

Ep.6.7  
444

TALLINNA  
POLÜTEHNILISE INSTITUUDI  
TOIMETISED

444

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА

TALLINN

**ТРИ**  
**'78**

Строительная механика 1X

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ  
И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ  
МЕТОДЫ  
АНАЛИЗА  
СИСТЕМ  
СТРОИТЕЛЬНОЙ  
ТЕХНИКИ





Ep. 6.7

444

**ТПИ  
'78**

**TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED**

**ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА**

УДК 624.041

Строительная механика 1X

● ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ  
И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ  
МЕТОДЫ АНАЛИЗА  
СИСТЕМ  
СТРОИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

Таллин 1978

78  
79

YALWAY POLY TECHNICALITY FOR METERS

TOYIN ALANKOIS DO TECHNICALITY HETTYA

YAK 02/01

YONTOBAN METERA IX

TECHNICALITY

YAKREPPENTU METERA

METERA KANAKA

CHITRA

TECHNICALITY METERA

NSV  
Teadusk  
Resmatukogu  
IV  
Teaduste Akadeemia

УДК 624.041.2

С.С.Богданов, Э.М.Иегн

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЙ И ИХ  
СВЯЗИ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕСОВЫХ ПАРАМЕТРОВ

В статье исследуется вопрос о выборе оптимальных связей между геометрическими характеристиками поперечных сечений стержня и их свойствами в пространстве безразмерных весовых параметров ( $q$ ).

В качестве параметров управления выбирается высота поперечного сечения стержня ( $h$ ) так, что все остальные геометрические характеристики — приведенная ширина сечения ( $b_{пр}$ ), площадь ( $F$ ), момент сопротивления ( $W$ ), момент инерции ( $J$ ), погонная жесткость ( $i$ ) — для поперечного сечения стержня представляются как некоторая линейная или нелинейная функция параметра ( $h$ ). Естественно, что высота сечения ( $h$ ) лишь условно может считаться независимым параметром, с необходимостью удовлетворяя требованиям прочности (жесткости, устойчивости) стержня в раме.

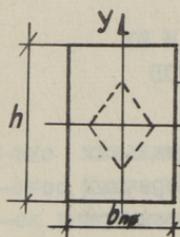
Если предположить, что между площадью ( $F$ ) и высотой ( $h$ ) поперечного сечения стержня любого профиля существует некоторый безразмерный переменный коэффициент связи ( $K_F$ ), как нелинейная функция от ( $h$ ) —  $K_F = K_F(h)$ , то все геометрические характеристики сечения могут быть полностью описаны через коэффициент площади  $K'_F = \frac{F}{h^2}$  и высоту сечения ( $h$ ).

Исследуя законы изменения  $K_F(h)$  на множестве прокатных профилей поперечных сечений была получена аппроксимирующая функция вида:

$$K_F(h) = \frac{\alpha}{h} + \beta, \quad (I)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — коэффициенты аппроксимации, зависящие от типа прокатного профиля и не зависящие от номера профиля.

тип сечения	$\alpha$	$\beta$	$K_{\text{Я}}$
прокат	I	1,00	0,02
	C	0,96	0,013
		0,5	0,167
		1,00	0,125



$$b_{\text{нр}} = \alpha + \beta h; \quad F = (\alpha + \beta h)h$$

$$W_z = F r_{\text{я}} = (\alpha + \beta h) K_{\text{Я}} h^2$$

$$J_z = W_z \frac{h}{2} = (\alpha + \beta h) \frac{K_{\text{Я}}}{2} h^3$$

Условие прочности:  $\sigma_{\text{спроч.}} = \frac{M_{\text{спроч.}}}{W_{zs}} \leq R_{\text{спроч.}}$

$$W_{zs} = (\alpha + \beta h_s) K_{\text{Я}} h_s^2 \geq \frac{M_{\text{спроч.}}}{R_{\text{спроч.}}} \rightarrow [F_s] = \frac{M_{\text{спроч.}}}{[h_s]} \cdot \frac{1}{R \cdot K_{\text{Я}}}$$

$$[V] = \sum_{s=1}^4 [V_s] = \sum_{s=1}^4 [F_s] \cdot L_s = \sum_{s=1}^4 \frac{M_{\text{спроч.}}}{[h_s]} \cdot \frac{1}{R K_{\text{Я}}} \cdot L_s$$

Принимаем  $h_s^{(0)} = \left( \frac{M_{\text{спроч.}}}{\alpha R K_{\text{Я}}} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow b_{\text{спр}}^{(0)} = \alpha + \beta h_s^{(0)} \rightarrow h_s^{(1)} = \left( \frac{M_{\text{спроч.}}}{b_{\text{спр}}^{(0)} R K_{\text{Я}}} \right)^{\frac{1}{2}}$

Для  $\alpha = 1; \beta = 0,02; K_{\text{Я}} = 0,32; R = 1600 \left[ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right]$

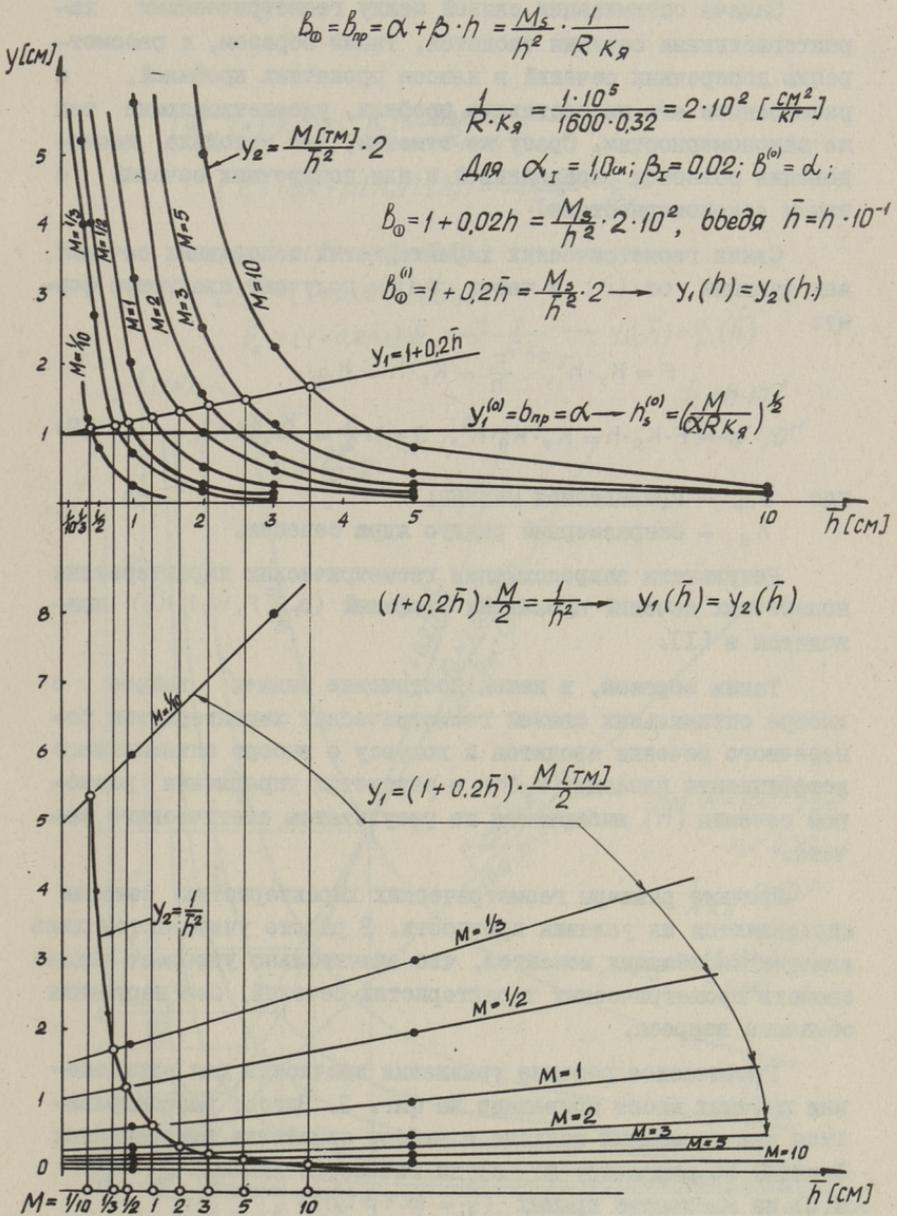
$$h_s^{(0)} = 14,1 \cdot M^{\frac{1}{2}} \rightarrow b_{\text{спр}}^{(0)} = 1 + 0,02 \cdot h_s^{(0)} \rightarrow h_s^{(1)} = \frac{h_s^{(0)}}{(b_{\text{спр}}^{(0)})^{\frac{1}{2}}}$$

$$F_s^{(1)} (\alpha + \beta h_s^{(1)}) h_s^{(1)} = \alpha h_s^{(1)} + \beta h_s^{(1)2} = F_{\alpha}^{(1)} + F_{\beta}^{(1)},$$

где

$$F_{\alpha}^{(1)} = 14,1 \cdot M^{\frac{1}{2}} (1 + 0,28 M^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}; \quad F_{\beta}^{(1)} = 4M (1 + 0,28 M^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$$

Фиг. 1. Прочные размеры сечений.



Фиг. 2. Решение уравнения для прочных высот ( $h$ ) прокатных профилей.

Задача оптимизации связей между геометрическими характеристиками сечения сводится, таким образом, к рассмотрению поперечных сечений в классе прокатных профилей, с расширением его на составные профили, удовлетворяющие тем же закономерностям. Сразу же отметим, что методика исследования остается справедливой и для поперечных сечений с иными закономерностями.

Связи геометрических характеристик поперечных сечений, как функции от  $(h)$  и через  $K_F(h)$  получают следующую форму:

$$F = K_F \cdot h^2, \quad \frac{F}{h} = K_F \cdot h = b_{np},$$

$$W = F \cdot K_A \cdot h = K_F \cdot K_A \cdot h^3, \quad J = W \frac{h}{2} = \frac{K_F K_A}{2} h^4, \quad (2)$$

где  $b_{np}$  — приведенная ширина;

$K_A$  — безразмерный радиус ядра сечения.

Результаты аппроксимации геометрических характеристик поперечных сечений прокатных профилей ( $b_{np}, F, W, J, K_F$ ) приводятся в [1].

Таким образом, в нашей постановке задачи вопрос о выборе оптимальных связей геометрических характеристик поперечного сечения сводится к вопросу о выборе оптимального коэффициента площади  $K_F(h)$ , а параметры управления размером сечения ( $h$ ) выбираются по результатам статического расчета.

Прочные размеры геометрических характеристик сечения определяются из условия прочности. В работе учитывается лишь влияние изгибающих моментов, что значительно упрощает анализ свойств геометрических характеристик сечений, без нарушения общности вопроса.

Графическое решение уравнения прочности для определения прочных высот приведено на фиг. 2. Здесь рассматриваются два возможных подхода к выбору семейства итерационных функций по параметру  $M$ : а) на множестве кривых ( $y_i = \frac{M}{h^3}$ ) и б) на множестве прямых ( $y_i = (\alpha + \beta h)M$ ).

Значение высоты поперечного сечения на границе прочности определяет все геометрические характеристики сечения

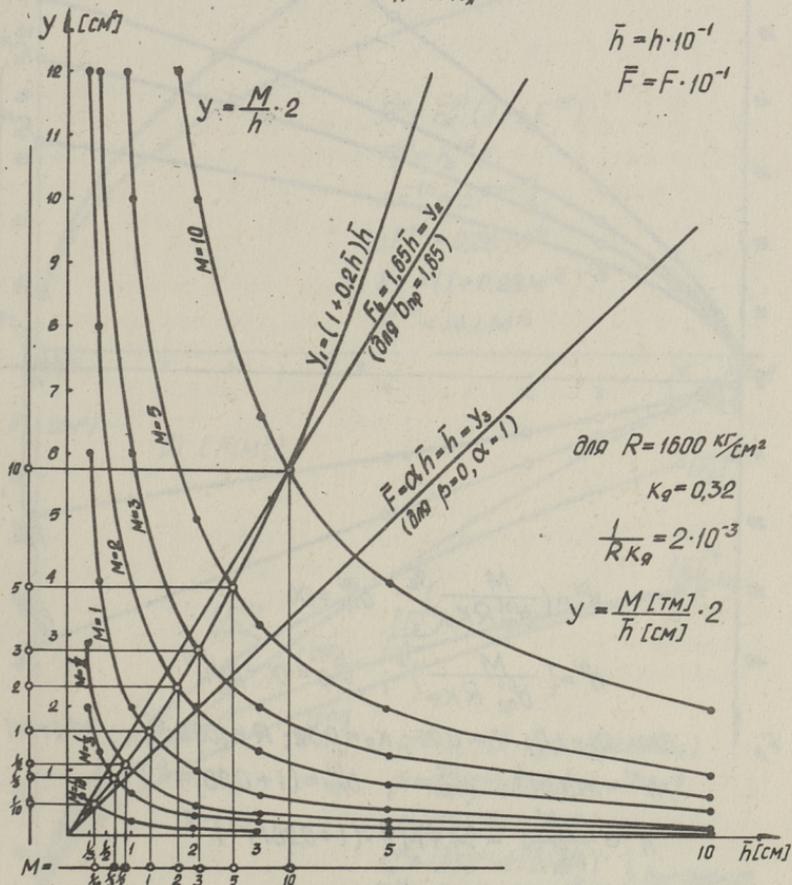
$$[W_{23}] = [F_s] \cdot K_R [h_s] = \frac{M_{расч.}}{R_{расч.}} \quad \text{---}$$

$$[F_s] = (\alpha + \beta [h_s]) \cdot [h_s] = \frac{M_{расч.}}{[h_s]} \cdot \frac{1}{R \cdot K_R}$$

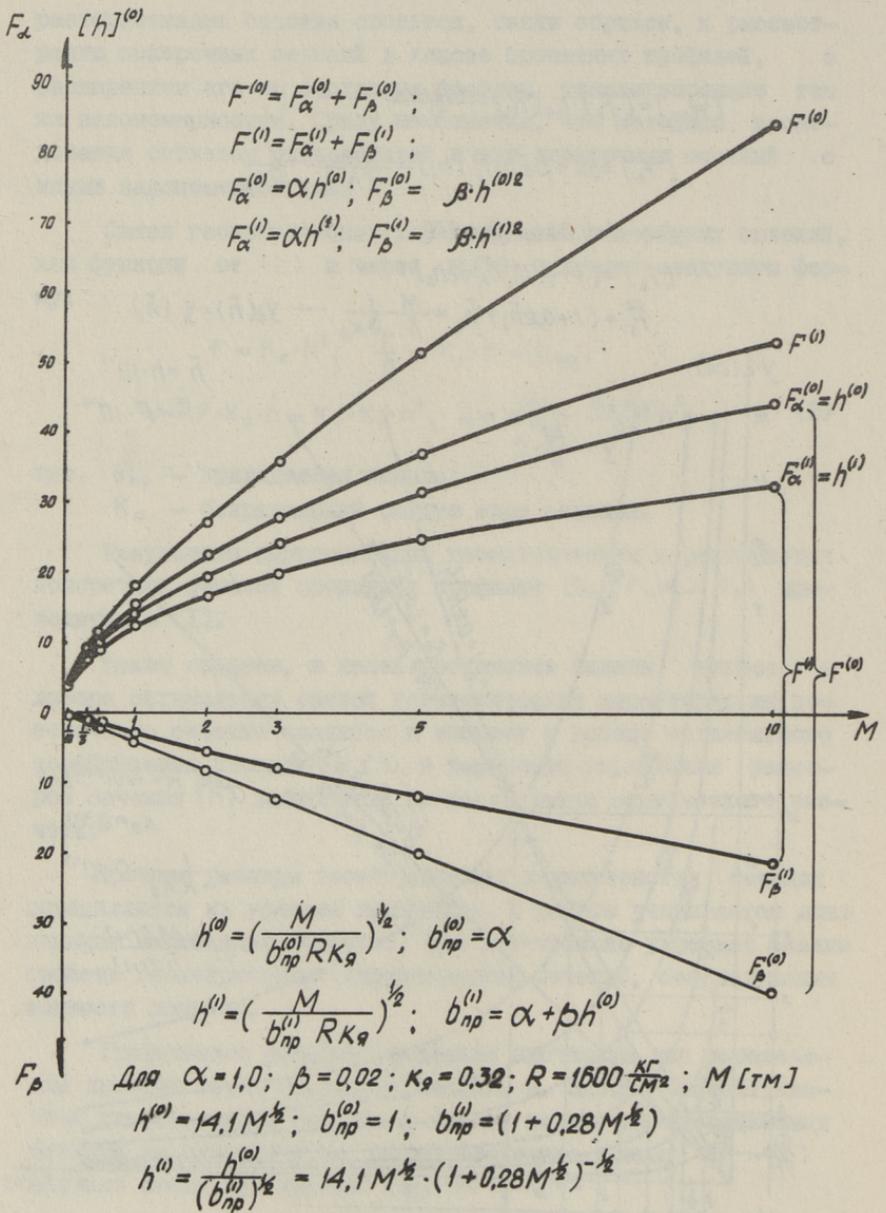
Для  $\alpha = 1,0$  см и  $\beta = 0,02$

$$[F_s] = (1 + 0,02 h_s) [h_s]$$

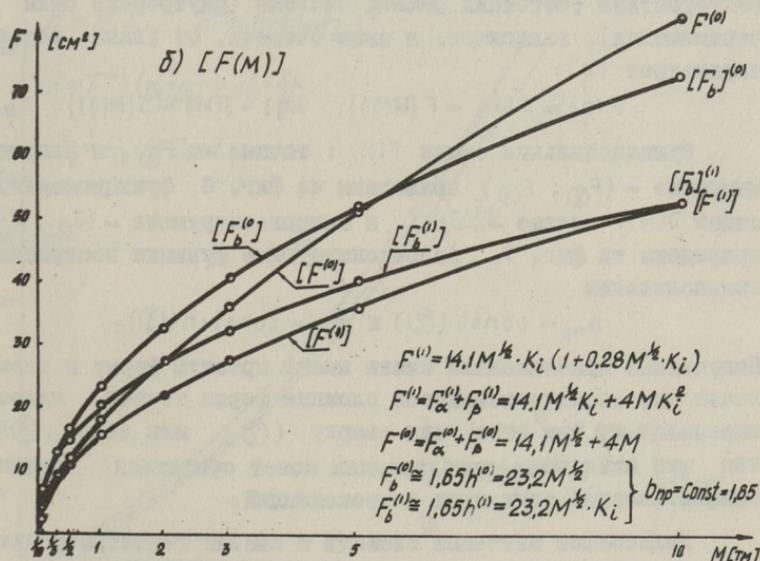
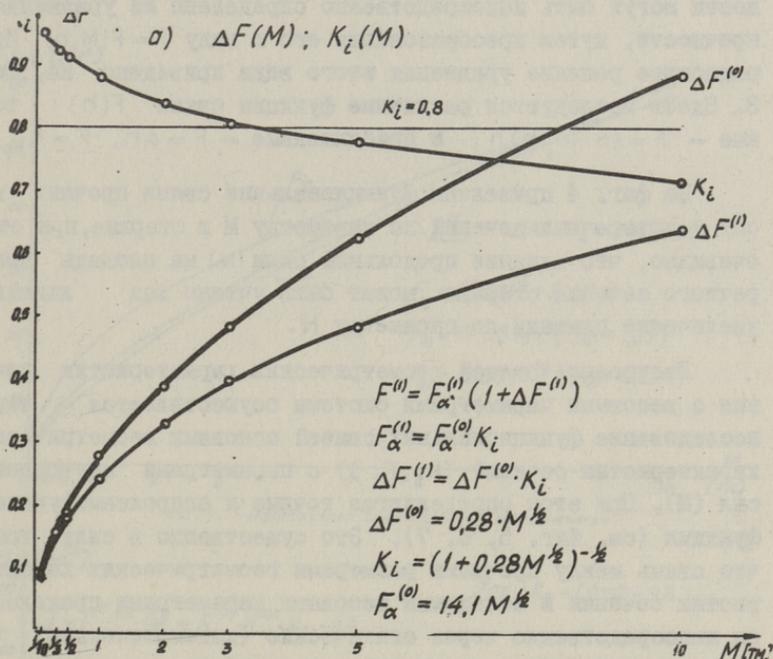
$$\bar{F}_s = (1 + 0,2 \bar{h}_s) \cdot \bar{h}_s = \frac{M}{\bar{h}} \frac{1}{R \cdot K_R} \quad \text{---} \quad y_i(\bar{h}) = y(\bar{h})$$



Фиг. 3. Решение уравнения для прочных площадей  $[F]$  поперечных сечений.



Фиг. 4. Функциональные связи  $[h(M)]$ ;  $[F(M)]$ .



Фиг. 5. Функциональные связи характеристик площадей и их аппроксимация.

(S) на границе прочности -  $[F_s]$ ;  $[W_s]$ ;  $[J_s]$ .

Площади поперечных сечений стержней на границе прочности могут быть непосредственно определены из уравнения прочности, путем преобразования его к виду  $F = F(M, h)$ . Итерационное решение уравнения этого вида приведено на фиг. 3. Здесь исследуются различные функции связи  $F(h)$ : точные -  $F = (\alpha + \beta h)h$ , и приближенные -  $F = \alpha h$ ,  $F = b_{np} \cdot h$ .

На фиг. 4 приведены функциональные связи прочных высот и поперечных сечений по параметру  $M$  в стержне, при этом очевидно, что влияние продольной силы ( $N$ ) на площадь поперечного сечения стержня может быть учтено как линейное увеличение площади по параметру  $N$ .

Построение связей геометрических характеристик сечения с весовыми параметрами системы осуществляется через исследование функциональных связей основных геометрических характеристик сечений ( $K_s$ ;  $F$ ;  $J$ ) с параметрами внутренних сил ( $M$ ). При этом определяются точные и аппроксимирующие функции (см. фиг. 5, 6, 7). Это существенно в силу того, что связь между прочными размерами геометрических характеристик сечения и исходными весовыми параметрами проявляется непосредственно через статические (кинематические) характеристики состояния рамной системы (внутренние силы и перемещения), зависящие, в свою очередь, от плана весовых параметров ( $q$ ):

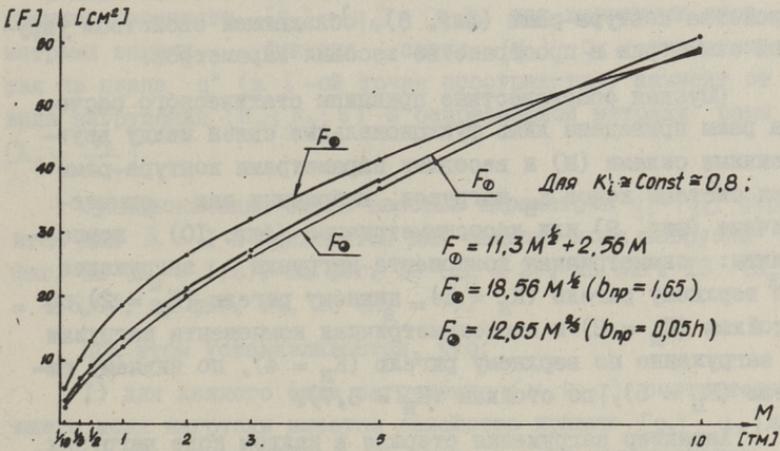
$$F(q) = F(M) = F\{M(q)\}; \quad J(q) = J(M) = J\{M(q)\}.$$

Функциональные связи  $F(M)$ : точные -  $F_{(1)}$  и аппроксимирующие - ( $F_{(2)}$ ;  $F_{(3)}$ ) приведены на фиг. 6, функциональные связи  $J(M)$ : точные -  $J_{(1)}$  и аппроксимирующие - ( $J_{(2)}$ ;  $J_{(3)}$ ) приведены на фиг. 7. Аппроксимирующие функции построены в предположении

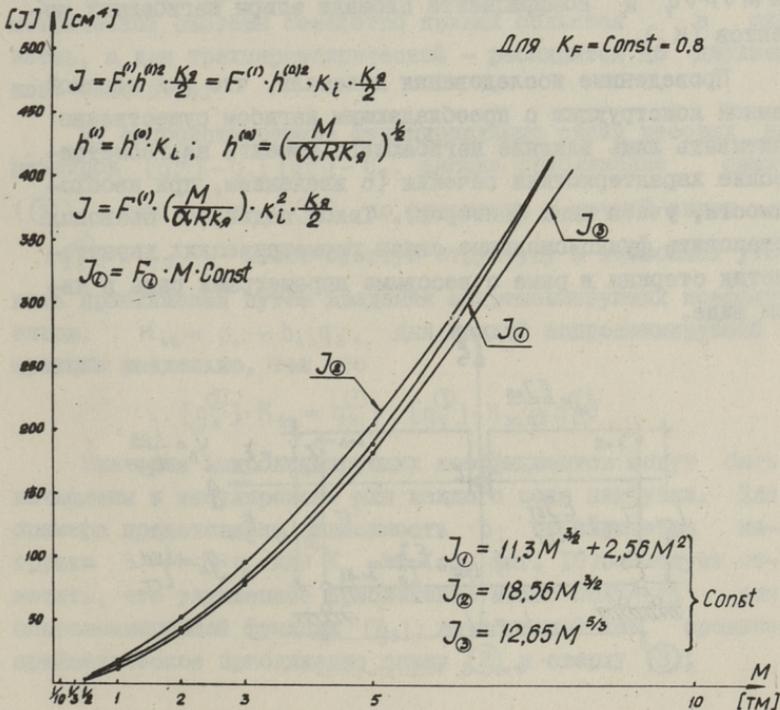
$$b_{np} = \text{const} \text{ (2)} \text{ и } b_{np} = \text{const} \cdot h \text{ (3)}.$$

Полученные приближенные связи имеют простую форму и достаточно хорошо аппроксимируют сложные формы точных связей, определяя их при этом или сверху (2) или снизу (3), так что наилучшим приближением может считаться среднее арифметическое этих двух аппроксимаций.

Дальнейшее изучение свойств и связей геометрических



Фиг. 6. Аппроксимация площади поперечного сечения.



Фиг. 7. Аппроксимация момента инерции поперечного сечения.

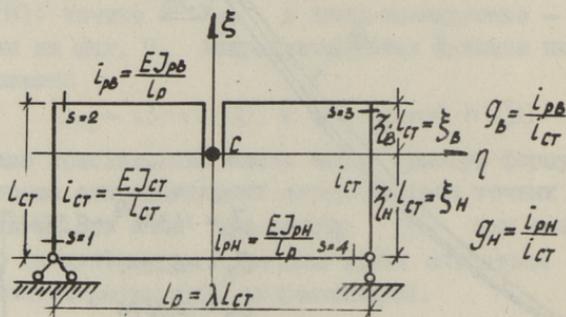
Характеристик сечений в пространстве весовых параметров может быть выполнено лишь после проведения статического расчета конструкции в целом.

В статье приводятся статические (и кинематические) свойства контура-рамы (фиг. 8), обладающей свойством упругой симметрии в пространстве весовых параметров.

Опуская общеизвестные принципы статического расчета рамы приведены лишь функциональные связи между внутренними силами ( $M$ ) и весовыми параметрами контура-рамы для системы кодов  $K_H$  нагрузок, выбранных как симметричные (фиг. 9) или кососимметричные (фиг. 10) компоненты: симметричная компонента нагрузки — загрузка по верхнему ригелю ( $K_H = 1$ ), нижнему ригелю ( $K_H = 2$ ), по стойкам ( $K_H = 3$ ) и кососимметричная компонента нагрузки — загрузка по верхнему ригелю ( $K_H = 4$ ), по нижнему ригелю ( $K_H = 5$ ), по стойкам ( $K_H = 6, 7$ ).

Характер нагружения стержня в каждом коде нагрузки учитывается путем введения параметров нагрузки ( $S$ ) =  $M \nu P \nu q$  и коэффициента площади эпюры изгибающих моментов ( $K_S$ ).

Проведенные исследования показали, что для плоской рамной конструкции с преобладающим изгибом существенно учитывать лишь влияние изгибающего момента на геометрические характеристики сечения (с введением, при необходимости, учета иных факторов). Такой подход позволил установить функциональные связи геометрических характеристик стержня в раме с весовыми параметрами рамы в явном виде.



Фиг. 8. Контур-рама.

Существенный интерес представляет исследование функций связей между исходными весовыми параметрами  $q_s = q_b \vee q_n$ , как входными параметрами задачи и их значениями, найденными по результату статического расчета на границе прочности  $[q_s] = [q_b] \vee [q_n]$ , как выходными параметрами задачи. Функция связи  $[q_s] - q_s$ , вычисленная на плане  $q^i$  (в  $i$ -ой точке пространства) зависит от вида загрузки ( $K_H; K_S; S$ ) и безразмерной метрики рамы ( $\lambda_s = \frac{b_s}{b_{ст}}$ ).

Функциональная связь весовых параметров  $q_s - [q_s]$  строится для  $\lambda = 1$  и приводится для каждого кода нагрузки на фиг. 11 ( $K_H = 1, 2$ ), на фиг. 12 ( $K_H = 3$ ), на фиг. 13 ( $K_H = 4, 5, 6$ ), на фиг. 14, 15 ( $K_H = 7$ ).

При этом устанавливается, что:

1) для каждого вида загрузки ( $M, P, q$ ) соответствующего кода нагрузки имеется семейство кривых  $[q_b] - q_b$  (или  $[q_n] - q_n$ ) по параметру  $q_n$  (или  $q_b$ ) в пространстве двухпараметрических систем. Естественно, что для однопараметрической системы семейство кривых сольется в одну ветвь, а для трехпараметрической - расширится до двухмерного семейства;

2) аппроксимирующие функциональные связи весовых параметров  $[q_s^{(2)}] - q_s$ ;  $[q_s^{(3)}] - q_s$ , дающие приближение снизу (2) или сверху (3) по отношению к точной связи

$[q_s^{(1)}] - q_s$  имеют простую структуру и позволяют уточнить приближения путем введения аппроксимирующих коэффициентов:  $K_{is} = a_i + b_i \cdot q_s$ , для каждой аппроксимирующей функции раздельно, так что

$$[q_s^{(2)}] \cdot K_{2s} = q_s^{(1)}; \quad [q_s^{(3)}] \cdot K_{3s} = q_s^{(1)}.$$

Значения аппроксимирующих коэффициентов могут быть вычислены и табулированы для каждого кода нагрузки. Для примера представлена зависимость  $b_i$  от параметра нагрузки  $S = M \vee P \vee q$  для  $K_H = 1$  (см. фиг. 16). Следует отметить, что улучшенное приближение можно получить для аппроксимирующей функции  $[q_s]$ , вычисленной как среднее арифметическое приближение снизу (2) и сверху (3);

$$b_{\text{CUM}} = M_p^{\text{CUM}} + m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2;$$

$$b_{\text{CUM}} = \begin{pmatrix} M_{10} \\ M_{1(1/2)} \\ M_{20} \\ M_{2(1/2)} \\ M_{30} \\ M_{3(1/2)} \\ M_{40} \\ M_{4(1/2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{0} \vee M \\ \sqrt{0} \vee S_{\text{CUM}}^{(\text{CT})} \\ \sqrt{0} \vee M \\ \sqrt{S_{\text{CUM}}^{(\text{PB})}} \vee 0 \\ \sqrt{0} \vee M \\ \sqrt{0} \vee S_{\text{CUM}}^{(\text{CT})} \\ \sqrt{0} \vee M \\ \sqrt{S_{\text{CUM}}^{(\text{PH})}} \vee 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\bar{\chi}_H \cdot L_{\text{CT}} \\ (\bar{\chi}_B - \bar{\chi}_H) L_{\text{CT}}/2 \\ \bar{\chi}_B \cdot L_{\text{CT}} \\ \bar{\chi}_B \cdot L_{\text{CT}} \\ \bar{\chi}_B \cdot L_{\text{CT}} \\ (\bar{\chi}_B - \bar{\chi}_H) L_{\text{CT}}/2 \\ -\bar{\chi}_H \cdot L_{\text{CT}} \\ -\bar{\chi}_H \cdot L_{\text{CT}} \end{pmatrix} \cdot \frac{3 \cdot S_{\text{CUM}} \cdot K_S \cdot \varphi_{1(g)}^{(K_H)}}{L_{\text{CT}}} - \begin{pmatrix} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{pmatrix} \cdot S_{\text{CUM}} \cdot K_S \cdot \varphi_{2(g)}^{(K_H)}$$

$$S_{\text{CUM}} \cdot S_{\text{CUM}}^{(M)} = M; \quad S_{\text{CUM}}^{(P)} = \frac{D L_D}{4}; \quad S_{\text{CUM}}^{(g)} = \frac{q L_D^2}{8};$$

$$K_S : K_S(M) = 1; \quad K_S(P) = 1/2; \quad K_S(g) = 2/3;$$

	$K_H=1$	$K_H=2$	$K_H=3$
$M_{10}$	$\psi_{1(g)}^{(1)} \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}}^{(\text{PB})}$	$\psi_{2(g)}^{(2)} \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}}^{(\text{PH})}$	$\frac{\psi_{3(g)}^{(3)} \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}} \cdot \text{ang}(P, g)}{[1 - \frac{\psi_{3(g)}^{(3)}}{K_S} \cdot S_{\text{CUM}} \cdot \text{ang}(M)]}$
$M_{1(1/2)}$	$\frac{\psi_{1(g)}^{(1)} - \psi_{1(g)}^{(1)}}{2} \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}}^{(\text{PB})}$	$\frac{\psi_{2(g)}^{(2)} - \psi_{1(g)}^{(2)}}{2} \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}}^{(\text{PH})}$	$[1 - \frac{\psi_{3(g)}^{(3)}}{2} + \frac{\psi_{4(g)}^{(4)}}{2} \cdot K_S] S_{\text{CUM}}^{(\text{CT})}$
$M_{20}$	$\psi_{2(g)}^{(1)} \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}}^{(\text{PB})}$ <small>(ang P, g)</small>	$\psi_{1(g)}^{(2)} \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}}^{(\text{PH})}$	$\psi_{4(g)}^{(3)} \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}}^{(\text{CT})}$
$M_{2(1/2)}$	$[1 - \psi_{2(g)}^{(1)}] \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}}^{(\text{PB})}$	$\psi_{1(g)}^{(2)} \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}}^{(\text{PH})}$	$\psi_{4(g)}^{(3)} \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}}^{(\text{CT})}$
$M_{30}$	$\psi_{2(g)}^{(1)} \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}}^{(\text{PB})}$	$\psi_{1(g)}^{(2)} \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}}^{(\text{PH})}$	$\frac{\psi_{4(g)}^{(3)} \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}} \cdot \text{ang}(P, g)}{[1 - \frac{\psi_{4(g)}^{(3)}}{K_S} \cdot S_{\text{CUM}} \cdot \text{ang}(M)]}$
$M_{3(1/2)}$	$\frac{\psi_{2(g)}^{(1)} - \psi_{1(g)}^{(1)}}{2} \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}}^{(\text{PB})}$	$\frac{\psi_{2(g)}^{(2)} - \psi_{1(g)}^{(2)}}{2} \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}}^{(\text{PH})}$	$[1 - \frac{\psi_{3(g)}^{(3)}}{2} + \frac{\psi_{4(g)}^{(4)}}{2} \cdot K_S] S_{\text{CUM}}^{(\text{CT})}$
$M_{40}$	$\psi_{1(g)}^{(1)} \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}}^{(\text{PB})}$	$\psi_{2(g)}^{(2)} \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}}^{(\text{PH})}$	$\psi_{3(g)}^{(3)} \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}}^{(\text{CT})}$
$M_{4(1/2)}$	$\psi_{1(g)}^{(1)} \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}}^{(\text{PB})}$	$[1 - \psi_{2(g)}^{(2)}] \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}}^{(\text{PH})}$	$\psi_{3(g)}^{(3)} \cdot K_S \cdot S_{\text{CUM}}^{(\text{CT})}$

$$\begin{array}{|l} \psi_{1(g)}^{(1)} = \frac{g_H}{[x]} \\ \psi_{2(g)}^{(1)} = \frac{3+2g_H}{[x]} \end{array} \quad \begin{array}{|l} \psi_{1(g)}^{(2)} = \frac{g_B}{[x]} \\ \psi_{2(g)}^{(2)} = \frac{3+2g_B}{[x]} \end{array} \quad \begin{array}{|l} \psi_{3(g)}^{(3)} = \frac{g_H(3+g_B)}{[x]} \\ \psi_{4(g)}^{(3)} = \frac{g_B(3+g_H)}{[x]} \end{array}$$

$$[x] = 2g_B + g_B \cdot g_H + 2g_H + 3;$$

Фиг. 9. Матрица усилий  $[b_{\text{CUM}}(g)]$  для симметричной компоненты нагрузки.

$$b_{\text{KOC}} = M_p^{\text{KOC}} + m_3 \cdot X_3$$

$$b_{\text{KOC}} = \begin{pmatrix} M_{10} \\ M_{1(1/2)} \\ M_{20} \\ M_{2(1/2)} \\ M_{30} \\ M_{3(1/2)} \\ M_{40} \\ M_{4(1/2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu 0 \nu - S_{\text{KOC}}^{(CT)} \\ \nu 0 \nu - S_{\text{KOC}}^{(CT)} \\ \nu 0 \nu - S_{\text{KOC}}^{(CT)} \\ 0 \\ \nu 0 \nu S_{\text{KOC}}^{(CT)} \\ \nu 0 \nu S_{\text{KOC}}^{(CT)} \\ \nu 0 \nu S_{\text{KOC}}^{(CT)} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_{p/2} \\ L_{p/2} \\ L_{p/2} \\ 0 \\ -L_{p/2} \\ -L_{p/2} \\ -L_{p/2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{2}{L_p} \cdot S_{\text{KOC}}^{(CT)} \cdot \varphi_{3(g)}^{(K_H)} = \frac{S_{\text{KOC}}^{(CT)} \varphi_{3(g)}^{(K_H)}}{S_{\text{KOC}}^{(CT)} (1 - \varphi_{3(g)}^{(K_H)})}$$

$$S_{\text{KOC}}: S_{\text{KOC}}^{(M)} = M; \quad S_{\text{KOC}}^{(P)} = Pl_{CT}; \quad S_{\text{KOC}}^{(Q)} = \frac{ql_{CT}^2}{2};$$

$$K_s: K_s^{(M)} = 1; \quad K_s^P = 1/2; \quad K_s^{(Q)} = 1/3;$$

	$K_H=4$	$K_H=5$	$K_H=6$	$K_H=7$
$M_{10}$	$1 - \varphi_{3(g)}^{(4)}$	$1 - \varphi_{3(g)}^{(5)}$	$1 - \varphi_{3(g)}^{(6)}$	$1 - \varphi_{3(g)}^{(7)}$
$M_{1(1/2)}$	$1 - \varphi_{3(g)}^{(4)}$	$1 - \varphi_{3(g)}^{(5)}$	$1 - \varphi_{3(g)}^{(6)}$	$K_{(1/2)} - \varphi_{3(g)}^{(7)}$
$M_{20}$	$\varphi_{3(g)}^{(4)}$	$1 - \varphi_{3(g)}^{(5)}$	$\varphi_{3(g)}^{(6)}$	$\varphi_{3(g)}^{(7)}$
$M_{2(1/2)}$	0	0	0	$\varphi_{3(g)}^{(7)}$
$M_{30}$	$1 - \varphi_{3(g)}^{(4)}$	$1 - \varphi_{3(g)}^{(5)}$	$1 - \varphi_{3(g)}^{(6)}$	$\varphi_{3(g)}^{(7)}$
$M_{3(1/2)}$	$1 - \varphi_{3(g)}^{(4)}$	$1 - \varphi_{3(g)}^{(5)}$	$1 - \varphi_{3(g)}^{(6)}$	$K_{(1/2)} - \varphi_{3(g)}^{(7)}$
$M_{40}$	$1 - \varphi_{3(g)}^{(4)}$	$\varphi_{3(g)}^{(5)}$	$\varphi_{3(g)}^{(6)}$	$1 - \varphi_{3(g)}^{(7)}$
$M_{4(1/2)}$	0	0	0	$\varphi_{3(g)}^{(7)}$

$$\varphi_{3(g)}^{(4)} = \frac{g_b(1+6g)}{\Theta} \quad \varphi_{3(g)}^{(5)} = \frac{g_b(1+6g)}{\Theta} \quad \varphi_{3(g)}^{(6)} = \frac{6g_b g_H}{\Theta} \quad \varphi_{3(g)}^{(7)} = \frac{g_b(1+6K_2 g_H)}{\Theta}$$

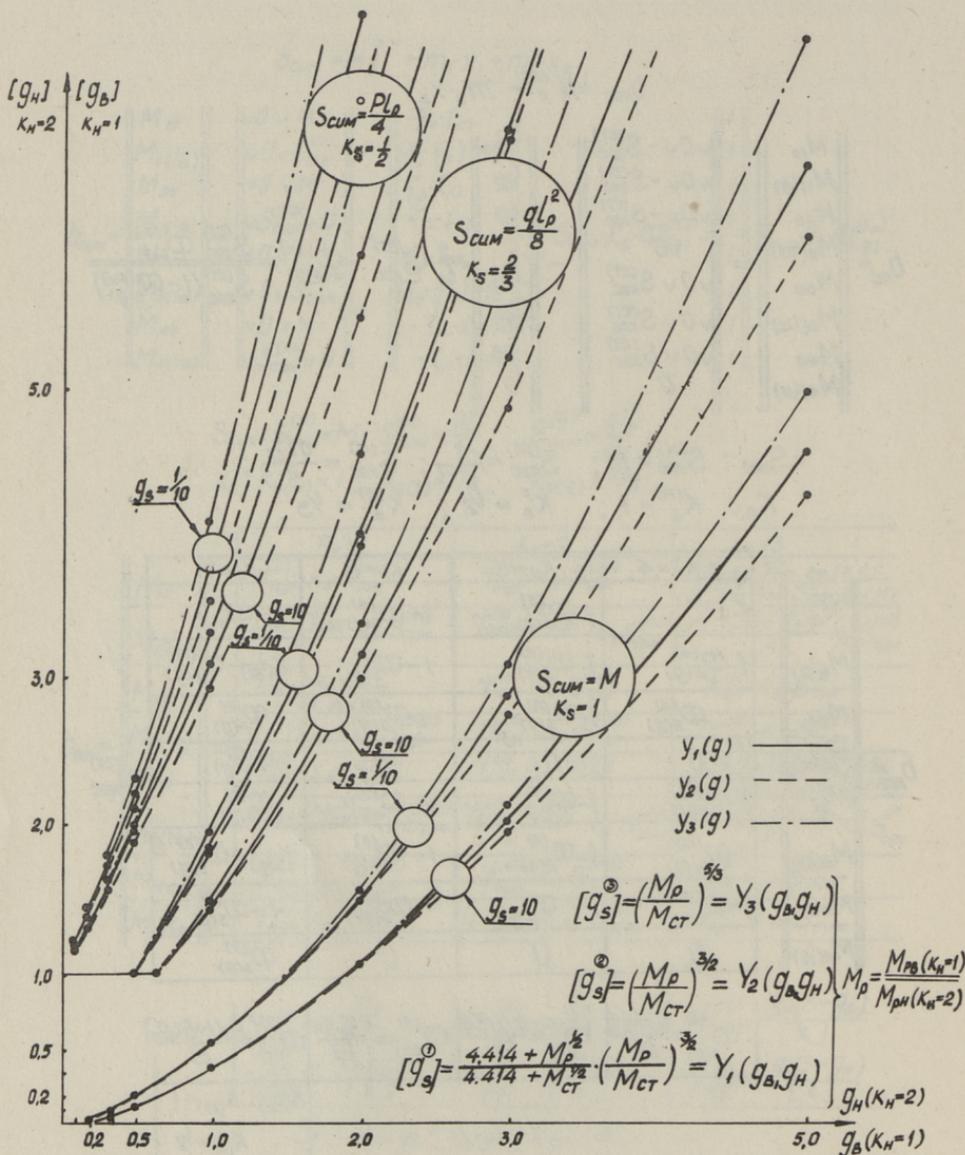
$$\Theta = g_b + 6g_b \cdot g_H + g_H;$$

$$K_{(1/2)}: K_{(M)} = 1$$

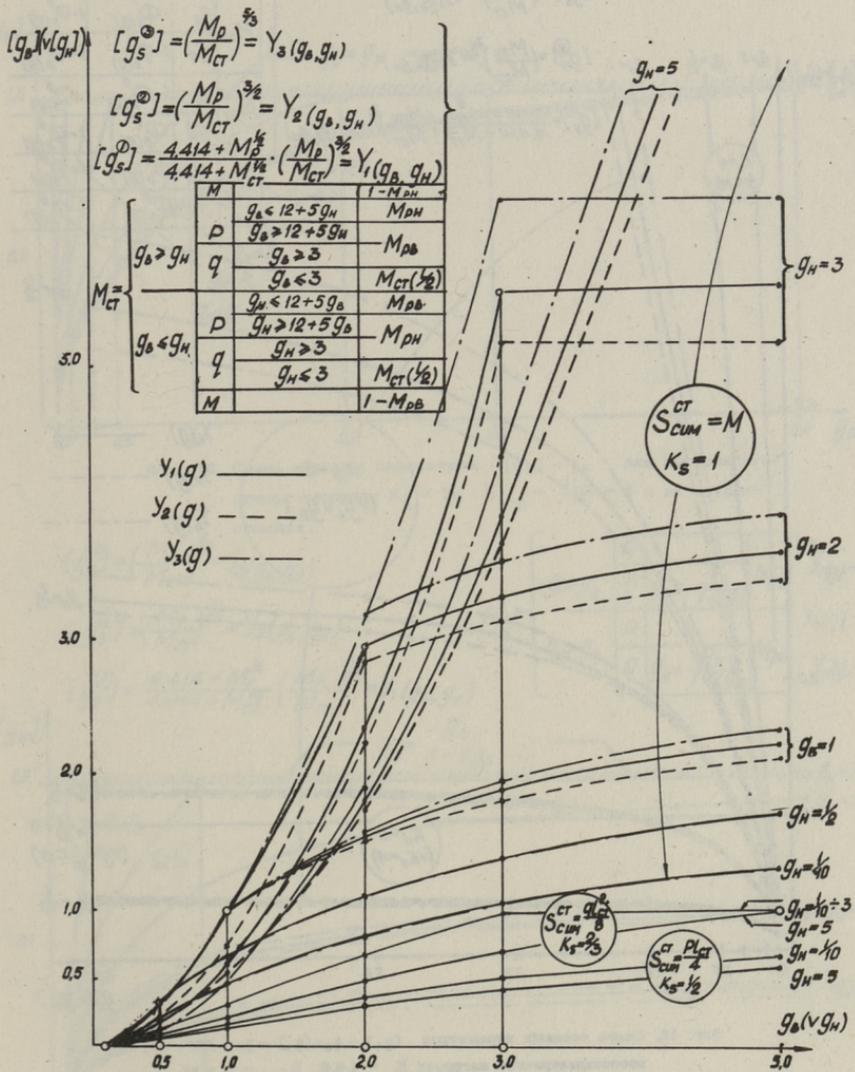
$$K_{(P)} = 1/2$$

$$K_{(Q)} = 1/4$$

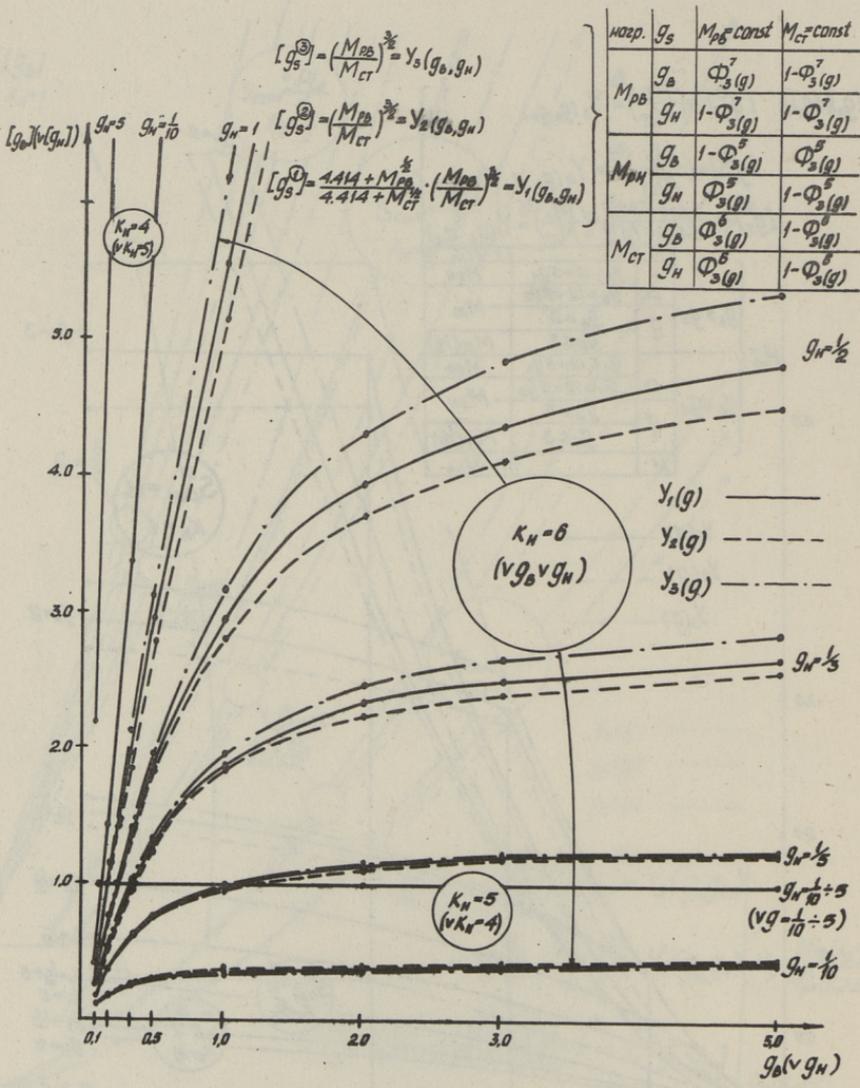
Фиг. 10. Матрица усилий  $[b_{\text{KOC}}^{(Q)}]$  для коссимметричной компоненты нагрузки.



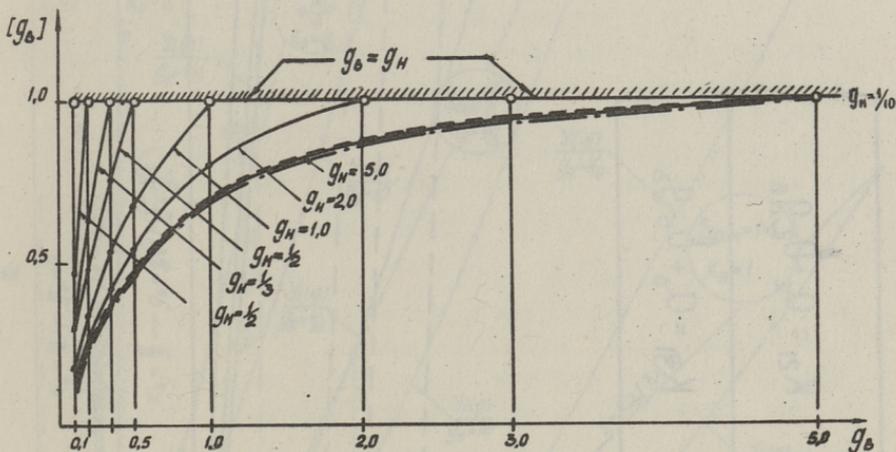
Фиг. 11. Связь весовых параметров  $[g_B] - g_s \sqrt{[g_H]} - g_H$  для симметричной нагрузки  $K_H = \sqrt{1} \sqrt{2}$ ;  $S_{сим} = 1$  и их аппроксимация.



Фиг. 12. Связь весовых параметров  $[g_b] - g_b \cdot v(g_n) - g_n$  для симметричной нагрузки  $K_N = 3$ ,  $S_{сим} = 1$  и их аппроксимация.



Фиг. 13. Связь весовых параметров  $[g_b] - g_b \sqrt{[g_H]} - g_H$  для кососимметричной нагрузки  $K_N = 4, 5, 6$ ,  $S_{\text{кос}} = 1$  и их аппроксимация.



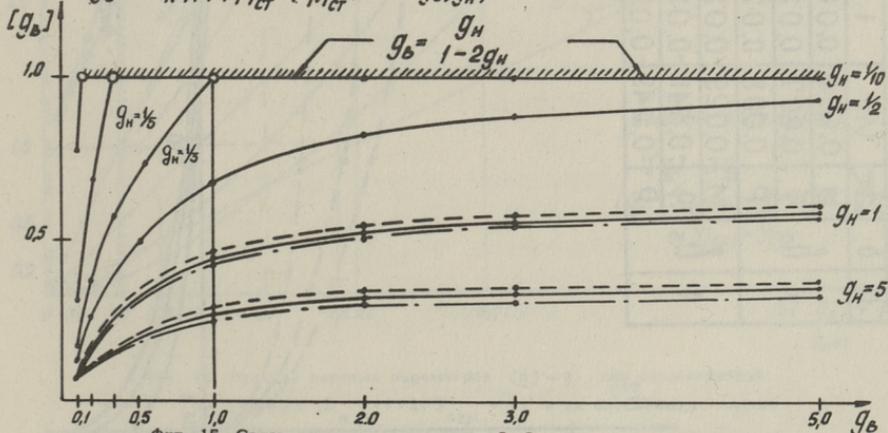
Фиг. 14. Связь весовых параметров  $[g_b] - g_b$  для кососимметричной нагрузки  $K_n = 7$ :  $S_{\text{кос}} = \frac{Pl_{\text{ст}}}{4} = 1$  и их аппроксимация.

$$[g_b^{(3)}] = \left(\frac{M_p}{M_{\text{ст}}}\right)^{\frac{2}{3}} = Y_3(g_b, g_n)$$

$$[g_b^{(2)}] = \left(\frac{M_p}{M_{\text{ст}}}\right)^{\frac{3}{2}} = Y_2(g_b, g_n)$$

$$[g_b^{(1)}] = \frac{4.414 + M_p^{\frac{1}{2}}}{4.414 + M_{\text{ст}}^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{M_p}{M_{\text{ст}}}\right)^{\frac{3}{2}} = Y_1(g_b, g_n)$$

$\rho$		$M_{\text{ст}}$	$Y_1(g) \text{ ---}$
$g_n > g_b$	$q$	$g_n \geq \frac{g_b}{1+2g_b}$	$Y_2(g) \text{ - - -}$
$g_n < g_b$	$q$	$g_n \leq \frac{g_b}{1+2g_b}$	$Y_3(g) \text{ - - -}$



Фиг. 15. Связь весовых параметров  $[g_b] - g_b$  для кососимметричной нагрузки  $K_n = 7$ :  $S_{\text{сим}} = \frac{ql_{\text{ст}}^2}{8} = 1$  и их аппроксимация.

$Q$	$b$	$\frac{S_{сим}}{инт}$	$1/10$	1	10	50
1	$b_2$	M	0,006	0,015	0,038	0,064
		q	0,007	0,021	0,055	0,096
		P	0,008	0,024	0,066	0,118
1	$b_3$	M	-0,029	-0,021	-0,001	0,020
		q	-0,041	-0,030	-0,004	0,028
		P	-0,049	-0,037	-0,007	0,030

$$K_{21} = a_2 + b_2 g_B$$

$$K_{31} = a_3 + b_3 g_B$$

$b_3$   
 $b_2$

0,014

20

0,010

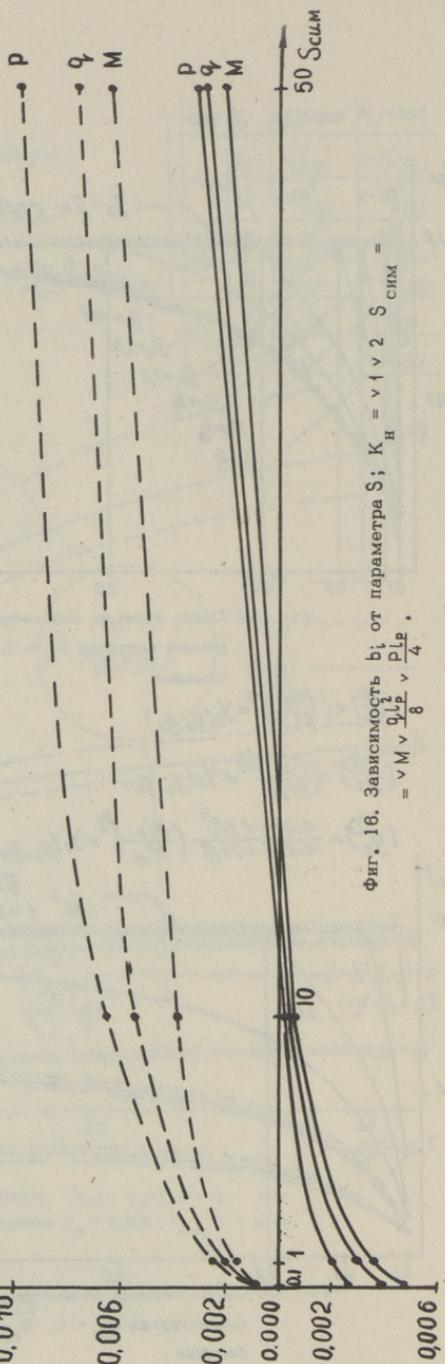
0,006

0,002

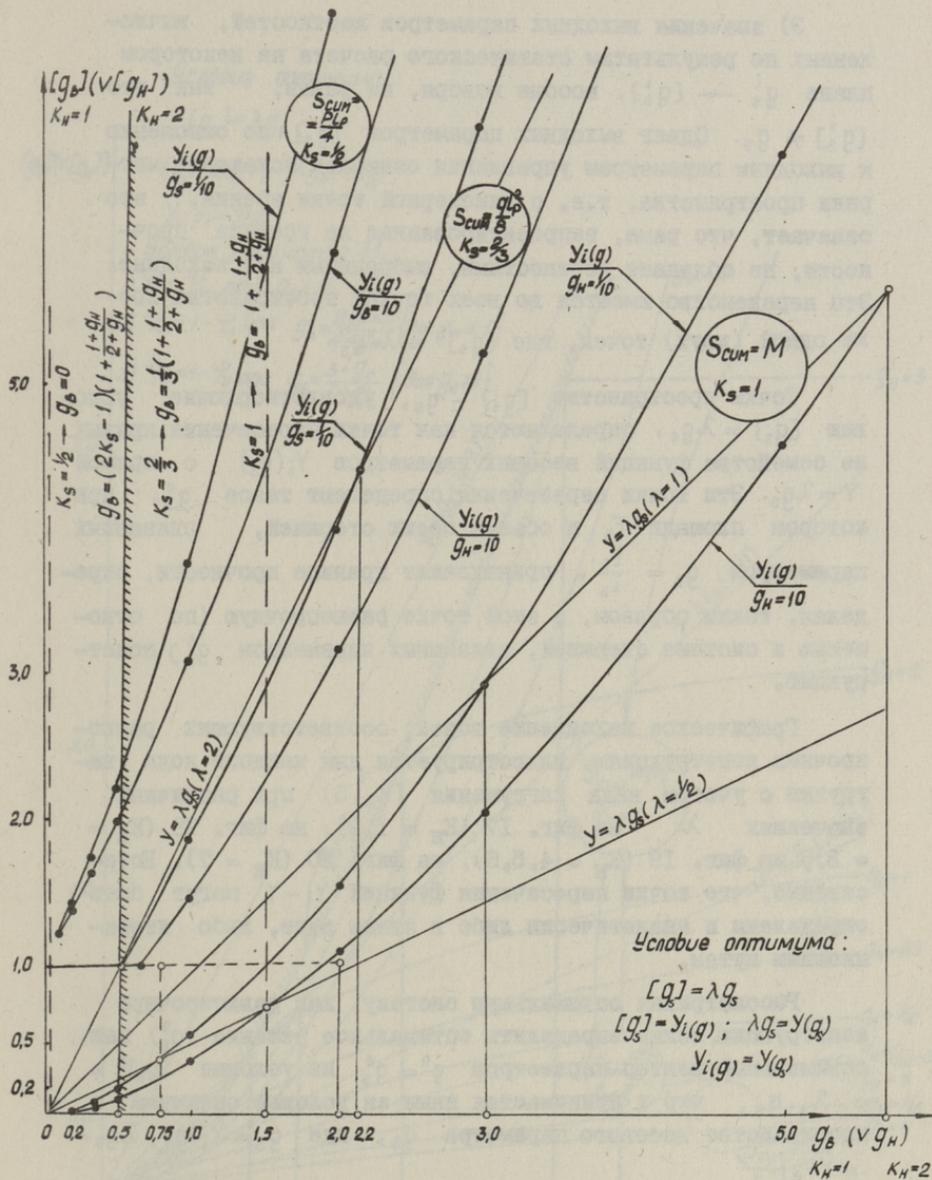
0,000

0,002

0,006



Фиг. 16. Зависимость  $b_i$  от параметра  $S$ ;  $K_H = \sqrt{1 + 2 S_{сим}}$   
 $= \sqrt{M} \sqrt{\frac{g_{1P}}{8}} \sqrt{\frac{P_{1P}}{4}}$



Фиг. 17. Функция весовых параметров  $[g]$  -  $g$  для симметричной нагрузки ( $K_H = \sqrt{1 + 2S_{\text{сим}}} = 1$ ) и их оптимальные значения  $g_{(B)\text{опт}} = g_B(g_H; \lambda; K_S)$ .

3) значения выходных параметров жесткостей, вычисленных по результатам статического расчета на некотором плане  $g_s^i$  —  $[g_s^i]$ , вообще говоря, не равны, так что  $[g_s^i] \neq g_s$ . Сдвиг выходных параметров  $[g_s]$  по отношению к выходным параметрам управления означает искажение метрики пространства, т.е. с инженерной точки зрения, это означает, что рама, запроектированная на границе прочности, не обладает жесткостями, выбранными как исходные. Это неравенство имеет место во всех точках пространства кроме одной (двух) точек, где  $[g_s]^0 = \lambda \cdot g_s^0$ .

Точки пространства  $[g_s] - g_s$ , удовлетворяющие условию  $[g_s] = \lambda g_s$ , определяются как точки пересечения кривых из семейства функций весовых параметров  $Y_i(g_s)$  с прямой  $Y = \lambda g_s$ . Эти точки пересечения определяют такое  $g_s^0$ , при котором площади  $F_s$  и объемы обеих стержней, связанных параметром  $g_s = \frac{i_s}{i_E}$ , принадлежат границе прочности, определяя, таким образом, в этой точке равнопрочную (по отношению к системе стержней, связанных параметром  $g_s^0$ ) конструкцию.

Графическое нахождение точек, соответствующих равнопрочным конструкциям, иллюстрируется для каждого кода нагрузки с учетом вида загрузки ( $K_s; S$ ) при различных значениях  $\lambda$  на фиг. 17 ( $K_H = 1, 2$ ), на фиг. 18 ( $K_H = 3$ ), на фиг. 19 ( $K_H = 4, 5, 6$ ), на фиг. 20 ( $K_H = 7$ ). Естественно, что точки пересечения функций  $Y_i - Y$  могут быть определены и аналитически либо в явном виде, либо итерационным путем.

Рассматривая оптимальную систему как равнопрочную конструкцию, можно определить оптимальное решение ( $g_s^0$ ) как оптимальный вектор параметров  $g^0 = g_s^0$  из условия  $[g_s]^0 = \lambda_s \cdot g_s$ , что и принимается нами за условие оптимума в пространстве весового параметра  $g_s$ , где  $g_s = Y_i(g)$ ,  $\lambda g_s = Y(g)$ .

Оптимальные значения весовых параметров ( $g_s$ ) для отдельных кодов нагрузки и видов загрузки ( $K_s; S$ ) при различных значениях  $\lambda$  определяются на фиг. 17-20, при этом могут быть установлены:

Условие оптимальности:

$$[g_s] = \lambda g_s;$$

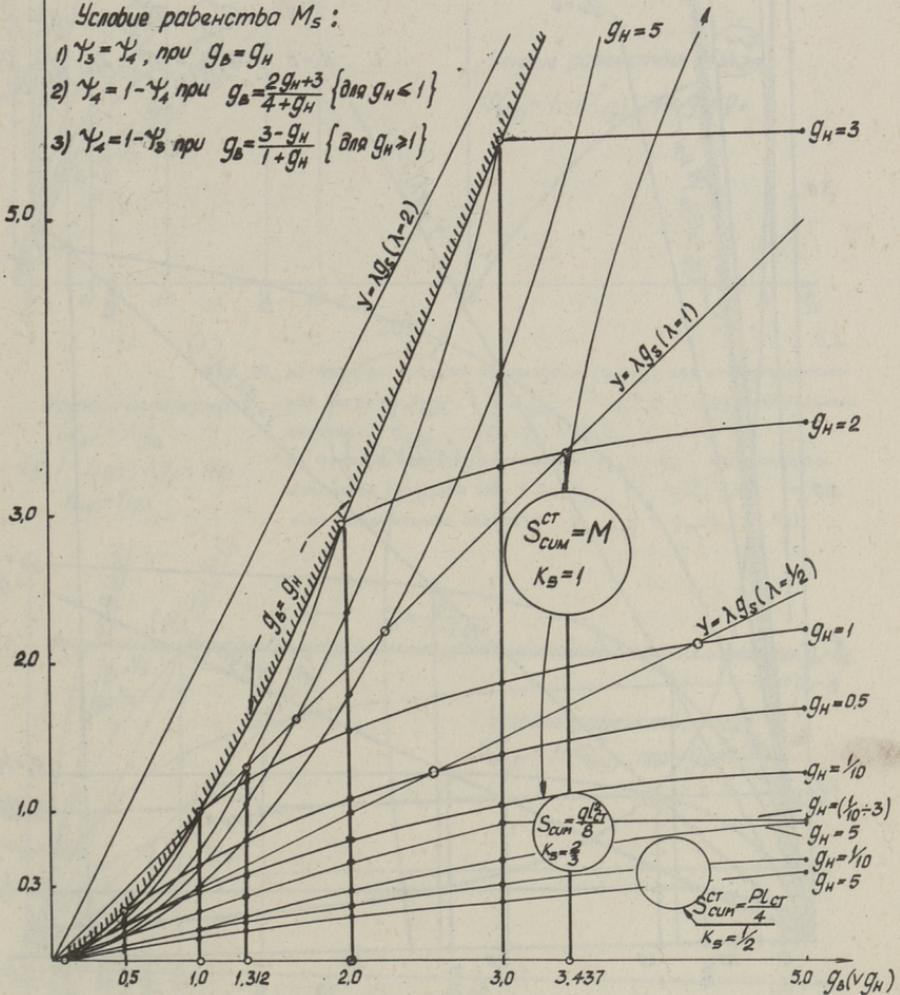
$(g_b)(v(g_H))$

$$[g_s] = \psi_1(g); \quad \lambda g_s = \psi_2(g);$$

$$\psi_1(g) = \psi_2(g)$$

Условие равенства  $M_s$ :

- 1)  $\psi_2 = \psi_1$ , при  $g_b = g_H$
- 2)  $\psi_2 = 1 - \psi_1$  при  $g_b = \frac{2g_H + 3}{4 + g_H}$  { для  $g_H \leq 1$  }
- 3)  $\psi_2 = 1 - \psi_1$  при  $g_b = \frac{3 - g_H}{1 + g_H}$  { для  $g_H \geq 1$  }



Фиг. 18. Функция весовых параметров  $[q]$  –  $g$  для симметричной нагрузки ( $K_H = 3$ ;  $S_{SUM} = 1$ ) и их оптимальные значения  $g_{(b) \text{ опт}} = g_b(g_H; \lambda; K_S)$ .

Условие оптимальности:

$$[g_s] = \lambda g_s; \quad S = P.B.(v.P.H)$$

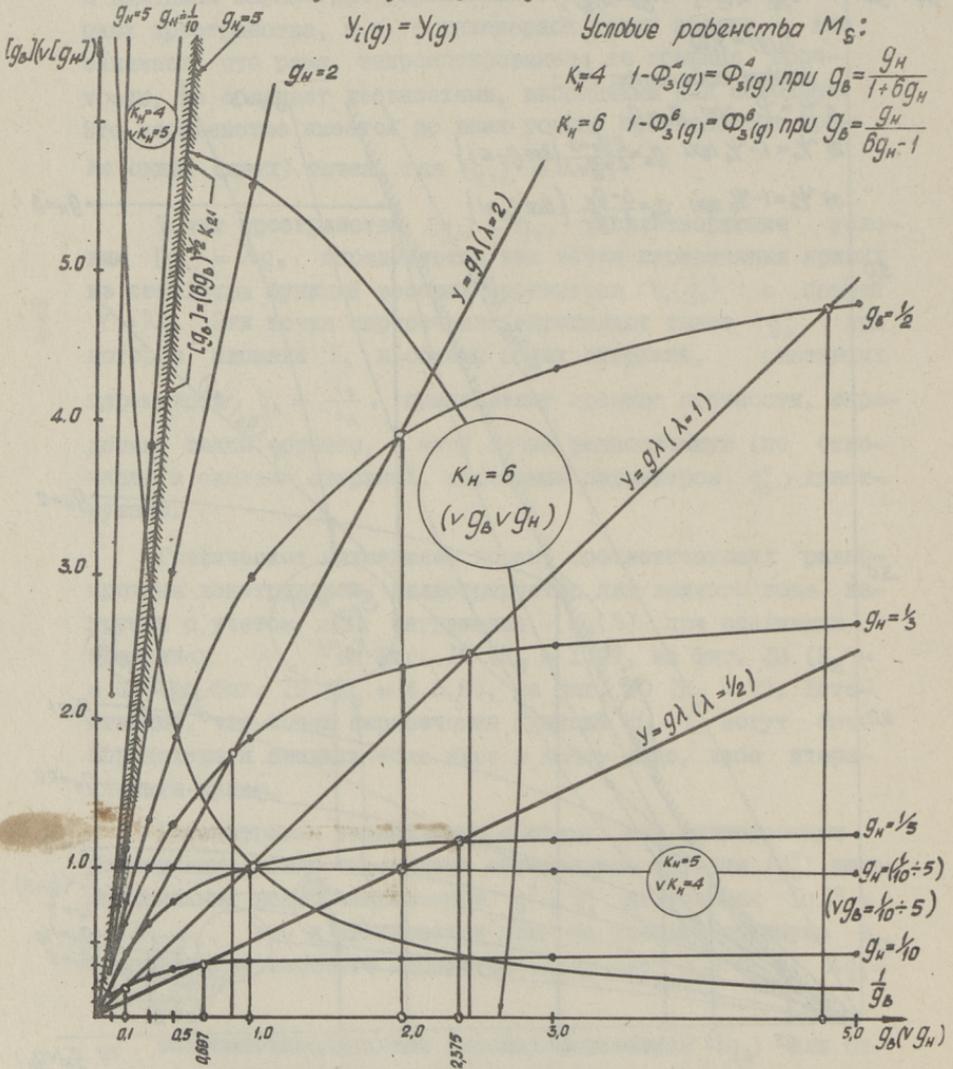
$$[g] = Y_i(g); \quad \lambda g_s = Y(g)$$

$$Y_i(g) = Y(g)$$

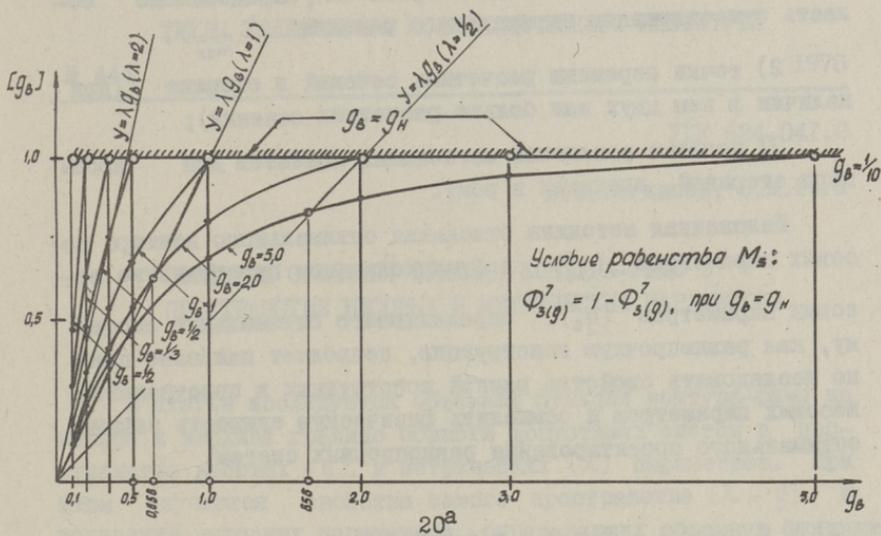
Условие равенства  $M_S$ :

$$K_H = 4 \quad 1 - \Phi_s^4(g) = \Phi_s^4(g) \quad \text{при } g_b = \frac{g_H}{1 + \delta g_H}$$

$$K_H = 6 \quad 1 - \Phi_s^6(g) = \Phi_s^6(g) \quad \text{при } g_b = \frac{g_H}{\delta g_H - 1}$$



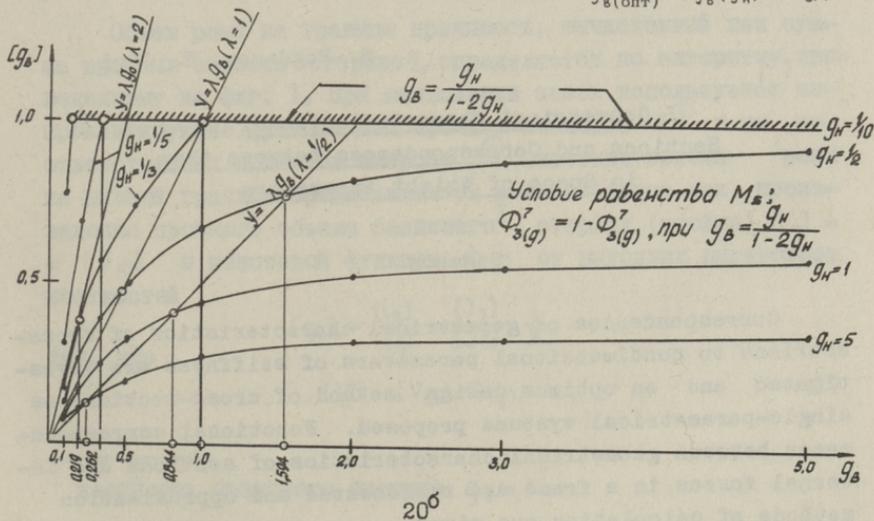
Фиг. 19. Функция весовых параметров  $[q] - g$  для кососимметричной нагрузки ( $K_H = 4, 5, 6$ ),  $S_{\text{кос}} = 1$  и их оптимальные значения  $g_b(\text{опт}) = g_b(q_H, \lambda, K_S)$ .



Фиг. 20. а) Функция весовых параметров  $[g_b]$ — $g_b$  для кососимметричной нагрузки  $K_H = 7$ ,  $S_{\text{кос}} = Pl_{\text{ст}}^2/4 = 1$  и их оптимальные значения  $g_{b(\text{опт})} = g_b(g_H, \lambda, K_S)$ .

Условие оптимума:  
 $[g_b] = \lambda g_b$   
 $[g_b] = Y_1(g); \lambda g_b = Y_1(g)$   
 $Y_1(g) = Y_1(g)$

б) Функция весовых параметров  $[g_b]$ — $g_b$  для кососимметричной нагрузки ( $K_H = 7$ ,  $S_{\text{кос}} = ql_{\text{ст}}^2/8 = 1$  и их оптимальные значения  $g_{b(\text{опт})} = g_b(g_H, \lambda, K_S)$ .



- 1) предельные значения метрики ( $\lambda$ ), определяющие область существования оптимального решения ( $\lambda_{\min}^{\max}$ );
- 2) точки перемены расчетных сечений в стержне (при наличии в нем двух или больше расчетных сечений);
- 3) условие равенства изгибающих моментов для любой пары стержней, входящих в раму.

Изложенная методика отыскания оптимального вектора весовых параметров ( $q_s^0$ ) в функциональном пространстве весовых параметров ( $q_s$ ), определяющего оптимальную систему, как равнопрочную конструкцию, позволяет наиболее полно исследовать свойства рамной конструкции в пространстве весовых параметров и осмыслить физическую сущность задачи оптимального проектирования равнопрочных систем.

#### Л и т е р а т у р а

И. Иегги Э.М., Нурмухамедова Р.М.  
 К расчету и оптимальному проектированию контура.—"Тр.Таллинск. политехн. ин-та". Строительная механика, № 360, Таллин, 1974.

S. Bogdanov, E. Jõgi

#### Geometrical Characteristics of Sections and Correspondences between them in Space of Weight Parameters

#### Summary

Correspondences of geometrical characteristics of cross-sections to nondimensional parameters of stiffness are investigated and an optimum design method of cross-sections as single-parametrical systems proposed. Functional correspondences between geometrical characteristics of sections and internal forces in a frame are represented and approximation methods of calculation are given.

All results are graphically illustrated.

СВОЙСТВА ОБЪЕМНОЙ ФУНКЦИИ КОНТУРА-РАМЫ В  
 ПРОСТРАНСТВЕ ВЕСОВЫХ И МЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

В статье исследуется объемная функция контура-рамы на нижней и верхней границе области допустимых систем в пространстве весовых ( $g$ ) и метрических ( $\lambda$ ) параметров. При этом изучаются свойства самого пространства ( $\lambda - g$ ) и поведение выходных параметров, определяющих объемную функцию.

Каждой точке в пространстве весовых и метрических параметров ( $g^i, \lambda^i$ ) можно поставить в соответствие значение объема контура-рамы на нижней (из условия прочности) и на верхней (из условия натяжения) границе области допустимых рамных конструкций.

Объем рамы на границе прочности, вычисленный как сумма прочных объемов стержней, определяется по алгоритму, приведенному на фиг. 1. При вычислении здесь используются аппроксимирующие функции для прочных площадей  $F^{\text{I}}$  и им соответствующих моментов инерции  $J^{\text{I}}$ . Значение объема рамы на нижней границе представляется в общей форме как произведение прочного объема базисного<sup>I</sup> стержня (стойки)  $[V_0] = [V_{\text{CT}}]$  и некоторой функции  $\Phi(g)$  от выходных параметров жесткостей

$$[g_s] = \frac{[i_s]}{[i_s]} = \frac{[J_s]}{[J_s]} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

так, что

$$[V] = [V_{\text{CT}}] \cdot \Phi(g). \quad (1)$$

<sup>I</sup> жесткость базисного стержня  $g_s = 1$ .

$$[V] = \sum_{s=1}^4 [V_s] = \sum_{s=1}^4 [\bar{F}_s] \cdot l_s = [V_{on}] \cdot \left(1 + \sum_{s=1}^4 \lambda_s \cdot \frac{[\bar{F}_s]}{[F_{on}]}\right)$$

Для симметричной или кососимметричной нагрузки:

$$[V] = \sum_{s=1}^4 [V_s] = \sum_{s=1}^4 [\bar{F}_s] \cdot l_s = 2 \cdot [\bar{F}_{cr}] \cdot l_{cr} + [\bar{F}_{pb}] \cdot l_p + [\bar{F}_d] \cdot l_p =$$

$$[\bar{F}_{cr}] \cdot l_{cr} \cdot \left[2 + \lambda \left(\frac{[\bar{F}_{pb}]}{[\bar{F}_{cr}]} + \frac{[\bar{F}_{pd}]}{[\bar{F}_{cr}]}\right)\right];$$

$$\left. \begin{aligned} [\bar{F}_s] : [\bar{F}_s]^{(2)} &\approx A_2 M_s^{1/2} \\ [\bar{F}_s]^{(3)} &\approx A_3 M_s^{2/3} \end{aligned} \right\} \frac{[\bar{F}_s]}{[\bar{F}_d]} = \left(\frac{M_s}{M_d}\right)^{k_i}; \quad k_{(2)} = 1/2, \quad k_{(3)} = 2/3$$

$$\left. \begin{aligned} [\bar{J}_s] : [\bar{J}_s]^{(2)} &\approx B_2 M_s^{3/2} \\ [\bar{J}_s]^{(3)} &\approx B_3 M_s^{5/3} \end{aligned} \right\} [q_s] \approx \frac{[\bar{J}_s]}{[\bar{J}_d]} \cdot \frac{1}{\lambda} \approx \left(\frac{M_s}{M_d}\right)^{m_i} \cdot \frac{1}{\lambda}; \quad m_{(2)} = 3/2, \quad m_{(3)} = 5/3$$

$$\frac{[\bar{F}_s]}{[\bar{F}_d]} \approx ([q_s] \cdot \lambda)^{k_i/m_i} = [q_s]^{n_i} \cdot \lambda^{n_i}; \quad n_{(2)} = 1/3; \quad n_{(3)} = 2/5;$$

$$[V]_i \approx [V_{cr}]_i \cdot \left\{2 + \lambda^{n_i+1} ([q_b]^{n_i} + [q_n]^{n_i})\right\}; \quad n_i = 1/3; 2/5;$$

Общая форма:

$$[V] = [V_s] \cdot \Phi([q]) = [V_{cr}] \cdot \Phi([q]);$$

где  $\Phi([q]) = 2 + [a_b] + [a_n]$ ;  $a_b = \lambda^{n_i+1} \cdot [q_b]^{n_i}$ ;  $a_n = \lambda^{n_i+1} \cdot [q_n]^{n_i}$

среднее значение:

$$[\bar{V}] = \frac{[V]_2 + [V]_3}{2} =$$

$$[V_{cr}]_i \cdot \left\{2 + \frac{1}{2} \cdot [\lambda^{1/3} ([q_{pb}]^{1/3} + [q_{pn}]^{1/3}) + \lambda^{2/5} \cdot ([q_{pb}]^{2/5} + [q_n]^{2/5})\right\};$$

Фиг. 1. Объем контура на нижней границе.

Наилучшее приближение, аппроксимирующее точное значение объема рамы, определится как среднее арифметическое снизу ( $i = 2$ ) и сверху ( $i = 3$ ).

Параметры для вычисления объема контура-рамы на нижней границе табулированы для различных кодов нагрузок и приводятся в таблице 1 ( $K_H = 1, 2$ ), в таблице 2 ( $K_H = 3$ ) и в таблице 3 ( $K_H = 7$ ).

$K_H$	$S_{sum}$	$K_S$	$\frac{[N]_{\sigma}}{M_{\sigma}} = A_1 \cdot M_{\sigma}^{\frac{1}{2}} \cdot b_{\sigma}$ $M_{\sigma} = S_{sum} \cdot K_S \cdot \psi_i^{(k)}$	$\psi_i^{(k)}$	$\frac{[g_{PH}]^n}{M_{\sigma}} = \frac{(M_{PH}) K_i}{M_{\sigma}}$	при условии	$\frac{[g_{PH}]^n}{M_{PH}} = \frac{(M_{PH}) K_i}{M_{PH}}$	при условии	[*]
1	M	1	$M \cdot 1 \cdot \psi_2^{(1)}$	$\frac{3+2g_H}{3}$ [*]	$\frac{g_0(2+g_H)}{3+2g_H}$	-	$\frac{g_H}{3+2g}$	-	$2g_0 + g_0 \cdot g_H + 2g_H + 3$
	$\frac{P_{CP}}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{P_{CP}}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \psi_2^{(1)}$	$\frac{2g_0(2+g_H)+2g_H+3}{3+2g_H}$	$\frac{g_H}{3+2g_H}$	-	$\frac{g_H}{3+2g_H}$	-	
	$\frac{q_{CP}^2}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{q_{CP}^2}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \psi_2^{(1)}$	$\frac{3g_0(2+g_H)+2g_H+3}{3+2g_H}$ $\frac{1}{1}$	$\frac{g_0 > \frac{3+2g_H}{3(2+g_H)}}{g_0 \leq \frac{3+2g_H}{3(2+g_H)}}$	$\frac{g_0 > \frac{3+2g_H}{3(2+g_H)}}{g_0 \leq \frac{3+2g_H}{3(2+g_H)}}$	$\frac{g_H}{3+2g_H}$	-	
2	M	1	$M \cdot 1 \cdot \psi_2^{(2)}$	$\frac{3+2g_0}{3+2g_0}$ [*]	$\frac{g_0}{3+2g_0}$	-	$\frac{g_H(2+g_0)}{3+2g_0}$	-	$2g_0 + g_0 \cdot g_H + 2g_H + 3$
	$\frac{P_{CP}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{P_{CP}}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \psi_2^{(2)}$	$\frac{g_0}{3+2g_0}$	$\frac{g_0}{3+2g_0}$	-	$\frac{2g_H(2+g_0)+2g_0+3}{3+2g_0}$	-	
	$\frac{q_{CP}^2}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{q_{CP}^2}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \psi_2^{(2)}$	$\frac{g_0}{3+2g_0}$	$\frac{3g_H(2+g_0)+2g_0+3}{3+2g_0}$	$\frac{g_0 > \frac{3+2g_0}{3(2+g_0)}}{g_0 \leq \frac{3+2g_0}{3(2+g_0)}}$	$\frac{3g_H(2+g_0)+2g_0+3}{3+2g_0}$	$\frac{g_H > \frac{3+2g_0}{3(2+g_0)}}{g_H \leq \frac{3+2g_0}{3(2+g_0)}}$	

Табл. 1. Параметры объема контура на нижней границе ( $K_H = 1, 2$ ).

$K_H$	$S_{sum}$	$K_S$	$[Ver] = A_i \cdot M_{er}^{K_i} \cdot Cor$ $M_{er} = S_{sum} \cdot K_S \cdot \psi_i^{(K_H)}$	$\psi_i^{(K_H)}$	$\frac{[g_B]^{K_i}}{M_{er}} = \frac{(M_{er}^{K_i})^{K_i}}{(M_{er})^{K_i}}$	$\frac{M_{pr}}{M_{er}} = \frac{(M_{pr}^{K_i})^{K_i}}{(M_{er})^{K_i}}$	при условии	[*]
3	M	1	$M \cdot [1 - \psi_4^{(g)}]$	$\frac{g_0(3+g_H)}{[*]}$	$\frac{g_B(3+g_H)}{2g_H+3-g_B}$	$\frac{g_H(3+g_B)}{2g_H+3-g_B}$	$g_B \leq g_H$	$2g_B + g_B \cdot g_H + 2g_H + 3$
			$M \cdot [1 - \psi_3^{(g)}]$	$\frac{g_H(3+g_0)}{[*]}$	$\frac{g_B(3+g_H)}{2g_B+3-g_H}$	$\frac{g_H(3+g_0)}{2g_B+3-g_H}$	$g_B \geq g_H$	
	$\frac{pl_{er}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{pl_{er}}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \psi_3^{(g)}$	$\frac{g_H(3+g_0)}{[*]}$	$\frac{g_0(3+g_H)}{g_H(3+g_0)}$	1	$g_H \geq 12+5g_0$	$g_H \leq 12+5g_0$ $g_B \leq 12+5g_H$
			$\frac{pl_{er}}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \psi_4^{(g)}$	$\frac{g_0(3+g_H)}{[*]}$	$\frac{2g_B(3+g_H)}{5(g_0+g_H)+2g_0 \cdot g_H+12}$	$\frac{2g_H(3+g_0)}{5(g_0+g_H)+2g_0 \cdot g_H+12}$	$g_H \geq 12+5g_H$	
$\frac{pl_{er}^2}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{pl_{er}}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \psi_3^{(g)}$	$\frac{pl_{er}}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \psi_3^{(g)}$	$\frac{g_H(3+g_0)}{[*]}$	$\frac{g_0(3+g_H)}{g_H(3+g_0)}$	1	$g_H \geq g_0$ $g_H \geq \frac{g+3g_0}{3+g_0}$	$g_H \leq \frac{g+3g_0}{3+g_0}$ $g_B \leq \frac{g+3g_H}{3+g_H}$
			$\frac{pl_{er}}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \psi_4^{(g)}$	$\frac{g_0(3+g_H)}{[*]}$	$\frac{2g_B(3+g_H)}{3(g_0+g_H)+2g_0 \cdot g_H+9}$	$\frac{2g_H(3+g_0)}{3(g_0+g_H)+2g_0 \cdot g_H+9}$	$g_0 \geq g_H$ $g_0 \geq \frac{g+3g_H}{3+g_H}$	
			$\frac{pl_{er}}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \psi_4^{(g)}$	$\frac{g_0(3+g_H)}{[*]}$	1	$g_0(3+g_0)$	$g_H(3+g_0)$	

Табл. 2. Параметры объема контура на нижней границе ( $K_H = 3$ ).

$K_H$	$S_{\text{коч}}$	$K_S$	$[N_{\text{ст}}] = A_i \cdot M_{\text{ст}}^{K_i} \cdot L_{\text{ст}}$ $M_{\text{ст}} = S_{\text{коч}} \cdot K_S \cdot Q_3^{(K)}$	$\gamma_i^{(K_H)}$	$\frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{ст}}} = \left( \frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{ст}}} \right)^{K_i}$	$\frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{ст}}} = \left( \frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{ст}}} \right)^{K_i}$	при условии	$H$
4	M	1	$M \cdot \Phi_3^{(4)}$	$\frac{g_H}{H}$	$\frac{g_B(1+6g_H)}{g_H}$	$\frac{g_B(1+6g_H)}{g_H}$	—	
5	M	1	$M \cdot \Phi_3^{(5)}$	$\frac{g_B}{H}$	$\frac{g_H(1+6g_B)}{g_B}$	$\frac{g_H(1+6g_B)}{g_B}$	—	
6	M	1	$M \cdot \Phi_3^{(6)}$	$\frac{6g_B g_H}{H}$	$\frac{6g_B g_H}{g_B + g_H}$	$\frac{6g_B g_H}{g_B + g_H}$	—	
7	$\frac{qL_{\text{ст}}^2}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{qL_{\text{ст}}^2}{2} \cdot [1 - \Phi_3^{(7)}]$ $\frac{qL_{\text{ст}}^2}{2} \cdot \Phi_3^{(7)}$	$\frac{g_B(1+2g_H)}{H}$	$\frac{g_B(1+2g_H)}{g_H(1+4g_B)}$	$1$	$\frac{g_B}{g_H} \geq \frac{g_B}{1+2g_B}$	
		$\frac{1}{2}$	$pL_{\text{ст}}(1 + \Phi_3^{(7)})$ $pL_{\text{ст}} \cdot \Phi_3^{(7)}$	$\frac{g_B(1+3g_H)}{H}$	$\frac{g_B(1+3g_H)}{g_H(1+3g_B)}$	$1$	$\frac{g_B}{g_H} \leq \frac{g_B}{1+2g_B}$	
								$g_B + 6g_B g_H + g_H$

Табл. 3. Параметры объема контура на нижней границе  
( $K_H = 4, 5, 6, 7$ ).

Как было показано в [1], выходные параметры  $[g_s]$  в общем случае не совпадают с исходными входными весовыми параметрами системы  $g_s$  в силу эффекта действия связи [2], как эффекта искажения метрики пространства безразмерных весовых параметров.

Поправка на сдвиг между входными и выходными параметрами системы производится путем увеличения соответствующих жесткостей поперечных сечений, так чтобы  $[g_s] \equiv g_s$ , при этом поправка на сдвиг приводит всегда к увеличению (натяжению объема рамы) по отношению к ее значению на границе прочности, так что  $V_{(g)} > [V_0]$ . Поэтому функция объема  $V_{(g)}$  лежит выше объема  $[V]$  и образует так называемую верхнюю границу объема, как функцию исходных весовых параметров  $(g)$ . Схема натяжения объема (и площади) из условия:

$$[g_s] \geq g_s$$

для однопараметрической системы приводится на фиг. 2, а. Схема вычисления объема для двухпараметрической системы приводится на фиг. 2, б, описывая также и схему вычисления объемной функции на верхней границе для контура-рамы с осью упругой симметрии.

Схема вычисления натянутого объема на верхней границе для "m" параметрической системы (в т.ч. и для трехпараметрической системы) приведена в [3].

Вычисление объема на верхней границе приводит всегда к необходимости нахождения элемента, работающего на границе прочности (опорного элемента), при этом каждый из стержней в раме может выступать в роли опорного элемента, с ему соответствующей вычислительной ветвью для объемной функции рамы. Для контура-рамы, обладающей осью упругой симметрии, в роли опорного элемента могут выступать: стойка (ст), ригель верхний (р.в.), ригель нижний (р.н.) как вычислительные ветви 1, 2, 3, соответственно.

Алгоритм вычисления объемной функции контура-рамы на верхней границе приводится на фиг. 3.

Значение объема рамы на верхней границе представляется в общей форме как произведение натянутого объема базисного стержня (ст)  $V_{\delta(g)} = V_{ст(g)}$  и некоторой функции  $\Phi_{(g)}$  входных параметров жесткостей  $g_s$ , так, что

$$[q_s] \geq q_s; \quad \text{где } [q_s] \approx \left(\frac{M_s}{M_\sigma}\right)^{m_i} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$1) \left(\frac{M_s}{M_\sigma}\right)^{m_i} \cdot \frac{1}{\lambda} \leq q_s \rightarrow M_s(q) = M_\sigma \cdot (\lambda \cdot q_s)^{1/m_i}$$

$$F_s(q) = A_i M_s^{k_i}(q) = A_i M_s^{k_i} \cdot (\lambda \cdot q_s)^{k_i/m_i} = n_i = [F_s] \cdot (\lambda \cdot q_s)^{-n_i}$$

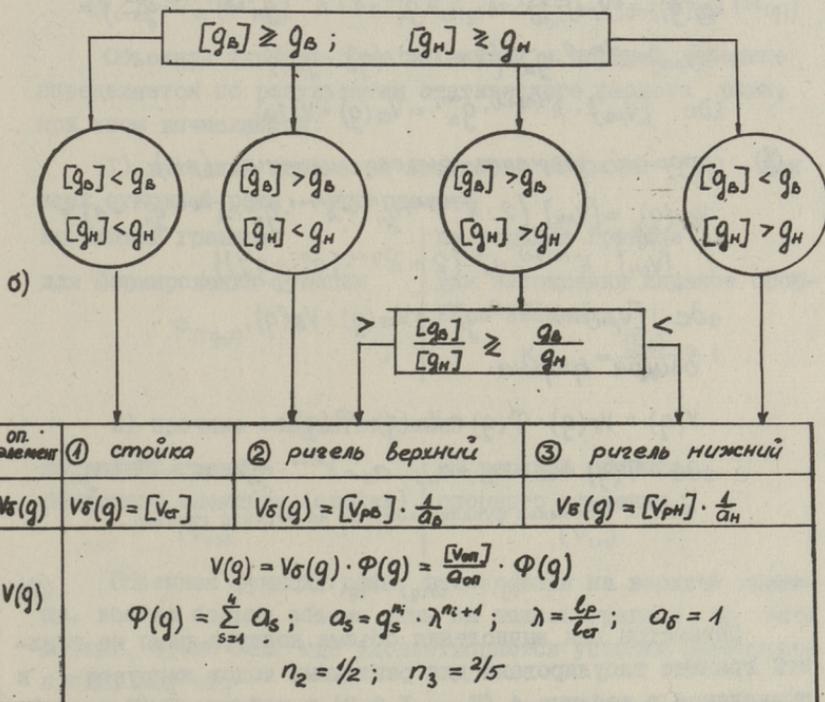
a)

$$V_\sigma(q) = [V_\sigma] \cdot \lambda \cdot (\lambda q_s)^{n_i}$$

$$2) \left(\frac{M_s}{M_\sigma}\right)^{m_i} \cdot \frac{1}{\lambda} \geq q_s \rightarrow M_s(q) = M_s \cdot (\lambda q_s)^{-1/m_i}$$

$$F_s(q) = A_i M_s^{k_i}(q) = A_i M_s^{k_i} \cdot (\lambda q_s)^{-k_i/m_i} = -n_i = [F_s] \cdot (\lambda q_s)^{-n_i}$$

$$V_\sigma(q) = [V_\sigma] \cdot \lambda^{-1} \cdot (\lambda q_s)^{-n_i}$$



Фиг. 2. а) Натяжение площади и объема для однопараметрической системы.

б) Вычисление объемной функции контура (для двухпараметрической системы).

$$V(q) = \sum_1^4 V_5(q) = \sum_1^4 F_5(q) \cdot \ell_5$$

для симметричной или кососимметричной нагрузки

$$V(q) = 2 \cdot F_{ct}(q) \cdot \ell_{ct} + F_{pb} \cdot \ell_{ct} + F_{pn}(q) \cdot \ell_p =$$

$$F_{ct}(q) \cdot \ell_{ct} \left[ 2 + \lambda \left( \frac{F_{pb}(q)}{F_{ct}(q)} + \frac{F_{pn}(q)}{F_{ct}(q)} \right) \right];$$

- ① опорный элемент стойка (ст.)

$$V_{\text{ст}}(q)_i \approx [V_{ct}] \cdot \{ 2 + \lambda^{n_i+1} (g_B^{n_i} + g_H^{n_i}) \}; \quad \begin{matrix} n = 1/3; 2/5 \\ i = 2; 3 \end{matrix}$$

$$V_5(q) = [V_5] \longrightarrow V_{ct}(q) = [V_{ct}].$$

- ② опорный элемент ригель верхний (рв).

$$V_{\text{рв}}(q)_i = [V_{рв}] \cdot \{ 2 \cdot \lambda^{-(n_i+1)} \cdot g_B^{-n_i} + 1 + \lambda^{n_i+1} \cdot g_H^{n_i} \cdot \lambda^{-(n_i+1)} \cdot g_B^{-n_i} \} =$$

$$[V_{рв}] \cdot \lambda^{-(n_i+1)} \cdot g_B^{-n_i} \{ 2 + \lambda^{n_i+1} \cdot (g_B^{n_i} + g_H^{n_i}) \};$$

$$\text{где } [V_{рв}] \cdot \lambda^{-(n_i+1)} \cdot g_B^{-n_i} = V_{ct}(q) = V_5(q).$$

- ③ опорный элемент ригель нижний (рн)

$$V_{\text{рн}}(q)_i = [V_{рн}] \cdot \{ 2 \cdot \lambda^{(n_i+1)} \cdot g_H^{-n_i} + \lambda^{n_i+1} \cdot g_B^{n_i} \cdot \lambda^{-n_i+1} \cdot g_H^{-n_i} + 1 \} =$$

$$[V_{рн}] \cdot \lambda^{(n_i+1)} \cdot g_H^{-n_i} \{ 2 + \lambda^{n_i+1} \cdot (g_B^{n_i} + g_H^{n_i}) \},$$

$$\text{где } [V_{рн}] \cdot \lambda^{(n_i+1)} \cdot g_H^{-n_i} = V_{ct}(q) = V_5(q).$$

общая форма:

$$V(q) = V_5(q) \cdot \Phi(q) = V_{ct}(q) \cdot \Phi(q),$$

$$\text{где } \Phi(q) = 2 + a_B + a_H; \quad a_B = \lambda^{n_i+1} \cdot g_B^{n_i}; \quad a_H = \lambda^{-n_i+1} \cdot g_H^{n_i}$$

Фиг. 3. Объемная функция контура на верхней границе.

$$V_{(q)} = V_{ct(q)} \cdot \Phi_{(q)}. \quad (2)$$

Параметры для вычисления объема контура-рамы на верхней границе табулированы для различных кодов нагрузок и приводятся в таблице 4 ( $K_H = 1, 2, 3$ ) и таблице 5 ( $K_H = 4, 5, 6, 7$ ).

Построенная общая форма вычисления объемной функции рамы на нижней (1) и верхней (2) границе области допусти-

мых систем имеет общую смысловую структуру, с общим видом функции параметров ( $\Phi$ ) по аргументу или входных  $g_s$  (2) или выходных  $[g_s]$  (I) параметров жесткостей:

на нижней границе:

$$[V] = [V_{CT}] \cdot \Phi_{([g_s])}$$

$$\Phi_{([g_s])} = \sum_1^4 [a_s]$$

$$a_s = [g_s]^{n_i} \cdot \lambda^{n_i+1}$$

$$[g_s] = [g_{CT}] = 1$$

$$\lambda_s = \frac{l_s}{l_s} = \frac{l_s}{l_{CT}}; \lambda_s = \lambda_{CT} = 1$$

$$[a_s] = [a_{CT}] = 1$$

$$[V_{CT}] = V_{CT} \{M(g)\}$$

на верхней границе:

$$V(g) = V_{CT(g)} \cdot \Phi(g)$$

где

$$\Phi(g) = \sum_1^4 a_s$$

$$a_s = g_s^{n_i} \cdot \lambda^{n_i+1}$$

$$g_s = g_{CT} = 1$$

$$a_s = a_{CT} = 1$$

$$V_{CT(g)} = \frac{[V_{on}]}{a_{on}}; [V_{on}] = V_{on} \{M(g)\}$$

Объемная функция рамы на нижней и верхней границе определяется по результатам статического расчета рамы, при этом вычисляются:

I) выходные параметры жесткости стержней  $[g_s]$  для всех стержней рамы — при расчете

на нижней границе

для формирования функции

$$\Phi_{([g_s])}$$

на верхней границе

для нахождения индекса опорного элемента

$$K_{p(g_s)} = \frac{[g_s]}{g_s} \geq 1$$

2) прочные объемы стержней

на нижней границе

базисного элемента (стойки)

$$[V_{CT}]$$

на верхней границе

опорного элемента

$$[V_{on}]$$

Объемная функция рамы, вычисленная на верхней границе, всегда больше объема рамы на нижней границе во всех точках, кроме тех, где удовлетворяются условия равнопрочности, так что

I) соответствующие значения функций входных и выходных весовых параметров равны между собой:

$$\Phi_{[g_s]} = \Phi(g_s), \text{ где } [g_s] = g_s \text{ для всех } (s);$$

2) значение объема базисного элемента (стойки) на границе

$K_H$	$K_B$	$\frac{[F_{PH}]}{M \text{ пр}} = A_i (M_{PH})^{K_i}$	$\frac{[F_{PH}]}{M \text{ пр}} = A_i (M_{PH})^{K_i}$	$\psi_i (K_H)$	при условии	$\frac{[F_{PH}]}{M \text{ пр}} = A_i (M_{PH})^{K_i}$	$\psi_i (K_H)$	при условии	$[*]$
1	M	M.1. $[1 - \psi_2 (g^{(1)})]$	M.1. $[1 - \psi_2 (g^{(1)})]$	$\frac{3+2g_H}{[*]}$	—	M.1. $\psi_1 (g)$	$\frac{g_H}{[*]}$	—	$2g_B + g_B \cdot g_H + 2g_H + 3$
	$\frac{P_{CP}}{4}$	$\frac{P_{CP}}{4} \cdot \frac{1}{2} [2 - \psi_2 (g^{(1)})]$	$\frac{P_{CP}}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \psi_1 (g)$		—				
	$\frac{g_{CP}^2}{8}$	$\frac{g_{CP}^2}{8} \cdot \frac{2}{3} [ \frac{3}{2} - \psi_2 (g^{(1)}) ]$	$\frac{g_{CP}^2}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \psi_1 (g)$		$g_B \geq \frac{5+2g_H}{3(2+g_H)}$ $g_B \leq \frac{3+2g_H}{3(2+g_H)}$				
2	M	M.1. $\psi_1 (g^{(2)})$	M.1. $[1 - \psi_2 (g^{(2)})]$	$\frac{g_B}{[*]}$	—	M.1. $[1 - \psi_2 (g^{(2)})]$	$\frac{3+2g_B}{[*]}$	—	$g_H \geq \frac{3+2g_B}{3(2+g_B)}$ $g_H \leq \frac{3+2g_B}{3(2+g_B)}$
	$\frac{P_{CP}}{4}$	$\frac{P_{CP}}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \psi_1 (g^{(2)})$	$\frac{P_{CP}}{4} \cdot \frac{1}{2} [2 - \psi_2 (g^{(2)})]$		—				
	$\frac{g_{CP}^2}{8}$	$\frac{g_{CP}^2}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \psi_1 (g^{(2)})$	$\frac{g_{CP}^2}{8} \cdot \frac{2}{3} [ \frac{3}{2} - \psi_2 (g^{(2)}) ]$		—				
3	M	M.1. $\psi_4 (g^{(3)})$	M.1. $\psi_3 (g)$	$\frac{g_B(3+g_H)}{[*]}$	—	M.1. $\psi_3 (g)$	$\frac{g_H(3+g_H)}{[*]}$	—	—
	$\frac{P_{CP}}{4}$	$\frac{P_{CP}}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \psi_4 (g^{(3)})$	$\frac{P_{CP}}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \psi_3 (g)$		—				
	$\frac{g_{CP}^2}{8}$	$\frac{g_{CP}^2}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \psi_4 (g^{(3)})$	$\frac{g_{CP}^2}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \psi_3 (g)$		—				

Табл. 4. Параметры объема контура на верхней границе ( $K_H = 1, 2, 3$ ).

$K_{H1}$	$S_{\text{конт}}$	$K_S$	$[F_{\text{пр}}] = A_1 \cdot (M_{\text{пр}})^{K_S}$	при условии	$\gamma_i^{(H)}$	$[F_{\text{пр}}] = A_1 \cdot (M_{\text{пр}})^{K_S}$	при условии	$\gamma_i^{(H)}$	при условии	$\gamma_B + 6\gamma_B \gamma_H + \gamma_H$
			$M_{\text{пр}}$			$M_{\text{пр}}$				
4	M	1	$M \cdot [1 - \Phi_{3(g)}^{(4)}]$	—	$\frac{\gamma_H}{H}$	$M \cdot [1 - \Phi_{3(g)}^{(4)}]$	—	$\frac{\gamma_H}{H}$	—	
5	M	1	$M \cdot [1 - \Phi_{3(g)}^{(5)}]$	—	$\frac{\gamma_B}{H}$	$M \cdot [1 - \Phi_{3(g)}^{(5)}]$	—	$\frac{\gamma_B}{H}$	—	
6	M	1	$M \cdot \Phi_{3(g)}^{(6)}$	—	$\frac{6\gamma_B \cdot \gamma_H}{H}$	$M \cdot \Phi_{3(g)}^{(6)}$	—	$\frac{6\gamma_B \cdot \gamma_H}{H}$	—	
7	$\frac{\gamma_{\text{ст}}^2}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\gamma_{\text{ст}}^2}{2} \cdot \Phi_{3(g)}^{(7)}$	—	$\frac{\gamma_B(1+2\gamma_H)}{H}$	$\frac{\gamma_{\text{ст}}^2}{2} \cdot [1 - \Phi_{3(g)}^{(7)}]$	—	$\frac{\gamma_B(1+2\gamma_H)}{H}$	—	
		$\frac{1}{2}$	$\rho_{\text{ст}} \cdot \Phi_{3(g)}^{(7)}$	—	$\frac{\gamma_B(1+3\gamma_H)}{H}$	$\rho_{\text{ст}} \cdot [1 - \Phi_{3(g)}^{(7)}]$	—	$\frac{\gamma_B(1+3\gamma_H)}{H}$	—	

Табл. 5. Параметры объема контура на верхней границе ( $K_H = 4, 5, 6, 7$ ).

прочности равно объему натянутого значения его, т.е. базисный элемент (стойка) выступает как опорный элемент  $[V_{\delta}] = [V_{ст}] \equiv V_{\delta(g)} = V_{ст(g)}$ .

Таким образом, объемная функция рамы на нижней или верхней границе описывается через значение объема базисного элемента на нижней или верхней границе, соответственно, и значение функций весовых параметров ( $\Phi$ ) на нижней (для выходных параметров) или верхней (для входных параметров) границе области.

При этом устанавливается, что объемная функция рамы определяется как функция весовых ( $g_s$ ) и метрических ( $\lambda_s$ ) параметров системы, а следовательно, свойства объемной функции рамы описываются в пространстве весовых и метрических параметров.

Отметим, что общая форма вычисления объемной функции на нижней и на верхней границе остается неизменной и для "m" параметрической системы (см. [I]), с проведением суммирования членов функции по всем стержням системы  $s = 1, 2, \dots, m$  и с учетом свойств базисного элемента.

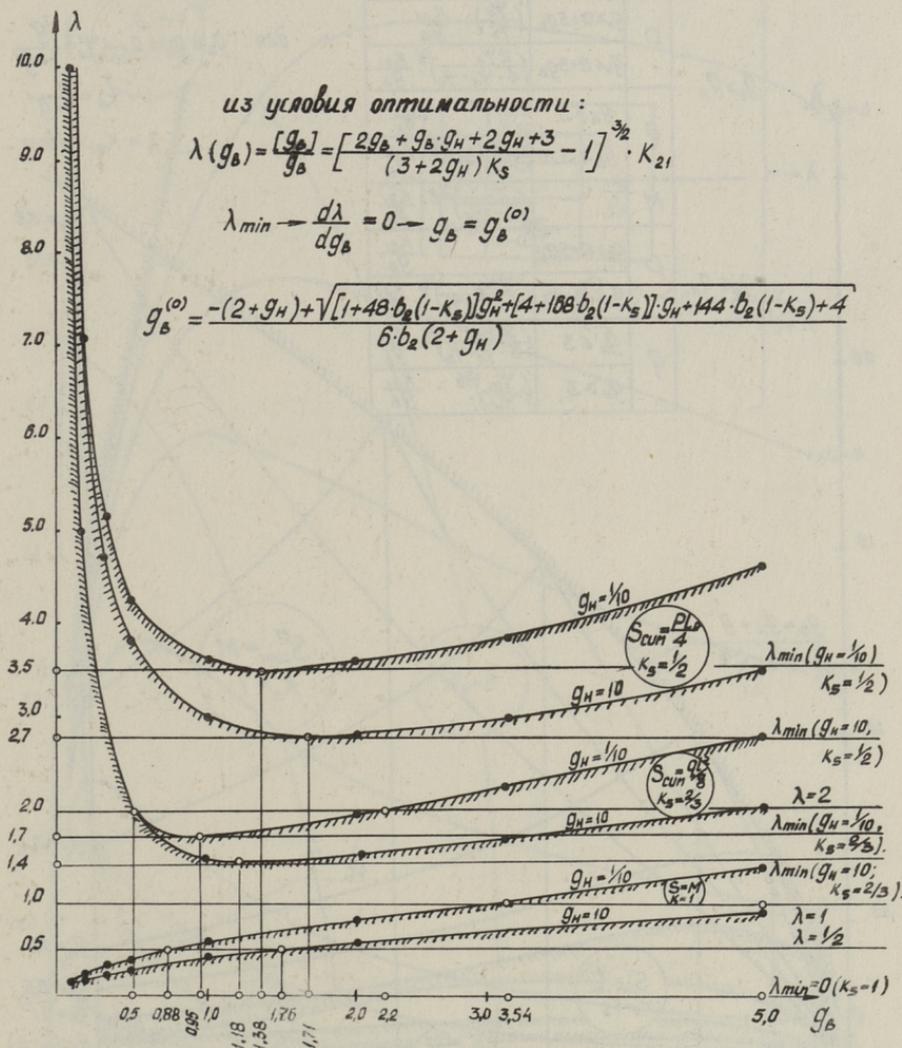
Графические модели, описывающие пространство  $\lambda - g$  и построенные для каждого кода нагрузки ( $K_H$ ) с учетом формы загрузки ( $S, K_S$ ), приводятся на фиг. 4 ( $K_H = 1 \vee 2$ ), фиг. 5 ( $K_H = 3$ ), фиг. 6 ( $K_H = 4, 5, 6$ ), фиг. 7 ( $K_H = 7$ ).

Анализ построенных моделей показывает, что для каждого кода нагрузки можно установить значение метрики  $\lambda_{\min}^{\max}$ , определяющей область существования оптимального параметра

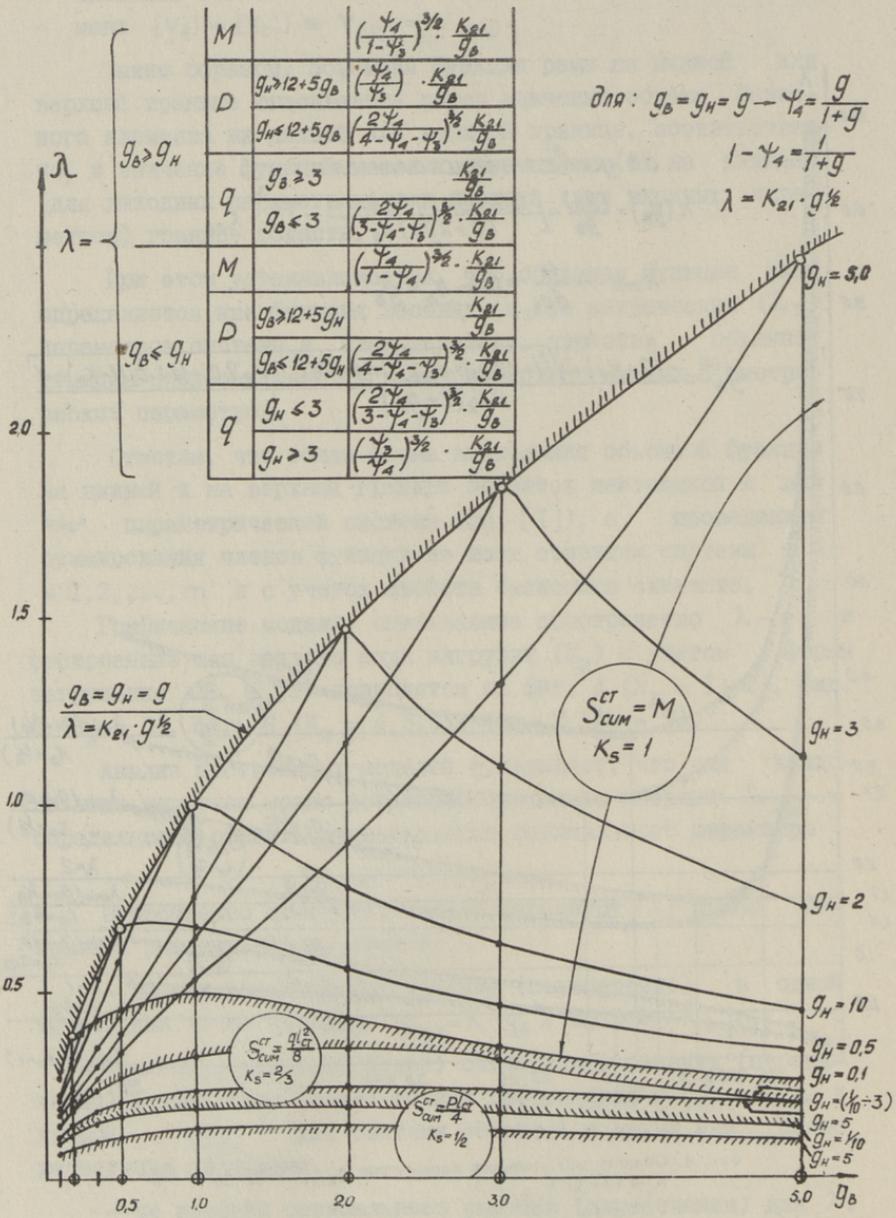
$$g_{s(опт)} = g_s(g, \lambda, K_S).$$

Существенно отметить, что по параметру ( $\lambda$ ) можно построить различные виды систем:

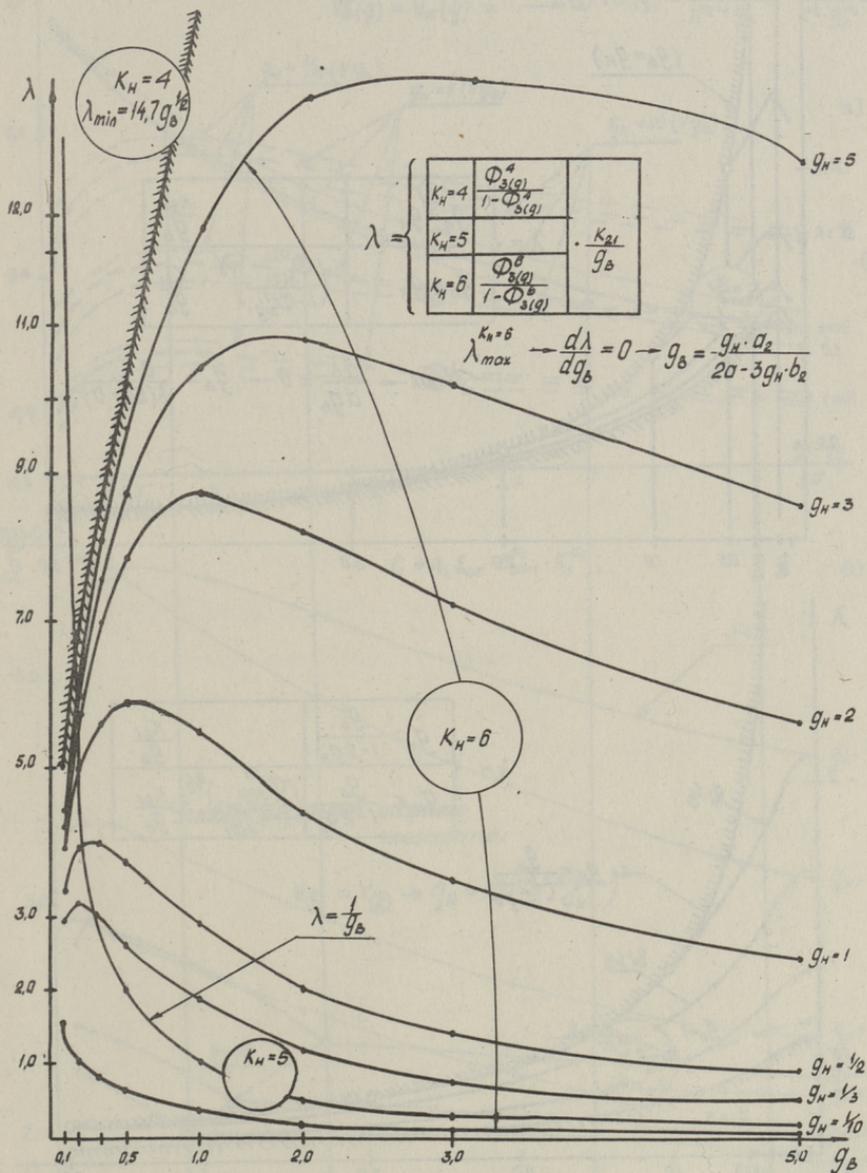
- имеющие оптимальное решение (пересечение) в одной точке, как точке касания  $y_{(g)} = \lambda \cdot g_s$  к кривой  $y_{i(g)}$ ,
- имеющие два (или более) оптимальных решения (пересечения) в двух (или более) точках пересечения  $y_{(s)} = \lambda \cdot g_s$  и кривой  $y_{i(g)}$  для системы стержней с двумя или более расчетными сечениями,
- не имеющих оптимального решения (пересечения) для  $\lambda$ , не лежащих в области существования оптимальных весовых параметров (вырожденная система).



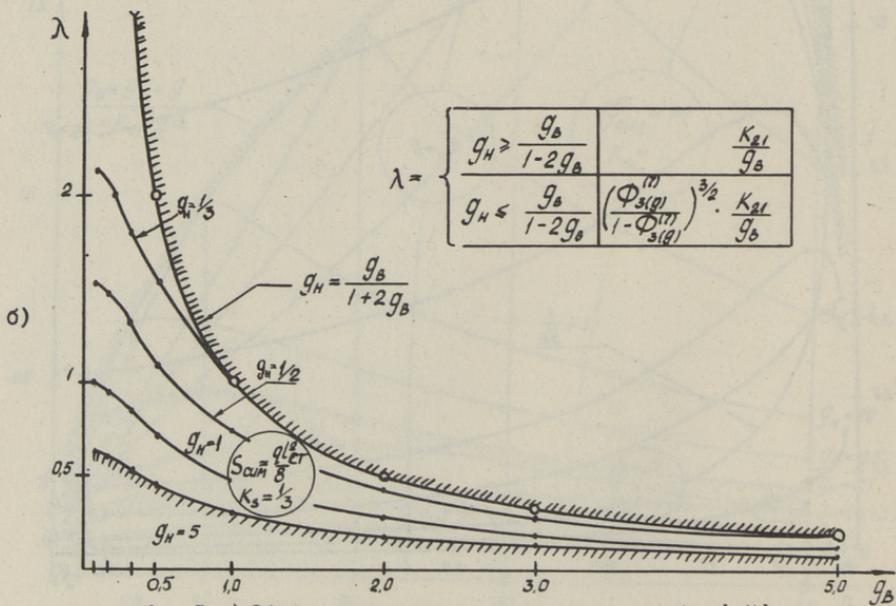
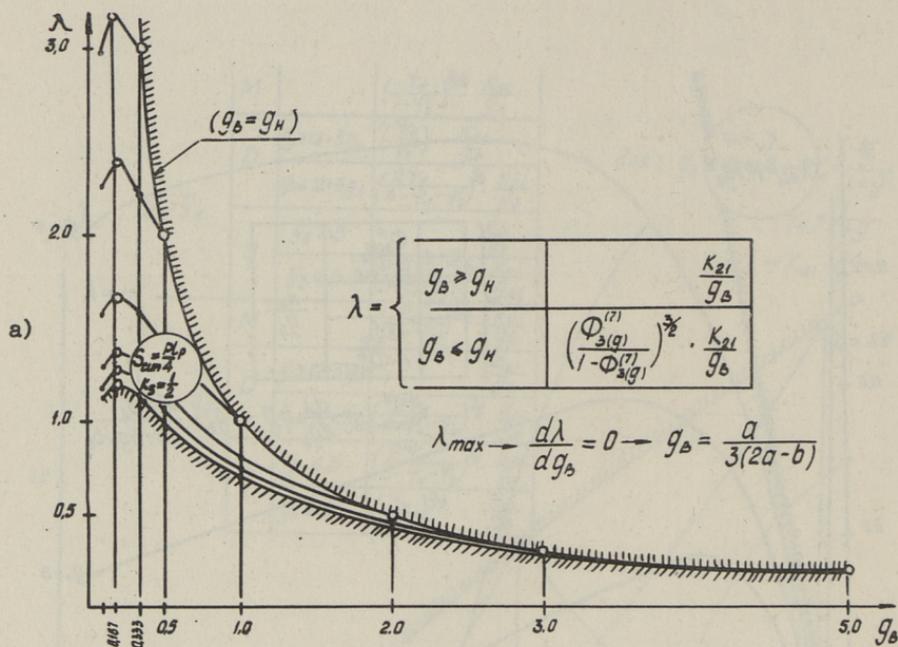
Фиг. 4. Область оптимальных параметров  $g_b(\text{опт}) = g_b(g_H, \lambda, K_S)$   
 $K_H = \sqrt{1 + 2}$ ;  $S_{\text{сим}} = 1$ .



Фиг. 5. Область оптимальных параметров  $g_{B(опт)} = g_B(g_H, \lambda, K_5)$   
 $K_H = 3; S_{сум} = 1.$



Фиг. 6. Область оптимальных параметров  $g_{B(\text{opt})} = g_B(g_H, \lambda, K_S)$   
 $K_H = 4, 5, 6; S_{\text{КОС}} = 1.$

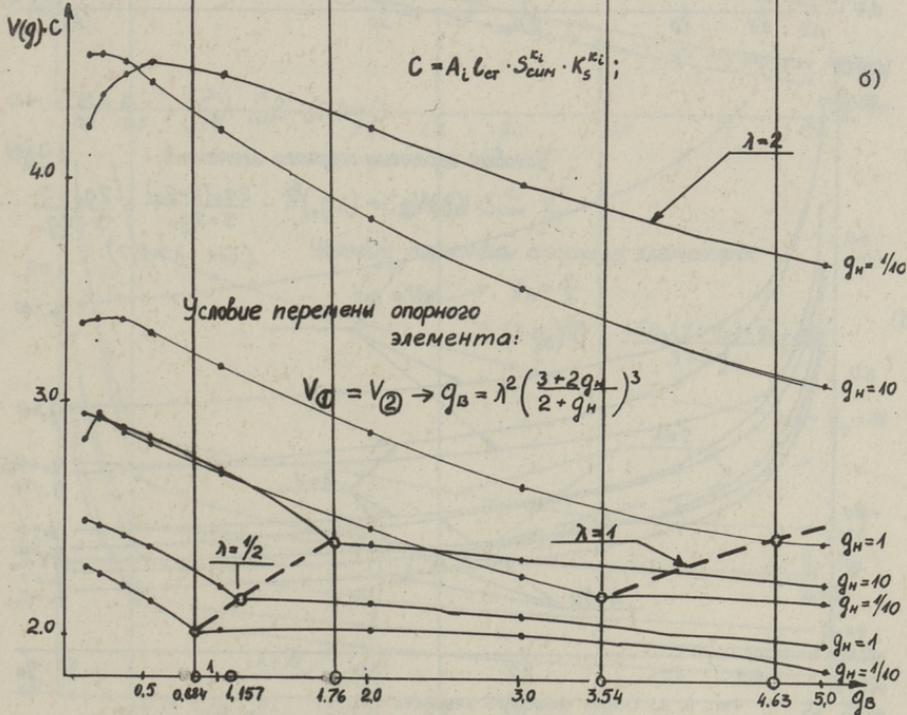
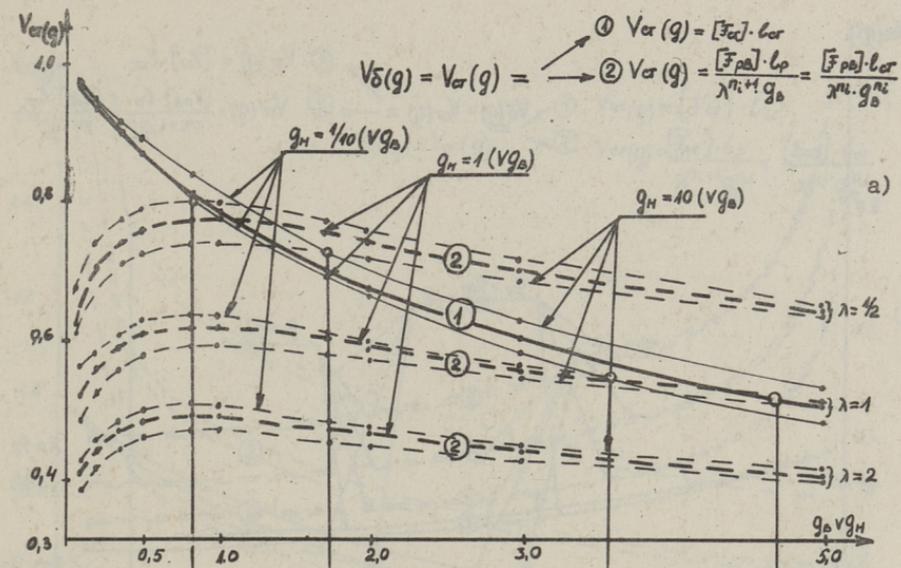


Фиг. 7. а) Область оптимальных параметров  $g_{B(опт)} = g_B(g_H, \lambda, K_S)$

$$K_H = 7; S_{кос} = \frac{PL_{CT}}{4} = 1.$$

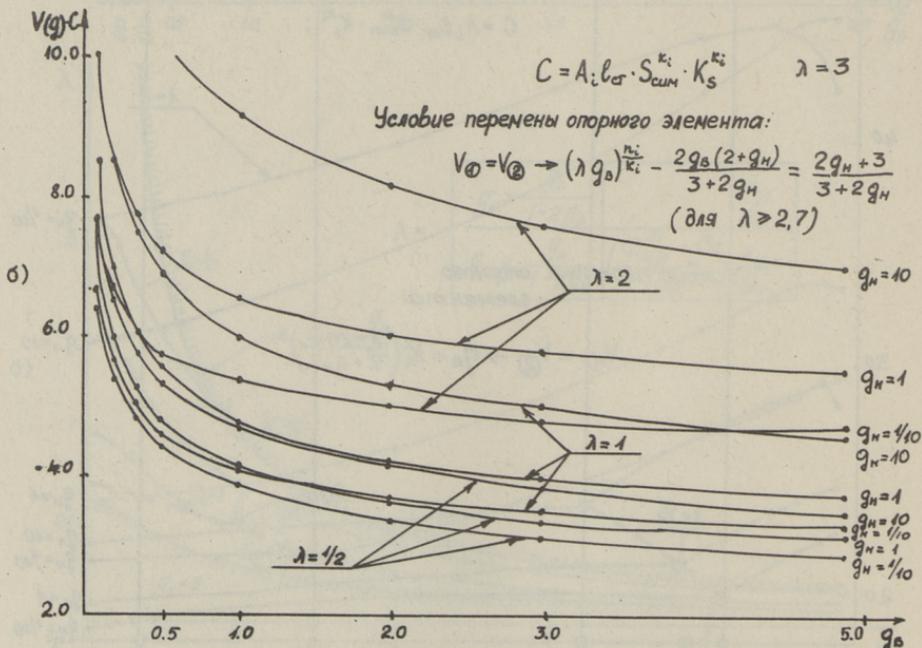
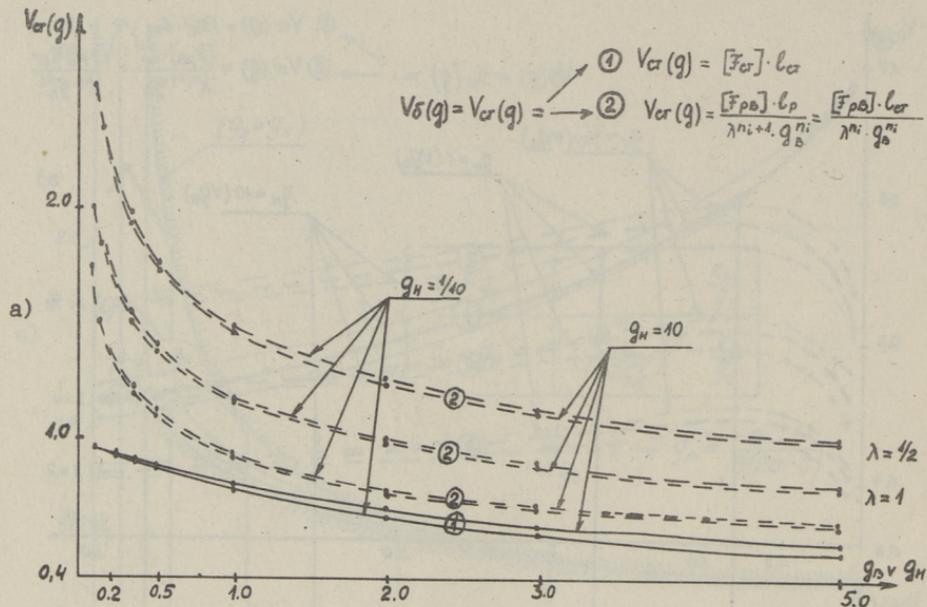
б) Область оптимальных параметров  $g_{B(опт)} = g_B(g_H, \lambda, K_S)$

$$K_H = 7; S_{кос} = \frac{q_{1,CT}^2}{8} = 1.$$



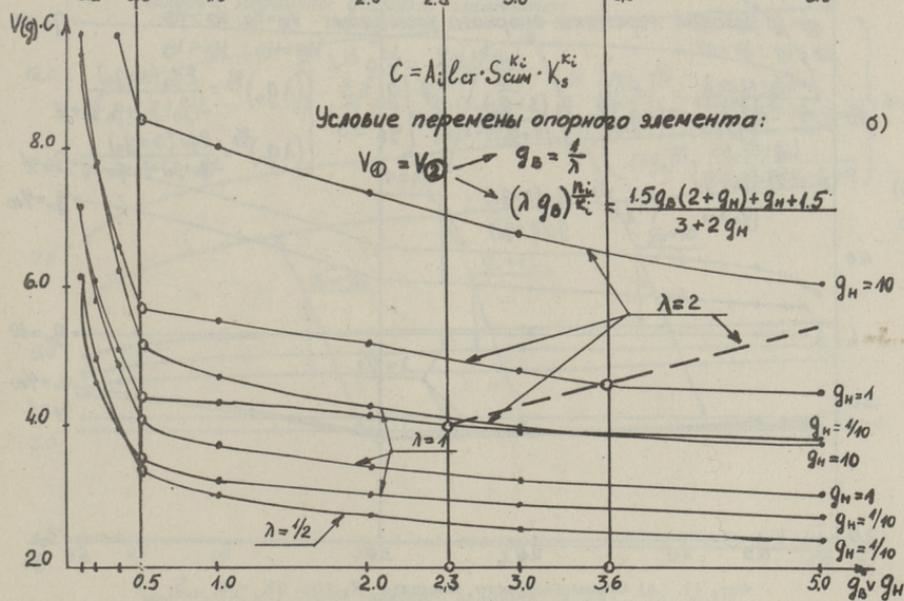
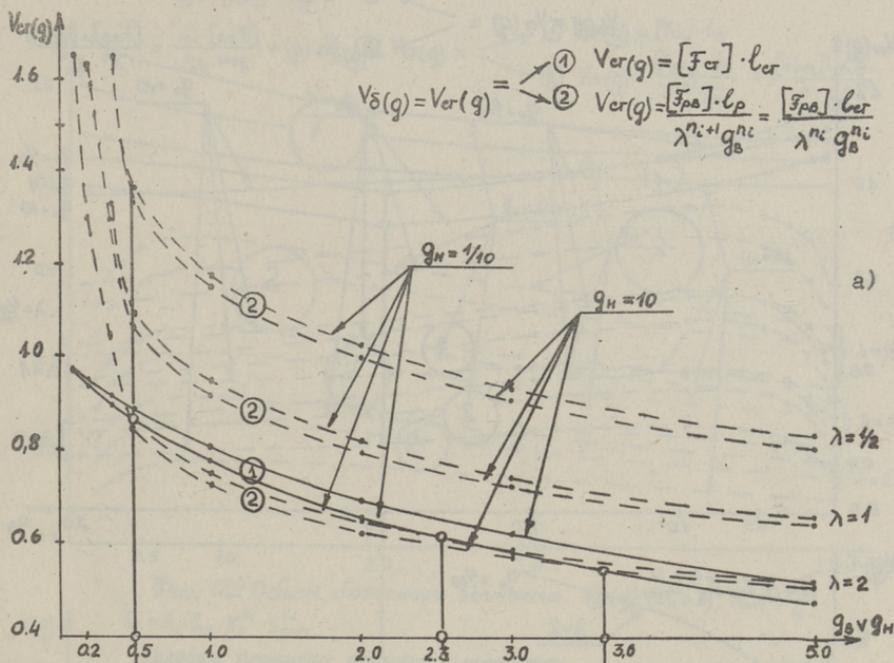
Фиг. 8. а) Объем базисного элемента  $V_{CT}(g)$  ( $K_H = v \cdot 1 \cdot 2$ ;  $S_{\text{сим}} = M$ ).

б) Объемная функция контура  $V(g) = V_{CT}(g) \cdot \Phi(g)$  ( $K_H = 1 \cdot 2$ ;  $S_{\text{сим}} = M$ ).



Фиг. 9. а) Объем базисного элемента  $V_{\sigma T}(g)$  ( $K_H = 1 \vee 2$ ;  
 $S_{\text{сум}} = \frac{PLP}{4}$ ).

б) Объемная функция контура  $V(g) = V_{\sigma T}(g) \cdot \Phi(g)$   
 ( $K_H = 1 \vee 2$ ;  $S_{\text{сум}} = \frac{PLP}{4}$ ).

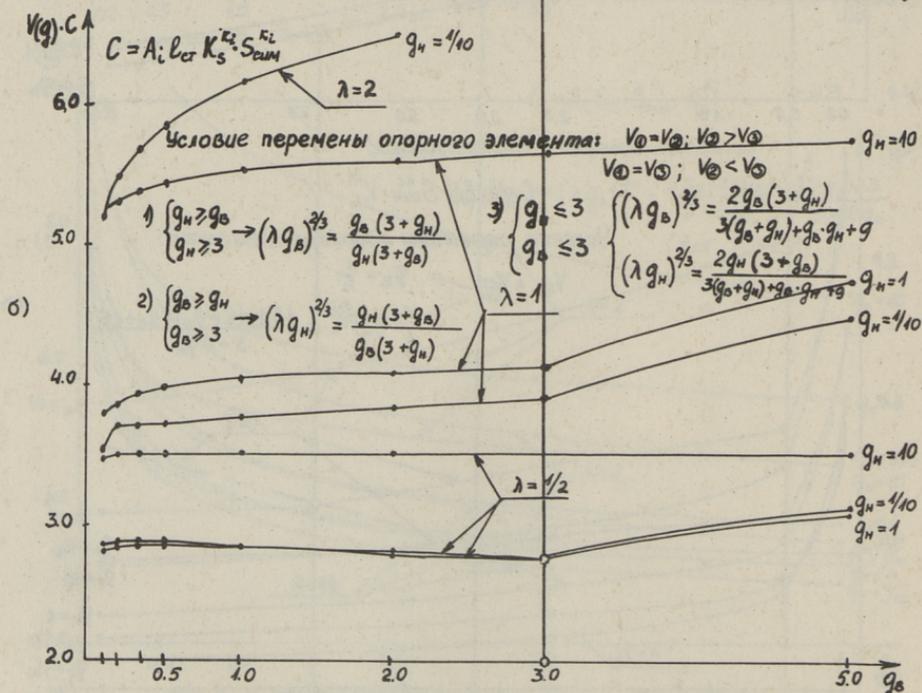
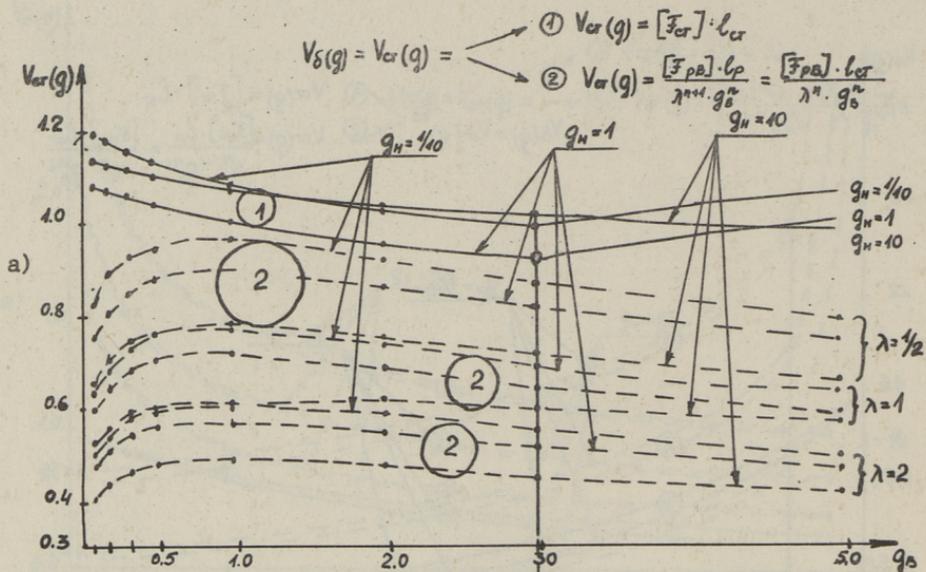


Фиг. 10 а) Объем базисного элемента  $V_{cr}(g)$  ( $K_H = 1 \vee 2$ ;

$$S_{\text{сим}} = \frac{g_b l_p}{8}$$

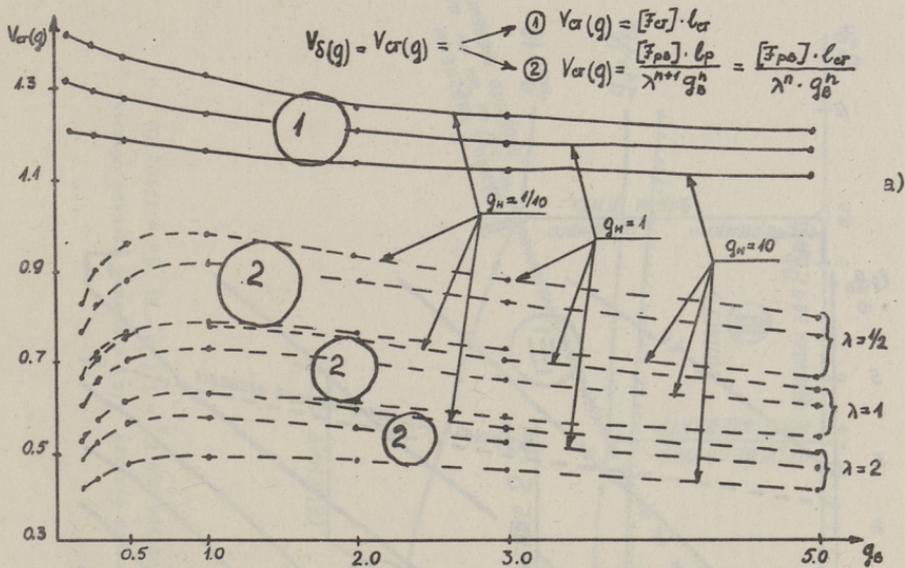
б) Объемная функция контура  $V(g) = V_{cr}(g) \cdot \Phi(g)$  ( $K_H = 1 \vee 2$ ;

$$S_{\text{сим}} = \frac{g_b l_p}{8}$$

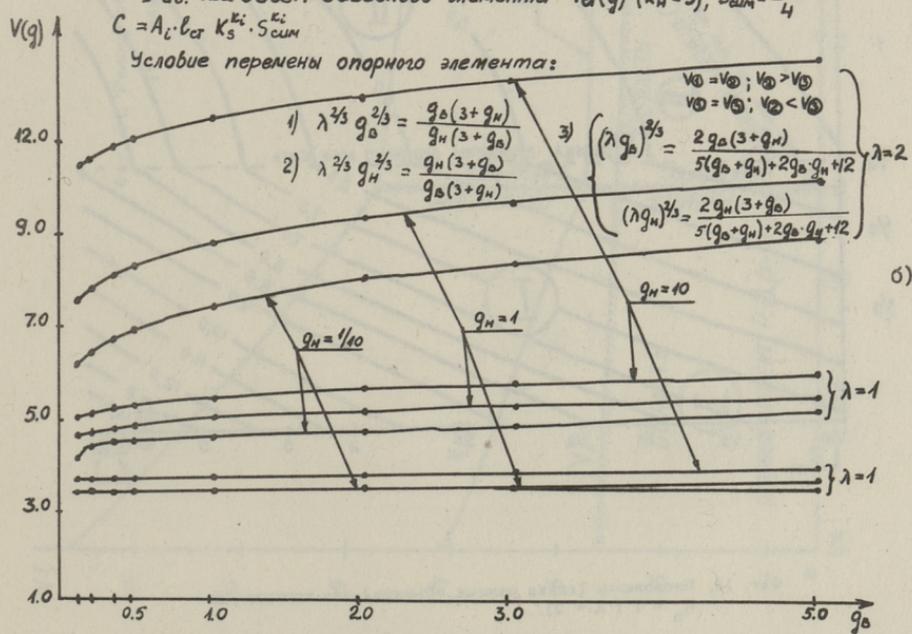


Фиг. 11. а) Объем базисного элемента  $V_{cr}(g)$  ( $K_H = 3$ ;  $S_{сим} = \frac{q l_{cr}^2}{8}$ ).

б) Объемная функция контура  $V(g) = V_{cr}(g) \cdot \Phi(g)$  ( $K_H = 3$ ;  $S_{сим} = \frac{q l_{cr}^2}{8}$ ).



Фиг. 12а Объем базисного элемента  $V_{ct}(g)$  ( $K_N = 3$ );  $S_{сим} = \frac{PL_{ct}}{4}$   
 $C = A_i \cdot v_{ct} K_s^{k_i} \cdot S_{сим}^{k_i}$



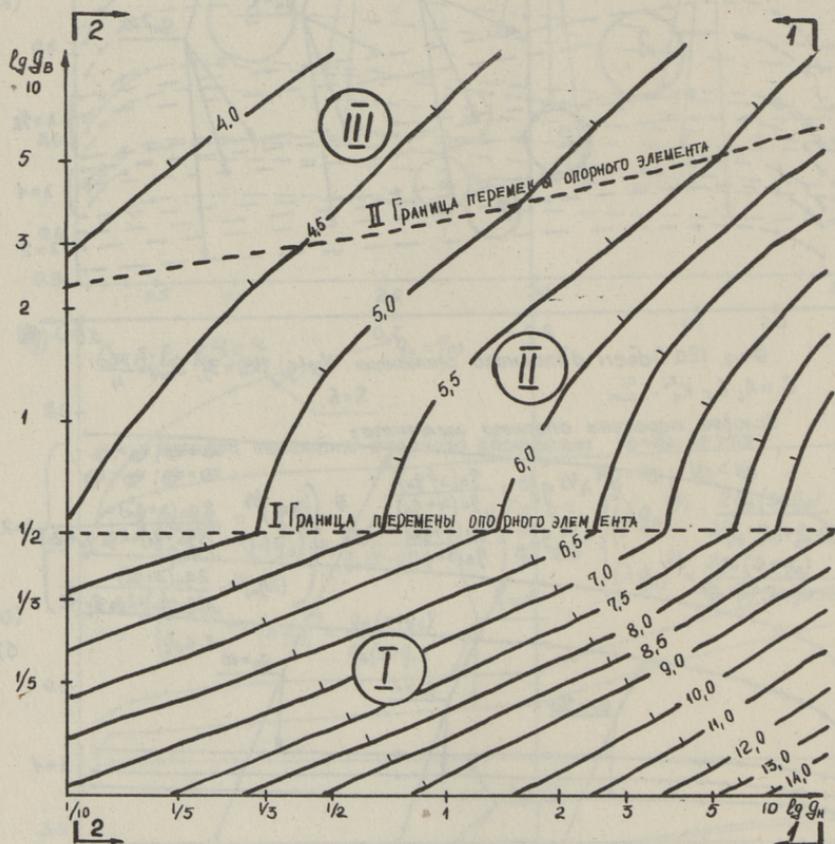
Условие перемены опорного элемента:

1)  $\lambda^{2/3} g_0^{2/3} = \frac{g_0(3+g_n)}{g_n(3+g_0)}$   
 2)  $\lambda^{2/3} g_n^{2/3} = \frac{g_n(3+g_0)}{g_0(3+g_n)}$

3)  $(\lambda g_0)^{2/3} = \frac{2g_0(3+g_n)}{5(g_0+g_n)+2g_0g_n+12}$   
 $(\lambda g_n)^{2/3} = \frac{2g_n(3+g_0)}{5(g_0+g_n)+2g_0g_n+12}$

Фиг. 12. а) Объем базисного элемента  $V_{ct}(g)$  ( $K_N = 3$ );  $S_{сим} = \frac{PL_{ct}}{4}$ .

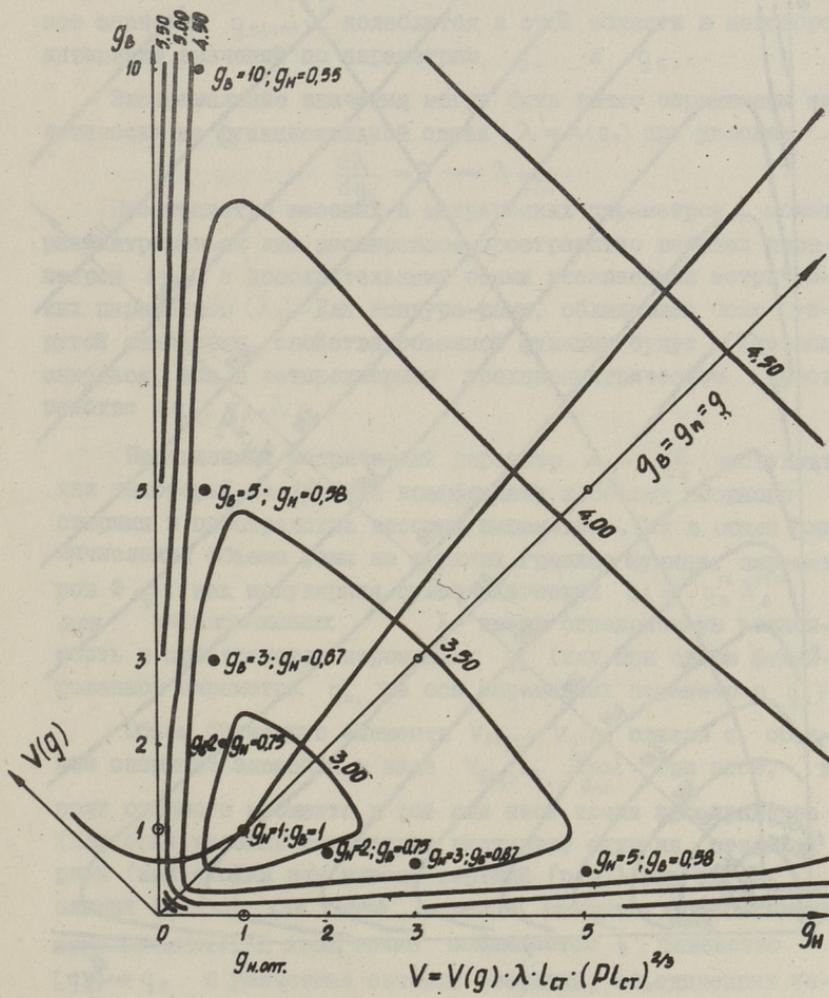
б) Объемная функция контура  $V(g) = V_{ct}(g) \cdot \Phi(g)$   
 $(K_N = 3; S_{сим} = \frac{PL_{ct}}{4})$ .



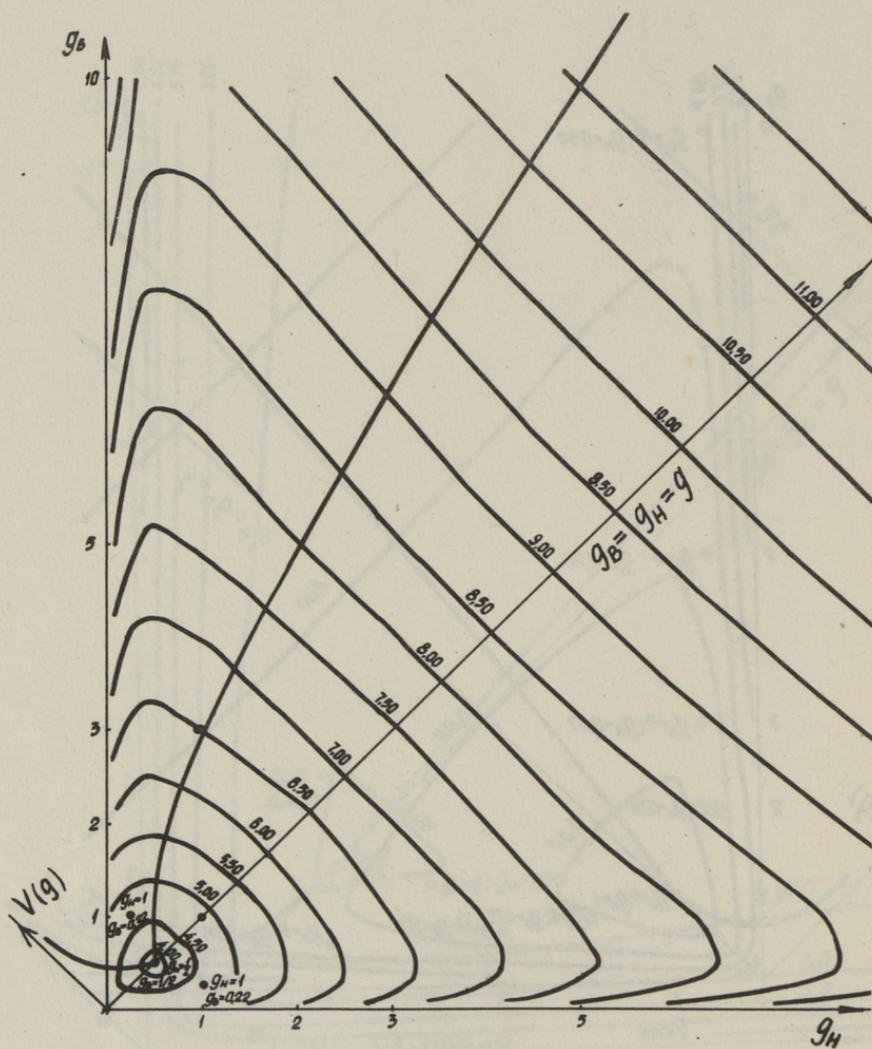
Фиг. 13. Изоволумы (линии равных объемов) для контура при  $K_H = 1$  ( $\lambda = 2$ ).







Фиг. 16. Изолюмы (линии равных объемов) для контура при  $K_H = 3$  ( $\lambda = 1$ ).



Фиг. 17. Изоволумы (линии равных объемов) для контура при  $K_H = 3$  ( $\lambda = 2$ ).

При этом выявляется, что область существования оптимальных параметров ( $q_{s(\text{опт})}$ ) описывается семейством кривых  $\lambda - q_s$ , построенных по второму параметру  $q_{s+1}$  (или  $q_{s-1}$ ).

Экстремальные значения  $\lambda$ , определяющие  $\max$  или  $\min$  метрики рамы-контра, при которой еще существует оптимальное значение  $q_{s(\text{опт})}$ , колеблются в этой области в некотором интервале значений по параметрам  $q_s$  и  $q_{s+1}$ .

Экстремальные значения могут быть также определены аналитически из функциональной связи  $\lambda = \lambda(q_s)$  при условии

$$\frac{d\lambda}{dq_s} = 0 \rightarrow \lambda_{\min}^{\max}.$$

Пространство весовых и метрических параметров может рассматриваться как расширенное пространство весовых параметров ( $q_s$ ) с дополнительными осями независимых метрических параметров ( $\lambda_s$ ). Для контра-рамы, обладающей осью упругой симметрии, свойства объемной функции будут в нем описываться, как в четырехмерном трехпараметрическом пространстве ( $q_s, q_n, \lambda$ ).

Независимый метрический параметр  $\lambda_s = \frac{q_s}{V_s}$  выступает как некоторый масштабный коэффициент к объему опорного стержня в пространстве весовых параметров. Так в общей форме вычисления объема рамы на верхней границе функция параметров  $\Phi(q_s)$ , как модулярная сумма слагаемых  $q_s = q_s^n \lambda_s^{n+1}$  для фиксированных  $\lambda$  имеет определенную зависимость в пространстве переменных  $q_s$  (или при одном фиксированном параметре  $q_n$ , на оси переменных параметров  $q_s$ ).

Объем базисного элемента  $V_{s(q)} = V_{\text{ст}(q)}$  связан с объемом опорного элемента в виде  $V_{s(q)} = \frac{[V_{\text{опт}}]}{q_{\text{оп}}}$ . При этом, в роли опорного элемента в той или иной точке пространства (или оси) весовых параметров выступает один из стержней рамы (или стойка или ригель верхний (р.в.) или ригель нижний (р.н.)), как точке перемены опорного стержня (опорного сечения). В этой точке соблюдается равенство  $[q_s] = q_s$  и расчетные сечения стержней, объединенных условием ( $q_s$ ) (два или более), удовлетворяют условию равнопрочности.

Покажем, что в роли опорного элемента в данной точке пространства (или оси), весовых параметров выступает эле-

мент, определяющий объем базисного стержня (стойки)  $V_{\delta(g)}$  наибольшим образом из всех возможных  $V_{\delta(g)} = \sqrt{\frac{[V_{ct}]}{1}} \sqrt{\frac{[V_{ps}]}{d_B}} \sqrt{\frac{[V_{pn}]}{d_n}}$ .

При этом, безразмерный метрический параметр ( $\lambda$ ) в определении натянутого объема стержня

$$V_{\delta(g)} = \frac{[V_s]}{d_s} = \frac{[V_s]}{g_s^n \cdot \lambda^{n+1}}$$

выступает как масштабный коэффициент ( $\lambda_s^{-(n+1)}$ ), понижающий (или повышающий) уровень объема стержня  $V_{s(g)}$ .

Графические модели, иллюстрирующие эти положения, показаны для различных кодов нагрузки и форм нагружений на фиг. 8, а,  $K_H = 1,2$   $S_{сим} = M$ , на фиг. 9, а  $K_H = 1,2$   $S_{сим} = \frac{Pl_p}{4}$ , на фиг. 10, а  $K_H = 1,2$   $S_{сим} = \frac{q_l l_p^2}{8}$ , на фиг. 11, а  $K_H = 3$   $S_{сим} = \frac{q_l l_{ct}}{8}$ , на фиг. 12, а  $K_H = 3$   $S_{сим} = \frac{Pl_{ct}}{4}$ .

Построенные рельефы верхней границы объемной функции контура-рамы на фиг. 8, б - 12, б свидетельствуют о том, что выбор опорного элемента может осуществляться не только по схеме критериев  $K_{p(g_s)} \geq 1$ , но и путем чистого сравнения натянутых объемов стержней  $V_{s(g)} = \frac{[V_s]}{d_s} \geq V_{s+1(g)}$ , с выбором на роль опорного элемента в данной точке стержня  $V_{\delta(g)} = V_{s(g)max}$ . Свойства объемной функции контура-рамы в пространстве весовых и метрических параметров выявляются со всей очевидностью на графических моделях для верхней и нижней границы области допустимых конструкций, построенных для выбранной системы кодов нагрузок на фиг. 13-17.

## Л и т е р а т у р а

1. Богданов С.С., Иегги Э.М. Геометрические характеристики сечений в пространстве весовых и метрических параметров. См. наст. сб., с. 3.

2. Иегги Э.М. Оптимальное проектирование статически неопределимых рам, как проблема математического программирования. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та". Строительная механика, № 227, Таллин, 1965.

3. Богданов С.С., Иегги Э.И., Вярк П.И. Оптимальное проектирование рамы с учетом стоимости материала. См. наст. сб., с. 57.

S. Bogdanov, E. Jögi, P. Võrk

Properties of Capacity Function in  
Space of Weight and Metrical Parameters

Summary

The paper deals with an optimum problem of a contour frame at the minimal capacity.

Properties of capacity function in the space of stiffness parameters are investigated and the correspondence between the frame of minimum capacity and the uniform strength one, which makes possible to construct a fast convergent solving method of a single contour frame problem, is represented.

The results of the calculation are graphically illustrated.



УДК 624.041.1

С.С. Богданов, Э.М. Иегги, П.И. Вьрк

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ РАМЫ С УЧЕТОМ  
 СТОИМОСТИ МАТЕРИАЛА

В статье исследуются свойства объемной функции ( $V$ ) и функции стоимости ( $C$ ) контура-рамы в пространстве безразмерных весовых параметров ( $q = \{q_s\}$ ), определяемых как соотношение погонных жесткостей элементов ее составляющих.

I. Задача формулируется как задача нелинейного математического программирования:

определить „ $m$ ”- мерный вектор  $q = \{q_s\}$ ;  $s = 1, 2, 3 \dots m$ , минимизирующий:

объемную функцию

$$V(q) = \sum_{s=1}^m V_s(q)$$

функцию стоимости

$$C(q) = \sum_{s=1}^m C_s(q) \quad (I)$$

рамы, при следующих ограничениях:

$$\Omega: \left\{ \begin{array}{l} 1) V_s \geq [V_s] \\ 2) V_s(q) = K_1(q) \cdot [V_s] \\ 3) q_s > 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) C_s \geq [C_s] \\ 2) C_s(q) = a_1(q) \cdot [C_s] \\ 3) q_s > 0 \end{array} \right\}, \quad (2)$$

где область допустимых значений ( $\Omega$ ) удовлетворяет требованиям прочности (1), при условии невырождения элементов рамы (3).

Выбранная таким образом функция цели, как показатель качества системы с необходимостью удовлетворяет эффекту действия связи (2), так что

$$V_s(q) > [V_s]; C_s(q) > [C_s] \quad (3)$$

для всех векторов ( $q$ ), кроме оптимального ( $q_{\text{опт}}$ ), определяющего оптимальную систему, так что

$$V_s(g_{\text{онт}}) \equiv [V_s] \quad \text{и} \quad C_s(g_{\text{онт}}) \equiv [C_s], \quad (3')$$

где  $s$  — индекс элемента;

$m$  — количество элементов в системе.

2. Построим схему оптимизации „ $m$ ” — параметрической системы.

Учет эффекта действия связи приводит к необходимости натяжения (увеличения) геометрических размеров поперечных сечений стержней (всех, кроме одного, работающего на границе прочности) в соответствии с выбранным планом распределения безразмерных параметров жесткостей ( $g$ ). Для нахождения элемента, работающего на границе прочности, исследуется соотношение весового параметра этого элемента, найденного на границе прочности  $[g_s]$  к исходному параметру ( $g_s = \frac{V_s}{V_s^0}$ ), образующему план задачи ( $g = \{g_s\}$ ), для  $s = 1, 2, 3, \dots, m$ .

Общее число варьируемых параметров ( $g_s$ ) рамы равно числу элементов, входящих в систему, без единицы.

При этом необходимо рассмотреть условия типа  $[g_s] \geq g_s$  с общим числом  $2^m$ , из них число условий, из которых непосредственно определяется опорный элемент, равно  $m+1$ , остальные условия (с числом  $2^m - m - 1$ ) требуют дополнительных проверок для определения опорного элемента из условий вида:

$$\frac{[g_s]}{[g_{s+1}]} \geq \frac{g_s}{g_{s+1}}. \quad (4)$$

Общее число расчетных ветвей равно числу элементов, входящих в систему ( $m+1$ ).

Ниже приводится схема оптимизации трехпараметрической рамы, не обладающей упругой осью симметрии.

Схема загрузки приводится на фиг. 1.

Статический расчет контура осуществляется по методу сил, с предварительным определением координат упругого центра (С) для ортогонализации базиса и получения диагональной матрицы коэффициентов канонических уравнений метода сил (D). Координаты упругого центра находятся из условий:

$$g_1 = 40,5 \text{ кг/см};$$

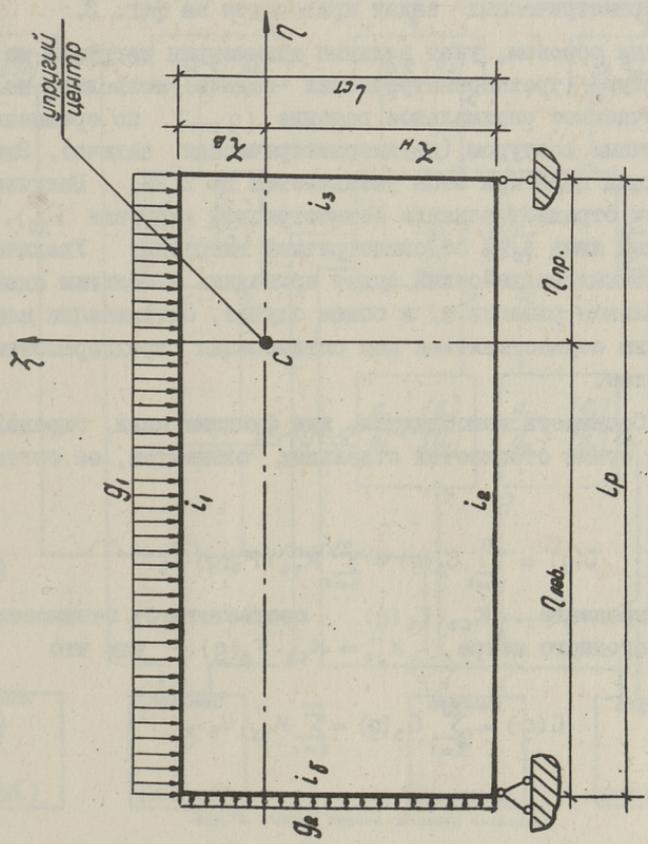
$$g_2 = 17 \text{ кг/см};$$

$$l_p = 6,0 \text{ м}; l_{cr} = 3,0 \text{ м};$$

$$m = 3$$

$$g_1 = \frac{l_1}{l_p}; g_2 = \frac{l_2}{l_p}$$

$$g_3 = \frac{l_3}{l_p}$$



Фиг. 1. Схема загрузки.

$$\left. \begin{aligned} \eta_{\text{нр}} &= \frac{g_2[g_3(1+2g_1)+g_1]}{2\{g_2[g_3(1+g_1)+g_1]+g_1g_3\}}; & \eta_{\text{лев}} &= 1 - \eta_{\text{нр}}; \\ \zeta_{\text{в}} &= \frac{g_1[g_3(1+g_2)+2g_3]}{2\{g_3[g_1(1+g_2)+g_2]+g_1g_3\}}; & \zeta_{\text{н}} &= 1 - \zeta_{\text{в}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Нахождение опорного элемента с выходом на расчетную ветвь проводится по схеме поиска опорного элемента (фиг. 2).

Сравнительные результаты расчета и оптимизации двух- и трехпараметрических задач приводятся на фиг. 3.

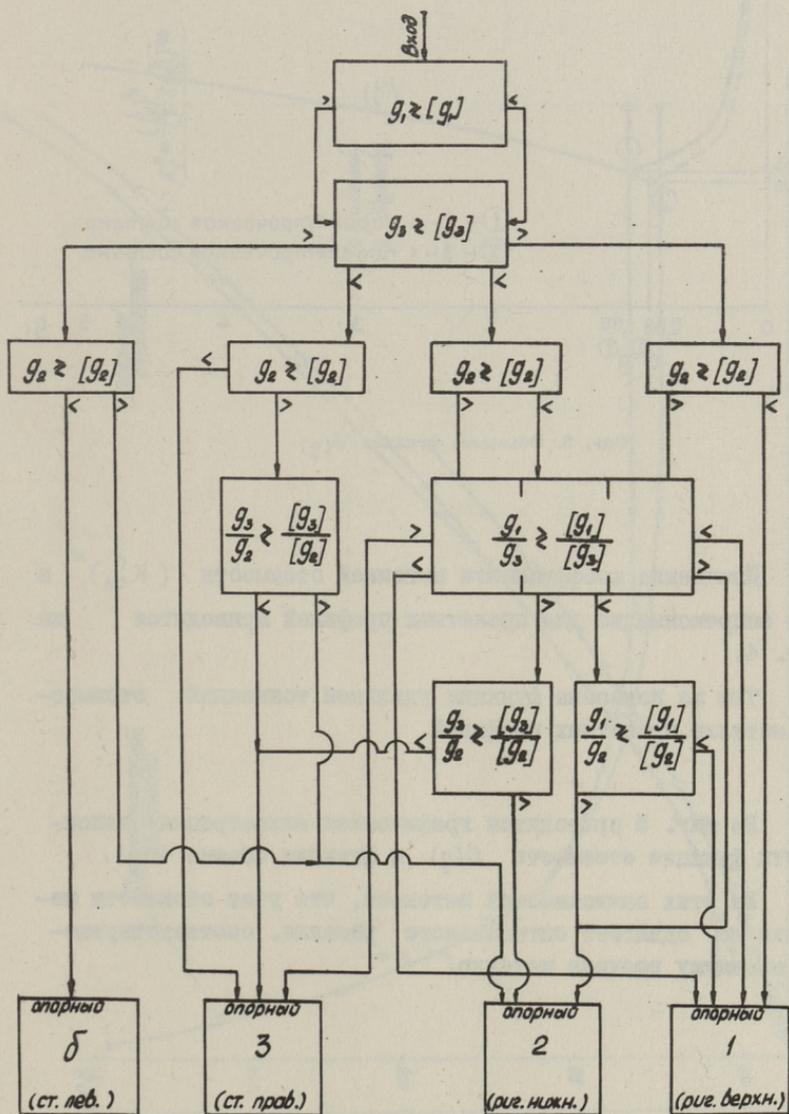
Таким образом, учет влияния асимметрии нагрузки на работу контура (трехпараметрическая задача) позволяет получить уточненное оптимальное решение ( $g_{\text{опт}}$ ) по сравнению с симметричным контуром (двухпараметрическая задача). Значение функции цели при этом уменьшается на 2,2%. Полученный результат отражает влияние асимметричной нагрузки ( $g_2$ ), составляющей лишь 4,2% от симметричной нагрузки. Увеличение асимметричных воздействий будет приводить к большим сдвигам в оптимальном решении и, в общем случае, оптимизация контуров должна осуществляться как оптимизация трехпараметрических систем.

3. Стоимость конструкции, как функция цели, определяется как сумма стоимостей отдельных элементов, ее составляющих:

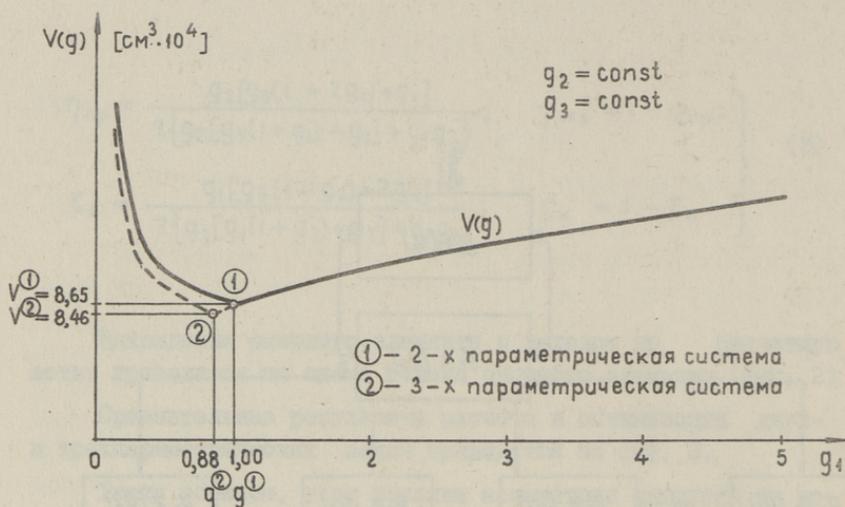
$$C(g) = \sum_{s=1}^m C_s(g) = \sum_{s=1}^m K_{cs} \cdot F_s(g) \cdot l_s, \quad (6)$$

где произведение  $K_{cs} \cdot F_s(g)$  соответствует стоимости одного погонного метра  $K_{cs}^n = K_{cs} \cdot F_s(g)$ , так что

$$C(g) = \sum_{s=1}^m C_s(g) = \sum_{s=1}^m K_{cs}^n \cdot l_s. \quad (7)$$



Фиг. 2. Схема поиска опорного элемента.



Фиг. 3. Объемная функция  $V(g)$ .

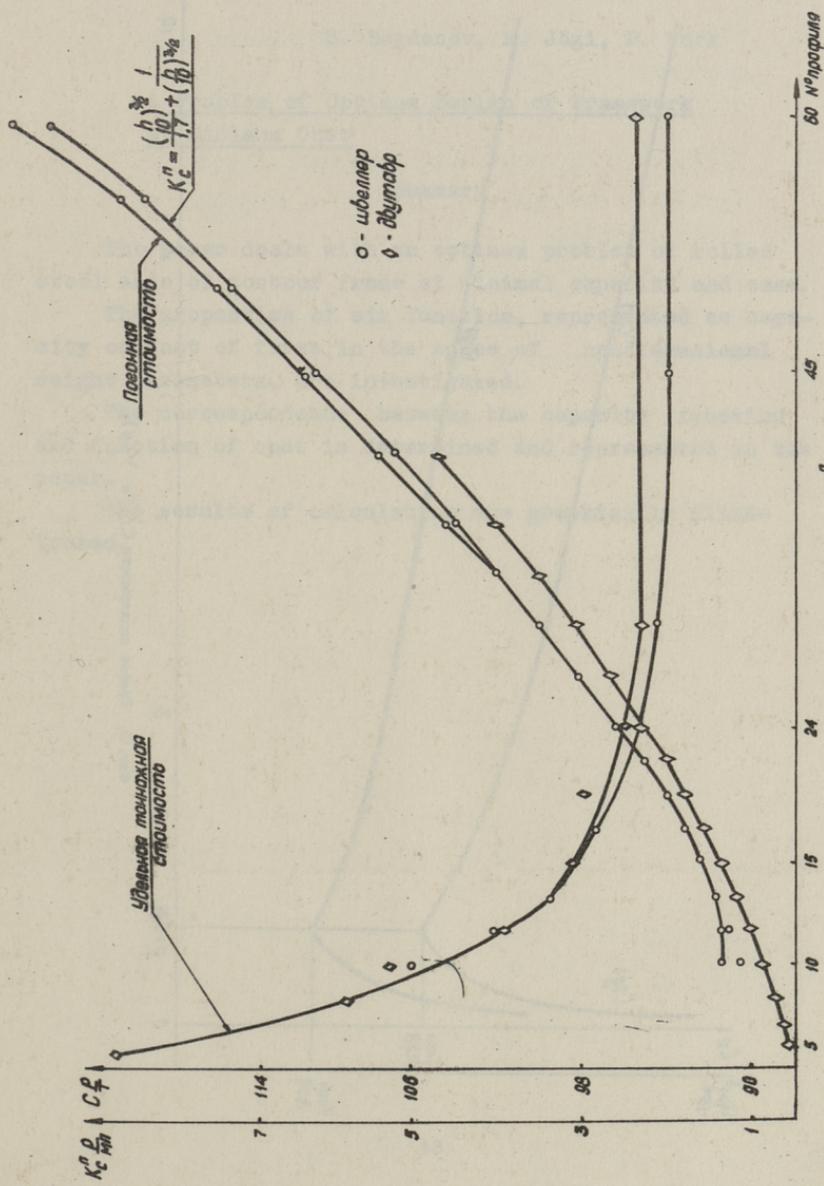
Изменение коэффициента погонной стоимости  $(K_{cs}^n)^x$  и его аппроксимация для прокатных профилей приводится на фиг. 4.

Там же показана функция удельной тонажной стоимости металла прокатных профилей.

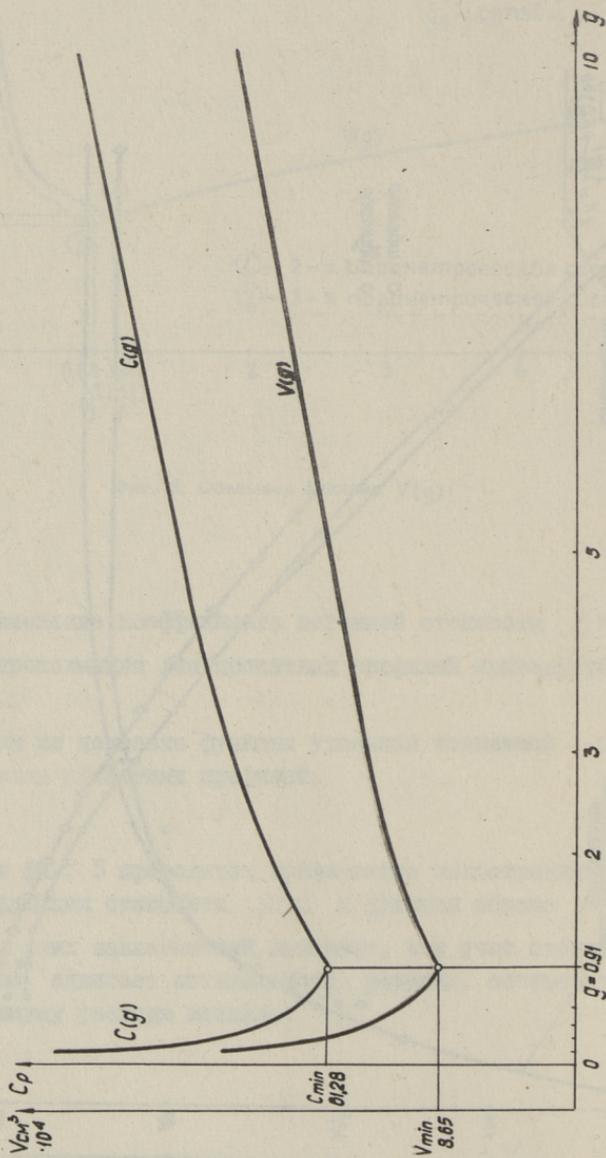
На фиг. 5 приводится графическая иллюстрация зависимости функции стоимости  $C(g)$  и функции объема  $V(g)$ .

Из этих зависимостей вытекает, что учет стоимости металла не сдвигает оптимального решения, соответствующего минимуму расхода металла.

\* Стоимость принята по прейскуранту №01-02 "Оптовые цены на сталь и прокат черных металлов". Ч. I, сортовая и фасонная сталь.



Фиг. 4. Коэффициент стоимости  $K_c^n$  и его апроксимации.



Фиг. 18. График зависимости  $C(g)$  и  $V(g)$ .

S. Bogdanov, E. Jögi, P. Vörk

A Problem of Optimum Design of Framework  
at Minimum Cost

Summary

The paper deals with an optimum problem of rolled steel made of contour frame at minimal capacity and cost.

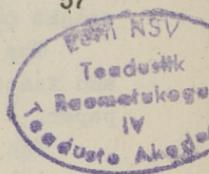
The properties of aim function, represented as capacity or cost of frame in the space of nondimensional weight parameters, are investigated.

The correspondence between the capacity function and function of cost is determined and represented in the paper.

The results of calculation are graphically illustrated.

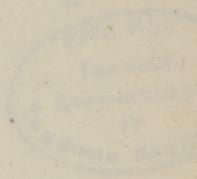
## С о д е р ж а н и е

1. Богданов С.С., Иегл Э.М. Геометрические характеристики сечений и их связи в пространстве весовых параметров. . . . . 3
2. Богданов С.С., Иегл Э.М. Свойства объемной функции в пространстве весовых и метрических параметров. . . . . 27
3. Богданов С.С., Иегл Э.М., Вьрк П.И. Оптимальное проектирование рамы с учетом стоимости материала. . . . . 57





1. Мухомов С.С., Мухомов В.В. Теоретические и экспериментальные основы и их применение в проектировании зданий и сооружений. . . . .
2. Мухомов С.С., Мухомов В.В. Основы теории конструкций и экспериментальные методы. . . . .
3. Мухомов С.С., Мухомов В.В., Мухомов В.В. Основы теории конструкций и экспериментальные методы. . . . .



ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
Труды ТПИ № 444  
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ  
АНАЛИЗА СИСТЕМ СТРОИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ  
Труды по строительной механике. Сборник статей 1X  
Редактор А. Юргенсон, Техн. редактор В. Ранник  
Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 18 янв. 1978 г.  
Подписано к печати 12 апр. 1978 г.  
Бумага 60x90/16, Печ. л. 4,25 + 0,125 приложение  
Уч. -изд. л. 3,71 . Тираж 300  
МВ-02690  
Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскла, 2/9, Зак. № 520  
Цена 56 коп.



Цена 56 коп.