676

ISSN 0136-3549
0320-3441

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI

TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

TRANSACTIONS OF TALLINN
TECHNICAL UNIVERSITY

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT

TALLINN 1988

676

ALUSTATUD 1937

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

TRANSACTIONS OF TALLINN TECHNICAL UNIVERSITY

УДК 621.39

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Радиотехника ХУI

TALLINN 1988

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Труды ТПИ № 676
МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ
Радиотехника ХУ1

На русском языке
Отв. редактор В. Вийес
Техн. редактор М. Тамме
Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 29.06.88
Подписано к печати 28.11.88
МВ-06560
Формат 60х90/16
Печ. л. 4,75 + 0,25 приложение
Уч.-изд. л. 4,0
Тираж 300
Зак. № 716
Цена 80 коп.
Таллинский политехнический институт,
200108 Таллин, Эхитаяте теэ, 5
Ротапринт ТПИ, 200006 Таллин, ул. Коскла, 2/9

№ 676

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 621.397.61:537.876.26

Э.А. Шульц

ТВЕРДОТЕЛЬНЫЙ МНОГОЭЛЕМЕНТНЫЙ РЕГИСТРАТОР ИМПУЛЬСНОГО ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Значительная часть физических экспериментов связана с регистрацией распределения интенсивности оптического излучения в пространстве. Высокая стабильность геометрических характеристик твердотельных многоэлементных фотоэлектрических преобразователей в сочетании с достаточно хорошими фотометрическими показателями и эксплуатационными достоинствами позволяет реализовать на их основе регистраторы оптического излучения, имеющие широкую сферу применения в спектроскопии, лазерной технике и т.д. [1].

Наиболее развитой разновидностью многоэлементных твердотельных фотоэлектрических преобразователей являются фоточувствительные приборы с зарядовой связью (ФПЗС) [2]. Ниже описывается разработанный на их основе регистратор импульсного оптического излучения.

Регистратор включает в свой состав камеру на линейном ФПЗС, камеру на матричном ФПЗС, соответствующие модули камер, модуль коррекции сигнала, аналого-цифровой преобразователь, модули обработки, индикации и запоминания информации (рис. 1). Модули исполнены в стандарте КАМАК, позволяющем гибкое использование регистратора в составе автоматизированных систем проведения физических экспериментов.

Камера на линейном ФПЗС обеспечивает регистрацию одномерного распределения эффективной интенсивности излучения с числом отсчетов 10^3. Необходимые для работы камеры управляющие сигналы вырабатываются в модуле камеры. Камера на матричном ФПЗС снимает двухмерное распределение интенсивности с числом отсчетов 288x360. Обе камеры реализуют режим электронного затвора, позволяющего осуществить вре-

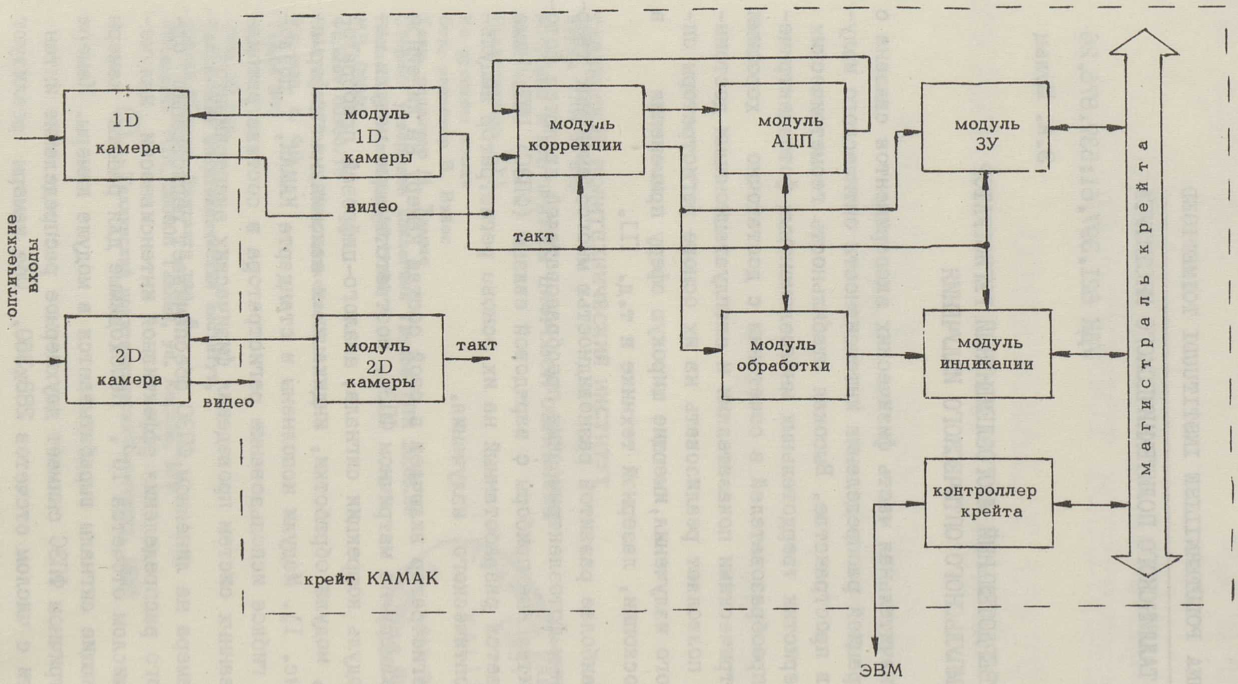

Рис. 1. Структурная схема регистратора, 1D – одномерный, 2D – двухмерный, АЦП – аналого-цифровой преобразователь, ЗУ – запоминающее устройство.

менное стробирование, а также временное накопление оптического сигнала.

Для подавления аддитивной и мультипликативной составляющих регулярной помехи, создаваемой ФПЗС, используется модуль коррекции. Данные коррекции вводятся и запоминаются в модуле коррекции в ходе калибровки регистратора. Аналоговая коррекция аддитивной помехи позволяет эффективно использовать весь динамический диапазон аналого-цифрового преобразователя. Подавление мультипликативной составляющей помехи выполняется более точным цифровым способом.

Данные регистрации вводятся в цифровой форме в модуль запоминающего устройства, откуда извлекаются пользователем через магистраль крейта КАМАК. Оперативная обработка данных в ходе регистрации осуществляется модулем обработки. Предусматриваются следующие операции, выполняемые по одномерному распределению:

1) поиск главного максимума, определение его величины и положения;

2) определение "ширины" главного максимума на половинном относительном уровне и координат краевых точек.

Имеется возможность обработки одномерных сечений двухмерного распределения с выборкой любой строки или столбца.

Остановимся на особенностях организации работы при регистрации одиночных импульсов малой (микро- и наносекундной) длительности с произвольным моментом поступления на вход регистратора.

Временной цикл работы регистратора излучения диктуется тогда ограниченным интервалом времени, в течение которого возможен непрерывный прием оптического излучения ФПЗС.

Перерывы в приеме оптического излучения ФПЗС определяются физикой процессов в ФПЗС с использованием нестационарного состояния МДП структур и связаны с необходимостью вывода зарядов, накапливающихся в ФПЗС и при отсутствии оптического излучения из-за термогенерации. Длительность перерывов зависит от способа вывода зарядов из ФПЗС и оказывается в любом случае существенно больше упомянутой минимальной длительности регистрируемых оптических импульсов.

В указанных условиях регистрация оптических импульсов может быть обеспечена одним из следующих способов или их сочетанием:

I) применением двух (в общем случае - нескольких) поочередно регистрирующих излучение ФПЗС, обеспечивающих взаимное перекрытие перерывов в регистрации;

2) увеличением времени непрерывной регистрации одним ФПЗС до значения, вытекающего из условий работы регистратора излучения, путем снижения скорости термогенерации носителей заряда до допустимой величины;

3) использованием специального импульсного (ждущего) вида работы регистратора с применением режима ожидания. В режиме ожидания исключается накапливание зарядов в ФПЗС. Перевод ФПЗС в рабочий режим согласуется с поступлением регистрируемого оптического сигнала.

Полученные на основе анализа вариантов их особенности представлены в таблице.

Таблица

Способы регистрации одиночных оптических импульсов с помощью ФПЗС

Способ	Достоинства	Недостатки
I	2	3
I. Поочередной работой двух ФПЗС	I. Неограниченное время работы 2. Работа при температуре окружающей среды	I. Усложнение регистратора а) удвоение числа ФПЗС с их электронным обрамлением, б) необходимость применения оптического расщепителя на входе, в) применение средств коммутации сигнала. 2. Пониженная (в два раза) чувствительность 3. Неидентичность 2-х каналов регистрации
2. Охлаждением ФПЗС	I. Относительная простота управления работой ФПЗС	I. Усложнение аппаратуры за счет средств охлаждения 2. Длительное время подготовки к рабочему режиму

I	2	3
	2. Одноканальная структура	3. Снижение разрешающей способности
	3. Возможность длительного аналогового накопления излучения - до десятков минут	4. Ограниченное время непрерывной работы
3. Ждущим режимом работы ФПЗС	I. Неограниченное время работы	I. Задержка при переходе в режим накопления - до единиц микросекунд
	2. Работа при температуре окружающей среды	2. Усложнение управлением ФПЗС за счет введения дополнительного режима ожидания
	3. Одноканальная структура	3. Ограниченное время непрерывного аналогового накопления

Выбор применяемого способа определяется в первую очередь требованиями к чувствительности, времени накопления и особенностями синхронизации в комплексе, включающем регистратор излучения.

В данном регистраторе реализован третий способ. Технические данные регистратора:

- спектральный диапазон - 400...1100 нм;
- длительность оптических импульсов - $10^{-9}...10^{-3}$ с;
- частота повторения оптических импульсов - 0...200 Гц;
- время экспозиции - (3 или 10)$\cdot 10^{k}$ мкс; где к=2,3,4 или 5;
- запуск для перехода к режиму экспозиции - внешний или внутренний периодический;
- интегральная чувствительность - не менее 10^{4} ед.мл. разр. $м^{2}\cdot Дж^{-1}$;
- разрядность цифрового сигнала - 8;
- тип ФПЗС - К1200 ЦЛ1 и К1200 ЦЛ7.

Литература

I. Ордынцев В.М. Системы автоматизации экспериментальных научных исследований. М.: Машиностроение, 1984.

2. Хромов Л.И. и др. Твердотельное телевидение. Телевизионные системы с переменными параметрами на ПЗС и микропроцессорах. М.: Радио и связь, 1986.

E. Schults

The Solid-State Multichannel Optical Radiation Recorder

Abstract

The features of creating one- and two-dimensional optical radiation intensity distribution recorders using charge coupled devices are analyzed. An information concerning CAMAC standard recorder model is given.

E. Schults

Mitmeelemendilise tahke fotomuunduriga optilise kiirguse registraator

Kokkuvõte

Analüüsitakse optilise impulss- ja pideva kiirguse intensiivsuse ühe- ja kahemõõtmelise jaotuse registraatorite ehituse iseärasusi, kasutades neis fotomuunduritena laengsidestusseadisi. Antakse CAMAC-standardis realiseeritud registraatori maketi iseloomustus.

№ 676

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 621.383

А.Х. Андра

СИСТЕМА КОНТРОЛЯ ОПТИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ТЕЛЕРЕГИСТРАТОРА

1. Структурная схема телерегистратора приведена на рис. 1. Она состоит из исполнительного узла ИУ, который выдает необходимые сигналы управления и синхронизации для фотоэлектронного преобразователя (ФЭП) и запоминающего осциллографа (ЗО).

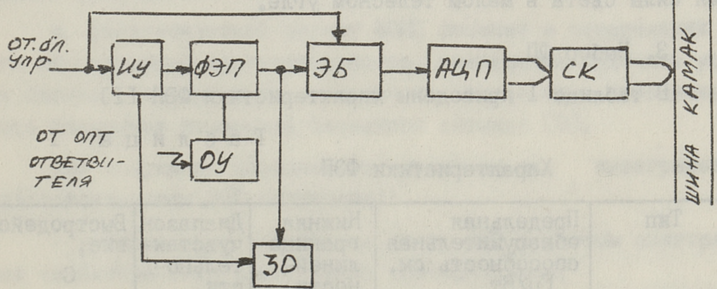

Рис. 1. Структурная схема установки.

Оптический сигнал от оптического осветителя поступает через оптический узел (ОУ) на ФЭП.

От блока управления поступают сигналы управления на ЧУ и электронный блок (ЭБ). В ЭБ производятся необходимые операции с сигналом от ФЭП для вычисления энергетических параметров (интегрирование, коммутация и усиливание сигнала). Сигнал от ЭБ поступает через блоки аналого-цифрового преобразователя (АЦП) и сопряжения с КАМАК на шину КАМАК.

2. Измерение энергетических параметров фотоприемников (ФЭП)

Энергетические параметры фотоприемников измеряют без светофильтров и объектива при использовании калиброванных источников излучения. Для измерений энергии необходимо интегрировать сигнал ФЭП.

При конструировании эффективного ФЭП необходимо решение следующих задач:

- выбор ФЭП с необходимой чувствительностью, уровня собственных шумов, временной температурной стабильности, линейности, быстродействия;
- обеспечение необходимой степени корригирования по ГОСТ II.093-64 спектральной характеристики ФП $S(\lambda)$ под кривую видимости;
- выбор конструкции ОУ исходя из необходимости измерения силы света в малом телесном угле.

3. Выбор ФП

В таблице I приведены характеристики ФЭП [I]

Таблица I

Характеристики ФЭП

Тип	Предельная обнаружительная способность см, Гц/Вт	Нижняя граница линейности световой характеристики, ЛМ	Диапазон чувствительности, мкм	Быстродействие, С
ФЭУ	$6 \cdot 10^{11} - 6 \cdot 10^{26}$	$5 \cdot 10^{-5}$	0,4-1,0	$10^{-8} - 10^{-9}$
фотоэлемент	10^{11}	10,0	0,4-1,0	10^{-8}
фоторезистор	$2 \cdot 10^{11} - 2 \cdot 10^{12}$	1,0	2,1-5,3	$6 \cdot 10^{-3} - 6 \cdot 10^{-5}$
фотодиод	$10^{14} - 10^{18}$	10^{-3}	0,4-1,5	$10^{-6} - 10^{-8}$
фототранзистор	$10^{10} - 10^{12}$	10^{-5}	0,4-1,5	10^{-4}

ФЭУ обладают высокой чувствительностью и быстродействием, но имеют низкую долговременную стабильность. Параметры их зависят от питающих напряжений. Они теряют работоспособность при превышении допустимого уровня засветки, диапазон линейности характеристики спектральной чувствительности ограниченный. Характеристики ФЭУ приведены [2, с. 74-75].

У фоторезисторов и фототранзисторов малое быстродействие. Наиболее удачным сочетанием параметров обладают кремниевые фотодиоды. Они имеют малый уровень темнового тока и шумов, достаточную чувствительность (0,I А/Вт), высокую долговременную и температурную стабильность чувствительности, малую инерционность, высокую линейность световой характеристики (порядка 90-I00 дБ [I]) в динамическом диапазоне потоков излучения фона, превышающего уровень полезного сигнала измеряемого прибора в 10^{14}-10^{15} раз.

Недостаток кремниевых фотодиодов - они имеют спектральную чувствительность S_λ, отличную от кривой видимости, что может привести к значительным погрешностям измерения, если не принять соответствующих мер. Характеристики фотодиодов приведены в [2, с. 8I].

4. Энергетический расчет ФЭПП состоит в определении его интегральной чувствительности, нахождении величины уровня сигнала, определении соотношения сигнал-шум, обеспечивающего уверенное измерение полезного сигнала [3].

Для получения обобщенного выражения для интегральной чувствительности ЭФП определяют:

- интегральную чувствительность ФЭП с учетом спектральной характеристики пропускания светофильтров;
- интегральную чувствительность ФЭП с учетом доли энергии измеряемого сигнала, поступающего на вход (учитываются потери в ОУ и геометрические и пространственные соотношения между измеряемым прибором и ФЭП, потери из-за отсутствия оптимального согласования фотоприемника с оптической средой и электронным трактом).

5. Выбор ФЭП

Необходимость проверки световых характеристик в нескольких пунктах в пространстве мишени ЭТ задает ФЭП геометрические ограничения. Из-за приблизительных световых характеристик фотодиодов (кремниевых) и мишени ПТТ (особенно кремникон и суперкремникон) и указанных в разделе 3 причин выбирается в качестве ФЭП кремниевый фотодиод (например,ФД-25к). Для измерения пороговой чувствительности телерегистратора предлагается использовать в качестве ФЭП ФЭУ (например, ФЭУ-93).

Литература

1. Геда Н.Ф. Измерение параметров оптоэлектроники / Под ред. С.В. Свечникова. М.: Радио и связь, 1981. 368 с.

2. Измерение энергетических параметров и характеристик лазерного излучения / Под ред. А.Ф. Костюка. М.: Радио и связь, 1981. 288 с.

3. Якушенко Ю.Г. Основы оптико-электронного приборостроения. М.: Сов. радио. 1977.

4. Петраков А.В. Автоматические телевизионные комплексы для регистрации быстропротекающих процессов. М.: Энергоатомиздат, 1987. 152 с.

A. Andra

The Testing System of Optical-Energetical Data for Optical Radiation Receivers

Abstract

The problems of the testing system of optical-energetical data for optical radiation receivers are considered in the article.

A. Andra

Teleregistraatori optilis-energeetiliste parameetrite kontrollimise süsteem

Kokkuvõte

Käesolevas töös on käsitletud optilise kiirguse energeetiliste parameetrite kontrollimise süsteemi loomise probleeme.

№ 676

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 621.373.42

П.Э. Мартверк, А.И. Рая

УМЕНЬШЕНИЕ АППАРАТУРНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ В ПЕРИОДОНЕЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ОЦЕНИВАТЕЛЯХ ЭФФЕКТИВНОГО ЗНАЧЕНИЯ СИГНАЛА

Для оперативной оценки и измерения эффективного значения периодического сигнала могут быть использованы алгоритмы периодонечувствительной оценки [1]. Например, в задачах повышения чувствительности широкополосных вольтметров за счет подавления внутриприборного шума, оценки мощности природно покрытых шумами периодических явлений в широком частотном диапазоне.

При реализации подобных алгоритмов оценки эффективного значения гармонического сигнала надо иметь в виду неидеальность блоков реализующих операций преобразования. Требуется учитывать ошибки, вызванные неидеальностью этих блоков и по возможности уменьшать эти ошибки модифицированием самих алгоритмов оценки.

В данной работе рассмотрены некоторые возможности уменьшения аппаратурной погрешности периодонечувствительных оценивателей эффективного значения периодического сигнала.

Известный автокорреляционный алгоритм с квадратурными каналами периодонечувствительной оценки эффективного значения гармонического сигнала [1]

$$(I,I)^2 = (L,\Gamma)^2 + (I,L)^2 \qquad (1)$$

имеет существенную ошибку, если коэффициент передачи по амплитуде не является постоянным во всем частотном диапазоне. От этого недостатка свободен модифицированный алгоритм [2]

$$(I,I)^2 = [(L,\Gamma)^2 + (I,L)^2]\cdot(I,I)/(L,L). \qquad (2)$$

Здесь и в дальнейшем используется условное обозначение корреляционного интеграла (,), с единичным оператором I , оператором задержки L и оператором преобразования Гильберта Γ. С целью укорачивания записи опускается наблюдаемая реализация $x(t)$, представляющая суммы сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$. Например,

$$(I,L) = (Ix, Lx) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,x(t-\tau)\,dt.$$

Вторым по сложности является блок, реализующий преобразование по Гильберту (широкополосный фазовращатель на 90°). Здесь надо учитывать неравномерность амплитудного коэффициента передачи и отличие фазовращения от 90°.

Исходя из матрицы коэффициентов [I]

$$R_I = \begin{pmatrix} (L,L) & (L,I) & (L,\Gamma) \\ (I,L) & (I,I) & (I,\Gamma) \\ (\Gamma,L) & (\Gamma,I) & (\Gamma,\Gamma) \end{pmatrix} \tag{3}$$

выразим ее детерминант и приравнивая к нулю, получаем алгоритм оценки

$$(I,I)^2 = (I,L)^2\frac{(I,I)}{(L,L)} + (L,\Gamma)^2\frac{(I,I)(I,I)}{(L,L)(\Gamma,\Gamma)} + (I,\Gamma)^2\frac{(I,I)}{(\Gamma,\Gamma)} - 2(I,L)(L,\Gamma)\frac{(I,I)(I,\Gamma)}{(L,L)(\Gamma,\Gamma)}. \tag{4}$$

При идеальности блока преобразования по Гильберту, то есть $(I,\Gamma)=0$, $(\Gamma,\Gamma)=(I,I)$ получается алгоритм (2).

Полная цифровая обработка сигнала позволяет применить идеальную задержку и не сужая общности, считая амплитудный коэффициент передачи блока преобразования по Гильберту, равной единице, получим алгоритм

$$(I,I)^2 = (I,L)^2 + (L,\Gamma)^2 + (I,\Gamma)^2 - 2(I,L)(I,\Gamma)(L,\Gamma)/(I,I)$$

и можно убедиться, что здесь происходит полная компенсация ошибок, вызванная неидеальностью фазовращения на 90°, но при малом отношении сигнал-шум (где обычно применяются автокорреляторы с квадратурными каналами) компенсация малоэффективна.

Учитывая вышесказанное, можем компенсировать неравномерности амплитудного коэффициента передачи блоков задержки и преобразования по Гильберту, применяя алгоритм

$$(I,I)^2 = \left[(I,L)^2 + (L,\Gamma)^2\frac{(I,I)}{(\Gamma,\Gamma)}\right]\frac{(I,I)}{(L,L)}. \tag{5}$$

Полученный алгоритм позволяет уменьшить требования к коэффициенту передачи по амплитуде для блоков задержки и преобразования по Гильберту.

Несколько менее эффективен с точки зрения подавления шумов алгоритм [4]

$$2(I,I) = -(I,L^2)+\sqrt{(I,L^2)^2+8(I,L)^2}\,. \qquad (6)$$

Преимуществом этого алгоритма является его технологичность, т.е. применяются лишь линии задержки и отсутствует блок преобразования по Гильберту.

Исходя из матрицы коэффициентов [I]

$$R_{II} = \begin{pmatrix} (G,G) & (G,L) \\ (G,L) & (L,L) \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

где $G = L^2 + I$.

Можно вывести по методике [I] алгоритм оценки, где происходит полная компенсация неравномерностей коэффициентов передачи по амплитуде блоков задержки

$$(I,I) = \left[1+\frac{(L^2,L^2)}{(I,I)}\right]^{-1}\left\{-(I,L^2)+\sqrt{(I,L^2)^2+\left[1+\frac{(L^2,L^2)}{(I,I)}\right]\frac{(I,I)}{(L,L)}\left[(L^2,L)+(I,L)\right]^2}\right\}. \qquad (8)$$

Нетрудно убедиться, что алгоритм (6) является частным случаем алгоритма (8) при идеальности коэффициентов передачи по амплитуде линии задержек.

Другая разновидность алгоритма (6) с компенсацией приведена в [3], где минимизировано количество операций для удобства аппаратурной реализации.

Литература

I. Кангур О.Э., Мартверк П.Э., Хейнрихсен В.Р. Оценка мощности периодического сигнала произвольного периода на фоне шумов // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. 1978. № 452. С. 3–8.

2. А.с. 613254 СССР, МКИ G01R 19/02

3. А.с. 1166001 СССР, МКИ G01R 19/00

4. А.с. 555348 СССР, МКИ G01R 19/00

P. Martverk, A. Raja

Some Possibilities for Decreasing the Errors of Devices by Estimating the Effective Value of the Signal

Abstract

The problems to realize frequency invariant algorithms for estimating the harmonic signal's effective value have been discussed. The paper describes some possibilities of decreasing the errors of devices in frequency invariant estimating equipments.

P. Martverk, A. Raja

Aparatuursete vigade vähendamine sagedustundetutes signaali efektiivväärtuse mõõturites

Kokkuvõte

Signaali efektiivväärtuse sagedustundetu hinnangu algoritme võib pruukida reas ülesannetes, mis nõuavad operatiivset hinnangut ja seda laias kontrollitavate sageduste diapasoonis.

Kirjeldatakse mõningaid algoritmilisi võimalusi, vähendamaks selliste mõõturite aparatuurseid vigu.

№ 676

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 543.42

А.А. Мейстер

МЕТОДЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА КОРОТКИХ РЕАЛИЗАЦИЙ СИГНАЛОВ

Классические методы оценивания спектральной плотности мощности стационарных процессов хорошо изучены и являются наиболее экономичными до тех пор пока длина реализации (и число точек дискретных значений N) достаточно большая, так что разрешается способность по частоте $\Delta f = 1/T = 1/N \cdot \Delta t$ и связанная с ней дискретная сетка кратных частот удовлетворяют потребителя.

Ситуация изменяется при обработке коротких реализаций, где $N < 100...200$. Во многих случаях, обычно при достаточно большом содержании детерминированных составляющих в составе сигнала (при большом ОСШ), удается использовать дополнительные предположения о структуре сигнала для заметного улучшения оценок. В последнее время наблюдается интенсивное развитие подобных методов для оценивания спектральной плотности мощности, обзор которых для одноканального случая приводится ниже [1, 2, 3, 15, 16].

Рассматриваемые методы можно распределить на параметрические и непараметрические. В первом случае сигнал представляется некоторой моделью, параметры которой оцениваются. Во втором случае используются некоторые преобразования автокорреляционной матрицы сигнала, и на базе этого находят улучшенные оценки.

<u>В классе параметрических оценок</u> (табл. I)

Наибольшее применение нашла <u>авторегрессионная</u> (АР) модель линейного предсказания, представляющая сигнал $x(n)$ в виде линейной комбинации предыдущих значений и белого шума $x(n)$:

$$x(n) = \sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) + u(n), \qquad (I)$$

где a_k – АР-коэффициенты.

Обратный фильтр имеет передаточную функцию

$$H(z) = 1/A(z), \quad \text{где } A(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}, \qquad (2)$$

а спектр сигнала оценивается как

$$P(f) = \sigma_u^2 \cdot |H(z)|^2_{z=\exp(j2\pi f\Delta t)}, \qquad (3)$$

где σ_u^2 – мощность белого шума.

При высоком порядке модели ($P < N/3 \ldots N/2$) она хорошо представляет сигналы с резкими пиками в спектре и при ОСШ > I имеет достаточно хорошие показатели. Способы расчета АР-коэффициентов базируются на различных вариантах автокорреляционной матрицы, из которых наиболее совершенным можно считать модифицированный метод [4]. В ряде случаев расчет дает коэффициенты нестабильного фильтра (полюсы вне единичной окружности), однако, если расчет спектра является конечной целью анализа, результат можно получить независимо от этого.

Наиболее популярным является метод гермонического среднего (Бэрга) [3] со многими его вариантами, где минимизация в нематричной форме суммы мощностей ошибок вперед и назад обеспечивает стабильность получаемого фильтра. Однако при простоте расчета метод имеет нежелательные посторонние эффекты, как разложение спектральных пиков при высоком порядке модели и зависимость расположения пиков в оценке спектра от начальной фазы соответствующей синусоидальной компоненты сигнала.

Выбор порядка АР-модели является компромиссом между разрешающей способностью и появлением нежелательных побочных эффектов. Известен ряд критериев, по минимуму которых можно определить оптимальное значение порядка [3].

АР-модели в настоящее время широко используются для анализа речевых сигналов, в геофизике, гидроакустике, электроэнцефалографии и т.д. [I, 2, 4].

Более общая модель авторегрессии - скользящего среднего (АРСС) представляет сигнал в виде

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{P} a_k \cdot x(n-k) + \sum_{\ell=0}^{Q} b_\ell \cdot u(n-\ell). \tag{4}$$

В этом случае обратный фильтр имеет передаточную функцию

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \text{ где } B(z) = \sum_{\ell=0}^{Q} b_\ell \cdot z^{-\ell}, \tag{5}$$

а спектр сигнала оценивается как

$$P(f) = \sigma_u^2 \left| \frac{B(z)}{A(z)} \right|^2_{z=\exp(j2\pi f \Delta t)}. \tag{6}$$

По сравнению с предыдущей АР-моделью АРСС-модель подходит для представления сигналов, в спектре которых встречаются как резкие пики (полюсы $H(z)$), так и глубокие провалы (нули $H(z)$). К сожалению, определение коэффициентов a_k и b_k связано с необходимостью нелинейной оптимизации [3]. Наиболее простым из применяемых в настоящее время методов является описанная в [6] псевдооптимальная структура, где сначала определяют оценки для коэффициентов a_k в знаменателе $H(z)$, затем с помощью АР-фильтра отфильтровывается остаток процесса, который затем используется для получения оценок коэффициентов b_k числителя $H(z)$.

Модель Прони представляет сигнал в виде суммы экспонент [7, 8]

$$x(n) = \sum_{k=0}^{P} A_k \cdot \exp[j\varphi_k + (\alpha_k + j\omega_k) n \cdot \Delta t] \tag{7}$$

с произвольными комплексными амплитудами $\dot{A}_k = A_k \exp(j\varphi_k)$ и комплексными частотами $s_k = \alpha_k + j\omega_k$. В случае вещественного сигнала каждая комплексно-сопряженная пара дает одну синусоиду. Модифицированный вариант, описанный в [8], использует постоянные во времени амплитуды слагаемых, где $\alpha_k = 0$. Общая нелинейная задача нахождения оценок всех параметров в постановке Прони решается в виде квазиоптимальной процедуры из двух частей, где на первом этапе определяют значения $s_k = \alpha_k + j\omega_k$, а на втором - комплексные амплитуды $A_k \cdot \exp(j\varphi_k)$. Обе части задачи сводятся к линейной, за исключением необходимости определения корней полинома высокого порядка. Выбор числа слагаемых и порядка модели P должен быть сделан в начале расчета, это предопределяет количество получаемых слагаемых. При анализе сигналов с низким ОСШ при заранее неизвестном порядке можно получить большое число ложных слагаемых, если порядок переоценен.

Прямым применением модели Прони является анализ всевозможных переходных процессов.

Модель Писаренко представляет сигнал в виде смеси синусоид постоянной амплитуды с произвольными частотами в белом шуме [9, 2]. Выделение синусоид основано на обработке корреляционной матрицы, для которой необходимо найти минимальное собственное значение и соответствующий ей собственный вектор. К сожалению, результаты, получаемые на основании приближенных оценок корреляционной матрицы, заметно уступают как теоретическим результатам, так и оценкам, получаемым по предыдущему методу.

Непараметрические оценки спектра определяются на основании оценки корреляционной матрицы или матрицы данных.

Метод минимальной дисперсии, называемый иногда методом максимального правдоподобия [2, 10], хорошо описывает относительную интенсивность компонентов спектра, причем оценки минимальной дисперсии высоты получаются путем минимизации мощности ошибок на выходах узкополосных фильтров, подстраиваемых под частоты слагаемых. Пики такой оценки линейно связаны с мощностью синусоид, что выгодно отличает метод от ранее рассмотренных АР- и АРСС-методов. Однако площадь под кривой оценки $P(f)$ не равна общей мощности процесса.

Значительное развитие получили методы разложения по сингулярным значениям матрицы данных или корреляционной матрицы [11]. Разложение для модифицированной ковариационной матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} x(P) & \cdots x(1) \\ \vdots & \vdots \\ x(N-1) & \cdots x(N-P) \\ \overset{*}{x}(2) & \cdots \overset{*}{x}(P+1) \\ \vdots & \vdots \\ \overset{*}{x}(N-p+1) & \cdots \overset{*}{x}(N) \end{vmatrix} = \bar{U}\bar{\Sigma}\bar{V}^H = \sum_{i=1}^{P} \sigma_i \bar{u}_i \bar{v}_i^H . \qquad (8)$$

Здесь исходная матрица ранга k представляется в виде произведения унитарных матриц $\bar{U}=(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\ldots,\bar{u}_{2(N-p)})$, $\bar{V}=(\bar{v}_1,\bar{v}_2,\ldots,\bar{v}_p)$ и диагональной матрицы $\bar{\Sigma}$, содержащей т.н. сингулярные значения $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ в убывающем порядке. Отбрасывание последних, меньших некоторого выбираемого критического уровня сингулярных значений уменьшает ранг матриц и является весьма эффективным (в среднеквадратическом смысле) способом уменьшения его ранга и подавления помех. Оценки спектра можно получить как по остающимся сингулярным значениям (в подпространстве сигналов) [I2], так и по отброшенной части (в подпространстве шумов) [I3, I4]. Известный под названием MUSIC метод из последней группы использует оценку вида

$$P(f)=\left[\bar{e}^{-H}(f)\left(\sum_{i=M+1}^{p}\bar{v}_i\bar{v}_i^{H}\right)\bar{e}(f)\right]^{-1}, \tag{9}$$

где M – число оставленных сингулярных значений, а вектор комплексных синусоид

$$\bar{e}(f)=\left[1 \quad \exp(j2\pi f\Delta t)\ \ldots\ \exp(j2\pi M\Delta t)\right]^{T}. \tag{I0}$$

Исследования показали, что оценки, получаемые этим методом при большом шуме (малом ОСШ), заметно лучше рассмотренных ранее оценок. Однако отбрасывание некоторой части матрицы не сохраняет мощность процесса, поэтому получаемые оценки пригодны для определения частот, а не мощностей слагаемых. С вычислительной точки зрения применяемое разложение требует обработки очень больших массивов комплексных чисел (матрицы с размером до $2N*2N$), что во многих случаях ограничивает их применение.

В лаборатории обработки сигналов кафедры радиотехники в настоящее время имеются программы спектрального анализа коротких реализаций сигналов с вещественными и комплексными значениями следующих типов:

- анализ по АР-модели на основании модифицированной ковариационной матрицы ($N \leqslant 300$);
- анализ по АРСС-модели ($N \leqslant 300$);
- анализ на основании модели Прони ($N \leqslant 300$);
- анализ по сингулярному разложению ($N \leqslant 64$).

Программы составлены на языке ФОРТРАН-IУ и работают на машинах сопрягаемых на уровне программ с IBM PC-XT.

Таблица I

Методы оценки спектральных характеристик

Класс оценки	Модель сигнала	Метод расчета и литература
I	2	3
парамет-рический	авторегресси-онный (АР)	автокорреляционный [I] ковариационный [I] модифиц. ковариационный [4] гармоническое среднее (Бэрг) [2, 3]
	авторегрессии - скользящего среднего (АРСС)	переопределенная модель [6]
	Сумма экспонентов (Прони)	псевдооптимальный метод наименьших квадратов [7, 8]
	Сумма синусоид (Писаренко)	м. корреляционной матрицы [9, 8]
непара-метриче-ский	нет	м. минимальной дисперсии [I0]
	нет	разложение по сингулярным значениям [II, I2, I3, I4]

Литература

I. Маркел Дж., Грей А. Линейное предсказание речи. М.: Связь, 1980. 308 с.

2. Кей С., Марпл С. Современные методы спектрального анализа. Обзор//ТИИЭР.Т.69, № II, ноябрь I98I.С. 5-5I.

3. Nonlinear Methods of Spectral Estimation, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo: Springer-Verlag / ed. S. Haykin, 1983. 263 p.

4. Тематический выпуск. Спектральное оценивание// ТИИЭР. Т. 70, № 9, сентябрь I982. 307 с.

5. Marple S. A New Autoregressive Spectrum Analysis Algorithm // IEEE Trans, v. ASSP-28. August, 1980. P. 441-454.

6. Кэдзоу Дж. Спектральное оценивание: метод переопределенной системы уравнений рациональной модели. См.[4].С. 256-293.

7. Van Blaricum M., Mittra R. A Technique for Extracting the Poles and Residues of a System Directly from its Transient Response // IEEE Trans., v. AP-23. November, 1975. P. 777-781.

8. Marple S. Spectral Line Analysis by Pisarenko and Prony Methods // Proc. IEEE ICASSP. 1979. P. 159-161.

9. Pisarenko V. The Retrieval of Harmonics from a Covariance Function // Geophys. J.R.A.S., v. 33. 1973. P. 347-366.

10. Capon J. Maximum-Likelihood Spectral Estimation // Ch. 5 in (3).

11. Форсайт Дж. и др. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 279 с.

12. Тафтс Д., Кумаресан Р. Оценивание частот суммы нескольких синусоид: Модификация метода линейного предсказания, сравнимая по эффективности с методом максимального правдоподобия. См. [4]С. 77-94.

13. Kaveh M., Barabell A. The Statistical Performance of the MUSIC and Minimum-Norm Algorithms for Resolving Plane Waves in Noise // IEEE Trans., v. ASSP-34. April, 1986. P. 331-341.

14. Johnson D., De Graaf S. Improving the Resolution of Bearing in Passive Sonar Arrays by Eigenvalue Analysis // IEEE Trans, v. ASSP-30. August, 1982. P. 638-647.

15. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов: Справочник. М.: Радио и связь, 1985. 312 с.

16. Андриянов А.В., Шпак И.И. Цифровая обработка информации в измерительных приборах и системах. Минск: Вышэйшая школа. 1987. С. 174.

A. Meister

Methods of Spectrum Analysis of Short Samples

Abstract

The methods of spectrum analysis based on the autoregressive and autoregressive-moving-average models, on the Prony and Pisarenko models, the minimum variance estimate and the singular value decomposition are briefly discussed.

A. Meister

Lühikeste realisatsioonide spektraalanalüüsi meetodid

Kokkuvõte

Käsitletakse spektraalanalüüsi meetodeid, mis kasutavad autoregressioon- ja autoregressioon-libisevkeskmise mudelit, samuti Prony ja Pisarenko mudelit, minimaalse dispersiooni hinnangut ning singulaarväärtuste dekompositsiooni.

№ 676

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 681.3.068

О.К. Лойтме

ВРАЩЕНИЕ ОБЪЕКТОВ ВОКРУГ x, y и z ОСИ НА ЭКРАНЕ ДИСПЛЕЯ

При отображении объектов на экране дисплея часто возникает необходимость изменять масштаб изображения, вращать его, смещать или трансформировать для улучшения наглядности перспективного изображения объекта. Основой для формирования различных изображений в машинной графике являются отображения точек и линий. Операция смены осуществляется с помощью матричной алгебры. В общем случае любое выражение имеет вид:

$$A \cdot T = B, \tag{I}$$

где $A = [x, y, z]$, матрица, описывающая координаты точек объекта;

$B = [X, Y, Z]$, матрица, описывающая координаты точек объекта после применения преобразования;

T матрица оператор.

Интерпретация матричного умножения как геометрического оператора является основой математических преобразований, используемых в машинной графике [I].

Рассмотрим ситуацию, когда осуществляется вращение объекта вокруг x, y и z осей. Матрица-оператор, т.е. матрица вращения примет вид:

$$T = T_x \cdot T_y \cdot T_z . \tag{2}$$

Предположим, что ось вращения проходит через начало координат. Матрицы вращения имеют следующие виды:

$$T_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos Q & \sin Q \\ 0 & -\sin Q & \cos Q \end{bmatrix}; \tag{3}$$

$$T_y = \begin{bmatrix} \cos\Phi & 0 & -\sin\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Phi & 0 & \cos\Phi \end{bmatrix}; \qquad (4)$$

$$T_z = \begin{bmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

В случае, когда вращение осуществляется вокруг осей, имеющих произвольные углы положения (проходит через начало координат), то тогда матрица вращения примет вид [2]:

$$R = \begin{bmatrix} n_1^2+(1-n_1^2)\cos Q & n_1n_2(1-\cos Q)+n_3\sin Q & n_1n_3(1-\cos Q)-n_2\sin Q \\ n_1n_2(1-\cos Q)-n_3\sin Q & n_2^2+(1-n_2^2)\cos Q & n_2n_3(1-\cos Q)+n_1\sin Q \\ n_1n_3(1-\cos Q)+n_2\sin Q & n_2n_3(1-\cos Q)-n_1\sin Q & n_3^2\ (1-n_3^2)\cos Q \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

где Q - угол вращения вокруг оси;

$\left.\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{matrix}\right\}$ - переменные (cos углы), которые характеризуют положение оси вращения.

В процессе вычислений необходимо найти три матрицы вращения и для каждой точки изображения осуществить умножения с ними. Это значительно увеличивает объем вычислений и в результате процесс отображения достаточно медленный.

Вращение по очереди вокруг x , y и z оси можно заменить вращением вокруг одной оси (с помощью матрицы R ,формула 6), но иногда мы не знаем положения этой оси и требуемого угла вращения.

Целью данного исследования является получение формулы, которая позволяет определить нужные пространственные углы оси вращения (n_1, n_2, n_3) и величины оси вращения (Q).

Рассмотрим матрицу вращения вокруг оси z, T_z; возможно показать, что матрица T_z является ортогональной [3, 4]

$$\left.\begin{aligned} T_z^T &= T_z^{-1} \\ \det(T_z) &= 1 \end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

где индекс $_T$ обозначает транспонирование. Пусть строки ортогональной матрицы, обозначенные как iT_z, jT_z, kT_z и вектор вдоль оси $\vec{i} = [100]$.

Строки являются ортогональными, так как

$$T_z \cdot T_z^T = I,$$

где I – единичная матрица.

То же получаем, что

$$T_z^T = T_z^{-1} \quad \text{и} \quad T_z^T T_z = I$$

т.е. является тоже ортогональными.

Рассмотрим собственные значения и собственные векторы матрицы. Известен закон

$$(T_z - \lambda I)\ell = 0, \tag{8}$$

где ℓ – является собственным вектором преобразований, выраженным матрицей T_z;

λ – является собственным значением преобразований.

Пишем характеристическое уравнение матрицы в виде полинома

$$\det(\lambda I \cdot T_z) = \lambda^3 - S_p(T_z)\lambda^2 + \ldots - \det T_z,$$

где $S_p'(T_z)$ является следом матрицы.

Если T_z является прямой ортогональной матрицей вращения, тогда $\det T_z = +1$ и полином имеет не меньше, чем один реальный корень: $\lambda > 0$.

Так как ℓ является собственным вектором преобразований, который характеризуется T_z, то известен закон [4]:

$$\ell \cdot T_z = \lambda \ell.$$

Найдем собственное значение λ

$$(\ell T_z)(\ell T_z)^T = (\lambda \ell)(\lambda \ell)^T = \ell \ell^T,$$

отсюда следует, что

$$\lambda^2 = 1; \quad \lambda = +1 \quad и \quad \ell T_z = \ell,$$

ℓ – собственный вектор является осью вращения. Мы можем выбрать длину собственного вектора 1 и выбрать e и f, которые являются ортогональными ℓ, так что e, f, ℓ являются ортогональными и образуют тройник правой руки, тогда $\ell T_z = (\cos\psi)e + (\sin\psi)f$. Остальные строки описываются аналогично.

Представляем матрицы в виде

$$A = P \cdot T_z \cdot P^{-1},$$

где P - матрица, строками которой являются собственные векторы e, f, ℓ в единицах оси i, j, k.

Чтобы найти угол ψ, матрицу P знать необязательно. Найдем след матрицы

$$S'_p(A) = S'_p(P \cdot T_z \cdot P^{-1}) = S'_p(T_z) = 1 - 2\cos\psi .$$

Рассмотрим теперь 3x3 ортогональную матрицу вращения T. Требуется найти для нее собственный вектор, для этой цели используются следующие связи [4]. Пусть B = 3x3 любая матрица и B^a адъюнктированная матрица B. Если $B = 0$, то $B^{-1} = \dfrac{B^a}{\det B}$:

$$B^a \cdot B = (\det B) \cdot I .$$

Если $\det B = 0$, то $B^a B = 0$ показывает, что каждая строка из B^a (если $\ell \neq 0$) удовлетворяет условию $\ell B = 0$.

Собственный вектор для матрицы T с собственным значением λ $\ell T = \lambda \ell$ или $\ell(T - \lambda I) = 0$ определен как строки

$$(T - \lambda I)^a . \qquad (9)$$

Если T прямая ортогональная матрица, ее оси определены как строки $(T - \lambda I)^a$. Если собственное значение не является множителем собственного значения T, то $(T - \lambda I)$ имеет ранг 2, и все строки $(T - \lambda I)^a$ являются скалярными произведениями одной строки.

Из вышеприведенного анализа можно сделать следующие выводы:

- собственный вектор прямой ортогональной матрицы, который предоставляет в пространстве вращению вокруг фиксированной оси, с собственным значением 1, находиться вдоль оси;

- этот собственный вектор определяется как любая строка из адъюнктированной матрицы $(T - I)^a$:

- угол вращения определен как след матрицы

$$S'_p(T) = 1 + 2\cos Q . \qquad (10)$$

Если имеется необходимость вращать объекты по очереди вокруг x, y и z оси, можно эти вращения заменить вращением вокруг оси, которая ориентирована в пространстве непараллельно координатным осям и пространственные углы которой определены из связи $(T-I)^{q}$ (где $T=T_x \cdot T_y \cdot T_z$) Элементы каждой строки зависят от пространственного угла положения. Требуемый угол вращения (Q) определяется из выражения

$1 + 2\cos Q = S'_p(T)$. Вычисление осуществляется тогда на основе матрицы R (6), где члены n_1, n_2, n_3 и Q определены из вышеизложенных выражений. Полученный алгоритм позволяет ускорить процесс вычисления, особенно при отображении поворачивающих объектов на экране дисплея.

Литература

I. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М.: Машиностроение, 1980. 241 с.

2. Справочник по машинной графике в проектировании / Под ред. В.Е. Михайленко и А.А. Лещенко. Киев: Будівельник, 1984. 241 с.

3. Бронштейн И.Н., Семендаев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1985. 798 с.

4. Ланкестер П. Теория матриц. М.: Наука, 1982. 272 с.

O. Loitme

Rotation of Objects on X-, Y- and Z-Axis on the Display

Abstract

The problemes connected with the rotation of objects on x-, y- and z-axis on the display have been discussed in the article.

The goal is to find proper orthogonal matrix having a prescribed vector determining the axis of the rotation and rotating by a prescribed angle on that axis.

A new formula of rotation matrix has been presented.

O. Loitme

Objektide pööramine displei ekraanil ümber x-, y-, z-telje

Kokkuvôte

Artiklis käsitletakse probleeme, mis on seotud objektide pööramisega järjestikku ümber x-, y-, z-telje.

Esitatakse pööramismaatriks ja metoodika pöördtelje asendi nurkade ning pööramisnurga suuruse leidmiseks, mis võimaldavad järjestikpööramise ümber kolme koordinaattelje asendada pööramisega ümber telje, mis on orienteeritud ruumis mitteparalleelselt koordinaattelgedega.

№ 676

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 518.128

Э. Пунгар

ОБ ОБРАЩЕНИИ МАТРИЦ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ НА ЭВМ СМ-4

Задача обращения матриц нередко является частью численного решения проблем технического характера, в том числе и радиотехнических. Например, для нахождения амплитуд составляющих при спектральном анализе Прони по методу наименьших квадратов необходимо обращение комплексной матрицы со структурой Вандермонде.

Метод ортогонализации, см. [I] является одним возможным методом обращения квадратных невырожденных матриц. Этот метод обосновывается на факте, что такую матрицу можно разложить на произведение $A=QR$, где Q – ортогональная, R – верхняя треугольная матрица. Такое разложение можно найти при помощи процесса ортогонализации Грама-Шмидта. Обратная матрица в таком случае $A^{-1}=R^{-1}Q^{T}$. Учитывая, что R треугольная, для ее обращения целесообразно применить метод окаймления.

О проблемах, связанных с обусловленностью при решении задач линейной алгебры численными методами на ЭВМ можно больше узнать, например, из [2].

Для оценивания обусловленности матрицы $A=QR$ удобно применить зависимость [I]:

$$\mathrm{cond}(A)=\mathrm{cond}(QR)\leq \mathrm{cond}(Q)\,\mathrm{cond}(R).$$

Обусловленность ортонормированной матрицы $\mathrm{cond}(Q)=1$. Таким образом, в процессе ортогонализации надо оценить только $\mathrm{cond}(R)$. Учитывая, что R треугольная, получаем оценку

$$\mathrm{cond}(A)\leq \frac{\max\limits_{\{i\}}|r_{ii}|}{\min\limits_{\{i\}}|r_{ii}|},$$

где $i = 1 \div n$,

n - размерность матрицы A,

r_{ii} - элементы главной диагонали матрицы R.

Оценивание $\mathrm{cond}(A)$ целесообразно провести параллельно с ортогонализацией. Если известно, что $\mathrm{cond}(A)$ не должны превышать некоторый предел, то надо ввести в программу соответствующую проверку вместе с выходом из программы и сообщением выявленных обстоятельств.

Опробирование ФОРТРАН-программ, составленных нами по вышеописанной методике, было проведено на ЭВМ СМ-4. Расчеты примеров с размерностями до $n = 16$ и разными обусловленностями проводились со стандартной (E) и двойной точностью (D) вычислений.

Обратная матрица A^{-1}, вычисленная по методу ортогонализации, была проверена двумя способами. При помощи соответствующих формул нашли обратную матрицу $A_{ф}^{-1}$. В качестве оценки точности служила максимальная абсолютная величина разности между соответствующими элементами матриц A^{-1} и $A_{ф}^{-1}$, в дальнейшем I оценка. Второй оценкой являлась аналогичная величина, полученная при сравнении элементов $A \cdot A^{-1}$ и E, единичной матрицы, в дальнейшем II оценка.

Результаты вычислений следующие: при хорошей обусловленности, $\mathrm{cond}(A) < 35$, матрицы порядка до $n = 16$ обращались по вышеописанным оценкам с точностью не менее 10^{-6}, если вычисления проводились со стандартной точностью. При применении двойной точности вычислений точность A^{-1} увеличивалась до 10^{-15}.

В качестве примеров с плохой обусловленностью были выбраны матрица Гилберта $a_{ij} = (i+j-1)^{-1}$, $i,j = (1 \div n)$ и одна ее модификация: $a_{1j} = 1$ $j = 1 \div n$, $a_{ij} = (i+j-1)^{-1}$, $i = 2 \div n$, $j = 1 \div n$.

Приведем некоторые характерные результаты вычислений для матрицы Гилберта, так как для ее модификации они весьма аналогичны

	точность вычислений		I оценка	П оценка
4	E	6349	10^{1}	10^{-3}
4	D	6350	10^{-9}	10^{-13}
8	E	16.230.000	10^{10}	10^{1}
8	D	1.538.000.000	10^{3}	10^{-7}

Обусловленность такой матрицы плохая уже при $n = 4$. Если провести вычисления с двойной точностью, можно еще получить хороший результат. При $n = 8$ не помогает и этот прием, так как обусловленность очень плохая.

Если матрица плохо обусловлена, явно нельзя верить оценке II. Несмотря на то, что максимальная разность между элементами $A \cdot A^{-1}$ и E сравнительно мала, оценка I показывает на очень большие ошибки. Элементы обратной матрицы, вычисленной по формулам, сильно отличаются от элементов, полученных по методу ортогонализации.

Основным выводом от проведенных вычислительных экспериментов следует считать очередное утверждение обстоятельства, что программы численного решения задач линейной алгебры, в том числе обращения матриц, обязательно должны выявить обусловленность. Выбранная нами методика ортогонализации Грама-Шмидта дает соответствующую оценку уже в процессе разложения. Это дает возможность ввода соответствующей проверки либо в диалоговом режиме или в виде экстренного выхода из программы.

Следует подчеркнуть и обстоятельство, что если матрица плохо обусловлена, нельзя проверить результат обращения матрицы сравниванием элементов $A \cdot A^{-1}$ и E. Возможное увеличение любых ошибок на $\mathrm{cond}(A)$ раз не дает обоснования верить такой проверке.

Литература

I. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.

2. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение. М.: Мир, 1984. 264 с.

E. Pungar

About Computing Inverse Matrices by Orthogonalization Method on SM-4

Abstract

Computing the inverse matrices by Gram-Schmidt orthogonalization method permits a convenient estimation for the condition number of the matrice.

Some numerical results of the computations on SM-4 for matrices up to order $n = 16$ with different condition numbers are discussed.

E. Pungar

Maatriksite pööramisest ortogonaliseerimismeetodiga arvutil SM-4

Kokkuvõte

Pöördmaatriksite leidmine Gram-Schmidti ortogonaliseerimismeetodiga võimaldab paralleelselt maatriksi komponentideks lahutamisega hinnata ka tema konditsiooni.

Ülalkirjeldatud metoodika abil pöörati arvutil SM-4 kuni 16 järku erineva konditsiooniga maatrikseid, kasutades nii standardset kui ka topelttäpsust. Töös käsitletakse saadud tulemuste täpsushinnanguid, nende seost konditsiooniga ja arvutuste täpsusega.

№ 676

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 621.391

И.О. Арро

ОБОБЩЕННЫЙ АЛГОРИТМ СОКРАЩЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО КОСИНУСНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим произвольный массив $Y(I)$ дискретного сигнала объемом $N/2+1$, т.е. $I=\overline{0,N/2}$, причем $N=2^{LP}$. LP - произвольное, но наперед заданное, положительное число.

Дискретное косинусное преобразование (ДКП) исходного сигнала с точностью до нормировочного множителя есть в каждой точке (К) спектра

$$XC(K)=\sum_{I=0}^{N/2} Y(I)\cos(2\pi IK/N),\quad K=\overline{0,N/2}. \qquad (1)$$

Здесь уместно отметить, что в случае произвольного сигнала объемом N из него выделяется четная часть и приравнивается к $Y(I)$.

Разбивая последовательно область определения спектра на нечетные и четные составляющие, т.е. $XC(R(2K+1))$, $R=2^r$, $r=\overline{0,(LP-3)}$, $K=\overline{0,(N/4R-1)}$, получаем выражение для расчета нечетного косинусного преобразования с периодом М (НКП-М)

$$XC(R(2K+1))=C_M(R(2K+1))+C_{M/2}(R(2K+1))+$$
$$+\ldots+C_8(R(2K+1))+Z(0),\ R\leqslant N/8, \qquad (2)$$

где нечетные косинусные трансформанты с периодом M/P (С-М/Р) равны

$$C_{M/P}(P(2K+1))=\sum_{I=0}^{M/8P-1} Z(P(2I+1))*$$
$$*\cos(2\pi(2I+1)(2K+1)/(M/P)),$$
$$P=2^{\alpha},\ M=2^{LM},\ LM=LP-r,\ \alpha=\overline{0,(LM-3)}, \qquad (3)$$
$$K=\overline{0,(M/8P-1)},$$

$$Z(I)=Y(I)-Y(M/2-I), \qquad (4)$$

$$Y(I) = Y(I) + Y(M/2-I), \tag{5}$$
$$I = \overline{0,(M/4-1)}.$$

Таким образом, ДКП сведено к вычислениям нечетных косинусных трансформантов и их суммированию. При этом следует учесть [I], что

$$C_{M/P}(M/4P-(2K+1)) = -C_{M/P}(M/4P+(2K+1)). \tag{6}$$

Если обозначить операцию вычитания буквой Δ (например, по формуле (4)), а операцию суммирования буквой Σ (например, по формуле (5)), то нетрудно графически представить структуру ДКП (рис. I) и НКП-N (рис. 2) в общем случае.

Основная вычислительная эффективность алгоритма определяется способом вычисления нечетных косинусных трансформантов. Без ущерба для общности полагаем $M = N$, $P = 1$ и представим $C_N(2K+1)$ в виде

$$C_N(2K+1) = \sum_{q=0}^{N/4G-1} RC(Q;\ 2K+1), \tag{7}$$
$$Q = 4q+1,\ q = \overline{0,(N/4G-1)},\ K = \overline{0,(G/4-1)},$$
$$G = 2^g,\ g \in \{2, LP-2\},$$

$$RC(Q;2K+1) = \cos(2\pi Q(2K+1)/N)\ XC_G^Q(2K+1) - \\ - \sin(2\pi Q(2K+1)/N)\ XS_G^Q(2K+1), \tag{8}$$

$$XC_G^Q(2K+1) = Z(Q) + \sum_{I=1}^{G/4-1}(Z(NI/G+Q) + \\ + Z(NI/G-Q))\cos(2\pi(2K+1)I/G), \tag{9}$$

$$XS_G^Q(2K+1) = (-1)^K Z(N/4-Q) + \sum_{I=1}^{G/4-1}(Z(NI/G+Q) - \\ - Z(NI/G-Q))\sin(2\pi(2K+1)I/G). \tag{10}$$

Аналогично [I] осуществляем распространение области спектра $K = \overline{0,(G/4-1)}$ в область $K = \overline{0,(N/8-1)}$ путем замены 2K+I на $GH+(2K+1)$. Тогда

$$XC_G^Q(GH \pm (2K+1)) = XC_G^Q(2K+1), \tag{11}$$

и
$$XS_G^Q(GH \pm (2K+1)) = \pm XS_G^Q(2K+1) \tag{12}$$

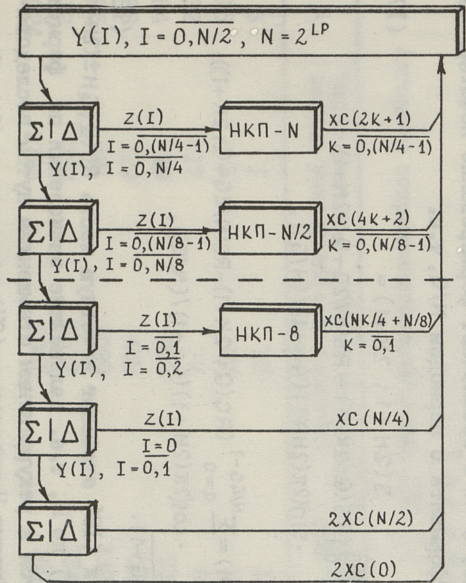

Рис. 1. Обобщенная структура алгоритма дискретного косинусного преобразования (ДКП).

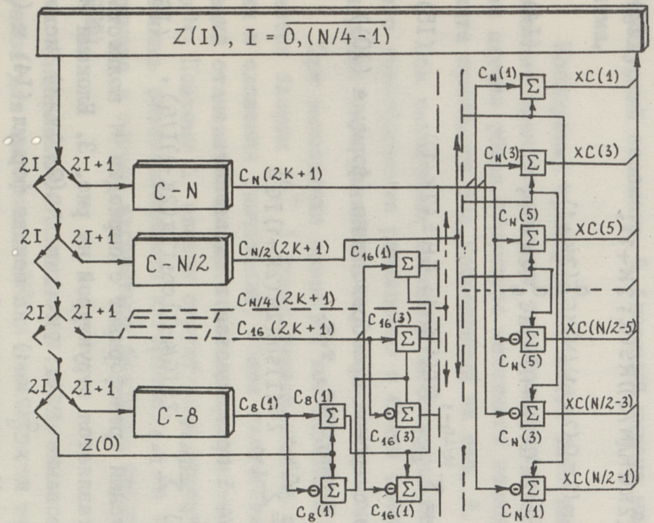

Рис. 2. Обобщенная структура нечетного косинусного преобразования с периодом N (НКП-N).

$$RC(Q;GH\pm(2K+1))=\cos(2\pi QH/(N/G))\cdot RC(Q;2K+1)\mp$$
$$\mp\sin(2\pi QH/(N/G))RS(Q;2K+1),\qquad(13)$$

$$RS(Q;2K+1)=\sin(2\pi Q(2K+1)/N)XC_G^Q(2K+1)+$$
$$+\cos(2\pi Q(2K+1)/N)XC_G^Q(2K+1),\qquad(14)$$

$$H=\overline{0,N/4G},$$

$$C_N(GH\pm(2K+1))=\sum_{q=0}^{N/4G-1}RC(4q+1;\ GH\pm(2K+1)).\qquad(15)$$

Если нечетное синусное преобразование (формула (10)) вычисляется через косинусное, т.к.

$$XS(2K+1)=\sum_{I=1}^{G/4-1}ZS(I)\sin(2\pi(2K+1)IG))$$

при замене I на $G/4-I$ превращается в выражение

$$XS(2K+1)=(-1)^K\sum_{I=1}^{G/4-1}ZS(G/4-I)\cos(2\pi(2K+1)I/G),\qquad(16)$$

то нечетный косинусний трансформант с периодом N полностью определен и представляется структурой на рис. 3. Блоками M_N^G реализуется формирование $RS(Q;2K+1)$ и $RC(Q;2K+1)$ исходя из $XS_G^Q(2K+1)$ и $XC_G^Q(2K+1)$ на основе формул (14) и (8), соответственно. $S-N/G$ обозначает формирование нечетного синусного трансформанта с периодом N/G, т.е.

$$S(2H+1;\ 2K+1)=\qquad(17)$$
$$=\sum_{q=0}^{N/4G}(RS(Q;2K+1)-RS(N/2G+Q;\ 2K+1))\cdot$$
$$\cdot\sin(2\pi(2H+1)(4q+1)/(N/G)),$$

аналогично

$$C(2H+1;2K+1)=\sum_{q=0}^{N/4G-1}(RC(Q;\ 2K+1)-RC(N/2G+Q;2K+1))\cdot$$
$$\cdot\cos(2\pi(2H+1)(4q+1)/(N/G)),$$

$$H=\overline{0,(H/8G-1)}.\qquad(18)$$

Формулы (17) и (18) отражают нечетную часть $RC(Q;GH\pm(2K+1)$ (формула (13)) по H, т.е. дальнейшие вычисления по формуле (15) приводятся к рекуррентным отношениям путем последовательного разбиения H на четные (2H) и нечетные $(2H+1)$ части. Каждая нечетная часть определяет соответствующие области спектра косинусного трансформанта и образует типовую процедуру спектрального расширения (СР). Параметрами каждого этапа СР являются период (нижний индекс на рис. 3) и структурный параметр G (верхний индекс на рис. 3) алгоритма.

Косинусный трансформант может быть вычислен и на базе нечетных трансформантных преобразований (НТП-G) [I]. В таком случае общая структура нечетного косинусного трансформанта принимает вид, приведенный на рис. 4.

Оба изложенных варианта вычисления нечетного косинусного трансформанта равноценны с точки зрения арифметических операций (как умножения так и сложения (вычитания)).

При выполнении операции комплексного умножения (выполняется блоком M_N^Q) тремя вещественными операциями умножения и сложения (вычитания) общее количество названных операций становится инвариантным относительно G для заданного N. Поэтому G назван структурным параметром (определяет степень разветвленности алгоритма), а не основанием, как принято в случае алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Инвариантное количество арифметических операций, требуемое для выполнения ДКП в зависимости от N, приведено в таблице I.

Таблица I

Алгоритм сокращенного вычисления ДКП

N	Число вещественных умножений	Число вещественных сложений (вычитаний)	Суммарное количество опер.
8	I	I0	II
I6	5	27	32
32	I7	72	89
64	49	I85	234
I28	I29	458	587
256	321	I099	I320
5I2	769	2572	334I
I024	I793	590I	7694

На практике, особенно при обработке речевых сигналов, находит применение косинусное преобразование по нечетным индексам, т.е.

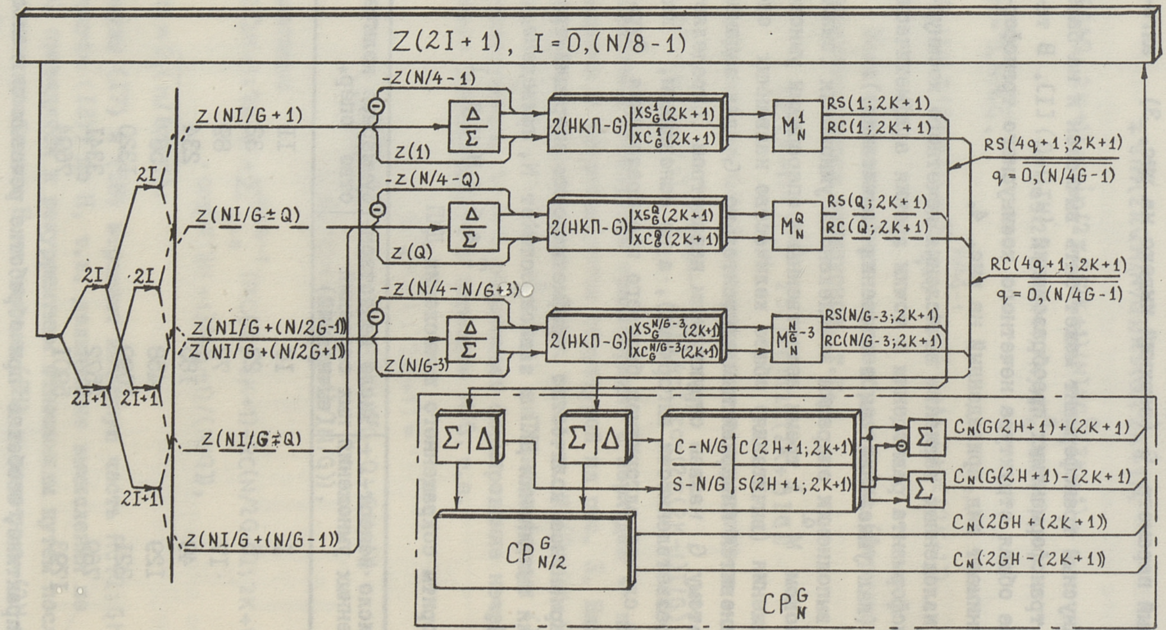

Рис. 3. Структура нечетного косинусного трансформанта с периодом N, определяемого через нечетные косинусные преобразования (С–N).

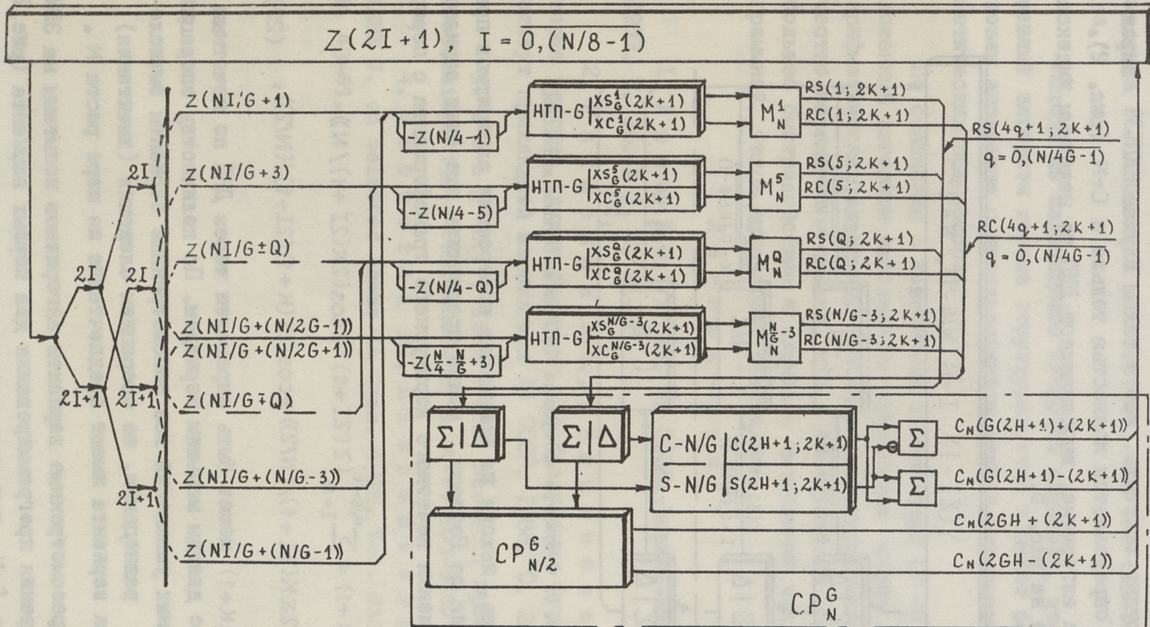

Рис. 4. Структура нечетного косинусного трансформанта с периодом N, опрелеляемого через нечетные трансформантные преобразования (C–N).

$$XC(K) = \sum_{I=0}^{N/4-1} Y(2I+1)\cos(2\pi(2I+1)K/N). \qquad (19)$$

Нетрудно заметить, что в таком случае НКП-N вырождается и определяется полностью только с C-N (рис. 2). Структура алгоритма, выполняющего ДКП по нечетным индексам, приведена на рис. 5.

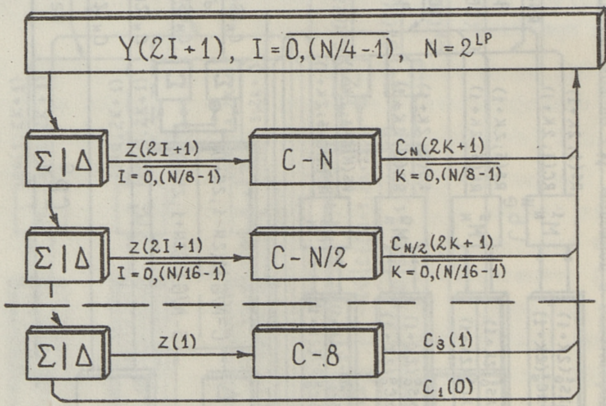

Рис. 5. Структура алгоритма ДКП по нечетным индексам.

Теперь, исходя из принципов построения алгоритмов преобразования по Рейдеру, можно предложить еще один вариант для вычисления нечетного косинусного трансформанта с периодом N :

$$C_N(2K+1) = \sum_{I=0}^{N/8-1} (Z(2I+1)/2\cos(2\pi(2I+1)/N))\cdot$$

$$\cdot(\cos(2\pi K(2I+1)/(N/2)) + \cos(2\pi(K+1)(2I+1)/(N/2)), \qquad (20)$$

т.е. $C_N(2K+1)$ может быть определен через ДКП по нечетным индексам с дважды меньшим периодом. По количеству операций вещественных умножений все рассмотренные варианты вычисления C-N равноценны, по операциям сложения (вычитания) первые два варианта имеют предпочтение по мере роста N .

Все рассмотренные варианты алгоритмов испытаны на ЭВМ. С точки зрения программирования два первых варианта (рис.2, рис. 3) по C-N примерно равноценны и не намного сложнее типового алгоритма БПФ. ДКП на типовых ЭВМ вычисляется в два раза быстрее, чем полное преобразование вещественного массива [I] и около 8 раз быстрее, чем БПФ такого же периода.

Исходя из изложенного нетрудно заметить, что предложенный алгоритм хорошо структурируется и может быть реализован аппаратно с использованием одного или множества арифметических процессоров.

По сравнению с известными алгоритмами [2-4] ДКП предложенный алгоритм выполняется наименьшим общим количеством арифметических операций. Благодаря этому уменьшается количество обращений к памяти, что в совокупности обеспечивает большее быстродействие и точность вычислений как при программной, так и аппаратной реализации.

Литература

I. Арро И.О. // Изв. АН ЭССР. Физика-математика. 1987. Т. 36. № I. С. 21-28

2. Рахманов А.И., Рахманова Н.К. Некоторые частные случаи быстрого преобразования Фурье. М.: Институт прикладной математики АН СССР. 1986. С. 22.

3. Wang Z. // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing. 1984. Vol. ASSP-32, N 4. P. 803-816.

4. Vetterli M., Listenberg A. // IEEE J. on Selected Areas in Comm. 1986. Vol. SAC-4, N 1. P. 49-61.

I. Arro

Generalized Algorithm of Reduced Discrete Cosine Transform

Abstract

The paper proposes a generalized reduced algorithm for the calculation of discrete cosine transform of data files of the length equal to an integral power of two plus 1.

It is shown that there is a class of algorithms which enables to perform the necessary calculations with more speed and accuracy, with less arithmetic operations and memory accesses than the previously known algorithms.

The algorithms are well-structured and they can be implemented by software as well as by hardware.

I. Arro

Diskreetse koosinusteisenduse üldine lühendatud arvutusalgoritm

Kokkuvõte

Käsitletakse diskreetse koosinusteisenduse üldist arvutusalgoritmi juhule, kus andmemassiivi pikkus on 2 aste + + 1. On näidatud, et eksisteerib algoritmide klass, mis annab tuntud algoritmidega võrreldes vähem tehteid ja mälu poole pöördumisi, suurema kiiruse ja täpsuse. Algoritmid on hea struktuuriga ning realiseeritavad nii programmina kui aparatuurselt.

№ 676

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 621.391

И.О. Арро, Т.И. Трумп

СОКРАЩЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВУМЕРНОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Двумерное дискретное преобразование Фурье (ДДПФ) массива данных резмерностью $N\times N$, $N=2^{\ell}$, $\ell\in\{1,2,\dots\}$ с точностью до нормировочного коэффициента определяется выражением:

$$F(R,S)=\sum_{I=0}^{N-1}\sum_{J=0}^{N-1}X(I,J)W^{I\cdot R+J\cdot S}, \qquad (1)$$

где $W=W_N=\exp(-2\pi\cdot\sqrt{-1}/N)$.

Используя тензорное представление (1), можно записать [1]

$$F(R,S)=\sum_{E=0}^{N-1}Y(R,S,E)\cdot W^{E}, \qquad (2)$$

где $Y(R,S,E)=\sum_{V_{R,S,E}}X(I,J)$,

$$V_{R,S,E}=\{(I,J);\ I,J=\overline{0,(N-1)},\ I\cdot R+J\cdot S=E(\mathrm{mod}\,N)\}.$$

При вычислении $F(R,S)$ возникает четыре случая.

1) R,S – нечетные, т.е. рассмотрим отдельно индексы $2R+1$ и $2S+1$, здесь $R,S=\overline{0,(N/2-1)}$.

В таком случае

$$V_{R,S,E}=\{(I,J);\ I,J=\overline{0,(N-1)},\ (2R+1)I+(2S+1)J=E(\mathrm{mod}\,N)\}.$$

Если при каких либо (I,J) выполняется равенство

$$(2R+1)I+(2S+1)J=E(\mathrm{mod}\,N),\ E<N/2,$$

то

$$(2R+1)(I+N/2)+(2S+1)J=E+(2R+1)N/2=E+N/2(\mathrm{mod}\,N),$$

$$(2R+1)I+(2S+1)(J+N/2)=E+(2S+1)N/2=E+N/2(\mathrm{mod}\,N),$$

$$(2R+1)(I+N/2)+(2S+1)(J+N/2)=E+(2R+2S+2)N/2=E(\mathrm{mod}\,N).$$

Учитывая, что $W_N^{E+N/2} = -W_N^E$ можно формулу (2) переписать в виде

$$F(2R+1, 2S+1) = \sum_{E=0}^{N/2-1} Y1(R,S,E)\cdot W^E, \qquad (3)$$

где $Y1(R,S,E) = \sum_{V1_{R,S,E}} (X(I,J) - X(I+N/2,J) - X(I,J+N/2) +$

$+ X(I+N/2, J+N/2)) = \sum_{V1_{R,S,E}} X1(I,J),$

$V1_{R,S,E} = \{(I,J);\ I,J = \overline{0(N/2-1)},\ (2R+1)I + (2S+1)J = E(\mathrm{mod}\,N),\ E < N/2\}.$

2) R - нечетное, S - четное, т.е. рассмотрим индексы $2R+1$ и $2S$; $R,S = \overline{0,(N/2-1)}$ тогда

$V_{R,S,E} = \{(I,J);\ I,J = \overline{0(N-1)},\ (2R+1)I + 2SJ = E(\mathrm{mod}\,N)\}.$

Если при каких либо (I,J) выполняется условие

$$(2R+1)I + 2SJ = E(\mathrm{mod}\,N), \quad E < N/2$$

то

$(2R+1)(I+N/2) + 2SJ = E + (2R+1)N/2 = E + N/2(\mathrm{mod}\,N),$

$(2R+1)I + 2S(J+N/2) = E + 2S\cdot N/2 = E(\mathrm{mod}\,N).$

$(2R+1)(I+N/2) + 2S(J+N/2) = E + (2R+2S+1)N/2 = E + N/2(\mathrm{mod}\,N)$

и следовательно,

$$F(2R+1, 2S) = \sum_{E=0}^{N/2-1} Y2(R,S,E)\cdot W^E, \qquad (4)$$

где

$Y2(R,S,E) = \sum_{V2_{R,S,E}} (X(I,J) - X(I+N/2,J) + X(I,J+N/2) -$

$- X(I+N/2, J+N/2)) = \sum_{V2_{R,S,E}} X2(I,J),$

$V2_{R,S,E} = \{(I,J);\ I,J = \overline{0,(N/2-1)},\ (2R+1)I + 2SJ = E(\mathrm{mod}\,N),\ E < N/2\}.$

3) R - четное, S - нечетное, т.е. рассмотрим индексы $2R$ и $2S+1$; $R,S = \overline{0,(N/2-1)}$.

Аналогично п. 2, получаем

$$F(2R, 2S+1) = \sum_{E=0}^{N/2-1} Y3(R,S,E)\cdot W^E, \qquad (5)$$

где

$Y3(R,S,E) = \sum_{V3_{R,S,E}} (X(I,J) + X(I+N/2,J) - X(I,J+N/2) -$

$- X(I+N/2, J+N/2)) = \sum_{V3_{R,S,E}} X3(I,J),$

$V3_{R,S,E} = \{(I,J);\ I,J = \overline{0,(N/2-1)},\ 2RI + (2S+1)J = E(\mathrm{mod}\,N),\ E < N/2\}.$

4) R,S - четные, т.е. индексы 2R,2S, причем $R,S=\overline{0,(N/2-1)}$.

$$V_{R,S,E}=\{(I,J);\ IJ=\overline{0,(N-1)},\ 2RI+2SJ=E(\mathrm{mod}\,N)\}.$$

когда $2RI+2SJ=E(\mathrm{mod}\,N),\ E<N/2$, то

$$2R(I+N/2)+2SJ=E+2R\cdot N/2=E(\mathrm{mod}\,N),$$

$$2RI+2S(J+N/2)=E+2S\cdot N/2=E(\mathrm{mod}\,N),$$

$$2R(I+N/2)+2S(J+N/2)=E+(2R+2S)N/2=E(\mathrm{mod}\,N).$$

Учитывая, что $W_H^{2E}=W_{N/2}^{E}$, получаем

$$F(2R,2S)=\sum_{E=0}^{N/2-1}Y4(R,S,E)\,W_N^{2(IR+JS)}=$$

$$=\sum_{E=0}^{N/2-1}Y4(R,S,E)\,W_{N/2}^{E}, \tag{6}$$

где $Y4(R,S,E)=\sum_{V4_{R,S,E}}(X(I,J)+X(I+N/2,J)+X(I,J+N/2)+$

$+X(I+N/2,J+N/2)=\sum_{V4_{R,S,E}}X4(I,J),$

$$V4_{R,S,E}=\{(I,J);\ I,J=\overline{0,(N/2-1)},\ IR+JS=E(\mathrm{mod}\,N/2)\}.$$

Полученная формула совпадает с формулой (2) при $N=N/2$ и, следовательно, разбиение может быть продолжено аналогичным образом до достижения равенства $N=2$.

Вычисление значений $XI(I,J)$, $X2(I,J)$, $X3(I,J)$ и $X4(I,J)$ целесообразно осуществить совместно, подобно вычислению 4-точечного быстрого преобразования Уолша-Адамара [2].

В дальнейшем учитываем тождество [I]

$$F[\widetilde{KR},\widetilde{KS}]=\sum_{E=0}^{N-1}Y(R,S,E)W^{KE}, \tag{7}$$

причем $\widetilde{KR}=K\cdot R(\mathrm{mod}\,N)$, а также обстоятельство, что для полного определения спектра достаточно, когда множество исходных значений (R,S) равно

$$A=\{(1,S),\ S=\overline{0,(N-1)}\}\cup\{(2R,1),\ R=\overline{0,(N/2-1)}\}. \tag{8}$$

Рассмотрим множество $\{(1,S),\ S=\overline{0,(N-1)}\}$.

В силу (4) напишем для четных S

$$F(\widetilde{K},\widetilde{KS})=\sum_{E=0}^{N/2-1}\Big(\sum_{V^{(0)}_{S,E}}X2(I,J)\Big)W^{KE}, \tag{9}$$

где $V^{(0)}_{S,E}=\{(I,J);\ I,J=\overline{0,(N/2-1)},\ I+JS=E(\mathrm{mod}\,N),\ E<N/2\}$.

Если при каких либо (I,J) выполняется равенство

$$I+2S^{(1)}\cdot J=E(\mathrm{mod}\,N),\ E<N/2,$$

то

$$I+2S^{(1)}(J+N/4)=\begin{cases}E(\mathrm{mod}\,N), & \text{если } S^{(1)}-\text{четное, т.е. } S=4S^{(2)}\\ E+N/2(\mathrm{mod}\,N), & \text{если } S^{(1)}-\text{нечетное, т.е. } S=4S^{(2)}+2.\end{cases}$$

Для нечетных S из формулы (3) получаем

$$F(\tilde{K},\tilde{K}S)=\sum_{E=0}^{N/2-1}\Big(\sum_{V^{(0)}_{S,E}}X1(I,J)\Big)W^{KE}. \tag{10}$$

Если $I+(2S^{(1)}+1)J=E(\mathrm{mod}\,N),\ E<N/2$ то при $I<N/4$

$$(I+N/4)+(2S^{(1)}+1)(J+N/4)=\begin{cases}E(\mathrm{mod}\,N), & \text{если } S=4S^{(2)}+3\\ E+N/2(\mathrm{mod}\,N), & \text{если } S=4S^{(2)}+1\end{cases}$$

и при $I\geqslant N/4$

$$(I-N/4)+(2S^{(1)}+1)(J+N/4)=\begin{cases}E(\mathrm{mod}\,N), & \text{если } S=4S^{(2)}+1\\ E+N/2(\mathrm{mod}\,N), & \text{если } S=4S^{(2)}+3.\end{cases}$$

Таким образом учитывая, что $W_N^{E+N/2}=-W_N^E$, получаем

$$F(\tilde{K},\tilde{K}S)=\sum_{E=0}^{N/2-1}\sum_{V^{(1)}_{S,E}}Y^{(1)}(I,J)\,W_N^{KE}, \tag{11}$$

где

$$Y^{(1)}(I,J)=\begin{cases}X2(I,J)+X2(I,J+N/4), & S=4S^{(2)}\\ X2(I,J)-X2(I,J+N/4), & S=4S^{(2)}+2\\ X1(I,J)+X1((I-N/4)(\mathrm{mod}\,N/2),J+N/4), & (S=4S^{(2)}+1\ \&\ i\geqslant N/4)\vee\\ & \vee(S=4S^{(2)}+3\ \&\ i<N/4)\\ X1(I,J)-X1((I-N/4)(\mathrm{mod}\,N/2),J+N/4), & (S=4S^{(2)}+1\ \&\ i<N/4)\vee\\ & \vee(S=4S^{(2)}+3\ \&\ i<N/4),\end{cases}$$

$$V^{(1)}_{S,E}=\{(I,J);\ I=\overline{0,(N/2-1)},\ J=\overline{0,(N/4-1)},\ I+SJ=E(\mathrm{mod}\,N),\ E<N/2\}.$$

Продолжим четно-нечетное разбиение по S (итерация 2).

I. $S=4S^{(2)}$

Если $I+4S^{(2)}\cdot J=E(\mathrm{mod}\,N),\ E<N/2,$
то

$$I+4S^{(2)}(J+N/8)=\begin{cases}E(\mathrm{mod}\,N), & S=8S^{(3)}\\ E+N/2(\mathrm{mod}\,N), & S=8S^{(3)}+4.\end{cases}$$

2. $S=4S^{(2)}+2$

Если $I+(4S^{(2)}+2)J=E(\mathrm{mod}\,N),\ E<N/2,$

то при $I<N/4$

$$(I+N/4)+(4S^{(2)}+2)(J+N/8)=\begin{cases}E(\mathrm{mod}\,N), & S=8S^{(3)}+6\\ E+N/2(\mathrm{mod}\,N), & S=8S^{(3)}+2\end{cases}$$

и при $I<N/4$

$$(I-N/4)+(4S^{(2)}+2)(J+N/8)=\begin{cases}E(\mathrm{mod}\,N), & S=8S^{(3)}+2\\ E+N/2(\mathrm{mod}\,N), & S=8S^{(3)}+6\end{cases}$$

3. $S=4S^{(2)}+1.$

Если $I+(4S^{(2)}+1)J=E(\mathrm{mod}\,N),$

то при $I<N/8$

$$(I+3N/8)+(4S^{(2)}+1)(J+N/8)=\begin{cases}E(\mathrm{mod}\,N), & S=8S^{(3)}+5\\ E+N/2(\mathrm{mod}\,N), & S=8S^{(3)}+1\end{cases}$$

и при $I\geqslant N/8$

$$(I-N/8)+(4S^{(2)}+1)(J+N/8)=\begin{cases}E(\mathrm{mod}\,N), & S=8S^{(3)}+1\\ E+N/2(\mathrm{mod}\,N), & S=8S^{(3)}+5\end{cases}$$

4. $S=4S^{(2)}+3.$

Если $I+(4S^{(2)}+3)J=E(\mathrm{mod}\,N),$

то при $I<3N/8$

$$(I+N/8)+(4S^{(2)}+3)(J+N/8)=\begin{cases}E(\mathrm{mod}\,N), & S=8S^{(3)}+7\\ E+N/2(\mathrm{mod}\,N), & S=8S^{(3)}+3\end{cases}$$

и при $I\geqslant 3N/8$

$$(I-3N/8)+(4S^{(2)}+3)(J+N/8)=\begin{cases}E(\mathrm{mod}\,N), & S=8S^{(3)}+3\\ E+N\,2(\mathrm{mod}\,N), & S=8S^{(3)}+7.\end{cases}$$

Следовательно,

$$F(\tilde{K},\tilde{K}S)=\sum_{E=0}^{N/2-1}\Big(\sum_{V^{(2)}_{S,E}}Y^{(2)}(I,J)\Big)W_N^{KE},$$

где

$$\begin{cases}Y^{(1)}(I,J)+Y^{(1)}(I,J+N/8), & S=8S^{(3)}\\ Y^{(1)}(I,J)-Y^{(1)}(I,J+N/8), & S=8S^{(3)}+4\\ Y^{(1)}(I,J)+Y^{(1)}((I-N/4)(\mathrm{mod}\,N/2),J+N/8), & (S=8S^{(3)}+2\,\&\,I\geqslant N/4)\vee\\ & \vee(S=8S^{(3)}+6\,\&\,I<N/4)\\ Y^{(1)}(I,J)-Y^{(1)}((I-N/4)(\mathrm{mod}\,N/2),J+N/8), & (S=8S^{(3)}+2\,\&\,I<N/4)\vee\end{cases}$$

$$
Y^{(2)}(I,J)=\begin{cases}
 & V(S=8S^{(3)}+6 \,\&\, I\geq N/4) \\
Y^{(1)}(I,J)+Y^{(1)}((I-N/8)(\mathrm{mod}\, N/2),J+N/8), & (S=8S^{(3)}+1 \,\&\, I\geq N/8)V \\
 & V(S=8S^{(3)}+5 \,\&\, I<N/8) \\
Y^{(1)}(I,J)-Y^{(1)}((I-N/8)(\mathrm{mod}\, N/2),J+N/8), & (S=8S^{(3)}+1 \,\&\, I<N/8)V \\
 & V(S=8S^{(3)}+5 \,\&\, I\geq N/8) \\
Y^{(1)}(I,J)+Y^{(1)}((I-3N/8)(\mathrm{mod}\, N/2),J+N/8), & (S=8S^{(3)}+3 \,\&\, I\geq 3N/8)V \\
 & V(S=8S^{(3)}+7 \,\&\, I<3N/8) \\
Y^{(1)}(I,J)+Y^{(1)}((I-3N/8)(\mathrm{mod}\, N/2),J+N/8), & (S=8S^{(3)}+3 \,\&\, I<3N/8)V \\
 & V(S=8S^{(3)}+7 \,\&\, I\geq 3N/8),
\end{cases}
$$

$$
V^{(2)}_{S,E}=\{(I\ J);\ I=\overline{0(N/2-1)},\ J=\overline{0(N/8-1)},\ I+JS=E(\mathrm{mod}\, N),\ E=N/2\}.
$$

Продолжая разбиения на Р-м шаге, получаем

$$
F(\tilde{K},\widetilde{KS})=\sum_{E=0}^{N/2-1}\Big(\sum_{V^{(P)}_{S,E}} Y^{P}(I,J)\Big)W_N^{KE}, \qquad (13)
$$

где

$$
Y^{(P)}(I,J)=\begin{cases}
Y^{(P-1)}(I,J)+Y^{(P-1)}((I-Q\cdot N/2^{(P+1)})(\mathrm{mod}\, N/2),J+N/2^{P+1}), \text{ если} \\
(S=2^{P+1}\cdot S^{(P+1)}+Q \,\&\, I\geq Q\cdot N/2^{P+1})V \\
V(S=2^{P+1}\cdot S^{(P+1)}+Q+2^{P} \,\&\, I<Q\cdot N/2^{P+1}) \\
Y^{(P-1)}(I,J)-Y^{(P-1)}((I-Q\cdot N/2^{P+1})(\mathrm{mod}\, N/2),J+N/2^{P+1}), \text{ если} \\
(S=2^{P+1}\cdot S^{(P+1)}+Q \,\&\, I<Q\cdot N/2^{P+1})V \\
V(S=2^{P+1}\cdot S^{P+1}+Q+2^{P} \,\&\, I\geq Q\cdot N/2^{P+1})
\end{cases}
$$

$H=\overline{0,(2^P-1)}$, Q – двоично-инверсное значение H,

$V^{(P)}_{S,E}=\{(I,J);\ I=\overline{0,(N/2-1)},\ J=\overline{0,(N/2^{P+1}-1)},\ I+JS=E(\mathrm{mod}\, N),\ E<N/2\}.$

Таким образом, можно продолжать разбиения до полного формирования всех внутренних сумм в формулах (9) и (10) при помощи $\log_2 N-1$ итераций.

Для множества $\{(2R,1);\ R=\overline{0(N/2-1)}\}$ можно вывести формулы, аналогичные формулам (9) и (11-13) для четных S, с той лишь разницей, что во всех формулах следует индексы менять местами.

Оставшуюся часть формулы типа

$$F(\tilde{K},\widetilde{KS}) = \sum_{E=0}^{N/2-1} Y(S) W_N^{KE}$$

целесообразно вычислить при помощи алгоритма, изложенного в [3] для нечетного трансформантного преобразования с периодом N.

Вычислительная схема сокращенного алгоритма ДДПФ

На основе приведенных выше формул вводя сдвиги полустрок и полуколонок таким образом, чтобы соблюдалось равенство $I = E + N/2$ можно выписать следующие соотношения

$$1. \begin{bmatrix} X(I,J) \\ X(I,J+M) \\ X(I+M,J) \\ X(I+M,J+M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(I,J) \\ X(I,J+M) \\ X(I+M,J) \\ X(I+M,J+M) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$I,J = \overline{0,(M-1)}$.

$$2. \left.\begin{aligned} &X(T,J) = -X(I(\mathrm{mod}\,M)+M,J), \text{ если } I<M \\ &X(T,J) = X(I(\mathrm{mod}\,M)+M,J), \text{ если } I\geq M \\ &X(J,T) = -X(J,I(\mathrm{mod}\,M)+M), \text{ если } I<M \,\&\, J<M \\ &X(J,T) = X(J,I(\mathrm{mod}\,M)+M), \text{ если } I\geq M \,\&\, J<M \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$K = \overline{1,(2^P-1)}$; $I = \overline{(M-M\cdot Q/2^P),(2M-MQ/2^P-1)}$;

$T = I + M\cdot Q/2^P$; $J = \overline{(M(1+2K)/2^{P+1}),(M(1+K)/2^P-1)}$;

Q – двоично-инверсное значение K.

$$3. \begin{aligned} &X(I,J) = X(I,J) + X(I,J+M/2^P) \\ &X(I,J+M/2^P) = X(I,J) - X(I,J+M/2^P) \\ &\left.\begin{aligned} &X(J,I) = X(J,I) + X(J+M/2^P,I) \\ &X(J+M/2^P,I) = X(J,I) - X(J+M/2^P,I) \end{aligned}\right\} \text{, если } J<M. \end{aligned} \quad (16)$$

$K = \overline{0,(2^P-1)}$; $I = \overline{M,(2M-1)}$; $P = \overline{1,\log_2 M}$;

$J = \overline{(K\cdot M/2^P),(M\cdot(1+2K)/2^{P+1}-1)}$.

4. Вычислить нечетные трансформантные преобразования с периодом 2M для полустолбцов с индексами $J = \overline{0,(2M-1)}$, причем $\forall J$, $I = \overline{M,(2M-1)}$ и для полустрок $I = \overline{0,(M-1)}$, здесь $\forall I$, $J = \overline{M,(2M-1)}$.

Во всех формулах $M = N/2^L$, $L = \overline{1,(\log_2 N)}$.

Заключение

При вещественных данных для реализации ДДПФ потребуется MULT вещественных умножений

$$MULT = N^2 \log_2 N/2 - 7N^2/6 + 8/3 \qquad (17)$$

и ADD вещественных сложений (вычитаний)

$$ADD = 5N^2 \log_2 N/2 - 13N^2/6 + 20/3. \qquad (18)$$

Количество арифметических операций в изложенной здесь и приведенной в [4] вычислительных схемах одинаковое, но в [4] индексная арифметика более сложная. Известные алгоритмы, кроме [4], существенно уступают по количеству арифметических операций приведенному здесь алгоритму сокращенного вычисления ДДПФ (АСВДДПФ). Конкретное сравнение в виде таблицы проводим с алгоритмом, построенным на основе обратных полиномиальных преобразований (АОПП) [5].

Таблица

N	АОПП		АСВДДПФ	
	MULT	ADD	MULT	ADD
8	36	588	24	348
16	300	3252	216	2012
32	1788	16580	1368	10588
64	9948	82532	7512	52572
128	51612	397732	38232	251228
256	254748	1865764	185688	1168732
512	1213980	8570148	873816	5330268
1024	5639196	38723363	4019544	23942292

Нетрудно заметить, что АСВДДПФ требует в среднем в 1,4 раза меньше умножений и в 1,6 раза меньше сложений, чем АОПП в пределе при больших N 1,5 и 1,7 раза соответственно).

АСВДДПФ может быть реализован с замещением памяти.

Литература

1. Григориан А.М. Алгоритм вычисления двумерного преобразования Фурье // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. Т. 27, № 10. 1984. С. 52-57.

2. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М.: Связь, 1980.

3. А р р о И.О. Алгоритм сокращенного вычисления дискретного преобразования Фурье // Изв. АН ЭССР. Физика-математика. Т. 36, № I. 1987. С. 21-29.

4. А р р о И.О., Т р у м п Т.И. Алгоритм вычисления двумерного дискретного преобразования Фурье. Методы и средства аналоговой и цифровой обработки информации. Таллин: Валгус, 1988. С. 110-114.

5. К р о м А.М., М и н е р в и н а Е.Б. Синтез алгоритмов дискретного преобразования Фурье для действительных последовательностей на основе полиномиальной алгебры // Радиотехника и электроника. 1987, № 6. С. 1217-1227.

I. Arro, T. Trump

Reduced Computation of Two-Dimensional Discrete Fourier Transform

Abstract

The derivation of reduced algorithm for computing the two-dimensional DFT with low computational complexity is given. Derivation is based on tensor decomposition of the two-dimensional DFT.

I. Arro, T. Trump

Kahemõõtmelise diskreetse Fourier' teisenduse lühendatud arvutusmetoodika

Kokkuvõte

Artiklis antakse lühendatud arvutusalgoritm kahemõõtmelise diskreetse Fourier' teisenduse arvutamiseks väikese tehete arvuga. Algoritmi tuletuskäik kasutab Fourier' teisenduse tensoresitust.

№ 676

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 621.391

Т.И. Трумп

АНАЛИЗ ОШИБОК АЛГОРИТМОВ СОКРАЩЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ АРИФМЕТИКИ С ФИКСИРОВАННОЙ ЗАПЯТОЙ

В работах [1-3] приведены алгоритмы сокращенного вычисления дискретного преобразования Фурье для одно-, дву- и трехмерных вещественных массивов данных. С точки зрения их аппаратурной реализации представляет интерес вопрос об ошибках вычисления при использовании арифметики с фиксированной запятой.

Известно [4], что при вычислении 3-мерного ДПФ с целью избежания переполнений необходимо ввести масштабирование путем $S \cdot \log_2 N$ сдвигов на один разряд вправо.

При этом порядок введения сдвигов в алгоритме можно варьировать. В данной работе рассматривается случай, когда сдвиги вводятся на каждом шаге алгоритма независимо от исходных данных.

В соответствии с исследуемыми алгоритмами, вычисления разбиваются на сумма-разностные и нечетные трансформантные преобразования (НТП). Во-первых, исследуем ошибки, возникающие при вычислении НТП. Предположим, что структурный параметр $G = N/4$. Тогда вычисление НТП с периодом N (НТП-N) включает в себя НТП-$N/2$, два НТП-$N/4$ и соединение их выходных результатов при помощи $N/16$ операций типа "двоичных бабочек со спектральным расширением" (ДБСПР) (рис. 1). Для рекуррентного определения ошибок НТП-N достаточно определить ошибки при выполнении НТП-8 и ДБСПР. В дальнейшем будем считать, что после сумма-разностных преобразований промежуточные результаты имеют ошибку с дисперсией δ_0^2. При округлении результата умножения возникает ошибка с дисперсией

$$\Delta_1^2 = 2^{-2b}/12, \tag{I}$$

где b - разрядность машинного слова (без знака). При сдвиге на один разряд вправо дисперсия ошибки

$$\Delta_2^2 = 2^{-2b}/2. \tag{2}$$

Математическое ожидание ошибок при всех операциях равняется нулю. Такие характеристики ошибок легко получить и при представлении чисел в дополнительном коде, получая младший бит сдвинутого числа как результат логического "или" двух младших битов исходного числа.

При выводе формул будет использовано предположение о статистической независимости всех ошибок. Также предполагаем, что цифры длиной $(b+1)$ бит по абсолютному значению не превышают единицы [4, 5].

I. Ошибка вычисления НТП-8

Направленный граф НТП-8 приведен в [7]. Полагаем, что данные, поступающие в НТП-8, нормированы таким образом, что при первом сложении переполнения не происходит. После первого сложения дисперсия ошибки

$$V_1 = 2\delta_0^2. \tag{3}$$

Умножение на коэффициент дает

$$V_2 = (\sqrt{2}/2)^2 V_1 + \overline{X_m^2} \cdot V(\sqrt{2}/2) + 4^m \Delta_1^2 =$$
$$= \delta_0^2 + 2^{m-1} K \Delta_1^2 + 4^m \Delta_1^2, \tag{4}$$

где $\overline{X_m^2}$ - мощность промежуточных результатов на данном этапе,

$K = X_0^2 = \sum_{i_1=0}^{N-1} \dots \sum_{i_S=0}^{N-1} X_0^2(i_1, \dots i_S)/N^S$ - мощность входных данных;

$V(\sqrt{2}/2)$ - дисперсия ошибки коэффициента.

Приблизительно можно считать, что мощность промежуточных результатов удваивается в тех же местах, где необходимо введение сдвигов, кроме первого, который осуществляется до всех вычислений, т.е. будем считать, что

$$\overline{X_m^2} = 2^{m-1} K. \tag{5}$$

Так как постоянные коэффициенты можно вычислить заранее с большой точностью, предполагаем, что они содержат только ошибки округления и

$$V(\sqrt{2}/2) = \Delta_1^2. \tag{6}$$

НТП-8 завершается суммированием, перед которым необходимо ввести сдвиг, поэтому

$$V_{НТП-8} = \delta_0^2 + 4^m \Delta_2^2 + V_2 + 4^m \Delta_2^2 = 2 \cdot 4^m \Delta_2^2 + 2^{m-1} K \Delta_1^2 + 4^m \Delta_1^2 + 2\delta_0^2. \tag{7}$$

2. Ошибка вычисления двоичных бабочек с спектральным расширением

Направленный граф ДБСПР в [6, 7]. Предполагаем, что на входы 0...3 поступают данные с дисперсией ошибки δ_1^2, а на входы 4...7 с δ_2^2. Предполагаем также, что данные нормированы таким образом, что при первом сложении переполнения не будет.

Умножение на коэффициенты и сложение дает

$$V_1 = \delta_2^2 \cos^2\varphi + \overline{X_m^2} V(\cos\varphi) + \delta_2^2 \sin^2\varphi + \overline{X_m^2} V(\sin\varphi) + 2 \cdot 4^m \Delta_1^2. \tag{8}$$

Учитывая формулы (5) и (6), а также то, что $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

$$V_1 = \delta_2^2 + 2 \cdot 2^{m-1} K \Delta_1^2 + 2 \cdot 4^m \Delta_1^2. \tag{9}$$

Перед последующим суммированием необходимо введение сдвигов и, таким образом

$$V_{ДБСПР} = 2(V_1 + 4^m \Delta_2^2) + 4^{m+1} \Delta_2^2 + \delta_1^2 + 4^{m+1} \Delta_2^2 = (2 \cdot 4^{m+1} + 2 \cdot 4^m)\Delta_2^2 + 4 \cdot 2^{m-1} K \Delta_1^2 + 4 \cdot 4^m \Delta_1^2 + 2\delta_2^2 + \delta_1^2. \tag{10}$$

Возможен и другой вариант мультипликативного операционного узла, использующего 3 умножения и 3 сложения вместо 4 умножений и 2 сложений. Здесь после сложения, умножения и вычитания получаем

$$V_1^1 = 2\overline{\cos^2(\pi/4-\varphi)}\,\delta_2^2 + \overline{X_m^2}\,V(c) + 4^m\Delta_1^2 + \overline{\cos^2\varphi}\cdot 2\delta_2^2 +$$
$$+ \overline{2X_m^2}\,V(c) + 4^m\Delta_1^2 + r, \qquad (\text{II})$$

где $V(c)$ – дисперсия коэффициента;

r – некое число, учитывающее статистическую зависимость операндов при вычитании.

Учитывая, что $\overline{\cos^2(\pi/4-\varphi)} + \overline{\cos^2\varphi} = 1$, а также формулы (5) и (6) получаем

$$V_1^1 = 3\cdot 2^{m-1}\cdot K\Delta_1^2 + 2\cdot 4^m\Delta_1^2 + 2\delta_2^2 + r. \qquad (\text{I2})$$

По аналогии с выводом формулы (I0) можно записать

$$V^1_{ДБСПР} = (2\cdot 4^{m+1} + 2\cdot 4^m)\Delta_2^2 + 6\cdot 2^m\cdot K\Delta_1^2 + 4\cdot 4^m\Delta_1^2 +$$
$$+ 4\delta_2^2 + \delta_1^2 + 2r. \qquad (\text{I3})$$

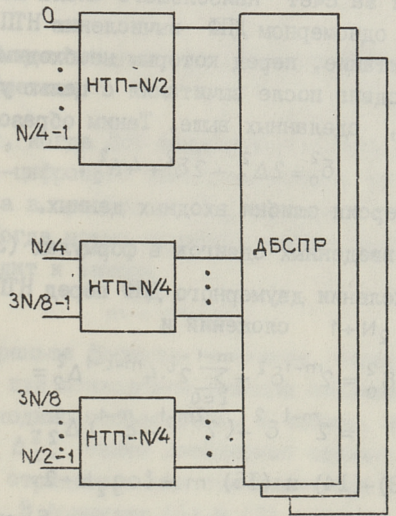

Рис. 1. Граф-схема алгоритма вычисления нечетного трансформаторного преобразования с периодом N при $G = N/4$.

На рисунке I можно заметить, что дисперсия ошибки НТП-N равна дисперсии ДБСПР, если приравнивать

$$\begin{cases} \delta_1^2 = V_{\text{НТП}-N/2} \\ \delta_2^2 = V_{\text{НТП}-N/4}. \end{cases} \quad (14)$$

Следовательно, учитывая что $V_{\text{НТП}-4} = \delta_0^2$ формулами (7) и (10) или (13) определена рекуррентная процедура вычисления $V_{\text{НТП}-N}$, $N > 8$. При этом необходимо обратить внимание на то, что каждый раз увеличение периода НТП вдвое сопровождается в формулах (10) и (13) заменой m на $m+1$. Кроме того, здесь уместно, что при вычислении НТП-N введены $\log_2 N - 2$ последовательных сдвигов.

3. Ошибка вычисления ДПФ

Для вычисления ДПФ перед НТП следует осуществить сумма-разностные преобразования. Справедливо считать, что наибольшие ошибки возникают при вычислении нечетных компонентов спектра за счет наибольшего числа последовательных умножений. При одномерном ДПФ вычислению НТП-N предшествует одно вычитание, перед которым необходимо ввести сдвиг. Введем также сдвиг после вычитания с целью удовлетворения предположений, сделанных выше. Таким образом,

$$\delta_0^2 = 2\Delta_2^2 + 2\delta^2 + 4\Delta_2^2, \quad (15)$$

где δ^2 - дисперсия ошибки входных данных.

За счет двух введенных сдвигов в формулах (3)-(14) $m = 2$.

При вычислении двумерного ДПФ перед НТП-N необходимо сделать $\log_2 N + 1$ сложений и

$$\delta_0^2 = 2^{m-1}\delta^2 + \sum_{i=0}^{m-1} 2^i \cdot 4^{m-i-1}\Delta_2^2 = \\ = 2^{m-1}\delta^2 + (2^{2m-1} - 2^{m-1})\Delta_2^2. \quad (16)$$

В формулах (3)-(14) и (16) $m = \log_2 N + 2$.

Формула (16) действительная и для S-мерного ДПФ при $m = S \cdot \log_2 N + 2$.

Суммируя по приведенным выше формулам (7), (10), (16) получаем дисперсию ошибки для S-мерного ДПФ

$$V = N^s(N^s - 2N^{s-1} - 0{,}5)\,\Delta_2^2 + N^{2s}\sum_{i=1}^{M-2} c_i\Delta_1^2/4^{i+1} + $$
$$+ N^s\Big(\sum_{i=1}^{M-3} c_i/2^{i+2} + c_{M-2}/2^{M+1}\Big)K\Delta_1^2 + N^s\delta^2/2, \qquad (17)$$

где $M = \log_2 N$, $c_i = 2^i(4 - 2^{-2u})/3 + 4$, $u = [(i-1)/2] - 1$.

$[\cdot]$ - взятие целой части.

Учитывая, что мощность результата превышает мощность данных в $N^s/2$ раз, для квадрата отношения среднеквадратичных значений ошибки и результата получаем

$$ОСКЗ^2 = (2N^s - 4N^{s-1} - 1)\,\Delta_2^2/K + $$
$$+ 2N^s\sum_{i=1}^{M-2} c_i\Delta_1^2/(K\cdot 4^{i+1}) + 2\Delta_1^2\Big(\sum_{i=1}^{M-3} c_i/2^{i+2} + $$
$$+ c_{M-2}/2^{M+1}\Big) + \delta^2/K. \qquad (18)$$

4. Случай несовпадения разрядности данных и арифметики

В случаях, когда ДПФ подвергаются данные, получаемые с выхода аналого-цифрового преобразователя, часто разрядность машинного слова в процессоре ($b_{пр}$) превышает разрядность данных ($b_{дан}$). Тогда можно опустить первые $\mu = b_{пр} - b_{дан}$ сдвигов, что приводит к замене

$$m = m - \mu \qquad (19)$$

в приведенных раньше формулах в членах, содержащих Δ_2^2. При этом те члены, где показатели степени оказываются отрицательными, необходимо отбрасывать. В членах, которые содержат множитель Δ_1^2, также необходимо сделать замену (17), но множители с отрицательными степенями при этом приравниваются единице. В формулах (1) и (2) заменим

$$b = b_{дан}. \qquad (20)$$

После суммирования для дисперсии выходного шума получаем

$$V = \Big(\sum_{i=1}^{\varkappa} 2^i\cdot 4^{s\cdot M - i - \mu} + \sum_{i=M-1}^{s\cdot M-\mu} 2^{i-1}\cdot 4^{s\cdot M - i - \mu}\Big)\,\Delta_2^2 + $$

$$+\left(\sum_{i=1}^{M-3} c_i\cdot 4^{\eta_0}+c_{M-2}\cdot 4^{\eta_1}/4\right)\Delta_1^2+\left(\sum_{i=1}^{M-3} c_i\cdot 2^{\eta_2}+\right.$$

$$\left.+c_{M-2}\cdot 2^{\eta_3}/4\right)K\Delta_1^2+N^S\delta^2/2, \qquad (21)$$

где

$$\varkappa = \min(M-2, S\cdot M-\mu),$$

$$\eta_0 = \max(0, S\cdot M-i-\mu-1),$$

$$\eta_1 = \max(0, (S-1)\cdot M+2-\mu),$$

$$\eta_2 = \max(0, S\cdot M-i-\mu-2),$$

$$\eta_3 = \max(0, (S-1)\cdot M-\mu+1).$$

5. Результаты моделирования

Моделирование проводилось на ЭВМ Gescomp под управлением операционной системы OS-9, используя язык программирования Си. Была построена модель двумерного ДПФ с фикси-

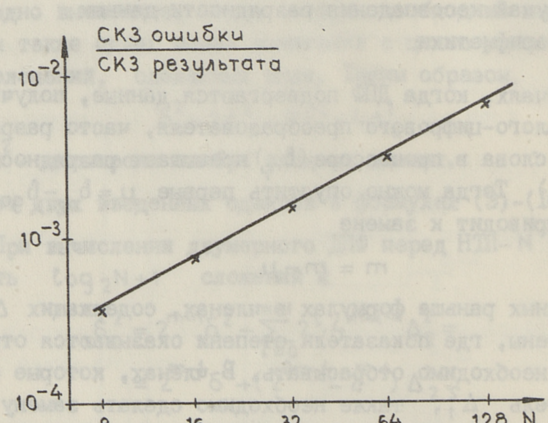

Рис. 2. Отношение среднеквадратичных значений ошибки и результата в зависимости от N для двумерной ДПФ массива $N\times N$. Входная реализация – случайные числа, распределенные равномерно в отрезке $[0,1]$. $b = 15$, $K \approx 0,33$.

рованной запятой, способная работать с числами длиной до 3I бит. Исходными реализациями служили псевдослучайные последовательности с равномерным и нормальным законами распределения, синусоиды и комбинации названных типов данных, которые генерировались с двоичной точностью и округлялись до b бит. Результат работы модели сравнивался со спектром неокругленного сигнала, вычисленного с двоичной точностью. Таким образом, σ^2 равна дисперсии ошибки округления. Результаты моделирования хорошо согласуются с теорией. На рисунке 2 для примера приведена зависимость ОСКЗ от N для равномерно распределенной в отрезке [0,I] последовательности. Хотя формулы (I7), (I8) и (2I) выведены для стратегии 4 умножения и 2 сложения (4/2) для комплексного умножения, они, как показывало моделирование, правомерны и для стратегии 3/3.

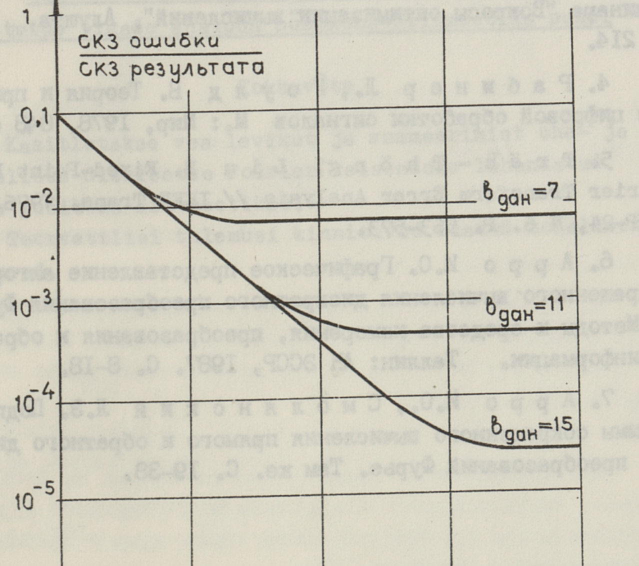

Рис. 3. Отношение среднеквадратичных значений ошибки и результата в зависимости от разрядности процессора для различных разрядностей данных N = 1024. K = 0,1.

На рисунке 3 представлена зависимость ОСКЗ от разрядности процессора для фиксированных разрядностей данных

$(b_{дан}+1) = 8$; I2; I6; для ДПФ I024xI024; $к = 0{,}1$. Отметим, что уменьшение K в t раз приводит к повышению ОСКЗ в $\sqrt{t}$ раз.

Литература

1. Арро И.О. Обобщенный алгоритм сокращенного вычисления дискретного преобразования Фурье // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. 1987. № 12. С. 5-10.

2. Арро И.О., Трумп Т.И. Сокращенное вычисление двумерного дискретного преобразования Фурье // См. наст. сб., с. 45-53.

3. Трумп Т.И. Многомерное дискретное преобразование Фурье вещественного массива // Тез. докл. всесоюз. семинара "Вопросы оптимизации вычислений". Алушта, 1987. С. 214.

4. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов М.: Мир, 1978. 848 с.

5. Trän-Thöng, Liu B. Fixed-Point Fast Fourier Transform Error Analysis // IEEE Trans. 1976. Vol. ASSP-24, N 6. P. 563-573.

6. Арро И.О. Графическое представление алгоритма сокращенного вычисления дискретного преобразования Фурье // Методы и средства измерения, преобразования и обработки информации. Таллин: АН ЭССР, 1987. С. 8-18.

7. Арро И.О., Смолянский Л.Э. Подпрограммы сокращенного вычисления прямого и обратного дискретных преобразований Фурье. Там же. С. 19-38.

T. Trump

Fixed-Point Error Analysis of Reduced Discrete Fourier Transform Algorithms

Abstract

Error characteristics of reduced DFT algorithms in one and more dimensions for fixed-point arithmetics are described. Theoretical results have been checked by modelling.

T. Trump

Diskreetse Fourier' teisenduse lühendatud algoritmide vigade analüüs püsikoma-aritmeetika puhul

Kokkuvõte

Käsitletakse vea levikut ja summeerimist ühe- ja kahemõõtmelises diskreetse Fourier' teisenduse lühendatud algoritmis püsikoma-aritmeetikas.

Teoreetilisi tulemusi kinnitavad saadud modelleerimistulemused.

№ 676

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 621.391.6

Б.Г. Гурьянов

Посвящается памяти моего учителя, профессора Давида Наумовича Шапиро...

ХААРАПОДОБНЫЕ БАЗИСЫ

Ядерные представления позволяют синтезировать бесчисленное количество матриц-базисов B_N путем простой смены углов Θ и V в обобщенном ядре [1]:

$$B_n^{(i,k)} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} \cos\Theta_{i,k} & w^{V_{i,k}}\sin\Theta_{i,k} \\ \sin\Theta_{i,k} & -w^{V_{i,k}}\cos\Theta_{i,k} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

где $w = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$; $\Theta \in \overline{0,2\pi}$; $V \in 0, \frac{N}{2}-1$; i,k - переменные, определяющие значения углов-параметров Θ и V; причем $N = 2^n$ ($N \times N$ - размерность синтезируемых базисов); $i \in \overline{1,n}$; $k \in \overline{1,\frac{N}{2}}$.

Ядро (1) получено на условиях ортогональности и полноты синтезируемых базисов.

Алгоритмы быстрых дискретных ортогональных преобразований строятся на основе факторизации исходной матрицы B_N. Можно факторизовать B_N и в виде произведения далее неразложимых матриц Гуда [1]

$$B_n = G_n \cdot G_{n-1} \cdot \ldots \cdot G_i \cdot \ldots \cdot G_1. \qquad (2)$$

Для формирования самих Гудовских матриц и, следовательно, синтезирования B_N на основе обобщенного ядра (1) необходимы еще правила получения самих ядер и правила их расположений в матрицах Гуда.

Цель работы - показать такие правила для матриц Хаара, для базиса $N = 2^n$. Рассмотрение для конкретности будем вести на примере $N = 2^3 = 8$.

Известно, что большинство функций Хаара имеют локальное поведение, и тем самым, могут подчеркивать кратковременные особенности исследуемых реализаций сигналов. Классический базис Хаара можно определить как [2]:

$$B(j,k,t) = \begin{cases} 2^{j/2} & \dfrac{k-1}{2^j} \leqslant t \leqslant \dfrac{k-0{,}5}{2^j} \\ -2^{j/2} & \dfrac{k-0{,}5}{2^j} \leqslant t \leqslant \dfrac{k}{2^j} \\ 0 & \text{вне} \end{cases} \qquad (3)$$

исключая $B(0,0,t)=1$, где $t \in [0,1]$ $j=\overline{0,n-1}$; $k=\overline{1,2^j}$.

Принимая в дальнейшем то, что отрезок определения разбивается на двоичные отрезки, получаемые путем деления отрезка на $N=2^N$ частей, где n = I, 2, 3, для матрицы Хаара $N \times N$ можно получить (4)

$$B_{N=8} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & & & & \\ & & & & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & & & & & & & \\ & & 2 & -2 & & & & \\ & & & & 2 & -2 & & \\ & & & & & & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Число строк матрицы B_N равно количеству базисных функций, участвующих в разложении сигнала, а элементы строки представляют собой дискретные значения одной из базисных функций (соответствующей номеру строк) в моменты дискретизации.

Для матриц Хаара, в соответствии с (I), имеем два ядра [I]

$B_r^{i,k} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ при $\begin{matrix} \Theta = \dfrac{\pi}{4} \\ V_{i,k} \equiv 0 \end{matrix}$ и $B_r^{i,k} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ при $\begin{matrix} \Theta = 0 \\ V_{i,k} \equiv 0 \end{matrix}$

Можно показать, что Гудовские матрицы (2) для нашего примера математически записываются как [4]

$$G_3 = \mathrm{diag} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1, & 0 & -\sqrt{2}, & 0 & -\sqrt{2}, & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \mathrm{diag} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1, & 1 & -1 \end{pmatrix} S^T_{2\cdot 2}, \begin{matrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}, & 0 & -\sqrt{2} \end{matrix} \right] \qquad (5)$$

$$G_1 = \mathrm{diag} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1, & 1 & -1 & 1 & -1, & 1 & -1 \end{bmatrix} S^T_{2\cdot 4}$$

где $S^T_{2\cdot 2}$, $S^T_{2\cdot 4}$ – перестановочные транспонированные матрицы размерностью 2x2 и 2x4 [3], и имеют следующий вид:

$$S^T_{2.2} = \begin{bmatrix} I & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I & \cdot \\ \cdot & I & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & I \end{bmatrix} \qquad S^T_{2.4} = \begin{bmatrix} I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot \\ \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I \end{bmatrix} \tag{6}$$

Из (5) видно, что $G_3 = G_n$ – это диагональная матрица, в которой первое ядро стоит в левом углу, а второе до конца заполняет G_3. На следующем этапе второе ядро остается в диагоналях, а первое удваивается за счет второго ядра и "расширяется" матрицей $S^T_{2.2}$. На последнем этапе, за счет дальнейших удваиваний и расширений через матрицы $S^T_{2.2}$, $S^T_{2.4}$, $S^T_{2.8}\ldots$ получается G_1, состоящее только из первого ядра. Вышесказанное и обеспечивает правила получения базиса Хаара и заполнения матриц Гуда ядрами.

Отметим, однако, что на основании (I) и (5) матрица -базис Хаара получается отличной от классического в соответствии с (3) и (4). Более подробное рассмотрение системы уравнений (II) из [I] показывает, что (I), которое получается из этой системы, корректнее записать как:

$$\begin{cases} B_r^{(i,k)} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} \cos\theta_{i,k} & \pm\, w^{V_{i,k}} \sin\theta_{i,k} \\ \sin\theta_{i,k} & \mp\, w^{V_{i,k}} \cos\theta_{i,k} \end{bmatrix} \\ B_n^{(i,k)} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} \pm\cos\theta_{i,k} & w^{V_{i,k}} \sin\theta_{i,k} \\ \mp\sin\theta_{i,k} & w^{V_{i,k}} \cos\theta_{i,k} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{7}$$

В таком случае мы не теряем классическое решение для второго ядра Хаара: $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$. А всего решений будет уже двенадцать, а не одно, учитывая двухъядерность функции Хаара (два угла $\theta = \frac{\pi}{4}$ и $\theta = 0$ при $V_{i,k} = 0$). При этом классическое решение будет для двух ядер:

$$\begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Можно показать, что матрицы Хаара, получаемые на основании (7), (2) и (5) имеют свойства, аналогичные классическому базису Хаара, и, прежде всего, несимметричность матриц Хаара. $B_N \neq B_N^T$ и нахождение обратной матрицы как: $B_N^{-1} = \frac{1}{2^n} B_N^T$.

Поэтому можно говорить о том, что матрицы, получаемые по вышеразработанным правилам, Хаароподобные. Однако сами матрицы, из-за разных ядер и их разных сочетаний будут разными. Выражение (4) представляет собой матрицу для классического базиса Хаара для ядер $\begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$. Для примера ниже приведены еще две разновидности базисов Хаара: для ядер $\begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ (формула 5) – B_{N_2} и для ядер $\begin{bmatrix} I & -I \\ I & I \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ – B_{N_3}. Размерность всех матриц $N = 2^3 = 8$:

$$B_{N_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & & & & \\ & & & & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & -2 & & & & & & \\ & & 2 & -2 & & & & \\ & & & & 2 & -2 & & \\ & & & & & & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad B_{N_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & & & & \\ & & & & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -2 & 2 & & & & & & \\ & & -2 & 2 & & & & \\ & & & & -2 & 2 & & \\ & & & & & & -2 & 2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Перемножив, например, слева направо матрицы, получаемые из (5) и (6) в соответствии с выражением (9) получим B_{N_2}:

$$B_{N_2} = \begin{bmatrix} I & I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ I & -I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sqrt{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \sqrt{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sqrt{2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sqrt{2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sqrt{2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sqrt{2} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \tag{9}$$

$$\times \begin{bmatrix} I & I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I & I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ I & -I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I & -I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sqrt{2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sqrt{2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sqrt{2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sqrt{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I & I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I & I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I & I & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I & I \\ I & -I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I & -I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I & -I & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I & -I \end{bmatrix}$$

В заключение отметим, что можно и далее обобщать класс Хаараподобных матриц, если не ограничив себя вышеназванными углами Θ и V, но сохранив их двухъядерность, далее действовать по разработанному алгоритму получения матриц по выражениям (7), (2) и (5).

Литература

I. Солодовников А.И. и др. Синтез ортогональных базисов на основе обобщенного спектрального ядра // Вопросы теории систем автоматического управления. Вып. 2. Л., 1976. С. 99-112.

2. Liferman J. Les methodes rapides de transformation du signalß Fouries, Walsh, Hadamard, Haar. Masson, 1975.

3. Дагман Э.Е., Кухарев Г.А. Быстрые дискретные ортогональные преобразования. Новосибирск: Наука, 1983.

4. Быстрые методы спектрального анализа дискретных сигналов. Таллин: ТПИ, 1987. 133 с.

B. Guryanov

Haar Matrices

Abstract

A technique is presented to implement a class of Haar matrices which are generated by the core matrix.

It is shown that a known Haar matrix is simply received from implemented matrices.

B. Gurjanov

Haari kujuga baasid

Kokkuvõte

Käsitletakse signaali ortogonaalseid teisendusi klassikalisel baasil. Üldistatud tuuma alusel on võimalik moodustada üldine ortogonaalsete teisenduste klass Haari kujuga baasile.

№ 676

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 621.391.6

Б.Г. Гурьянов, И.И. Белкина

МАТРИЦЫ ФУРЬЕ НА ОБОБЩЕННОМ ЯДРЕ

Для проведения цифрового спектрального анализа используются дискретные разновидности базисных функций Фурье, Уолша, Хаара [1], которые могут быть представлены в матричной форме. Матрицы Фурье размерностью $N \times N$ (их также называют спектральными опрераторами), используемые для дискретных преобразований, определяются из выражения (1)

$$B_n = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}, \qquad (1)$$

где $N = p^n - p$ - основание исчисления разбиения отрезка определения базисных функций.

Полагая индекс матрицы по строкам равным $i = n+1$ и по столбцам равным $j = k+1$, т.е. $B(n+1, k+1) = B(i,j)$ нетрудно получить из (1), например, для случая $N = 8$, квадратную матрицу в виде (2)

$$B_{N=8} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 & w^8 & w^{10} & w^{12} & w^{14} \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 & w^{12} & w^{15} & w^{18} & w^{21} \\ 1 & w^4 & w^8 & w^{12} & w^{16} & w^{20} & w^{24} & w^{28} \\ 1 & w^5 & w^{10} & w^{15} & w^{20} & w^{25} & w^{30} & w^{35} \\ 1 & w^6 & w^{12} & w^{18} & w^{24} & w^{30} & w^{36} & w^{42} \\ 1 & w^7 & w^{14} & w^{21} & w^{28} & w^{35} & w^{42} & w^{49} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Число строк матриц B_N равно количеству базисных функций, участвующих в разложении сигнала, а элементы строки представляют собой дискретные значения одной из базисных функций (соответствующей номеру строк) в моменты дискретизации.

В соответствии с [I] B_N представляет собой базис-матрицу ДЭФ - дискретных экспоненциальных функций. Алгоритмы быстрых дискретных ортогональных преобразований строятся на основе преобразования и факторизации исходной матрицы B_N в соответствии с теми множителями r_i, на которые раскладывается N [I].

Представляет определенный интерес факторизация матриц B_n совершенно на другой основе - первоначального определения структуры и элементов матриц ядер N [2].

Известно, что концепция ядерного представления спектральных операторов B_N (матриц), позволяет упростить процедуру их синтеза и факторизации.

В [2] факторизация и синтез матриц Фурье $\Phi = B_N$ производится на основе обобщенного ядра:

$$B_r^{(i,k)} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} \cos\Theta_{i,k} & w^{V_{i,k}}\sin\Theta_{i,k} \\ \sin\Theta_{i,k} & -w^{V_{i,k}}\cos\Theta_{i,k} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где $w = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$; $\Theta \in \overline{0,2\pi}$; $V \in \overline{0,\frac{N}{2}-1}$;

i,k - переменные, определяющие значения углов - параметров Θ и V; причем $N = 2^n$ ($N \times N$ - размерность базиса Фурье) $i \in \overline{1,n}$; $k \in \overline{1,\frac{N}{2}}$.

Ядро (3) получено на основе общего свойства синтезируемых базисов - условий ортогональности и полноты.

Если представить синтезируемую B'_N в виде произведения факторизованных и далее неразложенных матриц Гуда [I]

$$B'_N = G_n \cdot G_{n-1} \ldots G_i \ldots G_1, \tag{4}$$

которые принимаются одинаковой структуры, то встает вопрос: по какому алгоритму получать из (3) конкретные ядра для различных матриц Гуда, и как их располагать в этих матрицах.

Цель работы - показать один такой алгоритм. Рассмотрение будем вести для конкретности на примере $N = 8 = 2^3$.

Для классического дискретного преобразования Фурье $\Theta_{i,k} = \frac{\pi}{4}$, имеем:

$$B_r^{i,k} = \begin{bmatrix} 1 & w^{V_{i,k}} \\ 1 & -w^{V_{i,k}} \end{bmatrix} \tag{5}$$

и при $N = 2^3$ получаем четыре различных ядра (или $\frac{N}{2}$): $k = I, 2, 3, 4$.

Можно показать, что показатели степени при $w - V_{i,k}$, математически получаются путем последовательной инверсии чисел $a=(k-1)$ [I], т.е. из "a" получим числа $V_{i,k} = 0, 2, I, 3$.

Далее можно показать, что матрицы Гуда, начиная от самой многоядерной, до одноядерной, можно математически записать как [3]

$$G_3 = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & w^2 & 1 & w & 1 & w^3 \\ 1 & -1, & 1 & -w^2, & 1 & -w, & 1 & w^3 \end{bmatrix} \cdot S_{2\cdot 4}$$

$$G_2 = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & w^2 & 1 & 1 & 1 & w^2 \\ 1 & -1, & 1 & -w^2, & 1 & -1, & 1 & -w^2 \end{bmatrix} \cdot S_{2\cdot 4} \tag{6}$$

$$G_1 = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1, & 1, & -1, & 1 & -1, & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot S_{2\cdot 4}$$

где $S_{2\cdot 4}$ – перестановочная матрица [I], имеющая для $N = 2^3$ вид (справа показана также матрица инверсных перестановок S_{2^3}):

$$S_{2\cdot 4} = \begin{bmatrix} I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I \end{bmatrix} \qquad S_{2^3} = \begin{bmatrix} I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot \\ \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I \end{bmatrix} \tag{7}$$

Тогда, в соответствии с (6) переход от многоядерных матриц Гуда к одноядерным можно реализовать при помощи операции по модулю $\frac{N}{2^i}$, т.е. в нашем случае по модулю 4,2,I (i = I, 2, 3) чисел "a", служащих теперь индексом для $V_{i,k}$, т.е. $V[(a) \bmod \frac{N}{2^i}]$.

Действительно, так как $V_{i,k} = 0, 2, I, 3 = V_{i,k}(a_1, a_2, a_3, a_4)$, то

для G_3 : $V_{i,k}\,[(a) \bmod 4] = V_{i,k}\,[0,1,2,3]$

для G_2 : $V_{i,k}[(a) \bmod 2] = V_{i,k}[0,1,0,1]$

для G_1 : $V_{i,k}[(a) \bmod 1] = V_{i,k}[0,0,0,0]$

т.е. например, для G_1 надо брать только ядра при индексе a_1, т.е. с $V_{i,k}=0$, что согласуется с (6).

Отметим, что естественной упорядоченности строк базиса Фурье (см. матрицу (2)) соответствует выражение (8), несколько отличающееся от выражения (4)

$$B_{N=2^3} = S_{2^3} \cdot G_3 \cdot G_2 \cdot G_1 \qquad (8)$$

Действительно, подставив в (8) выражения (6) и (7) получаем (9):

$$B_N = S_{2^3} \times \begin{bmatrix} I & \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot \\ I & \cdot & \cdot & \cdot & -I & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & W^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & -W^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & W & \cdot \\ \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & -W & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & W^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & -W^3 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} I & \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot \\ I & \cdot & \cdot & \cdot & -I & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & W^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & -W^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot \\ \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & -I & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & W^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & -W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot \\ I & \cdot & \cdot & \cdot & -I & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot \\ \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & -I & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot \\ \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & -I & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & I \\ \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & -I \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

из которого, перемножая последовательно матрицы, как и обычно слева, направо, получим (2), учитывая, то, что имеется только N различных значений экспонент, т.е. берем $(kn) \bmod N$, а не kn.

Если, в качестве $\Theta_{i,k}$ брать и другие углы, но использовать описанный выше алгоритм построения B_N, то, очевидно, получим Фурьеобразные матрицы, частным случаем которых является классический базис-матрица Фурье при $\Theta = \frac{\pi}{4}$. Для $V_{i,k} \equiv 0$ и $\Theta = \frac{\pi}{4}$ получаем известный базис Адамара (одноядерный, для $V_{i,k} \equiv 0$ и $\Theta = \frac{\pi}{2}$ получаем диагональный базис.

Изучение обобщенного ядра (3) показывает, что оно имеет еще три разновидности, связанные со знаками перед элементами, а именно в виде $\begin{bmatrix} + & \pm \\ + & \mp \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} \pm & + \\ \mp & + \end{bmatrix}$, что еще более расширяет количество Фурьеподобных матриц.

Таким образом, ядерные представления, при разработанном выше алгоритме получения ядер и их записи в факторизованных матрицах позволяют просто синтезировать бесчисленное количество как Фурье, так и Фурьеподобных матриц путем простой смены θ и V в выражении (3). Конечно, возможны и многочисленные другие алгоритмы формирования ядер и их местоположений в факторизованных матрицах.

Литература

I. Дагман Э.Е., Кухарев Г.А. Быстрые дискретные ортогональные преобразования сигналов. Новосибирск: Наука, 1983. 232 с.

2. Солодовников А.И. Синтез полных ортонормированных функций, имеющих алгоритм быстрого преобразования //Вопросы теории систем автоматического управления. Л. Вып. 4. 1978. С. 94-105.

3. Быстрые методы спектрального анализа дискретных сигналов. Таллин: ТПИ, 1987. 133 с.

B. Guryanov, I. Belkina

The Core Matrix and the Fourier Matrices

Abstract

A technique is presented to implement a class of Fourier matrices which are generated by the core matrix. The known Fourier matrix, Hadamard matrix, diagonal and antidiagonal matrices are found from the above-mentioned matrices.

B. Gurjanov, I. Belkina

Üldistatud tuuma Fourier' maatriksid

Kokkuvõte

Lähtudes üldistatud tuumast, on toodud välja Fourier' maatriksite moodustamise eeskirjad diskreetsete teisenduste jaoks. Fourier', Hadamardi, diagonaalne ja antidiagonaalne maatriks on käsitletava maatriksi erijuhtumid.

Содержание

Цена 80 коп.