TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 176 1960

У. К. НИГУЛ

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ УПРУГОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СВОБОДНЫЕ ОТ ГИПОТЕЗ

ТАЛЛИН 1960

Ер. 6. 7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 176 1960

У. К. НИГУЛ

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ УПРУГОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СВОБОДНЫЕ ОТ ГИПОТЕЗ

ТАЛЛИН 1960

Работа выполнена на кафедре строительных конструкций ТПИ, заведуемой проф. докт. техн. наук Х. Х. Лаул. Основные результаты данной работы были изложены в докладе «Уточнение уравнений динамики круговой цилиндрической оболочки» 29 янв. 1960 г. в Москве на Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике и в докладе «Линейная теория кругоцилиндрических оболочек, свободная от гипотез» 25 апр. 1960 г. на XV Научной конференции Таллинского политехнического института.

1. ВВЕДЕНИЕ.

В обыкновенном смысле теория упругих оболочек представляет собою раздел трехмерной* теории упругости, в котором рассматриваются такие задачи расчета оболочек, при которых краевые условия на боковых поверхностях оболочки заданы в напряжениях в виде внешних нагрузок и целесообразно искать решение по нормали в виде степенного ряда относительно срединной поверхности оболочки. В связи с этим в теории оболочек вполне естественно и необходимо наложить на показатель изменяемости напряженного состояния условия, обеспечивающие сходимость указанных степенных рядов. Построение основных соотношений теорий оболочек заключается в приведении трехмерной задачи к двухмерной. Для этого все коэффициенты степенных рядов представляют как функции от перемещений срединной поверхности u_0, v_0, w_0, их производных (по двум координатам и времени) и внешней нагрузки, а затем составляют уравнения для определения u_0, v_0, w_0. Обыкновенно при этом применяют упрощающие гипотезы [2, 4, 7, 12, 21, 29]. В данной работе выводятся уточненные линейные уравнения динамики упругих круговых цилиндрических оболочек без применения гипотез. Единственное ограничение заключается в условиях, обеспечивающих сходимость степенных рядов.

Принятый метод построения уточненной теории оболочек является близким к методу начальных функций, разработанному проф. В. З. Власовым [5, 6] и содержит некоторые элементы из работ Э. Х. Кэннарда [21, 22, 23]. Этот метод принципиально позволяет построить ряды Тэйлора для всех искомых величин с любым количеством членов. Однако в данной статье учитывается такое количество членов в этих рядах, которое позволяет вывести ос-

---

* Здесь термины «трехмерная» и «двухмерная» указывают число пространственных координат. В динамических задачах напряженное состояние кроме того зависит от времени t.

новные уравнения, сохраняя в них безмоментные члены, все члены с множителем $a^2 = \delta^2/12R^2_0$ (см. рис. 1) и старшие производные с множителем a^4. Следуя проф. А. Л. Гольденвейзеру [7], полученные результаты исследованы и упрощены методом асимптотического интегрирования.

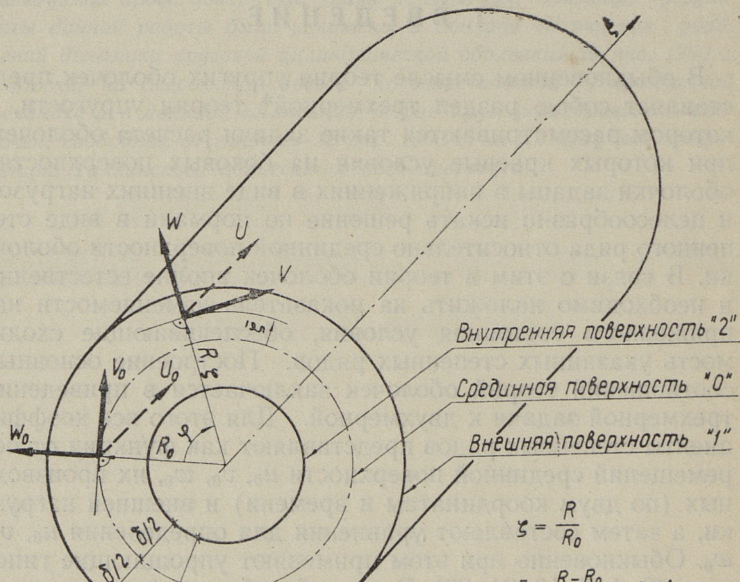

Рис. 1

По уточнению теории оболочек опубликован ряд работ [2, 9, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 29, 30], указывающих на три важные области применения уточненной теории.

а) **Расчет толстых оболочек.** При расчете толстых оболочек погрешность теории Кирхгофа-Лява может оказаться слишком большой даже при напряженном состоянии со сравнительно небольшим показателем изменяемости. В таком случае вполне логично применить к расчету кругоцилиндрической оболочки известное точное решение уравнений трехмерной теории упругости для цилиндрической области [15]. Например, такой подход был применен в работах [16, 18, 19, 20]. Однако надо отметить, что непосредственное применение общего точного решения в численных задачах связано с большими трудностями, поскольку оно зависит от нормальной координаты ζ через цилиндрические функции. В связи с тем можно предлагать представление цилиндрических функций: 1) в виде ряда Тэйлора — при напряженном состоянии, медленно изменяющемся по толщине оболочки; 2) асимптотическими формулами — при напряженном состоянии с весьма большим показателем изменяемости. В первом случае получают те же уравнения, которые представлены в данной статье.

б) Расчет многослойных оболочек. При расчете многослойных оболочек условия контакта целесообразно сформулировать в напряжениях. Поскольку в теории Кирхгофа-Лява пренебрегают напряжениями σ_{13}, σ_{23}, σ_{33},* то для решения этой задачи необходимо построить более точную теорию. Проф. С. А. Амбарцумян и проф. Ю И-Юань развивали теорию [2, 30], в которой пренебрегается σ_{33} и приближенно учитываются σ_{13}, σ_{23}. Нижеприведенные результаты позволяют судить о точности этих гипотез в случае однослойной цилиндрической оболочки.

в) Динамика оболочек. При решении динамических задач, в частности при исследовании быстропротекающих переходных процессов, применение классических методов динамики, затрудняется тем, что характеристическое уравнение теории Кирхгофа-Лява является параболическим (производные по координатам входят в уравнение до 8-порядка, а по времени только до 6-порядка). Кроме того, возникает вопрос об «инерции поворота нормалей» и т. д. В связи с тем выполнен ряд исследований [25, 29] с целью уточнить в уравнениях Кирхгофа-Лява члены, содержащие производные по времени. В этих работах как правило сохраняли гипотезу $\sigma_{33} = 0$, приближенно учитывали σ_{13}, σ_{23} при помощи условного коэффициента сдвига и несколько обобщали геометрическую гипотезу теории Кирхгофа-Лява. В данной статье излагается строгий метод для

---

*) σ_{jj} обозначает нормальное напряжение в направлении j и σ_{ij} — сдвигающее напряжение в направлении i на площадках с нормально j. При этом индекс «3» соответствует координате по нормали (ζ) и индексы «1», «2» — координатам в плоскости оболочки (ξ, φ).

выведения характеристических уравнений гиперболического типа и для определения их асимптотической погрешности.

Уточненная статика оболочек излагается в весьма общей форме в работах проф. Х. М. Муштари и И. Г. Терегулова [9, 17].

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРВИЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДОВ ТЭЙЛОРА.

Будем исходить из уравнений и соотношений трехмерной теории упругости в цилиндрических координатах [4, 26]. Обозначения геометрических величин, координат и перемещений приведены на рис. 1; E — модуль упругости, μ — коэффициент Пауссона, ϱ — плотность массы, t — время.

1) Уравнения равновесия в напряжениях:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I} \quad \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi}+\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\varphi}+\frac{1}{\zeta}\frac{\partial(\zeta\sigma_{13})}{\partial\zeta}=\varrho R_0\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t},\\
&\mathrm{II} \quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi}+\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\varphi}+\frac{1}{\zeta^2}\frac{\partial(\zeta^2\sigma_{23})}{\partial\zeta}=\varrho R_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \qquad (1)\\
&\mathrm{III} \quad \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\xi}+\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\varphi}+\frac{1}{\zeta}\frac{\partial(\zeta\sigma_{33})}{\partial\zeta}-\frac{\sigma_{22}}{\zeta}=\varrho R_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
\end{aligned}$$

2) Закон Гука:

$$\sigma_{jj}=\frac{E}{1+\mu}\left(\varepsilon_{jj}+\frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon\right),\quad \sigma_{ij}=\frac{E}{2(1+\mu)}\varepsilon_{ij},$$
$$(i,\ j=1,\ 2,\ 3), \qquad (2)$$

где

$$\varepsilon=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}. \qquad (3)$$

3) Формулы, связывающие компоненты деформации с перемещениями:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11}=\frac{1}{R_0}\frac{\partial u}{\partial\xi},\quad \varepsilon_{22}=\frac{1}{R_0}\left(\frac{1}{\zeta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{w}{\zeta}\right),\quad \varepsilon_{33}=\frac{1}{R_0}\frac{\partial w}{\partial\zeta},\\
&\varepsilon_{12}=\frac{1}{R_0}\left(\frac{1}{\zeta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial\xi}\right),\quad \varepsilon_{13}=\frac{1}{R_0}\left(\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{\partial w}{\partial\xi}\right), \qquad (4)\\
&\varepsilon_{23}=\frac{1}{R_0}\left(\frac{\partial v}{\partial\zeta}-\frac{v}{\zeta}+\frac{1}{\zeta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right).
\end{aligned}$$

4) Уравнения равновесия в перемещениях:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}=\Bigg[-\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-\frac{1}{\zeta^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}-\frac{1}{\zeta}\frac{\partial}{\partial \zeta}+$$

$$+\frac{2(1+\mu)}{E}\varrho R_0^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Bigg]u-\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial}{\partial \xi}\Bigg[\frac{1}{\zeta}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+$$

$$+\frac{1}{\zeta}\frac{\partial(\zeta w)}{\partial \zeta}\Bigg],$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2}=\Bigg[-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\frac{1}{\zeta^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{1}{\zeta}+$$

$$+\frac{2(1+\mu)}{E}\varrho R_0^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Bigg]v- \qquad (5)$$

$$-\frac{1}{1-2\mu}\frac{1}{\zeta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\Bigg[\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial w}{\partial \zeta}+(3-4\mu)\frac{w}{\zeta}\Bigg],$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}=\Bigg[-\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{1}{\zeta^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)-\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{1}{\zeta}+$$

$$+\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{(1-\mu)}\varrho R_0^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Bigg]w-$$

$$-\frac{1}{2(1-\mu)}\Bigg[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \zeta}+\frac{1}{\zeta}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi\partial \zeta}-(3-4\mu)\frac{1}{\zeta^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\Bigg].$$

5) Краевые условия на боковых поверхностях оболочек:

$$\sigma_{i3}=\sigma_{i3,r}, \quad (i=1,2,3;\ r=1,2). \qquad (6)$$

Здесь величины $\sigma_{i3,r}$ обозначают заданные напряжения (нагрузки) на боковых поверхностях оболочки; для внешней поверхности $r=1$, для внутренней — $r=2$ (рис. 1).

Поскольку ξ, φ и t не входят в коэффициенты уравнений (1), (5) и соотношений (2), (4), применим формальный прием интегрирования:

$$u=R_0f\bar{u}(\zeta),\ v=R_0fi\bar{v}(\zeta),\ w=R_0f\bar{w}(\zeta);$$

$$\varepsilon_{ij}=f\bar{\varepsilon}_{ij}(\zeta),\quad \sigma_{ij}=\bar{E}f\bar{\sigma}_{ij}(\zeta)\ \text{при}\ ij=11,\ 22,\ 33,\ 13; \qquad (7)$$

$$\varepsilon_{ij}=fi\bar{\varepsilon}_{ij}(\zeta),\quad \sigma_{ij}=\bar{E}fi\bar{\sigma}_{ij}(\zeta)\ \text{при}\ ij=12,\ 23,$$

где

$$\bar{E}=\frac{E}{1-\mu^2},\quad f=e^{\lambda\xi-im\varphi-i\omega t}. \qquad (8)$$

Аналогично представим поверхностные нагрузки в форме:

$$\sigma_{13,r} = \overline{E} f \overline{\sigma}_{13,r}\,;\ \sigma_{23,r} = \overline{E} f i \overline{\sigma}_{23,r}\,;\ \sigma_{33,r} = \overline{E} f \overline{\sigma}_{33,r}\,. \tag{9}$$

Отметим, что интегрирование при помощи функции f применяют здесь только как вариант символического метода [6] для упрощения записи производных. По существу оно не является нужным и никак не стесняет применения нижеизложенного метода к выведению уточненных уравнений для других типов оболочек. Далее приняты обозначения:

$$\frac{\partial(\ .\ .)}{\partial\zeta} = (\ldots)',\ N = \frac{\varrho R_0^2\,\omega^2}{E}. \tag{10}$$

На основе (7), (8), (10) формулы (1), (4), (5) превращаются в следующие:

$$\begin{gathered}
\lambda\overline{\sigma}_{11} + \frac{m}{\zeta}\overline{\sigma}_{12} + \overline{\sigma}_{13}' + \frac{1}{\zeta}\overline{\sigma}_{13} = -N\overline{u},\\
\lambda\overline{\sigma}_{12} - \frac{m}{\zeta}\overline{\sigma}_{22} + \overline{\sigma}_{23}' + \frac{2}{\zeta}\overline{\sigma}_{23} = -N\overline{v},\\
\lambda\overline{\sigma}_{13} + \frac{m}{\zeta}\overline{\sigma}_{23} + \overline{\sigma}_{33}' + \frac{1}{\zeta}(\overline{\sigma}_{33} - \overline{\sigma}_{22}) = -N\overline{w};
\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}
\overline{\varepsilon}_{11} = \lambda\overline{u},\quad \overline{\varepsilon}_{22} = \frac{1}{\zeta}(m\overline{v} + \overline{w}),\quad \overline{\varepsilon}_{33} = \overline{w}',\\
\overline{\varepsilon}_{12} = -\frac{m}{\zeta}\overline{u} + \lambda\overline{v},\quad \overline{\varepsilon}_{13} = \overline{u}' + \lambda\overline{w},\\
\overline{\varepsilon}_{23} = \overline{v}' - \frac{\overline{v}}{\zeta} - \frac{m}{\zeta}\overline{w};
\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\overline{u}'' &= \left[-\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\lambda^2 + \frac{m^2}{\zeta^2} - \frac{2}{1-\mu}N\right]\overline{u} - \frac{1}{\zeta}\overline{u}' -\\
&\quad - \frac{\lambda}{1-2\mu}\left(\frac{m}{\zeta}\overline{v} + \frac{1}{\zeta}\overline{w} + \overline{w}'\right),\\
\overline{v}'' &= \left[-\lambda^2 + \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\frac{m^2}{\zeta^2} - \frac{2}{1-\mu}N + \frac{1}{\zeta^2}\right]\overline{v} - \frac{1}{\zeta}\overline{v}' +\\
&\quad + \frac{m}{1-2\mu}\frac{1}{\zeta}\left(\lambda\overline{u} + \frac{3-4\mu}{\zeta}\overline{w} + \overline{w}'\right),
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\bar{w}'' = \left[\frac{-1+2\mu}{2(1-\mu)}\left(\lambda^2 - \frac{m^2}{\zeta^2}\right) - \frac{1-2\mu}{(1-\mu)^2} N + \frac{1}{\zeta^2}\right]\bar{w} - \frac{1}{\zeta}\bar{w}' -$$
$$- \frac{1}{2(1-\mu)}\left(\lambda\bar{u}' - \frac{3-4\mu}{\zeta^2} m\bar{v} + \frac{m}{\zeta}\bar{v}'\right). \tag{13}$$

При анализе уравнений (13) будем рассматривать λ, m, N как показатели изменяемости напряженного состояния [7]. Безразмерные перемещения $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ и безразмерные напряжения $\bar{\sigma}_{jj}$, $\bar{\sigma}_{ij}$ будем искать в виде рядов Тэйлора типа:

$$\bar{u} = u_0 + \bar{\zeta} u'_0 + \frac{\bar{\zeta}^2}{2!} u''_0 + \frac{\bar{\zeta}^3}{3!} u'''_0 + \ldots, \tag{14}$$

$$\bar{\sigma}_{jj} = \sigma_{jj,0} + \bar{\zeta}\sigma'_{jj,0} + \frac{\bar{\zeta}^2}{2!}\sigma''_{jj,0} + \frac{\bar{\zeta}^3}{3!}\sigma'''_{jj,0} + \ldots, \tag{15}$$

где индекс «0» обозначает срединную поверхность оболочки (рис. 1) и

$$\left.\frac{\partial^n \bar{u}}{\partial \zeta^n}\right|_{\zeta=1} = \left.\frac{\partial^n \bar{u}}{\partial \bar{\zeta}^n}\right|_{\bar{\zeta}=0} = u^n{}_0,$$
$$\left.\frac{\partial^n \bar{\sigma}_{jj}}{\partial \zeta^n}\right|_{\zeta=1} = \left.\frac{\partial^n \bar{\sigma}_{jj}}{\partial \bar{\zeta}^n}\right|_{\bar{\zeta}=0} = \sigma^n{}_{jj,0}. \tag{16}$$

Вначале выразим $u^n{}_0$, $v^n{}_0$, $w^n{}_0$, ($n \geqslant 2$) как функции от u_0, u'_0, v_0, v'_0, w_0, w'_0, [6]. Для u''_0, v''_0, w''_0 получим такие формулы, полагая в уравнениях (13), что $\zeta = 1$. Далее поддиференцируем уравнения (13) по ζ и положим, что $\zeta = 1$; исключая u''_0, v''_0, w''_0, получим формулы для u'''_0, v'''_0, w'''_0. Продолжая указанный процесс, можно получить выражения для производных до любого порядка n. (Практически были найдены такие выражения до $n = 6$ включительно). Далее заменим неизвестные u'_0, v'_0, w'_0 величинами $\sigma_{i3,0}$ ($i = 1, 2, 3$) по формулам (17), которые следуют из (12) на основе (2), (7).

$$u'_0 = \frac{2}{1-\mu}\sigma_{13,0} - \lambda w_0, \quad v'_0 = \frac{2}{1-\mu}\sigma_{23,0} + v_0 + m w_0,$$
$$w'_0 = \frac{1-2\mu}{(1-\mu)^2}\sigma_{33,0} - \frac{\mu}{1-\mu}(\lambda u_0 + m v_0 + w_0). \tag{17}$$

Указанным путем получим формулы (19), (20), (21), (22), определяющие коэффициенты $u^n{}_0$, $v^n{}_0$, $w^n{}_0$ $(n \geqslant 1)$ как функции от u_0, v_0, w_0, $\sigma_{i3,0}$ $(i = 1, 2, 3)$. Эти коэффициенты назовем первичными коэффициентами рядов Тэйлора для перемещений. На их основе найдем из (2), (12) первичные коэффициенты рядов Тэйлора для напряжений (23), (24). Ниже приводятся первичные коэффициенты до $n = 4$. При этом до $n = 2$ выписаны все члены, при $n = 3$, 4 для краткости — только старшие производные (члены с наибольшими степенями λ, m и N). Отметим, что для выведения $\sigma''_{i3,0}$ $(i = 1, 2, 3)$ являлись необходимыми все члены в формулах u'''_0, v'''_0, w'''_0 и для выведения $\sigma''''_{i3,0}$ $(i = 1, 2, 3)$ — величины u'''''_0, v'''''_0, w'''''_0. Для упрощения записи обозначим

$$\frac{1}{1-\mu} = \nu \tag{18}$$

и опустим верхний индекс $n = 0$.

$$\begin{aligned}
u^n{}_0 &= U^n{}_u u_0 + \lambda m U^n{}_v v_0 + \lambda U^n{}_w w_0 + \\
&\quad + U^n{}_{13}\sigma_{13,0} + \lambda m U^n{}_{23}\sigma_{23,0} + \lambda U^n{}_{33}\sigma_{33,0}, \\
v^n{}_0 &= \lambda m V^n{}_u u_0 + V^n{}_v v_0 + m V^n{}_w w_0 + \\
&\quad + \lambda m V^n{}_{13}\sigma_{13,0} + V^n{}_{23}\sigma_{23,0} + m V^n{}_{33}\sigma_{33,0}, \\
w^n{}_0 &= \lambda W^n{}_u u_0 + m W^n{}_v v_0 + W^n{}_w w_0 + \lambda W^n{}_{13}\sigma_{13,0} + \\
&\quad + m W^n{}_{23}\sigma_{23,0} + W^n{}_{33}\sigma_{33,0};
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
&U'_u = U'_v = U'_{23} = U'_{33} = 0, \quad U'_w = -1, \quad U'_{13} = 2\nu; \\
&U''_u = -2\nu N - (2-\mu)\nu\lambda^2 + m^2, \; U''_v = -\nu, \; U''_w = -\mu\nu, \\
&U''_{13} = -2\nu, \; U''_{23} = 0, \; U''_{33} = -\nu^2; \\
&U'''_u = -U''_u - 2m^2, \; U'''_v = 0, \\
&U'''_w = (3-2\mu)\nu^2 N + (2-\mu)\nu(\lambda^2 - m^2),
\end{aligned} \tag{20}$$

$$U'''_{13} = -4\nu^2 N - (3-2\mu)\nu^2\lambda^2 + 2\nu m^2,\ U'''_{23} = -U'''_{33} =$$
$$= -\nu^2;$$
$$U''''_u = 4\nu^2 N^2 + (7 - 12\mu + 4\mu^2)\nu^3 N\lambda^2 - 4\nu N m^2 +$$
$$+ (3-\mu)\nu\lambda^4 - (4-2\mu)\nu\lambda^2 m^2 + m^4, \tag{20}$$
$$U''''_v = (3-4\mu)\nu^3 N + 2\nu(\lambda^2 - m^2),\ U''''_w = -(3 - 6\mu +$$
$$+ 4\mu^2)\nu^3 N - 2\lambda^2 + 6m^2,\ U''''_{13} = 8\nu^2 N +$$
$$+ (6-4\mu)\nu^2\lambda^2 - 12\nu m^2,\ U''''_{23} = 2\nu^2,$$
$$U''''_{33} = \nu U''''_v;$$

$$V'_u = V'_{13} = V'_{33} = 0,\ V'_v = V'_w = 1,\ V'_{23} = 2\nu;$$
$$V''_u = \nu,\ V''_v = -2\nu N - \lambda^2 + (2-\mu)\nu m^2,$$
$$V''_w = (2-\mu)\nu,\ V''_{13} = 0,\ V''_{23} = -2\nu,\ V''_{33} = \nu^2;$$
$$V'''_u = -2(1+\mu)\nu,\ V'''_v = -3\nu m^2,\ V'''_w = -U'''_w,$$
$$V'''_{13} = \nu^2,\ V'''_{23} = -4\nu^2 N - 2\nu\lambda^2 + (3-2\mu)\nu^2 m^2,$$
$$V'''_{33} = -4\mu\nu^2; \tag{21}$$
$$V''''_u = -U''''_v,\quad V''''_v = 4\nu^2 N^2 + 4\nu N\lambda^2 - (7 - 12\mu +$$
$$+ 4\mu^2)\nu^3 N m^2 + \lambda^4 - (4-2\mu)\nu\lambda^2 m^2 + (3-\mu)\nu m^4,$$
$$V''''_w = -(1 - 6\mu + 4\mu^2)\nu^3 N + 2(1+\mu)\nu\lambda^2 -$$
$$-(6-2\mu)\nu m^2,\ V''''_{13} = -6\nu^2,\ V''''_{23} = 8\nu^2 N +$$
$$+ 4\nu\lambda^2 - (18 - 12\mu)\ \nu^2 m^2,\ V''''_{33} = \nu V''''_u;$$

$$W'_u = W'_v = W'_w = -\mu\nu,\ W'_{13} = W'_{23} = 0,$$
$$W'_{33} = (1-2\mu)\nu^2; \tag{22}$$

$$W''_u = \mu\nu,\ W''_v = 1,\ W''_w = -(1-2\mu)\nu^2 N + \\ + \mu\nu(\lambda^2 - m^2) + \nu;$$

$$W''_{13} = W''_{23} = -\nu^2,\ W''_{33} = -W'_{33};$$

$$W'''_u = W'''_v = (1-2\mu^2)\,\nu^3 N + (1+\mu)\,\nu\,(\lambda^2 - m^2),$$

$$W'''_w = (1-2\mu)\nu^3 N,\ W'''_{13} = 2\nu^2,\ W'''_{23} = (6-4\mu)\nu^2,$$

$$W'''_{33} = -(1-2\mu)^2\,\nu^4 N + 2\mu\nu^2\,(\lambda^2 - m^2), \tag{22}$$

$$W''''_u = -2W''''_u + 4\,(1+\mu)\,\nu m^2,$$

$$W''''_v = -(7-12\mu+4\mu^2)\nu^3 N - (4-2\mu)\nu\lambda^2 + \\ + (8+2\mu)\nu m^2,\ W''''_w = (1-2\mu)^2\nu^4 N^2 - (1+2\mu - \\ - 4\mu^2)\nu^3 N(\lambda^2 - m^2) - (1+\mu)\nu(\lambda^2 - m^2)^2,$$

$$W''''_{13} = W''''_{23} = \nu U''''_v,\quad W''''_{33} = -2W'''_{33} + 8\mu\nu^2 m^2;$$

$$\sigma^n_{jj,0} = \lambda S^n_{jj,u} u_0 + m S^n_{jj,v} v_0 + S^n_{jj,w} w_0 + \\ + \lambda S^n_{jj,13}\,\sigma_{13,0} + m S^n_{jj,23}\,\sigma_{23,0} + S^n_{jj,33}\,\sigma_{33,0}, \\ (jj = 11,\ 22,\ 33);$$

$$\sigma^n_{13,0} = S^n_{13,u} u_0 + \lambda m S^n_{13,v} v_0 + \lambda S^n_{13,w} w_0 + \\ + S^n_{13,13}\,\sigma_{13,0} + \lambda m S^n_{13,23}\,\sigma_{23,0} + \lambda S^n_{13,33}\,\sigma_{33,0}; \tag{23}$$

$$\sigma^n_{23,0} = \lambda m S^n_{23,u} u_0 + S^n_{23,v} v_0 + m S^n_{23,w} w_0 + \\ + \lambda\, m\, S^n_{23,13}\,\sigma_{13,0} + S^n_{23,23}\,\sigma_{23,0} + m\, S^n_{23,33}\,\sigma_{33,0};$$

$$\sigma^n_{12,0} = m S^n_{12,u} u_0 + \lambda S^n_{12,v} v_0 + \lambda m S^n_{12,w} w_0 + \\ + m S^n_{12,13}\,\sigma_{13,0} + \lambda S^n_{12,23}\,\sigma_{23,0} + \lambda m S^n_{12,33}\,\sigma_{33,0};$$

$$S_{11,u} = 1,\ S_{11,v} = S_{11,w} = \mu,\ S_{11,13} = S_{11,23} = 0,\ S_{11,33} = \mu\nu;$$

$$S'_{11,u} = 0,\ S'_{11,v} = \mu,\ S'_{11,w} = -\mu\nu N - \lambda^2 + \mu m^2,$$

$$S'_{11,13} = (2-\mu)\nu,\ S'_{11,23} = \mu\nu,\ S'_{11,33} = 0;$$

$$S''_{11,u} = -(2-3\mu)\nu^2 N - 2\lambda^2 + m^2,$$

$$S''_{11,v} = -\mu(1-2\mu)\nu^2 N - (1+\mu)\lambda^2 + \mu m^2 - \mu,$$

$$S''_{11,w} = \mu^2\nu^2 N - \mu\lambda^2,\ S''_{11,13} = -(2-\mu)\nu,$$

$$S''_{11,23} = -\mu\nu,\ S''_{11,33} = (S''_{11,v} + \mu)\nu;$$

$$S'''_{11,u} = -S''_{11,u} - 2m^2,\ S'''_{11,v} = -2\mu m^2,$$

$$S'''_{11,w} = \mu(1-2\mu)\nu^3 N^2 + (3-3\mu-$$

$$-\mu^2)\nu^2 N\lambda^2 - \mu(2-3\mu)\nu^2 N m^2 + 2\lambda^4 -$$

$$-(2+\mu)\lambda^2 m^2 + \mu m^4, \tag{24}$$

$$S'''_{11,13} = -(4-7\mu+2\mu^2)\nu^3 N - (3-\mu)\nu\lambda^2 + (2-\mu)\nu m^2,$$

$$S'''_{11,23} = S''_{11,33},\ S'''_{11,33} = -S''_{11,33} - 2\mu\nu m^2;$$

$$S''''_{11,v} = (4-11\mu+8\mu^2)\nu^4 N^2 + (7-10\mu)\nu^2 N\lambda^2 -$$

$$-(4-6\mu)\nu^2 N m^2 + 3\lambda^4 - 4\lambda^2 m^2 + m^4,$$

$$S''''_{11,v} = \mu(1-2\mu)^2\nu^4 N^2 + (3-2\mu-4\mu^2)\nu^2 N\lambda^2 -$$

$$-2\mu(1-2\mu)\nu^2 N m^2 + (2+\mu)\lambda^4 -$$

$$-2(1+\mu)\lambda^2 m^2 + \mu m^4,$$

$$S''''_{11,w} = -\mu(1-2\mu)\nu^4 N^2 - (3-4\mu+2\mu^2)\nu^2 N\lambda^2 +$$

$$+6\mu\nu N m^2 - (2-\mu)\lambda^4 + 6\lambda^2 m^2 - 5\mu m^4,$$

$$S''''_{11,13} = -2S'''_{11,13} - 4(2-\mu)\nu m^2,\ S''''_{11,23} = 2S'''_{11,33},$$

$$S''''_{11,33} = \nu S''''_{11,v};$$

$S_{22,u} = \mu,\ S_{22,v} = S_{22,w} = 1,\ S_{22,13} = S_{22,23} = 0,\ S_{22,33} = \mu\nu;$

$S'_{22,u} = -\mu,\ S'_{22,v} = 0,\ S'_{22,w} = -\mu\nu N - \mu\lambda^2 + m^2 - 1,$

$S'_{22,13} = \mu\nu,\ \ S'_{22,23} = (2-\mu)\nu,\ S'_{22,33} = (1-2\mu)\nu;$

$S''_{22,u} = -\mu(1-2\mu)\nu^2 N - \mu\lambda^2 + (1+\mu)m^2 + 3\mu,$

$S''_{22,v} = -(2-3\mu)\nu^2 N - \lambda^2 + 2m^2 + 1,$

$S''_{22,w} = -(1-3\mu+\mu^2)\nu^2 N + \mu\lambda^2 + 3,$

$S''_{22,13} = -(1+\mu)\nu,\ S''_{22,23} = -(7-5\mu)\nu,$

$S''_{22,33} = \nu S''_{22,u} - 3;$

$S'''_{22,u} = (1+\mu-4\mu^2)\nu^2 N + (1+2\mu)\lambda^2 - 6(1+\mu)m^2,$

$S'''_{22,v} = (7-12\mu+4\mu^2)\nu^2 N + (4-2\mu)\lambda^2 - 10m^2,$

$$S'''_{22,w} = \mu(1-2\mu)\nu^3 N^2 + \mu(2-3\mu)\nu^2 N\lambda^2 - \qquad (24)$$

$$-(3-3\mu-\mu^2)\nu^2 N m^2 + \mu\lambda^4 - (2+\mu)\lambda^2 m^2 + 2m^4,$$

$S'''_{22,13} = \nu(S''_{22,u} - 3\mu),$

$S'''_{22,23} = -(4-7\mu+2\mu^2)\nu^3 N - (2-\mu)\nu\lambda^2 + (3-\mu)\nu m^2,$

$S'''_{22,33} = -(1-3\mu)(1-2\mu)\nu^3 N + 3\mu\nu\lambda^2 - (3+9\mu)\nu m^2;$

$$S''''_{22,u} = \mu(1-2\mu)^2\nu^4 N^2 + 2\mu(1-2\mu)\nu^2 N\lambda^2 -$$

$$-(3-2\mu-4\mu^2)\nu^2 N m^2 + \mu\lambda^4 - 2(1+\mu)\lambda^2 m^2 +$$

$$+(2+\mu)m^4,$$

$$S''''_{22,v} = (4-11\mu+8\mu^2)\nu^4 N^2 + (4-6\mu)\nu^2 N\lambda^2 -$$

$$-(7-10\mu)\nu^2 N m^2 + \lambda^4 - 4\lambda^2 m^2 + 3m^4,$$

$$S''''_{22,w} = (1-6\mu+10\mu^2-4\mu^3)\nu^4 N^2 -$$

$$-(1+4\mu-6\mu^2)\nu^2 N\lambda^2 + (12+6\mu)\nu N m^2 -$$

$$-(1+2\mu)\lambda^4 + (12+6\mu)\lambda^2 m^2 - 15m^4,$$

$$S''''_{22,13} = (3 - 2\mu - 4\mu^2)\nu^3 N + 2(1 + \mu)\nu\lambda^2 -$$
$$- (12 + 6\mu)\nu m^2,$$
$$S''''_{22,23} = (27 - 50\mu + 20\mu^2)\nu^3 N + (14 - 10\mu)\nu\lambda^2 -$$
$$- (32 - 14\mu)\nu m^2,$$
$$S''''_{22,33} = \nu S''''_{22,u};$$
$$S'_{33,u} = \mu, \ S'_{33,v} = 1, \quad S'_{33,w} = -N + 1,$$
$$S'_{33,13} = S'_{33,23} = -1, \quad S'_{33,33} = -(1 - 2\mu)\nu;$$
$$S''_{33,u} = \nu N + \lambda^2 - m^2 - 3\mu, \ S''_{33,v} = S''_{33,u} - 2 + 3\mu,$$
$$S''_{33,w} = N - 3, \ S''_{33,13} = (2 - \mu)\nu, \ S''_{33,23} = (6 - 5\mu)\nu,$$
$$S''_{33,33} = -(1 - 2\mu)\nu^2 N + \mu\nu(\lambda^2 - m^2) + 3(1 - 2\mu)\nu;$$
$$S'''_{33,u} = -(2 - \mu - 2\mu^2)\nu^2 N - (2 + \mu)\lambda^2 + 3(2 + \mu)m^2,$$
$$S'''_{33,v} = -S'''_{22,v} - 2m^2, \tag{24}$$
$$S'''_{33,w} = (1 - 2\mu)\nu^2 N^2 - (1 + \mu)\nu N(\lambda^2 - m^2) - (\lambda^2 - m^2)^2,$$
$$S'''_{33,13} = S'''_{33,23} = (3 - 2\mu)\nu^2 N + (2 - \mu)\nu(\lambda^2 - m^2),$$
$$S'''_{33,33} = (2 - 3\mu)(1 - 2\mu)\nu^3 N - 3\mu\nu(\lambda^2 - 3m^2);$$
$$S''''_{33,u} = S''''_{33,v} = -(3 - 4\mu)\nu^3 N^2 -$$
$$- (5 - 6\mu)\nu^2 N(\lambda^2 - m^2) - 2(\lambda^2 - m^2)^2,$$
$$S''''_{33,w} = -(2 - 4\mu)\nu^2 N^2 + (1 + \mu)\nu N(2\lambda^2 - 6m^2) +$$
$$+ 2\lambda^4 - 12\lambda^2 m^2 + 10m^4,$$
$$S''''_{33,13} = -(9 - 14\mu + 4\mu^2)\nu^3 N - (6 - 2\mu)\nu\lambda^2 +$$
$$+ (18 - 6\mu)\nu m^2,$$
$$S''''_{33,23} = -(25 - 46\mu + 20\mu^2)\nu^3 N - (14 - 10\mu)\nu\lambda^2 +$$
$$+ (26 - 14\mu)\nu m^2,$$

$$S''''_{33,33} = (1-2\mu)^2 \nu^4 N^2 - (1+2\mu-4\mu^2)\nu^3 N(\lambda^2 - m^2) -$$

$$-(1+\mu)\nu(\lambda^2-m^2)^2;$$

$$S'_{13,u} = -N - \lambda^2 + {}^1/_2\,(1-\mu)m^2, \quad S'_{13,v} = -{}^1/_2\,(1+\mu),$$

$$S'_{13,w} = -\mu, \; S'_{13,13} = -1, \; S'_{13,23} = 0, \; S'_{13,33} = -\mu\nu;$$

$$S''_{13,u} = N + \lambda^2 - {}^3/_2\,(1-\mu)m^2, \quad S''_{13,v} = {}^1/_2\,(1-\mu),$$

$$S''_{13,w} = S''_{33,u} + 4\mu,$$

$$S''_{13,13} = -2\nu N - (2-\mu)\nu\lambda^2 + m^2 + 2,$$

$$S''_{13,23} = -\nu, \; S''_{13,33} = \mu\nu;$$

$$S'''_{13,u} = 2\nu N^2 + (4 - 6\mu + \mu^2)\nu^2 N\lambda^2 - 2Nm^2 + 2\lambda^4 -$$

$$-{}^1/_2\,(5-\mu)\lambda^2 m^2 + {}^1/_2\,(1-\mu)m^4,$$

$$S'''_{13,v} = (2 - 2\mu - \mu^2)\nu^2 N + {}^1/_2\,(3+\mu)\,(\lambda^2 - m^2),$$

$$S'''_{13,w} = -(1 - 2\mu + 2\mu^2)\nu^2 N - (1-\mu)\,(\lambda^2 - 3m^2), \qquad (24)$$

$$S'''_{13,13} = -2S''_{13,13} - 4m^2, \; S'''_{13,23} = (4-2\mu)\nu,$$

$$S'''_{13,33} = (1-2\mu^2)\nu^3 N + (1+\mu)\nu(\lambda^2 - m^2);$$

$$S'''_{13,u} = -4\nu N^2 - (8 - 12\mu + 2\mu^2)\nu^2 N^2 \lambda^2 +$$

$$+12Nm^2 - 4\lambda^4 + 3(5-\mu)\lambda^2 m^2 - 5(1-\mu)m^4,$$

$$S''''_{13,v} = -(5 - 8\mu + 2\mu^2)\nu^2 N - (3-\mu)\lambda^2 + (9+\mu)m^2,$$

$$S''''_{13,w} = S''''_{33,u},$$

$$S''''_{13,13} = 4\nu^2 N + (7 - 12\mu + 4\mu^2)\nu^3 N\lambda^2 - 4\nu Nm^2 +$$

$$+(3-\mu)\nu\lambda^4 - (4-2\nu)\nu\lambda^2 m^2 + m^4,$$

$$S''''_{13,23} = (3-4\mu)\nu^3 N + 2\nu(\lambda^2 - m^2),$$

$$S''''_{13,33} = -2S'''_{13,33} + 6\nu m^2;$$

$$S'_{23,u} = {}^1/_2\,(1+\mu), \quad S'_{23,v} = -N - {}^1/_2(1-\mu)\lambda^2 + m^2,$$

$$S'_{23,w} = 1, \quad S'_{23,13} = 0, \quad S'_{23,23} = -2, \quad S'_{23,33} = \mu\nu;$$

$$S''_{23,u} = -{}^1/_2\,(3+5\mu), \quad S''_{23,v} = N + {}^1/_2(1-\mu)\lambda^2 - 3m^2,$$

$$S''_{23,w} = -\nu N - \lambda^2 + m^2 - 4, \quad S''_{23,13} = \nu,$$

$$S''_{23,23} = -2\nu N - \lambda^2 + (2-\mu)\nu m^2 + 6,$$

$$S''_{23,33} = (1-5\mu)\nu;$$

$$S'''_{23,u} = -S'''_{13,v}, \quad S'''_{23,v} = 2\nu N^2 + 2N\lambda^2 - (4 - 6\mu + \mu^2)\nu^2 N m^2 + {}^1/_2\,(1-\mu)\lambda^4 - {}^1/_2\,(5-\mu)\lambda^2 m^2 + 2m^4$$

$$S'''_{23,w} = -(1 - 6\mu + 4\mu^2)\nu^2 N + 2(1+\mu)\lambda^2 - 4m^2,$$

$$S'''_{23,13} = -6\nu, \quad S'''_{23,23} = 6\nu N + 3\lambda^2 - (15-9\mu)\nu m^2,$$

$$S'''_{23,33} = -S'''_{13,33}; \tag{24}$$

$$S''''_{23,u} = (11 - 8\mu - 10\mu^2)\nu^2 N + (9+5\mu)\lambda^2 - (15+7\mu)m^2,$$

$$S''''_{23,v} = -4\nu N^2 - 4N\lambda^2 + (24 - 36\mu + 6\mu^2)\nu^2 N m^2 - (1-\mu)\lambda^4 + (15-3\mu)\lambda^2 m^2 - 20m^4,$$

$$S''''_{23,w} = -S''''_{33,u}, \quad S''''_{23,13} = -S''''_{13,23},$$

$$S''''_{23,23} = 4\nu^2 N^2 + 4\nu N\lambda^2 - (7 - 12\mu + 4\mu^2)\nu^3 N m^2 + \lambda^4 - (4-2\mu)\nu\lambda^2 m^2 + (3-\mu)\nu m^4,$$

$$S''''_{23,33} = (1 + 12\mu - 20\mu^2)\nu^3 N + (4+10\mu)\nu\lambda^2 - (8+14\mu)\nu m^2;$$

$$-S_{12,u} = S_{12,v} = S'_{12,u} = S'_{12,v} = {}^1/_2\,S'_{12,w} = {}^1/_2(1-\mu),$$

$$S_{12,w} = S_{12,13} = S_{12,23} = S_{12,33} = S'_{12,33} = 0,$$

$$-S'_{12,13} = S'_{12,23} = 1;$$

$$S''_{12,u} = N + {}^1\!/_2(3-\mu)\lambda^2 - {}^1\!/_2(1-\mu)m^2 - 1 + \mu,$$

$$S''_{12,v} = -N - {}^1\!/_2(1-\mu)\lambda^2 + {}^1\!/_2(3-\mu)m^2, \quad S''_{12,w} = \mu,$$

$$S''_{12,13} = 3, \quad S''_{12,23} = -1, \quad S''_{12,33} = \nu;$$

$$S'''_{12,u} = -4N - (5-\mu)\lambda^2 + 3(1-\mu)m^2, \quad S'''_{12,v} = -3m^2,$$

$$S'''_{12,w} = (\mu - 1)S'''_{33,13}, \quad S'''_{12,13} = -(S''_{13,13} + 9),$$

$$S'''_{12,23} = S''_{23,23} - 3, \quad S'''_{12,33} = -2(1+\mu)\nu;$$

$$S''''_{12,u} = -2\nu N^2 - (5 - 8\mu + 2\mu^2)\nu^2 N\lambda^2 + 2Nm^2 - \qquad (24)$$

$$- {}^1\!/_2(5-\mu)\lambda^4 + (3-\mu)\lambda^2 m^2 - {}^1\!/_2(1-\mu)m^4,$$

$$S''''_{12,v} = 2\nu N^2 + 2N\lambda^2 - (5 - 8\mu + 2\mu^2)\nu^2 N m^2 +$$

$$+ {}^1\!/_2(1-\mu)\lambda^4 - (3-\mu)\lambda^2 m^2 + {}^1\!/_2(5-\mu)m^4,$$

$$S''''_{12,w} = (7 - 10\mu + 4\mu^2)\nu^2 N + (6 - 2\mu)\lambda^2 - (10 - 6\mu)m^2,$$

$$S''''_{12,13} = -12\nu N - (12 - 6\mu)\nu\lambda^2 + 10m^2,$$

$$S''''_{12,23} = 4\nu N + 2\lambda^2 - (12 - 6\mu)\nu m^2,$$

$$S''''_{12,33} = -(3 - 4\mu)\nu^3 N - 2\nu(\lambda^2 - m^2).$$

Из (24) следуют некоторые важные свойства рядов напряжений типа (15):

(а) В первых двух членах ($n = 0; 1$) некоторые слагаемые равны нулю, начиная с третьих членов ($n = 2$) все слагаемые отличны от нуля.

(б) $$\sigma^{k+1}_{ij,0}, \quad \sigma^{k+2}_{ij,0} \leqslant (p^k + 1)\sigma''_{ij,0}, \qquad (25)$$
$$p^2 \sim N + \lambda^2 + m^2, \quad ij = 1, 2, 3; \quad k = 2, 4, \ldots$$

(в) Ряды сходятся [8] к истинному решению начиная с третьего члена ($n = 2$), если выполняется условие:

$$a^2(p^2 + 1) \leqslant max\,K. \qquad (26)$$

Величина K зависит от коэффициента Пуассона μ и от рассматриваемого напряженного состояния. Поэтому трудно определить ее точное максимальное значение, но по-видимому во многих задачах $max\, K \sim 0{,}1 \div 1$ (см. п. 4).

В следующем пункте излагается метод (способ «А») построения основных уравнений теории оболочек, в котором учитывается одинаковое нечетное число (1, 3, 5) членов в рядах всех напряжений. Предположим, что эти ряды сходятся, т. е. предположим, что условие (26) выполнено. Из (а) следует, что могут иметь место такие (моментные) напряженные состояния, при которых

$$\sigma_{ij,0} < \sigma'_{ij,0}, \quad \sigma''_{ij,0}$$

и следовательно первые члены (соотношения безмоментной теории) не характеризуют напряженного состояния оболочек. Однако с учетом трех членов всегда достигается приближенное решение. Верхние пределы асимптотической погрешности такого решения являются следующими: для краевых напряжений $\vartheta^* \leqslant p^2a^2 + a$, для характеристического уравнения $\vartheta_0 \leqslant (p^2 + 1)a^2$. По-видимому могут иметь место такие задачи, при которых условие (26) выполнено, но точность порядка ϑ^*, ϑ_0 недостаточна. В таких задачах целесообразно учесть 5 членов в рядах напряжений. Верхние пределы асимптотической погрешности такой «уточненной теории» являются следующими: для краевых напряжений $\vartheta^{**} \leqslant p^4a^4 + a$, для характеристического уравнения $\vartheta_1 \leqslant p^4a^4 + a^2$. Вопрос об асимптотической погрешности характеристического уравнения рассматривается более подробно в п. 4, где доказывается, что при $N < \lambda^2$, m^2 вышеуказанные пределы асимптотической погрешности совпадают с действительными оценками, а при $N > \lambda^2$, m^2 — несколько преувеличены.

3. СИСТЕМЫ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Следующий этап построения уточненной теории заключается в составлении системы из шести уравнений относительно u_0, v_0, w_0, $\sigma_{13,0}$, $\sigma_{23,0}$, $\sigma_{33,0}$. Такую систему уравнений можно составить различными способами. Ниже излагаются два из этих способов, сохраняя члены с множителями $a^2 = \delta^2/12R^2_0$ и a^4, и отбрасывая члены с более маленькими множителями.

Способ «А». Пусть уравнения равновесия (11) условно написаны в форме $l_i = 0$, $(i = 1, 2, 3)$. Составим следующие уравнения:

$$\int_{-\frac{\delta}{2R_0}}^{\frac{\delta}{2R}} \zeta l_i d\zeta = 0, \qquad \int_{-\frac{\delta}{2R_0}}^{\frac{\delta}{2R_0}} \zeta\zeta l_i d\zeta = 0, \ (i = 1, 2, 3),$$

которые можем рассматривать как уравнения равновесия «макроскопического» элемента оболочки. Подставляя напряжения и перемещения в виде ряда Тэйлора, получим уравнения:

$$1)\ -\lambda\sigma_{11,0} - m\sigma_{12,0} - Nu_0 - {}^1/_2 a^2 [\lambda(2\sigma'_{11,0} + \sigma''_{11,0}) + m\sigma''_{12,0} + N(2u'_0 + u''_0)] - {}^3/_{40}\, a^4 [\lambda(4\sigma'''_{11,0} + \sigma''''_{11,0}) + m\sigma''''_{12,0} + N(4u'''_0 + u''''_0)] = q_{\mathrm{I}},$$

$$2)\ -\lambda\sigma_{12,0} + m\sigma_{22,0} - \sigma_{23,0} - Nv_0 - {}^1/_2\, a^2 [\lambda(2\sigma'_{12,0} + \sigma''_{12,0}) - m\sigma''_{22,0} + \sigma''_{23,0} + N(2v'_0 + v''_0)] - {}^3/_{40}\, a^4 [\lambda(4\sigma'''_{12,0} + \sigma''''_{12,0}) - m\sigma''''_{22,0} + \sigma''''_{23,0} + N(4v'''_0 + v''''_0)] = q_{\mathrm{II}}, \qquad (27)$$

$$3)\ -\lambda\sigma_{13,0} - m\sigma_{23,0} + \sigma_{22,0} - Nw_0 - {}^1/_2\, a^2 [\lambda(2\sigma'_{13,0} + \sigma''_{13,0}) + m\sigma''_{23,0} - \sigma''_{22,0} + N(2w'_0 + w''_0)] - {}^3/_{40}\, a^4 [\lambda(4\sigma'''_{13,0} + \sigma''''_{13,0}) + m\sigma''''_{23,0} - \sigma''''_{22,0} + N(4w'''_0 + w''''_0)] = q_{\mathrm{III}},$$

$$4)\ \sigma_{13,0} + a^2 [-\lambda(\sigma_{11,0} + \sigma'_{11,0}) - m\sigma'_{12,0} + \sigma'_{13,0} + {}^1/_2\, \sigma''_{13,0} - N(u_0 + u'_0)] + {}^3/_{40}\, a^4 [-\lambda(12\sigma''_{11,0} + 4\sigma'''_{11,0}) - 4m\sigma'''_{12,0} + 4\sigma'''_{13,0} + \sigma''''_{13,0} - N(12u''_0 + 4u'''_0)] = q_{\mathrm{IV}},$$

$$5)\ \sigma_{23,0} + a^2[-\lambda(\sigma_{12,0} + \sigma'_{12,0}) + m\sigma'_{22,0} + {}^1/_2\,\sigma''_{23,0} -$$

$$- N(v_0 + v'_0)] + {}^3/_{40}\,a^4[-\lambda(12\sigma''_{12,0} + 4\sigma'''_{12,0}) +$$

$$+ 4m\sigma'''_{22,0} + \sigma''''_{23,0} - N(12v''_0 + 4v'''_0)] = q_{\mathrm{V}},$$

$$6)\ \sigma_{33,0} + a^2[-\lambda(\sigma_{13,0} + \sigma'_{13,0}) - m\sigma'_{23,0} + \sigma'_{33,0} + \qquad (27)$$

$$+ {}^1/_2\,\sigma''_{33,0} + \sigma'_{22,0} - N(w_0 + w'_0)] +$$

$$+ {}^3/_{40}\,a^4[-\lambda(12\sigma''_{13,0} + 4\sigma'''_{13,0}) - 4m\sigma'''_{23,0} + 4\sigma'''_{33,0} +$$

$$+ \sigma''''_{33,0} + 4\sigma'''_{22,0} - N(12w''_0 + 4w'''_0)] = q_{\mathrm{VI}},$$

где при $j = \mathrm{I, II, III}$:

$$q_j = {}^1/_2\,(\bar\sigma_{i3,1} + \bar\sigma_{i3,2}) + \frac{R_0}{\delta}(\bar\sigma_{i3,1} - \bar\sigma_{i3,2}), \qquad (28)$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3,);$$

и при $j = \mathrm{IV, V, VI}$:

$$q_j = {}^1/_2\,(\bar\sigma_{i3,1} + \bar\sigma_{i3,2}) + \frac{\delta}{4R_0}(\bar\sigma_{i3,1} - \bar\sigma_{i3,2}),$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3). \qquad (28a)$$

Способ «Б». Составим 3 пары уравнений, выражающих на поверхностях «1» и «2» условия равенства напряжений σ_{13}, σ_{23}, σ_{33} соответствующим поверхностным нагрузкам. Сложением и вычитанием уравнений каждой пары придадим правым частям этих уравнений форму уравнений (27). В результате получим следующие 6 уравнений:

1), 2), 3):

$$\sigma_{i3,0} + \sigma'_{i3,0} + a^2({}^3/_2\sigma''_{i3,0} + {}^1/_2\sigma'''_{i3,0}) +$$

$$+ a^4({}^3/_8\sigma''''_{i3,0} + {}^3/_{40}\sigma'''''_{i3,0}) = q_j, \quad (i = 1,\ 2,\ 3;$$

$$j = \mathrm{I, II, III});$$

4), 5), 6): (29)

$$\sigma_{i3,0} + a^2(3\sigma'_{i3,0} + {}^3/_2\sigma''_{i3,0}) +$$

$$+ a^4({}^3/_2\sigma'''_{i3,0} + {}^3/_8\sigma''''_{i3,0}) = q_j, \quad (i = 1,\ 2,\ 3;$$

$$j = \mathrm{IV, V, VI}).$$

На основе (19), (20), (21), (22), (23), (24) можем выразить в уравнениях (27), (29) все компоненты напряжений и перемещений как функции от u_0, v_0, w_0 и $\sigma_{13,0}$, $\sigma_{23,0}$, $\sigma_{33,0}$, т. е. получить систему уравнений для определения этих величин.

Эквивалентность способов «А» и «Б». Правые части уравнений (27) и (29) являются одинаковыми. Остается доказать эквивалентность левых частей. Для этого составим дополнительные соотношения (30). Полагая в уравнениях (11), что $\zeta = 1$, получим соотношения индексом $n = 0$. Дифференцируя уравнения (11) и полагая затем, что $\zeta = 1$, получим соотношения индексом $n = 1$ и т. д.

$$(а): \lambda\sigma^n{}_{11,0} + mh_n(\sigma_{12,0}) + h_n(\sigma_{13,0}) + \sigma^{n+1}{}_{13,0} + Nu^n{}_0 = 0,$$

$$(б): \lambda\sigma^n{}_{12,0} - mh_n(\sigma_{22,0}) + 2h_n(\sigma_{23,0}) + \sigma^{n+1}{}_{23,0} + Nv^n{}_0 = 0,$$

$$(в): \lambda\sigma^n{}_{13,0} + mh_n(\sigma_{23,0}) + \sigma^{n+1}{}_{33,0} + h_n(\sigma_{33,0}) - h_n(\sigma_{22,0}) + Nw^n{}_0 = 0, \quad (30)$$

где $n = 0, 1, 2, 3, 4$ и

$$\text{при } n = 0: h_0(\sigma_{ij,0}) = \sigma_{ij,0}; \quad (31)$$

$$\text{при } n \geqslant 1: h_n(\sigma_{ij,0}) = -nh_{n-1}(\sigma_{ij,0}) + \sigma^n{}_{ij,0}.$$

При помощи пяти соотношений (а) системы (30) можно привести уравнения 1) и 4) системы (29) к виду соответствующих уравнений системы (27). Аналогично соотношения (б) и (в) позволяют доказать эквивалентность уравнений 2), 5) и 3), 6) системы (29) к соответствующим уравнениям системы (27).

В таблице 1 приводится первичная система шести уравнений, в которой коэффициенты имеют значения (32). Для проверки эти коэффициенты были найдены обоими способами. В них сохранены безмоментные члены, все члены с множителем a^2 и старшие производные с множителем a^4.

Замечание: По техническим соображениям типографии здесь и далее численные дробные множители напечатаны с наклонной чертой, причем алгебраическое выражение, следующее дроби, считается умноженным на дробь. Например:

$$^3/_2\,\mu m^2 = \frac{3}{2}\mu m^2, \quad ^1/_2(1+\mu) = \frac{1+\mu}{2} \quad \text{и т. д.}$$

Таблица 1

	Левая сторона						Правая сторона
	u_0	v_0	w_0	$\sigma_{13,0}$	$\sigma_{23,0}$	$\sigma_{33,0}$	
	1	2	3	4	5	6	
1.	B_{11}	$\lambda m B_{12}$	λB_{13}	B_{14}	$\lambda m B_{15}$	λB_{16}	q_{I}
2.	$\lambda m B_{21}$	B_{22}	$m B_{23}$	$\lambda m B_{24}$	B_{25}	$m B_{26}$	q_{II}
3.	λB_{31}	$m B_{32}$	B_{33}	λB_{34}	$m B_{35}$	B_{36}	q_{III}
4.	B_{41}	$\lambda m B_{42}$	λB_{43}	B_{44}	$\lambda m B_{45}$	λB_{46}	q_{IV}
5.	$\lambda m B_{51}$	B_{52}	$m B_{53}$	$\lambda m B_{54}$	B_{55}	$m B_{56}$	q_{V}
6.	λB_{61}	$m B_{62}$	B_{63}	λB_{64}	$m B_{65}$	B_{66}	q_{VI}

$$
\begin{aligned}
B_{11} = {} & -N-\lambda^2+{}^1/_2(1-\mu)\,m^2+a^2\,[\nu N^2+{}^1/_2(4-6\mu+\\
& +\mu^2)\,\nu^2N\lambda^2-Nm^2+\lambda^4-{}^1/_4(5-\mu)\,\lambda^2m^2+\\
& +{}^1/_4(1-\mu)\,m^4+{}^1/_2(1-\mu)\,m^2]+{}^3/_{40}\,a^4\,[-4\nu^2N^3-\\
& -(11-30\mu+24\mu^2-4\mu^3)\,\nu^4N^2\lambda^2+6\nu N^2m^2-\\
& -(10-14\mu+\mu^2)\,\nu^2N\lambda^4+(13-20\mu+4\mu^2)\,\nu^2N\lambda^2m^2-\\
& -3Nm^4-3\lambda^6+{}^1/_2(13-\mu)\,\lambda^4m^2-(4-\mu)\,\lambda^2m^4+\\
& +{}^1/_2(1-\mu)\,m^6],\\
B_{12} = {} & -{}^1/_2\,(1+\mu)+a^2\,[{}^1/_2(2-2\mu-\mu^2)\,\nu^2N+\\
& +{}^1/_4(3+\mu)\,(\lambda^2-m^2)-{}^\mu/_2]+{}^3/_{40}\,a^4\,[-(5-12\mu+\\
& +6\mu^2+2\mu^3)\,\nu^4N^2-(7-8\mu-2\mu^2)\,\nu^2N\,(\lambda^2-m^2)-\\
& -{}^1/_2(5+\mu)\,(\lambda^2-m^2)^2],\\
B_{13} = {} & -\mu+a^2\,[{}^1/_2(2-\mu-2\mu^2)\,\nu^2N+{}^1/_2(2+\mu)\,\lambda^2-\\
& -{}^3/_2\mu m^2]+{}^3/_{40}\,a^4\,[-(9-20\mu+8\mu^2+4\mu^3)\,\nu^4N^2-\\
& -(15-16\mu-4\mu^2)\,\nu^2N\lambda^2-(5-12\mu+12\mu^2)\,\nu^2Nm^2-\\
& -(6+\mu)\,\lambda^4-(4-6\mu)\,\lambda^2m^2+(10-5\mu)\,m^4],\\
B_{14} = {} & a^2\,[-\nu N-{}^1/_2(2-\mu)\,\nu\lambda^2-{}^3/_2\,m^2]+{}^3/_{40}\,a^4\,[8\nu^2N^2+\\
& +(14-24\mu+8\mu^2)\,\nu^3N\lambda^2+16\nu Nm^2+(6-2\mu)\,\nu\lambda^4+\\
& +(16-8\mu)\,\nu\lambda^2m^2-10m^4],\\
B_{15} = {} & {}^1/_2\,a^2(1-2\mu)\,\nu+{}^3/_{40}\,a^4\,[-(2-8\mu+8\mu^2)\,\nu^3N+\\
& +4\mu\nu\lambda^2+(12-4\mu)\,\nu m^2],
\end{aligned}
\tag{32}
$$

$$B_{16} = -\mu\nu + a^2 [{}^1/_2 (1-2\mu^2)\nu^3 N +$$

$$+ {}^1/_2 (1+\mu)\nu(\lambda^2 - m^2)] + {}^3/_{40} a^4 [-(3-6\mu +$$

$$+ 4\mu^3)\nu^5 N^2 - (5-4\mu-4\mu^2)\nu^3 N(\lambda^2 - m^2) -$$

$$- (2+\mu)\nu(\lambda^2 - m^2)^2];$$

$$B_{21} = -B_{12} + {}^1/_4 a^2 (3+9\mu),$$

$$B_{22} = -N - {}^1/_2 (1-\mu)\lambda^2 + m^2 + a^2 [\nu N^2 + N\lambda^2 -$$

$$- {}^1/_2 (4-6\mu+\mu^2)\nu^2 N m^2 - {}^3/_2 N + {}^1/_4 (1-\mu)\lambda^4 -$$

$$- {}^1/_4 (5-\mu)\lambda^2 m^2 - {}^3/_4 (1-\mu)\lambda^2 + m^4 + 2m^2] +$$

$$+ {}^3/_{40} a^4 [-4\nu^2 N^3 - 6\nu N^2 \lambda^2 + (11 - 30\mu + 24\mu^2 -$$

$$- 4\mu^3)\nu^4 N^2 m^2 - 3N\lambda^4 + (13 - 20\mu + 4\mu^2)\nu^2 N\lambda^2 m^2 -$$

$$- (10 - 14\mu + \mu^2)\nu^2 N m^4 - {}^1/_2 (1-\mu)\lambda^6 +$$

$$+ (4-\mu)\lambda^4 m^2 - {}^1/_2 (13-\mu)\lambda^2 m^4 + 3m^6], \tag{32}$$

$$B_{23} = 1 + a^2 [-{}^1/_2 (4 - 9\mu + 4\mu^2)\nu^2 N - {}^1/_2 (1-2\mu)\lambda^2 -$$

$$- {}^1/_2 m^2 + {}^7/_2] + {}^3/_{40} a^4 [(11 - 38\mu + 44\mu^2 - 16\mu^3)\nu^4 N^2 +$$

$$+ (5 - 20\mu + 16\mu^2)\nu^2 N\lambda^2 + (15 - 8\mu - 8\mu^2)\nu^2 N m^2 -$$

$$- (1+4\mu)\lambda^4 + (18+4\mu)\lambda^2 m^2 - 17m^4],$$

$$B_{24} = -{}^3/_2 a^2 \nu + {}^3/_{40} a^4 [(12-16\mu)\nu^3 N + 8\nu\lambda^2 - 20\nu m^2],$$

$$B_{25} = -1 + a^2 [-{}^1/_2 (9-6\mu)\nu m^2 - 3] + {}^3/_{40} a^4 [4\nu^2 N^2 +$$

$$+ 4\nu N\lambda^2 + (40 - 72\mu + 28\mu^2)\nu^3 N m^2 + \lambda^4 +$$

$$+ (22-14\mu)\nu\lambda^2 m^2 - (35-15\mu)\nu m^4],$$

$$B_{26} = -B_{16} - {}^1/_2 a^2 (4-11\mu)\nu;$$

$$B_{31} = \mu + a^2\,[{}^1/_2(1 - 2\mu + 2\mu^2)\,\nu^2 N + {}^1/_2\,(1 - \mu)\,\lambda^2 +$$
$$+ {}^3/_2\,(1 + \mu)\,m^2 + {}^3/_2\,\mu] + {}^3/_{40}\,a^4\,[-(6 - 15\mu +$$
$$+ 12\mu^2 - 4\mu^3)\,\nu^4 N^2 - (10 - 4\mu)\,\nu N \lambda^2 - (20 - 18\mu -$$
$$- 12\mu^2)\,\nu^2 N m^2 - (4 - \mu)\,\lambda^4 - (16 + 6\mu)\,\lambda^2 m^2 +$$
$$+ (20 + 5\mu)\,m^4],$$

$$B_{32} = B_{23} + a^2\,(3m^2 - 3) + {}^3/_{40}\,a^4\,[-60\nu N m^2 -$$
$$- 40\lambda^2 m^2 + 40 m^4],$$

$$B_{33} = -N + 1 + a^2\,[{}^1/_2\,(1 - 2\mu)\,\nu^2 N^2 -$$
$$- {}^1/_2\,(1 + \mu)\,\nu N\,(\lambda^2 - m^2) - {}^1/_2\,(2 - 6\mu + 3\mu^2)\,\nu^2 N -$$
$$- {}^1/_2\,(\lambda^2 - m^2)^2 + \mu\lambda^2 + 2m^2 + {}^3/_2] +$$
$$+ {}^3/_{40}\,a^4\,[-(1 - 4\mu + 4\mu^2)\,\nu^4 N^3 + (4 - 2\mu - \qquad (32)$$
$$- 4\mu^2)\,\nu^3 N^2\,(\lambda^2 - m^2) + (6 - 6\mu - \mu^2)\,\nu^2 N\,(\lambda^2 - m^2)^2 +$$
$$+ 2\,(\lambda^2 - m^2)^3],$$

$$B_{34} = -1 + a^2\,[{}^1/_2(3 - 2\mu)\,\nu^2 N + {}^1/_2\,(2 - \mu)\,\nu\,(\lambda^2 - m^2) -$$
$$- {}^1/_2\,(1 + \mu)\,\nu] + {}^3/_{40}\,a^4\,[-(7 - 12\mu + 4\mu^2)\,\nu^4 N^2 -$$
$$- (9 - 14\mu + 4\mu^2)\,\nu^3 N\,(\lambda^2 - m^2) - (3 - \mu)\,\nu\,(\lambda^2 - m^2)^2],$$

$$B_{35} = B_{34} - 6a^2,$$

$$B_{36} = \mu\nu + a^2\,[-{}^1/_2\,(1 - 2\mu)\,\nu^3 N + 3\mu\nu m^2 -$$
$$- {}^3/_2\,(1 - 2\mu)\,\nu] + {}^3/_{40}\,a^4\,[(2 - \mu)\,(1 - 2\mu)^2 \nu^5 N^2 -$$
$$- (2 + 4\mu)\,\nu^2 N \lambda^2 - (4 + 14\mu - 28\mu^2)\,\nu^3 N m^2 -$$
$$- (2 + \mu)\,\nu\lambda^4 - (8 + 14\mu)\,\nu\lambda^2 m^2 + (10 + 15\mu)\,\nu m^4];$$

$$B_{41} = -{}^3/_4\, a^2\,[2N + 2\lambda^2 + (1-\mu)\, m^2] + {}^3/_8\, a^4\,[4\nu N^2 +$$

$$+ (8 - 12\mu + 2\mu^2)\,\nu^2 N\lambda^2 + 4Nm^2 + 4\lambda^4 +$$

$$+ (5-\mu)\,\lambda^2 m^2 - 3\,(1-\mu)\, m^4],$$

$$B_{42} = -{}^3/_4\, a^2\,(1 + 3\mu) + {}^3/_8\, a^4\,[(3 - 6\mu^2)\,\nu^2 N +$$

$$+ (3 + 3\mu)\,\lambda^2 + (3-\mu)\, m^2],$$

$$B_{43} = {}^3/_2\, a^2\,[\nu N + \lambda^2 - m^2 - \mu] + {}^3/_8\, a^4\,[-(3 - 4\mu)\,\nu^3 N^2 -$$

$$-(5 - 6\mu)\,\nu^2 N\,(\lambda^2 - m^2) - 2\,(\lambda^2 - m^2)^2],$$

$$B_{44} = 1 + {}^3/_2\, a^2\,[-2\nu N - (2-\mu)\,\nu\lambda^2 + m^2] +$$

$$+ {}^3/_8\, a^4\,[4\nu^2 N^2 + (7 - 12\mu + 4\mu^2)\,\nu^3 N\lambda^2 - 4\nu N m^2 +$$

$$+ (3-\mu)\,\nu\lambda^4 - (4 - 2\mu)\,\nu\lambda^2 m^2 + m^4],$$

$$B_{45} = -{}^3/_2\, a^2\nu + {}^3/_8\, a^4\,[(3 - 4\mu)\,\nu^3 N + 2\nu\,(\lambda^2 - m^2)],$$

$$B_{46} = -{}^3/_2\, a^2\,\mu\nu + {}^3/_8\, a^4\,[(2 - 4\mu^2)\,\nu^3 N + \qquad (32)$$

$$+ (2 + 2\mu)\,\nu\,(\lambda^2 + m^2)];$$

$$B_{51} = B_{42} - {}^1/_2\, a^4\,(9 + 3\mu)\, m^2,$$

$$B_{52} = -{}^3/_4\, a^2\,[2N + (1-\mu)\,\lambda^2 + 2m^2] + {}^3/_8\, a^4\,[4\nu N^2 +$$

$$+ 4N\lambda^2 + (8 - 12\mu + 2\mu^2)\,\nu^2 N m^2 + (1-\mu)\,\lambda^4 +$$

$$+ (5-\mu)\,\lambda^2 m^2 - 12 m^4],$$

$$B_{53} = -B_{43} - {}^3/_2\, a^2\,(2 + \mu), \quad B_{54} = -B_{45},$$

$$B_{55} = 1 + {}^3/_2\, a^2\,[-2\nu N - \lambda^2 + (2-\mu)\,\nu m^2 + 2] +$$

$$+ {}^3/_8\, a^4\,[4\nu^2 N^2 + 4\nu N\lambda^2 - (7 - 12\mu + 4\mu^2)\,\nu^3 N m^2 +$$

$$+ \lambda^4 - (4 - 2\mu)\,\nu\lambda^2 m^2 + (3-\mu)\,\nu m^4],$$

$$B_{56} = {}^3/_2\, a^2 (1 - 3\mu)\nu + {}^3/_8\, a^4 [-3(1 - 2\mu)^2\nu^3 N + 6\mu\nu\lambda^2 -$$

$$- (4 + 10\mu)\nu m^2];$$

$$B_{61} = B_{43},\ B_{62} = B_{43} + {}^3/_2\, a^2\mu,$$

$$B_{63} = -{}^3/_2\, a^2\, (N + 1) + {}^3/_8\, a^4 [(2 - 4\mu)\nu^2 N^2 -$$

$$- (2 + 2\mu)\nu N(\lambda^2 + m^2) - 2\lambda^4 - 4\lambda^2 m^2 + 6m^4],$$

$$B_{64} = {}^3/_2\, a^2\mu\nu + {}^3/_8\, a^4 [(3 - 6\mu + 4\mu^2)\nu^3 N + 2\lambda^2 +$$

$$+ (10 - 2\mu)\nu m^2], \qquad (32)$$

$$B_{65} = {}^3/_2\, a^2 (4 - 3\mu)\nu + {}^3/_8\, a^4 [-(13 - 26\mu + 12\mu^2)\nu^3 N -$$

$$- 6\lambda^2 + (18 - 10\mu)\nu m^2],$$

$$B_{66} = 1 + {}^3/_2\, a^2 [-(1 - 2\mu)\nu^2 N + \mu\nu(\lambda^2 - m^2) +$$

$$+ (1 - 2\mu)\nu] + {}^3/_8\, a^4 [(1 - 2\mu)^2\nu^4 N^2 -$$

$$- (1 + 2\mu - 4\mu^2)\nu^3 N(\lambda^2 - m^2) - (1 + \mu)\nu(\lambda^2 - m^2)^2].$$

Проводя вычисление коэффициентов B с вышеуказанной точность по способу «А», приходится сохранить в формулах для σ^n_{ij} $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ все члены при $n = 0, 1, 2$ и старшие производные при $n = 3, 4$; т. е. достаточно располагать формулами (24). Способом «Б» достигается такая же точность, если учесть в формулах для σ^n_{i3} $(i = 1, 2, 3)$ все члены при $n = 0, 1, 2, 3$ и старшие производные при $n = 4, 5$. Напомним, что для определения величин $\sigma'''''_{13,0}$, $\sigma'''''_{23,0}$, $\sigma'''''_{33,0}$ необходимо предварительно вывести формулы для u'''''_0, v'''''_0, w'''''_0. Это обстоятельство несколько усложняет применение способа «Б» по сравнению со способом «А».

Преобразование первичной системы уравнений. Далее преобразуем первичную систему шести уравнений (таблица 1) в новую форму (таблица 2), более удобную для практических вычислений. Для этого во-первых решим

Таблица 2

	Левая сторона						Правая сторона					
	u_0	v_0	w_0	$\sigma_{13,0}$	$\sigma_{23,0}$	$\sigma_{33,0}$	q_{I}	q_{II}	q_{III}	q_{IV}	q_{V}	q_{VI}
	1	2	3	4	5	6	I	II	III	IV	V	VI
1.	b_{11}	$\lambda m b_{12}$	λb_{13}	0	0	0	1	0	0	$b_{1\,\mathrm{IV}}$	$\lambda m b_{1\,\mathrm{V}}$	$\lambda b_{1\,\mathrm{VI}}$
2.	$\lambda m b_{21}$	b_{22}	$m b_{23}$	0	0	0	0	1	0	$\lambda m b_{2\,\mathrm{IV}}$	$b_{2\,\mathrm{V}}$	$m b_{2\,\mathrm{VI}}$
3.	λb_{31}	$m b_{32}$	b_{33}	0	0	0	0	0	1	$\lambda b_{3\,\mathrm{IV}}$	$m b_{3\,\mathrm{V}}$	$b_{3\,\mathrm{VI}}$.
4.	b_{41}	$\lambda m b_{42}$	λb_{43}	—1	0	0	0	0	0	$-b_{4\,\mathrm{IV}}$	$-\lambda m b_{4\,\mathrm{V}}$	$-\lambda b_{4\,\mathrm{VI}}$
5.	$\lambda m b_{51}$	b_{52}	$m b_{53}$	0	—1	0	0	0	0	$-\lambda m b_{5\,\mathrm{IV}}$	$-b_{5\,\mathrm{V}}$	$-m b_{5\,\mathrm{VI}}$
6.	λb_{61}	$m b_{62}$	b_{63}	0	0	—1	0	0	0	$-\lambda b_{6\,\mathrm{IV}}$	$-m b_{6\,\mathrm{V}}$	$-b_{6\,\mathrm{VI}}$

уравнения 4., 5., 6. таблицы 1 относительно $\sigma_{13,0}$, $\sigma_{23,0}$, $\sigma_{33,0}$. В результате получим уравнения 4., 5., 6. таблицы 2. Затем исключим при помощи этих уравнений $\sigma_{13,0}$, $\sigma_{23,0}$, $\sigma_{33,0}$ из первых трех уравнений тиблацы 1. Получим уравнения 1., 2., 3. таблицы 2, представляющие собою систему трех уравнений относительно u_0, v_0, w_0.

Коэффициенты таблицы 2 являются следующими:

$$
\begin{aligned}
b_{11} = &- N - \lambda^2 + {}^1/_2 (1-\mu) m^2 + a^2 [\nu N^2 + \\
&+ {}^1/_2 (4 - 3\mu + \mu^2) \nu^2 N \lambda^2 - N m^2 + {}^1/_2 (2+\mu) \nu \lambda^4 - \\
&- {}^1/_4 (5 + \mu^2) \nu \lambda^2 m^2 + {}^1/_4 (1-\mu) m^4 - {}^3/_2 \mu^2 \nu \lambda^2 + \\
&+ {}^1/_2 (1-\mu) m^2] + {}^3/_{40} a^4 [-4\nu^2 N^3 - (21 - 45\mu + \\
&+ 44\mu^2 - 4\mu^3) \nu^4 N^2 \lambda^2 + 6\nu N^2 m^2 - (30 - 29\mu + 45\mu^2 - \\
&- \mu^3) \nu^3 N \lambda^4 + (33 - 38\mu + 54\mu^2 - 4\mu^3) \nu^3 N \lambda^2 m^2 - \\
&- 3 N m^4 - (13 + 4\mu + 13\mu^2) \nu^2 \lambda^6 + {}^1/_2 (53 + 13\mu + \\
&+ 55\mu^2 - \mu^3) \nu^2 \lambda^4 m^2 - (14 + \mu + 16\mu^2 - \mu^3) \nu^2 \lambda^2 m^4 + \\
&+ {}^1/_2 (1-\mu) m^6],
\end{aligned}
\tag{33}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{12} = &- {}^1/_2 (1+\mu) + a^2 [{}^1/_2 (2 + \mu - \mu^2) \nu^2 N + \\
&+ {}^1/_4 (3 + 4\mu - \mu^2) \nu (\lambda^2 - m^2) - {}^1/_2 \mu] + \\
&+ {}^3/_{40} a^4 [-(15 - 27\mu + 26\mu^2 + 2\mu^3) \nu^4 N^2 - \\
&- (27 - 20\mu + 36\mu^2 + 2\mu^3) \nu^3 N (\lambda^2 - m^2) - \\
&- {}^1/_2 (25 + 11\mu + 23\mu^2 + \mu^3) \nu^2 (\lambda^2 - m^2)^2],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{13} = &- \mu + a^2 [{}^1/_2 (2 - 4\mu + \mu^2) \nu^2 N + {}^1/_2 (2+\mu) \lambda^2 - \\
&- {}^3/_2 \mu m^2 - {}^3/_2 \mu\nu] + {}^3/_{40} a^4 [(21 - 50\mu + 52\mu^2 - \\
&- 24\mu^3) \nu^4 N^2 + (35 - 59\mu + 8\mu^2 - 14\mu^3) \nu^3 N \lambda^2 +
\end{aligned}
$$

$$+ (5 + 87\mu - 104\mu^2 + 42\mu^3)\nu^3 N m^2 + (14 - 29\mu -$$

$$- 14\mu^2 - \mu^3)\nu^2\lambda^4 + (16 + 54\mu - 16\mu^2 + 6\mu^3)\nu^2\lambda^2 m^2 -$$

$$- (30 + 25\mu - 30\mu^2 + 5\mu^3)\nu^2 m^4],$$

$$b_{1\,\mathrm{IV}} = a^2 [\nu N + {}^1/_2\,(2 - 3\mu - 2\mu^2)\nu^2\lambda^2 + {}^3/_2\, m^2] +$$

$$+ {}^3/_{40}\, a^4 [32\nu^2 N^2 + (66 - 167\mu + 68\mu^2 + 48\mu^3)\nu^4 N\lambda^2 +$$

$$+ 24\nu N m^2 + (34 - 32\mu - 32\mu^2)\nu^2\lambda^4 +$$

$$+ (34 + 4\mu + 72\mu^2)\nu^2\lambda^2 m^2 - 20 m^4],$$

$$b_{1\,\mathrm{V}} = - {}^1/_2\, a^2 (1 + 9\mu - 7\mu^2)\nu^2 + {}^3/_{40}\, a^4 [(42 - 295\mu +$$

$$+ 476\mu^2 - 208\mu^3)\nu^4 N + (50 - 64\mu + 104\mu^2)\nu^2\lambda^2 -$$

$$- (2 - 76\mu + 84\mu^2)\nu^2 m^2],$$

$$b_{1\,\mathrm{VI}} = \mu\nu + a^2 [- {}^1/_2\,(1 - 3\mu + 4\mu^2)\nu^3 N -$$

$$- {}^1/_2\,(1 + 2\mu^2)\nu^2(\lambda^2 - m^2) - {}^3/_2\mu(1 - 2\mu)\nu^2] + \qquad (33)$$

$$+ {}^3/_{40}\, a^4 [-(7 - 39\mu + 80\mu^2 - 64\mu^3)\nu^5 N^2 -$$

$$- (5 - 26\mu + 40\mu^2 - 64\mu^3)\nu^4 N(\lambda^2 - m^2) +$$

$$+ (2 + 12\mu + 16\mu^3)\nu^3(\lambda^2 - m^2)^2];$$

$$b_{21} = - b_{12} + {}^3/_2\, a^2 \mu^2\nu,$$

$$b_{22} = - N - {}^1/_2\,(1 - \mu)\lambda^2 + m^2 + a^2 [\nu N^2 + N\lambda^2 -$$

$$- {}^1/_2\,(4 - 3\mu + \mu^2)\nu^2 N m^2 - 3N + {}^1/_4\,(1 - \mu)\lambda^4 -$$

$$- {}^1/_4\,(5 + \mu^2)\nu\lambda^2 m^2 - {}^3/_2\,(1 - \mu)\lambda^2 + {}^1/_2\,(2 + \mu)\nu m^4 +$$

$$+ {}^1/_2\, m^2] + {}^3/_{40}\, a^4 [- 4\nu^2 N^3 - 6\nu N^2\lambda^2 + (21 - 45\mu +$$

$$+ 44\mu^2 - 4\mu^3)\nu^4 N^2 m^2 - 3N\lambda^4 + (33 - 38\mu + 54\mu^2 -$$

$$- 4\mu^3)\nu^3 N\lambda^2 m^2 - (30 - 29\mu + 45\mu^2 - \mu^3)\nu^3 N m^4 -$$

$$-\,{}^1/_2\,(1-\mu)\,\lambda^6+(14+\mu+16\mu^2-\mu^3)\,\nu^2\lambda^4m^2-$$

$$-\,{}^1/_2\,(53+13\mu+55\mu^2-\mu^3)\,\nu^2\lambda^2m^4+(13+4\mu+$$

$$+\,13\mu^2)\,\nu^2m^6],$$

$$b_{23}=1+a^2\,[-\,{}^1/_2\,(7-15\mu+7\mu^2)\,\nu^2N-(2-\mu)\,\lambda^2+$$

$$+\,m^2+{}^1/_2\,(1+2\mu)\,\nu]+{}^3/_{40}\,a^4\,[-(44-77\mu+36\mu^2-$$

$$-\,4\mu^3)\,\nu^4N^2-(70-120\mu+14\mu^2+6\mu^3)\,\nu^3N\lambda^2+$$

$$+\,(30-148\mu+110\mu^2-22\mu^3)\,\nu^3Nm^2-(21-48\mu-$$

$$-\,7\mu^2+4\mu^3)\,\nu^2\lambda^4-(2+92\mu-30\mu^2-4\mu^3)\,\nu^2\lambda^2m^2+$$

$$+\,(23+44\mu-37\mu^2)\,\nu^2m^4],$$

$$b_{2\mathrm{IV}}={}^3/_2\,a^2\mu^2\nu^2+{}^3/_{40}\,a^4\,[-(57-118\mu-4\mu^2+ \qquad (33)$$

$$+\,80\mu^3)\,\nu^4N-(28-28\mu-40\mu^2)\,\nu^2\lambda^2-(20+40\mu+$$

$$+\,60\mu^2)\,\nu^2m^2],$$

$$b_{2\mathrm{V}}=1+a^2[3\nu N+{}^3/_2\lambda^2+{}^1/_2(3+6\mu-6\mu^2)\,\nu^2m^2]+$$

$$+\,{}^3/_{40}a^4[96\nu^2N^2+96\nu N\lambda^2-(105-462\mu+620\mu^2-$$

$$-\,248\mu^3)\,\nu^4Nm^2+24\lambda^4-(72-116\mu+124\mu^2)\,\nu^2\lambda^2m^2-$$

$$-\,80\mu\nu m^4],$$

$$b_{2\mathrm{VI}}=-b_{1\mathrm{VI}}+{}^1/_2\,a^2\,(1-2\mu)\,\nu;$$

$$b_{31}=\mu+a^2[-\,{}^1/_2(2-\mu+\mu^2)\,\nu^2N-{}^1/_2(2+2\mu-$$

$$-\,\mu^2)\,\nu\lambda^2+{}^3/_2\mu\nu\,(m^2+1)\,]+{}^3/_{40}a^4[-(6-20\mu+$$

$$+\,22\mu^2-24\mu^3)\,\nu^4N^2-(30-99\mu+38\mu^2-$$

$$-\,14\mu^3)\,\nu^3N\lambda^2-(15+12\mu-44\mu^2+62\mu^3)\,\nu^3Nm^2-$$

$$-(24-69\mu+16\mu^2-\mu^3)\nu^2\lambda^4-(6+74\mu-36\mu^2+$$

$$+16\mu^3)\nu^2\lambda^2m^2+(30+5\mu-20\mu^2+15\mu^3)\nu^2m^4],$$

$$b_{32}=1+a^2[-{}^1/_2(7-12\mu+7\mu^2)\nu^2N-{}^1/_2(4-\mu^2)\nu\lambda^2+$$

$$+{}^1/_2(2+\mu)\nu m^2+{}^1/_2]+{}^3/_{40}\,a^4\,[(11-33\mu+34\mu^2+$$

$$+4\mu^3)\nu^4N^2-(20-45\mu-46\mu^2+26\mu^3)\nu^3N\lambda^2-$$

$$-(25-42\mu+40\mu^2+22\mu^3)\nu^3Nm^2-(21-28\mu-$$

$$-37\mu^2+14\mu^3)\nu^2\lambda^4-(12-8\mu+70\mu^2-$$

$$-14\mu^3)\nu^2\lambda^2m^2+(33-66\mu+123\mu^2-60\mu^3)\nu^2m^4],$$

$$b_{33}=1-N+a^2[{}^1/_2(1-2\mu)\nu^2N^2+{}^1/_2(2-\mu)\nu N(\lambda^2-$$

$$-m^2)-{}^1/_2(2-9\mu+6\mu^2)\nu^2N+(\lambda^2-m^2)^2-$$

$$-{}^1/_2\mu\lambda^2-m^2+{}^3/_2\nu]+{}^3/_{40}a^4[-(1-4\mu+4\mu^2)\nu^4N^3+ \qquad (33)$$

$$+(19-22\mu-4\mu^2)\nu^3N^2(\lambda^2-m^2)+(51-36\mu-$$

$$-\mu^2)\nu^2N(\lambda^2-m^2)^2+(32-12\mu)\nu(\lambda^2-m^2)^3],$$

$$b_{3\mathrm{IV}}=1+a^2[{}^1/_2(3-4\mu)\nu^2N+(2-\mu)\nu(\lambda^2-m^2)+$$

$$+{}^1/_2\,(1+2\mu^2)\nu^2]+{}^3/_{40}\,a^4\,[(47-112\mu+64\mu^2)\nu^4N^2+$$

$$+(114-184\mu+64\mu^2)\nu^3N(\lambda^2-m^2)+(68-64\mu+$$

$$+16\mu^2)\,\nu^2\,(\lambda^2-m^2)^2],$$

$$b_{3\mathrm{V}}=b_{3\mathrm{IV}}+3a^2(1+\mu)\nu,$$

$$b_{3\mathrm{VI}}=-\mu\nu+a^2\,[{}^1/_2(1-5\mu+6\mu^2)\nu^3N+{}^3/_2\,\mu\nu^2\lambda^2-$$

$$-{}^3/_2\,(1-2\mu+2\mu^2)\nu^2m^2+{}^3/_2\,(1-2\mu)\nu^2]+$$

$$+{}^3/_{40}\,a^4\,[(8-56\mu+128\mu^2-96\mu^3)\nu^5N^2-(8-55\mu+$$

$$+ 76\mu^2 + 16\mu^3)\,\nu^4 N\lambda^2 - (41 - 230\mu + 392\mu^2 -$$

$$- 248\mu^3)\,\nu^4 N m^2 - (8 - 42\mu + 80\mu^2 - 16\mu^3)\,\nu^3\lambda^4 -$$

$$- (42 - 158\mu + 120\mu^2 - 64\mu^3)\,\nu^3\lambda^2 m^2 + (50 - 200\mu +$$

$$+ 200\mu^2 - 80\mu^3)\,\nu^3 m^4];$$

$$b_{41} = a^2\,[{}^3\!/_2\,N + {}^3\!/_2\,\lambda^2 + {}^3\!/_4\,(1-\mu)\,m^2] + \underline{a^4\,[3\nu N^2 +}$$

$$\underline{+ {}^1\!/_2\,(12 - 18\mu + 3\mu^2)\,\nu^2 N\lambda^2 - {}^3\!/_2\,N m^2 + 3\lambda^4 -}$$

$$\underline{- {}^1\!/_4\,(3 - 27\mu - 3\mu^2)\,\nu\lambda^2 m^2]},$$

$$b_{42} = {}^1\!/_4\,a^2\,(3 + 9\mu) + \underline{a^4\,[{}^1\!/_8\,(27 - 36\mu^2)\,\nu^2 N +}$$

$$\underline{+ {}^1\!/_4\,(9 + 9\mu - 9\mu^2)\,\nu\lambda^2 + {}^1\!/_2\,(3\mu + 6\mu^2)\,\nu m^2]},$$

$$b_{43} = {}^3\!/_2\,a^2\,(-\nu N - \lambda^2 + m^2 + \underline{\mu)} +$$

$$+ a^4\,[-{}^1\!/_8\,(27 - 24\mu)\,\nu^3 N^2 - {}^1\!/_8\,(57 - 36\mu)\,\nu^2 N(\lambda^2 - \tag{33}$$

$$- m^2) - {}^1\!/_4\,(15 - 6\mu)\,\nu(\lambda^2 - m^2)^2],$$

$$b_{4\,\mathrm{IV}} = 1 + a^2\,[3\nu N + {}^1\!/_2\,(6 - 3\mu)\,\nu\lambda^2 - {}^3\!/_2\,m^2] +$$

$$+ a^4\,[{}^{15}\!/_2\nu^2 N^2 + {}^1\!/_8\,(123 - 180\mu + 60\mu^2)\,\nu^3 N\lambda^2 -$$

$$- {}^{15}\!/_2\,\nu N m^2 + {}^1\!/_8\,(63 - 60\mu + 15\mu^2)\,\nu^2\lambda^4 -$$

$$- {}^1\!/_4\,(39 - 45\mu + 15\mu^2)\,\nu^2\lambda^2 m^2 + {}^{15}\!/_8\,m^4],$$

$$b_{4\mathrm{V}} = {}^3\!/_2\,a^2\,\nu + a^4\,[{}^1\!/_8\,(63 - 60\mu)\,\nu^3 N +$$

$$+ {}^1\!/_4\,(24 - 15\mu)\,\nu^2(\lambda^2 - m^2)],$$

$$b_{4\mathrm{VI}} = {}^3\!/_2\,a^2\,\mu\nu + a^4\,[-{}^1\!/_4\,(3 - 27\mu + 30\mu^2)\,\nu^3 N -$$

$$- {}^1\!/_4\,(3 - 15\mu)\,\nu\lambda^2 - {}^1\!/_4\,(12 - 18\mu - 21\mu^2)\,\nu^2 m^2];$$

$$b_{51} = {}^1/_4\, a^2 (3 + 9\mu) + a^4 [{}^1/_8 (9 - 36\mu^2) \nu^2 N -$$

$$- {}^1/_4 (18\mu + 9\mu^2) \nu\lambda^2 - {}^1/_4 (9 + 6\mu) m^2],$$

$$b_{52} = a^2 [{}^3/_2 N + {}^3/_4 (1 - \mu) \lambda^2 + {}^3/_2 m^2] + a^4 [3\nu N^2 + 3N\lambda^2 -$$

$$- {}^1/_4 (3 + 12\mu^2) \nu^2 N m^2 + {}^3/_4 (1 - \mu) \lambda^4 -$$

$$- {}^1/_4 (3 + 27\mu + 6\mu^2) \nu\lambda^2 m^2 - {}^9/_4 (1 - 2\mu) \nu m^4],$$

$$b_{53} = - b_{43} + {}^3/_2\, a^2 (2 + \mu),$$

$$b_{5\,\mathrm{IV}} = - b_{4\mathrm{V}},$$

$$b_{5\mathrm{V}} = 1 + a^2 [3\nu N + {}^3/_2 \lambda^2 - {}^1/_2 (6 - 3\mu) \nu m^2 - 3] +$$

$$+ a^4 [{}^{15}/_2 \nu^2 N^2 + {}^{15}/_2 \nu N\lambda^2 - {}^1/_8 (123 - 180\mu +$$

$$+ 60\mu^2) \nu^3 N m^2 + {}^{15}/_8 \lambda^4 - {}^1/_4 (39 - 45\mu + 15\mu^2) \nu^2\lambda^2 m^2 +$$

$$+ {}^1/_8 (63 - 60\mu + 15\mu^2) \nu^2 m^4],$$

$$b_{5\mathrm{VI}} = - {}^3/_2\, a^2 (1 - 3\mu) \nu + a^4 [- {}^1/_8 (45 - 198\mu + \qquad (33)$$

$$+ 180\mu^2) \nu^3 N - {}^1/_4 (9 - 27\mu + 45\mu^2) \nu^2\lambda^2 +$$

$$+ {}^1/_4 (24 - 63\mu + 39\mu^2) \nu^2 m^2];$$

$$b_{61} = a^2 [- {}^3/_2 \nu N - {}^3/_2 (\lambda^2 - m^2) + {}^3/_2 \mu] +$$

$$+ a^4 [- {}^1/_8 (9 - 24\mu) \nu^3 N^2 - {}^1/_8 (3 - 36\mu) \nu^2 N (\lambda^2 -$$

$$- m^2) + {}^1/_4 (3 + 6\mu) \nu (\lambda^2 - m^2)^2],$$

$$b_{62} = b_{61} - {}^3/_2\, a^2 \mu,$$

$$b_{63} = {}^3/_2\, a^2 (N + 1) + a^4 [{}^1/_2 (3 - 6\mu) \nu^2 N^2 +$$

$$+ {}^1/_4 (3 + 6\mu^2) \nu^2 N\lambda^2 - {}^1/_4 (33 - 36\mu + 12\mu^2) \nu^2 N m^2 +$$

$$+ {}^1/_4 (3 + 6\mu) \nu\lambda^4 - {}^1/_2 (15 - 6\mu) \nu\lambda^2 m^2 +$$

$$+ {}^1/_4 (27 - 18\mu) \nu m^4],$$

$$b_{6\,IV} = -\,{}^3/_2\, a^2 \mu\nu + a^4 [-\,{}^1/_8\,(9 + 36\mu - 60\mu^2)\nu^3 N -$$

$$-\,{}^1/_4\,(3 + 15\mu)\nu\lambda^2 + {}^{21}/_4\,(1 + \mu)\nu m^2],$$

$$b_{6\,V} = -\,{}^1/_2\, a^2\,(12 - 9\mu)\nu + a^4 [-\,{}^1/_8\,(177 - 372\mu +$$

$$+ 180\mu^2)\nu^3 N - {}^1/_4\,(27 - 45\mu)\nu\lambda^2 + {}^1/_4\,(45 - 39\mu)\nu m^2],$$

$$b_{6\,VI} = 1 + a^2 [{}^1/_2\,(3 - 6\mu)\nu^2 N - {}^3/_2\,\mu\nu\,(\lambda^2 - m^2) - \qquad (33)$$

$$-\,{}^3/_2\,(1 - 2\mu)\nu] + a^4 [{}^{15}/_8\,(1 - 2\mu)^2 \nu^4 N^2 +$$

$$+\,{}^1/_8\,(3 - 30\mu + 60\mu^2)\nu^3 N (\lambda^2 - m^2) +$$

$$+\,{}^1/_8\,(3 + 15\mu^2)\nu^2 (\lambda^2 - m^2)^2].$$

4. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ТРЕХ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

Характеристическое уравнение системы шести уравнений таблицы 2 по существу представляет собою характеристическое уравнение первых трех уравнений. Придерживая такую же точность, как при выведении исходных уравнений, получим характеристическое уравнение следующего вида:

$$d_0 + a^2 d_1 + a^4 d_2 = 0, \qquad (34)$$

где

$$d_0 = -N^3 - {}^1/_2\,(3 - \mu) N^2 (\lambda^2 - m^2) + N^2 -$$

$$-\,{}^1/_2\,(1 - \mu) N [(\lambda^2 - m^2)^2 - (3 + 2\mu)\lambda^2 + m^2] + \qquad (35)$$

$$+\,{}^1/_2\,(1 - \mu)\,(1 - \mu^2)\lambda^4 \sim N p^4 + \lambda^4;$$

$$d_1 = d_1\,(p^8, p^6, p^4),\; d_2 = d_2\,(p^{10});\; p^2 \sim (N + \lambda^2 + m^2). \qquad (36)$$

Изложенная теория представляет интерес только в том случае, если ряды Тэйлора (14), (15) сходятся. Поэтому на основе (26) предполагаем, что

$$p^2 < a^{-2}. \qquad (37)$$

В зависимости от конкретных значений N, λ^2, m^2 в уравнении (34) является наибольшей одна из следующих величин:

$$Np^4,\ \lambda^4,\ a^2p^4,\ a^2p^8, \tag{38}$$

и наибольшим пренебреженным членом — одна из величин:

$$a^4p^2,\ a^4p^8,\ a^6p^{12}. \tag{39}$$

Следовательно максимальная асимптотическая погрешность уравнения (34) порядка:

$$\begin{gathered}\vartheta_1 \sim (a^4p^2 + a^4p^8 + a^6p^{12})(Np^4 + \lambda^4 + a^2p^4 + a^2p^8)^{-1} \leqslant \\ \leqslant a^2 + a^4(\lambda^4 + m^4) + a^6N^3.\end{gathered} \tag{40}$$

Характеристическое уравнение (34) имеет на основе (40) асимптотическую погрешность $\vartheta_1 \geqslant a^2$ и следовательно вполне обосновано пренебречь в выражении d_1 членами типа d_0. После указанного упрощения получим для d_1 и d_2 следующие формулы:

$$\begin{gathered}d_1 = d_{11} + d_{12} + d_{13} + d_{14}, \\ d_2 = d_{21} + d_{22} + d_{23},\end{gathered} \tag{41}$$

где

$$d_{11} = {}^1/_2\,(5 - 6\mu)\,\nu^2N^4,$$

$$d_{12} = {}^1/_2\,(1 - \mu)\,[(\lambda^2 - m^2)^4 - 2m^6 + m^4],$$

$$\begin{aligned}d_{13} = {}&{}^1/_4\,(25 - 35\mu + 12\mu^2)\,\nu^2N^3(\lambda^2 - m^2) + \\ &+ {}^3/_4\,(8 - 6\mu + \mu^2)\,\nu N^2(\lambda^2 - m^2)^2 + \\ &+ {}^1/_4\,(11 - 3\mu)\,N(\lambda^2 - m^2)^3 - \\ &- {}^3/_4\,(1 - \mu)\,(1 - \mu^2)\,\lambda^6 - {}^3/_4\,(1 - \mu)\,(3 + \mu^2)\,\lambda^4m^2,\end{aligned} \tag{42}$$

$$d_{14} = 4(1 - \mu)\,\lambda^2m^4 - 2(1 - \mu)\,\lambda^2m^2;$$

$$d_{21} = -{}^{1}/_{40}\,(107 - 260\mu + 156\mu^2)\,\nu^4 N^5,$$

$$\begin{aligned} d_{22} = -{}^{1}/_{80}\{ &(673 - 1755\mu + 1612\mu^2 - \\ &- 468\mu^3)\,\nu^4 N^4 (\lambda^2 - m^2) + \\ &+ (733 - 1360\mu + 1144\mu^2 - 234\mu^3)\,\nu^3 N^3 (\lambda^2 - m^2)^2 + \\ &+ (251 - 181\mu + 351\mu^2 - 39\mu^3)\,\nu^2 N^2 (\lambda^2 - m^2)^3 - \\ &- (59 - 138\mu - 39\mu^2)\,\nu N (\lambda^2 - m^2)^4\}. \end{aligned} \qquad (42)$$

$$d_{23} = {}^{9}/_{20}\,(1 - \mu)\,(\lambda^2 - m^2)^5.$$

Коэффициенты характеристического уравнения (34) позволяют ориентировочно определить величину *max K* (см. формулу 26) и исследовать практическую сходимость нашего метода построения основных соотношений теории оболочек.

Пример. Рассмотрим частный случай:

$$|N| > max\,[|\lambda^2|, |m^2|, 1], \qquad (a)$$

при котором в характеристическом уравнении (34) являются главными члены, содержащие наибольшие степени величины N:

$$-N^3 (1 - d_{11} a^2 N - d_{21} a^4 N^2 - \ldots). \qquad (b)$$

Исследуем сходимость ряда, стоящего в скобках формулы (b). Перепишем этот ряд в форме:

$$1 - X + rX^2 - \ldots, \qquad (c)$$

где

$$X = r_1 a^2 N. \qquad (d)$$

Коэффициенты r и r_1 являются функциями от μ. Например

при $\mu = 0$: $r_1 = 2{,}50$, $r = 0{,}43$;

при $\mu = 0{,}3$: $r_1 = 3{,}27$, $r = 0{,}42$;

при $\mu = 0{,}5$: $r_1 = 4{,}00$, $r = 0{,}40$;

Сопоставляя ряд (c) со сходящим цифровым рядом:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \approx 0{,}368, \qquad \text{(e)}$$

можем приближенно определить $max\,K$ из условия $X \approx 1$, т. е.

$$max\,K = max\,(a^2N) = \frac{1}{r_1} X \approx \frac{1}{r_1}. \qquad \text{(f)}$$

Однако ряд сравнения (e) сходится сравнительно медленно и первые 3 члена этого ряда плохо аппроксимируют его сумму. В связи с тем, кроме величины $max\,K$, представляет интерес еще такое значение $K \geqslant a^2N$, при котором ряд (c) сходится с практически достаточной скоростью. В прикладных задачах по-видимому достигается достаточная точность, если выполняется условие:

$$a^2N \leqslant K \approx {}^1/_2\, max\,K \approx \frac{1}{2r_1}. \qquad \text{(g)}$$

В случае (a) условие (g) по существу определяет область практической применимости характеристического уравнения (34) и вообще «двухмерной» теории оболочек (теории, основывающейся прямо или косвенно на применении степенных рядов к приведению трехмерной задачи к двухмерной).

Отметим, что в литературе имеются некоторые ошибочные попытки распространить «двухмерную» теорию оболочек за пределы ее области применимости. Такое недоразумение, например, имеет место в численных примерах работы [29].

При вычислении коэффициентов (41), (42) характеристического уравнения (34) оказались неиспользованными некоторые члены в коэффициентах b_{ij} ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$) таблицы 2. Эти члены в формулах (33) подчеркнуты и в дальнейшем ими пренебрегают как второстепенными. Имея в виду их происхождение, были найдены и подчеркнуты второстепенные члены в формулах (32). В однородных задачах (при отсутствии нагрузки на боковых поверхностях оболочки) можно пренебречь всеми подчеркнутыми членами. В неоднородных задачах могут оказаться нужными члены, отмеченные пунктиром. В дальнейшем условимся обозначать коэффициенты B_{ij} и b_{ij} без подчеркнутых членов соответственно через $\overline{B}_{ij}$ и $\overline{b}_{ij}$.

Пренебрегая подчеркнутыми членами, исследуем далее однородную систему трех первых уравнений таблицы 2:

$$\begin{aligned}
&b_{11}u_0 + \lambda m b_{12}v + \lambda \overline{b}_{13}w_0 = 0,\\
&\lambda m b_{21}u_0 + \overline{b}_{22}v_0 + m\overline{b}_{23}w_0 = 0,\\
&\lambda \overline{b}_{31}u_0 + m\overline{b}_{32}v_0 + \overline{b}_{33}w_0 = 0.
\end{aligned} \tag{43}$$

Вышеуказанное упрощение по существу состоит в том, что в коэффициентах b_{13}, b_{23}, b_{31}, b_{32} отброшенные все члены с множителем a^4 и в коэффициентах b_{13}, b_{22}, b_{23}, b_{31}, b_{32}, b_{33} — члены типа a^2N.

Как известно, в приближенных теориях принимают некоторые упрощающие гипотезы относительно напряжений σ_{13}, σ_{23}, σ_{33}. Чтобы пояснить роль этих напряжений в уравнениях равновесия, представим коэффициенты системы (43) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&b_{11} = B_{11} + a^2\Delta_2 b_{11} + a^4\Delta^*{}_2 b_{11},\\
&b_{12} = B_{12} + a^2\Delta_2 b_{12} + a^4\Delta^*{}_2 b_{12},\\
&\overline{b}_{13} = \overline{B}_{13} + a^2\Delta_2 b_{13};\\
&b_{21} = B_{21} + a^2(\Delta_1 b_{21} + \Delta_2 b_{21}) + a^4\Delta_2{}^* b_{21},\\
&\overline{b}_{22} = \overline{B}_{22} + a^2(\Delta_1 b_{22} + \Delta_2 b_{22}) + a^4\Delta_2{}^* b_{22},\\
&\overline{b}_{23} = \overline{B}_{23} + a^2(\Delta_1 b_{23} + \Delta_2 b_{23}),\\
&\overline{b}_{31} = \overline{B}_{31} + a^2(\Delta_1 b_{31} + \Delta_2 b_{31}),\\
&\overline{b}_{32} = \overline{B}_{32} + a^2(\Delta_1 b_{32} + \Delta_2 b_{32}),\\
&\overline{b}_{33} = \overline{B}_{33} + a^2(\Delta_1 b_{33} + \Delta_2 b_{33}) + a^4\Delta^*{}_1 b_{33}.
\end{aligned} \tag{44}$$

В формулах (44) $\Delta_1 b_{ij}$, $\Delta^*{}_1 b_{33}$ обозначают «поправки» от учета касательных напряжений σ_{13}, σ_{23} и $\Delta_2 b_{ij}$, $\Delta^*{}_2 b_{ij}$ — «поправки» от учета нормальных напряжений σ_{33}. Эти «поправки» являются следующими:

$$\Delta_1 b_{21} = -{}^3/_4\,(1+3\mu),\ \Delta_1 b_{22} = -{}^3/_2\,[{}^1/_2\,(1-\mu)\lambda^2 + m^2],$$

$$\Delta_1 b_{23} = {}^3/_2\,(-\lambda^2 + m^2 - 2),\ \Delta_1 b_{31} = -{}^3/_2\,[\lambda^2 + (1+\mu)m^2],$$

$$\Delta_1 b_{32} = -{}^3/_2\,[(1+\mu)\lambda^2 + m^2],$$

$$\Delta_1 b_{33} = {}^3/_2\,[\nu N(\lambda^2 - m^2) + (\lambda^2 - m^2)^2 - \mu\lambda^2 - 2m^2];$$

$$\Delta_2 b_{11} = -\lambda^2 \Delta_2 b_{21} = {}^3/_2\,\mu\nu\lambda^2(\nu N + \lambda^2 - m^2 - \mu),$$

$$\Delta_2 b_{31} = -{}^3/_2\,\mu\nu(\lambda^2 - m^2 - \mu);$$

$$\Delta_2 b_{22} = -m^2 \Delta_2 b_{12} = -{}^3/_2\,\mu\nu m^2(\nu N + \lambda^2 - m^2),$$

$$-\Delta_2 b_{32} = {}^3/_2\,\mu\nu(\lambda^2 - m^2), \tag{45}$$

$$-\Delta_2 b_{13} = \Delta_2 b_{23} = \Delta_2 b_{33} = {}^3/_2\,\mu\nu;$$

$$\Delta^*{}_1 b_{33} = {}^3/_8\,[(3-4\mu)\nu^3 N^2(\lambda^2 - m^2) +$$

$$+ (9-6\mu)\nu^2 N(\lambda^2 - m^2)^2 + (6-2\mu)\nu(\lambda^2 - m^2)^3],$$

$$-\Delta^*{}_2 b_{12} = \Delta^*{}_2 b_{21} = {}^3/_8\,[(2-3\mu+4\mu^2)\nu^4 N^2 +$$

$$+ (4-\mu+6\mu^2)\nu^3 N(\lambda^2 - m^2) +$$

$$+ 2(1+\mu+\mu^2)\nu^2(\lambda^2 - m^2)^2],$$

$$\Delta^*{}_2 b_{11} = \lambda^2 \Delta^*{}_2 b_{12},\ \Delta^*{}_2 b_{22} = m^2 \Delta^*{}_2 b_{21}.$$

Вышеизложенные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1) Во втором и в третьем уравнениях системы (43) появляются «поправки» от σ_{13}, σ_{23} и σ_{33}; в первом уравнении — только от σ_{33}.

2) Характеристическое уравнение (34) является уравнением гиперболического типа десятого порядка. Если пренебречь всеми членами с множителем a^4, то получим гиперболическое уравнение восьмого порядка.

3) Характеристическое уравнение не содержит членов типа a^2p^2.

4) Напряжения σ_{13}, σ_{23} дают в характеристическое уравнение (34) «поправки» порядка:

$$a^2 d_{12},\ a^2 d_{13},\ a^2 d_{14},\ a^4 \lambda^2 p^8,\ a^4 m^2 p^8 \qquad (46)$$

и напряжение σ_{33} — «поправки» порядка:

$$a^2 d_{13},\ a^2 d_{14},\ a^4 \lambda^2 p^8,\ a^4 m^2 p^8. \qquad (47)$$

Следовательно теорию, изложенную в работе [29], нельзя считать вполне последовательной.

5) При гипотезах

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0. \qquad (48)$$

следует на основе (46), (47) принимать характеристическое уравнение в форме:

$$d_0 + a^2 d_{11} + a^4 d_{21} = 0. \qquad (49)$$

Уравнение (49) имеет асимптотическую погрешность порядка:

$$[a^2 (d_{12} + d_{13} + d_{14}) + a^6 N^6] d_0^{-1}. \qquad (50)$$

Если $|N| < max\ (|\lambda^2|, |m^2|)$, то уравнение (49) упрощается в уравнение $d_0 = 0$ без увеличения погрешности. Полученный результат находится в соответствии с известным положением теории оболочек [4, 7, 12], что пренебрежение поперечными силами и напряжением σ_{33} приводит к безмоментной теории.

6) В характеристических уравнениях, основывающихся на гипотезе $\sigma_{33} = 0$, в общем приходится пренебречь членами типа (47). Однако надо отметить, что при соответствующей формулировке гипотез Кирхгофа-Лява достигают правильного значения величины d_{14}. Например, в книге А. Л. Гольденвейзера [7] коэффициенты при $\lambda^2 m^4$ и $\lambda^2 m^2$ совпадают с соответствующими коэффициентами в нашем выражении d_{14}. Указанное еще раз подчеркивает удачность гипотез теории Кирхгофа-Лява. Это обстоятельство, что при гипотезе $\sigma_{33} = 0$ приходится пренебречь в характеристическом уравнении величинами $a^2 d_{13}$, $a^4 d_{22}$, $a^4 d_{23}$, находится в соответствии с известным фактом, обнаружен-

ным в многих работах [3, 7, 10, 14], что члены типа $a^2 d_{13}$ не имеют практического значения в пределах теории, не учитывающей члены с множителем a^4.

В пределах асимптотической погрешности:

$$\vartheta_0 \leqslant a^2 (p^2 + 1) \tag{51}$$

является обоснованным дополнительное пренебрежение членами $a^2 d_{11}$ и $a^4 d_{21}$. Получим характеристическое уравнение теории Кирхгофа-Лява:

$$d_0 + a^2 d_{12} + (a^2 d_{14}) = 0. \tag{52}$$

7) Уточненные теории, основывающиеся на применении гипотезы $\sigma_{33} = 0$ и «коэффициента сдвига» [2, 25, 29, 30], позволяют приближенно определить напряжения σ_{13} и σ_{23}, но численные коэффициенты уточняющих членов характеристического уравнения являются неточными. Например проф. Ю И-Юань получил в работе [29] для d_1 и d_2 выражения d^*_1, d^*_2, которые в наших обозначениях являются следующими;

$$\begin{aligned} d^*_1 &= d^*_{11} + d_{12} + d^*_{13} + d^*_{14}, \\ d^*_2 &= d^*_{21} + d^*_{22} + d^*_{23}; \end{aligned} \tag{53}$$

где

$$d^*_{11} = 2\varkappa^{-1} N^4,$$

$$\begin{aligned} d^*_{13} = {} & [{}^3/_2 (3 - \mu)\varkappa^{-1} + 1] N^3 (\lambda^2 - m^2) + {}^1/_4 [(13 - 10\mu + \\ & + \mu^2)\varkappa^{-1} + 10 - 2\mu] N^2 (\lambda^2 - m^2)^2 + \\ & + {}^1/_4 [(1 - \mu)(3 - \mu)\varkappa^{-1} + 8 - 4\mu] N (\lambda^2 - m^2)^3 - \\ & - {}^1/_4 (1 - \mu) [(1 - \mu^2)(3 - \mu)\varkappa^{-1} - 4\mu] \lambda^6 + \\ & + {}^1/_4 (1 - \mu) [(1 - \mu^2)(3 - \mu)\varkappa^{-1} - 12] \lambda^4 m^2, \end{aligned} \tag{54}$$

$$d^*_{14} = (1 - \mu)(4 - \mu)\lambda^2 m^4 - {}^1/_4 (1 - \mu)(7 - 3\mu)\lambda^2 m^2;$$

$$d^*_{21} = - \varkappa^{-2} N^5,$$

$$d^*_{22} = -\varkappa^{-1}\{[(3-\mu)\varkappa^{-1}+1]N^4(\lambda^2-m^2)+$$
$$+{}^1/_4[(13-10\mu+\mu^2)\varkappa^{-1}+12-4\mu]N^3(\lambda^2-m^2)^2+$$
$$+{}^1/_4[2(1-\mu)(3-\mu)\varkappa^{-1}+13-10\mu+ \qquad (54)$$
$$+\mu^2]N^2(\lambda^2-m^2)^3+{}^1/_4[(1-\mu)^2\varkappa^{-1}+$$
$$+2(1-\mu)(3-\mu)]N(\lambda^2-m^2)^4\},$$
$$d^*_{23} = -{}^1/_2(1-\mu)^2\varkappa^{-1}(\lambda^2-m^2)^5.$$

Для $\varkappa$ рекомендуется формула:

$$\varkappa = {}^1/_2\,(1-\mu)\,(0{,}824 \div 0{,}860). \qquad (55)$$

Легко убедиться в том, что при таком значении $\varkappa$ численные коэффициенты в формулах (42) и (54) существенно отличаются (см. приложение).

8) Уравнение (34) представляет из себя уравнение пятой степени относительно N, λ^2 и m^2. Если задавать для двух из этих трех велечин численные значения, подчиняющиеся условию типа (37) в строгом смысле, то уравнение (34) позволяет определить 5 корней для третьей величины. Однако одно из этих корней как правило не удовлетворяет условие (37) с практически достаточной строгостью. Остальные корни приближенно определяются из уравнения:

$$d_0 + a^2 d_1 = 0, \qquad (56)$$

имеющей асимптотическую погрешность порядка:

$$\bar{\vartheta}_0 \sim a^2\,(\lambda^2+m^2+1)+a^4N^2.$$

Этот результат анализа характеристического уравнения находится в соответствии с выводом, сделанным на стр. 22 при анализе структуры рядов Тэйлора для напряжений. Следовательно четвертые и пятые члены в рядах Тэйлора для напряжений и соответственно члены с множителем a^4 в характеристическом уравнении имеют в основном уточняющий характер. Дальнейшее уточнение уравнений (например учет членов с множителем a^6) по-видимому не имеет практического значения.

Если рассматриваются такие значения a^2 и p^2, при которых асимптотическая погрешность порядка ϑ_0 (51) является практически допустимой, то задача решается с достаточной точностью при помощи уравнений теории Кирхгофа-Лява. Однако для приближенного определения напряжений σ_{13}, σ_{23} (например при расчете многослойных оболочек) могут оказаться весьма целесообразными приближенные теории, предложенные проф. С. А. Амбарцумяном [2], американскими учеными Г. Герман, И. Мирски [20], Э. Кеннард [21, 22, 23, 24], Т. Лин, Г. Морган [25], Ю И-Юань [29, 30] и другими авторами.

Применение наших уточненных формул является целесообразным при значениях a^2p^2, близких к пределу (26), т. е. в случаях, когда асимптотическая погрешность ϑ_0 (51) является слишком большой, но погрешность порядка ϑ_1 (40) — допустимой.

9) В задачах статики обыкновенно представляют интерес элементарные напряженные состояния с показателем изменяемости до $a^{-1/2}$. В таких задачах:

$$\vartheta_0 \sim \bar{\vartheta}_0 \leqslant a, \quad \vartheta_1 \leqslant a^2.$$

В частном случае $\delta = {}^1/_2\, R_0$ получим:

$$\vartheta_0 \sim \bar{\vartheta}_0 \sim \frac{1}{4\sqrt{3}}, \quad \vartheta_1 \sim \frac{1}{48}.$$

Поскольку асимптотические оценки были выведены без учета численных множителей, то фактическая погрешность ϑ_0 теории Кирхгофа-Лява может оказатся слишком большой, но точность теории проф. Х. М. Муштари и наших формул по-видимому является достаточной. Следовательно уточненная теория практически позволяет провести статический расчет весьма толстых оболочек ($\delta \leqslant {}^1/_2\, R_0$).

5. КОЭФФИЦИЕНТЫ РЯДОВ ТЭЙЛОРА КАК ФУНКЦИИ ОТ u_0, v_0, w_0, q_{IV}, q_{V}, q_{VI}.

$\sigma_{13,0}$, $\sigma_{23,0}$, $\sigma_{33,0}$ определяются тремя последними уравнениями таблицы 2 как функции от

$$u_0,\ v_0,\ w_0,\ q_{\mathrm{IV}},\ q_{\mathrm{V}},\ q_{\mathrm{VI}}. \tag{57}$$

При помощи этих уравнений исключим $\sigma_{13,0}$, $\sigma_{23,0}$, $\sigma_{33,0}$ из всех остальных коэффициентов (19), (23) рядов Тэйлора типа (14), (15). Таким образом получим формулы, определяющие все указанные коэффициенты как функции от величин (57). Подставляя эти коэффициенты в первое, второе и третье уравнение системы (27), опять получим три первых уравнения таблицы 2. Составляя левые части этих уравнений с точностью уравнений (43), обнаружим некоторые «ненужные» члены в коэффициентах рядов Тэйлора. В нижеприведенных формулах эти члены подчеркнуты.

$$\begin{aligned}
u^n{}_0 &= U^n{}_1 u_0 + \lambda m U^n{}_2 v_0 + \lambda U^n{}_3 w_0 + \\
&\quad + U^n{}_4 q_{\mathrm{IV}} + \lambda m U^n{}_5 q_{\mathrm{V}} + \lambda U^n{}_6 q_{\mathrm{VI}}, \\
v^n{}_0 &= \lambda m V^n{}_1 u_0 + V^n{}_2 v_0 + m V^n{}_3 w_0 + \\
&\quad + \lambda m V^n{}_4 q_{\mathrm{IV}} + V^n{}_5 q_{\mathrm{V}} + m V^n{}_6 q_{\mathrm{VI}}, \\
w^n{}_0 &= \lambda W^n{}_1 u_0 + m W^n{}_2 v_0 + W^n{}_3 w_0 + \\
&\quad + \lambda W^n{}_4 q_{\mathrm{IV}} + m W^n{}_5 q_{\mathrm{V}} + W^n q_{\mathrm{VI}};
\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
&U'_1 = \underline{{}^3/_2\, a^2 (2\nu N + 2\nu\lambda^2 + m^2)}, \quad U'_2 = \underline{{}^3/_2\, a^2 (1 + 3\mu)\nu}, \\
&U'_3 = \underline{-1 - 3a^2\nu(\nu N + \lambda^2 - m^2)}, \\
&U'_4 = 2\nu + 3a^2\nu\,[2\nu N + (2 - \mu)\,\nu\lambda^2 - m^2], \\
&U'_5 = 3a^2\nu^2, \quad U'_6 = \underline{\mu U'_5}; \\
&U''_1 = \lambda^2 U''_2 - 2\nu N - \lambda^2 + m^2, \quad U''_2 = -{}^1/_2\, \nu(U'_3 + 3),
\end{aligned} \tag{59}$$

$$U''_3 = -\mu\nu + {}^3/_2\, a^2\nu\,[\nu N + 2(\lambda^2 - m^2)],$$

$$U''_4 = -2\nu - 3a^2\nu\,[2\nu N + {}^1/_2\,(4 - 7\mu + 2\mu^2)\,\nu^2\lambda^2 - m^2],$$

$$U''_5 = {}^3/_2\, a^2(2-\mu)\,\nu^3, \quad U''_6 = -\nu^2 +$$

$$+ {}^3/_2\, a^2\nu^3\,[-(1-2\mu)\,\nu N + \mu(\lambda^2 - m^2)];$$

$$U'''_1 = U'''_u, \quad U'''_2 = U'''_v, \quad U'''_3 = U'''_w, \tag{59}$$

$$U'''_4 = U'''_{13}, \quad U'''_5 = U'''_{23}, \quad U'''_6 = U'''_{33};$$

$$U''''_1 = U''''_u, \quad U''''_2 = U''''_v, \quad U''''_3 = U''''_w,$$

$$U''''_4 = U''''_{13}, \quad U''''_5 = U''''_{23}, \quad U''''_6 = U''''_{33};$$

$$V'_1 = U'_2, \; V'_2 = 1 + {}^3/_2\, a^2(2\nu N + \lambda^2 + 2\nu m^2), \; V'_3 = -U'_3,$$

$$V'_4 = -U'_5 \quad V'_5 = 2\nu + 3a^2\nu\,[2\nu N + \lambda^2 - (2-\mu)\,\nu m^2],$$

$$V'_6 = (1 - 3\mu)\,V'_4;$$

$$V''_1 = -U''_2, \; V''_2 = m^2 V''_1 - 2\nu N - \lambda^2 + m^2,$$

$$V''_3 = 2 - U''_3, \quad V''_4 = {}^3/_2\, a^2\,(2 - 3\mu)\,\nu^3,$$

$$V''_5 = -2\nu - 3a^2\nu\,[2\nu N + \lambda^2 + {}^1/_2\,(3\mu - 2\mu^2)\,\nu^2 m^2], \tag{60}$$

$$V''_6 = -U''_6;$$

$$V'''_1 = V'''_u, \quad V'''_2 = V'''_v, \quad V'''_3 = V'''_w,$$

$$V'''_4 = V'''_{13}, \quad V'''_5 = V'''_{23}, \quad V'''_6 = V'''_{33};$$

$$V''''_1 = V''''_u, \quad V''''_2 = V''''_v, \quad V''''_3 = V''''_w,$$

$$V''''_4 = V''''_{13}, \quad V''''_5 = V''''_{23}, \quad V''''_6 = V''''_{33};$$

$$W'_1 = W'_2 = -\mu\nu - {}^3/_2\, a^2(1-2\mu)\nu^2(\nu N + \lambda^2 - m^2),$$

$$W'_3 = -\mu\nu + {}^3/_2\, a^2(1-2\mu)\nu^2 N,$$

$$W'_4 = -{}^3/_2\, a^2\mu(1-2\mu)\nu^3, \quad W'_5 = -{}^3/_2\, a^2\,(4 - 11\mu +$$

$$+ 6\mu^2)\nu^3, \quad W'_6 = -(1-2\mu)\,U''_6;$$

$$W''_1 = \mu\nu - {}^3/_2\, a^2\nu^2\,[\mu\nu N + 2\mu\lambda^2 + (2-\mu)m^2],$$

$$W''_2 = 1 - {}^3/_2\, a^2\nu^2\,[\mu\nu N + 3\mu\lambda^2 + 2(1-\mu)m^2],$$

$$W''_3 = -(1-2\mu)\nu^2 N + \mu\nu(\lambda^2 - m^2) + \nu +$$

$$+ {}^3/_2\, a^2\nu^2\,[\nu N(\lambda^2 - m^2) + (\lambda^2 - m^2)^2], \tag{61}$$

$$W''_4 = W''_5 = -\nu^2 - {}^3/_2\, a^2\nu^3\,[2N + (2-\mu)\,(\lambda^2 - m^2)],$$

$$W''_6 = -(1-2\mu)\nu^2 - {}^3/_2\, a^2\nu^3\,[(1-2\mu)^2\nu N +$$

$$+ 2\mu^2\lambda^2 - (1 - 4\mu + 2\mu^2)m^2];$$

$$W'''_1 = W'''_u, \quad W'''_2 = W'''_v, \quad W'''_3 = W'''_w,$$

$$W'''_4 = W'''_{13}, \quad W'''_5 = W'''_{23}, \quad W'''_6 = W_{33};$$

$$W''''_1 = W''''_u, \quad W''''_2 = W''''_v, \quad W''''_3 = W''''_w,$$

$$W''''_4 = W''''_{13}, \quad W''''_5 = W''''_{23}, \quad W''''_6 = W''''_{33}.$$

Из формул (59), (60), (61) следует, что в случае однородной задачи допустимо пренебречь величинами Nu'_0, Nv'_0, Nw'_0 в первых трех уравнениях системы (27). Следовательно так называемая *инерция поворота прямых нормалей* является второстепенным фактором.

Компоненты рядов напряжений определяются по следующим формулам:

$$\sigma^n_{jj,0} = \lambda S^n_{jj,1}\, u_0 + m S^n_{jj,2}\, v_0 + S^n_{jj,3} w_0 +$$
$$+ \lambda S^n_{jj,4}\, q_{\mathrm{IV}} + m S^n_{jj,5}\, q_{\mathrm{V}} + S^n_{jj,6}\, q_{\mathrm{VI}}, \qquad (jj = 11,\ 22,\ 33), \tag{62}$$

$$\sigma^n{}_{12,0} = mS^n{}_{12,1}u_0 + \lambda S^n{}_{12,2}v_0 + \lambda m S^n{}_{12,3}w_0 +$$

$$+ mS^n{}_{12,4}q_{\mathrm{IV}} + \lambda S^n{}_{12,5}q_{\mathrm{V}} + \lambda m S^n{}_{12,6}q_{\mathrm{VI}},$$

$$\sigma^n{}_{13,0} = S^n{}_{13,1}u_0 + \lambda m S^n{}_{13,2}v_0 + \lambda S^n{}_{13,3}w_0 + \qquad (62)$$

$$+ S^n{}_{13,4}q_{\mathrm{IV}} + \lambda m S^n{}_{13,5}q_{\mathrm{V}} + \lambda S^n{}_{13,6}q_{\mathrm{VI}},$$

$$\sigma^n{}_{23,0} = \lambda m S^n{}_{23,1}u_0 + S^n{}_{23,2}v_0 + mS^n{}_{23,3}w_0 +$$

$$+ \lambda m S^n{}_{23,4}q_{\mathrm{IV}} + S^n{}_{23,5}q_{\mathrm{V}} + mS^n{}_{23,6}q_{\mathrm{VI}}.$$

При $n = 0, 1, 2$ величины $S^n{}_{ij,k}$ определяются по формулам (63). Для упрощения записи опущен верхний индекс $n = 0$.

$$S_{11,1} = 1 - {}^3/_2\, a^2 \mu\nu (\nu N + \lambda^2 - m^2 - \mu) -$$

$$- {}^3/_8\, a^4 \mu\nu^2 [(3 - 8\mu)\nu^2 N^2 + (1 - 12\mu)\nu N(\lambda^2 - m^2) -$$

$$- 2(1 + 2\mu)(\lambda^2 - m^2)^2],$$

$$S_{11,2} = S_{11,1} - 1 + \mu - {}^3/_2\, a^2 \mu^2 \nu,$$

$$S_{11,3} = \mu + {}^3/_2\, a^2 \mu\nu (N + 1) + {}^3/_4\, a^2 \mu\nu^2 [2(1 - 2\mu)\nu N^2 +$$

$$+ (1 + 2\mu)\nu N\lambda^2 - (11 - 12\mu + 4\mu^2)\nu N m^2 +$$

$$+ (1 + 2\mu)\lambda^4 - (10 - 4\mu)\lambda^2 m^2 + (9 - 6\mu) m^4], \qquad (63)$$

$$S_{11,4} = - {}^3/_2\, a^2 \mu^2 \nu^2 - {}^3/_8\, a^4 \mu\nu^2 [(3 + 12\mu - 20\mu^2)\nu^2 N +$$

$$+ (2 + 10\mu)\lambda^2 - 14(1 + \mu) m^2],$$

$$S_{11,5} = - {}^3/_2\, a^2 \mu (4 - 3\mu)\nu^2 - {}^3/_8\, a^4 \mu\nu^2 [(59 - 124\mu +$$

$$+ 60\mu^2)\nu^2 N + (18 - 30\mu)\lambda^2 - (30 - 26\mu) m^2],$$

$$S_{11,6} = \mu\nu + {}^3/_2\, a^2 \mu\nu^2 [(1 - 2\mu)\nu N - \mu(\lambda^2 - m^2) -$$

$$- 1 + 2\mu] + {}^3/_8\, a^4 \mu\nu^3 [5(1 - 2\mu)^2 \nu^2 N^2 + (1 - 10\mu +$$

$$+ 20\mu^2)\nu N(\lambda^2 - m^2) + (1 + 5\mu^2)(\lambda^2 - m^2)^2];$$

$$S'_{11,1} = {}^3/_2\, a^2\nu\, [(2-\mu)(N+\lambda^2) + (1-\mu+2\mu^2)\, m^2],$$

$$S'_{11,2} = \mu + {}^3/_2\, a^2\mu\nu\, [N + (1+3\mu-2\mu^2)\lambda^2 + m^2],$$

$$S'_{11,3} = -\mu\nu N - \lambda^2 + \mu m^2 - {}^3/_2\, a^2\nu\, [(2-\mu)\nu N\lambda^2 - \mu\nu N m^2 + (2-\mu)\lambda^4 - 2\lambda^2 m^2 + \mu m^4],$$

$$S'_{11,4} = (2-\mu)\nu + {}^3/_2\, a^2\nu^2\, [2(2-\mu) N + (2-\mu)^2\lambda^2 - (2-2\mu+\mu^2)\, m^2],$$

$$S'_{11,5} = \mu\nu + {}^3/_2\, a^2\nu^2\, [2\mu N + (2-\mu^2)\lambda^2 - \mu(2-\mu)\, m^2],$$

$$S'_{11,6} = {}^3/_2\, a^2\mu\nu^2\, [(2-\mu)\lambda^2 - (1-3\mu)\, m^2];$$

$$\begin{aligned} S''_{11,1} = {} & -(2-3\mu)\nu^2 N - 2\lambda^2 + m^2 + \\ & + {}^3/_2\, a^2\nu\, [\mu(1-2\mu)\nu^3 N^2 + (1+\mu-3\mu^2)\nu^2 N\lambda^2 - \\ & - \mu(2-3\mu)\nu^2 N m^2 + (1+\mu)\lambda^4 - (1+2\mu)\lambda^2 m^2 + \\ & + \mu m^4], \quad S''_{11,2} = -\mu(1-2\mu)\nu^2 - (1+\mu)\lambda^2 + \\ & + \mu m^2 - \mu + {}^3/_2\, a^2\nu\, [\mu(1-2\mu)\nu^3 N^2 + (1+\mu - \\ & - 3\mu^2)\nu^2 N\lambda^2 - \mu(2-3\mu)\nu^2 N m^2 + (1+\mu)\lambda^4 - \\ & - (1+2\mu)\lambda^2 m^2 + \mu m^4], \end{aligned} \qquad (63)$$

$$S''_{11,3} = \mu^2\nu^2 N - \mu\lambda^2 - {}^3/_2\, a^2\nu\, [\mu(1-2\mu)\nu^2 N^2 - (1-\mu+\mu^2)\nu N\lambda^2 + \mu^2\nu N m^2 - (2-\mu)\lambda^4 + 2\lambda^2 m^2 - \mu m^4],$$

$$S''_{11,4} = -(2-\mu)\nu - {}^3/_2\, a^2\nu\, [(4-10\mu+7\mu^2)\nu^3 N + (4-5\mu)\nu\lambda^2 - 2m^2],$$

$$
\begin{aligned}
S''_{11,5} = &- \mu\nu + {}^3/_2\, a^2\nu\, [(2 - 7\mu + 4\mu^2)\, \mu\nu^3 N + \\
&+ (2 + \mu - 2\mu^2)\, \nu\lambda^2 - 2\mu m^2],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S''_{11,6} = &- \mu(1 - 2\mu)\, \nu^3 N - (1 + \mu)\, \nu\lambda^2 + \mu\nu m^2 - \\
&- {}^3/_2\, a^2\nu^2\, [\mu(1 - 2\mu)^2 \nu^3 N^2 + (1 - 2\mu)\,(1 - \\
&- 2\mu^2)\, \nu^2 N\lambda^2 - \mu(1 - 2\mu)^2 \nu^2 N m^2 - \mu(1 + \mu)\, \lambda^4 + \\
&+ \mu(1 + 2\mu)\, \lambda^2 m^2 - \mu^2 m^2];
\end{aligned}
$$

$$
S_{22,1} = S_{11,1} - 1 + \mu, \quad S_{22,2} = S_{11,1} - {}^3/_2\, a^2\mu^2\nu,
$$

$$
S_{22,3} = S_{11,3} + 1 - \mu, \quad S_{22,4} = S_{11,4}, \quad S_{22,5} = S_{11,5},
$$

$$
S_{22,6} = S_{11,6};
$$

$$
\begin{aligned}
S'_{22,1} = &- \mu - {}^3/_2\, a^2\nu\, [(1 - 3\mu + \mu^2)\, \nu N + (1 - 3\mu)\, \lambda^2 - \\
&- (2 + \mu - 2\mu^2)\, m^2],
\end{aligned}
\tag{63}
$$

$$
S'_{22,2} = {}^3/_2\, a^2\, [(1 - \mu + \mu^2)\, \nu^2 N + \mu(1 + 2\mu)\, \nu\lambda^2 + 3m^2],
$$

$$
\begin{aligned}
S'_{22,3} = &- \mu\nu N - \mu\lambda^2 + m^2 - 1 + {}^3/_2\, a^2\nu\, [- \mu\nu N\lambda^2 + \\
&+ (2 - \mu)\, \nu N m^2 - \mu\lambda^4 + 2\lambda^2 m^2 - (2 - \mu)\, m^4],
\end{aligned}
$$

$$
S'_{22,4} = \mu\nu + {}^3/_2\, a^2\nu^2\, [2\mu N + \mu(2 - \mu)\, \lambda^2 - (2 - \mu^2)\, m^2],
$$

$$
\begin{aligned}
S'_{22,5} = &\ (2 - \mu)\, \nu + {}^3/_2\, a^2\nu^2\, [2(2 - \mu)\, N + (2 - 2\mu + \\
&+ \mu^2)\, \lambda^2 - (2 - \mu)^2 m^2],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S'_{22,6} = &\ (1 - 2\mu)\, \nu + {}^3/_2\, a^2\nu^2\, [(1 - 2\mu)^2 \nu N - \\
&- \mu(1 - 3\mu)\, \lambda^2 - (2 - 8\mu + 5\mu^2)\, m^2];
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S''_{22,1} = &- \mu(1 - 2\mu)\, \nu^2 N - \mu\lambda^2 + (1 + \mu)\, m^2 + 3\mu + \\
&+ {}^3/_2\, a^2\nu\, [\mu(1 - 2\mu)\, \nu^3 N^2 + \mu(2 - 3\mu)\, \nu^2 N\lambda^2 -
\end{aligned}
$$

$$- (1 + \mu - 3\mu^2)\,\nu^2 N m^2 + \mu\lambda^4 - (1 + 2\mu)\,\lambda^2 m^2 +$$

$$+ (1 + \mu)\, m^4],$$

$$S''_{22,2} = -(2 - 3\mu)\,\nu^2 N - \lambda^2 + 2m^2 + 1 +$$

$$+ {}^3/_2\, a^2 \nu\, [\mu (1 - 2\mu)\,\nu^3 N^2 + \mu (2 - 3\mu)\,\nu^2 N \lambda^2 -$$

$$- (1 + \mu - 3\mu^2)\,\nu^2 N m^2 + \mu\lambda^4 - (1 + 2\mu)\,\lambda^2 m^2 +$$

$$+ (1 + \mu)\, m^4],$$

$$S''_{22,3} = -\underline{(1 - 3\mu + \mu^2)\,\nu^2 N} + \mu\lambda^2 + 3 -$$

$$- \underline{{}^3/_2\, a^2 \nu\, [\mu (1 - 2\mu)\,\nu^2 N - (1 + \mu^2)\,\nu N \lambda^2 +}$$

$$\underline{+ (6 - 5\mu + \mu^2)\,\nu N m^2 - (1 + \mu)\,\lambda^4 +}$$

$$\underline{+ (8 - 4\mu)\,\lambda^2 m^2 - (7 - 5\mu)\, m^4]}, \tag{63}$$

$$S''_{22,4} = -(1 + \mu)\,\nu - {}^3/_2\, a^2 \nu\, [(2 - 2\mu - 3\mu^2 + 4\mu^3)\,\nu^3 N +$$

$$+ (2 + \mu - 2\mu^2)\,\nu\lambda^2 - (8 + 2\mu)\, m^2],$$

$$S''_{22,5} = -(7 - 5\mu)\,\nu - {}^3/_2\, a^2 \nu\, [(14 - 42\mu + 45\mu^2 -$$

$$- 16\mu^3)\,\nu^3 N + (8 - 15\mu + 8\mu^2)\,\nu\lambda^2 - 2(5 - 4\mu)\, m^2],$$

$$S''_{22,6} = -\mu (1 - 2\mu)\,\nu^3 N - \mu\nu\lambda^2 + (1 + \mu)\,\nu m^2 -$$

$$-(3 - 6\mu)\,\nu + {}^3/_2\, a^2 \nu^2\, [-\mu (1 - 2\mu)^2 \nu^3 N^2 -$$

$$- \mu (1 - 2\mu)\,\nu^2 N \lambda^2 + (1 - 2\mu)\,(1 - 2\mu^2)\,\nu^2 N m^2 +$$

$$+ \mu^2 \lambda^4 - \mu (1 + 2\mu)\,\lambda^2 m^2 + \mu (1 + \mu)\, m^4];$$

$$S_{33,1} = \underline{b_{61}}, \quad S_{33,2} = \underline{b_{62}}, \quad S_{33,3} = \underline{b_{63}},$$

$$S_{33,4} = \underline{b_{6\,\mathrm{IV}}}, \quad S_{33,5} = \underline{b_{6\,\mathrm{V}}}, \quad S_{33,6} = \underline{b_{6\,\mathrm{VI}}};$$

$$S'_{33,1} = \underline{\mu - {}^3/_2\, a^2 \nu\, [\mu^2 \nu N + \mu\lambda^2 + (2 - 2\mu - \mu^2)\, m^2]},$$

$$S'_{33,2} = 1 - {}^3/_2\, a^2\nu\, [\mu^2\nu N + \mu(2-\mu)\lambda^2 + (2-3\mu)m^2],$$

$$S'_{33,3} = 1 - N + {}^3/_2\, a^2\, [N\nu(\lambda^2 - m^2) + (\lambda^2 - m^2)^2],$$

$$S'_{33,4} = S'_{33,5} = -1 - {}^3/_2\, a^2\nu\, [2N + (2-\mu)(\lambda^2 - m^2)],$$

$$S'_{33,6} = -(1-2\mu)\nu - {}^3/_2\, a^2\nu^2\, [(1-2\mu)^2\nu N + \mu^2\lambda^2 -$$
$$-(1-5\mu+5\mu^2)m^2];$$

$$S''_{33,1} = \nu N + \lambda^2 - m^2 - 3\mu + {}^3/_2\, a^2\nu\, [(1-2\mu)\nu^2 N^2 +$$
$$+(1-3\mu)\nu N(\lambda^2 - m^2) - \mu(\lambda^2 - m^2)^2],$$

$$S''_{33,2} = S''_{33,1} - 2 + 3\mu,$$

$$S''_{33,3} = N - 3 - {}^3/_2\, a^2\nu\, [(1-2\mu)\nu N^2 + (2-2\mu +$$
$$+\mu^2)\nu N\lambda^2 - (6-6\mu+\mu^2)\nu N m^2 + (2-\mu)\lambda^4 -$$
$$-(8-6\mu)\lambda^2 m^2 + (6-5\mu)m^4], \qquad (63)$$

$$S''_{33,4} = (2-\mu)\nu + {}^3/_2\, a^2\nu\, [(4-5\mu)\nu^2 N + 4\lambda^2 - 8m^2],$$

$$S''_{33,5} = (6-5\mu)\nu + {}^3/_2\, a^2\, [(16-33\mu+16\mu^2)\nu^3 N +$$
$$+8\lambda^2 - (12-8\mu)\nu m^2],$$

$$S''_{33,6} = -(1-2\mu)\nu^2 N + \mu\nu(\lambda^2 - m^2) + 3(1-2\mu)\nu +$$
$$+{}^3/_2\, a^2\nu^2\, [-(1-2\mu)^2\nu^2 N +$$
$$+2\mu(1-2\mu)\nu N(\lambda^2 - m^2) - \mu^2(\lambda^2 - m^2)^2];$$

$$-S_{12,1} = S_{12,2} = {}^1/_2\,(1-\mu),$$

$$S_{12,3} = S_{12,4} = S_{12,5} = S_{12,6} = 0;$$

$$S'_{12,1} = {}^1/_2\,(1-\mu) - {}^3/_4\, a^2\, [2N + (1-3\mu)\lambda^2 + (1-\mu)m^2],$$

$$S'_{12,2} = {}^1/_2\,(1-\mu) + {}^3/_4\, a^2\, [2N + (1-\mu)\lambda^2 + (1-3\mu)m^2],$$

$$S'_{12,3} = 1 - \mu + 3a^2(\nu N + \lambda^2 - m^2),$$

$$S'_{12,4} = -1 - {}^3/_2\, a^2 [2\nu N + (3-\mu)\nu\lambda^2 - m^2],$$

$$S'_{12,5} = 1 + {}^3/_2\, a^2 [2\nu N + \lambda^2 - (3-\mu) m^2],$$

$$S'_{12,6} = -{}^3/_2\, a^2 (1 - 2\mu)\nu;$$

$$S''_{12,1} = N + {}^1/_2\,(3-\mu)\lambda^2 - {}^1/_2\,(1-\mu)m^2 - 1 + \mu -$$

$$- {}^3/_2\, a^2\nu\lambda^2 (\nu N + \lambda^2 - m^2),$$

$$S''_{12,2} = -N - {}^1/_2\,(1-\mu)\lambda^2 + {}^1/_2\,(3-\mu)m^2 -$$

$$- {}^3/_2\, a^2\nu m^2 (\nu N + \lambda^2 - m^2),$$

$$S''_{12,3} = \mu - a^2 [{}^9/_2\,\nu N + 6(\lambda^2 - m^2)],$$

$$S''_{12,4} = 3 + {}^3/_2\, a^2 [6\nu N + (7 - 11\mu + 3\mu^2)\nu^2\lambda^2 - 3m^2],$$

$$S''_{12,5} = -1 - {}^3/_2\, a^2 [2\nu N + \lambda^2 - (1 - 3\mu + \mu^2)\nu^2 m^2],$$

$$S''_{12,6} = \nu + {}^3/_2\, a^2\nu^2 [(1-2\mu)\nu N - \mu(\lambda^2 - m^2)]; \tag{63}$$

$$S_{13,1} = b_{41}, \quad S_{13,2} = b_{42}, \quad S_{13,3} = b_{43},$$

$$S_{13,4} = b_{4\,\mathrm{IV}}, \quad S_{13,5} = b_{4\,\mathrm{V}}, \quad S_{13,6} = b_{4\,\mathrm{VI}};$$

$$S'_{13,1} = -N - \lambda^2 + {}^1/_2\,(1-\mu)m^2 +$$

$$+ {}^3/_2\, a^2\mu\nu\lambda^2(\nu N + \lambda^2 - m^2),$$

$$S'_{13,2} = -{}^1/_2\,(1+\mu) + {}^3/_2\, a^2\mu\nu(\nu N + \lambda^2 - m^2),$$

$$S'_{13,3} = -\mu + {}^3/_2\, a^2(N + \lambda^2 - m^2),$$

$$S'_{13,4} = -1 - {}^3/_2\, a^2 [2\nu N + (2 - 3\mu)\nu^2\lambda^2 - m^2],$$

$$S'_{13,5} = -{}^3/_2\, a^2 (1 - 5\mu + 3\mu^2)\nu^2,$$

$$S'_{13,6} = -\mu\nu + {}^3/_2\, a^2\mu\nu^2 [-(1-2\mu)\nu N + \mu(\lambda^2 - m^2)];$$

$$S''_{13,1} = N + \lambda^2 - {}^3/_2(1-\mu)\,m^2 - {}^3/_4\, a^2\,[4\nu N^2 + (8 - 8\mu +$$

$$+ 2\mu^2)\,\nu^2 N\lambda^2 + 4\nu\lambda^2 + (1+\mu^2)\,\nu\lambda^2 m^2 - (1-\mu)\,m^4],$$

$$S''_{13,2} = {}^1/_2\,(1-\mu) - {}^3/_4\, a^2\nu\,[(4 + 4\mu - 6\mu^2)\,\nu N +$$

$$+ (3 + 6\mu - 3\mu^2)\,\lambda^2 + (1 - 4\mu + 3\mu^2)\,m^2],$$

$$S''_{13,3} = \nu N + \lambda^2 - m^2 + \mu + {}^3/_2\, a^2\nu\,[2\nu N^2 +$$

$$+ (4 - 3\mu)\,\nu N\,(\lambda^2 - m^2) + (2-\mu)\,(\lambda^2 - m^2)^2],$$

$$S''_{13,4} = -2\nu N - (2-\mu)\,\nu\lambda^2 + m^2 + 2 - {}^3/_2\, a^4\,[4\nu^2 N^2 +$$

$$+ 4\,(2-\mu)\,\nu^2 N\lambda^2 - 4\nu N m^2 + (2-\mu)^2\nu^2\lambda^4 -$$

$$- (5 - 6\mu + 2\mu^2)\,\nu^2\lambda^2 m^2 + m^4],$$

$$S''_{13,5} = -\nu - {}^3/_2\, a^2\nu^2\,[4N + (3 - 2\mu)\,(\lambda^2 - m^2)],$$

$$S''_{13,6} = \mu\nu - {}^3/_2\, a^2\nu^2\,[\mu\nu N + 2\mu\lambda^2 - (1-2\mu)\,m^2]; \qquad (63)$$

$$S_{23,1} = b_{51}, \quad S_{23,2} = b_{52}, \quad S_{23,3} = b_{53},$$

$$S_{23,4} = b_{5\,\mathrm{IV}}, \quad S_{23,5} = b_{5\mathrm{V}}, \quad S_{23,6} = b_{5\,\mathrm{VI}};$$

$$S'_{23,1} = -S'_{13,2}, \quad S'_{23,2} = -N - {}^1/_2\,(1-\mu)\,\lambda^2 + m^2 -$$

$$- {}^3/_2\, a^2\mu\nu m^2\,(\nu N + \lambda^2 - m^2),$$

$$S'_{23,3} = 1 - {}^3/_2\, a^2\,[(2-\mu)\,\nu N + 2\,(\lambda^2 - m^2)],$$

$$S'_{23,4} = {}^3/_2\, a^2\,(2 - 2\mu - \mu^2)\,\nu^2,$$

$$S'_{23,5} = -2 - {}^3/_2\, a^2\,[4\nu N + 2\lambda^2 - (4 - 10\mu + 5\mu^2)\,\nu^2 m^2],$$

$$S'_{23,6} = -S'_{13,6};$$

$$S''_{23,1} = -{}^1/_2\,(3 + 5\mu) - {}^3/_4\, a^2\nu\,[(2 - 4\mu - 6\mu^2)\,\nu N +$$

$$+ (1 - 8\mu - 3\mu^2)\,\lambda^2 - (5 - 6\mu - 3\mu^2)\,m^2],$$

$$S''_{23,2} = N + {}^1/_2\,(1-\mu)\lambda^2 - 3m^2 - {}^3/_4\,a^2\,[4\nu N^2 + 4N\lambda^2 + (2 - 8\mu - 2\mu^2)\,\nu^2 N m^2 + (1-\mu)\,\lambda^4 + (1 - 12\mu - \mu^2)\,\nu\lambda^2 m^2 - (6 - 12\mu)\,\nu m^4],$$

$$S''_{23,3} = -S''_{13,3} - 4 + \mu,$$

$$S''_{23,4} = -S''_{13,5}, \tag{63}$$

$$S''_{23,5} = -2\nu N - \lambda^2 + (2-\mu)\,\nu m^2 + 6 - {}^3/_2\,a^2\,[4\nu^2 N^2 + 4\nu N\lambda^2 - 4(2-\mu)\,\nu^2 N m^2 + \lambda^4 - (5 - 6\mu + 2\mu^2)\,\nu^2\lambda^2 m^2 + (2-\mu)^2\nu^2 m^4],$$

$$S''_{23,6} = (1 - 5\mu)\,\nu + {}^3/_2\,a^2\nu^2\,[(3 - 15\mu + 16\mu^2)\,\nu N + (1 - 4\mu + 8\mu^2)\,\lambda^2 - (2 - 8\mu + 8\mu^2)\,m^2].$$

При $n = 3, 4$ величины $S^n{}_{ij,k}$ определяются по формулам (64):

$$S^n{}_{ij,1} = S^n{}_{ij,u}, \quad S^n{}_{ij,2} = S^n{}_{ij,v}, \quad S^n{}_{ij,3} = S^n{}_{ij,w},$$
$$S^n{}_{ij,4} = S^n{}_{ij,13}, \quad S^n{}_{ij,5} = S^n{}_{ij,23}, \quad S^n{}_{ij,6} = S^n{}_{ij,33}; \tag{64}$$
$$(i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3; \quad n = 3, 4).$$

При выведении первых трех уравнений таблицы 2 из первых трех уравнений системы (27) допустимо пренебречь следующими величинами:

$$S'''_{11,1}, \quad S'''_{11,2}, \quad S'''_{11,3}, \quad S'''_{11,6}, \quad S''''_{11,3};$$
$$S'''_{12,1}, \quad S'''_{12,2}, \quad S'''_{12,3}, \quad S'''_{12,6}, \quad S''''_{12,3};$$
$$S'''_{22,i}\ (i = 1, 2, \ldots 6), \quad S''''_{22,3};$$
$$S'''_{13,i}\ (i = 1, 2, 3, 4, 5), \quad S''''_{13,1}, \quad S''''_{13,2}; \tag{65}$$
$$S'''_{23,i}\ (i = 1, 2, \ldots 6), \quad S''''_{23,1}, \quad S''''_{23,2};$$
$$S'''_{33,i}, \quad S''''_{33,i}\ (i = 1, 2, \ldots 6).$$

Формулы, приведенные в этом пункте, составлены со следующей точностью: при $n = 0$ сохранены все члены первого порядка (безмоментные члены), все члены с множителем a^2 и старшие производные с множителем a^4; при $n = 1, 2$ сохранены все члены первого порядка и старшие производные с множителем a^2; при $n = 3, 4$ сохранены только старшие производные членов первого порядка. Эти формулы позволяют построить ряды Тэйлора и определить краевые напряжения и перемещения с асимптотической погрешностью, не превышающей пределы, указанные на странице 19.

Отметим еще, что вместо непосредственного применения уравнений (27) может оказаться целесообразным применить уравнения (66) к выведению трех первых уравнений таблицы 2. Система уравнений (66) не содержит компонентов второстепенных напряжений σ_{13}, σ_{23} и σ_{33}.

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & -\lambda\sigma_{11,0} - m\sigma_{12,0} - Nu_0 - {}^1/_2\, a^2 [\lambda(2\sigma'_{11,0} + \sigma''_{11,0}) + \\
& + m\sigma''_{12,0} + N(2u'_0 + u''_0)] - \\
& - {}^3/_{40}\, a^4 [\lambda(4\sigma'''_{11,0} + \sigma''''_{11,0}) + \\
& + m\sigma''''_{12,0} + N(4u'''_0 + u''''_0)] = q_{\mathrm{I}}, \\
(2)\quad & -\lambda\sigma_{12,0} - m\sigma_{22,0} - Nv_0 - {}^1/_2\, a^2 [\lambda(2\sigma_{12,0} + 4\sigma'_{12,0} + \\
& + \sigma''_{12,0}) - 2m\sigma'_{22,0} - m\sigma''_{22,0} + \qquad\qquad (66) \\
& + N(2v_0 + 4v'_0 + v''_0)] - {}^3/_{40}\, a^4 [\lambda(12\sigma''_{12,0} + 8\sigma'''_{12,0} + \\
& + \sigma''''_{12,0}) - 4m\sigma'''_{22,0} - m\sigma''''_{22,0} + \\
& + N(12v''_0 + 8v'''_0 + v''''_0)] = q_{\mathrm{II}} + q_{\mathrm{V}}, \\
(3)\quad & \sigma_{22,0} - Nw_0 - {}^1/_2\, a^2 [2\lambda^2(\sigma_{11,0} + \sigma'_{11,0}) + \\
& + \lambda m(2\sigma_{12,0} + 4\sigma'_{12,0}) - 2m^2\sigma'_{22,0} - \sigma''_{22,0} + \\
& + 2\lambda N(u_0 + u'_0) + 2mN(v_0 + v'_0) + N(2w'_0 + w''_0)] - \\
& - {}^3/_{40}\, a^4 [\lambda^2(12\sigma''_{11,0} + 4\sigma'''_{11,0}) +
\end{aligned}
$$

$$+\lambda m(12\sigma''_{12,0}+8\sigma'''_{12,0})-4m^2\sigma'''_{22,0}-\sigma''''_{22,0}+$$
$$+\lambda N(12u''_0+4u'''_0)+mN(12v''_0+4v'''_0)+ \qquad (66)$$
$$+N(4w'''_0+w''''_0)]=q_{\text{III}}+\lambda q_{\text{IV}}+mq_{\text{V}}.$$

Уравнение (1) системы (66) представляет из себя первое уравнение системы (27); уравнение (2) — сумму второго и пятого уравнения системы (27); уравнение (3) — сумму третьего, λ-кратного четвертого и m-кратного пятого уравнения системы (27).

Приложение

ЧИСЛЕННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ.

В таблице 3 численно сопоставляются коэффициенты характеристического уравнения (34), найденные по формулам автора (41), (42), по теории Ю И-Юаня (формулы 53, 54) и по теории Кирхгофа-Лява в постанове работы [11]. Рассматриваются два случая: $\mu=0$ и $\mu=0{,}3$. В части теории Ю И-Юаня приняты два значения «коэффициента сдвига»:

1) $\varkappa=\varkappa_1=0{,}3010$. Значение $\varkappa_1$ применялось в работе [29].

2) $\varkappa=\varkappa_2=\dfrac{4}{5-6\mu}(1-\mu)^2$. Значение $\varkappa_2$ обеспечивает совпадение нашего множителя при a^2N^4 с соответствующим коэффициентом теории Ю И-Юаня. При обеих значениях $\varkappa$ коэффициенты для членов с множителем a^4 отличаются существенно (некоторые даже по знаку).

Таблица 3

	Величина	Численный множитель							
		$\mu = 0$				$\mu = 0{,}3$			
		Автор	Ю И-Юань		Кирхгоф-Ляв	Автор	Ю И-Юань		Кирхгоф-Ляв
			$\varkappa = \varkappa_1$	$\varkappa = \varkappa_2$			$\varkappa = \varkappa_1$	$\varkappa = \varkappa_2$	
$a^4 \times$	N^5	—2,68	—11,0	—1,56	—	—4,48	—11,0	—2,67	—
	$N^4(\lambda^2 - m^2)$	—8,41	—36,4	—5,94	—	—14,5	—33,1	—8,83	—
	$N^3(\lambda^2 - m^2)^2$	—9,16	—45,8	—8,83	—	—15,4	—36,8	—11,1	—
	$N^2(\lambda^2 - m^2)^3$	—3,14	—27,4	—6,41	—	—5,80	—18,8	—6,64	—
	$N(\lambda^2 - m^2)^4$	0,738	—7,74	—2,23	—	0,252	—4,49	—1,87	—
	$(\lambda^2 - m^2)^5$	0,450	1,66	—0,625	—	0,315	—0,814	—0,400	—
$a^2 \times$	N^4	2,50	6,65	2,50	—	3,27	6,65	3,27	—
	$N^3(\lambda^2 - m^2)$	6,25	16,0	6,63	—	7,95	14,5	8,27	—
	$N^2(\lambda^2 - m^2)^2$	6,00	13,3	6,56	1,000	6,74	10,7	6,47	1,000
	$N(\lambda^2 - m^2)^3$	2,75	4,49	2,94	1,500	2,53	3,27	2,47	1,350
	$(\lambda^2 - m^2)^4$	0,500	0,500	0,500	0,500	0,350	0,350	0,350	0,350
	λ^6	—0,75	—2,49	—0,938	—	—0,478	—1,22	—0,492	—
	$\lambda^4 m^2$	—2,25	—0,508	—2,06	—4,000	—1,62	—0,672	—1,40	—2,737
	$\lambda^2 m^4$	4,00	4,00	4,00	4,000	2,80	2,59	2,59	2,800
	m^6	—1,00	—1,00	—1,00	—1,000	—0,700	—0,700	—0,700	—0,700
	$\lambda^2 m^2$	—2,00	—1,75	—1,75	—2,000	—1,40	—1,07	—1,07	—1,400
	m^4	0,500	0,500	0,500	0,500	0,350	0,350	0,350	0,350
		$\nu = 1$	$\varkappa_1 = 0{,}3010$ $\varkappa_2 = 0{,}8000$			$\nu = 1{,}42857$	$\varkappa_1 = 0{,}3010$ $\varkappa_2 = 0{,}61250$		

ОБОЗНАЧЕНИЯ. SYMBOLS.

E — модуль Юнга
Young's modulus

μ — коэффициент Пуассона
Poisson's ratio

$\nu = \frac{1}{1-\mu}$

ϱ — плотность материала оболочки
density of shell material

R_0 — радиус срединной поверхности оболочки
radius of median surface of shell

δ — толщина оболочки
thickness of shell

$a^2 = \frac{\delta^2}{12R^2_0}$

ξ, φ, ζ — безразмерные координаты соответственно по длине, по поперечному кругу и по радиусу оболочки (Рис. 1)
dimensionless co-ordinates in longitudinal, circumferential, and radially outward directions, respectively (Fig. 1)

$\bar{\zeta} = \zeta - 1$

$\frac{d(\ldots)}{d\zeta} = (\ldots)'$

t — время
time

$f = e^{\lambda\xi - im\varphi - i\omega t}$ — функции формального интегрирования дифференциальных уравнений

function of formal integration of differential equations

$N = \frac{\rho R^2{}_0 \omega^2 (1 - \mu^2)}{E}$

$p^2 \sim \lambda^2 + m^2 + N \leqslant max\, K$

u, v, w — перемещения соответственно в направлениях ξ, φ, ζ

displacements in ξ, φ, ζ directions, respectively

ε_{ij} — относительные деформации

strains

σ_{ij} — напряжения

stresses

$\sigma_{i3,r}$ $(i = 1, 2, 3;$ $r = 1, 2)$ — компоненты распределенной нагрузки (или заданные напряжения) на боковых поверхностях оболочки

components of distributed load (or given stresses) on faces of shell

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\varepsilon}_{ij}, \bar{\sigma}_{ij}, \bar{\sigma}_{ij,r}$ — безразмерные функции от ζ, введенные по формулам (7), (8), (9)

dimensionless functions of ζ introduced by formulae (7), (8), (9)

$u_0, u'_0, \ldots,$ $v_0, v'_0, \ldots,$ $w_0, w'_0, \ldots,$ $\sigma_{ij,0}, \sigma'_{ij,0}, \ldots$ — безразмерные величины, относящиеся к срединной поверхности; введенные по формулам (14), (15), (16)

dimensionless quantities referring to the median surface, introduced by formulae (14), (15), (16)

$U^n{}_g$, $V^n{}_g$, $W^n{}_g$, $S^n{}_{ij,g}$ ($n = 0, 1, 2, 2, 4$; $g = u, v, w, 13, 23, 33$; $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$)	величины, определяемые по формулам (19), (20), (21), (22), (23), (24) *quantitites defined by formulae (19), (20), (21), (22), (23), (24)*
$U^n{}_g$, $V^n{}_g$, $W^n{}_g$, $S^n{}_{ij,g}$ ($n = 0, 1, 2, 3, 4$; $g = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$)	величины, определяемые по формулам (58), (59), (60), (61), (62), (63) *quantities defined by formulae (58), (59), (60), (61), (62), (63)*
B_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, 6$; $j = 1, 2, \ldots, 6$)	коэффициенты первичной системы уравнений (таблица 1) *coefficients of initial set of equations (table 1)*
b_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, 6$; ($j = 1, 2, 3, IV, V, VI$)	коэффициенты уравнений таблицы 2 *coefficients of equations of table 2*
q_j ($j = I, II, \ldots, VI$)	величины, определяемые по формулам (28), (28a) *quantities defined by formulae (28), (28a)*
d_0, d_1, d_2	коэффициенты (35), (41), (42) характеристического уравнения (34) *coefficients (35), (41), (42) of characteristic equation (34)*
$d^*{}_1$, $d^*{}_2$	коэффициенты (53), (54) характеристического уравнения теории И-Юаня Ю *coefficients (53), (54) of characteristic equation of Yi-Yuan Yu theory*

ϑ — оценка погрешности
estimation of error

$\varkappa$ — «коэффициент сдвига» в теории И-Юаня Ю
«shear constant» in Yi-Yuan Yu theory

U. Nigul

LINEAR, FREE OF HYPOTHESES, EQUATIONS OF MOTION OF ELASTIC CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL

(SUMMARY)

1. **Introduction.** In this paper linear shell-theory is considered as a part of three-dimensional linear theory of elasticity, in which the general solution for shells is obtained expanding all variable quantities into a series of powers of the co-ordinate perpendicular to the median surface. Theory of shells in this usual meaning can be used only in case of convergent series. Therefore the conditions of convergence of the series of powers are thoroughly investigated and mathematically formulated.

The theory of elastic shells has been so far mostly developed with the help of certain simplifying assumptions [4, 7, 12, 21, 29]. In this paper no hypotheses are used. Consequently our results open a field for discussing and estimating the error of all approximate theories including the new theory developed by Yi-Yuan Yu [29, 30].

The method used in this paper is similar to the method of «initial functions», developed by V. Z. Vlassov [5, 6] and includes some ideas, suggested by P. S. Epstein and E. H. Kennard [21, 22, 23, 24]. Details are worked out only for cylindrical shells, but the method itself can be used for every kind of shells.

2. **Initial equations and primary coefficients of Taylor's series.** We start from the equations of the theory of elasticity (1), (2), (4), (5). With the help of formulae (7), (8), (9), (10) the equations (11), (12), (13) are obtained, in which all the quantities are ζ-functions. Further all the quantities are expanded into Taylor's series (14), (15). (Subscript «o» denotes quantities referring to points on the

median surface.) From equations (13) we get formulae which express u_0'', v_0'', w_0'' as functions of

$$u_0,\ v_0,\ w_0,\ u_0',\ v_0',\ w_0'. \qquad (*)$$

Having differentiated the equations (13) assumed $\zeta=1$ and eliminated u_0'', v_0'', w_0'', we also determine u_0''', v_0''', w_0''' as functions of quantities (*). The next derivatives are calculated analogically. Then, using formulae (17), derivatives u_0', v_0', w_0' are eliminated and instead of them three new unknowns $\sigma_{13,0}$, $\sigma_{23,0}$, $\sigma_{33,0}$ are introduced.

As a result of these calculations the primary coefficients of Taylor's series are derived (19), (20), (21), (22,), (23), (24). These series are convergent in case (26).

3. **Sets of fundamental equations.** Equations of motions for cylindrical shell (table 1), expressed in terms of 6 quantities referring to the median surface, have been derived in two ways with the identical result. Method «A» is based on the use of equations (11), method «B» — on the use of boundary conditions on the faces $\left(\bar{\zeta}=\pm\frac{\delta}{2R_0}\right)$ of the shell; the latter is similar to the method described by E. H. Kennard [21].

From the set of table 1 are derived 6 equations presented in the table 2. The first three of them represent the fundamental set of equations for determination of u_0, v_0 and w_0. From this fundamental set the characteristic equation (34) is obtained.

4. **Characteristic equation and research of the set of three homogeneous equations.** Coefficients of the characteristic equation (34) are determined by the formulae (35), (41), (42). Thereby in the formula for d_1 members like d_0 are neglected and in the formula for d_2 only the highest orders of λ, m and N are taken into consideration. The asymptotic error of the equation (34) is determined by the estimation (40). By derivation of the equation (34) some members of the fundamental set were found to be unnecessary. These members are underlined in the formulae (32), (33).

Further the simplifying assumptions of approximate theories are discussed. The most important results are the following:

(a) In approximate theories, founded on assumption $\sigma_{33}\equiv 0$, members with the multiplier a^4 must be neglected.

(b) Equations without members with the multiplier a^4 give an approximate solution. The members with the multiplier a^4 mainly improve the accuracy of the solution.

(c) Estimation of error of Kirchhoff-Love theory is determined by the formula (51).

(d) Equations of theory developed by Yi-Yuan Yu [29] considerably differ from ours. "The shear constant", used in this theory, is quite an artificial quantity. For comparison the coefficients of characteristic equation of Yi-Yuan Yu theory were represented by our symbols (53), (54). In the table 3 (p. 59) the coefficients of the characteristic equation of Yi-Yuan Yu theory are compared with those of our theory numerically.

5. Coefficients of Taylor's series as functions of u_0, v_0, w_0, q_{IV}, q_V and q_{VI}.

The formulae of coefficients of Taylor's series are given for the first five members. They offer the opportunity to determine the boundary stresses and displacements with the asymptotic error $\vartheta^{**} \leqslant p^4a^4 + a$.

Tallinn, June 29, 1960

Литература. Bibliography.

1. Амбарцумян С. А., К вопросу построения приближенных теорий расчета пологих цилиндрических оболочек, ПММ т. XVIII, в. 3, 1954.
2. Амбарцумян С. А., К общей теории анизотропных оболочек, ПММ т. XXII, в. 2, 1958.
3. Браславский В. Е., О колебаниях цилиндрических оболочек, Инж. сборник, т. XVI, АН СССР, 1953.
4. Власов В. З., Общая теория оболочек, 1949.
5. Власов В. З., Метод начальных функций в задачах теории упругости, Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, № 7, 1955.
6. Власов В. З. и Леонтьев Н. Н., Балки, плиты и оболочки на упругом основании, 1960.
7. Гольденвейзер А. Л., Теория упругих тонких оболочек, 1953.
8. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, 1951.
9. Муштари Х. М., Терегулов И. Г., К теории оболочек средней толщины, ДАН СССР, т. 128, № 6, 1959.
10. Нигул У. К., Об общих формах колебания круговой замкнутой цилиндрической оболочки, Труды ТПИ № 147, 1958.
11. Нигул У. К., Некоторые результаты исследования уравнений собственных колебаний упругой кругоцилиндрической оболочки, Труды ТПИ № 171, 1960.
12. Новожилов В. В., Теория тонких оболочек, 1951.
13. Оллик К. К., Об осесимметрических колебаниях кругоцилиндрических тонкостенных оболочек, Труды ТПИ № 147, 1958.
14. Ониашвили О. Д., Некоторые динамические задачи теории оболочек, АН СССР, 1957.
15. Петрашень Г. И., Смирнова Н. С., Гельчинский Б. Я., Динамические задачи теории упругости, Ученые записки ЛГУ № 170, 1953.
16. Прокопов В. К., Равновесие упругого осесимметрично нагруженного толстостенного цилиндра, ПММ т. XIII в. 2, 1949.
17. Терегулов И. Г., К теории пластин и оболочек, автореферат, Казань, 1960.
18. Gazis D. C., Exact Analysis of the Plane-Strain Vibrations of Thick-Walled Hollow Cylinders, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 30, August, 1958.
19. Gazis D. C., Three-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 31, May, 1959.
20. Herrmann G. and Mirsky I., Three-Dimensional and Shell-Theory Analysis of Axially Symmetric Motions of Cylinders, Journal of Applied Mechanics, December, 1956.

21. Kennard E. H., The New Approach to Shell Theory: Circular Cylinders, Journal of Applied Mechanics, March, 1953.
22. Kennard E. H., Cylindrical Shells: Energy, Equilibrium, Addenda, and Erratum, Journal of Applied Mechanics, March, 1955.
23. Kennard E. H., Approximate Energy and Equilibrium Equations for Cylindrical Shells, Journal of Applied Mechanics, December, 1956.
24. Kennard E. H., A Fresh Test of the Epstein Equations for Cylinders, Journal of Applied Mechanics, December, 1958.
25. Lin T. C. and Morgan G. W., A Study of Axisymmetric Vibrations of Cylindrical Shells as Affected by Rotatory Inertia and Transverse Shear, Journal of Applied Mechanics, June, 1956.
26. Müller W., Theorie der elastischen Verformung, Leipzig, 1959.
27. Naghdi P. M., On the Theory of Thin Elastic Shells, Quarterly of Applied Mathematics, January, 1957.
28. Yu Yi-Yuan, Free Vibrations of Thin Cylindrical Shells Having Finite Lengths with Freely Supported and Clamped Edges, Journal of Applied Mechanics, March, 1955.
29. Yu Yi-Yuan, Vibrations of Thin Cylindrical Shells Analyzed by Means of Donnell-Type Equations, Journal of the Aero/Space Sciences, November, 1958.
30. Yu Yi-Yuan, New Theroy of Elastic Sandwich Plates, Journal of Applied Mechanics, Series E, September, 1959.

Рукопись поступила в редакцию 29 июня 1960 г.

У. К. Нигул

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ УПРУГОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СВОБОДНЫЕ ОТ ГИПОТЕЗ

*

Таллинский политехнический институт

Редактор Х. Лаул

Технический редактор А. Тамм

Корректор М. Каска

Сдано в набор 8 IX 1960. Подписано к печати 17 XI 1960. Печатных листов 4,25. По формату 60×92 печатных листов 3,50. Учетно-издательских листов 2,45. Тираж 500. МВ-08330. Заказ № 6487.

Типография «Коммунист» ул. Пикк 2, Таллин.

Цена 1 руб. 80 коп.
1961 г. — 18 коп.

1 руб. 80 коп.
1961 г. — 18 коп.