe osa pikkusel konstantne ($dQ/dx = -p_z = 0$) ja paindemoment muutub lineaarselt ($dM/dx = Q_z = \text{konst.}$). Jõudude P_{i-2} ja P_{i-1} vahel oleva vardaosa tasakaalu tingimuse $\Sigma Y = 0$ põhjal koostatud võrrand on järgmine:

$$Q_{i-1} - Q_i - P_{i-1} = 0$$

millega avaldatakse põikjõudude vahe



Joon. 2.6

$$Q_i - Q_{i-1} = -P_{i-1} \quad (2.15)$$

või põikjõud P_{i-1} ja P_i vahel

$$Q_i = Q_{i-1} - P_{i-1} \quad (2.16)$$

Jõudude P_{i-1} ja P_i vahel oleva vardaosa tasakaalu tingimuse $\sum M_i = 0$ alusel koostatud võrrandist leitakse momentide vahe

$$M_i - M_{i-1} = Q_i c_i \quad (2.17)$$

või moment lõikes i

$$M_i = M_{i-1} + Q_i c_i \quad (2.18)$$

Kui $Q > 0$ (joon. 2.6, b: Q_{i-1}), siis moment suureneb paremale poole (joon. 2.6, c: M_{i-2} ja M_{i-1} vahel); kui $Q < 0$ (joon. 2.6, b: Q_i), siis moment väheneb (joon. 2.6, c: M_{i-1} ja M_i vahel); $Q = 0$ puhul on moment konstantne.

Kui varras on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega, siis muutub põikjõud lineaarselt. Paindemoment muutub ruutparabooli järgi ja varda otstes ning lõigetes, kus põikjõud on null, on paindemoment ekstremaalne.

Varda tõmmatud poolele kantud paindemomendi epüüri puhul on epüüri kumerus jaotatud koormuse suunas. Koondatud jõudude puhul on paindemomendi epüüris jõu kohal murdepunkt teravikuga jõu suunas. Põikjõu epüüri ordinaadid muutuvad koondatud jõu kohal astmeliselt jõu suuruse võrra. Koondatud välismomendi M_j kohal muutuvad paindemomendi epüüri ordinaadid

astmeliselt momendi M_j võrra, kuna põikjõu epüüris ei ole mingit muutust.

Viltu asetsevate vardade suvalise sihiga mõjuv koondatud jõud P_i lahutatakse horisontaalseks ja vertikaalseks komponendiks P_{ix} , P_{iy} (joon. 2.7). Lõigete $i-2$, $i-1$ vahelise vardaosa (joon. 2.7) tasakaalu tingimuste alusel koostatud võrranditest avaldatakse jõust P_{i-1} paremal ja vasakul pool mõjuvate peavektorite horisontaalsete ja vertikaalsete komponentide vahed

$$H_i - H_{i-1} = -P_{i-1,x}; \quad V_i - V_{i-1} = -P_{i-1,y} \quad (2.19)$$

ja peavektori horisontaalne ja vertikaalne komponent lõigete $i-1$ ja i vahel

$$H_i = H_{i-1} - P_{i-1,x}; \quad V_i = V_{i-1} - P_{i-1,y} \quad (2.20)$$

Peavektori komponentide H_i , V_i abil on piki- ja põikjõudude avaldised järgmised:

$$N_i = H_i \cos \alpha_i - V_i \sin \alpha_i; \quad Q_i = H_i \sin \alpha_i + V_i \cos \alpha_i \quad (2.21)$$

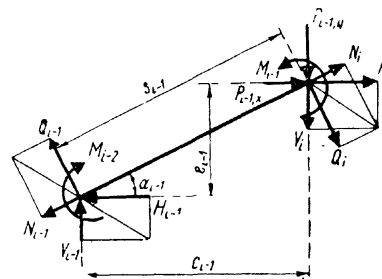
Jõu P_i kohal on põikjõu epüüris aste $-P_{ix} \sin \alpha_i - P_{iy} \cos \alpha_i$ ja pikijõu epüüris $-P_{ix} \cos \alpha_i + P_{iy} \sin \alpha_i$.

Lõigete $i-1$ ja i vahelise vardaosa (joon. 2.8) tasakaalu tingimuse $\sum M_i = 0$ alusel kirjutatud võrrandist $M_{i-1} - M_i + Q_i s_i = 0$ avaldatakse momentide vahe

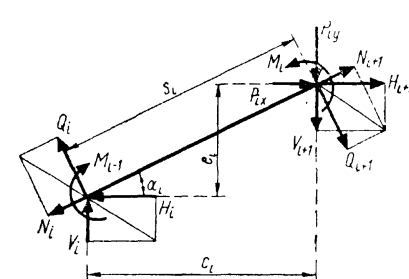
$$M_i - M_{i-1} = Q_i s_i = V_i c_i + H_i e_i \quad (2.22)$$

või moment lõikes i

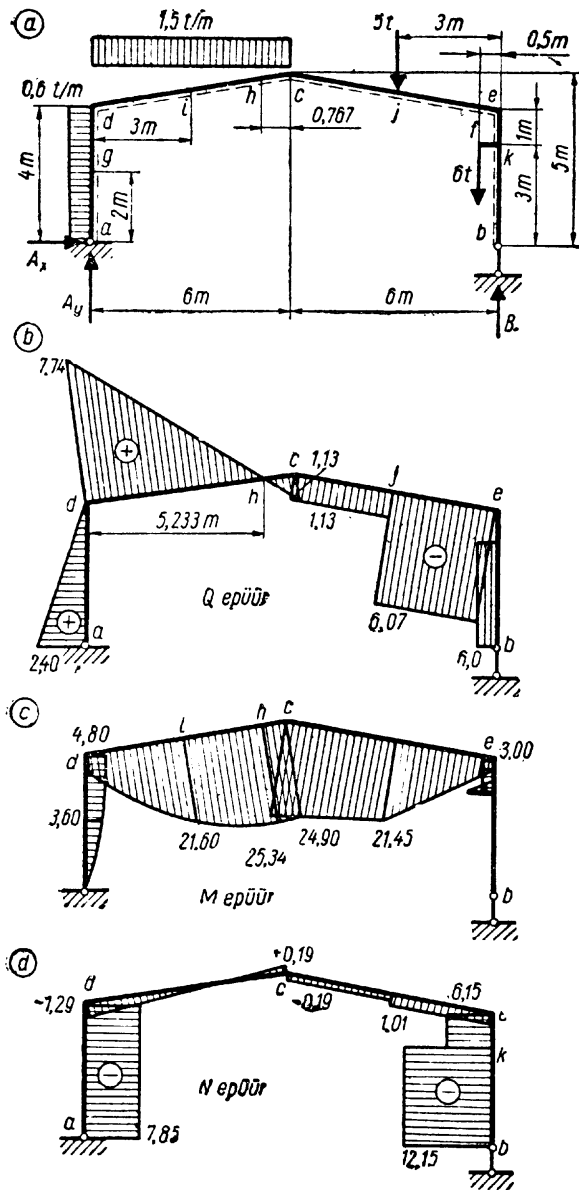
$$M_i = M_{i-1} + Q_i s_i = M_{i-1} + V_i c_i + H_i e_i \quad (2.23)$$



Joon. 2.7



Joon. 2.8



Joon. 2.9

Näide 2.4. Arvutada paindemomendi, põik- ja pikijõu epüüride ordinaadid joonisel 2.9, a esitatud arvutuskeemi jaoks.

Tasakaalutingimustest leitakse toereaktsioonid:

$$\begin{aligned} \Sigma X=0; & A_x+4\cdot 0,6=0; & A_x & =-2,4 \text{ t} \\ \Sigma M_b=0; & 12A_y+4\cdot 0,6\cdot 2-6\cdot 1,5\cdot 9-5\cdot 3-6\cdot 0,5=0; & A_y & =7,85 \text{ t} \\ \Sigma M_a=0; & -12B+4\cdot 0,6\cdot 2+6\cdot 1,5\cdot 3+5\cdot 9+6\cdot 11,5+0; & B & =12,15 \text{ t} \end{aligned}$$

Vertikaalseid toereaktsioone kontrollitakse tasakaalutingimusega $\Sigma Y=0$

$$7,85+12,15-6\cdot 1,5-5-6=20,0-20,0=0$$

Sisejõudude M , Q , N epüüridel arvutatakse nende ise-loomustavad ordinaadid. Sisejõu tähise M , Q , N indeksiteks on kaks tähte, kaks tähte sidekriipsuga või üks täht. Kahe tähe puhul märgib esimene varda otsristlõiget, kus leitakse sisejõudu, ja teine tähistab selle varda teist otsristlõiget. Kaks tähte sidekriipsuga näitavad, mis-suguste ristlõigete vahel on sisejõud konstantne. Üks täht tähistab varda suvalist ristlõiget.

Põikjõu epüüri ordinaatide arvutus:

$$\begin{aligned} Q_{ad} & =-A_x=2,4 \text{ t}; & Q_{da} & =2,4-4\cdot 0,6=0 \text{ t} \\ \text{tg } \alpha & =1/6; & \sin \alpha & =0,1644; & \cos \alpha & =0,9864 \\ Q_{dc} & =A_y \cos \alpha - (A_x+0,6\cdot 4) \sin \alpha =7,85\cdot 0,9864-0\cdot 0,1644=7,74 \text{ t} \\ Q_{cd} & =(7,85-6\cdot 1,5)0,9864=-1,13 \text{ t} \\ Q_{b-h} & =0; & Q_{h-e} & =0; & Q_{j-k} & =-6,0 \text{ t} \\ Q_{e-j} & =(6-12,15)0,9864=-6,07 \text{ t} \\ Q_{j-c} & =(6+5-12,15)0,9864=-1,13 \text{ t} \end{aligned}$$

Suurim paindemoment sõlmede d ja c vahel on lõikes, kus põikjõud võrdub nulliga:

$$Q_h = (7,85 - 1,5x_h)0,9864 = 0$$

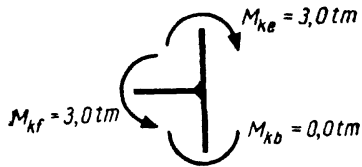
millest $x_h = 7,85/1,5 = 5,233 \text{ m}$

Põikjõu epüür on kujutatud joonisel 2.9, b.

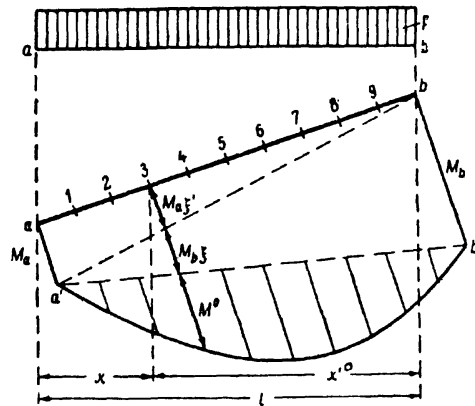
Paindemomendi epüüri (joon. 2.9, c) ordinaatide arvutus:

$$\begin{aligned} M_g & =2,4\cdot 2-0,6\cdot 2\cdot 1=3,60 \text{ tm}; \\ M_{da} & =2,4\cdot 4-0,6\cdot 4\cdot 2=4,80 \text{ tm} \\ M_i & =7,85\cdot 3+2,4\cdot 4,5-0,6\cdot 4\cdot 2,5-1,5\cdot 3\cdot 1,5=21,60 \text{ tm} \\ M_h & =12,15\cdot 6,767-6\cdot 6,267-5\cdot 3,767-1,5\cdot 0,767^2/2=25,34 \text{ tm} \\ M_c & =12,15\cdot 6-6\cdot 5,5-5\cdot 3=24,90 \text{ tm} \\ M_j & =12,15\cdot 3-6\cdot 2,5=21,45 \text{ tm} \\ M_e & =6\cdot 0,5=3,0 \text{ tm} \\ M_{ke} & =6\cdot 0,5=3,0 \text{ tm}; & M_{kf} & =-6\cdot 0,5=-3 \text{ tm}; & M_{kb} & =0 \end{aligned}$$

Nendes sõlmedes, kus on ühendatud järgalt rohkem kui kaks varrast (sõlm k), kontrollitakse momentide tasakaalu. Lõikega eraldatakse sõlm ülejäänud arvutuske-



Joon. 2.10



Joon. 2.11

mist ja rakendatakse sõlme varrastele mõjuvad momendid (joon. 2.10). Momendid rakendatakse sõlmele selliselt, et nool on suunatud varda surutud poolele. Tasakaalu puhul on momentide summa sõlmes null.

$$\text{Sõlm } k: 3,0 \pm 0,0 - 3,0 = 0$$

Koormatud varda vahepealsetes ristlõigetes on otsarbekohane arvutada paindemomente järgmiselt: ühendatakse sirge punktiirjoonega varda otsristlõigete (või koormuse ulatusel kahe suvalise ristlõike) paindemomendi ordinaadid (joon. 2.11). Sellele punktiirjoonele kantakse nende ristlõigete vahelise osa lihttala paindemomendi epiür M^0 .

Paindemoment varda suvalises lõikes (joon. 2.11 lõigete a ja b vahel) arvutatakse järgmiselt:

$$M = M_a(x'/l) + M_b(x/l) + M^0 \quad (2.24)$$

ehk

$$M = M_a\xi' + M_b\xi + M^0 \quad (2.25)$$

milles

$$\xi = x/l, \quad \xi' = x'/l = (1-x)/l, \quad \xi + \xi' = 1 \quad (2.26)$$

Kogu pikkusel ühtlaselt jaotatud koormusega varda a - b keskmise ristlõike paindemoment leitakse valemiga

$$M = (M_a + M_b)/2 + pl^2/8 \quad (2.27)$$

Valemiga (2.27) arvutatud paindemomendid

$$M_g = 4,8/2 + 0,6 \cdot 4^2/8 = 3,6 \text{ tm}$$

$$M_c = (4,8 + 24,9)/2 + 1,5 \cdot 6^2/8 = 21,60 \text{ tm}$$

ühtivad varem leitud ordinaatidega.

Pikijõu epiüri (joon. 2.9, d) ordinaatide arvutus:

$$N_{a-d} = -7,85 \text{ t} \quad N_{de} = -7,85 \cdot 0,1644 = -1,291 \text{ t}$$

$$N_{cd} = (1,5 \cdot 6 - 7,85)0,1644 = 0,189 \text{ t}; \quad N_{c-j} = -0,189 \text{ t}$$

$$N_{j-e} = (6 - 12,15)0,1644 = -1,011 \text{ t}; \quad N_{e-h} = -6,15 \text{ t}$$

$$N_{h-b} = -12,15 \text{ t}; \quad N_{h-j} = 0 \text{ t}$$

3. TOEREAKTSIOONIDE JA SISEJÕUDUDE ARVUTUS KINEMAATIKA TASAKAALUTINGIMUSTEGA

3.1. Arvutusskeemi vabadusaste

Paljud ehituskonstruksioonid moodustatakse varrastest ja geomeetriselt muutumatutest tasandkujunditest. Need kujundid ühendatakse üksteisega jäigalt või liigenditega. Konstruksioonide arvutamisel varraste jäigad ja liigendühendused, samuti ka toed idealiseeritakse ning arvutusskeemis asendatakse nad samaväärsete ühendus- ja toevarrastega. Arvutusskeemis on kolme, kahe või ühe vardaga (sidemega) ühendused, millel on vastavalt null, üks või kaks vabadusastet.

Keha vabadusaste on nende geomeetriseliste parameetrite arv, mis keha liikumisel muutuvad üksteisest sõltumatult. Käsitletakse ainult tasandilist liikumist. Liikuva punkti asukoht tasandil määratakse kahe koordinaadiga samal tasandil suvalise liikumatu koordinaatide süsteemi suhtes. Punkti vabadusaste tasandil on kaks. Kujundi asend tasandliikumisel määratakse kolme sõltumatu muu-

tujaga: kujundi mingi punkti a kahe koordinaadiga x ja y ning kahte suvalist punkti läbiva sirge ja ühe koordinaattelje vahelise nurgaga (joon. 3.1). Kujundi vabadusaste tasandliikumisel on kolm.

Joonisel 3.2 on punkt a ühendatud vardaga $o-a$ liikumatu punktiga o . Punkt a saab liikuda ringjoonel, mille võrrandiks on $y = \sqrt{r^2 - x^2}$; ringjoone võrrandis tähistab r varda $o-a$ pikkust ja on ringjoone raadiuseks. Kui abstsiss x on sõltumatu muutuja, siis ordinaat y on selle funktsioon ja punkti a asukoht on määratud ühe muutujaga x . Varras vähendab liikumisvabadust ühe võrra.

Viirutatud kujund $o-a$ (joon. 3.2) on kinnitatud liigendiga o paigalseisva kujundi külge. Kujundi $o-a$ asend tasandil on määratud ühe sõltumatu muutujaga: kujundi telje $o-a$ ja x -telje vahelise nurgaga α . Lihtliigend kõrvaldab kaks liikumisvabadust ja vastab kahele kinemaatilisele sidemele.

Arvutusskeemi vabadusaste leitakse järgmisel viisil: loendatakse arvutusskeemist kõigi liigendite ja toevarraste eemaldamisega saadud elementide arv k , lihtliigendite arv l ja toesidemete arv t ; kõigi elementide üldine vabadusaste on $3k$; lihtliigend vastab kahele ja toeside ühele kinemaatilisele sidemele ning üldine sidemete arv, mis vähendab elementide üldist vabadusastet, on $2l+t$. Arvutusskeemi vabadusaste leitakse valemiga

$$\omega = 3k - 2l - t \quad (3.1)$$

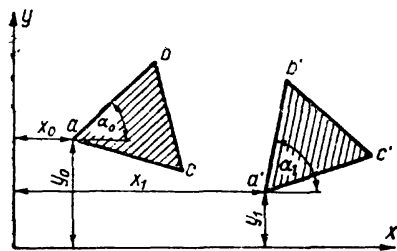
Kui $\omega > 0$, siis konstruksiooni osad võivad paigutada ilma elementide deformatsioonideta. Kui $\omega = 0$, siis on arvutusskeemil minimaalne arv sidemeid kujumuutumatuse ja liikumatuse kindlustamiseks. Tingimus $\omega = 0$ on arvutusskeemi kujumuutumatuse vajalik, kuid mitte küllaldane tingimus. Kui $\omega < 0$, siis on arvutusskeemil liigsidemeid. Liigsidemete arv n leitakse valemiga

$$n = -\omega = 2l + t - 3k \quad (3.2)$$

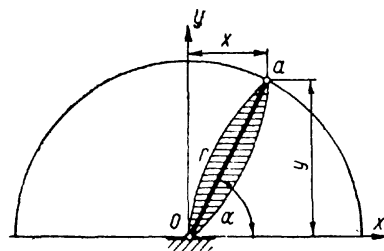
Geomeetriselise muutumatuse ja liikumatuse vajalik tingimus ($\omega = n = 0$) minimaalse arvu sidemete juures annab (valemid 3.1 ja 3.2) järgmise võrduse:

$$3k = 2l + t \quad (3.3)$$

milles kõigi elementide vabadusastmete summa võrdub kinemaatiliste sidemete koguarvuga.



Joon. 3.1



Joon. 3.2

Tingimus (3.3) ühtib staatikaga määratava arvutuskeemi vajaliku tingimusega (2.1), mille põhjal võib öelda, et **iga staatikaga määratav arvutuskeem on geomeetriliselt muutumatu ja vastupidi — iga liigsidemeta geomeetriliselt muutumatu arvutuskeem on staatikaga määratav.**

Ühe vabadusastmega ($w=1$) kinemaatilist ketti nimetatakse mehhanismiks. Mehhanismi punktide paigutiste trajektooriid on määratud. Mehhanismi nimetatakse sundliikumisega kinemaatiliseks ketiks.

Kujundiks nimetatakse arvutuskeemi osa, mis jääb alles, kui toesidemed eemaldatakse. Kujundi vabadusastet tähistatakse w^* ja leitakse valemiga

$$w^* = 3k - 2l - 3 \quad (3.4)$$

sest geomeetriliselt muutumatu kujund vajab tasandil kinnitamiseks kolme sidet.

Sõrestiku vabadusaste leitakse valemiga

$$w = 2s - v - t \quad (3.5)$$

ja sõrestiku kujundi vabadusaste

$$w^* = 2s - v - 3 \quad (3.6)$$

milles $2s$ on liigendsõlmede summaarne vabadusaste tasandil ning $v+t$ — sõrestiku sõlmede liikumisvabadust piiravate varraste ja toevarraste arv.

Minimaalse vajaliku arvu sidemetega geomeetriliselt kujumuutumatu ja liikumatu sõrestik rahuldab tingimust $n = -w = 0$, s. t.

$$2s = v + t \quad (3.7)$$

ning sõrestikkujund tingimust

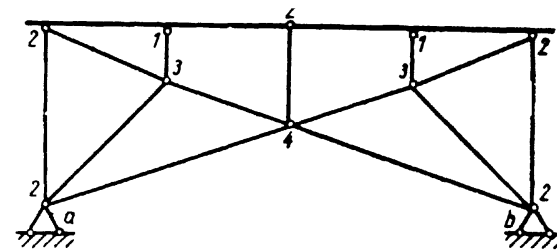
$$2s = v + 3 \quad (3.8)$$

Sõrestiku liigsidemete arv leitakse valemiga

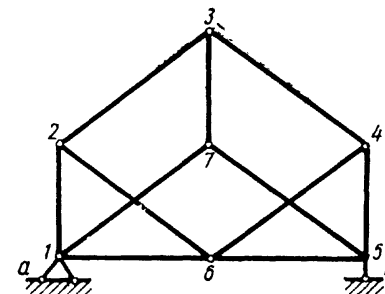
$$n = v + t - 2s \quad (3.9)$$

Näide 3.1. Leida joonistel 3.3 ja 3.4 kujutatud arvutuskeemide vabadusastmed.

Joonisel 3.3 esitatud arvutuskeemil on iga liigendi juurde märgitud lihtliigendite arv. Üldine lihtliigendite arv $l=22$, elementide arv $k=15$ ja toesidemete arv $t=4$. Vabadusaste valemiga (3.1) $w = 3 \cdot 15 - 2 \cdot 22 - 4 = -3$. Arvutuskeemil on kolm liigsidet.



Joon. 3.3



Joon. 3.4

Joonisel 3.4 esitatud sõrestiku vabadusaste valemiga (3.5) $w = 2 \cdot 7 - 11 - 3 = 0$. Sõrestikul on 7 sõlme, 11 varrast ja 3 toevarrast ning väikseim arv sidemeid kujumuutumatu kindlustamiseks.

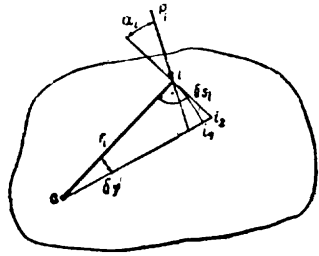
3.2. Võimalike paigutiste printsiip

Võimalikeks ehk virtuaalseteks paigutisteks nimetatakse kujundi väikesi paigutisi, mis on võimalikud vastavalt kinemaatilistele tingimustele. Konstruktsioonile rakendatud tasakaalus olevate jõudude töö konstruktsiooni elementide lõpmata väikestel võimalikel paigutistel võrdub nulliga:

$$T = \sum \bar{P}_i \bar{\delta s}_i = \sum P_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0 \quad (3.10)$$

Jõu P_i projektsioonide X_i , Y_i ja jõu rakenduspunkti i võimaliku siirde δs_i projektsioonide δx_i , δy_i kaudu avaldatuna on võimaliku töö võrrand (3.10) järgmine:

$$T = \sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i) = 0 \quad (3.11)$$



Joon. 3.5

Kujundi siirdel x -telje sihis on $\delta y_i = 0$ ja võrrandi (3.11) asemel võib kirjutada $\sum X_i \delta x_i = 0$. Jagades selle võrrandi siirdelga x_i , saadakse esimene tasakaalutingimus (2.3): $\sum X_i = 0$. Teine tasakaalutingimus $\sum Y_i = 0$ saadakse analoogiliselt, kui $\delta x_i = 0$.

Kujundil pöördel ümber punkti a $\delta\varphi$ võrra (joon. 3.5) teeb jõud P_i võimalikku tööd: $T = P_i \delta s_i \cos \alpha_i = P_i r_i \delta\varphi \cos \alpha_i$, milles r_i on jõu P_i rakenduspunkti kaugus punktist a . Kujundi pöördel liigub punkt i piki ringi kaart raadiusega r_i asukohta i_1 . Küllalt väikese paigutise puhul eemaldub kaar väga vähe puutujast ning paigutise $i-i_1$ asemel võib küllaldase täpsusega võtta kaarele punktis i tõmmatud puutujasihilise lõigu $i-i_2$. Jõu P_i moment punkti a suhtes on $M_{i,a} = P_i r_i \cos \alpha_i$ ning võimaliku töö võrrand on kujundi võimalikul pöördel $\delta\varphi$: $\sum M_{i,a} \delta\varphi = 0$. Jagades võrrandi pöördega $\delta\varphi$, saadakse kolmas tasakaalutingimus $\sum M_{i,a} = 0$.

Kui võimaliku töö võrrand (3.11) jagada võimaliku paigutise δs_i läbimiseks kulutatud ajaga, siis saadakse võimalike kiiruste võrrand

$$\frac{T}{\delta t} = \sum (X_i \dot{x}_i + Y_i \dot{y}_i) \quad (3.12)$$

milles $\dot{x} = dx/\delta t$, $\dot{y} = dy/\delta t$ on liikumise hetkkiirused. Kiirusi \dot{x} , \dot{y} võib vaadelda kui ajaühiku kestel läbitud teed ja sel juhul ei ole põhimõttelist erinevust võimalike paigutiste (3.11) ja võimalike kiiruste (3.12) printsiipide vahel.

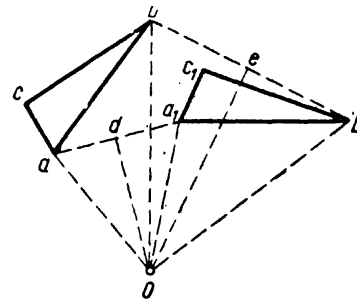
3.3. Pooluste plaan

Liikugu tasandkujund oma tasandis asukohast abc asukohta $a_1 b_1 c_1$ (joon. 3.6). Kui tõmmata sirgete $a-a_1$, $b-b_1$ keskpunktidest d ja e ($a-d=d-a_1$, $b-e=e-b_1$) neile sirgetele ristjooned kuni lõikumiseni punktis o , siis saadakse kaks ühtivat kolmnurka $\triangle aob \equiv \triangle a_1 o b_1$. Kujund abc on pöördega ümber punkti o liikunud asukohta $a_1 b_1 c_1$. Kui liikumise kestus on lõpmatult lühike, siis lõplike kiiruste juures võib vaadelda sirgeid $a-a_1$, $b-b_1$, kui punktide a ja b hetkelise liikumise suundi ja kujundi liikumist igal aja- hetkel kui pöoret ümber punkti o . Seda punkti nimetatakse pöörde hetkeskesmeks või hetkpooluseks. Tasandkujundi liikumisel suvalisest punktist punkti liikumise trajektoorige tõmmatud normaal läbib hetkpoolust o . Joonisel 3.7 on kujutatud kolme punkti a , b , c kiirusvektorid v_a , v_b , v_c ja nendest punktidest kiirusvektoritele tõmmatud ristsirged. Kujundi hetkpooluse leidmiseks piisab kahe punkti kiiruse suunast. Kujundi hetkpoolus asetseb läbi kahe punkti nende punktide kiirusvektoritele tõmmatud ristsirgete lõikepunktis.

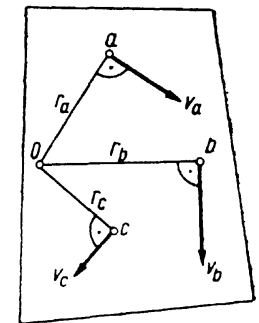
Kujundi suvalise punkti c kiirus v_c on kujundi nurkkiiruse ω ja pöörderaadiuse korrutis, kusjuures kiirusvektor v_c on risti punkti c ja hetkpooluse o ühendussirgega $c-o$.

Punktide kiirused on proportsionaalsed nende kaugustega hetkpoolusest:

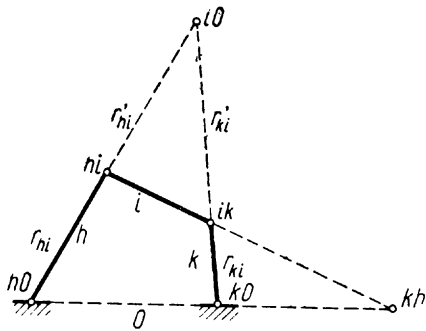
$$v_a = r_a \omega, \quad v_b = r_b \omega, \quad v_c = r_c \omega, \dots$$



Joon. 3.6



Joon. 3.7



Joon. 3.8

Kui on teada ühe punkti kiirus, näiteks punkti a kiirus, siis kujundi nurkkiirus $\omega = v_a/r_a$. Liikumise hetkeline nurkkiirus ω on positiivne päripäeva.

Kujundi i väikest paigutist teise kujundi k suhtes võib vaadelda kui nende kujundite vastastikust pöret ümber ühe reaalse või mõeldava liigendi. Seda liigendit nimetatakse nende kujundite vastastikuse liikumise hetkpooluseks või kõrvalpooluseks ik . Kujundite vastastikune nurkkiirus on $\omega_{ki} = \omega_k - \omega_i$. Hetkpooluseid, mille ümber kujundid i ja k pöörduvad, nimetatakse peapoolusteks ja tähistatakse iO ja kO (või o_i ja o_k). Mehhanismi pea- ja kõrvalpoolused kujundavad pooluste plaani. Kui on teada mehhanismi ühe kujundi i nurkkiirus ω_i või kahe kujundi i ja k vastastikuse liikumise kiirus ω_{ki} ning mehhanismi pooluste plaan, siis on mehhanismi kõigi teiste kujundite nurkkiirused üheselt määratud.

Kõige lihtsam mehhanism koosneb neljast omavahel liigenditega ühendatud kujundist (joon. 3.8). Kolm varrast h , i , k on liikuvad ja neljas kujund on liikumatu ning tähistatud O (null). Hetkpoolused hO , hi , ik , kO on teada, kuna nad ühtivad kujundeid ühendavate liigenditega. Varda i peapooluse ja varraste h ning k kõrvalpooluse hk asukohad on vaja leida. Vardad h ja k pöörduvad ümber peapooluste hO ja kO . Varda i peapooluse iO asukoha määramiseks on vaja leida varda i kahe punkti trajektoori normaalide lõikepunkt. Varraste h ja i vastastikuse liikumise pooluse hi trajektoor on mõlemal vardal ühine. Poolus hi liigub ringikaart mööda ümber peapooluse hO raadiusega r_{hi} . Raadius on ringjoonele normaaliks ja

seega hetkpoolus asub sirgel $hO-hi$. Samuti on varraste i ja k vastastikuse liikumise pooluse ik trajektoor mõlemal vardal ühine. Poolus ik liigub ringikaart mööda raadiusega r_{ki} ümber pooluse kO ja poolus iO asub ringjoone normaali, s.t. raadiuse $kO-ik'$ sihil. Seega varda i hetkpoolus asub varraste h ja k sihtide lõikepunktis.

Varraste h ja k vastastikuse liikumise hetkpooluse hk leidmisel eeldatakse, et varras h on liikumatu ja esialgu liikumatu kujund O liikuv; selle juures jääb varraste h ja k suhteline liikumine endiseks. Kasutades nüüd sama mõttekäiku kui pooluse iO leidmisel, võib veenduda, et pooluseks hk on pooluseid hi ja ik ning hO ja kO ühendavate sirgete pikenduste lõikepunkt. Mehhanismi kolme varda h , i ja k kõrvalpoolused hi , ik ning hk asuvad ühel sirgel.

3.4. Pööratud kiiruste plaan

Varda h (joon. 3.8) liikumisel nurkkiirusega ω_h on pooluse hi kiirus $v_{hi} = \omega_h r_{hi}$ ja varda i nurkkiirus $\omega_i = -v_{hi}/r'_{hi} = -\omega_h r_{hi}/r'_{hi}$. Peapoolused hO ja iO asuvad kõrvalpoolusest erinevatel pooltel ning seepärast on elementide h ja i nurkkiirused erinevate märkidega. Kui peapoolused asuvad ühel pool kõrvalpoolust, siis on kujundite nurkkiirused samade märkidega. Pooluse ik kiirus $v_{ik} = -\omega_i r'_{ki} = \omega_h r_{hi} r'_{ki}/r'_{hi}$ ja varda k nurkkiirus $\omega_k = v_{ik}/r_{ki} = \omega_h r_{hi} r'_{ki}/r'_{hi} r_{ki}$. Hetkpoolustega hO , iO , kO ja nurkkiirustega ω_h , ω_i , ω_k on mehhanismi (joon. 3.8) kiiruste plaan määratud.

Varrastest koosneva mehhanismi kiiruste plaan leitakse tavaliselt ilma pooluste plaanita. Kujundi abc (joon. 3.9) pöördel oma tasandis ümber hetkpooluse o nurkkiirusega ω on punktide kiirused proportsionaalsed nende kaugustega hetkpoolusest o :

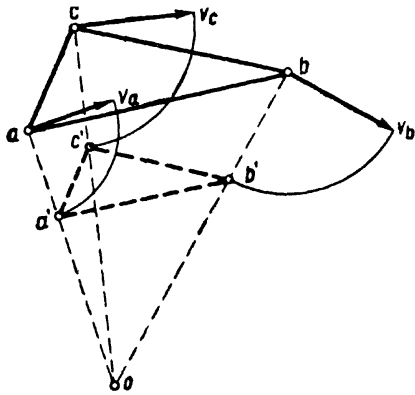
$$v_a = a \cdot \omega; \quad v_b = b \cdot \omega; \quad v_c = c \cdot \omega \quad (a)$$

millest

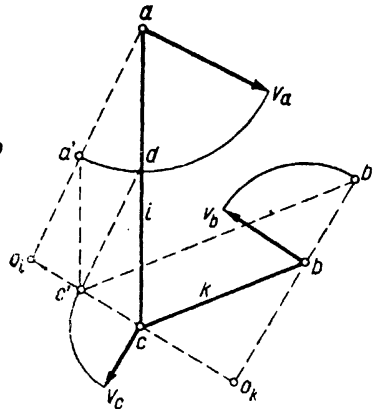
$$\omega = v_a/a = v_b/b = v_c/c \quad (b)$$

Joonisel 3.9 on kujundi punktide a , b ja c kiirusvektorid pööratud täisnurga võrra:

$$a-a' = v_a, \quad b-b' = v_b, \quad c-c' = v_c \quad (c)$$



Joon. 3.9



Joon. 3.10

Nurkkiiruse avaldisest (b) võrduste (c) abil võib kirjutada:

$$a-a'/a-o = b-b'/b-o = c-c'/c-o \quad (d)$$

millest järeldub, et

$$a'-b' \parallel a-b, \quad a'-c' \parallel a-c, \quad b'-c' \parallel b-c \quad (e)$$

Sirglõikused $a-a'$, $b-b'$, $c-c'$ nimetatakse punktide a , b , c pööratud kiirusteks. Punktide a , b , c pööratud kiiruste lõpp-punkte a' , b' , c' ühendavad sirged moodustavad liikuva kujundiga a , b , c sarnase ja sarnaselt asetseva kujundi. Poolus o on mõlema kujundi sarnasuspunktiks. Uut kujundit tähistatakse F' ja nimetatakse liikuva kujundi $F(a, b, c)$ mittepolaarseks pööratud kiiruste plaaniks. Punkte a' , b' , c' nimetatakse liikuva kujundi F punktide a , b , c kujutisteks mittepolaarses pööratud kiiruste plaanis. Mittepolaarse pööratud kiiruste plaani F' kahte kujutuspunkti ühendav sirge on paralleelne liikuva algkujundi F vastavaid punkte ühendava sirgega (avaldis e).

Pööratud kiirusvektorite kandmisel poolusesse o kujundavad nende otspunktid uue kujundi, mida nimetatakse polaarseks pööratud kiiruste plaaniks. Enamikul juhtudel kasutatakse mittepolaarset pööratud kiiruste plaani.

Varrasketi mittepolaarse pööratud kiiruste plaani moo-

dustamisel leitakse kahest vardast i ja k moodustatud nurga sõlmpunkti c kujutuspunkt c' varraste i ning k otspunktide a ja b teadaolevate kujutuspunktide a' , b' abil (joon. 3.10). Olgu teada punktide a ja b kujutuspunktide a' , b' mittepolaarses pööratud kiiruste plaanis ja vaja leida: 1) kujutuspunkt c' ; 2) peapoolused o_i , o_k ja 3) nurkkiirused ω_i , ω_k . Kujutuspunkti c' leidmiseks tõmmatakse punktide a' , b' paralleelsed sirged vastavalt sirgetele $a-c$ ja $b-c$. Sirgete paralleelsuse tingimuste (e) alusel on nende kahe sirge lõikepunkt punkti c kujutuspunktiks c' . Kujundi i peapooluseks o_i on kahe punkti a ja c pööratud kiiruste ($a-a'$, $c-c'$) sihtide lõikepunkt ning kujundil k -punktide b ja c pööratud kiiruste ($b-b'$, $c-c'$) sihtide lõikepunkt o_k .

Varraste i ja k nurkkiirused

$$\omega_i = a-a'/a-o_i, \quad \omega_k = b-b'/b-o_k \quad (f)$$

Kujundite i ja k nurkkiirused (f) arvutatakse tavaliselt ilma peapooluseid o_i , o_k leidmata. Kujutuspunktist c' paralleelselt pööratud kiirusega $a-a'$ tõmmatud sirge ($c'-d \parallel a'-a$) moodustab kaks sarnast kolmnurka: $\Delta a o_i c \sim \Delta d c' c$. Nende kolmnurkade sarnasuse põhjal võib kirjutada: $a-a'/a-o_i = d-c'/a-o_i = d-c/a-c = (a-c - a'-c')/a-c$. Viimast suhet kasutatakse kujundi i nurkkiiruse (f) arvutamiseks

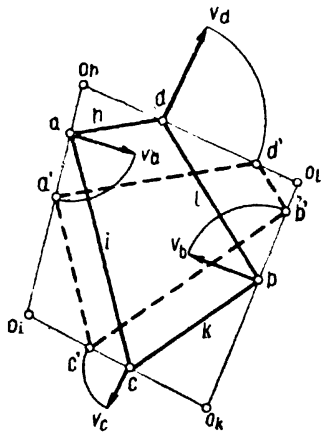
$$\omega_i = a-a'/a-o_i = (a-c - a'-c')/a-c \quad (g)$$

Analoogiliselt kujundi k nurkkiirus

$$\omega_k = (b-c - b'-c')/b-c = -(b'-c' - b-c)/b-c \quad (h)$$

Pööratud kiiruste plaani kujutuspunktide b' , c' vahekaugus on suurem kui kujundi esialgsete punktide b ja c vahekaugus ning kujundi k nurkkiirus on negatiivne.

Kui mehhanismi liikumisel mingi punkt k jääb paigale, siis kujutuspunkt k' ühtib mehhanismi punktiga k . Kui geomeetriliselt muutumatu kujundi punkti i kiirus on nii suur, et kujutuspunkt i' ühtib poolusega o , siis kõigi teiste punktide kujutuspunktid ühtivad poolusega o . Geomeetriliselt muutumatu kujundi translatoorsel liikumisel on kõigi punktide kujutuspunktid võrdsel kaugusel algkujundi vastavatest punktidest.



Joon. 3.11

Joonisel 3.11 on kujutatud geomeetriselt muutuva kujundi $a-d-b-c$ mittepolaarne pööratud kiiruste plaan $a'-d'-b'-c'$: ($a'-d' \parallel a-d$, $d'-b' \parallel d-b$, $b'-c' \parallel b-c$, $c'-a' \parallel c-a$). Varda i kahe punkti a ja c pööratud kiiruste $a-a'$, $c-c'$ sihtide lõikepunkt on varda i liikumise hetkpoolus o_i . Analoogiliselt on varraste h , k , l hetkpoolusteks o_h , o_k ja o_l . Algekujundiga mittesarnane pööratud kiiruste plaan $a'-d'-b'-c'$ näitab, et igal vardal on erinev poolus ja et liikumisel muutub üksikute varraste vastastikune asend nende pöörumise tõttu ümber erinevate pooluste. Kujund, mille pööratud kiiruste plaan ei ole algekujundiga sarnane, on geomeetriselt muutuv.

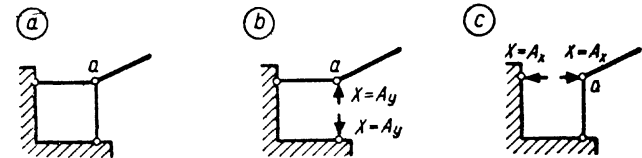
3.5. Võimalike paigutiste printsiibi rakendusi

Staatikaga määratavast ja geomeetriselt muutumatust arvutuskeemist eemaldatakse see side, milles taetakse leida reaktsiooni või sisejõudu; ja sideme mõju asendatakse toereaktsiooni või sisejõuga, mis mõjub nüüd kui välisjõud. Ühe sideme eemaldamisega muudetakse geomeetriselt muutumatu ja staatikaga määratav arvutuskeem mehanismiks.

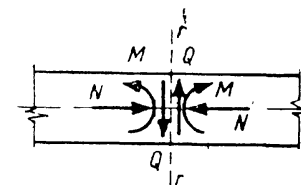
Liikumatu le liigendtoele vastavad sidemed on kujutatud joonisel 3.12, *a*. Toereaktsiooni A vertikaalse ja horisontaalse komponendi leidmiseks eemaldatakse vastavalt

vertikaalne ja horisontaalne varras ja selle mõju asendatakse kahe võrdse vastupidi suunatud jõuga $X=A_y$ ning $X=A_x$ (joon. 3.12, *b* ja *c*).

Sisejõudude M , Q , N leidmisel kinemaatika meetodiga on ristlõikele r (joon. 3.13) ekvivalentsed sidemed kujutatud joonistel 3.14, *a*; 3.15, *a* ja 3.16, *a*. Kolme sideme a , b , c asetus varda vasak- ja parempoolse osa vahel võib olla mitmesugune, kuid peab rahuldama geomeetriselt muutumatult ühendamise tingimust: varraste a , b , c sihid ei tohi olla paralleelsed ega lõikuda ühes punktis.

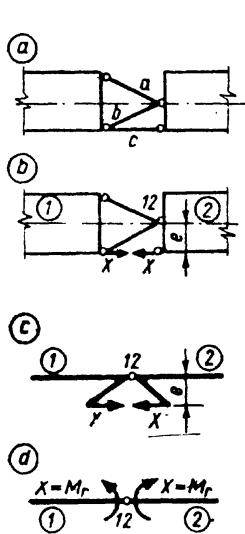


Joon. 3.12

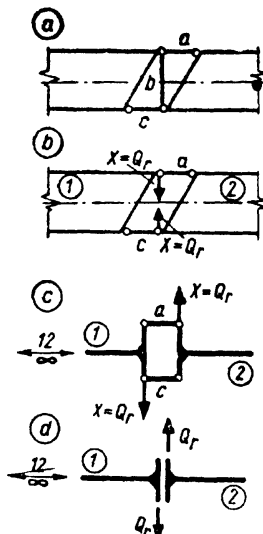


Joon. 3.13

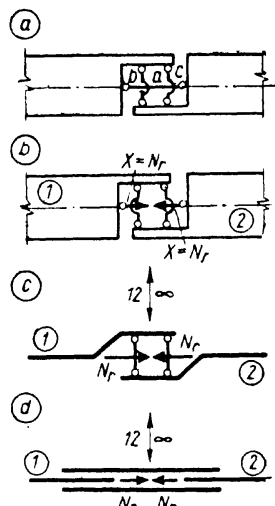
Paindemomendi M_r leidmisel eemaldatakse side c ja selle asemele rakendatakse kaks võrdset vastupidi mõjuvat jõudu (joon. 3.14, *b*). Vasakpoolne kujund 1 võib pööruda parempoolse kujundi 2 suhtes ümber pooluse 12 (joon. 3.14, *b*, *c*). Tundmatu jõu X moment varda teljel asuva pooluse 12 suhtes on $M_r=Xe$, milles e on pooluse 12 kaugus jõu X sihist. Kui võtta $e=1$, siis jõu X moment pooluse 12 kohta võrdub jõu suurusega $M_r=X$ (joon. 3.14, *d*).



Joon. 3.14



Joon. 3.15



Joon. 3.16

Põikjõu leidmisel joonisel 3.15, *a* näidatud ühendusvarraste asetuse puhul eemaldatakse varras *b* ja tema mõju asendatakse kahe võrdse ja vastupidi suunatud jõuga $X=Q_r$ (joon. 3.15, *b*). Allesjäänud ühendusvardad *a* ja *c* on varda teljega paralleelsed ja ühendatavate elementide 1 ning 2 vastastikuse liikumise hetkpoolus 12 asub ühendusvarraste sihis, s.t. varda telje sihil lõpmatuses (joon. 3.15, *c*, *d*). Mehhanismi võimalikus paigutusolukorras jäävad elementide 1 ja 2 teljed paralleelseteks.

Joonisel 3.16, *a* näidatud ühendusvarraste *a*, *b*, *c* asetuse puhul on pikijõud ristlõikes võrdne varda *a* sisejõuga ja pikijõu leidmisel eemaldatakse see side (joon. 3.16, *b*). Allesjäänud paralleelsed, varda telgjoonega risti olevad ühendusvardad *b* ja *c* võimaldavad elementidel 1 ning 2 üksteisele läheneda või eemalduda, kusjuures elementide telgjooned moodustavad sirge. Elementide 1 ja 2 vastastikuse liikumise hetkpoolus 12 asub kahe ühendusvarda (*b*, *c*) sihis, s.t. varda telgjoone ristsirgel lõpmatuses (joon. 3.16, *c*, *d*).

Koormuse ja kaksikjõu X_r mõjul tasakaalus oleva meh-

hanismi jaoks võimalike paigutiste printsiibi alusel koostatud võrrandist

$$X_r \delta r + \sum P_i \delta p_i = 0 \quad (3.13)$$

milles δr on kaksikjõu Q_r või N_r rakenduspunktide siirte projektsioonide summa jõudude X_r sihile või kaksikmomendi M_r ristlõigete, kus momendid on rakendatud, vastastikune pööre ja δp_i — jõu P_i rakenduspunkti siirde projektsioon jõu sihile, leitakse tundmatu

$$X_r = -\sum P_i \delta p_i / \delta r \quad (3.14)$$

Võimalikud paigutised δr ja δp_i leitakse mehhanismi pooluste või kiiruste plaanist. Juhul kui $\delta p_i \neq 0$ ja $\delta r = 0$, järeldub võrrandist (3.13), et arvutusskeemis võivad ka deformeermata elementide puhul esineda paigutised, kui reaktsioonile X_r vastav side ei ole eemaldatud. Nii-sugune arvutusskeem on hetkmuutuv.

Järgnevalt vaadeldakse võimalike tööde arvutamist pooluste plaaniga. Kuna mehhanismi paigutised on ühe suvalise parameetriga määratud, siis võetakse tavaliselt kaksikjõule X_r vastav paigutis võrdne miinus ühega: $\delta r = -1$

Kujundi *k* (joon. 3.17) pöördel ümber peapooluse $k0$ on jõu P_i rakenduspunkti siire v_i risti jõu rakenduspunkti kohavektoriga r_i :

$$v_i = \omega_k r_i \quad (a)$$

milles ω_k on kujundi *k* pööre. Jõu rakenduspunkti siirde projektsioon jõu sihile on:

$$\delta p_i = v_i \cos \varphi_i = \omega_k r_i \cos \varphi_i \quad (b)$$

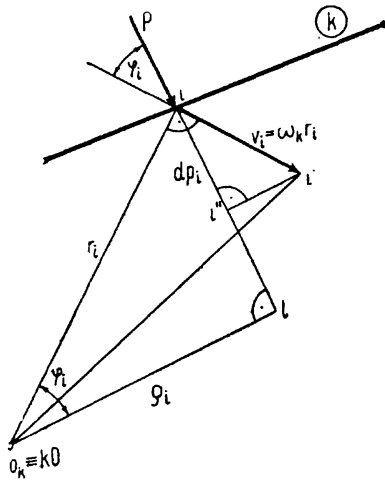
milles

$$Q_i = r_i \cos \varphi_i \quad (c)$$

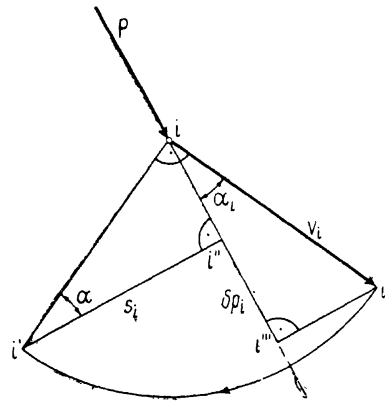
on jõu P_i õlg pooluse o_k suhtes. Jõu P_i tööd kujundi *k* pöördel ω_k võrra võib väljendada järgmiselt:

$$P_i \delta p_i = P_i \omega_k r_i \cos \varphi_i = P_i \omega_k Q_i = S_i \omega_k \quad (3.15)$$

milles $S_i = P_i Q_i$ on jõu P_i moment peapooluse $k0$ suhtes. Töö on positiivne, kui jõu staatiline moment pooluse suhtes on päripäeva. Asetades jõu P_i töö (3.15) valemisse



Joon. 3.17



Joon. 3.18

(3.14), saadakse n kujundiga mehhanismi toereaktsiooni või sisejõu arvutamiseks järgmine avaldis:

$$X_r = - \sum_{k=1}^n (\omega_k \sum_i S_i) / \delta r. \quad (3.16)$$

Kui valemis (3.16) võimalikud paigutised δ_r ja δp_i leitakse pööratud kiiruste plaaniga, siis kiiruste plaan peab rahuldama kinemaatilisi toetingimusi. Kui kiiruste plaani moodustamisel ei ole kinemaatilised toetingimused rahuldatud, siis arvutatakse tundmatu jõud x_r valemiga

$$X_r = - (\sum P_i \delta p_i + \sum R_c \delta c) / \delta r \quad (3.17)$$

milles $\sum R_c \delta c$ on toereaktsioonide töö.

Järgnevalt käsitletakse jõu P_i võimaliku töö $P_i \delta p_i$ arvutamist pööratud kiiruste plaaniga (joon. 3.18). Punkt i' on võimaliku siirde v_i lõpp-punkti i^{IV} kujutuspunktiks pööratud kiiruste plaanis ($i-i' = i-i^{IV}$). Joonisel 3.18 on kaks ühtivat kolmnurka: $\Delta i-i'-i'' = \Delta i^{IV}-i^{IV}-i'''$, kuna $i-i' = i-i^{IV}$, $\sphericalangle i-i' = \sphericalangle i^{IV}-i^{IV} = \alpha_i$ (risthaaradega nurgad) ja $\sphericalangle i-i'' = \sphericalangle i^{IV}-i''' = \pi/2$. Need kolmnurgad on kongruentsed. Jõu P rakenduspunkti i kujutuspunkti i' kaugus jõu sihst on võrdne jõu rakenduspunkti võimaliku siirde projektsiooniga jõu sihile: $i'-i'' = s_i = i-i''' = \delta p_i$. Jõu P_i töö on võrdne jõu momendiga rakenduspunkti pööratud kiiruste plaani

kujutuspunkti suhtes ja avaldise (3.14) asemel võib kirjutada

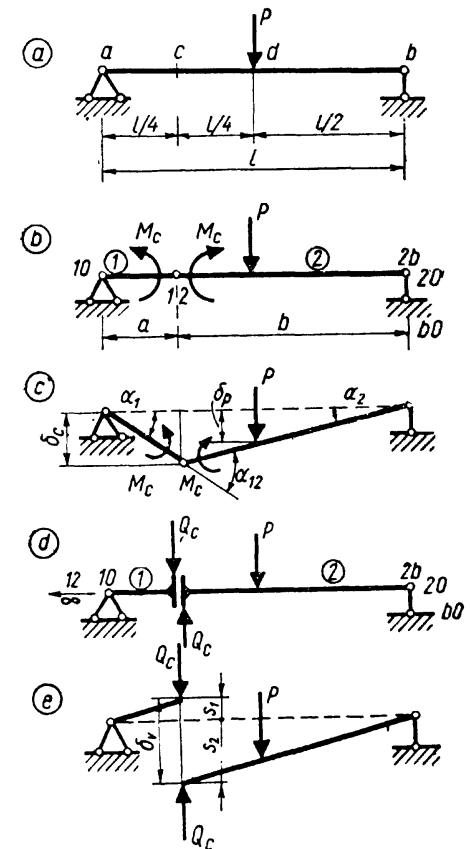
$$X_r = - (\sum P_i s_i) / \delta r \quad (3.18)$$

Jõu P_i moment tema rakenduspunkti i pööratud kiiruste plaani kujutuspunkti i' suhtes on positiivne, kui moment mõjub päripäeva.

Näide 3.2. Leida kinemaatika meetodiga joonisel 3.19, a kujutatud tala ristlõikes c paindemoment ja põikjõud.

Paindemomendi arvutamisel lõikes c eemaldatakse sellest lõikest paindemomenti vastuvõttev side ja rakendatakse sinna kaks momenti (joon. 3.19, b). Element 1 pöörub ümber liigendi a ja see on peapooluseks 10 . Elementide 1 ja 2 ühendusliigend lõikes c on kõrvalpooluseks 12 . Toesideme b ühendusliigend toepinnaga on sideme peapooluseks 20 on pooluseid 10 ja 12 ning $b0$ ja $2b$ läbivate sirgete lõikepunkt, mida sümboliseeritakse järgmiselt:

$$\left. \begin{array}{l} 10-12-20 \\ b0-2b-20 \end{array} \right\}$$



Joon. 3.19

Sirgete lõikepunkt ühtib elemendi 2 ja toesideme b ühendusliigendiga. Kõrvalpooluse 12 siire on δc ja elementide pöörded $\alpha_1 = \delta c/a$ ning $\alpha_2 = \delta c/b$ (joon. 3.19, c). Elementide vastastikune pööre

$$\alpha_{12} = -\alpha_1 - \alpha_2 = -\frac{\delta c}{a} - \frac{\delta c}{b} = -\delta c \frac{a+b}{ab} = -\delta c \frac{l}{ab} \quad (a)$$

Pöörete α_1 ja α_2 ees on miinusmärk, kuna mõlemad elemendid on pöördunud vastupidi momendile M_c . Võttes $\alpha_{12} = -1$, saadakse avaldisest (a)

$$\delta c = ab/l \quad (b)$$

Võrrandist $M_c \alpha_{12} + P \delta p = 0$ avaldatakse

$$M_c = -P \delta p / \alpha_{12} \quad (c)$$

milles

$$\delta p = (\delta c/b) l/2 = \delta c l/2b \quad (d)$$

Arvestades avaldist (b), $p = (ab/l) l/2b = l/8$. Paindemoment lõikes c on nüüd $M_c = -P(l/8)/(-1) = Pl/8$.

Põikjõu leidmiseks eemaldatakse ristlõikest c põikjõudu vastuvõttev side ja asendatakse selle mõju kahe jõuga Q_c (3.19, d) Elementide 1 ja 2 kõrvalpoolus 12 asub tala telje sihis lõpmatuses. Elemendi 2 peapooluseks on sirgete 10-12 ja b0-2b lõikepunkt, s.-t. toesideme b ja elemendi 2 kõrvalpoolus 2b. Mehhanismi elementidele antakse niisugused paigutised, et põikjõule Q_c vastav paigutis $\delta c = \delta v = -1$. Elementide 1 ja 2 vastastikune eemaldumine lõike c kohal on $s_1 + s_2 = 1$, (joon. 3.19, e). Elemendid 1 ja 2 on ühendatud kahe paralleelse vardaga ja jäävad paralleelseteks: $s_1 = -\delta v/4 = 1/4$, $s_2 = -\delta v \cdot 3/4 = 3/4$. Jõule P vastav siire on $\delta p = (s_2/0,75l) l/2 = s_2 \cdot 2/3 = (3/4) \cdot (2/3) = 1/2$ ja põikjõud $Q_c = -P \delta p / \delta v = -P(1/2)/(-1) = P/2$.

4. HETKMUUTUVAD KONSTRUKTSIOONID

4.1. Hetkmuutuvus

Nullvabadusastmega arvutuskeemi, mis rahuldab tingimust $3k = 2l + t$ (2.1), toereaktsioonid ja sisejõud on arvutatavad tasakaalutingimustega, kui tasakaalutingimuste alusel koostatud lineaarse võrrandisüsteemi (2.6) tundmatute kordajatest moodustatud determinant D (2.8) ei võrdu nulliga. Juhul, kui tingimus (2.1) on rahuldatud, kuid determinant (2.8) võrdub nulliga ($D=0$), ei ole tundmatud kas üheselt määratavad või lõplikud. Niisugune arvutuskeem on hetkmuutuv. Hetkmuutavas arvutuskeemis võib lõplik koormus põhjustada teoreetiliselt lõpmata suuri, praktiliselt väga suuri toereaktsioone ja sisejõude.

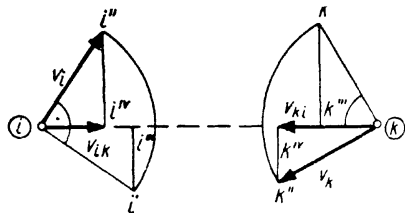
Kinemaatika tunnus hetkmuutuva arvutuskeemi jaoks saadakse võimalike paigutiste printsiibi alusel koostatud võrrandist (3.13) avaldatud tundmatu valemist $X_r = -\sum P_i \delta p_i / \delta r$ (3.14). Juhul kui

$$\delta p_i \neq 0 \quad \text{ja} \quad \delta r = 0 \quad (4.1)$$

võivad ka deformeerimata elementide puhul esineda paigutised arvutuskeemis, kui reaktsioonile X_r vastav side ei ole skeemist eemaldatud. Arvutuskeem on siis hetkmuutuv. Järgnevalt käsitletakse hetkmuutuvuse kontrollimise meetodeid.

4.2. Pööratud kiiruste plaani meetod

Hetkmuutuvuse kontrollimiseks eemaldatakse nullvabadusastmega arvutuskeemist üks varras või geomeetriselt muutumatu kujund ja moodustatakse mehhanismi mittepolaarne või polaarne pööratud kiiruste plaan. Kiiruste plaanis vaadeldakse kahte punkti i ja k , mille vahelt



Joon. 4.

varras on eemaldatud (joon. 4.1). Mehhanismi sõlmede i ja k kiirused tähistatakse v_i ning v_k ja kujutuspunktid i' , k' . Sõlmede i ja k lähenemiskiirust kujutab kiiruste v_i ja v_k projektsioonide summa varda sihile: $v = v_{ik} + v_{ki}$. Sõlmede i ja k lähenemist võib väljendada ka pööratud kiiruste plaani kujutuspunktide i' ning k' abil: $|v| = |i'-i''' + k'-k''|$, kuna $i'-i''' = i-i''$ ja $k'-k'' = k-k''$. Lõigud $i'-i'''$ ja $k'-k''$ on sõlmede i ning k kujutuspunktide i' ja k' kaugused varda $i-k$ telgjoonest ning on samamargilised, kui asetsevad vardast $i-k$ erinevatel pooltel.

Mehhanismi elementide liikumisel ei muutu sõlmede i ja k vahekaugus, kui nende sõlmede kiirused on võrdsed, kuid vastupidise märgiga. Sel juhul liigub üks sõlm teise poole, kuid teine sõlm liigub sama kiirusega eest ära. Ka varda $i-k$ asetamine oma kohale ei takista elementide väikesi paigutisi. Arvutusskeem on hetkmuutuv ja varda $i-k$ telgjoon ning kujutuspunkte ühendav sirge $i'-k'$ on paralleelsed: $i'-k' // i-k$. Kui $i'-k' \neq i-k$, siis sõlmede i ja k vahekaugus muutub mehhanismi elementide liikumisel ning varda $i-k$ asetamine mehhanismi tagasi teeb arvutusskeemi geomeetriliselt muutumatuks.

Seega arvutusskeem on hetkmuutuv, kui on võimalik moodustada kiiruste plaani.

Kõigi varraste kujutised pööratud kiiruste plaanis on paralleelsed algskeemi varrastega.

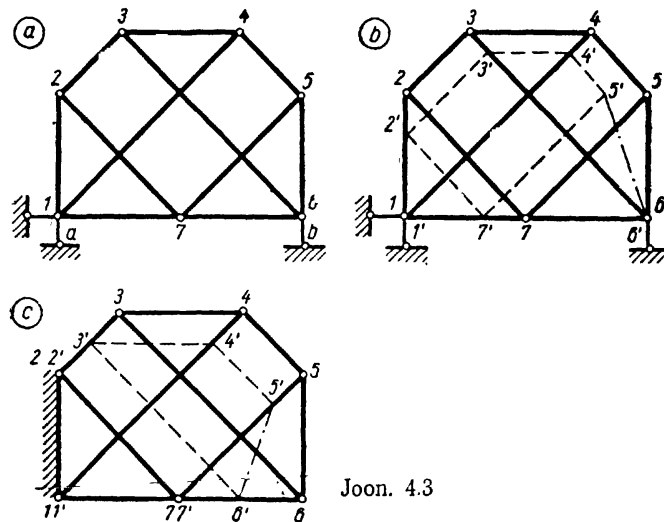
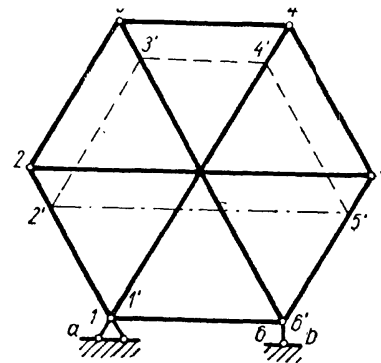
Kolme toevardaga arvutusskeemi hetkmuutuvuse kontrollimisel jäetakse ära tavaliselt toevardad ja kontrollitakse kujundi hetkmuutuvust. Toevarraste eemaldamisega tekkinud kolm liikumisvabadust kõrvaldatakse kujundi ühe elemendi kinnitamisega.

Näide 4.1. Selgitada, kas joonistel 4.2 ja 4.3 kujutatud sõrestikud on hetkmuutuvad või mitte.

Joonisel 4.2 esitatud sõrestiku sõlm 1 on kinnitatud kahe toesidemega ja liikumatu. Sõlme 1 kujutuspunkt mittepoolaarses pööratud

kiiruste plaanis ühtib sõlmega 1. Sõlm 6 on kinnitatud toesidemega b ja vardaga 1-6 liikumatu punktiga 1 ning on liikumatu. Kujutuspunkt 6' ühtib sõlmega 6. Kiiruste plaani moodustamiseks eeldatakse, et sõrestik on hetkmuutuv ja väikesed paigutised võimalikud. Sõlme 2 pööratud kiiruseks võetakse 2-2'. Sõlme 3 kujutuspunkt 3' leitakse sirgete 2'-3'//2-3 ja 6'-3'//6-3 lõikepunktina. Sõlmede 4 ja 5 kujutuspunktid 4', 5' leitakse järgnevalt sirgete 3'-4'//3-4 ja 1'-4'//1-4 ning 4'-5'//4-5 ja 6'-5'//6-5 lõikepunktidenä. Viimase kujutuspunkti 5' leidmiseks on kolm sirget: 4'-5', 6'-5' ja 2'-5'. Kujutuspunkt 5' leitakse sirgetega 4'-5' ja 6'-5'. Antud juhul ei kasutata sirget 2'-5' ja selle asend näitab, kas sõrestik on hetkmuutuv või mitte. Kujutussirge 2'-5' on paralleelne sõrestiku vastava vardaga (2'-5'//2-5) ja sõrestik on hetkmuutuv.

Joon. 4.2



Joon. 4.3

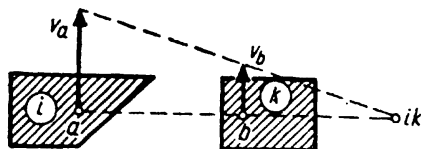
Joonisel 4.3, *a* kujutatud sõrestiku hetkmuutuvuse kontrollimisel moodustatakse pööratud kiiruste plaan toesidemetega (joon. 4.3, *b*) ja ilma toesidemeteta sõrestikkujundile (joon. 4.3, *c*).

Joonisel 4.3, *b* võetakse kujutuspunkti 2' asukoht sirgel 1-2 (1' ühtib sõlmega 1) vabalt ja leitakse järgnevalt kujutuspunkt 7': 2'-7'//2-7 ja 1'-7'//1-7. Kujutuspunktiks 6' on parempoolse toevarda *b* ja punktist 7' paralleelselt vardaga 6-7 tõmmatud sirge lõikepunkt, mis ühtib toesõlmega 6. Järgnevalt leitakse kujutuspunktid 3', 4' ja 5': 2'-3'//2-3 ja 6'-3'//6-3, 3'-4'//3-4 ja 1'-4'//1-4, 4'-5'//4-5 ja 7'-5'//7-5. Viimase kujutuspunkti 5' leidmisel ei kasutata sirget 5'-6'. Sirge 5'-6' // 5-6 ja sõrestik on hetkmuutumatu.

Joonisel 4.3, *c* on ära jäetud sõrestiku kolm toevarrast ja kinnitatud varras 1-2, mis märgitakse viirutusega. Kujutuspunktid 1' ja 2' ühtivad sõlmega 1 ning 2. Sõlm 7 on kinnitatud varrastega 1-7 ja 2-7 liikumatute sõlmega 1 ning 2 külge ja on ka liikumatu. Kujutuspunkt 7' ühtib sõlmega 7. Kujutuspunkti 3' asukoht sirgel 2-3 (sõlm 3 on ühendatud vardaga 2-3 liikumatu sõlmega 2) võetakse vabalt. Järgnevalt leitakse kujutuspunktid 4', 5' ja 6': 3'-4'//3-4 ja 1'-4'//1-4, 4'-5'//4-5 ja 7'-5'//7-5, 2'-6'//2-6 ja 7'-6'//7-6. Viimase kujutuspunkti 6' leidmisel ei kasutata sirget 5'-6', mille asend 5'-6' // 5-6 näitab, et kujund on hetkmuutumatu. Kolme toevarda sihid ei ole paralleelsed ega lõiku ühes punktis ja sõrestik (joon. 4.3, *a*) on hetkmuutumatu.

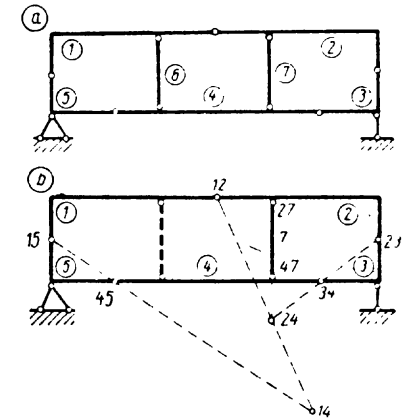
4.3. Pooluste plaani meetod

Pooluste plaani meetodit on sobiv kasutada raam- ja kombineeritud konstruktsioonide hetkmuutuvuse kontrollimiseks. Kahe liigendi vahelt eemaldatakse arvutuskeemist üks varras või geomeetriselt muutumatu kujund. Joonisel 4.4 on esitatud ainult need kaks kujundit *i* ja *k*, mille vahelt varras *a-b* on eemaldatud. Ühe varda eemaldamisega muutub nullvabadusastmega arvutuskeem mehanismiks. Pooluste plaani meetodiga tehakse kindlaks, kas need punktid, mille vahelt varras on eemaldatud, lähenevad (kaugenevad) mehhanismi elementide võimalikel paigutistel või jääb vahekaugus muutumatuks. Punktide *a* ja *b* vahekauguse muutumise kindlaksmääramisel mehhanismi elementide liikumise alghetkel kasutatakse hetkpooluste omadust: kolme kujundi vastastikuse liikumise



Joon. 4.4

mise hetkpoolused asetsevad ühel sirgel. Kui kujundite *i* ja *k*, mille vahelt varras on eemaldatud, vastastikuse liikumise hetkpoolus *ik* asub eemaldatud varda *a-b* sihil, siis on punktide *a* ja *b* trajektoorid paralleelsed (joon. 4.4) ning punktide *a* ja *b* vahekaugus ei muutu liikumise alghetkel. Arvutuskeem on hetkmuutuv, kuna ka siis, kui varras *a-b* asub liigendite *a* ja *b* vahel, on väikesed paigutised võimalikud. Kui poolus *ik* ei asu varda *a-b* sihil, siis punktide *a* ja *b* trajektoorid ei ole paralleelsed ($v_a \nparallel v_b$) ning ka liikumise alghetkel muutub punktide *a* ja *b* vahekaugus. Arvutuskeem on hetkmuutumatu, kuna varras *a-b* takistab liigendite *a* ja *b* vahekauguse muutumist.



Joon. 4.5

Näide 4.2. Joonisel 4.5, *a* esitatud arvutuskeemist, mille vabadusaste $\omega = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 9 - 3 = 0$, eemaldatakse hetkmuutuvuse kontrollimiseks varras 6 kujundite 1 ja 4 vahelt (joon. 4.5, *b*). Eesmärgiks on leida hetkpoolus 14.

Kujundite 2, 3 ja 4 vastastikuse liikumise hetkpoolused asetsevad ühel sirgel. Kolmest poolusest 23, 34 ja 24 on kaks teada (23 ja 34) ning kolmas poolus 24 asub sirgel 23-34. Kolme kujundi 2, 7 ja 4 vastastikuse liikumise hetkpoolusest on kaks teada (27 ja 47) ning kolmas poolus 24 asub sirgel 27-47. Seega hetkpooluseks 24 on sirgete 23-34 ja 27-47 lõikepunkt:

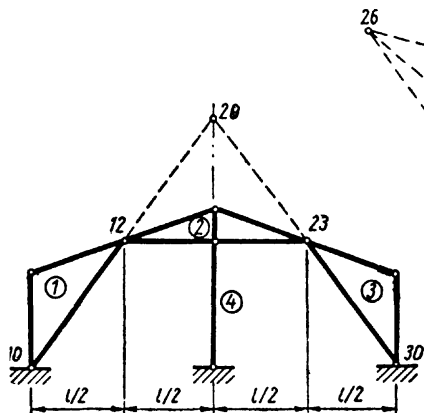
$$\left. \begin{array}{l} 23-34-24 \\ 27-47-24 \end{array} \right\}$$

Kujundite 1, 2 ja 4 ning 1, 5 ja 4 vastastikuse liikumise hetkpoolused määravad pooluse 14 asukohta:

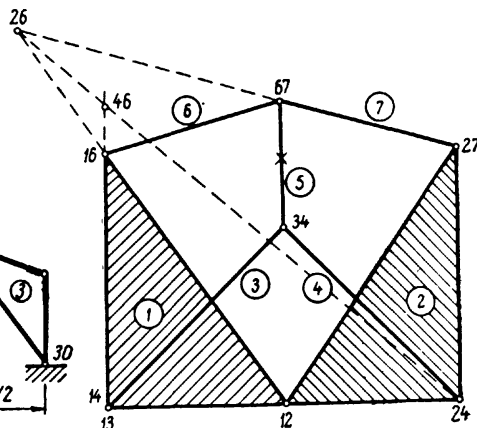
12-24-14 }
15-45-14 }

Arvutusskeem on hetkmuutumatu, kuna kujundite 1 ja 4 vastastikuse liikumise hetkpoolus 14 ei asu nende kujundite vahelt ära-äetatud varda 6 sihil.

Näide 4.3. Joonisel 4.6 esitatud arvutusskeemi hetkmuutuvuse kontrollimiseks jäetakse ära varras 4. Arvutusskeemi allesjäänud osa koosneb kolmest geomeetriselt muutumatust kujundist 1, 2 ja 3. Eemaldatud varras 4 asub kujundi 2 ja toepinna vahel. Eesmärgiks on leida hetkpoolus 20. Vastastikuse liikumise hetkpoolus 20 on sirgete 10-12 ja 30-23 lõikepunkt, mis asub sümmeetriateljelt eemaldatud varda 4 sihil. Arvutusskeem on hetkmuutuv.



Joon. 4.6



Joon. 4.7

Näide 4.4. Sõrestike hetkmuutumatus kontrollimisel pooluste plaani meetodiga märgitakse varrastest moodustatud geomeetriselt muutumatu osa ühe kujundina (joon. 4.7 kujundid 1 ja 2). Ristiga on märgitud eemaldatud varras 5. Varras 5 asub varraste 3 ja 6, 3 ja 7, 4 ja 6 või 4 ja 7 vahel. Otsitavateks hetkpoolusteks on 36, 37, 46 ja 47. Nendest neljast on vaja leida ainult üks poolus. Kui üks poolustest 36, 37, 46 või 47 asub eemaldatud varda 5 sihil, siis ka teised poolused asuvad samal sihil. Kui üks nendest neljast poolusest ei asu sellel sihil, siis ka teised kolm ei asu seal.

Leitavaks hetkpooluseks võetakse 46, mis määratakse järgmiste sirgetega:

13-34-14 } 12-16-26 } 14-16-46 }
12-24-14 } 27-67-26 } 26-24-46 }

Joonisel 4.7 esitatud sõrestikkujund on hetkmuutumatu, kuna hetkpoolus 46 ei asu eemaldatud varda 5 sihil.

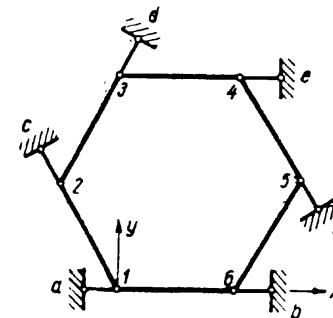
4.4. Nullkoormuse meetod

Staatikaga määratava arvutusskeemi definitsiooni põhjal on tema reaktsioonid ja sisejõud lõpliku koormuse mõjumisel tasakaalutingimustega üheselt määratavad. Seosest (2.7) järeldub, et koormuse puudumisel on staatikaga määrataval arvutusskeemil ainult üks õige lahend ja nimelt null-lahend, s.t. kõik reaktsioonid ja sisejõud võrduvad nulliga. Seda omadust kasutatakse arvutusskeemide hetkmuutuvuse kontrollimiseks. Kui koormuse puudumisel ainult null-lahend rahuldab tasakaalutingimusi, siis on arvutusskeem hetkmuutumatu. Kui koormuse puudumisel on võimalikud ka nullist erinevad lahendid, siis on nullvabadusastmega arvutusskeem hetkmuutuv. Seda hetkmuutuvuse kontrollimise viisi nimetatakse nullkoormuse meetodiks.

Koormuse puudumisel konstruktsioonis esinevaid sisejõude nimetatakse algsisejõududeks ja pingeid — algpingeteks ehk eelpingeteks. Staatikaga määratavas konstruktsioonis on algsisejõud nullid. Hetkmuutuvas konstruktsioonis võivad algsisejõud esineda.

Näide 4.5. Joonisel 4.8 kujutatud sõrestiku hetkmuutuvust kontrollitakse nullkoormuse meetodiga. Järgemööda koostatakse sõlmede kohta tasakaalutingimused. Sõlmede 1, 4 ja 6 kohta koostatud tasakaalutingimusest $\sum Y=0$ leitakse, et

$$N_{1-2}=0, N_{4-5}=0 \text{ ja } N_{6-5}=0.$$



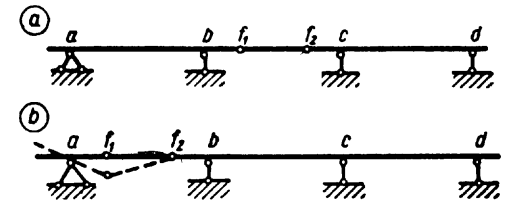
Joon. 4.8

Sõlmes 2, mis on koormamata, ei saa kaks mitte ühel sirgel asuvat jõudu rahuldada projektsoonide tasakaalu tingimusi; järelikult toereaktsioon $C=0$ ja $N_{2-3}=0$. Kuna $N_{2-3}=0$, siis sõlme 3 projektsoonide tasakaalu tingimustest järeldeb, et toereaktsioon $D=0$ ja $N_{3-4}=0$. Nullid on muidugi ka toereaktsioonid E ja F . Toereaktsioonid A ja B ning varda 1-6 sisejõud N_{1-6} jäävad tasakaalu tingimustega määramatuks. Joonisel 4.8 esitatud sõrestik sellise toesidemete asetusega on hetkmuutuv.

5. GEOMEETRIILISE STRUKTUURI ANALÜÜS

5.1. Analüüsi mõte

Iga geomeetriselt muutumatu konstruktsiooni vabadusaste võrdub nulliga või on negatiivne. Kuid iga negatiivse või nullvabadusastmega konstruktsioon ei ole geomeetriselt muutumatu. Esineb samatüübilisi konstruktsioone, milles kujundite, liigendite ja toesidemete arvud on võrdsed, kuid nende erineva asetuse tõttu on konstruktsioonid erinevad: kas geomeetriselt muutumatud või geomeetriselt muutuvad.



Joon. 5.1

Näiteks joonisel 5.1 kujutatud talad on moodustatud kolmest vardast, mis on omavahel ühendatud kahe liigendiga ja millel on neli tuge viie toesidemega. Mõlema tala vabadusaste $w=3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5=0$. Joonisel 5.1, a kujutatud tala on geomeetriselt muutumatu ja joonisel 5.1, b geomeetriselt muutuv. Viimasel talal võib liigend f_1 liikuda alla ja üles, kuna tala parempoolsel osal f_2 -d on üks liigside.

Koos vabadusastme määramisega tuleb arvutuskeemi struktuuri geomeetriselt analüüsida: vaatluse teel selgitatakse, kas nullvabadusastmega arvutuskeemi elemendid on üksteisega ühendatud niiviisi, et ühel osal on liigsidemed ja teine osa on liikuv. Samuti kontrollitakse ka arvutuskeemi hetkmuutumatust.

5.2. Kujundi geomeetriselise muutumatuse põhitunnused

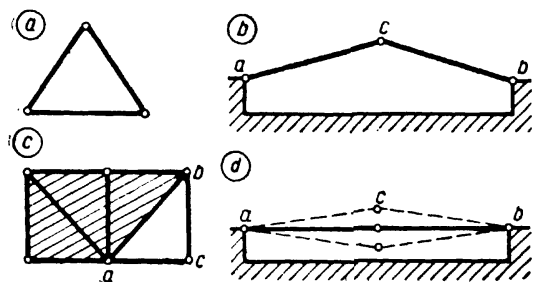
Geomeetriselt muutumatu ja liikumatu konstruktsiooni elemendid võivad olla mitmeti ühendatud. Geomeetriselise struktuuri analüüsimisel peab tundma geomeetriselt muutumatute konstruktsioonide põhitunnuseid.

Lihtsaim geomeetriselt muutumatu kujund (joon. 5.2, a) või konstruktsioon (joon. 5.2, c) koosneb kolmest elemendist, mis on ühendatud kolme mitte ühel sirgel asetseva liigendiga. Kui need liigendid asetsevad ühel sirgel, siis on konstruktsioon hetkmuutuv (joon. 5.2, d), kuna keskmine liigend c saab vertikaalsihis liikuda.

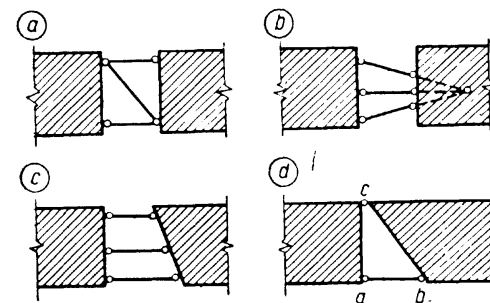
Jooniselt 5.2, b selgub, et geomeetriselt muutumatule kujundile (viirutatud osa) lisatakse uus sõlm c kahe mitte ühel sirgel asetseva vardaga, mis on sõlmes c teineteisega ühendatud liigendiga. **Liigendkolmnurkadest moodustatud kujund, mis saadakse algkolmnurgale kahe mitte ühel sirgel asetseva vardaga uue sõlme lisamise teel, on geomeetriselt muutumatu.** Niiviisi moodustatud kujundit nimetatakse lihtkujundiks.

Kahe geomeetriselt muutumatu kujundi ühendamisel kolme vardaga, mille sihid ei löiku ühes punktis ja ei ole paralleelsed, saadakse uus geomeetriselt muutumatu kujund (joon. 5.3, a). Kui kolme ühendusvarda sihid lõikuvad ühes punktis (joon. 5.3, b) või on paralleelsed, kusjuures vardad on erineva pikkusega (joon. 5.3, c), siis on kujund hetkmuutuv.

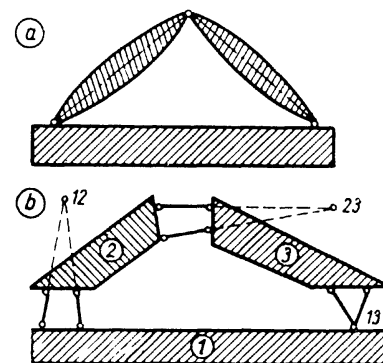
Kaks kujundit saab ühendada geomeetriselt muutumatuks kujundiks liigendi ja vardaga, mille siht ei läbi ühendusliigendit (joon. 5.3, d). Kui varda siht läheb läbi ühendusliigendi, siis on uus kujund hetkmuutuv.



Joon. 5.2



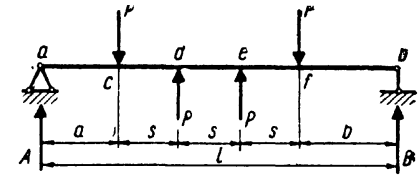
Joon. 5.3



Joon. 5.4

Kõik, mis on märgitud kahe kujundi ühendamise kohta, on kehtiv ka geomeetriselt muutumatu kujundi kinnitamisel toepinnaga.

Kolm kujundit ühendatakse üheks geomeetriselt muutumatuks kujundiks kolme mitte ühel sirgel asetseva liigendiga (joon. 5.4, a). Liigendi võib asendada kahe vardaga. Kolm kujundit ühendatakse siis üheks geomeetriselt muutumatuks kujundiks kuue vardaga niiviisi, et vardapaaride sihtide lõikepunktid 12, 23 ja 13 ei asetse ühel sirgel (joon. 5.4, b). Kui lõikepunktid 12, 23 ja 13 asetsevad ühel sirgel, siis on uus kujund hetkmuutuv.



Joon. 6.1

6. STAATIKAGA MÄÄRATAVATE KONSTRUKTSIOONIDE STAATIKALISED OMADUSED

6.1. Eelpinged

Nagu eelmises, hetkmuutuvust käsitlevas peatükis veenduti, võivad algsisejõud esineda nullvabadusastmega arvutusskeemi puhul ainult hetkmuutavas konstruktsioonis. Staatikaga määratavas konstruktsioonis on algsisejõud võrdsed nulliga. Seega ka algpinged ehk eelpinged on nullid.

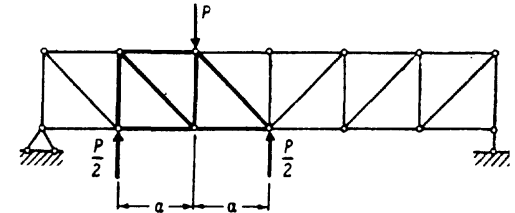
6.2. Temperatuuri muutuse, tugede paigutiste ja montaaži ebatäpsuse mõju

Temperatuuri muutus, tugede paigutised ja konstruktsiooni elementide mõõtmete ebatäpsus ei põhjusta staatikaga määratavas konstruktsioonis toereaktsioone ega sisejõude. Kui koormus puudub, siis rahuldab staatikaga määratava konstruktsiooni tasakaalutingimusi ainult nulllahend.

6.3. Tasakaalus koormus

Staatikaga määratava konstruktsiooni geomeetriselt muutumatule osale rakendatud tasakaalus koormus tekitab sisejõude ainult selle geomeetriselt muutumatu osa ulatusel, millel koormus mõjub. Konstruktsiooni teistes osades on reaktsioonid ja sisejõud nullid. See omadus on põhjendatud staatikaga määratava konstruktsiooni lahendi ühesusega: kuna lahend rahuldab kõiki tasakaalutingimusi, siis see on ainuke õige lahend.

Näiteks joonisel 6.1 esitatud talas tekivad sisejõud talale rakendatud tasakaalus koormusest ainult vahemikus c-f. Selles võib kergelt veenduda, leides tasakaalutingimustega



Joon. 6.2

$$\Sigma M_b = 0: \quad Al + P[(b+2s) + (b+s)] - P[(b+3s) + b] = 0$$

$$\Sigma M_a = 0: \quad -Bl + P[a + (a+3s)] - P[(a+s) + (a+2s)] = 0$$

toereaktsioonid

$$A = [P(2b+3s) - P(2b+3s)]/l = 0$$

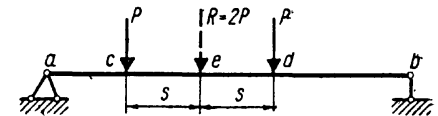
$$B = [P(2a+3s) - P(2a+3s)]/l = 0$$

Kuna toereaktsioonid A ja B on nullid, siis vahemikes a-c ja f-b on ka sisejõud nullid.

Joonisel 6.2 kujutatud sõrestikus tekivad antud tasakaalus koormuse mõjul sisejõud ainult paksemalt joonestatud varrastes. Toereaktsioonid on nullid.

6.4. Ekvivalentne koormus

Konstruktsiooni geomeetriselt muutumatule osale rakendatud koormuse asendamine ekvivalentse koormusega ei põhjusta sisejõudude muutust konstruktsiooni teistes osades. Kaks koormust on staatikaliselt ekvivalentsed, kui nende resultandid on suuruselt ja suunalt võrdsed ning sihid langevad ühte.



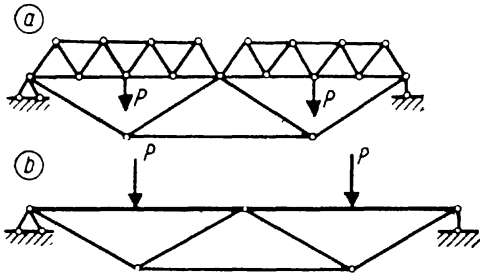
Joon. 6.3

Näiteks joonisel 6.3 kujutatud talas ei muutu toereaktsioonid A ja B ning sisejõud vahemikes $a-c$ ja $d-b$, kui talale rakendatud kaks jõudu asendatakse nende resultantjõuga.

6.5. Geomeetrilise struktuuri muutmise mõju

Konstruksiooni geomeetriselt muutumatu osa geomeetrilise struktuuri ja kuju muutmine ei põhjusta teistes osades sisejõudude muutust, kui ühendused osade vahel jäävad endisteks.

Joonisel 6.4, a ja b kujutatud sõrestike tõmbi ja diagonaalide sisejõud on võrdsed mõlemal juhul, olenemata ülemise vöö varraste kujust ja geomeetrisest struktuurist.



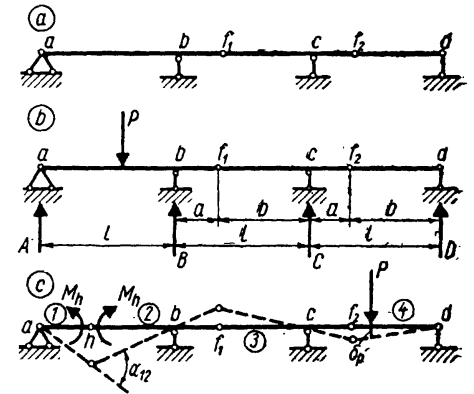
Joon. 6.4

6.6. Põhi- ja lisaosad

Põhiosaks nimetatakse konstruktsiooni niisugust osa, mis on geomeetriselt muutumatu ka siis, kui konstruktsiooni teised osad on eemaldatud. Lisaosa on geomeetriselt muutumatu, kui ta on kinnitatud põhiosa külge, ja geomeetriselt muutuv, kui naaberpõhiosa on eemaldatud.

Põhiosale rakendatud koormus põhjustab toereaktsioone ja sisejõude ainult selles põhiosas, millele ta mõjub. Lisaosale rakendatud koormus põhjustab sisejõude ja toereaktsioone lisaosas ning naaberpõhiosades.

Joonisel 6.5, a kujutatud staatikaga määratav kolme-sildeline tala koosneb kolmest osast. Vasakpoolne ele-



Joon. 6.5

ment, konsooliga tala $a-f_1$, on põhiosa. Elementid f_1-f_2 ja f_2-d on lisaosad, kuna põhiosa $a-f_1$ puudumisel on nad geomeetriselt muutuvad. Kui on eemaldatud ainult osa f_2-d , siis keskmine element f_1-f_2 , mis on kinnitatud põhiosa $a-f_1$ külge liigendiga f_1 ja toetub toele c , on geomeetriselt muutumatu; seega on element f_1-f_2 elemendi f_2-d suhtes põhiosaks.

Joonisel 6.5, b on koormus rakendatud põhiosale $a-f_1$. Tingimusest, et liigendis paindemoment võrdub nulliga,

$$M_{f_2} = Db = 0; \quad M_{f_1} = D(l+a)_1 + Cb = 0$$

leitakse $D=0$ ja $C=0$. Kuna toereaktsioonid D ja C võrduvad nulliga, siis on lisaosades ka sisejõud nullid.

Joonisel 6.5, c on koormus rakendatud lisaosale f_2-d . Põhiosa suvalisest lõikest h eemaldatakse paindemomendi vastuvõttev side ja selle mõju asendatakse kahe momendiga M_h . Võimalike paigutiste printsiibi alusel koostatud võrrandist $M_h \alpha_{12} + P \delta p = 0$ järeldub, et paindemoment $M_h \neq 0$, kuna $\alpha_{12} \neq 0$ ja $\delta p \neq 0$.

7. LIKUV KOORMUS

7.1. Mõjujoone mõiste

Seni käsitleti toereaktsioonide ja sisejõudude arvutust konstruktsioonil mõjuvast liikumatust koormusest. Konstruktsioonide arvutuse eesmärgiks on leida suurimad paindemomendid, piki- ja põikjõud ning ristlõiked, milles nad tekivad. Paigalseisva koormuse puhul on selleks tarvis arvutada sisejõudude epüüride joonestamiseks vajalikud ordinaadid.

Liikuvast koormusest (kraanad, traktorid, autod, rongid jne.) tingitud suurimate arvutuslike sisejõudude määramiseks on vaja leida liikuva koormuse niisugune asetus, mis põhjustab selles lõikes suurema sisejõu. Koormuse asetus, mis tingib vaadeldavas ristlõikes suurima sisejõu, on selles lõikes tekkiva sisejõu jaoks kõige ebasoodsam ehk ohtlikum.

Liikuva koormuse puhul arvutatakse konstruktsioonid graafikute abil, milles abstsiss vastab koormuse asukohale ja ordinaat kujutab toereaktsiooni, sisejõu või paigutise suurust konstruktsiooni ühes konkreetses ristlõikes. Iga dimensioonitava ristlõike jaoks koostatakse sisejõududele eraldi graafikud.

Mõjujoon on graafik, mis kujutab konstruktsioonil liikuvast ja oma suunda säilitavast ühikjõust tingitud toereaktsiooni, sisejõu, paigutise (vms.) suurust arvutuskeemi kindlaksmääratud lõikes.

Järgnevalt selgitatakse mõjujoone ja epüüri erinevust mõjufunktsiooni abil. Mõjufunktsiooni üheks muutujaks on lõike asukoht, kus vaadeldav suurus tekib, ja teiseks muutujaks jõu asukoht. Mõjujoonte ordinaadid arvutatakse tavaliselt vertikaalsest ühikjõust. Joonisel 7.1, a mõjub tala lõikes m vertikaalne ühikjõud ($P_m=1$). Ülesandeks on arvutada tala suvalise ristlõike vertikaalsiire. Suvaline lõige vasakul ja paremal pool ühikjõu

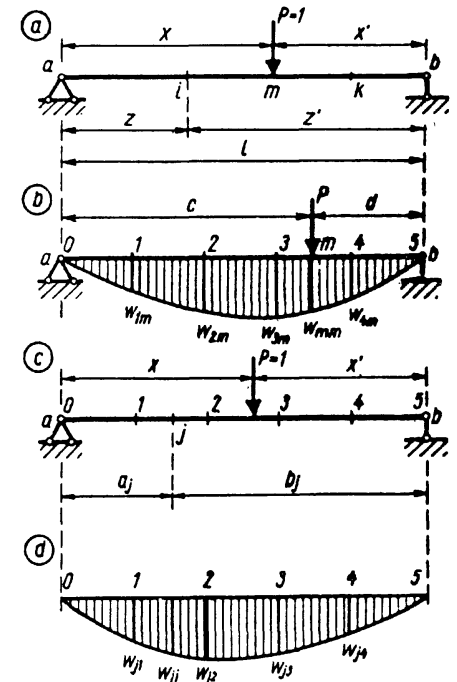
rakenduspunkti m tähistatakse vastavalt i ja k . Jõu rakenduspunkti m kaugust vasakpoolsest toest tähistatakse x ja parempoolsest toest x' ning ristlõike $i(k)$ kaugust vasakpoolsest toest z ja parempoolsest toest z' . Elastse joone diferentsiaalvõrrandi integreerimise tulemusena saadakse ristlõigete i ja k vertikaalsiirete arvutamiseks järgmised valemid:

$$w_{im} = \frac{Pl}{6EI} z x' \left[1 - \left(\frac{x'}{l} \right)^2 - \left(\frac{z}{l} \right)^2 \right], \text{ kui } z \leq x \quad (a)$$

$$w_{km} = \frac{Pl}{6EI} z' x \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \left(\frac{z'}{l} \right)^2 \right], \text{ kui } z \geq x \quad (b)$$

milles E on normaal-elastsusmoodul, I — ristlõike inertsmoment ja l — sille.

Siirete tähistamisel kasutatakse kahte indeksit. Esimene indeks näitab kohta, kus esineb vaadeldav siire, ja teine indeks näitab siiret põhjustava jõu asukohta.



Joon. 7.1

Siire w_{im} (w_{km}) oleneb kahest muutujast x ja z . Funktsiooni $w_{im} = w(x, z)$ nimetatakse mõjufunktsiooniks. Mõjufunktsioonist saadakse epüür või mõjujoon, olenevalt sellest, kumb muutujatest võetakse konstantseks:

Kui võetakse $x = c = \text{konst.}$ ja $x' = l - c = d = \text{konst.}$, siis saadakse mõjufunktsioonist $w(x, z)$ läbipaindejoone võrrand $w(c, z)$, mis on ühtlasi tala vertikaalsiirde epüüriks. Valemid (a) ja (b) on siis järgmised:

$$w_{im} = \frac{Pl}{6EI} zd \left[1 - \left(\frac{d}{l} \right)^2 - \left(\frac{z}{l} \right)^2 \right], \text{ kui } z \leq c \quad (c)$$

$$w_{km} = \frac{Pl}{6EI} z'c \left[1 - \left(\frac{c}{l} \right)^2 - \left(\frac{z'}{l} \right)^2 \right], \text{ kui } z \geq c \quad (d)$$

Joonisel 7.1, *b* on kujutatud tala vertikaalsiirde epüür. Epüüri ordinaadid w_{1m}, w_{2m}, \dots kujutavad tala lõigete 1, 2, ... vertikaalsiirdeid, mis on põhjustatud kohas m asuvast jõust P .

Kui võetakse $z = a = \text{konst.}$ ja $z' = l - a = b = \text{konst.}$, siis saadakse mõjufunktsioonist $w(x, z)$ mõjujoone võrrand $w(x, a)$. Asetades valemitesse (a) ja (b) $z = a$ ning $P = 1$, saavad nad kuju

$$w_{im} = \frac{1l}{6EI} ax' \left[1 - \left(\frac{x'}{l} \right)^2 - \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right], \text{ kui } x \geq a \quad (e)$$

$$w_{km} = \frac{1l}{6EI} bx \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right], \text{ kui } x \leq a \quad (f)$$

Joonisel 7.1, *d* on kujutatud lõike j (joon. 7.1, *c*) vertikaalsiirde mõjujoon. Mõjujoone ordinaat w_{jm} kujutab lõike j vertikaalsiiret, mis on tingitud ühikjõust tala lõikes m . Ordinaadid w_{j1}, w_{j2}, \dots kujutavad lõike j vertikaalsiiret, kui ühikjõud asub talal vastavalt lõigetes 1, 2, ... Ordinaadid w_{j2}, w_{j3}, w_{j4} arvutatakse valemiga (e), sest lõiked 2, 3, 4 on paremal pool lõiget j ($x > a_j$). Ordinaat w_{j1} arvutatakse valemiga (f), sest lõige 1 on vasakul pool lõiget j ($x < a_j$).

Mõjujoone mõistet võib kohandada ka sihilt muutuva ühikjõule ja liikuvale ühikmomendile.

7.2. Mõjujoone ordinaadi dimensioon

Siirde dimensioon on pikkuse dimensioon. Eelises punktis valemitega (a) ja (b) arvutatavate siirde dimensiooniks on pikkuse dimensioon; $kG \cdot \text{cm} \cdot \text{cm} / (\text{kG}/\text{cm}^2) \text{cm}^4 = \text{cm}$. Valemites (e) ja (f) on koormuseks dimensioonita ühikjõud ning nende valemitega arvutatud vertikaalsiirde mõjujoone ordinaadi dimensioon saadakse siirde dimensiooni jagamisel jõu dimensiooniga: $1 \text{ cm} \cdot \text{cm} \cdot \text{cm} / (\text{kG}/\text{cm}^2) \text{cm}^4 = \text{cm}/\text{kG}$.

Mõjujoone ordinaadi dimensiooni määramiseks tuleb vaadeldava suuruse dimensioon jagada jõu dimensiooniga.

Toereaktsiooni, põik- ja pikijõu mõjujoone ordinaat on dimensioonita (kG/kG või t/t). Paindemomendi mõjujoone ordinaadi dimensiooniks on $\text{kGcm}/\text{kG} = \text{cm}$, $\text{kGm}/\text{kG} = \text{m}$ või $\text{tm}/\text{t} = \text{m}$, s. t. pikkuse dimensioon. Põõrde mõjujoone ordinaadid on dimensiooniga $1/\text{t}$ või $1/\text{kG}$.

Toereaktsiooni, põik- ja pikijõu ning paindemomendi mõjujoonte ordinaatide dimensioonid ei sisalda jõu dimensiooni ja nende mõjujoonte kasutamisel võib koormuse dimensiooniks olla kG või t . Paigutise mõjujoone ordinaadi dimensioonis esineb jõu dimensioon kG või t . Seejärel tuleb paigutiste arvutamisel mõjujoontega võtta koormus sama jõu dimensiooniga, mis esineb mõjujoone ordinaadi dimensioonis.

7.3. Mõjujoone ordinaatide arvutus staatika tasakaalutingimustega

7.3.1. Toereaktsiooni mõjujoon

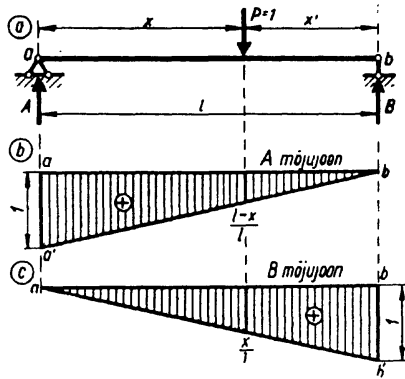
Liikugu talal a - b jõud $P = 1$ (joon. 7.2, *a*). Toe b kohta koostatud tasakaalutingimusest

$$\Sigma M_b = 0; \quad Al - P(l - x) = 0$$

avaldatakse toereaktsioon A jõu P ja abstsissi x funktsioonina

$$A = P \frac{l - x}{l}$$

kuna $P = 1$, siis $A = 1(l - x)/l$ ehk



Joon. 7.2

$$A = \frac{l-x}{l} \quad (7.1)$$

Toereaktsiooni A avaldises (7.1) on muutuja x esimeses astmes; seega on toereaktsiooni A suuruse ja ühikjõu asukoha abstsissi seos lineaarne. See sirge määratakse kahe punktiga: kui $x=0$, siis $A=1$, ja kui $x=l$, siis $A=0$. Sirge (joon. 7.2, b) iga ordinaat kujutab toereaktsiooni A suurust, kui ühikjõud asub talal selle ordinaadi kohal. Seda sirget nimetatakse toereaktsiooni A mõjujooneks. Sille l ja ühikjõu kaugus toest b $l-x$ on pikkuse dimensiooniga, kuid nende suhe $(l-x)/l$ on dimensioonita; toereaktsiooni A mõjujoone ordinaadid on dimensioonita arvud.

Toereaktsiooni B mõjujoone ordinaatide arvutamiseks koostatakse toe a kohta momentide tasakaalu tingimus:

$$\sum M_a = 0; -Bl + Px = 0, \text{ millest } B = Px/l = 1x/l \text{ ehk}$$

$$B = \frac{x}{l} \quad (7.2)$$

Toereaktsiooni B mõjujoon (joon. 7.2, c) määratakse kahe ordinaadiga: kui $x=0$, siis $B=0$, ja kui $x=l$, siis $B=1$.

7.32. Paindemomendi mõjujoon

Paindemomendi avaldis lõike c kohta oleneb sellest, kummal pool lõiget c asetseb ühikjõud (joon. 7.3, a). Olenevalt ühikjõu asukohast saadakse kaks võrrandit mõjujoone ordinaatide arvutamiseks.

Olgu ühikjõud paremal pool lõiget c , s.t. $x > a$ (joon. 7.3, a). Paindemoment lõike c kohta avaldatakse valemiga

$$M_c = Aa, \text{ kui } x \geq a \quad (a)$$

Paindemomendi M_c (kui $x \geq a$) mõjujoone ordinaadid on proportsionaalsed toereaktsiooni mõjujoone ordinaatidega, kusjuures proportsionaalsusteguriks on lõike c kaugus toest a . Arvestades valemit (7.1) on

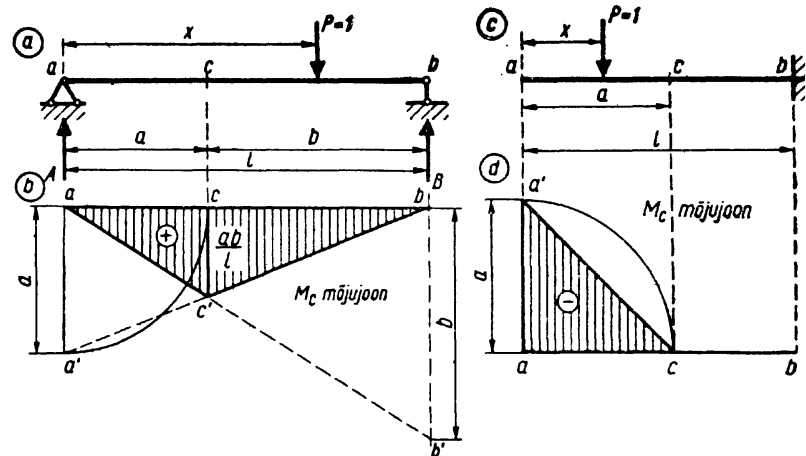
$$M_c = \frac{l-x}{l} \cdot a, \text{ kui } x \geq a \quad (7.3)$$

Võrrandiga (7.3) määratud sirge kujutamiseks leitakse kaks ordinaati: kui $x=0$, siis $M_c=a$ ja kui $x=l$, siis $M_c=0$. Joonisel 7.3, b kujutatud sirgel $a'-b$ kehtib mõjujoonena ainult lõik $c'-b$, s.t. kui ühikjõud on paremal pool lõiget c ($x \geq a$). Lõiku $c'-b$ nimetatakse mõjujoone parempoolseks sirgeks.

Kui jõud asub vasakul pool lõiget c ($x \leq a$), siis

$$M_c = Bb = \frac{x}{l} \cdot b, \text{ kui } x \leq a \quad (7.4)$$

Sirge (7.4) kujutamiseks leitakse kaks ordinaati: kui $x=0$, siis $M_c=0$, ja kui $x=l$, siis $M_c=b$. Selle sirge ordinaadid on proportsionaalsed toereaktsiooni B mõju-



Joon. 7.3

joone ordinaatidega; proportsionaalsusteguriks on lõike c kaugus toest b . Paindemomendi M_c mõjujoonena kehtib sirge lõik $a-c'$ ($x \leq a$) ja seda nimetatakse mõjujoone vasakpoolseks sirgeks.

Paindemomendi mõjujoon koosneb kahest sirgjoonest: mõjujoone parempoolsest sirgest $c'-b$ ja vasakpoolsest sirgest $a-c'$. Viies avaldistesse (7.3), (7.4) $x=a$ veendutakse, et mõlemate sirgete ordinaadid lõike c kohal on võrdsed: $M_c=ab/l$. Mõjujoone vasak- ja parempoolne sirge lõikuvad lõike c vertikaalil.

Ühikjõu liikumisel vasakust toest kuni lõikeni c paindemoment kasvab nullist kuni maksimumsuuruseni $M_c=ab/l$, kui jõud asub lõike c kohal; ühikjõu liikumisel lõikest c kuni parempoolse toeni väheneb paindemoment jällegi nullini.

Praktiliselt konstrueeritakse paindemomendi mõjujoon järgmiselt. Vasakpoolse toe vertikaalile kantakse lõik a (joon. 7.3, b). Lõigu otspunktist a' ja parempoolse toe kohal läbi nullpunkti b tõmmatakse sirge, mis lõigete c ja b vahel kujutab mõjujoone parempoolse sirge. Järgnevalt tõmmatakse läbi lõike c vertikaalne sirge kuni liikumiseni parempoolse sirgega punktis c' . Mõjujoone vasakpoolseks sirgeks on sirglõik vasakpoolse toe kohal nullpunktist a kuni lõikepunktini c' lõike c vertikaalil.

Kui lõige c on lähemal parempoolsele toele, siis tõmmatakse enne vasakpoolse sirge. Parempoolse toe vertikaalile kantakse lõik b ja tõmmatakse sirge $a-b'$, leitakse lõikepunkt c' , mis ühendatakse punktiga b sirglõigu $c'-b$ abil.

Paindemomendi mõjujoone ordinaat on pikkuse dimensiooniga: $kGcm/kG=cm$, $kGm/kG=m$, $tcm/t=cm$ või $tm/t=m$.

Paindemomendi M_c mõjujoone ordinaadid kujutavad paindemomendi suurust lõikes c , kui ühikjõud asub talal vastava ordinaadi kohal.

Konsooli lõike c paindemomendi mõjujoon on esitatud joonisel 7.3, d . Olenemata ühikjõu asukohast vaadeldakse konsooli vaba otsa ja lõike c vahelise osa tasakaalu. Kui ühikjõud on lõike c ja toeristlõike vahel, siis $M_c=0$. Mõjujoone parempoolne sirge ühtib abstsisssteljega. Kui ühikjõud asub vasakul pool lõiget c (joon. 7.3, c), siis

$$M_c = -P(a-x) = -1(a-x) = -(a-x) \quad (7.5)$$

ja vasakpoolse sirge (7.5) kujutamiseks leitakse kaks ordinaati: kui $x=0$, siis $M_c=-a$ ja kui $x=a$, siis $M_c=0$. Kui ühikjõud asub konsooli vabal otsal, siis paindemoment lõikes c on negatiivne ja võrdne lõike kaugusega vabast otsast. Kui ühikjõud asub lõike c kohal, siis on paindemoment lõikes c null (joon. 7.3, d).

Konsooli paindemomendi mõjujoon lõike c jaoks koosneb kahest sirgest, mille lõikepunkt asub lõike c vertikaalil. Lõike c ja toe vaheline sirge ühtib abstsisssteljega. Mõjujoone kujutamiseks konsooli vaba otsa ja lõike c vahel kantakse vaba otsa vertikaalile lõik a , mille otspunkt a' ja nullpunkt c lõike c vertikaalil ühendatakse sirglõiguga $a'-c$ (joon. 7.3, d).

7.33. Põikjõu mõjujoon

Lihttala lõike c põikjõu Q_c mõjujoone parempoolse sirge kujutamiseks koostatakse põikjõu avaldis lõike c jaoks, kui ühikjõud mõjub paremal pool lõiget c (joon. 7.4, a), kusjuures vaadeldakse tala vasaku osa tasakaalu:

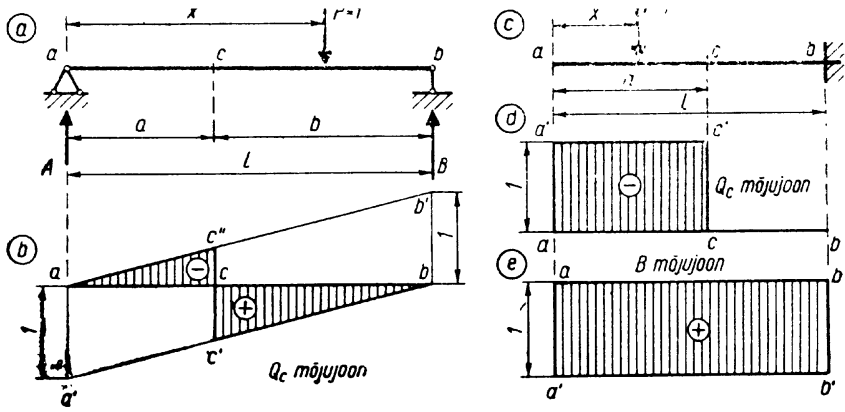
$$Q_c = A = 1(l-x)/l = (l-x)/l \quad (x > a) \quad (7.6)$$

Mõjujoone parempoolne sirge ühtib toereaktsiooni A mõjujoonega lõigete c ja b vahel.

Kui ühikjõud mõjub vasakul pool lõiget c , siis põikjõud lõikes c on võrdne toereaktsiooniga B , kuid vastupidise märgiga:

$$Q_c = -B = -1 \cdot x/l = -x/l \quad (x < a) \quad (7.7)$$

Põikjõu mõjujoon konstrueeritakse järgmiselt. Vasakpoolse toe vertikaalil kantakse abstsisssteljest allapoole ühikpikkusega lõik $a-a'$, mille otspunkt a' ja parempoolse toe vertikaalil nullpunkt b ühendatakse sirglõiguga $a'-b$ (joon. 7.4, b). Mõjujoone parempoolseks sirgeks on sellest sirglõigust lõik $c'-b$ lõigete c ja b vahel. Järgnevalt kantakse parempoolse toe vertikaalil abstsisssteljest ülespoole ühikpikkusega lõik $b-b'$, mille otspunkt b' ja vasakpoolse toe vertikaalil nullpunkt a ühendatakse sirglõiguga $b'-a$. Mõjujoone vasakpoolseks sirgeks on sellest sirglõigust lõik $a-c''$ lõigete a ja c vahel. Ilmselt $a-c'' // c'-b$. Mõjujoone parempoolse sirge vasakpoolse ordinaadi $c-c' = b/l$ ja vasakpoolse sirge parempoolse ordinaadi $c-c'' = a/l$ absoluutväärtuste summa on üks:



Joon. 7.4

$$a/l + b/l = (a+b)/l = 1$$

Ka konsooli pöikjõu mõjujoon lõike c jaoks koosneb kahest paralleelsest sirgest, mis on teineteise suhtes nihutatud ühiku võrra. Lõike c vertikaalil on aste (joon. 7.4, c ja d). Kui ühikjõud mõjub paremal pool lõiget c , siis vasaku osa tasakaalu tingimus $\Sigma Y=0$ annab $Q_c=0$. Kui ühikjõud mõjub vasakul pool lõiget c , siis sama osa tasakaalu tingimus $\Sigma Y=0$ annab $Q_c=-1$. Mõjujoone vasakpoolne sirge on abstsisssteljega paralleelne sirge $a'-c'$, mis asetseb abstsisssteljest ühiku kaugusel.

Toereaktsiooni B mõjujoon on kujutatud joonisel 7.4, e .

Pöikjõu mõjujoone ordinaadid on dimensioonita arvud: kG/kG või t/t .

Staatikaga määratavate arvutuskeemide toereaktsioonide ja sisejõudude mõjujooned koosnevad sirgjoontest (joon. 7.3, 7.4) ning paigutiste mõjujooned kõverjoontest (joon. 7.1, d).

Staatikaga määratavate arvutuskeemide kõik mõjujooned koosnevad kõverjoontest.

7.4. Mõjujoonte konstrueerimine kinemaatika meetodiga

7.4.1. Meetodi idee

Toereaktsioon või sisejõud leitakse võimalike paigutiste printsiibi alusel avaldisega (3.14):

$$X_r = -\Sigma P_i \delta p_i / \delta r_i$$

Mõjujoone ordinaatide arvutamisel on koormuseks ühikjõud ja see avaldis on siis järgmine:

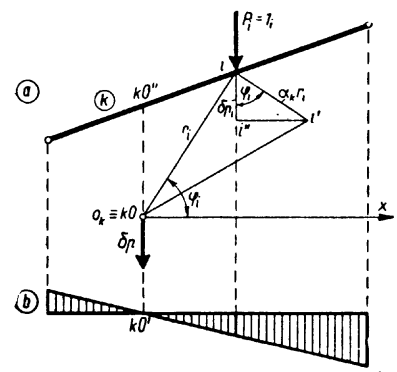
$$X_r = -1_i \delta p_i / \delta r \tag{7.8}$$

milles δ_r on eemaldatud sideme reaktsiooni X_r võimalik paigutus ja δp_i — ühikjõu rakenduspunkti siirde $\alpha_{kr} r_i = = i-i'$ projektsioon ühikjõu sihile (joon. 7.5, a)

$$\delta p_i = \alpha_{kr} r_i \cos \varphi_i = \alpha_{kr} x \tag{a}$$

Võimalikus paigutusolukorras on reaktsioonile X_r vastav paigutus δr konstant. Ühikjõu rakenduspunkti siire δp_i muutub olenevalt ühikjõu asukohast. Arvutusskeemi sõidutee siirded leitakse pooluste või pööratud kiiruste plaaniga.

Mehhanismi võimalikul liikumisel kujund k pöörduv ümber peapooluse kO . Kujundi k punktide siirded muutuvad lineaarselt kaugusega peapoolusest kO . Sõidutee punkti i siirde projektsioon ühikjõu sihile δp_i muutub lineaarselt punkti abstsissiga x , kusjuures koordinaatide algpunktiks on peapoolus kO (joon. 7.5, a ja b). Järe-



Joon. 7.5

leitakse toereaktsioon

$$A = -1_i \delta p_i / \delta r \quad (b)$$

Reaktsioonile A vastav paigutus $\delta r = a - a' < 0$, kuna rakenduspunkti a siire on reaktsiooni suunaga vastupidine. Mõjujoone ordinaadi mõõtkava määramiseks võetakse $\delta r = -1$. Valemi (b) kuju on nüüd:

$$A = -1 \delta p_i / (-1) = \delta p_i \quad (c)$$

Reaktsiooni A mõjujooneks on kujundi I vertikaalsiirde epüür (joon. 7.7, c).

7.43. Paindemomendi mõjujoon

Paindemomendi M_c mõjujoone moodustamiseks eemaldatakse löikest c paindemomenti vastuvõttev side, s.t. asetatakse löikesse c liigend. Ühikjõu tasakaalustamiseks rakendatakse ristlõikesse c kaks võrdset vastupidi mõjuvat momenti M_c (joon. 7.8, a). Järgnevalt kujutatakse mehhanismi vertikaalsiirde epüür (joon. 7.8, b).

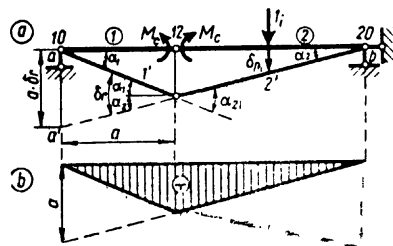
Mehhanism koosneb elementidest 1 ja 2. Elementide 1 ja 2 ühendusliigend on kõrvalpooluseks 12. Elementi 2 peapooluseks on toeliigend $b = 20$. Elementi 1 peapooluseks on toevarda a ja sirge 12-20 sihtide löikepunkt 10. Element 1 pöörduv ümber toeliigendi $a = 10$. Mehhanismi võimaliku siirde epüür kujutatakse kahe sirgega 1' ja 2', mis lõikuvad kõrvalpooluse 12 vertikaalil. Epüüri teljega lõikuvad need sirged vastavalt peapooluste 10 ja 20 vertikaalidel.

Võimalike paigutiste printsiibi alusel koostatud võrrandist

$$M_c \alpha_1 + M_c \alpha_2 + 1_i \delta p_i = 0 \quad (d)$$

avaldatakse paindemoment

$$M_c = -1_i \delta p_i / (\alpha_1 + \alpha_2) = -\delta p_i / \delta r \quad (e)$$

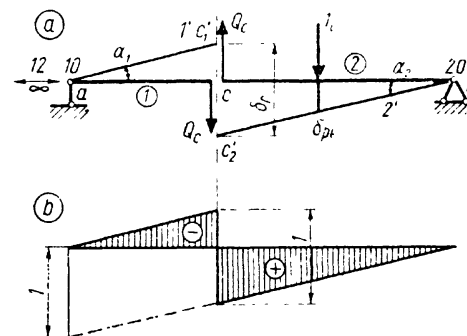


Joon. 7.8

Pööre $\alpha_1 < 0$ ja pööre $\alpha_2 < 0$, sest elemendid 1 ning 2 pöörduvad vastupidises suunas nendel elementidel mõjuvate momentidega M_c . Kuna paigutised on väikesed, siis nurkade α_1 ja α_2 asemel võetakse tangensid: $\alpha_1 + \alpha_2 = \delta r = a - a' / a$. Kui võtta $\delta r = -1$, siis $a - a' = a$ ja paindemomendi mõjujoone ordinaadid võrduvad võimaliku siirde epüüri ordinaatidega $M_c = \delta p_i$ (joon. 7.8, b).

7.44. Põikjõu mõjujoon

Põikjõu Q_c mõjujoone moodustamiseks eemaldatakse löikest c põikjõudu vastuvõttev side ja ühikjõu tasakaalustamiseks rakendatakse tala teljega risti kaks võrdset vastupidise suunaga jõudu Q_c (joon. 7.9, a). Ristlõikesse c jääb pärast põikjõudu vastuvõtva sideme eemaldamist kaks tala teljega paralleelset sidet, mis lubavad mehha-



Joon. 7.9

nismi elementidel 1 ja 2 teineteise suhtes nihkuda, kuid ei võimalda ühe elemendi pöoret teise suhtes. Elementide 1 ja 2 kõrvalpoolus 12 asetseb kahe paralleelse sideme sihis, s.t. varda telje sihis, lõpmatuses. Elementide 1 ja 2 peapoolused ühtivad toeliigenditega $10 = a$ ja $20 = b$ (joon. 7.9, a). Mehhanismi elemendid pöörduvad ümber peapooluste 10 ja 20, kuid jäävad teineteisega paralleelseks. Võimaliku siirde epüür koosneb kahest paralleelsest sirgest 1' ja 2', mille nullpunktid on tugede kohal. Võimalike paigutiste printsiibi alusel koostatud võrrandist

$$Q_c(c - c'_1) + Q_c(c - c'_2) + 1_i \delta p_i = 0$$

avaldatakse põikjõud

$$Q_c = -1, \delta p_i / (c - c'_1 + c - c'_2) = 1, \delta p_i / (c'_1 - c'_2) = -\delta p_i / \delta r \quad (f)$$

Siire $\delta r = c'_1 - c'_2 = c - c'_1 + c - c'_2 < 0$, sest elementidele 1 ja 2 mõjuvate põikjõudude Q_c rakenduspunktide siirded $c - c'_1$ ja $c - c'_2$ on negatiivsed.

Kui võtta $\delta r = -1$, siis on vertikaalsiirde epüür põikjõu mõjujooneks: $Q_c = \delta p_i$ (joon. 7.9, b). Paremal pool lõiget c on mõjujoone ordinaadid positiivsed, sest $\delta p_i > 0$, ja vasakul pool negatiivsed, sest $\delta p_i < 0$.

7.5. Mõjujoonte omadused ja kasutamine

7.51. Koormused, mille mõju saab arvutada mõjujoontega

Funktsiooni Z_k mõjujoone ordinaat η_{ki} kujutab konstruktsiooni lõikes i mõjuvast ühikjõust põhjustatud funktsiooni Z suurust lõikes k .

Mõjujoontega arvutatakse toereaktsioone, sisejõude, deformatsioone ja paigutisi igasugusest ühikjõuga paralleelsest koormusest.

7.52. Üks koondatud jõud

Konstruktsioonil lõikes i mõjuvast koondatud jõust $P_i \neq 1$ põhjustatud funktsiooni Z väärtus on võrdne jõu P_i ja jõu kohal oleva mõjujoone ordinaadi η_i korrutisega

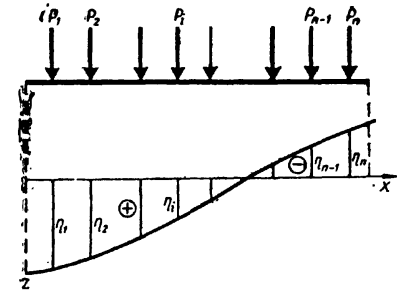
$$Z = P_i \eta_i \quad (7.9)$$

7.53. Paralleelsed koondatud jõud

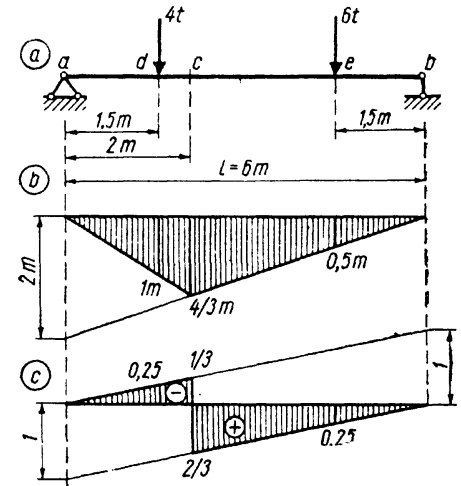
Olgu konstruktsioonil ühikjõuga paralleelsetest koondatud jõududest koosnev koormus P_1, P_2, \dots, P_n (joon. 7.10). Sisejõud või paigutis võrdub jõudude mõjumise sõltumatuse printsiibi alusel jõudude ja nende kohal olevate mõjujoone ordinaatide korrutiste summaga:

$$Z = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + \dots + P_n \eta_n = \sum P_i \eta_i \quad (7.10)$$

Ordinaadi η_i juures arvestatakse ka märki.



Joon. 7.10



Joon. 7.11

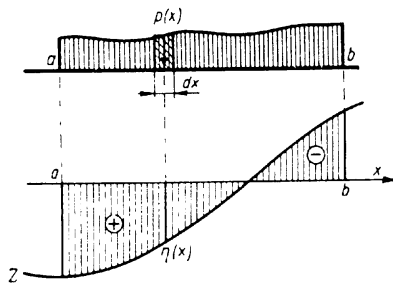
Näide 7.1. Arvutada mõjujoontega paindemoment ja põikjõud joonisel 7.11, a kujutatud tala lõikes c . Paindemomendi ja põikjõu mõjujooned on esitatud joonisel 7.11, b ja c. Jõudude kohal olevate ordinaatide suurused on märgitud mõjujoontel. Paindemoment ja põikjõud lõikes c arvutatakse valemiga (7.10):

$$M_c = 4 \cdot 1,0 + 6 \cdot 0,5 = 7,0 \text{ tm}$$

$$Q_c = 6 \cdot 0,25 - 4 \cdot 0,25 = 0,5 \text{ t}$$

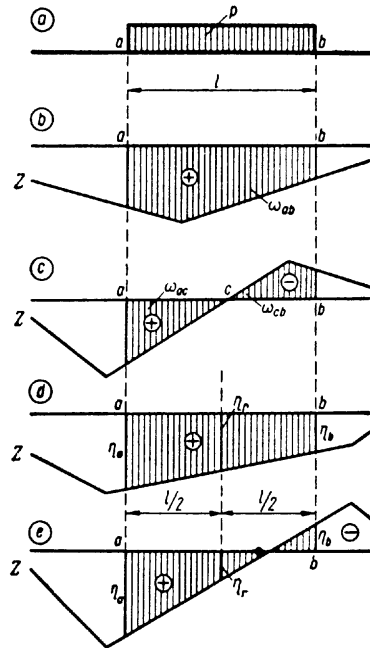
7.54. Jaotatud koormus

Konstruktsioonil vahemikus $a-b$ muutuva intensiivsusega koormuse $p(x)$ puhul võetakse koormuse intensiivsus diferentsiaali dx pikkusel konstantseks (joon. 7.12). Sellel



Joon. 7.12

Joon. 7.13



pikkusel vaadatakse koormusele kui koondatud jõule suurusega $p(x)dx$. Elementaarjõust $p(x)dx$ tingitud funktsiooni Z väärtus arvutatakse valemiga (7.9):

$$dZ = p(x)dx \cdot \eta(x)$$

milles $\eta(x)$ on mõjujoone ordinaat elementaarjõu kohal (joon. 7.12). Nüüd kasutatakse valemit (7.10), kusjuures piirile minekul asendatakse summa märk integraali märgiga:

$$Z = \int_a^b p(x)\eta(x)dx \quad (7.11)$$

Konstruksioonile vahemikus $a-b$ rakendatud koormusest põhjustatud Z suurus on arvutatav, kui on teada koormuse intensiivsus $p(x)$ ja mõjujoone võrrand $\eta(x)$.

Ühtlaselt jaotatud koormuse puhul $p(x) = p = \text{konst.}$ tuuakse koormuse intensiivsus p valemis (7.11) integraalmärgi ette ja integreerimise tulemusena saadakse

$$Z = p \int_a^b \eta(x)dx = p\omega_{a-b} \quad (7.12)$$

milles ω_{a-b} on mõjujoone epüüri pindala koormuse mõju-
mise ulatusel $a-b$.

Ühtlaselt jaotatud koormusest põhjustatud toereakt-
siooni, sisejõu, paigutise või deformatsiooni arvutamisel
vastava mõjujoonega korrutatakse koormuse intensiivsus
 p koormuse all oleva mõjujoone epüüri pindalaga (joon.
7.13, a ja b). Kui mõjujoone ordinaadid koormuse kohal
on kahemärgilised, siis võetakse pindalad vastavate mär-
kidega (joon. 7.13, a ja c):

$$Z = p(\omega_{a-c} - \omega_{c-b}) \quad (a)$$

7.55. Mõjujoone sirge osa omadus

Kui ühtlaselt jaotatud koormuse pikkusel l mõjujoon
on sirge (7.13, d ja e), siis arvutatakse mõjujoone pind-
ala koormuse kohal valemiga

$$\omega_{a-b} = l(\eta_a + \eta_b)/2 \quad (b)$$

milles η_a ja η_b on mõjujoone ordinaadid koormuse otse
kohal.

Koormuse keskkohal asuv ordinaat η_r võrdub koor-
muse otste kohal asuvate mõjujoone ordinaatide pool-
summaga

$$\eta_r = (\eta_a + \eta_b)/2 \quad (c)$$

Valem (b) on siis järgmine:

$$\omega_{a-b} = l\eta_r \quad (d)$$

Mõjujoone sirge osa kohal asetseva koormuse mõju
arvutatakse nüüd valemiga

$$Z = p\omega_{a-b} = pl\eta_r \quad (7.13)$$

ehk

$$Z = R\eta_r \quad (7.14)$$

milles $R = pl$ on koormuse resultant.

Valem (7.14) on kehtiv ka mitteühtlase jaotatud koor-
muse, samuti koondatud jõudude puhul.

Mõjujoone kujutamisel kinemaatika meetodiga vastab
mõjujoone sirgele h' arvutuskeemist ühe sideme eemal-
damisega saadud mehhanismi geomeetriselt muutumatu
kujund h . Geomeetriselt muutumatule kujundile raken-

datud koormust võib asendada ekvivalentkoormusega, kusjuures ei muutu toereaktsioonid ja sisejõud väljaspool koormuse piire. Järelikult on mõjujoone sirge osa ulatusel konstruktsioonile rakendatud koormuse resultandi mõju võrdne koormuse mõjuga:

$$Z = \sum P_i \eta_i = R \eta_r \quad (7.15)$$

milles $R = \sum P_i$ ja η_r on mõjujoone ordinaat koormuse resultandi R vertikaalil.

Näide 7.2. Arvutada joonisel 7.14, a kujutatud ühtlaselt jaotatud koormusest $p = 2$ t/m lihttala lõikes d paindemoment ja põikjõud mõjujoontega.

Paindemomendi M_d mõjujoone (joon. 7.14, b) epüüri pindala koormuse ulatusel on:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = (1/2)(0,5 + 1,5)4,0 + (1/2) \cdot 1,5 \cdot 2,0 = 5,5 \text{ m}^2$$

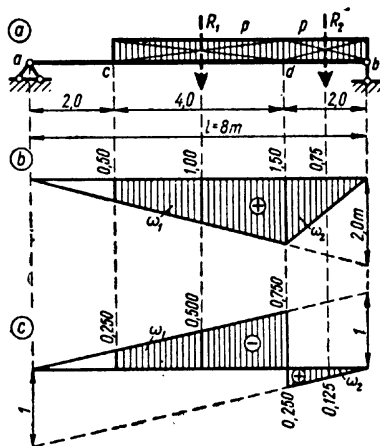
ja paindemoment lõikes d :

$$M_d = p\omega = 2 \cdot 5,5 = 11,0 \text{ tm}$$

Koormuse resultandid mõjujoone vasakpoolse ja parempoolse sirge kohal on $R_1 = 2 \cdot 4 = 8$ t ja $R_2 = 2 \cdot 2 = 4$ t. Mõjujoone ordinaadid resultantide kohal on: $\eta_1 = 1,0$ m ja $\eta_2 = 0,75$ m. Kasutades mõjujoone sirge osa omadust, on paindemoment lõikes d :

$$M_d = R_1 \eta_1 + R_2 \eta_2 = 8 \cdot 1,0 + 4 \cdot 0,75 = 11,0 \text{ tm}$$

Põikjõu Q_d mõjujoone ordinaadid on vasakul pool lõiget d negatiivsed ja paremal pool positiivsed (joon. 7.14, c). Negatiivne pindala $\omega_1 = (1/2)(0,25 + 0,75) \cdot 4 = 2,0$ m ja positiivne pindala $\omega_2 = (1/2)0,25 \cdot 2 = 0,25$ m.



Joon. 7.14

Põikjõud lõikes d

$$Q_d = p(\omega_2 - \omega_1) = 2(0,25 - 2,00) = -3,5 \text{ t}$$

ehk

$$Q_d = R_1 \eta_1 + R_2 \eta_2 = 8(-0,500) + 4 \cdot 0,125 = -3,5 \text{ t}$$

7.56. Sõlmkoormus

Ühikjõud liigub konstruktsioonil sõlmpunktide $m-1$ ja m vahel. Funktsiooni Z otsese koormuse mõjujoon on kujutatud joonisel 7.15 kõvera peenjoonena. Sõlmkoormuse puhul abitalale rakendatud ühikjõud mõjub peatalale kahe komponendina naabersõlmede $m-1$ ja m ristlõigetel vastavalt

$$P_{m-1} = 1(\lambda - x)/\lambda \quad \text{ja} \quad P_m = 1x/\lambda \quad (e)$$

milles x on ühikjõu kaugus sõlmest $m-1$ ja λ — sõlmede vahekaugus. Funktsiooni Z otsese koormuse mõjujoone (kõver kriipsjoon) ordinaadid sõlmede $m-1$ ja m kohal on vastavalt η_{m-1} ja η_m .

Kui ühikjõud asub abitalal sõlmes $m-1$, siis mõjub ta sõlme kaudu otseselt peatala samas lõikes. Funktsiooni Z suurus sõlmkoormusel koormuse niisuguse asetuse puhul arvutatakse otsese koormuse mõjujoone ordinaadiga η_{m-1} , s.t. sõlme kohal on otsese ja sõlmkoormuse mõjujoonte ordinaadid võrdsed. Sõlmede vahel on sõlmkoormuse kaju esialgu tundmatu. Sõlmkoormuse mõjujoone ordinaati sõlmede vahel üksikjõu vertikaalil tähistatakse η_x .

Sõlmkoormuse puhul jaotub ühikjõud sõlmedesse $m-1$ ja m ning funktsiooni Z suurus arvutatakse valemiga (7.10):

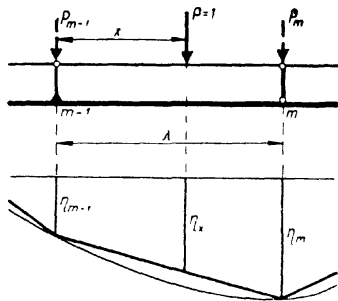
$$Z = P_{m-1} \eta_{m-1} + P_m \eta_m \quad (f)$$

Viies avaldisse (f) komponentide suurused (e), saab see kaju

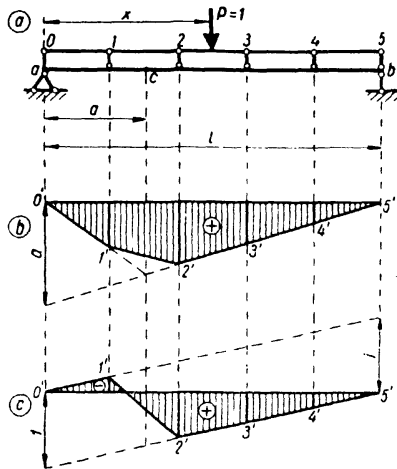
$$Z = [1(\lambda - x)/\lambda] \eta_{m-1} + [1x/\lambda] \eta_m \quad (g)$$

Et vältida ühikjõu komponentide arvutamist ja kahe korrutise liitmist, kujutatakse sõlmede vahel sõlmkoormuse mõjujoon, mille ordinaadi η_x korruptamisel ühikjõuga saadakse funktsiooni Z suurus sõlmkoormusel:

$$Z = 1 \eta_x \quad (h)$$



Joon. 7.15



Joon. 7.16

Võrrandite (g) ja (h) vasakud ja paremad pooled on võrdsed, mille põhjal saadakse sõlmkoormuse mõjujoone võrrand sõlmede $m-1$ ja m vahel:

$$\eta_x = (\lambda - x)\eta_{m-1}/\lambda + x\eta_m/\lambda \quad (i)$$

Avaldis (i) kujutab sirge võrrandit. Järelikult sõlmkoormuse mõjujoon kahe naabersõlme vahel on sirgjoon. Otsese ja sõlmkoormuse mõjujoonte ordinaadid on võrdsed sõlmede kohal: kui $x=0$, siis $\eta_{x=0} = \eta_{m-1}$ ja kui $x=\lambda$, siis $\eta_{x=\lambda} = \eta_m$.

Sõlmkoormuse mõjujoone kujutamiseks projekteeritakse sõlmed otsese koormuse mõjujoonele ja naabersõlmede projektsioonid ühendatakse sirglõikudega. Sõlmkoormuse mõjujoon kujutab hulknurka, mille tippude ordinaadid sõlmede kohal ühtivad otsese koormuse mõjujoone ordinaatidega.

Näide 7.3. Kujutada joonisel 7.16, a esitatud tala lõike c paindemomendi ja põikjõu mõjujooned sõlmkoormuse jaoks.

Algul moodustatakse lõike c jaoks otsese koormuse paindemomendi ja põikjõu mõjujooned. Otsese koormuse mõjujooned on joonisel 7.16, b ja c sõlm punktide vahel kujutatud punktiirjoonega ja teiste sõlmede vahel pideva joonega. Otsesel koormusel on koormus rakendatud vahetult peatalale $a-b$. Järgnevalt projekteeritakse sõlmed $0, 1, 2, \dots, 5$ otsese koormuse mõjujoontele ja tähistatakse vastavalt $0', 1', 2', \dots, 5'$. Naabersõlm punktide projektsioonid ühendatakse sirg-

lõikudega. Kui lihttalal on sõlmed ka tugeled, siis erinevad sõlmkoormuse mõjujooned otsese koormuse mõjujoontest ainult kahe sõlme vahel, kus asub lõige c . Joonistel 7.16, b ja c on sõlmede 1 ja 2 vahel sõlmkoormuse mõjujooned kujutatud pidevjoonega ja otsese koormuse mõjujooned punktiirjoonega.

7.6. Koormuse ebasoodsaim asetus

7.6.1. Funktsiooni ekstreemumid

Mõjujoone ordinaadid on positiivsed ja negatiivsed. Mõjujoone ja telgjoone lõikepunkte nimetatakse nullpunktideks. Nullpunktid jaotavad mõjujoone positiivseteks ja negatiivseteks osadeks. Mõjujoonega leitakse konstruktsiooni kindlaksmääratud lõike jaoks liikuva koormuse ebasoodsaim (kõige ohtlikum) asetus, mille juures Z omab suurimat positiivset ($\max Z$) või negatiivset ($\min Z$) väärtust. Positiivsete ordinaatidega mõjujoone puhul on $\min Z$ funktsiooni Z väikseim väärtus. Negatiivsete ordinaatidega mõjujoone puhul on $\max Z$ funktsiooni väikseim negatiivne väärtus.

7.6.2. Ühtlaselt jaotatud koormus

Alalisest jaotatud koormusest g (kG/m) ja ajutisest jaotatud koormusest p (kG/m) tekib $\max Z$ ajutise koormuse rakendamisel konstruktsioonile mõjujoone positiivse osa kohal ja $\min Z$ ajutise koormuse rakendamisel konstruktsioonile mõjujoone negatiivse osa kohal:

$$\max Z = g(\omega_+ - \omega_-) + p\omega_+; \quad \min Z = g(\omega_+ - \omega_-) - p\omega_- \quad (a)$$

milles ω_+ ja ω_- on vastavalt positiivse osa ja negatiivse osa pindala.

7.6.3. Hulknurkne mõjujoon

Ühe koondatud jõu puhul tekib maksimaalne või minimaalne sisejõud siis, kui jõud asetseb konstruktsioonil vastavalt mõjujoone suurima positiivse või negatiivse ordinaadi kohal:

$$\max Z = P\eta_{\max}; \quad \min Z = P\eta_{\min} \quad (b)$$

Mitmest koondatud jõust P_1, P_2, \dots, P_n , mille vahekaugused koormuse liikumisel ei muutu, arvutatakse suurimad sisejõud tavaliselt proovimise teel, kusjuures võrreldakse koormuse erinevate asendite jaoks leitud sisejõudusid. Sisejõud arvutatakse mõjujoone abil valemiga (7.10): $Z = \sum P_i \eta_i$. Koormus asetatakse niimoodi, et suuremad jõud oleksid suuremate ordinaatide kohal, ning et vastavalt sellele, kas leitakse $\max Z$ või $\min Z$, oleks konstruktsioonil koormatud ainult mõjujoone positiivne või negatiivne osa. Koormussüsteemi hõlpsamaks nihutamiseks mõjujoone kohal joonestatakse jõudude asetuse skeem paberiribale.

Olgu mõjujoon hulknurk, mille küljed $1', 2', \dots, r'$ moodustavad telgjoonega nurgad $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ (joon. 7.17). Mõjujoone langeva sirge (sirged $1', 2', 4'$) puhul on nurk positiivne ja mõjujoone positiivsed ordinaadid suurenevad ning negatiivsed ordinaadid vähenevad paremale poole; tõusva sirge, s.t. negatiivse nurga (joon. 7.17 nurgad α_3 ja α_5) puhul vastupidi.

Mõjujoone sirge i' ($i' = 1', 2', \dots, r'$) kohal mõjuvad jõud asendatakse nende resultantjõuga R_i ja sisejõud arvutatakse valemiga (7.10):

$$Z = R_1 \eta_1 + R_2 \eta_2 + \dots + R_r \eta_r = \sum R_i \eta_i \quad (c)$$

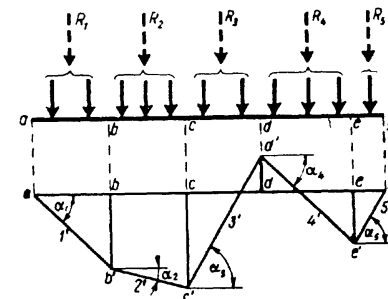
Koormuse ebasoodsaima asetuse puhul on sisejõud suurim. Koormuse nihkumisel ebasoodsaimast asukohast dx võrra paremale või vasakule on sisejõu juurdekasv negatiivne ($dZ < 0$). Koormussüsteemi nihkumisel dx võrra paremale või vasakule poole tingimusel, et ükski jõududest ei lähe mõjujoone ühelt sirgelt teisele, muutuvad kõigi resultantjõudude kohal olevad ordinaadid $d\eta_i = dx \operatorname{tg} \alpha_i$ võrra. Sisejõu juurdekasv arvutatakse valemiga

$$dZ = dx (R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + \dots + R_r \operatorname{tg} \alpha_r)$$

ehk

$$dZ = dx \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i \quad (d)$$

Sisejõud Z kasvab koormuse liikumisel niikaua, kui juurdekasv $dZ = dx \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i > 0$. Juurdekasv $dZ > 0$ siis, kui dx ja $\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i$ on samamärgilised. Resultantjõu ja selle kohal oleva mõjujoone sirge ning horisontaali vahelise nurga tangensi korrutiste positiivse summa



Joon. 7.17

($\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i > 0$) puhul peab selleks, et funktsioon Z kasvaks ($dZ > 0$), koormussüsteem nihkuma paremale poole ($dx > 0$). Koormuse liikumisel paremale kasvab sisejõud Z seni, kuni $\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i$ muutub negatiivseks. Kuna $\operatorname{tg} \alpha_i = \text{konst}$, siis mõjujoone sirgete osade kohal mõjuvate jõudude resultantjõudude ja tangensi korrutis $\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i$ muutub ainult resultantjõudude R_i muutumisel. Resultantjõud R_i muutuvad ühe jõu liikumisel üle mõjujoone tipu ühelt sirgelt teisele.

Resultantjõu ja nurga tangensi korrutiste negatiivse summa ($\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i < 0$) puhul on sisejõu Z juurdekasv positiivne ($dZ > 0$) seni, kuni koormussüsteemi liikumisel vasakule ($dx < 0$) korrutiste summa ($\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i$) muutub positiivseks. Negatiivne korrutiste summa $\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i$ saab muutuda positiivseks jõu üleminekul mõjujoone tipust.

Koormuse ebasoodsaimal asetusel on üks jõududest mõjujoone tipu kohal. See tingimus on vajalik, mitte aga küllaldane. Koormuse ebasoodsaimal asetusel rahuldab mõjujoone tipu kohal olev jõud järgmist tingimust: kui jõud on mõjujoone tipust vasakul, siis $\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i > 0$, ja kui paremal, siis $\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i < 0$. Jõudu, mis rahuldab seda tingimust, nimetatakse kriitiliseks jõuks. Juhul, kui $\sum P_i \operatorname{tg} \alpha_i = 0$, on sisejõud konstantne koormuse liikumisel vasakule või paremale seni, kuni ükski jõududest ei lähe üle mõjujoone tipu.

Hulknurkse kujuga mõjujoonel võib olla mitu kriitilist jõudu. Sisejõu suurus arvutatakse igale kriitilisele jõule vastaval koormuse asetusel; ebasoodsaima asetuse leitakse võrdlemise teel.

Näide 7.4. Arvutada suurim paindemoment joonisel 7.18, *a* kujutatud tala lõikes *c*. Koormusskeem on esitatud joonisel 7.18, *b*: $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = 7$ t, $P_6 = P_7 = 6$ t. Paindemomendi M_c mõjujoon sõlmkoormuse jaoks on kujutatud joonisel 7.18, *g*. Mõjujoone sirgete kaldenurkade tangensid on: $\operatorname{tg} \alpha_1 = 2/3$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = 0$, $\operatorname{tg} \alpha_3 = -1/3$.

Asugu jõud P_1 ordinaadi *d-d'* kohal sirgel 2' (joon. 7.18, *c*). Siis:

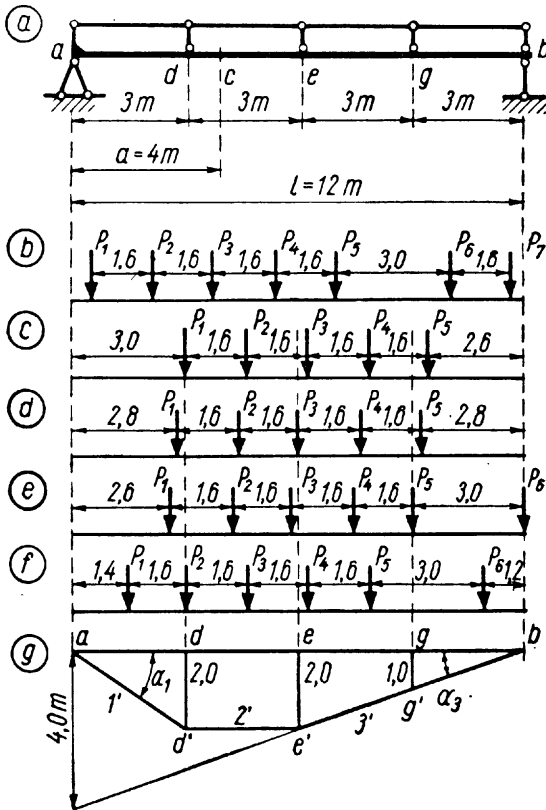
$$R_1 = 0, \quad R_2 = 2 \cdot 7 = 14 \text{ t}, \quad R_3 = 3 \cdot 7 = 21 \text{ t}$$

$$\Sigma R_i \operatorname{tg} \alpha_i = 0 \cdot 2/3 + 14 \cdot 0 - 21 \cdot 1/3 = -7 \text{ t} < 0$$

Kui jõud P_1 asub sirgel 1', siis: $R_1 = 7$ t, $R_2 = 7$ t, $R_3 = 21$ t.

$$\Sigma R_i \operatorname{tg} \alpha_i = 7 \cdot 2/3 + 7 \cdot 0 - 21 \cdot 1/3 = -7/3 \text{ t} < 0$$

Mõlemal korral on $\Sigma R_i \operatorname{tg} \alpha_i < 0$. Selleks et paindemoment suureneks, on vaja koormust nihutada vasakule. Koormuse liikumisel vasakule tuleb jõud P_3 esimesena mõjujoone tipu kohale sõlmes *e*



Joon. 7.18

(joon. 7.18, *d*). Kui jõud P_3 on ordinaadi *e-e'* kohal sirgel 3', siis resultantjõud on samad kui eelmisel juhul ja $\Sigma R_i \operatorname{tg} \alpha_i = -7/3 \text{ t} < 0$. Kui jõud P_3 on sirgel 2', siis $R_1 = 7$ t, $R_2 = 14$ t ja $R_3 = 14$ t ning

$$\Sigma R_i \operatorname{tg} \alpha_i = 7 \cdot 2/3 + 14 \cdot 0 - 14 \cdot 1/3 = 0$$

Koormuse edasisel liikumisel vasakule on paindemoment M_c seni konstantne, kuni ükski jõud ei lähe üle mõjujoone murdepunkti. Paindemomendi arvutamisel avaldatakse mõjujoone ordinaadid sirgel 1' korrutisena $x \operatorname{tg} \alpha_1$ ning sirgel 3' korrutisena $x' \operatorname{tg} \alpha_3$, kusjuures x tähistab kaugust vasakpoolsest ning x' — parempoolsest toest.

$$M_c = x_1 \operatorname{tg} \alpha_1 P_1 + 2(P_2 + P_3) - \operatorname{tg} \alpha_3 (x'_4 P_4 + x'_5 P_6) =$$

$$= 2,8(2/3)7 + 2 \cdot 14 - (1/3)(4,4 \cdot 7 + 2,8 \cdot 7) = 57,87 \text{ tm}$$

Koormuse liikumisel vasakule ületab jõud P_6 esimesena mõjujoone murdepunkti, tulles konstruktsioonile toe *b* kohal (joon. 7.18, *e*).

Kui jõud P_6 ei ole veel talal, siis $\Sigma R_i \operatorname{tg} \alpha_i = 0$.

Kui jõud P_6 mõjub vasakul pool tuge *b*, siis $R_1 = 7$ t, $R_2 = 14$ t ja $R_3 = 20$ t ning

$$\Sigma R_i \operatorname{tg} \alpha_i = 7 \cdot 2/3 - 20 \cdot 1/3 = -2 \text{ t} < 0.$$

Paindemoment

$$M_c = 2,6(2/3) \cdot 7 + 2 \cdot 7 \cdot 2 + (1/3)(4,6 + 3,0)7 = 57,87 \text{ tm}$$

Kuna $\Sigma R_i \operatorname{tg} \alpha_i = -2 < 0$, siis koormuse liikumisel vasakule paindemoment suureneb. Esimesena tuleb nüüd mõjujoone tipu kohale jõud P_2 sõlmes *d*. Kui jõud P_2 asetseb sirgel 2', siis $\Sigma R_i \operatorname{tg} \alpha_i = -7$, ja kui sirgel 1', siis $R_1 = 14$ t, $R_2 = 7$ t ning $R_3 = 20$ t; $\Sigma R_i \operatorname{tg} \alpha_i = 14 \cdot 2/3 + 7 \cdot 0 - 20 \cdot 1/3 = 8/3 > 0$. Jõu P_2 üleminekul mõjujoone murdepunkti sõlme *d* kohal muutub korrutiste summa $\Sigma R_i \operatorname{tg} \alpha_i$ märk positiivseks ja koormuse edaspidisel liikumisel vasakule paindemoment väheneb. Vastavalt joonisel 7.18, *f* näidatud koormuse asetusele, kui jõud P_2 on sõlme *d* kohal, on suurim paindemoment

$$M_c = (1,4 + 3,0) \cdot 7 \cdot 2/3 + 7 \cdot 2 + [(5,8 + 4,2)7 + 1,2 \cdot 6] \cdot 1/3 = 60,27 \text{ tm}$$

Analoogiliselt arvutatakse suurim paindemoment M_c , kui koormus on ümber pööratud ja liigub vasakult paremale.

7.64. Kolmnurkne mõjujoon

Kolmnurkne mõjujoon on hulknurkse mõjujoone erijuht. Koormuse ebasoodsaimal asetusel mõjujoone suurima ordinaadi kohal olev kriitiline jõud tähistatakse P_m (joon. 7.19). Kui jõud P_m on mõjujoone tipu kohal parempoolsel sirgel *c'-b*, siis $\Sigma R_i \operatorname{tg} \alpha_i < 0$:

$$\operatorname{tg} \alpha_v \sum_{i=1}^{m-1} P_i + \operatorname{tg} \alpha_p \sum_{i=m}^n P_i < 0 \quad (e)$$

ja kui vasakpoolisel sirgel *a-c'*, siis

$$\operatorname{tg} \alpha_v \sum_{i=1}^m P_i + \operatorname{tg} \alpha_p \sum_{i=m+1}^n P_i > 0 \quad (f)$$

Mõjujoone kohal olevate jõudude arv on n .
Mõjujoone sirgete kaldenurkade tangensid on:

$$\operatorname{tg} \alpha_v = \eta_c / a, \quad \operatorname{tg} \alpha_p = -\eta_c / b, \quad \operatorname{tg} \alpha_p / \operatorname{tg} \alpha_v = -a / b \quad (g)$$

Pärast võrratuste (e) ja (f) jagamist vasakpoolse sirge kaldenurga tangensiga ($\operatorname{tg} \alpha_v$) ja tingimuste (g) sisseviimist saavad nad kuju

$$\sum_{i=1}^{m-1} P_i - \frac{a}{b} \sum_{i=m}^n P_i < 0$$

$$\sum_{i=1}^m P_i - \frac{a}{b} \sum_{i=m+1}^n P_i > 0$$

ehk

$$\sum_{i=1}^{m-1} P_i < \frac{a}{b} \sum_{i=m}^n P_i; \quad \frac{a}{b} \sum_{i=m+1}^n P_i < \sum_{i=1}^m P_i \quad (h)$$

Jagades esimese ja teise võrratuse vastavalt jõudude summaga $\sum_{i=m}^n P_i$ ja $\sum_{i=m+1}^n P_i$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m-1} P_i}{\sum_{i=m}^n P_i} < \frac{a}{b}; \quad \frac{a}{b} < \frac{\sum_{i=1}^m P_i}{\sum_{i=m+1}^n P_i}$$

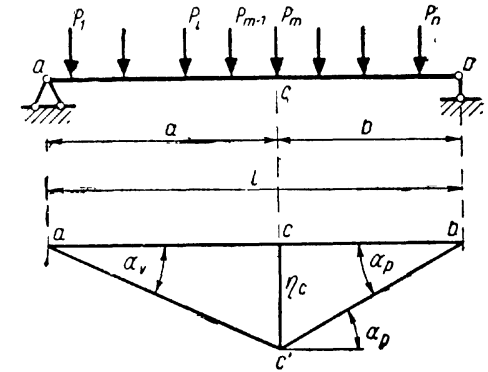
ning liites murdude nimetajatele murdude lugejad, saadakse järgmised võrratused:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m-1} P_i}{\sum_{i=1}^{m-1} P_i + \sum_{i=m}^n P_i} < \frac{a}{a+b}; \quad \frac{a}{a+b} < \frac{\sum_{i=1}^m P_i}{\sum_{i=1}^m P_i + \sum_{i=m+1}^n P_i}$$

ehk

$$\frac{\sum_{i=1}^{m-1} P_i}{\sum_{i=1}^n P_i} < \frac{a}{l} < \frac{\sum_{i=1}^m P_i}{\sum_{i=1}^n P_i} \quad (i)$$

Korrutades nüüd võrratused (i) mõjujoone kohal ole-



Joon. 7.19

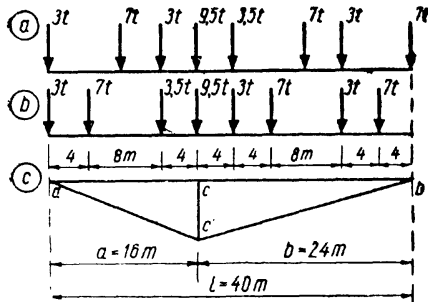
vate jõudude resultantiga $R = \sum_{i=1}^n P_i$, saadakse tingimus kriitilise jõu P_m jaoks:

$$\sum_{i=1}^{m-1} P_i < \frac{a}{l} R < \sum_{i=1}^m P_i \quad (7.16)$$

Jõud, mis asetseb kolmnurkse kujuga mõjujoone suurima ordinaadi kohal ja rahuldab tingimust (7.16), määrab kindlaks koormuse ebasoodsaima asetuse selle mõjujoone jaoks. Tingimus (7.16) näitab, et mõjujoone kohal konstruksioonile rakendatud jõudude resultant R , mis on korruutatud suhtega a/l , on suurem kui mõjujoone vasaku osa kohal mõjuvate jõudude summa ilma kriitilise jõuta $\sum_{i=1}^{m-1} P_i$ ja väiksem kui nende jõudude summa koos kriitilise jõuga $\sum_{i=1}^{m-1} P_i + P_m = \sum_{i=1}^m P_i$.

Erijuhul võib esineda kriitilise jõu tingimuses ühe võrratusmärgi asemel võrdusmärk. Kui parempoolse võrratusmärgi asemel on võrdusmärk, siis koormuse niisugusel asetusel, mille juures mõjujoone suurim ordinaat asub jõudude P_m ja P_{m+1} vahel, on sisejõud konstantne ja suurim. Kui vasakpoolse võrratusmärgi asemel on võrdusmärk, siis sisejõud on konstantne ja suurim, kui mõjujoone suurim ordinaat on jõudude P_{m-1} ja P_m vahel.

Näide 7.5. Leida joonisel 7.20, c kujutatud kolmnurkse mõjujoone jaoks kriitiline jõud ja arvutada suurim sisejõud autokolonnist



Joon. 7.20

H-10. Autokolonni H-10 skeem sõidusuunaga vasakult paremale ja paremalt vasakule on näidatud joonisel 7.20, *a* ja *b*.

Autokolonnis on üks jõududest tunduvalt suurem kui teised ja koormuse ebasoodsaimal asetusel on see jõud mõjujoone suurima ordinaadi kohal. Jääb selgitada, millise liikumissuuna puhul tekib suurim sisejõud.

Kui autokolonn liigub vasakult paremale ja raskeima auto tagatelg on lõike *c* kohal (joon. 7.20, *a*), siis on autokolonni kaal mõjujoone ulatusel $R = 9,5 + 3,5 + 2(7 + 3) = 33,0$ t. Resultantjõus $R = 33,0$ t ei ole arvestatud mõjujoone nullordinaatide kohal olevaid koormusi. Kriitilise jõu tingimus $10 < (16/40) \cdot 33 = 13,2 < 19,5$ on rahuldatud. Sellele koormusasetusele vastav sisejõud

$$S = \frac{1}{16}(7 \cdot 8 + 3 \cdot 12 + 9,5 \cdot 16) + \frac{1}{24}(3,5 \cdot 20 + 7 \cdot 12 + 3 \cdot 8) = 22 \frac{2}{3} \text{ t}$$

Paremalt vasakule liikumisel on mõjujoone kohal autokolonni kaal (joon. 7.20, *b*) $R = 13 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 = 40$ t. Kriitilise jõu tingimus

$$10,5 < (16/40) \cdot 40 = 16 < 20$$

on rahuldatud. Sellel koormusasetusel tekib sisejõud

$$S = \frac{1}{16}(7 \cdot 4 + 3,5 \cdot 12 + 9,5 \cdot 16) + \frac{1}{24}(3 \cdot 20 + 7 \cdot 16 + 3 \cdot 8 + 7 \cdot 4) = 23,21 \text{ t,}$$

mis on suurem kui autokolonni liikumisel vasakult paremale. Joonisel 7.20, *b* esitatud koormuse asetuse on ebasoodsaim.

7.65. Ekvivalentne koormus

Suurimate sisejõudude arvutamine koondatud jõududest koosneva koormussüsteemi puhul nõuab lihtsat, kuid suurt arvutustööd. Esiteks on vaja leida koormuse ebasoodsaim asetuse ja pärast selle kindlaksmääramist arvutada sisejõud valemiga

$$Z = \sum P_i \eta_i \quad (j)$$

Kui koormussüsteemi kasutatakse paljude erinevate, kuid samatüübiliste mõjujoonte koormamisel, siis vähendatakse arvutustööd ekvivalentsete koormuste tabelite koostamisega.

Ekvivalentseks koormuseks nimetatakse tavaliselt niisugust jaotatud koormust, mille mõju antud mõjujoone koormamisel võrdub koondatud jõudude süsteemi mõjuga selle ebasoodsaimal asetusel. Ekvivalentseks koormuseks võib olla ka koondatud jõud, mis on rakendatud kindlaksmääratud ordinaadi kohal.

Ohtlaselt jaotatud ekvivalentse koormuse puhul arvutatakse sisejõud mõjujoone abil valemiga

$$Z = p\omega \quad (k)$$

milles p — ekvivalentse koormuse intensiivsus ja ω — mõjujoone epüüri pindala. Ekvivalentse koormuse definitsiooni järgi on valemite (j) ja (k) vasakud pooled võrdsed ja siis on võrdsed ka valemite paremad pooled

$$p\omega = \sum P_i \eta_i \quad (l)$$

Võrdusest (l) avaldatakse ekvivalentse koormuse intensiivsus

$$p = \sum P_i \eta_i / \omega \quad (7.17)$$

Antud koondatud jõududest koosneva koormussüsteemi puhul oleneb ekvivalentse koormuse intensiivsus mõjujoone pikkusest ja kujust, kuid ei olene mõjujoone ordinaatide mõõtmest. Kui mõjujoone kõiki ordinaate korrutada teguriga k , siis avaldise (7.17) paremal pool muutub lugeja ja nimetaja k korda, kuid suhe jääb endiseks. Seega ekvivalentse koormuse intensiivsus p ei olene mõjujoone ordinaatide mõõtmest.

Ekvivalentsete koormuste tabelite koostamisel leitakse suurimad sisejõud vastava mõjujoone koormamise teel koondatud jõudude süstemiga. Kui on olemas ekvivalentse koormuse intensiivsuse tabelid erinevate sillete ja erineva kujuga mõjujoonte jaoks, siis arvutatakse koondatud jõudude süstemist põhjustatud suurimad sisejõud ja reaktsioonid valemiga (k): $Z = p\omega$.

7.7. Mõjumaatriks

Arvutusskeemi lõigetes $i=1, 2, \dots, n$ mõjuvatest jõududest tingitud sisejõud (paigutis) lõikes k leitakse selle lõike sisejõu (paigutise) mõjujoone abil valemiga (7.10):

$$S_k = s_{k1}P_1 + s_{k2}P_2 + \dots + s_{kn}P_n = \sum_{i=1}^n s_{ki}P_i \quad (7.18)$$

Arvutusskeemis kõigi mõjuvate jõudude lõigete jaoks on sisejõudude avaldised järgmised

$$\begin{aligned} S_1 &= s_{11}P_1 + s_{12}P_2 + \dots + s_{1i}P_i + \dots + s_{1n}P_n \\ S_2 &= s_{21}P_1 + s_{22}P_2 + \dots + s_{2i}P_i + \dots + s_{2n}P_n \\ &\dots \\ S_k &= s_{k1}P_1 + s_{k2}P_2 + \dots + s_{ki}P_i + \dots + s_{kn}P_n \\ &\dots \end{aligned} \quad (7.19)$$

$S_n = s_{n1}P_1 + s_{n2}P_2 + \dots + s_{ni}P_i + \dots + s_{nn}P_n$
mis maatrikskujul on järgmine:

$$S = b_s P \quad (7.20)$$

milles

$$S = \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{vmatrix} = |\{S_1 S_2 \dots S_n\}| \quad (7.21)$$

on sisejõudude veergmaatriks (vektor);

$$P = \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{vmatrix} = |\{P_1 P_2 \dots P_n\}| \quad (7.22)$$

on mõjuvate jõudude veergmaatriks (vektor) ja

$$b_s = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1i} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2i} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k1} & s_{k2} & \dots & s_{ki} & \dots & s_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{ni} & \dots & s_{nn} \end{vmatrix} \quad (7.23)$$

on sisejõu mõjumaatriks, mille element s_{ki} on kohas i mõjuvast ühikjõust põhjustatud sisejõud arvutusskeemi lõikes k .

Sisejõu mõjumaatriks (7.23) teisendab välisjõu vektori (7.22) sisejõu vektoriks (7.21).

Maatriksi (7.23) veeru i elemendid $s_{1i}, s_{2i}, \dots, s_{ni}$ on kohas i mõjuvast ühikjõust $P_i=1$ põhjustatud sisejõu S epüüri ordinaadid arvutusskeemi lõigetes $1, 2, \dots, n$. Maatriksi (7.23) rea k elemendid $s_{k1}, s_{k2}, \dots, s_{kn}$ on sisejõu S mõjujoone ordinaadid arvutusskeemi lõike k jaoks. Astmelisel muutumisel koondatud jõu kohal on maatriksi ühesuguste tähistega elementidel s_{ii} kaks tähendust: $s_{ii,i-1}$, kui ühikjõud on lõikest i vasakul, ja $s_{ii,i+1}$, kui ühikjõud on lõikest i paremal.

Järgnevalt käsitletakse paindemomendi mõjumaatriksit. Kohas i mõjuvast ühikjõust $P_i=1$ põhjustatud paindemoment arvutusskeemi lõikes k tähistatakse m_{ki} . Jõudude mõju sõltumatuse printsiibi alusel leitakse paindemomendid arvutusskeemi lõigetes järgmiselt:

$$\begin{aligned} M_1 &= m_{11}P_1 + m_{12}P_2 + \dots + m_{1i}P_i + \dots + m_{1n}P_n \\ M_2 &= m_{21}P_1 + m_{22}P_2 + \dots + m_{2i}P_i + \dots + m_{2n}P_n \\ &\dots \\ M_k &= m_{k1}P_1 + m_{k2}P_2 + \dots + m_{ki}P_i + \dots + m_{kn}P_n \\ &\dots \\ M_n &= m_{n1}P_1 + m_{n2}P_2 + \dots + m_{ni}P_i + \dots + m_{nn}P_n \end{aligned} \quad (7.24)$$

või

$$M = b_m P \quad (7.25)$$

milles maatriks

$$b_m = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1i} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2i} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{k1} & m_{k2} & \dots & m_{ki} & \dots & m_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{ni} & \dots & m_{nn} \end{vmatrix} \quad (7.26)$$

on paindemomendi mõjumaatriks. Maatriksi (7.26) rea k elementideks m_{ki} on arvutusskeemi lõike k

paandemomendi mõjujoone ordinaadid lõigete $i=1, 2, \dots$, \dots, n kohal ja veeru i elementideks m_{ki} — lõikes i mõjuvast ühikjõust $P_i=1$ põhjustatud paandemomendi epüüri ordinaadid lõigetes $k=1, 2, \dots, n$. Matriksi (7.26) koostamiseks on vaja arvutada n mõjujoone või n epüüri ordinaadid lõigetes $1, 2, \dots, n$.

Joonisel 7.21, a kujutatud n võrdseks osaks jaotatud lihttala paandemomendi mõjumaatriksi elemendid m_{ki} arvutatakse valemitega

$$m_{ki} = Aa_k, \text{ kui } k \leq i$$

$$m_{ki} = B(l - a_k), \text{ kui } i \leq k$$

mis, kui nendesse asetada

$$A = 1(l - x_i)/l = (n - i)d/nd = (n - i)/n$$

$$B = 1x_i/l = id/nd = i/n$$

$$a_k = kd; \quad l = nd$$

saavad kuju

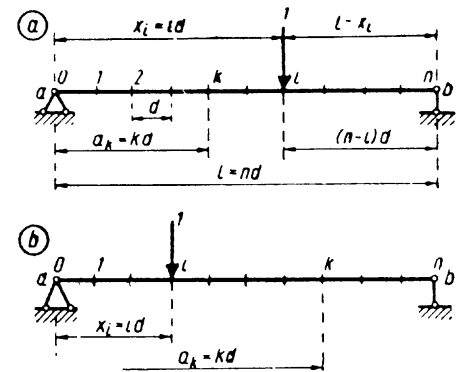
$$m_{ki} = \frac{d}{n}(n - i)k = \frac{l}{n^2}(n - i)k, \text{ kui } k \leq i \quad (7.27)$$

$$m_{ki} = \frac{d}{n}(n - k)i = \frac{l}{n^2}(n - k)i, \text{ kui } i \leq k$$

Lihttala paandemomendi mõjumaatriks (7.26), kui tala on jaotatud n võrdseks osaks ja elemendid arvutatakse valemitega (7.27), on järgmine:

$$b_m = \frac{l}{n^2} \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-2 & (n-2)2 & \dots & 4 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha & \alpha \cdot 2 & \alpha \cdot \beta & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 4 & \dots & 2\beta & \dots & 2(n-2) & n-2 \\ 1 & 2 & \dots & \beta & \dots & n-2 & n-1 \end{pmatrix} \quad (7.28)$$

Matriks b_m on sümmeetriline mõlema diagonaali suhtes. Viimane rida vasakult paremale ja esimene veerg alt üles esitavad naturaalarvude ridu $1, 2, \dots, n-1$. Teised elemendid arvutatakse järgmise reegli järgi: iga element peadiagonaalil (vasakult ülevalt paremale alla) ja allpool võrdub rea (α) ja veeru (β) järjekorranumbrite korrutisega $\alpha \cdot \beta$ (numeratsioon ridadel esimese veeru



Joon. 7.21

järgi alt üles ja veergudel alumise rea järgi vasakult paremale). Tala jaotamisel n võrdseks osaks on lõigete arv $n+1$. Tugede lõigetes on paandemomendid nullid ja neid ridu ja veerge ei kirjutata. Paandemomendi mõjumaatriks on ruutmatriks $n-1$ rea ja veeruga.

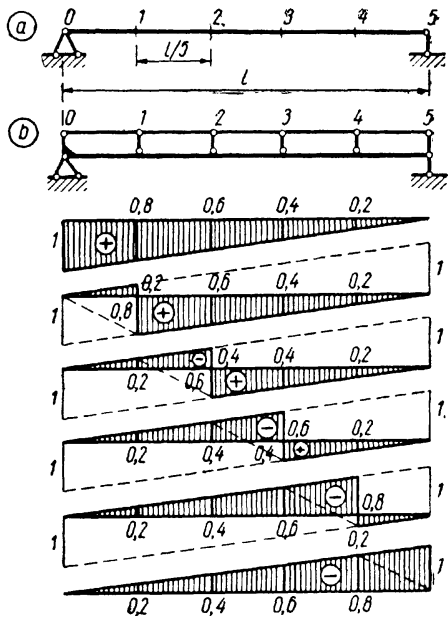
Kaheksaks võrdseks osaks jaotatud lihttala paandemomendi mõjumaatriks näiteks on järgmine:

$$b_m = \frac{l}{8^2} \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 10 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Lihttala, mis on jaotatud n võrdseks osaks, põikjõu mõjumaatriksid on järgmised:

1) otsesel koormusel

$$b_q = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2/n-2 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & -2 & \dots & (2-n)/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \dots & 2-n & (1-n)/1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \dots & 2-n & 1-n & -n \end{pmatrix} \quad (7.29)$$



Joon. 7.22

2) sõlmkoormusel (n sõlmvahet)

$$b_q = \frac{1}{n} \begin{vmatrix} n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & n-2 & n-3 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & n-3 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 3-n & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 3-n & 2-n & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 3-n & 2-n & 1-n \end{vmatrix} \quad (7.30)$$

Otsese koormuse põikjõu mõjumaatriksi peadiagonaalil asuvatel elementidel on kaks väärtust: vasakpoolne, kui ühikjõud on lõikest vasakul, ja parempoolne, kui ühikjõud on lõikest paremal. Raaliga arvutamisel peavad ka teised elemendid olema kirjutatud kaks korda. Näiteks maatriksi (7.29) kolmanda veeru asemel kirjutatakse kaks veergu: peadiagonaalist ülalpool $n-2$ ja allpool -2 kahes veerus.

Näiteks viieks võrdseks osaks jaotatud lihttala põikjõu mõjumaatriksid otsesel ja sõlmkoormusel (joon. 7.22, a ja b) on järgmised:

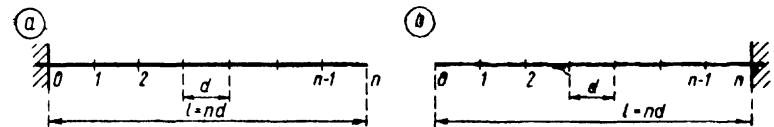
$$b_q = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2/3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4/1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$b_q = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

Otsese koormuse lihttala põikjõu mõjumaatriks on ruutmaatriks $n+1$ rea ja veeruga. Esimese rea elementideks on lõike 0 põikjõu mõjujoone ordinaadid, teise rea elementideks lõike 1 mõjujoone ordinaadid jne. Sõlmkoormuse puhul on lihttala põikjõu mõjumaatriksil n rida ja $n-1$ veergu. Ridade arv vastab sõlmvahemike arvule (mõjujooned näidatud joonisel 7.22 punktiirjoontega) ja veergude arv sõlmede (ilma toesõlmedeta) arvule.

Võrdseteks osadeks jaotatud konsooli (joon. 7.23, a) paindemomendi mõjumaatriks on järgmine:

$$b_m = -\frac{l}{n} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (7.31)$$

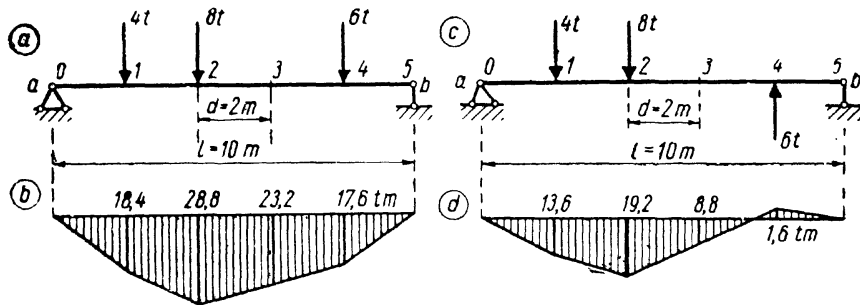


Joon. 7.23

Kui konsooli tugi on paremal pool (joon. 7.23, *b*), siis mõjumaatriks kujutab maatriksi (7.31) peegelpilti peadiagonaali suhtes.

Viieks võrdseks osaks jaotatud konsoolide paindemomendi mõjumaatriksid on vastavalt

$$\mathbf{b}_m = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b}_m = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$



Joon. 7.24

Näide 7.6. Arvutada joonisel 7.24, *a* ja *c* esitatud koormuste jaoks lihttala paindemomendi epüüri ordinaadid paindemomendi mõjumaatriksi abil.

$$\mathbf{M} = \mathbf{b}_m \mathbf{P} = \frac{10}{5^2} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 8 \\ 0 & 0 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18,4 & 13,6 \\ 28,8 & 19,2 \\ 23,2 & 8,8 \\ 17,6 & -1,6 \end{vmatrix} \text{ tm}$$

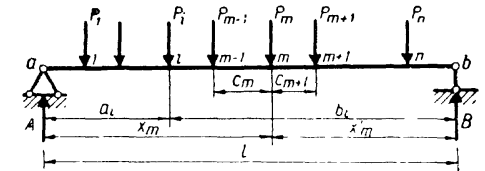
Paindemomendi epüürid on kujutatud joonisel 7.24, *b* ja *d*.

8. TALA KAHEL TOEL

8.1. *Q* ja *M* epüüride arvutus

8.11. Otsene koormus

Toereaktsioonid *A* ja *B* arvutatakse punktide *b* ja *a* kohta momentide tasakaalu tingimuste põhjal koostatud võrranditest (joon. 8.1):



Joon. 8.1

$$A = \sum_{i=1}^n P_i b_i / l \quad (8.1)$$

$$B = \sum_{i=1}^n P_i a_i / l$$

Põikjõud jõudude P_m ja P_{m-1} vahel:

$$Q_m = A - \sum_{i=1}^{m-1} P_i \quad \text{või} \quad Q_m = Q_{m-1} - P_{m-1} \quad (8.2)$$

Paindemoment lõikes *m*:

$$M_m = A x_m - \sum_{i=1}^{m-1} P_i (x_m - a_i) \quad \text{või} \quad M_m = M_{m-1} + Q_m c_m \quad (8.3)$$

milles

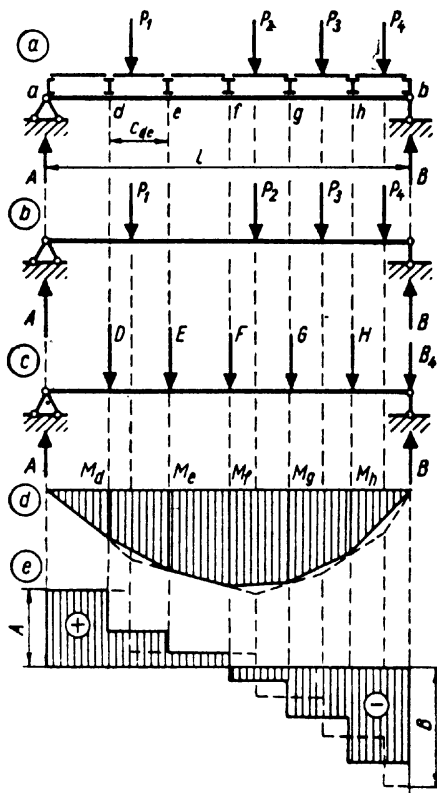
$$M_{m-1} = A x_{m-1} - \sum_{i=1}^{m-2} P_i (x_{m-1} - a_i)$$

Suurim paindemoment $\max M$ esineb lõikes, kus $Q = 0$ või muutub põikjõu märk.

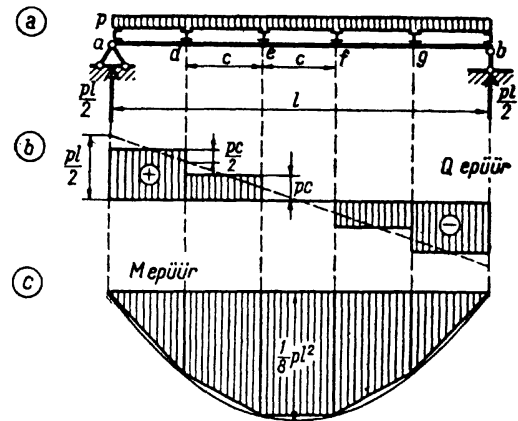
8.12. Sõlmkoormus

Pikitala kannab koormuse põiktaladele koondatud jõududena, mille suurused on võrdsed pikitala toereaktsioonidega. Kahe peatala vahel asuv põiktala kannab koormuse koondatud jõududena peatalade lõigetesse, kus põiktala on kinnitatud. Sõlmeks nimetatakse põiktala kohal asuvat peatala ristlõiget. Kahe peatala vahel asuv koormus kantakse piki- ja põiktalade kaudu peataladele, mida arvestatakse põikasetuse teguriga. Koormuse põikasetuse teguri suurim väärtus on 1,0. Edaspidi vaadeldakse koormusi põikasetuse teguriga 1,0.

Kui äärmised sõlmed asuvad tugede a ja b kohal (joon. 8.2, a), siis on sõlmkoormuse ja sama koormuse otsesel mõjumisel toereaktsioonid võrdsed (joon. 8.2, a ja



Joon. 8.2



Joon. 8.3

b). Sõlmkoormusel jaotuvad jõud komponentideks naabersõlmedesse (joon. 8.2, c): $P_1 = D + E$, $P_2 = F + G_2$, $P_3 = G_3 + H_3$, $P_4 = H_4 + B_4$ ja kuna jõudude komponentide momentide summa võrdub jõudude momentide summaga, siis on toereaktsioonid otsesel ja sõlmkoormusel võrdsed. Samal põhjusel on võrdsed paindemomendid peatala sõlmede ristlõigetel otsesel ja sõlmkoormusel (joon. 8.2, d). Sõlmede ristlõigetel d, e, \dots, h arvutatakse paindemomendid M_d, M_e, \dots, M_h otsese koormuse skeemiga (joon. 8.2, b). Paindemomendi epüür on hulknurk, mille tipud on sõlmede kohal. Põikjõud kahe naabersõlme vahel on konstant ja leitakse valemiga

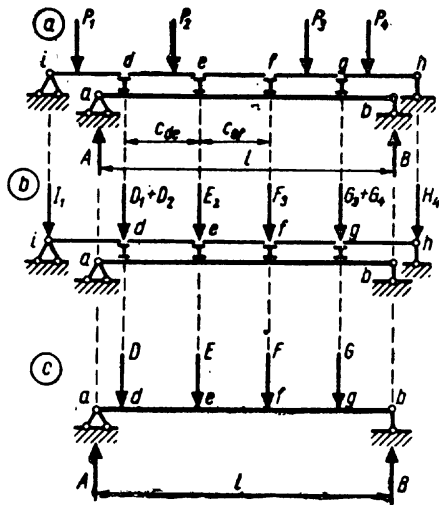
$$Q_{j-k} = (M_k - M_j) / c_{jk} \quad (8.4)$$

milles M_j, M_k on paindemomendid vastavalt vasak- ja parempoolses ristlõikes ning c_{jk} — naabersõlmede j ja k vahekaugus. Näiteks $Q_{d-e} = (M_e - M_d) / c_{de}$.

Joonisel 8.2, d ja e on sõlmkoormuse epüürid joonestatud pideva joonega ja otsese koormuse epüürid katkendjoonega.

Joonisel 8.2, c kujutatud koormusskeemiga, kus talale mõjuvad jõud P_1, P_2, \dots, P_n (joon. 8.2, a) on lahutatud komponentideks naabersõlmedesse, saadakse sõlmkoormusele vastavad paindemomendi ja põikjõu epüürid.

Joonisel 8.3, a kujutatud peatala ühtlasest koormusest põhjustatud põikjõu ja paindemomendi epüürid on esitatud joonistel 8.3, b ja c



Joon. 8.4

Kui tugede a ja b kohal ei ole sõlmi ning tugede kohal olevad sõlmevahed on koormatud (joon. 8.4, a), siis toereaktsioonid otsesel ja sõlmkoormusel ei ole võrdsed. Sõlmede vahel mõjuvad jõud tuleb lahutada naaber-sõlmedesse komponendideks: $P_1 = I_1 + P_1$, $P_2 = D_2 + E_2$, $P_3 = F_3 + G_3$ ja $P_4 = G_4 + H_4$ (joon. 8.4, b) ning ühes sõlmes mõjuvad komponendid liita: $D = D_1 + D_2$, $E = E_2$, $F = F_3$ ja $G = G_3 + G_4$ (joon. 8.4, c): Joonisel 8.4, c esitatud koormusskeemiga arvutatakse paindemomendi ja põikjõu epüürid, mis vastavad peatala sõlmkoormuse (joon. 8.4, a) epüüridele.

8.2. Suurimad põikjõud

8.2.1. Ühtlaselt jaotatud koormus

8.2.1.1. Otsene koormus

Suurimad põikjõud tala lõikes k arvutatakse mõjujoonega (joon. 8.5, c). Tala koormamisel mõjujoone positiivse või negatiivse osa ulatusel (joon. 8.5, a ja b) leitakse vastavalt maksimaalne ning minimaalne põikjõud valemiga (7.12):

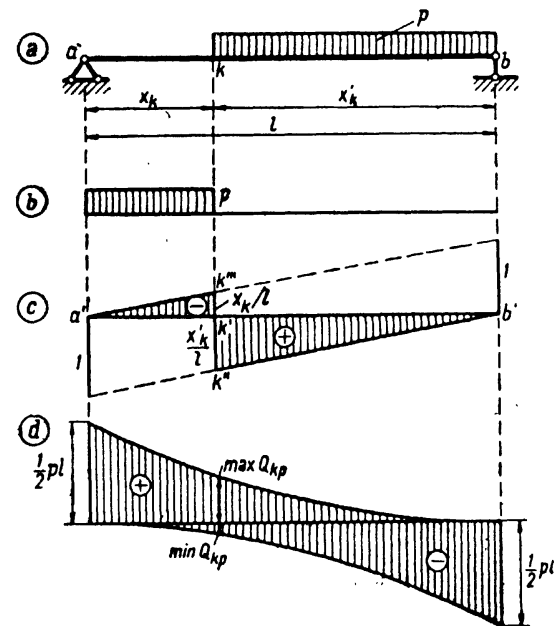
$$\max Q_{kp} = p \frac{x_k^2}{2l} = \frac{1}{2} pl \xi^2 \quad (8.5)$$

$$\min Q_{kp} = -p \frac{x_k^2}{2l} = -\frac{1}{2} pl \xi^2$$

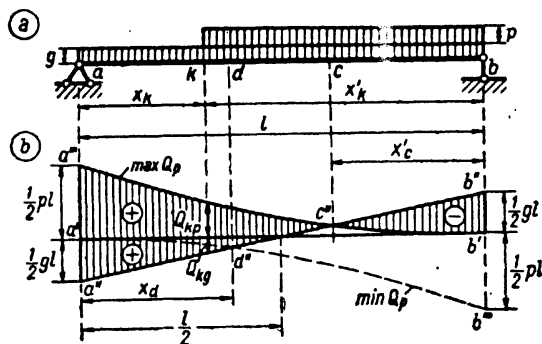
milles $x_k^2/2l = \omega_+$ ja $x_k^2/2l = \omega_-$ on vastavalt mõjujoone epüüri positiivse ning negatiivse osa pindala.

Ühtlasest jaotatud liikuvast koormusest põhjustatud $\max Q$ ($\min Q$) epüür on ruutparabool (joon. 8.5, d), mille ordinaat kujutab suurimat positiivset (negatiivset) põikjõudu tala lõikes samal vertikaalil. Positiivsete ja negatiivsete põikjõudude $\max Q$ ning $\min Q$ epüürid on paraboolid lagipunktidega vastavalt toe b ja toe a kohal ning suurimate ordinaatidega $pl/2$ toe a ja toe b kohal.

Liikuvast koormusest p ja omakaalust g (joon. 8.6, a) põhjustatud epüüride ordinaadid liidetakse (joon. 8.6, b). Liikuva koormuse $\max Q_p$ epüür läbib punkte b' , c'' ja a'''



Joon. 8.5



Joon. 8.6

ning min Q_p epüür punkte a' , d'' ja b''' . Omakaalust põhjustatud epüür on sirge $a''-b''$, mille suurimad ordinaadid asuvad tugede kohal: $Q_{ag} = gl/2$ ja $Q_{bg} = -gl/2$.

Summeerimisel saadakse

$$\max Q_h = \max Q_{hp} + Q_{hg}$$

$$\min Q_h = \min Q_{hp} + Q_{hg}$$

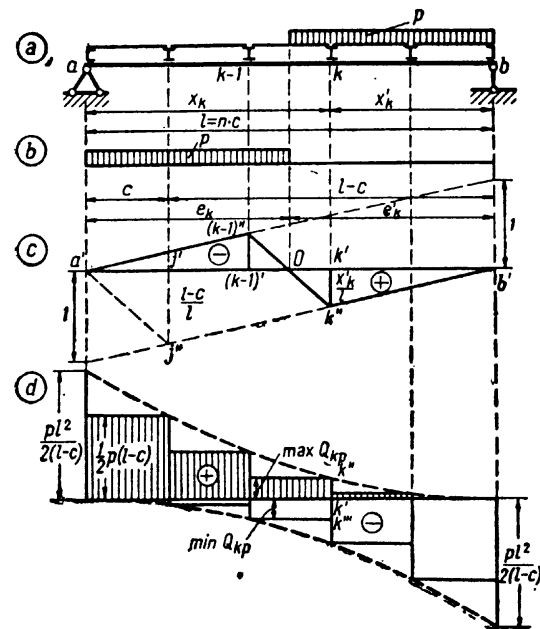
Summaarse epüüri telgjooneks on $a''-b''$.

Omakaalu epüüri ja liikuva koormuse $\max Q_{hp}$ epüüri lõikepunkti c'' vertikaalil asetsevas tala ristlõikes c on $\max Q_c = 0$. Lõikepunkti d'' vertikaalil, ristlõikes d , on $\min Q_d = 0$. Paremal pool lõiget c on $\max Q$ negatiivne ja vasakul pool lõiget d on $\min Q$ positiivne. Vahemikus $a-d$: $0 \leq \xi \leq \xi_d = (g/p)(\sqrt{1+p/g} - 1)$ on põikjõud positiivne ja vahemikus $c-b$ ($0 \leq \xi' \leq \xi'_c = \xi_d$) on põikjõud negatiivne. Vahemikus $d-c$ ($\xi_d \leq \xi \leq 1 - \xi'_c$) on maksimaalne põikjõud positiivne ja minimaalne põikjõud negatiivne.

8.21.2. Sõlmkoormus

Sõlmkoormusel on kahe naabersõlme vahel põikjõud konstantne. Naabersõlmede $k-1$ ja k vahel kehtib kõigi lõigete jaoks üks mõjujoon (joon. 8.7, c).

Tala koormamisel mõjujoone positiivse või negatiivse pinna ulatusel (joon. 8.7, a ja b) tekib sõlmede $k-1$ ja k vahel vastavalt $\max Q_k$ või $\min Q_k$:



Joon. 8.7

$$\begin{aligned} \max Q_{kp} &= px'_k e'_k / 2l \\ \min Q_{kp} &= p(x_k - c) e_k / 2l \end{aligned} \quad (8.6)$$

Sarnaste kolmnurkade $a'b'j''$ ja $ob'k''$ omadusega $e'_k = x'_k l / (l - c)$ elimineeritakse $\max Q_{kp}$ avaldisest mõjujoone nullpunkti kaugus toest b . Analoogiliselt elimineeritakse $\min Q_{kp}$ avaldisest e_k . Pärast e_k ja e'_k elimineerimist on valemid (8.6) järgmised:

$$\begin{aligned} \max Q_{kp} &= px_k^2 / 2(l - c) \\ \min Q_{kp} &= -p(x_k - c)^2 / 2(l - c) \end{aligned} \quad (8.7)$$

Joonisel 8.7, d on kujutatud suurimate põikjõudude epüürid.

8.22. Koondatud jõud

8.22.1. Otsene koormus

Koormussüsteemi liikumisel paremalt vasakule on positiivne põikjõud tala lõikes k suurim, kui jõud P_1 jõuab lõikesse k . See on kehtiv, kui

$$P_1 > \frac{b_{1-2}}{l} \sum_{i=1}^{r-1} P_i \quad (8.8)$$

milles l on tala sille, b_{1-2} — jõudude P_1 ja P_2 vahekaugus ja P_r — parempoolne jõud talal, kui jõud P_2 asub lõikes k .

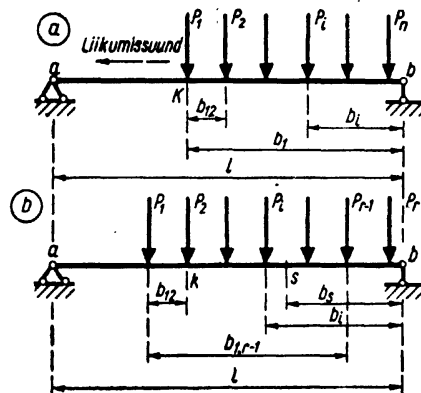
Koormussüsteemi liikumisel vasakult paremale (ärastminekul talalt) on positiivne põikjõud ristlõikes k suurim, kui viimane jõud P_n asub lõikes k . See kehtib eeldusel, et

$$P_n > \frac{b_{n,n-1}}{l} \sum_{i=n}^{r-1} P_i \quad (8.9)$$

milles $b_{n,n-1}$ on jõudude P_n , P_{n-1} vahekaugus ja P_r — parempoolne jõud talal, kui jõud P_{n-1} asub lõikes k .

Koormussüsteemi põhiasetuseks lõike k jaoks nimetatakse koormuse niisugust asetust, mille puhul jõud P_1 mõjub lõikes k (joon. 8.8, a). Suurim negatiivne põikjõud lõikes k tekib koormussüsteemi pealetulekul talale liikumissuunaga vasakult paremale ja talalt ärastminekul liikumissuunaga paremalt vasakule:

$$\max Q_{kp} = A_k; \quad \min Q_{kp} = -B_k \quad (a)$$



Joon. 8.8

Toereaktsioon A_k vastab koormussüsteemi põhiasetusele lõike k jaoks (joon. 8.8, a)

$$A_k = \sum_{i=1}^n P_i b_{i/l} \quad (b)$$

milles n on jõudude arv talal põhiasetuse puhul.

Koormussüsteemi põhiasetus lõike k jaoks (joon. 8.8, a) ei tekita lõikes k suurimat põikjõudu, kui tingimus (8.8) ei ole rahuldatud, s. t.

$$P_1 < \frac{b_{1-2}}{l} \sum_{i=1}^{r-1} P_i$$

Tingimusel

$$P_1 < \frac{b_{1-2}}{l} \sum_{i=1}^r P_i < P_1 + P_2 \quad (8.10)$$

tekib lõikes k suurim põikjõud, kui jõud P_2 mõjub lõikes k (joon. 8.8, b)

$$\max Q_k = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^r P_i b_i - P_1 \quad (8.11)$$

Kui

$$\frac{b_{1-2}}{l} \sum_{i=1}^{r-1} P_i < P_1 < \frac{b_{1-2}}{l} \sum_{i=1}^r P_i \quad (8.12)$$

siis tala lõikest s , mis on toest b kaugusel

$$b_s = b_{1,r-1} + \Delta b \quad (8.13)$$

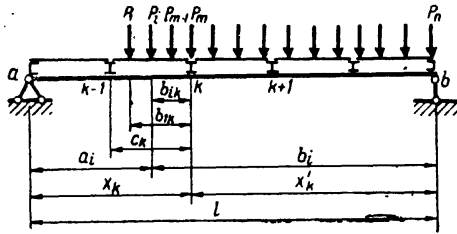
milles

$$\Delta b = \frac{l}{P_r} \left(P_1 - \frac{b_{1-2}}{l} \sum_{i=1}^{r-1} P_i \right) \quad (8.14)$$

vasakul pool asuvates lõigetes ($b_s \leq b \leq l$) tekib maksimaalne põikjõud, kui lõike kohal mõjub jõud P_2 .

8.22.2. Sõlmkoormus

Liikugu koormus, paremalt vasakule. Kahe naaber sõlme vahel on põikjõud konstantne. Sõlmede suure vahekauguse puhul ei asu jõud P_1 koormuse kõige ohtlikuma asetuse puhul lõikest paremal asuva sõlme kohal. Eba-



Joon. 8.9

soodsaima koormuse asetuse puhul lõikest paremal asuva sõlme k kohal mõjuv jõud tähistatakse P_m (joon. 8.9). Põikjõud sõlmede $k-1$ ja k vahel arvutatakse valemiga

$$Q_k = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n P_i b_i - \frac{1}{c_k} \sum_{i=1}^m P_i b_{i-k} \quad (8.15)$$

milles b_i on jõu P_i kaugus toest b , b_{i-k} — jõu P_i kaugus sõlmest k , c_k — sõlmede $k-1$ ja k vahekaugus, l — tala sille ja n — jõudude arv talal.

Koormuse nihkumisel db võrra vasakule muutub põikjõud

$$dQ = \left(\frac{1}{l} \sum_{i=1}^n P_i - \frac{1}{c_k} \sum_{i=1}^m P_i \right) db \quad (c)$$

võrra. Põikjõud väheneb, kui $dQ < 0$, s. t. kui

$$\frac{c_k}{l} \sum_{i=1}^n P_i < \sum_{i=1}^m P_i \quad (d)$$

Kui

$$\frac{c_k}{l} \sum_{i=1}^n P_i < P_1 \quad (8.16)$$

siis on koormuse kõige ohtlikuma asetuse puhul sõlme k kohal jõud P_1 , ja kui

$$P_1 < \frac{c_k}{l} \sum_{i=1}^n P_i < P_1 + P_2 \quad (8.17)$$

siis jõud P_2 . Viimase asetuse puhul arvutatakse suurim põikjõud valemiga

$$\max Q_k = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n P_i b_i - \frac{1}{c_k} P_1 b_{1-2} \quad (8.18)$$

Sõlmede $k-1$ ja k vahel kõige ebasoodsama koormuse asetuse puhul sõlme k kohal olev jõud P_m rahuldab tingimust

$$\sum_{i=1}^{m-1} P_i < \frac{c_k}{l} \sum_{i=1}^n P_i < \sum_{i=1}^m P_i \quad (8.19)$$

Sellel koormuse asetusel on sõlmede $k-1$ ja k vahel põikjõud maksimaalne:

$$\max Q_{kp} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n P_i b_i - \frac{1}{c_k} \sum_{i=1}^m P_i b_{im} \quad (8.20)$$

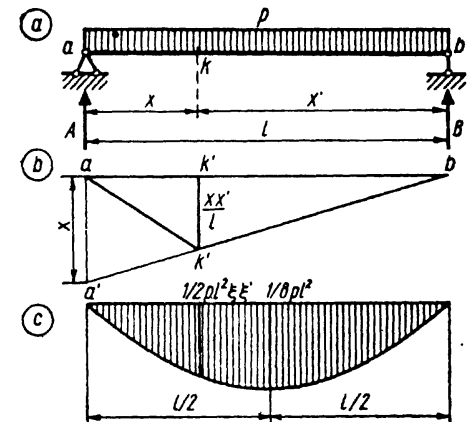
8.3. Suurim paindemoment

8.31. Ühtlaselt jaotatud koormus

Tala suvalise lõike paindemomendi mõjujoone ordinaadid on positiivsed (joon. 8.10, b). Maksimaalne paindemoment tekib kogu tala koormamisel (joon. 8.10, a)

$$\max M_{kp} = \frac{1}{2} p x x' = \frac{1}{2} p l^2 \xi \xi' \quad (8.21)$$

Sõlmkoormusel ühtivad paindemomendid sõlmede lõigetes otsesel koormusel tekkivate paindemomentidega. Sõlmede vahel muutub paindemoment lineaarselt. Suurim paindemoment tekib tala keskkohale kõige lähemal asuva sõlme lõikes kogu tala koormamisel.



Joon. 8.10

8.32. Koondatud jõud

Sõlmkoormusel on paindemomendi epüür hulknurk tippudega sõlmede kohal. Sõlmkoormuse puhul tekib suurim paindemoment tala keskkoha lähedal sõlme lõikes. Paindemomendi mõjujoon (joon. 8.11, b) on kolmnurk, mille jaoks kõige ebasoodsam koormuse asetus leitakse kriitilise jõu tingimusega

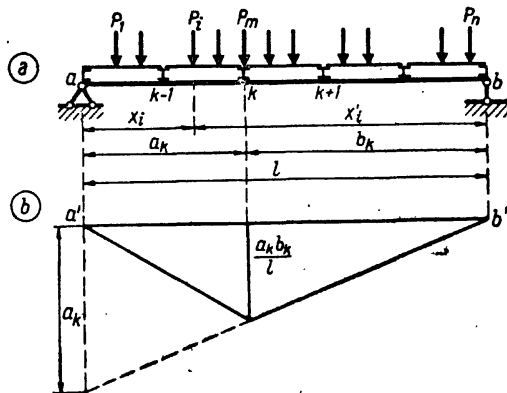
$$\sum_{i=1}^{m-1} P_i < \frac{a_k}{l} \sum_{i=1}^n P_i < \sum_{i=1}^m P_i$$

Suurim paindemoment sõlme k lõikes arvutatakse valemiga

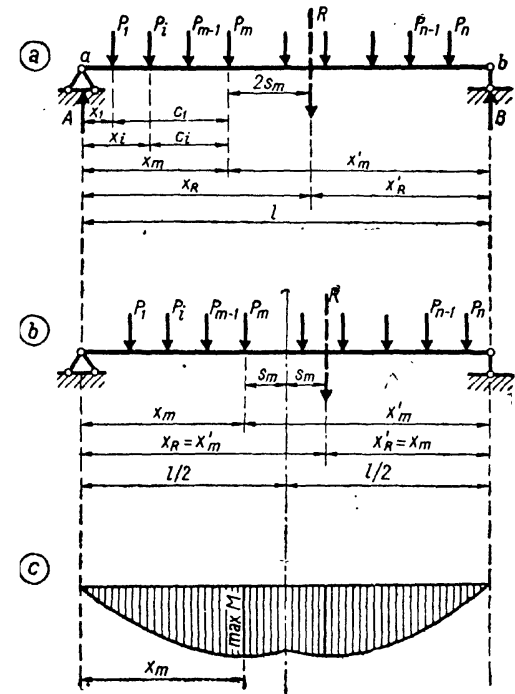
$$\max M_{kp} = \frac{a_k}{l} \sum_{i=1}^n P_i b_i - \sum_{i=1}^m P_i (a_k - x_i) \quad (8.22)$$

Liikuva koormuse otsesel mõjumisel ei ole teada ristlõige, milles tekib suurim paindemoment. Igal koormuse asetusel on üks kõige suurem paindemoment. Nendest kõige suurematest tuleb leida suurim.

Koondatud jõudude puhul tekib suurim paindemoment ühe jõu kohal asuvas tala lõikes. Ohtliku ristlõike kaugus vasakust toest tähistatakse x_m , parempoolsest toest x'_m , selles lõikes mõjuv jõud — P_m , mille kaugus koormussüsteemi resultandist on $2s_m$ (joon. 8.12). Paindemoment jõu P_m kohal tala ristlõikes arvutatakse valemiga



Joon. 8.11



Joon. 8.12

$$M_m = A x_m - \sum_{i=1}^{m-1} P_i c_i \quad (a)$$

või

$$M_m = \frac{R}{l} x'_R x_m - \sum_{i=1}^{m-1} P_i c_i \quad (b)$$

milles

$$x'_R = l - 2s_m - x_m \quad (c)$$

on koormussüsteemi resultandi R kaugus toest b ; c_i — jõudude P_i ja P_m vahekaugus, mis koormuse liikumisel ei muutu. Paindemomendi avaldis (b), kui arvestada tingimust (c), on järgmine:

$$M_m = \frac{R}{l} (l - 2s_m - x_m) x_m - \sum_{i=1}^{m-1} P_i c_i \quad (d)$$

Momendi avaldise teine liige $\sum_{i=1}^m P_i c_i$ on jõust P_m vasakul pool asuvate jõudude momentide summa jõu P_m rakenduspunkti suhtes ning ei olene koormuse asetusest ($c_i = \text{konst}$). Esimene liige on toereaktsiooni A moment jõu P_m rakenduspunkti suhtes. See moment oleneb koormuse asetusest ja momendi avaldis (d) vastab ruutparaboolile. Koondatud jõududest koosneva koormussüsteemi suurimate paindemomentide epüüri (joon. 8.12, c) ordinaat kujutab liikuva jõu P_m kohal tala ristlõikes tekkivat paindemomenti. Paindemoment on suurim lõikes, kus epüüri puutuja kaldenurk võrdub nulliga, s. t.

$$\frac{dM}{dx} = \frac{R}{l}(l - 2s_m - 2x_m) = 0 \quad (e)$$

Kuna $R/l \neq 0$, siis avaldise (e) sulgavaldis peab võrduma nulliga:

$$l - 2s_m - 2x_m = 0$$

millest

$$x_m = \frac{l}{2} - s_m \quad (8.22)$$

Suurim paindemoment jõu P_m kohal tala ristlõikes tekib siis, kui jõud P_m asub tala keskkohast niipalju ühel pool, kui palju koormuse resultant R asub tala keskkohast teisel pool (joon. 8.12, b):

$$\begin{aligned} x_m &= l/2 - s_m \\ x_R &= l/2 + s_m \end{aligned} \quad (f)$$

Paindemoment lõikes x_m on

$$M_m = \frac{R}{l} \left(\frac{l}{2} - s_m \right)^2 - \sum_{i=1}^{m-1} P_i c_i \quad (8.23)$$

Jõud P_m peab rahuldama ka kriitilise jõu tingimust

$$\sum_{i=1}^{m-1} P_i \leq \frac{x_m}{l} R \leq \sum_{i=1}^m P_i \quad (g)$$

millest

$$\frac{l}{R} \sum_{i=1}^{m-1} P_i \leq x_m \leq \frac{l}{R} \sum_{i=1}^m P_i \quad (8.24)$$

Ainult siis, kui jõu P_m abstsiss x_m (8.22) rahuldab ka tingimust (8.24), on jõu P_m kohal paindemoment kõige suurem. Tingimusega (8.24) leitakse piirid, mille vahel jõud on kriitiline:

$$\begin{aligned} P_1: & \quad 0 \leq x_1 \leq P_1 l / R \\ P_2: & \quad P_1 l / R \leq x_2 \leq (P_1 + P_2) l / R \end{aligned} \quad (8.25)$$

$$P_m: \quad (l/R) \sum_{i=1}^{m-1} P_i \leq x_m \leq (l/R) \sum_{i=1}^m P_i$$

$$P_n: \quad (l/R) \sum_{i=1}^{n-1} P_i \leq x_n \leq l$$

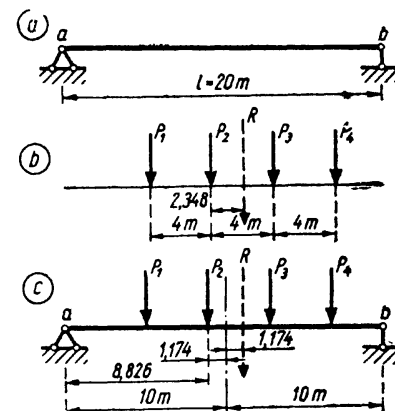
Kuna suurim paindemoment tekib tala keskkoha lähedal, siis leitakse esmalt tingimustega (8.25) jõud, mis on kriitiliseks tala keskkoha lähedal. Valemiga (8.22) määratakse lõige, milles see jõud tingib suurima paindemomendi, ja kontrollitakse, kas tingimus (8.24) on rahuldatud. Tingimuse (8.24) rahuldamise korral leitakse valemiga (8.23) suurim paindemoment talas.

Näide 8.1. Arvutada lihttalas (joon. 8.13, a) suurim paindemoment ja leida lõige, milles ta tekib joonisel 8.13, b esitatud liikuvast koormusest: $P_1 = 3,5$ t; $P_2 = 9,5$ t; $P_3 = 3$ t ja $P_4 = 7$ t.

Koormuse resultant

$$R = 3,5 + 9,5 + 3,0 + 7,0 = 23 \text{ t} \quad (a)$$

Suurim jõud P_2 asub koormusskeemi keskel ja see jõud oletat-



Joon. 8.13

takse kriitiliseks $P_2 = P_m$. Kriitilise jõu P_2 kaugus koormusskeemi resultantjõust R on

$$2s_m = (-3,5 \cdot 4 + 9,5 \cdot 0 + 3,0 \cdot 4 + 7,0 \cdot 8) / 23 = 2,348 \text{ m} \quad (b)$$

Koormusskeem (joon. 8.13, *b*) asetatakse talale selliselt, et oletatud kriitiline jõud P_2 asub tala keskkohast $s_m = 2,348/2 = 1,174 \text{ m}$ võrra vasakul. Koormussüsteemi resultant asub siis tala keskkohast niisama palju paremal (joon. 8.13, *c*). Jõu $P_2 = P_m$ kaugus vasakust toest

$$x_m = l/2 - s_m = 10,0 - 1,174 = 8,826 \text{ m} \quad (c)$$

Võrratustega (7.16)

$$\sum_{i=1}^{m-1} P_i < \frac{a}{l} R < \sum_{i=1}^m P_i \quad (d)$$

kontrollitakse, kas löike $x_m = a = 8,826 \text{ m}$ jaoks $P_2 = P_m$ on kriitiline

$$\sum_{i=1}^{m-1} P_i < \frac{x_m}{l} R < \sum_{i=1}^m P_i$$

ehk

$$P_1 < \frac{x_m}{l} R < P_1 + P_2$$

mis arvsuurustega on järgmine:

$$3,5 < \frac{8,826}{20} \cdot 23 = 10,15 < 3,5 + 9,5 = 13$$

Mõlemad võrratused on täidetud ja jõud P_2 on löike $x_m = 8,826 \text{ m}$ kriitiliseks jõuks. Selles löikes tekib antud koormusskeemist (joon. 8.13, *b*) suurim paindemoment, mis arvutatakse valemiga (8.23):

$$\max M = \frac{R}{l} \left(\frac{l}{2} - s_m \right)^2 - \sum_{i=1}^{m-1} P_i c_i = \frac{23}{20} \cdot 8,826^2 - 3,5 \cdot 4 = 75,58 \text{ tm}$$

9. STAATIKAGA MÄÄRATAV MITMESILDELINE TALA

9.1. Geomeetrilise struktuuri analüüs

Ehitise mitme naaberava sildamiseks kasutatakse liht-talasilid, staatikaga määramatut mitmesildelist nn. jätkuv-tala ja staatikaga määratavat mitmesildelist liigenditega tala. Mitmesildelistes talades on paindemomendid väikesemad.

Liigenditeta mitmesildeline tala on toereaktsioonide suhtes staatikaga määramatu. Staatikaga määramatuse aste

$$n = t - 3 \quad (9.1)$$

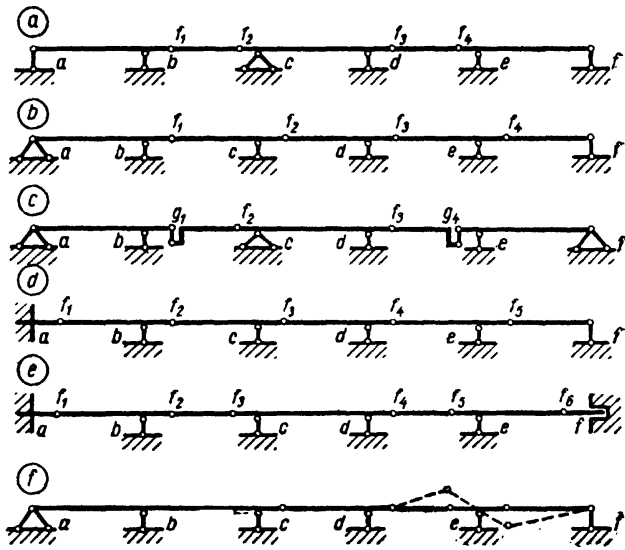
milles t on toesidemete arv. Staatikaga määramatu mitmesildeline tala muudetakse arvutuskeemi liigendite asetamisega staatikaga määratavaks. Liigendis on paindemoment võrdne nulliga. Lisaks kolmele tasakaalutingimusele: $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$ ja $\Sigma M = 0$, võimaldab liigend koostada sõltumatu tasakaaluvõrrandi: kõigi ühel pool liigendit talale rakendatud jõudude momentide summa liigendi suhtes on võrdne nulliga.

Mitmesildeline tala on staatikaga määratav, kui lihtliigendite arv on võrdne ilma liigenditeta tala staatikaga määramatuse astmega (9.1):

$$l = t - 3 \quad (9.2)$$

Tingimus (9.2) on vajalik, kuid mitte küllaldane selleks, et mitmesildeline tala oleks staatikaga määratav. Liigendite ja toesidemete asetus peab olema niisugune, et oleks tagatud geomeetiline muutumatus.

Mitmesildelised staatikaga määratavad talad on peamiselt kaht tüüpi. Joonisel 9.1, *a* ja *b* kujutatud taladel on üks liikumatu ja viis liikuvat silindertuge. Kummalgi talal on toesidemeid 7. Vajalik liigendite arv $l = t - 3 =$



Joon. 9.1

$=7 - 3 = 4$. Joonisel 9.1, *a* kujutatud talal on äärmised silded liigendita ja edasi vahelduvad kahe liigendiga silded liigendita silletega. Joonisel 9.1, *b* esitatud talal on esimene sille liigendita ja teistes silletes on igaühes üks liigend.

Rohkem kui ühe horisontaalset siire mittevõimaldava toe puhul asendatakse osa lihtliigendeid elementidega, milles peale paindemomendi on ka pikijõud võrdne nulliga (joon. 9.1, *c*). Need elemendid võimaldavad peale talaosade vastastikuse pöörde ka nende vastastikust horisontaalset nihet (joon. 9.1, *c* g_1 ja g_4). Nende elementide arv leitakse valemiga

$$h = j - 1 \quad (9.3)$$

milles j on horisontaalset siiret takistavate tugede arv.

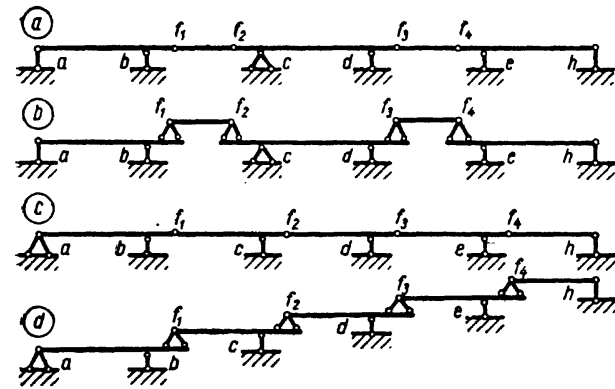
Joonisel 9.1, *d* kujutatud talal on äärmine vasakpoolne tugi jäik. Sellele toele vastab kolm sidet ja vajalik liigendite arv $l = t - 3 = 8 - 3 = 5$. Joonisel 9.1, *e* kujutatud talal on vajalik liigendite arv $l = t - 3 = 9 - 3 = 6$.

Valemiga (9.2) leitakse vajalik liigendite arv. Lii-

gendite asetus peab olema niisugune, mis tagab mitmesildelise tala geomeetrisel muutumatuse. Joonisel 9.1, *a...e*) on kõik talad geomeetriselt muutumatud. Joonisel 9.1, *f* kujutatud talal on vajalik arv liigendeid ($l = 7 - 3 = 4$), kuid liigendite asetus talas on niisugune, mille juures üks osa (*a-b-c*) on staatikaga määratu ja teine osa ($f_2-f_3-f_4-f$) geomeetriselt muutuv. Võimalik paigutusolukord on kujutatud punktiirjoonega.

Geomeetriselt muutumatus ja staatikaga määratavas mitmesildelises talas, milles on võrrandile (9.2) vastav arv liigendeid, ei ole ühes sildes rohkem kui kaks ja kahes naabersildes rohkem kui kolm liigendit. Kahes naabersildes peab olema vähemalt üks liigend.

Enam kasutatav staatikaga määratav mitmesildeline tala koosneb konsoolidega taladest (osad *a-b-f₁*, *f₂-c-d-f₃*, *f₄-e-h*) ja nende vahel liigenditega konsoolide külge kinnitatud osadest (*f₁-f₂*, *f₃-f₄*) (joon. 9.2, *a*). Konsoolidega tala *f₂-c-d-f₃* on põhiosa, kuna ta on kinnitatud kolme toesidemele ja on geomeetriselt muutumatu ka siis, kui naaberosad *f₁-f₂* ja *f₃-f₄* on eemaldatud. Konsoolidega talad *a-b-f₁* ja *f₄-e-h* on vertikaalse koormuse puhul põhiosad, kuna naaberosade *f₁-f₂* ja *f₃-f₄* puudumisel on takistatud tala *a-b-f₁* vertikaalne siire ja on võimalik ainult horisontaalne siire. Osadel *f₁-f₂* ja *f₃-f₄* ei ole ühtegi toesidet ja



Joon. 9.2

need on lisaosad, kuna nende naaberosa eemaldamisega muutuvad nad mehhanismiks.

Arvutusskeemis kinnitatakse lisaosa põhiosa külge kahe sidemega (joon. 9.2, *b*). Sisejõudude arvutusel käsitletakse lisaosasid kui lihttalasid, kuna nende üks tugi on liikuv: osal f_1-f_2 tugi f_1 ja osal f_3-f_4 tugi f_4 , sest need toetuvad taladele, mille horisontaalne siire on võimalik.

Joonisel 9.2, *c* kujutatud tala kolme toesidemega kinnitatud geomeetriliselt muutumatu osa $a-b-f_1$ on põhiosa. Element f_1-c-f_2 jääb geomeetriliselt muutumatuks, kui eemaldatakse ainult temast paremal asuvad osad, sest ta on kinnitatud liigendiga f_1 põhiosa ja toevardaga c toepinna külge. Element f_2-d-f_3 on geomeetriliselt muutumatu, kui on eemaldatud ainult paremal asuvad osad. Järgnevate osade kohta kehtib sama. Seepärast on elemendid f_1-f_2 , f_2-f_3 , f_3-f_4 , f_4-h vasakpoolse naaberelemendi suhtes lisaosaks ja paremal asuva naaberelemendi suhtes põhiosaks. Arvutusskeem on esitatud joonisel 9.2, *d*.

9.2. Sisejõudude arvutus

9.2.1. Otsene koormus

Sisejõudude arvutust alustatakse lisaosadest. Joonisel 9.2, *a* ja *b* kujutatud tala lisaosad arvutatakse lihttaladena. Põhiosad arvutatakse konsoolidega taladena. Põhiosade arvutamisel rakendatakse lisaks põhiosale mõjuvale koormusele ka lisaosade toereaktsioonid vastupidiste suundadega, s.t. lisaosale mõjuv koormus lahutatakse kaheks komponendiks ühendusliigenditesse.

Joonisel 9.2, *c* ja *d* kujutatud tala arvutust alustatakse lisaosast f_4-h . Esmalt leitakse toereaktsioonid toesidemel h ja liigendis f_4 (H, F_4) ning arvutatakse sisejõud. Järgmise lisaosa — konsooliga tala f_3-e-f_4 arvutamisel rakendatakse lisaks mõjuvale koormusele konsooli otsalõikesse f_4 lisaosa f_4-h toereaktsioon F_4 vastupidise suunaga. Leitakse toereaktsioonid toesidemel e ja liigendis f_3 (E, F_3) ning arvutatakse sisejõud. Järgmine osa — konsooliga tala f_2-d-f_3 arvutatakse analoogiliselt jne.

Joonisel 9.2, *a* kujutatud tala toereaktsioone saab kontrollida (võib ka arvutada) paandemomentide tingimustega liigendite f_1 , f_2 , f_3 ja f_4 kohta. Talale vahemikus $a-f_1$

mõjuvate kõigi välisjõudude momentide summa liigendi f_1 suhtes on võrdne nulliga. Sama tingimus kehtib ka vahemikus $a-f_2$ mõjuvate välisjõudude kohta liigendi f_2 suhtes ning vahemikus $a-f_3$ ja $a-f_4$ mõjuvate välisjõudude kohta vastavalt liigendite f_3 ja f_4 suhtes.

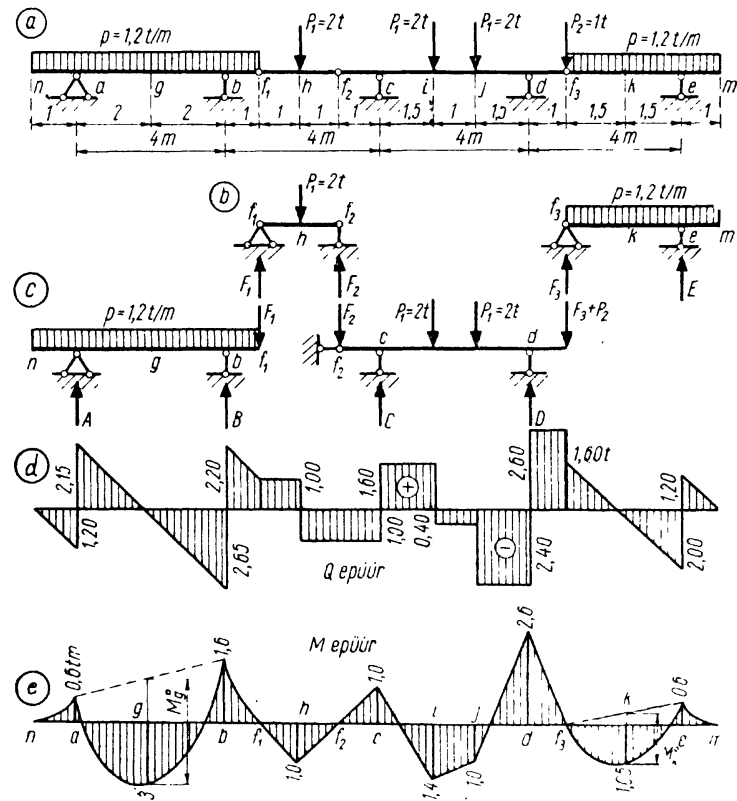
Näide 9.1. Arvutada joonisel 9.3, *a* kujutatud tala toereaktsioonid ja M ning Q epiüüride ordinaadid.

Lisaosade toereaktsioonid (joon. 9.3, *b*):

$$F_1 = F_2 = P_1/2 = 1 \text{ t}; E = 4 \cdot 1,2 \cdot 2/3 = 3,2 \text{ t}; F_3 = 4 \cdot 1,2 \cdot 1/3 = 1,6 \text{ t}$$

Põikjõud:

$$Q_{f_1-h} = 1 \text{ t}; Q_{h-f_2} = -1 \text{ t}; Q_{em} = 1 \cdot 1,2 = 1,2 \text{ t};$$



Joon. 9.3

$$Q_{ef1} = 1,2 - 3,2 = -2,0 \text{ t}; \quad Q_{f3e} = 1,6 \text{ t}$$

Paindemomendid:

$$M_h = 1 \cdot 1,0 = 1 \text{ tm}$$

$$M_k = M_h + M_e/2 = 1,2 \cdot 3^2/8 - 0,6/2 = 1,05 \text{ tm}$$

$$M_e = -1 \cdot 1,2 \cdot 0,5 = -0,6 \text{ tm}$$

Põhiosade toereaktsioonid (joon. 9.3, c):

$$\Sigma M_b = 0; \quad A = (1,2 \cdot 6 \cdot 2 - 1 \cdot 1)/4 = 3,35 \text{ t}$$

$$\Sigma M_a = 0; \quad B = (1,2 \cdot 6 \cdot 2 + 1 \cdot 5)/4 = 4,85 \text{ t}$$

$$\Sigma M_d = 0; \quad C = [1 \cdot 5 + 2 \cdot 2,5 + 2 \cdot 1,5 - (1 + 1,6) \cdot 1]/4 = 2,60 \text{ t}$$

$$\Sigma M_c = 0; \quad D = [-1 \cdot 1 + 2 \cdot 1,5 + 2 \cdot 2,5 + (1 + 1,6) \cdot 5]/4 = 5,00 \text{ t}$$

Kontroll:

$$\Sigma Y = 0; \quad 3,35 + 4,85 + 2,60 + 5,00 + 3,20 - 6 \cdot 1,2 - 3 \cdot 2 - 1 - 4 \cdot 1,2 = 0$$

Põikjõud:

$$Q_{an} = -1,2 \cdot 1 = -1,20 \text{ t}; \quad Q_{ab} = -1,2 + 3,35 = 2,15 \text{ t}; \quad Q_{f,b} = 1,00 \text{ t}$$

$$Q_{bf1} = 1 + 1 \cdot 1,2 = 2,20 \text{ t}; \quad Q_{ba} = 2,20 - 4,85 = -2,65 \text{ t}$$

$$Q_{f3c} = -1,00 \text{ t}; \quad Q_{c-i} = -1,00 + 2,60 = 1,60 \text{ t}; \quad Q_{i-j} = 1,60 - 2,0 =$$

$$= -0,40 \text{ t}; \quad Q_{j-d} = -0,40 - 2,0 = -2,40 \text{ t}; \quad Q_{d-f3} = 2,60 \text{ t}$$

Paindemomendid:

$$M_a = -1,2 \cdot 1 \cdot 0,5 = -0,60 \text{ tm}; \quad M_b = -1 \cdot 1 - 1,2 \cdot 1 \cdot 0,5 = -1,60 \text{ tm}$$

$$M_g = M_g^0 + (M_a + M_b)/2 = 1,2 \cdot 4^2/8 - (0,6 + 1,6)/2 = 1,30 \text{ tm}$$

$$M_c = -1 \cdot 1 = -1,00 \text{ tm}; \quad M_i = -1 \cdot 2,5 + 2,6 \cdot 1,5 = 1,40 \text{ tm}$$

$$M_j = -(1 + 1,6) \cdot 2,5 + 5,00 \cdot 1,5 = 1,00 \text{ tm};$$

$$M_d = -(1 + 1,6) \cdot 1 = -2,60 \text{ tm}$$

Põikjõu epüür on kujutatud joonisel 9.3, d ja paindemomendi

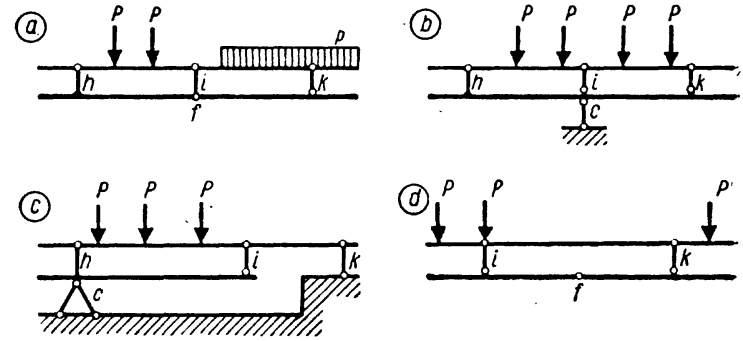
epüür joonisel 9.3, e.

9.22. Sõlmkoormus

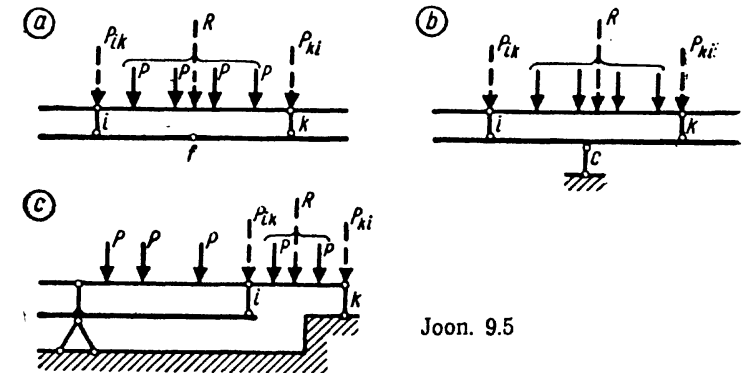
Kui iga liigendi (joon. 9.4, a) ja iga toe (joon. 9.4, b) kohal on sõlm, või kui äärmine sõlmevahe $i-k$ (joon. 9.4, c) ning ka liigendi kohal olev sõlmevahe (joon. 9.4, d) on koormamata, siis on sõlmkoormuse toereaktsioonid võrdsed otsese koormuse toereaktsioonidega.

Sisejõudude epüürid arvutatakse siis analoogiliselt otsese koormuse epüüridega. Sõlmede kohal on paindemomendid otsesel ja sõlmkoormusel võrdsed. Kahe naabersõlme vahel muutub paindemoment linearselt ja põikjõud on konstantne.

Kui liigendi või toe kohal sõlme ei ole (joon. 9.5, a ja b) või kui äärmine sõlmevahe on koormatud (joon. 9.5, c), siis lahutatakse sõlmede vahel mõjuva koormuse resultant R kaheks komponendiks naabersõlmedesse i ja k : $P_{ih} + P_{ki} = R$.



Joon. 9.4



Joon. 9.5

Sisejõudude epüürid arvutatakse tavalisel viisil vastavalt resultandi komponentidele P_{ih} ja P_{ki} . Komponentide tähistamisel näitavad kaks indeksit, milliste sõlmede vahelise koormuse resultant on lahutatud komponentideks, kusjuures esimene indeks näitab komponendi rakenduspunkti.

9.3. Mõjujooned

9.31. Staatika meetod

Joonisel 9.6, *a* kujutatud neljasildelise tala toereaktsiooni *C* mõjujoon on esitatud joonisel 9.6, *b*. Tala on moodustatud kahest põhi- ja lisaosast. Kolme sidemega konsoolidega tala $f_2-c-d-f_3$ on põhiosa; vertikaalse ühikjõu suhtes on põhiosa ka kahe vertikaalse toesidemega osa $a-b-f_1$. Lisaosadeks on f_1-f_2 ja f_3-e-h . Mõjujoone kujutamisel vaadeldakse esmalt seda talaosa, mille jaoks mõjujoont leitakse. Toereaktsioon *C* on põhiosa $f_2-c-d-f_3$ reaktsioon. Ühikjõu mõjumisel põhiosal $f_2-c-d-f_3$ ($-n_2 \leq x_3 \leq l_3 + m_4$) leitakse toereaktsioon *C* toe *d* kohta kirjutatud momentide tasakaalu tingimusest: $\Sigma M_d = 0$:

$$C = 1(l_3 - x_3)/l_3 \quad (a)$$

Toereaktsioonid *A*, *B* ja *E* on siis nullid. Toereaktsiooni *C* mõjujoone avaldis (a) kujutab sirget $f'_2-f'_3$:

$$\text{kui } x_3 = -n_2, \text{ siis } C = 1(l_3 + n_2)/l_3 \quad (b)$$

$$\text{ja kui } x_3 = l_3 + m_4, \text{ siis } C = -1m_4/l_3 \quad (c)$$

Ühikjõu mõjumisel lisaosal f_1-f_2 ($0 \leq x_2 \leq d_2$) lahutatakse jõud põhiosa mõjujoonte arvutamisel kaheks komponendiks liigenditesse f_1 ja f_2 :

$$F_1 = 1(d_2 - x_2)/d_2; \quad F_2 = 1x_2/d_2 \quad (d)$$

Asetades nüüd ühikjõu komponendi F_2 (d) ühikjõu asemele avaldisse (b), saadakse toereaktsiooni *C* arvutamiseks järgmine võrrand:

$$C = 1x_2(l_3 + n_2)/(l_3d_2) \quad (e)$$

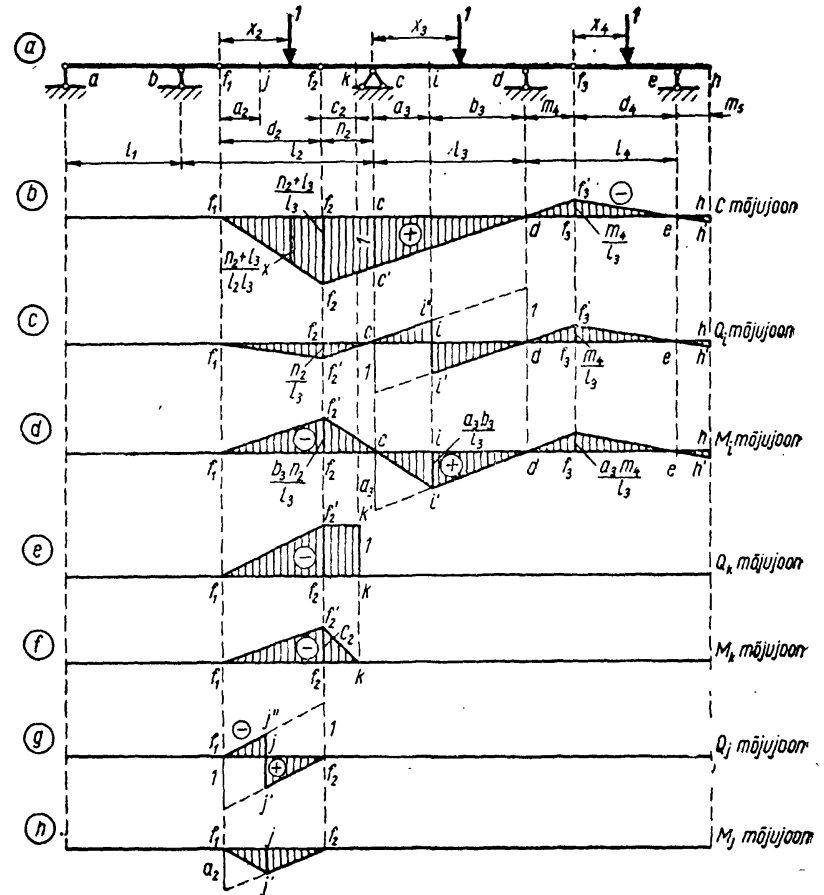
$$\text{Kui } x_2 = 0, \text{ siis } C = 0 \quad (f)$$

$$\text{ja kui } x_2 = d_2, \text{ siis } C = 1(l_3 + n_2)/l_3 \quad (g)$$

mis ühtib avaldisega (b). Joonisel 9.6, *a* kujutab seda sirget lõik $f_1-f'_2$.

Ühikjõu mõjumisel lisaosal f_3-e-h ($0 \leq x_4 \leq d_4 + m_5$) lahutatakse jõud põhiosa arvutamisel kaheks komponendiks liigendisse f_3 ja toele *E*:

$$F_3 = 1(d_4 - x_4)/d_4; \quad E = 1x_4/d_4 \quad (h)$$



Joon. 9.6

Asetades nüüd komponendi F_3 (h) ühikjõu asemele avaldisse (c), saadakse toereaktsiooni *C* arvutamiseks võrrand

$$C = 1(d_4 - x_4)m_4/(l_3d_4) \quad (i)$$

$$\text{Kui } x_4 = 0, \text{ siis } C = -1m_4/l_3 \quad (j)$$

$$\text{mis ühtib avaldisega (c), ja kui } x_4 = d_4, \text{ siis } C = 0 \quad (k)$$

Joonisel 9.6, *a* kujutab seda sirget lõik f'_3-e-h' . Toereaktsiooni *C* mõjujoon koosneb kolmest sirgest (a), (e) ja

(i). Põhiosa ulatusel kujutab sirge (a) konsoolidega tala toereaktsiooni mõjujoont. Lisa- ja põhiosa ühendusliigendite (f_2, f_3) kohal on lisa- ja põhiosa sirgetel võrdsed ordinaadid ($f_2-f'_2$ ja $f_3-f'_3$). Lisaosa f_3-e-h all on mõjujoonel nullpunkt toe e kohal (k) ja lisaosa f_1-f_2 all liigendi f_1 kohal. Kui ühikjõud mõjub põhiosal $a-b-f_1$, siis lisaosades ja põhiosas $f_2-c-d-f_3$ toereaktsioonide sisejõude ei teki: toereaktsiooni C mõjujoone ordinaadid vahemikus $a-b-f_1$ on nullid.

Lõige i asub põhiosa $f_2-c-d-f_3$ tugede c ja d vahel. Kui ühikjõud asub paremal pool lõiget i ($x_3 > a_3$), siis põikjõud võrdub toereaktsiooniga C . Põikjõud lõikes i võrdub ühikjõud mõjumisel põhiosal lõike i ja liigendi f_3 vahel avaldisega (a):

$$Q_i = C = (l_3 - x_3) / l_3 \quad (a_3 < x_3 \leq l_3 + m_4) \quad (l)$$

ja lisaosal f_3-e-h avaldisega (i)

$$Q_i = C = -(d_4 - x_4) m_4 / (l_3 d_4) \quad (0 \leq x_4 \leq d_4 + m_5) \quad (m)$$

Avaldised (l) ja (m) on vastavalt sirgete $i'-f'_3$ ning f'_3-h' võrrandid (joon. 9.6, c). Kui $x_3 = l_3 + m_4$ ($x_4 = 0$), siis $Q_i = C = m_4 / l_3$ ja kui $x_4 = d_4$, siis $Q_i = 0$.

Kui ühikjõud asub vasakul pool lõiget i ($x_3 < a_3$), siis põikjõud lõikes i avaldatakse toereaktsiooni D kaudu:

$$-n_2 \leq x_3 < a_3: \quad Q_i = -D = -x_3 / l_3 \quad (n)$$

$$0 \leq x_2 \leq d_2: \quad Q_i = -D = x_2 n_2 / (l_3 d_2) \quad (o)$$

avaldised (n) ja (o) on vastavalt sirgete f'_2-i'' ning $f'_1-f'_2$ võrrandid (joon. 9.6, c):

kui

$$x_3 = a_3 - 0, \quad x_3 = -n_2, \quad x_2 = 0, \quad x_2 = d_2$$

siis

$$Q_i = -a_3 / l_3, \quad Q_i = n_2 / l_3, \quad Q_i = 0, \quad Q_i = n_2 / l_3$$

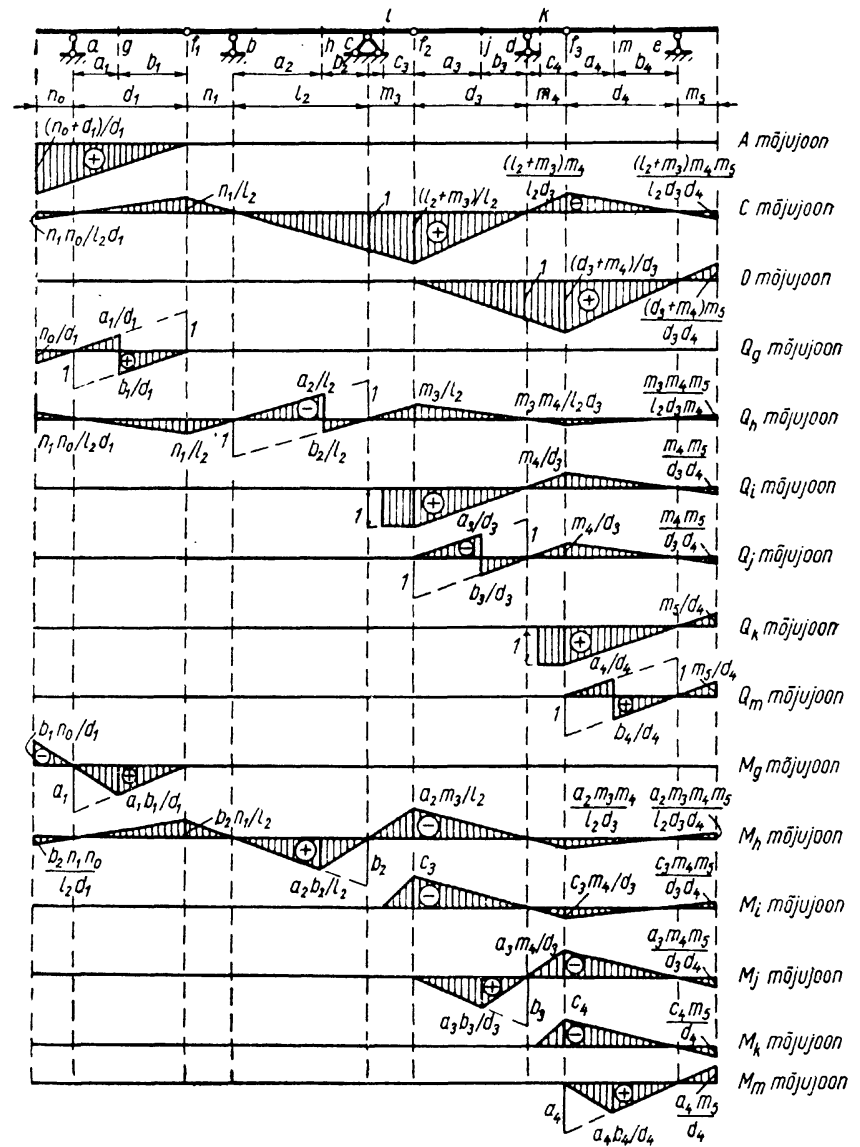
Paindemoment lõikes i , kui ühikjõud asub paremal pool lõiget i ($x_3 \geq a_3$), leitakse toereaktsiooni C kaudu:

$$M_i = C a_3 \quad (p)$$

Valem (p), kui sellesse asetada toereaktsiooni avaldised (a) ja (i), saab kuju:

$$a_3 \leq x_3 \leq l_3 + m_4: \quad M_i = (l_3 - x_3) a_3 / l_3 \quad (q)$$

$$0 \leq x_4 \leq d_4 + m_5: \quad M_i = -(d_4 - x_4) a_3 m_4 / (l_3 d_4) \quad (r)$$



Joon. 9.7

Avaldis (q) on sirge $i'-f'_3$ (joon. 9.6, d) võrrand: kui $x_3 = a_3$, siis $M_i = a_3 b_3 / l_3$, ja kui $x_3 = l_3 + m_4$, siis $M_i = -a_3 m_4 / l_3$. Avaldisega (r) kujutatakse sirge f'_3-h' : kui $x_4 = 0$, siis $M_i = -a_3 m_4 / l_3$, ja kui $x_4 = d_4 + m_5$, siis $M_i = a_3 m_4 m_5 / (l_3 d_4)$.

Kui ühikjõud asub vasakul pool lõiget i , siis

$$M_i = D(l_3 - a_3) = D b_3 \quad (s)$$

$$-n \leq x_3 \leq a_3: \quad M_i = x_3 b_3 / l_3 \quad (t)$$

$$0 \leq x_2 \leq d_2: \quad M_i = -x_2 n_2 b_3 / (l_3 d_2) \quad (u)$$

Avaldised (t) ja (u) on sirgete f'_2-i' ja $f_1-f'_2$ võrrandid: kui

$$x_3 = a_3, \quad x_3 = -n_2, \quad x_2 = 0, \quad x_2 = d_2$$

siis

$$M_i = a_3 b_3 / l_3, \quad M_i = -n_2 b_3 / l_3, \quad M_i = 0, \quad M_i = -n_2 b_3 / l_3$$

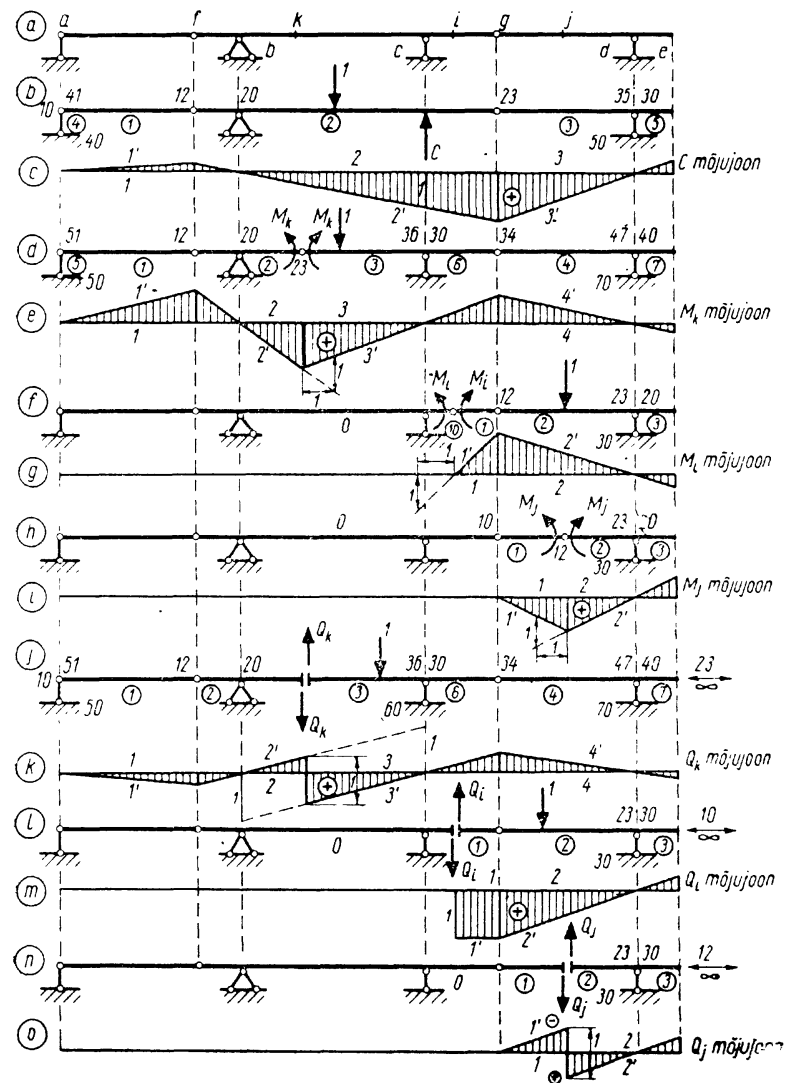
Ristlõige k asub põhiosa $f_2-c-d-f_3$ konsoolis liigendi f_2 ja toe c vahel. Kui ühikjõud on ristlõikest k paremal pool [$x_3 > -(n_2 - c_2)$], siis põikjõud ja paindemoment selles lõikes on nullid: $Q_k = 0, M_k = 0$ (joon. 9.6, e ja f). Kui ühikjõud mõjub liigendi f_2 ja ristlõike k vahel [$-n_2 \leq x_3 < -(n_2 - c_2)$], siis $Q_k = -1$, ning kui lisaosal f_1-f_2 ($0 \leq x_2 \leq d_2$), siis $Q_k = -F_2 = -x_2/d_2$: kui $x_2 = 0$, siis $Q_k = 0$ ja kui $x_2 = d_2$, siis $Q_k = -1$. Ühikjõu mõjumisel ristlõikes k on $M_k = 0$ ja liigendi f_2 kohal $M_k = -1 \cdot c_2$. Kui ühikjõud on lisaosal f_1-f_2 , siis $M_k = -F_2 c_2 = -x_2 c_2 / d_2$, mis kujutab sirget $f_1-f'_2$ (joon. 9.6, f). Kui $x_2 = 0$, siis $M_k = 0$ ja kui $x_2 = d_2$, siis $M_k = -c_2$.

Kuna koormuse mõjumisel põhiosal ei teki sisejõudusid lisaosas, siis lisaosa f_1-f_2 ristlõike j mõjujooned ühtivad sama sildega ($l = d_2$) lihttala mõjujoontega (joon. 9.6, g ja h: Q_j ja M_j).

Joonisel 9.7 on kujutatud teistsuguse staatikaga määratava mitmesildelise tala mõjujooned. Konsoolidega tala $f_1-b-c-f_2$ on põhiosa ja elemendid $a-f_1$, f_2-f_3 ning f_3-e on lisaosad. Element f_2-f_3 on põhiosa $f_1-b-c-f_2$ suhtes lisaosa, kuid elemendi f_3-e suhtes põhiosa.

9.32. Kinemaatika meetod

Mõjujoone kujutamisel kinemaatika meetodiga eemaldatakse side, mille reaktsiooni mõjujoont leitakse. Sideme eemaldamisega tekkinud mehhanismile antakse võimalik



Joon. 9.8

paigutusolukord, milles eemaldatud sideme reaktsioonile R vastav paigutus võrdub miinus ühega ($\delta r = -1$). Reaktsioon R on kas paindemoment, põikjõud, pikijõud või toereaktsioon. Seejärel moodustatakse mehhanismi vertikaalsiirde epüür. Epüüri ordinaat võrdub eemaldatud sideme reaktsiooni mõjujoone ordinaadiga.

Joonisel 9.8, *a* esitatud tala toereaktsiooni C mõjujoone kujutamisel muudetakse tala mehhanismiks toesideme c eemaldamisega (joon. 9.8, *b*). Vertikaalsiirde epüür kujutatakse mehhanismi pooluste plaani abil. Mehhanismi element 2 pöörduv ümber toeliigendi b , mis on elemendi 2 peapoolus 20. Elemendi 1 peapooluseks 10 on horisontaalse sirge 20-12 ja toevarda a sihi, s. t. vertikaalse sirge 40-41 lõikepunkt, mis ühtib liigendiga a (41). Elemendi 3 peapooluseks 30 on horisontaalse sirge 20-23 ja toevarda d (element 5) sihi 50-35 lõikepunkt (joon. 9.8, *b*).

Mõjujoone ordinaadid peapooluste 10, 20 ja 30 vertikaalidel (mehhanismi toevarraste kohal) on nullid. Elementide 1 ja 2 ning 2 ja 3 siirded vastavalt pooluste 12 ning 23 vertikaalidel on võrdsed. Reaktsioonile C vastav siire $\delta c = -1$. Järelikult mehhanismi vertikaalsiirde epüür (joon. 9.8, *c*) ühtib toereaktsiooni mõjujoonega.

Paindemomentide M_h , M_i ja M_j mõjujoonte kujutamisel pannakse vastavasse lõikesse liigend ning leitakse pooluste plaan (joon. 9.8, *d*, *f* ja *h*). Mehhanismi liikumatud elemendid märgitakse tähisega 0. Pooluste plaani abil kujutatakse mehhanismi vertikaalsiirde epüür, mis on paindemomendi mõjujooneks ($\delta r = -1$, joon. 9.8, *e*, *g* ja *i*).

Põikjõudude Q_h , Q_i ja Q_j mõjujoonte kujutamisel eemaldatakse vastavast lõikest põikjõudu vastuvõttev side ning leitakse pooluste plaan (joon. 9.8, *k*, *m* ja *o*). Pooluste plaani abil kujutatakse mehhanismi vertikaalsiirde epüür, kusjuures põikjõule vastav paigutus $\delta r = -1$ (joon. 9.8, *l*, *n* ja *p*). Põikjõu sideme eemaldamisel jäävad teine teisel pool lõiget asetsevad elemendid võimalikus paigutusolukorras paralleelseteks, sest elemendid on ühendatud kahe paralleelse vardaga. Iga mõjujoone puhul on antud mehhanismi elementidele niisugused paigutised, et eemaldatud sideme reaktsioonile vastav paigutus võrdub miinus ühega ning vertikaalsiirde epüür ühtib eemaldatud sideme reaktsiooni mõjujoonega.

9.4. Liigendite asetus

Mitmesildelises staatikaga määratavas talas olenevad antud koormusest põhjustatud paindemomendid liigendite asukohast. Konstantse ristlõikega talade puhul on materjali kulu väikseim, kui suurimad positiivsed silde-momendid on arvuliselt võrdsed suurimate negatiivsete toemomentidega.

Joonisel 9.9, *a* on kujutatud kahe võrdse sildega tala, mis on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega. Liigendi f kaugus toest b leitakse võrdusest:

$$M_1 = -M_b \quad (a)$$

milles M_1 on maksimaalne sildemoment ja M_b — minimaalne toemoment.

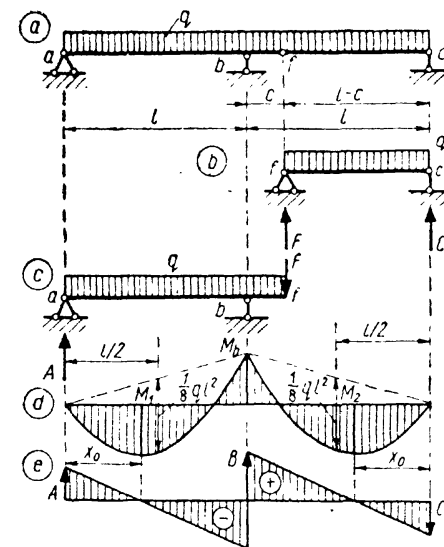
Põhiosaks on konsooliga tala $a-b-f$ ja lisaosaks $f-c$, lisaosa toereaktsioonid:

$$F = C = q(l - c)/2 \quad (b)$$

Toemoment

$$M_b = -Fc - qc^2 = -q(l - c)c/2 - qc^2/2 = -qlc/2 = -ql^2\zeta/2 \quad (c)$$

milles $\zeta = c/l$; $c = \zeta l$ on konsooli pikkus $b-f$.



Joon. 9.9

Toereaktsioon A leitakse tasakaalutingimusest $\Sigma M_b = 0$

$$Al - ql^2/2 + Fc + qc^2/2 = 0$$

$$A = [ql^2/2 - q(l-c)c/2 - qc^2/2]/l =$$

$$= [ql^2/2 - qlc/2]/l = ql(1-\zeta)/2 \quad (d)$$

Lõikes, kus tekib maksimaalne paindemoment M_1 , võrdub põikjõud nulliga:

$$Q_{x_0} = A - qx_0 = 0 \quad (e)$$

millest, arvestades avaldist (d), leitakse

$$x_0 = A/q = l(1-\zeta)/2 \quad (f)$$

Maksimaalne paindemoment

$$M_1 = Ax_0 - qx_0^2/2 = ql^2(1-\zeta)^2/4 - ql^2(1-\zeta)^2/8 =$$

$$= ql^2(1-\zeta)^2/8 \quad (g)$$

Avaldised (c) ja (g) on tingimuse (a) alusel arvuliselt võrdsed, kuid vastupidiste märkidega:

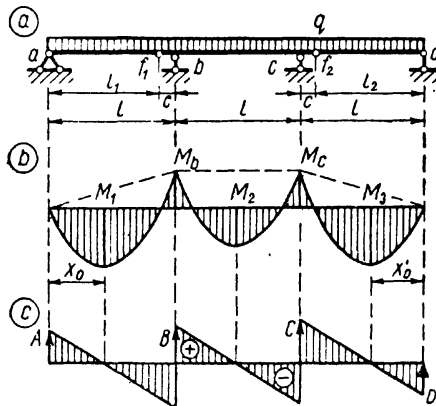
$$ql^2(1-\zeta)^2/8 = ql^2\zeta/2$$

mis ζ suhtes on ruutvõrrand

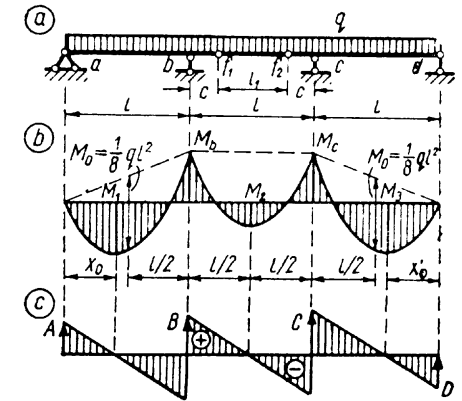
$$\zeta^2 - 6\zeta + 1 = 0 \quad (n)$$

Võrrandi (h) lahend $\zeta = 3 + \sqrt{8}$ ei kõlba, kuna $\zeta < 1$. Järelikult

$$\zeta = 3 - \sqrt{8} = 0,1716 \quad (i)$$



Joon. 9.10



Joon. 9.11

Kui liigend f on toest b kaugusel $c = \zeta l = 0,1716l$, siis

$$M_1 = -M_b = M_2 = 0,0858ql^2 = 0,6863ql^2/8 \quad (j)$$

$$A = C = 0,414ql; \quad B = 1,172ql \quad (k)$$

Vasakpoolses sildes on paindemomendi epüüri nullpunkt toest b kaugusel $\zeta l = 0,1716l$.

Joonisel 9.10 kujutatud kolmesildelise sümmeetrilise tala liigendi f_1 kaugus toest b on arvatud järgmise tingimuse alusel:

$$-M_b = -M_c = M_2 = M_2^0/2 = ql^2/16 = 0,0625ql^2 \quad (l)$$

milles $M_2^0 = ql^2/8$ on lihttala suurim paindemoment ühtlastest jaotatud koormusest q . Tulemused on järgmised:

$$c = 0,125l$$

$$l_1 = 0,875l$$

$$x_0 = 0,438l$$

$$M_2 = -M_b = -M_c = ql^2/16 = 0,0625ql^2$$

$$M_1 = M_3 = 0,0957ql^2$$

$$A = D = 0,438ql; \quad B = C = 1,062ql$$

Joonisel 9.11 kujutatud tala konsooli f_1-b pikkus c on arvatud võrduse $M_1 = -M_b$ alusel:

$$c = 0,220l$$

$$l_1 = 0,560l$$

$$x_0 = x'_0 = 0,414l$$

$$M_1 = -M_b = -M_c = M_3 = 0,0858ql^2 = 0,6863ql^2/8$$

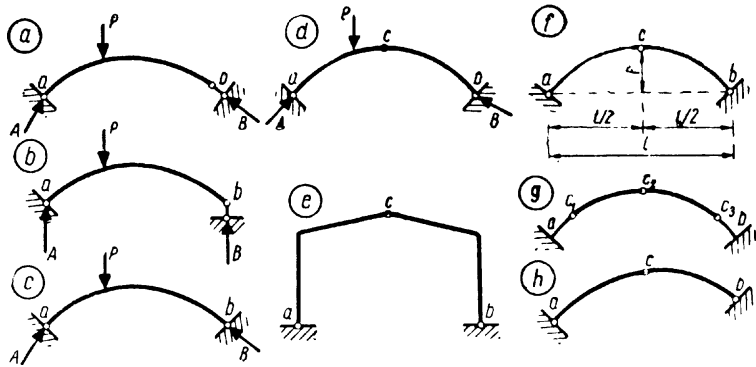
$$M_2 = 0,0392ql^2; \quad A = D = 0,414ql; \quad B = C = 1,086ql$$

10. KOLME LIIGENDIGA KAAR JA RAAM

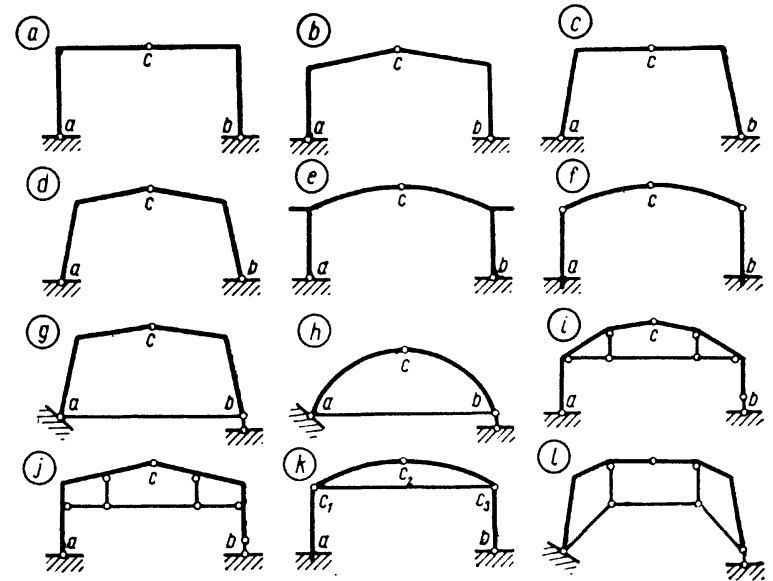
10.01. Üldised mõisted

Kahele toele toetuvat ühest või mitmest surutud kõverast vardast moodustatud konstruktsiooni, milles vertikaalne koormus põhjustab nii vertikaalseid kui ka horisontaalseid toereaktsioone, nimetatakse kaareks.

Joonisel 10.1, *a* ja *b* on kujutatud vastavalt kaare ja kõvera tala arvutusskeemid. Kõverale talale mõjuv vertikaalne koormus tekitab ainult vertikaalseid toereaktsioone (joon. 10.1, *b*), kuid põhjustab liigendi *b* horisontaalse siirde. Selle vältimiseks lisatakse toele *b* horisontaalne tugivarras, mis teeb toe *b* liikumatuks. Kahele liikumatule liigenditoele toetuvat kõverat varrast nimetatakse kahe liigendiga kaareks (joon. 10.1, *c*). Kahe liigendiga kaar on ühekordselt staatikaga määratu. Joonisel 10.1, *d* kujutatud kolme liigendiga kaar on staatikaga määratu.



Joon. 10.1



Joon. 10.2

Sirgetest või murtud teljega varrastest koosnevast konstruktsiooni, milles vertikaalne koormus põhjustab vertikaalseid ja horisontaalseid toereaktsioone, nimetatakse raamiks (joon. 10.1, *e*).

Kolme liigendiga kaare toeliigendeid *a* ja *b* nimetatakse kannaliigenditeks ja keskmist liigendit *c* lukuliigendiks. Lukuliigendi vertikaalset kaugust toeliigendeid ühendavast sirgest nimetatakse kaare kõrguseks ja märgitakse tähega *f* (joon. 10.1, *f*). Kaare geomeetriselised põhikarakteristikud on kõrgus *f* ja selle *l*. Kõrguse ja silde suhet f/l nimetatakse tõusuks.

Mõnikord on kannaliigendid nihutatud silde keskkoha poole ja asetsevad siis konsoolidel 10.1 *g*. Tavaliselt asuvad toeliigendid *a* ja *b* samal kõrgusel. Mõnel juhul on toed erinevatel kõrgustel (joon. 10.1, *h*); niisugust kaart nimetatakse roomavaks kaareks.

Joonisel 10.2, *a*, *b*, *c* ja *d* on esitatud mitmesuguse kujuga kolme liigendiga raame. Raami kuju oleneb peamiselt konstruktsiooni otstarbest. Sageli ehitatakse konst-

ruktsioone, milles osa vardaid on kõverad ja osa sirged (joon. 10.2, *e, f, h* ja *k*).

Vertikaalse koormuse puhul horisontaalse toereaktsiooni vältimiseks kasutatakse sirget või murtud kujuga tõmbi (joon. 10.2, *g...l*). Tõmbiga kolme liigendiga kaar on staatikaga määratav. Uks tugi on liikumatu ja teine on liikuv silindriline tugi. Tõmbi asetus ja kaju olenevad kaare või raami kujust ning konstruktsiooni otstarbest.

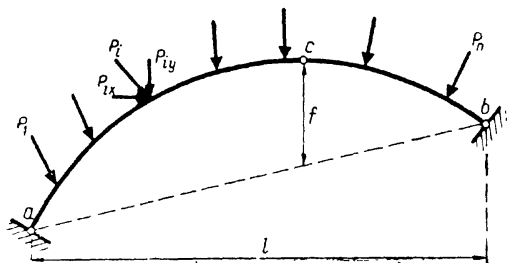
10.02. Toereaktsioonide ja sisejõudude arvutus

10.02.1. Vertikaalne koormus

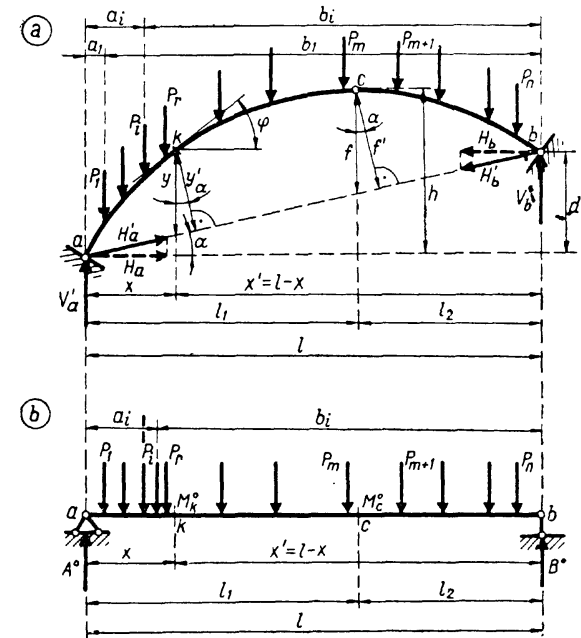
Kolme liigendiga kaare arvutamisel lahutatakse mittevertikaalne koormus tavaliselt vertikaalseks ja horisontaalseks koormuseks (joon. 10.3) ning lahendatakse eraldi. Algul käsitleme vertikaalset koormust.

Kolme liigendiga kaare toed on liikumatud liigendtoed, mis võimaldavad ainult toeristlõigete pööret. Tundmatuteks on toereaktsioonide suurused ja sihid. Kolme liigendiga kaarel on neli tundmatut toereaktsiooni komponenti, kummagi toe juures kaks. Need neli tundmatut komponenti arvutatakse kogu kaare kohta koostatud kolmest tasakaaluvõrrandist ja ühest lukuliigendi *c* kohta kirjutatud tasakaalutingimusest: liigendis *c* on paindemoment null, s. t. kõigi ühel pool liigendit *c* kaarele (osale *a-c* või *c-b*) rakendatud jõudude momentide summa liigendi *c* suhtes võrdub nulliga.

Roomava kaare puhul lahutatakse toereaktsioonid vertikaalseteks ja toeliigendeid *a* ning *b* ühendava sirge sihilisteks komponentideks (joon. 10.4, *a*). Vertikaalsed komponendid tähistatakse V'_a ja V'_b ning toeliigendeid ühendava sirge sihilised komponendid H'_a ja H'_b . Toeliigendite *b* ja



Joon. 10.3



Joon. 10.4

a kohta kirjutatud momentide tasakaalu tingimustest

$$\sum M_b = 0; \quad V'_a l - \sum_{i=1}^n P_i b_i = 0$$

$$\sum M_a = 0; \quad -V'_b l + \sum_{i=1}^n P_i a_i = 0$$

arvutatakse toereaktsioonide komponendid

$$V'_a = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n P_i b_i; \quad V'_b = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n P_i a_i \quad (10.1)$$

milles a_i ja b_i on toeliigendite *a* ja *b* kaugused jõu P_i sihist. Toereaktsioonide komponendid V'_a ja V'_b on sama koormusega ja kaarega võrdse sildega lihttala toereaktsioonidega (joon. 10.4, *b*) ühesuurused:

$$V'_a = A^0 \quad \text{ja} \quad V'_b = B^0 \quad (a)$$

Tasakaalutingimusest $\sum X = 0$: $H'_a \cos \alpha - H'_b \cos \alpha = 0$ leitakse, et

$$H'_a = H'_b = H' \quad (10.2)$$

Vertikaalsest koormusest põhjustatud, toeliigendeid a ja b ühendava sirge sihilised toereaktsioonide komponendid on võrdsed ning vastassuunalised. Ülaltpoolsest mõjuva koormuse puhul on mõlemad suunatud kaare silde poole. Toereaktsiooni komponent H' leitakse lukuliigendi c kohta kirjutatud paindemomendi tingimusest $M_c=0$:

$$V_a l_1 - \sum_{i=1}^m P_i (l_1 - a_i) - H' f' = 0 \quad (b)$$

ehk

$$M_c^0 - H' f' = 0 \quad (c)$$

milles f' ja l_1 on liigendi c kaugused sirgest $a-b$ ja toeliigendi a vertikaalist, m — kaarele mõjuvate jõudude arv vasakul pool liigendit c ning M_c^0 — samast koormusest kaarega võrdse sildega lihttala lõikes c tekkiv paindemoment (joon. 10.4, b)

$$M_c^0 = V_a l_1 - \sum_{i=1}^m P_i (l_1 - a_i) \quad (d)$$

või

$$M_{c,par}^0 = B^0 l_2 - \sum_{i=m+1}^n P_i (l_2 - b_i) \quad (e)$$

Vertikaalse koormuse puhul $M_{c,par}^0 = M_{c,vas}^0 = M_c^0$. Võrrandist (c) avaldatakse

$$H' = M_c^0 / f' \quad (10.3)$$

Kaare toereaktsioonid A ja B lahutatakse tavaliselt vertikaalseks ja horisontaalseks komponendiks (joon. 10.5). Vertikaalse koormuse puhul on horisontaalsed komponendid võrdsed:

$$H_a = H_b = H \quad (10.4)$$

Horisontaalne toereaktsioon H leitakse valemiga

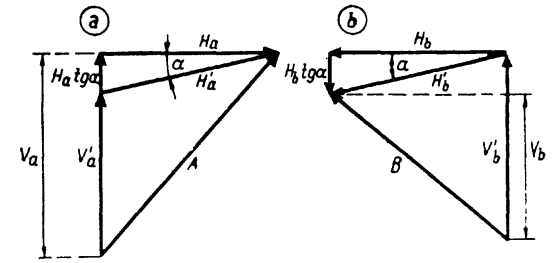
$$H = H' \cos \alpha = M_c^0 \cos \alpha / f'$$

ehk

$$H = M_c^0 / f \quad (10.5)$$

kuna $f' = f \cos \alpha$. Horisontaalne toereaktsioon H on pöördvõrdeline kõrgusega f . H' vertikaalne komponent on

$$H' \sin \alpha = H \operatorname{tg} \alpha \quad (f)$$



Joon. 10.5

Toereaktsioonide A ja B vertikaalsed komponendid arvutatakse järgmiste valemitega:

$$V_a = V'_a + H' \sin \alpha$$

$$V_b = V'_b - H' \sin \alpha$$

ehk

$$V_a = V'_a + H \operatorname{tg} \alpha$$

$$V_b = V'_b - H \operatorname{tg} \alpha \quad (10.6)$$

Kui toeliigendid a ja b on samal kõrgusel, siis $\alpha=0$ ja $H'=H$ ning vertikaalsed toereaktsioonid on võrdsed lihttala toereaktsioonidega:

$$V_a = V'_a = A^0, \quad V_b = V'_b = B^0 \quad (10.7)$$

Paindemoment kaare suvalises ristlõikes k arvutatakse valemiga

$$M_k = V'_a x - \sum_{i=1}^r P_i (x_k - a_i) - H' y' \quad (10.8)$$

ehk

$$M_k = M_k^0 - H y \quad (10.9)$$

milles x on ristlõike k kaugus toeliigendi a vertikaalist, y'_k — ühendussirgest $a-b$, y — ühendussirgest $a-b$ vertikaalsihis ($y' = y \cos \alpha$); r — jõudude arv vasakul lõiget k ja

$$M_k^0 = V'_a x - \sum_{i=1}^r P_i (x - a_i) \quad (10.10)$$

on kaarega võrdse sildega lihttala ristlõikes k tekkiv paindemoment (joon. 10.4, b) ning

$$H y_k = H' y', \quad \text{kuna } H' = H / \cos \alpha \text{ ja } y' = y \cos \alpha \quad (g)$$

Paindemoment kaare ristlõikes k on võrdne sama sildega lihttala vastavas ristlõikes k tekkiva paindemomendi ja horisontaalsest toereaktsioonist põhjustatud momendi vahega (10.9). Lihttala paindemoment M_k^0 ja horisontaalsest reaktsioonist põhjustatud moment H_y on samas suurusjärgus, vahe aga nendest tunduvalt väiksem. Järelikult on samast koormusest põhjustatud paindemoment kaares tunduvalt väiksem kui kaarega võrdse sildega lihttala paindemoment.

Põikjõud ristlõikes k arvutatakse kõigi ühel lõiget k mõjuvate jõudude projektsioonide summa tingimusest lõikes k kaare telje puutujaga risti olevale sihile (ristlõike tasandile):

$$Q_k = (V'_a - \sum_{i=1}^r P_i) \cos \varphi - H' \sin(\varphi - \alpha) \quad (10.11)$$

ehk

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi - H' \sin(\varphi - \alpha) \quad (10.12)$$

milles

$$Q_k^0 = V'_a - \sum_{i=1}^r P_i \quad (10.13)$$

on põikjõud lihttalas ja φ — horisontaali ja puutuja vaheline nurk lõikes k . Kui toereaktsioon A lahutatakse horisontaalseks ja vertikaalseks komponendiks, siis põikjõu avaldis saab kuju

$$Q_k = (V_a - \sum_{i=1}^r P_i) \cos \varphi - H \sin \varphi \quad (10.14)$$

ehk

$$Q_k = V_k^0 \cos \varphi - H \sin \varphi \quad (10.15)$$

milles

$$V_k^0 = V_a - \sum_{i=1}^r P_i \quad (10.16)$$

on ühel pool lõiget k kaarele mõjuvate jõudude resultandi vertikaalne komponent.

Pikijõud arvutatakse kõigi ühel pool lõiget k mõjuvate jõudude projektsioonide summa tingimusest kaare telje puutuja sihile lõikes k :

$$N_k = (V'_a - \sum_{i=1}^r P_i) \sin \varphi + H' \cos(\varphi - \alpha) \quad (10.17)$$

ehk

$$N_k = Q_k^0 \sin \varphi + H' \cos(\varphi - \alpha) \quad (10.18)$$

või toereaktsiooni A vertikaalse ja horisontaalse komponendi kaudu:

$$N_k = (V_a - \sum_{i=1}^r P_i) \sin \varphi + H \cos \varphi \quad (10.19)$$

ehk

$$N_k = V_k^0 \sin \varphi + H \cos \varphi \quad (10.20)$$

Normaaljõu avaldises võetakse survejõud positiivsena, sest ülalt alla mõjuv koormus tekitab kaares survejõu.

Kui kaare kannad asuvad samal kõrgusel, siis $\alpha = 0$ ja $H' = H$ ning põik- ja pikijõud leitakse valemitega

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi - H \sin \varphi \quad (10.21)$$

$$N_k = Q_k^0 \sin \varphi + H \cos \varphi \quad (10.22)$$

Avaldistest (10.21) ja (10.22) järeldub, et põikjõud kaares on väiksem kui lihttalas, kuid kaares tekib pikijõud, mis lihttalas puudub.

10.022. Horisontaalne koormus

Toereaktsioonide komponendid V'_a ja V'_b arvutatakse liigendite b ning a kohta koostatud momentide tasakaalu tingimustest

$$V'_a = -\frac{1}{l} \sum_{i=1}^n W_i (c_i - l \operatorname{tg} \alpha) \quad (10.23)$$

$$V'_b = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n W_i (y_i + x_i \operatorname{tg} \alpha) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n W_i c_i$$

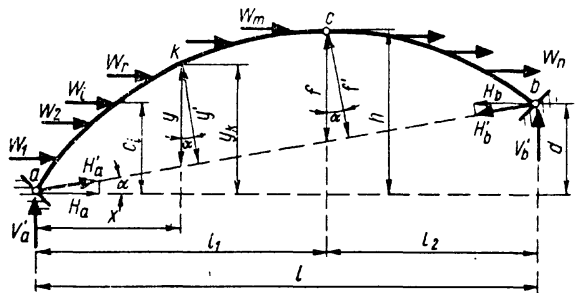
milles c_i on toeliigendi a kaugus horisontaalse jõu W_i sihist.

Projektsioonide tingimusega $\sum X = 0$ leitakse toereaktsioonide horisontaalsete komponentide vahe:

$$\sum X = 0; \quad H'_a \cos \alpha - H'_b \cos \alpha + \sum_{i=1}^n W_i = 0$$

või

$$H_a - H_b + \sum_{i=1}^n W_i = 0$$



Joon. 10.6

millest

$$H_b - H_a = \sum_{i=1}^n W_i \quad (10.24)$$

Liigendi c kohta koostatud paindemomendi tingimusest arvutatakse H'_a ja H'_b :

$$M_{c,vas.} = 0; \quad V'_a l_1 - \sum_{i=1}^m W_i (h - c_i) - H'_a f' = 0$$

$$M_{c,par.} = 0; \quad V'_b l_2 + \sum_{i=m+1}^n W_i (h - c_i) - H'_b f' = 0$$

millest

$$H'_a = [V'_a l_1 - \sum_{i=1}^m W_i (h - c_i)] / f' \quad (10.25)$$

$$H'_b = [V'_b l_2 + \sum_{i=m+1}^n W_i (h - c_i)] / f'$$

kus h ja l_2 on liigendi c kaugused toeliigendi a horisontaalset ja toeliigendi b vertikaalset.

Toereaktsioonide A ja B horisontaalsed ja vertikaalsed komponendid arvutatakse valemitega:

$$H_a = [V'_a l_1 - \sum_{i=1}^m W_i (h - c_i)] / f \quad (10.26)$$

$$H_b = [V'_b l_2 + \sum_{i=m+1}^n W_i (h - c_i)] / f$$

$$V_a = V'_a + H_a \operatorname{tg} \alpha \quad (10.27)$$

$$V_b = V'_b - H_b \operatorname{tg} \alpha$$

Paindemoment lõikes k arvutatakse valemiga

$$M_k = V'_a x - \sum_{i=1}^r W_i (y_k - c_i) - H'_a y'$$

või

$$M_k = V'_a x - \sum_{i=1}^r W_i (y_k - c_i) - H_a y \quad (10.28)$$

kus y_k on ristlõike k raskuskeskme kaugus liigendi a horisontaalset.

Piki- ja põikjõud arvutatakse järgmiste valemitega:

$$N_k = V'_a \sin \varphi + \sum_{i=1}^r W_i \cos \varphi + H'_a \cos (\varphi - \alpha) \quad (10.29)$$

$$Q_k = V'_a \cos \varphi - \sum_{i=1}^r W_i \sin \varphi - H'_a \sin (\varphi - \alpha) \quad (10.30)$$

$$N_k = V_a \sin \varphi + (\sum_{i=1}^r W_i + H_a) \cos \varphi \quad (10.31)$$

$$Q_k = V_a \cos \varphi - (\sum_{i=1}^r W_i + H_a) \sin \varphi \quad (10.32)$$

10.03. Sisejõudude epüüride konstrueerimine vertikaalse koormuse puhul

Kaare paindemomendi epüüri ordinaadid arvutatakse valemiga (10.9): $M_k = M_k^0 - Hy$. Esimene liige on lihttala paindemomendi epüüri ordinaat ja teine liige horisontaalse toereaktsiooni ning kaare telje ordinaadi korrutis. Paindemomendi avaldist (10.9) teisendatakse järgmiselt:

$$M_k = M_k^0 - Hy = H(M_k^0/H - y) = H(y^* - y) = H\eta \quad (a)$$

milles y^* , η on vastavalt lihttala ja kaare paindemomendi epüüride ordinaadid, mis on jagatud horisontaalse reaktsiooniga H :

$$y^* = M_k^0/H, \quad \eta = M_k/H \quad (b)$$

Lukuliigendis c võrdub paindemoment nulliga:

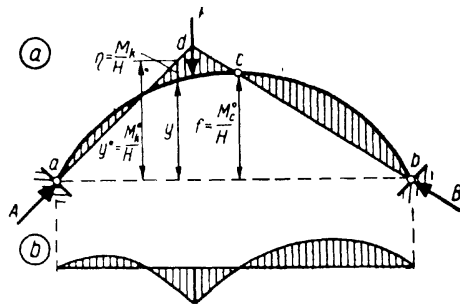
$$M_c = M_c^0 - Hy_c = H(M_c^0/H - y_c) = H(y_c^* - y_c) = 0 \quad (c)$$

milles

$$y_c = f \quad (d)$$

on kaare kõrgus. Võrrandist (c) järeldub, et

$$y_c^* = f \quad (e)$$



Joon. 10.7

Võrrandite (a) ja (e) alusel konstrueeritakse nüüd paindemomendi epüür (joon. 10.7, a). Esmalt kujutatakse kaare telgjoon $a-c-b$. Järgnevalt kantakse positiivsed ordinaadid $y^* = M_h^0/H$ teljelt $a-b$ ülespoole ja kuna $y_c^* = f$, siis epüüri M_h^0/H ($a-d-b-a$) sirge $b-d$ läbib kaare lukuliigendit c . Kaare paindemoment võrdub epüüri M_h^0/H ja kaare telgjoone ordinaatide vahe η ja toereaktsiooni H korrutisega (a) : $M_h = H\eta$. Joonisel 10.7, a kujutab viirutus ordinaate η . Joonisel 10.7, b on kaare paindemomendi epüüri nulljooneks võetud horisontaalne telg.

Kui kahe kaare silded on võrdsed ($l_1 = l_2 = l$), telje kujud ühesugused [näiteks ruutparaboolid $y_1 = (4f_1/l^2)x \times (l-x)$ ja $y_2 = (4f_2/l^2)x(l-x)$] ning kõrgused erinevad ($f_1 \neq f_2$), siis sama koormuse puhul on mõlemas kaares paindemomendid võrdsed.

Olgu $f_1 = cf_2$, kusjuures $c > 0$. Kui $l_1 = l_2 = l$, siis sama kujuga kaartel on $y_1 = cy_2$. Horisontaalne toereaktsioon on pöördvõrdeline kõrgusega: $H_1 = H_2/c$. Kaare paindemomendi avaldises korrutis $H y$ mõlema kaare jaoks $H_1 y_1 = (H_2/c) cy_2 = H_2 y_2$ on võrdne. Järelikult paindemomendi epüüri ordinaadid on võrdsed.

Jooniselt 10.7, a on näha, et kolme liigendiga kaare paindemomendid on tunduvalt väiksemad kui sama sildedega lihttala paindemomendid. Sama kehtib ka põikjõudude kohta.

Näide 10.1. Arvutada joonisel 10.8, a esitatud kolme liigendiga kaare paindemomendi, normaal- ja põikjõu epüüride ordinaadid ja kujutada epüürid. Kaare telgjoone võrrand

$$y = (4f/l^2)x(l-x) = 4f\xi(1-\xi) = 4f\xi\xi' \quad (a)$$

milles $\xi = x/l$, $\xi' = x'/l$.

Toereaktsioonid:

$$\begin{aligned} \Sigma M_b = 0; & \quad V_a \cdot 20 - 10 \cdot 2 \cdot 15 = 0 \\ \Sigma M_a = 0; & \quad -V_b = 20 + 10 \cdot 2 \cdot 5 = 0 \end{aligned}$$

millest $V_a = 15$ t ja $V_b = 5$ t.

$$\text{Kontroll } \Sigma Y = 0: 15 + 5 - 10 \cdot 2 = 0$$

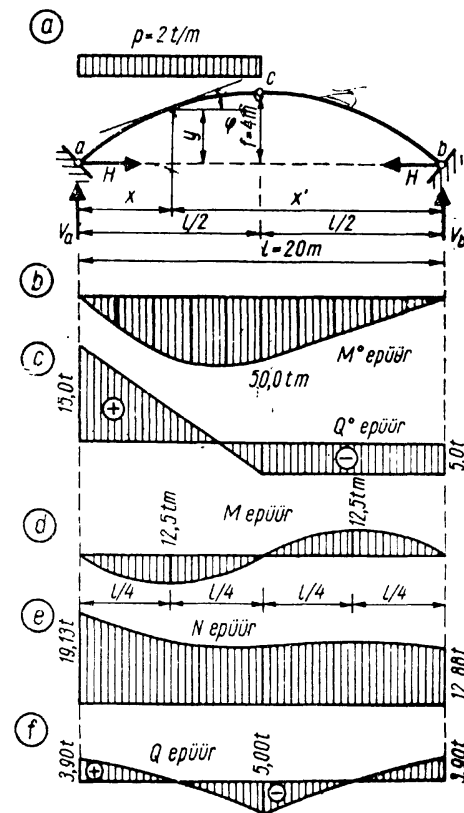
Vertikaalse koormuse puhul on horisontaalsed reaktsioonid võrdsed ja leitakse tingimusest $M_c = 0$:

$$V_b \cdot l/2 - Hf = 0$$

millest

$$H = (V_b l/2)/f = 5 \cdot 10/4 = 12,5 \text{ t}$$

Kaare sisejõudude epüürid on kõverjoonelised ja nende kujutamiseks on selle jaotatud kümneks võrdseks osaks. Sisejõud on arvatud iga kümnendiku ja lisaks veel veerandi ja kolmveerandi silde kohal.



Joon. 10.8

Kaare telje ordinaadid arvutatakse võrrandiga (a): $y=4f\xi\xi' = 4 \cdot 4\xi\xi' = 16\xi\xi'$. Telje puutuja kaldenurga siinus ning koosinus

$$\sin \varphi = \frac{1/2 - \xi}{\sqrt{l^2/(64f^2) + (1/2 - \xi)^2}} = \frac{1/2 - \xi}{\sqrt{25/64 + (1/2 - \xi)^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (64f^2/l^2)(1/2 - \xi)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (64/25)(1/2 - \xi)^2}}$$

Kaare geomeetriselised andmed on antud tabelis 10.1.

Tabel 10.1

Kolme liigendiga kaare, mille telgjooneks on rautparabool, geomeetriselised andmed $l=20$ m; $f=4$ m (näide 10.1, joon. 10.8, a)

x	0,0	2,0	4,0	5,0	6,0	8,0	10,0
ξ	0,0	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5
y	0,0	1,44	2,56	3,00	3,36	3,84	0,0000
$\sin \varphi$	0,6247	0,5390	0,4327	0,3714	0,3048	0,1580	4,00
$\cos \varphi$	0,7809	0,8423	0,9015	0,9285	0,9524	0,9874	1,0000

Märkus. Parem pool liigendit c on $\sin \varphi$ negatiivne.

Lihttala paindemomendid ja põikjõud arvutatakse valemitega

$$0 \leq x \leq l/2 = 10 \text{ m: } M_x^0 = V_a x - px^2/2 = x(15 - x) \text{ tm}$$

$$Q_x^0 = V_a - px = 15 - 2x \text{ t}$$

$$l/2 = 10 \text{ m} \leq x \leq l = 20 \text{ m: } M_x^0 = V_b x' = 5x' \text{ tm}$$

$$Q_x^0 = -V_b = -5 \text{ t}$$

Arvutustulemused on esitatud tabelis 10.2 ja epüürid on kujutatud joonisel 10.8, b ja c .

Kaare paindemomendid-, piki- ja põikjõud leitakse valemitega (10.9), (10.21), (10.28):

(Näide 10.1, joonis 10.8)
Paindemomendi, põik- ja normaaliõu epüüride ordinaadid
(Näide 10.1, joonis 10.8)

x m	0	2	4	5	6	8	10	12	14	15	16	18	20
M_x^0 tm	0,0	26,0	41,0	50,0	54,0	56,0	50,0	40,0	30,0	25,0	20,0	10,0	0,0
H_y tm	0,0	18,0	32,0	37,5	42,0	48,0	50,0	48,0	42,0	37,5	32,0	18,0	0,0
M_x tm	0,0	8,0	12,0	12,5	12,0	8,0	0,0	-8,0	-12,0	-12,5	-12,0	-8,0	0,0
Q_x^0 t	15,0	11,0	7,0	5,0	3,0	-1,0	-5,0	-5,0	-5,0	-5,0	-5,0	-5,0	-5,0
$Q_x^0 \sin \varphi$ t	9,37	5,93	3,03	1,86	0,91	-0,16	0,00	0,79	1,52	1,86	2,16	2,70	3,12
$H \cos \varphi$ t	9,76	10,54	11,27	11,61	11,91	12,34	12,50	12,34	11,91	11,61	11,27	10,54	9,76
N_x t	19,13	16,47	14,30	13,47	12,82	12,18	12,50	13,13	13,43	13,47	13,43	13,24	12,88
$Q_x^0 \cos \varphi$ t	11,71	9,27	6,31	4,64	2,86	-0,99	-5,00	-4,94	-4,76	-4,64	-4,51	-4,21	-3,90
$H \sin \varphi$ t	7,81	6,74	5,41	4,64	3,81	1,98	0,00	-1,97	-3,81	-4,64	-5,41	-6,74	-7,81
Q_x t	3,90	2,53	0,90	0,00	-0,95	-2,97	-5,00	-2,97	-0,95	0,00	0,90	2,53	3,91

$$M_x = M_x^0 - Hy$$

$$N_x = Q_x^0 \sin \varphi + H \cos \varphi$$

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi - H \sin \varphi$$

Arvutustulemused on esitatud tabelis 10.2 ja epüürid joonisel 10.8, d, e ja f.

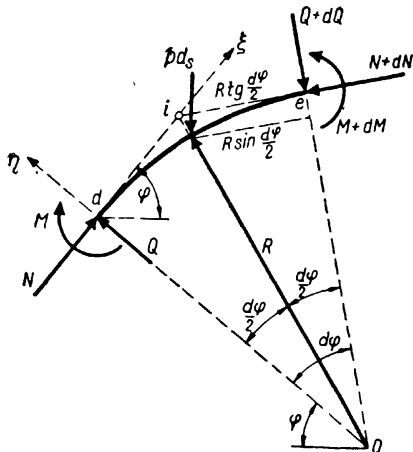
10.04. Seosed sisejõudude vahel

Seostega (2.14) kontrollitakse sirge varda sisejõudude epüüre. Järgnevalt tuletatakse paindemomendi, põik- ja normaaljõu vahelised seosed kõvera varda jaoks. Joonisel 10.9 on kujutatud kõverast vardast eraldatud ds pikkune element. Eeldatakse, et elemendile mõjub pidevalt jaotatud koormus intensiivsusega p . Elemendi otsristlõigetest tõmmatud kaare telje puutuja lõikepunkti i kohta kirjutatud momentide tasakaalu tingimus annab võrrandi

$$M - (M + dM) + (Q + dQ)R \operatorname{tg} d\varphi/2 + QR \operatorname{tg} d\varphi/2 + p ds R (\operatorname{tg} d\varphi/2 - \sin d\varphi/2) = 0 \quad (a)$$

Kuna $d\varphi$ on väike nurk, siis $\sin d\varphi/2 \approx \operatorname{tg} d\varphi/2$ ja võrrandi (a) viimane liige võrdub ligikaudu nulliga ning $\operatorname{tg} d\varphi \approx d\varphi$. Võrrandist (a) avaldatakse momendi juurdekasv

$$dM = QR d\varphi + dQR d\varphi/2 \quad (b)$$



Joon. 10.9

ja jagatakse elemendi pikkusega $R d\varphi = ds$:

$$\frac{dM}{ds} = Q + \frac{1}{2} dQ \quad (c)$$

Võrrandi (c) teine liige paremal pool on võrreldes esimese liikmega väike, mistõttu võib kirjutada

$$\frac{dM}{ds} = Q \quad (10.33)$$

või

$$Q = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{dM}{dx} \cos \varphi \quad (10.34)$$

Projektsioonide tasakaalu tingimused elemendi otsristlõikest d tõmmatud kaare telje puutuja sibile $\Sigma \xi = 0$ ja puutuja ristteljele $\Sigma \eta = 0$ annavad võrrandid

$$N - (N + dN) \cos d\varphi - (Q + dQ) \sin d\varphi - p ds \sin \varphi = 0 \quad (d)$$

$$Q - (Q + dQ) \cos d\varphi + (N + dN) \sin d\varphi - p ds \cos \varphi = 0 \quad (e)$$

Kui arvestada, et $\sin d\varphi \approx d\varphi$, $\cos d\varphi \approx 1$, $ds = R d\varphi$ või $d\varphi = ds/R$, ja jagada võrrandid (d), (e) elemendi pikkusega ds ning ära jättes teise järgu väikesed suurused, saadakse järgmised võrrandid:

$$-\frac{dN}{ds} - \frac{Q}{R} - p \sin \varphi = 0$$

$$-\frac{dQ}{ds} + \frac{N}{R} - p \cos \varphi = 0$$

millest

$$\frac{Q}{R} = - \left(\frac{dN}{ds} + p \sin \varphi \right) \quad (10.35)$$

$$\frac{N}{R} = \frac{dQ}{ds} + p \cos \varphi \quad (10.36)$$

Kui kaare elemendil koormust ei ole, siis on seosed (10.35) ja (10.36) järgmised:

$$\frac{Q}{R} = - \frac{dN}{ds} \quad \text{ja} \quad \frac{N}{R} = \frac{dQ}{ds} \quad (10.37)$$

Näide 10.2. Arvutada kolme liigendiga kaare (joon. 10.10, a) sisejõudude epüüride ordinaadid, kujutada M , Q ja N epüürid ning leida suurimad paindemomendid ja normaaljõud.

Kaare telgjooneks on ringi kaar, mille ordinaadid arvutatakse valemiga

$$y = \sqrt{R^2 - (l/2 - x)^2} - (R - f) \quad (a)$$

milles R on kaare telje kõverusraadius ja leitakse valemiga:

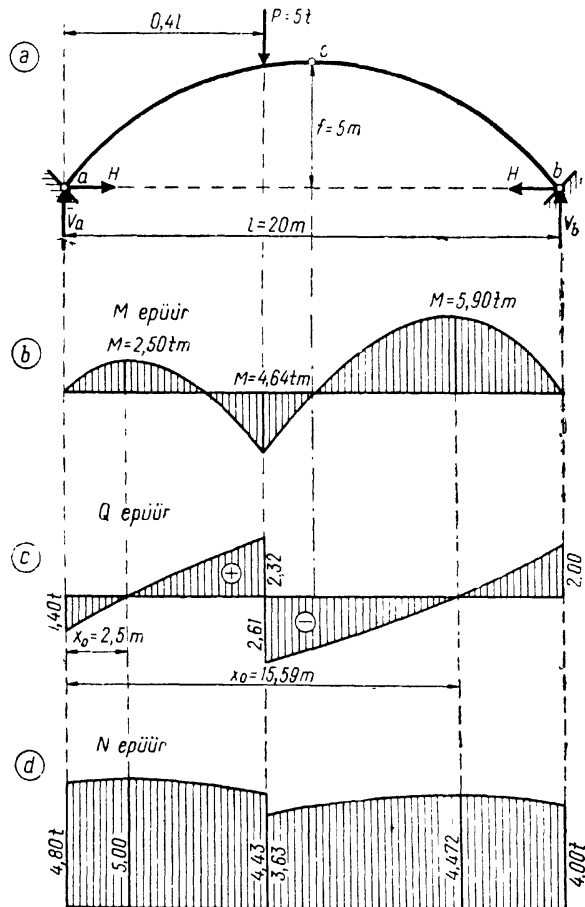
$$R = (l^2 + 4f^2) / 8f = (20^2 + 4 \cdot 5^2) / (8 \cdot 5) = 12,5 \text{ m} \quad (b)$$

Toereaktsioonid

$$V_a = 0,6l \cdot P/l = 0,6 \cdot 5 = 3 \text{ t}$$

$$V_b = 0,4l \cdot P/l = 0,4 \cdot 5 = 2 \text{ t}$$

$$H = M_c / f = V_b l / (2f) = 2 \cdot 20 / 2 \cdot 5 = 4 \text{ t}$$



Joon. 10.10

Kaare telje puutuja kaldenurga siinus ja koosinus arvutatakse valemitega

$$\sin \varphi = (1/2 - x/l)l/R = 0,8(1 - 0,1x) \quad (c)$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - (l/R)^2(1/2 - x/l)^2} = \sqrt{1 - 0,64(1 - 0,1x)^2} \quad (d)$$

M , Q ja N epüürid on kujutatud joonisel 10.10, b, c ja d . Seostest (10.33) ja (10.37) järeldub, et ristlõigetes, kus $Q=0$, on M ja N ekstreemsed.

Põikjõud kaare ristlõikes x arvutatakse valemiga (10.21):

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi - H \sin \varphi \quad (e)$$

Vahemikus $0 < x < 8 \text{ m}$ on

$$Q_x = 3 \sqrt{1 - 0,64(1 - 0,1x)^2} - 4 \cdot 0,8(1 - 0,1x) \quad (f)$$

mis võrrutades nulliga ja pärast lihtsaid teisendusi annab võrrandi

$$x_0^2 - 20x_0 + 43,75 = 0 \quad (g)$$

Võrrandi (g) lahend $x_{0,1} = 2,5 \text{ m}$ määrab ristlõike, kus M ja N on ekstreemsed. Lahend $x_{0,2} = 17,5 \text{ m}$ ei ole vaadeldavas vahemikus ($0 < x_0 < 8 \text{ m}$) ja ei kõlba.

Kaare ristlõikes $x_0 = 2,5 \text{ m}$ on: $\sin \varphi_0 = 0,6$; $\cos \varphi_0 = 0,8$; $y_0 = 2,5 \text{ m}$

$$Q_x = Q_{x_0}^0 \cos \varphi_0 - H \sin \varphi_0 = 3 \cdot 0,8 - 4 \cdot 0,6 = 0$$

$$N_x = Q_{x_0}^0 \sin \varphi_0 + H \cos \varphi_0 = 3 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,8 = 5 \text{ t}$$

$$M_x = M_{x_0}^0 - H y_0 = 7,5 - 4 \cdot 2,5 = -2,5 \text{ tm}$$

Paremal pool jõu P rakenduspunkti ($8 < x < 20$) arvutatakse põikjõud valemiga

$$Q_x = -2 \sqrt{1 - 0,64(1 - 0,1x)^2} - 4 \cdot 0,8(1 - 0,1x) \quad (h)$$

Analoogiliselt võrrandiga (g) saadakse järgmine võrrand:

$$x_0^2 - 20x_0 + 68,75 = 0 \quad (i)$$

mille lahend vahemikus $8 < x_0 < 20 \text{ m}$ on $x_0 = 15,59 \text{ m}$. Selles ristlõikes on: $\sin \varphi_0 = -0,4472$; $\cos \varphi_0 = 0,8944$; $y_0 = 3,680 \text{ m}$

$$Q_{x_0} = -2 \cdot 0,8944 + 4 \cdot 0,4472 = 0$$

$$N_{x_0} = 2 \cdot 0,4472 + 4 \cdot 0,8944 = 4,472 \text{ t}$$

$$M_{x_0} = 2 \cdot (20 - 15,59) - 4 \cdot 3,68 = -5,90 \text{ tm}$$

Näide 10.3. Kujutada joonisel 10.11, a esitatud kolme liigendiga kaarele M , Q ja N epüürid ning arvutada M ja N ekstreemumid. Geomeetrilised andmed on samad kui näite 10.2 puhul.

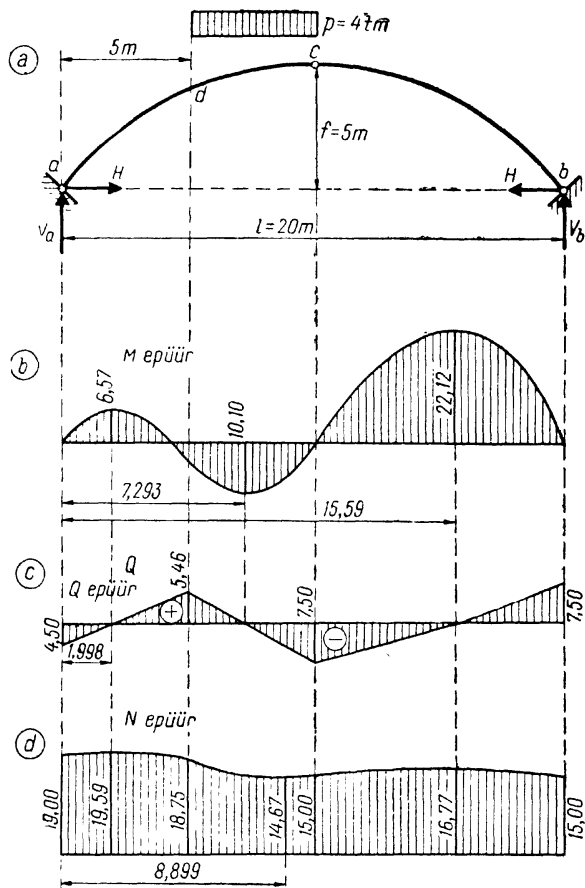
Toereaktsioonid:

$$V_a = p(l/4)(5/8)l/l = 12,5 \text{ t};$$

$$V_b = p(l/4)(3/8)l/l = 7,5 \text{ t}$$

$$H = M_c / f = V_b(l/2) / f = 7,5 \cdot 10 / 5 = 15 \text{ t}$$

M , Q ja N epüürid on arvutatud valemitega (10.9), (10.21) ja (10.22) ning kujutatud joonisel 10.11, b, c ja d .



Joon. 10.11

Analoogiliselt eelmise ülesandega leitakse liigendi a ja lõike d vahel suurim paindemoment ja normaaljõud: $x_0 = 1,998$ m; $M_{x_0} = -6,57$ tm; $N_{x_0} = 19,59$ t.

Kaare geomeetriselised andmed on samad kui eelmisel ülesandel ja mõlemal juhul on kaar liigendite c - b vahel koormamata ning seepärast selles kaare osas tekivad suurimad M ja N samas lõikes kui eelmisel ülesandel: $x_0 = 15,590$ m.

$$N_{x_0} = 7,5 \cdot 0,4472 + 15,0 \cdot 0,8944 = 16,77 \text{ t}$$

$$M_{x_0} = 7,5(20 - 15,590) - 15,0 \cdot 3,680 = -22,12 \text{ tm}$$

Koormuse all ei teki paindemomendi ja normaaljõu ekstreemumid ühes ja samas ristlõikes. Suurim paindemoment esineb ka koormuse

all ristlõikes, kus põikjõud $Q_x = [V_a - (x - x_d)p] \cos \varphi - H \sin \varphi$ võrdub nulliga, mis annab võrrandi

$$[12,5 - 4(x_0 - 5)] \sqrt{1 - 0,64(1 - 0,1x_0)^2} - 15 \cdot 0,8(1 - 0,1x_0) = 0$$

Võrrandi lahend vahemikus $5 \leq x \leq 10$ m on $x_0 = 7,293$ m. Selles lõikes $y_0 = 4,703$ m ja paindemoment

$$M_{x_0} = V_a x_0 - p(x_0 - x_d)^2/2 - H y_0 = 12,5 \cdot 7,293 - 4(7,293 - 5)^2/2 - 15 \cdot 4,703 = 10,10 \text{ tm}$$

Kaare ristlõige, milles tekib väikseim normaaljõud vahemikus $5 \leq x \leq 10$ m, leitakse võrrandiga (10.35):

$$\frac{Q}{R} + p \sin \varphi = -\frac{dN}{ds}$$

mis lõike leidmiseks annab võrrandi

$$\frac{Q}{R} + p \sin \varphi = 0$$

Vastavalt ülesande andmetele on võrrand järgmine:

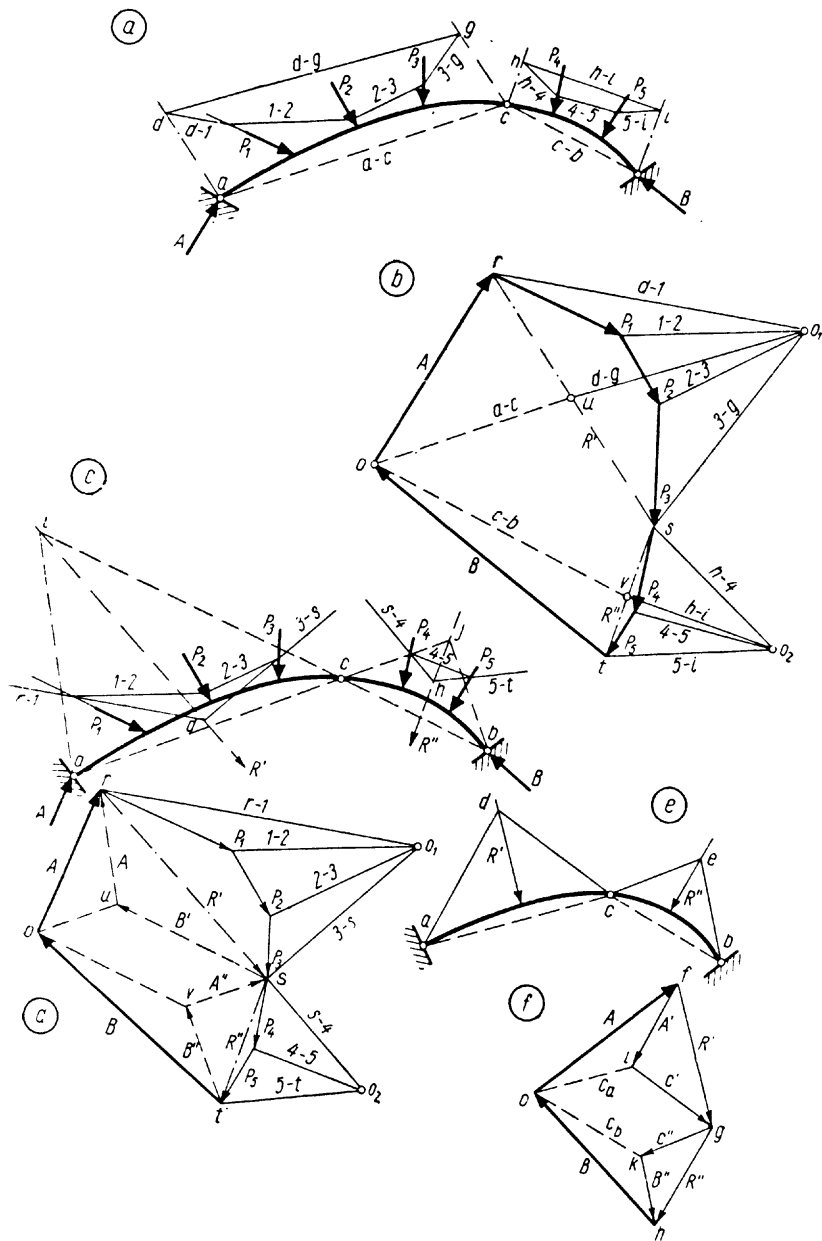
$$\frac{1}{12,5} \{ [12,5 - 4(x_0 - 5)] \sqrt{1 - 0,64(1 - 0,1x_0)^2} - 15 \cdot 0,8(1 - 0,1x_0) \} + 4 \cdot 0,8(1 - 0,1x_0) = 0$$

Võrrandi lahend vahemikus $5 \leq x \leq 10$ m on $x_0 = 8,899$ m. Selles ristlõikes on $\sin \varphi_0 = 0,0881$; $\cos \varphi_0 = 0,9961$ ja

$$N_{x_0} = [V_a - (x_0 - x_d)p] \sin \varphi_0 + H \cos \varphi_0 = [21,5 - (8,899 - 5)4]0,0881 + 15 \cdot 0,9961 = 14,67 \text{ t}$$

10.05. Toereaktsioonide graafiline konstrueerimine

Kolme liigendiga kaare toereaktsioonide määramise kolm graafilist võtet on esitatud joonisel 10.12. Joonisel 10.12, a ja b esitatud võtte puhul lahutatakse kaare vasakpoolsele osale rakendatud jõudude süsteemi resultantjõud R' (joon. 10.12, b) kaheks komponendiks, mis on paralleelsed resultantjõuga ja on rakendatud liigendites a ja c . Selleks tõmmatakse liigenditest a ja c resultantjõu R' sihiga r - s paralleelsed sirged kuni lõikumiseni nõõrhulknurga äärmiste kiirtega punktides d ja g . Punktid d ja g ühendatakse sulgejaga d - g . Jõuhulknurga poolusest o_1 nõõrhulknurga sulgejaga d - g paralleelselt tõmmatud sirge jaotab resultantjõu R' kaheks komponendiks. Komponent r - u on rakendatud liigendis a ja komponent u - s — liigendis c .



Joon. 10.12

Analoogiliselt lahutatakse kaare osale $c-b$ rakendatud koormuse resultant R'' kaheks resultantjõuga paralleelseks komponendiks. Komponent $s-v$ mõjub liigendis c ja komponent $v-t$ — liigendis b . Liigendis c mõjuvate komponentide resultant lahutatakse kaheks komponendiks sihtidele $a-c$ ja $c-b$. Toereaktsioon A tasakaalustab koormuse komponendid $r-u$ ja $u-o$ ning toereaktsioon B — komponendid $o-v$ ja $v-t$.

Teine võte on kujutatud joonisel 10.12, c ja d . Reaktsioonid leitakse eraldi osadele $a-c$ ja $c-b$ mõjuvast koormusest ja liidetakse. Jõu- ja nõõrhulknurkadega leitakse kaare osadele $a-c$ ja $c-b$ rakendatud koormuse resultandid R' ja R'' . Järgnevalt leitakse kaare osale $a-c$ mõjuvast koormusest R' põhjustatud toereaktsioonid A' ja B' . Kui kaare parempoolsel osal koormust ei ole, siis läbib parempoolse toereaktsiooni siht liigendit c , sest liigendis c on paindemoment null. Järelikult komponendi B' sihiks on sirge $b-c$, mis lõikab resultantjõu R' sihti punktis i . Tasakaalu puhul läbib ka toereaktsiooni A' siht lõikepunkti i . Komponentid A' ja B' on kujutatud jõuhulknurkas (joon. 10.12, d) sirgetega $u-r \parallel a-i$ ja $s-u \parallel b-c$. Analoogiliselt leitakse toereaktsioonide komponendid A'' ja B'' kaare parempoolsele osale rakendatud koormusest. Komponentide A' ja A'' ning B' ja B'' geomeetrisel liitmisel saadakse kaarele mõjuvast koormusest $R'+R''$ põhjustatud toereaktsioonid A ja B . Selleks tõmmatakse jõuhulknurkas punktides u ja v vastavalt A'' ning B' sihtidega paralleelsed sirged, kuni lõikumiseni punktis o ($o-u=A''$ ja $o-u \parallel v-s$ ning $v-o=B'$ ja $v-o \parallel s-u$).

Kolmas võte on esitatud joonisel 10.12, e ja f . Kaare osadele $a-c$ ja $c-b$ mõjuvate koormuste resultantjõud R' ja R'' lahutatakse nende sihtidel vabalt valitud punktides d ja e kumbki kaheks komponendiks. Resultantjõud R' lahutatakse sihtidele $d-a$ ja $d-c$ (komponendid A' ja C' ning R'' — sihtidele $e-c$ ja $e-b$ (komponendid C'' ja B'')). Komponentide C' ja C'' summa lahutatakse sihtidele $c-a$ ning $c-b$ kaheks komponendiks C_a ja C_b . Toereaktsioon A tasakaalustab komponendid A' ja C_a ning toereaktsioon B — komponendid B'' ja C_b .

10.06. Kolme liigendiga kaare survejoon

Sisejõud kaare ristlõikes võib leida kaarele rakendatud koormuse jaoks kujutatud nöörihulknurgaga, mis läbib kaare kolme liigendit. Antud koormuse puhul kaare kolme liigendit läbivaks hulknurgaks on resultantjõu hulknurk, mille küljeks on kõigi ühel pool lõiget mõjuvate jõudude resultantjõu siht. Resultantjõu hulknurka nimetatakse kolme liigendiga kaare survejooneks. Survejoon läbib ristlõiget ühel pool lõiget mõjuvate jõudude resultandi rakenduspunkti (joon. 10.13). Resultantjõu projektsioonid kaare telje puutujale $t-t$ ja puutujaga risti olevale teljele $n-n$ ristlõikes k on võrdsed lõike k piki- ja põikjõuga. Paindemoment kaare ristlõikes k

$$M_k = N_k e \quad \text{või} \quad M_k = R_k r \quad (10.38)$$

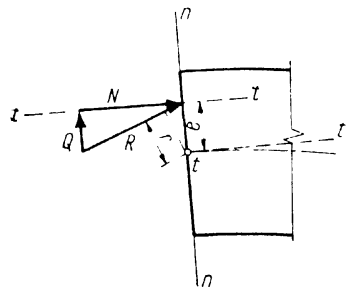
milles R_k on ühel pool lõiget k mõjuvate jõudude resultant,

$$r = M_k / R_k \quad (10.39)$$

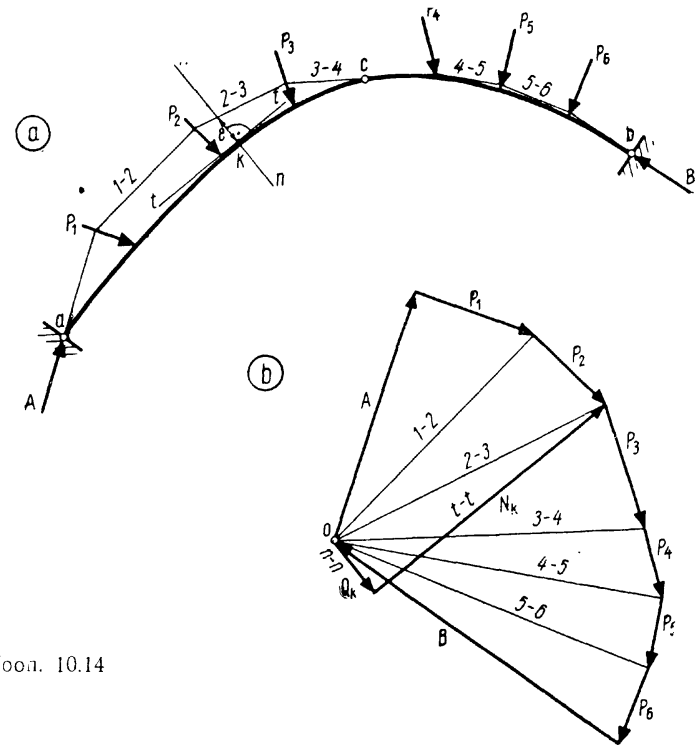
— ristlõike raskuskeskme kaugus resultantjõu sihist ja

$$e = M_k / N_k \quad (10.40)$$

— ekstsentrilisus, mis kujutab ristlõike raskuskeskme ning ühel pool lõiget mõjuvate jõudude resultandi rakenduspunkti vahekaugust lõikes k . Survejoone (joon. 10.14, *a*) kujutamiseks analüütilise arvutuse põhjal kasutatakse valemit (10.40), mis annab survejoone ja kaare telje vahelise kauguse ristlõikes k . Survejõu N_k ja positiivse paindemomendi puhul on survejoon ülalpool kaare teljejoont ning negatiivse paindemomendi puhul allpool telge.



Joon. 10.13

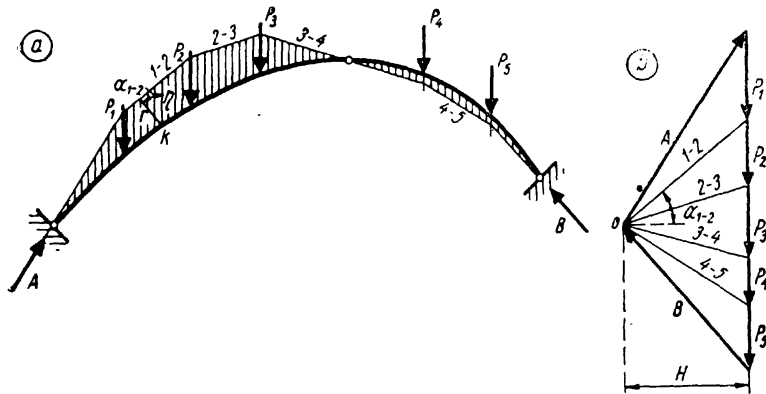


Joon. 10.14

Ristlõikes, kus survejoon lõikub kaare teljega, võrdub paindemoment nulliga.

Jaotatud koormuse puhul on survejoon kõverjoon. Kui survejoon ühtib kaare telgjoonega, siis on paindemoment kaare igas ristlõikes null. Kaart, mille telgjoon ühtib survejoonega, nimetatakse ratsionaalse teljega kaareks.

Joonisel 10.14, *a* ja *b* on kujutatud survejoon ja välisjõudude jõuhulknurk. Survejoone graafiliseks kujutamiseks võetakse jõuhulknurgas pooluseks toereaktsioonide *A* ja *B* lõikepunkt *o* ning tõmmatakse kiired 1-2, 2-3, 3-4, 4-5 ja 5-6. Iga kiir on ühel pool seda kiirt asetsevate jõudude resultant. Näiteks kiir 2-3 on jõudude *A*, P_1 ja P_2 resultant. Järgnevalt kujutatakse jõuhulknurgale vastav nöörihulknurk, mille esimese kiire (toereaktsiooni *A*) siht



Joon. 10.15

läbib liigendit a . Iga järgnev nöörihknurga kiir tõmmatakse paralleelselt jõuhulknurga vastava kiirega. Selliselt saadud hulknurk kujutab survejoont. Liigend c on jõudude P_3 ja P_4 vahel ning survejoone lõik 3-4 läbib liigendit c . Survejoone viimane külj, milleks on toereaktsiooni B siht, läbib toeliigendit b . Ristlõike k kohal oleva survejoone kiire 2-3 (joon. 10.14, a) lahutamisel jõuhulknurgas kaare telje puutuja sihiliseks ($t-t$) ja puutujaga risti olevaks komponendiks, saadakse lõikes k normaaljõud N_k ja põikjõud O_k (joon. 10.14, b).

Olgu i ja j lõikest k vasakul ja paremal asuvate jõudude tähised. Joonisel 10.15, a märgitud lõike k puhul on $i=1$ ja $j=2$.

Vertikaalse koormuse puhul (joon. 10.15) võib paindemomendi avaldist $M_k = R_{1-j}r = R_{1-2}r$ esitada järgmiselt:

$$M_k = H\eta \quad (10.41)$$

kuna $R_{1-2} = H/\cos \alpha_{1-2}$ ja $r = \eta \cos \alpha_{1-2}$, milles H on ühel pool lõiget mõjuvate jõudude resultandi horisontaalne komponent (horisontaalne toereaktsioon H), η — vertikaalne lõik kaare telje ja survejoone vahel ristlõike k raskuskeskme kohal ning α_{1-2} — nurk kiire 1-2 ja horisontaali vahel.

Vertikaalse koormuse puhul kujutavad vertikaalsed ordinaadid kaare telje ja survejoone vahel kindlaksmääratud mõõtkavas paindemomendi epüüri ordinaate.

10.07. Kaare telje ratsionaalne kuju vertikaalsel koormusel

Kaare telje ratsionaalne kuju kindlaksmääratud silde ja kõrguse juures ühtib antud koormuse jaoks kujutatud survejoonega. Kaare kõigis ristlõigetel on siis paindemomendid nullid. Survejoon läbib kaare kolme liigendit, kusjuures tema kuju liigendite vahel on koormuse iseloomust ja suurusel.

Ühtigu pideva jaotatud vertikaalse koormuse $p(x)$ mõjumisel kaare telgjoon survejoonega, mille ordinaadid määratakse kaare telje võrrandiga

$$y = f(x) \quad (a)$$

Horisontaali ja kaare telje puutuja vahelise nurga φ tangens on avaldatav järgmiselt (joon. 10.16):

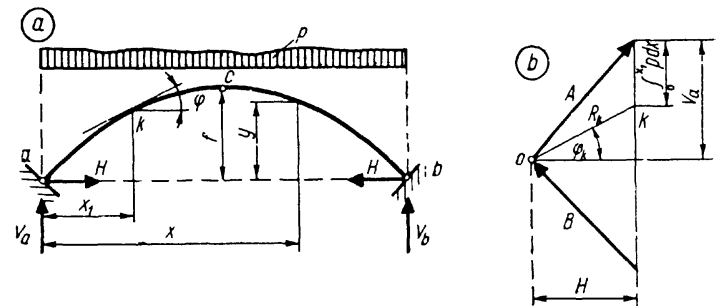
$$\operatorname{tg} \varphi = [V_a - \int_0^{x_1} p(x) dx] / H \quad (b)$$

Kuna $\operatorname{tg} \varphi = dy/dx$, siis võib kirjutada

$$\frac{dy}{dx} = [V_a - \int_0^{x_1} p(x) dx] / H \quad (c)$$

Kaare telje ratsionaalse kuju diferentsiaalvõrrand pideva jaotatud koormuse $p(x)$ jaoks saadakse avaldise (c) diferentseerimisel üks kord x järgi:

$$\frac{dy^2}{dx} = -\frac{p(x)}{H} \quad (10.42)$$



Joon. 10.16

Ratsionaalse telje kujuga kaare igas ristlõikes võrdub paindemoment nulliga:

$$M_x = M_x^0 - Hy = 0$$

millest

$$y = M_x^0 / H \quad (10.43)$$

Avaldisest järeldub, et vertikaalse koormuse puhul on kaare ratsionaalse telje ordinaadid proportsionaalsed sama silde ja koormusega lihttala paindemomendi epüüri ordinaatidega. Proportsionaalsusteguriks on $1/H$.

Näide 10.4. Leida ühtlaselt jaotatud vertikaalse koormuse $p = \text{konst.}$ jaoks kolme liigendiga kaare telje ratsionaalne kuju (joon. 10.17).

Kaare telje ratsionaalse kuju diferentsiaalvõrrand (10.42) on

$$\frac{dy^2}{dx^2} = -\frac{p}{H} \quad (a)$$

Pärast võrrandi (a) kahekordset integreerimist saadakse kaare telje võrrand

$$\frac{dy}{dx} = -kx + c_1 \quad (b)$$

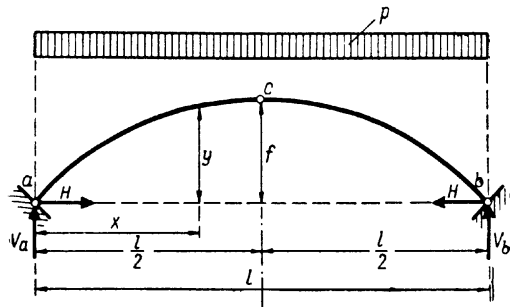
$$y = -kx^2/2 - c_1x + c_2 \quad (c)$$

milles

$$k = p/H \quad (d)$$

Integreerimiskonstandid c_1 ja c_2 määratakse tingimustest: kui $x=0$, siis $y=0$ ja võrrandist (c) leitakse, et $c_2=0$; kui $x=l/2$, siis $dy/dx=0$ ja võrrandist (b) saadakse, et $c_1=kl/2$. Kui arvestada avaldist (d) ja integreerimiskonstantide väärtusi $c_1=kl/2$ ning $c_2=0$, siis võrrand (c) on järgmine:

$$y = px(l-x)/2H \quad (e)$$



Joon. 10.17

Horisontaalne toereaktsioon arvutatakse valemiga

$$H = M_c^0 / f = \rho l^2 / 8f \quad (f)$$

Kolme liigendiga kaare telje ratsionaalne kuju ühtlaselt jaotatud koormuse jaoks (e), kui arvestada avaldist (f), on järgmine:

$$y = 4fx(l-x)/l^2 \quad (g)$$

mis kujutab ruutparabooli. Sama tulemus saadakse ka valemiga (10.43). Lihttala ühtlaselt jaotatud koormusest paindemoment ja kaare horisontaalne toereaktsioon arvutatakse valemitega

$$M_x^0 = px(l-x)/2, \quad H = M_c^0 / f = \rho l^2 / 8f$$

Kaare telje võrrand on nüüd

$$y = M_x^0 / H = 4fx(l-x)/l^2$$

mis ühtib võrrandiga (g)

10.08. Mõjujooned

10.081. Staatika meetod

Sümmeetrilise kolme liigendiga kaare toereaktsioonide vertikaalsed komponendid V_a ja V_b arvutatakse momentide tasakaalu tingimustest $\Sigma M_b = 0$ ning $\Sigma M_a = 0$:

$$V_a = 1 \frac{l-x}{l}, \quad V_b = 1 \frac{x}{l} \quad (a)$$

Valemid (a) ühtivad lihttala toereaktsioonide A^0 ja B^0 avaldistega ning V_a ja V_b mõjujooned on samasugused kui lihttala toereaktsioonide mõjujooned (joon. 10.18, b ja c).

Horisontaalreaktsioon H arvutatakse valemiga (10.5):

$$H = M_c / f \quad (b)$$

Ühikjõud mõjub vasakul pool liigendit c ($0 \leq x \leq l_1$):

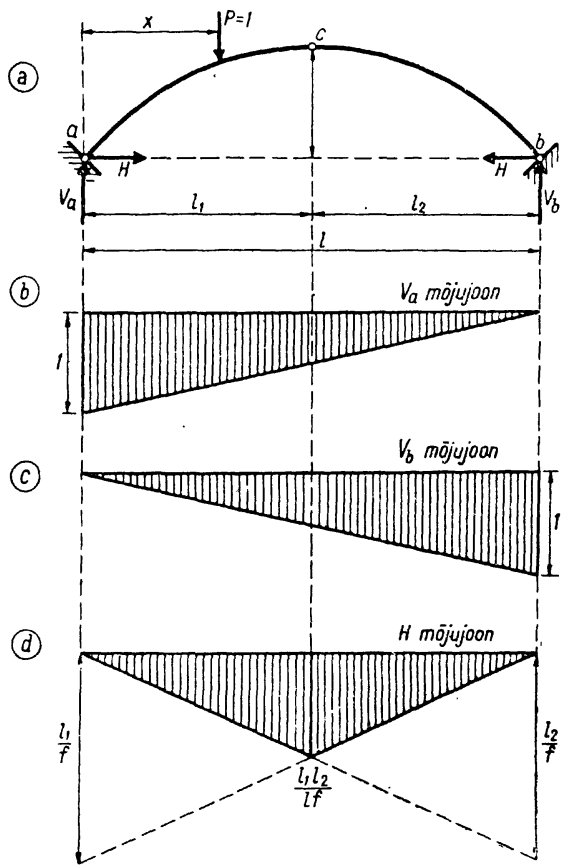
$$M_c^0 = V_b l_2 = (x/l) l_2; \quad H = V_b l_2 / f = (x/l) l_2 / f \quad (c)$$

Kui $x=0$, siis $H=0$ ja kui $x=l_1$, siis $H=l_1 l_2 / lf$. Lõigu pikkus mõjujoone vasakpoolse sirge pikenduse ja nulljoone vahel toe b vertikaalil on l_2 / f (joon. 10.18, d).

Ühikjõud mõjub paremal pool liigendit c ($l_1 \leq x \leq l$):

$$H = M_c^0 / f = V_a l_1 / f = [(l-x)/l] l_1 / f \quad (d)$$

Kui $x=l$, siis $H=[(l-l_1)/l] l_1 / f$, ja kui $x=l$, siis



Joon. 10.18

$H=0$. Mõjujoone parempoolse sirge pikenduse ja nulljoone vaheline lõik toe a vertikaalil on l_1/f .

Toereaktsiooni H mõjujoon on kolmnurk, mille nullpunktid on tugede ja suurim ordinaat liigendi c vertikaalil.

Paindemomendi mõjujoone ordinaadid leitakse valemiga (10.9):

$$M_k = M_k^0 - Hy \quad (e)$$

Sisejõud lõikes k arvutatakse ühikjõu mõjumisel vasakul pool lõiget k toereaktsiooni B (V_b ja $H_b=H$) ning paremal pool lõiget k toereaktsiooni A (V_a ja $H_a=H$)

kaudu. Ühikjõu mõjumisel lõike k ja liigendi c vahel (joon. 10.19, a) arvutatakse reaktsiooni A horisontaalne komponent $H_a=H_b=H$ reaktsiooni V_b kaudu.

Ühikjõud asub toe a ja lõike k vahel ($0 \leq x \leq a_k$):

$$\begin{aligned} M_k &= V_b(l - a_k) - (V_b l_2 / f) y = V_b \left[(l - a_k) - (l_2 / f) y \right] = \\ &= \frac{x}{l} \left[(l - a_k) - \frac{l_2}{f} y \right] \end{aligned} \quad (f)$$

Kui $x=0$, siis $M_{ka}=0$ ja kui $x=a_k$, siis

$$M_{kk} = \frac{a_k}{l} \left[(l - a_k) - \frac{l_2}{f} y \right] \quad (g)$$

Esimene indeks paindemomendi tähise M juures näitab lõiget, kus paindemomenti leitakse, ja teine indeks, milles lõikes mõjub ühikjõud.

Ühikjõud asub lõike k ja liigendi c vahel ($a_k \leq x \leq l_1$):

$$M_k = V_a a_k - \frac{V_b l_2}{f} y = \frac{l-x}{l} a_k - \frac{x l_2}{l f} y \quad (h)$$

Kui $x=a_k$, siis

$$M_{kk} = \frac{l-a_k}{l} a_k - \frac{a_k l_2}{l f} y = \frac{a_k}{l} \left[(l - a_k) - \frac{l_2}{f} y \right] \quad (i)$$

ja kui $x=l_1$, siis

$$M_{kc} = \frac{l-l_1}{l} a_k - \frac{l_1 l_2}{l f} y = \frac{l_2}{l} \left(a_k - \frac{l_1}{f} y \right) \quad (j)$$

Ühikjõud mõjub vahemikus $l_1 \leq x \leq l_2$:

$$\begin{aligned} M_k &= V_a a_k - \frac{V_a l_1}{f} y = V_a \left(a_k - \frac{l_1}{f} y \right) = \\ &= \frac{l-x}{l} \left(a_k - \frac{l_1}{f} y \right) \end{aligned} \quad (k)$$

Kui $x=l_1$, siis

$$M_{kc} = \frac{l-l_1}{l} \left(a_k - \frac{l_1}{f} y \right) = \frac{l_2}{l} \left(a_k - \frac{l_1}{f} y \right) \quad (l)$$

ja kui $x=l$, siis $M_{kb}=0$.

Paindemomendi M_k mõjujoon koosneb kolmest sirgest (joon. 10.19, b). Mõjujoone vasakpoolse ja keskmise sirge ordinaadid lõike k kohal on võrdsed, avaldised (g) ja

(i) ühtivad. Võrdsed on ka mõjujoone keskmise ja parempoolse sirge ordinaadid liigendi c kohal: avaldised (j) ja (l) ühtivad. Edaspidi kujutatakse paindemomendi mõjujoon keskmise sirge võrrandiga (h). Avaldise (i) nurksulgude esimene liige ($l - a_k$) on suurem kui teine liige (l_2/f) y ja mõjujoone ordinaat lõike k kohal on positiivne. Kaare ristlõike k raskuskese asetseb liigendite a ja c ühendussirgest kõrgemal ning võrrandi (j) sulgavaldisise teine liige on suurem kui esimene; seega mõjujoone ordinaat liigendi c kohal M_{kc} on negatiivne.

Normaaljõu mõjujoone (joon. 10.19, c) ordinaadid arvutatakse avaldisega (10.22):

$$N_k = Q_k^0 \sin \varphi + H \cos \varphi \quad (m)$$

Vahemikus $0 \leq x < a_k$ on $Q_k^0 = -V_b$ ja $H = V_b l_2 / f$ ning

$$\begin{aligned} N_k &= -V_b \sin \varphi + (V_b l_2 / f) \cos \varphi = \\ &= V_b [-\sin \varphi + (l_2 / f) \cos \varphi] = \\ &= (x/l) [-\sin \varphi + (l_2 / f) \cos \varphi] \end{aligned} \quad (n)$$

Kui $x=0$, siis $N_{ka}=0$, ja kui $x=a_k-0$, siis

$$N_{k,k,v} = (a_k/l) [-\sin \varphi + (l_2/f) \cos \varphi] \quad (o)$$

Vahemikus $a_k < x \leq l_1$ on $Q_k^0 = V_a$ ja $H = V_b l_2 / f$ ning

$$N_k = V_a \sin \varphi + \frac{V_b l_2}{f} \cos \varphi = \frac{l-x}{l} \sin \varphi + \frac{x l_2}{l f} \cos \varphi \quad (p)$$

Kui $x=a_k+0$, siis

$$N_{k,k,p} = \frac{l-a_k}{l} \sin \varphi + \frac{a_k l_2}{l f} \cos \varphi \quad (q)$$

ja kui $x=l_1$, siis

$$N_{kc} = \frac{l-l_1}{l} \sin \varphi + \frac{l_1 l_2}{l f} \cos \varphi = \frac{l_2}{l} \left(\sin \varphi + \frac{l_1}{f} \cos \varphi \right) \quad (r)$$

Vahemikus $l_1 \leq x \leq l$ on $Q_k^0 = V_a$ ja $H = V_a l_1 / f$ ning

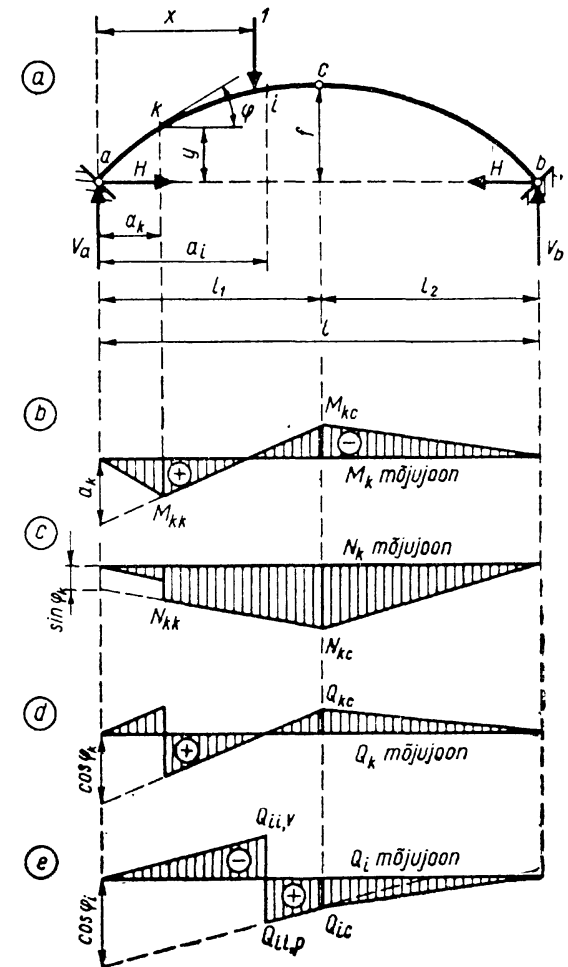
$$\begin{aligned} N_k &= V_a \sin \varphi + (V_a l_1 / f) \cos \varphi = V_a [\sin \varphi + (l_1 / f) \cos \varphi] = \\ &= [(l-x)/l] \cdot [\sin \varphi + (l_1 / f) \cos \varphi] \end{aligned} \quad (s)$$

Kui $x=l_1$, siis

$$N_{kc} = \frac{l-l_1}{l} \left(\sin \varphi + \frac{l_1}{f} \cos \varphi \right) = \frac{l_2}{l} \left(\sin \varphi + \frac{l_1}{f} \cos \varphi \right) \quad (t)$$

mis võrdub avaldisega (r), ja kui $x=l$, siis $N_{kb}=0$.

Normaaljõu mõjujoon koosneb kolmest sirgest. Vasak-



Joon. 10.19

poolne ja keskmine sirge on paralleelsed, kuna avaldis (p) on $\sin \varphi$ võrra suurem avaldisest (n). Keskmise ja parempoolse sirge ordinaadid liigendi c vertikaalil on võrdsed [avaldised (r) ja (t)]. Mõjujoone kujutamiseks arvutatakse keskmise sirge võrrandiga ordinaadid lõike k ja liigendi c kohal.

Põikjõu mõjujoone (joon. 10.19, d ja e) ordinaadid leitakse avaldisega (10.21):

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi - H \sin \varphi \quad (\text{u})$$

Vahemikus $0 \leq x < a_k$ on $Q_k^0 = -V_b$ ja $H = V_b l_2 / f$ ning

$$\begin{aligned} Q_k &= -V_b \cos \varphi - (V_b l_2 / f) \sin \varphi = \\ &= -V_b [\cos \varphi + (l_2 / f) \sin \varphi] = \\ &= -(x/l) [\cos \varphi + (l_2 / f) \sin \varphi] \end{aligned} \quad (\text{v})$$

Kui $x=0$, siis $Q_{ka}=0$, ja kui $x=a_k=0$, siis

$$Q_{k,k,v} = -(a_k/l) [\cos \varphi + (l_2/f) \sin \varphi] \quad (\text{w})$$

Vahemikus $a_k < x \leq l_1$ on $Q_k^0 = V_a$ ja $H = V_b l_2 / f$ ning

$$Q_k = V_a \cos \varphi - \frac{V_b l_2}{f} \sin \varphi = \frac{l-x}{l} \cos \varphi - \frac{x l_2}{l f} \sin \varphi \quad (\text{õ})$$

Kui $x=a_k+0$, siis

$$Q_{k,k,p} = [(l-a_k)/l] \cos \varphi - (a_k l_2 / l f) \sin \varphi \quad (\text{ä})$$

ja kui $x=l_1$, siis

$$Q_{k,c} = \frac{l-l_1}{l} \cos \varphi - \frac{l_1 l_2}{l f} \sin \varphi = \frac{l_2}{l} \left(\cos \varphi - \frac{l_1}{f} \sin \varphi \right) \quad (\text{ö})$$

Vahemikus $l_1 \leq x \leq l$ on $Q_k^0 = V_a$ ja $H = V_a l_1 / f$ ning

$$Q_k = V_a \cos \varphi - \frac{V_a l_1}{f} \sin \varphi = \frac{l-x}{l} \left(\cos \varphi - \frac{l_1}{f} \sin \varphi \right) \quad (\text{ü})$$

Kui $x=l_1$, siis

$$Q_{k,c} = \frac{l-l_1}{l} \left(\cos \varphi - \frac{l_1}{f} \sin \varphi \right) = \frac{l_2}{l} \left(\cos \varphi - \frac{l_1}{f} \sin \varphi \right) \quad (\text{x})$$

mis võrdub avaldisega (ö), ja kui $x=l$, siis $Q_{k,b}=0$.

Põikjõu mõjujoon koosneb kolmest sirgest. Kui vaadeldav lõige on lukuliigendist c vasakul pool, siis on vasakpoolne ja keskmine sirge paralleelsed, kuna avaldis (ö) on $\cos \varphi$ võrra suurem avaldisest (v). Keskmise ja parempoolse sirge ordinaadid liigendi c vertikaalil on

võrdsed. Mõjujoone kujutamiseks leitakse keskmise sirge võrrandiga ordinaadid lõike k ja liigendi c kohal. Lõike k kohal on mõjujoonel aste, mille suurus on $\cos \varphi_k$. Ühikjõu mõjumisel vasakul pool lõiget k ühtib toereaktsiooni B suund liigendite b ja c ühendussirgega ning põikjõud ristlõikes k on negatiivne.

Põikjõu mõjujooned on kaheksa kujuga. Toe ligidal asuva ristlõike mõjujoone keskmine sirge lõikab nulljoont (joon. 10.19, d). Lukuliigendi lähedal asuva ristlõike põikjõu mõjujoone keskmise sirge ordinaadid on ühemärgilised (joon. 10.19, e). Põikjõu mõjujoone kolmas kuju on erijuht, mis vastab ristlõikele, kus kaare telje puutuja on paralleelne toeliigendi ja lukuliigendi ühendussirgega. Selle lõike põikjõu mõjujoone ordinaat lukuliigendi kohal võrdub nulliga. Vaadeldavast lõikest teisel pool lukuliigendit ühtib mõjujoone sirge nulljoonega.

Näide 10.5. Kujutada joonisel 10.20, a esitatud kolme liigendiga kaare reaktsiooni H ja ristlõike k jaoks M , N ning Q mõjujooned. Kaare telgjooneks on ruutparabool $y = 4fx(l-x)/l^2$.

Ristlõike k raskuskeskme ordinaat $y = 4 \cdot 4 \cdot 16(20-16)/20^2 = 2,56$ m ja kaare telgjoone puutuja kaldenurga tangens on

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l} \left(1 - \frac{2x}{l} \right) = \frac{4 \cdot 4}{20} \left(1 - 2 \cdot \frac{16}{20} \right) = -0,48$$

Vastavalt nurk $\varphi = -25^\circ 38,3'$; $\sin \varphi = -0,4327$ ja $\cos \varphi = 0,9015$. Horisontaalreaktsiooni H mõjujoone (joon. 10.20, b) suurim ordinaat $H = M_c^0 / f = (1 \cdot l / 4f) = 1 \cdot 20 / 4 \cdot 4 = 1,25$. Sisejõudude mõjujoonte ordinaatide arvutamisel leitakse toereaktsioonid kahel juhul: 1) ühikjõud mõjub liigendi c kohal ($x=l/2=10$ m): $V_a = V_b = 0,5$ ja $H = 1,25$; 2) ühikjõud mõjub lõike k kohal ($x=l-b=20-4=16$ m): $V_a = 0,2$ ja $V_b = 0,8$ ning $H = M_c^0 / f = 0,2 \cdot 10 / 4 = 0,5$. Lõike k sisejõudude mõjujoonte (joon. 10.20, c , d ja e) keskmiste sirgete võrrandid on järgmised:

$$M_k = M_k^0 - Hy = V_b b - Hy$$

$$N_k = Q_k^0 \sin \varphi + H \cos \varphi = -V_b \sin \varphi + H \cos \varphi$$

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi - H \sin \varphi = -V_b \cos \varphi - H \sin \varphi$$

Kui $x=10$ m, siis

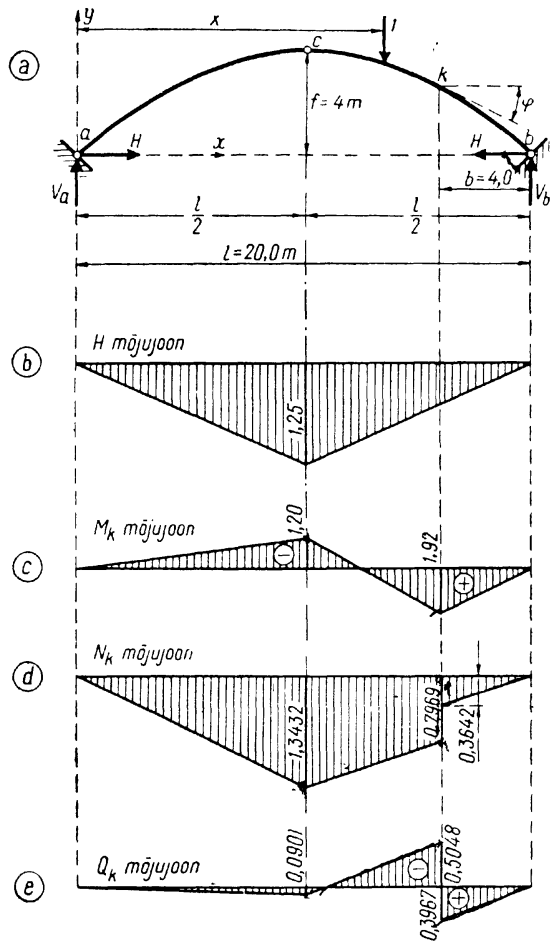
$$M_k = 0,5 \cdot 4 - 1,25 \cdot 2,56 = -1,2 \text{ m}$$

$$N_k = 0,5 \cdot 0,4327 + 1,25 \cdot 0,9015 = 1,3432$$

$$Q_k = -0,5 \cdot 0,9015 + 1,25 \cdot 0,4327 = 0,0901$$

ja kui $x=16-0$ m, siis

$$M_k = 0,8 \cdot 4 - 0,5 \cdot 2,56 = 1,92 \text{ m}$$



Joon. 10.20

$$N_k = 0,8 \cdot 0,4327 + 0,5 \cdot 0,9015 = 0,7969$$

$$Q_k = -0,8 \cdot 0,9015 + 0,5 \cdot 0,4327 = -0,5048$$

ning kui $x = 16 + 0$ m, siis

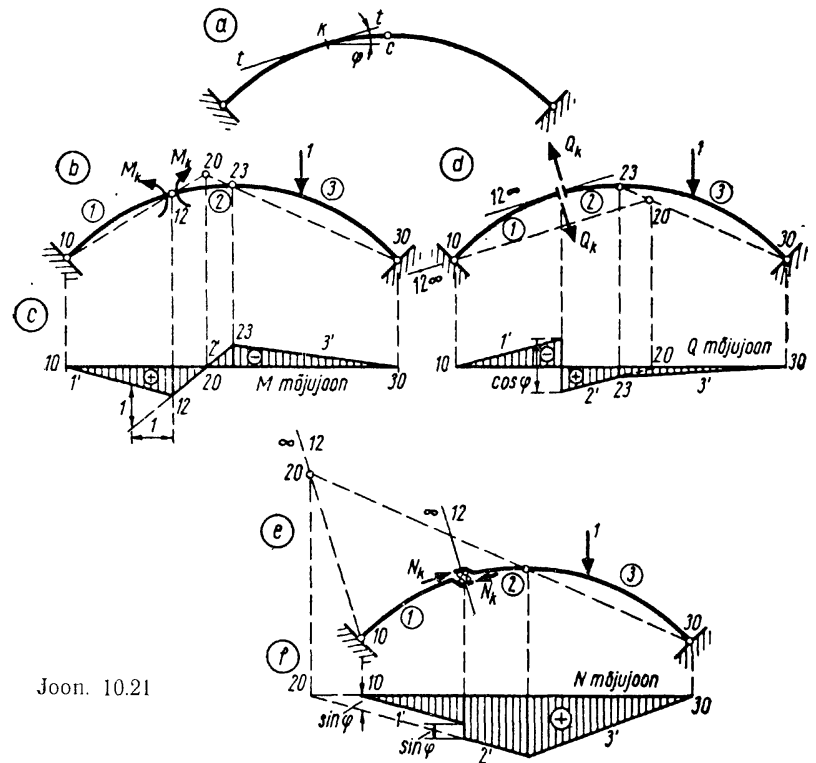
$$N_k = 0,7969 - 0,4327 = 0,3642$$

$$Q_k = -0,5048 + 0,9015 = 0,3967$$

10.082. Kinemaatika meetod

Paindemomendi M_k mõjujoone kujutamiseks eemaldatakse lõikest k momenti vastuvõttev side ja ühikjõu tasakaalustamiseks rakendatakse sinna kaksikmoment (joon. 10.21, b). Vertikaalsirde epüüri kujutamiseks leitakse mehhanismi pea- ja kõrvalpoolused. Kujundite 1 ja 3 peapoolused 10 ning 30 ühtivad toeliigenditega a ja b . Peapooluseks 20 on pooluste 10 ja 12 ning 30 ja 23 sihtide lõikepunkt. Peapooluste vertikaalidel on mõjujoone ordinaadid nullid (joon. 10.21, c).

Põikjõu Q_k mõjujoone kujutamiseks eemaldatakse lõikest k põikjõudu vastuvõttev side ja ühikjõu tasakaalustamiseks rakendatakse selle asemele kaks vastassuunalist teljega risti mõjuvat jõudu (joon. 10.21, d). Kujundite 1



Joon. 10.21

ja 2 vastastikuse liikumise hetkpoolus 12 on lõikes k kaare telje puutuja sihil lõpmatuses. Peapooluseks 20 on sirgete 23-30 ja 10-12 lõikepunkt. Sirge 10-12 on paralleelne kaare telje puutujaga lõikes k .

Vertikaalsiirde epüüri (joon. 10.21, e) kujutamiseks antakse mehhanismi kujunditele niisugused paigutised, et kujundite 1 ja 2 vastastikune nihe lõikes k kaare telje ristihil võrdub ühega. Vastastikuse nihke vertikaalne komponent on $\cos\varphi$. Kujundite 1 ja 2 kujutussirged 1' ja 2' on paralleelsed. Kujutussirge 2' siht lõikub nulljoonega peapooluse 20 vertikaalil. Kujundite 2 ja 3 siirded on võrdsed kõrvalpooluse 23 vertikaalil.

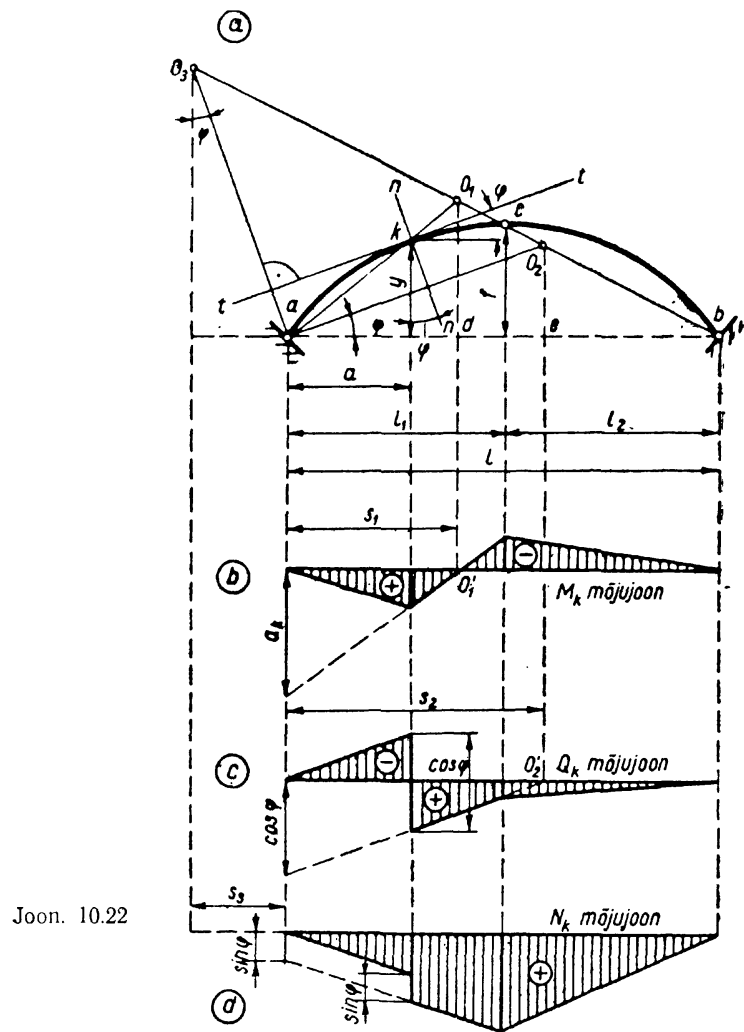
Normaaljõu N_k mõjujoone kujutamiseks eemaldatakse lõikest k normaaljõudu vastuvõttev side ja ühikjõu tasa-kaalustamiseks rakendatakse selle asemele kaks vastasuunalist telje sihil mõjuvat jõudu (joon. 10.21, f). Poolus 12 on lõikes k kaare telje puutuja ristihil lõpmatuses. Peapooluseks 20 on sirgete 23-30 ja 10-12 lõikepunkt. Sirge 10-12 on paralleelne kaare telje puutuja ristihiga lõikes k . Kujundite 1 ja 2 teljesihilise vastastikuse ühiksiirde vertikaalne komponent on $\sin\varphi$ (joon. 10.21, g). Kujutussirged 1' ja 2' on paralleelsed. Kujutussirge 2' pikenduse lõikepunkt nulljoonega on peapooluse 20 vertikaalil. Kujundite 2 ja 3 siirded on võrdsed pooluse 23 vertikaalil.

Mõjujoonte ordinaatide märgid leitakse analoogiliselt lihttala mõjujoonte märkidega.

10.083. Mõjujoonte kujutamine nullpunktide abil

Kolme liigendiga kaare sisejõu mõjujoon koosneb kolmest sirgest. Mõjujoone vasak- ja parempoolsel sirgel on ordinaadid nullid toeliigendite a ning b kohal. Paindemomendi ja toelähedaste ristlõigete põikjõu mõjujoone keskmisel sirgel on reaalne nullpunkt. Normaaljõu ja lukuliigendi c lähedal asuvate ristlõigete põikjõu mõjujoone keskmise sirge pikendus lõikub nulljoonega (joon. 10.22, c ja d). Tuginedes kinemaatika meetodile, leitakse keskmise sirge reaalse või mõeldava nullpunkti abstsiss.

Paindemomendi M_k keskmise sirge nullpunkt O'_1 asub vertikaalil, kus liigendit a ja ristlõike k raskuskeset läbib sirge lõikub liigendeid b ning c läbiva sirgega (joon.



Joon. 10.22

10.22, a ja b). Kolmnurkade adO_1 ja bdO_1 ühise külje O_1-d tingimusest $s_1/y/a = (l - s_1)f/l_2$ tuletatakse nullpunkti abstsiss

$$s_1 = af / (yl_2 + af) \quad (10.44)$$

Põikjõu mõjujoone keskmise sirge reaalse või mõel-

dava nullpunkti O'_2 (joon. 10.22, c) abstsiss tuletatakse kolmnurkade aeO_2 ja beO_2 abil (sirge $a-O_2$ on paralleelne kaare telje puutujaga lõikes k): $s_2 \operatorname{tg} \varphi = (l - s_2) f / l_2$, millest

$$s_2 = l / [1 + (l_2/f) \operatorname{tg} \varphi] \quad (10.45)$$

Normaaljõu N_k mõjujoone keskmise sirge pikenduse lõikepunkt nulljoonega (joon. 10.22, d) leitakse kolmnurkadest agO_3 ja bgO_3 (sirge $a-O_3$ on paralleelne kaare telje puutuja ristsihiga $n-n$ lõikes k):

$$s_3 = l / [(l_2/f) \operatorname{ctg} \varphi - 1] \quad (10.46)$$

10.09. Tuumamomendid

Kaare telgjoone tasandi suhtes sümmeetriliste ristlõigete puhul, kui koormus mõjub kaare telje tasandis, on ühel pool ristlõiget mõjuvate jõudude resultandi rakenduspunkt ristlõike sümmeetriateljel. Normaalpinged kaare ristlõikes leitakse ekstsentrilise surve valemiga

$$\sigma = N/F + Mz/I \quad (a)$$

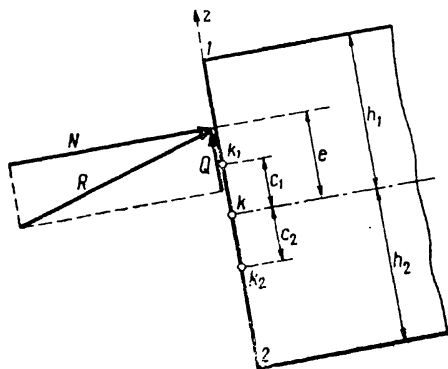
Suurimad normaalpinged tekivad äärmistes kiududes (joon. 10.23):

$$\sigma_{\bar{u}} = N/F + Mh_1/I \quad (b)$$

$$\sigma_a = N/F - Mh_2/I \quad (c)$$

või

$$\sigma_{\bar{u}} = N/F + M/W_1 \quad (d)$$



Joon. 10.23

$$\sigma_a = N/F - M/W_2 \quad (e)$$

milles

$$M = Ne. \quad (f)$$

Kui resultantjõud mõjub ristlõike tuumas, siis on normaalpinged ühemärgilised, ja kui väljaspool tuuma, siis kahemärgilised. Tuuma äärmist punkti sümmeetriateljel nimetatakse tuumapunktiks. Normaalpinge ristlõike äärmises kius võrdub nulliga, kui resultantjõud mõjub teisel pool raskuskeset tuumapunktis. Tuumapunktide kaugusi ristlõike raskuskeskmest tähistatakse c_1 ja c_2 (joon. 10.23).

Resultantjõu mõjumisel alumises tuumapunktis k_2 on paindemoment $M = -Nc_2$ ja pinge ristlõike ülemises kius võrdub nulliga:

$$\sigma_{\bar{u}} = N/F - Nc_2/W_1 = 0 \quad (g)$$

millest leitakse alumise tuumapunkti k_2 kaugus raskuskeskmest

$$c_2 = W_1/F \quad (h)$$

Resultantjõu mõjumisel ülemises tuumapunktis k_1 ($M = Nc_1$) võrdub normaalpinge alumises kius nulliga ja valemist (e) leitakse ülemise tuumapunkti kaugus

$$c_1 = W_2/F \quad (i)$$

Pinge ülemises kius arvutatakse valemiga (d):

$$\sigma_{\bar{u}} = N/F + M/W_1 = (N/W_1) (W_1/F + M/N)$$

ja kui arvestada avaldisi (h) ja (i)

$$\sigma_{\bar{u}} = (N/W_1) (c_2 + e) \quad (j)$$

ehk

$$\sigma_{\bar{u}} = M_{k_2}/W_1 \quad (k)$$

milles

$$M_{k_2} = N(c_2 + e) \quad (l)$$

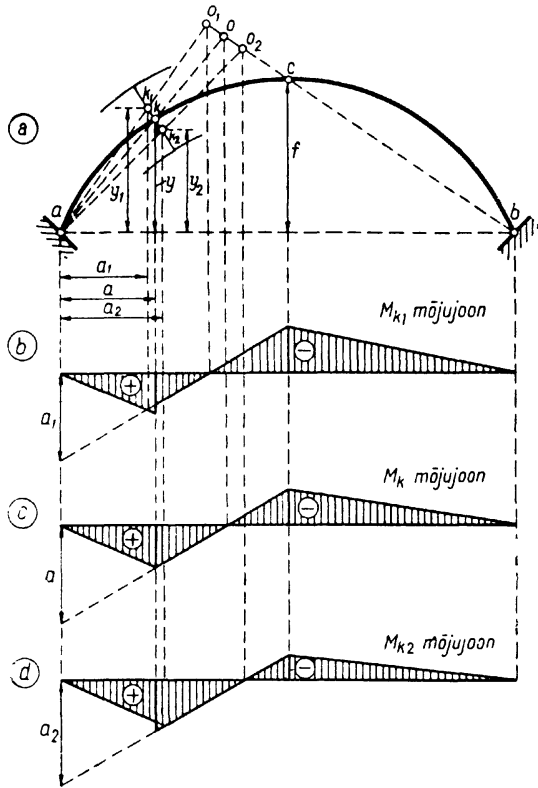
on tuumamoment ristlõike alumise tuumapunkti suhtes. Tuumamoment on arvuliselt võrdne ühel pool lõiget k kaarele rakendatud jõudude momentide algebralise summaga ristlõike tuumapunkti k_2 suhtes.

Lähtudes valemist (e) tuletatakse analoogiliselt pinge valem alumise kiu jaoks

$$\sigma_a = -M_{k_1}/W_2 \quad (m)$$

milles

$$M_{k_1} = N(e - c_1) \quad (n)$$



Joon. 10.24

Liikuvast koormusest põhjustatud suurimate normaalpingete arvutamisel avaldistega (d) ja (e) on vaja leida suurim paindemoment ja sellele vastav normaaljõud ning suurim normaaljõud ja sellele vastav paindemoment. Suurimate pingete arvutamisel valemitega (k) ja (m) on vaja leida suurimad tuumamomendid.

Tuumamomentide mõjujooned (joon. 10.24) kujutatakse analoogiliselt paindemomendi mõjujoonega. Mõjujoone ordinaatide arvutamisel kasutatakse valemit (10.9), milles ristlõike k raskuskeskme koordinaadid asendatakse vastavalt tuumapunkti k_1 või k_2 koordinaatidega.

10.10. Sisejõudude mõjumaatriksid

Samal kõrgusel asuvate kannaliigenditega kolme liigendiga kaare (joon. 10.25) sisejõud vertikaalsest koormusest arvutatakse valemitega (10.9), (10.21) ja (10.22)

$$M_k = M_k^0 - Hy \quad (a)$$

$$N_k = Q_k^0 \sin \varphi + H \cos \varphi \quad (b)$$

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi - H \sin \varphi \quad (c)$$

milles horisontaalreaktsioon

$$H = M_c^0 / f \quad (d)$$

ühikjõu mõjumisel lõikes i (joon. 10.25, a) leitakse n võrdseks osaks jaotatud silde puhul valemitega

$$h_i = \frac{x_i l_2}{l f} = \frac{id \cdot l_2}{n d f} = \frac{l_2}{n f} i, \quad \text{kui } 0 \leq i \leq \frac{l_1}{d} \quad (e)$$

$$h_i = \frac{(l - x_i) l_1}{l f} = \frac{(n - i) d \cdot l_1}{n d f} = \frac{l_1}{n f} (n - i),$$

$$\text{kui } \frac{l_1}{d} \leq i \leq n$$

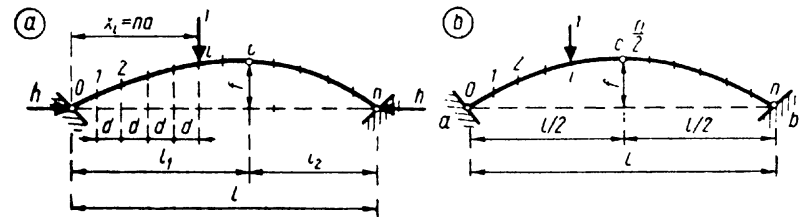
Kui $l_1 = l_2 = l/2$ (joon. 10.25, b), siis avaldised (e) on:

$$h_i = (l/2fn) i, \quad \text{kui } 0 \leq i \leq n/2 \quad (10.47)$$

$$h_i = (l/2fn) (n - i), \quad \text{kui } n/2 \leq i \leq n.$$

Kolme liigendiga kaare paindemomendi mõjumaatriks b_m leitakse kahe maatriksi vahena:

$$b_m = b_{m0} - b_{mh} \quad (10.48)$$



Joon. 10.25

Maatriks \mathbf{b}_{m0} on lihttala paindemomendi mõjumaatriks ja leitakse, kui sille on jaotatud n võrdseks osaks ($d = l/n$), skeemi (7.28) abil:

$$\mathbf{b}_{m0} = \frac{l}{n^2} \begin{vmatrix} n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-2 & (n-2)2 & \dots & 4 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 4 & \dots & 2(n-2) & n-2 \\ 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} \quad (10.49)$$

Maatriks \mathbf{b}_{mh} saadakse kahe maatriksi korrutamise teel:

$$\mathbf{b}_{mh} = \mathbf{b}_y \mathbf{b}_h \quad (10.50)$$

kusjuures veergmaatriksi

$$\mathbf{b}_y = \{y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{n-1}\} \quad (10.51)$$

elementideks on kaare telje ordinaadid ja ridamaatriksi

$$\mathbf{b}_h = \{h_1 \ h_2 \ \dots \ h_{n-1}\} \quad (10.52)$$

elementideks on horisontaalse reaktsiooni H mõjujoone ordinaadid. Maatriks (10.50) on:

$$\mathbf{b}_{mh} = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{vmatrix} \cdot \{h_1 \ h_2 \ \dots \ h_{n-1}\} = \begin{vmatrix} y_1 h_1 & y_1 h_2 & \dots & y_1 h_{n-1} \\ y_2 h_1 & y_2 h_2 & \dots & y_2 h_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n-1} h_1 & y_{n-1} h_2 & \dots & y_{n-1} h_{n-1} \end{vmatrix} \quad (10.53)$$

Kolme liigendiga kaare paindemomendi mõjumaatriks leitakse nüüd lihttala mõjumaatriksi (10.49) ja maatriksi \mathbf{b}_{mh} (10.50) vahena:

$$\mathbf{b}_m = \frac{l}{n^2} \begin{vmatrix} n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-2 & (n-2)2 & \dots & 4 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 4 & \dots & 2(n-2) & n-2 \\ 1 & 2 & \dots & (n-2) & n-1 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} y_1 h_1 & y_1 h_2 & \dots & y_1 h_{n-1} \\ y_2 h_1 & y_2 h_2 & \dots & y_2 h_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n-2} h_1 & y_{n-2} h_2 & \dots & y_{n-2} h_{n-1} \\ y_{n-1} h_1 & y_{n-1} h_2 & \dots & y_{n-1} h_{n-1} \end{vmatrix} \quad (10.54)$$

Vastavalt avaldistele (b) ja (c) leitakse piki- ja põikjõu mõjumaatriksid

$$\mathbf{b}_n = \mathbf{b}_{sd} \mathbf{b}_{q0} + \mathbf{b}_c \mathbf{b}_h \quad (10.55)$$

$$\mathbf{b}_q = \mathbf{b}_{cd} \mathbf{b}_{q0} + \mathbf{b}_s \mathbf{b}_h \quad (10.56)$$

milles lihttala põikjõu mõjumaatriks

$$\mathbf{b}_{q0} = \begin{vmatrix} q_{00} & q_{01} & \dots & q_{0n} \\ q_{10} & q_{11,v} / q_{11,p} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n0} & q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{vmatrix} \quad (q)$$

leitakse skeemi (7.29) järgi:

$$\mathbf{b}_{q0} = \frac{1}{n} \begin{vmatrix} n & (n-1) & n-2 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & -1/(n-1) & n-2 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2/(n-2) & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & -2 & \dots & (1-n)/1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \dots & 1-n & -n \end{vmatrix} \quad (10.57)$$

ja veergmaatriksite

$$\mathbf{b}_s = \{\sin \varphi_0 \ \sin \varphi_1 \ \dots \ \sin \varphi_{n-1} \ \sin \varphi_n\} \quad (10.58)$$

$$\mathbf{b}_c = \{\cos \varphi_0 \ \cos \varphi_1 \ \dots \ \cos \varphi_{n-1} \ \cos \varphi_n\} \quad (10.59)$$

ning diagonaalmaatriksite

$$\mathbf{b}_{sd} = \begin{vmatrix} \sin \varphi_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sin \varphi_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sin \varphi_n \end{vmatrix} \quad (10.60)$$

$$\mathbf{b}_{cd} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \cos \varphi_n \end{vmatrix} \quad (10.61)$$

elementideks on kaare telje puutuja ja horisontaali vahe-
lise nurga siinus ja koosinus lõigetes $0, 1, 2, \dots, n$.

Piki- ja põikjõu mõjumaatriksid (10.54), (10.55) võib
esitada nüüd järgmisel kujul:

$$\mathbf{b}_n = \begin{vmatrix} \sin \varphi_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sin \varphi_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sin \varphi_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q_{00} & q_{01} & \dots & q_{0n} \\ q_{10} & q_{11,v}/q_{11,p} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n0} & q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos \varphi_0 \\ \cos \varphi_1 \\ \dots \\ \cos \varphi_n \end{vmatrix} \cdot \|h_0 \ h_1 \ \dots \ h_n\| \quad (10.62)$$

$$\mathbf{b}_q = \begin{vmatrix} \cos \varphi_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \cos \varphi_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q_{00} & q_{01} & \dots & q_{0n} \\ q_{10} & q_{11,v}/q_{11,p} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n0} & q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sin \varphi_0 \\ \sin \varphi_1 \\ \dots \\ \sin \varphi_n \end{vmatrix} \cdot \|h_0 \ h_1 \ \dots \ h_n\| \quad (10.63)$$

Sisejõudude vektorid leitakse mõjumaatriksite abil
avaldisega (7.20):

$$\mathbf{M} = \mathbf{b}_m \mathbf{P} \quad (10.64)$$

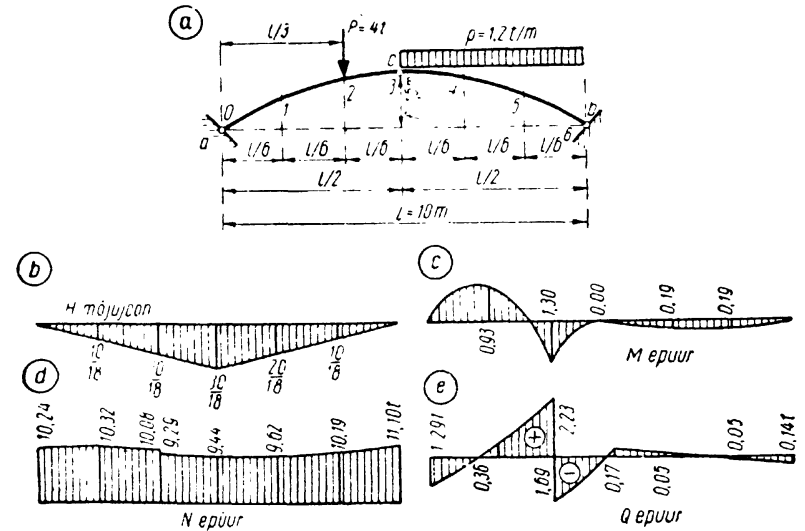
$$\mathbf{N} = \mathbf{b}_n \mathbf{P} \quad (10.65)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{b}_p \mathbf{P} \quad (10.66)$$

milles \mathbf{P} on vertikaalse koormuse jõuvektor (veergmaatriks).

Näide 10.6. Arvutada joonisel 10.26, a esitatud koormuse jaoks
sisejõudude epiüüride ordinaadid mõjumaatriksite abil. Kaare teljeks
on ruutparabool.

Kaare sille on jaotatud kuueks võrdseks osaks: $d=l/n=l/6$.



Joon. 10.26

Tabel 10.3

Ruutparaboolse teljega kaare geometrilised andmed
 $l=10 \text{ m}$; $f=1,5 \text{ m}$ (näide 10.6, joon. 10.26, a)

Lõige	ξ	y	$\text{tg } \varphi$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$
0	0	0	0,6	0,5145	0,8575
1	1/6	5/6	0,4	0,3714	0,9285
2	2/6	8/6	0,2	0,1961	0,9806
3	3/6	9/6	0,0	0,0000	1,0000
4	4/6	8/6	-0,2	-0,1961	0,9806
5	5/6	5/6	-0,4	-0,3714	0,9285
6	1	0	-0,6	-0,5145	0,8575

Kaare telje geometrilised andmed on esitatud tabelis 10.3, kusjuures
telgjoone ordinaadid leitakse võrrandiga

$$y = (4f/l^2)x(l-x) = 4f\xi(1-\xi) = 4f\xi\xi'$$

või vastavalt ülesande andmetele

$$y = 4 \cdot 1,5\xi\xi' = 6\xi\xi'$$

$$\text{tg } \varphi = dy/dx = (4f/l)(1-2\xi) = 0,6(1-2\xi).$$

Horizontaalse toereaktsiooni H mõjujoon on kujutatud joonisel 10.26, b , kusjuures ordinaadid on leitud avaldistega (10.47):

$$h_i = (10/2 \cdot 1,5 \cdot 6)i = (10/18)i; \quad (0 \leq i \leq 3)$$

$$h_i = (10/2 \cdot 1,5 \cdot 6)(n-i) = (10/18)(6-i); \quad (3 \leq i \leq 6)$$

Paindemomendi mõjumaatriks (10.48)

$$b_m = b_{m0} - b_{mh}$$

leitakse maatriksite (10.49)...(10.53) abil:

$$b_m = \frac{10}{6^2} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} - \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ 8 \\ 5 \end{vmatrix} \cdot \frac{10}{18} \|1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1\| =$$

$$= \frac{10}{36} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} - \frac{10}{3 \cdot 3^2} \begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 & 10 & 5 \\ 8 & 16 & 24 & 16 & 8 \\ 9 & 18 & 27 & 18 & 9 \\ 8 & 16 & 24 & 16 & 8 \\ 5 & 10 & 15 & 10 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0,9259 & 0,1852 & -0,5556 & -0,3704 & -0,1852 \\ 0,3704 & 0,7407 & -0,5556 & -0,3704 & -0,1852 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,1852 & -0,3704 & -0,5556 & 0,7407 & 0,3704 \\ -0,1852 & -0,3704 & -0,5556 & 0,1852 & 0,9259 \end{vmatrix} m$$

Paindemomendi epüüri ordinaadid leitakse vastavalt avaldisele (10.64)

$$M = b_m P =$$

$$= \begin{vmatrix} 0,9259 & 0,1852 & -0,5556 & -0,3704 & -0,1852 \\ 0,3704 & 0,7407 & -0,5556 & -0,3704 & -0,1852 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,1852 & -0,3704 & -0,5556 & 0,7407 & 0,3704 \\ -0,1852 & -0,3704 & -0,5556 & 0,1852 & 0,9259 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \{-0,926 \ 1,296 \ 0,000 \ 0,185 \ 0,185\} \text{ tm}$$

Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 10.26, c .

Piki- ja põikjõu mõjumaatriksid leitakse avaldisega (10.62) ja (10.63), kusjuures lihttala põikjõu mõjumaatriks leitakse skeemi (10.57) abil:

$$b_n = \begin{vmatrix} 0,5145 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3714 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1961 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,1961 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,3714 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5145 \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2/4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3/3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5/1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,8575 \\ 0,9285 \\ 0,9806 \\ 1,0000 \\ 0,9806 \\ 0,9285 \\ 0,8575 \end{vmatrix}$$

$$-\frac{10}{18} \|0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0\| =$$

$$= \begin{vmatrix} 0,5145 & 0,9052 & 1,2958 & 1,6865 & 1,1243 & 0,5622 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,4539 & 1,2793 & 1,7332 & 1,1555 & 0,5777 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,5121 & 1,0241 & 1,7323 & 1,1549 & 0,5775 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,5556 & 1,1111 & 1,6667 & 1,1111 & 0,5556 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,5775 & 1,1549 & 1,7323 & 1,2202 & 0,5121 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,5777 & 1,1555 & 1,7332 & 1,2793 & 0,8253 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,5622 & 1,1243 & 1,6865 & 1,2958 & 0,9052 & 0,5145 \end{vmatrix}$$

$$b_q = \begin{vmatrix} 0,8575 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9285 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9806 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9806 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9285 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8575 \end{vmatrix}$$

$$-\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2/4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3/3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5/1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,5145 \\ 0,3714 \\ 0,1961 \\ 0,0000 \\ -0,1961 \\ -0,3714 \\ -0,5145 \end{vmatrix}$$

$$-\frac{10}{18} \|0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0\| =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,8575 & 0,4288 & 0,0000 & -0,4288 & -0,2858 & -0,1429 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,3611 & & & & & \\ & 0,5675 & 0,2063 & -0,1547 & -0,1032 & -0,0515 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,2723 & -0,5448 & 0,1635 & 0,1090 & 0,0545 & 0,0000 \\ & & 0,4358 & & & & \\ 0,0000 & -0,1667 & -0,3333 & -0,5000 & 0,3333 & 0,1667 & 0,0000 \\ & & & 0,5000 & & & \\ 0,0000 & -0,0545 & -0,1090 & -0,1635 & -0,4358 & 0,2723 & 0,0000 \\ & & & & 0,5448 & & \\ 0,0000 & 0,0515 & 0,1032 & 0,1547 & -0,2063 & -0,5675 & 0,0000 \\ & & & & & 0,3611 & \\ 0,0000 & 0,1429 & 0,2858 & 0,4288 & 0,0000 & -0,4288 & -0,8575 \end{pmatrix}$$

milles näiteks teise rea peadiagonaali elemendid $-0,3611$ ja $0,5675$, mis on löike I põikjõu mõjujoone ordinaadid löikest vasakul ja paremal pool, on leitud järgmiselt:

$$0,9285(1/6)(-1) - 0,3714(10/18) \cdot 1 = -0,3611$$

$$0,9285(1/6) \cdot 5 - 0,3714(10 \cdot 18) \cdot 1 = 0,5675$$

Järgnevalt leitakse piki- ja põikjõu epüüride ordinaadid võrranditega (10.65) ning (10.66):

$$N = \begin{pmatrix} 0,514 & 0,905 & 1,296 & 1,686 & 1,124 & 0,562 & 0,000 & 0 \\ 0,000 & 0,454 & & & & & & \\ & 0,825 & 1,279 & 1,733 & 1,156 & 0,578 & 0,000 & 0 \\ 0,000 & 0,512 & 1,024 & 1,732 & 1,155 & 0,577 & 0,000 & 4 \\ & & 1,220 & & & & & \\ 0,000 & 0,556 & 1,111 & 1,667 & 1,111 & 0,556 & 0,000 & 1 \\ & & & & 1,220 & & & \\ 0,000 & 0,577 & 1,155 & 1,732 & 1,024 & 0,512 & 0,000 & 2 \\ & & & & & & & \\ & & & & & 0,825 & & \\ 0,000 & 0,578 & 1,156 & 1,733 & 1,279 & 0,454 & 0,000 & 2 \\ & & & & & & & \\ 0,000 & 0,562 & 1,124 & 1,686 & 1,296 & 0,905 & 0,514 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{matrix} 10,24 & 10,32 & \frac{9,29}{10,08} & 9,44 & 9,62 & 10,19 & 11,10 \end{matrix} \right\} t$$

Näiteks N epüüri ordinaadid löikest 2 (jõust $P=4$ t) vasakul ja paremal pool ning löikes 5 on arvutatud järgmiselt:

$$0,000 \cdot 0 + 0,512 \cdot 0 + 1,220 \cdot 4 + 1,732 \cdot 1 + 1,155 \cdot 2 + 0,577 \cdot 2 + 0,000 \cdot 1 = 10,076 \text{ t}$$

$$0,000 \cdot 0 + 0,512 \cdot 0 + 1,024 \cdot 4 + 1,732 \cdot 1 + 1,155 \cdot 2 + 0,577 \cdot 2 + 0,000 \cdot 1 = 9,292 \text{ t}$$

$$0,000 \cdot 0 + 0,578 \cdot 0 + 1,156 \cdot 4 + 1,733 \cdot 1 + 1,279 \cdot 2 + (0,825 + 0,454)(2/2) + 0,000 \cdot 1 = 10,194 \text{ t}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0,857 & 0,429 & 0,000 & -0,429 & -0,286 & -0,143 & 0,000 & 0 \\ 0,000 & -0,361 & & & & & & \\ & 0,568 & 0,206 & -0,155 & -0,103 & -0,052 & 0,000 & 0 \\ 0,000 & -0,272 & -0,545 & 0,164 & 0,109 & 0,055 & 0,000 & 4 \\ & & 0,436 & & & & & \\ 0,000 & -0,167 & -0,333 & -0,500 & 0,333 & 0,167 & 0,000 & 1 \\ & & & 0,500 & & & & \\ 0,000 & -0,055 & -0,109 & -0,164 & 0,436 & 0,272 & 0,000 & 2 \\ & & & & 0,545 & & & \\ 0,000 & 0,052 & 0,103 & 0,155 & -0,206 & -0,568 & 0,000 & 2 \\ & & & & & 0,361 & & \\ 0,000 & 0,143 & 0,286 & 0,429 & 0,000 & -0,429 & -0,857 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} -1,286 & 0,361 & -\frac{1,689}{2,234} & 0,167 & 0,054 & -0,052 & -0,143 \end{matrix} \right\} t$$

Piki- ja põikjõu epüürid on kujutatud joonisel 10.26, d ja e .

10.11. Kolme liigendiga raam

Kolme liigendiga raami arvutamisel kehtivad kolme liigendiga kaare jaoks tuletatud valemid. Erinevalt kaarest võetakse tõmme positiivsena ja surve negatiivsena.

Näide 10.7. Arvutada joonisel 10.27, a kujutatud kolme liigendiga raami M , N ja Q epüüride ning löike k ($a=2,5$ m, $y=3,5$ m) M_k , N_k ja Q_k mõjujoonte ordinaadid.

A. Toereaktsioonide arvutus.

$$\Sigma M_b = 0; \quad V_a \cdot 10 - 4 \cdot 2,5 - 0,4 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0$$

$$\Sigma M_a = 0; \quad -V_b \cdot 10 + 4 \cdot 7,5 - 0,4 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0$$

millest

$$V_a = 1,18 \text{ t}; \quad V_b = 2,82 \text{ t}$$

$$\text{Kontroll: } \Sigma Y = 0; \quad 1,18 + 2,82 - 4 = 0$$

$$M_{c,v} = 0; \quad 1,185 - H_a \cdot 4 = 0$$

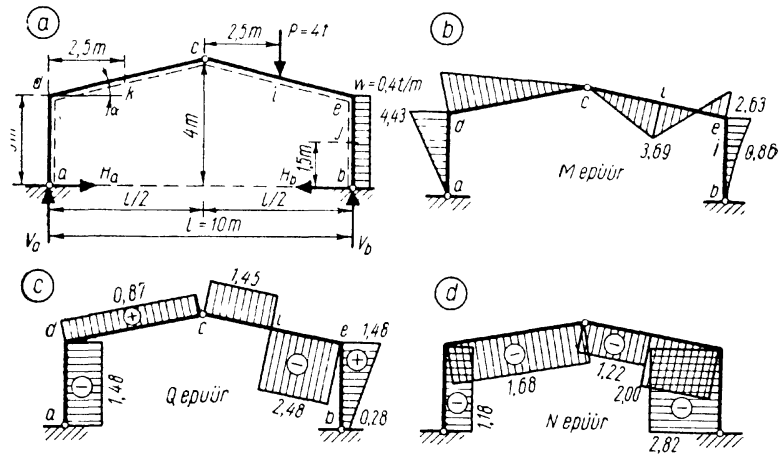
$$M_{c,p} = 0; \quad 2,82 \cdot 5 - 0,4 \cdot 3 \cdot 2,5 - 4 \cdot 2,5 - H_b \cdot 4 = 0$$

millest

$$H_a = 1,475 \text{ t}; \quad H_b = 0,275 \text{ t}$$

$$\text{Kontroll: } \Sigma X = 0; \quad 1,475 - 0,275 - 3 \cdot 0,4 = 0$$

B. Paindemomendi epüüri (joon. 10.27, b) ordinaatide arvutus.



Joon. 10.27

$$M_d = 1,475 \cdot 3 = 4,425 \text{ tm}; \quad M_i = 1,18 \cdot 7,5 - 1,475 \cdot 3,5 = 3,688 \text{ tm}$$

$$M_e = -0,275 \cdot 3 - 0,4 \cdot 3 \cdot 1,5 = 2,625 \text{ tm}$$

$$M_j = -0,275 \cdot 1,5 - 0,4 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 0,863 \text{ tm}$$

C. Põikjõu epüüri (joon. 10.27, c) ordinaatide arvutus.

$$Q_{a-d} = -1,475 \text{ t}; \quad Q_{b-e} = 0,275 \text{ t}; \quad Q_{e-b} = 0,275 + 3 \cdot 0,4 = 1,475 \text{ t}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,2; \quad \sin \alpha = 0,1961; \quad \cos \alpha = 0,9806$$

$$Q_{d-c} = 1,18 \cdot 0,9806 - 1,475 \cdot 0,1961 = 0,868 \text{ t}$$

$$Q_{c-i} = 1,18 \cdot 0,9806 + 1,475 \cdot 0,1961 = 1,446 \text{ t}$$

$$Q_{i-e} = -2,82 \cdot 0,9806 + (0,275 + 3 \cdot 0,4) \cdot 0,1961 = -2,476 \text{ t}$$

D. Pikijõu epüüri (joon. 10.27, d) ordinaatide arvutus.

$$N_{a-d} = -1,18 \text{ t}; \quad N_{b-e} = N_{e-b} = -2,82 \text{ t}$$

$$N_{d-c} = -1,18 \cdot 0,1961 - 1,475 \cdot 0,9806 = -1,678 \text{ t}$$

$$N_{c-i} = 1,18 \cdot 0,1961 - 1,475 \cdot 0,9806 = -1,215 \text{ t}$$

$$N_{i-e} = -2,82 \cdot 0,1961 - (0,275 + 3 \cdot 0,4) \cdot 0,9806 = -1,999 \text{ t}$$

E. Mõjujonte (joon. 10.28) ordinaatide arvutus.

Toereaktsioonid, kui ühikjõud mõjub lõikes k ($x=2,5$ m), on järgmised:

$$V_a = 0,75; \quad V_b = 0,25; \quad H = \frac{M_c^0}{f} = 0,25 \cdot 5/4 = 0,3125$$

ja kui liigendi c kohal, siis

$$V_a = V_b = 0,5; \quad H = 0,5 \cdot 5/4 = 0,625$$

Mõjujonte keskmiste sirgete võrrandid:

$$M_k = V_a a - H y$$

$$N_k = -V_a \sin \alpha - H \cos \alpha$$

$$Q_k = V_a \cos \alpha - H \sin \alpha$$

Kui $x=2,5$ m, siis

$$M_k = 0,75 \cdot 2,5 - 0,3125 \cdot 3,5 = 0,7812 \text{ m}$$

$$N_k = -0,75 \cdot 0,1961 - 0,3125 \cdot 0,9806 = -0,4535$$

$$Q_k = 0,75 \cdot 0,9806 - 0,3125 \cdot 0,1961 = 0,6742$$

Kui $x=5$ m, siis

$$M_k = 0,5 \cdot 2,5 - 0,625 \cdot 3,5 = -0,9375 \text{ m}$$

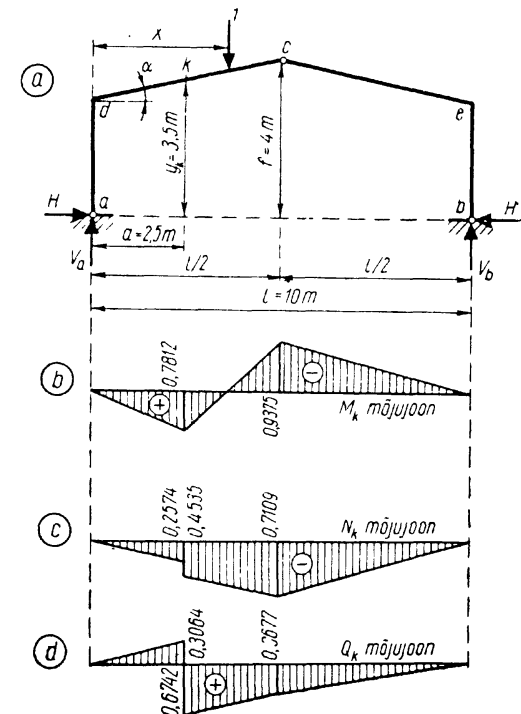
$$N_k = -0,5 \cdot 0,1961 - 0,625 \cdot 0,9806 = -0,7109$$

$$Q_k = 0,5 \cdot 0,9806 - 0,625 \cdot 0,1961 = 0,3677$$

Kui ühikjõud asub mõjujoone vasakpoolisel sirgel lõike k kohal ($x=2,5-0$ m), siis

$$N_k = 0,1961 - 0,4535 = -0,2574$$

$$Q_k = 0,6742 - 0,9806 = -0,3064$$



Joon. 10.28

10.12. Tõmbiga kolme liigendiga kaar ja raam

Tõmbiga kolme liigendiga kaare ja raami (joon. 10.2, $g...l$) toereaktsioonid arvutatakse analoogiliselt lihttala toereaktsioonidega. Tõmbi sisejõud N_t leitakse analoogiliselt kaare või raami horisontaalse reaktsiooniga H :

$$N_t = M_c^0 / f \quad (a)$$

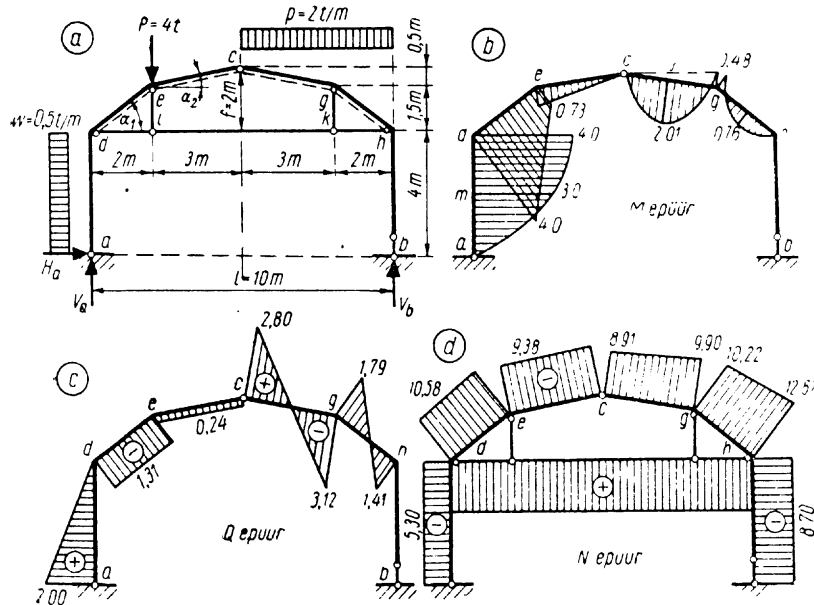
milles f on liigendi c kaugus tõmbist.

Vertikaalsest koormusest tekib tõmbis tõmme ja kaares surve ning arvuskeemis märgitakse tõmme positiivsena ja surve negatiivsena. Tõmbiga kaare arvutamisel tõmbita kaare jaoks tuletatud pikijõu võrrandiga võetakse märgid valemis vastupidised.

Näide 10.8. Arvutada joonisel 10.29, a kujutatud tõmbiga kolme liigendiga raami sisejõud.

A. Toereaktsioonide ja tõmbi sisejõu arvutus.

$$\Sigma X = 0; H_a + 0,5 \cdot 4 = 0, H_a = -2 \text{ t}$$



Joon. 10.29

$$\Sigma M_b = 0; V_a \cdot 10 + 0,5 \cdot 4 \cdot 2 - 4 \cdot 8 - 2 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0$$

$$\Sigma M_a = 0; 0,5 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \cdot 7,5 - V_b \cdot 10 = 0$$

$$V_a = 5,3 \text{ t}; V_b = 8,7 \text{ t}$$

$$\text{Kontroll: } \Sigma Y = 0; 5,3 + 8,7 - 4 - 2 \cdot 5 = 0$$

$$M_{c,v} = 0; 5,3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 - 0,5 \cdot 4 \cdot 4 - 4 \cdot 3 - N_{i,k} \cdot 2 = 0$$

millest

$$N_{i,k} = 9,25 \text{ t}$$

$$\text{Kontroll: } M_{c,p} = 0; 8,7 \cdot 5 - 2 \cdot 5 \cdot 2,5 - N_{i,k} \cdot 2 = 0$$

$$N_{i,k} = 9,25 \text{ t}$$

B. Paindemomendi epüüri (joon. 10.29, b) ordinaatide arvutus.

$$M_d = 2 \cdot 4 - 0,5 \cdot 4 \cdot 2 = 4 \text{ tm}$$

$$M_e = 5,3 \cdot 2 + 2 \cdot 5,5 - 0,5 \cdot 4 \cdot 3,5 - 9,25 \cdot 1,5 = 0,725 \text{ tm}$$

$$M_m = 4/2 + 0,5 \cdot 4^2/8 = 3 \text{ tm}$$

$$M_g = 8,7 \cdot 2 - 9,25 \cdot 1,5 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = -0,475 \text{ tm}$$

$$M_j = 2 \cdot 3^2/8 - 0,475/2 = 2,01 \text{ tm}$$

$$M_l = 2 \cdot 2^2/8 - 0,475/2 = 0,76 \text{ tm}$$

C. Põikjõu epüüri (joon. 10.29, c) ordinaatide arvutus.

$$Q_{da} = 2 \text{ t}; Q_{da} = 2 - 0,5 \cdot 4 = 0$$

$$\text{tg } \alpha_1 = 0,75; \sin \alpha_1 = 0,6000; \cos \alpha_1 = 0,8000$$

$$Q_{d-e} = 5,3 \cdot 0,8000 - (0,5 \cdot 4 - 2 + 9,25) \cdot 0,6000 = -1,31 \text{ t}$$

$$\text{tg } \alpha_2 = 1/6; \sin \alpha_2 = 0,1644; \cos \alpha_2 = 0,9864$$

$$Q_{e-c} = (5,3 - 4) \cdot 0,9864 - (0,5 \cdot 4 - 2 + 9,25) \cdot 0,1644 = 1,282 - 1,521 = -0,24 \text{ t}$$

$$Q_{cg} = 1,282 + 1,521 = 2,80 \text{ t}$$

$$Q_{gc} = (2 \cdot 2 - 8,7) \cdot 0,9864 + 1,521 = -3,12 \text{ t}$$

$$Q_{gh} = (2 \cdot 2 - 8,7) \cdot 0,8000 + 9,25 \cdot 0,6000 = 1,79 \text{ t}$$

$$Q_{hg} = -8,7 \cdot 0,8000 + 9,25 \cdot 0,6000 = 1,41 \text{ t}$$

D. Pikijõu epüüri (joon. 10.29, d) ordinaatide arvutus (tõmme on positiivne ja surve negatiivne).

$$N_{a-d} = -5,30 \text{ t}; N_{b-h} = -8,70 \text{ t}$$

$$N_{d-e} = -5,3 \cdot 0,6000 - (0,5 \cdot 4 - 2 + 9,25) \cdot 0,8000 = -10,58 \text{ t}$$

$$N_{e-c} = -(5,3 - 4,0) \cdot 0,1644 - 9,25 \cdot 0,9864 = -9,34 \text{ t}$$

$$N_{cg} = +0,214 - 9,124 = -8,91 \text{ t}$$

$$N_{gc} = -(8,7 - 2 \cdot 2) \cdot 0,1644 - 9,124 = -9,90 \text{ t}$$

$$N_{gh} = -(8,7 - 2 \cdot 2) \cdot 0,6000 - 9,25 \cdot 0,8000 = -10,22 \text{ t}$$

$$N_{hg} = -8,7 \cdot 0,6000 - 9,25 \cdot 0,8000 = -12,62 \text{ t}$$

Näide 10.9. Arvutada joonisel 10.30, a kujutatud murtud tõmbiga kolme liigendiga raami sisejõud ja joonisel 10.31, a esitatud skeemi sõlme d lõigete da ning dc jaoks sisejõudude mõjujoonte ordinaadid.

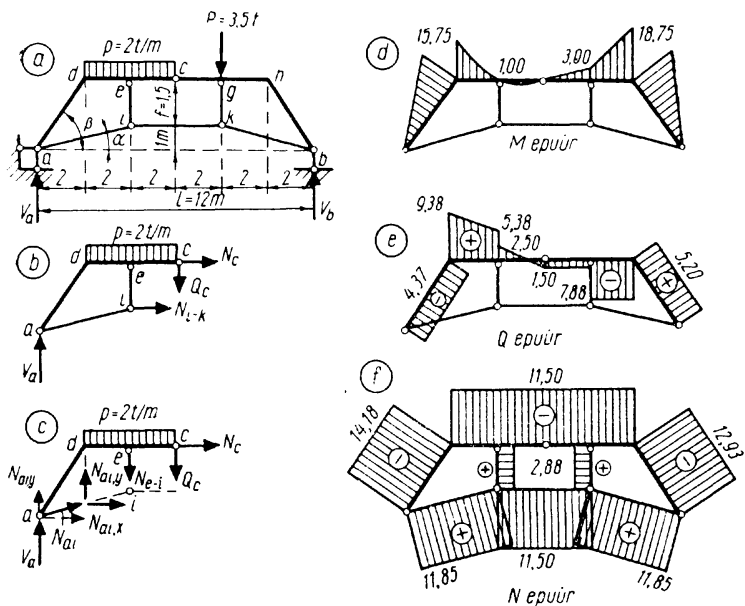
A. Toereaktsioonide ja tõmbi varraste pikijõudude arvutus.

$$\Sigma M_b = 0; V_a \cdot 12 - 4 \cdot 2 \cdot 8 - 3,5 \cdot 4 = 0$$

$$\Sigma M_a = 0; 4 \cdot 2 \cdot 4 + 3,5 \cdot 8 - V_b \cdot 12 = 0$$

$$\text{millest } V_a = 6,5 \text{ t}; V_b = 5,0 \text{ t}$$

$$\text{Kontroll: } 6,5 + 5,0 - 2 \cdot 4 - 3,5 = 0$$



Joon. 10.30

Tõmbi sisejõud leitakse tingimusest (joon. 10.30, b)

$$M_{c,v}=0; 6,5 \cdot 6 - 4 \cdot 2 \cdot 2 - N_{i,k} \cdot 2 = 0; N_{i,k} = 11,5 \text{ t}$$

Kontroll: $M_{c,p}=0; 5,0 \cdot 6 - 3,5 \cdot 2 - N_{i,k} = 0; N_{i,k} = 11,5 \text{ t}$

Tõmbide *i-a* ja *i-e* sisejõud leitakse sõlme *i* tasakaalutingimustest:

$$\sum X=0; N_{i,k} - N_{i,a} \cos \alpha = 0$$

$$\sum Y=0; N_{i,e} - N_{i,a} \sin \alpha = 0$$

millest

$$N_{i,a} = N_{i,k} / \cos \alpha = 11,5 / 0,9701 = 11,85 \text{ t}$$

$$N_{i,e} = N_{i,a} \sin \alpha = 11,85 \cdot 0,25 = 2,875 \text{ t}$$

B. Paandemomendi epüüri (joon. 10.30, d) arvutus.

Sõlmes *d* paandemomendi arutamisel lahutatakse tõmbi *a-i* sisejõud N_{a-i} kaheks komponendiks. Vertikaalne komponent on võrdne tõmbi *i-e* sisejõuga $N_{a-i,y} = N_{i,e} = 2,875 \text{ t}$ ja horisontaalne komponent tõmbi *i-k* sisejõuga $N_{a-i,x} = 11,5 \text{ t}$. Tõmbi *a-i* sisejõud lahutatakse kaheks komponendiks sõlme *d* läbival vertikaalil (joon. 10.30, c), kuna siis vertikaalse komponendi moment on null. Kui tõmbi *a-i* sisejõud lahutatakse toetligendis *a* kaheks komponendiks, siis annavad mõlemad momendi sõlme *d* suhtes

$$M_d = 6,5 \cdot 2 - 11,5 \cdot 2,5 = -15,75 \text{ tm}$$

$$M_e = Q_c \cdot 2 - p \cdot 2^2 / 2 = 1,5 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = -1 \text{ tm}$$

milles (joon. 10.30, c)

$$Q_c = 6,5 - 4 \cdot 2 = -1,5 \text{ t}$$

$$M_h = 5 \cdot 2 - 11,5 \cdot 2,5 = -18,75 \text{ tm}$$

$$M_g = Q_c \cdot 2 = -1,5 \cdot 2 = -3,0 \text{ tm}$$

C. Põikjõu epüüri (joon. 10.30, e) ordinaatide arvutus.

$$\operatorname{tg} \beta = 1,5; \quad \sin \beta = 0,8321; \quad \cos \beta = 0,5547$$

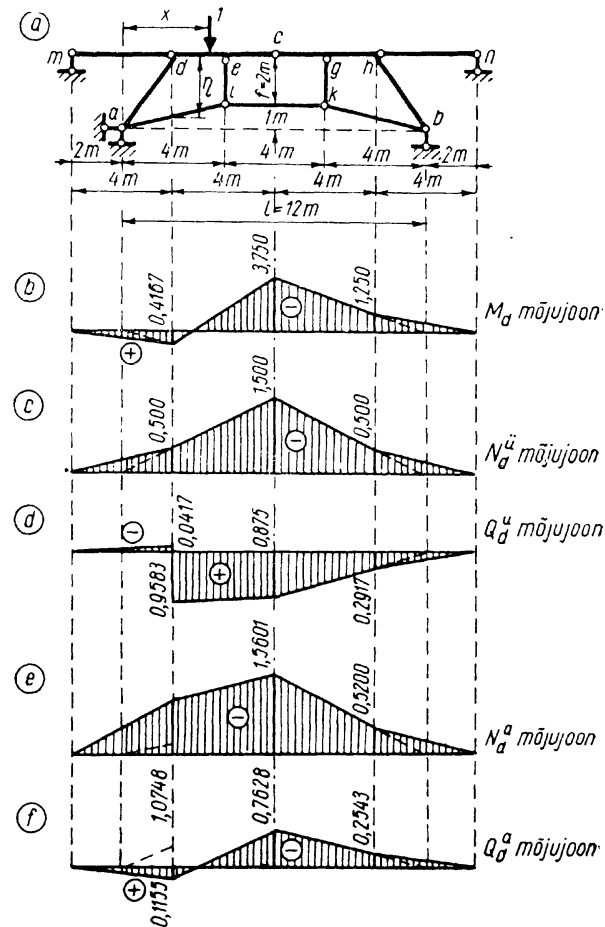
$$Q_{a-d} = (6,5 + 2,875) \cdot 0,5547 - 11,5 \cdot 0,8321 = -4,369 \text{ t}$$

$$Q_{de} = 6,5 + 2,875 = 9,375 \text{ t}; \quad Q_{ed} = 9,375 - 2 \cdot 2 = 5,375 \text{ t}$$

$$Q_{ec} = 5,375 - 2,875 = 2,5 \text{ t}; \quad Q_{c-g} = 2,5 - 2 \cdot 2 = -1,5 \text{ t}$$

$$Q_{h-b} = -(5,0 + 2,875) \cdot 0,5547 + 11,5 \cdot 0,8321 = 5,201 \text{ t}$$

$$Q_{g-h} = -5,0 - 2,875 = -7,875 \text{ t}$$



Joon. 10.31

D. Pikijõu epiüri (joon. 10.30, f) ordinaatide arvutus.

$$N_c = -N_{i-k} = -11,5 \text{ t}$$

$$N_{a-d} = -(6,5 + 2,875) \cdot 0,8321 - 11,5 \cdot 0,5547 = -14,18 \text{ t}$$

$$N_{h-b} = -(5,0 + 2,875) \cdot 0,8321 - 11,5 \cdot 0,5547 = -12,93 \text{ t}$$

E. M , Q , N mõjujoonte (joon. 10.31) ordinaatide arvutus.

Kui ühikjõud asub lõike d kohal ($x=2$ m), on tõmbi $i-k$ pikijõud ja toereaktsioonid järgmised:

$$V_a = \frac{5}{6}; \quad V_b = \frac{1}{6}; \quad N_{i-k} = \frac{M_c^0}{f} = \frac{V_b \cdot 0,5l}{f} = \frac{1 \cdot 6}{6 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

ja kui liigendi c kohal, siis

$$V_a = V_b = 0,5; \quad N_{i-k} = 0,5 \cdot 6/2 = 1,5$$

Lõike dc jaoks on sisejõudude mõjujoonte keskmiste sirgete võrrandid järgmised:

$$M_{dc} = V_a a - N_{a-i} \cos \alpha \cdot \eta = V_a a - N_{i-k} \eta$$

$$N_{di} = -N_{i-k}$$

$$Q_{dc} = V_a + N_{i-k} \operatorname{tg} \alpha$$

Kui $x=2$ m, siis

$$M_d = (5/6) \cdot 2 - 0,5 \cdot 2,5 = 5/12 \text{ m}$$

$$N_{dc} = -0,5$$

$$Q_{dc} = 5/6 + 0,5 \cdot 0,25 = 23/24$$

Kui $x=6$ m, siis

$$M_{dc} = 0,5 \cdot 2 - 1,5 \cdot 2,5 = -2,75 \text{ m}$$

$$N_{dc} = -1,5$$

$$Q_{dc} = 0,5 + 1,5 \cdot 0,25 = 0,675$$

Lõike da jaoks on sisejõudude mõjujoonte keskmiste sirgete võrrandid järgmised:

M_{da} on sama kui lõike dc jaoks

$$N_{da} = -(V_a + N_{i-k} \operatorname{tg} \alpha) \sin \beta - N_{i-k} \cos \beta$$

$$Q_{da} = (V_a + N_{i-k} \operatorname{tg} \alpha) \cos \beta - N_{i-k} \sin \beta$$

Kui $x=2$ m, siis

$$N_{da} = -\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) 0,8321 - \frac{1}{2} \cdot 0,5547 = -1,0748$$

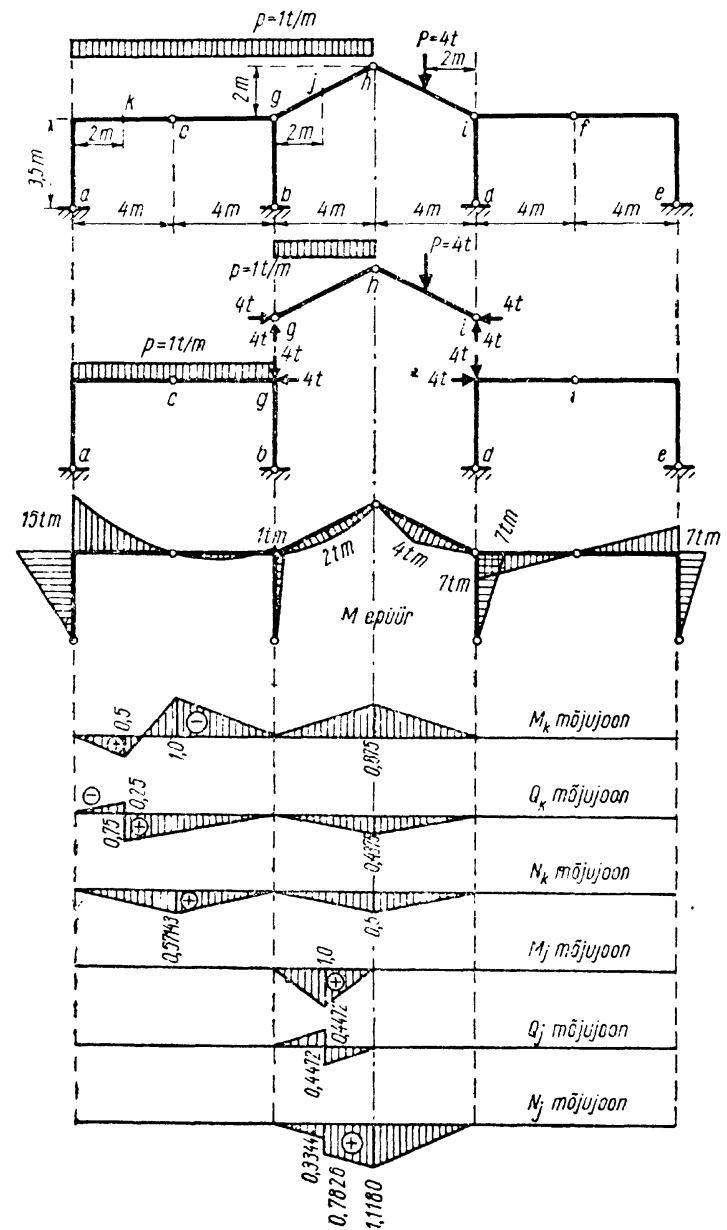
$$Q_{da} = \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) 0,5547 - \frac{1}{2} \cdot 0,8321 = 0,1155$$

ja kui $x=6$ m, siis

$$N_{da} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) 0,8321 - \frac{3}{2} \cdot 0,5547 = -1,5601$$

$$Q_{da} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) 0,5547 - \frac{3}{2} \cdot 0,8321 = -0,7628$$

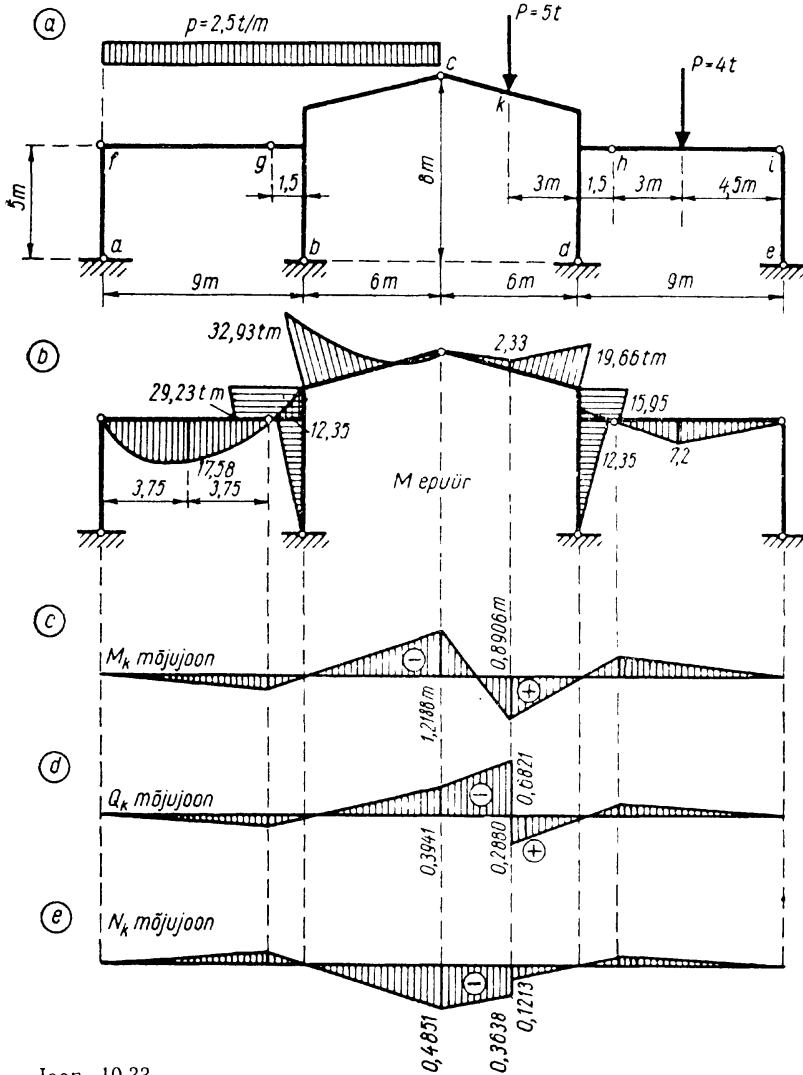
Varraste $a-d$ ja $h-b$ kohal punktiirjoonega määratud ordinaadid kujutavad ilma lisaosadeta $m-d$ ja $h-n$ tõmbiga kolme liigendiga raami mõjujooni.



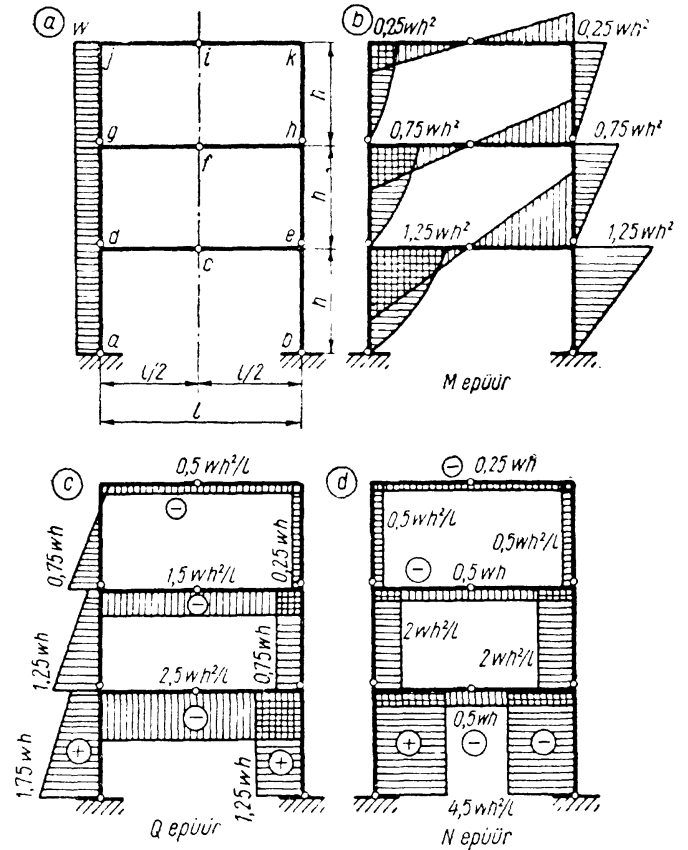
Joon. 10.32

10.13. Mitmesildelised ja -korruselised raamid

Mitmesildelised ja mitmekorruselised raamid koosnevad põhi- ja lisaosadest. Algul arvutatakse sisejõud lisaosades ja ühendusliigendites. Põhiosa sisejõudude leid-



Joon. 10.33



Joon. 10.34

misel arvestatakse lisaks koormusele ka ühendusliigenditest ülekantavaid jõudusid.

Joonisel 10.32 on kujutatud kolme sildega raami paindemomendi epüür ja sisejõudude mõjujooned lõigete k ning j jaoks. Algul arvutatakse lisaosa $g-h-i$ toereaktsioonid ja sisejõud. Põhiosa $a-b-c$ ja $d-e-f$ arvutamisel rakendatakse sõlmedesse g ning i lisaosa toereaktsioonid vastupidiste suundadega.

Joonisel 10.33 on esitatud kolme sildega raami paindemomendi epüür ja sisejõudude mõjujooned lõike k jaoks. Algul leitakse sisejõud lisaosades $a-f$, $j-g$, $i-e$ ja $h-i$. Põhi-

osa *b-c-d* arvutamisel rakendatakse lõigetes *g* ja *h* lisaosade *f-g* ning *h-i* reaktsioonid vastupidise suunaga.

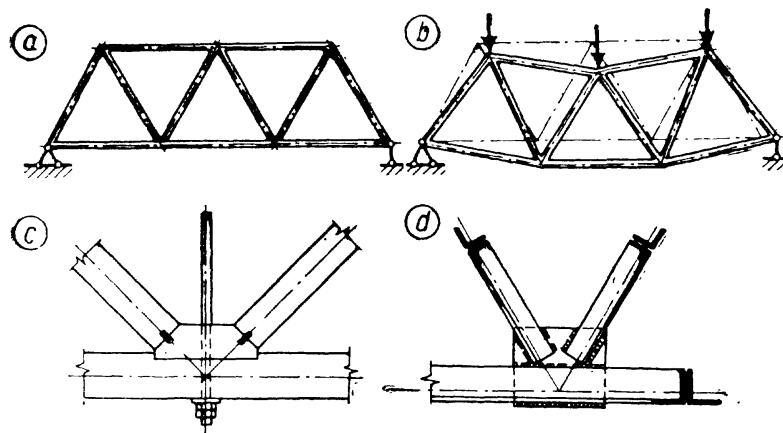
Joonisel 10.34 kujutatud kolmekorruselise raami põhi- osaks on alumine raam *a-b-c* ja lisaosadeks teise ja kolmanda korruse raamid. Arvutust alustatakse kolmanda korruse raamiga, siis leitakse sisejõud ja toereaktsioonid teise korruse raamil, millele rakendatakse lisaks koormusele ka kolmanda korruse raami toereaktsioonid vastupidise suunaga. Viimasena arvutatakse alumise korruse raam, rakendades talle lisaks koormusele teise korruse raamilt edasiantavad koormused.

11. TASANDSÖRESTIKUD

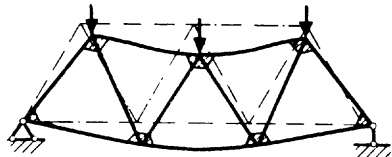
11.01. Üldised mõisted

Hõõrdevabade liigenditega ainult ottest ühendatud varrastest geomeetriselt muutumatut konstruktsiooni nimetatakse sõrestikuks. Hõõrdevabad liigendid võimaldavad ühes sõlmes ühendatud varraste vastastikust pööret, kusjuures vardad jäävad sirgeks (joon. 11.1, *a* ja *b*). Tegelikud sõrestiku sõlmed konstrueeritakse jäikadena (joon. 11.1, *c* ja *d*), mistõttu ühes sõlmes ühendatud vardad ei saa vastastikku pöörduda. Sõrestiku koormamisel pöörduvad ühes sõlmes jäigalt ühendatud varraste otsristlõiked võrdse nurga võrra, mistõttu esialgselt sirged vardad kõverduvad (joon. 11.2).

Sõlmede jäikuse arvestamisel on sõrestiku arvutuskeem paljukordselt staatikaga määramatu ja sisejõudude leidmine nõuab suurt arvutustööd. Uurimused näitavad,



Joon. 11.1

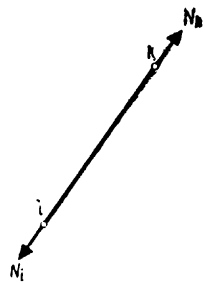


Joon. 11.2

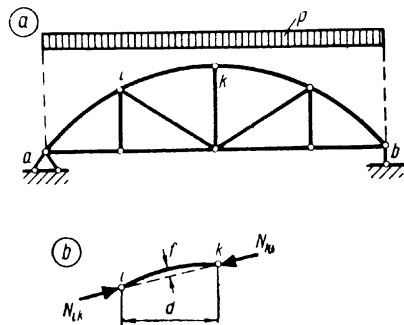
et pikkade ja saledate varrastega sõrestikus on sõlmede jäikusest tekkivad pinged väikesed ning moodustavad mõne protsendi pingetest, mis saadakse liigendsõlmedega arvutusskeemi järgi lahendamisel. Seepärast kasutatakse eeldust, et sõrestiku arvutusskeemi sõlmed on hõõrdevabad liigendid.

Arvutusskeemis on sõrestiku varras kujutatud lõiguga, mis ühtib varda geomeetrilise teljega. Tasandsõrestiku varraste telgjooned asetsevad ühes tasandis. Varraste ristlõiked on sümmeetrilised ja sümmeetriatelg asub sõrestiku tasandis. Sõlme geomeetriliseks tsentriks nimetatakse punkti, milles lõikuvad sõlmes ühendatud varraste telgjooned.

Sõrestik konstrueeritakse tavaliselt sirgete varrastega ja koormus rakendatakse ainult sõlmedesse. Sel juhul on vardad sõlmede vahel otseselt koormamata; hõõrdevabade liigendite eeldusel tekivad varrastes ainult pikijõud. Teiste varrastega otstest hõõrdevabade liigenditega ühendatud sirge varda eemaldamisel ülejäänud sõrestikust asendatakse teiste varraste mõju sõlmedes i ja k mõjuvate jõududega N_i ning N_k (joon. 11.3). Varras on nende kahe



Joon. 11.3



Joon. 11.4

jõu mõjul tasakaalus ainult siis, kui need jõud on võrdsed, vastassuunalised ja asetsevad samal sihil. Seepärast põhjustavad sihil $i-k$ mõjuvad jõud N_i ja N_k sirges vardas ainult pikijõu.

Sõlmede vahel ühtlaselt jaotatud koormusega otseselt koormatud vardad projekteeritakse vahel ka kõveratena (joon. 11.4). Sõlmede i ja k sihil mõjuvad jõud N_{ik} ning N_{ki} põhjustavad kõveras vardas peale pikijõu ka paindemomente ja põikjõude. Varda kõverus valitakse nii, et jõust N_{ik} põhjustatud suurim paindemoment $M = -N_{ik}f$ (joon. 11.4, b) on võrdne, kuid vastupidise märgiga, ühtlaselt jaotatud koormusest põhjustatud suurima paindemomendiga $M = pd^2/8$, milles p on koormuse intensiivsus piki horisontaali ja d — sõlmede i ning k vahelise lõigu horisontaalprojektsioon.

11.02. Terminid ja liigitus

Sõrestiku ülemised vardad moodustavad ülemise vöö alumised vardad — alumise vöö. Vöödevaheleised vardad moodustavad sõrestiku võrgu. Võrgu vertikaalseid vardaid nimetatakse postideks ja kaldvardaid — diagonaalideks. Toe pool kõrgemal asuva otsaga diagonaali nimetatakse langevaks ja madalamal asuva otsaga — tõusvaks diagonaaliks.

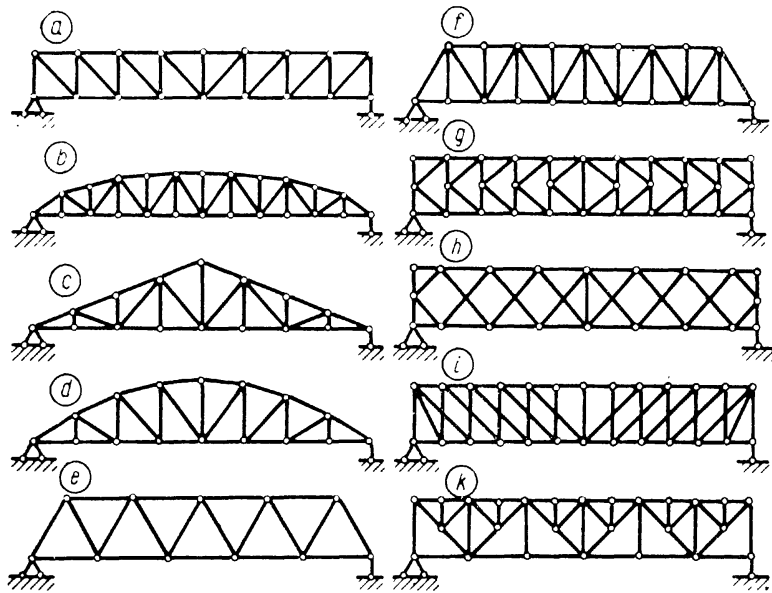
Horisontaalse vöö kahe naabersõlme vahekaugust nimetatakse paneeli pikkuseks.

Sõrestikke liigitatakse järgmiste tunnuste järgi:

1) ülesande järgi — sillasõrestikud, katusesõrestikud, kraanasõrestikud, kõrgepingeliinide sõrestikmastid, raadiomastid, tornisõrestikud jne.;

2) toereaktsioonide järgi: talasõrestikud, konsoolsõrestikud, konsoolidega talasõrestikud; kaar-, raam- ja rippõrestikud; kombineeritud sõrestikud (näiteks kaar koos talasõrestikuga);

3) kuju järgi: paralleelvöödega sõrestikud (joon. 11.5, a); polügonaalvööga sõrestikud, mille üks vöö on hulknurkne (joon. 11.5, b); kolmnurksõrestikud (joon. 11.5, c); kõvera vööga sõrestikud, mille vöövardad on sirged, kuid sõlmede tsentrid asuvad kõverjoonel (näiteks parabolvööga sõrestik joonisel 11.5, d); kõverad võivad olla ka mõlemad vööd;



Joon. 11.5

4) võrgu järgi: diagonaalvõrguga sõrestikud (joon. 11.5, e), post-diagonaalvõrguga sõrestikud (joon. 11.5, a), lisapostidega diagonaalvõrguga sõrestikud (f), K-võrguga sõrestikud (g), rombivõrguga sõrestikud (h), kahekordse post-diagonaalvõrguga sõrestikud (i) ja sprengelsõrestikud (k), mis koosnevad diagonaal- või post-diagonaalvõrguga sõrestikust ja lisaelementidest — sprenglitest.

Diagonaal-, post-diagonaal-, K-võrguga ja lisapostidega diagonaalvõrguga sõrestikke nimetatakse lihtvõrguga sõrestikeks. Lihtvõrguga sõrestiku võrk koosneb kolmnurkadest, kusjuures vardad ei löiku üksteisega.

11.03. Sisejõudude arvutus staatika meetodiga

Tingimuse $2s = v + t$, milles $2s$ on tasakaalutingimuste ja $v + t$ tundmatute arv, rahuldamisel on geomeetriliselt muutumatu sõrestik staatikaga määratav.

Tala-, konsool- ja konsoolidega talasõrestike tuge

kinemaatilised tingimused on samad kui täisseinalisel talal või konsoolil. Niisuguste sõrestike toereaktsioonid arvutatakse analoogiliselt täisseinalise tala või konsooli toereaktsioonidega.

Sirgetest varrastest moodustatud ja ainult sõlmedes koormatud sõrestikul on tundmatuteks varrastes tekkivad pikijõud. Tundmatute pikijõudude arvutamiseks koostatakse $2s - 3$ üksteisest sõltumatut tasakaaluvõrrandit. Tasakaaluvõrrandite koostamisel kasutatakse lõikemeetodit. Sõrestiku arvutusskeemist eraldatakse üks sõlm või osa sõrestikust ja teiste osade mõjud asendatakse läbilõigatud varraste sisejõududega. Eraldatud sõlme või sõrestikuosa tasakaalu tingimustest leitakse läbilõigatud varraste sisejõud. Lahendamise otstarbekus nõuab, et võrrandis oleks ainult üks tundmatu. Võrrandis võib olla ka rohkem tundmatuid, kui kõik tundmatud peale ühe on arvutatavad eelnevatest võrranditest.

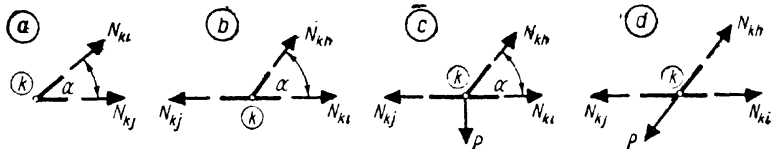
Tasakaaluvõrrandite koostamisel oletatakse sisejõud tõmbejõududena ja märgitakse suunaga sõlme poolt. Arvutuse tulemusena saadud miinuskärg näitab, et oletus oli vale ja varda pikijõuks on survejõud ning õige suund on sõlme poole.

Lihtvõrguga sõrestike varraste sisejõudude arvutamisel kasutatakse järgmisi võtteid: sõlmede eraldamise, momendipunkti ja projektsioonide võtte või nende kombinatsioone.

Mitte-lihtvõrguga sõrestike varraste sisejõud ei ole alati leitavad eelmärgitud võtetega. Mitte-lihtvõrguga sümmeetrilise sõrestiku puhul kasutatakse koormuse lahutamise võtet; mittesümmeetrilise sõrestiku puhul varraste asendamise võtet või kinemaatika meetodit.

11.04. Sõlmede eraldamise võtte

Lõikega eraldatakse sõrestiku arvutusskeemist sõlm ja koostatakse selle jaoks projektsioonide tasakaalu tingimused. Tasandil on võimalik iga sõlme jaoks koostada ainult kaks teineteisest sõltumatut projektsioonide tasakaalu tingimust. Sisejõudude leidmist alustatakse sõlmest, kus on ühendatud kaks varrast. Esimese tasakaalutingimusena kirjutatakse projektsioonide summa teljele, mis on risti ühe tundmatu sisejõu sihiga. Kui teises projektsioonide võrrandis on kaks sisejõudu, siis üks elimineeritakse



Joon. 11.6

esimese võrrandi abil. Järgnevalt eraldatakse sõlm, milles tundmatud ainult kahe varde sisejõud, jne. Eelviimase sõlme kohta koostatud kahes tasakaalutingimuses on ainult üks tundmatu sisejõud. Ühest võrrandist leitakse tundmatu sisejõud ja teine võrrand jääb arvutuse kontrollimiseks. Viimases sõlmes ei ole ühtegi tundmatut ja sõlme kohta koostatud tasakaalutingimustega kontrollitakse eelnevat arvutust.

Üksteisest sõltumatute tasakaaluvõrrandite üldarv on $2s$. Neist kolme kasutati lahendamise algul toereaktsioonide arvutamiseks. Seepärast on s sõlme kohta koostatud $2s$ tasakaalutingimusest $2s - 3$ sõltumatud võrrandid; kolme viimast võrrandit kasutatakse kontrollimiseks.

Sõlmede eraldamise võtte puuduseks on asjaolu, et ühes sõlmes tehtud viga levib ka järgmistesse sõlmedesse.

Sõrestiku sisejõudude arvutamisel sõlmede eraldamise võttega on suurema osa varraste sisejõudude arvutatavad alles pärast paljude teiste varraste sisejõudude leidmist. Mõnedes sõlmedes on võimalik arvutada varraste sisejõud, ilma eelnevalt teiste varraste sisejõudusid leidmata.

Joonisel 11.6, a kujutatud sõlme projektsioonide tingimusest $\Sigma Y=0$: $N_{ki} \sin \alpha = 0$ järeldub, et $N_{ki} = 0$, kuna $\sin \alpha \neq 0$, ja järelikult ka $N_{kj} = 0$. Sellest järeldub, et koormamata sõlmes, mis on moodustatud kahest mitte ühel sirgel asuvast vardast, on varraste sisejõud nullid. Varrast, mille sisejõud on null, nimetatakse edaspidi nullvardaks.

Joonisel 11.6, b kujutatud sõlme projektsioonide tingimustest

$$\begin{aligned} \Sigma X=0; & N_{ki} - N_{kj} + N_{kh} \cos \alpha = 0 \\ \Sigma Y=0; & N_{kh} \sin \alpha = 0 \end{aligned}$$

järeldub, et $N_{kh} = 0$ ja $N_{ki} = N_{kj}$.

Kui koormamata sõlmes on ühendatud kolm varrast, millest kaks asuvad ühel sirgel, siis ühel sirgel asuvate varraste sisejõud on võrdsed ja kolmanda varde sisejõud

on null. Sellise sõlme koormamisel jõuga P (joon. 11.6, c) leitakse kolmanda varde sisejõud projektsioonide tingimusest kahe ühel sirgel asuva varde ristteljele:

$$\Sigma Y=0; N_{kh} \sin \alpha - P = 0, \text{ millest } N_{kh} = P / \sin \alpha.$$

Projektsioonide tingimusest kahe varde teljele: $\Sigma X=0$; $N_{ki} + N_{kh} \cos \alpha - N_{kj} = 0$ võib avaldada $N_{ki} - N_{kj} = -N_{kh} \cos \alpha = P \operatorname{ctg} \alpha$. Sel juhul $N_{ki} \neq N_{kj}$.

Kui jõud P mõjub kolmanda varde sihil (joon. 11.6, d), siis on selle varde sisejõud võrdne jõuga P ja varraste $k-i$ ning $k-j$ sisejõud on võrdsed. Tasakaalutingimustest

$$\begin{aligned} \Sigma Y=0; & N_{kh} \sin \alpha - P \sin \alpha = 0 \\ \Sigma X=0; & N_{ki} - N_{kj} + N_{kh} \cos \alpha - P \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

järeldub, et $N_{kh} = P$ ja $N_{ki} = N_{kj}$.

Näide 11.1. Joonisel 11.7, a kujutatud sõrestikul on 7 varrast, 5 sõlme ja 3 toesidet. Tasakaalutingimuste üldarv on $2s = 2 \cdot 5 = 10$. Toereaktsioonide leidmiseks kasutatakse kolme tasakaalutingimust:

$$\begin{aligned} \Sigma M_b = 0; & A \cdot 2d - P \cdot 1,5d = 0 \\ \Sigma M_a = 0; & -B \cdot 2d + P \cdot 0,5d = 0 \end{aligned}$$

millest $A = 0,75P$ ja $B = 0,25P$.

Projektsioonide tingimusest $\Sigma X=0$ järeldub, et horisontaalne reaktsioon toe juures on null.

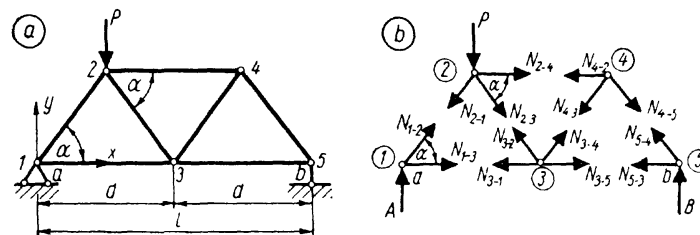
Sisejõudude arvutamist alustatakse sõlmest 1.

$$\begin{aligned} \Sigma Y=0; & A + N_{1-2} \sin \alpha = 0 \\ \Sigma X=0; & N_{1-2} \cos \alpha + N_{1-3} = 0 \end{aligned}$$

millest

$$\begin{aligned} N_{1-2} &= -A / \sin \alpha = -0,75P / \sin \alpha \\ N_{1-3} &= -N_{1-2} \cos \alpha = 0,75P \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned}$$

Seejärel eraldatakse sõlm 2 ja arvutatakse varraste 2-3 ja 2-4 sisejõud:



Joon. 11.7

$$\begin{aligned} \Sigma Y=0; & -N_{2-1} \sin \alpha - N_{2-3} \sin \alpha - P=0 \\ \Sigma X=0; & N_{2-4} + N_{2-3} \cos \alpha - N_{2-1} \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

millest

$$N_{2-3} = -P/\sin \alpha - N_{2-1} = -P/\sin \alpha + 0,75P/\sin \alpha = -0,25P/\sin \alpha$$

kuna $N_{2-1} = N_{1-2} = -0,75P/\sin \alpha$ ja

$$N_{2-4} = -(N_{2-3} - H_{2-1}) \cos \alpha = -0,5P \operatorname{ctg} \alpha$$

Edasi sõlm 3:

$$\begin{aligned} \Sigma Y=0; & N_{3-2} \sin \alpha + N_{3-4} \sin \alpha = 0 \\ \Sigma X=0; & N_{3-5} - N_{3-1} + N_{3-4} \cos \alpha - N_{3-2} \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

millest

$$\begin{aligned} N_{3-4} &= -N_{3-2} = -N_{2-3} = 0,25P/\sin \alpha \\ N_{3-5} &= N_{3-1} + (N_{3-2} - N_{3-4}) \cos \alpha = 0,75P \operatorname{ctg} \alpha - 0,5P \operatorname{ctg} \alpha = \\ &= 0,25P \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned}$$

Kümnest sõltumatust võrrandist on kasutatud üheksa. Sõlmes 4 on üks tundmatu sisejõud N_{4-5} ja selle arvutamiseks on jäänud üks tasakaalutingimus:

$$\Sigma Y=0; N_{4-5} \sin \alpha - N_{4-3} \sin \alpha = 0$$

millest

$$N_{4-5} = -N_{4-3} = -0,25P/\sin \alpha$$

Tasakaalutingimus $\Sigma X=0$ on kontrollimiseks:

$$N_{4-5} \cos \alpha - N_{4-3} \cos \alpha - N_{4-2} = -0,25P \operatorname{ctg} \alpha - 0,25P \operatorname{ctg} \alpha + 0,5P \operatorname{ctg} \alpha = 0, \text{ mis on rahuldatud.}$$

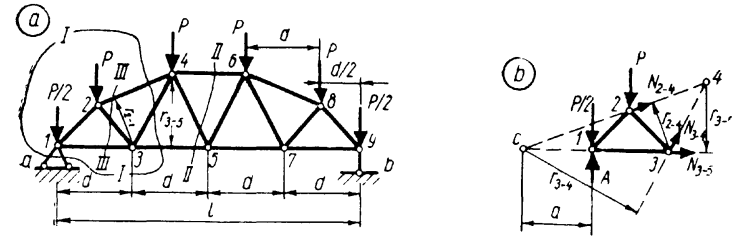
Sõlme 5 kohta koostatud tasakaalutingimused

$$\begin{aligned} \Sigma X=0; & -N_{5-3} - N_{5-4} \cos \alpha = -0,25P \operatorname{ctg} \alpha + 0,25P \operatorname{ctg} \alpha = 0 \\ \Sigma Y=0; & B + N_{5-4} \sin \alpha = 0,25P - 0,25P = 0 \text{ on rahuldatud.} \end{aligned}$$

11.05. Momendipunkti võte

Sisejõu leidmisel niisuguses vardas, mis asub arvutuse alustamise sõlmest kaugel, on sõlmede eraldamise võte ebaproduktiivne. Sel juhul on lihtvõrguga sõrestiku puhul otstarbekas rakendada momendipunkti võtet. Sõrestiku arvutuskeem eraldatakse lõikega kaheks osaks. Lõige tehakse tavaliselt läbi kolme varda, mis kõik ei kuulu ühe sõlme juurde (joon. 11.8, a, lõige I-I). Sõrestiku kaheks eraldatud arvutuskeemist vaadeldakse seda osa, millele mõjub vähem jõudusid. Teise osa mõju asendatakse läbilõigatud varraste pikijõududega, mis rakendatakse ärajäetud varraste asemele (joon. 11.8, b).

Tundmatute sisejõudude leidmiseks kasutatakse momentide tasakaalu tingimust. Tasakaalus olevale sõrestiku arvutuskeemi osale rakendatud kõigi jõudude (välisjõudude ja läbilõigatud varraste mõju asendavate sise-



Joon. 11.8

jõudude) momentide summa sõrestiku tasandi suvalise punkti suhtes võrdub nulliga. Otstarbekas on koostada momentide tasakaalu tingimus tasandi selle punkti kohta, kus lõikuvad kahe läbilõigatud varda sihid. Joonisel 11.8, b on niisugusteks punktideks sõlmed 3 ja 4 ning punkt c, mis on varraste 2-4 ja 3-5 sihtide lõikepunkt. Neid punkte nimetatakse momendipunktideks. Momentide summa koostamisel momendipunkti, s.o. kahe läbilõigatud varda sihi lõikepunkti kohta on tasakaaluvõrrandis tundmatuks kolmanda varda pikijõud.

Alumise vöö varda 3-5 sisejõu arvutamiseks võib teha kaks lõiget: I-I ja II-II, mis läbivad kolme varrast ning lahutavad sõrestiku arvutuskeemi kaheks osaks. Mõlema lõike puhul lõikuvad kahe ülejäänud varda (lõike I-I puhul vardad 2-4 ja 4-3 ning lõike II-II puhul vardad 4-6 ja 4-5) sihid sõlmes 4. Vasakpoolsele osale rakendatud jõudude momentide tasakaalu tingimusest sõlme 4 kohta $\Sigma M_4=0$:

$$A \cdot 1,5d - \frac{P}{2} \cdot 1,5d - Pd - N_{3-5} r_{3-5} = 0$$

avaldatakse varda 3-5 sisejõud

$$N_{3-5} = (1,5A - 1,75P)d/r_{3-5} = M_4/r_{3-5} \quad (a)$$

milles M_4 on vasakpoolsele osale rakendatud jõudude momentide summa kahe ülejäänud varda (2-4 ja 3-4) sihtide lõikepunkti (sõlme 4) suhtes ja r_{3-5} on momendipunkti (sõlme 4) kaugus vardast 3-5.

Lõikega I-I või III-III arvutatakse ülemise vöö varda 2-4 sisejõud. Mõlema lõike puhul on kahe ülejäänud läbilõigatud varda ühiseks punktiks (momendipunktiks) sõlm 3. Momentide tasakaalu tingimus momendipunkti suhtes ($\Sigma M_3=0$) annab järgmise võrrandi:

$$Ad - \frac{P}{2}d - P\frac{d}{2} + N_{2-4}r_{2-4} = 0$$

millest

$$N_{2-4} = -(A - P)d/r_{2-4} = -M_3/r_{2-4} \quad (b)$$

Ülevalt alla mõjuva vertikaalse koormuse puhul tugede vahel asuva momendipunkti suhtes on koormuse momendid positiivsed ($M_3 > 0$; $M_4 > 0$) ning talasõrestikel on alumise vöö vardad tõmmatud ja ülemise vöö vardad surutud.

Diagonaali 3-4 momendipunktiks on lõikega *I-I* läbi lõigatud ülemise vöö varda 2-4 ja alumise vöö varda 3-5 sihtide lõikepunkt *c*:

$$\Sigma M_c = 0; \quad -Aa + \frac{P}{2}a + P\left(a + \frac{d}{2}\right) - N_{3-4}r_{3-4} = 0$$

millest

$$N_{3-4} = [-Aa + P(3a + d)/2]/r_{3-4} = M_c/r_{3-4} \quad (c)$$

Olenevalt vööde kujust asetsevad võrguvarraste momendipunktid kas väljaspool tugesid või tugede vahel. Kui momendipunkt asub tugede vahel, siis vertikaalse koormuse puhul, olenemata koormuse asukohast sõrestikul, on võrgu varda sisejõud ühemärgiline. Väljaspool tugesid asuva momendipunkti puhul (joon. 11.8) võib võrgu varras olla olenevalt koormuse asukohast kas tõmmatud või surutud. Olgu koormatud lõikest *I-I* paremal asetsev sõrestiku osa. Vasakpoolse osa tasakaalu tingimusest momendipunkti *c* kohta

$$\Sigma M_c = 0; \quad -Aa - N_{3-4}r_{3-4} = 0$$

leitakse, et diagonaali 3-4 sisejõud on negatiivne:

$$N_{3-4} = -Aa/r_{3-4} \quad (d)$$

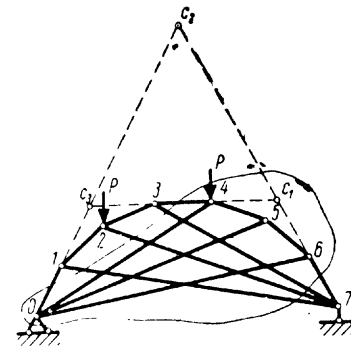
Kui on koormatud lõikest *I-I* vasakul asetsev sõrestiku osa, siis parempoolse osa momentide tasakaalu tingimusest momendipunkti *c* kohta

$$\Sigma M_c = 0; \quad N_{3-4}r_{3-4} - B(a+l) = 0$$

leitakse, et diagonaali 3-4 sisejõud on positiivne:

$$N_{3-4} = B(a+l)/r_{3-4} \quad (e)$$

Need märgid kehtivad tõusvate diagonaalide jaoks, mille momendipunkt asetseb väljaspool sillet. Langevate diagonaalide jaoks on märgid vastupidised.



Joon. 11.9

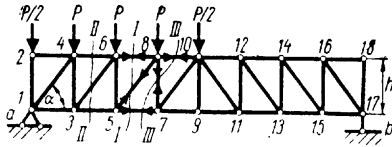
Iga sõrestikku ei saa eraldada kaheks osaks niimoodi, et oleks läbi lõigatud ainult kolm varrast. Mõnel juhul saab koostada ühe tundmatuga momentide tasakaalu võrrandi ka siis, kui lõigatakse läbi rohkem kui kolm varrast.

Joonisel 11.9 kujutatud sõrestikust eraldatakse suletud lõikega üks osa, kusjuures lõigatakse läbi 6 varrast. Vardad 0-1, 3-4 ja 6-7 on läbi lõigatud üks kord ning vardad 1-7, 2-7 ja 3-7 kaks korda. Paarisarv kordi läbi lõigatud varraste sisejõudude moment esineb tasakaaluvõrrandis paarisarv kordi. Momendid on võrdsed ja vastupidiste märkidega, tasakaalustavad teineteist ning langevad võrrandist välja. Võrrandisse jäävad ainult paaritu arv kordi läbi lõigatud varraste 0-1, 3-4 ja 6-7 sisejõudude momendid. See võimaldab koostada võrrandid ühe tundmatuga. Niisuguse võimaluse esitas *F. S. Jassinski*.

Varda 0-1 sisejõu leidmiseks koostatakse momentide tasakaalu tingimus varraste 3-4 ja 6-7 sihtide lõikepunkti *c*₁ kohta ning varrastel 3-4 ja 6-7 vastavalt punktide *c*₂ ja *c*₃ kohta.

11.06. Projektsioonide võte

Paralleelvöödega post-diagonaalvõrguga sõrestiku (joon. 11.10) vöövarraste sisejõud leitakse momendipunkti võttega. Kolmandas paneelis arvutatakse vöövarraste sisejõud lõike *I-I* abil. Ülemise vöö varda 6-8 ja alumise vöö varda 5-7 momendipunktideks on vastavalt sõlmed 5 ja 8. Ühel pool lõiget *I-I* sõrestikule rakendatud jõudude momentide tasakaalu tingimustest momendipunktide suhtes leitakse vöövarraste sisejõud



Joon. 11.10

$$N_{5-7} = M_8/h \quad \text{ja} \quad N_{6-8} = -M_5/h \quad (a)$$

milles h on sõrestiku kõrgus ning M_5 ja M_8 — ühel pool lõiget sõrestikule mõjuvate jõudude momentide summad momendipunktide suhtes.

Analoogiliselt leitakse teises paneelis lõike II-II abil vöovarraste sisejõud

$$N_{3-5} = M_6/h \quad \text{ja} \quad N_{4-6} = -M_3/h \quad (b)$$

Vertikaalse koormuse puhul on momendid sõlmede 5 ja 6 kohta võrdsed:

$$M_5 = M_6 \quad (c)$$

Järelikult

$$N_{6-8} = -N_{3-5} \quad (d)$$

Tõusvate diagonaalidega post-diagonaalvõrguga paralleelvõodega sõrestiku vasaku toe ja keskmise posti vahel on naaberpaneelides postist vasakul alumise vöö varda sisejõud võrdne postist paremal ülemise vöö varda sisejõuga, kuid vastupidise märgiga. Paralleelvõodega sõrestiku diagonaali sisejõudu ei saa leida momentide tasakaalu tingimusest, kuna momendipunkt on lõpmatuses (lõiked I-I ja II-II). Kahe läbilõigatud paralleelse vöö risttelje kohta kirjutatud jõudude projektsioonide tasakaalu tingimusest

$$\Sigma Y = 0; \quad N_{5-8} \sin \alpha + A - P/2 - P - P = 0$$

leitakse diagonaali 5-8 sisejõud

$$N_{5-8} = -(A - 2,5P)/\sin \alpha = -Q_3/\sin \alpha \quad (e)$$

milles Q_3 on lihttala põikjõud kolmandas paneelis sõlmede 6 ja 8 vahel. Lõikest paremal pool sõrestikule mõjuvate jõudude projektsioonide tingimusest

$$\Sigma Y = 0; \quad -N_{5-8} \sin \alpha + B - P/2 - P = 0$$

saadakse sama tulemus

$$N_{5-8} = (B - 1,5P)/\sin \alpha = -Q_3/\sin \alpha \quad (f)$$

Analoogiliselt teises paneelis (lõige II-II):

$$N_{3-6} = -Q_2/\sin \alpha.$$

Paralleelvõodega sõrestiku diagonaalide sisejõud on proportsionaalsed sõrestikuga võrdse sildega lihttala samast koormusest põhjustatud põikjõududega. Ühtlase koormuse puhul on äärmiste paneelide diagonaalide sisejõud suuremad kui keskmistes paneelides. Tõusva diagonaali sisejõud on positiivse põikjõu puhul sõrestiku keskkohest vasakul pool negatiivne ja paremal pool positiivne. Negatiivse põikjõu puhul on märgid vastupidised.

Paralleelsete vööde risttelje kohta kirjutatud jõudude projektsioonide tasakaalu tingimusest (lõige III-III)

$$\Sigma Y = 0; \quad N_{7-8} + B - P/2 = 0$$

leitakse ka posti sisejõud

$$N_{7-8} = -(B - P/2) = Q_4 \quad (g)$$

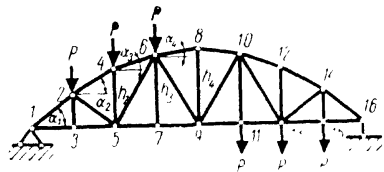
Lõige III-III läbib ülemist vööd neljandas ja alumist vööd kolmandas paneelis. Põikjõu indeks vastab paneelile, kus lõige läbib koormatud vööd. Tõusvate diagonaalidega post-diagonaalvõrguga sõrestiku posti sisejõud on positiivse põikjõu puhul sõrestiku keskkohest vasakul pool positiivne ja paremal pool negatiivne. Negatiivse põikjõu puhul on märgid vastupidised.

Langevate diagonaalidega post-diagonaalvõrguga sõrestiku posti ja diagonaali sisejõud on vastupidiste märkidega, võrreldes tõusvate diagonaalidega sõrestiku posti ja diagonaali sisejõududega.

11.07. Kombineeritud võte

Iga lihtvõrguga sõrestiku võrgu kõigi varraste sisejõud ei ole arvutatavad ainult ühest projektsioonide või momentide tasakaalu tingimusest. Joonisel 11.11 esitatud sõrestiku vöovarraste ja diagonaalide sisejõud leitakse momentide tasakaalu tingimustest. Postide 2-3, 6-7, 10-11 ja 14-15 sisejõud leitakse alumise vöö sõlmede 3, 7, 11 ja 15 jõudude projektsioonide tasakaalu tingimustest vertikaalteljele:

$$N_{2-3} = N_{6-7} = 0 \quad \text{ja} \quad N_{10-11} = N_{14-15} = P$$



Joon. 11.11

Postide 4-5, 8-9 ja 12-13 sisejõud arvutatakse ülemise vöö sõlmede tasakaalu tingimustest. Posti 4-5 sisejõud leidmisel arvutatakse algul posti naaberpaneelides ülemise vöö varraste sisejõud momentide tasakaalu tingimustest sõlme 5 suhtes:

$$\begin{aligned} N_{2-4} &= -M_5/h_2 \cos \alpha_2 \\ N_{4-6} &= -M_5/h_2 \cos \alpha_3 \end{aligned} \quad (a)$$

milles h_2 on posti 2-4 pikkus ja α_2, α_3 — nurk ülemise vöö varda ja horisontaali vahel.

Sõlme 4 jõudude projektsioonide tingimusest

$$\Sigma Y=0; \quad -N_{4-5} - N_{4-2} \sin \alpha_2 + N_{4-6} \sin \alpha_3 - P=0$$

avaldatakse, arvestades avaldise (a), posti 4-5 sisejõud

$$N_{4-5} = (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_3) M_5/h_2 - P \quad (b)$$

Sõlme 8 jõudude projektsioonide tingimustest

$$\begin{aligned} \Sigma X=0; \quad & -N_{8-6} \cos \alpha_4 + N_{8-10} \cos \alpha_4 = 0 \\ \Sigma Y=0; \quad & -N_{8-9} - N_{8-6} \sin \alpha_4 - N_{8-10} \sin \alpha_4 = 0 \end{aligned}$$

järeldub, et

$$N_{8-6} = N_{8-10} = -M_9/h_4 \cos \alpha_4 \quad (c)$$

$$N_{8-9} = 2 \operatorname{tg} \alpha_4 M_9/h_4 \quad (d)$$

Näide 11.2. Arvutada joonistel 11.12, a; 11.13; 11.14 ja 11.15 kujutatud võrdse sildega ja ühesuguse koormusega sõrestike varraste sisejõud.

Sille $l=12$ m, kõrgus $h=3$ m, paneeli pikkus $d=2$ m ja koormus sõlmes $P=3$ t.

Mõnikord kasutatakse sõrestiku varraste sisejõudude märkimiseks järgmisi tähti:

ülemise vöö vardal O
 alumise vöö vardal U
 diagonaalil D
 postil V

Indeksitena kasutatakse kas sõlmede tähiseid, mille vahel asub

varras, või paneeli tähistavat arvu. Viimasel juhul pannakse postile temast vasakul oleva paneeli number.

Sõrestiku kõigi varraste sisejõudude leidmisel arvutatakse algul sõrestikule mõjuvast koormusest lihttala paindemomendi epüüri ordinaadid ja paralleelvöödega sõrestiku jaoks ka põikjõu epüüri ordinaadid.

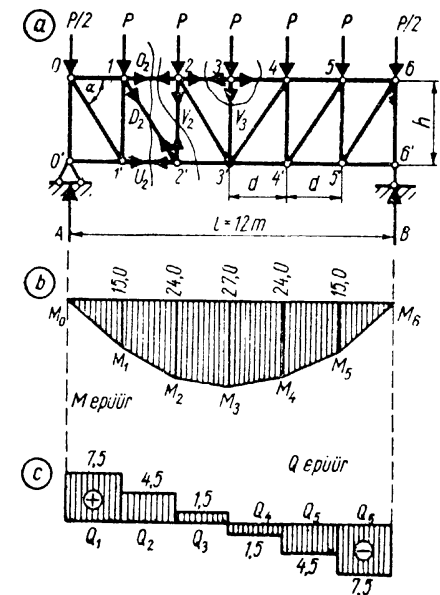
A. Langevate diagonaalidega paralleelvöödega sõrestik (joon. 11.12, a).

Alumise vöö paneeli k varda sisejõu U_k momendipunktiks on sama paneeli ülemise vöö ja diagonaali lõikepunkt (sõlm $k-1$). Sisejõud U_k leitakse momendipunkti ($k-1$) kohal oleva lihttala paindemomendi epüüri (joon. 11.12, b) ordinaadi ja sõrestiku kõrguse h suhtega:

$$\begin{aligned} U_k &= M_{k-1}/h \\ U_1 &= 0 \\ U_2 &= M_1/h = 15/3 = 5 \text{ t} \\ U_3 &= M_2/h = 24/3 = 8 \text{ t} \end{aligned} \quad (a)$$

Ülemise vöö paneeli k varda sisejõu O_k momendipunktiks on alumise vöö ja sama paneeli diagonaali lõikepunkt (sõlm k'):

$$\begin{aligned} O_k &= -M_{k'}/h \\ O_1 &= -M_{1'}/h = -15/3 = -5 \text{ t} \\ O_2 &= -M_{2'}/h = -24/3 = -8 \text{ t} \\ O_3 &= -M_{3'}/h = -27/3 = -9 \text{ t} \end{aligned} \quad (b)$$



Joon. 11.12

Avaldistest (a) ja (b) järeldub, et ülemise vöö paneeli k ja alumise vöö paneeli $k+1$ varraste sisejõud on võrdsed, kuid vastupidiste märkidega:

$$U_{k+1} = -O_k \quad (c)$$

Postide $0-0'$ ja $3-3'$ sisejõud leitakse sõlmede $0'$ ja 3 tasakaalu tingimustest

$$\Sigma Y = 0; \quad V_0 = -A = -9,0 \text{ t} \quad \text{ja} \quad V_3 = -P = -3 \text{ t}$$

Postide $1-1'$ ja $2-2'$ sisejõud arvutatakse löikega kaheks eraldatud sõrestiku arvutuskeemi vasaku osa projektsioonide tingimusest $\Sigma Y = 0$:

$$V_k = Q_k \quad (d')$$

$$V_1 = -Q_1 = -7,5 \text{ t}; \quad V_2 = -Q_2 = -4,5 \text{ t}$$

Analoogiliselt leitakse postide $4-4'$ ja $5-5'$ sisejõud:

$$V_k = Q_{k+1} \quad (d')$$

Diagonaalide $0-1'$, $1-2'$ ja $2-3'$ sisejõud arvutatakse sõrestiku arvutuskeemi vasaku osa projektsioonide tingimusest

$$\Sigma Y = 0; \quad D_k = Q_k / \sin \alpha \quad (e)$$

$$D_1 = 7,5 / 0,8321 = 9,01 \text{ t}; \quad D_2 = 4,5 / 0,8321 = 5,41 \text{ t};$$

$$D_3 = 1,5 / 0,8321 = 1,80 \text{ t}$$

Diagonaalide $4-3'$, $5-4'$ ja $6-5'$ sisejõud leitakse arvutuskeemi parempoolse osa tasakaalu tingimusest

$$\Sigma Y = 0; \quad D_k = -Q_k / \sin \alpha \quad (e')$$

B. K-võrguga paralleelvöödega sõrestik (joon. 11.13).

Alumise ja ülemise vöö varraste sisejõudude arvutamiseks tehakse löige $I-I$ (joon. 11.13). Sama paneeli alumise ja ülemise vöö varraste momendipunktid asuvad ühel vertikaalil ning nende sisejõud on võrdsed, kuid vastupidiste märkidega:

$$U_k = -O_k = M_{k-1} / h \quad (f)$$

$$U_1 = 0; \quad U_2 = 15/3 = 5 \text{ t}; \quad U_3 = 24/3 = 8 \text{ t}$$

$$O_1 = 0; \quad O_2 = -5 \text{ t}; \quad O_3 = -8 \text{ t}$$

Diagonaalvarraste sisejõud leitakse kahe tasakaalutingimusega. Algul eraldatakse posti keskel olev sõlm k'' ja selle sõlme jaoks koostatud võrrandid

$$\Sigma X = 0; \quad D_k \cos \alpha + D'_k \cos \alpha = 0$$

saadakse:

$$D_k = -D'_k \quad (g)$$

Samas paneelis asuvate diagonaalide sisejõud on võrdsed, kuid vastupidiste märkidega. Järgnevalt tehakse löige $II-II$ ja arvutuskeemi ühe osa tasakaalu tingimusest

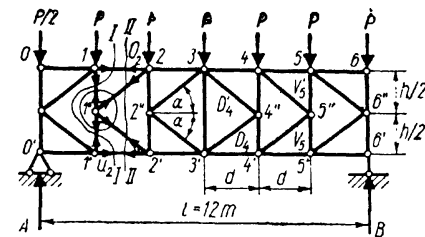
$$\Sigma Y = 0; \quad Q_k - D_k \sin \alpha + D'_k \sin \alpha = 0$$

leitakse, kasutades võrrandit (g), diagonaalide sisejõud

$$D_k = Q_k / 2 \sin \alpha; \quad D'_k = -Q_k / 2 \sin \alpha \quad (h)$$

$$D_1 = -D'_1 = 7,5 / 2 \cdot 0,6 = 6,25 \text{ t}; \quad D_2 = -D'_2 = 4,5 / 2 \cdot 0,6 = 3,75 \text{ t}$$

$$D_3 = -D'_3 = 1,5 / 2 \cdot 0,6 = 1,25 \text{ t}$$



Joon. 11.13

Postide sisejõud määratakse sõlmede tasakaalu tingimustest. Sõlmede 0 ja $0'$ tasakaalu tingimusest $\Sigma Y = 0$ leitakse $V_0 = -A = -9,0 \text{ t}$ ja $V'_0 = -P/2 = -1,5 \text{ t}$. Kui koormus on ülemise vöö sõlmedes, siis alumise vöö sõlme $3'$ tasakaalu tingimusest

$$\Sigma Y = 0; \quad D_3 \sin \alpha + V_3 + D_4 \sin \alpha = 0$$

saadakse keskmise posti $3-3'$ sisejõud

$$V_3 = -D_3 \sin \alpha - D_4 \sin \alpha = -Q_3/2 + Q_4/2 = -1,5 \text{ t}$$

Alumise vöö sõlme tasakaalu tingimusest

$$\Sigma Y = 0; \quad V_k + D_k \sin \alpha = 0$$

arvutatakse sisejõud vahepealse posti alumises osas

$$V_k = -D_k \sin \alpha = -Q_k/2 \quad (i)$$

$$V_1 = -7,5/2 = -3,75 \text{ t}; \quad V_2 = -4,5/2 = -2,25 \text{ t}$$

Ülemise vöö sõlme tasakaalu tingimusest

$$\Sigma Y = 0; \quad -V'_k - D'_k \sin \alpha - P = 0$$

saadakse sisejõud posti ülemises osas

$$V'_k = -D'_k \sin \alpha - P = Q_k/2 - P \quad (j)$$

$$V'_1 = 7,5/2 - 3 = 0,75 \text{ t}; \quad V'_2 = 4,5/2 - 3 = -0,75 \text{ t}$$

C. Kolmnurksõrestik (joon. 11.14).

$$\sin \alpha = 0,4472; \quad \cos \alpha = 0,8944$$

$$\sin \beta_2 = 0,4472; \quad \cos \beta_2 = 0,8944$$

$$\sin \beta_3 = \cos \beta_3 = 0,7071$$

Alumise vöö varda sisejõud leitakse sama paneeli ülemise vöö diagonaali löikepunkti kohta kirjutatud momentide tasakaalu tingimusest

$$U_k = M_{k-1} / h_{k-1} \quad (k)$$

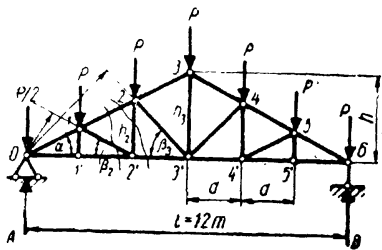
$$U_1 = U_2 = M_1 / h_1 = 15/1 = 15 \text{ t}; \quad U_3 = M_2 / h_2 = 24/2 = 12 \text{ t}$$

Ülemise vöö varda sisejõud arvutatakse sama paneeli alumise vöö ja diagonaali löikepunkti kohta kirjutatud momentide tasakaalu tingimusest

$$Q_k = -M_k' / h_k \cos \alpha \quad (l)$$

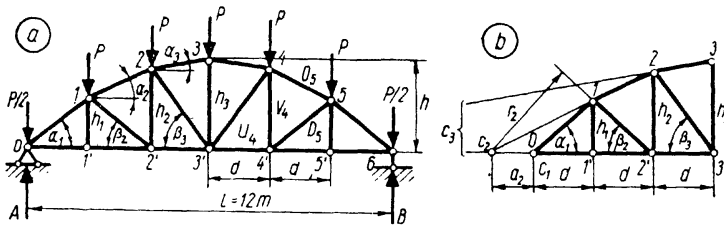
$$O_1 = -15/1 \cdot 0,8944 = -16,77 \text{ t}; \quad O_2 = -24/2 \cdot 0,8944 = -13,42 \text{ t}$$

$$O_3 = -27/3 \cdot 0,8944 = -10,06 \text{ t}$$



Joon. 11.14

Joon. 11.15



Kui alumise vöö sõlm $1'$ on koormamata, siis $V_1=0$. Sõlme 3 tasakaalutingimustest

$$\begin{aligned} \sum X=0; & \quad -O_3 \cos \alpha + O_4 \cos \alpha = 0 \\ \sum Y=0; & \quad -V_3 - O_3 \sin \alpha - O_4 \sin \alpha - P = 0 \end{aligned}$$

leitakse, et $O_4=O_3$, ja arvestades avaldist (1)

$$V_3 = -2 \cdot O_3 \sin \alpha - P = 2 \operatorname{tg} \alpha M_3' / h_3 - P = 2 \cdot 0,5 \cdot 27/3 - 3 = 6 \text{ t} \quad (\text{m})$$

Sõrestiku vasaku poole diagonaalide ja posti $2-2'$ momendipunktiks on toesõlm a , ning nende varraste sisejõud arvutatakse momentide tasakaalu tingimusest toesõlme a kohta:

$$D_k = - \sum_{i=1}^{k-1} P_i i / k \sin \beta_k \quad (\text{n})$$

$$V_k = \sum_{i=1}^{k-1} P_i i / k \quad (\text{o})$$

$$\begin{aligned} D_2 &= -P_1/2 \sin \beta_2 = -3/2 \cdot 0,4472 = -3,35 \text{ t} \\ D_3 &= -(P_1 \cdot 1 + P_2 \cdot 2)/3 \sin \beta_3 = -3(1+2)/3 \cdot 0,7071 = -4,24 \text{ t} \\ V_2 &= P_1 \cdot 1/2 = 3 \cdot 1/2 = 1,5 \text{ t} \end{aligned}$$

D. Kõverjoonelise ülemise vööga sõrestik (joon. 11.15, a).

Geomeetrilised andmed on esitatud tabelis 11.1. Keskmise posti sisejõud leitakse analoogiliselt kolmnurksõrestiku keskmise posti sisejõuga (m). Kõigi teiste varraste sisejõud arvutatakse momentide tasakaalu tingimusest varda momendipunkti suhtes:

$$U_k = M_{k-1}/h_{k-1}; \quad O_k = -M_k/h_k \cos \alpha_k \quad (\text{p})$$

$$V_k = - \frac{Aa_k - \sum_{i=0}^{k-1} P_i (id+a_k)}{a_k+kd}; \quad D_k = \frac{Aa_k - \sum_{i=0}^{k-1} P_i (id+a_k)}{r_k} \quad (\text{r})$$

milles a_k on momendipunkti c_k kaugus toereaktsiooni sihist ja r_k — sama punkti kaugus diagonaali D_k sihist (joon. 11.15, b).

Sarnaste kolmnurkade tingimusest leitakse momendipunkti kaugused

$$a_k+kd = d \frac{h_k}{h_k - h_{k-1}} = d \frac{h_k}{\Delta h_k} \quad (\text{s})$$

$$r_k = d \frac{h_k}{\Delta h_k} \sin \beta_k \quad (\text{t})$$

Postide ja diagonaalide sisejõudude arvutamine valemitage (r) nõuab momentide arvutamist punktide c_k suhtes. Vertikaalse koormuse puhul arvutatakse diagonaalide ja postide sisejõud projektsioonide tingimustega.

Diagonaalvarda sisejõu leidmiseks tehakse lõige selles paneelis läbi diagonaali, alumise ja ülemise vöö ning projektsioonide tingimusest

$$\sum X=0; \quad D_k \cos \beta_k + U_k + O_k \cos \alpha_k = 0$$

avaldatakse

$$D_k = (-O_k \cos \alpha_k - U_k) / \cos \beta_k$$

mis, arvestades avaldasi (p), on järgmine:

$$D_k = (M_k/h_k - M_{k-1}/h_{k-1}) / \cos \beta_k \quad (\text{u})$$

Alumise vöö sõlme tasakaalu tingimusest

$$\sum X=0; \quad V_k + D_k \sin \beta_k = 0$$

leitakse posti sisejõud

$$V_k = -D_k \sin \beta_k$$

või, kui arvestada avaldist (u),

$$V_k = -(M_k/h_k - M_{k-1}/h_{k-1}) \operatorname{tg} \beta_k \quad (\text{v})$$

Olenevalt postide pikkustest on võrgu vardad kas tõmmatud, surutud või nullvardad. Diagonaalis ja postis on sisejõud null, kui avaldistes (u) ning (v) sulgavaldis võrdub nulliga:

$$(M_k/h_k - M_{k-1}/h_{k-1}) = 0$$

millest

$$\frac{M_k}{h_k} = \frac{M_{k-1}}{h_{k-1}} \quad \text{või} \quad \frac{M_k}{M_{k-1}} = \frac{h_k}{h_{k-1}} \quad (\text{w})$$

Kui koormus asub alumise vöö sõlmedes, siis tingimuse (w) kehtimisel on diagonaalis sisejõud null ja posti sisejõud võrdub sõlme rakendatud jõuga. Kui vööde sõlmed on koormatud võrdsete

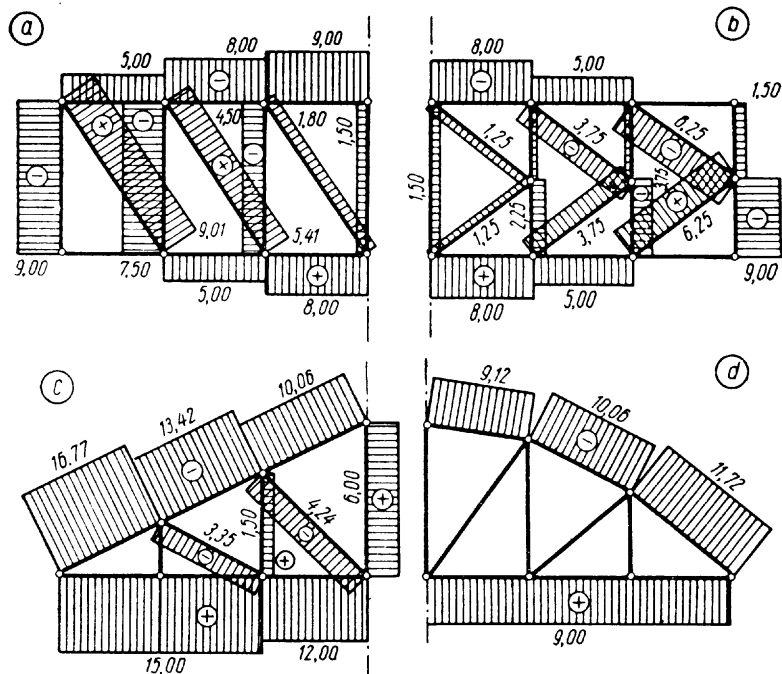
Tabel 11.1. Kõverjoonelise ülemise vööga sõrestiku geometrilised andmed

Paneel k	1	2	3
h_k	5/3	8/3	9/3
$h'_k = h_k - h_{k-1}$	5/3	3/3	1/3
$tg \beta_k$	—	5/6	8/6
$\sin \beta_k$	—	0,6402	0,8000
$\cos \beta_k$	—	0,7682	0,6000
$tg \alpha_k$	5/6	3/6	1/6
$\sin \alpha_k$	0,6402	0,4472	0,1644
$\cos \alpha_k$	0,7682	0,8944	0,9864
$a_k + kd$	2	16/3	18
a_k	0	4/3	12
r_k	—	3,414	14,4

Märkus. Pikkused on antud meetrites.

Tabel 11.2. Sõrestike sisejõud

Sisejõud	Paralleel- vöödega sõrestik	K-vörguga sõrestik	Kolmnurk- sõrestik	Parabool- vööga sõrestik
U_1	0,00	0,00	15,00	9,00
U_2	5,00	5,00	15,00	9,00
U_3	8,00	8,00	12,00	9,00
O_1	-5,00	0,00	-16,77	-11,72
O_2	-8,00	-5,00	-13,42	-10,06
O_3	-9,00	-8,00	-10,06	-9,12
$V_0; V'_0$	-9,00	-9,00; -1,50	—	—
$V_1; V'_1$	-7,50	-3,75; 0,75	0,00	0,00
$V_2; V'_2$	-4,50	-2,25; -0,75	1,50	0,00
$V_3; V'_3$	-1,50	-1,50	6,00	0,00
$D_1; D'_1$	9,01	6,25; -6,25	—	—
$D_2; D'_2$	5,41	3,75; -3,75	-3,35	0,00
$D_3; D'_3$	1,80	1,25; -1,25	-4,24	0,00



Joon. 11.16

jõududega ja ülemise vöö sõlmed asuvad ruutparaboolil (paraboolvööga sõrestik), siis kehtib tingimus (w) igas paneelis. Niisuguse sõrestiku ja koormuse puhul on diagonaalide sisejõud nullid, posti sisejõud võrdub alumise vöö sõlme rakendatud jõuga ning alumise vöö varraste sisejõud on võrdsed. Võrdsed on ka ülemise vöö varraste sisejõudude horisontaalprojektsioonid.

Vööde varraste sisejõud valemite (p) järgi:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= U_2 = M_1/h_1 = 15/(5/3) = 9 \text{ t;} \\
 U_3 &= M_2/h_2 = 24/(8/3) = 9 \text{ t;} \\
 O_1 &= -15/(5/3) \cdot 0,7682 = -11,72 \text{ t;} \\
 O_2 &= -24/(8/3) \cdot 0,8944 = -10,06 \text{ t;} \\
 O_3 &= -27/(9/3) \cdot 0,9864 = -9,12 \text{ t}
 \end{aligned}$$

Tabelis 11.2 on esitatud joonistel 11.12, a; 11.13, 11.14 ja 11.15, a kujutatud sõrestike varraste sisejõud.

Epüürid on kujutatud joonisel 11.16.

Sisejõud vöovarrastes olenevad sõrestiku kõrguse ja silde suhtest ning vööde kujust. Võrdse sildega ja ühe-

suguse vöö kuju puhul on kõrgema sõrestiku vöödes sisejõud väiksemad kui madalama sõrestiku vöödes.

Tabelis 11.2 esitatud tulemustest nähtub, et kõige suuremad sisejõud vöödes tekivad kolmnurksõrestikus, kusjuures tugede lähedal on sisejõud suuremad kui silde keskel. Kõige väiksemad sisejõud vöödes on paralleelsete vöödega sõrestikes ja tugede lähedal väiksemad kui silde keskel.

Paraboolvööga sõrestikus on sisejõudude jaotus väga ühtlane. Ühtlasel koormusel on alumise vöö sisejõud konstantne. Ülemise vöö varraste sisejõud on tugede juures veidi suuremad. Ühtlase koormuse puhul on diagonaalvarraste sisejõud nullid ja postid töötavad ainult kohalikule koormusele, kui koormus mõjub alumise vöö sõlmedes.

Kõige suuremad sisejõud võrgu varrastes on paralleelvöödega sõrestikes tugede lähedal. Kolmnurksõrestikus on võrgu varraste sisejõud veidi väiksemad kui paralleelvöödega sõrestikus, kusjuures tugede lähedal on sisejõud väiksemad kui silde keskel.

11.08. Paralleelvööde ja rombvõrguga sõrestik

Joonisel 11.17 kujutatud rombvõrguga sõrestiku võrgu varraste sisejõud arvutatakse sõlmede eraldamise võttega. Tugede kohal olevate postide sisejõud leitakse projektioonide tasakaalu tingimustest vertikaalteljel:

$$\begin{aligned} V_0 &= -A = -2,375P; & V_{0'} &= 0 \\ V_8 &= -B = -0,875P; & V_{8'} &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

Toeposti keskmise sõlme $0''$ tasakaalu tingimustest

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0; & D_1 \cos \alpha + D_{1'} \cos \alpha &= 0 \\ \Sigma Y &= 0; & A - D_1 \sin \alpha + D_{1'} \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

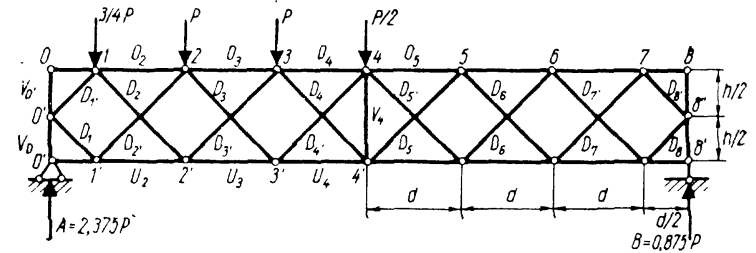
leitakse, et

$$D_1 = -D_{1'} = A/2 \sin \alpha = 1,1875P/\sin \alpha \quad (b)$$

Alumise vöö sõlmede $1'$, $2'$ ja $3'$ tasakaalu tingimustest $\Sigma Y=0$ saadakse, et

$$D_{2'} = -D_1; \quad D_{3'} = -D_2; \quad D_{4'} = -D_3 \quad (c)$$

Sõlmede 1 ja 2 tasakaalu tingimustest $\Sigma Y=0$



Joon. 11.17

$$\begin{aligned} -D_1 \sin \alpha - D_2 \sin \alpha - 0,75P &= 0 \\ -D_2 \sin \alpha - D_3 \sin \alpha - P &= 0 \end{aligned}$$

leitakse

$$\begin{aligned} D_2 &= -D_{1'} - 0,75P/\sin \alpha = (1,1875 - 0,75)P/\sin \alpha = \\ &= 0,4375P/\sin \alpha \\ D_3 &= -D_{2'} - P/\sin \alpha = (1,1875 - 1)P/\sin \alpha = \\ &= 0,1875P/\sin \alpha \end{aligned} \quad (d)$$

Nüüd

$$\begin{aligned} D_{3'} &= -D_2 = -0,4375P/\sin \alpha \\ D_{4'} &= -D_3 = -0,1875P/\sin \alpha \end{aligned} \quad (e)$$

Sõlme 3 tasakaalu tingimusest $\Sigma Y=0$ saadakse, et

$$D_4 = -D_{3'} - P/\sin \alpha = (0,4375 - 1)P/\sin \alpha = \\ = -0,5625P/\sin \alpha \quad (f)$$

Paremal pool keskmist posti $4-4'$ asuvate diagonaalide sisejõud leitakse sõlmede tasakaalu tingimusest $\Sigma Y=0$:

$$D_8 = -D_{8'} = D_7 = -D_7' = D_6 = -D_6' = D_5 = -D_5' = \\ = B/2 \sin \alpha = 0,4375P/\sin \alpha \quad (g)$$

Alumise vöö keskmise sõlme $4'$ tingimusest $\Sigma Y=0$:

$$V_4 + (D_4 + D_5) \sin \alpha = 0$$

avaldatakse posti $4-4'$ sisejõud, arvestades tingimusi (f), (g):

$$V_4 = -(D_4 + D_5) \sin \alpha = (0,5625 - 0,4375)P = 0,125P \quad (h)$$

Järgnevalt arvutatakse vöövarraste sisejõud momentide tasakaalu tingimustest. Näiteks neljandas paneelis momentide tasakaalu tingimustest sõlmede 3 ja $3'$ suhtes

$$\begin{aligned} \Sigma M_3 &= 0; & -U_4 h - D_4 d \sin \alpha + M_3 &= 0 \\ \Sigma M_{3'} &= 0; & O_4 h + D_4 d \sin \alpha + M_{3'} &= 0 \end{aligned}$$

milles

$$M_3 = M_{3'} = 2,375P \cdot 2d - 0,75P \cdot 2d - Pd = 3,4375Pd$$

on välisjõudude moment, avaldatakse vöovarraste sisejõud

$$U_4 = (M_3 - D_4 d \sin \alpha) / h = (3,4375 + 0,1875) Pd / h = 3,625Pd / h$$

$$O_4 = -(M_{3'} + D_4 d \sin \alpha) / h = -(3,4375 - 0,5625) Pd / h = -2,875Pd / h \quad (j)$$

Arvutust kontrollitakse projektsioonide tingimusega $\Sigma X = 0$:

$$\begin{aligned} U_4 + O_4 + D_4 \cos \alpha + D_4' \cos \alpha &= \\ = 3,625Pd / h - 2,875Pd / h - 0,5625P \operatorname{ctg} \alpha - \\ - 0,1875P \operatorname{ctg} \alpha &= 3,625Pd / h - 3,625Pd / h = 0 \end{aligned}$$

Analoogiliselt leitakse teiste varraste sisejõud vasakul pool keskmist posti:

$$\begin{aligned} U_2 &= 2,375Pd / h; & U_3 &= 3,25Pd / h \\ O_2 &= -1,625Pd / h; & O_3 &= -3,00Pd / h \end{aligned} \quad (k)$$

Paremal pool keskmist posti on langevate ja tõusvate diagonaalide sisejõud arvuliselt võrdsed, kuid vastupidiste märkidega (g), samuti on võrdsed paneeli ülemise ja alumise vöö varraste sisejõud, kuid vastupidiste märkidega. Sõlmede 6, 5 ja 4 suhtes koostatud ühel pool lõiget arvutuskeemi osale mõjuvate jõudude momentide summade tingimustest

$$\begin{aligned} \Sigma M_6 &= 0; & U_7 h - B \cdot 1,5d + D_7 d \sin \alpha &= 0 \\ \Sigma M_5 &= 0; & U_6 h - B \cdot 2,5d + D_6 d \sin \alpha &= 0 \\ \Sigma M_4 &= 0; & U_5 h - B \cdot 3,5d + D_5 d \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

saadakse alumise vöö varraste sisejõud

$$\begin{aligned} U_7 &= (1,5Bd - Bd/2) / h = Bd / h = 0,875Pd / h \\ U_6 &= (2,5Bd - Bd/2) / h = 2Bd / h = 1,750Pd / h \\ U_5 &= (3,5Bd - Bd/2) / h = 3Bd / h = 2,625Pd / h \end{aligned} \quad (l)$$

Ülemise vöö varraste sisejõud on järgmised:

$$O_5 = -2,625Pd / h; \quad O_6 = -1,750Pd / h; \quad O_7 = -0,875Pd / h \quad (m)$$

11.09. Kahekordse post-diagonaalvõrgu ja paralleelvöödega sõrestik

Kahekordse post-diagonaalvõrguga sõrestiku sisejõude leidmist alustatakse sõlmest, kus ei ole diagonaali. Niisugused sõlmed on joonisel 11.18 3, 4 ja 5. Sõlme 4 jõudude projektsioonide tingimusest $\Sigma Y = 0$ leitakse $V_{4-4'} = -P$. Sõlmede 5, 5', 7 ja 7' projektsioonide tingimusest $\Sigma Y = 0$ leitakse postide 5-5' ja 7-7' ning diagonaalide 5'-7 ja 7'-8 sisejõud:

$$V_{5-5'} = D_{5'-7} = V_{7-7'} = D_{7'-8} = 0 \quad (a)$$

Ülejäänud varrastes paremal pool keskmist posti 4-4' arvutatakse sisejõud nagu post-diagonaalvõrguga sõrestikus.

Sõlmede 3 ja 3' tasakaalu tingimusest $\Sigma Y = 0$

$$-V_{3-3'} - P = 0; \quad V_{3-3'} + D_{3'-1} \sin \alpha = 0$$

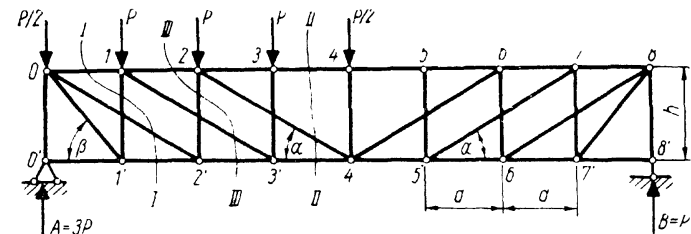
leitakse

$$V_{3-3'} = -P; \quad D_{3'-1} = -V_{3-3'} / \sin \alpha = P / \sin \alpha \quad (b)$$

Järgnevalt leitakse teiste sõlmest 3 väljuva siksaki 3-3', 3'-1, 1-1' ja 1'-0 varraste sisejõud sõlmede tasakaalu tingimusest $\Sigma Y = 0$:

$$V_{1-1'} = -2P; \quad D_{1'-0} = 2P / \sin \alpha \quad (c)$$

Teiste varraste sisejõudude arvutamiseks eraldatakse sõrestiku arvutuskeem lõikega kaheks osaks, kusjuures lõigatakse läbi neli varrast (lõiked I-I ja III-III) ja ühel juhul (lõige II-II) kolm varrast. Neljast läbilõigatud varda sisejõust on üks tuntud. Ülejäänud kolme varda sisejõud leitakse järgmiselt: tundmatul võrguvaldal pro-



Joon. 11.18

jektsioonide tingimusest $\Sigma Y=0$ ning pärast seda tundmatul vöövardal — momentide tasakaalu tingimusest teise läbilõigatud vöövarda ja diagonaali ühise sõlme suhtes.

Diagonaalide $0-2'$ ja $2-4'$ sisejõudude arvutamiseks tehakse lõiked $I-I$ ja $II-II$ ning projektsioonide tingimustest

$$\Sigma Y=0; \quad A - 0,5P + V_{1'-1} - D_{0-2'} \sin \alpha = 0$$

$$A - 3,5P - D_{2-4'} \sin \alpha = 0$$

leitakse

$$D_{0-2'} = (2,5P + V_{1'-1}) / \sin \alpha = (2,5 - 2)P / \sin \alpha = P/2 \sin \alpha \quad (d)$$

$$D_{2-4'} = -P/2 \sin \alpha$$

Posti $2-2'$ sisejõud leitakse sõlme $2'$ projektsioonide tingimusest

$$\Sigma Y=0; \quad V_{2'-2} + D_{2'-0} \sin \alpha = 0;$$

$$V_{2'-2} = -D_{2'-0} \sin \alpha = -P/2 \quad (e)$$

Sõlmede $0, 1$ ja 2 (lõiked vastavalt $I-I, III-III$ ja $II-II$) kohta koostatud momentide tasakaalu tingimustest

$$\Sigma M_0=0; \quad -U_2h - V_{1'-1}d = 0$$

$$\Sigma M_1=0; \quad -U_3h + (A - P/2)d - V_{2'-2}d = 0$$

$$\Sigma M_2=0; \quad -U_4h + (A - P/2) \cdot 2d - Pd + Pd = 0$$

leitakse alumise vöö varraste sisejõud

$$U_2 = -V_{1'-1}d/h = 2Pd/h$$

$$U_3 = 2,5Pd/h - V_{2'-2}d/h = (2,5 + 0,5)Pd/h = 3Pd/h \quad (f)$$

$$U_4 = (A - P/2) \cdot 2d/h = 5Pd/h$$

ning tingimustest

$$\Sigma M_{2'}=0; \quad O_1h + V_{1'-1}d + (A - P/2) \cdot 2d = 0$$

$$\Sigma M_{3'}=0; \quad O_2h + V_{2'-2}d + (A - P/2) \cdot 3d - P \cdot 2d = 0$$

$$\Sigma M_{4'}=0; \quad O_4h + (A - P/2) \cdot 4d - Pd(3+2+1) = 0$$

leitakse ülemise vöö varraste sisejõud

$$O_1 = -(5P - 2P)d/h = -3Pd/h$$

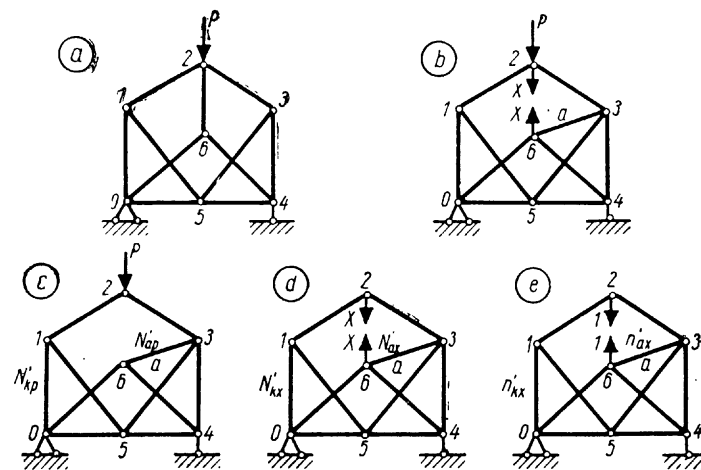
$$O_2 = -(7,5 - 2 - 0,5)Pd/h = -5Pd/h \quad (g)$$

$$O_4 = O_3 = -(3 - 0,5) \cdot 4Pd/h + 6Pd/h = -4Pd/h$$

11.10. Varraste asendamise võte

Varraste asendamise võtet võib kasutada mittelihtvõrguga ja mittesümmeetriliste sõrestike varraste sisejõudude arvutamiseks, kui eespool esitatud võtete rakendamise on tülakas. Varraste asendamise võtte puhul eemaldatakse sõrestiku arvutuskeemist üks varras ja selle mõju asendatakse sisejõuga, mida märgitakse tähega X . Kujumuutumatuse kindlustamiseks asetatakse sõrestiku arvutuskeemist ärajäetud varda asemele uus varras teise kohta. Joonisel 11.19, *a* kujutatud sõrestiku arvutuskeemist eemaldatakse varras 2-6, tema mõju asendatakse sõlmedes 2 ja 6 varda sisejõuga X ning kujumuutumatuse tagamiseks pannakse uus varras sõlmede 3 ja 6 vahele (joon. 11.19, *b*). Uut skeemi nimetatakse sõrestiku asendavaks arvutuskeemiks ja uut varrast, mida märgitakse tähega a , asendavardaks (joon. 11.19, *b*). Asendav arvutuskeem peab olema geomeetriliselt muutumatu ja niisuguse struktuuriga, mis lubab rakendada sisejõudude leidmiseks eelkirjeldatud lihtsaid võtteid.

Sõrestiku arvutuskeemis (joon. 11.19, *a*) ei ole varrast sõlmede 3 ja 6 vahel. Eemaldatud varda 2-6 mõju



Joon. 11.19

asendav sisejõud X (joon. 11.19, *b*) määratakse tingimusest, et asendusvarda a sisejõud võrdub nulliga, kuna seda varrast ei ole sõrestiku alg-arvutusskeemis. Selle tingimuse rahuldamisel on sõrestiku asendava arvutusskeemi kõigi teiste varraste sisejõud võrdsed sõrestiku alg-arvutusskeemi varraste sisejõududega.

Asendava sõrestiku suvalise varda k sisejõud väljendatakse jõudude mõju sõltumatuse printsiibi alusel:

$$N_k = N'_{kp} + N'_{kx} \quad (a)$$

milles

N'_{kp} — koormusest põhjustatud sisejõud asendava arvutusskeemi vardas k (joon. 11.19, *c*);

N'_{kx} — ärajäetud varda asemele rakendatud kaksikjõust X põhjustatud sisejõud asendava arvutusskeemi vardas k (joon. 11.19, *d*).

Varda k sisejõud N'_{kx} väljendatakse korrutisena

$$N'_{kx} = n'_{kx} X \quad (b)$$

milles

X — eemaldatud varda sisejõud alg-arvutusskeemis;
 n'_{kx} — kaksikjõududest $X=1$ põhjustatud sisejõud sõrestiku asendavas arvutusskeemis (joon. 11.19, *e*).

Nüüd võib avaldise (a) esitada kujul

$$N_k = N'_{kp} + n'_{kx} X \quad (11.1)$$

mis kehtib ka asendusvarda a jaoks:

$$N_a = N'_{ap} + n'_{ax} X \quad (c)$$

milles

N'_{ap} — koormusest põhjustatud sisejõud asendusvardas;

n'_{ax} — kaksikjõududest põhjustatud sisejõud asendusvardas.

Kuna alg-arvutusskeemis varrast a ei ole, siis tingimus $N_a = 0$ annab võrrandi

$$N'_{ap} + n'_{ax} X = 0 \quad (d)$$

millest avaldatakse sisejõud X

$$X = -N'_{ap}/n'_{ax} \quad (11.2)$$

Kui $n'_{ax} = 0$, siis $X = -N'_{ap}/0 = \infty$; või kui ka $N'_{ap} = 0$,

siis $X = 0/0$. Sellest järeldub: kui $n'_{ax} = 0$ ja asendav arvutusskeem on geomeetriliselt muutumatu, siis sõrestiku alg-arvutusskeem on hetkmuutuv.

Eemaldatud varda sisejõu (11.2) asetamisel avaldisse (11.1) saadakse valem suvalise varda k sisejõu arvutamiseks:

$$N_k = N'_{kp} - n'_{kx}(N'_{ap}/n'_{ax}) \quad (11.3)$$

Kahe varda asendamisel leitakse sõrestiku asendava arvutusskeemi varrastes sisejõud koormusest, esimese eemaldatud varda asemele rakendatud kaksikjõust $X_1 = 1$ ja teise eemaldatud varda asemele rakendatud kaksikjõust $X_2 = 1$.

Sõrestiku varraste sisejõud arvutatakse valemiga

$$N_k = N'_{kp} + n'_{k1} X_1 + n'_{k2} X_2 \quad (11.4)$$

milles

N'_{ap}, N'_{bp} — koormusest põhjustatud sisejõud asendusvarrastes a ja b ;

n'_{k1}, n'_{k2} — kaksikjõududest $X_1 = 1$ ja $X_2 = 1$ põhjustatud sisejõud asendava arvutusskeemi vardas k .

Eemaldatud varraste sisejõudude X_1 ja X_2 leidmiseks koostatakse võrrandisüsteem tingimuste põhjal, et asendusvarraste a ja b sisejõud võrduvad nulliga:

$$\begin{aligned} N_a &= N'_{ap} + n'_{a1} X_1 + n'_{a2} X_2 = 0 \\ N_b &= N'_{bp} + n'_{b1} X_1 + n'_{b2} X_2 = 0 \end{aligned} \quad (11.5)$$

milles

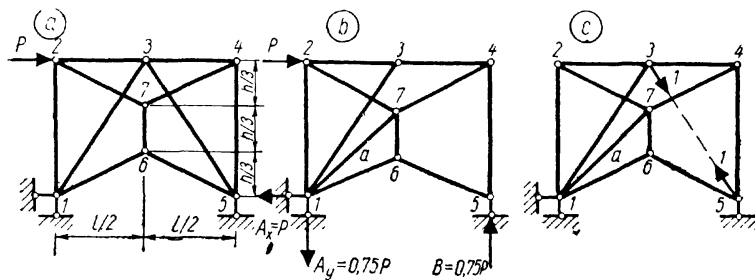
N'_{ap}, N'_{bp} — koormusest põhjustatud sisejõud asendusvarrastes a ja b ;

n'_{a1}, n'_{b1} — esimese eemaldatud varda asemele rakendatud kaksikjõust $X_1 = 1$ põhjustatud sisejõud asendusvarrastes a ja b ;

n'_{a2}, n'_{b2} — teise eemaldatud varda asemele rakendatud kaksikjõust $X_2 = 1$ põhjustatud sisejõud asendusvarrastes a ja b .

Näide 11.3. Arvutada varraste asendamise võttega joonisel 11.20, *a* kujutatud sõrestiku varraste sisejõud. $P = 1000$ kG ja $h = 0,75l$.

Eemaldatakse varras 3-5 ja asendatakse see vardaga 1-7. Koormusest põhjustatud sisejõud asendava arvutusskeemi varrastes leitakse sõlmede eraldamise võttega (joon. 11.20, *b*). Algul vaadeldakse



Joon. 11.20

sõlme 5 ja edasi sõlmi 4, 6, 3, 7, 2, 1. Järgnevalt leitakse eemaldatud varda 3-5 asemele rakendatud kaksikjõust $X_1=1$ põhjustatud sisejõud asendava arvutuskeemi varrastes (joon. 11.20, c). Tulemused on esitatud tabelis 11.3.

Võrrandist

$$N_a = N'_{ap} + n'_{ax}X = 0 \quad \text{või} \quad 1414 + 1,569X = 0$$

leitakse eemaldatud varda 3-5 sisejõud

$$X = -1414/1,569 = -901 \text{ kG}$$

Valemiga (11.1) arvatud varraste sisejõud on esitatud tabelis 11.3.

Tabel 11.3

Varras	N'_{kp}	n'_{kx}	$n'_{kx}X$	$N_k = N'_{kp} + n'_{kx}X$
1-2	-250	0,000	0	-250
2-3	-1500	0,000	0	-1500
3-4	-1500	-1,109	1000	-500
4-5	-750	-0,555	500	-250
5-6	0	-0,620	559	559
6-1	0	-0,620	559	559
2-7	559	0,000	0	559
7-4	1677	1,240	-1118	559
7-6	0	-0,555	500	500
1-3	0	-1,000	901	901
3-5	—	1,000	-901	-901
a	1414	1,569	-1414	0

11.11. Koormuse lahutamise võte

Koormuse lahutamise võtet kasutatakse sümmeetriliste arvutuskeemide sisejõudude ja toereaktsioonide leidmisel. Sümmeetrilises arvutuskeemis põhjustab sümmeetriline koormus sümmeetrilisi ja antisümmeetrilise koormuse antisümmeetrilisi sisejõudusid. Sümmeetriliselt asetsevates elementides esinevad sisejõud on sümmeetrilise koormuse puhul võrdsed ja antisümmeetrilise koormuse puhul suuruselt võrdsed, kuid vastupidiste märkidega.

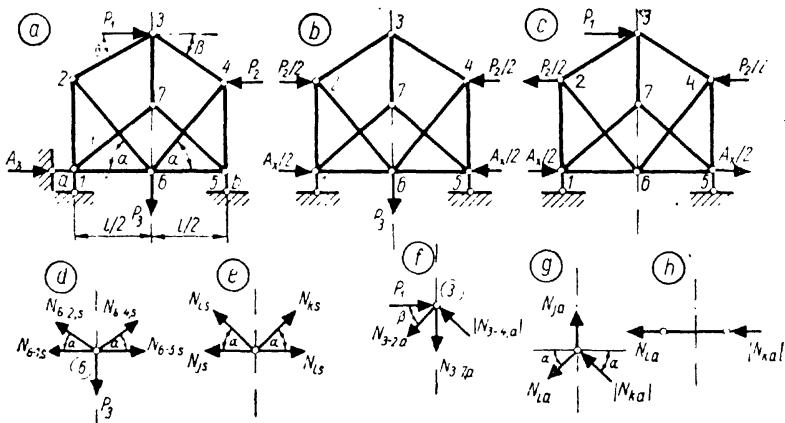
Sümmeetrilise arvutuskeemi lahendamisel lahutatakse suvaline koormus sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks koormuseks selliselt, et nende summa moodustab antud koormuse. Varraste sisejõud leitakse eraldi mõlemast koormusest ja lõplike sisejõudude saamiseks liidetakse.

Joonisel 11.21, a kujutatud sõrestikule mõjuv koormus on lahutatud sümmeetriliseks (joon. 11.21, b) ja antisümmeetriliseks (joon. 11.21, c). Sõrestikkujundil on kolm toesidet. Vertikaalsed toesidemed on sümmeetrilised; horisontaalne toeside ei ole. Tingimusest $\sum X = 0$: $A_x + P_1 - P_2 = 0$ leitakse horisontaalne toereaktsioon $A_x = P_2 - P_1$. Edaspidisel ülesande lahendamisel käsitletakse toereaktsiooni A_x koormusena, mis lahutatakse samuti sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks.

Kui osa koormusest on sümmeetriline (jõud P_3), siis kantakse see tervikuna sümmeetrilisse koormusskeemi. Antisümmeetriline koormuse osa (jõud P_1) kantakse tervikuna antisümmeetrilisse koormusskeemi. Suvalisest koormusest (jõud P_2 ja toereaktsioon A_x) kantakse pool sümmeetrilise ja pool antisümmeetrilise koormusskeemi. Teisel pool sümmeetriatelge rakendatakse pool koormust sümmeetrilises koormusskeemis sümmeetriliselt ja antisümmeetrilises skeemis sellele vastupidise suunaga.

Koormuse lahutamine sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks annab lisaks tasakaalutingimustele veel mõned lisatingimused sümmeetriateljel asuvates sõlmedes ühendatud varraste sisejõudude leidmiseks (joon. 11.21, a: sõlmed 3, 6, 7).

Lahendamist alustatakse sümmeetriateljel asuvast sõlmest. Sümmeetrilises koormusskeemis alustatakse sõlmest 6 (joon. 11.21, b ja d). Tasakaalutingimus



Joon. 11.21

$$\Sigma X=0; \quad N_{6-5,s} - N_{6-1,s} + N_{6-4,s} \cos \alpha - N_{6-2,s} \cos \alpha = 0 \quad (a)$$

on rahuldatud, kuna sümmeetrilises koormusskeemis

$$N_{6-2,s} = N_{6-4,s}; \quad N_{6-1,s} = N_{6-5,s} \quad (11.6)$$

Tasakaalutingimusest

$$\Sigma Y=0; \quad N_{6-2,s} \sin \alpha + N_{6-4,s} \sin \alpha - P_3 = 0 \quad (b)$$

leitakse tingimuse (11.6) alusel

$$N_{6-2,s} = N_{6-4,s} = P_3/2 \sin \alpha \quad (11.7)$$

Sümmeetrilises koormusskeemis arvutatakse järgnevalt sisejõud sõlmes 2 ühendatud varrastes ja edasi sõlmedes 1 ning 3.

Joonisel 11.21, e on kujutatud sümmeetrilise koormusskeemi sümmeetriateljel asuv koormamata sõlm. Tasakaalutingimus

$$\Sigma X=0; \quad N_{ks} \cos \alpha - N_{is} \cos \alpha + N_{ls} - N_{js} = 0 \quad (c)$$

on rahuldatud, kuna

$$N_{is} = N_{ks}; \quad N_{js} = N_{ls} \quad (11.8)$$

Tasakaalutingimus

$$\Sigma Y=0; \quad N_{is} \sin \alpha + N_{ks} \sin \alpha = 0 \quad (d)$$

on ainult siis rahuldatud, kui

$$N_{is} = N_{ks} = 0 \quad (11.9)$$

kuna $\sin \alpha \neq 0$ ja tingimus (11.8) peab olema rahuldatud. Joonisel 11.21, e kujutatud sümmeetrilise koormusskeemi sümmeetriateljel asuvas koormamata sõlmes ühendatud diagonaalide sisejõud on nullid (11.9).

Antisümmeetrilises koormusskeemis (joon. 11.22, c) vaadeldakse sümmeetriateljel asuvate sõlmede 3 ja 7 (joon. 11.21, f ja g) tasakaalu.

Antisümmeetrilises koormusskeemis

$$N_{3-2,a} = -N_{3-4,a} \quad (11.10)$$

ja sõlme 3 tasakaalu tingimusest

$$\Sigma X=0; \quad P_1 - N_{3-2,a} \cos \beta - |N_{3-4,a}| \cos \beta = 0$$

leitakse

$$N_{3-2,a} = |N_{3-4,a}| = P_1/2 \cos \beta \quad (11.11)$$

Tasakaalutingimusest

$$\Sigma Y=0; \quad -N_{3-2,a} \sin \beta + |N_{3-4,a}| \sin \beta - N_{3-7,a} = 0 \quad (e)$$

leitakse, kuna $N_{3-2,a} = |N_{3-4,a}|$, et

$$N_{3-7,a} = 0 \quad (11.12)$$

Võrrandist (11.12) järeldub, et antisümmeetrilises koormusskeemis sümmeetriateljel asuvas vardas (joonisel 11.21, c varras 3-7) on sisejõud null. Sõlme 7 tasakaalust leitakse, et ka varraste 7-1 ja 7-5 sisejõud on nullid. Järgnevalt lahendatakse sõlmed 2 ja 1. Lõplike sisejõudude saamiseks liidetakse mõlema koormusskeemi varraste sisejõud.

Joonisel 11.21, g kujutatud antisümmeetrilise koormusskeemi sümmeetriateljel asuva sõlme tasakaalu tingimusest

$$\Sigma X=0; \quad -N_{ia} \cos \alpha - |N_{ka}| \cos \alpha = 0$$

järeldub, et

$$N_{ia} = |N_{ka}| = 0 \quad (11.13)$$

kuna $\cos \alpha \neq 0$ ja $N_{ia} = -N_{ka}$. Tasakaalutingimusest $\Sigma Y=0$ saadakse, et ka $N_{ja} = 0$. Järelikult joonisel 11.21, g kujutatud antisümmeetrilise koormusskeemi sümmeetriateljel asuvas koormamata sõlmes ühendatud varraste sisejõud on nullid.

Kui antisümmeetrilises skeemis varras asub risti sümmeetriateljel (joon. 11.21, h), siis selle varda sisejõud võrdub nulliga: $N_{ia} = |N_{ka}| = 0$.

11.12. Sisejõudude arvutus kinemaatika meetodiga

Kinemaatika meetodi kasutamisel eemaldatakse arvutusskeemist varras, mille sisejõudu tahetakse leida. Ärajäetud varda mõju asendatakse kaksikjõuga X_r .

Varda sisejõud X_r leitakse võimalike paigutiste või kiiruste printsiibi alusel mehhanismi tasakaalu tingimusest. Lihtvõrguga sõrestike puhul kasutatakse pooluste ja mittelihtvõrguga sõrestike juures pööratud kiiruste plaani.

Sõrestiku tugede tingimustele vastava mehhanismi pooluste plaani puhul leitakse sisejõud X_r võrrandist

$$\sum P_k \delta p_k + X_r \delta r = 0 \quad (a)$$

ja tugede tingimustele mittevastava pooluste plaani puhul võrrandist

$$\sum P_k \delta p_k + \sum R_c \delta c + X_r \delta r = 0 \quad (b)$$

milles δp_k , δr , δc on jõule P_k , kaksikjõule X_r ja eemaldatud toesidemel c tekkivale reaktsioonile R_c vastavad võimalikud siirded.

Jõu P_k töö avaldatakse ka järgmiselt:

$$P_k \delta p_k = P_k \omega_h Q_k \quad (c)$$

milles $P_k Q_k$ on jõu P_k staatiline moment kujundi h peapooluse $h\theta$ suhtes ja ω_h on kujundi, millele on rakendatud jõud P_k , nurkkiirus või pööre. Analoogiliselt avaldatakse ka reaktsiooni R_c ja kaksikjõu X_r töö; võrrand (b) saab siis kuju

$$X_r (\omega_i Q_i + \omega_j Q_j) + \sum P_k Q_k \omega_h + R_c Q_c \omega_c = 0 \quad (d)$$

milles i ja j tähistavad sõlmi, mille vahelt on varras eemaldatud, s. t. $N_{ij} = X_r$.

Mittepolaarse pööratud kiiruste plaaniga leitakse varda X_r sisejõud võrrandist

$$X_r (s_{ri} + s_{rj}) + \sum P_k s_k = 0 \quad (e)$$

milles s_{ri} , s_{rj} , s_k on eemaldatud varda sõlmede i ja j ning jõu P_k rakenduspunkti kujutuspunktide i' , j' ja k' kaugused vastavalt eemaldatud varda sihist ja jõu P_k sihist. Jõu moment kujutuspunkti suhtes on positiivne, kui ta on suunaga päripäeva.

Näide 11.4. Leida pooluste plaaniga joonisel 11.22, a kujutatud sõrestiku alumise vöö varda 5-7 ja diagonaali 4-5 sisejõud.

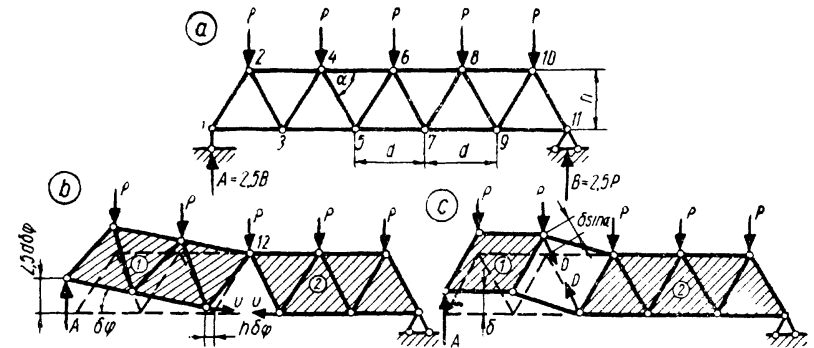
Alumise vöö varda 5-7 ja diagonaali eemaldamisega tekkinud mehhanismide võimalike paigutusolukordade lihtsamaks kujutamiseks eemaldatakse veel toeside a ja selle asemele lisatakse kujundile 2 üks side, mille tulemusena kujund 2 ei saa liikuda. Vastavad võimalikud paigutusolukorrad on kujutatud joonisel 11.22, b ja c.

Kuna võimalikes paigutusolukordades tugede tingimused ei ole täidetud ($\delta \alpha \neq 0$), siis kasutatakse võrrandit (b):

$$\begin{aligned} -P \cdot 2d \delta \varphi - Pd \delta \varphi + A \cdot 2,5d \delta \varphi - U_{5-7} h \delta \varphi &= 0 \\ (A - P - P) \delta - D_{4-5} \delta \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

millest ($A = 2,5P$)

$$U_{5-7} = 3,25Pd/h; \quad D_{4-5} = -P/2 \sin \alpha$$



Joon. 11.22

Näide 11.5. Arvutada joonisel 11.23, a kujutatud sõrestiku varda 1-2 sisejõud pööratud kiiruste plaaniga.

Sõrestikust eemaldatakse varras 1-2 ja tema mõju asendatakse kaksikjõuga $N_{1-2} = N_{2-1}$. Mehhanismi kinemaatiliste toetingimustele vastav mittepolaarne pööratud kiiruste plaan on kujutatud joonisel 11.23, b.

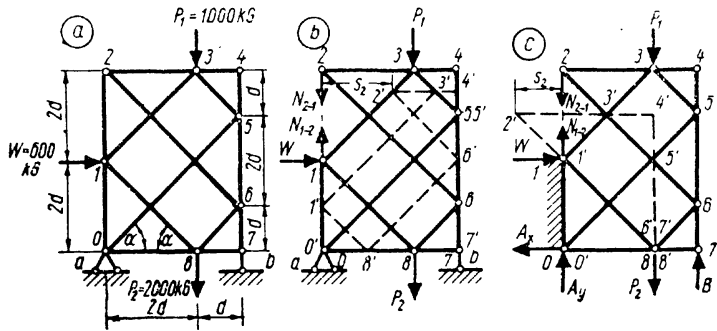
Kujutuspunktide kohta koostatud momentide võrrandist (e)

$$N_{1-2} s_1 - N_{2-1} s_2 + W \cdot (I-I') - P_1 \cdot (3-3') \cos \alpha + P_2 \cdot (8-8') = 0$$

avaldatakse varda 1-2 sisejõud

$$\begin{aligned} N_{1-2} = N_{2-1} &= [W \cdot (I-I') - P_1 \cdot (3-3') \cos \alpha + P_2 \cdot (8-8')] / (s_2 - s_1) \\ &= (600d - 1000 \cdot 0,5d + 2000d) / (1,5 - 0)d = 1400 \text{ kG}. \end{aligned}$$

Joonisel 11.23, c on kujutatud mehhanismi mittepolaarne pööratud



Joon. 11.23

kiiruste plaan, kusjuures on ära jäetud kolm toesidet ja nende asemele on pandud kolm sidet selliselt, et varras $O-I$ on liikumatu. Momentide võrrandist pööratud kiiruste plaani kujutuspunktide suhtes

$$P_1 \cdot (3-3') \cos \alpha - B \cdot (7-7') + A_x \cdot 0 + A_y \cdot 0 + P_2 \cdot 0 + W \cdot 0 + N_{2-1} s_2 + N_{1-2} \cdot 0 = 0$$

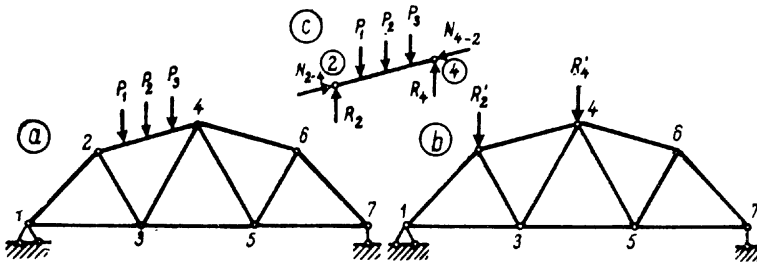
saadakse varda $I-2$ sisejõud

$$N_{1-2} = N_{2-1} = [B \cdot (7-7') - P_1 \cdot (3-3') \cos \alpha] / s_2 = (2400d - 1000d) / d = 1400 \text{ kG}$$

12.13. Liitvarrastega sõrestikud

Sõrestiku koormamisel sõlmede vahel põhjustavad normaalpingeid pikijõud ja paindemomendid. Suurimad pinged leitakse ekstsentrilise tõmbe-surve valemiga

$$\begin{aligned} \max \sigma &= \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W} \\ \text{mir. } \sigma &= \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W} \end{aligned}$$



Joon. 11.24

Pikijõudude ja paindemomentide leidmiseks asendatakse vardale mõjuv koormus (joon. 11.24, *a*) temale ekvivalentsete jõududega R'_2 ning R'_4 (joon. 11.24, *b*). Selleks lahutatakse vardale mõjuva koormuse resultant kaheks komponendiks nendesse sõlmedesse, mille vahel varras asub.

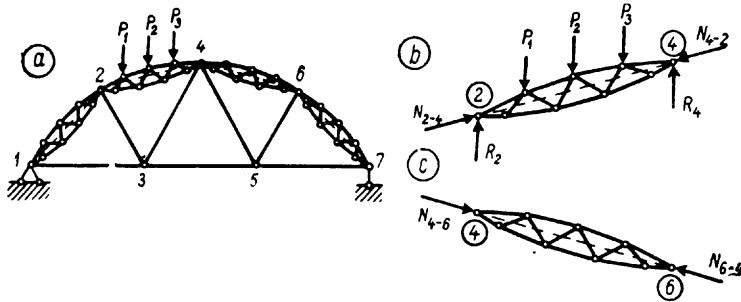
Koormuse asendamisel temale ekvivalentse koormusega muutuvad sisejõud ainult otseselt koormatud vardas (joon. 11.24, *a* vardas 2-4). Teiste varraste sisejõud ei muutu. Seega joonistel 11.24, *a* ja *b* kujutatud koormustest põhjustatud varraste (välja arvatud varda 2-4) sisejõud on võrdsed. Joonisel 11.24, *b* esitatud koormusest tekivad varrastes ainult pikijõud.

Lõplike sisejõudude N , M , Q leidmiseks sõlmede vahel koormatud vardas (2-4) rakendatakse lisaks vardale mõjuvale koormusele ja koormust sõlmedes tasakaalustavatele jõududele veel varda telje sihis kaks võrdset vastupidise suunaga jõudu N_{2-4} ning N_{4-2} (joon. 11.24, *c*). Jõud N_{2-4} ja N_{4-2} võrduvad koormatud varda sõlmedes mõjuvatest jõududest R'_2 ning R'_4 põhjustatud pikijõuga vardas 2-4. Tõmbe-pikijõud rakendatakse suunaga sõlme poolt ja surve-pikijõud — suunaga sõlme poole.

Sõlmede vahel koormatud sõrestikus (joon. 11.24, *a*) paindemomentidest vabanemiseks asendatakse täisseinalised vardad sõrestikvarrastega, kusjuures jõud rakendatakse sõrestikvarraste sõlmedesse (joon. 11.25, *a*). Sõrestikku, milles kõik või osa vardaid on sõrestikvardad, nimetatakse liitvarrastega sõrestikuks. Sõrestikvarraste telgjoontel täisseinaliste varrastega asendamisel saadud uut sõrestikku nimetatakse liitvarrastega sõrestiku põhisõrestikuks. Joonisel 11.25, *a* on see kujutatud punktiiriga.

Liitvarrastega sõrestiku arvutus on analoogiline sõlmede vahel koormatud põhisõrestiku arvutusega. Esmalt asendatakse liitvarrastega sõrestikvardale mõjuv koormus (joon. 11.25, *a*) temaga ekvivalentsete jõududega R'_2 ja R'_4 , mis rakendatakse põhisõrestiku sõlmedesse (joon. 11.24, *b*), ning arvutatakse pikijõud põhisõrestiku varrastes. Liitvarrastega sõrestiku täisseinaliste varraste pikijõud on võrdsed põhisõrestiku vastavate varraste pikijõududega.

Koormatud sõrestikvarda elementide sisejõud arvutatakse sõrestikvardale mõjuvast koormusest, seda tasa-

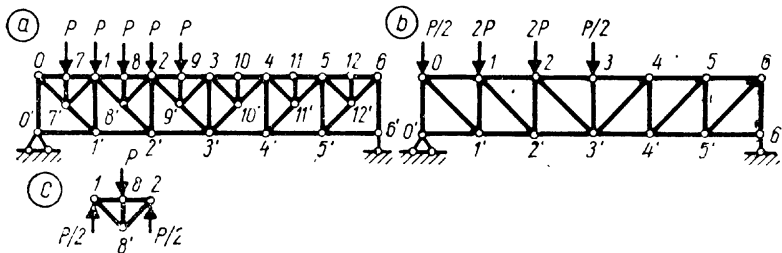


Joon. 11.25

kaalustavatest jõududest ja sõrestikvarda ottesse rakendatud kahest põhisõrestiku varda sisejõuga võrdsest vastassuunalisest jõust (joon. 11.25, *b*). Koormamata sõrestikvarda elementide sisejõud arvutatakse kahest sõrestikvarda telje sihilisest põhisõrestiku varda sisejõuga võrdsest ja vastassuunalisest jõust (joon. 11.25, *c*).

11.14. Sprengelsõrestikud

Sprengelsõrestikku (joon. 11.26, *a*) käsitletakse kui liitvarrastega sõrestikku, mis saadakse põhisõrestikust (joon. 11.26, *b*), kui põhisõrestiku ülemise vöö iga varras asendatakse põhisõrestiku sõlmedesse toetuva väikese sõrestikuga, mida nimetatakse sprenglikuks (joon. 11.26, *c*). Sprengel kannab tema sõlme rakendatud vertikaalse koormuse üle põhisõrestiku sõlmedesse vertikaalsete komponentidena.



Joon. 11.26

Sprengelsõrestikus on kolme liiki vardaid. Joonisel 11.26, *a* on ainult põhisõrestiku varrasteks alumise vöö vardad, postid ja diagonaalvarraste alumised pooled $7'-1'$, $8'-2'$, ... Nende varraste sisejõud arvutatakse põhisõrestiku koormuskeemiga 11.26, *b*.

Ainult sprengli juurde kuuluvad sprenglite postid ja diagonaalid ($7-7'$, $8-8'$, ...; $1-7'$, $2-8'$, ...). Nendes varrastes tekivad sisejõud kohalikest koormusest, kui sprengli sõlm on koormatud (joon. 11.26, *c*). Sprenglite sõlmed 10, 11 ja 12 on koormamata ning varraste $10-10'$, $11-11'$, $12-12'$, $3-10'$, $4-11'$ ja $5-12'$ sisejõud on nullid.

Kolmandat liiki vardad on põhisõrestiku ja sprengli elementideks. Nendeks on joonisel 11.26, *a* kujutatud sõrestikul ülemise vöö vardad ja diagonaalide ülemised pooled $0-7'$, $1-8'$, ... Sisejõud nendes varrastes saadakse põhisõrestiku varda sisejõu ja sprengli varda kohalikest koormusest põhjustatud sisejõu liitmisel.

11.15. Sisejõudude diagramm

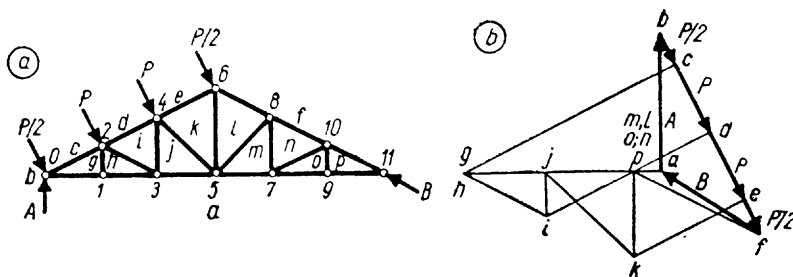
Sõrestiku kõigi varraste sisejõudude graafilisel leidmisel konstrueeritakse sisejõudude diagramm. Sisejõudude määramine põhineb jõu tasakaalustamisel kahe jõuga, mille sihid lõikuvad jõu sihiga ühes punktis.

Sisejõudude diagrammi konstrueerimisel tähistatakse välis- ja sisejõud järgmiselt. Sõrestiku väliskontuuril kahe naabervälisjõuga ja vööga piiratud pinda tähistatakse tähega (või numbriga). Neid pindasid nimetatakse edaspidi väljadeks. Välis- ja sisejõud märgitakse kahe tähega (või numbriga), mis näitavad, milliste väljade vahel jõud asub. Toereaktsioon A ja sõlmes 2 rakendatud jõud P tähistatakse vastavalt $a-b$ ning $c-d$, kuna nad asuvad väljade a ja b ning c ja d vahel (joon. 11.27). Tähed märgitakse järjekorras, kuidas neid kohatakse päripäeva liikumisel ümber sõrestiku.

Välisjõudude hulknurk kujutatakse järjekorras, nagu neid kohatakse päripäeva liikumisel ümber sõrestiku.

Toereaktsioon A asub väljade a ja b vahel. Seepärast tähistatakse jõuvektori A alg- ja lõpp-punkt vastavalt tähega a ning b . Sõlmes 0 rakendatud jõud $P/2$ asub väljade b ja c vahel; jõu algpunkt märgitakse tähega b ja lõpp-punkt tähega c jne.

Sisejõudude diagrammi kujutamist alustatakse sõl-



Joon. 11.27

mest, mis on moodustatud kahest vardast. Joonisel 11.27, *a* kujutatud sõrestikul on nendeks sõlmed *0* ja *11*.

Sõlmes *0* on tuntud jõududeks reaktsioon *A* ja jõud $P/2$ ning tundmatuteks varraste *c-g* ja *g-a* sisejõud. Need neli jõudu *a-b*, *b-c*, *c-g* ja *g-a* on tasakaalus ja hulknurk kinnine. Jõuhulknurga neljast tipust *a*, *b*, *c* ja *g* on kolm tippu *a*, *b* ja *c* välisjõudude hulknurgas määratud. Tipu *g* leidmiseks lahutatakse tuntud jõudude resultant jõuhulknurgas *a-b-c* kaheks komponendiks tundmatute sisejõudude sihtidele. Punktidest *c* ja *a* tõmmatakse varrastega *c-g* ja *g-a* paralleelsed sirged. Nende sirgete lõikepunkt määrab jõuhulknurga tipu *g*. Jõuhulknurga küljed *c-g* ja *g-a* kujutavad jõu mõõtkavas varraste *c-g* ja *g-a* sisejõudusid. Sisejõudude märgid leitakse jõuhulknurga *a-b-c-g* abil. Kinnises jõuhulknurgas on jõudude kulg pidev, mis lubab ühe jõu suuna järgi määrata kõigi teiste jõudude suunad. Reaktsiooni *A* suund on tipust *a* tippu *b*; jõu $P/2$ suund on tipust *b* tippu *c*. Järelikult on varda *c-g* sisejõud suunatud tipust *c* tippu *g* ning varda *g-a* sisejõud suunatud tipust *g* tippu *a*. Kandes jõuhulknurgas leitud sisejõudude suunad sõlme *0* juures sõrestiku varrastele nähtub, et varda *c-g* sisejõud on suunatud sõlme poole, seega varras on surutud. Varda *g-a* sisejõud on suunatud sõlmest eemale, seega varras on tõmmatud.

Seejärel vaadeldakse sõlme *0* naabersõlme, milles on tundmatud kahe varda sisejõud. Sõlmes *1* on tundmatuteks varraste *g-h* ja *h-a* sisejõud. Nende määramiseks moodustatakse jõuhulknurk *a-g-h-a*, mille tipud *a* ja *g* on kujutatud sõlme *0* jõuhulknurgas. Tipp *h* leitakse punktidest *g* ja *a* varrastega *g-h* ja *h-a* paralleelselt tõmmatud sirgete lõikepunktina. Osutub, et nende sirgete

lõikepunkt *h* ühtib punktiga *g*. Järelikult varda *g-h* sisejõud on null; varda *h-a* sisejõud on võrdne varda *a-g* sisejõuga. Jõuhulknurgas on varda *a-g* sisejõud suunatud paremalt vasakule ja varda *h-a* sisejõud vasakult paremale. Mõlemad sisejõud suunatud sõlmest *1* eemale, järelikult on mõlemad vardad tõmmatud.

Edasi leitakse analoogiliselt varraste *d-i* ja *i-h* sisejõud sõlmes *2*, varraste *i-j* ja *j-a* sisejõud sõlmes *3* ning varraste *e-k* ja *k-j* sisejõud sõlmes *4*.

Sõrestiku keskkohast paremal pool asuvate sõlmede jaoks moodustatakse jõuhulknurgad lähtudes sõlmest *11*. Sõlmele *11* vastaval jõuhulknurgal *j-a-p* puudub tipp *p*, mis leitakse sirgetega *a-p* ja *p-f*.

Analoogiliselt sõlme *1* jaoks kujutatud jõuhulknurgaga moodustatakse hulknurgad sõlmede *9*, *10*, *7* ja *8* jaoks, mille tulemusel väljadele *o*, *n*, *m* ja *l* vastavad tipud jõuhulknurgas ühtivad tipuga *p*. Järelikult on varraste *l-m*, *m-n*, *n-o* ja *o-p* sisejõud nullid.

Seni ei ole vaadeldud sõlmedele *5* ja *6* vastavaid jõuhulknurki. Nendes on ainult üks tundmatu sisejõud *k-l*. Sisejõudude diagrammis on need punktid juba leitud ja ühendatakse sirgega. Viimase tundmatu sisejõuga varda siht on kontrollimiseks: kui sisejõudude diagrammi punktide *l* ja *k* ühendussirge on paralleelne vardaga *l-k*, siis on diagramm moodustatud õigesti. Kui sirged ei ole paralleelsed, siis viga tasandatakse, muutes diagrammi sisejõude.

Varda sisejõud esineb diagrammi kahe naabersõlme jõuhulknurgas vastupidiste suundadega. Sisejõudude suunad märgitakse ainult sõrestiku sõlmede juures, mitte aga diagrammi jõuhulknurkades.

Sõrestiku üht välja piiravate varraste sisejõud koonduvad diagrammi ühte punkti. See punkt on märgitud sama tähega kui varrastega piiratud väli. Sõrestiku ühes sõlmes mõjuvad välisjõud ja varraste sisejõud moodustavad diagrammis kinnise jõuhulknurga, mille tipud asuvad samas järjekorras, kui väljad ümber vastava sõlme.

12. TALASÖRESTIKE MÕJUJONED

12.01. Mõjujonte konstrueerimise meetodid

Liikuva koormuse puhul arvutatakse sõrestikud mõjujontega. Sõrestikuvarda sisejõu mõjujont on graafik, mis kujutab sõrestikul liikuvast ühikjõust tingitud pikijõudu vardas. Kui koormus mõjub ülemise vöö sõlmedes, siis on sõrestik sõiduteega üleval ja kui alumise vöö sõlmedes, siis sõiduteega all. Koormus kantakse sõrestikule sõlmedes ja seepärast on sõrestiku naabersõlmede vahel mõjujonte osad sirged.

Mõjujoned moodustatakse staatika või kinemaatika meetodiga. Staatika meetodi puhul eraldatakse sõrestiku arvutusskeem lõikega kaheks osaks ja koostatakse ühe osa jaoks tasakaaluvõrrandid. Nendest tasakaaluvõrranditest avaldatakse läbilõigatud varraste sisejõud ühikjõu asukoha funktsioonina ja kujutatakse mõjujoned. Talasõrestike varraste pikijõudude mõjujoned kujutatakse enamasti kas sõrestiku toereaktsiooni, sõrestikuga võrdse sildega tala paindemomendi või põikjõu mõjujone abil.

Kinemaatika meetodi puhul eemaldatakse sõrestiku arvutusskeemist varras ja asendatakse varda mõju kahe võrdse vastupidi suunatud jõuga N_r nendes sõlmedes, mille vahelt varras eemaldatai. Võimalike paigutiste või kiiruste printsiibi põhjal koostatud tingimusest

$$N_r \delta r + 1 \cdot \delta p = 0$$

avaldatakse varda pikijõud

$$N_r = -1 \cdot \delta p / \delta r \quad (12.1)$$

Varda eemaldamisega tekkinud mehhanismile antakse võimalikud väikesed paigutised ja kujutatakse liikuva ühikjõu rakenduspunktide, s.t. sõrestiku sõidutee vertikaalsiirde epüür. Vertikaalsiirde epüür kindlaksmääratud mõõtkavas kujutab sõrestiku arvutusskeemist eemaldatud varda pikijõu mõjujont.

Kaksikjõule N_r vastava paigutise $\delta r = -1$ puhul ühtib sõrestiku sõidutee vertikaalsiirde δp epüür varda pikijõu mõjujonega. Järelikult, kui ühikjõule vastav siire δp ja kaksikjõule vastav siire δr on samamärgilised, siis mõjujone ordinaat siirde δp kohal (ühikjõu all) on negatiivne, ja kui vastasmärgilised, siis positiivne.

Pooluste plaani meetodil kujutatakse mehhanismi sõidutee vertikaalsiirde epüür hetkpooluste ja kiiruste plaani meetodi puhul pööratud kiiruste plaani abil.

12.02. Mõjujonte konstrueerimine momentide tasakaalu tingimusega

Mõjujonte moodustamisel staatika tasakaalutingimustega eraldatakse sõrestiku arvutusskeem lõikega kaheks osaks, nii et lõige läbiks seda varrast, mille pikijõu mõjujont kujutatakse. Kui sõrestiku arvutusskeemi saab eraldada kaheks osaks, lõigates läbi ainult kolm varrast, siis varda sisejõu mõjujone avaldise tuletamiseks kasutatakse momentide või projektsioonide tasakaalu tingimust. Järgnevalt rakendatakse momentide tasakaalu tingimust: kõigi ühel pool lõiget arvutusskeemi osale rakendatud jõudude momentide summa tasandi suvalise punkti suhtes võrdub nulliga. Momendipunktiks võetakse kahe teise läbilõigatud varda sihi lõikepunkt, mistõttu momentide tasakaalu tingimuse alusel koostatud võrrand ei sisalda nende varraste pikijõude. Mõjujone kujutamiseks koostatakse kaks võrrandit. Talasõrestike puhul vaadeldakse vasakul pool lõiget asuva sõrestikuosa tasakaalu, kui ühikjõud mõjub paremal pool lõiget, ja lõikest paremal pool oleva sõrestikuosa tasakaalu, kui ühikjõud asub vasakul pool lõiget.

Kui ühikjõud asub paremal pool lõiget, siis avaldatakse varda pikijõud sõrestiku arvutusskeemi vasakule osale rakendatud jõudude momentide tasakaalu tingimusest, mis koostatakse varda momendipunkti kohta. Varda pikijõud on võrdne momendipunkti kohta koostatud toereaktsiooni A momendiga, mis on jagatud momendipunkti kaugusega varda sihist.

Kui ühikjõud mõjub vasakul pool lõiget, siis on varda pikijõud võrdne momendipunkti kohta koostatud toereaktsiooni B momendiga, mis on jagatud momendipunkti kaugusega varda sihist.

Varda pikijõud on positiivne, kui varda oletatud tõmbe-

jõu ja toereaktsiooni momendid momendipunkti suhtes on erinevate märkidega, ja negatiivne, kui momendid on samamärgilised.

Joonisel 12.1, *a* esitatud sõrestiku arvutuskeemi ja lõike *I-I* puhul leitakse varraste 4-6, 4-7 ja 5-7 pikijõud mõjujooned. Asugu sõidutee alumisel vöö.

Kui ühikjõud mõjub paremal pool lõiget ($3d \leq x \leq l$), siis sõrestiku arvutuskeemi vasakpoolsele osale mõjuvate jõudude momentide tasakaalu tingimusest ülemise vöö varda 4-6 momendipunkti, s.t. sõlme 7 kohta

$$\Sigma M_7 = 0; \quad N_{4-6} r_{4-6} + A \cdot 3d = 0$$

avaldatakse varda 4-6 pikijõud

$$N_{4-6} = -3dA/r_{4-6}; \quad (3d \leq x \leq l) \quad (a)$$

Avaldis (a) on varda 4-6 pikijõu mõjujoone parempoolse sirge võrrandiks. Mõjujoone parempoolse sirge 7'-*b* (joon. 12.1, *b*) kujutamiseks kantakse toe *a* vertikaalile lõik $-3d/r_{4-6}$ ($A=1$), mille otspunktist *a'* tõmmatakse sirge toe *b* vertikaalil nullpunkti *b* ($A=0$).

Kui ühikjõud mõjub vasakul pool lõiget ($0 \leq x \leq 2d$), siis arvutuskeemi parempoolsele osale mõjuvate jõudude momentide tasakaalu tingimusest

$$\Sigma M_7 = 0; \quad -N_{4-6} r_{4-6} - B \cdot 5d = 0$$

avaldatakse varda N_{4-6} pikijõud

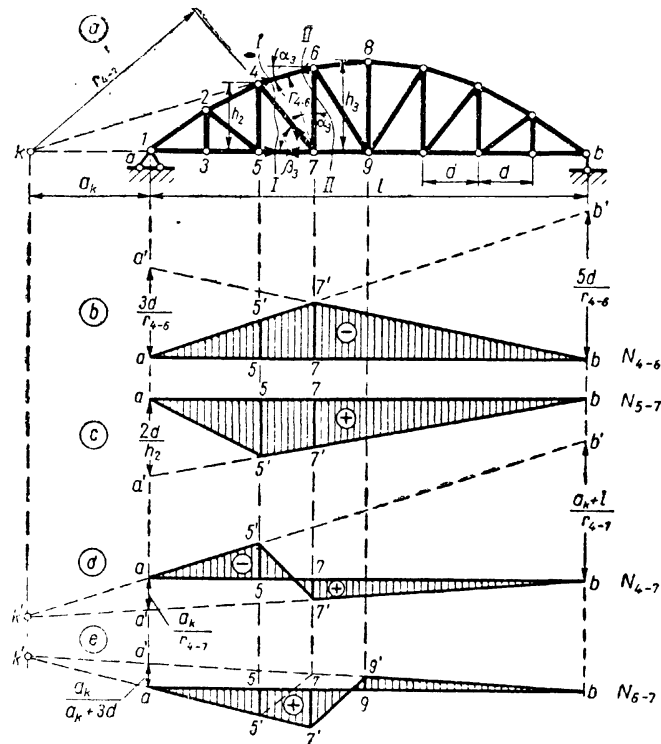
$$N_{4-6} = -5dB/r_{4-6}; \quad (0 \leq x \leq 2d) \quad (b)$$

Mõjujoone vasakpoolse sirge *a-5'* (*b*) kujutamiseks kantakse parempoolse toe *b* vertikaalile lõik $-5d/r_{4-6}$ ($B=1$), mille otspunktist *b'* tõmmatakse sirge toe *a* vertikaalil nullpunkti *a* ($B=0$).

Läbilõigatud paneelis, ühikjõu mõjumisel sõlmede 5 ja 7 vahel ($2d \leq x \leq 3d$), mõjujoone kujutamiseks ühendatakse punktid 5' ja 7' sirg lõiguga, mis ühtib sirgega *a-b'*.

Varda 4-6 pikijõu avaldiste (a) ja (b) lugejad väljendavad ühel pool lõiget mõjuvate jõudude momenti momendipunkti 7 suhtes:

$$\begin{aligned} M_7 &= 3dA, & (3d \leq x \leq l) \\ M_7 &= 5dB, & (0 \leq x \leq 2d) \end{aligned} \quad (c)$$



Joon. 12.1

Moment M_7 on võrdne lihttala paindemomendiga lõikes 7. Ülemise vöö varda 4-6 pikijõu mõjujoone avaldise võib esitada nüüd kujul

$$N_{4-6} = -\frac{M_7}{r_{4-6}} = -\frac{M_7}{h_3 \cos \alpha_3} \quad (12.2)$$

Kuna lihttala paindemomendi M_7 mõjujoone vasak- ja parempoolne sirge lõikuvad sõlme 7 läbival vertikaalil, siis ka varda 4-6 pikijõu mõjujoone vasak- ja parempoolse sirge lõikepunkt 7' asub momendipunkti 7 vertikaalil. Seega varda 4-6 pikijõu N_{4-6} mõjujoone vasakpoolse sirge *a-5'* kujutamiseks ühendatakse mõjujoone parempoolse sirge ja momendipunkti 7 vertikaali lõikepunkt 7' vasaku toe vertikaalil nullpunktiga *a*.

Alumise vöö varda 5-7 pikijõu mõjujoon leitakse sama lõikega I-I. Kui ühikjõud asub paremal pool lõiget I-I ($3d \leq x \leq l$), siis sõrestiku arvutusskeemi vasakpoolse osa tasakaalu tingimusest alumise vöö varda 5-7 momendipunkti suhtes

$$\Sigma M_4 = 0; \quad A \cdot 2d - N_{5-7} h_2 = 0 \quad (d)$$

avaldatakse varda 5-7 pikijõu mõjujoone parempoolse sirge võrrand (joon. 12.1, c)

$$N_{5-7} = 2dA/h_2 = M_4/h_2 \quad (3d \leq x \leq l) \quad (12.3)$$

Mõjujoone parempoolse sirge kujutamiseks kantakse toe a vertikaalile lõik $a-a'$ pikkusega $2d/h_2$ ($A=1$) ja ühendatakse sirglõigu otspunkt a' toe b vertikaalil nullpunktiga b ($A=0$). Mõjujoone vasakpoolse sirge ($0 \leq x \leq 2d$) kujutamiseks tõmmatakse momendipunkti vertikaalne sirge kuni lõikumiseni parempoolse sirgega punktis $5'$, mis ühendatakse nullpunktiga a vasaku toe vertikaalil. Läbilõigatud paneeli kohal, sõlmede 5 ja 7 vahel ($2d \leq x \leq 3d$), ühendatakse mõjujoone kujutamiseks sõlmede 5 ja 7 kohal olevate mõjujoone ordinaatide otspunktid $5'$ ning $7'$ sirglõiguga.

Läbilõigatud paneelis mitteparalleelsete vöövarraste puhul kujutatakse ka võrguvarraste mõjujooned momentide tasakaalu tingimusega. Diagonaali 4-7 momendipunktiks on varraste 4-6 ja 5-7 sihtide lõikepunkt k (joon. 12.1, a). Arvutusskeemi vasakpoolse osa (ühikjõud on parempoolisel osal: $3d \leq x \leq l$) momentide tasakaalu tingimusest

$$\Sigma M_k = 0 \quad -Aa_k + N_{4-7} r_{4-7} = 0 \quad (e)$$

avaldatakse mõjujoone parempoolse sirge võrrand

$$N_{4-7} = Aa_k/r_{4-7} \quad (f)$$

Sirge kujutamiseks kantakse vasaku toe vertikaalile lõik a_k/r_{4-7} ja ordinaadi otspunkt a' ühendatakse nullpunktiga b parempoolse toe vertikaalil. Mõjujoonena on see kehtiv sõlmest 7 kuni toeni b .

Arvutusskeemi parempoolse osa momentide tasakaalu tingimusest

$$\Sigma M_k = 0; \quad -B(a_k + l) - N_{4-7} r_{4-7} = 0 \quad (g)$$

avaldatakse mõjujoone vasakpoolse sirge võrrand (ühik-

iõud mõjub vasakpoolisel osal: $0 \leq x \leq 2d$)

$$N_{4-7} = -B(a_k + l)/r_{4-7} \quad (h)$$

Sirge kujutamiseks kantakse parempoolse toe vertikaalile lõik $-(a_k + l)/r_{4-7}$. Lõigu otspunkt b' ühendatakse nullpunktiga a vasakpoolse toe vertikaalil. Mõjujoonena on see kehtiv toest a kuni sõlmeni 5. Läbilõigatud paneelis ühendatakse mõjujoone kujutamiseks sõlmede 5 ja 7 kohal olevate ordinaatide otspunktid $5'$ ning $7'$ sirglõiguga (joon. 12.1, d).

Kolmnurkade $a-k'-a'$ ja $b'-k'-b$ sarnasusest tuleneb, et mõjujoone parempoolse sirge $7'-b$ ja vasakpoolse sirge $a-5'$ pikenduste lõikepunkt k' asub momendipunktide k vertikaalil.

Posti 6-7 pikijõu N_{6-7} mõjujoone (joon. 12.1, e) kujutamiseks tehakse lõige II-III. Posti momendipunkti k kohta koostatud arvutusskeemi vasaku osa momentide tasakaalu tingimusest

$$\Sigma M_k = 0; \quad -Aa_k - N_{6-7}(a_k + 3d) = 0 \quad (i)$$

avaldatakse pikijõu N_{6-7} mõjujoone parempoolse sirge $9'-b$ ($4d \leq x \leq l$) võrrand

$$N_{6-7} = -Aa_k/(a_k + 3d) \quad (j)$$

Mõjujoone vasakpoolse sirge kujutamiseks pikendatakse parempoolset sirget $b-9'$ läbi punkti a' kuni lõikumiseni momendipunkti k vertikaaliga punktis k' . Sirge $k'-a$ pikendus $a-7'$ on mõjujoone vasakpoolne sirge. Sõidutee vöö läbilõigatud paneelis, sõlmede 7 ja 9 vahel, on mõjujoone sirgeks lõik $7'-9'$.

Kokkuvõtte mõjujoonte kujutamise kohta momentide tasakaalu tingimusega. Vasakpoolse toe vertikaalile kantakse lõik, mille pikkus leitakse murruna. Murru lugejaks ja nimetajaks on vastavalt momendipunkti kaugused vasaku toe vertikaalilt ja vardast, mille pikijõu mõjujoont kujutatakse. Lõigu otspunkt a' ja parempoolse toe vertikaalil asuv nullpunkt b ühendatakse sirgega, mis mõjujoonena on kehtiv parempoolsest toest kuni läbilõigatud paneelini. Mõjujoone vasakpoolse sirge kujutamiseks ühendatakse sirgega momendipunkti vertikaali ja mõjujoone parempoolse sirge või tema pikenduse lõikepunkt k' vasaku toe vertikaalil asuva nullpunktiga a . Viimane sirge kehtib mõjujoonena vasakust toest kuni

läbilõigatud paneelini. Läbilõigatud paneeli kohal on mõjujooneks sirglõik, mis ühendab läbilõigatud paneeli sõidutee sõlmede kohal olevate ordinaatide otspunkte.

Mõjujoon on ühemärgiline, kui momendipunkt on tugede vahel, ja kahemärgiline, kui väljaspool tugesid. Kui momendipunkt on parema või vasaku toe vertikaalil, siis vastavalt mõjujoone vasakpoolne või parempoolne sirge ühtib mõjujoone abstsissiteljega. Post-diagonaalvõrguga sõrestiku posti pikijõu mõjujoon oleneb sõidutee asukohast. Kui koormus mõjub ülemisel vöö, siis on koormatud vöö läbi lõigatud antud näite puhul kolmandas paneelis ja sirglõik, mis ühendab mõjujoone parempoolset sirget vasakpoolse sirgega, tõmmatakse kolmandas paneelis (joonisel 12.1, d näidatud punktiirjoonega).

12.03. Mõjujoonte konstrueerimine projektsioonide tasakaalu tingimusega

Joonisel 12.2, a esitatud sõrestiku vöövarraste mõjujooned on kujutatud momentide tasakaalu tingimustega. Sõidutee asub alumisel vöö. Alumise vöö varda 5-7 mõjujoon on hulknurk $a-5'-7'-b$ ja ülemise vöö varda 4-6 mõjujoon on kolmnurk $a-5'-b$. Kui sõidutee asub üleval, siis on vastupidi — alumise vöö varda mõjujoon on kolmnurk $a-6'-b$ ja ülemise vöö varda 4-6 mõjujoon hulknurk $a-4'-6'-b$. Need mõjujooned on näidatud joonisel 12.2, b ja c punktiiriga.

Võrguvarraste mõjujoonte kujutamiseks kasutatakse projektsioonide tasakaalu tingimust: ühel pool lõiget arvutuskeemile mõjuvate jõudude projektsioonide summa paralleelsete vöövarraste ristteljele võrdub nulliga.

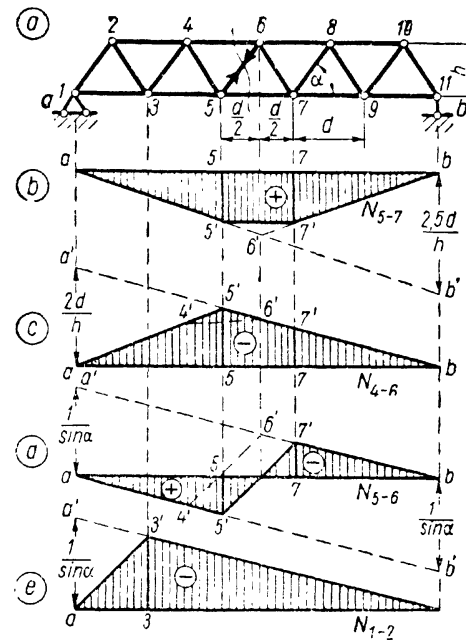
Kui ühikjõud mõjub lõikest paremal, siis arvutuskeemi vasakpoolsele osale mõjuvate jõudude projektsioonide tingimusest

$$\Sigma Y=0; \quad D_{5-6} \sin \alpha + A=0$$

avaldatakse diagonaali pikijõu mõjujoone parempoolse sirge võrrand

$$D_{5-6} = -A/\sin \alpha \quad (a)$$

Vasakpoolse toe vertikaalile kantakse lõik $-1/\sin \alpha$, mille otspunkt a' ja nullpunkt b ühendatakse sirgega



Joon. 12.2

(joon. 12.2, d). Mõjujoone parempoolseks sirgeks on sirglõik $7'-b$.

Kui ühikjõud mõjub vasakul pool lõiget, siis tasakaalutingimusest

$$\Sigma Y=0; \quad -D_{5-6} \sin \alpha + B=0$$

avaldatakse diagonaali vasakpoolse sirge võrrand

$$D_{5-6} = B/\sin \alpha \quad (b)$$

Mõjujoone vasakpoolseks sirgeks on sirglõik $a-5'$. Läbilõigatud paneeli kohal, sõlmede 5 ja 7 vahel, on mõjujooneks sirge $5'-7'$.

Avaldiste (a) ja (b) asemel võib kirjutada

$$D_{5-6} = -Q_{5-7}/\sin \alpha \quad (12.4)$$

Kui koormus mõjub ülemisel vöö, siis on koormatud vöö läbi lõigatud sõlmede 4 ja 6 vahel. Mõjujoon on kujutatud punktiirjoonega ($a-4'-6'-b$).

12.04. Mõjujoonte konstrueerimine sõlmede kohta koostatud tasakaalutingimustega

Joonisel 12.3, *a* esitatud sõrestiku vöö- ja diagonaalaraste sisejõudude mõjujooned kujutatakse momentide tasakaalu tingimustega. Posti pikijõu mõjujoon kujutatakse sõrestiku arvutuskeemist eraldatud sõlme kohta koostatud tasakaalutingimustega. Vaadeldakse sõlmi, milles ei ole diagonaale. Niisugused sõlmed on alumisel vööl 3, 7, 11 ja 15 ning ülemisel vööl 4, 8 ja 12. Tasakaalutingimuste koostamisel vaadeldakse kahte olukorda: kui sõlm on koormatud ja kui sõlm on koormamata. Alumise vöö sõlmes 7 (samuti ka sõlmedes 3, 11 ja 15) on ühendatud kolm varrast, kusjuures kaks vöövarrast asuvad ühel sirgel. Postis 7-6 tekib sisejõud ainult siis, kui sõlm 7 on koormatud ($2d \leq x \leq 4d$). Kui sõlm 7 on koormamata ($0 \leq x \leq 2d$ ja $4d \leq x \leq l$), siis posti 6-7 pikijõud võrdub nulliga. Kui ühikjõud mõjub sõlmes 7 ($x=3d$), siis projektsioonide tingimusest $\Sigma Y=0$

$$N_{7-6} - 1 = 0$$

saadakse posti pikijõud $N_{7-6}=1$, mis on mõjujoone ordinaadiks sõlme 7 all (joon. 12.3, *b*). Kui koormus ei ole kolmandas ja neljandas paneelis ($0 \leq x \leq 2d$ või $4d \leq x \leq l$), siis sõlme 7 tasakaalust järgneb, et $N_{7-6}=0$ ning teiste sõlmede all on mõjujoone ordinaadid nullid (joon. 12.3, *b*).

Postide 4-5, 8-9 ja 12-13 pikijõudude mõjujooned moodustatakse vastavalt sõlmede 4, 8 ja 12 tasakaalutingimuste alusel. Kui sõidutee on alumisel vööl, siis on sõlm 4 koormamata. Sõlme 4 tasakaalu tingimusest

$$\Sigma Y=0; \quad N_{4-6} \sin \alpha_3 - N_{2-4} \sin \alpha_2 - N_{4-5} = 0$$

avaldatakse posti 4-5 pikijõud

$$N_{4-5} = -N_{2-4} \sin \alpha_2 + N_{4-6} \sin \alpha_3 \quad (a)$$

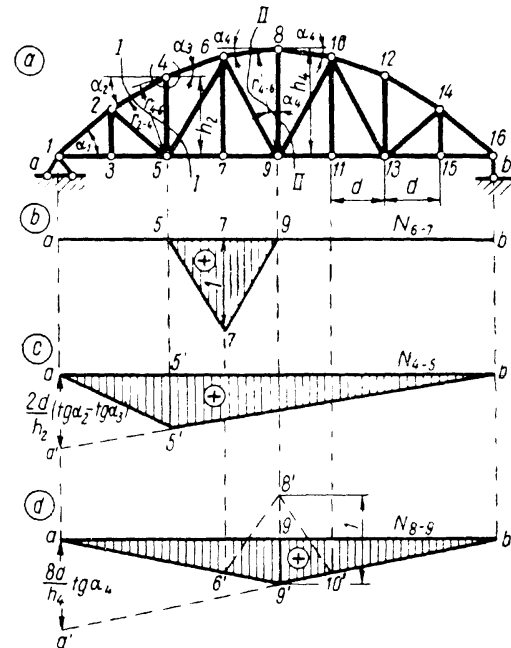
Elimineerides avaldisest (a) ülemise vöö varraste 2-4 ja 4-6 sisejõud

$$N_{2-4} = -M_5/r_{2-4} = -M_5/h_2 \cos \alpha_2$$

$$N_{4-6} = -M_5/r_{4-6} = -M_5/h_2 \cos \alpha_3$$

saadakse varda 4-5 sisejõu avaldis kujul

$$N_{4-5} = (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_3) M_5/h_2 \quad (12.5)$$



Joon. 12.3

Posti 4-5 pikijõu mõjujoone ordinaadid on proportsionaalsed momenti M_5 mõjujoone ordinaatidega. Proportsionaalsustegur on $(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_3)/h_2$. Vasaku toe vertikaalile kantakse lõik $2d(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_3)/h_2$ (joon. 12.3, *c*).

Sõlme 8 tasakaalu tingimusest

$$\Sigma Y=0; \quad -N_{8-9} - 2N_{6-8} \sin \alpha_4 = 0$$

saadakse

$$N_{8-9} = -2N_{6-8} \sin \alpha_4 = 2 \operatorname{tg} \alpha_4 M_9/h_4 \quad (12.6)$$

kuna $N_{6-8} = -M_9/h_4 \cos \alpha_4$.

Mõjujoon on kujutatud joonisel 12.3, *d*.

Kui koormus mõjub ülemisel vööl sõlmes 8, siis on posti 8-9 pikijõud

$$N_{8-9} = 4d \operatorname{tg} \alpha_4/h_4 - 1$$

Mõjujoon on kujutatud joonisel 12.3, *d* punktiirjoonega.

12.05. Kolmnurksõrestik

Kolmnurksõrestiku (joon. 12.4, a) keskmise posti 8-9 ja äärmiste postide 2-3 ning 14-15 pikijõudude mõjujooned moodustatakse sõlmede projektsioonide tasakaalu tingimuste abil. Kõigi teiste varraste sisejõudude mõjujooned kujutatakse momendipunkti võttega.

Ülemise vöö varda 4-6 momendipunktiks on sõlm 7. Vasaku toe vertikaalile kantava löigu pikkus on $3d/r_{4-6} = 3d/3d \sin \alpha = 1/\sin \alpha$. Sama pikkus saadakse ka kõigi teiste keskmisest postist vasakul asuvate ülemise vöö varraste jaoks (joon. 12.4, b).

Alumise vöö varda 5-7 momendipunktiks on sõlm 4. Vasaku toe vertikaalile kantava löigu pikkus on $2d/(h/2) = 4d/h = \operatorname{ctg} \alpha$. Sama löigu pikkus on ka teistel keskmisest postist vasakul pool asuvate alumise vöö varraste mõjujoontel (joon. 12.4, c).

Diagonaali 4-7 momendipunktiks on toesõlm 1. Kui koormus asub paremal pool lõiget I-I, siis tingimusest $\Sigma M_1 = 0$: $N_{4-7} r_{4-7} = 0$ järeldub, et $N_{4-7} = 0$ ja mõjujoone parempoolse sirge ühtib abstsissiteljega. Momendipunkti ühtimise tõttu toesõlmega a vaadeldakse arvutuskeemi vasaku osa tasakaalu ka siis, kui ühikjõud mõjub vasakul pool lõiget. Tingimusest $\Sigma M_1 = 0$

$$1x + N_{4-7} r_{4-7} = 0$$

avaldatakse diagonaali 4-7 mõjujoone vasakpoolse sirge võrrand

$$N_{4-7} = -x/r_{4-7} \quad (0 \leq x \leq 2d) \quad (a)$$

Kui $x = 2d$, siis

$$N_{4-7} = -2d/r_{4-7} = -2d/3d \sin \beta_3 = -2/3 \sin \beta_3$$

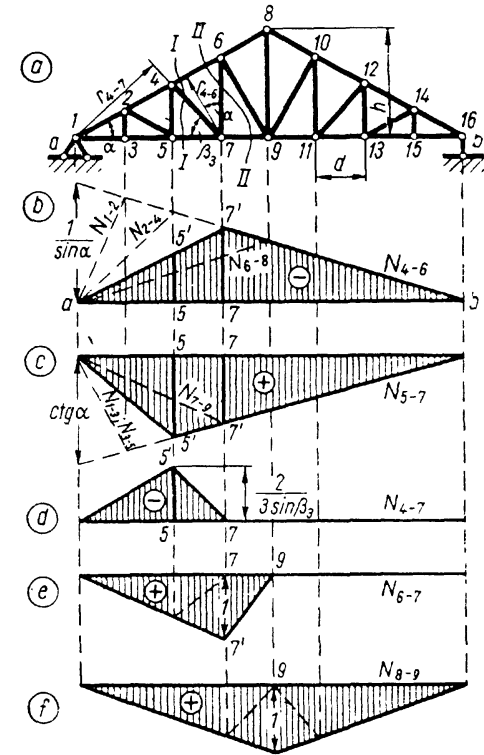
Sõrestiku vasaku poole postide momendipunktiks on toesõlm 1. Nende postide mõjujoonte parempoolsed sirged ühtivad abstsissiteljega. Ühikjõu mõjumisel vasakul pool lõiget (joon. 12.4, a lõige II-II) avaldatakse tingimusest $\Sigma M_1 = 0$

$$1x - N_{6-7} 3d = 0$$

posti 6-7 pikijõu mõjujoone vasakpoolse sirge võrrand

$$N_{6-7} = x/3d \quad (0 \leq x \leq 3d) \quad (b)$$

Suurim ordinaat $N_{6-7} = 1$ on posti vertikaalil ($x = 3d$).



Joon. 12.4

Sõlme 8 kohta koostatud tasakaalutingimustest

$$\begin{aligned} \Sigma Y = 0; & \quad -N_{8-6} \cos \alpha + N_{8-10} \cos \alpha = 0 \\ \Sigma Y = 0; & \quad -N_{8-9} - N_{8-6} \sin \alpha - N_{8-10} \sin \alpha = 0 \end{aligned}$$

leitakse

$$\begin{aligned} N_{8-6} &= N_{8-10}; \quad N_{8-9} = -N_{8-6} \sin \alpha - N_{8-10} \sin \alpha = \\ &= -2N_{8-6} \sin \alpha \end{aligned}$$

ja kuna $N_{8-6} = -M_9/h \cos \alpha = -M_9/4d \sin \alpha$, siis

$$N_{8-9} = M_9/2d \quad (c)$$

Mõjujoone suurim ordinaat on sõlme 9 kohal, kus $M_9 = 2d$, $N_{8-9} = 2d/2d = 1$.

Postide pikijõudude mõjujooned olenevad sõidutee asukohast. Postide 6-7 ja 8-9 pikijõudude mõjujooned, kui ühikjõud mõjub ülemise vöö sõlmedes, on kujutatud joonisel 12.4, e ja f punktiirjoontega.

12.06. K-võrguga paralleelvöödega sõrestik

Ülemise vöö varda 8-10 pikijõu mõjujoone kujutamiseks eraldatakse arvutuskeem lõikega *I-I* kaheks osaks. Lõige läbib nelja varrast. Kahe posti ja alumise vöö sihtide lõikepunkt sõlm 7 on ülemise vöö varda 8-10 momendipunktiks. Alumise vöö varda 7-11 momendipunkt sõlm 8 asub samal vertikaalil kui ülemise vöö varda 8-10 momendipunkt 7. Sama paneeli vööde varraste mõjujooned erinevad ainult märgi poolest (joon. 12.5, *b* ja *c*).

Diagonaalide 9-10 ja 9-11 pikijõudude mõjujoonte kujutamiseks leitakse algul sõlme 9 tasakaalu tingimusest $\Sigma X=0$: $N_{9-10} \cos \alpha + N_{9-11} \cos \alpha = 0$, et diagonaalide 9-10 ja 9-11 pikijõud on võrdsed, kuid vastupidiste märkidega:

$$N_{9-10} = -N_{9-11} \quad (a)$$

Ühikjõu mõjumisel lõikest *II-II* (joon. 12.5, *a*) paremal avaldatakse võrduse (a) alusel arvutuskeemi vasaku osa tasakaalu tingimusest $\Sigma Y=0$

$$A + N_{9-10} \sin \alpha - N_{9-11} \sin \alpha = 0$$

diagonaalvarraste pikijõud

$$N_{9-11} = -N_{9-10} = A/2 \sin \alpha \quad (3d \leq x \leq l) \quad (b)$$

Sõrestiku arvutuskeemi parempoolse osa tasakaalu tingimusest $\Sigma Y=0$ avaldatakse mõjujoonte vasakpoolsete sirgete võrrandid

$$N_{9-11} = -N_{9-10} = -B/2 \sin \alpha \quad (0 \leq x \leq 2d) \quad (c)$$

Mõjujoonte võrrandid (b) ja (c) väljendatakse avaldisega

$$N_{9-11} = -N_{9-10} = Q_3/2 \sin \alpha \quad (d)$$

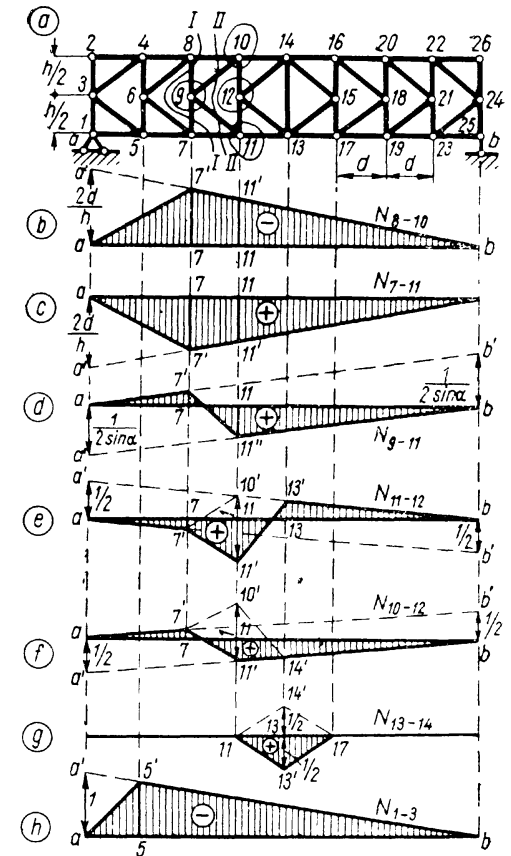
Joonisel 12.5, *d* on kujutatud diagonaali 9-11 mõjujoon.

Postide pikijõudude mõjujooned kujutatakse sõlmede tasakaalu tingimustega. Kui koormus ei asu kolmandas ja neljandas paneelis ($0 \leq x \leq 2d$ ja $4d \leq x \leq l$), siis sõlme 11 tasakaalu tingimusest $\Sigma Y=0$: $N_{11-12} + N_{9-11} \sin \alpha = 0$, avaldatakse posti 11-12 pikijõud

$$N_{11-12} = -N_{9-11} \sin \alpha = -Q_3/2 \quad (e)$$

Kui ühikjõud on sõlmes 11, siis sõlme tasakaalu tingimusest $\Sigma Y=0$ leitakse posti pikijõud

$$N_{11-12} = -Q_3/2 + 1 \quad (f)$$



Joon. 12.5

Posti mõjujoon kulgeb läbi punktide a , $7'$, $11'$, $13'$, b (joon. 12.5, *e*). Koormuse liikumisel ülemisel vööl on sõlm 11 alati koormamata ja mõjujoon kulgeb läbi punktide a , $7'$, $10'$ ja b .

Sõlme 10 tasakaalu tingimusest $\Sigma Y=0$ leitakse posti 10-12 pikijõu mõjujoone võrrand

$$N_{10-12} = Q_3/2 \quad (g)$$

Mõjujoon koormuse liikumisel alumisel vööl on kujutatud joonisel 12.5, *f*. Kui sõidutee asub ülemisel vööl, siis kulgeb mõjujoon läbi punktide a , $7'$, $10'$, $14'$, b .

Alumisel vööl asuva sõidutee puhul kujutatakse kesk-mise posti 13-14 pikijõu mõjujoon ülemise vöö sõlme 14 tasakaalu tingimusega $\Sigma Y=0$. Kui ühikjõud ei asu neljandas ja viiendas paneelis, siis nende paneelide põikjõud on võrdsed ning diagonaalide 12-14 ja 14-15 pikijõud on võrdsed, kuid vastupidiste märkidega. Sõlme 14 tasakaalu tingimusest järeldub, et $N_{13-14}=0$. Kui ühikjõud on sõlmes 13, siis $Q_4=1/2$ ja $Q_5=-1/2$ ning diagonaalide 12-14 ja 14-15 pikijõud on võrdsed:

$$N_{12-14} = N_{14-15} = -Q_4/2 \sin \alpha = -1/4 \sin \alpha \quad (f)$$

Sõlme 14 tasakaalu tingimusest $\Sigma Y=0$

$$-N_{14-13} - N_{12-14} \sin \alpha - N_{14-15} \sin \alpha = 0$$

avaldatakse posti 13-14 pikijõud

$$\begin{aligned} N_{14-13} &= -N_{12-14} \sin \alpha - N_{14-15} \sin \alpha \\ &= -2N_{12-14} \sin \alpha = 1/2 \end{aligned} \quad (g)$$

Mõjujoon on kujutatud joonisel 12.5, g. Ülemisel vööl asuva sõiduteega on mõjujoone ordinaadid negatiivsed (joon. 12.5, g kriipsjoontega).

Posti 1-3 pikijõu mõjujoon (joon. 12.5, h) kujutatakse sõlme 1 tasakaalu tingimusega $\Sigma Y=0$.

Sõiduteega alumisel vööl on mõjujooneks a-5'-b ja ülemisel vööl a-a'-b.

12.07. Konsolsõrestik

Konsolsõrestiku varraste pikijõudude mõjujoonte kujutamisel on otstarbekas vaadelda lõikega eraldatud arvutuskeemi vaba otsa tasakaalu. Ühikjõu mõjumisel lõike ja toe vahel on läbilõigatud varraste sisejõud nullid.

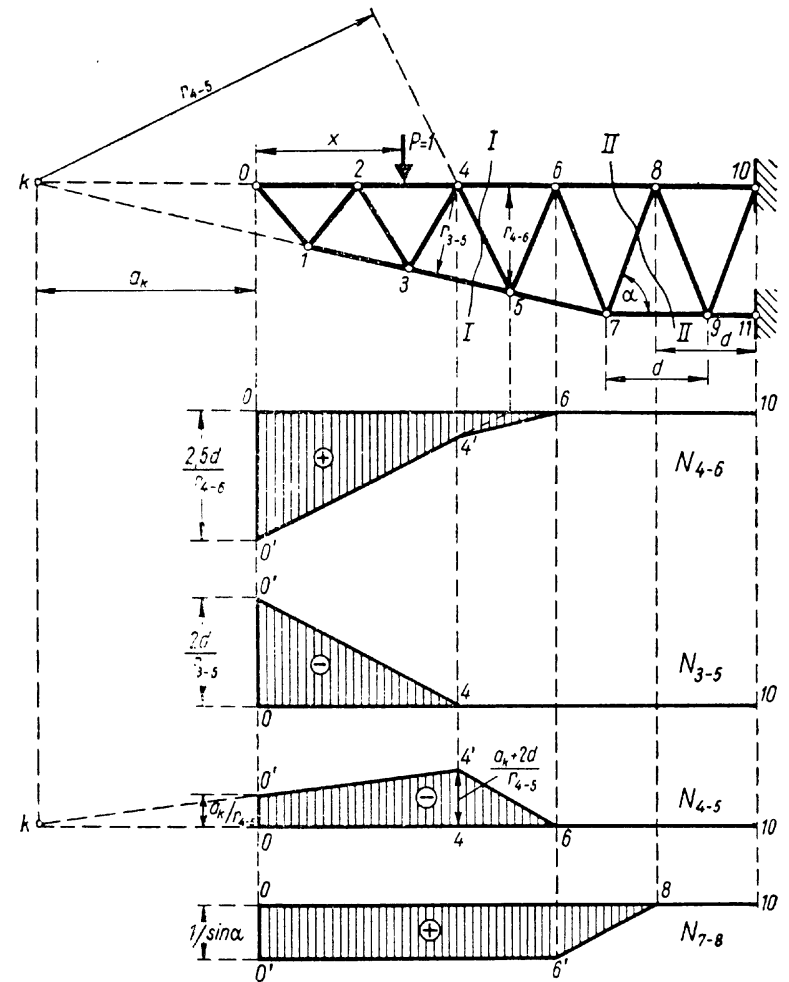
Lõikest I-I (joon. 12.6, a) vasakul pool asuva osa tasakaalu tingimusest $\Sigma M_5=0$

$$-(2,5d - x) \cdot 1 + N_{4-6} r_{4-6} = 0$$

saadakse ülemise vöö yarda 4-6 mõjujoone võrrand vahemiku $0 \leq x \leq 2d$ jaoks

$$N_{4-6} = (2,5d - x) / r_{4-6}$$

Sõlme 0 kohal ($x=0$) on ordinaadiks $N_{4-6} = 2,5d / r_{4-6}$ ja kui $x=2,5d$, siis $N_{4-6} = 0$. Läbilõigatud paneeli ulatusel on mõjujooneks sirge 4'-6.



Joon. 12.6

Alumise vöö yarda 3-5 momendipunktiks on sõlm 4, mille kaugus konsooli vabast otsast on $2d$ ja yarda 3-5 sihist r_{3-5} . Sõlme 0 vertikaalile kantakse lõik 0-0', mille pikkus on $2d / r_{4-5}$. Momendipunkti vertikaalil on mõjujoone ordinaat null.

Diagonaali 4-5 pikijõu mõjujoone kujutamiseks kan-

takse sõlme 0 vertikaalile lõik $0-0'$ pikkusega a_k/r_{4-5} , milles a_k ja r_{4-5} on momendipunkti k kaugus vastavalt sõlme 0 vertikaalile ja diagonaali $4-5$ sihist. Läbi lõigu otspunkti $0'$ ja momendipunkti vertikaalil asuva nullpunkti k tõmmatakse sirge kuni läbilõigatud paneelini. Parem pool lõiget on mõjujoone ordinaadid nullid ja läbilõigatud paneelis on mõjujooneks sirge $4'-6$.

Lõike $II-II$ puhul on läbilõigatud võõde vardad paralleelsed. Diagonaali $7-8$ pikijõu mõjujoon kujutatakse tasakaalutingimusega $\Sigma Y=0$. Kui ühikjõud on paremal pool lõiget, siis $N_{7-8}=0$ ja kui vasakul pool lõiget, siis $N_{7-8}=1/\sin \alpha$. Läbilõigatud paneelis muutub mõjujoon lineaarselt.

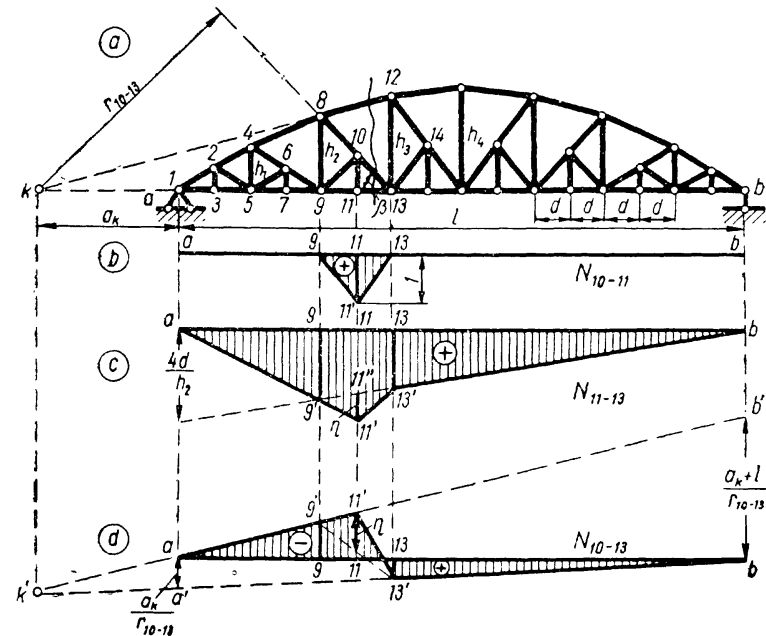
12.08. Sprengelsõrestik

Sprengelsõrestiku (joon. 12.7, *a*) varrastes, mis kuuluvad ainult sprengli juurde ($2-3$, $2-5$, $5-6$, $6-7$, ...), tekiavad sisejõud ainult siis, kui vastava sprengli sõlm (3 , 7 , ...) on koormatud. Joonisel 12.7, *b* on kujutatud sprengli posti $11-10$ pikijõu mõjujoon. Varraste, milles ühe paneeli pikkuse sõrestikuosa (joon. 12.8, *a*) sprenglisõlme koormamisel sisejõud võrduvad nulliga, mõjujooned ühtivad sprenglita sõrestiku varraste mõjujoontega (joon. 12.1). Joonisel 12.7, *a* kujutatud sprengelsõrestikul on niisugusteks varrasteks postid, ülemise võõ vardad ja diagonaalide ülemised pooled, sest ühe paneeli pikkuse sõrestiku (joon. 12.8, *a*) sõlme 11 koormamisel on postide $8-9$ ja $12-13$, ülemise võõ varda $8-12$ ning diagonaali ülemise poole $8-10$ sisejõud nullid.

Sprengelsõrestiku (joon. 12.7, *a*) sprengli sõlme 11 tasakaalu tingimusest $\Sigma X=0$ järeldub, et varraste $9-11$ ja $11-13$ pikijõud on võrdsed ja momendipunkti sõlme 8 (lõige $I-I$) kohta koostatud momentide tasakaalu tingimusest saadakse

$$N_{9-11} = N_{11-13} = M_8/h_2 \quad (a)$$

Mõjujoone parempoolse sirge ($6d \leq x \leq l$) kujutamiseks kantakse toe a vertikaalile lõik $4d/h_2$. Mõjujoone vasakpoolse sirge ($0 \leq x \leq 5d$) kujutamiseks ühendatakse momendipunkti 8 vertikaali ja mõjujoone parempoolse sirge pikenduse lõikepunkt $9'$ toe a vertikaalil nullpunk-



Joon. 12.7

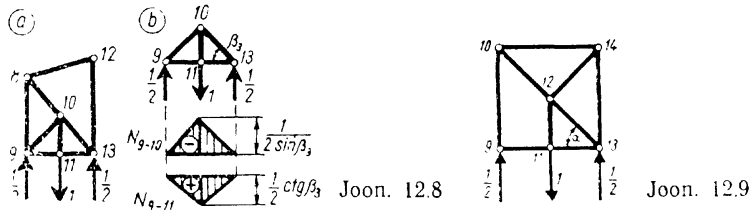
tiga a . Seda sirget pikendatakse paremale poole kuni sõlme 11 vertikaaliga lõikumiseni punktis $11'$ (läbilõigatud paneelini). Läbilõigatud paneelis, sõlmede 11 ja 13 vahel, on mõjujoone sirgeks $11'-13'$.

Varda $9-11$ või $11-13$ mõjujoont $a-9'-11'-13'-b$ võib vaadelda põhisõrestiku mõjujoone $a-9'-b$ ja sprengli mõjujoone $9'-11'-13'$ summana. Sõlmede 11 , 10 ja 9 tasakaalu tingimustest leitakse sprengli varraste pikijõud (joon. 12.8)

$$\begin{aligned} N_{10-11} &= 1 \\ N_{9-10} &= N_{10-13} = -1/2 \sin \beta_3 \\ N_{9-11} &= N_{11-13} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \beta_3 \end{aligned} \quad (b)$$

Mõjujooned on kujutatud joonisel 12.8, *b*.

Alumise võõ varda $9-11$ ($11-13$) pikijõu mõjujoone kolmnurkade $a-9'-a'$ ja $11'-9'-11''$ sarnasuse põhjal kehtib võrdus



Joon. 12.8

Joon. 12.9

$$\frac{4d}{h_2} / 4d = \eta/d$$

millest

$$\eta = \frac{d}{h_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2d}{h_2} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \beta_3$$

mis võrdub sprengli varraste 9-11 ja 11-13 pikijõuga (b), kui sprengli sõlm 11 on koormatud (joon. 12,8, b).

Diagonaali alumise poole 10-13 pikijõu mõjujoone kujutamisel lõike I-I abil on momendipunktiks ülemise ja alumise vöö varraste sihtide lõikepunkt k . Vasakpoolse toe vertikaalile kantakse lõik a_k/r_{10-13} , mille otspunkt a' läbib parempoolse sirge ($6d \leq x \leq l$) siht. Vasakpoolse sirge siht lõikub parempoolse sirge pikendusega momendipunkti vertikaalil punktis k' . Vasakpoolne sirge on kehtiv sõlmeni 11 ($0 \leq x \leq 5d$). Läbilõigatud paneelis, sõlmede 11 ja 13 vahel, on mõjujoone sirgeks 11'-13' (joon. 12,7, d).

Joonisel 12.10, a kujutatud sprengelsõrestikus mõjutavad sprenglid sisejõudusid ülemises vöös, postides ja diagonaalide ülemistes pooltes. Ühe paneeli pikkuse sõrestikuosa sprengli sõlme koormamisel ühikjõuga (joon. 12.9) järeldub sõlmede 9, 11 ja 13 tasakaalu tingimustest, et

$$\begin{aligned} N_{9-11} &= N_{11-13} = N_{12-13} = 0 \\ N_{9-10} &= N_{13-14} = -1/2 \end{aligned} \quad (c)$$

Sõlmede 12 ja 10 tasakaalu tingimustest saadakse, et

$$N_{10-12} = N_{12-14} = 1/2 \sin \alpha \quad (d)$$

$$N_{10-14} = -\operatorname{ctg} \alpha / 2 \quad (e)$$

Sprengelsõrestiku (joon. 12.10, a) ülemise vöö varda 10-14 pikijõu mõjujoon (joon. 12.10, b) kujutatakse lõike I-I abil. Sõidutee on lõigatud läbi sõlmede 9 ja 11 vahel. Mõjujoone vasakpoolne sirge $a-9'$ kehtib toest a kuni sõlmeni 9 ja parempoolne sirge $11'-b$ sõlmest 11 kuni toeni b .

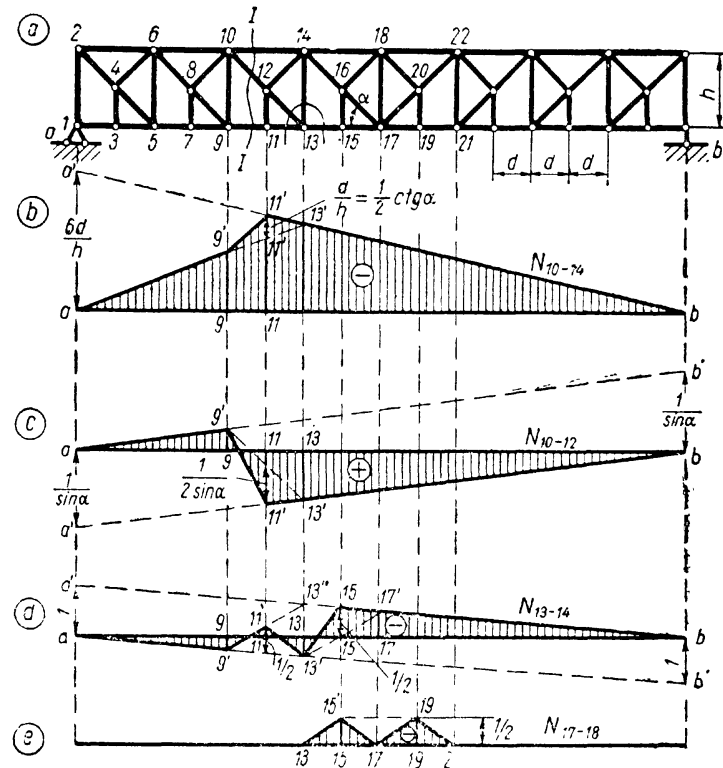
Sirgete $a-9'$ ja $11'-b$ sihid lõikuvad momendipunkti 13 vertikaalil punktis $13'$. Läbilõigatud paneeli kohal on mõjujoone sirgeks $9'-11'$.

Lõike I-I abil kujutatakse ka diagonaali 10-12 pikijõu mõjujoon (joon. 12.10, c), mille avaldiseks on

$$N_{10-12} = Q_5 / \sin \alpha \quad (f)$$

Vasakpoolne sirge on kehtiv sõlmede 1 ja 9 vahel ning parempoolne sirge sõlme 11 ja toe b vahel. Sõlmede 9 ja 11 vahel on mõjujoone sirgeks $9'-11'$.

Posti 13-14 mõjujoont (joon. 12.10, d) kujutatakse kahel viisil: 1) liites põhisõrestiku ja joonisel 12.9 kujutatud abisõrestiku postide 13-14 mõjujooned (abisõrestikes



Joon. 12.10

leitakse mõjujooned sõlmede 11 ning 15 koormamisel) ja 2) sõlme 13 kohta koostatud tasakaalutingimusega.

Sõlme 13 kohta koostatud tasakaalutingimusest $\Sigma Y=0$ avaldatakse posti 13-14 pikijõud. Kui sõlm ei ole koormatud ($0 \leq x \leq 5d$ ja $7d \leq x \leq l$), siis

$$N_{13-14} = -N_{12-13} \sin \alpha = -Q_{9-13} \quad (j)$$

ja kui sõlm on koormatud ($5d \leq x \leq 7d$), siis

$$N_{13-14} = -Q_{9-13} + 1 \quad (k)$$

Pikijõu avaldis (j) on kehtiv toest a kuni sõlmeni 11 ja sõlmest 15 kuni toeni b . Nendes vahemikes moodustavad mõjujoone sirglõigud $a-9'$ ja $9'-11'$ ning $15'-b$. Sõlme 13 kohal kujutab esimene liige avaldises (k) lõiku 13-13'', millele lõigu $+1$ liitmise teel saadakse mõjujoone ordinaat 13-13'. Sõlmede 11 ja 13 ning 13 ja 15 vahel muutub mõjujoon lineaarselt.

Keskmise posti 17-18 mõjujoon kujutatakse sõlme 18 tasakaalu tingimusega $\Sigma Y=0$. Kui sõlmed 15 ja 19 on koormamata ($0 \leq x \leq 6d$, $x=8d$ ja $10d \leq x \leq l$), siis on varraste 16-18 ja 18-20 sisejõud nullid. Kui ühikjõud on sõlmes 15 ($x=7d$) või 19 ($x=9d$), siis on posti 17-18 pikijõud $-1/2$. Mõjujoon on kujutatud joonisel 12.10, e.

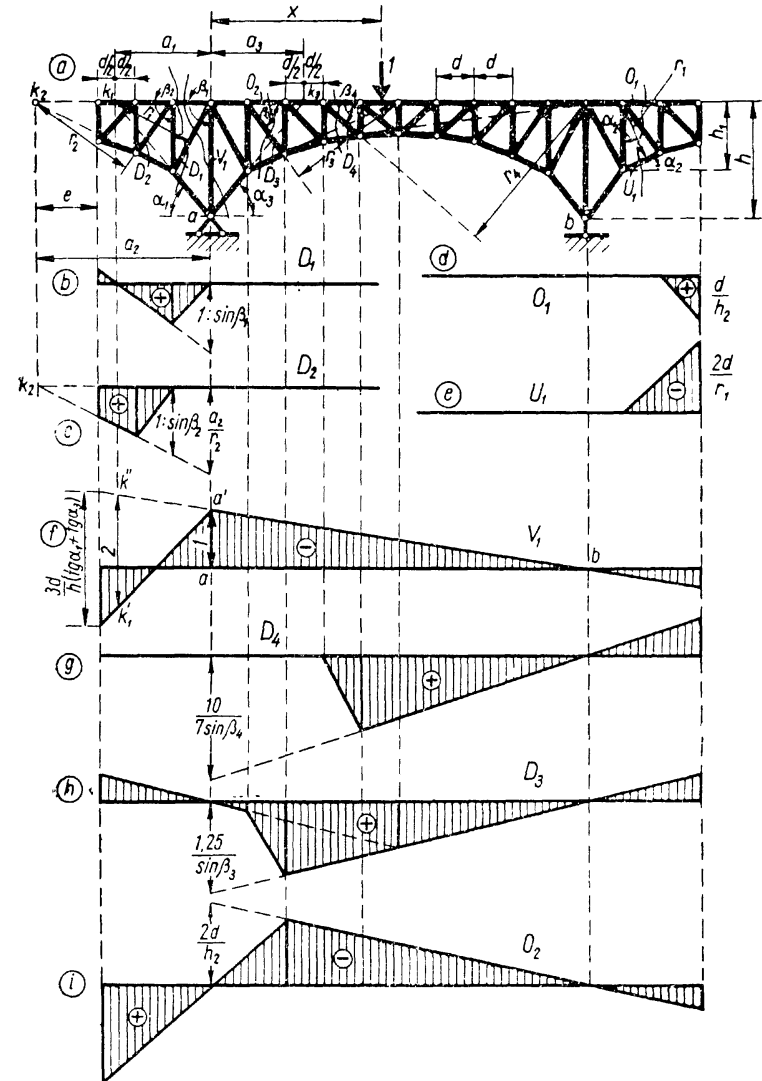
12.09. Konsoolidega talasõrestik

Konsoolidega talasõrestiku (joon. 12.11, a) tugede vahel asuvate varraste pikijõudude mõjujooned kujutatakse analoogiliselt talasõrestiku varraste pikijõudude mõjujoontega (joon. 12.11, g, h ja i). Vasakpoolsed sirged läbivad nullpunkti toe a vertikaalil ja on mõjujooneks vasaku konsooli otsast kuni läbilõigatud paneelini. Parempoolsed sirged läbivad nullpunkti toe b vertikaalil ja on mõjujooneks läbilõigatud paneelist kuni parempoolse konsooli otsani.

Konsooli varrastes tekivad sisejõud ainult samal konsoolil lõike ja vaba otsa vahel mõjuvast koormusest. Läbilõigatud paneelist toe pool ühtivad konsooli varraste pikijõu mõjujooned abstsissiteljega (joon. 12.11, b, c, d ja e).

Ühikjõu mõjumisel paremal pool tuge a on vasakpoolsed konsooli varraste sisejõud nullid. Järelikult on sõlmes a ühendatud alumise võõ varraste pikijõud nullid ja posti pikijõud (surve) võrdub toereaktsiooniga A (joon. 12.11, f).

Ühikjõu mõjumisel vasakul pool tuge a ($-3d \leq x \leq 0$)



Joon. 12.11

punkti k_3 suhtes koostatud momentide tasakaalu tingimusest

$$Aa_3 + V_1 a_3 + D_1 \sin \beta_1 \cdot a_3 - 1(a_3 - x) = 0$$

leitakse posti pikijõud

$$V_1 = -A - D_1 \sin \beta_1 + 1 - x/a_3 \quad (a)$$

Momentide tasakaalu tingimusest punkti k_1 suhtes

$$1(a_1 + x) - D_1 \sin \beta_1 \cdot a_1 = 0$$

avaldatakse diagonaali D_1 pikijõud

$$D_1 = (1 + x/a_1) / \sin \beta_1 \quad (b)$$

Valemiga (b) elimineeritakse avaldisest (a) diagonaali sisejõud D_1 :

$$V_1 = -A - x/a_1 - x/a_3 \quad (c)$$

Joonisel 12.11, a esitatud sõrestikul $a_1 = a_3 = 2,5d$. Kui $x = -a_1$, siis $V_1 = A + 2$ ja vertikaalse löigu $k'_1 - k''_1$ pikkus toereaktsiooni A mõjujoone sirge $b - k''_1$ ning posti V_1 mõjujoone vasakpoolse sirge $a' - k'_1$ vahel on kaks mõjujoone ordinaadi ühikut.

Kui $a_1 \neq a_3$, kusjuures $a_1 = h \operatorname{ctg} \alpha_1$ ja $a_3 = h \operatorname{ctg} \alpha_3$, siis posti pikijõu V_1 avaldis (c) omab kuju

$$V_1 = -A - x(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_3) / h \quad (d)$$

Ühikjõu mõjumisel konsooli vabal otsal ($x = -3d$) on

$$V_1 = -A + 3d(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_3) / h$$

12.10. Mitmesildeline talasõrestik

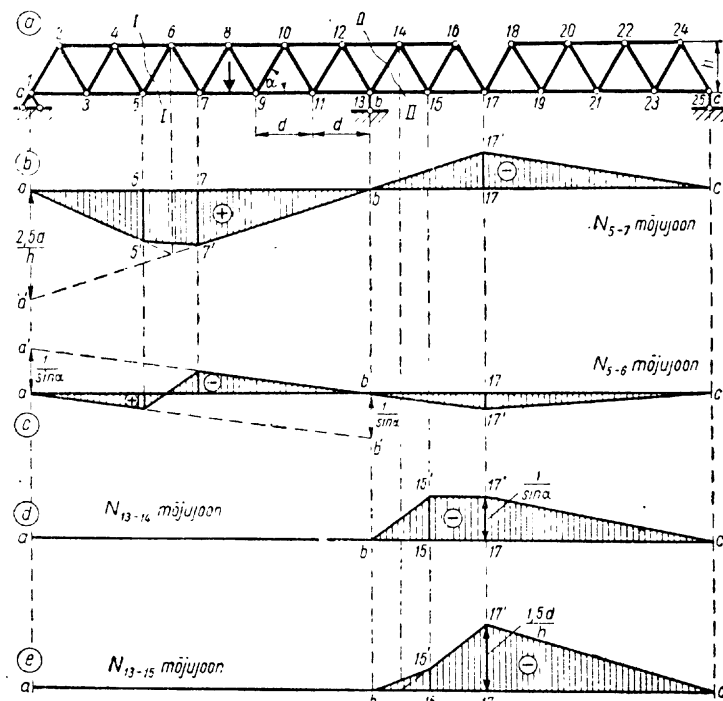
Mitmesildelise talasõrestiku varda pikijõu mõjujoon kujutatakse analoogiliselt mitmesildelise tala paindemomendi või põikjõu mõjujoonega.

Joonisel 12.12, a esitatud kaheksildelisel talasõrestikul on põhiosaks konsooliga talasõrestik sõlmest 1 kuni sõlmeni 17 ja lisaosaks talasõrestik sõlmest 17 kuni sõlmeni 25.

Alumise vöö varda 5-7 pikijõu avaldis saadakse momentide tasakaalu tingimusest sõlme 6 kohta:

$$N_{5-7} = M_6 / h$$

Mõjujoone põhiosa parempoolseks sirgeks on $7' - 17'$ ja vasakpoolseks $a - 5'$. Ühikjõu mõjumisel lisaosal (sõlmest 17



Joon. 12.12

kuni sõlmeni 25) muutuvad põhiosa varrastes pikijõud lineaarselt ja on nullid, kui ühikjõud asub toel c (joon. 12.12, b).

Diagonaalide 5-6 ja 13-14 pikijõudude mõjujooned kujutatakse projektsioonide tingimusega $\Sigma Y = 0$ (joon. 12.12, c ja d). Ühikjõu mõjumisel sõlmest 13 vasakul pool on diagonaali 13-14 pikijõud null ning sõlmede 15 ja 17 vahel konstantne

$$N_{13-14} = -1 / \sin \alpha$$

Läbilõigatud paneeli (sõlmede 13 ja 15 vahel) ning lisaosa ulatusel muutub pikijõu mõjujoon lineaarselt.

Alumise vöö varda 13-15 pikijõu mõjujoon (joon. 12.12, e) kujutatakse sõlme 14 kohta koostatud tasakaalutingimusega $\Sigma M_{14} = 0$ (löige II-II).

12.11. Mõjujoonte konstrueerimine pooluste plaani abil

Pooluste plaani meetodit kasutatakse lihtvõrguga sõrestike mõjujoonte kujutamiseks.

Joonisel 12.13, *a* esitatud sõrestiku ülemise vöö varda 4-6 pikijõu mõjujoone kujutamiseks eemaldatakse arvutuskeemist see varras. Varda 4-6 eemaldamisega tekkiv mehhanism koosneb kahest geomeetriliselt muutumatust kujundist 1 ja 2. Mehhanismile mõjuva ühikjõu tasakaalustamiseks rakendatakse sõlmedesse 4 ja 6 kaks võrdset vastupidi suunatud jõudu N_{4-6} (joon. 12.13, *b*).

Kujundi 1 peapoolus 10 ühtib liikumatu toeliigendiga *a*. Kujundite 1 ja 2 vastastikuse liikumise hetkpoolus 12 asub sõlmes 7, mis ühendab mõlemat kujundit. Kujundi 2 peapoolus 20 asub toesideme *b* ja sirge 10-12 sihtide lõikepunktis, s.t. sõlmes 16. Mehhanismi alumise vöö vertikaalsirde epüür on kujutatud joonisel 12.13, *c*. Epüüri nullpunktideks on peapooluste 10 ja 20 projektsioonid abstsissiteljele (*a* ning *b*). Hetkpooluse 12 siire 7-7' kujunditel 1 ja 2 on võrdne. Vertikaalsirde epüüri vasakpoolne sirge *a-7'* ja parempoolne sirge *b-7'* lõikuvad hetkpooluse 12 vertikaalil.

Ühikjõu rakenduspunkti siire δp on negatiivne, sest mehhanismi kujundite 1 ja 2 alumise vöö vertikaalsiirded

on alt üles. Siirde epüürist *a-7'-b* järeldeb, et kujund 1 pöördub kujundi 2 suhtes vastupäeva ümber hetkpooluse 12. Järelikult sõlmed 4 ja 6 eemalduvad teineteisest ja sisejõududele, mis asendavad varda 4-6 mõju, vastav paigutis δr on negatiivne. Paigutised δp ja δr on mõlemad sama märgiga ning mõjujoone N_{4-6} ordinaadid on negatiivsed.

Mõjujoone (siirde epüüri) ordinaadi mõõtkava määramisel antakse mehhanismi kujunditele paigutised, mille juures varda pikijõule vastav paigutis võrdub miinus ühega ($\delta r = -1$). Siirde epüüri ordinaadid võrduvad siis varda pikijõu mõjujoone ordinaatidega:

$$N_{4-6} = -\delta p / \delta r = -\delta p / (-1) = \delta p$$

Mõjujoone ordinaadi mõõtkava ühiku määramisel ei ole oluline, kas pikijõule vastav ühikpaigutis on negatiivne või positiivne, kuna mõjujoone märgid leitakse tavaliselt mõõtkavast lahus. Varda 4-6 pikijõule vastava ühikpaigutise $\delta r_{4-6} = 1$ puhul on mehhanismi kujundite 1 ja 2 vastastikuse pööre $\varphi_{12} = 1/r_{4-6}$, milles r_{4-6} on kujundite 1 ja 2 vastastikuse liikumise hetkpooluse 12 kaugus eemaldatud varda 4-6 sihist. Poolusest 12 r_{2-4} kaugusel asuval vertikaalil siirde epüüri vasak- ja parempoolse sirge sihtide vahel olev lõik *e-e'* on mõjujoone ordinaadi mõõtkava ühikuks (joon. 12.13, *c*).

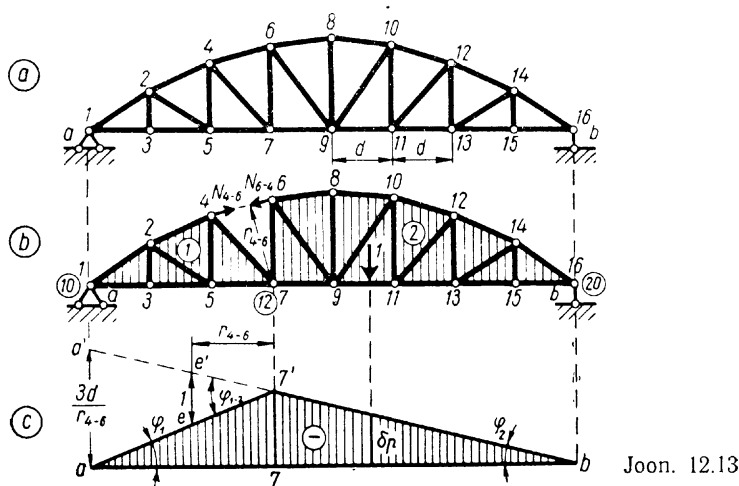
Hetkpoolus 12 on toe *a* vertikaalist $3d$ kaugusel. Vasakpoolse toe vertikaalil mõjujoone vasak- ja parempoolse sirge sihtide vahel asuva lõigu pikkus on

$$3d \cdot \varphi_{12} = 3d \cdot 1/r_{4-6} = 3d/r_{4-6}$$

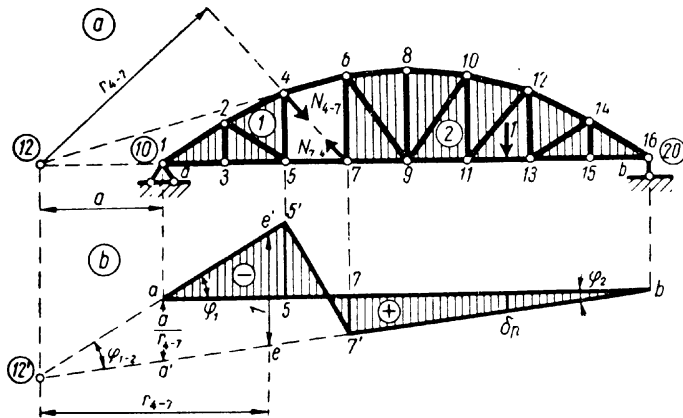
milline tulemus saadi ka staatika meetodiga.

Joonisel 12.14, *a* on eemaldatud diagonaal 4-7 ja asendatud kaksikjõuga N_{4-7} . Mehhanismi alumise vöö vertikaalsirde epüür on kujutatud joonisel 12.14, *b*. Siirde epüüri sirgete *a-5'* ja *b-7'* nullpunktid asuvad vastavalt peapooluseid 10 ning 20 läbivatel vertikaalidel. Nende sirgete pikenduste lõikepunkt 12' on kujundite 1 ja 2 kõrvalpooluse 12 vertikaalil. Varda 5-7 siirde epüüri kujutab sirge *5'-7'*.

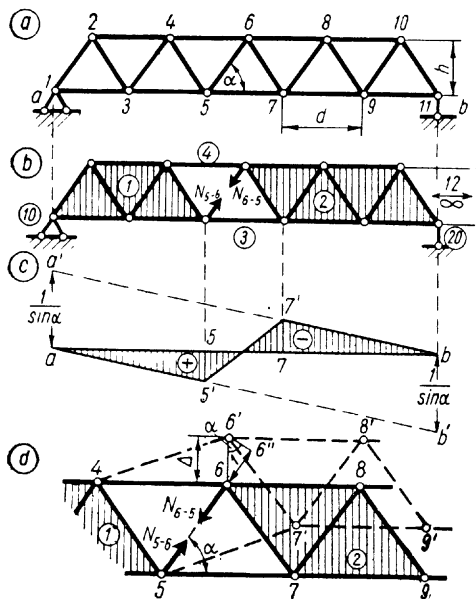
Kujundid 1 ja 2 on pöördunud ümber peapooluste vastupäeva (joon. 12.14, *b*) ning sõlmed 4 ja 7 eemalduvad teineteisest. Paigutis δr on negatiivne. Kujundil 1 on siirded alt üles ja kujundil 2 ülevalt alla. Ühikjõule vastavad siirded δp on kujundil 1 negatiivsed ja kujundil



Joon. 12.13



Joon. 12.14



Joon. 12.15

2 positiivsed. Mõjujoone vasakpoolsed ordinaadid on negatiivsed, sest δr ja δp on samade märkidega ning parempoolsed ordinaadid on positiivsed, kuna δr ja δp on erinevate märkidega.

Kujundite 1 ja 2 kõrvalpooluse 12 kaugus diagonaali 4-7 sihist on r_{4-7} . Siirde epüüri sirgete pikenduste lõikepunktist 12' moodetakse horisontaalne lõik pikkusega r_{4-7} . Lõigu otspunkti läbival vertikaalil siirde epüüri sirgete vahel asuv sirglõik $e-e'$ on mõjujoone ordinaadi mõõtkava ühikuks.

Diagonaalvõrguga paralleelvöödega sõrestiku (joon. 12.15, a) diagonaali 5-6 pikijõu mõjujoone kujutamiseks eemaldatakse varras 5-6 ja asendatakse varda mõju kaksikjõuga. Varda eemaldamisega tekkinud mehhanismi (joon. 12.15, b) kujundid 1 ja 2 jäävad võimalikus paigutusolukorras teineteisega paralleelseks, sest nad on ühendatud kahe paralleelse vardaga 3 ja 4. Joonisel 12.15, c on kujutatud mehhanismi alumise vöö siirded. Selles paigutusolukorras on kujundid 1 ja 2 pöördunud päripäeva ümber peapooluste, mille tulemusena sõlmed 5 ja 6 eemalduvad teineteisest. Kaksikjõule vastav siire on negatiivne.

Ühikjõule vastavad siirded on kujundil 1 positiivsed ja kujundil 2 negatiivsed ning samad märgid on ka mõjujoone sirgetel, kuna $\delta r < 0$.

Mõjujoone ordinaadi mõõtkava määramisel vaadeldakse kujundite suhtelist siiret eeldusel, et kujund 1 on liikumatu (joon. 12.15, d).

Võimalikus paigutusolukorras antakse kujundile 2 niisugune siire Δ , et kaksikjõule N_{6-5} vastav siire 6-6'' võrdub ühega:

$$\Delta \sin \alpha = 1$$

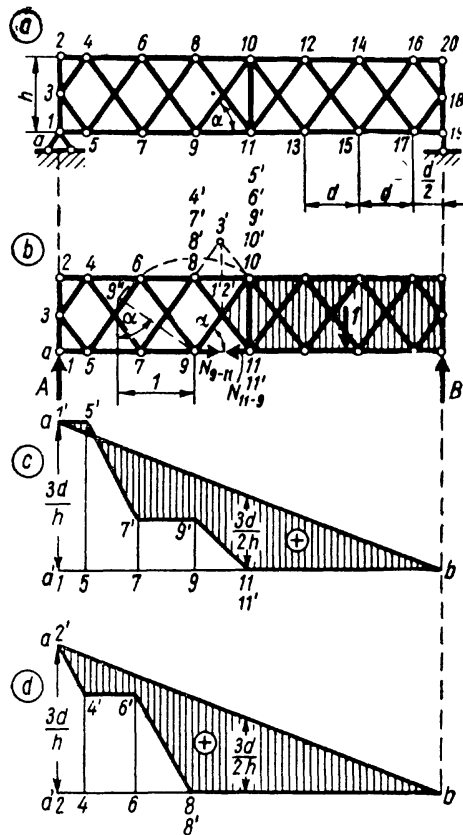
millest

$$\Delta = 1/\sin \alpha$$

12.12. Mõjujoonte konstrueerimine kiiruste plaani abil

Eelmises punktis käsitletud pooluste plaani meetod on otstarbekas, kui arvutuskeemist varda eemaldamisega tekkinud mehhanism koosneb väikesest arvust geomeetriselt muutumatutest kujunditest. Suurest hulgast geomeetriselt muutumatutest kujunditest koosneva mehhanismi koormatud vöö vertikaalsiirde epüür kujutatakse mittepolaarse pööratud kiiruste plaaniga.

Joonisel 12.16, a esitatud rombivõrguga paralleelsete vöödega sõrestiku alumise vöö varda 9-11 mõjujooned on kujutatud sõiduteega all (joon. 12.16, c) ja sõiduteega



Joon. 12.16

ülal (joon. 12.16, d). Pööratud kiiruste plaani lihtsamaks kujutamiseks eemaldatakse peale varda 9-11 veel toesidemed ja nende mõju asendatakse toereaktsioonidega. Varda 9-11 ja toesidemete eemaldamisega saadud arvutusskeemi vabadusaste on neli. Järgnevalt kinnitatakse arvutusskeemi parempoolne geomeetriselt muutumatu kujund kolme sidemega, mille tulemusena saadakse ühe vabadusastmega süsteem (joon. 12.16, b). Joonisel 12.16, b on kolm kinnitusvarrast asendatud viirutusega.

Kiiruste plaani kujutuspunktid $8'$, $10'$ ja $11'$ ühtivad sõlmedega 8 , 10 ning 11 , kuna need mehhanismi sõlmed ei siirdu. Sõlm 9 on ühendatud varda $9-10$ abil mehhanismi liikumatu sõlmega 10 . Sõlmele 9 antakse niisugune siire,

et kiiruste plaani kujutuspunkt $9'$ ühtib sõlmega 10 . Kõigi teiste sõlmede kujutuspunktid on nüüd üheselt määratud. Sõlmed 1 , 5 , 7 ja 9 on ühendatud horisontaalsete varrastega ning nende kujutuspunktid asuvad samal horisontaalil (ülemisel vööl). Sõlmede 2 , 4 , 6 ja 8 kujutuspunktid asuvad ühel horisontaalil. Sõlmest 10 väljuval varrastest moodustatud siksakil $10-9-6-5$ asuvate sõlmede kujutuspunktid ühtivad sõlmega 10 ja sõlmest 8 väljuva siksaki sõlmede 8 , 7 , 4 kujutuspunktid ühtivad sõlmega 8 . Sõlme 3 kujutuspunktiks on sirgete $4'-3' \parallel 4-3$ ja $5'-3' \parallel 5-3$ lõikepunkt. Sõlmede 1 ja 2 kujutuspunktid asuvad ülemisel vööl kujutuspunkti $3'$ vertikaalil (joon. 12.16, b). Joonisel 12.16, c on kujutatud mehhanismi alumise vöö vertikaalsiirde epüür (sõidutee all). Sõlme siirde vertikaalne komponent on võrdeline sõlme ja selle kujutuspunkti vahelise lõigu horisontaalprojektsiooniga, kuna pööratud kiiruste plaanis on kiirused (siirded) pööratud täisnurga võrra.

Vaadeldava mehhanismi sõlmede kujutuspunktid on siirdunud paremale ja kantakse esialgsest nulljoonest $a'-b$ ülespoole. Sõlmede 1 ja 5 siirete vertikaalsed komponendid on kolm korda suuremad kui sõlmedel 7 ning 9 . Murtud joon $1'-5'-7'-9'-11'-b$ kujutab mehhanismi alumise vöö vertikaalsiirde epüüri, kui toesidemed puuduvad ja mehhanismi parem pool on liikumatu. Toesõlm a on tegelikult liikumatu. Nüüd pööratakse mehhanism kui geomeetriselt muutumatu kujund toele a tagasi. Tegelik nulljoon läbib toesõlme a siirde vertikaalset komponenti kujutava lõigu $a-a'$ otspunkti a ja toe b vertikaalil nullpunkti b .

Nõutakse, et kaksikjõule N_{9-11} vastav siire võrdub ühega (joon. 12.16, b): $(9-9'') \cdot \sin \alpha = (9-9') \cdot \sin \alpha = 1$, millest

$$(9-9') = 1/\sin \alpha \quad (a)$$

Epüüri kantakse sõlme 9 siirde vertikaalne komponent $(9-9'') \cdot \cos \alpha = (9-9') \cdot \cos \alpha$, või kui arvestada avaldist (a),

$$(9-9'') \cos \alpha = \text{ctg } \alpha = d/h$$

Sõlme 1 siirde vertikaalne komponent on võrdne joonisel 12.16, b lõigu $1-1'$ horisontaalse komponendiga:

$$3(9-9') \cos \alpha = 3d/h$$

Võimalikus paigutusolukorras siirdus sõlm 9 vasakule ja eemaldus sõlmest 11 . Kaksikjõule N_{9-11} vastav paigutus

on negatiivne. Ühikjõu rakenduspunktide siirded on positiivsed (välja arvatud sõlm 5), kuna sõlmed 7, 9, ... paigutuvad tegelikult nulljoonest $a-b$ allapoole. Nende sõlmede kohal on kaksikjõule ja ühikjõule vastavad paigutatud erinevate märkidega ning mõjujoone ordinaadid positiivsed.

Mõjujoone ordinaadi märk ja mõõtkava ühik leitakse tavaliselt võimalike paigutiste printsiibiga. Joonisel 12.16, b kujutatud mehhanismi sõlmede kujutuspunktide kohta koostatud momentide võrrandist

$$A \cdot 3d - N_{9-11}h = 0$$

või, kui ühikjõud on sõlmes 11 ($A=B=0,5$),

$$0,5 \cdot 3d - N_{9-11}h = 0 \quad (b)$$

leitakse sõlme 11 kohal olev ordinaat koos märgiga

$$N_{9-11} = 1,5d/h$$

Võrrandis (b) ei esine toereaktsiooni B ja sõlmes 11 mõjuva sisejõu N_{11-9} ning ühikjõu momente, kuna sõlmed 19 ja 11 on liikumatud (joon. 12.16, b).

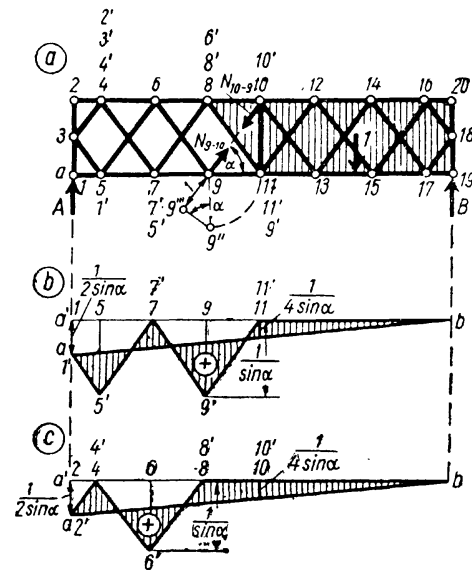
Joonisel 12.16, d on kujutatud alumise vöö varda 9-11 pikijõu mõjujoon sõrestikule sõiduteega ülal.

Sõiduteega all ja üleval on sama sõrestiku diagonaali 9-10 pikijõu mõjujooned kujutatud joonistel 12.17, b ja c . Tugede ja diagonaali 9-10 eemaldamisega saadud arvutuskeemi parem pool moodustab geomeetriliselt muutu-matu kujundi, mis mittepolaarse pööratud kiiruste plaani kujutamisel võetakse liikumatuks (joonisel 12.17, a viirutatud). Sõlmele 9, mis on vardaga 9-11 ühendatud liikumatu sõlme 11 külge, antakse niisugune kiirus (siire), et kiiruste plaani kujutuspunkt 9' ühtib sõlme 11.

Mehhanismi alumise ja ülemise vöö sõlmede kujutus-punktid on vastavalt alumise ja ülemise vöö horisontaalil. Siksakil 11-8-7-4 asuvad mehhanismi sõlmed jäävad paigale. Siksakil 9-6-5 asuvate sõlmede siirded on võrdsed: $(9-9') = (6-6') = (5-5')$. Sõlme 1 siire $1-1'$ on kaks korda väiksem kui sõlmel 9. Mehhanismi sõlmede siirete esi-algseks nulljooneks on $a'-b$. Tegelikult on toesõlme a siire null ja seepärast pööratakse mehhanism toele a tagasi. Lõplik nulljoon tõmmatakse läbi punktide a ja b .

Diagonaali 9-10 pikijõule vastava ühikpaigutise puhul (joon. 12.17, a)

$$1 = 9-9'' = (9-9') \sin \alpha = (9-9') \sin \alpha$$



Joon. 12.17

on siirde 9-9' pikkus

$$9-9' = 1/\sin \alpha$$

Vertikaalsiirde epüüris (joon. 12.17, b) on lõigu 9-9' pikkus võrdne $1/\sin \alpha$, kuna sõlme 9 siire 9-9'' on vertikaalne. Sõlmede 7 ja 11 kohal ja paremal pool on ühikjõule vastavad siirded negatiivsed. Negatiivne on ka kaksikjõule N_{9-10} vastav siire: sõlmede 9 ja 10 vahekaugus muutub suuremaks. Mõjujoone ordinaadid nende sõlmede kohal on negatiivsed.

Momentide võrrandist

$$A(1-1') + N_{9-10}(9-9') \sin \alpha = 0$$

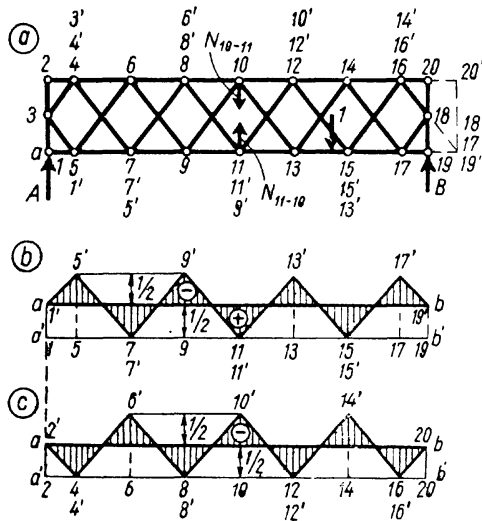
või kui ühikjõud on sõlmes 11 ($A=B=0,5$)

$$0,5 \cdot d/2 + N_{9-10}d \sin \alpha = 0$$

leitakse sõlme 11 kohal diagonaali 9-10 pikijõu mõjujoone ordinaat koos märgiga

$$N_{9-10} = -1/4 \sin \alpha$$

Posti 10-11 pikijõu mõjujoone kujutamiseks eemaldatakse toed ja varras 10-11. Keskmise postita on arvutus-



Joon. 12.18

skeemi mõlemad pooled geomeetriliselt muutuvad ja ilma toesidemeteta on vabadusaste neli. Pööratud kiiruste plaani leidmisel kinnitatakse sõlm 11 (kaks sidet) ja sõlmele 10 antakse vertikaalne siire (üks side). Sõlme 10 kujutuspunkt pööratud kiiruste plaanis asub sõlme läbival horisontaalil (ülemisel vööl). Sõlmega 11 samal siksakil asuvad sõlmed jäävad paigale, kuna nende kujutuspunktid ühtivad sõlme endaga. Sõlmele 10 antakse niisugune siire, et kujutuspunkt 10' ühtib sõlmega 12. Alumise vöö sõlmede 5, 9, 13 ja 17 siirded on võrdsed. Toesõlmede siirded on kaks korda väiksemad.

Momentide võrrandist

$$A(1-1') + B \cdot (19-19') - N_{10-11} \cdot (10-10') = 0$$

kui ühikjõud on sõlmes 11 (sõidutee all)

$$0,5 \cdot d/2 + 0,5 \cdot d/2 - N_{10-11}d = 0$$

leitakse mõjujoone ordinaat sõlme 11 kohal

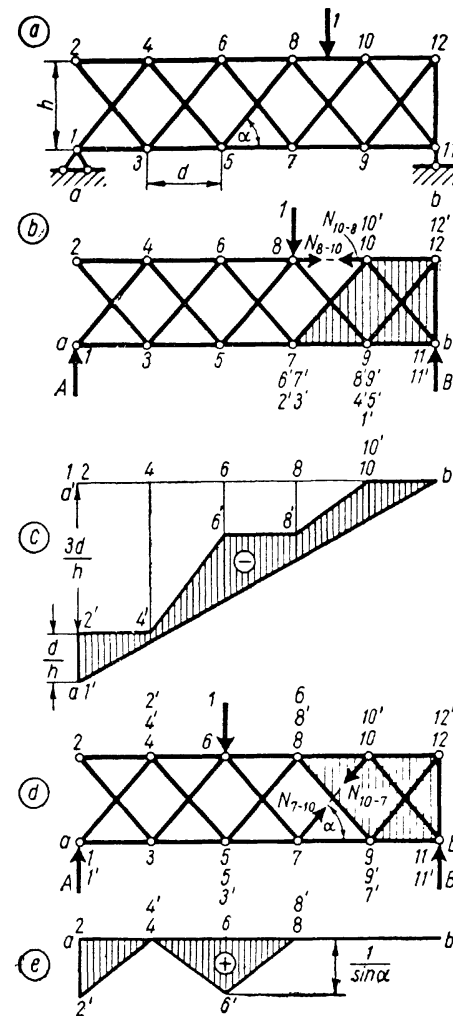
$$N_{10-11} = 0,5$$

Üleval asuva sõiduteega sõrestiku keskmise posti mõjujoon on kujutatud joonisel 12.18, c.

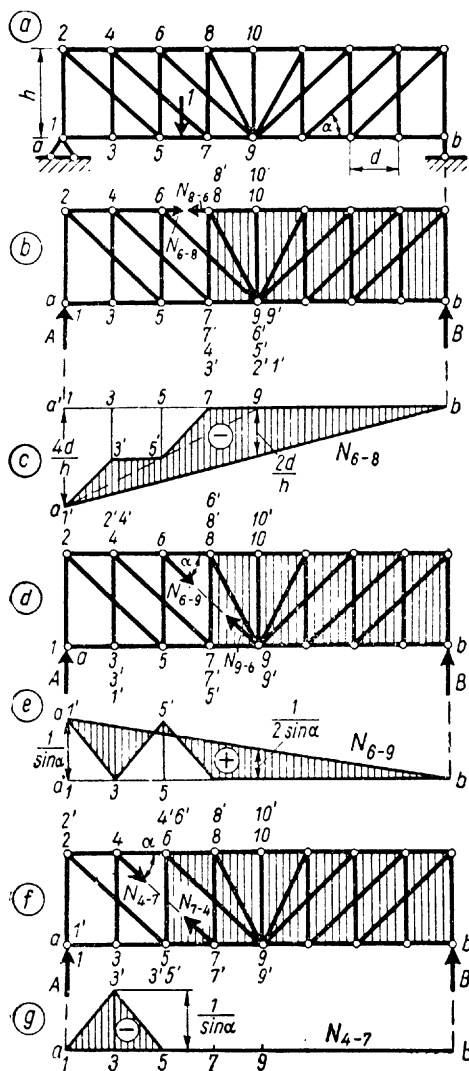
Joonisel 12.19, a esitatud ülemisel vööl asuva sõidu-

teega sõrestiku varraste pikijõudude mõjujoonte kujutamisel on vaja selgitada lõpliku nulljoone asetust.

Murtud joon 2'-4'-6'-8'-10'-b (joon. 12.19, c) kujutab ülemise vöö vertikaalsirde epüüri, kui varras 8-10 ja toesidemed on eemaldatud ning geomeetriliselt muutumatu osa (viirutatud) on liikumatu. Pikijõule vastava ühikpai-



Joon. 12.19



Joon. 12.20

gutise puhul on toesõlme 1 (a) siire $1-1'$ võrdne $4d/h$. Mehhanism kui geomeetriliselt muutumatu kujund pööratakse toele tagasi ja lõplik nulljoon läbib punkte a ning b (joon. 12.19, c).

Diagonaali 7-10 pikijõu mõjujoone kujutamisel mehhanismi (joon. 12.19, d) toesõlm a (sõlm 1) ei siirdu ja lõplik nulljoon $a-b$ ühtib esialgse nulljoonega $2-b$ (joon. 12.19, e).

Joonisel 12.20, a esitatud sõrestiku ülemise vöö varda 6-8 mõjujoon on kujutatud joonisel 12.20, c. Mehhanismi sõlmedele antakse niisugused siirded, et sõlme 6 kujutuspunkt $6'$ ühtib sõlmega 9 (joon. 12.20, b). Kui ühikjõud mõjub sõlmes 9, siis momentide võrrandist

$$N_{6-8}h + 0,5 \cdot 4d = 0$$

leitakse varda 6-8 pikijõud

$$N_{6-8} = -2d/h$$

Diagonaali 4-7 pikijõu mõjujoone kujutamisel mehhanismi toesõlm a (sõlm 1) ei siirdu (joon. 12.20, f) ja tegelik nulljoon $a-b$ ühtib esialgse nulljoonega $1-b$ (joon. 12.20, g). Kui ühikjõud asub sõlmes 3, siis võrrandist

$$-N_{4-7} \cdot d \sin \alpha - 1d = 0$$

leitakse diagonaali 4-7 pikijõud

$$N_{4-7} = -1/\sin \alpha$$

12.13. Pikijõu mõjumaatriks

Pikijõu mõjumaatriksit kasutatakse paljudest koormusjuhtudest põhjustatud sisejõudude arvutamiseks sõrestiku varrestes. Pikijõud sõrestiku varrestes leitakse maatrikujus valemiga

$$\mathbf{N} = \mathbf{bP} \quad (12.7)$$

milles \mathbf{N} on koormusest põhjustatud sõrestiku varraste pikijõudude maatriks, mille ridade arv võrdub varraste arvuga ja veergude arv erinevate koormusjuhtude arvuga; \mathbf{P} — mõjuvate jõudude maatriks, mille veergude arv võrdub erinevate koormusjuhtude arvuga; \mathbf{b} — pikijõu mõjumaatriks, mille ridade arv on võrdne varraste ja veergude arv koormatud vöö sõlmede arvuga. Mõjumaatriksi \mathbf{b} rea k elementideks on varda k pikijõu mõjujoone ordinaadid koormatud vöö sõlmede kohal.

Üks moodus pikijõu mõjumaatriksi koostamiseks on arvutada sõrestiku kõigi varraste pikijõudude mõjujoonte ordinaadid sõidutee sõlmede kohal. Kui pikijõudude mõjujoonte ordinaatide arvutamisel kasutatakse sõrestiku sil-

dega võrdse pikkusega tala paindemomendi või põikjõu mõjujooni, siis saab sõrestiku varraste pikijõu mõjumaatriksi elementide arvutamiseks rakendada tala paindemomendi mõjumaatriksit.

Järgnevalt käsitletakse joonisel 12.21, a kujutatud sõrestiku varraste pikijõu mõjumaatriksi koostamist. Sõidutee on alumisel vööl. Sümmeetria tõttu koostatakse mõjumaatriks ainult sõrestiku vasaku poole varraste jaoks. Alumise vöö sõlmede koormamisel ei teki postis 4-4' sisejõudu: $N_{4-4'}=0$. Postide 1-1' ja 3-3' jaoks leitakse mõjumaatriksi elemendid sõlmede 1 ja 3 tasakaalu tingimustest $\Sigma Y=0$:

$$1) \quad n_{1-1'}=1, \quad \text{kui } x=d$$

$$n_{1-1'}=0, \quad \text{kui } x=0 \text{ või } 2d \leq x \leq l \quad (a)$$

$$2) \quad n_{3-3'}=1, \quad \text{kui } x=3d$$

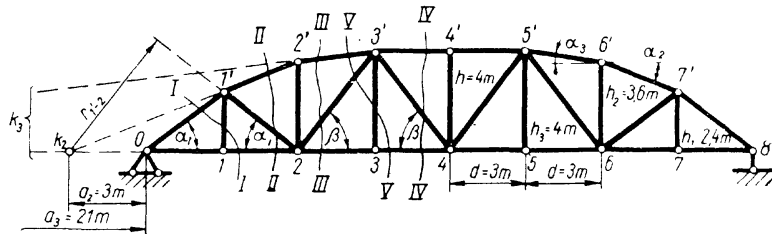
$$n_{3-3'}=0, \quad \text{kui } 0 \leq x \leq 2d \text{ või } 4d \leq x \leq l \quad (b)$$

Ülemise ja alumise vöö varraste pikijõud leitakse momentide tasakaalu tingimustega (lõiked I-I, II-II, III-III ja IV-IV):

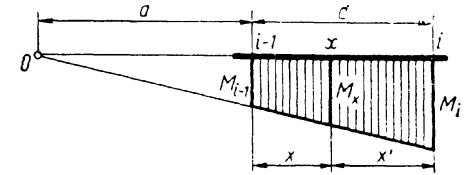
$$\Sigma M_{1'}=0; \quad n_{0-1} = n_{1-2} = \frac{m_{1'}}{h_1} = \frac{m_1}{h_1} = \frac{1}{2,4} m_1$$

$$\Sigma M_{3'}=0; \quad n_{2-3} = n_{3-4} = \frac{m_{3'}}{h_3} = \frac{m_3}{h_3} = \frac{1}{4,0} m_3$$

$$\Sigma M_1=0; \quad n_{0-1'} = -\frac{m_1}{h_1 \cos \alpha_1} = -\frac{m_1}{2,4 \cdot 0,78087} = -\frac{1}{1,8741} m_1$$



Joon. 12.21



Joon. 12.22

$$\Sigma M_2=0; \quad n_{1'-2'} = -\frac{m_2}{h_2 \cos \alpha_2} = -\frac{m_2}{3,6 \cdot 0,92847} = -\frac{1}{3,3425} m_2$$

$$\Sigma M_3=0; \quad n_{2'-3'} = -\frac{m_2}{h_2 \cos \alpha_3} = -\frac{m_2}{3,6 \cdot 0,99123} = -\frac{1}{3,5684} m_2$$

$$\Sigma M_4=0; \quad n_{3'-4'} = -\frac{m_4}{h} = -\frac{1}{4,0} m_4$$

Diagonaali 1'-2 pikijõud leitakse momentide tasakaalu tingimusest (lõige II-II)

$$\Sigma M_{k_2}=0; \quad n_{1'-2} = -\frac{m_{k_2}}{r_{1'-2}} = -\frac{m_{k_2}}{(a_2+2d) \sin \alpha_1} \quad (c)$$

Välisjõudude momendi momendipunkti k_2 kohta m_{k_2} saab avaldada lõikest II-II vasakul ja paremal olevate sõlmede 1 ning 2 kohta kirjutatud momentide m_1 ja m_2 kaudu.

Joonisel 12.22 esitatud paindemomendi epüüri otsordinaatide M_{i-1} ja M_i kaudu arvutatakse paindemoment ja põikjõud lõikes x järgmiselt:

$$M_x = \frac{x'}{d} M_{i-1} + \frac{x}{d} M_i; \quad Q_x = (M_i - M_{i-1})/d \quad (12.8)$$

Analoogiliselt saab avaldada momendi ka punkti 0 kohta, kusjuures nüüd $x=-a$ ja $x'=a+d$:

$$M_0 = \frac{a+d}{d} M_{i-1} - \frac{a}{d} M_i \quad (12.9)$$

Vastavalt võrrandile (12.9) avaldatakse nüüd diagonaali 1'-2 pikijõud

$$n_{1'-2} = -\frac{m_{k_2}}{(a_2+2d) \sin \alpha_1} = -\frac{(a_2+2d) m_1}{d(a_2+2d) \sin \alpha_1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(a_2+d)m_2}{d(a_2+2d)\sin\alpha_1} = - \frac{9m_1}{3 \cdot 9 \cdot 0,62470} + \\
& + \frac{6m_2}{3 \cdot 9 \cdot 0,62470} = - \frac{1}{1,8741} m_1 + \frac{1}{2,8112} m_2
\end{aligned}$$

Lõikega III-III ja momendipunktiga k_3 leitakse diagonaali 2-3' pikijõud

$$n_{2-3'} = \frac{m_{k_3}}{r_{2-3'}} = \frac{m_{k_3}}{(a_3+2d)\sin\beta}$$

või vastavalt avaldisele (12.9) momentide m_2 ja m_3 kaudu:

$$\begin{aligned}
n_{2-3'} &= \frac{a_3+3d}{d(a_3+2d)\sin\beta} m_2 - \frac{a_3+2d}{d(a_3+2d)\sin\beta} m_3 = \\
&= \frac{21+9}{3(21+6) \cdot 0,8} m_2 - \frac{21+6}{3(21+6) \cdot 0,8} m_3 = \\
&= \frac{1}{2,16} m_2 - \frac{1}{2,40} m_3
\end{aligned}$$

Lõikega IV-IV ja projektsioonide tingimusega $\Sigma Y=0$ leitakse diagonaali 3'-4 pikijõud

$$n_{3'-4} = q_4 / \sin\beta$$

või vastavalt võrrandile (12.8)

$$n_{3'-4} = - \frac{m_3}{d \sin\beta} + \frac{m_4}{d \sin\beta} = - \frac{1}{2,4} m_3 + \frac{1}{2,4} m_4$$

Sõlme 2' projektsioonide tingimusest $\Sigma Y=0$ leitakse posti 2'-2 pikijõud

$$\begin{aligned}
n_{2'-2} &= -n_{2'-1} \sin\alpha_2 + n_{2'-3'} \sin\alpha_3 = \frac{m_2 \sin\alpha_2}{h_2 \cos\alpha_2} - \\
&- \frac{m_2 \sin\alpha_3}{h_2 \cos\alpha_3} = m_2 (\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_3) / h_2 = \\
&= \frac{0,26667}{3,6} m_2 = \frac{1}{13,5} m_2
\end{aligned}$$

Lõigetega I-I, V-V ja momendipunktidega 0 ning 4 saab avaldada ka postide 1-1', 3-3' pikijõud momentide kaudu:

$$n_{1-1'} = \frac{m_0}{d} = \frac{2d}{d^2} m_1 - \frac{d}{d^2} m_2 = \frac{2}{3} m_1 - \frac{1}{3} m_2$$

$$\begin{aligned}
n_{3-3'} &= - \frac{m_4}{d} - n_{2-3'} \cdot 2 \sin\beta - \frac{(a_3+4d)\sin\alpha_3}{d} n_{2'-3'} = \\
&= - \frac{m_4}{d} - \frac{1,6}{2,16} m_2 + \frac{1,6}{2,4} m_3 + \frac{1,4538}{3,5684} m_2 = \\
&= - \frac{1}{3} m_2 + \frac{2}{3} m_3 - \frac{1}{3} m_4
\end{aligned}$$

Pikijõu mõjumaatriks leitakse järgnevalt kahe maatriksi, milles esimese maatriksi elementideks on varraste pikijõudude avaldistes momentide m_i ($i=1, 2, \dots, 7$) korrad ja teiseks maatriksiks on kaheksaks võrdseks osaks jaotatud lihttala paindemomendi mõjumaatriks, korrutamiseks:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{1,8741} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3,3425} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3,5684} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{1,8741} & \frac{1}{2,8112} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2,16} & \frac{-1}{2,40} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2,4} & \frac{1}{2,4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{13,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{3}{8} \begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 10 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1,0938 & 0,9375 & 0,7813 & 0,6250 & 0,4688 & 0,3125 & 0,1563 \\ 0,4688 & 0,9375 & 1,4063 & 1,2250 & 0,8438 & 0,5625 & 0,2813 \\ -1,4007 & -1,2006 & -1,0005 & -0,8004 & -0,6003 & -0,4002 & -0,2001 \\ -0,6731 & -1,3463 & -1,1219 & -0,8975 & -0,6731 & -0,4488 & -0,2244 \\ -0,6305 & -1,2610 & -1,0508 & -0,8406 & -0,6305 & -0,4203 & -0,2102 \\ -0,3750 & -0,7500 & -1,1250 & -1,5000 & -1,1250 & -0,7500 & -0,3750 \\ -0,6003 & 0,4002 & 0,3335 & 0,2668 & 0,2001 & 0,1334 & 0,0667 \\ 0,2604 & 0,5208 & -0,6076 & -0,4861 & -0,3646 & -0,2431 & -0,1215 \\ -0,1563 & -0,3125 & -0,4688 & 0,6250 & 0,4688 & 0,3125 & 0,1563 \\ 0,1667 & 0,3333 & 0,2778 & 0,2222 & 0,1667 & 0,1111 & 0,0556 \\ 1,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Pikijõu mõjumaatriksi kahe viimase rea elemendid ühtivad eespool sõlmede 1 ja 3 tasakaalu tingimustega $\Sigma Y=0$ leitud postide 1-1' ning 3-3' pikijõu mõjujoonte ordinaatidega (a) ja (b).

13. KOLME LIIGENDIGA KAARSÖRESTIKU MÕJUJONED

13.1. Staatika meetod

Kolme liigendiga kaarsõrestiku (joon. 13.1, a) toe-reaktsioonid V_a , V_b ja H arvutatakse analoogiliselt täiseinalse kaare toereaktsioonidega:

$$V_a = V'_a + H \operatorname{tg} \alpha; \quad V_b = V'_b - H \operatorname{tg} \alpha \quad (a)$$

$$H = M_c^0 / f \quad (b)$$

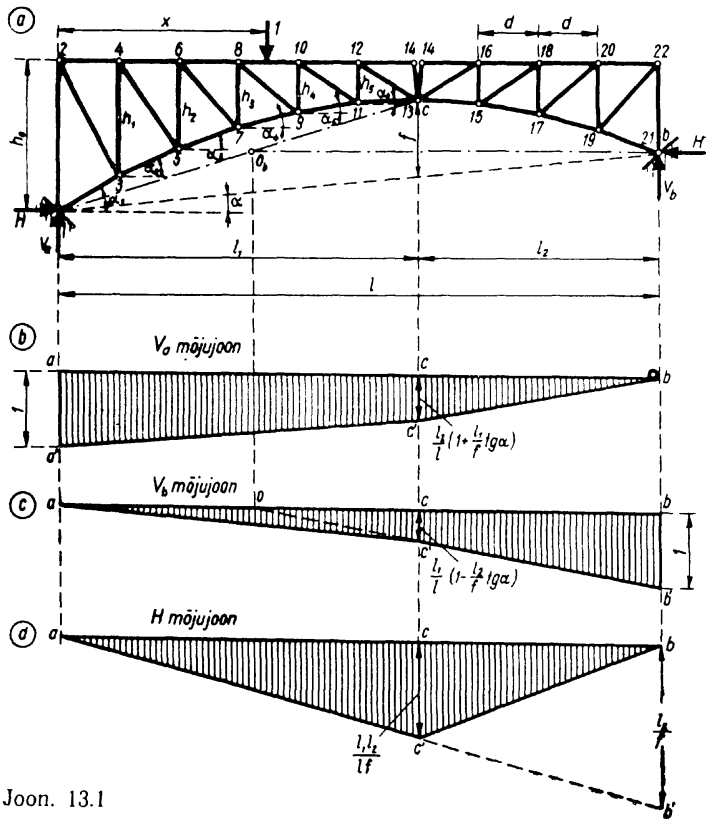
milles

$$V'_a = (l - x) / l \quad \text{ja} \quad V_b = x / l \quad (c)$$

Reaktsioonide mõjujooned on kujutatud joonisel 13.1.

Varda pikijõu mõjujoone kujutamiseks eraldatakse arvutuskeem lõikega kaheks osaks, lõigates läbi kolm varrast. Lihtvõrguga sõrestiku puhul on see enamasti võimalik. Kahe läbilõigatud varda sihtide lõikepunkti k kohta koostatud momentide tasakaalu tingimusest avaldatakse kolmanda varda pikijõud.

Kolme liigendiga kaarsõrestiku varraste pikijõudude mõjujooned koosnevad kolmest sirgest: vasak- ja parempoolsest ning keskmisest sirgest. Vasakul pool lukuliigendit c asuva varda puhul on vasakpoolne sirge toe a ja läbilõigatud paneeli, keskmine sirge läbilõigatud paneeli ja lukuliigendi c ning parempoolne sirge lukuliigendi ja parempoolse toe b vahel. Läbilõigatud paneeli kohal muutub mõjujoon lineaarselt. Vasakpoolne sirge läbib abstsissitelge toe a vertikaalil ja parempoolne sirge toe b vertikaalil. Mõjujoone keskmine sirge lõikub parempoolse sirgega lukuliigendi c vertikaalil ja vasakpoolse sirgega momendipunkti k vertikaalil, s. t. vertikaalil, millel lõikuvad kahe teise läbilõigatud varda sihid. Kaarsõrestiku varda pikijõu mõjujoone kujutamiseks kasutatakse keskmise sirge võrrandit ja neid tingimusi.



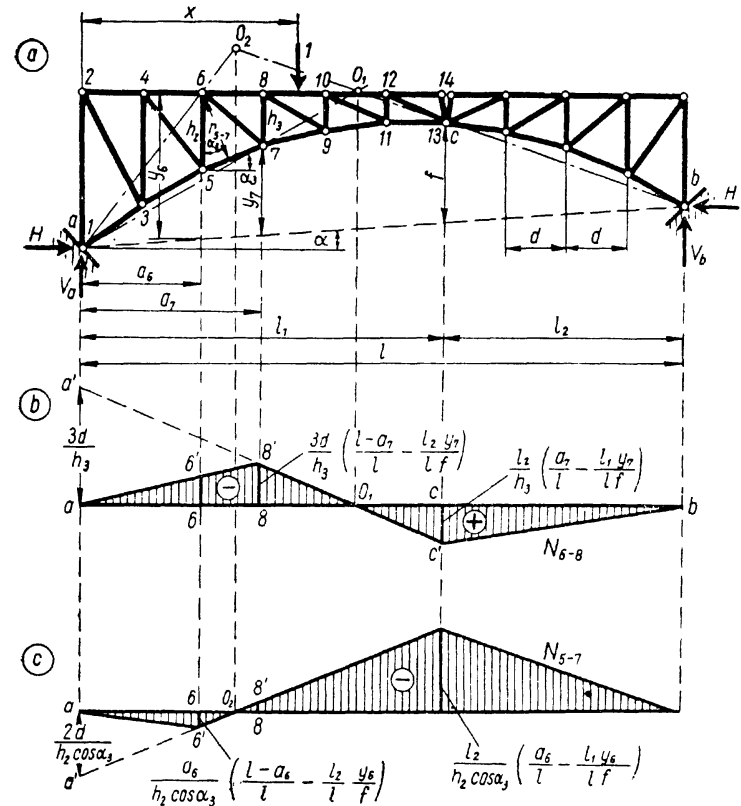
Joon. 13.1

Ülemise vöö varda 6-8 momendipunktiks on sõlm 7 (joon. 13.2, a). Sõlme 7 kohta koostatud momentide tasakaalu võrrandist

$$N_{6-8}h_3 + V'_a a_7 - Hy_7 = 0$$

avaldatakse pikijõu mõjujoone keskmise sirge ($3d \leq x \leq l_1$) võrrand (joon. 13.2, b)

$$\begin{aligned} N_{6-8} &= -\frac{1}{h_3}(V'_a \cdot a_7 - Hy_7) = \\ &= -\frac{1}{h_3}\left(\frac{l-x}{l} a_7 - x \frac{l_2 y_7}{l f}\right) \end{aligned} \quad (d)$$



Joon. 13.2

Kui $x = a_7 = 3d$, siis

$$N_{6-8} = -\frac{a_7}{h_3}\left(\frac{l-a_7}{l} - \frac{l_2 y_7}{l f}\right) = -\frac{3d}{h_3}\left(0,7 - 0,4 \frac{y_7}{f}\right)$$

ja kui $x = l_1$, siis

$$N_{6-8} = -\frac{l_2}{h_3}\left(\frac{a_7}{l} - \frac{l_1 y_7}{l f}\right) = -\frac{1,2d}{h_3}\left(1 - 2 \frac{y_7}{f}\right)$$

kuna $l = 10d$, $l_1 = 6d$, $l_2 = 4d$ ja $a_7 = 3d$.

Joonisel 13.2, c on kujutatud alumise vöö varda 5-7 pikijõu N_{5-7} mõjujoon. Momendipunktiks on sõlm 6. Sõlme 6 kohta koostatud momentide tasakaalu tingimusest

$$-N_{5-7}r_{5-7} + V'_a a_6 - Hy_6 = 0$$

avaldatakse varda 5-7 pikijõu keskmise sirge võrrand

$$\begin{aligned} N_{5-7} &= \frac{1}{r_{5-7}} (V'_a a_6 - Hy_6) = \\ &= \frac{1}{h_2 \cos \alpha_3} \left(\frac{l-x}{l} a_6 - x \frac{l_2 y_6}{l f} \right) \end{aligned} \quad (e)$$

Kui $x = a_6 = 2d$, siis

$$N_{5-7} = \frac{a_6}{h_2 \cos \alpha_3} \left(\frac{l-a_6}{l} - \frac{l_2 y_6}{l f} \right) = \frac{0,8d}{h_2 \cos \alpha_3} \left(2 - \frac{y_6}{f} \right)$$

ja kui $x = l_1 = 6d$, siis

$$N_{5-7} = \frac{l_2}{h_2 \cos \alpha_3} \left(\frac{a_6}{l} - \frac{l_1 y_6}{l f} \right) = \frac{0,8d}{h_2 \cos \alpha_3} \left(1 - \frac{3y_6}{f} \right)$$

Kui läbilõigatud paneeli ülemise ja alumise vöö vardad ei ole paralleelsed, siis kujutatakse ka võrgu varraste mõjujooned momentide tasakaalu tingimustega.

Diagonaali 4-5 momendipunktiks on ülemise vöö ja alumise vöö varda 3-5 sihi lõikepunkt k_1 (joon. 13.3, a). Punkti k_1 kohta koostatud momentide tasakaalu tingimusest

$$-N_{4-5}r_{4-5} + V'_a a_{k_1} - Hy_{k_1} = 0$$

avaldatakse diagonaali pikijõu mõjujoone keskmise sirge võrrand

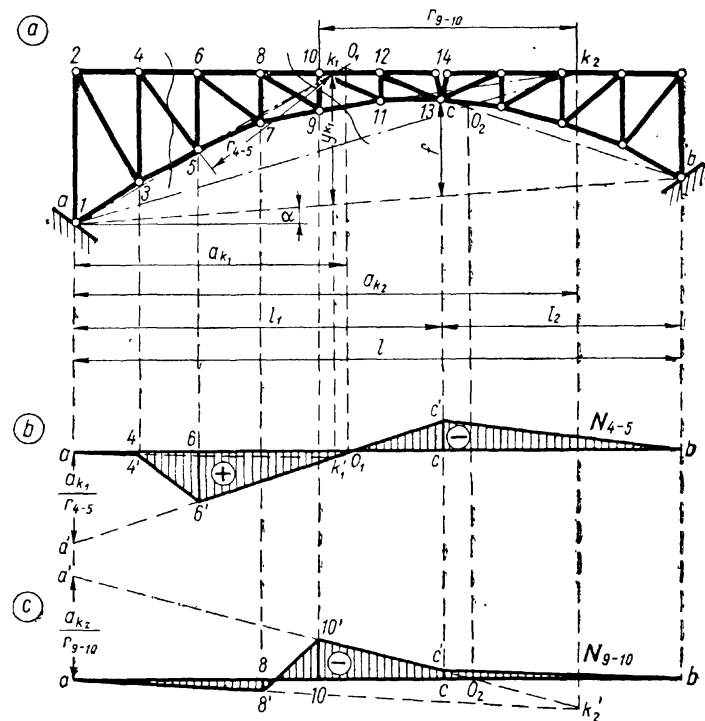
$$\begin{aligned} N_{4-5} &= \frac{1}{r_{4-5}} (V'_a a_{k_1} - Hy_{k_1}) = \\ &= \frac{1}{r_{4-5}} \left(\frac{l-x}{l} a_{k_1} - x \frac{l_2 y_{k_1}}{l f} \right) \end{aligned} \quad (f)$$

Mõjujoone ordinaadid 6-6' ($x=2d$) ja $c-c'$ ($x=l_1$) leitakse avaldistega (joon. 13.3, b)

$$N_{4-5} = \frac{1}{r_{4-5}} \left(\frac{l-2d}{l} a_{k_1} - 2d \frac{l_2 y_{k_1}}{l f} \right)$$

$$N_{4-5} = \frac{l_2}{r_{4-5}} \left(\frac{a_{k_1}}{l} - \frac{l_1 y_{k_1}}{l f} \right)$$

Mõjujoone keskmiseks sirgeks on 6'-c'. Mõjujoone parempoolne sirge c'-b läbib abstsissstelge toe b vertikaalil



Joon. 13.3

ja lõikub keskmise sirgega lukuliigendi c vertikaalil. Mõjujoone vasakpoolse sirge (läbib abstsissstelge toe a vertikaalil) pikendus lõikub keskmise sirgega momendipunkti k_1 vertikaalil punktis k'_1 (joon. 13.3, b). Keskmise sirge nullpunkt O_1 asub liigendeid b ja c ning liigendit a ja momendipunkti k_1 läbivate sirgete lõikepunkti vertikaalil.

Joonisel 13.3, c on kujutatud posti 9-10 pikijõu mõjujoon, mille kujutamiseks vajalikud ordinaadid leitakse analoogiliselt diagonaali mõjujoone ordinaatidega.

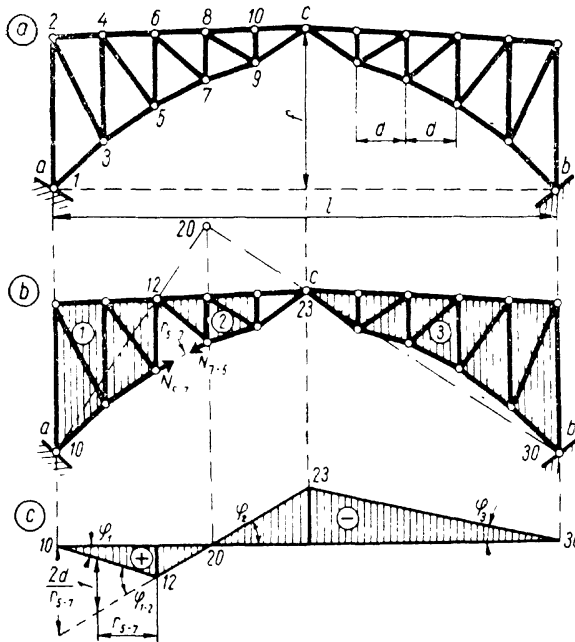
Kui kaarsõrestiku vööde vardad on paralleelsed, kujutatakse võrgu varraste pikijõudude mõjujooned projektsioonide tasakaalu tingimustega. Projektsioonid võetakse vööde varraste ristteljele.

13.2. Kinemaatika meetod

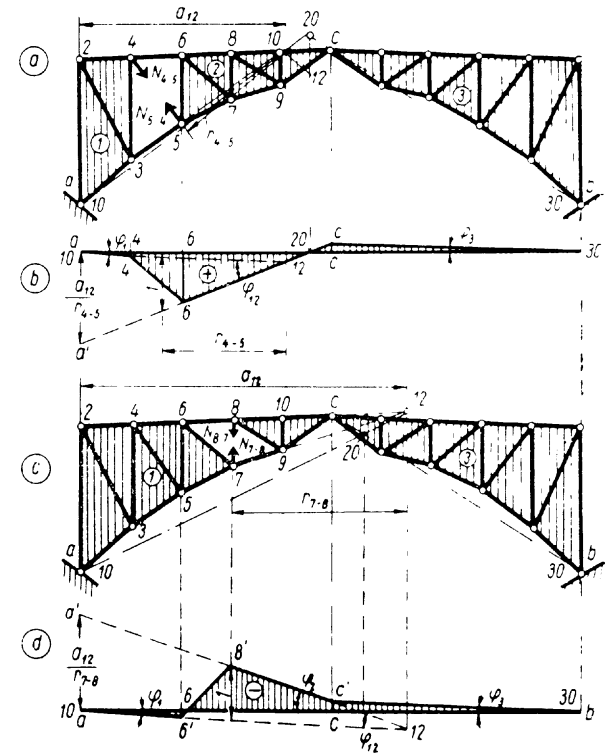
Lihtsa võrguga kaarsõrestiku (joon. 13.4, a) varraste pikijõudude mõjujoonte kujutamisel kasutatakse hetkpooluste meetodit.

Vöövarda eemaldamisega mehhanismiks muudetud skeem koosneb kolmest geometriselt muutumatust kujundist (joon. 13.4, b), mis on üksteisega ja alusega ühendatud liigenditega. Kujundi 1 ja 3 peapoolusteks on toeliigendid a ja b . Kujundi 2 peapoolus 20 asub sirgete 10-12 ja 30-32 lõikepunktis. Mehhanismi vertikaalsirde epüür on kujutatud joonisel 13.4, c koos mõjujoone ordinaadi mõõtkava ühikuga.

Vertikaalsirde epüürist järeldub, et kujund 1 pöörduv ümber kõrvalpooluse 12 kujundi 2 suhtes päripäeva ning selle tulemusena sõlmed 5 ja 7 eemalduvad teineteisest (joon. 13.4, c). Eemaldatud varda pikijõule N_{5-7} vastav siire on negatiivne ja mõjujoone ordinaadi märk ühtib vertikaalsirde märgiga.



Joon. 13.4



Joon. 13.5

Sõrestiku arvutuskeemist diagonaali 4-5 eemaldamisega saadud mehhanism koosneb kolmest geometriselt muutumatust kujundist 1, 2 ja 3 (joon. 13.5, a). Kujud 1 ja 2 on teineteisega ühendatud varrastega 4-6 ja 3-5. Nende kahe varda sihi lõikepunkt on kujundite 1 ja 2 kõrvalpooluseks 12. Kujundi 2 peapooluseks 20 on sirgete 10-12 ja 30-32 (32 \equiv c) lõikepunkt. Kujundi 3 vertikaalsiire peapooluse 20 vertikaalil on null (joon. 13.5, b). Kujundi 3 vertikaalsiire lukuliigendi c (pooluse 23) vertikaalil on niisama suur kui kujundil 2 ja peapooluse 30 vertikaalil null. Kujundi 1 vertikaalsiire toe a vertikaalil on null ja siirde epüüri pikendus lõikub kujundi 2 siirde epüüri kõrvalpooluse 12 vertikaalil. Vasakpoolne sirge $a-4'$ on toe a ja läbilõigatud paneeli ning keskmine sirge $6'-c'$

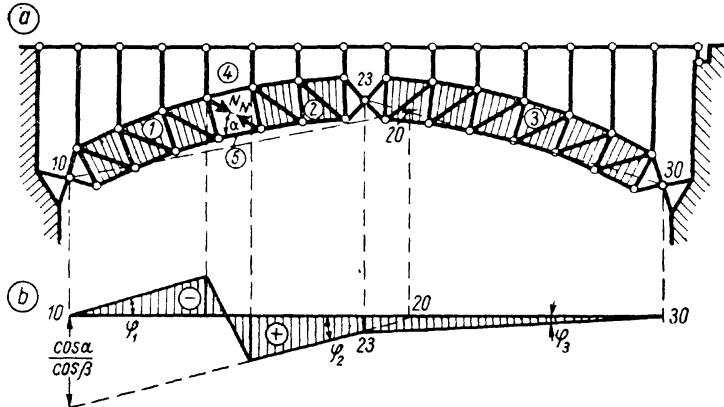
läbilõigatud paneeli ja lukuliigendi c vahel. Läbilõigatud paneelis muutub mõjujoon lineaarselt (sirge $4'-6'$).

Siirde epüürist (joon. 13.5, b) jäeldub, et kujund 1 pöörduv kujundi 2 suhtes ümber pooluse 12 päripäeva, mistõttu sõlmed 4 ja 5 eemalduvad teineteisest. Eemaldatud varda $4-5$ pikijõule N_{4-5} vastav siire on negatiivne ja diagonaali $4-5$ mõjujoone ordinaadi märgiks on vertikaalsiirde märk.

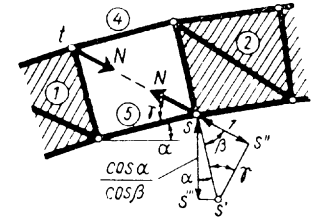
Joonisel 13.5, d on kujutatud posti $7-8$ (joon. 13.5, c) mõjujoon.

Kui mehhanismi kaks kujundit on ühendatud teineteisega kahe paralleelse vardaga, siis nende kujundite vastastikuse liikumise hetkpoolus on lõpmatult kaugel.

Joonisel 13.6, a on sõrestiku arvutuskeemist eemaldatud diagonaalvarras ja selle mõju on asendatud kaksikjõuga. Mehhanismi kujundid 1 ja 2 on ühendatud kahe paralleelse vardaga 4 ja 5 . Kujundite 1 ja 2 vastastikuse liikumise hetkpoolus 12 on paralleelsete varraste 4 ja 5 sihis lõpmatult kaugel. Kujundi 2 peapooluse 20 leidmiseks tõmmatakse üks sirge läbi pooluste 23 ja 30 ning teine sirge läbi pooluse 10 paralleelselt varrastega 4 ja 5 . Nende kahe sirge lõikepunkt on kujundi 2 peapooluseks 20 . Siirde epüüris on kujundite 1 ja 2 siirde sirged paralleelsed (joon. 13.6, b).



Joon. 13.6



Joon. 13.7

Siirde epüürist jäeldub, et kujundid 1 ja 2 pöörduvad vastupäeva. Selle tulemusena need sõlmed, mille vahelt diagonaal puudub, eemalduvad teineteisest. Kaksikjõule vastav siire on negatiivne ja mõjujoone ordinaadi märk ühtib siirde epüüri ordinaadi märgiga.

Mõjujoone ordinaadi mõõtkava ühiku määramisel vaadeldakse mehhanismi kujundite 1 ja 2 suhtelist siiret eeldusel, et kujund 1 on liikumatu (joon. 13.7). Võimalikus paigutusolukorras antakse kujundile 2 niisugune siire, et jõu N_{s-t} rakenduspunkti s siirde $s-s'$ projektsioon diagonaali $s-t$ sihile võrdub ühega:

$$(s-s'') = (s-s') \cos \beta = 1 \quad (g)$$

millest

$$s-s' = 1/\cos \beta \quad (h)$$

Sõlme s siirde $s-s'$ vertikaalne komponent

$$s-s''' = (s-s') \cos \alpha \quad (i)$$

või, kui arvestada tingimust (h),

$$s-s''' = \cos \alpha / \cos \beta \quad (j)$$

kujutab siirde epüüris mehhanismi kujundite 1 ja 2 vertikaalset suhtelist siiret ning kantakse toe a vertikaalile.

Nurk vöövarda ja horisontaali vahel on α ning diagonaali ja vertikaali vahel $\alpha + \beta$.

14. KOMBINEERITUD KONSTRUKTSIOONID

14.1. Kombineeritud konstruktsioonide liigid

Kombineeritud konstruktsioonis töötab osa elemente ainult survele või tõmbele ja teine osa elemente paindele (joon. 14.1, *d* ja *e*), paindele ja tõmbele (joon. 14.1, *c*) või paindele ja survele (joon. 14.1, *a* ja *b*). Survele või tõmbele töötavaid vertikaalseid elemente nimetatakse postideks, kui nendes tekivad survejõud (joon. 14.1, *a*, *b* ja *d*), ja riputiteks, kui nendes tekivad tõmbejõud (joon. 14.1, *c* ja *e*). Teised tõmbele või survele töötavad elemendid moodustavad varrasahela ehk varrasketi.

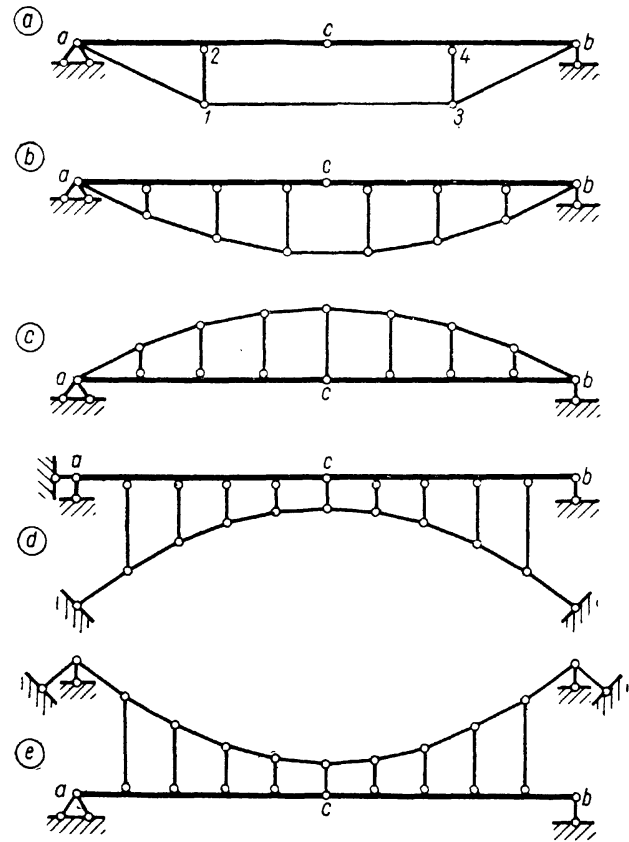
Lihtne kombineeritud konstruktsioon on sprengeltala (joon. 14.1, *a*). Elementides *a-c* ja *c-b* tekivad paindemomendid, põik- ja pikijõud (surve). Varraskett *a-1-3-b* on tõmmatud ja postid *1-2* ning *3-4* surutud.

Konstruktsioonil, mille arvutuskeem on esitatud joonisel 14.1, *c*, on varraskett surutud. Elementides *a-c* ja *c-b* tekivad paindemomendid ja tõmbejõud.

Rippkonstruktsiooni (rippsilla) arvutuskeem on esitatud joonisel 14.1, *e*. Varrasahel ja riputid on tõmmatud. Paindele töötavaid elemente *a-c* ja *c-b* nimetatakse jäikustalaks. Rippkonstruktsioone kasutatakse suurte avade sildamiseks.

Kaljuste nõlvadega kuristike sildamisel kasutatakse kaarele toetuvat tala (joon. 14.1, *d*). Varraskett ja postid on surutud. Tavaliselt ehitatakse niisugune konstruktsioon ilma vahepealse liigendita *c* ja on siis staatikaga ühe-kordselt määratu.

Paindele töötavate täisseinaliste elementide (joonisel 14.1 *a-c* ja *c-b*) asemel kasutatakse ka sõrestikelemente (joon. 14.2).

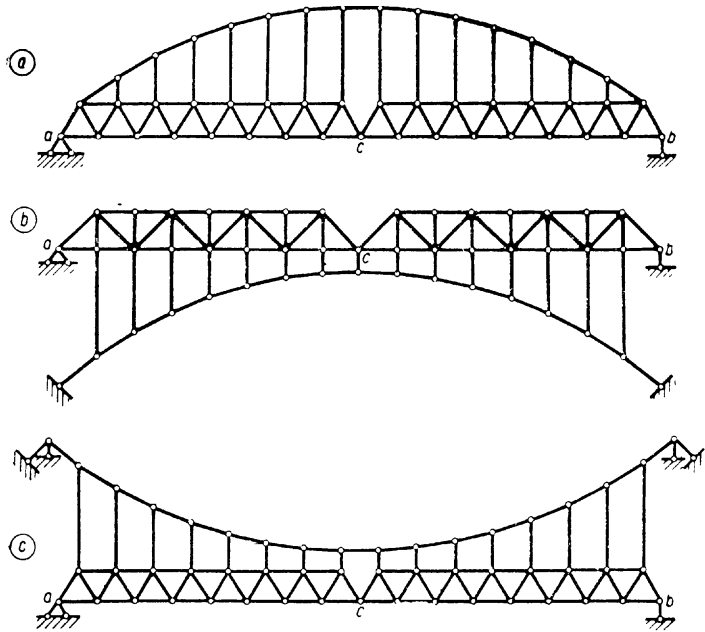


Joon. 14.1

14.2. Sprengeltala

Sprengeltala (joon. 14.3, *a*) sisejõud arvutatakse analoogiliselt murtud tõmbiga kolme liigendiga raami sisejõududega. Toereaktsioonid on võrdsed sama sildega lihttala toereaktsioonidega. Liigendi *c* kohta koostatud paindemomendi tingimusest (joon. 14.3, *b*)

$$M_c = M_c^0 - N_{1-3}h = 0$$



Joon. 14.2

avaldatakse tõmbi varda 1-3 pikijõud

$$N_{1-3} = M_c^0 / h \quad (14.1)$$

Sõlme 1 kohta koostatud tasakaalutingimusest (joon. 14.3, c)

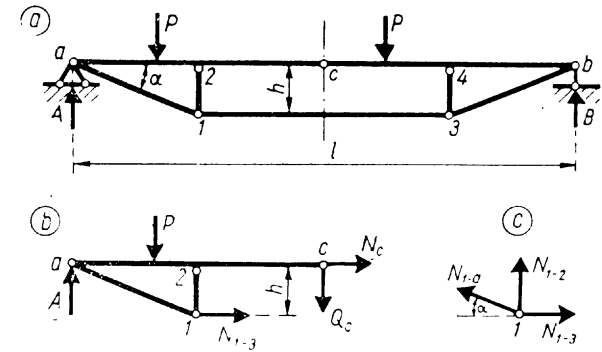
$$\Sigma X = 0; \quad -N_{1-a} \cos \alpha + N_{1-3} = 0$$

$$\Sigma Y = 0; \quad N_{1-a} \sin \alpha + N_{1-2} = 0$$

leitakse tõmbi varda 1-a ja posti 1-2 pikijõud

$$N_{1-a} = N_{1-3} / \cos \alpha \quad (14.2)$$

$$N_{1-2} = -N_{1-a} \sin \alpha = -N_{1-3} \operatorname{tg} \alpha \quad (14.3)$$



Joon. 14.3

Tala osades $a-c$ ja $c-b$ paindemomentide ja põikjõudude leidmisel arvestatakse peale koormuse veel tõmbi ja postide sisejõude. Pikijõud talas on

$$N_c = -N_{1-3} \quad (14.4)$$

Joonisel 14.1, b ja c esitatud arvutusskeemides leitakse paindemomendid, põik- ja pikijõud analoogiliselt spregeltala sisejõududega. Joonisel 14.1, c kujutatud tala pikijõud on vastupidiste märkidega joonisel 14.1, a ja b esitatud talade pikijõududega. Joonisel 14.1, c kujutatud arvutusskeemis on kaar surutud, riputid ja tala $a-c-b$ tõmmatud.

Näide 14.1

Arvutada joonisel 14.4, a kujutatud spregeltala paindemomendid, põik- ja pikijõud.

Toereaktsioonid:

$$A = (2 \cdot 4,0 \cdot 6,0 + 2 \cdot 3,0) / 8,0 = 6,75 \text{ t}$$

$$B = (2 \cdot 4,0 \cdot 2,0 + 2 \cdot 5,0) / 8,0 = 3,25 \text{ t}$$

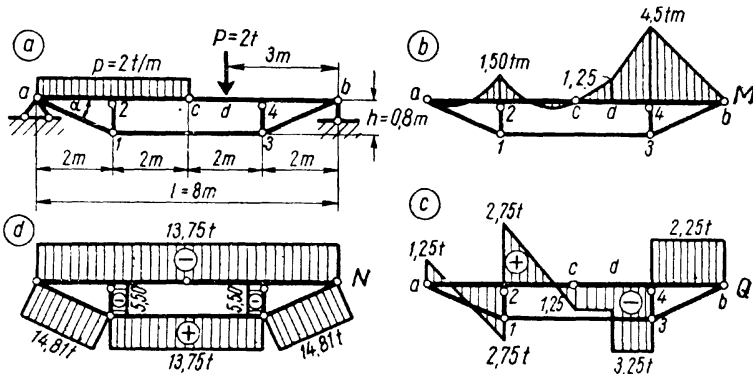
Tõmbi varda 1-3 pikijõud leitakse valemiga (14.1):

$$N_{1-3} = M_c^0 / h = (6,75 \cdot 4,0 - 2 \cdot 4,0 \cdot 2,0) / 0,8 = 13,75 \text{ t}$$

Valemitega (14.2 ja 14.3) arvutatakse varraste $a-1$ ja $1-2$ pikijõud ($\operatorname{tg} \alpha = 0,8 / 2,0 = 0,40$; $\sin \alpha = 0,3714$; $\cos \alpha = 0,9285$):

$$N_{1-a} = 13,75 / 0,9285 = 14,81 \text{ t}$$

$$N_{1-2} = -13,75 \cdot 0,40 = -5,50 \text{ t}$$



Joon. 14.4

Paindemomendid:

$$M_2 = 6,75 \cdot 2,0 - 2 \cdot 2,0 \cdot 1,0 - 13,75 \cdot 0,8 = -1,50 \text{ tm}$$

$$M_d = 3,25 \cdot 3,0 - 13,75 \cdot 0,8 = -1,25 \text{ tm}$$

$$M_4 = 3,25 \cdot 2,0 - 13,75 \cdot 0,8 = -4,50 \text{ tm}$$

Põikjõud:

$$Q_{a-2} = A - N_{a-1} \sin \alpha = 6,75 - 14,81 \cdot 0,3714 = 1,25 \text{ t}$$

$$Q_{2-a} = 1,25 - 2 \cdot 2,0 = -2,75 \text{ t}$$

$$Q_{2-c} = -2,75 + 5,50 = +2,75 \text{ t}$$

$$Q_{c-d} = 2,75 - 2 \cdot 2,0 = -1,25 \text{ t}$$

$$Q_{d-4} = -1,25 - 2 = -3,25 \text{ t}$$

$$Q_{4-b} = -3,25 + 5,5 = 2,25 \text{ t}$$

Kontroll:

$$Q_b = -B + N_{3-b} \sin \alpha = -3,25 + 5,50 = 2,25 \text{ t}$$

M , Q ja N epüürid on kujutatud joonisel 14.4, b , c ja d .

14.3. Rippkonstruktsioonid

14.31. Arvutuskeem

Rippkonstruktsioone kasutatakse peamiselt sillaehituses suurte avade sildamiseks, samuti trosskatustena. Varrasahel on tavaliselt kõrgemargilisest terasest. Varrasahela elementide deformatsioonidest põhjustatud sõlmede paigutised on suured ja avaldavad mõju rippkonstruktsiooni elementide sisejõududele, eriti jäikustala paindemomentidele. Sisejõudude arvutamisel kasutatakse järkjärgulist lähenemist. Esimeses lähenduses arvutatakse sisejõud eeldusel, et koormusest põhjustatud paigutised on väikesed. Tasakaalutingimused koostatakse esialgse deformeerumata tasakaaluolukorra kohta ja arvutatakse sisejõud. Leitud sisejõududega arvutatakse paigutised. Teises lähenduses koostatakse tasakaalutingimused esimeses lähenduses leitud paigutusolukorra jaoks ja arvutatakse sisejõud. Nende sisejõududega leitakse uuesti paigutised ja korratakse arvutust kuni vajaliku täpsuseni.

14.32. Sisejõudude arvutus paigalseisvast koormusest

Rippisillal (joon. 14.5, a) on kuus tuge: jäikustalal kaks (a ja b) ning varrasahelal neli (d , e , o ja 10). Jäikustala toereaktsioonid tähistatakse A_1 ja B_1 . Arvutuskeemi varrasahela äärmised elemendid $0-1$ ja $9-10$ lõigatakse läbi jäikustala toeliigendite vertikaalidel lõigetes m ning n . Lõigetes m ja n rakendatakse läbilõigatud elementide pikijõudude vertikaalsed ning horisontaalsed komponendid A_2 ja H_m ning B_2 ja H_n .

Vertikaalsete riputite puhul varrasahela suvalise sõlme j kohta koostatud tasakaalutingimusest $\sum X=0$ (joon. 14.5, c)

$$N_{j+1} \cos \alpha_{j+1} - N_j \cos \alpha_j = 0$$

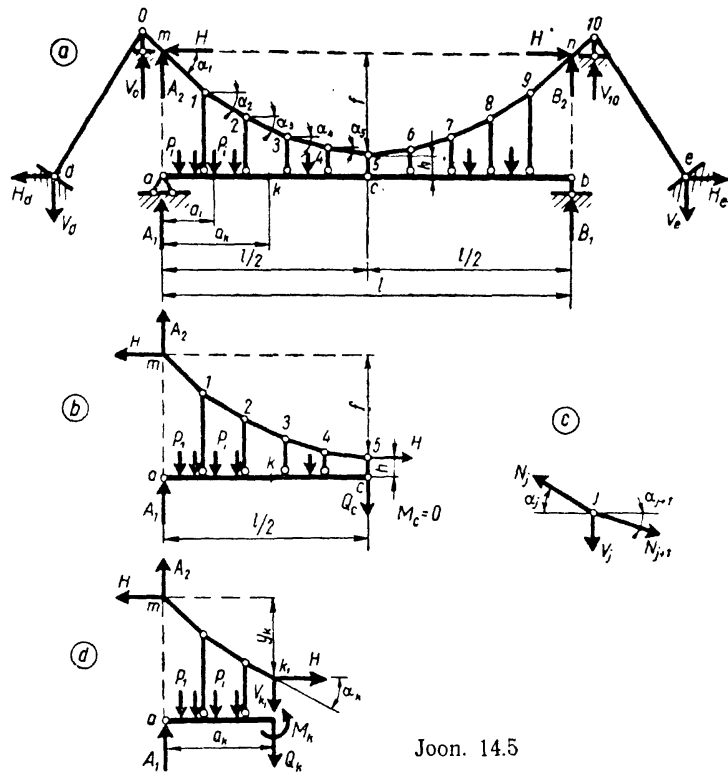
leitakse, et varrasahela elementide pikijõudude horisontaalsed komponendid on võrdsed:

$$N_j \cos \alpha_j = N_{j+1} \cos \alpha_{j+1} = \text{konst.} = H \quad (14.5)$$

Tingimusest (14.5) järeldeb, et

$$H_m = H_n = H \quad (14.6)$$

Vertikaalsete postide o ja 10 puhul on tuge d ja e



Joon. 14.5

horisontaalsed reaktsioonid võrdsed varrasahela elemendi pikijõu horisontaalse komponendiga

$$H_d = H_e = H \quad (14.7)$$

Jäikustala toeliigendit b läbiva vertikaali ja varrasahela elemendi $9-10$ telje lõikepunkti n kohta koostatud momentide tasakaalu tingimusest $\sum M_n = 0$

$$(A_1 + A_2)l - \sum P_i b_i = 0$$

avaldatakse vertikaalsete toereaktsioonide A_1 ja A_2 summa

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{l} \sum P_i b_i \quad (14.8)$$

Avaldisest (14.8) järeldub, et vertikaalsete toereaktsioonide summa on võrdne lihttala toereaktsiooniga

$$A_1 + A_2 = A^0 \quad (14.9)$$

Tasakaalutingimusest $\sum M_m = 0$ leitakse, et

$$B_1 + B_2 = -\frac{1}{l} \sum P_i a_i = B^0 \quad (14.10)$$

Joonisel 14.5, b kujutatud osa on eraldatud arvutuskeemist lõikega läbi liigendite a ja c , sõlme 5 ning punkti m . Ärajäetud arvutuskeemi osade mõju on asetatud jõududega. Paindemomendi tingimusest liigendi c kohta ($M_c = 0$)

$$M_c^0 - H(f+h) + Hh = 0$$

avaldatakse

$$H = M_c^0 / f \quad (14.11)$$

milles M_c^0 on lõikega läbi punktide a , c , 5 ja m eraldatud osale mõjuvate vertikaalsete jõudude moment liigendi c suhtes ja f liigendi c vertikaalil asuva sõlme 5 kaugus sirgest $m-n$.

Valemist (14.11) järeldub, et rippkonstruktsiooni varrasahela elemendi pikijõu horisontaalne komponent H on võrdne kolme liigendiga kaare horisontaalse toereaktsiooniga, kui kaare sille võrdub jäikustala sildega ja kaare kõrgus on võrdne rippkonstruktsioonis liigendi c vertikaalil asuva varrasahela sõlme (sõlm 5) ja sirge $m-n$ vahelise lõiguga. Seda omadust kasutatakse rippkonstruktsiooni mõjujoonte kujutamiseks.

Varrasahela esimese elemendi $0-1$ pikijõu N_{0-1} vertikaalne komponent $A_2 = N_{0-1} \sin \alpha_1$ avaldatakse horisontaalse komponendi funktsioonina

$$A_2 = H \operatorname{tg} \alpha_1 \quad (14.12)$$

analoogiliselt

$$B_2 = H \operatorname{tg} \alpha_n \quad (14.13)$$

Sümmeetrilise ripp silla puhul ($\alpha_1 = \alpha_{10}$) on äärmiste elementide vertikaalsed komponendid võrdsed: $A_2 = B_2$.

Posti O reaktsioon on võrdne toe d vertikaalse reaktsiooni ja varrasahela esimese elemendi $0-1$ pikijõu vertikaalse komponendi A_2 summaga:

$$V_0 = V_d + A_2 = H(\operatorname{tg} \alpha_0 + \operatorname{tg} \alpha_1) \quad (14.14)$$

Analoogiliselt

$$V_{10} = H(\operatorname{tg} \alpha_n + \operatorname{tg} \alpha_{n+1}) \quad (14.15)$$

Jäikustala toereaktsioonid leitakse avaldistega (14.9), (14.10), (14.12) ja (14.13):

$$A_1 = A^0 - A_2 = A^0 - H \operatorname{tg} \alpha_1 \quad (14.16)$$

$$B_1 = B^0 - B_2 = B^0 - H \operatorname{tg} \alpha_n \quad (14.17)$$

Tingimusest $N_j \cos \alpha_j = H$ (14.5) ja sõlme j (joon. 14.5, c) kohta koostatud tasakaalutingimusest $\Sigma Y = 0$

$$N_j \sin \alpha_j - N_{j+1} \sin \alpha_{j+1} - V_j = 0$$

avaldatakse varrasahela elementide ja riputite pikijõud

$$N_j = H / \cos \alpha_j \quad (14.18)$$

$$V_j = N_j \sin \alpha_j - N_{j+1} \sin \alpha_{j+1} = H(\operatorname{tg} \alpha_j - \operatorname{tg} \alpha_{j+1}) \quad (14.19)$$

Lõikega läbi punktide a , k , k_1 ja m eraldatud osa tasakaalutingimustest saadakse paindemomendi ja põikjõu avaldised

$$M_k = M_k^0 - H y_k \quad (14.20)$$

$$Q_k = Q_k^0 - H \operatorname{tg} \alpha_k \quad (14.21)$$

milles M_k^0 ja Q_k^0 on paindemoment ja põikjõud lihttalas, y_k — varrasahela telje (punkti k_1) kaugus sirgest $m-n$ lõike k vertikaalil ning α_k — nurk varrasahela elemendi ja horisontaali vahel lõike k kohal.

14.33. Mõjujoonte konstrueerimine

Rippsilla toereaktsioonid ja sisejõud (14.6) kuni (14.21) olenevad varrasahela elementide pikijõudude horisontaalkomponendist (14.11)

$$H = M_c^0 / f$$

Kui $0 \leq x \leq x_c = l/2$, siis

$$H = B^0 l / 2f = x / 2f \quad (a)$$

ja kui $x_c = l/2 \leq x \leq l$, siis

$$H = A^0 l / 2f = (l - x) / 2f \quad (b)$$

H mõjujoon on kujutatud joonisel 14.6, b.

Varrasahela elemendi j ja riputi j pikijõudude N_j ning V_j (14.18, 14.19) mõjujooned saadakse H mõjujoone ordinaatide korrutamisel vastavalt teguritega $1/\cos \alpha_j$ ja $(\operatorname{tg} \alpha_j - \operatorname{tg} \alpha_{j+1})$.

Jäikustala toereaktsiooni A_1 mõjujoon (joon. 14.6, c) koosneb kahest sirgest ja ordinaadid leitakse avaldisega (14.16): $A_1 = A^0 - H \operatorname{tg} \alpha_1$. Toe b vertikaalil on toereaktsiooni A_1 mõjujoone ordinaat null. Ühikjõu mõjumisel liigendite a ja c vahel leitakse toereaktsioon A_1 avaldistega (14.16) ja (a):

$$A_1 = A^0 - B^0 \frac{l}{2f} \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{l-x}{l} - \frac{x}{2f} \operatorname{tg} \alpha_1 \quad (14.22)$$

Kui $x=0$, siis $A_1=1$ ja kui $x=l/2$, siis

$$A_1 = \frac{1}{2} - \frac{l}{4f} \operatorname{tg} \alpha_1$$

Jäikustala suvalise lõike k paindemomendi ja põikjõu mõjujooned kujutatakse analoogiliselt kolme liigendiga kaare mõjujoontega.

Paindemomendi mõjujoone (joon. 14.6, d) keskmine sirge ($a_k \leq x \leq l/2$)

$$M_k = \frac{l-x}{l} a_k - \frac{x}{2f} y_k \quad (14.23)$$

ja vasakpoolne sirge lõikuvad lõike k vertikaalil ($x=a_k$) ning keskmine sirge (14.23) ja parempoolne sirge liigendi c vertikaalil ($x=l/2$).

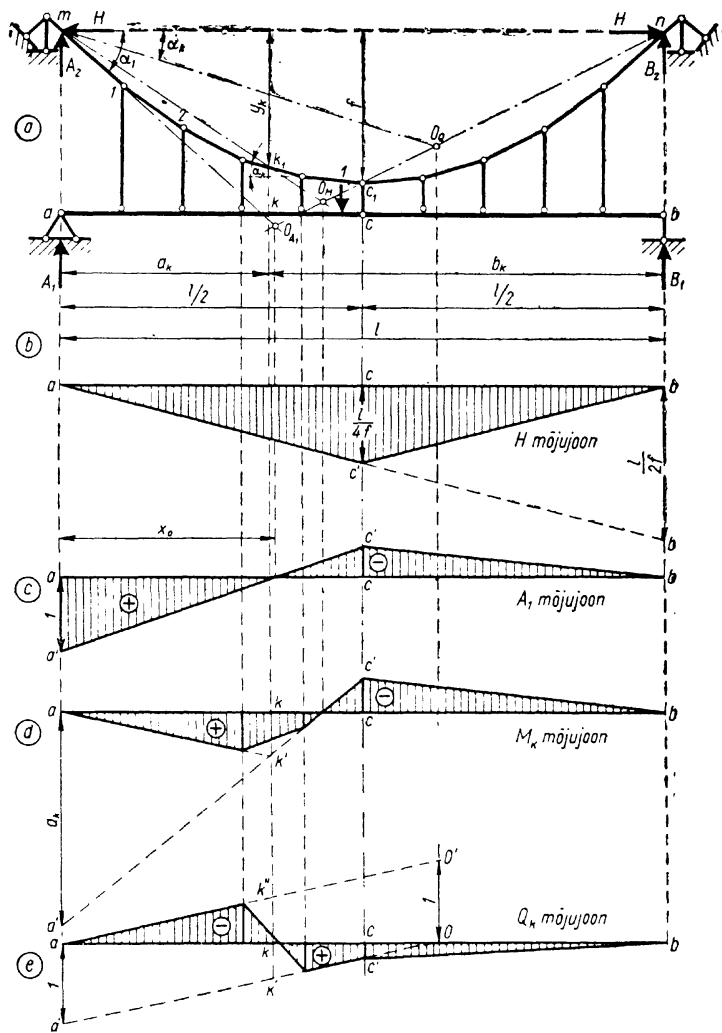
Kui $x=a_k$, siis

$$M_k = \frac{l-a_k}{l} a_k - \frac{a_k}{2f} y_k = a_k \left(\frac{l-a_k}{l} - \frac{y_k}{2f} \right)$$

ja kui $x=l/2$, siis

$$M_k = \frac{a_k}{2} - \frac{l}{4f} y_k$$

Sõlmkoormuse tõttu on mõjujoon kahe riputi vahel sirge.



Joon. 14.6

Põikjõu mõjujoone (joon. 14.6, e) keskmine sirge ($a_h < x \leq l/2$)

$$Q_h = \frac{l-x}{l} - \frac{x}{2f} \operatorname{tg} \alpha_h \quad (14.24)$$

on paralleelne vasakpoolse sirgega ja lõikub parempoolse sirgega liigendi c vertikaalil.

Kui $x = a_h + 0$, siis

$$Q_h = \frac{l-a_h}{l} - \frac{a_h}{2f} \operatorname{tg} \alpha_h$$

ja kui $x = l/2$, siis

$$Q_h = \frac{1}{2} - \frac{1}{4f} \operatorname{tg} \alpha_h$$

Sõlmkoormuse tõttu on mõjujoon kahe riputi vahel sirge.

14.4. Kaarele toetuv tala

Kaarest, talast ja postidest koosneva konstruktsiooni arvutusskeem on kujutatud joonisel 14.7, a. Toereaktsioonid ja sisejõud leitakse analoogiliselt rippilla toereaktsioonide ja sisejõududega. Toereaktsioonid arvutatakse võrranditega:

$$H = M_c^0 / f \quad (14.11)$$

$$A_2 = H \operatorname{tg} \alpha_1; \quad B_2 = H \operatorname{tg} \alpha_n \quad (14.12), (14.13)$$

$$A_1 = A^0 - H \operatorname{tg} \alpha_1; \quad B_1 = B^0 - H \operatorname{tg} \alpha_n \quad (14.16), (14.17)$$

Kaare elemendid ja postid on surutud. Pikijõud leitakse avaldistega

$$N_j = H / \cos \alpha_j \quad (14.18)$$

$$V_j = H (\operatorname{tg} \alpha_j - \operatorname{tg} \alpha_{j+1}) \quad (14.19)$$

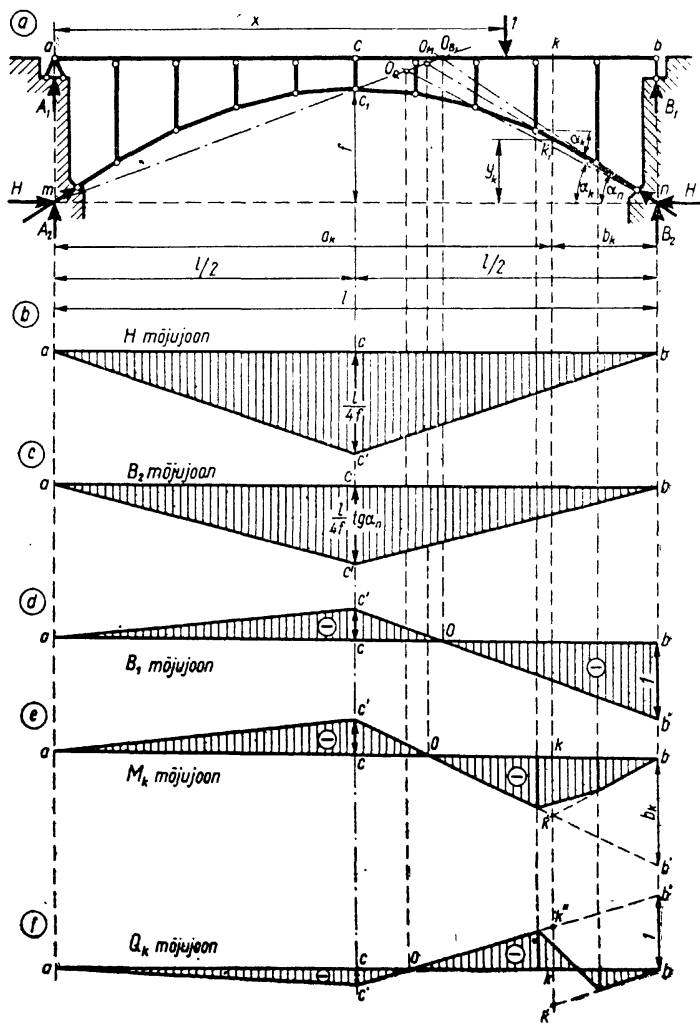
Paindemoment ja põikjõud tala suvalises ristlõikes k arvutatakse võrranditega:

$$M_k = M_h^0 - H y_h \quad (14.20)$$

$$Q_k = Q_h^0 - H \operatorname{tg} \alpha_h \quad (14.21)$$

Mõjujooned on kujutatud joonisel 14.7, e ja f.

Paindemomendi mõjujoone keskmise sirge kujutamiseks kantakse tala toe b vertikaalile lõik pikkusega b_k



Joon. 14.7

ja liigendi c vertikaalile lõik $c-c'$, mille pikkus on $b_k/2 - ly_h/4f$. Mõjujoone vasakpoolne sirge läbib tala toe a vertikaalil abstsissitelge ja liigendi c vertikaalil ordinaadi $c-c'$ tippu c' . Mõjujoone parempoolne sirge läbib tala toe b vertikaalil abstsissitelge ja lõike k vertikaalil lõikub mõjujoone keskmise sirgega.

Põikjõu mõjujoone keskmise sirge kujutamiseks kantakse tala parempoolse toe b vertikaalile ühikpikkusega lõik ja liigendi c vertikaalile lõik $c-c'$, mille pikkus on $1/2 - (l/4f) \operatorname{tg} \alpha_n$. Vasakpoolne sirge läbib toe a vertikaalil abstsissitelge ja liigendi c vertikaalil ordinaadi tippu c' . Parempoolne sirge on paralleelne keskmise sirgega ja läbib toe b vertikaalil abstsissitelge.

14.5. Sõrestikud

Suuremate avade sildamisel asendatakse varraskaarele toetuv või ripatsitega varrasahela külge kinnitatud täiseinaline tala talasõrestikuga. Niisuguste talasõrestike toereaktsioonid ja varraskaare või -ahela elementide ning postide või riputite pikijõud arvutatakse samuti kui täiseinaliste jäikustalade puhul.

Sõrestike varraste pikijõudude mõjujoonte ordinaadid leitakse tasakaalutingimustega.

Joonisel 14.8, a kujutatud sõrestiku arvutuskeemi aluse vöö varda 7-9 ja diagonaali 6-9 mõjujoonte ordinaatide arvutamiseks tehakse lõige $I-I$. Sõlme 6 kohta koostatud momentide tasakaalu tingimusest $\Sigma M_6 = 0$, kui ühikjõud on paremal pool lõiget,

$$A^0 a_6 - H(y_3 + h_3 + h) + H(h_3 + h) - N_{7-9} h = 0$$

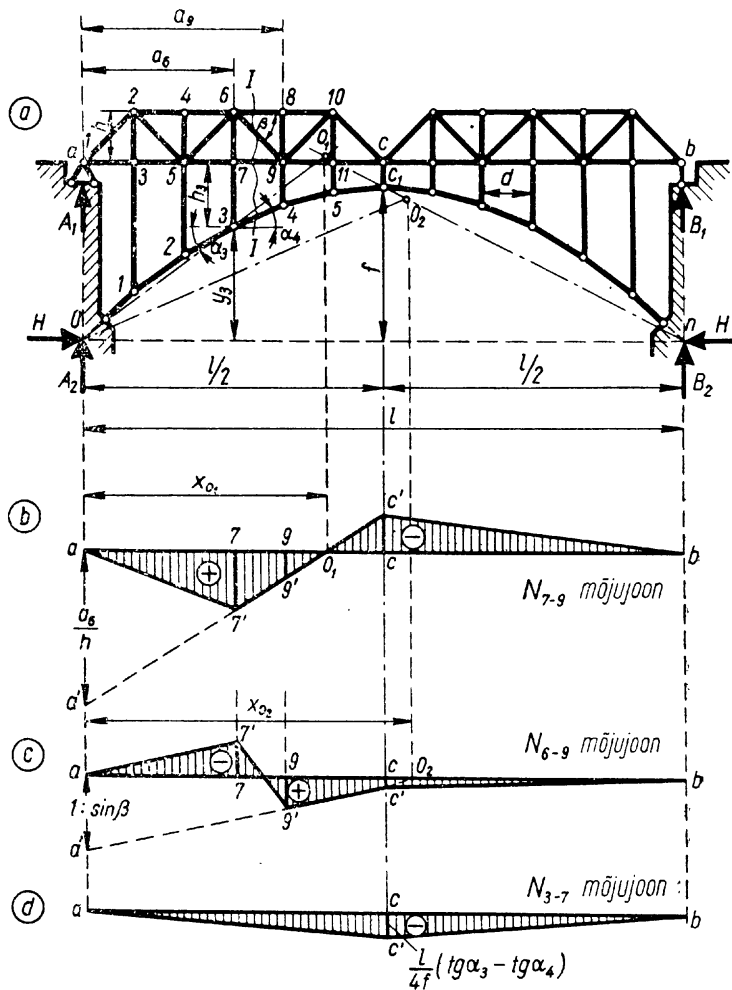
avaldatakse varda 7-9 pikijõud

$$N_{7-9} = (A^0 a_6 - H y_3) / h = M_3 / h \quad (14.25)$$

Avaldises (14.25) tähistab M_3 paindemomenti kolme liigendiga kaares varrasahela sõlmele 3 vastavas ristlõikes.

Varda 7-9 pikijõud, kui ühikjõud mõjub sõlme 9 ja liigendi c vahel, arvutatakse võrrandiga

$$N_{7-9} = \frac{1}{h} (A^0 a_6 - H y_3) = \frac{1}{h} \left(\frac{l-x}{l} a_6 - x \frac{y_3}{2f} \right) \quad (14.26)$$



Joon. 14.8

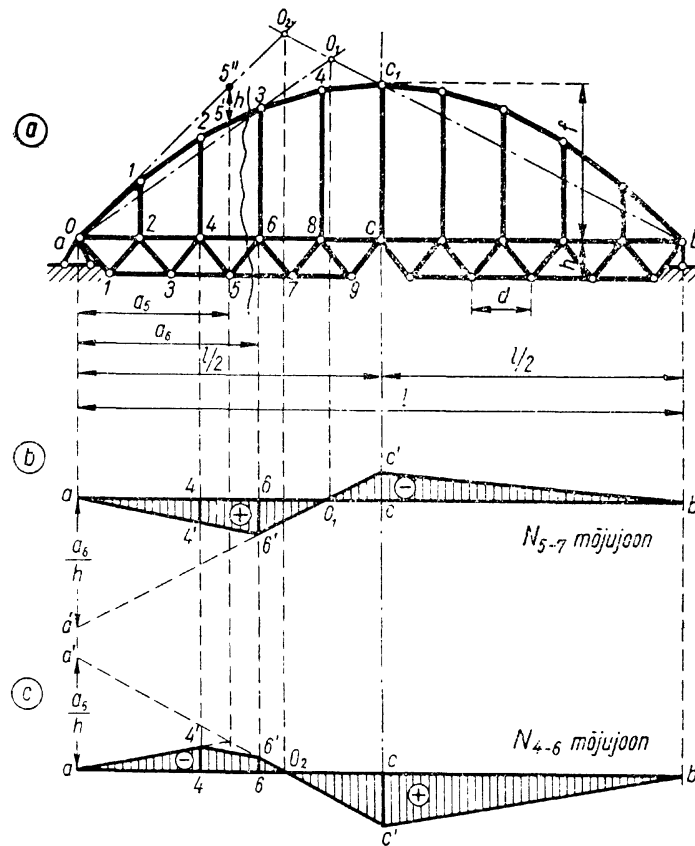
Läbilõigatud paneeli kohal asuv sirglõik 7'-9' on antud juhul mõjujoone keskmise sirge pikenduseks (sõlm 3 asub sõlme 7 samal vertikaalil). Sõlme 7 kohal asuv ordinaat 7-7' ($x=a_6$) leitakse keskmise sirge võrrandiga (14.26):

$$N_{7-9} = \frac{1}{h} \left(\frac{l-a_6}{l} a_6 - a_6 \frac{y_3}{2f} \right) = \frac{a_6}{h} \left(\frac{l-a_6}{l} - \frac{y_3}{2f} \right)$$

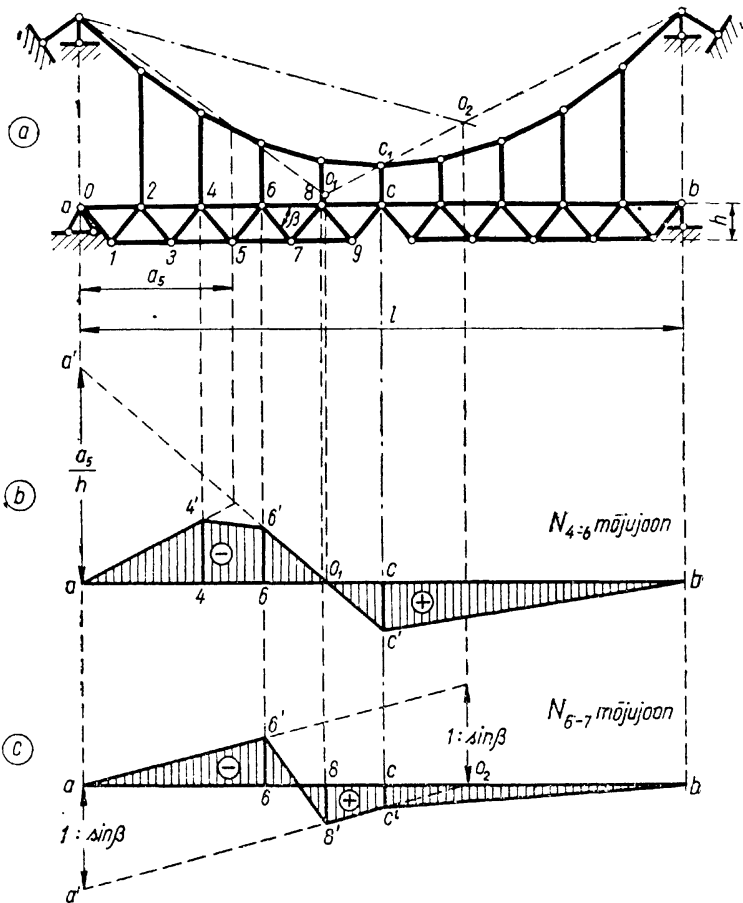
Liigendi c kohal olev ordinaat $c-c'$ ($x=l/2$) on

$$N_{7-9} = \frac{1}{h} \left(\frac{a_6}{2} - \frac{ly_3}{4f} \right)$$

Diagonaali 6-9 pikijõu mõjujoone (joon. 14.8, c) ordinaadid arvutatakse projektsioonide tasakaalu tingimusega $\Sigma Y=0$. Kui ühikjõud asub paremal pool lõiget $I-I$, siis



Joon. 14.9



Joon. 14.10

projektsioonide võrrandist

$$A^0 - H \operatorname{tg} \alpha_4 - N_{6-9} \sin \beta = 0$$

avaldatakse varda 6-9 pikijõud

$$N_{6-9} = (A^0 - H \operatorname{tg} \alpha_4) / \sin \beta \quad (14.27)$$

Keskmise sirge 9'-c' ordinaadid on järgmised: ordinaat 9-9' ($x=4d$)

$$N_{6-9} = \left(\frac{l - a_9}{l} - \frac{a_9}{2f} \operatorname{tg} \alpha_4 \right) / \sin \beta$$

ja ordinaat c-c' ($x=l/2$)

$$N_{6-9} = \left(\frac{1}{2} - \frac{l}{4f} \operatorname{tg} \alpha_4 \right) / \sin \beta$$

Mõjujoone vasakpoolne sirge (joon. 14.8, c) on paralleelne keskmise sirgega ja parempoolne sirge lõikub keskmise sirgega liigendi c vertikaalil.

Posti 3-7 mõjujoone kujutamisel vaadeldakse varraskaare sõlme 3 tasakaalu. Posti 3-7 mõjujoon on kujutatud joonisel 14.8, d.

Joonistel 14.9 ja 14.10 on esitatud kombineeritud sõrestike varrasde pikijõudude mõjujooni.

15. RUUMSÕRESTIKUD

15.1. Üldised mõisted

Tasandsõrestik on tasakaalus, kui koormus mõjub sõrestiku tasandis. Tasandsõrestiku tasakaaluasendis hoidmiseks kinnitatakse sõrestik lisasidemetega, mis teevad konstruktsiooni ruumiliseks.

Sõrestiku sõlmed on jäigad. Sõlmede jäikusest tekivad pinged saledates varrastes on liigendsõlmedega sõrestikus tekkivate pingetega võrreldes väikesed. Seepärast eeldatakse, et ka ruumsõrestiku vardad on üksteisega ühendatud hõõrdevabade keralliigenditega. Keralliigend võimaldab vardal pöörduda igas liigendi tsentrit läbivas tasandis. Eeldatakse, et koormus on rakendatud sõrestiku sõlmedes ja et varrastes tekivad ainult pikijõud.

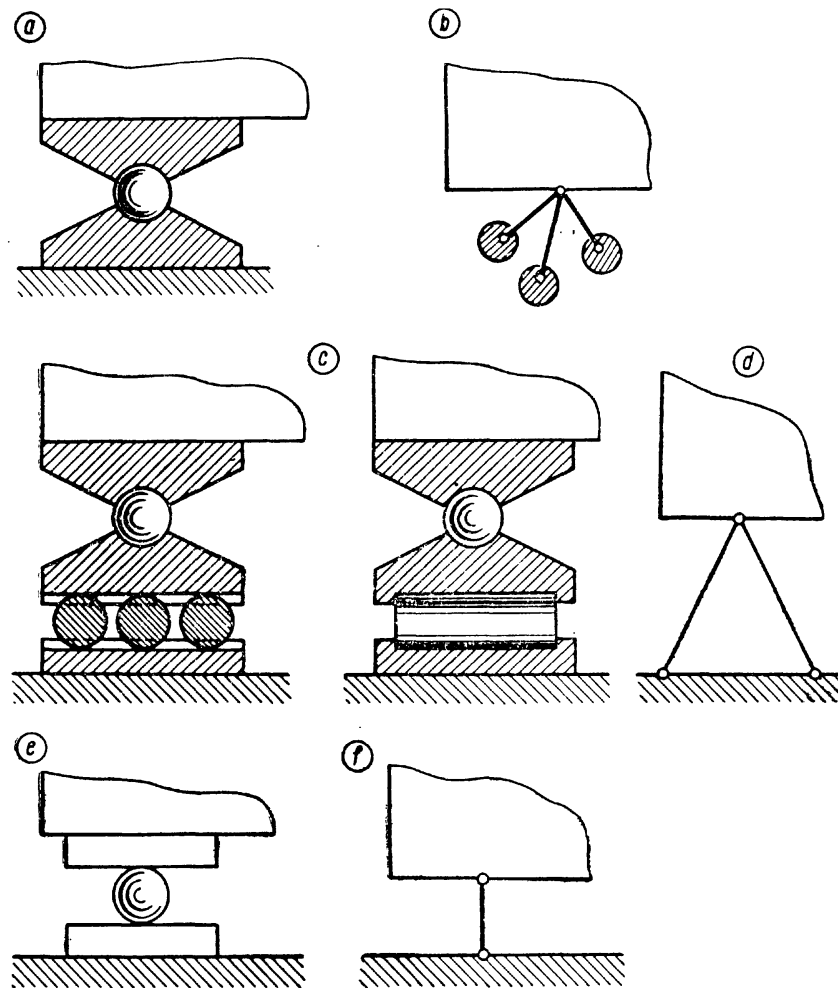
15.2. Toed

Geomeetrilisel muutumatul kujundil on ruumis 6 liikumisvabadust. Kujundi kinnitamiseks on vaja 6 tugivarrast. Tugede asetus peab kindlustama ka sõrestiku hetkmuutumatuse.

Tugesid on kolme liiki.

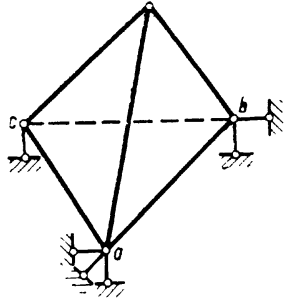
Liikumatu keratugi koosneb kahest balanssiirist, mille vahel asub kera (joon. 15,1, a). See tugi võimaldab pöört kolme telje suhtes ümber kera tsentri. Siirded ei ole võimalikud. Arvutuskeemis kujutatakse niisugused toed kolme vardaga, mille sihid lõikuvad kera tsentris (joon. 15,1, b). Toereaktsioonil on kolm komponenti — R_x , R_y , R_z .

Silindritel asetsev keratugi koosneb samuti kahest balanssiirist, mille vahel asub kera. Alumise balanssiiri ja toeplaadi vahel on silindrid. Niisugune tugi võimaldab pöört ümber kera tsentri ja siiret risti silindrite



Joon. 15.1

telgedega ning paralleelselt alusplaadiga (joon. 15.1, c). Arvutuskeemis on tugi kujutatud kahe vardaga, mille ühine liigend asub kera tsentris. Varraste tasand on vertikaalne ja läbib keskmise rulli telgjoont (joon. 15.1, d). Toereaktsioon asub tugivarraste tasandis ja omab kahte komponenti.



Joon. 15.2

Liikuv keratugi koosneb kahest plaadist ja nende vahel asuvast kerast (joon. 15.1, e). Tugi võimaldab pöört kolme telje suhtes ja siiret paralleelselt tugiplaatide pindadega. Toereaktsiooni siht läbib kera tsentrit ja on tugiplaatidega risti. Arvutuskeemis vastab sellele toele üks tugiplaatide pindadega risti olev varras (joon. 15.1, f).

Ruumsõrestiku kinnitamiseks toepinna külge on vaja vähemalt kolme tuge kokku kuue vardaga: üks tugi kolme, teine kahe ja kolmas ühe vardaga (joon. 15.2). Toe *b* varraste tasand ei tohi läbida kolme vardaga toe liigendit *a*. Toe *c* varda siht ei tohi lõikuda sirgega *a-b*.

Kuue tugivardaga sõrestik on hetkmuutuv järgmistel juhtudel:

- 1) kui kuue tugivarda sihid läbivad üht sirget;
- 2) kui nelja tugivarda sihid lõikuvad ühes punktis;
- 3) kui neli tugivarrast asuvad ühes tasandis;
- 4) kui viis varrast asuvad kahes tasandis ja kuues varras on paralleelne nende tasandite lõikejoonega.

15.3. Staatikaga määratavad ruumsõrestikud

Sõlmel on ruumis kolm liikumisvabadust. Sõrestikujundi varras, samuti ka tugivarras vähendab liikumisvabadust ühe võrra. Ruumsõrestiku vabadusaste leitakse avaldisega

$$\omega = 3s - v - t \quad (15.1)$$

milles *s* on sõlmede, *v* — varraste ja *t* — tugivarraste arv.

Kui sõrestiku vabadusaste $\omega > 0$, siis on konstrukt-

sioon geometriselt muutuv. Kui $\omega < 0$, siis on konstruksioonil lisasidemed, mille tõttu sõrestik on staatikaga määratu. Staatikaga määratud sõrestiku vabadusaste $\omega = 0$, s. t.

$$3s - v - t = 0$$

või

$$3s = v + t \quad (15.2)$$

Ruumsõrestiku sõlme kohta saab koostada kolm tasakaaluvõrrandi. Võrrandi (15.2) vasak pool vastab tasakaalutingimuste arvule. Parem pool on võrdne tundmatute sisejõudude ja toereaktsioonide komponentide arvuga.

Staatikaga määratuse aste leitakse valemiga

$$n = v + t - 3s \quad (15.3)$$

Tingimus (15.2) on küll vajalik, kuid mitte piisav. Sõrestiku mõni osa võib olla hetkmuutuv. Ruumsõrestiku hetkmuutuvust kontrollitakse nullkoormuse meetodiga.

15.4. Sisejõudude arvutus

15.4.1. Sõlmede eraldamise võte

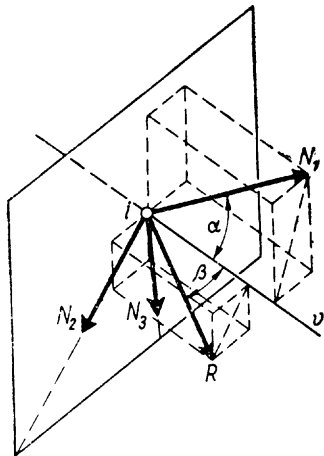
Sõrestikust eraldatakse järjestikku sõlmed ja leitakse varraste sisejõud sõlmede kohta koostatud tasakaalutingimustest. Iga sõlme kohta koostatakse kolm projektsioonide tasakaalu tingimust:

$$\Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma Z = 0 \quad (a)$$

Projektsioonide tasakaalu tingimuste asemel võib koostada ka momentide tasakaalu tingimused.

Ühes sõlmes ühendatud varraste sisejõud on arvutatavad tasakaalutingimustest, kui tundmatuid on ainult kolm. Kolm varrast, mille sisejõud on tundmatud, ei tohi seejuures asuda ühes tasandis. Arvutamisel koostatakse sageli projektsioonide tasakaalu tingimused kahte varrast läbiva tasandi normaali suhtes. Näiteks joonisel 15.3 kujutatud sõlmes *i* koostatakse varda *1* sisejõu arvutamiseks projektsioonide võrrand vardaid *2* ja *3* läbiva tasandi normaali *v* kohta:

$$\Sigma v = 0; \quad N_1 \cos \alpha + R \cos \beta = 0 \quad (b)$$



Joon. 15.3

milles R on sõlmes i rakendatud koormuse ja eelnevalt leitud sisejõudude resultant.

Kui koormamata sõlm koosneb kolmest mitte ühes tasandis asuvast vardast, siis võrrandist (b) järeldub, et nende varraste sisejõud võrduvad nulliga.

Kui sõrestiku sõlmes on ühendatud rohkem kui kolm varrast ja kõik vardad peale ühe asuvad ühes tasandis, siis selles tasandis mitte asuva varda sisejõud leitakse projektsioonide tingimusest tasandi normaali kohta. Kui see sõlm on koormamata, siis vardas, mis ei asu teiste varrastega ühes tasandis, võrdub sisejõud nulliga.

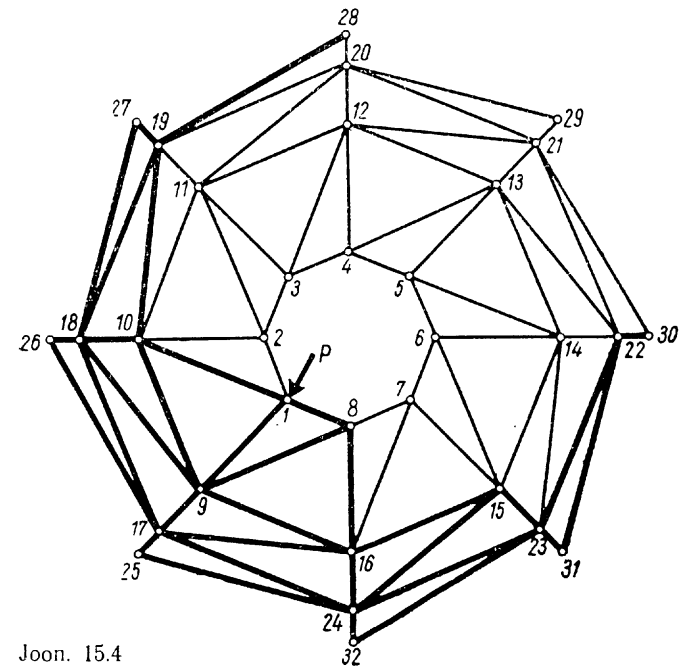
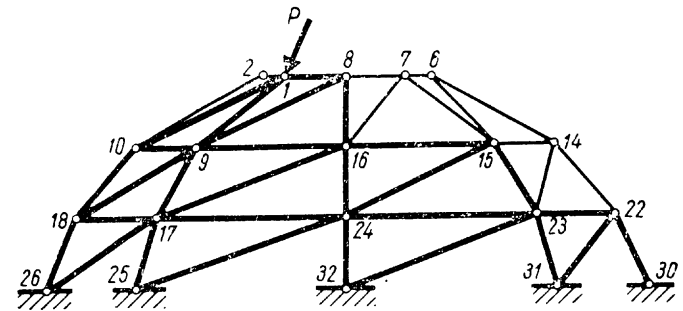
Ruumsõrestiku arvutamisel tehakse esimeses järjekorras kindlaks vardad, mille sisejõud on nullid. Siis eraldatakse arvutusskeemist sõlm, milles on ainult kolm mitte ühes tasandis asuvat varrast (nullvardaid ei arvestata), ja arvutatakse nende varraste sisejõud. Järgnevalt eraldatakse sõlm, milles on tundmatuid sisejõude kolm, ja arvutatakse nende varraste sisejõud jne.

Näide 15.1. Joonisel 15.4 kujutatud kupli tahud koosnevad viiest vardast. Neli varrast moodustavad trapetsi ja viies varras on diagonaal.

Sõlmede arv on 32, varraste arv 72. Valemist (15.2) järeldub, et toesidemete arv peab olema $t = 3s - v = 3 \cdot 32 - 72 = 24$. Kuplil on 8 tuge. Iga tugi peab olema kolme sidemega, järelikult liikumatu keraliigend.

Sõrestik on koormatud sõlmes I . Sõlmes 8 ühendatud neljast

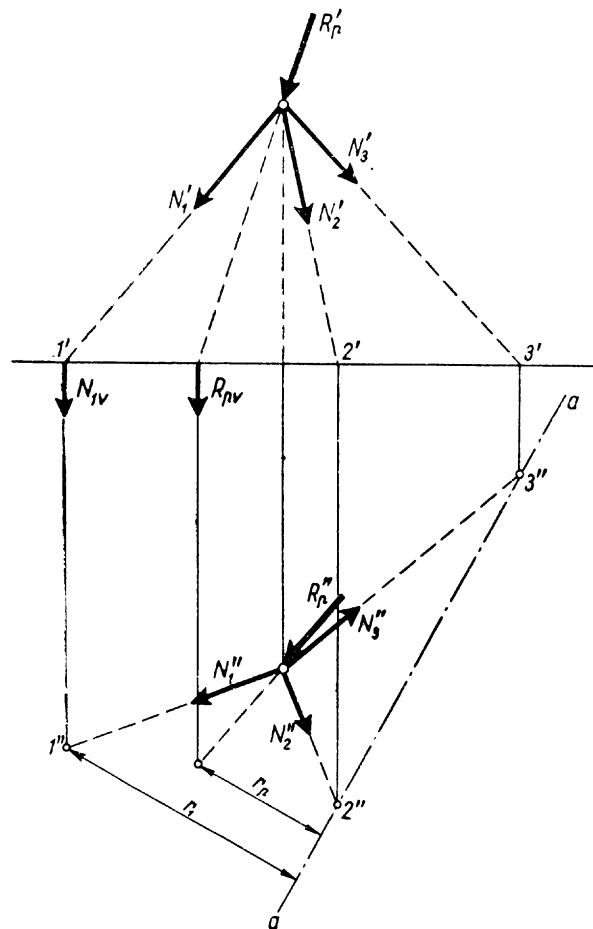
vardast asuvad kolm varrast (8-1, 8-9 ja 8-16) ühes tasandis. Kuna sõlm 8 on koormamata, siis neljas varras 8-7, mis ei ole teistega ühes tasandis, on nullvarras. Analoogiliselt leitakse sõlmedes 7, 6, 5, 4, 3 ja 2, et $N_{7-6} = N_{6-5} = N_{5-4} = N_{4-3} = N_{3-2} = N_{2-1} = 0$. Sõlmes 7 on $N_{7-8} = N_{7-6} = 0$. Järelikult kahe ülejäänud varda sisejõud võrduvad nulliga: $N_{7-15} = N_{7-16} = 0$. Analoogiliselt leitakse sõlmedes 6, 5, 4, 3 ja 2, et $N_{6-14} = N_{6-15} = 0$; $N_{5-13} = N_{5-14} = 0$; $N_{4-12} = N_{4-13} = 0$ jne. Sõlmes 15 on kuus varrast. Kaks varrast on nullvardad ($N_{7-15} = N_{6-15} = 0$).



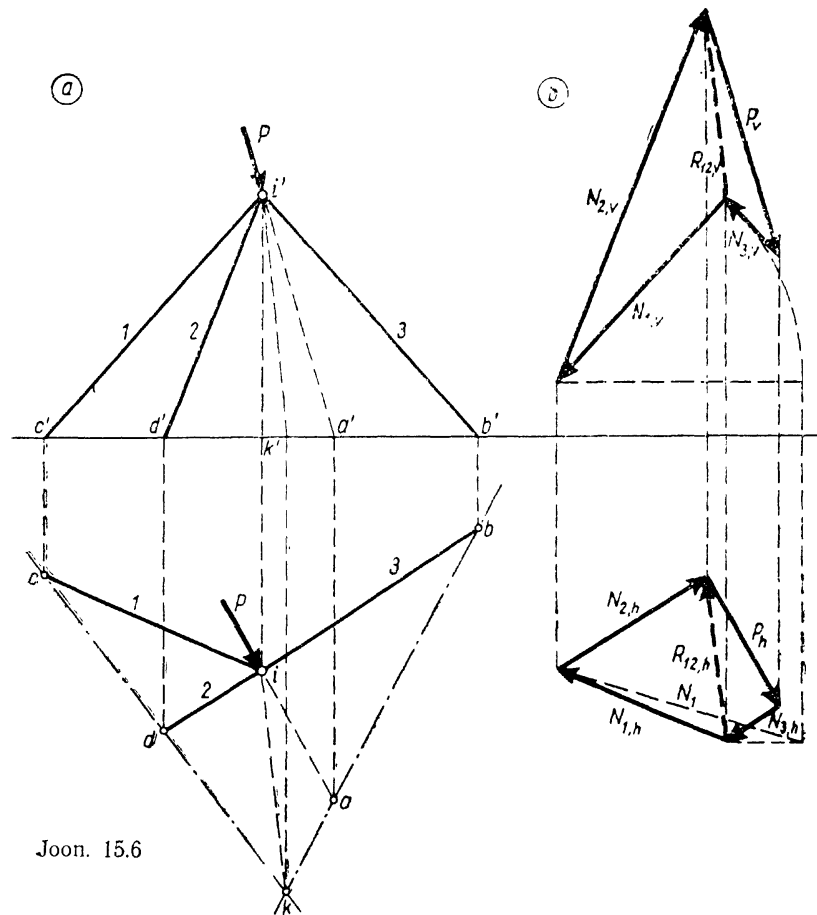
Joon. 15.4

Kolm varrast (15-16, 15-23 ja 15-24) asuvad ühes tasandis, varras 14-15 ei asu selles tasandis. Järelikult $N_{14-15}=0$ jne. Joonisel 15.4 on nullvardad kujutatud peene joonega.

Sõlm 1 on koormatud. Varraste 1-8, 1-9, 1-10 sisejõud leitakse sõlme tasakaalu tingimustest. Järgnevalt lahendatakse sõlm 8. Kuna varda 1-8 sisejõud on leitud, siis avaldatakse varraste 8-9 ja 8-16 sisejõud kahest tasakaalutingimusest. Sõlme 10 tasakaalu tingimustest leitakse varraste 10-9, 10-18 ja 10-19 sisejõud. Edasi lahendatakse sõlmed järjekorras 9, 16, 15, 19, 18, 17, 24, 23 ja 22.



Joon. 15.5



Joon. 15.6

Kolme tundmatuga ruumilise sõlme varda sisejõu leidmisel momentide võrrandiga koostatakse võrrand telje kohta, mis läbib kahe varda sihti. Arvutuse lihtsustamiseks võetakse telg horisontaalpinnal. Koormus ja tuntud sisejõudude resultant, samuti tundmatu varda sisejõud lahutatakse vertikaalseks ja horisontaalseks komponendiks (joon. 15.5). Tundmatu sisejõu vertikaalne komponent leitakse telje $a-a$ kohta koostatud võrrandist

$$R_{pv}r_p + N_{1v}r_1 = 0$$

milles R_{pv} on sõlme mõjuva koormuse ja tuntud sise-

jõudude resultandi vertikaalne komponent; N_{1v} — varda 1 sisejõu vertikaalne komponent; r_p ja r_1 — vertikaalsete komponentide õlad telje $a-a$ suhtes.

Kolme vardaga ruumilise sõlme sisejõudude leidmine graafiliselt on esitatud joonisel 15.6. Sisejõud leitakse kahel ekraanil. Esiteks leitakse varrast 3 ja jõudu P läbiva tasandi $P-3$ ning varraste 1 ja 2 tasandi $1-2$ lõikejoone jäljed vertikaal- ja horisontaalekraanil. Tasandite $P-3$ ja $1-2$ jälgedeks horisontaalekraanil on sirged $a-b$ ja $c-d$. Tasandite lõikejoone jäljeks horisontaalekraanil on sirge $i-k$ ja vertikaalekraanil $i'-k'$ (joon. 15.6, a).

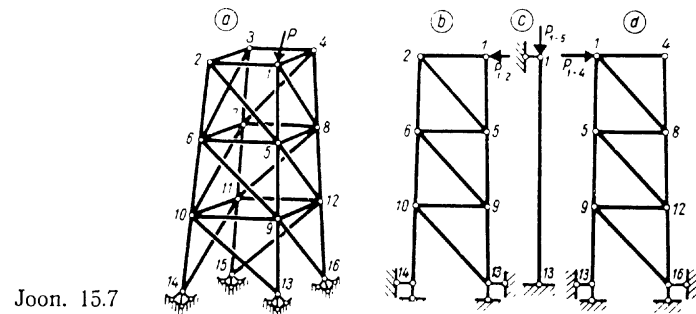
Mõlemal ekraanil tasakaalustatakse jõud P varda 3 ja tasandite lõikejoone sihiliste komponentidega (tasandil $P-3$). Järgnevalt lahutatakse lõikejoone sihiline komponent tasandil $1-2$ varraste 1 ja 2 sihilisteks komponentideks (joon. 15.6, b). Jõudude suurused leitakse maha-pöörete abil. Näiteks N_1 suuruse leidmiseks pööratakse ta paralleelseks horisontaalekraaniga. Jõu pööramisel horisontaalekraanil leitakse tema tegelik suurus vertikaalekraanil.

15.42. Momenditelje võte

Kui sõrestiku arvutuskeemi on võimalik lõikega läbi kuue varda eraldada kaheks osaks, siis arvutatakse läbilõigatud varraste sisejõud ühe osa kohta koostatud tasakaalutingimustest. Läbilõigatud varraste sisejõudude arvutamiseks võib koostada kuus tasakaaluvõrrandit: kolm projektsioonide ja kolm momentide võrrandit koordinaattelgedes suhtes. Arvutuse lihtsustamiseks võib tasakaalutingimused koostada ainult momentide võrranditena. Telgedeks võetakse kaks sirget, mis lõikavad nelja läbilõigatud varda sihti või on nendega paralleelsed. Nendest võrranditest leitakse kahe ülejäänud varda sisejõud. Kui nelja läbilõigatud varda sihid on paralleelsed, siis kasutatakse ka projektsioonide tingimusi.

15.43. Ruumsõrestiku lahutamine tasandsõrestikeks

Staatikaga määratavatest ja geomeetriselt muutumatutest tasandsõrestikest moodustatud ruumsõrestiku arvutamisel lahutatakse sõrestikule mõjuv koormus komponentideks tasandsõrestike pindades. Geomeetriselt muu-



Joon. 15.7

tumatu tasandsõrestiku varrastes leitakse sisejõud sõrestiku tasandis mõjuvast koormusest.

Näitena vaadeldakse sisejõudude leidmist joonisel 15.7, a kujutatud sõrestiku arvutuskeemis. Sõrestiku sõlmes 1 rakendatud jõud lahutatakse komponentideks varraste $1-2$, $1-4$ ja $1-5$ sihis. Komponent P_{1-5} põhjustab sisejõude ainult postis $1-13$ (joon. 15.7, c). Varda $1-4$ sihiline komponent P_{1-4} põhjustab sisejõud sõrestiku ristkülikus $1-4-16-13$ (joon. 15.7, d), komponent P_{1-2} — ristkülikus $1-2-14-13$ (joon. 15.7, b).

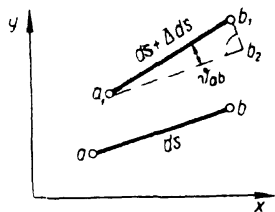
Ruumsõrestiku posti varraste $1-5$, $5-9$ ja $9-13$ lõplikud sisejõud leitakse kolme komponendi (joon. 15.7, b, c ja d) liitmise. Vaadeldud tasandsõrestikesse mitte kuuluvate varraste sisejõud võrduvad nulliga.

16. PAIGUTISTE ARVUTUS

16.1. Sissejuhatus

Koormuse rakendamisel muutub konstruktsiooni esialgne kuju. See kujumuutus on põhjustatud konstruktsiooni varraste lõpmata väikeste elementide deformatsioonidest. Ehitise deformeerumisel paigutuvad kõik või peaaegu kõik tema punktid uude kohta. Konstruktsiooni elemendi mingi punkti või sirge paigutuse muutust oma algasendi suhtes nimetatakse paigutiseks. Näiteks varda elementaarse osakese ds otspunkti a (joon. 16.1) paigutiseks on siire aa_1 , mis kujutab punkti a lõpp- ja algasendi raadiusvektorite vahet valitud koordinaatide süsteemi suhtes. Lineaarse elemendi paigutis määratakse tema pöörde ja sellel elemendil suvaliselt valitud punkti siirdega. Näiteks lineaarse elemendi ab paigutus pärast konstruktsiooni deformeerumist on määratud punkti a siirdega aa_1 ja elemendi ab pöördega ϑ_{ab} . Lineaarse elemendi pöore ϑ_{ab} on elemendi uue sihi a_1b_1 ja esialgse sihi ab vaheline nurk ($a_1b_1 // ab$).

Ehituskonstruktsioonid peavad olema tugevad, püsivad ja jäigad. Viimane tingimus on iseloomustatud konstruktsiooni elementide paigutiste ja nende elementide põhimõõtmete suhtega. Seepärast on vaja projekteeritava konstruktsiooni jäikuse hindamiseks ja teise arvutusliku piirlokorra määramiseks arvutada paigutised, mis teki-



Joon. 16.1

vad konstruktsiooni ekspluateerimisel. Tähtsamaid ehitisi kontrollitakse veel eksperimentaalselt määratud paigutiste võrdlemisega teoreetiliselt arvatud paigutistega. Lisaks eespool esitatud vajadustele nõuab iga staatikaga määratamatu ehitise arvutus peale staatika tasakaaluvõrrandite veel projekteeritava konstruktsiooni elementide paigutisi sisaldavate võrrandite koostamist ja lahendamist.

Seepärast on konstruktsioonide paigutiste arvutamine ehitismehaanika üheks põhiülesandeks.

Edaspidi vaadeldakse ainult lineaarselt deformeeruvaid konstruktsioone, mille kohta kehtib jõudude mõju sõltumatuse printsiip. Lineaarselt deformeeruva konstruktsiooni suvalise punkti k paigutis Δk avaldub lineaarse funktsioonina konstruktsioonile mõjuvatest välisjõududest P_1, P_2, \dots, P_n :

$$\Delta k = \delta_{k1}P_1 + \delta_{k2}P_2 + \dots + \delta_{kn}P_n = \sum_{i=1}^n \delta_{ki}P_i \quad (16.1)$$

milles δ_{ki} on punkti k paigutis, mis on põhjustatud ühikjõust kohas i ($P_i=1$).

Kõige üldisem meetod konstruktsioonide tasakaalu uurimisel põhineb võimalike paigutiste printsiibil, mille esimesena formuleeris *J. Bernoulli* ja hiljem üldkujul esitas *J. L. Lagrange*. Lineaarselt deformeeruva konstruktsiooni jaoks sõnastatakse võimalike paigutiste printsiip järgmiselt: **kui konstruktsioon on temale rakendatud koormuse mõjul tasakaalus, siis konstruktsiooni elementide suvalistel lõpmata väikestel võimalikel paigutistel võrdub välis- ja sisejõudude tööde summa nulliga:**

$$T + U = 0 \quad (16.2)$$

milles T on välisjõudude ja U — sisejõudude töö võimalikel paigutistel. Võimalike paigutistena kujutletakse niisuguseid paigutisi, mis on põhjustatud suvaliste võimalike lõpmatult väikeste jõudude (või ka mõnede muude põhjuste) poolt. Eeldatakse, et konstruktsioonile mõjuvate välis- ja sisejõudude suurused ja suunad võimalike paigutiste ajal ei muutu. Võrrandist (16.2) järeldub, et sisejõudude võimalik töö on võrdne välisjõudude tööga, kuid vastupidise märgiga:

$$U = -T \quad (16.3)$$

Valdav osa ehitisi töötavad tingimustes, mille juures pinged materjalis ei ületa elastsuspiiri. Kuna materjali

elastsetest deformatsioonidest põhjustatud paigutised on väga väikesed, võrreldes konstruktsiooni mõõtmetega, siis rakendatakse võimalike paigutiste printsiipi ka konstruktsioonide tegelikel paigutistel.

16.2. Üldistatud jõud ja paigutised

Jõu töö väljendatakse kahe teguri korrutisena $P\delta$, milles tegur P esitab jõudu ja tegur δ on jõu rakenduspunkti siirde komponent jõu sihil. Jõudude mõju sõltumatus printsiibi alusel võrdub jõudude süsteemi töö üksikute jõudude tööde summaga $\sum P_i\delta_i$. Avaldiste ja järelduste üldisemaks ja kompaksemaks muutmiseks väljendatakse ka jõudude süsteemi töö kahe teguri korrutisena

$$\sum P_i\delta_i = S\delta_s \quad (16.4)$$

milles tegurit S nimetatakse üldistatud jõuks ja tegurit δ_s — üldistatud paigutiseks. Üldistatud jõud S oleneb jõudude süsteemist ja esitab seda tervikuna. Üldistatud jõu dimensiooniks võib olla kG, kGm, kG/m jne. Üldistatud paigutis δ_s oleneb paigutistest ja on vastav jõudude süsteemi esitavale üldistatud jõule S . Vastavus väljendub selles, et üldistatud jõu ja üldistatud paigutise korrutis on võrdne jõudude süsteemi tööga: $\sum P_i\delta_i = S\delta_s$.

Mõningatel juhtudel omab üldistatud paigutis konkreetset geomeetrilist tähendust. Lihtsaim üldistatud jõud koosneb kahest võrdsest vastupidise suunaga jõust P_1 ja P_2 ($P_1 = P_2 = P$), mis asetsevad ühel sirgel (joon. 16.2, a).

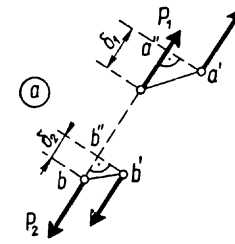
Olgu jõudude P_1 ja P_2 rakenduspunktide a ja b võimalikud siirded aa' ja bb' , kusjuures jõudude sihid ei muutu. Jõudude P_1 ja P_2 rakenduspunktide a, b siirete (aa' ja bb') komponendid jõudude mõjumissihil on aa'' ja bb'' , mille moodulid tähistatakse vastavalt $\delta_1 = |aa''|$, $\delta_2 = |bb''|$. Võimalik töö on nüüd

$$T = P\delta_1 - P_2\delta_2 = P(\delta_1 - \delta_2) \quad (a)$$

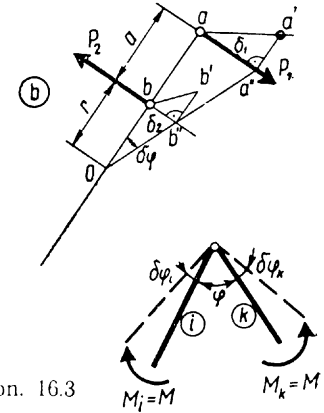
ehk

$$T = P\delta \quad (16.5)$$

milles P on üldistatud jõud, mis esitab kahte võrdset ja vastupidise suunaga jõudu P_1 ja P_2 , ning $\delta = \delta_1 - \delta_2$ on üldistatud paigutis, mis kujutab jõudude P_1 ja P_2 rakenduspunktide vahel asetseva lõigu $a-b$ pikkuse muu-



Joon. 16.2



Joon. 16.3

tust. Avaldises (a) on jõu P_2 töö negatiivne, kuna siire bb'' on vastupidine jõu P_2 suunaga.

Olgu üldistatud jõuks jõupaar $P_1 = P_2 = P$ (joon. 16.2, b). Vektorid aa' ja bb' on jõudude P_1 ja P_2 rakenduspunktide siirded. Jõusihiliste siirete komponentide moodulid on vastavalt $\delta_1 = |aa''|$ ja $\delta_2 = |bb''|$. Võimaliku töö avaldis antud juhul on sama, kui eelnevalt vaadeldud üldistatud jõu puhul (a). Kui kasutada joonisel 16.2, b esitatud tähistust: $a = a-b$, $r = b-0$ ja $\delta\varphi$, mis on sirgete $a-b$ ning $a''-b''$ vaheline nurk, siis väikeste paigutiste puhul

$$\delta_1 = (r+a)\delta\varphi, \quad \delta_2 = r\delta\varphi \quad (b)$$

ja avaldis (a) saab kuju

$$T = P(\delta_1 - \delta_2) = P[(r+a)\delta\varphi - r\delta\varphi] \quad (c)$$

ehk

$$T = Pa\delta\varphi = M\delta\varphi \quad (16.6)$$

Siin $M = Pa$ ja esitab jõupaari (P_1, P_2) momenti. Järelikult, kui üldistatud jõuks on jõupaari moment M , siis üldistatud paigutiseks on nurk $\delta\varphi$. Kui pöördekesse 0 on lõpmatuses, siis jõupaari paigutiseks on siire ja $\delta\varphi = 0$. Järelikult ka töö võrdub nulliga.

Järgnevalt vaadeldakse üldistatud jõudu, mis esitab kahe võrdse vastupidise suunaga momendi ($M_k = -M_i$) mõju (joon. 16.3). Momendid M_i ja M_k on rakendatud vastavalt elementidele i ja k , mille võimalikud paigutised

on $\delta\varphi_i$ ja $\delta\varphi_k$. Kui tähistada

$$M = |M_i| = |M_k| \quad (d)$$

$$\delta\varphi_{ih} = \delta\varphi_i + \delta\varphi_k \quad (e)$$

siis leitakse võimalik töö järgmiselt:

$$T = M_i \delta\varphi_i + M_k \delta\varphi_k = M \delta\varphi_{ih} \quad (16.7)$$

Järelikult, kui elementidele i ja k on rakendatud kaks võrdset, kuid vastupidi mõjuvat momenti $M_i = -M_k$ ja nad asendatakse üldistatud jõuga $M = |M_i| = |M_k|$, siis on üldistatud paigutiseks nende elementide i ja k vahelise nurga φ_{ih} muutus $\delta\varphi_{ih}$.

Üldistatud paigutis on niisuguse dimensiooniga, et üldistatud jõu ja üldistatud paigutise korrutise dimensiooniks on töö dimensioon.

Edaspidi, kui käsitletakse jõudu ja sellele vastavat paigutist, siis mõeldakse nendena üldistatud jõudu ja üldistatud paigutist.

16.3. Tegelik töö

16.31. Välisjõudude töö

Tegelikuks tööks nimetatakse niisugust tööd, mida teevad konstruktsioonile rakendatud jõud paigutistel, mis on põhjustatud samade jõudude poolt.

Koormuse rakendamine põhjustab konstruktsiooni deformeerumist. Kui koormus kasvab pikkamööda, nii et konstruktsiooni elementide deformeerumine on aeglane ja seetõttu ka deformeerumisel tekkivad inertsjõud on võrreldes teiste mõjuvate jõududega kaduvväikesed, siis nimetatakse koormuse rakendamist staatiliseks.

Konstruktsioonile staatiliselt mõjuvat koormust tähistatakse X_k , mis kasvab nullist kuni suuruseni S_k . Jõududele X_k ja S_k vastavaid üldistatud paigutisi tähistatakse λ_k ja Δ_k .

Elastse konstruktsiooni paigutis on proportsionaalne mõjuva jõuga:

$$\lambda_k = \delta_{kk} X_k, \quad \Delta_k = \delta_{kk} S_k \quad (a)$$

milles δ_{kk} on jõule X_k vastav paigutis, mis on põhjustatud jõust $X_k = 1$. Jõu suurenemine dX_k võrra põhjustab pai-

gutise juurdekasvu

$$d\lambda_k = \delta_{kk} dX_k \quad (b)$$

mille tulemusena jõu ($X_k + dX_k$) poolt paigutise juurdekasvul $d\lambda_k$ tehtud elementaarset tööd võib avaldada järgmiselt:

$$dT = (X_k + dX_k) d\lambda_k$$

või, kui ära jätta lõpmata väike teise järgu suurus $dX_k d\lambda_k$, siis

$$T = X_k d\lambda_k = \delta_{kk} X_k d\lambda_k \quad (c)$$

Kogu tegelik töö koormuse staatilisel suurenemisel nullist kuni väärtuseni S_k leitakse integreerimise teel:

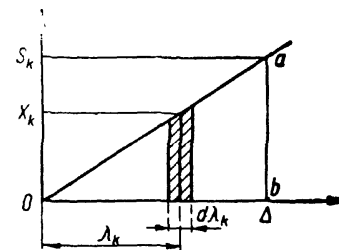
$$T = \int_0^{S_k} \delta_{kk} X_k dX_k = \frac{1}{2} \delta_{kk} S_k^2$$

mis, arvestades avaldist (a), saab kuju

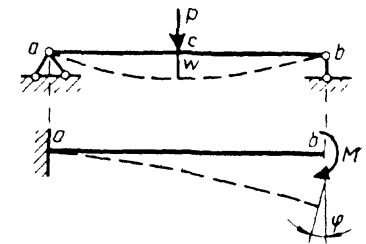
$$T = \frac{1}{2} S_k \Delta_k \quad (16.8)$$

Avaldis (16.8) esitab *Clapeyroni* teoreemi, mis sõnastatult on järgmine: **jõu staatilisel rakendamisel konstruktsioonile väljendub töö elastsete deformatsioonide puhul jõu ja paigutise lõppsuuruste poole korrutisena**. See on õige ainult siis, kui konstruktsioon ei ole koormatud teiste jõududega, ei oma algpingeid ja on lineaarselt deformeeruv, s.t. paigutised on proportsionaalsed mõjuva jõuga (16.4).

Joonisel 16.4 on elementaarne töö kujutatud viirutatud pinnana. Kogu töö võrdub kolmnurga Oab pindalaga.



Joon. 16.4



Joon. 16.5

Mitme jõu üheaegsel staatilisel rakendamisel elastsele lineaarselt deformeeruvale konstruktsioonile arvutatakse nende jõudude töö järgmise valemiga:

$$T = \frac{1}{2} \sum S_k \Delta_k \quad (16.9)$$

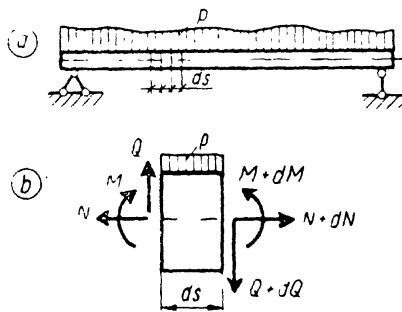
milles S_k on üldistatud jõud ja Δ_k — jõule S_k vastav lõpp-paigutus, mis on põhjustatud kõigist jõududest.

Kui konstruktsioonile mõjub ainult üks jõud (joon. 16.5, a ja b), siis selle välisjõu tegelik töö $T = \frac{1}{2} S \Delta > 0$, kuna paigutus on jõu suunas. Kui konstruktsioonile mõjub palju välisjõudusid, siis võib mõne välisjõu töö olla negatiivne, kuid kõigi välisjõudude tööde summa on ikka positiivne: $T = \frac{1}{2} \sum S_k \Delta_k > 0$.

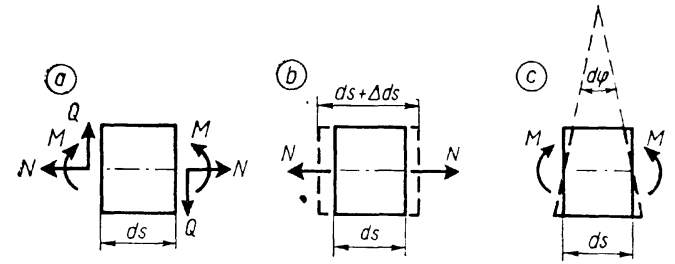
16.32. Sisejõudude töö

Konstruktsioonile mõjuvate välis- ja sisejõudude tööde summa võrdub nulliga (16.2) ja kuna välisjõudude töö on positiivne, siis sisejõudude töö (16.3) on negatiivne ($U = -T < 0$).

Sisejõudude töö vaatlemisel piirdatakse sirgetest varrastest koosnevate tasandkonstruktsioonidega ja eeldatakse, et ristlõigete tasapinnalisuse hüpotees on kehtiv. Sisejõudude töö arvutamiseks eraldatakse vardast kahe, varda teljega perpendikulaarse lõikega lõpmatult lühike element pikkusega ds (joon. 16.6). Kahe naaberosa mõju sellele



Joon. 16.6



Joon. 16.7

eraldatud elemendile asendatakse jõududega, mis arvu- liseks on võrdsed terve varda nendes lõigetes (joon. 16.6, a) esinevate sisejõududega. Eraldatud elemendi suhtes mõjuvad need jõud välisjõududena (joon. 16.6, b).

Eraldatud elemendi pikkus ds on lõpmatult lühike ja seepärast on temale mõjuvad sisejõudude juurdekasvud dN , dM , dQ ja koormus $p ds$ hüljatavalt väikesed ning jäetakse ära. Eraldatud elemendile mõjuvad nüüd võrdsed, kuid vastupidiste suundadega jõud N , M , Q (joon. 16.7, a).

Elemendile rakendatud pikijõud N põhjustab elemendi pikennemise $\Delta ds = N ds / EF$ võrra (joon. 16.7, b), kus F on varda ristlõikepindala ja E — materjali normaal- elastsusmoodul. Koormuse staatilisel rakendamisel on pikijõu töö

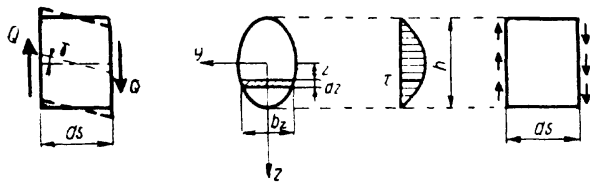
$$dT_N = \frac{1}{2} N \cdot \Delta ds = \frac{1}{2} N \frac{N ds}{EF} = \frac{N^2 ds}{2EF}$$

Elementaarse osa pikennemisel pikijõu N mõjul ds võrra sisejõud M ja Q tööd ei tee.

Elemendi otstes mõjuvad kaks võrdset momenti põhjustavad elemendi kõverdumise (joon. 16.7, c). Telgjoon ainult kõverdub, ei lühene ega pikene. Kõverus elemendi pikkusel on konstantne: $1/q = M/EI$, mille tulemusena ots- ristlõiked pöörduvad teineteise suhtes nurga $d\varphi = ds/q = = M ds / EI$ võrra. Momendi M töö nurkpaigutisel $d\varphi$ koormuse staatilisel rakendamisel on nüüd

$$dT_M = \frac{1}{2} M d\varphi = \frac{1}{2} M \frac{M ds}{EI} = \frac{M^2 ds}{2EI} \quad (b)$$

Nurkpaigutisel $d\varphi$ pikijõud N ja põikjõud Q tööd ei tee. Elementaarsed tangentsiaaljõud τdF , mille resultant



Joon. 16.8

ristlõikes võrdub põikjõuga (joon. 16.8, a), ei ole ühtlaselt jaotatud ja y -teljega paralleelsel ribal arvutatakse nad valemiga

$$\tau dF = (QS/Ib_z) dF \quad (c)$$

kus S on allpool (või ülalpool) seda riba asetseva ristlõikeosa staatiline moment y -telje suhtes, b_z — riba laius ja dF — riba pindala (joon. 16.8). Elemendi otstes y -teljest võrdsel kaugusel asetsevate ribakeste suhteline nihe on $\gamma ds = (\tau/G) ds$, milles G on nihke-elastsusmoodul ja γ — nihkenurk. Elementaarsete tangentsiaaljõu τdF töö paigutisel γds koormuse staatilisel rakendamisel väljendatakse korrutisega $\frac{1}{2} \tau dF \gamma ds$ ja kogu elementaarsete

tangentsiaaljõudude tööde summa ristlõikes leitakse integreerimise teel:

$$\begin{aligned} dT_Q &= \int_F \frac{1}{2} \tau dF \gamma ds = \frac{ds}{2} \int_F \tau^2 \frac{dF}{G} = \frac{ds}{2G} \int_F \frac{Q^2 S^2}{I^2 b_z^2} dF = \\ &= \frac{Q^2 ds}{2GF} \cdot \frac{F}{I^2} \int_F \frac{S^2}{b_z^2} dF = k \frac{Q^2 ds}{2GF} \end{aligned} \quad (d)$$

milles

$$k = \frac{F}{I^2} \int_F \frac{S^2}{b_z^2} dF \quad (16.10)$$

Tegur k (16.10) on dimensioonita suurus, mis oleneb ristlõike kujust. Ristkülikristlõike, mille kõrgus on h ja laius b , $F = bh$, $I = bh^3/12$, $S = \frac{b}{2} (h^2/4 - z^2)$,

$$k = \frac{36}{h^5} \int_{-h/2}^{h/2} (h^2/4 - z^2)^2 dz = 1,2$$

Ringristlõike $k = 32/27 \approx 1,18$. I-ristlõike jaoks leitakse k ligikaudselt valemiga $k \approx F/F_s$, milles F_s on ristlõike seina pindala.

Põikjõu Q poolt põhjustatud paigutisel pikijõud N ja paindemoment M tööd ei tee.

Kuna ükski jõududest N , M , Q kahe teise jõu poolt põhjustatud paigutistel tööd ei tee, siis nende üheaegsel mõjumisel saadakse kogu elementaarne töö üksikute tööde (avaldised a, b ja d) liitmisel. Kogu töö varda ulatusel leitakse integreerimise teel ja terve konstruktsiooni jaoks nende integraalide summeerimisega:

$$T = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \frac{N^2 ds}{2EF} + \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \frac{M^2 ds}{2EI} + \sum_{j=1}^v k_j \int_0^{l_j} \frac{Q^2 ds}{2GF} \quad (16.11)$$

milles v on varraste (integreerimisvahemike) arv.

Sisejõudude töö on võrdne, kuid vastupidise märgiga välisjõudude tööga:

$$U = - \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \frac{N^2 ds}{2EF} - \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \frac{M^2 ds}{2EI} - \sum_{j=1}^v k_j \int_0^{l_j} \frac{Q^2 ds}{2GF} \quad (16.12)$$

Kõverate varraste puhul arvutatakse sisejõudude töö avaldisega¹

$$\begin{aligned} U &= - \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \frac{N^2 ds}{2EF} - \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \frac{M^2 ds}{2E} \left(\frac{1}{I'} + \frac{1}{Fr^2} \right) - \\ &- \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \frac{NM ds}{EFr} - \sum_{j=1}^v k_j \int_0^{l_j} \frac{Q^2 ds}{2GF} \end{aligned}$$

milles

$$I' = \int_F \frac{r}{r-z} z^2 dF$$

Siin r on varda kõverusraadius ja telje z positiivne suund on kõverustsentrini poole.

Ruumiliste varraskonstruktsioonide puhul on sisejõudude töö avaldises kuut liiki integraale (pikijõud, kaks paindemomenti, väändemoment ja kaks põikjõudu).

¹ М. М. Филоненко-Бородич. Курс сопротивления материалов, ч. 2. 1949.

16.4. Potentsiaalenergia

Konstruksiooni koormamisel teevad välisjõud, mis põhjustavad konstruktsiooni deformeerumist, positiivset tööd. Välisjõudude poolt tehtud töö akumuleerub elastses konstruktsioonis deformatsioonitööna. Osa välisjõudude tööst kulutatakse hõõrdumise ületamiseks, osa muundub soojuseks jne. Kuna need on väga väikesed, siis elastsete konstruktsioonide puhul eeldatakse, et **koormuse rakendamisel muundub välisjõudude töö deformatsioonitööks ehk deformatsiooni potentsiaalenergiaks**. Koormuse rakendamisel püüavad sisejõud takistada välisjõudude poolt põhjustatavat konstruktsiooni deformeerumist ja teevad seejuures negatiivset tööd.

Koormusest vabanemisel on deformatsioonid vastupidiste märkidega. Välisjõud, mis hoiavad konstruktsiooni deformeerunud olukorras, teevad koormusest vabanemisel negatiivset tööd. Sisejõud, mis koormusest vabanemisel viivad konstruktsiooni esialgsesse mittedeformeerunud olukorda ja kulutavad seejuures deformatsiooni potentsiaalenergiat, teevad positiivset tööd. **Konstruksiooni koormusest vabanemisel muundub deformatsiooni potentsiaalenergia sisejõudude tööks**. Deformatsiooni potentsiaalenergia on võrdne sisejõudude tööga, kuid vastupidise märgiga: $V = -U$ või, kui arvestada avaldist (16.12),

$$V = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \frac{N^2 ds}{2EF} + \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \frac{M^2 ds}{2EI} + \sum_{j=0}^v k_j \int_0^{l_j} \frac{Q^2 ds}{2GF} \quad (16.14)$$

Kuna sisejõudude töö on negatiivne, siis deformatsiooni potentsiaalenergia on positiivne. See järeldeb ka valemist (16.14), kus on sisejõud N , M ja Q ruudus. Jõudude grupist põhjustatud potentsiaalenergia ei võrdu igast üksikust jõust eraldi põhjustatud potentsiaalenergiate summaga. **Potentsiaalenergia kohta jõudude sõltumatuse printsiip ei kehti**.

Paljude ehitismehaanika ülesannete lahendamisel uuritakse konstruktsiooni täielikku potentsiaalenergiat, mis koosneb deformatsiooni potentsiaalenergiast ja koormuse asukoha potentsiaalenergiast:

$$\Pi = V + W \quad (16.15)$$

Koormuse asukoha potentsiaalenergia oleneb energia valitud algtasandist. Ehitismehaanikas loetakse koormuse asukoha energia nulliks deformeerunud tasakaaluolukorras. Seepärast arvutatakse täielikku potentsiaalenergiat tööde summana, mida teevad sise- ja välisjõud üleminekul deformeerunud tasakaaluolukorrast deformeerumata olukorda. Sellest järgneb, et deformatsiooni potentsiaalenergia on positiivne ja koormuse asukoha potentsiaalenergia on negatiivne. Koormuse potentsiaalenergia avaldises puudub kordaja $1/2$.

Näide 16.1. Arvutada kogu silde pikkusel ühtlaselt koormatud lihttala deformatsiooni potentsiaalenergia. Andmed: $l=6,0$ m; $p=0,4$ t/m; profiil I 18; $I=1660$ cm⁴; $F=30,6$ cm², seina paksus $d=0,65$ cm; $E=2 \cdot 10^6$ kG/cm² ja $G=8 \cdot 10^5$ kG/cm².

Potentsiaalenergia valem (16.14), kui sinna asetada lihttala paindemomendi ja põikjõu avaldised $M = \frac{1}{2} px(l-x)$, $Q = \frac{1}{2} p(l-2x)$ on järgmine:

$$V = \frac{p^2}{8EI} \int_0^l x^2(l-x)^2 dx + \frac{kp^2}{8GF} \int_0^l (l-2x)^2 dx$$

või pärast integreerimist

$$V = \frac{p^2 l^3}{24E} \left(\frac{l^2}{10I} + \frac{kE}{GF} \right)$$

Antud lähteandmete puhul, kus k arvutatakse valemiga $k \approx F/F_s = 30,6/0,65 \cdot 18 = 2,62$

$$V = \frac{4^2 \cdot 600^3}{24 \cdot 2 \cdot 10^6} \left(\frac{600^2}{10 \cdot 1660} + \frac{2,62 \cdot 2 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^5 \cdot 30,6} \right) = 72(21,69 + 0,21) = 1580 \text{ kGcm}$$

Teine liige sulgudes (0,21) väljendab põikjõu mõju ja on vähem kui 1% paindemomendi mõjust.

16.5. Vastastikkuse teoreemid

16.51. Välis- ja sisejõudude võimalik töö

Võimaliku töö puhul vaadeldakse algolukorrana konstruktsioonile mõjuvast koormusest S_k põhjustatud deformeerunud tasakaaluolukorda. Selles esinevad sisejõud märgitakse N_k, M_k, Q_k . Uute võimalike paigutistena kujutatakse paigutisi, mis on põhjustatud deformeerunud tasakaaluolukorras olevale konstruktsioonile rakendatud mõnest teisest koormusest S_i või mõne muu põhjuse poolt. Koormuse S_i põhjustatud sisejõud tähistatakse N_i, M_i, Q_i . Koormuse staatilisel rakendamisel kasvavad koormus ja sisejõud nullist kuni oma lõplike suurusteni ning seepärast on välis- ja sisejõudude tööde avaldistes (16.9), (16.12) tegur $1/2$. Võimaliku töö vaatlemisel eeldatakse, et algolukorras mõjuvate välis- ja sisejõudude suurused ning suunad ei muutu võimalike paigutiste ajal ja seepärast võimalike tööde avaldistes puudub tegur $1/2$.

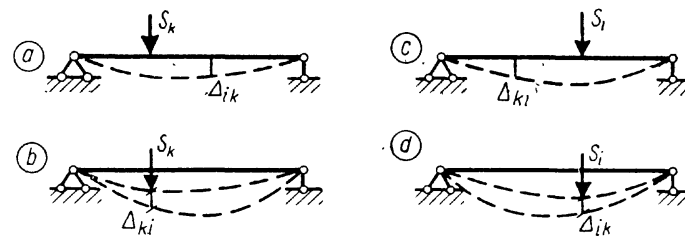
Välisjõudude S_k ja sisejõudude N_k, M_k, Q_k tööde summa võimalikel paigutistel, mis on põhjustatud koormuse S_i poolt, võrdub võrrandi (16.2) alusel nulliga:

$$S_k \Delta_{hi} - \sum \int M_k \frac{M_i ds}{EI} - \sum \int N_k \frac{N_i ds}{EF} - \sum k_j \int Q_k \frac{Q_i ds}{GF} = 0 \quad (16.16)$$

milles Δ_{hi} on jõule S_k vastav paigutis, mis on põhjustatud koormusest S_i .

16.52. Tööde vastastikkuse teoreem

Tööde vastastikkuse teoreemi tuletamisel vaadeldakse konstruktsiooni kahte tasakaaluolukorda. Esimeses tasakaaluolukorras on konstruktsioon koormatud üldistatud jõuga S_k (joon. 16.9, a) ja teises tasakaaluolukorras üldistatud jõuga S_i (joon. 16.9, c). Algul vaadeldakse esimeses koormusolukorras mõjuvate välis- ja sisejõudude (S_k, M_k, N_k, Q_k) võimalikku tööd (võrrand 16.16) paigutistel, mis on põhjustatud teisest koormusest S_i (joon. 16.9, b). Jõudude mõju sõltumatuse printsiibi põhjal on need paigutised võrdsed teise tasakaaluolukorra paigu-



Joon. 16.9

tistega (joon. 16.9, c). Võimalike paigutiste printsiibi alusel koostatud võrrandist (16.16) saab avaldada järgmise seose:

$$S_k \Delta_{hi} = \sum \int M_k \frac{M_i ds}{EI} + \sum \int N_k \frac{N_i ds}{EF} + \sum k_j \int Q_k \frac{Q_i ds}{GF} \quad (a)$$

Võrrandis (a) on vasakul pool võrdusmärgi esimese koormusolukorra välisjõudude ja paremal pool võrdusmärgi vastupidiste märkidega sisejõudude võimalik töö paigutistel, mis on põhjustatud teise koormusolukorra jõudude poolt.

Järgnevalt vaadeldakse võimalikku tööd, mida teevad teise koormusolukorra (joon. 16.9, c) välis- ja sisejõud esimese koormusolukorra jõudude põhjustatud paigutistel (joon. 16.9, a). Kui viia võimalike paigutiste printsiibi alusel koostatud võrrandis sisejõudude tööd väljendavad liikmed paremale poole võrdusmärgi, siis saadakse järgmine võrdus:

$$S_i \Delta_{ih} = \sum \int M_i \frac{M_h ds}{EI} + \sum \int N_i \frac{N_h ds}{EF} + \sum k_j \int Q_i \frac{Q_h ds}{GF} \quad (b)$$

Kuna võrrandite (a) ja (b) paremad pooled on võrdsed, siis on võrdsed ka nende vasakud pooled:

$$S_k \Delta_{hi} = S_i \Delta_{ih} \quad (16.17)$$

Saadud seos väljendab tööde vastastikkuse

teoreemi (*E. Betti*): esimese koormusolukorra välisjõudude (või sisejõudude) võimalik töö teise koormusolukorra jõudude põhjustatud paigutistel on võrdne teise koormusolukorra välisjõudude (sisejõudude) võimaliku tööga esimese koormusolukorra jõudude põhjustatud paigutistel.

Näide 16.2. Joonisel 16.10 on kujutatud lihttala kaks erinevat koormusolukorda. Esimeses koormusolukorras mõjub talale ühtlaselt jaotatud koormus p (joon. 16.10, a) ja teises koormusolukorras on tala toeristlõikes a rakendatud moment M_a (joon. 16.10, b).

Paigutised mõlemas tasakaaluolukorras leitakse elastse joone diferentsiaalvõrrandi $EIw'' = -M$ integreerimise teel. Esimeses koormusolukorras on paindemoment $M = \frac{1}{2}px(l-x)$. Järgnevalt integreeritakse elastse joone diferentsiaalvõrrandit:

$$EIw'' = -\frac{1}{2}px(l-x) \quad (a)$$

kaks korda, mille tulemusena saadakse

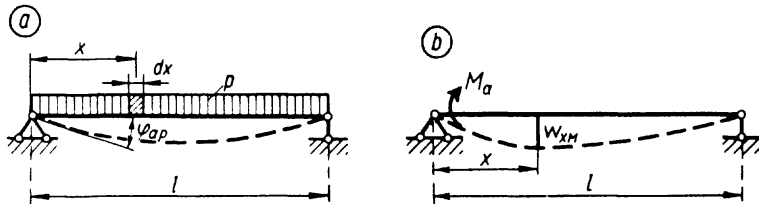
$$EIw' = -\frac{1}{4}px^2 \left(l - \frac{2}{3}x \right) + C_1 \quad (b)$$

$$EIw = -\frac{1}{12}px^3 \left(l - \frac{1}{2}x \right) + C_1x + C_2 \quad (c)$$

Integreerimiskonstandid määratakse toetustingimuste alusel: kui $x=0$ ja $x=l$, siis $w=0$, ning avaldisest (c) saadakse $C_2=0$ ja $C_1 = pl^3/24$. Tala elastse joone võrrand (c) ja ristlõike pöördenurk (b) on nüüd järgmised:

$$w = \frac{pl^4}{24EI} \left(\frac{x}{l} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right) \quad (d)$$

$$w = \frac{pl^3}{24EI} \left(1 - 6\frac{x^2}{l^2} + 4\frac{x^3}{l^3} \right) \quad (e)$$



Joon. 16.10

$$\text{Kui } x=0, \text{ siis} \\ w' = \varphi_a p = pl^3/24EI \quad (i)$$

Analoogiliselt teises koormusolukorras

$$EIw'' = -M_a(1-x/l) \quad (g)$$

$$EIw' = -M_ax(1-x/2l) + C_1 \quad (h)$$

$$EIw = -\frac{1}{2}M_ax^2(1-x/3l) + C_1x + C_2 \quad (i)$$

Avaldisest (i) leitakse integreerimiskonstandid: kui $x=0$ ja $x=l$, siis $w=0$ ning vastavalt nendele tingimustele saadakse $C_2=0$ ja $C_1 = \frac{1}{3}M_al$. Elastse joone võrrand (i) on nüüd:

$$w = \frac{M_al^2}{2EI} \cdot \frac{x}{l} \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{l} + \frac{x^2}{3l^2} \right) \quad (j)$$

Esimese koormusolukorra välisjõudude (ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega p) töö teise koormusolukorra (moment M_a) poolt põhjustatud paigutistel w (j) leitakse integreerimise teel:

$$\int_0^l p dx \cdot w = \int_0^l p \frac{M_al^2}{2EI} \cdot \frac{x}{l} \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{l} + \frac{x^2}{3l^2} \right) dx = \frac{M_al^3}{24EI} \quad (k)$$

Teise koormusolukorra välisjõudude töö esimese koormusolukorra jõudude poolt põhjustatud paigutistel on

$$M_a \varphi_a p = M_a \frac{pl^3}{24EI} \quad (l)$$

Avaldised (k) ja (l) on võrdsed ja tööde vastastikkuse teoreem rahuldatud.

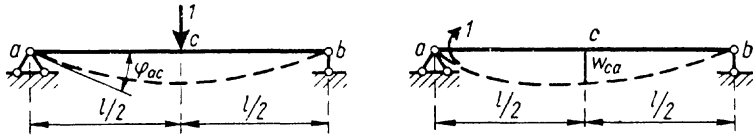
16.53. Paigutiste vastastikkuse teoreem

Paigutiste vastastikkuse teoreem on tööde vastastikkuse teoreemi (16.17) erijuht. Kui esimeses ja ka teises koormusolukorras mõjub ainult üks üldistatud ühikjõud, siis tööde vastastikkuse teoreemi alusel on

$$l_h \delta_{hi} = l_i \delta_{ih} \\ \text{või} \\ \delta_{hi} = \delta_{ih} \quad (16.18)$$

Ühikjõududest põhjustatud paigutised tähistatakse väikese tähega δ , kusjuures esimene indeks näitab, millisele üldistatud jõule see paigutis vastab, ja teine indeks näitab, millisest üldistatud ühikjõust see paigutis on põhjustatud.

Võrdus (16.18) väljendab paigutiste vastastik-



Joon. 16.11

kuse teoreemi (*J. Maxwell*): kohas k mõjuvale jõule I_k vastav üldistatud paigutis, mis on põhjustatud ühikjõust kohas i , võrdub jõule I_i vastava üldistatud paigutisega, mis on põhjustatud ühikjõust kohas k .

Ühikjõust põhjustatud üldistatud paigutise δ_{ki} dimensioon leitakse paigutise Δ_k dimensiooni jagamisel paigutist põhjustava üldistatud jõu dimensiooniga.

Näide 16.3. Lihttala keskmise ristlõike c kohal mõjuvast ühikjõust põhjustatud toeristlõike pööre võrdub paigutiste vastastikkuse teoreemi alusel lihttala toeristlõikes mõjuvast ühikmomendist põhjustatud ristlõike c vertikaalsiirdega (joon. 16.11):

$$\varphi_{ac} = w_{ca}$$

Ühikjõust I_c põhjustatud tala kõverdunud telje võrrand on

$$w = x(3l^2 - 4x^2)/48EI \quad (a)$$

ja ristlõike pööre leitakse avaldise (a) diferentseerimisega:

$$w' = l^2(1 - 4x^2/l^2)/16EI \quad (b)$$

Kui $x=0$, siis

$$\varphi_{ac} = w' = l^2/16EI \quad (c)$$

Ühikjõust I_c põhjustatud pööre φ_{ac} dimensioon on $1/kG$.

Tala keskmise ristlõike c vertikaalsiire w_{ca} , mis on põhjustatud toeristlõikes a mõjuvast ühikmomendist, arvutatakse näites 16.2 toodud valemiga (j) ($x=l/2$):

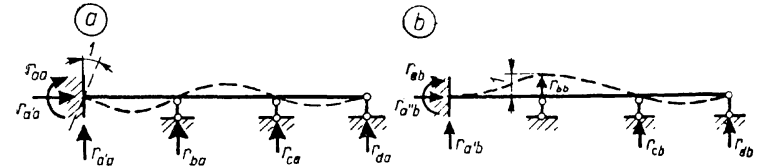
$$w_{ca} = \frac{l^2}{2EI} \cdot \frac{l/2}{l} \left(\frac{2}{3} - \frac{l/2}{l} + \frac{(l/2)^2}{3l^2} \right) = \frac{l^2}{16EI} \quad (d)$$

Ühikmomendist põhjustatud vertikaalsiirde dimensioon on $cm/kGcm = 1/kG$. Järelikult

$$\varphi_{ac} = w_{ca} = l^2/16EI$$

16.54. Reaktsioonide vastastikkuse teoreem

Joonisel 16.12 on kujutatud staatikaga määramatu mitmesildelise tala kaks erinevat deformatsiooniolukorda. Esimeses olukorras (joon. 16.12, a) on tugi a pöördunud



Joon. 16.12

ühiknurga võrra ja teises olukorras (joon. 16.12, b) on toe b vertikaalsiire võrdne ühikuga.

Ühikpaigutisest põhjustatud reaktsioon märgitakse väikese tähega r , millel on kaks indeksit. Esimene indeks tähistab sidet, mille reaktsiooni vaadeldakse, ja teine indeks näitab, missuguse sideme ühikpaigutisest on reaktsioon põhjustatud.

Toe a kolme reaktsioonikomponenti tähistatakse järgmiselt: momenti r_a , vertikaalset ja horisontaalset jõudu vastavalt $r_{a'}$ ja $r_{a''}$. Tööde vastastikkuse teoreemi alusel koostatud võrrand

$$\begin{aligned} r_{aa} \cdot 0 + r_{a'a} \cdot 0 + r_{a''a} \cdot 0 + r_{ba} \cdot 1 + r_{ca} \cdot 0 + r_{da} \cdot 0 = \\ = r_{ab} \cdot 1 + r_{a'b} \cdot 0 + r_{a''b} \cdot 0 + r_{bb} \cdot 0 + r_{cb} \cdot 0 + r_{db} \cdot 0 \end{aligned}$$

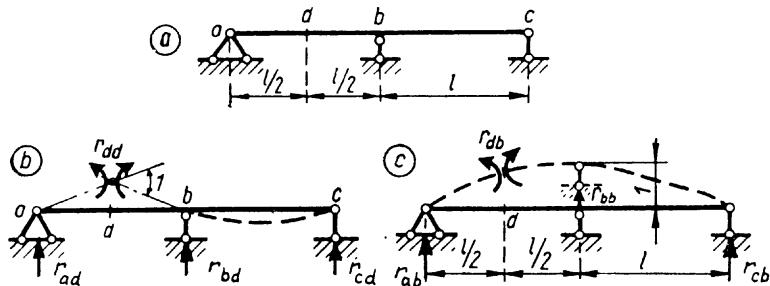
mille vasak pool esitab esimese olukorra välisjõudude tööd teise olukorra paigutistel ja parem pool teise olukorra välisjõudude tööd esimese olukorra paigutistel, annab järgmise võrduse:

$$r_{ab} = r_{ba} \quad (16.19)$$

Võrrand (16.19) väljendab reaktsioonide vastastikkuse teoreemi (*J. Rayleigh*): **sideme b ühikpaigutisest põhjustatud reaktsioon sidemes a võrdub sideme a ühikpaigutisest põhjustatud reaktsiooniga sidemes b .**

Reaktsiooni dimensioon leitakse üldistatud jõu dimensiooni jagamisel reaktsiooni põhjustava üldistatud paigutise dimensiooniga.

Reaktsioon r_{ab} antud näite puhul on moment, mis on põhjustatud ühiksiirdest, ja tema dimensioon on $kGcm/cm = kG$. Reaktsioon r_{ba} on jõud, mis on põhjustatud ühikpöördest, ja tema dimensioon on $kG/l = kG$. Reaktsioonide r_{ab} ja r_{ba} dimensioonid on võrdsed.



Joon. 16.13

Reaktsioonide vastastikkuse teoreemi võib rakendada ka sisejõudude puhul. Näitena vaadeldakse kaheksildelist tala (joon. 16.13, a).

Ülesandeks on leida reaktsioon r_{bd} esimeses deformeerunud olukorras (joon. 16.13, b). Niisuguse deformeerunud olukorra tekitamiseks pannakse ristlõikesse d liigend ja selle kõrvale rakendatakse kaks võrdset vastupidi mõjuvat momenti, mis põhjustavad liigendi kõrvale asetsevate ristlõigete pöörde teineteise suhtes ühiknurga võrra. Ülesande lahendamiseks antakse toele b ühiksiire ja leitakse paindemoment ristlõikes d (joon. 16.13, c). Reaktsioonide vastastikkuse teoreemi alusel $r_{bd} = r_{db}$. Lihttala silde keskel rakendatud jõud P põhjustab selles lõikes läbipainde $f = Pl^3/48EI$. Teises deformeerunud olukorras on $f = 1$, $P = r_{bb}$ ja sildeks $2l$. Seega $r_{bb} = 6EI/l^3$, $r_{ab} = 3EI/l^3$ ja $r_{cb} = 3EI/2l^2$ kG.

16.55. Reaktsiooni ja paigutise vastastikkuse teoreem

Joonisel 16.14 on esitatud kolmesildelise tala kaks tasakaaluolukorda. Esimeses olukorras mõjub talale suvalisel kohal k üldistatud ühikjõud (joon. 16.14, a). Ühikjõust põhjustatud reaktsioonid r'_{ak} , r'_{bk} , r'_{ck} ja r'_{dk} märgitakse kriipsuga, kuna ilma kriipsuta tähistatakse ühikpaigutisest põhjustatud reaktsioone.

Teises tasakaaluolukorras on üks toeside (joon. 16.14, b) tugi c) nihkunud ühiksiirde võrra. Kohas k mõjuvale ühikjõule vastavat üldistatud paigutist tähistatakse δ'_{kc} . Ühikpaigutisest põhjustatud üldistatud paigutist tähistatakse tähega δ ja märgitakse juurde kriipsuke, kuna

tähega δ ilma kriipsuta tähistati ühikjõust põhjustatud paigutist.

Esimese tasakaaluolukorra välisjõudude võimalik töö teise olukorra paigutistel on

$$T_{12} = 1_k \delta'_{kc} + r'_{ak} \cdot 0 + r'_{bk} \cdot 0 + r'_{ck} \cdot 1 + r'_{dk} \cdot 0 \quad (a)$$

ja teise tasakaaluolukorra välisjõudude võimalik töö esimese olukorra paigutistel on

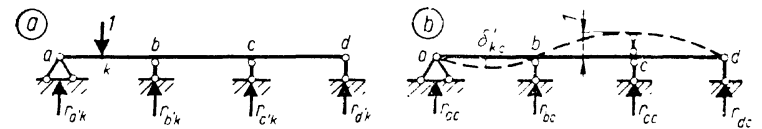
$$T_{21} = r_{ac} \cdot 0 + r_{bc} \cdot 0 + r_{cc} \cdot 0 + r_{dc} \cdot 0 = 0 \quad (b)$$

Tööde vastastikkuse teoreemi põhjal on tööde avaldised (a) ja (b) võrdsed ($T_{12} = T_{21}$):

$$1_k \delta'_{kc} + r'_{ck} \cdot 1 = 0$$

millest

$$r'_{ck} = -\delta'_{kc} \quad (16.20)$$



Joon. 16.14

Võrrand (16.20) väljendab reaktsiooni ja paigutise vastastikkuse teoreemi (*J. Rayleigh*): **kohas k mõjuvast ühikjõust põhjustatud reaktsioon sidemes c on võrdne, kuid vastupidise märgiga, kohas k mõjuvale ühikjõule vastava üldistatud paigutisega, mis on põhjustatud sideme c ühikpaigutisest.**

Reaktsiooni r'_{ck} dimensioon leitakse koormusest põhjustatud sideme c reaktsiooni dimensiooni jagamisel reaktsiooni r'_{ck} põhjustava üldistatud jõu 1_k dimensiooniga. Paigutise δ'_{kc} dimensioon leitakse üldistatud jõule 1_k vastava üldistatud paigutise dimensiooni jagamisel sideme c paigutise dimensiooniga.

16.6. Paigutiste arvutus

16.61. Välismõjud

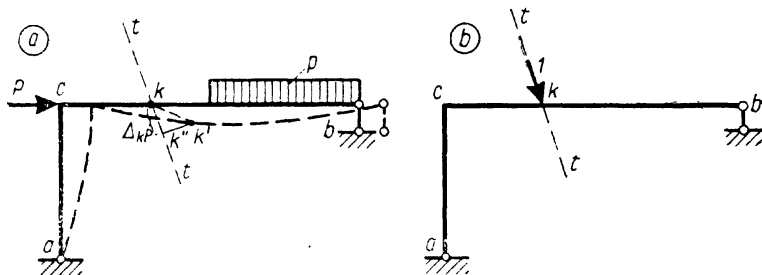
Ehitiste arvutamiseks liigitatakse välismõjud kolme rühma: 1) koormused, 2) temperatuuri muutused ja 3) toetõid või muude sidemete paigutised.

Paigutiste arvutamisel eeldatakse, et temperatuuri muutumine varraste ristlõigetel on tasandiline, s. t. piki üht peatelge on temperatuuri muutus konstantne ja piki teist peatelge muutub temperatuur lineaarselt.

16.62. Koormusest põhjustatud paigutised

Konstruksiooni mingi elemendi paigutise arvutamisel vaadeldakse konstruktsiooni arvutusskeemi kahte tasakaaluolukorda. Ühe olukorrana vaadeldakse koormuse poolt põhjustatud tasakaaluolukorda ja arvutusskeemis tekkivaid sisejõude tähistatakse sel juhul M_p , N_p , Q_p . Teise olukorrana vaadeldakse tasakaaluolukorda, kus arvutusskeemile mõjub ainult üks leitavale paigutisele vastav üldistatud ühikjõud. Selles tasakaaluolukorras esinevad sisejõud ja reaktsioonid tähistatakse väikeste tähtedega m_k , n_k , q_k ja r'_k .

Olgu ülesandeks arvutada konstruktsiooni punkti k siirde kk' komponent sirge $t-t$ sihis (joon. 16.15, a). Leitavat komponenti tähistatakse Δ_{kp} . Esmalt arvutatakse koormusest põhjustatud sisejõud (M_p , N_p , Q_p). Järgnevalt rakendatakse arvutusskeemi punkti k sirge $t-t$ sihis üldistatud ühikjõud (joon. 16.15, b) ja leitakse sisejõudude epüürid (m_k , n_k , q_k).



Joon. 16.15

Järgnevalt rakendatakse võimalike paigutiste printsiipi ja vaadeldakse üldistatud ühikjõu poolt põhjustatud välis- ning sisejõudude võimalikku tööd tegeliku koormuse poolt põhjustatud paigutistel:

$$l_k \Delta_{kp} - \sum \int m_k \frac{M_p ds}{EI} - \sum \int n_k \frac{N_p ds}{EF} - \sum k_j \int q_k \frac{Q_p ds}{GF} = 0$$

millest

$$\Delta_{kp} = \sum \int m_k \frac{M_p ds}{EI} + \sum \int n_k \frac{N_p ds}{EF} + \sum k_j \int q_k \frac{Q_p ds}{GF} \quad (16.21)$$

Avaldist (16.21) nimetatakse *Mohr-Maxwelli* valemiks. Paigutise Δ_{kp} (16.21) avaldamisel on eelnevalt võrrandit jagatud ühikjõuga l_k ja sisejõudude m_k , n_k , q_k dimensioonide saamiseks on seepärast vaja vastava sisejõu dimensioon jagada üldistatud ühikjõu dimensiooniga.

Tala ja raamkonstruktsioonide, mille varraste ristlõike mõõtmete ja pikkuse suhe $h/l < 1/10$, paigutiste arvutamisel valemiga (16.21) on kolmanda liikme mõju võrreldes esimese liikmega väike. Kui konstruktsiooni varraste pikijõud on väikesed, siis nende mõju paigutistele on samuti väike ja paigutised arvutatakse valemi (16.21) esimese liikmega, mis arvestab paindeformatsioonide mõju:

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{m_k M_p}{EI} ds \quad (16.22)$$

Konstruksioonides, kus paindemomendid ja põikjõud on väikesed võrreldes pikijõududega, arvutatakse paigutised valemi (16.21) teise liikmega

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{n_k N_p}{EF} ds \quad (16.23)$$

Kui pikijõud varda ulatusel on konstantsed, siis projekteeritakse varras konstantse ristlõikega (sõrestik) ja paigutised leitakse summeerimise teel:

$$\Delta_{kp} = \sum_{j=1}^v n_{jk} N_{jp} l_j / EF_j \quad (16.24)$$

Ruumkonstruktsioonis tekib koos sisejõudu: pikijõud

N_x , põikjõud Q_y , Q_z , paindemomendid M_y , M_z ja väändmoment M_x ning paigutised arvutatakse valemiga

$$\Delta_{kp} = \sum \int \left(\frac{m_y M_y}{EI_y} + \frac{m_z M_z}{EI_z} + \frac{n_x N_x}{EF} + k_y \frac{q_y Q_y}{GF} + k_z \frac{q_z Q_z}{GF} + \frac{m_x M_x}{GI_v} \right) ds \quad (16.25)$$

Valemis (16.25) viimase liikme nimetaja GI_v tähistab väändejäikust. Ümmarguse ristlõikega vardal $GI_v = G\pi d^3/32$ ja ristkülikristlõikega vardal $GI_v = Gk h b^3$.

Kõverate varrastega konstruktsioonides, kus paindemoment põhjustab peale kõveruse muutuse veel ka telje pikideformatsiooni ja pikijõud telje kõveruse muutust, arvutatakse paigutised valemiga

$$\Delta_{kp} = \sum \int \left[m_k \left(\frac{M_p}{EI'} + \frac{N_p}{EFr} \right) + n_k \left(\frac{N_p}{EF} + \frac{M_p}{EFr} \right) + k_j \frac{q_k Q_p}{GF} \right] ds \quad (16.26)$$

milles $I' = I/(1/Fr^2 + 1)$

16.63. Temperatuuri muutusest põhjustatud paigutised

Joon. 16.16 on kujutatud vardast eraldatud elementaarne osa pikkusega ds . Arvutusskeemidel märgitakse varda üks pool punktiirjoonega. Temperatuuri muutust punktiiriga märgitud poolel tähistatakse t_a , vastaspoolel — $t_{\bar{a}}$ ja varda telgjoonel — t_0 .

Temperatuuri tõusmisel varda elementaarne osa alumised ja ülemised kiud pikenevad vastavalt $\alpha t_a ds$ ja $\alpha t_{\bar{a}} ds$ ning varda telgjoonel

$$\Delta ds = \alpha t_0 ds \quad (16.27)$$

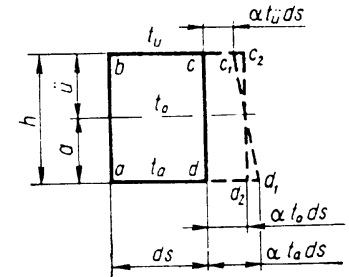
võrra, milles α on materjali temperatuurijoonpaisumistegur.

Temperatuuri muutus telgjoonel (joon. 16.16) arvutatakse valemiga

$$t_0 = (\bar{u}t_a + \alpha t_{\bar{a}})/(a + \bar{u}) \quad (16.28)$$

Kui ristlõige on mõlema peatelje suhtes sümmeetriline ($a = \bar{u}$), siis

* K. Ollik, O. Roots, Tugevusõpetus. Tln., 1965, lk. 202.



Joon. 16.16

$$t_0 = \frac{1}{2} (t_a + t_{\bar{a}}) \quad (16.29)$$

Elementaarne osa ristlõike cd paigutumist temperatuuri muutumisel asukohta $c_1 d_1$ võib vaadelda kahe paigutise summamana. Algul nihkub ristlõige cd võrra kohta $c_2 d_2$ ja pöörduv siis nurga $\Delta\varphi$ võrra asendisse $c_1 d_1$. Ristlõike pööre arvutatakse valemiga

$$\Delta\varphi = (\alpha t_a ds - \alpha t_{\bar{a}} ds)/h = \alpha (t_a - t_{\bar{a}}) ds/h = \alpha \frac{\Delta t}{h} ds \quad (16.30)$$

milles h on ristlõike kõrgus ja

$$\Delta t = t_a - t_{\bar{a}} \quad (16.31)$$

on varda alumiste ja ülemiste kiudude temperatuuri muutuste vahe.

Edaspidi vaadeldakse temperatuuri muutusest põhjustatud paigutiste arvutamist kahes osas. Paigutised, kus varda kõik kiud pikenevad võrdselt varda telgjoonega $\Delta ds = \alpha t_0 ds$ võrra, nimetatakse ühtlasest temperatuuri muutusest põhjustatud paigutisteks. Ülemiste ja alumiste kiudude erinevast temperatuuri muutusest tingitud varda kõverdumist nimetatakse temperatuuri mitteühtlasest muutusest põhjustatud deformatsiooniks. Varda kõverdumisel pöörduvad elementaarne osa otsristlõiked teineteise suhtes nurga $\Delta\varphi = \alpha \Delta t ds/h$ võrra.

Temperatuuri tõusmine loetakse positiivseks ja langeamine negatiivseks.

Temperatuuri muutusest põhjustatud paigutiste arvutamiseks tuleb võtta valem võimalike paigutiste printsiibi alusel. Üldistatud ühikjõud rakendatakse arvutusskeemil

kohta, kus soovitakse leida paigutist. Võimaliku paigutusolukorrana vaadeldakse temperatuuri muutusest põhjustatud olukorda. Temperatuuri muutusest põhjustatud varda elementaarse osa paigutised arvutatakse valemitega (16.27) ja (16.30). Üldistatud ühikjõuga koormatud arvutuskeemi välis- ja sisejõudude tööde summa temperatuuri muutusest põhjustatud paigutistel võrdub nulliga:

$$1_k \Delta_{kt} - \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} m_k \alpha \frac{\Delta t}{h} ds - \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} n_k a t_0 ds = 0$$

millest

$$\Delta_{kt} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} m_k \alpha \frac{\Delta t}{h} ds + \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} n_k a t_0 ds \quad (16.32)$$

Kui integreerimise vahemiku ulatusel on varras samast materjalist ($\alpha_j = \text{konst.}$) ja temperatuuri muutus ühesugune ($\Delta t_j = \text{konst.}$, $t_{0j} = \text{konst.}$) ning varda ristlõike kõrgus konstantne ($h_j = \text{konst.}$), siis arvutatakse paigutised valemiga

$$\Delta_{kt} = \sum_{j=1}^v \alpha_j \frac{\Delta t_j}{h_j} \int_0^{l_j} m_k ds + \sum_{j=1}^v \alpha_j t_{0j} \int_0^{l_j} n_k ds \quad (16.33)$$

Avaldise (16.33) integraalid $\int m_k ds$ ja $\int n_k ds$ kujutavad ühikjõust 1_k põhjustatud paindemomendi ja pikijõu epüüri pindalaid integreerimisvahemiku ulatusel. Selle avaldise esimene summa on positiivne, kui paindemomendi epüüri pindala ja temperatuuri mitteühtlane muutus $\Delta t = t_a - t_{\bar{u}}$ on sama märgiga, ning negatiivne, kui nad on vastasmärkidega. Märki võib määrata ka varda deformeerunud kuju järgi: kui ühikjõust ja temperatuuri muutusest põhjustatud varda kõverused on ühesugused, siis on korrutis positiivne, ning vastupidisel juhul negatiivne. Kui varda telgjoonel temperatuuri muutus ja ühikjõust põhjustatud pikijõu epüüri pindala on sama märgiga, siis on avaldise (16.33) teine summa positiivne, ja kui erinevate märkidega, siis negatiivne.

16.64. Tugede paigutiste mõju

Üldistatud ühikjõud rakendatakse arvutuskeemil kohta, kus soovitakse leida paigutist. Võimalike paigutiste printsiibi alusel võrdub ühikjõuga koormatud arvutuskeemi välis- ja sisejõudude tööde summa tugede (või mõne teise sideme) nihkumisest põhjustatud paigutistel nulliga:

$$1_k \Delta_{kr} + \sum_{j=1}^m \Delta c_j r'_{jk} = 0 \quad (a)$$

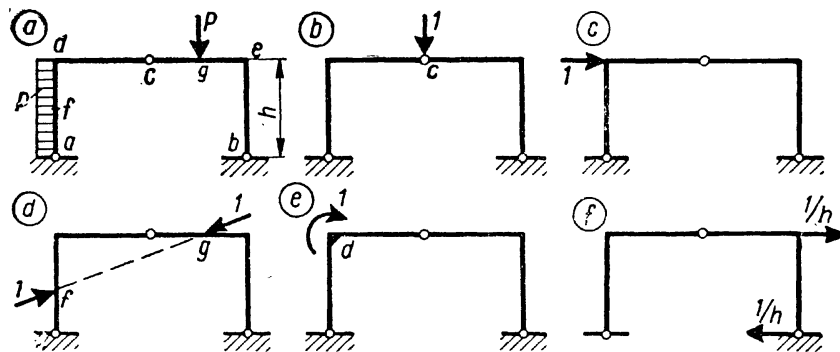
milles Δc_j on toesideme j paigutis ja r'_{jk} — ühikjõust põhjustatud reaktsioon sidemes j . Kuna staatikaga määratava konstruktsiooni tugede nihkumine sisejõude ei põhjusta, siis elemendid ei deformeeru ja võrrandis (a) ei esine sisejõudude tööd. Võrrandist (a) avaldatakse paigutis

$$\Delta_{kr} = - \sum_{j=1}^m \Delta c_j r'_{jk} \quad (16.34)$$

Korrutis $\Delta c_j r'_{jk}$ on positiivne, kui paigutise ja reaktsiooni suunad ühtivad, ja negatiivne, kui nad on vastasuunalised. Reaktsiooni r'_{jk} dimensioon saadakse sidemes j tekkiva reaktsiooni dimensiooni jagamisel üldistatud ühikjõu 1_k dimensiooniga.

16.65. Üldistatud ühikjõud

Järgnevalt esitatakse mõned arvutustes sagedamini esinevad üldistatud ühikjõud. Joonisel 16.17, a on raam koormatud ühtlaselt jaotatud horisontaalse koormusega



Joon. 16.17

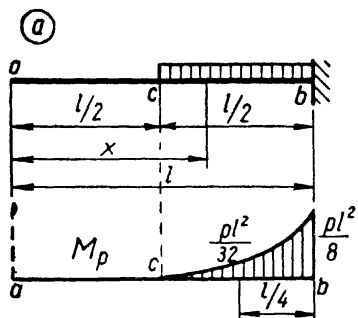
ja vertikaalse koondatud jõuga. Suvalise punkti siirde arvutamiseks rakendatakse sinna leitava siirde sihis ühikjõud: joonisel 16.17, *b* liigendi *c* vertikaalsiire ja joonisel 16.17, *c* — sõlme *d* horisontaalsiire. Kui arvutuse tulemus on positiivne, siis siirde ja ühikjõu suunad ühtivad. Kui arvutuse tulemus on negatiivne, siis siire ja ühikjõud on vastupidiste suundadega. Kahe punkti vahekauguse muutuse arvutamiseks rakendatakse nendes punktidesse kaks ühel sirgel asetsevat vastupidise suunaga ühikjõudu (joon. 16.17, *d*). Ristlõike või sõlme pöörde arvutamiseks rakendatakse sinna ühikmoment (joon. 16.17, *e*). Varda pöörde arvutamisel rakendatakse vardale jõupaar, mille moment võrdub ühega. Niisugune jõupaar koosneb varda mõlemas otsas risti varda teljega mõjuvast jõust, mille suurus on $1/l$ (l — varda pikkus) (joon. 16.17, *f*).

16.66. Arvutusnäiteid

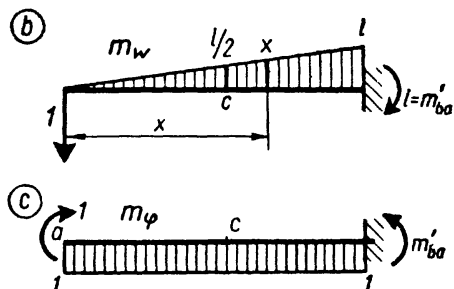
Näide 16.4. Arvutada konsooli vaba otsa vertikaalsiire ja pööre joon. 16.18, *a* esitatud koormusest, temperatuuri muutusest $t_{\bar{u}} = 20^\circ\text{C}$ ja $t_a = 0$ ning toe vajumisest $w_b = 1$ cm ja pöördest $\varphi_b = -0,001$ rad.

Koormusest põhjustatud paindemoment, kui $0 \leq x \leq l/2$, on null, ja kui $l/2 \leq x \leq l$, siis $M = -\frac{1}{2}(x - l/2)^2 p$. Konsooli otsristlõike *a* vertikaalsiirde arvutamiseks sinna rakendatud vertikaalne ühikjõud põhjustab paindemomendi $m = -x$ (joon. 16.18, *b*). Valemiga (16.22) leitakse

$$w_{a,p} = \int_0^{l/2} \frac{m_w M_p}{EI} dx + \int_{l/2}^l \frac{m_w M_p}{EI} dx =$$



Joon. 16.18



$$= \int_0^{l/2} \frac{-x \cdot 0}{EI} dx + \int_{l/2}^l \frac{x \frac{1}{2} p (x - l/2)^2}{EI} dx = \frac{7}{384} \frac{pl^4}{EI}$$

Temperatuuri muutusest põhjustatud vertikaalsiire arvutatakse valemiga (16.33):

$$w_{a,t} = \alpha \frac{\Delta t}{h} \int_0^l m ds + \alpha t_0 \int_0^l n ds = \alpha \frac{t_a - t_{\bar{u}}}{h} \int_0^l (-x) dx + \alpha \frac{t_a + t_{\bar{u}}}{2} \int_0^l 0 dx = \frac{\alpha}{h} (0 - 20) \left(-\frac{1}{2} l^2 \right) + 0 = 10\alpha l^2/h$$

Toe *b* paigutisest põhjustatud vertikaalsiire leitakse valemiga (16.34):

$$w_{a,r} = -\sum \Delta c_b r'_{b,k} = -(w_b r'_{b,a}) - (-\varphi_b m'_{b,a}) = 1 + 0,001 l$$

Konsooli otsristlõikesse rakendatud ühikmoment põhjustab konsoolis konstantse paindemomendi $m = 1$ (joon. 16.18, *c*).

Ristlõike *a* pööre

$$\varphi_{a,r} = \int_0^{l/2} \frac{1 \cdot 0}{EI} dx + \int_{l/2}^l \frac{1 \cdot \left[-\frac{1}{2} p (x - l/2)^2 \right]}{EI} dx = -\frac{pl^2}{48EI}$$

$$\varphi_{a,t} = \alpha \frac{t_a - t_{\bar{u}}}{h} \int_0^l 1 dx + \alpha \frac{t_a + t_{\bar{u}}}{2} \int_0^l 0 \cdot dx = \frac{\alpha}{h} (0 - 20) (1 \cdot l) = -20\alpha l/h$$

$$\varphi_{a,r} = -(w_b \cdot 0) - (-\varphi_b m'_{b,a}) = -0,001 \text{ rad.}$$

Näide 16.5. Arvutada lihttala keskmise ristlõike vertikaalsiire ja toeristlõike *a* pööre, kui tala vasak pool on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega (joon. 16.19, *a*). Põikjõu mõju ei arvestata, $EI = \text{konst.}$

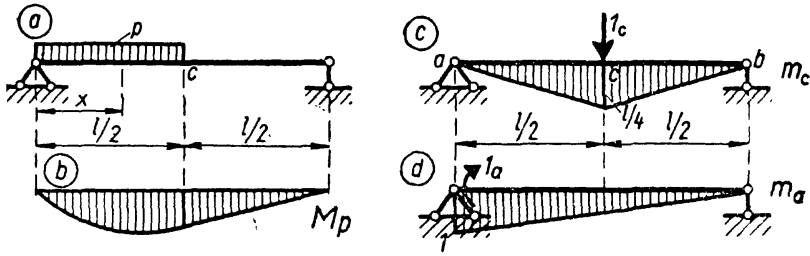
Koormusest põhjustatud paindemomendid on:

$$1) 0 \leq x \leq l/2: \quad M = \frac{1}{2} p \left(\frac{3}{4} lx - x^2 \right)$$

$$2) l/2 \leq x \leq l: \quad M = \frac{1}{8} pl(l - x)$$

Tala keskmise ristlõikesse rakendatud vertikaalne ühikjõud põhjustab järgmised paindemomendid (joon. 16.19, *c*):

$$1) 0 \leq x \leq l/2: \quad m = \frac{1}{2} x$$



Joon. 16.19

$$2) \quad l/2 \leq x \leq l: \quad m = \frac{1}{2}(l-x)$$

Ristlõike c vertikaalsiire

$$\omega_{c,p} = \int_0^l \frac{m_c M}{EI} dx = \frac{p}{4} \int_0^{l/2} \left(\frac{3}{4} l x^2 - x^3 \right) \frac{dx}{EI} +$$

$$+ \frac{pl}{16} \int_{l/2}^l \frac{(l-x)^2}{EI} dx = \frac{5}{768} \cdot \frac{pl^4}{EI}$$

Toeristlõikes a rakendatud ühikmoment põhjustab tala lõikes x paindemomendi $m = (l-x)/l$ (joon. 16.19, d).

Ristlõike a pööre

$$\varphi_{a,p} = \int_0^l \frac{m_a M}{EI} dx = \frac{p}{2EI} \int_0^{l/2} \left(\frac{3}{4} l^2 x - \frac{7}{4} l x^2 + x^3 \right) dx +$$

$$+ \frac{p}{8EI} \int_{l/2}^l (l-x)^2 dx = \frac{3}{128} \cdot \frac{pl^3}{EI}$$

16.67. Paigutiste arvutus potentsiaalenergia abil

Sisejõudude töö (16.12) on arvuliselt võrdne, kuid vastupidise märgiga, nii deformatsiooni potentsiaalenergiaga (16.14) kui ka välisjõudude tööga (16.11). Järelikult deformatsiooni potentsiaalenergiat võib arvutada ka välisjõudude tööna (16.9):

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_k \Delta_k \quad (16.35)$$

Kui lineaarselt deformeeruva konstruktsiooni suvalise punkti k paigutis leida valemiga (16.1)

$$\Delta_k = \delta_{k1} S_1 + \delta_{k2} S_2 + \dots + \delta_{kn} S_n = \sum_{i=1}^n \delta_{ki} S_i \quad (16.36)$$

siis potentsiaalenergia avaldise (16.35) võib esitada kujul

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{ki} S_i S_k \quad (16.37)$$

Valemist (16.37) järeldub, et lineaarselt deformeeruva konstruktsiooni potentsiaalenergia on teise astme funktsioon välisjõududest. Järgnevalt võetakse üldistatud jõud S_i ja S_k sõltumatuteks muutujateks ja diferentseeritakse paigutise Δ_k ja potentsiaalenergia V avaldise (16.36), (16.37) ühe üldistatud jõu S_m järgi:

$$\partial \Delta_k / \partial S_m = \delta_{km} \quad (16.38)$$

$$\partial V / \partial S_m = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \delta_{mi} S_i + \sum_{k=1}^n \delta_{km} S_k \right) \quad (16.39)$$

Paigutiste vastastikkuse teoreemi $\delta_{km} = \delta_{mk}$ alusel võib viimase avaldise (16.39) kirjutada kujul

$$\partial V / \partial S_m = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \delta_{mi} S_i + \sum_{k=1}^n \delta_{mk} S_k \right)$$

või, kui arvestada paigutise Δ_k avaldist (16.36), siis

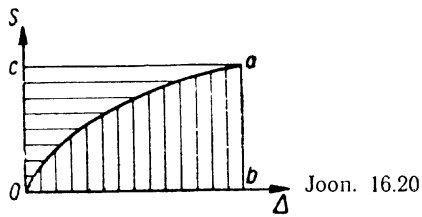
$$\partial V / \partial S_m = \Delta_m \quad (16.40)$$

Lineaarselt deformeeruva konstruktsiooni potentsiaalenergia osatuletis üldistatud jõu järgi on võrdne sellele üldistatud jõule vastava üldistatud paigutisega (Castigliano teoreem).

Potentsiaalenergia teine tuletis üldistatud jõu S_m järgi, kui silmas pidada veel valemid (16.38), (16.40), on

$$\partial^2 V / \partial S_m^2 = (\partial / \partial S_m) (\partial V / \partial S_m) = \partial \Delta_m / \partial S_m = \delta_{mm} \quad (16.41)$$

Paigutis δ_{mm} on positiivne, sest ühe jõu mõjumisel tema rakenduspunkt siirdub jõu suunas. Kuna teine tuletis potentsiaalenergiast on positiivne, siis tasakaaluolukorras potentsiaalenergia on minimaalne.



Castigliano teoreemi abil võib arvutada lineaarselt deformeeruva konstruktsiooni suvalise punkti paigutist. Kui vaadeldavas punktis pole vastavat üldistatud jõudu, siis rakendatakse sinna fiktiivne jõud P_f . Valemiga (16.14) arvutatakse potentsiaalenergia, diferentseeritakse potentsiaalenergiat fiktiivse jõu P_f järgi ja pärast seda võrrotatakse potentsiaalenergia osatuletise avaldises fiktiivne jõud nulliga. Allesjäänud osa kujutab otsitavat paigutist.

Castigliano teoreem ei ole rakendatav, kui paigutised ei väljendu lineaarsete funktsioonidena välisjõududest. F. Engresser tõestas, et täiendusenergia tuletis üldistatud jõu järgi on võrdne paigutisega ka siis, kui paigutiste ja välisjõudude vahelised seosed on mittelineaarsed:

$$\partial V' / \partial S_m = \Delta_m \quad (16.42)$$

Täiendusenergia mõistet selgitab joonis 16.20, millel üldistatud jõu ja üldistatud paigutise vaheline seos on mittelineaarne.

Deformatsiooni potentsiaalenergia V on kujutatud vertikaalselt viirutatud pinnana. Horisontaalselt viirutatud pind täiendab vertikaalselt viirutatud pinda selliselt, et nende pindalade summa kujundab ristküliku. Ristküliku pindala kujutab jõu S võimalikku tööd paigutisel Δ : $T = S\Delta$. Horisontaalselt viirutatud pind kujutab täiendusenergiat V' . Lineaarselt deformeeruva konstruktsiooni deformatsiooni potentsiaalenergia ja täiendusenergia on võrdsed:

$$V = V' \quad (16.43)$$

Näide 16.6. Arvutada lihttala keskmise ristlõike c vertikaalsiire $w_{c,p}$, kui selles lõikes mõjub koondatud jõud P (joon. 16.21, a), ja ühtlaselt jaotatud koormusega konsooli vaba otsa pöörde (joon. 16.21, b). Potentsiaalenergia arvutamisel on arvestatud ainult paindemomentide mõju. Paindejäikus $EI = \text{konst}$.

Lihttala vahemikus $0 \leq x \leq l/2$ on paindemoment $M = \frac{1}{2}Px$ ja potentsiaalenergia kogu talas leitakse integreerimise teel:

$$V = 2 \int_0^{l/2} \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{P^2}{4EI} \int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{P^2 l^3}{96EI}$$

Ristlõike c vertikaalsiire

$$w_{c,p} = \partial V / \partial P = Pl^3 / 48EI$$

Konsooli vabal otsal ei mõju üldistatud paigutisele (pöördele) vastavat üldistatud jõudu (momenti) ja seepärast rakendatakse sinna fiktiivne moment M_f (joon. 16.21, c). Paindemoment konsoolis on nüüd

$M = -M_f - \frac{1}{2}px^2$ ja potentsiaalenergia

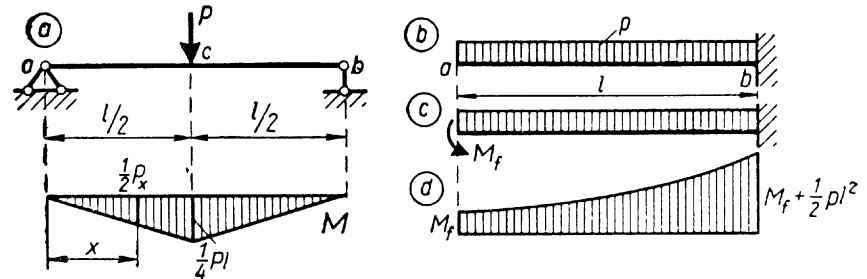
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2EI} \int_0^l \left(-M_f - \frac{1}{2}px^2 \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2EI} \int_0^l \left(M_f^2 l + \frac{1}{3}M_f pl^3 + \frac{1}{20}p^2 l^5 \right) \end{aligned}$$

Potentsiaalenergia tuletis üldistatud jõu M_f järgi

$$\partial V / \partial M_f = (2M_f l + pl^3/3) / 2EI$$

ja kuna $M_f = 0$, siis

$$\varphi_a = pl^3 / 6EI$$



Joon. 16.21

16.68. Paigutise valemi integraalide arvutamine

Paljude varraskonstruksioonide ülesannete lahendamisel on vaja arvutada paigutisi. Sirgetest varrastest koosneva tasandkonstruksiooni elementide paigutised leitakse valemiga (16.21), milles on paindemomentide, piki- ja põikjõudude integraalid. Esialgu vaadeldakse ainult paindemomentide integreerimist, kuid saadud tulemused kehtivad ka piki- ja põikjõudude integraalide kohta. Kui arvestatakse ainult paindemomentide mõju, siis leitakse paigutised valemiga (16.22)

$$\Delta_{kp} = \sum \int m_k \frac{M_p}{EI} ds \quad (a)$$

milles M_p ja m_k on vastavalt koormusest ning üldistatud ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüüri ordinaadid. Paigutise leidmisel jaotatakse konstruksioon osadeks, kas üksikuteks varrasteks või veel väiksemateks elementideks, ja arvutatakse iga elemendi jaoks integraal ning lõpptulemuse saamiseks liidetakse. Kui ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüür integreerimisvahemiku $a-b$ ulatusel on lineaarne ja koormuse epüüri ordinaat jagatud paindejäikusega EI muutub lineaarselt või kujutab teise astme parabooli, siis võib rakendada *Simpsoni* valemit

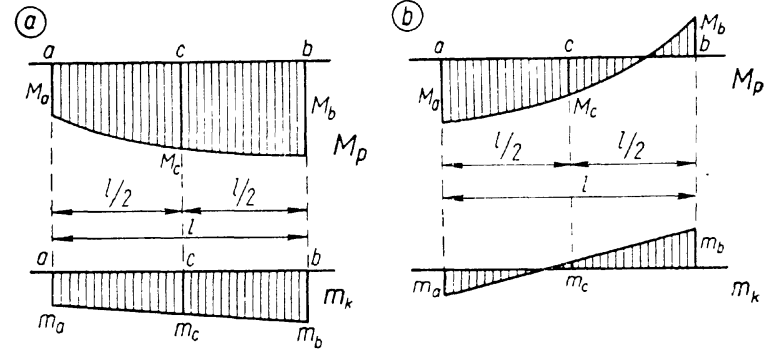
$$\int_a^b f(s) ds = \frac{l}{6} (f_a + 4f_c + f_b) \quad (b)$$

milles l on integreerimisvahemiku $a-b$ pikkus, f_a, f_b — integreeritava funktsiooni väärtused vahemiku piirpunktides a ja b ; f_c — integreeritava funktsiooni väärtus vahemiku $a-b$ keskel, s.t. $f_c = f[(a+b)/2]$. Vahemiku $a-b$ ulatusel arvutatakse integraal (a) *Simpsoni* valemiga (b):

$$\int_a^b m_k \frac{M_p}{EI} ds = \frac{l}{6} \left(m_{ak} \frac{M_{ap}}{EI_a} + 4m_{ck} \frac{M_{cp}}{EI_c} + m_{bk} \frac{M_{bp}}{EI_b} \right) \quad (16.44)$$

Kui vahemiku $a-b$ ulatusel jäikus EI on konstantne, siis võib valemi (16.14) kirjutada järgmiselt:

$$\frac{1}{EI} \int_a^b m_k M_p ds = \frac{l}{6EI} (m_{ak} M_{ap} + 4m_{ck} M_{cp} + m_{bk} M_{bp}) \quad (16.45)$$

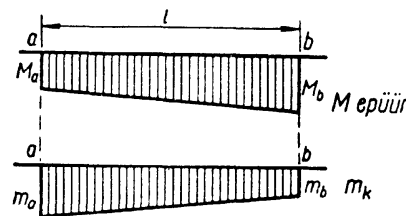


Joon. 16.22

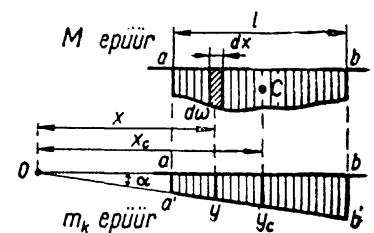
Valemities (16.44), (16.45) on korrutis mM positiivne, kui ühikjõust ja koormusest põhjustatud epüüride ordinaadid on varda samal poolel (joon. 16.22, a ja b ordinaadid m_a, M_a ning m_b, M_b) ja negatiivne, kui epüüride m ja M ordinaadid on vastupidiste märkidega, s.t. ordinaadid on varda erinevatel pooltel (joon. 16.22, b ordinaadid m_c ja M_c).

Kui mõlemad epüürid (M_p, m_k) on lineaarsed (joon. 16.23) ja $EI = \text{konst.}$, siis saab keskmised ordinaadid arvutada otsmiste ordinaatide kaudu: $m_c = (m_a + m_b)/2$ ja $M_c = (M_a + M_b)/2$ ning valem (16.45) on järgmise kujuga:

$$\frac{1}{EI} \int_a^b m_k M_p ds = \frac{l}{6EI} [2(m_a M_a + m_b M_b) + m_a M_b + m_b M_a] \quad (16.46)$$



Joon. 16.23



Joon. 16.24

Järgnevalt vaadeldakse paigutise valemi integraalide arvutamise teist moodust, kui üks epüüridest on lineaarselt muutuv. Olgu vahemikus $a-b$ ühikjõust põhjustatud epüür lineaarne ja varda jäikus konstantne. Ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüüri kujutava sirge $a'-b'$ ja telgjoone $a-b$ vaheline nurk tähistatakse α ning nende sirgete pikenduste lõikepunkt O võetakse koordinaatide algpunktiks (joon. 16.24). Ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüüri ordinaat on nüüd $m_k = y = x \operatorname{tg} \alpha$ ja paigutise valemi integraali võib teisendada järgmiselt:

$$\Delta_{kp} = \frac{1}{EI} \int_a^b m_k M_p dx = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{EI} \int_a^b x \cdot M_p dx \quad (c)$$

Integraali

$$\int_a^b x \cdot M_p dx$$

milles $M_p dx = d\omega$ on epüüri elementaarne pindala ja x — selle pinna raskuskeskme kaugus koordinaatide algusest, väärtus on võrdne koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri staatilise momendiga punkti O suhtes. Paindemomendi epüüri staatiline moment leitakse epüüri kogu pinna ja selle raskuskeskme kauguse korrutisena ωx_c ning

$$\operatorname{tg} \alpha \int_a^b x \cdot M_p dx = \operatorname{tg} \alpha \cdot \omega x_c = \omega y_c, \quad (d)$$

milles ω on koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri pindala, x_c — selle pinna raskuskeskme kaugus punktist O ja $y_c = x_c \operatorname{tg} \alpha$ — koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri pinna raskuskeskme kohal olev ordinaat teises lineaarselt muutavas epüüris.

Nüüd

$$\Delta_{kp} = \frac{1}{EI} \int_a^b m_k M_p dx = \omega y_c \quad (16.47)$$

Seega paindemomendi epüüride m_k , M_p ordinaatide korrutise integraal vahemikus $a-b$ on võrdne korrutisega, mille üheks teguriks on kõverjoonelise epüüri pindala vahemikus $a-b$ ja teiseks teguriks kõverjoonelise epüüri pinna raskuskeskme kohal olev ordinaat teises lineaarselt muutavas epüüris. Korrutis ωy_c on positiivne, kui koormusest põhjustatud paindemomendi epüür M_p ja ordinaat y_c on sama märgiga, s. t. mõlemad on kantud vardast ühele

ja samale poole. Niisuguste integraalide lahendamise moodust nimetatakse Vereštšagini võtteks.

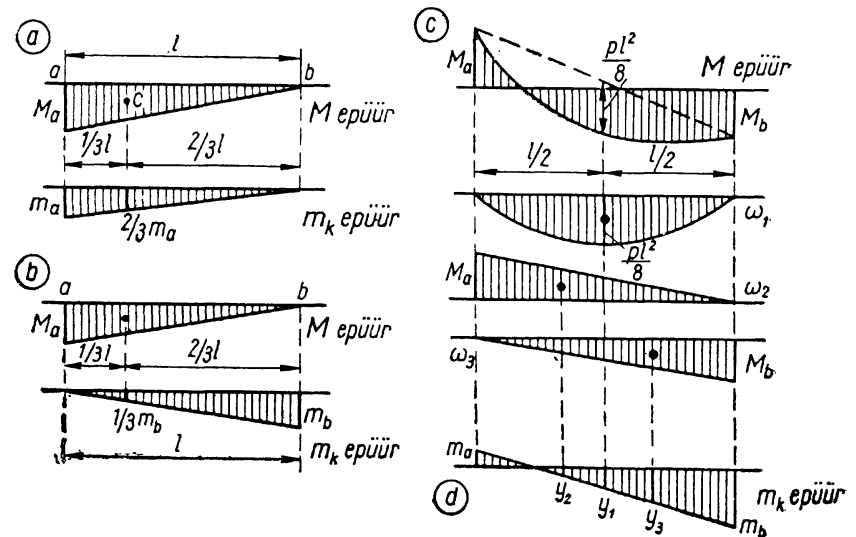
Vereštšagini võtte integraali arvutamisel, kui $EI = \text{konst.}$ (16.47), annab lihtsad valemid kolmnurksete epüüride jaoks. Joonisel 16.25, a on mõlemal epüüril suurim ordinaat kohakuti ja integraali väärtuseks on

$$\Delta_{kp} = \frac{1}{EI} \int_a^b M_p m_k dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M_a l}{2} \cdot \frac{2}{3} m_a = \frac{l}{3EI} M_a m_a \quad (16.48)$$

Joonisel 16.25, b on epüüride suurimad ordinaadid integreerimisvahemiku erinevas otses ja integraali väärtuseks sellel juhul on

$$\Delta_{kp} = \frac{1}{EI} \int_a^b M_p m_k dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M_a l}{2} \cdot \frac{1}{3} m_b = \frac{l}{6EI} M_a m_b \quad (16.49)$$

Koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri võib jõudude mõju sõltumatuse printsiibi alusel vaadelda kui üksikutest koormustest põhjustatud paindemomendi epüü-



Joon. 16.25

ride algebraalist summat. See lubab paigutise arvutamisel vaadelda epüüri lihtsate pindalade summa või vahena.

Joonisel 16.25, c on koormusest põhjustatud paindemomendi epüür kujutatud kogu koormusest ja ka eraldi kolmeks jaotatud koormusest. Integraali (16.47) väärtuseks on

$$\Delta_{k_p} = \frac{1}{EI} \int_a^b Mm \, dx = (\omega_1 y_1 - \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3)$$

milles

$$y_1 = (m_b - m_a)/2, \quad y_2 = \frac{1}{3} m_b - \frac{2}{3} m_a,$$

$$y_3 = \frac{2}{3} m_b - \frac{1}{3} m_a$$

Kui varda jäikus on muutuv, siis ei saa seda tuua integraalimärgi ette ja enne *Vereštšagini* võtte kasutamist on vaja koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri ordinaadid redutseerida, korrutades neid teguriga I_0/I . Inertsmomendi I_0 väärtus on vabalt valitav. Valemi (16.47) asemel tuleb kasutada siis järgmist avaldist:

$$\Delta_{k_p} = \int_a^b m_k \frac{M_p}{EI} \, dx = \frac{1}{EI_0} \int_a^b m_k \left(M_p \frac{I_0}{I} \right) \, dx = \omega_R y_c / EI_0 \quad (16.50)$$

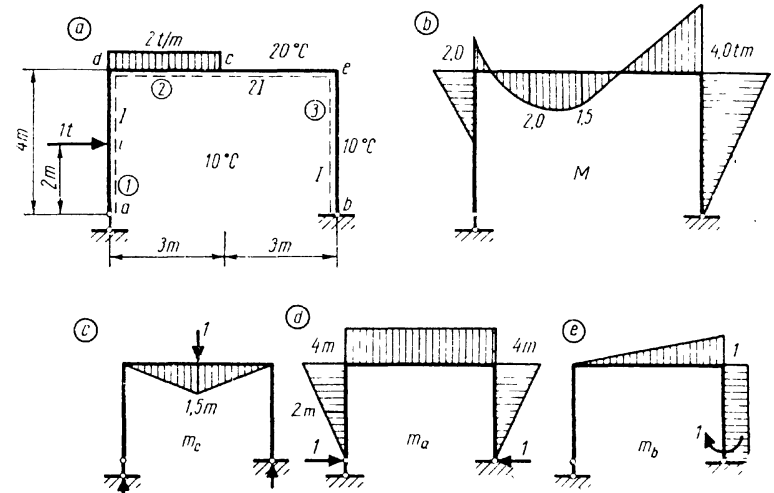
kus ω_R on koormusest põhjustatud redutseeritud paindemomendi ($M_p I_0 / I$) epüüri pindala.

Näide 16.7. Arvutada joonisel 16.26, a kujutatud arvutusskeemi ristlõike c vertikaalsiire, toeristlõike a horisontaalsiire ja toeristlõike b pööre: 1) koormusest, 2) temperatuuri muutusest ja 3) tugede paigutistest. Temperatuur tõuseb sisemisel poolel 10°C ja väljaspool vasakul ning üleval 20°C ja paremal 10°C võrra. Varraste ristlõiked on sümmeetrilised, inertsmomendid $I_1 = I_3 = I$ ja $I_2 = 2I$ ning ristlõikete kõrgused $h_1 = h_3 = 50$ cm ja $h_2 = 60$ cm. Temperatuuri-joonpaisumistegur $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$. Tugi a vajub $\Delta a_v = 2$ cm ja tugi b $\Delta b_v = 1$ cm ning nihkub vasakult paremale $\Delta b_h = 0,5$ cm võrra.

Koormusest põhjustatud paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 16.26, b . Ristlõike c vertikaalsiirde arvutamiseks rakendatakse sinna üldistatud ühikjõud. Ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 16.26, c . Vertikaalsiire

$$\begin{aligned} w_{c_p} &= (3,0/6 \cdot 2EI) (2 \cdot 0 + 4 \cdot 0,75 \cdot 2,0 + 1,5 \cdot 1,5) + \\ &+ (3,0/6 \cdot 2EI) (1,5 \cdot 1,5 - 4 \cdot 0,75 \cdot 1,25 + 0 \cdot 4) = \\ &= 1,6875/EI \approx 1,69/EI \text{ m} \end{aligned}$$

Ristlõikesse a rakendatud horisontaalsest ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüür on esitatud joonisel 16.26, d .



Joon. 16.26

Toeristlõike a horisontaalsiire

$$\begin{aligned} u_{a_p} &= (2,0/6EI) (2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2) + (3,0/6 \cdot 2EI) (2 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot 4 - \\ &- 4 \cdot 1,5) + 4 \cdot 3,0 \cdot 1,25/2EI + (4,0/3EI) \cdot 4 \cdot 4 = 28/EI \text{ m} \end{aligned}$$

Toeristlõikesse b rakendatud ühikmomendist põhjustatud paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 16.26, e .

Ristlõike b pööre

$$\begin{aligned} \varphi_{b_p} &= (3,0/6 \cdot 2EI) (0 \cdot 2,0 - 4 \cdot 0,25 \cdot 2,0 - 0,5 \cdot 1,5) + (3,0/6 \cdot 2EI) \cdot \\ &\cdot [2(-0,5 \cdot 1,5 + 1,0 \cdot 4,0) + 0,5 \cdot 4,0 - 1,0 \cdot 1,5] + \\ &+ 4,0 \cdot 1 \cdot 2 = 9,0625/EI \approx 9,06/EI \end{aligned}$$

Sümmeetriliste ristlõigetega varraste puhul arvutatakse temperatuuri muutuse varda telgjoonel valemiga (16.29):

$$t_0 = \frac{1}{2} (t_a + t_u)$$

$$t_{01} = t_{02} = \frac{1}{2} (10 + 20) = 15^\circ\text{C}, \quad t_{03} = \frac{1}{2} (10 + 10) = 10^\circ\text{C}$$

Temperatuuri muutuste vahed varraste alumiste ja ülemiste kiudude vahel on järgmised (16.31):

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = 10 - 20 = -10^\circ\text{C}, \quad \Delta t_3 = 10 - 10 = 0^\circ\text{C}$$

Paigutised arvutatakse valemiga (16.33):

$$\Delta_{k_t} = \sum \alpha_j \frac{\Delta t_j}{h_j} \int_0^{l_j} m_k \, ds + \sum \alpha_j t_{0j} \int_0^{l_j} n_k \, ds$$

Ristlõike c vertikaalsiire

$$w_{\cdot i} = 12 \cdot 10^{-6} \left[\frac{-10}{0,6} \cdot \frac{1,5 \cdot 6,0}{2} \right] + 12 \cdot 10^{-6} \left[15 \left(-\frac{1}{2} \cdot 4,0 \right) + 10 \left(-\frac{1}{2} \cdot 4,0 \right) \right] = -15 \cdot 10^{-4} \text{ m} = -1,5 \text{ mm}$$

Toeristlõike a horisontaalsiire

$$u_{a i} = 12 \cdot 10^{-6} \left[\frac{-10}{0,5} \left(-\frac{4 \cdot 4,0}{2} \right) + \frac{-10}{0,6} (-4 \cdot 6,0) + \frac{0}{0,5} (4 \cdot 4,0) \right] + 12 \cdot 10^{-6} \cdot [15(0 \cdot 4,0) + 15(-1 \cdot 6,0) + 10(0 \cdot 4,0)] = 564 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 5,64 \text{ mm}$$

Toeristlõike b pööre

$$\varphi_{b i} = 12 \cdot 10^{-6} \left[\frac{-10}{0,6} \left(\frac{-1 \cdot 6,0}{2} \right) + \frac{0}{0,5} (-1 \cdot 4,0) \right] + 12 \cdot 10^{-5} \left[15 \left(\frac{1}{6} \cdot 4,0 \right) + 15(0 \cdot 6,0) + 10 \left(-\frac{1}{6} \cdot 4,0 \right) \right] = 64 \cdot 10^{-5} = 0,00064 \text{ rad}$$

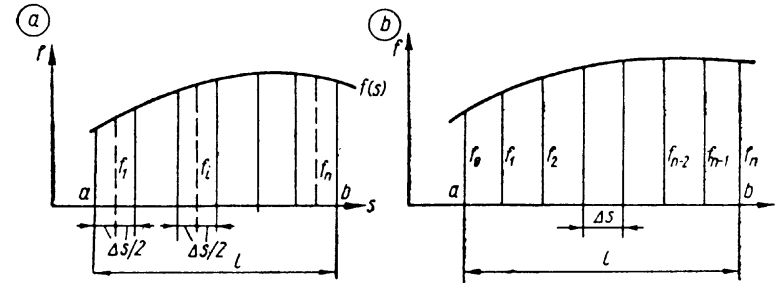
Paigutused tugede nihkumistest arvutatakse valemiga (16.34):

$$\begin{aligned} \Delta_{k r} &= -\sum \Delta c_j r'_{j k} \\ w_{c r} &= -(-2 \cdot 0,5 - 1 \cdot 0,5) = 1,5 \text{ cm} \\ u_{a r} &= -(-0,5 \cdot 1) = 0,5 \text{ cm} \\ \varphi_{b r} &= -(2 \cdot 1/600 - 1 \cdot 1/600) = -1/600 \text{ rad.} \end{aligned}$$

16.69. Funktsioonide numbriline integreerimine

Kõverate varrastega konstruktsioonidel (kaartel) on koormusest ja ühikjõust põhjustatud epüürid mõlemad mittelineaarsed ning paigutiste valemi integraalid arvutatakse numbrilise integreerimise teel. Funktsiooni $f(s) = m_k M_p / EI$ numbrilisel integreerimisel jaotatakse integreerimisvahemik $a-b$ n võrdseks osaks $\Delta s = l/n$ (joon. 16.27). Kõige lihtsamal numbrilisel integreerimisel arvutatakse funktsiooni $f(s)$ väärtused osakeste keskkohal f_1, f_2, \dots, f_n (joon. 16.27, a) ja integraali ligikaudne väärtus leitakse summeerimise teel:

$$\int_a^b m_k \frac{M_p}{EI} ds \approx \int_a^b f(s) ds \approx \Delta s (f_1 + f_2 + \dots + f_n) =$$



Joon. 16.27

$$= \Delta s \sum_{i=1}^n f_i \quad (16.51)$$

Osakeste erinevate pikkuste puhul ($\Delta s_i \neq \text{konst.}$) arvutatakse integraal järgmiselt:

$$\int_a^b f(s) ds \approx f_1 \Delta s_1 + f_2 \Delta s_2 + \dots + f_n \Delta s_n = \sum_{i=1}^n f_i \Delta s_i \quad (16.52)$$

Trapetsivalemi kasutamisel jagatakse integreerimisvahemik $a-b$ n võrdseks osaks, funktsiooni $f(s)$ väärtused arvutatakse osakeste vahekohtades $f_0, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_n$ (joon. 16.27, b) ja integraali ligikaudne väärtus leitakse avaldisega

$$\int_a^b f(s) ds \approx \Delta s \left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right) \quad (16.53)$$

Kui funktsioon $f(s)$ on mittelineaarne, siis parabolse interpolatsiooni võte annab tulemuse väiksema veaga. Sel juhul jagatakse integreerimisvahemik $a-b$ paarisarvuliseks n võrdseks osaks ja integraali ligikaudne väärtus leitakse nn. *Simpsoni* valemiga

$$\int_a^b f(s) ds \approx \frac{1}{3} \Delta s (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \quad (16.54)$$

16.7. Paigutiste arvutamine maatrikskujus

16.7.1. Muutusmaatriks

Konstruksioonide arvutamisel maatriksitega esitatakse kõik lähteandmed maatrikskujul. Muutusmaatriks esitab konstruktsiooni elementidele mõjuvate üldistatud ühikjõudude ja nendele vastavate üldistatud paigutiste vahelisi seoseid. Üldistatud jõule S_k vastav üldistatud paigutis avaldub lineaarse funktsioonina konstruktsioonile mõjuvatest üldistatud jõududest S_k, S_i, \dots, S_n (16.1):

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \delta_{kk}S_k + \delta_{ki}S_i + \dots + \delta_{kn}S_n \\ \Delta_i &= \delta_{ik}S_k + \delta_{ii}S_i + \dots + \delta_{in}S_n \\ &\vdots \\ \Delta_n &= \delta_{nk}S_k + \delta_{ni}S_i + \dots + \delta_{nn}S_n \end{aligned} \quad (16.55)$$

ehk maatrikskujul väljendatult

$$\begin{Bmatrix} \Delta_k \\ \Delta_i \\ \vdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{kk} & \delta_{ki} & \dots & \delta_{kn} \\ \delta_{ik} & \delta_{ii} & \dots & \delta_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{nk} & \delta_{ni} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_k \\ S_i \\ \vdots \\ S_n \end{Bmatrix} \quad (16.56)$$

Avaldist (16.56) võib esitada lühemalt

$$\mathbf{v} = \mathbf{D}_1 \mathbf{S} \quad (16.57)$$

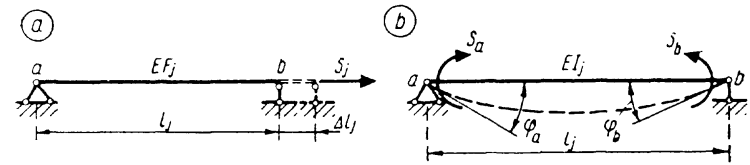
milles \mathbf{v} ja \mathbf{S} on vastavalt paigutiste ja jõudude veergmaatriksid (vektorid). Keskmine maatriks \mathbf{D}_1 on n järku ruutmaatriks ja esitab üldistatud jõududele S_k, S_i, \dots, S_n vastavaid üldistatud paigutisi, mis on põhjustatud igast eraldi mõjuvast üldistatud ühikjõust.

Järgnevalt vaadeldakse konstantse ristlõikega varrast või selle osa pikkusega l_j . Varda tõmbejäikus on EF_j ja paindejäikus EI_j . Joonisel 16.28, *a* kujutatud vardal on üldistatud jõuks tõmbejõud S_j ja üldistatud paigutiseks — varda pikenemine

$$\Delta l_j = S_j l_j / EF_j = (l_j / EF_j) S_j = \delta_j S_j \quad (16.58)$$

Üldistatud ühikjõust põhjustatud varda pikenemine, väljendatuna maatrikskujul,

$$\delta_j = \frac{l_j}{EF_j} \|1\| \quad (16.59)$$



Joon. 16.28

on konstantse ristlõikega sirge varda tõmbe (surve) muutusmaatriks.

Joonisel 16.28, *b* kujutatud tala toeristlõigete pöörded φ_a, φ_b arvutatakse vastavalt võrranditele (16.55):

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \delta_{aa}S_a + \delta_{ab}S_b \\ \varphi_b &= \delta_{ba}S_a + \delta_{bb}S_b \end{aligned}$$

või maatrikskujul

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{aa} & \delta_{ab} \\ \delta_{ba} & \delta_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_a \\ S_b \end{Bmatrix} \quad (16.60)$$

milles \mathbf{v} on paigutiste veergmaatriks. Üldistatud jõududele S_a ja S_b vastavateks paigutisteks on toeristlõigete pöörded φ_a ja φ_b . Paigutiste maatriksit (16.60), kui kasutada ühikjõududest põhjustatud üldistatud paigutisi

$$\delta_{aa} = \delta_{bb} = l_j / 3EI_j, \quad \delta_{ab} = \delta_{ba} = l_j / 6EI_j$$

võib esitada järgmiselt

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \frac{l_j}{6EI_j} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_a \\ S_b \end{Bmatrix} = \mathbf{f}_j \begin{Bmatrix} S_a \\ S_b \end{Bmatrix} \quad (16.61)$$

milles

$$\mathbf{f}_j = \frac{l_j}{6EI_j} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (16.62)$$

on konstantse ristlõikega sirge varda painde muutusmaatriks.

Varda otsristlõigetes mõjuvatest ühikmomentidest $S_a=1, S_b=1$ põhjustatud paindemomentide veergmaatriksi transponeeritud maatriksi $\|m_a=1 \ m_b=1\|$ korrutamisel pöörete φ_a ja φ_b veergmaatriksiga saadakse üldistatud jõududest S_a ja S_b põhjustatud varda otsristlõigete pöörete summa

$$\|m_a \ m_b\| \cdot \left\| \begin{matrix} \varphi_a \\ \varphi_b \end{matrix} \right\| = \|1 \ 1\| \cdot \left\| \begin{matrix} \varphi_a \\ \varphi_b \end{matrix} \right\| = \varphi_a + \varphi_b$$

Sirge varda a - b otsristlõigete pöördnurkade summa, mis on põhjustatud varda otstes mõjuvatest momentidest (joon. 16.28, b), on maatrikskujul väljendatuna järgmine:

$$\begin{aligned} \varphi_a + \varphi_b &= \|m_a \ m_b\| \cdot f_j \left\| \begin{matrix} S_a \\ S_b \end{matrix} \right\| = \\ &= \|1 \ 1\| \cdot \frac{l_j}{6EI_j} \left\| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} S_a \\ S_b \end{matrix} \right\| \end{aligned} \quad (16.63)$$

16.72 Paigutiste arvutamine

Valemi (16.21) rakendamisel maatrikskujul käsitletakse algul ainult selle esimese, paindeformatsiooni arvestava liikmega (16.22)

$$\Delta_{kp} = \Sigma \int m_k (M_p/EI) ds$$

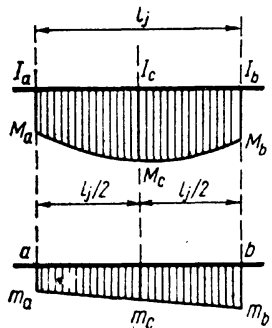
Järgnevalt vaadeldakse üht integreerimisvahemikku pikkusega l_j (joon. 16.29).

Kui üldistatud ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüür m_k muutub lineaarselt ja koormuse epüüri ordinaat jagatud paindejäikusega (M_p/EI) muutub teise astme parabooli järgi või on lineaarne, siis valemiga (16.44) arvutatud tulemus on täpne

$$\Delta_{kp} = \frac{l_0}{6EI_0} (\alpha_{aj} m_a M_a + 4\alpha_{cj} m_c M_c + \alpha_{bj} m_b M_b) \quad (16.64)$$

milles

$$\alpha_{ij} = EI_0 l_j / EI_i l_0 \quad (i = a, b, c) \quad (16.65)$$



Joon. 16.29

Kui M_p/EI kujutab kolmanda või kõrgema astme parabooli, siis valemiga (16.64) arvatud tulemus on ligikaudne. Viga on seda väiksem, mida väiksem on integreerimisvahemik l_j .

Maatrikskujul esitatuna on valem (16.64) järgmine:

$$\Delta_{kp} = \|m_{ak} \ m_{ck} \ m_{bk}\| \cdot \frac{l_0}{6EI_0} \left\| \begin{matrix} \alpha_{aj} & 0 & 0 \\ 0 & 4\alpha_{cj} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{bj} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} M_a \\ M_c \\ M_b \end{matrix} \right\| \quad (16.66)$$

ehk

$$\Delta_{kp} = \mathbf{b}'_{kj} \mathbf{f}_j \mathbf{b}_{0j} \quad (16.67)$$

milles

$$\mathbf{b}'_{kj} = \|m_{ak} \ m_{ck} \ m_{bk}\| \quad (16.68)$$

on üldistatud ühikjõust 1_k põhjustatud paindemomendi veergmaatriksi transponeeritud maatriks ja

$$\mathbf{f}_j = \frac{l_0}{6EI_0} \left\| \begin{matrix} \alpha_{aj} & 0 & 0 \\ 0 & 4\alpha_{cj} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{bj} \end{matrix} \right\| \quad (16.69)$$

vahemiku j painde muutusmaatriks ning

$$\mathbf{b}_{0j} = \mathbf{M}_{pj} = \left\| \begin{matrix} M_{ap} \\ M_{cp} \\ M_{bp} \end{matrix} \right\| = \{M_{ap} \ M_{cp} \ M_{bp}\} \quad (16.70)$$

koormusest põhjustatud paindemomendi M_p veergmaatriks.

Kui mõlemad epüürid m_k ja M_p integreerimisvahemiku ulatusel on lineaarsed, siis keskmised ordinaadid saab avaldada otsmiste ordinaatide kaudu ja maatriksite (16.68), (16.69), (16.70) asemel võib kirjutada

$$\mathbf{b}'_{kj} = \|m_{ak} \ m_{bk}\| \quad (16.71)$$

$$\mathbf{f}_j = \frac{l_0}{6EI_0} \left\| \begin{matrix} (\alpha_{aj} + \alpha_{cj}) & \alpha_{cj} \\ \alpha_{cj} & (\alpha_{cj} + \alpha_{bj}) \end{matrix} \right\| \quad (16.72)$$

$$\mathbf{b}_{0j} = \{M_{ap} \ M_{bp}\} \quad (16.73)$$

Kui elemendi l_j ulatusel on jäikus konstantne, siis $\alpha_{aj} = \alpha_{cj} = \alpha_{bj} = \alpha_j$ ja valem (16.72) ühtib valemiga (16.62):

$$\mathbf{f}_j = \frac{l_0}{6EI_0} \left\| \begin{matrix} 2\alpha_j & \alpha_j \\ \alpha_j & 2\alpha_j \end{matrix} \right\| = \frac{l_j}{6EI_j} \left\| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\| \quad (16.72')$$

Paigutise Δ_{kp} arvutamisel summeeritakse arvutustulemused üle kõigi elementide:

$$\Delta_{kp} = \sum_j \mathbf{b}'_{kj} \mathbf{f}_j \mathbf{b}_{0j} \quad (16.74)$$

mis maatriksümboolikas omab kuju

$$\Delta_{kp} = \|\mathbf{b}'_{k1} \mathbf{b}'_{k2} \dots \mathbf{b}'_{km}\| \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{f}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{f}_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{f}_m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{b}_{01} \\ \mathbf{b}_{02} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{b}_{0m} \end{vmatrix} \quad (16.75)$$

ehk

$$\Delta_{kp} = \mathbf{b}'_k \mathbf{f} \mathbf{b}_0 \quad (16.76)$$

Avaldises (16.76) on maatriks \mathbf{f} kvaasidiagonaalne ja koosneb üksikute elementide muutusmaatriksitest ning sisaldab m rida ja veergu (16.75). Paigutisvektori \mathbf{v} arvutamisel on vaja avaldises (16.75) rea \mathbf{b}'_k asemel kirjutada n rida, s. t. ridamaatriks \mathbf{b}'_k asendada maatriksiga \mathbf{b}' , mille ridade arv võrdub vektori \mathbf{v} dimensiooniga. Maatriksi \mathbf{b}' elementideks on vastavatest üldistatud ühikjõududest põhjustatud epüüride ordinaadid.

Seega

$$\mathbf{v} = \mathbf{b}' \mathbf{f} \mathbf{b}_0 \quad (16.77)$$

Kui ühikjõudude epüüride naaberelementide külgnevad ordinaadid on võrdsed (epüürid on pidevad), siis saab vähendada maatriksi \mathbf{b}' elementide arvu. Naaberelementide külgnevad ordinaadid kirjutatakse ainult üks kord. Maatriksi \mathbf{f} ridu on vaja nihutada selliselt, et eelneval ja järgneval maatriksil \mathbf{f}_j oleks üks ühine rida

$$\mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{f}_1 & & & \\ & \mathbf{f}_3 & & \\ & & \mathbf{f}_2 & \\ & & & \dots \end{vmatrix} \quad (16.78)$$

Kui koormuse epüüri naaberelementide külgnevad ordinaadid on võrdsed, siis saab vähendada koormusvektori \mathbf{M}_p dimensiooni ja maatriksi \mathbf{f} veerge nihutada selliselt, et eelneval ja järgneval maatriksil \mathbf{f}_j oleks üks ühine veerg

$$\mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{f}_1 & & & \\ & \mathbf{f}_3 & & \\ & & \mathbf{f}_2 & \\ & & & \dots \end{vmatrix} \quad (16.79)$$

Kui koormuse ja ühikjõudude epüürid on pidevad, siis maatriksid \mathbf{f} nihutatakse mõlemas sihis selliselt, et eelneval \mathbf{f}_{j-1} viimane ja järgneval \mathbf{f}_j esimene element oleks kohakuti ja need liidetakse

$$\mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{f}_1 & & & \\ & + & & \\ & & \mathbf{f}_2 & \\ & & & + \\ & & & & \mathbf{f}_3 \\ & & & & & \dots \end{vmatrix} \quad (16.80)$$

Niisugusel juhul on otstarbekohane maatriksite \mathbf{b}' ja \mathbf{b}_0 elemente tähistada lõigete, mitte aga integreerimisvahemike järgi.

Seni käsitleti paigutiste arvutamist maatriksümboolikas, arvestades ainult varraste paindedeformatsiooni. Varraste piki- ja nihkedeformatsioone arvestades kasutatakse eelpool esitatud maatrikseid, milles paindedeformatsioonile vastavad sümboolid m_k , M_p , EF_0 ja α_j asendatakse pikideformatsioonile vastavate sümboolitega

$$n_k, N_p, EF_0 \text{ ja } \beta_j = EF_0 l_j / E_j F_j l_0 \quad (16.81)$$

või nihkedeformatsioonile vastavate sümboolitega

$$q_k, Q_p, EF_0 \text{ ja } \gamma_j = k_j EF_0 l_j / G_j F_j l_0 \quad (16.82)$$

Kui pikijõud on varraste ulatusel konstantsed (sõrestikud), siis paigutised arvutatakse valemiga

$$\Delta_{kp} = \sum_{j=1}^v \frac{n_{jk} N_{jp}}{EF_j} l_j$$

ehk maatriksümboolikas (16.76)

$$\Delta_{kp} = \mathbf{b}'_{kN} \mathbf{f}_N \mathbf{b}_{0N} \quad (16.83)$$

milles

$$1) \mathbf{b}'_{kN} = \|\mathbf{b}'_{k1,N} \mathbf{b}'_{k2,N} \dots \mathbf{b}'_{km,N}\| \quad (16.84)$$

on üldistatud jõust 1_k põhjustatud pikijõu veergmaatriksite transponeeritud maatriksitest koosnev ridamaatriks,

$$2) \mathbf{f}_N = \frac{l_0}{EF_0} \begin{vmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_m \end{vmatrix} \quad (16.85)$$

— tõmbe (surve) muutusmaatriks,

$$3) \mathbf{b}_{0N} = \|\{\mathbf{b}_{01,N} \mathbf{b}_{02,N} \dots \mathbf{b}_{0m,N}\}\| \quad (16.86)$$

— koormusest põhjustatud pikijõudude veergmaatriks. Paigutiste maatriks, mis on põhjustatud tõmbest (survest), arvutatakse analoogiliselt valemiga (16.77):

$$\mathbf{v}_N = \mathbf{b}'_N \mathbf{f}_N \mathbf{b}_{0N} \quad (16.86)$$

Tõmbe (surve-) ja paindedeformatsioonide arvutamisel liidetakse maatriksid (16.77) ja (16.86):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_M + \mathbf{v}_N \quad (16.87)$$

mis maatrikskujul on

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \|\mathbf{b}'_M \mathbf{b}'_N\| \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{f}_M & 0 \\ 0 & \mathbf{f}_N \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{b}_{0M} \\ \mathbf{b}_{0N} \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{b}'_M \mathbf{f}_M \mathbf{b}_{0M} + \mathbf{b}'_N \mathbf{f}_N \mathbf{b}_{0N} = \mathbf{v}_M + \mathbf{v}_N \end{aligned} \quad (16.88)$$

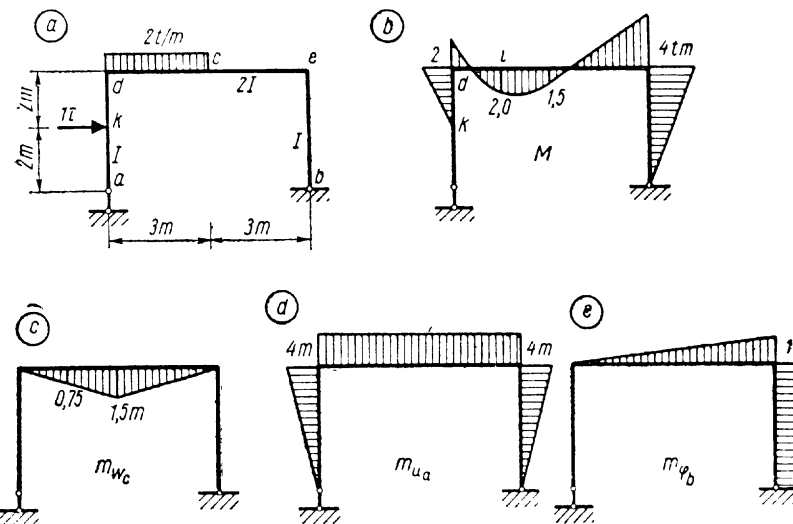
Näide 16.8. Arvutada joonisel 16.30, a esitatud arvutusskeemi punkti c vertikaalsiire w_{cp} , liigendi a horisontaalsiire u_{ap} ja toeristlõike b pööre φ_{bp} . Arvestada ainult paindedeformatsiooni.

Vasakpoolse posti alumine osa vahemikus $a-k$ jääb sirgeks, kuna koormus selles osas paindemomenti ei põhjusta, ja selle osa jaoks ei leita muutusmaatriksit. Teiste osade muutusmaatriksid arvutatakse avaldistega (16.69) ja (16.72'), milles α_j leitakse valemiga $\alpha_j = EI_0 l_j / EI l_0$ (16.65), milles võetakse $EI_0 = EI$ ja $l_0 = 2,0$ m:

$$\begin{aligned} \alpha_{h-a} &= EI \cdot 2,0 / EI \cdot 2,0 = 1 \\ \alpha_{d-c} &= \alpha_{c-e} = EI \cdot 3,0 / 2EI \cdot 2,0 = 0,75 \\ \alpha_{r-b} &= EI \cdot 4,0 / EI \cdot 2,0 = 2 \end{aligned} \quad (a)$$

Muutusmaatriksid on järgmised:

$$\mathbf{f}_{b-d} = \frac{2,0}{6EI} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$



Joon. 16.30

$$\mathbf{f}_{d-c} = \frac{2,0}{6EI} \begin{vmatrix} 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 \end{vmatrix} \quad (b)$$

$$\mathbf{f}_{c-e} = \frac{2,0}{6EI} \begin{vmatrix} 1,5 & 0,75 \\ 0,75 & 1,5 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{c-b} = \frac{2,0}{6EI} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Koormuse ja ühikjõudude epüürid on pidevad ja kogu arvutusskeemi muutusmaatriks esitatakse valemi (16.80) järgi:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{3EI} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,25 & 0,75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,75 & 5,50 & 2,0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,0 & 4,0 \end{vmatrix} \quad (c)$$

Maatriks \mathbf{b}' koostatakse ühikepüüride ordinaatidest (joon. 16.30, c, d, e):

$$\mathbf{b}' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0,75 & 1,5 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -0,25 & -0,5 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad (d)$$

ja vektori b_0 koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri ordinaatidest (joon. 16.30, b)

$$b_0 = \{0 \ -2 \ 2 \ 1,5 \ -4 \ 0\} \quad (e)$$

Valemiga (16.77) arvutatakse paigutised

$$v = \begin{Bmatrix} w_{c,p} \\ u_{a,p} \\ \varphi_{b,p} \end{Bmatrix} = b'fb_0 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0,75 & 1,5 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -0,25 & -0,5 & -1 & -1 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{3EI} \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,25 & 0,75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,75 & 5,5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1,5 \\ -4 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3EI} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 2,25 & 3,375 & 1,125 & 0 \\ -8 & -13 & -12 & -12 & -25 & -8 \\ 0 & 0 & -0,75 & -1,875 & -7,875 & -6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1,5 \\ -4 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3EI} \begin{Bmatrix} 5,052 \\ 84,000 \\ 27,188 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 1,684 \\ 28,000 \\ 9,062 \end{Bmatrix}$$

16.8. Mõjujooned

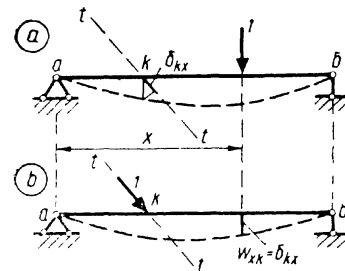
16.8.1. Paigutise mõjujoon

Paigutise mõjujoon on graafik, mis kujutab paigutise olenevust konstruktsioonil liikuvast ja oma suunda säilitavast ühikjõust. Mõjujooned arvutatakse tavaliselt vertikaalse ühikjõuga. Paigutise mõjujoone ordinaat kujutab konstruktsiooni punkti, mille jaoks mõjujoon on arvutatud, paigutise suurust, kui ühikjõud asub konstruktsioonil ordinaadi kohal.

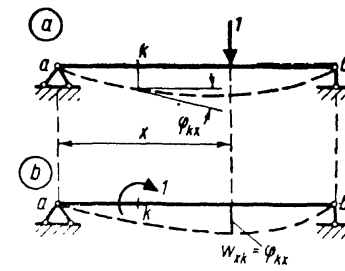
Järgnevalt esitatakse lihttala ristlõike k raskuskeskme tegeliku (vertikaalse) siirde valitud sihiga komponendi mõjujoon vertikaalse ühikjõu jaoks. Joonisel 16.31 on valitud siht $t-t$ märgitud punktiirjoonega. Lihttala ristlõike k raskuskeskme siirde komponent punktiiriga märgitud sihis, kui ühikjõud asub lõikes x , tähistatakse δ_{hx} . Paigutiste vastastikkuse teoreemi põhjal

$$\delta_{hx} = \delta_{xh} \quad (a)$$

Võrduse (a) vasak pool δ_{hx} kujutab ristlõike k raskuskeskme siirde mõjujoont, kuna siiret põhjustava ühikjõu asukoht (teine indeks x) on muutuv. Kuna lõikes x mõjuv



Joon. 16.31



Joon. 16.32

üldistatud jõud on vertikaalne (joon. 16.31, a), siis võrduse (a) parem pool δ_{xh} kujutab kohas k asuvast liikumatust üldistatud ühikjõust põhjustatud vertikaalsiirde epüüri (joon. 16.31, b), sest siirde asukohta tähistav esimene indeks x on muutuv. Vertikaalsiiret tähistatakse tähega w ja seose (a) asemel võib kirjutada

$$\delta_{hx} = w_{xh} \quad (16.89)$$

Paigutiste vastastikkuse teoreemi (16.89) alusel kujutab konstruktsioonil lõikes k mõjuvast üldistatud ühikjõust põhjustatud vertikaalsiirde epüür w_{xh} lõikes k üldistatud ühikjõule vastava üldistatud paigutise δ_{hx} mõjujoont. Vastavalt paigutiste vastastikkuse teoreemile kujutab ristlõike k pöörde (joon. 16.32, a) mõjujoont vertikaalsiirde epüür, mis on põhjustatud lõikes k mõjuvast ühikmomendist (joon. 16.32, b).

Näide 16.9. Arvutada joonisel 16.33, a esitatud konsooli lõike 3 vertikaalsiirde mõjujoone ordinaadid. Konsooli pikkus $l=5$ m.

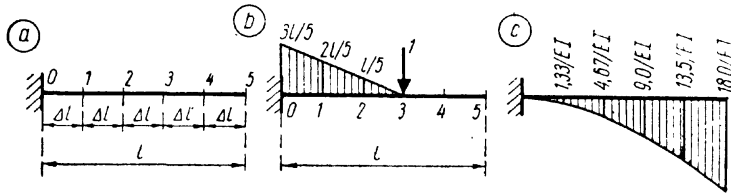
Mõjujoone ordinaadid võib arvutada valemiga (16.77): $v = b'fb$, milles b on lõikes 3 mõjuvast vertikaalsest ühikjõust põhjustatud paindemomendi vektor ja b' — konsooli transponeeritud paindemomendi mõjumaatriks. Kuna järgmises punktis käsitletakse paigutise mõjumaatriksi leidmist maatrikssümboolikas, siis antud ülesanne lahendatakse elastse joone diferentsiaalvõrrandi integreerimise teel.

Konsooli lõikes 3 mõjuvast ühikjõust (joon. 16.33, b) põhjustatud vertikaalsiirde epüür (joon. 16.33, c) on paigutiste vastastikkuse teoreemi alusel lõike 3 vertikaalsiirde w_3 mõjujoon.

Paindemomendid:

kui $0 \leq x \leq 0,6l$, siis $m = -(0,6l - x) = -0,6l + x$ ja kui $0,6 \leq x \leq l$, siis $m = 0$. Elastse joone diferentsiaalvõrrandid nendes vahemikes on vastavalt

$$EI\omega_1'' = 0,6l - x; \quad EI\omega_2'' = 0 \quad (a)$$



Joon. 16.33

Võrrandeid (a) integreeritakse kaks korda, mille tulemusena saadakse:

$$EIw_1' = 0,6lx - x^2/2 + C_1 \quad EIw_1 = 0,3lx^2 - x^3/6 + C_1x + C_2 \quad (b)$$

$$EIw_2' = C_3; \quad EIw_2 = C_3x + C_4 \quad (c)$$

Kui $x=0$, siis $w_1' = 0$ ja $w_1 = 0$ ning $C_1 = C_2 = 0$.

Avaldised (b) on nüüd järgmised:

$$EIw_1' = 0,6lx - x^2/2; \quad EIw_1 = 0,3lx^2 - x^3/6 \quad (d)$$

Lõikes 3, kus $x = 0,6l$, on $w_1 = w_2$ ja $w_1' = w_2'$.

Nendest tingimustest leitakse $C_3 = (0,6l)^2/2$; $C_4 = -(0,6l)^3/6$. Avaldised (c) omavad nüüd kuju:

$$EIw_2' = (0,6l)^2/2 = 0,18l^2 \quad (e)$$

$$EIw_2 = (0,6l)^2 x/2 - (0,6l)^3/6 = (0,6l)^2(x - 0,2l)/2$$

Mõjujoone w_3 ordinaadid leitakse nüüd avaldistega (d) ja (e):

$$x=0: \quad EIw = 0$$

$$x=1 \text{ m: } EIw = 0,3 \cdot 5 \cdot 1^2 - 1^2/6 = 1,333 \text{ m}^3$$

$$x=2 \text{ m: } EIw = 0,3 \cdot 5 \cdot 2^2 - 2^2/6 = 4,667 \text{ m}^3$$

$$x=3 \text{ m: } EIw = 0,3 \cdot 5 \cdot 3^2 - 3^2/6 = (0,6 \cdot 5)^2(3 - 0,2 \cdot 5)/2 = 9,000 \text{ m}^3$$

$$x=4 \text{ m: } EIw = (0,6 \cdot 5)^2(4 - 0,2 \cdot 5)/2 = 13,500 \text{ m}^3$$

$$x=5 \text{ m: } EIw = (0,6 \cdot 5)^2(5 - 0,2 \cdot 5)/2 = 18,000 \text{ m}^3$$

16.82. Paigutise mõjumaatriks

Paigutise mõjumaatriks arvutatakse valemiga (16.77):

$$v = b'fb \quad (a)$$

milles maatriks b on paindemomendi mõjumaatriks ja f — muutusmaatriks. Maatriksi b rea k elemendid kujutavad lõike k paindemomendi mõjujoone ordinaate ja veeru i elemendid — lõikes i mõjuvast ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüüri ordinaate.

Paigutise mõjumaatriksi v rea k elementideks on lõike k paigutise mõjujoone ordinaadid ja veeru i elementideks — lõikes i mõjuvast üldistatud ühikjõust põhjustatud vertikaalsiirde epüüri ordinaadid, mis paigutiste vastastikkuse teoreemi (16.89) alusel ($\delta_{ki} = \delta_{ik}$) on ka lõike k mõjujoone ordinaatideks.

Näide 16.10. Arvutada joonisel 16.33, a esitatud konsooli vertikaalsiirde mõjumaatriks. Konsooli pikkus $l = 5$ m.

Vieiks võrdseks osaks jaotatud konsooli paindemomendi mõjumaatriks omab kuju

$$b = \frac{l}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & l \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{l}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b)$$

Muutusmaatriks f leitakse vastavalt valemite (16.62) ja (16.80):

$$f = \frac{l}{5 \cdot 6EI} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (c)$$

Valemiga (a) leitakse nüüd mõjumaatriks, mille elemendid on mõjujoonte ordinaatideks:

$$v = \frac{l}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{l}{5 \cdot 6EI} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} b =$$

$$= \frac{l^2}{5^2 \cdot 6EI} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 12 & 6 & 1 \\ 11 & 18 & 12 & 6 \\ 14 & 24 & 18 & 12 \end{pmatrix} \cdot \frac{l}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{l^3}{5^3 \cdot 6EI} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 5 & 16 & 28 & 40 & 52 \\ 8 & 28 & 54 & 81 & 108 \\ 11 & 40 & 81 & 128 & 176 \\ 14 & 52 & 108 & 176 & 250 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} 0,333 & 0,833 & 1,333 & 1,833 & 2,333 \\ 0,833 & 2,667 & 4,667 & 6,667 & 8,667 \\ 1,333 & 4,667 & 9,000 & 13,500 & 18,000 \\ 1,833 & 6,667 & 13,500 & 21,333 & 29,333 \\ 2,333 & 8,667 & 18,000 & 29,333 & 41,667 \end{pmatrix} \frac{m}{T} \quad (d)$$

Näide 16.11. Arvutada joonisel 16.34 esitatud tala ($l=5m$) vertikaalsiirde mõjumaatriks.

Muutusmaatriksid leitakse vastavalt valemitele (16.62), (16.80):

$$f_1=f_5=\frac{l}{5 \cdot 6EI_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{l}{5 \cdot 6EI_0} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$f_2=f_4=\frac{l}{5 \cdot 6EI_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{l}{5 \cdot 6EI_0} \begin{vmatrix} 3 & 1,5 \\ 1,5 & 3 \end{vmatrix}$$

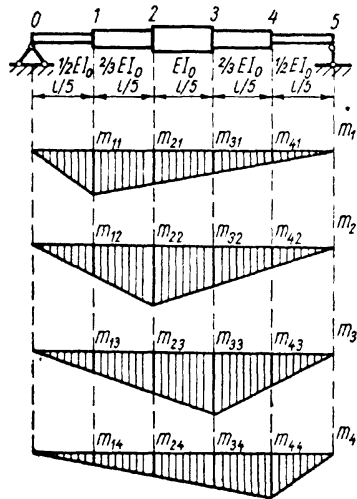
$$f_3=\frac{l}{5 \cdot 6EI_3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{l}{5 \cdot 6EI_0} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$f = \frac{l}{5 \cdot 6EI_0} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 1,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad (a)$$

Viieks võrdseks osaks jaotatud lihttala paindemomendi mõjumaatriks on järgmine:

$$b = \frac{l}{5^2} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad (b)$$

Kuna toeliigendites a ja b paindemomendid on nullid, siis mõjumaatriksis (b) ei ole kirjutatud nende lõigete jaoks nullelemente ning



Joon. 16.34

ka muutusmaatriksis f ei tarvitse kirjutada esimest ja viimast rida ning veergu:

$$f = \frac{l}{5 \cdot 6EI_0} \begin{vmatrix} 7 & 1,5 & 0 & 0 \\ 1,5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1,5 & 7 \end{vmatrix}$$

Joonisel 16.34 esitatud tala vertikaalsiirde mõjumaatriks arvutatakse nüüd valemiga (16.77) ($v = bfb$):

$$v = \frac{l}{5^2} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \frac{l}{5 \cdot 6EI_0} \begin{vmatrix} 7 & 1,5 & 0 & 0 \\ 1,5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1,5 & 7 \end{vmatrix} \cdot \frac{l}{5^2} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{l^2}{5^3 \cdot 6EI_0} \begin{vmatrix} 32,5 & 23 & 14,5 & 10 \\ 30 & 38,5 & 29 & 20 \\ 20 & 29 & 38,5 & 30 \\ 10 & 14,5 & 23 & 32,5 \end{vmatrix} \cdot \frac{l}{5^2} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{l^3}{5^5 \cdot 6EI_0} \begin{vmatrix} 238,0 & 313,5 & 274,0 & 162,0 \\ 313,5 & 477,0 & 448,0 & 274,0 \\ 274,0 & 448,0 & 477,0 & 313,5 \\ 162,0 & 274,0 & 313,5 & 238,0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{EI_0} \begin{vmatrix} 1,5867 & 2,0900 & 1,8267 & 1,0800 \\ 2,0900 & 3,1800 & 2,9867 & 1,8267 \\ 1,8267 & 2,9867 & 3,1800 & 2,0900 \\ 1,0800 & 1,8267 & 2,0900 & 1,5867 \end{vmatrix} \frac{m}{T}$$

16.83. Reaktsiooni mõjujoon

Konstruksiooni arvutuskeemi mingi sideme i reaktsiooni mõjujoone ordinaate arvutatakse reaktsiooni ja paigutise vastastikkuse teoreemiga $r'_{ik} = -\omega'_{ki}$, mis liikuva vertikaalse ühikjõu puhul omab kuju

$$r'_{ix} = -\omega'_{xi} \quad (16.90)$$

milles r'_{ix} on kohas x mõjuvast vertikaalsest ühikjõust põhjustatud reaktsioon sidemes i ja ω'_{xi} — sideme i ühikpaigutisest põhjustatud vertikaalsiire kohas x . Avaldise (16.90) vasak pool kujutab sideme i reaktsiooni mõjujoont ja parem pool — sideme i negatiivsest ühikpaigutisest põhjustatud vertikaalsiirde epüüri.

Staatikaga n korda määramatu arvutuskeemi suvalise sideme i reaktsiooni mõjujoont võib arvutada ka järgmiselt: arvutuskeemist eemaldatakse see side, mille reaktsiooni mõjujoont leitakse; järgnevalt rakendatakse eemal-

datud sideme i asemele üldistatud jõud 1_i ja arvutatakse sellest jõust põhjustatud vertikaalsirde epüüri ordinaadid $w_{xi}^{(n-1)}$, mis jagatuna üldistatud ühikjõule 1_i vastava üldistatud paigutisega $\delta_{ii}^{(n-1)}$ kujutavad sideme i reaktsiooni mõjujoone ordinaate vastupidise märgiga:

$$r'_{ix} = -w_{xi}^{(n-1)}/\delta_{ii}^{(n-1)} \quad (16.91)$$

Näide 16.12. Leida joonisel 16.35, *a* kujutatud kahesildelise tala keskmise toe b reaktsiooni B mõjujoon.

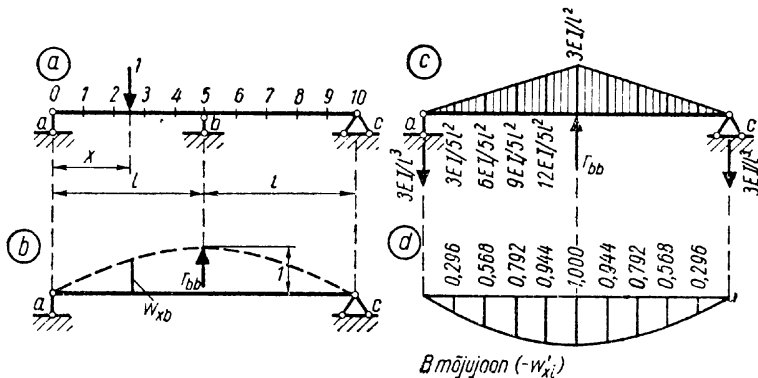
Arvutuskeemist eemaldatakse tugi b ja selle asemele rakendatakse jõud r_{bb} , mis põhjustab ristlõike b ühiksirde. Lihttala silde keskel mõjuv jõud põhjustab selles lõikes läbipainde $f = Pl^3/48EI$. Kuna antud juhul $f=1$ ja tala sildeks on $2l$ (joon. 16.35, *b*), siis $r_{bb} = 6EI/l^3$.

Vertikaalsirde epüüri w'_{xi} ordinaadid arvutatakse valemiga $v = b'fb_0$

milles b' on lihttala paindemomendi transponeeritud mõjumaatriks, f — painde muutusmaatriks ja b_0 — lõikes b mõjuvast jõust r_{bb} põhjustatud paindemomendi (joon. 16.35, *c*) veergmaatriks. Toereaktsiooni B mõjujoon on sümmeetriline ja mõjujoone ordinaadid arvutatakse ainult tala vasaku poole jaoks ning transponeeritud mõjumaatriks b kirjutatakse seepärast ainult viie reaga lõigete 1, 2, 3, 4, 5 jaoks.

Toeliigendites a ja c on paindemoment null ja seepärast ei kirjutata muutusmaatriksis esimest ning viimast rida ja veergu. Jõust r_{bb} põhjustatud vertikaalsirde vektor leitakse valemiga (16.77):

$$v = \frac{2l}{10^2} \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 16 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 7 & 14 & 21 & 18 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 20 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 20 & 15 & 10 & 5 \end{vmatrix}$$



Joon. 16.35

$$\frac{2l}{10 \cdot 6EI} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \frac{3EI}{5l^2} \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \\ -4 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{2l^2}{10^3 \cdot 3EI} \begin{vmatrix} 44 & 48 & 42 & 36 & 30 & 24 & 18 & 12 & 6 \\ 48 & 86 & 84 & 72 & 60 & 48 & 36 & 24 & 12 \\ 42 & 84 & 116 & 108 & 90 & 72 & 54 & 36 & 18 \\ 36 & 72 & 108 & 134 & 120 & 96 & 72 & 48 & 24 \\ 30 & 60 & 90 & 120 & 140 & 120 & 90 & 60 & 30 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \left(-\frac{3EI}{5l^2} \right) =$$

$$= -\frac{2}{5} \{0,74 \ 1,42 \ 1,98 \ 2,36 \ 2,50\} =$$

$$= -\{0,296 \ 0,568 \ 0,792 \ 0,944 \ 1,000\}$$

Toereaktsiooni B mõjujoone ordinaadid on vastupidiste märkidega (joon. 16.35, *d*).

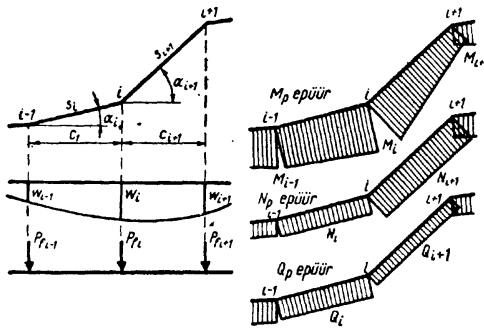
16.9. Siirde epüüri konstrueerimine elastsete koormuste meetodiga

Siirde epüüri konstrueerimisel *Maxwell-Mohri* valemiga jaotatakse konstruktsiooni arvutuskeem osadeks. Viimaste vahekohtadesse rakendatakse järjekorras ühikjõud ja arvutatakse epüürid iga ühikjõu jaoks eraldi. Järgnevalt integreeritakse koormusest ja ühikjõust põhjustatud epüüride ordinaatide korrutist. Kui selliselt arvutatud siirde lõpp-punktid ühendada sirglõikudega, siis saadakse hulknurkne epüür. Erinevus tegelikust siirde epüürist on seda väiksem, mida väiksemad on osakeste pikkused s_i .

Hulknurkne siirde epüür sarnaneb koondatud jõududest põhjustatud paindemomendi epüüri. Elastsete koormuste meetodi kasutamisel leitakse niisugused fiktiivsed elastsed jõud, mis põhjustavad sirges vardas siiretega arvuliselt võrdsed paindemomendid. See tinglik sirge varras, millele rakendatakse fiktiivsed elastsed jõud, on konstruktsiooni varda projektsioon siirete ristsihile.

Konstruksioon	Tinglik varras

Joon. 16.36



Joon. 16.37

Tingliku varda ja tegeliku konstruksiooni vahel kehtivad järgmised seosed:

1) kui konstruksiooni punkti i siire on null, siis fiktiivsetest elastsetest jõududest põhjustatud paindemoment varda selles lõikes võrdub nulliga: $M_{fi}=0$;

2) kui konstruksiooni ristlõige ei pöördu, siis fiktiivsest elastsest koormusest põhjustatud põikjõud tingliku varda selles lõikes võrdub nulliga: $Q_{fi}=0$.

Joonisel 16.36 on esitatud mõned tegeliku konstruksiooni ja vastava tingliku varda skeemid.

Võimalike paigutiste printsiibi alusel tuletatakse avaldis elastsete jõudude arvutamiseks (joon. 16.37):

$$EI_0 P_{fi} = \frac{I_0}{I_i} \cdot \frac{s_i}{6} (M_{i-1} + 2M_i) + \frac{I_0}{I_{i+1}} \cdot \frac{s_{i+1}}{6} (2M_i + M_{i+1}) +$$

$$+ \frac{I_0}{F_0} \left(N_{i+1} \frac{F_0}{F_{i+1}} \operatorname{tg} \alpha_{i+1} - N_i \frac{F_0}{F_i} \operatorname{tg} \alpha_i \right) +$$

$$+ k \frac{E}{G} \cdot \frac{I_0}{F_0} \left(Q_i \frac{F_0}{F_i} - Q_{i+1} \frac{F_0}{F_{i+1}} \right) +$$

$$+ EI_0 \alpha \left[t_0 (\operatorname{tg} \alpha_{i+1} - \operatorname{tg} \alpha_i) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{s_i}{h_i} + \frac{s_{i+1}}{h_{i+1}} \right) \right] \quad (16.92)$$

Kui $s_i = s_{i+1} = s$ ja $I_i = I_{i+1} = I$, siis paindemomentidele vastavad elastsed jõud arvutatakse järgmiste valemitega:

$$EIP_{fi} = \frac{s}{6} (M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1})$$

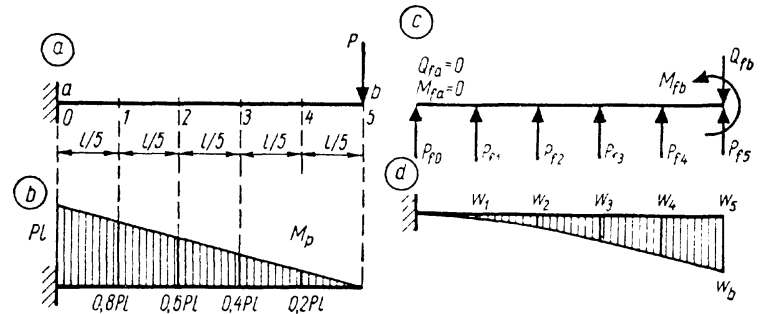
$$EIP_{j0} = \frac{s}{6} (2M_0 + M_1); \quad EIP_{jn} = \frac{s}{6} (M_{n-1} + 2M_n) \quad (16.93)$$

Avaldisega (16.92) arvutatakse vertikaalsed elastsed jõud. Mittevertikaalsete elastsete jõudude arvutamisel jäävad momentide liikmed samadeks. Teised liikmed muutuvad, kuna nurgad α_i, α_{i+1} muutuvad.

Kui konstruksioonis on liigend, siis rakendatakse lisaks avaldisega (16.92) arvutatud elastsele jõule sirge varda selles lõikes veel fiktiivne põikjõud, mis arvuliselt võrdub konstruksiooni elastse joone nurga muutusega liigendi juures.

Näide 16.13. Arvutada konsooli vertikaalsiirde epüür, kui konsooli vabal otsal mõjub koondatud jõud P (joon. 16.38, a). $EI = \text{konst}$.

Fiktiivsed jõud arvutatakse ainult paindemomentide mõjuga. Piki- ja põikjõudude mõju on väike, võrreldes paindemomendi mõjuga.



Joon. 16.38

Paindemomendi epüür on esitatud joonisel 16.38, *b*. Konsool jaotatakse viieks võrdseks osaks: $s=0,2l$ ja fiktiivsed jõud arvutatakse valemitega (16.93):

$$\begin{aligned} P_{f_0} &= -0,2l(2Pl+0,8Pl)/6EI = -0,56Pl^2/6EI \\ P_{f_1} &= -0,2l(1+4\cdot 0,8+0,6)Pl/6EI = -0,96Pl^2/6EI \\ P_{f_2} &= -0,2l(0,8+4\cdot 0,6+0,4)Pl/6EI = -0,72Pl^2/6EI \\ P_{f_3} &= -0,2l(0,6+4\cdot 0,4+0,2)Pl/6EI = -0,48Pl^2/6EI \\ P_{f_4} &= -0,2l(0,4+4\cdot 0,2+0,0)Pl/6EI = -0,24Pl^2/6EI \\ P_{f_5} &= -0,2l(0,2+2\cdot 0)Pl/6EI = -0,04Pl^2/6EI \end{aligned}$$

Fiktiivsed jõud on negatiivsed ja rakendatakse sirgele vardale suunaga alt üles (joon. 16.38, *c*). Konsooli kinnitusriistlõikes on $\varphi_a=0$ ja $w_a=0$ ning järelkult $Q_{fa}=0$ ja $M_{fa}=0$.

Järgneval fiktiivsete paindemomentide arvutamisel võetakse fiktiivsed jõud positiivsetena, kuna miinusmärk on arvestatud nende jõudude rakendamisel sirgele vardale (joon. 16.38, *c*).

Ristlõigete vertikaalsiirded:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= M_{fa} = 0 \\ \omega_1 &= (0,56Pl^2/6EI) \cdot 0,2l = 0,112Pl^3/6EI \\ \omega_2 &= (0,56 \cdot 0,4 + 0,96 \cdot 0,2)Pl^3/6EI = 0,416Pl^3/6EI \\ \omega_3 &= (0,56 \cdot 0,6 + 0,96 \cdot 0,4 + 0,72 \cdot 0,2)Pl^3/6EI = 0,864Pl^3/6EI \\ \omega_4 &= (0,56 \cdot 0,8 + 0,96 \cdot 0,6 + 0,72 \cdot 0,4 + 0,48 \cdot 0,2)Pl^3/6EI = 1,408Pl^3/6EI \\ \omega_5 &= (0,56 \cdot 1,0 + 0,96 \cdot 0,8 + 0,72 \cdot 0,6 + 0,48 \cdot 0,4 + 0,24 \cdot 0,2)Pl^3/6EI = \\ &= Pl^3/3EI \end{aligned}$$

Vertikaalsiirde epüür on esitatud joonisel 16.38, *d*. Ristlõike *b* pööre

$$\begin{aligned} \varphi_b = Q_{fb} &= - \sum_{i=0}^5 P_{fi} = 0,56 + 0,96 + 0,72 + 0,48 + 0,24 + \\ &+ 0,04)Pl^2/6EI = Pl^2/2EI \end{aligned}$$

STAATIKAGA MÄÄRAMATUD VARRASKONSTRUKTSIOONID

17. STAATIKAGA MÄÄRAMATUTE KONSTRUKTSIOONIDE ARVUTUS

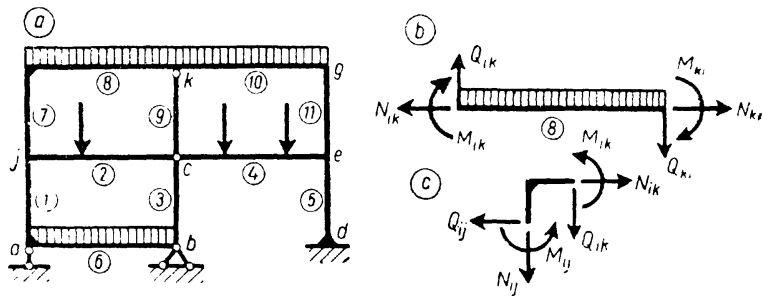
17.1. Staatikaga määratu konstruktsioon

Konstruktsioonide projekteerimisel on pingeid varras-tes võimalik arvutada, kui on teada sisejõud (M , N , Q) ja varraste mõõtmed. Deformatsioonide arvutamiseks on vaja teada ka konstruktsiooni materjali elastsusomadusi.

**Konstruktsiooni arvutuskeem on staatikaga määratu, kui kõik sisejõud ja toereaktsioonid ei ole arvu-
tatavad ainult tasakaaluvõrranditest.** Staatikaga määratu ülesande lahendamine nõuab lisaks tasakaaluvõrranditele veel ka konstruktsiooni paigutusolukorra geometriliste tingimuste alusel võrrandite koostamist ja lahendamist.

Varrastest moodustatud konstruktsiooni elemendid on sõlmedes ühendatud jäigalt või liigenditega. Aluse külge on konstruktsioon kinnitatud tugiosadega. Jäigaks nimetatakse niisugust sõlme, milles vähemalt kaks varrast on ühendatud jäigalt, olenemata selle külge liigenditega kinnitatud varraste hulgast (näiteks raami sõlm *a* joonisel 17.1, *a*).

Konstruktsioonist eraldatud varras või selle osa on temale mõjuva koormuse all tasakaalus, kui läbilõigatud kohtades on rakendatud nendes ristlõigetel esinevate sisejõududega arvuliselt võrdsed jõud, mida edaspidi lihtsuse pärast nimetatakse ka sisejõududeks. Sõlmes jäigalt ühendatud varda läbilõikamisel asendatakse sõlme mõju vardale kolme sisejõuga (M , N , Q). Joonisel 17.1, *b* kujutatud varras on kahe lõikega eraldatud raami sõlmede *i* ja *k* vahelt. Varras on teie mõjuva koormuse ja kuue sisejõu mõjul tasakaalus. Sõlme tasakaalu vaatlemisel on sisejõudude suunad vastupidised. Joonisel 17.1, *c* on kujutatud raamist eraldatud sõlm *i*, kusjuures varraste 7 ja 8



Joon. 17.1

mõju on asendatud läbilõigatud ristlõigetel esinevate sisejõududega.

Mõlemast otsast hõrdevaba liigendiga sõlme külge kinnitatud varda tasakaalu vaatlemisel rakendatakse peale vardale mõjuva koormuse tema kumbagi otsa kaks sisejõudu N ja Q (paindemoment liigendis on null). Kui varras on ühendatud ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga sõlme külge, siis on sisejõudude arv varda mõlemas otsas kokku 5.

Olenevalt otste kinnitusest on ühel vardal mõlemas otsas kokku kas 6, 5 või 4 sisejõudu. Raami varraste üldarv v koosneb kolmest osast

$$v = v_6 + v_5 + v_4, \quad (a)$$

milles v_6 on mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varraste arv, v_5 — ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga ühendatud varraste arv ning v_4 — mõlemast otsast liigendiga ühendatud varraste arv. Varraste otsristlõigete sisejõudude ja toereaktsioonide komponentide üldarv on nüüd

$$6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + t, \quad (b)$$

milles t on ainult liigendtüvede toesidemete arv, kuna avaldise (b) esimene liige $6v_6$ sisaldab juba jäikade tüvede toesidemete hulka (joon. 17.1, a, tugi d).

Raami varraste ristlõigete paigutised olenevad vardale mõjuvast koormusest ja sõlmede paigutistest. Raami jäiga sõlme i paigutuse muutus määratakse kolme komponendiga — kahe siirdega u_i ja w_i ning ühe pöördega

φ_i . Liigendsõlme c paigutuse muutus määratakse kahe siirdega u_c ja w_c . Raami sõlmede arv s koosneb s_3 jäigast ja s_2 liigendsõlmest:

$$s = s_3 + s_2. \quad (c)$$

Avaldises (c) jäikade sõlmede arv s_3 ei sisalda toesõlmi, kuid liigendsõlmede s_2 hulka arvestatakse ka liigend-toesõlmed.

Raami sõlmede (c) paigutised on tundmatud. Nad on määratavad

$$3s_3 + 2s_2 - t \quad (d)$$

geomeetrilise suurusega. Avaldises (d) on sõlmede paigutiste üldarvust $3s_3 + 2s_2$ lahutatud liigendtüvede toesidemete arv t , kuna iga toeside kõrvaldab ühe liikumisvabaduse.

Raami tundmatute sisejõudude ja paigutiste üldarv

$$6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + t + 3s_3 + 2s_2 - t \quad (e)$$

sisaldab $6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + t$ staatilist tundmatut (N, M, Q, R) ja $3s_3 + 2s_2 - t$ geomeetrilist tundmatut (u, w, φ). Tundmatute sisejõudude ja reaktsioonide arvutamiseks on võimalik koostada iga varda jaoks kolm tasakaaluvõrrandit ($\sum M=0, \sum X=0, \sum Y=0$). Kõigi varraste jaoks kokku võib koostada

$$3v_6 + 3v_5 + 3v_4 = 3v \quad (f)$$

tasakaaluvõrrandit. Jäiga sõlme jaoks saab koostada 3 ja liigendsõlme jaoks 2 tasakaaluvõrrandit ning raami kõigi sõlmede jaoks kokku

$$3s_3 + 2s_2 \quad (g)$$

võrrandit.

Sõlmede paigutised on üksteisest sõltuvad, sest sõlmed on omavahel varrastega ühendatud. Raami sõlmede ja varraste otste vastavad paigutised peavad geomeetriliselt üksteisega sobima. Kahe sõlme vahel mõlemas otsas liigendiga või jäigalt kinnitatud varda jaoks on võimalik koostada vastavalt üks või kolm geomeetrilist pidevustingimust. Ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varda jaoks on võimalik koostada kaks geomeetrilist pidevustingimust. Raami kõigi varraste jaoks saab koostada $3v_6 + 2v_5 + v_4$ pidevustingimust. Võrrandite üldarv

$$6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + 3s_3 + 2s_2 \quad (h)$$

koosneb

$$3v + 3s_3 + 2s_2 \quad (i)$$

tasakaaluvõrrandist ja

$$3v_6 + 2v_5 + v_4 \quad (j)$$

geomeetrisest pidevusvõrrandist. Seega on tundmatute hulk (e) võrdne võrrandite üldarvuga (h):

$$\begin{aligned} 6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + t + 3s_3 + 2s_2 - t = \\ = 6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + 3s_3 + 2s_2 \end{aligned} \quad (k)$$

Lõpliku koormuse ja geomeetriselt muutumatu konstruktsiooni puhul on tundmatud sisejõud ja toereaktsioonid üheselt määratud.

Joonisel 17.1, a kujutatud raamil on staatikalisteks tundmatuteks $6 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 59$ varraste otsristlõigete sisejõudu ja 3 toereaktsiooni komponenti (A_y , B_x , B_y). Toe d kolm reaktsioonikomponenti on arvesse võetud varda 5 sisejõududena. Geomeetrisesteks tundmatuteks on $3 \cdot 6 + 2 \cdot 2 - 3 = 19$ paigutist (d). Tasakaaluvõrrandeid (i) on $3 \cdot 11 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 55$ ja geomeetrisest pidevustingimusi (j) $3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 2 = 26$. Üldine tundmatute arv on võrdne üldise võrrandite arvuga: $59 + 3 + 19 = 55 + 26$.

Kui tasakaaluvõrrandeid (i) on niisama palju kui varraste otsristlõigetel tundmatuid sisejõude ja toereaktsioonide komponente (b): $6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + t = 3v + 3s_3 + 2s_2$, või kui arvestada avaldist (a):

$$3v_6 + 2v_5 + v_4 + t = 3s_3 + 2s_2 \quad (1)$$

siis on ülesanne staatikaga määratav. Sisejõud ja toereaktsioonide komponendid saab arvutada sel juhul ainult tasakaalustingimustega. Pärast toereaktsioonide ja sisejõudude leidmist arvutatakse paigutised koormuse funktsioonidena.

Kui tundmatuid sisejõude ja toereaktsioonide komponente (b) on rohkem kui tasakaaluvõrrandeid (i):

$$\begin{aligned} 6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + t > 3v + 3s_3 + 2s_2 \text{ või} \\ 3v_6 + 2v_5 + v_4 + t > 3s_3 + 2s_2 \end{aligned} \quad (m)$$

siis on ülesanne staatikaga määratav: sisejõud ja toereaktsioonid ei ole arvutatavad ainult tasakaaluvõrranditega.

Kokkuvõttes: **staatikaga määratav konstruktsiooni puhul on sisejõude ja toereaktsioone võimalik arvutada ainult koos paigutistega**, s. t. geomeetrisest pidevustingimuste abil.

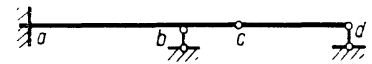
17.2. Staatikaga määratavate konstruktsioonide üldised omadused

1. Staatikaga määrataval konstruktsioonil on liigsideid. Liigside on niisugune element, mille eemaldamisel ülejäänud konstruktsiooniosa on ikka geomeetriselt muutumatu.

2. Tingimata vajalikes sidemetes on sisejõud leitavad tasakaalustingimustega. Tingimata vajaliku sideme eemaldamisel muutub osa konstruktsioonist geomeetriselt muutuvaks.

Näiteks toesideme d eemaldamine muudab joonisel 17.2 kujutatud tala osa $c-d$ geomeetriselt muutuvaks. Toe b eemaldamisel on aga allesjäänud konstruktsiooniosa geomeetriselt muutumatu. Tugi d on tingimata vajalik side ja tugi b on liigside.

Joon. 17.2



3. Staatikaga määrataval konstruktsioonil on lõpmata palju lahendeid, mis rahuldavad tasakaalustingimusi, kuid ainult üks neist rahuldab ka deformatsioonide pidevuse tingimusi.

4. Temperatuuri muutus, tugevate paigutised ja konstruktsiooni elementide mõõtmete mittevastavus projektile võib põhjustada staatikaga määratav konstruktsioonis sisejõudusid.

Tingimata vajalikes sidemetes need mõjud sisejõudusid ei põhjusta.

5. Staatikaga määratav konstruktsioonis võivad esineda pinged ka ilma koormuseta. Neid pingeid nimetatakse eelpingeteks.

6. Staatikaga määratav konstruktsiooni sisejõud olenevad varraste jäikusest.

Kui temperatuur on konstantne ja toed ei paigutu, siis

sisejõud olenevad ainult varraste jäikuste suhetest. Kui kogu konstruktsioon on samast materjalist ja mõjub ainult koormus, siis elastsustegurid ei mõjuta sisejõudude jaotust.

7. Tasakaalus koormus põhjustab sisejõudusid. ka väljaspool koormuse rakendamise ulatust.

17.3. Staatikaga määramatute konstruktsioonide arvutuse meetodid

17.31. Arvutusmeetodite liigitus

Staatikaga määramatu konstruktsiooni arvutamisel esineb kaht liiki tundmatuid. Varrastes tekkivad sisejõud (M, N, Q) ja toereaktsioonid (R) on staatikalised tundmatud ning sõlmede paigutised (u, w, φ) on geomeetrilised tundmatud. Kõiki tundmatuid ei arvutata üheaegselt. Esialgu leitavaid tundmatuid, mille arvutamiseks on vaja võrrandite süsteem koostada ja lahendada, nimetatakse lisatundmatuteks. Ülejäänud teised tundmatud arvutatakse järgnevalt koormuse ja lisatundmatute funktsioonidena. Olenevalt sellest, mis sugused tundmatud võetakse lisatundmatuteks, on kolm põhilist arvutusmeetodit: jõumeetod, paigutis- ehk deformatsioonimeetod ja segameetod.

Jõumeetodi puhul võetakse lisatundmatuteks sisejõud ja reaktsioonid, s.t. staatikalised tundmatud. Lisatundmatute arvutamiseks koostatakse võrrandisüsteem geomeetriliste pidevustingimuste alusel. Nendest geomeetriliste pidevustingimuste alusel koostatud võrranditest arvutatavad lisatundmatud on staatikaga määramatud, kuna neid ei ole võimalik leida ainult tasakaaluvõrranditest. Ülejäänud sisejõud ja reaktsioonid arvutatakse koormuse ja lisatundmatute funktsioonidena tasakaalutingimustest.

Paigutis- ehk deformatsioonimeetodi puhul valitakse lisatundmatuteks raami sõlmede paigutised. Geomeetriliste lisatundmatute (sõlmede paigutiste) arvutamiseks koostatakse võrrandisüsteem sõlmede tasakaalutingimuste alusel. Sisejõud ja reaktsioonid leitakse järgnevalt koormuse ja lisatundmatute funktsioonidena.

Segameetodi puhul valitakse lisatundmatuteks

osalt paigutised ja osalt sisejõud. Lisatundmatutele sisejõududele vastavalt koostatakse võrrandid geomeetriliste pidevustingimuste alusel ja lisatundmatutele paigutistele vastavalt sõlmede tasakaalutingimuste põhjal.

17.32. Jõumeetod

Konstruktsiooni varraste otsristlõigetes mõjuvate sisejõudude ja toereaktsioonide komponentide üldarv on $6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + t$ (a). Varraste ja sõlmede kohta saab koostada $3v + 3s_3 + 2s_2$ (b) tasakaaluvõrrandit. Kui staatikalisi tundmatuid (a) on rohkem kui tasakaaluvõrrandeid (b), siis on ülesanne staatikaga määramatu. Lisatundmatute arv on võrdne staatikaliste tundmatute üldarvu (a) ja tasakaaluvõrrandite arvu (b) vahega:

$$n = 6v_6 + 5v_5 + 4v_4 + t - 3v - 3s_3 - 2s_2 \quad (c)$$

mida nimetatakse staatikalise määramatuse astmeks. Kui avaldises (c) asendada varraste üldarv erinevat liiki varraste arvude summaga $v = v_6 + v_5 + v_4$, siis saadakse lisatundmatute arvu ehk staatikalise määramatuse astme jaoks järgmine valem:

$$n = 3v_6 + 2v_5 + v_4 + t - 3s_3 - 2s_2 \quad (17.1)$$

Valemis (17.1) tähistab t ainult liigendtugevate toesidemete arvu. Ülesande lahendamisel jõumeetodiga on lisatundmatuteks n staatikaga määramatut sisejõudu ja reaktsiooni. Ülesannet nimetatakse siis n -kordselt staatikaga määramatuks.

Lisatundmatute arvutamiseks on kasutada geomeetrilised sobivustingimused sõlmede ja varraste vahel: $3v_6 + 2v_5 + v_4$ (d), mis sisaldavad peale tundmatute sisejõudude ja toereaktsioonide (a) veel $3s_3 + 2s_2 - t$ (e) tundmatut paigutist. Tasakaaluvõrranditega (b) elimineeritakse geomeetrilistest sobivustingimustest (d) tasakaalutingimustega (b) võrdne arv tundmatuid sisejõude ja toereaktsioonide komponente. Geomeetrilistesse võrranditesse (d) jääb pärast elimineerimist n staatikaga määramatut sisejõudu ja toereaktsioonide komponenti ning $3s_3 + 2s_2 - t$ tundmatut paigutist. Nendest geomeetrilistest sobivustingimustest (d) kasutatakse (e) tingimust tundmatute paigutiste elimineerimiseks, mistõttu järelejäanud geomeetrilisi sobivusvõrrandeid on:

$$\begin{aligned} 3v_6+2v_5+v_4-(3s_3+2s_2-t) = \\ 3v_6+2v_5+v_4-3s_3-2s_2+t \end{aligned} \quad (f)$$

mis sisaldavad n staatikaga määramatut tundmatut sisejõudu ja toereaktsioonide komponenti (lisatundmatut). Kuna võrrandite arv (f) on võrdne lisatundmatute arvuga n (17.1), siis on need antud koormuse, temperatuurimuutuse ning tugede paigutiste puhul üheselt määratavad. Ülejäänud tundmatud sisejõud ja toereaktsioonid arvutatakse tasakaalutingimustega koormuse ja lisatundmatute funktsioonidena.

17.33. Deformatsioonimeetod

Ülesannete lahendamisel deformatsioonimeetodiga on lisatundmatuteks paigutised. Tundmatuid sisejõude varraste otsristlõigetel ja toereaktsioonide komponente liigend tugedes on kokku $6v_6+5v_5+4v_4+t$ (a). Raami sõlmede kohta kirjutatud tasakaaluvõrranditest $3s_3+2s_2-t$ (b) elimineeritakse varraste ja liigend-toesõlmede kohta kirjutatud tasakaaluvõrrandite abil vastavalt $3v_6+3v_5+3v_4$ (c) sisejõudu ja t (d) toereaktsioonide komponenti. Sõlmede kohta kirjutatud tasakaaluvõrranditesse (b) jääb $3v_6+2v_5+v_4$ (e) tundmatut sisejõudu ja $3s_3+2s_2-t$ tundmatut paigutist.

Geomeetriliste sobivustingimustega $3v_6+2v_5+v_4$ (f) elimineeritakse sõlmede kohta kirjutatud tasakaaluvõrranditest (b) järelejäänud $3v_6+2v_5+v_4$ tundmatut sisejõudu, mis esitatakse paigutiste funktsioonidena.

Sõlmede kohta kirjutatud tasakaaluvõrrandid (b) sisaldavad niisama palju $3s_3+2s_2-t$ (g) tundmatuid paigutisi. Tundmatud paigutised on lisatundmatuteks ja määratakse üheselt tasakaaluvõrranditest (b). Lisatundmatute arvu nimetatakse geomeetrilise määramatuse astmeks

$$n^* = 3s_3 + 2s_2 - t \quad (17.2)$$

Sisejõud arvutatakse pärast lisatundmatute määramist koormuse ja paigutiste funktsioonidena.

Nii staatikalise määramatuse astme n (17.1) kui ka geomeetrilise määramatuse astme n^* (17.2) arvutamisel ei loeta varraste hulka jäiga sõlmega ühendatud konsoolvarrast.

18. JÕUMEETOD

18.1. Arvutuse alused

18.11. Staatikalise määramatuse aste

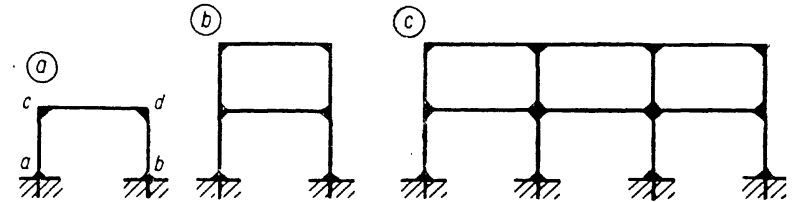
Valem (17.1) kehtib kõigi varrastest moodustatud konstruktsioonide kohta. Kuid eri liiki konstruktsioonide staatikalise määramatuse astet saab arvutada lihtsamate valemitega. Näiteks liigendita suletud kontuuridest koosneva raami (joon. 18.1) staatikaga määramatuse aste leitakse valemiga

$$n = 3m_0 \quad (18.1)$$

milles m_0 on liigendita suletud kontuuride arv. Iga liigendita suletud kontuur on kolmekordselt staatikaga määramatu. Liigendita suletud kontuurist saab eemaldada kolm sidet niimoodi, et allesjäänud osa on geomeetriliselt muutumatu.

Näide 18.1. Arvutada joonisel 18.1 kujutatud suletud kontuuridega raamide staatikalise määramatuse astmed.

Joonisel 18.1, a kujutatud ühekorruseline raam koos toepinnaga $a-b$ moodustab suletud kontuuri ja on kolmekordselt staatikaga määramatu. Joonisel 18.1, b kujutatud kahekorruseline raam koosneb kahest suletud kontuurist. Staatikalise määramatuse aste $n=2 \cdot 3=6$. Joonisel 18.1, c kujutatud raam on 18 korda staatikaga määramatu, kuna ta koosneb kuuest suletud kontuurist.



Joon. 18.1

Kui konstruktsioonis on nii liigendita kui ka liigenditega suletud kontuure, siis staatikalise määramatuse aste leitakse valemiga

$$n = 3m_1 - l_1 \quad (18.2)$$

milles m_1 on liigendita ja liigenditega kontuuride arv, l_1 — lihtliigendite arv, kusjuures toelliigendis vaadeldakse toepinda ühe kujundina, või järgmise valemiga

$$n = 3m_2 + 2l + t - 3k \quad (18.3)$$

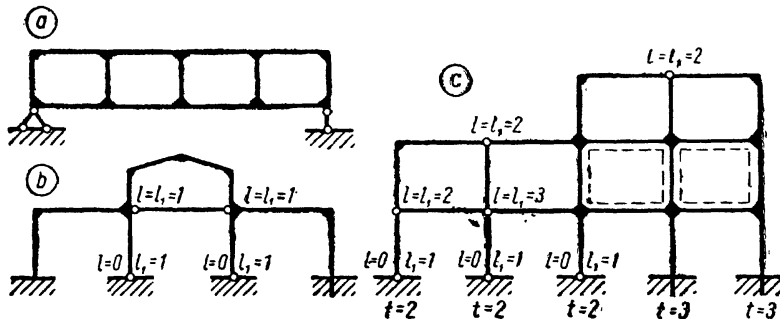
milles m_2 on ainult varrastest moodustatud liigendita suletud kontuuride arv, l — lihtliigendite arv, t — toesidemete arv ja k — geomeetriselt muutumatute elementide arv. Toereaktsioonide komponendid ja liigendites esinevad sisejõud $t+2l$ (a) koos liigendita suletud kontuuride lisatundmatutega $3m_2$ (b) moodustavad tundmatute üldarvu $3m_2+2l+t$ (c). Üldine tasakaalutingimuste arv on $3k$ (d). Tundmatute üldarvu (c) ja tasakaalutingimuste (d) vahe on staatikalise määramatuse aste (18.3).

Kui konstruktsioonis liigendita suletuid kontuure ei esine, siis leitakse staatikalise määramatuse aste valemiga

$$n = 2l + t - 3k \quad (18.4)$$

Näide 18.2. Arvutada joonisel 18.2 kujutatud konstruktsioonide staatikalise määramatuse astmed.

Joonisel 18.2, a kujutatud konstruktsioonil on varrastest moodustatud liigendita suletud kontuuride arv $m_2=4$, lihtliigendeid (l) ei ole, toesideme arv $t=3$ ja kujundite arv $k=1$. Staatikalise määra-



Joon. 18.2

matusete aste leitakse valemiga (18.3): $n=3 \cdot 4 + 3 - 3 \cdot 1 = 12$. Toereaktsioonide suhtes on konstruktsioon staatikaga määratav ($t=3$), kuid sisejõudude suhtes 12 korda staatikaga määratav.

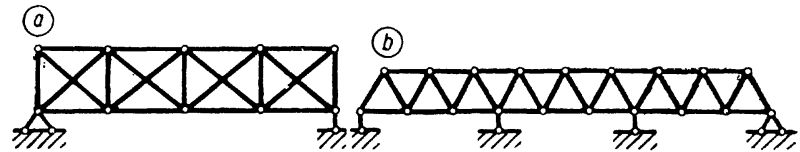
Joonisel 18.2, b kujutatud raamil on elementide arv $k=2$, lihtliigendite arv $l=2$, toesidemete arv $t=10$, liigenditega kontuuride arv $m_1=4$ ja lihtliigendite arv $l_1=4$. Staatikalise määramatuse aste valemiga (18.4) on $n=2 \cdot 2 + 10 - 3 \cdot 2 = 8$ ja valemiga (18.2) $n=3 \cdot 4 - 4 = 8$.

Joonisel 18.2, c kujutatud raamil on liigendita ja liigenditega suletud kontuuride arv $m_1=10$ ja lihtliigendite arv $l_1=12$. Staatikalise määramatuse aste $n=3m_1 - l_1 = 3 \cdot 10 - 12 = 18$. Valemiga (18.3) leitud staatikalise määramatuse aste $n=3 \cdot 2 + 2 \cdot 9 + 12 - 3 \cdot 6 = 18$, milles ainult varrastest moodustatud suletud kontuuride arv $m_2=2$, lihtliigendite arv $l=9$, toesidemete arv $t=12$ ja geomeetriselt muutumatute elementide arv $k=6$.

Sõrestike staatikalise määramatuse aste leitakse valemiga

$$n = v + t - 2s \quad (18.5)$$

milles v on varraste arv, t — toesidemete arv ja s — sõlmede arv. Sisejõudude ja toereaktsioonide üldarv on $v+t$ ja tasakaaluvõrrandite arv $2s$.



Joon. 18.3

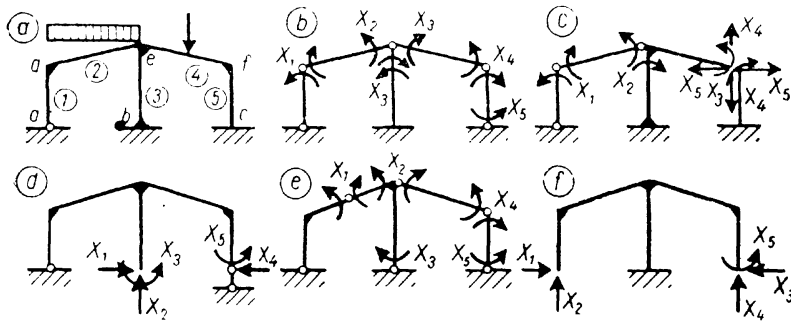
Näide 18.3. Arvutada joonisel 18.3 kujutatud sõrestike staatikalise määramatuse astmed.

Sõrestikul (joon. 18.3, a) on varraste arv $v=21$, toesidemete arv $t=3$ ja sõlmede arv $s=10$. Staatikalise määramatuse aste $n=21+3-2 \cdot 10=4$.

Joonisel 18.3, b esitatud sõrestikul on varraste arv $v=35$, toesidemeid $t=5$ ja sõlmi $s=19$. Staatikalise määramatuse aste $n=35+5-2 \cdot 19=2$.

18.12. Põhiskeem ja lisatundmatud

Staatikaga määratav ülesande lahendamisel leitakse kõigepealt staatikalise määramatuse aste n . Järgnevalt eemaldatakse staatikaga määratavust arvutusskeemist n liigsidet. Sel teel saadud uut staatikaga määratavat



Joon. 18.4

skeemi nimetatakse põhiskeemiks. Staatikaga määratu konstruktsiooni lahendamisel asendatakse ärajäetud sidemete mõju reaktsioonidega, mis tekivad nendes sidemetes staatikaga määratust konstruktsioonis. Jõumeetodi puhul on need ärajäetud sidemete asemele põhiskeemile rakendatud jõud lisatundmatuteks.

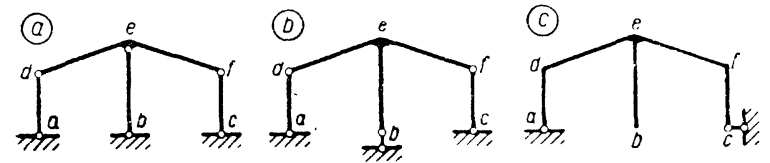
Joonisel 18.4 on näitena esitatud viis põhiskeemi, mis on saadud viiekordselt staatikaga määratust arvutuskeemist erinevate liigsidemete eemaldamisega. Joonisel 18.4, *b* ja *e* on eemaldatud viis paindemomenti vastuvõtvat sidet ja lisatundmatuteks on paindemomendid. Joonisel 18.4, *c* on varda 2 otsristlõigetesse *d* ja *e* pandud liigendid. Nendes lõigetes on lisatundmatuteks paindemomendid. Raami parempoolne osa *befc* moodustab suletud kontuuri. Lõikes *f* on suletud kontuur lõigatud läbi ja lisatundmatuteks on paindemoment X_3 , posti pikijõud X_4 ja põikjõud X_5 . Joonisel 18.4, *d* ja *f* on eemaldatud staatikaga määratust skeemist viis toesidet. Joonisel 18.4, *d* toetub põhiskeem kahele liigendtoele ja lisatundmatuteks on keskmise toereaktsiooni kolm komponenti $X_1 = H_b$, $X_2 = V_b$ ja $X_3 = M_b$ ning toe *c* reaktsiooni kaks komponenti $X_4 = H_c$ ja $X_5 = M_c$. Joonisel 18.4, *f* on põhiskeemi keskmine post kinnitatud järgalt. Lisatundmatuteks on toe *a* reaktsiooni kaks komponenti $X_1 = H_a$ ja $X_2 = V_a$ ning toe *c* reaktsiooni kolm komponenti $X_3 = H_c$, $X_4 = V_c$ ja $X_5 = M_c$.

Joonisel 18.5 on näidatud kolm kõlbmatut põhiskeemi. Joonisel 18.5, *a* ja *b* on üks kujund kinnitatud kolme

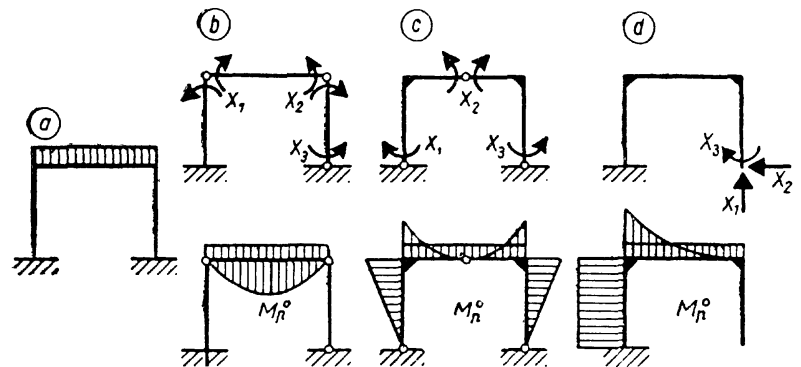
paralleelse vardaga, mistõttu skeem on geomeetriselt muutuv. Joonisel 18.5. *c* on kujund kinnitatud liigendiga *a* ja toesidemega *c*, kusjuures sideme *c* siht läbib liigendit *a* ning skeem on järelikult hetkmuutuv.

Staatikaga määratu arvutuskeemi lahendamisel võib kasutada suvalist geomeetriselt muutumatut põhiskeemi, mis on saadud määratust skeemist liigsidemete eemaldamisega. Iga põhiskeem ei ole aga otstarbekas ja eriti arvutamisel klahvmasinatel. Sel juhul peab olema niisugune põhiskeem, millega on lihtsam arvutada. Jõumeetodi puhul on põhiline ja väga oluline koht ühiktundmatustest ja koormusest põhjustatud sisejõudude epüüride arvutamisel staatikaga määratavas põhiskeemis ning järgnevalt nende epüüride kasutamisel paigutiste leidmisel. Otstarbeka staatikaga määratava põhiskeemi tunnuseks on sisejõudude epüüride lihtsus.

Näitena on toodud joonisel 18.6 üheavalise suletud



Joon. 18.5



Joon. 18.6

raami kolm erinevat põhiskeemi lisatundmatutega ja koormusest põhjustatud paindemomendi epüüriaga. Lihtsaim paindemomendi epüür M_p^0 on kujutatud joonisel 18.6, b: paindemomendid tekivad ainult raami ühes vardas, kuna kahes vardas on paindemomendid nullid.

18.13. Võrrandid lisatundmatute arvutamiseks

Staatikaga määramatu ülesande lahendamise raskus seisneb lisatundmatute X_i väärtuse leidmises. Lisatundmatute arvutamiseks koostatakse võrrandid staatikaga määramatu konstruktsiooni deformeerunud olukorra geometriliste pidevustingimuste alusel. Nende võrrandite lahendamisega leitakse lisatundmatud. Konstruktsiooni suvalise punkti paigutus arvutatakse pärast lisatundmatute leidmist jõudude mõju sõltumatuse printsiibi põhjal:

$$\Delta_k = \delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \dots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{k0} \quad (18.6)$$

milles

$$\Delta_{k0} = \Delta_{kp} + \Delta_{kt} + \Delta_{kr} \quad (18.7)$$

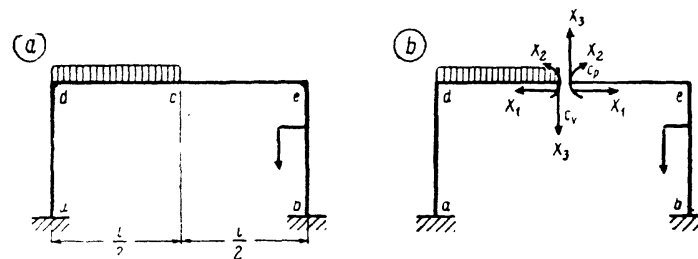
või

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^n \delta_{ki}X_i + \Delta_{k0} \quad (18.8)$$

kus δ_{ki} , Δ_{kp} , Δ_{kt} , Δ_{kr} on põhiskeemi ristlõike k paigutised, mis on põhjustatud vastavalt lisatundmatust $X_i=1$, koormusest, temperatuuri muutusest ja tugevate paigutistest.

Staatikaga määratav põhiskeem saadakse staatikaga määramatust arvutusskeemist n liigsideme eemaldamisega. Lisaks koormusele rakendatakse põhiskeemile ärajäetud sidemete asemele staatikaga määramatu arvutusskeemi nendes sidemetes tekkivate reaktsioonidega võrdsed jõud (lisatundmatud) ning põhiskeemi paigutusolukord on siis ekvivalentne staatikaga määramatu arvutusskeemi paigutusolukorraga. Nende kahe paigutusolukorra ekvivalentsuse alusel koostatakse võrrandid lisatundmatute leidmiseks.

Joonisel 18.7, a on kujutatud staatikaga määramatu konstruktsiooni arvutusskeem koos temale mõjuva koormusega. Raami staatikalise määramatuse aste $n=3$. Lisatundmatuteks on võetud riivi keskmises ristlõikes c tekkivad sisejõud: pikijõud $N_c=X_1$, paindemoment $M_c=X_2$ ja põikjõud $Q_c=X_3$. Joonisel 18.7, b on esitatud staati-



Joon. 18.7

kaga määratav põhiskeem koos koormuse ja lisatundmatutega X_1 , X_2 , X_3 .

Tundmatule X_1 vastav paigutus Δ_1 on põhiskeemi riivi vasakpoolse ja parempoolse osa otsristlõigete c_v ning c_p eemaldumine teineteisest horisontaalsihis. Staatikaga määratav arvutusskeemis moodustavad poolriivide otsad c_v ja c_p ühise ristlõike c ning seetõttu poolriivide otsristlõiked c_v ja c_p paigutuvad ühes suunas. Järelikult lisatundmatule X_1 vastav paigutus $\Delta_1=0$. Tundmatule X_2 vastav paigutus staatikaga määratavas põhiskeemis (joon. 18.7, b) on poolriivide ristlõigete c_v ja c_p pööre teineteise suhtes. Staatikaga määratav skeemis moodustavad nad ühise ristlõike c ja pöörduvad seetõttu samas suunas võrdse nurga võrra, jäädes paralleelseks. Koormuse ja lisatundmatutega staatikaga määratava põhiskeemi ning koormusega staatikaga määramatu arvutusskeemi ekvivalentsuse tingimusest järeldub, et $\Delta_2=0$ (c_v ja c_p jäävad paralleelseteks). Tundmatule X_3 vastav paigutus põhiskeemis on ristlõigete c_v ja c_p vertikaalne nihe teineteise suhtes. Staatikaga määratav arvutusskeemis moodustavad nad ühise ristlõike c ja nihkuvad võrdselt. Järelikult peab staatikaga määratavas põhiskeemis tundmatule X_3 vastav paigutus võrduma nulliga: $\Delta_3=0$.

Avaldise (18.6) järgi koostatakse nüüd kolm võrrandit:

$$\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\Delta_2 = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0$$

$$\Delta_3 = \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0$$

Esimese võrrandi esimene liige $\delta_{11}X_1$ on staatikaga määratavas põhiskeemis tundmatule X_1 vastav paigutus,

mis on põhjustatud samast jõust X_1 . Tegur δ_{11} on tundmatule X_1 vastav paigutis, mis on põhjustatud ühiktundmatust $X_1=1$. Teine ja kolmas liige $\delta_{12}X_2$ ning $\delta_{13}X_3$ on tundmatule X_1 vastavad paigutised, mis on põhjustatud vastavalt tundmatutest X_2 ja X_3 . Tegurid δ_{12} ja δ_{13} on tundmatule X_1 vastavad paigutised, mis on põhjustatud ühiktundmatutest $X_2=1$ ja $X_3=1$. Viimane liige Δ_{1p} on koormusest põhjustatud lisatundmatule X_1 vastav paigutis põhiskeemis.

Esimeses võrrandis väljendab liikmete summa põhiskeemis tundmatule X_1 vastavat paigutist, mis on põhjustatud lisatundmatutest ja koormusest ning võrdub nulliga, kuna vastav paigutis staatikaga määramatus skeemis on null.

Kui arvutuskeem on n korda staatikaga määramatu, siis saadakse avaldise (18.8) alusel n võrrandit:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{10} = 0 \\ \Delta_2 &= \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{20} = 0 \\ &\dots \\ \Delta_h &= \delta_{h1}X_1 + \delta_{h2}X_2 + \dots + \delta_{hn}X_n + \Delta_{h0} = 0 \\ &\dots \\ \Delta_n &= \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{n0} = 0 \end{aligned} \quad (18.9)$$

ehk

$$\sum_{i=1}^n \delta_{ki}X_i + \Delta_{k0} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (18.10)$$

Võrrandisüsteemi (18.9) või (18.10) nimetatakse jõumeetodi kanooniliseks võrrandisüsteemiks. Võrrandisüsteemi (18.9) lahendamisel leitakse tundmatud X_i .

Võrrandisüsteemi (18.10) tundmatute kordajad (ühiktundmatutest põhjustatud paigutised) ja vabaliikmed (koormusest, temperatuuri muutusest ja tugede nihkumisest põhjustatud paigutised) arvutatakse valemitega (16.21), (16.32), (16.34).

$$\delta_{ki} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_k m_i}{EI_j} + \frac{n_k n_i}{EF_j} + k_j \frac{q_k q_i}{GF_j} \right) ds \quad (18.11)$$

$$\delta_{hk} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_k^2}{EI_j} + \frac{n_k^2}{EF_j} + k_i \frac{q_k^2}{GF_j} \right) ds \quad (18.12)$$

$$\Delta_{kp} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_k M_p^0}{EI_j} + \frac{n_k N_p^0}{EF_j} + k_j \frac{q_k Q_p^0}{GF_j} \right) ds \quad (18.13)$$

$$\Delta_{kt} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \alpha_j \left(\frac{\Delta t_j}{h_j} m_k + t_{0j} n_k \right) ds \quad (18.14)$$

$$\Delta_{kr} = - \sum_{j=1}^m \Delta c_j r'_{jk} \quad (18.15)$$

$$\Delta_{k0} = \Delta_{kp} + \Delta_{kt} + \Delta_{kr} \quad (18.16)$$

Võrrandisüsteemi (18.9) tundmatute ees olevatest kordajatest (paigutistest) moodustatud determinant

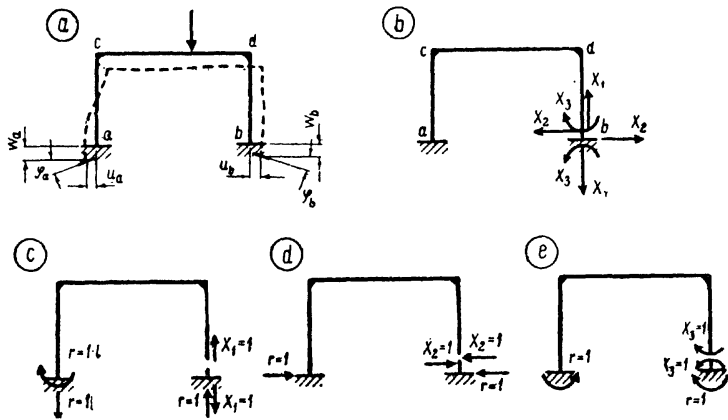
$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \dots & \delta_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix} \quad (18.17)$$

on positiivne ja ei võrdu nulliga.

Kahe ühesuguse indeksiga paigutist δ_{kk} nimetatakse peapaigutiseks ja erinevate indeksitega paigutist δ_{ki} kõrvalpaigutiseks. Peapaigutised asetsevad peadiagonaalil, mille siht on ülevalt vasakult paremale alla. Peapaigutised on alati positiivsed ($\delta_{kk} > 0$). Kõrvalpaigutised on paigutiste vastastikkuse teoreemi põhjal peadiagonaali suhtes sümmeetrilised: $\delta_{ki} = \delta_{ik}$. Kõrvalpaigutis võib olla positiivne, negatiivne ja võrduda nulliga.

Kui lisatundmatuteks võetakse reaktsioonid toesidemetes, mis staatikaga määramatus konstruktsioonis paigutuvad, siis selleks, et kanoonilised võrrandid omaksid kuju (18.9) või (18.10), peab põhiskeemi saamiseks need sidemed läbi lõikama, mitte aga ära jätma. Kanooniliste võrrandite vabaliikmete arvutust selgitatakse joonisel 18.8, *a* esitatud raamiga.

Staatikaga määramatu arvutuskeemi tugede paigutised on näidatud joonisel 18.8, *a* ja põhiskeem koos lisatundmatutega joonisel 18.8, *b*. Staatikaga määratavale



Joon. 18.8

põhiskeemile rakendatakse ühiktundmatud, leitakse reaktsioonid (joon. 18.8, c, d, e) ja valemiga (18.15) arvutatakse lisatundmatutele vastavad paigutised, mis on kanooniliste võrrandite vabaliikmeteks:

$$\Delta_{1r} = -(1 \cdot \omega_a - 1 \cdot \omega_b - 1l \cdot \varphi_a) = \omega_b - \omega_a + l\varphi_a \quad (a)$$

$$\Delta_{2r} = -(-1 \cdot u_a - 1 \cdot u_b) = u_a + u_b \quad (b)$$

$$\Delta_{3r} = -(1 \cdot \varphi_a + 1 \cdot \varphi_b) = -(\varphi_a + \varphi_b) \quad (c)$$

Samad tulemused saab ka ilma valemitega (18.15). Põhiskeemi toe a vajumine põhjustab posti bd ristlõike b siirde ω_a ülevalt alla. Postile bd ristlõikes b rakendatud tundmatu X_1 positiivne suund on valitud alt üles. Järelikult ristlõike b siire ω_a ülevalt alla on negatiivne (a). Toe b siire ω_b on toele b rakendatud tundmatuga X_1 samasuunaline ja positiivne (a). Toe a pööre vastupäeva põhjustab posti bd ristlõike b siirde $l\varphi_a$ ülespoole, s. t. tundmatu X_1 suunas, ja on positiivne (a).

Toe a nihkumise tõttu vasakule u_a võrra nihkub vasakule ka põhiskeemi post bd , s. t. postile rakendatud tundmatu X_2 suunas. Toe b nihe paremale (u_b võrra) ühtib toele b rakendatud tundmatu X_2 positiivse suunaga. Järelikult mõlemad paigutised on positiivsed ja lisatundmatule X_2 vastav üldistatud paigutus on võrdne nende summaga (b).

Lisatundmatu X_3 koosneb kahest võrdsest vastupidise

suunaga momendist (joon. 18.8, b). Posti bd ristlõike b pöörduv koos vardaga bd ja toega a vastupäeva nurga φ_a võrra ning tugi b päripäeva nurga φ_b võrra. Mõlema elemendi pööre on vastupidine elemendile rakendatud lisatundmatu X_3 valitud positiivse suunaga ja on negatiivne. Lisatundmatule X_3 vastav üldistatud paigutus on negatiivne ja võrdne nende kahe pööre summaga (c).

18.14. Kanooniliste võrrandite tundmatute kordajate ja vabaliikmete arvutamine

Staatikaga määratu ülesande praktilisel lahendamisel korrutatakse võrrandisüsteemi (18.10) tundmatute kordajad ja vabaliikmed suvalise jäikusega EI_0 . Tavaliselt võetakse selleks varda jäikus, mis konstruktsioonis esineb kõige rohkem. Kanoonilised võrrandid (18.10) on siis järgmise kujuga:

$$\sum_{i=1}^n EI_0 \delta_{ki} X_i + EI_0 \Delta_{k0} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (18.18)$$

Kanooniliste võrrandite (18.18) tundmatute kordajad ja vabaliikmed arvutatakse nüüd valemitega:

$$EI_0 \delta_{ki} = \sum_{j=1}^n \left(\int_0^{l_j'} m_k m_i ds + \frac{I_0}{F_0} \int_0^{l_j''} n_k n_i ds + k_j \frac{E_j I_0}{G_j F_0} \int_0^{l_j''} q_k q_i ds \right) \quad (18.19)$$

$$EI_0 \delta_{kk} = \sum_{j=1}^n \left(\int_0^{l_j'} m_k^2 ds + \frac{I_0}{F_0} \int_0^{l_j''} n_k^2 ds + k_j \frac{E_j I_0}{G_j F_0} \int_0^{l_j''} q_k^2 ds \right) \quad (18.20)$$

$$EI_0 \Delta_{kp} = \sum_{j=1}^n \left(\int_0^{l_j'} m_k M_p^0 ds + \frac{I_0}{F_0} \int_0^{l_j''} n_k N_p^0 ds + \right)$$

$$+k_j \frac{E_j I_0}{G_j F_0} \int_0^{l_j''} q_k Q_p^0 ds \quad (18.21)$$

$$EI_0 \Delta_{ht} = EI_0 \sum_{j=1}^v \alpha_j \left(\int_0^{l_j} \frac{\Delta t}{h} m_k ds + \int_0^{l_j} t_0 n_k ds \right) \quad (18.22)$$

$$EI_0 \Delta_{hr} = -EI_0 \sum_{j=1}^m \Delta c_j r'_{jk} \quad (18.23)$$

mis on saadud valemite (18.11) kuni (18.15) korrutamisel jäikusega EI_0 ja milles l'_j , l''_j on varraste redutseeritud pikkused. Varda redutseeritud pikkusteks l'_j ja l''_j on vastavalt varda j tegeliku pikkuse ning paindejäikuste suhte EI_0/EI_j korrutis

$$l'_j = l_j \cdot EI_0/EI_j \quad (18.24)$$

ja tegeliku pikkuse ning tõmbejäikuste suhte EF_0/EF_j korrutis

$$l''_j = l_j \cdot EF_0/EF_j \quad (18.25)$$

Kui konstruktsiooni kõik vardad on samast materjalist ($E = \text{konst.}$), siis varraste redutseeritud pikkuste avaldistest (18.24) ja (18.25) saab taandada normaalelastsusmooduli E :

$$l'_j = l_j \cdot I_0/I_j, \quad l''_j = l_j \cdot F_0/F_j \quad (18.26), (18.27)$$

ning varraste redutseeritud pikkused olenevad ainult ristlõike inertsmomentide ja pindalade suhetest. Paigutiste avaldistes (18.19), (18.20) ja (18.21) paindemomendi ja pikijõu integraalid ei olene siis sellest, mis materjalist on konstruktsioon. Põikjõu integraali märgi ees on normaal- ja nihkeelastsuse moodulite suhe $E_j/G_j = 2(1+\nu_j)$ ning need liikmed olenevad varda materjali *Poisson'*i tegurist ν_j . Koormusest põhjustatud lisatundmatute väärtused ei olene varraste jäikuse absoluutsuurustest, vaid olenevad jäikuste suhetest.

Kuna kanooniliste võrrandite (18.18) temperatuuri muutusest ja tugede paigutistest põhjustatud vabaliikmed (18.22), (18.23) olenevad jäikusest EI_0 , lisatundmatute X_i kordajad aga jäikuste suhetest, mis järeldub valemite (18.19), (18.20), (18.24), (18.25), siis temperatuuri muutuse ja tugede paigutiste puhul on lisatundmatud seda suuremad, mida suuremad on varraste jäikused. Sama

tulemus järeldub ka kanooniliste võrrandite (18.10) ja paigutiste (18.11), (18.12), (18.14), (18.15) avaldistest. Temperatuuri muutusest ja tugede nihkumistest põhjustatud paigutised Δ_{ht} , Δ_{hr} (18.14), (18.15) ei olene varraste jäikusest. Kanooniliste võrrandite tundmatute kordajad δ_{hi} , δ_{hk} (18.11), (18.12) on aga pöördvõrdelised varraste jäikustega ja järelikult on temperatuuri muutusest ja tugede paigutistest põhjustatud lisatundmatud seda suuremad, mida suuremad on varraste jäikused.

18.15. Sisejõudude epüürid staatikaga määramatus arvutusskeemis

18.15.1. Koormusest põhjustatud sisejõudude epüürid

Kanooniliste võrrandite lahendamiseks leitakse lisatundmatud X_1, X_2, \dots, X_n . Pärast lisatundmatute X_i leidmist arvutatakse sisejõud jõudude mõju sõltumatus printsiibi alusel:

$$M_k = m_{k1}X_1 + m_{k2}X_2 + \dots + m_{kn}X_n + M_{kp}^0 \quad (18.28)$$

$$N_k = n_{k1}X_1 + n_{k2}X_2 + \dots + n_{kn}X_n + N_{kp}^0 \quad (18.29)$$

$$Q_k = q_{k1}X_1 + q_{k2}X_2 + \dots + q_{kn}X_n + Q_{kp}^0 \quad (18.30)$$

ehk

$$M_k = \sum_{i=1}^n m_{ki}X_i + M_{kp}^0 \quad (18.31)$$

$$N_k = \sum_{i=1}^n n_{ki}X_i + N_{kp}^0 \quad (18.32)$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^n q_{ki}X_i + Q_{kp}^0 \quad (18.33)$$

milles m_{ki} , n_{ki} , q_{ki} on lisatundmatust $X_i = 1$ ning M_{kp} , N_{kp} , Q_{kp} koormusest põhjustatud paindemoment, piki- ja põikjõud staatikaga määratava põhiskeemi ristlõikes k . Valemid (18.28) kuni (18.33) võib esitada üldisemal kujul:

$$S_{kp} = s_{k1}X_1 + s_{k2}X_2 + \dots + s_{kn}X_n + S_{kp}^0 \quad (18.34)$$

ehk

$$S_{kp} = \sum_{i=1}^n s_{ki}X_i + S_{kp}^0 \quad (18.35)$$

milles S_{kp} on staatikaga määratatu arvutusskeemi ristlõikes k esinev sisejõud või toereaktsioon (M_{kp} , N_{kp} , Q_{kp} ,

R_{kp}), s_{ki} — ühiktundmatust $X_i=1$, põhjustatud sisejõud või reaktsioon staatikaga määratava põhiskeemi ristlõikes k (m_{ki} , n_{ki} , q_{ki} , r_{ki}), S_{kp}^0 — koormusest põhjustatud sisejõud või reaktsioon põhiskeemi ristlõikes k (M_{kp}^0 , N_{kp}^0 , Q_{kp}^0 , R_{kp}^0).

Sirgete varrastega konstruktsioonide sisejõudude epüüride arvutamisel leitakse tavaliselt eeltoodud valemitega ainult paindemomendi epüüri ordinaadid (18.28), kuna põikjõud arvutatakse paindemomentide abil varraste kohta koostatud momentide tasakaalu tingimustest ja pikijõud pärast põikjõudude leidmist sõlmest kohta koostatud projektsioonide tasakaalu tingimustest. Varda või selle osa eraldamisel arvutuskeemist rakendatakse temale mõjuv koormus ja tema otstesse paindemendid, mille suurused saadakse M epüürist ning tundmatud piki- ja põikjõud. Sisejõud tähistatakse kahe indeksiga. Esimene indeks näitab lõiget, kus mõjub sisejõud; teine indeks tähistab vardale rakendatud lähima koondatud jõu rakenduspunkti või, kui koondatud jõudu vardale ei mõju, siis varda teise otsa ristlõiget.

Joonisel 18.9, *a* ja *b* on esitatud staatikaga määratatu raami M epüür ning raamist eraldatud varras ab koos sellele mõjuva koormusega ja varda otsristlõigetes mõjuvate sisejõududega. Tundmatud põik- ja pikijõud rakendatakse positiivsete suundadega vastavalt märkide reeglitele, tuntud paindemendid aga vastavalt M epüürile. M epüüri ordinaadid joonestatakse varda tõmmatud poolele. Joonisel 18.9, *a* on varda ab otste kohal olevad paindemendid epüüri ordinaadid ülalpool; ja vastavate suundadega rakendatakse momentid varda otstesse (joon. 18.9, *b*). Võrrandist

$$\sum M_b = 0: Q_{ak} \cdot l_{ab} - P \cdot l/2 - M_{ak} + M_{bk} = 0$$

leitakse põikjõud

$$Q_{ak} = \frac{1}{2} P \cos \alpha - (M_{bk} - M_{ak}) / l_{ab} \quad (a)$$

ja võrrandist

$$\sum M_a = 0: Q_{bk} \cdot l_{ab} + P \cdot l/2 - M_{ak} + M_{bk} = 0$$

põikjõud

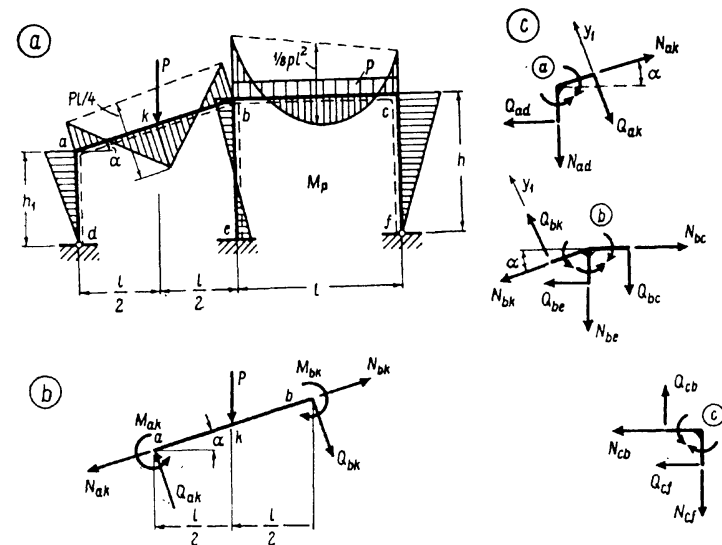
$$Q_{bk} = -\frac{1}{2} P \cos \alpha - (M_{bk} - M_{ak}) / l_{ab} \quad (b)$$

milles l_{ab} on varda ab pikkus ja $\cos \alpha = l/l_{ab}$. Põikjõudude Q_{ak} ja Q_{bk} avaldisi (a), (b) võib esitada üldisel kujul järgmiselt:

$$Q_k = Q_k^0 + (M_{par} - M_{vas}) / l_{ab} \quad (18.36)$$

milles Q_k^0 on põikjõud vardale mõjuvast koormusest, kui varda mõlemas otsas on liigendid, M_{par} — paindemoment parempoolses otsas, M_{vas} — paindemoment vasakpoolses otsas ja l_{ab} — varda ab pikkus. Paindemendid M_{par} ja M_{vas} on positiivsed, kui vastavas lõikes varda alumine pool on tõmmatud, ning negatiivsed, kui varda ülemine pool on tõmmatud. Põikjõud varda bc otsristlõigetes arvutatakse valemiga (18.36): $Q_{bc} = \frac{1}{2} pl + (M_{cb} - M_{bc}) / l$ ja

$Q_{cb} = -\frac{1}{2} pl + (M_{cb} - M_{bc}) / l$. Põikjõudude Q_{bc} ja Q_{cb} avaldistes sulgavaldisse märk muutub vastupidiseks, kui nendes asetatakse paindemomentide M_{bc} ning M_{cb} väärtused, mis on mõlemad negatiivsed. Joonisel 18.9, *a* esita-



Joon. 18.9

tud raamil on postides põikjõud konstantsed: $Q_{a-d} = M_{ad}/h$, $Q_{b-e} = (M_{be} - M_{eb})/h$, $Q_{c-f} = -M_{cf}/h$.

Pikijõu epüüri ordinaatide arvutamiseks eraldatakse sõlmed varrastest (joon. 18.9, c). Eraldatud sõlmedele rakendatakse piki- ja põikjõud positiivsete suundadega: pikijõud suunaga sõlme poolt ja põikjõud sõlme suhtes päripäeva (märgitud tähega Q). Põikjõu Q kaks indeksit tähistavad selle varda, kus ta mõjub, kahte ristlõiget.

Iga sõlme kohta on võimalik koostada ainult kaks sõltumatut projektsioonide tingimust. Seepärast vaadeldakse esimesena niisugust sõlme, kus on ühendatud ainult kaks varrast, ja järgnevalt niisuguse sõlme tasakaalu, kus on ainult kaks tundmatut pikijõudu. Sõlme c projektsioonide tingimustest $\Sigma X = 0$; $\Sigma Y = 0$ leitakse vastavalt $N_{cb} = -Q_{cf}$ ja $N_{cf} = Q_{cb}$. Pikijõu avaldistesse viiakse põikjõud vastavalt eespool leitud märkidega. Sõlme a jõudude projektsiooni tingimustest

$$\Sigma X = 0: N_{ak} \cdot \cos \alpha + Q_{ak} \cdot \sin \alpha - Q_{ad} = 0$$

leitakse

$$N_{ak} = (Q_{ad} - Q_{ak} \sin \alpha) / \cos \alpha = Q_{ad} / \cos \alpha - Q_{ak} \operatorname{tg} \alpha$$

ja vardaga ab risti oleva telje y_1 kohta kirjutatud tingimusest

$$-N_{ad} \cos \alpha - Q_{ak} + Q_{ad} \sin \alpha = 0$$

saadakse

$$N_{ad} = (Q_{ad} \sin \alpha - Q_{ak}) / \cos \alpha = Q_{ad} \operatorname{tg} \alpha - Q_{ak} / \cos \alpha$$

Riivile bc mõjub koormus varda teljega risti ja seepärast $N_{bc} = N_{cb}$ ning sõlmes b on tundmatuks N_{bh} ning N_{be} , mis leitakse tingimustest $\Sigma X = 0$ ja $\Sigma Y_1 = 0$:

$$-N_{bh} \cos \alpha - Q_{bh} \sin \alpha - Q_{be} + N_{bc} = 0$$

$$-N_{be} \cos \alpha + Q_{be} \sin \alpha + Q_{bh} + Q_{bc} \cos \alpha - N_{bc} \sin \alpha = 0$$

$$N_{bh} = (N_{bc} - Q_{be} - Q_{bh} \sin \alpha) / \cos \alpha$$

$$N_{be} = (Q_{be} \sin \alpha + Q_{bh} - Q_{bc} \cos \alpha - N_{bc} \sin \alpha) / \cos \alpha$$

Riivil ab on pikijõu epüüris aste $P \sin \alpha$ ja seepärast peab olema rahuldatud tingimus $N_{bh} = N_{ak} + P \sin \alpha$.

18.15.2. Temperatuuri muutusest ja tugede paigutistest põhjustatud sisejõudude epüürid

Kanooniliste võrrandite (18.18) vabaliikmed arvutatakse temperatuuri muutuse korral valemiga (18.22) ja tugede paigutiste puhul valemiga (18.23). Kanooniliste võrrandite lahendamisel saadud lisatundmatutega X_{it} , X_{ir} arvutatakse paindemomendid valemiga (18.28) analoogiliste avaldistega

$$M_{ht} = m_{h1}X_{1t} + m_{h2}X_{2t} + \dots + m_{hn}X_{nt} \quad (18.37)$$

$$M_{hr} = m_{h1}X_{1r} + m_{h2}X_{2r} + \dots + m_{hn}X_{nr} \quad (18.38)$$

Valemi (18.28) liikmele M_{hp}^0 vastavad liikmed valemites (18.37), (18.38) puuduvad, kuna temperatuuri muutus ja tugede paigutised ei põhjusta sisejõude staatikaga määratavas arvutusskeemis. Seetõttu temperatuuri muutusest ja tugede paigutistest põhjustatud paindemomendid sirgete varrastega staatikaga määratulates raamid muutuvad lineaarselt. Põikjõud raami vardas on konstantne ja arvutatakse valemiga

$$Q = (M_{par} - M_{vas}) / l \quad (18.39)$$

18.16. Staatikaga määramatute konstruktsioonide paigutiste arvutamine

18.16.1. Paigutised koormusest

Staatikaga määratavate konstruktsioonide koormusest põhjustatud paigutised arvutatakse valemiga (16.21), mis tuleb võimalike paigutiste printsiibi alusel. Vaadeldi konstruktsiooni arvutusskeemi kahte koormusolukorda: üldistatud ühikjõust ja tegelikust koormusest põhjustatud olukorda. Üldistatud ühikjõuga koormatud staatikaga määratud konstruktsiooni arvutusskeemi välis- ja sisejõudude tööde summa koormusest põhjustatud konstruktsiooni paigutistel võrdub nulliga. Selle printsiibi alusel koostatud võrrandist saadakse paigutiste arvutamiseks järgmine avaldis:

$$\Delta_{hp}^n = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_k^n M_p^n}{EI} + \frac{n_k^n N_p^n}{EI} + k_j \frac{q_k^n Q_p^n}{GF} \right) ds \quad (18.40)$$

milles Δ_{kp}^n on koormusest põhjustatud paigutis staatikaga määramatus konstruktsioonis; $M_p^n, N_p^n, Q_p^n, m_k^n, n_k^n, q_k^n$ — vastavalt koormusest ja arvutuskeemi ristlõikes k mõjuvast üldistatud ühikjõust põhjustatud sisejõud staatikaga määramatus arvutuskeemis. Indeks n paigutise ja sisejõu tähise juures ülal näitab staatikaga määramatuse astet. Avaldisest (18.40) järeldub, et paigutiste Δ_{kp}^n leidmiseks tuleb arvutada koormusest ja iga paigutise jaoks üldistatud ühikjõust põhjustatud sisejõud staatikaga määramatus arvutuskeemis. Kuna konstruktsiooni deformeerunud olukord ei muutu, kui konstruktsioonist eemaldatud sideme mõju asendatakse selles sidemes esineva reaktsiooniga, siis on võimalik seda mahukat arvutamist vähendada. Arvutuskeem muutub staatikaga määratavaks, kui eemaldatakse n liigsidet. Lisaks tegelikule koormusele rakendatakse staatikaga määratavale arvutuskeemile eemaldatud sidemete asemele reaktsioonid, mis tekivad nendes sidemetes staatikaga määramatus arvutuskeemis. Eemaldatud sidemete asemele rakendatud jõud mõjuvad nüüd välisjõududena ja neid võib vaadelda ühise koormusena koos tegeliku koormusega. Paigutiste arvutamisel, kui arvutuskeemile rakendatakse üldistatud ühikjõud, jäetakse koormus ära. Koos tegeliku koormusega jäetakse nüüd ära ka eemaldatud sidemete asemel mõjuvad reaktsioonid. Järelikult võib üldistatud ühikjõu rakendada suvalisele staatikaga määratavale arvutuskeemile, mis saadakse antud staatikaga määramatust arvutuskeemist n liigsideme eemaldamisega. Valemi (18.40) asemel võib nüüd kirjutada järgmise avaldise:

$$\Delta_{kp}^n = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_k^0 M_p^n}{EI} + \frac{n_k^0 N_p^n}{EF} + k_j \frac{q_k^0 Q_p^n}{GF} \right) ds \quad (18.41)$$

milles m_k^0, n_k^0, q_k^0 on üldistatud ühikjõust põhjustatud sisejõud staatikaga määratavas põhiskeemis.

Ühikjõuga koormatud staatikaga määramatu arvutuskeemi võimaliku töö avaldises, mis koostatakse tegelike paigutiste jaoks, ei esine liigsidemete reaktsioonide tööd, kuna nendele reaktsioonidele vastavad paigutised staatikaga määramatu konstruktsiooni tegelikus deformeerunud olukorras võrduvad nulliga. Seega ärajäetud sidemete

reaktsioonid, mis staatikaga määratavas arvutuskeemis mõjuvad välisjõududena, ei tee tööd, ja ka nendele reaktsioonidele vastavate sisejõudude töö võrdub siis nulliga. Staatikaga määramatute konstruktsioonide paigutiste arvutamisel võib koostada võimaliku töö avaldise ühikjõuga koormatud staatikaga määratava arvutuskeemi jõudude jaoks, ja järelikult on põhjendatud avaldise (18.41) kasutamine valemi (18.40) asemel.

Staatikaga määramatute konstruktsioonide paigutiste arvutamiseks võib tuletada valemi ka järgmisel viisil. Staatikaga määramatule konstruktsioonile mõjuva koormuse ja sisejõudude võimalik töö staatikaga määramatule arvutuskeemile rakendatud üldistatud ühikjõu l_k poolt põhjustatud paigutistel võrdub nulliga:

$$\sum P_i \delta_{ik}^n - \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(M_p^n \frac{m_k^n}{EI} + N_p^n \frac{n_k^n}{EF} + k_j Q_p^n \frac{q_k^n}{GF} \right) ds = 0$$

millest

$$\sum P_i \delta_{ik}^n = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(M_p^n \frac{m_k^n}{EI} + N_p^n \frac{n_k^n}{EF} + k_j Q_p^n \frac{q_k^n}{GF} \right) ds \quad (a)$$

Võrduse (a) ja valemi (18.40) paremad pooled on võrdsed ning järelikult

$$\sum P_i \delta_{ik}^n = \Delta_{kp}^n \quad (b)$$

Koormuse ja koormuse poolt põhjustatud staatikaga määratava põhiskeemi sisejõudude M_p^0, N_p^0, Q_p^0 võimalik töö staatikaga määramatule arvutuskeemile rakendatud ühikjõu l_k poolt põhjustatud paigutistel võrdub samuti nulliga:

$$\sum P_i \delta_{ik}^n - \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(M_p^0 \frac{m_k^n}{EI} + N_p^0 \frac{n_k^n}{EF} + k_j Q_p^0 \frac{q_k^n}{GF} \right) ds = 0$$

millest

$$\sum P_i \delta_{ik}^n = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(M_p^0 \frac{m_k^n}{EI} + N_p^0 \frac{n_k^n}{EF} + k_j Q_p^0 \frac{q_k^n}{GF} \right) ds \quad (c)$$

Võrrandite (b) ja (c) vasakud pooled on võrdsed ning järelikult on võrdsed ka nende paremad pooled:

$$\Delta_{kp}^n = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{M_p^0 m_k^n}{EI} + \frac{N_p^0 n_k^n}{EF} + k_j \frac{Q_p^0 n_k^n}{GF} \right) ds \quad (18.42)$$

Staatikaga määramatutes konstruktsioonides võib paigutisi arvutada kolmel erineval viisil: 1) sisejõud koormusest ja üldistatud ühikjõust arvutatakse staatikaga määramatus arvutuskeemis (S_p^n , s_k^n) ja kasutatakse valemit (18.40); 2) sisejõud koormusest leitakse staatikaga määramatus arvutuskeemis (S_p^n) ja üldistatud ühikjõust staatikaga määratavas põhiskeemis ning paigutised arvutatakse valemiga (18.41); 3) sisejõud koormusest leitakse põhiskeemis (S_p^0) ja ühikjõust staatikaga määramatus arvutuskeemis (s_k^n) ning paigutised leitakse valemiga (18.42).

Näide 18.4. Arvutada joonisel 18.10, *a* esitatud tala ristlõike *c* vertikaalsiire.

Ulesanne on ühekordselt staatikaga määramatu. Lisatundmatuks on võetud toemoment M_a (18.10, *b*). Lisatundmatule M_a vastav üldistatud paigutus on toeristlõike *a* pööre, mis staatikaga määramatus arvutuskeemis on null. Geomeetriline pidevusvõrrand toemomendi M_a leidmiseks on

$$\varphi_a = \delta_{aa} M_a + \Delta_{ap} = 0 \quad (a)$$

milles

$$\delta_{aa} = l/3EI \quad (b)$$

on põhiskeemi toeristlõike *a* pööre ühiktundmatust $m_a = 1$ (joon. 18.10, *c*) ja

$$\Delta_{ap} = \frac{2}{3} \cdot \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EI} = \frac{pl^3}{24EI} \quad (c)$$

on toeristlõike *a* pööre koormusest (joon. 18.10, *d*). Võrrand (a), kui arvestada avaldisi (b) ja (c), on järgmine:

$$M_a l/3EI + pl^3/24EI = 0$$

mildest

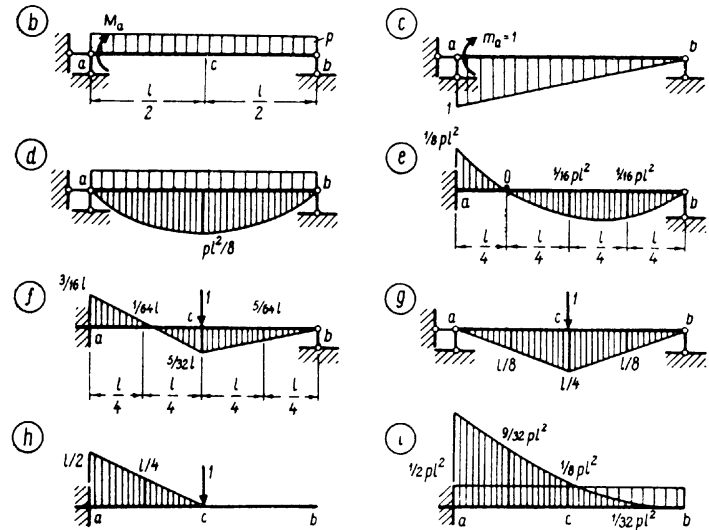
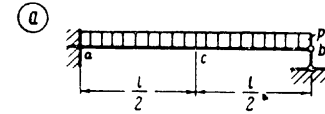
$$M_a = -pl^2/8 \quad (d)$$

Staatikaga määramatu tala (joon. 18.10, *a*) paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 18.10, *e*.

Valemi (18.40) kasutamisel rakendatakse üldistatud ühikjõud (vertikaalne) staatikaga määramatu tala lõikesse *c* ja arvutatakse paindemomendi epüüri ordinaadid (epüür on kujutatud joonisel 18.10, *f* ilma arvutust esitamata).

Ristlõike *c* vertikaalsiire

$$w_{cp} = \frac{l \cdot pl^2}{2 \cdot 6EI} \left(\frac{3l}{16} \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{l}{64} \cdot 0 + \frac{5l}{32} \cdot \frac{1}{16} \right) +$$



Joon. 18.10

$$+ \frac{l \cdot pl^2}{2 \cdot 6EI} \left(\frac{5l}{32} \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{5l}{64} \cdot \frac{1}{16} \right) = \frac{pl^4}{192EI}$$

ehk

$$w_{cp} = \frac{pl^2 \cdot l}{2 \cdot 6EI} \left(\frac{3l}{16} \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{l}{64} \cdot 0 + \frac{5l}{32} \cdot \frac{1}{16} \cdot 2 + 4 \cdot \frac{5l}{64} \cdot \frac{1}{16} \right) = \frac{pl^4}{192EI}$$

Valemiga (18.41) paigutiste arvutamisel rakendatakse üldistatud ühikjõud staatikaga määratavale põhiskeemile. Kaks erinevat põhiskeemi koos paindemomendi epüüriaga on esitatud joonisel 18.10, *g* ja *h*. Vastavalt nendele epüüridele leitakse valemiga (18.41) vertikaalsiire

$$w_{cp} = \frac{pl^2 \cdot l}{2 \cdot 6EI} \left(0 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{l}{4} \cdot \frac{1}{16} \cdot 2 + 4 \cdot \frac{l}{8} \cdot \frac{1}{16} \right) = \frac{pl^4}{192EI}$$

$$w_{cp} = \frac{pl^2 \cdot l}{2 \cdot 6EI} \left(\frac{l}{2} \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{l}{4} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{16} \right) = \frac{pl^4}{192EI}$$

Paigutise arvutamine on seda lihtsam, mida lihtsam on ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüür staatikaga määratud põhiskeemis.

Paigutiste leidmisel valemiga (18.42) arvutatakse üldistatud ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüür staatikaga määramatus arvutusskeemis (joon. 18.10, f) ja koormusest põhjustatud epüür põhiskeemis (18.10, d).

$$w_{c,p} = \frac{pl^2 \cdot l}{2 \cdot 6EI} \left(-4 \cdot \frac{l}{64} \cdot \frac{3}{32} + \frac{5l}{32} \cdot \frac{1}{8} \cdot 2 + 4 \cdot \frac{5l}{64} \cdot \frac{3}{32} \right) = \frac{pl^4}{192EI}$$

Sama tulemus saadakse ka siis, kui koormus rakendatakse konsoolile. Epüür on esitatud joonisel 18.10, i. Vertikaalsiire.

$$w_{c,p} = \frac{pl^2 \cdot l}{2 \cdot 6EI} \left(\frac{3l}{16} \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{l}{64} \cdot \frac{9}{32} - \frac{5l}{32} \cdot \frac{1}{8} \cdot 2 - 4 \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{5}{64} l \right) = \frac{pl^4}{192EI}$$

Vertikaalsiirde $w_{c,p}$ arvutamisel ei ole arvestatud põikjõudude mõju.

18.16.2. Paigutised temperatuuri muutusest

Temperatuuri muutusest põhjustatud paigutiste arvutamiseks tuleb võtta valem võimalike paigutiste printsiibi alusel. Antud juhul lubab võimalike paigutiste printsiip — üldistatud ühikjõuga koormatud staatikaga määramatu arvutusskeemi välis- ja sisejõudude tööde summa konstruktsiooni temperatuuri muutusest põhjustatud paigutistel võrdub nulliga — koostada võrrandi, millest avaldatakse

$$\Delta_{kt}^n = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} (m^n \cdot a \Delta t / h + n^n a t_0) ds \quad (18.43)$$

kus m^n ja n^n on üldistatud ühikjõust põhjustatud paindemoment ning pikijõud n korda staatikaga määramatus arvutusskeemis. Paigutiste arvutamise valemiga (18.43) on otstarbekas mõne paigutise leidmiseks. Suurema hulga paigutiste arvutamiseks saadakse valem järgmiselt. Temperatuuri muutumisel tekivad staatikaga määramatus konstruktsioonis sisejõud, mida tähistatakse M_t^n, N_t^n, Q_t^n . Konstruktsiooni deformeerunud olukord ei muutu, kui eemaldatakse liigsidemed ja nende asemele rakendatakse staatikaga määratavale põhiskeemile ärajäetud sidemete reaktsioonid (lisatundmatud X_{it}). Lisatundmatud X_{it} mõjuvad põhiskeemile välisjõududena ja nendest põhjus-

tatud epüürid tähistatakse, nagu varem märgiti, M_t^n, N_t^n, Q_t^n . Staatikaga määramatu arvutusskeemi deformeerunud olukorra vaatlemist võib asendada sellega ekvivalentse staatikaga määratava põhiskeemi, millele mõjuvad lisatundmatud ja temperatuuri muutus, deformeerunud olukorra vaatlemisega. Võimalike paigutiste printsiibi alusel saadakse järgmine valem paigutiste arvutamiseks:

$$\Delta_{kt}^n = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_k^0 M_t^n}{EI} + \frac{n_k^0 N_t^n}{EF} + k_j \frac{q_k^0 Q_t^n}{GF} \right) ds + \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} (m_k^0 a \Delta t / h + n_k^0 a t_0) ds \quad (18.44)$$

milles m_k^0, n_k^0, q_k^0 on üldistatud jõust 1_k põhjustatud sisejõud staatikaga määratavas põhiskeemis ja M_t^n, N_t^n, Q_t^n — temperatuuri muutusest põhjustatud sisejõud staatikaga määramatus arvutusskeemis.

18.16.3. Paigutised tugede paigutistest

Mõne üksiku paigutise arvutamisel rakendatakse üldistatud ühikjõud staatikaga määramatule arvutusskeemile ja leitakse nende sidemete reaktsioonid, mis paigutuvad. Vajalik paigutis leitakse nüüd valemiga

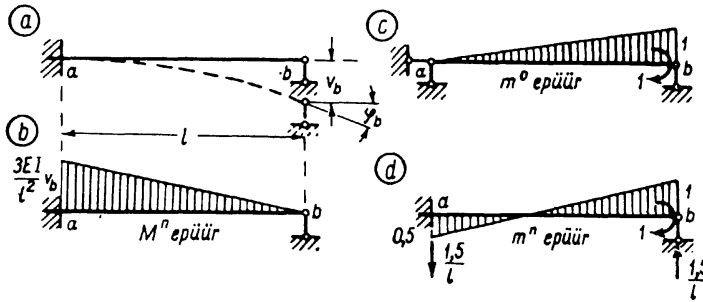
$$\Delta_{kr}^n = - \sum_{j=1}^m \Delta c_j \cdot r_{jk}^n \quad (18.45)$$

milles Δc_j on sideme j paigutis ja r_{jk}^n — üldistatud jõust 1_k põhjustatud reaktsioon staatikaga määramatu arvutusskeemi sidemes j .

Suurema hulga paigutiste arvutamisel rakendatakse üldistatud ühikjõud staatikaga määratavale põhiskeemile ja paigutised leitakse järgmise avaldisega:

$$\Delta_{kr}^n = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_k^0 M_r^n}{EI} + \frac{n_k^0 N_r^n}{EF} + k_j \frac{q_k^0 Q_r^n}{GF} \right) ds - \sum_{j=1}^m \Delta c_j r_{jk}^0 \quad (18.46)$$

milles m_k^0, n_k^0, q_k^0 on üldistatud jõust 1_k põhjustatud sise-



Joon. 18.11

jõud ja r_{jk}^0 — reaktsioon staatikaga määratavas põhiskeemis ning M_r^n , N_r^n , Q_r^n — tugede paigutistest põhjustatud sisejõud staatikaga määramatus arvutuskeemis.

Näide 18.5. Arvutada joonisel 18.11, a kujutatud tala toeristlõike b pööre φ_b toe vajumisest ω_b võrra.

Konsooli vabale otsale rakendatud jõust põhjustatud konsooli otsa siire arvutatakse valemiga $f_b = Pl^3/3EI$ (a).

Võrduse (a) abil leitakse toereaktsioon B . Kuna $\omega_b = B^n l^3/3EI$, siis toereaktsioon $B^n = 3EI\omega_b/l^3$ ja toemoment $M_a = B^n l = 3EI\omega_b/l^2$. Toe b vajumisest põhjustatud paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 18.11, b. Staatikaga määratavale põhiskeemile rakendatud üldistatud jõust $m_b = 1$ põhjustatud paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 18.11, c. Ristlõike b pööre (põikjõudude mõju ei arvestata) leitakse nüüd avaldisega (18.46):

$$\varphi_{br} = \frac{l}{6} \cdot 1 \cdot \frac{3EI}{l^2} \omega_b \cdot \frac{1}{EI} - \left(-\frac{1}{l} \omega_b \right) = 1,5\omega_b/l$$

Kui ühikmoment rakendatakse staatikaga määramatule skeemile (joon. 18.11, d), siis arvutatakse toeristlõike pööre valemiga (18.45):

$$\varphi_{br} = -(-\omega_b \cdot 1,5/l) = 1,5\omega_b/l$$

Toereaktsioonid on näidatud joonisel 18.11, d ilma arvutust esitamata.

18.17. Arvutuse kontroll

18.17.1. Paigutiste kontrollimine

Vigade vältimiseks ja ülesleidmiseks on vaja kogu arvutust kontrollida. Vigadeta lahendamise aluseks on õige põhiskeemi valik ja ühiktundmatutest ning koormusest põhjustatud sisejõudude arvutamine staatikaga mää-

ratavas põhiskeemis. Põhiskeemi staatikaga määratud sisejõudude epüüre kontrollitakse tasakaalutingimustega. Järgnevalt kontrollitakse kanooniliste võrrandite tundmatute kordajaid ja vabaliikmeid. Nende kontrollimine tugineb jõudude mõju sõltumatus printsiibile, mille põhjal jõudude grupist põhjustatud paigutis võrdub eraldi igast jõust põhjustatud paigutiste summaga.

Võrrandisüsteemi võrrandis k on tundmatu X_i ees olev tegur δ_{ki} tundmatule X_k vastav paigutis, mis on põhjustatud ühikjõust $X_i = 1$. Tundmatule X_k vastav paigutis,

mis on põhjustatud kõigist ühiktundmatutest ($\sum_{i=1}^n X_i = 1$)

tähistatakse indeksiga Σ — $\delta_{k\Sigma}$. Summaarset paigutist $\delta_{k\Sigma}$ võib arvutada kahel viisil, kas liitmise teel:

$$\delta_{k\Sigma} = \delta_{k1} + \delta_{k2} + \dots + \delta_{kn} = \sum_{i=1}^n \delta_{ki} \quad (18.47)$$

või tundmatust $X_k = 1$ ja kõigist ühiktundmatutest

($\sum_{i=1}^n X_i = 1$) põhjustatud epüüride ordinaatide korrutiste integreerimisega:

$$\delta_{k\Sigma} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_k m_{\Sigma}}{EI} + \frac{n_k n_{\Sigma}}{EF} + k_j \frac{q_k q_{\Sigma}}{GF} \right) ds \quad (18.48)$$

milles

$$\begin{aligned} m_{\Sigma} &= m_1 + m_2 + \dots + m_n \\ n_{\Sigma} &= n_1 + n_2 + \dots + n_n \\ q_{\Sigma} &= q_1 + q_2 + \dots + q_n \end{aligned} \quad (18.49)$$

Summaarsete epüüride m_{Σ} , n_{Σ} , q_{Σ} ordinaadid on soovitatav arvutada põhiskeemile rakendatud ühiktundmatutest

($\sum_{i=1}^n X_i = 1$), mitte aga leida liitmise teel valemitega

(18.49). Neid valemiteid kasutatakse kõigist ühiktundmatutest põhjustatud summaarsete epüüride arvutatud ordinaatide kontrollimiseks. Kui ka ainult ühest tundmatust põhjustatud epüürid ei ole õigesti arvutatud, siis valemitega (18.49) leitud summaarsete epüüride ordinaadid ei ole õiged. Seepärast on tingimata vaja tasakaalutingimustega kontrollida summaarsete epüüride õigsust.

Kui epüüride m_{Σ} , n_{Σ} , q_{Σ} ordinaate korrutada vastavalt epüüride m_k , n_k , q_k ordinaatidega ja integreerida, siis

vigadeta arvutamisel võrdub integraalide summa (18.48) võrrandi k tundmatute kordajate summaga $\delta_{k\Sigma}$ (18.47).

Epüüride m_Σ , n_Σ , q_Σ ordinaatide teiste astmete integraalide summa valemi (18.48) järgi, kus täht k on asetatud märgiga Σ , võrdub vigadeta arvutamisel võrrandisüsteemi kõigi tundmatute kordajate summaga

$$\delta_{\Sigma\Sigma} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{ki} \quad (18.50)$$

See kontrollib korruga kõigi tundmatute ees olevaid kordajaid, kuid vea puhul ei ole teada, kus viga on tehtud.

Koormuse epüüride M_p^0 , N_p^0 , Q_p^0 ja summaarsete epüüride m_Σ , n_Σ , q_Σ ordinaatide korrutiste integreerimisel valemiga

$$\Delta_{\Sigma p} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_\Sigma M_p^0}{EI} + \frac{n_\Sigma N_p^0}{EF} + k_j \frac{q_\Sigma Q_p^0}{GF} \right) ds \quad (18.51)$$

annab vigadeta arvutamisel kanooniliste võrrandite koormusliikmete summa

$$\Delta_{\Sigma p} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \dots + \Delta_{np} = \sum_{i=1}^n \Delta_{ip} \quad (18.52)$$

Pärast tundmatute kordajate ja vabaliikmete kontrollimist lahendatakse võrrandisüsteem. Kui võrrandisüsteemi lahendamisel ei tehtud spetsiaalset kontrolli, siis on vaja kontrollida süsteemi lahendamisel leitud lisatundmatute väärtusi. Lisatundmatud peavad samaselt rahuldama kanoonilisi võrrandeid.

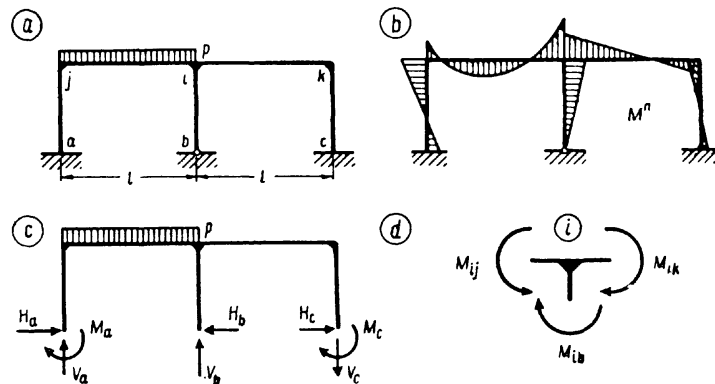
18.17.2. Sisejõudude epüüride kontroll

Koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri ordinaadid arvutatakse valemiga (18.28):

$$M_{kp} = m_{k1}X_1 + m_{k2}X_2 + \dots + m_{kn}X_n + M_{kp}^0$$

Kui kanooniliste võrrandite kordajad ja vabaliikmed arvutati ainult paindemomentide integraalidega, siis valemiga (18.28) leitud epüüri ordinaate kontrollitakse enne põikjõu epüüri arvutamist.

Kui arvutusskeem tervikuna ja arvutusskeemist eraldatud mis tahes osa eraldi rahuldab tasakaalutingimusi,



Joon. 18.12

siis on ühiktundmatutest ja koormusest põhjustatud epüürid staatikaga määratud põhiskeemi jaoks õiged.

Joonisel 18.12, a esitatud viiekordselt staatikaga määramatu raami paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 18.12, b . Raamist eraldatud sõlmele rakendatud momendid peavad rahuldama momentide tasakaalu tingimusi. Näiteks joonisel 18.12, d kujutatud sõlme i jaoks $-M_{ij} + M_{ib} + M_{ik} = 0$. Maapinnast eraldatud raam koos sellele mõjuva koormuse ja toereaktsioonidega (joon. 18.12, c) peab olema tasakaalus:

$$\begin{aligned} \Sigma X=0: & \quad H_a - H_b + H_c = 0 \\ \Sigma Y=0: & \quad V_a + V_b - V_c - pl = 0 \\ \Sigma M_a=0: & \quad M_a + pl^2/2 - V_b l + V_c \cdot 2l + M_c = 0 \end{aligned}$$

Kuid lahendi staatikaline kontroll ei näita, kas lisatundmatud on õigesti arvutatud ja kas paindemomendi epüür on õige. Kui ühiktundmatutest ja koormusest põhjustatud epüürid staatikaga määratud põhiskeemi jaoks on õiged ning valemiga (18.28) arvutamisel ei ole tehtud viga, siis on tasakaalutingimused rahuldatud lisatundmatute suvaliste väärtuste puhul.

Sisejõudude epüüre M_p^n , N_p^n , Q_p^n kontrollitakse geomeetriliste pidevustingimuste abil. Kui paigutusolukord, mis vastab epüüridele M_p^n , N_p^n , Q_p^n , on ekvivalentne staatikaga määramatu arvutusskeemi paigutusolukorraga,

siis on lõppepüürid M_p^n , N_p^n , Q_p^n õiged. Valemiga (18.41) arvutatakse mõned paigutised, mis staatikaga määramatus arvutusskeemis võrduvad nulliga. Niisugusteks paigutisteks on lisatundmatutele X_i vastavad üldistatud paigutised. Valemi (18.41) järgi integreeritakse põhiskeemis suvalisest ühiktundmatust $X_i=1$ põhjustatud sisejõudude epüüride m_i^0 , n_i^0 , q_i^0 ordinaatide ja staatikaga skeemis suvalisest ühiktundmatust $X_i=1$ põhjustatud sisejõudude epüüride M_p^n , N_p^n , Q_p^n ordinaatide korrutisi ning nende integraalide summa peab võrduma nulliga:

$$\Delta_{ip}^n = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \left(\frac{m_i^0 M_p^n}{EI} + \frac{n_i^0 N_p^n}{EF} + k_j \frac{q_i^0 Q_p^n}{GF} \right) ds = 0 \quad (18.53)$$

kuna lisatundmatutele vastavad paigutised staatikaga määramatus arvutusskeemis on nullid. Võrrandite (18.53) koostamisel tuleb arvestada nende integraalidega, millega arvutati kanooniliste võrrandite paigutised. Kui kanooniliste võrrandite kordajad ja vabaliikmed arvutati ainult paindemomentide mõjuga, siis võrrandid (18.53) tuleb arvutada samuti ainult paindemomentide integraalidega:

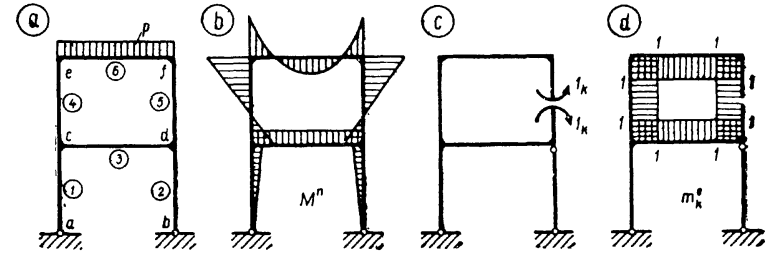
$$\Delta_{ip}^n = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} \frac{m_i^0 M_p^n}{EI} ds = 0 \quad (18.54)$$

Seega paindemomendi M_p^n epüüri ja ühiktundmatu $X_i=1$ epüüri m_i^0 ordinaatide korrutiste, mis on jagatud paindejäikusega EI , integraalide summa võrdub nulliga. Sama tulemus saadakse vigadeta arvutamisel ka M_p^n ja m_2^0 epüüridega. Kui raami vardad on samast materjalist, siis integraalide summa (18.54) esitatakse järgmisel kujul:

$$EI_0 \Delta_{ip}^n = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} m_i^0 M_p^n \frac{I_0}{I} ds = 0 \quad (18.55)$$

Kui tundmatute leidmisel on paigutised arvutatud ka piki- ja põikjõudude mõjuga, siis tuleb seda arvestada ka kontrollimisel.

Kui liigendita suletud kontuuridega raami tundmatud on arvutatud ainult paindemomentide mõjuga, siis pain-



Joon. 18.13

demomendi M_p^n epüüri kontrollimine lihtsustub. Joonisel 18.13, *a* esitatud raami staatikalise määramatuse aste $n=4$. Ülemine liigendita suletud kontuur on kolmekordselt staatikaga määramatu ja alumine kahe liigendiga suletud kontuur (koos maapinnaga) on ühekordselt staatikaga määramatu. Selleks et arvutada staatikaga määratava skeemi lõikes k ristlõigete vastastikune pööre, rakendatakse põhiskeemile üldistatud jõuna kaks ühikmomenti (joon. 18.13, *c*). Joonisel 18.13, *d* on esitatud ühikmomentide põhjustatud paindemomendi epüür m_k^0 .

EI_0 -kordne ristlõigete vastastikune pööre lõikes k

$$EI_0 \varphi_k = \sum_{j=1}^r \int_0^{l_j} m_k^0 M_p^n \frac{I_0}{I} ds = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} 1 \cdot M_p^n \frac{I_0}{I} ds$$

Kuna lõike k kohal staatikaga määramatus raamis moodustavad põhiskeemi varraste otsad ühise ristlõike ja pöörduvad seetõttu samas suunas võrdse nurga võrra, jäädes paralleelseiks, siis $\varphi_k=0$ ja

$$\sum_{j=3}^6 \int_0^{l_j} M_p^n \frac{I_0}{I} ds = \sum_{j=3}^6 \int_0^{l_j} M_p^n ds = 0 \quad (18.56)$$

Integraalide summa (18.56) kujutab ühe liigendita suletud kontuuri ulatusel redutseeritud paindemomendi epüüri pindala. Integraalide summa (18.56) võrdub nulliga ja seepärast redutseeritud paindemomendi epüüri pindala väljaspool suletud kontuuri võrdub suletud kontuuri sees oleva redutseeritud paindemomendi epüüri pindalaga. Raami alumisel kontuuril redutseeritud paindemomendi

pindalad sees- ja väljaspool kontuuri ei ole võrdsed, kuna kontuuris on liigendid.

Temperatuuri muutusest ja tugede paigutistest põhjustatud paindemomendi epüüride ordinaadid arvutatakse vastavalt valemitele (18.37), (18.38):

$$M_{kt}^n = m_{k1}X_{1t} + m_{k2}X_{2t} + \dots + m_{kn}X_{nt}$$

$$M_{kr}^n = m_{k1}X_{1r} + m_{k2}X_{2r} + \dots + m_{kn}X_{nr}$$

Nendes valemites puuduvad koormusest põhjustatud paindemomendi avaldise (18.28) liikmele M_p^0 vastavad liikmed, kuna temperatuuri muutus ja tugede paigutised ei põhjusta sisejõude staatikaga määratavas põhiskeemis.

Integraalide summa $\sum \int_0^{l_j} m_i M_p^0 ds$ võrdub võrrandisüsteemi võrrandi i vabaliikmega Δ_{ip} . Kuna avaldistes (18.37), (18.38) puudub epüürile M_p^0 analoogiline liige, siis integraalide summa epüüri M_t^n või M_r^n ja lisatundmatu $X_i=1$ epüüri ordinaatide korrutistest ($\sum \int_0^{l_j} m_i M_t^n ds$ või

$\sum \int_0^{l_j} m_i M_r^n ds$) ei võrdu nulliga, vaid võrrandi i vabaliikmega vastupidise märgiga:

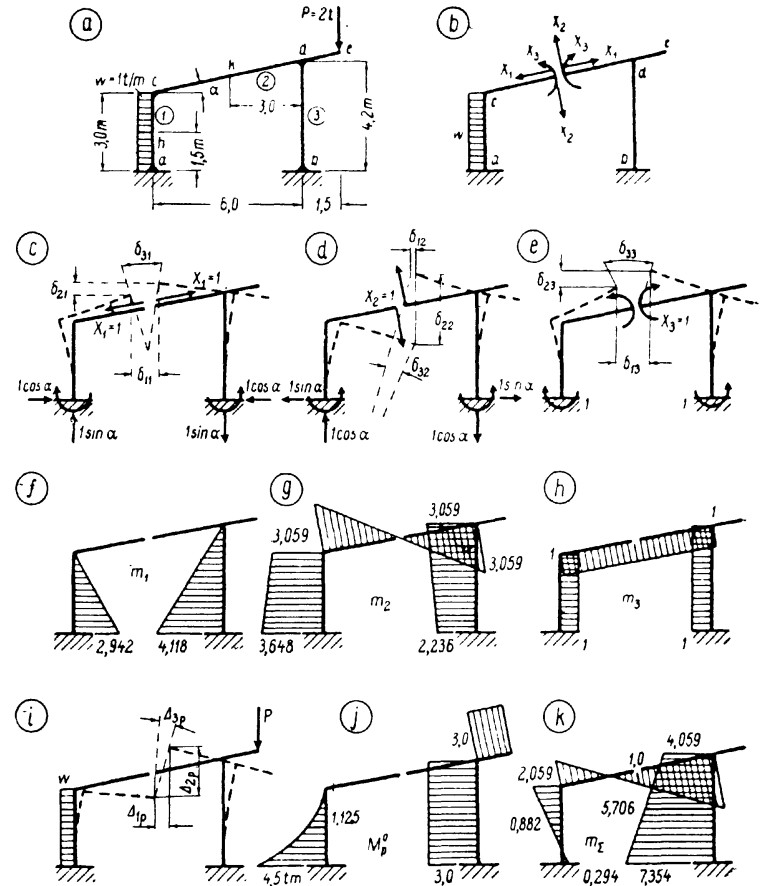
$$\sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} m_i M_t^n ds = -EI_0 \Delta_{it} \quad (18.57)$$

$$\sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} m_i M_r^n ds = -EI_0 \Delta_{ir} \quad (18.58)$$

Kui kanooniliste võrrandite paigutised on arvutatud paindemomentide, piki- ja põikjõudude mõjuga, siis kontrollimisel tuleb samuti teha.

18.18. Raami arvutuse näide

Näide 18.6. Konstrueerida joonisel 18.14, a esitatud raami sisejõudude epüürid, arvutada ristlõike k vertikaalsiire ja sõlme d pöore raami skeemil esitatud koormusest, temperatuuri muutusest raami sisemisel poolel $+20^\circ\text{C}$ ja välimisel poolel -10°C ning toe b vajumisest $\Delta_b=1$ cm. Raami varraste ristlõiked on konstantse lausega $b=30$ cm ja järgmiste kõrgustega: $h_1=30$ cm, $h_2=50$ cm, $h_3=40$ cm.



Joon. 18.14

Materjali elastusmoodul $E=2 \cdot 10^6$ t/m² ja joonpaisumistegur $a=10^{-5}$ 1/°C.

1. Raami staatikaga määramatuse aste $n=3$, kuna raam koos alusega moodustab liigendita suletud kontuuri.
2. Põhiskeem koos koormuse ja lisatundmatutega on kujutatud joonisel 18.14, b. Lisatundmatuteks on ristlõike k piki- ja põikjõud ning paindemoment.
3. Kanoonilised võrrandid lisatundmatute arvutamiseks on järgmised:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{10} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{20} &= 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{30} &= 0\end{aligned}$$

Ühiklisatundmatutest ja koormusest põhjustatud paigutised ning paindemomendi epüürid on kujutatud joonisel 18.14, *c...f*.

4. Kanooniliste võrrandite tundmatute kordajate ja vabaliikmete arvutus (paigutiste arvutamine).

Varraste ristlõigete inertsomendid:

$$I_1 = 0,3 \cdot 0,3^3 / 12 \text{ m}^4; \quad I_2 = 0,3 \cdot 0,5^3 / 12 \text{ m}^4; \quad I_3 = 0,3 \cdot 0,4^3 / 12 \text{ m}^4$$

Kuna raami vardad on samast materjalist ja ristlõigete laiused on võrdsed, siis jäikuste (EI) suhe on võrdne ristlõigete kõrguste kuupide suhtega: $I_1/I_3 = 27/64$, $I_2/I_3 = 125/64$. Võetud on $EI_3 = EI_0$. Varraste redutseeritud pikkused: $l'_1 = l_1 \cdot EI_0/EI_1 = l_1 \cdot EI_3/EI_1 = 3,0 \cdot 64/27 = 7,111 \text{ m}$, $l'_2 = l_2 EI_3/EI_2 = (6,0/0,9806) \cdot 64/125 = 3,133 \text{ m}$; $\sin \alpha = 0,1961$; $\cos \alpha = 0,9806$.

$$\begin{aligned}EI_0 \delta_{11} &= 7,111 \cdot 2,942^2 / 3 + 4,2 \cdot 4,118^2 / 3 = 44,26 \text{ m}^3 \\ EI_0 \delta_{12} &= EI_0 \delta_{21} = -(2,942 \cdot 3,648 + 4 \cdot 1,471 \cdot 3,354) \cdot 7,111 / 6 = -14,40 \text{ m}^3 \\ EI_0 \delta_{13} &= EI_0 \delta_{31} = 7,111 \cdot 1 \cdot 1,471 + 4,2 \cdot 1 \cdot 2,059 = 19,11 \text{ m}^2 \\ EI_0 \delta_{22} &= (3,648^2 + 4 \cdot 3,354^2 + 3,059^2) \cdot 7,111 / 6 + 2 \cdot 3,059^2 \cdot 3,133 / (2 \cdot 3) + \\ &+ (3,059^2 + 4 \cdot 2,648^2 + 2,236^2) \cdot 4,2 / 6 = 119,65 \text{ m}^3 \\ EI_0 \delta_{23} &= EI_0 \delta_{32} = -(3,648 \cdot 1 + 4 \cdot 3,354 \cdot 1 + 3,059 \cdot 1) \cdot 7,111 / 6 + \\ &+ (3,059 \cdot 1 + 4 \cdot 2,648 \cdot 1 + 2,236 \cdot 1) \cdot 4,2 / 6 = -12,73 \text{ m}^2 \\ EI_0 \delta_{33} &= 7,111 \cdot 1^2 + 3,133 \cdot 1^2 + 4,2 \cdot 1^2 = 14,44 \text{ m}\end{aligned}$$

Ühikjõududest põhjustatud üldistatud paigutiste dimensioonid leitakse vastava paigutise dimensiooni jagamisel paigutist põhjustava üldistatud jõu dimensiooniga.

$$\begin{aligned}EI_0 \delta_{11}, EI_0 \delta_{22}, EI_0 \delta_{12} &= EI_0 \delta_{21}: \text{tm}^2 \cdot \text{m} / \text{t} = \text{m}^3 \\ EI_0 \delta_{13} \text{ ja } EI_0 \delta_{23} &: \text{tm}^2 \cdot \text{m} / \text{tm} = \text{m}^2 \\ EI_0 \delta_{31} \text{ ja } EI_0 \delta_{32} &: \text{tm}^2 \cdot 1 / \text{t} = \text{m}^2 \\ EI_0 \delta_{33} &: \text{tm}^2 \cdot 1 / \text{tm} = \text{m}\end{aligned}$$

Edasi:

a) koormusest põhjustatud paigutised

$$\begin{aligned}EI_0 \Delta_{1p} &= -(2,942 \cdot 4,5 + 4 \cdot 1,471 \cdot 1,125) \cdot 7,111 / 6 + 3 \cdot 4,2 \cdot 2,059 = \\ &= 2,408 \text{ tm}^3 \\ EI_0 \Delta_{2p} &= (3,648 \cdot 4,5 + 4 \cdot 3,354 \cdot 1,125) \cdot 7,111 / 6 + 3 \cdot 4,2 \cdot 2,648 = \\ &= 70,708 \text{ tm}^3 \\ EI_0 \Delta_{3p} &= -(1 \cdot 4,5 + 4 \cdot 1 \cdot 1,125) \cdot 7,111 / 6 + 4,2 \cdot 1 \cdot 3 = 1,934 \text{ tm}^2\end{aligned}$$

b) temperatuuri muutusest

$$\begin{aligned}t_{01} = t_{02} = t_{03} = t_0 &= (20 - 10) / 2 = 5 \text{ }^\circ\text{C} \\ \Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \Delta t &= 20 - (-10) = 30 \text{ }^\circ\text{C}\end{aligned}$$

põhjustatud paigutised ($EI_0 \alpha = EI_3 \alpha = 2 \cdot 10^8 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-5} = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ tm}^2 / \text{ }^\circ\text{C}$)

$$\begin{aligned}EI_0 \Delta_{1t} &= 3,2 \cdot 10^{-2} \{30 [3,0 \cdot 2,942 / (2 \cdot 0,30) + 4,2 \cdot 4,118 / (2 \cdot 0,40)] + \\ &+ 5 [3,0 (-0,1961) + 6,119 (-1,0) + 4,2 \cdot 0,1961]\} = 33,94 \text{ tm}^3 \\ EI_0 \Delta_{2t} &= 3,2 \cdot 10^{-2} \{30 [3,0 (-3,354) / 0,30 + 4,2 \cdot 2,648 / 0,40] + \\ &+ 5 [3,0 (-0,9806) + 4,2 \cdot 0,9806]\} = -5,318 \text{ tm}^3 \\ EI_0 \Delta_{3t} &= 3,2 \cdot 10^{-2} \{30 [3,0 \cdot 1 / 0,30 + 6,119 \cdot 1 / 0,50 + 4,2 \cdot 1 / 0,40]\} = \\ &= 31,43 \text{ tm}^2\end{aligned}$$

c) toe b vajumisest $\Delta_b = 1 \text{ cm}$

$$\begin{aligned}EI_0 \Delta_{1r} &= -EI_0 \cdot 1 \sin \alpha \cdot \Delta_b = -3,2 \cdot 10^3 \cdot 0,1961 \cdot 0,01 = -6,275 \text{ tm}^3 \\ EI_0 \Delta_{2r} &= -EI_0 \cdot 1 \cos \alpha \cdot \Delta_b = -3,2 \cdot 10^3 \cdot 0,9806 \cdot 0,01 = -31,38 \text{ tm}^3 \\ EI_0 \Delta_{3r} &= 0\end{aligned}$$

Siin $1 \cdot \sin \alpha$, $1 \cdot \cos \alpha$ ja 0 on lisatundmatutest $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ ja $X_3 = 1$ põhjustatud reaktsioonide vertikaalsed komponendid toe b juures.

5. Kanoonilised võrrandid, milles paigutised on asendatud EI_0 - kordsete paigutistega, on järgmised:

$$\begin{aligned}44,26X_1 - 14,40X_2 + 19,11X_3 + 2,408 + 33,94 - 6,275 &= 0 \\ -14,40X_1 - 119,65X_2 - 12,73X_3 + 70,708 - 5,318 - 31,38 &= 0 \\ 19,11X_1 - 12,73X_2 + 14,44X_3 + 1,934 + 31,43 + 0 &= 0\end{aligned}$$

Võrrandisüsteemi vabaliikmed on esitatud eraldi koormusest, temperatuuri muutusest ja toe b vajumisest.

6. Võrrandisüsteemi tundmatute kordajate ja koormusest põhjustatud vabaliikmete kontrollimiseks arvutatakse summaarne ühiklisatundmatutest põhjustatud paindemomendi epüür m_Σ (joon. 18.14, *k*). Järgnevalt integreeritakse epüüride m_Σ ja m_1 ordinaatide korristist, mille tulemusena saadakse lisatundmatule X_1 vastav EI_0 -kordne paigutis, mis on põhjustatud kõigist ühiktundmatutest:

$$\begin{aligned}EI_0 \delta_{1\Sigma} &= (2,942 \cdot 0,294 - 4 \cdot 1,471 \cdot 0,882) \cdot 7,111 / 6 + (4 \cdot 2,059 \cdot 5,706 + \\ &+ 4,118 \cdot 7,354) \cdot 4,2 / 6 = 48,97\end{aligned}$$

See peab võrduma esimese võrrandi tundmatute kordajate algebraise summaga

$$EI_0 \delta_{1\Sigma} = 44,26 - 14,40 + 19,11 = 48,97$$

Edasi

$$\begin{aligned}EI_0 \delta_{2\Sigma} &= (-3,648 \cdot 0,294 + 4 \cdot 3,354 \cdot 0,882 + 3,059 \cdot 2,059) \cdot 7,111 / 6 + \\ &+ (3,059 \cdot 2,059 + 3,059 \cdot 4,059) \cdot 3,133 / 6 + (3,059 \cdot 4,059 + \\ &+ 4 \cdot 2,648 \cdot 5,706 + 2,236 \cdot 7,354) \cdot 4,2 / 6 = 92,50 \\ EI_0 \delta_{2\Sigma} &= -14,40 + 119,65 - 12,73 = 92,52 \\ EI_0 \delta_{3\Sigma} &= -7,111 \cdot 1 \cdot 0,882 + 3,133 \cdot 1 \cdot 1 + 4,2 \cdot 1 \cdot 5,706 = 20,83 \\ EI_0 \delta_{3\Sigma} &= 19,11 - 12,73 + 14,44 = 20,82\end{aligned}$$

Integraalide summa

$$\begin{aligned}EI_0 \delta_{\Sigma\Sigma} &= \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} m_\Sigma^2 ds = (0,294^2 + 4 \cdot 0,882^2 + 2,059^2) \cdot 7,111 / 6 + \\ &+ (2,059^2 + 4 \cdot 1^2 + 4,059^2) \cdot 3,111 / 6 + \\ &+ (4,059^2 + 4 \cdot 5,706^2 + 7,354^2) \cdot 4,2 / 6 = 162,27\end{aligned}$$

võrdub võrrandite kõigi tundmatute kordajate summaga

$$EI_0 \delta_{\Sigma\Sigma} = 44,26 + 119,65 + 14,44 + 2(-14,40 + 19,11 - 12,73) = 162,31$$

Kuna erinevus on ainult viimases kohas, siis on paigutised arvutatud õigesti.

Kanooniliste võrrandite koormusest põhjustatud vabaliikmete kontrollimiseks integreeritakse summaarse ja koormuse epüüride ordi-

naafide korrutist:

$$EI_0 \Delta_{\Sigma p} = (-4,5 \cdot 0,294 + 4 \cdot 1,125 \cdot 0,882) \cdot 7,111/6 + 4,2 \cdot 3 \cdot 5,706 = 75,032$$

mis koormusest põhjustatud vabaliikmete summast

$$EI_0 \Delta_{\Sigma p} = 2,407 + 70,708 + 1,934 = 75,05$$

erineb ainult kahe sajandiku võrra.

7. Kanooniliste võrrandite lahendamiseks leitakse tundmatud:

a) koormusest

$$X_{1p} = 0,0944 \text{ t}; \quad X_{2p} = -0,6700 \text{ t}; \quad X_{3p} = -0,8495 \text{ tm}$$

b) temperatuuri muutusest

$$X_{1t} = 0,4314 \text{ t}; \quad X_{2t} = -0,2162 \text{ t}; \quad X_{3t} = -2,9379 \text{ tm}$$

c) toe *b* vajumisest

$$X_{1r} = 0,2944 \text{ t}; \quad X_{2r} = 0,2828 \text{ t}; \quad X_{3r} = -0,1403 \text{ tm}$$

Kui võrrandisüsteemi lahendus ei sisalda kontrollarvutust, siis tuleb veenduda, kas leitud lisatundmatud rahuldavad kanoonilisi võrrandeid. Siin tehakse seda ainult koormusest põhjustatud lisatundmatutega:

$$\begin{aligned} 44,26 \cdot 0,0944 - 14,40(-0,6700) + 19,11(-0,8495) + 2,408 &= 0,000 \\ -14,40 \cdot 0,0944 + 119,65(-0,6700) - 12,73(-0,8495) + 70,708 &= -0,003 \\ 19,11 \cdot 0,0944 - 12,73(-0,6700) + 14,44(-0,8495) + 1,934 &= 0,000 \end{aligned}$$

8. Paindemomendi epüüride arvutus

a) Koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri ordinaadid arvutatakse valemiga (18.28):

$$\begin{aligned} M_k &= m_{k1} X_1 + m_{k2} X_2 + m_{k3} X_3 + M_{k0} \\ M_a &= 2,942 \cdot 0,0944 - 3,648(-0,6700) + 1(-0,8495) - 4,5 = \\ &= -2,628 \text{ tm} \\ M_c &= 0,0 \cdot 0,0944 - 3,059(-0,6700) + 1(-0,8495) + 0,0 = 1,200 \text{ tm} \\ M_{dc} &= 0,0 \cdot 0,0944 + 3,059(-0,6700) + 1(-0,8495) + 0,0 = -2,899 \text{ tm} \\ M_{db} &= 0,0 \cdot 0,0944 + 3,059(-0,6700) + 1(0,8495) + 3,0 = 0,101 \text{ tm} \\ M_{de} &= -3,0 \text{ tm} \\ M_b &= 4,118 \cdot 0,0944 + 2,236(-0,6700) + 1(0,8495) + 3,0 = 1,041 \text{ tm} \\ M_h &= 1,471 \cdot 0,0944 - 3,354(-0,6700) + 1(0,8495) - 1,125 = 0,412 \text{ tm} \end{aligned}$$

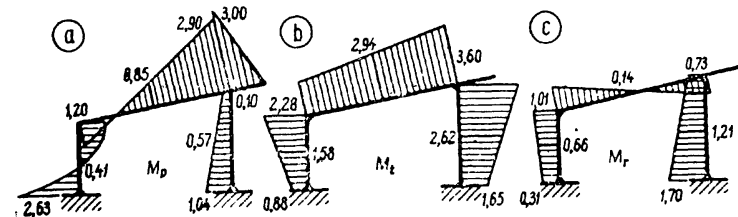
Paindemomendi epüür on esitatud joonisel 18.15, a. Järgnevalt kontrollitakse lahendust. Arvutatakse lisatundmatule X_3 vastav paigutus, mis pidevustingimustele vastavalt peab võrduma nulliga:

$$\begin{aligned} EI_0 \Delta_{3p} &= \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} m_3 M_p ds = (-2,628 \cdot 1 + 4 \cdot 0,412 \cdot 1 + 1,200 \cdot 1) \cdot \\ &\cdot 7,111/6 + (1,200 \cdot 1 + 4 \cdot 0,849 \cdot 1 - 2,899 \cdot 1) \cdot 3,133/6 + \\ &+ (0,101 \cdot 1 + 4 \cdot 0,571 \cdot 1 + 1,041 \cdot 1) \cdot 4,2/6 = 2,659 - 2,660 \approx 0 \end{aligned}$$

Liigendita suletud kontuuri puhul peab raami siseküljel olev redutseeritud paindemomendi epüüri pindala võrduma raami välisküljel oleva redutseeritud epüüri pindalaga.

b) Temperatuuri muutusest põhjustatud paindemomendid arvutatakse valemiga (18.37):

$$\begin{aligned} M_a &= 2,942 \cdot 0,4314 - 3,648(-0,2162) + 1(-2,9379) = -0,880 \text{ tm} \\ M_c &= 0,0 \cdot 0,4314 - 3,059(-0,2162) + 1(-2,9379) = -2,276 \text{ tm} \\ M_{dc} &= M_{db} = 0,0 \cdot 0,4314 + 3,059(-0,2162) + 1(-2,9379) = -3,599 \text{ tm} \end{aligned}$$



Joon. 18.15

$$M_{de} = 0$$

$$M_b = 4,118 \cdot 0,4314 + 2,236(-0,2162) + 1(-2,9379) = -1,645 \text{ tm}$$

Epüür on esitatud joonisel 18.15, b.

Epüüri kontrollarvutus:

$$\begin{aligned} EI_0 \Delta_{3t} + \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} M_t m_3 ds &= 31,43 - (0,880 \cdot 1 + 4 \cdot 1,578 \cdot 1 + \\ &+ 2,276 \cdot 1) \cdot 7,111/6 - (2,276 \cdot 1 + 4 \cdot 2,938 \cdot 1 + 3,599 \cdot 1) \cdot 3,133/6 - \\ &- (3,599 \cdot 1 + 4 \cdot 2,622 \cdot 1 + 1,645 \cdot 1) \cdot 4,2/6 = 31,43 - 31,44 \approx 0 \end{aligned}$$

Analoogiliselt: $EI_0 \Delta_{1t} + \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} M_t m_1 ds = 33,94 - 33,93 \approx 0$

$$EI_0 \Delta_{2t} + \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} M_t m_2 ds = -5,32 + 5,31 \approx 0$$

c) Toe *b* vajumisest põhjustatud paindemomendid arvutatakse valemiga (18.38):

$$\begin{aligned} M_a &= 2,942 \cdot 0,2944 - 3,648 \cdot 0,2828 - 1 \cdot 0,1403 = -0,306 \text{ tm} \\ M_c &= 0,0 \cdot 0,2944 - 3,059 \cdot 0,2828 - 1 \cdot 0,1403 = -1,005 \text{ tm} \\ M_{dc} &= M_{db} = 0,0 \cdot 0,2944 + 3,059 \cdot 0,2828 - 1 \cdot 0,1403 = 0,725 \text{ tm} \\ M_b &= 4,118 \cdot 0,2944 + 2,236 \cdot 0,2828 - 1 \cdot 0,1403 = 1,704 \text{ tm} \end{aligned}$$

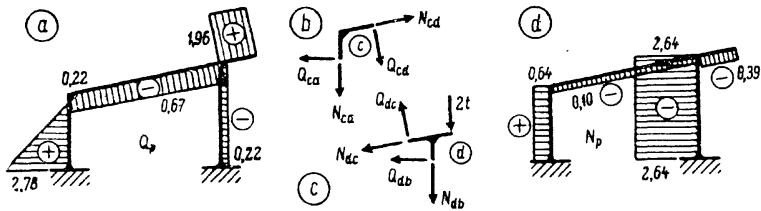
Epüür on kujutatud joonisel 18.15, c.

Kontrollarvutus:

$$\begin{aligned} \sum_0^{l_j} \int_0^{l_j} m_2 M_r ds + EI_0 \Delta_{2r} &= (0,306 \cdot 3,648 + 4 \cdot 0,656 \cdot 3,354 + 1,005 \cdot 3,059) \cdot \\ &\cdot 7,111/6 + (1,005 \cdot 3,059 + 4 \cdot 0,140 \cdot 0 + 0,725 \cdot 3,059) \cdot 3,133/6 + \\ &+ (0,725 \cdot 3,059 + 4 \cdot 1,214 \cdot 2,648 + 1,704 \cdot 2,236) \cdot 4,2/6 = \\ &= 31,38 - 31,38 = 0,00 \end{aligned}$$

$$\sum_0^{l_j} \int_0^{l_j} m_1 M_r ds = 6,27; \quad \sum_0^{l_j} \int_0^{l_j} m_3 M_r ds = 0,00$$

9. Põik- ja pikijõu epüürid arvutatakse ainult koormusest. Temperatuuri muutusest ja tugevate paigutistest põhjustatud epüüride arvutamine on analoogiline. Põikjõud leitakse valemiga (18.36):



Joon. 18.16

$$Q_k = Q_k^0 + (M_{par} - M_{vas})/l$$

Põikjõu arutamisel postis vaadeldakse teda horisontaalsena. Paindemoment on positiivne, kui vardade alumine pool on tõmmatud, ja negatiivne, kui ülemine pool on tõmmatud.

$$\begin{aligned} Q_a &= 1 \cdot 3/2 + (1,200 + 2,628)/3,0 = 2,776 \text{ t} \\ Q_{ca} &= -1 \cdot 3/2 + (1,200 + 2,628)/3,0 = -0,224 \text{ t} \\ Q_{dc} &= (-2,899 - 1,200)/6,119 = -0,670 \text{ t} = X_{2p} \\ Q_{de} &= Q_{ed} = 2 \cdot 0,9806 = 1,961 \text{ t} \\ Q_{bd} &= Q_{db} = (1,041 - 0,101)/4,2 = 0,224 \text{ t} \end{aligned}$$

Põikjõu epüür on esitatud joonisel 18.16, a.

Sõlme c (joon. 18.16, b) kohta koostatud tasakaalutingimustest

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0: & N_{cd} \cos \alpha + Q_{cd} \sin \alpha - Q_{ca} = 0 \\ \Sigma Y = 0: & -N_{ca} - Q_{cd} \cos \alpha + N_{cd} \sin \alpha = 0 \end{aligned}$$

leitakse pikijõud varrestes 1 ja 2

$$\begin{aligned} N_{cd} &= Q_{ca}/\cos \alpha - Q_{cd} \operatorname{tg} \alpha = -0,224/0,9806 + 0,670 \cdot 0,2000 = \\ &= -0,0944 \text{ t} = X_{1p} \\ N_{ca} &= N_{cd} \sin \alpha - Q_{cd} \cos \alpha = -0,0944 \cdot 0,1961 + 0,670 \cdot 0,9806 = \\ &= 0,638 \text{ t} \end{aligned}$$

Sõlme d (joon. 18.16, c) kohta koostatud tasakaalutingimustest

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0: & -N_{dc} \cos \alpha - Q_{dc} \sin \alpha - Q_{db} = 0 \\ \Sigma Y = 0: & -N_{db} - P + Q_{dc} \cos \alpha - N_{dc} \sin \alpha = 0 \end{aligned}$$

leitakse

$$\begin{aligned} N_{dc} &= -Q_{dc} \operatorname{tg} \alpha - Q_{db}/\cos \alpha = 0,671 \cdot 0,200 - 0,224/0,9806 = \\ &= -0,0944 \text{ t} \\ N_{db} &= -P + Q_{dc} \cos \alpha - N_{dc} \sin \alpha = -2,0 - 0,670 \cdot 0,9806 + \\ &+ 0,0944 \cdot 0,1961 = -2,638 \text{ t} \end{aligned}$$

Kuna vardale cd ei ole rakendatud koormust, siis $N_{cd} = N_{dc} = -0,0944 \text{ t}$

Pikijõu epüür on kujutatud joonisel 18.16, d. Piki- ja põikjõu epüüride õigsust kontrollitakse tasakaalutingimustega

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0: & \omega l_1 - Q_a - Q_b = 1,0 \cdot 3,0 - 2,776 - 0,224 = 0,000 \\ \Sigma Y = 0: & -N_{ac} - N_{bd} - P = -0,638 + 2,638 - 2,0 = 0,000 \end{aligned}$$

Vardale 1 mõjub koormus risti vardade teljega ja seepärast $N_{ac} = N_{ca} = -0,638 \text{ t}$.

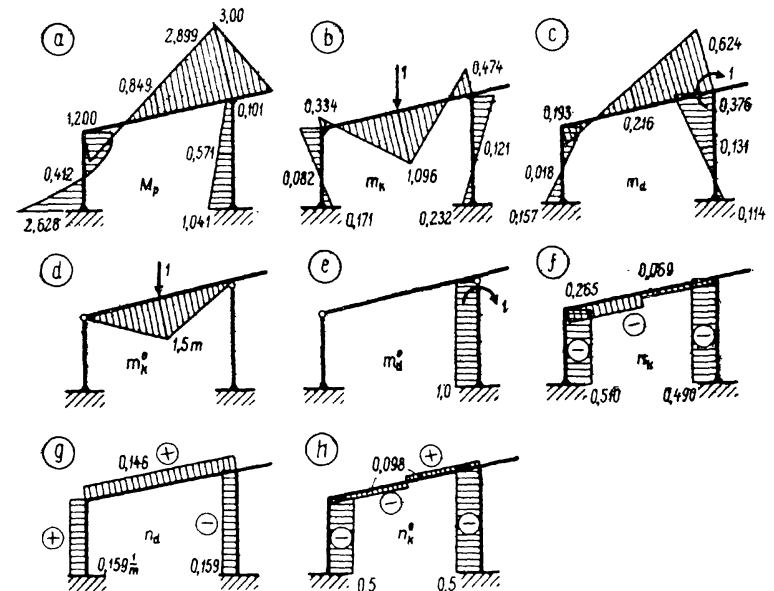
10. Ristlõike k vertikaalsiirde ja sõlme d pöörde arvutamine.

Koormus. Staatikaga määramatus arvutuskeemis arvatatakse paigutisi kolmel erineval viisil. Ühel juhul rakendatakse üldistatud ühikjõud staatikaga määramatule arvutuskeemile ja lahendatakse jõumeetodiga. Joonisel 18.17, b ja c on esitatud üldistatud ühikjõududest põhjustatud paindemomendi epüürid staatikaga määramatus arvutuskeemis ilma arvutust esitamata. Joonisel 18.17, a on esitatud koormusest põhjustatud paindemomendi epüür staatikaga määramatus skeemis. Kasutades nüüd avaldist (18.40) ja arvestades ainult paindemomentide mõju, leitakse paigutised

$$\begin{aligned} EI_0 \omega_{kp} &= (-2,628 \cdot 0,171 - 4 \cdot 0,412 \cdot 0,082 - 1,200 \cdot 0,334) \cdot 7,111/6 + \\ &+ (-1,200 \cdot 0,334 + 4 \cdot 0,175 \cdot 0,381 - 1,096 \cdot 0,850 \cdot 2 - \\ &- 4 \cdot 1,875 \cdot 0,311 + 2,899 \cdot 0,474) \cdot 3,133/(2 \cdot 6) + \\ &+ (-0,101 \cdot 0,474 - 4 \cdot 0,571 \cdot 0,121 + 1,041 \cdot 0,232) \cdot 4,2/6 = \\ &= -1,997 \text{ tm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EI_0 \varphi_{dp} &= (2,628 \cdot 0,157 + 4 \cdot 0,412 \cdot 0,018 + 1,200 \cdot 0,193) \cdot 7,111/6 + \\ &+ (1,200 \cdot 0,193 + 4 \cdot 0,849 \cdot 0,216 + 2,899 \cdot 0,624) \cdot 3,133/6 + \\ &+ (0,101 \cdot 0,376 + 4 \cdot 0,571 \cdot 0,131 - 1,041 \cdot 0,114) \cdot 4,2/6 = \\ &= 2,400 \text{ tm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{millest } \omega_{kp} &= -1,997/(3,2 \cdot 10^3) = -0,624 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx -0,62 \text{ mm} \\ \varphi_{dp} &= 2,400/(3,2 \cdot 10^3) = 0,750 \cdot 10^{-3} = 0,00075 \end{aligned}$$



Joon. 18.17

Lihtsam on arvutada paigutisi avaldisega (18.41) (arvestatakse ainult paindemomentide mõju), mille puhul üldistatud ühikjõud rakendatakse staatikaga määramatust skeemist n suvalise liigsideme eemaldamisega saadud staatikaga määratavale skeemile (joon. 18.17, d ja e):

$$EI_0 \omega_{kp} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} m_k^0 M_p^n ds = -(0,849 \cdot 3,133/2) \cdot 1,5 = -1,995 \text{ tm}^3$$

$$EI_0 \varphi_{dp} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} m_d^0 M_p^n ds = 0,571 \cdot 4,2 \cdot 1 = 2,398 \text{ tm}^2$$

millest

$$\omega_{kp} = -1,995/(3,2 \cdot 10^3) = -0,623 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx -0,62 \text{ mm}$$

$$\varphi_{dp} = 2,398/(3,2 \cdot 10^3) = 0,749 \cdot 10^{-3} = 0,000749$$

Samad tulemused saadakse ka avaldisega (18.42) (arvestades ainult paindemomentide mõju):

$$\begin{aligned} EI_0 \omega_{kp} &= \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} m_k^n M_p^0 ds = \\ &= (-4,5 \cdot 0,171 + 4 \cdot 1,125 \cdot 0,082) \cdot 7,111/6 - 3 \cdot 4,2 \cdot 0,120 = \\ &= -1,987 \text{ tm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EI_0 \varphi_{dp} &= \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} m_d^n M_p^0 ds = \\ &= (4,5 \cdot 0,157 - 4 \cdot 1,125 \cdot 0,018) \cdot 7,111/6 + 3 \cdot 4,2 \cdot 0,131 = \\ &= 2,392 \text{ tm}^2 \end{aligned}$$

millest

$$\omega_{kp} = -1,987/(3,2 \cdot 10^3) = -0,621 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx -0,62 \text{ mm}$$

$$\varphi_{dp} = 2,392/(3,2 \cdot 10^3) = 0,000748$$

Temperatuuri muutus. Kui ühikjõud rakendatakse staatikaga määramatule skeemile, siis kasutatakse paigutiste arvutamiseks avaldist (18.43):

$$\Delta_{kt} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} (m^n \alpha \Delta t/h + n^n \alpha t_0) ds$$

Vertikaalsiire (epüürid joon. 18.17, b ja f)

$$\begin{aligned} \omega_{kt} &= 30\alpha [-3,0 \cdot 0,082/0,30 + 3,059(0,381 + 0,311)/0,50 - \\ &- 4,2 \cdot 0,121/0,40] - 5\alpha [3,0 \cdot 0,510 + 3,059(0,265 + 0,069) + \\ &+ 4,2 \cdot 0,490] = 4,16 \cdot 10^{-4} \text{ m} \approx 0,42 \text{ mm} \end{aligned}$$

Sõlme d pööre (epüürid joon. 18.17, c ja g)

$$\begin{aligned} \varphi_{dt} &= 30 \cdot 10^{-5} [3,0 \cdot 0,018/0,30 - 6,119 \cdot 0,216/0,50 + \\ &+ 4,2 \cdot 0,131/0,40] + 5 \cdot 10^{-5} [3,0 \cdot 0,159 + 6,119 \cdot 0,146 - \\ &- 4,2 \cdot 0,159] = -0,000291 \end{aligned}$$

Rakendades üldistatud ühikjõu staatikaga määratavale skeemile ja kasutades nüüd avaldist (18.44), milles ei arvestata piki- ja põikjõudude mõju ($N_t^n = 0$; $Q_t^n = 0$),

$$\Delta_{kt} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} (m_k^0 M_t^n / EI_0) ds + \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} (m_k^0 \alpha \Delta t/h + n_k^0 \alpha t_0) ds$$

leitakse vertikaalsiire (epüürid 18.17, d ja h ; 18.15, b)

$$\begin{aligned} \omega_{kt} &= -(3,133 \cdot 1,5/2) \cdot 2,938/(3,2 \cdot 10^3) + 10^{-5} \cdot 30 \cdot 6,119 \cdot 1,5/(2 \cdot 0,50) - \\ &- 10^{-5} \cdot 5(3,0 \cdot 0,5 + 4,2 \cdot 0,5) = 4,17 \cdot 10^{-4} \text{ m} \approx 0,42 \text{ mm} \end{aligned}$$

ja sõlme d pööre (epüürid 18.17, e ; 18.15, b)

$$\varphi_{dt} = -4,2 \cdot 2,622 \cdot 1/3,2 \cdot 10^3 + 10^{-5} \cdot 30 \cdot 4,2 \cdot 1/0,4 = -0,000291$$

Toe b vajumine. Ühikjõud rakendatakse staatikaga määramatule skeemile (joon. 18.17, b ja c) ja paigutised arvutatakse valemiga (18.45):

$$\Delta_{kr} = - \sum_{j=1}^m \Delta c_j r_{jk}^n$$

Vertikaalsiire ($r_{bk}^n = 0,490$; joon. 18.17, b ja f)

$$\omega_{kr} = -(-0,490) \cdot 0,01 = 0,0049 \text{ m} = 4,9 \text{ mm}$$

Sõlme d pööre ($r_{bd}^n = 0,159$; joon. 18.17, c ja g)

$$\varphi_{dr} = -(-0,159 \cdot 0,01) = 0,00159$$

Kui ühikjõud rakendatakse staatikaga määratavale põhiskeemile, siis leitakse paigutised avaldisega (18.46), kusjuures põik- ja pikijõudude mõju ei arvestata:

$$\Delta_{kr} = \sum_{j=1}^v \int_0^{l_j} (m_k^0 M_r^n / EI_0) ds - \sum_{j=1}^m \Delta c_j \cdot r_{jk}^0$$

Vertikaalsiire (M_r^n epüür joonisel 18.15, c ; $r_{bk}^0 = 0,5$)

$$\begin{aligned} \omega_{kr} &= -(3,133 \cdot 1,5/2) \cdot 0,140/(3,2 \cdot 10^3) + 0,5 \cdot 0,01 = 4,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} = \\ &= 4,9 \text{ mm} \end{aligned}$$

Sõlme d pööre (M_r^n epüür joonisel 18.15, c ; $r_{bd}^0 = 0$)

$$\varphi_{dr} = 4,2 \cdot 1 \cdot 1,214/3,2 \cdot 10^3 = 0,00159$$

Paigutiste arvutamisel erinevate valemitega on saadud praktiliselt võrdsed tulemused.

18.19. Raami arvutus maatrikstehetega

Maatrikssümboolikas ülesande lahendamine koosneb kahest osast: 1) raami elastseid ja geomeetrilisi omadusi ning koormuse mõju iseloomustavate maatriksite koostamine, 2) maatrikstehted sisejõudude ja paigutiste arvutamiseks.

Jõumeetodi kanoonilised võrrandid

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{10} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{20} &= 0 \\ \dots & \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{n0} &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

maatrikskujul on:

$$\mathbf{D}_1 \mathbf{X} + \mathbf{D}_0 = 0 \quad (18.59)$$

Maatriks

$$\mathbf{D}_1 = \|\delta_{ki}\| = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix} \quad (18.60)$$

on kanooniliste võrrandite (a) tundmatute X_i ees olevate kordajate δ_{ki} (paigutiste) maatriks. Maatriksil on n rida ja n veergu.

Lisatundmatute maatriks

$$\mathbf{X} = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1q} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nq} \end{vmatrix} \quad (18.61)$$

koosneb n reast ja q veerust, kus q on koormusskeemide arv. Koormusskeemide hulka võetakse ka temperatuuri muutused ja tuge paigutised.

Maatriks

$$\mathbf{D}_0 = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1q} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nq} \end{vmatrix} \quad (18.62)$$

on staatikaga määratavas põhiskeemis erinevatest koormusjuhtudest, temperatuuri muutustest ja tuge paigutistest põhjustatud lisatundmatutele vastavate üldistatud paigutiste maatriks ning koosneb n reast ja q veerust.

Paigutiste δ_{ki} maatriks \mathbf{D}_1 , kui raami skeem on jaotatud t elemendiks, leitakse valemiga (16.77):

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{b}'_i \mathbf{f} \mathbf{b}_i \quad (18.63)$$

ehk

$$\mathbf{D}_1 = \begin{vmatrix} b'_{11} & b'_{12} & \dots & b'_{1j} & \dots & b'_{1t} \\ b'_{21} & b'_{22} & \dots & b'_{2j} & \dots & b'_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b'_{k1} & b'_{k2} & \dots & b'_{kj} & \dots & b'_{kt} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b'_{n1} & b'_{n2} & \dots & b'_{nj} & \dots & b'_{nt} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & f_j & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & f_t \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{k1} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{k2} & \dots & b_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1j} & b_{2j} & \dots & b_{kj} & \dots & b_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1t} & b_{2t} & \dots & b_{kt} & \dots & b_{nt} \end{vmatrix} \quad (18.64)$$

Esimese maatriksi \mathbf{b}'_i element b'_{kj} on üldistatud ühikjõust I_k põhjustatud raami elemendi j paindemomendi veergmaatriksi \mathbf{b}_i

$$\mathbf{b}_{kj} = \{m_{ak,j} m_{ck,j} m_{bk,j}\}; \quad \mathbf{b}'_{kj} = \{m_{ak,j} m_{bk,j}\} \quad (18.65)$$

transponeeritud ridamaatriks ja esitatakse avaldisega (16.68) või (16.71):

$$\mathbf{b}'_{kj} = \|m_{ak,j} m_{ck,j} m_{bk,j}\|; \quad \mathbf{b}'_{kj} = \|m_{ak,j} m_{bk,j}\| \quad (18.66)$$

Raami elemendi j muutusmaatriksi f element leitakse valemiga (16.69) või (16.72); eeldatakse, et elemendi ülatusel on ristlõige konstantne:

$$\mathbf{f}_j = \frac{l_j}{6EI_j} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{f}_j = \frac{l_j}{6EI_j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (18.67)$$

Maatriksvõrrandi (18.59) vabaliige maatriks \mathbf{D}_0 koosneb kolmest osast:

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{D}_p \vdash \mathbf{D}_t \vdash \mathbf{D}_r \quad (18.68)$$

ja esitab välismõjudest põhjustatud eemaldatud liigsidele vastavate paigutiste ($\Delta_{k0} = \Delta_{kp} + \Delta_{kt} + \Delta_{kr}$) maatrikseid. Koormusest põhjustatud lisatundmatutele vastavate paigutiste maatriks \mathbf{D}_p arvutatakse analoogiliselt maatriksiga \mathbf{D}_1 :

$$D_p = b'_i f b \quad (18.69)$$

ehk

$$D_p = \begin{vmatrix} b'_{11} & b'_{12} & \dots & b'_{1j} & \dots & b'_{1t} \\ b'_{21} & b'_{22} & \dots & b'_{2j} & \dots & b'_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b'_{k1} & b'_{k2} & \dots & b'_{kj} & \dots & b'_{kt} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b'_{n1} & b'_{n2} & \dots & b'_{nj} & \dots & b'_{nt} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & f_2 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & f_j & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & f_t \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{p11} & b_{p21} & \dots & b_{p1i} & \dots & b_{pqi} \\ b_{p12} & b_{p22} & \dots & b_{p12} & \dots & b_{pqi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & b_{p1i} & \dots & b_{pqi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1i} & b_{p2i} & \dots & b_{p1i} & \dots & b_{pqi} \end{vmatrix} \quad (18.70)$$

milles

$$b_{p1i} = \{M_{ap1i} \ M_{cp1i} \ M_{bp1i}\} \quad (18.71)$$

või

$$b_{p1i} = \{M_{ap1i} \ M_{bp1i}\}$$

Valemities (18.71) tähistab indeks j raami elementi ja tähed a, b, c — selle elemendi vasak- ja parempoolset ning keskmist ristlõiget; indeks i tähistab siin koormuskeemi.

Temperatuuri muutustest ja tugevde nihkumisest põhjustatud lisatundmatutele vastavate paigutiste maatriksid on ühesuguse kujuga:

$$D_t = b'_i H_t; \quad D_r = b'_i H_r \quad (18.72)$$

milles H_t ja H_r on vastavalt temperatuuri muutusest ning tugevde nihkumisest (või ka konstruktsiooni ebatäpsest montaažist) põhjustatud raami elementide deformatsioonide maatriksid staatikaga määratud põhiskeemis. Sõrestiku varraste maatriksi H elementideks on varraste pikkuste muutused. Temperatuuri muutusest põhjustatud maatriksi H elemendid sõrestiku varraste jaoks leitakse valemiga

$$\Delta l = \alpha \Delta l t_0$$

milles α — temperatuuri-joonpaisumise koefitsient, l — varda pikkus, t_0 — temperatuuri muutus varda telgjoonel. Painutatud varraste puhul on maatriksi H elementideks varda (või selle osa) otsristlõigete pöörded, mis arvutatakse valemiga (16.62). Varda otsristlõike pöörde arvutamine on lihtsam, kui põhiskeem saadakse staatikaga määramatule skeemile liigendite sisseviimisega, mitte aga varda läbilõikamisega. Praktiselt arvutamisel osutub sageli lihtsamaks leida vahetult kanooniliste võrrandite vabaliikmed (maatriksite D_t ja D_r elemendid) valemitega (16.33) ning (16.34) ilma maatriksit H koostamata.

Võrrandi (18.59) võib lahendada otseselt. Kui erinevate välismõjude arv on suurem kui konstruktsiooni arvutusskeemi staatikalise määramatuse aste, siis võib osutada otstarbekaks lahendada võrrand pöördmaatriksi abil:

$$X = -D_1^{-1} D_0 \quad (18.73)$$

Pöördmaatriksi D_1^{-1} i -nda rea k -nda veeru elemendiks δ_{ik}^{-1} on maatriksi D_1 elemendi δ_{ki} alamdeterminant $D_{1,ki}$ mis on jagatud maatriksi D_1 determinandiga, kusjuures märk leitakse valemiga $(-1)^{k+i}$. Alamdeterminant $D_{1,ki}$ saadakse determinandist $\det D_1$, jättes ära k -nda rea ja i -nda veeru, kusjuures märgiks on $(-1)^{k+i}$. Seega

$$\delta_{ik}^{-1} = D_{1,ki} / \det D_1 \quad (18.74)$$

milles

$$D_{1,ki} = (-1)^{k+i} \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1,i-1} & \delta_{1,i+1} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2,i-1} & \delta_{2,i+1} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k-1,1} & \delta_{k-1,2} & \dots & \delta_{k-1,i-1} & \delta_{k-1,i+1} & \dots & \delta_{k-1,n} \\ \delta_{k+1,1} & \delta_{k+1,2} & \dots & \delta_{k+1,i-1} & \delta_{k+1,i+1} & \dots & \delta_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{n,i-1} & \delta_{n,i+1} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix} \quad (18.75)$$

Sisejõud arvutatakse jõumeetodi puhul valemiga (18.35), mis maatrikskujul on järgmine:

$$S = S^0 + sX \quad (18.76)$$

ehk

$$S = S^0 - sD_1^{-1} D_0 \quad (18.77)$$

Siin S^0 on koormusest põhjustatud sisejõudude maatriks staatikaga määratud põhiskeemis, s — sisejõudude maatriks staatikaga määratud põhiskeemile rakendatud ühiklisatundmatutest, X — lisatundmatute maatriks. Sisejõudude arvutamisel temperatuuri muutusest ja tugede paigutistest võrdub esimene liige S^0 valemis (18.76) nulliga, kuna need välismõjud ei põhjusta sisejõudusid staatikaga määratavas põhiskeemis. Nende sisejõudude arvutamisel, mida kasutati lisatundmatute leidmisel, omavad valemid (18.76) ja (18.77) järgmist kuju:

$$b = b_p + b_1 X, \quad b = b_p - b_1 D_1^{-1} D_0 \quad (18.78)$$

Analoogiliselt punktis 18.16 esitatud kolme valemiga (18.40), (18.41), (18.42) võib koormuse poolt põhjustatud paigutisi staatikaga määratava konstruktsioonis ka maatrikskujul leida kolme erineva avaldisega:

$$v = b'_3 f b \quad (18.79)$$

$$v = b'_2 f b \quad (18.80)$$

$$v = b'_3 f b_p \quad (18.81)$$

milles maatriksid b_2 ja

$$b_3 = b_2 + b_1 X_1 \quad (18.82)$$

on sisejõudude maatriksid vastavalt staatikaga määratavale põhiskeemile ning staatikaga määratavale konstruktsioonile rakendatud üldistatud ühikjõududest nendes kohtades, kus soovitakse leida paigutisi. Avaldises (18.82) on maatriks X_1 võrrandisüsteemi

$$D_1 X_1 + D_{p1} = 0 \quad (18.83)$$

lahendiks

$$X_1 = -D_1^{-1} D_{p1} \quad (18.84)$$

kus

$$D_{p1} = b'_1 f b_2 \quad (18.85)$$

Staatikaga määratus konstruktsioonis arvutatakse paigutised temperatuuri muutusest ja tugede paigutistest järgmiste valemitega:

$$v = b'_3 H \quad (18.86)$$

või

$$v = b'_2 (f b + H) = b'_2 f b + b'_2 H = b'_2 f b + v^0 \quad (18.87)$$

milles b on sisejõudude maatriks staatikaga määratus

konstruktsioonis vastavalt kas temperatuuri muutusest või tugede paigutistest:

$$b = b_1 X = -b_1 D_1^{-1} D_0 = -b_1 D_1^{-1} b'_1 H \quad (18.88)$$

ja $v^0 = b'_2 H$ on paigutised staatikaga määratavas skeemis.

Näide 18.7. Konstrueerida joonisel 18.18, a esitatud raami paindemomendi ja pikijõu epüürid, arvutada sõlme d pöör raami skeemil esitatud koormusest, temperatuuri muutusest ning toe b vajumisest $\Delta_b = 1$ cm. Andmed on samad, kui näite 18.6 puhul. Valitud $EI_0 = EI_3 = 3,2 \cdot 10^3$ tm².

Põhiskeem koos lisatundmatutega on esitatud joonisel 18.18, b. Niisuguse põhiskeemiga on varraste elementide arv ühe võrra väiksem kui eelmise näite juures.

Raami varraste muutusmaatriksid arvutatakse valemitega (18.67):

$$f_{ac} = \frac{3,0}{6} \cdot \frac{64}{27EI_0} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 1,1852 & 0 & 0 \\ 0 & 4,7407 & 0 \\ 0 & 0 & 1,1852 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ \\ \end{vmatrix} \frac{1}{\text{tm}} \quad (a)$$

$$f_{cd} = \frac{6,0}{6 \cdot 0,9806} \cdot \frac{64}{125EI_0} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 1,0443 & 0,5221 \\ 0,5221 & 1,0443 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ \\ \end{vmatrix} \frac{1}{\text{tm}} \quad (b)$$

$$f_{db} = \frac{4,2}{6EI_0} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 1,4 & 0,7 \\ 0,7 & 1,4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ \\ \end{vmatrix} \frac{1}{\text{tm}} \quad (c)$$

Konsooli ed muutusmaatriksit ei ole vaja, kuna sisejõud konsoolis on arvutatavad staatika tasakaalutingimustega ja tema jäikus ei mõjuta sisejõude teistes varrastes ning seepärast vahepeale arvutuse juures ei esitata konsooli jaoks ka sisejõudude maatrikseid.

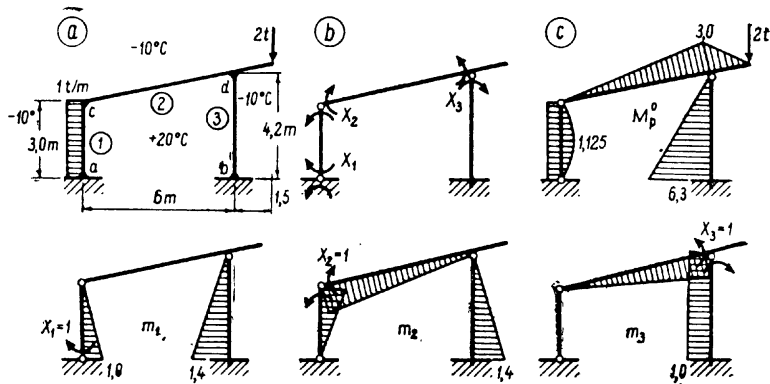
1. Sisejõud ja sõlme d pöör koormusest. Maatriksite b_1 ja b_p koostamiseks on esitatud ühiktundmatutest ja koormusest põhjustatud paindemomendi epüürid joonisel 18.18. Paigutiste arvutamisel loobutakse Q ja N mõjust.

Ühiktundmatutest ja koormusest põhjustatud paindemomentide maatriksid on järgmised:

$$b_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1,4 & -1,4 & 1 \end{vmatrix}; \quad b_p = \begin{vmatrix} 0 \\ 1,125 \\ 0 \\ 0 \\ -3,0 \\ 0 \\ 6,3 \\ -3,0 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ tm}$$

konsool

Paindemomendi epüürid m_1, m_2, m_3 on pidevad ja paigutiste δ_k arvutamisel võib sõlmedes c ning d maatriksi elemendid kirjutada ainult üks kord. Muutusmaatriksi f koostamisel liidetakse vastavad elemendid.



Joon. 18.18

$$D_1 = b_1' f b_1 =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 & 1,4 \\ 0 & 0,5 & 1 & 0 & -1,4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 1,1852 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4,7407 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,2295 & 0,5221 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5221 & 2,4443 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & 1,4 \end{vmatrix} b_1 =$$

$$= \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 1,1852 & 2,3704 & 0 & 0,98 & 1,96 \\ 0 & 2,3704 & 2,2295 & -0,4579 & -1,96 \\ 0 & 0 & 0,5221 & 3,1443 & 2,10 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1,4 & -1,4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 5,114 & -1,559 & 2,940 \\ -1,559 & 6,159 & -2,418 \\ 2,940 & -2,418 & 5,244 \end{vmatrix} \frac{1}{\text{tm}} \quad (d)$$

Kuna koormuse epüür M_p^0 sõlmes d ei ole pidev ($M_{dc}^0 = -3 \text{ tm}$, $M_{db}^0 = 0$), siis maatriksi D_p arvutamisel võib maatriksit f_{db} nihutada ainult ühe rea võrra ülespoole ja mitte enam ühe veeru võrra vasakule:

$$D_p = b_1' f b_p =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 & 1,4 \\ 0 & 0,5 & 1 & 0 & -1,4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 1,1852 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4,7407 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,2295 & 0,5221 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5221 & 1,0443 & 1,4 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 1,4 \end{vmatrix} b_p =$$

$$= \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 1,1852 & 2,3704 & 0 & 0 & 0,98 & 1,96 \\ 0 & 2,3704 & 2,2295 & 0,5221 & -0,98 & -1,96 \\ 0 & 0 & 0,5221 & 1,0443 & 2,1 & 2,1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1,125 \\ 0 \\ -3,0 \\ 0 \\ 6,3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 15,015 \\ -11,248 \\ 10,097 \end{vmatrix} \quad (e)$$

Avaldisega (18.75) arvutatakse pöördmaatriksi D_1^{-1} elemendid ja tervikuna on see järgmine:

$$D_1^{-1} = EI_0 \begin{vmatrix} 0,28922 & 0,01166 & -0,15677 \\ 0,01166 & 0,19872 & 0,08509 \\ -0,15677 & 0,08509 & 0,31782 \end{vmatrix} \quad (f)$$

Teisenduse kontroll:

$$D_1 D_1^{-1} = \frac{1}{EI_0} \begin{vmatrix} -5,114 & -1,559 & 2,940 \\ -1,559 & 6,159 & -2,418 \\ 2,940 & -2,418 & 5,244 \end{vmatrix} =$$

$$\cdot EI_0 \begin{vmatrix} 0,28922 & 0,01166 & -0,15677 \\ 0,01166 & 0,19872 & 0,08509 \\ -0,15677 & 0,08509 & 0,31782 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{vmatrix}$$

Pöördmaatriksi abil leitakse nüüd tundmatud:

$$X = -D_1^{-1} D_p =$$

$$= -EI_0 \begin{vmatrix} 0,28922 & 0,01166 & -0,15677 \\ 0,01166 & 0,19872 & 0,08509 \\ -0,15677 & 0,08509 & 0,31782 \end{vmatrix} \cdot \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 15,015 \\ -11,248 \\ 10,097 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2,628 \\ 1,201 \\ 0,102 \end{vmatrix} \text{ tm}$$

Järgnevalt leitakse paindemomendid:

$$M = b = b_p + b_1 X =$$

$$= b_p + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1,4 & -1,4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2,628 \\ 1,201 \\ 0,102 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1,125 \\ -3,0 \\ 0 \\ 6,3 \\ -3,0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2,628 \\ -0,713 \\ 1,201 \\ 0,102 \\ 0,102 \\ -5,259 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2,628 \\ 0,412 \\ 1,201 \\ -2,898 \\ 0,102 \\ 1,041 \\ -3,000 \\ 0,000 \end{vmatrix} \text{ tm}$$

Epüür on esitatud joonisel 18.19, a.

Arvutuse kontrolliks leitakse lisatundmatutele vastavad paigutised:

$$\Delta_k = b'_1 f b =$$

$$= \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 1,1852 & 2,3704 & 0 & 0 & 0,98 & 1,96 \\ 0 & 2,3704 & 2,2295 & 0,5221 & -0,98 & -1,96 \\ 0 & 0 & 0,5221 & 1,0443 & 2,10 & 2,10 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2,628 \\ 0,412 \\ 1,201 \\ -2,898 \\ 0,102 \\ 1,041 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 0,0010 \\ -0,0003 \\ 0,0010 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Sõlme d pöörde arvutamiseks valemiga (18.80) rakendatakse põhiskeemile ühikmoment. Paindemomendi epüür on esitatud joonisel 18.19, b . Maatriks b'_2 on järgmine:

$$b'_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

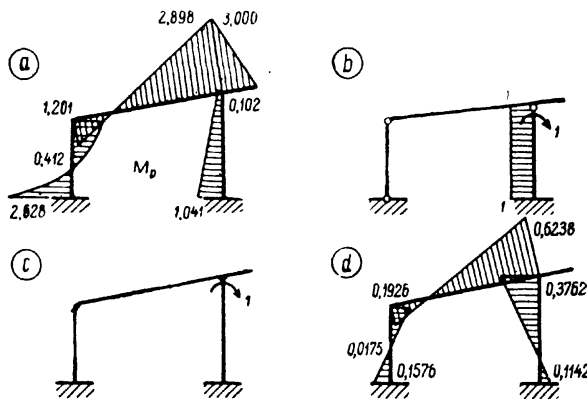
ning sõlme d pöörde leitakse valemiga (18.80):

$$\varphi_d = b'_2 f b =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 1,1852 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4,7407 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,2295 & 0,5221 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5221 & 1,0443 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,4 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 1,4 \end{vmatrix} b =$$

$$= \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2,1 & 2,1 \end{vmatrix} \cdot \{-2,628 \ 0,412 \ 1,201 \ -2,898 \ 0,102 \ 1,041\} =$$

$$= 2,400/EI_0 = 2,400/(3,2 \cdot 10^3) = 0,000750$$



Joon. 18.19

Sõlme d pöörde arvutamiseks valemitega (18.79) ja (18.81) rakendatakse ühikmoment staatikaga määramatule konstruktsioonile (joon. 18.19, c) ja leitakse paindemomendi epüür. Ühikmomendist põhjustatud lisatundmatute arvutamisel võib varda ac muutusmaatriksi esitada järgmisel kujul:

$$f_{ac} = \frac{3,0}{6} \cdot \frac{64}{27EI_0} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 2,3704 & 1,1852 \\ 1,1852 & 2,3704 \end{vmatrix} \frac{1}{tm} \quad (g)$$

Maatriksvõrrandi (18.83)

$$D_1 X_1 + D_{p_1} = 0$$

vabaliige arvutatakse valemiga (18.85):

$$D_{p_1} = b'_1 f b_2 =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1,4 \\ 0 & 1 & 0 & -1,4 \\ 0 & 0 & 1 & 1,0 \end{vmatrix} \cdot \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 2,3704 & 1,1852 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,1852 & 3,4147 & 0,5221 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5221 & 1,0443 & 1,4 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & 1,4 & 0 \end{vmatrix} b_2 =$$

$$= \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 2,3704 & 1,1852 & 0 & 0,98 & 1,96 \\ 1,1852 & 3,4147 & 0,5221 & -0,98 & -1,96 \\ 0 & 0,5221 & 1,0443 & 2,10 & 2,10 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 2,94 \\ -2,94 \\ 4,20 \end{vmatrix} \frac{1}{tm}$$

Maatriksvõrrandi lahend leitakse pöördmaatriksi abil:

$$X_1 = -EI_0 \begin{vmatrix} 0,28922 & 0,01166 & -0,15677 \\ 0,01166 & 0,19872 & 0,08509 \\ -0,15677 & 0,08509 & 0,31782 \end{vmatrix} \cdot \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 2,94 \\ -2,94 \\ 4,20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,1576 \\ 0,1926 \\ -0,6238 \end{vmatrix}$$

Ühikmomendist põhjustatud paindemomendi maatriks on nüüd:

$$b_3 = b_2 + b_1 X_1 =$$

$$= b_2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1,4 & -1,4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -0,1576 \\ 0,1926 \\ -0,6238 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -0,1576 \\ 0,0175 \\ 0,1926 \\ -0,6238 \\ -0,6238 \\ -1,1141 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,1576 \\ 0,0175 \\ 0,1926 \\ -0,6238 \\ 0,3762 \\ -0,1141 \end{vmatrix}$$

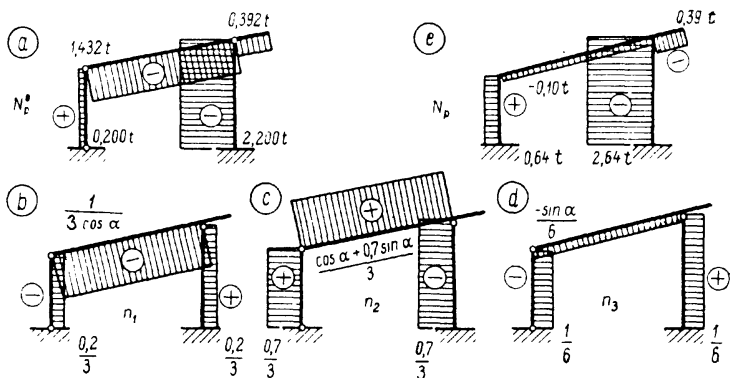
Epüür on esitatud joonisel 18.19, d .

Sõlme d pöörde, arvatud valemiga (18.79),

$$\varphi_d = b'_3 f b =$$

$$= \begin{vmatrix} -0,1576 & 0,0175 & 0,1926 & -0,6238 & 0,3762 & -0,1141 \end{vmatrix} \cdot$$

$$\frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 1,1852 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4,7407 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,2255 & 0,5221 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5221 & 1,0443 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,4 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 1,4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2,628 \\ 0,412 \\ 1,201 \\ -2,898 \\ 0,102 \\ 1,041 \end{vmatrix} =$$



Joon. 18.20

$$= \frac{1,0}{EI_0} \cdot \begin{vmatrix} -0,1868 & 0,0830 & 0,1029 & -0,5509 & 0,4467 & 0,1035 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2,628 & 0,412 & 1,201 & -2,898 & 0,102 & 1,041 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,399 \end{vmatrix} / EI_0 = 2,399 / (3,2 \cdot 10^3) = 0,000750$$

või valemiga (18.81)

$$\varphi_d = \mathbf{b}'_3 \mathbf{f} \mathbf{b}_p = \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} -0,1868 & 0,0830 & 0,1029 & -0,5509 & 0,4467 & 0,1035 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1,125 & 0 & -3,0 & 0 & 6,3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,398 \end{vmatrix} / EI_0 = 2,398 / (3,2 \cdot 10^3) = 0,000749$$

Pikijõudude arvutamiseks maatrikskujul on vaja koostada maatriksid koormusest ja ühiktundmatustest. Epüürid on esitatud joonisel 18.20. Pikijõud on varraste ulatusel konstantsed ja seepärast võib raami jaotada neljaks elemendiks.

$$\mathbf{b}_{1n} = \begin{vmatrix} -0,0667 & 0,2333 & -0,1666 \\ -0,3399 & 0,3726 & -0,0327 \\ 0,0667 & -0,2333 & 0,1666 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{vmatrix} \frac{1}{m}; \quad \mathbf{b}_{p,n} = \begin{vmatrix} 0,200 \\ -1,432 \\ -2,200 \\ -0,392 \end{vmatrix} t$$

Pikijõud leitakse nüüd valemiga (18.78):

$$\mathbf{N} = \mathbf{b} = \mathbf{b}_{p,n} + \mathbf{b}_{1n} \mathbf{X} = \mathbf{b}_{p,n} + \begin{vmatrix} -0,0667 & 0,2333 & -0,1666 \\ -0,3399 & 0,3726 & -0,0327 \\ 0,0667 & -0,2333 & 0,1666 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2,628 \\ 1,201 \\ 0,102 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,200 \\ -1,432 \\ -2,200 \\ -0,392 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,438 \\ 1,337 \\ -0,438 \\ 0,000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,638 \\ -0,095 \\ -2,638 \\ -0,392 \end{vmatrix} t$$

Epüür on kujutatud joonisel 18.20, e. Põikjõud arvutatakse analoogiliselt.

2. Sisejõud ja sõlme d pöörde temperatuuri muutusest ja toe b vajumisest.

Kanooniliste võrrandite vabaliikmed temperatuuri muutusest ja tuge paigutistest arvutatakse valemitega (16.33) ning (16.34):

$$\begin{aligned} \Delta_{1t} &= 30\alpha [1 \cdot 3,0 / (2 \cdot 0,30) + 1,4 \cdot 4,2 / (2 \cdot 0,40)] + 5\alpha (-3,0 \cdot 0,2/3 - 6,119 \cdot 0,3399 + 4,2 \cdot 0,2/3) = (370,5 - 10)\alpha = 360,5\alpha = 3,605 \cdot 10^{-3} \\ \Delta_{2t} &= 30\alpha [3,0 \cdot 1 / (2 \cdot 0,30) + 6,119 \cdot 1 / (2 \cdot 0,50) - 4,2 \cdot 1,4 / (2 \cdot 0,40)] + 5\alpha (3 \cdot 1,4/6 + 6,119 \cdot 0,3726 - 4,2 \cdot 1,4/6) = (113,1 + 10)\alpha = 1,231 \cdot 10^{-3} \\ \Delta_{3t} &= 30\alpha [6,119 \cdot 1 / (2 \cdot 0,50) + 4,2 \cdot 1 / 0,40] + 5\alpha (-3,0 \cdot 1/6 - 6,119 \cdot 0,0327 + 4,2 \cdot 1/6) = (498,6 + 0)\alpha = 4,986 \cdot 10^{-3} \\ \Delta_{1r} &= -[(0,2/3) \cdot 0,01] = -10^{-2} \cdot 0,2/3; \\ \Delta_{2r} &= -[(1,4/6) \cdot 0,01] = -10^{-2} \cdot 1,4/6; \\ \Delta_{3r} &= -[(1/6) \cdot 0,01] = -10^{-2} \cdot 1/6 \end{aligned}$$

Seega vabaliikmete maatriksid on järgmised:

$$\mathbf{D}_t = \begin{vmatrix} 3,605 \\ 1,231 \\ 4,986 \end{vmatrix} 10^{-3}; \quad \mathbf{D}_r = \begin{vmatrix} -1/15 \\ 1,4/6 \\ -1/6 \end{vmatrix} 10^{-2}$$

Pöördmaatriksiga (f) leitakse nüüd tundmatud temperatuuri muutusest ja toe b vajumisest:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t; \mathbf{X}_r &= -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{D}_t; \mathbf{D}_r \\ &= -EI_0 \begin{vmatrix} 0,28922 & 0,01166 & -0,15677 \\ 0,01166 & 0,19872 & 0,08509 \\ -0,15677 & 0,08509 & 0,31782 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0,3605 & -1/15 \\ 0,1231 & 1,4/6 \\ 0,4986 & -1/6 \end{vmatrix} 10^{-2} = \\ &= -32 \begin{vmatrix} 0,02753 & 0,00957 \\ 0,07109 & 0,03141 \\ 0,11242 & -0,02267 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,881 & -0,306 \\ -2,275 & -1,005 \\ -3,597 & 0,725 \end{vmatrix} tm \end{aligned}$$

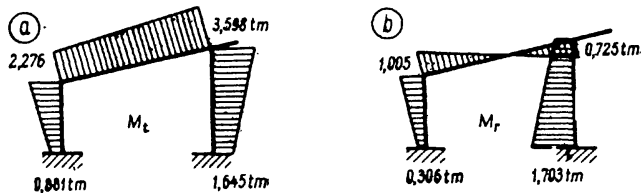
Paindemomendid arvutatakse valemiga (18.88):

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{b} = \mathbf{b}_1 \mathbf{X} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -0,881 & -0,306 \\ -2,275 & -1,005 \\ -3,597 & 0,725 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,881 & -0,306 \\ -2,275 & -1,005 \\ -3,597 & 0,725 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -0,881 & -0,306 \\ -2,275 & -1,005 \\ -3,597 & 0,725 \end{vmatrix} tm \end{aligned}$$

Epüürid on esitatud joonisel 18.21, a ja b.

Sõlme d pöörde arvutamiseks koostatakse maatriksid \mathbf{b}_3 (vt. joon. 18.19, d) ja \mathbf{H} :

$$\mathbf{b}_3 = \begin{vmatrix} -0,1576 \\ 0,1926 \\ -0,6238 \\ 0,3762 \\ -0,1142 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{vmatrix} 0,3605 & -0,0667 \\ 0,1231 & 0,2333 \\ 0,1836 & 0,1667 \\ 0,3150 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 \end{vmatrix} \cdot 10^{-2}$$



Joon. 18.21

Maatriksi H elemendid on leitud valemitega (16.33) ja (16.34). Sõlme d pööre leitakse nüüd valemiga (18.86):

$$\begin{aligned} \varphi_d &= v = b'_3 H = \\ &= \begin{vmatrix} -0,1576 & 0,1926 & -0,6238 & 0,3762 & -0,1142 \end{vmatrix} \\ &\cdot \begin{vmatrix} 0,3605 & -0,0667 \\ 0,1231 & 0,2333 \\ 0,1836 & 0,1667 \\ 0,3150 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 \end{vmatrix} \cdot 10^{-2} = \begin{vmatrix} 0,0291 & 0,159 \end{vmatrix} \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

Sõlme d pööre temperatuuri muutusest $\varphi_{dt} = 0,000291$ ja toe b vajumist $\varphi_{dr} = 0,00159$.

Kui sõlme pööre arvutamisel rakendatakse üldistatud ühikjõud staatikaga määratavale põhiskeemile (joon. 18.19, b), siis paigutised arvutatakse valemiga (18.87):

$$v = b'_2 (fb + H) = b'_2 fb + b'_2 H$$

milles

$$b'_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$f = \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 2,3704 & 1,1852 & 0 & 0 \\ 1,1852 & 3,4147 & 0,5221 & 0 \\ 0 & 0,5221 & 1,0443 & 0 \\ 0 & 0 & 1,4 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0,7 & 1,4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ tm}$$

$$b_t = \begin{vmatrix} -0,881 \\ -2,275 \\ -3,597 \\ -1,645 \end{vmatrix} \text{ tm}; \quad H_t = \begin{vmatrix} 0,3605 \\ 0,1231 \\ 0,1836 \\ 0,3150 \\ 0,0000 \end{vmatrix} \cdot 10^{-2}; \quad b_r = \begin{vmatrix} -0,306 \\ -1,005 \\ 0,725 \\ 1,704 \end{vmatrix} \text{ tm};$$

$$H_r = \begin{vmatrix} -0,0667 \\ 0,2333 \\ -0,1667 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \end{vmatrix} \cdot 10^{-2}$$

Kuna maatriksil b'_2 on ainult kaks viimast elementi nullist erinevad, siis paigutise arvutamisel jäetakse nullelemendid ära ja ülejäänud maatriksitel kirjutatakse kahe alumise rea elemendid.

Sõlme d pööre temperatuuri muutusest

$$\begin{aligned} \varphi_{dt} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix} \left[\frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 1,4 & 0,7 \\ 0,7 & 1,4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3,597 \\ -1,645 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,3150 \\ 0,0000 \end{vmatrix} \cdot 10^{-2} \right] = \\ &= \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 2,1 & 2,1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3,597 \\ -1,645 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,3150 \end{vmatrix} \cdot 10^{-2} = \\ &= -11,008 / (3,2 \cdot 10^3) + 0,3150 \cdot 10^{-2} = -0,000290 \end{aligned}$$

ja toe b vajumisest

$$\begin{aligned} \varphi_{dr} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \left[\frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 1,4 & 0,7 \\ 0,7 & 1,4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0,725 \\ 1,704 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,000 \\ 0,000 \end{vmatrix} \right] = \\ &= \frac{1,0}{EI_0} \begin{vmatrix} 2,1 & 2,1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0,725 \\ 1,704 \end{vmatrix} = 5,101 / (3,2 \cdot 10^3) = 0,00159 \end{aligned}$$

18.2. Arvutuse lihtsustamise võimalused

18.2.1. Kõrvalpaigutised kanoonilistes võrrandites

Ülesande lahendamine vajab seda rohkem arvutamist, mida suurem on arvutuskeemi staatikaga määramatuse aste. Järgnevalt esitatakse mõned arvutuste vähendamise võimaldavad võtted, mis on eriti oluline klahvarvutiga lahendamisel. Kanooniliste võrrandite tundmatute kordajate ja vabaliikmete arvutamine ning võrrandisüsteemi lahendamine on kõige tülikam osa ülesande lahendamisel. Kui arvutuskeemil on kolm või rohkem lisatundmatut, siis tuleb valida niisugune põhiskeem, et saadakse võimalikult lihtsad kanoonilised võrrandid. Suurim tundmatute arv võrrandis võrdub staatikaga määramatuse astmega n . Tundmatute arv võrrandis on staatikaga määramatuse astmest väiksem, kui mõne tundmatu kordaja võrdub nulliga. Võrrandisüsteemi lahendamine on seda lihtsam, mida vähem on võrrandites tundmatuid.

Nulliga võib võrduda ainult kõrvalpaigutis δ_{hi} , mitte aga peapaigutis δ_{ii} . Kõrvalpaigutis $\delta_{hi} = 0$, kui integraalide summa

$$\Sigma \int (m_i m_k / EI) ds = 0 \quad (a)$$

Avaldise (a) puhul on arvestatud ainult paindemomen-

tide mõju. Integraal $\int_a^b (m_i m_h / EI) ds = 0$ näiteks, kui elemendi ab ulatusel on:

- 1) $m_i = 0$ ja $m_h \neq 0$;
- 2) $m_i \neq 0$ ja $m_h = 0$;
- 3) $m_i = 0$ ja $m_h = 0$;

4) lineaarselt muutuvate epüüride puhul ükskõik kumma epüüri raskuskeskme kohal teise epüüri ordinaat on null.

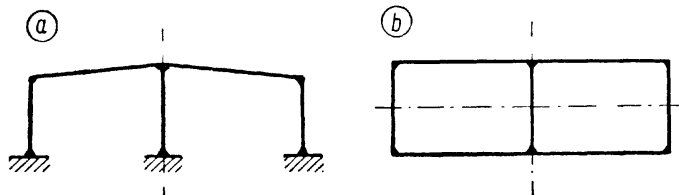
Integraalide summa (a) võrdub nulliga ka siis, kui integraalide väärtuste positiivsed ja negatiivsed summad on võrdsed.

Mida rohkem kõrvalpaigutisi võrdub nulliga, seda väiksem on tundmatute arv võrrandis. Kui võrrandis kõik kõrvalpaigutised võrduvad nulliga, siis on selles võrrandis ainult üks tundmatu, mille suurus on võrdne, kuid vastupidise märgiga, vabaliikme ja peapaigutise jagatisega. Võrrandisüsteemi kogu tundmatute arv võrdub staatikalise määramatuse astmega.

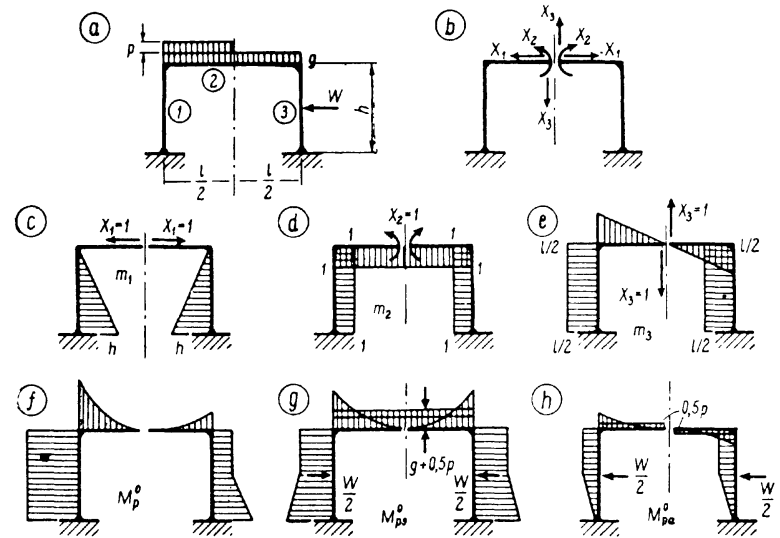
18.22. Sümmetriselised konstruktsioonid

Staatikaga määramatu konstruktsioon võib olla sümmeetriline ühe ja kahe telje suhtes (joon. 18.22, a ja b) või ka suurema arvu telgede suhtes. Seejuures peavad olema sümmeetrilised nii konstruktsiooni geomeetriselised mõõtmed kui ka elementide jäikused (joon. 18.22).

Suvalise koormusega staatikaga määramatu konstruktsiooni arvutamisel on suuremaks lihtsustuseks üldise võrrandisüsteemi lahutamise mitmeks üksteisest sõltumatuks võrrandite grupiks, mis saavutatakse sümmeetrilise põhiskeemi ja sümmeetriliste ning antisümmeetriliste lisatundmatutega. Ühe sümmeetriatelje puhul jaguneb



Joon. 18.22



Joon. 18.23

võrrandisüsteem kaheks, kahe telje puhul — neljaks jne. Lisatundmatu on sümmeetriline, kui ta sümmeetrilisele põhiskeemile on rakendatud sümmeetriliselt (pikijõud ja paindemoment joonisel 18.23, b), ning antisümmeetriline, kui sümmeetriatelje suhtes sümmeetriliselt asetsevate lisasidemete asemel on rakendatud antisümmeetrilised jõud (põikjõud joonisel 18.23, h)

Ühe sümmeetriateljega konstruktsiooni puhul jaguneb kanooniline võrrandisüsteem kaheks teineteisest sõltumatuks võrrandisüsteemiks, kusjuures üks sisaldab ainult sümmeetrilisi ja teine võrrandisüsteem ainult antisümmeetrilisi lisatundmatuid. Eelduseks on, et kõik lisatundmatud on valitud sümmeetrilised ja antisümmeetrilised. Põhjendus on väga lihtne: sümmeetrilises põhiskeemis tekivad sümmeetrilisest lisatundmatust sümmeetrilised sisejõud ja paigutised ning antisümmeetrilisest lisatundmatust antisümmeetrilised sisejõud ja paigutised. Järelikult igas võrrandis, mis koostatakse sümmeetrilisele lisatundmatule vastava paigutise kohta, võrduvad kõik antisümmeetrilistest tundmatutest põhjustatud paigutised nulliga. Igas võrrandis, mis koostatakse antisümmeetrilise

paigutise kohta, võrduvad nulliga kõik sümmeetrilistest lisatundmatutest põhjustatud paigutised.

Joonisel 18.23, *a* on kujutatud sümmeetriline ($EI_1 = EI_3$) kolmekordselt staatikaga määratu raam. Põhiskeem ja lisatundmatud on esitatud joonisel 18.23, *b*. Lisatundmatud pikijõud X_1 ja paindemoment X_2 on sümmeetrilised ning lisatundmatu põikjõud X_3 on antisümmeetriline. Sümmeetrilised lisatundmatud X_1 ja X_2 põhjustavad sümmeetrilised paindemomendi epüürid, mille ordinaadid sümmeetriatelje suhtes sümmeetriliselt asetsevas lõigetes on suuruselt võrdsed ja sama märgiga (joon. 18.23, *c* ja *d*). Antisümmeetrilistest lisatundmatust X_3 põhjustatud paindemomendi epüür (joon. 18.23, *e*) on antisümmeetriline. Antisümmeetrilise epüüri sümmeetriliselt asetsevas lõigetes on momendid võrdsed, kuid vastupidiste märkidega. Kahe epüüri, millest üks on sümmeetriline ja teine antisümmeetriline, ordinaatide korrutiste integraalide summa kogu raami ulatusel võrdub nulliga:

$$\Sigma \int m^{(s)} m^{(a)} ds = 0 \quad (b)$$

sest sümmeetriliselt asetsevate varraste integraalid on võrdsed, kuid vastupidiste märkidega.

Joonisel 18.23, *a* kujutatud raami põhiskeemi ja lisatundmatute (joon. 18.23, *b*) jaoks koostatud üldine võrrandisüsteem

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} &= 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} &= 0 \end{aligned} \quad (c)$$

jaguneb kaheks — sümmeetrilisi lisatundmatuid X_1 ja X_2 sisaldavaks võrrandisüsteemiks

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} &= 0 \end{aligned} \quad (d)$$

ning antisümmeetrilise lisatundmatuga X_3 võrrandiks

$$\delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0 \quad (e)$$

sest

$$\delta_{13} = \delta_{31} = 0 \quad \text{ja} \quad \delta_{23} = \delta_{32} = 0$$

Koormusest põhjustatud epüüride ja paigutiste arvutamist lihtsustatakse koormuse lahutamiseega sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks (joon. 18.23, *j*, *g*, *h*).

Sümmeetrilisest koormusest põhjustatud sümmeetrilises paigutisolukorras võrdub antisümmeetrilisele tundmatule vastav paigutis nulliga ($\Delta_{3ps} = 0$) ning järelikult kõik antisümmeetrilised tundmatud on nullid ($X_{3s} = 0$).

Antisümmeetrilisest koormusest põhjustatud antisümmeetrilises paigutusolukorras võrdub sümmeetrilisele tundmatule vastav paigutis nulliga ($\Delta_{1p,a} = 0$; $\Delta_{2p,a} = 0$) ning järelikult kõik sümmeetrilised tundmatud on nullid ($X_{1a} = 0$; $X_{2a} = 0$).

Paigutiste Δ_{1p} ja Δ_{2p} arvutamisel kasutatakse M_{ps}^0 epüüri ja paigutise Δ_{3p} arvutamisel M_{pa}^0 epüüri.

Staatikaga määratu konstruktsiooni paindemomendi epüür arvutatakse järgmise valemiga:

$$M_h = M_{hs}^0 + m_{h1}X_1 + m_{h2}X_2 + M_{ha}^0 + m_{h3}X_3 \quad (f)$$

milles kolme esimese liikme summa esitab sümmeetrilisest koormusest ja kahe viimase liikme summa — antisümmeetrilisest koormusest põhjustatud paindemomenti.

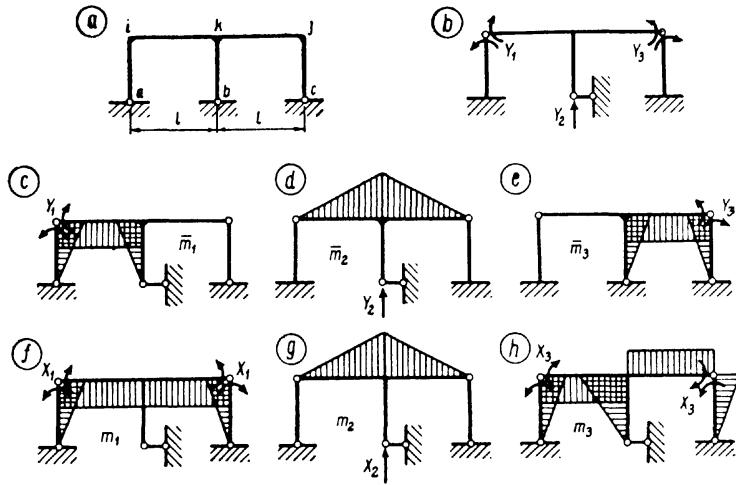
18.23. Grupptundmatud

Raamide arvutamisel on sageli otstarbekas üksikute jõudude asemel võtta lisatundmatuteks jõudude grupid. Eriti otstarbekad on grupptundmatud sümmeetriliste raamide arvutamisel. Olgu n korda staatikaga määratu arvutuskeemi lisatundmatud esialgselt tähistatud Y_1, Y_2, \dots, Y_n . Lisatundmatu Y_i ($i=1, 2, \dots, n$) on konstruktsiooni ristlõikes esinev sisejõud või toereaktsioon. Lisatundmatu Y_i asemel võib võtta üheks lisatundmatuks korruga mitmes (vahel ka ainult ühes) ristlõikes esinevad sisejõud. Neid korruga mitmes (või ka ühes) ristlõikes esinevaid sisejõude või ka toereaktsioone, mis on võetud ühe lisatundmatuna, nimetatakse grupptundmatuks ja tähistatakse X_i . Grupptundmatut X_i võib avaldada n parameetriga lisatundmatute Y_1, Y_2, \dots, Y_n kaudu:

$$X_i = \alpha_i Y_1 + \beta_i Y_2 + \gamma_i Y_3 + \dots + \nu_i Y_n \quad (a)$$

milles $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \dots, \nu_i$ on vabalt valitavad tegurid, kusjuures osa neist võivad olla nullid. Tegurid α_i, β_i, \dots valitakse niimoodi, et võimalikult rohkem kõrvalpaigutisi võrdub nulliga.

Grupptundmatute mõistet selgitame joonisel 18.24, *a* esitatud raamiga, mis on kolmekordselt staatikaga määratu. Põhiskeem koos liht-lisatundmatutega Y_1, Y_2 ja Y_3



Joon. 18.24

on näidatud joonisel 18.24, *b*. Ühiktundmatutest põhjustatud epüürid on kujutatud joonisel 18.24, *c*, *d* ja *e*. Ükski kõrvalpaigutis ei võrdu nulliga ja paigutiste maatriks on järgmine:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} \quad (b)$$

Staatikaga määramatu sümmeetrilise arvutuskeemi puhul valitakse niisugused grupp-tundmatud, et ühik-grupp-tundmatutest põhjustatud epüürid põhiskeemis oleksid sümmeetrilised ja antisümmeetrilised. Esimese grupp-tundmatuna vaadeldava raami jaoks rakendatakse sõlmedesse *i* ja *j* kaksikmomendid X_1 sümmeetriliselt (joon. 18.24, *f*).

Avaldis (a) grupp-tundmatu X_1 jaoks on järgmine:

$$X_1 = \alpha_1 Y_1 + \beta_1 Y_2 + \gamma_1 Y_3 \quad \text{või} \quad X_1 = Y_1 + Y_3, \quad \text{kuna} \\ \alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 1$$

Kuna tundmatust Y_2 põhjustatud epüür m_2 on sümmeetriline, siis võetakse $X_2 = Y_2$, s.t. $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1$ ja $\gamma_2 = 0$ (joon. 18.24, *g*). Grupp-tundmatuks X_3 võetakse sõlmedes

i ja *j* antisümmeetriliselt rakendatud kaksikmomendid (joon. 18.24, *h*), s.t. $\alpha_3 = 1$, $\beta_3 = 0$ ja $\gamma_3 = -1$: $X_3 = Y_1 - Y_3$. Võrrandisüsteem jaguneb nüüd kaheks. Esimesed kaks võrrandit sisaldavad sümmeetrilisi tundmatuid X_1 ja X_2 ning kolmas võrrand ainult antisümmeetrilist tundmatut X_3 . Grupp-tundmatutele vastavate paigutiste maatriksid on järgmised:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad \delta_{33}$$

Grupp-tundmatutele vastavad paigutised leitakse epüüridega m_1 , m_2 ja m_3 . Võrrandisüsteemi lahendamiseks leitakse grupp-tundmatute suurused; paindemomendid arvutatakse nii nagu liht-tundmatute puhul avaldisega (18.28):

$$M_h = M_{hp}^0 + m_{h1} X_1 + m_{h2} X_2 + m_{h3} X_3$$

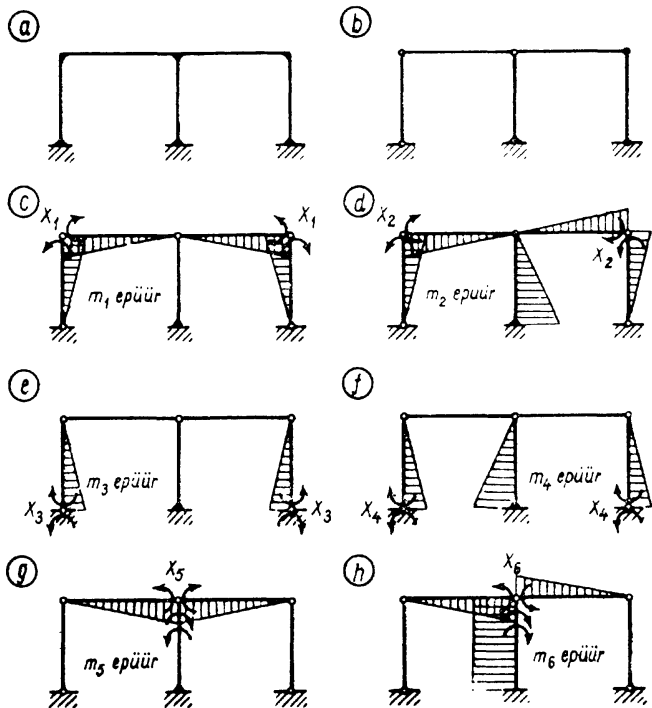
Analoogiliselt leitakse ka põik- ja pikijõud.

Raamide arvutamisel grupp-tundmatutega ei leita grupp-tundmatute ja liht-tundmatute vahelisi seoseid, s.t. ei määrata tegureid α_i , β_i , ... Algul leitakse staatikaga määratuse aste n . Järgnevalt valitakse põhiskeem ja lisatundmatuteks võetakse kohe grupp-tundmatud. Kõik lisatundmatud tähistatakse tähega X . Eespool liht-tundmatutega raamide arvutamise kohta esitatud kehtib ka grupp-tundmatutega lahendamisel.

Joonisel 18.25, *a* kujutatud raam on kuuekordselt staatikaga määramatu. Valitud põhiskeem on esitatud joonisel 18.25, *b*. Üldine kõrvalpaigutiste arv on $n(n-1)/2 = 6 \cdot 5/2 = 15$. Ühik-grupp-tundmatutest põhjustatud epüürid on kujutatud joonisel 18.25, *c*...*h*.

Grupp-tundmatud X_1 , X_3 ja X_5 on sümmeetrilised ning grupp-tundmatud X_2 , X_4 ja X_6 antisümmeetrilised. Valitud põhiskeemi ja grupp-tundmatutega on viieteistkümnest kõrvalpaigutisest kümme nullid. Võrrandisüsteem jaguneb kaheks: üks süsteem sümmeetriliste ja teine antisümmeetriliste tundmatutega:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{13} & \delta_{15} \\ \delta_{31} & \delta_{33} & 0 \\ \delta_{51} & 0 & \delta_{55} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \delta_{22} & \delta_{24} & \delta_{26} \\ \delta_{42} & \delta_{44} & \delta_{46} \\ \delta_{62} & \delta_{64} & \delta_{66} \end{vmatrix}$$

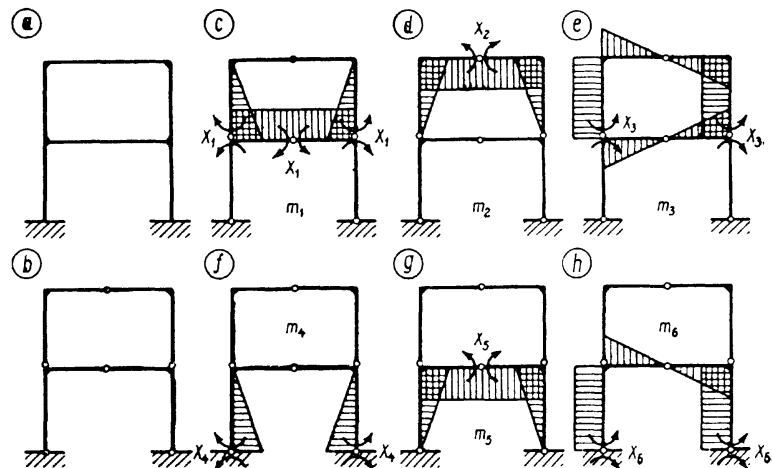


Joon. 18.25

Sama põhiskeemiga, kuid lihtlisatundmatuga arvutamisel ei võrdu nulliga ükski kõrvalpaigutis. Koostada tuleks kuuest võrrandist koosnev süsteem, igas võrrandis kuus tundmatut, ja see lahendada.

Joonisel 18.26, a kujutatud raam koosneb kahest suletud kontuurist ja on kuuekordselt staatikaga määratu ($n=6$). Üldine kõrvalpaigutiste arv on 15.

Kui põhiskeemina kasutada kahte kolme liigendiga raami (joon. 18.26, b) ja lihttundmatuid, siis on viieteistkümnest kõrvalpaigutisest ainult kolm võrdsed nulliga. Lahendada on vaja 6 võrrandit kuue tundmatuga. Grupp-tundmatute kasutamisel (joon. 18.26, c...h) jaguneb võrrandisüsteem kaheks kuna tundmatud X_1, X_2, X_4 ja X_5 on sümmeetrilised ning X_3 ja X_6 on antisümmeetrilised. Paigutiste maatriksid on järgmised:



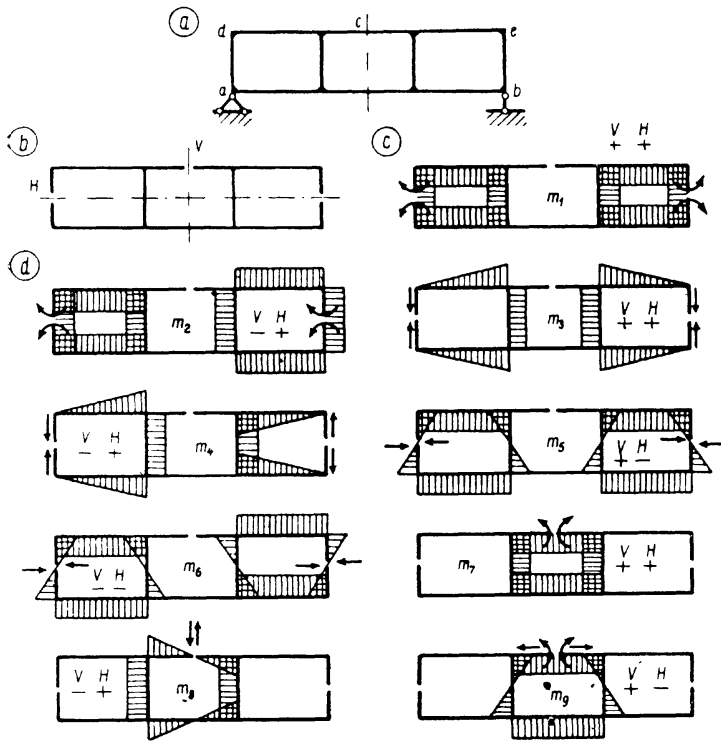
Joon. 18.26

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & 0 & \delta_{15} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{44} & \delta_{45} \\ \delta_{51} & 0 & \delta_{54} & \delta_{55} \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} \delta_{33} & \delta_{36} \\ \delta_{63} & \delta_{66} \end{vmatrix}$$

Kõrvalpaigutiste arv on 4.

Joonisel 18.27, a esitatud raam on sisejõudude suhtes üheksakordselt staatikaga määratu. Toesidemete arv on kolm ja toereaktsioonid on seetõttu arvutatavad tasakaalutingimustega. Esimeses järjekorras leitakse toereaktsioonid ja järgneva arvutuse juures käsitletakse neid kui koormust. Põhiskeem ilma toesidemeteta koosneb ühest geomeetriliselt muutumatust kujundist ja kuna lisatundmatud koosnevad paarikaupa vastupidiste suundadega mõjuvatest jõududest (tasakaalus koormus), siis põhiskeemile rakendatuna ei põhjusta nad toereaktsioone. Ühik-tundmatutest põhjustatud paindemomendi epüüride koostamisel ei kujutata seepärast toesidemeid.

Toesidemeteta kujundil on kaks sümmeetriatelge — vertikaalne ja horisontaalne. Kui võimalik, siis tuleb ka põhiskeem valida kahe telje suhtes sümmeetriline. Antud kujundi puhul ei ole see võimalik. Toesidemeteta põhiskeem (joon. 18.27, b) saadakse kolme suletud kontuuri

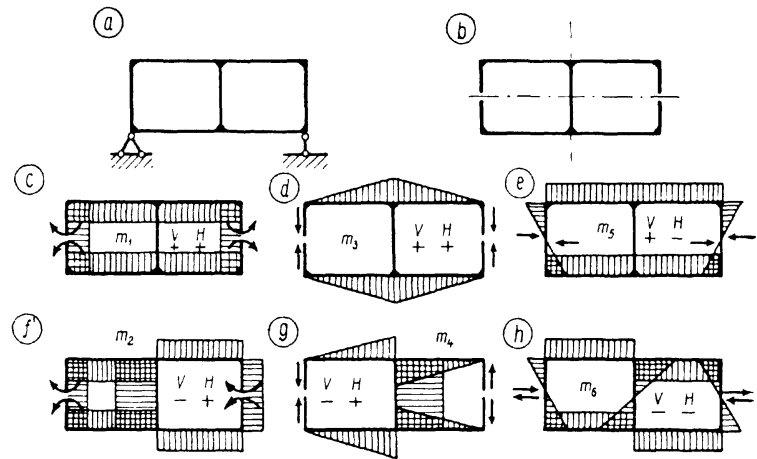


Joon. 18.27

läbilõikamisega. Tundmatutest põhjustatud paindemomendi epüürid on esitatud joonisel 18.27, *c...d*. Gruppundmatud X_1, \dots, X_6 põhjustavad sümmeetriatelgede suhtes sümmeetrilised ja antisümmeetrilised epüürid. Lihttundmatu paindemoment lõikes c X_7 põhjustab mõlema telje suhtes sümmeetrilise epüüri ja lihttundmatu pikijõud lõikes c X_8 vertikaaltelje suhtes antisümmeetrilise ning horisontaaltelje suhtes sümmeetrilise epüüri. Raami lõikes c mõjub veel tundmatu pikijõud. Pikijõud lõikes c põhjustab vertikaaltelje suhtes sümmeetrilise epüüri, kuid horisontaaltelje suhtes ei ole epüür sümmeetriline ega antisümmeetriline. Seepärast ei ole otstarbekas võtta tundmatuks X_9 ainult pikijõud lõikes c , vaid rakendada tema asemele gruppundmatu. Gruppundmatu X_9 koosneb pikijõust

ja paindemomendist, kusjuures nad valitakse selliselt, et epüür horisontaaltelje suhtes on antisümmeetriline. Paindemomendi epüüride juures on märgitud tähe V ja H all plussmärk, kui epüür on sümmeetriline vastavalt vertikaal- ja horisontaaltelje suhtes, ning miinusmärk, kui epüür on telje suhtes antisümmeetriline. Kõrvalpaigutis δ_{ki} on nullist erinev, kui epüüride m_k ja m_i juures mõlemad märgid on samad. Epüürid m_1, m_3, m_7 on mõlema telje suhtes sümmeetrilised: $V(+), H(+)$. Järelikult $\delta_{13} = \delta_{31} \neq 0, \delta_{17} = \delta_{71} \neq 0, \delta_{37} = \delta_{73} \neq 0$. Epüürid m_2, m_4, m_8 on vertikaaltelje suhtes antisümmeetrilised: $V(-)$ ja horisontaalse telje suhtes sümmeetrilised: $H(+)$. Järelikult kõrvalpaigutised $\delta_{24} = \delta_{42} \neq 0, \delta_{28} = \delta_{82} \neq 0, \delta_{48} = \delta_{84} \neq 0$. Epüürid m_5 ja m_9 on vertikaaltelje suhtes sümmeetrilised: $V(+)$ ning horisontaaltelje suhtes antisümmeetrilised: $H(-)$. Järelikult $\delta_{59} = \delta_{95} \neq 0$. Ainult m_6 epüür on mõlema telje suhtes antisümmeetriline: $V(-), H(-)$ ja järelikult kõrvalpaigutised $\delta_{6i} = \delta_{i6} = 0$ ($i=1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9$). Paigutiste maatriksid on järgmised:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{13} & \delta_{17} \\ \delta_{31} & \delta_{33} & \delta_{37} \\ \delta_{71} & \delta_{73} & \delta_{77} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \delta_{22} & \delta_{24} & \delta_{28} \\ \delta_{42} & \delta_{44} & \delta_{48} \\ \delta_{82} & \delta_{84} & \delta_{88} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \delta_{55} & \delta_{59} \\ \delta_{95} & \delta_{99} \end{vmatrix}; \|\delta_{66}\|$$



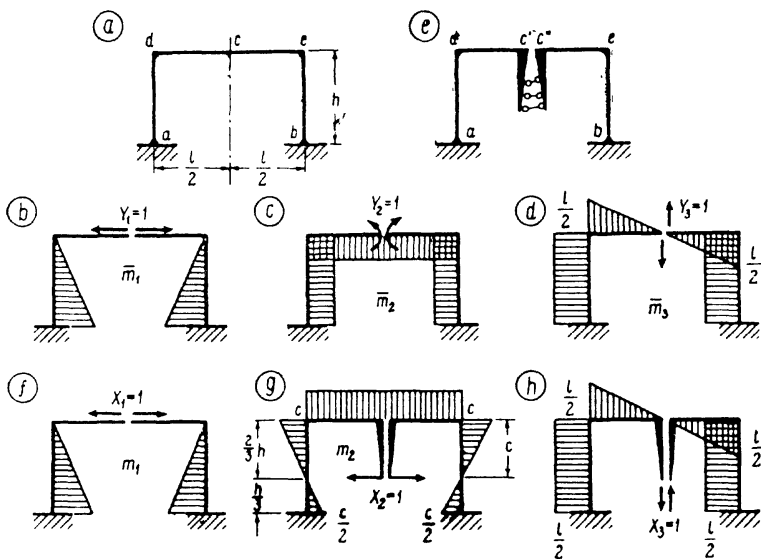
Joon. 18.28

Üldine kõrvalpaigutiste arv on $n(n-1)/2=9 \cdot 8/2=36$. Neist 36 kõrvalpaigutisest on nullist erinevad ainult 7 paigutist.

Joonisel 18.28, *a* kujutatud raam on sisejõudude suhtes kuuekordselt staatikaga määramatu. Joonisel 18.28, *b* esitatud põhiskeemi ja gruppitudmatutega on võimalik viia viieteistkümnest kõrvalpaigutisest kolmteist nulliks. Kuuest võrrandist koosnev võrrandisüsteem jaguneb neljaks: kaks kahe võrrandiga võrrandisüsteemi ja kaks ühe tundmatuga võrrandit.

18.24. Jäigad konsoolid

Jäiku konsooli kasutatakse liigendita suletud kontuuride arvutamisel. Jäikade konsoolide kasutamine põhineb omadusel, et arvutusskeemi paigutusolukord ja sisejõud ei muutu, kui antud skeem asendatakse teise väliselt erineva, kuid kinemaatilisel ja staatikaliselt ekvivalentse arvutusskeemiga. Jäikade konsoolide kasutamist arvutuse



Joon. 18.29

lihtsustamiseks selgitame ühesildelise ja -korruselise liigendita raami lahendamisel.

Joonisel 18.29, *a* esitatud sümmeetrilise raami lahendamisel lihttundmatutega on võetud lisatundmatuteks ristlõikes *c* pikijõud Y_1 , paindemoment Y_2 ja põikjõud Y_3 . Ühiktundmatutest põhjustatud epüürid on kujutatud joonisel 18.29, *b*, *c* ja *d*. Lisatundmatud Y_1 ja Y_2 on sümmeetrilised ning Y_3 antisümmeetriline. Paigutiste maatriksid on järgmised:

$$\begin{vmatrix} \bar{\delta}_{11} & \bar{\delta}_{12} \\ \bar{\delta}_{21} & \bar{\delta}_{22} \end{vmatrix} \text{ ja } \|\bar{\delta}_{33}\| \quad (a)$$

Lihttundmatutest põhjustatud paigutised märgitakse siin kriipsuga $\bar{\delta}_{hi}$. Samuti tähistatakse ka paindemomente kriipsuga üleval \bar{m}_i . Esimeses maatriksis kõrvalpaigutis $\bar{\delta}_{12} \neq 0$. Selleks et viia kõrvalpaigutis $\bar{\delta}_{12}$ nulliks, kasutatakse gruppitudmatuid:

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha_1 Y_1 + \beta_1 Y_2 \\ X_2 &= \alpha_2 Y_1 + \beta_2 Y_2 \end{aligned} \quad (b)$$

Ühik-gruppitudmatutest põhjustatud paindemomendid on järgmised:

$$\begin{aligned} m_1 &= \alpha_1 \bar{m}_1 + \beta_1 \bar{m}_2 \\ m_2 &= \alpha_2 \bar{m}_1 + \beta_2 \bar{m}_2 \end{aligned}$$

Üldjuhul $\delta_{12} \neq 0$. Kuid kordajad α_1 , β_1 , α_2 ja β_2 on võimalik valida selliselt, et $\delta_{12} = 0$. Nende kordajate leidmist kergendab jäikade konsoolide kasutamine.

Raam *a-d-c-e-b* on suletud kontuur. Raami deformeerunud olukord ei muutu, kui raami riiv eraldatakse lõikega kaheks osaks, pannakse läbilõigatud kohas mõlema vardaosa külge jäik konsool (võib olla suvalise kujuga) ning need kaks jäika ($I = \infty$) konsooli ühendatakse kolme mittedeformeeruva ($\epsilon = 0$) vardaga (joon. 18.29, *e*). Kolm ühendusvarrast ei tohi olla paralleelsed ja nende sihid ei tohi lõikuda ühes punktis. Kuna ühendusvardad ei pikene ega lühene ($\epsilon = 0$) ja konsoolid on jäigad ($I = \infty$), siis suvalise koormuse mõjumisel naaberristlõiked *c'* ja *c''* ei nihku ega pöördu teineteise suhtes. Nad on tihedalt kinnitatud teineteise vastu. Raami varrastes on sisejõud kui

raamioikamata riiviga raamil. Lõike asukoht on suvaliselt valitav ja võib olla ka postis.

Jäikade konsoolide kasutamine võimaldab suletud kontuuriga raami põhiskeemi valida otstarbekalt, muutes rohkem kõrvalpaigutisi nulliks. Jäikade konsoolide kasutamisel võetakse lisatundmatuteks kolme ühendusvarda sisejõud. Kuna kõik kolm ühendusvarrast ei tohi olla paralleelsed ja nende sihid ei tohi lõikuda ühes punktis, siis ühendusvarraste sisejõud peavad rahuldama samu tingimusi. Raami riiv lõigatakse läbi suvalises kohas, kuid sümmeetrilise raami puhul peavad konsoolide otsad asuma sümmeetrilisel teljel. Lisatundmatuteks on lõike kohas piki- ja raskuskeskme kohal peab võrduma nulliga. Epüüri m_1 raskuskeskme kohal peab võrduma nulliga. Epüüri m_1 raskuskeskme kohal peab võrduma nulliga. Epüüri m_1 raskuskeskme kohal peab võrduma nulliga. Epüüri m_1 raskuskeskme kohal peab võrduma nulliga. Epüüri m_1 raskuskeskme kohal peab võrduma nulliga. Epüüri m_1 raskuskeskme kohal peab võrduma nulliga. Epüüri m_1 raskuskeskme kohal peab võrduma nulliga. Epüüri m_1 raskuskeskme kohal peab võrduma nulliga. Epüüri m_1 raskuskeskme kohal peab võrduma nulliga. Epüüri m_1 raskuskeskme kohal peab võrduma nulliga.

$$\alpha_1=1, \beta_1=0, \alpha_2=1 \text{ ja } \beta_2=-c \quad (d)$$

Vastavalt kordajatele (d) on paindemomentide avaldised (c) nüüd järgmised:

$$m_1=\bar{m}_1, m_2=\bar{m}_1-c\bar{m}_2, m_3=\bar{m}_3 \quad (e)$$

Tingimusest

$$\delta_{12}=0 \text{ või } EI_p\delta_{12}=0 \quad (f)$$

mis arvestades avaldise (e) on järgmine:

$$\begin{aligned} EI_p\delta_{12} &= \sum \int_0^{l_j} \bar{m}_1(\bar{m}_1-c\bar{m}_2) \frac{I_p}{I} ds = \\ &= \sum \int_0^{l_j} \bar{m}_1^2 \frac{I_p}{I} ds - c \sum \int_0^{l_j} \bar{m}_1\bar{m}_2 \frac{I_p}{I} ds = \\ &= EI_p\bar{\delta}_{11} - cEI_p\bar{\delta}_{12}=0 \end{aligned} \quad (g)$$

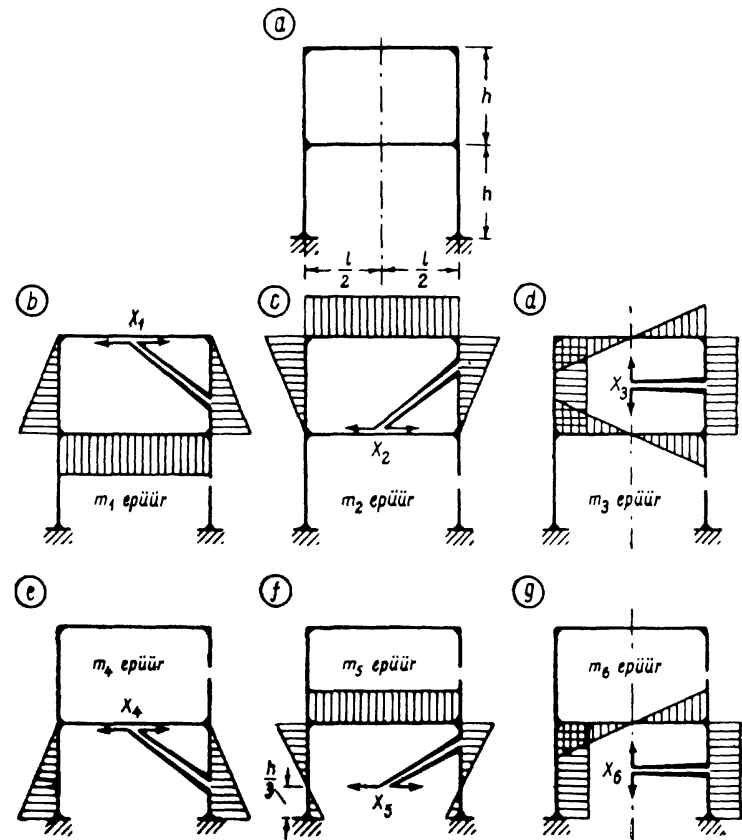
leitakse konsoolide pikkus

$$c=EI_p\bar{\delta}_{11}/EI_p\bar{\delta}_{12} \quad (h)$$

Kui avaldise (h) viia paigutised $EI_p\bar{\delta}_{11}=2\cdot h^3/3$ ja $EI_p\bar{\delta}_{12}=2\cdot 1\cdot h\cdot h/2=h^2$, siis konsoolide pikkus $c=(2/3)h$.

Sama tulemus saadakse ka ühiktundmatutest põhjustatud paindemomendi epüüride m_1 ja m_2 vaatlemisel. Kui $\delta_{12}=0$, siis paindemomendi m_2 ordinaat epüüri m_1 raskuskeskme kohal peab võrduma nulliga. Epüüri m_1 raskuskeskme kohal peab võrduma nulliga. Epüüri m_1 raskuskeskme kohal peab võrduma nulliga. Epüüri m_1 raskuskeskme kohal peab võrduma nulliga. Epüüri m_1 raskuskeskme kohal peab võrduma nulliga. Epüüri m_1 raskuskeskme kohal peab võrduma nulliga. Epüüri m_1 raskuskeskme kohal peab võrduma nulliga. Epüüri m_1 raskuskeskme kohal peab võrduma nulliga. Epüüri m_1 raskuskeskme kohal peab võrduma nulliga.

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1p}=0; \delta_{22}X_2+\Delta_{2p}=0; \delta_{33}X_3+\Delta_{3p}=0$$



Joon. 18.30

milles

$$\delta_{11} = 2h^3/3EI_p; \delta_{22} = 2(h/6) [(h/3)^2 + 4(h/6)^2 + (2h/3)^2] + 2(2h/3)^2 l / (2 \cdot 3EI_r);$$

$$\delta_{33} = 2[h(l/2)(l/2) + (l/2)^2 l / (2 \cdot 3EI_r)]$$

Jäikade konsoolide kasutamine on otstarbekas, kui nende sisseviimine põhiskeemi ei lisa arvutusi. Näitena vaatleme kahekorruselist suletud kontuuridega raami (joon. 18.30, a). Joonisel 18.26, b kujutatud põhiskeemiga ja grupptundmatutega lahendamisel jaguneb võrrandisüsteem kaheks: 4 võrrandit ja 2 võrrandit, kokku neljä kõrvalpaigutisega δ_{12} , δ_{15} , δ_{45} ning δ_{36} . Jäikade konsoolidega lahendamisel (joon. 18.30) väheneb kõrvalpaigutiste arv veel ühe võrra ($\delta_{45} = 0$) ja võrrandisüsteem jaguneb kolmeks. Paigutiste maatriksid on järgmised:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{15} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & 0 \\ \delta_{51} & 0 & \delta_{55} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \delta_{33} & \delta_{36} \\ \delta_{63} & \delta_{66} \end{vmatrix}; \|\delta_{44}\|$$

18.25. Ühik-lisatundmatutest põhjustatud epüürid

Jõumeetodi kanooniliste võrrandite

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1i}X_i + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{10} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2i}X_i + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{20} &= 0 \\ \dots & \\ \delta_{h1}X_1 + \delta_{h2}X_2 + \dots + \delta_{hi}X_i + \dots + \delta_{hn}X_n + \Delta_{h0} &= 0 \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{ni}X_i + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{n0} &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

võrrandi k tundmatute kordajate (paigutiste) δ_{ki} ($i = 1, 2, \dots, n$) ja vabaliikme Δ_{k0} korrutamine suvalise teguriga c ei muuda lisatundmatute X_i väärtusi. Kui võrrandisüsteemi kõigis võrrandites korrutada sama tundmatu X_i kordajaid (paigutisi) δ_{ki} ($k = 1, 2, \dots, n$) suvalise teguriga c_i , siis jäävad teiste lisatundmatute väärtused samaks, kuid lisatundmatu X_i muutub c_i korda väiksemaks:

$$X_i^* = X_i/c_i \quad (b)$$

Lisatundmatust $X_i = 1$ põhjustatud epüüri m_i ordinaatide korrutamisel teguriga c_i :

$$m_i^* = c_i m_i \quad (c)$$

muutuvad paigutised δ_{ki} c_i korda suuremaks:

$$\delta_{ki}^* = c_i \delta_{ki} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (d)$$

Lõplik paindemoment arvutatakse nüüd valemiga

$$M_k = m_{k1}X_1 + m_{k2}X_2 + \dots + m_{ki}^*X_i^* + \dots + m_{kn}X_n + M_{kp}^0$$

mis, kui arvestada X_i^* ja m_i^* avaldisi (b) ning (c), ühtib valemiga (18.28):

$$M_k = m_{k1}X_1 + m_{k2}X_2 + \dots + c_i m_{ki} X_i / c_i + \dots + m_{kn}X_n + M_{kp}^0$$

kuna

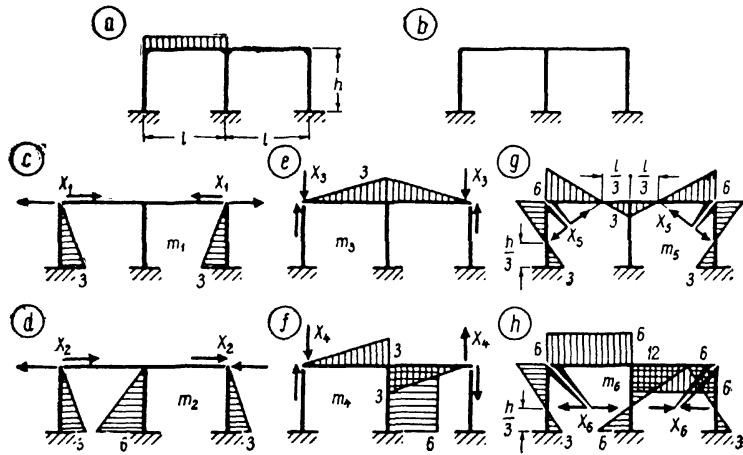
$$m_{ki}^* X_i^* = c_i m_{ki} \cdot X_i / c_i = m_{ki} X_i \quad (e)$$

Tegurid c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) on vabalt valitavad. Lahendamisel võetakse nüüd $X_i = 1$ asemel $X_i = c_i$ ja arvutatakse epüüri m_i^* . Epüüri m_i^* nimetatakse lihtsuse mõttes ikka ühik-tundmatust põhjustatud paindemomendi epüüriks. Seda võib tõlgendada järgmiselt: lisatundmatuks ei ole põhiskeemil märgitud üldistatud jõud X_i , vaid paindemoment arvutusskeemi lõikes, kus m_i^* ordinaat võrdub ühega. Kui ka mõni teine lisatundmatu põhjustab selles lõikes paindemomendi, siis lisatundmatu X_i moodustab ühe osa grupp-tundmatust.

Kui kanooniliste võrrandite koostamisel kasutatakse lisatundmatutest $X_i = c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) põhjustatud epüüre m_i^* , siis temperatuuri muutusest ja tugevate paigutistest põhjustatud paigutiste Δ_{ht} ja Δ_{hr} arvutamisel on vaja samuti kasutada lisatundmatust $X_i = c_i$ põhjustatud paindemomente, pikijõude ja toereaktsioone.

Kuna $m_i^* X_i^* = m_i X_i$, siis järgnevalt jäetakse tärnid ära. Ei ole vaja ka teada, kui suur on c_i . Lisatundmatust $X_i = c_i$ põhjustatud epüüri ordinaatide arvutamisel võetakse üks ordinaat vabalt ning teised leitakse juba vastavalt sellele ordinaadile. Paigutiste arvutamise valemite esinevad tegurid $1/3$ ja $1/6$ ning seepärast on otstarbekas valida elemendi otsa kohal epüüri ordinaadi väärtuseks arv, mis jagub kuuega.

Joonisel 18.31, a kujutatud kuuekordselt staatikaga määramatu raami lahendamisel jäikade konsoolidega jä



Joon. 18.31

gruppitudmatutega on ainult kaks kõrvalpaigutist nullist erinevad. Paigutiste maatriksid on järgmised:

$$\begin{matrix} \|\delta_{11}\| & & & \\ & \|\delta_{33}\| & & \\ & & \|\delta_{55}\| & \\ & & & \|\delta_{22} \ \delta_{24} \ 0\| \\ & & & \|\delta_{42} \ \delta_{44} \ \delta_{46}\| \\ & & & \|\ 0 \ \delta_{64} \ \delta_{66}\| \end{matrix}$$

Sümmeetrilisi tundmatuid sisaldavates võrrandites on kõik kõrvalpaigutised nullid.

Joonisel 18.31, a kujutatud raami lahendamisel võib olenemata sildest l ja kõrgusest h võtta lisatundmatutest põhjustatud paindemomendi ühikepüüride ordinaatideks joonisel 18.31, c... h esitatud suurused.

Näide 18.8. Arvutada joonisel 18.32, a kujutatud raami paindemomendi epüüri ordinaadid. Põhiskeem koos tundmatutega on esitatud joonisel 18.32, b, koormuse epüür M_p^0 ja ühikepüürid m_1, m_2, m_3 joonisel 18.32, c, d, e ja f. Kanoonilised võrrandid on järgmised:

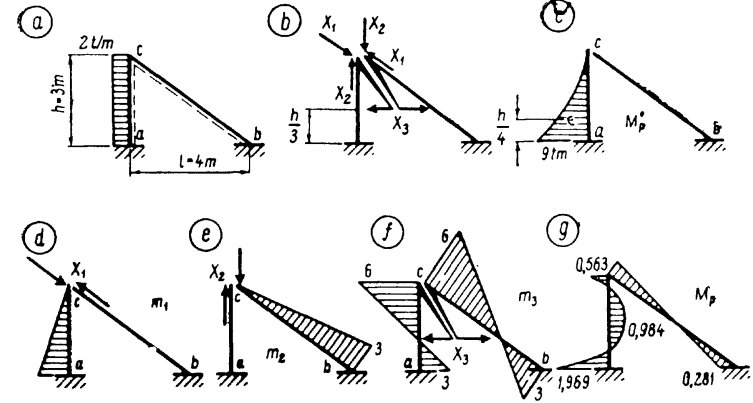
$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0, \quad \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0, \quad \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0 \quad (a)$$

Paigutised arvutatakse paindemomentide mõjuga:

$$\begin{aligned} EI\delta_{11} &= 3,0 \cdot 3^2/3 = 9 \text{ m}^3; & EI\delta_{22} &= 5,0 \cdot 3^2/3 = 15 \text{ m}^3 \\ EI\delta_{33} &= (3^2 + 4 \cdot 1,5^2 + 6^2) (3,0 + 5,0)/6 = 72 \text{ m}^3 \\ EI\Delta_{1p} &= 3,0 \cdot 9 \cdot 2,25/3 = 20,25 \text{ tm}^3; & EI\Delta_{2p} &= 0 \\ EI\Delta_{3p} &= -3,0 \cdot 9 \cdot 0,75/3 = -6,75 \text{ tm}^3 \end{aligned}$$

Lisatundmatud leitakse kanoonilistest võrranditest (a):

$$X_1 = -20,25/9 = -2,25 \text{ t}; \quad X_2 = -0/15 = 0; \quad X_3 = 6,75/72 = 0,09375 \text{ t}$$



Joon. 18.32

Paindemomendi epüüri M_p ordinaadid on:

$$\begin{aligned} M_a &= (-3)(-2,25) + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0,09375 - 9 = -1,96875 \approx -1,969 \text{ tm} \\ M_b &= 0 \cdot (-2,25) - 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0,09375 + 0 = 0,28125 \approx 0,281 \text{ tm} \\ M_c &= -6 \cdot 0,09375 = -0,5625 \approx 0,563 \text{ tm} \\ M_d &= -1,5(-2,25) - 1,5 \cdot 0,09375 - 2,25 = 0,984375 \approx 0,984 \text{ tm} \end{aligned}$$

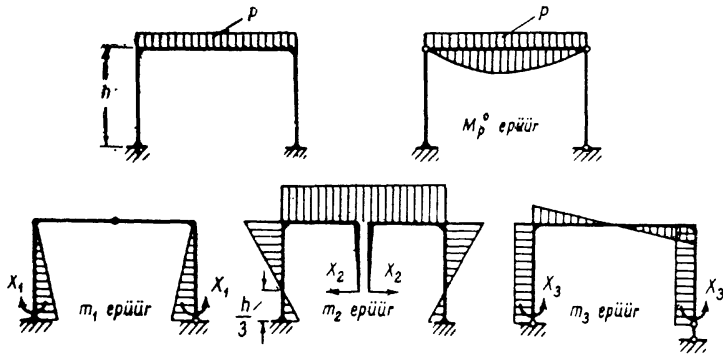
Paindemomendi M_p epüür on esitatud joonisel 18.32, g. Kontrolliks integreeritakse epüüride M_p ja m_3 ordinaatide korrutist:

$$\begin{aligned} EI\Delta_3 &= \sum \int (m_3 M_p / EI) ds = \\ &= (-3 \cdot 1,9688 - 4 \cdot 1,5 \cdot 0,9844 + 6 \cdot 0,5625) 3,0/6 + \\ &+ (6 \cdot 0,5625 + 4 \cdot 1,5 \cdot 0,1406 + 3 \cdot 0,2812) \cdot 5,0/6 = -0,0004 \approx 0 \end{aligned}$$

18.26. Mitme põhiskeemi samaaegne kasutamine

Joonisel 18.30 kasutatud põhiskeemi ja lisatundmatutega saadakse ühiktundmatutest põhjustatud epüürid sarnased joonisel 18.26 konstrueeritud ühiktundmatute epüüridel, välja arvatud ainult tundmatule X_5 vastav epüür. Kui pikendada tundmatu X_5 puhul konsoole kuni toepinani, siis on ka tundmatule X_5 vastavad epüürid sarnased.

Joonisel 18.26, a kujutatud staatikaga määratu raami jaoks saab konstrueerida joonisel 18.26 esitatud ühiktundmatutest põhjustatud epüüri sarnaseid epüüre ka teistsuguste staatikaga määratud põhiskeemide ja lisatundmatutega. Sellest tuleneb järeldus, et iga lisatundmatu ja samuti ka koormuse jaoks võib kasutada erinevat staatikaga määratavat põhiskeemi (joon. 18.33).



Joon. 18.33

Mitme põhiskeemi samaaegsel kasutamisel ei tohi ühiklisatundmatutest põhjustatud epüürid olla üksteisega sarnased, s. t.

$$m_i \neq cm_k$$

18.27. Elastsete koormuste kese

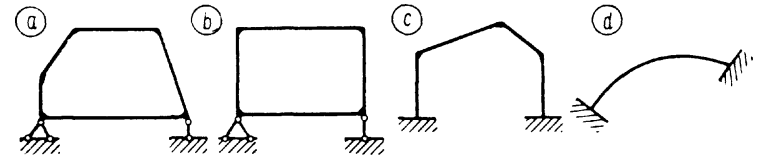
Suletud kontuuride (joon. 18.34, a ja b) või liigendita raamide ja kaarte (joon. 18.34, c ja d) arvutamisel kasutatakse elastsete koormuste keset kõrvalpaigutiste arvu vähendamiseks.

Seda võrrandisüsteemi lihtsustamise võtet käsitletakse järgnevalt mittesümmeetrilise suletud kontuuri või liigendita raami arvutamisel. Joonisel 18.35, a kujutatud suletud kontuuri arvutamisel saadakse lihtne põhiskeem suvalises ristlõikes kontuuri läbilõikamisel (joon. 18.35, b ja c). Lisatundmatuteks on läbilõigatud kohas paindemoment, põik- ja pikijõud. Niisuguse põhiskeemi ja lisatundmatutega on kõik kolm kõrvalpaigutist δ_{12} , δ_{13} ja δ_{23} nullist erinevad. Jäikade konsoolidega viiakse tundmatud punkti c (joon. 18.35, d või e), mille koordinaadid x_c ja y_c määratakse nii, et kõrvalpaigutised

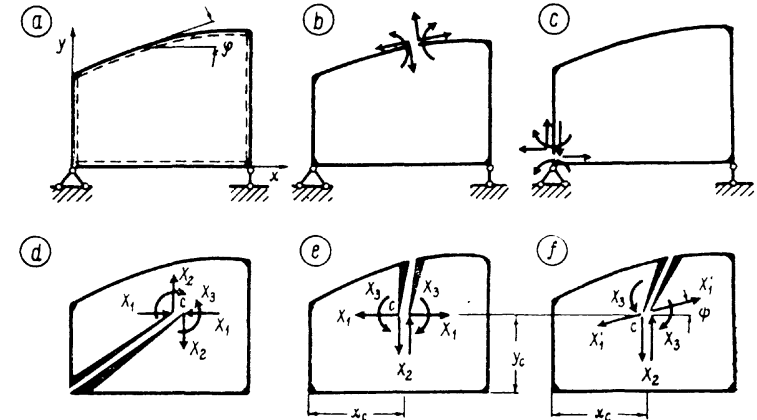
$$\delta_{13}=0 \text{ ja } \delta_{23}=0 \quad (\text{a})$$

Kolmandat kõrvalpaigutist δ_{12} saab muuta nulliks

$$\delta_{12}=0 \quad (\text{b})$$



Joon. 18.34



Joon. 18.35

kui vastavalt valida lisatundmatu X_1 siht, s. t. nurk φ . Tingimust (b) võib rahuldada ka lisatundmatute X_1 ja X_2 pööramisega võrdse nurga võrra.

Punkti c koordinaatide arvutamisel loobutakse põikjõudude mõjust. Ühik-lisatundmatutest põhjustatud paindemomendid ja pikijõud leitakse järgmiste avaldistega (põhiskeem joonisel 18.35, e):

$$\begin{aligned} m_1 &= -1(y - y_c), & n_1 &= -\cos \varphi \\ m_2 &= 1(x - x_c), & n_2 &= -\sin \varphi \\ m_3 &= 1, & n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{c})$$

Punkti c koordinaadid x_c ja y_c määratakse nii, et tingimused (a) oleksid rahuldatud:

$$\begin{aligned} EI_0 \delta_{13} &= \Sigma \int m_1 m_3 (EI_0/EI) ds = 0 \\ EI_0 \delta_{23} &= \Sigma \int m_2 m_3 (EI_0/EI) ds = 0 \end{aligned} \quad (\text{d})$$

Tingimustest (d), kui nendes on viidud avaldised (c),

$$\begin{aligned} \Sigma \int 1(x-x_c)(EI_0/EI) ds &= 0, \\ \Sigma \int 1(y-y_c)(EI_0/EI) ds &= 0 \end{aligned} \quad (e)$$

saadakse valemid punkti c koordinaatide arvutamiseks:

$$\begin{aligned} x_c &= \Sigma \int x \frac{EI_0}{EI} ds / \Sigma \int \frac{EI_0}{EI} ds; \\ y_c &= \Sigma \int y \frac{EI_0}{EI} ds / \Sigma \int \frac{EI_0}{EI} ds \end{aligned} \quad (18.89)$$

milles ds/EI nimetatakse elastseks koormuseks. Punkti c nimetatakse elastsete koormuste keskmeks, kuna punkti c läbivate telgede kohta võrduvad elastsete koormuste staatilised momendid nulliga (e). Joonisel 18.35, d või e esitatud lisatundmatutega on kanoonilised võrrandid järgmised:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} &= 0 \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} &= 0 \end{aligned} \quad (f)$$

Konsoolide otstesse rakendatud lisatundmatu $X_3=1$ ei põhjusta jääkade konsoolide vabade otste nihet, kui tingimused (a) on rahuldatud, s.t. $\delta_{13}=0$ ja $\delta_{23}=0$. Jääkade konsoolide vabad otsad pöörduvad teineteise suhtes nurga δ_{33} võrra, kuid jäävad elastsete koormuste keskmesse. Lisatundmatute X_1 ja X_2 suvaliste sihtidega on tingimused (a) rahuldatud.

Konstantse jääkusega varraste puhul on valemid elastsete koormuste keskmise koordinaatide arvutamiseks järgmised:

$$x_c = \frac{\sum_j x_{kj} l_j EI_0/EI_j}{\sum_j l_j EI_0/EI_j}; \quad y_c = \frac{\sum_j y_{kj} l_j EI_0/EI_j}{\sum_j l_j EI_0/EI_j} \quad (18.90)$$

milles x_{kj} , y_{kj} on varda j keskkoha koordinaadid.

Kolmanda kõrvalpaigutise δ_{12} saab muuta nulliks joonisel 18.35, f esitatud põhiskeemi ja lisatundmatutega. Lisatundmatu X'_1 ja x -telje vaheline nurk on ψ . Ühiktundmatutest põhjustatud paindemomentide ja pikijõudude avaldised on järgmised:

$$\begin{aligned} m'_1 &= 1 \cdot \sin \psi \cdot (x-x_c) - 1 \cos \psi \cdot (y-y_c); \\ n'_1 &= -\cos(\varphi - \psi) \\ m_2 &= 1 \cdot (x-x_c); & n_2 &= -\sin \varphi \\ m_3 &= 1; & n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (g)$$

Tingimusest (b)

$$EI_0 \delta'_{12} = \Sigma \int m'_1 m_2 (EI_0/EI) ds + (EI_0/EF_0) \Sigma \int n'_1 n_2 (EF_0/EF) ds = 0 \quad (h)$$

kui sinna on viidud avaldised (g):

$$\Sigma \int [(x-x_c)^2 \sin \psi - (x-x_c)(y-y_c) \cos \psi] (EI_0/EI) ds + (EI_0/EF_0) \Sigma \int \sin \varphi \cos(\varphi - \psi) (EF_0/EF) ds = 0 \quad (i)$$

leitakse lisatundmatu X'_1 ja x -telje vahelise nurga ψ tangens

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\Sigma \int (x-x_c)(y-y_c)(EI_0/EI) ds - (EI_0/EF_0) \Sigma \int \sin \varphi \cos \varphi (EF_0/EF) ds}{\Sigma \int (x-x_c)^2 (EI_0/EI) ds + (EI_0/EF_0) \Sigma \int \sin^2 \varphi (EF_0/EF) ds} \quad (18.91)$$

ehk

$$\operatorname{tg} \psi = -EI_0 \delta_{12} / EI_0 \delta_{22} \quad (18.92)$$

Nurga ψ leidmine toob tavaliselt rohkem arvutust juurde, kui kanooniliste võrrandite lihtsustumisega arvutus väheneb. Seepärast nurka ψ tavaliselt ei leita ja kasutatakse joonisel 18.35, d või e esitatud lisatundmatuid, mis annavad võrrandisüsteemi (f). Nende lisatundmatutega on kõrvalpaigutised

$$\delta_{13} = \delta_{23} = 0 \quad \text{ja} \quad \delta_{12} \neq 0.$$

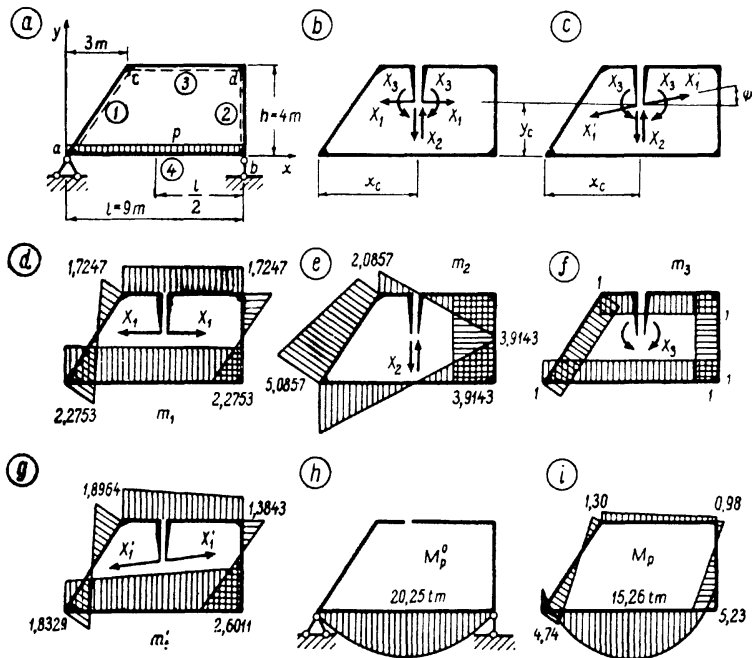
Näide 18.9. Arvutada joonisel 18.36, a kujutatud raami paindemomendi epüür. Raami vardad on samast materjalist. Varraste ristlõiked on konstantse laiusena b ja kõrgustega $h_1=h_2=50$ cm, $h_3=60$ cm ja $h_4=90$ cm. Sille $l=9$ m, kõrgus $h=4$ m ja koormuse intensiivsus $p=2$ t/m.

Arvestatakse ainult paindemomentide mõju.

Suletud kontuuri staatikaga määramatuse aste $n=3$. Põhiskeem koos lisatundmatutega on esitatud joonisel 18.36, b ja c . Jääkuseks EI_0 võetakse varraste ac ja bd jääkus $EI_1=EI_2=EI_0=Eb \cdot 50^3/12$.

Jääkuste suhted EI_0/EI_j on järgmised: $EI_0/EI_1=EI_0/EI_2=1$; $EI_0/EI_3=1/1,728$ ja $EI_0/EI_4=1/5,832$. Elastsete koormuste keskmise koordinaadid leitakse valemitega (18.90):

$$x_c = (1,5 \cdot 5,0 \cdot 1 + 6,0 \cdot 6,0/1,728 + 9,0 \cdot 4,0 \cdot 1 + 4,5 \cdot 9,0/5,832) / (5,0 \cdot 1 + 6,0/1,728 + 4,0 \cdot 1 + 9,0/5,832) = 5,0857 \text{ m}$$



Joon. 18.36

$$y_c = (2,0 \cdot 5,0 \cdot 1 + 4,0 \cdot 6,0/1,728 + 2,0 \cdot 4,0 \cdot 1 + 0,9/5,832) / (5,0 \cdot 1 + 6,0/1,728 + 4,0 \cdot 1 + 9,0/5,832) = 2,2753 \text{ m}$$

Joonisel 18.36, b esitatud põhiskeemile ja lisatundmatutele vastavad ühik-paindemomendi epüürid on kujutatud joonisel 18.36, d, e, f. Koordinaatide $x_c = 5,0857 \text{ m}$ ja $y_c = 2,2753 \text{ m}$ kontrolliks arvutatakse paigutised δ_{13} ja δ_{23} :

$$EI_0 \delta_{13} = 5,0 \cdot 0,2753 - 6,0 \cdot 1,7247/1,728 + 4,0 \cdot 0,2753 + 9,0 \cdot 2,2753/5,832 = 5,9890 - 5,9885 = 0,0005 \approx 0$$

$$EI_0 \delta_{23} = -5,0 \cdot 3,5857 + 6,0 \cdot 0,9143/1,728 + 4,0 \cdot 3,9143 - 9,0 \cdot 0,5857/5,832 = 18,8322 - 18,8324 = -0,0002 \approx 0$$

Nurga ψ (joon. 18.36, c) tangensi leidmiseks arvutatakse paigutised δ_{12} ja δ_{22} :

$$EI_0 \delta_{12} = (-2,2753 \cdot 5,0857 - 4 \cdot 0,2753 \cdot 3,5857 + 1,7247 \cdot 2,0857) \cdot 5,0/6 - 6,0 \cdot 1,7247 \cdot 0,9143/1,728 + 4,0 \cdot 3,9143 \cdot 0,2753 - 9,0 \cdot 2,2753 \cdot 0,5857/5,832 = -13,157 \text{ m}^3$$

$$EI_0 \delta_{22} = (5,0857^2 + 4 \cdot 3,5857^2 + 2,0857^2) \cdot 5,0/6 + (2,0857^2 + 4 \cdot 0,9143^2 + 3,9143^2) \cdot 6,0/(6 \cdot 1,728) + 4 \cdot 3,9143^2 + (3,9143^2 + 4 \cdot 0,5857^2 + 5,0857^2) \cdot 9,0/(6 \cdot 5,832) = 153,588 \text{ m}^3$$

Lisatundmatu X'_1 (joon. 18.36, c) ja x -telje vahelise nurga tangens leitakse valemiga (18.92):

$$\operatorname{tg} \psi = -EI_0 \delta_{12} / EI_0 \delta_{22} = -(-13,157) / 153,588 = 0,08566$$

ning $\sin \psi = 0,08535$ ja $\cos \psi = 0,99635$.

Lisatundmatust $X'_1 = 1$ põhjustatud paindemomendid arvutatakse avaldisega $m'_1 = (x - x_c) - (y - y_c) \cos \psi$

$$\begin{aligned} m'_{a1} &= -5,0857 \cdot 0,08535 + 2,2753 \cdot 0,99635 = 1,8329 \text{ m} \\ m'_{b1} &= 3,9143 \cdot 0,08535 + 2,2753 \cdot 0,99635 = 2,6011 \text{ m} \\ m'_{c1} &= -2,0857 \cdot 0,08535 - 1,7247 \cdot 0,99635 = -1,8964 \text{ m} \\ m'_{d1} &= 3,9143 \cdot 0,08535 - 1,7247 \cdot 0,99635 = -1,3843 \text{ m} \end{aligned}$$

Epüür on esitatud joonisel 18.36, g. Kontrolliks arvutatakse paigutis $EI_0 \delta'_{12} = \sum \int m'_1 m_2 (EI_0/EI) ds = (-1,8329 \cdot 5,0857 + 4 \cdot 0,0318 \cdot 3,5857 + 1,8964 \cdot 2,0857) \cdot 5,0/6 + (1,8964 \cdot 2,0857 - 4 \cdot 1,6403 \cdot 0,9143 - 1,3843 \cdot 3,9143) \cdot 6,0/(6 \cdot 1,728) + 4 \cdot 0,3 \cdot 3,9143 \cdot 0,6084 + (-1,8329 \cdot 5,0857 - 4 \cdot 2,2170 \cdot 0,5857 + 2,6011 \cdot 3,9143) \cdot 9,0/(6 \cdot 5,832) = 9,5258 - 9,5249 = 0,0009 \approx 0$

Kanoonilised võrrandid on nüüd

$$\delta'_{11} X'_1 + \Delta'_{1p} = 0; \quad \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0; \quad \delta_{33} X_3 + \Delta_{3p} = 0$$

Paigutised:

$$\begin{aligned} EI_0 \delta'_{11} &= (1,8329^2 + 4 \cdot 0,0318^2 + 1,8964^2) \cdot 5,0/6 + (1,8964^2 + 4 \cdot 1,6403^2 + 1,3843^2) \cdot 6,0/(6 \cdot 1,728) + (1,3843^2 + 4 \cdot 0,6084^2 + 2,6011^2) \cdot 4,0/6 + (2,6011^2 + 4 \cdot 2,2170^2 + 1,8329^2) \cdot 9,0/(6 \cdot 5,832) = 29,655 \text{ m}^3 \\ EI_0 \delta_{22} &= 153,59 \text{ m}^3 \\ EI_0 \delta_{33} &= 5,0 \cdot 1^2 + 6,0 \cdot 1^2/1,728 + 4,0 \cdot 1^2 + 9,0 \cdot 1^2/5,832 = 14,015 \text{ m}^3 \\ EI_0 \Delta'_{1p} &= -(2/3) \cdot 9,0 \cdot 20,25 \cdot 2,2170/5,832 = -46,188 \text{ tm}^3 \\ EI_0 \Delta_{2p} &= (2/3) \cdot 9,0 \cdot 20,25 \cdot 0,5857/5,832 = 12,202 \text{ tm}^3 \\ EI_0 \Delta_{3p} &= -(2/3) \cdot 9,0 \cdot 20,25 \cdot 1,0/5,832 = -20,833 \text{ tm}^3 \end{aligned}$$

Lisatundmatud leitakse kanoonilistest võrranditest

$$\begin{aligned} X'_1 &= 46,188/29,655 = 1,5575 \text{ t}; \quad X_2 = -12,202/153,59 = -0,0794 \text{ t} \\ X_3 &= 20,833/14,015 = 1,4864 \text{ tm} \end{aligned}$$

Lõpp-paindemomendi epüüri ordinaadid arvutatakse ühikepüüride ja lisatundmatute kaudu:

$$\begin{aligned} M_a &= 1,8329 \cdot 1,5575 + 5,0857 \cdot 0,0794 + 1,4864 = 4,7449 \text{ tm} \\ M_b &= 2,6011 \cdot 1,5575 - 3,9143 \cdot 0,0794 + 1,4864 = 5,2268 \text{ tm} \\ M_c &= -1,8964 \cdot 1,5575 + 2,0857 \cdot 0,0794 + 1,4864 = -1,3016 \text{ tm} \\ M_d &= -1,3843 \cdot 1,5575 - 3,9143 \cdot 0,0794 + 1,4864 = -0,9804 \text{ tm} \\ M_h &= 2,2170 \cdot 1,5575 + 0,5857 \cdot 0,0794 + 1,4864 = -15,2641 \text{ tm} \end{aligned}$$

Epüür on esitatud joonisel 18.36, i. Epüüri kontrollarvutus:

$$\begin{aligned} EI_0 \Delta_3 &= 5,0 \cdot 4,7449/2 - 5,0 \cdot 1,3016/2 - (6,0/1,728) (1,3016 + 0,9804)/2 + 4,0 \cdot 5,2268/2 - 4,0 \cdot 0,9804/2 + (9,0/5,832) (4,7449 + 5,2268)/2 - (2/3) \cdot 20,25 \cdot 9,0/5,832 = 30,0100 - 30,0099 = 0,0001 \approx 0 \end{aligned}$$

18.28. Võrrandisüsteemide lahendamine

18.28.1. Eliminatsioonivõte

Suurema staatikaga määramatuse astmega raamide arvutamisel tuleb, vaatamata kõikidele lihtsustamistele, lahendada mitme tundmatuga võrrandisüsteem või -süsteemid. Praktilisel arvutamisel klahvarvutiga on otsustabekohane kasutada süstematiseeritud eliminatsiooni võtet.

Järgnevalt esitatakse eliminatsioonivõttega nelja tundmatuga neljast võrrandist koosneva süsteemi lahendamine, mida lugejal endal on pärast kerge üldistada üldjuhu jaoks. Olgu võrrandisüsteem kirjutatud järgmisel kujul (vabaliige paremal pool võrdusmärki):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= a_{15} & (a) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= a_{25} & (b) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= a_{35} & (c) \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= a_{45} & (d) \end{aligned}$$

kusjuures a_{11} peab erinema nullist. Jõumeetodi puhul on a_{11} peapaigutis, mis on alati nullist erinev.

Esimeses järjekorras elimineeritakse võrranditest (b), (c) ja (d) tundmatu x_1 . Selleks jagatakse võrrandit (a) kordajaga a_{11} :

$$x_1 + (a_{12}/a_{11})x_2 + (a_{13}/a_{11})x_3 + (a_{14}/a_{11})x_4 = a_{15}/a_{11} \quad (e)$$

Järgnevalt korrutatakse võrrandit (e) järjekorras teguritega a_{21} ja a_{31} ning a_{41} ja lahutatakse saadud võrrandid vastavalt võrranditest (b), (c) ja (d), mille tulemusel koos võrrandiga (a) saadakse järgmine võrrandisüsteem:

$$\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 &= b_{15} & (f) \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 &= b_{25} & (g) \\ b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_{34}x_4 &= b_{35} & (h) \\ b_{42}x_2 + b_{43}x_3 + b_{44}x_4 &= b_{45} & (i) \end{aligned}$$

milles

$$\begin{aligned} b_{1j} &= a_{1j}/a_{11} & (j=2, 3, 4, 5) & (j) \\ b_{ij} &= a_{ij} - a_{i1}b_{1j} & (i=2, 3, 4), & (j=2, 3, 4, 5) & (k) \end{aligned}$$

Järgnevalt elimineeritakse võrranditest (h) ja (i) tundmatu x_2 . Selleks jagatakse võrrandit (g) kordajaga b_{22} :

$$x_2 + (b_{23}/b_{22})x_3 + (b_{24}/b_{22})x_4 = b_{25}/b_{22} \quad (l)$$

ja selle tulemusena saadud võrrandit (l) korrutatakse teguritega b_{32} ja b_{42} ning lahutatakse vastavalt võrranditest (h) ja (i). Need kaks võrrandit koos võrrandiga (l) moodustavad võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 &= c_{25} & (m) \\ c_{33}x_3 + c_{34}x_4 &= c_{35} & (n) \\ c_{43}x_3 + c_{44}x_4 &= c_{45} & (o) \end{aligned}$$

milles

$$\begin{aligned} c_{2j} &= b_{2j}/b_{22} & (j=3, 4, 5) & (p) \\ c_{ij} &= b_{ij} - b_{i2}c_{2j} & (i=3, 4), & (j=3, 4, 5) & (q) \end{aligned}$$

Nüüd elimineeritakse võrrandist (o) tundmatu x_3 . Võrrandit (n) jagatakse kordajaga c_{33} ja korrutatakse teguriga c_{43} ning tulemus lahutatakse võrrandist (o). Võib kirjutada

$$\begin{aligned} x_3 + d_{34}x_4 &= d_{35} & (r) \\ d_{44}x_4 &= d_{45} & (s) \end{aligned}$$

milles

$$\begin{aligned} d_{3j} &= c_{3j}/c_{33} & (j=4, 5) & (t) \\ d_{ij} &= c_{ij} - c_{i3}d_{3j} & (i=4), & (j=4, 5) & (u) \end{aligned}$$

Võrrandist (s) leitakse tundmatu x_4

$$x_4 = e_{45} \quad (v)$$

kus

$$e_{45} = d_{45}/d_{44} \quad (w)$$

Tundmatud x_i leitakse nüüd järjekorras võrranditest (v), (r), (m) ja (f):

$$\begin{aligned} x_4 &= e_{45} & (\bar{o}) \\ x_3 &= d_{35} - d_{34}x_4 & (\bar{a}) \\ x_2 &= c_{25} - c_{24}x_4 - c_{23}x_3 & (\bar{\delta}) \\ x_1 &= b_{15} - b_{14}x_4 - b_{13}x_3 - b_{12}x_2 & (\bar{u}) \end{aligned}$$

18.28.2. Võrrandisüsteemi lahendamine klahvarvutiga

Võrrandisüsteemi lahendamisel klahvarvutiga saab eelmises punktis toodud elimineerimise tehted, kaasa arvatud tundmatute x_i -de leidmine ja lahenduse kontrollimine, esitada kompaktselt järgmises tabelis.

Tabeli A esimeses, teises, kolmandas ja neljandas lahteris (kahte külglahtrit arvestamata) on võrrandisüsteemi

Tabel 18.1

	i	x_1	x_2	x_3	x_4	a_{i5}	$a_{i\Sigma}$
A	1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	$a_{1\Sigma}$ (1)
	2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	$a_{2\Sigma}$ (1)
	3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	$a_{3\Sigma}$ (1)
	4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	$a_{4\Sigma}$ (1)
B	1	a_{11} (2)	b_{12} (3)	b_{13} (3)	b_{14} (3)	b_{15} (3)	$b_{1\Sigma}$ (3)
	2	a_{21} (2)	b_{22} (4)	c_{23} (5)	c_{24} (5)	c_{25} (5)	$c_{2\Sigma}$ (5)
	3	a_{31} (2)	b_{32} (4)	c_{33} (6)	d_{34} (7)	d_{35} (7)	$d_{3\Sigma}$ (7)
	4	a_{41} (2)	b_{42} (4)	c_{43} (6)	d_{44} (8)	e_{45} (9)	$e_{4\Sigma}$ (9)
C	x_i	x_1 (16)	x_2 (14)	x_3 (12)	x_4 (10)		
	x'_i	x'_1 (17)	x'_2 (15)	x'_3 (13)	x'_4 (11)		

tundmatute kordajad. Tabeli A seitsmendas lahtris on võrrandisüsteemi vabaliikmed märgiga, mis neil on paremal pool võrdusmärki. Viimane lahter on arvutuse kontrolliks. Tabeli A viimases lahtris ja tabelites B ning C elementide taga sulgudes olevad numbrid näitavad täitmise järjekorda.

(1) Tabeli A viimase lahtri elemendiks on sama rea kõigi teiste elementide algebraline summa:

$$a_{i\Sigma} = \sum_j a_{ij} \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad (j=1, 2, 3, 4, 5) \quad (a)$$

(2) Tabeli B esimese lahtri elemendid on võrdsed tabeli A esimese lahtri elementidega.

(3) Tabeli B esimese rea elemendid, välja arvatud esimese lahtri element a_{11} , saadakse tabeli A esimese rea vastava lahtri elemendi jagamisel elemendiga a_{11} :

$$b_{1j} = a_{1j}/a_{11} \quad (j=2, 3, 4, 5, \Sigma) \quad (b)$$

Tabeli B esimese rea viimase elemendiga $b_{1\Sigma}$ kontrollitakse selle rea elementide õigsust. Viimase lahtri element $b_{1\Sigma}$ peab võrduma ühega liidetud esimese rea elementide, välja arvatud a_{11} , algebralise summaga:

$$b_{1\Sigma} = a_{1\Sigma}/a_{11} = 1 + \sum_{j=2}^5 b_{1j} = 1 + b_{12} + b_{13} + b_{14} + b_{15} \quad (c)$$

(4) Arvutatakse teise lahtri elemendid alates teisest reast valemiga

$$b_{i2} = a_{i2} - a_{i1} \cdot b_{12} \quad (i=2, 3, 4) \quad (d)$$

Element a_{i2} võetakse tabelist A. Tabelist B võetakse element a_{i1} samast reast ja element b_{12} samast lahtrist kui b_{i2} .

(5) Leitakse teise rea elemendid, alates kolmandast lahtrist, valemiga

$$c_{2j} = (a_{2j} - a_{21} \cdot b_{1j})/b_{22} \quad (j=3, 4, 5, \Sigma) \quad (e)$$

Element a_{2j} võetakse tabelist A ja elemendid a_{21} , b_{1j} ja b_{22} tabelist B. Elemendid a_{21} ja b_{1j} on vastavalt samast reast ning samast lahtrist kui element c_{2j} . Sümmetrilise võrrandisüsteemi puhul (jõu- ja deformatsioonimeetodi kanoonilised võrrandid)

$$c_{2j} = b_{i2}/b_{22} \quad (i=j=3, 4) \quad (f)$$

Kontroll:

$$1 + \sum_{j=3}^5 c_{2j} = c_{2\Sigma}$$

ehk

$$1 + c_{23} + c_{24} + c_{25} = (a_{2\Sigma} - a_{21} \cdot b_{1\Sigma})/b_{22}$$

(6) Kolmanda lahtri elemendid alates kolmandast reast arvutatakse valemiga

$$c_{i3} = a_{i3} - a_{i1} \cdot b_{13} - b_{i2} \cdot c_{23} \quad (i=3, 4) \quad (h)$$

Element a_{i3} võetakse tabelist A ja ülejäänud tabelist B. Elemendid a_{i1} ja b_{i2} ning elemendid b_{13} ja c_{23} on vastavalt samast reast i ning samast lahtrist $j=3$ kui element c_{i3} .

(7) Kolmanda rea elemendid alates neljandast lahtrist arvutatakse järgmiselt:

$$d_{3j} = (a_{3j} - a_{31} \cdot b_{1j} - b_{32} \cdot c_{2j}) / c_{33} \quad (j=4, 5, \Sigma) \quad (i)$$

kusjuures element a_{3j} võetakse tabelist A ja ülejäänud tabelist B . Elemendid a_{31} ja b_{32} on samast reast $i=3$ ning elemendid b_{1j} ja c_{2j} samast lahtrist j kui element d_{3j} . Sümmetrilise võrrandisüsteemi puhul

$$d_{34} = c_{43} / c_{33} \quad (j)$$

Kontroll:

$$1 + d_{34} + d_{35} = d_{3\Sigma} \quad (k)$$

(8) ja (9) arvutatakse järgmiste avaldistega:

$$d_{44} = a_{44} - a_{41} \cdot b_{14} - b_{42} \cdot c_{24} - c_{43} \cdot d_{34} \quad (l)$$

$$e_{4j} = (a_{4j} - a_{41} \cdot b_{1j} - b_{42} \cdot c_{2j} - c_{43} \cdot d_{3j}) / d_{44} \quad (j=5, \Sigma) \quad (m)$$

Kontroll:

$$1 + e_{45} = e_{4\Sigma} \quad (n)$$

Tabeli B elemendi, mille indeksiteks on i ja j , arvutamise juhul on järgmine:

a) võetakse tabelist A vastav element indeksitega i ja j : a_{ij} ;

b) elemendist a_{ij} lahutatakse tabeli B elementide korrutised, kusjuures tegurid võetakse samast reast i vasakult (tabel B) ja samast lahtrist j ülalt (tabel B), kus asub arvutatav element. Tegurid võetakse järjekorras: esimesel korrutisel vasakult samast reast esimesest lahtrist ja ülalt samast lahtrist esimesest reast, teisel korrutisel samast reast teisest lahtrist ja ülalt samast lahtrist teisest reast jne. Tegurite märke tuleb arvestada. Positiivse a_{ij} puhul esineb lahutamise asemel liitmine, kui korrutise tegurid on vastupidiste märkidega.

Tabelis 18.1 on näitena märgitud pideva joonega all need tegurid, mida kasutatakse elemendi d_{35} , ja katkestatud joonega need tegurid, mida kasutatakse elemendi c_{43} arvutamiseks;

c) kui arvutatav element asub peadiagonaalil, s. t. elemendid a_{11} , b_{22} , c_{33} jne., või on sellest allpool, siis punktis b saadud tulemus on vastavaks elemendiks ja märgitakse tabelisse B . Kui element asub paremal pool peadiagonaali,

siis punktis b saadud tulemus jagatakse sama rea peadiagonaali elemendiga ja jagatis märgitakse tabelisse B ;

d) tabeli C esimese rea elemendid on tundmatud x_i ja arvutatakse eelmises punktis esitatud valemitega (\bar{o}), (\bar{a}), (\bar{o}) ja (\bar{u}). Tundmatute x_i kordajateks on tabelis B elemendid peadiagonaalist paremal teises, kolmandas ja neljandas lahtris ning vabaliikmeks tabeli B eelviimase lahtri element. Tundmatute arvutuse kontrolliks täidetakse tabeli C alumine rida, s. t. arvutatakse x'_i samade valemitega (\bar{o}), (\bar{a}), (\bar{o}) ja (\bar{u}), kusjuures x_i asendatakse x'_i -ga ja vabaliikmeks on tabeli B viimase lahtri element vastavas reas. Vigadeta arvutamisel $x_i + 1 = x'_i$.

Kirjeldataud algoritmi piltlikumaks kujutamiseks esitatakse järgmise võrrandisüsteemi lahendus:

$$\begin{aligned} 5,6384x_1 - 1,7293x_2 + 2,1543x_3 + 1,1212x_4 - 15,8105 &= 0 \\ -1,7293x_1 + 6,2475x_2 - 1,8174x_3 + 3,2581x_4 + 11,1596 &= 0 \\ 2,1543x_1 - 1,8174x_2 + 4,9556x_3 - 0,9187x_4 - 13,1137 &= 0 \\ 1,1212x_1 + 3,2581x_2 - 0,9187x_3 + 8,6574x_4 + 4,1213 &= 0 \end{aligned}$$

Järgnevalt esitatakse tabeli 18.2 osa B mõnede elementide leidmine, kusjuures arvutiga arvutamise vahepealseid tehteid välja ei kirjutata. Tabelisse B kantakse ainult lõpptulemus.

Teise rea neljanda lahtri element sümmetrilise võrrandisüsteemi puhul saadakse neljanda rea teise lahtri elemendi jagamisel peadiagonaali elemendiga:

$$3,60197/5,71712 = 0,63003$$

Mittesümmetrilise võrrandisüsteemi puhul tuleb arvutada järgmiselt:

$$[3,2581 - (-1,7293)0,19885]/5,71712 = 0,63003$$

Teise rea viimase lahtri element

$$[-5,2007 - (-1,7293)4,07830]/5,71712 = 0,32392$$

Kontroll: $1 - 0,20232 + 0,63003 - 1,10379 = 0,32392$

Neljanda rea kolmanda lahtri element leitakse järgmiselt:

$$-0,9187 - 1,1212 \cdot 0,38207 - 3,60197(-0,20232) = -0,61833$$

Kolmanda rea neljanda lahtri element leitakse sümmetrilise võrrandisüsteemi puhul järgmiselt:

$$-0,61833/3,85849 = -0,16025$$

ja mittersümmetrilise puhul

$$\begin{aligned} [-0,9187 - 2,1543 \cdot 0,19885 - (-1,15668)0,63003]/3,85849 &= \\ = -0,16025 \end{aligned}$$

Kolmanda rea elementide kontroll: $1 - 0,16025 + 1,50303 = 2,34278$, mis on võrdne sama rea viimase elemendiga. Neljanda rea viienda lahtri element arvutatakse järgmiselt:

Tabel 18.2

	x_1	x_2	x_3	x_4	a_{i5}	a_i	
A	1	5,6384	-1,7293	2,1543	1,1212	15,8105	22,9951
	2	-1,7293	6,2475	-1,8174	3,2581	-11,1596	-5,2007
	3	2,1543	-1,8174	4,9156	-0,9187	13,1170	17,4508
	4	1,1212	3,2581	-0,9187	8,6574	-4,1213	7,9967
B	1	5,6384	-0,30670	0,38207	0,19885	2,80408	4,07830
	2	-1,7293	5,71712	-0,20232	0,63003	-1,10379	0,32392
	3	2,1543	-1,15668	3,85849	-0,16025	1,50303	2,34278
	4	1,1212	3,60197	-0,61833	6,06601	-0,38906	0,61094
C	x_i	2,15705	-0,56719	1,44068	-0,38906		
	x'_i	3,15705	0,43281	2,44068	0,61094		

$$\begin{aligned} &[-4,1213 - 1,1212 \cdot 2,80408 - 3,60197(-1,10379) - \\ & - (-0,61833) \cdot 1,50303] / 6,0661 = -0,38906 \end{aligned}$$

mis on ühtlasi lisatundmatu x_4 .

Lisatundmatud x_i ja kontrollimiseks vajalikud suurused x'_i on leitud järgmiselt:

$$\begin{aligned} x_4 &= -0,38906; \quad x'_4 = 0,61094 \\ x_3 &= 1,50303 - (-0,16025)(-0,38906) = 1,44068 \\ x'_3 &= 2,34278 - (-0,16025) \cdot 0,61094 = 2,44068 \\ x_2 &= -1,10379 - 0,63003(-0,38906) - (-0,20232) \cdot 1,44068 = \\ &= -0,56719 \\ x'_2 &= 0,32392 - 0,63003 \cdot 0,61094 - (-0,20232) \cdot 2,44068 = \\ &= 0,43281 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2,80408 - 0,19885(-0,38906) - 0,38207 \cdot 1,44068 - \\ & - (-0,30670)(-0,56719) = 2,15705 \\ x'_1 &= 4,07830 - 0,19885 \cdot 0,61094 - 0,38207 \cdot 2,44068 - \\ & - (-0,30670) \cdot 0,43281 = 3,15705 \end{aligned}$$

Oigete tundmatute puhul on tingimused $x_{i+1} = x'_i$ rahuldatud:

$$\begin{aligned} x_4 + 1 &= -0,38906 + 1 = 0,61094 = x'_4 \\ x_3 + 1 &= 1,44068 + 1 = 2,44068 = x'_3 \\ x_2 + 1 &= -0,56719 + 1 = 0,43281 = x'_2 \\ x_1 + 1 &= 2,15705 + 1 = 3,15705 = x'_1 \end{aligned}$$

18.28.3. Iteratsioonivõte

Võrrandisüsteemi lahendamisel iteratsioonivõtte ehk järkjärgulise lähendamisega avaldatakse igast võrrandist üks tundmatu teiste tundmatute ja vabaliikme kaudu, jagades selleks võrrandit peapaigutisega δ_{ii} , mille tulemusena saadakse:

$$\begin{aligned} X_1 &= -\Delta_{1p}/\delta_{11} + c_{12}X_2 + c_{13}X_3 + \dots + c_{1k}X_k + \dots + c_{1n}X_n \\ &\dots \\ X_i &= -\Delta_{ip}/\delta_{ii} + c_{i1}X_1 + c_{i2}X_2 + \dots + c_{ik}X_k + \dots + c_{in}X_n \\ &\dots \\ X_n &= -\Delta_{np}/\delta_{nn} + c_{n1}X_1 + c_{n2}X_2 + \dots + c_{nk}X_k + \dots + \\ & + c_{n(n-1)}X_{n-1} \end{aligned} \quad (18.93)$$

milles

$$c_{ik} = \delta_{ik}/\delta_{ii} \quad (18.94)$$

Tundmatute arvutamisel s lähenduse juures kasutatakse eelnevalt $s-1$ lähendusel leitud tundmatute väärtusi järgmise skeemi järgi:

$$\begin{aligned} X_1^s &= -\Delta_{1p}/\delta_{11} + c_{12}X_2^{s-1} + c_{13}X_3^{s-1} + \dots + c_{1n}X_n^{s-1} \\ X_2^s &= -\Delta_{2p}/\delta_{22} + c_{21}X_1^s + c_{23}X_3^{s-1} + \dots + c_{2n}X_n^{s-1} \\ X_i^s &= -\Delta_{ip}/\delta_{ii} + c_{i1}X_1^s + c_{i2}X_2^s + \dots + c_{i,i-1}X_{i-1}^s + \\ & + c_{i,i+1}X_{i+1}^{s-1} + \dots + c_{in}X_n^{s-1} \\ X_n^s &= -\Delta_{np}/\delta_{nn} + c_{n1}X_1^s + c_{n2}X_2^s + \dots + c_{ni}X_i^s + \dots + \\ & + c_{n,n-1}X_{n-1}^s \end{aligned} \quad (18.95)$$

Indeks s näitab lähenduse järku.

Esimeses lähenduses tundmatu X_i^1 arvutamisel võetakse tundmatute $X_{i+1}, X_{i+2}, \dots, X_n$ algväärtused suvaliselt, näiteks kas null, üks või avaldiste (18.95) vabaliikmed. Esimestes lähendustes ei ole vaja tundmatuid arvutada lõppväärtuste täpsusega. Algul võib arvutada tundmatud väiksema täpsusega ja lahenduse käigus suurendada seda kuni vajaliku täpsuseni. Võrrandisüsteemi lahend on leitud, kui kahe viimase lähenduse tulemused ühtivad.

Arvutusprotsessi koonduvus oleneb tundmatute ees olevatest kordajatest, mitte aga vabaliikmetest ega tundmatute valitud algväärtusest. Kui algväärtused on valitud ebasobivad, siis see pikendab arvutuskäiku.

Kui tundmatute kordajate absoluutväärtuste summa igas võrrandis (18.93) on väiksem kui üks:

$$\sum_k |c_{ik}| < 1 \quad (k=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n, k \neq i) \quad (18.96)$$

siis arvutus koondub. Kui ühes võrrandis tingimus (18.96) ei ole täidetud, siis arvutus ise näitab, kas tundmatute suurused lähenevad kindlatele väärtustele või mitte.

Olgu lahendada järgmine võrrandisüsteem:

$$\begin{aligned} 12,0X_1 + 1,5X_2 - 2,0X_3 + 6,0 &= 0 \\ 1,5X_1 + 15,0X_2 + 0,5X_3 - 4,0 &= 0 \\ -2,0X_1 + 0,5X_2 + 8,0X_3 - 7,5 &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

Võrrandid (a) esitatakse kujul (18.93):

$$\begin{aligned} X_1 &= -0,5000 - 0,125X_2 + 0,1667X_3 \\ X_2 &= 0,2667 - 0,100X_1 - 0,3333X_3 \\ X_3 &= 0,9375 + 0,250X_1 - 0,0625X_2 \end{aligned} \quad (b)$$

Tingimused (18.96):

$$\begin{aligned} 1. \text{ võrrand: } &0,125 + 0,1667 < 1 \\ 2. \text{ võrrand: } &0,100 + 0,3333 < 1 \\ 3. \text{ võrrand: } &0,250 + 0,0625 < 1 \end{aligned} \quad (c)$$

on rahuldatud.

Tundmatu X_1 arvutamisel esimeses lähenduses võetakse

$$X_2^0 = X_3^0 = 1$$

$$X_1^1 = -0,500 - 0,125 \cdot 1 + 0,167 \cdot 1 = -0,458$$

Tundmatu X_2 arvutamisel võetakse X_1 väärtuseks esimeses lähenduses saadud tulemus $X_1^1 = -0,458$ ja $X_3^0 = 1$

$$X_2^1 = 0,267 - 0,100(-0,458) - 0,333 \cdot 1 = -0,020$$

Tundmatu X_3 esimese lähenduse leidmisel võetakse tundmatute X_1 ja X_2 väärtuseks esimeses lähenduses saadud tulemused

$$X_1^1 = -0,458 \text{ ja } X_2^1 = -0,020$$

$$X_3^1 = 0,938 + 0,250(-0,458) - 0,062(-0,020) = 0,825$$

Järgnevatel lähendustel asetatakse valemities (b) paremale poole võrdusmärgi eelnevalt saadud tulemus.

Teine lähendus:

$$X_1^2 = -0,5 - 0,125(-0,020) + 0,167 \cdot 0,825 = -0,360$$

$$X_2^2 = 0,267 - 0,100(-0,360) - 0,333 \cdot 0,825 = 0,028$$

$$X_3^2 = 0,938 + 0,250(-0,360) - 0,062 \cdot 0,028 = 0,846$$

Järgnevad lähendused koos esimese ja teise lähendusega on esitatud tabelis 18.3.

Tabel 18.3

Võrrandid (b)	X_1	X_2	X_3	Vabaliige
1. X_1	—	-0,1250	0,1667	-0,5000
2. X_2	-0,1000	—	-0,3333	0,2667
3. X_3	0,2500	-0,0625	—	0,9375
1. lähendus	-0,458	-0,020	0,825	
2. „	-0,360	0,028	0,846	
3. „	-0,3621	0,0209	0,8457	
4. „	-0,3616	0,0210	0,8458	
5. „	-0,3616	0,0210	0,8458	

18.28.4. Võrrandisüsteemi lahendi leidmine mõjuarvudega

Jõumeetodi kanoonilise võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned}
 \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1i}X_i + \dots + \delta_{1j}X_j + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{10} &= 0 \\
 \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2i}X_i + \dots + \delta_{2j}X_j + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{20} &= 0 \\
 \dots & \dots \\
 \delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \dots + \delta_{ki}X_i + \dots + \delta_{kj}X_j + \dots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{k0} &= 0 \\
 \dots & \dots \\
 \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{ni}X_i + \dots + \delta_{nj}X_j + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{n0} &= 0
 \end{aligned} \tag{18.97}$$

lahendi võib esitada järgmisel kujul:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \beta_{11}\Delta_{10} + \beta_{12}\Delta_{20} + \dots + \beta_{1i}\Delta_{i0} + \dots + \beta_{1j}\Delta_{j0} + \dots + \beta_{1n}\Delta_{n0} \\
 X_2 &= \beta_{21}\Delta_{10} + \beta_{22}\Delta_{20} + \dots + \beta_{2i}\Delta_{i0} + \dots + \beta_{2j}\Delta_{j0} + \dots + \beta_{2n}\Delta_{n0} \\
 \dots & \dots \\
 X_i &= \beta_{i1}\Delta_{10} + \beta_{i2}\Delta_{20} + \dots + \beta_{ii}\Delta_{i0} + \dots + \beta_{ij}\Delta_{j0} + \dots + \beta_{in}\Delta_{n0} \\
 \dots & \dots \\
 X_j &= \beta_{j1}\Delta_{10} + \beta_{j2}\Delta_{20} + \dots + \beta_{ji}\Delta_{i0} + \dots + \beta_{jj}\Delta_{j0} + \dots + \beta_{jn}\Delta_{n0} \\
 \dots & \dots \\
 X_n &= \beta_{n1}\Delta_{10} + \beta_{n2}\Delta_{20} + \dots + \beta_{ni}\Delta_{i0} + \dots + \beta_{nj}\Delta_{j0} + \dots + \beta_{nn}\Delta_{n0}
 \end{aligned} \tag{18.98}$$

Kui avaldistes (18.98) võtta

$$\Delta_{i0}=1 \text{ ja } \Delta_{j0}=0 \quad (j=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n) \tag{18.99}$$

siis saadakse lisatundmatute väärtusteks

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \beta_{1i}; \quad X_2 = \beta_{2i}; \quad \dots; \quad X_i = \beta_{ii}; \quad \dots; \\
 X_j &= \beta_{ji}; \quad \dots; \quad X_n = \beta_{ni}
 \end{aligned} \tag{18.100}$$

Lisatundmatute suurusi β_{ji} ($j=1, 2, \dots, n$) (18.100) nimetatakse mõjuarvudeks ja nad esitavad vabaliikme $\Delta_{i0}=1$ mõju lisatundmatutele X_1, X_2, \dots, X_n .

Mõjuarvude kohta kehtib reaktsioonide vastastikkus:

$$\beta_{ji} = \beta_{ij} \tag{18.101}$$

kuna nendeks on reaktsioonid lisasidemetes vastavalt vabaliikmetele (18.99).

Mõjuarvud β_{ji} leitakse võrrandisüsteemist, milles üheks võrrandiks on

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij}\beta_{ji} + 1 = 0$$

ja $n-1$ võrrandit on homogeensed:

$$\sum_{j=1}^n \delta_{kj}\beta_{ji} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n)$$

Seega mõjuarvud leitakse võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned}
 \delta_{11}\beta_{1i} + \delta_{12}\beta_{2i} + \dots + \delta_{1i}\beta_{ii} + \dots + \delta_{1j}\beta_{ji} + \dots + \delta_{1n}\beta_{ni} &= 0 \\
 \delta_{21}\beta_{1i} + \delta_{22}\beta_{2i} + \dots + \delta_{2i}\beta_{ii} + \dots + \delta_{2j}\beta_{ji} + \dots + \delta_{2n}\beta_{ni} &= 0 \\
 \dots & \dots \\
 \delta_{i1}\beta_{1i} + \delta_{i2}\beta_{2i} + \dots + \delta_{ii}\beta_{ii} + \dots + \delta_{ij}\beta_{ji} + \dots + \delta_{in}\beta_{ni} &= -1 \\
 \dots & \dots \\
 \delta_{k1}\beta_{1i} + \delta_{k2}\beta_{2i} + \dots + \delta_{ki}\beta_{ii} + \dots + \delta_{kj}\beta_{ji} + \dots + \delta_{kn}\beta_{ni} &= 0 \\
 \dots & \dots \\
 \delta_{n1}\beta_{1i} + \delta_{n2}\beta_{2i} + \dots + \delta_{ni}\beta_{ii} + \dots + \delta_{nj}\beta_{ji} + \dots + \delta_{nn}\beta_{ni} &= 0
 \end{aligned} \tag{18.102}$$

Võrrandisüsteemist (18.102) järeldub, et mõjuarvudeks β_{ji} ($j=1, 2, \dots, n$) on niisugused lisatundmatute väärtused, mis staatikaga määratavas põhiskeemis põhjustavad paigutusolukorra, kus ühele lisatundmatule X_i vastav üldistatud paigutus võrdub miinus ühega ja teistele lisatundmatutele vastavad üldistatud paigutised on nullid. Mõjuarvu β_{ji} esimene indeks j näitab, millist lisatundmatut mõjuarv esitab, ja teine indeks i , millisele lisatundmatule vastav paigutus on miinus üks.

Jõumeetodi kanooniliste võrrandite maatrikskuju (18.59)

$$D_1 X + D_0 = 0$$

lahendiks on

$$X = B D_0 \quad (18.103)$$

milles

$$B = \|\beta_{ji}\| = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1i} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2i} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} & \dots & \beta_{ii} & \dots & \beta_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \dots & \beta_{ki} & \dots & \beta_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{ni} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \quad (18.104)$$

on mõjuarvude maatriks.

Maatriksvõrrandist (18.59), kui sellesse on viidud tundmatute maatriks X (18.103)

$$D_1 B D_0 + D_0 = 0$$

saadakse $D_1 B = -E$ ehk $D_1 B = -D_1 D_1^{-1}$. Viimane võrdus annab

$$B = -D_1^{-1} \quad (18.105)$$

s. t. mõjumaatriksi elemendid β_{ji} on võrdsed, kuid vastupidiste märkidega paigutiste pöördmaatriksi elementidega. Siit järeldus, et mõjuarvud olenevad ainult kanooniliste võrrandite tundmatute kordajatest, s. t. põhiskeemi elementide geomeetristest mõõtmetest ja jäikuste suhetest, mitte aga võrrandite vabaliikmetest (koormusest).

Mõjuarvude leidmiseks eliminatsioonivõttega tabeli 18.1 kujul on tabelis 18.4 esitatud üldkujul ainult tabeli osad A ja C . Tabeli B ja C elemendid arvutatakse nagu tabelis 18.1.

Tabeli A viimase lahtri elemendiks on

$$\sum \delta_{ij} - 1 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

Tabelis 18.4, C leitud mõjuarve kontrollitakse tingimustega

$$\sum_j \beta_{ij} + 1 = \beta'_i \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

Tabel 18.4

	β_{1i}	\dots	β_{ji}	\dots	β_{ii}	\dots	β_{ni}	$\Delta_{i0}=1$	\dots	$\Delta_{i0}=1$	\dots	$\Delta_{i0}=1$	\dots	$\Delta_{n0}=1$	Σ
A	δ_{11}	\dots	δ_{1j}	\dots	δ_{1i}	\dots	δ_{1n}	-1	0	0	0	0	0	0	$\Sigma \delta_{1j} - 1$
	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	δ_{j1}	\dots	δ_{jj}	\dots	δ_{ji}	\dots	δ_{jn}	0	0	-1	0	0	0	0	
	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	δ_{i1}	\dots	δ_{ij}	\dots	δ_{ii}	\dots	δ_{in}	0	0	0	0	-1	0	0	
	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
δ_{n1}	\dots	δ_{nj}	\dots	δ_{ni}	\dots	δ_{nn}	0	0	0	0	0	0	0	-1	
B															
C	β_{11}	\dots	β_{j1}	\dots	β_{i1}	\dots	β_{n1}								
	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots								
	β_{1j}	\dots	β_{jj}	\dots	β_{ij}	\dots	β_{nj}								
	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots								
	β_{1i}	\dots	β_{ji}	\dots	β_{ii}	\dots	β_{ni}								
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots									
β_{1n}	\dots	β_{jn}	\dots	δ_{in}	\dots	β_{nn}									
β'_1		β'_j		β'_i		β'_n									

Tabel 18.5

	β_{1i}	β_{2i}	β_{3i}	β_{4i}	$\Delta_{10}=1$	$\Delta_{20}=1$	$\Delta_{30}=1$	$\Delta_{40}=1$	Σ
1	20	-4	6	10	-1	0	0	0	31
2	-4	8,8	2	5	0	-1	0	0	10,8
3	6	2	12	-3	0	0	-1	0	16
4	10	5	-3	10	0	0	0	-1	21
I	20	-0,2000	0,3000	0,5000	-0,0500	-	-	-	1,5500
2	-4	8,0	0,4000	0,8750	-0,0250	-0,1250	-	-	2,1250
3	6	3,2	8,9200	-0,9865	0,0426	0,0448	-0,1121	-	-0,0112
4	10	7,0	-8,8000	-9,8066	-0,1071	-0,1294	0,1006	0,1020	0,9660
β_{1i}	0,0413	0,0940	-0,0631	-0,1071					
β_{12}	0,0939	0,0214	-0,0829	-0,1294					
β_{13}	-0,0630	-0,0829	-0,0129	0,1006					
β_{14}	-0,1071	-0,1295	0,1006	0,1020					
β'_i	0,9651	0,9030	0,9418	0,9660					

kusjuures viimase rea element β'_i on arvatud analoogiliselt tabeli C teiste ridade sama veeru elementidega β_{ij} ($j=1, 2, \dots, n$)

Näitena on tabelis 18.5 esitatud nelja tundmatuga võrdandisüsteemi mõjuarvude leidmine.

Mõjuarvud on:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= 0,0413; & \beta_{21} &= 0,0940; & \beta_{31} &= -0,0631; & \beta_{41} &= -0,1071 \\ \beta_{22} &= 0,0214; & \beta_{32} &= -0,0829; & \beta_{42} &= -0,1294; \\ \beta_{33} &= -0,0129; & \beta_{43} &= 0,1006; & \beta_{44} &= 0,1020 \end{aligned}$$

18.3. Mõjujooned

18.31. Kinemaatika meetod

Staatikaga määramatute raamide sisejõudude ja reaktsioonide mõjujoonte ordinaadid arvutatakse kinemaatika meetodi puhul reaktsiooni ja paigutiste vastastikkuse teoreemi alusel (16.90):

$$r'_{ix} = -\delta'_{xi} \quad (a)$$

Kohas x mõjuvast ühikjõust põhjustatud reaktsioon sidemes i on võrdne sideme i negatiivsest ühikpaigutisest põhjustatud ühikjõule vastava üldistatud paigutisega kohas x .

Vertikaalsest ühikjõust põhjustatud mõjujoone ordinaatide arvutamisel kujutab võrduse (a) parem pool sideme i negatiivsest ühikpaigutisest põhjustatud raami varraste, mille liigub ühikjõud, vertikaalsiirde epüüri.

Staatikaga määramatute raami lisatundmatu X_i mõjujoone jaoks kirjutatakse võrdus (a) järgmisel kujul:

$$X_{ix} = -w'_{xi} \quad (18.106)$$

milles võrduse parem pool $-w'_{xi}$ on lisatundmatule X_i vastava sideme negatiivsest ühikpaigutisest põhjustatud raami varraste vertikaalsiirde epüür (varrastel, kus mõjub koormus).

Tundmatu X_i mõjujoone ordinaadid leitakse järgmiselt:

1) eemaldatakse staatikaga määramatust arvutusskeemist side, milles tekib reaktsioon X_i ;

2) antakse sideme i eemaldamisega saadud uues arvutusskeemis eemaldatud sideme sihis negatiivne ühikpaigutis;

3) arvutatakse negatiivsest ühikpaigutisest põhjustatud varraste ristlõigete vertikaalsirde epüür.

Viimane ongi lisatundmatu X_i mõjujoon.

Sideme i eemaldamisega saadud arvutusskeemis sideme sihis negatiivsest ühikpaigutisest põhjustatud paigutusolukord on niisugune, kus lisatundmatule X_i vastav üldistatud paigutis on miinus üks ja teistele lisatundmatutele vastavad üldistatud paigutised on nullid, kuna need sidemed on alles.

Niisuguse paigutusolukorra, kus ühele lisatundmatule (X_i) vastav üldistatud paigutis on miinus üks ja teistele lisatundmatutele X_j ($j=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$) vastavad üldistatud paigutised võrduvad nulliga, põhjustavad staatikaga määratavale põhiskeemile rakendatud mõjuarvud β_{ji} ($j=1, 2, \dots, n$). Mõjuarvud leitakse võrrandisüsteemist (18.102). Nendest mõjuarvudest põhjustatud paindemomendi epüüri M_i ordinaadid arvutatakse valemiga (18.28):

$$M_{ki} = m_{k1}\beta_{1i} + m_{k2}\beta_{2i} + \dots + m_{kn}\beta_{ni} \quad (18.107)$$

Järgnevalt kasutatakse paindemomendi epüüri M_i vertikaalsirde epüüri, s.t. X_i mõjujoone ordinaatide arvutamiseks valemit (16.22):

$$\omega_{xi} = \Sigma \int (m_x^0 M_i / EI) ds \quad (18.108)$$

Lisatundmatute mõjujoonte abil arvutatakse raami suvalises lõikes k paindemomendi, piki- ja põikjõu mõjujoone ordinaadid järgmiste avaldistega:

$$\begin{aligned} m_{hx} &= m_{hx}^0 + m_{h1}X_{1x} + m_{h2}X_{2x} + \dots + m_{hn}X_{nx} \\ n_{hx} &= n_{hx}^0 + n_{h1}X_{1x} + n_{h2}X_{2x} + \dots + n_{hn}X_{nx} \end{aligned} \quad (18.110)$$

$$q_{hx} = q_{hx}^0 + q_{h1}X_{1x} + q_{h2}X_{2x} + \dots + q_{hn}X_{nx}$$

või

$$s_{hx} = s_{hx}^0 + s_{h1}X_{1x} + s_{h2}X_{2x} + \dots + s_{hn}X_{nx} \quad (18.110')$$

Teine mõjujoonte ordinaatide arvutamise moodus põhineb samuti reaktsiooni ja paigutise vastastikkuse lausel. Esmalt eemaldatakse see side, mille reaktsiooni mõjujoone ordinaate arvutatakse. Lisasideme eemaldamisega saadud arvutusskeem on $n-1$ korda staatikaga määratav. Järgnevalt rakendatakse eemaldatud sideme i asemele

üldistatud jõud I_i . Üldistatud jõust I_i põhjustatud paigutist ärajäetud sideme sihis tähistatakse $\delta_{ii}^{(n-1)}$, mis on nii tundmatule X_i kui ka ühikjõule I_i vastav üldistatud paigutis.

Staatikaga $n-1$ korda määratavale arvutusskeemile rakendatud üldistatud jõust I_i põhjustatud vertikaalsirde epüüri ordinaadid $\omega_{xi}^{(n-1)}$ vastupidiste märkidega ja jagatuna paigutisega $\delta_{ii}^{(n-1)}$ võrduvad reaktsiooni X_i mõjujoone ordinaatidega:

$$X_{ix} = -\omega_{xi}^{(n-1)} / \delta_{ii}^{(n-1)} \quad (18.111)$$

Näide 18.10. Konstrueerida kolmesildelise raami lisatundmatute ja lõike 14 jaoks paindemomendi ning põikjõu mõjujooned (joon. 18.37, a).

Staatikalise määratavuse aste $n=2 \cdot 0 + 6 - 3 \cdot 1 = 3$. Põhiskeem ja lisatundmatud on kujutatud joonisel 18.37, b; ühiktundmatutest põhjustatud epüürid joonisel 18.37, c, d ja e. Varraste redutseeritud pikkused $l'_1 = l'_3 = 9,0$ m; $l'_2 = 9,0 l_0 / 0,75 l_0 = 12$ m; $l'_4 = l'_5 = 4,8 l_0 / 0,8 l_0 = 6,0$ m.

Paigutised:

$$\begin{aligned} EI_0 \delta_{11} &= 2 \cdot 6 / 3 + 12 = 16 \text{ m}; & EI_0 \delta_{12} &= EI_0 \delta_{21} = 12 \cdot 0,5 = 6 \text{ m} \\ EI_0 \delta_{13} &= EI_0 \delta_{31} = -2 \cdot 6 / 3 - 12 \cdot 0,5 = -10 \text{ m} \\ EI_0 \delta_{22} &= 9 / 3 + 12 / 3 = 7 \text{ m}; & EI_0 \delta_{23} &= EI_0 \delta_{32} = -12 / 3 = -4 \text{ m} \\ EI_0 \delta_{33} &= 2 \cdot 6 / 3 + 12 / 3 + 9 / 3 = 11 \text{ m} \end{aligned}$$

Võrrandisüsteemid mõjuarvude leidmiseks on järgmised:

$$\begin{aligned} 16\beta_{11} + 6\beta_{21} - 10\beta_{31} &= -1 & 16\beta_{12} + 6\beta_{22} - 10\beta_{32} &= 0 \\ 6\beta_{11} + 7\beta_{21} - 4\beta_{31} &= 0 & 6\beta_{12} + 7\beta_{22} - 4\beta_{32} &= -1 \\ 10\beta_{11} - 4\beta_{21} + 11\beta_{31} &= 0 & -10\beta_{12} - 4\beta_{22} + 11\beta_{32} &= 0 \\ 16\beta_{13} + 6\beta_{23} - 10\beta_{33} &= 0 \\ 6\beta_{13} + 7\beta_{23} - 4\beta_{33} &= 0 \\ -10\beta_{13} - 4\beta_{23} + 11\beta_{33} &= -1 \end{aligned}$$

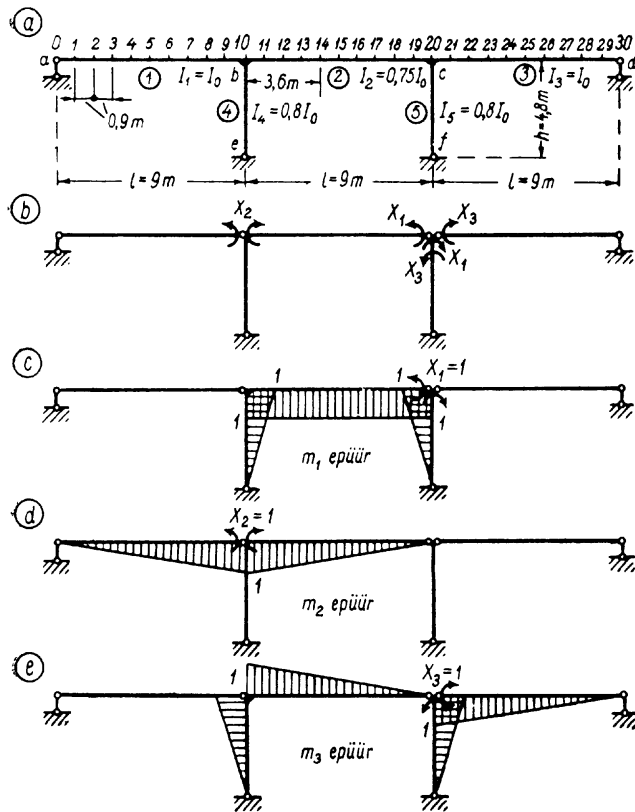
Kuna mõjuarvude kordajad arvutatakse EI_0 korda suuremad kui ühiktundmatutest põhjustatud paigutised, siis võrrandisüsteemi lahendamisel saadakse mõjuarvud EI_0 korda väiksemad.

Mõjuarvud leitakse eliminatsioonimeetodiga analoogiliselt tabelis 18.5 toodud näitega.

Mõjuarvud on järgmised:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= -0,169444; & \beta_{21} = \beta_{12} &= 0,072222; & \beta_{31} = \beta_{13} &= -0,127778 \\ \beta_{22} &= -0,211111; & \beta_{32} = \beta_{23} &= -0,011111; & \beta_{33} &= -0,211111 \end{aligned}$$

Tundmatu X_1 mõjujoone ordinaatide leidmiseks rakendatakse mõjuarvud β_{11} , β_{21} ja β_{31} staatikaga määratavale põhiskeemile ja arvutatakse raami riivide vertikaalsirde epüür. Vertikaalsirde epüüri leidmiseks arvutatakse mõjuarvudest põhjustatud paindemomendi $M_{\beta 1}$ epüüri ordinaadid valemiga (18.107):



Joon. 18.37

$$\begin{aligned}
 M_{ba} &= 0,07222 \\
 M_{bc} &= 1(-0,16944) + 1 \cdot 0,07222 + (-1)(-0,12778) = 0,03056 \\
 M_{be} &= 1(-0,16944) + (-1)(-0,12777) = -0,04167 \\
 M_{cd} &= -0,12778 \\
 M_{cb} &= -0,16944 \\
 M_{cf} &= 1 \cdot (-0,16944) + (-1)(-0,12777) = -0,04167
 \end{aligned}$$

Paindemomendi $M_{\beta 1}$ epüür on esitatud joonisel 18.38, a.

Nüüd rakendatakse vertikaalne ühikjõud järgemööda lõigetes 0, 1, 2, ..., 30 ja leitakse valemiga (18.108) riivide vertikaalsiirde epüüri ordinaadid (joon. 18.39, a). Kui staatikaga määratud põhiskeemis põhjustab vertikaalne ühikjõud epüüri ainult koormatud varda ulatusel, kusjuures epüür on kolmnurk ning ühikjõu epüüri ulatusel M_{β} epüür on sirge, siis valemi (18.108) asemel võib raami suvalise ristlõike vertikaalsiirde arvutamiseks kasutada avaldist

$$w = \frac{l^2 EI_0}{6EI} (M_i f_{\xi'} + M_j f_{\xi}) \quad (18.112)$$

ehk

$$w = \frac{l l'}{6} (M_i f_{\xi'} + M_j f_{\xi}) \quad (18.112')$$

milles M_i ja M_j on M_{β} epüüri vasak- ja parempoolse otsmise ristlõike paindemoment ühikjõuga koormatud vardal ning funktsioonid

$$f_{\xi} = \xi(1 - \xi^2); \quad f_{\xi'} = \xi'(1 - \xi'^2) \quad (18.113)$$

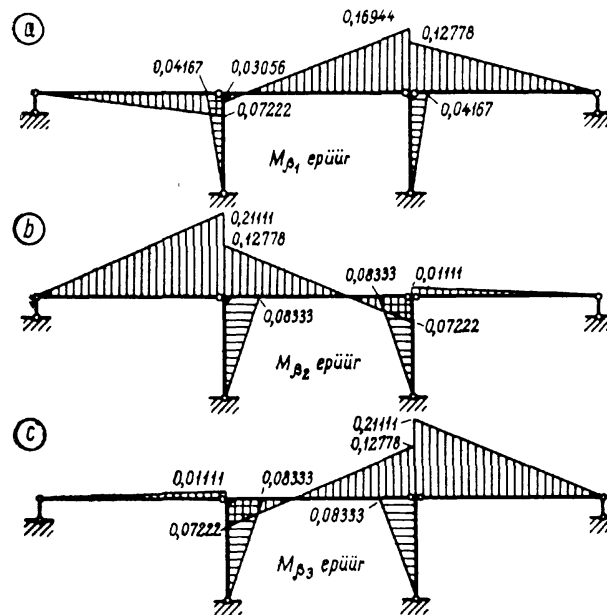
olenevad ühikjõu asukohast vardal (tabel 18.6). Avaldises (18.112) on M_{β} epüüri ordinaate korrutatud jäikusega EI_0 , kuna mõjuarvud on arvatud EI_0 korda väiksemad.

Kui ühikjõud mõjub esimesel sildel, on avaldis (18.112') järgmine:

$$X_1 = \omega_1 = \frac{l_1 l'_1}{6} (0 \cdot f_{\xi'} + M_{ba} f_{\xi}) = \frac{9 \cdot 9}{6} \cdot 0,07222 f_{\xi} = 0,975 f_{\xi} \quad (a)$$

Teise silde jaoks

$$\begin{aligned}
 X_1 = \omega_1 &= (M_{bc} f_{\xi'} + M_{cb} f_{\xi}) l_2 \cdot l'_2 / 6 = (0,03056 f_{\xi'} - 0,16944 f_{\xi}) \cdot \\
 &\cdot 9 \cdot 12 / 6 = 0,55 f_{\xi'} - 3,05 f_{\xi} \quad (b)
 \end{aligned}$$



Joon. 18.38

Tabel 18.6

ξ	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	ξ'
f_ξ	0,000	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171	0,000	$f_{\xi'}$
ξ'	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0	ξ

$$\int \xi' = \xi (1 - \xi^2)$$

Kolmanda silde jaoks

$$X_1 = w_1 = (M_{ca} f_\xi + 0 \cdot f_{\xi'}) \cdot l_3 \cdot l_3 / 6 = (-0,12778 f_\xi) \cdot 9 \cdot 9 / 6 = -1,725 f_\xi \quad (c)$$

Näiteks ristlõike 16 jaoks $\xi = 0,6$ ja vertikaalsiire on järgmine:

$$w_{1,16} = 0,55 \cdot 0,336 - 3,05 \cdot 0,384 = -0,9864 \text{ m}$$

Tundmatu X_1 mõjujoon, mille ordinaadid arvutatakse valemitega (a), (b) ja (c), on kujutatud joonisel 18.39, a.

Paindemomendi $M_{\beta 2}$ epiüri (joon. 18.38, b), mis on põhjustatud mõjuarvudest β_{12} , β_{22} ja β_{32} , kasutatakse tundmatu X_2 mõjujoone ordinaatide leidmiseks (joon. 18.39, b). Mõjujoone ordinaadid arvutatakse avaldisega (18.112'):

1. sille:

$$X_2 = w_2 = (-0,21111 f_\xi) \cdot 9 \cdot 9 / 6 = -2,85 f_\xi \quad (d)$$

2. sille:

$$X_2 = w_2 = (-0,12778 f_\xi + 0,07222 f_{\xi'}) \cdot 9 \cdot 12 / 6 = -2,3 f_\xi + 1,3 f_{\xi'} \quad (e)$$

3. sille:

$$X_2 = w_2 = (-0,01111 f_{\xi'}) \cdot 9 \cdot 9 / 6 = -0,15 f_{\xi'} \quad (f)$$

Lisatundmatu X_3 mõjujoon, mille ordinaatide leidmiseks kasutatakse mõjuarvudest β_{13} , β_{23} ja β_{33} põhjustatud $M_{\beta 3}$ epiüri (joon. 18.38, c), on kujutatud joonisel 18.39, c. Mõjujoone ordinaadid arvutatakse järgmistega avaldistega:

1. sille:

$$X_3 = w_3 = (-0,01111 f_\xi) \cdot 9 \cdot 9 / 6 = -0,15 f_\xi \quad (g)$$

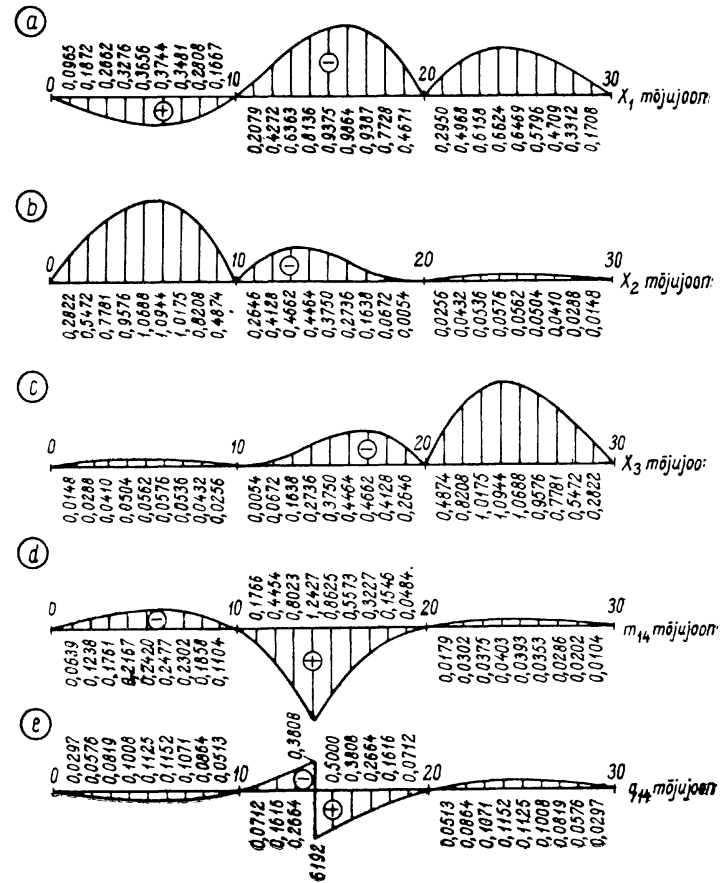
2. sille:

$$X_3 = w_3 = (0,07222 f_{\xi'} - 0,12778 f_\xi) \cdot 9 \cdot 12 / 6 = 1,3 f_{\xi'} - 2,3 f_\xi \quad (h)$$

3. sille:

$$X_3 = w_3 = (-0,21111 f_{\xi'}) \cdot 9 \cdot 9 / 6 = -2,85 f_{\xi'} \quad (i)$$

Lõike 14 paindemomendi mõjujoone (joon. 18.39, d) ordinaadid arvutatakse avaldisega (18.110')



Joon. 18.39

$$m_{14,x} = m_{14,x}^0 + m_{14,1} X_{1x} + m_{14,2} X_{2x} + m_{14,3} X_{3x} \quad (j)$$

ehk

$$m_{14,x} = m_{14,x}^0 + X_{1x} + 0,6 X_{2x} - 0,6 X_{3x} \quad (k)$$

kuna

$$m_{14,1} = 1; \quad m_{14,2} = 0,6; \quad m_{14,3} = -0,6$$

Näiteks kui ühikjõud asetseb lõikes 12, siis paindemoment lõikes 14 on järgmine:

$$m_{14,12}^0 = 1,08 - 0,4272 + 0,6(-0,4128) - 0,6(-0,0672) = 0,4454 \text{ m}$$

milles $m_{14,12}^0 = 1,08 \text{ m}$ on lõike 14 lihtala paindemomendi mõjujoone ordinaat, kui ühikjõud asub lõikes 12.

Arvutus lihtsustub tunduvalt, kui valemis (k) tundmatud asenda-

lakse vastavate avaldistega (a), (b), ..., (i). Paindemomendi avaldised löike 14 jaoks sillete kaupa on siis järgmised:

$$1) m_{14,x} = 0,975f_{\xi} + 0,6(-2,85f_{\xi}) - 0,6(-0,15f_{\xi}) = -0,645f_{\xi}$$

$$2) m_{14,x} = m_{14,x}^0 + 0,55f_{\xi r} - 3,05f_{\xi} + 0,6(-2,3f_{\xi r} + 1,3f_{\xi}) - 0,6(1,3f_{\xi r} - 2,3f_{\xi}) = m_{14,x}^0 - 1,61f_{\xi r} - 0,89f_{\xi}$$

$$3) m_{14,x} = -1,725f_{\xi r} + 0,6(-0,15f_{\xi r}) - 0,6(-2,85f_{\xi r}) = -1,105f_{\xi r}$$

Löike 14 jaoks arvutatakse põikjõu mõjujoone (joon. 18.39, c) ordinaadid avaldisega (18.110):

$$q_{14,x} = q_{14,x} + 0 \cdot X_{1x} - (1/9)X_{2x} + (1/9)X_{3x} \quad (1)$$

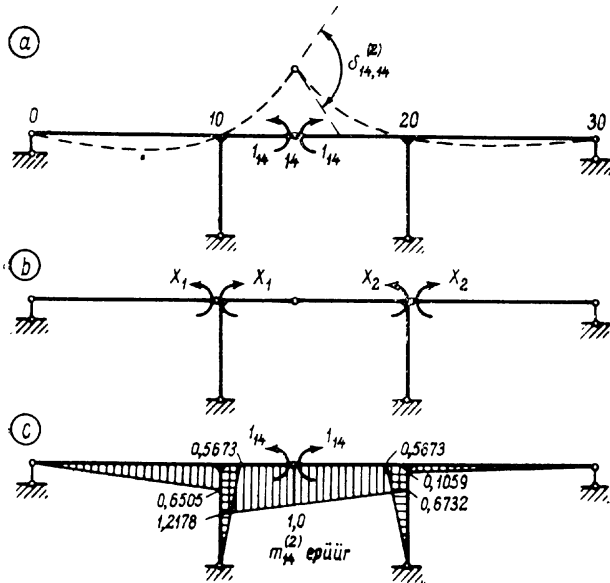
Kui valemis (1) lisatundmatud asendatakse avaldistega (a), (b), ..., (i), siis saadakse sillete kaupa järgmised valemid:

$$1) q_{14,x} = 0,30f_{\xi}$$

$$2) q_{14,x} = q_{14,x}^0 - 0,4(f_{\xi} - f_{\xi r})$$

$$3) q_{14,x} = -0,30f_{\xi r}$$

Paindemomendi mõjujoone ordinaatide arvutamisel löike 14 jaoks teise võtte abil asetatakse ristlõikesse liigend ja rakendatakse kaks vastupidist ühikmomenti (joon. 18.40, a). Ühikmomentidest põhjusta-



Joon. 18.40

tud raami riivide vastupidiste märkidega vertikaalsiirde epüüri ordinaadid, mis on jagatud paigutisega $\delta_{14,14}^{(2)}$, on võrdsed paindemomendi m_{14} mõjujoone ordinaatidega.

Põhiskeem koos lisatundmatutega on kujutatud joonisel 18.26, b. Paigutised on järgmised:

$$EI_0\delta_{11} = 5,56 \text{ m}; EI_0\delta_{12} = EI_0\delta_{21} = -0,16 \text{ m}; EI_0\delta_{22} = 4,76 \text{ m};$$

$$EI_0\delta_{1p} = -3,6 \text{ m ja } EI_0\delta_{2p} = -0,4 \text{ m.}$$

Võrrandisüsteemist

$$5,56X_1 - 0,16X_2 = 3,6$$

$$-0,16X_1 + 4,76X_2 = 0,4$$

leitakse tundmatud $X_1 = 0,6505$ ja $X_2 = 0,1059$

Ühikmomentidest põhjustatud paindemomendi epüür kahekordselt staatikaga määramatus skeemis (joon. 18.40, a) on esitatud joonisel 18.40, c.

Ühikmomentidele vastav paigutis

$$EI_0\delta_{14,14}^{(2)} = \int m_{14}^{(2)} m_{14}^{(2)} ds = 2 \cdot 0,5673^2 \cdot 6/3 + (0,6505^2 + 0,1059^2) \cdot 9/3 + (1,2178^2 + 4 \cdot 0,9455^2 + 0,6732^2) = 13,615 \text{ m}$$

$$EI_0\delta_{14,14}^{(2)} = \int m_{14}^{(2)} m_{14}^{(2)} ds = 2 \cdot 0,5673 \cdot 1 \cdot 6/3 + (1,2178 + 4 \cdot 0,9455 + 0,6732) \cdot 12/6 = 13,615 \text{ m}$$

Löike 14 paindemomendi mõjujoone ordinaadid arvutatakse valemiga

$$m_{14,x} = -\omega_{x,14}^{(2)} / \delta_{14,14}^{(2)} \quad (m)$$

1. sille:

$$m_{14,x} = (9 \cdot 9/6) \cdot 0,6505f_{\xi} / 13,615 = 0,6450f_{\xi} \quad (n)$$

3. sille:

$$m_{14,x} = (9 \cdot 9/6) \cdot 0,1059f_{\xi r} / 13,615 = 0,1050f_{\xi r} \quad (o)$$

Valemis (m) arvutatakse $\omega_{x,14}^{(2)}$ 1. ja 3. sildes avaldisega (18.112'), kuna ühikjõust põhjustatud epüürid nendes silletes staatikaga määratud põhiskeemis on lihttala epüürid. Kui ühikjõud asetseb teises sildes, kus põhiskeemiks on kolme liigendiga raam (joon. 18.40, b), siis arvutatakse raami riivi vertikaalsiirded järgmise avaldisega (joon. 18.41):

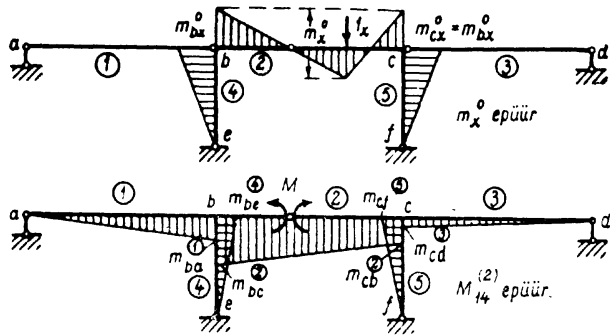
$$EI_0\omega_{xk}^{(2)} = \int f m_k^{(2)} m_x^0 ds = -m_{bc}^{(2)} m_{bc}^0 h'/3 - (m_{bc}^{(2)} + m_{cb}^{(2)}) m_{bc}^0 l'/2 - m_{cf}^{(2)} m_{cf}^0 h'/3 + (m_{bc}^{(2)} f_{\xi r} + m_{cb}^{(2)} f_{\xi}) \quad (18.114)$$

Löike 14 jaoks ($k=14$) on avaldis (18.114) järgmine (joon. 18.40, c):

$$EI_0\omega_{x,14}^{(2)} = -0,5673 \cdot 2 \cdot (6/3) m_{bc}^0 - (1,2178 + 0,6732) (12/2) m_{bc}^0 + (1,2178f_{\xi r} + 0,6732f_{\xi}) \cdot 9 \cdot 12/6 \quad (p)$$

Kui $0 \leq x \leq 3,6$ m, siis $m_{bc}^0 = 5,4\xi$ ja

$$EI_0\omega_{x,14}^{(2)} = -73,522\xi + 21,921f_{\xi r} + 12,118f_{\xi} \quad (r)$$



Joon. 18.41

ning kui $3,6 \leq x \leq 9,0$ m, siis $m_{be}^0 = 3,6\xi'$ ja

$$EI_0 \omega_{x,14}^{(2)} = -49,017\xi' + 21,921f_{\xi'} + 12,118f_{\xi} \quad (s)$$

Kui $x = 3,6$ m, siis $\xi = 0,4$ ja

$$EI_0 \omega_{14,14}^{(2)} = -73,522 \cdot 0,4 + 21,921 \cdot 0,384 + 12,118 \cdot 0,336 = -16,921 \text{ m}^2$$

ning

$$m_{14,14} = -EI_0 \omega_{14,14}^{(2)} / EI_0 \delta_{14,14}^{(2)} = -(-16,921) / 13,615 = 1,2427 \text{ m}$$

18.32. Staatika meetod

Lisatundmatud X_i ($i=1, 2, \dots, n$) arvutatakse mõjuarvude abil avaldistega (18.98) järgmiselt:

$$X_i = \beta_{i1} \Delta_{1p} + \beta_{i2} \Delta_{2p} + \dots + \beta_{ij} \Delta_{jp} + \dots + \beta_{in} \Delta_{np} \quad (a)$$

$(i=1, 2, \dots, n)$

kus Δ_{jp} on lisatundmatule X_j vastav koormusest põhjustatud üldistatud paigutis. Mõjuarvude arvutamisel on koormuseks liikuv vertikaalne ühikjõud, millest põhjustatud paigutisi tähistatakse väikese tähega δ . Seega lisatundmatu X_i ($i=1, 2, \dots, n$) mõjuarvude avaldiste võib kirjutada järgmiselt:

$$X_{ix} = \beta_{i1} \delta_{1p(x)} + \beta_{i2} \delta_{2p(x)} + \dots + \beta_{ij} \delta_{jp(x)} + \dots + \beta_{in} \delta_{np(x)} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

mis maatriksümboolikas omab kuju:

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} \mathbf{D}_{p(x)} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{j1} & \beta_{j2} & \dots & \beta_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{1p(x)} \\ \delta_{2p(x)} \\ \dots \\ \delta_{jp(x)} \\ \dots \\ \delta_{np(x)} \end{pmatrix} \quad (18.115)$$

Avaldises (18.115) on $\delta_{jp(x)}$ lisatundmatule X_j vastava vertikaalsest ühikjõust põhjustatud üldistatud paigutise mõjuarv avaldis.

Paigutiste vastastikkuse teoreemi järgi on lisatundmatule X_j vastava üldistatud paigutise mõjuarvude ordinaat kohas x võrdne ühiktundmatust $X_j=1$ põhjustatud vertikaalsiirdega kohas x (16.89), mille alusel võib kirjutada:

$$\delta_{jp(x)} = \omega_{xj} \quad (b)$$

Lisatundmatu X_i mõjuarvude ordinaatide leidmiseks saadakse nüüd järgmised avaldised:

$$X_{ix} = \beta_{i1} \omega_{x1} + \beta_{i2} \omega_{x2} + \dots + \beta_{ij} \omega_{xj} + \dots + \beta_{in} \omega_{xn} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

või

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} & \dots & \beta_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{01} & \omega_{11} & \dots & \omega_{k1} & \dots & \omega_{m1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{0i} & \omega_{1i} & \dots & \omega_{ki} & \dots & \omega_{mi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{0n} & \omega_{1n} & \dots & \omega_{kn} & \dots & \omega_{mn} \end{pmatrix} \quad (18.116)$$

milles ω_{ki} on lisatundmatust $X_i=1$ põhjustatud vertikaalsiirde epüüri ordinaat kohas k .

Sisejõudude mõjuarvused arvutatakse valemiga (18.110'), mis maatrikskujul on järgmine:

$$\mathbf{s}_x = \mathbf{s}_x^0 + \mathbf{s} \mathbf{X} \quad (18.117)$$

Maatriksi \mathbf{s}_x^0 elementideks on põhiskeemi sisejõudude mõjuarvude ordinaadid. Maatriks \mathbf{s} on ühiktundmatustest

($X_i=1$) põhjustatud sisejõudude maatriks. Maatriksi \mathbf{X} (18.116) elementideks on lisatundmatute mõjujoonte ordinaadid.

Valemi (18.117) võib esitada ka järgmisel kujul:

$$\mathbf{s}_x = \mathbf{s}_x^0 + \mathbf{s} \mathbf{B} \mathbf{D}_{p(x)} = \mathbf{s}_x^0 - \mathbf{s} \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{D}_{p(x)} \quad (18.118)$$

18.4. Jätkuvtalad

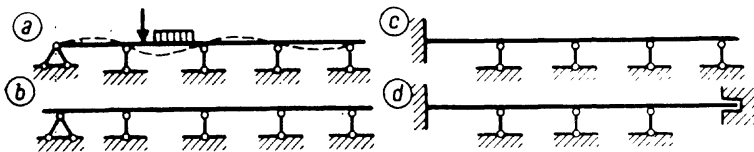
18.4.1. Staatikalise määramatuse aste

Jätkuvtalaks nimetatakse liigenditeta mitmesilidelist tala. Sisejõud ja toereaktsioonid tekivad jätkuvtalas ka mittekoormatud silletes, mis järeldub joonisel 18.42, *a* kujutatud tala deformeerunud kujust. Deformeerunud kuju on joonestatud katkendjoonena.

Geomeetriliselt muutumatu kujund vajab tasandis kinditamiseks kolme toesidet. Jätkuvtalal on toesidemeid rohkem kui kolm ja ta on toereaktsioonide suhtes staatikaga määramatu. Staatikalise määramatuse aste leitakse valemiga

$$n = t - 3 \quad (18.119)$$

milles t on toesidemete arv.

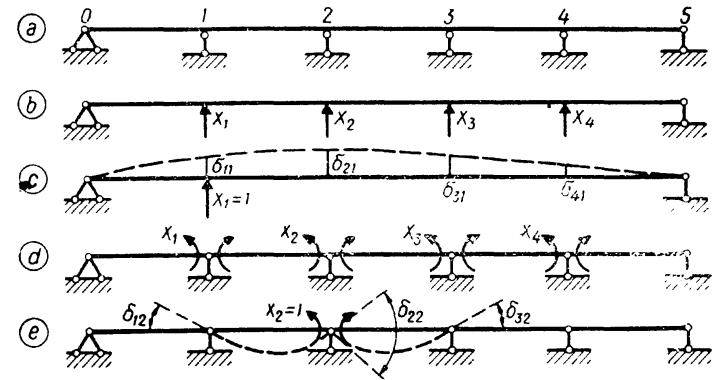


Joon. 18.42

Joonisel 18.42, *a*, *b*, *c* ja *d* esitatud neljal talal on igaühel viis tuge. Toesidemete arv on aga 6, 6, 7 ja 8 ning staatikalise määramatuse aste vastavalt 3, 3, 4 ja 5.

18.4.2. Põhiskeem ja lisatundmatud

Otstarbekas põhiskeem rahuldab kahte tingimust: koorumest ja ühiktundmatutest põhjustatud sisejõud põhiskeemis on kergelt arvatavad ning kanoonilistes võrrandites on võimalikult palju kõrvalpaigutisi võrdsed nulliga.



Joon. 18.43

Joonisel 18.43, *b* esitatud põhiskeem — tala kahel toel, mis saadakse n vahepealse toe eemaldamisega, rahuldab esimest tingimust. Lisatundmatuteks on vahepealsete tuge toereaktsioonid. Tundmatust $X_1=1$ põhjustatud põhiskeemi deformeerunud kujust (joon. 18.43, *c*) järeldub, et $\delta_{ii} = \delta_{ii} \neq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) ja seega esimene võrrand

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} = 0$$

sisaldab n tundmatut. Sama kehtib ka kõigi teiste võrrandite kohta. Järelikult niisugune põhiskeem ei ole otstarbekas.

Joonisel 18.43, *d* kujutatud põhiskeem koosneb üksteise kõrval asetsevatest lihttaladest. Lisatundmatuteks on tuge ristlõigetes tekkinud paindemomendid X_1, X_2, \dots, X_n , mida nimetatakse toemomentideks. Lisatundmatule X_i vastavaks üldistatud paigutiseks on

$$\varphi_i = \varphi_{ii} + \varphi_{i,i+1} \quad (a)$$

milles φ_{ii} ja $\varphi_{i,i+1}$ on toest i vasakul asuva naabertala parempoolse ja paremal asuva naabertala vasakpoolse toeristlõike pööre. Esimene indeks tähistab tuge ja teine indeks — sillet. Tundmatu X_2 põhjustab põhiskeemis deformatsioone ainult kahes sildes: toest 2 (joon. 18.43, *a*) vasakul ja paremal pool asuvas naabertalal (joon. 18.43, *e*). Sama kehtib iga teise lisatundmatu X_i ($i=1, 2, \dots, n$) kohta, kui äärmised toed on liigendtoed või konsoolidega (joon. 18.42, *a* ja *b*). Seega iga lisatundmatu toemoment põhjustab staatikaga määratavas põhiskeemis

(18.43, *d*) deformatsioone ainult kahes naabertalases. Äärmise jäiga toe lisatundmatu (paindemoment) põhjustab deformatsioone ainult äärmises sildes. Seega kanoonilistest võrrandites on ainult kas kaks või üks (esimeses ja viimases võrrandis) kõrvalpaigutist nullist erinevad.

18.43. Kanoonilised võrrandid. Kolme momendi võrrand

18.43.1. Koormuse mõju

Järgnevalt vaadeldakse jätkuvtala suvalist tuge i ja sellest toest kummalegi poole kahte sillet (joon. 18.44, *a*). Lisatundmatu tekitab põhiskeemis ainult kahe naabersilde talades deformatsioone. Lisatundmatule X_i vastavat üldistatud paigutist φ_i põhjustavad kolm momenti X_{i-1} , X_i ja X_{i+1} (joon. 18.44, *b, c* ja *d*). Tundmatud X_{i-2} ja X_{i+2} , samuti ülejäänud lisatundmatud ei põhjusta silletes i ja $i+1$ deformatsioone ning lisatundmatule X_i vastavat üldistatud paigutist. Tundmatule X_i vastav kanooniline võrrand on järgmine:

$$\delta_{i,i-1}X_{i-1} + \delta_{ii}X_i + \delta_{i,i+1}X_{i+1} + \Delta_{ip} = 0 \quad (18.120)$$

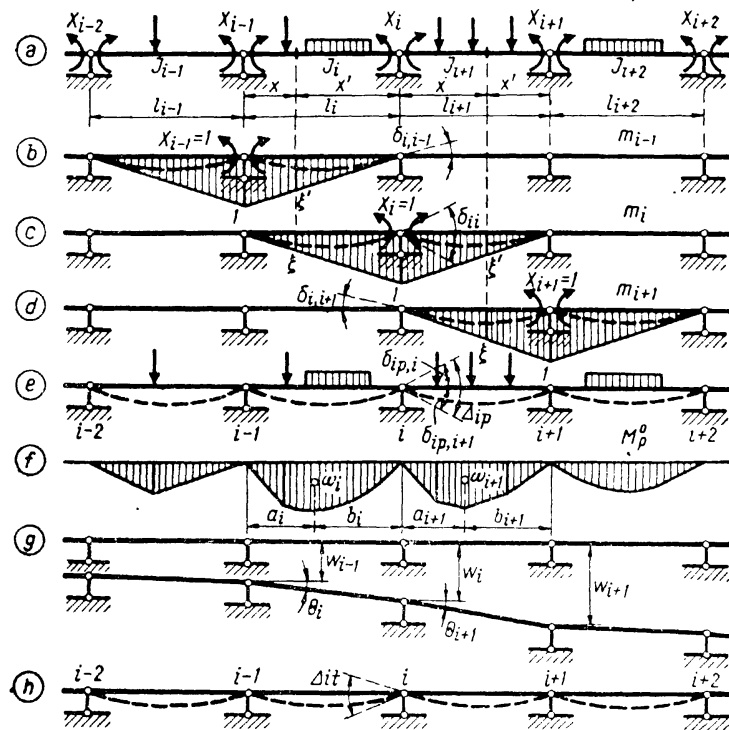
Võrrandit (18.120) nimetatakse kolme momendi võrrandiks, kuna võrrandis on kolm tundmatut paindemomenti. Niisugune võrrand koostatakse jätkuvtala iga tundmatu toemomendi jaoks, mille tulemusena saadakse n võrrandiga süsteem. Esimeses ja viimases võrrandis on kaks tundmatut ning vahepealsetes võrrandites on igaüks kolm tundmatut momenti.

Võrrandi (18.120) paigutiste $\delta_{i,i-1}$, δ_{ii} , $\delta_{i,i+1}$ ja Δ_{ip} arvutamiseks rakendatakse põhiskeemile järjekorras momendid $X_{i-1}=1$, $X_i=1$ ning $X_{i+1}=1$ ja koormus. Nendest põhjustatud paindemomendi epüürid m_{i-1} , m_i , m_{i+1} ja M_p^0 on esitatud joonisel 18.44. Paigutiste leidmisel põikjõudude mõju ei arvestata. Võrrandi (18.120) tundmatute kordajad arvutatakse valemiga

$$EI_0\delta_{ih} = \int m_i m_h (I_0/I) dx$$

mis annab

$$EI_0\delta_{i,i-1} = \int_0^{l_i} m_i m_{i-1} (I_0/I) dx = l_i \int_0^1 \xi \xi' (I_0/I) d\xi$$



Joon. 18.44

$$\begin{aligned} EI_0\delta_{ii} &= \int_0^{l_i} m_i^2 (I_0/I) dx + \int_0^{l_{i+1}} m_i^2 (I_0/I_{i+1}) dx = \\ &= l_i \int_0^1 \xi^2 (I_0/I) d\xi + l_{i+1} \int_0^1 \xi'^2 (I_0/I_{i+1}) d\xi \end{aligned} \quad (18.121)$$

$$EI_0\delta_{i,i+1} = \int_0^{l_{i+1}} m_i m_{i+1} (I_0/I_{i+1}) dx = l_{i+1} \int_0^1 \xi \xi' (I_0/I_{i+1}) d\xi$$

milles $\xi = x/l$ ja $\xi' = x'/l = 1 - \xi$

Kui jätkuvtala iga silde ulatusel on ristlõige konstantne, siis pärast avaldiste (18.121) integreerimist saadakse paigutiste arvutamiseks järgmised valemid:

$$EI_0\delta_{i,i-1} = (l_i/6) (I_0/I_i) = l'_i/6$$

$$EI_0\delta_{ii} = (l_i/3) (I_0/I_i) + (l_{i+1}/3) (I_0/I_{i+1}) = l'_i/3 + l'_{i+1}/3 \quad (18.122)$$

$$EI_0\delta_{i,i+1} = (l_{i+1}/6) (I_0/I_{i+1}) = l'_{i+1}/6$$

Võrrandi vabaliige Δ_{ip} arvutatakse valemiga

$$EI_0\Delta_{ip} = \Sigma \int m_i M_p^0(I_0/I) dx$$

Kui $I_i = C_i = \text{konst.}$ ja $I_{i+1} = C_{i+1} = \text{konst.}$, siis integraalide arvufamisel kasutatakse Vereštšagini võtet, mille tulemusel saadakse

$$EI_0\Delta_{ip} = (I_0/I_i) (a_i/l_i) \omega_i + (I_0/I_{i+1}) (b_{i+1}/l_{i+1}) \omega_{i+1} \quad (18.123)$$

milles ω_i ja ω_{i+1} on põhiskeemi koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri pindalad silletes i ning $i+1$: a_i , b_i , a_{i+1} ja b_{i+1} — nende pindade raskuskeskmete kaugused toevvertikaalidest; a_i/l_i ja b_{i+1}/l_{i+1} tundmatust $X_i = 1$ põhjustatud paindemomendi epüüri m_i ordinaadid koormusest põhjustatud epüüri M_p^0 pindade ω_i ja ω_{i+1} raskuskeskmete kohal.

Paigutiste (18.122) ja (18.123) asetamisel võrrandisse (18.120), kusjuures iga liiget on korrutatud teguriga 6 ja vabaliige on viidud paremale poole võrdusmärgi, saab kolme momendi võrrand järgmise kuju:

$$l'_i X_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) X_i + l'_{i+1} X_{i+1} = -6(I_0/I_i) a_i \omega_i / l_i - 6(I_0/I_{i+1}) b_{i+1} \omega_{i+1} / l_{i+1} \quad (18.124)$$

ehk

$$l'_i X_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) X_i + l'_{i+1} X_{i+1} = -6B_i^f I_0 / l_i - 6A_{i+1}^f I_0 / l_{i+1} \quad (18.125)$$

milles

$$B_i^f = a_i \omega_i / l_i; \quad A_{i+1}^f = b_{i+1} \omega_{i+1} / l_{i+1} \quad (18.126)$$

on tinglikust koormusest põhjustatud toereaktsioonid: B_i^f — sildes i parempoolne ja A_{i+1}^f — sildes $i+1$ vasakpoolne. Tinglikuks koormuseks on tegelikust koormusest põhjustatud paindemomendi epüür põhiskeemis M_p^0 .

Kanooniliste võrrandite koostamisel rakendatakse kolme momendi võrrandit n korda.

Tabelis 18.7 on esitatud valemid vabaliikmete arvutamiseks.

Tabel 18.7

Valemid vabaliikmete arvutamiseks

Jrk. nr.	Skeem	Valemid
1		$6 \frac{I_0}{I_i} \frac{b_i \omega_i}{l_i} = 6 \frac{I_0}{I_i} \frac{a_i \omega_i}{l_i} =$ $= 6(I_0/I_i) A_i^f = 6(I_0/I_i) B_i^f$
2		$Pl'_i \xi \xi' (1 + \xi')$ $Pl'_i \xi \xi' (1 + \xi)$
3		$\frac{1}{4} pl_i^2 l'_i$ $\frac{1}{4} pl_i^2 l'_i$
4		$\frac{5}{32} pl_i^2 l'_i$ $\frac{5}{32} pl_i^2 l'_i$
5		$\frac{7}{60} pl_i^2 l'_i$ $\frac{2}{15} pl_i^2 l'_i$
6		$\frac{1}{4} pl_i^2 l'_i \xi'^2 (2 - \xi'^2)$ $\frac{1}{4} pl_i^2 l'_i \xi'^2 (2 - \xi')^2$
7		$-Ml'_i (1 - 3\xi'^2)$ $Ml'_i (1 - 3\xi^2)$

18.43.2. Temperatuuri mitteühtlase muutuse ja tugede paigutiste mõju

Jätkuvtala, millel ainult üks on liikumatu ja teised on liikuvad liigendtoed, temperatuuri ühtlane muutus sisejõude ei põhjusta. Temperatuuri mitteühtlase muutumise korral, kui tala ülemise ja alumise pinna temperatuuri muutus on erinev, tingib tala kõverdumine sisejõude. Kui tala ristlõike kõrgus silletes i ja $i+1$ on konstantne, on kolme momendi võrrand järgmine:

$$l'_i X_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) X_i + l'_{i+1} X_{i+1} = -6EI_0 \Delta_{it} \quad (18.127)$$

milles paigutis Δ_{it} (joon. 18.44, *h*) arvutatakse valemiga

$$\Delta_{it} = \Sigma \alpha (\Delta t_i / h_i) \int m_i dx$$

mis pärast integreerimist on järgmine:

$$\Delta_{it} = (\alpha/2) (\Delta t_i l_i / h_i + \Delta t_{i+1} l_{i+1} / h_{i+1}) \quad (18.128)$$

Avaldises (18.128) tähistavad h_i ja h_{i+1} ristlõigete kõrgusi silletes i ning $i+1$.

Jätkuvtala tugede vajumine, kui tala jääb sirgeks, ei põhjusta sisejõude. Tugede vajumine, kui tala kõverdub, tekitab talas paindemomente ja põikjõude. Toemomendid arvutatakse kolme momendi võrrandiga:

$$l'_i X_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) X_i + l'_{i+1} X_{i+1} = -6EI_0 \Delta_{ir} \quad (18.129)$$

milles Δ_{ir} on tugede mitteühtlasest vajumisest põhjustatud tala murdenurk toe i juures staatikaga määratavas põhiskeemis ja arvutatakse järgmiselt (joon. 18.44, *g*):

$$\Delta_{ir} = (\omega_{i+1} - \omega_i) / l_{i+1} - (\omega_i - \omega_{i-1}) / l_i \quad (18.130)$$

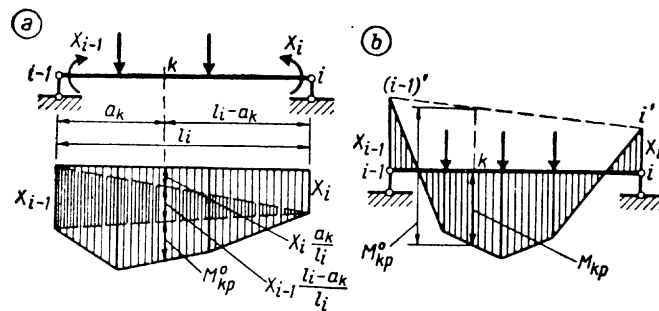
18.44. Sisejõudude epüürid

Jätkuvtala paindemomendi ja põikjõu epüüride ordinaatide arvutamisel vaadeldakse iga sillet eraldi temale mõjuva koormuse ja kanoonilistest võrranditest leitud lisatundmatute toemomentidega (joon. 18.45, *a*). Paindemoment ja põikjõud sildes i lõikes k arvutatakse järgmiste avaldistega:

$$M_k = M_{kp}^0 + X_{i-1}(l_i - a_k) / l_i + X_i a_k / l_i \quad (18.131)$$

$$Q_k = Q_{kp}^0 + (X_i - X_{i-1}) / l_i \quad (18.132)$$

Joonisel 18.45, *a* on eeldatud, et toemomendid X_i ja X_{i-1} on positiivsed, ning joonisel 18.45, *b* negatiivsed.



Joon. 18.45

Positiivne moment kantakse allapoole ja negatiivne moment ülespoole nulljoont. Kui toemomentide ordinaatide tipp ühendavale sirglõigule $(i-1)'-i'$, mis joonisel 18.45, *b* on kujutatud kriipsjoonega, kantakse lihttala paindemomendi epüür, siis saadakse jätkuvtala epüür (viirutatud). Toereaktsioon leitakse põikjõudude kaudu järgmiselt:

$$R_i = Q_{i,i+1} - Q_{ii} = R_{i,i+1}^0 + (X_{i+1} - X_i) / l_{i+1} + R_{ii}^0 + (X_{i-1} - X_i) / l_i \quad (18.133)$$

Näide 18.11. Arvutada joonisel 18.46, *a* esitatud jätkuvtala M ja Q epüüride ordinaadid ning joonestada epüürid.

Redutseeritud silded:

$$l'_1 = 6,0 l_2 / 3 = 2,0 \cdot l_2 = 9,0 \text{ m}; \quad l'_2 = 6,0 \text{ m}; \quad l'_3 = 6,0 l_2 / 4 = 1,5 \cdot l_2 = 8,0 \text{ m}$$

Jätkuvtala on $n = 6 - 3 = 3$ korda staatikaga määratulu.

Kanoonilised võrrandid koostatakse kolme momendi võrrandi (18.125) alusel ($i = 1, 2, 3$):

$$l'_1 M_0 + 2(l'_1 + l'_2) X_1 + l'_2 X_2 = -6B_1^f I_0 / l_1 - 6A_2^f I_0 / l_2$$

$$l'_2 X_1 + 2(l'_2 + l'_3) X_2 + l'_3 X_3 = -6B_2^f I_0 / l_2 - 6A_3^f I_0 / l_3$$

$$l'_3 X_2 + 2l'_3 X_3 = -6B_3^f I_0 / l_3$$

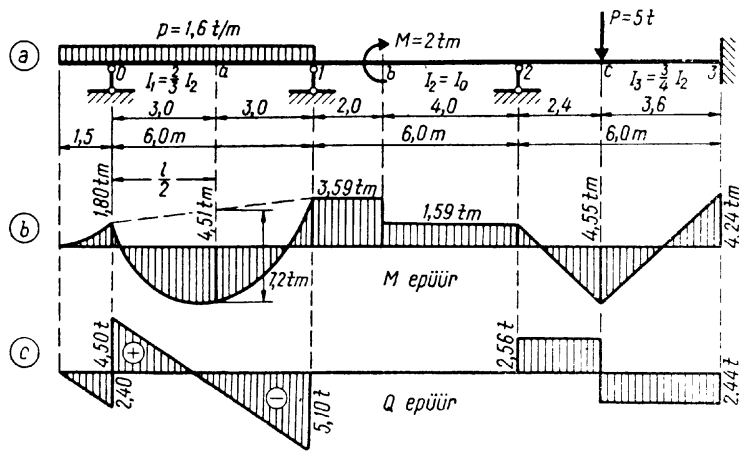
milles

$$M_0 = -1,6 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -1,8 \text{ tm}$$

$$6B_1^f I_0 / l_1 = \rho l_1^2 l'_1 / 4 = 1,6 \cdot 6^2 \cdot 9 / 4 = 129,6 \text{ tm}^2$$

$$6A_2^f I_0 / l_2 = -M l'_2 (1 - 3\xi^2) = -2 \cdot 6 (1 - 3 \cdot 4/9) = 4,0 \text{ tm}^2$$

$$6B_2^f I_0 / l_2 = M l'_2 (1 - 3\xi^2) = 2 \cdot 6 (1 - 3 \cdot 1/9) = 8,0 \text{ tm}^2$$



Joon, 18.46

$$6A_3^f I_0 / I_3 = Pl_3' \xi \xi' (1 + \xi') = 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 0.4 \cdot 0.6 (1 + 0.6) = 92.16 \text{ tm}^2$$

$$6B_3^f I_0 / I_3 = Pl_3' \xi \xi' (1 + \xi) = 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 0.4 \cdot 0.6 (1 + 0.4) = 80.64 \text{ tm}^2$$

Asetades redutseeritud sillete ja vabalükkmete väärtused kaanoni-
 listesse võrranditesse, saadakse järgmine võrrandisüsteem:

$$\begin{aligned} 30X_1 + 6X_2 &= -117.40 \\ 6X_1 + 28X_2 + 8X_3 &= -100.16 \\ 8X_2 + 16X_3 &= -80.64 \end{aligned}$$

mille lahend on:

$$X_1 = -3.594 \text{ tm}; \quad X_2 = -1.595 \text{ tm}; \quad X_3 = -4.243 \text{ tm}.$$

Lõigetes *a*, *b* ja *c* arvutatakse paindemomendid avaldisega
 (18.131):

$$\begin{aligned} M_a &= 1.6 \cdot 6^2 / 8 - 1.8 / 2 - 3.59 / 2 = 4.51 \text{ tm} \\ M_{b1} &= -2 \cdot 2 / 6 - 3.59 \cdot 2 / 3 - 1.59 / 3 = -3.59 \text{ tm} \\ M_{b2} &= 4 \cdot 2 / 6 - 3.59 \cdot 2 / 3 - 1.59 / 3 = -1.59 \text{ tm} \\ M_c &= 0.6 \cdot 5 \cdot 2.4 - 0.6 \cdot 1.59 - 0.4 \cdot 4.24 = 4.55 \text{ tm} \end{aligned}$$

Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 18.46, *b*.

Põikjõud arvutatakse avaldisega (18.132):

$$\begin{aligned} Q_{01} &= 6 \cdot 1.6 / 2 + (1.8 - 3.59) / 6 = 4.50 \text{ t}; \\ Q_{12} &= -2 / 6 + (3.59 - 1.59) / 6 = 0 \\ Q_{10} &= -6 \cdot 1.6 / 2 + (1.8 - 3.59) / 6 = -5.10 \text{ t}; \\ Q_{2c} &= 0.6 \cdot 5 + (1.59 - 4.24) / 6 = 2.56 \text{ t} \\ Q_3 &= -0.4 \cdot 5 + (1.59 - 4.24) / 6 = -2.44 \text{ t} \end{aligned}$$

Epüür on esitatud joonisel 18.46, *c*.

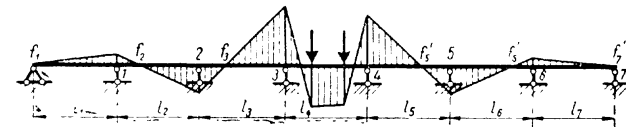
Reaktsioonid leitakse avaldisega (18.133):

$$\begin{aligned} R_0 &= 4.50 + 2.4 = 6.90 \text{ t}; & R_1 &= 0 + 5.10 = 5.10 \text{ t} \\ R_2 &= 2.56 + 0 = 2.56 \text{ t}; & R_3 &= 2.44 \text{ t} \end{aligned}$$

18.45. Jätkuvtalade arvutus fookussuhetega

18.45.1. Fookussuhted

Ehituskonstruksioonide dimensioonimisel leitakse ala-
 lise ja ajutise koormuse kombinatsioonid, mis põhjustavad
 suurimad sisejõud. Jätkuvtala ajutise koormuse mõju
 leidmiseks koormatakse ainult üht sillet (joon. 18.47).
 Vertikaalse koormuse puhul on koormatud silde toemo-
 mendid negatiivsed. Koormamata silde toemomendid on
 erinevate märkidega. Koormatud sildest kaugemal asetse-
 val toel on toemoment väiksem kui koormatud sildele
 lähemal asetseval toel. Kuna koormamata silde paindemo-
 mendid on erinevate märkidega, siis on igas koormamata
 sildes paindemomendi epüüris üks nullpunkt. Seda null-
 punkti nimetatakse fookuseks. Fookus asub koormat-
 tud sildest kaugemal asetsevale toele lähemal. Koormatud
 sildest vasakul asetsevas koormamata silletes on null-
 punktid (joonisel 18.47 fookused f_1 , f_2 ja f_3) silde vasakule
 toele lähemal ja neid nimetatakse vasakpoolseteks
 fookusteks. Koormatud sildest paremal nimetatakse
 koormamata sillete paindemomendi epüüri nullpunkte
 (f'_5 , f'_6 ja f'_7) parempoolseteks fookusteks.



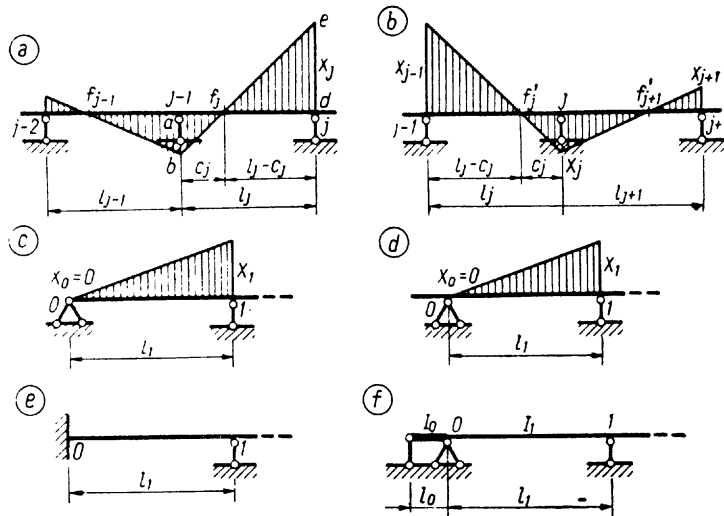
Joon. 18.47

Koormatud sildes koormuse asetuse ja iseloomu muu-
 tumisel, samuti koormuse suuruse muutumisel jäävad
 paindemomendi epüüri nullpunktid koormamata silletes,
 s. t. fookused samadesse ristlõigetes. **Fookuste asukohad
 ei olene koormusest.**

Koormatud sillete paindemomendi epüüri nullpunktid
 olenevad koormusest ja ei ole seepärast fookused.

Igas sildes on kaks fookust: vasakpoolne f_j ja parem-
 poolne f'_j , kuna koormus võib olla vaadeldavast sildest
 kas vasakul või paremal pool.

Vasakpoolseks fookussuhteks nimetatakse



Joon. 18.48

vasakpoolse fookuse kauguste suhet parem- ja vasakpoolsest toest (joon. 18.48, a)

$$k_j = (l_j - c_j) / c_j \quad (a)$$

milles l_j on silde ja c_j — vasakpoolse fookuse f_j kaugus vasakpoolsest toest. Kolmnurkade abf_j ja def_j sarnasuse põhjal

$$(l_j - c_j) / c_j = |X_j| / |X_{j-1}| \quad (b)$$

Seoste (a) ja (b) alusel võib kirjutada:

$$k_j = -X_j / X_{j-1} \quad (18.134)$$

Momentide suhte ees on miinusmärk, kuna koormamata silde on toemomendid erinevate märkidega. Koormatud sildest vasakul asuva koormamata silde vasakpoolne toemoment on arvutatav parempoolse toemomendi ja selle silde vasakpoolse fookussuhtega

$$X_{j-1} = -X_j / k_j \quad (18.135)$$

Kolme momendi võrrand koormamata silde j vasakpoolse toe $j-1$ kohta, eeldusel et $I_j = \text{konst.}$ ja $I_{j-1} = \text{konst.}$ (joon. 18.48, a), on järgmine:

$$l'_{j-1} X_{j-2} + 2(l'_{j-1} + l'_j) X_{j-1} + l'_j X_j = 0 \quad (c)$$

Kui võrrandit (c) jagada momendiga X_{j-1} ja kasutada fookussuhet (18.135): $k_j = -X_j / X_{j-1}$, $X_{j-2} / X_{j-1} = -1 / k_{j-1}$, siis saab järgmise võrrandi:

$$-l'_{j-1} / k_{j-1} + 2(l'_{j-1} + l'_j) - l'_j k_j = 0$$

millest

$$k_j = 2 + (l'_{j-1} / l'_j) (2 - 1 / k_{j-1}) \quad (18.136)$$

Analoogiliselt saadakse ka valem parempoolsete fookussuhte arvutamiseks (joon. 18.48, b):

$$k'_j = 2 + (l'_{j+1} / l'_j) (2 - 1 / k'_{j+1}) \quad (18.137)$$

kusjuures

$$X_j = -X_{j-1} / k'_j \quad (18.138)$$

Sildes j leitakse fookussuhe k_j vasakpoolse silde $j-1$ fookussuhte k_{j-1} abil. Vasakpoolsete fookussuhte arvutamist alustatakse seepärast esimesest sildest. Kui jätkuvtala esimene tugi on liigendtugi konsooliga või ilma (joon. 18.48, d ja c), siis esimese silde fookus ühtib toeliigendiga ja esimese silde vasakpoolne fookussuhe on

$$k_1 = -X_1 / X_0 = X_1 / 0 = \infty \quad (18.139)$$

Avaldisega (18.136) arvutatakse järgnevalt teise, kolmanda jne. silde fookussuhted k_j .

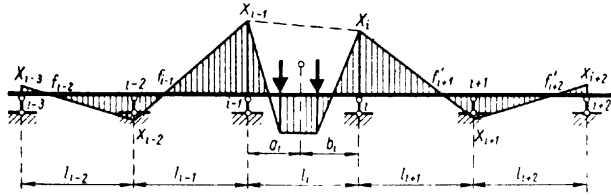
Kui jätkuvtala esimene tugi on jäik (joon. 18.48, e), siis võib selle asendada skeemiga, mis on kujutatud joonisel 18.48, f. Silde 0 inertsmoment $I_0 = \infty$ ja redutseeritud silde $l'_0 = 0$. Avaldise (18.139) järgi $k_0 = \infty$ ja silde 1 leitakse fookussuhe valemiga (18.136):

$$k_1 = 2 + (l'_0 / l'_1) (2 - 4 / k_0) = 2 + (0 / l'_1) (2 - 1 / \infty) = 2 \quad (18.140)$$

Kui esimeses silde ristlõige on konstantne ja esimene tugi on jäik, siis vasakpoolne fookussuhe $k_1 = 2$.

18.45.2. Koormatud silde toemomendid

Olgu koormatud ainult silde i (joon. 18.49). Toemomentide X_i ja X_{i-1} arvutamiseks koostatakse koormatud silde tugede $i-1$ ja i jaoks kolme momendi võrrandid:



Joon. 18.49

$$l'_{i-1}X_{i-2} + 2(l'_{i-1} + l'_i)X_{i-1} + l'_iX_i = -6 \frac{I_0}{I_i} \frac{b_i}{l_i} \omega_i \quad (a)$$

$$l'_iX_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1})X_i + l'_{i+1}X_{i+1} = -6 \frac{I_0}{I_i} \frac{a_i}{l_i} \omega_i$$

Võrranditest (a) elimineeritakse momendid X_{i-2} ja X_{i+1} valemitega (18.135) ning (18.138):

$$X_{i-2} = -X_{i-1}/k_{i-1}, \quad X_{i+1} = -X_i/k'_{i+1} \quad (b)$$

ja vabaliikmete kirjutamisel kasutatakse avaldisi (18.126):

$$-(l'_{i-1}/k_{i-1})X_{i-1} + 2(l'_{i-1} + l'_i)X_{i-1} + l'_iX_i = -6A_i^f I_0/I_i \quad (c)$$

$$l'_iX_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1})X_i - (l'_{i+1}/k'_{i+1})X_i = -6B_i^f I_0/I_i$$

Kui võrrandid (c) jagada silde i redutseeritud pikkusega l'_i ja rühmitada liikmed, siis saavad nad kuju:

$$[2 + (l'_{i-1}/l'_i)(2 - 1/k_{i-1})]X_{i-1} + X_i = -6A_i^f I_0/I_i l'_i \quad (d)$$

$$X_{i-1} + [2 + (l'_{i+1}/l'_i)(2 - 1/k'_{i+1})]X_i = -6B_i^f I_0/I_i l'_i$$

ehk

$$k_i X_{i-1} + X_i = -6A_i^f / l_i \quad (e)$$

$$X_{i-1} + k'_i X_i = -6B_i^f / l_i$$

kuna $1/l_i = I_0/I_i l'_i$. Võrrandisüsteemi (e) lahend annab avaldised koormatud silde toemomentide arvutamiseks:

$$X_{i-1} = -(6A_i^f k'_i - 6B_i^f) / l_i (k_i k'_i - 1) \quad (18.141)$$

$$X_i = -(6B_i^f k_i - 6A_i) / l_i (k_i k'_i - 1)$$

või

$$X_{i-1} = -6\omega_i (b_i k'_i - a_i) / l_i (k_i k'_i - 1) \quad (18.142)$$

$$X_i = -6\omega_i (a_i k_i - b_i) / l_i (k_i k'_i - 1)$$

Kui jätkuvtatal on koormatud rohkem kui üks sille, siis arvutatakse toemomendid eraldi iga silde koormusest ja summeeritakse.

Kui äärmised toed on liigendtoed, siis on avaldised (18.141) äärmiste sillete jaoks järgmised: esimeses sildes $k_1 = \infty$

$$X_0 = 0; \quad X_1 = -(6B_1^f k_1 - 6A_1^f) / l_1 (k_1 k'_1 - 1) =$$

$$= -(6B_1^f - 6A_1^f / k_1) / l_1 (k'_1 - 1/k_1) =$$

$$= -6B_1^f / l_1 k'_1$$

viimasel sildes $(n+1) k'_{n+1} = \infty$ (18.143)

$$X_n = -(6A_{n+1}^f k'_{n+1} - 6B_{n+1}^f) / l_{n+1} (k_{n+1} k'_{n+1} - 1) =$$

$$= -(6A_{n+1}^f - 6B_{n+1}^f / k'_{n+1}) / l_{n+1} (k_{n+1} - 1/k'_{n+1}) =$$

$$= -6A_{n+1}^f / l_{n+1} k_{n+1}$$

$$X_{n+1} = 0 \quad (18.143)$$

Näide 18.12. Arvutada joonisel 18.50 kujutatud jätkuvtala toemomendid. Andmed on samad kui näitel 18.11: $l'_1 = 9,0$ m; $l'_2 = 6,0$ m; $l'_3 = 8,0$ m.

Vasakpoolsed fookussuhted:

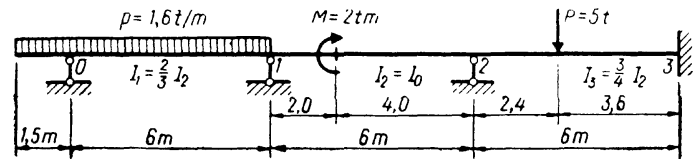
$$k_1 = \infty; \quad k_2 = 2 + (l'_1/l'_2)(2 - 1/k_1) = 2(1 + 9/6) = 5$$

$$k_3 = 2 + (l'_2/l'_3)(2 - 1/k_2) = 2 + (6/8)(2 - 1/5) = 3,35$$

Parempoolsed fookussuhted:

$$k'_3 = 2; \quad k'_2 = 2 + (l'_3/l'_2)(2 - 1/k'_3) = 2 + (8/6)(2 - 1/2) = 4$$

$$k'_1 = 2 + (l'_2/l'_1)(2 - 1/k'_2) = 2 + (6/9)(2 - 1/4) = 3 \frac{1}{6}$$



Joon. 18.50

Järgnevalt arvutatakse toemomendid eraldi iga silde koormusest. Koormatud silde toemomentide leidmiseks kasutatakse valemeid (18.141), (18.143) ja tabelit 18.7:

$$6B_1^f = p l_1^3 / 4 = 1,6 \cdot 6,0^3 / 4 = 86,4 \text{ tm}^2$$

$$6A_2^f = -M l_2 (1 - 3\xi^2) = -2 \cdot 6 (1 - 3 \cdot 4/9) = 4,0 \text{ tm}^2$$

$$6B_2^f = M l_2 (1 - 3\xi^2) = 2 \cdot 6 (1 - 3 \cdot 1/9) = 8,0 \text{ tm}^2$$

$$6A_3^f = P l^2 \xi \xi' (1 + \xi') = 5 \cdot 6^2 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 1,6 = 69,12 \text{ tm}^2$$

$$6B_3^f = P l^2 \xi \xi' (1 + \xi) = 5 \cdot 6^2 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 1,4 = 60,48 \text{ tm}^2$$

Konsool koormatud:

$$X_{0k} = -1,6 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -1,8 \text{ tm}$$

$$X_{1k} = -X_{0k} / k'_1 = 1,8 / 3 \cdot \frac{1}{6} = 0,5684 \text{ tm}$$

$$X_{2k} = -X_{1k} / k'_2 = -0,5684 / 4 = -0,1421 \text{ tm}$$

$$X_{3k} = -X_{2k} / k'_3 = 0,1421 / 2 = 0,0710 \text{ tm}$$

Esimene silde koormatud:

$$X_{11} = -6B_1^f / l_1 k'_1 = -86,4 / 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} = -4,5474 \text{ tm}$$

$$X_{21} = -X_{11} / k'_2 = 4,5474 / 4 = 1,1369 \text{ tm}$$

$$X_{31} = -X_{21} / k'_3 = -1,1369 / 2 = -0,5684 \text{ tm}$$

Teine silde koormatud:

$$X_{12} = -(6A_2^f \cdot k'_2 - 6B_2^f) / l_2 (k_2 k'_2 - 1) = -(4 \cdot 4 - 8) / 6 (5 \cdot 4 - 1) = -0,0702 \text{ tm}$$

$$X_{22} = -(6B_2^f \cdot k_2 - 6A_2^f) / l_2 (k_2 k'_2 - 1) = -(8 \cdot 5 - 4) / 6 (5 \cdot 4 - 1) = -0,3158 \text{ tm}$$

$$X_{32} = -X_{22} / k'_3 = +0,3158 / 2 = 0,1579 \text{ tm}$$

Kolmas silde koormatud:

$$X_{23} = -(6A_3^f \cdot k'_3 - 6B_3^f) / l_3 (k_3 k'_3 - 1) = -(69,12 \cdot 2 - 60,48) / 6 (3,35 \cdot 2 - 1) = -2,2737 \text{ tm}$$

$$X_{33} = -(6B_3^f \cdot k_3 - 6A_3^f) / l_3 (k_3 k'_3 - 1) = -(60,48 \cdot 3,35 - 69,12) / 6 (3,35 \cdot 2 - 1) = -3,9032 \text{ tm}$$

$$X_{13} = -X_{23} / k_2 = 2,2733 / 5 = 0,4547 \text{ tm}$$

Toemomendid kogu koormusest:

$$X_0 = -1,8 \text{ tm}$$

$$X_1 = 0,5684 - 4,5474 - 0,0702 + 0,4547 = -3,594 \text{ tm}$$

$$X_2 = -0,1421 + 1,1369 - 0,3158 - 2,2737 = -1,595 \text{ tm}$$

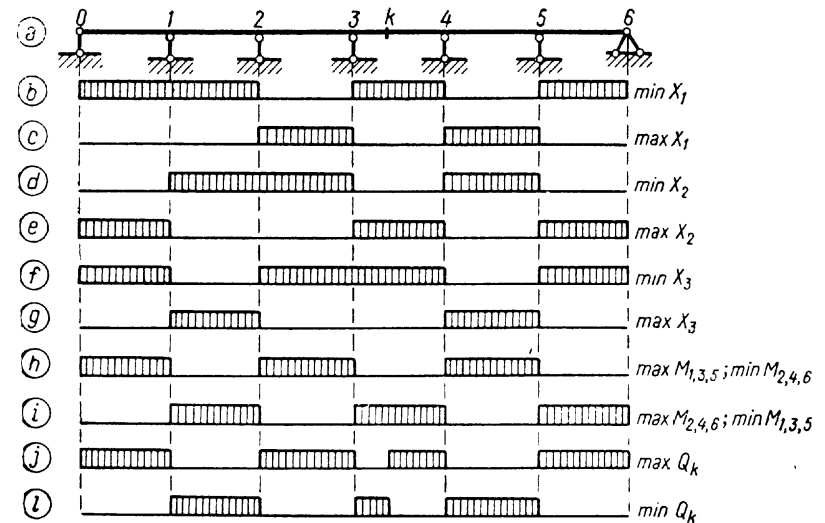
$$X_3 = 0,0710 - 0,5684 + 0,1579 - 3,9032 = -4,243 \text{ tm}$$

mis ühtivad näite 18.11 toemomentidega.

18.46. Suurimate paindemomentide ja põikjõudude epüürid

Konstruksioonide arvutamisel rakendatakse koormused terve konstruktsiooni ja iga üksiku osa jaoks kõige ebasoodsamates kombinatsioonides. Jätkuvtala arvutamisel leitakse niisugused koormuste kombinatsioonid, mis põhjustavad tala ristlõigetes suurimad paindemomendid ja põikjõud: $\max M$ ja $\min M$ ning $\max Q$ ja $\min Q$.

Ühe silde koormamisel ajutise vertikaalse koormusega on koormatud silde toemomendid negatiivsed (joon. 18.47, avaldised (18.141, 18.142)), naabersillete koormatud sildest kaugemal olevad momendid on positiivsed ja edasi vahelduvate märkidega. Järelikult tekib minimaalne toemoment siis, kui ajutise koormusega koormatakse toe naabersilte ja teised silde üle ühe (joon. 18.51, *b*, *d* ja *f*). Maksimaalne toemoment, mis on absoluutväärtuselt tavaliselt minimaalsest toemomendist väiksem, saadakse nende sillete koormamisega, mis on minimaalse toemomendi puhul koormamata (joon. 18.51, *c*, *e* ja *g*).



Joon. 18.51

Joonisel 18.47 kujutatud epüürilt on näha, et jätkuvtala sillete keskmistes lõigetes on paindemoment positiivne koormatud sildes ja kummalegi poole üle ühe asuvates silletes.

Järelikult koormusskeem joonisel 18.51, *h* põhjustab maksimaalsed sildemomendid esimeses, kolmandas ja viiendas sildes ning koormusskeem joonisel 18.51, *i* teises, neljandas ja kuueandas sildes. Minimaalsed sildemomendid koormusskeemist joonisel 18.51, *h* tekivad teises, neljandas ja kuueandas sildes ning koormusskeemist joonisel 18.51, *i* esimeses, kolmandas ja viiendas sildes.

Koormusskeem, mis põhjustab minimaalse toemomendi, tekitab samas toes maksimaalse toereaktsiooni. Minimaalne reaktsioon tekib koormusskeemiga, mis põhjustab samal toel maksimaalse toemomendi.

Nende lõigete jaoks, mis asuvad silde vasaku fookuse ja vasaku toe või parema fookuse ja parema toe vahel, ei ole võimalik koormuse kõige ebasoodsamat asetust ilma paindemomendi mõjujooneta kindlaks määrata.

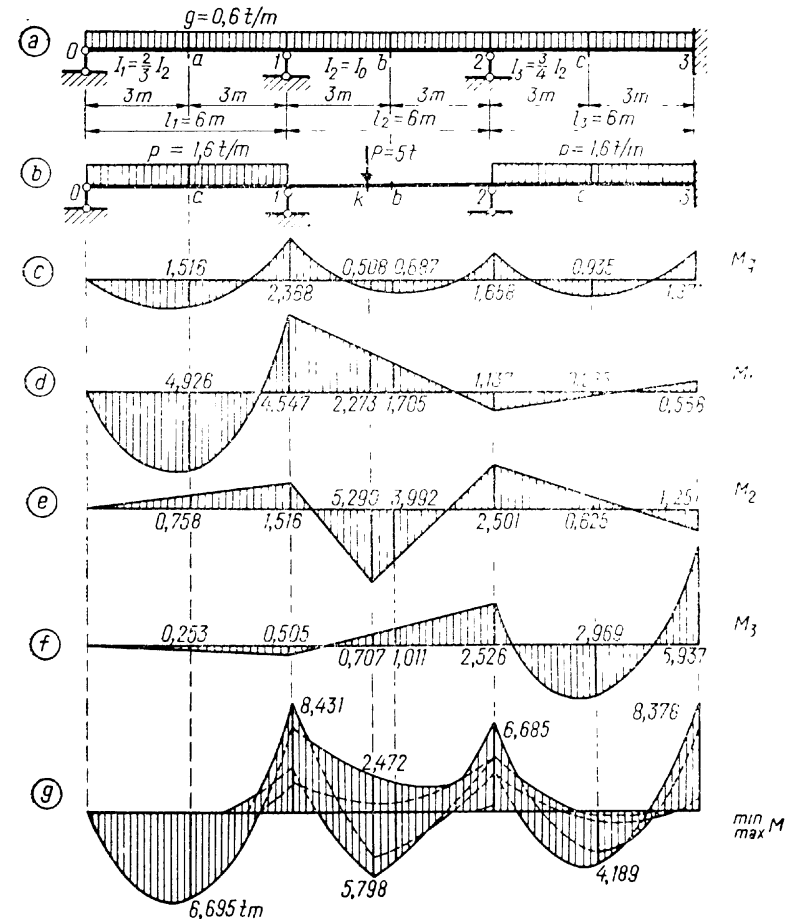
Lõikes *k* (joon. 18.51, *a*) tekib max *Q* koormusskeemiga *j* ja min *Q* koormusskeemiga *l*.

Kui ajutine koormus mõjub kindlaksmääratud asukohas ja võib olla eemaldatud ainult sillete kaupa, siis saab arvutada suurimad sisejõud tala kõigis ristlõigetes mõjujoonteta. Ajutisest koormusest põhjustatud paindemomendi epüürid arvutatakse eraldi iga silde koormusest. Max *M* või max *Q* epüüri kujutamisel liidetakse igas lõikes omakaalust põhjustatud epüüri ordinaadile ajutiste koormuste epüüride need ordinaadid, mis on vaadeldava lõike kohal positiivsed. Min *M* või min *Q* epüüri ordinaatide arvutamisel liidetakse omakaalust põhjustatud epüüri ordinaatidele ajutiste koormuste epüüride negatiivsed ordinaadid. Ühele abstsisssteljele kantult moodustavad maksimaalsete ja minimaalsete paindemomentide (või põikjõudude) epüürid suurimate paindemomentide (või põikjõudude) epüüri.

Näide 18.13. Arvutada joonisel 18.52, *a* kujutatud kolmesildelise tala suurimate paindemomentide epüür. Omakaal on 0,6 t/m. Ajutine koormus on esitatud joonisel 18.52, *b*.

Omakaalust põhjustatud paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 18.52, *c*; eraldi iga silde ajutisest koormusest põhjustatud paindemomendi epüürid — *d*, *e* ja *f*.

Järgnevalt arvutatakse minimaalsed ja maksimaalsed toe- ja sildemomendid. Ees on märgitud tala silded, kus mõjub ajutine koormus.



Joon. 18.52

1 ja 2	min $X_1 = -2,368 - 4,547 - 1,516 = -8,431$ tm
2 ja 3	min $X_2 = -1,658 - 2,501 - 2,526 = -6,685$ tm
1 ja 3	min $X_3 = -1,871 - 0,568 - 5,937 = -8,376$ tm
3	max $X_1 = -2,368 - 0,505 = -1,863$ tm
1	max $X_2 = -1,658 + 1,137 = -0,521$ tm
2	max $X_3 = -1,871 + 1,251 = -0,620$ tm

Nendest koormusjuhtudest põhjustatud paindemomendid teistes lõigetel on esitatud tabelis 18.8.

Tabel 18.8

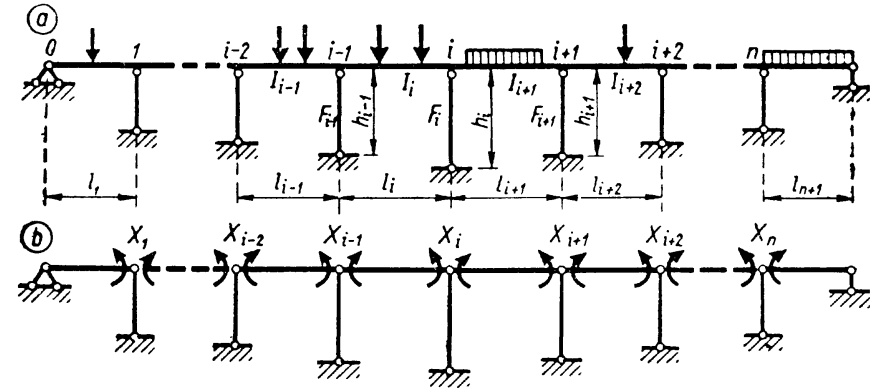
Koormatud silded	X_1	X_2	X_3	M_a	M_b	M_c	M_d
1 ja 2	-8,431	-3,022	-1,188	5,684	3,525	2,974	0,595
2 ja 3	-3,379	-6,685	-6,557	1,011	5,091	3,668	3,279
1 ja 3	-6,410	-3,047	-8,376	6,695	-2,472	-2,029	4,189
3	-1,863	-4,178	-7,808	1,769	-0,199	-0,324	3,904
1	-6,915	-0,521	-2,439	6,442	-1,765	-1,018	1,220
2	-3,884	-4,159	-0,620	0,758	5,798	4,679	0,310

Tabelist 18.8 on näha, et ajutine koormus esimeses ja kolmandas sildes, mis tekitab min X_3 , põhjustab antud tala puhul maksimaalsed sildemomendid esimeses ja kolmandas ning minimaalsed teises sildes. Ajutine koormus teises sildes põhjustab maksimaalsed sildemomendid teises ja minimaalsed sildemomendid esimeses ja kolmandas sildes. Nendele koormusjuhtudele vastavad paindemomendi epüürid ühele teljele kantuna moodustavad suurimate paindemomentide epüüri (joon. 18.52, g). Ainult jäiga äärmise toega jätkuvtalal tekitab üks ja sama koormusjuht suurima toemomendi äärmises jäigas toes ja suurimad sildemomendid äärmises sildes.

Suurimate põikjõudude epüür arvutatakse analoogiliselt.

18.47. Elastsetel tugeudel asuva jätkuvtala arvutus. Viie momendi võrrand

Jäikadele tugelele toetuva jätkuvtala toemomendid arvutatakse kolme momendi võrrandiga. Saledatele pendelpostidele toetuva jätkuvtala (joon. 18.53, a) toeristlõigete vajumid olenevad postides tekkivatest pikijõududest ja postide survejäikusest. Lisatundmatuteks võetakse toeristlõigetes tekkivad paindemomendid ja põhiskeemiks on üksteise kõrval asetsevad lihttalad (joon. 18.53, b). Tundmatu X_{i-2} ja sildel $i-1$ mõjuv koormus põhjustab põhi-



Joon. 18.53

skeemi posti $i-1$ lühenemist või pikendamist. Posti $i-1$ pikkuse muutus põhjustab tala pöörde sildes i , kusjuures kõik ristlõiked, järelikult ka toeristlõige i , pöörduvad sama nurga võrra. Lisatundmatu X_{i+2} ja sildel $i+2$ mõjuv koormus põhjustavad posti $i+1$ pikkuse muutuse, mille tagajärjel pöördub põhiskeemi tala toeristlõige i sildes $i+1$. Toe i jaoks koostatud kanooniline võrrand, mida nimetatakse viie momendi võrrandiks, on järgmine:

$$\delta_{i,i-2}X_{i-2} + \delta_{i,i-1}X_{i-1} + \delta_{ii}X_i + \delta_{i,i+1}X_{i+1} + \delta_{i,i+2}X_{i+2} + \Delta_{ip} = 0 \quad (18.144)$$

Paigutised $\delta_{i,i-2}$ ja $\delta_{i,i+2}$ on põhjustatud vastavalt postide $i-1$ ning $i+1$ pikkuse muutusest. Paigutised $\delta_{i,i-1}$, δ_{ii} ja $\delta_{i,i+1}$ koosnevad tala paindedeformatsioonidest põhjustatud paigutistest, mis arvutatakse samuti kui kolme momendi võrrandi puhul, ning postide pikideformatsioonidest põhjustatud paigutistest. Järgnevalt esitatakse postide deformatsioonidest põhjustatud paigutised, mida tähistatakse indeksiga (N).

Ühiktundmatutest põhjustatud epüürid on esitatud joonisel 18.54, a, c ja e. Lisatundmatutest $X_{i-2}=1$ tekib toel $i-1$ reaktsioon $1/l_{i-1}$, mis põhjustab posti $i-1$ lühenemise

$$\Delta h_{i-1,i-2} = h_{i-1}/l_{i-1}E_{i-1}F_{i-1} \quad (a)$$

Posti $i-1$ lühenemine põhjustab põhiskeemi toel i ristlõike pöörde (joon. 18.54, *b*)

$$\delta_{i,i-2}^{(N)} = \Delta h_{i-1,i-2}/l_i \quad (b)$$

Tundmatust $X_{i-1}=1$ tekib toes $i-1$ reaktsioon $-(1/l_{i-1}+1/l_i)$, mis põhjustab posti $i-1$ pikenemise

$$\Delta h_{i-1,i-1} = (1/l_{i-1}+1/l_i) h_{i-1}/E_{i-1}F_{i-1} \quad (c)$$

ja toes i reaktsioon $1/l_i$, mis põhjustab posti i lühenemise

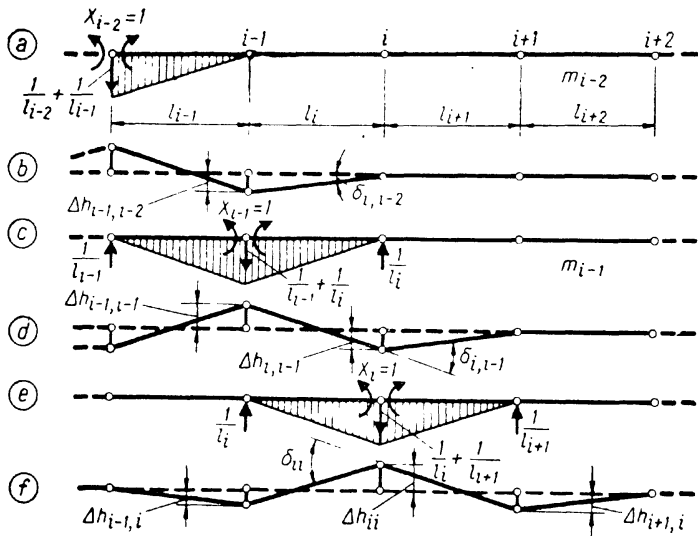
$$\Delta h_{i,i-1} = h_i/l_i E_i F_i \quad (d)$$

Postide deformatsioonid põhjustavad toe i ristlõigete vastastikuse pöörde (joon. 18.54, *d*)

$$\delta_{i,i-1}^{(N)} = -\Delta h_{i-1,i-1}/l_i - \Delta h_{i,i-1}(1/l_i+1/l_{i+1}) \quad (e)$$

Lisatundmatu $X_i=1$ põhjustab postide $i-1$ ja $i+1$ lühenemise ning posti i pikenemise (joon. 18.54, *f*)

$$\begin{aligned} \Delta h_{i-1,i} &= h_{i-1}/l_i E_{i-1} F_{i-1}; & \Delta h_{i+1,i} &= h_{i+1}/l_{i+1} E_{i+1} F_{i+1} \\ \Delta h_{ii} &= (1/l_i+1/l_{i+1}) h_i/E_i F_i \end{aligned} \quad (f)$$



Joon. 18.54

Paigutis toel i on järgmine:

$$\delta_{ii}^{(N)} = \Delta h_{i-1,i}/l_i + \Delta h_{ii}(1/l_i+1/l_{i+1}) + \Delta h_{i+1,i}/l_{i+1} \quad (g)$$

Analoogiliselt leitakse tundmatust $X_{i+1}=1$ ja $X_{i+2}=1$ põhjustatud paigutised

$$\begin{aligned} \delta_{i,i+1}^{(N)} &= -\Delta h_{i+1,i+1}/l_{i+1} - \Delta h_{i,i+1}(1/l_i+1/l_{i+1}) \\ \delta_{i,i+2}^{(N)} &= \Delta h_{i+1,i+1}/l_{i+1} \end{aligned} \quad (h)$$

Koormuse poolt põhjustatud postide deformatsioonide tagajärjel tekib toel i paigutis

$$\Delta_{ip}^{(N)} = (\Delta h_{i-1,p} - \Delta h_{ip})/l_i + (\Delta h_{i+1,p} - \Delta h_{ip})/l_{i+1} \quad (i)$$

milles

$$\begin{aligned} \Delta h_{i-1,p} &= R_{i-1}^0 h_{i-1}/E_{i-1} F_{i-1}; & \Delta h_{ip} &= R_{ip}^0 h_i/E_i F_i \\ \Delta h_{i+1,p} &= R_{i+1}^0 h_{i+1}/E_{i+1} F_{i+1} \end{aligned} \quad (j)$$

Postide deformatsioonidest põhjustatud paigutised korrutatakse teguriga $E_0 I_0$ ja liidetakse paindedeformatsioonidest põhjustatud paigutistega (18.121), (18.123).

18.48. Mõjujooned

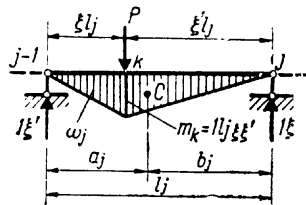
18.48.1. Staatika meetod

Toemomentide (lisatundmatute) mõjujoonte ordinaadid arvutatakse fookussuhete abil, mõjuarvudega või maatrikskujul.

Vertikaalse ühikjõu puhul lihtsustub koormusest olenevate tegurite A_i^f ja B_i^f leidmine fookussuhetega avaldistes (18.141):

$$\begin{aligned} 6B_i^f &= 6\omega_i a_i/l_i = (6m_k l_i/2) l_i (1+\xi)/3l_i = \\ &= l_i^2 \xi \xi' (1+\xi) = l_i^2 f_\xi \\ 6A_i^f &= 6\omega_i b_i/l_i = (6m_k l_i/2) l_i (1+\xi')/3l_i = \\ &= l_i^2 \xi \xi' (1+\xi') = l_i^2 f_{\xi'} \end{aligned} \quad (18.145)$$

Vertikaalse ühikjõu puhul omavad valemid (18.141) järgmist kuju:



Joon. 18.55

$$\begin{aligned} X_{i-1} &= -(k'_i f_{\xi'} - f_{\xi}) l_i / (k_i k'_i - 1) = c_{i1} f_{\xi} + c_{i2} f_{\xi'} \\ X_i &= -(k_i f_{\xi} - f_{\xi'}) l_i / (k_i k'_i - 1) = c_{i1} f_{\xi'} + c_{i3} f_{\xi} \end{aligned} \quad (18.146)$$

milles

$$\begin{aligned} c_{i1} &= l_i / (k_i k'_i - 1) \\ c_{i2} &= -k'_i c_{i1} = -l_i k'_i / (k_i k'_i - 1) \\ c_{i3} &= -k_i c_{i1} = -l_i k_i / (k_i k'_i - 1) \end{aligned} \quad (18.147)$$

Kui esimene tugi on liigendtugi, siis $k_i = \infty$ ja ühikjõu mõjumisel esimesel sildel saadakse koormatud silde parempoolse toemomendi X_i avaldisest järgmine valem:

$$X_i = -f_{\xi} l_i / k'_i \quad (18.148)$$

Mõjujoone ordinaatide arvutamisel jaotatakse iga silde viieks või kümneks võrdseks osaks, rakendatakse ühikjõud järjekorras nendesse lõigetes, koormatud sildes arvutatakse toemomendid avaldistega (18.146) ja koormamata silletes fookussuhetega (18.135), (18.138).

Toemomendi X_i mõjujoone ordinaadid leitakse mõjuarvude abil avaldisega

$$X_{ix} = \beta_{i1} \delta_{1p(x)} + \beta_{i2} \delta_{2p(x)} + \dots + \beta_{ij} \delta_{jp(x)} + \dots + \beta_{in} \delta_{np(x)} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (18.115)$$

või maatrikskujul

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} \mathbf{D}_{p(x)} = -\mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{D}_{p(x)} \quad (18.116)$$

Jätkuvtala puhul ei ole vaja mõjuarvude maatriksi \mathbf{B} elementide leidmiseks lahendada võrrandisüsteemi. Mõjuarvud leitakse fookussuhete kaudu valemitega. Toe i kohta koostatud kolme momendi võrrand, kus tundmatute kordajad on korrutatud teguriga $6EI_0$ ja vabaliige teguriga 6, on järgmine:

$$l'_i \beta_{i-1,i} + 2(l'_i + l'_{i+1}) \beta_{ii} + l'_{i+1} \beta_{i+1,i} = -6 \quad (a)$$

milles

$$\beta_{i-1,i} = X_{i-1}; \quad \beta_{ii} = X_i; \quad \beta_{i+1,i} = X_{i+1}$$

Kuna võrrandi (a) saamisel on tundmatute kordajad korrutatud teguriga $6EI_0$ ja vabaliige mitte, siis on mõjuarvud $6EI_0$ korda väiksemad ja mõjujoone ordinaatide arvutamisel avaldisega (18.115) tuleb seda arvestada:

$$\beta_{i-1,i} = \beta_{i-1,i} / 6EI_0; \quad \beta_{ii} = \beta_{ii} / 6EI_0; \quad \beta_{i+1,i} = \beta_{i+1,i} / 6EI_0 \quad (18.149)$$

Järgnevalt jagatakse võrrand (a) silde i redutseeritud pikkusega l'_i ja fookussuhetega elimineeritakse sealt mõjuarvud $\beta_{i-1,i} = -\beta_{ii} / k_i$ ning $\beta_{i+1,i} = -\beta_{ii} / k'_{i+1}$, mille tulemusena saadakse

$$\beta_{ii} \{ [2 + (l'_{i+1} / l'_i) (2 - 1/k'_{i+1})] - 1/k_i \} = -6/l'_i \quad (b)$$

Võrduse (b) nurksulgudes on silde i parempoolse fookussuhete avaldis (18.137) ja võrrandi (b) võib esitada nüüd järgmiselt:

$$\beta_{ii} (k'_i - 1/k_i) = -6/l'_i \quad (c)$$

millest

$$\beta_{ii} = -(6/l'_i) k_i / (k_i k'_i - 1) \quad (18.150)$$

Teised mõjuarvud leitakse fookussuhetega:

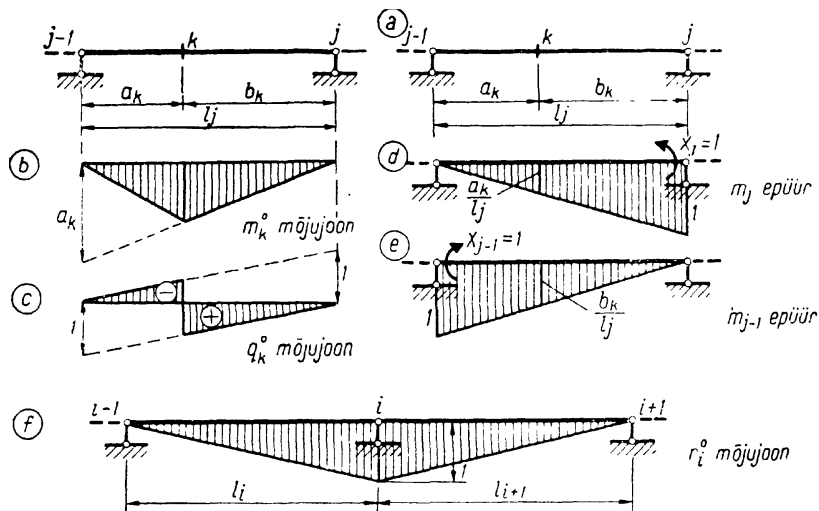
$$\beta_{i-1,i} = -\beta_{ii} / k_i, \quad \beta_{i-2,i} = -\beta_{i-1,i} / k_{i-1} \text{ jne.} \quad (18.151)$$

$$\beta_{i+1,i} = -\beta_{ii} / k'_{i+1}, \quad \beta_{i+2,i} = -\beta_{i+1,i} / k'_{i+2} \text{ jne.}$$

Toemomendi X_i mõjujoone ordinaatide arvutamisel avaldisega (18.115) leitakse põhiskeemi ristlõike pööre toe j juures nüüd $6EI_0$ -kordne: $\delta_{jp(x)} = EI_0 \delta_{jp(x)}$. Valemite (18.145) abil leitakse toe j juures ristlõigete pöörded. Ühikjõu mõjudes sildel j

$$EI_0 \delta_{jp} = \frac{I_0}{I_j} \cdot \frac{\omega_j a_j}{l_j} = \frac{I_0}{I_j} l_j^2 \xi \xi' (1 + \xi) / 6 = l_j l'_j f_{\xi} / 6 \quad (18.152)$$

ja sildel $j+1$



Joon. 18.56

$$EI_0 \delta_{jp, j+1} = \frac{I_0}{I_{j+1}} \cdot \frac{\omega_{j+1} b_{j+1}}{l_{j+1}} = \frac{I_0}{I_{j+1}} \cdot l_{j+1}^2 \xi \xi' (1 + \xi') / 6 = l_{j+1} l'_{j+1} f'_{\xi'} / 6$$

Ristlõike k (joon. 18.56, a) paindemomendi (silde-momendi) mõjujoone ordinaadid arvutatakse sama silde toemomentide mõjujoonte abil:

$$m_{kx} = m_{kx}^0 + (b_k/l_j) X_{j-1,x} + (a_k/l_j) X_{jx} \quad (18.153)$$

milles m_{kx}^0 on põhiskeemi lõike k paindemomendi mõjujoone ordinaat (joon. 18.56, b); $X_{j-1,x}$ ja X_{jx} — toemomentide mõjujoonte ordinaadid ning kordajad (a_k/l_j) ja (b_k/l_j) — ühiktoemomentidest $X_j=1$, $X_{j-1}=1$ põhjustatud paindemomendi epüüride m_j , m_{j-1} ordinaadid põhiskeemis lõike k kohal (joon. 18.56, d ja e).

Põikjõu mõjujoone ordinaadid arvutatakse toemomentide mõjujoonte abil:

$$q_{kx} = q_{kx}^0 + (X_{jx} - X_{j-1,x}) / l_j \quad (18.154)$$

milles q_{kx}^0 on staatikaga määratud põhiskeemi mõjujoone ordinaat (joon. 18.56, c) ja avaldise (18.154) teine liige esitab toemomentidest põhjustatud põikjõudu põhiskeemis.

Toereaktsiooni mõjujoone ordinaadid arvutatakse valemiga

$$r_{ix} = r_{ix}^0 + (X_{i-1,x} - X_{ix}) / l_i + (X_{i+1,x} - X_{ix}) / l_{i+1} \quad (18.155)$$

milles r_{ix}^0 on staatikaga määratud põhiskeemi toereaktsiooni mõjujoone ordinaat (joon. 18.56, f).

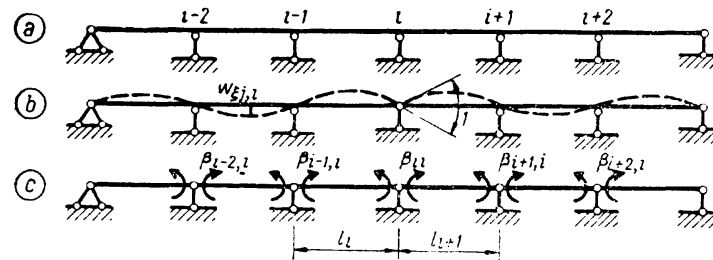
Paindemomentide, põikjõudude ja reaktsioonide mõjujooned leitakse maatrikstehtega avaldisega (18.118):

$$s_x = s_x^0 + sBD_{p(x)} = s_x^0 - sD_1^{-1} D_{p(x)}$$

18.48.2. Kinemaatika meetod

Kinemaatika meetodi puhul eemaldatakse side, mille reaktsiooni mõjujoont konstrueeritakse. Järgnevalt antakse arvutusskeemis eemaldatud sideme sihis negatiivne ühikpaigutus, millest põhjustatud vertikaalsirde epüür kujutab reaktsiooni mõjujoont.

Toemomendi mõjujoone kujutamiseks pannakse toeristlõikesse liigend. Arvutusskeemist eemaldatud sidemele vastavast negatiivsest ühikpaigutisest põhjustatud deformeerunud kaju kujutab toemomendi mõjujoont (joon. 18.57, b). Deformeerunud kaju, mis on esitatud joonisel 18.57, b , tekitatakse mõjuarvudega. Joonisel 18.57, c esitatud mõjuarvud põhjustavad staatikaga määratud põhi-



Joon. 18.57

skeemi niisuguse deformeerunud olukorra, kus ristlõigete pöördenurkade summa toel i on võrdne miinus ühega ja teistel tugeidel nulliga, s. t. ühtib joonisel 18.57, b esitatud deformeerunud kujuga.

Deformeerunud kuju vertikaalsiirded arvutatakse valemiga

$$X_{i,\xi_j} = \omega_{\xi_j,i} = \frac{l_j^2}{6EI_j} (\beta_{j-1,i} f_{\xi'} + \beta_{ji} f_{\xi}) =$$

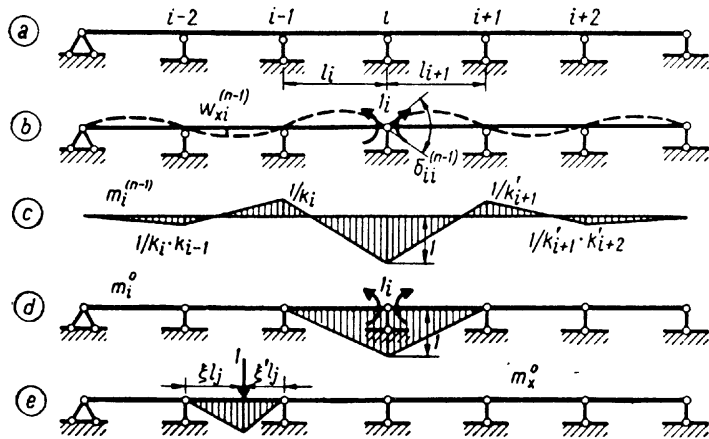
$$= \frac{EI_0 l_j^2}{6EI_j} \left(\frac{\beta_{j-1,i}}{EI_0} f_{\xi'} + \frac{\beta_{ji}}{EI_0} f_{\xi} \right)$$

ehk

$$X_{i,\xi_j} = (l_j l'_{j/6}) (\beta_{j-1,i}^* f_{\xi'} + \beta_{ji}^* f_{\xi}) \quad (18.156)$$

Valemis (18.156) tähistab j sillet, kus siiret arvutatakse.

Toemomendi mõjujoone ordinaatide arvutamise teise mooduse puhul rakendatakse eemaldatud sideme asemele üldistatud ühikjõud. Üldistatud jõule vastavat paigutist tähistatakse $\delta_{ii}^{(n-1)}$ (joon. 18.58, b). Ühikjõust põhjustatud vertikaalsiirded on $\delta_{ii}^{(n-1)}$ korda suuremad ühikpaigutisest



Joon. 18.58

põhjastatud vertikaalsiiretest. Toemomendi mõjujoone ordinaadid arvutatakse nüüd valemiga

$$X_{ix} = -\omega_{xi}^{(n-1)} / \delta_{ii}^{(n-1)} \quad (18.157)$$

milles (joon. 18.58)

$$EI_0 \delta_{ii}^{(n-1)} = \sum \int [m_i^{(n-1)}]^2 \frac{I_0}{I} dx = \sum \int m_i^{(n-1)} m_i^0 \frac{I_0}{I} dx =$$

$$= (l'_i/6) (2 - 1/k_i) + (l'_{i+1}/6) (2 - 1/k'_{i+1}) \quad (18.158)$$

$$EI_0 \omega_{xi}^{(n-1)} = \sum \int m_i^{(n-1)} m_x^{(n-1)} \frac{I_0}{I} dx =$$

$$= \sum \int m_i^{(n-1)} m_x^0 \frac{I_0}{I} dx =$$

$$= (l_j l'_{j/6}) (m_{j-1,i}^{(n-1)} f_{\xi'} + m_{ji}^{(n-1)} f_{\xi})$$

Momendid $m_{j-1,i}^{(n-1)}$ ja $m_{ji}^{(n-1)}$ on paindemomendi epüüri $m_i^{(n-1)}$ toemomendid sildes, kus arvutatakse toemomendi X_i mõjujoone ordinaati.

Näide 18.14. Arvutada joonisel 18.59, a kujutatud jätkuvtala toemomentide, lõigete 11, 12, 13 sildemomentide, lõike 13 põikjõu ja toe 2 reaktsiooni mõjujooned. Andmed on samad kui näites 18.12. Redutseeritud silde: $l'_1=9$ m; $l'_2=6$ m; $l'_3=8$ m. Fookussuhted: $k_1=\infty$; $k_2=5$; $k_3=3,35$; $k'_1=19/6$; $k'_2=4$; $k'_3=2$. Ühikjõuga koormatud silde arvutatakse toemomentide mõjujoonte ordinaadid valemitega (18.146). Selleks arvutatakse eelnevalt iga silde jaoks konstandid (18.147):

1. sildes:

$$c_{11} = l_1 / (k_1 k'_1 - 1) = 6 / [\infty (19/6) - 1] = 0$$

$$c_{13} = -l_1 k_1 / (k_1 k'_1 - 1) = -l_1 / (k'_1 - 1/k_1) = -6 / (19/6 - 0) = -36/19$$

2. sildes:

$$c_{21} = l_2 / (k_2 k'_2 - 1) = 6 / (5 \cdot 4 - 1) = 6/19$$

$$c_{22} = -k'_2 c_{21} = -4 \cdot 6/19 = -24/19;$$

$$c_{23} = -k_2 c_{21} = -5 \cdot 6/19 = -30/19$$

3. sildes:

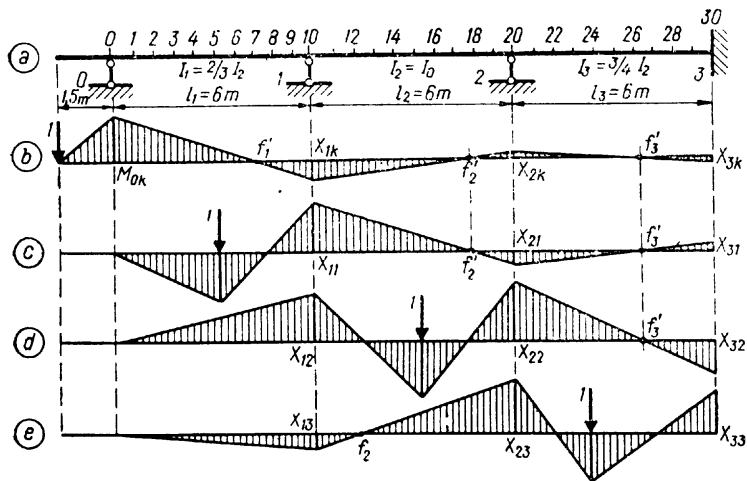
$$c_{31} = l_3 / (k_3 k'_3 - 1) = 6 / (3,35 \cdot 2 - 1) = 20/19$$

$$c_{32} = -k'_3 c_{31} = -2 \cdot 20/19 = -40/19;$$

$$c_{33} = -k_3 c_{31} = -3,35 \cdot 20/19 = -67/19$$

Kui ühikjõud mõjub konsooli vabal otsal (joon. 18.59, b), siis $M_{0k} = -1,5$ m; $X_{1k} = -M_{0k} / k'_1 = 1,5 / (19/6) = 0,4737$ m; $X_{2k} = -X_{1k} / k'_2 = -0,4737 / 4 = -0,1184$ m; $X_{3k} = -X_{2k} / k'_3 = 0,0592$ m

Toemomendi teine indeks näitab ühikjõu asukohta.



Joon. 18.59

Kui ühikjõud asub esimesel sildel (joon. 18.59, c), siis toemoment X_1 arvutatakse koormatud silde parempoolse toemomendi X_i valemiga (18.146) või (18.148):

$$X_{11} = c_{11}f_{\xi'} + c_{13}f_{\xi} = 0 \cdot f_{\xi'} - (36/19)f_{\xi} = -(36/19)f_{\xi} \quad (a)$$

Teiste toemomentide jaoks saadakse avaldised fookussuhetega:

$$X_{21} = -X_{11}/k'_2 = (36/19 \cdot 4)f_{\xi} = (9/19)f_{\xi} \quad (b)$$

$$X_{31} = -X_{21}/k'_3 = -(9/19 \cdot 2)f_{\xi} = -(4,5/19)f_{\xi}$$

Kui ühikjõud asub teisel sildel (joon. 18.59, d), siis toemomendid X_1 ja X_2 arvutatakse valemitega (18.146):

$$X_{12} = c_{21}f_{\xi} + c_{22}f_{\xi'} = (6/19)f_{\xi} - (24/19)f_{\xi'} \quad (c)$$

$$X_{22} = c_{21}f_{\xi'} + c_{23}f_{\xi} = (6/19)f_{\xi'} - (30/19)f_{\xi}$$

$$\text{Toemoment } X_3 \text{ leitakse fookussuhetega} \\ X_{32} = -X_{22}/k'_3 = -X_{22}/2 = -(3/19)f_{\xi'} + (15/19)f_{\xi} \quad (d)$$

Kui ühikjõud asub kolmandal sildel (joon. 18.59, e), siis

$$X_{23} = c_{31}f_{\xi} + c_{32}f_{\xi'} = (20/19)f_{\xi} - (40/19)f_{\xi'} \quad (e)$$

$$X_{33} = c_{31}f_{\xi'} + c_{33}f_{\xi} = (20/19)f_{\xi'} - (67/19)f_{\xi}$$

$$X_{13} = -X_{23}/k_2 = -X_{23}/5 = (8/19)f_{\xi'} - (4/19)f_{\xi}$$

Toemomentide avaldistes esinevate funktsioonide f_{ξ} ja $f_{\xi'}$ väärtused võetakse tabelist 18.6 vastavalt ühikjõu asukohale sildel. Toemomentide mõjujooned, mille ordinaadid arvutatakse avaldistega a, b, ..., e on kujutatud joonisel 18.60.

Mõjuarvudega leitakse toemomentide mõjujoonte avaldised vastavalt võrrandile (18.115):

$$X_{1x} = \beta_{11}\delta_{1p} + \beta_{12}\delta_{2p} + \beta_{13}\delta_{3p} \quad (f)$$

$$X_{2x} = \beta_{21}\delta_{1p} + \beta_{22}\delta_{2p} + \beta_{23}\delta_{3p}$$

$$X_{3x} = \beta_{31}\delta_{1p} + \beta_{32}\delta_{2p} + \beta_{33}\delta_{3p}$$

Mõjuarvud leitakse valemitega (18.150) ja (18.151):

$$\beta_{11}^* = -4/19; \quad \beta_{21}^* = \beta_{12}^* = 1/19; \quad \beta_{31}^* = \beta_{13}^* = -1/38 \quad (g)$$

$$\beta_{22}^* = -5/19; \quad \beta_{32}^* = \beta_{23}^* = 5/38; \quad \beta_{33}^* = -16,75/38$$

Ühikjõust põhjustatud paigutised δ_{jp} arvutatakse valemitega (18.152). Ühikjõu mõjudes:

1. sildel:

$$EI_0\delta_{1p} = \delta_{1p}^* = (6 \cdot 9/6)f_{\xi} = 9f_{\xi}; \quad EI_0\delta_{2p} = 0; \quad EI_0\delta_{3p} = 0 \quad (h)$$

2. sildel:

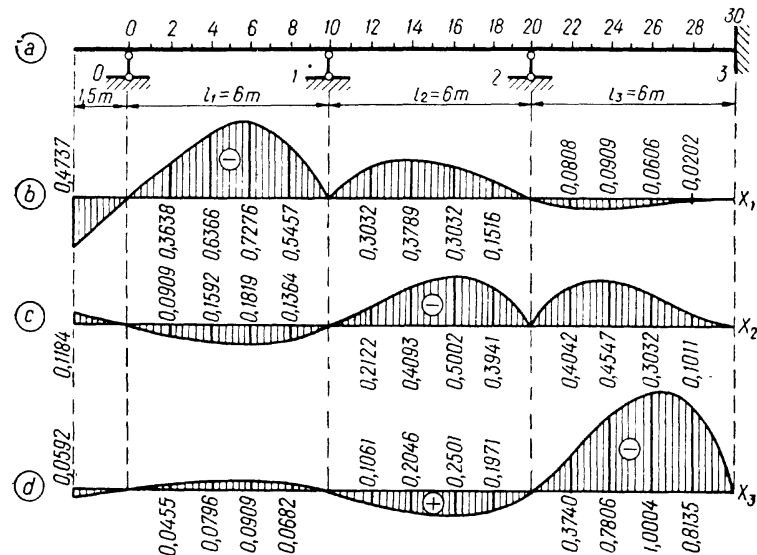
$$EI_0\delta_{1p} = (6 \cdot 6/6)f_{\xi'} = 6f_{\xi'}; \quad EI_0\delta_{2p} = 6f_{\xi}; \quad EI_0\delta_{3p} = 0 \quad (i)$$

3. sildel:

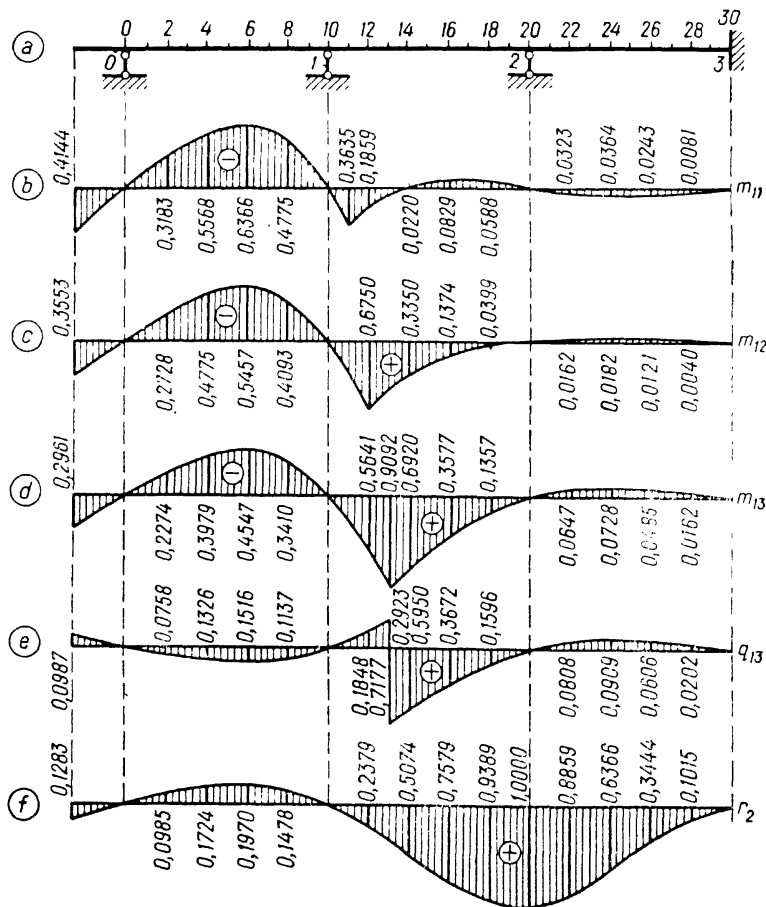
$$EI_0\delta_{1p} = 0; \quad EI_0\delta_{2p} = (6 \cdot 8/6)f_{\xi'} = 8f_{\xi'}; \quad EI_0\delta_{3p} = 8f_{\xi} \quad (j)$$

Kui asetada mõjuarvud (g) ja ühikjõust põhjustatud paigutiste funktsioonid (h), (i) ning (j) toemomentide avaldistesse (f), siis saadakse samad avaldised kui fookussuhetega eespool leitud. Näiteks kui ühikjõud asub teisel sildel, siis

$$X_{2x} = \beta_{21}\delta_{1p} + \beta_{22}\delta_{2p} + \beta_{23}\delta_{3p} = (1/19) \cdot 6f_{\xi'} + (-5/19) \cdot 6f_{\xi} + (5/38) \cdot 0 = (6/19)f_{\xi'} - (30/19)f_{\xi}$$



Joon. 18.60



Joon. 18.61

Valemiga (18.153) ja toemomentide X_1 ning X_2 mõjujoonte (joon. 18.60) ordinaatidega arvutatakse ristlõigete 11, 12 ja 13 paindemomendi mõjujoonte ordinaadid:

$$m_{11,x} = m_{11,x}^0 + 0,9X_{1x} + 0,1X_{2x}$$

$$m_{12,x} = m_{12,x}^0 + 0,8X_{1x} + 0,2X_{2x}$$

$$m_{13,x} = m_{13,x}^0 + 0,7X_{1x} + 0,3X_{2x}$$

Mõjujooned on kujutatud joonisel 18.61, *b, c* ja *d*.

Joonisel 18.61, *e* ja *f* on esitatud lõike 13 põikjõu ja toe 2 reaktsiooni mõjujooned, mille ordinaadid arvutatakse valemitega

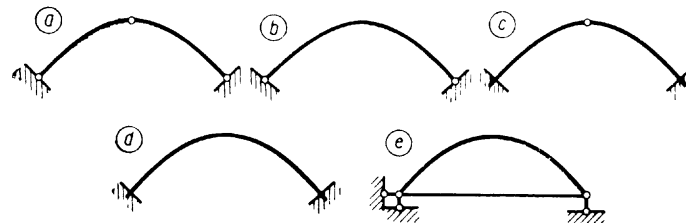
$$q_{13,x} = q_{13,x}^0 + (X_{2x} - X_{1x})/l_2$$

$$r_{2x} = r_{2x}^0 + (X_{1x} - X_{2x})/l_2 + (X_{3x} - X_{2x})/l_3$$

18.5. Kaarkonstruksioonid

18.5.1. Arvutuse alused

Kaared leiavad laialdast kasutamist silla-, tsiviil- ja tööstusehituses. Olenevalt liigendite arvust nimetatakse neid kolme, kahe, ühe liigendiga või liigenditeta kaarteks (joon. 18.62). Kolme liigendiga kaar on staatikaga määratav, teised kaared — staatikaga määramatud.

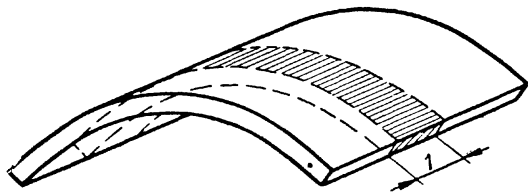


Joon. 18.62

Staatikaga määramatute kaartide arvutamisel on väga tähtsad tuge paigutised. Kahe liigendiga kaare toe horisontaalne siire on ohtlik, kuid vertikaalne vajumine mitte. Liigenditeta kaare toe kõik paigutiskomponendid põhjustavad kaares sisejõudude muutust, kuid mõlema toe võrdne vajumine ei põhjusta.

Kahe liigendiga kaarel on paindemomendid tuge juures väikesed ja suurenevad tunduvalt silde keskkohta poole. Liigenditeta kaarel on paindemomentide jaotus ühtlasem, kuid vundamendid on raskemas olukorras kui kahe liigendiga kaarel.

Kaare paksus ja laius (kaare ristlõike kõrgus ja laius) on samas suurusjärgus, kuid tunduvalt väiksemad kui kaare sille. Kui ristlõike laius on tunduvalt suurem ristlõike kõrgusest ja on samas suurusjärgus kui sille, siis nimetatakse konstruktsiooni võlviks (joon. 18.63). Kui



Joon. 18.63

koormus on võlvi laiusel konstantne, siis jaotatakse võlv arutamisel ühiklaiusega ribadeks. Riba koos temale mõjuva koormusega arvutatakse kaarena.

Kaare telgjooneks võetakse parabool, ringi kaar, katenoid või muutumatu koormusele vastav survekõver. Kaare kuju projekteeritakse nii, et suurimad arvutuslikud pinged kaare ristlõigetes ligikaudu võrduksid üksteisega. Muutumatu koormuse puhul ühtib kaare telje ökonoomne kuju survekõveraga või lõikub sellega mitmes punktis.

Staatikaga määramatu kaare survekõvera leidmine nõuab eelnevalt lisatundmatute arvutamist. Lisatundmatud omakorda olenevad kaare kujust ja deformatsioonidest. Telje kuju leitakse järkjärgulise lähenemisega. Algul võetakse kaare telgjooneks parabool, ringi kaar, katenoid või staatikaga määratud kolme liigendiga kaare survekõver. Järgnevalt arvutatakse lisatundmatud ja leitakse staatikaga määramatu kaare survekõver. Nüüd muudetakse esialgset kaare telje kuju vastavalt staatikaga määramatu kaare survekõverale ja korratakse arvutust, kuni kaare telgjoon rahuldab temale esitatud nõudeid. Kuju valikul arvestatakse täiendavalt ka kaare telje lühenemist normaaljõudude mõjul.

Liikuva koormuse puhul on kaare telje kuju valik veelgi raskem. Kui ühtlaselt jaotatud ajutine liikuvkoormus on võrreldes alalise koormusega suur, siis võetakse kaare telgjoon niisugune, et kaare ühe poole ajutise koormuse jaoks leitud survekõvera suurimad kõrvalekalded telgjoonest oleksid kaare mõlemal poolel ligikaudu võrdsed.

Kaare sisejõud olenevad peale kaare telje kuju veel ka kaare ristlõike mõõtmetest. Kaare luku ja kanna ristlõike mõõtmed valitakse kogemuste põhjal või määratakse algul ligikaudsete valemitega. Lõplikud ristlõike mõõtmed ja kuju peavad vastama arvutuslike sisejõudude jaotusele.

Sümmeetriliste kaarte puhul võib ristlõike inertsmomenti muutuse piki kaare telje valida näiteks järgmistel avaldistega:

1) liigendita kaare jaoks

$$I_c/I \cos \varphi = 1 - (1 - n) (x/l_1)^r \quad (18.159)$$

2) kahe liigendiga kaare jaoks

$$I_c/I \cos \varphi = 1 + (n - 1) (x/l_1)^r \quad (18.160)$$

$$I = I_c \cos \varphi$$

milles x on kaare telje abstsiss (koordinaatide algpunkt lukuristlõike raskuskeskmes); φ — nurk kaare telje puutuja ja horisontaali vahel; I_c — lukuristlõike inertsmoment; I — ristlõike, mille abstsiss on x , inertsmoment; l_1 — pool sillet; $n = I_c/I_k \cos \varphi_k$, milles I_k on kaare kannaristlõike inertsmoment ja φ_k — nurk telje ja puutuja vahel kaare kannas.

Enamikul juhtudel võetakse valemities (18.159), (18.160), $r=1$ ja valemis (18.159) sageli ka $n=1$.

Väikese kõverusega kaarkonstruktsioonides ($q/h > 5$, milles q on kõverusraadius ja h — kaare paksus) arvutatakse paigutised avaldisega

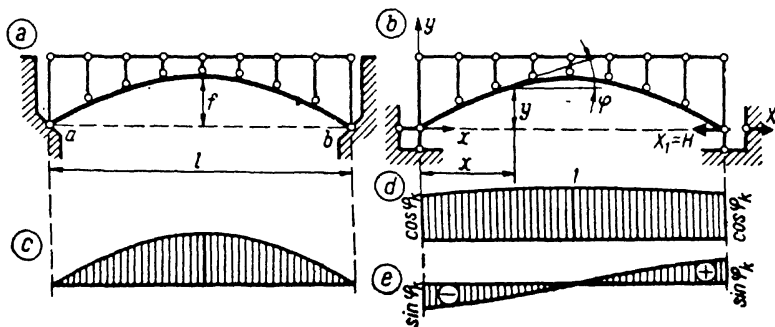
$$\Delta_{kp} = \sum \int \left(\frac{m_k M_p}{EI} + \frac{n_k N_p}{EF} - \frac{m_k N_p}{EFQ} - \frac{n_k M_p}{EFQ} + k_j \frac{q_k Q_p}{GF} \right) ds \quad (18.161)$$

Kolmanda ja neljanda liikme ees on miinusmärk, sest survejõud on võetud positiivsena. Piki- ja põikjõu mõju paigutistele võrreldes paindemomendi mõjuga oleneb koormusest, kaare kujust ja mõõtmetest ning hinnatakse arvutustulemuste järgi.

18.52. Kahe liigendiga kaar

18.52.1. Koormuse, temperatuuri muutuse ja tugede paigutiste mõju

Kahe liigendiga kaar (joon. 18.64, a) on staatikaga ühekordselt määramatu. Põhiskeemina kasutatakse kõverat tala. Lisatundmatuks võetakse toereaktsiooni B horisontaalne komponent $H_b = X_1$ (joon. 18.64, b).



Joon. 18.64

Ühiktundmatust $X_1=1$ põhjustatud sisejõud põhiskeemis leitakse valemitega

$$m_1 = -y; \quad n_1 = \cos \varphi; \quad q_1 = -\sin \varphi \quad (a)$$

Epüürid on kujutatud joonistel 18.64, c, d ja e.

Vertikaalsest koormusest põhjustatud sisejõud põhiskeemis arvutatakse avaldistega

$$M_p^0 = M^0; \quad N_p^0 = Q^0 \sin \varphi; \quad Q_p^0 = Q^0 \cos \varphi \quad (b)$$

milles M^0 ja Q^0 on paindemoment ja põikjõud kaarega võrdse sildega lihttalas. Temperatuuri muutus ja tugede paigutised põhiskeemis sisejõude ei põhjusta:

$$M_t^0 = N_t^0 = Q_t^0 = 0; \quad M_r^0 = N_r^0 = Q_r^0 = 0 \quad (c)$$

Kanoonilisest võrrandist

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{10} = 0$$

avaldatakse lisatundmatu

$$X_1 = -\Delta_{10} / \delta_{11} \quad (18.162)$$

milles

$$\Delta_{10} = \Delta_{1p} + \Delta_{1t} + \Delta_{1r}$$

Lamedate kaarte puhul, kui kõveruse mõju ei arvestata, leitakse paigutised järgmiste valemitega:

$$EI_c \delta_{11} = \int_0^s y^2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{F_c} \int_0^s \cos^2 \varphi \frac{F_c}{F} ds +$$

$$+ k \frac{E}{G} \frac{I_c}{F_c} \int_0^s \sin^2 \varphi \frac{F_c}{F} ds \quad (18.163)$$

$$EI_c \Delta_{1p} = - \int_0^s y M_p^0 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{F_c} \int_0^s \cos \varphi N_p^0 \frac{F_c}{F} ds -$$

$$- k \frac{E}{G} \frac{I_c}{F_c} \int_0^s \sin \varphi Q_p^0 \frac{F_c}{F} ds \quad (18.164)$$

Temperatuuri muutusest põhjustatud paigutis leitakse valemiga (16.32)

$$\Delta_{1t} = - \int_0^s a n_1 t_0 ds + \int_0^s a m_1 (\Delta t / h) ds$$

või kui $a = \text{konst.}$, $\Delta t = \text{konst.}$ ja $t_0 = \text{konst.}$, siis

$$\Delta_{1t} = - a t_0 \int_0^s \cos \varphi ds - a \Delta t \int_0^s (y/h) ds \quad (18.165)$$

Kaare tugede paigutistest põhjustatud silde suurenemisel Δl võrra on lisatundmatule X_1 vastav üldistatud paigutis võrdne silde suurenemisega:

$$\Delta_{1r} = \Delta l \quad (18.166)$$

Arvutamise lihtsustamiseks avaldatakse kõik integreeritavad funktsioonid abstsissi x kaudu, kusjuures

$$ds = dx / \cos \varphi \quad (d)$$

Paigutiste avaldised on siis järgmised:

$$EI_c \delta_{11} = \int_0^l y^2 \frac{I_c}{I} \frac{dx}{\cos \varphi} + \frac{I_c}{F_c} \int_0^l \cos \varphi \frac{F_c}{F} dx +$$

$$+ k \frac{E}{G} \frac{I_c}{F_c} \int_0^l \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi \frac{F_c}{F} dx \quad (18.163^*)$$

$$EI_c \Delta_{1p} = - \int_0^l y M_p^0 \frac{I_c}{I} \frac{dx}{\cos \varphi} + \frac{I_c}{F_c} \int_0^l N_p^0 \frac{F_c}{F} dx -$$

$$- k \frac{E}{G} \frac{I_c}{F_c} \int_0^l Q_p^0 \operatorname{tg} \varphi \frac{F_c}{F} dx \quad (18.164^*)$$

Vertikaalse koormuse puhul

$$\begin{aligned}
 EI_c \Delta_{1p} &= - \int_0^l y M^0 \frac{I_c}{I} \frac{dx}{\cos \varphi} + \frac{I_c}{F_c} \int_0^l Q^0 \sin \varphi \frac{F_c}{F} dx - \\
 &- k \frac{E}{G} \frac{I_c}{F_c} \int_0^l Q^0 \sin \varphi \frac{F_c}{F} dx = \\
 &= - \int_0^l y M^0 \frac{I_c}{I} \frac{dx}{\cos \varphi} + \\
 &+ \left(1 - k \frac{E}{G} \right) \frac{I_c}{F_c} \int_0^l Q^0 \sin \varphi \frac{F_c}{F} dx. \quad (18.164^{**})
 \end{aligned}$$

Valemi (18.165) asemel võib kirjutada

$$\Delta_{1t} = -\alpha t_0 l - \alpha \Delta t \int_0^l (y/h \cos \varphi) dx \quad (18.165^*)$$

Pärast lisatundmatute arvutamist avaldisega (18.162) leitakse sisejõud järgmiste valemitega:

1) koormusest

$$\begin{aligned}
 N_p &= N_p^0 + \cos \varphi X_{1p}; & M_p &= M_p^0 - y X_{1p}; \\
 Q_p &= Q_p^0 - \sin \varphi X_{1p}
 \end{aligned} \quad (18.167)$$

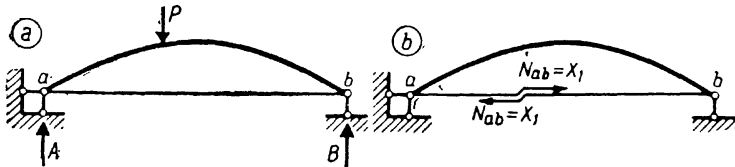
2) temperatuuri muutusest

$$N_t = \cos \varphi X_{1t}; \quad M_t = -y X_{1t}; \quad Q_t = -\sin \varphi X_{1t} \quad (18.168)$$

3) tugede paigutistest

$$N_r = \cos \varphi X_{1r}; \quad M_r = -y X_{1r}; \quad Q_r = -\sin \varphi X_{1r} \quad (18.169)$$

Tõmbiga kahe liigendiga kaare (joon. 18.65, a) tugede ebaühtlane vajumine ei põhjusta tõmbis sisejõudu. Kasutades joonisel 18.65, b esitatud põhiskeemi ja võttes lisa-



Joon. 18.65

tundmatuks tõmbis tekkiva tõmbejõu $X_1 = N_{ab}$ on erinevused võrreldes kahe liigendiga kaarega ainult paigutiste δ_{11} ja Δ_{1t} arvutamisel:

$$\begin{aligned}
 EI_c \delta_{11} &= \int_0^l y^2 \frac{I_c}{I} \frac{dx}{\cos \varphi} + \frac{I_c}{F_c} \int_0^l \cos \varphi \frac{F_c}{F} dx + \\
 &+ k \frac{E}{G} \frac{I_c}{F_c} \int_0^l \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi \frac{F_c}{F} dx + (EI_c/E_t F_t) \cdot 1l
 \end{aligned} \quad (18.170)$$

$$\Delta_{1t} = -(a - a_t) t_0 l - \alpha \Delta t \int_0^l (y/h \cos \varphi) dx \quad (18.171)$$

Kuna tõmbiga kaarel on paigutise $EI_c \delta_{11}$ avaldis (18.170) liikme $(EI_c/E_t F_t) \cdot 1l$ võrra suurem kui tõmbita kaarel (18.163), siis tõmbis on jõud väiksem kui samast koormusest kahe liigendiga kaare horisontaalne toereaktsioon. See on tingitud tõmbi pikenedisest. Mida väiksem on tõmbi tõmbejäikus $E_t F_t$, seda väiksem on tõmbis jõud.

Survejoone kaugus kaare telgjoonest leitakse valemiga $e = M/N$. Vertikaalse koormuse puhul võib arvutada teisiti. Paindemoment kaare ristlõikes k leitakse valemiga

$$M_k = M_k^0 - X_1 y = M_k^0 - H y$$

või

$$M_k = H(z - y) = H\eta$$

milles

$$\eta = z - y \quad (18.172)$$

on vertikaalne lõikurvejoone ja kaare telgjoone vahel. Survejoone ordinaadid leitakse valemiga

$$z = M^0/H \quad (18.173)$$

18.52.2. Analüütiliselt määratud telgjoonega kaar

Analüütiliselt väljendatava telgjoonega $[y = f(x)]$ kaare jaoks avaldatakse paigutiste valemite esinevad trigonomeetrised funktsioonid analüütiliselt:

$$\operatorname{tg} \varphi = dy/dx; \quad \cos \varphi = \pm 1/\sqrt{1 + (dy/dx)^2}$$

$$\sin \varphi = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \operatorname{tg} \varphi \cos \varphi =$$

$$= (dy/dx)/\sqrt{1 + (dy/dx)^2}$$

Funktsioon $\cos \varphi$ on positiivne kogu kaare pikkusel, $\sin \varphi$ on vasakul pool sümmeetriatelge positiivne ja paremal pool negatiivne.

Lamedatel kaartel on põikjõu mõju paigutisele $EI_c \delta_{11}$ väike ja ligikaudse arvutuse juures võib valemist (18.163) jätta ära kolmanda integraali

$$EI_c \delta_{11} = \int_0^l y^2 \frac{I_c}{I} \frac{dx}{\cos \varphi} + \frac{I_c}{F_c} \int_0^l \cos \varphi \frac{F_c}{F} dx$$

ja esitada ta järgmisel kujul:

$$EI_c \delta_{11} = (1+\nu) \int_0^l y^2 \frac{I_c}{I} \frac{dx}{\cos \varphi} = (1+\nu) \int_0^l EI_c \delta_{11,m} (18.174)$$

milles

$$\nu = \frac{\frac{I_c}{F_c} \int_0^l \cos \varphi \frac{F_c}{F} dx}{\int_0^l y^2 \frac{I_c}{I} \frac{dx}{\cos \varphi}} = \frac{EI_c \delta_{11,n}}{EI_c \delta_{11,m}} \quad (18.175)$$

Murru lugeja ja nimetaja väljendavad vastavalt piki- ja paindemomendi mõju.

Pikijõu mõju on oluline lamedate kaarte puhul.

Ligikaudsel arvutamisel võib lamedate kaarte puhul võtta $\cos \varphi \approx 1$ ja $F_c/F \approx 1$, mille tulemusel valemi (18.175) lugeja väärtuseks on

$$EI_c \delta_{11,n} \approx (I_c/F_c) l \quad (18.176)$$

Järgnevalt vaadeldakse kahe liigendiga kaart, mille telgjooneks on parabool

$$y = 4(f/l^2)x(l-x) = 4f\xi(1-\xi) = 4f\xi\xi' \quad (18.177)$$

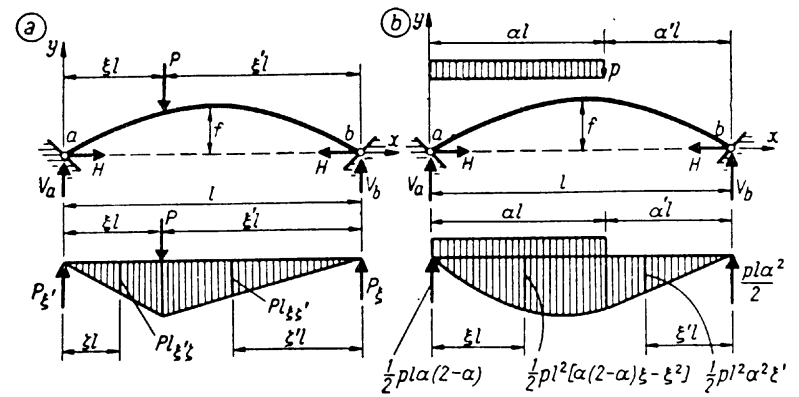
kus

$$\xi = x/l; \quad \xi' = x'/l = (l-x)/l$$

ja ristlõike inertsmoment muutub vastavalt avaldisele

$$I_c/I \cos \varphi = 1 \quad (18.178)$$

$$EI_c \delta_{11,m} = \int_0^l y^2 \frac{I_c}{I} \frac{dx}{\cos \varphi} = \int_0^l y^2 dx = l \int_0^1 y^2 d\xi = \frac{8}{15} f^2 l \quad (18.179)$$



Joon. 18.66

$$EI_c \delta_{11} = (8/15) f^2 l (1+\nu) \quad (18.180)$$

$$\nu = (I_c/F_c) l / (8/15) f^2 l = (15/8) (I_c/F_c) / f^2 \quad (18.181)$$

Kui kaarele mõjub koondatud jõud P (joon. 18.66, a), siis

$$\begin{aligned} EI_c \Delta_{1p} &= - \int_0^l M_p^0 y \frac{I_c}{I} \frac{dx}{\cos \varphi} = - \int_0^l M_p^0 y dx = \\ &= -4Pfl^2 (\xi' \int_0^{\xi} \zeta^2 \zeta' d\zeta + \xi \int_0^{\xi'} \zeta \zeta'^2 d\zeta) = \\ &= 4Pfl^2 [(1-\xi) \int_0^{\xi} \zeta^2 (1-\zeta) d\zeta + \xi \int_0^{1-\xi} \zeta (1-\zeta)^2 d\zeta] \end{aligned}$$

mis pärast integreerimist on järgmine:

$$EI_c \Delta_{1p} = (Pfl^2/3) (\xi - 2\xi^3 + \xi^4) \quad (18.182)$$

Horisontaalne toereaktsioon

$$\begin{aligned} H = X_1 &= -EI_c \Delta_{1p} / EI_c \delta_{11} = \\ &= (5/8) (l/f) [P/(1+\nu)] (\xi - 2\xi^3 - \xi^4) \quad (18.183) \end{aligned}$$

Avaldistega (18.167) leitakse lõplikud sisejõud kaares. Näiteks paindemoment lukuristlõikes c , kui $\xi \leq 1/2$, arvutatakse valemiga

$$M_c = (Pl/8) [4\xi - 5(\xi - 2\xi^3 + \xi^4)/(1+\nu)] \quad (18.184)$$

H mõjujoone ja lukuristlõike paindemomendi M_c mõjujoone ordinaatide arvutamisel tuleb avaldistes (18.183) ja (18.184) võtta $P=1$.

Kui kaarele mõjub ühtlaselt jaotatud koormus vasakust toest pikkusel αl (joon. 18.66, b), siis

$$\begin{aligned} EI_c \Delta_{1p} &= - \int_0^l M_p^0 y \frac{I_c}{I} \frac{dx}{\cos \varphi} = - \int_0^l M_p^0 y dx = \\ &= -2pf l^3 \left[\alpha(2-\alpha) \int_0^\alpha \xi^2 \xi' d\xi - \int_0^\alpha \xi^3 \xi' d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2 \int_0^\alpha \xi \xi'^2 d\xi \right] \end{aligned}$$

Pärast integreerimist saadakse avaldis

$$EI_c \Delta_{1p} = -pf l^3 \alpha^2 (1 - \alpha^2 + 0,4\alpha^3) / 6 \quad (18.185)$$

Nüüd

$$H = (5/16) p l^2 \alpha^2 (1 - \alpha^2 + 0,4\alpha^3) / f (1 + \nu) \quad (18.186)$$

Kui pool sillet on koormatud ($\alpha=1/2$), siis

$$H = p l^2 / 16 f (1 + \nu); \quad V_a = 3pl/8; \quad V_b = pl/8 \quad (18.187)$$

$$M_c = p l^2 \nu / 16 (1 + \nu) \quad (18.188)$$

Kui terve sille on koormatud ($\alpha=1$), siis

$$H = p l^2 / 8 f (1 + \nu); \quad V_a = V_b = pl/2; \quad M_c = p l^2 \nu / 8 (1 + \nu) \quad (18.189)$$

Teljjooneks on ringi kaar. Kaar on konstantse ristlõikega (joon. 18.67, a):

$$\begin{aligned} r &= (f/2) [1 + (l_1/f)^2]; \quad \sin \varphi_k = l_1/r; \\ \cos \varphi_k &= (r - f)/r \end{aligned} \quad (18.190)$$

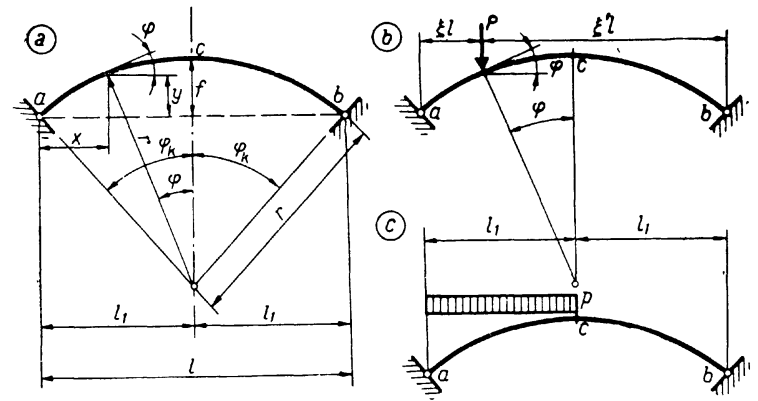
$$x = l_1 - r \sin \varphi; \quad y = r \cos \varphi - (r - f) \quad (18.191)$$

$$\begin{aligned} EI \delta_{11} &= r^3 (\varphi_k - 3 \sin \varphi_k \cos \varphi_k + 2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k) + \\ &\quad + r (I/F) (\varphi_k + \sin \varphi_k \cos \varphi_k) \end{aligned} \quad (18.192)$$

Kui kaarele mõjub koondatud jõud P (joon. 18.67, b), siis

$$\begin{aligned} EI \Delta_{1p} &= P r l^2 \xi (1 - \xi) / 2 + (r - f) r^2 [(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) - \\ &\quad - (\cos \varphi_k + \varphi_k \sin \varphi_k)] \end{aligned} \quad (18.193)$$

Avaldisega (18.162) leitakse horisontaalreaktsioon X_1 ja valemitega (18.167) sisejõud. Horisontaalreaktsiooni



Joon. 18.67

$X_1 = H$ mõjujoone ordinaatide arvutamisel tuleb valemis (18.193) võtta $P=1$.

Kui pool sillet on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega (joon. 18.67, c), siis

$$\begin{aligned} EI \Delta_{1p} &= (p r^4 / 4) [\sin \varphi_k (4 \sin^2 \varphi_k / 3 - \cos^2 \varphi_k) + \\ &\quad + \varphi_k \cos \varphi_k (1 - 2 \sin^2 \varphi_k)] \end{aligned} \quad (18.194)$$

Näide 18.15. Arvutada kahe liigendiga kaare, mille pool sillet on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega p , sisejõudude N , M ja Q epüüride ning horisontaalreaktsiooni H ja lõike k (joon. 18.68, a) sisejõudude N , M , Q mõjujoonte ordinaadid. Andmed: $l=32$ m; $l_1=16$ m; $f=4$ m;

$$\begin{aligned} F_c &= 0,845 \text{ m}^2 (h_c = 1,3 \text{ m}; b_c = 0,65 \text{ m}); \quad I_c = 0,12 \text{ m}^4; \quad I_c / I \cos \varphi = 1; \\ y &= 4f \xi \xi'; \quad \xi = x/l; \quad p = 8 \text{ t/m}; \quad a_k = 6,4 \text{ m}. \end{aligned}$$

Valemitega (18.187) leitakse toereaktsioonid:

$$H = \frac{p l^2}{16f(1+\nu)} = \frac{8 \cdot 32^2}{16 \cdot 4(1+0,01664)} = 125,9 \text{ t}$$

$$\begin{aligned} V_a &= (3/8) p l = (3/8) \cdot 8 \cdot 32 = 96 \text{ t}; \\ V_b &= p l / 8 = 8 \cdot 32 / 8 = 32 \text{ t} \end{aligned}$$

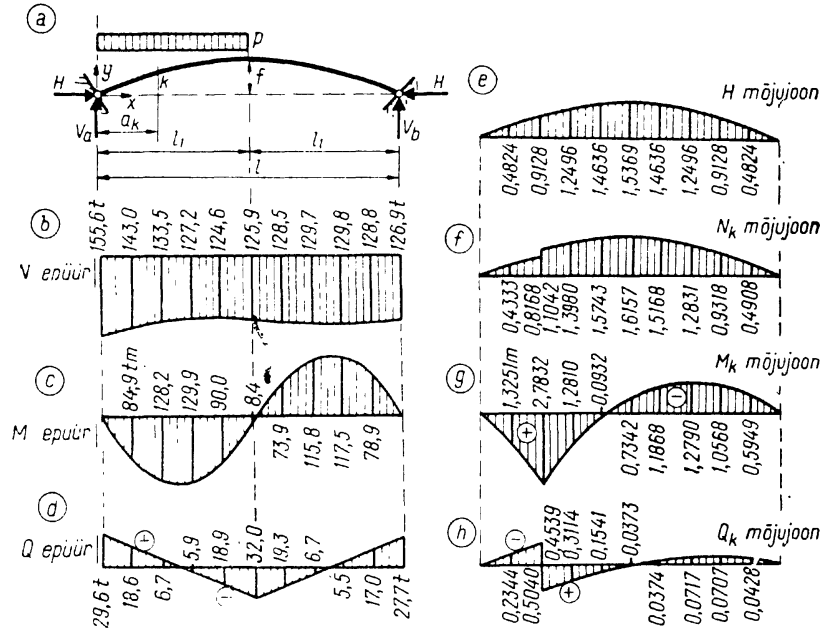
kus valemiga (18.181) on leitud

$$\nu = (15/8) (I_c / F_c) / f^2 = (15/8) (0,12 / 0,845) / 4^2 = 0,01664$$

Avaldisega (18.188) leitakse paindemoment lukus

$$M_c = p l^2 \nu / 16 (1 + \nu) = (8 \cdot 32^2 / 16) 0,01664 / (1 + 0,01664) = 8,38 \text{ tm}$$

Valemitega (18.167), milles $X_{1p} = H$, arvutatakse sisejõud N , M ja Q kaare lõigetes $\xi=0,1; 0,2; \dots 1,0$. Epüürid on esitatud joonisel 18.68, b, c ja d.



Joon. 18.68

Valemiga (18.183), milles $P=1$, arvutatakse horisontaalse toereaktsiooni mõjujoone ordinaadid

$$H = [5 \cdot 32 / 8 \cdot 4 (1 + 0,01664)] (\xi - 2\xi^3 + \xi^4) = 4,9182 (\xi - 2\xi^3 + \xi^4)$$

Joonisel 18.68, e on kujutatud reaktsiooni H mõjujoon.

Valemitega (18.167) arvutatakse lõike k sisejõudude mõjujoonte ordinaadid:

$$\begin{aligned} N_{kx} &= N_{px} + \cos \varphi X_{1p} = \sin \varphi Q_{kx}^0 + \cos \varphi H_x = \\ &= 0,28735 Q_{kx}^0 + 0,95783 H_x \end{aligned}$$

$$M_{kx} = M_{px}^0 - y X_{1p} = M_{kx}^0 - y H_x = M_{kx}^0 - 2,56 H_x$$

$$\begin{aligned} Q_{kx} &= Q_{px}^0 - \sin \varphi X_{1p} = \cos \varphi Q_{kx}^0 - \sin \varphi H_x = \\ &= 0,95783 Q_{kx}^0 - 0,28735 H_x \end{aligned}$$

Nendes avaldistes on Q_{kx}^0 , M_{kx}^0 lihttala, mille sille $l=32$ m, lõike k ($a_k=6,4$ m) põikjõu ja paindemomendi mõjujoone ordinaat; H_x — kaare horisontaalreaktsiooni mõjujoone ordinaat; $y=2,56$ m — kaare ristlõike k raskuskeskme ordinaat; $\sin \varphi=0,28735$ ja $\cos \varphi=0,95783$ — kaare lõikes k telgjoone puutuja ja horisontaali vahelise nurga siinus ja koosinus. Mõjujooned on kujutatud joonisel 18.68, f, g ja h.

18.52.3. Analüütiliselt määratu telgjoonega kaar

Kui-kaare telgjoon ei ole analüütiliselt määratu, siis siirete δ_{11} ja Δ_{1p} avaldistes integraalide arvutamine suletud kujul ei ole võimalik ning kasutatakse numbrilist integreerimist. Siirete arvutamisel kasutatakse näiteks *Simpsoni* valemit (16.54)

$$\int_0^s f(s) ds \approx \frac{\Delta s}{3} [f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2}) + f_n] \quad (a)$$

Valemi (a) kasutamine nõuab integreeritava vahemiku jaotamist paarisarvuks võrdse pikkusega osaks Δs .

Arvutamise lihtsustamiseks avaldatakse kõik funktsioonid abstsissi x kaudu. Numbrilisel integreerimisel jaotatakse nüüd kaare sille paarisarvuks võrdseks osaks.

Mõjujoonte ordinaatide arvutamisel leitakse esmalt lisatundmatu horisontaalse toereaktsiooni H mõjujoone ordinaadid reaktsiooni ja paigutise vastastikkuse teoreemi

$$r'_{ik} = -\delta'_{ki} \quad (a)$$

alusel. Vertikaalse ühikjõu puhul võib avaldise (a) asemel kirjutada

$$r'_{ix} = -w'_{xi} \quad (b)$$

milles r'_{ix} on sideme i reaktsiooni mõjujoone ordinaat ja w'_{xi} — sideme ühikpaigutistest põhjustatud vertikaalsiire kohas x .

Horisontaalreaktsiooni H mõjujoone ordinaatide arvutamisel rakendatakse toe b juures ärajäetud sideme asemele üldistatud ühikjõud. Üldistatud ühikjõust $H=1$ põhjustatud vertikaalsiirde epüüri w_{xi} ordinaadid on vastupidiste märkidega reaktsiooni H mõjujoone ordinaatidega ja δ_{11} korda suuremad.

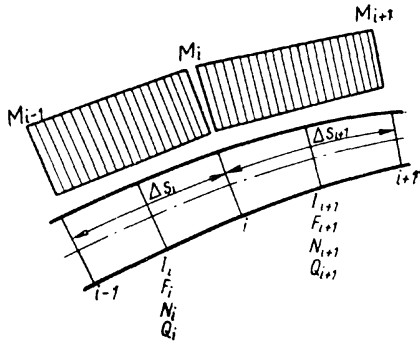
Reaktsiooni H mõjujoone ordinaadid leitakse valemiga

$$H_x = X_{1x} = -w_{x1} / \delta_{11} \quad (c)$$

Ühiktundmatust $H=1$ põhjustatud vertikaalsiirde epüür w_1 arvutatakse maatrikskujul avaldisega

$$v = b' f b_1 \quad (d)$$

milles b' on põhiskeemi paindemomendi transponeeritud



Joon. 18.69

mõjumaatriks, f — muutusmaatriks ja b_1 — jõust $H=1$ põhjustatud veergmaatriks.

Vertikaalsirde epüüri arvutamisel elastsete koormuste meetodiga arvatatakse fiktiivsed elastsed jõud valemiga (16.92) (joon. 18.69):

$$EI_c P_{fi} = \frac{I_c}{I_i} \frac{s_i}{6} (M_{i-1} + 2M_i) + \frac{I_c}{I_{i+1}} \frac{s_{i+1}}{6} (2M_i + M_{i+1}) + (I_c/F_c) [N_{i+1}(F_c/F_{i+1}) \operatorname{tg} \varphi_{i+1} - N_i(F_c/F_i) \operatorname{tg} \varphi_i] + k(E/G) (I_c/F_c) [Q_i(F_c/F_i) - Q_{i+1}(F_c/F_{i+1})] \quad (18.195)$$

Näide 18.16. Arvutada kahe liigendiga kaare, mille pool sillel on koormatud ühtlaselt jaotunud koormusega p (joon. 18.70, a) horisontaalne toereaktsioon H numbrilise integreerimisega ja H mõjujoone ordinaadid maatriksarvutusega ja elastsete koormuste meetodiga. Andmed on samad kui näites 18.15:

$$I_c/I = \cos \varphi; \quad F_c/F = \sqrt[3]{\cos \varphi}$$

Paigutised

$$EI \Delta_{1p} = - \int_0^s y M_p^0 \frac{I_c}{I} ds = - \int_0^s y M_p^0 \cos \varphi ds = - \int_0^i y M_p^0 dx \quad (a)$$

$$EI_c \delta_{11} = 2 \int_0^{s/2} y^2 \frac{I_c}{I} ds + 2 \frac{I_c}{F_c} \int_0^{s/2} \cos^2 \varphi \frac{F_c}{F} ds =$$

$$= 2 \int_0^{l/2} y^2 dx + 2 \frac{I_c}{F_c} \int_0^{l/2} \cos \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi} dx \quad (b)$$

Simpsoni valemiga numbriliseks integreerimiseks vajalikud suurused on esitatud tabelites 18.9 ja 18.10.

Tabel 18.9

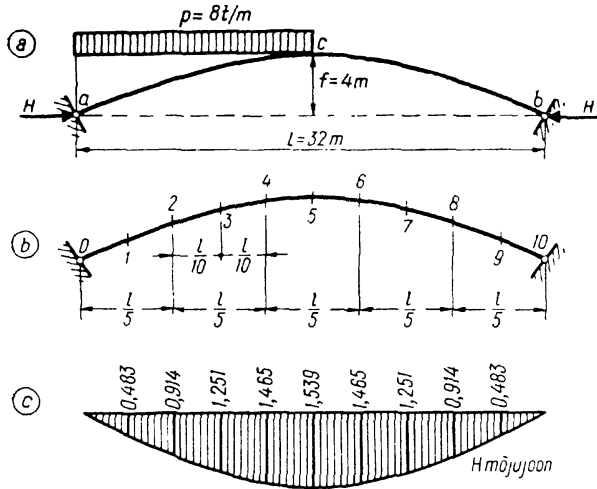
Lõige	x	y	y^2	$\cos \varphi$	$\sqrt[3]{\cos \varphi}$	$\cos \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi}$
0	0,00	0,00	0,0000	0,8944	0,9635	0,8618
1	1,60	0,76	0,5776	0,9119	0,9698	0,8844
2	3,20	1,44	2,0736	0,9285	0,9756	0,9058
3	4,80	2,04	4,1616	0,9439	0,9810	0,9260
4	6,40	2,56	6,5536	0,9578	0,9857	0,9441
5	8,00	3,00	9,0000	0,9701	0,9899	0,9603
6	9,60	3,36	11,2896	0,9806	0,9935	0,9742
7	11,20	3,64	13,2496	0,9889	0,9963	0,9852
8	12,80	3,84	14,7456	0,9950	0,9983	0,9933
9	14,40	3,96	15,6816	0,9988	0,9996	0,9984
10	16,00	4,00	16,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabel 18.10

Lõige	y	M_p^0	yM_p^0	Lõige	y	M_p^0	yM_p^0
0	0,00	0,00	0,00	10	4,00	512,00	2048,00
1	0,76	143,36	108,95	11	3,96	460,80	1824,77
2	1,44	266,24	383,39	12	3,84	409,60	1572,86
3	2,04	368,64	752,03	13	3,64	358,40	1304,58
4	2,56	450,56	1153,43	14	3,36	307,20	1032,19
5	3,00	512,00	1536,00	15	3,00	256,00	768,00
6	3,36	552,96	1857,95	16	2,56	204,80	524,29
7	3,64	573,44	2087,32	17	2,04	153,60	313,34
8	3,84	573,44	2202,01	18	1,44	102,40	147,46
9	3,96	552,96	2189,72	19	0,76	51,20	38,91
10	4,00	512,00	2048,00	20	0,00	0,00	0,00

$$EI_c \Delta_{1p} = -(1,60/3) [0,00 + 4(108,95 + 752,03 + 1536,00 + 2087,32 + 2189,72 + 1824,77 + 1304,58 + 768,00 + 313,34 + 38,91) + 2(383,39 + 1193,43 + 1857,95 + 2202,01 + 2048,00 + 1572,86 + 1032,19 + 524,29 + 147,46) + 0,00] = -34953 \text{ tm}^3$$

$$EI_c \delta_{11} = 2(1,60/3) [0,0000 + 4(0,5776 + 4,1616 + 9,0000 + 13,2496 + 15,6816) + 2(2,0736 + 6,5536 + 11,2896 + 14,7456) + 16,0000] + 2(0,12/0,845) (1,60/3) [0,8618 + 4(0,8844 + 0,9260 + 0,9603 + 0,9852 + 0,9984) + 2(0,9058 + 0,9441 + 0,9742 + 0,9933) + 1,0000] = 273,07 + 4,32 = 277,39 \text{ m}^3$$



Joon. 18.70

$H = -EI_c \Delta_1 p / EI_c \delta_{11} = 34953 / 277,39 = 126,0 \text{ t}$ (c)
 Horisontaalse toereaktsiooni H mõjujoone ordinaadid leitakse valemiga

$$H x = -w_x / \delta_{11} \quad (d)$$

kusjuures ühikjõust $H=1$ põhjustatud vertikaalsirde epüür w_1 arvutatakse matriksteketega

$$w_1 = b' f b_1 \quad (e)$$

Kaare sille on jaotatud viieks võrdseks osaks ($\Delta l = l/5 = 32/5 = 6,4 \text{ m}$). Kuna kaare ristlõige on muutuv, siis muutusmaatriksi f elemendid leitakse valemiga (16.69), mis nõuab funktsioonide arvutamist ka osa keskel:

$$f_j = \frac{\Delta l}{6EI_c \cos \varphi_{i-1}} \begin{vmatrix} \alpha_{i-2} & \\ & 4\alpha_{i-1} \\ & & \beta_{i-2} \\ & & & 4\beta_{i-1} \end{vmatrix} \frac{\Delta l}{6EI_c} \begin{vmatrix} \beta_{i-2} & \\ & 4\beta_{i-1} \end{vmatrix} \beta_i \quad (f)$$

milles

$$\alpha_{i-2} = \frac{EI_c}{EI_{i-2}} = \cos \varphi_{i-2}; \quad \alpha_{i-1} = \frac{EI_c}{EI_{i-1}} = \cos \varphi_{i-1}; \quad (g)$$

$$\alpha_i = \frac{EI_c}{EI_i} = \cos \varphi_i$$

$$\beta_{i-2} = \cos \varphi_{i-2} / \varphi_{i-1}; \quad \beta_{i-1} = \cos \varphi_{i-1} / \cos \varphi_{i-1} = 1 \quad (h)$$

$$\beta_i = \cos \varphi_i / \cos \varphi_{i-1}$$

kusjuures
 $i=2j$ ($j=1, 2, 3, 4, 5$)
 Kaare elementide ($j=1, 2, \dots, 5$) muutusmaatriksid on nüüd järgmised:

$$f_1 = \frac{\Delta l}{6EI_c} \begin{vmatrix} \cos \varphi_0 / \cos \varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_2 / \cos \varphi_1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\Delta l}{6EI_c} \begin{vmatrix} 0,9633 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0316 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$f_2 = \frac{\Delta l}{6EI_c} \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 / \cos \varphi_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_4 / \cos \varphi_3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\Delta l}{6EI_c} \begin{vmatrix} 0,9768 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0147 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$f_3 = \frac{\Delta l}{6EI_c} \begin{vmatrix} \cos \varphi_4 / \cos \varphi_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_6 / \cos \varphi_5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\Delta l}{6EI_c} \begin{vmatrix} 0,9950 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9950 & 0 \end{vmatrix} = \quad (j)$$

$$f_4 = \frac{\Delta l}{6EI_c} \begin{vmatrix} \cos \varphi_6 / \cos \varphi_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_8 / \cos \varphi_7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\Delta l}{6EI_c} \begin{vmatrix} 1,0147 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9768 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$f_5 = \frac{\Delta l}{6EI_c} \begin{vmatrix} \cos \varphi_8 / \cos \varphi_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_{10} / \cos \varphi_9 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\Delta l}{6EI_c} \begin{vmatrix} 1,0316 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9633 & 0 \end{vmatrix} =$$

Kuna funktsioonid kaare ulatusel on pidevad, siis muutusmaatriks koostatakse skeemi (16.80) järgi:

$$f = \frac{\Delta l}{6EI_c} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,010 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,010 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,008 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad (k)$$

Muutusmaatriksist on ära jäetud esimene ja viimane element, kuna põhiskeemi mõjumaatriksi b vastavad elemendid on nullid.

Vertikaalsirde epüüri w_{x1} ordinaadid arvutatakse lõigetes 2, 4, 6, 8 (joon. 18.70, b), sest kaare sille on jaotatud viieks võrdseks osaks. Kuna funktsioonid on vaja arvutada ka osade keskel, siis põhiskeemi paindemomendi mõjumaatriksi koostatakse kümneks võrdseks osaks jaotatud silde jaoks. Sellest mõjumaatriksist võetakse 2., 4., 6. ja 8. rida:

$$b' = \frac{32,0}{10^2} \begin{vmatrix} 8 & 16 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 20 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 18 & 12 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 8 \end{vmatrix} \quad (l)$$

Maatriks b_1 on jõust $H=1$ põhjustatud paindemomendi veergmaatriks

$$b_1 = \begin{bmatrix} -1,44 & -2,56 & -3,36 & -3,84 & -4,0 & -3,84 & -3,36 & -2,56 & -1,44 \end{bmatrix} \quad (m)$$

Nüüd

$$w_1 = b'fb_1 =$$

$$= \frac{32,0}{10^2} \begin{vmatrix} 8 & 16 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 20 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 18 & 12 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,010 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,010 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,008 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1,44 \\ -2,56 \\ -3,36 \\ -3,84 \\ -4,00 \\ -3,84 \\ -3,36 \\ -2,56 \\ -1,44 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{32,0 \cdot 6,4}{6 \cdot 10^2 EI_c} \begin{vmatrix} 32 & 32,13 & 56 & 24,12 & 40 & 16,08 & 24 & 8,03 & 8 \\ 24 & 24,10 & 72 & 48,24 & 80 & 32,16 & 48 & 16,06 & 16 \\ 16 & 16,06 & 48 & 32,16 & 80 & 48,24 & 72 & 24,10 & 24 \\ 8 & 8,03 & 24 & 16,08 & 40 & 24,12 & 56 & 32,13 & 32 \end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1,44 \\ -2,56 \\ -3,36 \\ -3,84 \\ -4,00 \\ -3,84 \\ -3,36 \\ -2,56 \\ -1,44 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-0,34133}{EI_c} \begin{bmatrix} 743,6 \\ 1192,4 \\ 1192,4 \\ 743,6 \end{bmatrix} = -\frac{1}{EI_c} \begin{bmatrix} 253,8 \\ 407,0 \\ 407,0 \\ 253,8 \end{bmatrix} \quad (n)$$

Reaktsiooni H mõjujoone ordinaatide saamiseks jagatakse sirde epüüri $EI_c w_1$ ordinaadid paigutisega $EI_c \delta_{11} = 277,4$ ja võetakse vastupidiste märkidega:

$$H_{i=2} = -EI_c w_{21} / EI_c \delta_{11} = 253,8 / 277,4 = 0,915$$

$$H_{i=4} = -EI_c w_{41} / EI_c \delta_{11} = 407,0 / 277,4 = 1,467$$

$$H_{i=6} = H_{i=4} = 1,467;$$

$$H_{i=8} = H_{i=2} = 0,915$$

Silde jaotamisel ainult viieks võrdseks osaks saadakse mõjujoone ordinaate vähe ja nad on ebatäpsed. Joonisel 18.70, c on esitatud reaktsiooni H mõjujoon, kui muutusmaatriksi arvutamisel on sille jaotatud kümneks võrdseks osaks ja põhiskeemi paindemomendi mõjumaatriksi elementide arvutamisel kahekümneks võrdseks osaks, kusjuures sellest võetakse ainult 2, 4, 6, ..., 18 rida.

Vertikaalsirde epüüri w_1 arvutamisel elastsete koormuste meetodiga arvutatakse fiktiivsed elastsed jõud valemiga (18.195). Kuna $I_c / I_i = \cos \varphi_i$, siis $s_i I_c / I = s_i \cos \varphi_i = \Delta x_i$. Arvutuse lihtsustamiseks võetakse $\Delta x_i = \text{konst}$. Valem (18.195) saab siis kuju

$$EI_c P_{fi} = (\Delta x / 6) (M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1}) + (I_c / F_c) (N_{i+1} \sqrt{\cos \varphi_{i+1}} \operatorname{tg} \varphi_{i+1} - N_i \sqrt{\cos \varphi_i} \operatorname{tg} \varphi_i) + k(E/G) (I_c / F_c) (Q_i \sqrt{\cos \varphi_i} - Q_{i+1} \sqrt{\cos \varphi_{i+1}}) \quad (18.196)$$

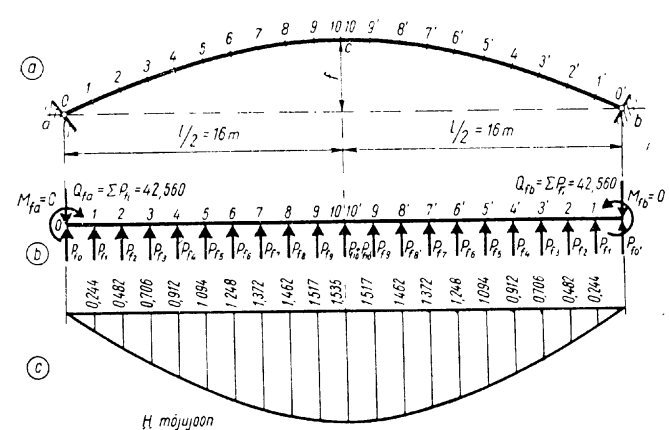
kusjuures esimene ja viimane jõud arvutatakse valemitega

$$EI_c P_{f0} = (\Delta x / 6) (2M_0 + M_1) + (I_c / F_c) \sqrt{\cos \varphi_1} (N_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - k(E/G) Q_1)$$

$$EI_c P_{fn} = (\Delta x / 6) (M_{n-1} + 2M_n) + (I_c / F_c) \sqrt{\cos \varphi_n} [k(E/G) Q_n - N_n \operatorname{tg} \varphi_n]$$

Kui $m_i = -y_i$, $n_i = \cos \varphi_i$ ja $q_i = -\sin \varphi_i$, siis saab avaldis (18.196) kuju

$$EI_c P_{fi} = -(\Delta x / 6) (y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}) + (I_c / F_c) [1 + k(E/G)] (\sin \varphi_{i+1} \sqrt{\cos \varphi_{i+1}} - \sin \varphi_i \sqrt{\cos \varphi_i})$$



Joon. 18.71

Tabel 18.11

Lõige	x	y	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	$-\frac{6EI_c}{\Delta x} P_{fi}$	$-EI_c P_{fi}$
0	0,0	0,00	—	0,00	0,76	0,76	0,2027
1	1,6	0,76	0,00	0,76	1,44	4,48	1,1947
2	3,2	1,44	0,76	1,44	2,04	8,56	2,2827
3	4,8	2,04	1,44	2,04	2,56	12,16	3,2427
4	6,4	2,56	2,04	2,56	3,00	15,28	4,0747
5	8,0	3,00	2,56	3,00	3,36	17,92	4,7787
6	9,6	3,36	3,00	3,36	3,64	20,08	5,3547
7	11,2	3,64	3,36	3,64	3,84	21,76	5,8027
8	12,8	3,84	3,64	3,84	3,96	22,96	6,1227
9	14,4	3,96	3,84	3,96	4,00	23,68	6,3147
10	16,0	4,00	3,96	4,00	—	11,96	3,1893

$$\Sigma = 42,5603$$

Fiktiivsete jõudude arvutamisel on kaare sille jaotatud 20 võrdseks osaks. Nende jõudude arvutus on esitatud tabelis 18.11 ($\Delta x/6 = 0,26667$). Arvestatakse ainult paindemomendi mõju. Järgnevalt rakendatakse fiktiivsed jõud sirgele vardale (joon. 18.71, b) ja arvutatakse varda lõigetes fiktiivsed paindemomendid. Fiktiivsed jõud on negatiivsed ja rakendatakse vardale suunaga alt üles.

$$M_{f1} = -(42,560 - 0,203) \cdot 1,6 = -42,357 \cdot 1,6 = -67,77 \text{ m}^3$$

$$M_{f2} = (-42,357 \cdot 2 + 1,195) \cdot 1,6 = -133,63 \text{ m}^3$$

$$M_{f3} = (-42,357 \cdot 3 + 1,195 \cdot 2 + 2,283) \cdot 1,6 = -195,84 \text{ m}^3$$

$$M_{f4} = (-42,357 \cdot 4 + 1,195 \cdot 3 + 2,283 \cdot 2 + 3,243) \cdot 1,6 = -252,85 \text{ m}^3$$

$$M_{f5} = -303,35 \text{ m}^3; \quad M_{f6} = -346,20 \text{ m}^3; \quad M_{f7} = -380,49 \text{ m}^3$$

$$M_{f8} = -405,49 \text{ m}^3; \quad M_{f9} = -420,69 \text{ m}^3; \quad M_{f10} = -425,78 \text{ m}^3$$

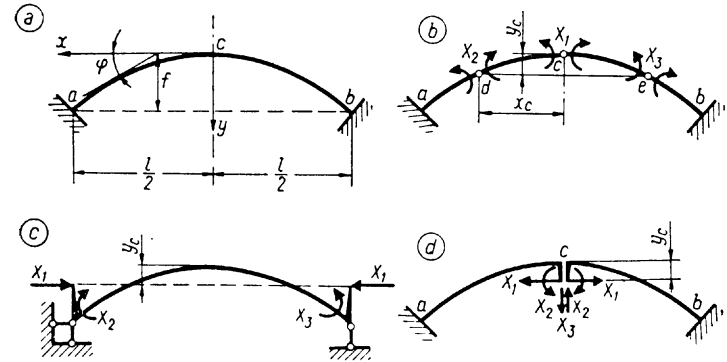
Horisontaalreaktsiooni H mõjujoone ordinaatide saamiseks jagatakse fiktiivsed paindemomendid siirdelga $EI_c \delta_{11} = 277,39 \text{ m}^3$ ja võetakse vastupidiste märkidega. Mõjujoon on esitatud joonisel 18.71, c.

Elastsete koormuste meetod on ligikaudne. Meetodi rakendamisel eeldatakse, et paindemomendid kahe lõike vahel muutuvad lineaarselt ja et piki- ning põikjõud on konstantsed. Tulemused on täpsemad, kui lõigete arv võetakse suurem.

18.53. Liigendita sümmeetriline kaar

18.53.1. Põhiskeem ja sisejõudude epüürid

Liigendita kaar on kolmekordselt staatikaga määratu (joon. 18.72, a). Liigendita sümmeetriliste kaarte arvutamisel kasutatakse kolme põhiskeemi: kolme liigendiga kaar, kõver tala ja kaks konsooli (joon. 18.72, b, c ja d).



Joon. 18.72

Lisatundmatute valikul on soovitatav, et kanoonilistes võrrandites

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} &= 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

kõik kõrvalpaigutised võrduksid nulliga. Kolme liigendiga kaare ja kõvera tala põhiskeemiga (joon. 18.72, b ja c) arvutamisel on lisatundmatu X_1 sümmeetriline, kuid lihtlisatundmatud X_2 ja X_3 ei ole sümmeetrilised ega antisümmeetrilised. Kahe konsooliga põhiskeemiga (joon. 18.72, d) arvutamisel on lisatundmatud X_1 ja X_2 sümmeetrilised ning X_3 antisümmeetriline. Kolme liigendiga kaare ja kõvera tala põhiskeemiga arvutamisel tuleb seepärast lisatundmatute X_2 ja X_3 asemel kasutada gruppundma-

tuid: gruppundmatu X_2 sümmeetrilisena ning gruppundmatu X_3 antisümmeetrilisena. Selliselt valitud tundmatutega on kõigi kolme põhiskeemiga arvutamisel kõrvalpaigtised

$$\delta_{13} = \delta_{31} = 0; \quad \delta_{23} = \delta_{32} = 0 \quad (b)$$

Kui kahe konsooliga põhiskeemi jäikade konsoolide otsad on kaare elastsuskeskmes, siis ka kolmas kõrvalpaigtis

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0 \quad (c)$$

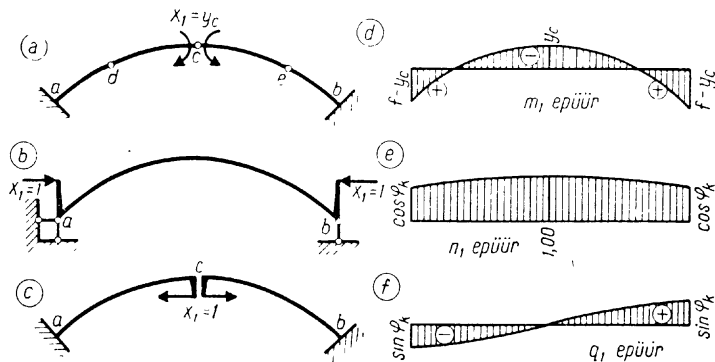
Kaare elastsuskeskme ordinaat y_c leitakse võrrandist, mis koostatakse tingimuse (c) alusel. Tingimuse (c) alusel koostatud võrrandist leitakse ka kolme liigendiga kaare põhiskeemis liigendite d ja e ning kõvera tala puhul jäikade konsoolide otste ordinaat y_c . Sümmeetriliste tundmatutega X_1 ja X_2 , antisümmeetrilise tundmatuga X_3 ning tingimuse (c) rahuldamise korral on kõik kõrvalpaigtised nullid. Kanoonilistest võrranditest

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0; \quad \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0; \quad \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0 \quad (d)$$

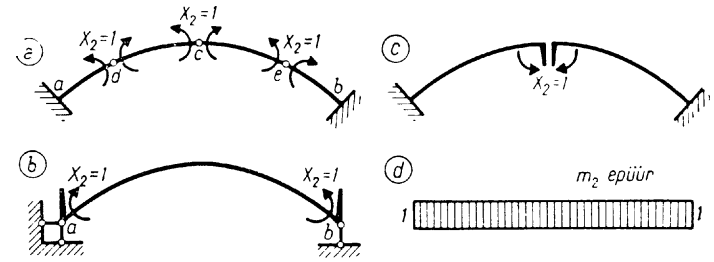
leitakse tundmatud

$$X_1 = -\Delta_{1p}/\delta_{11}; \quad X_2 = -\Delta_{2p}/\delta_{22}; \quad X_3 = -\Delta_{3p}/\delta_{33} \quad (18.197)$$

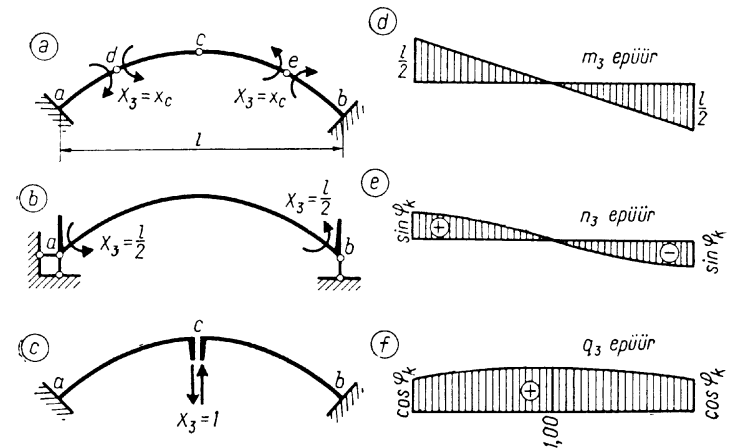
Kui võtta ühiktundmatuteks kolme liigendiga kaares sümmeetriline tundmatu $X_1 = y_c$ (joon. 18.73, a), süm-



Joon. 18.73



Joon. 18.74



Joon. 18.75

meetriline gruppundmatu $X_2=1$ (joon. 18.74, a), antisümmeetriline gruppundmatu $X_3=x_c$ (joon. 18.75, a) ja kõvera tala puhul sümmeetrilised gruppundmatud $X_1=1$, $X_2=1$ (joon. 18.73, b ja 18.74, b), antisümmeetriline gruppundmatu $X_3=l/2$ (joon. 18.75, b) ning kahe konsooliga põhiskeemis $X_1=1$, $X_2=1$, $X_3=1$ (joon. 18.73, c, 18.74, c ja 18.75, c), siis kõigi kolme põhiskeemi jaoks on nendest tundmatutest põhjustatud sisejõudude avaldised ühesugused:

$$\begin{aligned} m_1 &= y - y_c; & n_1 &= \cos \varphi; & q_1 &= -\sin \varphi \\ m_2 &= 1; & n_2 &= 0; & q_2 &= 0 \\ m_3 &= -x; & n_3 &= \sin \varphi; & q_3 &= \cos \varphi \end{aligned} \quad (18.198)$$

Kuna kõigi kolme põhiskeemi jaoks tinglikest ühik-
tundmatutest põhjustatud sisejõudude avaldised on samad
(18.198), siis kaare elastsuskeskme ordinaadi y_c leidmisel
ja peapaigutiste δ_{11} , δ_{22} ning δ_{33} arvutamisel ei ole vaja
märkida, millist põhiskeemi nendest kolmest on kasu-
tatud. Seda on vaja teha ainult koormusliikmete Δ_{1p} ,
 Δ_{2p} ja Δ_{3p} arvutamisel.

Tingimusest, et paigutis $\delta_{12}=0$, määratakse liigendite
 d ja e (joon. 18.72, b) ja jäikade konsoolide otste (joon.
18.72, c ja d) asukohad, s. t. kaare elastsuskeskme ordi-
naat y_c . Võrrand $El_c\delta_{12}=0$, väljendatuna valemiga
(18.161), on järgmine:

$$El_c\delta_{12} = \int m_1 m_2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{F_c} \int n_1 n_2 \frac{F_c}{F} ds - \\ - \frac{I_c}{F_c} \int \frac{m_1 n_2}{\varrho} \frac{F_c}{F} ds - \frac{I_c}{F_c} \int \frac{n_1 m_2}{\varrho} \frac{F_c}{F} ds + \\ + k \frac{E}{G} \cdot \frac{I_c}{F_c} \int q_1 q_2 \frac{F_c}{F} ds = 0$$

või, kui arvestada avaldise (18.198), siis

$$El_c\delta_{12} = \int (y - y_c) \frac{I_c}{I} ds - \frac{I_c}{I} \int \frac{\cos \varphi}{\varrho} \frac{F_c}{F} ds = 0 \quad (e)$$

Võrrandist (e) avaldatakse ordinaat y_c

$$y_c = \frac{\int y \frac{I_c}{I} ds - \frac{I_c}{F_c} \int \frac{\cos \varphi}{\varrho} \frac{F_c}{F} ds}{\int \frac{I_c}{I} ds} \quad (18.199)$$

Koormusest põhjustatud paigutiste Δ_{1p} , Δ_{2p} ja Δ_{3p}
arvutamiseks on soovitatav lahutada koormus sümmeetri-
liseks ja antisümmeetriliseks. Sümmeetriline koormus
põhjustab paigutised Δ_{1p} ja Δ_{2p} ning antisümmeetriline
koormus Δ_{3p} .

Paigutised arvutatakse järgmiste avaldistega ($i =$
 $1, 2, 3$):

$$El_c\delta_{ii} = \int m_i^2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{F_c} \int n_i^2 \frac{F_c}{F} ds - \\ - 2 \frac{I_c}{F_c} \int \frac{m_i n_i}{\varrho} \frac{F_c}{F} ds + k \frac{E}{G} \frac{I_c}{F_c} \int q_i^2 \frac{F_c}{F} ds \quad (18.200)$$

$$El_c\Delta_{ip} = \int m_i M_p^0 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{F_c} \int n_i N_p^0 \frac{F_c}{F} ds - \\ - \frac{I_c}{F_c} \int \frac{m_i N_p^0}{\varrho} \frac{F_c}{F} ds - \frac{I_c}{F_c} \int \frac{n_i M_p^0}{\varrho} \frac{F_c}{F} ds + \\ + k \frac{E}{G} \frac{I_c}{F_c} \int q_i Q_p^0 \frac{F_c}{F} ds \quad (18.201)$$

milles M_p^0 , N_p^0 , Q_p^0 on paindemoment, piki- ja põikjõud
liigendita kaarest kolme sideme eemaldamisega saadud
staatikaga määratavas põhiskeemis.

Kui valemitesse (18.200) ja (18.201) viia sisejõudude
avaldised (18.198), siis on nad järgmised:

$$El_c\delta_{11} = \int (y - y_c)^2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{F_c} \int \cos^2 \varphi \frac{F_c}{F} ds - \\ - 2 \frac{I_c}{F_c} \int \frac{(y - y_c) \cos \varphi}{\varrho} \frac{F_c}{F} ds + \\ + k \frac{E}{G} \frac{I_c}{F_c} \int \sin^2 \varphi \frac{F_c}{F} ds. \\ El_c\delta_{22} = \int \frac{I_c}{I} ds \quad (18.202)$$

$$El_c\delta_{33} = \int x^2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{F_c} \int \sin^2 \varphi \frac{F_c}{F} ds + \\ + 2 \frac{I_c}{F_c} \int \frac{x \sin \varphi}{\varrho} \frac{F_c}{F} ds + \\ + k \frac{E}{G} \frac{I_c}{F_c} \int \cos^2 \varphi \frac{F_c}{F} ds$$

$$El_c\Delta_{1p} = \int (y - y_c) M_p^0 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{F_c} \int \cos \varphi N_p^0 \frac{F_c}{F} ds - \\ - \frac{I_c}{F_c} \int \frac{(y - y_c) N_p^0}{\varrho} \frac{F_c}{F} ds - \\ - \frac{I_c}{F_c} \int \frac{\cos \varphi M_p^0}{\varrho} \frac{F_c}{F} ds -$$

$$\begin{aligned}
& -k \frac{E}{G} \frac{I_c}{F_c} \int \sin \varphi Q_p^0 \frac{F_c}{F} ds \\
EI_c \Delta_{2p} &= \int M_p^0 \frac{I_c}{I} ds - \frac{I_c}{F_c} \int \frac{N_p^0 F_c}{Q} ds \quad (18.203) \\
EI_c \Delta_{3p} &= - \int x M_p^0 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{F_c} \int \sin \varphi N_p^0 \frac{F_c}{F} ds + \\
& + \frac{I_c}{F_c} \int \frac{x N_p^0 F_c}{Q} ds - \frac{I_c}{F_c} \int \frac{\sin \varphi M_p^0 F_c}{Q} ds + \\
& + k \frac{E}{G} \frac{I_c}{F_c} \int \cos \varphi Q_p^0 \frac{F_c}{F} ds
\end{aligned}$$

Liigendita kaare sisejõud arvutatakse järgmiste avaldistega:

$$\begin{aligned}
M_p &= M_p^0 + (y - y_c) X_1 + X_2 - x X_3 \\
N_p &= N_p^0 + \cos \varphi X_1 + \sin \varphi X_3 \\
Q_p &= Q_p^0 - \sin \varphi X_1 + \cos \varphi X_3
\end{aligned} \quad (18.204)$$

Näide 18.17. Arvutada numbrilise integreerimisega joonisel 18.76, a esitatud liigenditeta kaare lisatundmatud ja kujutada sisejõudude epiürid.

Andmed: $l=32$ m; $l_1=16$ m; $f=4$ m; $F_c=0,845$ m² ($h_c=1,3$ m; $b=0,65$ m); $I_c=0,12$ m⁴; $G=0,425$ E; $I_c/F_c=0,142$ m²; $q_c=1$ t/m; $q_k=5$ t/m. Kaare telgjooneks on ruutparabool:

$$y = (4f/l^2)x^2 \quad (a)$$

Kaare ristlõige on konstantse lausega ja kõrgus muutub selliselt, et

$$I = I_c / \cos \varphi \quad \text{ning} \quad F = F_c / \sqrt[3]{\cos \varphi} \quad (b)$$

Kaare sille jaotatakse 20 võrdseks osaks (joon. 18.76, a) ja numbrilisel integreerimisel avaldatakse kõik funktsioonid abstsissi x kaudu.

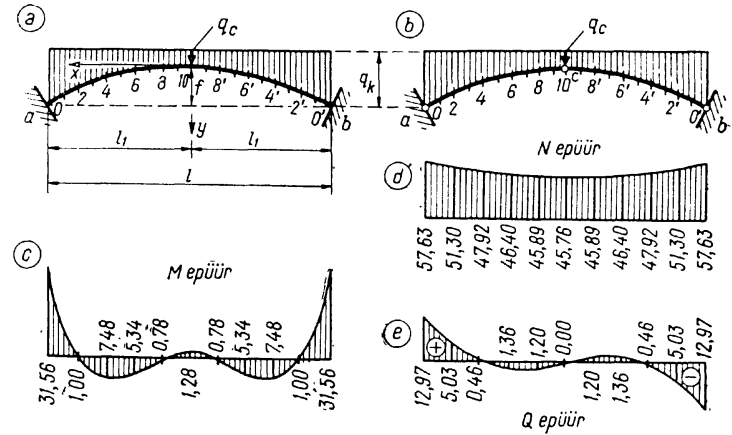
Kaare geomeetrilised andmed on esitatud tabelis 18.12.

Kaare elastsuskeskme ordinaat y_c arvutatakse valemiga (18.199), milles asendatakse seoste (b) abil

$$I/I_c = \cos \varphi, \quad F_c/F = \sqrt[3]{\cos \varphi} \quad \text{ja} \quad ds = dx / \cos \varphi \quad (c)$$

Nüüd

$$y_c = \left(\int_0^{l/2} y dx - \frac{I_c}{F_c} \int_0^{l/2} \frac{1}{Q} \sqrt[3]{\cos \varphi} dx \right) / \int_0^{l/2} dx \quad (d)$$



Joon. 18.76

milles

$$\begin{aligned}
\int_0^{l/2} y dx &\approx (1,6/3) [0,00 + 4(0,04 + 0,36 + 1,00 + 1,96 + 3,24) + \\
& + 2(0,16 + 0,64 + 1,44 + 2,56) + 4,00] = 21,333 \text{ m}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{I_c}{F_c} \int_0^{l/2} \frac{1}{Q} \sqrt[3]{\cos \varphi} dx &\approx 0,142 (1,6/3) [0,0312 + 4(0,0311 + 0,0303 + \\
& + 0,0282 + 0,0258 + 0,0230) + 2(0,0307 + 0,0293 + 0,0271 + \\
& + 0,0244) + 0,0215] = 0,0628 \text{ m}^2
\end{aligned}$$

$$\int_0^{l/2} dx = 16 \text{ m}$$

Kaare elastsuskeskme ordinaat

$$y_c = (21,333 - 0,063) / 16 = 1,329 \text{ m} \quad (e)$$

ja kui kõveruse mõju ei arvestata, siis

$$y_c = 21,333 / 16 = 1,333 \text{ m} \quad (f)$$

Kõveruse mõju $100(1,333 - 1,329) / 1,333 = 0,3\%$ on väike ja järgnevalt seda ei arvestata.

Antisümmeetriline lisatundmatu X_3 võrdub nulliga, kuna koormus on sümmeetriline.

Koormusest põhjustatud paigutiste leidmiseks arvutatakse sisejõudude M_p^0 , N_p^0 ja Q_p^0 epiüride ordinaadid kolme liigendiga kaare jaoks, mille kaks liigendit on kannaristlõigetes (joon. 18.76, b).

Tabel 18.12

Liigendita sümmeetrilise kaare geomeetriselised andmed

Lõige	x	y	sin φ	cos φ	tg φ	$\sqrt[3]{\cos \varphi}$	ρ	$\sqrt[3]{\cos \varphi / \rho}$
0	16,00	4,00	0,4472	0,8944	0,50	0,9635	44,72	0,0215
1	14,40	3,24	0,4104	0,9119	0,45	0,9698	42,20	0,0230
2	12,80	2,56	0,3714	0,9285	0,40	0,9756	39,98	0,0244
3	11,20	1,96	0,3304	0,9439	0,35	0,9810	38,06	0,0258
4	9,60	1,44	0,2874	0,9578	0,30	0,9857	36,42	0,0271
5	8,00	1,00	0,2425	0,9701	0,25	0,9899	35,05	0,0282
6	6,40	0,64	0,1961	0,9806	0,20	0,9935	33,94	0,0293
7	4,80	0,36	0,1483	0,9889	0,15	0,9963	32,96	0,0302
8	3,20	0,16	0,0995	0,9950	0,10	0,9983	32,48	0,0307
9	1,60	0,04	0,0499	0,9988	0,05	0,9996	32,10	0,0311
10	0,00	0,00	0,0000	1,0000	0,00	1,0000	32,00	0,0312

Toereaktsioonid:

$$V_{a,p}^0 = q_c l/2 + (1/3)(q_n - q_c)(l/2) = 1 \cdot 16 + 4 \cdot 16/3 = 112/3 \text{ t}$$

$$H_p^0 = [112 \cdot 16/3 - 16 \cdot 8 \cdot 0 - (3/4)(4 \cdot 16/3)]/4 = 160/3 \text{ t}$$

Pikijõud lukuliigendis $N_{c,p}^0 = H_p^0 = 160/3 \text{ t}$

Sisejõud staatikaga määratavas põhiskeemis arvutatakse järgmistest avaldistest:

$$M_{x,p}^0 = N_{c,p}^0 y - q_c x^2/2 - 4(q_x - q_c)x^4/12 \cdot l^2 = (160/3)y - x^2/2 - x^4/768$$

$$N_{x,p}^0 = N_{c,p}^0 \cos \varphi + [q_c x + 4(q_x - q_c)x^3/3l^2] \sin \varphi = (160/3) \cos \varphi + (x + x^3/192) \sin \varphi$$

$$Q_{x,p}^0 = -(160/3) \sin \varphi + (x + x^3/192) \cos \varphi$$

ja tulemused on esitatud tabelis 18.14.

Paigutised $EI_c \delta_{11}$ ja $EI_c \delta_{22}$ arvutatakse valemitega (18.202) ning paigutised $EI_c \Delta_{1p}$ ja $EI_c \Delta_{2p}$ valemitega (18.203), kusjuures kõveruse mõju ei arvestata. Kui paigutiste avaldistesse (18.202), (18.203) viia seosed (c), siis on nad järgmised:

$$\frac{1}{2} EI_c \delta_{11} = \int_0^{l/2} (y - y_c)^2 dx + \frac{I_c}{F_c} \int_0^{l/2} \cos \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi} dx +$$

$$+ k \frac{E}{G} \frac{I_c}{F_c} \int_0^{l/2} \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi} dx$$

$$\frac{1}{2} EI_c \delta_{22} = \int_0^{l/2} dx = 16 \text{ m}$$

$$\frac{1}{2} EI_c \Delta_{1p} = \int_0^{l/2} (y - y_c) M_p^0 dx + \frac{I_c}{F_c} \int_0^{l/2} N_p^0 \sqrt[3]{\cos \varphi} dx -$$

$$- k \frac{E}{G} \frac{I_c}{F_c} \int_0^{l/2} Q_p^0 \operatorname{tg} \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi} dx$$

$$\frac{1}{2} EI_c \Delta_{2p} = \int_0^{l/2} M_p^0 dx$$

Vajalikud funktsioonide väärtused on esitatud tabelites 18.13 ja 18.14.

Tabel 18.13

$EI_c \delta_{11}$ arvutamiseks vajalikud funktsioonide väärtused

Lõige	$y - y_c$	$(y - y_c)^2$	$\cos \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi}$	$\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi \sqrt[3]{\cos \varphi}$
0	2,6667	7,1111	0,8618	0,2155
1	1,9067	3,6355	0,8844	0,1791
2	1,2267	1,5048	0,9058	0,1346
3	0,6267	0,3928	0,9260	0,1134
4	0,1067	0,0114	0,9441	0,0850
5	-0,3333	0,1111	0,9603	0,0600
6	-0,6933	0,4807	0,9742	0,0390
7	-0,9733	0,9473	0,9852	0,0222
8	-1,1733	1,3766	0,9933	0,0099
9	-1,2933	1,6726	0,9984	0,0025
10	-1,3333	1,7777	1,0000	0,0000

Tabel 18.14

$EI_c \Delta_{1p}$ arvutamiseks vajalikud funktsioonide väärtused

Lõige	M_p^0	$(y - y_c) M_p^0$	N_p^0	$N_p^0 \sqrt[3]{\cos \varphi}$	Q^0	$\frac{Q_p^0 \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt[3]{\cos \varphi}}$
0	0,000	0,0000	64,399	62,048	9,581	4,616
1	13,133	25,0407	60,926	59,086	5,427	2,368
2	19,660	24,1169	58,330	56,908	2,219	0,866
3	21,324	13,3638	56,456	55,383	-0,141	-0,048
4	19,661	2,0978	55,167	54,378	-1,716	-0,507
5	16,000	-5,3333	54,328	53,779	-2,586	-0,640
6	11,468	-7,9508	53,821	53,471	-2,846	-0,566
7	6,989	-6,8024	53,541	53,343	-2,594	-0,388
8	3,276	-3,8437	53,424	53,333	-1,953	-0,195
9	0,844	-1,0915	53,348	53,327	-1,044	-0,052
10	0,000	0,0000	53,333	53,333	0,000	0,000

$$EI_c \delta_{11}/2 \approx (1,6/3) [1,7777 + 4(1,6726 + 0,9473 + 0,1111 + 0,3928 + 3,6355) + 2(1,3766 + 0,4807 + 0,0114 + 1,5048) + 7,1111] + 0,142(1,6/3) [1,0000 + 4(0,9984 + 0,9852 + 0,9603 + 0,9260 + 0,884) + 2(0,9933 + 0,9742 + 0,9441 + 0,9058) + 0,8618] + (1,2/0,425)0,142 \cdot (1,6/3) [0,0000 + 4(0,0025 + 0,0222 + 0,0600 + 0,1134 + 0,1791) + 2(0,0099 + 0,0390 + 0,0850 + 0,1346) + 0,2155] = 22,7589 + 2,1594 + 0,4835 = 25,402 \text{ m}$$

$$EI_c \Delta_{1p}/2 \approx (1,6/3) [0,0 + 4(-1,0915 - 6,8024 - 5,3333 + 13,3638 + 25,0407) + 2(-3,8437 - 7,9508 + 2,0978 + 24,1169) + 0,0] + 0,142(1,6/3) [53,333 + 4(53,327 + 53,343 + 53,779 + 55,383 + 59,086) + 2(53,333 + 53,471 + 54,378 + 56,908) + 62,048] - (1,2/0,425)0,142(1,6/3) [0,000 - 4(0,052 + 0,388 + 0,640 + 0,048 - 2,368) - 2(0,195 + 0,566 + 0,507 - 0,866) + 4,616] = 192,27 \text{ tm}^2$$

$$EI_c \Delta_{2p}/2 \approx (1,6/3) [0,000 + 4(0,844 + 6,989 + 16,000 + 21,324 + 13,133) + 2(3,276 + 11,468 + 19,661 + 19,660) + 0,000] = 182,02 \text{ tm}^2$$

Lisatundmatud:

$$X_1 = -192,27/25,402 = -7,569 \text{ tm}$$

$$X_2 = -182,02/16,0 = -11,376 \text{ tm}$$

$$X_3 = 0$$

Avaldistega (18.204) arvutatakse sisejõudude epüürid. Arvutused on esitatud tabelis 18.15 ja epüürid joonisel 18.76, c, d ja e.

Tabel 18.15

M_p , N_p ja Q_p epüüride ordinaatide arvutus

$$M_p = M_p^0 + (y - y_c)X_1 + X_2 = M_p^0 - 7,569(y - y_c) - 11,376$$

$$N_p = N_p^0 + \cos \varphi X_1 = N_p^0 - 7,569 \cos \varphi$$

$$Q_p = Q_p^0 - \sin \varphi X_1 = Q_p^0 + 7,369 \sin \varphi$$

ge Lõi-	M_p^0	$(y - y_c)X_1$	M_p	N_p^0	$\cos \varphi X_1$	N_p	Q_p^0	$\sin \varphi X_1$	Q_p
0	0,000	-20,184	-31,560	64,40	-6,77	57,63	9,58	-3,39	12,97
1	13,133	-14,432	-12,675	60,93	-6,90	54,03	5,43	-3,11	8,54
2	19,660	-9,285	-1,001	58,33	-7,03	51,30	2,22	-2,81	5,03
3	21,324	-4,743	5,205	56,46	-7,14	49,32	-0,14	-2,50	2,36
4	19,661	-0,808	7,477	55,17	-7,25	47,92	-1,72	-2,18	0,46
5	16,000	2,523	7,147	54,33	-7,34	46,99	-2,59	-1,84	-0,75
6	11,468	5,248	5,340	53,82	-7,42	46,40	-2,85	-1,48	-1,37
7	6,989	7,367	2,980	53,54	-7,48	46,06	-2,59	-1,12	-1,47
8	3,276	8,881	0,781	53,42	-7,53	45,89	-1,95	-0,75	-1,20
9	0,844	9,789	-0,743	53,35	-7,56	45,79	-1,04	-0,38	-0,66
10	0,000	10,092	-1,284	53,33	-7,57	45,76	0,00	0,00	0,00

18.53.2. Mõjujooned

Lisatundmatute mõjujoonte ordinaadid võib arvutada reaktsiooni ja paigutise vastastikkuse teoreemi alusel. Vertikaalsirde epüür, mis on põhjustatud liigsideme-negatiivsest ühikpaigutisest, ühtib selle sideme reaktsiooni mõjujoonega. Kui eemaldatud sideme asemele rakendatakse ühikjõud, siis sellest jõust põhjustatud vertikaalsirde epüüri ordinaadid on proportsionaalsed eemaldatud sideme reaktsiooni mõjujoone ordinaatidega. Proportsionaalsustegur on $-1/\delta_{ii}^{(n-i)}$, s. t. ühiktundmatust põhjustatud vertikaalsirde epüüri ordinaadid on vastupidiste märkidega lisasideme reaktsiooni mõjujoone ordinaatidega ja $\delta_{ii}^{(n-i)}$ korda suuremad.

Liigendita kaar on kolmekordselt staatikaga määratu. Ühe liigsideme eemaldamisega saadud arvutuskeem on kaks korda staatikaga määratu. Eemaldatud liigsideme asemele rakendatud ühiktundmatust põhjustatud vertikaalsirde epüüri ordinaadid tuleks arvutada järelikult kahekordselt staatikaga määratu skeemis. Joonistel 18.73, 18.74 ja 18.75 kujutatud lisatundmatute ja põhiskeemidega ei põhjusta üks tundmatu teistele tundmatutele vastavaid üldistatud paigutisi: kõik kõrvalpaigutised on nullid. Järelikult staatikaga määratavale põhiskeemile rakendatud ühik-lisatundmatust põhjustatud vertikaalsirde epüür ühtib kahekordselt staatikaga määratule skeemile rakendatud ühik-lisatundmatust põhjustatud vertikaalsirde epüüri.

Sümmeetrilise kaare lisatundmatute mõjujoonte ordinaatide arvutamisel kasutatakse tavaliselt põhiskeemina tala või kahte konsooli. Nende põhiskeemide ja lisatundmatutega võrduvad kõik kõrvalpaigutised nulliga ja ühik-lisatundmatu rakendatakse staatikaga määratavale põhiskeemile.

Sama tulemus saadakse ka paigutiste vastastikkuse teoreemi alusel. Kuna mõjujoonte ordinaadid arvutatakse vertikaalse ühikjõu jaoks, siis lisatundmatute valemite (18.197) võib koormusest põhjustatud paigutised Δ_{1p} , Δ_{2p} ja Δ_{3p} asendada ühikjõust põhjustatud paigutistega δ_{1p} , δ_{2p} ning δ_{3p} . Valemid (18.197) on siis järgmised:

$$X_1 = -\delta_{1p}/\delta_{11}; \quad X_2 = -\delta_{2p}/\delta_{22}; \quad X_3 = -\delta_{3p}/\delta_{33} \quad (a)$$

ja paigutiste vastastikkuse teoreemi põhjal võib neid esitada kujul

$$X_1 = -\delta_{p1}/\delta_{11}; \quad X_2 = -\delta_{p2}/\delta_{22}; \quad X_3 = -\delta_{p3}/\delta_{33} \quad (b)$$

Lisatundmatutele vastavad paigutised δ_{ip} ($i=1, 2, 3$) on põhjustatud staatikaga määratavale põhiskeemile rakendatud vertikaalsest ühikjõust. Tundmatu X_i ($i=1, 2, 3$) avaldise (b) lugeja δ_{pi} kujutab aga ühik-lisatundmatust põhjustatud vertikaalsirde epüüri w_i ordinaati ühikjõu kohal. Ühik-lisatundmatust $X_i=1$ põhjustatud vertikaalsirde epüüri ordinaat ühikjõu kohal $\delta_{pi} = w_{xi}$, mis võetakse vastupidise märgiga ja jagatakse peapaigutisega δ_{ii} , kujutab lisatundmatu X_i mõjujoone ordinaati lõikes, mille abstsissiks on x . Ühik-lisatundmatust põhjustatud vertikaalsirde epüüride ordinaadid arvutatakse tavaliselt maatriksite abil või elastsete koormuste meetodiga.

Näide 18.18. Konstrueerida liigendita kaare (joon. 18.77, a) lisatundmatute X_i ($i=1, 2, 3$), M_a , V_a ja M_c ning ristlõike $k=4$ sisejõudude mõjujooned. Andmed on samad kui näites 18.17:

$$l=32 \text{ m}, \quad l_1=16 \text{ m}, \quad f=4 \text{ m}, \quad y=(4f/l^2)x^2, \quad I_c/I=\cos \varphi \quad (a)$$

Geomeetriselised andmed lõigete $i=0, 1, \dots, 10$ kohta on esitatud tabelis 18.12.

Põhiskeem ja lisatundmatud on esitatud joonisel 18.77, b. Lisatundmatute mõjujoonte ordinaadid leitakse valemiga

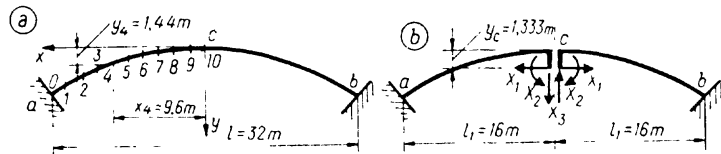
$$X_{ix} = -\delta_{pi}/\delta_{ii} = -w_{xi}/\delta_{ii} \quad (i=1, 2, 3) \quad (b)$$

kusjuures ühikundmatutest põhjustatud vertikaalsirde epüürid w_i arvutatakse maatriksitehete

$$w = b'fb_1 \quad (c)$$

milles b' on põhiskeemi (konsooli) paindemomendi transponeeritud mõjumaatriks, f — muutusmaatriks ja b_1 — jõududest $X_i=1$ ($i=1, 2, 3$) põhjustatud paindemomendi maatriks.

Lisatundmatute X_1 ja X_2 mõjujooned on sümmeetrilised ning lisatundmatu X_3 mõjujoon antisümmeetriline. Seepärast arvutatakse nende mõjujoonte ordinaadid kaare poole silde jaoks.



Joon. 18.77

Kaare elemendi j muutusmaatriks leitakse avaldisega (näide 18.16)

$$f_j = \frac{\Delta l}{6EI_c} \begin{vmatrix} \cos \varphi_{k-2}/\cos \varphi_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_k/\cos \varphi_{k-1} \end{vmatrix} \quad (d)$$

$$k=2j \quad (j=1, 2, 3, 4, 5)$$

Põhiskeemi vasaku konsooli muutusmaatriks

$$f = \frac{16}{5 \cdot 6EI_c} \begin{vmatrix} 0,9808 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,0018 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,0021 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,0023 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,0024 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0012 \end{vmatrix} \quad (e)$$

Mõjujoonte ordinaadid arvutatakse kaare lõigete 2, 4, 6, 8, 10 jaoks. Kuna kaare paksus, samuti sisejõud kaares muutuvad mitte-lineaarselt, siis funktsioonide väärtused on vaja arvutada ka iga osa keskkohal. Seepärast jaotatakse konsooli paindemomendi transponeeritud mõjumaatriksi leidmisel konsooli sille $l_1=16$ m kümneks võrdseks osaks ja võetakse sellest transponeeritud maatriksist 2., 4., 6., 8. ja 10. rida:

$$b' = \frac{-16}{10} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (f)$$

Ühik-lisatundmatutest põhjustatud paindemomendi maatriks on järgmine:

$$b_1 = \begin{vmatrix} 2,6667 & 1 & -16,0 \\ 1,9067 & 1 & -14,4 \\ 1,2267 & 1 & -12,8 \\ 0,6267 & 1 & -11,2 \\ 0,1067 & 1 & -9,6 \\ -0,3333 & 1 & -8,0 \\ -0,6933 & 1 & -6,4 \\ -0,9733 & 1 & -4,8 \\ -1,1733 & 1 & -3,2 \\ -1,2933 & 1 & -1,6 \\ -1,3333 & 1 & 0,0 \end{vmatrix} \quad (g)$$

Järgnevalt asetatakse maatriksid (f), (e) ja (g) valemisse (c) ning korrutatakse maatriksid b' ja f , mille tulemusena saadakse järgmine maatriksavaldis:

$$w = \frac{-16^2}{300EI_c} \begin{vmatrix} 1,9616 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,9232 & 12 & 4,0036 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5,8848 & 20 & 8,0072 & 12 & 4,0042 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7,8464 & 28 & 12,0108 & 20 & 8,0084 & 12 & 4,0046 & 4 & 0 \\ 9,8080 & 36 & 16,0144 & 28 & 12,0126 & 20 & 8,0092 & 12 & 4,0048 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2,6667 & 1 & -16,0 \\ 1,9067 & 1 & -14,4 \\ 1,2267 & 1 & -12,8 \\ 0,6267 & 1 & -11,2 \\ 0,1067 & 1 & -9,6 \\ -0,3333 & 1 & -8,0 \\ -0,6933 & 1 & -6,4 \\ -0,9733 & 1 & -4,8 \\ -1,1733 & 1 & -3,2 \\ -1,2933 & 1 & -1,6 \\ -1,3333 & 1 & 0,0 \end{vmatrix} = \frac{-0,85333}{EI_c} \begin{vmatrix} 12,858 & 5,962 & -88,99 \\ 40,760 & 23,927 & -331,62 \\ 70,264 & 53,896 & -689,49 \\ 91,765 & 95,870 & -1124,19 \\ 99,500 & 149,849 & -1596,51 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{EI_c} \begin{vmatrix} -10,968 & -5,087 & 75,93 \\ -34,782 & -20,418 & 282,98 \\ -59,958 & -45,991 & 588,36 \\ -78,306 & -81,809 & 959,31 \\ -84,906 & -127,871 & 1362,35 \end{vmatrix} \quad (h)$$

Eelmises näites on leitud peapaigutis $EI_c \delta_{11}$, mis arvestades paindemomendi ja pikijõu mõju on

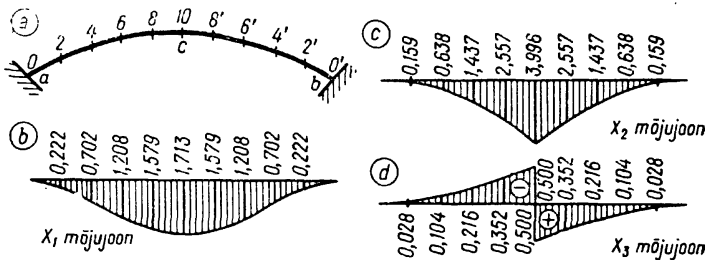
$$EI_c \delta_{11} = 2(22,759 + 2,159) = 49,836 \text{ m} \quad (i)$$

ja peapaigutis

$$EI_c \delta_{22} = 2 \cdot 16 = 32 \text{ m} \quad (j)$$

Maatriksi (h) viimase veeru viimane element on vasaku konsooli ristlõike 10 EI_c -kordne vertikaalsiire ja seega

$$EI_c \delta_{33} = 2 \cdot 1362,35 = 2724,7 \text{ m} \quad (k)$$



Joon. 18.78

Jagades nüüd maatriksi (h) esimese, teise ja kolmanda veeru EI_c -kordsed elemendid vastavalt peapaigutistega $EI_c \delta_{11}$, $EI_c \delta_{22}$ ning $EI_c \delta_{33}$ ja võttes jagatise vastupidiste märkidega, saadakse lisatundmatute mõjujoonte ordinaadid. Mõjujooned on kujutatud joonisel 18.78. b, c ja d.

Toereaktsioonide ja sisejõudude mõjujooned arvutatakse lisatundmatute mõjujoonte abil valemiga

$$S = S_p^0 + sX \quad (1)$$

milles maatriksid on järgmised:

$$s = \begin{vmatrix} 0,000 & 0,000 & 1,000 \\ 2,667 & 1,000 & -16,000 \\ -1,333 & 1,000 & 0,000 \\ 0,107 & 1,000 & -9,600 \\ 0,9578 & 0,000 & 0,2874 \\ -0,2874 & 0,000 & 0,9578 \end{vmatrix}$$

$$S_p^0 = \begin{vmatrix} V_a^0 \\ M_a^0 \\ M_c^0 \\ M_4^0 \\ N_4^0 \\ Q_4^0 \end{vmatrix} =$$

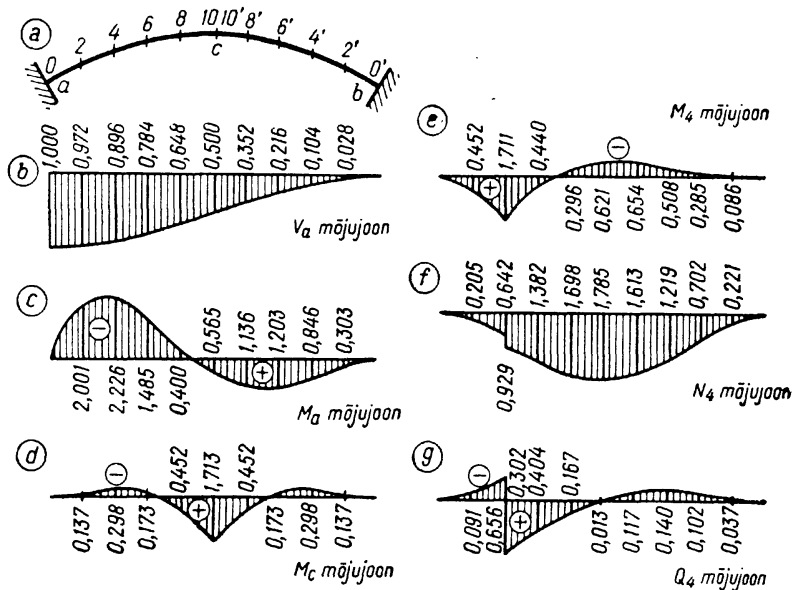
$$= \begin{vmatrix} 1,000 & 1,000 & 1,000 & 1,000 & 1,000 & 1,0/0,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,000 & -3,200 & -6,400 & -9,600 & -12,800 & -16,0/0,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,0/0,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & -3,200 & -6,400 & -9,6/0,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,000 & 0,000 & 0,0/0,287 & 0,287 & 0,287 & 0,287/0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,000 & 0,000 & 0,0/0,958 & 0,958 & 0,958 & 0,958/0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$X = \begin{vmatrix} 0,00 & 0,22 & 0,70 & 1,21 & 1,58 & 1,71 & 1,58 & 1,21 & 0,70 & 0,22 & 0,00 \\ 0,00 & 0,16 & 0,64 & 1,44 & 2,56 & 4,00 & 2,56 & 1,44 & 0,64 & 0,16 & 0,00 \\ 0,00 & -0,03 & -0,10 & -0,22 & -0,35 & -0,5/0,5 & 0,35 & 0,22 & 0,10 & 0,03 & 0,00 \end{vmatrix}$$

Maatriksi s esimese, teise ja kolmanda veeru elementideks on lisatundmatustest $X_1=1$, $X_2=1$ ning $X_3=1$ põhjustatud toereaktsioonid ja sisejõud põhiskeemi nendes lõigetes, mille jaoks mõjujoone ordinaate arvutatakse: 1. reas, 2. reas, ..., 6. reas vastavalt vertikaalne toereaktsioon a_i , toemoment $m_{a,i}$, paindemoment $m_{c,i}$ ja sisejõud lõikes 4 $m_{4,i}$, $n_{4,i}$, $q_{4,i}$.

Maatriksi S_p^0 rea elementideks on põhiskeemi mõjujoone ordinaadid: 1., 2., ..., 6. reas vastavalt toereaktsiooni V_a^0 , toemomendi M_a^0 , paindemomendi M_c^0 ja lõike 4 sisejõudude M_4^0 , N_4^0 , Q_4^0 mõjujoonte ordinaadid.

Maatriksi X esimese, teise ja kolmanda rea elementideks on vastavalt lisatundmatute X_1 , X_2 ning X_3 mõjujoonte ordinaadid. Maatriksi X elemendid on kirjutatud kahe kohaga pärast koma selleks, et nad mahuksid ühte ritta. Arvutatud on kolme kohaga pärast koma.



Joon. 18.79

Tabel 18.16

Toereaktsiooni V_a ja paindemomendi M_c mõjujoone ordinaatide arvutus

$$V_a = V_{aP}^0 + X_2; \quad M_c = M_{cP}^0 + m_{c1}X_1 + m_{c2}X_2 + m_{c3}X_3 = -1,333X_1 + X_2$$

Lõige	V_{aP}^0	X_3	V_a	X_1	$1,333X_1$	X_2	M_c
0	1,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	1,000	-0,028	0,972	0,222	0,296	0,159	-0,137
4	1,000	-0,104	0,896	0,702	0,936	0,638	-0,298
6	1,000	-0,216	0,784	1,208	1,610	1,437	-0,173
8	1,000	-0,352	0,684	1,579	2,105	2,557	0,452
10	1,0/0,0	$\mp 0,500$	0,500	1,713	2,283	3,996	1,713
8'	0,000	0,352	0,352	1,579	2,105	2,557	0,452
6'	0,000	0,216	0,216	1,208	1,610	1,437	-0,173
4'	0,000	0,104	0,104	0,702	0,936	0,638	-0,298
2'	0,000	0,028	0,028	0,222	0,296	0,159	-0,137
0'	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabel 18.17

Toemomendi M_a mõjujoone ordinaatide arvutus

$$M_a = M_{aP}^0 + m_{a1}X_1 + m_{a2}X_2 + m_{a3}X_3 = M_{aP}^0 + 2,667X_1 + X_2 - 16X_3$$

Lõige	X_1	X_3	M_{aP}^0	$2,667X_1$	X_2	$16X_3$	M_a
0	0,000	0,000	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,222	-0,028	-3,2	0,592	0,159	-0,448	-2,001
4	0,702	-0,104	-6,4	1,872	0,638	-1,664	-2,226
6	1,208	-0,216	-9,6	3,222	1,437	-3,456	-1,485
8	1,579	-0,352	-12,4	4,211	2,557	-5,632	-0,400
10	1,713	$\mp 0,500$	-16,0/0,0	4,569	3,996	$\mp 8,000$	0,565
8'	1,579	0,352	0,0	4,211	2,557	5,632	1,136
6'	1,208	0,216	0,0	3,222	1,437	3,456	1,203
4'	0,702	0,104	0,0	1,872	0,638	1,664	0,846
2'	0,222	0,028	0,0	0,592	0,159	0,448	0,303
0'	0,000	0,000	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabel 18.18

Paindemomendi M_4 mõjujoone ordinaatide arvutus

$$M_4 = M_{4P}^0 + m_{41}X_1 + m_{42}X_2 + m_{43}X_3 = M_{4P}^0 + 0,107X_1 + X_2 - 9,6X_3$$

Lõige	X_1	X_3	M_{4P}^0	$0,107X_1$	X_2	$9,6X_3$	M_4
0	0,000	0,000	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,222	-0,028	0,0	0,024	0,159	-0,269	0,452
4	0,702	-0,104	0,0	0,075	0,638	-0,998	1,711
6	1,208	-0,216	-3,2	0,129	1,437	-2,074	0,440
8	1,579	-0,352	-6,4	0,168	2,557	-3,379	-0,296
10	1,713	$\mp 0,500$	-9,6/0,0	0,183	3,996	$\mp 4,800$	-0,621
8'	1,579	0,352	0,0	0,168	2,557	3,379	-0,654
6'	1,208	0,216	0,0	0,129	1,437	2,074	-0,508
4'	0,702	0,104	0,0	0,075	0,638	0,998	-0,285
2'	0,222	0,028	0,0	0,024	0,159	0,269	-0,086
0'	0,000	0,000	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000

Kui element on kirjutatud kahe arvuga, siis vasakul ja paremal pool kaldjoont olev arv esitab sisejõudu vastavalt kui ühikjõud mõjub dx võrra vasakul või paremal lõiget.

Pärast avaldises (1) ettenähtud tehteid saadakse maatriks, mille ridade elemendid esitavad arvutatavate mõjujoonte ordinaate. Mõjujooned on esitatud joonisel 18.79.

Mõjujoone ordinaadid võib arvutada ka tabelite kujul: tabelid 18.16, 18.17, 18.18, 18.19, 18.20.

Tabel 18.19

Pikijõu N_4 mõjujoone ordinaatide arvutus

$$N_4 = N_{4p}^0 + n_{41}X_1 + n_{42}X_2 + n_{43}X_3 = N_{4p}^0 + 0,9578X_1 + 0,2874X_3$$

Lõige	X_1	X_3	N_{4p}^0	$0,9578X_1$	$0,2874X_3$	N_4
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,222	-0,028	0,000	0,213	-0,008	0,205
4v	0,702	-0,104	0,000	0,672	-0,030	0,642
4p	0,702	-0,104	0,287	0,672	-0,030	0,929
6	1,208	-0,216	0,287	1,157	-0,062	1,382
8	1,579	-0,352	0,287	1,512	-0,101	1,698
10	1,713	±0,500	0,287/0,0	1,641	±0,144	1,785
8'	1,579	0,352	0,000	1,512	0,101	1,613
6'	1,208	0,216	0,000	1,157	0,062	1,219
4'	0,702	0,104	0,000	0,672	0,030	0,702
2'	0,222	0,028	0,000	0,213	0,008	0,221
0'	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabel 18.20

Põikjõu Q_4 mõjujoone ordinaatide arvutus

$$Q_4 = Q_{4p}^0 + q_{41}X_1 + q_{42}X_2 + q_{43}X_3 = Q_{4p}^0 - 0,2874X_1 + 0,9578X_3$$

Lõige	X_1	X_3	Q_{4p}^0	$0,2874X_1$	$0,9578X_3$	Q_4
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,222	-0,028	0,000	0,064	-0,027	-0,091
4v	0,702	-0,104	0,000	0,202	-0,100	-0,302
4p	0,702	-0,104	0,958	0,202	-0,100	0,656
6	1,208	-0,216	0,958	0,347	-0,207	0,404
8	1,579	-0,352	0,958	0,454	-0,337	0,167
10	1,713	±0,500	0,958/0,0	0,492	±0,479	-0,013
8'	1,579	0,352	0,000	0,454	0,337	-0,117
6'	1,208	0,216	0,000	0,347	0,207	-0,140
4'	0,702	0,104	0,000	0,202	0,100	-0,102
2'	0,222	0,028	0,000	0,064	0,027	-0,037
0'	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

18.53.3. Temperatuuri muutuse mõju

Temperatuuri muutus põhjustab liigendita kaares sisejõude. Eeldatakse, et temperatuuri muutus kaare ristlõigetel on ühesugune; temperatuur muutub kogu kaare ulatuses alumises kius t_a , ülemises kius t_u ja telgjoonel t_0 °C võrra.

Joonistel 18.73, 18.74, 18.75 esitatud põhiskeemide puhul leitakse lisatundmatud valemitega

$$X_{1t} = -\frac{EI_c \Delta_{1t}}{EI_c \delta_{11}}; \quad X_{2t} = -\frac{EI_c \Delta_{2t}}{EI_c \delta_{22}}; \quad X_{3t} = -\frac{EI_c \Delta_{3t}}{EI_c \delta_{33}} \quad (18.205)$$

milles

$$\begin{aligned} \Delta_{1t} &= -at_0 \int_0^s \cos \varphi ds + \alpha \Delta t \int_0^s \frac{y - y_c}{h} ds = \\ &= -at_0 \int_0^l dx + \alpha \Delta t \int_0^l \frac{y - y_c}{h \cos \varphi} dx = \\ &= -at_0 l + \alpha \Delta t \int_0^l \frac{y - y_c}{h \cos \varphi} dx \\ \Delta_{2t} &= \alpha \Delta t \int_0^s ds / h = \alpha \Delta t \int_0^l dx / h \cos \varphi \\ \Delta_{3t} &= 0 \end{aligned} \quad (18.206)$$

Paigutis $\Delta_{3t} = 0$, kuna temperatuuri muutus on lukuristlõike suhtes sümmeetriline.

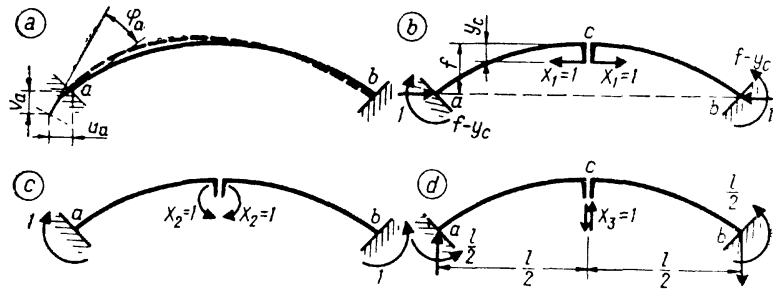
Temperatuuri muutusest põhjustatud sisejõud arvutatakse valemitega

$$\begin{aligned} M_t &= (y - y_c) X_{1t} + X_{2t}; \quad N_t = \cos \varphi X_{1t}; \\ Q_t &= -\sin \varphi X_{1t} \end{aligned} \quad (18.207)$$

18.53.4. Tugede paigutiste mõju

Liigendita kaare toe siirdest ja pöördest (joon. 18.80, a) tekivad kaares sisejõud. Joonistel 18.73, 18.74 ja 18.75 esitatud põhiskeemiga leitakse lisatundmatud valemitega

$$X_{1r} = -\frac{EI_c \Delta_{1r}}{EI_c \delta_{11}}; \quad X_{2r} = -\frac{EI_c \Delta_{2r}}{EI_c \delta_{22}}; \quad X_{3r} = -\frac{EI_c \Delta_{3r}}{EI_c \delta_{33}} \quad (18.208)$$



Joon. 18.80

Lisatundmatutele vastavad paigutised, mis on põhjustatud toe siirdest või pöördest, arvutatakse valemiga (16.34):

$$\Delta_{kr} = - \sum_{j=1}^n \Delta_{cj} r'_{jk}$$

milles r'_{jk} on ühiktundmatust põhjustatud reaktsioon liigsidemes ja Δ_{cj} — selle sideme siire või pööre.

Joonistel 18.73, 18.74 ja 18.75 esitatud põhiskeemide ja lisatundmatutega on ühiktundmatutest põhjustatud reaktsioonid võrdsed. Toereaktsioonid leitakse ka konsooliga põhiskeemis (joon. 18.80, *b*, *c* ja *d*). Lisatundmatutele vastavad paigutised, mis on põhjustatud toe *a* siirdest ja pöördest, on järgmised:

$$\begin{aligned} \Delta_{1r} &= u_a + (f - y_c) \varphi_a; & \Delta_{2r} &= \varphi_a; \\ \Delta_{3r} &= v_a - (l/2) \varphi_a \end{aligned} \quad (18.209)$$

Kui tugi *b* nihkub paremale u_b , vajub v_b ja pöörduv päripäeva nurga φ_b võrra, siis liidetakse paigutistega (18.209) järgmised paigutised:

$$\begin{aligned} \Delta_{1r} &= u_b + (f - y_c) \varphi_b; & \Delta_{2r} &= \varphi_b; & \Delta_{3r} &= -v_b + (l/2) \varphi_b \end{aligned} \quad (18.210)$$

Tugede paigutistest põhjustatud sisejõud arvutatakse valemitega

$$\begin{aligned} M_r &= (y - y_c) X_{1r} + X_{2r} - x X_{3r} \\ N_r &= \cos \varphi X_{1r} + \sin \varphi X_{3r} \\ Q_r &= -\sin \varphi X_{1r} + \cos \varphi X_{3r} \end{aligned} \quad (18.211)$$

18.6. Sõrestikud

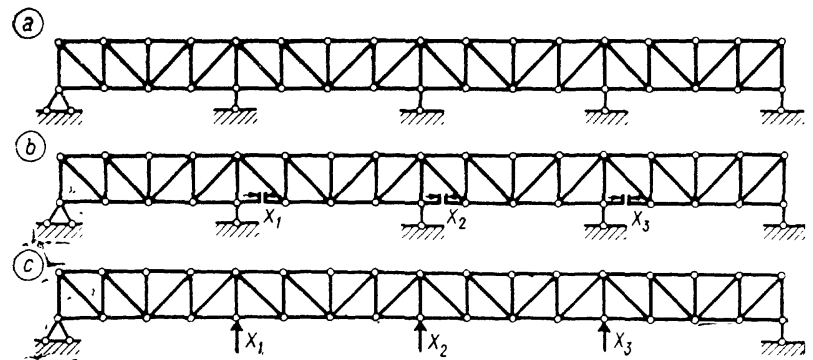
Ehituskonstruksioonides kasutatavate sõrestike vardad on sõlmedes ühendatud jäigalt. Saledate varrastega sõrestikus on varraste paindest põhjustatud normaalpinged võrreldes pikijõududest põhjustatud pingetega väikesed. See lubab sõrestike arvutuskeemides kasutada liigend-sõlmede hüpoteesi. Järgnevalt käsitletakse niisuguseid sõrestikke, mille arvutuskeem on ka liigendsõlmede hüpoteesi kehtimisel staatikaga määratu.

Sõrestiku staatikalise määramatuse aste leitakse valemiga (18.5)

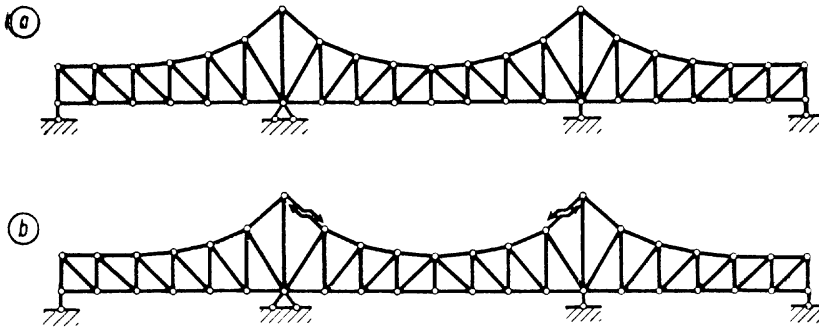
$$n = v + t - 2s \quad (18.212)$$

milles v on varraste, t — toesidemete ja s — sõlmede arv. Mitmesildeliste talasõrestike puhul osutuvad põhiskeemid, mis on saadud varraste läbilõikamisega, otstarbekamaks kui liigtoesidemeteta põhiskeemid. Näiteks joonisel 18.81, *b* esitatud põhiskeem. Esimeses põhiskeemis põhjustab koormus sisejõude ainult selles sildes, kus ta mõjub, kuna teises põhiskeemis tekivad sisejõud üle kogu sõrestiku.

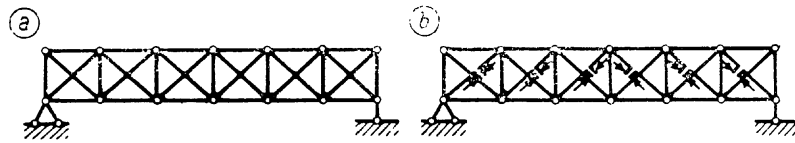
Paralleelsete vöödega mitmesildelises sõrestikus on vöövarraste sisejõud vahepealsete tugede juures tunduvalt suuremad kui mujal. Seepärast projekteeritakse mitme-



Joon. 18.81



Joon. 18.82



Joon. 18.83

sildelised sõrestikud sagedasti mitteparalleelsete vöödega (joon. 18.82).

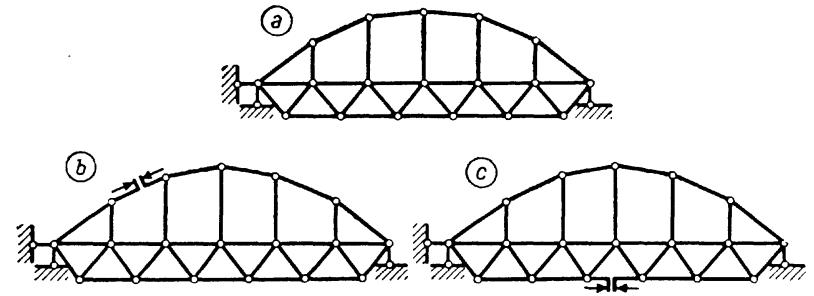
Joonisel 18.83, *a* esitatud sõrestik on toereaktsioonide suhtes staatikaga määratav, kuid sisejõudude suhtes kuuekordselt staatikaga määratav. Lihtsaim põhiskeem saadakse kuue langeva või tõusva diagonaali läbilõikamisega (joon. 18.83, *b*).

Kombineeritud sõrestikukonstruktsiooni (joon. 18.84, *a*) põhiskeemina kasutatakse joonisel 18.84, *b* või *c* kujutatud skeeme. Joonisel 18.84, *b* esitatud põhiskeemil on lisatundmatuks varrasahela läbilõigatud varda pikijõud, kuna joonisel 18.84, *c* kujutatud skeemil talasõrestiku vöövarda pikijõud. Esimese arvutus on lihtsam, kuna koormusest, mis on rakendatud talasõrestiku sõlmedes, tekivad sisejõud ainult talasõrestiku varrastes.

Lisatundmatuteks on sõrestiku läbilõigatud varraste pikijõud ja nad leitakse kanoonilistest võrranditest

$$\sum_{i=1}^n EF_0 \delta_{ki} X_i + EF_0 \Delta_{kp} + EF_0 \Delta_{kt} + EF_0 \Delta_{kr} = 0 \quad (18.213)$$

$$k=1, 2, \dots, n$$



Joon. 18.84

Võrrandisüsteemi (18.213) paigutised arvutatakse valemitega

$$EF_0 \delta_{ki} = \sum_{j=1}^v n_{jk} n_{ji} (EF_0 / EF_j) l_j$$

$$EF_0 \Delta_{kp} = \sum_{j=1}^v n_{jk} N_{jp}^0 (EF_0 / EF_j) l_j \quad (18.214)$$

$$\Delta_{kt} = \sum_{j=1}^v \alpha_j t l_j n_{jk}$$

$$\Delta_{kr} = \sum_{j=1}^v n_{jk} \cdot \Delta l_j - \sum_{j=1}^m \Delta c_j r'_{jh}$$

Viimase valemi esimese summa korrutise tegur Δl_j on varda tegeliku ja projekteeritud pikkuse vahe.

Pikijõud varrastes arvutatakse valemiga (18.29)

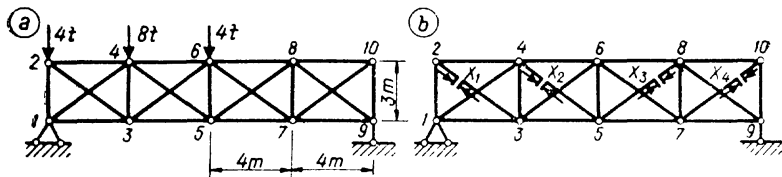
$$N_j = N_{jp}^0 + n_{j1} X_1 + n_{j2} X_2 + \dots + n_{jn} X_n \quad (18.215)$$

Valemiga (18.215) arvutatud sõrestiku varraste sisejõude kontrollitakse geomeetriliste pidevustingimustega.

Koormusest põhjustatud sisejõudude puhul peavad olema rahuldatud tingimused

$$\sum_{j=1}^n n_{ji} N_{jp} (EF_0 / EF_j) l_j = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (18.216)$$

Temperatuuri muutusest ja tugevde paigutistest põhjustatud pikijõudude puhul võrrandite (18.216) paremad pooled ei võrdu nulliga, vaid kanooniliste võrrandite vabaliikmetega vastupidiste märkidega.



Joon. 18.85

Näide 18.19. Arvutada joonisel 18.85, *a* esitatud sõrestiku varraste sisejõud, sõlme 6 vertikaalsiire ja koostada pikijõudude mõju-maatriks. Ülemise vöö varraste, toepostide ja äärmistes paneelides tõusvate diagonaalide ristlõigete pindalad on $F_0 = 2 \cdot 20 \text{ cm}^2 = 40 \text{ cm}^2$; alumise vöö varraste $F = 0,8F_0$; äärmiste paneelide langevate diagonaalide ja keskmiste paneelide võrguvarraste $F = 0,5F_0$; $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$.

Sõrestiku staatikalise määramatuse aste leitakse valemiga (18.212)
 $n = v + t - 2s = 21 + 3 - 2 \cdot 10 = 4$

Lisatundmatuteks võetakse langevate diagonaalide pikijõud. Põhiskeemi koos lisatundmatutega on esitatud joonisel 18.85, *b*. Niisuguse põhiskeemi puhul põhjustab iga lisatundmatu sisejõude ainult selle paneeli varrastes, kus ta on rakendatud. Järelikult $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$, $\delta_{14} = \delta_{41} = 0$; $\delta_{24} = \delta_{42} = 0$ ja kanoonilised võrrandid on järgmised:

Tabel 18.21

Sõrestiku varraste geomeetriselised andmed ja põhiskeemi sisejõud

Varras	F_0/F	l cm	$\frac{F_0}{F} \cdot l = l''$ cm	n_1	n_2	n_3	n_4	N_p^0 t
1-3	1,25	400	500	-0,8	0	0	0	32/3
3-5	1,25	400	500	0	-0,8	0	0	32/3
2-4	1	400	400	-0,8	0	0	0	0
4-6	1	400	400	0	-0,8	0	0	-32/3
1-4	1	500	500	1,0	0	0	0	-40/3
2-3	2	500	1000	1,0	0	0	0	0
3-6	2	500	1000	0	1,0	0	0	0
4-5	2	500	1000	0	1,0	0	0	0
1-2	1	300	300	-0,6	0	0	0	-4,0
3-4	2	300	600	-0,6	-0,6	0	0	0
5-6	2	300	600	0	-0,6	-0,6	0	0
7-8	2	300	600	0	0	-0,6	-0,6	4,0
9-10	1	300	300	0	0	0	-0,6	0
5-8	2	500	1000	0	0	1,0	0	0
6-7	2	500	1000	0	0	1,0	0	-20/3
7-10	2	500	1000	0	0	0	1,0	0
8-9	1	500	500	0	0	0	1,0	-20/3
6-8	1	400	400	0	0	-0,8	0	-16/3
8-10	1	400	400	0	0	0	-0,8	0
5-7	1,25	400	500	0	0	-0,8	0	32/3
7-9	1,25	400	500	0	0	0	-0,8	16/3

Tabel 18.22

Siirete arvutus

Var-ras	$EF_0\delta_{11}$	$EF_0\delta_{22}$	$EF_0\delta_{33}$	$EF_0\delta_{44}$	$EF_0\Delta_{1p}$	$EF_0\Delta_{2p}$	$EF_0\Delta_{3p}$	$EF_0\Delta_{4p}$
	$n_1^2 l''$	$n_2^2 l''$	$n_3^2 l''$	$n_4^2 l''$	$n_1 N_p^0 l''$	$n_2 N_p^0 l''$	$n_3 N_p^0 l''$	$n_4 N_p^0 l''$
1-3	320	0	0	0	-4266	0	0	0
3-5	0	320	0	0	0	-4266	0	0
2-4	256	0	0	0	0	0	0	0
4-6	0	256	0	0	0	3413	0	0
1-4	500	0	0	0	-6667	0	0	0
2-3	1000	0	0	0	0	0	0	0
3-6	0	1000	0	0	0	0	0	0
4-5	0	1000	0	0	0	0	0	0
1-2	108	0	0	0	720	0	0	0
3-4	216	216	0	0	0	0	0	0
5-6	0	216	216	0	0	0	0	0
7-8	0	0	216	216	0	0	-1440	-1440
9-10	0	0	0	108	0	0	0	0
5-8	0	0	1000	0	0	0	0	0
6-7	0	0	1000	0	0	0	-6667	0
7-10	0	0	0	1000	0	0	0	0
8-9	0	0	0	500	0	0	0	-3333
6-8	0	0	256	0	0	0	1707	0
8-10	0	0	0	256	0	0	0	0
5-7	0	0	320	0	0	0	-4267	0
7-9	0	0	0	320	0	0	0	-2133
Σ	2400	3008	3008	2400	-10213	-853	-10667	-6907

$$\begin{aligned}
 EF_0\delta_{11}X_1 + EF_0\delta_{12}X_2 + & EF_0\Delta_{1p} = 0 \\
 EF_0\delta_{21}X_1 + EF_0\delta_{22}X_2 + EF_0\delta_{23}X_3 + & EF_0\Delta_{2p} = 0 \\
 EF_0\delta_{32}X_2 + EF_0\delta_{33}X_3 + EF_0\delta_{34}X_4 + EF_0\Delta_{3p} = & 0 \\
 EF_0\delta_{43}X_3 + EF_0\delta_{44}X_4 + EF_0\Delta_{4p} = & 0
 \end{aligned}$$

Sõrestiku varraste geomeetriselised andmed ja põhiskeemi varraste sisejõud koostatakse ning ühiktundmatutest on esitatud tabelis 18.21.

Siirded arvutatakse valemitega (18.214):

$$\begin{aligned}
 EF_0\delta_{hi} = EF_0\delta_{ih} = \Sigma n_i n_k (EF_0/EF)l = \Sigma n_i n_k l'' \\
 EF_0\Delta_{hp} = \Sigma n_h N_p^0 (EF_0/EF)l = \Sigma n_h N_p^0 l''
 \end{aligned}$$

ja nende arvutus on esitatud tabelis 18.22.

Siirded:

$$\begin{aligned}
 EF_0\delta_{11} = EF_0\delta_{44} = 2400 \text{ tcm}; \quad EF_0\delta_{22} = EF_0\delta_{33} = 3008 \text{ tcm} \\
 EF_0\delta_{12} = EF_0\delta_{21} = EF_0\delta_{23} = EF_0\delta_{32} = EF_0\delta_{43} = \\
 = EF_0\delta_{34} = 0,6 \cdot 0,6 \cdot 600 = 216 \text{ tcm} \\
 EF_0\Delta_{1p} = -10213 \text{ tcm}; \quad EF_0\Delta_{2p} = -853 \text{ tcm} \\
 EF_0\Delta_{3p} = -10667 \text{ tcm}; \quad EF_0\Delta_{4p} = 6907 \text{ tcm}
 \end{aligned}$$

Võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} 2400X_1 + 216X_2 &= 10213 \\ 216X_1 + 3008X_2 + 216X_3 &= 853 \\ 216X_2 + 3008X_3 + 216X_4 &= 10667 \\ 216X_3 + 2400X_4 &= 6907 \end{aligned}$$

lahend on

$$X_1 = 4,2795 \text{ t}; \quad X_2 = -0,2664 \text{ t}; \quad X_3 = 3,3804 \text{ t}; \quad X_4 = 2,5735 \text{ t}$$

Sisejõud varrastes arvutatakse valemiga

$$N_j = N_{jp}^0 + n_{j1}X_1 + n_{j2}X_2 + n_{j3}X_3 + n_{j4}X_4$$

Arvutus on esitatud tabelis 18.23.

Tingimustega (18.216) kontrollitakse leitud pikijõude. Tabelis 18.24 on esitatud ainult kontroll pikijõuga n_i : $\sum n_{j1}N_{jp}l_j'' = 7425$ — $-7424 = 1$, mis ühtib arvutustäpsuse ühikuga ja mille võib seepärast praktiliselt lugeda nulliks.

Sõlme 6 vertikaalsiire

$$w_6 = \sum_{j=1}^v n_6 N_{jp} l'' / EF_0 = 28843 / (2 \cdot 10^3 \cdot 40) = 0,361 \text{ cm} = 3,61 \text{ mm}$$

Tabel 18.23

Sisejõudude arvutus

Var-ras	N_p^0 t	$n_1 X_1$ t	$n_2 X_2$ t	$n_3 X_3$ t	$n_4 X_4$ t	N_p t
1-3	10,667	-3,424	0	0	0	7,243
3-5	10,667	0	0,213	0	0	10,880
2-4	0	-3,424	0	0	0	-3,424
4-6	-10,667	0	0,213	0	0	-10,454
1-4	-13,333	4,280	0	0	0	-9,053
2-3	0	4,280	0	0	0	4,280
3-6	0	0	-0,266	0	0	-0,266
4-5	0	0	-0,266	0	0	-0,266
1-2	-4,000	-2,568	0	0	0	-6,568
3-4	0	-2,568	0,160	0	0	-2,408
5-6	0	0	0,160	-2,028	0	-1,868
7-8	4,000	0	0	-2,028	-1,544	0,428
9-10	0	0	0	0	-1,544	-1,544
5-8	0	0	0	3,380	0	3,380
6-7	-6,667	0	0	3,380	0	-3,287
7-10	0	0	0	0	2,573	2,573
8-9	-6,667	0	0	0	2,573	-4,094
6-8	-5,333	0	0	-2,704	0	-8,037
8-10	0	0	0	0	-2,059	-2,059
5-7	10,667	0	0	-2,704	0	7,963
7-9	5,333	0	0	0	-2,059	3,274

Tabel 18.24

Pikijõudude kontroll ja sõlme 6 vertikaalsiirde arvutus

Var-ras	n_1	n_6	$\frac{F_0}{F} l = l''$	N_p	$n_1 l'' N_p$	$n_6 N_p l''$
1-3	-0,8	2/3	500	7,243	-2897	2414
3-5	0	4/3	500	10,880	0	7253
2-4	-0,8	0	400	-3,424	1096	0
4-6	0	-2/3	400	-10,454	0	2788
1-4	1,0	-5/6	500	-9,053	-4527	3772
2-3	1,0	0	1000	4,280	4280	0
3-6	0	-5/6	1000	-0,266	0	222
4-5	0	0	1000	-0,266	0	0
1-2	-0,6	0	300	-6,568	1182	0
3-4	-0,6	1/2	600	-2,408	867	-722
5-6	0	0	600	-1,868	0	0
7-8	0	1/2	600	0,428	0	128
9-10	0	0	300	-1,544	0	0
5-8	0	0	1000	3,380	0	0
6-7	0	-5/6	1000	-3,287	0	2739
7-10	0	0	1000	2,573	0	0
8-9	0	-5/6	500	-4,094	0	1706
6-8	0	-2/3	400	-8,037	0	2143
8-10	0	0	400	-2,059	0	0
5-7	0	4/3	500	7,963	0	5309
7-9	0	2/3	500	3,274	0	1091
				Σ	7425	28843 tcm
					-7424	

Pikijõudude mõjumaatriksi koostamisel kasutatakse sama põhiskeemi, kui koormusest sisejõudude arvutamisel (joon. 18.85). Lähtemaatriksi b_1 elemendid, s.t. ühiktundmatutest põhjustatud sisejõud varrastes, on antud tabelis 18.21. Lähtemaatriksi b_p , mis on põhiskeemi varraste pikijõudude mõjumaatriksi, koostamiseks rakendatakse vertikaalne ühikjõud sõlmedesse 2, 4, 6, 8 ja 10 ning leitakse põhiskeemi varrastes sisejõud (tabel 18.25). Muutusmaatriksi f , mis on diagonaalmaatriks, elementideks on ühikjõust põhjustatud varraste pikenemised ja need avaldatakse varda redutseeritud pikkuse kaudu järgmiselt: l''/EF_0 .

Paigutiste maatriksi D_1 elemendid on eespool leitud ja arvutatud ei korrata.

$$D_1 = b_1' f b_1 = \frac{1}{EF_0} \begin{vmatrix} 2400 & 216 & 0 & 0 \\ 216 & 3008 & 216 & 0 \\ 0 & 216 & 3008 & 216 \\ 0 & 0 & 216 & 2400 \end{vmatrix} \frac{\text{cm}}{\text{t}} \quad (a)$$

mille pöördmaatriks on järgmine:

$$D_i^{-1} = \frac{EF_0}{10^7} \begin{vmatrix} 4194 & -303 & 22 & -2 \\ -303 & 3364 & -243 & 22 \\ 22 & -243 & 3364 & -303 \\ -2 & 22 & -303 & 4194 \end{vmatrix} \frac{t}{\text{cm}} \quad (b)$$

Tabel 18.25

Lähtemaatriksite elemendid

Var-ras	b_1		EF_{of} l''	b_p				
	n_1	n_2		N_2 $P=1$ s. 2	N_4 $P=1$ s. 4	N_6 $P=1$ s. 6	N_8 $P=1$ s. 8	N_{10} $P=1$ s. 10
1-3	-0,8	0	500	0	1	2/3	1/3	0
3-5	0	-0,8	500	0	2/3	4/3	2/3	0
2-4	-0,8	0	400	0	0	0	0	0
4-6	0	-0,8	400	0	-1	-2/3	-1/3	0
1-4	1,0	0	500	0	-5/4	-5/6	-5/12	0
2-3	1,0	0	1000	0	0	0	0	0
3-6	0	1,0	1000	0	5/12	-5/6	-5/12	0
4-5	0	1,0	1000	0	0	0	0	0
1-2	-0,6	0	300	-1	0	0	0	0
3-4	-0,6	-0,6	600	0	-1/4	1/2	1/4	0
5-6	0	-0,6	600	0	0	0	0	0

Var-ras	b_1		EF_{of} l''	b_p				
	n_3	n_4		N_2 $P=1$ s. 2	N_4 $P=1$ s. 4	N_6 $P=1$ s. 6	N_8 $P=1$ s. 8	N_{10} $P=1$ s. 10
5-6	-0,6	0	600	0	0	0	0	0
7-8	-0,6	-0,6	600	0	1/4	1/2	-1/4	0
9-10	0	-0,6	300	0	0	0	0	-1
5-8	1,0	0	1000	0	0	0	0	0
6-7	1,0	0	1000	0	-5/12	-5/6	5/12	0
7-10	0	1,0	1000	0	0	0	0	0
8-9	0	1,0	500	0	-5/12	-5/6	-5/4	0
6-8	-0,8	0	400	0	-1/3	-2/3	-1	0
8-10	0	-0,8	400	0	0	0	0	0
5-7	-0,8	0	500	0	2/3	4/3	2/3	0
7-9	0	-0,8	500	0	1/3	2/3	1	0

Märkus. Tundmatud $X_1=1$ ja $X_2=1$ ei põhjusta sisejõude põhiskeemis paremal pool keskmist posti olevates varrestes ning tundmatud $X_3=1$ ja $X_4=1$ vasakul pool keskmist posti ning neid nulle ei ole tabelis kirjutatud.

Tabel 18.26

Sõlmedes 2, 4, 6, 8 ja 10 mõjuvast ühikjõust põhjustatud lisatundmatutele vastavate paigutiste arvutus

Var-ras	$n_1 l'' N_2$	$n_1 l'' N_4$	$n_2 l'' N_4$	$n_1 l'' N_6$	$n_2 l'' N_6$	$n_1 l'' N_8$	$n_2 l'' N_8$
1-3	0	-400	0	-800/3	0	-400/3	0
3-5	0	0	-800/3	0	-1600/3	0	-800/3
2-4	0	0	0	0	0	0	0
4-6	0	0	320	0	640/3	0	320/3
1-4	0	-625	0	-1250/3	0	-625/3	0
2-3	0	0	0	0	0	0	0
3-6	0	0	1250/3	0	-2500/3	0	-1250/3
4-5	0	0	0	0	0	0	0
1-2	180	0	0	0	0	0	0
3-4	0	90	90	-180	-180	-90	-90
5-6	0	0	0	0	0	0	0

Σ	180	-935	1680/3	-2590/3	-4000/3	-1295/3	-2000/3
----------	-----	------	--------	---------	---------	---------	---------

Var-ras	$n_3 l'' N_4$	$n_4 l'' N_4$	$n_3 l'' N_6$	$n_4 l'' N_6$	$n_3 l'' N_8$	$n_4 l'' N_8$	$n_4 l'' N_{10}$
5-6	0	0	0	0	0	0	0
7-8	-90	-90	-180	-180	90	90	0
9-10	0	0	0	0	0	0	180
5-8	0	0	0	0	0	0	0
6-7	-1250/3	0	-2500/3	0	1250/3	0	0
7-10	0	0	0	0	0	0	0
8-9	0	-625/3	0	-1250/3	0	-625	0
6-8	320/3	0	640/3	0	320	0	0
8-10	0	0	0	0	0	0	0
5-7	-800/3	0	-1600/3	0	-800/3	0	0
7-9	0	400/3	0	-800/3	0	-400	0

Σ	-2000/3	-1295/3	-4000/3	-2590/3	1680/3	-935	180
----------	---------	---------	---------	---------	--------	------	-----

Vertikaalsest ühikjõust sõlmedes 2, 4, 6, 8 ja 10 põhjustatud lisatundmatutele vastavate paigutiste maatriks on järgmine (tabel 18.26).

$$D_p = \frac{1}{3EF_0} \begin{vmatrix} 540 & -2805 & -2590 & -1295 & 0 \\ 0 & 1680 & -4000 & -2000 & 0 \\ 0 & -2000 & -4000 & 1680 & 0 \\ 0 & -1295 & -2590 & -2805 & 540 \end{vmatrix} \frac{\text{cm}}{t} \quad (c)$$

Lisatundmatute mõjumaatriks leitakse maatriksite (b) ja (c) korutamisega:

$$X = -D_1^{-1} D_p = \begin{pmatrix} -0,07551 & 0,41049 & 0,32444 & 0,15942 & 0,00004 \\ 0,00545 & -0,23196 & 0,39187 & 0,22685 & -0,00040 \\ -0,00040 & 0,22685 & 0,39187 & -0,23196 & 0,00545 \\ 0,00004 & 0,15942 & 0,32444 & 0,41049 & -0,07551 \end{pmatrix} \quad (d)$$

Sõrestiku varraste pikijõudude mõjumaatriks leitakse nüüd avaldisega

$$b = b_p + b_1 X \quad (e)$$

Kuna sõrestik on sümmeetriline, siis pikijõudude mõjumaatriks leitakse sõrestiku vasaku poole varraste jaoks:

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 4/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -5/4 & -5/6 & -5/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/12 & -5/6 & -5/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,8 & 0 & 0 \\ -0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,8 & 0 & 0 \\ 1,0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0 & 0 & 0 \\ -0,6 & 0 & 0 & 0 \\ -0,6 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,07551 & 0,41049 & 0,32444 & 0,15942 & 0,00004 \\ 0,00545 & -0,23196 & 0,39187 & 0,22685 & 0,00040 \\ -0,00040 & 0,22685 & 0,39187 & -0,23196 & 0,00545 \\ 0,00004 & 0,15942 & 0,32444 & 0,41049 & 0,07551 \\ 0,06041 & 0,67161 & 0,40712 & 0,20579 & -0,00003 \\ -0,00436 & 0,85224 & 1,01983 & 0,48519 & 0,00032 \\ 0,06041 & -0,32839 & -0,25955 & -0,12754 & -0,00003 \\ -0,00436 & -0,81443 & -0,98017 & -0,51481 & 0,00032 \\ -0,07551 & -0,83951 & -0,50889 & -0,25725 & 0,00004 \\ -0,07551 & 0,41049 & 0,32444 & 0,15942 & 0,00004 \\ 0,00545 & 0,18471 & -0,44146 & -0,18982 & -0,00040 \\ 0,00545 & -0,23196 & 0,39187 & 0,22685 & -0,00040 \\ -0,95469 & -0,24629 & -0,19466 & -0,09565 & -0,00002 \\ 0,04204 & -0,35712 & 0,07021 & 0,01824 & 0,00022 \\ -0,00303 & 0,00307 & -0,47024 & 0,00307 & -0,00303 \end{pmatrix}$$

Maatriksi b rea elemendid esitavad ühe varda pikijõu mõjujoone ordinaate. Pikijõudude maatriks N saadakse maatriksi b ja koormuse maatriksi P korrutamisega:

$$N = bP$$

Näiteks varda 4-6 pikijõud antud koormusest on:

$$N_{4-6} = \begin{pmatrix} -0,00436 & -0,81443 & -0,98017 & -0,51481 & 0,00032 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 \cdot 0,00436 - 8 \cdot 0,81443 - 4 \cdot 0,98017 = -10,454 \text{ t}$$

19. DEFORMATSIOONIMEETOD

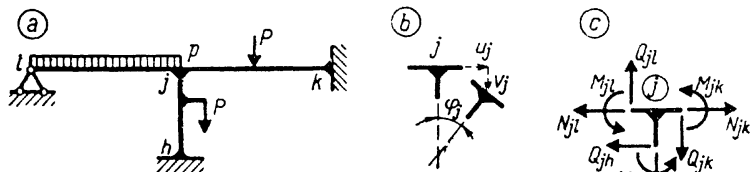
19.1. Arvutuse alused

19.11. Deformatsioonimeetodi idee

Seni käsitleti staatikaga määramatute arvutusskeemide (raamid, talad, kaared, sõrestikud) lahendamist jõumeetodiga, kus lisatundmatuteks on staatikaga määramatud sisejõud ja reaktsioonid. Jõumeetodi puhul leitakse lisatundmatud geomeetriliste pidevustingimuste alusel koostatud võrranditest. Pärast lisatundmatute leidmist arvutatakse ülejäänud sisejõud ja reaktsioonid koormuse ning lisatundmatute funktsioonidena.

Kui staatikaga määramatu arvutusskeemi geomeetrisel määramatuse aste (käsitletakse p. 19.12) on väiksem, võrdne või vähe suurem staatikalise määramatuse astmest, siis on otstarbekas lahendada ülesanne paigutiste ehk deformatsioonimeetodiga. Deformatsioonimeetodi puhul võetakse lisatundmatuteks paigutised ja nende leidmiseks kasutatakse tasakaaluvõrrandeid. Staatikaga määramatu raami deformeerunud olukorra esitamisel hüljatakse (nagu tavaliselt raami lahendamisel jõumeetodiga): 1) pikijõududest põhjustatud deformatsioonid (N mõju), 2) erinevus paindunud varda otsmiste ristlõigete raskuskeskmeid ühendava kõõlu ja esialgse sirge varda pikkuse vahel, 3) pöikjõudude mõju deformatsioonidele. Temperatuuri muutusest põhjustatud sisejõudude leidmisel arvestatakse pikideformatsioone.

Joonisel 19.1, a kujutatud raami arvutamisel jõumeetodiga tuleb koostada ja lahendada viis võrrandit viie tundmatuga. Raami staatikalise määramatuse aste on viis. Raami paigutusolukord on määratud koormuse ja sõlme j kolme paigutisega φ_j , u_j , v_j (joon. 19.1, b). Kolme paigutise arvutamiseks on võimalik koostada sõlme j (joon.



Joon. 19.1

19.1, c) jaoks kolm tasakaaluvõrrandit. Eespool esitatud eelduste rakendamisel on siirded u_j ja v_j nullid ning jääb ainult üks tundmatu — sõlme j pööre φ_j . Joonisel 19.1, a esitatud raami geomeetrilise määramatuse aste on üks.

Lisatundmatu φ_j leitakse sõlme j kohta koostatud momentide tasakaalu tingimusest

$$\Sigma M_j = 0; \quad M_{jl} + M_{jk} + M_{jh} = 0 \quad (a)$$

Sõlme tasakaalu vaatlemisel võetakse vastupäeva mõjuvad momendid positiivsed (joon. 19.1, c).

Paindemomendid võrrandis (a) on lineaarsed funktsioonid paigutistest u_j , v_j , φ_j :

$$\begin{aligned} M_{jl} &= M_{jl,p} + m_{jl,u}u_j + m_{jl,v}v_j + m_{jl,\varphi}\varphi_j \\ M_{jk} &= M_{jk,p} + m_{jk,u}u_j + m_{jk,v}v_j + m_{jk,\varphi}\varphi_j \\ M_{jh} &= M_{jh,p} + m_{jh,u}u_j + m_{jh,v}v_j + m_{jh,\varphi}\varphi_j \end{aligned} \quad (b)$$

ja kuna vaadeldava raami puhul $u_j = 0$, $v_j = 0$, siis

$$\begin{aligned} M_{jl} &= M_{jl,p} + m_{jl,\varphi}\varphi_j \\ M_{jk} &= M_{jk,p} + m_{jk,\varphi}\varphi_j \\ M_{jh} &= M_{jh,p} + m_{jh,\varphi}\varphi_j \end{aligned} \quad (c)$$

$M_{jl,p}$, $M_{jk,p}$ ja $M_{jh,p}$ on koormusest põhjustatud paindemomendid sõlmes j vastavalt varrastes $j-l$, $j-k$ ning $j-h$, kui $u_j = 0$, $v_j = 0$ ja $\varphi_j = 0$. Paindemomendid $m_{jl,\varphi}$, $m_{jk,\varphi}$ ja $m_{jh,\varphi}$ on põhjustatud sõlme j ühikpöörde $\varphi_j = 1$ ning valemid nende arvutamiseks tuletatakse jõumeetodiga.

Asetades paindemomentide avaldised (c) tasakaaluvõrrandisse (a), saadakse järgmine võrrand:

$$\begin{aligned} M_{jl,p} + m_{jl,\varphi}\varphi_j + M_{jk,p} + m_{jk,\varphi}\varphi_j + M_{jh,p} + m_{jh,\varphi}\varphi_j &= 0 \\ \text{ehk} \\ (m_{jl,\varphi} + m_{jk,\varphi} + m_{jh,\varphi})\varphi_j + (M_{jl,p} + M_{jk,p} + M_{jh,p}) &= 0 \end{aligned} \quad (d)$$

Tundmatu φ_j kordaja ja vabaliige võrrandis (d) tähistatakse vastavalt

$$\begin{aligned} r_{jj} &= m_{jl,\varphi} + m_{jk,\varphi} + m_{jh,\varphi} \\ R_{jp} &= M_{jl,p} + M_{jk,p} + M_{jh,p} \end{aligned} \quad (e)$$

Võrrandi (d) võib esitada nüüd kujul

$$r_{jj}\varphi_j + R_{jp} = 0 \quad (f)$$

millest leitakse lisatundmatu sõlme j pööre

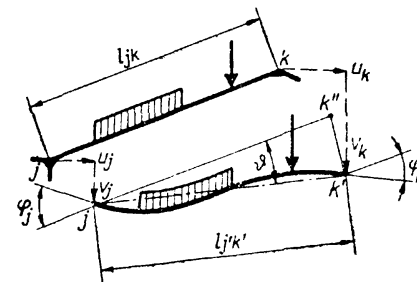
$$\varphi_j = -R_{jp}/r_{jj} \quad (g)$$

ja avaldistega (c) arvutatakse paindemomendid sõlmes j .

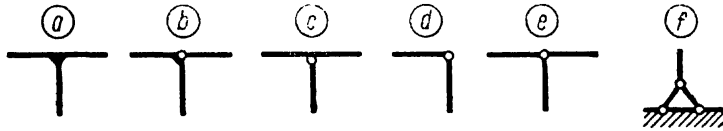
19.12. Geomeetrilise määramatuse aste

Koormusest põhjustatud varraste deformatsioonide tagajärjel sõlmed pöörduvad ja siirduvad. Joonisel 19.2 on kujutatud raamist eraldatud sirge varras $j-k$ ja varda paindunud kuju deformeerunud olukorras $j'-k'$. Varda $j-k$ paigutumist deformeerunud olukorda $j'-k'$ võib vaadelda järgmiselt: 1) varras $j-k$ siirdub asukohta $j'-k''$, 2) sõlmed pöörduvad nurkade φ_j ja φ_k võrra ning sõlm k nihkub veel asukohta k' , mille tagajärjel sõlmede j ja k geomeetrilisi tsentreid ühendav sirge $j'-k'$ moodustab esialgse teljega nurga ϑ .

Eelduste põhjal on sõlmede geomeetriliste tsentrite



Joon. 19.2



Joon. 19.3

vahekaugused deformeerunud olukorras ja deformeerumata algolukorras võrdsed:

$$l_{j'k'} = l_{jk} \quad (a)$$

Seega sõlmede vastastikune nihe oleneb ainult varda pöördest ϑ .

Arvutuskeemi sõlmede kohta on võimalik koostada $3s_3 + 2s_2 - t$ tasakaaluvõrrandit ja avaldada need paigutistega. Tingimusega (a) elimineeritakse nendest võrranditest v geomeetrilist tundmatut (paigutist), s.t. nii palju, kui arvutuskeemil on vardaid ilma toesidemeteta. Tasakaaluvõrranditesse jäänud paigutised on lisatundmatuteks ja nende arv geomeetrilise määramatuse astmeks:

$$n^* = 3s_3 + 2s_2 - t - v \quad (b)$$

milles s_3 on arvutuskeemi jäikade sõlmede arv (toesõlmedeta), s_2 — liigendsõlmede (kaasa arvatud toesõlmed) arv, v — varraste arv (varraste hulka ei loeta ühest otsast kinnitatud elementi), t — liigend-toesõlmede toesidemete arv. Joonisel 19.3, a, b, c on esitatud raami jäigad ja d, e, f liigendsõlmed.

Valemit (b) teisendatakse järgmiselt:

$$n^* = s_3 + 2(s_3 + s_2) - v - t = s_3 + 2s - v - t \quad (c)$$

milles s on raami üldine sõlmede arv jäikade toesõlmedeta.

Sirgetest varrastest moodustatud raami geomeetrilise määramatuse aste, s.t. lisatundmatute arv leitakse valemiga

$$n^* = s_3 + \omega \quad (19.1)$$

milles

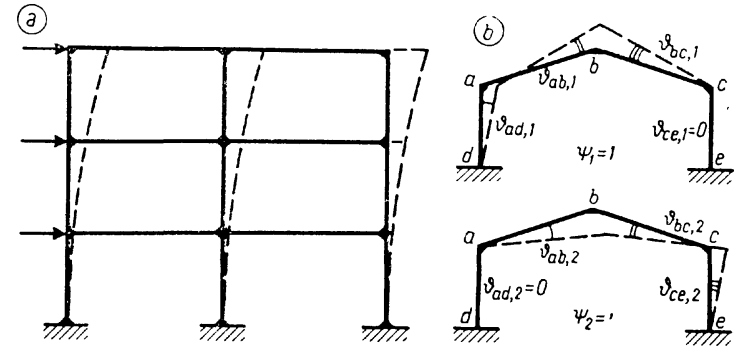
$$\omega = 2s - v - t \quad (19.2)$$

on raami vabadusaste ja tähistab varraste pöördenurki määravate sõltumatute geomeetriliste parameetrite

arvu. Geomeetrilise määramatuse aste (19.1) võrdub jäikade sõlmede (ilma toesõlmedeta) arvuga, kui raami vabadusaste (19.2) võrdub nulliga või on negatiivne:

$$n^* = s_3, \quad \text{kui } \omega \leq 0 \quad (19.3)$$

Raami vardad on sõlmedes ühendatud ja varraste pöörded on teineteisest geomeetriselt sõltuvad. Raamid, mille $\omega > 1$, ei ole kõigi varraste pöörded üksteisest sõltuvad. Näiteks joonisel 19.4, a kujutatud raami vabadusaste $\omega = 2 \cdot 9 - 15 - 0 = 3$. Iga korruse postid pöörduvad võrdse nurga võrra, kuid erinevatel korrustel võivad pöörded olla erinevad.



Joon. 19.4

Joonisel 19.4, b kujutatud raami vabadusaste

$$\omega = 2 \cdot 3 - 4 - 0 = 2.$$

Raamil on vähemalt kaks teineteisest sõltumatut paigutusolukorda. Näiteks paigutusolukorras $\psi_1 = 1$ ei pöördu parempoolne ja paigutusolukorras $\psi_2 = 1$ vasakpoolne post. Vastavalt geomeetriselt sõltumatutele parameetritele tähistatakse raami varraste sõltumatud pöörded ψ_c ($c = 1, 2, \dots, \omega$). Raami varraste pöörded avaldatakse nende sõltumatute pöörete kaudu.

$$\vartheta_{jk} = \vartheta_{jk,1}\psi_1 + \vartheta_{jk,2}\psi_2 + \dots + \vartheta_{jk,w}\psi_w = \sum_{c=1}^{\omega} \vartheta_{jk,c}\psi_c \quad (19.4)$$

milles $\vartheta_{jk,c}$ on varda j - k pööre paigutusolukorras $\psi_c = 1$. Joonisel 19.4, b on sõltumatuks pöördeks ülemisel skee-

mil $\psi_1 = \vartheta_{ad}$ ja alumisel $\psi_2 = \vartheta_{ce}$. Valemiga (19.4) avaldatakse pöörded:

$$\begin{aligned}\vartheta_{ad} &= \vartheta_{ad,1}\psi_1 + \vartheta_{ad,2}\psi_2 = \vartheta_{ad,1}\psi_1 + 0\psi_2 = \vartheta_{ad,1}\psi_1 \\ \vartheta_{ab} &= \vartheta_{ab,1}\psi_1 + \vartheta_{ab,2}\psi_2; \quad \vartheta_{bc} = \vartheta_{bc,1}\psi_1 + \vartheta_{bc,2}\psi_2 \\ \vartheta_{ce} &= \vartheta_{ce,1}\psi_1 + \vartheta_{ce,2}\psi_2 = 0\psi_1 + \vartheta_{ce,2}\psi_2 = \vartheta_{ce,2}\psi_2\end{aligned}$$

Lisatundmatuteks on s_3 raami jäiga sõlme (ilma toe-sõlmedeta) pöoret ja w sõltumatut varraste pöoret. Üldine lisatundmatute arv n^* on võrdne nende summaga (19.1). Joonisel 19.4 esitatud raamide geomeetrilise määramatuse astmed on $n^* = 9 + 3 = 12$ ja $n^* = 3 + 2 = 5$. Nende raamide staatikalise määramatuse astmed on vastavalt $n = 6 \cdot 3 = 18$ ja $n = 3$. Esimest raami on otstarbekas lahendada deformatsioonimeetodiga ($n^* < n$) ja teist raami jõumeetodiga ($n < n^*$).

Varraste sõltumatute pöörete asemel võib võtta lisatundmatuteks ka sõlmede siirded. Sisulist erinevust ei ole, kuna üldjuhul sõlmede siirded arvutatakse poolusplaanist varraste pöörete funktsioonidena.

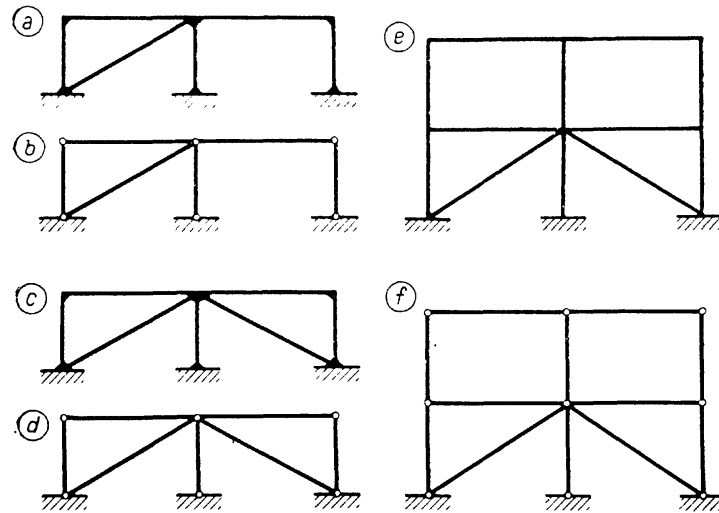
Raami vabadusaste valemis (19.2) ei tehta vahet jäikade sõlmede ja liigendsõlmede vahel, sest valemis esineb sõlmede summa s . Järelikult raami varrasahela vabadusaste ühtib raami vabadusastmega. Varrasahel saadakse raamist kõigi jäikade sõlmede asendamisel liigendsõlmedega. Varrasahelat vaadeldakse nii mitme üksteisest erineva ühe vabadusastmega kinemaatilise ketina, kui suur on varraste sõltumatute pöörete arv w . Igas ühe vabadusastmega kinemaatilises ketis antakse ühele vardale pööre ja teiste varraste pöörded avaldatakse selle sõltumatu pöördede funktsioonidena.

Joonisel 19.5, a ja c esitatud raamide varrasahelate (joon. 19.5, b ja d) vabadusaste on vastavalt

$$w = 2 \cdot 6 - 6 - 6 = 0 \quad \text{ning} \quad w = 2 \cdot 6 - 7 - 6 = -1.$$

Mõlema raami geomeetrilise määramatuse aste $n^* = s_3 = 3$ (19.3). Koormuse mõjumisel sõlmed pöörduvad, kuid vardad mitte.

Tingimus $w \leq 0$ on vajalik, kuid mitte küllaldane selleks, et raami vardad ei pöörduks. Valemi (19.2) järgi arvutades on joonisel 19.5, e kujutatud raami varrasahela (joon. 19.5, f) vabadusaste $w = 2 \cdot 9 - 12 - 6 = 0$. Kuna raami alumisel korrusel on üks liigne varras $w_1 = 2 \cdot 6 - 7 - 6 = -1$ ja ülemise korruse vabadusaste $w_2 =$



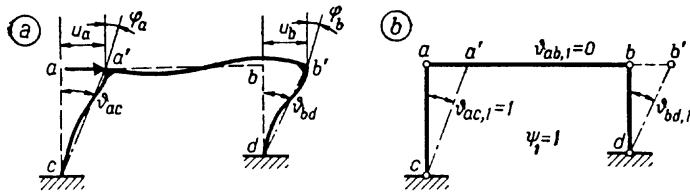
Joon. 19.5

$= 2 \cdot 6 - 5 - 6 = 1$, siis raami geomeetrilise määramatuse aste $n^* = s_3 + w_2 = 6 + 1 = 7$. Lisatundmatuteks on kuue sõlme pöörded ja ülemise korruse ühe posti pööre, sest teise korruse ülejäänud postide pöörded on niisama suured.

Joonisel 19.6, a kujutatud raami geomeetrilise määramatuse aste $n^* = s_3 + w = 2 + 1 = 3$. Vabade jäikade sõlmede arv $s_3 = 2$ ja raami vabadusaste on võrdne varrasahela (joon. 19.6, b) vabadusastmega $w = 2s - v - t = 2 \cdot 4 - 3 - 4 = 1$. Sõltumatuks pöördeks on võetud varda a-c pööre $\vartheta_{ac} = \psi_1$. Lisatundmatuteks on sõlmede a ja b pöörded φ_a ning φ_b ja varda a-c pööre $\vartheta_{ac} = \psi_1$. Varras a-b on ühendatud toepinna külge kahe vertikaalse postiga ja saab ainult horisontaalselt nihkuda. Järelikult riivi a-b pööre on null ($\vartheta_{ab} = 0$).

Posti b-d pööre leitakse sõltumatu pöördede ψ_1 funktsioonina. Eelduste järgi on sõlmede a ja b horisontaalsed siirded võrdsed ning tingimusest $u_a = u_b$, ehk $\vartheta_{ac,1}l_{ac} = \vartheta_{bd,1}l_{bd}$ leitakse varda b-d pööre paigutusolukorras $\psi_1 = 1$.

$$\vartheta_{bd,1} = \vartheta_{ac,1} \cdot l_{ac} / l_{bd} \quad (d)$$



Joon. 19.6

Tähtindeksid näitavad, milliste sõlmede vahel asub varras, ja numberindeks paigutusolukorras (ψ_1). Varraste pöörded on

$$\vartheta_{ac} = \vartheta_{ac,1}\psi_1; \quad \vartheta_{ab} = 0; \quad \vartheta_{bd} = \vartheta_{bd,1}\psi_1$$

Lisatundmatuteks võib võtta ka sõlmede a ja b pöörded ning sõlme a siirde. Sõlme b siire võrdub sõlme a siirdega $u_b = u_a$. Sõlmede siirete ja varraste pöörete vahel on seosed

$$u_a = l_{ac}\vartheta_{ac}, \quad u_b = l_{bd}\vartheta_{bd} \quad (e)$$

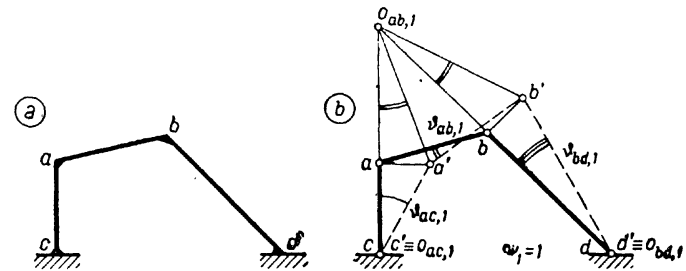
ning seepärast ei ole sisulist erinevust tundmatute φ_a , φ_b , u_a ja tundmatute φ_a , φ_b , ψ_1 vahel.

Kaldu olevate riivide ja viltuste postidega raamide varrasahela varraste pöörded leitakse poolusplaanist. Varrasahela ühele vardale antakse paigutusolukorras $\psi_c = 1$ ($c=1, 2, \dots, \omega$) ühikpöörde ja teiste varraste pöörded arvutatakse poolusplaanist selle vardade pöörde funktsioonidena.

Vardade pöörde päripäeva ümber peapooluse on positiivne.

Joonisel 19.7, a kujutatud raami geomeetrilise määratuse aste $n^* = 2 + 1 = 3$, kuna $\omega = 2 \cdot 4 - 3 - 4 = 1$. Varrasahela paigutusolukorras $\psi_1 = 1$ (joon. 19.7, b) pöörduvad vardad $a-c$ ja $b-d$ ümber toesõlmede c ning d . Nende varraste peapoolusteks on toesõlmed $c \equiv o_{ac,1}$ ja $d \equiv o_{bd,1}$. Tähtindeksid tähistavad varrast ja numberindeksid paigutusolukorda.

Liigend a ühendab varrasahela vardaid $a-c$ ja $a-b$ ning on nende varraste vastastikuse liikumise hetkpooluseks. Järelikult vardade $a-b$ peapoolus asub vardade $a-c$ peapoolusega c ja varraste $a-c$ ning $a-b$ vastastikuse liikumise hetkpoolusega a määratud sirgel $a-c$. Liigend b ühendab vardaid $b-a$ ja $b-d$ ning on nende varraste vas-



Joon. 19.7

tastikuse liikumise hetkpoolus. Vardade $a-b$ peapoolus asub ka vardade $b-d$ peapoolusega d ja varraste $b-a$ ning $b-d$ vastastikuse liikumise hetkpoolusega b määratud sirgel $b-d$. Sirgete $a-c$ ja $b-d$ lõikepunkt $o_{ab,1}$ on vardade $a-b$ peapoolus. Seega on kõigi varraste peapoolused leitud. Paigutusolukorras $\psi_1 = 1$ antakse vardade $a-c$ pöörde $\vartheta_{ac,1} = 1$. Kolmnurkadel $c-a-a'$ ja $o_{ab,1}-a-a'$ on ühine külge $a-a'$. Sellest tingimusest

$$l_{ac}\vartheta_{ac,1} = -a-o_{ab,1}\vartheta_{ab,1} \quad (f)$$

leitakse vardade $a-b$ pöörde

$$\vartheta_{ab,1} = -\vartheta_{ac,1}l_{ac}/a-o_{ab,1} = -l_{ac}/a-o_{ab,1} \quad (g)$$

Kolmnurkade $o_{ab,1}-b-b'$ ja $d-b-b'$ ühise külge $b-b'$ võrduse tingimusest

$$-b-o_{ab,1}\vartheta_{ab,1} = l_{bd}\vartheta_{bd,1} \quad (h)$$

arvutatakse vardade $b-d$ pöörde

$$\vartheta_{bd,1} = -\vartheta_{ab,1}b-o_{ab,1}/l_{bd} \quad (i)$$

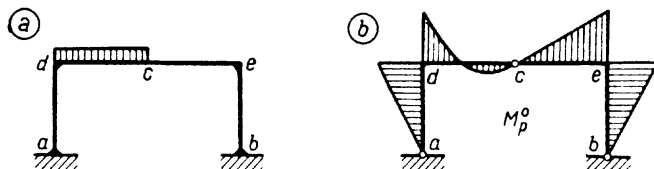
või asendades pöörde $\vartheta_{ab,1}$ avaldisega (g)

$$\vartheta_{bd,1} = [l_{ac}/(a-o_{ab,1})](b-o_{ab,1})/l_{bd} \quad (j)$$

Kolmnurkade võrdsete külgede tingimustes (f) ja (h) on korrutise, mille üheks teguriks on $\vartheta_{ab,1}$, ees märk miinus, sest $\vartheta_{ab,1}$ on negatiivne. Vardade $a-b$ pöörde on negatiivne, kuna varras pöördub peapooluse $o_{ab,1}$ suhtes vastu-päeva.

19.13. Geomeetriselt määratud põhiskeem

Enne deformatsioonimeetodi geomeetriselt määratud põhiskeemi esitamist vaatleme veel kord jõumeetodi staatikaga määratavat põhiskeemi. Jõumeetodi puhul võetakse lisatundmatuteks staatikalised suurused (jõud, momendid, reaktsioonid). Põhiskeem saadakse staatikaga määramatust arvutuskeemist nii mitme liigsideme eemaldamisega, kui suur on staatikalise määramatuse aste. Staatikaga määratavas põhiskeemis koormus ei põhjusta lisatundmatuid, sest liigsidemed on eemaldatud. Näiteks joonisel 19.8, *a* kujutatud raam on kolm korda staatikaga määramatu. Lisatundmatuteks võetakse paindemomendid lõigetest *a*, *b* ja *c*. Põhiskeem saadakse staatikaga määramatust arvutuskeemist, kui lõigetest *a*, *b* ja *c* eemaldatakse paindemomendi vastuvõtavad sidemed, s.t. nendes lõigetes moodustatakse liigendid (joon. 19.8, *b*). Põhiskeemi nendes lõigetes (liigendites) koormus paindemomente ei põhjusta.

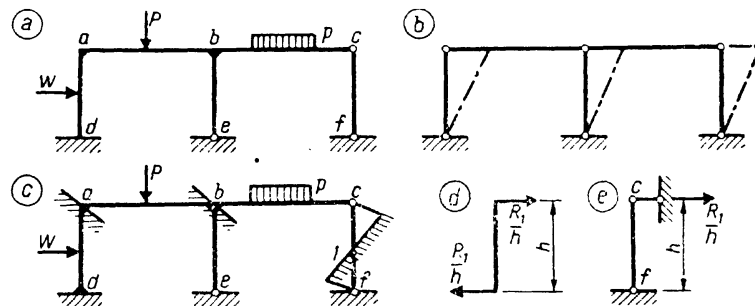


Joon. 19.8

Deformatsioonimeetodi puhul on lisatundmatuteks geomeetriselised suurused — sõlmede ja varraste pöörded. Geomeetriselt määratud põhiskeemis on koormusest põhjustatud lisatundmatud (paigutised) võrdsed nulliga. Selline skeem saadakse, kui staatikaga määramatule arvutuskeemile lisatakse nii mitu sidet, kui suur on geomeetriselise määramatuse aste. Geomeetriselise määramatuse aste leitakse valemitega (19.1), (19.2) või (19.3):

$$n^* = s_3 + \omega; \quad \omega = 2s - v - t$$

Sõlmede pöördumist takistavate sidemete arv võrdub vabade jäikade sõlmede arvuga s_3 . Igasse jäika sõlme pannakse üks sõlme pööret takistav side. Varraste pöör-



Joon. 19.9

dumist takistavate sidemete arv võrdub raami vabadusastmega ω . Varraste pöördumist takistavad sidemed asetatakse nii, et ükski varras ei saa pöörduda. Geomeetriselt määratud põhiskeemi sõlmede koormusest põhjustatud paigutised on nullid: $\varphi_j = 0$ ja $\psi_c = 0$ ($c = 1, 2, \dots, \omega$).

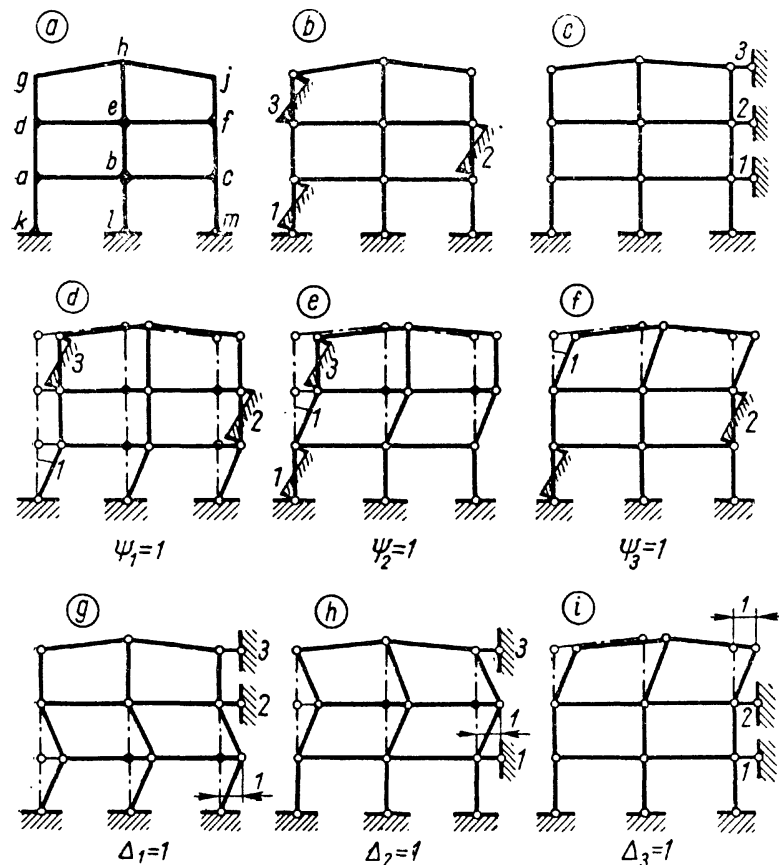
Joonisel 19.9, *a* kujutatud raami geomeetriselise määramatuse aste on kolm. Raamil on kaks vaba jäika sõlme *a* ja *b* ning varrasahela (joon. 19.9, *b*) vabadusaste on üks. Joonisel 19.9, *c* on esitatud geomeetriselt määratud põhiskeem, mille mõlemas jäigas sõlmes *a* ja *b* on sõlme pöördumist takistav side ning ühel postil (ükskõik millisel) varda pöördumist takistav side. Esitatud põhiskeemil on see parempoolsel postil. Viimast sidet tähistatakse numbriga.

Märgitakse veel, et sõlme pandud lisaside takistab ainult geomeetriselt määratud põhiskeemi sõlme pööret, kuid ei takista sõlme siiret. Vardale pandud lisaside takistab geomeetriselt määratud põhiskeemis varda pööret, kuid ei takista varda siiret.

Sõlmede ja varraste pööret takistavates sidemetes tekkivad reaktsioonid on momendid. Posti *c-f* pööret takistavas sidemes *1* tekkivat reaktsioonmomenti võib esitada jõupaarina. Jõud on rakendatud varda mõlemas otsas risti varda teljega ja jõudude suurusteks on reaktsioonmoment jagatud varda pikkusega: R_1/h (joon. 19.9, *d*). Kui varda ühe otsa siire on null (joon. 19.9, *a* toesõlm *f*), siis võib varda pööret takistava sideme asendada varda vaba sõlme siiret takistava sidemega (joon. 19.9, *e*).

See side pannakse risti varda teljega ja sidemes tekkivat reaktsiooni vaadeldakse kui jõupaari komponenti suurusega R_1/h , milles R_1 on reaktsioonmoment ja h varda pikkus.

Varda pööret takistava sideme võib panna ka postile $a-d$ või $b-e$; selle asukoht ei ole kindlaks määratud, nagu on sõlmede pööret takistavate sidemete puhul. Arvutuse juures ei tarvitse näidata varda pööret takistava sideme asukohta, vaid näidata varrasahela võimalik paigutus-



Joon. 19.10

olukord sideme puudumisel. Joonisel 19.9, b on võimalik paigutusolukord näidatud punktiirjoonega.

Korrustraamide arvutamisel on sõlmede ja varraste pööret takistavate sidemetega geomeetriliselt määratud põhiskeem tunduvalt otstarbekam kui sõlmede pööret ja siiret takistavate sidemetega põhiskeem.

Joonisel 19.10, a esitatud raam on 12 korda geomeetriliselt määratu. Vabade jäikade sõlmede arv $s_3=9$ ja varraste liikumise vabadusaste $w=3$. Varrasahela varraste pööret takistavate sidemetega põhiskeem on näidatud joonisel 19.10, b ja sõlmede siiret takistavate sidemetega joonisel 19.10, c .

Joonistel 19.10, d , e ja f on kujutatud varrasahela kolm võimalikku paigutusolukorda $\psi_1=1$, $\psi_2=1$ ja $\psi_3=1$. Paigutusolukorrad $\psi_1=1$, $\psi_2=1$ ja $\psi_3=1$ saadakse vastavalt esimese, teise ja kolmanda korruse posti pööret takistava sideme eemaldamisel. Igal niisugusel võimalikul paigutusolukorral on pöördunud ainult ühe korruse postid.

Joonistel 19.10, g , h ja i on näidatud võimalikud paigutusolukorrad $\Delta_1=1$, $\Delta_2=1$ ja $\Delta_3=1$, mis saadakse vastavalt sõlme c , f või j siiret takistava sideme eemaldamisel. Nendel paigutusolukordadel on pöördunud kahe korruse postid ja ainult ühel paigutusolukorral, mis vastab ülemise korruse posti ülemise sõlme siiret takistavale sidemele, on pöördunud ühe (ülemise) korruse postid.

Raamide arvutamisel ei ole oluline, kus asuvad varda pööret või sõlme siiret takistavad sidemed. Oluline on, et sellise sideme eemaldamisel varrasahela võimalikus paigutusolukorras pöördunud varraste arv oleks minimaalne. Varrasahela võimalike paigutusolukordade $\psi_c=1$ ($c=1, 2, \dots, w$) valik on suvaline, kuid nad ei tohi olla üksteisest lineaarselt sõltuvad.

Lõpuks deformatsiooni- ja jõumeetodi võrdlus. Jõumeetodi staatikaga määratav põhiskeem saadakse staatikaga määratav arvutusskeemist liigsete sidemete eemaldamisega. Deformatsioonimeetodi geomeetriliselt määratud põhiskeem saadakse staatikaga määratavule arvutusskeemile lisasidemete juurdepanemisega.

Jõumeetodi staatikaga määratav põhiskeem võib olla mitmesugune, kuna n korda staatikaga määratav arvutusskeemist on võimalik eemaldada n liigset sidet erinevatest kohtadest. Deformatsioonimeetodi põhiskeem on geomeetriliselt määratud ning sõlmede ja varraste pöör-

ded on nullid. Seepärast on igal raamil ainult üks geomeetriselt määratud põhiskeem. Raamide lahendamisel, mille vabadusaste on suurem kui üks ($\omega > 1$), võivad esineda erinevused. Need on tingitud sellest, et sõltumatud geomeetriselised parameetrid ψ_c ($c=1, 2, \dots, \omega$) on valitud erinevalt.

19.14. Seosed varda otste paigutiste ja sisejõudude vahel

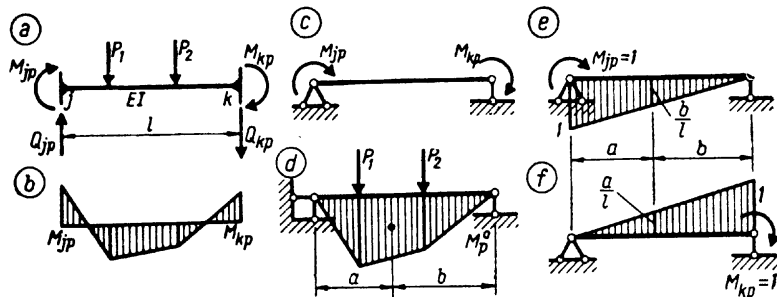
19.14.1. Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varras

19.14.11. Koormus

Reaktsioonmomendid M_{jp} ja M_{kp} (joon. 19.11, a) leitakse jõumeetodiga. Valemid tuletatakse sirgete ja konstantse ristlõikega varraste jaoks. Staatikaga määratav põhiskeem ja lisatundmatud on näidatud joonisel 19.11, c. Eelduse $\varepsilon=0$ tõttu on lisatundmatuid kaks. Geomeetriselisele tingimustele $\varphi_j=0$ ja $\varphi_k=0$ vastavalt koostatakse kaks võrrandit lisatundmatute määramiseks:

$$\begin{aligned} \delta_{jj}M_{jp} + \delta_{jk}M_{kp} + \Delta_{jp} &= 0 \\ \delta_{kj}M_{jp} + \delta_{kk}M_{kp} + \Delta_{kp} &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

Momendid M_{jp} ja M_{kp} on positiivsed, kui nad varda suhtes mõjuvad päripäeva (joon. 19.11, a, c, e ja f). Koormusest ja ühiktundmatutest $M_{jp}=1$, $M_{kp}=1$ põhjustatud



Joon. 19.11

epüürid on kujutatud joonisel 19.11, d, e ja f. Võrrandisüsteemis (a) esinevad paigutised on järgmised:

$$\delta_{jj} = l/3EI; \quad \delta_{jk} = \delta_{kj} = -l/6EI; \quad \delta_{kk} = l/3EI \quad (b)$$

$$\Delta_{jp} = \omega b/EI; \quad \Delta_{kp} = -\omega a/EI \quad (c)$$

milles EI on varda jäikus, ω — staatikaga määratud põhiskeemis koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri pindala, a ja b — koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri pinna raskuskeskme kaugused varda otstest.

Võrrandisüsteemi (a) lahend on järgmine:

$$M_{jp} = -2\omega(2b - a)/l^2; \quad M_{kp} = 2\omega(2a - b)/l^2 \quad (19.5)$$

Põikjõud varda otstes

$$Q_{jp} = Q_{jp}^0 - (M_{jp} + M_{kp})/l = Q_{jp}^0 - 6\omega(a - b)/l^3 \quad (19.6)$$

$$Q_{kp} = Q_{kp}^0 - (M_{jp} + M_{kp})/l = Q_{kp}^0 - 6\omega(a - b)/l^3$$

milles Q_{jp}^0 , Q_{kp}^0 on koormusest põhjustatud põikjõud staatikaga määratud põhiskeemis.

Koormusest põhjustatud paindemomente M_{jp} ja M_{kp} geomeetriselt määratud põhiskeemis nimetatakse kinnitusemomentideks.

Valemid mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varda kinnitusemomentide arvutamiseks mitmesuguste koormusjuhtude jaoks on antud tabelis 19.1 lk. 581.

19.14.12. Sõlme j pööre φ_j

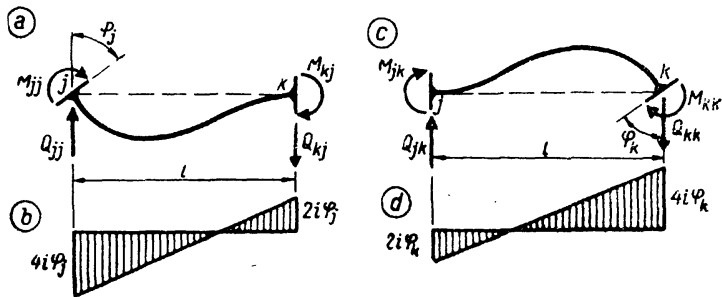
Põhiskeem ja lisatundmatud on samad kui koormusest põhjustatud kinnitusemomentide arvutamisel (joon. 19.11, c). Lisatundmatute M_{jj} ja M_{kj} arvutamiseks koostatakse geomeetriselisele tingimustele $\varphi_j=1$, $\varphi_k=0$ vastavalt kaks võrrandit:

$$\delta_{jj}M_{jj} + \delta_{jk}M_{kj} = \varphi_j \quad (d)$$

$$\delta_{kj}M_{jj} + \delta_{kk}M_{kj} = 0$$

Ühiktundmatutest põhjustatud paigutised on samad kui eelmisel juhul (b). Võrrandisüsteemi (d) lahend on järgmine:

$$M_{jj} = 4(EI/l)\varphi_j; \quad M_{kj} = 2(EI/l)\varphi_j \quad (19.7)$$



Joon. 19.12

Põikjõud on

$$Q_{jj} = Q_{kj} = -6(EI/l^2)\varphi_j \quad (19.8)$$

Edaspidi tähistatakse varda paindejäikust EI/l tähega i :

$$i = EI/l \quad (19.9)$$

Valemid (19.7) ja (19.8) on siis järgmised:

$$M_{jj} = 4i\varphi_j; \quad M_{kj} = 2i\varphi_j \quad (19.10)$$

$$Q_{jj} = Q_{kj} = -(6i/l)\varphi_j \quad (19.11)$$

Pöördest φ_j põhjustatud paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 19.12, b.

19.14.13. Sõlme k pööre φ_k

Analoogiliselt sõlme j pöördega φ_j on sõlme k pöördest φ_k põhjustatud reaktsioonmomendid ja põikjõud järgmised (joon. 19.12, c):

$$M_{jk} = 2i\varphi_k; \quad M_{kk} = 4i\varphi_k \quad (19.12)$$

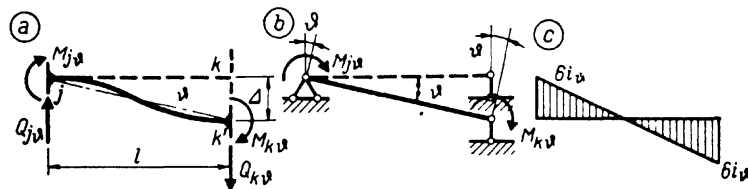
$$Q_{jk} = Q_{kk} = -(6i/l)\varphi_k \quad (19.13)$$

19.14.14. Varda pööre ϑ_{jk}

Põhiskeem ja lisatundmatud on samad kui koormuse puhul (joon. 19.13, b). Geomeetrilistele tingimustele $\varphi_j = \varphi_k = 0$ (joon. 19.13, a) vastavalt koostatakse lisatundmatute $M_{j\vartheta}$ ja $M_{k\vartheta}$ leidmiseks kaks võrrandit:

$$\begin{aligned} \delta_{jj} M_{j\vartheta} + \delta_{jk} M_{k\vartheta} + \vartheta_{jk} &= 0 \\ \delta_{kj} M_{j\vartheta} + \delta_{kk} M_{k\vartheta} + \vartheta_{jk} &= 0 \end{aligned} \quad (e)$$

milles ϑ_{jk} on varda pöördest, või ka sõlme k nihkest sõlme j suhtes, põhjustatud lisatundmatutele $M_{j\vartheta}$ ja $M_{k\vartheta}$ vastavad üldistatud paigutised (varda otsristlõigete pöörded) staatikaga määratud põhiskeemis (joon. 19.13, b).



Joon. 19.13

Ühiktundmatutest põhjustatud paigutised on samad kui koormuse puhul. Võrrandisüsteemi (e) lahend on:

$$M_{j\vartheta} = M_{k\vartheta} = -6i\vartheta_{jk} \quad (19.14)$$

või sõlme k suhtelise nihke Δ funktsioonina

$$M_{j\Delta} = M_{k\Delta} = -(6i/l)\Delta_{jk} \quad (19.15)$$

Põikjõud

$$Q_{j\vartheta} = Q_{k\vartheta} = (12i/l)\vartheta_{jk}; \quad Q_{j\Delta} = Q_{k\Delta} = (12i/l^2)\Delta_{jk} \quad (19.16)$$

19.14.15. Koormusest, sõlmede ja varda pööretest põhjustatud reaktsioonid

Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varda j - k otste ristlõigetes arvutatakse paindemomendid liitmise teel koormusest, kui sõlmed ei paigutu (19.5), sõlmede j ja k pööretest φ_j ning φ_k (19.10), (19.12) ja varda pöördest ϑ (19.14):

$$M_j = M_{jp} + 4i\varphi_j + 2i\varphi_k - 6i\vartheta_{jk} \quad (19.17)$$

$$M_k = M_{kp} + 2i\varphi_j + 4i\varphi_k - 6i\vartheta_{jk}$$

Põikjõud arvutatakse tavaliselt paindemomentide kaudu:

$$Q_j = Q_{jp}^0 - (M_j + M_k)/l \quad (19.18)$$

$$Q_k = Q_{kp}^0 - (M_j + M_k)/l$$

kuid võib arvutada ka pöörete funktsioonina:

$$\begin{aligned} Q_j &= Q_{jp} - (6i/l)(\varphi_j + \varphi_k) + (12i/l)\vartheta_{jk} \\ Q_k &= Q_{kp} - (6i/l)(\varphi_j + \varphi_k) + (12i/l)\vartheta_{jh} \end{aligned} \quad (19.19)$$

Kui varras ei pöördu ($\vartheta_{jh} = 0$), siis leitakse paindemomendid ja põikjõud valemitega:

$$M_j = M_{jp} + 4i\varphi_j + 2i\varphi_k; \quad M_k = M_{kp} + 2i\varphi_j + 4i\varphi_k \quad (19.20)$$

$$Q_j = Q_{jp} - (6i/l)(\varphi_j + \varphi_k); \quad Q_k = Q_{kp} - (6i/l)(\varphi_j + \varphi_k) \quad (19.21)$$

Kui sõlm k on jäik toesõlm, siis $\varphi_k = 0$ ja avaldistes (19.17), (19.19) puuduvad pöõret φ_k sisaldavad liikmed. Paindemomendid ja põikjõud arvutatakse siis valemitega:

$$M_j = M_{jp} + 4i\varphi_j - 6i\vartheta_{jh}; \quad M_k = M_{kp} + 2i\varphi_j - 6i\vartheta_{jh} \quad (19.22)$$

$$\begin{aligned} Q_j &= Q_{jp} - (6i/l)\varphi_j + (12i/l)\vartheta_{jh} \\ Q_k &= Q_{kp} - (6i/l)\varphi_j + (12i/l)\vartheta_{jh} \end{aligned} \quad (19.23)$$

19.14.2. Ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varras

19.14.21. Koormus

Lisatundmatuks võetakse sõlmes j tekkiv reaktsioonmoment M_{jp} (joon. 19.14, *a* ja *c*), mille suurus leitakse võrrandist

$$\delta_{jj}M_{jp} + \Delta_{jp} = 0 \quad (a)$$

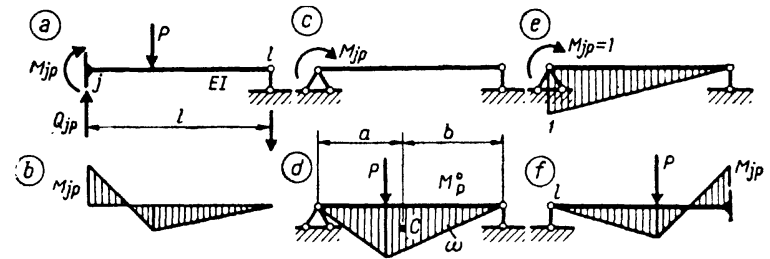
Paigutised δ_{jj} ja Δ_{jp} arvutatakse staatikaga määratud põhiskeemi paindemomendi epüüride abil (joon. 19.14, *d* ja *e*)

$$\delta_{jj} = l/3EI = 1/3i; \quad \Delta_{jp} = \omega b/EI l \quad (b)$$

Võrrandi (a) lahendiks on

$$M_{jp} = -3\omega b/l^2 \quad (19.24)$$

milles ω on koormusest põhjustatud põhiskeemi painde-



Joon. 19.14

momendi epüüri pindala ja b selle pinna raskuskeskme kaugus liigendsõlmest.

Põikjõud

$$Q_{jp} = Q_{jp}^0 - M_{jp}/l = Q_{jp}^0 + 3\omega b/l^3 \quad (19.25)$$

$$Q_{kp} = Q_{kp}^0 - M_{jp}/l = Q_{kp}^0 + 3\omega b/l^3$$

Kui jäik kinnitus on varda parempoolses otsas (joon. 19.14, *f*), siis on reaktsioonmomendi märk vastupidine. Koormusest põhjustatud põhiskeemi paindemomendi epüüri pinna raskuskeskme kaugus a võetakse ikka liigendsõlmest. Avaldiste (19.24) ja (19.25) asemel on siis järgmised valemid:

$$M_{jp} = 3\omega a/l^2 \quad (19.26)$$

$$Q_{jp} = Q_{jp}^0 - M_{jp}/l = Q_{jp}^0 - 3\omega a/l^3 \quad (19.27)$$

$$Q_{kp} = Q_{kp}^0 - M_{jp}/l = Q_{kp}^0 - 3\omega a/l^3$$

Valemid ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varda kinnitusmomendi M_{jp} arvutamiseks mitmesuguste koormusjuhtude jaoks on antud taebliis 19.2 lk. 582.

19.14.22. Sõlme j pöõre φ_j

Reaktsioonmoment M_{jj} leitakse geomeetrilisele tingimusele (joon. 19.15, *a*) vastavast võrdusest

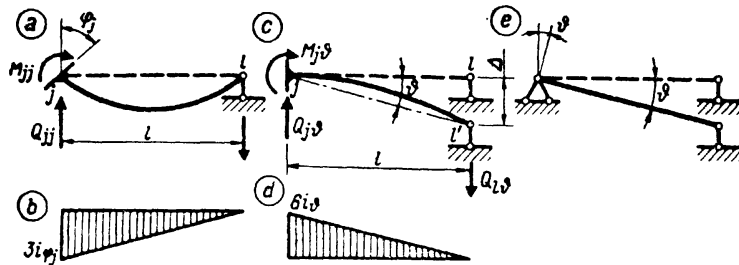
$$\delta_{jj}M_{jj} = \varphi_j \quad (c)$$

mis annab

$$M_{jj} = (1/\delta_{jj})\varphi_j = 3i\varphi_j \quad (19.28)$$

Põikjõud

$$Q_{jj} = Q_{lj} = -(3i/l)\varphi_j \quad (19.29)$$



Joon. 19.15

19.14.23. Varda pööre ϑ_{jl}

Võrrandist (joon. 19.15, c ja e)

$$\delta_{jj} M_{j\vartheta} + \vartheta = 0 \quad (d)$$

leitakse moment sõlmes j ($\delta_{jj} = 1/3i$)

$$M_{j\vartheta} = -3i\vartheta \quad (19.30)$$

Põikjõud on

$$Q_{j\vartheta} = Q_{l\vartheta} = (3i/l)\vartheta \quad (19.31)$$

Avaldades momendi ja põikjõu sõlme l suhtelise siirde Δ funktsioonina, on valemid (19.30) ja (19.31) järgmised:

$$M_{j\Delta} = -(3i/l)\Delta; \quad Q_{j\Delta} = Q_{l\Delta} = (3i/l^2)\Delta \quad (19.32)$$

19.14.24. Koormusest, sõlme j ja varda pööretest põhjustatud reaktsioonid

Koormusest, sõlme j pöördest φ_j ja varda pöördest ϑ_{jl} põhjustatud reaktsioonmoment leitakse valemiga

$$M_j = M_{jp} + 3i\varphi_j - 3i\vartheta_{jl} \quad (19.33)$$

Põikjõud arvutatakse paindemomentide kaudu

$$Q_j = Q_{jp}^0 - M_j/l; \quad Q_l = Q_{lp}^0 - M_j/l \quad (19.34)$$

või koormuse ja pöörete φ_j ning ϑ_{jl} funktsioonina

$$\begin{aligned} Q_j &= Q_{jp} - (3i/l)(\varphi_j - \vartheta_{jl}) \\ Q_l &= Q_{lp} - (3i/l)(\varphi_j - \vartheta_{jl}) \end{aligned} \quad (19.35)$$

Tabel 19.1
Kinnitussmomendid ja -põikjõud mõlemast otsast jäigalt kinnitatud vardas

$$a/l = \xi \quad b/l = \eta$$

Nr.	Koormusskeem	M_p	Q_p
1		$M_{jp} = -Pa\eta^2$ $M_{kp} = Pb\xi^2$	$Q_{jp} = P\eta^2(1+2\xi)$ $Q_{kp} = -P\xi^2(1+2\eta)$
2		$M_{jp} = -\frac{1}{12}pl^2$ $M_{kp} = \frac{1}{12}pl^2$	$Q_{jp} = \frac{1}{2}pl$ $Q_{kp} = -\frac{1}{2}pl$
3		$M_{jp} = -\frac{1}{30}pl^2$ $M_{kp} = \frac{1}{20}pl^2$	$Q_{jp} = \frac{3}{20}pl$ $Q_{kp} = -\frac{7}{20}pl$
4		$M_{jp} = -\frac{1}{12}pl^2 \times$ $\times (1 - 2\xi^2 + \xi^3)$ $M_{kp} = \frac{1}{12}pl^2 \times$ $\times (1 - 2\xi^2 + \xi^3)$	$Q_{jp} = \frac{1}{2}pl(1 - \xi)$ $Q_{kp} = -\frac{1}{2}pl \times$ $\times (1 - \xi)$
5		$M_{jp} = -\frac{5}{96}pl^2$ $M_{kp} = \frac{5}{96}pl^2$	$Q_{jp} = \frac{1}{4}pl$ $Q_{kp} = -\frac{1}{4}pl$
6		$M_{jp} = M\eta(2 - 3\eta)$ $M_{kp} = M\xi(2 - 3\xi)$	$Q_{jp} = -\frac{6}{l}M\xi\eta$ $Q_{kp} = -\frac{6}{l}M\xi\eta$
7		$M_{jt} = -EI\alpha \Delta t/h$ $M_{kt} = EI\alpha \Delta t/h$	$Q_{jt} = 0$ $Q_{kt} = 0$

Tabel 19.2

Kinnitussmomendid ja -põikjõud ühest otsast järgalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud vardas

$$a/l = \xi \quad b/l = \eta$$

Nr.	Koormusskeem	M_{jP}	Q_P
1		$-\frac{1}{2}Pl\eta \times (1 - \eta^2)$	$Q_{jP} = \frac{1}{2}P\eta(3 - \eta^2)$ $Q_{hP} = -\frac{1}{2}P\xi^2(3 - \xi)$
2		$-\frac{1}{8}pl^2$	$Q_{jP} = \frac{5}{8}pl$ $Q_{hP} = -\frac{3}{8}pl$
3		$-\frac{1}{15}pl^2$	$Q_{jP} = \frac{2}{5}pl$ $Q_{hP} = -\frac{1}{10}pl$
4		$-\frac{7}{120}pl^2$	$Q_{jP} = \frac{9}{40}pl$ $Q_{hP} = -\frac{11}{40}pl$
5		$-\frac{5}{64}pl^2$	$Q_{jP} = \frac{21}{64}pl$ $Q_{hP} = -\frac{11}{64}pl$
6		$-\frac{1}{8}pl^2 \times (1 - 2\xi^2 + \xi^3)$	$Q_{jP} = \frac{pl}{8} \times (5 - 4\xi - 2\xi^2 + \xi^3)$ $Q_{hP} = -\frac{pl}{8} \times (3 - 4\xi + 2\xi^2 - \xi^3)$

Tabel 19.2 (järg)

Nr.	Koormusskeem	M_{jP}	Q_P
7		$\frac{1}{2}M(1 - 3\eta^2)$	$Q_{jP} = -\frac{3M}{2l}(1 - \eta^2)$ $Q_{hP} = -\frac{3M}{2l}(1 - \eta^2)$
8		$M_{jt} = -\frac{3}{2}EI\alpha \Delta t/h$	$Q_{jt} = \frac{3EI\alpha \Delta t}{2hl}$ $Q_{kt} = Q_{jt}$

Tabel 19.3

Paigutistest põhjustatud momendid ja põikjõud

Paigutis	Paigutusolukord ja paindemomendi epüüür	M	$Q_{jh} = Q_{hj} = Q$
φ_j		$M_{jj} = 4i_{jk}\varphi_j$ $M_{kj} = 2i_{jk}\varphi_j$	$Q = -\frac{6i_{jk}}{l}\varphi_j$
φ_k		$M_{jk} = 2i_{jk}\varphi_k$ $M_{kk} = 4i_{jk}\varphi_k$	$Q = -\frac{6i_{jk}}{l}\varphi_k$
ϑ		$M_{j\vartheta} = -6i_{jk}\vartheta$ $M_{k\vartheta} = -6i_{jk}\vartheta$	$Q = \frac{12i_{jk}}{l}\vartheta$

Tabel 19.3 (järg)

Paigutis	Paigutusolukord ja paindemomendi epüür	M	$Q_{jA} = Q_{Aj} = Q$
φ_j		$M_{jj} = 3i_{jl}\varphi_j$	$Q = -\frac{3i_{jl}}{l}\varphi_j$
ϑ		$M_{j\vartheta} = -3i_{jl}\vartheta$	$Q = \frac{3i_{jl}}{l}\vartheta$

Kui varras ei pöördu ($\vartheta_{jl}=0$), siis moment ja põikjõud arvutatakse valemitega

$$M_j = M_{jp} + 3i\varphi_j \quad (19.36)$$

$$Q_j = Q_{jp} - (3i/l)\varphi_j; \quad Q_l = Q_{lp} - (3i/l)\varphi_j \quad (19.37)$$

Kui sõlm j on jäik toesõlm ($\varphi_j=0$), siis on reaktsioonid järgmised:

$$\begin{aligned} M_j &= M_{jp} - 3i\vartheta_{jl} \\ Q_j &= Q_{jp} + (3i/l)\vartheta_{jl} \\ Q_l &= Q_{lp} + (3i/l)\vartheta_{jl} \end{aligned} \quad (19.38)$$

19.15. Kanoonilised võrrandid

Geomeetriliselt määratud põhiskeem saadakse staatikaga määramatule arvutusskeemile lisasidemete juurdepanemisega. Joonisel 19.16, *a* kujutatud raam on kolm korda geomeetriliselt määramatu: $n^* = 2 + 1 = 3$. Lisatudmatuteks on sõlmede a ja b pöörded φ_a ning φ_b ja postide pööre ψ_1 . Geomeetriliselt määratud põhiskeem koos koormusega on esitatud joonisel 19.16, *d*. Lisatudmatud leitakse koormusest põhjustatud staatikaga määramatu

arvutusskeemi paigutusolukorra (joon. 19.16, *b*) ja koormusest ning sõlmede ja varraste pööretest põhjustatud geomeetriliselt määratud põhiskeemi paigutusolukorra (joon. 19.16, *c*) ekvivalentsuse tingimuste alusel koostatud võrranditest. Kui geomeetriliselt määratud põhiskeemi, millel mõjub koormus, sõlmi pöörata nurkade φ_a ja φ_b ning poste nurga ψ_1 võrra, mis on võrdsed koormusest põhjustatud raami vastavate elementide pööretega, siis ei ole mingit erinevust raami arvutusskeemi tegeliku paigutusolukorra (joon. 19.16, *b*) ja samasse olukorda viidud geomeetriliselt määratud põhiskeemi paigutusolukorra (joon. 19.16, *c*) vahel: paigutised, sisejõud ja reaktsioonid on võrdsed. Järgnevalt rakendatakse geomeetriliselt määratud põhiskeemi tegeliku olukorraga ekvivalentse paigutusolukorra (joon. 19.16, *c*) uurimisel jõudude mõju sõltumatuse printsiipi.

Geomeetriliselt määratud põhiskeemi sõlme a pöördest $\varphi_a=1$ tekivad lisasidemetes a , b ja l reaktsioonid r_{aa} , r_{ba} ning r_{la} (joon. 19.16, *f*). Esimene indeks tähistab sidet, milles tekib reaktsioon, ja teine näitab põhjust. Geomeetriliselt määratud põhiskeemi sõlme a ühikpöördest ($\varphi_a=1$) põhjustatud paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 19.16, *g*. Sõlme a tegelikust pöördest φ_a põhjustatud reaktsioonid lisasidemetes a , b ja l on vastavalt

$$r_{aa}\varphi_a, \quad r_{ba}\varphi_a, \quad r_{la}\varphi_a \quad (a)$$

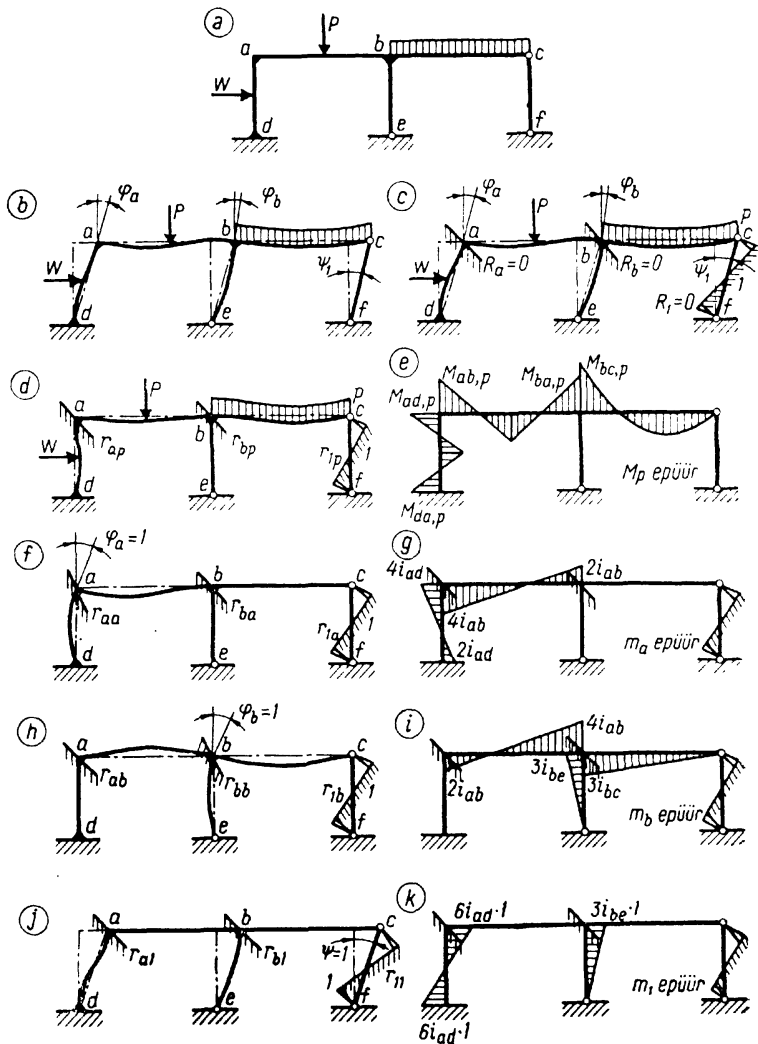
Geomeetriliselt määratud põhiskeemi sõlme b pöördest $\varphi_b=1$ (joon. 19.16, *h*) tekivad lisasidemetes reaktsioonid r_{ab} , r_{bb} ja r_{lb} . Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 19.16, *i*. Tegelikule pöördele φ_b vastavad reaktsioonid lisasidemetes on

$$r_{ab}\varphi_b, \quad r_{bb}\varphi_b, \quad r_{lb}\varphi_b \quad (b)$$

Postide ühikpöördest $\psi_1=1$ tekivad geomeetriliselt määratud põhiskeemi lisasidemetes reaktsioonid r_{a1} , r_{b1} ja r_{l1} (joon. 19.16, *j*). Paindemomendi epüür on esitatud joonisel 19.16, *k*. Tegelikust pöördest ψ_1 põhjustatud reaktsioonid on järgmised:

$$r_{a1}\psi_1, \quad r_{b1}\psi_1, \quad r_{l1}\psi_1 \quad (c)$$

Koormusest põhjustatud reaktsioonid geomeetriliselt



Joon. 19.16

määratud põhiskeemi lisasidemetes (joon. 19.16, d) tähistatakse:

$$r_{ap}, \quad r_{bp}, \quad r_{fp} \quad (d)$$

Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 19.16, e.

Tegelikku paigutusolukorda viidud geomeetriselt määratud põhiskeem (joon. 19.16, c) töötab nagu lisasidemete staatikaga määramatu arvutuskeem ja selles tegelikus paigutusolukorras on summaarsed reaktsioonimomendid kõigis lisasidemetes, kuna neid lisasidemeid tegelikul arvutuskeemil ei ole, võrdsed nulliga:

$$r_{aa}\varphi_a + r_{ab}\varphi_b + r_{a1}\psi_1 + r_{ap} = 0 \quad (e)$$

$$r_{ba}\varphi_a + r_{bb}\varphi_b + r_{b1}\psi_1 + r_{bp} = 0$$

$$r_{1a}\varphi_a + r_{1b}\varphi_b + r_{11}\psi_1 + r_{1p} = 0 \quad (f)$$

Esimene võrrand on koostatud lisasideme *a* kohta: esimene liige on sõlme *a* pöördest φ_a , teine liige sõlme *b* pöördest φ_b , kolmas liige posti *a-b* pöördest ψ_1 ja viimane liige koormusest põhjustatud reaktsioon geomeetriselt määratud põhiskeemis. Teine ja kolmas võrrand on koostatud vastavalt lisasidemete *b* ja *l* kohta. Võrrandid (e), (f) on tasakaaluvõrrandid. Tundmatu φ_a kordajad r_{aa} , r_{ba} , r_{1a} on geomeetriselt määratud põhiskeemi sõlme *a* ühikpöördest $\varphi_a=1$ (joon. 19.16, f) põhjustatud reaktsioonid lisasidemetes:

$$r_{aa} = r_{aa}(a-d) + r_{aa}(a-b); \quad r_{ba} = r_{ab}(a-b);$$

$$r_{1a} = r_{a1}(a-d)$$

Reaktsioon r_{aa} on kahe momendi summa, kuna paigutusolukorras $\varphi_a=1$ on paindunud mõlemad sõlmes *a* jäigalt ühendatud vardad *a-d* ja *a-b*. Reaktsioon r_{ba} on ühe-liikmeline, sest paigutusolukorras $\varphi_a=1$ on sõlmes *b* jäigalt ühendatud varrastest paindunud ainult varras *b-a*. Lisatundmatute kordajate reaktsioonide kohta kehtib vastastikkus $r_{1a} = r_{a1}$. Paigutusolukorras $\psi_1=1$ on sõlmes *a* jäigalt ühendatud varrastest paindunud ainult varras *a-d*. Varras *a-b* on jäänud sirgeks. Reaktsioon $r_{1a} = r_{a1}$ koosneb vaadeldava raami puhul ühest liikmest.

Analoogiliselt paigutusolukorra $\varphi_b=1$ jaoks (joon. 19.16, h)

$$r_{bb} = r_{bb}(b-a) + r_{bb}(b-e) + r_{bb}(b-c)$$

$$r_{ab} = r_{ba}(a-b); \quad r_{1b} = r_{b1}(b-e)$$

Reaktsioon r_{11} koosneb kahest liikmest, sest paigutusolukorras $\psi_1=1$ on paindunud kaks varrast *a-d* ja *b-e* (joon. 19.16, j). Varras *c-f* on küll pöördunud, kuid on

jäänud sirgeks ja ei tekita seepärast reaktsiooni lisasidemetes I :

$$r_{11} = r_{11}(a-d) + r_{11}(b-e)$$

Koormusest põhjustatud momentide summad geomeetriselt määratud põhiskeemi lisasidemetes, kui $\varphi_a = 0$, $\varphi_b = 0$, $\psi_1 = 0$ (joon. 19.16, d), on võrrandite vabaliikmeteks:

$$\begin{aligned} r_{ap} &= M_{ap}(a-d) + M_{ap}(a-b); \\ r_{bp} &= M_{bp}(b-a) + M_{bp}(b-c) \\ r_{1p} &= M_{1p}(a-d) \end{aligned}$$

Pärast võrrandisüsteemi (e), (f) lahendamist leitakse valemitega (19.17) ja (19.33) paindemomendi epüüri ordinaadid

$$\begin{aligned} M_{ad} &= M_{ad,p} + 4i_{ad}\varphi_a - 6i_{ad}\psi_1 \\ M_{ab} &= M_{ab,p} + 4i_{ab}\varphi_a + 2i_{ab}\varphi_b \\ M_{ba} &= M_{ba,p} + 2i_{ab}\varphi_a + 4i_{ab}\varphi_b \\ M_{be} &= 0 + 3i_{be}\varphi_b - 3i_{be}\psi_1 \\ M_{bc} &= M_{bc,p} + 3i_{bc}\varphi_b \\ M_{da} &= M_{da,p} + 2i_{da}\varphi_a - 6i_{da}\psi_1 \end{aligned}$$

Põik- ja pikijõu epüüride ordinaadid arvutatakse sõlmede ja varraste tasakaalu tingimustest. Epüüre kontrollitakse tasakaalutingimustega.

Geomeetrisel määramatuse astmele $n^* = s_3 + \omega$ vastavalt saab koostada s_3 (e) tüüpi võrrandit sõlme pööret takistava sideme kohta ja ω (f) tüüpi võrrandit varda pööret takistava sideme kohta. Olgu sõlmede pööret takistavad sidemed tähistatud a, b, \dots, n , kusjuures nende sidemete arv on s_3 ja varraste pööret takistavad sidemed $1, 2, \dots, \omega$. Kanoonilised võrrandid on siis järgmised:

$$\begin{aligned} r_{aa}\varphi_a + r_{ab}\varphi_b + \dots + r_{an}\varphi_n + r_{a1}\psi_1 + \dots + r_{aw}\psi_w + r_{ap} &= 0 \\ r_{ba}\varphi_a + r_{bb}\varphi_b + \dots + r_{bn}\varphi_n + r_{b1}\psi_1 + \dots + r_{bw}\psi_w + r_{bp} &= 0 \\ \dots & \dots \end{aligned} \quad (19.39)$$

$$\begin{aligned} r_{na}\varphi_a + r_{nb}\varphi_b + \dots + r_{nn}\varphi_n + r_{n1}\psi_1 + \dots + r_{nw}\psi_w + r_{np} &= 0 \\ r_{1a}\varphi_a + r_{1b}\varphi_b + \dots + r_{1n}\varphi_n + r_{11}\psi_1 + \dots + r_{1w}\psi_w + r_{1p} &= 0 \\ \dots & \dots \end{aligned} \quad (19.40)$$

$$\dots \dots \dots r_{wa}\varphi_a + r_{wb}\varphi_b + \dots + r_{wn}\varphi_n + r_{w1}\psi_1 + \dots + r_{ww}\psi_w + r_{wp} = 0$$

Temperatuuri muutusest ja tugede paigutistest põhjustatud lisatundmatute leidmisel on võrrandisüsteemi (19.39), (19.40) vabaliikmeteks temperatuuri muutusest ja tugede paigutistest põhjustatud reaktsioonid geomeetriselt määratud põhiskeemi lisasidemetes.

Võrrandisüsteemi (19.39), (19.40) nimetatakse deformatsioonimeetodi kanoonilisteks võrranditeks ja esitatakse sageli ka järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n^*}Z_{n^*} + r_{1p} &= 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n^*}Z_{n^*} + r_{2p} &= 0 \\ \dots & \dots \\ r_{n^*1}Z_1 + r_{n^*2}Z_2 + \dots + r_{n^*n^*}Z_{n^*} + r_{n^*p} &= 0 \end{aligned} \quad (19.41)$$

Võrrandisüsteemis (19.41) on kõik lisatundmatud tähistatud tähega Z indeksiga $1, 2, \dots, n^*$.

Võrrandisüsteem (19.41) maatrikskujul on järgmine:

$$\mathbf{RZ} + \mathbf{R}_p = 0 \quad (19.42)$$

milles

$$\mathbf{R} = \|r_{kj}\| = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n^*} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n^*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n^*1} & r_{n^*2} & \dots & r_{n^*n^*} \end{vmatrix} \quad (19.43)$$

on kanoonilise võrrandisüsteemi tundmatute kordajate maatriks, mida nimetatakse jäikusmaatriksiks;

$$\mathbf{Z} = \{Z_1 \ Z_2 \ \dots \ Z_{n^*}\} \quad (19.44)$$

on tundmatute veergmaatriks (vektor);

$$\mathbf{R}_p = \{R_{1p} \ R_{2p} \ \dots \ R_{n^*p}\} \quad (19.45)$$

on võrrandisüsteemi vabaliikmete koormusest põhjustatud reaktsioonide veergmaatriks (vektor).

19.16. Kanooniliste võrrandite tundmatute kordajad

Staatikaga määramatu raami geomeetrisel määramatuse aste $n^* = s_3 + \omega$, milles s_3 tähistab raami vabade jäikade sõlmede $j = a, b, \dots, n$ arvu ja ω — raami vabadusastet. Lisatundmatuteks on vabade jäikade sõlmede pöörded φ_j ja varraste sõltumatud pöörded ψ_c . Geomeetriselt määratud põhiskeemi, milles on s_3 vaba jäiga sõlme

ja ω varda pöoret takistavat sidet, iga lisasideme kohta koostatakse momentide tasakaalu tingimus $R_j=0$, $R_c=0$. (19.39), (19.40):

$$r_{jj}\varphi_j + \sum_k r_{jk}\varphi_k + \sum_{c=1}^w r_{jc}\psi_c + r_{jp} = 0 \quad (19.46)$$

($j=a, b, \dots, n$; s_3 võrrandit)

$$\sum_j r_{cj}\varphi_j + \sum_{b=1}^w r_{cb}\psi_b + r_{cp} = 0 \quad (19.47)$$

($c=1, 2, \dots, w$; ω võrrandit)

milles

$$r_{jj} = 4 \sum_k i_{jk} + 3 \sum_l i_{jl} \quad (19.48)$$

$$r_{jk} = 2i_{jk} \quad (19.49)$$

$$r_{jc} = r_{cj} = -6 \sum_k i_{jk}\vartheta_{jk,c} - 3 \sum_l i_{jl}\vartheta_{jl,c} \quad (19.50)$$

$$r_{jp} = \sum_h M_{jh,p} + \sum_l M_{jl,p} \quad (19.51)$$

$$r_{cb} = 12 \sum_r i_r\vartheta_{rc}\vartheta_{rb} + 3 \sum_s i_s\vartheta_{sc}\vartheta_{sb} \quad (19.52)$$

$$r_{cp} = - \sum_r (M_{jp} + M_{kp} + S_{rc})\vartheta_{rc} - \sum_s (M_{jp} + S_{sc})\vartheta_{sc} - \sum_t S_{tc}\vartheta_{tc} - \sum_m T_m \quad (19.53)$$

Geomeetriliselt määratud põhiskeemi lisasidemes j tekivad momendid on põhjustatud sõlme j pöördest $r_{jj}\varphi_j$, naabersõlmede k pöoretest $\sum_k r_{jk}\varphi_k$, sõlmes j jäigalt kinnitatud varraste pöoretest $\sum_c r_{jc}\psi_c$ ja koormusest r_{jp} .

Lisasidemes j tekivad momendid ainult sõlmes j jäigalt kinnitatud varrastest.

Sõlme j pöördest φ_j võrra tekib moment $r_{jj}\varphi_j$, milles r_{jj} (19.48) on sõlme j ühikpöördest põhjustatud reaktsioon lisasidemes j :

$$r_{jj} = \sum_k 4i_{jk} + \sum_l 3i_{jl} = 4 \sum_k i_{jk} + 3 \sum_l i_{jl}$$

Valemis (19.48) summeeritakse niisuguste varraste jäikused, mis on sõlmes j jäigalt ühendatud, kusjuures i_{jk} on varda jäikus, mis ka naabersõlmes k on jäigalt ühendatud, ja i_{jl} on niisuguse varda jäikus, mis naabersõlmes on liigendiga kinnitatud. Reaktsioon r_{jj} koosneb nii mitmest liikmest, kui mitu varrast on sõlmes j jäigalt ühendatud.

Võrrandis (19.46) tähistab k sõlme j jäika naaber-

sõlme, kusjuures varras $j-k$ on mõlemas sõlmes jäigalt ühendatud. Jäiga naabersõlme k ühikpööre põhjustab sõlmes j momenti, mis leitakse valemiga (19.49):

$$r_{jk} = 2i_{jk}$$

Reaktsioon r_{jc} , mis tekib lisasidemes j paigutusolukorras $\psi_c=1$, arvutatakse valemiga (19.50):

$$r_{jc} = -6 \sum_k i_{jk}\vartheta_{jk,c} - 3 \sum_l i_{jl}\vartheta_{jl,c}$$

milles $\vartheta_{jk,c}$ on sõlmedes j ja k jäigalt ühendatud varda pööre paigutusolukorras $\psi_c=1$ ning $\vartheta_{jl,c}$ on sõlmes j jäigalt ja sõlmes l liigendiga ühendatud varda pööre paigutusolukorras $\psi_c=1$. Reaktsioon r_{jc} koosneb nii mitmest liikmest, kui mitu sõlmes j jäigalt ühendatud varrast on pöördunud paigutusolukorras $\psi_c=1$.

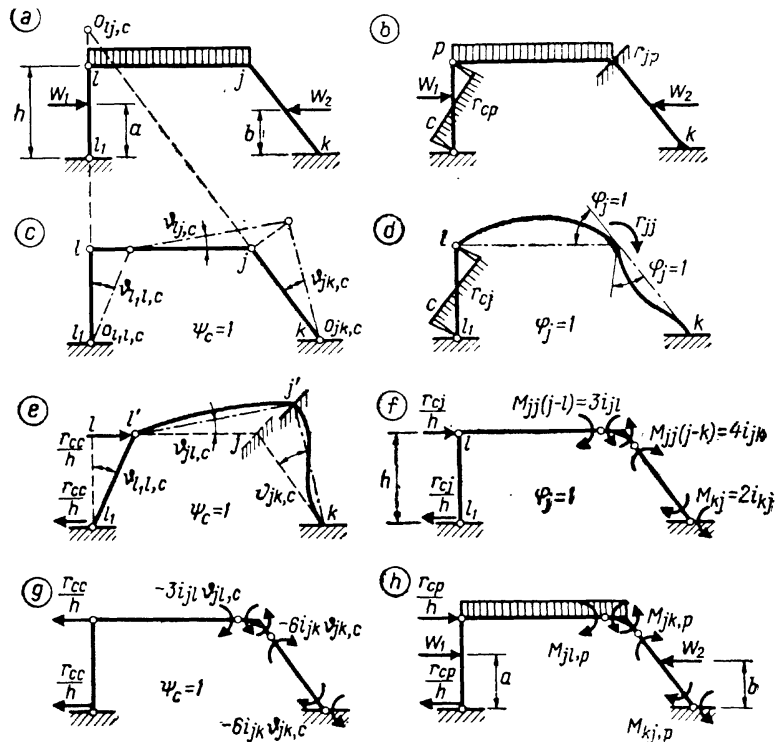
Sõlmes j jäigalt kinnitatud varrastele mõjuv koormus tekitab geomeetriliselt määratud põhiskeemi sidemes j momenti (19.51)

$$r_{jp} = \sum_c M_{jk,p} + \sum_l M_{jl,p}$$

milles momendid $M_{jk,p}$ ja $M_{jl,p}$ arvutatakse tabelites 19.1 ja 19.2 esitatud valemitega. Reaktsioon r_{jp} koosneb nii mitmest liikmest, kui mitu sõlmes j jäigalt kinnitatud varrast on koormatud.

Varraste pöoret takistavate sidemete kohta koostatud momentide tasakaalu võrrandites (19.47) esinevate reaktsioonide arvutusvalemid (19.52), (19.53), (19.54) tuleatakse võimalike paigutiste printsiibi alusel.

Vaba jäiga sõlme j pöördest $\varphi_j=1$ põhjustatud reaktsiooni r_{cj} leidmiseks varda pöoret takistavas sidemes c (joon. 19.17, *d*) eraldatakse jäigad sõlmed varrastest liigenditega. Paigutusolukorraga $\varphi_j=1$ ekvivalentse pingega deformatsiooniolukorra säilitamiseks rakendatakse sellele kinemaatilisele ketile välisjõududena iga jäiga sõlme ja varda vahele pandud liigendi juurde kaks vastupidi mõjuvat momenti (joon. 19.17, *f*) mis on ekvivalentset paigutusolukorras $\varphi_j=1$ varraste otstes tekkinud momentidega. Kinemaatilisele ketile rakendatud tasakaalus jõudude tööde summa võimalikel väikestel paigutistel on null. Võimalikud paigutised võetakse paigutusolukorras $\psi_c=1$ (joon. 19.17, *c* ja *e*). Sõlmele rakendatud momendid ei tee tööd, kuna paigutusolukorras $\psi_c=1$ sõl-



Joon. 19.17

med ei pöördi. Tööd teevad ainult sõlmes j jäigalt ühendatud ja paigutusolukorras $\psi_c=1$ pöördunud varrastele rakendatud momendid

$$r_{cj} \cdot 1 + M_{jj}(j-l) \vartheta_{jl,c} + [M_{jj}(j-k) + M_{hj}(j-k)] \vartheta_{jk,c} = 0 \quad (a)$$

Võrrandist (a) avaldatakse reaktsioon r_{cj} , kusjuures momendid väljendatakse varraste jäikuste kaudu (tabel 19.3, joon. 19.17, f):

$$r_{cj} = -(4i_{jk} + 2i_{jl}) \vartheta_{jk,c} - 3i_{jl} \vartheta_{jl,c} = -6i_{jk} \vartheta_{jk,c} - 3i_{jl} \vartheta_{jl,c} \quad (b)$$

Reaktsioon r_{cj} on momentide, mis on põhjustatud sõlme j ühikpöördest $\varphi_j=1$, summa varda pöret takistavas sidemes c .

Joonisel 19.17 kujutatud raamil on sõlmes j jäigalt

ühendatud kaks varrast. Kui sõlmes j on jäigalt ühendatud rohkem varraid, siis reaktsiooni arvutamisel summeeritakse kõigi nende varraste momentid, mille tulemusel saadakse valem (19.50):

$$r_{cj} = -6 \sum_k i_{jk} \vartheta_{jk,c} - 3 \sum_l i_{jl} \vartheta_{jl,c}$$

Reaktsioonimomendi r_{cc} arvutamiseks varda pöret takistavas sidemes c paigutusolukorras $\psi_c=1$ tuletatakse valem analoogiliselt. Paigutusolukorras $\psi_c=1$ tekkinud reaktsioonide (joon. 19.17, e ja g) töö võimalikel paigutistel $\psi_c=1$ (joon. 19.17, c ja e) on:

$$r_{cc} \cdot 1 + [M_{jc}(j-k) + M_{hc}(j-k)] \vartheta_{jk,c} + M_{jc}(j-l) \vartheta_{jl,c} = 0 \quad (c)$$

Võrrandist (c) avaldatakse reaktsioon r_{cc} , kusjuures momendid väljendatakse varraste jäikuste kaudu (tabel 19.3, joon. 19.17, g):

$$r_{cc} = (6i_{jk} \vartheta_{jk,c} + 6i_{jl} \vartheta_{jl,c}) \vartheta_{jk,c} + 3i_{jl} \vartheta_{jl,c} \vartheta_{jl,c} = 12i_{jk} \vartheta_{jk,c}^2 + 3i_{jl} \vartheta_{jl,c}^2 \quad (d)$$

Joonisel 19.17 kujutatud raamil on paigutusolukorras $\psi_c=1$ pöördunud kolm varrast. Vardal $l-l_1$ on mõlemas otsas liigendid ja tema pööre ei põhjusta reaktsiooni sidemes c . Seda põhjustavad vardad $j-l$ ja $j-k$. Kui arvutataval raamil on sõlmedes jäigalt ühendatud varraid paigutusolukorras $\psi_c=1$ pöördunud rohkem, siis reaktsioonid summeeritakse valemiga

$$r_{cc} = 12 \sum_r i_r \vartheta_{rc}^2 + 3 \sum_s i_s \vartheta_{sc}^2 \quad (19.54)$$

Valem reaktsioonimomendi r_{cb} ($w>1$) arvutamiseks tuletatakse analoogiliselt. Vaadeldakse paigutusolukorras $\psi_b=1$ tekkinud momentide võimalikku tööd paigutusolukorras $\psi_c=1$, mille tulemusel saadud võrrandist leitakse

$$r_{cb} = 12 \sum_r i_r \vartheta_{rc} \vartheta_{rb} + 3 \sum_s i_s \vartheta_{sc} \vartheta_{sb}$$

Valemities (19.52), (19.54) tähistab r mõlemas sõlmes jäigalt ühendatud varrast ning s — ühes otsas jäigalt ja teises otsas liigendiga kinnitatud varrast.

Reaktsioon r_{cc} koosneb nii mitmest liikmest, kui mitu r ja s varrast on pöördunud paigutusolukorras $\psi_c=1$.

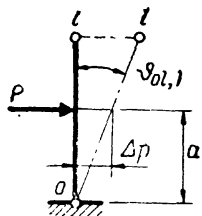
Valemist (19.52) järeldub, et reaktsioon r_{cb} koosneb nii mitmest liikmest, kui mitu samade indeksitega r ja s varrast on pöördunud paigutusolukordades $\psi_c=1$ ja $\psi_b=1$.

Geomeetriliselt määratud põhiskeemis koormusest põhjustatud reaktsiooni arvutamiseks varda pöört takistavas sidemes c tuleb võtta valem samuti võimalike paigutiste printsiibi alusel. Koormuse ja geomeetriliselt määratud põhiskeemi reaktsioonide (joon. 19.17, b ja h) tööde summa võimalikus paigutusolukorras $\psi_c=1$ võrdub nulliga:

$$r_{cp} \cdot 1 + [M_{jp}(j-k) + M_{kp}(j-k) + S_{jk,c}] \vartheta_{jk,c} + [M_{jp}(j-l) + S_{jl,c}] \vartheta_{jl,c} + S_{l,l,c} \vartheta_{l,l,c} = 0 \quad (e)$$

milles $S_{jk,c}$, $S_{jl,c}$ ja $S_{l,l,c}$ on vastavalt varrastele $j-k$, $j-l$ ja $l-l$ rakendatud koormuse staatilised momendid nende varraste hetkpooluste $O_{jk,c}$, $O_{jl,c}$ ja $O_{l,l,c}$ suhtes paigutusolukorras $\psi_c=1$. Vardale rakendatud koormuse staatiline moment paigutusolukorras $\psi_c=1$ varda peapooluse suhtes, korrutatuna sama paigutusolukorra varda pöördega, väljendab koormuse tööd võimalikus paigutusolukorras $\psi_c=1$ (joon. 19.18):

$$T_p = P \Delta p = P a \cdot \vartheta_{ol,1} = S \vartheta_{ol,1} \quad (f)$$



Joon. 19.18

Koormuse staatiline moment hetkpooluse suhtes päripäeva on positiivne ja vastupäeva — negatiivne.

Võrrandist (e) avaldatakse reaktsioon sidemes c

$$r_{cp} = -[M_{jp}(j-k) + M_{kp}(j-k) + S_{jk,c}] \vartheta_{jk,c} - [M_{jp}(j-l) + S_{jl,c}] \vartheta_{jl,c} - S_{l,l,c} \vartheta_{l,l,c} \quad (g)$$

Suurema varraste arvuga raami puhul liidetakse kõik koormuse poolt põhjustatud võimalikud tööd paigutusolukorras $\psi_c=1$ ja saadud võrrandist avaldatakse reaktsioon varda pöört takistavas sidemes c (19.53):

$$r_{cp} = - \sum_r (M_{jp} + M_{kp} + S_{rc}) \vartheta_{rc} - \sum_s (M_{jp} + S_{sc}) \vartheta_{sc} - \sum_t S_{tc} \vartheta_{tc} - \sum_m T_m$$

milles r tähistab mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varrast, s — ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga ühendatud varrast ning t — mõlemas otsas liigendiga kinnitatud varrast; T_m — niisugusele vardale, mis ei pöördu, kuid siirdub paigutusolukorras $\psi_c=1$ (näiteks teise ja kolmanda korruse postid joonisel 19.10, d), rakendatud koormuse töö paigutusolukorras $\psi_c=1$.

19.17. Sisejõudude epüürid ja nende kontroll

Võrrandisüsteemi (19.46), (19.47) lahendamiseiga leitakse lisatundmatud vabade jäikade sõlmede pöörded φ_j ja varraste pöörded määravad geomeetrilised parameetrid ψ_c .

Varraste pöörded arvutatakse valemiga (19.4):

$$\vartheta_r = \sum_{c=1}^r \vartheta_{rc} \psi_c; \quad \vartheta_s = \sum_{c=1}^w \vartheta_{sc} \psi_c$$

Paindemomendid arvutatakse pärast lisatundmatute leidmist valemitega (19.17) ja (19.18):

$$M_{jk} = M_{jp} + 4i_{jk} \varphi_j + 2i_{jk} \varphi_k - 6i_{jk} \sum_{c=1}^w \vartheta_{jk,c} \psi_c \quad (19.55)$$

$$M_{kj} = M_{kp} + 2i_{jk} \varphi_j + 4i_{jk} \varphi_k - 6i_{jk} \sum_{c=1}^w \vartheta_{jk,c} \psi_c$$

$$M_{jl} = M_{jp} + 3i_{jl} \varphi_j - 3i_{jl} \sum_{c=1}^w \vartheta_{jl,c} \psi_c \quad (19.56)$$

Põikjõud arvutatakse varraste tasakaalu tingimustest paindemomendi epüüri ordinaatide abil valemitega (19.18), (19.34):

$$Q_{jk} = Q_{jp}^0 - (M_j + M_k) / l_{jk}$$

$$Q_{kj} = Q_{kp}^0 - (M_j + M_k) / l_{jk}$$

$$Q_{jl} = Q_{jp}^0 - M_j / l_{jl}; \quad Q_{lj} = Q_{lp}^0 - M_j / l_{jl}$$

või lisatundmatute kaudu valemitega (19.19), (19.35):

$$Q_{jk} = Q_{jp} - (6i_{jk}/l_{jk}) (\varphi_j + \varphi_k) + (12i_{jk}/l_{jk}) \sum_{c=1}^w \vartheta_{jk,c} \psi_c \quad (19.57)$$

$$Q_{hj} = Q_{kp} - (6i_{jk}/l_{jk}) (\varphi_j + \varphi_k) + (12i_{jk}/l_{jk}) \sum_{c=1}^w \vartheta_{jk,c} \psi_c$$

$$Q_{jl} = Q_{jp} - (3i_{jl}/l_{jl}) (\varphi_j - \sum_{c=1}^w \vartheta_{jl,c} \psi_c) \quad (19.58)$$

$$Q_{lj} = Q_{lp} - (3i_{jl}/l_{jl}) (\varphi_j - \sum_{c=1}^w \vartheta_{jl,c} \psi_c)$$

Pikijõud varrastes arvutatakse pärast põikjõudude leidmist sõlmede kohta koostatud tasakaalutingimustest.

Epüüride õigsust kontrollitakse tasakaalutingimustega: nii iga sõlm ja varras kui ka arvutuskeem tervikuna peavad rahuldama tasakaalutingimusi $\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$ ja $\Sigma M=0$.

Paindemomendi epüüri kontrollitakse ka analoogiliselt jõumeetodiga raamide lahendamise kontrollile. Raamist eemaldatakse n liigsidet. Ühe eemaldatud liigsidelele vastavast üldistatud ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüüri ja deformatsioonimeetodiga leitud paindemomendi epüüri M_p redutseeritud ordinaatide korrutiste integraalide summa peab, vastavalt geomeetrilistele pidevustingimustele, võrduma nulliga.

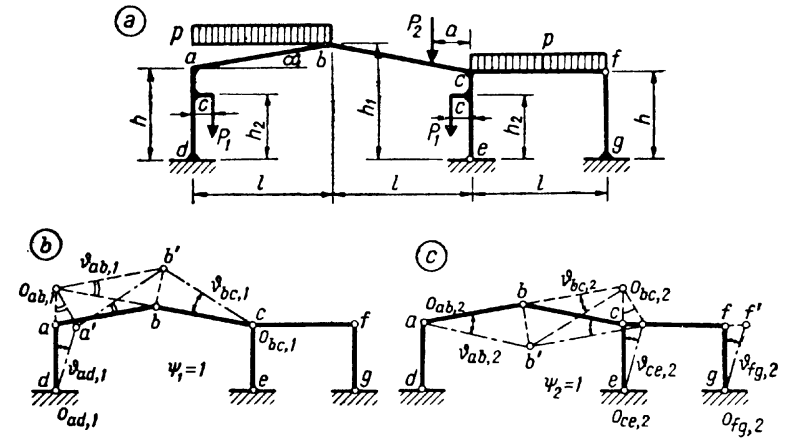
19.18. Raami arvutuse näide

Näide 19.1. Koostada joonisel 19.19, *a* kujutatud raami paindemomendi, põik- ja pikijõu epüürid.

Geomeetrilised andmed: vasakpoolse löövi sille $2l=12$ m, parempoolse löövi sille $l=6$ m, vasakpoolse löövi katuseharja kõrgus $h_1=5$ m, postide kõrgus $h=4$ m, $a=1,5$ m, $c=0,8$ m; konsooli kõrgus maast $h_2=3$ m.

Varraste jäikused $i=EI/l$ tm: $i_{ad}=2$; $i_{ab}=i_{bc}=5$, $i_{ce}=3$, $i_{fg}=4$, $i_{fg}=1$.

Koormus: $p=2$ t/m, $P_1=5$ t, $P_2=8$ t, $W=1$ t.



Joon. 19.19

Geomeetrilise määramatuse aste. Vabade jäikade sõlmede arv $s_3=3$, liigendsõlmede arv $s_2=2$, varraste arv $v=6$ ja liigendtugede toesidemete arv $t=2$. Raami vabadusaste

$$w = 2s - v - t = 2 \cdot 5 - 6 - 2 = 2$$

Varrasahela (joon. 19.19, *b, c*) vabadusaste

$$w = 2s - v - t = 2 \cdot 7 - 6 - 6 = 2$$

Raami geomeetrilise määramatuse aste on

$$n^* = s_3 + w = 3 + 2 = 5$$

Lisatundmatuteks on sõlmede a, b, c pöörded $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$ ja geomeetrilised parameetrid ψ_1, ψ_2 , mis määravad varraste pöörded.

Varraste pöörded. Paigutusolukord $\psi_1=1$ (joon. 19.19, *b*):

$$\begin{aligned} \vartheta_{ad,1} &= 1; & \vartheta_{ce,1} &= \vartheta_{cf,1} = \vartheta_{fg,1} = 0 \\ \vartheta_{ab,1} &= -\vartheta_{ad,1}(a-d)/(a-o_{ab,1}) = -1 \cdot 4/2 = -2 \\ \vartheta_{bc,1} &= -\vartheta_{ab,1}(b-o_{ab,1})/(b-c) = 2(6/\cos \alpha)/(6/\cos \alpha) = 2 \end{aligned}$$

Paigutusolukord $\psi_2=1$ (joon. 19.19, *c*)

$$\begin{aligned} \vartheta_{fg,2} &= 1; & \vartheta_{ad,2} &= \vartheta_{cf,2} = 0; & \vartheta_{ce,2} &= \vartheta_{fg,2} = 1 \\ \vartheta_{bc,2} &= -\vartheta_{ce,2}(e-c)/(c-o_{bc,2}) = -1 \cdot 4/2 = -2 \\ \vartheta_{ab,2} &= -\vartheta_{bc,2}(b-o_{bc,2})/(b-a) = 2(6/\cos \alpha)/(6/\cos \alpha) = 2 \end{aligned}$$

Ühikpaigutistest põhjustatud reaktsioonid:

$$\begin{aligned} r_{aa} &= 4(i_{ad} + i_{ab}) = 4(2+5) = 28 \text{ tm} \\ r_{ab} &= r_{ba} = 2i_{ab} = 2 \cdot 5 = 10 \text{ tm} \\ r_{bb} &= 4(i_{ab} + i_{bc}) = 4(5+5) = 40 \text{ tm} \\ r_{bc} &= r_{cb} = 2i_{bc} = 2 \cdot 5 = 10 \text{ tm} \\ r_{cc} &= 4i_{ce} + 3(i_{ce} + i_{cf}) = 4 \cdot 5 + 3(3+4) = 41 \text{ tm} \\ r_{a1} &= r_{1a} = -6(i_{ad}\vartheta_{ad,1} + i_{ab}\vartheta_{ab,1}) = -6 \cdot [2 \cdot 1 + 5(-2)] = 48 \text{ tm} \\ r_{b1} &= r_{1b} = -6(i_{ab}\vartheta_{ab,1} + i_{bc}\vartheta_{bc,1}) = -6[5(-2) + 5 \cdot 2] = 0 \text{ tm} \\ r_{c1} &= r_{1c} = -6i_{bc}\vartheta_{bc,1} = -6 \cdot 5 \cdot 2 = -60 \text{ tm} \\ r_{a2} &= r_{2a} = -6i_{ab}\vartheta_{ab,2} = -6 \cdot 5 \cdot 2 = -60 \text{ tm} \end{aligned}$$

$$r_{b2} = r_{2b} = -6(i_{ab}\vartheta_{ab,2} + i_{bc}\vartheta_{bc,2}) = -6[5 \cdot 2 + 5(-2)] = 0 \text{ tm}$$

$$r_{c2} = r_{2c} = -6i_{bc}\vartheta_{bc,2} - 3i_{ce}\vartheta_{ce,2} = -6 \cdot 5(-2) - 3 \cdot 3 \cdot 1 = 51 \text{ tm}$$

$$r_{11} = 12(i_{ad}\vartheta_{ad,1}^2 + i_{ab}\vartheta_{ab,1}^2 + i_{bc}\vartheta_{bc,1}^2) = 12[2 \cdot 1^2 + 5(-2)^2 + 5 \cdot 2^2] = 504 \text{ tm}$$

$$r_{12} = r_{21} = 12(i_{ab}\vartheta_{ab,1}\vartheta_{ab,2} + i_{bc}\vartheta_{bc,1}\vartheta_{bc,2}) = 12[5(-2) \cdot 2 + 5 \cdot 2(-2)] = -480 \text{ tm}$$

$$r_{22} = 12(i_{ab}\vartheta_{ab,2}^2 + i_{bc}\vartheta_{bc,2}^2) + 3(i_{ce}\vartheta_{ce,2}^2 + i_{fg}\vartheta_{fg,2}^2) = 12[5 \cdot 2^2 + 5(-2)^2] + 3(3 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2) = 492 \text{ tm}$$

Kinnitustmomendid geomeetriliselt määratud põhiskeemis:

$$M_{da,p} = P_1 c \eta (2 - 3\eta) = 5 \cdot 0,8 \cdot 0,25 (2 - 3 \cdot 0,25) = 1,25 \text{ tm}$$

$$M_{ad,p} = P_1 c \xi (2 - 3\xi) = 5 \cdot 0,8 \cdot 0,75 (2 - 3 \cdot 0,75) = -0,75 \text{ tm}$$

$$M_{ab,p} = -pl^2/12 = -2 \cdot 6/12 = -6 \text{ tm}$$

$$M_{ba,p} = pl^2/12 = 2 \cdot 6^2/12 = 6 \text{ tm}$$

$$M_{bc,p} = -P_2 l \xi \eta^2 = -8 \cdot 6 \cdot 0,75 \cdot 0,25^2 = -2,25 \text{ tm}$$

$$M_{cb,p} = P_2 l \xi^2 \eta = 8 \cdot 6 \cdot 0,75^2 \cdot 0,25 = 6,75 \text{ tm}$$

$$M_{ce,p} = \frac{1}{2} M (1 - 3\eta^2) = \frac{1}{2} (-5 \cdot 0,8) (1 - 3 \cdot 0,75^2) = 1,375 \text{ tm}$$

$$M_{cf,p} = -pl^2/8 = -2 \cdot 6^2/8 = -9 \text{ tm}$$

$$M_{gf,p} = 0$$

Koormusliikmed:

$$r_{ap} = M_{ad,p} + M_{ab,p} = -0,75 - 6 = -6,75 \text{ tm}$$

$$r_{bp} = M_{ba,p} + M_{bc,p} = 6 - 2,25 = 3,75 \text{ tm}$$

$$r_{cp} = M_{cb,p} + M_{ce,p} + M_{cf,p} = 6,75 + 1,375 - 9 = -0,875 \text{ tm}$$

$$r_{1p} = -(M_{da,p} + M_{ad,p} + S_{da,1})\vartheta_{da,1} - (M_{ab,p} + M_{ba,p} + S_{ab,1})\vartheta_{ab,1} - (M_{bc,1} + M_{cb,1} + S_{bc,1})\vartheta_{bc,1} = -(1,25 - 0,75 + 5 \cdot 0,8) \cdot 1 - (-6 + 6 + 2 \cdot 6 \cdot 3) \cdot (-2) - (-2,25 + 6,75 - 8 \cdot 1,5) \cdot 2 = 82,5 \text{ tm}$$

$$r_{2p} = -(M_{ab,p} + M_{ba,p} + S_{ab,2})\vartheta_{ab,2} - (M_{bc,2} + M_{cb,2} + S_{bc,2})\vartheta_{bc,2} - (M_{ce,2} + S_{ce,2})\vartheta_{ce,2} - S_{fg,2}\vartheta_{fg,2} = -(-6 + 6 + 2 \cdot 6 \cdot 3) \cdot 2 - (-2,25 + 6,75 - 8 \cdot 1,5) \cdot (-2) - (1,375 - 5 \cdot 0,8) \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot 1 = -88,375 \text{ tm}$$

Kanoonilised võrrandid on järgmised:

$$r_{aa}\varphi_a + r_{ab}\varphi_b + r_{a1}\psi_1 + r_{a2}\psi_2 + r_{ap} = 0$$

$$r_{ba}\varphi_a + r_{bb}\varphi_b + r_{bc}\varphi_c + r_{b1}\psi_1 + r_{b2}\psi_2 + r_{bp} = 0$$

$$r_{ca}\varphi_a + r_{cb}\varphi_b + r_{cc}\varphi_c + r_{c1}\psi_1 + r_{c2}\psi_2 + r_{cp} = 0$$

$$r_{1a}\varphi_a + r_{1b}\varphi_b + r_{1c}\varphi_c + r_{11}\psi_1 + r_{12}\psi_2 + r_{1p} = 0$$

$$r_{2a}\varphi_a + r_{2b}\varphi_b + r_{2c}\varphi_c + r_{21}\psi_1 + r_{22}\psi_2 + r_{2p} = 0$$

või arvkoordajatega

$$28\varphi_a + 10\varphi_b + 48\psi_1 - 60\psi_2 - 6,750 = 0$$

$$10\varphi_a + 40\varphi_b + 10\varphi_c + 3,750 = 0$$

$$10\varphi_b + 41\varphi_c - 60\psi_1 + 51\psi_2 - 0,875 = 0$$

$$48\varphi_a - 60\varphi_c + 504\psi_1 - 480\psi_2 + 82,500 = 0$$

$$-60\varphi_a + 51\varphi_c - 480\psi_1 + 492\psi_2 - 88,375 = 0$$

Võrrandisüsteemi lahendamisel leitakse lisatundmatud:

$$\varphi_a = 1,30877; \quad \varphi_b = -0,36154; \quad \varphi_c = -0,23759; \quad \psi_1 = 0,42220$$

$$\psi_2 = 0,77576$$

Paindemomendid arvutatakse valemitega (19.55), (19.56)

$$M_{da} = M_{da,p} + 2i_{da}\varphi_a - 6i_{da}\vartheta_{da,1}\psi_1 = 1,25 + 2 \cdot 2 \cdot 1,30877 - 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0,42220 = 1,419 \text{ tm}$$

$$M_{ad} = M_{ad,p} + 4i_{da}\varphi_a - 6i_{da}\vartheta_{da,1}\psi_1 = -0,75 + 4 \cdot 2 \cdot 1,30877 - 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0,42220 = 4,654 \text{ tm}$$

$$M_{ab} = M_{ab,p} + 4i_{ab}\varphi_a + 2i_{ab}\varphi_b - 6i_{ab}(\vartheta_{ab,1}\psi_1 + \vartheta_{ab,2}\psi_2) = -6,0 + 4 \cdot 5 \cdot 1,30877 + 2 \cdot 5(-0,36154) - 6 \cdot 5(-2 \cdot 0,42220 + 2 \cdot 0,77576) = -4,654 \text{ tm}$$

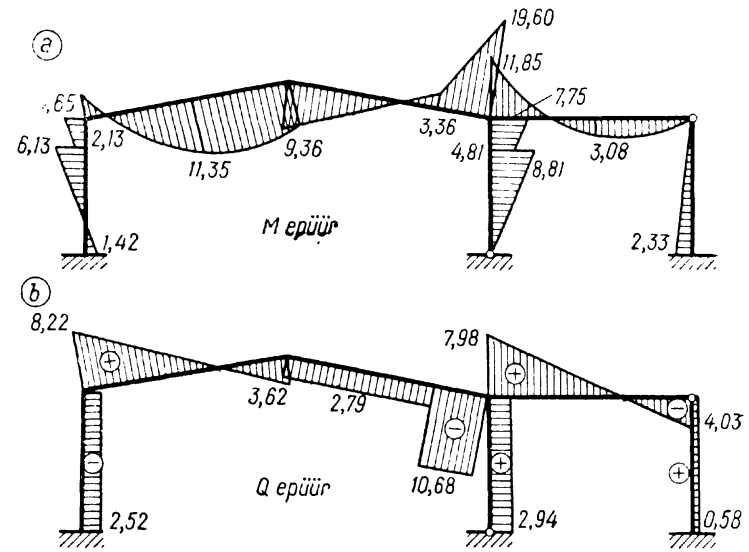
$$\text{Kontroll: } M_{ad} + M_{ab} = 4,654 - 4,654 = 0,000$$

$$M_{ba} = M_{ba,p} + 2i_{ab}\varphi_a + 4i_{ab}\varphi_b - 6i_{ab}(\vartheta_{ab,1}\psi_1 + \vartheta_{ab,2}\psi_2) = 6 + 2 \cdot 5 \cdot 1,30877 + 4 \cdot 5(-0,36154) - 6 \cdot 5(-2 \cdot 0,42220 + 2 \cdot 0,77576) = -9,357 \text{ tm}$$

$$M_{bc} = M_{bc,p} + 4i_{bc}\varphi_b + 2i_{bc}\varphi_c - 6i_{bc}(\vartheta_{bc,1}\psi_1 + \vartheta_{bc,2}\psi_2) = -2,25 + 4 \cdot 5(-0,36154) + 2 \cdot 5(-0,23759) - 6 \cdot 5(2 \cdot 0,42220 - 2 \cdot 0,77576) = 9,357 \text{ tm}$$

$$\text{Kontroll: } M_{ba} + M_{bc} = -9,357 + 9,357 = 0,000$$

$$M_{cb} = M_{cb,p} + 2i_{bc}\varphi_b + 4i_{bc}\varphi_c - 6i_{bc}(\vartheta_{bc,1}\psi_1 + \vartheta_{bc,2}\psi_2) = 6,75 + 2 \cdot 5(-0,36154) + 4 \cdot 5(-0,23759) - 6 \cdot 5(2 \cdot 0,42220 - 2 \cdot 0,77576) = 19,596 \text{ tm}$$



Joon. 19.20

$$M_{ce} = M_{ce,p} + 3i_{ce}\varphi_c - 3i_{ce}\vartheta_{ce,2}\psi_2 = 1,375 + 3 \cdot 3(-0,23759) - 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0,77576 = -7,745 \text{ tm}$$

$$M_{cf} = M_{cf,p} + 3i_{cf}\varphi_c = -9 + 3 \cdot 4(-0,23759) = -11,851 \text{ tm}$$

$$\text{Kontroll: } M_{cb} + M_{ce} + M_{cf} = 19,596 - 7,745 - 11,851 = 0,000$$

$$M_{gf} = M_{gf,p} - 3i_{fg}\vartheta_{fg,2}\psi_2 = 0 - 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,77576 = -2,327 \text{ tm}$$

Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 19.20, a.

Põikjõud varraste otses arvutatakse paindemomentide kaudu valemitega (19.18), (19.34) või lisatundmatute abil valemitega (19.57) (19.58):

$$Q_{da} = Q_{ad} = Q_{da}^0 - (M_{da} + M_{ad})/l_{ad} = -5 \cdot 0,8/4 - (1,419 + 4,654)/4 = -2,518 \text{ t}$$

$$Q_{ec} = Q_{ce} = Q_{ec}^0 - M_{ce}/l_{ce} = 5 \cdot 0,8/4 + 7,745/4 = 2,936 \text{ t}$$

$$Q_{gf} = Q_{fg} = Q_{gf}^0 - M_{gf}/l_{gf} = 2,327/4 = 0,582 \text{ t}$$

$$Q_{ab} = Q_{ab}^0 - (M_{ab} + M_{ba})/l_{ab} = 2 \cdot 6 \cdot 0,9864/2 + (4,654 + 9,357)/6,083 = 8,222 \text{ t}$$

$$Q_{ba} = Q_{ba}^0 - (M_{ab} + M_{ba})/l_{ab} = -2 \cdot 6 \cdot 0,9864/2 + (4,654 + 9,357)/6,083 = -3,615 \text{ t}$$

$$Q_{bc} = Q_{bc}^0 - (M_{bc} + M_{cb})/l_{bc} = 2 \cdot 0,9864 - (9,357 + 19,596)/6,083 = -2,787 \text{ t}$$

$$Q_{cb} = Q_{cb}^0 - (M_{bc} + M_{cb})/l_{bc} = -6 \cdot 0,9864 - (9,357 + 19,596)/6,083 = -10,678 \text{ t}$$

$$Q_{cf} = Q_{cf}^0 - M_{cf}/l = 2 \cdot 6/2 + 11,851/6 = 7,975 \text{ t}$$

$$Q_{fc} = Q_{fc}^0 - M_{cf}/l = -2 \cdot 6/2 + 11,851/6 = -4,025 \text{ t}$$

Lisatundmatute kaudu valemitega (19.57) arvutatakse põikjõud ainult vardas b-c:

$$Q_{bc} = Q_{bc,p} - 6(i_{bc}/l_{bc})(\varphi_b + \varphi_c) + 12(i_{bc}/l_{bc})(\vartheta_{bc,1}\psi_1 + \vartheta_{bc,2}\psi_2) = 2 \cdot 0,9864 + (2,25 - 6,75)/6,083 - 6(5/6,083)(-0,36154 - 0,23759) + 12(5/6,083)(2 \cdot 0,42220 - 2 \cdot 0,77576) = -2,787 \text{ t}$$

$$Q_{cb} = -6 \cdot 0,9864 + (2,25 - 6,75)/6,083 - 6(5/6,083)(-0,36154 - 0,23759) + 12(5/6,083)(2 \cdot 0,42220 - 2 \cdot 0,77576) = -10,678 \text{ t}$$

Saadud tulemused ühtivad paindemomentide kaudu arvutatud põikjõududega. Arvutuste võrdlusest järeldub, et paindemomentide kaudu on põikjõude leidmine lihtsam.

Põikjõu epüür on esitatud joonisel 19.20, b.

Pikijõud leitakse sõlmede kohta kirjutatud tasakaalutingimustest.

Sõlme a (joon. 19.21, a) tasakaalu tingimustest

$$\Sigma X = 0: N_{ab} \cos \alpha + Q_{ab} \sin \alpha - Q_{ad} = 0$$

$$\Sigma u = 0: -N_{ad} \cos \alpha + Q_{ad} \sin \alpha - Q_{ab} = 0$$

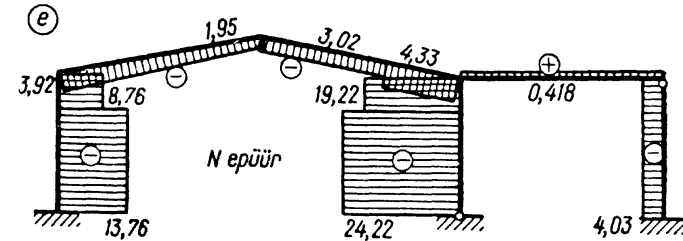
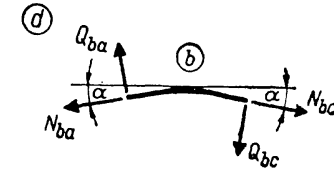
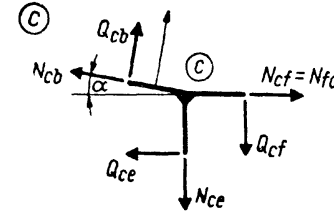
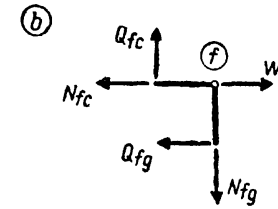
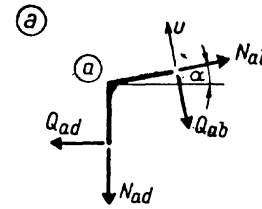
leitakse pikijõud

$$N_{ab} = -Q_{ab} \operatorname{tg} \alpha + Q_{ad} / \cos \alpha = -8,222/6 - 2,518/0,9864 = -3,923 \text{ t}$$

$$N_{ad} = Q_{ad} \operatorname{tg} \alpha - Q_{ab} / \cos \alpha = -2,518/6 - 8,222/0,9864 = -8,755 \text{ t}$$

$$N_{da} = N_{ad} - P_1 = -8,755 - 5,0 = -13,755 \text{ t}$$

$$N_{ba} = N_{ab} + p l \sin \alpha = -3,923 + 2 \cdot 6 \cdot 0,1644 = -1,950 \text{ t}$$



Joon. 19.21

Sõlme f (joon. 19.21, b) tasakaalu tingimustest

$$\Sigma X = 0: W - N_{fc} - Q_{fg} = 0 \text{ ja } \Sigma Y = 0: Q_{fc} - N_{fg} = 0$$

leitakse pikijõud

$$N_{fc} = W - Q_{fg} = 1 - 0,582 = 0,418 \text{ t}$$

$$N_{fg} = Q_{fc} = -4,025 \text{ t}$$

Sõlme c (joon. 19.21, c) tasakaalu tingimustest

$$\Sigma X = 0: -N_{cb} \cos \alpha + Q_{cb} \sin \alpha - Q_{ce} + N_{cf} = 0$$

$$\Sigma v = 0: -N_{ce} \cos \alpha + Q_{ce} \sin \alpha - Q_{cf} \cos \alpha + N_{cf} \sin \alpha + Q_{cb} = 0$$

leitakse pikijõud:

$$N_{cb} = Q_{cb} \operatorname{tg} \alpha + (N_{cf} - Q_{ce}) / \cos \alpha = -10,678/6 + (0,418 - 2,936)/0,9864 = -4,332 \text{ t}$$

$$N_{ce} = -Q_{ce} \operatorname{tg} \alpha - Q_{cf} + N_{cf} \operatorname{tg} \alpha + Q_{cb} / \cos \alpha = -2,936/6 - 7,975 + 0,418/6 - 10,678/0,9864 = -19,220 \text{ t}$$

Pikijõud:

$$N_{bc} = N_{cb} + P_2 \sin \alpha = -4,332 + 8 \cdot 0,1644 = -3,017 \text{ t}$$

$$N_{ec} = N_{ce} - P_1 = -19,220 - 5,0 = -24,220 \text{ t}$$

Sõlme b (joon. 19.21, d) kohta kirjutatud tasakaalutingimused $\Sigma X=0$ ja $\Sigma Y=0$ on kontrolliks:

$$\begin{aligned} (N_{bc} - N_{ba}) \cos \alpha - (Q_{bc} + Q_{ba}) \sin \alpha &= \\ = (-3,017 + 1,950) \cdot 0,9864 - (-2,787 - 3,615) \cdot 0,1644 &= \\ = -1,052 + 1,052 = 0,000 & \\ (Q_{ba} - Q_{bc}) \cos \alpha - (N_{ba} + N_{bc}) \sin \alpha &= \\ = (-3,615 + 2,787) \cdot 0,9864 + (1,950 + 3,017) \cdot 0,1644 &= \\ = -0,817 + 0,817 = 0,000 & \end{aligned}$$

Pikijõu epüür on esitatud joonisel 19.21, e . Kontroll. Lisaks sõlmede tasakaalu tingimuste rahuldamisele peavad olema rahuldatud ka kogu koormuse ja toereaktsioonide tasakaalu tingimused:

$$\begin{aligned} \Sigma X=0: -Q_{aa} - Q_{ec} - Q_{gf} + W &= 2,518 - 2,936 - 0,582 + 1 = \\ &= 0,000 \\ \Sigma Y=0: -N_{aa} - N_{ec} - N_{gf} - 2P_1 - 2pl - P_2 &= \\ &= 13,755 + 24,220 + 4,025 - 10 - 24 - 8 = 0,000 \\ \Sigma M_e=0: M_a + M_g - N_{aa} \cdot 2l + N_{gf}l - P_1(2l - c) - P_1c - & \\ - (3/2)pl^2 - P_2a + pl^2/2 + Wh &= 1,419 - 2,327 + \\ + 13,755 \cdot 12 - 4,025 \cdot 6 - 5(12 - 0,8) - 5 \cdot 0,8 - & \\ - (3/2) \cdot 2 \cdot 6^2 - 8 \cdot 1,5 + 2 \cdot 6^2/2 + 1 \cdot 4 &= \\ = 206,479 - 206,477 = 0,002 \approx 0 & \end{aligned}$$

19.2. Jätkuvtala

19.2.1. Liigend-ääretagedega jätkuvtala

Jätkuvtala arvutamisel jõumeetodiga on lisatundmatuteks toemomendid. Staatikalise määramatuse aste on ühe võrra väiksem sillete arvust:

$$n = m - 1 \quad (a)$$

milles m on sillete arv. Jätkuvtala arvutamisel deformatsioonimeetodiga on lisatundmatuteks toeristlõigete (sõlmede) pöörded. Geomeetrilise määramatuse aste on samuti ühe võrra väiksem sillete arvust:

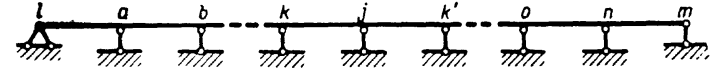
$$n^* = m - 1 \quad (b)$$

Esimese lisasideme a ja viimase lisasideme b (joon. 19.22) jaoks on võrrandid järgmised:

$$r_{aa}\varphi_a + r_{ab}\varphi_b + r_{ap} = 0; \quad r_{no}\varphi_o + r_{nn}\varphi_n + r_{np} = 0 \quad (19.59)$$

milles

$$\begin{aligned} r_{aa} &= 3i_{al} + 4i_{ab}; & r_{nn} &= 4i_{no} + 3i_{nm} \\ r_{ab} &= 2i_{ab}; & r_{no} &= 2i_{no} \end{aligned} \quad (19.60)$$



Joon. 19.22

Vahepealse lisasideme $j=b, c, \dots, o$ kohta koostatud võrrand omab kuju:

$$r_{jk}\varphi_k + r_{jj}\varphi_j + r_{jk'}\varphi_{k'} + r_{jp} = 0 \quad (19.61)$$

milles φ_k ja $\varphi_{k'}$ on toe j naaberristlõigete pöörded.

Ühikpööretest põhjustatud reaktsioonid on:

$$r_{jj} = 4(i_{jk} + i_{jk'}); \quad r_{jk} = 2i_{jk}; \quad r_{jk'} = 2i_{jk'} \quad (19.62)$$

Võrrandite (19.59), (19.61) vabaliikmed on järgmised:

$$\begin{aligned} r_{ap} &= M_{al,p} + M_{ab,p}; & r_{np} &= M_{no,p} + M_{nm,p}; \\ r_{jp} &= M_{jk,p} + M_{jk',p} \end{aligned} \quad (19.63)$$

milles koormusest põhjustatud kinnitusmomendid $M_{jk,p}$ arvutatakse tabelites 19.1 ja 19.2 esitatud valemitega.

Paindemomendid ja põikjõud leitakse nagu raamis, mille vardad ei pöördu.

19.2.2. Jäikade ääretagedega jätkuvtala

Jäikade ääretagedega jätkuvtala staatikalise määramatuse aste on ühe võrra suurem sillete arvust:

$$n = m + 1 \quad (c)$$

kuid geomeetrilise määramatuse aste on sama kui liigend-tagedega talal:

$$n^* = m - 1 \quad (d)$$

sest äärmiste tugede pöörded on nullid: $\varphi_r = 0, \varphi_m = 0$ (joon. 19.23).

Esimene võrrand toeristlõike a ja viimane võrrand toe-



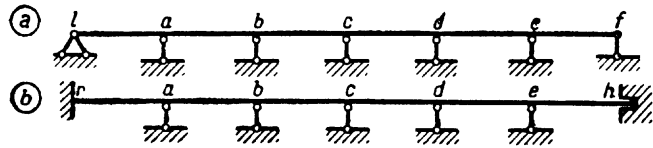
Joon. 19.23

ristlõike n jaoks on samad kui liigend-ääretudega talal (19.59), kuid reaktsioonid nendes võrrandites arvutatakse valemitega

$$\begin{aligned} r_{aa} &= 4(i_{ar} + i_{ab}); & r_{nn} &= 4(i_{no} + i_{nm}) \\ r_{ab} &= 2i_{ab}; & r_{no} &= 2i_{no} \end{aligned} \quad (19.64)$$

Vahepealsete toeristlõigete jaoks on võrrandid ja reaktsioonid samad kui liigend-ääretudega talal (19.61), (19.62).

Näiteks kuuesildelise liigend- ja jäikade ääretudega tala (joon. 19.24) jaoks on kanoonilised võrrandid samad:



Joon. 19.24

$$\begin{aligned} r_{aa}\varphi_a + r_{ab}\varphi_b & & + r_{ap} &= 0 \\ r_{ba}\varphi_a + r_{bb}\varphi_b + r_{bc}\varphi_c & & + r_{bp} &= 0 \\ r_{cb}\varphi_b + r_{cc}\varphi_c + r_{cd}\varphi_d & & + r_{cp} &= 0 \\ r_{dc}\varphi_c + r_{dd}\varphi_d + r_{de}\varphi_e + r_{dp} & & = 0 \\ r_{ed}\varphi_d + r_{ee}\varphi_e + r_{ep} & & = 0 \end{aligned} \quad (e)$$

Kõik ühikpöõretest põhjustatud reaktsioonid, välja arvatud r_{aa} ja r_{ee} , arvutatakse mõlema tala puhul valemitega (19.26).

Erinevad reaktsioonid:

1) liigend-ääretudega talal

$$r_{aa} = 4\left(\frac{3}{4}i_{al} + i_{ab}\right); \quad r_{ee} = 4\left(i_{ed} + \frac{3}{4}i_{ef}\right) \quad (f)$$

2) jäikade ääretudega talal

$$r_{aa} = 4(i_{ar} + i_{ab}); \quad r_{ee} = 4(i_{ed} + i_{eh}) \quad (g)$$

Võrrandisüsteem (e) on esitatud tabelis 19.4 liigend-ääretudega tala jaoks. Jäikade ääretudega tala puhul on jäikuste i_{al} ja i_{ef} ees kordaja $3/4$ asemel kordaja $4/4 = 1$.

Tabel 19.4.

Võrrandisüsteem kuuesildelise liigend-ääretudega tala jaoks. Kõik reaktsioonid on jagatud teguriga 4.

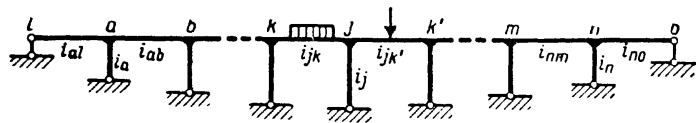
Tugi j	Võrrandi vasak pool					Võrrandi parem pool $-r_{jp}/4$
	φ_a	φ_b	φ_c	φ_d	φ_e	
a	$\frac{r_{aa}}{4}$ $\frac{3}{4}i_{al} + i_{ab}$	$\frac{r_{ab}}{4}$ $\frac{1}{2}i_{ab}$				$-\frac{r_{ap}}{4}$ $-\frac{1}{4}(M_{al,p} + M_{ab,p})$
b	$\frac{r_{ba}}{4}$ $\frac{1}{2}i_{ab}$	$\frac{r_{bb}}{4}$ $i_{ab} + i_{bc}$	$\frac{r_{bc}}{4}$ $\frac{1}{2}i_{bc}$			$-\frac{r_{bp}}{4}$ $-\frac{1}{4}(M_{ba,p} + M_{bc,p})$
c		$\frac{r_{cb}}{4}$ $\frac{1}{2}i_{bc}$	$\frac{r_{cc}}{4}$ $i_{bc} + i_{cd}$	$\frac{r_{cd}}{4}$ $\frac{1}{2}i_{cd}$		$-\frac{r_{cp}}{4}$ $-\frac{1}{4}(M_{cb,p} + M_{cd,p})$
d			$\frac{r_{dc}}{4}$ $\frac{1}{2}i_{cd}$	$\frac{r_{dd}}{4}$ $i_{cd} + i_{de}$	$\frac{r_{de}}{4}$ $\frac{1}{2}i_{de}$	$-\frac{r_{dp}}{4}$ $-\frac{1}{4}(M_{dc,p} + M_{de,p})$
e				$\frac{r_{ed}}{4}$ $\frac{1}{2}i_{de}$	$\frac{r_{ee}}{4}$ $i_{de} + \frac{3}{4}i_{ef}$	$-\frac{r_{ep}}{4}$ $-\frac{1}{4}(M_{ed,p} + M_{ef,p})$

19.3. Ühekorruseline raam

19.31. Liigendtudega raam

Joonisel 19.25 kujutatud ühekorruselise raami postid on liigenditega ühendatud aluste külge. Geomeetriselise määratuse aste $n^* = s_3 + 1$. Vertikaalsete postidega raami riivid saavad ainult horisontaalselt nihkuda, kuid ei pöõrdu. Postide pöõrded määratakse geomeetriselise parameetriga ψ_1 , milleks on ühe, näiteks vasakult esimese posti pöõre $\psi_1 = \vartheta_a$. Teiste postide pöõrded arvutatakse postide pikkuste suhtega

$$\vartheta_j = \psi_1 h_a / h_j \quad (19.65)$$



Joon. 19.25

Paigutusolukorras $\psi_1=1$ on posti pööre

$$\vartheta_{j1} = h_a/h_j \quad (19.66)$$

Sõlme j kohta koostatud kanooniline võrrand on järgmine:

$$r_{jk}\varphi_k + r_{jj}\varphi_j + r_{jk'}\varphi_{k'} + r_{j1}\psi_1 + r_{jp} = 0 \quad (19.67)$$

$j = a, b, \dots, n$

Esimeses võrrandis, mis koostatakse sõlme a kohta, puudub esimene liige, ja viimases võrrandis, mis koostatakse sõlme n kohta, puudub kolmas liige.

Reaktsioonid leitakse valemitega:

$$\begin{aligned} r_{aa} &= 3i_{al} + 3i_a + 4i_{ab} \\ r_{nn} &= 4i_{nm} + 3i_n + 3i_{no} \\ r_{jj} &= 4i_{jk} + 3i_j + 4i_{jk'} = 4[i_{jk} + (3/4)i_j + i_{jk'}] \\ r_{jk} &= 2i_{jk}; \quad r_{jk'} = 2i_{jk'}; \quad r_{j1} = -3i_j\vartheta_{j1} = -3i_jh_a/h_j \\ r_{jp} &= M_{jk,p} + M_{jp} + M_{jk',p} \end{aligned} \quad (19.68)$$

Posti pööret takistava sideme kohta koostatud tasakaaluvõrrandis on kõik tundmatud:

$$\sum_a^n r_{1j}\varphi_j + r_{11}\psi_1 + r_{1p} = 0 \quad (19.69)$$

milles

$$\begin{aligned} r_{1j} &= r_{j1} = -3i_j\vartheta_{j1} = -3i_jh_a/h_j \\ r_{11} &= 3 \sum_a^n i_j\vartheta_{j1}^2 = 3 \sum_a^n i_j (h_a/h_j)^2 \\ r_{1p} &= - \sum_a^n (M_{jp} + S_{j1}) h_a/h_j \end{aligned} \quad (19.70)$$

Paindemomendid arvutatakse valemitega:

1) riivis

esimeses sildes

$$M_{al} = M_{al,p} + 3i_{al}\varphi_a$$

viimases sildes

$$M_{no} = M_{no,p} + 3i_{no}\varphi_n \quad (19.71)$$

vahepealsetes sildetes

$$M_{jk} = M_{jk,p} + 4i_{jk}\varphi_j + 2i_{jk}\varphi_k \quad (19.72)$$

$$M_{jk'} = M_{jk',p} + 4i_{jk'}\varphi_j + 2i_{jk'}\varphi_{k'}$$

2) postis

$$M_j = M_{jp} + 3i_j(\varphi_j - \psi_1 h_a/h_j) \quad (19.73)$$

19.32. Jäigalt kinnitatud postidega raam

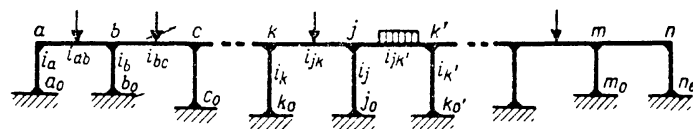
Raami geomeetrilise määramatuse aste $n^* = s_3 + 1$. Kanoonilised võrrandid on järgmised:

$$r_{jk}\varphi_k + r_{jj}\varphi_j + r_{jk'}\varphi_{k'} + r_{j1}\psi_1 + r_{jp} = 0 \quad (19.74)$$

$(j = a, b, \dots, n)$

$$\sum_a^n r_{1j}\varphi_j + r_{11}\psi_1 + r_{1p} = 0 \quad (19.75)$$

Võrrandisüsteemis (19.74) puudub sõlme a kohta koostatud võrrandis ($j=a$) esimene liige ja sõlme n kohta koostatud võrrandis ($j=n$) kolmas liige.



Joon. 19.26

Reaktsioonid võrrandites (19.74), (19.75) on järgmised:

$$\begin{aligned} r_{aa} &= 4(i_a + i_{ab}); & r_{jj} &= 4(i_{jk} + i_j + i_{jk'}); \\ r_{nn} &= 4(i_n + i_{nm}); & r_{jk} &= 2i_{jk}; & r_{jk'} &= 2i_{jk'}; \\ r_{j1} &= r_{1j} = -6i_j\vartheta_{j1}^2 = -6i_jh_a/h_j \end{aligned} \quad (19.76)$$

$$\begin{aligned} r_{11} &= 12 \sum_a^n i_j\vartheta_{j1}^2 = 12 \sum_a^n i_j (h_a/h_j)^2 \\ r_{jp} &= M_{jk,p} + M_{jp} + M_{jk',p}; \\ r_{1p} &= - \sum_a^n (M_{j0,p} + M_{j0j,p} + S_{j0,1}) (h_a/h_j) \end{aligned} \quad (19.77)$$

Paindemomendid arvutatakse valemitega:

$$1) \text{ riivis: } M_{jk} = M_{jh,p} + 4i_{jk}\varphi_j + 2i_{jk}\varphi_k \quad (19.78)$$

$$2) \text{ postis: } M_{jjo} = M_{jjo,p} + 4i_j\varphi_j - 6i_j(h_a/h_j)\psi_1 \quad (19.79)$$

$$M_{joi} = M_{joi,p} + 2i_j\varphi_j - 6i_j(h_a/h_j)\psi_1$$

19.4. Korrusraamid

Vertikaalsete postidega korrusraami riivide pöörded on nullid. Ühel korrusel võrdsete pikkustega postide puhul on sel korrusel postide pöörded võrdsed. Kui raami vabad sõlmed on kõik jäigad, siis geomeetrilise määramatuse aste leitakse valemiga

$$n^* = s_3 + w = w(m+2) \quad (19.80)$$

milles raami vabadusaste w võrdub raami korruste arvuga ja m on sillete arv.

Kanoonilised võrrandid on järgmised:

$$r_{jj}\varphi_j + \sum_k r_{jk}\varphi_k + \sum_c r_{jc}\psi_c + r_{jp} = 0 \quad (19.81)$$

$$r_{cc}\psi_c + \sum_j r_{cj}\varphi_j + r_{cp} = 0 \quad (19.82)$$

Vaba jäiga sõlme j kohta koostatud võrrandis (19.81) tähistab k sõlme j vaba jäika naabersõlme ja c sõlmest j all- ja ülalpool asuvat korrust. Posti pöört takistava sideme c kohta koostatud võrrandis (19.82) on lisatudmatu ψ_c korruse c postide pööre ja lisatudmatud φ_j on selle korruse postide ülemiste ja alumiste sõlmede pöörded.

Reaktsioonid r_{jj} , r_{jk} , $r_{jc} = r_{cj}$, r_{jp} arvutatakse valemitega (19.48)...(19.51). Reaktsioon r_{cc} (paigutusolukorras $\psi_c = 1$ on postidele antud ühikpööre) arvutatakse valemiga

$$r_{cc} = 12 \sum_r i_r \quad (19.83)$$

kus r tähistab korruse c posti.

Vertikaalse koormuse puhul võrrandi (19.82) vabaliige $r_{cp} = 0$, kuna riivid ei pöördu. Horisontaalse tuulekoormuse mõjumisel, kui koormus on rakendatud sõlmedesse, arvutatakse vabaliige valemiga

$$r_{cp} = -h_c \sum_{b=c}^w W_b \quad (19.84)$$

Valemis (19.84) esinev summa $\sum_{b=c}^w W_b$ tähistab koormuse resultanti, mille liikmeteks on jõud alates korruse c ülemisse sõlme rakendatud jõust W_c kuni ülemise jõuni W_w .

Paindemomendi epüüri ordinaate kontrollitakse igas sõlmes. Momentide summa igas sõlmes peab võrduma nulliga. Põikjõude igal korrusel kontrollitakse tasakaalutimusega $\sum X = 0$. Iga korruse postide põikjõudude summa peab tasakaalustama ülaltpoolt raamile mõjuva horisontaalse koormuse $\sum_{b=c}^w W_b - \sum_r Q_{rc} = 0$. Vertikaalse koormuse puhul peab ühel korrusel postide põikjõudude summa võrduma nulliga.

Joonisel 19.27 esitatud kolmesildelise ($m=3$) ja viiekorruselise ($w=5$) raami geomeetrilise määramatuse aste $n^* = w(m+2) = 5(3+2) = 25$.

Näitena koostatakse sõlme j ja teise korruse $c=2$ posti pöört takistavate sidemete kohta võrrandid:

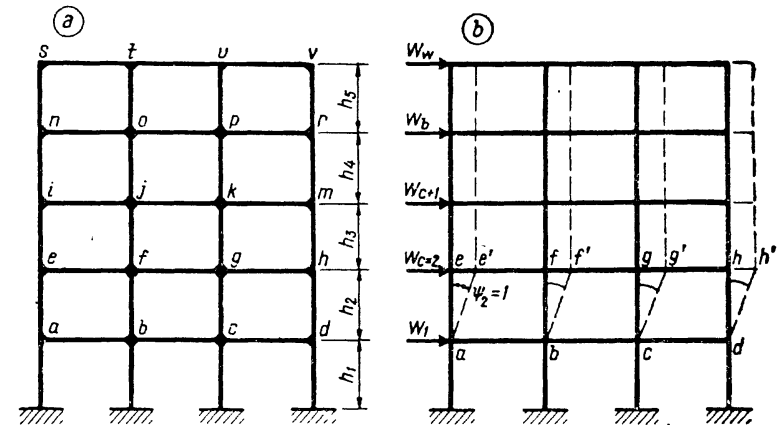
$$r_{jj}\varphi_j + r_{jf}\varphi_f + r_{ji}\varphi_i + r_{jk}\varphi_k + r_{jo}\varphi_o + r_{j3}\psi_3 + r_{j4}\psi_4 + r_{jp} = 0$$

$$r_{22}\psi_2 + r_{2a}\varphi_a + r_{2b}\varphi_b + r_{2c}\varphi_c + r_{2d}\varphi_d + r_{2e}\varphi_e + r_{2f}\varphi_f + r_{2g}\varphi_g + r_{2h}\varphi_h + r_{2p} = 0$$

milles

$$r_{jj} = 4(i_{jf} + i_{ji} + i_{jk} + i_{jo})$$

$$r_{jf} = 2i_{jf}; \quad r_{ji} = 2i_{ji}; \quad r_{jk} = 2i_{jk}; \quad r_{jo} = 2i_{jo}$$



Joon. 19.27

$$\begin{aligned}
r_{j3} &= -6i_{jf}; & r_{j4} &= -6i_{jo} \\
r_{jp} &= M_{jf,p} + M_{ji,p} + M_{jk,p} + M_{jo,p} \\
r_{22} &= 12(i_{ae} + i_{bf} + i_{cg} + i_{dh}) \\
r_{2a} &= -6i_{ae}; & r_{2b} &= -6i_{bf}; & r_{2c} &= -6i_{cg}; & r_{2d} &= -6i_{dh} \\
r_{2e} &= -6i_{ae}; & r_{2f} &= -6i_{bf}; & r_{2g} &= -6i_{cg}; & r_{2h} &= -6i_{dh} \\
r_{2p} &= -h_2(W_2 + W_3 + W_4 + W_5)
\end{aligned}$$

19.5. Sümmeetrilised raamid

Sümmeetria kasutamisel lahutatakse koormus sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks. Sümmeetriline koormus tingib sümmeetrilise ja antisümmeetrilise koormuse antisümmeetrilise paigutusolukorra. Sümmeetriliselt asetsevate sõlmede ja varraste pöörded on antisümmeetrilise koormuse mõjumisel võrdsed ning samade märkidega. Sümmeetrilise koormuse puhul on sümmeetriliselt asetsevate elementide pöörded võrdsed, kuid vastupidiste märkidega.

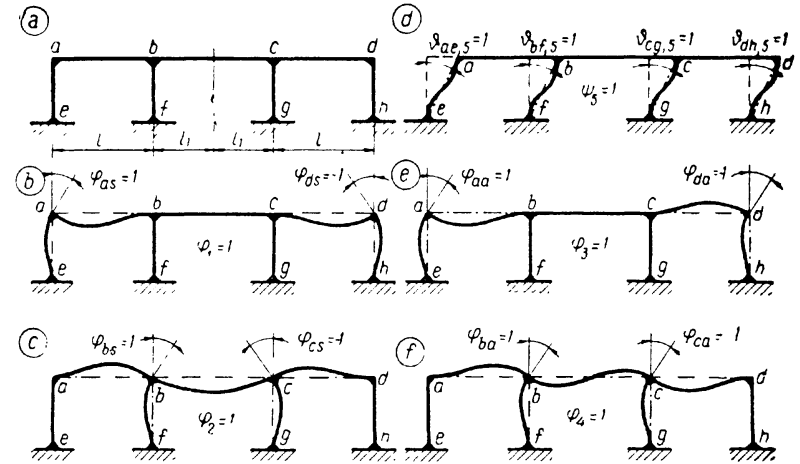
Sümmeetrilise koormuse mõjumisel saab sümmeetriateljel asetsev element nihkuda piki sümmeetriatelge, kuid pööre ja siire sümmeetriateljega risti on nullid. Antisümmeetrilise koormuse mõjumisel saab sümmeetriateljel asetsev element pöörduda ja nihkuda sümmeetriateljega risti, kuid siire sümmeetriatelje sihis on null.

Koormuse lahutamiseks sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks ning sümmeetriliste ja antisümmeetriliste grupptundmatutega jaguneb n^* võrrandiga süsteem kaheks: üks osa võrrandeid sisaldab ainult sümmeetrilisi grupptundmatuid ja teine ainult antisümmeetrilisi grupptundmatuid.

Joonisel 19.28, *a* kujutatud raam on viis korda geomeetriliselt määramatu. Lisatundmatuteks on nelja sõlme ja ühe posti pöörded. Sümmeetrilise koormuse mõjumisel on sõlme *d* pööre võrdne sõlme *a* pöördelga, kuid vastupidise märgiga: $\varphi_{ds} = -\varphi_{as}$. Antisümmeetrilise koormuse mõjumisel on sõlme *d* pööre suuruselt ja märgilt võrdne sõlme *a* pöördelga: $\varphi_{da} = \varphi_{aa}$. Sama kehtib ka sõlmede *b* ja *c* kohta: $\varphi_{cs} = -\varphi_{bs}$, $\varphi_{ca} = \varphi_{ba}$.

Sümmeetrilised grupptundmatud on φ_1 ja φ_2 (joon. 19.28, *b* ja *c*) ning antisümmeetrilised grupptundmatud φ_3 , φ_4 ja φ_5 (joon. 19.28, *d*, *e* ja *f*).

Ühikpööretest põhjustatud reaktsioonid:



Joon. 19.28

1) paigutusolukorras φ_1 ($\varphi_{as} = -\varphi_{ds}$)

$$r_{11} = 2 \cdot 4(i_{ae} + i_{ab}); \quad r_{21} = 2 \cdot 2i_{ab}$$

2) paigutusolukorras φ_2 ($\varphi_{bs} = -\varphi_{cs}$)

$$r_{22} = 2 \cdot 4(i_{ba} + i_{bf} + 0,5i_{bc}); \quad r_{12} = r_{21} = 2 \cdot 2i_{ab}$$

(varda *b-c* jääkuse i_{bc} ees on tegur 0,5, kuna paigutusolukorras $\varphi_2 = 1$ sõlmed *b* ja *c* on pöördunud ühiknurga võrra vastupidistes suundades);

3) paigutusolukorras $\varphi_3 = 1$ ($\varphi_{aa} = \varphi_{da}$)

$$r_{33} = 2 \cdot 4(i_{ae} + i_{ab}); \quad r_{43} = 2 \cdot 2i_{ab}$$

4) paigutusolukorras $\varphi_4 = 1$ ($\varphi_{ba} = \varphi_{ca}$)

$$r_{44} = 2 \cdot 4(i_{ba} + i_{bf} + 1,5i_{bc}); \quad r_{34} = 2 \cdot 2i_{ab}$$

(varda *b-c* jääkuse ees on tegur 1,5, kuna paigutusolukorras $\varphi_4 = 1$ on sõlmed *b* ja *c* pöördunud samas suunas ühiknurga võrra);

5) paigutusolukorras $\varphi_5 = 1$ ($\vartheta_{ae} = \vartheta_{dh} = \vartheta_{bf} = \vartheta_{cg}$)

$$r_{55} = 2 \cdot 12(i_{ae} + i_{bf})$$

$$r_{35} = r_{53} = -2 \cdot 6i_{ae}; \quad r_{45} = r_{54} = -2 \cdot 6i_{bf}$$

Võrrandite vabaliikmed on järgmised:

$$\begin{aligned} r_{1p} &= 2(M_{ae,ps} + M_{ab,ps}) \\ r_{2p} &= 2(M_{ba,ps} + M_{bf,ps} + M_{bc,ps}) \\ r_{3p} &= 2(M_{ae,pa} + M_{ab,pa}) \\ r_{4p} &= 2(M_{ba,pa} + M_{bf,pa} + M_{bc,pa}) \\ r_{5p} &= -2(M_{ae,pa} + M_{ea,pa} + S_{ae,pa}) \cdot 1 - \\ &\quad - 2(M_{bf,pa} + M_{fb,pa} + S_{bf,pa}) \cdot 1 \end{aligned}$$

Kuna kõigi reaktsioonide ja vabaliikmete valemities on ees tegur 2, siis jäetakse see edaspidisel arvutusel ära.

Võrrandisüsteemide

$$\left. \begin{aligned} r_{11}\varphi_1 + r_{12}\varphi_2 + r_{1p} &= 0 \\ r_{21}\varphi_1 + r_{22}\varphi_2 + r_{2p} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} r_{33}\varphi_3 + r_{34}\varphi_4 + r_{35}\psi_5 + r_{3p} &= 0 \\ r_{43}\varphi_3 + r_{44}\varphi_4 + r_{45}\psi_5 + r_{4p} &= 0 \\ r_{53}\varphi_3 + r_{54}\varphi_4 + r_{55}\psi_5 + r_{5p} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

lahendamiseks leitakse grupp-tundmatud, millede kaudu leitakse sõlmede pöörded:

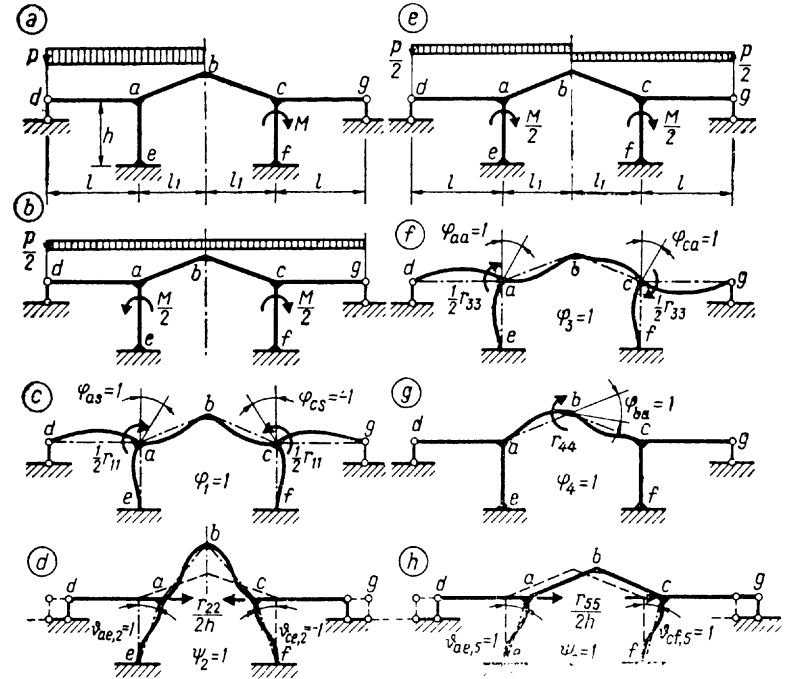
$$\begin{aligned} \varphi_a &= \varphi_{as} + \varphi_{aa} = \varphi_1 + \varphi_3; & \varphi_b &= \varphi_{bs} + \varphi_{ba} = \varphi_2 + \varphi_4 \\ \varphi_d &= \varphi_{da} - \varphi_{ds} = \varphi_3 - \varphi_1; & \varphi_c &= \varphi_{ca} - \varphi_{cs} = \varphi_4 - \varphi_2 \end{aligned}$$

Kõik postid pöörduvad nurga ψ_5 võrra.

Joonisel 19.29, a kujutatud raami geomeetrisel määramatuse aste $n^* = s_3 + \omega = 3 + 2 = 5$. Tundmatuteks on sõlmede a, b, c pöörded ja varraste pöörded määravad geomeetriselised parameetrid ψ_2 ning ψ_5 (joon. 19.29, d ja h). Sümmeetriateljel asuva sõlme b pööre $\varphi_b = \varphi_4$ on antisümmeetriline; samuti on antisümmeetriline paigutusolukord $\psi_5 = 1$; paigutusolukord $\psi_2 = 1$ on sümmeetriline. Grupp-tundmatuid kasutatakse sõlmede a ja c pöörete juures. Sümmeetriliseks grupp-tundmatuks on $\varphi_1 = \varphi_{as} = -\varphi_{cs}$ ja antisümmeetriliseks grupp-tundmatuks $\varphi_3 = \varphi_{aa} = \varphi_{ca}$. Sümmeetrilisteks tundmatuteks on nüüd φ_1 ja ψ_2 (joon. 19.29, c ja d) ning antisümmeetrilisteks tundmatuteks φ_3, φ_4 ja ψ_5 (joon. 19.29, f, g ja h). Koormus on lahutatud sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks (joon. 19.29, b ja e).

Reaktsioonid arvutatakse poole raami jaoks ja seepärast puudub valemities tegur 2.

$$\begin{aligned} r_{11} &= 4(0,75i_{ad} + i_{ae} + i_{ab}); & r_{34} &= 2i_{ab} \\ r_{12} &= -6(i_{ae}\vartheta_{ae,2} + i_{ab}\vartheta_{ab,2}); & r_{35} &= -6i_{ae}\vartheta_{ae,5} \end{aligned}$$



Joon. 19.29

$$\begin{aligned} r_{22} &= 12(i_{ae}\vartheta_{ae,2}^2 + i_{ab}\vartheta_{ab,2}^2); & r_{44} &= 4i_{ab}; & r_{45} &= 0 \\ r_{33} &= 4(0,75i_{ad} + i_{ae} + i_{ab}); & r_{55} &= 12i_{ae}\vartheta_{ae,5}^2 \end{aligned}$$

Koormusliikmed poole raami jaoks:

$$\begin{aligned} r_{1p} &= (M_{ad,ps} + M_{ae,ps} + M_{ab,ps}) \\ r_{2p} &= -(M_{ae,ps} + M_{ea,ps} + S_{ae,ps})\vartheta_{ae,2} - \\ &\quad - (M_{ab,ps} + M_{ba,ps} + S_{ab,ps})\vartheta_{ab,2} \\ r_{3p} &= (M_{ad,pa} + M_{ae,pa} + M_{ab,pa}); & r_{4p} &= M_{ba,pa} \\ r_{5p} &= -(M_{ae,pa} + M_{ea,pa} + S_{ae,pa})\vartheta_{ae,5} \end{aligned}$$

Võrrandisüsteemide

$$\left. \begin{aligned} r_{11}\varphi_1 + r_{12}\psi_2 + r_{1p} &= 0 \\ r_{21}\varphi_1 + r_{22}\psi_2 + r_{2p} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

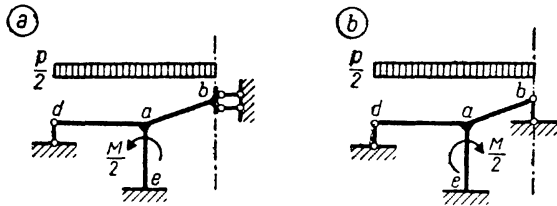
$$\left. \begin{aligned} r_{33}\varphi_3 + r_{34}\varphi_4 + r_{35}\psi_5 + r_{3p} &= 0 \\ r_{43}\varphi_3 + r_{44}\varphi_4 + r_{45}\psi_5 + r_{4p} &= 0 \\ r_{53}\varphi_3 + r_{54}\varphi_4 + r_{55}\psi_5 + r_{5p} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

lahendamiseks leitakse lisatundmatud $\varphi_1, \psi_2, \varphi_3, \varphi_4$ ja ψ_5 . Sõlmede ja varraste pöörded on järgmised:

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \varphi_1 + \varphi_3; & \varphi_b &= \varphi_4; & \varphi_c &= \varphi_3 - \varphi_4 \\ \vartheta_{ad} &= 0; & \vartheta_{ae} &= \vartheta_{ae,2}\psi_2 + \vartheta_{ae,5}\psi_5; & \vartheta_{ab} &= \vartheta_{ab,2}\psi_2 \\ \vartheta_{bc} &= \vartheta_{bc,2}\psi_2; & \vartheta_{cf} &= \vartheta_{cf,2}\psi_2 + \vartheta_{cf,5}\psi_5; & \vartheta_{cg} &= 0 \end{aligned}$$

Sümmeetriline koormus (joon. 19.29, *b*) ei põhjusta sõlme *b* pööret ($\varphi_{bs}=0$) ja horisontaalsiiret ($u_{bs}=0$) ning joonisel 19.29, *b* kujutatud arvutusskeemi asemel võib ülesannet lahendada joonisel 19.30, *a* esitatud skeemiga ($\varphi_b=0, u_b=0$).

Antisümmeetriline koormus (joon. 19.29, *e*) ei põhjusta sõlme *b* vertikaalsiiret ($v_{ba}=0$). Antisümmeetrilise koormuse mõjumisel ei teki sõlmes *b* paindemomenti ja hori-



Joon. 19.30

sontaaljõudu ning ülesannet võib lahendada joonisel 19.30, *b* kujutatud arvutusskeemiga. Raami parempoolses osas on sümmeetrilisest koormusest põhjustatud paindemendid sümmeetrilised ja antisümmeetrilisest koormusest antisümmeetrilised.

19.6. Temperatuuri muutuse, tugevde paigutiste ja pikijõudude mõju

19.61. Temperatuuri muutuse mõju

Temperatuuri muutusest põhjustatud sisejõudude arvutus on analoogiline koormusest põhjustatud sisejõudude arvutusega. Erinevus on kanooniliste võrrandite vabaliikmete leidmises.

Temperatuuri mitteühtlane muutus $\Delta t = t_a - t_{ii}$ tingib

varraste kõverdumist ja ühtlane muutus t_0 nende pikene- mist või lühenemist. Temperatuuri muutusest tingitud varraste deformatsioonid tekitavad geomeetriliselt määratud põhiskeemis kinnituspõhised. Temperatuuri mitte- ühtlasest muutusest põhjustatud kinnituspõhised arvutatakse tabelites 19.1 ja 19.2 esitatud valemitega

$$M_{jk,t} = -EI\alpha\Delta t/h_{jk}; \quad M_{kj,t} = EI\alpha\Delta t/h_{jk} \quad (a)$$

$$M_{jl,t} = \mp (3/2)EI\alpha\Delta t/h_{jl} \quad (b)$$

Valemities (a) tähistab *j* varda vasakpoolset ja *k* parempoolset sõlme ning h_{jk} ristlõike kõrgust. Valemites (b) on märk miinus, kui vardal on jäik sõlm vasakul ja liigendsõlm paremal, ning pluss, kui jäik sõlm paremal ja liigendsõlm vasakul.

Kanooniliste võrrandite vabaliikmed temperatuuri mitteühtlasest muutusest arvutatakse valemitega (19.51), (19.53), milles koormusest põhjustatud kinnituspõhised asendatakse temperatuuri muutusest põhjustatud kinnituspõhised:

$$r_{jk,\Delta t} = \sum_k M_{jk,\Delta t} + \sum_l M_{jl,\Delta t} \quad (19.93)$$

$$r_{c\Delta t} = - \sum_s M_{js,\Delta t} \cdot \vartheta_{sc} \quad (19.94)$$

Valemites (19.94) esineb ainult niisugune varda kinnituspõhised, mille ühes otsas on liigend ja teises otsas jäik sõlm. Mõlemas otsas jäigalt kinnitatud varda kinnituspõhised algebraalne summa on null (a).

Temperatuuri ühtlasest muutusest põhjustatud kinnituspõhised geomeetriliselt määratud põhiskeemis arvutatakse valemitega

$$M_{jl,t} = -(3EI_{jl}/l_{jl})\vartheta_{jl,t} \quad (19.95)$$

$$M_{jk,t} = M_{kj,t} = -(6EI_{jk}/l_{jk})\vartheta_{jk,t} \quad (19.96)$$

milles $\vartheta_{jk,t}$, $\vartheta_{jl,t}$ on temperatuuri ühtlasest muutusest põhjustatud varraste pöörded geomeetriliselt määratud põhiskeemis, kusjuures tähtedega *jk* on tähistatud mõlemast otsast jäigalt ning tähtedega *jl* ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud vardad.

Temperatuuri ühtlasest muutusest tingitud varraste pikene- mised ja lühenemised arvutatakse valemiga

$$\Delta l = \alpha t_0 l \quad (19.97)$$

Varraste pikkuste muutuste Δl kaudu leitakse geomeet-

riliselt määratud põhiskeemi sõlmede siirded, mis on vajalikud varraste pöörete arvutamiseks.

Võrrandite vabaliikmed leitakse valemitega

$$r_{jt} = \sum_H M_{jk,t} + \sum_L M_{jl,t} \quad (19.98)$$

$$r_{ct} = - \sum_r (M_{jk,t} + M_{kj,t}) \vartheta_{rt} - \sum_s M_{jl,t} \vartheta_{st} \quad (19.99)$$

nis kinnituspõrked (19.95), (19.96) sisseviimisel saavad kujud:

$$r_{jt} = -6 \sum_k (EI_{jk}/l_{jk}) \vartheta_{jk,t} - 3 \sum_l (EI_{jl}/l_{jl}) \vartheta_{jl,t} \quad (19.100)$$

$$r_{ct} = 12 \sum_r (EI_r/l_r) \vartheta_{rt} \vartheta_{rc} + 3 \sum_s (EI_s/l_s) \vartheta_{st} \vartheta_{sc} \quad (19.101)$$

milles r on mõlemas otsas jäigalt ja s ühes otsas jäigalt ning teises otsas liigendiga kinnitatud varras.

Pärast võrrandite lahendamist arvutatakse sisejõud tavalisel viisil.

Näide 19.2. Arvutada joonisel 19.31, *a* kujutatud raami paindemomendi epüüri ordinaadid, mis on põhjustatud temperatuuri muutusest väljaspool raami $+10^\circ\text{C}$ ja seespool $+20^\circ\text{C}$. Andmed: $l=6\text{ m}$, $h=4\text{ m}$, $\alpha=10^{-5}\text{ }1/^\circ\text{C}$, $E=2 \cdot 10^6\text{ t/m}^2$, varraste ristlõigete mõõtmed on antud joonisel 19.31, *a*; ristlõigete inertsmomendid on: $I_{ad}=3,125 \cdot 10^{-3}\text{ m}^4$; $I_{ab}=I_{bf}=I_{bc}=5,4 \cdot 10^{-3}\text{ m}^4$; $I_{ce}=0,675 \cdot 10^{-3}\text{ m}^4$.

Varraste jäikused:

$$i_{ad} = EI_{ad}/h = 2 \cdot 10^6 \cdot 3,125 \cdot 10^{-3} / 4 = 1562,5\text{ tm}$$

$$i_{ab} = i_{bc} = EI_{ab}/h = 2 \cdot 10^6 \cdot 5,4 \cdot 10^{-3} / 6 = 1800,0\text{ tm}$$

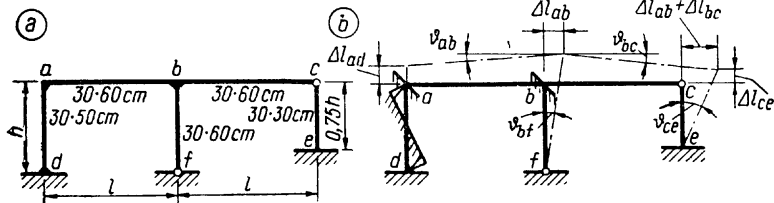
$$i_{bf} = EI_{bf}/h = 2 \cdot 10^6 \cdot 5,4 \cdot 10^{-3} / 4 = 2700,0\text{ tm}$$

$$i_{ce} = EI_{ce}/(0,75h) = 2 \cdot 10^6 \cdot 0,675 \cdot 10^{-3} / 3 = 450,0\text{ tm}$$

Uhikpööretest põhjustatud reaktsioonide leidmisel võetakse jäikused 1000 korda väiksemad, mistõttu kanoonilistest võrranditest leitud tundmatud on 1000 korda suuremad ja nende korrutised ei muutu:

$$i_{ad} = 1,5625; \quad i_{ab} = i_{bc} = 1,8; \quad i_{bf} = 2,7; \quad i_{ce} = 0,45$$

Temperatuuri ühtlane muutus varrastes $a-d$, $a-b$, $b-c$, $c-e$ on $t_0 = (20+10)/2 = 15^\circ\text{C}$ ja vardas $b-f$ $t_0 = 20^\circ\text{C}$ ning mitteühtlane muu-



Joon. 19.31

tus varrastes $a-d$, $a-b$, $b-c$, $c-e$ $\Delta t = 20 - 10 = 10^\circ\text{C}$ ja vardas $b-f$ $\Delta t = 0$.

Reaktsioonid:

$$r_{aa} = 4(1,5625 + 1,8) = 13,45\text{ tm}; \quad r_{ab} = r_{ba} = 2 \cdot 1,8 = 3,6\text{ tm}$$

$$r_{bb} = 4 \cdot 1,8 + 3(2,7 + 1,8) = 20,7\text{ tm}$$

$$r_{a1} = -6 \cdot 1,5625 \cdot 1 = -9,375\text{ tm}$$

$$r_{b1} = -3 \cdot 2,7 \cdot 1 = -8,1\text{ tm}$$

$$r_{11} = 12 \cdot 1,5625 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2,7 \cdot 1^2 + 3 \cdot 0,45(4/3)^2 = 29,25\text{ tm}$$

Kinnituspõrked temperatuuri ühtlasest muutusest avalduvad järgmiselt.

Varraste pikened:

$$\Delta l_{ad} = 15 \cdot 10^{-5} \cdot 4 = 6 \cdot 10^{-4}\text{ m}; \quad \Delta l_{bf} = 20 \cdot 10^{-5} \cdot 4 = 8 \cdot 10^{-4}\text{ m}$$

$$\Delta l_{ce} = 15 \cdot 10^{-5} \cdot 3 = 4,5 \cdot 10^{-4}\text{ m}; \quad \Delta l_{ab} = \Delta l_{bc} = 15 \cdot 10^{-5} \cdot 6 = 9 \cdot 10^{-4}\text{ m}$$

Varraste pöörded temperatuuri ühtlasest muutusest geomeetriliselt määratud põhiskeemis, mille varda $a-d$ pööre on takistatud ($\vartheta_{ad,t} = 0$; joon. 19.31, *b*):

$$\vartheta_{ab,t} = (\Delta l_{ad} - \Delta l_{bf})/l_{ab} = (6 - 8) \cdot 10^{-4} / 6 = -(1/3) \cdot 10^{-4}$$

$$\vartheta_{bf,t} = \Delta l_{ab}/l_{bf} = 9 \cdot 10^{-4} / 4 = 2,25 \cdot 10^{-4}$$

$$\vartheta_{bc,t} = (\Delta l_{bf} - \Delta l_{ce})/l_{bc} = (8 - 4,5) \cdot 10^{-4} / 6 = (3,5/6) \cdot 10^{-4}$$

$$\vartheta_{ce,t} = (\Delta l_{ab} + \Delta l_{bc})/l_{ce} = 18 \cdot 10^{-4} / 3 = 6 \cdot 10^{-4}$$

Kinnituspõrked:

$$M_{ab,t} = M_{ba,t} = -6i_{ab}\vartheta_{ab,t} = -6 \cdot 1800(-1/3) \cdot 10^{-4} = 0,36\text{ tm}$$

$$M_{bf,t} = -3i_{bf}\vartheta_{bf,t} = -3 \cdot 2700 \cdot 2,25 \cdot 10^{-4} = -1,8225\text{ tm}$$

$$M_{bc,t} = -3i_{bc}\vartheta_{bc,t} = -3 \cdot 1800(3,5/6) \cdot 10^{-4} = -0,315\text{ tm}$$

$$M_{ce,t} = -3i_{ce}\vartheta_{ce,t} = -3 \cdot 450 \cdot 6 \cdot 10^{-4} = -0,81\text{ tm}$$

Vabaliikmed:

$$r_{at} = 0,36\text{ tm}; \quad r_{bt} = 0,36 - 1,8225 - 0,315 = -1,7775\text{ tm}$$

$$r_{1t} = -M_{bf,t}\vartheta_{bf,t} - M_{ce,t}\vartheta_{ce,t} = 1,8225 \cdot 1 + 0,81 \cdot 4/3 = 2,9025\text{ tm}$$

Võrrandisüsteemi

$$13,45\varphi_a + 3,6\varphi_b - 9,375\psi_1 + 0,36 = 0$$

$$3,6\varphi_a + 20,7\varphi_b - 8,100\psi_1 - 1,7775 = 0$$

$$9,375\varphi_a - 8,1\varphi_b + 29,250\psi_1 + 2,9025 = 0$$

lahend on järgmine:

$$\varphi_a = -0,12928; \quad \varphi_b = 0,05979; \quad \psi_1 = -0,12411$$

Paindemomendid temperatuuri ühtlasest muutusest:

$$M_{da,t} = -2 \cdot 1,5625 \cdot 0,12928 + 6 \cdot 1,5625 \cdot 0,12411 = 0,760\text{ tm}$$

$$M_{ad,t} = -4 \cdot 1,5625 \cdot 0,12928 + 6 \cdot 1,5625 \cdot 0,12411 = 0,356\text{ tm}$$

$$M_{ab,t} = 0,36 - 4 \cdot 1,8 \cdot 0,12928 + 2 \cdot 1,8 \cdot 0,05979 = -0,356\text{ tm}$$

$$\text{Kontroll: } M_{ad,t} + M_{ab,t} = 0,356 - 0,356 = 0,000$$

$$M_{ba,t} = 0,36 - 2 \cdot 1,8 \cdot 0,12928 + 4 \cdot 1,8 \cdot 0,05979 = 0,325\text{ tm}$$

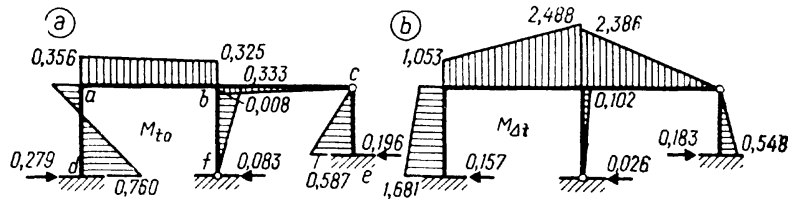
$$M_{bf,t} = -1,8225 + 3 \cdot 2,7(0,05979 + 0,12411) = -0,333\text{ tm}$$

$$M_{bc,t} = -0,315 + 3 \cdot 1,8 \cdot 0,05979 = 0,008\text{ tm}$$

$$\text{Kontroll: } M_{ba,t} + M_{bf,t} + M_{bc,t} = 0,325 - 0,333 + 0,008 = 0,000$$

$$M_{ce,t} = -0,81 + 3 \cdot 0,450(4/3) \cdot 0,12411 = -0,587\text{ tm}$$

Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 19.32, *a*.



Joon. 19.32

Põikjõud postides:

$$Q_{da} = -(0,760 + 0,356)/4 = -0,279 \text{ t}$$

$$Q_{fb} = 0,333/4 = 0,083 \text{ t}; \quad Q_{ec} = 0,587/3 = 0,196 \text{ t}$$

$$\Sigma X = 0: -0,279 + 0,083 + 0,196 = 0,000$$

Kinnitusmomendid temperatuuri mitteühtlasest muutusest:

$$M_{ad,\Delta t} = EI_{ad}\alpha\Delta t/h_{ad} = 2 \cdot 10^6 \cdot 3,125 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5} \cdot 10/0,50 = 1,25 \text{ tm}$$

$$M_{da,\Delta t} = -1,25 \text{ tm}$$

$$M_{ba,\Delta t} = EI_{ab}\alpha\Delta t/h_{ab} = 2 \cdot 10^6 \cdot 5,4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5} \cdot 10/0,60 = 1,80 \text{ tm}$$

$$M_{ab,\Delta t} = -1,80 \text{ tm}; \quad M_{bf,\Delta t} = 0$$

$$M_{bc,\Delta t} = -(3/2)EI_{bc}\alpha\Delta t/h_{bc} = -(3/2) \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 5,4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5} \cdot 10/0,60 = -2,70 \text{ tm}$$

$$M_{ec,\Delta t} = (3/2)EI_{ec}\alpha\Delta t/h_{ec} = (3/2) \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 6,75 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-5} \cdot 10/0,30 = 0,675 \text{ tm}$$

Vabaliikmed:

$$r_{at} = 1,25 - 1,80 = -0,55 \text{ tm}; \quad r_{bt} = 1,80 - 2,70 = -0,90 \text{ tm}$$

$$r_{1z} = -0,675 \cdot 4/3 = -0,90 \text{ tm}$$

Võrrandisüsteemi

$$13,45 \varphi_a + 3,6 \varphi_b - 9,375 \psi_1 - 0,55 = 0$$

$$3,6 \varphi_a + 20,7 \varphi_b - 8,1 \psi_1 - 0,90 = 0$$

$$9,375 \varphi_a - 8,1 \varphi_b + 29,25 \psi_1 - 0,90 = 0$$

lahend on järgmine:

$$\varphi_a = 0,07468; \quad \varphi_b = 0,05820; \quad \psi_1 = 0,07082$$

Paindemomendi epüür temperatuuri mitteühtlasest muutusest on ilma arvutust esitamata kujutatud joonisel 19.32, b.

Põikjõud postides:

$$Q_{da} = -(1,053 - 1,681)/4 = 0,157 \text{ t}$$

$$Q_{fb} = 0,102/4 = 0,026 \text{ t}; \quad Q_{ec} = -0,584/3 = -0,183 \text{ t}$$

$$\Sigma X = 0: -0,157 - 0,026 + 0,183 = 0,000$$

19.62. Tugede paigutiste mõju

Tugede paigutistest põhjustatud sisejõud leitakse analoogiliselt temperatuuri muutusest tingitud sisejõududega. Tugede pööretest tingitud kinnitusmomendid geomeetriselt määratud põhiskeemis arvutatakse mõlemast otsast jäigalt kinnitatud vardas valemitega:

$$M_{kj,r} = 4(EI_{kj}/l_{kj})\varphi_{kr}; \quad M_{jk,r} = 2(EI_{kj}/l_{kj})\varphi_{kr} \quad (19.102)$$

ja jäiga toega k , kuid teises otsas liigendiga kinnitatud vardas valemiga

$$M_{kl,r} = 3(EI_{kl}/l_{kl})\varphi_{kr} \quad (19.103)$$

milles φ_{kr} on jäiga toe pööre.

Tugede pööretest põhjustatud kanooniliste võrrandite vabaliikmed leitakse valemitega:

$$r_{jr} = 2 \sum_k (EI_{jk}/l_{jk})\varphi_{kr} \quad (19.104)$$

$$r_{cr} = -6 \sum_r (EI_r/l_r)\varphi_{kr}\vartheta_{rc} - 3 \sum_s (EI_s/l_s)\varphi_{kr}\vartheta_{sc} \quad (19.105)$$

Valemities (19.104), (19.105) tähistab k jäika toesõlme, r — toesõlmes ja teises otsas jäigalt kinnitatud varrast ning s — toesõlmes jäigalt ja teises otsas liigendiga kinnitatud varrast.

Tugede siiretest tingitud kinnitusmomendid geomeetriselt määratud põhiskeemis arvutatakse analoogiliselt temperatuuri ühtlasest muutusest põhjustatud momentidega:

$$M_{jk,r} = M_{kj,r} = -6(EI_{jk}/l_{jk})\vartheta_{jk,r} \quad (19.106)$$

$$M_{jl,r} = -3(EI_{jl}/l_{jl})\vartheta_{jl,r} \quad (19.107)$$

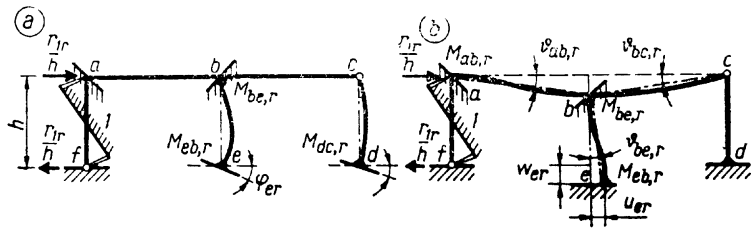
milles $\vartheta_{jk,r}$, $\vartheta_{jl,r}$ on geomeetriselt määratud põhiskeemi tugede siiretest põhjustatud varraste pöörded.

Kanooniliste võrrandite vabaliikmed leitakse valemitega:

$$r_{jr} = -6 \sum_k (EI_{jk}/l_{jk})\vartheta_{jk,r} - 3 \sum_l (EI_{jl}/l_{jl})\vartheta_{jl,r} \quad (19.108)$$

$$r_{cr} = 12 \sum_r (EI_r/l_r)\vartheta_{rr}\vartheta_{rc} + 3 \sum_s (EI_s/l_s)\vartheta_{sr}\vartheta_{sc} \quad (19.109)$$

Valemis (19.108) on tähistatud vaba jäiga sõlme j jäika naaber-toesõlme tähega k ja liigend-naaber-toesõlme tähega l . Valemis (19.109) korrutised summeeritakse varda r pöörete ϑ_{rr} ja ϑ_{rc} esimese indeksi r järgi; teine indeks pöördede ϑ_{rr} juures tähistab põhjust.



Joon. 19.33

Joonisel 19.33, a on näidatud raami geomeetriselt määratud põhiskeemi tugede pööretest tingitud kinnitusemomendid:

$$M_{be,r} = 2(EI_{be}/h)\varphi_{er}; \quad M_{eb,r} = 4(EI_{be}/h)\varphi_{er}$$

$$M_{dc,r} = 3(EI_{cd}/h)\varphi_{dr}$$

Kanooniliste võrrandite vabaliikmed on järgmised:

$$r_{ar} = 0; \quad r_{br} = 2(EI_{be}/h)\varphi_{er}$$

$$r_{1r} = -6(EI_{be}/h)\varphi_{er}\vartheta_{be,1} - 3(EI_{cd}/h)\varphi_{dr}\vartheta_{cd,1} =$$

$$= -6(EI_{bc}/h)\varphi_{er} \cdot 1 - 3(EI_{cd}/h)\varphi_{dr} \cdot 1$$

Joonisel 19.33, b on näidatud tugede siiretest tingitud kinnitusemomendid:

$$M_{ab,r} = M_{ba,r} = -6(EI_{ab}/l)\vartheta_{ab,r} = -6(EI_{ab}/l)\omega_{er}/l$$

$$M_{bc,r} = -3(EI_{bc}/l)\vartheta_{bc,r} = 3(EI_{bc}/l)\omega_{er}/l$$

$$M_{be,r} = M_{eb,r} = -6(EI_{be}/h)\vartheta_{be,r} = 6(EI_{be}/h)u_{er}/h$$

Kanooniliste võrrandite vabaliikmed on järgmised:

$$r_{ar} = M_{ab,r} = -6(EI_{ab}/l)\omega_{er}/l$$

$$r_{br} = M_{ba,r} + M_{bc,r} + M_{be,r} =$$

$$= [3(EI_{bc}/l) - 6(EI_{ab}/l)]\omega_{er}/l + 6(EI_{be}/h)u_{er}/h$$

$$r_{1r} = 12(EI_{be}/h)\vartheta_{be,r}\vartheta_{be,1} =$$

$$= 12(EI_{be}/h)(-u_{er}/h) \cdot 1 = -12(EI_{be}/h)u_{er}/h$$

19.63. Pikijõudude mõju

Pikijõudude mõju arvutamise üheks mooduseks on lähendarvutus. Esmalt arvestatakse ainult paindefor- matsioone ja leitakse sõlmede ning varraste pöörded. Nende kaudu leitakse paindemomendid, varraste tasakaalu tingimustest põikjõud ja sõlmede tasakaalu tingimustest

pikijõud. Konstantse ristlõikega varda pikkuse muutus leitakse valemiga

$$\Delta l = Nl/EF \quad (19.110)$$

Raami varraste pikkuse muutusest põhjustatud painde- momendid, mis vastavad pikijõudude mõjule, arvutatakse esimeses lähenduses analoogiliselt temperatuuri ühtlasest muutusest põhjustatud paindemomentidega. Kinnitusmo- mendid leitakse valemitega:

$$M_{jk,N} = M_{kj,N} = -6(EI_{jk}/l_{jk})\vartheta_{jk,N} \quad (19.111)$$

$$M_{jl,N} = -3(EI_{jl}/l_{jl})\vartheta_{jl,N} \quad (19.112)$$

milles $\vartheta_{jk,N}$, $\vartheta_{jl,N}$ on varraste pikkuste muutustest põhjus- tatud varraste pöörded geomeetriselt määratud põhi- skeemis.

Kanooniliste võrrandite vabaliikmed arvutatakse vale- mittega:

$$r_{jN} = -6 \sum_h (EI_{jh}/l_{jh})\vartheta_{jk,N} - 3 \sum_l (EI_{jl}/l_{jl})\vartheta_{jl,N} \quad (19.113)$$

$$r_{cN} = 12 \sum_r (EI_r/l_r)\vartheta_{rN}\vartheta_{rc} + 3 \sum_s (EI_s/l_s)\vartheta_{sN}\vartheta_{sc} \quad (19.114)$$

Võrrandisüsteemi lahendamiseks leitakse pikijõudude mõjust tingitud sõlmede ja varraste pöörded, millega arvutatakse lisa-paindemomendid. Esialgsete ja lisa-pain- demomentide liitmisega saadakse paindemomendid, mis sisaldavad ka pikijõudude mõju esimeses lähenduses. Nende pikijõudude mõju sisaldavate paindemomentidega leitakse varraste ja sõlmede tasakaalu tingimustest põik- ja pikijõud. Suurema täpsuse saamiseks võib arvutust korrata, lähtudes täpsustatud pikijõududest.

19.7. Raami arvutus maatrikskujul

Näide 19.3. Arvutada joonisel 19.34, a kujutatud raami painde- momendi epüüri ordinaadid. Andmed: $l=6$ m, $h=4$ m, $h_1=5$ m, $h_2=3$ m, $a=1,5$ m; $c=0,8$ m; $i_{ad}=2$, $i_{ab}=i_{bc}=5$, $i_{ce}=3$, $i_{cf}=4$, $i_{fg}=1$; $p=2$ t/m, $P_1=5$ t, $P_2=8$ t, $W=1$ t.

Geomeetriselise määramatuse aste $n^*=s_3+\omega=3+2=5$.

Lisatundmatuteks on φ_a , φ_b , φ_c , ψ_1 ja ψ_2 .

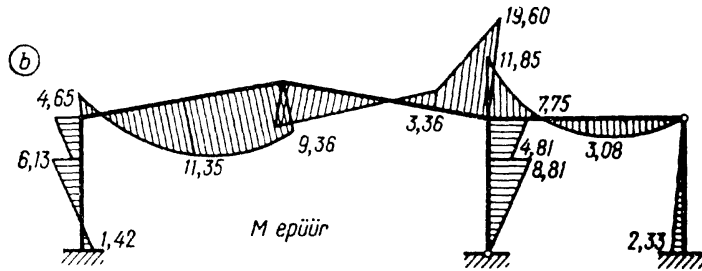
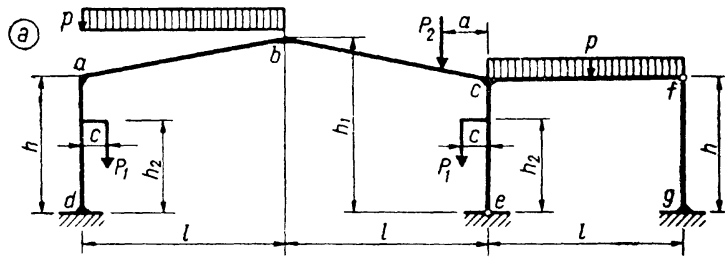
Algul leitakse paindemomendid, mis vastavad paigutusolukorda- dele $\varphi_j=1$ ($j=a, b, c$); $\psi_c=1$ ($c=1, 2$)

Paigutusolukord $\varphi_a=1$:

$$m_{da} = 2i_{ad} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ tm}; \quad m_{ad} = 4i_{ad} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ tm}$$

$$m_{ab} = 4i_{ab} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ tm}; \quad m_{ba} = 2i_{ab} = 2 \cdot 5 = 10 \text{ tm}$$

$$m_{bc} = m_{cb} = m_{ce} = m_{cf} = m_{gf} = 0$$



Joon. 19.34

Paigutusolukord $\varphi_b = 1$:

$$m_{da} = m_{ad} = 0; \quad m_{ab} = 2i_{ab} = 2 \cdot 5 = 10 \text{ tm}; \quad m_{ba} = 4i_{ab} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ tm}$$

$$m_{bc} = 4i_{bc} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ tm}; \quad m_{cb} = 2i_{bc} = 2 \cdot 5 = 10 \text{ tm}$$

$$m_{ce} = m_{cf} = m_{gf} = 0$$

Paigutusolukord $\varphi_c = 1$:

$$m_{da} = m_{ad} = m_{ba} = m_{ab} = 0; \quad m_{bc} = 2i_{bc} = 2 \cdot 5 = 10 \text{ tm}$$

$$m_{cb} = 4i_{bc} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ tm}; \quad m_{ce} = 3i_{ce} = 3 \cdot 3 = 9 \text{ tm}$$

$$m_{cf} = 3i_{cf} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ tm}, \quad m_{gf} = 0$$

Paigutusolukord $\psi_1 = 1$. Varraste pöörded on leitud näites 19.1:

$$\vartheta_{ad,1} = 1; \quad \vartheta_{ab,1} = -2; \quad \vartheta_{bc,1} = 2$$

$$\vartheta_{ce,1} = \vartheta_{cf,1} = \vartheta_{fg,1} = 0$$

$$m_{da} = m_{ad} = -6i_{ad}\vartheta_{ad,1} = -6 \cdot 2 \cdot 1 = -12 \text{ tm}$$

$$m_{ab} = m_{ba} = -6i_{ab}\vartheta_{ab,1} = -6 \cdot 5 \cdot (-2) = 60 \text{ tm}$$

$$m_{bc} = m_{cb} = -6i_{bc}\vartheta_{bc,1} = -6 \cdot 5 \cdot 2 = -60 \text{ tm}$$

Paigutusolukord $\psi_2 = 1$. Varraste pöörded on leitud näites 19.1:

$$\vartheta_{ad,2} = 0; \quad \vartheta_{fg,2} = 1; \quad \vartheta_{ab,2} = 2; \quad \vartheta_{bc,2} = -2; \quad \vartheta_{ce,2} = 1; \quad \vartheta_{cf,2} = 0$$

$$m_{da} = m_{ad} = 0,$$

$$m_{ab} = m_{ba} = -6i_{ab}\vartheta_{ab,2} = -6 \cdot 5 \cdot 2 = -60 \text{ tm}$$

$$m_{bc} = m_{cb} = -6i_{bc}\vartheta_{bc,2} = -6 \cdot 5 \cdot (-2) = 60 \text{ tm}$$

$$m_{ce} = -3i_{ce}\vartheta_{ce,2} = -3 \cdot 3 \cdot 1 = -9 \text{ tm}$$

$$m_{cf} = -3i_{cf}\vartheta_{cf,2} = -3 \cdot 4 \cdot 0 = 0$$

$$m_{gf} = -3i_{gf}\vartheta_{gf,2} = -3 \cdot 1 \cdot 1 = -3 \text{ tm}$$

Koormusest põhjustatud kinnitusemomendid on leitud näites 19.1 ja nendest moodustatud maatriks on:

$$M = \begin{pmatrix} M_{da,p} \\ M_{ad,p} \\ M_{ab,p} \\ M_{ba,p} \\ M_{bc,p} \\ M_{cb,p} \\ M_{ce,p} \\ M_{cf,p} \\ M_{gf,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,25 \\ -0,75 \\ -6,00 \\ 6,00 \\ -2,25 \\ 6,75 \\ 1,375 \\ -9,00 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19.115)$$

Järgnevalt koostatakse paindemomentide maatriks m , mille esimeses, teises ja kolmandas veerus on vastavalt sõlmede a , b ja c ühikpööretest tingitud kinnitusemomendid ning neljandas ja viiendas veerus on paigutusolukordadele $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 1$ vastavad kinnitusemomendid:

$$m = \begin{pmatrix} m_{da} \\ m_{ad} \\ m_{ab} \\ m_{ba} \\ m_{bc} \\ m_{cb} \\ m_{ce} \\ m_{cf} \\ m_{gf} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -12 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -12 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 60 & -60 \\ 10 & 20 & 0 & 60 & -60 \\ 0 & 20 & 10 & -60 & 60 \\ 0 & 10 & 20 & -60 & 60 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ tm} \quad (19.116)$$

Koormusest ja ühikpaigutistest tingitud reaktsioonid lisasidemetes a , b , c leitakse vastavalt maatriksite M_0 ja m veeru ühe sõlme elementide liitmisel:

$$r_{aa} = 8 + 20 = 28 \text{ tm}; \quad r_{ab} = 10 \text{ tm}; \quad r_{bb} = 20 + 20 = 40 \text{ tm}$$

$$r_{bc} = 10 \text{ tm}; \quad r_{cc} = 20 + 9 + 12 = 41 \text{ tm}; \quad r_{a1} = 60 - 12 = 48 \text{ tm}$$

$$r_{b1} = 60 - 60 = 0; \quad r_{c1} = -60 \text{ tm}; \quad r_{a2} = -60 \text{ tm}$$

$$r_{b2} = 60 - 60 = 0; \quad r_{c2} = 60 - 9 = 51 \text{ tm} \quad (a)$$

$$r_{ap} = -0,75 - 6,00 = -6,75 \text{ tm}; \quad r_{bp} = 6,00 - 2,25 = 3,75 \text{ tm};$$

$$r_{cp} = 6,75 + 1,375 - 9,00 = -0,875 \text{ tm} \quad (b)$$

Koormusele ja paigutusolukordadele $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 1$ vastavad reaktsioonid lisasidemetes 1 ja 2 leitakse valemitega (19.52), (19.53):

$$r_{11} = 12[2 \cdot 1^2 + 5(-2)^2 + 5 \cdot 2^2] = 504 \text{ tm}$$

$$r_{12} = r_{21} = 12[5(-2) \cdot 2 + 5 \cdot 2 \cdot (-2)] = -480 \text{ tm} \quad (c)$$

$$r_{22} = 12[5 \cdot 2^2 + 5(-2)^2] + 3(3 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2) = 492 \text{ tm}$$

$$r_{1p} = -(1,25 - 0,75 + 5 \cdot 0,8) \cdot 1 - (-6 + 6 + 2 \cdot 6 \cdot 3) \cdot (-2) - (2,25 + 6,75 - 8 \cdot 1,5) \cdot 2 = 82,5 \text{ tm} \quad (d)$$

$$r_{2p} = -(-6 + 6 + 2 \cdot 6 \cdot 3) \cdot 2 - (-2,25 + 6,75 - 8 \cdot 1,5) \cdot (-2) - (1,375 - 5 \cdot 0,8) \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot 1 = -88,375 \text{ tm}$$

Lisatundmatute maatriks Z , mille elementideks on sõlmede pöör-
ded φ_j ja geomeetriselised parameetrid ψ_c , leitakse maatriksvõrrandist

$$R_1 Z + R_0 = 0 \quad (19.117)$$

milles maatriks

$$R_1 = \begin{pmatrix} r_{aa} & r_{ab} & r_{ac} & r_{a1} & r_{a2} \\ r_{ba} & r_{bb} & r_{bc} & r_{b1} & r_{b2} \\ r_{ca} & r_{cb} & r_{cc} & r_{c1} & r_{c2} \\ r_{1a} & r_{1b} & r_{1c} & r_{11} & r_{12} \\ r_{2a} & r_{2b} & r_{2c} & r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \quad (19.118)$$

on raami jäikusmaatriks ja tema elementideks on kanooniliste võr-
randide tundmatute Z_i kordajad (reaktsioonid); maatriks

$$Z = \{\{\varphi_a \quad \varphi_b \quad \varphi_c \quad \psi_1 \quad \psi_2\}\} \quad (19.119)$$

on lisatundmatute veergmaatriks ja kolmas maatriks

$$R_0 = \{\{r_{ap} \quad r_{bp} \quad r_{cp} \quad r_{1p} \quad r_{2p}\}\} \quad (19.120)$$

on koormusliikmetest moodustatud veergmaatriks.

Asetades nüüd maatriksid R_1 , Z ja R_0 võrrandisse (19.117),
kusjuures maatriksite R_1 ning R_0 elemendid on asendatud nende
arvsuurustega vastavalt (a), (c) ja (b), (d), saadakse maatriks-
võrrand

$$\begin{pmatrix} 28 & 10 & 0 & 48 & -60 \\ 10 & 40 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 41 & -60 & 51 \\ 48 & 0 & -60 & 504 & -480 \\ -60 & 0 & 51 & -480 & 492 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \varphi_c \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6,75 \\ 3,75 \\ -0,875 \\ 82,5 \\ -88,375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (e)$$

mille lahend on

$$Z = \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \varphi_c \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,30877 \\ -0,36154 \\ -0,23759 \\ 0,42220 \\ 0,77576 \end{pmatrix} \quad (f)$$

Paindemomendid varraste otsristlõigetes leitakse valemiga

$$M = mZ + M_0 \quad (19.121)$$

$$M = \begin{pmatrix} m_{da} \\ m_{ad} \\ m_{ab} \\ m_{ba} \\ m_{bc} \\ m_{cb} \\ m_{cc} \\ m_{cf} \\ m_{gf} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \varphi_c \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_{da,p} \\ M_{ad,p} \\ M_{ab,p} \\ M_{ba,p} \\ M_{bc,p} \\ M_{cb,p} \\ M_{cc,p} \\ M_{cf,p} \\ M_{gf,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -12 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -12 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 60 & -60 \\ 10 & 20 & 0 & 60 & -60 \\ 0 & 10 & 10 & -60 & 60 \\ 0 & 0 & 20 & -60 & 60 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1,30877 \\ -0,36154 \\ -0,23759 \\ 0,42220 \\ 0,77576 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,25 \\ -0,75 \\ -6,00 \\ 6,00 \\ -2,25 \\ 6,75 \\ 1,375 \\ -9,00 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,419 \\ 4,654 \\ -4,654 \\ -9,357 \\ 9,357 \\ 19,596 \\ -7,745 \\ -11,851 \\ -2,327 \end{pmatrix} \quad \text{tm}$$

Paindemomendi epüür on esitatud joonisel 19.34, b. Analoogiliselt
võib leida sisejõud $S(M, N, Q)$ suvalistes lõigetes, kasutades valemit
 $S = sZ + S_0$ (19.122)

kus s on vastavate sisejõudude maatriks sõlmede ühikpöõretest
 $\varphi_j = 1$ ja varraste pöõretest paigutusolukordades $\varphi_c = 1$ ning S_0 on
koormusest tingitud sisejõudude maatriks geomeetriselt määratud
põhiskeemis.

19.8. Mõjujooned

19.8.1. Staatika meetod

19.8.1.1. Lisatundmatute mõjujooned

Lisatundmatute mõjujooned väljendatakse mõjuarvude
kaudu:

$$Z_1 = \beta_{11}r_{1p} + \beta_{12}r_{2p} + \dots + \beta_{1j}r_{jp} + \dots + \beta_{1n^*}r_{n^*p}$$

$$\dots$$

$$Z_i = \beta_{i1}r_{1p} + \beta_{i2}r_{2p} + \dots + \beta_{ij}r_{jp} + \dots + \beta_{in^*}r_{n^*p}$$

$$\dots$$

$$Z_{n^*} = \beta_{n^*1}r_{1p} + \beta_{n^*2}r_{2p} + \dots + \beta_{n^*j}r_{jp} + \dots + \beta_{n^*n^*}r_{n^*p}$$

$$\text{ehk} \quad Z_i = \sum_{j=1}^{n^*} \beta_{ij}r_{jp} \quad (i=1, 2, \dots, n^*) \quad (19.123)$$

$$Z_i = \sum_{j=1}^{n^*} \beta_{ij}r_{jp} \quad (i=1, 2, \dots, n^*) \quad (19.124)$$

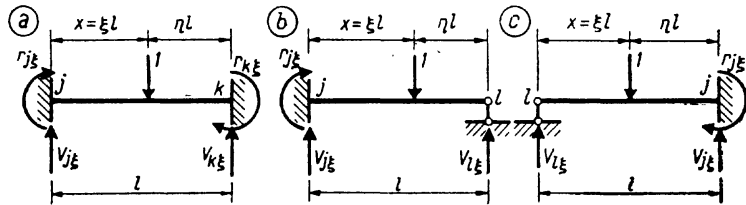
Mõjuarvud leitakse võrrandisüsteemist, kus ühe võr-
randi vabaliige võrdub ühega ($r_{ip} = 1$) ja teiste võrrandite
vabaliikmed on nullid:

$$\text{üks võrrand} \quad \sum_{j=1}^{n^*} r_{ij}\beta_{ij} + 1 = 0 \quad (19.125)$$

$$n^* - 1 \text{ võrrandit} \quad \sum_{j=1}^{n^*} r_{hj}\beta_{ij} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n^*)$$

Mõjuarv β_{ij} esitab lisatundmatut Z_i , mis vastab koormusliikmele $r_{jp}=1$, kusjuures teised koormusliikmed on nullid. Koormusliige r_{jp} oleneb varraste otste kinnitustüüsi ja ühikjõu asukohast vardal.

Järgnevalt esitatakse geomeetriliselt määratud vardas (joon. 19.35) kinnitusemomentide, toereaktsioonide ja suvalises lõikes c , mille kaugust varda vasakust otsast märgitakse tähega z , paindemomendi M_c ja põikjõu Q_c mõjujoonte avaldised. Kinnitusemomentide mõjujoonte avaldiseks on tabelites 19.1 ja 19.2 valemid nr. 1.



Joon. 19.35

Järgnevate tabelite 19.5, 19.6, 19.7 ja 19.8 elemendid, kui neid korrutada varda sildega l , esitavad varda otsristlõikes kinnitusemomenti ning suvalises lõikes c paindemomendi mõjujoone ordinaate.

Toereaktsioonide avaldised leitakse tasakaalutingimustest.

Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varras (joon. 19.35, a). Kinnitusemomentid (tabel 19.5, A):

$$r_{j\xi} = -1a\xi^2 = l\xi\eta^2; \quad r_{k\xi} = 1b\xi^2 = l\eta\xi^2 \quad (19.126)$$

Toereaktsioonid (tabel 19.5, A):

$$V_{j\xi} = \eta[1 + \xi(\eta - \xi)]; \quad V_{k\xi} = \xi[1 + \eta(\xi - \eta)] \quad (19.127)$$

Paindemoment (tabel 19.6):

$$\begin{aligned} \xi \geq \zeta = z/l: \quad M_{c\xi} &= r_{j\xi} + V_{j\xi}z = r_{j\xi} + V_{j\xi}l\xi \\ \xi \leq \zeta = z/l: \quad M_{c\xi} &= r_{j\xi} + V_{j\xi}z - 1(z - x) = \\ &= r_{j\xi} + l[V_{j\xi}\xi - (\zeta - \xi)] \end{aligned} \quad (19.128)$$

Põikjõud (tabel 19.5, A):

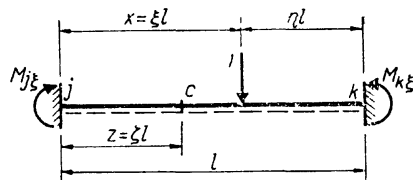
$$\xi > \zeta: \quad Q_{c\xi} = V_{j\xi}; \quad \xi < \zeta: \quad Q_{c\xi} = V_{j\xi} - 1 = -V_{k\xi} \quad (19.129)$$

Tabel 19.5
Ühikjõust tingitud kinnitusemomentid ja toereaktsioonid

	$\xi = x/l$	0,0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
A	$r_{jp}/l = -\xi\eta^2$	0	-0,128	-0,144	-0,125	-0,096	-0,032	0
	$r_{kp}/l = \eta\xi^2$	0	0,032	0,096	0,125	0,144	0,128	0
	$V_{jp} = \eta[1 + \xi(\eta - \xi)]$	1,0	0,896	0,648	0,500	0,352	0,104	0
	$V_{kp} = \xi[1 + \eta(\xi - \eta)]$	0	0,104	0,352	0,500	0,648	0,896	1,0
B	$r_{jp}/l = -\frac{1}{2}\eta(1 - \eta^2)$	0	-0,144	-0,192	-0,1875	-0,168	-0,096	0
	$V_{jp} = \eta\left[1 + \frac{1}{2}(1 - \eta^2)\right]$	1,0	0,944	0,792	0,6875	0,568	0,296	0
	$V_{ip} = \xi\left[1 - \frac{1}{2}\eta(1 + \eta)\right]$	0	0,056	0,208	0,3125	0,432	0,704	1,0
C	$r_{jp}/l = \frac{1}{2}\xi(1 - \xi^2)$	0	0,096	0,168	0,1875	0,192	0,144	0
	$V_{jp} = \xi\left[1 + \frac{1}{2}(1 - \xi^2)\right]$	0	0,296	0,568	0,6875	0,792	0,944	1,0
	$V_{ip} = \eta\left[1 - \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)\right]$	1,0	0,704	0,432	0,3125	0,208	0,056	0

Tabel 19.6

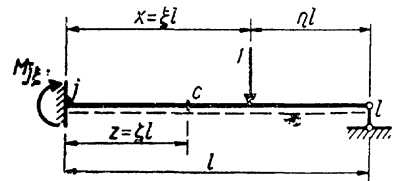
Uhikjõust põhjustatud paindemomendid $M_{\xi\zeta}/l$



$\zeta = z/l$	$\xi = x/l$						
	0,0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
0,0	0	-0,1280	-0,1440	-0,1250	-0,0960	-0,0320	0
0,2	0	0,0512	-0,0144	-0,0250	-0,0256	-0,0112	0
0,4	0	0,0304	0,1152	0,0750	0,0448	0,0096	0
0,5	0	0,0200	0,0800	-0,1250	0,0800	0,0200	0
0,6	0	0,0096	0,0448	0,0750	0,1152	0,0304	0
0,8	0	-0,0112	-0,0256	-0,0250	-0,0144	0,0512	0
1,0	0	-0,0320	-0,0960	-0,1250	-0,1440	-0,1280	0

Tabel 19.7

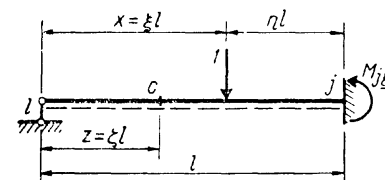
Uhikjõust põhjustatud paindemomendid $M_{\xi\zeta}/l$



$\zeta = z/l$	$\xi = x/l$						
	0,0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
0,0	0	-0,1440	-0,1920	-0,1875	-0,1680	-0,0960	0
0,2	0	0,0448	-0,0336	-0,0500	-0,0544	-0,0368	0
0,4	0	0,0336	0,1248	0,0875	0,0592	0,0224	0
0,5	0	0,0280	0,1040	0,1563	0,1160	0,0520	0
0,6	0	0,0224	0,0832	0,1250	0,1728	0,0816	0
0,8	0	0,0112	0,0416	0,0625	0,0864	0,1408	0
1,0	0	0	0	0	0	0	0

Tabel 19.8

Uhikjõust põhjustatud paindemomendid $M_{\xi\zeta}/l$



$\zeta = z/l$	$\xi = x/l$						
	0,0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
0,0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	0	0,1408	0,0864	0,0625	0,0416	0,0112	0
0,4	0	0,0816	0,1728	0,1250	0,0832	0,0224	0
0,5	0	0,0520	0,1160	0,1563	0,1040	0,0280	0
0,6	0	0,0224	0,0592	0,0875	0,1248	0,0336	0
0,8	0	-0,0368	-0,0544	-0,0500	-0,0336	0,0448	0
1,0	0	-0,0960	-0,1680	-0,1875	-0,1920	-0,1440	0

Tabelites 19.6, 19.7 ja 19.8 on positiivse paindemomendi puhul tõmmatud alumine kiud.

Vasakpoolses otsas jäigalt ja parempoolses otsas liigendiga kinnitatud varras (joon. 19.35, b).

Kinnitusmoment (tabel 19.5, B):

$$r_{j\xi} = -\frac{1}{2} l \eta (1 - \eta^2) \quad (19.130)$$

Toereaktsioonid (tabel 19.5, B):

$$V_{j\xi} = \eta \left[1 + \frac{1}{2} (1 - \eta^2) \right]; \quad (19.131)$$

$$V_{l\xi} = \xi \left[1 - \frac{1}{2} \eta (1 + \eta) \right]$$

Paindemoment (tabel 19.7):

$$\begin{aligned} \xi \geq \zeta: M_{\xi\xi} &= r_{j\xi} + V_{j\xi} z = r_{j\xi} + V_{j\xi} l \zeta \\ \xi \leq \zeta: M_{\xi\xi} &= r_{j\xi} + V_{j\xi} z - l(z - x) = \\ &= r_{j\xi} + l[V_{j\xi} \zeta - (\zeta - \xi)] \end{aligned} \quad (19.132)$$

Põikjõud (tabel 19.5, B):

$$\xi > \zeta: Q_{\zeta\xi} = V_{j\xi}; \quad \xi < \zeta: Q_{\zeta\xi} = V_{j\xi} - 1 = -V_{k\xi} \quad (19.133)$$

Vasakpoolses otsas liigendiga ja parempoolses otsas järgalt kinnitatud varras (joon. 19.35, c).

Kinnitusmoment (tabel 19.5, C):

$$r_{j\xi} = \frac{1}{2} l_{\xi}(1 - \xi^2) \quad (19.134)$$

Toereaktsioonid (tabel 19.5, C):

$$V_{j\xi} = \xi \left[1 + \frac{1}{2}(1 - \xi^2) \right]; \quad (19.135)$$

$$V_{i\xi} = \eta \left[1 - \frac{1}{2} \xi(1 + \xi) \right]$$

Paindemoment (tabel 19.8):

$$\xi \geq \zeta: M_{\zeta\xi} = V_{i\xi}z = V_{i\xi}l_{\xi} \quad (19.136)$$

$$\xi \leq \zeta: M_{\zeta\xi} = V_{i\xi}z - 1(z - x) = l[V_{i\xi}\xi - (\zeta - \xi)]$$

Põikjõud (tabel 19.5, C):

$$\xi > \zeta: Q_{\zeta\xi} = V_{i\xi}; \quad \xi < \zeta: Q_{\zeta\xi} = V_{i\xi} - 1 = -V_{j\xi} \quad (19.137)$$

Lisatundmatute mõjujoonte avaldis (19.123) on maatrikskujul järgmine:

$$\mathbf{Z}_{\xi} = \mathbf{BR}_{\xi} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1j} & \dots & \beta_{1n^*} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2j} & \dots & \beta_{2n^*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} & \dots & \beta_{ij} & \dots & \beta_{in^*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n^*1} & \beta_{n^*2} & \dots & \beta_{n^*j} & \dots & \beta_{n^*n^*} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{1\xi} \\ r_{2\xi} \\ \dots \\ r_{i\xi} \\ \dots \\ r_{n^*\xi} \end{pmatrix} \quad (19.138)$$

19.81.2. Sisejõudude mõjujooned

Kinnitusmomentide mõjujooned leitakse valemiga

$$\mathbf{M}_{\xi} = \mathbf{mZ}_{\xi} + \mathbf{M}_{0\xi} \quad (19.139)$$

milles \mathbf{m} on kinnitusmomentide maatriks sõlmede ühikpöõretest $\varphi_j = 1$ ja varraste pöõretest paigutusolukordades $\psi_c = 1$ ning $\mathbf{M}_{0\xi}$ on koormusest tingitud kinnitusmomentide

mõjujoonte maatriks geomeetriliselt määratud põhiskeemis.

Suvalises lõikes leitakse sisejõudude M_c , Q_c , N_c mõjujooned analoogiliselt:

$$\mathbf{S}_{\xi} = \mathbf{sZ}_{\xi} + \mathbf{S}_{0\xi} \quad (19.140)$$

ehk

$$\mathbf{S}_{\xi} = \mathbf{sBR}_{\xi} + \mathbf{S}_{0\xi} = -\mathbf{sR}_1^{-1} \mathbf{R}_{0\xi} + \mathbf{S}_{0\xi} \quad (19.141)$$

milles \mathbf{s} on vastavate sisejõudude maatriks sõlmede ühikpöõretest $\varphi_j = 1$ ja varraste pöõretest paigutusolukordades $\psi_c = 1$ ning $\mathbf{S}_{0\xi}$ on geomeetriliselt määratud põhiskeemi sisejõudude mõjujoonte maatriks.

Paindemomendi ja põikjõu mõjujoonte ordinaatide arvutamiseks kasutatakse ka valemeid:

$$M_{\zeta\xi} = M_{\zeta\xi}^0 + \zeta' M_{jk,\xi} - \zeta M_{kj,\xi} \quad (19.142)$$

$$Q_{\zeta\xi} = Q_{\zeta\xi}^0 - (M_{jk,\xi} + M_{kj,\xi}) / l_{jk} \quad (19.143)$$

milles $M_{\zeta\xi}^0$, $Q_{\zeta\xi}^0$ on kohas ξ mõjuvast ühikjõust põhjustatud paindemoment ja põikjõud lihttala lõikes ζ ; $M_{jk,\xi}$, $M_{kj,\xi}$ — kohas ξ mõjuvast ühikjõust põhjustatud kinnitusmomentid geomeetriliselt määratus skeemis:

$$M_{jk,\xi} = M_{jk,\xi p} + 4i_{jk}\varphi_{j\xi} + 2i_{jk}\varphi_{k\xi} - 6i_{jk}\vartheta_{jk,\xi} \quad (19.144)$$

$$M_{kj,\xi} = M_{kj,\xi p} + 2i_{jk}\varphi_{j\xi} + 4i_{jk}\varphi_{k\xi} - 6i_{jk}\vartheta_{jk,\xi}$$

Valemities (19.144) tähistavad $M_{jk,\xi p}$, $M_{kj,\xi p}$ kohas ξ mõjuvast ühikjõust põhjustatud kinnitusmomente geomeetriliselt määratud põhiskeemis.

Valemid (19.142), (19.143), kui arvestada kinnitusmomentide avaldisi (19.144), on järgmised:

$$M_{\zeta\xi} = M_{\zeta\xi}^0 + \zeta' [M_{jk,\xi p} + i_{jk}(4\varphi_{j\xi} + 2\varphi_{k\xi} - 6\vartheta_{jk,\xi})] - \zeta [M_{kj,\xi p} + i_{jk}(2\varphi_{j\xi} + 4\varphi_{k\xi} - 6\vartheta_{jk,\xi})] \quad (19.145)$$

$$Q_{\zeta\xi} = Q_{\zeta\xi}^0 - [M_{jk,\xi p} + M_{kj,\xi p} - 6i_{jk}(\varphi_{j\xi} + \varphi_{k\xi} - 2\vartheta_{jk,\xi})] / l_{jk} \quad (19.146)$$

või

$$M_{\zeta\xi} = M_{\zeta,\xi p} + \zeta' i_{jk}(4\varphi_{j\xi} + 2\varphi_{k\xi} - 6\vartheta_{jk,\xi}) - \zeta i_{jk}(2\varphi_{j\xi} + 4\varphi_{k\xi} - 6\vartheta_{jk,\xi}) \quad (19.147)$$

$$Q_{\zeta\xi} = Q_{\zeta,\xi p} - (6i_{jk}/l_{jk}) (\varphi_{j\xi} + \varphi_{k\xi} - 2\vartheta_{jk,\xi}) \quad (19.148)$$

milles $M_{\zeta,\xi p}$ ja $Q_{\zeta,\xi p}$ on ühikjõust põhjustatud paindemoment ja põikjõud lõikes ζ geomeetriliselt määratud põhiskeemis.

19.82. Kinemaatika meetod

Paigutiste vastastikkuse teoreemi alusel arvutatakse lisatundmatu paigutise mõjujoone asemel arvutuskeemi vertikaalsiirde epüür, mille ordinaadid on võrdsed paigutise mõjujoone ordinaatidega. Näiteks sõlme j pöörde φ_j mõjujoone ordinaatide leidmiseks rakendatakse sõlme j ühikmoment ja arvutatakse vertikaalsiirde epüür. Paigutiste vastastikkuse teoreemi $\varphi_{jx} = w_{xj}$ põhjal on vertikaalsiirde epüür sõlme j pöörde mõjujooneks. Ühikmomendist põhjustatud vertikaalsiirde epüüri leidmiseks vajalik paindemomendi epüür arvutatakse jõu- või deformatsioonimeetodiga. Deformatsioonimeetodi puhul on võrrandis j vabaliige $r_{jp} = -1$, kuna teistes võrrandites on vabaliikmed nullid.

Varraste pöördeid määrava parameetri ψ_c mõjujoone ordinaatide arvutamiseks rakendatakse arvutuskeemile paigutisele ψ_c vastav üldistatud jõud. Sellest jõust põhjustatud vertikaalsiirde epüür kujutab lisatundmatu ψ_c mõjujoont. Vertikaalsiirde epüüri leidmiseks vajalikud lisatundmatud arvutatakse deformatsioonimeetodi kanoonilistest võrranditest, milles $r_{cc} = -1$ ja teised vabaliikmed võrduvad nulliga.

Vertikaalsiirde epüür leitakse ainult nende varraste jaoks, kus mõjujoone ordinaatide arvutamisel liigub vertikaalne ühikjõud.

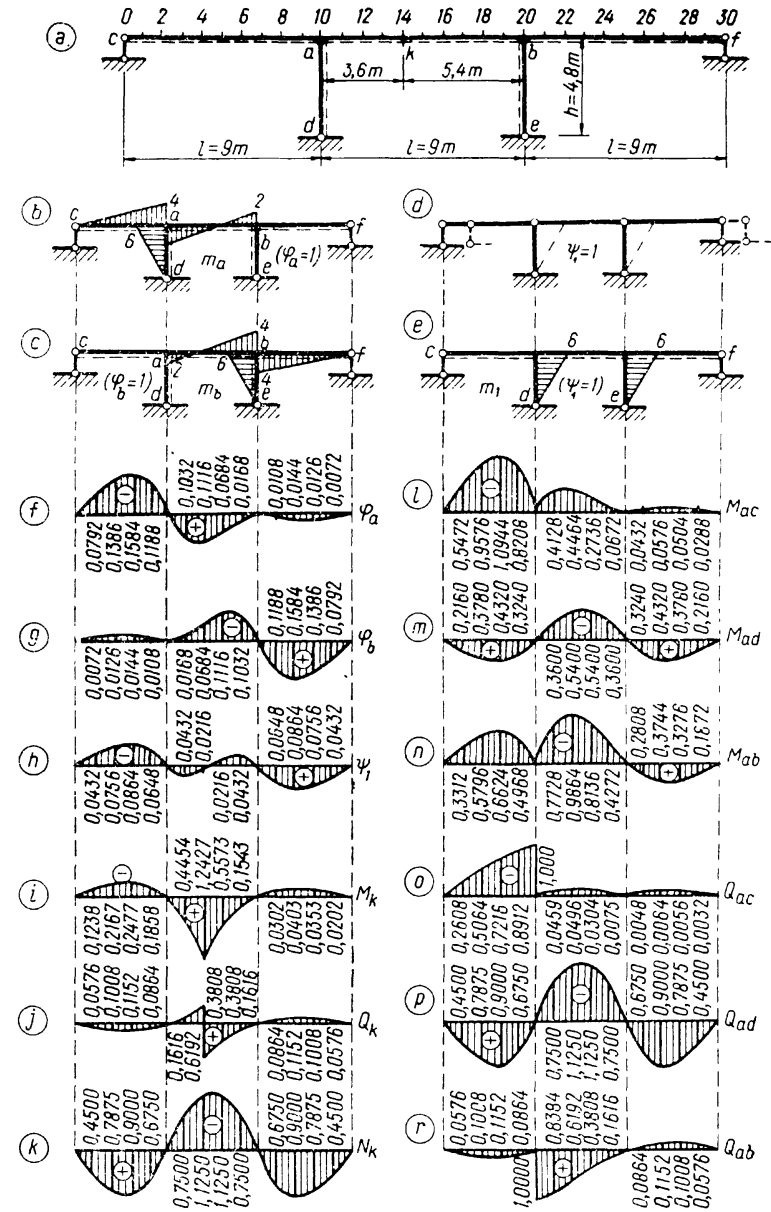
19.83. Mõjujoonte arvutus

Näide 19.4. Arvutada kolmesildelise raami lisatundmatute, sõlme a ühendatud varrastes kinnitusemomentide ja kinnituspõikjõudude ning lõikes k paindemomendi ja põikjõu mõjujoonte ordinaadid lõigetes $0, 2, 4, \dots, 30$ (joon. 19.36, a).

Varraste paindejäikused: $i_{ac} = i_{bf} = 4/3$, $i_{ab} = 1$, $i_{ad} = i_{be} = 2$.

Geomeetrilise määramatuse aste $n^* = s_3 + w = 2 + 1 = 3$.

Lisatundmatuteks on sõlmede pöördeid φ_a ja φ_b ning postide pööre $\psi_1 = \vartheta_{ad} = \vartheta_{bf}$.



Joon. 19.36

Sõlmede ja postide ühikpöõretest tingitud epüürid on kujutatud joonisel 19.36, *b, c, e*. Varrasahela paigutusolukord $\psi_1=1$ on esitatud joonisel 19.36, *d*: $\vartheta_{ad}=\vartheta_{be}=1$, $\vartheta_{ac}=\vartheta_{ab}=\vartheta_{bf}=0$.

Kanoonilised võrrandid on järgmised:

$$\begin{aligned} r_{aa}\varphi_a + r_{ab}\varphi_b + r_{a1}\psi_1 + r_{ap} &= 0 \\ r_{ba}\varphi_a + r_{bb}\varphi_b + r_{b1}\psi_1 + r_{bp} &= 0 \\ r_{1a}\varphi_a + r_{1b}\varphi_b + r_{11}\psi_1 + r_{1p} &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

milles reaktsioonid on:

$$\begin{aligned} r_{aa} &= 3(i_{ac} + i_{ad}) + 4i_{ab} = 3(4/3 + 2) + 4 \cdot 1 = 14 \text{ tm} \\ r_{bb} &= 3(i_{be} + i_{bf}) + 4i_{ba} = 3(2 + 4/3) + 4 \cdot 1 = 14 \text{ tm} \\ r_{ab} &= r_{ba} = 2i_{ab} = 2 \cdot 1 = 2 \text{ tm} \\ r_{a1} &= r_{1a} = -3i_{ad}\vartheta_{ad,1} = -3 \cdot 2 \cdot 1 = -6 \text{ tm} \\ r_{b1} &= r_{1b} = -3i_{be}\vartheta_{be,1} = -3 \cdot 2 \cdot 1 = -6 \text{ tm} \\ r_{11} &= 3(i_{ad}\vartheta_{ad,1}^2 + i_{be}\vartheta_{be,1}^2) = 3(2 \cdot 1 + 2 \cdot 1) = 12 \text{ tm} \end{aligned} \quad (b)$$

Võrrandisüsteemist

$$\begin{vmatrix} 14 & 2 & -6 \\ 2 & 14 & -6 \\ -6 & -6 & 12 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_{aa} & \beta_{ab} & \beta_{a1} \\ \beta_{ba} & \beta_{bb} & \beta_{b1} \\ \beta_{1a} & \beta_{1b} & \beta_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (c)$$

leitakse mõjuarvud:

$$\begin{aligned} \beta_{aa} &= -0,091667; & \beta_{ab} &= -0,008333; & \beta_{a1} &= -0,050000 \\ \beta_{ba} &= -0,008333; & \beta_{bb} &= -0,091667; & \beta_{b1} &= -0,050000 \\ \beta_{1a} &= -0,050000; & \beta_{1b} &= -0,050000; & \beta_{11} &= -0,133333 \end{aligned} \quad (d)$$

Avaldistega (19.123) leitakse lisatundmatute mõjujooned:

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \beta_{aa}r_{ap} + \beta_{ab}r_{bp} + \beta_{a1}r_{1p} \\ \varphi_b &= \beta_{ba}r_{ap} + \beta_{bb}r_{bp} + \beta_{b1}r_{1p} \\ \psi_1 &= \beta_{1a}r_{ap} + \beta_{1b}r_{bp} + \beta_{11}r_{1p} \end{aligned} \quad (e)$$

või

$$\begin{aligned} \varphi_a &= -0,091667 r_{ap} - 0,008333 r_{bp} - 0,050000 r_{1p} \\ \varphi_b &= -0,008333 r_{ap} - 0,091667 r_{bp} - 0,050000 r_{1p} \\ \psi_1 &= -0,050000 r_{ap} - 0,050000 r_{bp} - 0,133333 r_{1p} \end{aligned} \quad (f)$$

Vertikaalse ühikjõu puhul on $r_{1p}=0$ ja r_{ap} ning r_{bp} olenevad jõu asukohast. Koormusliikmed r_{ap} ja r_{bp} leitakse ühikjõu mõjumisel lõigetel 2, 4, 6, ..., 28.

Ühikjõud asub 1. sildel. Kinnitusemoment arvutatakse valemiga (19.134) (tabel 19.5, C):

$$\begin{aligned} r_{ap} &= \frac{1}{2} l \xi (1 - \xi^2); & r_{bp} &= 0; & r_{1p} &= 0 \\ r_{a,p,2} &= 9 \cdot 0,096 = 0,864 \text{ m}; & r_{a,p,4} &= 9 \cdot 0,168 = 1,512 \text{ m} \\ r_{a,p,6} &= 9 \cdot 0,192 = 1,728 \text{ m}; & r_{a,p,8} &= 9 \cdot 0,144 = 1,296 \text{ m} \end{aligned} \quad (g)$$

Ühikjõud asub 2. sildel. Kinnitusemomentid leitakse valemiga (19.126) (tabel 19.5, A)

$$\begin{aligned} r_{ap} &= -l \xi \eta^2; & r_{bp} &= l \xi^2 \eta; & r_{1p} &= 0 \\ r_{a,p,12} &= -9 \cdot 0,128 = -1,152 \text{ m}; & r_{b,p,12} &= 0,288 \text{ m} \\ r_{a,p,14} &= -9 \cdot 0,144 = -1,296 \text{ m}; & r_{b,p,14} &= 0,864 \text{ m} \\ r_{a,p,16} &= -9 \cdot 0,096 = -0,864 \text{ m}; & r_{b,p,16} &= 1,296 \text{ m} \\ r_{a,p,18} &= -9 \cdot 0,032 = -0,288 \text{ m}; & r_{b,p,18} &= 1,152 \text{ m} \end{aligned} \quad (h)$$

Tabel 19.9

Lisatundmatute mõjujoonte transponeeritud maatriks Z'

Lõige	φ'_a	φ'_b	ψ'_1
0	0,0000	0,0000	0,0000
2	-0,0792	-0,0072	-0,0432
4	-0,1386	-0,0126	-0,0756
6	-0,1584	-0,0144	-0,0864
8	-0,1188	-0,0108	-0,0648
10	0,0000	0,0000	0,0000
12	0,1032	-0,0168	0,0432
14	0,1116	-0,0684	0,0216
16	0,0684	-0,1116	-0,0216
18	0,0168	-0,1032	-0,0432
20	0,0000	0,0000	0,0000
22	0,0108	0,1188	0,0648
24	0,0144	0,1584	0,0864
26	0,0126	0,1386	0,0756
28	0,0072	0,0792	0,0432
30	0,0000	0,0000	0,0000

Ühikjõud asub 3. sildel. Kinnitusemoment arvutatakse valemiga (19.130), (tabel 19.5, B)

$$\begin{aligned} r_{ap} &= 0; & r_{bp} &= -\frac{1}{2} l \eta (1 - \eta^2); & r_{1p} &= 0 \\ r_{b,p,22} &= -9 \cdot 0,144 = -1,296 \text{ m}; & r_{b,p,24} &= -9 \cdot 0,192 = -1,728 \text{ m} \\ r_{b,p,26} &= -9 \cdot 0,168 = -1,512 \text{ m}; & r_{b,p,28} &= -9 \cdot 0,096 = -0,864 \text{ m} \end{aligned} \quad (i)$$

Avaldistega (f), millesse asetatakse $r_{1p}=0$ ja reaktsioonid (g), (h), (i), arvutatakse tundmatute φ_a , φ_b ning ψ_1 mõjujoonte ordinaadid (tabel 19.9). Mõjujooned on kujutatud joonisel 19.36, *f, g, h*.

Peale kinnitusemomentide M_{ac} , M_{ad} , M_{ab} tuleb leida veel ka paindemomendi M_k ja põikjõudude mõjujooned ning seepärast arvutatakse kõigi mõjujoonte ordinaadid valemiga (19.140):

$$S_{\xi} = sZ_{\xi} + S_{0\xi} \quad (j)$$

Maatriksi

$$s = \begin{vmatrix} m_{ac} \\ m_{ad} \\ m_{ab} \\ m_k \\ q_{ac} \\ q_{ad} \\ q_{ab} \\ q_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1,6 & -0,4 & 0 \\ -4/9 & 0 & 0 \\ -1,25 & 0 & 1,25 \\ -2/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & -2/3 & 0 \end{vmatrix} \quad (k)$$

esimese, teise ja kolmanda veeru elementideks on sisejõud paigutusolukordades $\varphi_a=1$, $\varphi_b=1$ ning $\psi_1=1$. Paindemoment on positiivne, kui punktiiriga märgitud vardapool on tõmmatud (joon. 19.36, a).

Tabelis 19.9 on antud lisatundmatute mõjujoonte transponeeritud maatriks Z'_{ξ} .

Osa maatriksi $S_{0\xi}$ elemente on eespool juba leitud: kinnitusmomentid $M_{ac,\xi}$ (g) ja $M_{ab,\xi}$ (h). Paimomendid geometriliselt määratud põhiskeemis lõikes k ($\zeta=0,4$) arvutatakse tabeli 19.6 abil. Rea $\zeta=0,4$ elemente korrutatakse varda $a-b$ pikkusega $l_{ab}=9$ m. Põikjõu $Q_{ac,\xi}$ leidmiseks kasutatakse tabelit 19.5, C ja $Q_{ab,\xi}$ ning $Q_{k\xi}$ arvutamiseks tabelit 19.5, A. Geomeetriselt määratud põhiskeemis paimomendide ja põikjõudude mõjujoonte maatriks $S_{0\xi}$ on esitatud tabelis 19.10 transponeeritud kujul.

Tabel 19.10

Geomeetriselt määratud põhiskeemis sisejõudude transponeeritud maatriks S'_0

Lõige	$M'_{ac,\xi}$	$M'_{ab,\xi}$	$M'_{k\xi}$	$Q'_{ac,\xi}$	$Q'_{ab,\xi}$	$Q'_{k\xi}$
0	0,000	0	0	0,000	0	0
2	-0,864	0	0	-0,296	0	0
4	-1,512	0	0	-0,568	0	0
6	-1,728	0	0	-0,792	0	0
8	-1,296	0	0	-0,944	0	0
10	0,000	0,000	0,0000	-1,000	0/1,000	0,000
12	0	-1,152	0,2736	0	0,896	-0,104
14	0	-1,296	1,0368	0	0,648	-0,352/0,648
16	0	-0,864	0,4032	0	0,352	0,352
18	0	-0,288	0,0864	0	0,104	0,104
20	0	0,000	0,0000	0	0,000	0,000
22	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0

Valemiga (j) arvutatakse sisejõudude mõjujoonte ordinaadid. Maatriksi Z_{ξ} elemendid võetakse tabelist 19.9 ja maatriksi $S_{0\xi}$ elemendid tabelist 19.10. Geomeetriselt määratud põhiskeemis vertikaalne jõud ei põhjusta paimomente ja põikjõude postides: $M_{ad,p}=0$; $Q_{ad,p}=0$ ning seepärast ei ole neid tabelis 19.10.

Mõjujooned on kujutatud joonisel 19.36, i, j, \dots, r .

20. SEGA- JA KOMBINEERITUD MEETOD

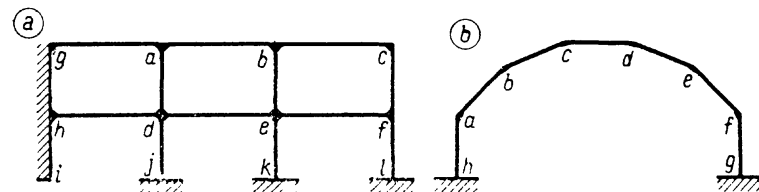
20.1. Segameetod

Staatikaga määratu raami lahendamine deformatsioonimeetodiga on otstarbekas. arvutuskeemide puhul, kus liigsidevete arv n on suur, kuid raami vabadusaste w väike. Eriti otstarbekas on deformatsioonimeetod, kui vabadusaste $w=0$. Joonisel 20.1, a kujutatud raami staatikaga määratuse aste $n=6 \cdot 3=18$, vabadusaste $w=0$ ja geomeetriselt määratuse aste $n^*=s_3+w=6+0=6$. Deformatsioonimeetodiga lahendamisel on lisatundmatuteks kuue jäiga sõlme pöörded.

Joonisel 20.1, b kujutatud raamil on samuti kuus vaba jäika sõlme ($s_3=6$), kuid vabadusaste $w=2s-v-t=2 \cdot 6-7-0=5$ (t tähistab liigendtugede toesidemete arvu). Geomeetriselt määratuse aste $n^*=s_3+w=6+5=11$ ja staatikaga määratuse aste $n=3$.

Arvutuskeemide puhul, kus liigsidevete arv n on väike, kuid vabadusaste w suur (nagu joonisel 20.1, b) on otstarbekas rakendada jõumeetodit.

Jõumeetodiga lahendamisel on lisatundmatuteks jõud ja momendid ning põhiskeem saadakse staatikaga määratust arvutuskeemist liigsidevete eemaldamisega. Deformatsioonimeetodi puhul on lisatundmatuteks paigutised



Joon. 20.1

ja põhiskeem saadakse staatikaga määramatule arvutuskeemile lisasidemete juurdepanemisega.

Staatikaga määramatu arvutuskeemi, mille ühel osal on palju liigsideid ja väike vabaduste ning teisel osal vastupidi on vähe liigsideid ja küllalt suur vabaduste, lahendamisel on sobiv võtta lisatundmatuteks paigutised ning jõud ja momendid, s.t. kasutada segameetodit (A. A. Gvozdzjev).

Segameetodi põhiskeem moodustatakse liigsidemete eemaldamisega arvutuskeemi sellest osast, kus $n_I < n_I^*$, ja sidemete lisamisega sellele osale, kus $n_{II} < n_{II}^*$. Kanoonilised võrrandid koostatakse eemaldatud liigsidemete vastavate üldistatud paigutiste geomeetriliste tingimuste (n_I võrrandit) ja juurdepanud sidemete tasakaalutingimuste (n_{II}^* võrrandit) alusel. Geomeetriliste pidevus-tingimuste ja tasakaalutingimuste alusel koostatud võrrandites on tundmatute kordajateks ning vabaliikmeteks vastavalt paigutised ja reaktsioonid.

Staatikaga määramatu arvutuskeemi paindemomendi epüür arvutatakse nii nagu jõu- ja deformatsioonimeetodi puhul jõudude mõju sõltumatus printsiibi alusel.

Raami lahendamist segameetodiga selgitame joonisel 20.2, a kujutatud arvutuskeemiga. Raami geomeetrilise määramatuse aste $n^* = s_3 + \omega = 6 + 2 = 8$ ja staatikaga määramatuse aste $n = 10$. Kolmest kontuurist koosneval arvutuskeemi osal $a-b-c-k-j-h-g-a$ on $n^* = 3$ ja $n = 7$ ning ülejäänud osal $c-d-e-f-a$ on $n = 3$ ja $n^* = 5$. Lisatundmatuteks võetakse esimesel osal sõlmede pöörded φ_a, φ_b ja φ_c ning teisel osal kolm sisejõudu X_1, X_2 ja X_3 . Põhiskeem moodustatakse esimeses osas, kus tundmatuteks on sõlmede pöörded, sidemete juurdepanemisega, ja teises osas, kus tundmatuteks on sisejõud, liigsidemete eemaldamisega (joon. 20.2, b). Kolme eemaldatud sideme kohta koostatakse kanoonilised võrrandid geomeetriliste tingimuste ja kolme juurdepanud sideme kohta tasakaalutingimuste alusel. Kokku saadakse kuus võrrandit:

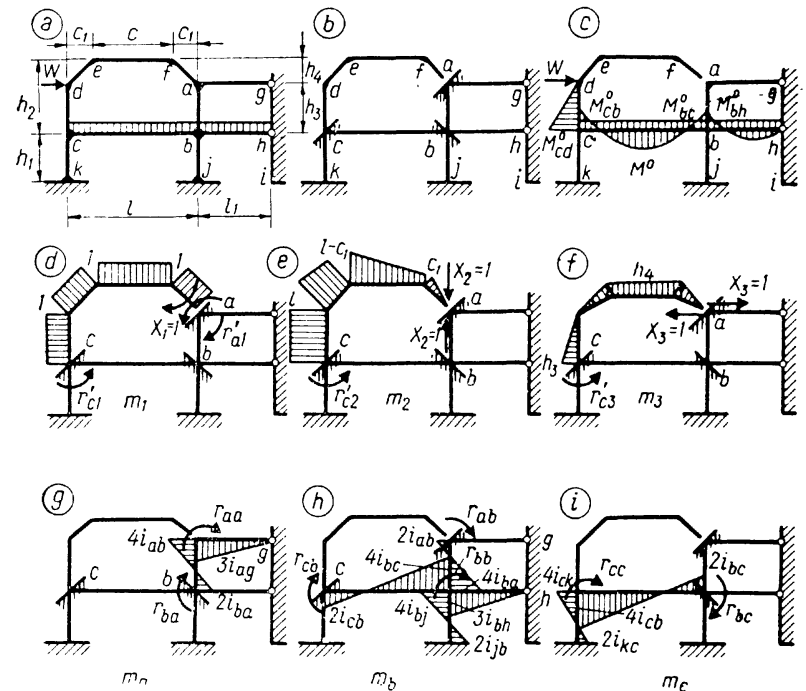
$$\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \delta_{i3}X_3 + \delta'_{ia}\varphi_a + \delta'_{ib}\varphi_b + \delta'_{ic}\varphi_c + \Delta_{ip} = 0 \quad (a)$$

$i = 1, 2, 3$

$$r'_{j1}X_1 + r'_{j2}X_2 + r'_{j3}X_3 + r_{ja}\varphi_a + r_{jb}\varphi_b + r_{jc}\varphi_c + r_{jp} = 0 \quad (b)$$

$j = a, b, c$

Ühiktundmatutest ja koormusest põhjustatud epüürid põhiskeemis on esitatud joonisel 20.2, c, d, ..., i.



Joon. 20.2

Ühikjõududest ja koormusest põhjustatud põhiskeemi paigutised $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}, \Delta_{ip}$ ($i = 1, 2, 3$) leitakse samuti kui jõumeetodi puhul.

Ühikpaigutistest ja koormusest põhjustatud reaktsioonid r_{ja}, r_{jb}, r_{jc} ja r_{jp} põhiskeemi lisasidemetes arvutatakse nagu deformatsioonimeetodi puhul.

Lisatundmatule X_i vastavad paigutised $\delta'_{ia}, \delta'_{ib}$ ja δ'_{ic} on põhjustatud sõlmede a, b ja c ühikpööretest.

Reaktsioonid r'_{j1}, r'_{j2} ja r'_{j3} on tundmatutest $X_1 = 1, X_2 = 1$ ning $X_3 = 1$ põhjustatud reaktsioonmomendid sõlmes j ($j = a, b, c$):

$$\begin{array}{lll} r'_{a1} = 1; & r'_{b1} = 0; & r'_{c1} = -1 \\ r'_{a2} = 0; & r'_{b2} = 0; & r'_{c2} = -l \\ r'_{a3} = 0; & r'_{b3} = 0; & r'_{c3} = -h_3 \end{array}$$

Paigutise ja reaktsiooni vastastikkuse teoreemi põhjal

$$\begin{aligned} \delta'_{1a} &= -r'_{a1} = -1; & \delta'_{1b} &= -r'_{b1} = 0; & \delta'_{c1} &= -r'_{c1} = 1 \\ \delta'_{2a} &= -r'_{a2} = 0; & \delta'_{2b} &= -r'_{b2} = 0; & \delta'_{c2} &= -r'_{c2} = l \\ \delta'_{3a} &= -r'_{a3} = 0; & \delta'_{3b} &= -r'_{b3} = 0; & \delta'_{c3} &= -r'_{c3} = h_3 \end{aligned}$$

Pärast võrrandisüsteemi lahendamist arvutatakse paindemomendi epüüri ordinaadid raami suvalises lõikes k valemiga

$$M_k = M_{kp}^0 + m_{k1}X_1 + m_{k2}X_2 + m_{k3}X_3 + m_{ka}\varphi_a + m_{kb}\varphi_b + m_{kc}\varphi_c$$

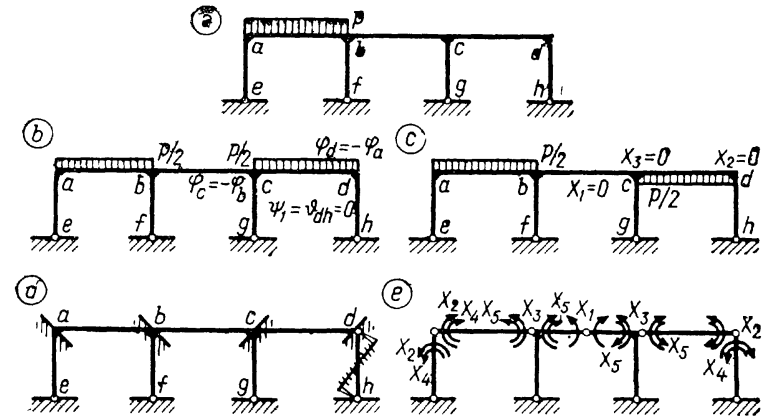
milles M_{kp}^0 , m_{k1} , m_{k2} , m_{k3} , m_{ka} , m_{kb} ja m_{kc} on koormuse ning ühik-lisatundmatute poolt põhjustatud paindemomendid põhiskeemi lõikes k .

20.2. Kombineeritud meetod

Kombineeritud meetodi rakendamisel sümmeetriliste konstruktsioonide arvutamisel (*I. M. Rabinovičs*) lahutatakse koormus sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks koormuseks (joon. 20.3, *a*, *b* ja *c*). Joonisel 20.3, *a* kujutatud raami geomeetrilise ja staatikalise määramatuse aste on viis. Jõumeetodi staatikaga määratav sümmeetriline põhiskeem koos sümmeetriliste grupptundmatutega on kujutatud joonisel 20.3, *e*. Deformatsioonimeetodi geomeetriliselt määratud põhiskeem on esitatud joonisel 20.3, *d*.

Sümmeetriline koormus (joon. 20.3, *b*) tingib sümmeetrilises arvutusskeemis sümmeetrilised paigutised ja jõud. Raami postid ei pöördu: $\vartheta_{ae} = \vartheta_{bf} = \vartheta_{cg} = \vartheta_{dh} = 0$. Sõlme d pööre on võrdne sõlme a pöördega, kuid vastupidise märgiga ($\varphi_d = -\varphi_a$). Samuti $\varphi_c = -\varphi_b$. Antisümmeetrilised grupptundmatud X_4 ja X_3 (joon. 20.3, *e*) on võrdsed nulliga. Raami arvutamisel deformatsioonimeetodiga on tundmatuteks sõlmede a ja b pöörded φ_a ning φ_b ja jõumeetodiga sümmeetrilised grupptundmatud X_1 , X_2 , X_3 . Deformatsioonimeetodi puhul on kaks kanoonilist võrrandit ja jõumeetodi puhul kolm.

Antisümmeetriline koormus (joon. 20.3, *c*) tingib sümmeetrilises arvutusskeemis antisümmeetrilised paigutised ja jõud. Sõlme d pööre võrdub sõlme a pöördega ja sõlme c pööre sõlme b pöördega ($\varphi_d = \varphi_a$; $\varphi_c = \varphi_b$); kõik postid pöörduvad võrdse nurga võrra: $\psi_1 = \vartheta_{ae} = \vartheta_{bf} = \vartheta_{cg} = \vartheta_{dh}$.



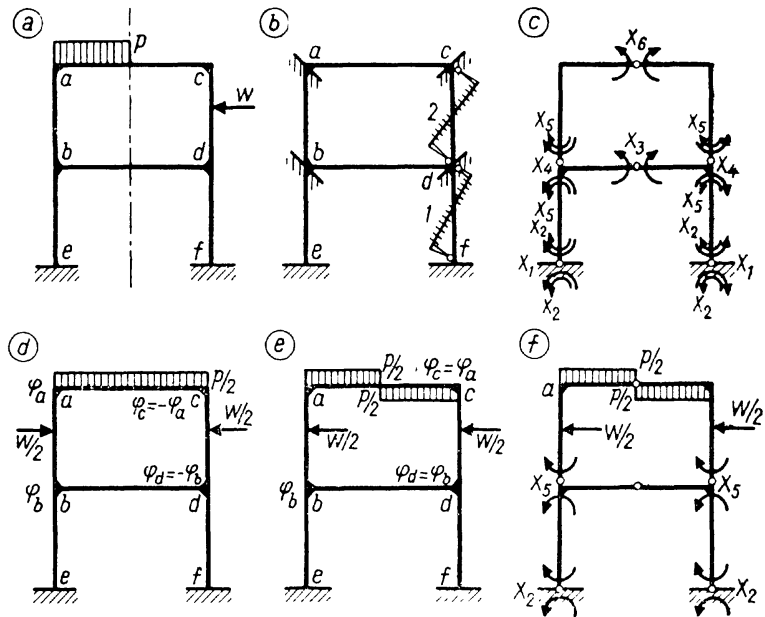
Joon. 20.3

Sümmeetrilised grupptundmatud X_1 , X_2 ja X_3 võrduvad nulliga. Raami arvutamisel jõumeetodiga on lisatundmatuteks grupptundmatud X_4 ja X_5 ning deformatsioonimeetodi puhul sõlmede a ja b pöörded φ_a , φ_b ning ühe posti pööre ψ_1 . Jõumeetodiga lahendamisel on kaks kanoonilist võrrandit ja deformatsioonimeetodiga kolm võrrandit.

Järelikult, kui sümmeetrilise raami staatikalise ja geomeetrilise määramatuse astmed on võrdsed, siis on otsustavaks ülesannet lahendada sümmeetrilise koormuse mõjumisel deformatsioonimeetodiga ning antisümmeetrilise koormuse mõjumisel jõumeetodiga.

Eriti otstarbekas on kombineeritud meetod sümmeetriliste ühesildeliste ja mitmekorruseliste raamide lahendamisel. Joonisel 20.4, *a* kujutatud raamil on $n = n^* = 6$. Põhiskeemid on esitatud joonisel 20.4, *b* ja *c*. Sümmeetrilisel koormusel on $n^* = 2$: $\varphi_c = -\varphi_a$; $\varphi_d = -\varphi_b$; $\psi_1 = \psi_2 = 0$ (joon. 20.4, *d*) ja $n = 4$: antisümmeetrilised tundmatud $X_2 = X_5 = 0$. Antisümmeetrilise koormuse mõjumisel (joon. 20.4, *e*) on $n^* = 4$: $\varphi_c = \varphi_a$, $\varphi_d = \varphi_b$, $\psi_1 \neq 0$, $\psi_2 \neq 0$ ja $n = 2$: sümmeetrilised tundmatud $X_1 = X_3 = X_4 = X_6 = 0$ (joon. 20.4, *f*).

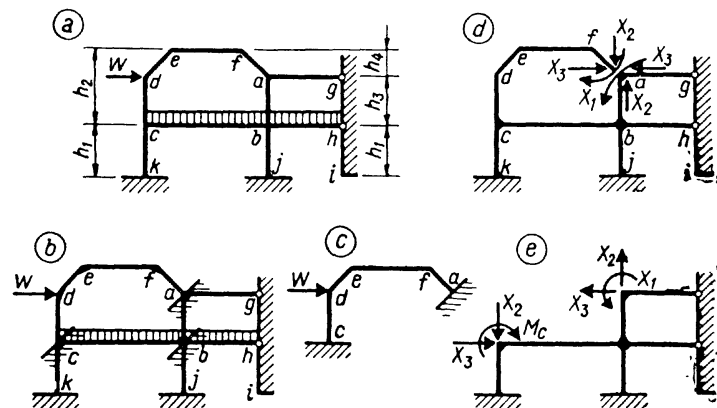
Sümmeetrilise koormuse puhul lahendatakse raam deformatsioonimeetodiga ja kanooniliste võrrandite arv on kaks. Antisümmeetrilise koormuse puhul lahendatakse



Joon. 20.4

jõumeetodiga ja kanooniliste võrrandite arv on samuti kaks.

Mittesümmeetriliste arvutuskeemide puhul võib kasutada jõu- ja deformatsioonimeetodit koos kombineeritult kahel viisil. Joonisel 20.5, a kujutatud raamil on $n=10$ ja $n^*=8$. Segameetodiga lahendamisel on lisatundmatute arv kuus (joon. 20.2, b) ja võrrandisüsteem koosneb kuuest võrrandist. Lahendades ülesannet deformatsioonimeetodiga, kuid geometriliselt määramatu põhiskeemiga (joon. 20.5, b), on põhi-lisatundmatute arv kolm: φ_a , φ_b , φ_c . Kolme võrrandi koostamiseks on eelnevalt vaja lahendada jõumeetodiga geometriliselt määramatu osa $c-d-e-f-a$ (joon. 20.5, c). Reaktsioonide r_{aa} , r_{cc} , $r_{ac}=r_{ca}$, r_{ap} ja r_{cp} arvutamiseks tuleb kolm korda staatikaga määramatu skeem lahendada kolme olukorra jaoks: koormusest ja sõlmede a ning c ühikpööretest $\varphi_a=1$, $\varphi_c=1$. Deformatsiooni- ja jõumeetodi sellisel kasutamisel on vaja lahendada kolm võrrandit kolme tundmatuga kaks korda.



Joon. 20.5

Seda ülesannet võib lahendada ka jõumeetodiga ja staatikaga määramatu põhiskeemiga (joon. 20.5, d). Põhilisatundmatuteks on siis X_1 , X_2 ja X_3 . Kanooniliste võrrandite tundmatute kordajate (paigutiste) arvutamiseks tuleb eelnevalt lahendada staatikaga määramatu põhiskeemiosa (joon. 20.5, e). See osa arvutuskeemist lahendatakse deformatsioonimeetodiga kolme koormusjuhu jaoks: $X_1=1$, $X_2=1$ ja $X_3=1$. Jällegi tuleb lahendada kolm võrrandit kolme tundmatuga kaks korda.

21. MOMENTIDE JAOTAMISE MEETOD

21.1. Arvutuse alused

Momentide jaotamise meetod (*N. M. Bernadski ja H. Gross*) võimaldab suure staatikalise määramatusega raame lahendada võrdlemisi lihtsalt. Momentide jaotamise meetod on järkjärguline lähenemine, kusjuures lahendit võib saada lähteandmete täpsusega. Algul leitakse koormusest põhjustatud kinnituspunktid geomeetriliselt määratud põhiskeemi varraste otsristlõigetel ja järgnevalt tasakaalustatakse neid momentide jaotamise teel kuni soovitud (algandmete) täpsuseni.

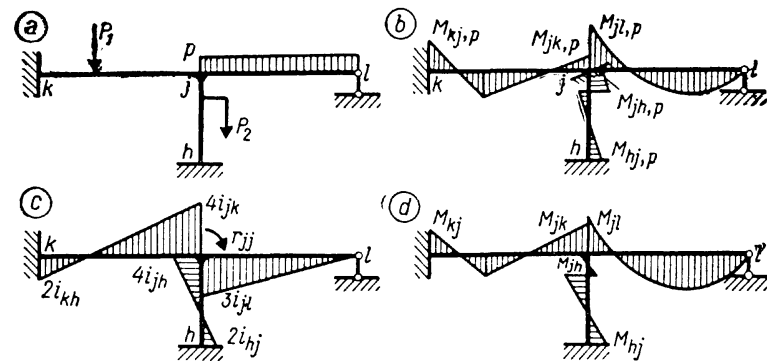
Null-vabadusastmega ($w=0$) raami arvutamisel momentide jaotamise teel ei ole vaja võrrandeid koostada ega lahendada. Paindemomendid leitakse lihtsate matemaatiliste tehetege. Kui raami vabadusaste $w>0$, siis lahendi saamiseks on vaja (peale lihtsate matemaatiliste tehete) koostada ja lahendada ka $w=2s-v-t$ võrrandit. Mida väiksem on raami vabadusaste, seda efektiivsem on momentide jaotamise meetod.

Joonisel 21.1, *a* esitatud skeemiga selgitame sõlme pöördel momentide jaotumist pöördunud sõlmes jäigalt ühendatud varrastes. Koormusest tingitud paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 21.1, *b*. Geomeetriliselt määratud põhiskeemi varraste otstes tekkivaid momente nimetatakse kinnituspunktimomentideks ($M_{jk,p}$, $M_{jh,p}$, $M_{jl,p}$, $M_{hj,p}$, $M_{hj,p}$), mis arvutatakse deformatsioonimeetodi juures esitatud valemitega (tabelid 19.1 ja 19.2).

Kinnituspunktimomentide algebralist summat ühes sõlmes nimetatakse tasakaalustamata momentideks

$$M_{j\Sigma,p} = M_{jk,p} + M_{jh,p} + M_{jl,p} \quad (a)$$

Kui geomeetriliselt määratud põhiskeemi sõlm j vabastada pöört takistavast sidemest (kõigi teiste sõlmede pöört takistavad sidemed jäävad alles ja need



Joon. 21.1

sõlmed ei pöördu), siis sõlm j pöörduv tasakaalustamata momendi $M_{j\Sigma,p}$ tõttu niipalju, et momentide summa sõlmes muutub nulliks, s.t. tasakaaluasendisse. Tingituna sõlme j pöördel muutuvad momendid sõlmes j ühendatud varraste jäikades otstes. Sõlme pöördel jaotub tasakaalustamata moment kindlas proportsioonis sõlmes ühendatud varrastele. Kuna sõlmes jäigalt ühendatud vardad pöörduvad võrdse nurga võrra, siis jaotub tasakaalustamata moment varrastele proportsionaalselt nende jäikustele.

Varda jäikus on võrdne vabas jäigas sõlmes tekkiva momendiga, mis on tingitud selle sõlme ühikpöördest ($\varphi=1$).

Kui varda mõlemad otsad on ühendatud jäikades sõlmedes (joon. 21.2, *a*), siis arvutatakse konstantse ristlõikega varda jäikus esimese valemiga (19.7; $\varphi_j=1$):

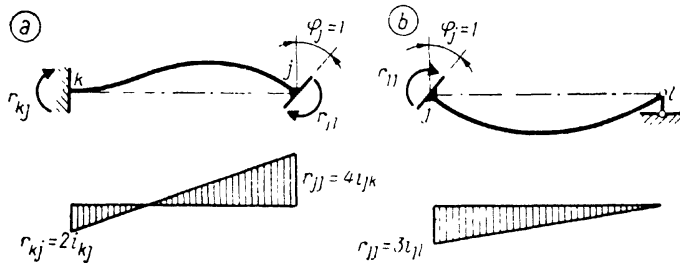
$$r_{jj} = 4EI_{jk}/l_{jk} = 4i_{jk} \quad (21.1)$$

Ühes otsas jäigalt ja teises otsas liigendiga kinnitatud varda (joon. 21.2, *b*) jäikus konstantse ristlõike puhul arvutatakse valemiga (19.28; $\varphi_j=1$):

$$r_{jj} = 3EI_{jl}/l_{jl} = 3i_{jl} \quad (21.2)$$

Tasakaalustamata momendi jaotumisel tekkinud momente nimetatakse tasakaalustavateks momentideks.

Sõlme j pöörde põhjustab momendi muutust sõlmes j jäigalt ühendatud varda teises otsas jäigas sõlmes (joon. 21.1, *a*: sõlmed k ja h). Neid momente nimetatakse üle-



Joon. 21.2

kandemomentideks. Ülekandemoment on võrdne ülekandeteguri ja tasakaalustava momendi korrutisega.

Ülekandegur λ on võrdne paigalseisvas ja pöörduvas sõlmes (jäigalt ühendatud varda otstes tekkivate) momentide suhtega ($\lambda_{jk} = M_{kj}/M_{jk}$; $\lambda_{jh} = M_{hj}/M_{jh}$). Konstantse ristlõikega varda ülekandegur $\lambda = 1/2$.

Sõlme j pöört takistava sideme eemaldamisel pöörduv sõlm tasakaalustamata momendi $M_{j\Sigma,p}$ tõttu. Tasakaaluvõrrandist

$$r_{jj}\varphi_j + M_{j\Sigma,p} = 0 \quad (b)$$

leitakse sõlme j pööre

$$\varphi_j = -M_{j\Sigma,p}/r_{jj} \quad (21.3)$$

milles

$$r_{jj} = 4(i_{jk} + i_{jh}) + 3i_{jl} \quad (c)$$

on sõlmes j jäigalt ühendatud varraste jäikuste summa (joon. 21.1, c).

Sõlmes j jäigalt ühendatud varraste jäikuste summa leitakse valemiga (19.48):

$$r_{jj} = 4 \sum_k i_{jk} + 3 \sum_l i_{jl} \quad (21.4)$$

Sõlme j pöördest tingitud tasakaalustavad momendid on järgmised:

$$\begin{aligned} M_{jk,p'} &= -(4i_{jk}/r_{jj}) M_{j\Sigma,p} \\ M_{jh,p'} &= -(4i_{jh}/r_{jj}) M_{j\Sigma,p} \\ M_{jl,p'} &= -(3i_{jl}/r_{jj}) M_{j\Sigma,p} \end{aligned} \quad (d)$$

Tasakaalustamata momendi $M_{j\Sigma,p}$ ees olevaid suhteid

$4i_{jk}/r_{jj}$, $4i_{jh}/r_{jj}$ ja $3i_{jl}/r_{jj}$ nimetatakse jaotusarvudeks. Jaotusarvud näitavad, kuidas tasakaalustamata moment jaotub varrastele. Kui arvestada valemit (c), siis on nende avaldised järgmised:

$$\begin{aligned} \text{vardal } j-k: \quad j_{jk} &= 4i_{jk}/[4(i_{jk} + i_{jh}) + 3i_{jl}] = \\ &= i_{jk}/(i_{jk} + i_{jh} + 0,75i_{jl}) \\ \text{vardal } j-h: \quad j_{jh} &= 4i_{jh}/[4(i_{jk} + i_{jh}) + 3i_{jl}] = \\ &= i_{jh}/(i_{jk} + i_{jh} + 0,75i_{jl}) \\ \text{vardal } j-l: \quad j_{jl} &= 3i_{jl}/[4(i_{jk} + i_{jh}) + 3i_{jl}] = \\ &= 0,75i_{jl}/(i_{jk} + i_{jh} + 0,75i_{jl}) \end{aligned} \quad (e)$$

Jaotusarvude summa sõlmes võrdub ühega:

$$j_{jk} + j_{jh} + j_{jl} = 1 \quad (f)$$

Jaotusarv mõlemas otsas jäigalt kinnitatud vardal arvutatakse valemiga

$$j_{jk} = i_{jk}/(\sum_k i_{jk} + 0,75 \sum_l i_{jl}) \quad (21.5)$$

ja sõlmes j jäigalt ning teises otsas liigendiga kinnitatud vardal

$$j_{jl} = 0,75i_{jl}/(\sum_k i_{jk} + 0,75 \sum_l i_{jl}) \quad (21.6)$$

$$\text{Kontroll: } \sum_k j_{jk} + \sum_l i_{jl} = 1 \quad (21.7)$$

Tasakaalustavad momendid arvutatakse nüüd valemitega:

$$\begin{aligned} M_{jk,p'} &= -j_{jk}M_{j\Sigma,p}; & M_{jh,p'} &= -j_{jh}M_{j\Sigma,p}; \\ M_{jl,p'} &= -j_{jl}M_{j\Sigma,p} \end{aligned} \quad (21.8)$$

Ülekandemomendid jäikades sõlmedes k ja h arvutatakse tasakaalustavate momentide ja ülekandetegurite korrutistena:

$$M_{kj,p''} = \lambda_{jk}M_{jk,p'}; \quad M_{hj,p''} = \lambda_{jh}M_{jh,p'} \quad (21.9)$$

mis konstantse ristlõikega varraste puhul on:

$$M_{kj,p''} = 1/2M_{jk,p'}; \quad M_{hj,p''} = 1/2M_{jh,p'} \quad (21.10)$$

Paindemomendi epüüri (joon. 21.1, d) ordinaadid leitakse liitmise teel:

$$\begin{aligned} M_{jk} &= M_{jk,p} + M_{jk,p'}; & M_{jh} &= M_{jh,p} + M_{jh,p'} \\ M_{jl} &= M_{jl,p} + M_{jl,p'} \\ M_{kj} &= M_{kj,p} + M_{kj,p''}; & M_{hj} &= M_{hj,p} + M_{hj,p''} \end{aligned} \quad (21.11)$$

Järgnevalt esitatakse **arvutusprogramm** nullvabadusastmega arvutusskeemi jaoks ($\omega=0$).

1. Arvutatakse koormusest põhjustatud kinnitusmomentid geomeetriliselt määratud põhiskeemis.

2. Leitakse jaotusarvud.

3. Raami geomeetriliselt määratud põhiskeemi ühest sõlmest eemaldatakse pöret takistav side. Tasakaalustamata momendi tõttu sõlm pöörduv. Järgnevalt arvutatakse sõlme pöördest tingitud tasakaalustavad momendid. Viimaste summa on võrdne tasakaalustamata momendiga (kinnitusmomentide algebraline summa sõlmes), kuid vastupidise märgiga. Pärast momentide tasakaalustamist pannakse raami sõlme pöret takistav side sõlme tagasi.

4. Leitakse ülekandemomendid, mis saadakse tasakaalustava momendi korrutamisel ülekandeteguriga. Ülekandemomendid on tasakaalustavate momentidega samamärgilised.

5. Rakendatakse punktides 3 ja 4 kirjeldatud tehteid kõigi sõlmede kohta, kusjuures tasakaalustamata momentide leidmisel liidetakse koormusest põhjustatud kinnitusmomentidele ka ülekandemomendid. Pärast kõigi sõlmede ühekordset tasakaalustamist esinevad sõlmedes ülekandemomendid, mille tõttu sõlmed ei ole tasakaalus.

6. Korratakse punktides 3, 4 ja 5 kirjeldatud tehteid tasakaalustamata ülekandemomentidega, kuni ülekandemomendid on arvutustäpsusest väiksemad. Sõlme teistkordsel ja järgnevatel tasakaalustamistel on tasakaalustamata momendiks ülekandemomentide algebraline summa sõlmes.

7. Iga varda otsas liidetakse kinnitusmoment, tasakaalustavad ja ülekandemomendid, mille tulemusena saadakse arvutusskeemile mõjuvast koormusest põhjustatud paindemomendid.

8. Põik- ja pikijõud leitakse varraste ja sõlmede kohta koostatud tasakaalutingimustega.

9. Sisejõude ja toereaktsioone kontrollitakse tasakaalutingimustega: $\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$ ja $\Sigma M=0$.

Sõlmi võib tasakaalustada suvalises järjekorras. Otsarbekas on alustada sõlmest, kus tasakaalustamata moment on kõige suurem. Arvutus esitatakse tabeli kujul. Tabeli peas märgitakse sõlmed, vardad ja jaotusarvud. Tasakaalustamine koosneb tsüklistest. Tsükli moodustab ühekordne tasakaalustamine kõigi sõlmede juures. Esi-

mene arvutustsükkel koosneb kolmest reast: esimeses reas on kinnitusmomentid, teises reas ülekandemomendid ja kolmandas reas tasakaalustavad momendid. Iga järgmine tsükkel koosneb tavaliselt kahest reast, kui sõlmed tasakaalustatakse samas järjekorras kui eelmises tsükli: esimeses reas on ülekandemomendid ja teises reas tasakaalustavad momendid. Kui sõlmed tasakaalustatakse, võrreldes eelmise tsükliga, teises järjekorras, siis võib tsükkel koosneda kolmest reast: esimeses ja teises reas on ülekandemomendid ja kolmandas — tasakaalustavad momendid.

Eelnevalt kirjeldati momentide jaotamise meetodit nullvabadusastmega ($\omega=0$) raami jaoks.

Järgnevalt käsitletakse momentide jaotamise meetodit, kui raami vabadusaste $\omega>0$. Selliste raamide arvutamisel peab sõlmede tasakaalustamisel arvestama peale sõlmede pöördest tingitud momentide ka varraste pöördest põhjustatud momente. Raami varraste pöörded ϑ_{jh} määratakse parameetritega ψ_c (19.4), mille arv on võrdne raami vabadusastmega ω (19.2):

$$\vartheta_{jh} = \sum_c^w \vartheta_{jh,c} \psi_c \quad (21.12)$$

Arvutusprogramm on järgmine.

1. Leitakse ülekande- ja jaotusarvud.

2. Arvutatakse koormusest põhjustatud kinnitusmomentid geomeetriliselt määratud põhiskeemis ($M_{jh,p}$; $M_{jl,p}$).

3. Tasakaalustatakse koormuse poolt põhjustatud kinnitusmomentid. Tasakaalustamisel eemaldatakse üksteise järel ja pannakse tagasi sidemed, mis takistavad sõlmede pöörded. Varraste pöörded takistavaid sidemeid ei eemaldata. Koormusest põhjustatud paindemomendid, kui raami vardad ei pöördu (pöörduvad ainult raami sõlmed), tähistatakse M_{jp^*} .

4. Raam viiakse paigutusolukorda $\psi_c=1$ ($c=1, 2, \dots, \omega$) ja arvutatakse kinnitusmomentid varraste pöördest: $M_{jh,c}$ ning $M_{jl,c}$. Paigutusolukorras $\psi_c=1$ on sõlmede pöörded nullid ($\varphi_j=0$).

5. Tasakaalustatakse paigutusolukorrast $\psi_c=1$ ($c=1, 2, \dots, \omega$) põhjustatud kinnitusmomentid, vabastades ja pannes tagasi ainult sõlmede pöörded takistavad sidemed, jättes vabastamata varraste pöörded takistavad sidemed. Selle juures toimitakse nii, kuidas on kirjeldatud

Tabel 21.1

Koormusest põhjustatud momendid, kui vardad ei pöördu

Sõlm	<i>d</i>	<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>			<i>g</i>
Var-ras	<i>d-a</i>	<i>a-d</i>	<i>a-b</i>	<i>b-a</i>	<i>b-c</i>	<i>c-b</i>	<i>c-e</i>	<i>c-f</i>	<i>g-f</i>
<i>j</i>	—	2/7	5/7	1/2	1/2	20/41	9/41	12/41	—
<i>M_{j,p}</i>	1250	-750	-6000	6000	-2250	6750	1375	-9000	
	964	1929	4821	2411	-3080	-1540	1178	530	707
	220	440	-1540	550	589	-285	139	63	83
	41	81	-285	102	69	-43	21	9	13
	6	12	-43	15	10	-7	3	2	2
	1	2	-6	2	-2				
		-1							
		1							
<i>M_{j,p*}</i>	2482	1714	-1714	5330	-5330	6216	1979	-8195	—

$$j_{ce} = 0,75i_{ce}/[i_{cb} + 0,75(i_{ce} + i_{cf})] = 0,75 \cdot 3/[5 + 0,75(3+4)] = 9/41$$

$$j_{cb} = i_{cb}/[i_{cb} + 0,75(i_{ce} + i_{cf})] = 5/[5 + 0,75(3+4)] = 20/41$$

$$j_{cf} = 0,75i_{cf}/[i_{cb} + 0,75(i_{ce} + i_{cf})] = 0,75 \cdot 4/[5 + 0,75(3+4)] = 12/41$$

Ulekandearvud $\lambda = 0,5$.

Kinnitusmomendid geometriliselt määratud põhiskeemis on arvu-tatud näites 19.1:

$$M_{da,p} = 1,25 \text{ tm}; \quad M_{ad,p} = -0,75 \text{ tm}; \quad M_{ab,p} = -6 \text{ tm}$$

$$M_{ba,p} = 6 \text{ tm}; \quad M_{bc,p} = -2,25 \text{ tm}; \quad M_{cb,p} = 6,75 \text{ tm}$$

$$M_{cf,p} = -9 \text{ tm}; \quad M_{e,p} = 1,375 \text{ tm}$$

Paindemomendi epüür geometriliselt määratud põhiskeemis $M_{j,p}$ on kujutatud joonisel 21.3, *b*.

Sõlmede tasakaalustamisel ei eemaldata varraste pöörded takis-tavaid sidemeid 1 ja 2. Momentide jaotus on esitatud tabelis 21.1.

Tabel 21.2

Paigutusolukorras $\psi_1 = 1$ tasakaalustatud momendid

Sõlm	<i>d</i>	<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>			<i>g</i>
Var-ras	<i>d-a</i>	<i>a-d</i>	<i>a-b</i>	<i>b-a</i>	<i>b-c</i>	<i>c-b</i>	<i>c-e</i>	<i>c-f</i>	<i>g-f</i>
<i>j</i>	—	2/7	5/7	1/2	1/2	20/41	9/41	12/41	—
<i>M_{j1}</i>	-12000	-12000	60000	60000	-60000	-60000	—	—	—
	-6857	-13714	-34286	-17143	14634	1255	29268	13171	17561
	-90	-179	627	-224	-153	627	-306	-138	-183
	-14	-27	94	-33	-23	94	-46	-21	-27
	-2	-4	14	-5	-3	14	-7	-3	-4
			2	-1					
		-2	1						
<i>M_{j1*}</i>	-18963	-25924	25924	44070	-44070	-30355	13009	17346	—

Kinnitusmomendid $M_{j,p}$ on kirjutatud tabelis dimensiooniga kGm. Paindemomendi $M_{j,p*}$ epüür on kujutatud joonisel 21.3, *c*Kinnitusmomendid paigutusolukorras $\psi_1 = 1$ (joon. 21.3, *d*; var-raste pöörded on leitud näites 19.1):

$$M_{ad,1} = M_{da,1} = -6i_{ad}\theta_{ad,1} = -6 \cdot 2 \cdot 1 = -12 \text{ tm} = -12000 \text{ kGm}$$

$$M_{ab,1} = M_{ba,1} = -6i_{ab}\theta_{ab,1} = -6 \cdot 5 \cdot (-2) = 60 \text{ tm} = 60000 \text{ kGm}$$

$$M_{bc,1} = M_{cb,1} = -6i_{bc}\theta_{bc,1} = -6 \cdot 5 \cdot 2 = -60 \text{ tm} = -60000 \text{ kGm}$$

Paigutusolukorras $\psi_1 = 1$ vastav paindemomendi epüür on kuju-tatud joonisel 21.3, *e*.Kinnitusmomendid paigutusolukorras $\psi_2 = 1$ (joon. 21.3, *f*; var-raste pöörded on leitud näites 19.1):

$$M_{ab,2} = M_{ba,2} = -6i_{ab}\theta_{ab,2} = -6 \cdot 5 \cdot 2 = -60 \text{ tm} = -60000 \text{ kGm}$$

$$M_{bc,2} = M_{cb,2} = -6i_{bc}\theta_{bc,2} = -6 \cdot 5 \cdot (-2) = 60 \text{ tm} = 60000 \text{ kGm}$$

$$M_{ce,2} = -3i_{ce}\theta_{ce,2} = -3 \cdot 3 \cdot 1 = -9 \text{ tm} = -9000 \text{ kGm}$$

$$M_{gf,2} = -3i_{gf}\theta_{gf,2} = -3 \cdot 1 \cdot 1 = -3 \text{ tm} = -3000 \text{ kGm}$$

Tabel 21.3

Paigutusolukorras $\psi_2=1$ tasakaalustatud momendid

Sõlm	d		a		b		c			g
Var-ras	d-a	a-d	a-b	b-a	b-c	c-b	c-e	c-f	g-f	
j	—	2/7	5/7	1/2	1/2	20/41	9/41	12/41	—	
M_{j2}	—	—	—60000	—60000	60000	60000	—9000	—	—3000	
	8571	17143	42857	21429	—12439	—24878	—11195	—14927		
	321	642	—2247	803	548	—2247	1096	493	658	
	48	97	—338	121	82	—338	165	74	99	
	8	15	—51	18	12	—51	25	11	15	
1	2	—7	2	2	—7	3	2	2		
		—1			—1					
		1			1					
M_{j2}^*	8949	17899	—17899	—42916	42916	33768	—19615	—14153	—3000	

Paigutusolukordadest $\psi_1=1$ ja $\psi_2=1$ põhjustatud kinnitusmomentide tasakaalustamine on esitatud tabelites 21.2 ja 21.3. Tasakaalustamisel ei eemaldata varraste pöördeid takistavaid sidemeid.

Parameetrid ψ_1 ja ψ_2 leitakse võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} a_{11}\psi_1 + a_{12}\psi_2 + a_{10} &= 0 \\ a_{21}\psi_1 + a_{22}\psi_2 + a_{20} &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

milles

$$\begin{aligned} a_{11} &= (M_{da,1} + M_{ad,1})\vartheta_{ad,1} + (M_{ab,1} + M_{ba,1})\vartheta_{ab,1} + \\ &+ (M_{bc,1} + M_{cb,1})\vartheta_{bc,1} = (-18963 - 25924) \cdot 1 + \\ &+ (25924 + 44070) \cdot (-2) + (-44070 - 30355) \cdot 2 = -333725 \text{ kGm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= (M_{da,2} + M_{ad,2})\vartheta_{ad,1} + (M_{ab,2} + M_{ba,2})\vartheta_{ab,1} + \\ &+ (M_{bc,2} + M_{cb,2})\vartheta_{bc,1} = (8949 + 17899) \cdot 1 + \\ &+ (-17899 - 42916) \cdot (-2) + (42916 + 33768) \cdot 2 = 301846 \text{ kGm} \end{aligned}$$

Tabel 21.4
Paigutusmomenti M_j epüüri ordinaadid

Sõlm	g		c		b		a		d	
Var-ras	g-f	—	c-f	c-e	c-b	b-c	b-a	a-b	a-d	d-a
M_{j1}	—	—3000	17346	13009	—30355	—44070	44070	25924	—25924	—18963
M_{j2}	—	—	—14153	—19615	33768	42916	—42916	—17899	17899	8949
M_{jP}	—	—	—8195	1975	6216	—5330	5330	—1714	1714	2482
$\psi_1 M_{j1}$	—	—	7323	5492	—12816	—18606	18606	10945	—10945	—8006
$\psi_2 M_{j2}$	—2327	—	—10979	—15217	26196	33293	—33293	—13885	13885	6942
M_j	—2327	—	—11851	—7746	19596	9357	—9357	—4654	4654	1418

$$a_{21} = (M_{ab,1^*} + M_{ba,1^*}) \vartheta_{ab,2} + (M_{bc,1^*} + M_{cb,1^*}) \vartheta_{bc,2} + \\ + M_{ce,1^*} \vartheta_{ce,2} = (25924 + 44070) \cdot 2 + (-44070 - 30355) (-2) + \\ + 13009 \cdot 1 = 301847 \text{ kGm}$$

$$a_{22} = (M_{ab,2^*} + M_{ba,2^*}) \vartheta_{ab,2} + (M_{bc,2^*} + M_{cb,2^*}) \vartheta_{bc,2} + \\ + M_{ce,2^*} \vartheta_{ce,2} + M_{gf,2^*} \vartheta_{gf,2} = (-17899 - 42916) \cdot 2 + \\ + (42916 + 33768) (-2) - 19615 \cdot 1 - 3000 \cdot 1 = -297613 \text{ kGm}$$

$$a_{10} = (M_{da,p^*} + M_{ad,p^*} + S_{ad,1}) \vartheta_{ad,1} + (M_{ab,p^*} + M_{ba,p^*} + \\ + S_{ab,1}) \vartheta_{ab,1} + (M_{bc,p^*} + M_{cb,p^*} + S_{bc,1}) \vartheta_{bc,1} = \\ = (2482 + 1714 + 5000 \cdot 0,8) \cdot 1 + (-1714 + 5330 + 2000 \cdot 6 \cdot 3) \cdot \\ \cdot (-2) + (-5330 + 6216 - 8000 \cdot 1,5) \cdot 2 = -93264 \text{ kGm}$$

$$a_{20} = (M_{ab,p^*} + M_{ba,p^*} + S_{ab,2}) \vartheta_{ab,2} + (M_{bc,p^*} + M_{cb,p^*} + \\ + S_{bc,2}) \vartheta_{bc,2} + (M_{ce,p^*} + S_{ce,2}) \vartheta_{ce,2} + S_{gf,2} \vartheta_{gf,2} = \\ = (-1714 + 5330 + 2000 \cdot 6 \cdot 3) \cdot 2 + (-5330 + 6216 - \\ - 8000 \cdot 1,5) (-2) + (1979 - 5000 \cdot 0,8) \cdot 1 + 1000 \cdot 4 = 103439 \text{ kGm}$$

Kui tööde avaldised a_{11} , $a_{12} = a_{21}$, a_{22} , a_{10} ja a_{20} asendada arvsuustega, siis on võrrandisüsteem (a) järgmine:

$$-333725\psi_1 + 301846\psi_2 - 93264 = 0 \\ 301847\psi_1 - 297613\psi_2 + 103439 = 0 \quad (b)$$

Võrrandisüsteemi (b) lahendamiseks leitakse varraste pöördede määravad parameetrid

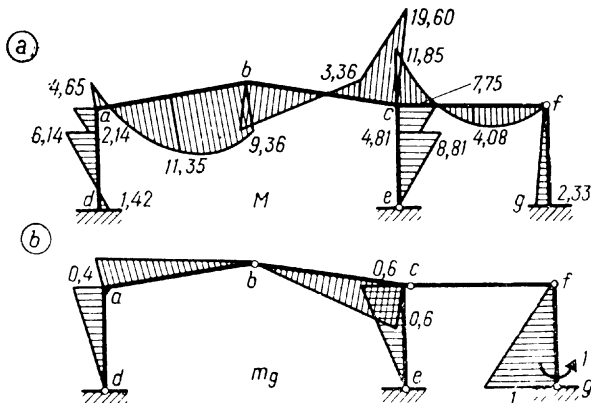
$$\psi_1 = 0,42219 \quad \text{ja} \quad \psi_2 = 0,77576$$

Paindemomendid arvutatakse valemiga (21.14):

$$M_j = M_{jp^*} + M_{j1^*}\psi_1 + M_{j2^*}\psi_2$$

Arvutus on esitatud tabelis 21.4 ja paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 21.4, a.

Kontrolliks arvutatakse staatikaga määratavas skeemis paigutus, mis staatikaga määramatus arvutuskeemis võrdub nulliga. Staatikaga määratud skeem on kujutatud joonisel 21.4, b. Ristlõike



Joon. 21.4

pöörde arvutamiseks on sinna rakendatud ühikmoment ja arvutatud paindemomendi epüür. Varraste redutseeritud pikkused on: $l'_{ce} = l_{ce} = 4 \text{ m}$.

$$l'_{ad} = \frac{l_{ce} i_{ce}}{i_{ad}} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ m}; \quad l'_{ab} = \frac{l_{ce} i_{ce}}{i_{ab}} = \frac{4 \cdot 3}{5} = 2,4 \text{ m}$$

$$l'_{cf} = \frac{l_{ce} i_{ce}}{i_{cf}} = \frac{4 \cdot 3}{4} = 3 \text{ m}; \quad l'_{fg} = \frac{l_{ce} i_{ce}}{i_{fg}} = \frac{4 \cdot 3}{1} = 12 \text{ m}$$

$$EI_0 \varphi_g = 1 \cdot 2,327 \cdot 12/3 - 8,810 \cdot 0,45 \cdot 3/3 - [0,45 \cdot 4,810 + \\ + 4 \cdot 0,525(7,746 + 4,810)/2 + 0,6 \cdot 7,746]/6 - \\ - (0,6 \cdot 19,596 + 4 \cdot 0,525 \cdot 11,477 + 0,45 \cdot 3,358) 0,6/6 + \\ + (-0,45 \cdot 3,358 + 4 \cdot 0,225 \cdot 3,000) \cdot 1,8/6 - \\ + (4 \cdot 0,2 \cdot 11,351 - 0,4 \cdot 4,654) \cdot 2,4/6 + [0,4 \cdot 4,654 + \\ + 4 \cdot 0,35(4,654 + 2,136)]/2 + 0,3 \cdot 2,136] 1,5/6 + \\ + [0,3 \cdot 6,136 + 4 \cdot 0,15(6,136 - 1,418)]/2] 4,5/6 = 13,921 - \\ - 13,923 = 0,002 \approx 0$$

21.3. Temperatuuri muutuse mõju

Temperatuuri muutuse mõju arvutamine momentide jaotamise meetodiga on analoogiline koormusest põhjustatud paindemomentide arvutusega. Erinevus esineb ainult geomeetriselt määratud põhiskeemi kinnitusmomentide arvutuses. Temperatuuri ühtlasest muutusest põhjustatud kinnitusmomentid geomeetriselt määratud põhiskeemis arvutatakse valemitega (19.95), (19.96):

$$M_{jk,t} = M_{kj,t} = -6(EI_{jk}/l_{jk}) \vartheta_{jk,t} \quad (21.15)$$

$$M_{jl,t} = -3(EI_{jl}/l_{jl}) \vartheta_{jl,t}$$

milles $\vartheta_{jk,t}$ ja $\vartheta_{jl,t}$ on temperatuuri ühtlasest muutusest põhjustatud varraste pöörded geomeetriselt määratud põhiskeemis mõlemas otsas jäigalt ning ühes otsas jäigalt ja teises otsas liigendiga kinnitatud vardas.

Temperatuuri mitteühtlasest muutusest põhjustatud kinnitusmomentid geomeetriselt määratud põhiskeemis arvutatakse valemitega (tabelid 19.1 ja 19.2):

$$M_{jk,\Delta t} = -EI_{jk} \alpha \Delta t / h_{jk}; \quad M_{kj,\Delta t} = EI_{jk} \alpha \Delta t / h_{jk} \quad (21.16)$$

$$M_{jl,\Delta t} = -(3/2) EI_{jl} \alpha \Delta t / h_{jl} \quad (21.17)$$

Valemid (21.16) kehtivad mõlemas otsas jäigalt kinnitatud varda kohta, kusjuures sõlm j on vasakul ja sõlm k paremal pool ning h_{jk} on varda ristlõike kõrgus. Valem (21.17) kehtib varda kohta, mille vasakul pool on jäik

sõlm ja paremal pool liigendsõlm. Kui jääk sõlm on paremal ja liigendsõlm vasakul, siis on valemis (21.17) plussmärk.

Muus osas kehtib koormusest põhjustatud paindemomentide kohta esitatud arvutusprogramm.

Näide 21.2. Arvutada joonisel 21.5, a kujutatud raami jaoks paindemomendi epüüri ordinaadid, mis on põhjustatud temperatuuri muutusest väljaspool raami $+10^\circ\text{C}$ ja raami sees $+20^\circ\text{C}$. Geomeetriselised andmed on esitatud joonisel 21.5, a. $E=2\cdot 10^6 \text{ t/m}^2$, $\alpha=10^{-5}$; $I_{ad}=3,125\cdot 10^{-3} \text{ m}^4$; $I_{ab}=I_{bc}=I_{be}=5,4\cdot 10^{-3} \text{ m}^4$; $I_{cf}=0,675\cdot 10^{-3} \text{ m}^4$.

Varraste jäikused:

$$\begin{aligned} i_{ad} &= EI_{ad}/l_{ad} = 2\cdot 10^6 \cdot 3,125\cdot 10^{-3}/4,0 = 1562,5 \text{ tm} \\ i_{be} &= EI_{be}/l_{be} = 2\cdot 10^6 \cdot 5,400\cdot 10^{-3}/4,0 = 2700,0 \text{ tm} \\ i_{cf} &= EI_{cf}/l_{cf} = 2\cdot 10^6 \cdot 0,675\cdot 10^{-3}/3,0 = 450,0 \text{ tm} \\ i_{ab} &= EI_{ab}/l_{ab} = 2\cdot 10^6 \cdot 5,400\cdot 10^{-3}/6,0 = 1800,0 \text{ tm} \\ i_{bc} &= i_{ab} = 1800 \text{ tm} \end{aligned}$$

Jaotusarvude leidmisel on arvutuslikud jäikused võetud 1000 korda väiksemad:

$$i_{ad} = 1,5625; \quad i_{be} = 2,700; \quad i_{cf} = 0,450; \quad i_{ab} = i_{bc} = 1,800$$

Temperatuuri ühtlane muutus varrastes $d-a$, $a-b$, $b-c$ ja $c-f$ $t_0 = (20+10)/2 = 15^\circ\text{C}$ ning vardas $b-e$ $t_0 = 20^\circ\text{C}$.

Temperatuuri mitteühtlane muutus varrastes $d-a$, $a-b$, $b-c$ ja $c-f$ $\Delta t = 20 - 10 = 10^\circ\text{C}$ ning vardas $b-e$ $\Delta t = 0$.

Varraste pöörded temperatuuri ühtlasest muutusest on leitud näites 19.2:

$$\begin{aligned} \vartheta_{da,t} &= 0; \quad \vartheta_{be,t} = 2,25\cdot 10^{-4}; \quad \vartheta_{cf,t} = 6\cdot 10^{-4}; \\ \vartheta'_{ab,t} &= -\frac{1}{3}\cdot 10^{-4}; \quad \vartheta'_{bc,t} = (3,5/6)\cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Jaotusarvud

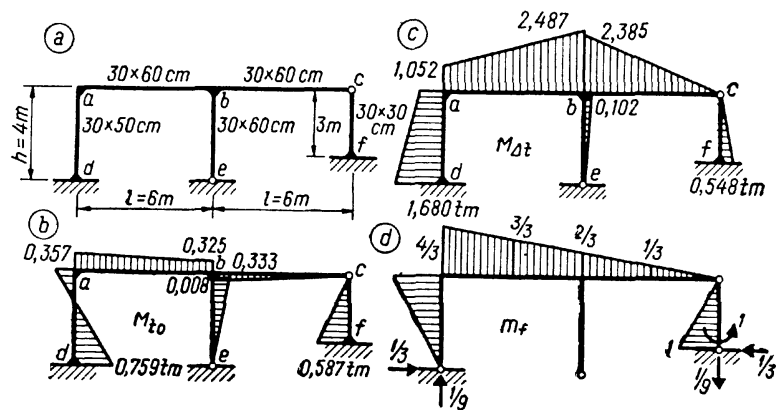
$$\begin{aligned} j_{ad} &= i_{ad}/(i_{ad}+i_{ab}) = 1,5625/(1,5625+1,8) = 5/10,76 \\ j_{ab} &= i_{ab}/(i_{ad}+i_{ab}) = 1,8/(1,5625+1,8) = 5,76/10,76 \\ j_{ba} &= i_{ba}/[i_{ba}+0,75(i_{be}+i_{bc})] = 1,8/[1,8+0,75(2,7+1,8)] = 8/23 \\ j_{be} &= 0,75i_{be}/[i_{ba}+0,75(i_{be}+i_{bc})] = 0,75\cdot 2,7/[1,8+0,75(2,7+1,8)] = 9/23 \\ j_{bc} &= 0,75i_{bc}/[i_{ba}+0,75(i_{be}+i_{bc})] = 0,75\cdot 1,8/[1,8+0,75(2,7+1,8)] = 6/23 \end{aligned}$$

Kinnitusemomendid temperatuuri ühtlasest muutusest:

$$\begin{aligned} M_{ab,t} &= M_{ba,t} = -6i_{ab}\vartheta_{ab,t} = -6\cdot 1800(-1/3)\cdot 10^{-4} = 0,36 \text{ tm} \\ M_{be,t} &= -3i_{be}\vartheta_{be,t} = -3\cdot 2700\cdot 2,25\cdot 10^{-4} = -1,8225 \text{ tm} \\ M_{bc,t} &= -3i_{bc}\vartheta_{bc,t} = -3\cdot 1800(3,5/6)\cdot 10^{-4} = -0,315 \text{ tm} \\ M_{fc,t} &= -3i_{fc}\vartheta_{fc,t} = -3\cdot 450\cdot 6\cdot 10^{-4} = -0,81 \text{ tm} \end{aligned}$$

Kinnitusemomendid temperatuuri mitteühtlasest muutusest:

$$\begin{aligned} M_{ad,\Delta t} &= EI_{ad}\alpha\Delta t/h_{ad} = 2\cdot 10^6 \cdot 3,125\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-5}\cdot 10/0,50 = 1,25 \text{ tm} \\ M_{ad,\Delta t} &= -1,25 \text{ tm} \\ M_{ba,\Delta t} &= EI_{ba}\alpha\Delta t/h_{ab} = 2\cdot 10^6 \cdot 5,4\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-5}\cdot 10/0,60 = 1,80 \text{ tm} \\ M_{ab,\Delta t} &= -1,80 \text{ tm}; \quad M_{be,\Delta t} = 0 \end{aligned}$$



Joon. 21.5

Tabel 21.5

Sõlm	d	a			b		f
		a-d	a-b	b-a	b-e	b-c	
Varas	d-a	a-d	a-b	b-a	b-e	b-c	f-c
j	—	5/10,76	5,76/10,76	8/23	9/23	6/23	—
M_{jt}	—156	360	360	—1822	—315	—810	—
	—311	309	—358	618	695	464	—
	—7	—14	31	—179	62	70	47
M_{jt*}	—163	—325	325	856	—1054	198	—810

$$M_{bc,\Delta t} = -\frac{3}{2} EI_{bc} \alpha \Delta t / h_{bc} = -\frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 5,4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5} \cdot 10 / 0,60 = -2,70 \text{ tm}$$

$$M_{fc,\Delta t} = \frac{3}{2} EI_{fc} \alpha \Delta t / h_{fc} = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 6,75 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-5} \cdot 10 / 0,30 = 0,675 \text{ tm}$$

Temperatuuri ühtlasest muutusest põhjustatud kinnitusemomendid on tasakaalustatud tabelis 21.5. Tasakaalustamisel vardad ei pöördu, pöörduvad ainult sõlmed.

Paigutusolukorras $\psi_1 = 1$ ($\vartheta_{ad,1} = \vartheta_{be,1} = 1$; $\vartheta_{cf,1} = 4/3$; $\vartheta_{ab,1} = \vartheta_{bc,1} = 0$) põhjustatud kinnitusemomendid

Tabel 21.6

Sõlm	<i>d</i>	<i>a</i>		<i>b</i>			<i>f</i>
Var-ras	<i>d-a</i>	<i>a-d</i>	<i>a-b</i>	<i>b-a</i>	<i>b-e</i>	<i>b-c</i>	<i>f-c</i>
<i>j</i>	—	5/10,76	5,76/10,76	8/23	9/23	6/23	—
<i>M_{j1}</i>	—9375 2178	—9375 4356	5019	2509 1945	—8100 2188	1458	—1800
	—226	—452	972 —520	—260 90	102	68	
	—10	—21	45 —24	—12 4	5	3	
		—1	2 —1				
<i>M_{j1*}</i>	—7433	—549	549	4276	—5805	1529	—1800
<i>M_{jt*}</i>	—163	—325	325	856	—1054	198	—810
$\psi_1 M_{j1*}$	922	682	—682	—531	721	—190	223
<i>M_t</i>	759	357	—357	325	—333	—8	—587

$$M_{ad,1} = M_{da,1} = -6i_{ad} \vartheta_{ad,1} = -6 \cdot 1,5625 \cdot 1 = -9,375 \text{ tm}$$

$$M_{be,1} = -3i_{be} \vartheta_{be,1} = -3 \cdot 2,7 \cdot 1 = -8,1 \text{ tm}$$

$$M_{fc,1} = -3i_{fc} \vartheta_{fc,1} = -3 \cdot 0,45 \cdot 4/3 = -1,8 \text{ tm}$$

on tasakaalustatud tabelis 21.6.

Võrrandist

$$a_{11} \psi_1 + a_{10} = 0 \quad (a)$$

leitakse

$$\psi_1 = -a_{10}/a_{11} \quad (b)$$

milles

$$a_{10} = (-163 - 325) \cdot 1 - 1054 \cdot 1 - 810 \cdot 4/3 = -2622 \text{ kGm}$$

$$a_{11} = (-7433 - 549) \cdot 1 - 5805 \cdot 1 - 1800 \cdot 4/3 = -21131 \text{ kGm}$$

Postide *a-d* ja *b-e* pööre

$$\psi_1 = -(-2622)/(-21131) = -0,1241 \quad (c)$$

Temperatuuri ühtlasest muutusest põhjustatud paindemomendi epüüri ordinaadid leitakse valemiga

$$M = M_{jt*} + \psi_1 M_{j1*} \quad (d)$$

Arvutus on esitatud tabelis 21.6 (kolm alumist rida). Paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 21.5, *b*.

Temperatuuri mitteühtlasest muutusest põhjustatud kinnitusemomendid geomeetriliselt määratud põhiskeemis on tasakaalustatud tabelis 21.7.

Võrrandi (a) vabaliige

$$a_{10,\Delta t} = (-1154 + 1441) \cdot 1 + 309 \cdot 1 + 675(4/3) = 1496 \text{ kGm}$$

Temperatuuri mitteühtlasest muutusest põhjustatud postide *a-d* ja *b-e* pööre leitakse valemiga (b):

$$\psi_1 = -1496/(-21131) = 0,0708$$

ja paindemomendi epüüri ordinaadid avaldisega

$$M = M_{j\Delta t*} + \psi_1 M_{j1*} \quad (e)$$

Arvutus on esitatud tabelis 21.7 (kolm alumist rida). Epüür on kujutatud joonisel 21.5, *c*.

Paindemomendi epüüride kontrolliks leitakse staatikaga määratavas skeemis paigutis, mis staatikaga määramatus arvutuskeemis võrdub nulliga. Staatikaga määratud skeem on kujutatud joonisel 21.5, *d*. Ristlõike *f* pööre arutamiseks rakendatakse sinna ühikmoment ja leitakse paindemomendi epüür.

Varraste redutseeritud pikkused

$$l'_{ab} = l'_{bc} = 6 \text{ m}$$

$$l'_{be} = l_{ab} i_{ab} / i_{be} = 6 \cdot 1,8 / 2,7 = 4 \text{ m}$$

$$l'_{ad} = l_{ab} i_{ab} / i_{ad} = 6 \cdot 1,8 / 1,5625 = 6,912 \text{ m}$$

$$l'_{cf} = l_{ab} i_{ab} / i_{cf} = 6 \cdot 1,8 / 0,45 = 24 \text{ m}$$

$$EI_0 \varphi_{jt} = EI_0 \alpha \sum f t_0^n ds + \sum f M_t m_t^0 ds =$$

$$= 2 \cdot 10^6 \cdot 5,4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5} \cdot 15(3 \cdot 1/9 - 12 \cdot 1/3 - 4 \cdot 1/9) +$$

$$+ [(4/3) \cdot 0,357 - 4(2/3) \cdot 0,201] 6,912/6 +$$

$$+ [(4/3) \cdot 0,357 + 4(3/3) \cdot 0,341 + (2/3) \cdot 0,325] \cdot$$

$$\cdot 6,0/6 - [(2/3) \cdot 0,008 + 4(1/3) \cdot 0,004] \cdot 6,0/6 +$$

$$+ 1 \cdot 0,587 \cdot 24/3 = 6,75 - 6,74 = 0,01 \approx 0$$

Tabel 21.7

Sõlm	<i>d</i>	<i>a</i>		<i>b</i>			<i>f</i>
Varras	<i>d-a</i>	<i>a-d</i>	<i>a-b</i>	<i>b-a</i>	<i>b-e</i>	<i>b-c</i>	<i>f-c</i>
<i>j</i>	—	5/10,76	5,76/10,76	8/23	9/23	6/23	—
$M_{j\Delta t}$	—1250 92	1250 183	—1800 156 211	1800 313	— 352	—2700 235	675
	4	8	—18 10	105 —37	—41	—27	
			—1 1	5 —2	—2	—1	
$M_{j\Delta t^*}$	—1154	1441	—1441	2184	309	—2493	675
$\psi_1 M_{j\Delta t^*}$	—526	—389	389	303	—411	108	—127
$M_{\Delta t}$	1680	1052	—1052	2487	—102	—2385	548

$$\begin{aligned}
 EI_0 \varphi_{j\Delta t} &= EI_0 a \Sigma \int m^0 (\Delta t/h) ds + \Sigma \int M_{\Delta t} m_f^0 ds = \\
 &= 2 \cdot 10^8 \cdot 5,4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5} \cdot 10 [-4(4/3)/2 \cdot 0,5 - \\
 &- 1 \cdot 6/0,6 - (1/3)6/0,6 + 1 \cdot 3/2 \cdot 0,30] + \\
 &+ [4(2/3) \cdot 1,366 + (4/3) \cdot 1,052] 6,912/6 + [(4/3) \cdot 1,052 + \\
 &+ 4 \cdot 1(2,487 + 1,052)/2 + (2/3) \cdot 2,487] 6,0/6 + \\
 &+ (2/3) \cdot 2,385 \cdot 6,0/3 - 1 \cdot 0,548 \cdot 24,0/3 = 19,13 - 19,14 = \\
 &= -0,01 \approx 0
 \end{aligned}$$

22. RUUMRAAMID

Ruumilisi tala- ja raamkonstruktsioone kasutatakse väga palju raudbetoon- ja teraskonstruktsioonides. Staatikaga määramatute ruumraamide arvutus tugineb samadele alustele, millele tugines staatikaga määramatute tasandkonstruktsioonide arvutus. Arvutusmeetodid on samad kui tasandkonstruktsioonidel; printsiipiaalseid erinevusi ei ole. Ruumraamide arvutus on tunduvalt mahukam. Lisatundmatute arv ruum-arvutusskeemides on tunduvalt suurem kui tasand-arvutusskeemides. Tingituna koormuse ruumilisest iseloomust on sisejõudude ja deformatsioonide arvutus keerukam kui tasandskeemides. Erinevate sisejõudude arv ruumkonstruktsioonide varrestes on suurem kui tasandkonstruktsioonides: tasandskeemi vardas on kolm sisejõu komponenti — paindemoment M , põikjõud Q ja pikijõud N ; ruumskeemi vardas kuus — kaks paindemomenti M_y ja M_z , väändmoment M_x , pikijõud N_x ja kaks põikjõudu Q_y ning Q_z .

22.1. Jõumeetod

22.11. Staatikalise määramatuse aste ja põhiskeem

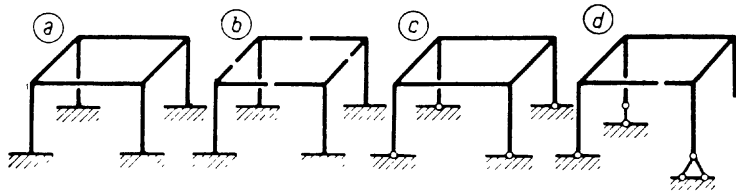
Ruumraamide staatikalise määramatuse aste leitakse valemiga

$$n = 6v + t - 6s \quad (22.1)$$

milles v on varraste, s — sõlmede ja t — toesidemete arv. Raami vardad on sõlmes jäigalt kinnitatud. Toesõlmed võivad olla nii jäigad kui ka liigendsõlmed (joon. 22.1). Elementi, mis on kinnitatud ainult ühest otsast, ei loeta vardaks.

Joonisel 22.1, a kujutatud raami staatikalise määramatuse aste on

$$n = 6 \cdot 8 + 24 - 6 \cdot 8 = 24$$



Joon. 22.1

Põhiskeem on esitatud joonisel 22.1, *b*. Neli riivi on läbi lõigatud, mille tulemusena on eemaldatud $4 \cdot 6 = 24$ liigsidet (ruumvarda ristlõikes on 6 sisejõu komponenti). Põhiskeem koosneb neljast postist, mille ülemisse otsa on kinnitatud kaks konsooli.

Joonisel 22.1, *c* kujutatud raami staatikalise määramatuse aste

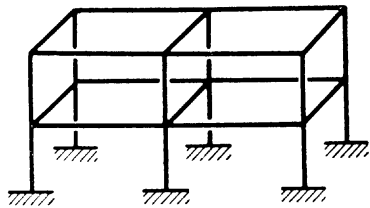
$$n = 6 \cdot 8 + 12 - 6 \cdot 8 = 12$$

Põhiskeem saadakse näiteks ühe riivi läbilõikamise ja kuue toesideme eemaldamisega.

Kui raamis ei ole ühtegi liigendit, siis leitakse staatikalise määramatuse aste valemiga

$$n = 6m \quad (22.2)$$

milles m on staatikaliselt määratud põhiskeemi saamiseks vajalik lõigete arv.



Joon. 22.2

Joonisel 22.2 esitatud raam on $n = 14 \cdot 6 = 84$ korda staatikaga määramatu.

Ruumsõrestiku staatikalise määramatuse aste leitakse valemiga (15.3):

$$n = v + t - 3s \quad (22.3)$$

22.12. Kanoonilised võrrandid, paigutiste ja sisejõudude arvutus

Kanoonilised võrrandid on analoogilised tasandskeemide kanooniliste võrranditega

$$\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \dots + \delta_{ki}X_i + \dots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{kp} = 0 \quad (22.4) \\ (k=1, 2, \dots, n)$$

Tundmatute kordajad ja vabaliikmed arvutatakse valemiga (16.25):

$$\delta_{ki} = \sum \int \frac{m_{yh}m_{yi}}{EI_y} ds + \sum \int \frac{m_{zh}m_{zi}}{EI_z} ds + \\ + \sum \int \frac{m_{xh}m_{xi}}{GI_v} ds + \sum \int k_y \frac{q_{yh}q_{yi}}{GF} ds + \\ + \sum \int k_z \frac{q_{zh}q_{zi}}{GF} ds + \sum \int \frac{n_{xh}n_{xi}}{EF} ds \quad (22.5)$$

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{m_{yh}M_{yp}^0}{EI_y} ds + \sum \int \frac{m_{zh}M_{zp}^0}{EI_z} ds + \\ + \sum \int \frac{m_{xh}M_{xp}^0}{GI_v} ds + \sum \int k_y \frac{q_{yh}Q_{yp}^0}{GF} ds + \\ + \sum \int k_z \frac{q_{zh}Q_{zp}^0}{GF} ds + \sum \int \frac{n_{xh}N_{xp}^0}{EF} ds \quad (22.6)$$

milles k_y, k_z on ristlõike kujust olenevad tegurid (16.10); GI_v — väändejäikus. Ümarvardal on $I_v = \pi d^4/32$.

Ligikaudsed väärtused suuruse I_v jaoks: ruustristlõige (külje pikkus a) $I_v \approx 0,1426a^4$; suhteliselt kitsaste varraste puhul ($h/b > 4$) $I_v \approx (h/b - 0,63)b^4/3$; I- ja T-profiilide puhul $I_v \approx \Sigma bd^3/3$, kus b on ristlõike elemendi (ristküljiku) pikema ja d — lühema külje pikkus.

Ruumsõrestiku puhul leitakse paigutised valemitega:

$$\delta_{ki} = \sum n_{jk}n_{ji}l_j/EF_j \quad (22.7)$$

$$\Delta_{kp} = \sum n_{jk}N_{jp}^0l_j/EF_j \quad (22.8)$$

Lõplikud sisejõud staatikaga määramatus arvutuskeemis leitakse valemiga (18.34):

$$S_{kp} = s_{k1}X_1 + s_{k2}X_2 + \dots + s_{kn}X_n + S_{kp}^0 \quad (22.9)$$

Sisejõudude epüüre kontrollitakse samuti kui tasand-skeemide puhul.

Näide 22.1. Arvutada joonisel 22.3, *a* kujutatud raami paindemomentide epüüri ordinaadid, kui $I_y = I_z$ ja $EI/GI_v \approx 1,4$.

Staatikalise määramatuse aste on

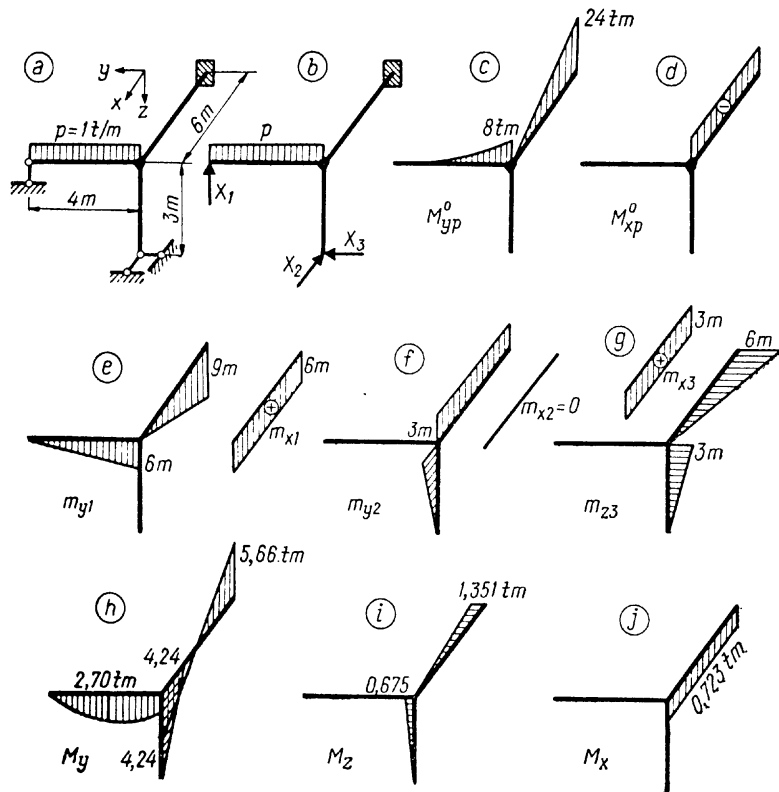
$$n = 6v + t - 6s = 6 \cdot 3 + 9 - 6 \cdot 4 = 3$$

Põhiskeem koormuse ja lisatundmatutega on kujutatud joonisel 22.3, *b*. Koormusest ja ühiktundmatutest tingitud epüürid on esitatud joonisel 22.3, *c...g*. Kanooniliste võrrandite paigutiste leidmisel arvestatakse painde- ja väändemomentidega.

Paigutised:

$$EI\delta_{11} = 6^2 \cdot 4/3 + 9^2 \cdot 6/3 + 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1,4 = 512,4 \text{ m}^3$$

$$EI\delta_{22} = 3^2 \cdot 3/3 + 3 \cdot 6 \cdot 3 = 63 \text{ m}^3$$



Joon. 22.3

$$EI\delta_{33} = 3^2 \cdot 3/3 + 6^2 \cdot 6/3 + 3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 1,4 = 156,6 \text{ m}^3$$

$$EI\delta_{12} = -3 \cdot 6 \cdot 4,5 = -81 \text{ m}^3$$

$$EI\delta_{13} = 6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 1,4 = 151,2 \text{ m}^3$$

$$EI\delta_{23} = 0$$

$$EI\Delta_{1p} = -4,5 \cdot 4 \cdot 8/3 - 9 \cdot 24 \cdot 6/3 - 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 1,4 = -883,2 \text{ m}^3$$

$$EI\Delta_{2p} = 3 \cdot 6 \cdot 12 = 216 \text{ m}^3$$

$$EI\Delta_{3p} = -3 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 1,4 = -201,6 \text{ m}^3$$

Kanoonilised võrrandid:

$$512,4X_1 - 81X_2 + 151,2X_3 = 883,2$$

$$81,0X_1 + 63X_2 = -216,0$$

$$151,2X_1 + 156,6X_3 = 201,6$$

Lisatundmatud:

$$X_1 = 1,566 \text{ t}; \quad X_2 = -1,414 \text{ t}; \quad X_3 = -0,225 \text{ t}$$

Paindemomentide M_y ja M_z ning väändemomendi M_x epüürid on kujutatud joonisel 22.3, *h, i* ja *j*.

Kontrollarvutus:

$$EI\Delta_1 = (4 \cdot 3 \cdot 2,699 + 6 \cdot 1,399)4/6 - (4 \cdot 4,5 \cdot 0,707 + 9 \cdot 5,658) + 6 \cdot 6 \cdot 0,7234 \cdot 1,4 = -0,001 \approx 0$$

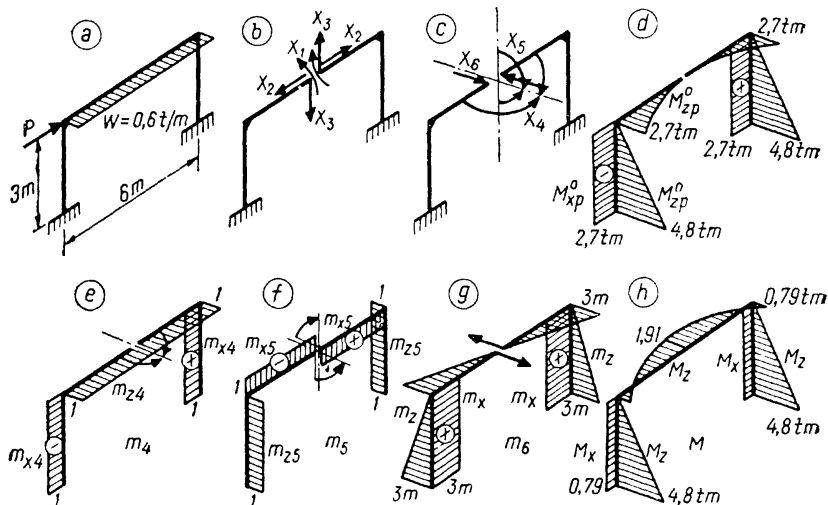
$$EI\Delta_2 = -4,244 \cdot 3 \cdot 3/3 + 6 \cdot 3 \cdot 0,707 = -0,005 \approx 0$$

$$EI\Delta_3 = -3 \cdot 0,675 \cdot 3/3 - 6 \cdot 1,351 \cdot 6/3 + 6 \cdot 3 \cdot 0,7234 \cdot 1,4 = -0,007 \approx 0$$

22.13. Tasandraami arvutus mitte raami tasandis mõjuva koormuse puhul

Mitte raami tasandis mõjuva koormusega suletud tasandkontuur on kuus korda staatikaga määramatu (joon. 22.4, *a*). Raami tasandis mõjuv koormus P ja lisatundmatud X_1, X_2, X_3 (joon. 22.4, *b*) põhjustavad paigutisi ainult raami tasandis. Ühik-lisatundmatutest $X_1=1, X_2=1, X_3=1$ põhjustatud mitte raami tasandis asuvatele lisatundmatutele X_4, X_5, X_6 vastavad kõrvalpaigutised on nullid; paigutiste vastastikkuse teoreemi alusel ka vastupidi. Tasandraami arvutamisel jagunevad kanoonilised võrrandid kaheks võrrandisüsteemiks: ühes võrrandisüsteemis on raami tasandis mõjuvast koormusest põhjustatud raami tasandis tekkivad lisatundmatud; teises võrrandisüsteemis on raami tasandiga risti mõjuvast koormusest põhjustatud mitte raami tasandis mõjuvad lisatundmatud (joon. 22.4, *c*).

Näide 22.2. Arvutada joonisel 22.4, *a* kujutatud raami painde- ja väändemomentide epüüride ordinaadid raami tasandiga risti mõjuvast koormusest $w=0,6 \text{ t/m}$. Raami vardad on ümarristlõikega, $(E/G)(I/I_v) = 2,55 \cdot 0,5 = 1,275$.



Joon. 22.4

Raami tasandiga risti mõjuv koormus põhjustab lisatundmatud X_4 , X_5 ja X_6 (joon. 22.4, c). Koormuse sümmeetriast tingituna on antisümmeetrilised tundmatud X_5 ja X_6 nullid (joon. 22.4, g ja f). Lisatundmatust $X_4=1$ ja koormusest põhjustatud painde- ja väändmomentide epüürid põhiskeemis on esitatud joonisel 22.4, d ja e.

Kanooniline võrrand on:

$$\delta_{44}X_4 + \Delta_{4p} = 0$$

Paigutised:

$$EI\delta_{44} = 6 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1,275 = 13,65 \text{ m}$$

$$EI\Delta_{4p} = 2(1 \cdot 2,7 \cdot 3/3 + 3 \cdot 1 \cdot 2,7 \cdot 1,275) = 26,06 \text{ tm}^2$$

$$\text{Lisatundmatu } X_4 = -26,06/13,65 = -1,909 \text{ tm}$$

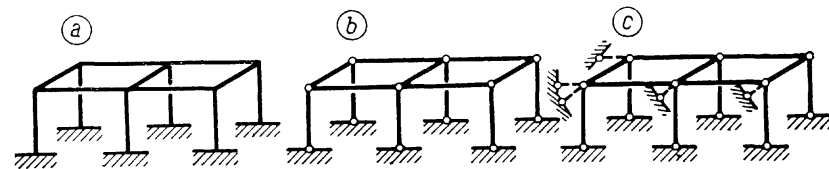
Painde- ja väändmomentide epüürid on kujutatud joonisel 22.4, d. Kontroll:

$$EI\Delta_4 = (1 \cdot 0,791 - 4 \cdot 1 \cdot 1,909 + 1 \cdot 0,791) + 2 \cdot 3 \cdot 0,791 \cdot 1,275 = 7,633 - 7,636 = -0,003 \approx 0$$

22.2. Deformatsioonimeetod

Raami sõlme vabadusaste ruumis on 6: kolm pöört koordinaattelgede ümber ja kolm siiret koordinaattelgede sihis. Sõlmed on üksteisega ühendatud varrastega ja seetõttu on sõltumatute siirete arv väiksem. Geomeetriselise määramatuse aste määratakse valemiga

$$n^* = 3s + w \quad (22.10)$$



Joon. 22.5

milles s on vabade jäikade sõlmede arv ja w raami vabadusaste. Raami vabadusaste ühtib raamist saadud ruumvarrasahela vabadusastmega

$$w = 3s - v - t \quad (22.11)$$

Joonisel 22.5, a kujutatud raami sõlmede arv $s=6$, varraste arv $v=13$ ja liigendtugede toesidemete arv $t=0$. Vabadusaste

$$w = 3 \cdot 6 - 13 - 0 = 5$$

ühtib joonisel 22.5, b esitatud varrasahela, mille $s=12$, $v=13$ ja liigendtugede toesidemete arv $t=6 \cdot 3=18$, vabadusastmega

$$w = 3 \cdot 12 - 13 - 18 = 5$$

Varraste pöörete takistamiseks on vaja viis sidet (joon. 22.5, c) ja raami geomeetriselise määramatuse aste on $n^* = 3 \cdot 6 + 5 = 23$. Staatikalise määramatuse aste $n = 7 \cdot 6 = 42$.

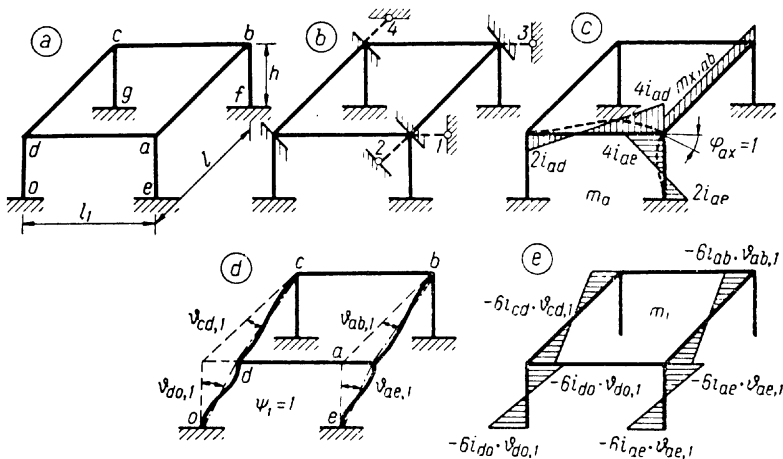
Geomeetriselt määratud põhiskeem saadakse tavalisel viisil. Igasse vabasse jäika sõlme pannakse sõlme pöört takistav side. Side on kolmekordne, mis takistab pöört kolme koordinaattelje suhtes. Varraste pöört takistavaid sidemeid on w .

Joonisel 22.6, a kujutatud raami ($n^* = 4 \cdot 3 + 4 = 16$) geomeetriselt määratud põhiskeemi (joon. 22.6, b) kaks paigutusolukorda on esitatud joonisel 22.6, c ja d ning neile vastavad paindemomentide epüürid on kujutatud joonisel 22.6, c ja e. Paigutusolukorras $\psi_c = 1$ on postile a-e antud pööre $\vartheta_{ae,1} = 1$. Teiste varraste pöörded on

$$\vartheta_{ab,1} = \vartheta_{cd,1} = -\vartheta_{ae,1}h/l = -h/l$$

$$\vartheta_{d0,1} = \vartheta_{ae,1} = 1$$

Paigutusolukorras $\varphi_a = 1$ (joon. 22.6, c) on vardad a-d



Joon. 22.6

ja $a-e$ painutatud ning varras $a-b$ väänatud. Ühiknurgast ($\varphi_a=1$) põhjustatud väändemoment vardas $a-b$ on

$$m_x = GI_v/l_{ab} = i_{ab} GI_v/EI \quad (22.12)$$

Kanooniline võrrand:

$$\begin{aligned} & r_{jx,jx}\varphi_{jx} + r_{jx,jy}\varphi_{jy} + r_{jx,jz}\varphi_{jz} + r_{jx,kx}\varphi_{kx} + \\ & + r_{jx,ky}\varphi_{ky} + r_{jx,kz}\varphi_{kz} + \dots + r_{jx,1}\psi_1 + r_{jx,2}\psi_2 + \\ & + \dots + r_{jx,p} = 0 \end{aligned} \quad (22.13)$$

Võrrandi (22.13) tundmatute kordajad ja vabaliige leitakse tasandraamide valemitega, millele lisandub varda väände puhul avaldis (22.12).

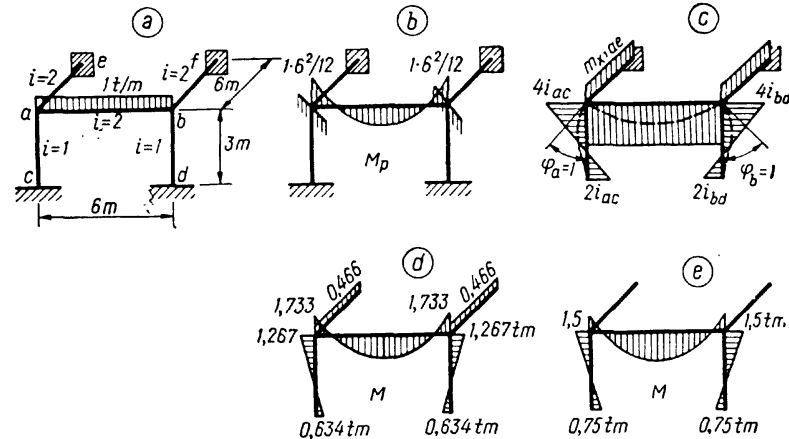
Geomeetriselt määramatu raami paindemomendi epüüri ordinaadid leitakse avaldisega:

$$\begin{aligned} M &= m_{jx}\varphi_{jx} + m_{jy}\varphi_{jy} + m_{jz}\varphi_{jz} + \\ & + \dots + m_1\psi_1 + m_2\psi_2 + \dots + M_p \end{aligned} \quad (22.14)$$

Näide 22.3. Arvutada joonisel 22.7, a kujutatud raami paindemomentide epüüri ordinaadid. Varraste ristlõige on ruut, mille $l = a^4/12 = 0,0833a^4$, $I_v = 0,1426a^4$. $E/G = 2,33$.

Raami geomeetriselise määramatuse aste $n^* = 7$, kuid tasandis $a-b-c-d$ mõjuva sümmeetrilise koormuse tõttu vardad ei pöördu ja sõlmed a ning b pöörduvad koormuse tasandis võrdse nurga võrra telje x suhtes:

$$\varphi_{bx} = -\varphi_{ax}$$



Joon. 22.7

Põhiskeem on esitatud joonisel 22.7, b ja paigutusolukorrast $\varphi_{ax} = -\varphi_{bx}$ tingitud epüürid joonisel 22.7, c . Väändemoment vardas $a-e$

$$m_{x,ae} = 2 \cdot (1/2,33) \cdot 0,1426a^4/0,0833a^4 = 1,469 \text{ tm}$$

Reaktsioonid

$$r_{aa} = 4i_{ac} + 2i_{ab} + m_{x,ae} = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1,469 = 9,469 \text{ tm}$$

$$r_{ap} = -1 \cdot 6^2/12 = -3 \text{ tm}$$

$$\text{Sõlme } a \text{ pööre } \varphi_{ax} = 3/9,469 = 0,3168$$

Paindemomendid:

$$M_{yab} = -3 + 2 \cdot 2 \cdot 0,3168 = -1,733 \text{ tm}$$

$$M_{yac} = 4 \cdot 1 \cdot 0,3168 = 1,267 \text{ tm}$$

$$M_{yca} = 2 \cdot 1 \cdot 0,3168 = 0,634 \text{ tm}$$

Väändemoment

$$M_{xae} = 1,469 \cdot 0,3168 = 0,466 \text{ tm}$$

Painde- ja väändemomentide epüürid on kujutatud joonisel 22.7, d . Tasandraami (ei arvvestata riivide $a-e$ ja $b-f$ väändejäikust) paindemomendi epüür on kujutatud joonisel 22.7, e .

23. KONSTRUKTSIOONIDE ARVUTUS PIIRKOORMUSE JÄRGI

23.1. Arvutuse alused

Lineaarne ehitusmehaanika, mis käsitleb elastsest materjalist konstruktsioonide arvutust, võimaldab praktikale vajaliku täpsusega leida sisejõud ja pinged varras-konstruktsiooni elementides, määrata deformatsioonid ning arvutada paigutised. Kuid lineaarsele ehitusmehaanikale tuginev arvutus ei võimalda kindlaks määrata ehitise tugevust (kandevõimet).

Alates 1955. a. arvutatakse NSV Liidus ehituskonstruktsioonid piirulukordade järgi. Piirulukorras loetakse sellist olukorda, kus konstruktsioon lakkab rahuldavast talle eksploatatsioonis esitatavaid nõudeid. Arvutustes käsitletakse järgmisi piirulukordi: 1) kandevõime järgi, 2) deformatsioonide ja paigutiste järgi ning 3) pragude ja muude kohalike defektide järgi.

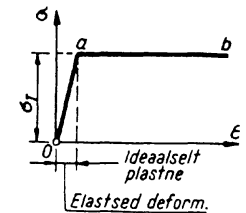
Käesolevas peatükis käsitletakse varras-konstruktsioonide arvutust esimese piirulukorra (tugevuse ja püsivuse) järgi, mis peab tagama konstruktsiooni kandevõime ja piirama ülemääraseid plastseid deformatsioone kõige ebasoodsamates tingimustes.

Piirulukordade meetodi arvutuse põhinõudeks on, et sisejõud või pinged, deformatsioonid, paigutised ja praod välismõjude toimel ei ületaks piirväärtusi, mis on määratud konstruktsioonide projekteerimise normidega.

Arvutustes kasutatakse sagedasti lihtsustatud pinge ja piknemise diagrammi (joon. 23.1). Lihtsustatud diagramm koosneb kahest sirgest. Esimene sirge $0-a$ vastab pingetele, mis on deformatsioonidega proportsionaalsed. Teine sirge $a-b$ vastab konstantsele pingele — voolavuspääri (le)le (σ_T). Seda diagrammi võib kasutada, kui voolavusele vastav osa on nii pikk, et seda ehitise töötamisel kogu pikkuses ei kasutata. Niisugusele diagrammile vas-

tavat materjali nimetatakse ideaalselt elasto-plastseks.

Staatikaga määratavate konstruktsioonide, mille varastes esinevad pikijõud, tugevusarvutused lubatavate pingete ja piirkoormuse meetodiga annavad sama tulemuse. Staatikaga määratavate konstruktsioonide arvutus esimese piirulukorra meetodiga annab erineva tulemuse, võrreldes lubatavate pingete meetodiga. Võrdsete varustegurite puhul lubab piirkoormuse järgi arvutus rakendada suuremat koormust kui arvutus lubatavate pingete meetodiga.



Joon. 23.1

Näide 23.1. Leida joonisel 23.2, a esitatud arvutusskeemi sõlmes 0 rakendatud jõu piirväärtus, kui varraste ristlõiked on võrdsed: $F_1 = F_2 = F_3 = F$.

Hooke'i seadusele alluvate deformatsioonide puhul on ülesanne ühekordselt staatikaga määratav. Tingimusest

$$\Delta l_1 \cos \alpha = \Delta l_2,$$

ehk

$$\frac{N_1 l_1}{EF} \cos \alpha = \frac{N_2 l / \cos \alpha}{EF} \quad (a)$$

saadakse, et

$$N_2 = N_1 \cos^2 \alpha \quad (b)$$

Sõlme 0 tasakaalu tingimusest $\Sigma Y = 0$ leitakse

$$P = 2N_2 \cos \alpha + N_1 = 2N_1 \cos^3 \alpha + N_1 = N_1 (1 + 2 \cos^3 \alpha) \quad (c)$$

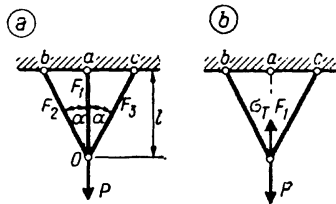
Tingimusel, et $\sigma_1 < \sigma_T$, $\sigma_2 = \sigma_3 < \sigma_T$ on pinged varrastes järgmised:

$$\sigma_1 = \frac{P}{F(1 + 2 \cos^3 \alpha)}; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{P \cos^2 \alpha}{F(1 + 2 \cos^3 \alpha)} \quad (d)$$

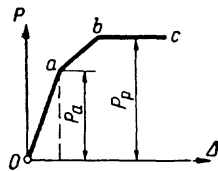
Avaldistest (d) järeldub, et keskmises vardas on pinge suurem kui äärmistes varrastes. Jõu suurenemisel saavutab pinge voolavuspääri esimesena keskmises vardas. See vastab jõule (joon. 23.3)

$$P_a = \sigma_T F (1 + 2 \cos^3 \alpha) \quad (e)$$

kusjuures $\sigma_2 = \sigma_T \cos^2 \alpha$. Edasisel jõu suurenemisel ($P_a < P < P_p$) suureneb pinge äärmistes varrastes 2 ja 3, kuna keskmises vardas jääb ta konstantseks $\sigma_1 = \sigma_T$ (materjal voolab) ja jõud $N_1 = \sigma_T F$ (joon.



Joon. 23.2



Joon. 23.3

23.2, b). Keskmises vardas voolavuspiiriga võrdse pinge puhul on algul ühekordselt staatikaga määratatu arvutuskeem muutunud staatikaga määratavaks. Äärmistes varrastes on pinged ($\sigma_2 = \sigma_3 < \sigma_T$) leitavad sõlme O tasakaalu tingimusest $\Sigma Y = 0$ (joon. 23.2, b):

$$\sigma_2 = (P - \sigma_T F) / 2F \cos \alpha \quad (f)$$

Jõu P piirväärtus, mis vastab äärmistes varrastes voolavuspiiriga võrdsetele pingetele ($\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_T$), leitakse avaldisest (f):

$$P_p = 2\sigma_2 F \cos \alpha + \sigma_T F = 2\sigma_T F \cos \alpha + \sigma_T F = \sigma_T F (1 + 2 \cos \alpha) \quad (g)$$

Edaspidisel deformatsioonide suurenemisel on kandevõime ammen- datud, kuna konstruktsioonis tekivad lubamatud paigutised. See vas- tab diagrammi (joon. 23.3) horontaalsele osale $b-c$, mis ei võimalda suuremat koormust vastu võtta. Plastsete materjalide puhul tugevuse kadu veel ei teki ja piirkoormust P_p (g) võib lugeda arvutuslikuks.

Piirkoormuse (g) suuruse oleks võinud leida kohe sõlme O tasa- kaalu tingimusest $\Sigma Y = 0$, kui $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_T$.

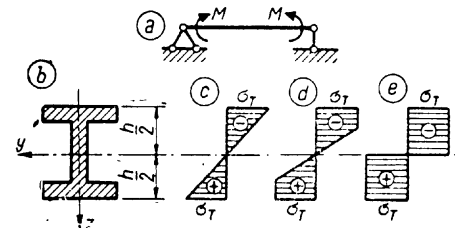
23.2. Piir-paindemoment ja piir-vastupanumoment

Täisseinalise tala puhtal paindel (joon. 23.4, a ja b) on normaalpingete epüür kolmnurkne (joon. 23.4, c), kui pinge äärmistes kiududes on voolavuspiirist väiksem või sellega võrdne ($\sigma \leq \sigma_T$). Paindemomenti, mis vastab joo- nisel 23.4, c kujutatud pingediagrammile, tähistatakse

$$M_T = \sigma_T W \quad (23.1)$$

milles W on elastsele staadiumile vastav ristlõike vastu- panumoment. Koormuse edasisel kasvamisel, eeldades elas- toplastset materjali ja ristlõigete tasandhüpoteesi kehti- mist, saadakse normaalpingete jaoks joonisel 23.4, d kuju- tatud diagramm. Ristlõike ülemises ja alumises osas on pinge võrdne voolavuspiiriga. Keskmise osa, kus pinge on

voolavuspiirist väiksem, töötab elastses olukorras ja seda nimetatakse elastseks tuumaks. Koormuse edasisel suurenemisel elastne tuum väheneb, kuni pinge ristlõike kõigis kiududes võrdub voolavuspiiriga (joon. 23.4, e). Koormuse edasine suurenemine ei ole võimalik, sest rist- lõige ei ole võimeline suuremat momenti vastu võtma. Paindemoment omab suurimat väärtust, mida ristlõige on võimeline vastu võtma.



Joon. 23.4

Sellises piir-olukorras olevat ristlõiget nimetatakse plastseks liigendiks ja sellele vastavat painde- momenti M_p piirmomendiks.

Piirmoment M_p sümmeetrilise ristlõike jaoks leitakse diagrammilt joonisel 23.4, e:

$$M_p = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_T dF = 2\sigma_T \int_0^{h/2} z dF = 2\sigma_T S_0 \quad (23.2)$$

milles S_0 on ristlõike ülemise või alumise poole staatiline moment nulljoone suhtes.

Piirmomendi avaldist (23.2) võib esitada kujul:

$$M_p = \sigma_T W_p \quad (23.3)$$

milles

$$W_p = 2S_0 \quad (23.4)$$

on piir-vastupanumoment.

Ristlõike piir-vastupanumomendi (23.4) ja vastupanu- momendi W suhe

$$\alpha = \frac{M_p}{M_T} = \frac{\sigma_T W_p}{\sigma_T W} = \frac{2S_0}{W} \quad (23.5)$$

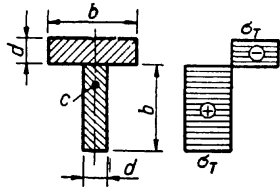
näitab arvutuslike koormuste suhet piir-olukorra ja luba- tavate pingete järgi.

Ristkülikristlõike ($b \cdot h$) puhul on

$$S_0 = bh^2/8, \quad W = bh^2/6, \quad \alpha = 2S_0/W = 3/2 \quad (23.6)$$

Arvutus piirlokorra järgi lubab 50% suuremat arvutuslikku koormust. Valtsitud I-profiilide puhul on $W_p \approx \approx 1,16W$.

Mittesümmeetrilise ristlõike puhul ei läbi piirlokorra tõmmatud ja surutud tsoone eraldav joon (nulljoon) raskuskeset (joon. 23.5).



Joon. 23.5

Piirlokorraks vastav sisejõudude moment võrdub piirmomendiga:

$$M_p = \sigma_T \int_{F_t} z dF + \sigma_T \int_{F_s} z dF \quad (23.7)$$

ehk

$$M_p = \sigma_T S_t + \sigma_T S_s = \sigma_T (S_t + S_s) = \sigma_T W_p \quad (23.8)$$

milles S_t ja S_s on tõmbe- ja survetsooni pindade staatilised momendid tsoonide eraldusjoone suhtes. Piir-vastupanumoment võrdub tõmmatud ja surutud tsoonide staatiliste momentide summaga:

$$W_p = S_t + S_s \quad (23.9)$$

Tasakaalutingimus varda teljele $\Sigma X = 0$

$$\sigma_T F_t - \sigma_T F_s = 0$$

annab

$$F_t = F_s \quad (23.10)$$

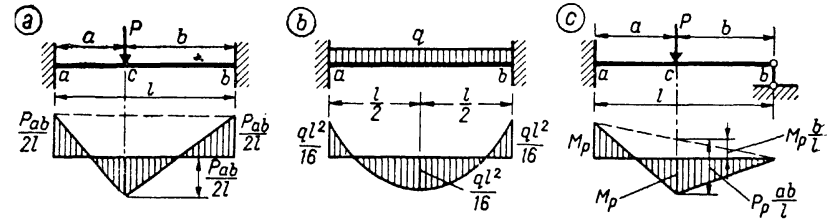
Tõmbe- ja survetsooni eraldav joon jagab ristlõike pindala kaheks võrdseks osaks.

Siin käsitleti puhast painet. Põikjõu mõju arvestamine vähendab arvutuslikku piirmomenti.

23.3. Ühesildeline staatikaga määratu tala

Staatikaga määratu tala piirlokord leitakse tasakaalutingimustest, kasutamata deformatsioonide võrrandeid.

Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud tala muutub mehhanismiks, s.t. on piirlokorraks, kolme plastse liigendi tekkimisel. Joonisel 23.6, a kujutatud talas tekivad suurimad momendid lõigetes a , b ja c , kus konstantse ristlõike



Joon. 23.6

kega talas tekivad ka plastsed liigendid. Piirmomentide võrdsuse tingimusest

$$M_a = M_c = M_b = M_p \quad (a)$$

$$M_{ap} + M_{cp} = 2M_p = M_c^0 = Pab/l \quad (b)$$

leitakse piirmoment

$$M_p = Pab/2l \quad (c)$$

ja piirkoormus

$$P_p = 2lM_p/ab \quad (d)$$

Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud ja ühtlaselt jaotatud koormusega tala (joon. 23.6, b) piirmoment on

$$M_p = M_c^0/2 = ql^2/16 \quad (e)$$

ja piirkoormus

$$q_p = 16M_p/l^2 \quad (f)$$

Joonisel 23.6, c kujutatud tala momentide M_a ja M_c võrdsuse tingimusega $M_a = M_c = M_p$, milles

$$M_c = M_c^0 - M_a b/l \quad (g)$$

ehk

$$M_p = Pab/l - M_p b/l \quad (h)$$

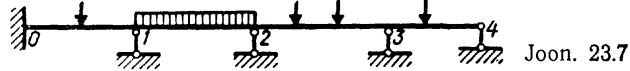
leitakse piirmoment ja piirkoormus

$$M_p = P_p ab / (l + b), \quad P_p = M_p (l + b) / ab \quad (i)$$

23.4. Jätukvtala

Jätukvtala piirkoormused leitakse iga silde jaoks eraldi. Olenemata teiste sillete koormusest saabub esimeses sildes (joon. 23.7) piirulukord kolme plastse liigendi tekkimisega. Piirkoormus esimeses sildes leitakse analoogiliselt joonisel 23.6, *a* kujutatud tala piirkoormuse määramisega. Eeldatakse, et silde ulatusel on ristlõige konstantne.

Piirmomendiks vahepealsetel tugedel on väiksem kahest naabersilde piirmomendist.



Joon. 23.7

Neljandas sildes tekib piirulukord kahe plastse liigendiga — toel 3 ja koondatud jõu ristlõikes. See leitakse analoogiliselt joonisel 23.6, *c* kujutatud tala piirkoormusega. Vahepealsetes silletes tekivad piirulukorrad kolme plastse liigendiga.

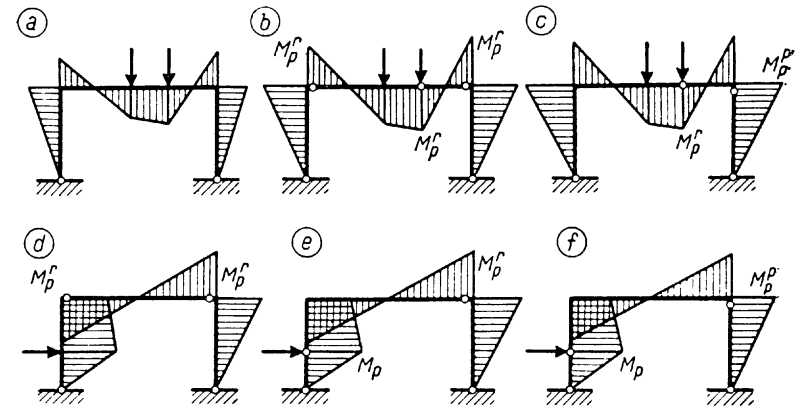
Kui koormus ja ristlõiked on teada, siis leitakse iga silde jaoks varutegur.

Kui on antud varutegur ja koormus, siis dimensioonitakse ristlõiked.

23.5. Raamid

Raamide (eriti kaarte) arvutus piirulukorra järgi on väga tülikas, kuna ei ole teada, kus tekivad plastsed liigendid. Võimalike variantide arv on tunduvalt suurem kui talades.

Näiteks kahe liigendiga raami piirulukorra võimalikud variandid plastsete liigenditega on kujutatud joonisel 23.8.



Joon. 23.8

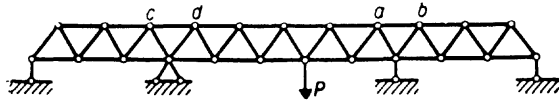
Vertikaalse koormuse puhul tekib üks piirulukord kolme plastse liigendiga riivis (joon. 23.8, *b*) ja teine piirulukorra variant on plastse liigendiga riivis ja postis (joon. 23.8, *c*). Horisontaalse koormuse puhul on piirulukorra võimalikud variandid järgmised: kaks plastset liigendit riivis (joon. 23.8, *d*), plastne liigend postis ja riivis (*e*) ning üks plastne liigend mõlemas postis (*f*).

Kõiki võimalikke plastsete liigendite tekkimise variante on vaja arvestada. Piirkoormuse määramisel võetakse nendele variantidele vastavatest koormustest väikseim ning ristlõike dimensioonimisel — suurim ristlõige.

23.6. Sõrestikud

Sõrestike arvutus piirkoormuse järgi on analoogiline tala- ja raamkonstruktsioonide arvutusega. Tala ja raam muutusid piirulukorras mehhanismiks plastsete liigendite tekkimisega. Staatikaga määratu sõrestik muutub mehhanismiks kõige suuremate pingetega varraste üleminekul elastses olukorras töötamiselt plastsesse olukorda.

Algul leitakse staatikaga määratu sõrestikus (joon. 23.9) sisejõud elastses staadiumis. Olgu kõige suuremate pingetega varras *a-b*. Järgnevalt eemaldatakse varras *a-b* ja tema mõju asendatakse kahe välisjõuga



Joon. 23.9

$$N_{ab} = \sigma_T F_{ab} \quad (a)$$

sõlmedes a ning b . Järgnevalt leitakse varda $a-b$ eemaldamisega saadud uues arvutusskeemis koormusest ja jõududest sõlmes a ja b kõige suuremate pingetega varras. Olgu selleks varras $c-d$. Koormuse kasvamisel läheb see varras esimesena uues skeemis elastsest olukorrast plastsesse. Selles piirilukorras on varda sisejõud

$$N_{cd} = N_{cd,p} + n_{cd,ab} N_{ab} = \sigma_T F_{cd} \quad (b)$$

milles $n_{cd,ab}$ on jõust $N_{ab} = 1$ põhjustatud sisejõud vardas $c-d$.

Varda $c-d$ eemaldamisega saadakse staatikaga määratav skeem, mille varraste sisejõud leitakse koormusest ja jõududest N_{ab} (a) ning N_{cd} (b).

Koormuse suurenemisel kõige suurema pingega varda $j-k$ üleminekul plastsesse staadiumi muutub sõrestik mehhanismiks ja on piirilukorras.

Varda $j-k$ sisejõud leitakse valemiga

$$N_{jk} = n_{jk,p} P_p + n_{jk,ab} N_{ab} + n_{jk,cd} N_{cd} = \sigma_T F_{jk} \quad (c)$$

millest saadakse, kui arvestatakse avaldisi (a) ja (b),

$$P_p = (F_{jk} - n_{jk,ab} F_{ab} - n_{jk,cd} F_{cd}) \sigma_T / n_{jk,p} \quad (d)$$

Siin käsitleti piirkoormuse leidmist eeldusel, et lisasidemed $a-b$ ja $c-d$ töötavad tõmbele. Erilist tähelepanu peab pöörama aga surutud varraste nõtketele enne kui kogu ristlõikes tekib voolamine. Vardas mõjuv jõud on siis väiksem kui $\sigma_T F$. Kui varda nõtkete toimub materjali voolamise ajal, siis koormuse suurenemisel võib varda vastupanu hakata kiirelt vähenema.

SISUKORD

1. Ehitusmehaanika põhialused	3
1.1. Ulesanded ja eesmärk	3
1.2. Eeldused ja printsiibid	5
1.3. Arvutusskeem	6
1.4. Ehituskonstruksioonide liigitus	7
1.5. Koormused	9
1.6. Tasandkonstruksioonide toed	10
1.7. Sisejõud	12

Staatikaga määratavad varraskonstruksioonid

2. Toereaktsioonide ja sisejõudude arvutus tasakaalutingimuste abil	15
2.1. Staatikaga määratav arvutusskeem	15
2.2. Toereaktsioonide arvutus	16
2.3. Sisejõudude arvutus	19
2.4. Sisejõudude epüürid	20
3. Toereaktsioonide ja sisejõudude arvutus kinemaatika tasakaalutingimustega	28
3.1. Arvutusskeemi vabadusaste	28
3.2. Võimalike paigutiste printsiip	31
3.3. Pooluste plaan	33
3.4. Pööratud kiiruste plaan	35
3.5. Võimalike paigutiste printsiibi rakendusi	38
4. Hetkmuutuvad konstruksioonid	45
4.1. Hetkmuutuvus	45
4.2. Pööratud kiiruste plaani meetod	45
4.3. Pooluste plaani meetod	48
4.4. Nullkoormuse meetod	51
5. Geomeetrilise struktuuri analüüs	53
5.1. Analüüsi mõte	53
5.2. Kujundi geomeetrilise muutumatuse põhitunnused	54
6. Staatikaga määratavate konstruksioonide staatikalised omadused	56
6.1. Eelpinged	56
6.2. Temperatuuri muutuse, tugevate paigutiste ja montaaži ebatäpsuse mõju	56
6.3. Tasakaalus koormus	56
6.4. Ekvivalentne koormus	57
6.5. Geomeetrilise struktuuri muutmise mõju	58
6.6. Põhi- ja lisaosad	58
7. Liikuv koormus	60
7.1. Mõjujoonte mõiste	60
7.2. Mõjujoone ordinaadi dimensioon	63

7.3. Mõjujoonte ordinaatide arvutus staatika tasakaalutuginimustega	63	10.04. Seosed sisejõudude vahel	144
7.31. Toereaktsiooni mõjujoon	63	10.05. Toereaktsioonide graafiline konstrueerimine	149
7.32. Paindemomendi mõjujoon	64	10.06. Kolme liigendiga kaare survejoon	152
7.33. Põikjõu mõjujoon	67	10.07. Kaare telje ratsionaalne kuju vertikaalsel koormusel	155
7.4. Mõjujoonte konstrueerimine kinemaatika meetodiga	69	10.08. Mõjujooned	157
7.41. Meetodi idee	69	10.081. Staatika meetod	157
7.42. Toereaktsiooni mõjujoon	71	10.082. Kinemaatika meetod	165
7.43. Paindemomendi mõjujoon	72	10.083. Mõjujoonte kujutamine nullpunktide abil	166
7.44. Põikjõu mõjujoon	73	10.09. Tuumamomendid	168
7.5. Mõjujoonte omadused ja kasutamine	74	10.10. Sisejõudude mõjumaatriksid	171
7.51. Koormused, mille mõju saab arvutada mõjujoontega	74	10.11. Kolme liigendiga raam	179
7.52. Üks koondatud jõud	74	10.12. Tõmbiga kolme liigendiga kaar ja raam	182
7.53. Paralleelsed koondatud jõud	74	10.13. Mitmesildelised ja -korruselised raamid	188
7.54. Jaotatud koormus	75	11. Tasandsõrestikud	191
7.55. Mõjujoone sirge osa omadus	77	11.01. Uldised mõisted	191
7.56. Sõlmkoormus	79	11.02. Terminid ja liigitus	193
7.6. Koormuse ebasoodsaim asetus	81	11.03. Sisejõudude arvutus staatika meetodiga	194
7.61. Funktsiooni ekstreemumid	81	11.04. Sõlmede eraldamise võte	195
7.62. Ühtlaselt jaotatud koormus	81	11.05. Momendipunkti võte	198
7.63. Hulknurkne mõjujoon	81	11.06. Projektsioonide võte	201
7.64. Kolmnurkne mõjujoon	85	11.07. Kombineeritud võte	203
7.65. Ekvivalentne koormus	88	11.08. Paralleelvõõde ja rombivõrguga sõrestik	212
7.7. Mõjumaatriks	90	11.09. Kahekordse post-diagonaalvõrgu ja paralleelvõõdega sõrestik	215
8. Tala kahel toel	97	11.10. Varraste asendamise võte	217
8.1. Q ja M epüüride arvutus	97	11.11. Koormuse lahutamise võte	221
8.11. Otsene koormus	97	11.12. Sisejõudude arvutus kinemaatika meetodiga	224
8.12. Sõlmkoormus	98	11.13. Liitvarrastega sõrestikud	226
8.2. Suurimad põikjõud	100	11.14. Sprengelsõrestikud	228
8.21. Ühtlaselt jaotatud koormus	100	11.15. Sisejõudude diagramm	229
8.21.1. Otsene koormus	100	12. Talasõrestike mõjujooned	232
8.21.2. Sõlmkoormus	102	12.01. Mõjujoonte konstrueerimise meetodid	232
8.22. Koondatud jõud	104	12.02. Mõjujoonte konstrueerimine momentide tasakaalu tingimusega	233
8.22.1. Otsene koormus	104	12.03. Mõjujoonte konstrueerimine projektsioonide tasakaalu tingimusega	238
8.22.2. Sõlmkoormus	105	12.04. Mõjujoonte konstrueerimine sõlmede kohta koostatud tasakaalutingimustega	240
8.3. Suurim paindemoment	107	12.05. Kolmnurksõrestik	242
8.31. Ühtlaselt jaotatud koormus	107	12.06. K-võrguga paralleelvõõdega sõrestik	244
8.32. Koondatud jõud	108	12.07. Konsolsõrestik	246
9. Staatikaga määratav mitmesildeline tala	113	12.08. Sprengelsõrestik	248
9.1. Geomeetrilise struktuuri analüüs	113	12.09. Konsoolidega talasõrestik	252
9.2. Sisejõudude arvutus	116	12.10. Mitmesildeline talasõrestik	254
9.21. Otsene koormus	116	12.11. Mõjujoonte konstrueerimine pooluste plaani abil	256
9.22. Sõlmkoormus	118	12.12. Mõjujoonte konstrueerimine kiiruste plaani abil	259
9.3. Mõjujooned	120	12.13. Pikijõu mõjumaatriks	267
9.31. Staatika meetod	120	13. Kolme liigendiga kaarsõrestiku mõjujooned	273
9.32. Kinemaatika meetod	124	13.1. Staatika meetod	273
9.4. Liigendite asetus	127	13.2. Kinemaatika meetod	278
10. Kolme liigendiga kaar ja raam	130	14. Kombineeritud konstruktsioonid	282
10.01. Uldised mõisted	130	14.1. Kombineeritud konstruktsioonide liigid	282
10.02. Toereaktsioonide ja sisejõudude arvutus	132	14.2. Sprengeltala	283
10.021. Vertikaalne koormus	132	14.3. Rippkonstruktsioonid	287
10.022. Horisontaalne koormus	137		
10.03. Sisejõudude epüüride konstrueerimine vertikaalse koormuse puhul	139		

14.31. Arvutusskeem	287	17.33. Deformatsioonimeetod	376
14.32. Sisejõudude arvutus paigalseisvast koormusest	287	18. Jõumeetod	377
14.33. Mõjujoonte konstrueerimine	290	18.1. Arvutuse alused	377
14.4. Kaarele toetuv tala	293	18.11. Staatikalise määramatuse aste	377
14.5. Sõrestikud	295	18.12. Põhiskeem ja lisatundmatud	379
15. Ruumsõrestikud	300	18.13. Võrrandid lisatundmatute arvutamiseks	382
15.1. Üldised mõisted	300	18.14. Kanooniliste võrrandite tundmatute kordajate ja vabaliikmete arvutamine	387
15.2. Toed	300	18.15. Sisejõudude epüürid staatikaga määramatus arvutusskeemis	389
15.3. Staatikaga määratavad ruumsõrestikud	302	18.15.1. Koormusest põhjustatud sisejõudude epüürid	389
15.4. Sisejõudude arvutus	303	18.15.2. Temperatuuri muutusest ja tugede paigutistest põhjustatud sisejõudude epüürid	393
15.41. Sõlmede eraldamise võte	303	18.16. Staatikaga määramatute konstruktsioonide paigutiste arvutamine	393
15.42. Momenditelje võte	308	18.16.1. Paigutised koormusest	393
15.43. Ruumsõrestiku lahutamine tasandsõrestikeks	308	18.16.2. Paigutised temperatuuri muutusest	398
16. Paigutiste arvutus	310	18.16.3. Paigutised tugede paigutistest	399
16.1. Sissejuhatus	310	18.17. Arvutuse kontrollimine	400
16.2. Üldistatud jõud ja paigutised	312	18.17.1. Paigutiste kontrollimine	400
16.3. Tegelik töö	314	18.17.2. Sisejõudude epüüride kontrollimine	402
16.31. Välisjõudude töö	314	18.18. Raami arvutuse näide	406
16.32. Sisejõudude töö	316	18.19. Raami arvutus maatriksethetega	415
16.4. Potentsiaalenergia	320	18.2. Arvutuse lihtsustamise võimalused	429
16.5. Vastastikkuse teoreemid	322	18.21. Kõrvalpaigutised kanoonilistes võrrandites	429
16.51. Välis- ja sisejõudude võimalik töö	322	18.22. Sümmeetrilised konstruktsioonid	430
16.52. Tööde vastastikkuse teoreem	322	18.23. Gruppundmatud	433
16.53. Paigutiste vastastikkuse teoreem	325	18.24. Jäigad konsoolid	440
16.54. Reaktsioonide vastastikkuse teoreem	326	18.25. Ühik-lisatundmatutest põhjustatud epüürid	444
16.55. Reaktsiooni ja paigutise vastastikkuse teoreem	328	18.26. Mitme põhiskeemi samaaegne kasutamine	447
16.6. Paigutiste arvutamine	330	18.27. Elastsete koormuste kese	448
16.61. Välismõjud	330	18.28. Võrrandisüsteemide lahendamine	454
16.62. Koormusest põhjustatud paigutised	330	18.28.1. Eliminatsioonivõte	454
16.63. Temperatuuri muutusest põhjustatud paigutised	332	18.28.2. Võrrandisüsteemi lahendamine klahvarvuliga	455
16.64. Tugede paigutiste mõju	335	18.28.3. Iteratsioonivõte	461
16.65. Üldistatud ühikjõud	335	18.28.4. Võrrandisüsteemi lahendi leidmine mõjuarvudega	464
16.66. Arvutusnäiteid	336	18.3. Mõjujooned	469
16.67. Paigutiste arvutamine potentsiaalenergia abil	338	18.31. Kinemaatika meetod	469
16.68. Paigutise valemi integraalide arvutamine	342	18.32. Staatika meetod	478
16.69. Funktsioonide numbriline integreerimine	348	18.4. Jätkuvtalad	480
16.7. Paigutiste arvutamine maatrikskujul	350	18.41. Staatikalise määramatuse aste	480
16.71. Muutusmaatriks	350	18.42. Põhiskeem ja lisatundmatud	480
16.72. Paigutiste arvutamine	352	18.43. Kanoonilised võrrandid. Kolme momendi võrrand	482
16.8. Mõjujooned	358	18.43.1. Koormuse mõju	482
16.81. Paigutise mõjujoon	358	18.43.2. Temperatuuri mitteühtlase muutuse ja tugede paigutiste mõju	486
16.82. Paigutise mõjumaatriks	360	18.44. Sisejõudude epüürid	486
16.83. Reaktsiooni mõjujoon	363	18.45. Jätkuvtalade arvutus fookussuhetega	489
16.9. Siirde epüüri konstrueerimine elastsete koormuste meetodiga	365	18.45.1. Fookussuhted	489
Staatikaga määratud varraskonstruktsioonid	369	18.45.2. Koormatud silde toemomendid	491
17. Staatikaga määramatute konstruktsioonide arvutus	369	18.46. Suurimate paindemomentide ja põikjõudude epüürid	495
17.1. Staatikaga määramatu konstruktsioon	369	18.47. Elastsetel tugeudel asuva jätkuvtala arvutus. Viie momendi võrrand	498
17.2. Staatikaga määramatute konstruktsioonide üldised omadused	373	18.48. Mõjujooned	501
17.3. Staatikaga määramatute konstruktsioonide arvutuse meetodid	374		
17.31. Arvutusmeetodite liigitus	374		
17.32. Jõumeetod	375		

18.48.1. Staatika meetod	501	19.81. Staatika meetod	625
18.48.2. Kinemaatika meetod	505	19.81.1. Lisatundmatute mõjujooned	625
18.5. Kaarkonstruksioonid	511	19.81.2. Sisejõudude mõjujooned	630
18.51. Arvutuse alused	511	19.82. Kinemaatika meetod	632
18.52. Kahe liigendiga kaar	513	19.83. Mõjujoonte arvutus	632
18.52.1. Koormuse, temperatuuri muutuse ja tugede paigutiste mõju	513	20. Sega- ja kombineeritud meetod	637
18.52.2. Analüütiliselt määratud telgjoonega kaar	517	20.1. Segameetod	637
18.52.3. Analüütiliselt määramatu telgjoonega kaar	523	20.2. Kombineeritud meetod	640
18.53. Liigendita sümmeetriline kaar	531	21. Momentide jaotamise meetod	644
18.53.1. Põhiskeem ja sisejõudude epüürid	531	21.1. Arvutuse alused	644
18.53.2. Mõjujooned	541	21.2. Raami arvutus	651
18.53.3. Temperatuuri muutuse mõju	549	21.3. Temperatuuri muutuse mõju	657
18.53.4. Tugede paigutiste mõju	549	22. Ruumraamid	663
18.6. Sõrestikud	551	22.1. Jõumeetod	663
Deformatsioonimeetod	561	22.11. Staatikalise määramatuse aste ja põhiskeem	663
19.1. Arvutuse alused	561	22.12. Kanoonilised võrrandid, paigutiste sisejõudude arvutus	665
19.11. Deformatsioonimeetodi idee	561	22.13. Tasandraami arvutus mitte raami tasandis mõjuva koormuse puhul	667
19.12. Geomeetrilise määramatuse aste	563	22.2. Deformatsioonimeetod	668
19.13. Geomeetriliselt määratud põhiskeem	570	23. Konstruksioonide arvutus piirkoormuse järgi	672
19.14. Seosed varda otsste paigutiste ja sisejõudude vahel	574	23.1. Arvutuse alused	672
19.14.1. Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varras	574	23.2. Piir-paindemoment ja piir-vastupanumoment	674
19.14.11. Koormus	574	23.3. Uhesildeline staatikaga määramatu tala	677
19.14.12. Sõlme j pööre φ_j	575	23.4. Jätkuvtala	678
19.14.13. Sõlme k pööre φ_k	576	23.5. Raamid	678
19.14.14. Varda pööre ϑ_{1k}	576	23.6. Sõrestikud	679
19.14.15. Koormusest, sõlmede ja varda pööretest põhjustatud reaktsioonid	577		
19.14.2. Ühest otsast jäigalt ja teisest otsast liigendiga kinnitatud varras	578		
19.14.21. Koormus	578		
19.14.22. Sõlme j pööre φ_j	579		
19.14.23. Varda pööre ϑ_{j1}	580		
19.14.24. Koormusest, sõlme j ja varda pööretest põhjustatud reaktsioonid	580		
19.15. Kanoonilised võrrandid	584		
19.16. Kanooniliste võrrandite tundmatute kordajad	589		
19.17. Sisejõudude epüürid ja nende kontroll	595		
19.18. Raami arvutuse näide	596		
19.2. Jätkuvtala	602		
19.21. Liigend-ääretugegedega jätkuvtala	602		
19.22. Jäikade ääretugegedega jätkuvtala	603		
19.3. Uhekorruselise raam	605		
19.31. Liigendtugegedega raam	605		
19.32. Jäigalt kinnitatud postidega raam	607		
19.4. Korrusraamid	608		
19.5. Sümmeetrilised raamid	610		
19.6. Temperatuuri muutuse, tugede paigutiste ja pikijõudude mõju	614		
19.61. Temperatuuri muutuse mõju	614		
19.62. Tugede paigutiste mõju	619		
19.63. Pikijõudude mõju	620		
19.7. Raami arvutus maatrikskujul	621		
19.8. Mõjujooned	625		

Раймунд Куставович Рязмет. Строительная механика. На эстонском языке. Художник-оформитель Т. Ару. Издательство «Valgus». Таллин. Toimetaja T. Masso. Kunstiline toimetaja M. Niin. Tehniline toimetaja M. Pall. Korrektorid E. Martoja ja S. Uustare. Laduda antud 17. XII 1974. Trükkida antud 8. IX 1975. Kohila Paberivabriku trükipaber nr. 2, 54×84/16. Trükipoog-
naid 43. Tingtrükipoognaid 36,12. Arvestuspoognaid 34,59. Trükiarv 3000. MB-05889. Kirjastus «Valgus», Tallinn, Pärnu mnt. 10. Hans Heidemanni nim. Trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II Tellimuse nr. 6447.
Hind rbl. 1.34.