

Er 6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED  
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Серия А № 39

1952

Х. Х. ЛАУЛЬ

I. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КАСТИЛЬЯНО-РИТЦА ДЛЯ  
РАСЧЕТА ДЛИННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК  
СО СТРИНГЕРАМИ  
II. РАСЧЕТ ОБОЛОЧКИ С ОПЕРТЫМ БОРТОВЫМ  
ЭЛЕМЕНТОМ

ENSV Teaduste Akadeemia  
Keskraamatukogu

P.12871



ЭСТОНСКОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТАЛЛИН 1952



## СОДЕРЖАНИЕ.

	Стр.
I. Применение метода Кастильяно-Ритца для расчёта длинных цилиндрических оболочек со стрингерами . . . . .	5
а) Общие замечания . . . . .	5
б) Выбор дополнительной эпюры . . . . .	7
в) Внутренние усилия, вызываемые дополнительной эпюрой	10
г) Условия минимума потенциальной энергии . . . . .	12
д) Заключение . . . . .	19
II. Расчет оболочки с опертым бортовым элементом . . . . .	20
а) Общие замечания . . . . .	20
б) Описание метода для случая нагрузки, симметричной относительно конька . . . . .	22
в) Пример . . . . .	25
г) Заключение . . . . .	29
Обозначения . . . . .	31
Библиография . . . . .	32

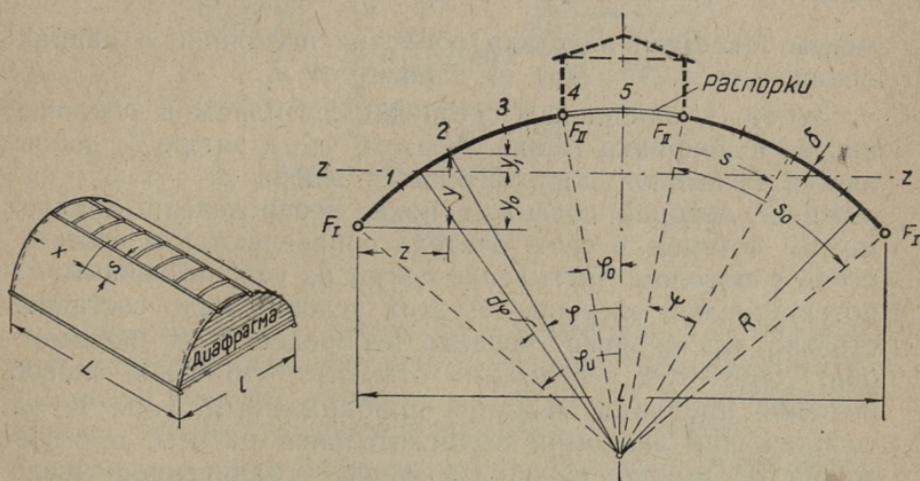


# 1. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КАСТИЛЬЯНО-РИТЦА ДЛЯ РАСЧЕТА ДЛИННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СО СТРИНГЕРАМИ.

## а. Общие замечания.

Длинные цилиндрические оболочки, которые применяются в технике, и особенно в строительной технике, зачастую снабжены стрингерами.

Например, изображенная на черт. 1 длинная цилиндрическая оболочка снабжена двумя стрингерами: наверху



Черт. 1.

и внизу, т. к. нижний бортовой элемент часто можно рассматривать, как стрингер. Наверху ставятся стрингеры в том случае, если в оболочке должен быть фонарь.

В дальнейшем рассматривается тип оболочки, представленной на черт. 1, но излагаемые здесь рассуждения

одинаково применимы для каких угодно длинных цилиндрических оболочек с симметрическим поперечным сечением и снабженных стрингерами.

В настоящем ограничимся случаем, когда нагрузка симметрична относительно  $\varphi = 0$  и  $x = L/2$ ; если же нагрузка антисимметрична относительно  $\varphi = 0$ , то решение комбинируется из методов, даваемых в настоящей работе и в работе [4].

Допустим, что длинная цилиндрическая оболочка с симметрическим поперечным сечением несёт нагрузку, постоянную по длине оболочки и симметричную относительно поперечного сечения.

Вся нагрузка на один погонный метр оболочки вызывает в ней, как в «большой балке» моменты  $\bar{M}$  и поперечные силы  $\bar{Q}$ . В соответствии с результатами работы [2], возникают (— при такой элементарной трактовке вопроса) продольные внутренние силы  $T_0$ , сдвигающие силы  $S_0$  (соответственно  $\zeta_0 = \frac{\partial S_0}{\partial x}$ ) и поперечные моменты  $M_0$ . Если нагрузка оболочки постоянна в направлении  $x$ , то и  $\zeta_0 = \dot{f}(s)$  не зависит от  $x$ .

Затем к найденным срезающим усилиям в оболочке вносится поправка таким образом, что к эпюре  $\zeta_0$  добавляется некоторая дополнительная эпюра  $\Delta\zeta = \dot{f}_1(s)$ , выражение которой содержит пока неопределенные параметры, которые в свою очередь определяются в соответствии с методом *Кастильяно-Ритца* из условий минимума потенциальной энергии. А этих условий надо составить столько же, сколько введено неопределенных параметров. При этом необходимо отметить, что такой способ решения проблемы является приближенным, т. к. 1) из соображений экономии вычислительной работы, в выражении  $\Delta\zeta$  можно сохранить лишь ограниченное число параметров, и 2)  $\Delta\zeta$  фактически в некоторой мере зависит от  $x$ . Что таким путем полученное решение приводит к удовлетворительным результатам, показано в [3].

Необходимо ещё отметить, что дополнительную эпюру  $\Delta\zeta(s)$ , как вариацию внутренних усилий, нужно избирать, согласно принципу *Кастильяно-Ритца*, целиком удовлетворяющую условиям равновесия и граничным условиям.

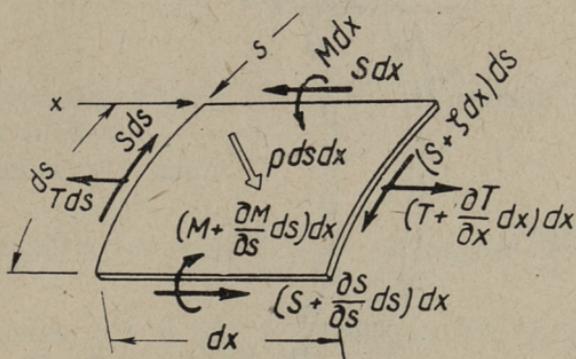
## б. Выбор дополнительной эпюры $\Delta\zeta(s)$ .

В данном случае дополнительная эпюра  $\Delta\zeta(s)$  избрана следующим образом:

$$\Delta\zeta = a_{II} + (a_I - a_{II}) \frac{s}{s_0} + \sum_{1,2,3,\dots} a_n \sin \frac{n\pi s}{s_0}. \quad (1)$$

Такое выражение является достаточно полным для варьирования выражения внутренних усилий.

Количество пока неопределенных параметров равно  $n + 2$ , из коих  $a_I$  и  $a_{II}$  являются ординатами эпюры  $\Delta\zeta$  соответственно вблизи стрингеров I и II.



Черт. 2.

Далее показано, что число параметров, для нахождения которых надо составлять условия минимума потенциальной энергии, равно  $n - 1$ , т. к. три параметра возможно исключить дополнительными условиями.

Условия равновесия элемента оболочки, представленного на черт. 2, дают:

$$\frac{\partial(\Delta T)}{\partial x} + \frac{\partial(\Delta S)}{\partial s} = 0,$$

откуда

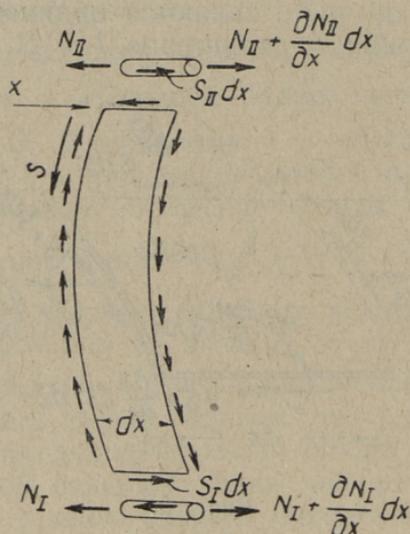
$$\frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial s}(\Delta\zeta).$$

Учитывая граничные условия диафрагмы ( $\Delta T = 0$ ) и условия по середине оболочки  $x = L/2$  (там будет  $\partial(\Delta T)/\partial x = 0$ ), получаем после интегрирования:

$$\Delta T = \frac{x}{2} (L - x) \frac{\partial}{\partial s} (\Delta \zeta) = \frac{x}{2} (L - x) \Delta t. \quad (2)$$

Из черт. 3 явствуют условия равновесия элемента верхнего стрингера:

$$\frac{\partial (\Delta N_{II})}{\partial x} + \Delta S_{II} = 0,$$



Черт. 3.

откуда

$$\frac{\partial^2 (\Delta N_{II})}{\partial x^2} = - \Delta \zeta_{II},$$

и после интегрирования

$$\Delta N_{II} = \frac{x}{2} (L - x) \Delta \zeta_{II}. \quad (3)$$

Аналогично, из условий равновесия нижнего стрингера (1) имеем

$$\Delta N_I = - \frac{x}{2} (L - x) \Delta \zeta_I. \quad (4)$$

Условие, что напряжения, возникающие в нижнем стрингере, сходны с напряжениями вдоль по образующей оболочки, соседней с этим стрингером [см. (2) и (4)] дают:

$$-\frac{x}{2F_I}(L-x)\Delta\zeta_I = \frac{x}{2\delta}(L-x)\frac{\partial}{\partial s}(\Delta\zeta)_I,$$

откуда

$$-\frac{\Delta\zeta_I}{F_I} = \frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial s}(\Delta\zeta)_I \quad (5)$$

Аналогично для верхнего стрингера получаем:

$$\frac{\Delta\zeta_{II}}{F_{II}} = \frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial s}(\Delta\zeta)_{II}. \quad (6)$$

Посредством выражений (5) и (6) возможно исключить параметры  $a_I$  и  $a_{II}$ .

Выражение (1) дает:

$$\frac{\partial}{\partial s}(\Delta\zeta) = (a_I - a_{II})\frac{1}{s_0} + \frac{\pi}{s_0} \sum_{1,2,3,\dots} na_n \cos \frac{n\pi s}{s_0}. \quad (7)$$

Подставляя (1) и (7) в равенства (5) и (6), после некоторых преобразований получаем:

$$a_I = \frac{\pi F_I}{F} \left[ \frac{2F_{II}}{\delta s_0} \sum_{1,3,5,\dots} na_n + \sum_{1,2,3,\dots} (-1)^{n+1} na_n \right], \quad (8)$$

$$a_{II} = \frac{\pi F_{II}}{F} \left[ \frac{2F_I}{\delta s_0} \sum_{1,3,5,\dots} na_n + \sum_{1,2,3,\dots} na_n \right], \quad (9)$$

где

$$F = F_I + F_{II} + \delta s_0.$$

Из условия, что вертикальная, составляющая эпюры  $\Delta\zeta$ , должна быть равна нулю, (это условие, идентично с условием, что момент эпюры  $\Delta T$ , вызываемый эпюрой  $\Delta\zeta$ , относительно горизонтальной оси поперечного сечения, должен быть равен нулю) получаем еще одно дополнительное условие для исключения одного из параметров, например  $a_I$ .

Вертикальная проекция силы, действующей на элемент  $Rd\varphi$  (см. черт. 1) равна

$$R\Delta\zeta \sin \varphi d\varphi.$$

Подставляя  $\Delta\zeta$  из выражения (1) и интегрируя от нуля до  $s_0$ , получаем условие равновесия вертикальных результирующих сил для оболочки с круговым поперечным сечением:

$$\begin{aligned} a_1 \left( \frac{R}{s_0} \sin \varphi_u - \cos \varphi_u - \frac{R}{s_0} \sin \varphi_0 \right) + a_{II} \left( \cos \varphi_0 - \right. \\ \left. - \frac{R}{s_0} \sin \varphi_u + \frac{R}{s_0} \sin \varphi_0 \right) + \\ + \sum_{1,2,3\dots} a_n \frac{\sin \varphi_0 + (-1)^{n+1} \sin \varphi_u}{\frac{n\pi R}{s_0} - \frac{s_0}{n\pi R}} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В случае оболочек с некруговым поперечным сечением приходится пользоваться методом численного интегрирования.

### в. Внутренние усилия, вызываемые дополнительной эпюрой $\Delta\zeta$ .

$$\text{Сдвигающие усилия: } \Delta S = - (L/2 - x)\Delta\zeta. \quad (11)$$

Приращение продольных усилий дается выражением (2).

Изменения внутренних усилий в стрингерах даются равенствами (3) и (4).

Поперечный момент  $m_y$ , обусловленный дополнительной эпюрой (см. черт. 4) относительно какого-нибудь сечения  $C$ , определяемого центральным углом  $\varphi_0 + \gamma$  равен:

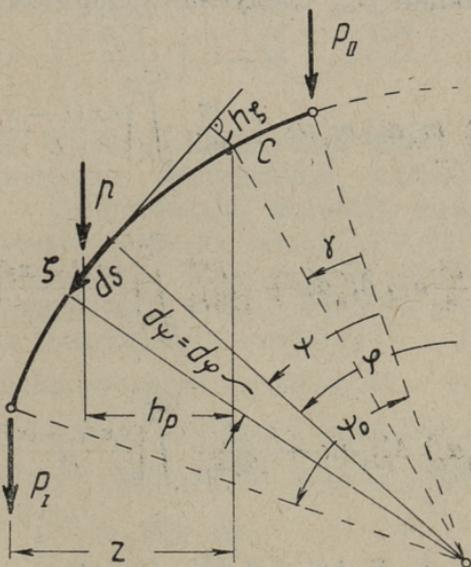
$$m_y = - \int_{\varphi_0}^{\gamma} \Delta\zeta h_s R d\psi.$$

После подстановок и соответствующих вычислений получаем для кругового поперечного сечения:

$$\begin{aligned}
 m_\gamma = R^2 [\sin (\psi_0 - \gamma) - (\psi_0 - \gamma)] a_{II} + \frac{R^3}{s_0} \left[ \cos (\psi_0 - \gamma) + \right. \\
 \left. + \psi_0 \sin (\psi_0 - \gamma) - \frac{\psi_0^2 - \gamma^2}{2} - 1 \right] (a_I - a_{II}) + \\
 + \sum_{1,2,3 \dots} \frac{R^2}{m^2 - 1} \left[ (-1)^n \left( m - \frac{1}{m} \right) + m (-1)^{n+1} \cos (\psi_0 - \gamma) + \right. \\
 \left. + \frac{1}{m} \cos m\gamma \right] a_n = m_{II} a_{II} + m_{I-II} (a_I - a_{II}) + \sum_{1,2,3 \dots} m_n a_n, \quad (12)
 \end{aligned}$$

где

$$m = \frac{n\pi R}{s_0}.$$



Черт. 4.

В случае поперечного сечения какой-нибудь другой формы рекомендуется применение методов численного интегрирования (напр. по формуле параболического интерполирования).

Действительные внутренние усилия находим суммированием. Например, поперечный момент:

$$M = M_0 + m_{II} a_{II} + m_{I-II} (a_I - a_{II}) + \sum_{1,2,3,\dots} m_n a_n. \quad (13)$$

Если из этого выражения посредством (8), (9), (10) исключить  $a_I$ ,  $a_{II}$  и  $a_1$ , то получим:

$$M = M_0 + \sum_{2,3,4,\dots} m'_n a_n,$$

где  $m'_n$  является линейной комбинацией из  $m_{II}$ ,  $m_{I-II}$ ,  $m_1$  и  $m_n$ .

#### г. Условия минимума потенциальной энергии.

Если пренебречь влиянием сдвигающих усилий, то условия минимума потенциальной энергии можно выразить для вариации  $\Delta \zeta_k$  следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{3L}{\delta^3} \int_0^{s_0} (M_0 + \sum_{2,3,4,\dots} m'_n a_n) m'_k ds + \frac{L^2}{16\delta} \int_0^{0,5L} \left[ \frac{4x(L-x)}{L^2} \right]^2 dx \int_0^{s_0} (T_0 + \\ & + \sum_{2,3,4,\dots} \Delta t'_n \frac{L^2}{8} a_n) \Delta t'_k ds + \frac{L^4}{128 F_I} \int_0^{0,5L} \left[ \frac{4x(L-x)}{L^2} \right]^2 (\zeta_{0I} + \\ & + \sum_{2,3,4,\dots} \Delta \zeta'_{nI} a_n) \Delta \zeta'_{kI} dx + \frac{L^4}{128 F_{II}} \int_0^{0,5L} \left[ \frac{4x(L-x)}{L^2} \right]^2 (\zeta_{0II} + \\ & + \sum_{2,3,4,\dots} \Delta \zeta'_{nII} a_n) \Delta \zeta'_{kII} dx = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\int_0^{0,5} \left[ \frac{4x(L-x)}{L^2} \right]^2 dx = 0,267L.$$

### Пример.

Проведем вычисления для оболочки, представленной на черт. (1) в случае следующих числовых данных, касающихся размеров оболочки:

$$\varphi_{\text{н}} = 50^\circ; \varphi_0 = 10^\circ; R = 6,52 \text{ м}; \Delta\varphi = 10^\circ; \Delta s = 1,14 \text{ м};$$

$$s_0 = 4,56 \text{ м}; f = 2,33 \text{ м}; l = 10,0 \text{ м}; L = 23,0 \text{ м};$$

$$\delta = 6,0 \text{ см}; F_{\text{I}} = 0,10 \text{ м}^2; F_{\text{II}} = 0,04 \text{ м}^2.$$

Центр тяжести поперечного сечения находится над линией, соединяющей нижние стрингеры  $y_0 = 1,10 \text{ м}$ .

Моменты инерции поперечного сечения:

$$I_{zz} = 0,624 \text{ м}^4.$$

В случае таким образом избранных данных, местоположения сечений определены таблицей:

Сечение	0	1	2	3	4	5
$z$	0	0,80	1,74	2,77	3,87	5,0
$y$	0	0,81	1,46	1,94	2,22	2,33
$y'$	1,10	0,29	-0,36	-0,84	-1,12	-1,23

Оба крыла оболочки соединены через каждые 1,5 м между стрингерами посредством распорок размером  $0,15 \times 0,1 \text{ м}$ . Относительно момента инерции эта конструкция заменяет толщину оболочки в 6,0 см.

Нагрузка оболочки симметричная (см. черт. 4): вес одного квадратного метра оболочки  $p = 250 \text{ кг}$ .  
Вертикальная нагрузка на стрингер I —  $P_{\text{I}} = 250 \text{ кг/м}$ .  
Вертикальная нагрузка на стрингер II —  $P_{\text{II}} = 500 \text{ кг/м}$ .

Вся нагрузка на I погонный метр оболочки:

$$\bar{q} = 2(250 + 500 + 4,56 \cdot 250) = 3780 \text{ кг/м};$$

$$\bar{M} = \frac{3,78 \cdot 23^2}{8} = 250 \text{ тм};$$

$$\bar{Q} = \frac{3,78 \cdot 23}{2} = 43,5 \text{ т};$$

$$\sigma_{0,0} = + \frac{250 \cdot 1,10}{0,624} = 440 \text{ т/м}^2; T_{0,0} = 440 \cdot 0,06 = 26,4 \text{ т/м}.$$

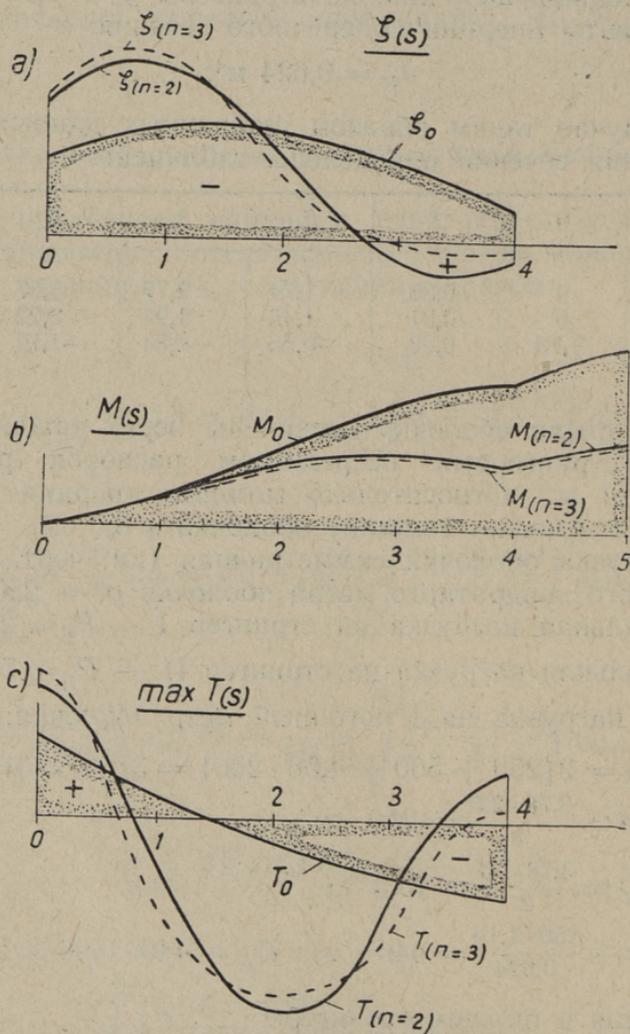
Усилия в нижнем стрингере:

$$N_{01} = 440 \cdot 0,1 = 44,0 \text{ т}.$$

Аналогично найдены внутренние продольные усилия  $T_0$  в остальных сечениях. Усилия  $T_0$  даны в таблице I и на черт. 5-с.

Приращение сдвигающих усилий:

$$\frac{\partial S_0}{\partial x} = \xi_0 = \frac{\bar{q} S_{0z}}{2I_{zz}}$$



Черт. 5.

Сдвигающие усилия у диафрагмы ( $x = 0$ )

$$S = \frac{\bar{Q}S_{0z}}{2I_{zz}}.$$

$\zeta_0$  представлена в таблице I и на чертеже 5-а.

Моменты в рассматриваемой задаче найдены посредством выражения

$$M_0 = -P_1 \cdot z - \int_0^z p h_p ds - \int_0^z \zeta_0 h_\zeta ds.$$

(см. черт. 4). Вычисленные величины представлены в таблице I и на черт. 5-б.

В разбираемом примере ограничиваемся  $n = 2$  для эпюры  $\Delta\zeta$ , таким образом

$$\Delta\zeta = a_{II} + (a_I - a_{II}) \frac{1}{s_0} + a_1 \sin \frac{\pi s}{s_0} + a_2 \sin \frac{2\pi s}{s_0}; \quad (A)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (\Delta\zeta) = \Delta t = & (a_I - a_{II}) \frac{1}{s_0} + \frac{\pi}{s_0} a_1 \cos \frac{\pi s}{s_0} + \\ & + \frac{2\pi}{s_0} a_2 \cos \frac{2\pi s}{s_0}. \end{aligned}$$

$a_I$  найдено посредством выражения (8):

$$a_I = 0,982 a_1 - 1,520 a_2.$$

$a_{II}$  найдено из выражения (9):

$$a_{II} = 0,526 a_1 + 0,608 a_2.$$

Условие, что вертикальная составляющая эпюра  $\Delta\zeta$  равна нулю, дает

$$a_I \cdot 0,204 + a_{II} \cdot 0,139 + a_1 \cdot 0,220 - a_2 \cdot 0,067 = 0.$$

Подставляя сюда  $a_I$  и  $a_{II}$ , получаем:

$$a_1 = 0,592 a_2,$$

$$a_I = -0,938 a_2,$$

$$a_{II} = 0,920 a_2,$$

$$a_{I-II} = -1,858 a_2.$$

Таким образом, из четырех параметров, фигурирующих в выражении (A), независимым остался только один —  $a_2$ .

$$\text{Величины } \Delta\zeta_1 = \sin \frac{\pi s}{s_0}; \dots; \Delta t_1 = \frac{\pi}{s_0} \cos \frac{\pi s}{s_0}, \dots$$

также и  $m_n$ , найденные по формуле (12), представлены в таблице I.

Действительные внутренние усилия:

$$M = M_0 + a_2 m'_2; \quad \frac{\partial M}{\partial a_2} = m'_2;$$

$$\zeta = \zeta_0 + a_2 \Delta\zeta_2;$$

$$\max T = \max T_0 + \frac{L^2}{8} a_2 \Delta t'_2; \quad \frac{\partial (\max T)}{\partial a_2} = \frac{L^2}{8} \Delta t'_2.$$

Т а б л и ц а I.

Сечение	0 I	1	2	3	4 II	5
Усилие стрин- гера $T_0$	26,4	7,0	-8,7	-20,2	-26,9	—
$N_0$	+44,0	—	—	—	-17,9	—
$\zeta_0$	-0,670	-0,965	-0,935	-0,687	-0,272	—
$M^0$	0	-0,29	-0,71	-1,07	-1,26	-1,59
$\Delta\zeta_1$	0	0,707	1,000	0,707	0	—
$\Delta\zeta_2$	0	-1,0	0	+1,0	0	—
$\Delta\zeta_{II}$	1	1	1	1	1	—
$\Delta\zeta_{I-II}$	1	0,75	0,5	0,25	0	—
0,592 $\Delta\zeta_1$	0	0,419	0,592	0,419	0	—
$\Delta\zeta_2$	0	-1,000	0	1,000	0	—
0,920 $\Delta\zeta_{II}$	0,920	0,920	0,920	0,920	0,920	—
-1,858 $\Delta\zeta_{I-II}$	-1,858	-1,392	-0,929	-0,464	0	—
$\Sigma = \Delta\zeta'_2$	-0,938	-1,053	+0,583	+1,875	+0,920	
$m_1$	0	0	-0,11	-0,49	-1,35	-2,73
$m_2$	0	0,02	0,18	0,59	1,12	1,72
$m_{II}$	0	-0,04	-0,30	-1,01	-2,36	-4,50
$m_{I-II}$	0	-0,04	-0,24	-0,85	-1,76	-3,10

Сечение	0	1	2	3	4	5
0,592 $m_1$	0	0	-0,06	-0,29	-0,80	-1,61
$m_2$	0	0,02	0,18	0,59	1,12	1,72
0,920 $m_{II}$	0	-0,04	-0,28	-0,93	-2,17	-4,14
-1,858 $m_{I-II}$	0	0,07	0,45	1,58	3,27	5,76
$\Sigma = m'_2$	0	0,05	0,29	0,95	1,42	1,73
$\Delta t_1$	-0,688	-0,486	0	0,486	0,688	—
$\Delta t_2$	1,376	0	-1,376	0	1,376	—
$\Delta t_{I-II}$	0,219	0,219	0,219	0,219	0,219	—
0,592 $\Delta t_1$	-0,408	-0,238	0	0,288	0,408	—
$\Delta t_2$	1,376	0	-1,376	0	1,376	—
-1,858 $\Delta t_{I-II}$	-0,407	-0,407	-0,407	-0,407	-0,407	—
$\Sigma = \Delta t'_2$	0,561	-0,695	-1,783	-0,119	1,377	—

Условия минимума потенциальной энергии (14):

$$0,32 \cdot 10^6 \int_0^{s_0} (M_0 + a_2 m'_2) m'_2 ds + \frac{L^2}{8} \cdot 51 \int_0^{s_0} (T_0 + \\ + \frac{L^2}{8} \Delta t'_2 \cdot a_2) \Delta t'_2 ds + 134,8 \cdot 10^3 (\zeta_{0I} + a_2 \cdot \Delta \zeta'_{2I}) \Delta \zeta'_{2I} + \\ + 337 \cdot 10^3 (\zeta_{0II} + a_2 \cdot \Delta \zeta'_{2II}) \Delta \zeta'_{2II} = 0.$$

Встречающиеся здесь интегралы:

$$\int_0^{s_0} M_0 m'_2 ds = -\frac{1,14}{3} [2 \cdot 0,29 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,71 \cdot 0,29 + 2 \cdot 1,07 \cdot \\ \cdot 0,95 + 4 \cdot 1,26 \cdot 1,42 + 1,59 \cdot 1,73] = -4,86.$$

Аналогично

$$\int_0^{s_0} (m'_2)^2 ds = 5,01; \quad \frac{L^4}{64} \int_0^{s_0} (\Delta t'_2)^2 ds = 20600;$$

$$\frac{L^2}{8} \int_0^{s_0} T_0 \Delta t'_2 ds = \sim 0.$$

Таким образом, уравнение упрощается

$$-1,550 + 3,214 a_2 = 0;$$

и окончательно

$$a_2 = 0,482.$$

Действительные внутренние усилия найдены посредством суммирования и представлены в табл. II и на черт. 5.

Внутренние усилия в стрингерах:

$$\max N_I = -\frac{L^2}{8} \zeta_I = +\frac{23^2}{8} \cdot 1,126 = 74,5 \text{ т};$$

$$\max N_{II} = \frac{L^2}{8} \zeta_{II} = \frac{23^2}{8} \cdot 0,172 = 11,4 \text{ т}.$$

Т а б л и ц а II.

Сечение	0	1	2	3	4	5
$M_0$	0	-0,29	-0,71	-1,07	-1,26	-1,59
$0,482 m'_2$	0	0,02	0,14	0,46	0,68	0,84
$\Sigma = M$	0	-0,27	-0,57	-0,61	-0,58	-0,75
$T_0$	26,4	7,0	-8,7	-20,2	-26,9	-
$0,482 \frac{L^2}{8} \Delta t'_2$	17,9	-22,2	-56,9	-3,8	+43,8	-
$\Sigma = T$	44,5	-15,2	-65,6	-24,0	+16,9	-
$\zeta_0$	-0,670	-0,965	-0,935	-0,687	-0,272	-
$0,482 A \zeta'_2$	-0,456	-0,508	+0,282	+0,905	0,444	-
$\Sigma = \zeta$	-1,126	-1,473	-0,653	+0,218	0,172	-

Проверка величины момента  $T$  относительно конька оболочки (п. 5 — черт. 1):

$$\begin{aligned} \frac{\bar{M}}{2} &= 74,5 \cdot 2,33 + \frac{1,14}{3} [44,5 \cdot 2,33 - 4 \cdot 15,2 \cdot 1,52 - 2 \cdot 65,6 \cdot \\ &\cdot 0,87 - 4 \cdot 24 \cdot 0,39 + 16,9 \cdot 0,11] + 11,4 \cdot 0,11 = \\ &= + 123 \approx 125 \text{ тм.} \end{aligned}$$

#### д. Заключение.

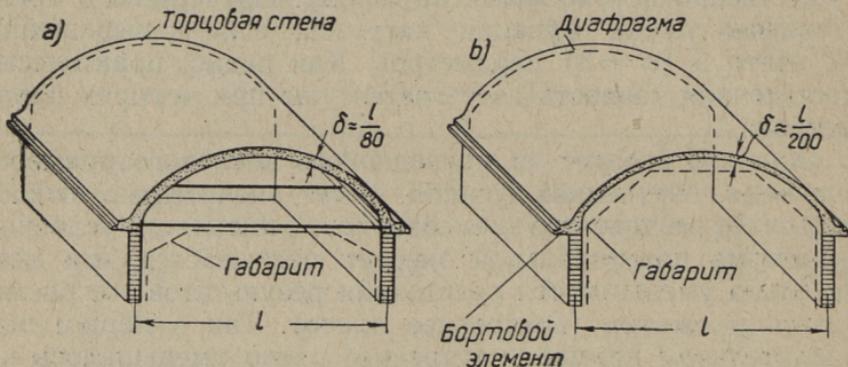
Изложенный ход вычислений для уточнения значений внутренних усилий является достаточно коротким и наглядным по содержанию. Вообще говоря, в выражении  $\Delta\zeta$  можно ограничиваться только четырьмя ( $n=2$ ) неопределенными параметрами, из коих три можно исключить при помощи формул (8), (9) и (10). В таком случае надо составить только одно условие минимума потенциальной энергии, для чего придется вычислить 4 существенно необходимых интеграла. На чертеже 5 представлены также функции нагрузок, если в выражении  $\Delta\zeta$  взято 5 ( $n=3$ ) параметров. Как видно, практически достаточная точность достигается уже при четырех параметрах.

Как это следует из приведенного числового примера, значения внутренних усилий могут значительно отклоняться от результатов элементарного решения. В условиях минимума потенциальной энергии оказывается, что значительно уменьшаются расстояния результатов зон растяжения и сжатия (внутреннее плечо). Так в нашем вычислительном примере внутреннее плечо уменьшалось на 45% по сравнению с внутренним плечом, получаемом в элементарной задаче. Естественно, что в результате этого увеличиваются и результирующие растягивающие усилия.

## II. РАСЧЕТ ОБОЛОЧКИ С ОПЕРТЫМ БОРТОВЫМ ЭЛЕМЕНТОМ.

### а. Общие замечания.

Этот случай имеет очень большое практическое значение, так как на практике встречаются часто длинные цилиндрические оболочки, опертые на наружные стены. Кроме того, этот случай встречается при распалубке, т. к. всегда от опалубки освобождается вначале криво-



Черт. 1.

линейная часть, а лишь потом бортовой элемент. И наконец, надо считать нерациональным применение тонких железобетонных оболочек — сводов с тяжами (черт. 1-а), так как в таком случае:

1) будет применяться сравнительно большая толщина сводов (напр.  $\frac{l}{80}$ ), обуславливаемая большими поперечными моментами, и, кроме того,

2) большая часть полезного габарита будет перерезана тяжами.

Напротив, длинная цилиндрическая оболочка (черт. 1-б), опертая на стены или столбы, ничем не стес-

няет габарита внутреннего помещения (что особенно важно при проектировании больших спортивных залов) и допускает значительно меньшую толщину конструкции (напр.  $\frac{l}{200}$ ).

Само собою разумеется, что всякое сводчатое покрытие, как бы оно ни было рассчитано, работает фактически как длинноцилиндрическая оболочка, если эффект от работы диафрагмы гарантирован хотя бы в малой мере. Очевидно, что в таком случае в тязях или контрафорсах будут фигурировать внутренние усилия, значительно отличающиеся от усилий, находимых согласно теории сводов.

В зарубежной практике часто рассчитывались такие оболочки, как не опертые вдоль по бортовому элементу. Это неправильно, так как внутренние усилия оболочки, опертой на продольные стены и диафрагмы, значительно отличаются от внутренних усилий оболочки, опертой только на диафрагмы.

При расчете оболочек, опертых на стены, оказывается затруднительным сделать это приближенно. Например, в случае оболочки с неопертыми продольными ребрами получаем достаточно хорошее качественное представление о работе оболочки, рассматривая ее как «большую балку», опирающуюся на диафрагмы [3]. К сожалению, в разбираемом случае это представление не дает ничего, так как «большая балка» оперта непрерывно. Интуитивно ясно, что оболочка не передает равномерно свою нагрузку продольным стенам, потому что большая часть нагрузки, также и в этом случае, передается посредством сдвигающих усилий на диафрагмы. Нагрузка на стены меньше, чем нагрузка на погонный метр «большой балки», и поэтому оболочка работает все же в некоторой мере, как «большая балка», хотя и в меньшей мере, чем оболочка, не опертая вдоль по бортовому элементу.

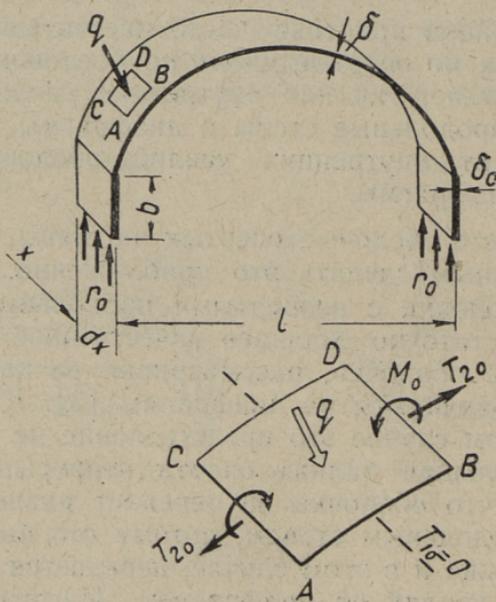
В литературе предлагается несколько способов разрешения этой проблемы, так, например, *Н. Д. Левицкая* [2] разрешает эту проблему по методу профессора *В. З. Власова*.

В настоящем предлагается разрешить проблему оболочки, опертой на продольную стенку посредством ме-

года Кастильяно-Ритца, нашедшем применение у автора при решении также и других задач, касающихся длинных цилиндрических оболочек.

### б. Описание метода для случая нагрузки, симметричной относительно конька.

Находим внутренние усилия в оболочке, как в «большой балке» с бесконечно жестким поперечным сечением. Ясно, что в таком случае вся нагрузка на погонный метр оболочки уравнивается реакциями стены ( $r_0$ ). Затем,



Черт. 2.

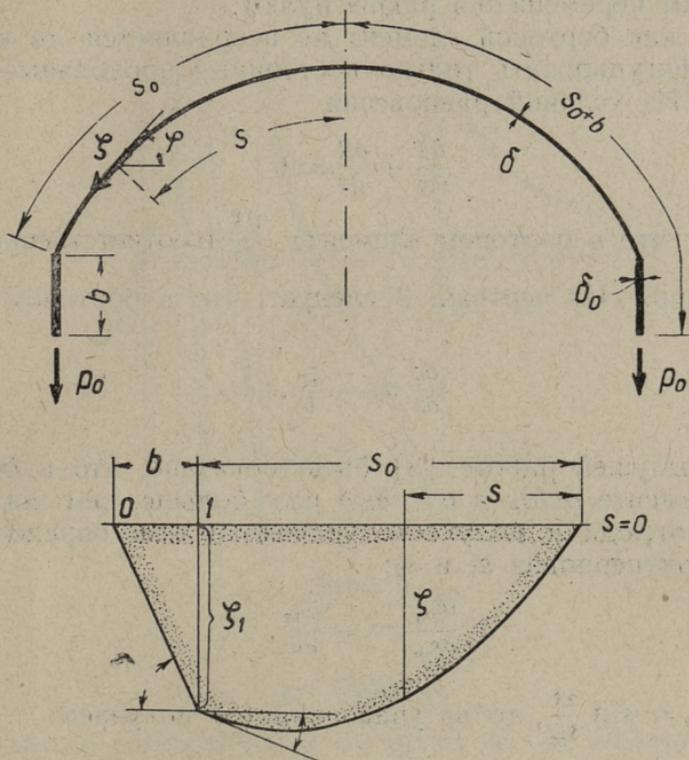
как для простой балки, находим поперечные моменты  $M_0$ . Продольные внутренние усилия  $T_0$  в этой задаче не возникают (см. черт. 2).

Примем эпюру приращения сдвигающих усилий  $\zeta = \frac{\partial S}{\partial x}$  в виде:

$$\zeta = a_1 \sin \frac{\pi s}{s_1} + a_2 \sin \frac{\pi s}{s_2}, \quad (1)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — пока неопределенные параметры,  
 $s_1$  и  $s_2$  — пока неопределенные полупериоды.

При таком выборе  $\zeta$  сдвигающие усилия вдоль конька оболочки обращаются в нуль (симметрия). Далее предполагается, что  $\zeta$  не зависит от  $x$ , вследствие чего предлагаемый ход решения надо рассматривать, как приближенный.



Черт. 3.

Полоса оболочки шириною в  $dx = 1$  находится в равновесии в вертикальном направлении под влиянием эпюры  $\zeta$  и обусловленных ею изменений реакций  $p_0$  (которые предполагаем неизменяемыми относительно  $x$ ). Отсюда следует (см. черт. 3), что

$$p_0 + \int_0^{s_0} \zeta \sin \varphi ds = 0, \quad (2)$$

так как внешняя нагрузка  $q$  находится в равновесии с реакциями стен  $r_0$ . В этом выражении встречается дополнительная реакция стены —  $p_0$ , которая определяется посредством уравнения (2), в зависимости от параметров  $a_1$  и  $a_2$ . Эта, пока неопределенная внешняя сила не мешает успешно применять метод *Кастильяно-Ритца*, так как силы реакции  $p_0$  не совершают работу (соответствующие им перемещения равны нулю).

Так как бортовой элемент не искривляется, то в нем могут фигурировать только постоянные продольные усилия  $T$ . Из условий равновесия

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial s} = 0$$

следует, что в бортовом элементе  $\frac{\partial S}{\partial s}$  (соответственно  $\frac{\partial \zeta}{\partial s}$ ) постоянно. Из чертежа 3 следует, что в бортовом элементе

$$\frac{\partial \zeta}{\partial s} = -\frac{\zeta_1}{b}.$$

В предыдущей работе [3] было показано, что в бортовом элементе  $\partial \zeta / \partial s$  в  $\alpha = \delta_0 / \delta$  раз больше, чем на оболочке; отсюда и получаем уравнение для определения длин полупериодов  $s_1$  и  $s_2$ :

$$\frac{\partial \zeta_m}{\partial s_m} = -\frac{\zeta_{1m}}{ab}. \quad (3)$$

Если  $\zeta_m = \sin \frac{\pi s}{s_m}$ , то из уравнения (3) получаем:

$$-ab\pi = s_m \operatorname{tg} \frac{\pi s_1}{s_m}. \quad (4)$$

Это тригонометрическое уравнение имеет бесконечно много корней для  $s_m$ ; выбираем два самые большие из них. Решение наиболее удобно проводить графически.

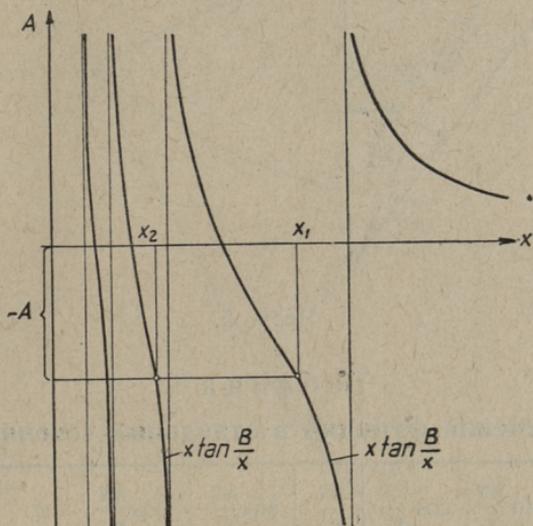
Рассмотрим наше уравнение в форме

$$-A = x \operatorname{tg} \frac{B}{x}.$$

Изображая графически две первые отрицательные ветви (см. черт. 4), находим без труда искомые решения  $x_1$  и  $x_2$  (соответственно  $s_1$  и  $s_2$ ).

Затем находим эпюры  $T$ ,  $M$  и  $p_0$  (обусловленные эпюрами  $\zeta$ ), выраженные через неизвестные параметры  $a_1$  и  $a_2$ . В свою очередь, эти неизвестные параметры находятся по методу *Кастильяно-Ритца* из условий минимума потенциальной энергии (см. [3] и [4]).

После этого становится возможным определить действительные внутренние усилия в оболочке.



Черт. 4.

### в. Пример.

Данные заимствованы из труда *Н. Д. Левицкой* [2] (см. черт. 5).

В этом случае уравнение (4) принимает вид:

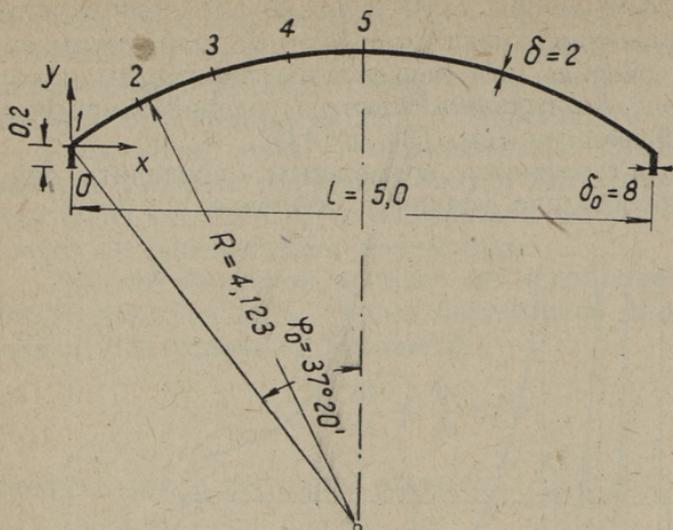
$$-4 \cdot 0,2\pi = s_m \operatorname{tg} \frac{\pi \cdot 2,686}{s_m}.$$

Корни этого уравнения суть:

$$\begin{aligned} s_1 &= 3,375; \\ s_2 &= 0,2965. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\zeta = a_1 \sin 0,9315 s + a_2 \sin 1,966 s.$$



$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 37^\circ 20' \\ R &= 4,123 \text{ м} \\ f &= 0,845 \text{ м} \\ s_0 &= 2,686 \text{ м} \\ \Delta s &= 0,6715 \text{ м} \\ d\varphi &= 9^\circ 20' \\ L &= 10,0 \text{ м} \\ q &= 100 \text{ кг/м}^2 \\ \alpha &= \frac{\delta_0}{\delta} = 4 \end{aligned}$$

Черт. 5.

Таблица I.

Значения функций в отдельных сечениях.

Сечение	$\frac{\pi s}{s_1}$	$\sin \frac{\pi s}{s_1}$	$\cos \frac{\pi s}{s_1}$	$\frac{\pi s}{s_2}$	$\sin \frac{\pi s}{s_2}$	$\cos \frac{\pi s}{s_2}$	$\varphi$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$
1	2,502	0,5969	-0,8023	5,281	-0,8426	0,5385	37° 20'	0,6065	0,7951
2	1,876	0,9538	-0,3005	3,961	-0,7307	-0,6826	28° 0'	0,4695	0,8829
3	1,251	0,9493	0,3144	2,640	0,4808	-0,8768	18° 40'	0,3201	0,9474
4	0,625	0,5851	0,8110	1,320	0,9687	0,2482	9° 20'	0,1622	0,9868
5	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Дополнительную реакцию  $p_0$  продольного ребра определяем из уравнения (2):

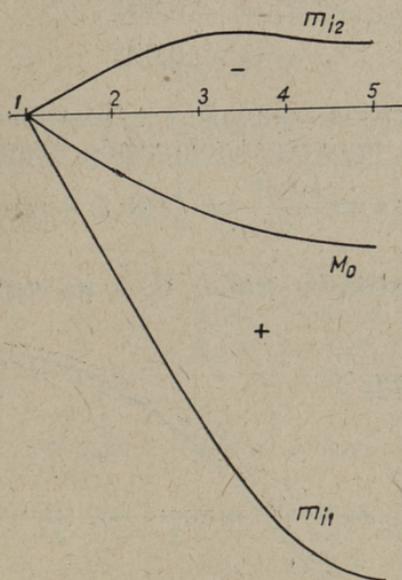
$$p_0 = -0,761 a_1 + 0,296 a_2 \quad (A)$$

В случае нагрузки оболочки в  $q = 100 \text{ кг/м}^2$ , первоначальная реакция на продольной стенке:

$$r_0 = q s_0 = 100 \cdot 2,686 \approx 269 \text{ кг/м.}$$

Далее, исходя из найденных значений реакции  $r_0$  и нагрузки  $q$ , вычисляем поперечные моменты в каждом

сечении, как в простой балке. Моменты  $M_0$ , найденные таким образом, представлены в таблице II и на черт. 6. Там же указаны значения моментов:  $m_1$ , обусловленное  $\zeta_1 = \sin 0,9315 s$  и  $m_2$ , обусловленное  $\zeta_2 = \sin 1,9660 s$ , причем учтено влияние дополнительной реакции продольной стены  $p_0$ , находимое по формуле (А).



Черт. 6.

Продольные внутренние усилия в середине пролета находим из дополнительной эпюры (см. 1, 2)

$$\begin{aligned} \max T &= \frac{L^2}{8} \frac{\partial}{\partial s} \zeta = a_1 \frac{L^2}{8} \frac{\pi}{s_1} \cos \frac{\pi s}{s_1} + a_2 \frac{L^2}{8} \frac{\pi}{s_2} \cos \frac{\pi s}{s_2} = \\ &= + a_1 \cdot 11,64 \cdot \cos 0,9315 s + a_2 \cdot 24,6 \cdot \cos 1,9660 s = \\ &= a_1 \cdot t_1 + a_2 \cdot t_2. \end{aligned}$$

Значения  $t_1$  и  $t_2$  представлены в табл. II.

В бортовом элементе значения  $T$ ,  $t_1$  и  $t_2$  увеличиваются в  $\alpha$  раз.

Затем составляются два условия минимума потенциальной энергии, аналогично тому, как это сделано в примерах, приведенных в работах [3], [4].

В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} -23,66 a_1 + 4,14 a_2 &= 7,15, \\ +4,14 a_1 - 0,984 a_2 &= -1,27, \end{aligned}$$

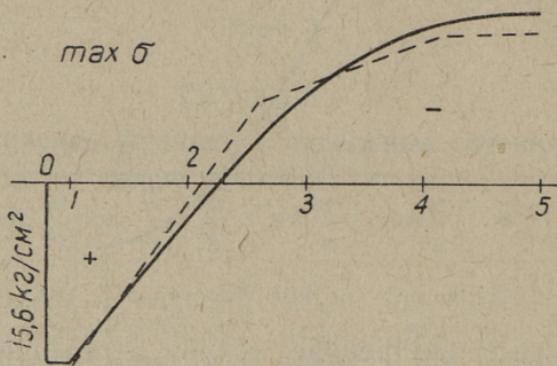
откуда находим:

$$\begin{aligned} a_1 &= -0,301, \\ a_2 &= +0,023. \end{aligned}$$

Функции нагрузок находим суммированием. Например, в середине пролета продольное напряжение:

$$\max \sigma = \frac{\max T}{\delta} = \frac{1}{\delta} (a_1 t_1 + a_2 t_2).$$

$\max \sigma$  представлена в табл. II и на черт. 7 сплошной линией.



Черт. 7.

Поперечные моменты:

$$M = M_0 + m_1 a_1 + m_2 a_2$$

представлены в табл. II и на черт. 8 сплошной линией.

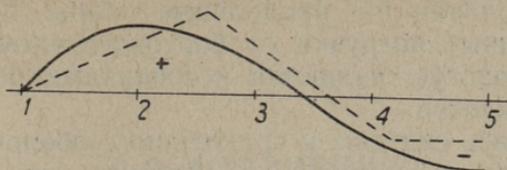
Из формулы (А) находим дополнительную реакцию

$$p_0 = 0,236 \text{ т/м.}$$

Таким образом, конечная реакция опоры края

$$r = r_0 - p_0 = 0,033 \text{ т/м.}$$

М



Черт. 8.

Таблица II.

Сечение	0	1	2	3	4	5
$M_0$	—	—	0,131	0,236	0,300	0,324
$m_1$	—	—	0,384	0,750	1,008	1,106
$m_2$	—	—	- 0,107	- 0,167	- 0,163	- 0,146
$t_1$	-37,4	-37,4				
		- 9,35	- 3,55	+ 3,66	+ 9,45	+11,64
$t_2$	53,0	53,0				
		+13,25	-16,80	-21,48	+ 6,11	+24,60
max $\sigma$	15,6	15,6	3,4	- 8,0	-13,5	-14,7
M	—	—	0,012	0,06	- 0,007	- 0,012

#### г. Заключение.

На чертежах 7 и 8 представлены пунктирами для сравнения результаты решения этой же самой задачи, полученные *Н. Д. Левицкой*. Как уже было сказано, *Н. Д. Левицкая* воспользовалась методом проф. *В. З. Власова*.

Несмотря на то, что в настоящей работе все вычисления производились только посредством логарифмической линейки, результаты, как это видно из чертежей, совпадают достаточно хорошо.

Из результатов вычислений следует, что главная часть нагрузки падает все же на диафрагму. Продольные опоры оболочки несут только примерно 12% от всей нагрузки. Это замечание, конечно, не означает, что роль

продольных опор настолько незначительна, что ею можно пренебречь. Дополнительно к упомянутым 12% общей нагрузки оболочки на продольные опоры падают еще непосредственные нагрузки от бортового элемента. Эти последние зачастую являются источниками больших поперечных моментов.

Возвращаясь еще раз к сравнению с оболочкою свода (см. п. а и черт. 1), следует отметить, что арматура, нужная для бортового элемента, приблизительно покрывает необходимость в арматуре для бортовой балки и тяжей в своде. В случае свода большой расход в арматуре (для восприятия изгибающих моментов) и большая толщина свода значительно превышает соответствующие расходы материалов на диафрагмы оболочек. Таким образом, рассматривая подобные перекрытия как оболочки, возможно достичь дополнительно к свободному габариту также и известной экономии в стоимости сооружения (в случае длины оболочки до 30 м).

## ОБОЗНАЧЕНИЯ.

$l$  — поперечный пролет оболочки.

$l$  — продольный пролет оболочки.

$s_0$  — полудлина поперечного сечения оболочки.

$s$ ;  $x$  — координаты на поверхности оболочки.

$s_m$  — фиктивная полудлина поперечного сечения оболочки в  $m$ -ом члене разложения.

$b$  — высота бортового элемента.

$\delta$ ;  $\delta_0$  — толщины оболочки.

$\alpha = \delta_0/\delta$ .

$I_{zz}$  — момент инерции поперечного сечения оболочки, как балки, относительно оси тяжести.

$S_{0z}$  — статический момент части поперечного сечения оболочки относительно оси тяжести.

$F_I$ ;  $F_{II}$  — поперечные сечения стрингеров.

$p$ ;  $q$  — нагрузка на единицу кривой поверхности оболочки.

$P_I$ ;  $P_{II}$  — вертикальные нагрузки на стрингеры I, II (т/м).

$S(s_1, x)$  — сдвигающие силы (т/м).

$\zeta(s) = \partial S/\partial x$  — приращение сдвигающих сил (т/м<sup>2</sup>).

$T(s_1, x)$  — продольная сила в поперечном сечении оболочки (т/м).

$N_I$ ;  $N_{II}$  — усилия в стрингерах.

$S_0$ ;  $\epsilon_0$ ;  $T_0$ ;  $M_0$ ;  $N_{0I}$ ;  $N_{0II}$  — те же величины, но вычисленные на основании элементарной задачи.

$\Delta S_m$ ;  $\Delta \zeta_m$ ;  $\zeta_m$ ;  $\Delta T_m$ ;  $\Delta t_m$ ;  $t_m$  — те же величины, но вычисленные из  $m$ -го члена разложения  $\Delta \zeta_m(\zeta_m)$  в рад., если  $a_m = 1$ .

$r_0$  — реакция стены в элементарной задаче.

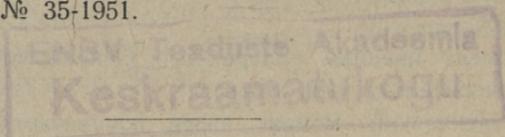
$p_0$  — изменение реакции стены.

$\sigma = T/\delta$ .

$$t = \frac{\partial}{\partial s} = - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

## БИБЛИОГРАФИЯ.

1. В. З. Власов. Общая теория оболочек, 1949.
2. Исследования по вопросам теории и проектирования тонкостенных конструкций — сборник статей под редакцией В. З. Власова, 1950.
3. Х. Х. Лауль. Применение метода Кастильяно-Ритца к расчету длинных цилиндрических оболочек, Труды Таллинского политехнического института, А № 33-1949.
4. Х. Х. Лауль. Расчет длинных цилиндрических оболочек при антисимметрической нагрузке по методу Кастильяно-Ритца, Труды ТПИ, А № 35-1951.



Редактор А. Гаршнек.  
Технический редактор Х. Коху.  
Корректоры А. Тихане и Е. Дудкина.

Сдано в набор 12 VIII 1952. Подписано к печати 1 XI 1952. Тираж 800. Бумага 54 × 84, 1/16. Печатных листов 2. По формату 60 × 92 печатных листов 1,64. Учетно-издагельских листов 1,05. МВ-19114. Типография „Ханс Хейдеман“, Тарту, Валликраави 4. Заказ № 3028.

Цена 75 коп.