TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 296

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ И СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА

СБОРНИК СТАТЕЙ

X

ТАЛЛИН 1970

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 296 1970

УДК 624

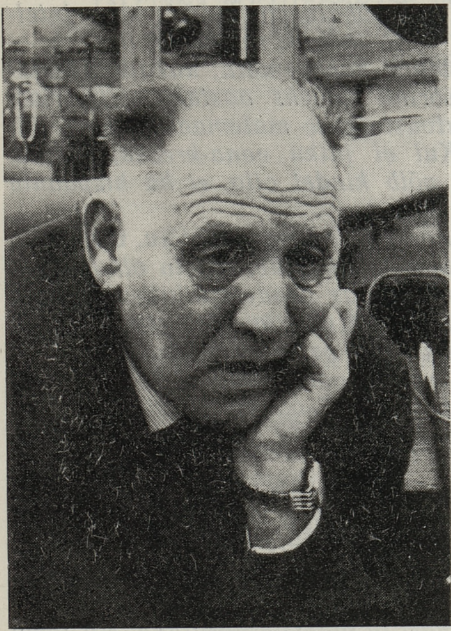
СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ И СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА

СБОРНИК СТАТЕЙ X

Таллин 1970

These proceedings are devoted to 60-th anniversary of prof. H. Laul D. Sc., Chief of the Chair of Structures, Civil Engineering Faculty, Tallinn Polytechnic Institute, Correspondent Member of the Estonian Academy of Sciences and include the papers of his colleagues and pupils.

Сборник посвящается 60-летию со дня рождения заведующего кафедрой строительных конструкций Таллинского политехнического института, доктора технических наук, профессора Х. Х. Лаула и содержит работы его коллег и учеников.



Heinrich L a u l — 60 ehk Mis ta nüüd ette võtab?

Midagi suureplaanilist on tal alati käes olnud, pühendades oma peaaegu piiramatud jõuvarud globaalse eesmärgi teenistusse ja lakkamata seejuures täitmast oma arvukaid igapäevaseid ülesandeid professorina, noorte teadlaste juhendajana ja otsitud konsultandina, kui mõnel suuremal ehitusel on miskit viltu läinud. Kuid kes oskab öelda, peale tema enese, mis tal on plaanis: ta on ju ülimalt laiahaardeline, oma kunagise õpetaja, professor Ottomar Maddisoni väärikas järglane. H. Laul võiks kirjutada isikupärase monograafia raudbetoonkoorikutest — objektidest, mida tema ise ja tema enese arvukad õpilased on usinalt uurinud ja mille staatika on üdini tunnetatud, olgu need siis kas nullilise või negatiivse kõverusega, asümptootiliste radadega või ilma, pragudega ja pragudeta, eelpingestusega ja ilma. H. Laul võiks kirjutada kompetentselt ehituste katsetamisest, raudbetoonist üldse (seda on ta juba teinud ning võiks vabalt korrata) ja pingebetoonist, mõistagi, eriti. H. Laul võiks kirjutada amatöörajaloolasena Hitleri-režiimi mehanismist, kuid, pole kahtlust, memuaare tema kirjutama niipea ei hakka.

Kus sellega, ta on ikka veel kõhkluseta valmis oma intellektuaalset baasi täiendama — ja mis on seejuures oluline — oma kõrgeid teaduslikke nimetusi häbenemata; kui tekib vajadus, läheb ta soliidse professorina pooleks aastaks perifeeriast assistentide hulka, kellele tutvustatakse matemaatika uute lõikude uusimaid rakendusi. Kui ei jätku vana-kreeka, ladina, saksa, vene, inglise keeltest, võib kindel olla, et ka hispaania keel saab peagi selgeks.

Aga kui palju on tema abi vajatud? Kergejõustiku, võrkpalli, korvpalli, lauatennise ja male võistkondades on ta olnud kandev jõud; ansamblites, kus on puudus headest viiuli-, klarneti- või gitarrimängijaist, on täiendus H. Laulu näol alati teretulnud. Ja kogu selle avara võimete ja oskuste spektri juures on ta jäänud pehmeloomuliseks, sellele vaatamata, et tee autojuhi pojast Pelgulinna agulis Eesti NSV Teaduste Akadeemia liikmeskonda pole olnud voolujooneline; kuid küünarnukkidega ta endale teed pole ka teinud.

H. Laul õigustas üliõpilaspõlves oma silmapaistvat töökust materiaalsete raskuste (need olid tal väga tõsist laadi) kiirema ületamise sooviga. Töö insenerina likvideeris küll primaarse vajaduse rabamiseks, kuid tegi ka tema sõpradele selgeks, et tööisu on tal püsivprogrammina organismis, mida veelgi rohkem kinnistab teiste vajadus tema oskusi ja võimeid kasutada. Nii tema kolleegid ja sõbrad ja abivajajavad mõtlevadki: las' ta pingutab edasi — see lubab paremini säiluda ja tõsta ka temaga seotud indiviidide, gruppide ja organisatsioonide stabiilsust.

Kolleegide nimel pani selle kirja

N. Alumäe

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 296 1970

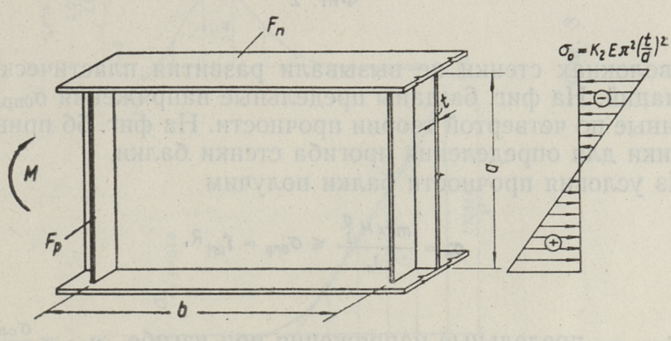
УДК 624

И. И. Ааре

ОСНОВНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОЕКТИРОВАНИЮ ТОНКОСТЕННЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ БАЛОК

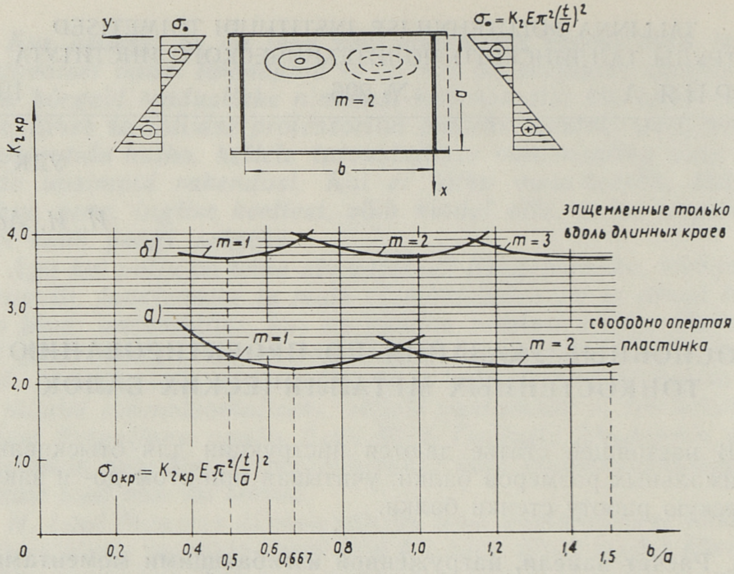
В настоящей статье даются инструкции для отыскивания оптимальных размеров балки, учитывая при этом до- и закритическую работу стенки балки.

А. Расчет панели, нагруженной изгибающими моментами (фиг. 1)



Фиг. 1

Графики для определения критических напряжений стенки балки приведены на фиг. 2. При действии нагрузки выше критической панель выпучивается и происходит перераспределение напряжений в срединной поверхности стенки балки. На фиг. 3 дана картина распределения напряжений в сечении балки при $\frac{\sigma_0}{\sigma_{0кр}} = 3{,}4$. Фиг. 4 дает представление роста напряжения сжатого пояса в середине панели. На фиг. 5 представлены формы выпученных квадратных пластин при нагрузке, превышающей в 3,4 раза критическую. Несущие способности стенки балки определены из условия, что максимальные напряжения в край-



Фиг. 2

них волокнах стенки не вызывали развития пластических деформаций. На фиг. 6а даны предельные напряжения $\sigma_{0пр}$, определенные по четвертой теории прочности. На фиг. 6б приведены графики для определения прогиба стенки балки.

Из условия прочности балки получим

$$\sigma_0 = \frac{\max M \frac{a}{2}}{J_x} \leqslant \sigma_{опр} = \gamma_{(\sigma)} R, \qquad (1)$$

где $\sigma_{опр}$ — предельные напряжения при изгибе, $\gamma_{(\sigma)} = \frac{\sigma_{опр}}{R}$,

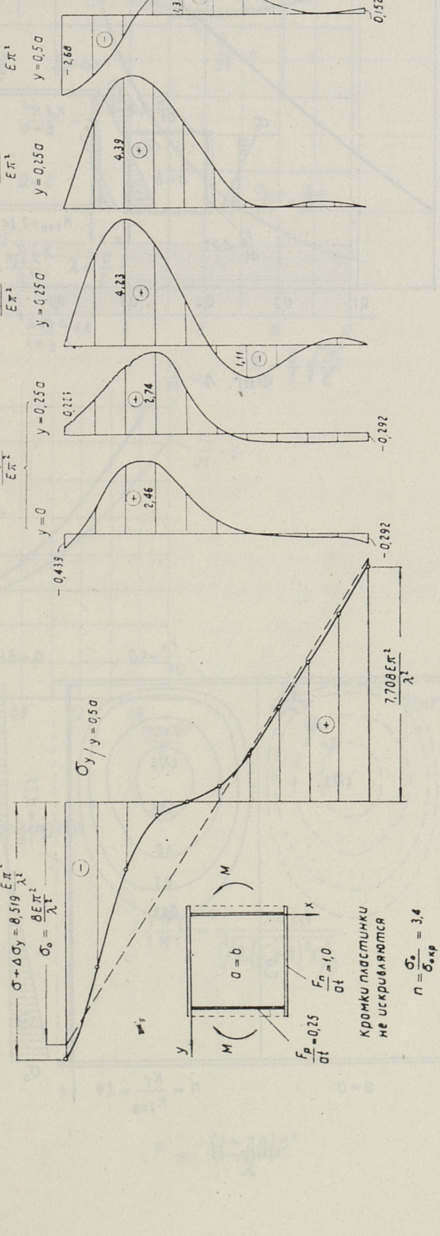
R — расчетная прочность материала.

Подставляя в (1) значения

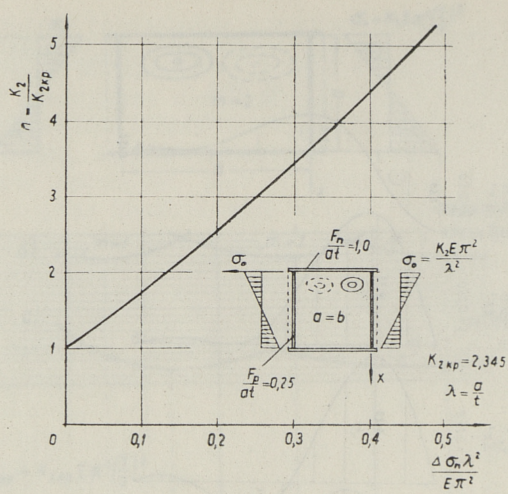
$$\beta = \frac{F_n}{at}, \quad J_x = \frac{a^3 t}{2}\left(\frac{1}{6} + \beta\right); \quad \lambda = \frac{a}{t},$$

получим необходимые формулы для расчета высоты стенки

$$a\left(\frac{R}{M}\right)^{\frac{1}{3}} = \left[\frac{\lambda}{\left(\frac{1}{6} + \beta\right)\gamma_{(\sigma)}}\right]^{\frac{1}{3}} \qquad (2)$$

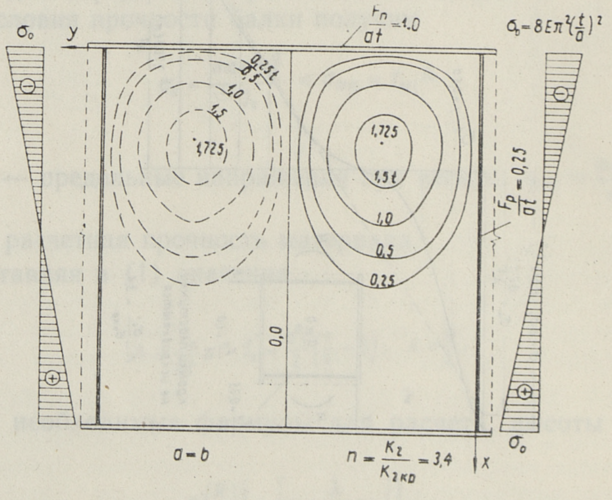

Цепн. напр.
Изгиб. напр.
y = 0
y = 0,25a
y = 0,5a
-0,439
2,46
2,74
-0,292
4,23
1,11
4,39
-2,68
1,316
0,152
a = b
Кромки пластинки не искривляются

Фиг. 3



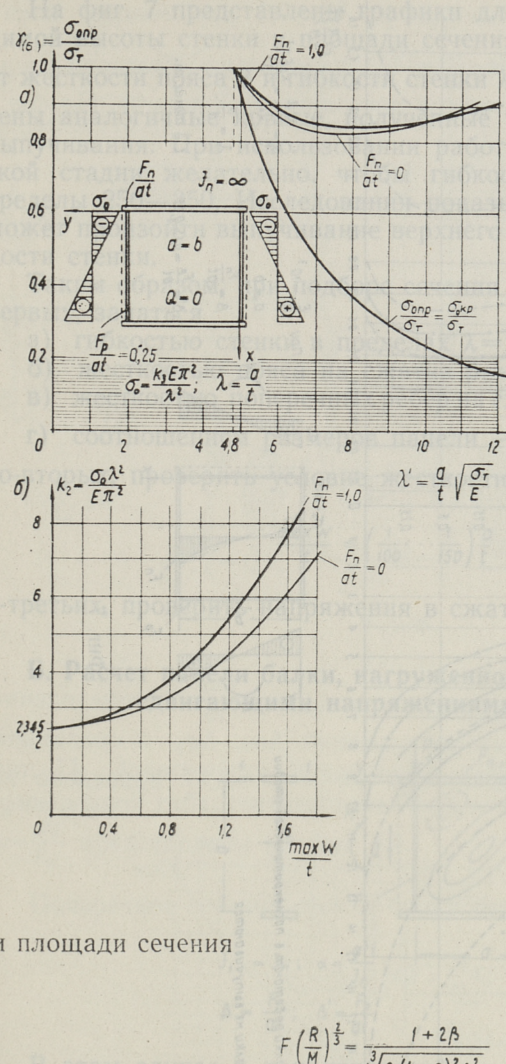
$n = \frac{K_2}{K_{2кр}}$
5
4
3
2
1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
$\frac{\Delta \sigma_n \lambda^2}{E\pi^2}$
$\frac{F_n}{at} = 1,0$
σ_0
$\sigma_0 = \frac{K_2 E \pi^2}{\lambda^2}$
$a = b$
$\frac{F_p}{at} = 0,25$
$K_{2кр} = 2,345$
$\lambda = \frac{a}{t}$
x

Фиг. 4



σ_0
y
$\frac{F_n}{at} = 1,0$
$\sigma_0 = 8E\pi^2(\frac{t}{a})^2$
0,25t
0,5
1,0
1,5
1,725
1,725
1,5t
1,0
0,5
0,25
0,0
$\frac{F_p}{at} = 0,25$
$a = b$
$n = \frac{K_2}{K_{2кр}} = 3,4$
x

Фиг. 5



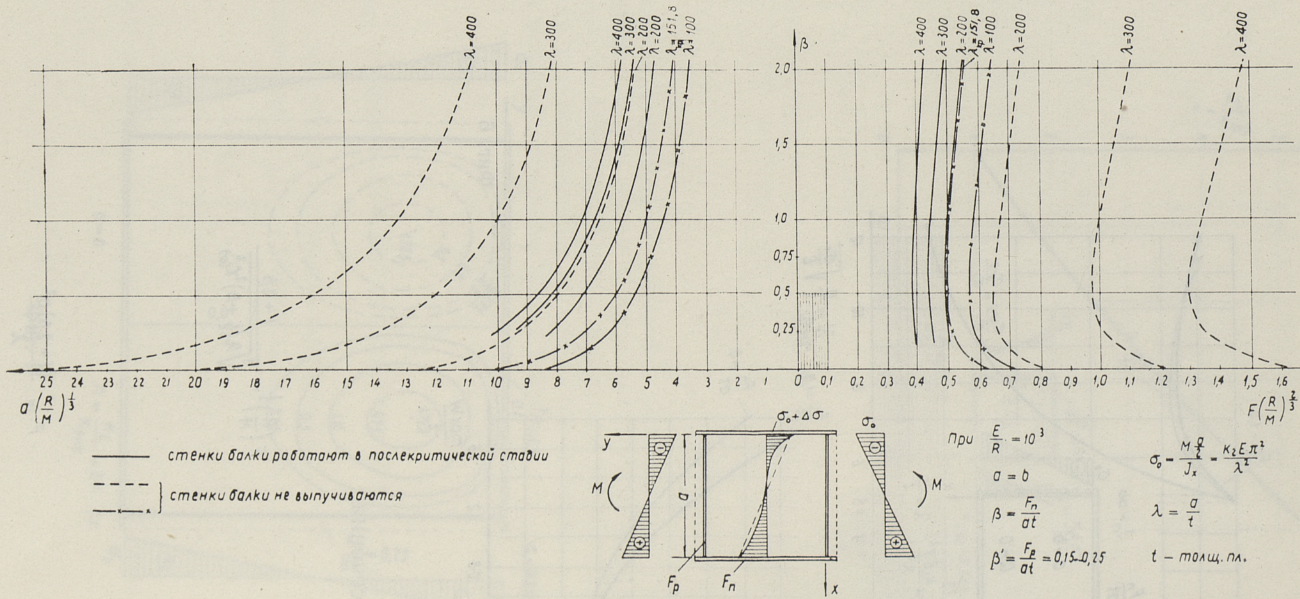
Фиг. 6

и площади сечения

$$F\left(\frac{R}{M}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1+2\beta}{\sqrt[3]{\lambda\left(\frac{1}{6}+\beta\right)^2 \gamma_{(\sigma)}^2}} \tag{3}$$

или

$$F = \frac{(1+2\beta)a^2}{\lambda} \tag{3'}$$



$\lambda=400$
$\lambda=300$
$\lambda=200$
$\lambda=100$
$\lambda_{кр}=151,8$
β
$a\left(\frac{R}{M}\right)^{\frac{1}{3}}$
$F\left(\frac{R}{M}\right)^{\frac{2}{3}}$
стенки балки работают в послекритической стадии
стенки балки не выпучиваются
$\sigma_0+\Delta\sigma$
σ_0
M
y
x
a
F_p
F_n
При $\frac{E}{R}=10^3$
$a=b$
$\beta=\frac{F_n}{at}$
$\beta'=\frac{F_p}{at}=0,15\text{–}0,25$
$\sigma_0=\frac{M\frac{a}{2}}{J_x}=\frac{K_2 E\pi^2}{\lambda^2}$
$\lambda=\frac{a}{t}$
t – толщ. пл.

Фиг. 7

На фиг. 7 представлены графики для определения необходимой высоты стенки и площади сечения балки в зависимости от жесткости пояса β и гибкости стенки $\lambda=\frac{a}{t}$. На графике нанесены аналогичные кривые, полученные при работе стенки без выпучивания. При использовании работы стенки в закритической стадии желательно, чтобы гибкость ее не выходила за пределы 250—350. Исследования показывают, что при $\lambda>400$ может произойти выпучивание верхнего сжатого пояса в плоскости стенки.

Таким образом, при подборе сечения балки необходимо, вопервых, задаться

а) гибкостью стенки в пределах $\lambda=250\ldots350$,

б) жесткостью пояса на сжатие $\beta=0{,}75\ldots1{,}2$,

в) жесткостью поперечных ребер на сжатие $\beta'=0{,}15\ldots0{,}20$,

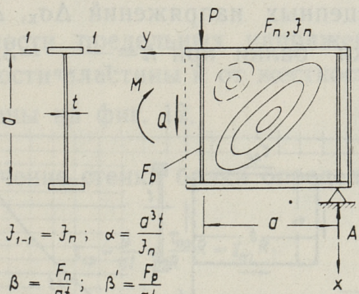
г) соотношением размеров панели $\frac{a}{b}=0{,}8\ldots1{,}2$;

во-вторых, проверить условие жесткости стенки (фиг. 5б)

$$\frac{\max w}{t}\leq\left(\frac{1}{100}\ldots\frac{1}{150}\right)\frac{a}{t}$$

в-третьих, проверить напряжения в сжатом поясе.

Б. Расчет панели балки, нагруженной главным образом сдвигающими напряжениями (фиг. 8).



$$J_{1-1}=J_n;\quad \alpha=\frac{a^3t}{J_n}$$

$$\beta=\frac{F_n}{at};\quad \beta'=\frac{F_p}{at}$$

Фиг. 8

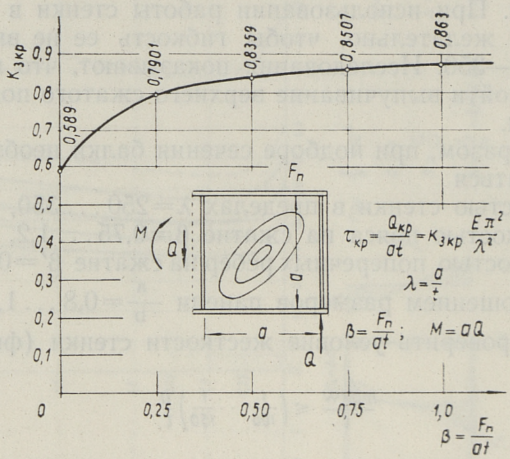
В этом случае в докритической стадии работы балки напряжения в сечении распределяются по закону:

$$\sigma_x=0$$

$$\sigma_y=-\left(1-\frac{2x}{a}\right)\frac{\tau_{cp}}{\frac{1}{6}+\beta}\,\frac{y}{a} \tag{4}$$

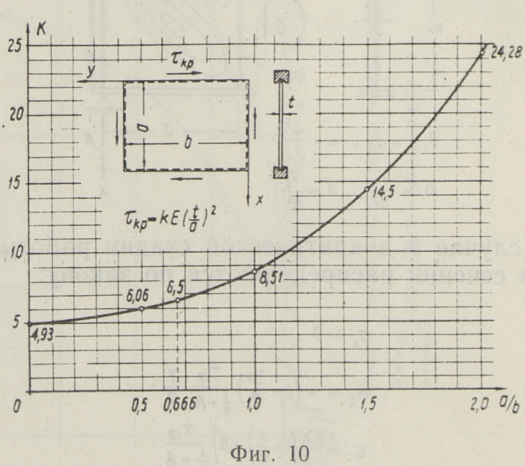
$$\tau=\left[\frac{x}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)+\beta\right]\frac{\tau_{cp}}{\frac{1}{6}+\beta}.$$

Расчеты показывают, что при $\beta = \frac{F_n}{at} < 0{,}5$ критические касательные напряжения $\tau_{ср\ кр} = \frac{Q_{кр}}{at}$ значительно уменьшаются, а при $\beta \geqslant 1$ — $\tau_{ср\ кр}$ остаются постоянными (фиг. 9). На фиг.

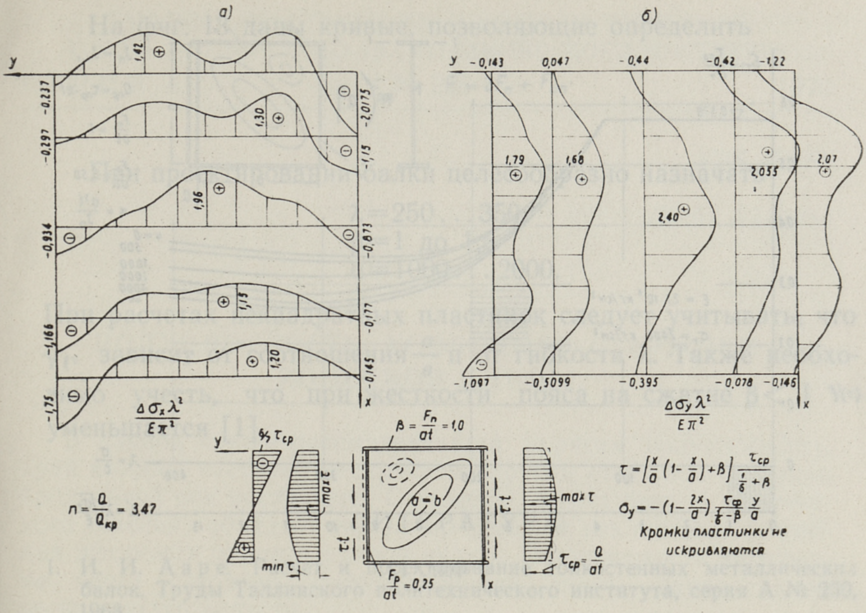


Фиг. 9

10 приведен график для определения $\tau_{ср\ кр} = \frac{Q_{кр}}{at}$. Распределение дополнительных цепных напряжений $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$ в срединной поверхности стенки балки при $n = \frac{\tau}{\tau_{ср\ кр}} = 3{,}47$ приведено на



Фиг. 10



Фиг. 11

фиг. 11. Зависимости предельных напряжений сдвига $\tau_{пр}$ от приведенной гибкости пластины и от жесткости пояса на изгиб $\alpha = \frac{a^3 t}{I_n}$ представлены на фиг. 12.

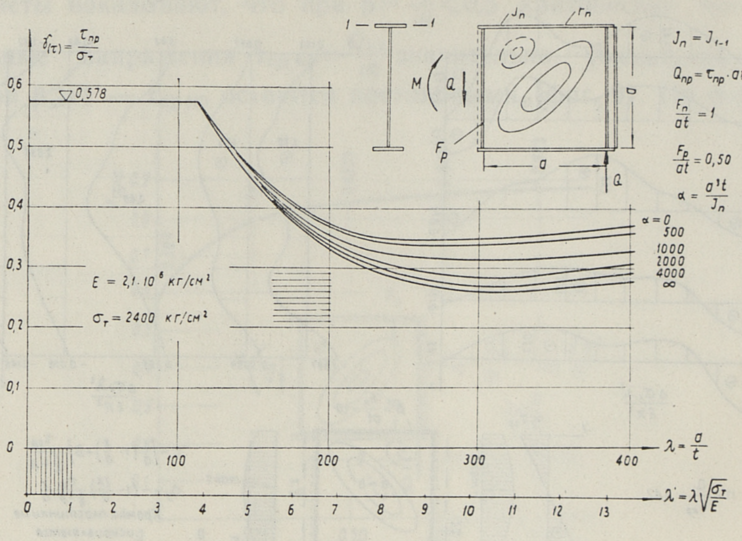
Поперечное сечение стенки балки определяем из условия

$$\tau_{cp} = \frac{Q}{at} \leq \frac{\tau_{np}}{R} R = \gamma_{(\tau)} R.$$

Выбирая гибкость стенки балки $\lambda = \frac{a}{t}$, получим формулы для определения высоты стенки балки и ее поперечного сечения

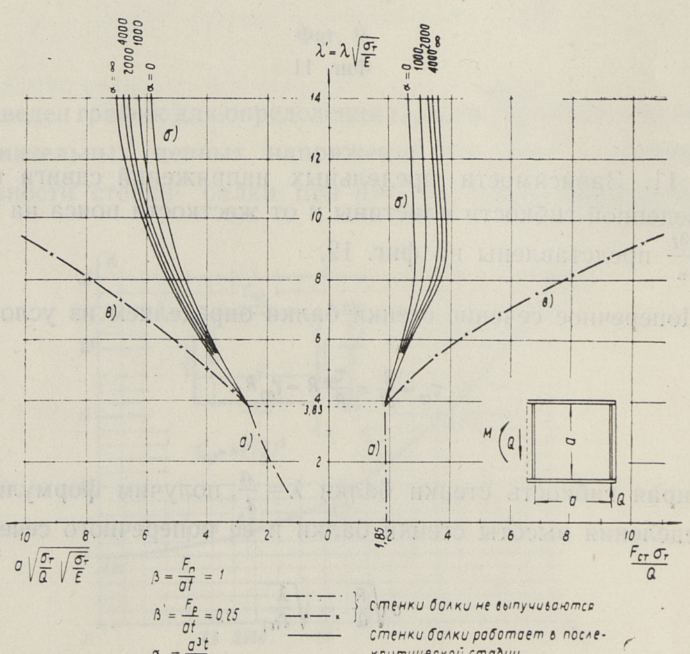
$$a\sqrt{\frac{R}{Q}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma_{(\tau)}}} \tag{5}$$

$$F_{cm} \cdot \frac{R}{Q} = \frac{1}{\gamma_{(\tau)}} \tag{6}$$



$\varphi_{(\tau)} = \frac{\tau_{np}}{\sigma_T}$
0,578
$E = 2{,}1 \cdot 10^6$ кг/см²
$\sigma_T = 2400$ кг/см²
$J_n = J_{1-1}$
$Q_{np} = \tau_{np} \cdot at$
$\frac{F_n}{at} = 1$
$\frac{F_p}{at} = 0{,}50$
$\alpha = \frac{a^3 t}{J_n}$
α = 0
500
1000
2000
4000
∞
$\lambda = \frac{a}{t}$
$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{\sigma_T}{E}}$

Фиг. 12



$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{\sigma_T}{E}}$
α = ∞
2000
4000
1000
α = 0
б)
в)
а)
3,83
1,85
$a\sqrt{\frac{\sigma_T}{Q}}\sqrt{\frac{\sigma_T}{E}}$
$\frac{F_{cT}\sigma_T}{Q}$
$\beta = \frac{F_n}{at} = 1$
$\beta' = \frac{F_p}{at} = 0{,}25$
$\alpha = \frac{a^3 t}{J_n}$
стенки балки не выпучиваются
стенки балки работает в послекритической стадии

Фиг. 13

На фиг. 13 даны кривые, позволяющие определить

$$a, \ F_{cm} \text{ и } F = 2F_n + F_{cm}.$$

При проектировании балки целесообразно назначать

$$\lambda = 250 \ldots 350,$$
$$\beta = 1 \text{ до } 1{,}5$$
$$\alpha = 1000 \ldots 2000.$$

При расчетах неквадратных пластинок следует учитывать, что $\gamma(\tau)$ зависит от соотношения $\frac{a}{в}$ и от гибкости λ. Также необходимо учесть, что при жесткости пояса на сжатие $\beta < 1$ $\gamma(\tau)$ уменьшается [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Ааре. Расчет и проектирование тонкостенных металлических балок. Труды Таллинского политехнического института, серия А № 259, 1968.
2. И. И. Ааре, С. И. Иднурм. Закритическое поведение пластинок при сдвиге и изгибе. Труды Таллинского политехнического института, серия А № 278, 1969.

I. Aare

The Instruction of Design of the Metal Plate Girders with a Thin Web.

An analysis of the static load-carrying capacity of plate girders subjected to bending and shear is presented.

Utilizing the postbuckling strength of girder webs, the instructions for designing the metal plate girders with a thin web are given.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 296 1970

УДК 539.371

Л. А. Алликас

ПОЛУПЛОСКОСТЬ, УСИЛЕННАЯ СТЕРЖНЕМ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

В данной статье рассматривается упругая полуплоскость, край которой частично подкреплен упругим стержнем по линии продольной оси последнего. Стержень (может быть и переменного сечения) обладает только продольной жесткостью (изгибная жесткость принята равной нулю). Полуплоскость нагружена через стержень сосредоточенной силой, параллельной кромке полуплоскости.

Модуль упругости материала стержня обозначена через E_2, площадь поперечного сечения — F. Модуль упругости материала полуплостkости и ее толщина обозначены соответственно через E_1 и t.

Относительные деформации полуплоскости определяются [1]

$$\varepsilon(x,y) = -\frac{2p}{E_1 t}\,\frac{x}{(x^2+y^2)^2}$$

и относительные деформации на кромке полуплоскости

$$\varepsilon(x,0) = -\frac{2p}{E_1 t}\,\frac{1}{x}. \qquad (1)$$

Представляя уравнение (1) как функцию влияния, получим

$$\kappa(x,\xi) = \frac{-\kappa}{(x-\xi)}, \qquad (2)$$

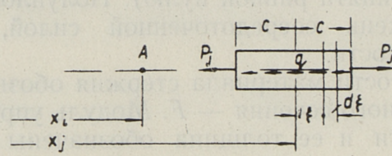
где $\kappa = \dfrac{2}{E_1 t}$.

Уравнение (2) дает значения $\varepsilon(x, o)$ в точке (x, o) на кромке полуплоскости от единичной силы, приложенной в точке ξ.

Отсюда относительные деформации кромки полуплоскости от сдвигающей нагрузки q имеют вид

$$\varepsilon(x,0) = -\int_0^l \kappa q(\xi)\frac{d\xi}{x-\xi}. \tag{3}$$

Для определения неизвестных сдвигающих усилий приравниваются относительные деформации кромки полуплоскости $\varepsilon(x, o)$ с относительными деформациями стержня ε. Для приближенного решения полученного таким образом сингулярного интегрального уравнения используются результаты, опубликованные в работах [2] и [3]. Для обеспечения непрерывности деформации ребра и пластины предполагается, что часть силы, величиной Q, от сосредоточенной силы P, приложенной к ребру, непосредственно действует на пластину. Далее стержень делится на отдельные элементы длиной $2c_i$. Контактные сдвигающие усилия в пределах каждого элемента предполагаются постоянными. В таком случае получаем (фиг. 1)



Фиг. 1

$$\varepsilon(x,0) = -\kappa\frac{q}{2c_i}\int_{-c}^{+c}\frac{d\xi}{x-\xi}, \tag{4}$$

где $q = p_i - p_{i-1}$,

p_i, p_{i-1} — нормальные силы, действующие на концы рассматриваемого элемента.

Интегрирование выражения (4) дает

$$\varepsilon(x,0) = -\kappa\frac{p_{i+1}-p_i}{2c_i}\ln\left|\frac{x_j - x_i + c_i}{x_j - x_i - c_i}\right|. \tag{5}$$

Деформация кромки полуплоскости от сосредоточенной силы Q, приложенной $x=0$, равна

$$\varepsilon(x,0) = \frac{Q}{x_i}. \tag{6, a}$$

Учитывая, что на стержень действует контактная сдвигающая нагрузка интенсивностью $q = p_i - p_{i+1}$, получим относительную деформацию на середине элемента

$$\varepsilon = \frac{1}{2E_2F}(p_i + p_{i+1}). \tag{6, б}$$

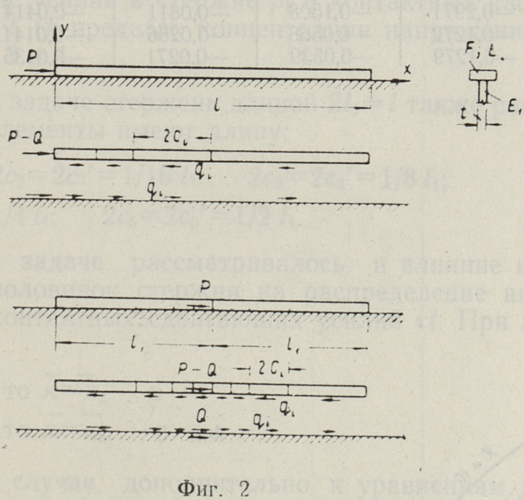
Для определения искомых величин $p_1, p_2, \ldots, p_n$ имеется n (n — количество элементов стержня) условий непрерывности деформаций. Обозначив $2c_i = \varkappa_i l$, получим

$$\sum_{j=1\ldots i-1,\, i+1\ldots n} \frac{p_{i+1}-p_i}{\varkappa_i} \ln\left|\frac{x_j - x_i + c_i}{x_j - x_i - c_i}\right| + \frac{Q}{x_i} = \bar{K}(p_i + p_{i+1}), \tag{7}$$

где

$$\bar{K} = \frac{E_1 t l}{4E_2F}.$$

На фиг. 2 представляются две задачи. В первом случае сосредоточенная сила P приложена к левому концу стержня, во втором — к середине стержня.



Фиг. 2

В первой задаче стержень разделен на десять частей таким образом, что каждый последующий элемент длиннее предыдущего в 2 раза (за исключением первых двух элементов, которые равны). Таким образом, элементы имеют следующую длину:

$2c_1 = 2c_2 = 1/512\,l$; $\quad 2c_3 = 1/256\,l$; $\quad 2c_4 = 1/128\,l$;

$2c_5 = 1/64\,l$; $\quad 2c_6 = 1/32\,l$; $\quad 2c_7 = 1/16\,l$;

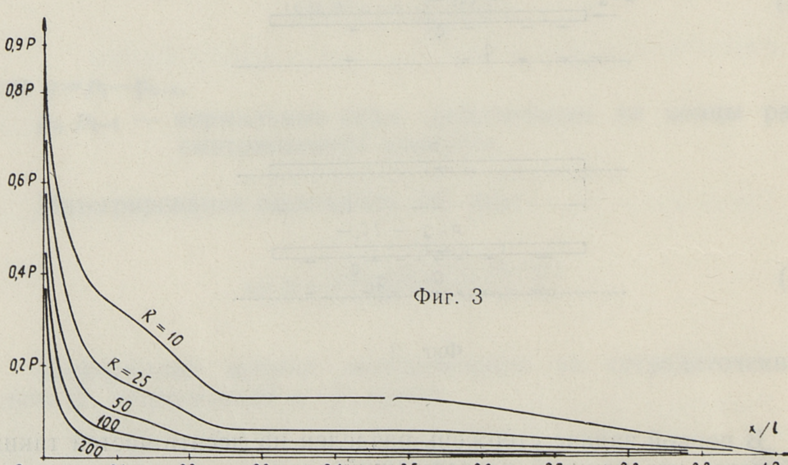
$2c_8 = 1/8\,l$; $\quad 2c_9 = 1/4\,l$; $\quad 2c_{10} = 1/2\,l$.

Решения системы при различных жесткостях κ приведены в таблице 1. В настоящем случае $p_1 = P - Q$.

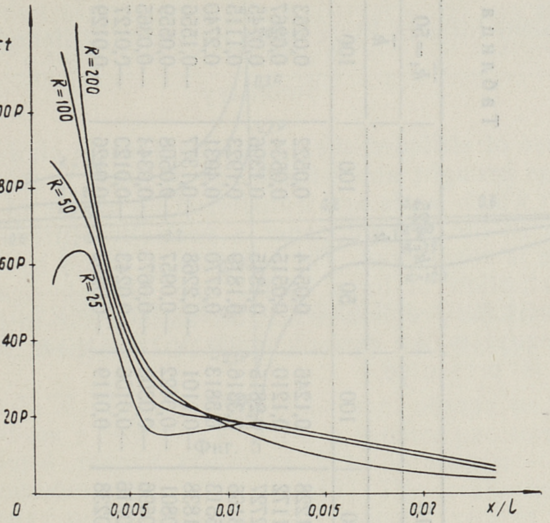
Таблица 1

Значения p_i $(p=1)$

p_i	$\bar{\kappa}$				
	10	25	50	100	200
Q	0,0881	0,1003	0,1080	0,1021	0,0535
p_2	—0,8726	—0,7946	—0,7207	—0,0331	—0,5360
p_3	—0,7551	—0,6719	—0,5841	—0,4786	—0,3652
p_4	—0,7487	—0,6135	—0,4922	—0,3637	—0,2434
p_5	—0,5974	—0,4661	—0,3477	—0,2316	—0,1375
p_6	—0,5614	—0,3767	—0,2457	—0,1432	—0,0765
p_7	—0,3368	—0,2066	—0,1240	—0,0674	—0,0345
p_8	—0,2971	—0,1508	—0,0811	—0,0414	—0,0207
p_9	—0,1272	—0,0568	—0,0286	—0,0141	—0,0069
p_{10}	—0,1279	—0,0539	—0,0271	—0,0135	—0,0067



Фиг. 3



Фиг. 4

Внутренние усилия в стержне p_i и контактных касательных усилиях $q=\tau\cdot t$ (в пределах концентрации напряжения) приведены на фиг. 3 и 4.

Во второй задаче стержень длиной $2l_1=l$ также разделен на 10 частей и элементы имеют длину:

$$2c_1=2c_1'=2c_2=2c_2'=1/16\ l_1;\qquad 2c_3=2c_3'=1/8\ l_1;$$

$$2c_4=2c_4'=1/4\ l_1;\qquad 2c_5=2c_5'=1/2\ l_1.$$

В данной задаче рассматривалось и влияние изменения жесткостей половинок стержня на распределение внутренних усилий p_i и контактных сдвигающих усилий τt. При этом обозначено:

если $x<0$, то $\bar{\kappa}=\bar{\kappa}_1$ и

если $x>0$, то $\bar{\kappa}=\bar{\kappa}_2$.

В данном случае, дополнительно к уравнениям (7), были использованы условия равновесия

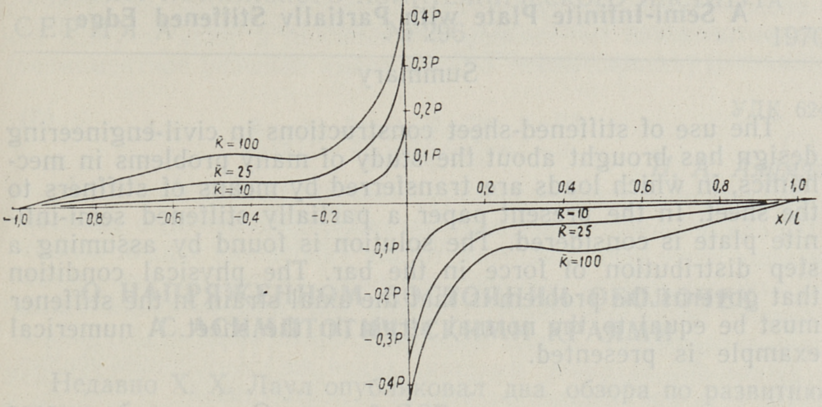
$$(P-Q)-p_0+p_0'=0.$$

Результаты приведены в таблице 2 и на фиг. 5 и 6.

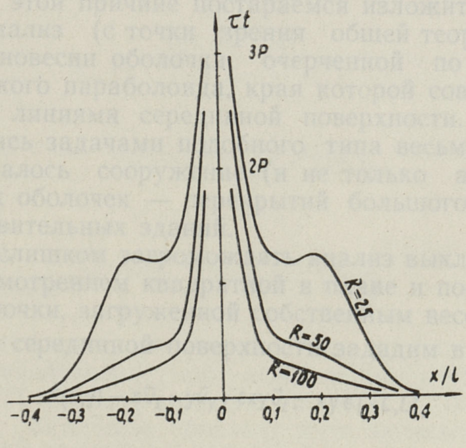
Таблица 2

Значения p_i (P=1)

p_i	$\overline{k}_1=\overline{k}_2=\overline{k}$				$\overline{k}_1=10$, $\overline{k}_2$			$\overline{k}_1=25$, $\overline{k}$		$\overline{k}_1=50$, $\overline{k}$
	10	25	50	100	25	50	100	50	100	100
p'_4	0,1139	0,0501	0,0259	0,0131	0,1200	0,1228	0,1246	0,0514	0,0522	0,0263
p'_3	0,0998	0,0487	0,0258	0,0132	0,1113	0,1172	0,1210	0,0515	0,0534	0,0267
p'_2	0,2336	0,1269	0,0716	0,0380	0,2592	0,2727	0,2815	0,1345	0,1396	0,0745
p'_1	0,2546	0,1670	0,1050	0,0596	0,2945	0,3166	0,3316	0,1819	0,1923	0,1115
p'_0	0,4341	0,3408	0,2540	0,1689	0,5082	0,5513	0,5813	0,3770	0,4031	0,2740
p_0	—0,4341	—0,3408	—0,2540	—0,1689	—0,2816	—0,1838	—0,1101	—0,2268	—0,1377	—0,1556
p_1	—0,2546	—0,1670	—0,1050	—0,0596	—0,1413	—0,0801	—0,0422	—0,0957	—0,0508	—0,0559
p_2	—0,2336	—0,1269	—0,0716	—0,0380	—0,1128	—0,0596	—0,0303	—0,0673	—0,0343	—0,0365
p_3	—0,0998	—0,0487	—0,0258	—0,0132	—0,0434	—0,0216	—0,0106	—0,0243	—0,0120	—0,0127
p_4	—0,1139	—0,0501	—0,0259	—0,0131	—0,0473	—0,0238	—0,0119	—0,0252	—0,0126	—0,0129



Фиг. 5



Фиг. 6

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Новожилов. Теория упругости, 1958.
2. R. E. Glover. Journ. of Applied Mechanics, 17, № 2, 1950.
3. N. C. Remedios. The Institution of Civil Engineers, 42, № T-3, 1969.
4. Л. А. Алликас. Изв. АН Эст. ССР, 14, № 3, 1965.

A Semi-Infinite Plate with Partially Stiffened Edge

Summary

The use of stiffened-sheet constructions in civil-engineering design has brought about the study of many problems in mechanics, in which loads are transferred by means of stiffners to the sheet. In the present paper a partially stiffened semi-infinite plate is considered. The solution is found by assuming a step distribution of force in the bar. The physical condition that governs the problem is that the axial strain in the stiffener must be equal to the normal strain in the sheet. A numerical example is presented.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 296 1970

УДК 624

Н. А. Алумяэ

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ОБОЛОЧЕК С АСИМПТОТИЧЕСКИМИ КРАЯМИ

Недавно Х. Х. Лаул опубликовал два обзора по развитию теории оболочек в Эстонской ССР: в первом рассматривались вопросы общей теории оболочек [1], во втором — вопросы расчета железобетонных оболочек [2]. Представляется, что в этих проблемах много общего, что общая теория оболочек может помочь разработке методов расчета железобетонных оболочек. По этой причине постараемся изложить весьма элементарный анализ (с точки зрения общей теории оболочек) задачи о равновесии оболочки, очерченной по поверхности гиперболического параболоида, края которой совпадают асимптотическими линиями серединной поверхности. Школа Х. Х. Лаула занялась задачами подобного типа весьма интенсивно: предусматривалось сооружение (и не только академический расчет) таких оболочек — перекрытий большого пролета для ряда представительных зданий.

Чтобы не слишком загромождать анализ выкладками, ограничимся рассмотрением квадратной в плане и постоянной толщиной h оболочки, загруженной собственным весом p.

Уравнение серединной поверхности зададим в форме

$$\bar{r}(x,y) = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y + cxy\bar{u}_z; \quad x,y \in (-L,L), \tag{1}$$

где $\bar{u}_x$, $\bar{u}_y$, $\bar{u}_z$ — орты декартовой системы координат. В этой системе

$$\bar{p} = p\sqrt{a}\,\bar{u}_z, \quad a = 1 + c^2(x^2+y^2), \; p = const. \tag{2}$$

Координатные линии на поверхности (1) образуют косоугольную сеть, поэтому в дальнейшем T^{xx}, T^{xy}, T^{yy} обозначают контравариантные компоненты тензора внутренних усилий, M^{xx}, M^{xy}, M^{yy} — те же для тензора изгибающих моментов,

ε_{xx}, ε_{xy}, ε_{yy} и $\varkappa_{xx}$, $\varkappa_{xy}$, $\varkappa_{yy}$ — ковариантные компоненты первого и второго тензоров деформации. Ради дальнейшего упрощения рассматривается «свободное опирание» оболочки на бортовые элементы, т. е. на краю $x=L$:

$$T^{xx}=0, \quad M^{xx}=0, \quad \varepsilon_{yy}=0, \quad \varkappa_{yy}=0 \tag{3}$$

и аналогичные условия на остальных краях $x=-L$, $y=\pm L$.

Если оболочка имеет одну затяжку, соединяющую расположенные ниже углы оболочки, то для упрощения задачи целесообразно разложить решение основной задачи на две составляющие, введя фиктивную затяжку для симметризации. Наша цель заключается в рассмотрении только первой задачи, где в фиктивной затяжке имеется такое же сжимающее усилие, какое есть растягивающее усилие в нефиктивной.

Итак, первая задача такова: оболочка нагружена собственным весом, T^{xy} — четная относительно $x=0$, $y=0$, а T^{xx} и T^{yy} — нечетные относительно $x=0$ и $y=0$.

Частное решение безмоментных уравнений можно найти без труда:

$$\frac{2c}{\sqrt{a}}T^{xy}+p=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{a}\,T^{xx}+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial y}a^{3/2}T^{xy}+pcy=0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{a}\,T^{yy}+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x}a^{3/2}T^{xy}+pcx=0, \tag{6}$$

но эти уравнения не дают произвола интегрирования, при помощи которого можно было бы удовлетворить краевому условию $T^{xx}=0$ на краях $x=\pm L$ (или условию $T^{yy}=0$ на краях $y=\pm L$). Выполнение этих условий возможно при помощи краевого эффекта (в данном случае, вдоль асимптотической линии).

Основные соотношения краевого эффекта вдоль асимптотической линии оболочки отрицательной кривизны уже давно выведены А. Л. Гольденвейзером [3]. Соответствующее напряженное состояние может быть коротко названо также «полубезмоментным», хотя и по скорости затухания его состояние отличается от такового у прямолинейных краев оболочки нулевой кривизны.

Уравнения краевого эффекта вдоль асимптотической линии $x=\mathrm{const}$ учитывают быстрое изменение напряженного состояния поперек края и медленное изменение по линии $x=\mathrm{const}$ (безмоментное решение имеет именно такой характер):

$$\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{a}\,T^{yy}+\frac{Eh^3(1+c^2L^2)^2}{24(1-\nu^2)ca}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varkappa_{xx}=0, \tag{7}$$

$$-\frac{(1+c^2L^2)^2}{2Ehca}\frac{\partial^3}{\partial x^3}T^{yy}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{a}}\varkappa_{xx}=0, \tag{8}$$

где E — модуль упругости, γ — коэффициент Пуассона.

В уравнениях (7), (8) выписаны только главные члены. Усилие T^{xx} определяется по известному T^{yy} уравнениями (5) и (6).

Решение уравнений (7), (8) можно на краю $x=L$ искать в форме асимптотического разложения

$$T^{yy}=e^{\kappa r(x-L)}\left(T^{yy}_{(0)}+\frac{1}{\kappa L}T^{yy}_{(1)}+\cdots\right),$$

$$\varkappa_{xx}=e^{\kappa r(x-L)}\left(\varkappa^{(0)}_{xx}+\frac{1}{\kappa L}\varkappa^{(1)}_{xx}+\cdots\right), \tag{9}$$

где k — достаточно большой параметр, чтобы разложение имело смысл

$$\kappa^6=48(1-\nu^2)c^2/h^2L^2.$$

Тогда получим

$$L^2\frac{d}{dy}\sqrt{1+c^2(L^2+y^2)}\;\frac{d}{dy}\sqrt{1+c^2(L^2+y^2)}\;T^{yy}_{(0)}+\frac{(1+c^2L^2)^4}{1+c^2(L^2+y^2)}r^6T^{yy}_{(0)}=0, \tag{10}$$

причем $T_{(0)}{}^{yy}=0$ при $y=0$ и при $y=\pm L$.

Из этих условий определяются собственные числа r^6 уравнения (10).

Краевые условия при $x=L$ для полубезмоментного состояния примут вид:

$$T^{yy}_{(0)}=0,\quad \varkappa^{(0)}_{xx}=0,\quad T^{xx}_{(0)}=-\frac{cpy}{\sqrt{1+c^2(L^2+y^2)}}. \tag{11}$$

Первое из них означает, что краевой эффект имеет настолько большую амплитуду, что в общем условии $\varepsilon_{yy}=0$ на краю можно пренебречь безмоментной составляющей; аналогичное утверждение имеет место для второго краевого условия $M^{xx}=0$. Все это вызвано тем, что при краевом эффекте $T^{yy}_{(0)}\approx\approx k^2L^2T^{xx}_{(0)}$; вместе с тем, для удовлетворения условия $T^{xx}_{(0)}=0$ на краю $x=L$ нет других ресурсов.

Пока осталось неудовлетворенным краевое условие $\varkappa_{yy}=0$ на краю $x=L$ (или $\varkappa_{xx}=0$ вдоль $y=\pm L$). Для этого введем в рассмотрение чистомоментное состояние (характеризуемое изгибанием серединной поверхности). Решение последней задачи особых трудностей не представляет; обратное утверждение было бы, пожалуй, более верным.

В заключение хотелось бы повторить, что в свободно опертых по асимптотическим краям оболочках отрицательной Гауссовой кривизны возникают очень большие параллельные к краям нормальные усилия типа краевого эффекта, и что расчет этих оболочек можно вести классическим методом [3] разложения общего напряженного состояния на элементарные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Лаул. О развитии теории тонкостенных конструкций в Эстонской ССР. Известия АН ЭССР, серия физ.-мат. и техн. н., 1965, № 3.
2. Х. Лаул. Исследование железобетонных оболочек в Эстонской ССР. Там же.
3. А. Л. Гольденвейзер. Теория упругих тонких оболочек. ГИТТЛ, 1953.

N. Alumäe

The stress state in shells with asymptotic boundaries

Summary

It is shown that in shells with negative curvature and asymptotic boundaries the principle of decomposition of the general stress state into the elementary states — membrane state, bending state, and generalized boundary layers — can effectively be used in analyzing and computing, provided the shell is thin and not shallow. As an example, a hyperbolic paraboloidic shell with «freely supported» asymptotic boundaries is considered. The specific feature of that class of shells is expressed in comparatively high normal stresses in direction and along the boundaries.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 296 1970

УДК 624.072.327.04

Ю. К. Энгельбрехт

ПРИБЛИЖЕННЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ВИСЯЧИХ ПОКРЫТИЙ ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ

Известны приближенные решения статических задач висячих покрытий, в решениях которых учитывают только деформации главных вант. В данной статье предлагается решение динамической задачи при подобном упрощении. Показывается путь определения первых частот свободных колебаний и вычисления смещений и усилий при периодических нагрузках, близких к равновесным.

Рассматривается покрытие на прямоугольном плане. Уравнение поверхности имеет вид:

$$z_0 = f_1 \cdot \sin\frac{\pi x}{l_1} - f_2 \cdot \sin\frac{\pi y}{l_2}, \tag{1}$$

где l_i — пролет, f_i — стрела подъема, индексы 1 и 2 здесь и в дальнейшем означают соответственно несущих и стягивающих вант. При деформации очертание поверхности имеет вид:

$$z = z_0 + \eta \cdot \sin\frac{n\pi x}{l_1} \cdot \sin\frac{m\pi y}{l_2}. \tag{2}$$

Движение предлагается гармоническим и $\eta = \eta_0 \cdot \sin\omega t$. Длину отдельного ванта вычисляем при помощи ряда Маклорена, удерживая первые два члена. В деформационном состоянии удлинения главных (средних) несущей и стягивающей вант соответственно:

$$\Delta L_1 = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\pi^2 f_1}{l_1} \cdot \sin\frac{m\pi}{2}\eta + \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{l_1} \cdot \eta^2 & \text{при } n = 1, \\ \frac{1}{4}\frac{n^2\pi^2}{l_1} \cdot \eta^2 & \text{при } n \neq 1. \end{cases} \tag{3}$$

$$\Delta L_2 = \begin{cases} -\frac{1}{2}\frac{\pi^2 f_2}{l_2}\sin\frac{n\pi}{2}\eta + \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{l_2}\cdot\eta^2 & \text{при } m=1, \\ \frac{1}{4}\frac{m^2\pi^2}{l_2}\cdot\eta^2 & \text{при } m\neq 1. \end{cases}$$

На вантовую сеть действует внешняя нагрузка q (собственный вес, снег и т. д.). Контакт между отдельными семействами вант заменяется контактной нагрузкой

$$p = p_1 - p_2\cdot\sin\frac{\pi x}{l_1} + p_3\sin\frac{\pi y}{l_2}.$$

Определение контактной нагрузки приведено в [1, 2]. Кроме статических нагрузок сеть нагружается динамической нагрузкой q_t, под которой подразумеваются главным образом ветровые нагрузки, определенные при помощи характеристик случайного явления [3]. Любая дополнительная нагрузка q_t вызывает изменение контактной нагрузки, которая задается из соображений статического решения в виде

$$\Delta p_t = p_4\left(1+\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi x}{l_1} - \frac{1}{2}\sin\frac{m\pi y}{l_2}\right),$$

где

$$p_4 = p_{40}\cdot\sin\omega t.$$

Уравнение упругих деформаций имеет обычный вид:

$$\Delta L_y = \int_0^{l_i}\frac{\Delta T\cdot ds}{EF_i},$$

откуда получим, например:

$$\Delta L_{1y} = \frac{1}{EF_1}\int_0^{l_1}\Delta H_1\left(1+\frac{\pi^2 f_1^2}{l_1^2}\cos^2\frac{\pi x}{l_1}\right)dx. \quad (4)$$

Изменение распора вычисляется при помощи известного соотношения $H\cdot y = M$. Здесь вводится еще одно допущение, что в деформационном состоянии для вычисления усилий стрелы f_1 и f_2 принимаются неизменными. Такое допущение соответствует пологим сеткам с небольшими амплитудами колебаний.

Из (3) и (4) получим систему разрешающих уравнений в виде:

$$\begin{cases} \frac{l_1^*}{EF_1}\Delta H_1 - \Delta L_1 = 0 \\ \frac{l_2^*}{EF_2}\Delta H_2 - \Delta L_2 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

где $l_i^* = l_i + \frac{\pi^2 f_i^2}{2 l_i}$; EF_i — погонная жесткость. Найдем приближенное периодическое решение системы (5). Используем метод Бубнова-Галеркина, интегрировав в пределах полупериода колебаний π/ω. После интегрирования получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{l_1^* l_1^2}{EF_1 f_1}\frac{\mu\omega^2}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{m\pi}{2}\cdot\eta_0 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2 f_1}{l_1}\cdot\sin\frac{m\pi}{2}\cdot\eta_0 - \frac{2}{3}\frac{n^2\pi}{l_1^2}\eta_0^2 - \\ -\frac{l_1^*\cdot l_1^2}{EF_1\cdot f_1}\cdot\left[\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}\sin\frac{m\pi}{2}\right)+\frac{1}{2n^2\pi^2}\right]p_{40} = -\frac{l_1^*}{EF_1\cdot f_1}\frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega}\Phi_t \sin\omega t\,dt, \\ \frac{1}{2}\frac{\pi^2 f_2}{l_2}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\eta_0 - \frac{2}{3}\frac{m^2\pi}{l_2^2}\eta_0^2 + \frac{l_2^*\cdot l_2^2}{EF_2\cdot f_2}\left[-\frac{1}{8}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{1}{2m^2\pi^2}\right]p_{40} = 0, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\Phi_t = \frac{1}{2}\int_0^{l_1} p_t (l_1 - x)\,dx - \int_0^{l_1/2} p_t\left(\frac{l_1}{2} - x\right)dx;$$

μ — погонная масса; ω — круговая частота.

Для определения собственных частот $p_t = 0$. Если $n \neq 1$, то второй член первого уравнения системы (6) превращается в нуль, и если $m \neq 1$, то первый член второго уравнения превращается в нуль. Уравнения явно нелинейные, причем нелинейность увеличивается для высших частот, так как деформации отдельных вант характеризуются в этом случае только нелинейными членами. Для определения первых частот можно применить линейную часть из системы (6), но вопрос погрешности требует дополнительного анализа. Также возникает вопрос о правильности предпосылки гармонического движения. Как известно по [4], для висячих покрытий это справедливо при колебании с относительной амплитудой $\eta_0/\lambda < 0{,}05$, где λ — меньший размер ячейки сетки.

Представляем результаты измерений собственных частот и соответствующие вычисления по данным модели прямоугольного висячего покрытия [5]. Частота первой симметричной формы ($n=1$, $m=1$) вычисляется из однородной линейной системы (6), приравнивая определитель нулю. Возможен и другой путь: исключаем из системы (5) неизвестную p_4 и получаем относительно η обычное дифференциальное уравнение второго порядка, решение которого общеизвестно. Теоретические частоты и результаты измерений представлены в таблице 1.

Таблица 1

Узловая нагрузка (*кг*)	Измеренная частота (Hz)	Теоретическая частота (Hz)
2	10,7	10,70
6	6,5	6,18
8	5,6	5,33
12	4,8	4,36

По методике М. Пирнера [6] теоретические частоты больше экспериментальных примерно на 10%, по предлагаемой методике разница 5%. Дополнительно можно вычислить и контактную нагрузку в виде функции от амплитуды. Предлагаемая схема расчета включает и расчет при вынужденных колебаниях. Для покрытий с непрямоугольным контуром данная методика дает оценку частот колебаний, так как учитываются только главные ванты.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Р. Кульбах. Упрощенный расчет предварительно напряженных висячих покрытий отрицательной кривизны. Труды ТПИ, серия А, № 200, 1963.
2. В. Р. Кульбах, Ю. К. Энгельбрехт. О некоторых результатах расчета висячих покрытий отрицательной кривизны с конечным числом тросов. Труды ТПИ, серия А, № 257, 1967.
3. А. Ф. Лилеев, Е. Н. Селезнева. Методы расчета пространственных вантовых систем. Стройиздат, М. 1964.
4. В. Н. Кислоокий, А. Л. Синявский. Нелинейные колебания пологих ортогональных вантовых сетей. Сб. Сопротивление материалов и теория сооружений, вып. I, 1965.
5. Ю. К. Энгельбрехт. Экспериментальное исследование висячих покрытий отрицательной кривизны с деформируемым контуром. Труды ТПИ, серия А, № 257, 1967.
6. M. Pirner. Vlastni kmity předpjatých siti tvaru translačnich ploch. Stavebnicky časopis SAV, č. 10, 1963.

J. Engelbrecht

An Approximate Dynamical Design of Hanging Roofs with Negative Curvature

Summary

An approximate method for the above mentioned problem is presented in this paper for roofs of rectangular shape. The non-linear equations of main cables are integrated by Bubnoff-Galyorkin method. The results of designing for the first mode of natural-vibration frequency on the basis of linear equations are given, while the results are in good agreement with experimental ones.

An Approximate Dynamical Design of Hanging Roofs with Negative Curvature

Summary

An approximate method for the above mentioned problem is presented in this paper for roofs of rectangular shape. The non-linear equations of main cables are integrated by Bubnoff-Galiorkin method. The results of designing for the first mode of natural vibration frequency on the basis of linear equations are given, while the results are in good agreement with experimental ones.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 296 1970

УДК 666.944.21.001.5

В. Х. Кикас, Р. Э. Отсман

ФРАКЦИИ СЛАНЦЕВОЙ ЗОЛЫ В ПРОМЫШЛЕННОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Применение горючего сланца-кукерсита в нашей республике из года в год увеличивается. Одновременно растут объемы отходов переработки и энергетического использования сланцев. Основными отходами сланцеперерабатывающей промышленности и электростанций являются сланцевые коксы и золы.

Вид и свойства отходов связаны со свойствами применяемого сланца и условиями его термического преобразования.

В сланцеперерабатывающей промышленности, применяющей богатый органикой сланец, твердыми остатками являются кокс и полукокс.

При производстве сланцевого газа камерным способом сланцевый кокс образуется при температурах 800 . . . 900°С. Ввиду значительного содержания органики (в среднем 15%) его нецелесообразно применять для производства строительных материалов без дополнительного обжига, хотя он и обладает вяжущими свойствами.

Полукокс — твердный остаток перегонки сланца в туннельных печах после выделения жидких продуктов. У полукокса, содержащего около 10% органических веществ, из-за низкой температуры перегонки (порядка 500°С) вяжущих свойств не наблюдается, и в таком виде он не может быть применен.

Сланцевая зола представляет собой минеральный остаток термического преобразования горючего сланца невысокой калорийности со степенью диссоциации углекислого кальция не менее 25% и содержанием органики не более 5%. В основном это отходы энергетического топлива, образующиеся при более высоких температурах (900 . . . 1450°С). Учитывая влияние термического преобразования сланца на свойства отхода в промышленности строительных материалов, предпочтительно применять золу, так как в этом случае дополнительного обжига не требуется. По степени диссоциации углекислого кальция и содержанию органики сланцевые золы можно разделить на три группы (табл. 1).

Таблица 1

Классификация сланцевых зол по степени диссоциации углекислого кальция и по содержанию органики

№ п.п.	Группа золы	Степень диссоциации углекислого кальция в %	Содержание органики в %	Виды золы промышленных установок
1	I	выше 90	0,5	летучие золы
2	II	70 . . . 90	0,5 . . . 2	топочные золы
3	III	25 . . . 70	2 . . . 5	золы, образующиеся в газогенераторах, установках перегонки сланца с твердым теплоносителем и недостаточно прогоревшие топочные золы

К золам I группы в первую очередь относятся летучие золы, выносимые дымовыми газами из топки пылевидного сжигания. Эти мелкие золы являются базой для изготовления вяжущих средних и высоких марок, в том числе цементов.

Топочные золы II группы крупнозернисты. Поэтому они не выносятся газами и осаждаются на дно топки. Они пригодны для получения строительных вяжущих низких и средних марок.

Золы III группы, образующиеся как в топках слоевого сжигания, так и в агрегатах специального назначения, могут служить основой для получения вяжущих низких марок, область применения которых существенно ограничена.

Из всех указанных в таблице 1 видов золы, образующихся при энергетическом сжигании сланца, наилучшими вяжущими свойствами обладает летучая зола, являясь эффективным сырьем для производства строительных материалов. Несмотря на рентабельность использования и хорошие технико-экономические показатели в строительстве сланцезольные материалы применяются ограниченно. С целью их широкого применения необходимо еще повысить эффективность, расширить номенклатуру и область применения этих материалов с доведением их до конкурентоспособности с традиционными, например, изготовленными на базе портландцемента материалами.

Основным затруднением на пути дальнейшего повышения качества и широкого распространения в строительстве сланцезольных материалов является нестабильность состава и качественных характеристик рядовой летучей золы.

Летучая зола, получаемая при пылевидном сжигании сланца, улавливается в одно- или двухступенчатых системах золоуловителей. В одноступенчатой системе золоуловителей используются эффективные циклоны малого диаметра ($\varnothing$ 25 *см*). В двухступенчатой системе улавливания крупная часть золы осаждается в циклонах большего диаметра ($\varnothing$120... ...300 *см*), а мелкая часть — в электрофильтрах.

В начальный период применения летучая зола классифицировалась по улавливающей установке. Так, например, различали циклонную и электрофильтровую золу, уловленную, соответственно, в циклонах и в электрофильтрах. На первый взгляд такая классификация с точки зрения ее практического использования кажется приемлемой. Однако при применении этой классификации возникли серьезные затруднения, которые связаны с тем, что химико-минералогический состав и свойства летучей золы меняются в зависимости от класса тонкости, который, к сожалению, не достаточно характеризуется наименованием золоулавливающей установки.

Тонкость летучей золы, осаждающейся в циклонах, и ее гранулометрический состав зависят от типа циклона, его диаметра, технического состояния и пр. Тонкость же золы, отделяемой в электрофильтрах, в свою очередь связана с золоулавливающей способностью расположенных перед ними циклонов, а также с режимом работы и техническим состоянием самих электрофильтров. Таким образом, тонкость, а также вяжущие свойства как циклонной, так и электрофильтровой золы колеблются в широких пределах (даже до 4 раз). Пробы этих зол, взятые в различное время в различных золоуловителях, иногда практически столь мало отличаются друг от друга, что невозможно установить место отбора проб. Поэтому классификация разновидностей летучей золы по виду золоулавливающей установки не содержит необходимой для производства строительных материалов информации о составе и свойствах золы. Тем самым не определяется их технологическая пригодность для изготовления материалов конкретного вида.

Входящие в состав летучей золы сланца-кукерсита частицы, отличающиеся по крупности и удельной массе, обладают различным химико-минералогическим составом и неодинаковыми вяжущими свойствами (таблица 2).

В Научно-исследовательской лаборатории строительных материалов Таллинского политехнического института исследованы фракции, полученные путем разделения золы в тяжелых жидкостях, в электрическом поле и др. Установлено, что близкие по размеру и удельной массе частицы летучей золы мало отличаются по составу и вяжущим свойствам. Поэтому наиболее выгодно классифицировать разновидности летучей золы по классам тонкости.

Для нужд промышленности строительных материалов, как подтверждается опытами, целесообразно летучую золу делить

Таблица 2

Группы частиц летучей золы и их химический состав (в %)

Наименование соединения	Летучая зола	По размеру зерен (мк)			Группы частиц по удельной массе (г/см³)				
		<30	30—60	>60	<2,4	2,4—2,6	2,6—2,8	2,8—3,05	>3,05
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CaO	44,1	38,6	50,3	57,4	18,2	22,0	40,6	54,7	60,7
SiO_2	29,8	32,1	25,3	21,4	50,5	52,5	31,6	19,0	14,8
Al_2O_3	7,6	9,0	6,2	4,0	16,2	10,0	7,5	5,4	4,2
Fe_2O_3	5,0	4,7	5,8	5,5	4,0	3,7	4,1	4,2	8,5
K_2O	2,9	3,7	1,9	1,1	5,6	5,0	4,0	2,0	0,3
Na_2O	0,2	0,2	0,3	0,2	0,3	0,3	0,2	0,2	0,1
MgO	3,1	2,8	3,4	3,9	2,4	2,5	2,8	3,0	4,0
CO_2	1,8	1,8	1,9	2,0	0,4	0,4	1,8	2,9	2,0
SO_3	5,7	6,6	4,3	3,8	1,8	3,2	7,0	8,3	5,0
$CaO_{своб}$	17,7	13,0	24,5	28,0	1,2	2,7	12,0	22,4	34,0
$CaSO_4$	9,7	11,2	7,3	6,5	3,1	5,4	11,9	14,1	8,5
Гидромодуль	1,04	0,84	1,35	1,85	0,26	0,33	0,94	1,91	2.21
Количество, %	100	64	18	18	12	16	19	28	25

на три класса, ограниченных определенными пределами зернового состава. Эти классы золы условно названы *крупной*, *мелкой* и *мельчайшей фракциями* [1, 2, 3].

Крупная фракция охватывает, в основном, область зерен размеров от 30 до 150 мк; мелкая — от 10 до 30 мк и мельчайшая фракция — до 15 мк, с преобладанием частиц менее 10 мк.

Классифицируя таким образом виды летучей золы, гарантируем достаточное постоянство как их зернового состава, так и качества. Кроме того, дается необходимая информация об их свойствах и обеспечивается получение качественных строительных материалов.

Основы разделения и использования летучей золы по отдельным фракциям, а также технология их применения для конкретных целей разработаны в НИЛСМ ТПИ.

Для промышленного фракционирования летучей золы был предложен метод воздушной сепарации, технико-экономические показатели которого наиболее высоки. Сепарирование золы на фракции заданного состава осуществляется непосредственно в процессе золоулавливания в котлоагрегатах электростанций. Это потребовало незначительных капитальных затрат.

Таблица 3

Химический и минералогический состав промышленных фракций летучей золы (в %)

Наименование соединения	Наименование фракции летучей золы		
	крупная	мелкая	мельчайшая
	Химический состав		
CaO	48—58	34—42	30—36
SiO_2	20—28	30—36	30—34
Al_2O_3	4—7	7—10	10—12
Fe_2O_3	4—6	4—6	4—5
MgO	3—4	2,5—3	2,5—3
K_2O	1,5—2,5	2,5—4	4,5—6,5
Na_2O	0,10	0,2	0,2
	Минералогический состав		
$CaO_{своб}$	20—32	11—15	7—11
$CaSO_4$	5—8	9—12	14—17
$CaCO_3$	4—7	3—5	2—5
$2CaO \cdot SiO_2$	9—14	9—11	8—10
$CaO \cdot Al_2O_3$	0,8—2	1,8—1,5	0,8—1,5
Стекловидная фаза	32—36	28—33	27—32
Нерастворимый остаток	12—18	24—33	25—35
Гидромодуль	1,2—1,8	0,70—0,90	0,60—0,80

Химический и минералогический состав промышленных фракций летучей золы приводится в таблице 3 [4].

Крупная фракция богата содержанием окиси кальция. В ней значительно меньше соединений алюминия, кремния, окислов калия и натрия, чем в мелких фракциях. Повышенным содержанием K_2O отличается мельчайшая фракция. Гидромодуль крупной фракции превышает гидромодуль мелкой и мельчайшей фракций, в среднем, в 2 раза.

В летучей золе содержатся, в основном, следующие группы соединений, определяющие ее вяжущие свойства:

а) минералы цемента — $2CaO \cdot SiO_2$ и $CaO \cdot Al_2O_3$;

б) воздушные вяжущие — свободная известь и ангидрит ($CaSO_4$), которые, реагируя со стекловидной фазой, образуют при твердении водостойкие соединения;

в) соединения стекловидной фазы, определяющие шлаковое и пуццолановое твердение. Отметим, что под стекловидной фазой подразумевается часть золы, которая в 5% растворе борной кислоты не растворяется, но растворяется в 3% растворе соляной кислоты;

г) нерастворимые минералы и стекло с высоким содержанием кремнезема. Они не растворяются в 3% растворе соляной кислоты и названы нерастворимым остатком.

Содержание минералов цемента во всех фракциях находится в пределах 10...15%. Оно имеет тенденцию к увеличению в сторону крупной фракции.

Количество свободной извести и ангидрита во фракциях сильно изменяется. Чем крупнее фракция, тем больше содержание свободной извести и тем меньше ангидрита. В крупной фракции среднее содержание $CaO_{св}$ — 26% и ангидрита 6%, а в мелкой фракции соответственно 9 и 15%. Содержание стекловидной фазы тем больше, а нерастворимого остатка тем меньше, чем крупнее фракция.

Состав вышеуказанных групп соединений и их взаимные соотношения определяют гидравлическую активность фракций При этом содержание минералов цемента не оказывает сколько-нибудь значительного влияния. Так, например, крупная фракция с повышенным содержанием минералов цемента обладает более низкой гидравлической активностью, чем мелкие фракции. Следовательно, гидравлическая активность сланцевых зол определяется, в основном, остальными тремя группами соединений (б, в, г).

Наибольшей гидравлической активностью отличается сланцевая зола, содержащая свободной извести 8—12% и ангидрита 3—5%. Однако в условиях нынешней работы электростанций получение золы такого состава практически невозможно. К этому составу приближается состав мельчайшей фракции. Она содержит свободной извести 7...11% и ангидрита 13...16%. Таким образом, мельчайшая фракция содержит оптимальное количество свободной извести, но избыточное количество ангидрита. Количество стекловидной фазы в мельчайшей фракции отклоняется в меньшую, а нерастворимого остатка в большую сторону (до 3 раз) от их содержания в крупной фракции. В крупной же фракции содержится извести в среднем в 2,5 раза больше оптимального, но с избытком гипсового ангидрита. Промежуточное положение между мельчайшей и крупной фракцией занимает мелкая фракция.

Зерновой состав и крупность летучей золы и ее фракций приводится в табл. 4.

Величина удельных поверхностей отдельных фракций находится в следующих пределах: крупная фракция 500—1200 *см²/г*; мелкая фракция 1800—2500*см²/г*: мельчайшая — 3200—5000 *см²/г*.

Таблица 4

Зерновой состав летучей золы и ее фракций (в %)

Вид золы	Размеры частиц (мк)						
	>150	90...150	60...90	30...60	20...30	10...20	<10
Летучая зола	0...7	5...7	6...8	15...20	18...25	22...28	14...20
Крупная фракция	0...30	5...40	30...65		0...30	—	—
Мелкая фракция				0...20	5...45	35...70	0...25
Мельчайшая фракция					0...15	10...35	50...90

Фракции имеют следующие значения удельной и объемной массы:

	Удельная масса $г/см^3$	Объемная масса $кг/м^3$
Крупная фракция	2,82...2,93	1150...1250
Мелкая фракция	2,70...2,76	900...1050
Мельчайшая фракция	2,65...2,71	650...850

Гидравлическая активность отдельных фракций золы оценена по результатам испытаний на сжатие образцов, изготовленных из пластичного раствора 1:3 (размолотая фракция : вольский песок), с расплывом конуса 12,5...13,5 *см*, после твердения в течение 28 дней при температуре +20 °С.

Активность фракции обусловливается различием химико-минералогического состава и ее физического состояния. Чем мельче фракция золы, тем больше в ней плотных зерен с оплавленной поверхностью и тем ниже ее водопотребность, отсюда — тем выше ее гидравлическая активность (табл. 5).

Таблица 5

№ п. п.	Наименование фракции в вяжущем	Водовяжущее соотношение	Активность при сжатии, $кГ/см^2$
1	Крупная	0,55	105
2	Мелкая	0,42	160
3	Мельчайшая	0,34	210

Вяжущее, так называемый кукермит, изготовленный на базе мельчайшей фракции, удовлетворяет требованиям марки «200», на базе крупной фракции — марки «100».

Проблема ускорения твердения сланцезольных вяжущих пыталась решаться с помощью различных добавок. Эффективной оказалась добавка портландцементного клинкера. Клинкер ускоряет твердение сланцезольных цементов не только при нормальных условиях, но и при пониженных температурах. Однако эффективность добавки клинкера зависит от тонкости фракции, от количества добавки клинкера и от температуры твердения. 28-дневная прочность раствора в некоторых случаях оказывается меньше расчетной, иногда даже ниже бесклинкерного кукермита. Добавка клинкера тем эффективнее, чем мельче фракция летучей золы. Для крупной фракции коэффициент эффективности* добавки клинкера имеет значение, в среднем, около 0,7, для мелкой фракции — 1,3 и для мельчайшей фракции — 1,5. Положительное влияние добавки клинкера от температуры твердения и количества добавки клинкера приводится в таблице 6.

Таблица 6

Коэффициенты эффективности добавки клинкера

Наименование фракции	Температура твердения, °С	Добавка клинкера (в %)		
		30	50	70
		Коэффициент эффективности добавки		
Мелкая	+5	1,40	1,30	1,25
	+20	1,20	1,20	1,20
Мельчайшая	+5	1,00	1,45	1,60
	+20	1,35	1,40	1,40

Из данных, приведенных в таблице, видно, что для мелкой фракции золы наибольший эффект при количестве добавки клинкера 30%, для мельчайшей фракции — 70%.

Производство материалов, получаемых с применением фракций летучей золы, налажено на Ахтмеском комбинате строительных материалов, на цементном заводе «Пунане Кунда» и на заводах железобетонных изделий республики.

Крупную фракцию применяют для производства ячеистых бетонов без добавки цемента или каких-либо других вяжущих. Выпускаемый газобетон объемного веса 400...800 *кг/м*³ не

* Коэффициент эффективности $K_{эф}$ — отношение фактической и расчетной активности смешанного вяжущего.

уступает цементному газобетону. Из-за повышенного содержания активной $CaO_{св}$ крупная фракция является ценным сырьем для силикатных бетонов и изделий.

Из мелкой фракции наиболее целесообразно изготовлять местные вяжущие — кукермит и кукермитцемент, отвечающие требованиям низких и средних марок. Состав, процесс твердения и свойства этих вяжущих подробно изучены [5].

Кукермит получается при помоле мелкой фракции золы. Кукермитцемент — это продукт совместного помола мелкой фракции золы и предварительно измельченного клинкера. При получении кукермита и кукермитцемента необходимо тонкость помола доводить до такой степени, чтобы удельная поверхность составляла, по крайней мере, 3500 *см²/г*. Исходя из вышеуказанных $K_{эф}$ и водостойкости раствора, наилучший состав кукермитцемента такой: мелкой фракции летучей золы — 65 . . . 80% и цементного клинкера — 35 . . . 20%.

Изготовленный на пластичном растворе кукермит удовлетворяет требованиям марок «100» . . . «150», а кукермитцемент — марок «200» . . . «300» (табл. 7).

Таблица 7

Кинетика нарастания прочности кукермитовых растворов

Вид вяжущего	Продолжительность твердения								
	3	7	28	2	3	6	1	3	5
	дни			месяцы			годы		
	Прочность раствора на сжатие, *кГ/см²*								
Кукермит	15	28	125	220	265	320	370	440	460
Кукермитцемент	60	78	245	320	355	410	455	540	565

Скорость твердения, определяемая как соотношение R_7/R_{28}, составляет для кукермита 0,18 . . . 0,25 и для кукермитцемента 0,30 . . . 0,35. При этом кукермит достигает водостойкости в возрасте 5 . . . 10 дней, а кукермитцемент уже в суточном возрасте.

Мельчайшая фракция летучей золы используется для получения нового вида быстротвердеющего и высокомарочного портландцемента, так называемого сланцезольного портландцемента. Этот цемент получается в результате совместного помола мельчайшей фракции летучей золы (20 . . . 30%) и цементного клинкера (80 . . . 70%) без каких-либо добавок. Ввиду достаточного количества ангидрита, содержащегося во фракции (около 15%), отпадает добавка гипса, необходимая при помоле всех других разновидностей портландцемента.

Сланцезольный портландцемент промышленного производства при оценке по действующему стандарту на портландцемент (водоцементное отношение не ниже 0,4) удовлетворяет требованиям марок «400»...«500», при условии же одинаковой консистенции раствора он удовлетворяет, в основном, требованиям марки «600» (табл. 8).

Таблица 8

Прочность сланцезольного и обыкновенного портландцемента в зависимости от водоцементного отношения и консистенции раствора (1:3)

Вид цемента	Водоцементное отношение	Расплыв конуса, мм	Продолж. твердения в днях					
			3	7	28	3	7	28
			Прочность на сжатие, *кГ/см*²			Прочность на изгиб, *кГ/см*²		
Сланцезольный портландцемент	0,30	106	480	560	665	70	79	88
	0,35	124	385	465	570	62	71	78
	0,40	145	320	390	500	56	61	71
	0,45	177	260	325	430	48	57	66
	0,50	203	215	275	370	42	54	61
Портландцемент	0,35*	105	370	460	555	64	70	77
	0,40	117	300	380	475	54	61	68
	0,45	141	235	315	405	44	53	62
	0,50	171	200	255	350	40	48	56

Такая высокая эффективность сланцезольного портландцемента обусловливается рядом специфических свойств мельчайшей фракции золы. Во-первых, добавка мельчайшей фракции уменьшает водопотребность цементного раствора на 10...20%; во-вторых, эта фракция придает цементу способность быстрого твердения при гидротермической обработке, и, в-третьих, добавка золы содействует умеренному расширению изделий. Таким образом, сланцезольный портландцемент объединяет в себе специфические свойства трех групп цементов: пластифицированных, пуццолановых и безусадочных.

Наличие совокупности вышеперечисленных ценных свойств позволяет рекомендовать сланцезольный портландцемент для применения в бетонах высоких марок и предпочтительно для преднапряженных железобетонных конструкций. При этом учитываются высокая плотность, а также коррозионная и морозостойкость получаемых бетонов.

---

* Раствор с водоцементным отношением 0,30 не поддавался уплотнению

Применение сланцезольного портландцемента помимо большого технического эффекта дает еще и значительную экономию цемента. Удельный расход цемента в бетоне при применении сланцезольного портландцемента в 1,3 до 1,6 раза ниже, чем при обыкновенном портландцементе. Удельный расход клинкера еще ниже, так как содержание добавки (золы) в сланцезольном портландцементе на 15...25% больше, чем в обыкновенном портландцементе.

Получение многих строительных материалов с новыми отличительными свойствами возможно лишь при применении летучей золы сланца-кукерсита раздельно по фракциям. Высокая эффективность этих материалов, превосходящих по ряду технических показателей традиционные материалы, способствует их быстрому внедрению в строительную промышленность.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Х. Кикас, Р. Э. Отсман, Т. А. Лаур. Газобетон на основе золы горючего сланца-кукерсита эстонского месторождения. Авторское свидетельство № 192046, 1967.
2. В. Х. Кикас, Р. Э. Отсман, Э. Э. Когерманн. Сланцезольное вяжущее. Авторское свидетельство № 185745, 1966.
3. В. Х. Кикас, Р. Э. Отсман, А. А. Хайн. Цемент. Авторское свидетельство № 178721, 1966.
4. В. Х. Кикас, А. А. Хайн, Х. Я. Рейспере Физико-химические показатели и вяжущие свойства фракций летучей золы сланца-кукерситета. Сборник трудов по изучению золы сланца-кукерсита IV. Таллин 1968.
5. В. Х. Кикас, И. А. Лауль, А. А. Хайн. Кинетика твердения и расширения кукермитных и кукермитцементных растворов. Сборник трудов по изучению золы сланца-кукерсита IV. Таллин 1968.

V. Kikas, R. Otsman

The Use of Kukersite Oil Shale Ash Fractions in Building Materials Industry

Summary

The article deals with the general characteristics of wastes that remain in burning of kukersite oil shale. Chemical and mineralogical composition and binding properties of different kinds of ashes have been given. The expediency of using coarse, fine and the finest fraction of fly ash in the production of building materials has been reported. According to the specific properties of different fractions various products have been produced.

[illegible] и бетоне при примене-
[illegible] до 4,6 раза [illegible]
[illegible]
[illegible] еще ниже, так как [illegible] (связки) в
[illegible] на 15 ... 25% больше, чем в
обыкновенном портландцементе.

[illegible] строительных материалов с [illegible] по фракциям. Высокая эффективность этих материалов, превосходящих по ряду технических показателей традиционные материалы, способствует их [illegible] внедрению в строительную промышленность.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Х. Кикас, [illegible] Газобетон на основе [illegible] 1968.
2. В. Х. Кикас, [illegible] Самоизмельчение [illegible] 1968.
3. В. Х. Кикас, [illegible] Авторское свидетельство [illegible]
4. В. Х. Кикас, [illegible] Физико-химические [illegible] IV. [illegible]
5. В. Х. Кикас, [illegible] Кинетика твердения и [illegible] 1968.

V. Kikas, [illegible]

The Use of [illegible] Oil Shale Ash Fractions in Building Materials Industry

Summary

[illegible] of [illegible] ashes have been [illegible] in the production of building materials has been reported. According to the [illegible] properties of different fractions various products have been produced.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 296 1970

УДК 624.074
624.04
621.031

В. Р. Кульбах

ОБ ОЦЕНКЕ СТАТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ ВИСЯЧИХ ПОКРЫТИЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С ДЕФОРМИРУЕМЫМ КОНТУРОМ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВРЕМЕННОЙ НАГРУЗКИ

Предельные состояния висячего покрытия отрицательной кривизны характеризуются исчерпанием несущей способности сети или контура или чрезмерными их деформациями. Вопросы возникновения предельных состояний рассматриваются в ряде работ [1, 7, 8]. Особенно подчеркивается необходимость избегать возникновения кинематических перемещений покрытия при выключении из работы стягивающих вант из-за исчерпания их предварительного напряжения. Анализ работы отдельных нитей [2], а также предварительно напряженных плоских систем [3] показывает, что большие искривления, а также раннее выключение из работы стягивающих вант свойственны случаю действия односторонней нагрузки. Экспериментальные исследования, проведенные в Таллинском политехническом институте, подтверждают, что аналогичное явление имеет место и в случае покрытий отрицательной кривизны со свободно деформированным контуром. Для расчетной оценки статической работы покрытия при действии временной нагрузки (включая одностороннюю) может быть развита методика [4], в основу которой принимаются уравнения упругой нити в перемещениях. Указанная методика позволяет перейти на приближенный линейный вариант решения задачи [5, 6].

Исходные положения

Рассмотрим покрытие, имеющее форму гиперболического параболоида

$$z = f_x \frac{x^2}{a^2} - f_y \frac{y^2}{b^2}$$

и обрамляемое эллиптическим в плане контуром.

За исходное состояние покрытия принимаем состояние предварительного напряжения при отсутствии внешней нагрузки. Соответствующая этому состоянию геометрия и характеризуется формулой (1), а распоры сети H_{0x} и

$$H_{0y} = H_{0x} \frac{f_x b^2}{f_y a^2}$$

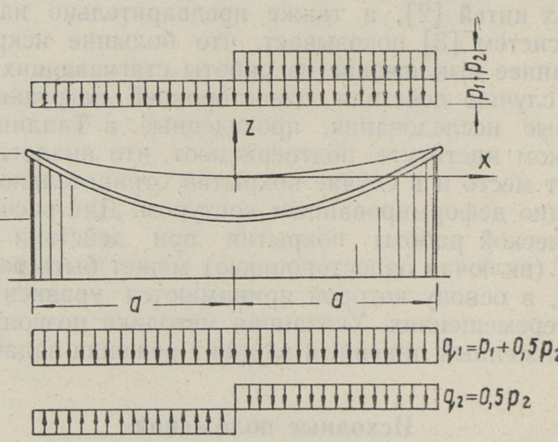
постоянны по всей поверхности покрытия.

За расчетное сочетание нагрузки обычно принимается сочетание постоянной нагрузки с временной на всей поверхности или на половине поверхности покрытия. Любую комбинацию из общей равномерно распределенной нагрузки p_1 и нагрузки на половине пролета p_2 (включая только одностороннюю нагрузку) можно разложить на равномерно распределенную часть (см. фиг. 1)

$$q_1 = p_1 + 0{,}5 p_2$$

и на антиметрическую часть

$$q_2 = 0{,}5 p_2.$$



Фиг. 1

Более опасным обычно является случай загружения половины пролета несущих вант, поэтому ограничимся рассмотрением действия нагрузок $q_1 = \mathrm{const}$ и $q_2 \mathrm{sign}\, x$. Учет антиметрической нагрузки $q_2 \operatorname{sign} y$ производится аналогично и не требует новых выкладок.

Для упрощения расчетных формул производим загружение покрытия нагрузками q_1 и $q_2 \operatorname{sign} x$ последовательно. Само собой разумеется, что при учете второй (антиметрической) части нагрузки в исходной геометрии необходимо учитывать прогиб от первой части нагрузки (увеличение f_x и уменьшение f_y). В то же время необходим учет новых исходных предварительных напряжений, которые теперь уже оказываются функциями от координат сети.

При выводе расчетных формул исходим из известной системы разрешающих уравнений [4]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta H_x = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Delta H_y = 0, \tag{3}$$

$$\Delta H_x \frac{\partial^2 (z+w)}{\partial x^2} + \Delta H_y \frac{\partial^2 (z+w)}{\partial y^2} + H_{0x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H_{0y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(x,y), \tag{4}$$

$$\int_0^{a\sqrt{1-y^2/b^2}} \frac{\partial u}{\partial x}dx = \frac{\Delta H_x}{E\delta_x}\int_0^{a\sqrt{1-y^2/b^2}}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}dx - \int_0^{a\sqrt{1-y^2/b^2}}\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx, \tag{5}$$

$$\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \frac{\partial v}{\partial y}dy = \frac{\Delta H_y}{E\delta_y}\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{3/2}dy - \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy. \tag{6}$$

Учет деформации изгиба эллиптического контура

Одним из центральных вопросов решения системы уравнений (2) ... (6) является вопрос учета деформаций контура под действием распоров сети ΔH_x и ΔH_y. Предполагаем, что точки контура, благодаря соединению к стеновому каркасу, могут смещаться только в горизонтальном направлении. В этом случае смещения контура сходятся со смещениями эллиптического кольца, размеры которого определяются проекцией контура на горизонтальную плоскость.

Опытом установлено, что распределение дополнительных распоров ΔH_x (положительных) и ΔH_y (отрицательных) при действии равномерно распределенной нагрузки на всей поверхности покрытия характеризуется параболическими зависимостями

$$\Delta H_x = \max \Delta H_x \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$\Delta H_y = \max \Delta H_y \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

При действии же антиметрической вдоль оси x нагрузки распределение распоров несущих вант тоже близко к параболическому,

$$\Delta H_x = \max \Delta H_x \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right),$$

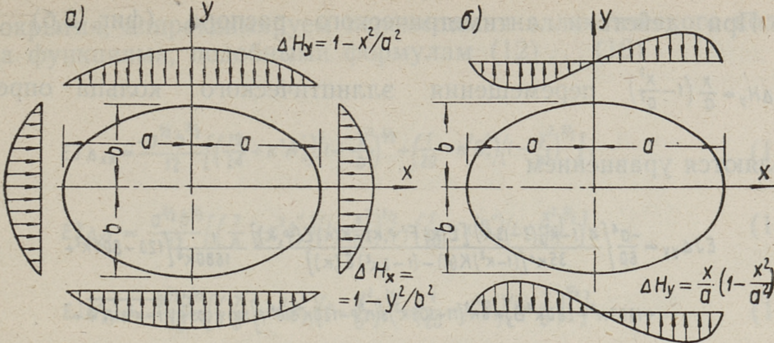
а распределение распоров стягивающих вант характеризуется антиметрической зависимостью

$$\Delta H_y = \max \Delta H_y \cdot \frac{x}{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Перемещения эллиптического кольца (фиг. 2,а) под действием параболических распоров $\Delta H_x = 1 - y^2/b^2$ и $\Delta H_y = 1 - x^2/a^2$ при $a > b$ определяются выведенными нами зависимостями (первый индекс показывает направление перемещения, второй индекс — направление распора, вызывающего это перемещение):

$$\begin{aligned} EJ\Delta_{xx} = \frac{-a^4(1-k^2)^{3/2}}{12} \Bigg\{ & \frac{2(1-k^2)(1+12k^2)}{15k^4} \left[F(\varphi,k) - \frac{K(k)}{E(k)} E(\varphi,k)\right] \cos\varphi - \frac{1}{240k^4} \Big[1 + \\ & + 48k^2 - 16(1-k^2)(1+12k^2)\frac{K(k)}{E(k)} + 6k^2(1-16k^2)\sin^2\varphi - 8k^4\sin^4\varphi\Big] \sin\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} - \\ & - \frac{1}{240k^5}\left[31 + 304k^2 - 384k^4 - 16(1-k^2)(1+12k^2)\frac{K(k)}{E(k)}\right] \arcsin(k\sin\varphi) \Bigg\}; \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} EJ\Delta_{yx} = \frac{a^4(1-k^2)}{12} \Bigg\{ & \frac{2(1-k^2)(1+12k^2)}{15k^4} \left[F(\varphi,k) - \frac{K(k)}{E(k)} E(\varphi,k)\right] \sin\varphi + \frac{1}{240k^4} \Big[1 + 44k^2 + \\ & + 51k^4 - 16(1-k^2)(1+12k^2)\frac{K(k)}{E(k)} + 2k^2(3-47k^2)\sin^2\varphi - 8k^4\sin^4\varphi\Big] \cos\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} + \\ & + \frac{1}{240k^5}\left[31 + 303k^2 - 283k^4 - 51k^6 - 16(1-k^2)(1+12k^2)\frac{K(k)}{E(k)}\right] \ln\frac{k\cos\varphi + \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-k^2}} \Bigg\}; \end{aligned} \tag{8}$$



Фиг. 2

$$EJ\Delta_{xy} = \frac{a^4(1-k^2)^{1/2}}{12}\left\{\frac{2(1-k^2)(1-13k^2)}{15k^4}\left[\frac{K(k)}{E(k)}E(\varphi,k) - F(\varphi,k)\right]\cos\varphi + \frac{1}{240k^4}\left[1 - 52k^2 - \right.\right.$$

$$\left. - 16(1-k^2)(1-13k^2)\frac{K(k)}{E(k)} + 2k^2(3+52k^2)\sin^2\varphi - 8k^4\sin^4\varphi\right]\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} +$$

$$\left. + \frac{1}{240k^5}\left[31 - 396k^2 + 416k^4 - 16(1-k^2)(1-13k^2)\frac{K(k)}{E(k)}\right]\arcsin(k\sin\varphi)\right\}; \qquad (9)$$

$$EJ\Delta'_{yy} = \frac{-a^4}{12}\left\{\frac{2(1-k^2)(1-13k^2)}{15k^4}\left[\frac{K(k)}{E(k)}E(\varphi,k) - F(\varphi,k)\right]\sin\varphi - \frac{1}{240k^4}\left[1 - 56k^2 - \right.\right.$$

$$\left. - 49k^4 - 16(1-k^2)(1-13k^2)\frac{K(k)}{E(k)} + 2k^2(3-53k^2) - 8k^4\sin^4\varphi\right]\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} -$$

$$\left. - \frac{1}{240k^5}\left[31 - 397k^2 + 317k^4 + 49k^6 - 16(1-k^2)^2(1-13k^2)\frac{K(k)}{E(k)}\right]\ln\frac{k\cos\varphi + \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-k^2}}\right\}, \qquad (10)$$

где

$k = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2}$ — эллиптичность кольца,

$\varphi = \arcsin\frac{x}{a}$;

$F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$ — эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода;

$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$, $E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ — соответствующие полные эллиптические интегралы,

EJ — изгибная жесткость кольца.

При действии антиметрического распора (фиг. 2,б) $\Delta H_y = \frac{x}{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$ перемещения эллиптического кольца определяются уравнением

$$EJ\Delta_{yy} = \frac{-a^4}{60}\left\{\frac{4(1-k^2)(3-13k^2)\left[E(k)F(\varphi,k)-K(k)E(\varphi,k)\right]}{35k^4\left[(1-k^2)K(k)-(1-2k^2)E(k)\right]} - \frac{1}{1680k^4}\left[123-800k^2+\right.\right.$$

$$\left.+1397k^4+280k^4B_y+6k^2(11+109k^2)\sin^2\varphi-120k^4\sin^4\varphi\right]\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+$$

$$\left.+\frac{1-k^2}{16k^5}\left[3-14k^2-45k^4-8k^4B_y\right]\sin\varphi\cdot\ln\frac{k\cos\varphi+\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-k^2}}\right\},$$

где

$$B_y = \frac{(24-125k^2-107k^4+208k^6)K(k)-(24-113k^2-162k^4+416k^6)E(k)}{35k^4\left[(1-k^2)K(k)-(1-2k^2)E(k)\right]}. \tag{11}$$

Перемещения Δ_{xy} от действия указанной нагрузки представляют собой четную функцию от x и таким образом не вызывают удлинения несущих вант.

В случае кругового кольца ($a=b$, $k=0$) имеем для определения вышеуказанных перемещений зависимости

$$EJ\Delta_{xx} = \frac{-a^4}{12}\left(\frac{19}{24}\sin^3\varphi+\frac{1}{20}\sin^5\varphi\right), \tag{12}$$

$$EJ\Delta_{yx} = \frac{a^4}{12}\left(\frac{7}{8}\cos^3\varphi-\frac{1}{20}\cos^5\varphi\right), \tag{13}$$

$$EJ\Delta_{xy} = \frac{a^4}{12}\left(\frac{7}{8}\sin^3\varphi-\frac{1}{20}\sin^5\varphi\right), \tag{14}$$

$$EJ\Delta_{yy} = \frac{-a^4}{12}\left(\frac{19}{24}\cos^3\varphi+\frac{1}{20}\cos^5\varphi\right), \tag{15}$$

$$EJ\Delta'_{yy} = \frac{-a^4}{12}\sin\varphi\left(\frac{11}{120}\cos^3\varphi+\frac{1}{50}\cos^5\varphi\right), \tag{16}$$

где φ — угол, отчитываемый от оси y.

Сравнение соответствующих эпюр перемещений эллиптического и кругового колец показывает их подобие при реальных значениях эллиптичности ($k^2 \leqslant 0{,}75$). Так как структура формул (12) ... (16) значительно проще структуры формул (7) ... (11) и лучше согласуется с геометрическими уравнениями покрытия, аппроксимируем перемещения эллиптического кольца функциями, подобными формулам (12) ... (16)

$$EJ\Delta_{xx}=\frac{-a^{1/2}b^{7/2}}{12}\left[\left(\frac{19}{24}+k^2A'_x\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2}+\left(\frac{1}{20}+k^2B'_x\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{5/2}\right], \tag{17}$$

$$EJ\Delta_{yx}=\frac{a^{3/2}b^{5/2}}{12}\left[\left(\frac{7}{8}+k^2A''_x\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}-\left(\frac{1}{20}-k^2B''_x\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{5/2}\right], \tag{18}$$

$$EJ\Delta_{xy}=\frac{a^{5/2}b^{3/2}}{12}\left[\left(\frac{7}{8}+k^2A''_y\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2}-\left(\frac{1}{20}-k^2B''_y\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{5/2}\right], \tag{19}$$

$$EJ\Delta_{yy}=\frac{-a^{7/2}b^{1/2}}{12}\left[\left(\frac{19}{24}+k^2A'_y\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}+\left(\frac{1}{20}+k^2B'_y\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{5/2}\right], \tag{20}$$

$$EJ\Delta'_{yy}=\frac{-a^{7/2}b^{1/2}}{12}\frac{x}{a}\left[\left(\frac{11}{120}+k^2A'''_y\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}+\left(\frac{1}{50}+k^2B'''_y\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{5/2}\right]. \tag{21}$$

Коэффициенты A_x, A_y, B_x и B_y могут быть определены путем сопоставления формул (17) ... (21) с формулами (7) ... (11) при заданном значении эллиптичности $k^2=1-\frac{b^2}{a^2}$. Соответствующие перемещения второй системы приравниваются перемещениям первой системы при двух значениях координат. За точки привязки можно принимать $y=0$, $y=0{,}5\,b$ в формулах (17), (19); $x=0$, $x=0{,}5\,a$ в формулах (18) и (20) и $x=0{,}5\,a$, $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ в формуле (21).

Расчет покрытия на равномерно распределенную часть нагрузки

Вертикальные перемещения покрытия аппроксимируем функцией

$$w=w_0\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right). \tag{22}$$

Подставляя соответствующие производные, а также смещения контура (формулы (17) ... (20)) в геометрические уравнения (5) и (6) и выполняя интегрирование, получим систему из двух линейных уравнений для определения максимальных распоров:

$$\frac{max\,\Delta H_x}{E\delta_x}\left\{1+2\frac{f_x^2}{a^2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)+\frac{E\delta_x a^{-1/2}b^{7/2}}{12EJ}\left[\frac{19}{24}+\kappa^2A_x'+\left(\frac{1}{20}+\kappa^2B_x'\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\right]\right\}-$$

$$-\frac{max\,\Delta H_y}{E\delta_x}\cdot\frac{E\delta_x a^{3/2}b^{3/2}}{12EJ}\left[\frac{7}{8}+\kappa^2A_y''-\left(\frac{1}{20}-\kappa^2B_y''\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\right]=\frac{2w_0}{3a^2}(2f_x+w_0), \qquad (23)$$

$$\frac{max\,\Delta H_x}{E\delta_x}\cdot\frac{E\delta_x a^{3/2}b^{3/2}}{12EJ}\left[\frac{7}{8}+\kappa^2A_x''-\left(\frac{1}{20}-\kappa^2B_x''\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]-\frac{max\,\Delta H_y}{E\delta_x}\times$$

$$\times\left\{\frac{E\delta_x a^{7/2}b^{-1/2}}{12EJ}\left[\frac{19}{24}+\kappa^2A_y'+\left(\frac{1}{20}+\kappa^2B_y'\right)\left(1-\frac{x^2}{a}\right)\right]+\frac{\delta_x}{\delta_y}\left[1+2\frac{f_y^2}{b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]\right\}= \qquad (24)$$

$$=\frac{2w_0}{3b^2}(2f_y-w_0).$$

Далее подставим полученные значения распоров в уравнение равновесия и интегрируем последнее в пределах всего покрытия. В результате получим кубическое уравнение для определения прогиба покрытия w_0, которое может быть представлено в параметрической форме:

$$\zeta_0^3\left[1+\psi+\xi(c_1'+c_2'+c_1''+c_2'')\right]+3\zeta_0^2\left[1-\psi\alpha+\xi\left(c_2'-c_1'\alpha+\frac{1-2\alpha}{3}c_2''+\frac{2-\alpha}{3}c_1''\right)\right]+$$

$$+2\zeta_0\left[1+\psi\alpha^2+\xi(c_2'+c_1'\alpha^2-c_2''\alpha-c_1''\alpha)+\lambda+\lambda\xi\left(c_2'+\frac{1}{\psi}c_1'\right)\right]=q_1^*\left[1+\xi\left(c_2'+\frac{1}{\psi}c_1'\right)\right], \qquad (25)$$

где

$\zeta_0=\dfrac{w_0}{f_x}$ — относительный прогиб покрытия;

$\alpha=\dfrac{f_y}{f_x}$ — соотношение начальных стрел провисания;

$\psi=\dfrac{a^4\delta_y\left(1+\frac{5f_x^2}{3a^2}\right)}{b^4\delta_x\left(1+\frac{5f_y^2}{3b^2}\right)}$ — геометрический параметр;

$\lambda=\dfrac{9(H_{0x}+H_{0y}\cdot a^2/b^2)a^2}{10E\delta_x f_x^2}\left(1+\dfrac{5f_x^2}{3a^2}\right)$ — параметр предварительного напряжения;

$q_1^*=\dfrac{9q_1a^4}{10E\delta_x f_x^3}\left(1+\dfrac{5f_x^2}{3a^2}\right)$ — параметр нагрузки;

$\xi=\dfrac{5E\delta_y a^{7/2}b^{-1/2}}{72E_kJ_k\left(1+\frac{5f_y^2}{3b^2}\right)}$ — параметр жесткости контура;

$$c_1' = 1+\left(\frac{6}{5}A_x' + B_x'\right)k^2; \quad c_1'' = 1+\left(\frac{6}{5}A_x'' + B_x''\right)k^2;$$

$$c_2' = 1+\left(\frac{6}{5}A_y' + B_y'\right)k^2; \quad c_2'' = 1+\left(\frac{6}{5}A_y'' + B_y''\right)k^2$$

— коэффициенты эллиптичности контура.

Дополнительные распоры находим по формулам:

$$\frac{\Delta H_x}{E\delta_x} = \frac{2f_x^2\zeta_0\left[(2+\zeta_0)(1+\xi c_2') - (2\alpha-\zeta_0)\xi c_2''\right]\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}{3a^2\left(1+\frac{5f_x^2}{3a^2}\right)\left[1+\xi c_2' + \frac{1}{\psi}\xi c_1' + \frac{1}{\psi}\xi^2(c_1'c_2' - c_1''c_2'')\right]}, \tag{26}$$

$$\frac{\Delta H_y}{E\delta_x} = \frac{-2f_x^2 b^2\zeta_0\left[(2\alpha-\zeta_0)(\psi+\xi c_1') - (2+\zeta_0)\xi c_1''\right]\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}{3a^4\left(1+\frac{5f_x^2}{3a^2}\right)\left[1+\xi c_2' + \frac{1}{\psi}\xi c_1' + \frac{1}{\psi}\xi^2(c_1'c_2' - c_1''c_2'')\right]}. \tag{27}$$

Расчет покрытия на антиметрическую часть нагрузки

Вертикальные перемещения покрытия аппроксимируем функцией:

$$w = w_0\frac{x}{a}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right) \tag{28}$$

Пробной аппроксимацией прогиба двухчленным уравнением установлено, что прогиб в середине сети ничтожно мал и может быть принят равным нулю.

Как было отмечено выше, в геометрических уравнениях, а также в уравнении равновесия теперь необходимо учитывать новую геометрию покрытия (увеличенная на w_0 стрела провисания несущих вант f_x и уменьшенная стрела провисания стягивающих вант f_y). Начальные распоры теперь состоят из двух частей:

1) распоры H_{0x}' и H_{0y}' от предварительного напряжения, которые были учтены при первом нагружении и равномерно распределяются по всей поверхности покрытия;
2) дополнительные распоры от загружения нагрузкой q_1 (см. формулы (26) и (27))

$$H_{0x}'' = \max \Delta H_x'\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right), \tag{29}$$

$$H_{0y}'' = \max \Delta H_y'\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \tag{30}$$

Из геометрических уравнений (5) и (6) получим

$$\frac{\max \Delta H_x}{E\delta_x}\left\{1+2\frac{f_x^2}{a^2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)+\frac{E\delta_x a^{-1/2} b^{7/2}}{12EJ}\left[\frac{\frac{19}{24}+\kappa^2 A_x'}{1-\frac{y^2}{b^2}}+\frac{1}{20}+\kappa^2 B_x'\right]\right\}=\frac{2w_1^2}{5a^2}, \tag{31}$$

$$\frac{\max \Delta H_x}{E\delta_x}\cdot\frac{E\delta_x a^{3/2} b^{3/2}}{12EJ}\left[\left(\frac{7}{8}+\kappa^2 A_x''\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-\left(\frac{1}{20}-\kappa^2 B_x''\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2\right]-\frac{\Delta H_y}{E\delta_x}\times$$

$$\times\left\{\frac{\delta_x}{\delta_y}\left[1+2\frac{f_y^2}{b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]+\frac{E\delta_x a^{7/2} b^{-1/2}}{12EJ}\left[\frac{11}{120}+\kappa^2 A_y'''+\left(\frac{1}{50}+\kappa^2 B_y'''\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{2f_y w_1}{3b^2}\left(2\frac{x}{a}-\frac{w_1 x^2}{f_y a^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right), \tag{32}$$

где коэффициенты A_x, A_y, B_x, B_y определяются сопоставлением формул (17), (18), (21) с формулами (7), (8), (11) при заданном значении $k^2=1-\frac{b^2}{a^2}$.

Уравнение равновесия (4) в случае действия антиметрической нагрузки принимает вид

$$\frac{\max \Delta H_x}{E\delta_x}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^2\frac{2f_x}{a^2}\left(1+3\frac{w_1 x}{f_x a}\right)-\frac{\Delta H_y}{E\delta_x}\,\frac{2f_y}{b^2}\left(1-\frac{w_1 x}{f_y a}\right)+$$

$$+\left[\frac{3H_{0x}'+H_{0y}'a^2/b^2}{E\delta_x}+\frac{3H_{0x}''}{E\delta_x}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)+\frac{H_{0y}''a^2}{E\delta_x b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]\frac{2w_1 x}{a^3}=\frac{q\,\mathrm{sign}\,x}{E\delta_x} \tag{33}$$

После применения метода Бубнова-Галеркина для системы из уравнений (31), (32), (33) и введения системы безразмерных параметров получим разрешающее уравнение для определения прогиба

$$\left[\frac{189}{200}+\frac{1}{8}\psi+\xi\left(\frac{1}{8}c_1'+\frac{21}{100}c_1''+\frac{189}{2000}c_2'''\right)\right]\zeta_1^3+\left[\frac{5}{6}\alpha^2(\psi+\xi c_1')+\right.$$

$$\left.+(\lambda_x+\lambda_y)\left(1+\frac{\xi}{\psi}c_1'\right)\left(1+\frac{\xi}{10}c_2'''\right)\right]\zeta_1=q_2^*\left(1+\frac{\xi}{\psi}c_1'\right)\left(1+\frac{\xi}{10}c_2'''\right), \tag{34}$$

где

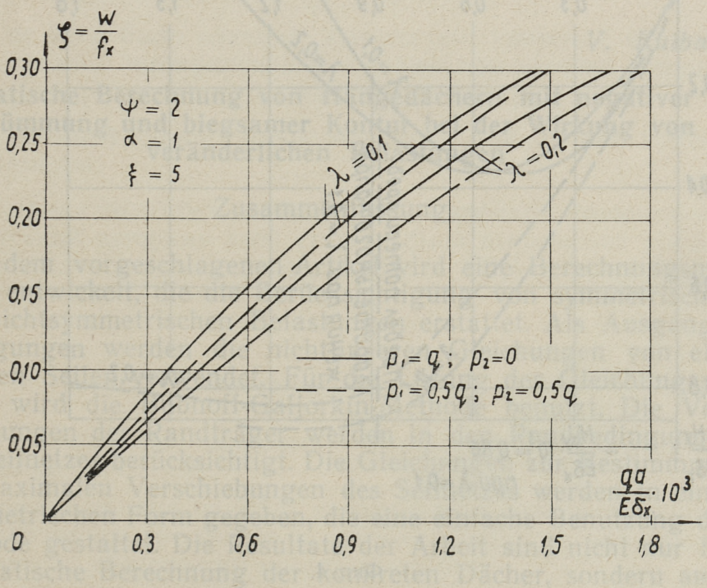
$$\lambda_x=\frac{3\left(H_{0x}'+\frac{7}{8}H_{0x}''\right)a^2}{E\delta_x f_x^2}\left(1+\frac{5f_x^2}{3a^2}\right),$$

$$\lambda_y=\frac{\left(H_{0y}'+\frac{5}{8}H_{0y}''\right)a^4}{E\delta_x f_x^2 b^2}\left(1+\frac{5f_x^2}{3a^2}\right)$$ — параметры предварительного напряжения.

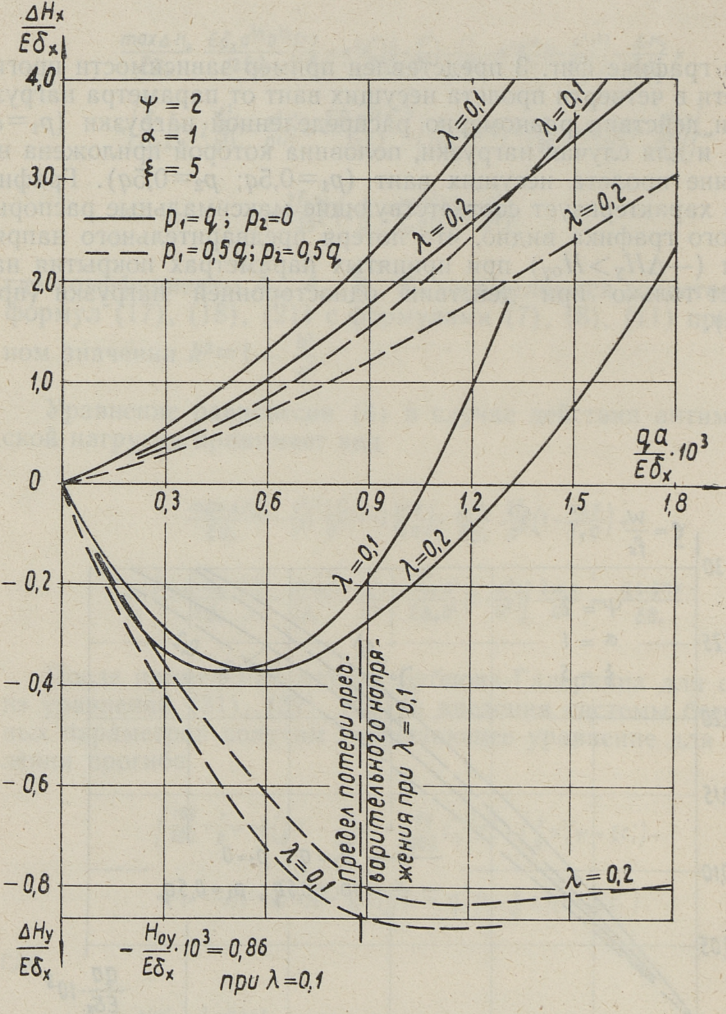
$q_{\gamma 2}^{*} = \frac{16 q_2 a^4}{5\pi E \delta_x f_x^3}\left(1 + \frac{5 f_x^2}{3 a^2}\right)$ — параметр антиметрической нагрузки.

$c_2''' = 1 + \kappa^2\left(A_y''' + \frac{2}{3} B_y'''\right)$ — коэффициент эллиптичности контура.

На графике фиг. 3 представлен пример зависимости прогибов сети в четверти пролета несущих вант от параметра нагрузки при действии равномерно распределенной нагрузки ($p_1 = q$, $p_2 = 0$) и для случая нагрузки, половина которой приложена на половине пролета несущих вант ($p_1 = 0{,}5q$; $p_2 = 0{,}5q$). График фиг. 4 характеризует соответствующие максимальные распоры. Из этого графика видно, что потеря предварительного напряжения ($-\Delta H_у > H_{оу}$) при принятых параметрах покрытия наступает только при действии односторонней нагрузки (при $\lambda = 0{,}1$).



Фиг. 3.



$\frac{\Delta H_x}{E\delta_x}$
$\Psi = 2$
$\alpha = 1$
$\xi = 5$
$p_1 = q;\ p_2 = 0$
$p_1 = 0{,}5q;\ p_2 = 0{,}5q$
$\lambda = 0{,}1$
$\lambda = 0{,}2$
$\frac{qa}{E\delta_x} \cdot 10^3$
4,0
3,0
2,0
1,0
0
0,3
0,6
0,9
1,2
1,5
1,8
− 0,2
− 0,4
− 0,6
− 0,8
Предел потери предварительного напряжения при $\lambda = 0{,}1$
$\frac{\Delta H_y}{E\delta_x}$
$-\frac{H_{oy}}{E\delta_x} \cdot 10^3 = 0{,}86$
при $\lambda = 0{,}1$

Фиг. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Веденико в. Влияние параметров конструкций и нагрузки на точность расчетов несущих систем висячих покрытий. Сборник «Металлические конструкции». Работы школы проф. Н. С. Стрелецкого, Стройиздат, Москва 1966.
2. В. Р. Кульбах. О представлении уравнений упругой нити в перемещениях. Труды Таллинского политехнического института, серия А. № 269, Таллин 1968.
3. В. Р. Кульбах. О расчете висячих покрытий с двойной системой тросов Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 269, Таллин 1968.
4. В. Р. Кульбах. О влиянии параметров системы на работу висячих покрытий отрицательной кривизны. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 278. Таллин 1969.
5. В. Р. Кульбах. Упрощенный расчет предварительно напряженных висячих покрытий отрицательной кривизны. Труды Таллинского политехнического института, серия А. № 200, Таллин 1963.
6. Х. Х. Лаул, В. Р. Кульбах, А. А Сумбак. О вопросах статического расчета и испытания конструкций покрытия Таллинской певческой эстрады. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 184, Таллин 1961.
7. А. Ф. Лилеев. Расчет упругих сетчатых вантовых покрытий. Сборник «Металлические конструкции». Работы школы проф. Н. С. Стрелецкого, Стройиздат, Москва 1966.
8. Н. С. Москалев. Расчет висячих систем по предельным состояниям. Сборник «Металлические конструкции». Работы школы проф. Н. С. Стрелецкого, Стройиздат, Москва 1966.

V. Kulbach

Statische Berechnung von Hängedächern mit negativer Krümmung und biegsamer Kontur bei der Wirkung von veränderlichen Belastungen

Zusammenfassung

In dem vorgeschlagenen Artikel wird eine Berechnungsmethode entwickelt, die die Berücksichtigung von symmetrischen und nichtsymmetrischen Belastungen erstattet. Als Ausgangsbedingungen werden die nichtlinearen Gleichungen von elastischen Seilen verwendet. Für die Lösung des Gleichungssystems wird die Bubnoff-Galjorkin-Methode benutzt. Die Verschiebungen der Randträger werden in den Randbedingungen des Seilnetzes berücksichtigt. Die Gleichungen zur Bestimmung der maximalen Verschiebungen des Seilnetzes werden in einer parametrischen Form gegeben, die eine einfache Benutzung der Methode gestattet. Die Resultate der Arbeit sind nicht nur für die statische Berechnung der konkreten Dächer, sondern auch für die Erwählung von optimalen Parametern des Systems geeignet.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 296 1970

УДК 621.031

Х. Х. Лаул, В. Л. Волтри

РАСЧЕТ ДЛИННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА ЭВМ «МИНСК 22»

1. Общие замечания

Метод расчета цилиндрических оболочек при помощи аппроксимации приращения сдвигающих сил [1], выработанный на кафедре строительных конструкций ТПИ, достаточно удобен для практического применения.

При использовании данного метода до сих пор встречались некоторые трудности:

1) не ясно было влияние количества синусных членов и при численном интегрировании — количества дуговых отрезков на точность расчета в пределах данного метода,

2) большой объем вычислительной работы при помощи арифмометра.

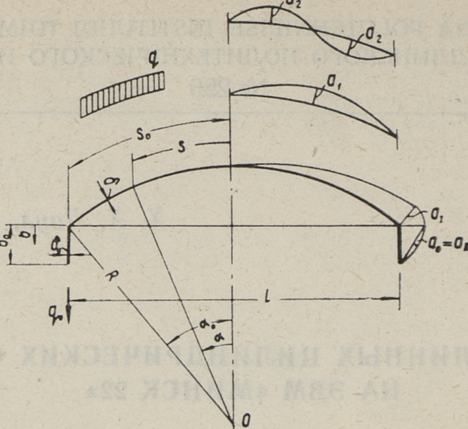
Учитывая эти обстоятельства на кафедре строительных конструкций авторами этой статьи была выработана универсальная вычислительная программа для ЭВМ «Минск 22» на основе метода [1].

2. Описание метода [1]

Вычислительная программа составлена на алгоритмическом языке МАЛГОЛ.

Основой расчета на ЭВМ является численное интегрирование имеющихся интегралов в условии минимума потенциальной энергии при помощи метода Симпсона.

Рассмотрим поперечную полоску оболочки шириной в единицу.



Фиг. 1

Выбираем приращение ζ сдвигающих сил s в направлении образующего (x) в виде

$$\zeta = a_I \frac{s}{s_0} + \sum_{i=1}^{J} a_i \sin(i \cdot sP) \tag{1}$$

в криволинейной части

$$\zeta = a_I \left(1 - \frac{b}{b_0}\right) + a_{II} \frac{4b(b_0 - b)}{b_0^2} \tag{1a}$$

по высоте бортового элемента.

В формулах приняты следующие обозначения:

q — вертикальная нагрузка на поверхности оболочки $(T/м^2)$,
q_0 — нагрузка на бортовой элемент $(T/м)$,
R — радиус оболочки $(м)$,
b_0 — высота бортового элемента $(м)$,
δ — толщина оболочки $(м)$,
δ_0 — толщина бортового элемента $(м)$,
α_0 — половина центрального угла дуги,
a_i — параметр — максимальная ордината синусного члена,
P — постоянная $\left(= \frac{\Pi}{\alpha_0}\right)$,
s_0 — половина длины дуги криволинейной части оболочки,
I — количество параметров a_i.

Составляем условие равновесия поперечной полоски в вертикальном направлении

$$s_0 q + q_0 + \sum_{i}^{I} R a_i \frac{(-1)^{i+1} \sin\alpha_0}{\frac{i\pi}{\alpha_0} - \frac{\alpha_0}{i\pi}} + \frac{2}{3} b_0 a_{II} + \left[\frac{b_0}{2} + R\left(\frac{\sin\alpha_0}{\alpha_0} - \cos\alpha_0\right)\right] a_I = 0 \cdot \tag{2}$$

Условие сходимости продольных напряжений на совместной линии бортового элемента и криволинейной части оболочки:

$$\sum_{1}^{I} (-1)^i i P \cdot a_i + \frac{a_I}{s_0} = -\frac{\delta}{\delta_0 b_0} a_I + \frac{4\delta}{\delta_0 b_0} a_{II} \cdot \tag{3}$$

Из (2) и (3) получаем

$$\begin{cases} a_I = \sum_{1}^{I} K_{Ii} \cdot a_i + K_I, \\ a_{II} = \sum_{1}^{I} K_{IIi} \cdot a_i + K_{II} \cdot \end{cases} \tag{4}$$

Изгибающий момент в поперечной полоске выражается

$$\begin{aligned} m = M_0 + \sum_{1}^{I} m_i \cdot a_i + m_I c_I + m_{II} a_{II} = (M_0 + m_I \cdot K_I + m_{II} \cdot K_{II}) + \\ + \sum_{1}^{I} (m_i + m_I \cdot K_{Ii} + m_{II} \cdot K_{IIi}) a_i = \bar{M}_0 + \sum_{1}^{I} \bar{m}_i a_i, \end{aligned} \tag{5}$$

где M_0 — момент от внешних сил,
m_i — момент от ζ_i.

Моменты M_0 и m_i можно найти при помощи численного интегрирования в зависимости от угла α_0 и параметра I.

Аналогично продольные силы:

$$\max T = \max \bar{T}_0 + \sum_{i=1}^{I} \max \bar{T}_i \cdot a_i,$$

где

$$\max T_i = \frac{L^2}{8} \frac{\partial \zeta_i}{\partial s}. \tag{6}$$

Для определения независимых параметров a_i составляется I условия минимума потенциальной энергии.

$$\frac{6}{\delta^2} \int_0^{s_0} \frac{\partial m}{\partial a_i} ds + 0{,}2(6) \oint \max T \frac{\partial(\max T)}{\partial a_i} ds = 0, \tag{7}$$

где
$$\frac{\partial m}{\partial a_i} = \bar{m}_i \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial (max\,T)}{\partial a_i} = max\,\bar{T}_i\,.$$

Интегралы типа $\int\limits_0^{S_0} m \frac{\partial m}{\partial a_i} ds$ можно выразить в виде

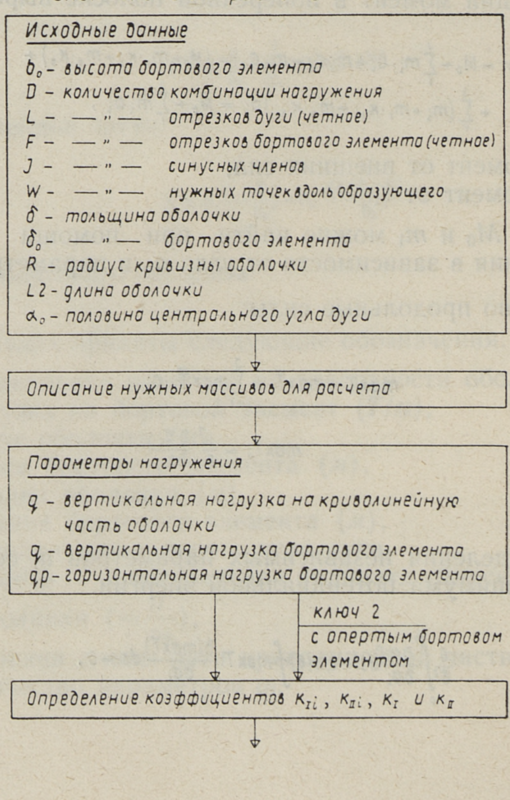
$$\int\limits_0^{s} m \frac{\partial m}{\partial a_i} ds = \int\limits_0^{s} \left(\bar{M}_0 + \sum_{i=1}^{J} \bar{m}_i \cdot a_i\right) \cdot \bar{m}_i ds\,.$$

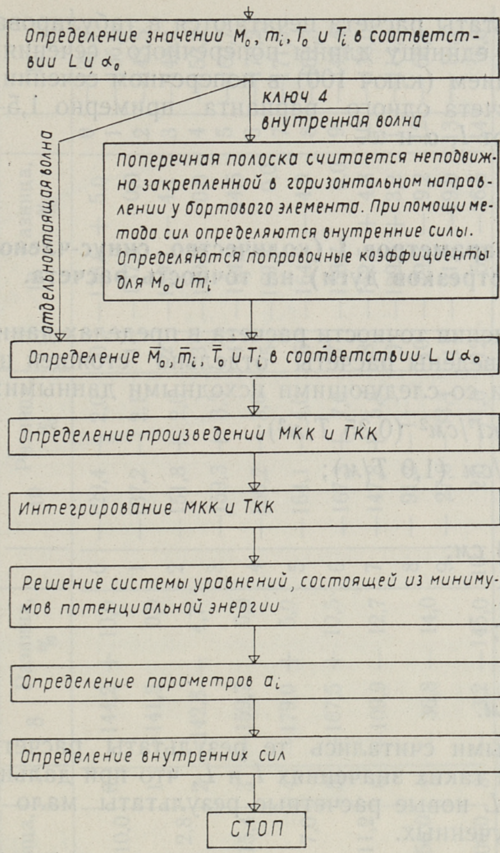
Для определения значения интегралов такого типа составляем произведения
$$\bar{m}_i \cdot \bar{m}_k = MKK_{ik}$$
$$\bar{T}_i \cdot \bar{T}_k = TKK_{ik}$$
в узлах дуговых участков и производим численное интегрирование по поперечному сечению оболочки.

Полученные величины интегралов являются коэффициентами для системы уравнений минимума потенциальной энергии.

Ниже изложена блок-схема для расчета:

3. Блок-схема для расчета





Универсальность программы выражается в следующем: при помощи операторных ключей можно решать при одних данных задачи с нижеприведенными краевыми условиями:

1) отдельно стоящая волна;

2) внутренняя панель (ключ 4);

3) отдельно стоящая панель с опертыми бортовыми элементами (ключ 2);

4) внутренняя панель с опертыми бортовыми элементами (ключи 2 и 4).

Возможность расчета при различных краевых условиях важна для оценки усилий при распалубке конструкции.

Все результаты расчета печатаются в табулированном виде или силой на единицу длины поперечного сечения оболочки или напряжением (ключ 100) в поперечном сечении.

Время расчета одного варианта примерно 1,5—5 мин., в зависимости от I, α и w.

3. Влияние параметров I (количество синус-членов в ζ) и L (количество отрезков дуги) на точность расчета.

Для выяснения точности расчета в пределах данного метода [1] были проведены расчеты отдельно стоящей цилиндрической оболочки со следующими исходными данными:

$q = 0{,}035$ *кГ/см*^{2} (0,35 *Т/м*^{2});

$q_0 = 10$ *кГ/см* (1,0 *Т/м*);

$qp = 0$;

$R = 933{,}43$ *см*;

$\delta = 7$ *см*;

$\delta_0 = 20$ *см*;

$\alpha_0 = 40°$;

$b_0 = 180$ *см*.

Правильными считались те результаты расчета, которые получили при таких значениях I и L, что при дальнейшем увеличении I и L новые расчетные результаты мало отличались от ранее полученных.

Ход расчета показал, что увеличивая количество синус-членов I придется увеличивать и параметр L, чтобы получить величины, постепенно приближающиеся к взятому пределу, (Табл. 1).

ЭВМ «Минск 22» позволила решить задачу с максимальными значениями $I = 6$ и $L = 14$ одновременно.

Результаты расчета представлены в таблице 1 и на фиг. 2.

Величина поперечных моментов не колеблется более 2—3%.

Можно дать следующее руководство для расчета при помощи метода [1]:

1) Если нет возможности расчета на ЭВМ, можно ограничиться двумя синус-членами ($I=2$), причем $L \geqslant 8$, предполагая колебания в результатах 15—20%;

2) при решении на ЭВМ $I \geqslant 4$ и $L \geqslant 10$, если $I=5$, то $L=12$, если $I=6$, то $L= 14$ и т. д.

Таблица 1

Результаты расчета (продольная сила) *кГ/см*

Разница — величина *абс.* ошибки в % от правильного ($I=6$)

$I=2$, $L=4$ и $L=6$:

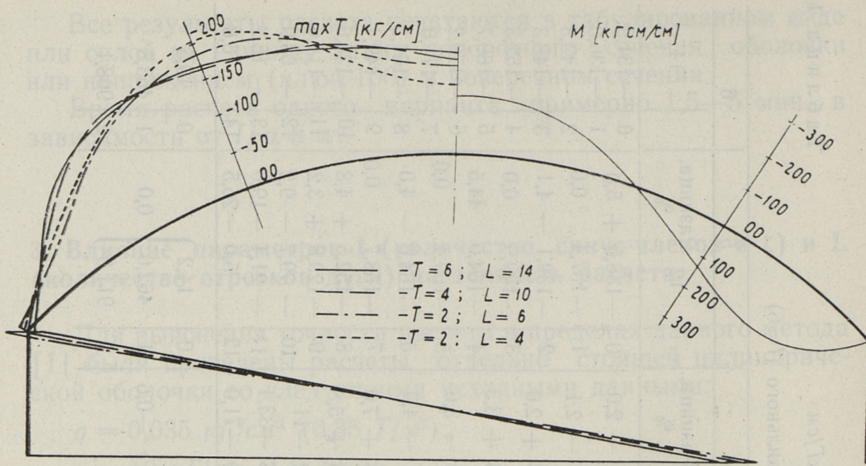
Часть	№	4	Разница, %	№	6	Разница, %
Криволинейная часть	0	— 93,0	— 29,6	0	—119,1	— 10,0
				1	—141,1	— 2,8
	1	—157,9	+ 5,3	2	—180,0	+ 15,4
	2	—204,1	+ 19,6	3	—182,8	+ 7,0
				4	—127,4	— 11,2
	3	— 94,2	— 25,5	5	— 49,9	— 50,0
	4	— 3,0	—142,0	6	— 13,8	—300,0
Бортовой элемент	0	—8,5	—2,0	0	—39,4	—2,7
	1	456,4		1	451,1	
	2	921,3		2	941,7	

$I=3$, $L=8$ и $I=4$, $L=10$:

Часть	№	8	Разница, %	№	10	Разница, %
Криволинейная часть	0	—144,2	+ 10,0	0	—129,4	— 2,0
	1	—141,5	0,0	1	—137,2	— 2,1
	2	—142,8	— 4,7	2	—151,8	+ 2,0
	3	—159,7	0,0	3	—159,3	+ 3,3
	4	—179,0	+ 5,0	4	—160,2	— 3,6
	5	—167,5	+ 10,5	5	—164,1	— 4,0
	6	—109,9	— 12,7	6	—167,3	+ 7,0
	7	— 36,8	— 14,0	7	—147,8	+ 5,8
				8	— 91,2	—11
				9	— 27,8	—33,4
	8	— 3,2	—145,0	10	2,0	—71,0
Бортовой элемент	0	—9,0	—1,4	0	5,7	—0,6
	1	457,4		1	460,6	
	2	923,8		2	915,6	

$I=5$, $L=12$ и $I=6$, $L=14$:

Часть	№	12	Разница, %	№	14
Криволинейная часть	0	—138,6	+ 5,0	0	—131,9
				1	—136,0
	1	—137,4	0,0	2	—143,5
	2	—139,1	— 4,1	3	—148,3
	3	—149,9	0,0	4	—152,3
	4	—164,0	44,5	5	—160,7
	5	—169,4	0,0	6	—170,2
				7	—171,0
	6	—164,6	— 4,0	8	—161,3
	7	—158,7	0,0	9	—149,4
	8	—152,5	+ 4,8	10	—138,0
	9	—129,8	+ 3,2	11	—114,6
	10	— 79,7	— 9,2	12	— 68,9
	11	— 21,4	—19,0	13	— 16,7
	12	5,0	—26,5	14	6,8
Бортовой элемент	0	14,2	0,0	0	19,5
	1	462,6		1	463,8
	2	911,0		2	908,1



Фиг. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Х. Лаул. Расчет цилиндрических оболочек с криволинейными частями, очерченными по окружности. Труды Таллинского политехнического института № 50, 1953 г.
2. H. H. Laul. Raudbetoon II, Tallinn 1962. a.

H. Laul, V. Voltri

The Computing of Cylindrical Shells with Electronic Computer MINSK 22

Summary

In this article the computing programme for the electronic computer MINSK 22 is presented to calculate the internal forces of cylindrical shells. The computing programme is based on Professor H. Laul's method of approximating shearing forces in cylindrical shells. The evaluation of the exactness of the results received is given at the end of the article.

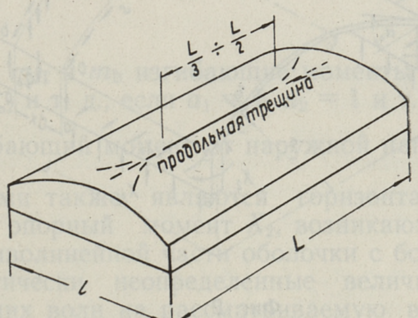
TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 296 1970

УДК 621.031
624.04

Х. Х. Лаул, Ю. А. Тярно

ВОПРОСЫ РАСЧЕТА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ЛИНЕЙНЫМ КОНЬКОВЫМ ШАРНИРОМ

По экспериментам, сделанным с железобетонными цилиндрическими оболочками, образование линейного шарнира в коньке оболочки вызывает существенное перераспределение внутренних усилий. В общем, видимые трещины образуются в протяжении $L/3 \div L/2$ в средней части оболочки (см. фиг. 1), но можно предполагать (также и в расчетах), что невидимые трещины распространяются до диафрагм.



Фиг. 1.

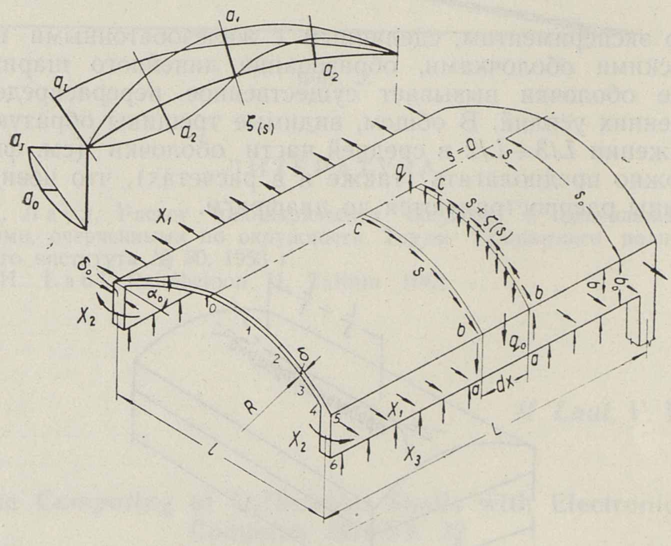
В настоящей статье рассматривается метод расчета цилиндрических оболочек с линейными шарнирами на коньке оболочки. Метод основан на методе аппроксимации сдвигающих сил [1, 2]. Уравнения выписаны для случая средней волны оболочки, когда обеспечено полное восприятие опорного момента и горизонтальной реакции.

Центральная величина в расчетах — приращение сдвигающих сил ζ (см. фиг. 2) — назначена для криволинейной части в виде

$$\zeta = a_1 \frac{s}{s_0} + a_1 \sin\frac{\pi s}{s_0} + a_2 \sin\frac{2\pi s}{s_0} \tag{1}$$

для бортового элемента

$$\zeta = a_1\left(1 - \frac{b}{b_0}\right) + a_0 \frac{4b(b_0 - b)}{b_0^2} \tag{2}$$

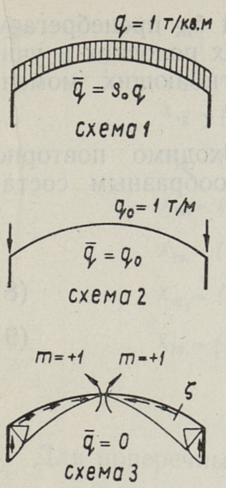


Фиг. 2

Условие равновесия элементарной полоски в вертикальном направлении

$$\bar{q} + \sum_{1,2} R a_i \frac{(-1)^{i+1} \sin\alpha_0}{\frac{i\pi}{\alpha_0} - \frac{\alpha_0}{i\pi}} + \frac{2}{3} b_0 a_0 + \left[\frac{b_0}{2} + R\left(\frac{\sin\alpha_0}{\alpha_0} - \cos\alpha_0\right)\right] a_1 = 0, \tag{3}$$

где $\bar{q}$ зависит от нагрузки (см. фиг. 3).



Фиг. 3

Из условия сходимости продольных напряжений на линиях соединения бортового элемента и криволинейной части оболочки

$$-\frac{\pi}{s_0}a_1+\frac{2\pi}{s_0}a_2+\frac{a_I}{s_0}=-\frac{\delta}{\delta_0}\frac{a_I}{b_0}+\frac{\delta}{\delta_0}\frac{4a_0}{b_0}. \tag{4}$$

Из условий (3) и (4) выражается связь между параметрами a_1, a_2, a_I и a_0.

$$a_I = k_{I1}a_1 + k_{I2}a_2 + K_I\,, \tag{5}$$

$$a_0 = k_{II1}a_1 + k_{II2}a_2 + k_{II}\,. \tag{6}$$

Поперечные изгибающие моменты

$$m = M_0 + m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_I a_I + m_{II} a_0 + X_1 m_b + X_2\,, \tag{7}$$

где m_1, m_2, m_I, m_{II} и m_b изгибающие моменты в элементарной полоске от ζ_1, ζ_2 и т. д., если $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ и т. д.

M_0 — изгибающий момент от наружной нагрузки.

Неизвестными также являются горизонтальная сила X_1 (см. фиг. 2) и опорный момент X_2, возникающие на линии соединения криволинейной части оболочки с бортовым элементом. Эти статически неопределенные величины выражают влияние соседних волн на рассматриваемую волну. Эти неизвестные находим из следующей системы линейных уравнений.

$$X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \delta_{10} = 0$$
$$X_1\delta_{12} + X_2\delta_{22} + \delta_{20} = 0\,,$$

где, например, δ_{ik} перемещение в основной системе в направлении неизвестного «i», вследствие нагрузки $X_k = 1$.

При вычислении элементов перемещений δ_{ik} пренебрегаем влиянием продольных сил T_2 в элементарных полосках и учитываем только воздействие поперечных изгибающих моментов m.

Так как в рассматриваемом случае необходимо повторно применить эту схему, то оказывается целесообразным составить сопряженную матрицу:

$$X_1 = \beta_{11}\delta_{10} + \beta_{12}\delta_{20} \tag{8}$$

$$X_2 = \beta_{21}\delta_{10} + \beta_{22}\delta_{20}, \tag{9}$$

где

$$\beta_{11} = -\beta\frac{100}{R^3}, \quad \beta_{12} = \beta\frac{\Psi_{Ab}}{Rs_0}, \quad \beta_{22} = -\beta\frac{\Psi_{bb}}{100 s_0},$$

$$\beta = \frac{100}{\Psi_{bb} - \frac{\Psi_{Ab}^2}{\alpha_0}} \qquad \Psi_{Ab}, \ \Psi_{bb}$$ и т. д. см. [1],

$$\delta_{10} = A + Ba_1 + Ca_2 + Da_I + Ea_0$$

$$\delta_{20} = F + Ja_1 + Ka_2 + La_I + Ma_0$$

где в свою очередь

$$A = \int_0^{s_0} M_0 m_b \, ds, \quad D = \int_0^{s_0} m_I m_b \, ds, \quad K = \int_0^{s_0} m_2 1_A \, ds,$$

$$B = \int_0^{s_0} m_1 m_b \, ds, \quad E = \int_0^{s_0} m_{II} m_b \, ds, \quad J = \int_0^{s_0} m_1 1_A \, ds,$$

$$C = \int_0^{s_0} m_2 m_b \, ds, \quad F = \int_0^{s_0} M_0 1_A \, ds, \quad L = \int_0^{s_0} m_I 1_A \, ds,$$

$$M = \int_0^{s_0} m_{II} 1_A \, ds.$$

При помощи условий (5) и (6)

$$X_1 = X_{1\bar{q}} + X_{1a_1}a_1 + X_{1a_2}a_2, \tag{10}$$

$$X_2 = X_{2\bar{q}} + X_{2a_1}a_1 + X_{2a_2}a_2, \tag{11}$$

где

$$X_{1\bar{q}} = (\beta_{11}A + \beta_{12}F) + (\beta_{11}D + \beta_{12}L)K_I + (\beta_{11}E + \beta_{12}M)K_{II}$$

$$X_{2\bar{q}} = (\beta_{12}A + \beta_{22}F) + (\beta_{12}D + \beta_{22}L)K_I + (\beta_{12}E + \beta_{22}M)K_{II}$$

$$X_{1a_1} = (\beta_{11}B + \beta_{12}J) + (\beta_{11}D + \beta_{12}L)k_{I1} + (\beta_{11}E + \beta_{12}M)k_{II1}$$

$$X_{2a_1} = (\beta_{12}B + \beta_{22}J) + (\beta_{12}D + \beta_{22}L)k_{I1} + (\beta_{12}E + \beta_{22}M)k_{II1}$$

$$X_{1a_2} = (\beta_{11}C + \beta_{12}K) + (\beta_{11}D + \beta_{12}L)k_{I2} + (\beta_{11}E + \beta_{12}M)k_{II2}$$

$$X_{2a_1} = (\beta_{12}C + \beta_{22}K) + (\beta_{12}D + \beta_{22}L)k_{I1} + (\beta_{12}E + \beta_{22}M)k_{II2}.$$

Для поперечных моментов получаем

$$m = \bar{M}_0 + \bar{m}_1 a_1 + \bar{m}_2 a_2 ,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{M}_0 &= M_0 + X_{1\bar{q}} m_b + X_{2\bar{q}} m_a + K_I m_I + K_{II} m_{II} , \\ \bar{m}_1 &= m_1 + X_{1a_1} m_b + X_{2a_1} m_a + k_{I1} m_I + k_{II1} m_{II} , \\ \bar{m}_2 &= m_2 + X_{2a_1} m_b + X_{2a_2} m_a + k_{I2} m_I + k_{II2} m_{II} . \end{aligned} \tag{12}$$

Используя четыре неизвестных a_1, a_2, a_I, a_0 (или $r=X_3$ — реакция стены, упирающей бортового элемента оболочки) и, в общем, два неизвестных X_1 и X_2, имеем четыре уравнения (3), (4), (8), (9). Дополнительные 2 уравнения получаем из условия минимума потенциальной энергии внутренних сил.

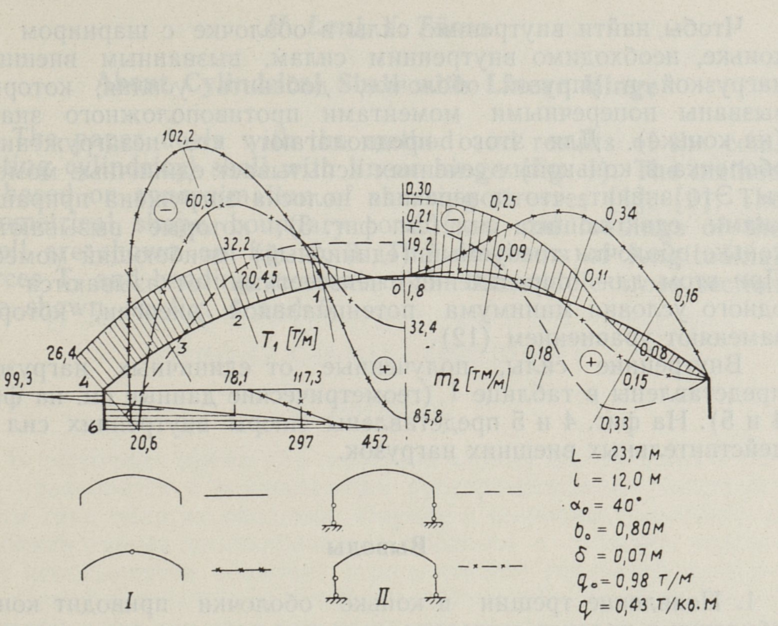
$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_k} = \frac{6}{\delta^2}\int_0^{\varphi_0} m \frac{\partial m}{\partial a_k} ds + 0{,}2\,(6)\int \max T \frac{\partial(\max T)}{\partial a_k} ds = 0. \tag{13}$$

При помощи неизвестных a_1, a_2, a_I, a_0 (или $r=X_3$), X_1 и X_3 определяются внутренние силы T_1, S и m_2.

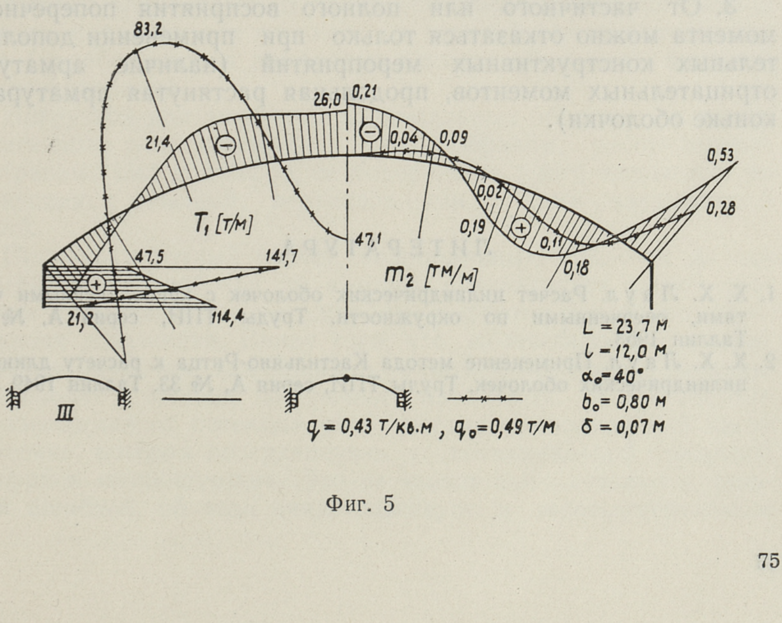
Целесообразно вычислять внутренние силы отдельно от каждой единичной нагрузочной схемы (см. фиг. 3). В нужных расчетных схемах (см. фиг. 2) X_1, X_2, $X_3=r$ и a_0 учитываются или не учитываются.

Таблица 1

Схема	Сечение	0	1	2	3	4	5	6
I (см. фиг. 4) + +1 (см. фиг. 3)	m_2	—0,50	—0,25	+0,34	+0,70	0		
	ΔT_1	—0,58	—0,74	—0,70	—0,03	+0,43	+1,62	+4,54
	ζ	0	—1,20	—1,78	—2,79	—2,53	—2,53	0
I + 2	m_2	—0,09	—0,15	—0,26	—0,23	0		
	ΔT_1	0,28	0,15	—0,16	—0,45	—0,57	—2,16	+4,59
	ζ	0	0,38	—0,06	—0,13	—1,00	—1,00	0
I + 3	m_2	+1,00	+0,28	—0,79	—0,79	0		
	ΔT_1	3,99	0,50	—3,34	—0,68	2,33	8,82	—7,39
	ζ	0	2,76	0,58	—0,89	—0,58	—0,58	0
II + 1	m_2	—0,48	—0,21	+0,41	+0,77	0		
	ΔT_1	—0,64	—0,80	—0,68	0,14	0,69	2,60	2,60
	ζ	0	—1,32	—1,75	—2,75	—2,13	—2,13	0
II + 3	m_2	+1,00	+0,30	—0,81	—0,88	0		
	ΔT_1	3,59	0,67	—2,84	—1,36	0,72	2,73	2,73
	ζ	0	2,84	0,37	—0,87	—2,23	—2,23	0
III (см. фиг. 5+ +1 (см. фиг. 3)	m_2	—0,40	—0,16	0,31	0,35	—0,98	—0,98	
	ΔT_1	—0,74	—0,84	—0,63	0,19	0,71	1,34	3,77
	ζ	0	—1,29	—2,59	—2,99	—2,13	—2,13	0
III + 2	m_2	—0,08	—0,03	0,06	0,07	—0,21	—0,21	0
	ΔT_1	—0,11	—0,13	—0,10	0,03	0,11	0,20	0,60
	ζ	0	—0,18	—0,39	—0,46	—0,33	—0,33	0
III + 3	m_2	+1,00	+0,23	—0,81	—0,35	+,1,15	+1,15	
	ΔT_1	+4,98	+0,55	—4,21	—0,56	+3,41	+6,42	—6,35


102,2
60,3
32,2
20,45
26,4
99,3
4
6
3
2
1
78,1
117,3
20,6
297
452
T1 [Т/м]
0,30
0,21
19,2
0,25
0,34
0,09
0,11
0,16
0
1,8
32,4
85,8
m2 [тм/м]
0,18
0,08
0,15
0,33
L = 23,7 м
l = 12,0 м
α0 = 40°
b0 = 0,80 м
δ = 0,07 м
q0 = 0,98 т/м
q = 0,43 т/кв.м
I
II

Фиг. 4


83,2
26,0
0,21
21,4
0,04
0,09
0,53
0,02
0,28
T1 [т/м]
0,19
0,11
47,1
47,5
141,7
m2 [тм/м]
0,18
21,2
114,4
L = 23,7 м
l = 12,0 м
α0 = 40°
b0 = 0,80 м
δ = 0,07 м
III
q = 0,43 т/кв.м , q0 = 0,49 т/м

Фиг. 5

Чтобы найти внутренние силы в оболочке с шарниром на коньке, необходимо внутренним силам, вызванным внешней нагрузкой в упругой оболочке, добавить усилия, которые вызваны поперечными моментами противоположного знака (на коньке). Для этого предполагают, что незагруженная оболочка в коньковых сечениях испытывает единичные моменты. Это значит, что поперечная полоска загружена приращениями сдвигающих сил (см. фиг. 3), которые вызывают в коньке оболочки требуемый (единичный) изгибающий момент. При этом для определения неизвестных отказываются от одного условия минимума потенциальной энергии, которое заменяют уравнением (12).

Внутренние силы, полученные от единичных нагрузок, представлены в таблице 1 (геометрические данные см. на фиг. 4 и 5). На фиг. 4 и 5 представлены эпюры внутренних сил от действительных внешних нагрузок.

Выводы

1. Появление трещин в коньке оболочки приводит конек оболочки в опасное состояние, вызывая в коньке значительную растянутую зону и увеличивая отрицательные моменты во всем поперечном сечении оболочки.

2. При оболочках с опертыми бортовыми элементами положение облегчается в отношении поперечных моментов, но остается зона растяжения на коньке оболочки.

3. От частичного или полного восприятия поперечного момента можно отказаться только при применении дополнительных конструктивных мероприятий (наличие арматуры отрицательных моментов, продольная растянутая арматура в коньке оболочки).

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Х. Лаул. Расчет цилиндрических оболочек с криволинейными частями, очерченными по окружности. Труды ТПИ, серия А, № 50, Таллин 1953.
2. Х. Х. Лаул. Применение метода Кастильяно-Ритца к расчету длинных цилиндрических оболочек. Труды ТПИ, серия А, № 33. Таллин 1949.

H. Laul, Y. Tärno

About Cylindrical Shell with Linear Hinge

The paper deals with the method and results of the computing cylindrical shell with linear hinge (fig. 1). The method is based on approximation of shearing stresses [1], [2]. The geometrical shape, boundary conditions and loadings of the shell are shown on fig. 2, 3. The diagrams of longitudinal forces T_1 and bending moment m_2 in the middle cross section are shown on fig. 4 and 5.

Чтобы найти внутренние силы [illegible] оболочке с шарниром в коньке, необходимо внутренним силам, вызванным внешней нагрузкой [illegible], которые вызваны поперечными моментами противоположного знака [illegible] одного условия минимума [illegible] заменяют уравнением (12).

Внутренние силы, полученные от единичных нагрузок, представлены в таблице 1 (геометрические данные см. на фиг. 4 и 5). На фиг. 4 и 5 представлены эпюры внутренних сил от действительных внешних нагрузок.

Выводы

1. Появление трещин в коньке оболочки приводит конек оболочки в опасное состояние, вызывая в коньке значительную растянутую зону и увеличивая отрицательные моменты во всем поперечном сечении оболочки.

2. При оболочках с [illegible] бортовыми элементами положение облегчается в отношении поперечных моментов, но остается зона растяжения по [illegible] оболочки.

3. [illegible] поперечного [illegible] дополнительных [illegible] арматуры [illegible] растянутая арматура и [illegible].

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Х. Лаул. Расчет цилиндрических оболочек с [illegible]. Труды ТПИ, серия А, № 50, Таллин, [illegible].
2. Х. Х. Лаул. [illegible] Канчелли-Ритца к расчету длинных [illegible]. Труды ТПИ, серия А, № [illegible], Таллин [illegible].

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 296 1970

УДК 621.031

А. И. Лавров

О РАСЧЕТЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ДИАФРАГМ КОНОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК

1. Введение

В настоящее время для покрытия зданий все больший интерес проявляется к тонкостенным пространственным конструкциям типа пологих оболочек. Наряду с широким применением железобетонных цилиндрических оболочек и оболочек вращения используются оболочки отрицательной гауссовой кривизны. Одной из типов этой линейной поверхности является коноидальная оболочка, которая имеет некоторые архитектурные и технологические преимущества по сравнению с другими железобетонными оболочками.

Конструкция покрытия коноидальной оболочки состоит из диафрагм высокого и низкого подъема (очерченных, например, по параболе), из криволинейной части оболочки с прямыми бортовыми элементами. В таких оболочках любое поперечное сечение, параллельное плоскости, в которой лежит направляющая (параболическая диафрагма высокого подъема), является также параболой.

Нагрузкой для диафрагм коноидальных оболочек являются сдвигающие силы оболочки. Таким образом, распределение внутренних сил в диафрагме совершенно иного характера по сравнению с обычной, вертикальными силами загруженной аркой.

Поскольку точный расчет коноидальных оболочек до сих пор еще не разработан, то автором предлагается расчет диафрагм приближенным методом, где делаются некоторые упрощающие допущения. Ввиду того, что железобетонные коноидальные оболочки, как правило, короткие оболочки (продольный пролет L меньше поперечного пролета l), то при расчете отказываются от потенциальной энергии криволинейной части оболочки, которая по сравнению с потенциальной энергией диафрагм незначительна. Это не может быть связано с большой ошибкой, об этом свидетельствует и экспериментальное исследование моделей — в диафрагмах не наблюдалось значительных изгибающих моментов.

Сдвигающие силы у диафрагмы (нагрузка на диафрагму) определяются из условия минимума потенциальной энергии самой диафрагмы и потенциальной энергии сдвигающих сил на протяжении некоторой зоны краевого эффекта. Притом предполагается, что простой краевой эффект не подвергается изменению при вариации усилий в диафрагме. Из данной задачи получают усилия в диафрагме, а также максимальные сдвигающие силы в оболочке у диафрагмы, при помощи которых находят максимальные растягивающие главные напряжения в углах оболочки.

2. Метод расчета

Направляющей коноидальной поверхности принята квадратная парабола. Уравнение поверхности (см. фиг. 1)

$$z = \frac{x \cdot f_n}{d}\left(1 - \frac{4y_0^2}{l^2}\right),$$

где d — расстояние между направляющими;

f_n — стрела подъема высокой диафрагмы.

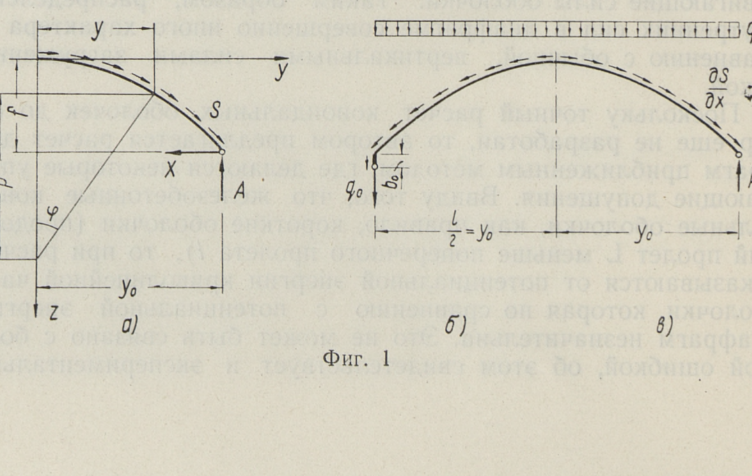
Нагрузка на оболочку q принимается горизонтально равномерно распределенной (см. фиг. 1б и в).

Оболочка передает подавляющую часть своей нагрузки диафрагмам посредством сдвигающих сил.

При расчете диафрагм сдвигающие силы S аппроксимируем в виде

$$S = a_1 \frac{y}{y_0} + \sum_i a_i \sin\frac{i\pi y}{y_0} \qquad (1)$$

где a_1 и a_i — определяемые параметры.



Фиг. 1

При неопертом бортовом элементе опорные реакции в углах оболочки

$$A=\frac{1}{4}qlL+\frac{1}{2}q_0L,$$

при опертом бортовом элементе

$$A=\frac{1}{4}qlL-p\frac{L}{2}.$$

где q — вертикальная нагрузка на поверхность оболочки;

q_0 — нагрузка на бортовой элемент;

p — погонная опорная реакция бортового элемента.

Условие равновесия в вертикальном направлении в плоскости диафрагмы

$$A=a_1V_1+\sum_i a_iV_i, \tag{2}$$

где V_1 и V_i — вертикальные составляющие сдвигающих сил (нагрузка на диафрагму) при параметрах $a_1=a_i=1$.

Вертикальные составляющие нагрузки S находим по следующим формулам:

$$V_1=\frac{y_0^2}{3p}; \tag{3}$$

$$V_i=(-1)^{i+1}\frac{y_0^2}{i\pi p}, \tag{4}$$

где $p=\frac{y_0^2}{2f}$ фокальный параметр канонического уравнения параболы (см. фиг. 1а).

Статически неопределенные усилия затяжки X_i (при $a_1=a_i=1$) определяем из условия

$$X_i\delta_{11}+\delta_{10}^{(i)}=0, \tag{5}$$

где δ_{11} и $\delta_{10}^{(i)}$ — упругие коэффициенты (см. [1] формулы (8) и (9)).

В выражениях δ_{11} и $\delta_{10}^{(i)}$ имеющиеся интегралы $\int m_i\, m_k\, ds$ и $\int n_i n_k\, ds$ находим при помощи численного интегрирования.

Изгибающие моменты диафрагмы

$$M = a_I m_I + \sum_i a_i m_i + V m_a + X m_b.$$

где изгибающие моменты при $a_I = a_i = 1$:

$$m_b = -\frac{1}{2p}(y_0^2 - y^2) = -\frac{y_0^2}{2p}\omega_b;$$

$$m_I = -\frac{y_0^3}{2p}\omega_I;$$

$$m_i = \frac{y_0^3}{2pi\pi}\omega_i;$$

где
$$\omega_I = \frac{1}{4}y_0^3 - \frac{2}{3}y_0^2 y + \frac{1}{2}y_0 y^2 - \frac{1}{12y_0}y^4;$$

$$\omega_i = (-1)^{i+1}\left[1 - 2\frac{y}{y_0} + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right] -$$

$$- \frac{2}{i^2\pi^2}\left[(-1)^{i+1} + \cos i\pi\frac{y}{y_0}\right].$$

Коэффициенты ω даны в таблице 1.

Нормальные силы в сечении диафрагмы:

$$N = a_I n_I + \sum_i a_i n_i + V n_a + X n_b.$$

где нормальные силы при $a_I = a_i = 1$:

$$n_a = -\sin\varphi;$$

$$n_b = -\cos\varphi;$$

$$n_I = \frac{p}{y_0\sqrt{p^2 + y^2}}\lambda_I \text{ и } n_i = \frac{p}{J_i\sqrt{p^2 + y^2}}\lambda_i,$$

где
$$\lambda_I = \frac{1}{2}(y_0^2 - y^2) + \frac{1}{3p^2 y}(y_0^3 - y^3),$$

$$\lambda_i = (-1)^{i+1} + \cos J_i y + \frac{y}{p^2}\left[(-1)^{i+1} y_0 -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{J_i}\sin J_i y + y\cos J_i y\right] \text{ и } J_i = \frac{i\pi}{y_0}.$$

Коэффициенты λ также табулируемы при различных y_0. Для вычисления таблиц составлены программы для ЭЦВМ «Минск-22».

При помощи условия равновесия в вертикальном направлении (2) один, зависимый параметр (например, a_I), выражается через остальные, независимые параметры. Независимые параметры находим из условия минимума потенциальной энергии диафрагмы и сдвигающих сил в области краевого эффекта оболочки $\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0$ (см. [1], формула (14)).

Сила затяжки диафрагмы

$$X = a_I X_I + \sum_i a_i X_i,$$

где X_I и X_i определяются из условия (5).

Сдвигающие силы у диафрагмы

$$S = K_I \frac{y}{y_0} + \sum_i a_i \left(k_{Ii} \frac{y}{y_0} + \sin \frac{i\pi y}{y_0} \right);$$

где $$K_I = \frac{A}{V_I} \quad \text{и} \quad k_{Ii} = -\frac{V_i}{V_I}.$$

3. Численные примеры

Расчет низкой диафрагмы (очерченной по квадратной параболе) коноидальной оболочки с неопертыми бортовыми элементами с продольным пролетом $L = 12{,}0$ м и поперечным пролетом $l = 18{,}0$ м. Схема и геометрические данные см. фиг. 2.

Назначаем функцию сдвигающих сил в виде (1), где $i = 1{:}3$.

Из опытов расчета выявляется, что преимущественную роль имеют параметры a_I и a_1. Параметры a_2; a_4; a_5 и т. д. не оказывают существенного влияния на величины внутренних усилий диафрагмы.

Общий ход расчета аналогичен численному примеру [1], при этом расчет удобно вести в табличной форме.

Результаты вычислений и эпюры усилий представлены на фиг. 2.

Главные растягивающие напряжения в углах оболочки у низкой диафрагмы

$$\sigma_1 = \frac{a_1}{\delta} = \frac{26{,}1771}{0{,}08} = 327{,}2\ т/м^2 = 32{,}72\ кГ/см^2,$$

где δ — толщина криволинейной части оболочки в м.

На фиг. 3 представлены результаты вычисления диафрагмы высокого подъема ($f_n = 5{,}5$ м) при тех же размерах поперечного сечения. Максимальные главные растягивающие напряжения в углах оболочки $\sigma_1 = 11{,}85$ *кГ/см²*.

Таблица 1

Сечение	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\omega_{\bar{o}}$	100,0000	76,5625	56,2500	39,0625	25,0000	14,0625	6,2500	1,5625	0
ω_a	100,0000	87,5000	75,0000	62,5000	50,0000	37,5000	25,0000	12,5000	0
ω_b	100,0000	98,4375	93,7500	85,9375	75,0000	60,9375	43,7500	23,4375	0
ω_I	25,0000	17,4459	11,4258	6,8664	3,6459	1,5929	0,4883	0,0631	0
ω_1	59,4715	37,5765	21,6567	11,0435	4,7358	1,5530	0,3148	0,0200	0
ω_2	100,0000	75,0787	51,1839	30,4142	14,8679	5,4142	1,1839	0,0787	0
ω_3	95,4968	73,4493	55,5905	38,8911	22,7484	9,7307	2,4063	0,1726	0
ω_4	100,0000	75,2960	54,0170	37,7960	25,0000	12,7960	3,7170	0,2960	0
ω_5	98,3789	76,0621	56,0126	37,5031	24,1894	14,0008	4,8663	0,4417	0

$$m_{\bar{o}} = -\frac{q}{200} y_0^2 \omega_{\bar{o}} \qquad m_a = -\frac{y_0}{100}\omega_a$$

$$m_I = -\frac{y_0^3}{200p}\omega_I \qquad m_b = \frac{y_0^2}{200p}\omega_b$$

$$m_i = (-1)^i \frac{y_0^3}{200 p i \pi}\omega_i \qquad p = \frac{y_0^2}{2f}$$

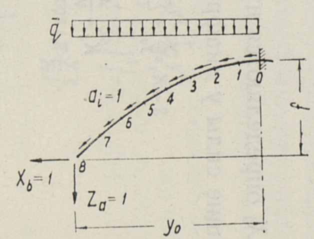
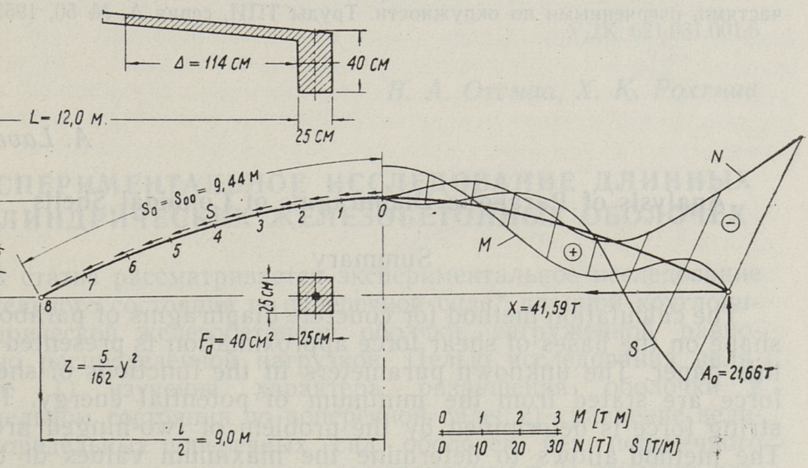
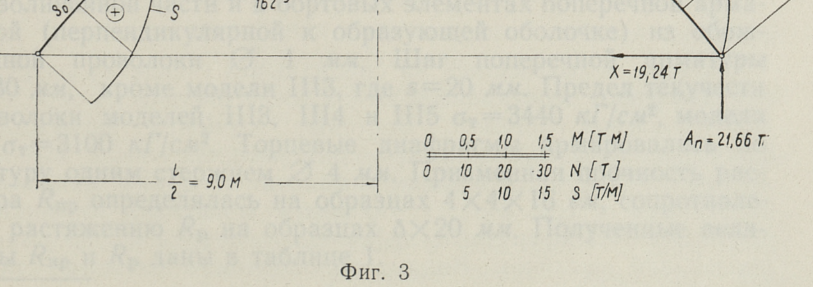


Рис. для табл. 1


Δ = 114 см
40 см
L– 12,0 м.
25 см
N
$S_0 = S_{00} = 9,44$ м
S
0
1
2
3
4
5
6
7
8
f = 2,5 м
M
⊖
⊕
25 см
$F_a = 40$ см²
25 см
X = 41,59 т
$Z = \frac{5}{162}y^2$
S
$A_0 = 21,66$ т
0 1 2 3 M [т м]
0 10 20 30 N [т] S [т/м]
$\frac{l}{2} = 9,0$ м

Фиг. 2


⊖
N
$f_n = 5,5$ м
⊕
$S_0 = 10,74$ м
$Z = \frac{11}{162}y^2$
M
⊖
⊕
S
X = 19,24 т
0 0,5 1,0 1,5 M [т м]
0 10 20 30 N [т]
5 10 15 S [т/м]
$A_n = 21,66$ т
$\frac{l}{2} = 9,0$ м

Фиг. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Х. Лаул, А. И. Лавров. О расчете диафрагм коноидальных оболочек. Труды ТПИ, серия А, № 244, 1966 г.

2. Х. Х. Лаул. Расчет цилиндрических оболочек с криволинейными частями, очерченными по окружности. Труды ТПИ, серия А, № 50, 1953 г.

A. Lavrov

Analysis of Parabolic Diaphragms of Conoidal Shells

Summary

The calculation method for concrete diaphragms of parabolic shape on the bases of shear force approximation is presented in this paper. The unknown parameters in the functions of shear force are stated from the minimum of potential energy. The string force is determined by the problem of two-hinged arch. The method allows to determine the maximum values of the main tension stresses in the districts of shell corners.

The approximate method is illustrated by calculation results and shear force diagrams in the diaphragms are presented.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 296 1970

УДК 621.031.001.5

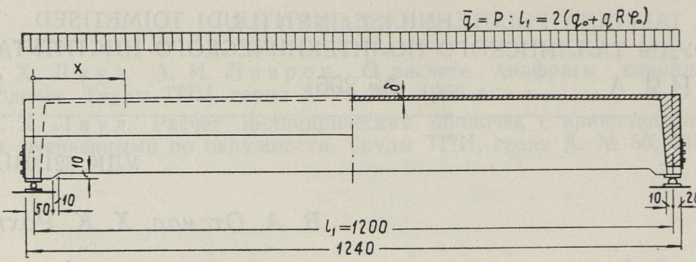
В. А. Отсмаа, Х. К. Рохтмаа

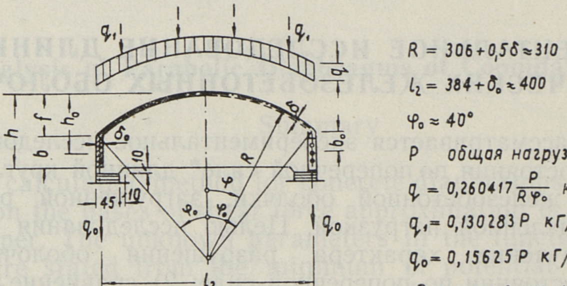
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДЛИННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ОБОЛОЧЕК

В статье рассматривается экспериментальное исследование предельного состояния по поперечной силе* длинной круглоцилиндрической железобетонной оболчки, загруженной равномерно распределенной нагрузкой. Целью исследования являются: 1) изучение характера разрушения оболочки в предельном состоянии по поперечной силе; 2) сравнение величин предельных поперечных сил оболочек без поперечного армирования и с поперечным армированием и 3) изучение возможности существования в предельном состоянии поперечной силы Q_B, передаваемой бетоном в наклонном сечении оболочки с поперечным армированием.

Были изготовлены и испытаны 7 моделей из цементного раствора с геометрическими размерами, приведенным на фиг. 1 и в таблице 1. Обозначения геометрических величин приняты по фиг. 1. Модели III1 и III3 (см. табл. 1) имели продольную арматуру 1 $\varnothing$ 5 *мм* из высокопрочной холоднотянутой проволоки ($\sigma_p = 13\,600$ *кГ/см*²), остальные модели — 3 $\varnothing$ 4 *мм* из холоднотянутой проволоки ($\sigma_p = 6500$ *кГ/см*²) в каждом бортовом элементе. Продольная арматура была анкерована на торцах моделей. Модели III1, III2 и I1 не имели поперечную арматуру. Модели III3, III4, III5 и II2 были армированы в криволинейной части и в бортовых элементах поперечной арматурой (перпендикулярной к образующей оболочке) из обожженной проволоки $\varnothing$ 1 *мм.* Шаг поперечной арматуры $s=30$ *мм*, кроме модели III3, где $s=20$ *мм.* Предел текучести проволоки моделей III3, III4 и III5 $\sigma_т = 3440$ *кГ/см*², модели II2 $\sigma_т = 3100$ *кГ/см*². Торцевые диафрагмы армировались по контуру одним стержнем $\varnothing$ 4 *мм.* Призменная прочность раствора $R_{пр}$ определялась на образцах 4×4×16 *см*, сопротивление растяжению R_p на образцах $\delta \times 20$ *мм.* Полученные величины $R_{пр}$ и R_p даны в таблице 1.

* Подразумевается поперечная сила оболочки как «большой балки».





Фиг. 1

ТАБЛИЦА 1.

Геометрические размеры моделей и прочности раствора

Тип оболочки	δ мм	δ_0 мм	h мм	h_0 мм	b мм	φ_0	$R_{пр}$ кГ/см²	$R_р$ кГ/см²
Ш 1	7,8	17,6	89	81	15	40°22′	359	37,9
Ш 2	8,6	18,0	112	94	38	40°22′	335	49,0
I 1	6,8	16,9	139	121	65	40°22′	406	32,7
Ш 3	8,4	18,4	89	81	15	40°26′	367	38,9
Ш 4	7,4	17,0	108	90	34	40°20′	373	43,3
Ш 5	8,3	16,2	123	102	50	40°10′	405	39,0
II 2	7,3	15,2	139	121	66	40°09′	316	32,0

Модели испытывались на специальном стенде до разрушения. Нагрузка передавалась на оболочку статически определимой рычажной системой. Бортовые элементы загружались линейной нагрузкой q_0, равномерно распределенная нагрузка криволинейной части q была заменена четырьмя линейными нагрузками q_1 (см. фиг. 1). Во время испытания измерились продольные и поперечные деформации бетона и деформации продольной арматуры. Ввиду ограниченного объема статьи данные об этих измерениях подробно не изложены.

Во время загружения в оболочке развивалась система трещин, состоящая из нормальных (вызванных изгибающими моментами оболочки как «большой балки») и наклонных трещин. В моделях с меньшей высотой (и соответственно с большей величиной отрицательных поперечных изгибающих моментов) возникали также продольные трещины по гребню оболочки. Первые наклонные трещины возникали при главных растягивающих напряжениях (см. τ_{I} в табл. 2) ниже или почти равных R_{p}. Наклонные трещины развивались приблизительно по направлению траектории главных сжимающих напряжений упругой оболочки.

Разрушение всех моделей произошло в торцевой части оболочки. С приближением к предельному состоянию некоторые наклонные трещины, названные нами в [1] критическими трещинами, значительно раскрывались. Окончательное разрушение произошло по наклонному сечению, определенному критическими трещинами. Разрушение сопровождалось срезом по критической трещине одного или обоих бортовых элементов и разрушением сжатой зоны оболочки над наклонными трещинами в т. н. критическом сечении. Если общая система развития трещин зависела от высоты оболочки (от относительной величины поперечного изгибающего момента), то форма критического блока (т. е. части оболочки, ограниченной критическими трещинами и критическим сечением), а также характер окончательного разрушения существенно не зависели ни от величины h_0, ни от наличия поперечной арматуры.

Схемы развития трещин до окончательного разрушения даны для всех моделей на фиг. 2 и 3. Цифра у трещины указывает нагрузку P при появлении трещины. Жирными линиями показаны критические трещины, пунктирной линией — критическое сечение.

Основные результаты испытаний даны в таблице 2. В таблице применены следующие обозначения:

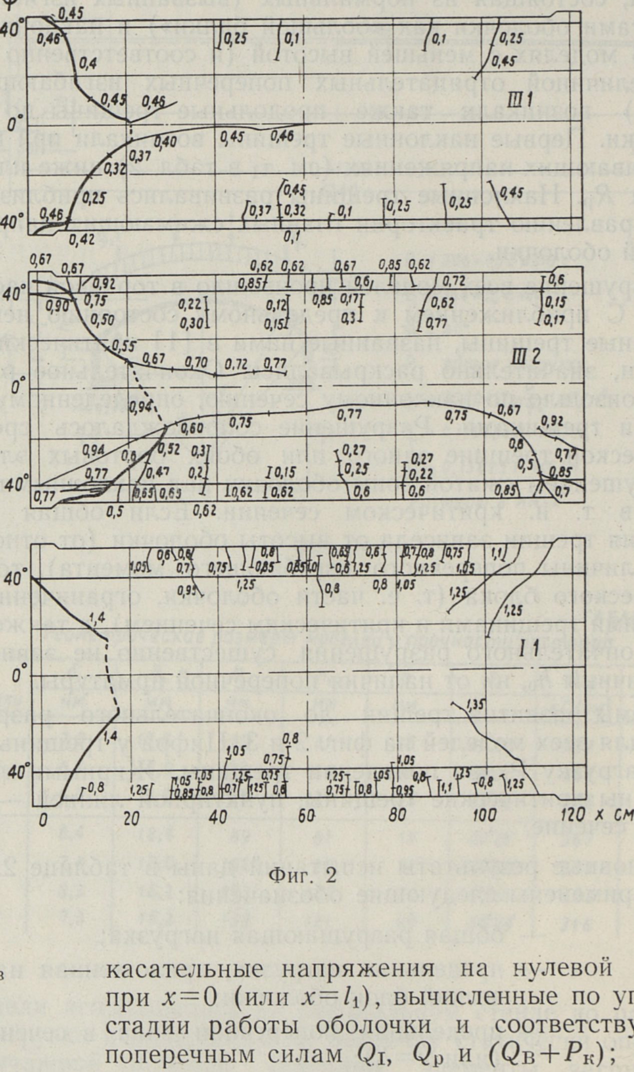
P_{p} — общая разрушающая нагрузка;

$P_{\text{к}}$ — предельная нагрузка, приложенная на критический блок оболочки;

Q_{p} — предельная поперечная сила в сечении $x=0$ (или $x=l_1$);

Q_{a}, $Q_{\text{в}}$ — предельные поперечные силы, воспринимаемые в наклонном сечении соответственно арматурой и бетоном;

Q_{I} — поперечная сила в сечении $x=0$ (или $x=l_1$) при возникновении первой наклонной трещины;



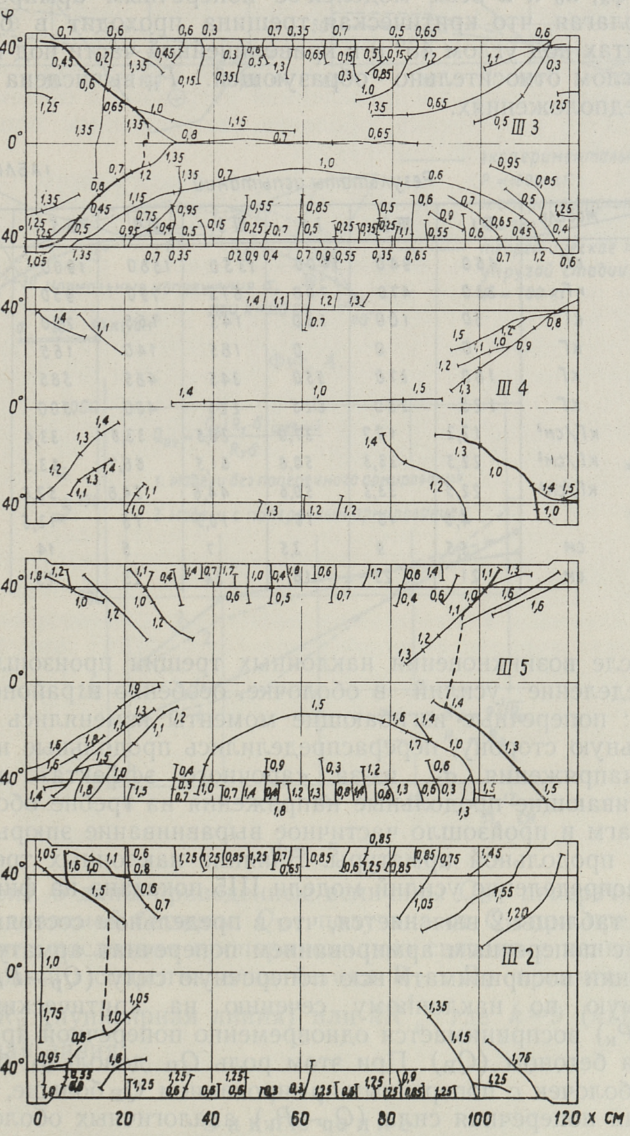
Фиг. 2

$\tau_{\mathrm{I}}, \tau_{\mathrm{рк}}, \tau_{\mathrm{в}}$ — касательные напряжения на нулевой линии при $x=0$ (или $x=l_1$), вычисленные по упругой стадии работы оболочки и соответствующие поперечным силам Q_{I}, $Q_{\mathrm{р}}$ и $(Q_{\mathrm{в}}+P_{\mathrm{к}})$;

φ_a — средний угол от гребня оболочки до критических трещин в критическом сечении;

x_0 — среднее расстояние критических трещин от опорного сечения по линии $\varphi=\varphi_0$;

a — среднее расстояние критического сечения от опорного сечения.



Фиг. 3

$Q_а$ в таблице вычислена по [2] на основе средних значений $\varphi_а$, x_0 и a всех моделей с поперечным армированием, предполагая, что критическая трещина проходит в бортовых элементах под углом 45° и в криволинейной части под постоянным углом относительно образующей. $P_к$ вычислена при тех же предположениях.

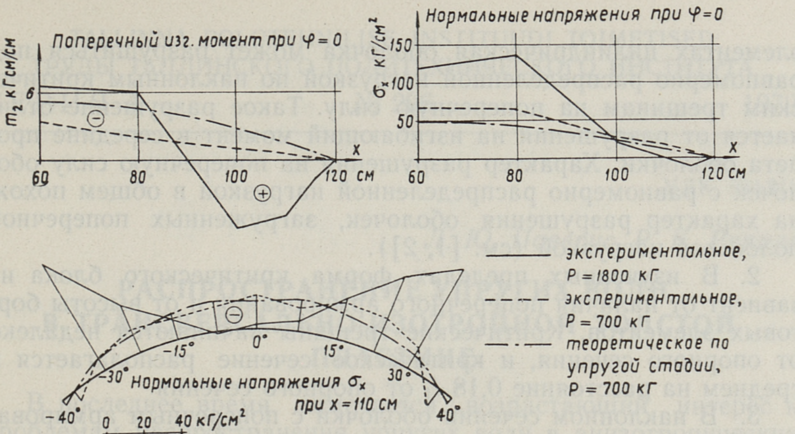
ТАБЛИЦА 2.

Результаты испытаний

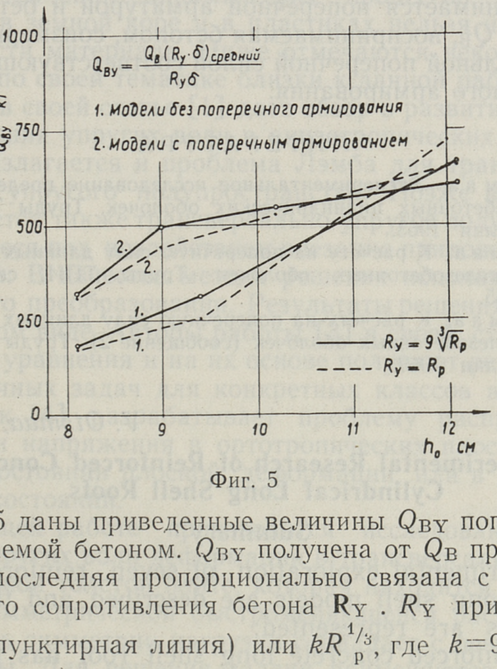
Модель		Ш 1	Ш 2	I 1	Ш 3	Ш 4	Ш 5	II 2
P_p	кГ	460	940	1400	1350	1580	1900	1800
Q_p	кГ	230	470	700	675	790	950	900
$P_к$	кГ	50	100	150	145	165	200	190
Q_a	кГ	0	0	0	185	140	165	180
$Q_в$	кГ	180	370	550	345	485	585	530
Q_I	кГ	125	250	625	225	400	500	300
τ_I	кГ/см²	12,2	17,7	37,0	20,5	33,8	33,4	20,2
$\tau_{рк}$	кГ/см²	22,5	33,3	50,6	61,5	66,7	63,5	60,5
$\tau_в$	кГ/см²	22,5	33,3	50,6	44,6	54,8	52,6	48,5
φ_a°		4,5	13	16	10,5	15	12,5	20
x_0	см	5,5	9	3,5	7	5	14	7
a	см	21	25	16	24	23	25	15

После возникновения наклонных трещин произошло перераспределение усилий в оболочке, особенно в районе у диафрагм: поперечные изгибающие моменты изменялись в положительную сторону, перераспределились продольные нормальные напряжения σ_x, из-за «арочного эффекта» возникли растягивающие продольные напряжения на гребне оболочки у диафрагм и произошло частичное выравнивание эпюры напряжений продольной арматуры. Влияние наклонных трещин на перераспределение усилий модели III5 показано на фиг. 4.

Из таблицы 2 выясняется, что в предельном состоянии оболочки с поперечным армированием поперечная арматура не в состоянии воспринимать всю поперечную силу ($Q_р$—$P_к$), передаваемую по наклонному сечению на критический блок. ($Q_р$—$P_к$) воспринимается одновременно поперечной арматурой ($Q_а$) и бетоном ($Q_В$). При этом роль $Q_В$ довольно большая. Для оболочек с поперечным армированием $Q_В$ больше, чем предельная поперечная сила ($Q_р$—$P_к$) аналогичных оболочек без поперечного армирования (кроме оболочек с относительно большой высотой бортовых элементов) (см. фиг. 5). Можно ожидать, что часть из $Q_В$ воспринимается в бортовых элементах благодаря шпоночной работе продольной арматуры.



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 5 даны приведенные величины Q_{BY} поперечной силы, передаваемой бетоном. Q_{BY} получена от Q_B при предположении, что последняя пропорционально связана с величинами δ и условного сопротивления бетона $\mathbf{R}_Y$. R_Y принята по [3] равной R_p (пунктирная линия) или $kR_p^{1/3}$, где $k=9$ $(кГ/см^2)^{2/3}$ (сплошная линия).

Заключение

Из проведенного экспериментального исследования вытекает следующее:

1. При наличии сильной продольной арматуры в бортовых

элементах цилиндрическая оболочка может разрушиться под равномерно распределенной нагрузкой по наклонным критическим трещинам на поперечную силу. Такое разрушение отличается от разрушения на изгибающий момент в середине пролета оболочки. Характер разрушения на поперечную силу оболочек с равномерно распределенной нагрузкой в общем похож на характер разрушения оболочек, загруженных поперечной полосовой нагрузкой (см. [1, 2]).

2. В изученных пределах форма критического блока не зависит от наличия поперечного армирования и от высоты бортовых элементов. Критические трещины начинаются недалеко от опорного сечения, и критическое сечение располагается в среднем на расстояние 0,18 l_1 от опорного сечения.

3. В наклонном сечении оболочки с поперечным армированием, определенном критическими трещинами, поперечная сила воспринимается поперечной арматурой и бетоном. Поперечная сила Q_B, воспринимаемая бетоном, соизмерима по величине с предельной поперечной силой соответствующей оболочки без поперечного армирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Отсмаа. Экспериментальное исследование предельного состояния железобетонных цилиндрических оболочек. Труды ТПИ, серия А, № 202, Таллин 1963.
2. В. А. Отсмаа. К расчету на поперечную силу длинных круглоцилиндрических железобетонных оболочек. Труды ТПИ, серия А, № 229, Таллин 1965.
3. В. А. Отсмаа. К расчету на поперечную силу длинных круглоцилиндрических железобетонных оболочек (сообщение 2). Труды ТПИ, серия А, № 269, Таллин 1969.

V. Otsmaa, H. Rohtmaa

Experimental Research of Reinforced Concrete Cylindrical Long Shell Roofs

Summary

The experimental exploration of seven reinforced concrete cylindrical long shell models are described and the following main results are represented:

1) a reinforced concrete long shell roof has two possible ways of crushing: bending moment crushing and shear crushing;

2) the general character of shear crushing does not depend on the height of the edge beams, nor on the existence of the shear reinforcement; 3) a great deal of the ultimate shear force of the long shell roof with shear reinforcement is resisted by concrete in the inclined section.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 296 1970

УДК 534.212

Л. Ю. Поверус, Р. К. Ряямет

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ТОЛСТОЙ ПЛАСТИНЕ

В последнее время замечается возрастающий интерес к проблемам распространения упругих волн в анизотропических средах. При изучении динамических процессов в некоторых кристаллах, в земной коре и в пластиках нельзя не учитывать анизотропности материала. Ниже отмечаются некоторые работы, которые по своей тематике близки к данной работе.

Э. Краут в своей статье [1] дает обзор о развитии проблемы распространения упругих волн в анизотропических материалах до 1963 г. Излагается и проблема Лэмба для трансверсально-изотропного упругого полупространства. Позже в работе [2] рассматривается также трансверсально-упругое полупространство, находящееся под воздействием внезапно приложенной точечной нагрузки. В качестве метода решения используется метод интегрального преобразования. Результаты решения реализуются в численном виде. Авторы работы [3] в своей статье используют точные уравнения и на их основе получают решения некоторых граничных задач для конкретных классов анизотропии. Г. Мартинчек [4] разрабатывает проблему распространения упругих волн напряжения в ортотропических плоских элементах, т. е. в состоянии плоской деформации или в плоском напряженном состоянии.

В настоящей работе производится исследование распространения упругих волн деформации в трансверсально-изотропной бесконечной толстой плите, которая находится под воздействием осесимметрической быстроменяющейся распределенной нагрузки. Ось симметрии нагрузки совпадает с осью анизотропии пластины. Для решения задачи применяются следующие точные уравнения движения пластины

$$
\begin{aligned}
&A_{11}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{\partial u_r}{r\partial r}-\frac{u_r}{r^2}\right)+A_{44}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}+\left(A_{13}+A_{44}\right)\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\
&A_{44}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{\partial u_z}{r\partial r}\right)+A_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\left(A_{13}+A_{44}\right)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z}+\frac{\partial u_r}{r\partial z}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

где u_z, u_r — составляющие перемещений точки в направлении нормали пластины и в радиальном направлении от оси пластины, ϱ — плотность материала и t — время, множители A_{ik} — коэффициенты следующих выражений (2) обобщенного закона Гука для трансверсально-упругого материала

$$\begin{aligned} \sigma_r &= A_{11}\varepsilon_r + A_{12}\varepsilon_\theta + A_{13}\varepsilon_z, \\ \sigma_\theta &= A_{12}\varepsilon_r + A_{22}\varepsilon_\theta + A_{23}\varepsilon_z, \\ \sigma_z &= A_{13}\varepsilon_r + A_{23}\varepsilon_\theta + A_{33}\varepsilon_z, \\ \tau_{rz} &= A_{44}\gamma_{rz}. \end{aligned} \tag{2}$$

Эти коэффициенты определяются формулами

$$\begin{aligned} &A_{11} = A_{22} = (a_{11}a_{33} - a_{13}^2)/B, \quad A_{12} = (a_{13}^2 - a_{12}a_{33})/B, \\ &A_{13} = A_{23} = a_{13}(a_{12} - a_{11})/B, \quad A_{33} = (a_{11}^2 - a_{12}^2)/B, \\ &A_{44} = 1/a_{44}, \quad B = (a_{11}^2 - a_{12}^2)a_{33} + 2(a_{12} - a_{11})\,a_{13}^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Множители в формулах (3) можно выражать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &a_{11} = 1/E', \quad a_{33} = 1/E, \quad a_{12} = -\nu'/E' \\ &a_{13} = -\nu/E, \quad a_{44} = 1/G, \end{aligned} \tag{4}$$

где E' и E — модули Юнга в плоскости изотропии и в направлении, перпендикулярном к ней, ν' — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в той же плоскости, ν — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в направлении, перпендикулярном к ней, G — модуль сдвига для плоскостей, нормальных к плоскости изотропии.

Уравнениям (1), если использовать безразмерные переменные

$$\begin{aligned} &\rho = r/h, \quad \zeta = z/h, \quad \tau = c_{1\zeta}\, t/h, \\ &u = u_r/h, \quad w = u_z/h \end{aligned} \tag{5}$$

и формулы (3) и (4), можно дать следующий вид

$$
\begin{aligned}
&\kappa_2^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}-\frac{u}{\rho^2}\right)+\kappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+\left(\frac{\kappa_1\nu}{1-\nu'}+\kappa^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\rho\,\partial\zeta}=\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \\
&\kappa^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}+\left(\frac{\kappa_1\nu}{1-\nu'}+\kappa^2\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\,\partial\zeta}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

в которых

$$
c_{1\zeta}=\sqrt{\frac{(1-\nu')E}{(1-\nu'-2\kappa_1\nu^2)\rho}}, \quad c_{1\rho}=\sqrt{\frac{(1-\kappa_1\nu^2)E'}{(1+\nu')(1-\nu'-2\kappa_1\nu^2)\rho}},
$$

$$
c_2=\sqrt{G/\rho}, \quad \kappa^2=c_2^2/c_{1\zeta}^2, \quad \kappa_1=E'/E. \tag{7}
$$

$$
\kappa_2^2=c_{1\rho}^2/c_{1\zeta}^2=\kappa_1(1-\kappa_1\nu^2)/(1-\nu'^2).
$$

Если использовать уравнения Коши, описывающие осесимметричную деформацию

$$
\varepsilon_r=\partial u_r/\partial r, \quad \varepsilon_\theta=u_r/r, \quad \varepsilon_z=\partial u_z/\partial z, \quad \gamma_{zr}=\partial u_z/\partial r+\partial u_r/\partial z \tag{8}
$$

и соотношения (3), (4), (5), тогда выражения для напряжений (2), умноженные еще множителем $(1-\nu'-2k_1\nu^2)/E'$, получают вид:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_\rho=\frac{1-\kappa_1\nu^2}{1+\nu'}\cdot\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{\nu'+\kappa_1\nu^2}{1+\nu'}\cdot\frac{u}{\rho}+\nu\frac{\partial w}{\partial \zeta}, \\
&\sigma_\theta=\frac{\nu'+\kappa_1\nu^2}{1+\nu'}\cdot\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1-\kappa_1\nu^2}{1+\nu'}\cdot\frac{u}{\rho}+\nu\frac{\partial w}{\partial \zeta}, \\
&\sigma_\zeta=\nu\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{u}{\rho}\right)+\frac{1-\nu'}{\kappa_1}\cdot\frac{\partial w}{\partial \zeta}, \\
&\tau_{\zeta\rho}=\frac{G}{E'}(1-\nu'-2\kappa_1\nu^2)\left(\frac{\partial w}{\partial \rho}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Представим условия, необходимые при решении системы (6), в случае нашей задачи.

А. На верхней поверхности ($\zeta=0$) удовлетворяются следующие условия

1. $\sigma_\zeta=f_i(\tau), \ (i=a, b, c)$ 2. $\tau_{\zeta\rho}=0$ (10)

при этом

$$f_a(\tau)=f(\tau), \qquad \text{при} \quad 0\leq\rho\leq\rho_1,$$
$$f_b(\tau)=f(\tau)(\rho_0-\rho)/(\rho_0-\rho_1), \qquad \text{при} \quad \rho_1\leq\rho\leq\rho_0, \tag{11}$$
$$f_c(\tau)=0, \qquad \text{при} \quad \rho_0\leq\rho.$$

Условия (10), выраженные в перемещениях, получают вид

$$1. \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{u}{\rho}\right)+\frac{1-\nu'}{K_1}\cdot\frac{\partial w}{\partial \zeta}=f_i(\tau), \quad (i=a,b,c).$$
$$2. \quad \frac{\partial w}{\partial \rho}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}=0. \tag{12}$$

В. На оси симметрии ($\varrho=0$) действительные условия:

1. $u=0$ 2. $\tau_{\zeta\rho}=0$

или выраженные в перемещениях

$$1. \ u=0 \qquad 2. \ \frac{\partial w}{\partial \varrho}=0 \tag{13}$$

С. На первом фронте перемещения равны нулю

$$1. \ u=0 \qquad 2. \ w=0 \tag{14}$$

Д. На нижней поверхности ($\zeta=1$ и $\tau>1$)

$$1. \ \sigma_\zeta=0 \qquad 2. \ \tau_{\zeta\rho}=0 \tag{15}$$

Уравнения движения (6) интегрируются конечно-разностным методом. Используется трехмерная сетка [5].

Безразмерные шаги в направлении ζ, ϱ, τ обозначим соответственно l_ζ, l_ρ, l_τ, при этом

$$l_\zeta=2l_\tau, \quad l_\rho=2l_\tau\cdot c_{1\rho}/c_{1\zeta}. \tag{16}$$

В примененном расчетном алгорифме существуют условные нечетные и четные слои, для которых отношение τ/l_τ выражается нечетным или четным числом. Внутренними точками сетки называются такие точки, которые не находятся на верхней поверхности пластины, не на оси симметрии или не являются точками, чередующими непосредственно фронту волны. Последние называются прифронтовыми точками. Расчет начинается от слоя $n=\tau/l_\tau=3$. На слоях $n=3$, $n=4$ нет внутренних точек. У всех следующих слоев имеются внутренние точки.

Представляем в следующем расчетные формулы для метода сеток.

1. Для внутренних точек получаются расчетные формулы, если в дифференциальных уравнениях (6) производные заменяются разностными отношениями в первом приближении. Точки обозначены следующим образом:

$$\rho = i l_\rho \quad \text{и} \quad \zeta = j l_\zeta ,$$

а перемещения в этих точках обозначаются u_{ijn}, w_{ijn}. Формулы для внутренних точек имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
u_{ijn} &= 2u_{ij,n-1} - u_{ij,n-2} + K^2 \frac{l_\tau^2}{l_\zeta^2}\left(u_{i,j+1,n-1} - 2u_{ij,n-1} + u_{i,j-1,n-1}\right) + \\
&+ K_2^2 \frac{l_\tau^2}{l_\rho^2}\left(u_{i+1,j,n-1} - 2u_{ij,n-1} + u_{i-1,j,n-1}\right) + \frac{1}{2} K_2^2 \frac{l_\tau^2}{l_\rho} \frac{1}{\rho_{ij}}\left(u_{i+1,j,n-1} - \right. \\
&\left. - u_{i-1,j,n-1}\right) - K_2^2 \frac{l_\tau^2}{\rho_{ij}^2} u_{ij,n-1} + \frac{1}{4}\left(\frac{\nu K_1}{1-\nu} + K^2\right) \frac{l_\tau^2}{l_\zeta l_\rho}\left(w_{i+1,j+1,n-1} - \right. \\
&\left. - w_{i-1,j+1,n-1} - w_{i+1,j-1,n-1} + w_{i-1,j-1,n-1}\right), \\
w_{ijn} &= 2w_{ij,n-1} - w_{ij,n-2} + \frac{l_\tau^2}{l_\zeta^2}\left(w_{i,j+1,n-1} - 2w_{ij,n-1} + w_{i,j-1,n-1}\right) + K^2 \frac{l_\tau^2}{l_\rho^2} \times \\
&\times \left(w_{i+1,j,n-1} - 2w_{ij,n-1} + w_{i-1,j,n-1}\right) + \frac{1}{2} \frac{K^2}{\rho_{ij}} \cdot \frac{l_\tau^2}{l_\rho}\left(w_{i+1,j,n-1} - w_{i-1,j,n-1}\right) + \\
&+ \frac{1}{4}\left(\frac{\nu K_1}{1-\nu} + K^2\right) \frac{l_\tau^2}{l_\zeta l_\rho}\left(u_{i+1,j+1,n-1} - u_{i-1,j+1,n-1} - u_{i+1,j-1,n-1} + \right. \\
&\left. + u_{i-1,j-1,n-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\nu K_1}{1-\nu} + K^2\right) \frac{l_\tau^2}{l_\zeta} \cdot \frac{1}{\rho_{ij}}\left(u_{i,j+1,n-1} - u_{i,j-1,n-1}\right).
\end{aligned} \tag{17}$$

2. На первом фронте перемещения равны нулю:

$$1.\ u = 0 \qquad 2.\ w = 0 \tag{18}$$

3. Под нагрузкой $\varrho \leqslant \varrho_0$ и в прифронтовых точках рассчитываются перемещения u, w при помощи конченоразностных уравнений, в которых производные по переменной ξ заменяются односторонними соотношениями по трем точкам:

а) на нечетных слоях

$$w\left(\zeta = \tau - \tfrac{1}{2} l_\zeta, \rho, \tau\right) = \frac{1}{9} w\left(\zeta = \tau - \tfrac{3}{2} l_\zeta, \rho, \tau\right) - \frac{l_\zeta}{3} \frac{\partial w}{\partial \zeta}\left(\zeta = \tau, \rho, \tau\right); \tag{19}$$

в) на четных слоях

$$w\left(\zeta=\tau-l_\zeta,\rho,\tau\right)=\frac{1}{4}w\left(\zeta=\tau-2l_\zeta,\rho,\tau\right)-\frac{l_\zeta}{2}\frac{\partial w}{\partial\zeta}\left(\zeta=\tau,\rho,\tau\right). \quad (20)$$

Перемещения u рассчитываются при помощи аналогичных формул. В формулах (19), (20) последние члены приравниваются нулю, так как предполагается, что внешняя нагрузка изменяется во времени плавно. Перемещения в прифронтовых точках у криволинейной части фронта ($\varrho \geqslant \varrho_0$) рассчитываются с переменным шагом при помощи односторонних соотношений с тремя точками. Около прямолинейного участка фронта в направлении ζ и близко к верхней поверхности в направлении ϱ расчет производится с переменным шагом.

4. На оси симметрии ($\varrho=0$) вычисляются перемещения на основе условий (13)

$$1.\quad u_{0jn}=0 \qquad 2.\quad w_{0jn}=\frac{4}{3}w_{1jn}-\frac{1}{3}w_{2jn}. \quad (21)$$

5. На верхней поверхности пластины ($\zeta=0$) вычисляются перемещения на основе условий (12), в которых производные заменяются конечно-разностными соотношениями. Учитывая еще условия на фронте (14) и на оси симметрии (21), получаем такое количество уравнений, сколько имеется неизвестных. Эту систему уравнений можно решить при помощи рекурентных формул аналогично работе [6].

6. На нижней поверхности пластины.

Если $\tau<1$, тогда фронт не успел распространяться до нижней поверхности.

При $\tau=1$, то есть $n=40$, на фронте $j=20$ и $i=0, 1, 2\ldots \frac{\varrho_0}{l_\rho}$ перемещения равны нулю

$$1.\quad u_{i,20,40}=0, \qquad 2.\quad w_{i,20,40}=0 \quad (22)$$

В случае $n>40$ условия на нижней поверхности следующие

а) на оси симметрии

$$1.\quad u_{0,20,n}=0,\quad 2.\quad w_{0,20,n}=\frac{4}{3}w_{1,20,n}-\frac{1}{3}w_{2,20,n}; \quad (23)$$

в) на фронте

$$1.\quad u=0 \qquad 2.\quad w=0. \quad (24)$$

На нижней поверхности пластины, если $\tau>1$, расстояние фронта от оси симметрии определяется формулой

$$\rho=l_\rho(i+\beta), \quad (25)$$

где $\beta<1$, i целое число u

$$i+\beta=\frac{\rho_0}{l_\rho}+\frac{l_\zeta}{l_\rho}\sqrt{\left(\frac{l_\tau}{l_\zeta}n\right)^2-20^2} \tag{26}$$

с) в прифронтовой точке

1. $$u_{i,20,n}=\left(\frac{\beta_{i,20,n}}{1+\beta_{i,20,n}}\right)^2 u_{i-1,20,n} \tag{27}$$

2. $$w_{i,20,n}=\left(\frac{\beta_{i,20,n}}{1+\beta_{i,20,n}}\right)^2 w_{i-1,20,n} \tag{28}$$

г) в точках

$$i=1,2,3\ldots\left(\frac{l_0}{l_\rho}+\frac{l_\zeta}{l_\rho}\sqrt{\left(\frac{l_\tau}{l_\rho}n\right)^2-20^2}-\beta-1\right)$$

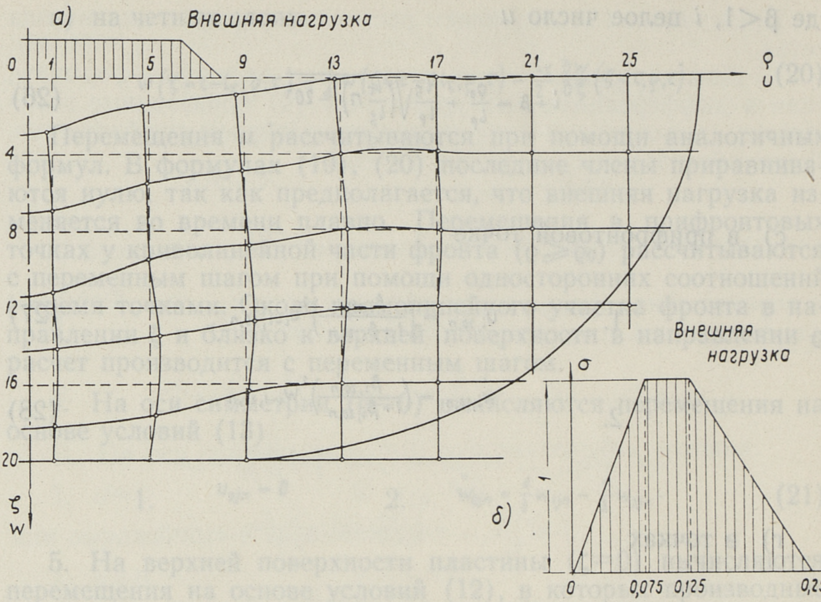
действительные следующие условия:

1. $$\frac{1-\nu'}{2K_1 l_\zeta}\left(3w_{i,20,n}-4w_{i,19,n}+w_{i,18,n}\right)+ \\ +\frac{\nu}{2l_\rho}\left(u_{i+1,20,n}-u_{i-1,20,n}\right)+\frac{\nu}{\rho_{i\rho}}u_{i,20,n}=0 \tag{29}$$

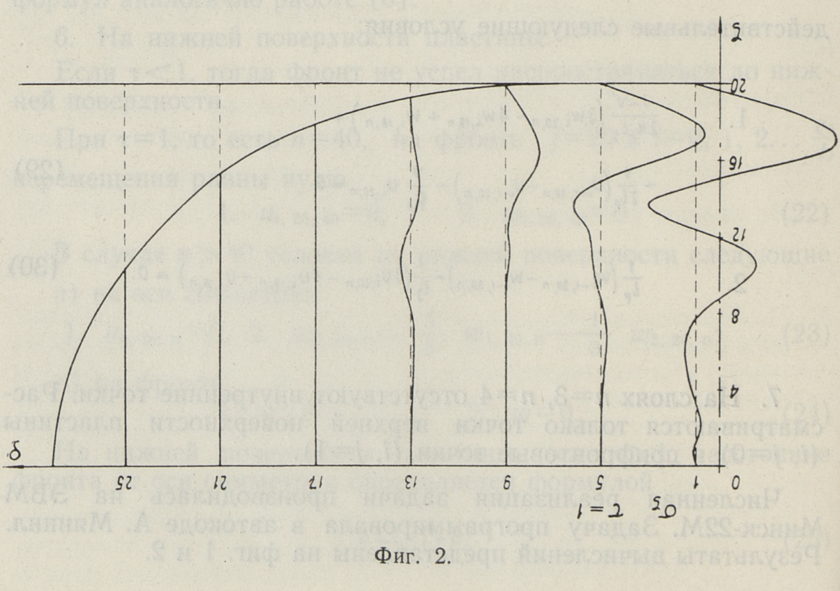
2. $$\frac{1}{l_\rho}\left(w_{i+1,20,n}-w_{i-1,20,n}\right)+\frac{1}{l_\zeta}\left(3u_{i,20,n}-4u_{i,19,n}+u_{i,18,n}\right)=0. \tag{30}$$

7. На слоях $n=3$, $n=4$ отсутствуют внутренние точки. Рассматриваются только точки верхней поверхности пластины $(i, j=0)$ и прифронтовые точки $(i, j=1)$.

Численная реализация задачи производилась на ЭВМ Минск-22М. Задачу программировала в автокоде А. Мяннил. Результаты вычислений представлены на фиг. 1 и 2.


а)
Внешняя нагрузка
0
1
5
9
13
17
21
25
φ
u
4
8
12
16
20
ζ
w
Внешняя нагрузка
σ
1
б)
τ
0
0,075
0,125
0,25

Фиг. 1


δ
25
21
17
13
9
5
1
0
4
8
12
16
20
τ = 1

Фиг. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kraut, Edgar A. Advances in the theory of Anisotropic Elastic Wave Propagation. Rev. of Geo. Phys., Vol. 1., № 3 Aug. 1963.
2. Cameron, N. and Eason, G., Wave Propagation in an Infinite Transversely Isotropic Elastic Solid. Quart. J. Mech. appl. Math., 20, Pt. I 1967.
3. Scott, R. A., Miklowitz, J. Transient Elastic Waves in Anisotropic Plates. Journ. of Appl. Mech № 3 1967.
4. Martinček, G. Širenie vln napatia v ortotropnych polšnych prokoch. Stavebnicky časopis sav XVI, 4 1968. Bratislava.
5. Нигул У. О методах и результатах анализа переходных волновых процессов изгиба упругой плиты. Известия АН ЭССР ,серия физ.-мат. и техн. наук. 1965, № 3.
6. Мяннил А. Программа метода трехмерных сеток для анализа переходного волнового процесса деформации плиты. Изв. АН ЭССР, серия физ.-мат. и техн. наук. 1965, № 3.

L. Poverus, R. Räämet

Fortpflanzung von elastischen Wellen in einer transversalisotropen dicken Platte

Zusammenfassung

Vorliegende Arbeit befasst sich mit der Fortpflanzung von elastischen Wellen in einer transversalisotropen dicken unendlichen Platte, infolge einer sich schnell ändernden Ladung. Die genauen Bewegungsgleichungen werden durch dreidimensionale Differenzgleichungen ersetzt und endliche numerische Resultate mit Hilfe einer elektronischen Rechenanlage erreicht.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 296 1970

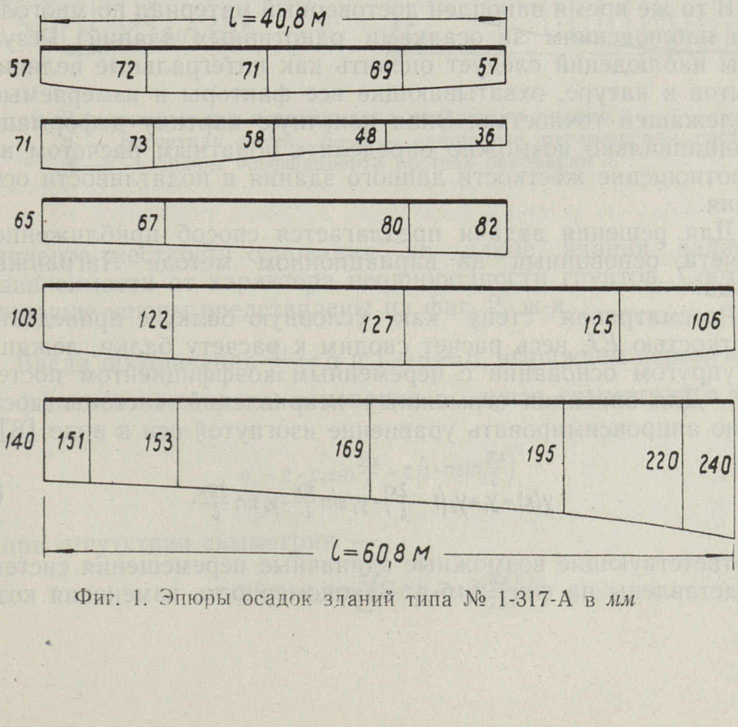
УДК 624.159.I.001.24
624.159.5.012.2

Э. Ю. Соонурм

К РАСЧЕТУ ЖИЛЫХ ЗДАНИЙ НА НЕРАВНОМЕРНЫЕ ОСАДКИ ОСНОВАНИЯ

Испытания грунтов пробными нагрузками показывают, что даже в том случае, если в основании залегают грунты с выдержанными по горизонтали напластованиями при отсутствии в них включений, прослоек и других аномалий, наблюдается значительная изменчивость сжимаемости грунтов. Такая же картина повторяется при оседании зданий. При наблюдении за осадками зданий в природе очень редко встречаются равномерные деформации даже в случае однородных грунтов. Особенно типично это встречается на территории распространения эстонских слабых глинистых грунтов.

На фиг. 1 приведены эпюры осадок типовых четырехэтажных кирпичных и крупноблочных жилых зданий (тип № I-317-А



Фиг. 1. Эпюры осадок зданий типа № 1-317-А в *мм*

1960 г.). Как видно, эпюры отличаются характером и величиной абсолютных или относительных осадок. Хотя эпюры не выражают стабилизованных осадок (измеренные лишь в течение 5—6 лет), характер искривления зданий все-таки явно заметен.

Причин неравномерного оседания зданий много, и они достаточно рассмотрены в литературе [1, 2, 3]. При создании расчетных схем деформирующих зданий оказалось, что основные факторы, обусловливающие неравномерные осадки основания, будут достаточно учтены, если принять винклеровскую модель основания с переменным коэффициентом постели по длине здания. Такая идея уже имелась в самой приближенной расчетной схеме совместной работы системы «здание—основание», предложенной Б. И. Далматовым [1], а затем была развита Д. Д. Сергеевым [4], П. П. Шагиным [5], Б. А. Косицыным [6], Д. Н. Соболевым [7] и др.

Очевидно, что при расчете на неравномерные осадки конструкций здания распределение реактивного отпора по подошве фундамента не зависит только от изменчивости коэффициента жесткости основания в горизонтальном направлении, но в бо́льшей мере и от приведенной жесткости самого здания.

Если оценка жесткостных характеристик основания довольно сложная, то определение истинного значения жесткости кирпичной стены окажется по нашему мнению почти невозможным, по крайней мере при проектировании.

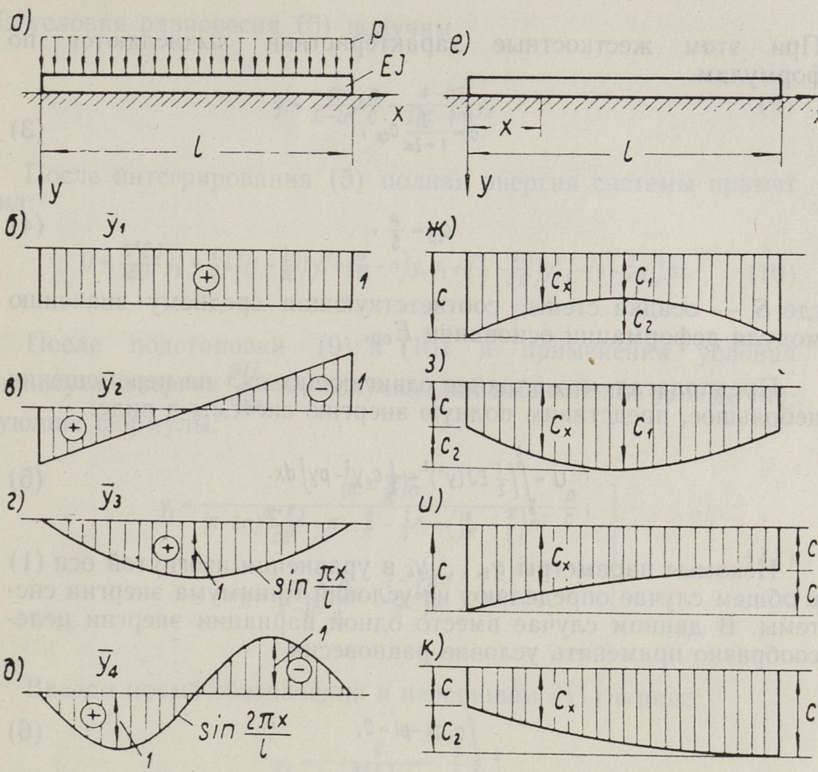
В то же время накоплен достоверный материал по многолетним наблюдениям за осадками однотипных зданий. Результаты наблюдений следует оценить как интегральные величины опытов в натуре, охватывающие все факторы и измеряемые с надлежащей точностью. Зная конечную картину доформаций, принципиально возможно определить обратным расчетом взаимоотношение жесткости данного здания и податливости основания.

Для решения задачи предлагается способ приближенного расчета, основанный на вариационном методе Лагранжа—Ритца.

Рассматривая стену как условную балку с приведенной жесткостью EJ, весь расчет сводим к расчету балки, лежащей на упругом основании с переменным коэффициентом постели $c(x)$. Для описания возможных искривлений системы достаточно аппроксимировать уравнение изогнутой оси в виде [8]

$$y(x) = y_1 + y_2\left(1 - \frac{2x}{l}\right) + y_3 \sin\frac{\pi x}{l} + y_4 \sin\frac{2\pi x}{l}. \tag{1}$$

Соответствующие возможные единичные перемещения системы представлены на фиг. 2, б-д. Закономерность изменения коэф-



Фиг. 2. Расчетная схема неравномерно оседаемого здания.
а — расчетная схема; *б—д* — единичные перемещения системы; *ж—к* — эпюры коэффициента постели основания

фициента жесткости основания по длине здания задается в зависимости от характера неоднородности грунтов. Соответствующие эпюры представлены на фиг. 2, ж-к.

Введя обозначения $\frac{c_1}{c} = \alpha$ и $1 - \alpha = n$, выражаем переменный коэффициент жесткости основания в случае симметрии в виде

$$c_x = c - c_2 \sin\frac{\pi x}{l} = c\left(1 - n\sin\frac{\pi x}{l}\right) \tag{1}$$

и при отсутствии симметрии —

$$c_x = c - c_2 \sin\frac{\pi x}{2l} = c\left(1 - n\sin\frac{\pi x}{2l}\right). \tag{2}$$

При этом жесткостные характеристики вычисляются по формулам

$$c = \frac{3}{1+2\alpha} c_{cp}, \tag{3}$$

$$c_{cp} = \frac{p}{S}, \tag{4}$$

где S — осадка стены, соответствующая среднему значению модуля деформации основания $E_{\text{ср}}$.

Предполагая, что влияние сдвигающих сил на перемещения небольшое, представим полную энергию системы в виде:

$$U = \int_0^l \left[\frac{1}{2} EJ(y'')^2 + \frac{1}{2} c_x y^2 - py\right] dx. \tag{5}$$

Искомые параметры $y_1, \ldots y_4$ в уравнении изогнутой оси (1) в общем случае определяют из условий минимума энергии системы. В данном случае вместо одной вариации энергии целесообразно применять условие равновесия

$$\int_0^l q_x dx - pl = 0, \tag{6}$$

где $q_x = c_x y$ — реактивный отпор основания.

Уравнение (6) позволяет выразить один искомый параметр через другие. В таком случае число канонических уравнений, полученных из условий минимума энергии, понизится на одно.

В качестве примера рассмотрим ход расчета в случае наиболее часто встречающегося прогиба зданий. Вследствие симметрии в уравнении (1) $y_2 = y_4 = 0$ и $y(x)$ аппроксимируем в виде

$$y(x) = y_1 + y_3 \sin\frac{\pi x}{l} \tag{7}$$

Этому случаю соответствует закон изменения c_x по (2) при $\alpha < 1$ (фиг. 2, *ж*).

Реактивный отпор основания выражается

$$q_x = c_x y = c\left(1 - n\sin\frac{\pi x}{l}\right)\left(y_1 + y_3 \sin\frac{\pi x}{l}\right). \tag{8}$$

Из условия равновесия (6) получим

$$y_1 = \frac{\pi}{\pi-2n}\cdot\frac{p}{c} - \frac{4-n\pi}{2(\pi-2n)}y_3. \tag{9}$$

После интегрирования (5) полная энергия системы примет вид:

$$U = \frac{\pi^4 EJ}{4l^3}y_3^2 + \frac{c}{2}l\left[\left(1-\frac{2n}{\pi}\right)y_1^2 + \left(\frac{4}{\pi}-n\right)y_1 y_3 + \left(\frac{1}{2}-\frac{4n}{3\pi}\right)y_3^2\right] - \left(y_1 + \frac{2}{\pi}y_3\right)pl. \tag{10}$$

После подстановки (9) в (10) и применения условия минимума энергии $\frac{\partial U}{\partial y_3}=0$, получим для вычисления y_3 и y_1 следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} y_3 &= \frac{\left(\pi-\frac{8}{\pi}\right)n}{(\pi-2n)\frac{\pi^4 EJ}{cl^4} + \pi - \frac{8}{\pi} - \frac{2}{3}n + \left(\frac{16}{3\pi}-\frac{\pi}{2}\right)n^2}\cdot\frac{p}{c}; \\ y_1 &= \frac{\pi}{\pi-2n}\cdot\frac{p}{c} - \frac{2-\frac{1}{2}\pi n}{\pi-2n}y_3. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Введем новые обозначения и перепишем (11) в виде:

$$\left.\begin{aligned} y_3 &= \frac{a_1}{a_2\frac{\pi^4 EJ}{cl^4} + a_3}\cdot\frac{p}{c}; \\ y_1 &= b_1\cdot\frac{p}{c} - b_2 y_3 \end{aligned}\right\} \tag{11'}$$

Значения коэффициентов a_1, a_2, a_3, b_1 и b_2 при различных значениях α и n приведены в таблице 1.

Таблица 1

α	n	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2
0,3	0,7	0,4166	1,7416	0,1905	1,8037	0,5168
0,4	0,6	0,3571	1,9416	0,2407	1,6179	0,5443
0,5	0,5	0,2976	2,1416	0,2935	1,4669	0,5670
0,6	0,4	0,2380	2,3416	0,3487	1,3416	0,5857
0,7	0,3	0,1785	2,5416	0,4065	1,2360	0,6015
0,8	0,2	0,1190	2,7416	0,4669	1,1459	0,6149
0,9	0,1	0,0595	2,9416	0,5297	1,0680	0,6264

Ординаты эпюр изгибающих моментов и поперечных сил определяются по эпюрам реактивного отпора q_x и внешней нагрузки p обычными приемами:

$$Q_x=\left\{\left[\frac{x}{l}+\frac{n}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{l}-1\right)\right]y_1^*+\left[\frac{1}{\pi}\left(1-\cos\frac{\pi x}{l}\right)-\frac{n}{2}\cdot\frac{x}{l}+\frac{n}{4\pi}\sin\frac{2\pi x}{l}\right]y_3^*-\frac{x}{l}\right\}pl; \tag{12}$$

$$\begin{aligned}M_x=\Big\{&\left[\frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}-\frac{n}{\pi}\frac{x}{l}+\frac{n}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{l}\right]y_1^*+\Big[-\frac{n}{4}\frac{x^2}{l^2}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x}{l}-\\&-\frac{1}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{n}{8\pi^2}\left(\cos\frac{2\pi x}{l}-1\right)\Big]y_3^*-\frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}\Big\}pl^2,\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$y_1^*=y_1\cdot\frac{c}{p}\quad \text{и}\quad y_3^*=y_3\cdot\frac{c}{p}.$$

Максимальный изгибающий момент в середине стены $(x=\frac{l}{2})$:

$$\text{макс}\,M=\left[\left(\frac{1}{8}-\frac{n}{2\pi}+\frac{n}{\pi^2}\right)y_1^*+\left(\frac{1}{2\pi}-\frac{1}{\pi^2}-\frac{n}{16}+\frac{n}{4\pi^2}\right)y_3^*-\frac{1}{8}\right]pl^2$$

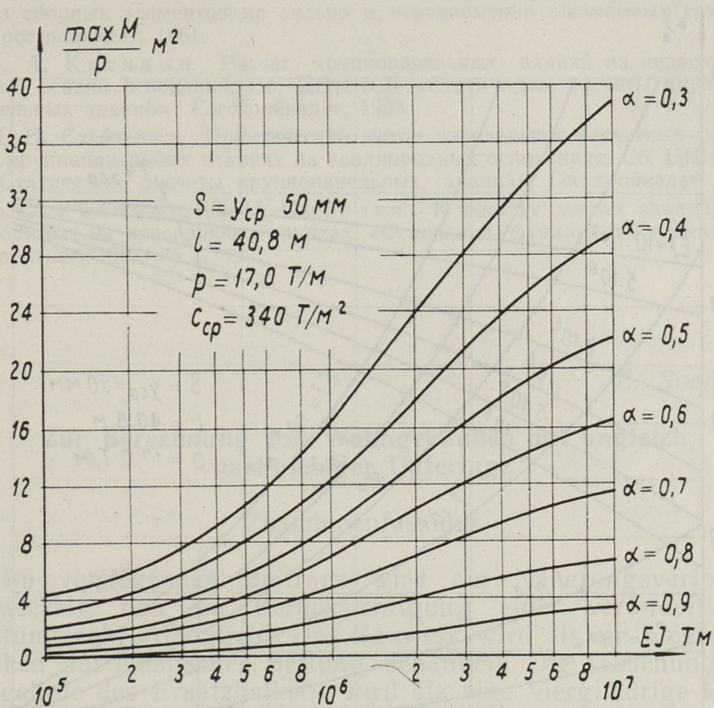
или

$$\text{макс}\,M=\left(d_1y_1^*+d_2y_3^*-\frac{1}{8}\right)pl^2. \tag{14}$$

Значения коэффициентов d_1 и d_2 приведены в таблице 2.

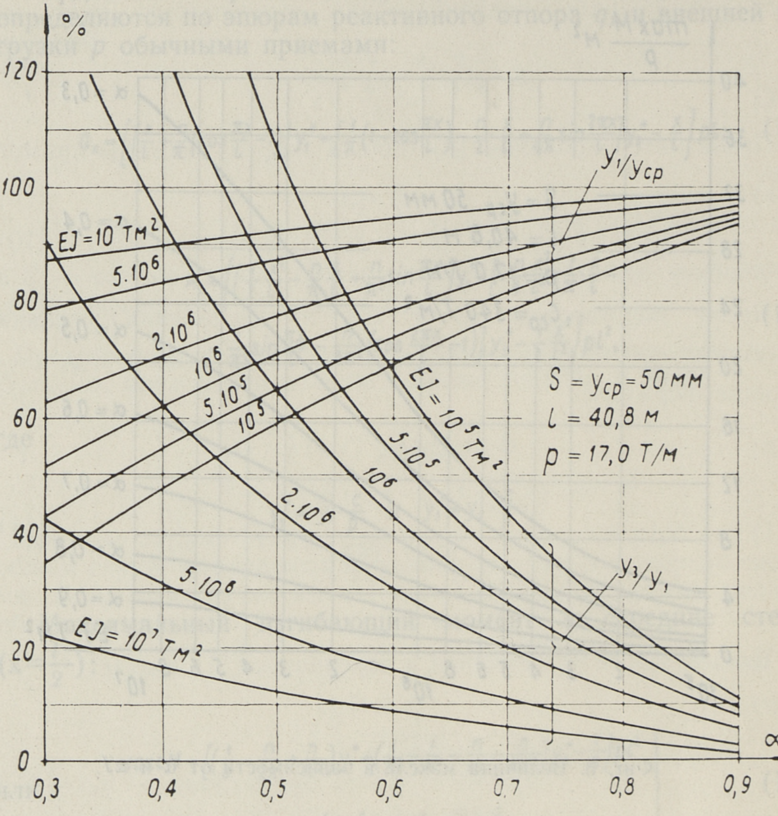
Таблица 2

α	n	d_1	d_2
0,3	0,7	0,0845	0,0318
0,4	0,6	0,0903	0,0355
0,5	0,5	0,0961	0.0392
0,6	0,4	0.1019	0,0429
0,7	0,3	0.1077	0,0466
0,8	0,2	0,1133	0.0503
0,9	0,1	0.1191	0.0540



Фиг. 3. Величина максM в зависимости от α и EJ.

На основе полученных формул (11) и (14) рассчитано двухсекционное четырехэтажное кирпичное здание длиной 40,8 *м* (тип № 1-317-А) в предположении, что средняя осадка после завершения строительства $S = y_{ср} = y_1 + \frac{2}{3} y_3 = 50$ *мм*. Из фиг. 3 явствует, в какой мере, при прочих равных условиях, влияют величина приведенной жесткости стены EJ и коэффициент изменчивости сжимаемости основания α на величину максимального изгибающего момента. На фиг. 4 представлены процентные соотношения $y_1/y_{ср}$ и y_3/y_1 при разных значениях α и EJ. При помощи подобных диаграмм оказывается возможным определить по измеренным в натуре осадкам также и жесткостные характеристики системы.



Фиг. 4. Значения y_1/y_{cp} и y_3/y_1 при разных α и EJ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Д. Васильев. Возведение капитальных зданий на сильно сжимаемых основаниях. Госстройиздат, 1952.
2. В. И. Лишак. Некоторые вопросы расчета конструкций крупнопанельных зданий на неравномерные осадки оснований. Сб. статей «Работа конструкций жилых зданий из крупноразмерных элементов». Госстройиздат, 1963.
3. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. «Основания и фундаменты». Гл. XIV. Стройиздат, 1964.
4. Б. Д. Васильев, Ю. Б. Монфред, В. П. Шипков. Фундаменты сборной конструкции. Госстройиздат, 1953.

5. П. П. Шагин. Прочность и устойчивость бескаркасных жилых зданий из сборных элементов на сильно и неравномерно сжимаемых грунтах. Госстройиздат, 1961.
6. Б. А. Косицын. Расчет крупнопанельных зданий на неравномерные осадки оснований. Сб. ЦНИИСК «Статические расчеты крупнопанельных зданий». Госстройиздат, 1963.
7. Д. Н. Соболев. Практический метод определения расчетных усилий в крупнопанельных зданиях на неоднородных основаниях. Сб. ЦНИИСК «Статические расчеты крупнопанельных зданий». Госстройиздат, 1963.
8. Б. А. Косицын, Д. Н. Соболев. К расчету жилых зданий, возводимых на просадочных грунтах. «Основания, фундаменты и механика грунтов», 1967, № 1.

E. Soonurm

Zur Berechnung von Wohngebäuden auf ungleich nachgiebiger Unterlage

Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrage wird ein Näherungsverfahren entwickelt, das die Berücksichtigung einer veränderlichen Bettungszahl ermöglicht. Das Bauwerk wird als ein biegsamer Balken auf elastischer Bettung behandelt. Die Gleichung der Biegelinie des Ersatzbalkens wird als eine viergliedrige Reihe approximiert. Zur Ermittlung der noch unbekannten vier Konstanten der Reihe wird die Variationsmethode Lagrange-Ritz benutzt. Die Formeln zur Bestimmung von Verschiebungen und Schnittkräften des Gebäudes bei einer symmetrischen Durchbiegung werden in Form gegeben, die eine einfache Benutzung des Verfahrens gestattet.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 296 1970

УДК.621.031

А. А. Сумбак

РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫМИ КОЛЬЦЕВЫМИ ОПОРНЫМИ ПЛИТАМИ

Введение

По эксплуатационным и архитектурным соображениям опорные кольца оболочек вращения довольно часто оформлены в виде кольцевых плит. По сравнению с обычными, плиточные опорные кольца имеют повышенную жесткость на растяжение, благодаря которой значительно уменьшаются краевые эффекты в районе опорного кольца. В случае необходимости опорные кольца могут быть подвергнуты также предварительному напряжению.

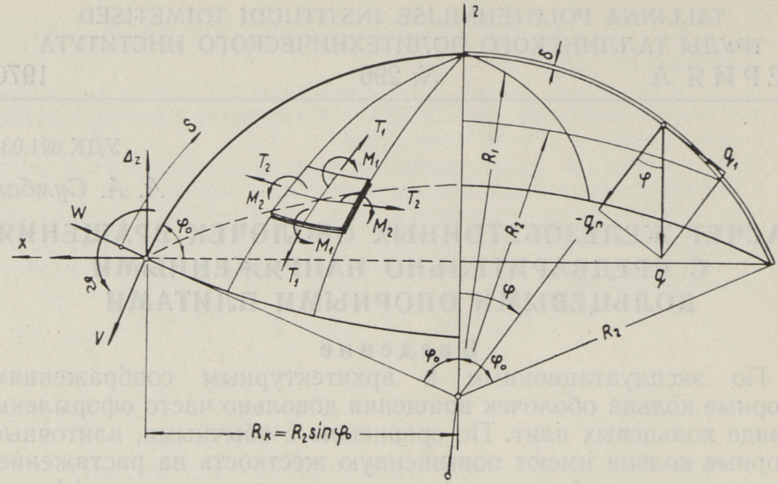
В настоящей статье изложен практический метод расчета оболочек вращения с предварительно напряженными кольцевыми опорными плитами. Метод также применим при расчете оболочек без предварительного напряжения.

1. Расчетная схема

Рассматривается оболочка вращения (фиг. 1) с предварительно напряженной опорной кольцевой плитой (фиг. 2).

Основные усилия и перемещения оболочки могут быть выражены формулами, изложенными В. В. Новожиловым [1]

$$\begin{aligned}
M_1 &= \left[M_0\sqrt{2}\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2R_2c}\,\sin\varphi_0\,(Q_{x0}-Q^*_{x0})\sin\beta\right]e^{-\beta},\\
M_2 &\approx \nu M_1,\\
T_1 &= \left[\cos\varphi_0\,(Q_{x0}-Q^*_{x0})\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)+M_0\sqrt{\frac{2}{R_2c}}\,\mathrm{ctg}\,\varphi_0\sin\beta\right]e^{-\beta}+T_1^*,\\
T_2 &= \left[\sqrt{\frac{2R_2}{c}}\sin\varphi_0\,(Q_{x0}-Q^*_{x0})\cos\beta-\frac{\sqrt{2}M_0}{c}\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\right]e^{-\beta}+T_2^*, \qquad (1)\\
w &= \frac{R_2\sqrt{2}}{E\delta}\left[\frac{R_2}{c}\sin\varphi_0\,(Q_{x0}-Q^*_{x0})\cos\beta-\frac{M_0}{c}\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\right]e^{-\beta}+w^*,\\
\Delta_x &= \frac{R_2\sqrt{2}}{E\delta}\sin\varphi\left[\sqrt{\frac{R_2}{c}}(Q_{x0}-Q^*_{x0})\sin\varphi_0\cos\beta-\frac{M_0}{c}\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\right]e^{-\beta}+\Delta_x^*,\\
\vartheta &= -\frac{1}{E\delta}\sqrt{\frac{2R_2}{c}}\left[\sqrt{\frac{R_2}{c}}\sin\varphi_0\,(Q_{x0}-Q^*_{x0})\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{c}M_0\cos\beta\right]e^{-\beta}+\vartheta^*,
\end{aligned}$$

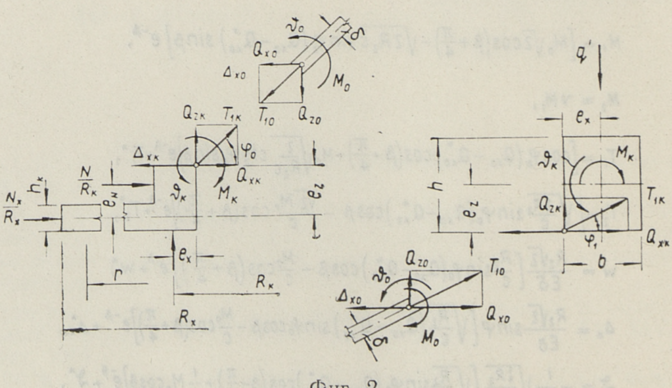


Фиг. 1

где
$$c = \frac{\delta}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}, \quad \beta = \frac{s}{\sqrt{2R_{20}c}}, \quad Q^*_{x0} = T^*_1 \cos\varphi_0 . \tag{2}$$

В формулах (1) и (2) звездочками обозначены усилия и перемещения безмоментной теории оболочек.

Неопределенные в формулах (1) величины Q_{x0} и M_0 определяем из контактных задач на линии примыкания оболочки к опорной плите или к фонарному кольцу (фиг. 2).



Фиг. 2

Соответственно фиг. 2 имеем на контактной линии оболочки у опорной плиты:

$$\Delta_{xк} = \Delta_{x0}, \quad \vartheta_к = \vartheta_0, \quad Q_{xк} = Q_{x0}, \quad M_к = M_0 \tag{3}$$

и у фонарного кольца:

$$\Delta_{xк} = \Delta_{x0}, \quad \vartheta_к = \vartheta_0, \quad Q_{xк} = -Q_{x0}, \quad M_к = -M_0. \tag{4}$$

Перемещение Δ_{x0} и угол поворота ϑ_0 нижнего, а также верхнего края оболочки выражаются формулами (5)

$$\begin{aligned} \Delta_{x0} &= \alpha_{11} Q_{x0} + \alpha_{12} M_0 - \alpha_{11} Q^*_{x0} + \Delta^*_{x0}, \\ \vartheta_0 &= \alpha_{21} Q_{x0} + \alpha_{22} M_0 - \alpha_{21} Q^*_{x0} + \vartheta^*_0, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= к \frac{2\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{E} \left(\frac{R_{20}}{\delta}\right)^{3/2} \sin^2\varphi_0, \\ \alpha_{12} &= \alpha_{21} = -\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{E\delta^2} R_{20} \sin\varphi_0, \\ \alpha_{22} &= к \frac{4[3(1-\nu^2)]^{3/4}}{E\delta^2} \sqrt{\frac{R_{20}}{\delta}}. \end{aligned} \tag{6}$$

В формулах (6) $к=1$ принимается для нижнего и $к=-1$ для верхнего края оболочки. R_{20} — значение радиуса R_2 у опорной плиты ($\varphi=\varphi_0$); для верхнего края оболочки в формулах (6) следует принять соответственно R_{21} и φ_1 (фиг. 3).

Для предварительно напряженной опорной плиты имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_{xк} &= -\frac{R_к(R_x^2+R_к^2)}{E_к h_к (R_x^2-R_к^2)} \left(Q_{xк} + \frac{N}{R_к}\right) - \frac{2R_к R_x}{E_к h_к (R_x^2-R_к^2)} N_x, \\ \vartheta_к &= \frac{12R_к(R_к^2+R_x^2)}{E_к h_к^3 (R_к^2-R_x^2)} \left(M_к \pm \frac{N}{R_к} e_N + Q_{xк} e_z - T^*_{1к} e_x \sin\varphi_0\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Для фонарного кольца аналогично:

$$\Delta_{xк} = -\frac{R_к^2}{E_к b h} Q_{xк},$$

$$\vartheta_к = \frac{12 R_к^2}{E_к b h^3}\left(M_к - Q_{xк} e_2 + T_{1к}^* e_x \sin\varphi_1\right). \tag{8}$$

В формулах (6), (7) и (8)

N и N_x — усилия в напрягаемой арматуре у внутреннего и внешнего края опорной плиты;

E и $E_к$ — модули упругости оболочки и опорной плиты;

ν — коэффициент Пуассона.

В случае необходимости обеспечения безмоментного напряженного состояния оболочки у опорной плиты величину силы предварительного напряжения можно определить из условия

$$\Delta_{xк} = \Delta_{x0}^*. \tag{9}$$

Из условия (9) для случая применения предварительного напряжения соответственно у внутреннего или у внешнего края плиты следует:

$$N = -R_к T_{10}^* \cos\varphi_0 - \frac{R_к E_к h_к}{E\delta}\left(T_{20}^* - \nu T_{10}^*\right)\frac{R_x^2 - R_к^2}{R_x^2 + R_к^2}, \tag{10а}$$

$$N_x = -\frac{E_к}{2R_x}\left(R_x^2 + R_к^2\right) T_{10}^* \cos\varphi_0 - \frac{h_к}{E\delta}\left(T_{20}^* - \nu T_{10}^*\right)\left(R_x^2 - R_к^2\right). \tag{10б}$$

Усилия в опорной плите выражаются формулами (11)

$$T_1 = \frac{R_к^2 p_1 - R_x^2 p_2}{R_x^2 - R_к^2} - \frac{R_к^2 R_x^2 (p_1 - p_2)}{r^2 (R_x^2 - R_к^2)},$$

$$T_2 = \frac{R_к^2 p_1 - R_x^2 p_2}{R_x^2 - R_к^2} + \frac{R_к^2 R_x^2 (p_1 - p_2)}{r^4 (R_x^2 - R_x^2)}, \tag{11}$$

где

$$p_1 = -Q_{x0} - \frac{N}{R_к}, \quad p_2 = \frac{N_x}{R_x}. \tag{12}$$

Для определения безмоментных усилий в оболочке (фиг. 1) имеем:

$$T_1^* = -\frac{q}{R_2 \sin^2\varphi_0}\int_0^{\varphi} R_1 R_2 \sin\varphi\, d\varphi,$$

$$T_2^* = -q R_2 \cos\varphi + \frac{q}{R_1 \sin^2\varphi_0}\int_0^{\varphi} R_1 R_2 \sin\varphi\, d\varphi. \qquad (13)$$

Для широко распространенных в практике сферических оболочек:

а) без отверстия в коньке

$$T_1^* = -\frac{qR}{1+\cos\varphi},$$

$$T_2^* = -qR\left(\cos\varphi - \frac{1}{1+\cos\varphi}\right). \qquad (14)$$

б) с фонарным отверстием (фиг. 3)

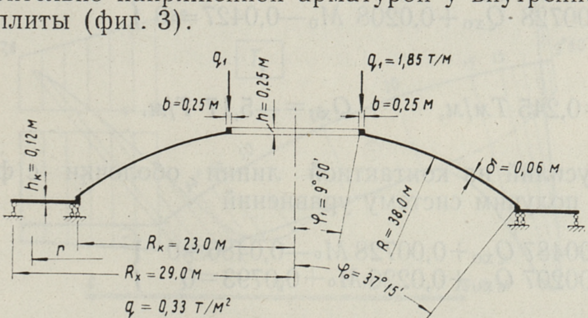
$$T_1^* = -\frac{Rq}{\sin^2\varphi}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi) - q'\frac{\sin\varphi_1}{\sin^2\varphi},$$

$$T_2^* = -\frac{Rq}{\sin^2\varphi}\left[(1+\sin^2\varphi)\cos\varphi - \cos\varphi_1\right] + q'\frac{\sin\varphi_1}{\sin^2\varphi}. \qquad (15)$$

Следует отметить, что изложенная методика применима для расчета оболочек вращения любой формы. Соответственно форме оболочки изменяются только усилия и деформации безмоментной теории.

2. Численный пример

В качестве примера рассматривается железобетонный купол с предварительно напряженной арматурой у внутреннего края опорной плиты (фиг. 3).



Фиг. 3

По формуле (10а) определим необходимую величину силы предварительного напряжения

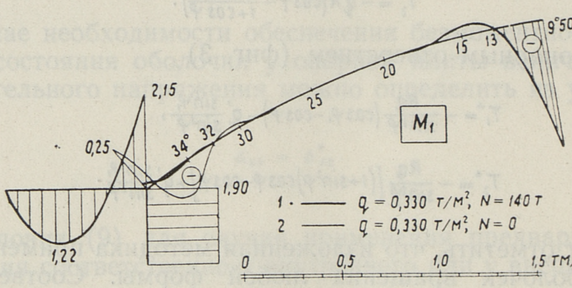
$$N = 140T. \tag{16}$$

При помощи формул (6) и (7) с учетом (3) составим систему уравнений (5). Учитывая условия опирания опорной плиты (фиг. 3), получим:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}00539\,Q_{x0} - 0{,}00728\,M_0 + 0{,}0314 = 0 \\ -0{,}00728\,Q_{x0} + 0{,}0208\,M_0 - 0{,}0427 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

откуда

$$M_0 = -0{,}018\ Тм/м, \qquad Q_{x0} = -5{,}81\ Т/м. \tag{18}$$



Фиг. 4

Аналогично для оболочки без предварительного напряжения:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}00539\,Q_{x0} - 0{,}00728\,M_0 + 0{,}0296 = 0 \\ -0{,}00728\,Q_{x0} + 0{,}0208\,M_0 - 0{,}0427 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

откуда

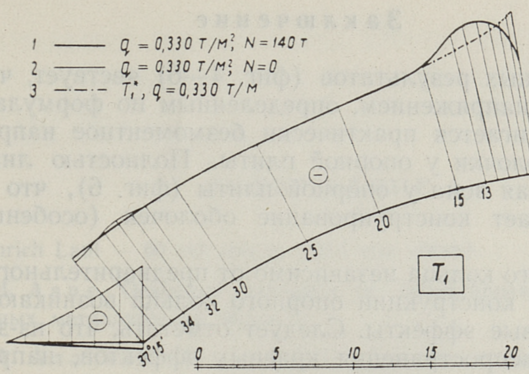
$$M_0 = 0{,}245\ Тм/м, \qquad Q_{x0} = -5{,}17\ Т/м. \tag{20}$$

Для усилий на контактной линии оболочки с фонарным кольцом получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} -0{,}00487\,Q_{x0} + 0{,}00728\,M_0 - 0{,}0486 = 0 \\ 0{,}00207\,Q_{x0} + 0{,}0226\,M_0 + 0{,}0793 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

откуда

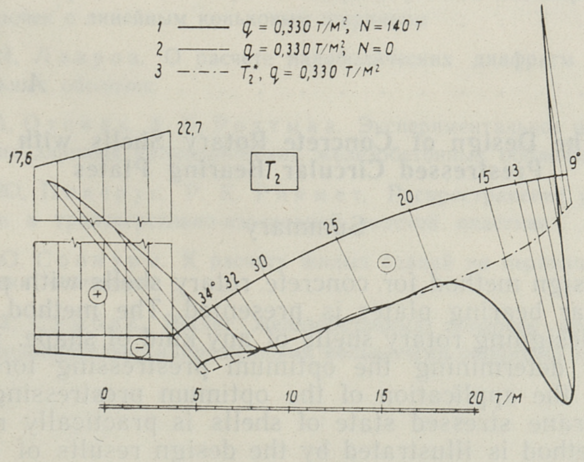
$$M_0 = -0{,}68\ Тм/м, \qquad Q_{x0} = -4{,}52\ Т/м \tag{22}$$



Фиг. 5

Далее, используя (18), (20) и (22), по формулам (1) и (11) определим усилия и перемещения оболочки и опорной плиты. Для удобства и повышения наглядности вычисление целесообразно произвести в табулированном виде.

Некоторые результаты расчета представлены на фигурах 4—6.



Фиг. 6

Заключение

Из численных результатов (фиг. 4—6) явствует, что предварительным напряжением, определенным по формулам (10а) и (10б), достигается практически безмоментное напряженное состояние оболочки у опорной плиты. Полностью ликвидируется растянутая зона у опорной плиты (фиг. 6), что существенно облегчает конструирование оболочек (особенно сборных).

У фонарного кольца независимо от предварительного напряжения или от конструкции опорного кольца возникают значительные краевые эффекты. Следует отметить, что из-за незначительного распространения краевых эффектов, напряженное состояние оболочки у нижнего и у верхнего края можно определить независимо друг от друга.

В случае применения предварительного напряжения, определенного по формулам (10а) и (10б), напряженное состояние оболочки у опорной плиты для практики с достаточной точностью можно определить по безмоментной теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Новожилов. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, Ленинград 1962.
2. А. А. Сумбак. Расчет предварительно напряженных железобетонных оболочек вращения. Труды ТПИ, серия А, № 256, 1967.
3. К. Ф. Черных. Линейная теория оболочек. Издательство Ленинградского университета, 1962.

A. Sumbak

The Design of Concrete Rotary Shells with Prestressed Circular Bearing Plates

Summary

The design method for concrete rotary shells with prestressed circular bearing plates is presented. The method can be used for designing rotary shells of any kind of shape. The formulae for determining the optimum prestressing forces are given. By the application of the optimum prestressing forces the membrane stressed state of shells is practically realized.

The method is illustrated by the design results of a prestressed concrete spherical shell roof.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Heinrich Laul — 60 ehk mis ta nüüd ette võtab? 3

2. И. И. Ааре. Основные указания по проектированию тонкостенных металлических балок 5

3. Л. А. Алликас. Полуплоскость, усиленная стержнем конечной длины 17

4. Н. А. Алумяэ. О напряженном состоянии оболочек с асимтотическими краями 25

5. Ю. К. Энгельбрехт. Приближенный динамический расчет висячих покрытий двоякой кривизны 29

6. В. Х. Кикас, Р. Э. Отсман. Фракции сланцевой золы в промышленности строительных материалов 35

7. В. Р. Кульбах. Об оценке статической работы висячих покрытий отрицательной кривизны с деформируемым контуром при действии временной нагрузки 47

8. Х. Х. Лаул, В. Л. Волтри. Расчет длинных цилиндрических оболочек на ЭВМ «Минск-22» 61

9. Х. Х. Лаул, Ю. А. Тярно. Вопросы расчета цилиндрических оболочек с линейным коньковым шарниром 69

10. А. И. Лавров. О расчете параболических диафрагм коноидальных оболочек 79

11. В. А. Отсмаа, Х. К. Рохтмаа. Экспериментальное исследование длинных цилиндрических железобетонных оболочек . . 87

12. Л. Ю. Поверус, Р. К. Ряямет. Распространение упругих волн в трансверсально-изотропной толстой пластине . . . 95

13. Э. Ю. Соонурм. К расчету жилых зданий на неравномерные осадки основания 105

14. А. А. Сумбак. Расчет железобетонных оболочек вращения с предварительно напряженными кольцевыми опорными плитами 115

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ И СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА

Сборник статей X

Таллинский политехнический институт

Редактор В. Райдна

Технический редактор Д. Роо

Сдано в набор 27/IV 1970 г. Подписано к печати 17/VIII 1970. Бумага 60×90/16. Печатных листов 7,75+0.25. Уч.-изд. листов 5,68. Тираж 350. МВ-07637 Заказ № 3300. Типография «Коммунист», Таллин, ул. Пикк, 2.

Цена 57 коп.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 296 1970

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ
И
СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА

сборник статей

X

УДК.624.072

1. И. И. Ааре. Основные указания по проектированию тонкостенных металлических балок (стр. 5)

Для эффективного использования материала в сплошных металлических балках целесообразно учитывать закритическую работу стенки балки, нагруженной статическими нагрузками. В статье приведены формулы и графики, которые дают возможность сравнительно быстро и легко произвести подбор сечения балки, учитывая при этом до- и закритическую работу стенки балки.

Иллюстраций 13.

УДК.539.371

2. Л. А. Алликас. Полуплоскость, усиленная стержнем конечной длины (стр. 17)

Рассматривается упругая полуплоскость, край которой частично подкреплен упругим стержнем. Для определения неизвестных контактных сдвигающих усилий приравниваются относительные деформации кромки полуплоскости к относительным деформациям стержня. Для приближенного решения полученного таким образом сингулярного интегрального уравнения стержень делится на отдельные элементы. Далее, предполагается, что сдвигающие усилия в пределах каждого элемента постоянны. В таком случае возможно прямое интегрирование уравнений. В качестве примера рассматривается решение двух задач.

УДК 624

3. Н. А. Алумяэ. О напряженном состоянии оболочек с асимптотическими краями (стр. 25)

Показывается, что метод разложения общего напряженного состояния на элементарные может быть успешно применен при анализе и расчете оболочек отрицательной гауссовой кривизны с асимптотическими краями. В качестве примера рассматривается равновесие «свободно опертой» оболочки, очерченной по поверхности гиперболического параболоида. Этот класс оболочек характеризуется относительно высокими ценными напряжениями в направлении края около бортовых элементов.

УДК 624.072.327.04

4. **Ю. К. Энгельбрехт. Приближенный динамический расчет висячих покрытий двоякой кривизны (стр. 29)**

В статье описывается метод для решения динамической задачи висячих покрытий отрицательной кривизны на прямоугольном плане. Уравнение средних вант интегрируется по методу Бубнова-Галеркина. Приводятся результаты вычислений для первой формы собственных частот из линеаризованной задачи, которые хорошо совпадают с экспериментальными.

УДК 666.944.21.001.5

5. **В. Х. Кикас, Р. Э. Отсман. Фракции сланцевой золы в промышленности строительных материалов (стр. 35)**

В статье даются общие условия образования и классификация отходов сланцевой промышленности. Виды золы сланца-кукерсита охарактеризовываются химико-минералогическим составом и вяжущими свойствами. Обосновывается целесообразность разделения летучей золы на крупную, мелкую и мельчайшую фракцию, описываются их свойства и применение в промышленности строительных материалов.

Таблиц — 8, библиографических названий — 5.

УДК 624.074
624.04
621.031

6. **В. Р. Кульбах. Об оценке статической работы висячих покрытий отрицательной кривизны с деформируемым контуром при действии временной нагрузки (стр. 47)**

Работа посвящается вопросу расчета седловидных висячих покрытий при полном и частичном нагружении с учетом деформации контура. В работе используется континуальная расчетная схема и система нелинейных разрешающих уравнений. Действующая нагрузка разлагается в симметричную и антиметрическую части, которые учитываются последовательно. Удачная аппроксимация функции прогиба, а также деформаций эллиптического в плане контура позволяет получить разрешающие уравнения в замкнутом виде. Использование результатов работы существенно упрощается благодаря введению системы безразмерных параметров. Полученные результаты позволяют решать не только вопросы статического расчета покрытий заданной формы, а также вопросы подбора их оптимальных параметров.

Иллюстраций 4, библиографий 8 наименований.

УДК 621.031

7. **Х. Х. Лаул, В. Л. Волтри. Расчет длинных цилиндрических оболочек на ЭВМ «Минск-22» (стр. 61)**

В статье «Расчет длинных цилиндрических оболочек на ЭВМ «МИНСК-22» рассматриваются вопросы программирования теории расчета длинных цилиндрических оболочек по принципу аппроксимации приращения сдвигающих сил. Дается блок-схема программирования. В конце схемы дана оценка точности расчета в пределах данной теории при помощи ЭВМ. Приведены основные параметры расчета.

Иллюстраций 2, библиографических указаний 2.

УДК 621.031
624.04

8. **Х. Х. Лаул, Ю. А. Тярно. Вопросы расчета цилиндрической оболочки с линейным коньковым шарниром (стр. 69)**

В статье рассматривается метод расчета цилиндрических оболочек с линейными шарнирами на коньке оболочки. Метод основан на методе аппроксимации сдвигающих сил. Уравнения выписаны для случая средней волны оболочки, когда обеспечено полное восприятие опорного момента и горизонтальной реакции. В статье представляются результаты расчетов оболочек с линейными шарнирами.

УДК 621.031

9. **А. И. Лавров. О расчете параболических диафрагм коноидальных оболочек (стр. 79)**

В статье предлагается технический метод расчета параболических диафрагм коноидальных оболочек.

Сдвигающие силы у диафрагмы (нагрузка на диафрагму) определяются из условия минимума потенциальной энергии диафрагмы и потенциальной энергии сдвигающих сил в зоне краевого эффекта.

Сдвигающие силы аппроксимируются в виде

$$S = a_I \frac{y}{y_0} + \sum_i a_i \sin \frac{i\pi y}{y_0}$$

Данный метод аппроксимации сдвигающих сил позволяет определить внутренние усилия диафрагмы и затяжки, а также максимальные главные растягивающие напряжения в углах оболочки.

Приводятся результаты численных примеров.

1 таблица, иллюстраций 4, библиографий 2.

УДК 621.031.001.5

10. **В. А. Отсмаа, Х. К. Рохтмаа. Экспериментальное исследование длинных цилиндрических железобетонных оболочек (стр. 87)**

Излагаются результаты экспериментального исследования 7 моделей длинных круглоцилиндрических железобетонных оболочек, загруженных равномерно распределенной нагрузкой. Рассматривается разрушение оболочки по наклонному сечению а поперечную силу оболочки как «большой балки». Указывается, что в наклонном сечении поперечная сила воспринимается не только поперечной арматурой, но и бетоном.

Таблиц 2. Иллюстраций 5. Библиографических названий 3.

УДК 534.212

11. **Л. Ю. Поверус, Р. К. Ряямет. Распространение упругих волн в трансверсально-изотропной толстой пластине (стр. 95)**

Производится исследование распространения упругих волн деформации в трансверсально-изотропной бесконечной толстой плите, которая находится под воздействием осесимметрической быстроменяющейся распределенной нагрузки. Уравнения движения пластины решаются методом трехмерных сеток. Численная реализация задач произведена на ЭВМ.

Иллюстраций 2, библиографий 6.

УДК 624.159.1.001.24
624.159.5.012.2

12. Э. Ю. Соонурм. К расчету жилых зданий на неравномерные осадки основания (стр. 105)

В статье рассматривается система «здание—основание» как условная балка, лежащая на упругом основании с переменным коэффициентом постели. Приближенный способ расчета основан на вариационном методе Лагранжа-Ритца. Приведен принципиальный ход расчета и в качестве примера решение задачи для одного вида искривления здания (прогиба) доведено до готовых формул. Показана возможность определения на основе измеренных в натуре осадок взаимоотношение жесткостных характеристик системы.

В статье 4 фиг. и в списке литературы 8 названий.

УДК 621.031

13. А. А. Сумбак. Расчет железобетонных оболочек вращения с предварительно напряженными кольцевыми опорными плитами (стр. 115)

В статье изложен практический метод расчета оболочек вращения с предварительно напряженными кольцевыми опорными плитами. Метод применим для расчета оболочек вращения любой формы, а также с фонарными кольцами.

С применением предварительного напряжения оптимальной величины практически ликвидируются краевые эффекты у опорного сечения оболочки и расчет можно вести по безмоментной теории.

Представлены результаты расчета сферической оболочки с предварительно напряженной кольцевой опорной плитой.

Иллюстраций 6, библиографий 3.

57 kop.

Cv