TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOLI TOIMETUSED
PUBLICATIONS FROM THE TECHNICAL UNIVERSITY OF ESTONIA AT TALLINN
Series A № 6 (March 1939)

Expansionistische Dynamik

II

WELLENMECHANISCHE GRUNDLAGEN

VON

J. NUUT

TALLINN

TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOLI TOIMETUSED
PUBLICATIONS FROM THE TECHNICAL UNIVERSITY OF ESTONIA AT TALLINN
Series A № 6 (March 1939)

Expansionistische Dynamik

II

WELLENMECHANISCHE GRUNDLAGEN

VON

J. NUUT

TALLINN

Publications from the Technical University of Estonia at Tallinn, Series A № 6, March 1939.

K. Mattieseni trükikoda o.-ü., Tartu, 1939.

Wellenmechanische Grundlagen.

§ 1. **Wellenpostulate.** Die durch das Phänomen der Elektronenbeugung gestützte Wellenmechanik von de Broglie beruht in erster Linie auf der Zuordnung einer Welle von der Frequenz ν und Phasengeschwindigkeit u zur Korpuskel, deren Energie E und deren Geschwindigkeit v beträgt. Die Parameter sind durch $E = h\nu$ und $uv = c^2$ bestimmt; $c = 3 \cdot 10^{10}$ [cm sec^{-1}] bedeutet hierbei die Lichtgeschwindigkeit und $h = 6{,}55 \cdot 10^{-27}$ [g cm^2 sec^{-1}] das Planck'sche Wirkungsquantum.

Geht man von dem Ideenkreis der expansionistischen Mechanik aus, so wird man hier konsequenterweise unter E die Eigenenergie und unter v die Eigengeschwindigkeit der Korpuskel verstehen[1]). Es soll nun untersucht werden, welche ferneren Modifikationen noch eingeführt werden müssten, um eine folgerichtig aufgebaute expansionistische Wellenmechanik zu begründen.

Es sei ein geradlinig fortschreitender Wellenzug ins Auge gefasst. Unter der Wellenlänge λ soll, wie gewöhnlich, die Distanz zweier benachbarter Orte kongruenter Phase für einen festen Zeitpunkt verstanden werden.

Wir postulieren nun zunächst, dass λ für einen festen Zeitpunkt t vom Ort unabhängig sein soll, sofern Anisotropie des Mediums nicht in Betracht kommt.

Ausserdem führen wir das naheliegende Postulat ein, wonach zwei r u h e n d e Beobachter ständig kongruente Phase konstatieren sollen, wenn sie es für irgendeinen Zeitpunkt t taten. Dies besagt m. a. W., dass die Wellenlänge λ exponentiell mit der Zeit wachsen muss:

$$\lambda = \lambda_0 e^{\sigma t}, \quad \sigma = 1{,}6 \cdot 10^{-17}\,[\mathrm{sec}^{-1}], \tag{1}$$

---

[1]) Vgl. „*Expansionistische Dynamik*" I (Publ. Techn. Univ. of Estonia, A No 5) § 2. Fernerhin zitiert als *E. D.* I.

wo λ_0 die Wellenlänge im Zeitpunkt $t_0 = 0$ bedeutet. Die gegenseitige Entfernung der ruhenden Beobachter wächst nämlich mit der Zeit nach diesem Exponentialgesetz[2]).

Als drittes Postulat fordern wir die Konstanz der Phasengeschwindigkeit u. Letztere wird hierbei definiert als diejenige Eigengeschwindigkeit, die ein Punkt gegenüber dem ruhenden Inertialsystem besitzen müsste, um in der Zeitspanne, die einer vollen Schwingung entspricht, gerade den benachbarten Ort kongruenter Phase zu erreichen. Führt man mittels

$$T = \tau(e^{\sigma t} - 1), \quad \tau = \sigma^{-1}, \quad e^{\sigma t} = 1 + \sigma T, \tag{2}$$

die „kinematische Milne-Zeit" ein[3]), so wird die überbrückte Distanz, vom Zeitpunkt $t = T = 0$ an gerechnet, gleich uT; andererseits muss dies der am Schluss der Periode bestehenden Wellenlänge $\lambda = \lambda_0 e^{\sigma t} = \lambda_0 (1 + \sigma T)$ gleich sein. Hieraus folgt

$$uT = \lambda_0 (1 + \sigma T) \qquad u = \frac{\lambda_0 (1 + \sigma T)}{T}, \tag{3}$$

wo T die Dauer der ersten Schwingung in kinematischer Milne-Zeit gemessen bedeutet. Da der Zeitnullpunkt beliebig gewählt werden darf, wobei natürlich λ_0 verschieden ausfällt, so ist die Definition (3) für u vollkommen eindeutig.

Nun definieren wir als Frequenz ν im Zeitpunkt t diejenige Zahl, die mit dem zugehörigen λ mittels

$$\lambda \nu = u \tag{4}$$

verknüpft ist. Führt man hier noch (1) ein und versteht unter ν_0 die Frequenz im Zeitpunkt $t_0 = 0$, so resultiert aus (4):

$$\nu = \nu_0 e^{-\sigma t} = \frac{\nu_0}{1 + \sigma T}. \tag{5}$$

Soll nun nach Planck und de Broglie $E = h\nu$ gelten und zugleich die Eigenenergie der Welle zeitlich erhalten bleiben, so ergibt dies zwangsläufig die Notwendigkeit eines exponentiellen Anwachsens von h:

$$h = h_0 e^{\sigma t}, \qquad \nu h = \nu_0 h_0 . \tag{6}$$

---

[2]) Vgl. *E. D.* I, § 1.

[3]) E. A. Milne, „*Kinematics, Dynamics and the Scale of Time*" I—III (Proc. Roy. Soc. A. 158, 159, — 1937). Vgl. *E. D.* I S. 6, Fussnote.

Bei den oben gewählten Postulaten und Definitionen wird also das Planck'sche Wirkungsquantum als eine mit der Zeit exponentiell wachsende Grösse zu behandeln sein, ebenso wie dies von uns für die Gravitationskonstante gefordert worden war. Praktisch ist h konstant, da ein Zuwachs um $1^0/_{00}$ ca. 2 Millionen Jahre erfordert.

Natürlich ist es mathematisch statthaft auch von anderen Postulaten auszugehen, wodurch dann etwa erreicht werden kann, dass h säkular invariant verbleibt. Die sich aus der im Text getroffenen Annahme ergebenden Konsequenzen, namentlich in ihrer Anwendung auf die Deutung des Phänomens der Rotverschiebung bei den extragalaktischen Nebeln, scheinen aber, nach Ansicht des Verfassers, auf eine physikalische Realität hinzudeuten.

§ 2. **Phasenansatz.** Bedeutet s die Ortsabszisse für einen geradlinig fortschreitenden Wellenzug, so wird in der Newton'schen Mechanik die Phase der Welle durch $2\pi\frac{\nu}{u}(s - ut)$ definiert. Man überzeugt nun sich leicht, dass man eine sämtlichen Forderungen des vorigen Paragraphen genügende Welle erhält, wenn man hier $\nu = \nu_0 e^{-\sigma t}$ gemäss (5) einführt und T statt t schreibt. Die Phase wird dann

$$2\pi\frac{\nu_0 e^{-\sigma t}}{u}(s - uT). \tag{7}$$

Tatsächlich bestimmt sich dann für ein konstantes T der Unterschied in s zwischen zwei benachbarten Orten kongruenter Phase aus

$$\lambda\frac{\nu_0 e^{-\sigma t}}{u} = 1, \text{ also } \lambda = \frac{u}{\nu_0 e^{-\sigma t}} = \frac{u}{\nu},$$

woraus sofort $\lambda = \lambda_0 e^{\sigma t}$ resultiert.

Beträgt andererseits im Zeitpunkt $t = T = 0$ der Phasenunterschied an zwei Orten s_a, s_b ein Vielfaches von 2π:

$$2\pi\frac{\nu_0}{u}s_a - 2\pi\frac{\nu_0}{u}s_b = 2k\pi,$$

so wird im beliebigen anderen Zeitpunkt T, wenn s_a und s_b zum ruhenden Inertialsystem gehören,

$$s_a^{(T)} = s_a(1 + \sigma T), \quad s_b^{(T)} = s_b(1 + \sigma T),$$

und demnach der neue Phasenunterschied

$$2\pi \frac{\nu_0}{u(1+\sigma T)}[s_a(1+\sigma T)-uT]-2\pi \frac{\nu_0}{u(1+\sigma T)}[s_b(1+\sigma T)-uT]=$$

$$=2\pi \frac{\nu_0}{u} s_a - 2\pi \frac{\nu_0}{u} s_b = 2k\pi,$$

wie vorhin.

Für die Dauer einer Schwingung am Ort, dessen Abszisse für $T=0$ den Wert s_0 hatte, ergibt sich aus (7), wenn man mit der Zeitrechnung von $T=0$ beginnt, infolge $s=s_0(1+\sigma T)$:

$$2\pi \frac{\nu_0}{u} s_0 - 2\pi \frac{\nu_0}{(1+\sigma T)u}[s_0(1+\sigma T)-uT]=2\pi,$$

$$T=\frac{1}{\nu_0-\sigma}.$$

Ein Punkt, der sich mit der Eigengeschwindigkeit u fortbewegt, wird während dieser Zeitspanne die Entfernung $\frac{u}{\nu_0-\sigma}$ überbrücken. Man verifiziert nun aber leicht, dass diese Grösse genau gleich ist der Wellenlänge $\lambda=\lambda_0(1+\sigma T)$ im Zeitpunkt T, denn

$$\lambda_0(1+\sigma T)=\lambda_0\left(1+\frac{\sigma}{\nu_0-\sigma}\right)=\lambda_0\frac{\nu_0}{\nu_0-\sigma}=\frac{u}{\nu_0-\sigma}.$$

Damit ist erwiesen, dass u genau die im § 1 geforderte Bedeutung hat. Der Phasenansatz (7) ist also in jeder Hinsicht konform zu den im § 1 gestellten Anforderungen.

§ 3. **Existenzhypothese.** Bei den de Broglie'schen „Materiewellen“ ist die Phasengeschwindigkeit u grösser als c; für $v=0$ wird u sogar unendlich gross. Beachtet man, dass der Definition (3) zufolge u nicht die Geschwindigkeit einer tatsächlichen materiellen Korpuskel, sondern bloss eine nach bestimmten mathematischen Vorschriften errechnete Zahlengrösse von der Dimension [cm sec^{-1}] ist, so liegt kein Grund zum Anstoss vor: eine Korpuskel kann sich nicht mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen, — die Phasengeschwindigkeit ist aber keine Korpuskelgeschwindigkeit, sondern, physikalisch betrachtet, bloss die Geschwindigkeit einer *fiktiven* Korpuskel.

Die de Broglie-Welle in expansionistischer Form erhält man am einfachsten, wenn man zunächst die einer ruhenden Korpuskel zugeordnete Schwingung postuliert und hernach die expansionistisch verallgemeinerte Lorentz-Transformation anwendet.

Für den Fall einer im Inertialsystem ruhenden Korpuskel hat man nach de Broglie $u = \infty$ anzusetzen. Führt man dies in die Phase (7) ein, so verschwindet dort die Koordinate s und man erhält

$$-2\pi\nu_0 e^{-\sigma t} T,$$

oder, wenn man ν_0 durch $\frac{E}{h_0} = \frac{mc^2}{h_0}$ ersetzt (m bedeutet die Ruhemasse der Korpuskel) und $h = h_0 e^{\sigma t}$ einführt,

$$-2\pi \frac{mc^2}{h} T.$$

Bekanntlich bietet die Deutung der de Broglie-Wellen grosse begriffliche Schwierigkeiten. Vielleicht dürfte die im folgenden entwickelte Auffassung wenigstens nach der formalen Seite hin zur Klärung beitragen.

Die veraltete Fresnel'sche Konzeption der Lichtwellen im materiell gedachten Äther ist in mancher Hinsicht schon deshalb unbefriedigend, weil sie die Bahn des schwingenden Teilchens in den dreidimensionalen Raum selbst verlegt. Mathematisch wesentlich für die „Transversalität" der Schwingungen ist ja eigentlich bloss die Orthogonalität der Schwingungsbahn gegenüber der Fortpflanzungsrichtung. Mir scheint es demnach begrifflich am einfachsten zu postulieren, dass die Schwingungsbahn überhaupt zu jeder Richtung im Raum orthogonal sein muss, m. a. W., dass die Schwingungsbahn in einer vierten, zum E_3 orthogonal gedachten Dimension liegt. Das schwingende Teilchen hätte demnach den Raum E_3 periodisch zu verlassen um dann wiederzukehren. Bezeichnet man den Zustand, in welchem das Teilchen dem Raum E_3 angehört, als seine „Existenz", so ist es denkbar auch von der „Grösse" dieser Existenz, die durch gewisse physikalische Eigenschaften gekennzeichnet sein könnte (vielleicht etwa durch die Grösse des dem Raum noch angehörenden Volumens) zu sprechen. Die Korrektur, die hier zur Fresnel'schen Auffassung vorgeschlagen wird, läuft dann darauf hinaus, den periodisch sich ändernden Parameter als „Existenzgrösse“ des Teilchens aufzufassen.

Diese Auffassung scheint noch zwingender zu werden, wenn man zur Interferenz der Elektronenschwärme[4]) übergeht: das die Platte schwärzende Elektron „existiert“ im E_3, während an den ungeschwärzten Stellen Elektrone „nicht existieren“. Man wird dadurch zur Vorstellung geneigt, wonach die „Existenz“ des Elektrons überhaupt als periodisch veränderlich anzusehen wäre. Man hätte somit im Elektron ein Naturphänomen, das in hohem Grade analog ist einem Wechselstrom. Die korpuskulare Auffassung des Elektrons ist dann analog der Betrachtung gewisser Mittelwerte eines Wechselstroms, etwa analog der Einführung des Begriffs der „Leistung“ dieses Wechselstroms. Zieht man in Betracht, dass ein schwingender Ladungsträger in der Tat einem Wechselstrom gleichwertig ist, so wird die Analogie noch verständlicher. Da für die de Broglie'schen Wellen eine ausgezeichnete Schwingungsrichtung im E_3 nicht gut denkbar ist, so ist es logisch kosequent, die Schwingung in eine vierte „Existenzdimension“ verlegt zu denken. Elektroneninterferenz wird dann einfach als Interferenz der Existenzgrössen aufzufassen sein.

Im folgenden soll diese Vorstellung der veränderlichen Existenz einer Korpuskel als Arbeitshypothese benutzt werden. Die Frage nach ihrer physikalischen Realität bleibt natürlich offen.

Wir denken uns also im Einklang mit dem vorhergehenden eine mit der „ruhenden“ Korpuskel von der Masse m verknüpfte komplexe Grösse ψ, deren Komponenten in irgend einer Beziehung zur physikalisch messbaren „Existenzgrösse“ der Korpuskel stehen. Bedeutet dann $a = \sqrt{\psi\bar{\psi}}$ ($\bar{\psi}$ ist der zu ψ konjugierte Wert) den Betrag von ψ, so soll ψ für den Zeitpunkt $T = \tau(e^{\sigma t} - 1)$ durch

$$\psi = a\, e^{-2\pi i m c^2 h^{-1} T} \tag{8}$$

bestimmt sein. Die Relation (8) bestimmt die „Existenzschwingung“ der betreffenden ruhenden Korpuskel. Statt von Materiewellen wollen wir konsequent von „Existenzwellen“ reden. Die Ruhemasse m ist dann eine durch zugehörige Werte von ψ und T invariant bestimmte reelle positive Zahlengrösse.

---

[4]) Davisson and Germer, Physical Review 30, 1927, S. 705.

§ 4. **Gleichung der Existenzwelle.** Es sei nun das Inertialsystem der Korpuskel in Bezug auf das Inertialsystem des ruhend gedachten Beobachters mit der Eigengeschwindigkeit $\mathfrak{v}$: (v_1, v_2, v_3) bewegt. Die Milne-Zeit im Inertialsystem der Korpuskel sei durch Strichelung (T') gekennzeichnet; die entsprechende Milne-Zeit im System des ruhenden Beobachters sei T. Sind dann k_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ die Richtungskosinus von $\mathfrak{v}$ und entsprechend s_α die kartesischen Koordinaten eines an das Inertialsystem der bewegten Korpuskel gebundenen Punktes vom ruhenden Beobachter aus beurteilt, so gilt bei passenden Anfangsbedingungen auf Grund der expansionistisch verallgemeinerten Lorentz-Transformation: [5])

$$cT' = -\operatorname{sh}\omega \cdot \Sigma k_\alpha s_\alpha + cT \operatorname{ch}\omega ,$$

d. h.

$$-cT' = \operatorname{sh}\omega \cdot \Sigma k_\alpha s_\alpha - cT \operatorname{ch}\omega . \tag{9}$$

Andererseits lautete der Ansatz für die Existenzschwingung der im gestrichenen System ruhenden Korpuskel

$$\psi = a e^{-2\pi i m c^2 h^{-1} T'} .$$

Führt man hier (9) ein, so resultiert, wenn man in Betracht zieht, dass im bewegten Ursprung $e^{\sigma' t'} = e^{\sigma t}$, also $h = h_0 e^{\sigma t} = h_0 e^{\sigma' t'} = h'$ gilt [6]):

$$\psi = a e^{+2\pi i m c h^{-1} (\operatorname{sh}\omega \cdot \Sigma k_\alpha s_\alpha - cT \operatorname{ch}\omega)} . \tag{10}$$

Hierbei ist ω durch $c \operatorname{th}\omega = v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_1^2}$ definiert; für h ist der Wert zu nehmen, der am Ort gilt, wo der bewegte Ursprung sich gerade befindet, wobei es gleichgültig ist, welches der beiden Inertialsysteme der Zeitmessung zu Grunde gelegt wird, sofern nur die beiden Ursprünge in der Nullepoche koinzidieren.

Nun ist $\Sigma k_\alpha s_\alpha$ bei den vorausgesetzten Anfangsbedingungen gleich der längs der Bewegungsrichtung $\mathfrak{v}$ gemessenen Abszisse s desjenigen Punktes der Bahn, dessen Ort durch das Tripel s_α festgelegt ist. Nimmt man noch $\operatorname{sh}\omega$ vor die Klammer, führt $\frac{v}{c} = \operatorname{th}\omega$ ein und beachtet, dass $mc \operatorname{sh}\omega$ den

[5]) *E. D.* I, § 1.

[6]) *E. D.* I, § 1, Formel (10).

Impulsbetrag p der Korpuskel darstellt, so erhält (10) die Gestalt

$$\psi = a e^{2\pi i p h^{-1}(s - c^2 v^{-1} T)} . \qquad (11)$$

Setzt man hier noch $\frac{c^2}{v} = u$ und stützt sich auf die Plancksche Beziehung

$$h_0 = \frac{E}{\nu_0} = \frac{mc^2 \operatorname{ch} \omega}{\nu_0},$$

wodurch

$$\frac{p}{h} = \frac{mc \operatorname{sh} \omega \cdot \nu_0}{mc^2 \operatorname{ch} \omega \cdot e^{\sigma t}} = \frac{\nu_0 e^{-\sigma t} \operatorname{th} \omega}{c} = \frac{\nu_0 e^{-\sigma t} \cdot v}{c^2} = \frac{\nu_0 e^{-\sigma t}}{u}$$

folgt, so wird die Phase in (11) formal mit (7) identisch:

$$\psi = a e^{2\pi i \nu_0 e^{-\sigma t} u^{-1} (s - uT)} . \qquad (12)$$

Der Existenzwert ψ ist also durch (12) für jedes s und T definiert. Es ist dies die expansionistisch verallgemeinerte de Broglie-Welle, die wir hier fernerhin als „Existenzwelle" ansprechen wollen; ihre Phasengeschwindigkeit u beträgt $\frac{c^2}{v}$, ihre Frequenz ν beträgt $\nu_0 e^{-\sigma t} = \frac{E}{h_0 e^{\sigma t}} = \frac{E}{h}$ und ihre Wellenlänge $\lambda = \frac{u}{\nu}$ wird demnach

$$\frac{c^2 h}{\nu E} = \frac{c^2 h}{\nu mc^2 \operatorname{ch} \omega} = \frac{h}{c \operatorname{th} \omega \cdot m \cdot \operatorname{ch} \omega} = \frac{h}{mc \operatorname{sh} \omega},$$

d. h.

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad \nu = \frac{E}{h}, \quad u = \frac{c^2}{v} . \qquad (13)$$

Dies sind genau die von de Broglie postulierten Beziehungen, jedoch mit dem wesentlichen Unterschied, dass sowohl ν als auch λ sich langsam säkular ändern.

Es sei nochmals ausdrücklich betont, dass u keine Korpuskelgeschwindigkeit, sondern bloss einen errechneten Parameter bedeutet[7]). Die Welle braucht daher durchaus nicht als Aus-

---

[7]) Schreibt man einer mit der Eigengeschwindigkeit u bewegten fiktiven Korpuskel die imaginäre Masse $i m \frac{v}{c}$ zu, so erhält man denselben Impulswert, wie für eine reelle Korpuskel von der Masse m und der durch $uv = c^2$ bestimmten Eigengeschwindigkeit v. Die Energie der fiktiven Korpuskel wird hierbei $E - E_0 \operatorname{ch}^{-1} \omega$, wenn E die Energie der bewegten reellen Korpuskel und E_0 ihre Ruheenergie bedeutet und $v = c \operatorname{th} \omega$ gesetzt ist.

breitung einer Wirkung mit der Überlichtgeschwindigkeit u aufgefasst zu werden. Vielmehr scheint uns der physikalisch reelle Sachverhalt nur darin zu bestehen, dass die Existenzschwingung der bewegten Korpuskel vom ruhenden Beobachter aus gesehen so beurteilt wird, als ob die betreffende Korpuskelexistenz an die Welle (12) gebunden wäre; um die Grösse der Existenz ψ zu bestimmen, hat man jeweils den Ort s der Korpuskel und die zugehörige Milne'sche Zeitgrösse T in die rechte Seite der Gleichung (12) einzusetzen. Diese Formulierung dürfte, wie mir scheint, völlig präzis sein und dazu beitragen verschwommen unklare Vorstellungen zu beseitigen.

§ 5. **Raumquantelung.** Führt man den zur Phasengeschwindigkeit u assoziierten hyperbolischen Vektor ein, der die Projektion des euklidischen Vektors u auf den im Anfangspunkt berührenden hyperbolischen Raum L_3 darstellt, setzt also etwa $u = c \operatorname{th} \tilde{\omega}$ ($c\tilde{\omega}$ ist dann die Länge des assoziierten hyperbolischen Vektors), so folgt aus $v = c \operatorname{th} \omega$ und $uv = c^2$

$$\operatorname{th} \omega \operatorname{th} \tilde{\omega} = 1, \tag{14}$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\tilde{\omega} = \omega + (2k+1)\frac{\pi}{2} i. \tag{15}$$

In der Klein'schen Interpretation [8]) des L_4 erscheinen die Endpunkte der zu v und u assoziierten hyperbolischen Vektoren $c\omega$ und $c\tilde{\omega}$ als konjugiert invers in Bezug auf das absolute unendlich-ferne Gebilde. Es ist beachtenswert, dass durch die Phasengeschwindigkeit u sämtlichen ideellen hyperbolischen Vektoren, d. h. Vektoren, deren Endpunkte im ideellen Gebiet (also ausserhalb des absoluten Gebildes) des L_4 liegen, ein physikalischer Sinn zukommt.

Die Wellenlänge λ der Existenzwelle für einen bestimmten Zeitpunkt t liefert die Nachbarabstände derjenigen Orte des ruhenden Inertialsystems, in denen zum Zeitpunkt t die bewegte Korpuskel in ein- und demselben Existenzzustand auftreten *könnte*. Wenn man aber die Korpuskel als individuell bestimmt ansieht, so wird die Korpuskel tatsächlich bloss an

---

[8]) Vgl. „*Ansätze zu einer expansionistischen Kinematik*" (Publ. Obs. Astron. Tartu, XXVIII No 4, — 1935), S. 34 u. 52.

einem einzigen dieser Orte im gegebenen ψ-Zustande zu lokalisieren sein. Sämtliche überhaupt möglichen ψ-Zustände für diesen Zeitpunkt t verteilen sich auf eine Strecke von der Länge λ. Nimmt man an, dass es physikalisch unmöglich ist bei Messungen die verschiedenen ψ-Zustände auseinanderzuhalten, so erhält man auf diese Weise vielleicht einen gangbaren Weg zur Veranschaulichung des Inhaltes der Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelation. Dieser Gedanke soll aber hier nicht weiter verfolgt werden.

Durch λ wird das Inertialsystem der bewegten Korpuskel sozusagen geometrisch gequantelt; der für einen gegebenen ψ-Zustand mögliche Raum ist nicht mehr stetig, sondern besteht aus einem diskreten Punktgitter. Dies führt dann unter geeignete Voraussetzungen zur Interferenz resp. Beugung von Korpuskelschwärmen. Auch darauf soll in der vorliegenden rein schematischen Abhandlung noch nicht eingegangen werden.

Die Distanz Λ im ruhenden Inertialsystem, die zwei benachbarten Orten entspricht, an denen die Korpuskel im Zustand ψ aufeinanderfolgend tatsächlich auftritt, ergibt sich aus der Gleichung der Existenzwelle, wenn man von $s=0$, $T_0=0$ ausgeht und hernach $s=\Lambda=vT$ setzt, was dem Phasenunterschied 2π entsprechen muss. Man findet auf diese Weise

$$-2\pi\frac{p}{h}(vT-uT)=2\pi, \tag{16}$$

also

$$T=\frac{h}{p}\,\frac{1}{u-v},$$

mithin

$$\Lambda=vT=\frac{h}{p}\,\frac{v}{u-v}=\frac{h}{p}\,\frac{v^2}{c^2-v^2}=\frac{h}{p}\,\frac{\operatorname{th}^2\omega}{1-\operatorname{th}^2\omega}= \tag{17}$$

$$=\frac{h}{p}\operatorname{sh}^2\omega=\lambda\operatorname{sh}^2\omega\,.$$

Führt man hier noch $mc\operatorname{sh}\omega$ statt p ein, so resultiert

$$\Lambda=\frac{h}{mc}\operatorname{sh}\omega\,. \tag{18}$$

Mit wachsendem v wird also Λ beliebig gross. Die Formel (18) darf aber nicht für den Grenzfall $v=c$ angewandt werden, weil dann (16) eine nicht erfüllbare Forderung darstellt, da $v = u$ wird. Für Photone, die sich mit der Eigengeschwindigkeit $v = c$ bewegen, verliert also das durch (18) definierte Λ seinen physikalischen Sinn. Statt dessen hat man in diesem Grenzfall zu berücksichtigen, dass ψ bei beliebiger Ortsannahme für das Photon, sobald T diesem Ort tatsächlich entspricht, konstant wird. Ein bewegtes Photon durchstreicht also den Raum kontinuierlich, und erscheint dabei an jedem Ort in ein- und demselben Existenzzustand ψ. Für ein Photon bleibt der Raum ungequantelt.

Grundsätzlich anders muss sich laut (18) eine massenbehaftete Korpuskel, etwa ein Elektron, verhalten. Bei $\operatorname{sh}^2 \omega = 1$, also $\operatorname{th} \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$, was $v = 212\,000$ km sec^{-1} entspricht, wird $\Lambda = \lambda$, unterhalb dieser Geschwindigkeit ist $\Lambda < \lambda$, oberhalb dagegen $\Lambda > \lambda$. Dieser kritischen Geschwindigkeit entspricht für ein Elektron die Spannungsdifferenz von ca. 210 000 Volt.

Nimmt man als Ruhemasse des Elektrons den Wert $m = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$, so wird $\frac{h}{mc} = 2{,}4 \cdot 10^{-10}$; für gewöhnliche Kathodenstrahlen wird daher nach (18) Λ etwa von der Ordnung 10^{-10} cm sein. Die Diskontinuität des zu solchen Kathodenstrahlen gehörigen Raumes $\boldsymbol{E}_3$ wird also praktisch nicht fühlbar. Könnte man aber Elektronen mit extrem hohen Eigengeschwindigkeiten beobachten, so müsste die Diskontinuität ihres Auftretens längs der Bahn sehr deutlich werden, da die Orte möglicher gleichphasiger Existenz durch genügende Vergrösserung von ω theoretisch beliebig weit auseinandergebracht werden können. Für extrem hohe Werte von v wird ω äusserst gross, und $\operatorname{sh} \omega$, $\operatorname{ch} \omega$, $\operatorname{ch} \omega - 1$ sind dann praktisch untereinander gleich. Misst man die zur Erreichung der Geschwindigkeit v vom Ruhezustand aus benötigte Spannung in Volt (V) und versteht unter $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ die elektrische Ladung des Elektrons, so wird

$$\frac{eV}{300} = mc^2 \operatorname{ch} \omega - mc^2 = mc^2 (\operatorname{ch} \omega - 1) \approx mc^2 \operatorname{sh} \omega ,$$

woraus sich nach (18) ergibt:

$$V \approx \frac{300\, m^2 c^3}{eh} \Lambda , \tag{19}$$

was, wie gesagt, nur für sehr hohe Werte von ω genügend zutreffend ist. Die erforderliche Spannung wäre dann also annähernd proportional dem gewünschten Λ. Für $\Lambda = 100$ Meter wären demnach ca. $21 \cdot 10^{18}$ Volt notwendig, was natürlich ausserhalb alles technisch Erreichbaren liegt, trotzdem aber bei manchen Naturprozessen von der Art des Atomzerfalls dennoch denkbar wäre. Die Wucht eines einzelnen solchen Elektrons wäre angenähert gleich der Wucht des Anpralls eines von 35 cm Höhe fallenden Gewichtes von 1 kg. Ein auftreffender Schwarm solcher Elektronen dürfte also ganz erhebliche Zerstörungen bewirken; die möglichen Treffpunkte liegen um 100 Meter auseinander. Die ausgelöste sekundäre Photonstrahlung dürfte wohl bei schon ganz geringer Intensität für Lebewesen tödlich sein.

Die zu bewegten Elektronen gehörige Raumquantelung bei erheblich geringeren Geschwindigkeiten von der Ordnung $10^4 - 10^6$ Volt dürfte bei geeigneten Zusatzhypothesen zur mathematischen Deutung der Bahnquantelung in atomaren Bereichen herbeigezogen werden, worauf hier jedoch nicht eingegangen werden soll. Es sei bloss nebenbei erwähnt, dass, solange es sich um ein einzelnes Elektron handelt, in erster Linie wohl Λ und nicht λ als physikalische Realität in Betracht kommt; die Bedeutung von λ tritt erst bei Elektronenschwärmen hervor, und zwar dann, wie es allerdings gewöhnlich der Fall ist, wenn Λ nicht gar zu gross ist gegenüber λ. Bei mässigen Werten von Λ werden nämlich auf Grund der Zufallsverteilung die möglichen Orte, wo Elektronen des Schwarmes überhaupt auftreten können, praktisch kontinuierlich im Raum ausgebreitet sein, so dass die durch λ bedingten Interferenzerscheinungen an jeder beliebigen Stelle im Raum tatsächlich zu beobachten sind.

§ 6. **Differentialgleichung der Welle.** Für die „ebene“ Existenzwelle (10) ergibt sich, auch wenn man noch eine beliebige konstante Phasenverschiebung hinzunimmt,

$$\frac{\partial \psi}{\partial s_\alpha} = 2\pi i \frac{mc}{h} k_\alpha \operatorname{sh} \omega \cdot \psi ,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s_\alpha^2} = -4\pi^2 \frac{m^2 c^2}{h^2} k_\alpha^2 \operatorname{sh}^2 \omega \cdot \psi ,$$

mithin, wenn man $\sum \frac{\partial^2 \psi}{\partial s_\alpha^2}$ mit $\Delta \psi$ bezeichnet und $\Sigma k_\alpha^2 = 1$ berücksichtigt:

$$\Delta \psi = -\frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} \operatorname{sh}^2 \omega \cdot \psi .$$

Differenziert man nach t, so hat man $T = \tau(e^{\sigma t} - 1)$, $\frac{dT}{dt} = e^{\sigma t} = 1 + \sigma T$ und $h = h_0 e^{\sigma t}$ zu berücksichtigen. Bezeichnet man noch $\Sigma k_\alpha s_\alpha$, also die Entfernung des betreffenden Punktes vom Ursprung, mittels s, so ergibt die Rechnung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial \psi}{\partial T}\frac{dT}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial T}(1+\sigma T) = \\
&= -\frac{2\pi imc}{h_0} \cdot \frac{c \operatorname{ch} \omega + \sigma s \operatorname{sh} \omega}{1+\sigma T} \cdot \psi \\
&= -\frac{2\pi imc}{h_0} \operatorname{sh} \omega \cdot \frac{u+\sigma s}{1+\sigma T} \cdot \psi ; \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= (1+\sigma T) \cdot \frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial \psi}{\partial t} \\
&= -\frac{2\pi imc}{h_0}(u+\sigma s) \operatorname{sh} \omega \cdot (1+\sigma T) \frac{\partial}{\partial T}(1+\sigma T)^{-1} \psi \\
&= -\frac{2\pi imc}{h_0}(u+\sigma s) \operatorname{sh} \omega \cdot \left[\frac{\partial \psi}{\partial T} - \sigma(1+\sigma T)^{-1} \psi\right] \\
&= -\frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h_0}(u+\sigma s)^2 \operatorname{sh}^2 \omega \cdot \psi - \sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} \\
&= (u+\sigma s)^2 \cdot \Delta \psi - \sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} .
\end{aligned}$$

Es genügt also (10) der Differentialgleichung

$$\Delta \psi = \frac{1}{(u+\sigma s)^2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \psi}{\partial t}\right), \tag{20}$$

was die expansionistische Verallgemeinerung der bekannten klassischen Differentialgleichung der Welle darstellt; die klassische Form resultiert für $\sigma = 0$.

Da (20) die Richtungskosinus k_α explicite nicht enthält, so gilt diese Differentialgleichung für jede beliebige vom Ursprung ausgehende Fortplanzungsrichtung; s bedeutet hierhin die vom Ursprung aus gerechnete zurückgelegte Distanz. Es umfasst demnach (20) auch Kugelwellen, die sich vom Ursprung aus mit der Phasengeschwindigkeit u ausbreiten.

Zur Aufstellung einer expansionistisch verallgemeinerten Schrödinger-Gleichung könnte man versuchen (20) als Ausgangspunkt zu verwenden.

§ 7. **Effektive Schwingungsanzahl.** Es bedeute N die effektive Anzahl registrierter Schwingungen während einer Zeitspanne $T_1 - T = \Delta T$ resp. Δt; diese Zahl N ist für $\Delta t = 1$ etwas von der Frequenz ν verschieden.

Es sei s die Abszisse des ruhenden Beobachters für den Zeitpunkt T resp. t. Im Zeitpunkt $T + \Delta T$ wird diese Abszisse gleich $s \cdot e^{\sigma \Delta t}$ sein. Ist h der Wert des Planck'schen Wirkungsquantums für den Zeitpunkt T, so wird dieser Wert für $T + \Delta T$ gleich $h \cdot e^{\sigma \Delta t}$ sein.

Aus

$$\begin{aligned} T + \Delta T &= \tau \left(e^{\sigma(t+\Delta t)} - 1\right) \\ &= \tau \left(e^{\sigma \Delta t} e^{\sigma t} - 1\right) \\ &= \tau \left[e^{\sigma \Delta t} (1 + \sigma T) - 1\right] \end{aligned}$$

berechnet sich

$$e^{\sigma \Delta t} = \frac{1 + \sigma T + \sigma \Delta T}{1 + \sigma T}. \tag{21}$$

Sind in der Zeitspanne ΔT vom betreffenden Beobachter genau N Schwingungen konstatiert, so bedeutet dies laut (11):

$$\frac{p}{h}(s - uT) - \frac{p(1 + \sigma T)}{h(1 + \sigma T + \sigma \Delta T)} \left[s \frac{1 + \sigma T + \sigma \Delta T}{1 + \sigma T} + \right.$$

$$\left. - u(T + \Delta T)\right] = N,$$

also

$$\frac{pu}{h}\left[- T + \frac{(1 + \sigma T)\,(T + \Delta T)}{1 + \sigma T + \sigma \Delta T}\right] = N.$$

Nun ist aber

$$\frac{pu}{h} = \frac{pc^2}{hv} = \frac{mc \operatorname{sh} \omega \cdot c^2}{h \cdot c \operatorname{th} \omega} = \frac{mc^2 \operatorname{ch} \omega}{h} = \nu ,$$

wobei hier ν die zum Zeitpunkt T gültige Frequenz bedeutet. Man hat somit

$$-T + \frac{(1+\sigma T)(T+\Delta T)}{1+\sigma T+\sigma \Delta T} = \frac{N}{\nu},$$

d. h.

$$\frac{\Delta T}{1+\sigma T+\sigma \Delta T} = \frac{N}{\nu},$$

woraus

$$\Delta T = \frac{N(1+\sigma T)}{\nu - \sigma N} \tag{22}$$

folgt. Hiernach wird nun laut (21):

$$e^{\sigma \Delta t} = 1 + \frac{\sigma \Delta T}{1+\sigma T}$$

$$= 1 + \frac{\sigma N}{\nu - \sigma N}$$

$$= \frac{\nu}{\nu - \sigma N}.$$

Dies ergibt

$$N = \nu\tau\,(1 - e^{-\sigma \Delta t}) . \tag{23}$$

Bezieht sich N auf die Zeiteinheit $\Delta t = 1$ sec, so folgt

$$N = \nu\tau\,(1 - e^{-\sigma})$$

$$= \nu \left(1 - \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma^2}{6} - \ldots\right) . \tag{24}$$

Es ist also die effektive Schwingungszahl N pro Sekunde um ein geringes kleiner als die Frequenz ν zu Beginn dieser Sekunde.

Bedeutet ν' die Frequenz am Schluss der Zeitspanne Δt, so hat man $\nu' = \nu e^{-\sigma \Delta t}$, also $\nu = \nu' e^{\sigma \Delta t}$. Aus (23) folgt dann

$$N = \nu'\tau\,(e^{\sigma \Delta t} - 1) . \tag{25}$$

Beginnt man die Zeitzählung mit dem Beginn der Zeitspanne, so wird $T = 0$ und

$$N = \nu' \Delta T\,. \tag{26}$$

Die effektive Schwingungszahl N pro Milne-Zeiteinheit ist also gleich der Frequenz am Schluss der betreffenden Zeitintervalls.

§ 8. **Photonwelle.** Wird die Phasengeschwindigkeit $u = c$, so erhält man als Grenzfall die Photonwelle:

$$\psi = a\, e^{2\pi i p h^{-1} (\Sigma k_\alpha s_\alpha - cT)}\,. \tag{27}$$

Hierin bedeutet p den Photonimpuls. Soll er einen endlichen Wert haben, so muss wegen $p = mc \operatorname{sh} \omega$, $\operatorname{sh} \omega = \infty$, m verschwinden. Man hat also an einen Grenzprozess zu denken, wo $m \operatorname{sh} \omega = M$ konstant verbleibt bei unendlich abnehmendem m. Für die Photonwelle ist $p = Mc$ mit der Wellenlänge λ nach der allgemeinen Beziehung (13) mittels $p = \frac{h}{\lambda}$, also $M = \frac{h}{\lambda c}$ verknüpft. Da für $\omega = \infty$ der Unterschied zwischen $\operatorname{sh} \omega$ und $\operatorname{ch} \omega$ verschwindet, so ist die Energie E des Photons

$$E = mc^2 \operatorname{ch} \omega = Mc^2\,, \tag{28}$$

also, infolge $\lambda \nu = c$,

$$E = \frac{hc^2}{\lambda c} = \frac{hc}{\lambda} = h\nu$$

wie erforderlich.

Der durch die Bindung der Elektrone an den Kern im Atom definierte Energiezustand kann auf gewisse diskret bestimmte Arten in Photone aufgelöst werden. Der Komplex dieser zum Atom gehörigen Photone bestimmt das Spektrum des betreffenden Elements.

Im Gegensatz zur Korpuskel existiert kein Inertialsystem, in dem das Photon „ruht", seine Existenzwelle also zu einer reinen Schwingung wird.

Ein anderer wesentlicher Unterschied gegenüber der Korpuskel besteht, wie schon im § 5 erwähnt wurde, darin, dass dem Photon kein gequantelter, sondern ein stetiger Raum E_3 zugehört.

Der Umstand, dass somit das Photon keine Existenzschwingung ausführt, sondern stets in der ihm zukommenden Phase verbleibt, entspricht merkwürdigerweise dem Fehlen einer Ruhemasse. Man könnte geneigt sein darin eine Bekräftigung des

Standpunktes zu sehen, wonach die Ruhemasse ein zum Existenz-Wechselstrom gehöriger Mittelwert ist: verschwindet dieser Wechselstrom, so verschwindet auch die Ruhemasse. All dies gilt aber nur dann, wenn man sich das Photon punktförmig und im Raum streng lokalisiert denkt, was aber nach Heisenberg bekanntlich nicht angeht. Auch bietet eine vernünftige Konzeption der Interferenzerscheinungen dann grosse begriffliche Schwierigkeiten. Zweckmässiger ist es zum Verstehen der Interferenz das Photon in seinen sämtlichen Existenzphasen auf mindestens einer Wellenlänge ausgebreitet zu denken. Je kürzer diese Wellenlänge (je grösser ν), je mehr also das Photon in der Umgebung eines Ortes zusammengeballt erscheint, — desto grösser ist seine Energie im $\boldsymbol{E}_3$. Die Energie wächst ins Unendliche, wenn das Photon in seinen sämtlichen Existenzphasen sich auf einen Punkt zusammenzieht, also λ gegen Null strebt.

§ 9. **Dopplerprinzip.** Wir untersuchen nun, wie sich die vom ruhenden Beobachter konstatierte Photonwelle

$$\psi = a\, e^{2\pi i p h^{-1} (\Sigma k_\alpha s_\alpha - cT)}$$

für ein Inertialsystem darstellt, das sich in der Richtung der positiven 1-Achse mit der Eigengeschwindigkeit $v_1 = v > 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$ bewegt. Bedeutet die Strichelung das bewegte Inertialsystem, so gilt die Lorentz-Transformation

$$\begin{gathered} s_1 = s_1' \operatorname{ch} \omega + cT' \operatorname{sh} \omega \\ cT = s_1' \operatorname{sh} \omega + cT' \operatorname{ch} \omega \\ s_2 = s_2', \; s_3 = s_3' \\ c \operatorname{th} \omega = v, \; \omega > 0 . \end{gathered} \tag{29}$$

Man hat demnach:

$$\begin{aligned} \Sigma k_\alpha s_\alpha - cT &= k_1 (s_1' \operatorname{ch} \omega + cT' \operatorname{sh} \omega) + k_2 s_2' + k_3 s_3' - \\ &\qquad - (s_1' \operatorname{sh} \omega + cT' \operatorname{ch} \omega) \\ &= s_1' (k_1 \operatorname{ch} \omega - \operatorname{sh} \omega) + s_2' k_2 + s_3 k_3' - cT' (\operatorname{ch} \omega - k_1 \operatorname{sh} \omega) \\ &= (\operatorname{ch} \omega - k_1 \operatorname{sh} \omega) \Bigg[s_1' \frac{k_1 \operatorname{ch} \omega - \operatorname{sh} \omega}{\operatorname{ch} \omega - k_1 \operatorname{sh} \omega} + s_2' \frac{k_2}{\operatorname{ch} \omega - k_1 \operatorname{sh} \omega} + \\ &\qquad + s_3' \frac{k_3}{\operatorname{ch} \omega - k_1 \operatorname{sh} \omega} - cT' \Bigg] . \end{aligned}$$

Bezeichnet man hier die Koeffizienten bei den s'_α mit k'_α, so ergibt eine einfacbe Nachrechnung

$$\Sigma k'^2_\alpha = 1 \, ,$$

d. h. die 3 Grössen k'_α können als Richtungskosinus behandelt werden.

Bedeutet nun h denjenigen Wert, der am ruhenden Ort gilt, mit welchem der im bewegten Inertialsystem mittels s'_α bestimmte Punkt im Augenblick T' koinzidiert, so erhält man demnach für die Photonwelle die Form

$$\psi = a e^{2\pi i p h^{-1} (\mathrm{ch}\,\omega - k_1 \,\mathrm{sh}\,\omega)(\Sigma k'_\alpha s'_\alpha - cT')} \, . \tag{30}$$

Die Abweichung der k'_α von den k_α bedeutet Aberration. h ist hier sowohl von s'_α als auch von T' abhängig.

Für den im bewegten Ursprung lokalisierten bewegten Beobachter wird $s'_\alpha = 0$. Für diesen gilt auf Grund der Lorentz-Transformation

$$T = T' \,\mathrm{ch}\,\omega$$

und demnach

$$1 + \sigma T = 1 + \sigma \,\mathrm{ch}\,\omega \; T' = 1 + \sigma' \, T' \, ,$$

wenn $\sigma' = \sigma \,\mathrm{ch}\,\omega$ gesetzt wird. Da dieser Beobachter denjenigen h Wert benutzt, der am ruhenden Ort gilt, mit dem er gerade koinzidiert, also $h_0(1+\sigma T) = h_0(1+\sigma' T')$, so bedeutet die Einführung von σ', dass nach Ansicht des ruhenden Systems der bewegte Ursprung einen unrichtigen, nämlich etwas zu grossen σ-Wert benutzt, wodurch er seine Zeitdilatation kompensiert.

Die Wellenlänge λ'_0 der Welle (30) für den bewegten Ursprung im Moment $T' = 0$ ergibt sich, wenn man zunächst die nach $T' = 0$ verfliessende Zeit $\Delta T'$ bestimmt, während welcher sich die Phase um 2π ändert, hierauf die vom Photon in dieser Zeitspanne durchlaufene Strecke (im bewegten System) $c\Delta T'$ berechnet und endlich letztere Strecke durch Multiplikation mit $e^{-\sigma \Delta t'} = \frac{1}{1+\sigma' \Delta T'}$ auf den Zeitpunkt $T' = 0$ reduziert. Es ist also

$$\lambda'_0 = \frac{c \Delta T'}{1 + \sigma' \Delta T'} \, .$$

Andererseits ergibt sich für die Bestimmung von $\Delta T'$ aus der geforderten Phasendifferenz die Beziehung

$$2\pi \frac{p(\mathrm{ch}\,\omega - k_1 \,\mathrm{sh}\,\omega)}{h_0(1+\sigma'\Delta T')} c\Delta T' = 2\pi,$$

also

$$\frac{c\,\Delta\,T'}{1+\sigma'\Delta T'} = \frac{h_0}{p(\mathrm{ch}\,\omega - k_1\,\mathrm{sh}\,\omega)}.$$

Mithin ist für den bewegten Ursprung im Moment $T' = 0$

$$\lambda_0' = \frac{h_0}{p(\mathrm{ch}\,\omega - k_1\,\mathrm{sh}\,\omega)},$$

während für den koinzidierenden ruhenden Beobachter im koinzidierenden Zeitpunkt $T=0$ die Wellenlänge

$$\lambda_0 = \frac{h_0}{p}$$

gelten musste. Man hat somit

$$\lambda_0' = \frac{\lambda_0}{\mathrm{ch}\omega - k_1\,\mathrm{sh}\omega}. \tag{31}$$

Darin liegt des Dopplerprinzip. Man kann ihm eine andere Form geben, wenn man noch den Winkel Θ zwischen der Bewegungsrichtung des Inertialsystems und der Richtung, aus welcher die Photonen im ruhenden System ankommen, einführt. Es wird dann $\cos\Theta = -k_1$ und (31) ergibt

$$\lambda_0 = \lambda_0'(\mathrm{ch}\,\omega + \mathrm{sh}\,\omega\cos\Theta)$$

oder, wenn man statt der Wellenlängen die zugehörigen Frequenzen $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$, $\nu_0' = \frac{c}{\lambda_0'}$ einführt:

$$\nu_0' = \nu_0(\mathrm{ch}\,\omega + \mathrm{sh}\,\omega\cos\Theta) = \nu_0\frac{1+\frac{v}{c}\cos\Theta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{32}$$

Es ist dies genau die Einstein'sche Formel, was verständlich wird, wenn man berücksichtigt, dass hier bloss die Eigengeschwindigkeit des bewegten Systems berücksichtigt wurde.

Vertauscht man die Begriffe „bewegt“ und „ruhend“, so hat man sinngemäss ω durch $-\omega$ und k_1 durch k_1' zu ersetzen. Definiert man Θ' mittels $\cos\Theta' = k_1'$, wodurch Θ' sinnentsprechend an die Stelle von Θ tritt, so wird laut (31), wenn man beachtet, dass die gestrichene Wellenlänge nun dem „ruhenden“ System angehört:

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_0'}{\operatorname{ch}\omega + \operatorname{sh}\omega\cos\Theta'}\,.$$

Die früher gefundene Beziehung zwischen k_1' und k_1 ergibt aber

$$\cos\Theta' = \frac{-\cos\Theta\operatorname{ch}\omega - \operatorname{sh}\omega}{\operatorname{ch}\omega + \cos\Theta\operatorname{sh}\omega}\,, \tag{33}$$

also

$$\operatorname{ch}\omega + \operatorname{sh}\omega\cos\Theta' = \frac{1}{\operatorname{ch}\omega + \operatorname{sh}\omega\cos\Theta}\,,$$

demnach für den neuen Standpunkt:

$$\lambda_0 = \lambda_0'(\operatorname{ch}\omega + \operatorname{sh}\omega\cos\Theta)\,,$$

was genau der früheren Beziehung zwischen den beiden Wellenlängen entspricht.

Emittiert nun eine zum ruhenden Inertialsystem gehörige Quelle ein Photon im Augenblick, wo die Distanz zwischen dem im Ursprung gedachten Beobachter und der Quelle ϱ Einheiten beträgt und bedeutet jetzt T die in diesem ruhenden Inertialsystem gemessene Laufzeit dieses Photons bis zum ruhenden Ursprung, so gilt

$$cT = \varrho(1 + \sigma T)\,,$$

also

$$T = \frac{\varrho}{c - \sigma\varrho}\,, \quad 1 + \sigma T = \frac{c}{c - \sigma\varrho}\,.$$

Bezeichnet h_0 den Wert im Moment der Emission, so wird im Moment der Ankunft demnach

$$h = h_0(1 + \sigma T) = \frac{ch_0}{c - \sigma\varrho}$$

gelten und die Frequenz ν im Moment des Empfanges wird, wenn ν_0 die emittierte Frequenz war:

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + \sigma T} = \nu_0 \left(1 - \frac{\sigma \varrho}{c}\right).$$

Betrachtet man nun einen Beobachter, der mit dem ruhenden im Moment des Empfanges koinzidiert, dabei aber in Bezug auf das Inertialsystem der Quelle eine Eigengeschwindigkeit $v_1 = v > 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$ besitzt, so wird letzterer laut (32) im Moment des Empfanges eine Frequenz ν' konstatieren, die sich aus

$$\begin{aligned} \nu' &= \nu (\operatorname{ch} \omega + \operatorname{sh} \omega \cos \Theta) \\ &= \nu_0 (\operatorname{ch} \omega + \operatorname{sh} \omega \cos \Theta) \left(1 - \frac{\varrho \sigma}{c}\right) \end{aligned}$$

bestimmt. Führt man hier wieder den Winkel Θ' ein, der sich auf das bewegte System bezieht, wenn man es nun als ruhend (die Lichtquelle also als mit der Eigengeschwindigkeit $v_1 = -v$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$ bewegt) denkt, und beachtet die involutorische Beziehung (33), aus der

$$\cos \Theta = \frac{-\operatorname{ch} \omega \cos \Theta' - \operatorname{sh} \omega}{\operatorname{ch} \omega + \operatorname{sh} \omega \cos \Theta'}$$

folgt, so ergibt sich

$$\operatorname{ch} \omega + \operatorname{sh} \omega \cos \Theta = \frac{1}{\operatorname{ch} \omega + \operatorname{sh} \omega \cos \Theta'},$$

also

$$\nu_0 = \frac{\operatorname{ch} \omega + \operatorname{sh} \omega \cos \Theta'}{1 - \dfrac{\sigma \varrho}{c}} \cdot \nu' . \tag{34}$$

Hierin bedeutet ν_0 die im Inertialsystem der Quelle emittierte Frequenz, $c \operatorname{th} \omega = v > 0$ die Eigengeschwindigkeit des empfangenden Beobachters in Bezug auf die Quelle und Θ' den Winkel zwischen der Richtung, aus der dem bewegten Beobachter die Photonen zu kommen scheinen, und der Eigengeschwindigkeit der Quelle in Bezug auf das Inertialsystem der Beobachters. ν' ist dann die vom Beobachter registrierte empfangene Frequenz. ϱ bedeutet die auf den Moment der Emission reduzierte Entfernung zwischen Quelle und Beobachterort unter der fiktiven Voraussetzung, dass der Beobachter zum Inertialsystem der Quelle gehört, m. a. W., ϱ ist diejenige Grösse, die sich ergibt, wenn man den Ort, wo der Empfang stattfindet, als zum Inertialsystem der Quelle gehörig denkt, die Zeitspanne t bestimmt, die ein Photon zur Überbrückung der entsprechenden Distanz bedarf, und diese Distanz dann mit $e^{-\sigma t}$ multipliziert[9]).

Laut (34) ist die Frequenzabnahme der aus weit entfernten Quellen emittierten Photone zum grössten Teil durch das Anwachsen von h bedingt. Man darf dies gut als „Lichtermüdung" ansprechen, wobei aber zu beachten ist, dass letztere nach der hier entwickelten Auffassung nichts mit der Wirkung von Gravitationsfeldern zu tun hat. Dieses säkulare Anwachsen von h ist eng mit der expansionistischen Auffassung verknüpft. Lichtermüdung im erwähnten Sinne bedeutet eben Expansion, und umgekehrt. Da das entwickelte System logisch widerspruchsfrei ist, was durch die Interpretation im L_4 gesichert zu sein scheint, so liegt kein zwingender Grund vor die Rotverschiebung (34) als im mechanischen Sinne „nicht-reell" wegzudiskutieren. Im Gegenteil, die innere Folgerichtigkeit der mathematischen Beziehungen scheint darauf hinzuweisen, dass es sich um eine Auffassung handelt, die in gutem Einklang mit den neuesten experimentellen Erfahrungen steht. Es sei nochmals betont, dass die Gravitation aus der Expansionstheorie als solcher hier völlig ausgeschaltet ist: Gravitation wird bloss als lokale Störung der Expansion gedeutet.

Auf einen interessanten Umstand sei noch hingewiesen:

Schreibt man ein bestimmtes Spektrum stets einem bestimmten chemischen Element zu, so müssen die emittierten Frequenzen säkulare Konstanten darstellen. Wegen der säkularen Zunahme von h erfordert dies eine ständige Zunahme der gequantelten Energiestufen des Atoms. Atome wären dem-

---

[9]) In der Abhandlung „*Ansätze zu einer expansionistischen Kinematik*" S. 48 Formel (70) habe ich das Dopplerprinzip in etwas abweichender Bezeichnungsweise aus rein kinematischen Betrachtungen abgeleitet. Die inhaltliche Übereinstimmung bezeugt, dass die gewählten Wellenpostulate der expansionistischen Kinematik angepasst sind.

nach Orte, wo sich Energie säkular anhäuft. Wie sich aus § 3 des ersten Teils dieser Abhandlung[10]) (Fall III) ergibt, tritt eine Anhäufung von Energie tatsächlich jedesmal ein, sobald das entsprechende Potential eine reine Ortsfunktion darstellt; vielleicht liegt darin der wesentliche Unterschied zwischen elektrischen und Gravitationsfeldern. Die Bahnen können dann geschlossene periodische Kurven werden. Die Felder in atomaren Bereichen müssten also von Gravitationsfeldern grundverschieden sein. Die säkulare Konstanz der räumlichen Dimensionen eines Atoms kann auch nur dann bestehen, wenn seine Energiestufen säkular anwachsen.

10) *E. D.* I, S. 13—14.

Inhalt.