297

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 297

ТРУДЫ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ

III

ТАЛЛИН 1970

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 297 1970

УДК 624.04

ТРУДЫ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ

III

ТАЛЛИН 1970

Ер. 6. 13

Содержание

Ер. 10048

Eesti NSV Teaduslik Raamatukogu Teaduste Akadeemia

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 297 1970

УДК 624.04

Э.М. Иеги

К ВОПРОСУ О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ И ПОСТРОЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ МИНИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА

I. Общие положения

Работа материала рассматривается в линейно-упругой области. Топологическая схема и геометрия осей предполагаются предварительно заданными. Форма поперечного сечения и соотношения параметров его принимаются по результатам, полученным в исследованиях об оптимальных характеристиках профиля поперечного сечения.

В работе рассматривается лишь один из вопросов общей задачи проектирования оптимальной конструкции – оптимальное распределение материала вдоль заданной геометрической оси системы. При этом оптимизация проводится в классе рам с прямолинейными элементами, постоянными между узлами поперечного сечения, и проблема сводится к отысканию оптимального распределения материала между отдельными элементами конструкции. В принятой постановке закон изменения сечения вдоль оси характеризуется конечным числом параметров.

В качестве оптимизируемой функции выбирается функция объема, совпадающая с точностью до постоянного множителя с функцией веса для однородных систем.

Задача расчета статически неопределимой рамы минимального объема как задача отыскания условного экстремума оптимизируемой функции (функция цели*) на множестве независимых

* Здесь и в дальнейшем терминология принимается в соответствии с [I].

переменных при некоторых ограничениях, является моделью задачи математического программирования. Минимум функции определяется на множестве независимых весовых параметров (или их соотношениях) $g = (g_s)$, $s = 1, 2, \ldots, r$, где r - число дискретных элементов в системе.

Очевидно, что любой набор весовых параметров $g_i = (g_{si})$ является планом задачи. Решение, построенное на этом плане, есть некоторый вектор сил b_i и ему соответствующая рама с некоторым (дискретным) значением объемной функции $\bar{V}_i$ *.

2. Объемная функция

Объем конструкции в рассматриваемом классе рам определяется как сумма объемов элементов рамы. Объемная функция $\bar{V}$ вводится так, что она отличается от значения объема V на величину некоторого параметра объема, как неизменяющаяся при переходе от элемента к элементу часть.

Объемная функция рамы, точнее, поперечные сечения ее элементов (при заданных длинах стержней) устанавливаются из условия надежности (прочности, устойчивости) элементов конструкции. Это условие определяет на плане g_i нижнюю границу объемной функции каждого элемента в отдельности и, тем самым, объемной функции рамы в целом как системы элементов. Вместе с тем, объемная функция рамы, а точнее, поперечное сечение каждого элемента, входящего в систему, непременно должно соответствовать закону распределения весовых параметров как плану задачи (g_i).

Следовательно, объем каждого из элементов, входящих в систему, находится из условий удовлетворения, с одной стороны, требованиям надежности работы элемента и, с другой стороны, требованиям дискретного плана задачи g_i. При этом первое требование удовлетворяется, если рассматриваем объемную функцию каждого элемента в отдельности (как необъединенная система); второе требование удовлетворяется при рассмотрении объемной функции системы элементов, объединенных в конструкцию.

---

* Знак дефис (-) отличает объемную функцию от объема (V_i).

Очевидно, что первое и второе условия на некотором плане g_i, в общем, не совпадают в силу так называемого "эффекта действия связей". Лишь для оптимальной конструкции на оптимальном плане задачи $g_{опт.}$ эффект действия связей исчезает и оба требования на границе определяют одну и ту же конструкцию, как конструкцию равнопрочную, как конструкцию минимального объема.

Важно отметить, что вектор-решение (b_i), определенный на множестве некоторого дискретного вектора весовых параметров (g_i), являющийся показателем качества объема, может быть определен с точностью и полнотой, совпадающей с точностью и полнотой разработанных методов статического расчета конструкций. Здесь могут быть учтены результаты не только статических, но и динамических воздействий по методике, полностью совпадающей с методикой решения прямой задачи строительной механики.

3. Математическая модель задачи

Математическая модель задачи расчета статически неопределимых рам минимального объема формулируется следующим образом:

Определить r-мерный (квази) вектор $g=(g_s)$; $s = 1,2,\dots,r$, где r - число элементов в раме, минимизирующее объемную функцию

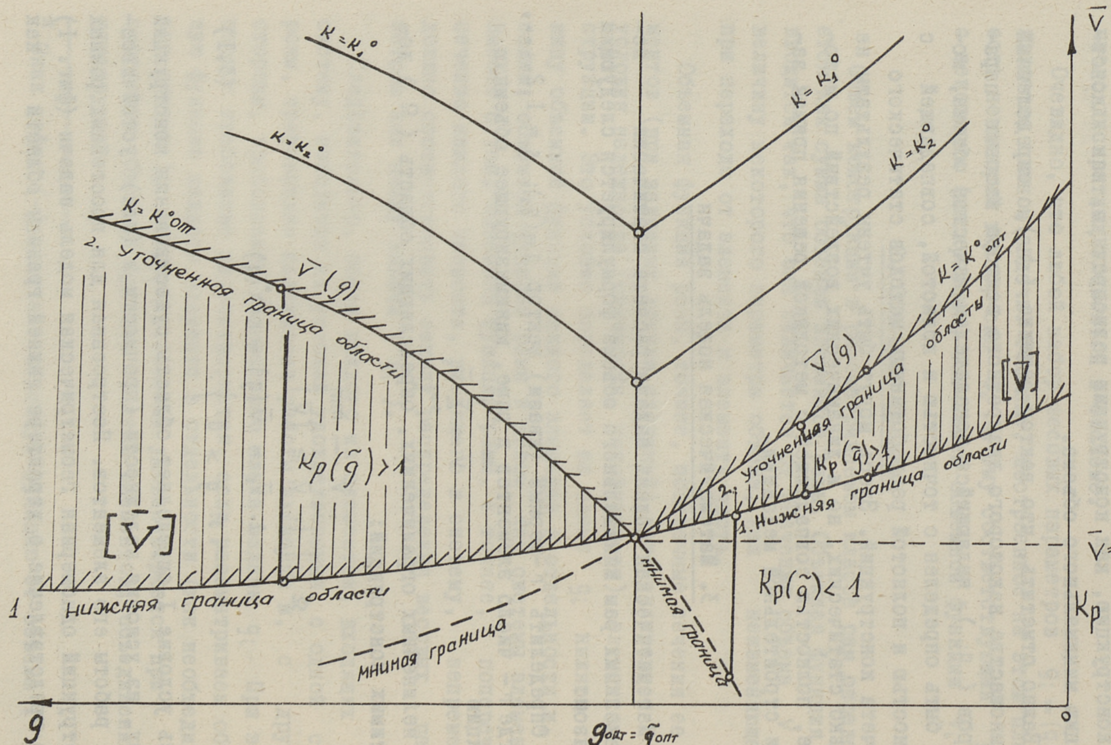
$$\bar{V} = \sum_{s=1}^{r} \bar{V}_s$$

при нелинейных ограничениях, определяющих область (Ω) допустимых конструкций:

$$\bar{V} \to \min$$

$$\Omega : \left\{ \begin{array}{l} 1.\ \bar{V}_1 \geq [\bar{V}] \\ 2.\ \bar{V}_2 = \bar{V}(g) = k\bar{V}^*(g) \\ 3.\ g > 0 \end{array} \right\}. \qquad (3.1)$$

Здесь условие I определяет область существования конструкций снизу, из условия надежности (прочности и (или) устойчивости) работы его элементов. Построенная для простейших рамных конструкций одномерная геометрическая модель задачи (фиг. I) дает представление о характере нижней границы области как



Фиг. 1. Одномерная геометрическая модель задачи

нелинейной функции, имеющей вогнутый (выпуклый) характер.

Условие 2 определяет "верхнюю" границу области существования конструкций из условия удовлетворения закону распределения весовых параметров в системе. При этом условие 2 определяет семейство граничных функций (с точностью до константы), соответствующее множеству статически и кинематически возможных конструкций, удовлетворяющих закону распределения весовой функции.

Граничная функция с константой, равной объемной функции опорного элемента, определяет нижний уровень "верхней" границы области допустимых конструкций.

Рельеф функции, соответствующей "верхней" границе области, определяется однозначно для заданной топологической схемы конструкции с заданной геометрией осей при заданном характере загружения. При этом рельеф функции не зависит от величины нагрузочных параметров, а лишь от их соотношений.

Построенная для простейшей одноконтурной рамы "верхняя" граница (фиг. I) получила вид кусочно-гладкой функции с выпуклыми или вогнутыми участками (ветвями), имеющей разрыв первого рода для производной в точке перемены знака кривизны. Интересно отметить, что каждая из ветвей рельефа "верхней" области границы имеет тот физический смысл, что определяет объемную функцию относительно некоторого s-го элемента, являющегося на этом интервале весовых параметров (g_i) опорным элементом. Переход от одной ветви к другой при вариации g_i означает переход от одного опорного элемента к другому.

Условие 3 определяет множество весовых параметров g, как множество существенно положительных чисел. Очевидно, что такое множество выпукло и удовлетворяет критерию выпуклости его.

4. Условие минимума объемной функции

В общем случае величины объемных функций, найденных на некотором плане g_i из граничных условий, связаны неравенством

$$\bar{V}(g_i)_2 > \bar{V}(g_i)_1 , \qquad (4.I)$$

при этом по крайней мере один элемент в системе работает с предельным условием надежности (опорный элемент).

Лишь для некоторого вектора весовой функции $g = g_{\text{оптим.}}$, определяющего оптимальный план задачи, неравенство (4.I) обращается в равенство

$$\bar{V}(g_{\text{опт}})_2 = \bar{V}(g_{\text{опт}})_1 ,$$

определяя, таким образом, конструкцию минимального объема, удовлетворяющую требованиям I и 2 на границе (на плане $g = g_{\text{оптим.}}$ граничные условия I и 2 совпадают).

5. Двойственная задача

Задача отыскания минимума кусочно-гладкой объемной функции двоякой кривизны как задача отыскания минимума функции на выпуклой области, с разрывом градиента в точках перемены знака кривизны на некотором выпуклом многообразии, лишь условно может быть отнесена к задаче вогнутого (выпуклого) программирования.

Известно, что достаточным условием для применения принципов теории двойственности является требование выпуклости области определения решения.

Если составить некоторую функцию из граничных условий выше сформулированной модели задачи (3.I) и установить новые граничные условия, то можно показать, что обе задачи представляют собой двойственную пару задач, и здесь имеет место теорема двойственности. Введем некоторую функцию (критерий) $K_p(\tilde{g})$ как функцию независимых весовых параметров и определим ее как отношение граничных условий I и 2 (из 3.I) так, что

$$K_p(\tilde{g}) = \frac{\nabla(\tilde{g})}{[V]} .$$

Функция $K_p(\tilde{g})$ характеризует степень сдвига "верхней" границы области, удовлетворяющей условию распределения весовой функции, относительно нижней границы области, соответствующей условию надежности конструкции или, иначе, функция $K_p(\tilde{g})$ характеризует степень отклонения решения, удовлетворяющего весовой функции, от решения, удовлетворяющего условию надежности; при этом оба эти условия рассматриваются на нижнем уровне области допустимых конструкций. Функция $K_p(\tilde{g})$ является гладкой выпуклой или вогнутой функцией, монотонно изменяющейся на множестве весового параметра.

Область допустимых конструкций удовлетворяет требованию $K_p(\tilde{g}) \geq 1$, значение $K_p(\tilde{g}) < 1$ означает выход из области надежных конструкций. Оптимальный план задачи удовлетворяет условию на границе, где $K_p(\tilde{g}) = 1$ и определяет конструкцию минимального объема.

Математическая модель двойственной (по отношению к 3.I) задачи расчета статически неопределимых рам минимального объема формулируется следующим образом:

Определить r-мерный (квази) вектор $\tilde{g} = (\tilde{g}_s)$; $s = 1, 2, \ldots, r$, где r - число элементов в раме, устремляющее функцию $K_p(\tilde{g}) = \bar{V}(\tilde{g})/[\bar{V}]$ к единице при нелинейных ограничениях, определяющих область (Ω) допустимых конструкций:

$$K_p(\tilde{g}) \longrightarrow 1$$

$$\Omega : \left\{ \begin{array}{l} 1.\ K_p(\tilde{g}) \geq 1 \\ 2.\ \tilde{g} > 0 \end{array} \right\}. \qquad (5.I)$$

Двойственная задача успешно реализуется в силу гладкости и монолитности изменения функции $K_p(\tilde{g})$ на множестве весового параметра и позволяет построить алгоритм отыскания оптимального плана задачи ($\tilde{g}_{опт.}$) как шаговый процесс по схеме метода возможных направлений. Совпадение решений $g_{опт}$ и $\tilde{g}_{опт}$, дающих оптимальный план задачи, вытекает с очевидностью.

6. Некоторые результаты расчета статически неопределимых рам минимального объема

Сформулированная вышеуказанным образом модель расчета статически неопределимых рам минимального объема была предложена в 1965 году (см. [2]). Для реализации счета на ЭЦВМ был разработан алгоритм в матричной форме с логической схемой и блок-схемой счета [3]. В соответствии с описанной моделью задачи проведен расчет большого числа одноконтурных рам и одной девятиконтурной рамы для различного вида однократных и многократных загружений. Некоторые результаты расчета приводятся в наших работах, указанных в [4].

Литература

1. А.А. Чирас. Методы линейного программирования при расчете упруго-пластических систем. Стройиздат. Л. 1969.

2. Э.М. Иеги. Оптимальное проектирование статически неопределимых рам, как проблема математического программирования. Труды ТПИ, серия А, № 227, Таллин 1965.

3. Э.М. Иеги. Алгоритм оптимального проектирования многоконтурных рам. Труды ЛИИЖТ, а, Л. 1968.

4. Библиография по применению математического программирования для расчета оптимальных строительных конструкций. Материалы совещания. Вильнюс 1969.

E. Jõgi

Zur Frage der Aufstellung und des Aufbaus des mathematischen Modells für die Berechnung der statisch unbestimmten Rahmen mit minimalem Volumen

Zusammenfassung

In der Abhandlung wird ein mathematisches Modell für die Berechnung der optimalen Baukonstruktionen vorgeschlagen. Von der allgemeinen Synthese der Probleme der optimalen Konstruktion behandelt man die Frage von der optimalen Verteilung des Materials längs der vorgegebenen geometrischen Achse des Rahmens. Optimisiert wird die Funktion seines Volumens.

Man betrachtet die Beschaffenheit und den Charakter der optimisierenden Funktionen, bestimmt ihre Grenzbedingungen und ihre Eigenschaften. Man formuliert die duale Aufgabe des Modells und gibt ihre optimale Lösung.

Das vorgeschlagene mathematische Modell des Problems entspricht einer Aufgabe des mathematischen nichtlinearen Programmierens und wird in Fachausdrücken seiner Theorie formuliert.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 197 1970

УДК 624.041.2

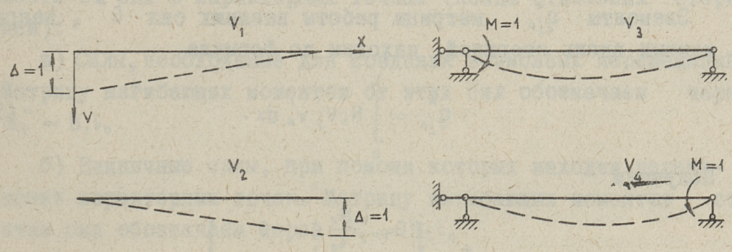
Р.Н. Ээк

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ И ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ РАМ МЕТОДОМ ЕДИНИЧНЫХ СИЛ

В этой статье излагается приближенный метод для определения критической нагрузки и частот собственных колебаний для упругих рам. Для отдельных стержней поперечные сечения, продольные силы и интенсивности масс постоянны.

Предлагаемый метод является разновидностью энергетического метода. В качестве заданных возможных перемещений берутся перемещения, вызванные силами, приложенными в узлах рамы, а в случае надобности и в пролете стержней. При этом не учитываются влияние продольно-поперечного изгиба и сил инерции на форму упругой линии.

Упругие линии отдельного стержня i характеризуются смещениями концов стрежня и моментами на концах стрежня (фиг. I).



Фиг. 1

Уравнения упругих линий следующие:

$$v_1 = 1 - \frac{x}{l_i} \qquad v_3 = \frac{l_i^2}{6EJ_i}\left(2\frac{x}{l_i} - 3\frac{x^2}{l_i^2} + \frac{x^3}{l_i^3}\right) \tag{I}$$

$$v_2 = \frac{x}{l_i} \qquad v_4 = \frac{l_i^2}{6EJ_i}\left(\frac{x}{l_i} - \frac{x^3}{l_i^3}\right).$$

Элементы δ^*_{jk} матрицы работы внутренних сил (матрицы податливости) F^* находим по формуле

$$\delta^*_{jk} = \int_0^{l_i} EJ_i\, v''_j \cdot v''_k\, dx = \int_0^{l_i} \frac{M_j M_k}{EJ_i}\, dx. \tag{2}$$

Получаем

$$F^* = \left\| \begin{array}{cc|cc} \delta^*_{11} & \delta^*_{12} & \delta^*_{13} & \delta^*_{14} \\ \delta^*_{21} & \delta^*_{22} & \delta^*_{23} & \delta^*_{24} \\ \hline \delta^*_{31} & \delta^*_{32} & \delta^*_{33} & \delta^*_{34} \\ \delta^*_{41} & \delta^*_{42} & \delta^*_{43} & \delta^*_{44} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & F_{MM}\dfrac{l_0}{6EJ_0} \end{array} \right\| \tag{3}$$

где

$$F_{MM} = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\| \frac{J_0 l_i}{J_i l_0}. \tag{4}$$

Элементы g^*_{jk} матрицы работы внешних сил G^*, направленных вдоль стержней, находим по формуле

$$g^*_{jk} = \int_0^{l_i} N_i v'_j v'_k\, dx. \tag{5}$$

Получаем

$$G^* = \left\| \begin{array}{c|c} G_{vv}\dfrac{N_0}{l_0} & 0 \\ \hline 0 & G_{MM}\dfrac{N_0 l_0^3}{36EJ_0} \end{array} \right\| \tag{6}$$

где

$$G_{vv} = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right\| \frac{N_i l_0}{N_0 l_i}; \qquad G_{MM} = \left\| \begin{matrix} 0{,}8 & 0{,}7 \\ 0{,}7 & 0{,}8 \end{matrix} \right\| \frac{N_i l_i^3 J_0^2}{N_0 l_0^3 J_i^2}. \tag{7}$$

Элементы h^*_{jk} матрицы работы сил инерции H^* находим по формуле

$$h^*_{jk} = \int_0^{l_i} m\omega^2 v_j v_k \, dx . \qquad (8)$$

Получаем

$$H^* = \left\| \begin{array}{c:c} H_{vv} \dfrac{m_0 l_0}{6} & H_{vm} \dfrac{m_0 l_0^3}{36 E J_0} \\ \hdashline H_{mv} \dfrac{m_0 l_0^3}{36 E J_0} & H_{mm} \dfrac{m_0 l_0^5}{216 (E J_0)^2} \end{array} \right\| , \qquad (9)$$

где

$$H_{vv} = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\| \frac{m_i l_i}{m_0 l_0}$$

$$H_{vm} = H_{mv} = \left\| \begin{matrix} 0{,}8 & 0{,}7 \\ 0{,}7 & 0{,}8 \end{matrix} \right\| \frac{m_i l_i^3 J_0}{m_0 l_0^3 J_i} \qquad (10)$$

$$H_{mm} = \left\| \begin{matrix} 32 & 31 \\ 31 & 32 \end{matrix} \right\| \frac{m_i l_i^5 J_0^2}{70 m_0 l_0^5 J_i^2} .$$

В формулах (3-10) через l_0, J_0, N_0 и m_0 обозначены эталонные произвольно заданные значения длины стержня, момента инерции, продольной силы и интенсивности массы. Положительной считается сжимающая продольная сила.

Для всей рамы матрицы F, G и H являются квазидиагональными матрицами, где отдельным блокам соответствуют отдельные стержни.

Приложим к раме следующие силы и найдем изгибающие моменты от них в характерных точках (концы отдельных стержней):

а) Силы, необходимые для создания возможных перемещений. Матрицу изгибающих моментов от этих сил обозначаем через $B_1^* = B_1 l_0$.

б) Единичные силы, при помощи которых находим перемещения характерных точек. Матрицу изгибающих моментов от этих сил обозначаем через $B_2^* = B_2 l_0$.

Работа внутренних сил (с обратным знаком)

$$D^* = D \frac{l_0^3}{6 E J_0} , \qquad (11)$$

где

$$D = B_1' F B_1 . \qquad (12)$$

Матрица перемещений характерных точек

$$V^* = V\frac{l_0^3}{6EJ_0}, \qquad (13)$$

где

$$V = B_2' F B_1. \qquad (14)$$

Работа внешних сил, направленных вдоль стержней

$$A_p^* = A_p \frac{N_0 l_0^5}{36(EJ_0)^2}, \qquad (15)$$

где

$$A_p = V' G_{vv} V + B_1' G_{MM} B_1. \qquad (16)$$

Для определения критической силы N_0 находим параметр λ из условия равенства нулю определителя, составленного из разностей элементов матрицы D^* и A_p^*. Учитывая выражения (11) и (15), получаем

$$\mathrm{Det}(D\lambda - A_p) = 0, \qquad (17)$$

откуда находим параметр λ. Критическую силу N_0 находим по формуле

$$N_0 = \frac{6EJ_0}{\lambda_{max} l_0^2}. \qquad (18)$$

Работа сил инерции

$$A_\omega^* = A_\omega \frac{\omega^2 m_0 l_0^7}{216(EJ_0)^2}, \qquad (19)$$

где

$$A_\omega = V' H_{vv} V + V' H_{vM} B_1 + B_1' H_{Mv} V + B_1' H_{MM} B_1. \qquad (20)$$

Параметр $\varkappa$ для определения частот ω собственных колебаний находим по формуле

$$\mathrm{Det}(D\varkappa - A_\omega) = 0 \qquad (21)$$

и соответствующая частота собственных колебаний

$$\omega = \frac{6}{l_0^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{\varkappa m_0}}. \qquad (22)$$

При наличии сосредоточенных масс и стержней, перемещающихся вдоль своей оси, прибавляются в соответствующих местах матрицы H_{vv} еще дополнительные члены $6M/m_0 l_0$, где через M обозначена колеблющаяся масса.

Литература

1. Н.В Корноухов. Прочность и устойчивость стержневых систем. Стройиздат. М. 1949.

2. Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем. Сборник переводов под редакцией А.П. Филина. Судпромгиз, Л. 1961.

3. А.П. Филин. Матрицы в статике стержневых систем Стройиздат, М. 1966.

R. Eek

The Determination of Critical Loads and Resonant Frequencies for Elastic Frames by Unit Force Method

Summary

This paper presents an approximate method for the investigation of flexural buckling and determination of resonant frequencies of elastic plane frames with members of constant cross-section.

The method is based on the theorem of virtual displacements. Virtual displacements are caused by a system of unit loads, and displacements of the knots of the frame are found by unit force method. The potential energy of internal forces and loads and the kinetic energy are determined by bending moments and displacements at the ends of the members of the frame. The solution is given in matrix formulation.

При наличии сосредоточенных масс в стержнях, прикрепленных вдоль своей оси, прибавляются к соответствующим элементам матрицы K_{ii} еще дополнительные члены $6M/m_i l_i$, где через M обозначена колеблющаяся масса.

Литература

1. Н.В.Корноухов. Прочность и устойчивость стержневых систем. Стройиздат. М. 1949.

2. Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем. Сборник переводов под редакцией А.П. Филина. Судпромгиз. Л. 1961.

3. А.П. Филин. Матрицы в статике стержневых систем. Стройиздат. М. 1966.

R. Pak

The Determination of Critical Loads and Resonant Frequencies for Elastic Frames by Unit Forces Method

Summary

This paper presents an approximate method for the investigation of flexural buckling and determination of resonant frequencies of elastic plane frames with members of constant cross-section.

The method is based on the theorem of virtual displacements. Virtual displacements are caused by a system of unit loads, and displacements of the nodes of the frame are found by unit force method. The potential energy of internal forces and loads and the kinetic energy are determined by bending moments and displacements at the ends of the members of the frame. The solution is given in matrix formulation.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 297 1970

УДК 624.04I

Ю.К. Вилипыльд

РАСЧЕТ РЕБРИСТЫХ ПЛИТ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В работе [3] было рассмотрено применение дискретного вариационного метода, предложенного Р.Цурмюлем [5], для получения уравнений и матриц при расчете стержневых и пластинчатых систем на прочность, устойчивость и колебания методом конечных элементов. Ниже аналогичный подход применяется к расчету пластин, подкрепленных прямоугольной сеткой эксцентренно расположенных ребер прямоугольного поперечного сечения. Расчет производится по общему алгоритму метода конечных элементов, описанному в работе [4].

При расчете учитывается: изгиб и плоское напряженное состояние пластины; изгиб в вертикальной плоскости, продольные деформации и кручение ребер. Изгиб ребер в горизонтальной плоскости не учитывается. Такие же исходные предпосылки использованы в работах Н.П. Абовского и Л.В. Енджиевского [I] и А.М. Азархина [2]. В работе [I] задача решалась вариационно-разностным методом, в [2] — дискретным вариационным методом, близким к методу прямых Л.В. Канторовича.

При расчете методом конечных элементов пластина разбивается на элементы прямоугольной сеткой линий. Шаг сетки в обоих направлениях может быть переменным. Обязательным является условие, чтобы ребра находились на линиях сетки. Ребро может быть отнесено целиком к одному элементу, либо распределено между смежными элементами.

Практически наиболее удобной является сетка, в которой линии деления совпадают в плане с осями ребер фиг. I. В этом случае жесткости ребер, не лежащих на контуре, делятся поровну на смежные элементы (например, элемент АБВГ фиг. I). Контурные ребра целиком относятся к одному элементу.

В качестве "стандартного" элемента (фиг. I б) принимается прямоугольная пластина, на всех кромках которой имеются ребра прямоугольного поперечного сечения. Жесткости ребер в общем случае принимаются все различными. Если по некоторым кромкам (а возможно и всем) ребра отсутствуют,то соответствующие жесткостные характеристики принимаются равными нулю. Такой выбор элемента позволяет легко учесть различные нерегулярности в пластине: неравные расстояния между ребрами, неравные жесткости ребер, вырезы и т.п.

В качестве параметров, с помощью которых приближенно описывается напряженно-деформированное состояние элемента, принимаются обобщенные перемещения узлов элемента w_j (j = = I, 2 ... 20) в срединной поверхности пластины. В каждом узле принимается пять параметров: три линейных и два угловых перемещения (см. фиг. I б).

Энергию внутренних сил элемента (равно и всей системы) можно представить в виде суммы:

$$П_{эл} = П_1 + П_2 + П_3 + П_4 + П_5 , \tag{I}$$

где: $П_1$ - энергия сил, действующих в срединной поверхности пластины,

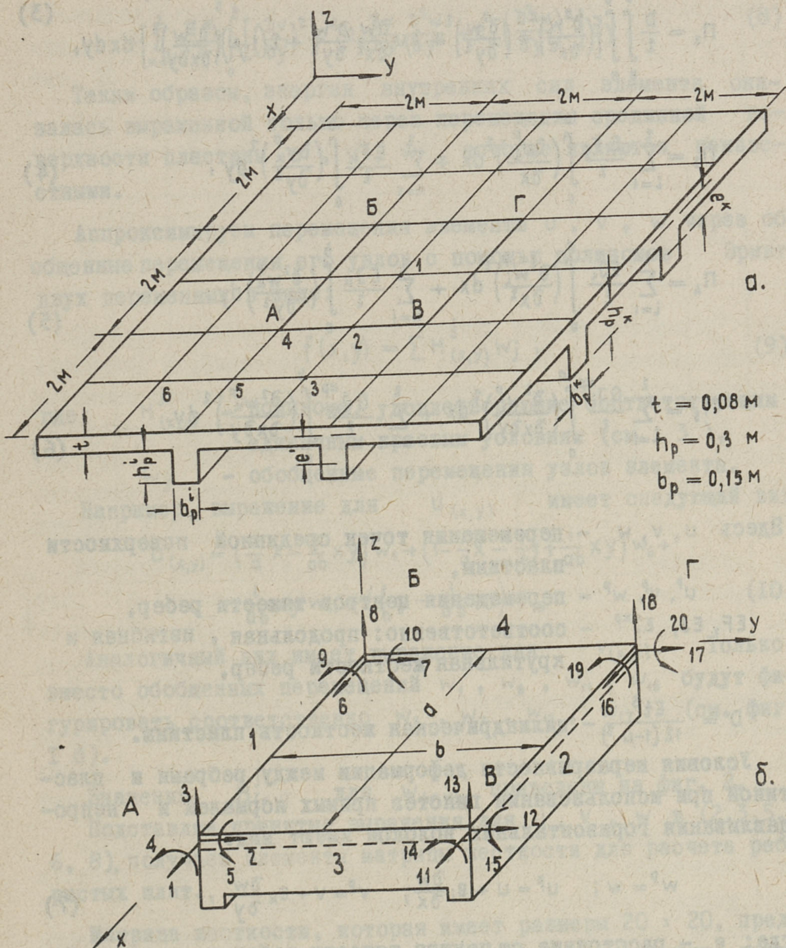
$П_2$ - энергия изгиба пластины,

$П_3$ - энергия растяжения (сжатия) ребер,

$П_4$ - энергия изгиба ребер,

$П_5$ - энергия кручения ребер,

$$П_1 = \frac{Et}{2(1-\mu^2)}\int_0^a\int_0^b\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]dx\,dy, \tag{2}$$



z
y
x
2м
2м
2м
2м
2м
2м
Б
Г
А
В
1
2
3
4
5
6
a.
t = 0,08 м
h_p = 0,3 м
b_p = 0,15 м
z
Б
Г
8
10
9
7
6
4
18
20
y
17
19
16
a
1
b
2
B
13
3
A
4
12
2
14
3
11
15
5
1
x
б.

Фиг. 1

$$\Pi_2 = \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dx\,dy, \tag{3}$$

$$\Pi_3 = \sum_{i=1}^{2}\frac{EF_i}{2}\int_0^a\left(\frac{\partial u_i^p}{\partial x}\right)^2 dx + \sum_{k=1}^{2}\frac{EF_k}{2}\int_0^b\left(\frac{\partial v_k^p}{\partial y^2}\right)^2 dy, \tag{4}$$

$$\Pi_4 = \sum_{i=1}^{2}\frac{EJ_i}{2}\int_0^a\left(\frac{\partial^2 w_i^p}{\partial x^2}\right)^2 dx + \sum_{k=1}^{2}\frac{EJ_k}{2}\int_0^b\left(\frac{\partial^2 w_k^p}{\partial y^2}\right) dy, \tag{5}$$

$$\Pi_5 = \sum_{i=1}^{2}\frac{GJ_i^{кр}}{2}\int_0^a\left(\frac{\partial^2 w_i^p}{\partial x\partial y}\right)^2 dx + \sum_{k=1}^{2}\frac{GJ_k^{кр}}{2}\int_0^b\left(\frac{\partial^2 w_k^p}{\partial x\partial y}\right)^2 dy. \tag{6}$$

Здесь u, v, w – перемещения точек срединной поверхности пластины,

u^p, v^p, w^p – перемещения центров тяжести ребер,

$EF, EJ, EJ^{кр}$ – соответственно: продольная, изгибная и крутильная жесткости ребер,

$D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластины.

Условия неразрывности деформации между ребрами и пластиной при использовании гипотез прямых нормалей и непродавливания горизонтальных волокон имеют вид:

$$w^p = w; \quad u^p = u + e_i\frac{\partial w}{\partial x}; \quad v^p = v + e_k\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{7}$$

где: e – расстояние от центра тяжести ребра до срединной поверхности пластины (фиг. I а).

Подставляя (7) в (4,5,6), получаем энергию ребер, выраженную через перемещения срединной поверхности пластины. Выражения (5,6) внешне остаются без изменения, только под w_i^p, w_k^p будет подразумеваться перемещение соответствующей кромки пластины. Выражение (4) принимает вид:

$$\Pi_3=\sum_{i=1}^{2}\frac{EF_i}{2}\int_0^a\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2e_i\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+e_i^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\right]dx+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\frac{EF_k}{2}\int_0^b\left[\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2e_k\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+e_k^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right]dy\,. \qquad (8)$$

Таким образом, энергия внутренних сил элемента оказалась выраженной только через перемещения срединной поверхности пластины u , v , w , которые являются неизвестными.

Аппроксимируем перемещения элемента u , v , w через обобщенные перемещения его узлов с помощью полиномов Эрмита двух переменных в виде:

$$f(x,y)=\sum H^{j}_{(x,y)}w_j\,, \qquad (9)$$

где: $H^{j}_{(x,y)}$ – полиномы, удовлетворяющие соответствующим единичным краевым условиям (см. 3),

w_j – обобщенные перемещения узлов элемента.

Например, выражение для $u_{(x,y)}$ имеет следующий вид:

$$u_{(x,y)}=\left(\frac{1}{a}x-\frac{1}{ab}xy\right)w_1+\left(1-\frac{1}{a}x-\frac{1}{b}y+\frac{1}{ab}xy\right)w_6+$$
$$+\frac{1}{ab}xy\,w_{11}+\left(\frac{1}{b}y-\frac{1}{ab}xy\right)w_{16}\,. \qquad (10)$$

Аналогичный вид имеет выражение для $v_{(x,y)}$. Только вместо обобщенных перемещений w_1 , w_6 , w_{11} , w_{16} будут фигурировать соответственно w_2 , w_7 , w_{12} , w_{17} (см. фиг. I б).

Значения $H^{j}_{(x,y)}$ для $w_{(x,y)}$ приведены на фиг. 2.

Подставляя принятые выражения для u , v , w в (2,3,5, 6, 8), получаем элементы матрицы жесткости для расчета ребристых плит.

Матрица жесткости, которая имеет размеры 20 × 20, представлена на фиг. 3,4,5 в виде подматриц, отражающих влияние отдельных видов деформаций (изгиб пластины, изгиб ребер и т.д.).

Подставляя принятое выражение для $w_{(x,y)}$ (фиг. 2) в (3), получаем матрицу, учитывающую изгиб пластины (фиг.3а, показана верхняя симметричная часть). Данная матрица может быть непосредственно использована для расчета пластин без ребер.

	1	x	y	x^2	xy	y^2	x^3	x^2y	xy^2	y^3	x^3y	xy^3
H_3	0	0	0	$3/a^2$	$1/ab$	0	$-2/a^3$	$-3/a^2b$	$-3/ab^2$	0	$2/a^3b$	$2/ab^3$
H_4	0	0	0	0	$1/a$	0	0	0	$-2/ab$	0	0	$1/ab^2$
H_5	0	0	0	$1/a$	0	0	$-1/a^2$	$-1/ab$	0	0	$1/a^2b$	0
H_8	1	0	0	$-3/a^2$	$-1/ab$	$-3/b^2$	$2/a^3$	$3/a^2b$	$3/ab^2$	$2/b^3$	$-2/a^3b$	$-2/ab^3$
H_9	0	0	1	0	$-1/a$	$-2/b$	0	0	$2/ab$	$1/b^2$	0	$-1/ab^2$
H_{10}	0	-1	0	$2/a$	$1/b$	0	$-1/a^2$	$-2/ab$	0	0	$1/a^2b$	0
H_{13}	0	0	0	0	$-1/ab$	0	0	$3/a^2b$	$3/ab^2$	0	$-2/a^3b$	$-2/ab^3$
H_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	$-1/ab$	0	0	$1/ab^2$
H_{15}	0	0	0	0	0	0	0	$1/ab$	0	0	$-1/a^2b$	0
H_{18}	0	0	0	0	$1/ab$	$3/b^2$	0	$-3/a^2b$	$-3/ab^2$	$-2/b^3$	$2/a^3b$	$2/ab^3$
H_{19}	0	0	0	0	0	$-1/b$	0	0	$1/ab$	$1/b^2$	0	$-1/ab^2$
H_{20}	0	0	0	0	$-1/b$	0	0	$2/ab$	0	0	$-1/a^2b$	0

Фиг. 2

Коэффициенты, учитывающие продольную деформацию, изгиб и кручение ребер, а также их эксцентреситет, получим из выражений (5,6,8). Для этого следует в указанные выражения последовательно для каждого ребра подставить соответствующие перемещения кромок пластины, определяемые из (I0) и фиг. 2.

Так, например, вертикальное перемещение кромки элемента, совпадающее с осью X (фиг. I б), имеет вид:

$$w_{(x,0)} = \left(\frac{3}{a^2}x^2 - \frac{2}{a^3}x^3\right)w_3 + \left(\frac{1}{a}x^2 - \frac{1}{a^2}x^3\right)w_5 + \\ + \left(1 - \frac{3}{a^2}x^2 + \frac{2}{a^3}x^3\right)w_8 + \left(-x + \frac{2}{a}x^2 - \frac{1}{a^2}x^3\right)w_{10}. \tag{II}$$

Следует отметить, что перемещения кромок пластины от единичных перемещений ее узлов совпадают с перемещениями отдельного стержня от тех же факторов. Тем самым обеспечивается совместность между ребрами и пластиной не только в узлах, но и в любой другой точке кромок пластины и реакции от единичных перемещений совпадают с реакциями отдельного стержня в методе деформации.

Матрица жесткости, учитывающая изгиб ребер, приведена на фиг. 3 б (показана нижняя симметричная часть). Она получена из выражения (5) с учетом последних членов в квадратных скобках выражения (8).

На фиг. 4 приведены матрицы, учитывающие кручение ребер. Верхняя матрица (фиг. 4 а) учитывает влияние I-го и 2-го ребра, а нижняя - 3-го и 4-го. Нумерация ребер показана на фиг. I б.

Матрица реакций, учитывающая плоское напряженное состояние пластины и растяжение-сжатие ребер, приведена на фиг. 5 (а, б). Здесь же (фиг. 5 в) приведены реакции, соответствующие вторым членам в квадратных скобках выражения (8).

Суммируя отдельные матрицы с учетом нумерации обобщенных перемещений по фиг. I б, получаем полную матрицу жесткости.

При наличии матрицы жесткости формирование системы уравнений не вызывает затруднений. Внешняя распределенная нагрузка предполагается приведенной к узловой.

a.

		3	4	5	8	9	10	13	14	15	18	19	20
3	D_1+D_3	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
4	C_3	B_3	P_{13}	P_{14}	P_5	P_{15}	0	$-P_8$	P_{16}	0	$-P_{11}$	P_{17}	0
5	C_1	0	B_1	P_{18}	$-P_6$	0	P_{19}	P_9	0	P_{20}	$-P_{12}$	0	P_{21}
8	$-D_1$	0	$-C_1$	D_1+D_4	P_1	P_2	$-P_3$	P_{10}	P_{11}	$-P_{12}$	P_7	P_8	$-P_9$
9	0	0	0	C_4	B_4	P_{13}	$-P_{14}$	$-P_{11}$	P_{17}	0	$-P_8$	P_{16}	0
10	C_1	0	A_1	$-C_1$	0	B_1	P_{18}	P_{12}	0	P_{21}	$-P_9$	0	P_{20}
13	$-D_3$	$-C_3$	0	0	0	0	D_2+D_3	P_1	$-P_2$	P_3	P_4	$-P_5$	P_6
14	C_3	A_3	0	0	0	0	$-C_3$	B_3	P_{13}	$-P_{14}$	$-P_5$	P_{15}	0
15	0	0	0	0	0	0	C_2	0	B_2	P_{18}	$-P_6$	0	P_{19}
18	0	0	0	$-D_4$	$-C_4$	0	$-D_2$	0	$-C_2$	D_2+D_4	P_1	$-P_2$	$-P_3$
19	0	0	0	C_4	A_4	0	0	0	0	$-C_4$	B_4	P_{13}	P_{14}
20	0	0	0	0	0	0	C_2	0	A_2	$-C_2$	0	B_2	P_{18}
	3	4	5	8	9	10	13	14	15	18	19	20	

б.

в.

P_1	$\frac{4a}{b^3}+\frac{4b}{a^3}+\frac{2\mu}{ab}+\frac{14\lambda}{5ab}$	P_{12}	$\frac{b}{a^2}-\frac{\lambda}{5b}$
P_2	$\frac{2a}{b^2}+\frac{\mu}{a}+\frac{\lambda}{5a}$	P_{13}	$\frac{4a}{3b}+\frac{4\lambda b}{15a}$
P_3	$\frac{2b}{a^2}+\frac{\mu}{b}+\frac{\lambda}{5b}$	P_{14}	μ
P_4	$\frac{2a}{b^3}-\frac{4b}{a^3}-\frac{2\mu}{ab}-\frac{14\lambda}{5ab}$	P_{15}	$\frac{2a}{3b}-\frac{4\lambda b}{15a}$
P_5	$\frac{a}{b^2}-\frac{\mu}{a}-\frac{\lambda}{5a}$	P_{16}	$\frac{2}{3}\frac{a}{b}-\frac{1}{15}\lambda\frac{b}{a}$
P_6	$\frac{2b}{a^2}+\frac{\lambda}{5b}$	P_{17}	$\frac{1}{3}\frac{a}{b}+\frac{1}{15}\lambda\frac{b}{a}$
P_7	$-\frac{4a}{b^3}+\frac{2b}{a^3}-\frac{2\mu}{ab}-\frac{14\lambda}{5ab}$	P_{18}	$\frac{4}{3}\frac{b}{a}+\frac{4}{15}\lambda\frac{a}{b}$
P_8	$\frac{2a}{b^2}+\frac{\lambda}{5a}$	P_{19}	$\frac{2}{3}\frac{b}{a}-\frac{1}{15}\lambda\frac{a}{b}$
P_9	$\frac{b}{a^2}-\frac{\mu}{b}-\frac{\lambda}{5b}$	P_{20}	$\frac{2}{3}\frac{b}{a}-\frac{4}{15}\lambda\frac{a}{b}$
P_{10}	$-\frac{2a}{b^3}-\frac{2b}{a^3}+\frac{2\mu}{ab}+\frac{14\lambda}{5ab}$	P_{21}	$\frac{1}{3}\frac{b}{a}+\frac{1}{15}\lambda\frac{a}{b}$
P_{11}	$\frac{a}{b^2}-\frac{\lambda}{5a}$		$\lambda=1-\mu$

$\times D$

$$A_i=\frac{2EJ_i^*}{L_i};\quad B_i=\frac{4EJ_i^*}{L_i};\quad C_i=\frac{6EJ_i^*}{L_i};\quad D_i=\frac{12EJ_i^*}{L_i^3};\quad J_i^*=J_i+e_i^2F_i\,.$$

Фиг. 3

а.

		3	4	5	8	9	10	13	14	15	18	19	20
3	T_1	K_1	0	K_2	$-K_1$	0	K_2	$-K_1$	0	$-K_2$	K_1	0	$-K_2$
4	T_2	T_4	K_3	0	0	$-K_3$	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	T_3	K_4	$-K_2$	0	$-K_5$	$-K_2$	0	$-K_4$	K_2	0	K_5
8	$-T_1$	$-T_2$	0	T_1	K_1	0	$-K_2$	K_1	0	K_2	$-K_1$	0	K_2
9	$-T_2$	$-T_4$	0	T_2	T_4	K_3	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	T_6	K_4	$-K_2$	0	K_5	K_2	0	$-K_4$
13	$-T_1$	$-T_2$	0	T_1	T_2	0	T_1	K_1	0	K_2	$-K_1$	0	K_2
14	T_2	$-T_5$	0	$-T_2$	T_5	0	$-T_2$	T_4	K_6	0	0	$-K_6$	0
15	0	0	$-T_3$	0	0	0	0	0	T_3	K_4	$-K_2$	0	$-K_5$
18	T_1	T_2	0	$-T_1$	$-T_2$	0	$-T_1$	T_2	0	T_1	K_1	0	$-K_2$
19	$-T_2$	T_5	0	T_2	$-T_5$	0	T_2	$-T_4$	0	$-T_2$	T_4	K_6	0
20	0	0	0	0	0	$-T_6$	0	0	0	0	0	T_6	K_4
	3	4	5	8	9	10	13	14	15	18	19	20	

б.

$$K_1 = \frac{G}{5ab^2}\left(J_1^к + J_2^к\right); \qquad K_2 = \frac{G}{10b^2}\left(J_1^к + J_2^к\right);$$

$$K_3 = \frac{GJ_1^к}{a}; \qquad K_4 = \frac{2Ga}{15b^2}\left(J_1^к + J_2^к\right);$$

$$K_5 = \frac{Ga}{30b^2}\left(J_1^к + J_2^к\right); \qquad K_6 = \frac{GJ_2^к}{a};$$

$$T_1 = \frac{G}{5a^2b}\left(J_3^к + J_4^к\right); \qquad T_2 = \frac{G}{10a^2}\left(J_3^к + J_4^к\right);$$

$$T_3 = \frac{GJ_3^к}{b}; \qquad T_4 = \frac{2Gb}{15a^2}\left(J_3^к + J_4^к\right);$$

$$T_5 = \frac{Gb}{30a^2}\left(J_3^к + J_4^к\right); \qquad T_6 = \frac{GJ_4^к}{b}.$$

Фиг. 4

а.

	1	2	6	7	11	12	16	17
1	V_1	$-V_2$	V_3	V_4	V_5	$-V_4$	V_6	V_2
2		V_7	$-V_4$	V_8	V_4	V_9	V_2	V_{10}
6			V_1	V_2	V_6	$-V_2$	V_5	V_4
7				V_{11}	$-V_2$	V_{10}	$-V_4$	V_{12}
11					V_{13}	V_2	V_{14}	$-V_4$
12						V_7	V_4	V_8
16							V_{13}	$-V_2$
17								V_{11}

$$m = \frac{a}{b}$$

$$A = \frac{1-\mu}{6}$$

$$d = \frac{Et}{1-\mu^2}$$

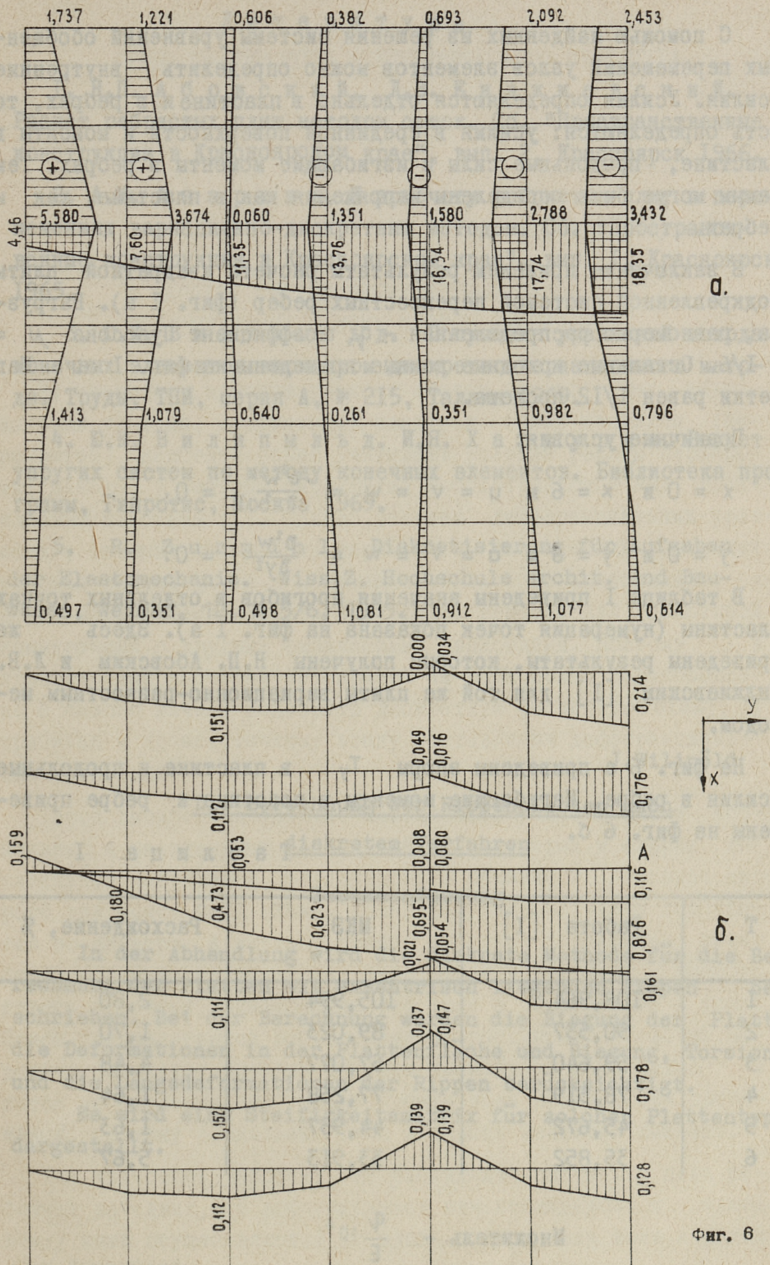
б.

V_1	$d\left(\frac{1}{3m} + Am\right) + \frac{EF_1}{a}$	V_8	$d\left(\frac{m}{6} - \frac{A}{m}\right)$
V_2	$\frac{1+\mu}{8} d$	V_9	$d\left(-\frac{m}{3} + \frac{A}{2m}\right) - \frac{EF_3}{b}$
V_3	$d\left(-\frac{1}{3m} + \frac{Am}{2}\right) - \frac{EF_1}{a}$	V_{10}	$d\left(-\frac{m}{6} - \frac{A}{2m}\right)$
V_4	$\frac{1-3\mu}{8} d$	V_{11}	$d\left(\frac{m}{3} + \frac{A}{m}\right) + \frac{EF_4}{b}$
V_5	$d\left(\frac{1}{6m} - Am\right)$	V_{12}	$d\left(-\frac{m}{3} + \frac{A}{2m}\right) - \frac{EF_4}{b}$
V_6	$d\left(-\frac{1}{6m} - \frac{Am}{2}\right)$	V_{13}	$d\left(\frac{1}{3m} + Am\right) + \frac{EF_2}{b}$
V_7	$d\left(\frac{m}{3} + \frac{A}{m}\right) + \frac{EF_3}{b}$	V_{14}	$d\left(-\frac{1}{3m} + \frac{Am}{2}\right) - \frac{EF_2}{a}$

в.

$R_{1,10}$; $R_{5,6}$	$\frac{e_1 E F_1}{a}$	$R_{1,5}$; $R_{6,10}$	$-\frac{e_1 E F_1}{a}$
$R_{11,20}$; $R_{15,16}$	$\frac{e_2 E F_2}{a}$	$R_{11,15}$; $R_{16,20}$	$-\frac{e_2 E F_2}{a}$
$R_{2,4}$; $R_{12,14}$	$\frac{e_3 E F_3}{b}$	$R_{2,14}$; $R_{4,12}$	$-\frac{e_3 E F_3}{b}$
$R_{7,9}$; $R_{17,19}$	$\frac{e_4 E F_4}{b}$	$R_{7,19}$; $R_{9,17}$	$-\frac{e_4 E F_4}{b}$

Фиг. 5


1,737
1,221
0,606
0,382
0,693
2,092
2,453
+
+
−
−
−
−
4,46
5,580
3,674
0,060
1,351
1,580
2,788
3,432
7,60
11,35
13,76
16,34
17,74
18,35
а.
1,413
1,079
0,640
0,261
0,351
0,982
0,796
0,497
0,351
0,498
1,081
0,912
1,077
0,614
0,000
0,034
0,214
0,151
0,049
0,016
0,176
0,112
0,159
0,053
0,088
0,080
A
0,116
0,180
0,473
0,623
0,695
0,826
0,021
0,054
б.
0,111
0,161
0,137
0,147
0,178
0,152
0,139
0,139
0,128
0,112
y
x

Фиг. 6

С помощью найденных из решения системы уравнений обобщенных перемещений узлов элементов можно определить внутренние усилия. Усилия определяются отдельно в пластине и в ребрах, то есть определяются: усилия в срединной поверхности и моменты в пластине, продольные силы и изгибающие моменты в ребрах. Тем самым могут быть определены напряжения как в пластине, так и ребрах.

В заключение приведем результаты расчета квадратной плиты, подкрепленной системой перекрестных ребер (фиг. I а). Нагрузка, равномерно распределенная – q, коэффициент Пуассона μ = = I/6. Остальные исходные данные приведены на фиг. I а. Шаг сетки равен I/I2 пролета.

Граничные условия:

$$x = 0 \text{ и } x = 6 \text{ м } \quad u = v = w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

$$y = 0 \text{ и } y = 6 \text{ м } \quad u = v = w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

В таблице I приведены значения прогибов в отдельных точках пластины (нумерация точек показана на фиг. I а). Здесь же приведены результаты, которые получены Н.П. Абовским и Л.В. Енджиевским [I] для той же плиты вариационно-разностным методом.

На фиг. 6 а приведены эпюры T_y в пластине и продольные усилия в ребре. Изгибающие моменты в пластине и ребре приведены на фиг. 6 б.

Таблица I

Т	Работа [I]	МКЭ	Расхождение, %
I	I08,964	I05,994	2,80
2	90,537	89,023	I,70
3	59,640	57,077	4,48
4	78,5I9	77,258	I,64
5	45,672	44,937	I,63
6	35,852	33,9I3	5,67

Множитель – $\frac{q}{E} 10^4$

Л и т е р а т у р а

I. Н.П. А б о в с к и й, Л.В. Е н д ж и е в с к и й. Расчет ребристых плит методом сеток. Сб. "Пространственные конструкции в Красноярском крае", вып. 2, Красноярск 1966.

2. А.М. А з а р х и н. К арасчету ребристых плит в перемещениях вариационно-дискретным методом. Сб. "Пространственные конструкции в Красноярском крае", вып. I, Красноярск 1965.

3. Ю.К. В и л и п ы л ь д. Получение уравнений метода конечных элементов вариантом дискретно-вариационного метода. Труды, ТПИ, серия А, № 215, Таллин 1969.

4. Ю.К. В и л и п ы л ь д. И.Я. Х а р х у р и м. Расчет упругих систем по методу конечных элементов. Библиотека программ, Гипротис, Москва 1969.

5. R. Z u r m ü h l. Diskretisierung für Aufgaben der Elastomechanic. Wiss.Z. Hochschule archit. und Bauwesen, Weimar, 12, № 5/6, 1965.

J.Wilipõld

Die Berechnung der Rippenplatten nach diskretem Verfahren

Zusammenfassung

In der Abhandlung wird die diskrete Methode für die Berechnung der Platten mit exzentrisch liegenden Rippen beschrieben. Bei der Berechnung werden die Biegung der Platte, die Deformationen in der Plattenfläche und Biegung, Torsion und die Längsdeformationen der Rippen berücksichtigt.

Es wird eine Steifigkeitsmatrix für solchen Plattentyp dargestellt.

Литература

1. Н.Д. А н д р о н с к и й, Л.Л. Б е л и к в и н. Расчет ребристых плит методом сеток. Сб. "Пространственные конструкции в Красноярском крае", вып. 2, Красноярск 1966.

2. А.М. [illegible]. [illegible] оболочек вариационно-дискретным методом. Сб. "Пространственные конструкции в Красноярском крае", вып. 1, Красноярск 1965.

3. [illegible]. Исследование [illegible] методом [illegible] вариантом дискретно-вариационного метода. Труды, ТПИ, серия А, № 275, Таллин 1969.

4. [illegible]. Расчет упругих систем по методу конечных элементов. Библиотека программ, "Недра", Москва 1969.

5. R. S z i l a r d. Diskretisierung für Aufgaben der Elastostatik. Wiss. Z. Hochschule archit. und Bauwesen, Weimar, 13, 1966.

J. Filipčík

Berechnung der Platten nach dem

diskreten Verfahren

Zusammenfassung

In der Abhandlung wird die diskrete Methode für die Berechnung der Platten mit exzentrisch liegenden Rippen beschrieben. Bei der Berechnung werden die Biegung der Platte, die Deformationen in der Mittelfläche und Biegung, Torsion und die Längsdeformationen der Rippen berücksichtigt.

Es wird eine übersichtliche Lösungsmatrix für solchen Plattentyp dargestellt.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 297 1970

УДК 624.041.2

Е.К. Трунов, Б.Н. Ясулович

К РАСЧЕТУ СИСТЕМ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК, ПОДКРЕПЛЕННЫХ С ДВУХ СТОРОН НАСТИЛОМ

Из известных методов расчета систем перекрестных вертикальных пластин, соединенных сверху и снизу настилом (перекрытий), наиболее полно учитывают условия работы перекрытий методы, в которых перекрытие рассматривается как трехслойная пластина [I]. Однако решение дифференциальных уравнений, описывающих работу перекрытия, для сложных граничных условий производится приближенно. Всякое же приближенное решение можно рассматривать как точное решение для некоторой конструкции с другими физическими свойствами. Поэтому в практических расчетах перекрытий на ЭЦВМ более целесообразно с самого начала подобрать дискретную расчетную схему, не прибегая к промежуточному этапу составления дифференциальных уравнений.

Такой дискретной схемой, позволяющей учесть, кроме нормальных и касательных напряжений в стрингерах и флорах касательные напряжения, возникающие в обшивке и настиле второго дна, может быть схема, идеализирующая элементы перекрытия по Вагнеру. А именно, каждая пластина перекрытия может быть представлена как поле, работающее в условиях чистого сдвига и поясов, окаймляющих это поле и соединенных в узлах. Пояса предполагаются работающими на растяжение и сжатие. Передача сил между поясами и полем происходит непрерывно и поток касательных сил вдоль кромки поля принимается постоянным, поэтому продольные силы в поясах меняются линейно.

Так как пояса работают на растяжение-сжатие, а поле работает на сдвиг, то деформируются они неодинаково и связь между ними осуществляется не вдоль всей кромки поля, а условно в "среднем".

Так как перемещения узловых точек панели и заменяющей ее конструкции должны быть одинаковы при чистом сдвиге, то следует, что размеры панели и поля, сопротивляющегося сдвигу, должны быть одинаковы.

Из условия равенства перемещений узлов реальной пластины и идеализированной следует, что при растяжении-сжатии площади поясов должны равняться половине произведения ширины и толщины пластины.

Алгоритм расчета пластинчатых систем с применением идеализации элементов по Вагнеру был предложен Аргиросом [2]. Согласно алгоритму Аргироса, для формирования системы канонических уравнений метода сил требуется произвести ряд матричных операций, именно перемножение трех матриц:

$$D = b_1' f b_1 , \qquad (I)$$

где

D – матрица коэффициентов системы уравнений,

b_1 – матрица усилий,

f – матрицв податливости,

b_1' – матрица, транспонирования по отношению к b_1.

Порядок матриц b_1, b_1' и f для реальных конструкций, как правило,больше IOO. Это значит, что на ЭВМ среднего класса с оперативной памятью до 8000 ячеек этот алгоритм осуществить затруднительно. Кроме того, указанные матрицы имеют много нулевых элементов и при перемножении по формуле (I) значительная часть машинного времени используется неэффективно. Применение же различных методов исключения нулевых элементов при перемножении матриц, например логических шкал, усложняет программу.

Указанных недостатков алгоритма Аргироса лишены алгоритм и программа МКЭ, разработанные Ю.К. Вилипыльдом в Таллинском политехническом институте [3]. По программе МКЭ формирование системы канонических уравнений метода деформаций осуществляется с помощью так называемой матрицы индексов Т . Элементы этой матрицы показывают, какие неизвестные из общей системы относятся к данному элементу. Узловые реакции элементов сведены в матрицы реакций. Последние получены в работе [3] дискретно вариационным методом, близким к методу Эйлера.

Благодаря применению матрицы T время, затраченное на формирование системы уравнений, мало, например, для формирования системы уравнений с 1000 неизвестными на машине "Минск-22" потребовалось всего 300 сек. По программе МКЭ структура матрицы системы канонических уравнений получается ленточной, и порядок ее может достигать 3000.

Так как рассчитать перекрытие по программе МКЭ, принимая за расчетный элемент пластину, невозможно из-за ограниченной оперативной памяти современных ЭВМ, авторы в данной работе применили следующий подход:

1) в качестве элемента перекрытия принята не стержень или пластина, а коробка (укрупненный элемент),

2) пластины коробки идеализируются по Вагнеру,

3) в основу получения матрицы реакций в узлах коробки положен метод сил,

4) формирование системы уравнений метода деформаций для перекрытий, ее решение и определение усилий производятся по программе МКЭ.

Рассмотрим вопрос получения матрицы жесткости коробки.

Выделим мысленно из перекрытия коробку, образованную двумя взаимно-перпендикулярными парами стрингеров и флор, а также пластинами обшивки и второго дна. Закрепим, опять-таки мысленно, узлы коробки связями, препятствующими перемещению горизонтальных и вертикальных стержней (пояса, окаймляющие поле, называют также стержнями) в направлении их продольной оси. Иными словами, связи препятствуют удлинению и укорочению стержней коробки (см. фиг. 1).

Площади горизонтальных стержней определяем по формуле

$$f_г = \frac{1}{6} h \cdot t_c + \frac{1}{2(1-\mu^2)} b \cdot t_н , \qquad (2)$$

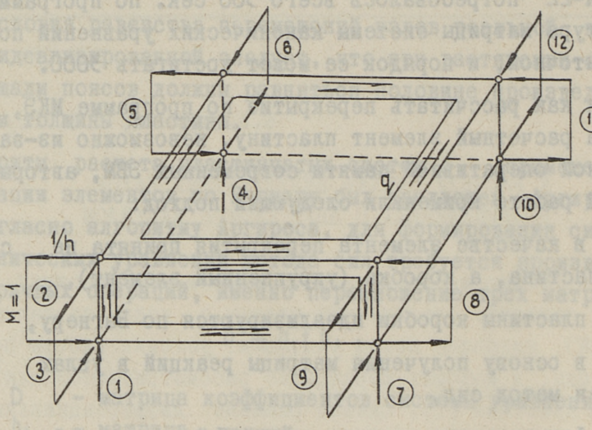
где $f_г$ - площадь поперечного сечения горизонтального стержня,

b - ширина коробки,

h - высота коробки,

t_c - толщина стенки стрингера,

$t_н$ - толщина настила второго дна.



Фиг. 1

Первое слагаемое в формуле (2) учитывает площадь вертикальной пластины (стрингера или флора), сопротивляющуюся растяжению-сжатию при изгибе этой пластины. Второе слагаемое учитывает площадь пластин настила, сопротивляющуюся растяжению-сжатию. При этом коэффициент $1/2\,(1-\mu^2)$ учитывает работу настила в плоском напряженном состоянии.

Площади вертикальных стержней определяем по формуле

$$f_в = \frac{1}{2}(d \cdot t_c + b \cdot t_ф), \qquad (3)$$

где $f_в$ – площадь поперечного сечения вертикального стержня,

d – длина коробки,

$t_ф$ – толщина стенки флора.

Первое и второе слагаемые в формуле (3) учитывают сопротивление растяжению-сжатию вертикальных взаимно-перпендикулярных пластин (стрингеров и флор).

Полученная стержневая система (коробки) оказывается 14 раз статически неопределимой. Для уменьшения степени статической неопределимости и для большего приближения основной системы к расчетному элементу программы МКЭ (расчетным элементом по МКЭ является пластина). Заменяем часть единичных сил обобщенными (пары сил). Этот прием уменьшает степень статической неопределимости до 9.

Матрица реакций идеализированной коробки R^* от действия единичных перемещений определяется по формуле:

$$R^* = \Delta^{-1} = (b' f_N b_1 + q_1' f_q q_1)^{-1}, \tag{4}$$

где b_1 и b_1' - матрица продольных усилий и ее транспонированная в стержнях коробки,

f_N - матрица податливости от продольных сил всех стержней коробки, рассматриваемых отдельно,

q_1, q_1' - матрица потоков касательных сил в пластинах коробки и ее транспонированная,

f_q - матрица податливости от касательных сил всех пластин коробки, рассматриваемых отдельно.

Матрица R^*, полученная по формуле (4), является матрицей 9x9. Она доформировывается до матрицы R I2xI2 реакциями возникающими в оставленных связях в основной системе. Элементы $r_{10,10}$, $r_{10,11}$, $r_{10,12}$, $r_{11,11}$, $r_{11,12}$, $r_{12,12}$ определяются из условий симметрии. Итак, матрица жесткости коробки R имеет порядок, равный I2, т.е. такой же, как и порядок матрицы реакций, полученной для элемента при изгибе пластины, причем тип реакций и их направление также совпадают. Однако имеется и существенное отличие. Оно заключается в том, что пластины коробки (коробка в данном случае является элементом перекрытия) идеализированы по Вагнеру, что дает возможность рассчитывать перекрытие как ортотропную пластину.

Из элементов полученных матриц реакций коробок, на которые мысленно расчленено перекрытие, программа МКЭ формирует систему канонических уравнений метода перемещений. Решением этой системы определяются перемещения от внешней нагрузки в узлах коробок. И, далее, при помощи матриц усилий определяются внутрение усилия: изгибающие моменты и перерезывающие силы в узлах.

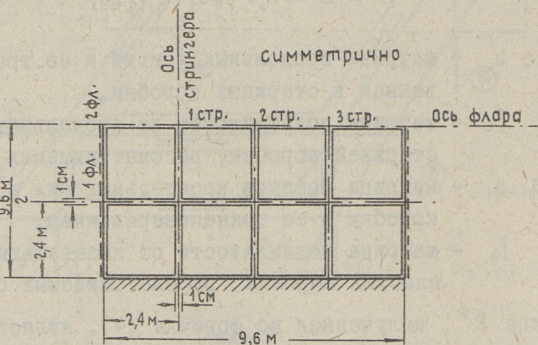
Сравнительные расчеты по описанной выше схеме и по схеме перекрестных балок были выполнены для простого перекрытия с числом стрингеров и флор, равным 3 (см. фиг. 2), при различных закреплениях последних:

а) стрингера и флоры свободно оперты,

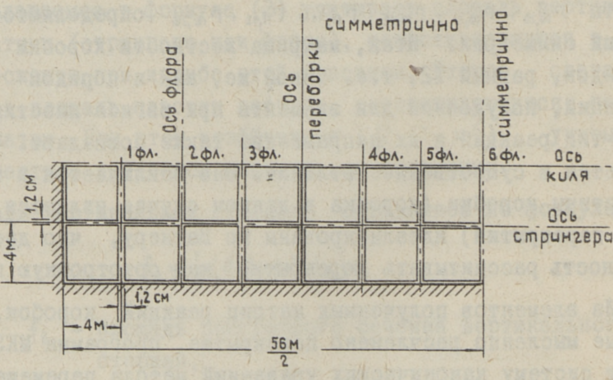
б) стрингера жестко защемлены, флоры свободно оперты,

в) стрингера и флоры жестко защемлены.

Было рассчитано также неразрезное перекрытие с числом стрингеров и флор 3хI3 (см. фиг. 3). Стрингера и флоры жестко защемлены. При расчете перекрытий по схеме перекрестных балок учитывался сдвиг в стенках стрингеров и флор.



Фиг. 2



Фиг. 3

Нагрузка принималась равномерно распределенной и приводилась к узлам.

Результаты расчетов показывают, что учет касательных сил в обшивке и настиле второго дна влияет на картину распределения внутренних сил в связях перекрытия по-разному, в зависимости от усилий закрепления связей. Это можно проследить на примере расчета простого перекрытия.

В случае (а) изгибающие моменты в стрингерах при коробчатой идеализации перекрытия уменьшаются по сравнению со схемой перекрестных связей в среднем на 27%, а во флорах на 32%.

В случае (б) наблюдается уменьшение моментов в стрингерах примерно на 28%, во флорах же моменты увеличиваются по сравнению со схемой перекрестных связей, причем для среднего флора это увеличение достигает 28%.

В случае (в) ощутимая разница (до 16%) в сторону уменьшения при коробчатой идеализации наблюдается лишь для 2-го стрингера и флора.

Что же касается неразрезного перекрытия, то тут также в основном наблюдается уменьшение изгибающих моментов при коробчатой идеализации по сравнению с расчетом по схеме перекрестных связей. Наибольшее увеличение (мы сравниваем здесь максимальные моменты) имеется для киля на переборке, оно достигает 20%. Разумеется, полученные результаты следует считать, как предварительные. Предстоит еще целый ряд сравнительных расчетов с варьированием размеров коробки и более точным учетом эффективных площадей стержней. Кроме того,предполагается получить матрицу жесткости коробки вариационным методом, а также провести ряд сравнительных расчетов с применением обеих матриц.

Литература

1. В.А. Постнов. Изгиб днищевого перекрытия как сложной пластины с учетом конечности расстояния между стрингерами. НТО СП, выпуск 66, Л. 1965.

2. Современные методы расчета сложных статических неопределимых систем. Сб. статей (перевод с английского) составление и общая редакция А.П. Филина, Судпромгиз, Л. 1961.

3. Ю.К. Вилипыльд. К расчету стержневых и пластинчатых элементов методом конечных элементов. Диссертация, ТПИ, 1970.

E. Trunov
B. Jasulovitsch

On the Computation of Cross Beams Stiffened on Both Sides by Flooring

Summary

This paper presents a method of computation of cross beams stiffened by flooring (e.g. the double bottom of a ship). It is proposed to consider such a structure as assembled of boxes. Stiffness matrix for a box is obtained by force method and further calculations are carried out by slopedeflection method. Comparative calculations are presented.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 297 1970

УДК 517.949.8

Л.К. Нарец

МАТРИЧНЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Посвящается памяти Бориса Николаевича Горбунова

Метод последовательных приближений в основном варианте применяется при доказательстве теорем существования и единственности решения у дифференциальных уравнений (Пикар) и интегральных уравнений (Нейман). Следовательно, варианты этого метода обладают хорошим теоретическим обоснованием. В прикладной математике этим методом решаются линейные и нелинейные дифференциальные уравнения и их системы, решаются также интегральные уравнения типа Вольтерра, частично - Фредгольма и их системы. В строительной механике метод последовательных приближений применяется при решении задач устойчивости, колебаний и многих других и называется методом Вианелло, Стодола, Энгессера, Новоторцева.

При реализации метода последовательных приближений в аналитическом варианте основным недостатком является нарастающая с каждым приближением сложность формул, запись которых требует иногда многих строк. Получение числового результата по этим формулам может быть затруднительным из-за трудоемкости, а сам результат ненадежным. В настоящей работе по указанным причинам мы рассматриваем только вопросы численного решения.

Так как электронные машины могут вычислять интегралы с любой наперед заданной точностью, но только в понимании интеграла как предела суммы, то всюду ниже мы будем понимать термин "интеграл" только в указанном смысле, т.е. как определенный интеграл, у которого пределы могут быть переменными. Понятие "неопределенный интеграл" в понимании первообразной или примитивной функции мы не будем применять, так как электронные машины непосредственно первообразные функции не получают.

Всюду в дальнейшем мы будем применять формулу Коши, данную им для решения простейшего дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f(x)\,,\quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{I}$$

которую иногда называют формулой замены нескольких повторных квадратур одиночной:

$$y(x) = y(a) + y'(a)(x-a) + y''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + \int\limits_a^x \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} f(\xi)\,d\xi\,. \tag{2}$$

Заметим, что в таком же виде записывается фомула разложения функции в ряд Маклорена с остаточным членом в форме Коши. В методе начальных параметров реализуется формула (2) часто без ссылки на первоисточник.

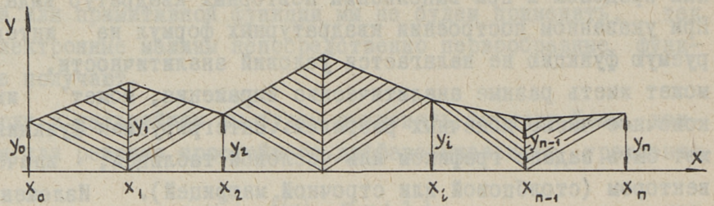
В формуле (2) подинтегральная функция может иметь конечное число коненных разрывов. В результате интегрирования по (2) мы всегда получаем непрерывную, кусочно-гладкую функцию. Замечательной особенностью (2) является то, что входящие в (2) константы $y(a)$, $y'(a)$, $y''(a)$, ... (их можно рассматривать как константы интеграции), имеют вполне определенный смысл (в отличие от обычных неопределенных констант интеграции): это значения функции $y(x)$ и ее производных в точке с абсциссой $x = a$. В формуле (2) верхний предел переменный, нижний предел - постоянное число. Поэтому формула (2) определяет функцию переменного x, заданную операцией интегрирования. Для интегрирования (I) мы будем применять матрицы для выполнения одиночной и повторных квадратур. Операция интегрирования будет выполняться путем умножения этих матриц справа на вектор, компонентами которого будут служить значения интегрируемой функции в избранных дискретных точках.

При построении квадратурных формул обычно оперируют со значениями функции в дискретных равноотстоящих точках. Затем по этим точкам тем или иным приемом строят приближающую функцию, которую интегрируют точно. Квадратурные формулы пригодны для любого числа точек. Поэтому они с успехом могут быть применены при вычислении интегралов с переменным верхним пределом и при выполнении повторных квадратур вида (2). При указанном построении квадратурных формул на интегрируемую функцию не налагается условий аналитичности, она может иметь разные аналитические выражения, может иметь конечное число конечных разрывов. Интегрируемая функция может быть задана графиком или числовой таблицей, иначе, - вектором (столбцовой или строчной матрицей). Изложенная особенность квадратурных формул прямо указывает на целесообразность применения матричных обозначений и матричных операций при повторном численном интегрировании. При этом аналитическая операция "интегрирование" заменяется алгебраической операцией "умножение матрицы на столбец". Учитывая это можно сделать и более сильное сопоставление: "исчисление бесконечно малых при таком приеме заменяется исчислением конечно малых".

Если функцию будем рассматривать как вектор, компоненты которого равны значениям функции в выбранных дискретных точках, то условимся к обычной записи функции добавлять сверху черту. Интегрирующую матрицу будем обозначать буквой $K^{(i)}$, указывая верхним индексом количество повторных квадратур. При описанных обозначениях формула (2) будет записываться так:

$$\bar{y}(x) = \bar{y}(a) + \overline{y'(a)\frac{x-a}{1!}} + \overline{y''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}} + \cdots + K^{(n)}\bar{f}(\xi). \qquad (3)$$

Здесь все функции, включая и те, которые зависят от начальных условий (Коши), следует рассматривать как векторы-столбцы. В предположении, что к компонентам этих векторов применима какая-либо из интегрирующих формул, то эти векторы можно рассматривать как приближающие функции. Покажем для простейшего случая, как получаются матрицы интегрирования. Приближенно заменяя интегрируемую кривую ломаной линией (см. фиг. I), мы можем разбить площадь кривой на ряд смежных равновеликих треугольников (одинаковые высоты при одинаковых основаниях). Площадь крайних треугольников вычисляется отдельно. Для площадей нашей кривой, соответствующих точкам подразделения x_0, x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n, получим такие значения:



Фиг. 1

$$\int_0^h y\,dx = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_1\right)$$

$$\int_0^{2h} y\,dx = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + y_2\right)$$

$$\int_0^{3h} y\,dx = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + y_3\right)$$

- -

На основании правила умножения матрицы на столбец полученный результат может быть записан в матричной форме.

$$\int_0^{x_i = ih} y\,dx = \frac{h}{2}\left[\begin{array}{ccc:cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \hdashline y_{i-1} \\ y_i \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \int_0^h y\,dx \\ \int_0^{2h} y\,dx \\ \hdashline \int_0^{(i-1)h} y\,dx \\ \int_0^{ih} y\,dx \end{array}\right] = \frac{h}{2} K^{(1)} \bar{y}. \qquad (4)$$

При применении более точных квадратурных формул и квадратурных формул для нескольких повторных квадратур меняются только коэффициенты у интегрирующей матрицы; характер выкладок, сами выкладки и количество нулей в матрице практически сохраняются. Обратим внимание, что при повторных n квадратурах под ординатой подинтегральной функции следует понимать следующее

$$y_i = \frac{(x-\xi_i)^{n-1}}{(n-1)!} f(\xi_i). \qquad (5)$$

Отметим остроумный прием, принадлежащий покойному Б.Н. Горбунову. Как известно, вычисление двойного повторного интеграла равносильно определению статического момента. Одного взгляда на фиг. I достаточно, чтобы заметить, что разбиение на треугольники упрощает вычисление статического момента.

Мы уже указывали, что операция численного интегрирования во много раз по точности превосходит операцию численного дифференцирования. Поэтому целесообразно (но не обязательно) от заданного дифференциального уравнения переходить к интегральному уравнению типа Вольтерра. Этот переход осуществляется весьма просто. Приведем простейший иллюстративный пример, для того чтобы инженеры, знакомые с методом последовательных приближений по работам Б.Н. Горбунова, С.П. Тимошенко, А.Н. Крылова и мн. других, сразу же заметили те принципиально несущественные различия, которые возникают при инженерной и математической дискретной трактовке метода последовательных приближений, и те существенные упрощения, которые создаются матрицами интегрирования.

П р и м е р. Найти критическую силу для основного случая Эйлера.

Дифференциальное уравнение продольного изгиба записывается так:

$$v''(x)+\lambda f(x)v(x)=0; \qquad \lambda=\frac{P}{EJ}; \tag{6}$$

при краевых условиях:

$$v(0)=0; \quad v'(0)\neq 0; \quad v(l)=0; \quad v'(l)\neq 0. \tag{7}$$

Здесь обозначено: $v(x)$ - перемещения оси стержня в направлении оси y, $f(x)$ - функция изменения жесткости стержня, λ - собственное число, по которому определяется критическая сила (фиг. 2)

$$P_{кр}=\lambda EJ. \tag{8}$$

Интегрирование (6) повторно два раза при краевых условиях (7) выполняется по формуле Коши (2)сразу. Получаем интегральное уравнение Вольтерра для задачи Эйлера:

$$v(x)=v'(0)x-\lambda\int_0^x (x-t)f(t)v(t)\,dt. \tag{9}$$

Вкладной лист № I.

$\bar{V}$	$\bar{\xi}$	$K^{(2)}$ множитель $\frac{l^2}{600}$ Матрица получена по формуле трапеций											$V_0 = (0{,}1\xi - 0{,}01\xi^2)l$	$10V_1 = \frac{\lambda l^3}{60} \cdot (4{,}95\xi - K^{(2)}\frac{V_0}{l})$	Примечание
$V_{(0)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00000 l	0,00000 λl^3	Для повышения точности вычислений вектор V_1 умножается на 10
$V_{(1)}$	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,09000 l	0,08100 λl^3	
$V_{(2)}$	2	5	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,16000 l	0,15300 λl^3	
$V_{(3)}$	3	8	12	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0,21000 l	0,21000 λl^3	
$V_{(4)}$	4	11	18	12	6	1	0	0	0	0	0	0	0,24000 l	0,24600 λl^3	
$V_{(5)}$	5	14	24	18	12	6	1	0	0	0	0	0	0,25000 l	0,25833 λl^3	
$V_{(6)}$	6	17	30	24	18	12	6	1	0	0	0	0	0,24000 l	0,24600 λl^3	
$V_{(7)}$	7	20	36	30	24	18	12	6	1	0	0	0	0,21000 l	0,21000 λl^3	
$V_{(8)}$	8	23	42	36	30	24	18	12	6	1	0	0	0,16000 l	0,15300 λl^3	
$V_{(9)}$	9	26	48	42	36	30	24	18	12	6	1	0	0,09000 l	0,08100 λl^3	
$V_{(10)}$	10	29	54	48	42	36	30	24	18	12	6	1	0,00000 l	0,00000 λl^3	

Аналитическое определение λ.

$$N_0^2 = \int_0^n V_0^2(\xi)\,d\xi = l^2 \int_0^n \left\{(\xi/n) - (\xi/n)^2\right\}^2 d\xi; \quad N_0 = l\sqrt{\frac{n}{30}}.$$

$$N_1^2 = \int_0^n V_1^2(\xi)\,d\xi = \frac{\lambda^2 l^6}{144} \int_0^n \left\{(\xi/n) - 2(\xi/n)^3 + (\xi/n)^4\right\}^2 d\xi; \quad N_1 = \frac{\lambda l^3}{12}\sqrt{\frac{31n}{630}}.$$

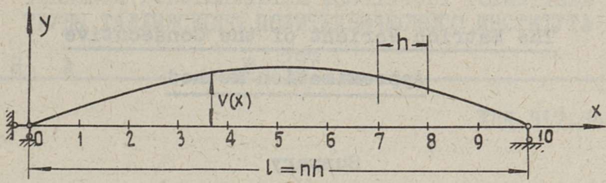
$$N_0 \doteq N_1; \quad \frac{\lambda l^3}{12}\sqrt{\frac{31n}{630}} \doteq l\sqrt{\frac{n}{30}}; \quad \lambda = 9{,}876$$

Векторное определение λ.

$$\sum_{i=0}^{n} V_{0i}^2 = 0{,}33330\,l^2; \quad \mathrm{Mod}\,\bar{V}_0 = 0{,}57732\,l$$

$$\sum_{i=0}^{n} V_{1i}^2 = 0{,}33611\,\lambda^2 l^6\,10^{-2}; \quad \mathrm{Mod}\,\bar{V}_1 = 0{,}57975\,\lambda l^3\,10^{-1}$$

$$\mathrm{Mod}\,\bar{V}_0 \doteq \mathrm{Mod}\,\bar{V}_1; \quad \lambda = 9{,}96\,\frac{1}{l^2}. \quad \text{Точно } \lambda = 9{,}86904\,\frac{1}{l^2}$$



Фиг. 2

В матричном виде уравнение (9) запишется так:

$$\overline{v}(x_i) = \overline{v'(0)\,x_i} - \lambda K^{(2)}\,\overline{f(x_i)\,v(x_i)}\,. \qquad (10)$$

Детали вычислений можно выяснить, просматривая таблицу, приведенную на вкладном листе № I. Рекомендуем собственные числа определять по нормам функций или по модулям векторов, что проще, чем по соотношениям Рэлея. Переменная жесткость сечения учитывается умножением на соответствующую диагональную матрицу.

Литература

I. Л. Нарец. Некоторые вопросы статики-динамики и устойчивости балок, возникающие в связи с появлением вычислительных машин непрерывного и дискретного действия. ТПИ, Таллин 1963.

2. Ж. Чудинова. Приложение матричного варианта метода последовательных приближений к решению линейных и нелинейных дифференциальных уравнений и их систем. См. наст. сборник, стр. 47.

L. Narets

The Matrich Variant of the Consecutive Approximation Method

Summary

The aim of this article is to derive the matrixes of the consecutive approximation method from the numerical integration of the differential equations. The method is illustrated by the classical Euler's problem for the lateral bending of a beam. It is very easy to apply the triangular matrixes of integration for solving these problems by the electronic computer.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 297 1970

УДК 517.949.8

Ж.М. Чудинова

ПРИЛОЖЕНИЕ МАТРИЧНОГО ВАРИАНТА МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Ниже будет применяться обобщенная квадратурная формула Симпсона. Обычно формула Симпсона применяется при четном числе участков подразделения и для выполнения одиночной квадратуры. Обычным путем, производя интерполирование по квадратной параболе, можно получить формулы, пригодные и при нечетном разбиении участка интегрирования. Эти формулы приведем ниже:

$$\int_0^h f(x)\,dx = \frac{h}{12}(5y_0 + 8y_1 - y_2) \tag{a}$$

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \tag{б}$$

$$\int_h^{2h} f(x)\,dx = \frac{h}{12}(-y_0 + 8y_1 + 5y_2). \tag{c}$$

В работе [I] приведены интегрирующие матрицы, полученные при обобщении формулы трапеций, позволяющие за один прием производить двойное повторное интегрирование. Естественно, возникает необходимость обобщить полученный результат и повысить точность квадратур. На вкладном листе № I мы даем матрицы, построенные по квадратурным формулам (а), (б), (с), с помощью которых можно производить одиночную и двойную квадратуру. Точно также можно получить матрицы повторных тройных и четверных квадратур. Таким образом, ин-

Вкладной лист № I

Матрица однократного интегрирования.
Обобщение формулы Симпсона

$$J = \int_0^x f(t)\,dt = \frac{h}{12} K^{(1)} \bar{f} + y(0)$$

$K^{(1)}$ Множитель $\frac{1}{120} = \frac{h}{12}$

ξ											
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5	8	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4	16	4	0	0	0	0	0	0	0	0
3	4	16	9	8	-1	0	0	0	0	0	0
4	4	16	8	16	4	0	0	0	0	0	0
5	4	16	8	16	9	8	-1	0	0	0	0
6	4	16	8	16	8	16	4	0	0	0	0
7	4	16	8	16	8	16	9	8	-1	0	0
8	4	16	8	16	8	16	8	16	4	0	0
9	4	16	8	16	8	16	8	16	9	8	-1
10	4	16	8	16	8	16	8	16	8	16	4

Матрица двукратного повторного интегрирования.
Обобщение формулы Симпсона

$$J = \int_0^x (x-t) f(t)\,dt = \frac{h^2}{12} K^{(2)} \bar{f} + y(0)\bar{\xi} + y'(0)$$

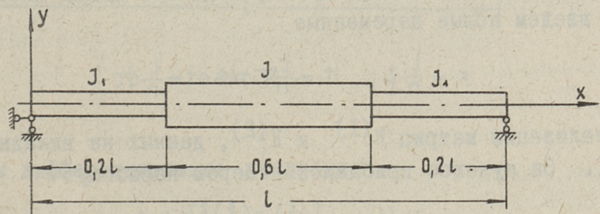
$K^{(2)}$ Множитель $\frac{1^2}{1200} = \frac{h^2}{12}$

ξ											
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5	0	1	0	0	0	C	0	0	0	0
2	8	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	12	32	9	0	1	0	0	0	0	0	0
4	16	48	16	16	0	0	0	0	0	0	0
5	20	64	24	32	9	0	1	0	0	0	0
6	24	80	32	48	16	16	0	0	0	0	0
7	28	96	40	64	24	32	9	0	1	0	0
8	32	112	48	80	32	48	16	16	0	0	0
9	36	128	56	96	40	64	24	32	9	0	1
10	40	144	64	112	48	80	32	48	16	16	0

тегрирование по формуле Коши (см. [I] форм. (I), (2)) может быть проведено численно за один прием. Такая возможность создает широкие перспективы для численного решения интегральных уравнений типа Вольтерра. Для проверки точности результатов интегрирования по приведенным матрицам мы численно выполнили такие квадратуры, и результаты проведенных повторных численных квадратур совпали с точными значениями повторных интегралов до пятого знака включительно. Были проведены и другие проверки, давшие такой же отличный результат.

При решении дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами возникают многие затруднения. Покажем, как устраняются эти затруднения при применении предлагаемого варианта.

П р и м е р I. Коэффициенты дифференциального уравнения имеют несколько конечных разрывов. Определение критической силы для стержня ступенчато-переменного сечения (см. [2] стр. I24).



Фиг. 1

Дифференциальное уравнение для этой задачи будет таким:

$$v''(x) = -\frac{P\,v(x)}{EJ(x)} \tag{I}$$

при начальных условиях

$$v(0)=0;\quad v'(0)\neq 0;\quad v(l)=0;\quad v'(l)\neq 0. \tag{2}$$

Функция жесткости, обозначенная $J(x)$, разрывна и принимает вдоль длины балки три значения. Функцию жесткости при разбиении балки на десять участков можно записать в матричной форме так:

$$\bar{f}(x)=\frac{1}{EJ}\begin{bmatrix} 2,50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,50 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Вычисления проводим в таблице, данной на вкладном листе №2. Последовательно интегрируя (I), применяя формулу Коши, получим:

$$v(x)=v(0)+v'(0)x-\lambda\int_0^x (x-t)\,v(t)\,f(t)\,dt \qquad (4)$$

которая в матричном виде представится так:

$$\bar{v}(x_i)=\bar{v}'(0)\frac{l}{n}\bar{\xi}-\frac{\lambda l^2}{n^2}K^{(2)}\overline{fV}. \qquad (5)$$

Для повышения точности вычислений целесообразно, по возможности, большую часть выкладок проводить в целых числах. Для этого введем новые переменные

$$x=\frac{l}{n}\xi; \quad t=\frac{l}{n}\tau; \quad dt=\frac{l}{n}d\tau \qquad (6)$$

для реализации матриц $K^{(I)}$ и $K^{(2)}$, данных на вкладном листе № I. За нулевое приближение берем параболу:

$$v_0(\xi)=l\left[\left(\frac{\xi}{n}\right)-\left(\frac{\xi}{n}\right)^2\right].$$

Эта парабола удовлетворяет краевым условиям, но не отражает хорошо изгиб балки уступчато-переменного сечения. Конечно, можно было взять в качестве нулевого приближения любой числовой вектор. Вектор нулевого приближения записан в третьем столбце. Результат умножения вектора нулевого приближения на матрицу жесткости (3) справа записан в четвертый столбец. Для определения начального поворота используем краевое условие $v(l)=0$, для чего умножаем последнюю строку матрицы $K^{(2)}$ на вектор столбца нулевого приближения. В результате получаем:

$$v'(0)=13,12\frac{\lambda l^2}{120}.$$

Ординаты кривой вычисляем по формуле

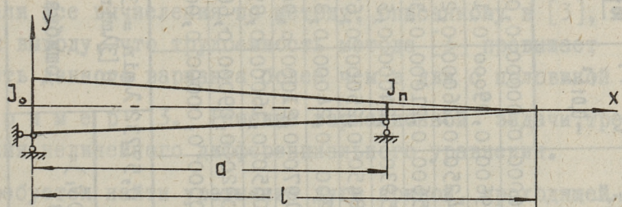
$$\overline{v}_1 = \frac{\lambda l^3}{1200}\cdot\left(13{,}12\,\overline{\xi} - K^{(2)}\overline{f v_0}\right)$$

и записываем в пятый столбец. Собственное число определяем по модулю (см. [I], форм. (2I)). Результат совпал с данными, приведенными в [2].

Пример 2. Коэффициенты дифференциального уравнения - дифференцируемые непрерывные функции.

Определить критическую силу для конического стержня(см. [3] стр. 240)

$$J(x) = J_n\left(\frac{a-x}{a-l}\right)^4;\quad J_0 = 10 J_n.$$



Фиг. 2

Имеем дифференциальное уравнение

$$v''(x) = -\frac{Pv(x)}{EJ(x)} = -\frac{Pv(x)}{10EJ_n}\left[1-\frac{x}{l}\left(1-\frac{1}{\sqrt[4]{10}}\right)\right]^{-4} \qquad (7)$$

при краевых условиях

$$v(0)=0;\quad v'(0)\neq 0;\quad v(l)=0;\quad v'(l)\neq 0. \qquad (8)$$

Функция жесткости дана формулой

$$f(x) = \frac{1}{EJ_n}\left[1-\frac{x}{l}\left(1-\frac{1}{\sqrt[4]{10}}\right)\right]^{-4}. \qquad (9)$$

Вычисления произведены в таблице, приведенной на вкладном листе № 2. Последовательно интегрируя (9), получим

$$v(x) = v'(0)\,x - \lambda\int_0^x (x-t)\,v(t)\,f(t)\,dt \qquad (I0)$$

Таблица к примеру № I

$\bar{\xi}$	$\bar{f}$	$\frac{\bar{V}_0}{l} = 0{,}1\bar{\xi} - 0{,}01\bar{\xi}^2$	$\bar{f}\frac{\bar{V}_0}{l}$	$10\bar{V}_1 = \frac{\lambda l^3}{120}\cdot\left(13{,}12\bar{\xi} - K^{(2)}\frac{\bar{f}\bar{V}_0}{l}\right)$	Примечания
0	2,50	0,00000	0,00000	0,00000	1. Матрица двукратного интегрирования см. вкладн. лист №1. 2. В матрице жесткости $\bar{f}$ зап. только элем. главн. диагонали.
1	2,50	0,09000	0,22500	0,10700	
2	1,75	0,16000	0,28000	0,18867	
3	1,00	0,21000	0,21000	0,24500	
4	1,00	0,24000	0,24000	0,28200	
5	1,00	0,25000	0,25000	0,29467	
6	1,00	0,24000	0,24000	0,28200	
7	1,00	0,21000	0,21000	0,24500	
8	1,75	0,16000	0,28000	0,18867	
9	2,50	0,09000	0,22500	0,10700	
10	2,50	0,00000	0,00000	0,00000	
$\sum\bar{V}_0^2$		0,33333	Mod= =0,57732	λ_{min}= =8,512	
$\sum(10\bar{V}_1)^2$		0,460015	Mod= =0,67824	В [2] λ_{min}= =8,51	

Вкладной лист №2

Таблица к примеру №2

$\bar{\xi}$	$10\bar{f}$	$\frac{\bar{V}_0}{l} = 0{,}1\bar{\xi} - 0{,}01\bar{\xi}^2$	$\frac{10\bar{f}\bar{V}_0}{l}$	$100\bar{V}_1 = \frac{\lambda l^3}{120}\cdot\left(24{,}46755\bar{\xi} - K^{(2)}\frac{\bar{f}\bar{V}_0}{l}\right); \bar{V}_1^*$	$10\bar{f}\bar{V}_1^*$	$100\bar{V}_2 = \frac{\lambda l^3}{120}\cdot\left(73{,}98314\bar{\xi} - K^{(2)}\bar{f}\bar{V}_1^*\right); \bar{V}_2^{**}$	Примечания
0	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	Матрица жестк. $\bar{f}$ увел. в 10 раз и запис. элем., стоящ. на главн. диаг. Ост. элемен. равны 0.
1	1,19600	0,09000	0,10764	0,20197	0,24156	0,61180	
2	1,44250	0,16000	0,23080	0,39344	0,56754	1,20084	
3	1,75600	0,21000	0,36876	0,56136	0,98575	1,73013	
4	2,15930	0,24000	0,51823	0,69259	1,49551	2,16237	
5	2,68450	0,25000	0,67112	0,77195	2,07230	2,44316	
6	3,38200	0,24000	0,81168	0,78399	2,65145	2,51676	
7	4,31970	0,21000	0,90714	0,71659	3,09545	2,33094	
8	5,60650	0,16000	0,89704	0,55673	3,12131	1,82859	
9	7,40920	0,09000	0,66683	0,31534	2,33642	1,04405	
10	10,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	
mod$\bar{V}_0$ = 0,57732			λ_{min} = 32,664 В [3] λ_{min}=31,21		Mod$\bar{V}_1^*$=1,76743	λ_{min}= =31,414	
mod(100 $\bar{V}_1$)= =1,76743			**ошибка 4%**		mod$\bar{V}_2^{**}$=5,62634	**ошибка 0,7%**	

и записываем в матричной форме

$$\overline{v}(x_i) = v'(0)\frac{l}{n}\overline{\xi} - \frac{\lambda l^2}{n^2}K^{(2)}\overline{fv}. \qquad (II)$$

Переход к новым переменным проводим, как в предыдущем примере. Нулевое приближение по параболе записано в третьем столбце. Ординаты кривой первого приближения вычисляются по формуле:

$$\overline{v}_1 = \frac{\lambda l^3}{12000}\left(24,46755\,\overline{\xi} - K^{(2)}\frac{\overline{v}_0}{l}\right). \qquad (I2)$$

Второе приближение вычисляется аналогично. Результат записан в седьмом столбце. Он близок к результату, полученному в [3]. Для сравнения трудоемкости данного варианта мы провели все вычисления по методу, описанному в [3], и пришли к выводу, что трудоемкость метода [3] превышает трудоемкость данного варианта более чем в два с половиной раза.

П р и м е р 3. Решение вариационной задачи, требующее решения нелинейного дифференциального уравнения.

Требуется найти уравнение дуги кривой, проходящей через точки (0,I) и (I,2) и дающей минимум интегралу

$$J = \int_0^1 \frac{[1+(y')^2]^{1/2}}{y}\,dx$$

(см. [4] стр. I09).

Дифференциальное уравнение Эйлера для решения поставленной задачи будет таким:

$$y'' = -\frac{1+(y')^2}{y} \qquad (I3)$$

при краевых условиях

$$y(0)=1; \quad y(1)=2. \qquad (I4)$$

Точное решение этого уравнения известно, оно будет таким:

$$y = \sqrt{5-(x-2)^2}. \qquad (I5)$$

Это позволит нам оценить как быстроту сходимости, так и точность предлагаемого метода в данном случае.

Последовательно интегрируя (I3), получим:

$$y'(x) = y'(0) - \int_0^x \frac{1+y'^2}{y}\,dt \qquad (I6)$$

Таблица к примеру № 3

N	$\bar{x}$	$\bar{y}_0=\overline{1+x}$	$\bar{f}_0=\frac{2}{\bar{y}_0}$	$\bar{y}_1=1+y_0'(0)\bar{x}-\frac{1}{2000}K^{(2)}\bar{f}_0$	$\bar{y}_1'=\bar{y}_1'(0)-\frac{1}{120}K^{(1)}\bar{f}_0$	$\bar{f}_1=\frac{\overline{1+y_1'^2}}{y_1}$	$\bar{y}_2=1+y_1'(0)\bar{x}-\frac{1}{1200}K^{(2)}\bar{f}_1$	$\bar{y}_2'=y_1'(0)-\frac{1}{120}K^{(1)}\bar{f}_1$	$\bar{f}_2=\frac{\overline{1+y_2'^2}}{y_2}$	$\bar{y}_3=1+y_2'(0)x-\frac{1}{1200}K^{(2)}\bar{f}_2$	$y_{точное}$
0	0,00	1,00000	2,00000	1,00000	1,77260	4,14211	1,00000	1,99240	4,96966	1,00000	1,00000
1	0,10	1,10000	1,81818	1,16754	1,58194	2,99993	1,18010	1,63869	3,12287	1,17814	1,1790
2	0,20	1,20000	1,66667	1,31694	1,40795	2,26458	1,33o87	1,37885	2,10481	1,32643	1,3267
3	0,30	1,30000	1,53846	1,44961	1,24785	1,76401	1,45814	1,17863	1,63850	1,45196	1,4526
4	0,40	1,40000	1,42857	1,56843	1,09965	1,40856	1,568o2	1,02121	1,30283	1,56131	1,5621
5	0,50	1,50000	1,33333	1,66988	o,96166	1,15265	1,66355	o,8937o	1,08124	1,65729	1,6583
6	o,6o	1,60000	1,25000	1,75954	0,83259	0,96230	1,74750	o,78850	0,92803	1,74256	1,7436
7.	0,7o	1,70000	1,17647	1,83666	0,71133	0,81996	1,82175	o,69968	0,81765	1,81840	1,8193
8.	0,8o	1,80000	1,11111	1,90204	0,59702	0,71315	1,88786	0,62332	0,73550	1,88612	1,8868
9	0,9o	1,90000	1,05263	1,95628	0,48888	0,58223	1,94674	0,55958	0,67453	1,94641	1,9468
1o.	1,00	2,00000	1,00000	2,00000	0,38630	0,57461	2,00000	0,50277	0,62639	2,00000	2,00000

$Y_0'(o)= 1,7726o$ $\qquad$ $Y_1'(o) = 1,9924o$ $\quad$ $Y_2'(o)=2,00603$

$$y(x) = 1 + y'(0)x - \int_0^x (x-t)\frac{1+y'^2}{y}dt \qquad (17)$$

В матричной форме они записываются так:

$$\bar{y}'(x_i) = \bar{y}'(0) - \frac{h}{12}K^{(1)}\bar{f} \qquad (18)$$

$$\bar{y}(x_i) = 1 + \overline{y'(0)}x - \frac{h^2}{12}K^{(2)}\bar{f}, \qquad (19)$$

где сделано обозначение:

$$\bar{f} = \overline{\frac{1+(y')^2}{y}}. \qquad (20)$$

Нулевое приближение принимаем таким:

$$\bar{y}_0 = \overline{1+x}. \qquad (21)$$

Решение произведено на вкладном листе № 3, в третьем столбце которого и записано нулевое приближение. В каждом последовательном приближении приемом, описанным выше, мы находим $y'(0)$ и по формуле (21) определяем компоненты векторов последовательных приближений. Просматривая компоненты векторов последовательных приближений, мы можем в данном случае установить отсутствие монотонности в процессе сходимости. Несмотря на неравномерную сходимость в данном примере, мы подходим к точному решению уже в третьем приближении с погрешностью в среднем 0,1%.

Методом последовательных приближений можно решить системы дифференциальных уравнений как линейных, так и нелинейных. За недостатком места мы не приводим решение системы нелинейных уравнений, хотя они представляют значительный интерес.

Литература

I. Л.К. Н а р е ц. Матричный вариант метода последовательных приближений. См. наст. сборник, стр, 39.

2. С.П. Т и м о ш е н к о. Устойчивость упругих систем. ОГИЗ ГОСТЕХИЗДАТ, 1946.

3. Ш.Е. М и к е л а д з е. Некоторые задачи строительной механики. ОГИЗ ГОСТЕХИЗДАТ, 1948.

4. В.Е. М и л н. Численное решение дифференциальных уравнений. Изд. "Иностранная литература", М. 1955.

J.Tschudinova

The Applications of the Matrix Variant of the Consecutive Approximation Method for the Solution of Linear and Non-linear Differential Equations

Summary

In this article the applications of the matrix variant of the consecutive approximation method for the mathematical and constructional mechanics problems is given. The first part of the article presents the derivation of the matrixes from one-, two-, three-, and four-step integrations on the basis of Simpson formulae.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 197 1970

УДК 629.7.023:539.4

Л.Ю. Поверус

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

В работе исследуется распространение волн упругой осесимметрической деформации тонкой замкнутой кругоцилиндрической полубесконечной оболочки, возникающей при воздействии продольной нагрузки типа Хевисайда, которая приложена в торцевом сечении оболочки. Исходными уравнениями решения являются уравнения типа Тимошенко, учитывающие влияние инерции вращения и сдвига.

Примененный в настоящей работе вариационный метод был впервые использован при исследовании полубесконечной балки в работах [I и 2].

Для вывода основных соотношений рассмотрим кругоцилиндрическую оболочку радиусом R и толщиной $h = const$. Далее, обозначим E - модель упругости, ν - коэффициент Пуассона, ρ - плотность материала оболочки, x - расстояние произвольной точки оболочки от торцевого сечения, t - время и u и w составляющие перемещения срединной поверхности, ψ - угол поворота нормали срединной поверхности в плоскости xz, $L(t)$ - расстояние, преодолеваемое некоторым возмущением за время, вызываемое каким-то внешним воздействием. В начальный момент при $t = 0$, $L(0) = 0$. Если

$$x \geq L(t), \text{ то } u(x,t) = \psi(x,t) = w(x,t) = 0. \qquad (2.I)$$

Используем в дальнейшем безразмерные величины

$$\bar{u} = \frac{u}{R}; \quad \bar{w} = \frac{w}{R}; \quad \xi = \frac{x}{R}; \quad l = \frac{L}{R}; \quad \tau = \frac{c_1 t}{R}, \qquad (2.2)$$

где $c_1 = \left[E/(1-\nu^2)\rho\right]^{0,5}$ - скорость распространения продольной волны в оболочке; скорость волны сдвига $c_2 = [E/2(1-\nu)\rho]^{0,5}$. Безразмерные скорости: $\bar{c}_1 = 1$, $\bar{c}_2 = (1-\frac{\nu}{2})^{0,5}$. Отношение скоростей - $\frac{c_2}{c_1} = \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} = n$.

Так как в дальнейшем применяются только безразмерные величины, можно черточку над вышеприведенными обозначениями опустить.

Для вывода основной вариационной формулы будем исходить из начала возможных перемещений с учетом принципа Даламбера

$$\delta U + \delta V + \delta K_1 = 0, \qquad (3.1)$$

где δU - вариация потенциальной энергии деформации оболочки,

δV - вариация работы внешних сил,

δK_1 - вариация кинетической энергии, соответствующая вариации расстояния фронта волны.

Вариация потенциальной энергии деформации оболочки определяется следующей формулой

$$\delta U = 2\pi \int_0^l \left[N_\xi \delta u' + M_\xi \delta\psi' - N_\theta \delta w + Q_\xi \delta(w'+\psi)\right] d\xi + F(l)\delta l, \qquad (3.2)$$

в которой N_ξ, N_θ - продольное и кольцевое тангенциальное усилие,

Q_ξ - поперечная сила,

M_ξ - изгибающий момент определяются формулами

$$N_\xi = u' - \nu w; \quad N_\theta = \nu u' - w; \quad Q_\xi = \varkappa^2(w'+\psi); \quad M_\xi = \varepsilon^2\psi', \qquad (3.3)$$

где $\varkappa^2 = (1-\nu)/2$ - коэффициент сдвига,

$\varepsilon^2 = h^2/12R^2$ - квадрат относительной толщины оболочки и $(\cdots)' = \frac{\partial}{\partial\xi}(\cdots)$.

В последнем члене уравнения (3.2) F - обозначает подынтегральное выражение потенциальной энергии деформации и этот член учитывает, следуя формуле Лейбница, переменности верхнего предела интеграции l при вычислении вариации потенциальной энергии.

Вариация кинетической энергии будет

$$\delta K_1 = K\delta l = \pi(\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \varepsilon^2\dot{\psi}^2)\delta l. \tag{3.4}$$

Вариация работы внешних сил имеет следующий вид:

$$\delta V = -2\pi T_{0\xi}\,\delta u(0,\tau) + 2\pi\int_0^l (\ddot{u}\delta u + \ddot{w}\delta w + \varepsilon^2\ddot{\psi}\delta\psi)\,d\xi. \tag{3.5}$$

Здесь $T_{0\xi}$ - продольная сила приложена в торцевом сечении оболочки.

После подстановок интегрирования по частям и после некоторых преобразований можно (3.I) представить в виде

$$\begin{aligned}
\delta U + \delta V + \delta K_1 = \int_0^l -\Big\{&(u'' - \nu w' - \ddot{u})\delta u + [\nu u' - w + \varkappa^2(w'' + \psi') - \\
&- \ddot{w}]\delta w + [\varepsilon^2\psi'' - \varkappa^2(w' + \psi) - \varepsilon^2\ddot{\psi}]\delta\psi\Big\}d\xi - \\
&- \Big\{(u' - \nu w + T_{0\xi})\delta u + \varepsilon^2\psi'\delta\psi + \varkappa^2(w' + \psi)\delta w\Big\}_{\xi=0} + \\
&+ \Big\{(u' - \nu w)\delta u + \varepsilon^2\psi'\delta\psi + \varkappa^2(w' + \psi)\delta w + \tfrac{1}{2}\big[(u' - \\
&- \nu w)u' + \varepsilon^2(\psi')^2 - (\nu u' - w)w + \varkappa^2(w' + \psi)^2 + \dot{u}^2 + \\
&+ \dot{w}^2 + \varepsilon^2\dot{\psi}^2\big]\delta l\Big\}_{\xi=l} = 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Первый член с фигурными скобками правой части уравнения (3.6) является решающей вариационной формулой задачи; второй член удовлетворяется граничными условиями на торце оболочки, а третий член - условиями на фронтах волн деформации. Условия на торцевом сечении оболочки формулируются здесь весьма ясно, но условия на фронтах волн требуют более подробного изучения, чтобы получить необходимые дополнительные условия для решения задачи. Из условия (2.I) следует, что также первый и следующие полные производные от перемещений по времени на фронтах волн должны равняться нулю.

Перемещение на фронте волны является функцией от времени и от расстояния фронта волн. Последняя является в свою очередь функцией от времени. С учетом изложенного, первые полные дифференциалы дают условия:

$$u'\dot{l}+\dot{u}=0; \quad \psi'\dot{l}+\dot{\psi}=0; \quad w'\dot{l}+\dot{w}=0. \tag{3.7}$$

На фронте волны будут действительными и следующие уравнения:

$$u'\delta l+\delta u=0; \quad \psi'\delta l+\delta\psi=0; \quad w'\delta l+\delta w=0. \tag{3.8}$$

Учитывая условия (2.I), (3.7) и (3.8), можем условию на фронтах волн уравнения (3.6) придать следующий вид:

$$\left\{(\dot{l}^2-1)(u'^2+\varepsilon^2\psi'^2)+(\dot{l}^2-n^2)w'^2\right\}\delta l=0. \tag{3.9}$$

Уравнение (3.9) показывает, что возмущения двигаются с двумя скоростями $c_1=1$ и $c_2=n$. Получим следующие дополнительные условия на фронтах: I) на фронте волны расширения

$$\text{при} \quad \dot{l}=1, \quad w'=0 \tag{3.I0}$$

2) на фронте волны сдвига

$$\text{при} \quad \dot{l}=n, \quad u'=0 \quad \text{и} \quad \psi'=0. \tag{3.II}$$

Можно предполагать, что любое перемещение состоит из двух составляющих, из которых одна составляющая двигается со скоростью 2, а вторая со скоростью n. Итак, напишем:

$$\begin{aligned} u(\xi,\tau) &= u_1(\xi,\tau)+u_2(\xi,\tau) \\ \psi(\xi,\tau) &= \psi_1(\xi,\tau)+\psi_2(\xi,\tau) \\ w(\xi,\tau) &= w_1(\xi,\tau)+w_2(\xi,\tau). \end{aligned} \tag{3.I2}$$

Причем, если

$$\xi\leq\tau_1, \quad \text{то} \quad u_1=\psi_1=w_1=w_1'=0 \tag{3.I3}$$

и

$$\xi\geq\tau_2=n\tau, \quad \text{то} \quad u_2=\psi_2=w_2=u_2'=\psi_2'=0. \tag{3.I4}$$

Здесь $\tau_1=1\tau$ и $\tau_2=n\tau$ - расстояния фронтов волн расширения и сдвига.

Исследование поведения разрывов на фронтах волн можно производить при помощи уравнений равновесия и условиями (3.I3), (3.I4) и (3.3). Такое исследование показывает [I,2], что разрывы производных от составляющих перемещений по координате и времени и скачки в усилиях распространяются на соответствующих фронтах постоянными.

4. Выделим из уравнения (3.6) вариационную формулу, которая применяется при дальнейшем решении задачи

$$\int_0^l \Big\{ (u'' - \nu w' - \ddot{u})\,\delta u - \left[\nu u' - w + \varkappa^2 (w'' + \psi') - \ddot{w}\right] \delta w +$$
$$+ \left[\varepsilon^2 \psi' - \varkappa^2 (w' + \psi) - \varepsilon^2 \ddot{\psi}\right] \delta\psi \Big\}\, d\xi = 0. \qquad (4.I)$$

Решения можно отыскивать в виде рядов, каждый член которых является произведением двух функций. Одна из этих функций зависит от координаты и времени, другая только от времени.

Будем аппроксимировать функции u_1, u_2, w_1, w_2, ψ_1 и ψ_2, учитывая следующие условия:

При $\xi = 0$

$$u_1' + u_2' - \nu(w_1 + w_2) = T_{0\xi}\,; \quad \psi_1' + \psi_2' = 0; \quad w_1 + w_2 = 0. \qquad (4.2)$$

При $\xi = n\tau$

$$u_2 = u_2' = \psi_2 = \psi_2' = w_2 = w_2' = -\dot{w}_2 = 0. \qquad (4.3)$$

При $\xi = \tau_1$

$$u_1 = \psi_1 = w_1' = 0; \quad u_1' = -\dot{u}_1 = -T_{0\xi}. \qquad (4.4)$$

Вышеприведенные условия удовлетворяются выбранными следующим образом перемещениями:

$$u_1 = \alpha(\tau)(\xi - \tau)^2 - T_{0\xi}(\xi - \tau) \quad \text{при } 0 \leqslant \xi \leqslant \tau \qquad (4.5)$$

$$u_2 = -\alpha(\tau)\frac{1}{n}(\xi - n\tau)^2 \quad \text{при } 0 \leqslant \xi \leqslant n\tau$$

$$w_1 = \beta(\tau)(\xi - \tau)^2 \quad \text{при } 0 \leqslant \xi \leqslant \tau$$

$$w_2 = -\beta(\tau)\frac{1}{n^2}(\xi - n\tau)^2 \quad \text{при } 0 \leqslant \xi \leqslant n\tau \qquad (4.6)$$

$$\psi_1 = \gamma(\tau)(\xi - \tau)^2 \quad \text{при } 0 \leqslant \xi \leqslant \tau$$

$$\psi_2 = -\gamma(\tau)\frac{1}{n}(\xi - n\tau)^2 \quad \text{при } 0 \leqslant \xi \leqslant n\tau. \qquad (4.7)$$

Подставляем функции (4.5), (4.6), и (4.7) в вариационную формулу (4.I) и производим интегрирование по координате ξ. Интегрирование производится двумя этапами. Сперва от 0 до $n\tau$. При этом участвуют все функции перемещений. При интегрировании от $n\tau$ до τ следует функции перемещения с индексами 2 приравнивать нулю.

После интегрирования и преобразования уравнение (4.I) приобретает следующий вид:

$$\left[M_1\tau^2\ddot{\alpha} + 4M_2\tau\dot{\alpha} - 2\left(n-\frac{1}{n}\right)M_3\alpha + 2\nu M_4\tau\beta\right]\delta\alpha + \Big\{M_5\tau^2\ddot{\beta} -$$
$$- 4M_6\tau\dot{\beta} - \Big[\!\Big[2\varkappa^2\Big[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)M_7 + N_7\Big] - 2N_7\Big]\!\Big]\beta - 2\nu M_6\tau\alpha - 2\varkappa^2 M_6\tau\gamma -$$
$$- \nu(M_7+N_7)T_{0\xi}\Big\}\delta\beta + \Big[M_1\varepsilon^2\tau^2\ddot{\gamma} - 4M_2\varepsilon\tau\dot{\gamma} - 2\left(n-\frac{1}{n}\right)M_3\varepsilon^2\gamma +$$
$$+ \varkappa^2 M_1\tau^2\gamma + 2\varkappa^2 M_4\tau\beta\Big]\delta\gamma = 0. \qquad (4.8)$$

В котором

$$\begin{aligned}
M_1 &= N_3 - \frac{2}{n}N_5 + \frac{n^3}{5} + N_9\\
M_2 &= N_2 - N_4 - \frac{1}{n}N_6 - \frac{n^3}{4} + N_8\\
M_3 &= N_1 - \frac{n^2}{3}\\
M_4 &= N_2 - \frac{1}{n^2}N_4 - \frac{1}{n}N_6 - \frac{n}{4} + N_8\\
M_5 &= N_3 - \frac{2}{n^2}N_5 + \frac{n}{5} + N_9\\
M_6 &= N_2 - \frac{1}{n}N_4 - \frac{1}{n^2}N_6 - \frac{n}{4} + N_8\\
M_7 &= N_1 - \frac{n}{3}
\end{aligned} \qquad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
N_1 &= \left(\frac{n^2}{3} - n + 1\right)n\\
N_2 &= \left(\frac{n^3}{4} - n^2 + \frac{3}{2}n - 1\right)n\\
N_3 &= \left(\frac{n^4}{5} - n^3 + 2n^2 - 2n + 1\right)n\\
N_4 &= \left(-\frac{n^2}{12} + \frac{n}{3} - \frac{1}{2}\right)n^2\\
N_5 &= \left(\frac{n^2}{30} - \frac{n}{6} + \frac{1}{3}\right)n^3\\
N_6 &= \left(\frac{n}{12} - \frac{1}{3}\right)n^3 \qquad\qquad n=\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\\
N_7 &= -\frac{n^3}{3} + n^2 - n + \frac{1}{3}\\
N_8 &= -\frac{n^4}{4} + n^3 - \frac{3}{2}n^2 + n - \frac{1}{4}\\
N_9 &= -\frac{n^5}{5} + n^4 - 2n^3 + 2n^2 - n + \frac{1}{5}.
\end{aligned} \qquad (4.10)$$

Уравнение (4.8) приводится к системе с тремя дифференциальными уравнениями по времени с переменными множителями. Неизвестными являются функции $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ и $\gamma(\tau)$.

Решение системы уравнений для оболочки с заданными размерами и внешней нагрузкой производится следующим образом:

Принимаем ν = 0,3 и находим значения n, N_1, ..., N_9 и M_1, M_2, ... M_7. Подставляем найденные значения в уравнение

(4.8), после чего получим систему дифференциальных уравнений с переменными множителями относительно $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ и $\gamma(\tau)$.

Решаем эту систему, аппроксимируя $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ и $\gamma(\tau)$ степенными рядами.

Выбираем более подходящую единицу для времени

$$\tau = \varepsilon t_1 \qquad (4.II)$$

в котором $\varepsilon^2 = \dfrac{h^2}{12R^2}$.

После преобразования получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$0{,}0689334\, t_1^2 \alpha'' + 0{,}344668\, t_1 \alpha' + 0{,}4262125\, \alpha + $$
$$+ 0{,}0200840\, \varepsilon t_1 \beta = 0.$$

$$0{,}0267786\, t_1^2 \beta'' + 0{,}133894\, t_1 \beta' + 0{,}0267786\, \varepsilon^2 t_1^2 \beta +$$
$$+ 0{,}1769698\, \beta + 0{,}020084I\, \varepsilon t_1 \alpha + 0{,}0234314\, \varepsilon t_1 \gamma +$$
$$+ 0{,}04083918\, T_{0\xi} = 0.$$

$$0{,}0689334\, \varepsilon^2 t_1 \gamma'' + 0{,}3446676\, \varepsilon t_1 \gamma' + 0{,}4262125\, \varepsilon^2 \gamma +$$
$$+ 0{,}02412669\, \varepsilon^2 t_1^2 \gamma + 0{,}02343138\, \varepsilon t_1 \beta = 0. \qquad (4.I2)$$

Отыскиваем решения (4.I2) в виде степенных рядов

$$\alpha = \sum_{q=0}^{\infty} a_q t_1^q; \qquad \beta = \sum_{q=0}^{\infty} b_q t_1^q; \qquad \gamma = \sum_{q=0}^{\infty} g_q t_1^q. \qquad (4.I3)$$

Подставляем q-ный член рядов в систему (4.I2) и получаем следующие формулы для определения множителей рядов:

$$(0{,}0689334\, q^2 + 0{,}2757346\, q + 0{,}4262125)\, a_q + 0{,}0200840\, \varepsilon b_{q-1} =$$
$$= 0 \quad q = I,2,3,\ldots$$
$$(0{,}0267786\, q^2 + 0{,}107II54\, q + 0{,}1769698)\, b_q + 0{,}0267786\, \varepsilon^2 b_{q-2} +$$
$$+ 0{,}920084I\, \varepsilon a_{q-1} + 0{,}0234314\, \varepsilon g_{q-1} = 0 \qquad q = I,3,4,\ldots$$

$$(0{,}0689334\, q^2 + 0{,}2757342\, q + 0{,}4262125)\, \varepsilon^2 g_q + 0{,}02412669 \cdot$$
$$\cdot\, \varepsilon^2 g_{q-2} + 0{,}02343138\, \varepsilon b_{q-1} = 0 \qquad (4.I4)$$
$$q = I,2,3,\ldots$$

Рассматриваем в дальнейшем оболочку, у которой $\varepsilon = I/I00$. Определим функции перемещений оболочки. Найдем в первую очередь множители членов степенных рядов для функций $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$. Множители с индексом 0 следующие:

$b_0 = -0{,}2307692\ T_{0\xi}$ из II уравнения;

$a_0 = 0$ из первого уравнения; $g_0 = 0$.

Используя множители с индексом, 0 находим при помощи формул (4.14) следующие множители рядов по необходимости.

Таким образом получим:

$$\alpha(t_1) = T_{0\xi}\,(0{,}00006012305\ t_1 + 0{,}0003522104.10^{-4}\ t_1^3 - 0{,}0111261\!0.10^{-8}\ t_1^5 + 2{,}653625.10^{-13}\ t_1^7 - 4{,}331861.10^{-16}\ t_1^9 + 6{,}856882.10^{-19}\ t_1^{11}\ 7{,}752647.10^{-22}\ t_1^{13} + 6{,}3941544.10^{-25}\ t_1^{15} - 5{,}623595.10^{-23}\ t_1^{17} + 3{,}463079.10^{-31}\ t_1^{19} - \ldots\ldots).$$

$$\beta(t_1) = T_{0\xi}\,(-0{,}2307692 - 0{,}0003286088\ t_1^2 + 0{,}01954557 \times 10^{-4}\ t_1^4 - 0{,}7576129.10^{-8}\ t_1^6 + 2{,}04289.10^{-11}\ t_1^8 - 4{,}028720.10^{-14}\ t_1^{10} + 6{,}045128.10^{-17}\ t_1^{12} - 7{,}121749.10^{-20}\ t_1^{14} + 6{,}7557212.10^{-23}\ t_1^{16} - 5{,}267750.10^{-26}\ t_1^{18} + 3{,}427187.10^{-29}\ t_1^{20} - \ldots).$$

$$\gamma(t_1) = T_{0\xi}\,(0{,}7014373\ t_1 - 0{,}008620578\ t_1^3 + 0{,}005765117 \times 10^{-2}\ t_1^5 - 0{,}2394766.10^{-6}\ t_1^7 + 6{,}747876.10^{-10}\ t_1^9 - 1{,}371667.10^{-12}\ t_1^{11} + 2{,}104155.10^{-15}\ t_1^{13} - 2{,}520866.10^{-18}\ t_1^{15} + 2{,}423038.10^{-21}\ t_1^{17} - 1{,}9053333.10^{-24}\ t_1^{19} + \ldots).$$

Для получения решения в окончательном виде нужно решения (4.15) подставить в формулы (4.5) - (4.7).

В случае больших значений времени t целесообразно решить систему уравнений (4.12) методом Рунге-Кутта.

Литература

1. B.A. Boley. An Approximate Theory of Lateral Impact on Beams. J. Appl. Mech. 22.1. 1955.

2. B.A. Boley, Chi-Chang Chac. An Approximate Analysis of Timoschenko Beams Under Dynamic Loads. J. Appl. Mech. 25.1. 1958.

3. H.M. Berkovitz. Longitudinal Impact of a Semiinfinite Elastic Cylindrical Shell. J. Appl. Mech., 30. 3. 1963.

4. J. Mirsky, G. Hermann. Axielly Symmetric Motions of Thick Shells. J. Appl. Mech. 25.1. 1958.

L.Poverus

Inventigation of Elastic Waves in a Cylindrical Shell by a Variation Method

Summary

Using the linear equations of Timoshenko, the elastic waves in a semi-infinite cylindrical shell have been investigated if a longitudinal Heavyside load is acting. A usual energetic method is applied.

$b_2 = -0{,}2307692\ T_{11}$ из II уравнения;

$g_2 = 0$ из первого уравнения, $g_4 = 0$.

Используя выкладки с индексом 0 выходим, что помимо формул (4.14) [illegible].

Таким образом, получим:

$$w(t_1) = T_{11}(0{,}02508012305\ t_1 + 0{,}005322108\cdot10^{-4}\ t_1^3 - 0{,}01112610\cdot10^{-8}\ t_1^5 + 2{,}653625\cdot10^{-13}\ t_1^7 - 4{,}831841\cdot10^{-16}\ t_1^9 + \ldots)$$

$$\beta(t_1) = T_{11}(-0{,}2307692 + 0{,}\ldots\ t_1^2 - \ldots \cdot 10^{-4}\ t_1^4 - 0{,}7976129\cdot10^{-8}\ t_1^6 + 2{,}04289\cdot10^{-11}\ t_1^8 - 4{,}028720\cdot10^{-14}\ t_1^{10} + 6{,}045128\cdot10^{-17}\ t_1^{12} - 7{,}121749\cdot10^{-20}\ t_1^{14} + 6{,}7557212\cdot10^{-23}\ t_1^{16} - 5{,}267730\cdot10^{-26}\ t_1^{18} + 3{,}427167\cdot10^{-29}\ t_1^{20} - \ldots),$$

$$\psi(t_1) = T_{11}(0{,}5014573\ t_1 - 0{,}008620578\ t_1^3 + 0{,}00576117\cdot10^{-2}\ t_1^5 - 0{,}2398766\cdot10^{-6}\ t_1^7 + 6{,}747876\cdot10^{-10}\ t_1^9 - 1{,}371667\cdot10^{-12}\ t_1^{11} + 2{,}104155\cdot10^{-15}\ t_1^{13} - 2{,}520865\cdot10^{-18}\ t_1^{15} + 2{,}423036\cdot10^{-22}\ t_1^{17} - 1{,}9054951\cdot10^{-24}\ t_1^{19} + \ldots).$$

Для получения решения в окончательном виде нужно решения (4.15) подставить в формулы (4.5) – (4.7).

В случае больших значений времени t_1 целесообразно решать систему уравнений (4.12) методом Рунге-Кутта.

Литература

1. B.A. Boley. An Approximate Theory of Lateral Impact on Beams. J. Appl. Mech. 22.1, 1955.

2. B.A. Boley, Chi-Chang Chao. An Approximate Analysis of Timoshenko Beams Under Dynamic Loads. J. Appl. Mech. 25.1, 1958.

3. H.N. Abramovich. Longitudinal Impact of a Semi-Infinite Elastic Cylindrical Shell. J. Appl. Mech. [illegible]

4. J. Mirsky, G. Herrmann. Axially Symmetric Motions of Thick Cylindrical Shells. J. Appl. Mech. 25.1, 1958.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 197 1970

УДК 681.14.001.57

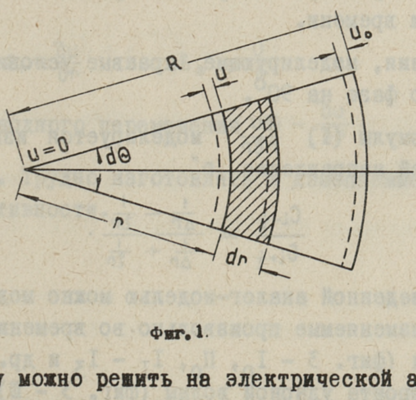
О.Т. Роотс

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В КРУГЛОЙ ПЛИТЕ

При осесимметрической, во времени изменяющейся нагрузке круглой плиты (фиг. I) радиальные перемещения выражаются следующей формулой:

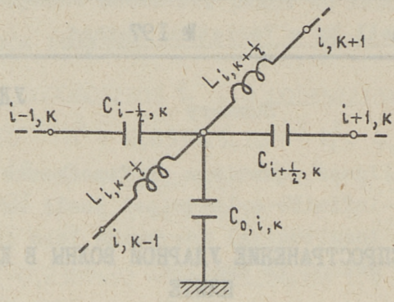
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (I)$$

где u – радиальное перемещение,
u_0 – кратковременная нагрузка (по краю плиты),
r – радиус,
ρ – плотность материала,
E – модуль упругости материала,
ν – коэффициент Пуассона,
t – время.



Фиг. 1.

Эту задачу можно решить на электрической аналог-модели, составленной из емкостей и индуктивности. Фиг. 2 показывает один из дискретных узлов этой модели.



Фиг. 2

В моделе

$$\left(U_{i+1,к}+U_{i-1,к}-2U_{i,к}\right)\omega C_{i,к}-\frac{U_{i,к+1}+U_{i,к-1}-2U_{i,к}}{\omega L_{i,к}}-U_{i,к}\,\omega C_{0,i,к}=0, \qquad (2)$$

где U - напряжение узловой точки,

ω - частота питающего тока,

C - емкости модели,

L - индуктивности модели.

Соответствие:

$$\frac{1}{\omega C}=\Delta r^2; \quad \omega L=\Delta t^2; \quad \frac{1}{\omega C_0}=r^2,$$

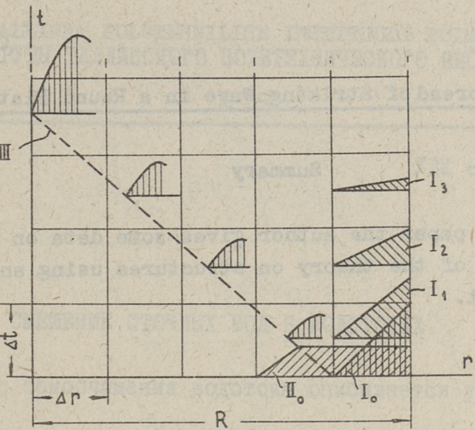
Δr и Δt - размеры дискретного участка в радиальном направлении и времени.

Напряжения, моделирующие краевые условия, должны быть сдвинуты по фазе на 90°.

Член формулы (I) $\frac{\partial u}{r\partial r}$ моделируется изменением величин емкостей направления „r"

$$\frac{C_{i-\frac{1}{2}}}{C_{i+\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{\Delta r}-\frac{1}{2r}}{\frac{1}{\Delta r}+\frac{1}{2r}}. \qquad (3)$$

Вышеприведенной аналог-моделью можно моделировать напряжения, изменяемые произвольно во времени и радиальном направлении (фиг. 3 - I_0, II_0, I_I - I_3 и др.), следить за движением фронта ударной волны (фиг. 3 - Ш) и измерять перемещения в желаемом времени.



Фиг. 3.

Моделировать можно и плиту с изменяемой толщиной.

Главнейшим недостатком этого метода является деление на дискретные участки как в направлениях „u" , так и в направлениях „t".

Следует применять многоэлементную сеть, тем более, что напряжения

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta\right) \qquad (4)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r\right),$$

где

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \text{и} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r},$$

зависят от производного перемещения u – „$\frac{\partial u}{\partial r}$".

Модель сложна. Трудно изготовлять и изменяемые высококачественные индуктивности.

O.Roots

The Spread of Striking Wave in a Round Plate

Summary

In this paper the author gives some data on the model of a problem of the theory on structures using an electric analogy model.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 197 1970

УДК 681.14.001.57

Л.И. Руга

СМЕШЕНИЕ СТОЧНЫХ ВОД В ВОДОТОКАХ

Процесс самоочищения водотока описывается уравнением (I)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial s}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial s}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial s}{\partial z}\right)=$$

$$= v_x\frac{\partial s}{\partial x}+v_y\frac{\partial s}{\partial y}+v_z\frac{\partial s}{\partial z}+\frac{\partial s}{\partial t}+Ks\,, \qquad (I)$$

где s - показатель концентрации загрязнения,
x, y, z - направления координатных осей,
v_x, v_y, v_z - проекция скорости течения на ось,
K_x, K_y, K_z - коэффициенты диффузии,
K - коэффициент неконсервативности.

В случае низкого широкого русла стационарный процесс описывается уравнением (2)

$$K_x\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+K_y\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}=v_x\frac{\partial s}{\partial x}. \qquad (2)$$

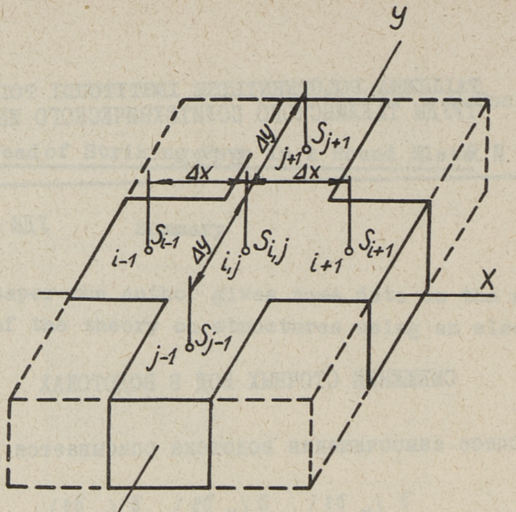
Этот процесс можно легко моделировать электрическим током.

При составлении электрической модели принято, что

I) коэффициенты турбулентной диффузии являются постоянными,

2) скорость течения по живому сечению одинакова и равна средней скорости потока, не изменяющейся по своей длине водотока,

3) коэффициент неконсервативности K равняется нулю.



Фиг. 1

Исследуя процесс в дискретной точке (фиг. I), можем написать

$$\frac{\partial s}{\partial x} \approx \frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{2\Delta x} \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{s_{i+1} - s_{i,j}}{\Delta x} - \frac{s_{i,j} - s_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{s_{i+1} - 2s_{i,j} + s_{i-1}}{\Delta x^2}. \tag{4}$$

Следовательно,

$$K_x \frac{s_{i+1} - s_{i,j}}{\Delta x^2} - K_x \frac{s_{i,j} - s_{i-1}}{\Delta x^2} + K_y \frac{s_{j+1} - s_{j,i}}{\Delta y^2} -$$

$$- K_y \frac{s_{i,j} - s_{j-1}}{\Delta y^2} \approx V_x \frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{2\Delta x}. \tag{5}$$

В электрической модели - (фиг. 2)

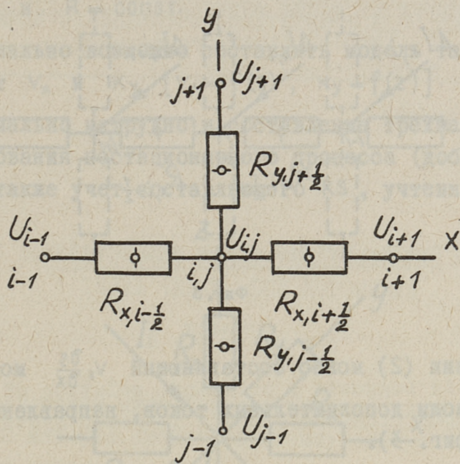
$$\frac{u_{i+1} - u_{i,j}}{R_{x,i+\frac{1}{2}}} - \frac{u_{i,j} - u_{i-1}}{R_{x,i-\frac{1}{2}}} + \frac{u_{j+1} - u_{j,i}}{R_{y,j+\frac{1}{2}}} -$$

$$- \frac{u_{j,i} - u_{j-1}}{R_{y,j-\frac{1}{2}}} = \Delta I, \tag{6}$$

где u - напряжение в узле,

R - омическое сопротивление,

I - сила тока.



Фиг. 2

Изменение тока ΔI в электрической модели соответствует в действительности величине $v_x \frac{S_{i+1} - S_{i-1}}{2\Delta x}$.

Такое соответствие действительно, если соотношение соседних омических сопротивлений

$$n = \frac{R_{x,i+\frac{1}{2}}}{R_{x,i-\frac{1}{2}}} = \frac{K_x \frac{1}{\Delta x^2} + V_x \frac{1}{2\Delta x}}{K_x \frac{1}{\Delta x^2} - V_x \frac{1}{2\Delta x}} \tag{7}$$

и

$$\frac{R_y}{R_x} = \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \frac{K_x}{K_y}, \tag{8}$$

$$R_x = r_x m, \tag{9}$$

$$R_y = r_y m, \tag{10}$$

$$R_{y,j+\frac{1}{2}} = R_{y,j-\frac{1}{2}} = R_{x,i-\frac{1}{2}} \sqrt{n} = \frac{R_{x,i+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}}, \tag{11}$$

$$R_{x,i+\frac{1}{2}} = n R_{x,i-\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

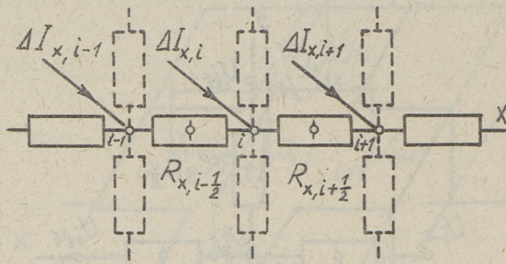
где m - масштаб сопротивления,

r - номинальное сопротивление,

R - сопротивление в модели.

Моделирование возможно, если

$$\frac{K_x}{\Delta x} > \frac{V_x}{2}. \qquad (13)$$



Фиг. 3

В уравнении (2) можно составляющий $V_x \frac{\partial s}{\partial x}$ моделировать тоже при помощи дополнительных токов, направленных в узловые точки (фиг. 3).

В этом случае омические сопротивления $R_x = const.$, а ограничивающее условие (13) отсутствует.

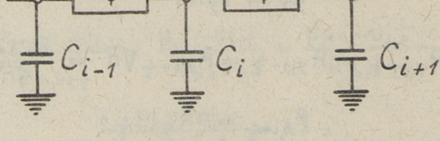
Но для автоматической подачи дополнительных токов ΔI требуются специальные генераторы тока, чувствительные к напряжению.

Если взять в уравнение (2)

$$K_x \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \approx 0,$$

можно двухмерную задачу моделировать при помощи линейной модели.

$$V_x \frac{\partial s}{\partial x} = K_y \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}. \qquad (14)$$

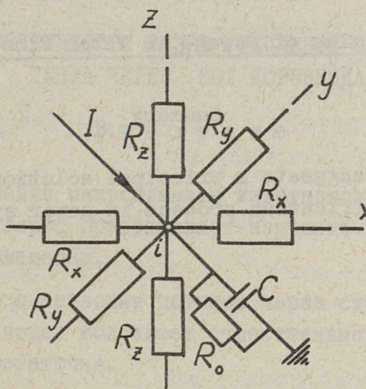


Фиг. 4

В этой модели (фиг. 4) значения аргумента x измеряются на оси времени. Если $V_x = const.$ и $K_y = const.$, то $C = const.$ и $R = const.$

Принципиально возможно составлять модель также при изменяющихся от V_x и K_y $[V_x = f(z)\ ,\ K_y = f(z)]$.

Принципиально нетрудно и составление трехмерной модели для исследования нестационарного процесса (добавляются емкости), а также учет составляющего KS, учтенного в модели



Фиг. 5

соответствующими дополнительными омическими сопротивлениями. Схема основного элемента электрической модели, моделирующая дискретную точку в этом случае, представлена на фиг. 5.

Литература

1. У. Карплюс. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. Издательство иностранной литературы, М. 1962.

2. П.М. Алабужев, В.Б. Геронимус, Л.М. Минкевич, Б.А. Шеховцов. Теория подобия и размерностей. Моделирование. Изд. "Высшая школа", М. 1968.

3. А.М. Айтсам, Х.А. Вельнер, Л.Л. Пааль. О расчете продольного смешения вещества загрязнения в водотоках. Сб. статей по санитарной технике IУ. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 247, Таллин 1967.

4. Л.Л. П а а л ь. О расчете смешения сточных вод при некоторых эпюрах загрузки водотоков. Сб. статей по санитарной технике IУ. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 247, Таллин 1967.

L.Ruga

Mixing of Sewage on Water Flows

Summary

The paper suggests a principal solution of a model of the self-purification process in sewer systems.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 297 1970

УДК 681.14.001.57

В.Ю. Компус

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВИДОВ УТЕПЛЕНИЙ НА ПОТЕРЮ ТЕПЛА ЧЕРЕЗ ПОЛ КОРОВНИКА

Введение

При исследовании микроклимата животноводческих зданий значительный интерес представляет изучение теплового потока через пол помещения.

По сравнению с тепловым потоком через стены и потолок тепловой поток через пол имеет существенные различия и изучен еще недостаточно.

Направление теплового потока через потолок и стены всегда ясно: он направлен в сторону более низкой температуры, причем определение разностей температуры не представляет трудности. При изучении теплового потока через пол определение его направления и величины затруднено, так как изменение температуры грунта под зданием связано с аккумуляцией тепла в грунте и геотермическим теплом.

Исследования, проведенные по этому вопросу, давали противоречивые результаты, что вызывает интерес к дальнейшему его изучению.

В настоящей статье приводятся некоторые результаты исследования теплового потока через пол коровника, которое было проведено при помощи электрической модели.

Модель

Моделирование теплового поля под коровником осуществлялось при помощи двумерной электрической модели типа RC - сетки.

Равенство критерия подобия соблюдено путем выбора соответствующих масштабов:

$$\frac{\alpha_c \cdot \alpha_r \cdot \alpha_l^2}{\alpha_t} = 1,$$

где α_c - масштаб емкости ($\alpha_c = 7.10^9$),

α_r - масштаб сопротивлений ($\alpha_r = 6{,}25.10^{-4}$),

α_t - масштаб времени ($\alpha_t = 4{,}38.10^6$),

α_l - масштаб длины ($\alpha_l = 1$).

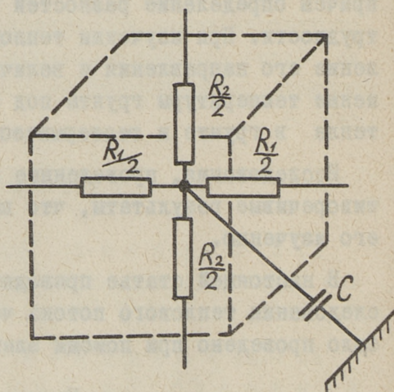
Модель изготовлена на месте. Емкости выполнены в виде емкостных магазинов. Сопротивления - проволочные резисторы. Питание синусоидальным переменным током осуществлялось при помощи генератора звуковой частоты. Постоянный ток подавался из батареи сухих элементов. Измерение параметров электрического тока производилось при помощи ламповых вольтметров, осциллоскопа и фазометра.

Исходные данные и краевые условия

На поперечное сечение грунта под коровником наложена мысленно сетка, которая разбивает рассматриваемое сечение на элементы.

Шаг сетки неравномерен, изменяясь от 8 до 0,5 м. Он короче там, где градиент температуры больше. Разбивка грунта под коровником на элементы приведена на фиг. I.

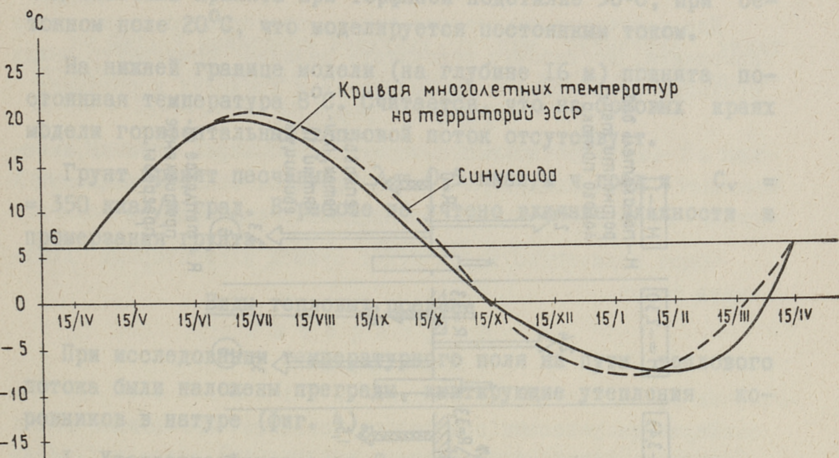
Каждому элементу в натуре соответствует в модели электрическое звено из емкости С и сопротивлений R_1 и R_2 (фиг. 2).



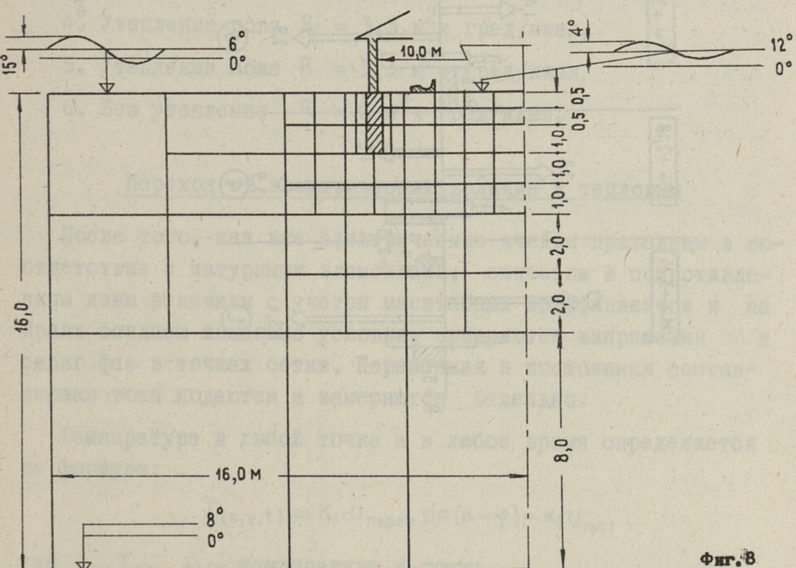
Фиг. 1

Температура поверхностного слоя грунта в условиях Эстонской ССР (средняя многолетняя) изменяется в течение года по кривой, близкой к синусоиде (фиг. 3).

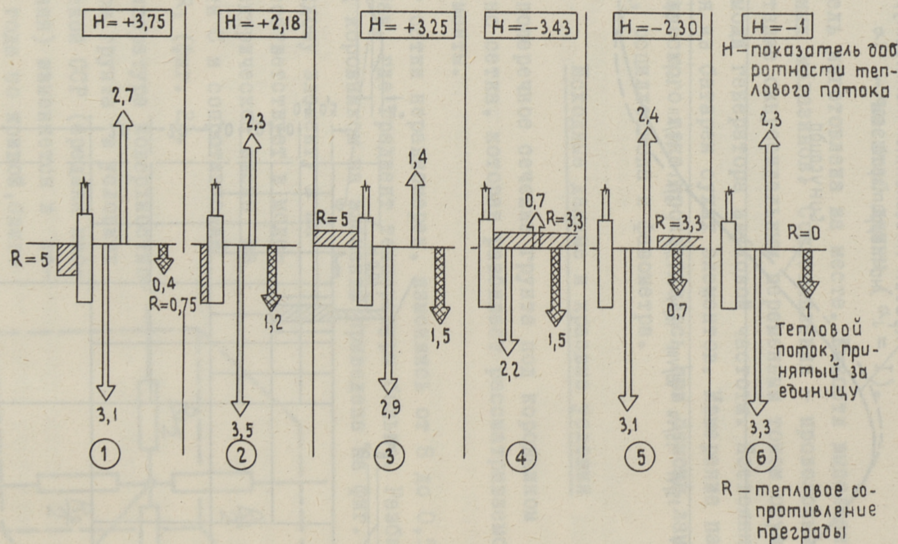
Изменение температуры поверхностного слоя грунта моделирует синусоидальный переменный ток. Амплитуда тока была выбрана в I5 вольт и частота 50C герц ($\frac{T}{u} = 1$).


°C
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
6
Кривая многолетних температур
на территорий ЭССР
Синусоида
15/IV
15/V
15/VI
15/VII
15/VIII
15/IX
15/X
15/XI
15/XII
15/I
15/II
15/III
15/IV

Фиг. 2


15°
6°
0°
10,0 м
4°
12°
0°
0,5
0,5
1,0
1,0
1,0
2,0
2,0
8,0
16,0
16,0 м
8°
0°

Фиг. 3


H= +3,75
H= +2,18
H= +3,25
H= −3,43
H= −2,30
H= −1
H – показатель добротности теплового потока
2,7
R = 5
0,4
R=0,75
3,1
1
2,3
1,2
3,5
2
R = 5
1,4
1,5
2,9
3
0,7
R=3,3
1,5
2,2
4
2,4
R = 3,3
0,7
3,1
5
2,3
R=0
1
Тепловой поток, принятый за единицу
3,3
6
R – тепловое сопротивление преграды

Фиг. 4

Температура в коровнике также моделируется синусоидальным током (амплитуда в модели 4 вольта). Температура ложа под животным принята при торфяной подстилке 30°С, при бетонном поле 20°С, что моделируется постоянным током.

На нижней границе модели (на глубине 16 м) принята постоянная температура 8°С. Считается, что на боковых краях модели горизонтальный тепловой поток отсутствует.

Грунт принят песчаный с $\lambda = 0{,}5$ ккал/м ч град и C_v = = 350 ккал/м^{3}град. В работе не учтено влияние влажности и промерзания грунта.

Виды тепловых преград

При исследовании температурного поля на пути теплового потока были наложены преграды, имитирующие утепления коровников в натуре (фиг. 4).

1. Утепление фундамента $R = 5$ м^{2}ч град/ккал,
2. Утепление фундамента $R = 0{,}75$ м^{2}ч град/ккал,
3. Утепление по внешнему периметру здания $R = 5$ м^{2}ч $\frac{\text{град}}{\text{ккал}}$,
4. Утепление пола $R = 3{,}3$ м^{2}ч град/ккал,
5. Утепление ложа $R = 3{,}3$ м^{2}ч град/ккал,
6. Без утепления $R = 0$ м^{2}ч град/ккал.

Переход от электрических величин к тепловым

После того, как все электрические ячейки приведены в соответствие с натурными элементами, емкостям и сопротивлениям даны величины с учетом масштабных коэффициентов и на краях созданы желаемые условия, замеряются напряжения и сдвиг фаз в точках сетки. Переменная и постоянная составляющая тока подаются и замеряются отдельно.

Температура в любой точке и в любое время определяется по формуле:

$$T_{(x,y,t)} = K_1 \cdot U_{перем} \sin(\alpha - \varphi) + K_2 U_{пост} ,$$

где $T_{(x,y,t)}$ - температура в точке,

$U_{перем}, U_{пост}$ - напряжения,

K_1, K_2 - переходный коэффициент от напряжения к температуре,

α – угол, соответствующий времени,

φ – сдвиг фазы напряжения в данной точке по сравнению с базисным напряжением.

Для получения количества тепла, проходящего через пол помещения, достаточно подсчитать разницы температур между крайними элементами и краем модели в пределах коровника:

$$\Delta Q = \nabla T \cdot F \cdot \lambda \cdot \Delta t ,$$

где ΔQ – количество тепла, проходящего через элемент, имеющий площадь F и коэффициент теплопроводности λ за время Δt при градиенте температуры ∇T.

Общее количество тепла будет суммой элементарных количеств тепла.

Выводы

Изучение тепловых потоков показывает, что потоки тепла меняют свою величину и направление как во времени, так и по ширине коровника.

Общая сумма количества тепла, проходящего через пол помещения, не полностью характеризует тепловой баланс коровника. Поток тепла из коровника в грунт неблагоприятен зимой, но летом может оказаться даже полезным. И наоборот, тепловой поток из грунта в коровник, улучшая микроклимат помещения зимой, является летом лишним.

Чтобы рядом с другими параметрами дать показатель, который показывал бы целесообразность теплового потока во времени, вычислен "показатель добротности теплового потока" – H

$$H = \Delta T_0 Q ,$$

где ΔT_0 – разность температур наружного и внутреннего воздуха (если температура наружного воздуха выше температуры коровника, то ΔT_0 – положительное число, в противоположном случае – отрицательное).

Q – количество тепла, текущее через пол (при потоке из коровника в почву – положительное).

При таком толковании большое положительное число значения H показывает благоприятное течение тепла, отрицательная же величина указывает на нецелесообразный поток тепла.

На фиг. 4 приведены величины H при различных видах утепления. Показатель H подсчитан по двухмесячным интервалам и суммирован за время стойлового периода.

Стрелками обозначены тепловые потоки через пол в течение стойлового периода. Стрелка вверх показывает тепловой поток в коровник, стрелка вниз - тепловой поток из коровника, а черная стрелка - суммарный поток.

Литература

I. L.A. J o o r i t s. Pinnase temperaturivälja eksperimentaalne ja teoreetiline uurimine laudasooja põrandakao selgitamiseks. Диссертация на соискание ученой степени канд. техн. наук, Таллин I965.

2. У. К а р п л ю с. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. Изд. Иностранной литературы. М. I962.

3. Справочник по климату СССР, выпуск А, Эстонская ССР, часть 2, температура воздуха и почвы. Гидрометеорологическое издательство. Л. I965.

4. Л.К. Ю р г е н с о н. Расчет режима помещения для сельскохозяйственных животных. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 75, Таллин I956.

5. Х.П. О т л о о т. Поглощение тепла ложем животного. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № I03, Таллин I957.

V.Kompus

The Effect of Various Ways of Thermal Insulation on Heat Loss

Summary

This paper deals with the problem of construction physics. The author gives some results of the experiment made by the use of the electric R-C model. An "Index of quality of heat current" has been suggested to ascertain the suitability of heat current direction through the floor of a cowshed.

ТРУДЫ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

Сборник статей III

Таллинский политехнический институт

Редактор Р. Э э к.

Техн. редактор Л. Л о о п е р.

Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 27 марта 1970 года.

Сдано в набор 3 июля 1970 года. Подписано к печати 19 сентября 1970 года. Бумага 60x90/16. Печ. л. 5,25+ +приложение. Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 400. МВ-08601.
Зак. № 437. Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскла, 2/9.

Цена 40 коп.

Eesti NSV Teaduslik Raamatukogu

Цена 40 коп.

EESTI AKADEEMILINE RAAMATUKOGU
1 0200 00083259 6