

Er .6.7
194

TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

№ 194

ТРУДЫ ПО ФИЗИКЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ

III

ТАЛЛИН 1962

Ер. 6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Серия А

№ 194

1962

ТРУДЫ ПО ФИЗИКЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ

III

ТАЛЛИН 1962

P 53479



Д. М. Ананьев

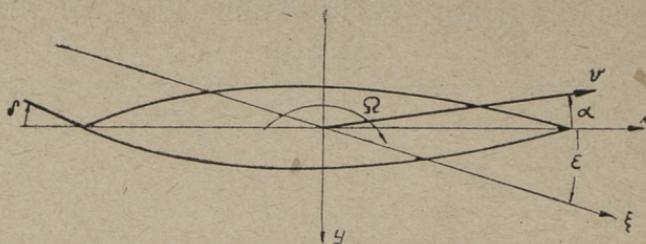
НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРАВЛЯЕМОСТИ СУДОВ НА ВОЛНЕНИИ

Вопросы управляемости судна на волнении в настоящее время изучены в весьма малой степени, хотя решение подобных задач представляет несомненный интерес. В настоящей работе предпринята попытка разработать линейную теорию управляемости на волнении и на её основе решить некоторые задачи, а именно — исследовать устойчивость судна на курсе, а также рассмотреть его движение на волнении в пределах применимости линейной теории. При этом волнение принимается регулярным и скорость хода судна — постоянной; влиянием качки пренебрегается.

Устойчивость судна на курсе при указанных выше основных предпосылках рассмотрена Г. Вейнблюмом [1]. С целью упрощения выкладок Г. Вейнблум приравнял приращение угла курса судна углу дрейфа, а также без серьезного обоснования исключил часть вызванных волнами сил из уравнений движения. Поэтому с результатами работы [1] нельзя согласиться.

Управляемость судна на волнении исследована также в работе Л. Ридилла [2]. Из-за чрезмерного упрощения уравнений движения судна Л. Ридилл получил, что устойчивость судна на волнении не отличается от устойчивости на тихой воде. Подобный вывод нельзя считать правильным. Заметим также, что в работах [1] и [2] не учитываются возмущающие силы дифракционной природы, что приводит к значительному (примерно в 2 раза) занижению возмущающих сил.

Кроме того, К. Давидсон [3] рассмотрел особый случай движения судна, когда его положение относительно профиля волны не изменяется. Этот случай в настоящей работе не исследуется.



Фиг. 1.

Примем систему координат xuz , (фиг. 1), связанную с судном, начало которых взято в плоскости грузовой ватерлинии на одной вертикали с центром тяжести судна. Ось z направлена вертикально вверх. На фиг. 1 также показаны: ξ — направление бега волн, ε — угол курса судна относительно направления бега волн, v — скорость хода, α — угол дрейфа, δ — угол перекладки руля.

Для исследования движения судна на волнении введем обычные в теории управляемости допущения о постоянстве скорости хода и малой величине угла дрейфа. Кроме того, примем, что судно симметрично относительно мидель-шпангоута. В таком случае уравнения движения судна имеют вид

$$\left. \begin{aligned} -m_2 \frac{d\alpha}{ds} + m_1 \Omega &= c_y \\ n \frac{d\Omega}{ds} &= m_z, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где Ω — безразмерная угловая скорость,

$$s = \frac{vt}{L},$$

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{M + \mu_{11}}{\frac{\rho}{2} L^2 T}, & m_2 &= \frac{M + \mu_{22}}{\frac{\rho}{2} L^2 T}, \\ n &= \frac{J + \mu_{66}}{\frac{\rho}{2} L^4 T}, & \Omega &= -\frac{d\varepsilon}{ds}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

M — масса судна,

J — момент инерции массы судна относительно оси z ,

μ_{11} , μ_{22} , μ_{66} — присоединенные массы,

ρ — массовая плотность воды,

L и T — длина и осадка судна,

c_y и m_z — коэффициенты поперечной силы и момента

рысканья, которые равны

$$c_y = \frac{Y}{\frac{\rho}{2} v^2 L T},$$

$$m_z = \frac{M_z}{\frac{\rho}{2} v^2 L^2 T};$$
(3)

в формулах (3): Y — поперечная гидродинамическая сила, M_z — момент рысканья.

Влияние волнения на поперечную силу и момент рысканья учитываем на основе гидродинамической теории качки корабля, согласно которой эти сила и момент могут быть разделены на две составляющие, из которых первая определяется как результат воздействия на судно не возмущенных его присутствием волн, а вторая учитывает дифракцию волн.

Приняв систему регулярных волн, движущихся в направлении оси ξ (фиг. 1), получим для симметричного относительно мидель-шпангоута судна первую составляющую согласно решению А. Н. Крылова [4] в виде

$$Y^* = \gamma \Theta_0 A_0 \sin \varepsilon \sin \sigma t,$$

$$M_z^* = -\gamma \Theta_0 (B_1 + \bar{G}_1) \sin \varepsilon \cos \sigma t,$$
(4)

где γ — весовая плотность воды,

Θ_0 — амплитуда угла волнового склона,

σ — кажущаяся частота волн, равная

$$\sigma = \sigma_0 - k v \cos(\varepsilon + \alpha);$$
(5)

в последней формуле

σ_0 — частота волн,

v — скорость хода судна,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

λ — длина волны.

В равенствах (4):

$$A_0 = 2 \int_{L-T}^0 \int e^{kz} y \cos k_1 x dz dx,$$

$$B_1 = 2 \int_{L-T}^0 \int e^{kz} xy \sin k_1 x dz dx,$$

$$\bar{G}_1 = -\frac{2}{3} k_1 \int_{L-T}^0 \int e^{kz} y^3 \cos k_1 x dz dx, \quad (6)$$

где y — ордината судовой поверхности,

$$k_1 = k \cos \varepsilon, \quad k_2 = k \sin \varepsilon. \quad (7)$$

В работе [5] показано, что дифракционные силу и момент можно определить из выражений

$$Y_0 = \gamma \Theta_0 A'_0 \sin \varepsilon \sin \sigma t, \quad (8)$$

$$M_{z0} = -\gamma \Theta_0 B'_1 \sin \varepsilon \cos \sigma t,$$

где

$$A'_0 = \frac{1}{\varrho} \int_L \kappa \mu_2 \cos k_1 x dx, \quad (9)$$

$$B'_1 = \frac{1}{\varrho} \int_L \kappa \mu_2 x \sin k_1 x dx,$$

причем μ_2 — присоединенная масса шпангоута при его движении в направлении оси y ,

κ — поправочный коэффициент, который выражается в виде следующего интеграла по контуру шпангоута l [5]:

$$\kappa = -\frac{\varrho}{\mu_2} \int_1 e^{kz} \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dl, \quad (10)$$

где φ_2 — потенциал скоростей при движении вдоль оси y ,

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \cos(n, y).$$

Присоединенную массу μ_2 в (9) и (10) можно приближенно принять равной половине ее значения для сдвоенного контура шпангоута при движении в неограниченной жидкости. Присоединенные массы для различных контуров даются, например, в работе [8]. Вычисление поправочного коэффициента можно упростить, приняв μ_2 равной половине присоединенной массы эллипса, а φ_2 — равным потенциалу скоростей эллипса, т. е.

$$\mu_2 = \frac{\pi}{2} \varrho T^2, \quad \varphi_2 = -\frac{2T}{B} y;$$

тогда после интегрирования получим

$$\kappa = \frac{2}{P} J_1(p) - \frac{4p}{3\pi} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p^{2j}}{\prod_{m=1}^j (1+2m) \prod_{m=1}^j (3+2m)} \right], \quad (11)$$

$$P = \frac{2\pi T}{\lambda},$$

$J_1(p)$ — бesselева функция мнимого аргумента.

Подставив возмущающие силы из (6), и (9), в (3), найдем их коэффициенты в виде

$$c_{yв} = \bar{c}_{yв} \sin \bar{\sigma} s, \quad (12)$$

$$m_{zв} = \bar{m}_{zв} \cos \bar{\sigma} s,$$

где

$$\bar{c}_{yв} = \frac{2\theta_0(A_0 + A'_0)}{Fr^2 L^2 T} \sin \varepsilon, \quad (13)$$

$$\bar{m}_{zв} = - \frac{2\theta_0(B_1 + B'_1 + \bar{G}_1)}{Fr^2 L^3 T} \sin \varepsilon,$$

Fr — число Фруда,

σ — безразмерная частота, равная

$$\bar{\sigma} = \sigma \frac{L}{v} = \sqrt{\frac{2\pi L}{\lambda}} \left[\frac{1}{Fr} - \sqrt{\frac{2\pi L}{\lambda}} \cos(\varepsilon + \alpha) \right]. \quad (14)$$

Для дальнейших выкладок введем приращение угла курса

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0. \quad (15)$$

Здесь ε_0 — постоянная величина, равная начальному или среднему значению угла курса.

Имея целью разработку линейной теории управляемости судна на волнении, запишем коэффициенты поперечной силы и момента рысканья в форме

$$c_y = c_y^\alpha \alpha + c_y^\Omega \Omega + R \delta + (\bar{c}_{y0} + \bar{c}_y^\varepsilon \Delta \varepsilon) \sin \bar{\sigma} s, \quad (16)$$

$$m_z = m_z^\alpha \alpha + m_z^\Omega \Omega - R \frac{l_r}{L} \delta + (\bar{m}_{z0} + \bar{m}_z^\varepsilon \Delta \varepsilon) \cos \bar{\sigma} s.$$

В равенствах (16) возмущающие силы учтены последними членами этих выражений. Здесь \bar{c}_{y0} и \bar{m}_{z0} — значения $\bar{c}_{yв}$ и $\bar{m}_{zв}$ при $\varepsilon = \varepsilon_0$, а \bar{c}_y^ε и \bar{m}_z^ε — производные последних по углу курса также при $\varepsilon = \varepsilon_0$. Остальные члены равенств (16) принимаются такими же, как на тихой воде. При этом R — эффективность руля, равная

$$R = r_0 \frac{dc_y}{d\delta} \frac{S_r}{L\bar{T}}.$$

где

$\frac{dc_y}{d\delta}$ — производная коэффициента поперечной силы на руле,

S_r — площадь руля,

r_0 — поправка на влияние рудерпоста, гребного винта и попутного потока,

l_r — расстояние от руля до начала координат.

Кроме того, в дальнейшем принимаем безразмерную кажущуюся частоту постоянной и равной

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{2\pi L}{\lambda}} \left(\frac{1}{Fr} - \sqrt{\frac{2\pi L}{\lambda}} \cos \varepsilon_0 \right). \quad (17)$$

Подобное упрощение допустимо при малых изменениях частоты и приемлемо при исследовании устойчивости на курсе.

Подставив (16) в (1), получим уравнения движения в виде

$$\left. \begin{aligned} m_2 \frac{d\alpha}{ds} + c_y^\alpha \alpha + \bar{c}_y^\Omega \Omega + \bar{c}_y^\varepsilon \Delta \varepsilon \sin \bar{\sigma} s &= -R \delta - \bar{c}_{y0} \sin \bar{\sigma} s \\ n \frac{d\Omega}{ds} - m_z^\alpha \alpha - \bar{m}_z^\Omega \Omega - \bar{m}_z^\varepsilon \Delta \varepsilon \cos \bar{\sigma} s &= -R \frac{l_r}{L} \delta + \bar{m}_{z0} \cos \bar{\sigma} s \end{aligned} \right\} (18)$$

Здесь обозначено

$$\bar{c}_y^\Omega = c_y^\Omega - m_1.$$

Примем также угол перекадки руля постоянным. В таком случае из системы (18) нетрудно получить дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\begin{aligned} \bar{A} \frac{d^3(\Delta \varepsilon)}{ds^3} + \bar{B} \frac{d^2(\Delta \varepsilon)}{ds^2} + (\bar{C}_0 + \bar{C}_1 \cos \bar{\sigma} s) \frac{d(\Delta \varepsilon)}{ds} + (\bar{D}_1 \cos \bar{\sigma} s + \\ + \bar{D}_2 \sin \bar{\sigma} s) \Delta \varepsilon = \bar{N} + \bar{M}_1 \cos \bar{\sigma} s + \bar{M}_2 \sin \bar{\sigma} s, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= m_2 n, \quad \bar{B} = -m_2 m_z^{\circ} + n c_y^{\alpha}, \\ \bar{c}_0 &= m_z^{\alpha} \bar{c}_y^{\circ} - c_y^{\alpha} m_z^{\circ}, \quad \bar{c}_1 = m_2 \bar{m}_z^{\varepsilon}, \\ \bar{D}_1 &= c_y^{\alpha} \bar{m}_z^{\varepsilon}, \quad \bar{D}_2 = -(m_z^{\alpha} \bar{c}_y^{\varepsilon} + m_2 \bar{\sigma} \bar{m}_z^{\varepsilon}), \\ \bar{N} &= R (c_y^{\alpha} \frac{l_r}{L} + m_z^{\alpha}) \delta, \\ \bar{M}_1 &= -C_y^{\alpha} \bar{m}_{z0}, \quad \bar{M}_2 = m_z^{\alpha} \bar{C}_{y0} + m_2 \bar{\sigma} \bar{m}_{z0}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Решение последнего дифференциального уравнения имеет вид

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_{\text{одн}} + \Delta \varepsilon_{\text{част}}, \quad (21)$$

причем решение соответствующего однородного уравнения

$$\Delta \varepsilon_{\text{одн}} = \sum_{j=1}^{\varepsilon} C_j e^{p_j s} \left[\frac{a_{j0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{jn} \cos n \bar{\sigma} s + b_{jn} \sin n \bar{\sigma} s) \right], \quad (22)$$

частное решение

$$\Delta \varepsilon_{\text{част}} = \frac{l_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (l_n \cos n \bar{\sigma} s + m_n \sin n \bar{\sigma} s). \quad (23)$$

Постоянные C_j определяются из начальных условий движения.

Для определения характеристических показателей p и коэффициентов разложения a_n и b_n целесообразно ввести новую переменную

$$\omega = \bar{\sigma} s.$$

В таком случае уравнение (19) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^3(\Delta \varepsilon)}{d\omega^3} + B \frac{d^2(\Delta \varepsilon)}{d\omega^2} + (C_0 + C_1 \cos \omega) \frac{d(\Delta \varepsilon)}{d\omega} + (D_1 \cos \omega + \\ + D_2 \sin \omega) \Delta \varepsilon = N + M_1 \cos \omega + M_2 \sin \omega, \end{aligned} \quad (24)$$

Система однородных уравнений (27) имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю. Приравняв определитель системы, в данном случае бесконечный, нулю и решив полученное уравнение, можно найти характеристический показатель μ . При малых коэффициентах уравнения (24) можно ограничиться определителем, составленным из коэффициентов первых трех уравнений системы (27). Этот прием применял Хилл при расчете характеристических показателей решений линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. В нашем случае сокращенный определитель системы (27):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - \frac{2B\mu + 3\mu^2}{1 - C_0}; & \frac{D_2}{2(1 - C_0)}; & \frac{\mu^3 + B\mu^2 - (3 - C_0)\mu - B}{1 - C_0} \\ C_1\mu + D_1; & \mu^3 + B\mu^2 + C_0\mu; & C_1 + D_2 \\ -\frac{\mu^3 + B\mu^2 - (3 - C_0)\mu - B}{1 - C_0}; & -\frac{\mu C_1 + D_1}{2(1 - C_0)}; & 1 - \frac{2B\mu + 3\mu^2}{1 - C_0} \end{vmatrix} = 0 \quad (28)$$

Коэффициенты уравнения (24) и характеристический показатель μ считаем малыми величинами, что возможно при относительно больших $\bar{\sigma}$. Тогда, отбрасывая малые высших порядков, из (28) получим

$$A_0\mu^3 + A_1\mu^2 + A_2\mu + A_3 = 0, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 - \frac{6C_0}{1 - C_0} + \frac{9C_0}{1 - 2C_0}, \\ A_1 &= B - \frac{4BC_0}{1 - C_0} + \frac{6BC_0}{1 - 2C_0} + \frac{3C_1D_1}{2(1 - 2C_0)}, \\ A_2 &= C_0 + \frac{C_1^2}{2(1 - 2C_0)} + \frac{3[D_2(C_1 + D_2) + D_1^2]}{2(1 - C_0)}, \\ A_3 &= \frac{C_1D_1}{2(1 - C_0)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Неизвестные a_n , b_n и μ можно найти при любых частотах из системы (27) путем подбора. При этом искомые коэффициенты разложения выразятся через один из этих коэффициентов. Поэтому в практическом расчете можно положить a_0 равным единице или двум. Расчеты показали, что коэффициенты разложения весьма быстро убывают с ростом порядкового номера n .

Полученные выше решения применим к исследованию устойчивости движения судна. Положим, что в решениях (22) и (23)

$$Re p_j < 0, \quad (j = 1, 2, 3), \quad (33)$$

$$l_0 = 0. \quad (34)$$

В таком случае при $s \rightarrow \infty$

$$\varepsilon \infty = \varepsilon_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (l_n \cos n\bar{\sigma}s + m_n \sin n\bar{\sigma}s). \quad (35)$$

Тогда очевидно, что выражения (33) и (34) определяют условия устойчивости движения судна по среднему углу курса ε_0 . Около этого среднего значения угол курса испытывает колебания с частотой, равной кажущейся частоте волны.

Коэффициент l_0 , который определяется из системы уравнений (32), может оказаться равным нулю при переключке руля на некоторый постоянный угол δ_0 . Например, учитывая из всех коэффициентов разложения только l_0 , l_1 и m_1 , нетрудно получить этот угол в виде

$$\delta_0 = - \frac{B[(C_1 + D_2)M_2 + D_1M_1] + (1 - C_0)[(C_1 + D_2)M_1 - D_1M_2]}{2[B^2 + (1 - C_0)^2]R \left(c_y^2 \frac{l_r}{L} + m_z^2 \right)}. \quad (36)$$

Равенство (36) является приближенным выражением условия устойчивости (34).

При выполнении условий (33) и (34) угловая скорость судна, которая представляет собой производную угла курса, испытывает периодические колебания относительно равного нулю среднего значения. Воспользовавшись вторым из уравнений движения (18), получим средний угол дрейфа

$$\alpha_0 = \frac{1}{m_z^2} \left(R \frac{l_r}{L} \delta_0 - \frac{\bar{m}_z^2}{2} l_1 \right).$$

Таким образом, если выполняются условия (33) и (34), судно сохраняет асимптотическую устойчивость на курсе, средний угол которого равен ε_0 . При этом имеет место дрейф судна со средним углом дрейфа α_0 .

В частных случаях попутного и встречного волнения ($\varepsilon_0 = 0$ или $\varepsilon_0 = 180^\circ$) частное решение (23) равно нулю, вследствие чего вместо (34) получается условие

$$\delta_0 = 0.$$

Воспользуемся приближенным методом определения характеристических показателей из уравнения (29) для анализа условия устойчивости (33).

Согласно теореме Гурвица, вещественная часть всех характеристических показателей μ будет отрицательной, если

$$\begin{aligned} A_1 > 0, \quad A_3 > 0, \\ A_1 A_2 - A_0 A_3 > 0. \end{aligned}$$

Приняв во внимание формулы (19) и (25), а также учитывая, что

$$\rho = \bar{\sigma}\mu,$$

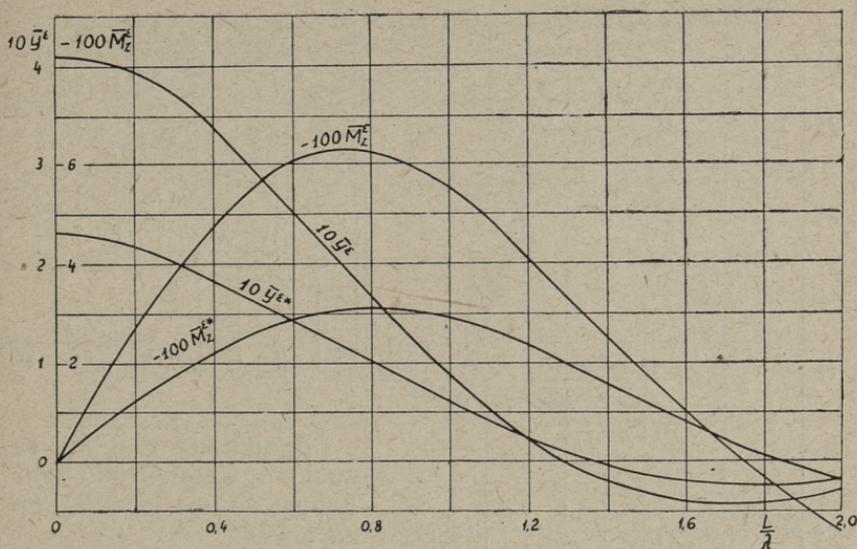
получим условия, при выполнении которых вещественные части всех показателей ρ будут отрицательными, в виде

$$\bar{B} > 0, \quad (37)$$

$$\frac{m_2 c_y^\alpha (\bar{m}_z^\varepsilon)^2}{1 - \frac{\bar{C}_0}{A\bar{\sigma}^2}} > 0, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}\bar{C}_0 + \frac{\bar{C}_1^2}{2\bar{\sigma}^2} \left[-\frac{m_z^2}{n \left(1 - \frac{\bar{C}_0}{A\bar{\sigma}^2}\right)} + \frac{3\bar{B}(c_y^\alpha)^2}{\bar{\sigma}^2 \left(1 - \frac{2\bar{C}_0}{A\bar{\sigma}^2}\right) m_2^2 \bar{A}} \right] + \\ + \frac{3\bar{B}m_z^\alpha \bar{c}_y^\varepsilon}{2\bar{\sigma}^3 \bar{A} \left(1 - \frac{2\bar{C}_0}{A\bar{\sigma}^2}\right)} \left(\bar{C}_1 + \frac{m_z^\alpha \bar{c}_y^\varepsilon}{\bar{\sigma}} \right) > 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Так как уравнение (29) приближенно справедливо для относительно больших $\bar{\sigma}$, а $m_2 > 0$ и $c_y^\alpha > 0$, то неравенство (38) удовлетворяется. Также всегда удовлетворяется условие (37). В неравенстве (39) знак первого члена совпадает со знаком C_0 . Второй член этого неравенства всегда положительный, так как производная коэффициента момента рысканья по угловой скорости является отрицательной величиной, а $\bar{B} > 0$; знак третьего члена может быть различным, но вследствие того, что его порядок малости выше, чем порядок второго члена, то, как правило, по величине третий член меньше второго. В условиях спокойной воды все члены неравенства (39), кроме первого, равны нулю. Суммируя сказанное выше, можно утверждать, что в условиях волнения неустой-



Фиг. 2.

чивое на тихой воде судно может приобрести курсовую устойчивость, а устойчивое на тихой воде судно сохранить устойчивость и на волнении.

В качестве примера приведем результаты расчетов устойчивости движения для двухвинтового танкера с размерениями: $L = 60,4$ м; $B = 10,0$; $T = 3,50$ м; коэффициент общей полноты $\delta = 0,69$. На фиг. 2 представлены амплитуды производных возмущающих сил при $\varepsilon = 0$ в форме

$$\bar{Y}^e = \frac{Fr^2 \bar{c}_{y^e}}{\theta_0}, \quad \bar{M}_z^e = \frac{Fr^2 \bar{m}_z^e}{\theta_0}. \quad (40)$$

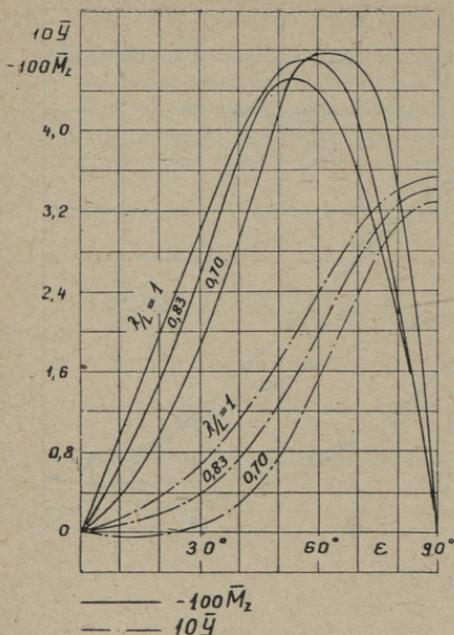
На этом же рисунке построены амплитуды «крыловских» составляющих силы и момента (\bar{Y}^{e*} и \bar{M}_z^{e*}).

На фиг. 3 показаны амплитуды этих сил для некоторых длин волн в виде

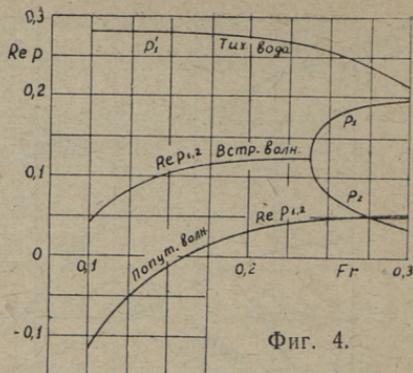
$$\bar{Y} = \frac{Fr^2 \bar{c}_{y_0}}{\theta_0}, \quad \bar{M}_z = \frac{Fr^2 \bar{m}_{z_0}}{\theta_0}. \quad (41)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \bar{Y}(\varepsilon) &= \bar{Y}(\pi - \varepsilon) = -\bar{Y}(\pi + \varepsilon), & \bar{Y}^e(\varepsilon) &= -\bar{Y}^e(\pi \pm \varepsilon), \\ \bar{M}_z(\varepsilon) &= -\bar{M}_z(\pi - \varepsilon) = \bar{M}_z(\pi + \varepsilon), & \bar{M}_z^e(\varepsilon) &= \bar{M}_z^e(\pi \pm \varepsilon). \end{aligned}$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.

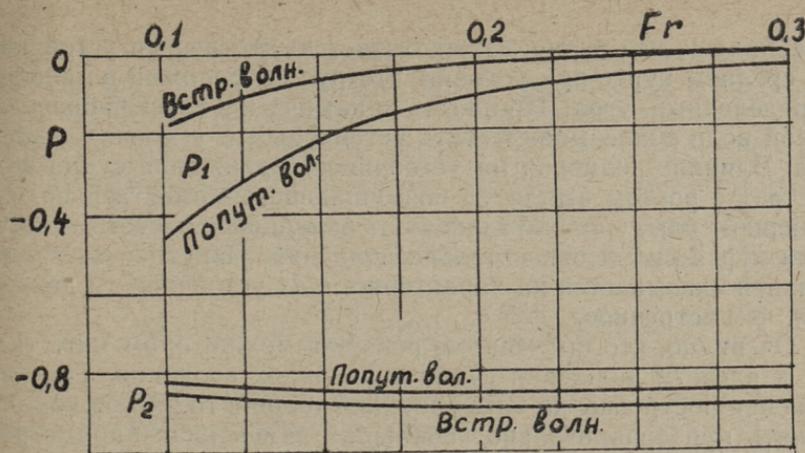
Величины \bar{Y} и \bar{M}_z зависят от элементов судна, длины волны и угла курса ε .

Вращательные и позиционные производные гидродинамических сил и моментов брались по методике Г. В. Соболева [6], т. е. такими же, как на

тихой воде. Поправки к этим производным, учитывающие влияние винтов, брались для выполненной в масштабе 1:20 модели танкера. Эффективность руля этой модели с учетом поправок равна 0,035. Модель оказалась неустойчивой на курсе в условиях спокойной воды; наибольший корень характеристического уравнения p'_1 показан на фиг. 4 (в расчете учтено влияние винтов).

На фиг. 4 построены графики вещественной части характеристических показателей p_1 и p_2 при различных числах Фруда, равной длине судна длине волны, отношении высоты волны к её длине, равном $\frac{1}{20}$, $\varepsilon_0 = 0$ (попутное волнение) и $\varepsilon_0 = \pi$ (встречное волнение). Наименьший показатель p_3 велик по абсолютной величине, а поэтому интереса не представляет.

Графики вещественной части показателей p_1 и p_2 при $\varepsilon_0 = 0$ и $\varepsilon_0 = \pi$ для динамически устойчивого на тихой воде одновинтового траулера с размерениями $L = 53,5$ м; $B = 9,00$ м, $T = 4,32$ м представлены на фиг. 5. При этом $\lambda = \frac{L}{h}$ и $\frac{h}{\lambda} = \frac{1}{20}$ (h — высота волны). На тихой воде наибольший корень $p'_1 = -0,85$.

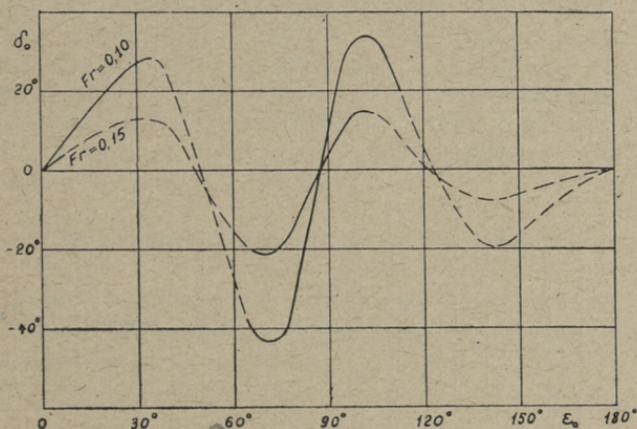


Фиг. 5.

Из фигур 4 и 5 видно, что соображения, высказанные на основе анализа приближенного решения, относительно влияния волнения на курсовую устойчивость, подтверждаются расчетом не только при больших кажущихся частотах. Заметим, что на попутном волнении при $Fr = 0,27 \div 0,30$ частоты сравнительно невелики (порядка $3 \div 2$).

Фигурой 6 представлены результаты расчета требуемого для сохранения устойчивости на курсе угла δ_0 перекладки руля танкера. Здесь сплошной линией обозначены те участки диаграммы, где вещественные части всех показателей ρ отрицательны, т. е. выполняются оба условия устойчивости.

Таким образом, из анализа устойчивости движения судна



Фиг. 6.

выяснилось, что судно может быть асимптотически устойчиво на среднем курсе при условии, что руль переложено на вполне определенный угол. При этом динамически неустойчивое на тихой воде судно может стать устойчивым в условиях волнения. Влияние волнения на устойчивость движения судна возрастает с ростом амплитуд возмущающего момента и возмущающей силы, а также зависит от кажущейся частоты волн и угла курса судна относительно волнения. Попутное волнение сильнее сказывается на характеристиках устойчивости движения, чем встречное.

Очевидно, что полученные решения можно применить также к расчету движения судна в условиях волнения. Так как решения построены на базе линейной теории, то их можно применять при сравнительно небольших изменениях параметров движения.

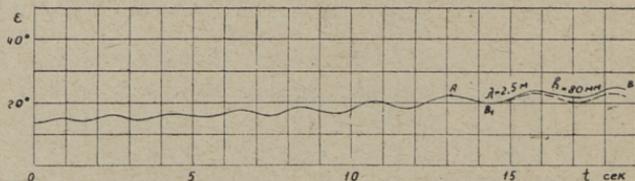
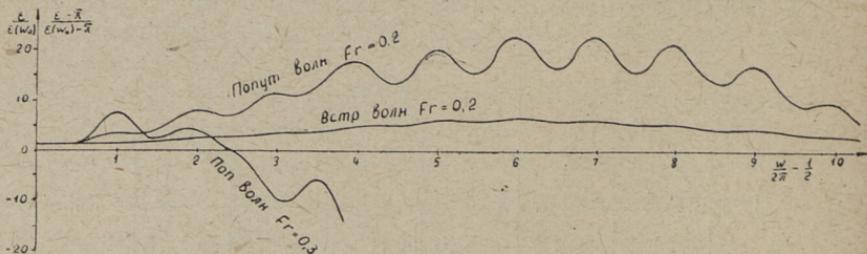
Заметим, что характеристические показатели p_1 и p_2 могут быть как вещественными, так и комплексными. В случае комплексных показателей движение судна включает колебание с низкой частотой.

$$Q_0 = I m p_1 = -I m p_2,$$

на которое наложены еще колебания с частотой, равной кажущейся частоте волн. При вещественных p низкочастотные колебания отсутствуют.

Приведем результаты расчета угла курса в таких условиях, когда можно принять

$$\bar{c}_{y0} = \bar{c}_y^\varepsilon \Delta \varepsilon, \quad \bar{m}_{z0} = \bar{m}_z^\varepsilon \Delta \varepsilon,$$



Фиг. 7 (наверху)

Фиг. 8. (внизу)

т. е. на курсах, близких курсу прямо по волне или навстречу ей. На фиг. 7 показаны результаты расчета на моделирующей электронной машине угла курса модели танкера в этих условиях при длине волны, равной длине модели и при отношении высоты волны к её длине, равном $\frac{1}{20}$. При этом принято, что в начальный момент центр тяжести судна находится на вершине волны, т. е. $\omega_0 = \pi$. Начальные условия движения:

$$\Delta\varepsilon(\omega_0) \neq 0, \frac{d(\Delta\varepsilon)}{d\omega}(\omega_0) = \frac{d^2(\Delta\varepsilon)}{d\omega^2}(\omega_0) = 0.$$

Из графиков фиг. 7 видно значительное различие в поведении судна на попутной и встречной волне, а также большое влияние скорости хода. Можно заметить, что на попутном волнении при приближении скорости хода к скорости бега волн (т. е. при приближении числа Фруда к 0,4) возмущение движения быстро возрастает. При $Fr = 0,35$ (случай, не показанный на фиг. 7) после прохождения мимо судна двух волн приращение угла курса возрастет в 400 раз. Качественно аналогичный результат был получен и при других начальных условиях. Этот вывод согласуется с практическими наблюдениями.

Сопоставим результаты расчета угла курса судна с экспериментом. В опытовом бассейне был проведен эксперимент на регулярном попутном волнении с самоходной моделью упомянутого выше танкера длиной 3,02 м. Модель ставилась под углом к оси бассейна, после чего включались волнопродуктор и мотор модели. Руль находился в нейтральном положении. На фиг. 8 приведена одна из осциллографических записей угла курса модели. На том же рисунке пунктиром показаны результаты расчета угла курса. Рассчитывался тот участок движения модели (AB на фиг. 8), где скорость хода и, следовательно, кажущийся период волн были постоянными. С целью определения начальных условий при длине волны, равной 2,5 м, приращение угла курса на участке AB_1 аппроксимировалось из опыта зависимостью

$$\Delta\varepsilon = 0,00416\omega - 0,0289 \cos(\omega + 0,204),$$

где начальная фаза была получена путем расчета.

Результаты расчета угла курса удовлетворительно совпали с экспериментом.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Weinblum. On the Directional Stability of Ships in Calm Water and in a Regular Seaway. Proc. of the I American Congress of Applied Mechanics, N. Y., 1951.
2. L. Rydill. A Linear Theory of the steered Motion of Ships in Waves. TINA, vol. 101, Nr. 1, 1959.
3. K. Davidson. A Note on the Steering on the Ships on Following Seas. Proc. of the VII Int. Congress for Appl. Mechanics, 1948.
4. А. Н. Крылов. Собрание трудов, т. XI. Качка корабля. АН СССР, 1951.
5. Д. М. Ананьев. Об учете дифракционных сил при исследовании управляемости судов на волнении. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 189, 1961.
6. Г. В. Соболев. Управляемость корабля (конспект лекций). ЛКИ, 1959.
7. И. Г. Малкин. Теория устойчивости движения. ГИТТЛ, 1952.
8. Н. А. Кудрявцева. Силы и моменты инерционной природы, действующие на сечения подводной части корпуса накренного корабля. Труды НТОСП, т. VII, вып. 2, 1957.

О. М. Сильде

К ВОПРОСУ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1. Введение

Большой успех гравитационной теории Эйнштейна, сущность которой заключается в уравнениях

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\kappa T_{ik},$$

которые по В. А. Фоку представляют «величайшее достижение человеческого гения» (В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, изд. 1955 г., стр. 469), является стимулом для математиков и физиков к дальнейшему развитию идей, вложенных в основу этой теории, с целью охватить и другие физические поля (в первую очередь электромагнитное поле). Главные направления этих изысканий исходят из идей расширения четырехмерной римановой геометрии, лежащей в основе теории гравитации Эйнштейна. Расширение римановой геометрии можно осуществить в двух направлениях:

- 1) увеличением числа измерений,
- 2) заменой величин римановой геометрии величинами более общего характера.

Закон обобщенного поля получается тогда обыкновенно в виде:

$$R_{ik} = 0$$

или, что то же самое,

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = 0.$$

Приходится все же сознаться, что до сих пор эти изыскания, несмотря на многочисленность предложенных решений, не привели к удовлетворительным результатам. Это, однако, не означает, что следует прекратить работу в этом направлении. В настоящее время при наличии огромного экспериментального материала надобность в обобщающих теориях чувствуюется особенно остро, и несоответствие теорий с практикой является уже препятствием к дальнейшему развитию. Более общие точки зрения, охватывающие широкие области физических явлений, поэтому оказываются необходимыми. Единство реального мира рождает в нас уверенность, что изыскания в этом направлении должны привести к некоторым результатам.

Но раньше, чем искать теорию физического поля в расширениях римановой геометрии, следовало бы основательно изучить вопрос: нельзя ли в рамках четырехмерной римановой геометрии найти возможности для описания более обширных полей, сохраняя при этом основные уравнения

$$G_{ik} = -\kappa T_{ik}.$$

Дело в том, что гравитационная теория Эйнштейна обращает главное внимание на тензоры R_{ik} и G_{ik} и оставляет вне внимания тензор Римана-Кристоффеля $R^i_{k,lm}$, как нечто лишнее, о котором известно, что он в случае неевклидовой геометрии не равняется нулю. Отсюда близко к идее, что именно тензор $R^i_{k,lm}$ характеризует состояние физического поля в данной точке пространства, и что мы не заметили этого только потому, что физики расчленили единое поле на несколько независимых друг от друга полей. Следовательно, задачей является отыскание полей, содержащихся в $R^i_{k,lm}$. Так как $R^i_{k,lm}$ имеет в 4-мерном римановом пространстве 20 независимых составляющих, то он является достаточным, чтобы включить и гравитационное и электромагнитное поле и поле импульса материи.

Я намереваюсь начать рассуждения о физических полях именно с этого вопроса и дать в настоящем изложении в общих чертах один из возможных ответов.

2. Основные положения

Во-первых, основным аппаратом для описания физического поля является четырехмерная римановая геометрия.

Квадрат линейного элемента ds^2 выражается в виде:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad i, k = 1, 2, 3, 4, \quad g_{ik} = g_{ki}$$

(g_{ik} — фундаментальный тензор поля или метрический тензор).

g_{ik} должны быть такими, чтобы в любой точке пространства с помощью действительных преобразований можно ds^2 привести к виду

$$ds^2 = -dx^1^2 - dx^2^2 - dx^3^2 + dx^4^2$$

(скорость света $c = 1$, время x^4 измеряется в сантиметрах).

Имеются тензоры:

1) $R^i_{k, lm}$ — тензор кривизны или тензор Римана-Кристоффеля,

2) $R_{km} = R_{mk} = R^i_{k, im}$ — свернутый тензор кривизны или тензор Риччи,

3) $R = g_{ik} R^{ik}$ — скаляр кривизны,

4) $G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R$ — тензор Эйнштейна или консервативный тензор.

Во-вторых, остаются в силе уравнения

$$G_{ik} = -\kappa T_{ik},$$

где κ гравитационная константа, а T_{ik} тензор энергии.

Но интерпретация последних уравнений будет новая: они уже не являются уравнениями гравитационного поля (или в общем уравнениями поля), а уравнениями, связывающими с одной стороны геометрические величины (или величины поля), представителем которых является G_{ik} , и с другой стороны физические или материальные величины, которые воплощены в T_{ik} . Геометрические величины — это g_{ik} и его комитанты, а физические величины, это те, которые получаются путем физических измерений в каждой точке пространства (импульс — энергия, электромагнитное поле, и т. д.). Физические величины, как и геометрические, суть также скаляры, векторы, тензоры и т. д.

Допустим, что уравнения

$$G_{ik} = -\kappa T_{ik}$$

не являются первичными уравнениями связи. Ими являются уравнения

$$R^i_{k, lm} = -\kappa T^i_{k, lm},$$

где $T^i_{k,lm}$ тензор четвертого порядка, составленный из физических величин.

Рассуждаем так: пусть дана некоторая риманова геометрия, т. е. даны g_{ik} . Из них мы можем вычислить $R^i_{k,lm}$ и написать вышестоящие уравнения. Теперь вводим требование: из этих уравнений можно найти все основные физические величины (или по крайней мере те, которые охватываются нашим полем) в любой точке пространства.

Тензор кривизны в 4-мерном римановом пространстве имеет 20 независимых составляющих. Следовательно, основные физические величины должны быть охарактеризованы всего 20 числами. Такую сумму составляющих имеют следующие величины:

	скаляр	1 составляющая,
	единичный вектор	3 составляющих,
	бивектор	6 „
—	симметр. тензор второго порядка	10 „
	<hr/>	
	Всего	20 составляющих.

Следовательно, физическое состояние в каждой точке пространства определяется этими четырьмя величинами, которые являются простейшими в римановой геометрии и которые можно найти из уравнений

$$R^i_{k,lm} = -\kappa T^i_{k,lm}.$$

В дальнейшем для облегчения записи и упрощения рассуждений, мы примем, что

$$\kappa = 1,$$

т. е. мы займемся непосредственным разложением тензора $R^i_{k,lm}$ на вектор, бивектор и симметричный тензор.

Обозначаем:

скаляр через m ,

единичный вектор через u^i ,

бивектор через f_{ik} , $f_{ki} = -f_{ik}$ и

симметр. тензор через h_{ik} , $h_{ki} = h_{ik}$.

В дальнейшем мы положим, что

$$u^i = \frac{dx^i}{ds},$$

тогда вектор пишется в виде

$$m u^i = m \frac{dx^i}{ds}.$$

Из этого вектора можно получить симметричный тензор второго порядка $tu^{ik} = tu^i u^k$ (тензор массы, t — плотность массы покоя).

Бивектор f_{ik} будем объяснять как антисимметр. тензор электромагнитного поля, а физическое значение h_{ik} остается пока невыясненным.

Для составления уравнений связи мы исходим из требований, чтобы они были наименьшей степени относительно t , u^i , f_{ik} и h_{ik} . Тогда имеется в сущности одна возможность.

Из любого симметричного тензора можно образовать тензор со свойствами тензора Римана-Кристоффеля двумя способами:

1) альтернированным общим произведением тензора на фундаментальный тензор (этот прием будем применять к тензору tu_{ik}).

2) альтернированным общим произведением тензора на самый тензор (этот прием применяем к тензору h_{ik}).

Из бивектора f_{ik} можно получить тензор

$$f_{ik} f_{lm} + \frac{1}{2} (f_{lk} f_{im} + f_{mk} f_{li}),$$

имеющий свойства тензора $R_{ik, lm}$.

Вводим еще скаляр H :

$$H = m - \frac{1}{2} f - \frac{1}{2} h,$$

$$\text{где } f = f_{st} f^{st}, \text{ а } h = h_s^s h_t^t - h_s^t h_t^s.$$

Из H можно получить тензор $(g_{il} g_{km} - g_{kl} g_{im}) H$ со свойствами тензора $R_{ik, lm}$.

После всех вышеприведенных объяснений можем уравнения связи написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} R_{ik, lm} = -T_{ik, lm} = & -\frac{1}{2} m (g_{il} u_{km} - g_{kl} u_{im} - g_{im} u_{kl} + \\ & + g_{km} u_{il}) + \frac{4}{3} f_{ik} f_{lm} + \frac{2}{3} (f_{lk} f_{im} + f_{mk} f_{li}) + \\ & + 2(h_{il} h_{km} - h_{kl} h_{im}) + \frac{1}{3} (g_{il} g_{km} - g_{kl} g_{im}) H. \end{aligned}$$

Если κ не приравнять единице, тогда конечно

$$R_{ik, lm} = -\kappa T_{ik, lm}$$

и все выражение на правой стороне следует умножить на κ .

Путем свертывания получается:

$$R_{ik} = R^s_{i, sk} = -\frac{1}{2} m (g^s_i u_{ik} - g^s_i u_{sk} - g^s_k u_{si} + g_{ik} u^s_s) + \\ + 2f^s_i f_{sk} + 2(h^s_s h_{ik} - h_{is} h^s_k) + \frac{1}{3} (g^s_s g_{ik} - g_{is} g^s_k) H.$$

Здесь

$$g^k_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{если } i \neq k, \end{cases} \quad a$$

$$u^s_s = 1.$$

$$\text{Обозначаем } p_{ik} = h^s_s h_{ik} - h_{is} h^s_k,$$

тогда

$$R_{ik} = -m(u_{ik} + \frac{1}{2} g_{ik}) + 2f_{is} f^s_k + 2p_{ik} + g_{ik} H = \\ = -m u_{ik} + \frac{1}{2} g_{ik} m + 2(f_{is} f^s_k - \frac{1}{4} g_{ik} f) + 2(p_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} h).$$

Свертывая еще раз, получается: $R = m$, и отсюда

$$G_{ik} = -m u_{ik} + 2(f_{is} f^s_k - \frac{1}{4} g_{ik} f) + 2(p_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} h).$$

Если положить

$$Q^{ik} = -2(f^i_s f^{ks} - \frac{1}{4} g^{ik} f) - 2(p^{ik} - \frac{1}{4} g^{ik} h)$$

и снова ввести множитель κ , то:

$$G^{ik} = -\kappa \left(m \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} + Q^{ik} \right).$$

и следовательно

$$T^{ik} = m \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} + Q^{ik}.$$

Для введения понятия электрического заряда мы вводим вектор плотности электрического тока I^k следующим образом:

$$I^k = 2 \nabla_i f^{ki}$$

3. Уравнения движения

Если дан фундаментальный тензор поля g_{ik} , то приведенные в предыдущем пункте формулы позволяют вычислить в любой точке все материальные величины, а именно m , $\frac{dx^i}{ds}$, f^{ik} , p^{ik} . Следовательно, в каждой точке пространства известна и скорость массы, а тогда можно определить и путь, пройденный каждой материальной точкой. Уравнения движения материальных частичек можно получить из условия, что дивергенция тензора G^{ik} равна нулю:

$$\nabla_i G^{ik} = 0 \text{ или } G^{ik};_i = 0,$$

или

$$\nabla_i \left(m \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} + Q^{ik} \right) = 0.$$

Вычисляем $\nabla_i \left(m \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \right)$. Для этого обозначаем

$$m^i = m \frac{dx^i}{ds}.$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} \nabla_i \left(m^i \frac{dx^k}{ds} \right) &= \frac{\partial m^i}{\partial x^1} \frac{dx^k}{ds} + m^i \frac{\partial \left(\frac{dx^k}{ds} \right)}{\partial x^1} + \Gamma_{1s}^i m^s \frac{dx^k}{ds} + \\ &+ \Gamma_{1s}^k m^i \frac{dx^s}{ds}. \end{aligned}$$

Приравняв $i = 1$ и суммируя получим

$$\nabla_i \left(m^i \frac{dx^k}{ds} \right) = m \frac{d^2 x^k}{ds^2} + m^1;_i \frac{dx^k}{ds} + m \Gamma_{1s}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^s}{ds}.$$

Прибавляя к этому $\nabla_i Q^{ik}$ и деля на m получим уравнения движения:

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{11}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^1}{ds} + \frac{1}{m} \left(m^1;_i \frac{dx^k}{ds} + \nabla_i Q^{ik} \right) = 0.$$

Из этих уравнений видно, что движение будет геодезическим, если

$$m^i{}_{;i} \frac{dx^k}{ds} + \nabla_i Q^{ik} = 0.$$

или

$$m^i{}_{;i} = 0 \text{ и } \nabla_i Q^{ik} = 0.$$

4. Пример

В качестве примера проанализируем до некоторой степени статический центрально-симметричный случай. В этом случае удобно ввести сферические координаты (см. Фок 1955 г, стр. 256). Тогда ds^2 выражается следующим образом:

$$ds^2 = V^2 dt^2 - F^2 dr^2 - \varrho^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2),$$

где V , F и ϱ — функции только r (координаты расстояния от центра симметрии), t — координата времени. Для удобства выберем координатную систему так, чтобы $\varrho = r$ (т. е. не вводим гармонических координат, как это делает Фок) и делаем дальнейшее упрощение, считая $FV = 1$ (это условие выполняется в случае полей Шварцшильда и Нордстрема). Наконец вводим новую переменную

$$2u = 1 - V^2.$$

Тогда составляющие тензора Римана-Кристоффеля выражаются в следующем виде (обозначая $u' = \frac{du}{dr}$):

$$R^{or}_{or} = u'' \quad (\text{o — индекс времени}),$$

$$R^{o\vartheta}_{o\vartheta} = R^{o\varphi}_{o\varphi} = R^{r\vartheta}_{r\vartheta} = R^{r\varphi}_{r\varphi} = \frac{u'}{r},$$

$$R^{\vartheta\varphi}_{\vartheta\varphi} = \frac{2u}{r^2}, \quad R = 2u'' + \frac{8u'}{r} + \frac{4u}{r^2}.$$

Все остальные R^{ik}_{lm} равны 0.

В действительных случаях $R \geq 0$.

Уравнения связи можно записать в следующем виде (если обозначить m буквою R и перенести в другую сторону, $u'_0 = 1$, остальные нули):

$$A = R^{or}_{or} + \frac{1}{2}R = f + 2h^o_0 h^r_r + \frac{1}{3}H, \quad (1)$$

$$B = R^{o\vartheta}_{o\vartheta} + \frac{1}{2}R = 2h^o_0 h^\vartheta_\vartheta + \frac{1}{3}H, \quad (2)$$

$$B = R^{0\varphi}_{0\varphi} + \frac{1}{2}R = 2h^0_\varphi h^\varphi_\varphi + \frac{1}{3}H, \quad (3)$$

$$C = R^{r\vartheta}_{r\vartheta} = 2h^r_r h^\vartheta_\vartheta + \frac{1}{3}H, \quad (4)$$

$$C = R^{r\varphi}_{r\varphi} = 2h^r_r h^\varphi_\varphi + \frac{1}{3}H, \quad (5)$$

$$D = R^{\vartheta\varphi}_{\vartheta\varphi} = 2h^\vartheta_\vartheta h^\varphi_\varphi + \frac{1}{3}H. \quad (6)$$

Из (2) и (3), а также (4) и (5) получается что $h^\varphi_\varphi = h^\vartheta_\vartheta$, вследствие чего уравнения (3) и (5) отпадают и у нас остаются 4 уравнения (1), (2), (4) и (6) с четырьмя неизвестными h^0_φ , h^r_r , h^ϑ_ϑ и $f = 2f^{or}f_{or}$ (остальные f_{ik} приняты равными 0). f^r_o есть интенсивность электрического поля в направлении координаты r .

Но между этими четырьмя уравнениями существует одно условие: после двойного свертывания получается, что $4R = 4R$.

Следовательно, недостает одного уравнения, чтобы найти h^0_φ , h^r_r , h^ϑ_ϑ и f .

Во всех подобных случаях мы будем добавлять еще условие $g^{ik}h_{ik} = h^s_s = 0$, вследствие чего задача становится определенной.

Вычисление дает, что

$$H = \frac{3}{4}(B + C + 2D),$$

$$h^\vartheta_\vartheta = h^\varphi_\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2(D - \frac{1}{3}H)},$$

$$h^r_r = \frac{C - \frac{1}{3}H}{\sqrt{2(D - \frac{1}{3}H)}}, \quad h^0_\varphi = \frac{B - \frac{1}{3}H}{\sqrt{2(D - \frac{1}{3}H)}},$$

$$f = A - D + \frac{(B - C)^2}{4(D - \frac{1}{3}H)}, \quad f^{ro} = \sqrt{-\frac{f}{2}}.$$

В действительных случаях

$$f \leq 0.$$

Нас особенно интересуют случаи без сингулярностей (ибо только такие случаи могут соответствовать действительности на протяжении всего поля), которые в бесконечности приво-

дят к псевдоэвклидовой метрике. Поэтому выберем в качестве конкретного примера:

$$u = \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{c}{r^3} \right) e^{-\frac{k}{r}}.$$

Мы здесь не будем исследовать вопроса о реальной возможности такого поля, а воспользуемся им для вычисления некоторых величин.

Это поле превращается в поле Нордстрема при $c = k = 0$, и в поле Шварцшильда при $b = c = k = 0$. Но если считать k малым, то далеко от центра получается приближенное поле Нордстрема, а вблизи центра поле без сингулярностей, если всюду $2u < 1$.

Вычисление дает:

$$R^{\text{or}} = \left(\frac{2a}{r^3} + \frac{6b - 4ka}{r^4} + \frac{12c - 6kb + k^2a}{r^5} + \frac{k^2b - 8kc}{r^6} + \frac{k^2c}{r^7} \right) e^{-\frac{k}{r}},$$

$$R^{\text{о}^{\text{в}} \text{о}^{\text{в}}} = R^{\text{r}^{\text{в}} \text{r}^{\text{в}}} = \left(-\frac{a}{r^3} + \frac{ka - 2b}{r^4} + \frac{kb - 3c}{r^5} + \frac{kc}{r^6} \right) e^{-\frac{k}{r}},$$

$$R^{\text{в}^{\text{в}} \text{в}^{\text{в}}} = \left(\frac{2a}{r^3} + \frac{2b}{r^4} + \frac{2c}{r^5} \right) e^{-\frac{k}{r}},$$

$$R = 2 \left(\frac{2c - 2kb + k^2a}{r^5} + \frac{k^2b - 4kc}{r^6} + \frac{k^2c}{r^7} \right) e^{-\frac{k}{r}},$$

$$f = \left(\frac{4b - 4ka}{r^4} + \frac{12c - 8kb + 2k^2a}{r^5} + \frac{2k^2b - 12kc}{r^6} + \dots \right) e^{-\frac{k}{r}}.$$

Из этих формул видно, что при $c = k = 0$ (т. е. при поле Нордстрема)

$$R = 0, f = \frac{4b}{r^4} \text{ и } f^{\text{r}^{\text{о}}} = \frac{\sqrt{-2b}}{r^2}.$$

В общем случае действительных решений $a \geq 0, b \leq 0, c \geq 0$, $(k^2b - 4kc)^2 - 4(2c - 2kb + k^2a)k^2c \leq 0$ и т. д.

Вся масса вычисляется приближенно по формуле:

$$M = \int_0^{\infty} R \cdot 4\pi r^2 dr = 8\pi a.$$

5. Закон поля

Закон поля должен из всевозможных римановых геометрий выбирать те, которые пригодятся для описания физического мира. Что любая геометрия к этому не годится, видно уже из того, что не всегда можно получить все величины m , $\frac{dx^i}{ds}$, $f^{ik} h^{ik}$, как некоторые действительные числа, причем $m \geq 0$. Но это условие делает выбор в самом общем виде, являясь необходимым, но не достаточным.

Экзактный закон поля должен установить связь между фундаментальным тензором и его комитантами, и не должен включать физических величин. Условия $R_{ik} = 0$ или $G_{ik} = 0$ уже не являются уравнениями поля, ибо они соответствуют некоторым выражениям физических величин, равенство нулю которых не может быть установлено наперед (напр. условие $G_{ik} = 0$ означало бы отсутствие тензора энергии, что не совпадает с опытом).

Из каких принципов можно вывести закон поля или уравнения поля?

Классическим является вариационный принцип:

$$\delta \int L \sqrt{-g} dx = 0,$$

где L инвариант — лагранжиан,

$$dx = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4,$$

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{14} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{41} & \cdots & g_{44} \end{vmatrix}.$$

L находят из величин, определяющих физическое состояние, и их первых производных по координатам.

В нашем случае физическое состояние в каждой точке пространства определяется составляющими тензора $R^i_{k, lm}$. Следовательно, лагранжиан должен быть составлен из них и их первых производных по координатам. Но это предписание позволяет составлять большое количество инвариантов. Чтобы делать выбор между ними, нужно ограничить задачу некоторыми дополнительными условиями. Этими могли бы быть следующие:

1) полученные уравнения поля должны удовлетворять по крайней мере в первом приближении полям Шварцшильда и Нордштрема,

2) должна сохраняться возможность центрально-симметричного поля без сингулярностей.

После внесения этих условий остались для исследования два инварианта:

$$1) L_1 = g^{ik} \frac{\partial R}{\partial x^i} \frac{\partial R}{\partial x^k},$$

$$2) L_2 = R^{i, \underline{k}l} R_{i, \underline{k}l} + a R^{i, \underline{k}l} R_{i, \underline{k}l} + l R^2,$$

где $R_{i, \underline{k}l} = \nabla_s R^{s, \underline{k}l}$ $R_{i, \underline{k}l} = \nabla_i R^{s, \underline{k}l}$.

Здесь a — абсолютная константа, которая определяется из дополнительного условия 1), l — физическая константа размерностью $\frac{1}{\text{см}^2}$.

Из этих двух инвариантов более жесткие уравнения поля дает L_2 . Однако для окончательного закона поля требуются дальнейшие исследования.

Б. А. Тийкма

ОДНО СВОЙСТВО ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ

1. Введение

Тензор кривизны Римана-Кристоффеля имеет большое значение в многомерной дифференциальной геометрии и в общей теории относительности. Известные уравнения поля тяготения Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = 0 \quad (1)$$

или

$$R_{ik} = 0 \quad (2)$$

содержат в себе тензор R_{ik} , т. е. свернутый тензор кривизны четвертого ранга

$$R_{ilm}{}^k. \quad (3)$$

Эти уравнения поля (1), (2) могут также рассматриваться как дифференциальные уравнения Эйлера-Лагранжа вариационного интеграла от инварианта R тензора кривизны.

$$\delta \int R \sqrt{-g} (dx) = 0. \quad (4)$$

Другими словами, компоненты тензора Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \quad (5)$$

являются коэффициентами вариаций фундаментального тензора — δg_{ik} .

Но уравнения (1), (2) можно получить из вариационного интеграла (4) также методом Палатини — т. е. при варьировании рассматривать фундаментальный тензор g_{ik} и коэффициенты аффинной связности отдельно как независимые переменные. В этом случае коэффициентами при вариации δg_{ik} получаются величины R_{ik} , а коэффициентами при вариации коэффициентов аффинной связности — величины $\nabla_k g_{mn}$, т. е. ковариантные производные от g_{mn} . Таким образом, уравнениями являются

$$R_{ik} = 0 \quad (6)$$

и

$$\nabla_k g_{mn} = 0. \quad (7)$$

В случае квадратичного инвариата R^2 по методу Палатини получены системы уравнений (см. [1]):

$$R(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R) = 0, \quad (8)$$

$$\nabla_s (R g^{mn} \sqrt{-g}) = 0. \quad (8')$$

Все эти системы уравнений (1), (2), (6), (7), (8) и (8') удовлетворяются частным решением К. Шварцшильда (см. [1]).

Наряду с другими методами можно было бы изучать свойство тензора кривизны с помощью свернутого ковариантного дифференцирования его. Приравниванием полученных производных к нулю можно далее изучать эти новые уравнения.

В данной работе найдены новые уравнения поля тяготения в статическом центрально-симметрическом случае. Эти уравнения выведены, исходя из наиболее общего вида метрики в форме Фока [2], путем свернутого ковариантного дифференцирования тензора кривизны четвертого ранга

$$R_k{}^{lm}{}_{n.} \quad (9)$$

2. Вывод новой системы уравнений

Рассмотрим линейный элемент

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3), \quad (10)$$

где

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}. \quad (11)$$

Здесь индекс 0 означает временную координату, — индексы 1, 2, 3, пространственные координаты. Фундаментальный тензор не зависит от времени $x^0 = t$, т. е.

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0. \quad (12)$$

Следуя Фоку [2, § 57] — взяв координатами

$$x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \vartheta \text{ и } x^3 = \varphi \quad (13)$$

и обозначив компоненты фундаментального тензора следующим образом

$$g_{00} = V^2, \quad g_{rr} = -F^2, \quad g_{\vartheta\vartheta} = -\varrho^2 \text{ и } g_{\varphi\varphi} = -\varrho^2 \sin^2 \vartheta, \quad (14)$$

причем $g_{\mu\nu} = 0$ если $\mu \neq \nu$, то линейный элемент (10) можно выразить через квадратичную дифференциальную форму

$$ds^2 = V^2 dt^2 - (F^2 dr^2 + \varrho^2 d\vartheta^2 + \varrho^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (15)$$

где величины F , ϱ и V зависят только от r .

Компонентами контравариантного фундаментального тензора будут величины

$$g^{00} = \frac{1}{V^2}, \quad g^{rr} = -\frac{1}{F^2}, \quad g^{\vartheta\vartheta} = -\frac{1}{\varrho^2}, \quad g^{\varphi\varphi} = -\frac{1}{\varrho^2 \sin^2 \vartheta} \quad (16)$$

и $g^{\mu\nu} = 0$, если $\mu \neq \nu$.

Для данной метрики отличные от нуля символы Кристоффеля второго рода следующие:

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{F'}{F}, & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -\frac{\varrho'\varrho}{F^2}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -\frac{\varrho'\varrho}{F^2} \sin^2 \vartheta, \\ \Gamma_{00}^r &= \frac{V'}{V}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^{\vartheta} &= -\sin \vartheta \cos \vartheta, & \Gamma_{r\vartheta}^{\vartheta} &= \frac{\varrho'}{\varrho}, \\ \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} &= \frac{\varrho'}{\varrho}, & \Gamma_{\vartheta\varphi}^{\varphi} &= ctg \vartheta, & \Gamma_{0r}^0 &= \frac{V'}{V}, \end{aligned} \quad (17)$$

т. е. всего девять символов из общего числа 64.

Дальше можно вычислить компоненты контравариантного тензора кривизны четвертого ранга.

$$\begin{aligned}
 R^{r\theta, r\theta} &= -\frac{1}{F^3 Q^3} \frac{d}{dr} \left(\frac{\varrho'}{F} \right), & R^{r\varphi, r\varphi} &= -\frac{1}{F^3 Q^3 \sin^2 \theta} \frac{d}{dr} \left(\frac{\varrho'}{F} \right), \\
 R^{\theta\varphi, \theta\varphi} &= \frac{F^2 - \varrho'^2}{F^2 Q^3 \sin^2 \theta}, & R^{or, or} &= -\frac{1}{V^3 F^3} \frac{d}{dr} \left(\frac{V'}{F} \right), \\
 R^{o\theta, o\theta} &= -\frac{\varrho' V'}{F^2 V^3 Q^3}, & R^{o\varphi, o\varphi} &= -\frac{\varrho' V'}{F^2 V^3 Q^2 \sin^2 \theta}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Остальные компоненты равны нулю.

Применив свойства тензора кривизны и операцию поднятия или опускания индексов можно из этой таблицы получить величины

$$R_{r \ r}^{\theta\theta} = -\frac{F}{Q^3} \frac{d}{dr} \left(\frac{\varrho'}{F} \right) \text{ и т. д.} \tag{19}$$

или особенно короткую таблицу:

$$\begin{aligned}
 R^{or}_{or} &= \frac{1}{VF} \frac{d}{dr} \left(\frac{V'}{F} \right), & R^{o\theta}_{o\theta} &= \frac{\varrho' V'}{F^2 V Q} = R^{o\varphi}_{o\varphi}, \\
 R^{\theta\varphi}_{\theta\varphi} &= -\frac{F^2 - \varrho'^2}{F^2 Q^2}, & R^{r\theta}_{r\theta} &= \frac{1}{F Q} \frac{d}{dr} \left(\frac{\varrho'}{F} \right) = R^{r\varphi}_{r\varphi}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Теперь можно составлять выражения

$$\nabla_l R_k^{lmn}, \tag{21}$$

которые в дальнейшем обозначены символом

$$R_k^{mn}. \tag{22}$$

Тогда можно написать, напр.

$$\nabla_l R_r^{l\theta} \equiv R_r^{\theta} \equiv \nabla_r R_r^{r\theta} + \nabla_{\theta} R_r^{\theta\theta} + \nabla_{\varphi} R_r^{\varphi\theta} + \nabla_o R_r^{o\theta}. \tag{23}$$

Чтобы вычислить все символы с тремя индексами, которых всего 64, нужно знать 256 ковариантных производных от тензора кривизны четвертого ранга.

Но гораздо проще вычислять вместо величин (22) или величин

$$\nabla_l R^{kl}_{mn} \tag{24}$$

им эквивалентные величины

$$\nabla_m R^k_n - \nabla_n R^k_m. \tag{25}$$

Не трудно показать, что величины (24) и (25) эквивалентны. В самом деле, с помощью свернутого тождества Бианки

$$\nabla_1 R_s^1{}_{mn} + \nabla_m R_s^1{}_{nl} + \nabla_n R_s^1{}_{lm} = 0 \quad (26)$$

следует, что

$$g^{ks} \nabla_1 R_s^1{}_{mn} = -g^{ks} \nabla_m R_s^1{}_{nl} - g^{ks} \nabla_n R_s^1{}_{lm} \quad (27)$$

или

$$\nabla_1 R^{kl}{}_{mn} = \nabla_m R^k{}_n - \nabla_n R^k{}_m. \quad (28)$$

Вычисления показали, что от нуля отличаются шесть символов

$$R_{\theta\theta}^r, R_{\varphi\varphi}^r, R_{oo}^r, R_{\theta r}^\theta, R_{\varphi r}^\varphi \text{ и } R_{or}^o, \quad (29)$$

причем

$$R_{\varphi r}^\varphi = R_{\theta r}^\theta, \quad (30)$$

$$R_{\varphi\varphi}^r = \sin^2\theta R_{\theta\theta}^r, \quad (31)$$

$$R_{\theta r}^\theta = -g^{\theta\theta} g_{rr} R_{\theta\theta}^r, \quad (32)$$

$$R_{or}^o = g^{oo} g_{rr} R_{oo}^r. \quad (33)$$

Из этого видно, что не все трехиндексные символы являются алгебраически независимыми друг от друга. Независимыми остаются только два символа, напр.

$$R_{oo}^r \text{ и } R_{\theta\theta}^r. \quad (34)$$

Их компактный вид следующий:

$$R_{oo}^r = \frac{\partial}{\partial r} R_{oo}^{rr} + 2R_{oo}^{rr} [\Gamma_{rr}^r - \Gamma_{ro}^o] + R_{oo}^{rr} [\Gamma_{\varphi r}^\varphi + \Gamma_{\theta r}^\theta] + \\ + \Gamma_{\theta\theta}^r R_{oo}^{\theta\theta} + \Gamma_{\varphi\varphi}^r R_{oo}^{\varphi\varphi}, \quad (35)$$

$$R_{\theta\theta}^r = \frac{\partial}{\partial r} R_{\theta\theta}^{rr} + 2R_{\theta\theta}^{rr} [\Gamma_{rr}^r - \Gamma_{r\theta}^\theta] + R_{\theta\theta}^{rr} [\Gamma_{\varphi r}^\varphi + \Gamma_{or}^o] + \\ + \Gamma_{\varphi\varphi}^r R_{\theta\theta}^{\varphi\varphi} + \Gamma_{oo}^r R_{\theta\theta}^{oo}. \quad (36)$$

В развернутом виде эти формулы

$$R_{oo}^r = \frac{V}{F^3} \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{V'}{F} \right) - \frac{V'}{F^3} \frac{d}{dr} \left(\frac{V'}{F} \right) - \frac{VF'}{F^4} \frac{d}{dr} \left(\frac{V'}{F} \right) + \\ + \frac{2Q'V}{QF^3} \frac{d}{dr} \left(\frac{V'}{F} \right) - \frac{2Q'^2 V'V}{F^4 Q^2}, \quad (37)$$

$$R_{\theta\theta}^r = -\frac{q}{F^3} \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{q'}{F} \right) + \frac{qF'}{F^4} \frac{d}{dr} \left(\frac{q'}{F} \right) - \frac{q'}{qF^4} (F^2 - q'^2) - \frac{V'q}{VF^3} \left(\frac{q'}{F} \right) + \frac{V'^2 q' q}{F^4 V^2}. \quad (38)$$

Приравнивая эти выражения к нулю, получаем два дифференциальных уравнения:

$$R_{\theta\theta}^r = 0 \quad (39)$$

и

$$R_{\theta\theta}^r = 0. \quad (40)$$

3. Изучение полученных уравнений

После упрощения левых сторон выражения (37) и (38), которые стоят в левых частях уравнений (39) и (40), можно эти уравнения написать следующим образом:

$$R_{\theta\theta}^r \equiv \frac{VV'''}{F^4} - \frac{3VV''F'}{F^5} - \frac{VV'F''}{F^5} + \frac{3VV'F'^2}{F^6} - \frac{V'V''}{F^4} - \frac{V'^2F'}{F^5} + \frac{2VV''q'}{F^4q} - \frac{2VV'F'q'}{F^5q} - \frac{2q'^2V'V}{q^2F^4} = 0; \quad (41)$$

$$R_{\theta\theta}^r \equiv -\frac{qq'''}{F^4} - \frac{3F'qq''}{F^5} + \frac{F'qq'}{F^5} - \frac{3F'^2qq'}{F^6} - \frac{V'qq''}{VF^4} + \frac{V'F'qq'}{VF^5} - \frac{q'F^2}{qF^4} + \frac{q'^3}{qF^4} + \frac{V'^2qq'}{V^2F^4} = 0. \quad (42)$$

Если уравнения (41) и (42) перемножить соответственно на выражения $\frac{F^4}{V^2}$ и $\frac{F^4}{q^2}$, тогда все члены на левой стороне имеют форму однородной дроби. Уравнение (42), напр., имеет такой вид:

$$\frac{V'''}{V} - \frac{3V''F'}{VF} - \frac{V'F''}{VF} + \frac{3V'F'^2}{VF^2} - \frac{V'V''}{V^2} + \frac{V'^2F'}{V^2F} + \frac{2V''q'}{Vq} - \frac{2V'F'q'}{VFq} - \frac{2V'q'^2}{Vq^2} = 0. \quad (43)$$

Легко убедиться, что метрика Шварцшильда-Фока (формула 57, 64 [2]), по которой коэффициенты выражения линейного элемента (15)

$$V^2 = c^2 \left(\frac{r - \alpha}{r + \alpha} \right), \quad F^2 = \left(\frac{r + \alpha}{r - \alpha} \right) \quad \text{и} \quad \varrho^2 = (r + \alpha)^2, \quad (45)$$

удовлетворяет данным уравнениям.

Таким образом можно сказать, что полученные уравнения выдерживают «боевые крещения» общей теории относительности (перемещение перигелия планеты Меркурия, отклонение света, смещение фраунгоферовых линий) как и уравнения Эйнштейна $R_{ik} = 0$.

Полученные дифференциальные уравнения отличаются от прежних (1) и (2) своим более сложным видом. Если уравнения $R_{ik} = 0$ второго порядка и второй степени, то новые уравнения будут третьего порядка и второй степени. Обе они нелинейные системы. Общего решения их не удалось получить, также не удалось найти общего метода нахождения точного решения.

Так как величины (24) и (25) эквиваленты, то и эквивалентны уравнения

$$\nabla_l R_k^{lm} = 0 \quad (46)$$

и

$$\nabla_n R_{kn} - \nabla_n R_{km} = 0. \quad (47)$$

В нашем случае $n = k \neq m$. И поэтому мы имеем

$$\frac{\partial R_{nn}}{\partial x_m} + \Gamma_{nn}^n R_{mm} - \Gamma_{nm}^n R_{nn} = 0. \quad (48)$$

Таким образом к нашим уравнениям (41) и (42) соответствуют уравнения

$$\frac{\partial R_{oo}}{\partial r} + \Gamma_{oo}^r R_{rr} - \Gamma_{ro}^o R_{oo} = 0; \quad (49)$$

$$\frac{\partial R_{\vartheta\vartheta}}{\partial r} + \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r R_{rr} - \Gamma_{r\vartheta}^{\vartheta} R_{\vartheta\vartheta} = 0. \quad (50)$$

Из предыдущего следует, что наши уравнения содержат в себе уравнения

$$R_{rr} = 0, \quad R_{\vartheta\vartheta} = 0 \quad \text{и} \quad R_{oo} = 0, \quad (51)$$

т. е. тензор R_{ik} удовлетворяет нашим уравнениям.

Линейная комбинация этих уравнений (51) ведет к уравнению

$$\frac{\varrho''}{\varrho} - \frac{V'\varrho'}{V\varrho} - \frac{F'\varrho'}{F\varrho} = 0, \quad (52)$$

решением которого будет

$$VF = \varrho' C. \quad (53)$$

Предполагая теперь $\varrho' = 1$ (см. [2], (57.40) и $C = 1$, рассмотрим уравнения (41) и (42) совместно с уравнением (53), считая $\varrho = r$ независимым переменным. Тогда уравнение

$$R_{\vartheta\vartheta}^r = 0 \quad (54)$$

примет следующий вид

$$V''V + V'^2 + \frac{1}{\varrho^2} - \frac{2}{\varrho^2} = 0. \quad (55)$$

После подстановки $V^2 = U$ получается уравнение

$$U'' - \frac{2U}{\varrho^2} = -\frac{2}{\varrho^2}, \quad (56)$$

общим решением которого является

$$U = C_1\varrho^2 + \frac{C_2}{\varrho} + 1. \quad (57)$$

Тогда общим решением уравнения (50) будет

$$V^2 = C_1\varrho^2 + \frac{C_2}{\varrho} + 1. \quad (58)$$

Этим решением удовлетворяется и уравнение (42), т. е. решением (58) удовлетворяются уравнения

$$R_{\vartheta\vartheta}^r = 0 \quad \text{и} \quad R_{\vartheta\vartheta}^r = 0.$$

Но (58) не удовлетворяет предельным условиям для V , т. к. оно содержит член $C_1\varrho^2$. Чтобы не было противоречия с предельным условием, должно быть $C_1 = 0$. Таким образом останется

$$V^2 = \frac{C_2}{\varrho} + 1, \quad (59)$$

которое и соответствует решению Шварцшильда.

Можно сказать, что наши новые уравнения удовлетворены метрикой Шварцшильда и метрикой де Ситтера, но не удо-

влетворены метрикой Нордстрема. Метрика Нордстрема удовлетворяет уравнения

$$\nabla_r R = 0 \quad \text{и} \quad R_r = 0, \quad (60)$$

на что обратил внимание О. М. Сильде. Эти уравнения связаны тождеством.

$$\nabla_k \left(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R \right) \equiv 0. \quad (61)$$

ЛИТЕРАТУРА

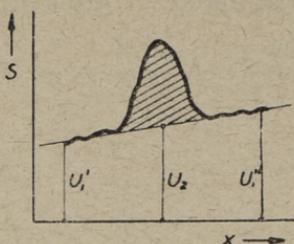
1. G. Stephenson. Quadratic Lagrangians and General Relativity. Nuovo Cimento, Vol. IX N° 2, 1958.
2. В. А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. Москва, 1955.

У. В. Пильвре

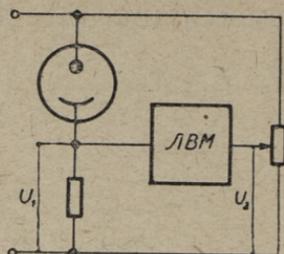
О ВОЗМОЖНОСТИ АВТОМАТИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ РЕНТГЕНОВСКИХ ЛИНИЙ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ФОТОГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА РЕГИСТРАЦИИ

В рентгеноструктурном анализе при использовании фото-регистрационного метода необходимо для определения интегральной интенсивности рентгеновских линий определить площадь пика, ограниченную регистрируемой кривой распределения плотности почернения, которая получается при помощи микрофотометра. Эта кривая представляет кривую энергий, полученных единицей поверхности пленки в функции от расстояния на пленке. Значит, площадь пика, пропорциональная интенсивности, получается в единицах ширины линий на пленке. На снимке всегда существует фон, на который накладывается линия. Этот фон надо продолжить (интерполировать) под пик и измерить только ту часть площади пика, которая заштрихована на фиг. 1. Для этой цели применяются планиметры [1]. Приборы, принцип действия которых чисто механический, относительно точные (в зависимости от типа планиметра точность достигает до 0,2%), но определение площади занимает много времени и даже при наибольшей тщательности практически трудно достичь максимальной точности прибора.

В последние годы опубликованы работы [2, 3], показывающие различные возможности использования электронных схем для получения кривых распределения плотности почернения рентгеновских линий, зарегистрированных на фотопластинке. Независимо от того, получается ли высшеуказанная кривая на экране катодного осциллографа или же на диаграм-



Фиг. 1. Кривая распределения плотности почернения

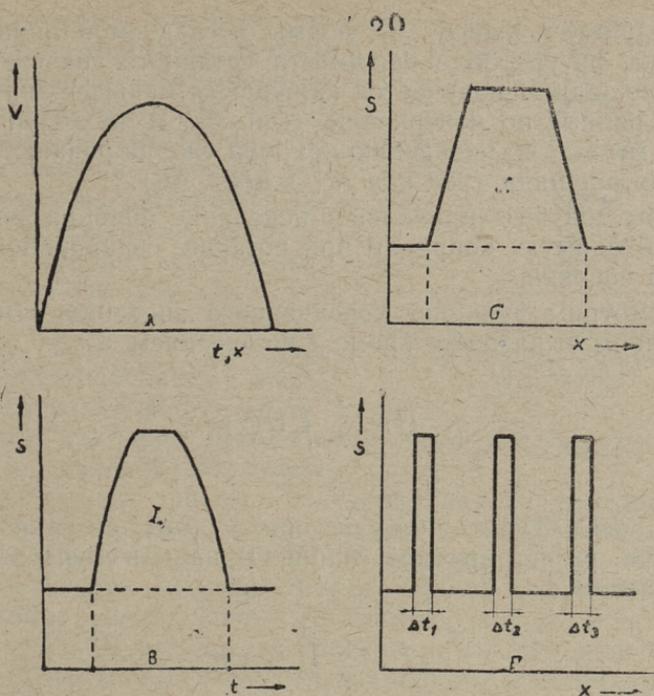


Фиг. 2. Принципиальная схема для определения интегральной интенсивности. ЛВМ — ламповый вольтметр

ной ленте электронного потенциометра, оказывается возможным специальной электронной схемой непосредственно определить площадь, ограниченную кривой распределения плотности почернения, т. е. интегральную интенсивность. Для определения площади пика можно использовать усредненное значение функции напряжения выходного сигнала фотометра или же количество электричества*, величина которого пропорциональна сигналу фотометра. Так как всегда необходимо вычесть интенсивность непрерывного фона, величина которого обычно линейно меняется на ширине линии, надо измерить величины фона U_1' и U_1'' , получаемые на одинаковом расстоянии справа и слева от линии (фиг. 1). Вычитая среднее арифметическое этих величин из полученной общей интегральной интенсивности, получаем интегральную интенсивность рентгеновской линии. Если показывающий прибор установить на нуль при величине $U_2 = \frac{U_1' + U_1''}{2}$ (фиг. 2), то он покажет величину, практически пропорциональную интегральной интенсивности. Используя для фотометрирования устройство, предлагаемое автором [4], целесообразно использовать усредненное значение напряжения сигнала фотометра [5].

В данном устройстве фотометрируемый объект совершает колебания. При этом свет, пройдя через фотометрируемый участок объекта, имеющего разную оптическую плотность, вызывает в фотоэлементе (см. фиг. 2, 5) соответственно изменяющийся ток [6]. Так как процесс этот периодический, усредненное значение является арифметическим средним от ординат кривой за определенный промежуток времени и сле-

* Здесь количество электричества более общее название и выражается током, изменением частот импульсов или какой-либо другой электрической величиной.



Фиг. 3. К определению интегральной интенсивности.
 а — кривая скорости развертки, б — кривая истинного распределения плотности почернения в функции x , в — та же кривая в функции времени t , г — равные по почернению линии в функции x

довательно пропорционально величине площади кривой, т. е. интегральной интенсивности рентгеновских линий [5]. Ниже рассмотрим некоторые особенности при осуществлении вышеописанного метода.

Как известно, усредненное значение выражается формулой

$$\bar{U} = \frac{1}{t} \int_0^t u dt.$$

Здесь предполагается равномерная скорость развертки, описывающая плотность почернения в промежутке от 0 до t .

В зависимости от простоты конструкции в данном приборе скорость развертки в центре линии в действительности больше, чем на краях (фиг. 3а), и при таком усреднении получае-

мый результат зависит от формы исследуемой линии. Как видно на фигуре 3б и 3в, вместо истинного значения величины площади U получается кажущееся меньшее значение I . Линии, равные по почернению (фиг. 3г) и находящиеся на разных местах, по показанию прибора уже не равняются друг другу по площади (так как $\Delta t_1 > \Delta t_2 < \Delta t_3$).

Чтобы получить правильное показание прибора, надо ввести необходимую поправку при помощи специальной электронной цепочки.

Рассмотрим функцию усредненного значения, заменяя в написанном выражении время t положением x

$$\bar{U} = \frac{1}{x} \int_0^x U(x) dx.$$

Получаемый результат был бы правильным при равномерном движении регистрируемой линии. В нашем случае функция принимает вид

$$\bar{I} = \frac{1}{t} \int_0^t J(t) dt,$$

следовательно

$$\bar{U} = \frac{1}{t(x)} \int_0^{t(x)} J(t) f(t) dt,$$

где $f(t) = x'(t)$. Таким образом, усредненное значение выражается в виде интеграла произведения функции сигнала микрофотометра и некоторой функции — функции поправочного напряжения, которым надо автоматически управлять модулятором искаженного усредненного значения, чтобы получить правильное показание прибора. Значит, зная функцию изменения скорости развертки, можно всегда сделать необходимую поправку.

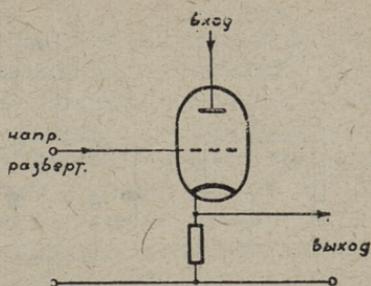
Так как в данном приборе скорость движения регистрирующей линии (скорость развертки) изменяется по функции синуса от времени (гармоническое колебание), то можно показать, что необходимое поправочное напряжение должно изменяться также по функции синуса.

Принципиальная схема электронной цепочки — модулятора поправочного напряжения — приведена на фигуре 4.

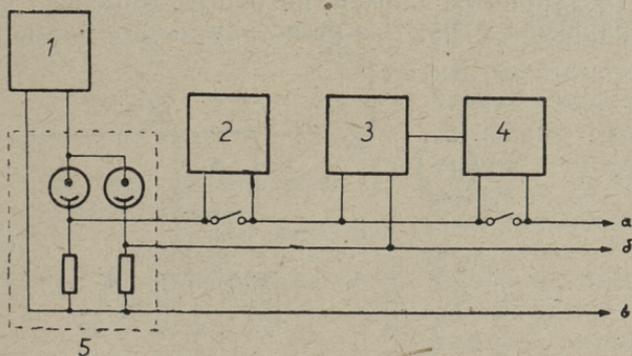
Напряжение развертки подается через трансформатор на сетку триода, тем самым изменение внутреннего сопротивления триода описывает ход скорости развертки. Выбирая рабочую точку на прямолинейном участке статической характеристики триода, получаются необходимые результаты.

Блок-схема для определения интегральной интенсивности по вышеописанному методу приведена на фиг. 5. Показывающим прибором применяется ламповый вольтметр для низкой (до нулевой) частоты.

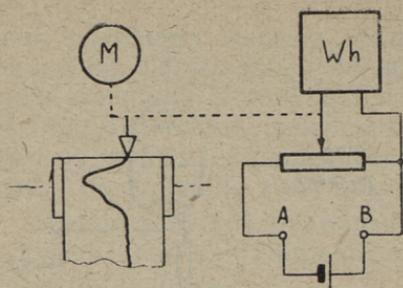
Как известно, принцип получения кривой распределения плотности почернения на диаграммной ленте электронного потенциометра (напр. на ЭПП-09) основан на том, что после регистрирующего микрофотометра (МФ-4) подключена соответствующая специальная логарифмирующая электронная приставка [3]. В результате увеличивается надежность и отпадает необходимость использования фотохимических процессов. Но с другой стороны, применение самопишущего прибора открывает возможность непосредственного определения и интегральной интенсивности рентгеновской линии во время



Фиг. 4. Принципиальная схема модулятора поправочного напряжения



Фиг. 5. Блок-схема для определения интегральной интенсивности ламповым вольтметром.
 1 — источник стабилизированных напряжений, 2 — логарифмирующий четырехполюсник, 3 — модулятор поправочного напряжения, 4 — специальный ламповый вольтметр, 5 — блок фотометрирующего устройства, а, б, в, — на катодный осциллограф



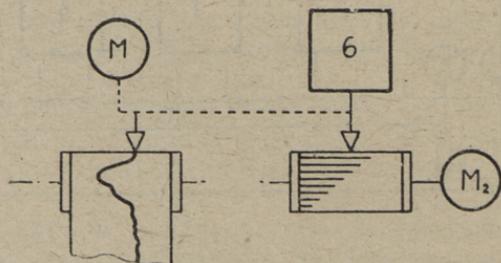
Фиг. 6. Принципиальная схема для определения интегральной интенсивности при помощи счетчика постоянного тока. Wh — счетчик постоянного тока, M — балансирующий сервомотор

записи. Основано это на определении количества электричества, проходящего измерительную цепь специальной кулонометрической схемы.

Ниже рассматриваются два варианта для регистрации этого количества.

А. Регистрация при помощи счетчика постоянного тока (фиг. 6). Принцип действия здесь очень простой, но и точность не высокая. Как видно на фигуре, напряжение на клеммах счетчика прямо пропорциональное положению пера самописца (соединение осуществлено механическим путем). По закону Ома пропорционален и ток, и показания счетчика дают количество проходящего через него электричества. После вычитания величины фона получаем в определенном масштабе площадь пика, которая в свою очередь пропорциональна интегральной интенсивности рентгеновской линии.

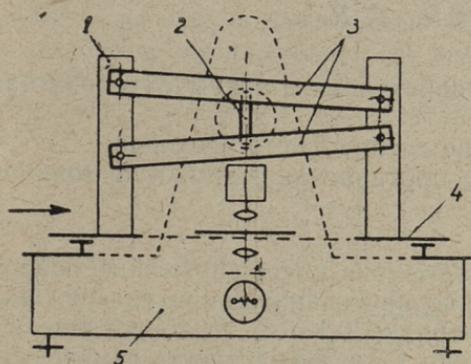
Б. Регистрация при помощи счетчика импульсов (фиг. 7). Принцип действия не сложен, но точность высокая и практически ограничена точностью регистрирующего потенциометра.



Фиг. 7. Принципиальная схема для определения интегральной интенсивности при помощи счетчика импульсов. 6 — счетчик импульсов, M — балансирующий сервомотор, M_2 — синхронный двигатель

Здесь из специального датчика получаются импульсы, частота которых пропорциональна положению пера самописца. Так как интенсивность линии пропорциональна площади пика, возвышающейся над непрерывным фоном, то метод определения интегральной интенсивности заключается в следующем. Электронный потенциометр замечает ширину линии и при этом подсчитывается общее число импульсов между двумя положениями, ограничивающими линию. Затем подсчитывается число импульсов для непрерывного фона на интервале такой же величины по обе стороны рядом с линией. Разница отсчетов пропорциональна интегральной интенсивности линии.

Из вышеописанного ясно, что определение интегральной интенсивности рентгеновских линий усложняется наличием непрерывного фона, если интенсивность фона изменяется в интервале ширины линии. Во избежание влияния изменения интенсивности непрерывного фона можно провести усовершенствование конструкции микрофотометра простым приспособлением.



Фиг. 8. Схема приспособления к микрофотометру.

1 — держатель, 2 — входная щель микрофотометра, 3 — пластины, 4 — каретка микрофотометра, 5 — основание микрофотометра

На каретку микрофотометра укреплены при помощи соответствующих держателей две пластины, которые движутся вместе с фотометрируемым объектом непосредственно перед входной щелью микрофотометра (после оптики увеличения изображения фотометрируемого объекта). Как видно на фигуре 8, выбирая соответствующее положение, пластины при движении каретки закрывают больше или меньше щель микро-

фотометра и тем самым компенсируют изменение плотности фона. Когда фон изменяется линейно, надо выбирать логарифмический профиль пластины (практически в интервале ширины линий изменение плотности фона можно всегда рассматривать как линейную функцию). В результате применения этого приспособления получается на диаграммной ленте пик рентгеновской линии, возвышающийся над горизонтальным фоном.

Остановимся на некоторых конструкционных особенностях вышеописанных устройств. В электронном самопишущем потенциометре разница напряжений между измеряемым напряжением и компенсационным напряжением на реохорде управляет через усилитель мощности балансирующий сервомотор, который приводит в движение плечо реохорда до получения равенства этих двух напряжений. Так как этот сервомотор довольно мощный, можно кроме пишущего элемента привести этим мотором в движение и датчик для измерения площади пика. Для регистрации интегральной интенсивности при помощи счетчика постоянного тока надо приводить в движение движок на специальном дополнительном реохорде (который можно монтировать в корпусе электронного потенциометра). Постоянное напряжение от аккумуляторной батареи соединено клеммами *A* и *B* (фиг. 6). Чтобы величина напряжения на клеммах счетчика была бы пропорциональна положению движка, величина сопротивления отдельных приборов должна соответствовать следующему условию:

$$R_A \ll R_R \ll R_{wh},$$

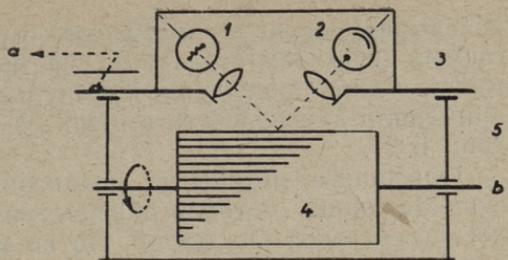
- где R_A — внутреннее сопротивление аккумуляторной батареи;
 R_R — сопротивление специального реохорда;
 R_{wh} — внутреннее сопротивление счетчика постоянного тока.

Так как счетчик постоянного тока имеет внутреннее сопротивление в порядке 10 *ом*, но внутреннее сопротивление аккумуляторной батареи в порядке 0,1 *ом*, то сопротивление реохорда получается примерно 1 *ом*. Погрешность измерения, обусловленная низким внутренним сопротивлением счетчика, зависит от положения движка, всегда отрицательное и достигает в данном случае примерно — 8% (не включая погрешности счетчика). Погрешность можно избежать, если реохорд изготовить нелинейным.

Для регистрации интегральной интенсивности при помощи подсчета импульсов, надо использовать датчик, в котором прямолинейное движение соответствующего элемента преобразуется в линейное изменение частоты импульсов на выходе датчика. В качестве генератора импульсов можно использовать электронный или же электромеханический генератор.

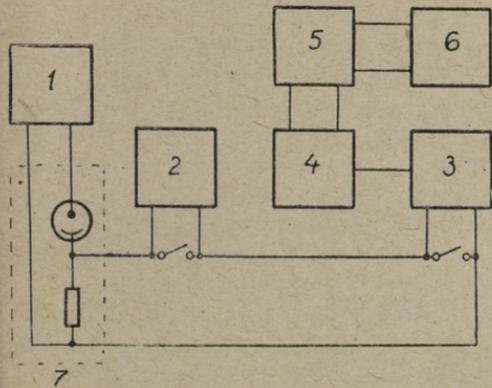
Остановимся на электромеханическом принципе, в котором электронные приборы применяются только для усиления импульсов. Это упрощает электронную схему и увеличивает

стабильность и точность в работе. Необходимая частота осуществляется при помощи барабана (фиг. 9), находящегося на вале синхронного двигателя. На поверхности барабана параллельные черные и белые линии. Число линий, пересекающих при вращении барабана тонкий световой пучок, который после отражения на линиях падает на фотоэлемент, изменяется по оси барабана. Таким образом получаемая частота изменяется в линейной зависимости по оси S (см. фиг. 3, 9) и положение фотоэлемента соответствует определенной частоте. Если общее число линий 400 (каждая следующая на 0,5 мм короче предыдущей), то точность определения положения фотоэлемента (и пера пишущего элемента электронного потенциометра) получается 0,25% (длина шкалы прибора 200 мм).



Фиг. 9. Схема электромеханического генератора импульсов.

- 1 — лампа накаливания с конденсатором,
- 2 — вакуумный фотоэлемент с оптикой,
- 3 — датчик импульсов, 4 — барабан, 5 — корпус генератора, а — к пишущему элементу потенциометра, б — на вал синхронного двигателя



Фиг. 10. Блок-схема для определения интегральной интенсивности.

- 1 — источник стабилизированных напряжений, 2 — лагорифмирующий четырехполосник, 3 — электронный потенциометр, 4 — генератор импульсов, 5 — усилитель, 6 — блок подсчета импульсов, 7 — блок фотометрирующего устройства

Импульсы света, падающие на фотоэлемент, преобразовываются в импульсы электрического тока и усиливаются. Для подсчета импульсов применяются механические нумераторы, которые не могут работать с большой частотой. Вследствие этого в схему включены участки, из которых каждый пропускает лишь один импульс из двух (двоичная шкала) [7]. Если имеется n таких последовательных участков, то нумератор

показывает число 2^n импульсов, а сигнальные лампы, зажигаемые действием отдельных участков, позволяют определить точное число пропущенных импульсов (в конкретном случае применили для подсчета импульсов блок ВСП от радиометра типа Б-2).

Описанные методы не предназначены в полный замен существующих методов определения интегральной интенсивности рентгеновских линий. Но во многих случаях приведенные решения могут помочь усовершенствованию и ускорению процесса определения интегральной интенсивности при использовании фоторегистрационного метода.

ЛИТЕРАТУРА

2. У. В. Пильвре. Устройство для автоматического фотометрирования рентгеновских линий. Труды ТПИ, № 167.
3. В. К. Латышев, А. К. Фелингер. Логарифмический электронный преобразователь для регистрирующего микрофотометра. Заводская лаборатория, XXIII, 5, 1957.
4. Бюллетень изобретения, № 12, 1961.
5. Электрические измерения. Госэнергоиздат, 1954.
6. В. К. Прокофьев. Фотографические методы количественного спектрального анализа металлов и сплавов. Гостехтеориздат, 1951.
7. Л. П. Крайзер, Техническая кибернетика. Госэнергоиздат, 1958.

Р. Р. Паккас, К. Шульц

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ИЗУЧЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ МЕТАЛЛОВ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕНТГЕНОВСКИХ УСТАНОВОК УРС-70 и УРС-50И

1. Введение

При регистрации рентгеновских интерференций применяются главным образом два метода — ионизационный и фотографический метод. Посредством фотографического метода получают интерференционную картину на пленке. При ионизационном методе линию вычерчивает самопишущий прибор или ее снимают по точкам посредством пересчетного устройства.

Ионизационный метод является сравнительно новым методом, но находит все большее применение при рентгенографическом изучении пластической деформации металлов, структурного анализа и т. д. Большим преимуществом ионизационного метода считают скорость получения результатов. Однако получение точных результатов при определении параметров интерференционной линии связано и в этом случае с большой затратой времени.

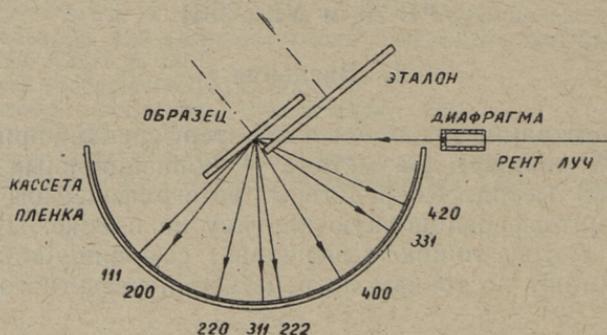
В научной литературе публикуются работы, выполненные разными методами зачастую с взаимно противоречивыми результатами, которые цитируются абсолютными, т. е. независимыми от метода рентгенографирования и методики выполнения работы и измерений. По нашему мнению многими исследователями методике работы и анализу ошибок уделяется недостаточное внимание. В результате этого изменения некоторых параметров интерференционной линии могут быть ошибочно приписаны процессам, происходящим в материале, в то время как они обусловлены только методикой рентгенографирования.

Целью настоящей работы было произвести анализ ошибок и проверку повторяемости результатов для выяснения оптимальной методики рентгенографирования.

Объектом рентгенографирования служил плоский образец никеля марки Н-1 с поперечным сечением $0,7 \times 7$ мм и расчетной длиной 40 мм при относительных деформациях растяжением в 6,0 и 12%.

2. Фотографический метод

В качестве материала для исследования служила никель Н-1. Из этого материала изготавливали плоские образцы с поперечным сечением $0,7 \times 10$ мм и расчетной длиной 40 мм. Деформирование образца производилось на растягивающей машине РМП-500. Образец получил сперва деформацию 6%, затем 12%.



Фиг. 1.

Рентгенографирование производилось на рентгеновской установке УРС-70. Для получения на снимке линий от (111) до (420) была сконструирована рентгеновская камера, принципиальная схема которой приведена на фиг. 1. Вращение образца относительно рентгеновского луча производилось под углом 40° . Перед образцом на расстоянии 6,5 мм вращался никелевый эталон, который давал наряду с исследуемыми от деформации независимые линии. Режим рентгенографирования был следующий: анод — *Си*, напряжение — 32 кв, ток — 10 мА, экспозиция с диафрагмой $2 \times 0,4$ мм — 25 минут. Длинная грань диафрагмы была расположена горизонтально. Расстояние образца от диафрагмы 65 мм, радиус кассеты 51,5 мм.

Для съемок использовали рентгенопленку «Agfa». Обработка пленки происходила соответственно инструкции, данной заводом. На одну пленку снимали 12 снимков.

Фотометрирование производилось на микрофотометре МФ-2. Для выяснения влияния метода фотометрирования измерения производили по трем методам.

1. Ширина измерительной щели 1,7 мм, высота 2×10 , подача 0,1 мм, пленка фокусируется.
2. Ширина измерительной щели 1,7 мм, высота 2×10 , подача 0,1 мм, пленка дефокусируется по шкале почернения от 48-го до 52-го деления.
3. Ширина измерительной щели 3,4 мм, высота 2×10 , подача 0,1 мм, пленка фокусируется.

Из полученных данных можно сделать следующие выводы.

1. Фотометрирование с широкой щелью и резкой фокусировкой дает те же результаты, что и фотометрирование с узкой щелью и дефокусировкой. Для узких интерференционных линий, где наблюдаются резкие изменения интенсивностей, оба метода уменьшают интенсивность и высоту линий по сравнению с методом с узкой щелью и фокусировкой. Ширина линий увеличивается. При этом изменяется и относительная интенсивность линий. Отсюда следует, что измерение всех рентгенограмм следует проводить одним методом, в противном случае возникают ошибки, сильно искажающие изменения интенсивностей и ширины, происходящие вследствие пластической деформации.

2. Для широких линий, где нет резких изменений интенсивности, все методы дают равноценные результаты.

В данной работе использовали щель шириной 1,6 мм и высотой $2 \times 7,5$. Подача 0,1 мм, увеличение установки 8^x , пленка фокусируется.

Для измерения площади кривых почернения использовали прецизионный планиметр, измеряющий площади с точностью 1 мм².

Измерения проводились для линий (200), (220), (311), (220)_с и (311)_с. Ширина рентгеновских линий определялась отношением площади кривой почернения к высоте. Для одного напряженного состояния делали на отдельных пленках 12 снимков. Затем на одну пленку делали снимки для всех напряженных состояний по 3 снимка. По измерительным данным, полученным при микрофотометрировании вычисляли среднюю квадратичную ошибку $\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum \Delta a^2}{N}}$ [1]. В таблице 1 представлены результаты, где для каждого напряженного состояния сделано 12 снимков и в таблице 2 результаты, где для каждого напряженного состояния сделано 3 снимка.

Результаты показывают, что ошибка измерения ни в коем

Таблица 1

Линия		Деформация	Без деформации	Деформация 6%	Деформация 12%
(220) _э	Интенсивность		945	849	870
	Ширина		13,9±4,1%	13,8±2,4%	13,9±3,5%
(311) _э	Интенсивность		509	460	468
	Ширина		17,6±2,6%	17,1±2,5%	17,6±4,2%
Сумма интенсивностей (220) _э + (311) _э			1456	1309	1338
Отношение интенсивностей (220) _э (311) _э			1,86	1,85	1,86
(200)	Интенсивность		330	325	174
	Интенсивность, в %		100	99	53
	Ширина		6,7±2,8%	7,5±3,4%	7,3±4,5%
	Ширина, в %		100	112	109
(220)	Интенсивность		697	987	1670
	Интенсивность, в %		100	142	240
	Ширина		12,9±2,6%	13,8±2,5%	14,2±5%
	Ширина, в %		100	107	110
(311)	Интенсивность		490	600	703
	Интенсивность, в %		100	122	143
	Ширина		17,5±3,6%	19,1±4%	19,2±4,6%
	Ширина, в %		100	109	110

Таблица 2

Линия		Деформация	Без деформации	Деформация 6%	Деформация 12%
(220) э	Интенсивность		955	821	826
	Ширина		$13,6 \pm 2,5\%$	$13,8 \pm 0,7\%$	$14,2 \pm 3,6\%$
(311) э	Интенсивность		536	458	455
	Ширина		$17,7 \pm 5\%$	$17,5 \pm 0,5\%$	$17,0 \pm 2,4\%$
Сумма интенсивностей (220) э + (311) э			1491	1279	1381
Отношение интенсивностей (220) э (311) э			1,78	1,80	1,82
(200)	Интенсивность		336	340	189
	Интенсивность, в %		100	101	56
	Ширина		$6,8 \pm 1,9\%$	$7,6 \pm 2,1\%$	$7,4 \pm 4,5\%$
	Ширина, в %		100	112	109
(220)	Интенсивность		672	1002	1728
	Интенсивность, в %		100	150	257
	Ширина		$12,8 \pm 2\%$	$13,9 \pm 0,7\%$	$14,7 \pm 3,8\%$
	Ширина, в %		100	108	115
(311)	Интенсивность		514	680	720
	Интенсивность, в %		100	132	140
	Ширина		$17,6 \pm 5\%$	$19,6 \pm 0\%$	$19,4 \pm 2,4\%$
	Ширина, в %		100	111	110

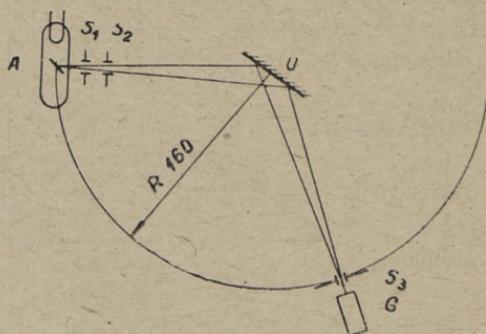
случае не превышает пяти процентов. Значит, при выбранной методике опыта, если для одного напряженного состояния сделано 2—3 снимка, ошибка измерения не превышает 5%. Величину ошибки главным образом определяет точность измерения высоты линии и определение линии фона. При узких линиях фотомер фиксирует высоту с большой ошибкой, при широких линиях существенно влияет определение линий фона.

3. Ионизационный метод

При изучении пластической деформации рентгенографическими методами с ионизационной регистрацией отраженных рентгеновских лучей, наиболее широкое применение нашла установка УРС-50И, которая позволяет с высокой точностью исследовать:

- а) поликристаллические порошки и шлифы фокусирующим методом;
- б) поликристаллические порошки методом столбика;
- в) монокристаллы в экваториальной плоскости.

Однако, для получения результатов достаточной точности с минимальной затратой времени, нужно знать главные источники ошибок и методы их уменьшения при различных условиях рентгенографирования и способах регистрации рентгеновских интерференций.



Фиг. 2.

Принципиальная схема установки приведена на фиг. 2.

Пучок рентгеновских лучей от анода трубки A через щели S_1 и S_2 падает на образец O , который совмещен с осью гониометра, и рассеиваясь попадает в щель S_3 и счетчик G .

Регистрируемая интерференционная картина может быть в большей или меньшей мере искажена в зависимости от условий съемки: величины щелей, скорости перемещения счетчика, максимальной скорости отсчета и постоянной времени

интегрирующей схемы при работе с самопишущим прибором и времени счета числа импульсов при снятии рентгенограммы по точкам посредством пересчетного устройства с электро-механическим счетчиком.

4. Регистрация интерференционной линии по точкам

При регистрации рентгеновских интерференций нужно всегда учитывать ошибку, возникающую из-за статистического распределения рентгеновских квантов во времени.

Предполагая равномерное распределение импульсов во времени, средняя относительная квадратичная ошибка при определении интенсивности N дается выражением

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{N}}{N}.$$

При определении интенсивности N_0 интерференционной линии, учитывая интенсивность фона N_F :

$$\eta_0 = \frac{\sqrt{N_0}}{N_0} = \frac{\sqrt{N - N_F}}{N - N_F} = \frac{\sqrt{\kappa(k-1)}}{(k-1)\sqrt{N}},$$

где $k = \frac{N}{N_F}$. Так как $N = n\tau$ и $N_F = n_F\tau$, где n — скорость счета и τ — время счета

$$\eta_0 = \frac{\sqrt{\kappa(k-1)}}{(k-1)\sqrt{n\tau}}.$$

Приведенное выражение показывает, что ошибка растет при уменьшении общего количества сосчитанных импульсов и с уменьшением отношения интенсивности интерференционной линии к интенсивности фона. Это обстоятельство нужно особенно иметь в виду при измерении слабых или сильно размытых интерференционных линий. Так, например, для сравнения интенсивностей линий (400) и (200) никеля в одной экспериментальной серии при среднем фоне $n_F = 240 \frac{\text{имп}}{\text{сек}}$

$$\text{имели } n_{200 \text{ max}} = 1040 \frac{\text{имп}}{\text{сек}} \quad \kappa_{200} = \frac{1040}{240} = 4,33$$

и

$$n_{400 \text{ max}} = 277 \frac{\text{имп}}{\text{сек}} \quad \kappa_{400} = \frac{277}{240} = 1,15$$

и для определения с одинаковой средней относительной квадратичной ошибкой интенсивностей обеих линий пришлось бы время счета при линии (400) увеличить в 22,2 раза.

Таблица 3

Время счета	$\bar{N} = \frac{\sum N}{n}$	Среднее число импульсов	Средняя интенсивность	Средняя ошибка	Максимальная ошибка	Средняя квадратическая	Средняя относительная ошибка	Максимальная относительная ошибка	Действительная средняя относительная ошибка	Теоретическая средняя относительная ошибка	Наивероятная средняя относительная ошибка
τ	$n_0 = \frac{\bar{N}}{\tau}$	n	Δ_{cp}	Δ_{max}	$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{n}}$	$\eta = \frac{\varepsilon}{N}$	$\frac{\Delta_{max}}{N}$	$\delta = \frac{\Delta_{cp}}{N}$	$\frac{1}{N}$	$\delta_* = 0,67 \delta$	
сек	имп/сек	имп	имп	имп	имп	%	%	%	%	%	
16	18,6	329	15,3	34,2	18,6	5,65	10,40	4,63	5,50	3,68	
32	21,2	676	17,0	34,6	19,5	2,89	5,12	2,52	3,84	2,57	
160	21,3	3405	59,0	158,0	72,9	2,14	4,64	1,73	1,71	1,15	
16	136	2175	21,4	58,0	25,9	1,19	2,67	0,98	2,14	1,43	
32	139	4450	40,4	60,0	13,8	0,31	1,35	0,91	1,50	1,00	
64	139	8924	84,3	106,4	24,9	0,28	1,19	0,95	1,06	0,70	
16	772	12383	92,4	154	106	0,86	1,25	0,75	0,90	0,60	
32	790	25375	157,2	257	170	0,67	1,01	0,62	0,63	0,42	
64	800	51264	204,8	448	243	0,48	0,87	0,40	0,44	0,30	

Для выбора времени счета импульсов при разных интенсивностях с достаточной точностью, было проведено специальное исследование, результаты которого приведены в таблице 3. При каждой интенсивности и времени счета делалось 20 измерений, вычислялось среднее число импульсов и приведенные в таблице ошибки.

Результаты исследования показывают закономерное уменьшение относительных ошибок с увеличением времени счета. При этом средняя действительная ошибка во всех сериях испытаний оставалась в пределах теоретической средней относительной ошибки. Средняя относительная квадратичная ошибка, характеризующая повторяемость результатов, становится уже при средней интенсивности $\sim 140 \frac{\text{имп}}{\text{сек}}$ и времени счета $\tau - 20 \text{ сек}$ менее 1%.

Таким образом, основное влияние на точность определения интенсивности (а также и других характеристик как ширина и т. д.) слабой интерференционной линии оказывает отношение интенсивности линии к интенсивности фона и соответственно этому приходится выбирать время счета.

Из-за неравномерного распределения импульсов во времени и сравнительно большого значения мертвого времени счетчика МСТР-4 нужно ввести поправку по следующей формуле [2]

$$n_d = \frac{n_0}{1 - n_0 \tau},$$

где n_d — действительная скорость счета,
 n_0 — регистрируемая скорость счета,
 τ — мертвое время счетчика.

Для этого нами было определено мертвое время для изменяемых счетчиков по известной методике [3] и затем вычерчена графически зависимость $n_d = f(n_0)$ для каждого счетчика, по которым и вносились поправки.

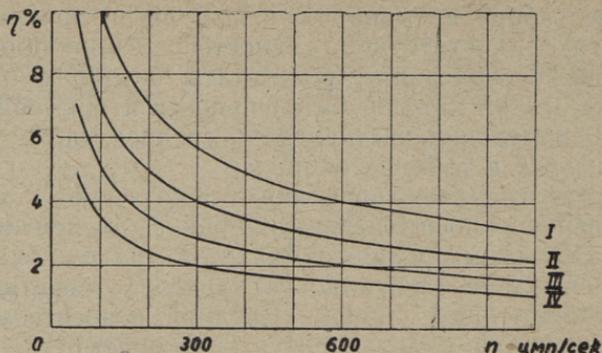
5. Применение интегрирующей схемы и самопишущего прибора

При регистрации рентгеновских интерференций самопишущим прибором средняя относительная ошибка дается уравнением [2]

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{nRC}},$$

где RC — постоянная времени интегрирующей схемы. Оче-

Фиг. 3.



видно, что средняя относительная квадратичная ошибка может быть уменьшена увеличением RC и скорости счета. На фиг. 3 показана зависимость $\eta = f(n)$ для постоянных времени:

- I $RC = 1$ сек,
- II $RC = 2$ „ „
- III $RC = 4$ „ „
- IV $RC = 8$ „ „

Работа в диапазоне до 200 имп/сек связана со сравнительно большой статистической ошибкой, которая больше 5% при интенсивностях до 50 имп/сек даже с константой IV $RC = 8$ сек.

Чтобы удовлетворить условиям правильной работы на диффрактометре, приходится выбирать постоянную времени интегратора в зависимости от применяемой скорости перемещения счетчика ω и величины щели S_3 соответствующей условию [4]

$$RC \leq \frac{1}{2} \frac{S_3}{\omega}.$$

Кроме того, для уменьшения ошибок в определении ширины линии необходимо, чтобы щель S_3 была в несколько раз меньше ширины линии [4].

Таким образом, даже при $\omega = 0,5^\circ/\text{мин} = 0,0233 \text{ рад/сек}$, пришлось бы для $RC = 8$ сек выбрать $S_3 \geq 0,373 \text{ мм}$ и $RC = 4$ сек выбрать $S_3 \geq 0,186 \text{ мм}$.

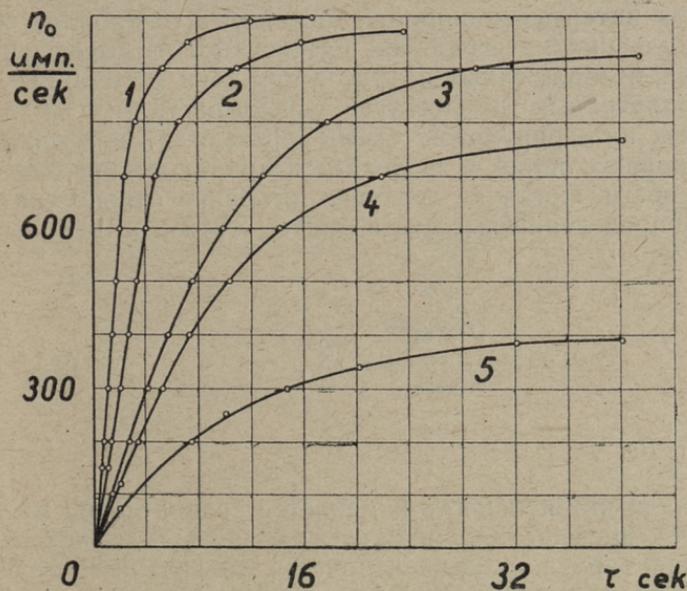
Это условие не соблюдается многими исследованиями, работающими на УРС-5ОИ, что в свою очередь повышает ошибку измерения.

Измерение слабых и размытых интерференционных линий связано с увеличением средней относительной квадратичной ошибки из-за наличия фона, как и в случае регистрации ли-

нии по точкам. При малых значениях $k = \frac{n}{n_F}$ названная ошибка может в несколько раз превышать все остальные.

При интенсивностях, превышающих 300 *имп/сек.*, необходимо ввести поправку на потери счета. Это однако связано с большой затратой времени и является при небрежной работе дополнительным источником ошибок.

Время полного отклонения стрелки измерителя скорости счета и каретки самопишущего прибора зависит от константы интегрирующей схемы, которое иллюстрируется на фиг. 4.



Фиг. 4

Графическая проверка в координатах

$$\lg \frac{n_0}{n_d} = f(\tau)$$

показывает, что при константной скорости счета $n = \text{const}$, каретка самопишущего прибора перемещается согласно закону

$$n_0 = n_d (1 - e^{-\alpha\tau}),$$

где $\alpha \approx RC$.

По графикам видно, что при константе времени IV $RC = 8$ *сек* полное отклонение каретки достигается только по истечении ~ 60 *сек*. В то же время измерение всего интерфе-

ренционного максимума у недеформированного металла длится примерно столько же времени. Ясно, что при больших скоростях изменения интенсивности показания измерителя скорости счета n_0 будут тем больше отставать от действительных значений интенсивности n_d , чем быстрее последние изменяются. Это иллюстрируется на фиг. 5, где кривая 1 — интерференционная линия (200) никеля, снятая по точкам, кривые 2, 3 и 4 — те же линии при том же режиме установки, полученные посредством самопишущего прибора при постоянной времени соответственно $RC = 1, 4$ и 8 сек. Видно, что наряду с изменением интегральной интенсивности уменьшается высота интерференционного максимума. В таблице 4 приводятся значения интегральной интенсивности, высоты и ширины линий, изображенных на фиг. 5 при двух испытаниях.

Анализ полученных результатов показывает, что из-за инерционности интегрирующей схемы срезаются верхушки интерференционных линий и искажается кривая распределения интенсивности. Срезание верхушек особенно сильно сказывается на определении высоты, а вместе с этим, и ширины линий

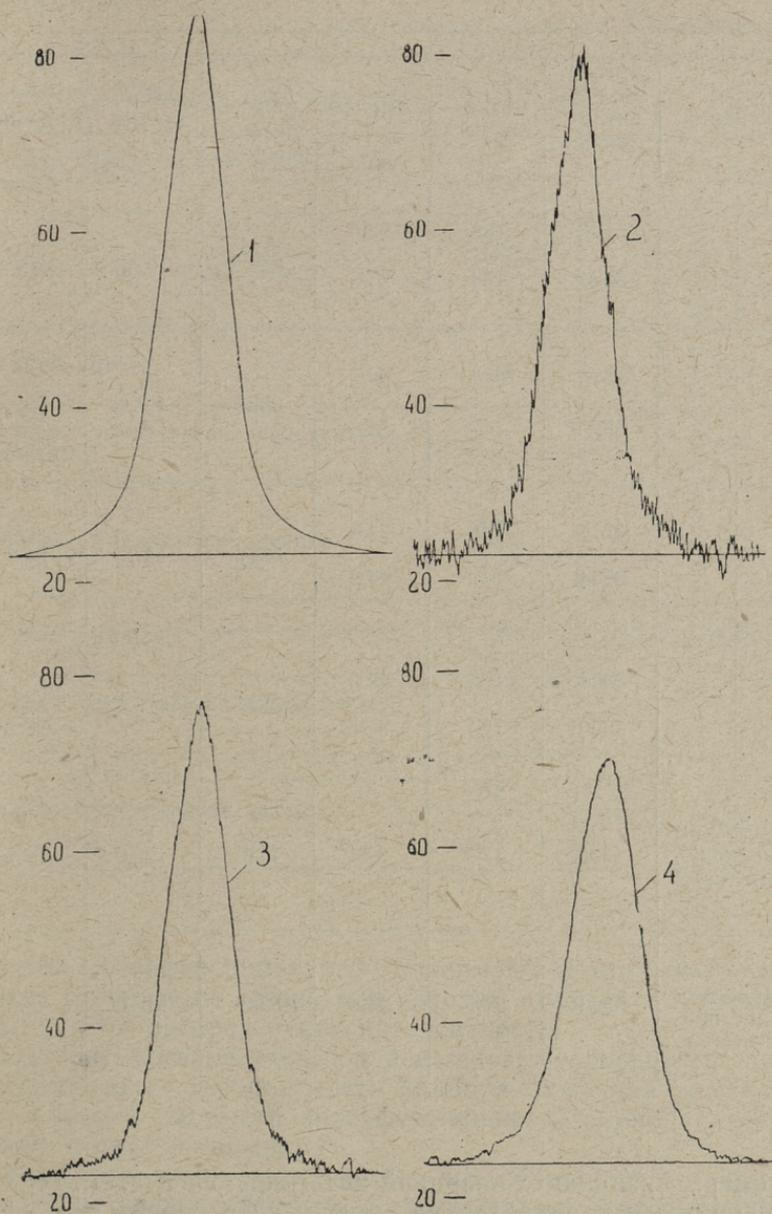
$$B = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} n_{од} d\vartheta}{n_{од\max}} = \frac{S}{H},$$

где $n_{од} = n_d - n_f$.

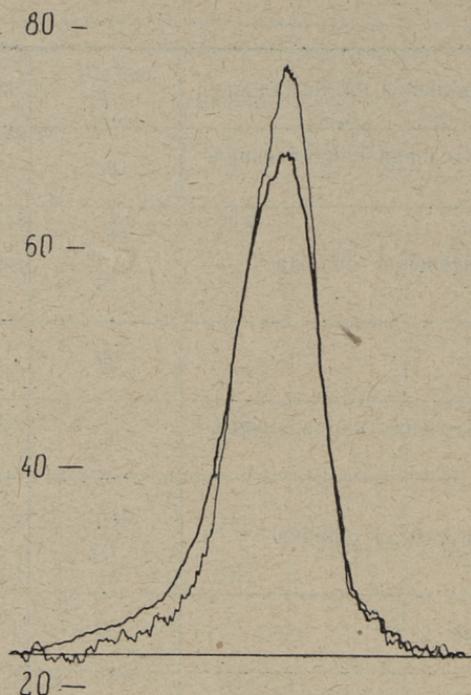
Интегральная интенсивность изменяется сравнительно мало, так как уменьшение площади измеряемой кривой вследствие срезания верхушки компенсируется увеличением площади около нисходящей ветви интерференционной линии, обусловленным инерционностью схемы при резком спадении n_d (фиг. 6).

Если считать действительной не исправленную на просчеты кривую распределения интенсивности, снятую по точкам, то нетрудно заметить, что разность ординат тем больше, чем больше скорость изменения интенсивности. Нужно отметить, что дополнительным источником ошибок является нелинейность интегрирующей схемы, которая по паспортным данным может достигать $\pm 4\%$.

Все вышесказанное заслуживает особого внимания, так как возникающая при определении интегральной интенсивности, высоты и других связанных с ними параметров интерференционной линии, систематическая ошибка изменяется по мере изменения кривой распределения интенсивности. Так,



Фиг. 5



Фиг. 6.

сти при сравнительно малых статистических ошибках в диапазоне до 200 *имп/сек*, где не нужно вносить поправок на просчеты счетчика. Однако при этом трудно достигнуть точности, превышающей $8 \div 10\%$. При других режимах ошибки сильно возрастают.

6. Выводы

1. Разброс результатов, полученных фотометодом, примерно в два раза больше, чем результатов, полученных ионизационным методом.

2. Неверно выбранные величины шелей, константы интегрирующей схемы и т. д. в случае применения самопишущего прибора могут внести большую систематическую ошибку.

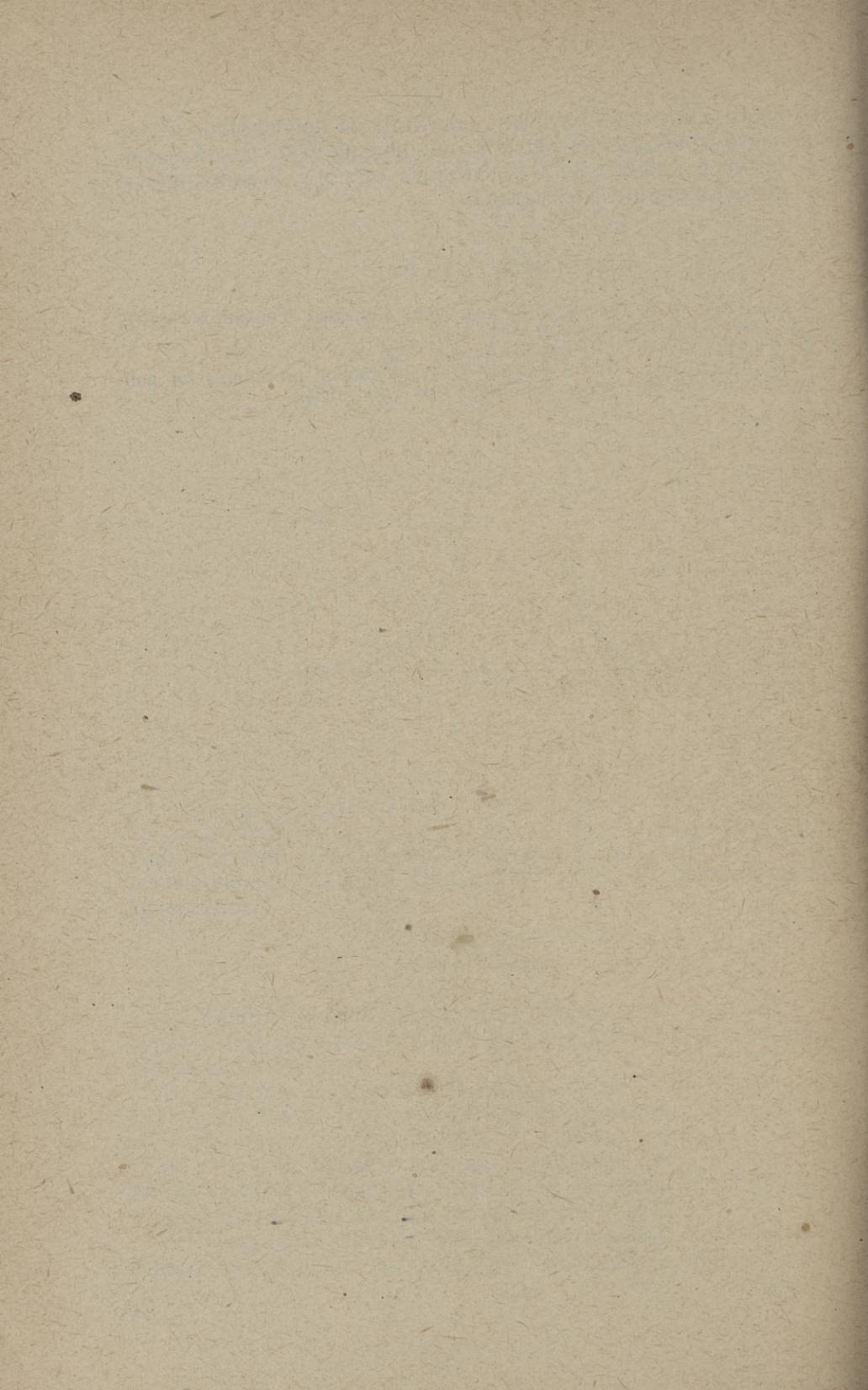
3. Ошибку, характеризующую повторяемость результатов, нельзя путать с ошибкой, вызванной неверной методикой, которая может превышать первую во много раз.

4. Получение точных результатов связано с большой затратой времени при регистрации интерференционной линии

по точкам. Быстрое получение результатов посредством самопишущего прибора связано с возникновением большой ошибки, могущей значительно превышать ошибку, возникающую при использовании фотометода.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Е. Блантер. Методика исследования металлов и обработки опытных данных. Металлургиздат, 1952.
2. Хейкер, Зевин. Кристаллография, 1956, 2.
3. X. P. Klug, L. E. Alexander. X-ray diffraction procedures for polikrystalline and amorphoys materials. New-York, 1954.



Р. Р. Паккас

К МЕТОДИКЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ШИРИНЫ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ K_{α_1} ДУБЛЕТА РЕНТГЕНОВСКОЙ ЛИНИИ

Для решения многих задач, например изучения причин размытия рентгеновских линий, необходимо определить ширину составляющей K_{α_1} дублета.

Пфарр и Вефер [1] предложили метод определения ширины на половине высоты линии. Метод дает удовлетворительные результаты только при хорошем разрешении дублета.

Замена реальных составляющих дублета треугольниками позволяет легко разделить дублет, но является очень грубой аппроксимацией. В большинстве случаев кривая распределения интенсивности составляющих дублета описывается удовлетворительно функцией вида

$$f(x) = e^{-k^2x^2} \quad (1a)$$

или

$$f(x) = \frac{1}{1+k^2x^2} \quad (16)$$

Более точным является метод М. П. Арбузова [2], где ширина рентгеновской линии определяется при помощи предварительно построенного графика

$$\frac{B_0}{B} = f\left(\frac{\delta}{B}\right) \quad (2)$$

где B — общая интегральная ширина неразрешенного дублета, измеряемая на рентгенограмме;

B_0 — интегральная ширина составляющей K_{α_1} дублета;

δ — междублетное расстояние, т. е. расстояние между максимумами $K_{\alpha 1}$ и $K_{\alpha 2}$.

Различные значения δ при построении графика получают путем сближения составляющих дублета $I_1(x)$ и $I_2(x)$ без изменения их формы.

Д. М. Васильев [3] считает недостатками метода трудности точного определения δ при размытом дублете и что в действительности изменяется параметр k в функциях вида (1) аппроксимирующих реальную кривую, а не междублетное расстояние δ , которое остается постоянным.

В действительности δ можно определить экспериментально достаточно точно у задних линий с хорошо разрешенным дублетом и учитывая, что

$$\delta = 2 \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \operatorname{tg} \vartheta, \quad (3)$$

вычислить и для передних линий. В ходе эксперимента при неизменных инструментальных факторах и масштабе δ остается постоянным.

Относительно замечания о постоянстве δ и изменении k нужно отметить, что уменьшение δ равнозначно увеличению k . Действительно, для функций типа (1а) и (1б)

$$B(k) = (1 + m) \frac{n}{k}, \quad (4)$$

где m — отношение интегральных интенсивностей составляющих дублета $K_{\alpha 1}$ и $K_{\alpha 2}$,

а $n = \sqrt{\pi}$ или π соответственно для функции (1а) и (1б).

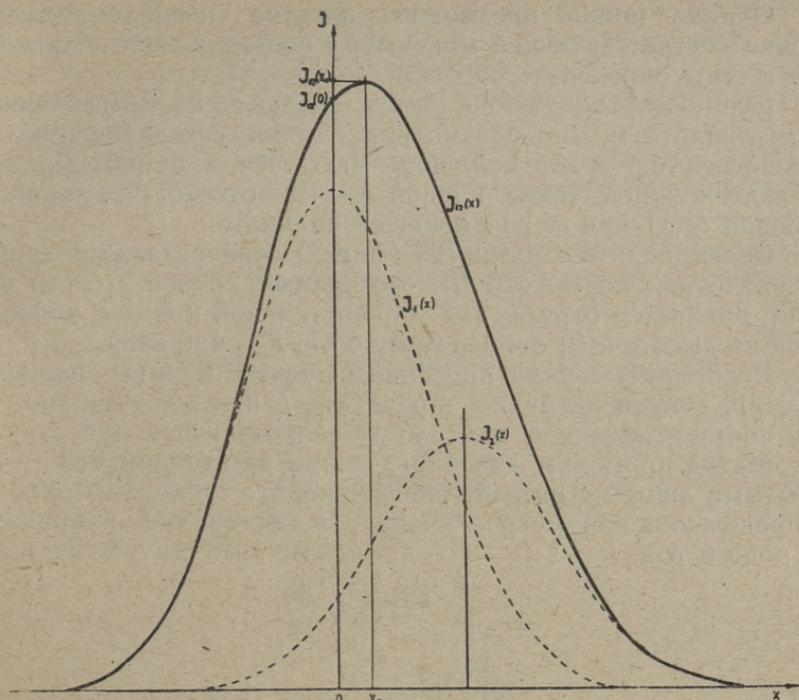
Таким образом

$$\frac{\delta}{B} = \frac{\delta k}{(1 + m)n}. \quad (5)$$

Следовательно, для получения различных значений $\frac{\delta}{B}$ безразлично, изменяем мы k (что происходит в действительности) или δ при постоянном k (без изменения формы кривых).

Сравнительно точным является и метод Д. М. Васильева [3], на основе которого

$$B(k) = \frac{I_{12}^*(k)}{(1 + m)I_{12}(0)} [1 + mf(k\delta)]. \quad (6)$$



Фиг. 1.

Обозначив

$$\frac{I_{12}^*(k)}{(1+m)I_{12}(0)} = B_0(k), \quad (7)$$

получается $B(k) = B_0(k)[1 + mf(k\delta)]$, (8)

где $I_{12}^*(k)$ — интегральная интенсивность неразрешенного дублета;

$I_{12}(0)$ — высота кривой распределения интенсивности неразрешенного дублета при абсциссе, соответствующей максимуму составляющей $K_{\alpha 1}$ (на фиг. 1 точка 0).

Применение метода требует решения уравнения (8) при различных значениях k и δ и составления соответствующих графических зависимостей $B(x) = f[B_0(k)]$ для функций типа (1).

Единственным недостатком метода является обстоятельство, что практически приходится вместо $I_{12}(0)$ брать $I_{12}(x_0)$, которое приводит (как показала проверка на синтезированных кривых) в самом неблагоприятном сочетании k и δ к ошибке до 5%.

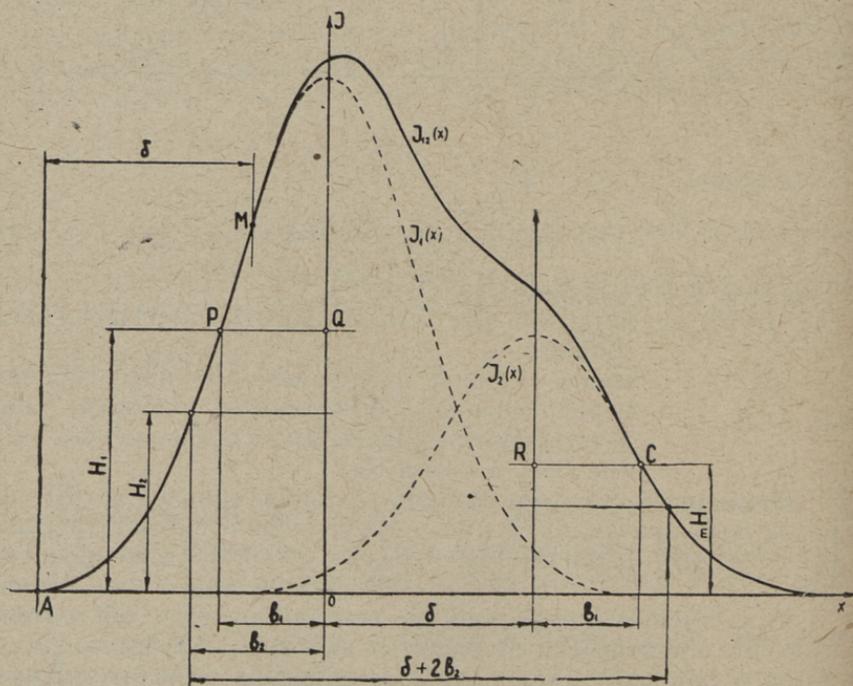
Однако можно предложить простой способ определения точки соответствующей максимуму составляющей Ka_1 дублета и этим определить значение $I_{12}(0)$.

Сущность способа состоит в следующем. Составляющую Ka_2 дублета можно рассматривать как составляющую Ka_1 , уменьшенную в вертикальном масштабе в m раз. Следовательно, каждой точке кривой $I_1(x)$ соответствует точка на кривой $I_2(x)$ при m раз меньшей ординате.

Очевидно, что отрезок PQ (фиг. 2) горизонтальной прямой, проведенной на высоте H_1 , отсекаемый кривой $I_1(x)$ и осью Ka_1 , равняется отрезку RC горизонтальной прямой, проведенной на высоте mH , отсекаемому осью Ka_2 и кривой $I_2(x)$.

Расстояние между проекциями точек P и C равняется $\delta \mp 2b$, откуда нетрудно определить b и, следовательно, точку соответствующую максимуму составляющей дублета Ka_1 .

Метод применим для определения расстояния между размытыми линиями на рентгенограмме, что особенно важно при определении параметров ячейки, исследования напряжений I рода и т. д.



Фиг. 2.

Вышеописанным способом определения точки 0 удобно пользоваться и в случае анализа Фурье неразрешенной дублетной линии, так как при правильном определении нулевой точки превращаются в нуль мнимые коэффициенты F^M истинной дифракционной линии.

Для избежания ошибок целесообразно провести несколько секущих на высотах H_1, H_2, \dots и им соответствующих mH_1, mH_2, \dots .

В последнем случае можно определить интегральную ширину составляющей дублета $K\alpha_1$ непосредственно следующим образом.

Аппроксимируя $I_1(x) = I_1(0)e^{-k^2x^2}$, можем написать

$$H_1 = I_1(0)e^{-k^2b_1^2}, \quad (5)$$

$$H_2 = I_1(0)e^{-k^2b_2^2}. \quad (6)$$

Разделив (5) на (6), получим

$$\frac{H_1}{H_2} = e^{k^2(b_2^2 - b_1^2)}$$

и

$$k = \sqrt{\frac{\ln \frac{H_1}{H_2}}{b_2^2 - b_1^2}}. \quad (7)$$

Интегральная ширина линии

$$\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{k} = \sqrt{\frac{\pi(b_2^2 - b_1^2)}{\ln \frac{H_1}{H_2}}}. \quad (8)$$

Для функции $I_1(x) = \frac{I_1(0)}{1 + k^2x^2}$ получим соответственно

$$H_1 = \frac{I_1(0)}{1 + k^2b_1^2},$$

$$H_2 = \frac{I_1(0)}{1 + k^2b_2^2},$$

$$k = \sqrt{\frac{H_2 - H_1}{H_1b_1^2 - H_2b_2^2}}. \quad (9)$$

и интегральная ширина

$$\beta = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{H_1 b_1^2 - H_2 b_2^2}{H_2 - H_1}}. \quad (10)$$

При пользовании описанным методом нужно выбрать точки пересечения горизонтальной прямой с кривой $I_1(x)$ в области, где составляющие дублета еще не перекрываются. Для определения этой области достаточно отложить с начала линии (точка A на фиг. 2) междублетное расстояние δ . Видно, что горизонтальные прямые должны пересекать линию $I_1(x)$ ниже точки M .

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Weyer, V. Pfarr, K.-W. Mitt. Inst. Eisenforschung 15, 140, (1933).
2. М. П. Арбузов, Изв. АН СССР, сер. физ., 15, 16, (1951).
3. Д. М. Васильев. ЖТФ, 25, 1994, (1955).

Р. Р. Паккас

ВКЛАД ГРАНИЦ ЗЕРЕН В ОБЩУЮ ДЕФОРМАЦИЮ ПРИ ДЕФОРМАЦИИ С РАЗЛИЧНЫМИ СКОРОСТЯМИ

Введение

В ряде работ было показано, что при ползучести металлов деформация осуществляется скольжением в зернах, фрагментацией зерен, а также скольжением зерен и фрагментов по границам. Эффект каждого процесса зависит как от температуры, так и от скорости деформирования. Даже при комнатных температурах обнаружена некоторая локализация деформации в приграничных областях кристаллических зерен. Экспериментально установлено это у цинка [1], магнезия [2], малоуглеродистых сталей [3, 4] и алюминия [5]. Косвенным доказательством этого является и более интенсивное возрастание твердости приграничных областей зерен при начальных стадиях деформирования. Вуд [6] предполагает, что до появления видимых следов скольжения процесс деформации состоит в фрагментации зерен с последующим поворотом и скольжением их. Это может происходить и при низких температурах, как показали работы [7, 8]. Некоторые авторы как Я. Р. Раузин и А. Р. Железнякова [9, 10] утверждают, что вся деформация на площадке текучести осуществляется скольжением зерен по границам. Большинство исследователей [5, 11—13] однако убеждены, что ведущим процессом является сдвиговая деформация, которая только сопровождается перемещением зерен друг относительно друга. При этом указывается возможность концентрации одной доли общей деформации в невидимых под микроскопом следах скольжения, которое наблюдалось в работах [1, 14, 15]. Нужно отметить, что большинство названных работ выполнено при повышенных

температурах. Нам не известно ни одной работы, посвященной исследованию вклада границ зерен и невидимых линий скольжения в общую деформацию при комнатных температурах и очень низких скоростях деформирования, хотя именно при медленных деформациях можно ожидать увеличения роли скольжения по границам. Целью настоящей работы и было изучение названных процессов в широком диапазоне скоростей деформирования.

Материалы и методика исследования

Образцы были изготовлены из алюминия марки АВ000 обычным механическим путем размерами $50 \times 6 \times 1$ мм. Деформация осуществлялась на разрывной машине со скоростями $V_1 = 1\%/мин$, $V_2 = 5 \cdot 10^{-3}\%/мин$ и $V_3 = 2 \cdot 10^{-6}\%/мин$. Образцы полировались сначала механически, а затем электролитически в электролите состава:

- | | |
|--|-----------|
| 1. ортофосфорная кислота (уд. вес 1,6) | — 480 мл, |
| 2. серная кислота (уд. вес 1,8) | — 50 мл, |
| 3. хромовый ангидрид | — 80 г, |
| 4. вода | — 60 мл. |

Режим полировки — плотность тока 2 а/дм^2 и температура 75°С . Отжигались образцы при температуре 500°С в вакууме. Перпендикулярно оси деформации наносились поперечные риски через каждые 2 мм, расстояние между которыми измерялось микроскопом ИЗА-2 на каждой ступени деформации с точностью $< 0,5 \text{ м}$. Это позволило точно определить степень деформации на различных наблюдаемых в интерференционном микроскопе МИИ-4 участках образца и этим избежать ошибки, могущей возникнуть вследствие неоднородности протекания пластической деформации.

Количественная оценка деформации, связанной с видимыми следами скольжения, а также за счет границ, проводилась по методу Маклина [16, 17] интерференционным микроскопом по вертикальной компонента смещения. Средняя величина смещения по линиям скольжения $p_{ск}$ или границам зерен $p_{гз}$ оценивалась по формуле

$$P = 2,3h \sqrt{1 + \varepsilon_2}, \quad (1)$$

а степень деформации по формуле

$$\varepsilon = [\sqrt{1 + p^2 n^2 + \sqrt{2pn}} - 1] 100\%, \quad (2)$$

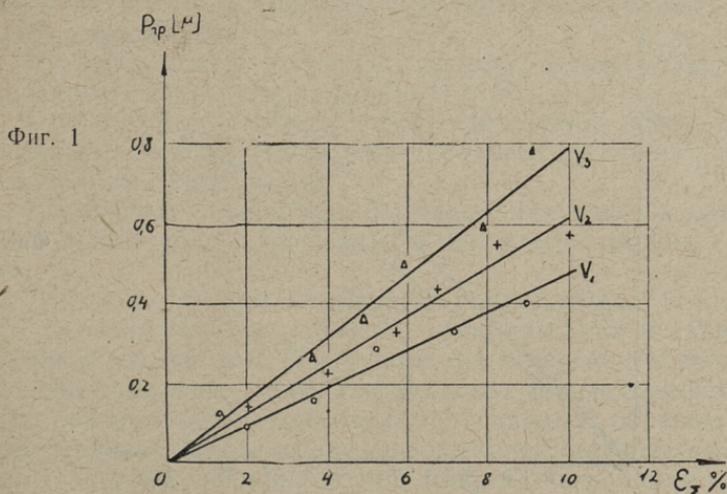
где h — среднее значение вертикальной составляющей смещения, n — число линий скольжения или границ зерен на единице длины образца, ε_{Σ} — общее удлинение образца и ε — доля деформации, связанная с видимыми линиями скольжения ($\varepsilon_{ск}$) или скольжением по границам ($\varepsilon_{гр}$). Величина h измерялась в среднем по 50 следам скольжения и усреднялась. Так же поступали при измерении смещения по границам зерен.

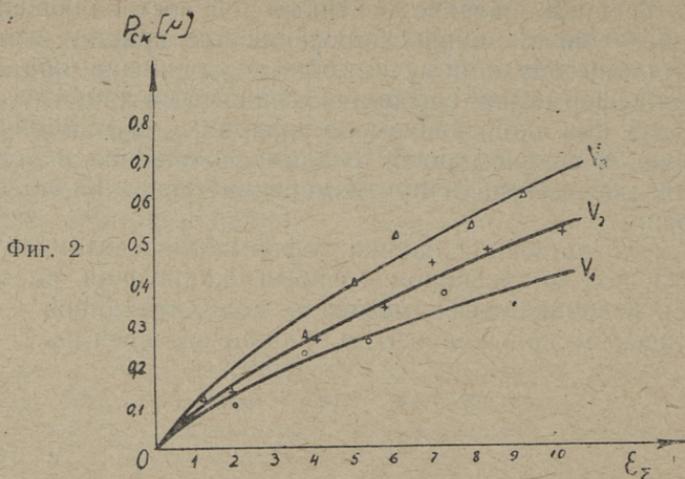
Для количественной оценки деформации, связанной с невидимыми под микроскопом следами скольжения ε_x , высчитывалась из общей деформации ε_{Σ} доли, связанной с видимыми следами скольжения $\varepsilon_{ск}$ и границами зерен $\varepsilon_{гр}$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{\Sigma} - (\varepsilon_{ск} + \varepsilon_{гр}). \quad (3)$$

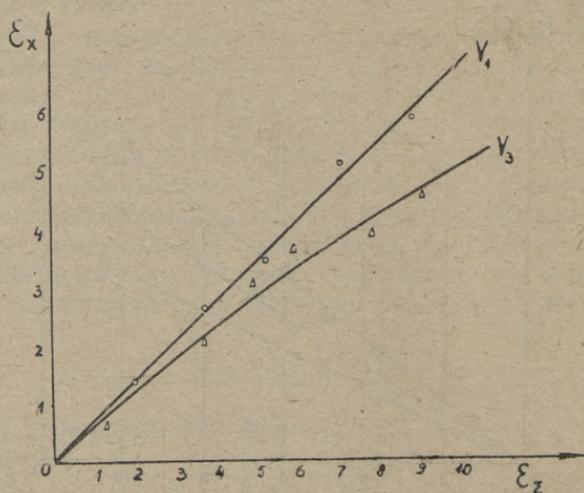
Результаты исследования и их обсуждение

На фиг. 1 представлен график зависимости среднего смещения по границам зерен $\rho_{гр}$ при различных скоростях деформирования в зависимости от общей деформации образца. В пределах ошибки имеем линейную зависимость и, как видно, с уменьшением скорости деформирования увеличивается вклад границ зерен. Микроскопическое изучение границ показывает большее смятие приграничных областей при повышенных скоростях деформирования, особенно вблизи стыка трех зерен. Какого-либо заметного расширения границ не происходит. При увеличении степени деформации происходит одно-





временно увеличение числа линий скольжения и среднего смещения по ним. Однако, резкое отличие наблюдается в развитии процесса в зависимости от скорости деформирования. При медленной деформации со скоростью V_3 для большинства зерен характерны длинные, хорошо развитые линии скольжения, сравнительно далеко отстоящие друг от друга. С увеличением степени деформации в некоторых зернах появляется мультиплетное скольжение. Величина же среднего смещения в линиях скольжения возрастает без особого насыщения (фиг. 2).



После растяжения с большой скоростью V_1 линии скольжения становятся тонкими и покрывают густой сеткой зерна. В большинстве зерен наблюдаются короткие искривленные линии скольжения, свидетельствующие о мультиплетном скольжении с самых начальных степеней деформации. Поверхность зерен изгибается при этом заметно меньше, чем при медленном деформировании.

Главное же различие состоит в сравнительно быстром насыщении кривой зависимости среднего смещения $p_{ск}$ в зависимости от общей деформации ϵ_x (фиг. 2).

Как видно по кривым, приведенным на фиг. 3, общая деформация обуславливается не только смещением по видимым линиям скольжения и границам зерен. Если из величины общего удлинения вычесть удлинение за счет указанных процессов, то получим по формуле (3) величину «недостающей части» деформации ϵ_x .

Как уже было сказано в введении, можно предполагать аккумуляцию одной доли деформации в невидимых под микроскопом линиях скольжения. Это подтверждается и некоторыми электронномикроскопическими исследованиями. Наши эксперименты показывают, что при медленных деформациях аккумулируется в невидимых линиях скольжения меньшая доля деформации, чем при больших скоростях деформации.

Выводы

1. В начальных стадиях деформирования сохраняется линейная зависимость среднего смещения по границам зерен и общей деформацией.

2. С уменьшением скорости деформирования увеличивается среднее смещение по границам зерен.

3. При больших скоростях деформирования наблюдается сравнительно быстрое насыщение среднего смещения по видимым линиям скольжения.

4. Увеличение скорости деформирования ведет к аккумуляции большей доли деформации в невидимых линиях скольжения.

5. Деформация при комнатных температурах осуществляется как скольжением зерен по границам, так и сдвигами по атомным плоскостям. Последний вид деформации является преобладающим и ведущим, так как даже малые степени медленных деформаций осуществляются главным образом внутрикристаллической сдвиговой деформацией, дающей вначале главным образом невидимые под микроскопом линии скольжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Г. Курносков, Н. М. Тронина, М. В. Якутович. ЖТФ, 18, № 2, 197 (1948).
2. F. Hauser, C. Stagg, L. Tietz, I. Dorn, Trans. Amer. Soc. Met., 47, 102 (1955).
3. П. О. Пашков, В. А. Братухина. Сборн. Металловедение. Суб-промгиз, 1958, стр. 165.
4. И. В. Навроцкий, Ю. С. Курманов, Ж. Ф. Янушевская. Бюллетень Украинского института металлов, 1958, № 7.
5. С. С. Горелик, С. М. Кальянова, В. М. Розенберг. ФММ, 1960, 10, 2, 251.
6. W. Wood, R. Scrutton. Journ. Inst. Met. 77, 423 (1950).
7. Б. М. Ровинский, Л. М. Рыбакова. Изв. АН СССР. Сер. физич., 1956, 20, № 6, 647.
8. A. Guhier. Proc. Phys. Soc., 57, 4 (1945).
9. Я. Р. Раузин, А. Р. Железнякова. ФММ, 1956, 3, 1, 146.
10. Я. Р. Раузин, А. Р. Железнякова. ФММ, 1956, 3, 1, 154.
11. Б. А. Сидоров. ФММ, 1958, 6, 191.
12. В. М. Розенберг, Л. В. Градова. ФММ, 1959, 7, 5, 722.
13. Е. А. Минкина, Н. В. Преображенская, В. М. Розенберг. Изв. АН СССР, ОТН. Металлургия и топливо. 1959, 2, 48.
14. А. А. Бочвар, Н. А. Преображенская. ДАН СССР, 1957, 113, № 3.
15. В. М. Розенберг. ФММ, 1960, 9, 6.
16. C. J. McLean. Inst. Met., may, 1952.
17. C. J. McLean. Inst. Met., november, 1952.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Д. М. Ананьев. Некоторые задачи теории управляемости судов на волнении	3
О. М. Сильде. К вопросу теории физического поля	21
Б. А. Тийкма. Одно свойство тензора кривизны	33
У. В. Пильвре. О возможности автоматического определения интенсивностей рентгеновских линий при использовании фотографического метода регистрации	43
Р. Р. Паккас, К. Шультс. Сравнение методов изучения пластической деформации металлов при использовании рентгеновских установок УРС-70 и УРСИ	53
Р. Р. Паккас. К методике определения интегральной ширины составляющей $K\alpha$, дублета рентгеновской линии	71
Р. Р. Паккас. Вклад границ зерен в общую деформацию при деформации с различными скоростями	77

ТРУДЫ ПО ФИЗИКЕ.
СБОРНИК СТАТЕЙ III

Таллинский политехнический институт

Редактор Г. Метс

Технический редактор Я. Мыттус

Корректор Ы. Каар

Сдано в набор 10 III 1962. Подписано к печати
23 VIII 1962. Бумага 60×90, 1/16. Печатных листов
5,25. Учетно-издательских листов 3,9. Тираж
600 экз. МВ-06760. Заказ № 2760.
Типография им. Х. Хейдеманна, Тарту,
ул. Юликооли 17/19. I.

Цена 27 коп.

Цена 27 коп.

