TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 312

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СБОРНИК СТАТЕЙ

VI

ТАЛЛИН 1971

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 312 1971

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СБОРНИК СТАТЕЙ

VI

Таллин 1971

Сборник посвящается семидесятилетию доцента кафедры математики, кандидата физико-математических наук

АНТСА ХАНСОВИЧА СЯРЕВА

Антс Хансович родился 14 апреля 1902 г. в Феллинском уезде в семье крестьянина. С 1922 по 1927 год он учился в Тартуском университете, где ему в 1929 г. была присуждена степень магистра по математике. В 1929-1931 гг. он усовершенствовался в Сорбонне. С декабря 1940 г. Антс Хансович работает в Таллинском политехническом институте. С 1946 г. он кандидат физико-математических наук, а в 1947 г. утверждён в звании доцента. В 1953-1966 гг. он руководил кафедрой математики.

Юбиляр великолепный педагог. Высокий научно-теоретический уровень его лекций, их мастерское изложение принесли ему заслуженную репутацию выдающегося лектора. Наряду с традиционными курсами он читал теоретическую механику и начертательную геометрию. Он был инициатором создания спецгрупп с повышенной подготовкой математики и сейчас активно составляет для них программы, читает спецкурсы.

Антс Хансович глубоко эрудированный математик, владеет многими иностранными языками. Круг его научных интересов широк, причём особенно его привлекают вопросы дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Антс Хансович удивительно доброжелательный и чуткий человек, со своеобразным мягким юмором. Он щедро делится с другими своими знаниями, идеями, опытом.

Антс Хансович продолжает успешно работать, читая лекции и оказывая квалифицированную помощь аспирантам, преподавателям и инженерам.

Коллектив кафедры математики

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 312 1971

УДК 513

Р. Колде

НЕВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ ИЗОТРОПНЫХ ПРЯМЫХ С БЕСКОНЕЧНО-УДАЛЕННЫМИ КРАТНЫМИ ФОКУСАМИ В ${}^1R_4$

Множество всех изотропных прямых в четырехмерном вещественном псевдоевклидовом пространстве ${}^1R_4$ индекса 1 образует пятимерное подмногообразие J_5 грассманова многообразия $\Omega(1,4)$. Конгруэнцией изотропных прямых называется дифференцируемое трехмерное подмногообразие V_3 в J_5. Сопоставляя с каждой прямой пространства ${}^1R_4$ ее бесконечно-удаленную точку (т.е. точку гиперболического пространства ${}^1S_3$), с изотропными прямыми сопоставляются точки абсолюта. Этот абсолют имеет структуру двумерного конформного пространства C_2 [8]. Таким образом, определяется отображение $\pi: \Omega(1,4)$ на ${}^1S_3$ такое, что $\pi(J_5)=C_2$. Это отображение играет для конгруэнции изотропных прямых роль, подобную роли сферического изображения в теории конгруэнции прямых в R_3 [12]. Конгруэнцию изотропных прямых называем невырожденной, если ее образ $\pi(V_3)$ в C_2 является двумерным. Наиболее общие классы невырожденных конруэнций изотропных прямых, а именно гиперболические и эллиптические конгруэнции (а также их частные случаи – нормальные и изотропные конгруэнции) рассмотрены нами в [2]. В данной статье изучаются невырожденные конгруэнции, имеющие бесконечно-удаленную дву- или трехкратную фокальную поверхность. По терминологии Р.М. Гейдельмана [I] следует их называть соответственно параболическими и сильно-параболическими. В проективном пространстве P_4 эти типы конгруэнции исследованы В.Г. Сычевой в [IO].

Автор искренно благодарен руководителю этой работы профессору Ю.Г. Лумисте.

§ I. Уравнения конгруэнции

I.I. Репер $\{M, \vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ псевдоевклидова пространства ${}^1R_4$ называется <u>полуизотропным</u>, если метрическая матрица $\|g_{ab}\|$ имеет вид [I)]:

$$\|g_{ab}\| = \|(\vec{e}_a, \vec{e}_b)\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.I}$$

Отнесем конгруэнцию изотропных прямых V_3 к подвижному полуизотропному реперу, вектор $\vec{e}_0$ которого направлен по прямой конгруэнции. Тем самым мы присоединим к каждой прямой конгруэнции пятипараметрическое семейство реперов (I.I), которые получаются один из другого при помощи следующих преобразований:

I) перемещения начала репера из точки M в точку M' с радиусом-вектором

$$\vec{M}' = \vec{M} + \mu^0 \vec{e}_0 ; \tag{I.2}$$

2) изотропного вращения вокруг вектора $\vec{e}_0$ [I3]:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_0 &= \vec{e}_0 , \\ \vec{e}'_1 &= -a^1_3 \vec{e}_0 + \vec{e}_1 , \\ \vec{e}'_2 &= -a^2_3 \vec{e}_0 + \vec{e}_2 , \\ \vec{e}'_3 &= -\frac{1}{2}\left[(a^1_3)^2 + (a^3_2)^2\right]\vec{e}_0 + a^1_3 \vec{e}_1 + a^2_3 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 ; \end{aligned} \tag{I.3}$$

3) вращения псевдоевклидовой плоскости $[M, \vec{e}_0, \vec{e}_3]$:

$$\vec{e}'_0 = a^0_0 \vec{e}_0 , \quad \vec{e}'_3 = \frac{1}{a^0_0} \vec{e}_3 ; \tag{I.4}$$

4) вращения собственно-евклидовой плоскости $[M, \vec{e}_1, \vec{e}_2]$:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \vec{e}_1 \cos\varphi - \vec{e}_2 \sin\varphi , \\ \vec{e}'_2 &= \vec{e}_1 \sin\varphi + \vec{e}_2 \cos\varphi . \end{aligned} \tag{I.5}$$

I) Индексам различных серий мы будем задавать следующие значения: $a, b, \ldots = 0,1,2,3$; $\alpha, \beta, \ldots = 1,2,3$; $i, j, \ldots = 1,2$.

Формулы инфинитезимального перемещения репера $\{M, \vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и соответствующие структурные уравнения имеют вид:

$$d\vec{M} = \omega^b \vec{e}_b, \quad d\vec{e}_a = \omega_a^b \vec{e}_b \tag{I.6}$$

и

$$d\omega^a = \omega^c \wedge \omega_c^a, \quad d\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a, \tag{I.7}$$

где в силу (I.I) соблюдаются равенства:

$$\begin{gathered} \omega_0^3 = \omega_3^0 = \omega_1^1 = \omega_2^2 = 0, \quad \omega_3^3 = -\omega_0^0, \\ \omega_1^3 = -\omega_0^i, \; \omega_i^0 = -\omega_3^i, \quad \omega_2^1 = -\omega_1^2. \end{gathered} \tag{I.8}$$

Так как стационарная подгруппа прямой $[M, \vec{e}_0]$ конгруэнции определяется в группе движений пространства ${}^1R_4$ системой Пфаффа $\omega^\alpha = 0, \omega_0^i = 0$, то I-формы ω^α и ω_0^i являются главными формами конгруэнции. С другой стороны, вполне интегрируемая подсистема $\omega_0^i = 0$ определяет стационарную подгруппу точки $\pi([M, \vec{e}_0])$ конформной плоскости C_2 в группе конформных преобразований. Следовательно, условие невырожденности конгруэнции требует независимости главных форм ω_0^1 и ω_0^2. Выбираем их базисными формами конгруэнции. В качестве третьей базисной формы следует взять одну из форм ω^α. Отметим здесь, что выбор формы ω^3 дает нам случай, рассмотренный в [2]. В силу (I.I) формы ω^1 и ω^2 равноправны; выбираем форму ω^1 базисной. Тогда конгруэнция изотропных прямых задается системой Пфаффа

$$\begin{aligned} \omega^2 &= A\omega^1 + B\omega_0^1 + C\omega_0^2, \\ \omega^3 &= D\omega^1 + E\omega_0^1 + G\omega_0^2 \end{aligned} \tag{I.9}$$

и некоторыми начальными условиями. Коэффициенты в правых частях составляют <u>фундаментальный объект первого порядка конгруэнции</u> [4].

I.2. Пусть точка $F \in {}^1R_4$ с радиусом-вектором

$$\vec{F} = \vec{M} + f^0 \vec{e}_0 \tag{I.10}$$

является <u>фокусом</u> [I2], т.е. пусть в точке $x \in V_3$, где $x \equiv [M, \vec{e}_0]$, существует касательный к V_3 вектор ∂, задаваемый значениями базисных форм

$$l_0^i \equiv \omega_0^i(\partial), \; l^1 \equiv \omega^1(\partial) \tag{I.11}$$

такой, что вектор $\partial\vec{F}$ пространства ${}^1R_4$ коллинеарен вектору $\vec{e}_0$. Продифференцировав формулу (I.10) в направлении ∂, получим:

$$\partial\vec{F}=f^{\circ}\Big\{(\lambda_0\iota^1+\iota^1_0)\vec{e}_1+\big[\lambda_0 A\iota^1+\lambda_0 B\iota^1_0+(\lambda_0 C+1)\iota^2_0\big]\vec{e}_2+$$
$$+\lambda_0(D\iota^1+E\iota^1_0+G\iota^2_0)\vec{e}_3\Big\}\ (\mathrm{mod}\ \vec{e}_0), \tag{I.12}$$

где $\lambda_0\equiv\frac{1}{f^{\circ}}$. Следовательно, точка F является фокусом тогда и только тогда, когда система

$$\begin{aligned}&\lambda_0\iota^1+\iota^1_0=0,\\&\lambda_0 A\iota^1+\lambda_0 B\iota^1_0+(\lambda_0 C+1)\iota^2_0=0,\\&\lambda_0 D\iota^1+\lambda_0 E\iota^1_0+\lambda_0 G\iota^2_0=0\end{aligned} \tag{I.13}$$

имеет нетривиальное решение ι^1,ι^i_0, т.е. когда λ_0 является корнем кубического уравнения

$$(\lambda_0)^3(BG-CE)+(\lambda_0)^2(DC-AG-E)+\lambda_0 D=0. \tag{I.14}$$

Отсюда следует, что конгруэнция имеет на данной прямой простой бесконечно-удаленный фокус (т.е. нулевое решение уравнения (I.14) - однократное), если $D\neq 0$; удвоенный бесконечно-удаленный фокус, если $D=0$ и $E\neq -AG$; утроенный бесконечно-удаленный фокус, если $D=0$, $E=-AG$ и $BG-CE\neq 0$, или каждая точка прямой является фокусом, если все коэффициенты в (I.14) равны нулю. В последнем случае система (I.13) имеет нетривиальное решение при каждом значении λ_0. Поскольку в настоящей статье рассматриваются только три последних случая, то уравнения конгруэнции (I.9) имеют у нас вид:

$$\begin{aligned}\omega^2&=A\omega^1+B\omega^1_0+C\omega^2_0,\\ \omega^3&=E\omega^1_0+G\omega^2_0.\end{aligned} \tag{I.15}$$

При $E\neq -AG$ имеем дело с параболической конгруэнцией (см. [I]) с бесконечно-удаленными двукратными фокусами на каждой прямой. В общей фокальной классификации конгруэнций изотропных прямых [3] этот класс конгруэнций был обозначен нами через 4Б. Поэтому в дальнейшем будем конгруэнцию этого класса называть просто <u>конгруэнцией типа 4Б</u>. Если

$$E=-AG, \tag{I.16}$$

но $BG-CE\neq 0$, то конгруэнция называется сильно-параболической с бесконечно-удаленным трехкратным фокусом на каждой прямой или, короче, согласно [3] конгруэнцией типа 6. Если кроме условия (I.16) коэффициенты в (I.15) удовлетворяют еще соотношению $BG-CE=0$, то получается особый тип конгруэнции [I], имеющий в каждой точке любой своей прямой $[M,e_0]$ фокус. Конгруэнция этого типа, называемая нами ∞-фокальной конгруэнцией (или, короче, конгруэнцией типа ∞-ф.), задается уравнениями (I.I5), где

$$E=-AG, \quad B=-AC. \tag{I.I7}$$

Действительно, подстановка (I.I6) в $BG-CE=0$ дает $G(B+AC)=0$, но здесь $G\neq 0$, так как в противном случае было бы $\omega^3=0$, а условие полной интегрируемости этого уравнения дало бы соотношение между базисными формами ω^1 и ω_0^i.

I.3. Внешнее дифференцирование системы Пфаффа (I.I5) дает:

$$\begin{gathered}[dA+(1+A^2)\omega_1^2]\wedge\omega^1+[dB+B\omega_0^0+(AB-C)\omega_1^2-E(A\omega_3^1-\omega_3^2)+A\omega^0]\wedge\omega_0^1+\\ +[dC+C\omega_0^0+(AC+B)\omega_1^2-G(A\omega_3^1-\omega_3^2)-\omega^c]\wedge\omega_0^2=0,\\ [dE-G\omega_1^2+\omega^1]\wedge\omega_0^1+[dG+E\omega_1^2+\omega^2]\wedge\omega_0^2=0.\end{gathered} \tag{I.I8}$$

Применяя к (I.I8) лемму Картана, получим:

$$\begin{aligned} dA+(1+A^2)\omega_1^2 &= a\omega^1+b\omega_0^1+c\omega_0^2,\\ dB+B\omega_0^0+(AB-C)\omega_1^2-E(A\omega_3^1-\omega_3^2) &= -A\omega^0+b\omega^1+d\omega_0^1+e\omega_0^2,\\ dC+C\omega_0^0+(AC+B)\omega_1^2-G(A\omega_3^1-\omega_3^2) &= \omega^0+c\omega^1+e\omega_0^1+g\omega_0^2 \end{aligned} \tag{I.I9}$$

и

$$\begin{aligned} dE-G\omega_1^2 &= -\omega^1+k\omega_0^1+l\omega_0^2,\\ dG+E\omega_1^2 &= -A\omega^1+(l-B)\omega_0^1+m\omega_0^2, \end{aligned} \tag{I.20}$$

где число новых коэффициентов $a, b, c, d, e, g, k, l, m$ – компонент второго порядка фундаментального объекта [4] конгруэнции – равно $N=9$. Вычисление характеров (см. [II]) замкнутой системы (I.I5) и (I.I8) дает $s_1=s_2=2$, $s_3=1$ и, следовательно, $Q=N=9$. В силу критерия Картана система Пфаффа (I.I5) находится в инволюции и конгруэнция типа 4Б существует с произволом одной функции от трех аргументов.

Продифференцировав дополнительное условие (I.I6) и использовав результат в (I.I8), мы получим для конгруэнции типа 6 три дополнительных условия на новые коэффициенты. Поскольку I-форма $dE-G\omega_1^2+\omega^1$ в (I.I8) тоже выражается через остальные формы, то для этого типа конгруэнции характеры имеют значения $s_1 = s_2 = 2$, $s_3 = 0$, т.е. $Q = N = 6$. Итак, конгруэнция типа 6 существует с произволом двух функций от двух аргументов.

Вопрос существования ∞-фокальной конгруэнции рассматривается ниже в § 5.

§ 2. Дифференциальная окрестность первого порядка

2.I. Вводим в точке $x \equiv [M, \vec{e}_0]$ многообразия V_3 базис касательных векторов $\{\partial_1, \partial_i^0\}$, дуальный к кобазису $\{\omega^1, \omega_0^i\}$, т.е. такой, что

$$\begin{aligned} &\omega^1(\partial_1) = 1, \ \omega_0^j(\partial_1) = 0, \\ &\omega^1(\partial_i^0) = 0, \ \omega_0^j(\partial_i^0) = \delta_i^j. \end{aligned} \qquad (2.I)$$

Тогда в этой точке любой касательный к V_3 вектор ∂ выражается через базисные векторы, т.е. $\partial = l^1\partial_1 + l_0^i\partial_i^0$, где в силу (2.I) коэффициенты l^1 и l_0^i являются значениями базисных форм ω^1 и ω_0^i в точке x в направлении вектора ∂ (см. формулы (I.II)).

Рассмотрим в V_3 кривую $V_1 = \{x(t) \mid t \in R\}$, проходящую через точку $x = x(0)$ в направлении вектора ∂. Ей в конгруэнции изотропных прямых соответствует линейчатая поверхность, проходящая через прямую $[M, \vec{e}_0]$. Касательная плоскость к этой поверхности в точке M натянута на векторы $\vec{e}_0$ и $\partial\vec{M} = \omega^\alpha(\partial)\vec{e}_\alpha \pmod{\vec{e}_0}$, где в силу (I.I5)

$$\partial\vec{M} = l^1\vec{e}_1 + (Al^1 + Bl_0^1 + Cl_0^2)\vec{e}_2 + (El_0^1 + Gl_0^2)\vec{e}_3 \pmod{\vec{e}_0}. \qquad (2.2)$$

Такую же касательную плоскость $[M, \vec{e}_0, \partial\vec{M}]$ в точке M имеют и все другие линейчатые поверхности, образы V_1 которых проходят через точку $x \in V_3$ в направлении того же вектора ∂. Поскольку в первой дифференциальной окрестности существенны лишь тангенциальные свойства линейчатых поверхностей, то мы будем вместо понятия линейчатой поверхности пользоваться понятием линейчатой полосы, которое определяется следующим образом.

Линейчатой полосой Π_∂, проходящей через данную прямую $[M, \vec{e}_0]$ конгруэнции, называем такое соответствие

$$\Pi_\partial : M' \longrightarrow [M', \vec{e}_0, \partial\vec{M}'] \qquad (2.3)$$

между точками $M' \in [M, \vec{e}_0]$ и двумерными плоскостями $[M', \vec{e}_0, \partial\vec{M}']$, которое определяется при помощи некоторой линейчатой поверхности V_1 с касательным вектором ∂ в $x \in V_3$, как соответствие между точками прямой и касательными плоскостями к V_1 в этих точках. Плоскость $\Pi_\partial(M') = [M', \vec{e}_0, \partial\vec{M}']$ называется при этом касательной плоскостью полосы Π_∂ в точке M', а линейчатая поверхность V_1 – ее порождающей поверхностью. Подпространство $T(\partial)$ пространства ${}^1R_4$ наименьшей размерности, содержащее все касательные плоскости полосы Π_∂, называется касательным пространством полосы Π_∂. В общем случае $T(\partial)$ является трехмерным и равно $[M, \vec{e}_0, \partial\vec{M}, \partial\vec{M}']$, где M и M' – две различные точки на прямой $[M, \vec{e}_0]$. Полоса называется развертывающейся, если ее касательное пространство двумерное.

Дифференцируя радиус-вектор $\vec{M}'$ (см. (I.2)) точки M' в направлении ∂, получим, в силу (I.6) и (I.15), что

$$\partial\vec{M}' = (l^1 + \mu^0 l_0^1)\vec{e}_1 + [Al^1 + Bl_0^1 + (C + \mu^0)l_0^2]\vec{e}_2 + \\ + [El_0^1 + Gl_0^2]\vec{e}_3 \pmod{\vec{e}_0}. \tag{2.4}$$

Следовательно, переход от $\Pi_\partial(M)$ к $\Pi_\partial(M')$ определяется преобразованием $A' = A, B' = B - \mu^0 A, C' = C + \mu^0, E' = E, G' = G$ компонент фундаментального объекта первого порядка (ср. с формулами (I.19) и (I.20)) и изменением значения $l^{1\prime} = l^1 + \mu^0 l_0^1$ базисной формы ω^1. Предельным касательным направлением полосы Π_∂ (см. [6]) называется направление вектора

$$\vec{l} = \lim_{\mu_0 \to \infty} \frac{\partial\vec{M}'}{\mu^0} = l_0^1\vec{e}_1 + l_0^2\vec{e}_2 \pmod{\vec{e}_0}. \tag{2.5}$$

Этот вектор вместе с $\vec{e}_0$ определяет предельную касательную плоскость $[M, \vec{e}_0, \vec{l}]$ полосы Π_∂. Из (I.I) следует, что каждый вектор плоскости $[M, \vec{e}_0, \vec{l}]$ ортогонален вектору $\vec{e}_0$. Следовательно, предельная касательная плоскость каждой полосы полуевклидова [9].

Полосу мы будем называть псевдоевклидовой или полуевклидовой, если ее касательные плоскости во всех конечных точках псевдоевклидовы или соответственно полуевклидовы.

Поскольку касательная плоскость развертывающейся полосы постоянна по прямой, то для такой полосы имеем

$$\partial\vec{M} \parallel \partial\vec{M}' \pmod{\vec{e}_0}.$$

Тогда из формул (2.2) и (2.4) следует, что

$$l^1+\mu^0 l_0^1 = \lambda l^1,$$
$$Al^1+Bl_0^1+(C+\mu^0)l_0^2 = \lambda(Al^1+Bl_0^1+Cl_0^2),$$
$$El_0^1+Gl_0^2 = \lambda(El_0^1+Gl_0^2).$$

Отсюда получим, что либо $\lambda=1$ и $l_0^1=l_0^2=0$, т.е.

$$\partial = l^1\partial_1, \tag{2.6}$$

либо $\lambda\neq 1$ и $El_0^1+Gl_0^2=0$, а $l^1=-\frac{BG-CE}{E+AG}l_0^1$, т.е.

$$\partial=\partial_0\equiv\frac{G(BG-CE)}{E+AG}\partial_1-G\partial_1^0+E\partial_2^0. \tag{2.7}$$

Поскольку $\partial_1\vec{e}_0=0\ (\mathrm{mod}\,\vec{e}_0)$, то порождающая линейчатая поверхность полосы Π_{∂_1} является цилиндром конгруэнции и в силу этого мы называем эту полосу <u>цилиндрической.</u> Так как вектор ∂_0 является решением системы (I.I3), то полоса Π_{∂_0} порождается нецилиндрическим торсом и мы называем эту полосу <u>торсовой.</u> Из (2.5) следует, что обе эти полосы — полуевклидовы (см. [2])[2].

2.2. С другой стороны, дифференцируемое отображение $\pi: V_3$ на C_2 влечет за собой отображение (см. [7]) $d\pi_x: T_x(V_3)$ на $T_{\pi(x)}(C_2)$ соответствующих касательных пространств. В нашем случае в силу того, что I-формы ω_0^i являются базисными формами также на C_2, отображение $d\pi_x$ определяется соотношениями: $d\pi_x(\partial_1)=0$, $d\pi_x(\partial_i^0)=\partial_i^0$. Наоборот, полным прообразом $d\pi_x^{-1}(\partial^*)$ касательного к C_2 вектора $\partial^* = l_0^1\partial_1^0+l_0^2\partial_2^0$ в точке $\pi(x)$ является множество касательных к V_3 векторов $\partial=l^1\partial_1+\partial^*$, где l^1 - произвольное действительное число. В частном случае $\partial^*=0$ полный прообраз $d\pi_x^{-1}(0)$ — это множество векторов в $T_x(V_3)$, коллинеарных вектору ∂_1.

---

[2] В работе [2] мы использовали иную терминологию. Линейчатая поверхность называлась там поверхностью первого или второго рода в зависимости от того, является ее касательная полоса полу- или соответственно псевдоевклидовой (см. [9]).

Отметим здесь, что в силу определения отображения π все параллельные прямые конгруэнции отображаются в одну точку $\pi([M,\vec{e}_0])$ на C_2. Отождествляя эту точку с направлением вектора $\vec{e}_0$ и имея в виду, что

$$\partial^* \vec{e}_0 = l_0^1 \vec{e}_1 + l_0^2 \vec{e}_2 \pmod{\vec{e}_0}, \tag{2.8}$$

мы получим, в силу определения ∂^* :

$$\partial_1^\circ \vec{e}_0 = \vec{e}_1, \partial_2^\circ \vec{e}_0 = \vec{e}_2. \tag{2.9}$$

Последние формулы определяют изоморфизм $\chi : [\vec{e}_1, \vec{e}_2] \to T_{\pi(x)}(C_2)$ между векторным пространством $[\vec{e}_1, \vec{e}_2]$ и касательным к C_2 пространством $T_{\pi(x)}(C_2)$.

Пусть ∂^* некоторый зафиксированный вектор в $T_{\pi(x)}(C_2)$. Обозначим через $\Pi(\partial^*) \equiv \{\Pi_\partial \mid \partial \in d\pi_x^{-1}(\partial^*)\}$ однопараметрическое семейство полос Π_∂, для которых $\partial \in d\pi_x^{-1}(\partial^*)$. В силу (2.5) и (2.8) все полосы этого семейства имеют общую полуевклидову предельную касательную плоскость $[M, \vec{e}_0, \partial^* \vec{e}_0]$. В точке M касательные плоскости $[M, \vec{e}_0, \partial \vec{M}(l^1)]$ полос семейства $\Pi(\partial^*)$ образуют однопараметрическое семейство с параметром l^1, т.е. они определяют в точке M пространство, которое мы называем касательным к семейству $\Pi(\partial^*)$ пространством и обозначим через

$$T_M(\partial^*) \equiv [M, \vec{e}_0, \partial \vec{M}, \partial' \vec{M}], \tag{2.10}$$

где

$$\partial' = \partial + \Delta l^1 \partial_1 \in d\pi_x^{-1}(\partial^*). \tag{2.11}$$

Семейство $\Pi(\partial^*)$ называется тангенциально-вырожденным, если существуют такая точка M и неразвертывающаяся полоса Π_∂, для которых касательные пространства $T_M(\partial^*)$ и $T(\partial)$ совпадают. В этом случае каждая двумерная плоскость $[M, \vec{e}_0, \partial' \vec{M}]$ в $T_M(\partial^*)$ является одновременно касательной к $\Pi_{\partial'}$ в точке M и касательной к Π_∂ в точке M'. Следовательно, возникает взаимно однозначное соответствие между полосами $\Pi_{\partial'}$ семейства $\Pi(\partial^*)$ и точками M' прямой. При этом $\Pi_{\partial'}$ и M' соответствуют друг другу, если $[M, \vec{e}_0, \partial' \vec{M}] = [M, \vec{e}_0, \partial \vec{M'}]$, т.е. если $\partial' \vec{M} \parallel \partial \vec{M'}$, где в силу (2.11) $\partial' \vec{M} = (l^1 + \Delta l^1)\vec{e}_1 + [A(l^1 + \Delta l^1) + B l_0^1 + C l_0^2]\vec{e}_2 + (E l_0^1 + G l_0^2)\vec{e}_3 \pmod{\vec{e}_0}$.

Сравнивая последнюю формулу с (2.4), получим, что

$$l^1+\Delta l^1=\lambda(l^1+\mu^\circ l_0^1),$$
$$A(l^1+\Delta l^1)+Bl_0^1+Cl_0^2=\lambda[Al^1+Bl_0^1+(C+\mu^\circ)l_0^2]$$
$$El_0^1+Gl_0^2=\lambda(El_0^1+Gl_0^2).$$

Отсюда следует, что если семейство $\Pi(\partial^*)$ является тангенциально-вырожденным, то либо $\lambda=1$, и

$$\Delta l^1=-\mu^\circ l_0^1=-\frac{1}{A}\mu^\circ l_0^2, \tag{2.12}$$

т.е. ∂^* коллинеарен вектору

$$\partial_s^*=\partial_1^\circ+A\partial_2^\circ; \tag{2.13}$$

либо $\lambda\neq 1$ и $El_0^1+Gl_0^2=0$, т.е. ∂^* коллинеарен вектору

$$\partial_t^*=-G\partial_1^\circ+E\partial_2^\circ. \tag{2.14}$$

В последнем случае имеем

$$\Delta l^1=\frac{(AG+E)l^1\mu^\circ-G(GB-CE)\mu^\circ}{(GB-CE)-\mu^\circ(AG+E)}.$$

Эти условия являются также достаточными.

Отметим, что касательная плоскость $[M,\vec{e}_0,\partial_1\vec{M}]$ цилиндрической полосы определяется в силу (2.9) вектором

$$\partial_1\vec{M}=\vec{e}_1+A\vec{e}_2. \tag{2.15}$$

Так как плоскость $[M,\vec{e}_0,\partial_1\vec{M}]$ полуевклидова, то ее бесконечно-удаленная прямая является касательной к абсолюту C_2 в ${}^1S_3$ и определяет на C_2, в силу (2.9), направление вектора ∂_s^* (см. (2.13)). Из (2.7) следует также, что $d\pi_x(\partial_0)=\partial_t^*$. Полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

Однопараметрическое семейство $\Pi(\partial^*)$ линейчатых полос конгруэнции типа 4Б, 6 или ∞-ф. является тангенциально-вырожденным тогда и только тогда, когда оно содержит развертывающуюся полосу конгруэнции. При этом касательная плоскость развертывающейся полосы является предельной касательной плоскостью тангенциально-вырожденного семейства полос.

Отметим одно важное свойство семейства $\Pi(\partial_s^*)$. В силу того, что Δl^1 в (2.12) зависит от μ° линейно и является независимой от l^1, строение семейства $\Pi(\partial_s^*)$ окажется равномерным в следующем смысле: если некоторая плоскость $[M,\vec{e}_0,\partial\vec{M}]$, касательная к полосе Π_∂ в M, касается полосы $\Pi_{\partial'}$, где $\partial'=\partial+\Delta l^1\partial_1$, в точке $\vec{M}'=\vec{M}+\mu^\circ\vec{e}_0$, то в точке $\vec{M}'' = \vec{M}' + \mu^{\circ}\vec{e}_0$ она касается полосы $\Pi_{\partial''}$, где $\partial'' = \partial' + \Delta\iota'\partial_1$ (ср. (2.I7)) и т.д.

2.3. В силу (2.2), (2.I3) и (2.I4) касательные плоскости $[M, \vec{e}_0, \partial_s\vec{M}]$ и $[M, \vec{e}_0, \partial_t\vec{M}]$ полос семейств $\Pi(\partial_s^*)$ и $\Pi(\partial_t^*)$ определяются в точке M соответственно векторами:

$$\partial_s\vec{M} = \iota'\vec{e}_1 + (A\iota' + B + AC)\vec{e}_2 + (E + AG)\vec{e}_3 \pmod{\vec{e}_0}, \tag{2.I6}$$

$$\partial_t\vec{M} = \iota'\vec{e}_1 + (A\iota' - BG + EC)\vec{e}_2 \pmod{\vec{e}_0}, \tag{2.I7}$$

где $\partial_s \in d\pi_x^{-1}(\partial_s^*)$ и $\partial_t \in d\pi_x^{-1}(\partial_t^*)$.

Рассмотрим конгруэнцию типа 4Б, т.е. предположим, что $E + AG \neq 0$. Тогда из (2.I6) следует, что семейство $\Pi(\partial_s^*)$ состоит из псевдоевклидовых полос, общей предельной касательной плоскостью которых является полуевклидова касательная плоскость цилиндрической полосы. Это семейство является для конгруэнции типа 4Б единственным семейством $\Pi(\partial^*)$ с равномерным строением вдоль прямой конгруэнеции. В силу (2.I7) и (I.I), все полосы семейства $\Pi(\partial_t^*)$ полуевклидовы и их общей предельной касательной плоскостью является касательная плоскость торсовой полосы. Поскольку абсцисса конечного фокуса вычисляется в силу (I.I4) по формуле

$$f^{\circ} = \frac{GB - CE}{E + AG}, \tag{2.I8}$$

то в фокусе $M = F$ имеем $GB - CE = 0$, т.е. $\partial_t\vec{F} = \iota'(\vec{e}_1 + A\vec{e}_2)$.

В силу (2.I7) все полуевклидовы полосы семейства $\Pi(\partial_t^*)$, кроме торсовой полосы, касаются в фокусе цилиндрической полосы. Касательная плоскость торсовой полосы в фокусе не определена, так как в силу (I.I3) $\iota' = -f^{\circ}\iota'_0$, т.е. в фокусе $\iota' = 0$. В итоге получим, что полуевклидовы полосы конгруэнции типа 4Б ведут себя относительно конечного и бесконечного фокусов таким же образом, как все полосы конгруэнции пространства R_3 относительно своих фокусов (см. [I2]).

В случае конгруэнции типа 6 или ∞-ф. имеем в силу (I.I6)

$$\partial_t^* = -G\partial_s^*, \tag{2.I9}$$

т.е. для конгруэнции типа 6 или ∞-ф. оба тангенциально-вырожденные семейства совпадают и образуют равномерное семейство полуевклидовых полос. При этом в случае конгруэнции типа 6 все эти полосы касаются цилиндрической полосы только в бесконечно-удаленной точке прямой, а в случае ∞ -фокальной конгруэнции в силу (I.I7) во всех точках прямой, т.е. для ∞-фокальной конгруэнции семейство $\Pi(\partial_s^*)$ состоит из торсовых полос, имеющих общую касательную плоскость, касательную к цилиндру конгруэнции.

2.4. Рассмотрим в первой дифференциальной окрестности прямой конгруэнции следующие дифференциальные формы:

$$\omega^3 = (d\vec{M}, \vec{e}_0) = E\omega_0^1 + G\omega_0^2 \tag{2.20}$$

и

$$\Phi_{00} \equiv (d\,\vec{e}_0)^2 = (\omega_0^1)^2 + (\omega_0^2)^2. \tag{2.2I}$$

Дифференциальная форма Ω называется относительно-инвариантной формой (см. [5]) конгруэнции, если $\delta\Omega = \Theta(\delta)\Omega$, где δ обозначает дифференцирование по вторичным параметрам, характеризуемое тем, что $\omega^1(\delta) = \omega_0^i(\delta) = 0$, а $\Theta(\delta)$ - значение некоторой вторичной формы Пфаффа. Обозначая $\omega_a^b(\delta) = \pi_a^b$ [II], мы получим из уравнений структуры (I,7), что $\delta\omega^3 = \pi_0^0\omega^3$ и $\delta\omega_0^i = \pi_0^0\omega_0^1 - \omega_0^j\pi_j^i$. Отсюда следует, что $\delta\Phi_{00} = 2\pi_0^0\Phi_{00}$. Таким образом, линейная форма ω^3 и квадратичная форма Φ_{00} являются относительно-инвариантными формами конгруэнции. В силу (2.2I) форма Φ_{00} определяет угловую метрику конформной плоскости C_2.

Определим при помощи этих форм функцию

$$S(\varphi) \equiv \frac{\omega^3(\partial^*)}{\sqrt{\Phi_{00}(\partial^*)}} = E\cos\varphi + G\sin\varphi, \tag{2.22}$$

где

$$\cos\varphi = \frac{l_0^1}{|\partial^*|}, \quad \sin\varphi = \frac{l_0^2}{|\partial^*|}, \quad |\partial^*| \equiv \sqrt{(l_0^1)^2 + (l_0^2)^2}.$$

С каждым вектором $\partial_0^* \equiv \frac{\partial^*}{|\partial^*|} = \cos\varphi\,\partial_1^0 + \sin\varphi\,\partial_2^0$ на C_2 теперь сопоставлено число $S(\varphi)$, которое в силу (2.20) является компонентой вектора перемещения $\partial\vec{M}$, где $\partial \in d\pi_x^{-1}(\partial^*)$ в направлении изотропного базисного вектора $\vec{e}_3$. Максимальное значение ее

$$S \equiv S_{max}(\varphi) = \sqrt{E^2 + G^2}, \tag{2.23}$$

достигаемое при $\varphi = \arctan\frac{G}{E}$, является абсолютным инвариантом конгруэнции типа 4Б, 6 или ∞ -ф., потому что $dS = 0 \pmod{\omega^1, \omega_0^i}$ в силу (I.20). Отметим, что для конгруэнции любого из этих типов всегда $S \neq 0$, так как в противном случае было бы $\omega^3 = 0$, что невозможно в силу результатов пункта I.2.

Примечание: Для эллиптической, гиперболической или параболической (с конечным кратным фокусом) конгруэнции изотропных прямых можно в силу (I.9), где $D \neq 0$, выбрать форму ω^3 в качестве базисной (см. [2]). Тогда отношение $\omega^3 : \sqrt{\Phi_{00}}$ является отношением независимых форм и, следовательно, сверху неограничено.

Функция $S(\varphi)$ обращается в нуль, т.е. $\omega^3(\partial^*) = 0$ при $\varphi = -\operatorname{arctan}\frac{E}{G}$. Это возможно только тогда, когда ∂^* коллинеарен вектору ∂_t^* или $\partial^* = 0$. С другой стороны,условие $\omega^3(\partial) = 0$ характеризует в силу (2.20) полуевклидовые полосы конгруэнции. Следовательно, в случае конгруэнции типа 4Б все полуевклидовы полосы, кроме цилиндрической полосы,принадлежат к семейству $\Pi(\partial_t^*)$. Для конгруэнции типа 6 или ∞ -ф. все полуевклидовы полосы принадлежат к $\Pi(\partial_s^*) = \Pi(\partial_t^*)$.

В первой дифференциальной окрестности прямой имеется еще один инвариант конгруэнции. Именно из (2.I3) и (2.I4) следует в силу (2.9) и (I.I), что

$$U \equiv \tan\psi = \left|\frac{GA+E}{G-AE}\right|, \qquad (2.24)$$

где ψ —угол между развертывающимися полосами конгруэнции. В силу (2.I9) конгруэнции типов 6 и ∞ -ф. характеризуются условием $U = 0$.

2.5. Пусть на V_3 задано дифференцируемое поле ненулевых векторов ∂ . В конгруэнции изотропных прямых ему соответствует дифференцируемое поле полос Π_∂ . Эти полосы огибают линейчатые поверхности конгруэнции, образами которых в V_3 являются интегральные кривые поля ∂ . Например, цилиндр конгруэнции можно теперь определить как огибающую поля полос Π_{∂_1}.

Как известно [I2], точкой сжатия линейчатой поверхности называется такая точка на прямой, которая является предельным положением конца общего перпендикуляра данной и бесконечно-близкой прямой на той же поверхности. Также известно, что в случае линейчатой поверхности конгруэнции точка сжатия зависит только от направления касательной плоскости поверхности, т.е. от полосы. В работе [2] показано, что в случае конгруэнции изотропных прямых абсцисса μ° точки сжатия линейчатой поверхности с касательной полосой Π_∂ определяется системой уравнений

$$\begin{gathered}\omega^3(\partial)=0,\\ \mu^\circ=-\frac{(\partial\vec{M}_1\partial\vec{e}_0)}{(\partial\vec{e}_0)^2}.\end{gathered}\tag{2.25}$$

Точку M' с абсциссой μ°, определяемой (2.25), мы будем называть также точкой сжатия полосы Π_∂. Точки сжатия всех касательных полос линейчатой поверхности образуют стрикционную линию [I2] на этой поверхности.

Из первого уравнения (2.25) следует, что $\partial=\partial_t$, т.е. точки сжатия существуют только для полуевклидовых полос конгруэнции. При помощи уравнений конгруэнции (I.I5) находим, что

$$\mu^\circ=\frac{G-AE}{E^2+G^2}\,l^1+\frac{E(BG-CE)}{E^2+G^2}.\tag{2.26}$$

Так как μ° зависит от l^1 линейно, то в нашем случае точки сжатия всех полуевклидовых полос заполняют всю прямую $[M,\vec{e}_0]$, т.е. граничные точки [II] конгруэнции типов 4Б, 6 и ∞-ф. бесконечно удалены.

2.6. Конгруэнции рассматриваемых нами типов можно в первой дифференциальной окрестности прямой отнести к полуканоническому реперу, характеризуемому тем, что его вектор $\vec{e}_1$ принадлежит к касательной плоскости цилиндрической полосы конгруэнции. Тогда имеем в силу (2.I3) и (2.9) $\partial_s^*=\partial_1^\circ$, т.е. $A=0$. Уравнения (I.I5) конгруэнции типа 4Б имеют относительно этого репера вид:

$$\begin{gathered}\omega^2=B\omega_0^1+C\omega_0^2,\\ \omega^3=E\omega_0^1+G\omega_0^2.\end{gathered}\tag{2.27}$$

В силу $A=0$ получим из системы (I.I9), что

$$\omega_1^2=a\omega^1+b\omega_0^1+c\omega_0^2\tag{2.28}$$

и

$$dB+B\omega_0^\circ+E\omega_3^2=(b+Ca)\omega^1+(d+Cb)\omega_0^1+(e+Cc)\omega_0^2,\tag{2.29}$$

$$dC+C\omega_0^\circ+G\omega_3^2=\omega^\circ+(c-Ba)\omega^1+(e-Bb)\omega_0^1+(g-Bc)\omega_0^2.\tag{2.30}$$

Из системы (I.20) следует теперь, что коэффициенты E и G являются абсолютными инвариантами конгруэнции. При этом инвариант S выражается по-прежнему формулой (2.23), а инвариант U имеет более простой вид: $U = \tan\psi = \left|\frac{E}{G}\right|$.

Для конгруэнции типа 6 в формулах (2.27) и (2.29) выполняется в силу (I.16) дополнительное условие

$$E = 0. \qquad (2.31)$$

В случае ∞-фокальной конгруэнции дополнительные условия (I.17) принимают вид:

$$B = E = 0. \qquad (2.32)$$

Для обоих этих типов конгруэнции имеем

$$G = S,\ U = 0. \qquad (2.33)$$

Для конгруэнции типа 4Б можно построить еще другой полуканонический репер, а именно: можно направить вектор $\vec{e}_2$ по торсовой полосе. Тогда в силу (2.14) и (2.9) имеем $\partial_t^* \parallel \partial_2^\circ$, т.е. $G = 0$. Следовательно, $E = S$ и уравнения (I.15) принимают вид:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= A\omega^1 + B\omega_0^1 + C\omega_0^2, \\ \omega^3 &= \qquad\quad S\omega_0^1. \end{aligned} \qquad (2.34)$$

Поскольку теперь $U = \left|\frac{1}{A}\right|$, то $|A| = \cot\psi$.

При дальнейшей канонизации репера конгруэнции типа 4Б исходим из этого полуканонического репера, потому что в этом случае удобнее использовать те геометрические свойства конгруэнции этого типа, которые связаны с нецилиндрическим торсом.

Оба приведенные здесь полуканонические реперы совпадают в частном случае конгруэнции типа 4Б, для которой $\psi = \frac{\pi}{2}$, т.е. для которой в (2.34) имеет место еще $A = 0$.

§ 3. Канонический репер конгруэнции типа 4Б

3.I. Пусть конгруэнция типа 4Б отнесена ко второму полуканоническому реперу, т.е. пусть она задается системой Пфаффа (2.34). Формулы (I.19) и (I.20) примут тогда в силу $G = 0$ вид:

$$dA = dS = 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^1, \omega^i_0),$$
$$dB + B\omega^0_0 - S(A\omega^1_3 - \omega^2_3) = -A\omega^0 (\mathrm{mod}\ \omega^1, \omega^i_0), \qquad (3.\mathrm{I})$$
$$dC + C\omega^0_0 = \omega^0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^1, \omega^i_0)$$

и

$$\omega^2_1 = -\frac{A}{S}\omega^1 + b_1\omega^1_0 + c_1\omega^2_0, \qquad (3.2)$$

где b_1 и c_1 — некоторые коэффициенты второго порядка.

Теперь из (3.I) следует, что

$$d(B + AC) + (B + AC)\omega^0_0 - S(A\omega^1_3 - \omega^2_3) = 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^1, \omega^i_0). \qquad (3.3)$$

Поскокьку $S \neq 0$, то, варьируя вторичный параметр a^2_3 (см. [II]), соответствующий вторичной форме ω^2_3, можно выбрать такие подвижные реперы, относительно которых имеет место

$$B + AC = 0. \qquad (3.4)$$

В новом репере имеем $\partial_{s0}\vec{M} = S\vec{e}_3 (\mathrm{mod}\,\vec{e}_0)$, где вектор ∂_{s0} выделяется из $d\pi^{-1}_x(\partial^*_s)$ условием $l^1 = 0$. Следовательно, новый базисный вектор $\vec{e}_3$ выбран на псевдоевклидовой плоскости $[M, \vec{e}_0, \partial_{s0}\vec{M}]$, касающейся в силу равномерности семейства $\Pi(\partial^*_s)$ в каждой точке прямой некоторой полосы из этого семейства. Отметим, что до сих пор базисный вектор $\vec{e}_1$ не фиксирован на плоскости $[M, \vec{e}_0, \vec{e}_1]$, т.е. условие $l^1 = 0$ выделяет в точке M' для разных векторов $\vec{e}_1$ разные полосы из $\Pi(\partial^*_s)$, а именно такие, касательные плоскости которых в точке M' принадлежат к ортогональному трехмерному пространству выбранного вектора $\vec{e}_1$. Из (3.3) находим теперь в силу (3.4), что

$$A\omega^1_3 - \omega^2_3 = 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^1, \omega^i_0). \qquad (3.5)$$

Зафиксировав начало подвижного репера в фокусе, получим в силу (2.I8) и (3.I), что $C = 0$ и

$$\omega^0 = p\omega^1 + q\omega^1_0 + r\omega^2_0, \qquad (3.6)$$

где p, q, r — некоторые величины второго порядка. Поскольку в силу (3.4) теперь также $B = 0$, то мы привели уравнения конгруэнции (2.34) к виду

$$\omega^2 = A\omega^1, \quad \omega^3 = S\omega^1_0. \qquad (3.7)$$

3.2. Продолжение [II] уравнений Пфаффа (3.2) дает

$$db_1 + b_1\omega_0^0 = 0 \pmod{\omega^1, \omega_0^i}, \qquad dc_1 + c_1\omega_0^0 + \omega_3^1 = 0 \pmod{\omega^1, \omega_0^i}. \tag{3.8}$$

Отсюда следует, что за счет подходящей фиксации вторичного параметра a_3^1 в (I.3) можно выбрать подвижные реперы, относительно которых в (3.2) имеет место $c_1 = 0$. После этого форма ω_3^1 будет в силу (3.8) главной, т.е.

$$\omega_3^1 = \alpha\omega^1 + \beta\omega_0^1 + \gamma\omega_0^2. \tag{3.9}$$

Из (3.5) следует тогда, что

$$\omega_3^2 = \varepsilon\omega^1 + \zeta\omega_0^1 + \eta\omega_0^2. \tag{3.10}$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \zeta, \eta$ – новые величины третьего порядка. В результате вектор $\vec{e}_1$ зафиксируется на плоскости $[M, \vec{e}_0, \vec{e}_1]$ так, что $\partial_2^0 \vec{e}_1 = 0 \pmod{\vec{e}_0}$, т.е. вектор $\vec{e}_1$ направляется по характеристике однопараметрического семейства плоскостей $[M, \vec{e}_0, \vec{e}_1]$, ортогональных к нецилиндрическому торсу. В силу предыдущего пункта $\vec{e}_3$ теперь тоже полностью зафиксирован: вектор $\vec{e}_3$ направлен по неколлинеарному $\vec{e}_0$ изотропному направлению псевдоевклидовой плоскости $[M, \vec{e}_0, \partial_{s_0}\vec{M}]$, а вектор $\vec{e}_2$ выбран на касательной плоскости торса так, чтобы репер оказался полуизотропным (см. (I.I)).

Для полной канонизации репера остается зафиксировать параметр a_0^0 в (I.4), т.е. дать закон изменения вектора $\vec{e}_0$ при переходе от одной прямой конгруэнции к другой. Продолжая уравнение (3.6), мы получим:

$$dp = p\omega_0^0 = 0, \quad dq + 2q\omega_0^0 = 0, \quad dr + 2r\omega_0^0 = 0 \pmod{\omega^1, \omega_0^i}. \tag{3.11}$$

Поскольку вектор $\partial_2^0 \vec{F} = r\vec{e}_0$ является касательным вектором ребра возврата нецилиндрического торса, то в общем случае $r \neq 0$. В силу (3.11) можно выбрать $r = 1$ (в случае $r < 0$ надо изменять знак при векторе $\vec{e}_2$). Тогда из (3.11) следует, что

$$\omega_0^0 = \lambda\omega^1 + \mu\omega_0^1 + \nu\omega_0^2. \tag{3.12}$$

Следовательно, в третьей дифференциальной окрестности прямой все вторичные формы выражены через главные, а именно

$$\omega^2 = A\omega^1,\ \ \omega^3 = S\omega^1_0,\ \ \omega^1_3 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^1_0 + \gamma\omega^2_0,$$
$$\omega^2_1 = -\frac{A}{S}\omega^1 + b_1\omega^1_0,\ \ \omega^2_3 = \varepsilon\omega^1 + \xi\omega^1_0 + \eta\omega^2_0, \tag{3.13}$$
$$\omega^0 = p\omega^1 + q\omega^1_0 + \omega^2_0,\ \ \omega^0_0 = \lambda\omega^1 + \mu\omega^1_0 + \nu\omega^2_0$$

и репер полностью канонизирован. Система (3.13) определяет конгруэнцию типа 4Б только в том случае, если коэффициенты ее удовлетворяют продолженной системе системы (3.12), т.е. некоторым дифференциальным уравнениям в четвертой дифференциальной окрестности прямой. Следовательно, для конгруэнции типа 4Б четвертая дифференциальная окрестность является основной [4]. Отметим, что не все коэффициенты в (3.13) являются независимыми, потому что в продолженную систему входят два конечных соотношения:

$$\eta = \frac{A}{S}(\gamma S - 1) - \frac{q}{S},\ \ \alpha = \frac{1}{S}(p + 2b_1 A).$$

Выпишем еще два дифференциальных уравнения продолженной системы, а именно

$$p = -\partial^0_2 A,\qquad b_1 = \partial^0_2 \ln S.$$

Они определяют геометрический смысл коэффициентов p и b_1.

3.3. Геометрический смысл некоторых других коэффициентов следует из формул Френе для ребра возврата нецилиндрического торса (см. [13]):

$$\begin{aligned}
\partial^0_2 \vec{F} &= \vec{e}_0,\\
\partial^0_2 \vec{e}_0 &= \vec{E}_2,\\
\partial^0_2 \vec{E}_2 &= \varkappa^2\vec{e}_0 - \vec{E}_3,\\
\partial^0_2 \vec{E}_3 &= -\varkappa_2\vec{E}_2 + \varkappa^3\vec{e}_1,\\
\partial^0_2 \vec{e}_1 &= -\varkappa^3\vec{e}_0,
\end{aligned}$$

где $\vec{E}_2 \equiv \nu\vec{e}_0 + \vec{e}_2$, $\vec{E}_3 \equiv -\frac{\nu^2}{2}\vec{e}_0 - \nu\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, а для коэффициентов имеем: $\varkappa^2 \equiv \partial^0_2\nu + \frac{1}{2}(\nu)^2 - \eta$, $\varkappa^3 \equiv \gamma$, т.е. третьей кривизной ребра возврата является коэффициент γ, а вторая кривизна выражается через коэффициенты ν и η. Поскольку первая кривизна $\varkappa^1 \equiv 1$, то для ребра возврата имеем $\omega^2_0 = d\sigma$, где σ является его псевдо-дугой [13].

§ 4. Канонический репер конгруэнции типа 6

4.I. Пусть конгруэнция типа 6 отнесена к полуканоническому реперу. Тогда в первой дифференциальной окрестности она задается в силу (2.27), (2.3I) и (2.33) системой Пфаффа:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= B\omega_0^1 + C\omega_0^2, \\ \omega^3 &= S\omega_0^2. \end{aligned} \tag{4.I}$$

Продолженную систему ее образуют уравнения (2.28), (2.29) и (2.30). Отметим здесь, что в силу (2.3I) и (I.20) формула (2.28) принимает вид:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{S}\omega^1 + b\omega_0^1 + c\omega_0^2. \tag{4.2}$$

Из (2.32) следует, что для конгруэнции типа 6 имеет место $B \neq 0$. Следовательно, в силу (2.29) можно зафиксировать вторичный параметр a_0^0 в (I.4) так, чтобы $B = 1$ (случай, когда $B < 0$ вводится к этому заменой знака при $\vec{e}_1$). Теперь из (2.29) следует, что

$$\omega_0^0 = b_1\omega^1 + d_1\omega_0^1 + e_1\omega_0^2, \tag{4.3}$$

где

$$b_1 \equiv b + \frac{C}{S}, \quad d_1 \equiv d + Cb, \quad e_1 \equiv e + Cc. \tag{(4.4)}$$

Из (4.I) следует, что, выбирая B равным единице, мы выбираем форму $B\omega_0^1$ в качестве новой базисной формы ω_0^1, т.е. приводим преобразование репера (I.4), где $a_0^0 = B$. После этого имеем $\partial_1^0 \vec{M} = \vec{e}_2 (\mathrm{mod}\, \vec{e}_0)$, где $\partial_S^* = \partial_1^0$. Поскольку точка M является в силу (2.26) точкой сжатия полосы $\Pi_{\partial_1^0}$, где $\partial_1^0 \in d\pi_x^{-1}(\partial_S^*)$, то новая форма ω_0^1 является дифференциалом дуги ds стрикционной линии на огибающей поля полос $\Pi_{\partial_1^0}$. Факт, что форма ω_0^0 в (4.3) не зависит от 1-формы ω^0, характеризует равномерное строение семейства $\Pi(\partial_S^*)$, т.е. $\omega_0^1 = ds$ для стрикционных линий всех полуевклидовых поверхностей конгруэнции.

4.2. Продолжая систему (4.2) и (4.3), получим:

$$db_1 - dc = 0 \quad (\mathrm{mod}\, \omega^1, \omega_0^i),$$

$$db - \omega_3^2 = -\frac{1}{S}\omega^0 (\mathrm{mod}\, \omega^1, \omega_0^i), \tag{4.5}$$

$$dd_1 - \omega_3^1 = -b_1\omega^0 (\mathrm{mod}\,\omega^1, \omega_0^i),$$
$$de_1 - b_1\omega_3^1 - \omega_3^2 = 0 \quad (\mathrm{mod}\,\omega^1, \omega_0^i).$$

Поскольку (2.30) имеет теперь вид:

$$dC + S\omega_3^2 = \omega^0 \quad (\mathrm{mod}\,\omega^1, \omega_0^i), \tag{4.6}$$

то из (4.5) следует

$$d(d_1 + b_1 C) - \omega_3^1 + b_1 S\omega_3^2 = 0 \ (\mathrm{mod}\,\omega^1, \omega_0^i). \tag{4.7}$$

В силу последней формулы (4.5) и (4.7) можно зафиксировать вторичные параметры a_3^1 и a_3^2 в (I.3) так, чтобы

$$d_1 + b_1 C = 0 \quad \text{и} \quad e_1 = 0.$$

Из (4.5) и (4.7) следует тогда, что

$$\omega_3^1 = \alpha\omega^1 + \beta\omega_0^1 + \gamma\omega_0^2,$$
$$\omega_3^2 = \varkappa\omega^1 + \lambda\omega_0^1 + \mu\omega_0^2. \tag{4.8}$$

После этого базисные векторы $\vec{e}_\alpha$ зафиксированы. При этом $\partial_2^0\vec{e}_0 = \vec{e}_2$ и $(\partial_1^0 + C\partial_1)\vec{e}_0 = \vec{e}_1$. Зафиксированность вектора $\vec{e}_3$ определяет на прямой единственную точку $\vec{C} \equiv \vec{M} - C\vec{e}_0$, в которой $\partial_2^0\vec{C} = S\vec{e}_3$. Выбрав эту точку началом подвижного репера, получим в силу $C = 0$ из (4.6), что

$$\omega_0 = \rho\omega^1 + \sigma\omega_0^1 + \tau\omega_0^2, \tag{4.9}$$

а в силу (4.4) также $b_1 = b$.

Тем самым в третьей дифференциальной окрестности все вторичные формы выражаются через главные и репер полностью канонизирован. Конгруэнция типа 6 определяется относительно канонического репера системой Пфаффа:

$$\begin{aligned}
&\omega^2 = \omega_0^1, \quad \omega^3 = S\omega_0^2, \quad \omega_3^1 = \alpha\omega^1 + \beta\omega_0^1 + \gamma\omega_0^2,\\
&\omega_1^2 = \frac{1}{S}\omega^1 + b\omega_0^1 + c\omega_0^2, \quad \omega_3^2 = \varkappa\omega^1 + \lambda\omega_0^1 + \mu\omega_0^2,\\
&\omega_0^0 = b\omega^1, \qquad\qquad \omega^0 = \rho\omega^1 + \sigma\omega_0^1 + \tau\omega_0^2.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Продолжение этой системы дает три конечных соотношения: $\rho = \varkappa S - c + \frac{1}{S}$, $\sigma = b + \lambda S$, $\tau = \frac{\lambda - \gamma}{b} + c + \beta S$. Остальные уравнения продолженной системы являются дифференциальными уравнениями, которым должны удовлетворять коэффициенты системы (4.10). Поскольку эти уравнения относятся к четвертой дифференциальной окрестности прямой, то эта окрестность является основной [4] для конгруэнции типа 6.

§ 5. ∞ -фокальная конгруэнция

Из системы (2.27) следует, в силу (2.32), что ∞ -фокальная конгруэнция задается относительно полуканонического репера системой Пфаффа:

$$\omega^2 = C\omega_0^2\,, \quad \omega^3 = S\omega_0^2. \tag{5.I}$$

Продолжение этой системы дает:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{S}\omega^1 - \frac{C}{S}\omega_0^1 + c\omega_0^2, \tag{5.2}$$

$$dC + C\omega_0^0 + S\omega_3^2 = \omega^0 - c\omega^1 - Cc\omega_0^1 + g\omega_0^2, \tag{5.3}$$

$$dS = -Sc\omega_0^1 - e\omega_0^2. \tag{5.4}$$

Продифференцировав внешним образом уравнения (5.2) и использовав в нем (5.I) - (5.4), получим:

$$3\frac{c}{S}\omega^1\wedge\omega_0^1 + \left[dc + c\omega_0^0 + \left(c^2 + \frac{Ce}{S^2} + \frac{g}{S}\right)\omega_0^1\right]\wedge\omega_0^2 = 0. \tag{5.5}$$

Отсюда в силу независимости базисных форм ω^1 и ω_0^i следует $c\equiv 0$. Теперь из (5.5) вытекает, что, кроме того, $e\equiv g\equiv 0$. Таким образом, в системе (5.I) - (5.4) все коэффициенты второго порядка равны нулю. Поскольку продолжение уравнений (5.3) и (5.4) не дает новых уравнений, то система (5.I) - (5.4), где $c\equiv e\equiv g\equiv 0$, вполне интегрируема. Следовательно, <u>∞ -фокальная конгруэнция определяется системой (5.I) - (5.4) с точностью до постоянных.</u>

Отметим, что в каждой точке M прямой можно в силу (5.2) выбрать еще $C=0$. Тогда имеем также $S\omega_3^2 = \omega^0$. Поскольку продолжение этого уравнения не дает отличных от нуля коэффициентов второго порядка, то дальнейшая канонизация реперы не осуществима даже в точке. Полученные полуканонические реперы определяются с точностью трех свободных параметров μ^0, a_3^1, a_0^0 (см. (I.2) - (I.4)). Относительно этих реперов ∞ -фокальная конгруэнция задается вполне интегрируемой системой

$$\omega^2 = 0\,,\quad \omega^3 = S\omega_0^2,$$
$$\omega_1^2 = \frac{1}{S}\omega^1,\ \omega_3^2 = \frac{1}{S}\omega^0,$$

где инвариант S является в силу (5.4) постоянным.

Литература

1. Р.М. Гейдельман. Дифференциальная геометрия семейств подпространств в многомерных однородных пространствах. Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия 1965, М., 1967, 323-374.

2. Р. Колде. Конгруэнция изотропных прямых в пространстве $^1R_4$ и ее канонические реперы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, 253, 73-95.

3. Р.К. Колде. Фокальная классификация конгруэнции изотропных прямых $^1R_4$. Тезисы III респ. конф. математиков БССР, Минск, 1971, 41 - 42.

4. Г.Ф. Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Москв. матем. об-ва, 1953, 2, 275-382.

5. Ю.Г. Лумисте. Дифференциальная геометрия линейчатых гиперповерхностей V_3 в R_4. Матем. сб., 1960, 50, № 2, 203-220.

6. Ю.Г. Лумисте. Многомерные линейчатые поверхности эвклидова пространства. Матем. сб., 1961, 55, № 4, 411-420.

7. К. Номидзу. Группа Ли и дифференциальная геометрия. М., 1960.

8. А.П. Норден. Пространства аффинной связности. М.-Л., 1950.

9. Б.А. Розенфельд. Неевклидовы геометрии. М., 1955.

10. В.Г. Сычева. О каноническом репере конгруэнции прямых в P_4. Уч. зап. Орехово-Зуевск. пед. ин-та, 1964, 22, №3, 64-72.

11. С.П. Фиников. Метод внешних форм Картана. М.-Л., 1948.

12. С.П. Фиников. Теория конгруэнции. М.-Л., 1950.

13. M. Castagnino. Sulle formule di Frenet-Serret per le curve nulle di una V_4 riemanniana a metrica iperbolica normale. Rend. mat. e applic., 1964, 23, 439-461.

R.Kolde

Regular Null-Congruences with Multiple Infinite Focuses in Space ${}^1R_4$

Summary

A null-congruence (i.e. a three-parametrical set of null straight lines) is said to be regular if the infinite points of rays form a two-dimensional domain in the conformal plane. The paper deals with congruences of such type for which the infinite points of rays are double focuses (congruence of type 4 Б) or triple focuses (congruence of type 6). Canonical quasi-orthonormal frames for congruences of these types are constructed. Congruences for which each point of ray is a focus are also studied. They are said to be a ∞-focal. In this case canonization of frame is only partially possible.

Л и т е р а т у р а

1\. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 312 1971

УДК 517.52

И. Таммерайд

О ТЕОРЕМАХ ТАУБЕРОВА ТИПА С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ

Настоящая статья является продолжением исследований автора [5,6]. В первом параграфе предложены основы метода, используемого для вывода тауберовых теорем с остаточным членом статей [5,6]. Второй параграф посвящен применению к тауберовым проблемам суммируемости со скоростью общей тауберовой теоремы Кангро [3] об ослаблении тауберовых условий.

Пусть A — матричный метод суммирования последовательностей и $\lambda=\{\lambda_n\}$, $\mu=\{\mu_n\}$ — монотонно возрастающие последовательности положительных чисел. Следуя Кангро [2, 4], введем понятия λ-сходимости, λ-ограниченности, A-суммируемости со скоростью λ и λ-ограниченности методом A последовательности $x=\{\xi_n\}$, а также понятия сохранения λ-сходимости и λ-ограниченности методом A. Последовательность x называют λ-сходящейся, если существуют пределы[1]

$$\lim_n \xi_n = \xi \tag{0.1}$$

и

$$\lim \beta_n = \beta,$$

где

$$\beta_n = \lambda_n(\xi_n - \xi).$$

Последовательность x называют λ-ограниченной, если существует предел (0.1) и $\beta_n = O(1)$. Множество всех λ-сходящихся или λ-ограниченных последовательностей обозначa-

1) Все пределы в данной заметке конечны. Под знаком предела указание $\to\infty$ всюду опущено.

ют соответственно через c^λ или m^λ. Если последовательность λ ограничена, то

$$c^\lambda = m^\lambda = c,$$

где c — множество сходящихся последовательностей. Для произвольной последовательности λ имеем

$$c^\lambda \subset m^\lambda \subset c.$$

Матричный метод суммирования A, определенный соотношением[2]

$$\eta_n = \sum_k a_{nk} \xi_k, \tag{0.2}$$

принадлежит к классу (c^λ, c^μ) или (m^λ, m^μ), если

$$A(c^\lambda) \subset c^\mu \tag{0.3}$$

или

$$A(m^\lambda) \subset m^\mu \tag{0.4}$$

соответственно. Если при $\lambda_n = \mu_n$ справедливо соотношение (0.3), то говорят, что метод A сохраняет λ -сходимость. Если при $\lambda_n = \mu_n$ справедливо соотношение (0.4), то говорят, что метод A сохраняет λ-ограниченность. Последовательность x принадлежит к классу (A, c^λ), если последовательность $y = \{\eta_n\}$, определенная соотношением (0.2), принадлежит к классу c^λ. Говорят, что последовательность x принадлежит к классу (A, m^λ), если последовательность $y = \{\eta_n\}$, определенная соотношением (0.2), принадлежит к классу m^λ. Во всей статье N и N_0 — соответственно множества натуральных и неотрицательных целых чисел.

Символы Δ и $\bar{\Delta}$ будем называть соответственно разностями вперед и назад, причем

$$\Delta \xi_n = \xi_n - \xi_{n+1}$$

и

$$u_n = \bar{\Delta} \xi_n = \xi_n - \xi_{n-1} \quad (\bar{\Delta} \xi_0 = \xi_0).$$

§ I. О независимости тауберовых условий от порядка суммируемости

Пусть X — данное векторное пространство и L — его подпространство, на котором определен некоторый линейный опе-

---

[2] Во всей статье свободные индексы принимают значения 0, I,2,... Если у знака предела индексы суммирования опущены, то суммирование происходит по всем целочисленным индексам от 0 до ∞.

ратор s со значениями в некотором векторном пространстве K. Следуя Кангро (см. [I], стр. I23), введем общее понятие метода суммирования A, понятие A-суммируемости элемента x к сумме S относительно L, понятие L-регулярности метода A и понятие A-суммируемости порядка α. Каждый линейный оператор A, действующий из некоторого подпространства $D_A \subset X$ в пространство X, называем методом суммирования. Элемент $x \in D_A$ будем называть A-суммируемым к сумме S относительно L, если $Ax \in L$ и $S = s(Ax)$. При этом A-сумму элемента x условимся обозначать $\bar{A}x$, т.е. $\bar{A}x = s(Ax)$. Метод A называем L-регулярным, если $A(L) \subset L$ и $\bar{A}x = sx$ при всех $x \in L$. Элемент x будем называть A-суммируемым порядка $\alpha \in N_0$, если x суммируем оператором A^α, причем $E = A^0$ — единичный оператор.

<u>Лемма</u> I.I При L-регулярном операторе A из A^α-суммируемости относительно L элемента x следует E-суммируемость элемента x к той же сумме точно тогда, когда x является $(E-A)$-суммируемым к нулю относительно L.

<u>Доказательство</u> см. [I], стр. I23-I24.

Рассмотрим L-консервативный метод A как L-регулярный метод суммирования с $sx = 0$ при $x \in L$. Из леммы I.I тогда непосредственно вытекает следующее следствие.

<u>Лемма</u> I.2. При L-консервативном методе суммирования A из соотношения $A^\alpha x \in L$ следует соотношение $x \in L$ точно тогда, когда $(E-A)x \in L$.

Пусть ω — множество всех методов суммирования в пространстве X, т.е. множество всех линейных операторов A из некоторого подпространства $D_A \subset X$ в пространство X. Определяем подмножество $(A, L) \subset D_A$ как совокупность всех элементов x, A-суммируемых относительно L. Определяем подмножество $\omega(L) \subset \omega$ как некоторую совокупность элементов множества ω, удовлетворяющую условию: существует такой L-консервативный метод суммирования $A \in \omega(L)$, называемый образующим множества $\omega(L)$, что при каждом элементе $B \in \omega(L)$ существует такое число $\alpha \in N$, что

$$(B, L) \subset (A^\alpha, L).$$

<u>Теорема</u> I.I. Если $B \in \omega(L)$, $Bx \in L$ и A — образующий множества $\omega(L)$, то

$$(E-A)x\in L \tag{I.I}$$

достаточно для

$$x\in L. \tag{I.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о непосредственно следует из леммы I.2 по выбору элементов множества $\omega(L)$.

Если при некотором числе $\alpha\in N$ справедливо

$$(B, L)\supset(A^{\alpha}, L),$$

то (I.I) является и необходимым для (I.2).

С л е д с т в и е I.I. Если при некотором числе $\alpha\in N$ справедливо [3]

$$x\in(C^{\alpha}, m^{\lambda})$$

и

$$H\in(m^{\lambda}, m^{\lambda}), \tag{I.3}$$

то

$$(E-H)x\subset m^{\lambda} \tag{I.4}$$

необходимо и достаточно для

$$x\in m^{\lambda}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X — пространство всех числовых последовательностей (с вещественными или комплексными элементами) и $L=m^{\lambda}$. При условии (I.3) по теореме 4 статьи [5] справедливо

$$(C^{\alpha}, m^{\lambda})=(H^{\alpha}, m^{\lambda}) \quad (\alpha\in N). \tag{I.5}$$

Следовательно, если $x\in(C^{\alpha}, m^{\lambda})$ с $\alpha\in N$, то по (I.5) находим, что $x\in(H^{\alpha}, m^{\lambda})$. Так как $x\in(H^{\alpha}, m^{\lambda})$ и по (I.3) метод суммирования арифметических средних H является m^{λ}-консервативным, то по лемме I.2 справедливо заключение следствия.

С л е д с т в и е I.2. Пусть при некотором числе $\alpha>0$ справедливо

$$x\in(C^{\alpha}, m^{\lambda}).$$

Если справедливы (I.3) и (I.4), то

$$x\in m^{\lambda}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X — пространство всех числовых последовательностей (с вещественными или

[3] Начиная с первого параграфа последовательности λ и μ неограничены. В этой статье C^{α} и H^{α} — соответственно методы суммирования Чезаро и Гельдера.

комплексными элементами), $L=m^\lambda, \omega(m^\lambda)$ — совокупность всех методов суммирования H^k с $k\in N_0$ и C^β с $\beta>0$. Так как при условии (I.3) справедливы соотношения (I.5),

$$\frac{\lambda_n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda_k}=O(1), \tag{I.6}$$

то образующим множества $\omega(m^\lambda)$ можно выбрать метод суммирования H. Завершаем доказательство применением теоремы I.I.

<u>Следствие</u> I.3. Пусть при некотором числе $0<\tau<1$ справедливо

$$x\in(E_\tau, m^\lambda),$$

где[4] $\lambda\in\Lambda$ и E_τ — метод суммирования Эйлера-Кноппа. Если справедливо

$$(E-E_{1/2})\,x\in m^\lambda,$$

то

$$x\in m^\lambda.$$

<u>Доказательство.</u> Пусть X — пространство всех числовых последовательностей (с вещественными или комплексными элементами), $L=m^\lambda$ и $\omega(m^\lambda)$ — совокупность всех методов суммирования E_τ с $0<\tau<1$. Так как при $\lambda\in\Lambda$ и при каждом числе $\tau\in(0,1)$ существует такое число $n(\tau)\in N$, что при $n\geq n(\tau)$ имеем (см. доказательство теоремы I статьи [6])

$$(E_\tau, m^\lambda)\subset(E^n_{1/2}, m^\lambda),$$

то образующим множества $\omega(m^\lambda)$ можно выбрать метод суммирования $E_{1/2}$. Завершаем доказательство применением теоремы I.I.

§ 2. Ослабление тауберовых условий

Пусть X — аддитивная группа всех последовательностей (с вещественными или комплексными элементами), $L\subset X$ — некоторая ее подгруппа, $\Gamma\subset X$ — произвольное подмножество и Y — произвольное множество. Следуя Кангро [3], введем общие понятия метода суммирования A и L-регулярности метода A,

---

4) Последовательность λ принадлежит к множеству Λ, если существует такое число $\nu\in(0,1)$, что $\lambda_n=O(\lambda_{[n\nu]})$.

подходящие при исследовании вопроса об ослаблении тауберовых условий, а также понятие L-тауберова условия.

Каждый оператор

$$\mathcal{A} : \mathcal{A}^* \to Y,$$

определенный на подмножестве $\mathcal{A}^* \subset X$, будем называть методом суммирования последовательностей. Метод $\mathcal{A}$ считаем аддитивным, если подмножество $\mathcal{A}^*$ является подгруппой в X. Пусть на подгруппе L задан оператор

$$S : L \to Y.$$

Метод $\mathcal{A}$ называем L-регулярным (относительно S), если

$$\mathcal{A}^* \supset L, \quad \mathcal{A}|L = S,$$

где символ $\mathcal{A}|L$ означает сужение оператора $\mathcal{A}$ на L. Пусть $T_0 \subset X$ — некоторое подмножество группы X. Условие $x \in T_0$ будем называть L-тауберовым для метода $\mathcal{A}$, если

$$\mathcal{A}^* \cap T_0 \subset L, \quad \mathcal{A}|T_0 = S|T_0.$$

Числовая последовательность $\{\varepsilon_n\}$ называется множителем суммируемости класса $[\Gamma, L]$, коротко $\{\varepsilon_n\} \in [\Gamma, L]$, если из соотношения $\{\xi_n\} \in \Gamma$ вытекает соотношение $\{\varepsilon_n \xi_n\} \in L$. Пусть β_n — отличные от нуля числа такие, что $\Delta\beta_n \neq 0$, а α_n — числа, отличные от нуля при $n \in N$.

<u>Т е о р е м а   2.I.</u> Пусть A — матричный метод суммирования последовательностей, сохраняющий λ-ограниченность (соответственно λ-сходимость).
Если

$$\left\{ \frac{\beta_n}{\alpha_{n+1}} \right\} \in [\Gamma, L], \tag{2.I}$$

$$\left\{ \frac{\beta_n \bar{\Delta} \alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}} \right\} \in [\Gamma, \Gamma] \tag{2.2}$$

и условие $\{\alpha_n u_n\} \in \Gamma$ является L-тауберовым для метода A, то условие

$$\left\{ \frac{1}{\beta_n} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k \right\} \in \Gamma \tag{2.3}$$

также L-тауберово для метода A, причем $L = m^\lambda$ в случае сохранения λ-ограниченности и $L = c^\lambda$ в случае сохранения λ-сходимости.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть условие $\{\alpha_n u_n\} \in r$ является L-тауберовым для метода A. Выбираем оператор S как нулевой оператор на подгруппе L группы X и оператор $\mathcal{A}$, называемый методом суммирования последовательностей, как нулевой оператор на подгруппе (A, L). Ввиду аддитивности матричного метода A, метод $\mathcal{A}$ также аддитивен. Так как метод A сохраняет λ-ограниченность (соответственно λ-сходимость), то по выбору операторов S и $\mathcal{A}$ метод $\mathcal{A}$ является L-регулярным относительно S. По выбору оператора $\mathcal{A}$ имеем, что L-тауберовы условия для методов A и $\mathcal{A}$ совпадают, т.е. условие $\{\alpha_n u_n\} \in r$ является L-тауберовым для метода $\mathcal{A}$. Если условие $\{\alpha_n u_n\} \in r$ является L-тауберовым для L-регулярного метода суммирования $\mathcal{A}$ и справедливы соотношения (2.I), (2.2), то условие (2.3) также L-тауберово для метода $\mathcal{A}$ (см. [3], теорема 2). Так как L-тауберовы условия для методов A и $\mathcal{A}$ совпадают, то условие (2.3) является L-тауберовым для метода A.

С л е д с т в и е 2.I. Пусть A – матричный метод суммирования последовательностей, сохраняющий λ-ограниченность. Если при $\varphi_n \neq 0$ с $n \in N$ условие $\varphi_n \lambda_n u_n = O(1)$ является m^λ-тауберовым для метода A, то при соотношении $\lambda_n = O(\Delta(\varphi_n \lambda_n))$ с $\varphi_{n+1}\lambda_{n+1}\varphi_{n-1}\lambda_{n-1} \neq \varphi_n^2 \lambda_n^2$ условие

$$\Delta(\varphi_n\lambda_n)\sum_{k=0}^{n}\varphi_k\lambda_k u_k = O(\varphi_{n+1}\lambda_{n+1})$$

или при соотношении $\Delta(\varphi_n\lambda_n) = O(\lambda_n)$ с $\varphi_{n+1}\lambda_{n+1}\lambda_{n-1} \neq \varphi_n \lambda_n^2$ условие

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n}\varphi_k\lambda_k u_k = O(\varphi_{n+1}\lambda_{n+1})$$

также m^λ-тауберово для метода A.

Д о к а з а т е л ь с т в о непосредственно следует из теоремы 2.I, если выбрать $r = m$ и $\alpha_n = \varphi_n\lambda_n$.

С л е д с т в и е 2.2. Пусть A — матричный метод суммирования последовательностей, сохраняющий λ-сходимость. Если при $\varphi_n \neq 0$ с $n \in N$ условие $\varphi_n\lambda_n u_n = O(1)$ является c^λ-тауберовым для метода A, то при соотношениях

$$\beta_n \Delta(\varphi_n\lambda_n) = O(\varphi_{n+1}\lambda_{n+1}),$$

$$\beta_n \lambda_n = o(\varphi_{n+1}\lambda_{n+1})$$

и $\beta_n \neq 0$, $\Delta\beta_n \neq 0$ условие

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi_k \lambda_k u_k = O(\beta_n)$$

также C^{λ} - тауберово для метода A .

Доказательство непосредственно следует из теоремы 2.I, если выбрать $r = m$ и $\alpha_n = \varphi_n \lambda_n$.

Теорема 2.2. Если точные порядки возрастания величин λ_n и $\Delta[(n+1)\lambda_n]$ совпадают, т.е. существуют такие числа $C_1, C_2 > 0$, что $C_1 \lambda_n < |\Delta[(n+1)\lambda_n]| < C_2 \lambda_n$, и справедливы соотношения (I.3),

$$x \in (C^{\alpha}, m^{\lambda}) \quad (\alpha > 0),$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1) \lambda_k u_k = O(n+1), \tag{2.4}$$

то

$$x \in m^{\lambda}.$$

Доказательство. При условии (I.3) справедливы (I.5) и (I.6), и так как $x \in (C^{\alpha}, m^{\lambda})$ с $\alpha > 0$,то существует (см. доказательство теоремы 2 статьи [5]) такое число $k \in N$, что

$$x \in (H^k, m^{\lambda}).$$

При условии (I.3) также справедливо

$$H^k \in (m^{\lambda}, m^{\lambda}), \tag{2.5}$$

а по теореме 6 статьи [5] условие

$$(n+1)\lambda_n u_n = O(1)$$

является m^{λ}-тауберовым для метода H^k. Так как по соотношению (2.5) метод суммирования H_k сохраняет λ-ограниченность и при условии (I.3) имеем $\lambda_{n+1} = O(\lambda_n)$, то при $\varphi_n = n+1$ из следствия 2.I получаем, что условие (2.4) также m^{λ}-тауберово для метода H^k . Следовательно, $x \in m^{\lambda}$.

Следствие 2.3. Если справедливы соотношения (I.3), (2.4),

$$\Delta^2(1/\lambda_n) \geq 0 \tag{2.6}$$

и при некотором числе $\alpha > 0$ имеем

$$x \in (C^{\alpha}, m^{\alpha}),$$

то

$$x \in m^{\lambda}.$$

Соотношение (I.3) справедливо точно тогда, когда справедливо соотношение (I.6). При помощи преобразования Абеля из

(I.6) вытекает, что

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\Delta(1/\lambda_k) = O(n+1)$$

и

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)(k+2)\Delta^2(1/\lambda_k) + \lambda_n n(n+1)\Delta(1/\lambda_{n-1}) = O(n+1). \quad (2.7)$$

Так как $\Delta(1/\lambda_n) \geq 0$, то по условию (2.6) из (2.7) выводим, что

$$n\lambda_n \Delta(1/\lambda_{n-1}) = O(1),$$

т.е.

$$(n+1)\Delta\lambda_n = O(\lambda_n). \quad (2.8)$$

С одной стороны, если метод H сохраняет λ-ограниченность, то $\lambda_{n+1} = O(\lambda_n)$ и при соотношении (2.8) следует, что

$$\Delta[(n+1)\lambda_n] = (n+1)\Delta\lambda_n - \lambda_{n+1} = O(\lambda_n). \quad (2.9)$$

С другой стороны, при монотонно возрастающих последовательностях положительных чисел λ справедливо соотношение

$$\lambda_n = O(\Delta[(n+1)\lambda_n]). \quad (2.10)$$

Следовательно, ввиду (2.9) и (2.10) точный порядок возрастания величин λ_n и $\Delta[(n+1)\lambda_n]$ совпадает и следствие является частным случаем теоремы 2.2.

Теорема 2.3. Если последовательности λ и x удовлетворяют условиям

$$\lambda \in \Lambda,$$

$$\Delta(\lambda_n\sqrt{n+1}) = O(\lambda_n), \quad (2.11)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k u_k \sqrt{k+1} = O(\sqrt{n+1}) \quad (2.12)$$

и при некотором числе $\tau \in (0,1)$ имеем

$$x \in (E_\tau, m^\lambda),$$

то

$$x \in m^\lambda.$$

Доказательство. Если $\lambda \in \Lambda$, то по лемме 4 статьи [6] метод суммирования $E_\tau \in (m^\lambda, m^\lambda)$. По теореме I статьи [6] условие $\lambda_n u_n \sqrt{n+1} = O(1)$ является m^λ-тауберовым для метода E_τ, и так как при $\lambda \in \Lambda$ справедливо $\lambda_{n+1} = O(\lambda_n)$, то ввиду (2.II) по следствию 2.I условие (2.I2) является m^λ-тауберовым. Следовательно,

$$x \in m^\lambda.$$

<u>Следствие</u> 2.4. Пусть последовательности $\lambda \in \Lambda$ и x удовлетворяют условию (2.I2), причем последовательность $\{\lambda_{n+1}/\lambda_n\}$ монотонно убывает. Если при некотором числе $\tau \in (0,1)$ имеем

$$x \in (E_\tau, m^\lambda),$$

то

$$x \in m^\lambda.$$

<u>Доказательство.</u> Если $\lambda \in \Lambda$, то по выбору элементов множества Λ существует число $M > 1$ такое, что

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{[n/2]}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \cdot \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-2}} \cdots \frac{\lambda_{[n/2]+2}}{\lambda_{[n/2]+1}} \cdot \frac{\lambda_{[n/2]+1}}{\lambda_{[n/2]}} \leq M. \tag{2.I3}$$

Ввиду монотонного убывания последовательности $\{\lambda_{n+1}/\lambda_n\}$ и соотношения (2.I3) получаем

$$\lambda_n \leq M^{2/n} \lambda_{n-1}. \tag{2.I4}$$

Так как

$$M^{2/n} = 1 + O\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

то из (2.I4) следует

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - 1 = O\left(\frac{1}{n+2}\right). \tag{2.I5}$$

Из (2.I5) вытекает справедливость соотношения (2.II) и по теореме 2.3 имеем $x \in m^\lambda$.

<u>Теорема</u> 2.4. Если точные порядки возрастания величин λ_n и $\Delta[(n+1)\lambda_n]$ совпадают и метод суммирования H сохраняет λ-сходимость, то условие

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)\lambda_k u_k = o(n+1). \tag{2.I6}$$

является c^λ-тауберовым для метода C^α в $\alpha \in N$.

Доказательство. Если метод H сохраняет λ-сходимость, то по теореме 5 статьи [5] справедливо

$$(H^{\alpha}, c^{\lambda}) = (C^{\alpha}, c^{\lambda}) \quad (\alpha \in N).$$

Следовательно, если метод H сохраняет λ-сходимость и $x \in (C^{\alpha}, c^{\lambda})$ с $\alpha \in N$, то $x \in (H^{\alpha}, c^{\lambda})$.

По теореме 3 статьи [5] условие

$$(n+1)\lambda_n u_n = o(1)$$

является c^{λ}-тауберовым для метода H^{α}, и так как метод H сохраняет λ-сходимость, то по лемме 13 статьи [5] метод H^{α} также сохраняет λ-сходимость. Поскольку точные порядки возрастания величин λ_n и $\Delta[(n+1)\lambda_n]$ совпадают, то при $\varphi_n = n+1$ из следствия 2.2 получаем, что условие (2.16) является c^{λ}-тауберовым для метода H^{α}. Следовательно, если $x \in (C^{\alpha}, c^{\lambda})$, то при условиях теоремы $x \in c^{\lambda}$, т.е. условие (2.16) также c^{λ}-тауберово для метода C^{α}.

Следствие 2.5. Если справедливы соотношения (2.6), (2.16),

$$H \in (c^{\lambda}, c^{\lambda})$$

и при некотором числе $\alpha \in N$ имеем

$$x \in (C^{\alpha}, c^{\lambda}),$$

то

$$x \in c^{\lambda},$$

Доказательство. Если метод H сохраняет λ-сходимость, то он сохраняет и λ-ограниченность. При условии (2.6) совпадают точные порядки возрастания величин λ_n и $\Delta[(n+1)\lambda_n]$. Тогда из теоремы 2.4 непосредственно следует, что $x \in c^{\lambda}$.

Литература

1. Г. Кангро. О независимости тауберовых условий от порядка суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, 220, 122-130.

2. Г. Кангро. О множителях суммируемости типа Бора-Харди для заданной скорости. I. Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем, 1969, 18, № 2, 137-146.

3. Г. К а н г р о. Об ослаблении тауберовых условий. Изв. АН ЭССР, Физ.-Матем., 1970, 19, № 1, 24-33.

4. Г. К а н г р о. Множители суммируемости для рядов, λ-ограниченных методами Рисса и Чезаро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 136-154.

5. И. Т а м м е р а й д. Тауберовы теоремы с остаточным членом для методов суммирования Чезаро и Гельдера. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 161-170.

6. И. Т а м м е р а й д. Тауберовы теоремы с остаточным членом для метода суммирования Эйлера-Кноппа. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 171-182.

I.Tammeraid

On Tauberian Remainder Theorems

S u m m a r y

In this paper is presented:

a) A method to derive Tauberian remainder theorems for some classes of matrix methods of summability.

b) A method to weaken Tauberian conditions in Tauberian remainder theorems.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А №312 1971

УДК 517.512.6

И. Таммерайд

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ТЕОРЕМЫ АБЕЛЕВА И ТАУБЕРОВА ТИПА С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ

Цель этой статьи — найти некоторую связь между проблемами суммируемости со скоростью и теории приближения функции, а затем применить полученные в заметках [28, 29] результаты к изучению проблем приближения функций. Точно так же, как в статье [30] настоящего сборника введем понятия λ-ограниченности и λ-ограниченности методом А последовательности $x=\{\xi_n\}$, а также понятие сохранения λ-ограниченности методом А.

Наилучшим приближением функции[I)] $f(x)\in L^p$ с $1\leq p\leq\infty$ при помощи тригонометрических полиномов порядка $\leq n$ называют величину $E_n^p(f)$, заданную формулой

$$E_n^p(f)=\inf_{\alpha_k,\beta_k}\left\| f(x)-\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right\|_{L^p}.$$

Модулем гладкости порядка k функции $f(x)\in L^p$ называют величину $\omega_k^p(h,f)$, заданную формулой

$$\omega_k^p(h,f)=\sup_{|t|\leq h}\left\|\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}f(x+\nu t)\right\|_{L^p},$$

причем

$$\omega_1^p(h,f)=\omega^p(h,f).$$

Отклонением функции $f(x)\in L^p$ от А-преобразованных частичных сумм Фурье порядка n этой функции называют величину $R_n^p(f,A)$ заданную формулой

I) В этой статье L^∞ — пространство функций, непрерывных на всей числовой оси.

$$R_n^p(f,A)=\| f(x)-U_n(f,x,A)\|_{L^p},$$

где $U_n(f,x,A)$ – A-преобразованные частичные суммы ряда Фурье порядка n функции $f(x)$, а A – матричный метод суммирования.

§ I. Линейные процессы приближения функций многочленами

В основе теории приближения функций действительного переменного лежат первая и вторая теоремы Вейерштрасса. Они утверждают, что для любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ существует последовательность обыкновенных или соответственно тригонометрических многочленов, равномерно сходящихся на $[a,b]$ к $f(x)$. Теоремы Вейерштрасса справедливы и при приближении функций из пространства L^p с $1\leqslant p\leqslant\infty$ (см. [I], стр. 46). В связи с теоремами Вейерштрасса возникает задача об изучении наиболее удобных в том или ином отношении способов построения для каждой рассматриваемой функции $f(x)$ последовательности аппроксимирующих ее многочленов. Если пользоваться терминологией функционального анализа, то всякому такому способу соответствует некоторая последовательность конечномерных полиномиальных операторов $\{U_n\}$, определенных в рассматриваемом функциональном пространстве F и отображающих его конечномерные подпространства $F_n (F_n\subset F_{n+1})$ многочленов порядка $\leqslant n$. С точки зрения скорости стремления $U_n(f)$ к $f(x)$ по норме в F при $n\to\infty$ самой выгодной является последовательность операторов, приводящих в соответствие каждой функции $f(x)$ ее многочлены наилучшего приближения, но такие операторы не всегда линейны (см. [3I], стр. 478).

Нелинейность в общем случае этих операторов значительно затрудняет изучение, а тем более эффективное построение соответствующих многочленов. Если ограничиться лишь классом линейных полиномиальных операторов, то исследование становится более доступным (см. Лозинский [I8,20,2I], Берман [4, 5] и Стечкин [25]). Например, Стечкин [25] показал, что если периодическая, периода 2π, функция $f(x)$ принадлежит к классу L^p с $1\leqslant p\leqslant\infty$, то существует линейный метод приближения $A_n(f)$, отображающий класс L^p в подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$ и такой, что для любой функции $f(x)\in L^p$ выполняется неравенство

$$\| f(x)-A_n(f)\|_{L^p}<\frac{3}{2}\,\omega^p\left(\frac{\pi}{n},f\right),$$

причем этот метод является одним и тем же для всех рассматриваемых пространств L^p с $1\leq p\leq\infty$. Важную роль при приближении функций линейными полиномиальными операторами играет следующая известная теорема Банаха (см. [31], стр. 479): для того, чтобы последовательность линейных операторов $\{U_n\}$, отображающих линейное нормированное пространство F, в свою очередь обладала свойством

$$\lim_n \| f-U_n(f)\|_F=0 \qquad (\text{I.I})$$

для всех функций $f\in F$, необходимо выполнение условия

$$\| U_n\| = \sup_{\|f\|_F\leq 1}\| U_n(f)\|_F = O(1).$$

Последовательность операторов $\{U_n\}$, приводящая каждой функции f в соответствие ее многочлены наилучшего приближения порядка $\leq n$, кроме свойства (I.I), обладает еще тем свойством, что при любом n всякий многочлен порядка $\leq n$ переводится оператором U_n в самого себя, т.е. если $f(x)$ – такой многочлен, то $U_n(f)=f(x)$. Известно (см. [31], стр. 479-480), что этими двумя свойствами в пространстве L^p с $1<p<\infty$ обладает последовательность частичных сумм разложения в ряд Фурье этой функции по тригонометрической системе, но в пространстве L^∞ этими двумя свойствами не обладают одновременно ни алгебраические, ни тригонометрические многочлены. Наиболее простым и естественным примером процесса аппроксимации непрерывных функций является приближение их последовательными частичными суммами Фурье (в периодическом случае — относительно тригонометрической системы, а в случае конечного отрезка $[a,b]$ - относительно системы полиномов Чебышева $\cos n \arccos\frac{2x-a-b}{b-a}$) или интерполирование по формуле Лагранжа (см. [31], стр. 184-192). Но ни частные суммы Фурье, ни интерполяционные полиномы Лагранжа ни при какой системе узлов сами по себе непригодны как аппарат для равномерного приближения на всем классе функций (см. [31], стр. 482-483). Возникает вопрос, каким образом можно, отправляясь от разложения в ряд Фурье или от интерполяционной формулы Лагранжа, путем того или иного видоизменения указанных процессов добиться равномерной сходимости полученных многочленов для любой непрерывной функции. Одним из наиболее распространенных способов для достижения этой цели является суммирование рядов Фурье. Тогда естественно, что при исследовании таких проблем нас интересуют прямые и обратные теоремы суммируемости со скоростью, т.е. теоремы абелева и тауберова типа с остаточным членом.

§ 2. О λ-ограниченных методах приближения

Пусть X — линейное нормированное пространство и $X_1 \subset X$ — всюду плотное в X подпространство. Пусть $\mathfrak{M}(X, X_1)$ — множество всех операторов из пространства X в подпространство X_1. Через $\mathfrak{N}(X, X_1)$ будем обозначать множество всех последовательностей $A = \{A_n\}$, где $A_n \in \mathfrak{M}(X, X_1)$. Множество $\mathfrak{P}(\mathfrak{N}, \mathfrak{N})$ определяем как совокупность всех операторов, переводящих каждый элемент множества $\mathfrak{N}(X, X_1)$ во множество $\mathfrak{N}(X, X_1)$. Элемент $A \in \mathfrak{N}(X, X_1)$ будем называть λ-ограниченным методом приближения на подмножестве $V \subset X$ элементами подпространства X_1, если при каждом $x \in V$ имеем[2])

$$\lambda_n \| x - A_n x \| = O(1).$$

Множество всех λ-ограниченных методов приближения на подмножестве $V \subset X$ элементами подпространства X_1 будем обозначать через $\mathfrak{N}(X, X_1, \lambda, V)$. Возникнут следующие проблемы:

1^0 При каких условиях, наложенных на оператор $\varphi \in \mathfrak{P}(\mathfrak{N}, \mathfrak{N})$, из $A \in \mathfrak{N}(X, X_1, \lambda, V)$ следует $\varphi A \in \mathfrak{N}(X, X_1, \mu, V)$.

2^0 При каких условиях, наложенных на оператор $\varphi \in \mathfrak{P}(\mathfrak{N}, \mathfrak{N})$ и на подмножество $W \subset V$, из $\varphi A \in \mathfrak{N}$ $X, X_1, \lambda, V)$ и $A \bar{\in} \mathfrak{N}(X, X_1, \lambda, V)$ следует $A \in \mathfrak{N}(X, X_1, \lambda, W)$.

Здесь мы предложим частичное решение этих проблем при некоторых дополнительных ограничениях.

Пусть $A_n, B_n \in \mathfrak{M}(X, X_1)$ — линейные операторы. Зафиксируем оператор $\varphi_0 \in \mathfrak{P}(\mathfrak{N}, \mathfrak{N})$ при помощи соотношения

---

2) Здесь величина $O(1)$ зависит, вообще говоря, от элемента $x \in V$.

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} A_k , \qquad (2.1)$$

где c_{nk} $(k \leqslant n)$ — комплексные числа, причем

$$\sum_{k=0}^{n} c_{nk} = 1.$$

Теорема 2.1. Если $\varphi_0 A \in (X, X_1, \lambda, V)$ и $A \in \mathfrak{N}(X, X_1, \lambda, V)$, то $A \in \mathfrak{N}(X, X_1, \lambda, W)$, где

$$W = \left\{ x : x \in V,\ \lambda_k \left| \sum_{\nu=0}^{k} c_{n\nu} \right| \left\| \Delta A_k x \right\| = O(c_{nk})\ (n \geqslant k) \right\}$$

и C — регулярный матричный метод суммирования последовательностей, определенный треугольной матрицей (c_{nk}), сохраняющий λ -ограниченность.

Доказательство. По условию теоремы при каждом $x \in V$ имеем

$$\lambda_n \| x - B_n x \| = O(1).$$

Достаточно доказать, что справедливо

$$\lambda_n \| (B_n - A_n) x \| = O(1).$$

При помощи (2.1), преобразования Абеля, выбора метода суммирования C и подпространства W получаем, что

$$\lambda_n \| (B_n - A_n) x \| = \lambda_n \left\| \sum_{k=0}^{n} c_{nk} (A_k - A_n) x \right\| =$$

$$= \lambda_n \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{\nu=0}^{k} c_{n\nu} \right) \Delta (A_k x) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_n \sum_{k=0}^{n-1} \left| \sum_{\nu=0}^{k} c_{n\nu} \right| \left\| \Delta (A_k x) \right\| =$$

$$= O(\lambda_n) \sum_{k=0}^{n} \frac{|c_{nk}|}{\lambda_k} = O(1).$$

Теорема 2.2. Пусть X — банахово пространство, оператор $\varphi_0 \in \mathfrak{P}(\mathfrak{N}, \mathfrak{N})$ определен соотношением (2.1) и C — регулярный матричный метод суммирования последовательностей, определенный нижней треугольной матрицей (c_{nk}), удовлетворяющей условию

$$\mu_n \sum_{k=0}^{n} \frac{|c_{nk}|}{\lambda_k} = O(1). \qquad (2.2)$$

Если $A \in \mathfrak{N}(X, X_1, \lambda, V)$, то $B \in \mathfrak{N}(X, X_1, \mu, V)$.

Доказательство следует из примечания I к теореме I статьи [12].

§ 3. Приближение функции ее преобразованными частичными суммами Фурье

Первые оценки уклонения функции $f(x)$ от арифметических средних частичных сумм Фурье этой функции, если функция $f(x)$ принадлежит к классу $Lip_D \beta$ или L^∞, принадлежат С.Н. Бернштейну и И.П. Натансону (см. [38], стр. 418). Центральной теоремой, в смысле следующих обобщений и применений, является теорема Стечкина (см. [24], стр. 48). Стечкин доказал: если [3] $f(x)$ — непрерывная функция, то

$$\|\sigma_n(f,x)-f(x)\|_{L^\infty} \leq \frac{B}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} E_\nu^\infty(f), \tag{3.1}$$

где $\sigma_n(f,x)$ — арифметические средние частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ и B — абсолютная постоянная. В той же работе Стечкина отмечается, что оценка (3.I) справедлива и для любого пространства L^p с $1 \leq p < \infty$. Ульянов [38] и Буадзе [6] установили оценки уклонения функции $f(x) \in L^p$ от чезаровских средних порядка $\alpha > 0$ ряда Фурье этой функции. Тиман [32, 33, 34, 35], Ульянов [38], Ковальчук [14], Кокилашвили [15] и Баскаков [23] установили оценки уклонения функции $f(x) \in L^p$ с $1 \leq p \leq \infty$ от преобразованных частичных сумм Фурье этой функции для некоторого определенного класса матричных методов суммирования рядов. Разные оценки при конкретных проблемах приближения различными конкретными конечномерными операторами установили Ульянов [38], Динцен [7,8,9], Ковальчук [13], Джафаров [10,11], Бабаев [2], Лейндлер [40], Пономаренко [22], Кокилашвили [16,17], Турецкий [36,37] и другие. Некоторые оценки приближения дифференцируемых функций установили Суетин [26], Го Чжу-жуй [39], Тайков [27], Баусов [23] и Бердышев [23]. Так как m^λ-тауберовы теоремы заметок [28,29] справедливы и при суммировании последовательностей, элементы которых принадлежат к некоторому банахову пространству, то эти теоремы и

---

[3] Во всем этом параграфе мы исследуем только периодические, периода 2π, функции $f(x)$.

теоремы 2.I и 2.2 позволяют исследовать в некотором смысле взаимосвязь между оценками, установленными в вышеотмеченных статьях, уклонения функции от некоторых конечномерных операторов. Наш метод основывается на свойствах сохранения λ-ограниченности применяемым методом суммирования. В связи с этим у нас появляется одно дополнительное условие, т.е. условие сохранения λ-ограниченности. Выходит, что при изучении структурных и конструктивных характеристик функций особое место занимают те функции, у которых последовательность наилучших приближений $\{E_n^p\}$ или модуль гладкости ω_k удовлетворяет какому-либо специальному дополнительному условию. При $1 \leq p < \infty$ Тиман (см. [3I], стр. 4I6-4I9) доказал, что если $f(x) \in L^p$ имеет последовательность наилучших приближений $\{E_n^p(f)\}$, удовлетворяющую условию

$$\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{k-1} E_\nu^p(f) = O\left((n+1)^k E_n^p(f)\right) \quad (k \in N), \tag{3.2}$$

то точный порядок убывания наилучших приближений $E_n^p(f)$ совпадает с порядком величины $\omega_k^p\left(\frac{1}{n}, f\right)$. При $p=\infty$ эквивалентные утверждения содержатся в работах [3] и [I9]. Если функция $f(x)$, у которой существует производная $f^{(r)}(x) \in L^p$ с $1 \leq p \leq \infty$, имеет последовательность наилучших приближений $\{E_n^p(f)\}$, удовлетворяющую условиям

$$\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{k+r-1} E_\nu^p(f) = O\left((n+1)^{k+r} E_n^p(f)\right) \quad (k \in N) \tag{3.3}$$

и

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu^p(f) = O\left(n^r E_n^p(f)\right),$$

то точный порядок убывания наилучших приближений $E_n^p(f)$ совпадает с порядком величины $\frac{1}{n^r}\omega_k^p\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)$. При $1 \leq p < \infty$ это утверждение доказано Тиманом [3I], а при $p=\infty$ эквивалентные утверждения содержатся в работах [3] и [I9]. Из одной теоремы Кангро [I2] вытекает, что соотношения (3.2) и (3.3) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы методы суммирования взвешенных средних Рисса, определенных последовательностью $\{p_n\}$, где $p_n = (n+1)^{k-1}$ или соответственно $p_n = (n+1)^{k+r-1}$ сохраняют λ-ограниченность, причем $\lambda_n = 1/E_n^p(f)$. В ряде случаев (см. [31], стр. 423–427) при соотношениях (3.2) и (3.3) удается определить точный порядок убывания последовательности наилучших приближений тех или иных индивидуальных функций. Следовательно, дополнительное условие сохранения λ-ограниченности применяемым методом суммирования в следующих примерах тесно связано с подмножеством функций рассматриваемого пространства, характеризуемым некоторым соотношением между точным порядком убывания последовательности наилучших приближений функции из этого подмножества и модулем гладкости этой функции.

Теперь приведем несколько примеров о применении нашего метода к конкретным проблемам приближения функции. Во всех примерах предполагается, что $E_n^p(f) \neq 0$.

<u>Пример 3.I.</u> Если $f(x) \in L^p$ с $1<p<\infty$, $\alpha>0$ и

$$\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} E_k^p(f) = O(A_n^\alpha)\,\omega^p\left(\frac{1}{n+1}, f\right), \tag{3.4}$$

то

$$R_n^p(f, C^\alpha) = O\left(\omega^p\left(\frac{1}{n+1}, f\right)\right). \tag{3.5}$$

<u>Доказательство.</u> Из неравенства Рисса (см. [32], стр. 742) следует, что

$$R_n^p(f, E) = O\left(E_n^p(f)\right) \quad (1<p<\infty), \tag{3.6}$$

где E — метод сходимости.

Пусть $\lambda_n = 1/E_n^p(f)$ и $\mu_n = 1/\omega^p\left(\frac{1}{n+1}, f\right)$. По свойствам пространства L^p последовательности λ и μ монотонно возрастают и неограниченны. Так как L^p с $1<p<\infty$ — банахово пространство (см. [31], стр. 48–50), метод C^α регулярен для $\alpha > 0$, при условии (3.4) справедливо соотношение (2.2) с $c_{nk} = A_{n-k}^{\alpha-1}/A_n^\alpha$ и по (3.6) последовательность конечномерных полиномиальных операторов, ставивших каждой функции из L^p с $1<p<\infty$ в соответствие частичные суммы ряда Фурье этой функции, является λ-ограниченным методом приближения в пространстве L^p с $1<p<\infty$ элементами всюду плотного в пространстве L^p подпространства тригонометрических многочленов, то по теореме 2.2 справедливо (3.5). Утверждение этого примера без дополнительного условия (3.4) при $\alpha \geq 1$ доказал Ульянов (см. [38], стр. 424-427) и при $0 < \alpha < 1$ Буадзе (см. [6], стр. 546).

Пример 3.2. Если $f(x) \in L^p$ с $p=1$ или $p=\infty$,

$$\sum_{k=0}^{n} \omega^p\left(\frac{\lg(k+2)}{k+1}, f\right) = O(n+1)\,\omega^p\left(\frac{\lg(n+2)}{n+1}, f\right) \tag{3.7}$$

и

$$n \left\| a_n \cos nx + b_n \sin nx \right\|_{L^p} = O\left(\omega^p\left(\frac{\lg(n+2)}{n+1}, f\right)\right), \tag{3.8}$$

где a_n и b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, то

$$R_n^p(f, E) = O\left(\omega^p\left(\frac{\lg(n+2)}{n+1}, f\right)\right). \tag{3.9}$$

Доказательство. При $p=1$ или $p=\infty$ для всех $\alpha > 0$ по одной теореме Ульянова (см. [38], стр. 424) имеем

$$R_n^p(f, C^\alpha) = O\left(\omega^p\left(\frac{\lg(n+2)}{n+1}, f\right)\right). \tag{3.10}$$

Пусть $\lambda_n = 1 / \omega^p\left(\frac{\lg(n+2)}{n+1}, f\right)$. При $\alpha > 0$ по условиям (3.7), (3.8), (3.10) и по теореме 2 статьи [28] выводим, что справедливо соотношение (3.9).

Пример 3.3. Если $f(x) \in L^p$ с $1 < p < \infty$ и C — регулярный треугольный матричный метод суммирования последовательностей, определенный матрицей (c_{nk}) с

$$\sum_{k=0}^{n} c_{nk} = 1,$$

то

$$R_n^p(f, C) = \sum_{k=0}^{n} |c_{nk}|\, E_k^p(f).$$

Доказательство непосредственно следует из теоремы 2.2 при помощи соотношения 3.6. Утверждение этого примера впервые доказал Ульянов [38], а для метода арифметических средних отметил Стечкин [24].

Пример 3.4. Если $f(x)\in L^p$ с $p=1$ или $p=\infty$, $\alpha\geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{k}(\nu+1)^{\alpha-1}E_\nu^p(f)=O\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\alpha-1}E_k^p(f)\right) \tag{3.11}$$

и

$$(n+1)^{\alpha+1}\left\|a_n\cos nx+b_n\sin nx\right\|_{L^p}=O\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\alpha-1}E_k^p(f)\right), \tag{3.12}$$

то

$$R_n^p(f,E)=O\left((n+1)^{-\alpha}\sum_{k=0}^{m}(k+1)^{\alpha-1}E_k^p(f)\right), \tag{3.13}$$

где a_n и b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Доказательство. Последовательность конечномерных полиномиальных операторов, ставивших каждой функции $g(x)$ из пространства L^p с $p=1$ или $p=\infty$ в соответствие частичные суммы ряда Фурье этой функции, не является λ-ограниченным методом приближения в пространстве L^p элементами подпространства тригонометрических многочленов (см. [31], стр. 482 и 479). При $p=1$ или $p=\infty$ согласно одной теореме Тимана (см. [32], стр. 742) имеем

$$R_n^p(f,(R,p_n))=O\left((n+1)^{-\alpha}\sum_{k=0}^{m}(k+1)^{\alpha-1}E_k^p(f)\right), \tag{3.14}$$

где $p_n=(n+1)^\alpha-n^\alpha$ с $\alpha\geq 1$. Следовательно, последовательность конечномерных полиномиальных операторов, ставивших каждой функции из пространства L^p с $p=1$ или $p=\infty$ в соответствие эти (R,p_n) — частичные суммы ряда Фурье этой функции, является λ-ограниченным методом приближения в пространстве L^p элементами подпространства тригонометрических многочленов, причем

$$\lambda_n=(n+1)^\alpha\Big/\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\alpha-1}E_k^p(f).$$

По условию (3.11) метод суммирования (R,p_n) с $p_n=(n+1)^\alpha-n^\alpha$ сохраняет λ-ограниченность. Так как справедливо (3.14), то ввиду условия (3.12) по теореме 2.1 заключаем справедливость (3.13).

П р и м е р 3.5. Пусть $L^\infty(E_\tau)\subset L^\infty$ с $0<\tau<1$ — некоторое подмножество пространства L^∞, характеризуемое условием: если $f(x)\in L^\infty(E_\tau)$, то приближение функции $f(x)$ при помощи E_τ-преобразованных частичных сумм Фурье дает приближение (тригонометрическими многочленами) порядка наилучшего [4]. Если $f(x)\in L^\infty(E_\tau)$ с $0<\tau<1$, a_n и b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ и при некотором числе $\nu\in(0,1)$ справедливо

$$E^\infty_{[n\nu]}(f)=O\left(E^\infty_n(f)\right), \tag{3,15}$$

то условие

$$\sqrt{n+1}\,\|a_n\cos nx+b_n\sin nx\|_{L^\infty}=O\left(E^p_n(f)\right) \tag{3.16}$$

достаточно для того, чтобы

$$R^\infty_n(f,E)=O\left(E^\infty_n(f)\right). \tag{3.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как приближение функции $f(x)\in L^\infty(E_\tau)$ при помощи последовательности E_τ-преобразованных частичных сумм ряда Фурье этой функции (по тригонометрической системе) дает приближение порядка наилучшего, то для функции $f(x)\in L^\infty(E_\tau)$ справедливо

$$R^\infty_n(f,E_\tau)=O\left(E^\infty_n(f)\right). \tag{3.18}$$

При $\lambda_n=1/E^\infty_n(f)$ ввиду условий (3.15), (3.16) и (3.18) по теореме I статьи [29] справедливо (3.17).

П р и м е ч а н и е. Аналогичное утверждение справедливо и при подмножествах пространства $L^1(E_\tau)\subset L^1$ с $0<\tau<1$, характеризуемых условием: если $f(x)\in L^1(E_\tau)$, то приближение функции $f(x)$ при помощи E_τ-преобразованных частичных сумм Фурье дает приближение порядка наилучшего.

---

4) Об одном таком классе функций см. [37].

Литература

I. Н.И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. М., 1965.

2. А.Х. Бабаев. О порядке приближения непрерывных функций суммами Фейера по многочленам Эрмита. Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн, и матем. н., 1966, № 2, 3-14.

3. Н.К. Бари, С.Б. Стечкин. Наилучшее приближение и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. Тр. Моск. матем. о-ва, 1956, 5, 483-522.

4. Д.Л. Берман. Приближение периодических функций линейными тригонометрическими полиномиальными операциями. Докл. АН СССР, 1953, 91, № 6, 1249-1252.

5. Д.Л. Берман. О скользящих линейных тригонометрических полиномиальных операциях. Докл. АН СССР, 1953, 92, № 4, 693-694.

6. А.И. Буадзе. Об одной задаче П.Л. Ульянова. Сообщ. АН Груз. ССР, 1965, 40, №3, 545-550.

7. Б.Л. Динцен. Об уклонении аналитических функций от средних арифметических частных сумм Фабера. Докл. АН СССР, 1964, 157, № 2, 250-253.

8. Б.Л. Динцен. Об отклонении непрерывных функций от средних арифметических частных сумм их ряда Фурье по некоторым полиномам Якоби. Уч. зап. Казанск. ун-та 1964, 124, № 6, 98-105.

9. Б.Л. Динцен. Об отклонении непрерывных функций от средних арифметических частных сумм их ряда П.Л.Чебышева. Иссл. по соврем. пробл. констр. теории функций, Баку, 1965, 358-362.

10. А.С. Джафаров. Приближение функций на сфере аналогами сумм Фейера и Валле-Пуссена. Изв.АН. Азерб.ССР. Сер. физ.-техн. и матем. н., 1965. № 3, 15-20,

11. А.С. Джафаров. О порядке приближения функции средними арифметическими суммами ее ряда Фурье-Штурма-Лиувилля. Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и матем.н., 1966, № 6, 11-15.

12. Г. К а н г р о. Множители суммируемости для рядов λ-ограниченных методами Рисса и Чезаро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 136-154.

13. Б.В. К о в а л ь ч у к. Приближение суммами Фурье-Чебышева дифференцируемых функций с заданным модулем непрерывности. Вопр. матем. физ. и теории функций, 1964, №1, 45-50.

14. Р.Н. К о в а л ь ч у к. Об одной задаче С.Б.Стечкина. Вопр. матем. физ. и теории функций, 1964, №1, 51-56.

15. В.М. К о к и л а ш в и л и. О приближении периодических функций некоторыми линейными операторами. Сообщ. АН Груз.ССР, 1966, 43, №2, 257-260.

16. В.М. К о к и л а ш в и л и. О приближении функций средними рядов Уолша-Фурье. Сообщ. АН Груз.ССР, 1967, 45, № 2, 305-310.

17. В.М. К о к и л а ш в и л и. Суммирование рядов по ультрасферическим полиномам и наилучшие приближения. Сообщ. АН Груз. ССР, 1967, 48, № 1, 3-6.

18. С.М. Л о з и н с к и й. Об одном классе линейных операций. Докл. АН СССР, 1948, 61, № 2, 193-196.

19. С.М. Л о з и н с к и й. Обращение теорем Джексона. Докл. АН СССР, 1952, 83, №5, 645-647.

20. С.М. Л о з и н с к и й. О скорости сходимости последовательности линейных операций. Докл. АН СССР, 1953, 89, № 4, 609-612.

21. С.М. Л о з и н с к и й. О скорости сходимости последовательности линейных тригонометрических полиномиальных операций. Докл. АН СССР, 1953, 89, №5, 785-787.

22. В.Г. П о н о м а р е н к о. Приближение периодических функций в пространствах Орлича. Сиб. матем. ж., 1966, 7, № 6, 1337-1346.

23. Применение функционального анализа в теории приближений. Материалы конференции. Калинин, 1970.

24. С.Б. С т е ч к и н. О приближении периодических функций суммами Фейера. Тр. матем. ин-та АН СССР, 1961, 62 48-60.

25. С.Б. С т е ч к и н. Замечание к теореме Джексона. Тр. матем. ин-та АН СССР, 1967, 88, 17-19.

26. П.К. С у е т и н. О представлении непрерывных и дифференцируемых функций рядами Фурье по многочленам Лежандра. Докл. АН СССР, 1964, 158, № 6, 1275-1277.

27. Л.В. Т а й к о в. О приближении периодических функций в среднем. Докл. АН СССР, 1965, 163, № 2, 301-302.

28. И. Т а м м е р а й д. Тауберовы теоремы с остаточным членом для методов суммирования Чезаро и Гельдера. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 161-170.

29. И. Т а м м е р а й д. Тауберовы теоремы с остаточным членом для метода суммирования Эйлера-Кноппа. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 171-182.

30. И. Т а м м е р а й д. О теоремах тауберова типа с остаточным членом. Настоящий сборник, стр. 27.

31. А.Ф. Т и м а н. Теория приближения функций действительного переменного. М., 1960.

32. М.Ф. Т и м а н. Некоторые линейные процессы суммирования рядов Фурье и наилучшее приближение. Докл. АН СССР, 1962, 145, № 4, 741-743.

33. М.Ф. Т и м а н. Наилучшее приближение функции и линейные методы суммирования рядов Фурье. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1965, 29, № 3, 587-604.

34. М.Ф. Т и м а н. Особенности основных теорем конструктивной теории функций в пространствах L_p. Иссл. по соврем. пробл. констр. теории функций. 1965, Баку, 18-25.

35. М.Ф. Т и м а н. О приближении непрерывных периодических функций линейными операторами, построенные на базе их рядов Фурье. Докл. АН СССР, 1968, 181, № 6, 1339-1342.

36. А.Х. Т у р е ц к и й . О классе функции, для которых данный метод суммирования дает приближение порядка наилучшего. Изв. высш. учебн. заведений.Математика,1965, № 5 (48), 133-139.

37. А.Х. Т у р е ц к и й. О классе функций, для которых данный метод суммирования дает приближение порядка наилучшего II. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1966, № 3, 159-165.

38. П.Л. У л ь я н о в. О приближении функций. Сиб. матем, ж. 1964, 5, № 2, 418-437.

39. G u o Z h ú r ú i. The approximation of a continuous function by the typical mean of its Fourier series. Acta math. sinica, 1965, 15, No. 1, 42-53.

40. L. L e i n d l e r. Über hinreichende Strukturbedingungen für Fourierreihen. Stud. sci. math. hung., 1966, 1, No. 3-4, 343-351.

I. Tammeraid

The Approximation of Functions and Abelian and Tauberian Remainder Theorems

S u m m a r y

The paper deals with the application of λ-summability in the theory of approximation. Some estimates for the approximation of functions of L^p by its transformed Fourier sums have been found in this paper.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 312 1971

УДК 517.948.322

Ю. Ярцев

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод коллокации для решения двумерных интегральных уравнений рассматривался ранее в заметке [2]. При этом была установлена среднеквадратичная сходимость метода для уравнений с произвольными непрерывными ядрами и свободными членами и равномерная сходимость - в случае ядер и правых частей из класса Липшица. Однако, как будет показано ниже, можно добиться равномерной сходимости и при любых непрерывных ядрах и таких же свободных членах, если в качестве координатных функций выбрать полиномы специального вида.

Итак, рассмотрим уравнение

$$Hx \equiv x(M) - \lambda \int_D h(M;Q)\,x(Q)\,dQ = y(M), \tag{I}$$

где D есть прямоугольник $-1 \leqslant t,\ s \leqslant 1$ и для краткости обозначим $M=(t,s)$, $Q=(u,v)$, $dQ=du\,dv$. Будем считать, что λ не является собственным значением ядра $h(M;Q)$.

Приближенное решение уравнения (I) будем разыскивать в виде

$$x_{mn} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} A_k^{(m)}(t) A_l^{(n)}(s); \quad (m,n=1,2,\dots), \tag{2}$$

где $A_k^{(m)}(t)$ и $A_l^{(n)}(s)$ — фундаментальные полиномы Фейера по узлам Чебышева (см. [I], стр. 550) степени $2m-1$ и $2n-1$ соответственно. Потребуем, чтобы коэффициенты a_{kl} удовлетворяли условиям

$$\left[Hx_{mn}(M) - y(M)\right]_{M=M_{ij}} = 0, \tag{3}$$

$$i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n;$$

$$M_{ij} = \left(t_i^{(m)}, s_j^{(n)}\right), \quad t_i^{(m)} = \cos(2i-1)(2m)^{-1}\pi; \quad s_j^{(n)} = \cos(2j-1)(2n)^{-1}\pi. \tag{4}$$

Поскольку $x_{mn}(M_{ij}) = a_{ij}$, то условия (3) можно представить в форме

$$a_{ij} - \lambda \int_D h(M_{ij}; Q) \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} A_k^{(m)}(u) A_l^{(n)}(v)\, dQ = y(M_{ij}), \tag{5}$$

$$i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n.$$

Точки M_{ij} определены равенствами (4).

Т е о р е м а. Если ядро и правая часть уравнения (I) непрерывны при $M, Q \in D$ то

I^0 для всех достаточно больших m и n существует единственный полином вида (2), удовлетворяющий условиям (3) и (4),

2^0 последовательность полиномов (2-4) сходится в D равномерно к точному решению уравнения (I),

3^0 имеет место следующая оценка погрешности

$$\| x - x_{mn} \|_{C_D} \leq (1 + |\lambda| R_\lambda)(\alpha_{mn} + |\lambda| \beta_{mn} \max_{k,l} |a_{kl}|), \tag{6}$$

где

$$\alpha_{mn} = \| y(M) - F_{mn}[y(M); M] \|_{C_D},$$

$$\beta_{mn} = \| \int_D | h(M; Q) - F_{mn}[h(M; Q); M] | dQ \|_{C_D},$$

$$R_\lambda = \| \int_D | R_\lambda(M; Q) | dQ \|_{C_D},$$

$R_\lambda(M; Q)$ — резольвента уравнения (I),

$$F_{mn}[f(M);M]=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} f(M_{kl})A_k^{(m)}(t)A_l^{(n)}(s). \qquad (7)$$

Точки M_{kl} определены равенством (4).

Доказательство. Сначала убедимся в том, что если существует полином (2) с коэффициентами (3,4), то он является решением уравнения

$$\varphi(M)-\lambda\int_D F_{mn}[h(M;Q);M]\varphi(Q)dQ=F_{mn}[y(M);M]. \qquad (8)$$

Действительно, умножая (5) на $A_i^{(m)}(t)A_j^{(n)}(s)$ и суммируя полученные выражения по i и j, придем к равенству типа (8), где $\varphi(M)=x_{mn}(M)$. С другой стороны, поскольку правая часть и ядро уравнения (8) являются (относительно переменных t и s) функциями одного и того же вида (7), то решение этого уравнения, если таковое сообще существует,должно иметь тоже вид (7), т.е.

$$\varphi(M)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{kl}A_k^{(m)}(t)A_l^{(n)}(s).$$

Полагая теперь в (8) $M=M_{ij}$ и учитывая, что $\varphi(M_{ij})=b_{ij}$,

$$F_{mn}[h(M,Q);M_{ij}]=h(M_{ij},Q),\quad F_{mn}[y(M);M_{ij}]=y(M_{ij}),$$

придем к системе равенств вида

$$b_{ij}-\lambda\int_D h(M_{ij};Q)\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{kl}A_k^{(m)}(u)A_l^{(n)}(v)dQ=y(M_{ij}),$$
$$i=1,\dots,m;\quad j=1,\dots,n,$$

равносильных системе (5), т.е. $b_{ij}=a_{ij}$.

Пусть K есть линейный интегральный оператор с ядром $h(M;Q)$ а P_n $(N=mn)$ — оператор, устанавливающий соответствие между непрерывной в квадрате D функцией и ее интерполяционным полиномом вида (7). Тогда уравнения (I) и(8) можно будет написать соответственно в форме

$$(E-\lambda K)x=y \qquad (9)$$

и

$$(E-\lambda P_N K)x_N=P_N y,\quad N=1,2,\dots \qquad (10)$$

здесь $x_N = x_{mn}$, E – тождественный оператор.

Обобщая методику доказательства теоремы Фейера на двумерный случай (см. [I], стр. 55I), можно доказать, что для любой непрерывной в D функции $f(M)$ имеет место предельное соотношение

$$\| f(M) - F_{mn}[f(M); M] \|_{C_D} \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0. \tag{II}$$

Обозначив далее через X пространство функций, непрерывных в области D с обычной нормой $\|x\| = \max\limits_{M\in D} |x(M)|$ и рассматривая K и $P_N K$ как операции из X в X, с помощью (II) убеждаемся, что $\|K - P_N K\| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$. Если, кроме того, положить $Y = X$, то приходим к выводу, что уравнения (9) и (I0) удовлетворяют всем предпосылкам леммы I из [2]. А это значит: во-первых, уравнение (I0) однозначно разрешимо для всех достаточно больших m и n, что в конечном счете равносильно утверждению 1^0 доказываемой теоремы; во-вторых, с помощью названной леммы I убеждаемся, что последовательность решений уравнений (I0) сходится с решением уравнения (9), откуда вытекает истинность утверждения 2^0 рассматриваемой теоремы. И, наконец, оценку (6) получим с помощью неравенства, содержащегося в пункте 3 леммы I, если примем во внимание, что в данном случае

$$\|(E-\lambda K)^{-1}\| \le 1 + |\lambda| R_\lambda, \quad \|y - P_N y\| = \alpha_{mn},$$

$$\|K - P_N K\| \le \beta_{mn}, \quad \|x_N\| \le \max_{k,l} |a_{kl}|.$$

Теорема доказана.

<u>Замечание.</u> Результаты теоремы, доказанной выше, легко могут быть перефразированы на случай интегрального уравнения вида (I), где

$$M = (t^{(1)}, \dots, t^{(p)}), \quad Q = (u^{(1)}, \dots, u^{(p)}),$$

$$dQ = du^{(1)} \cdot \ldots \cdot du^{(p)}, \ D = [-1 \le t^{(1)} \le 1, \dots, -1 \le t^{(p)} \le 1].$$

Приближенное решение при этом разыскивается в виде

$$x_{m_1\ldots m_p}=\sum_{i_1=1}^{m_1}\ldots\sum_{i_p=1}^{m_p} a_{i_1\ldots i_p} A_{i_1}^{(m_1)}(t^{(1)})\ldots A_{i_p}^{(m_p)}(t^{(p)}),$$

где $A_{i_k}^{(m_k)}(t^{(k)}),\ (i_k=1,\ldots,m_k)$ суть фундаментальные полиномы Фейера степени $2m_k-1$. Узлами коллокации служат точки

$$M_{i_1\ldots i_p}=(t_{i_1}^{(1)},\ldots,t_{i_p}^{(p)}),\ t_{i_k}^{(k)}=\cos(2i_k-1)(2m_k)^{-1}\pi,$$

$$i_k=1,\ldots,m_k;\quad k=1,\ldots,p.$$

Литература

I. И.П. Натансон. Конструктивная теория функций. М.-Л., 1949.

2. Ю.П. Ярцев. О методе коллокации для двумерных интегральных уравнений. Дифференциальные уравнения, 1969, Т5, № II, 2101-2105.

J.Jarzev

Über eine Variante der Kollokationsmethode für mehrdimensionale Integralgleichungen

Zusammenfassung

Im Artikel wird eine Variante der Kollokationsmethode zur Berechnung der mehrdimensionalen Integralgleichungen (1) vorgelegt und untersucht. Die Zeigerfunktionen in Formel (2) werden dabei in Form der Produkte der Fejérschen Fundamentalpolynome genommen.

[illegible]

-туры, не менее [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible]

более степени [illegible] [illegible]

$$[illegible] \qquad (11)$$

и [illegible] [illegible]

[illegible] и [illegible]

[illegible] (11) [illegible] уточнение,

от [illegible] [illegible]

[illegible] (10) [illegible]

[illegible] [illegible]

[illegible] [illegible]

[illegible] [illegible]

[illegible] [illegible]

и [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible]

[illegible] [illegible]

и [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible]

Über eine Vorlage [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] [illegible]

[illegible] wird [illegible]

zur Berechnung der [illegible]

(1) [illegible] und [illegible]

(2) werden dabei in [illegible]

[illegible]

[illegible]

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 312 1971

УДК 518.5

Ю. Ярцев

О ПРОГРАММИРОВАНИИ МЕТОДА ФЕЙЕРОВСКОЙ КОЛЛОКАЦИИ НА ЯЗЫКЕ МАЛГОЛ

Ниже рассматривается один из вариантов программирования вычислительной схемы метода фейеровской коллокации применительно к линейному дифференциальному уравнению

$$y'' + \varphi_1(x)\, y' + \varphi_2(x)\, y = \varphi(x) \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 y(-1) + \beta_1 y'(-1) = 0 \\ \alpha_2 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Согласно методу фейеровской коллокации (см. [1, 2]), приближенное решение задачи (1,2) разыскиваем в виде

$$y_n = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k f_k(x), \tag{3}$$

где $f_k(x)$ есть полином (к+2)-й степени, удовлетворяющий условиям [2]. Для устойчивости вычислительной схемы выбираем $f_k(x)$ так, чтобы полином $f_k''(x)$ был полиномом Чебышева (см. [2], теорема 5, стр. 6). Как известно, система коллокации в данном случае имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n-1} a_k \left[f_k''(x_i) + \varphi_1(x_i) f_k'(x_i) + \varphi_2(x_i) f_k(x_i) \right] = \varphi(x_i) \\ \sum_{k=0}^{2n-1} a_k f_k'''(x_i) = 0, \quad x_i = \cos\frac{2i-1}{2n}\pi, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Составление программы начнем с описания процедур для вычисления функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi(x)$, $f_k(x)$, $f'_k(x)$, $f''_k(x)$, $f'''_k(x)$. Пусть этими процедурами будут соответственно

```
proced'fi1(x)эT1эproced'fi2(x)эT2эproced'fi(x)эT3э
proced'f(x,к)эT4эproced'f1(x,к)эT5эproced'f2(x,к)эT6э
proced'f3(x,к)эT7э
```

(идентификатором ТК (К = I,2,...,7) обозначено тело соответствующей процедуры; в случае конкретного уравнения это комплексы определенных операций).

Далее опишем процедуру вычисления узлов коллокации:

```
proced'KS(i,n)эif'i(=n⌴then'
x:=cos'((2?-1)?pi'/(2?n))⌴
else'x:=cos'((2?(i-n)-1)?pi'/(2?n))э.
```

Теперь введем процедуры для коэффициентов и правых частей системы (4):

```
proced'KA(x,n,i,j)э
begin'if'i(=n⌴then'b:=f2(x,j)+
fi1(x)?f1(x,j)+fi2(x)?f(x,j)⌴
else'b:=f3(x,j)эb:=bэend'э
proced'VL(x,i,n)эbegin'if'i(=n⌴then'
r:=fi(x)⌴else'r:=0эr:rэend'э.
```

Следующая процедура является основной - с её помощью вычисляются элементы расширенной матрицы системы (4).

```
proced'LM(n,A.)эbegin'for'p:=1⌴step'1⌴
until'2?n⌴do'begin'z:=KS(p,n)э
for'q:=0⌴step'1⌴until'2?n⌴do'
if'q(=2?n-1⌴then'
A.(p,q+1).:=KA(z,n,p,q)⌴else'
A.(p,q+1).:=VL(z,p,n)эend'эend'э
```

На этом описательная часть программы закончена. Теперь напишем основную программу для вычисления коэффициентов полинома (3) (массив Н.) и его значений в равноотстоящих узлах (массив Т). Для этого выберем конкретные числовые значения для параметра n, задающего число координатных функций в (3), и для количества равноотстоящих узлов. Пусть этими числами будут d и $g+1$ соответственно и пусть $N = 2d$, $M = N + 1$. Тогда основная программа будет иметь вид:

```
comment' Feje'ri kollokatsioon э alg:
array' C.(1:N, 1:M).,H.(1:N).,
T.(0:g).э LM(d,C.)э Gauss'(C.)э
for'i: =1 ␣ step'1 ␣ until' N ␣ do'
H.(i).: =C.(1,i).э
for'j: =0 ␣ step'1 ␣ until' g ␣ do'
begin' x: = 2?j/g-1 э T.(j).: =0 э
for'k: =1 ␣ step'1 ␣ until' N ␣ do'
T.(j).: =T.(j).+H.(k).? f(x,k-1) э end' э
printa'(H.,T.) э stop' э start' alg э finish' э 1)
```

Корректность программы проверена на примере задачи

$$y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2-1} + 2, \tag{5}$$

$$y(-1) = y(1) = 0 \tag{6}$$

при $d = 13$. Отметим, что при этом значения аппроксимирующего полинома, а также значения точного решения задачи (5,6) ($y = e^{x^2-1} - 1$) вычислены не в равноотстоящих узлах, а в точках коллокации $x_i = \cos\frac{2i-1}{26}\pi$, $i = 1,\ldots,13$. Ниже приводятся коэффициенты приближенного решения (таблица 1), значения приближенного решения (таблица 2) и значения точного решения (таблица 3).

---

[1] Имеется в виду, что все описания процедур предшествуют основной программе.

Таблица I

2,867I	0,0000	0,0000	-0,0II7
-0,0060	0,0027	0,0000	0,0000
2,4I47	0,0000	-0,000I	-0,072I
-0,0004	0,000I	0,0000	0,000I
0,3966	0,0000	-0,00I2	-0,20I2
0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
0,0392	0,0000		

Таблица 2

-0,0I46
-0,I206
-0,2837
-0,4450
-0,5677
-0,6403
-0,6636
-0,639I
-0,5652
-0,44I2
-0,2786
-0,II45
-0,0080

Таблица 3

-0,0I44
-0,II8I
-0,2758
-0,4289
-0,5434
-0,6I04
-0,632I
-0,6I04
-0,5434
-0,4289
-0,2758
-0,II8I
-0,0I44

Литература

I. И. Петерсен. О сходимости приближенных методов интерполяционного типа для обыкновенных дифференциальных уравнений. Изв. АН ЭССР, серия физ.-мат. и техн.наук, I96I, 10, № I, 3-I2.

2. Ю. Ярцев. О сходимости и устойчивости некоторых методов интерполяционного типа. Автореферат диссертации, Таллин, I970.

J.Jarzev

Über die Programmierung der Fejerschen Kollokations-methode in der M a l g o l - Sprache

Zusammenfassung

Im Artikel wird der Algoritmus für die Zusammenstellung des Programms zur Berechnung der Grenzaufgabe (1,2) mit der Fejérschen Kollokationsmethode (3,4) betrachtet.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 312 1971

УДК 517.512.6

М. Левин

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НА ЭКСТРЕМУМ

Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $L_p(S_k, \Sigma_k, \mu_k)$ для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ – пространство с σ-аддитивной положительной мерой μ_k, определенной на алгебре Σ_k множества S_k.

Пусть, далее,

$$\varphi_k^1, \varphi_k^2, \ldots, \varphi_k^{m_k}$$

– система линейно независимых μ_k-измеримых функций пространства $L_p(S_k, \Sigma_k, \mu_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Через $\mathcal{E}$ обозначим совокупность всех подмножеств прямого произведения $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$, имеющих вид $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, где $E_k \in \Sigma_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, и пусть μ – σ-аддитивная функция множества, определенная на алгебре Σ, порожденной в S множеством $\mathcal{E}$, и такая, что

$$\mu(E) = \prod_{k=1}^{n} \mu_k(E_k).$$

Введем обозначение обобщенного многочлена из $L_p(S, \Sigma, \mu)$:

$$T_{m_j \ldots m_l} = \sum_{i_j, \ldots i_l = 1}^{m_j, \ldots, m_l} a_{i_j \ldots i_l} \varphi_j^{i_j} \ldots \varphi_l^{i_l},$$

где

$$a_{i_j \ldots i_l} \; (1 \leqslant j < \ldots < l \leqslant n, \; i_j + \ldots + i_l < m_j + \ldots + m_l) -$$

произвольные числа и $a_{m_j \ldots m_l} = 1$.

Через $t_{m_k}^{[p]}$ обозначим тот многочлен вида

$$T_{m_k} = \varphi_k^{m_k} + \sum_{i_k=1}^{m_k-1} a_{i_k} \varphi_k^{i_k},$$

для которого

$$\min_{\{a_{i_k}\}} \int\limits_{S_k} \left| T_{m_k} \right|^p \mu_k(ds_k) = \int\limits_{S_k} \left| t^{[p]}_{m_k} \right|^p \mu_k(ds_k).$$

Теорема. Справедливо равенство

$$\min_{\{a_{i_1 \dots i_n}\}} \int\limits_{S} \left| T_{m_1 \dots m_n} \right|^p \mu(ds) = \prod_{k=1}^{n} \int\limits_{S_k} \left| t^{[p]}_{m_k} \right|^p \mu_k(ds_k). \qquad (I)$$

Доказательство повторяет рассуждения работы [I]. Данная теорема обобщает ряд известных результатов, напр., [I-3].

В качестве примера приведем один частный случай теоремы.

Воспользовавшись результатом Бернштейна (см. [4], стр. 20-2I) и формулой (I), имеем

$$\min_{\{a_{kl},\, a_{mr}=1\}} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{k,l=0}^{m,r} a_{kl} \cos kx \sin ly \right|^p dx\, dy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left| \cos mx \right|^p dx \cdot \int\limits_0^{2\pi} \left| \sin ry \right|^p dy.$$

Литература

I. М. Левин. Об одной экстремальной задаче. Изв. АН ЭССР, Физ.-Матем., I969, 18, № 4, 464-468.

2. П.Е. Данко. О полиноме нескольких переменных, наименее уклоняющихся от нуля в метрике L_p. Сб. Ростов-на-Дону, Ин-та инж. ж.-д. трансп., I962, вып. 39.

3. М. Левин. Об экстремальных задачах, связанных с одной квадратурной формулой. Изв. АН ЭССР, сер. физ. матем. и техн. наук, I963, I2, № I, 44-56.

4. Н.И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. М., I965.

M.Levin

On one Extremum Problem

S u m m a r y

The theorem from [1] is generalized and the result is given by formula (1).

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 312 1971

УДК 518:517.392

М. Левин

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОДНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ

Прием, использованный в работе [I], применим и для формул вида

$$\int_{-a}^{a} p(x) f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{2m} \sum_{j=0}^{2r_k} \lambda_k^{(j)} f^{(j)}(x_k) + R_n(f), \tag{I}$$

где $r_k = r_{m+k}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, $p(x) = -p(-x)$ на отрезке $[-a, a]$, $p(x) \geq 0$ на отрезке $[0, a]$.

Предполагаем, что существуют моменты

$$m_k = \int_0^a x^k p(x)\, dx \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

причем $m_0 > 0$.

Пусть $A_k^{(j)}$, $u_k (u_k > 0)$ — коэффициенты и узлы формулы

$$\int_0^{a^2} \frac{1}{2} p(\sqrt{u}) f(u)\, du \approx \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{2r_k} A_k^{(j)} f^{(j)}(u_k), \tag{2}$$

точной для произвольного многочлена степени

$$n = 2(m + r_1 + r_2 + \cdots + r_m) - 1.$$

Такая формула, как известно [2], существует.

<u>Лемма I.</u> Имеет место равенство

$$\left| \frac{d^j}{dx^j} x^{2i+1} \right|_{i,j=0,1,\ldots,2r} = 1!\, 2! \ldots (2r)!\, 2^{r(2r+1)} x^{(r+1)(2r+1)}.$$

<u>Доказательство.</u> Определитель, стоящий в левой части доказываемого равенства, есть определитель Вронского. Воспользовавшись свойствами определителя Вронского (см., напр.,

[3], стр. 127–128) и заменой $y=x^2$, имеем

$$W\left[x, x^3, x^5, \ldots, x^{4r+1}\right] = x^{2r+1} W\left[1, x^2, x^4, \ldots, x^{4r}\right] =$$

$$= x^{2r+1}(2x)^{(2r+1)r} W\left[1, y, y^2, \ldots, y^{2r}\right] = 2^{r(2r+1)} x^{(2r+1)(r+1)} 1!\,2!\ldots(2r)!\,,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. Пусть числа $\gamma_k^{(j)}$ $(j=0,1,\ldots,2r_k)$ удовлетворяют равенствам

$$\sum_{j=0}^{2r_k} \gamma_k^{(j)} \left(x^{2i+1}\right)^{(j)}\Big|_{x=\sqrt{u_k}} = \sum_{j=0}^{2r_k} A_k^{(j)} \left(x^i\right)^{(j)}\Big|_{x=u_k} \qquad (3)$$

для значений $i=0,1,\ldots,2r_k$. Тогда равенства (3) справедливы и для всех целых значений $i>2r_k$.

Доказательство. Существование чисел $\gamma_k^{(j)}$, для которых равенства (3) выполнены при $i=0,1,\ldots,2r_k$, гарантировано леммой I. Итак, пусть (3) выполнено для $i=0,1,\ldots,2r_k$. Покажем, что (3) справедливо и для $i=l$, где $l>2r_k$. Обозначим

$$Q\left[\varphi(x)\right] = \sum_{j=0}^{2r_k} \gamma_k^{(j)} \left[x\varphi(x^2)\right]^{(j)}\Big|_{x=\sqrt{u_k}} - \sum_{j=0}^{2r_k} A_k^{(j)} \left[\varphi(x)\right]^{(j)}\Big|_{x=u_k}.$$

Тогда по условию $Q\left[x^i\right]=0$ $(i=0,1,\ldots,2r_k)$. Поэтому

$$Q\left[x^l\right] = Q\left[\sum_{i=0}^{2r_k} \alpha_i x^i + \sum_{i=2r_k+1}^{l} \beta_i (x-u_k)^i\right] = \sum_{i=2r_k+1}^{l} \beta_i Q\left[(x-u_k)^i\right] =$$

$$= \sum_{i=2r_k+1}^{l} \beta_i \left\{ \sum_{j=0}^{2r_k} \gamma_k^{(j)} \left[x(x^2-u_k)^i\right]^{(j)}\Big|_{x=\sqrt{u_k}} - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=0}^{2r_k} A_k^{(j)} \left[(x-u_k)^i\right]^{(j)}\Big|_{x=u_k} \right\} = 0\,,$$

что и доказывает лемму.

Теорема. Пусть в формуле (I)

$$\left.\begin{aligned} & x_k = -x_{m+k} = \sqrt{u_k}\,, \\ & \lambda_k^{(j)} = (-1)^{j+1}\lambda_{m+k}^{(j)} = \gamma_k^{(j)}\,, \\ & (k=1,2,\ldots,m;\ j=0,1,\ldots,2r_k), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где для каждого $k=1,2,\ldots,m$ числа $\gamma_k^{(j)}$ $(j=0,1,\ldots,2r_k)$ удовлетворяют уравнениям (3) при $i=0,1,\ldots,2r_k$.

Если $f(x)$ есть произвольный многочлен степени $2n+2$, тогда ошибка $R_n(f)$ формулы (I) равна нулю.

Доказательство. Подставляя в (2) функции $f(u)=u^i$ и учитывая точность этой формулы и лемму 2, имеем равенства

$$\int_0^{a^2}\frac{1}{2}p(\sqrt{u})\,u^i\,du = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{2r_k}\gamma_k^{(j)}\left(x^{2i+1}\right)^{(j)}\Big|_{x=\sqrt{u_k}} \quad (i=0,1,\ldots,n). \tag{5}$$

Пусть теперь в формуле (I) коэффициенты и узлы суть числа (4). Тогда для $q=0,1,\ldots,2n+2$ имеем

$$R_n(x^q) = \int_{-a}^{a} x^q p(x)\,dx - \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{2r_k}\gamma_k^{(j)}\left(x^q\right)^{(j)}\Big|_{x=\sqrt{u_k}} -$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{2r_k}(-1)^{j+1}\gamma_k^{(j)}\left(x^q\right)^{(j)}\Big|_{x=-\sqrt{u_k}} =$$

$$= \int_{-a}^{a} p(x)\,x^q\,dx - \left[1-(-1)^q\right]\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{2r_k}\gamma_k^{(j)}\left(x^q\right)^{(j)}\Big|_{x=\sqrt{u_k}}.$$

Так как

$$\int_{-a}^{a} x^q p(x)\,dx = \begin{cases} 0, & q=2i, \\ \int_0^{a^2} p(\sqrt{u})\,u^i\,du, & q=2i+1, \end{cases}$$

то этим $R_n(x^q)=0$ для всех четных значений q и

$$R_n\left(x^{2i+1}\right) = \int_0^{a^2} p(\sqrt{u})\,u^i\,du - 2\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{2r_k}\gamma_k^{(j)}\left(x^{2i+1}\right)^{(j)}\Big|_{x=\sqrt{u_k}}$$

для $q = 2i+1$ $(i = 0, 1, \ldots)$. Но тогда по (5) получим равенства $R_n(x^{2i+1}) = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Теорема доказана.

Замечание. Формула (I) с коэффициентами и узлами (4) имеет наивысшую алгебраическую степень точности.

Аналогично результат работы [I] распространяется и на квадратурную формулу с двумя фиксированными узлами на концах отрезка интегрирования.

Литература

I. R. Piessens. Gaussian quadrature formulas for the integration of oscillating functions. Z. angew. Math. und Mech., 1970, 50, No. 11, 698-700.

2. В.И. Крылов, Л.Т. Шульгина. Справочная книга по численному интегрированию. М., 1966.

3. Г. Полиа, Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа II. М., 1956.

M.Levin

Remark about one Quadrature Formula

Summary

The result of [1] is generalized for the formula (1).

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 312 1971

УДК 518:517.392

М. Левин

О ФОРМУЛАХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО КРУГУ И ТРЕУГОЛЬНИКУ

Рассмотрим задачу построения наилучших в определенном смысле кубатурных формул.

Пусть непрерывные в квадрате $0 \leqslant x, u \leqslant 1$ функции $g_{im_i}(x,u)$ $(i=1,2)$ удовлетворяют условиям:

I^0 Для каждого фиксированного значения $x \in [0,1]$ функции $g_{im_i}(x,u)$ абсолютно непрерывны на отрезке $0 \leqslant u \leqslant 1$.

2^0 Справедливы равенства

$$g_{im_i}(x,u) = \frac{\partial^{m_i}}{\partial u^{m_i}} \int_0^1 g_{im_i}(x,v)\, g_{im_i}(u,v)\, dv. \tag{I}$$

Через $W_{g_{im_i}} L_2$ мы будем обозначать класс всех функций $f(x)$, которые на отрезке $[0,1]$ имеют абсолютно непрерывную производную порядка m_i-1 и удовлетворяют условиям

$$f(x) = \int_0^1 f^{(m_i)}(u)\, g_{im_i}(x,u)\, du,$$

$$\left\{ \int_0^1 \left[f^{(m_i)}(x) \right]^2 dx \right\}^{1/2} \leqslant M.$$

Конкретные классы такого типа (при определенных $g_{im_i}(x,u)$) рассматривались, например, в работах [I, 2].

Через $W_{g_{1m_1} g_{2m_2}} L_2$ мы будем обозначать класс всех функций $f(x,y)$, которые в квадрате $0 \leqslant x,y \leqslant 1$ удовлетворяют условиям:

I^0 Производные

$$f^{(i+j)}_{x^i y^j}(x,y) \quad (i \leqslant m_1,\ j \leqslant m_2,\ i+j < m_1+m_2) \tag{2}$$

абсолютно непрерывны.

2^0 Имеет место равенство

$$f(x,y)=\int_0^1\int_0^1 f^{(m_1+m_2)}_{x^{m_1}y^{m_2}}(u,v)\,g_{1m_1}(x,u)\,g_{2m_2}(y,v)\,du\,dv. \qquad (3)$$

3^0 Выполнено неравенство

$$\left\{\int_0^1\int_0^1\left[f^{(m_1+m_2)}_{x^{m_1}y^{m_2}}(x,y)\right]^2 dx\,dy\right\}^{1/2}\leqslant M. \qquad (4)$$

Пример такого класса: класс всех функций $f(x,y)$, удовлетворяющих условиям I^0 и 3^0 и условию

$$f^{(i)}_{x^i}(0,y)\equiv f^{(j)}_{y^j}(x,0)\equiv 0\quad (i=0,1,\dots,m_1-1;\ j=0,1,\dots,m_2-1).$$

Для функций этого класса

$$g_{im_i}(x,u)=\frac{(x-u)^{m_i-1}E(x-u)}{(m_i-1)!},$$

где

$$E(x-u)=\begin{cases}1, & x>u;\\ 0, & x\leqslant u.\end{cases}$$

Будем предполагать, что введенные в рассмотрение классы функций удовлетворяют еще следующему требованию. Пусть нам заданы произвольные точки (x_i,y_j) $(i=1,2,\dots,n_1;\ j=1,2,\dots,n_2)$ такие, что $0\leqslant x_i,\ y_j\leqslant 1$ и $g_{1m_1}(x_i,u)\,g_{2m_2}(y_j,v)\neq 0$ для $0\leqslant u,\ v\leqslant 1$ $(i=1,2,\dots,n_1;\ j=1,2,\dots,n_2)$, а также числа p_{ij} $(i=1,2,\dots,n_1;\ j=1,2,\dots,n_2)$, среди которых есть отличные от нуля. Тогда в классе $W_{g_{1m_1}g_{2m_2}}L_2$ найдется некоторая функция $\psi(x,y)$ такая, что

$$\sum_{i,j=1}^{n_1,n_2} p_{ij}\psi(x_i,y_j)\neq 0.$$

Пусть теперь в классе $W_{g_{1m_1}}L_2$ среди формул

$$\int_0^1 xf(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n_1}A_i f(x_i)+r_{1n_1}(f) \qquad (5)$$

наилучшая, т.е. с наименьшим значением величины

$$r_{1n_1}=\sup_{f\in W_{g_{1m_1}}L_2}|r_{1n_1}(f)|,$$

формула характеризуется значениями

$$A_i = A_i^*, \; x_i = x_i^* \; (i=1,2,\ldots,n_1),$$
$$r_{1n_1} = M\cdot\delta_1.$$

Также пусть в классе $W_{g_{2m_2}}L_2$ наилучшая формула

$$\int_0^1 f(y)\,dy = \sum_{j=1}^{n_2} B_j f(y_j) + r_{2n_2}(f), \tag{6}$$

т.е. формула (6) с наименьшей величиной

$$r_{2n_2} = \sup_{f\in W_{g_{2m_2}}L_2} |r_{2n_2}(f)|,$$

характеризуется значениями

$$B_j = B_j^*, \; y_j = y_j^* \; (j=1,2,\ldots,n_2),$$
$$r_{2n_2} = M\cdot\delta_2.$$

Предполагаем, что системы функций $\left\{g_{1m_1}(x_i^*,u)\right\}$ и $\left\{g_{2m_2}(y_j^*,v)\right\}$ $(i=1,2,\ldots,n_1;\, j=1,2,\ldots,n_2)$ в отдельности линейно независимы.

Используем обозначения

$$\rho_1^2 = \int_0^1\left[\int_0^1 x\,g_{1m_1}(x,u)\,dx\right]^2 du,$$

$$\rho_2^2 = \int_0^1\left[\int_0^1 g_{2m_2}(x,u)\,dx\right]^2 du.$$

<u>Лемма</u>. В классе $W_{g_{1m_1}g_{2m_2}}L_2$ наилучшая формула

$$\int_0^1\int_0^1 x f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i,j=1}^{n_1,n_2} A_{ij} f(x_i,y_j) + R_{n_1n_2}(f), \tag{7}$$

т.е. формула (7) с наименьшей величиной

$$R_{n_1n_2} = \sup_{f\in W_{g_{1m_1}g_{2m_2}}L_2} |R_{n_1n_2}(f)|,$$

характеризуется значениями

$$A_{ij} = A_i^* B_j^*, \; (x_i, y_j) = (x_i^*, y_j^*)$$

$$(i=1,2,\ldots,n_1;\; j=1,2,\ldots,n_2), \tag{8}$$

$$R_{n_1n_2} = M\left[\rho_1^2\rho_2^2 - (\rho_1^2-\delta_1^2)(\rho_2^2-\delta_2^2)\right]^{1/2}.$$

Доказательство, проводимое так же, как доказательство теоремы в статье [3], разобьем на несколько частей.

I. Подставляя (3) в (7), получим для остатка формулы (7)

$$R_{n_1 n_2}(f)=\int_0^1\int_0^1 f^{(m_1+m_2)}_{x^{m_1}y^{m_2}}(u,v)K(u,v)\,du\,dv, \tag{9}$$

где

$$K(u,v)=\varphi_1(u)\varphi_2(v)-\sum_{i,j=1}^{n_1,n_2}A_{ij}\,g_{1m_1}(x_i,u)\,g_{2m_2}(y_j,v),$$

$$\varphi_1(u)=\int_0^1 x\,g_{1m_1}(x,u)\,dx,$$

$$\varphi_2(u)=\int_0^1 g_{2m_2}(x,u)\,dx.$$

Применяя к (9) неравенство Буняковского и учитывая (4), находим оценку

$$|R_{n_1n_2}(f)|\leqslant M\left[\int_0^1\int_0^1 K^2(u,v)\,du\,dv\right]^{1/2}. \tag{I0}$$

Пусть теперь

$$f_0(x,y)=\alpha\int_0^1\int_0^1 K(u,v)\,g_{1m_1}(x,u)\,g_{2m_2}(y,v)\,du\,dv, \tag{II}$$

где

$$\alpha=M\Big/\left[\int_0^1\int_0^1 K^2(u,v)\,du\,dv\right]^{1/2}.$$

Покажем, что $f_0(x,y)\in W_{g_{1m_1}g_{2m_2}}L_2$.

Из (I) следует, что найдется функция вида

$$P_{i,m_i-1}(x,u)=\sum_{j=0}^{m_i-1}u^j\gamma_{ij}(x)$$

такая, что

$$\int_0^1 g_{im_i}(x,v)\,g_{im_i}(u,v)\,dv=\int_0^u\cdots\int_0^u g_{im_i}(x,u)\,du^{m_i}+P_{i,m_i-1}(x,u). \tag{I2}$$

Умножая это равенство на

$$l_i(x)=\begin{cases}x, & i=1\\ 1, & i=2\end{cases}$$

и интегрируя полученное равенство по x, получим

$$\int_0^1 \varphi_i(v)\, g_{im_i}(u,v)\, dv = \int_0^u \cdots \int_0^u \varphi_i(u)\, du^{m_i} + \int_0^1 l_i(x)\, P_{i,m_i-1}(x,u)\, dx. \qquad (13)$$

Учитывая (I2) и (I3), мы по (II) имеем

$$f_0(x,y) = \alpha \left\{ \left(\int_0^x \cdots \int_0^x \varphi_1(x)\, dx^{m_1} + \int_0^1 u P_{1,m_1-1}(u,x)\, du \right) \times \right.$$

$$\times \left(\int_0^y \cdots \int_0^y \varphi_2(y)\, dy^{m_2} + \int_0^1 P_{2,m_2-1}(x,y)\, dx \right) -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n_1,n_2} A_{ij} \left(\int_0^x \cdots \int_0^x g_{1m_1}(x_i, x)\, dx^{m_1} + P_{1,m_1-1}(x_i, x) \right) \times$$

$$\times \left(\int_0^y \cdots \int_0^y g_{2m_2}(y_j, y)\, dy^{m_2} + P_{2,m_2-1}(y_j, y) \right).$$

Отсюда следует абсолютная непрерывность производных(2) для $f_0(x,y)$, а такжк равенство

$$f_{0\,x^{m_1}y^{m_2}}^{(m_1+m_2)}(x,y) = \alpha K(x,y), \qquad (14)$$

и поэтому для $f_0(x,y)$ выполнены условия (3), (4), т.е.

$$f_0(x,y) \in W_{g_{1m_1} g_{2m_2}} L_2 .$$

По (9) и (I4) следует, что для $f = f_0(x,y)$ неравенство (I0) превращается в равенство. Но тогда

$$R_{n_1 n_2} = M \left[\int_0^1 \int_0^1 K^2(u,v)\, du\, dv \right]^{1/2}. \qquad (15)$$

Точно так же для формул (5) и (6) мы получаем

$$r_{jn_j} = M \left[\int_0^1 Q_j^2(u)\, du \right]^{1/2}, \qquad (16)$$

где для $j = 1,2$ использованы обозначения

$$Q_j(u) = \varphi_j(u) - \sum_{i=1}^{n_j} \gamma_i^{(j)} g_{jm_j}(t_i^{(j)}, u),$$

$$\gamma_i^{(1)} = A_i,\ \ \gamma_i^{(2)} = B_i,\ \ t_i^{(1)} = x_i,\ \ t_i^{(2)} = y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n_j).$$

2. Пусть теперь узлы x_i $(i=1,2,\ldots,n_1)$, y_j $(j=1,2,\ldots,n_2)$ – фиксированы и такие, что функции

$$g_{1m_1}(x_i,u)\,g_{2m_2}(y_j,v) \qquad (i=1,2,\ldots,n_1;\ j=1,2,\ldots,n_2) \tag{17}$$

на квадрате $0\leqslant u,\ v\leqslant 1$ линейно независимы.

Пусть α_i, β_j, α_{ij} — веса соответственно формул (5), (6), (7), дающие величинам (16), (15) наименьшие значения. В силу предположения о линейной независимости функций (17), эти веса удовлетворяют системам уравнений

$$\frac{\partial r^2_{1n_1}}{\partial A_i}=0 \quad (i=1,2,\ldots,n_1),$$

$$\frac{\partial r^2_{2n_2}}{\partial B_j}=0 \quad (j=1,2,\ldots,n_2),$$

$$\frac{\partial R^2_{n_1n_2}}{\partial A_{ij}}=0 \quad (i=1,2,\ldots,n_1;\ j=1,2,\ldots,n_2),$$

являясь единственными решениями этих систем. Но отсюда легко получается, что

$$\alpha_{ij}=\alpha_i\cdot\beta_j \qquad (i=1,2,\ldots,n_1;\ j=1,2,\ldots,n_2).$$

Пусть теперь весами формул (5), (6), (7) являются числа α_i, β_j, α_{ij} и для этих формул

$$r_{jn_j}=M\cdot\omega_j \quad (j=1,2),$$

$$R_{n_1n_2}=M\cdot\Omega.$$

Тогда

$$\Omega=\rho_1^2\rho_2^2-(\rho_1^2-\omega_1^2)(\rho_2^2-\omega_2^2). \tag{18}$$

Действительно,

$$\omega_j^2=\min_{\{\gamma_i^{(j)}\}}\int_0^1 Q_j^2(u)\,du=\rho_j^2-\int_0^1\left(\sum_{i=1}^{n_j}\gamma_i^{(j)}g_{jm_j}(t_i^{(j)},u)\right)^2du, \tag{19}$$

где уже $\gamma_i^{(1)}=\alpha_i$, $\gamma_i^{(2)}=\beta_i$,

$$\Omega^2=\min_{\{A_{ij}\}}\int_0^1\!\!\int_0^1 K^2(u,v)\,du\,dv=$$

$$=\rho_1^2\rho_2^2-\int_0^1\!\!\int_0^1\left(\sum_{i,j=1}^{n_1,n_2}\alpha_i\beta_j\,g_{1m_1}(x_i,u)g_{2m_2}(y_j,v)\right)^2du\,dv. \tag{20}$$

Из (I9) и (20) следует (I8).

3а. Ищем наилучшую формулу среди формул (7) с узлами, для которых функции (I7) линейно независимы.

Закрепим в формуле (7) узлы $(x_i, y_j) = (x_i^*, y_j^*)$ и убедимся, что они являются узлами искомой формулы. Проведя минимизацию величины $R_{n_1 n_2}$ по весам A_{ij}, мы согласно предыдущей части доказательства получим значения $A_{ij} = A_i^* B_j^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n_1;\ j = 1, 2, \ldots, n_2)$, а для величины

$$\min_{\{A_{ij}\}} R_{n_1 n_2}$$

— значение (8).

Возьмем теперь в формуле (7) некоторые другие фиксированные значения узлов $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$. Точно так же минимизируя для этих узлов величину $R_{n_1 n_2}$ по весам A_{ij}, мы получим значения весов в виде некоторых произведений $A_{ij} = p_i q_j$ $(i = 1, 2, \ldots, n_1;\ j = 1, 2, \ldots, n_2)$. Для выбранных узлов и этих весов имеем оценку формулы

$$M\left[\rho_1^2 \rho_2^2 - (\rho_1^2 - \mu_1^2)(\rho_2^2 - \mu_2^2)\right]^{1/2}, \tag{2I}$$

где

$$\mu_j^2 = \int_0^1 \left[\varphi_j(u) - \sum_{i=1}^{n_j} v_i^{(j)} g_{j m_j}(w_i^{(j)}, u)\right]^2 du,$$

$$v_i^{(1)} = p_i, \quad v_i^{(2)} = q_i, \quad w_i^{(1)} = \bar{x}_i, \quad w_i^{(2)} = \bar{y}_i.$$

В силу свойств узлов (x_i^*, y_j^*) имеем неравенства $0 < \delta_j \leq \mu_j$ и хотя бы для одного $j = 1, 2$ — неравенство $\delta_j < \mu_j$. Так как $\rho_j^2 - \delta_j^2 \geq 0$, $\rho_j^2 - \mu_j^2 \geq 0$, то этим величина (2I) меньше значения (8). А это означает, что лемма доказана, если узлы наилучшей формулы (7) такие, что в них функции (I7) линейно независимы.

3б. Предположим, что узлы наилучшей формулы (7)

$$(x_i, y_j) = (\bar{x}_i, \bar{y}_j)$$

такие, что найдутся числа $\{p_{ij}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n_1;\ j = 1, 2, \ldots, n_2)$, которые не все равны нулю, и выполнено условие

$$\sum_{i,j=1}^{n_1, n_2} p_{ij}\, g_{1 m_1}(\bar{x}_i, u)\, g_{2 m_2}(\bar{y}_j, v) \equiv 0.$$

Рассмотрим два возможных случая.

Первый случай. Одна функция, например,

$$g_{1m_1}(\bar{x}_{n_1}, u) \equiv 0.$$

Тогда по (3) для всех функций класса $W_{g_{1m_1}, g_{2m_2}} L_2$

$$f(\bar{x}_{n_1}, \bar{y}_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n_2),$$

а это значит, что наилучшая формула (7) имеет вид

$$\int_0^1 \int_0^1 x f(x,y)\, dx\, dy = \sum_{i,j=1}^{n_1-1, n_2} A_{ij} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) + R_{n_1 n_2}(f). \tag{22}$$

Предположим, что теперь для формулы (22) мы находимся в условиях пункта 3а доказательства [I], т.е., что функции

$$g_{1m_1}(\bar{x}_i, u)\, g_{2m_2}(\bar{y}_j, v) \quad (i = 1, 2, \ldots, n_1 - 1; \; j = 1, 2, \ldots, n_2)$$

линейно независимы. Тогда для наилучшей формулы (22) имеем оценку, которая отличается от величины (8) тем, что там вместо δ_1 надо взять величину δ_1', которая удовлетворяет условию

$$\min_{f \in W_{g_{1m_1}} L_2} r_{1, n_1 - 1} = M \cdot \delta_1'.$$

Так как $\delta_1' \geq \delta_1$, то этим оценка наилучшей формулы (22) не меньше величины (8), и поэтому рассматриваемый случай не дает нам лучшей формулы по сравнению с формулой (7), у которой узлы (x_i^*, y_j^*) и веса $A_i^* B_j^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n_1;$ $j = 1, 2, \ldots, n_2)$.

Второй случай. Пусть среди функций

$$g_{1m_1}(\bar{x}_i, u), \; g_{2m_2}(\bar{y}_j, v) \quad (i = 1, 2, \ldots, n_1; \; j = 1, 2, \ldots, n_2)$$

нет тождественно равных нулю.

Тогда для произвольной функции $\varphi(x,y) \in W_{g_{1m_1} g_{2m_2}} L_2$ имеем

$$\sum_{i,j=1}^{n_1, n_2} p_{ij} \varphi(\bar{x}_i, \bar{y}_j) =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \varphi^{(m_1+m_2)}_{x^{m_1} y^{m_2}}(u,v) \sum_{i,j=1}^{n_1, n_2} p_{ij}\, g_{1m_1}(\bar{x}_i, u)\, g_{2m_2}(\bar{y}_j, v)\, du\, dv = 0,$$

[I] В противном случае мы повторяем рассуждения пункта 3б) сначала, пока не попадем в условия пункта 3а .

что противоречит предположению относительно свойств класса $W_{g_{m_1} g_{2m_2}} L_2$. Значит, последний случай невозможен. Этим лемма доказана.

Замечание. В лемме рассмотрен вопрос построения наилучшей кубатурной формулы для интегралов с весовой функцией x. Аналогично решается вопрос построения таких формул для интегралов, когда весовая функция, удовлетворяя некоторым естественным требованиям, есть произведение двух функций, каждая из которых зависит от одной переменной.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} x &= t\cos 2\pi u \\ y &= t\sin 2\pi u. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Тогда рассмотрение функций $f(x,y)$ на круге $x^2+y^2 \leqslant 1$ можно свести к рассмотрению функции

$$\hat{f}(t,u) = f(t\cos 2\pi u,\ t\sin 2\pi u)$$

на квадрате $0 \leqslant t,\ u \leqslant 1$.

Через $F_{g_{1m_1} g_{2m_2}} L_2$ будем обозначать класс интегрируемых на круге $x^2+y^2 \leqslant 1$ функций $f(x,y)$, удовлетворяющих условию

$$\hat{f}(x,y) \in W_{g_{1m_1} g_{2m_2}} L_2.$$

Приведем пример такого класса. Класс функций $f(x,y)$, которые равны нулю на окружности $x^2+y^2=1$ и на отрезке $y=0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$, а также удовлетворяют условиям: производные

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial u^j}\hat{f}(t,u) \quad (i+j<4,\ i \leqslant 2,\ j \leqslant 2)$$

абсолютно непрерывны на квадрате $0 \leqslant t,\ u \leqslant 1$,

$$\left\{\int_0^1\int_0^1 \left[\frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial u^2}\hat{f}(t,u)\right]^2 dt\,du\right\}^{1/2} \leqslant M.$$

Для таких функций, как в этом нетрудно убедиться,

$$\hat{f}(0,u) \equiv \hat{f}(1,u) \equiv \hat{f}(t,0) \equiv \hat{f}(t,1) \equiv 0$$

и поэтому

$$g_{1m_1}(x,u) = g_{2m_2}(x,u) = (x-u)\,E(x-u) - x(1-u).$$

В классе $F_{g_{1m_1} g_{2m_2}} L_2$ рассмотрим формулы вида

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} f(x,y)\,dx\,dy \approx \sum_{i,j=1}^{n_1,n_2} C_{ij} f(x_i, y_j),$$

где множество узлов $\{(x_i, y_j)\}$ есть точки пересечения n_2 лучей с вершиной в начале координат и n_1 концентрических окружностей с радиусами, не превосходящими единицы, и с центрами в начале координат.

Эти формулы могут быть записаны в виде

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i,j=1}^{n_1,n_2} C_{ij} f(t_i\cos\varphi_j,\, t_i\sin\varphi_j) + \bar{R}_{n_1,n_2}(f). \quad (24)$$

Наилучшая формула (24) в классе $F_{g_1m_1g_2m_2}L_2$ определяется значениями C_{ij}, t_i, φ_j, дающими величине

$$\bar{R}_{n_1n_2} = \sup_{f\in F_{g_1m_1g_2m_2}L_2} |\bar{R}_{n_1n_2}(f)|$$

наименьшее значение.

<u>Теорема</u> I. Наилучшая в классе $F_{g_1m_1g_2m_2}L_2$ формула (24) характеризуется значениями:

$$C_{ij} = 2\pi A_i^* B_j^*,$$

$$t_i = x_i^*, \quad \varphi_j = 2\pi y_j^*,$$

$$(i=1,2,\ldots,n_1;\ j=1,2,\ldots,n_2);$$

$$\bar{R}_{n_1n_2} = 2\pi M\left[\rho_1^2\rho_2^2 - (\rho_1^2-\delta_1^2)(\rho_2^2-\delta_2^2)\right]^{1/2}.$$

<u>Доказательство</u>. Заменой (23) мы для остатка формулы (24) получаем представление

$$\bar{R}_{n_1n_2}(f) = 2\pi\left[\int_0^1\int_0^1 t\hat{f}(t,u)\,dt\,du - \sum_{i,j=1}^{n_1,n_2}\frac{C_{ij}}{2\pi}\hat{f}(t_i,u_j)\right],$$

где

$$u_j = \frac{\varphi_j}{2\pi} \quad (j=1,2,\ldots,n_2).$$

Так как для любой функции $\hat{f}(t,u)\in W_{g_1m_1g_2m_2}L_2$ можно построить функцию $f(x,y)\in F_{g_1m_1g_2m_2}L_2$, то этим

$$\bar{R}_{n_1n_2} = 2\pi R_{n_1n_2},$$

а отсюда по лемме следует доказательство теоремы.

Пусть теперь в классе $W_{g_1 m_1} L_2$ наилучшая формула

$$\int_0^1 f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n_1} C_k f(z_k) + r_{n_1}(f)$$

характеризуется значениями

$$C_k = C_k^*, \quad z_k = z_k^*$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n_1),$$

$$\sup_{f \in W_{g_1 m_1} L_2} |r_{n_1}(f)| = M\delta_3 .$$

Обозначим

$$\rho_3^2 = \int_0^1 \left[\int_0^1 g_{1m_1}(x,u)\,dx \right]^2 du .$$

<u>Теорема</u> 2. В классе $F_{g_1 m_1 g_2 m_2} L_2$ формула

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \le 1} \frac{f(x,y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \sum_{i,j=1}^{n_1,n_2} A_{ij} f(t_i \cos\varphi_j,\ t_i \sin\varphi_j) + \tilde{R}_{n_1 n_2}(f) \qquad (25)$$

с наименьшим значением величины

$$\tilde{R}_{n_1 n_2} = \sup_{f \in F_{g_1 m_1 g_2 m_2} L_2} |\tilde{R}_{n_1 n_2}(f)|$$

характеризуется значениями

$$A_{ij} = 2\pi C_i^* B_j^*,$$

$$t_i = z_i^*, \quad \varphi_j = 2\pi y_j^*,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n_1;\ j = 1, 2, \ldots, n_2);$$

$$\tilde{R}_{n_1 n_2} = 2\pi M \left[\rho_3^2 \rho_2^2 - (\rho_3^2 - \delta_3^2)(\rho_2^2 - \delta_2^2) \right]^{1/2}.$$

<u>Доказательство</u> такое же, как и доказательство теоремы I.

Рассмотрим множество формул

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i,j=1}^{n_1,n_2} A_{ij} f(P_{ij}) + \bar{\bar{R}}_{n_1 n_2}(f), \qquad (26)$$

где Δ означает треугольник, ограниченный линиями $x = 0$

$y=0$, $x+y=1$, $P\equiv(x,y)$, а множество узлов $\{P_{ij}\}$ получается пересечением n_1 прямых, параллельных гипотенузе треугольника Δ, и n_2 прямых, имеющих общую точку в начале координат; при этом узлы предполагаются принадлежащими области Δ.

Эти формулы будем рассматривать в классе $\Phi_{g_{1m_1} g_{2m_2}} L_2$ функций $f(x,y)$ таких, что их преобразования

$$g_f(x,y) = f\big(x(1-y),\, xy\big)$$

принадлежат классу $W_{g_{1m_1} g_{2m_2}} L_2$.

Преобразование

$$\left.\begin{aligned} x &= u(1-v) \\ y &= uv \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

переводит область Δ в квадрат $0 \leqslant u,\ v \leqslant 1$.

<u>Теорема</u> 3. Формула (26) с наименьшим значением величины

$$\bar{\bar{R}}_{n_1 n_2} = \sup_{f\in\Phi_{g_{1m_1} g_{2m_2}} L_2} |\bar{\bar{R}}_{n_1 n_2}(f)|$$

характеризуется значениями

$$A_{ij} = A_i^* \; B_j^*,$$

$$P_{ij} = \big(x_i^*(1-y_j^*),\;\; x_i^* y_j^*\big)$$

$$(i=1,2,\dots,n_1;\ j=1,2,\dots,n_2).$$

<u>Доказательство.</u> Преобразование (27) переводит прямые

$$x+y = C$$

в прямые

$$u = C$$

и прямые

$$y = kx$$

в прямые

$$v = \frac{k}{1+k}.$$

Поэтому узлы формулы (25) переводятся в вершины прямоугольной сетки квадрата $0 \leqslant u,\ v \leqslant 1$. Учитывая это, мы для ошибки формулы (25) имеем представление

$$\bar{\bar{R}}_{n_1 n_2}(f) = \int_0^1\int_0^1 u g_f(u,v)\,du\,dv - \sum_{i,j=1}^{n_1,n_2} A_{ij}\, g_f(u_i, v_j),$$

где значения $u = u_i$, $v = v_j$, будучи подставлены в (27), дают координаты точки P_{ij}.

Но тогда по лемме, как и в теореме I, мы имеем доказательство теоремы 3.

Совершенно так же доказывается следующая

<u>Теорема</u> 4. Формулы вида

$$\iint_\Delta \frac{f(x,y)}{x+y}\,dx\,dy = \sum_{i,j=1}^{n_1,n_2} A_{ij} f(P_{ij}) + \tilde{\bar{\bar{R}}}_{n_1 n_2}(f) \tag{28}$$

с наименьшим значением величины

$$\tilde{\bar{\bar{R}}}_{n_1 n_2} = \sup_{f \in \Phi_{g_{1m_1} g_{2m_2}} L_2} \left|\tilde{\bar{\bar{R}}}_{n_1 n_2}(f)\right|$$

характеризуется значениями

$$A_{ij} = C_i^* B_j^*,$$

$$P_{ij} = \left(z_i^*(1-y_j^*),\ z_i^* y_j^*\right),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n_1;\ j = 1, 2, \ldots, n_2),$$

$$\tilde{\bar{\bar{R}}}_{n_1 n_2} = M\left[\rho_3^2 \delta_2^2 + \rho_2^2 \delta_3^2 - \delta_3^2 \delta_2^2\right]^{1/2}.$$

В заключение приведем пример класса $\Phi_{g_{1m_1} g_{2m_2}} L_2$ функций $f(x,y)$, определенных на треугольнике Δ: класс всех функций $f(x,y)$, которые на границе области Δ обращаются в нуль и удовлетворяют условиям: производные

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial u^i \partial v^j} g_f(u,v) \quad (i+j < 4,\ i \leqslant 2,\ j \leqslant 2)$$

абсолютно непрерывны на квадрате $0 \leqslant u,\ v \leqslant 1$ и

$$\left\{\int_0^1\int_0^1 \left[\frac{\partial^4}{\partial u^4 \partial v^4} g_f(u,v)\right]^2 du\,dv\right\}^{1/2} \leqslant M.$$

Нетрудно заметить, что $g_f(u,v) = 0$ на границе квадрата $0 \leqslant u$, $v \leqslant 1$, и поэтому в данном случае

$$g_{1m_1}(u,v) = g_{2m_2}(u,v) = (u-v)\,E(u-v) - u(1-v),$$

$$m_1 = m_2 = 2.$$

Литература

I. С.М. **Никольский**. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами. УМН, 1950, У, вып. 2(36), 165-177.

2. М. **Левин**. Экстремальные задачи для квадратурных формул на некоторых множествах функций. Изв. АН ЭССР, Физ.-Матем., 1970, <u>19</u>, № 4, 407-414.

3. М. **Левин**. О наилучших кубатурных формулах. Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., 1970, <u>19</u>, № 4, 499-502.

M.Levin

On the Integration Formulas for Circle and Triangle

Summary

The best cubature formulas of type (7), (24), (25), (26) and (28) have been constructed for certain classes of functions f(x,y)

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 312 1971

УДК 518:517.392

А. Ыги, М. Левин

ОДНА ЧАСТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ

В работе [1] были построены наилучшие квадратурные формулы [2] в классах функций $W^{(2r)}_{01L_q}$ и $W^{(2r)}_{L_q}$. В качестве примера использования метода рассмотрим еще две такие задачи.

В классе функций $f(x)$ (обозначим этот класс через F), которые на отрезке $[0,1]$ имеют абсолютно-непрерывную производную порядка $4r-1$ и удовлетворяют условиям

$$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1)=f^{(2r+k)}(0)=f^{(2r+k)}(1)=0 \tag{1}$$

$$(k=0,1,\dots,r-1)$$

$$\left\{\int_0^1 |f^{(4r)}(t)|^q\,dt\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant M, \tag{2}$$

построим формулу вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{4r-2}\mu_k^{(j)}f^{(j)}(x_k)+R_n(f) \tag{3}$$

с наименьшим значением величины

$$R_n=\sup_{f\in F}|R_n(f)|. \tag{4}$$

Числа $0<q\leqslant\infty$, n и r считаем заданными.

Пусть $\Gamma(x,t)$ — функция Грина оператора $f^{(4r)}(x)$ с краевыми условиями (1). Нетрудно увидеть, что

$$\Gamma(x,t) = \int_0^1 G(x,v)\, G(v,t)\, dv, \tag{5}$$

где $G(x,t)$ – функция Грина оператора

$$\begin{cases} f^{(2r)}(x), \\ f^{(\kappa)}(0) = f^{(\kappa)}(1) = 0, \quad (\kappa = 0, 1, \ldots, r-1) \end{cases}$$

и имеет вид [I]

$$G(x,t) = \frac{(x-t)^{2r-1}}{(2r-1)!} E(x-t) - H(x,t), \tag{6}$$

$$H(x,t) = \frac{x^r(1-t)^r}{(2r-1)!} \sum_{i=0}^{r-1} \binom{2r-1}{i} (1-t)^{r-i-1} \sum_{\kappa=0}^{r-i-1} (-1)^\kappa \binom{r+\kappa-1}{\kappa} (x-1)^{\kappa+i}.$$

Из формул (5) и (6) имеем

$$\Gamma(x,t) = A(x,t) + \frac{(x-t)^{4r-1}}{(4r-1)!} E(x-t),$$

где

$$A(x,t) = \int_0^1 H(x,v) H(v,t)\, dv - \frac{1}{(2r-1)!} \int_t^1 (v-t)^{2r-1} H(x,v)\, dv -$$

$$- \frac{1}{(2r-1)!} \int_0^x (x-v)^{2r-1} H(v,t)\, dv.$$

Так как для $f(x) \in F$ имеет место представление

$$f(x) = \int_0^1 f^{(4r)}(t)\, \Gamma(x,t)\, dt,$$

то

$$R_n = \frac{M}{(4r)!} \left\{ \int_0^1 |K(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}},$$

где

$$p(q-1) = q,$$

$$K(t) = (4r)! \left[\int_0^1 \Gamma(x,t)\, dx - \sum_{\kappa=1}^{n} \sum_{j=0}^{4r-2} \mu_\kappa^{(j)} \Gamma_{x^j}^{(j)}(x_\kappa, t) \right].$$

Используя свойства функции (5), мы замечаем, что функцию $K(t)$ можно представить в виде

$$K(t) = \begin{cases} t^r p_{3r}(t), & t \in [0, x_1] \\ p_{i,4r}(t), & t \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ (1-t)^r q_{3r}(t), & t \in [x_n, 1], \end{cases}$$

где $t^r p_{3r}(t)$, $(1-t)^r q_{3r}(t)$, $p_{i,4r}(t)$ — многочлены степени $4r$ со старшими коэффициентами, равными I, причем

$$\left[t^r p_{3r}(t)\right]^{(i)}_{t=0} = \left[(1-t)^r q_{3r}(t)\right]^{(i)}_{t=1} = 0,$$

$$i = 2r, 2r+1, \dots, 3r-1.$$

Пусть $R_{4r,p}(t)$ — многочлен степени $4r$ со старшим коэффициентом, равным I, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1,1]$ в метрике L_p, а $Q_{4r,p}(t)$ — многочлен вида

$$t^r\left(t^{3r} + \sum_{k=2r}^{3r-1} b_k t^k + \sum_{k=0}^{r-1} b_k t^k\right),$$

наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[0,1]$ в метрике L_p.

Повторяя рассуждение работы [1], приходим к следующим результатам.

Т е о р е м а I. Единственная формула (3) с наименьшей величиной (4) характеризуется значениями

$$\left.\begin{aligned}
&x_k = [2(k-1)+\delta]h, \quad k=1,2,\dots,n,\\
&\mu_1^{(j)} = \frac{1}{(4r)!}\left[(-1)^j x_1^{j+1} Q^{(4r-j-1)}_{4r,p}(1) + h^{j+1} R^{(4r-j-1)}_{4r,p}(1)\right],\\
&\qquad\qquad j = 0,1,\dots,4r-2,\\
&\mu_{i+1}^{(2j+1)} = 0, \quad j = 0,1,\dots,2r-2,\\
&\mu_{i+1}^{(2j)} = \frac{2h^{2j+1}}{(4r)!} R^{(4r-2j-1)}_{4r,p}(1), \quad i=1,2,\dots,n-2;\ j=0,1,\dots,2r-1\\
&\mu_n^{(j)} = (-1)^j \mu_1^{(j)}, \quad j=0,1,\dots,4r-2,
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$R_n = \frac{MR_{4r,p}(1)}{(4r)!\sqrt[p]{4rp+1}} h^{4r}, \qquad (8)$$

где

$$\delta = \left[\frac{R_{4r,p}(1)}{Q_{4r,p}(1)}\right]^{\frac{1}{4r}},$$

$$h = \frac{1}{2(n-1+\delta)}.$$

Обозначим $W^{(4r)}_{L_q}$ множество функций $f(x)$, которые на отрезке $[0,1]$ имеют абсолютно непрерывную производную порядка $4r-1$ и удовлетворяют условию (2).

Т е о р е м а 2. Единственная формула вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{4r-2} \mu_k^{(j)} f^{(j)}(x_k) + \sum_{j=0}^{r-1}\left[\gamma_j f^{(j)}(0) + \delta_j f^{(j)}(1)\right] + \sum_{j=2r}^{3r-1}\left[\gamma_j f^{(j)}(0) + \delta_j f^{(j)}(1)\right] + \bar{R}_n(f) \tag{9}$$

с наименьшим значением величины

$$\bar{R}_n = \sup_{f\in W^{(4r)}_{L_q}} |\bar{R}_n(f)| \tag{10}$$

характеризуется узлами x_k и весами $\mu_k^{(j)}$, вычисленными по формулам (7), весами $\{\gamma_j, \delta_j\}$, являющимися решением системы

$$\begin{cases} \gamma_m + \sum\limits_{j=0}^{m} \dfrac{\delta_j}{(m-j)!} = \dfrac{1}{m!} R_n(x^m), \quad m=0,1,\ldots,r-1, \\[2ex] \sum\limits_{j=0}^{r-1} \dfrac{\delta_j}{(m-j)!} = \dfrac{1}{m!} R_n(x^m), \quad m=r, r+1,\ldots, 2r-1, \\[2ex] \gamma_m + \sum\limits_{j=0}^{r-1} \dfrac{\delta_j}{(m-j)!} + \sum\limits_{j=2r}^{m} \dfrac{\delta_j}{(m-j)!} = \dfrac{1}{m!} R_n(x^m), \quad m=2r, 2r+1,\ldots,3r-1, \\[2ex] \sum\limits_{j=0}^{r-1} \dfrac{\delta_j}{(m-j)!} + \sum\limits_{j=2r}^{3r-1} \dfrac{\delta_j}{(m-j)!} = \dfrac{1}{m!} R_n(x^m), \quad m=3r, 3r+1,\ldots, 4r-1, \end{cases}$$

где $R_n(x^m)$ означает ошибку формулы (3) с узлами и весами (7) для функции $f(x)=x^m$. Величина (10) совпадает со значением (8).

Литература

1. М. Левин. Экстремальные задачи для квадратурных формул на некоторых множествах функций. Изв.АН ЭССР, Физ.-Матем., 1970, 19, № 4, 407-414.

2. С.М. Никольский. Квадратурные формулы. М., 1958.

A.Jõgi, M.Levin

Eine partikuläre Aufgabe für Quadraturformeln

Zusammenfassung

Es sei $W_{L_q}^{(4r)}$ eine Klasse der Funktionen f(x) die absolut stetige Ableitungen (4r-1)-ter Ordnung haben und die Bedingung (2) erfüllen. Es wird eine Formel für die beste Annäherung in Gestalt (9) mit der Fehlerabschätzung (10) konstruiert.

Es wird eine Formel (3) für die Klasse F der Funktionen f(x) $W_{L_q}^{(4r)}$, die die Bedingung (1) erfüllen, mit dem kleinsten Wert der Grösse (4) abgeleitet.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 312 1971

УДК 519.48

Я. Хенно

ГРУППОВЫЕ СИСТЕМЫ МЕНГЕРА

Пусть J — непустое подмножество множества всех натуральных чисел. Совокупность $A=\{A_n, n\in J\}$ непересекающихся множеств A_n называется <u>системой Менгера</u> (см. [2]), если для любых $n,m\in J$ всяким $a_1,\dots,a_m\in A_n, b\in A_m$ сопоставлен элемент $a_1\dots a_m b\in A_n$, причем выполняется тождество

$$x_1\dots x_m(y_1\dots y_k z)=(x_1\dots x_m y_1)\dots(x_1\dots x_m y_k)z \tag{I}$$

для любых $x_1,\dots,x_m\in A_n$, $y_1,\dots,y_k\in A_m$, $z\in A_k$.

Назовем систему множеств $L=\{L_n, n\in J\}$, где $L_n\subseteq A_n$, <u>левым идеалом</u> системы Менгера $A=\{A_n,n\in J\}$ (см. [2], [3]), если $x_1\dots x_m a\in L_n$ при любых $x_1,\dots,x_m\in A_n, a\in L_m, m,n\in J$.

Назовем систему множеств $R=\{R_n, n\in J_R\}$, где $R_n\subseteq A_n$, $J_R\subseteq J$, <u>правым идеалом</u> системы $A=\{A_n,n\in J\}$, если $a_1\dots a_m x\in R_n$ при любых $a_1,\dots,a_m\in R_n, n\in J_R, x\in A_m, m\in J$.

Назовем систему Менгера $A=\{A_n,n\in J\}$ <u>групповой</u>, если выполнены условия I, 2.

I. Система A не имеет нетривиальных (отличных от A) левых идеалов.

2. Система A не имеет нетривиальных (отличных от правых идеалов вида $R=\{A_n, n\in J_R\subseteq J\}$) правых идеалов.

Из определения следует, что для всякого $a\in A_m, m\in J$ множество $L_a=\{x\dots xa, x\in A_n, n\in J\}$ - левый идеал системы A. Так как всякий левый идеал системы A содержит левые идеалы такого вида, то I эквивалентно условию

I'. Для всяких $a\in A_m, b\in A_n, m,n\in J$ существует $x\in A_n$ такой, что $x\dots xa=b$.

Из определения следует, что для всякого $m \in J$ и для всякого $a \in A_n, n \in J$ множество $R_a = \{a \dots ax, x \in A_m\}$ - правый идеал системы A. Так как всякий правый идеал системы A содержит правые идеалы такого вида, то 2 эквивалентно условию

2'. Для всякого $m \in J$ и для всяких $a, b \in A_n, n \in J$ существует $y \in A_m$ такой, что $a \dots ay = b$.

Если $A = \{A_n, n \in J\}$ - система Менгера, то определим на множестве $A' = \bigcup_n A_n$ бинарную операцию $a \circ b$ формулой $a \circ b = a \dots ax$. Относительно этой операции $(A', \circ)$ является полугруппой, а все A_n - ее правыми идеалами. Назовем полугруппу $(A', \circ)$ диагональной полугруппой системы A.

<u>Теорема</u> I. Система Менгера $A = \{A_n, n \in J\}$ является групповой тогда и только тогда, когда диагональная полугруппа $(A', \circ)$ системы A разлагается в прямое произведение $G_A \times J'$, где G_A - группа и $G_A \cong (A_n, \circ)$ при всяком $n \in J$, а J' изоморфна полугруппе, которая получится, если на множестве J ввести умножение формулой $m \cdot n = m$ для всяких $m, n \in J$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $A = \{A_n, n \in J\}$ - групповая система Менгера. Из I' следует, что полугруппа $(A', \circ)$ обратима слева, а из I', 2' следует при $m = n$, что при любом $n \in J$ полугруппа $(A_n, \circ)$ - группа, единица e_n которой - идемпотент полугруппы $(A', \circ)$.

Так как $(A', \circ)$ - непересекающееся объединение групп $(A_n, \circ)$, то все его идемпотенты - единицы групп $(A_n, \circ)$, $n \in J$. Обозначим их совокупность через J'.

Известно ([2], УI. 3.3), что если полугруппа обратима слева, то всякий его идемпотент - правая единица всей полугруппы, т.е. для всяких $x \in A'$, $e_n \in J'$ имеем

$$x \circ e_n = x \dots x e_n = x. \tag{2}$$

Следовательно, J' - подполугруппа и так как $e_m \circ e_n = e_m$ для всяких $e_m, e_n \in J'$, то J' изоморфна полугруппе, которая получится, если на J ввести умножение формулой $m \cdot n = m$.

Кроме того, в ([2], УI, 3.7) доказано, что $(A', \circ) = G_A \times J'$, где G_A - группа и $G_A \cong e_n \circ A'$ для всякого $n \in J$. Так как $e_n \circ a = e_n \dots e_n a \in A_n$ для всякого $a \in A'$, то $e_n \circ A' \subseteq A_n$, но с другой стороны, $e_n \circ A' \subseteq e_n \circ A_n = A_n$, так как e_n – единица группы $(A_n, \circ)$. Следовательно, $G_A \cong (A_n, \circ)$ при всяком $n \in J$.

Обратно, пусть $A = \{A_n, n \in J\}$ – система Менгера, у которой $(A', \circ) = G_A \times J'$, где G_A – группа, $G_A \cong (A_n, \circ)$, а полугруппа J' изоморфна полугруппе, которая получится, если на J ввести умножение $m \cdot n = m$.

Если $a = (g_1, m) \in A_m$, $b = (g_2, n) \in A_n$, $g_1 g_2 \in G_A$, то для $x = (g_2 g_1^{-1}, n) \in A_n$ имеем $x \ldots xa = x \circ a = (g_2 g_1^{-1} g_1, nm) = (g_2, n) = b$, так что I' выполнено. Если $a = (g_1, n) \in A_n$, $b = (g_2, n) \in A_n$, то для $y = (g_1^{-1} g_2, m)$ имеем $a \ldots ay = a \circ y = (g_1 g_1^{-1} g_2, nm) = (g_1, n) = b$ и 2' тоже выполнено. Следовательно, A – групповая система. Теорема доказана.

<u>С л е д с т в и е 2.</u> Система Менгера $A = \{A_n, n \in J\}$ является групповой тогда и только тогда, когда выполняются условия I", 2".

I". Для всякого $n \in J$ существует $e_n \in A_n$ такой, что $x \circ e_n = x$ для всякого $x \in A_m, m \in J$, $e_n \circ y = y$ для всякого $y \in A_n$.

2". Для всякого $a \in A_m, m \in J$ существует $a^{-1} \in A_n$ такой, что $a^{-1} \circ a = e_n$ и для всякого $m \in J$, и для всякого $b \in A_n$ существует $b^{-1} \in A_m$ такой, что $b \circ b^{-1} = e_n$.

<u>Доказательство.</u> Если система $A = \{A_n, n \in J\}$ – групповая, то $(A', \circ) = G_A \times J'$. Тогда $x \circ e_n = x$ следует из (I), $e_n \circ y = y$ следует из того, что e_n – единица группы $(A_n, \circ)$, а в 2" можно для $a = (g_1, m) \in A_m$ взять $a^{-1} = (g^{-1}, n) \in A_n$, а для $b = (g_2, n) \in A_n$ взять $b^{-1} = (g_2^{-1}, m) \in A_m$.

Обратно, пусть I", 2" для системы Менгера $A = \{A_n, n \in J\}$ выполнены. Если $a \in A_m, b \in A_n, m, n \in J$, то для $x = b \circ a^{-1}$, где $a^{-1} \in A_n$ такой, что $a^{-1} \circ a = e_n$, выполняется I', если же $a, b \in A_n, n \in J$, то при произвольном $m \in J$ для $y = a^{-1} \circ b$, где $a^{-1} \in A_m$ такой, что $a \circ a^{-1} = e_n$ выполняется 2', следовательно, система A – групповая. Следствие доказано.

Назовем группу G_A основной группой групповой системы A.

Так как в групповой системе Менгера $A = \{A_n, n \in J\}$ при всяком $n \in J$ имеем $(A_n, \circ) \cong G_A$, то существуют изоморфизмы $\tau_n^m : (A_n, \circ) \to (A_m, \circ), n, m \in J$. При помощи следствия 2 легко проверить, что такие изоморфизмы можно определить формулой:

$$a \tau_n^m = e_m \circ a \quad \text{для всякого } a \in A_n.$$

Известно (см. [2]), что системы Менгера возникают при рассмотрении совокупностей многоместных функций относительно операции суперпозиции. Пусть $\varphi_n(M)$ - совокупность всех n-местных функций на множестве M. Если $a_1,\dots,a_m \in \varphi_n(M)$, $b \in \varphi_m(M)$, то определим функцию $a_1 \dots a_m b \in \varphi_n(M)$ следующей формулой:

$$\bar{\alpha}(a_1 \dots a_m b) = (\bar{\alpha} a_1) \dots (\bar{\alpha} a_m) b,$$

где $\bar{\alpha} a = \alpha_1 \dots \alpha_n a \in M$ есть результат применения функции $a \in \varphi_n(M)$ к $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in M^n$.

При таком определении совокупность множеств $\varphi_J(M) = \{\varphi_n(M), n \in J\}$ образует систему Менгера, все подсистемы которой называются <u>системами Менгера функции на множестве</u> M.

Пусть $A = \{A_n, n \in J\}$ - система Менгера функции на множестве M. Назовем подмножество $M_\lambda \subseteq M$ <u>замкнутым</u> для A, если при любых $\bar{\alpha} \in M_\lambda^n$, $a \in A_n$, $n \in J$ имеем $\bar{\alpha} a \in M_\lambda$ и M_λ - минимальное подмножество множества M, обладающее этим свойством.

<u>Лемма 3.</u> Пусть $A = \{A_n, n \in J\}$ - система Менгера функции на множестве M. Если M_λ - замкнутое для A подмножество множества M, то для всяких $\bar{\alpha} \in M_\lambda^n, n \in J$ имеем $M_\lambda = \{\bar{\alpha} a, a \in A_n\}$. Если A - групповая система, то для всяких $\bar{\alpha} \in M^n, n \in J$ множество $M' = \{\bar{\alpha} a, a \in A_n\}$ замкнуто для A.

<u>Доказательство.</u> Если M_λ - замкнуто для A, $\bar{\alpha} \in M_\lambda^n$, $n \in J$, то ввиду замкнутости M_λ имеем $\bar{\alpha} a \in M_\lambda$ для всякого $a \in A_n$, следовательно, $M' = \{\bar{\alpha} a, a \in A_n\} \subseteq M_\lambda$. Но так как при любых $\beta_1, \dots, \beta_m \in M'$, $\beta_1 = \bar{\alpha} a_1, \dots, \beta_m = \bar{\alpha} a_m, a_1, \dots, a_m \in A_n, b \in A_m, m \in J$ имеем ввиду $a_1 \dots a_m b \in A_n$ что $\beta_1 \dots \beta_m b = (\bar{\alpha} a_1) \dots (\bar{\alpha} a_m) b = \bar{\alpha}(a_1 \dots a_m b) \in M'$ и M_λ - минимальное подмножество, обладающее этим свойством, то $M' = M_\lambda$.

Если A - групповая система, то точно также можно показать, что при всяких $\bar{\alpha} \in M^n, n \in J$ множество $M' = \{\bar{\alpha} a, a \in A_n\}$ обладает свойством: из $\beta_1, \dots, \beta_m \in M'$ следует $\beta_1 \dots \beta_m b \in M'$ для всякого $b \in A_m$, $m \in J$. Пусть $M'' \subseteq M'$ — произвольное истинное подмножество множества M', $\beta = \bar{\alpha} a \in M''$, $\beta_1 = \bar{\alpha} a_1 \in M'$, $a, a_1 \in A_n$. При помощи следствия 2 получим $\beta_1 = \bar{\alpha} a_1 = \bar{\alpha}(e_n \circ a_1) = \bar{\alpha}((a \circ a^{-1}) \circ a_1) = \bar{\alpha}(a \circ (a^{-1} \circ a)) = \bar{\alpha}(a \dots a (a^{-1} \circ a_1)) = (\bar{\alpha} a) \dots (\bar{\alpha} a)(a^{-1} \circ a_1) = \beta \dots \beta (a^{-1} \circ a)$, следовательно, множество M'' не может быть замкнутым. Лемма доказана.

Пусть $A=\{A_n, n\in J\}$ – система Менгера функции на множестве M, $M_\lambda, \lambda\in\Lambda(A)$ – совокупность всех замкнутых для A подмножеств множества M, $N=\bigcup\limits_\lambda M_\lambda$. Сопоставим всякому $a\in A_n, n\in J$ преобразование (одноместную функцию) $\bar{a}: N\to N$, определенную формулой: $\alpha\circ\bar{a}=\alpha\ldots\alpha a$, где $\alpha\circ\bar{a}\in N$ обозначает результат применения преобразования $\bar{a}$ к $\alpha\in N$.

Л е м м а 4. Если $A=\{A_n, n\in J\}$ – групповая система Менгера функции на множестве M, то отображение $a\to\bar{a}$ есть изоморфизм групп $(A_n,\circ)$ на одну и ту же группу $\bar{G}_A$ взаимно однозначных преобразований множества N.

Доказательство. Так как при всяких $\alpha\in N$, $a\in A_n$, $b\in A_m$, $n,m\in J$ имеем $\alpha\circ(\overline{a\circ b})=\alpha\ldots\alpha(a\circ b)=\alpha\ldots\alpha(a\ldots ab)=(\alpha\ldots\alpha a)\ldots(\alpha\ldots\alpha a)b=(\alpha\ldots\alpha a)\circ\bar{b}=(\alpha\circ\bar{a})\circ\bar{b}=\alpha\circ(\bar{a}\circ\bar{b})$, то отображение $a\to\bar{a}$ – гомоморфизм.

Покажем, что

$$\alpha\circ\bar{e}_n=\alpha\ldots\alpha e_n=\alpha \tag{3}$$

при всяких $\alpha\in N$, $n\in J$. Действительно, если $\alpha\in N$, то $\alpha\in M_\lambda$ для какого-то замкнутого для A подмножества M_λ. Согласно лемме 3 $M_\lambda=\{\alpha\ldots\alpha a,\ a\in A_n\}$, следовательно, существует $a\in A_n$ такой, что $\alpha=\alpha\ldots\alpha a=\alpha\circ\bar{a}$, так что $\alpha\circ\bar{e}_n=(\alpha\circ\bar{a})\circ\bar{e}_n=$ $=\alpha\circ(\bar{a}\circ\bar{e}_n)=\alpha\circ(\overline{a\circ e_n})=\alpha\circ\bar{a}=\alpha$.

Отсюда следует, что $\alpha\circ\overline{a\tau_n^m}=\alpha\circ(\overline{e_m\circ a})=\alpha\circ(\bar{e}_m\circ\bar{a})=(\alpha\circ\bar{e}_m)\circ\bar{a}=\alpha\circ\bar{a}$ при всяких $\alpha\in N$, $a\in A_n$, $m,n\in J$, т.е. отображение $a\to\bar{a}$ сопоставит соответствующим при изоморфизме τ_n^m элементам групп $(A_n,\circ)$, $(A_m,\circ)$ одно и то же преобразование множества N. Все эти преобразования — взаимно однозначные, так как если для некоторых $\alpha_1,\alpha_2\in N$, $a\in A_n$, $n\in J$ имеем $\alpha_1\circ\bar{a}=\alpha_2\circ\bar{a}$, то $\alpha_1=\alpha_1\circ\bar{e}_n=\alpha_1\circ(\overline{a\circ a^{-1}})=\alpha_1\circ(\bar{a}\circ\overline{a^{-1}})=$

$$=(\alpha_1\circ\bar{a})\circ\overline{a^{-1}}=(\alpha_2\circ\bar{a})\circ\overline{a^{-1}}=\alpha_2\circ(\bar{a}\circ\overline{a^{-1}})=$$

$$=\alpha_2\circ(\overline{a\circ a^{-1}})=\alpha_2\circ\bar{e}_n=\alpha_2,$$

где $a^{-1}\in A_n$ такой, что $a\circ a^{-1}=e_n$. Кроме того, соответствие $a\to\bar{a}$ – взаимно однозначное, так как если для $a_1,a_2\in A_n$, $n\in J$ имеем $\bar{a}_1=\bar{a}_2$, то для всякого $\bar{\alpha}\in M^n$ имеем ввиду того, что $\bar{\alpha}e_n\in N$ согласно лемме 3, что $\bar{\alpha}a_1=\bar{\alpha}(e_n\circ a_1)=\bar{\alpha}(e_n\ldots e_na_1)=(\bar{\alpha}e_n)\ldots(\bar{\alpha}e_n)a_1=(\bar{\alpha}e_n)\circ\bar{a}_1=(\bar{\alpha}e_n)\circ\bar{a}_2=(\bar{\alpha}e_n)\ldots(\bar{\alpha}e_n)a_2=\bar{\alpha}(e_n\ldots e_na_2)=\bar{\alpha}(e_n\circ a_2)=\bar{\alpha}a_2$, т.е. $a_1=a_2$. Лемма доказана.

Назовем группу $\bar{G}_A$ основной группой преобразований групповой системы функции A.

Пусть G – группа взаимно однозначных преобразований некоторого подмножества $N \subseteq M$. Обозначим произведение элементов $g_1, g_2 \in G$ через $g_1 \circ g_2$, а результат применения преобразования $g \in G$ к $\alpha \in N$ через $\alpha \circ g$. Рассмотрим G как групповую систему Менгера ($J=\{1\}$) одноместных функций на множестве N и пусть $M_\lambda, \lambda \in \Lambda(G)$ — совокупность всех замкнутых для G подмножеств множества N. Можно заметить следующее:

I^0. Если e – единица группы G, то $\alpha \circ e = \alpha$ для всякого $\alpha \in N$, иначе для $\alpha \neq \alpha \circ e$ было бы $(\alpha \circ e) \circ e = \alpha \circ (e \circ e) = \alpha \circ e$, но e – взаимно однозначное преобразование.

2^0. $\bigcup_\lambda M_\lambda = N$, так как для всякого $\alpha \in N$ множество $M' = \{\alpha \circ g, g \in G\}$ согласно лемме 3 замкнуто и $\alpha = \alpha \circ e \in M'$.

3^0. Для всяких $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in M_\lambda, \lambda \in \Lambda(G), (n>1)$ существуют $g_1, \ldots, g_{n-1} \in G$ такие, что $\alpha_2 = \alpha_1 \circ g_1, \ldots, \alpha_n = \alpha_1 \circ g_{n-1}$, так как согласно лемме 3 имеем $M_\lambda = \{\alpha_1 \circ g, g \in G\}$.

Обозначим через $F_n(G)$ $(n>1)$ совокупность всех функций $f_n : G^{n-1} \to G$, для которых выполнены следующие условия:

$$(e, \ldots, e) f_n = e. \tag{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Из } \alpha \circ g_1 = \alpha \circ g'_1, \ldots, \alpha \circ g_{n-1} = \alpha \circ g'_{n-1} \text{ следует} \\ \qquad \alpha \circ (g_1, \ldots, g_{n-1}) f_n = \alpha \circ (g'_1, \ldots, g'_{n-1}) f_n. \end{array}\right\} \tag{5}$$

<u>Лемма 5.</u> Пусть $A = \{A_n, n \in J\}$ – групповая система Менгера функции на множестве M. Если для всякой $n \in J \setminus 1$ определить функцию $f_n^A : \bar{G}_A^{n-1} \longrightarrow \bar{G}_A$ формулой

$$(g_1, \ldots, g_{n-1}) f_n^A = \overline{e_n a_1 \ldots a_{n-1} e_n} \tag{6}$$

где $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A_n$ такие, что $\bar{a}_1 = g_1, \ldots, \bar{a}_{n-1} = g_{n-1}$, то $f_n^A \in F_n(\bar{G}_A)$.

<u>Доказательство.</u> Так как $\bar{e}_n = e$, то $(e, \ldots, e) f_n = \overline{e_n e_n \ldots e_n e_n} = \bar{e}_n = e$ и условие (4) выполнено.

Пусть $\alpha \in N$, $g_1, \ldots, g_{n-1}, g'_1, \ldots, g'_{n-1} \in \bar{G}_A$ такие, что $\alpha \circ g_i = \alpha \circ g'_i$ и $a_1, \ldots, a_{n-1}, a'_1, \ldots, a'_{n-1} \in A_n$ такие, что $\bar{a}_i = g_i$, $\bar{a}'_i = g'_i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Тогда

$$\alpha\circ(g_1,\dots,g_{n-1})f_n^A=\alpha\circ(\overline{e_n a_1\dots a_{n-1}e_n})=\alpha\dots\alpha(e_n a_1\dots a_{n-1}e_n)=$$
$$=(\alpha\dots\alpha e_n)(\alpha\dots\alpha a_1)\dots(\alpha\dots\alpha a_{n-1})e_n=(\alpha\circ\bar e_n)(\alpha\circ\bar a_1)\dots(\alpha\circ\bar a_{n-1})e_n=$$
$$=(\alpha\circ\bar e_n)(\alpha\circ\bar a'_1)\dots(\alpha\circ\bar a'_{n-1})e_n=(\alpha\dots\alpha e_n)(\alpha\dots\alpha a'_1)\dots(\alpha\dots\alpha a'_{n-1})e_n=$$
$$=\alpha\dots\alpha(e_n a'_1\dots a'_{n-1}e_n)=\alpha\circ(\overline{e_n a'_1\dots a'_{n-1}e_n})=\alpha\circ(g'_1,\dots,g'_{n-1})f_n^A$$

и (6) тоже выполняется. Лемма доказана.

Пусть A - групповая система Менгера функции на множестве M. Если множество M не замкнуто для A, то определим для всякого $n\in J$ функцию $\psi_n^A:[M^n\setminus(\bigcup_{\lambda\in\Lambda(A)}M_\lambda^n)]\to N=\bigcup_\lambda M_\lambda$ формулой

$$\psi_n^A(\bar\alpha)=\bar\alpha e_n, \tag{7}$$

где $$\bar\alpha\in M^n\setminus(\bigcup_\lambda M_\lambda^n).$$

Т е о р е м а 6. Всякая групповая система Менгера $A=\{A_n,\ n\in J\}$ функции на множестве M может быть задана при помощи основной группы $\bar G_A$ преобразований множества $N=\bigcup_{\lambda\in\Lambda(A)}M_\lambda$, множества индексов J, системы функций $\{f_n^A,\ n\in J\setminus 1\}$, определенных формулой (6), и если M не замкнуто для A, системы функций $\{\psi_n^A,\ n\in J\}$, определенных формулой (7).

Обратно, пусть заданы группа G взаимно однозначных преобразований множества $N\subseteq M$, множество индексов J, система функции $\{f_n,\ n\in J\setminus 1\}$, $f_n\in F_n(G)$, и если множество M не замкнуто для G, система функции $\{\psi_n,\ n\in J\}$, где $\psi_n:[M^n\setminus(\bigcup_{\lambda\in\Lambda(G)}M_\lambda^n)]\to N$. Если для всяких $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in M$, $(g,n)\in G\times J$ определить элемент $\alpha_1\dots\alpha_n(g,n)\in M$ формулой

$$\alpha_1\dots\alpha_n(g,n)=\begin{cases}\psi_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\circ g, \text{ если } (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in M^n\setminus(\bigcup_{\lambda\in\Lambda(G)}M_\lambda^n)\\ \alpha_1\circ g, \text{ если } n=1 \text{ и } \alpha_1\in N\\ \alpha_1\circ(g_1,\dots,g_{n-1})f_n\circ g, \text{ если } n>1 \text{ и } \alpha_1,\dots,\alpha_n\in M_\lambda^n, \text{ где}\\ g_1,\dots,g_{n-1}\in G \text{ такие, что } \alpha_2=\alpha_1\circ g_1,\dots,\alpha_n=\alpha_1\circ g_{n-1}\end{cases} \tag{8}$$

то совокупность $A=\{A_n, n\in J\}$, где $A_n=\{(g,n), g\in G\}$ образует групповую систему Менгера функции на множестве M , для которой $G_A=G$, $f_n=f_n^A$, $\psi_n^A=\psi_n$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $A=\{A_n, n\in J\}$ — групповая система Менгера функции на множестве M . Для всяких $\bar{\alpha}\in M^n$, $a\in A_n$, $n\in J$ имеем тогда $\bar{\alpha}a=\bar{\alpha}(e_n\circ a)=\bar{\alpha}(e_n\dots e_n a)=(\bar{\alpha}e_n)\dots(\bar{\alpha}e_n)a=(\bar{\alpha}e_n)\circ\bar{a}$, так как $\bar{\alpha}e_n\in N$ согласно лемме 3. Если $\bar{\alpha}\in M^n\setminus(\bigcup_{\lambda\in\Lambda(A)} M_\lambda^n)$, то $\bar{\alpha}e_n=\psi_n^A(\bar{\alpha})$, если же $\bar{\alpha}\in M_\lambda^n$, то в случае $n=1$ имеем $\bar{\alpha}e_n=\alpha_1 e_n$, а в случае $n>1$ имеем согласно лемме 3, что $M_\lambda=\{\alpha_1\dots\alpha_1 a, a\in A_n\}$, следовательно, существуют $a_1,\dots,a_{n-1}\in A_n$ такие, что $\alpha_2=\alpha_1\dots\alpha_1 a_1$, $\dots$, $\alpha_n=\alpha_1\dots\alpha_1 a_{n-1}$ и, учитывая (4), получим, что $\bar{\alpha}e_n=$
$=\alpha_1\dots\alpha_n e_n=(\alpha_1\dots\alpha_1 e_n)(\alpha_1\dots\alpha_1 a_1)\dots(\alpha_1\dots\alpha_1 a_{n-1})e_n=$
$=\alpha_1\dots\alpha_1(e_n a_1\dots a_{n-1}e_n)=\alpha_1\circ(\overline{e_n a_1\dots a_{n-1}e_n})=\alpha_1\circ(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_{n-1})f_n^A$.

Этим $\bar{\alpha}a$ во всех случаях выражена при помощи группы G_A, функции f_n^A, ψ_n^A, и первая половина теоремы доказана.

Обратно, пусть задана группа G взаимно однозначных преобразований множества $N\subseteq M$, множество индексов J , система $\{f_n, n\in J\setminus 1\}$ функции $f_n\in F_n(G)$, и если множество M не замкнуто относительно G , система функции $\{\psi_n, n\in J\}$, где $\psi_n: [M^n\setminus(\bigcup_{\lambda\in\Lambda(G)} M_\lambda^n)]\to N$. Используя сделанные выше замечания 1^0, 2^0, 3^0, легко убедиться, что все n-местные функции (g,n) , $g\in G$, $n\in J$ при помощи (8) однозначно определены. При этом парам $(g_1,n),(g_2,n)$, $g_1,g_2\in G$, $g_1\neq g_2$ при всяком $n\in J$ соответствуют разные функции. Действительно, ввиду $g_1\neq g_2$ существует $\alpha\in N$ такой, что $\alpha\circ g_1\neq\alpha\circ g_2$, следовательно, в случае $n=1$ имеем $\alpha(g_1,1)=\alpha\circ g_1\neq\alpha\circ g_2=\alpha(g_2,1)$, а в случае $n>1$ получим ввиду (4), что $\alpha\dots\alpha(g_1,n)=\alpha\circ(e,\dots,e)f_n\circ g_1=\alpha\circ(e\circ g_1)=$
$=\alpha\circ g_1\neq\alpha\circ g_2=\alpha\dots\alpha(g_2,n)$. Обозначим $A_n=\{(g,n), g\in G\}$.

Пусть $(g_1,n),\dots,(g_m,n)\in A_n$, $(h,m)\in A_m$, $n,m\in J$. Покажем, что

$$(g_1,n)\dots(g_m,n)(h,m)=(g_1\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h,n)\in A_n, \quad (9)$$

т.е. совокупность функции $A=\{A_n, n\in J\}$ образует подсистему симметрической системы $\mathcal{G}_J(M)$.

Если $\bar{\alpha} \in M^n \setminus (\bigcup_{\lambda\in\Lambda(G)} M^n_\lambda)$, то $\bar{\alpha}((g_1,n)\cdots(g_m,n)(h,m)) = (\bar{\alpha}(g_1,n))\cdots(\bar{\alpha}(g_m,n))(h,m) = (\psi_n(\bar{\alpha})\circ g_1)\cdots(\psi_n(\bar{\alpha})\circ g_m)(h,m)$

и так как $(\psi_n(\bar{\alpha})\circ g_1)\circ(g_1^{-1}\circ g_i) = \psi_n(\bar{\alpha})\circ g_i$, $i=2,\dots,m$, то согласно (8) получим

$$(\psi_n(\bar{\alpha})\circ g_1)\cdots(\psi_n(\bar{\alpha})\circ g_m)(h,m) = (\psi_n(\bar{\alpha})\circ g_1)\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h = \psi_n(\bar{\alpha})\circ(g_1\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h) = \bar{\alpha}(g_1\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h, n).$$

Пусть $\bar{\alpha} \in M^n_\lambda$, $\lambda\in\Lambda(G)$. Если $n=1$, то $\bar{\alpha} = \alpha \in M$ и

$$\alpha((g_1,1)\cdots(g_m,1)(h,m)) = (\alpha(g_1,1))\cdots(\alpha(g_m,1))(h,m) = (\alpha\circ g_1)\cdots(\alpha\circ g_m)(h,m) = (\alpha\circ g_1)\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h = \alpha\circ(g_1\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h = \alpha(g_1\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h, 1).$$

Если $n>1$, то согласно замечанию 3^0 существуют g_1', $\dots$, $g_{n-1}' \in G$ такие, что $\alpha_2 = \alpha_1\circ g_1', \dots, \alpha_n = \alpha_1\circ g_{n-1}'$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\bar{\alpha}(g_1,n)\cdots(g_m,n)(h,m) = \\
&=(\bar{\alpha}(g_1,n))\cdots(\bar{\alpha}(g_m,n))(h,m) = \\
&=(\alpha_1\circ(g_1',\dots,g_{n-1}')f_n\circ g_1)\cdots(\alpha_1\circ(g_1',\dots,g_{n-1}')f_n\circ g_m)(h,m) = \\
&=(\alpha_1\circ(g_1',\dots,g_{n-1}')f_n\circ g_1)\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h = \\
&=(\alpha_1\circ(g_1',\dots,g_{n-1}')f_n)\circ(g_1\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h = \\
&= \bar{\alpha}(g_1\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h, n).
\end{aligned}$$

Для всяких $(g,n)\in A_n$, $(g_2,m)\in A_m$, $n,m\in J$ имеем ввиду (9), что $(g_1,n)\circ(g_2,m) = (g_1,n)\cdots(g_1,n)(g_2,m) = g_1\circ(e,\dots,e)f_m\circ g_2 = g_1\circ e\circ g_2 = g_1\circ g_2$. Это значит, что диагональная полугруппа системы A разлагается в прямое произведение $G\times J'$, откуда согласно теореме I следует, что система A — групповая. Ввиду определения (8) ясно, что $G_A = G$, $f^A_n = f_n$, $\psi^A_n = \psi_n$. Теорема доказана.

Если $A = \{A_n, n\in J\}$ — групповая система Менгера, G_A — основная группа системы A, то согласно теореме I при всяком $n\in J$ существует изоморфизм $\tau_n : (A_n,\circ) \longrightarrow G_A$.

С л е д с т в и е 7. Всякая групповая система Менгера $A=\{A_n, n\in J\}$ может быть задана при помощи основной группы G_A системы A, множества индексов J и системы функции $\{f_n^A, n\in J\setminus 1\}$, где $\varphi_n^A : G_A^{n-1} \longrightarrow G_A$ определено формулой

$$(g_1,\dots,g_{n-1})\varphi_n^A = (e_n a_1 \dots a_{n-1} e_n)\tau_n, \tag{10}$$

где $a_1,\dots,a_{n-1}\in A_n$ такие, что $a_1\tau_n = g_1,\dots,a_{n-1}\tau_n = g_{n-1}$.

Обратно, пусть заданы группа G, множество индексов J и система функции $\{\varphi_n, n\in J\setminus 1\}$, где все $\varphi_n : G^{n-1}\longrightarrow G$ удовлетворяют условию (4).

Если обозначить $A=\{(g,n), g\in G\}$ и сопоставить формулой (9) всяким $(g_1,n),\dots,(g_m,n)\in A_n$, $(h,m)\in A_m$ элемент $(g_1,n)\dots(g_m,n)(h,m)\in A_n$, то совокупность $A = \{A_n, n\in J\}$ образует групповую систему Менгера, для которой $G=G_A$, $\varphi_n^A = f_n$.

Доказательство. Пусть $A=\{A_n, n\in J\}$ – групповая система Менгера. Превратим всякое $a\in A_n, n\in J$ в n-местную функцию $G_A^n \longrightarrow G_A$, полагая,

$$g_1\dots g_n a = (a_1\dots a_n a)\tau_n,$$

где $g_1,\dots,g_n\in G_A$, $a_1,\dots,a_n\in A_n$ такие, что $a_1\tau_n = g_1,\dots,a_n\tau_n = g_n$. Тогда A превратится в групповую систему функции на множестве G_A, причем G_A будет относительно A замкнутым. Для всяких $g\in G_A, a\in A_n, n\in J$ имеем $g\circ\bar{a} = g\dots ga = (a'\dots a'a)\tau_n = (a'\circ a)\tau_n = a'\tau_n\circ a\tau_n = g\circ a\tau_n$, где $a'\in A_n$ такой, что $a'\tau_n = g$. Это значит, что группу $\bar{G}_A$ можно отождествить с G_A и тогда (6), и (10) определяют одинаковые функции. Поэтому первая половина утверждения следует из предыдущей теоремы.

Обратно, пусть заданы группа G, множество индексов J и система функции $\{\varphi_n, n\in J\setminus 1\}$, где все $\varphi_n : G^{n-1}\longrightarrow G$ удовлетворяют условию (4).

Обозначим $A_n=\{(g,n), g\in G\}$ и сопоставим всяким $(g_1,n),\dots,(g_m,n)\in A_n, (h,m)\in A_m$ формулой (9) элемент $(g_1,n)\dots(g_m,n)(h,m)\in A_n$. Тогда для всяких $(g_1,n),\dots,(g_m,n)\in A_n$, $(h_1,m),\dots,(h_k,m)\in A_m, (d,k)\in A_k$ имеем

$$(g_1 n)\dots(g_m,n)\left[(h_1,m)\dots(h_k,m)(d,k)\right] =$$

$$= (g_1,n)\dots(g_m,n)(h_1\circ[(h_1^{-1}\circ h_2),\dots,(h_1^{-1}\circ h_k)]f_k\circ d,m) =$$

$$= (g_1\circ[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m\circ h_1\circ[(h_1^{-1}\circ h_2),\dots,(h_1^{-1}\circ h_k)]f_k\circ d,n).$$

С другой стороны, если обозначить $[(g_1^{-1}\circ g_2),\dots,(g_1^{-1}\circ g_m)]f_m = g'$ и учитывать, что $(g_1\circ g'\circ h_1)^{-1}\circ(g_1\circ g'\circ h_i) = h_1^{-1}\circ g'^{-1}\circ g_1^{-1}\circ g_1\circ g'\circ h_i = h_1^{-1}\circ h_i$, то

$$((g_1,n)\dots(g_m,n)(h_1,m))\dots((g_1,n)\dots(g_m,n)(h_k,m))(d,k) =$$

$$= (g_1\circ g'\circ h_1,n)\dots(g\circ g'\circ h_k,n)(d,k) =$$

$$= (g_1\circ g'\circ h_1\circ[(h_1^{-1}\circ h_2),\dots,(h_1^{-1}\circ h_k)]f_k\circ d,n).$$

Следовательно, тождество (I) выполняется и $A=\{A_n, n\in J\}$ - система Менгера. Точно так же, как в конце доказательства теоремы 6, можно проверить, что A - групповая система. Следствие доказано.

Отсюда следует теорема I из [3].

Предположим в дальнейшем везде, что $|M|>2$ ($|M|$ - мощность множества M). Пусть S_M - симметрическая группа всех взаимно однозначных преобразований множества M , f_{m+1} $(m>0)$ - некоторая фиксированная функция из $F_{m+1}(S_M)$, результат применения которой к $a_1,\dots,a_m\in S_M$ обозначим через $<a_1,\dots,a_m>$. Будем везде опускать знак $\circ$, так что $\alpha<a_1,\dots,a_m>= \alpha\circ(a_1,\dots,a_m)f_{m+1}$ для всякого $\alpha\in M$. Через $(\alpha\beta)\in S_M$ обозначим транспозицию элементов $\alpha,\beta\in M$ (если $\alpha=\beta$, то $(\alpha\beta) = e$ - единица группы S_M), $(\alpha\beta\gamma) = (\alpha\beta)(\alpha\gamma)$.

<u>Л е м м а 8.</u> Всегда $\alpha<a_1,\dots,a_m>\in\{\alpha,\alpha a_1,\dots,\alpha a_m\}$.

<u>Доказательство.</u> Обозначим $\alpha a_i=\beta_i$, $i=1,\dots,m$, тогда из (5) следует, что $\alpha<a_1,\dots,a_m>=\alpha<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>$. Так как для всех $\gamma\in M$, $\gamma\notin\{\alpha,\beta_1,\dots,\beta_m\}$ имеем $\gamma(\alpha\beta_i)=\gamma=\gamma e$, $i=1,\dots,m$, то из (4), (5) следует, что $\gamma<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>=\gamma<e,\dots,e>\gamma e=\gamma$. Поэтому невозможно, что $\alpha<a_1,\dots,a_m>=\alpha<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>=\gamma$, $\gamma\notin\{\alpha,\beta_1,\dots,\beta_m\}$, ибо тогда для взаимно однозначного преобразования $<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>\in S_M$ было бы $\alpha<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>=\gamma=\gamma<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>$, но $\alpha\neq\gamma$. Лемма доказана.

<u>Л е м м а 9.</u> Пусть $\alpha<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>=\beta\neq\alpha$, $\beta\in\{\beta_1,\dots,\beta_m\}$. Пусть $K=\{i, 1\le i\le m, \beta_i=\beta\}$ и пусть $b_j=(\alpha\beta_j)$, если $j\in K$ и $b_j=e$, если $j\in\{1,\dots,m\}\setminus K$. Тогда $\alpha<b_1,\dots,b_m>=\beta$.

Доказательство. Если $j\in K$, то $\beta_j=\beta$ и $\beta b_j=\beta(\alpha\beta_j)=\alpha$, если же $j\notin K$, то ввиду $\beta\neq\alpha$, $\beta\neq\beta_j$ имеем $\beta b_j=\beta e=\beta=\beta(\alpha\beta_j)$. Из-за (5) отсюда следует, что $\beta<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>=\beta<b_1,\dots,b_m>$. Так как $\alpha\neq\beta$, то $\beta<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>\neq\beta$, иначе для взаимно однозначного преобразования $<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>\in S_M$ было бы $\alpha<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>=\beta<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>$, но $\alpha\neq\beta$. Поэтому $\beta<b_1,\dots,b_m>=$ $=\beta<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>=\alpha$ согласно лемме 8, так как при $j\in K$ имеем $\beta(\alpha\beta_j)=\alpha$, а при $j\notin K$ имеем $\beta(\alpha\beta_j)=\beta$. Ввиду $\alpha\neq\beta$ невозможно $\alpha<b_1,\dots,b_m>=\alpha=\beta<b_1,\dots,b_m>$, и так как $\alpha b_j=\beta$, если $j\in K$, и $\alpha\beta_j=\alpha$, если $j\notin K$, то согласно лемме 8 получим $\alpha<b_1,\dots,b_m>=\beta$. Лемма доказана.

Л е м м а 10. Пусть $\alpha<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>=\beta\neq\alpha$, $\beta\in\{\beta_1,\dots,\beta_m\}$. Пусть $K=\{i,1\leqslant i\leqslant m,\ \beta_i=\beta\}$. Если $|K|>1$, то существуют $\gamma\in M$ и $c_1,\dots,c_m\in S_M$ такие, что $\gamma<c_1,\dots,c_m>=\delta\neq\gamma$ и если $L=\{j,1\leqslant j\leqslant m,\ \gamma c_j=\delta\}$, то $|L|<|K|$.

Доказательство. Пусть $b_j=(\alpha\beta_j)=(\alpha\beta)$, если $j\in K$ и $\beta_j=e$, если $j\in\{1,\dots,m\}\setminus K$. Согласно предыдущей лемме $\alpha<b_1,\dots,$ $\dots,b_m\}=\beta$.

Выберем $\gamma\in M$ такой, что $\gamma\neq\alpha$, $\gamma\neq\beta$ (ввиду $|M|>2$ это всегда возможно). Фиксируем некоторый $k\in K$ и пусть $c_k=(\alpha\beta\gamma)$, $c_j=b_j$, $j\in\{1,\dots,m\}\setminus K$. Так как $\alpha b_j=\alpha c_j$ при всех $j=1,\dots,m$, то согласно (5) имеем $\alpha<c_1,\dots,c_m>=$ $=\alpha<b_1,\dots,b_m>=b$. Поэтому $\beta<c_1,\dots,c_m>\neq\beta=\alpha<c_1,\dots,c_m>$. Но $\beta c_k=\gamma$, $\beta c_j=\alpha$, если $j\in K\setminus k$ и $\beta c_j=\beta$, если $j\notin K$. Учитывая лемму 8, получим, что $\beta<c_1,\dots,c_m>=\alpha$ или $\beta<c_1,\dots,c_m>=\gamma$. Так как $\beta c_j=\alpha$ только при $j\in K\setminus k$ и $\beta c_j=\gamma$ только при $j=k$, то в обоих случаях лемма доказана.

Л е м м а 11. Пусть $\alpha,\beta\in M$, $\alpha\neq\beta$ и пусть k, $1\leqslant k\leqslant m$ – некоторый фиксированный индекс. Обозначим $a_k=(\alpha\beta)$, $a_j=e$, если $j\in\{1,\dots,m\}\setminus K$. Пусть $\alpha<a_1,\dots,a_m>=\beta$. Тогда при всяком $\gamma\in M$ имеем $\alpha<b_1,\dots,b_m>=\gamma$, где $b_k=(\alpha\gamma)$ и $b_j=e$, если $j\in\{1,\dots,m\}\setminus K$.

Доказательство. Утверждение тривиально, если $\gamma=\alpha$ или $\gamma=\beta$, поэтому предположим $\alpha\neq\gamma\neq\beta$. Обозначим $c_k=(\beta\alpha\gamma)$ и $c_j=e$, $j\in\{1,\dots,m\}\setminus K$. Так как $\beta c_j=\beta a_j$ при всех $j=1,\dots,m$, то по (5) имеем $\beta<c_1,\dots,c_m>=\beta<a_1,\dots,a_m>$. Так как $\beta a_j\in\{\alpha,\beta\}$ при всех $j=1,\dots,m$, то по лемме 8 имеем $\beta<a_1,\dots,a_m>=\alpha$ ввиду того, что $\alpha<a_1,\dots,a_m>=\beta,\alpha=\beta$ и $<a_1,\dots,a_m>\in S_M$ – взаимно однозначное преобразование. Следовательно, $\beta<c_1,\dots,c_m>=\beta<a_1,\dots,a_m>=\alpha$. Точно так же получим $\alpha<c_1,\dots,c_m>=\gamma$ и так как $\alpha b_j=\alpha c_j$ при всех $j=1,\dots,m$, то $\alpha<b_1,\dots,b_m>=\alpha<c_1,\dots,c_m>=\gamma$. Лемма доказана.

Л е м м а I2. Пусть $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2\in M$, $\alpha\neq\beta$ и пусть $k, 1\leqslant k\leqslant m$ некоторый фиксированный индекс. Обозначим $a_k=(\alpha,\beta)$, $b_k=(\gamma_1,\gamma_2)$ и $a_j=b_j=e$, если $j\in\{1,\dots,m\}\setminus k$. Тогда из $\alpha<a_1,\dots,a_m>=\beta$ следует $\gamma_1<b_1,\dots,b_m>=\gamma_2$.

Доказательство. Если $\gamma_1=\gamma_2$, то $b_j=e$ при всех $j=1,\dots,m$, и утверждение следует из (4). Предположим, что $\gamma_1\neq\gamma_2$.

Если $\gamma_1=\alpha$, то утверждение следует из предыдущей леммы, если же $\gamma_1\neq\alpha$, то обозначим $c_k=(\alpha\gamma_1)$, $c_j=e$, $j\in\{1,\dots,m\}\setminus k$. Согласно предыдущей лемме $\alpha<c_1,\dots,c_m>=\gamma_1$, следовательно, $\gamma_1<c_1,\dots,c_m>\neq\gamma_1$ и согласно лемме 8 имеем $\gamma_1<c_1,\dots,c_m>=\alpha$. Согласно предыдущей лемме отсюда следует $\gamma_1<b_1,\dots,b_m>=\gamma_2$. Лемма доказана.

Л е м м а I3. Если при некоторых $\alpha\in M$, $a_1,\dots,a_m\in S_M$ имеем $\alpha<a_1,\dots,a_m>\neq\alpha$, то существует индекс k, $1\leqslant k\leqslant m$ такой, что $\alpha<a_1,\dots,a_m>=\alpha a_k$ и при всяких $\gamma_1,\gamma_2\in M$ имеем $\gamma_1<c_1,\dots,c_m>=\gamma_2$, где $c_k=(\gamma_1,\gamma_2)$, $c_j=e$, $j\in\{1,\dots,m\}\setminus k$.

Доказательство. Если $\alpha<a_1,\dots,a_m>\neq\alpha$, то согласно лемме 8 существуют индексы i, $1\leqslant i\leqslant m$ такие, что $\alpha<a_1,\dots,a_m>=\alpha a_i$. Пусть $K=\{i,\alpha<a_1,\dots,a_m>=\alpha a_i\}$.

Если $|K|>1$, то обозначим $\alpha a_j=\beta_j, j=1,\dots,m$. Ввиду (5) имеем $\alpha<a_1,\dots,a_m>=\alpha<(\alpha\beta_1),\dots,(\alpha\beta_m)>$ и, применяя $|K|-1$ раз лемму I0, получим, как и в случае $|K|=1$, что существует k, $1\leqslant k\leqslant m$, $\gamma\in M$, $c_1,\dots,c_m\in S_M$ такие, что $\gamma<c_1,\dots,c_m>=\gamma c_k\neq\gamma$ и $\gamma c_j\neq\gamma c_k$ при $j\in\{1,\dots,m\}\setminus k$. Обозначим $\gamma c_j=\delta_j$. Ввиду (5) имеем $\gamma<c_1,\dots,c_m>=\gamma<(\gamma\delta_1),\dots,(\gamma\delta_m)>$. Согласно лемме 9 получим теперь, что $\gamma<(\gamma\delta_1),\dots,(\gamma\delta_m)>=\gamma<b_1,\dots,b_m>=\delta_k$, где $b_k=(\gamma\delta_k)$, $b_j=e$, $j\in\{1,\dots,m\}\setminus k$, откуда согласно лемме I2 следует доказываемое утверждение. Лемма доказана.

Т е о р е м а I4. Если $|M|>2$, то $F_{m+1}(S_M)=\{\varphi_0^m,\varphi_1^m,\dots,\varphi_m^m\}$, где функции $\varphi_0^m,\dots,\varphi_m^m$ определены следующим образом:

$$(a_1,\dots,a_m)\varphi_0^m = e$$

$$(a_1,\dots,a_m)\varphi_k^m = a_k,\ 1\leqslant k\leqslant m$$

для всяких $a_1,\dots,a_m\in S_M$.

Доказательство. Предположим, что $\alpha\in M$, $a_1,\dots,a_m\in S_M$ такие, что $\alpha<a_1,\dots,a_m>\neq\alpha$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что существует k, $1\leqslant k\leqslant m$ такой, что $\beta<b_1,\dots,b_m)=\beta b_k$ при всяких $\beta\in M$, $b_1,\dots,b_m\in S_M$. Обозначим $\beta b_j=\beta_j$, $j=1,\dots,m$, тогда ввиду (5) имеем $\beta<b_1,\dots,b_m> = \beta<(\beta\beta_1),\dots,(\beta\beta_m)>$; следовательно, достаточно доказать, что для всяких $\beta,\beta_1,\dots,\beta_m\in M$ $\beta<(\beta\beta_1),\dots,(\beta\beta_m)=\beta_k$.

Согласно лемме I3 существует k, $1\leqslant k\leqslant m$ такой, что $\alpha<a_1,\dots,a_m>=\alpha a_k$ и при всяких $\gamma_1,\gamma_2\in M$ имеем $\gamma_1<c_1,\dots,c_m>=\gamma_2$, где $c_k=(\gamma_1,\gamma_2)$ и $c_j=e$, $j\in\{1,\dots,m\}\setminus k$. Если $m=I$, то этим теорема доказана, поэтому предположим, что $m>1$.

Покажем, что если $\beta<(\beta\beta_1),\dots,(\beta\beta_m)>=\beta'\neq\beta$, то $\beta'=\beta_k$. Предположим, что $\beta'\neq\beta_k$. Так как $\beta'\neq\beta$, то согласно лемме I3 существует l, $1\leqslant l\leqslant m$ такой, что $\beta<(\beta\beta_1),\dots,(\beta\beta_m)>=\beta(\beta,\beta_l)=\beta_l=\beta'$ и при всяких $\gamma_1,\gamma_3\in M$ имеем $\gamma_3<c_1',\dots,c_m'>=\gamma_1$, где $c_l'=(\gamma_1,\gamma_3)$ и $c_j'=e$, если $j\in\{1,\dots,m\}\setminus l$. Так как $\beta_l=\beta'$, $\beta_k\neq\beta$, то $k\neq l$. Выберем $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\in M$ такие, что $\gamma_1\neq\gamma_2\neq\gamma_3\neq\gamma_1$ (ввиду $|M|>2$ это всегда возможно) и обозначим $c_k''=c_k$, $c_l''=c_l'$ и $e_j''=e$, если $j\in\{1,\dots,m\}\setminus\{k,l\}$. Так как $\gamma_2c_j''=\gamma_2c_j$, $\gamma_3c_j''=\gamma_3c_j'$ при всех $j=1,\dots,m$, то по (5) имеем $\gamma_2<c_1'',\dots,c_m''>=\gamma_2<c_1,\dots,c_m>$, $\gamma_3<c_1'',\dots,c_m''>=\gamma<c_1',\dots,c_m'>$.

Но так как $\gamma_2c_j\in\{\gamma_1,\gamma_2\}$ при всех $j=1,2,\dots,m$ и $\gamma_1<c_1,\dots,c_m>=\gamma_2$, то ввиду леммы 8 имеем $\gamma_2<c_1,\dots,c_m>=\gamma_1$, иначе, $\gamma_2<c_1,\dots,c_m>=\gamma_2=\gamma_1<c_1,\dots,c_m>$, но $\gamma_1\neq\gamma_2$. Точно так же получим, что $\gamma_3<c_1',\dots,c_m'>=\gamma_1$, следовательно, $\gamma_2<c_1'',\dots,c_m''>=\gamma_1=\gamma_3<c_1'',\dots,c_m''>$, что противоречит с $\gamma_2\neq\gamma_3$.

Этим доказано, что $\beta<(\beta\beta_1),\dots,(\beta\beta_m)>\in\{\beta,\beta_k\}$. Если $\beta_k=\beta$, то утверждение доказано, поэтому предположим, что $\beta_k\neq\beta$. Пусть s – число тех β_j, $j=1,\dots,m$, которые равны β_k. Применим индукцию по s.

Пусть $s=1$. Обозначим $d_k=(\beta,\beta_k)$, $d_j=e$, $j\in\{1,\dots,m\}\setminus k$. Согласно определению k имеем $\beta_k<d_1,\dots,d_m>=\beta$, но так как $\beta_k\neq\beta_j$ при $j\neq k$, $\beta_k\neq\beta$, то $\beta_kd_j=\beta_k(\beta,\beta_j)$ при всех $j=1,\dots,m$, следовательно, $\beta_k<(\beta,\beta_1),\dots,(\beta,\beta_m)>=\beta_k<d_1,\dots,d_m>=\beta$. Поэтому $\beta<(\beta,\beta_1),\dots,(\beta,\beta_m)>\neq\beta$ и остается только возможность

$\beta<(\beta,\beta_1),\ldots,(\beta,\beta_m)>=\beta_k$, чем утверждение в случае $s=1$ доказано.

Пусть $s>1$ и утверждение уже доказано во всех случаях, когда число равных β_k элемент β_j, $j=1,\ldots,m$ меньше s. Выбираем l, $1\leqslant l\leqslant m$ такой, что $l\neq k$, $\beta_l=\beta_k$ и $\gamma\in M$ такой, что $\gamma\neq\beta$, $\gamma\neq\beta_k$. Обозначим $g_l=(\beta,\gamma)$, $g_j=(\beta,\beta_j)$, $j\in\{1,\ldots,m\}\setminus l$. Так как $\gamma\neq\beta_k$, то по предположению индукции $\beta<g_1,\ldots,g_m>\beta_k$. Пусть $g'_l=(\beta\gamma\beta_k)$, $g'_j=g_j$, $j\in\{1,\ldots,m\}\setminus l$. Так как $\beta g_j=\beta g'_j$ при всех $j=1,\ldots,m$, то $\beta<g'_1,\ldots,g'_m>=\beta<g_1,\ldots,g_m>=\beta_k$, следовательно, $\beta_k<d'_1,\ldots,d'_m>\neq\beta_k$, и так как $\beta_k g'_j\in\{\beta,\beta_k\}$ при всех $j=1,\ldots,m$, то $\beta_k<d'_1,\ldots,d'_m>=\beta$. Но $\beta_k g'_j=\beta_k g_j=\beta_k(\beta,\beta_j)$ при всех $j=1,\ldots,m$, следовательно, $\beta_k<(\beta\beta_1),\ldots,(\beta\beta_m)>=\beta_k<g'_1,\ldots,g'_m>=\beta$. Поэтому $\beta<(\beta\beta_1),\ldots,(\beta\beta_m)>\neq\beta$ и остается только возможность $\beta<(\beta\beta_1),\ldots,(\beta\beta_m)>=\beta_k$. Теорема доказана.

Назовем групповую систему Менгера $A=\{A_n, n\in J\}$ функции на множестве M с и м м е т р и ч е с к о й, если основная группа преобразований $\bar{G}_A$ системы A - симметрическая группа S_M всех взаимно однозначных преобразований множества M. Из определения и из леммы 3 следует, что если A - симметрическая групповая система функции на множестве M, то M всегда замкнута для A.

Следствие I5. Всякая симметрическая групповая система Менгера $A=\{A_n, n\in J\}$ функции на множестве $|M|>2$ может быть задана при помощи симметрической группы S_M, множества индексов J и множества натуральных чисел $\{k_n, n\in J, 1\leqslant k_n\leqslant n\}$, если для всяких $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in M$, $a\in A_n$, $n\in J$ положить $\alpha_1\ldots\alpha_n a=\alpha_{n_k}\ldots\alpha_{n_k}a=\alpha_{n_k}\circ\bar{a}$.

Доказательство. При доказательстве теоремы 6 указано, что если A- групповая система функции на множестве M и M замкнуто относительно A, то для всяких $\alpha_1,\ldots\alpha_n\in M$, $a\in A_n$, $n\in J$ имеем $\alpha_1\ldots\alpha_n a=\alpha_1\circ(g_1,\ldots,g_{n-1})f^A_n\circ\bar{a}$, где $g_1,\ldots,g_{n-1}\in\bar{G}_A$ такие, что $\alpha_1\circ g_1=\alpha_2,\ldots,\alpha_1\circ g_{n-1}=\alpha_n$. Так как для симметрической групповой системы $\bar{G}_A=S_M$ и $f^A_n\in F_n(S_M)$, то $f^A_n\in\{\varphi^n_0,\ldots,\varphi^n_n\}$ согласно предыдущей теореме. Если $f^A_n=\varphi^n_0$, то $\alpha_1\ldots\alpha_n a=\alpha_1\circ(g_1,\ldots,g_{n-1})\varphi^n_0\circ\bar{a}=\alpha_1\circ e\circ\bar{a}=\alpha_1\circ\bar{a}$, если же $f^A_n=\varphi^n_k$, $1\leqslant k\leqslant n$, то $\alpha_1\circ(g_1,\ldots,g_{n-1})\varphi^n_k\circ\bar{a}=\alpha_1\circ g_k\circ\bar{a}=\alpha_{k+1}\circ\bar{a}$.

Следствие доказано.

Л и т е р а т у р а

I. Е.С. Л я п и н. Полугруппы. 1960.

2. Я.В. Х и о н. m-арные Ω-кольцоиды. Сиб. мат.ж., 1967, УШ, 174-194.

3. Я.Н. Я р о к е р. Вполне простые Менгеровские оперативы. X Всесоюзный алгебраический коллоквиум, т. II, Новосибирск 1969, 138-139.

J.Henno

Group-like Menger Systems

S u m m a r y

Menger systems and Menger systems of functions without non-trivial oneside ideals, called group-like, are described in terms of some group and system of functions on that group.

С о д е р ж а н и е

Математика и теоретическая механика У1

Таллинский политехнический институт
Редактор Ф.Вихманн
Техн. редактор Л. Лоопер

Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 6/УП 1971.

Сдано в набор 10/1Х 1971 г. Подписано к печати
14/1 1972 г. Бумага 60х90/16. Печ.л. 7,0 + прил.0,25.
Уч.-изд. л. 5,5. Тираж 350. МВ-01905. Зак. №43 .
Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскла, 2/9.
Цена 55 коп.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 312 1971

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УI

УДК 513

Р. Колде

Невырожденные конгруэнции изотропных прямых с бесконечно-удаленными кратными фокусами в ${}^1R_4$

(стр. 3-26)

Методом Картана изучаются три типа конгруэнций (3-параметрические семейства) изотропных прямых в псевдоевклидовом пространстве ${}^1R_4$, для которых I) выполняется условие невырожденности, т.е. множество бесконечно-удаленных точек прямых конгруэнции образует двумерную область на конформной плоскости C_2, и 2) эти же бесконечно-удаленные точки являются дву- или трехкратными фокусами на прямых конгруэнции.

Библ. I3.

УДК 517.52

И. Таммерайд

О теоремах тауберова типа с остаточным членом

(стр. 27-38)

Установлен метод для получения тауберовых теорем с остаточным членом. Показано, как ослаблять тауберовы условия при суммируемости со скоростью.

Библ. 6

УДК 517.512.6

И. Таммерайд

Приближение функций и теоремы абелева и тауберова типа с остаточным членом (стр. 39-53)

Выяснена некоторая связь между проблемами суммируемости со скоростью и приближения функции. Найдены оценки при приближении функций из L^p их преобразованными частными суммами Фурье для некоторых конкретных матричных методов суммирования. Библ. 40.

УДК 517.948.322

Ю. Ярцев

Об одном варианте метода коллокации для решения многомерных интегральных уравнений (стр. 55-59)

В заметке предлагается вариант метода коллокации, когда координатными функциями служат произведения фундаментальных полиномов Фейера, а координатами узлов коллокации являются корни полиномов Чебышева. При этом доказывается равномерная сходимость последовательности аппроксимирующих функций к точному решению для уравнений с непрерывными ядрами и свободными членами. Вводится также оценка погрешности. Библ. 2.

УДК 518.5

Ю. Ярцев

О программировании метода фейеровской коллокации на языке МАЛГОЛ (стр. 61-65)

В заметке рассматривается алгоритм программирования метода фейеровской коллокации на языке МАЛГОЛ применительно к линейным дифференциальным уравнениям с однородными граничными условиями. Приводятся данные о точном и приближенном решении конкретной граничной задачи, из которых в частности можно сделать вывод о корректности предлагаемой схемы программирования. Библ. 3.

УДК 517.512.6

М. Левин

Об одной задаче на экстремум (стр. 67-69)

Результат предыдущей работы автора (РЖ Мат.1970, 5Б, 139) обобщается на пространства с аддитивной положительной мерой.

Библ. 4.

УДК 518:517.392

М. Левин

Замечание об одной квадратурной формуле (стр. 71-74)

Результаты работы R.Piessens'a (Z. angew. Math. u. Mech. 1970, 50, № 11, 698-700) распространяются на квадратурные формулы, содержащие наряду со значениями функции в узлах также значения производных функции в этих же узлах.

УДК 518:517.392

М. Левин

О формулах интегрирования по кругу и треугольнику (стр. 75-88)

Вводятся в рассмотрение некоторые классы функций, допускающих интегральное представление, по аналогии с тем, как это делалось в работе автора (Изв. АН ЭССР, Физ.-Матем., 19, № 4, 499-502, 1970). Заменой переменных вычисление интеграла по кругу и треугольнику сводится к вычислению интеграла по квадрату, а для интегралов по квадрату и соответствующих классов функций используются полученные в работе наилучшие кубатурные формулы. Рассматриваются также кубатурные формулы с весовыми функциями $(1-x^2-y^2)^{-1/2}$ (в случае круга $x^2+y^2\le 1$) и $(x+y)^{-1}$ (в случае треугольника $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 1$).

Библ. 3.

УДК 518:517.392

А. Ыги, М. Левин

Одна частная задача для квадратурной фомулы

(стр. 89-93)

Приводятся примеры, иллюстрирующие методику построения наилучших квадратурных формул в некоторых классах функций.

Библ. 2.

УДК 519.48

Я. Хенно

Групповые системы Менгера (стр. 95-110)

Исследуются системы Менгера без односторонних идеалов, названные групповыми. Дано описание групповых систем Менгера функции, из которой выводится описание групповых систем Менгера в общем случае. Отдельно рассматриваются симметрические групповые системы.

Библ. 3.

Цена 55 коп.