TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 183 1960

О. Я. РЮНК

ОБ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ УГЛА

ТАЛЛИН, 1961

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 183 1960

О. Я. РЮНК

ОБ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ УГЛА

ТАЛЛИН, 1961

Аннотация

В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с ортогональным проектированием угла, которые еще недостаточно исследованы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Вопросы, связанные с проектированием угла, еще недостаточно исследованы и мало освещаются в учебниках по начертательной геометрии. Кажется, что назрело время для заполнения этого пробела в нашей учебной литературе. Настоящая статья и является одной попыткой, сделанной в этом направлении.

В ряде частных случаев вопрос о проектировании угла совершенно ясен. Напомним здесь две общеизвестные теоремы, играющие исключительно важную роль в курсе начертательной геометрии.

Теорема 1. Если фигура лежит в плоскости уровня, то ее параллельная проекция равна самой фигуре, а центральная проекция подобна самой фигуре.

Теорема 2. Если сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а вторая его сторона не перпендикулярна к последней, то прямой угол проектируется ортогонально в виде прямого угла.

Действительны и обратные теоремы последней теоремы.

Обратная теорема (I). Если прямой угол проектируется ортогонально в виде прямого угла, то одна его сторона параллельна плоскости проекций.

Обратная теорема (II). Если одна сторона угла, проектирующегося ортогонально в виде прямого угла, параллельна плоскости проекций, то проектируемый угол прямой.

Известно также, что угол, величина которого отличается от прямого угла, может проектироваться ортогонально в натуральную величину и в случае, когда плоскость угла наклонена к плоскости проекций. А. М. Иерусалимский, разъясняя этот факт в своем учебнике, отмечает, что

«...на эпюре мы не имеем в этом случае никакого критерия, чтобы узнать, выражает проекция угла его действительную величину или нет. Убедиться в этом можно только посредством специальных построений»[1].

В курсе начертательной геометрии Н. Ф. Четверухина и др.[2] изложение ортогональной проекции угла заканчивается следующей теоремой:

Теорема 3. Произвольный угол δ ($0 < \delta < 180°$) можно рассматривать как ортогональную проекцию любого данного угла φ ($0 < \varphi < 180°$).

После доказательства этой теоремы делается следующее заключение: «Таким образом, проекции острого и тупого углов могут равняться проектируемому углу не только при условии параллельности плоскости угла, а следовательно и его сторон, плоскости проекций».

Вопрос о проектировании угла рассматривается и в других учебниках, но и в них затрагиваются только частные случаи.

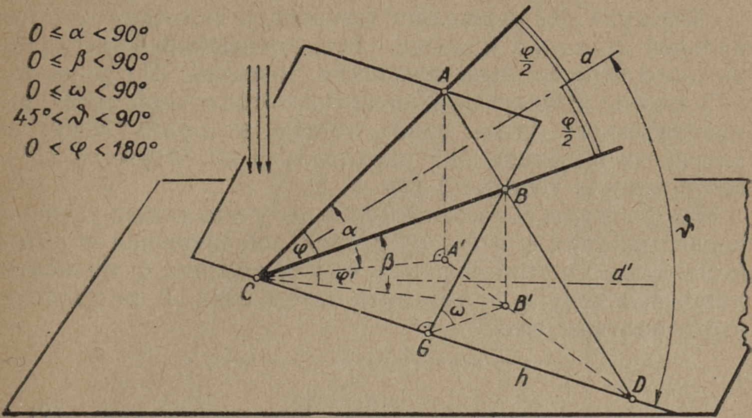
Возникает вопрос, какая общая зависимость существует между величиной угла и величиной ортогональной проекции этого угла. Если такая зависимость выведена, то из нее можно легко получить и условие равенства угла и и его ортогональной проекции.

При выводе зависимости между углом φ и его ортогональной проекцией φ' целесообразно взять за параметры либо углы наклона (α и β) сторон проектируемого угла φ, либо же угол наклона (ω) плоскости угла φ и угол (ϑ) между биссектрисой угла φ и следом плоскости этого же угла. Все указанные величины и пределы их изменения показаны на фиг. 1, где:

φ — проектируемый угол;
h — след плоскости угла φ (вершина C угла φ пусть будет на следе h);
φ' — ортогональная проекция угла φ;
CA и CB — стороны угла φ (целесообразно выбрать точки A и B так, чтобы $CA=CB$);
α и β — углы наклона сторон CA и CB угла φ;
d — биссектриса угла φ;

[1] А. М. Иерусалимский, Начертательная геометрия, 1954, стр. 90.
[2] Н. Ф. Четверухин и др., Курс начертательной геометрии, 1956, стр. 127.

ω — угол наклона плоскости угла φ;
ϑ — угол между биссектрисой и следом плоскости угла φ.



Фиг. 1

В следующем разделе будет выведена зависимость между углом φ и его ортогональной проекцией φ', используя в качестве параметров углы наклона α и β сторон угла φ.

2. Зависимость между углом, его ортогональной проекцией и углами наклона сторон угла

На научной конференции по вопросам инженерной графики в Риге в 1957 г. И. И. Котов в своем докладе «Основные теоремы об ортогональных проекциях углов» предложил следующую формулу, связывающую ортогональную проекцию угла с самим углом:[3]

$$\boxed{\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \sin\alpha\,\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}} \tag{1}$$

[3] В формуле применены обозначения, приведенные в п. 1.

Из этой формулы следует, что:

1) если $\varphi = 90^\circ$, то $\cos\varphi' = -\tan\alpha \tan\beta$ $\quad$ (I′)
2) если $\alpha = 0$, то $\cos\varphi' = \cos\varphi : \cos\beta$ $\quad$ (I″)
3) если $\varphi = 90^\circ$ и $\alpha = 0$, то $\varphi' = \varphi = 90^\circ$ $\quad$ (I‴)

Формула (I′) позволяет вычислить величину ортогональной проекции прямого угла, произвольно расположенного относительно плоскости проекций. По формуле (I″) можно вычислить величину ортогональной проекции произвольного угла, одна сторона которого лежит в плоскости проекций или параллельна ей. Формула (I‴) соответствует теореме 2 (см. п. 1).

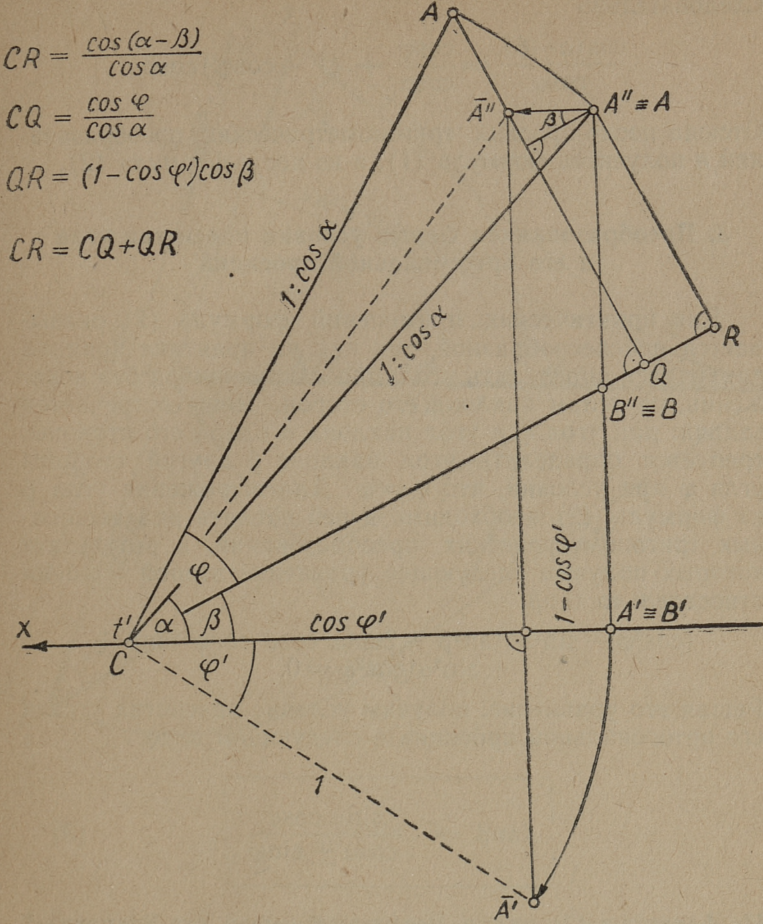
Из формулы (I) можно легко получить также условие равенства угла φ и его ортогональной проекции φ'. Для этого нужно в этой формуле вместо величин φ' написать лишь величину φ и выразить затем $\cos\varphi$. В результате этого получим, что

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\sin\alpha \sin\beta}{1 - \cos\alpha \cos\beta}} \qquad (2)$$

И. И. Котов в своем докладе не изложил подробного вывода формулы (1) и не дал формулы (2).

Покажем простой путь, как формулы (1) и (2) могут быть выведены, используя только общеизвестные приемы начертательной геометрии.

Предположим, что прямые CA и CB лежат вначале в фронтальной плоскости проекций ε_2, так что их углы наклона относительно горизонтальной плоскости проекций равны соответственно α и β (фиг. 2). Изменим величину угла $ACB = \varphi$ вращением прямой CA вокруг оси $t \supset C$, перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекций ε_1. Тогда угол поворота будет равен горизонтальной проекции φ' угла φ. Предположим, что точка A заняла после поворота положение $\bar{A}$; тогда $\varphi = \bar{A}CB$ и $\varphi' = \bar{A}'CB'$. Истинную величину угла φ можно определить совмещением плоскости $\bar{A}CB$ с фронтальной плоскостью проекций, вращая плоскость $\bar{A}CB$ вокруг прямой CB. Совмещенное положение A точки $\bar{A}$ найдем, если построим $\bar{A}''\bar{\bar{A}} \perp BC$ и $C\bar{\bar{A}} = CA$. Полученный угол $\bar{\bar{A}}CB$ и равен углу φ. Используя вспомогательные точки $Q \equiv \bar{\bar{A}}\bar{A}'' \times CB$ и $R \equiv CB \times$



Фиг. 2

$\times$ AR, (AR $\perp$ CB), можем написать, что CR = CQ + QR. Из фигуры видно, что если за единицу измерения взять длину отрезка $C\overline{A}' = CA'$, то можем написать, что

$$CR = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha};\ CQ = \frac{\cos\varphi}{\cos\alpha};\ QR = (1 - \cos\varphi')\cos\beta.$$

Следовательно

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha}=\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}+(1-\cos\varphi')\cos\beta.$$

Отсюда после простых тригонометрических преобразований и получится формула (1), а из нее и формула (2).

3. Преобразованная форма условия равенства угла и его ортогональной проекции

Для практических применений формула (2) оказывается нецелесообразной, так как на практике вряд ли приходится определять угол, проектирующийся без искажения, по углам наклона его сторон. Чаще встречается задача: дан угол φ и угол наклона α одной его стороны, требуется определить угол наклона β другой стороны угла φ при условии, что $\varphi=\varphi'$. Для выражения угла β из формулы (2) необходимо в ней сделать ряд несложных тригонометрических преобразований, в результате которых получим следующее уравнение второй степени относительно $\tan\beta$:

$$(\cos^2\varphi-\sin^2\alpha)\tan^2\beta-2\sin\alpha\cos\alpha\cos\varphi\tan\beta+$$
$$+\sin^2\alpha\cos^2\varphi=0.$$

Решая это уравнение, получим условие равенства угла и его ортогональной проекции в следующем виде:

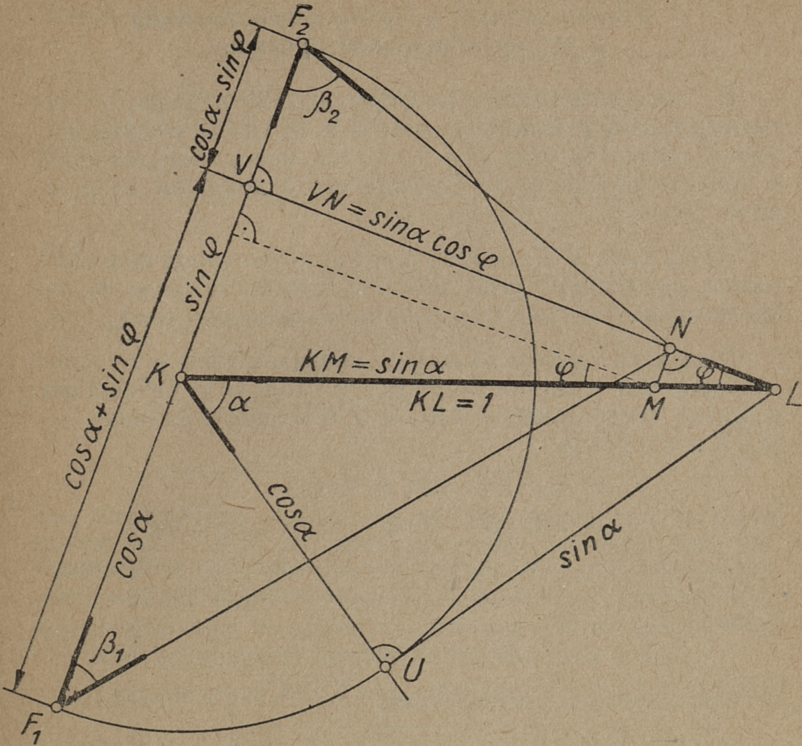
$$\boxed{\tan\beta=\frac{\sin\alpha\cos\varphi}{\cos\alpha\pm\sin\varphi}}\qquad(3)$$

Из формулы (3) видно, что угол β имеет два значения.*

На вычисление значений угла β по формуле (3) требуется примерно 10 минут времени. В несколько раз быстрее можно получить результат следующим простым построением (фиг. 3).

К произвольному отрезку прямой KL, длину которого будем считать равной единице, пристраивают заданные углы α и φ так, чтобы отрезок KL был их общей стороной,

* В некоторых случаях одно из значений β может оказаться посторонним решением.



Фиг. 3

а точки K и L их вершинами. Приведя через точки K и L перпендикуляры LU и KV к другим сторонам углов α и φ, можно написать, что $KU = \cos\alpha$, $LU = \sin\alpha$ и $KV = \sin\varphi$. Затем на прямой KL откладывают отрезок $KM = UL = \sin\alpha$ и через точку M проводят прямую $MN \parallel KV$; тогда $VN = \sin\alpha \cos\varphi$. Окружность с центром в точке K и с радиусом KU пересечет прямую KV в точках F_1 и F_2 так, что $VF_1 = \cos\alpha + \sin\varphi$ и $VF_2 = \cos\alpha - \sin\varphi$. Углы VF_1N и VF_2N равны искомым значениям β_1 и β_2 угла β, так как их тангенсы выражаются точно так как это получается из формулы (3).

4. Второй вариант условия равенства угла и его ортогональной проекции

Постараемся исходя из формулы (2) перейти от параметров α и β к параметрам ω и ϑ, где ω — угол наклона плоскости угла φ, а ϑ — угол между биссектрисой и следом плоскости φ. Прежде всего докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Если угол и его ортогональная проекция равны, то косинус угла наклона плоскости угла равен произведению косинусов углов наклона сторон угла.*

Доказательство. Рассмотрим фиг. 1 в предположении, что в натуре $AC = BC = 1$ и $\varphi' = \varphi$. Обозначим площади треугольников ABC и $A'B'C$ соответственно через S и S'. Тогда

$$S = AC \cdot BC \cdot \sin\varphi = \sin\varphi,$$

$$S' = A'C \cdot B'C \cdot \sin\varphi' = \cos\alpha \cos\beta \sin\varphi.$$

Но известно, что ортогональная проекция площади плоской фигуры связана с площадью самой фигуры следующей формулой:

$$S' = S \cdot \cos\omega.$$

Подставляя сюда выражения для S и S' получим, что

$$\boxed{\cos\omega = \cos\alpha \cos\beta} \qquad (4)$$

Этим теорема доказана.

Для введения параметра ϑ вернемся снова к фиг. 1 (при прежних предположениях). Из прямоугольных треугольников $BB'C$, $BB'G$ и BGC получим, что

$$\sin\beta = BB' = BG \cdot \sin\omega = \sin\left(\vartheta - \frac{\varphi}{2}\right) \sin\omega.$$

Аналогично найдем, что

$$\sin\alpha = \sin\left(\vartheta + \frac{\varphi}{2}\right) \sin\omega.$$

Следовательно

$$\sin\alpha \sin\beta = \sin\left(\vartheta + \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\vartheta - \frac{\varphi}{2}\right) \sin^2\omega.$$

Нетрудно показать, что

$$\sin\left(\vartheta + \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\vartheta - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cos\varphi - \cos 2\vartheta).$$

Таким образом

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2} \sin^2\omega (\cos\varphi - \cos 2\vartheta).$$

Если при помощи этого равенства и равенства (4) исключить из формулы (2) углы α и β, то формула (2) примет вид:

$$\cos\varphi = \frac{(1 - \cos^2\omega)(\cos\varphi - \cos 2\vartheta)}{2(1 - \cos\omega)}$$

или

$$2\cos\varphi = (1 + \cos\omega)(\cos\varphi - \cos 2\vartheta).$$

Отсюда получим, что

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\cos\omega + 1}{\cos\omega - 1} \cdot \cos 2\vartheta} \tag{5}$$

Эта зависимость и является другим вариантом условия равенства угла и его ортогональной проекции. Так как каждую из трех тригонометрических функций, встречающихся в формуле (5), можно легко выразить через две другие функции, то выбор параметров ω и ϑ является более целесообразным, чем выбор параметров α и β.

Формуле (5) можно придать еще следующие виды:

$$\boxed{\cos 2\vartheta = \frac{\cos\omega - 1}{\cos\omega + 1} \cdot \cos\varphi} \tag{5'}$$

$$\boxed{\cos\omega = \frac{\cos\varphi + \cos 2\vartheta}{\cos\varphi - \cos 2\vartheta}} \tag{5''}$$

5. Некоторые следствия

Из формул (2) и (4) следует, что

$$\sin\alpha \sin\beta = \cos\varphi (1 - \cos\omega).$$

Но из формулы (5) получим, что

$$\cos\varphi (1 - \cos\omega) = -(1 + \cos\omega) \cos 2\vartheta$$

Ввиду этого

$$\boxed{\sin\alpha \ \sin\beta = -(1 + \cos\omega)\cos 2\vartheta} \qquad (6)$$

Из формулы (6) можно сделать важное следствие относительно величины угла ϑ. Так как углы α, β и ω являются острыми, то $\sin\alpha \sin\beta > 0$ и $1 + \cos\omega > 0$. Следовательно должно быть, что $\cos 2\vartheta < 0$, т. е., что $2\vartheta > 90°$ или $\vartheta > 45°$. Таким образом доказана следующая теорема:

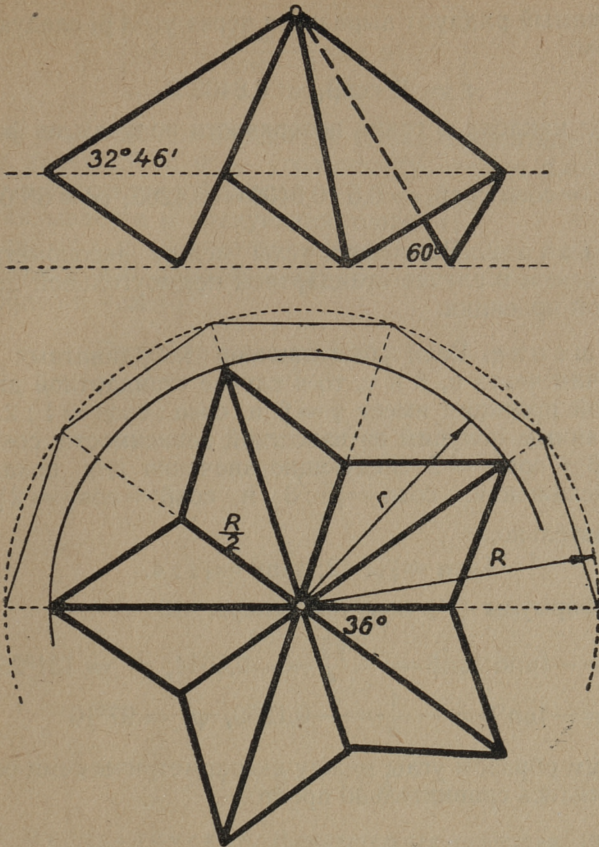
Теорема 5. Если угол и его ортогональная проекция равны, то биссектриса угла образовывает со следом плоскости угла угол больше, чем 45°.

6. Примеры

Выведенные формулы могут быть с успехом использованы для решения различных задач на ортогональное проектирование угла. Рассмотрим некоторые примеры.

Задача 1. Правильный десятиугольник, вписанный в окружность с радиусом R складывают в правильную складчатую десятиугольную пирамидальную поверхность так, что нижние концы боковых ребер с большим углом наклона (относительно плоскости перпендикулярной к оси поверхности) лежат на окружности с радиусом $\frac{1}{2}R$. Требуется найти радиус r окружности, на которой лежит нижние концы ребер с меньшим углом наклона, а также угол наклона ω боковой грани поверхности.

Решение. Так как пирамидальная поверхность получена складыванием плоскости десятиугольника, то сумма углов граней при вершине поверхности равна 360°. Но сумма ортогональных проекций этих углов на плоскости, перпендикулярной к оси поверхности также равна 360°. Ввиду этого угол (φ) грани при вершине равен своей проекции (φ'), т. е. $\varphi = \varphi' = 360° : 10 = 36°$ (фиг. 4). По условиям задачи длина проекции ребра с большим углом наклона в два раза меньше длины самого ребра. Следовательно угол наклона α этого ребра равен 60°. По формуле



Фиг. 4

(3) теперь нетрудно вычислить и угол наклона β другого ребра. Получим, что

$$\tan\beta = \frac{\sin\alpha \cos\varphi}{\cos\alpha \pm \sin\varphi} = \frac{\sqrt{3}\cdot\cos 36^\circ}{2(0{,}5 \pm \sin 36^\circ)} = \frac{1{,}401}{1 \pm 1{,}176},$$

откуда:

$\tan\beta_1 = 1{,}401 : 2{,}176 = 0{,}6438$; $\beta_1 = 32^\circ 46'$;
($\tan\beta_2 = -1{,}401 : 0{,}176 = -8{,}110$; $\beta_2 = -82^\circ 58'$ (постороннее решение).

Искомый радиус r выразится через угол β_1 следующим образом:

$$r = R \cos\beta_1 = 0{,}8403\ R.$$

Угол наклона ω грани поверхности получим из формулы (4):

$$\cos\varphi = \cos\alpha \cos\beta_1 = 0{,}5 \cdot 0{,}8403 = 0{,}4202;\ \omega = 65°08'.$$

З а д а ч а 2. Вычислить углы между аксонометрическими осями в случае стандартной прямоугольной диметрической проекции.

Р е ш е н и е. Если углы наклона координатных осей обозначим через α, β и γ, то в случае стандартной диметрической проекции имеет $\gamma = \beta$ и $\cos\alpha : \cos\beta = 1 : 2$. По этим данным получим из известной зависимости $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$ следующие значения для показателей искажения: $\cos\alpha = \sqrt{2} : 3$ и $\cos\beta = \cos\gamma = 2\sqrt{2} : 3$. Следовательно,

$$\tan\alpha = \sqrt{14} : 2;\ \tan\beta = \sqrt{2} : 4.$$

Из формулы (1') получим теперь, что

$$\cos\varphi_1' = -\tan\alpha \tan\beta = -\frac{\sqrt{7}}{4} = -0{,}6614;\ \varphi_1' = 131°25';$$

$$\cos\varphi_2' = -\tan^2\beta = -\frac{1}{8} = -0{,}1250;\ \varphi_2' = 97°10'.$$

Таким образом углы между аксонометрическими осями определились сравнительно просто.

Выводы

В работе выводится следующая формула, являющаяся условием равенства угла φ и его ортогональной проекции:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\sin\alpha \sin\beta}{1 - \cos\alpha \cos\beta},}$$

где α и β — углы наклона сторон угла φ относительно плоскости проекций. Для того же условия дается еще и другая формула:

$$\cos\varphi = \frac{\cos\omega + 1}{\cos\omega - 1}\cdot\cos 2\vartheta,$$

где ω — угол наклона плоскости угла φ относительно плоскости проекций, а ϑ — угол между следом плоскости угла φ и биссектрисой угла φ.

Доказывается и следующая теорема:

Если угол и его ортогональная проекция равны, то биссектриса угла образовывает со следом плоскости угла угол больше, чем 45°.

(Поступила в редакцию 20 VI 1960 г.)

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Иерусалимский, Начертательная геометрия, 1954.
2. Н. Ф. Четверухин и др., Курс начертательной геометрии, 1956.
3. И. И. Котов, Об ортогональных проекциях углов (Вопросы теории, приложений и методики преподавания начертательной геометрии; Труды Рижской научно-методической конференции, июнь 1957 г.), 1960, стр. 349.

О. Я. Рюнк

ОБ ОРТОГОНАЛЬНОЙ
ПРОЕКЦИИ УГЛА

Таллинский Политехнический Институт

Редактор Н. В. Палувер

Технический редактор и корректор
Я. Мыттус

Сдано в набор 13 XII 1960 г. Подписано к печати 24 II 1961. Бумага $54 \times 84 \, ^1/_{16}$. Печатных листов 1,0. По формату 60×92 печатных листов 0,82. Учетно-издательских листов 0,60. Тираж 600 экз. МВ-00450. Заказ № 1930.

Типография «Пунане Тяхт»
Таллин, ул. Пикк 54/58

Цена 6 коп.

Цена 6 коп.