

468

ISSN 0136-3549
0320-3352

TALLINNA
POLÜTEHNILISE INSTITUUDI
TOIMETISED

468

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

ТРИ
'79

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ
МЕТОДЫ
АНАЛИЗА
ОПТИМАЛЬНЫХ
СИСТЕМ
СТРОИТЕЛЬНОЙ
МЕХАНИКИ



Строительная механика X

УДК 624.04

● ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ
МЕТОДЫ
АНАЛИЗА
ОПТИМАЛЬНЫХ
СИСТЕМ
СТРОИТЕЛЬНОЙ
МЕХАНИКИ

Строительная механика X

Таллин 1979

С о д е р ж а н и е

1.	Э.М.Иеги; П.И.Коппель. Аналогия метода сил и метода перемещений при анализе свойств рамной конструкции в пространстве весовых параметров.	3
2.	Э.М.Иеги, П.И.Коппель. Метод конечных элементов в приложении к решению задачи об оптимизации плоских рам.	2I
3.	С.С.Богданов, Э.М.Иеги. Статический расчет и оптимальное проектирование многоконтурных рам	37
4.	В.М.Корсунский, Л.Ю.Поверус. Волны в слоистых пластинах и оболочках.	5I
5.	Ю.А.Тярно. Определение уравнивающих поперечных моментов в продольных трещинах-шарнирах в оболочках средней длины.	6I
6.	О.Т.Роотс. О модели двухмерной задачи теории упругости.	7I

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Труды ТПИ № 468

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА
ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Труды по строительной механике. Сборник статей X

Редактор Р. Ээк, Техн. редактор В. Ранник

Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 9 янв. 1979 г.

Подписано к печати 23 окт. 1979 г.

Бумага 60x90/16, Печ. л. 4,75 + 0,25 приложение

Уч.-изд. л. 4,6. Тираж 300. МВ-09213

Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскла, 2/9. Зак. № 691

Цена 70 коп.

© ТПИ, Таллин, 1979



АНАЛОГИЯ МЕТОДА СИЛ И МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ
АНАЛИЗЕ СВОЙСТВ РАМНОЙ КОНСТРУКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ
ВЕСОВЫХ ПАРАМЕТРОВ

Аналогия метода сил и метода перемещений для статического расчета рамы в матричной форме представляется известным образом [1]:

Метод сил	Метод перемещений
$DX + \bar{D}_p P = 0 \rightarrow X = -D^{-1} \cdot \bar{D}_p \cdot P,$ <p>где $D = b'_i \cdot f \cdot b_i = \{\delta_{ij}\};$ $\bar{D}_p = b'_i \cdot f \cdot b_p = \{\Delta_{ip}^{(kn)}\};$ $i, j = 1, 2, \dots, n.$</p>	$RY + \bar{R}_p P = 0 \rightarrow Y = -R^{-1} \cdot \bar{R}_p \cdot P,$ <p>где $R = c'_i \cdot f \cdot c_i = \{r_{ij}\};$ $\bar{R}_p = c'_i \cdot f \cdot c_p = \{R_{ip}^{(kn)}\};$ $i, j = 1, 2, \dots, m.$</p>

Здесь n — степень статической неопределенности;

m — степень кинематической неопределенности.

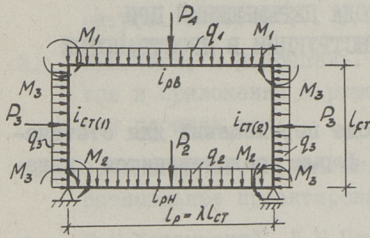
Матрица усилий (b) и перемещений (w) определяется из матричных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} b &= b_p + b_i, X = b_p - b_i \cdot D^{-1} \cdot \bar{D}_p \cdot P; \\ w &= b'_p \cdot f \cdot b_p. \end{aligned} \right| \begin{aligned} b &= c_p + c_i \cdot z = c_p - c_i \cdot R^{-1} \cdot \bar{R}_p \cdot P; \\ w &= c'_p \cdot f \cdot c_p. \end{aligned}$$

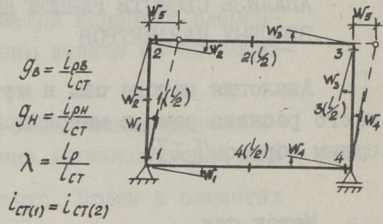
В работе проводится аналогия применения метода сил и метода перемещений для статического и кинематического анализа статически (кинематически) неопределимых рам в функциональном пространстве весовых параметров, введенных как безразмерные параметры жесткостей ($g = g_s; g_s = \frac{L_s}{I_s}$) для всех элементов рамы, кроме базисного ($s = 1, 2, \dots, g_s = 1$).

Аналогия проводится на примере одноконтурной рамы как трехпараметрической системы ($s = 1, 2, 3$) с учетом свойств

Схема загрузки



Расчетные сечения и перемещения



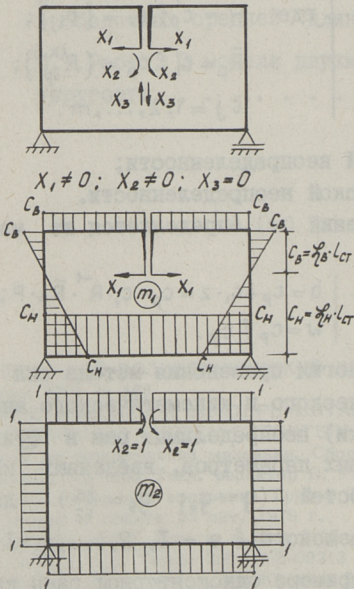
$$g_B = \frac{l_{pB}}{l_{CT}}$$

$$g_H = \frac{l_{pH}}{l_{CT}}$$

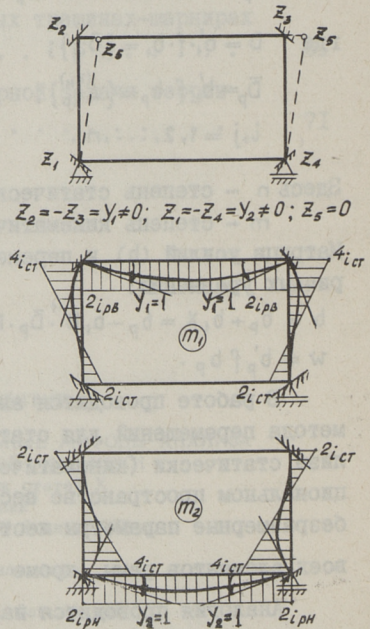
$$\lambda = \frac{l_p}{l_{CT}}$$

$$i_{CT(1)} = i_{CT(2)}$$

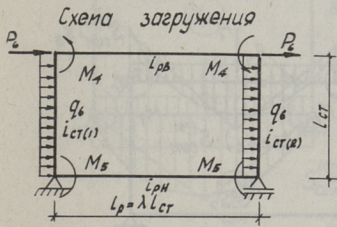
Метод сил



Метод перемещений



Фиг. 1. Симметричная компонента нагрузки. Схема загрузки, основная система и базис статического расчета.



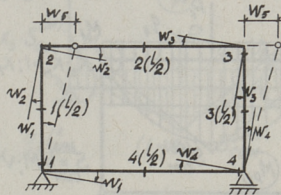
$$g_0 = \frac{i_{p0}}{i_{cr}}$$

$$g_H = \frac{i_{pH}}{i_{cr}}$$

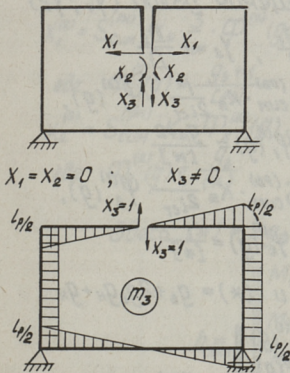
$$\lambda = \frac{L_p}{L_{cr}}$$

$$i_{cr(1)} = i_{cr(2)}$$

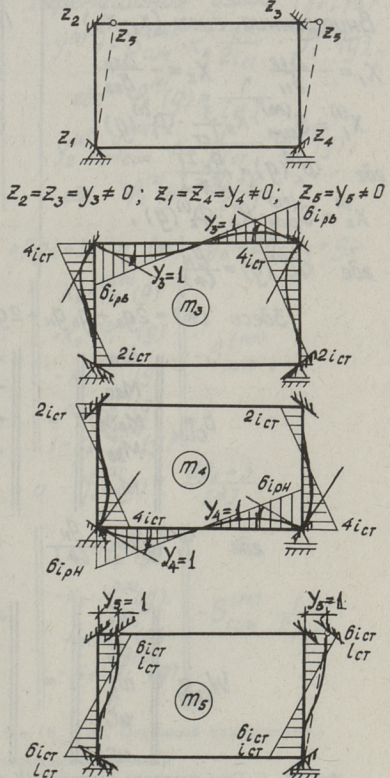
Расчетные сечения и перемещения



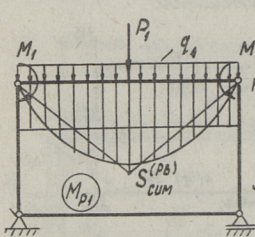
Метод сил



Метод перемещений



Фиг. 2. Кососимметричная компонента нагрузки. Схема загрузки, основная система и базис статического расчета.



Метод сил

Внутренние силы ($X_1; X_2$)

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\Delta_{2P}}{\delta_{22}}$$

$$X_1^{(1)} = S_{\text{CUM}}^{(PB)} \cdot K_S \cdot \frac{3}{L_{\text{CT}}} \cdot \Phi_1^{(1)}(g),$$

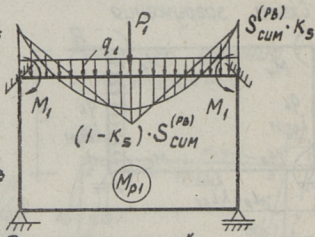
где $\Phi_1^{(1)}(g) = \frac{g_H + 1}{[*]}$

$$X_2^{(1)} = S_{\text{CUM}}^{(PB)} \cdot K_S \cdot \Phi_2^{(1)}(g),$$

где $\Phi_2^{(1)}(g) = \frac{g_H}{[*]}$

$$K_S: K_H = 1; \quad K_P = \frac{1}{2}; \quad K_Q = \frac{2}{3}$$

$$S_{\text{CUM}}^{(PB)} = \sqrt{M_1} \cdot \sqrt{\frac{P_1 L_{PB}}{4}} \cdot \sqrt{\frac{q_1 L_{PB}^2}{8}}$$



Метод перемещений

Перемещения узлов ($y_1; y_2$)

$$y_1 = -\frac{D_1}{D}; \quad y_2 = -\frac{D_2}{D}$$

$$y_1^{(1)} = S_{\text{CUM}}^{(PB)} \cdot K_S \cdot \frac{1}{2i_{\text{CT}}} \cdot \Psi_1^{(1)}(g),$$

где $\Psi_1^{(1)}(g) = \frac{g_H + 2}{[*]}$

$$y_2^{(1)} = -S_{\text{CUM}}^{(PB)} \cdot K_S \cdot \frac{1}{2i_{\text{CT}}} \cdot \Psi_2^{(1)}(g),$$

где $\Psi_2^{(1)}(g) = \frac{1}{[*]}$

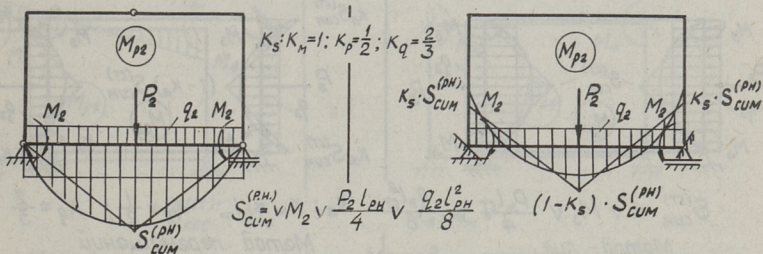
Здесь $[*] = 2g_6 + g_6 g_H + 2g_H + 3$ и $(*) = g_6 + 2g_6 g_H + g_H$

$$b_{\text{CUM}} = \begin{Bmatrix} M_{10} \\ M_{20} \\ M_{2(\frac{1}{2})} \\ M_{30} \\ M_{40} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_S \cdot \Psi_1^{(1)}(g) \\ -K_S \cdot \Psi_2^{(1)}(g) \\ -1 - K_S \cdot \Psi_2^{(1)}(g) \\ -K_S \cdot \Psi_2^{(1)}(g) \\ K_S \cdot \Psi_1^{(1)}(g) \end{Bmatrix} \cdot S_{\text{CUM}}^{(PB)},$$

где $\Psi_1^{(1)}(g) = \frac{g_H}{[*]}$ и $\Psi_2^{(1)}(g) = \frac{2g_H + 3}{[*]}$

$$W_{\text{CUM}} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -K_S \cdot \Psi_2^{(1)}(g) \\ K_S \cdot \Psi_1^{(1)}(g) \\ -K_S \cdot \Psi_1^{(1)}(g) \\ K_S \cdot \Psi_2^{(1)}(g) \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot S_{\text{CUM}}^{(PB)} \cdot \frac{1}{2i_{\text{CT}}}$$

Фиг. 3. Симметричная нагрузка ($K_{II} = 1$). Основные неизвестные. Внутренние силы и перемещения узлов.



Метод сил

Внутренние силы ($X_1; X_2$)

$$X_1^{(2)} = S_{CUM}^{(PH)} \cdot K_S \cdot \frac{3}{L_{CT}} \cdot \varphi_1^{(2)}(g),$$

$$\text{где } \varphi_1^{(2)}(g) = \frac{g_0 + 1}{[*]}$$

$$X_2^{(2)} = S_{CUM}^{(PH)} \cdot K_S \cdot \varphi_2^{(2)}(g),$$

$$\text{где } \varphi_2^{(2)}(g) = \frac{g_0}{[*]}$$

Метод перемещений

Перемещения узлов ($Y_1; Y_2$)

$$Y_1^{(2)} = -S_{CUM}^{(PH)} \cdot K_S \cdot \frac{1}{2i_{CT}} \cdot \varphi_1^{(2)}(g),$$

$$\text{где } \varphi_1^{(2)}(g) = \frac{1}{[*]}$$

$$Y_2^{(2)} = S_{CUM}^{(PH)} \cdot K_S \cdot \frac{1}{2i_{CT}} \cdot \varphi_2^{(2)}(g),$$

$$\text{где } \varphi_2^{(2)}(g) = \frac{g_0 + 2}{[*]}$$

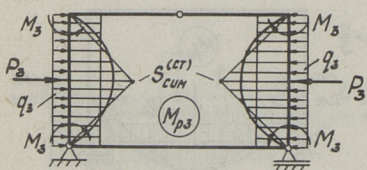
Здесь $[*] = 2g_0 + g_0 g_H + 2g_H + 3$ и $(*) = g_0 + 2g_0 g_H + g_H$

$$\vec{b}_{CUM} = \begin{pmatrix} M_{10} \\ M_{20} \\ M_{30} \\ M_{40} \\ M_{4(\frac{1}{2})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_S \cdot \psi_2^{(2)}(g) \\ -K_S \cdot \psi_1^{(2)}(g) \\ -K_S \cdot \psi_1^{(2)}(g) \\ K_S \cdot \psi_2^{(2)}(g) \\ 1 - K_S \cdot \psi_2^{(2)}(g) \end{pmatrix} \cdot S_{CUM}^{(PH)}$$

$$\text{где } \psi_1^{(2)}(g) = \frac{g_0}{[*]} \quad \text{и} \quad \psi_2^{(2)}(g) = \frac{2g_0 + 3}{[*]}$$

$$\vec{W}_{CUM} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_S \cdot \varphi_2^{(2)}(g) \\ -K_S \cdot \varphi_1^{(2)}(g) \\ K_S \cdot \varphi_1^{(2)}(g) \\ -K_S \cdot \varphi_2^{(2)}(g) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot S_{CUM}^{(PH)} \cdot \frac{1}{2i_{CT}}$$

Фиг. 4. Симметричная нагрузка ($K_H = 2$). Основные неизвестные. Внутренние силы и перемещения узлов.



$$S_{сум}^{(CT)} = v M_3 v \frac{P_3 L_{CT}}{4} v \frac{q_0 L_{CT}^2}{8}$$

Метод сил

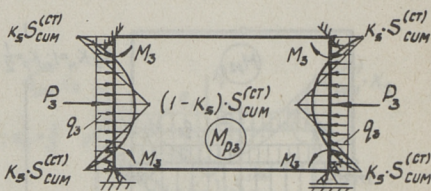
Внутренние силы ($X_1; X_2$)

$$X_1^{(s)} = S_{сум}^{(CT)} \cdot K_S \frac{3}{L_{CT}} \cdot \varphi_1^{(s)}(g),$$

$$\text{где } \varphi_1^{(s)}(g) = \frac{g_0 - g_H}{[*]}$$

$$X_2^{(s)} = S_{сум}^{(CT)} \cdot K_S \cdot \varphi_2^{(s)}(g),$$

$$\text{где } \varphi_2^{(s)}(g) = \frac{2g_0 g_H}{(*)}$$



$$K_S: K_M = 1; \quad K_P = \frac{1}{2}; \quad K_Q = \frac{2}{3}$$

Метод перемещений

Перемещения узлов ($y_1; y_2$)

$$y_1^{(s)} = -S_{сум}^{(CT)} \cdot K_S \frac{1}{2i_{CT}} \cdot \psi_1^{(s)}(g),$$

$$\text{где } \psi_1^{(s)}(g) = \frac{g_H + 3}{[*]}$$

$$y_2^{(s)} = S_{сум}^{(CT)} \cdot K_S \frac{1}{2i_{CT}} \cdot \psi_2^{(s)}(g),$$

$$\text{где } \psi_2^{(s)}(g) = \frac{g_0 + 3}{[*]}$$

Здесь $[*] = 2g_0 + g_0 g_H + 2g_H + 3$ и $(*) = g_0 + 2g_0 g_H + g_H$

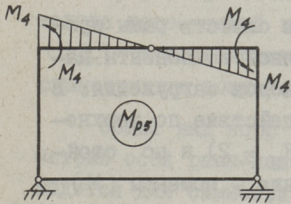
$$b_{сум} = \begin{Bmatrix} M_{10} \\ M_{1(\frac{1}{2})} \\ M_{20} \\ M_{30} \\ M_{3(\frac{1}{2})} \\ M_{40} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -K_S \psi_1^{(s)}(g) \\ 1 - K_S \frac{\psi_1^{(s)}(g) + \psi_2^{(s)}(g)}{2} \\ -K_S \psi_2^{(s)}(g) \\ -K_S \psi_2^{(s)}(g) \\ 1 - K_S \frac{\psi_1^{(s)}(g) + \psi_2^{(s)}(g)}{2} \\ -K_S \psi_1^{(s)}(g) \end{Bmatrix} \cdot S_{сум}^{(CT)},$$

$$\text{где } \psi_1^{(s)}(g) = \frac{g_H(g_0 + 3)}{[*]} \quad \text{и} \quad \psi_2^{(s)}(g) = \frac{g_0(g_H + 3)}{[*]}$$

$$W_{сум} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_S \cdot \varphi_2^{(s)}(g) \\ -K_S \cdot \varphi_1^{(s)}(g) \\ K_S \cdot \varphi_1^{(s)}(g) \\ -K_S \cdot \varphi_2^{(s)}(g) \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot S_{сум}^{(CT)} \cdot \frac{1}{2i_{CT}}$$

Фиг. 5. Симметричная нагрузка ($K_H = 3$). Основные неизвестные.

Внутренние силы и перемещения узлов.



$$S_{\text{кос}}^{(CT)} = M_4$$

Метод сил

Внутренние силы (X_3)

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3B}}{\delta_{33}}$$

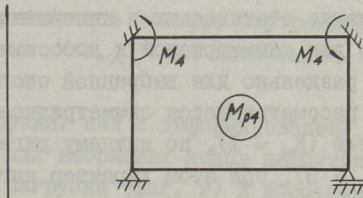
$$X_3^{(4)} = S_{\text{кос}}^{(CT)} \cdot \frac{2}{l_{CT}} \cdot \varphi_3^{(4)}(g).$$

$$\text{где } \varphi_3^{(4)} = \frac{g_H}{\theta}$$

Здесь $\theta = g_B + 6g_B g_H + g_H$

$$b_{\text{кос}} = \begin{Bmatrix} M_{10} \\ M_{20} \\ M_{30} \\ M_{40} \end{Bmatrix}$$

$$W_{\text{кос}} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \end{Bmatrix}$$



$$K_B: K_M = 1$$

Метод перемещений

Перемещения узлов (y_3, y_4, y_5)

$$y_3 = -\frac{D_3}{D}; \quad y_4 = -\frac{D_4}{D}; \quad y_5 = -\frac{D_5}{D};$$

$$y_3^{(4)} = -S_{\text{кос}}^{(CT)} \cdot \frac{1}{\delta_{iCT}} \cdot \varphi_3^{(4)}(g);$$

$$\text{где } \varphi_3^{(4)}(g) = \frac{6g_H + 1}{\theta}$$

$$y_4^{(4)} = -S_{\text{кос}}^{(CT)} \cdot \frac{1}{\delta_{iCT}} \cdot \varphi_4^{(4)}(g)$$

$$\text{где } \varphi_4^{(4)}(g) = \frac{1}{\theta}$$

$$y_5^{(4)} = -S_{\text{кос}}^{(CT)} \cdot \frac{l_{CT}}{\delta_{iCT}} \cdot \varphi_5^{(4)}(g),$$

$$\text{где } \varphi_5^{(4)}(g) = \frac{1}{2} [\varphi_3^{(4)}(g) + \varphi_4^{(4)}(g)]$$

$$= \begin{Bmatrix} \varphi_3^{(4)}(g) \\ -[1 - \varphi_3^{(4)}(g)] \\ -\varphi_3^{(4)}(g) \\ -\varphi_3^{(4)}(g) \end{Bmatrix} \cdot S_{\text{кос}}^{(CT)}$$

$$= \begin{Bmatrix} -\varphi_4^{(4)}(g) \\ -\varphi_3^{(4)}(g) \\ -\varphi_3^{(4)}(g) \\ -\varphi_4^{(4)}(g) \\ -l_{CT} \varphi_5^{(4)}(g) \end{Bmatrix} \cdot S_{\text{кос}}^{(CT)} \cdot \frac{1}{\delta_{iCT}}$$

Фиг. 6. Кососимметричная нагрузка ($K_H = 4$). Основные неизвестные. Внутренние силы и перемещения узлов.

упругой симметрии ее, что позволяет привести систему к двухпараметрической ($q_B = \frac{l_{PB}}{l_{CT}}$; $q_H = \frac{l_{PH}}{l_{CT}}$; $q_{CT}=1$) и сделать ее обозримой в функциональном пространстве весовых параметров.

Анализ статических и кинематических свойств рамы проводится для симметричной и кососимметричной компоненты нагрузки отдельно для выбранной системы кодов загрузки. В работе рассматривается симметричное воздействие по верхнему ригелю ($K_H = 1$), по нижнему ригелю ($K_H = 2$) и по стойкам ($K_H = 3$), при этом характер нагружения — моменты (M) в узлах, распределенная нагрузка q , силы P в пролете описываются в одном коде путем введения параметров нагрузки $S_{сим}$ и коэффициентов площади эпюр изгибающих моментов $K_{S_{сим}}$ [см. 2].

Кососимметричные воздействия описываются аналогично, как косые воздействия по верхнему ригелю ($K_H = 4$), по нижнему ригелю ($K_H = 5$) и по стойкам ($K_H = 6$), при этом характер нагружения (или M , или P , или q) описывается в одном коде путем введения параметров нагрузки ($S_{кос}$) и коэффициентов площади эпюр изгибающих моментов $K_{S_{кос}}$. Учет иного вида загрузки или учет совместного воздействия нескольких кодов нагрузок осуществляется соответствующим формированием матрицы сил (P).

Общая схема загрузки, выбор основной системы и базис статического расчета методом сил и методом перемещений приводится для симметричной компоненты нагрузки на фиг. 1 и для кососимметричной компоненты нагрузки на фиг. 2. При этом степень статической или кинематической неопределенности рамы-контура для симметричной компоненты нагрузки соответственно равна $n_{сим} = 2$, $m_{сим} = 2$ и для кососимметричной компоненты — $n_{кос} = 1$, $m_{кос} = 3$.

Результаты статического и кинематического расчета рамы-контура в функциональных связях с весовыми параметрами (как независимыми параметрами управления) приводятся для симметричной компоненты нагрузки ($K_H = 1, 2, 3$), на фиг. 3, 4, 5. При этом выявляется двойственность метода сил и метода перемещений и сопряженность векторов внутренних сил ($b_{сим}$) и перемещений узлов ($w_{сим}$) для всех видов симметричных воздействий.

Результаты статического и кинематического расчета рамы в функциональных связях с весовыми параметрами приводятся для кососимметричной компоненты нагрузки ($K_H = 4, 5, 6$) на фиг. 6, 7, 8. При этом выявляется двойственность метода сил и метода перемещений и сопряженность вектора внутренних сил ($b_{\text{кос}}$) и перемещений узлов ($w_{\text{кос}}$) для всех видов кососимметричных воздействий.

Общий вид эпюр внутренних сил и деформированной геометрии осей рамы-контюра для выбранных кодов нагрузок приводится для симметричной нагрузки (фиг. 9) и кососимметричной нагрузки (фиг. 10) раздельно.

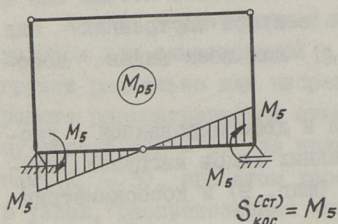
Для полноты анализа свойств рамной конструкции в пространстве весовых параметров исследовалось влияние подвижной системы симметричных и кососимметричных нагрузок. При этом были сформированы матрицы влияния в функциональных связях с весовыми параметрами и координатами положения сил для симметричной нагрузки (фиг. 11) и кососимметричной нагрузки (фиг. 12) раздельно.

Матрица влияния для подвижной силы (P) составлена как суммарная матрица влияний от симметричной ($\frac{P}{2}$) и кососимметричной ($\frac{P}{2}$) систем нагрузок (см. фиг. 13).

Разработанная методика статического и кинематического анализа рамы-контюра в пространстве весовых параметров и выбранная система кодов нагрузок позволяют исследовать свойства контюра-рамы в составе многоконтурной рамы, как конечного элемента сложной рамной конструкции. При этом коды нагрузок с моментами в узлах контюра описывают воздействия смежных контюров как краевые условия конечного элемента.

Полученные для рамы-контюра функциональные связи внутренних сил (b) и перемещений узлов (w) с весовыми параметрами системы (q_v, q_n) позволяют исследовать простейшую рамную конструкцию — порталную раму с жесткими опорами ($q_n = \infty$), с шарнирными опорами ($q_n = 0$) и всякую иную одноконтурную систему.

Функциональный анализ статических и кинематических свойств рамы-контюра является основой для исследования



Метод сил

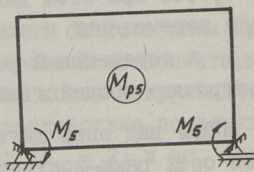
Внутренние силы (X_3)

$$X_3 = -\frac{\Delta_{30}}{\delta_{33}}$$

$$X_3^{(s)} = S_{кoc}^{(CT)} \cdot \frac{2}{l_p} \cdot \Phi_3^{(s)}(g),$$

$$\text{где } \Phi_3^{(s)}(g) = \frac{g_D}{\theta}$$

Здесь $\theta = g_B + 6g_B g_H + g_H$



$$K_S: K_M = 1$$

Метод перемещений

Перемещения узлов ($y_3; y_4; y_5$)

$$y_3 = -\frac{D_3}{D}; y_4 = -\frac{D_4}{D}; y_5 = -\frac{D_5}{D}$$

$$y_3^{(s)} = S_{кoc}^{(CT)} \cdot \frac{1}{b_{iCT}} \cdot \varphi_3^{(s)}(g),$$

$$\text{где } \varphi_3^{(s)}(g) = \frac{1}{\theta};$$

$$y_4^{(s)} = S_{кoc}^{(CT)} \cdot \frac{1}{b_{iCT}} \cdot \varphi_4^{(s)}(g),$$

$$\text{где } \varphi_4^{(s)}(g) = \frac{6g_D + 1}{\theta};$$

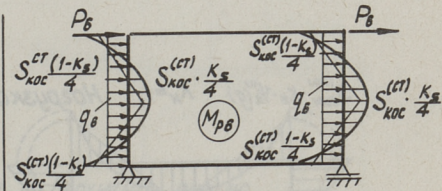
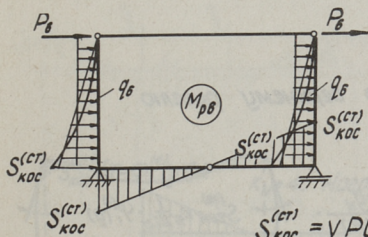
$$y_5^{(s)} = S_{кoc}^{(CT)} \cdot \frac{l_{CT}}{b_{iCT}} \cdot \varphi_5^{(s)}(g),$$

$$\text{где } \varphi_5^{(s)}(g) = \frac{1}{2} [\varphi_3^{(s)}(g) + \varphi_4^{(s)}(g)]$$

$$b_{кoc} = \begin{vmatrix} M_{10} \\ M_{20} \\ M_{30} \\ M_{40} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_3^{(s)}(g) \\ \varphi_3^{(s)}(g) \\ -\varphi_3^{(s)}(g) \\ [1 - \varphi_3^{(s)}(g)] \end{vmatrix} \cdot S_{кoc}^{(CT)}$$

$$W_{кoc} = \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_4^{(s)}(g) \\ \varphi_3^{(s)}(g) \\ \varphi_3^{(s)}(g) \\ \varphi_4^{(s)}(g) \\ l_{CT} \cdot \varphi_5^{(s)}(g) \end{vmatrix} \cdot S_{кoc}^{(CT)} \cdot \frac{1}{b_{iCT}}$$

Фиг. 7. Кососимметричная нагрузка ($K = 5$). Основные неизвестные, Внутренние силы и перемещения узлов.



$$S_{кoc}^{(CT)} = \nu P L_{CT} \nu \frac{q_b L_{CT}^2}{2}; \quad K_s; K_p = \frac{1}{2}; \quad K_q = \frac{1}{3}$$

Метод сил

Внутренние силы (X_3)

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}}$$

$$X_3^{(6)} = S_{кoc}^{(CT)} \cdot \frac{2}{l_p} \cdot \varphi_3^{(6)}(g)$$

$$\text{где } \varphi_3^{(6)}(g) = \frac{q_b (1 + 6K_s g_H)}{\theta}$$

Метод перемещений

Перемещения узлов ($Y_3; Y_4; Y_5$)

$$Y_3 = -\frac{D_3}{D}; \quad Y_4 = -\frac{D_4}{D}; \quad Y_5 = -\frac{D_5}{D}$$

$$Y_3^{(6)}(g) = S_{кoc}^{(CT)} \cdot \frac{1}{\delta_{iCT}} \cdot \varphi_3^{(6)}(g)$$

$$\text{где } \varphi_3^{(6)}(g) = \frac{1 + 6K_s g_H}{\theta}$$

$$Y_4^{(6)}(g) = S_{кoc}^{(CT)} \cdot \frac{1}{\delta_{iCT}} \cdot \varphi_4^{(6)}(g)$$

$$\text{где } \varphi_4^{(6)}(g) = \frac{1 + 6(1-K_s)g_b}{\theta}$$

$$Y_5^{(6)}(g) = S_{кoc}^{(CT)} \cdot \frac{L_{CT}}{\delta_{iCT}} \cdot \varphi_5^{(6)}(g)$$

$$\text{Здесь } \theta = g_b + 6g_b g_H + g_H$$

$$\text{где } \varphi_5^{(6)}(g) = \frac{1}{2} [1 + \varphi_3^{(6)}(g) + \varphi_4^{(6)}(g)]$$

$$b_{кoc} = \begin{vmatrix} M_{10} \\ M_{1(\frac{1}{2})} \\ M_{20} \\ M_{30} \\ M_{3(\frac{1}{2})} \\ M_{40} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -[1 - \varphi_3^{(6)}(g)] \\ \varphi_{(\frac{1}{2})} - \varphi_3^{(6)}(g) \\ \varphi_3^{(6)}(g) \\ -\varphi_3^{(6)}(g) \\ \varphi_{(\frac{1}{2})} - \varphi_3^{(6)}(g) \\ 1 - \varphi_3^{(6)}(g) \end{vmatrix} \cdot S_{кoc}^{(CT)} \cdot \text{где } \varphi(\frac{1}{2}):$$

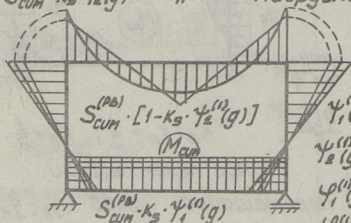
$$\varphi(p) = \frac{1}{2};$$

$$\varphi(q) = \frac{1}{4}$$

$$W_{кoc} = \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_3^{(6)}(g) \\ \varphi_3^{(6)}(g) \\ \varphi_3^{(6)}(g) \\ \varphi_4^{(6)}(g) \\ L_{CT} \cdot \varphi_5^{(6)}(g) \end{vmatrix} \cdot S_{кoc}^{(CT)} \cdot \frac{1}{\delta_{iCT}}$$

Фиг. 8. Кососимметричная нагрузка ($K_H = 6$). Основные неизвестные. Внутренние силы и перемещения узлов.

$S_{\text{сум}}^{(PB)} \cdot K_S \cdot \psi_2^{(1)}(g)$ $K_H=1$. Нагрузка по верхнему ригелю

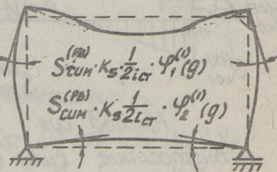


$$\psi_1^{(1)}(g) = \frac{g_H}{[*]};$$

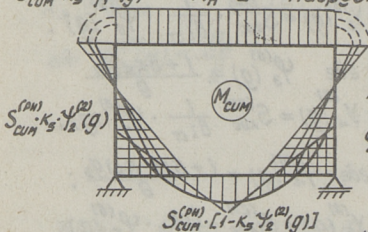
$$\psi_2^{(1)}(g) = \frac{2g_H+3}{[*]};$$

$$\varphi_1^{(1)}(g) = \frac{g_H+2}{[*]};$$

$$\varphi_2^{(1)}(g) = \frac{1}{[*]}.$$



$S_{\text{сум}}^{(PB)} \cdot K_S \cdot \psi_1^{(2)}(g)$ $K_H=2$ Нагрузка по нижнему ригелю

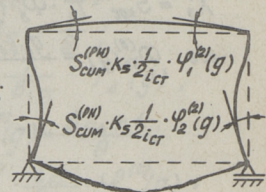


$$\psi_2^{(2)}(g) = \frac{g_B}{[*]};$$

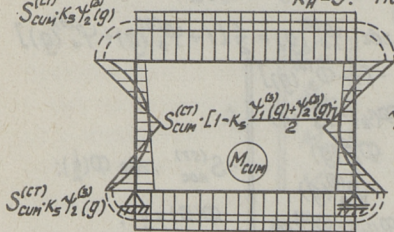
$$\psi_1^{(2)}(g) = \frac{2g_B+3}{[*]};$$

$$\varphi_1^{(2)}(g) = \frac{1}{[*]};$$

$$\varphi_2^{(2)}(g) = \frac{g_B+2}{[*]}.$$



$S_{\text{сум}}^{(CT)} \cdot K_S \cdot \psi_2^{(3)}(g)$ $K_H=3$. Нагрузка по стойкам

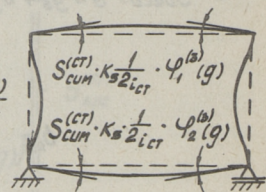


$$\psi_1^{(3)}(g) = \frac{g_H(g_B+3)}{[*]};$$

$$\psi_2^{(3)}(g) = \frac{g_B(g_H+3)}{[*]};$$

$$\varphi_1^{(3)}(g) = \frac{g_H+3}{[*]};$$

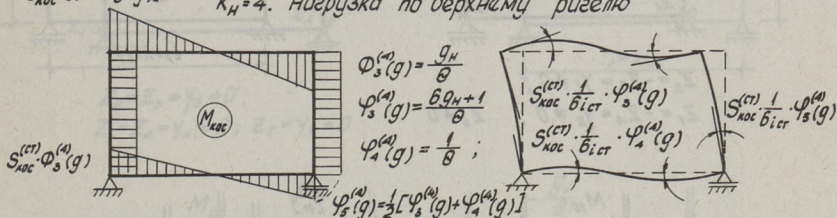
$$\varphi_2^{(3)}(g) = \frac{g_B+3}{[*]}.$$



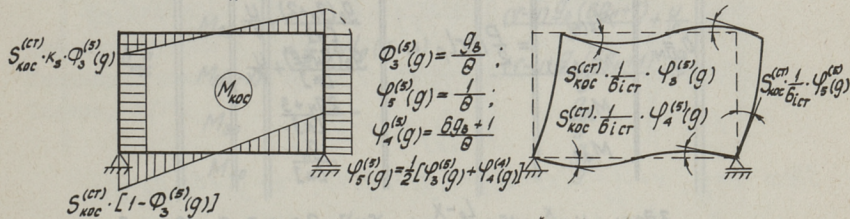
Здесь $[*] = 2g_B + g_B g_H + 2g_H + 3$

Фиг. 9. Симметричная компонента нагрузки. Эпюры внутренних сил и перемещений узлов. ($K_H = 1, 2, 3$).

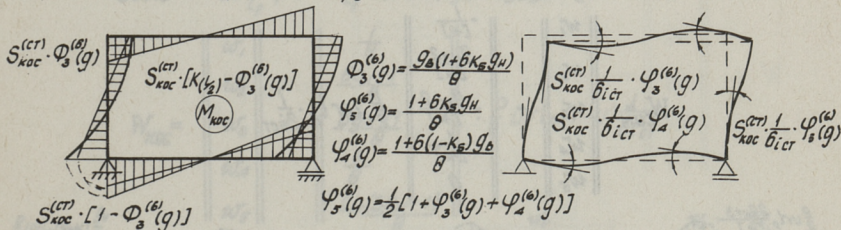
$S_{\text{кос}}^{(cr)} \cdot [1 - \Phi_3^{(4)}(g)]$ $K_H = 4$. Нагрузка по верхнему ригелю



$K_H = 5$. Нагрузка по нижнему ригелю

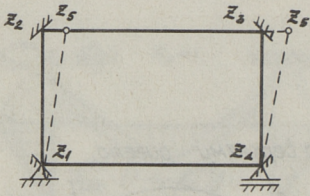


$K_H = 6$. Нагрузка по стойкам



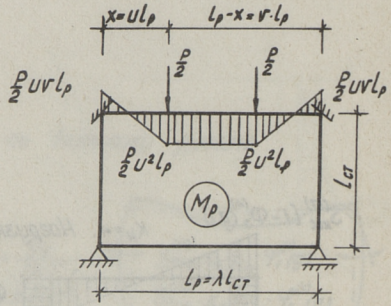
Здесь $\theta = g_B + 6g_B g_H + g_H$

Фиг. 10. Кососимметричная компонента нагрузки. Эпюры внутренних сил и перемещений узлов ($K_H = 4, 5, 6$).



$$Z_2 = -Z_3 = Y_1 \neq 0;$$

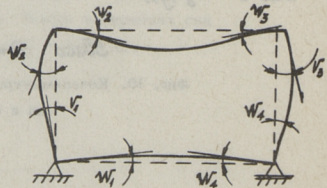
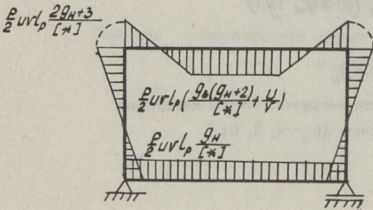
$$Z_1 = -Z_4 = Y_2 \neq 0; \quad Z_5 \neq 0$$



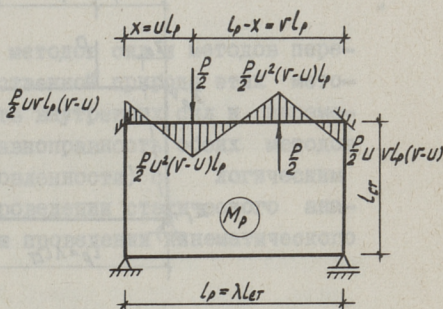
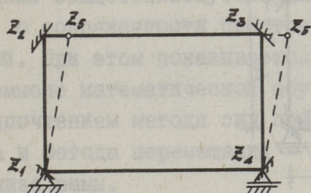
$$U_{CUM} \begin{pmatrix} M_{10} \\ M_{20} \\ M_{2(x)} \\ M_{2(lp-x)} \\ M_{30} \\ M_{40} \end{pmatrix} = \frac{P}{2} U V l_p \cdot \begin{pmatrix} \frac{g_H}{[*]} \\ -\frac{2g_H+3}{[*]} \\ \frac{g_b(g_H+2)}{[*]} + \frac{U}{V} \\ \frac{g_b(g_H+2)}{[*]} + \frac{U}{V} \\ -\frac{2g_H+3}{[*]} \\ \frac{g_H}{[*]} \end{pmatrix}$$

здесь $U = \frac{x}{l_p}$; $v = \frac{l_p - x}{l_p}$; $[*] = 2g_b + g_b g_H + 2g_H + 3$

$$W_{CUM} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{[*]} \\ \frac{g_H+2}{[*]} \\ -\frac{g_H+2}{[*]} \\ \frac{1}{[*]} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{P}{2} U V l_p \cdot \frac{1}{2 l_{CT}}$$



Фиг. 11. Матрица влияния симметричной нагрузки.



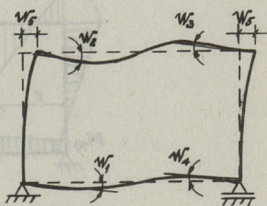
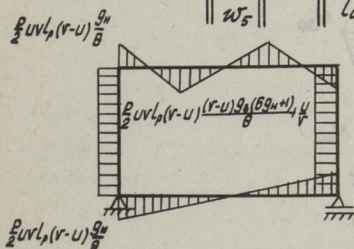
$$Z_2 = Z_3 = Y_3 = 0;$$

$$Z_1 = Z_4 = Y_4 = 0; Z_5 = Y_5 \neq 0$$

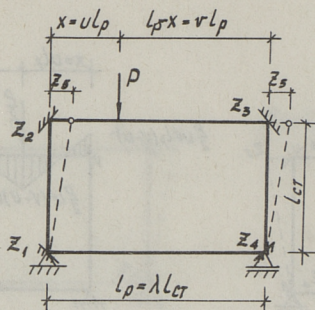
$$b_{\text{noc}} = \begin{pmatrix} M_{10} \\ M_{20} \\ M_{2(x)} \\ M_{2(l_p-x)} \\ M_{30} \\ M_{40} \end{pmatrix} = \frac{P}{2} UV l_p (v-u) \begin{pmatrix} -\frac{g_H}{\theta} \\ -\frac{g_H}{\theta} \\ \frac{(v-u)g_b(6g_H+1) + U}{V} \\ -\frac{(v-u)g_b(6g_H+1) - U}{V} \\ \frac{g_H}{\theta} \\ \frac{g_H}{\theta} \end{pmatrix}$$

Здесь $U = \frac{x}{l_p}$; $v = \frac{l_p - x}{l_p}$; $\theta = g_b + 6g_b g_H + g_H$

$$W_{\text{noc}} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta} \\ \frac{6g_H+1}{\theta} \\ \frac{6g_H+1}{\theta} \\ \frac{1}{\theta} \\ \frac{l_{ct}(3g_H+1)}{\theta} \end{pmatrix} \cdot \frac{P}{2} UV l_p (v-u) \frac{1}{\delta_{i,ct}}$$



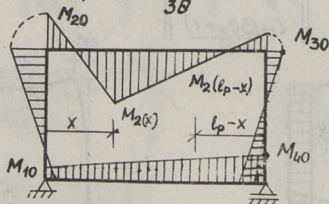
Фиг. 12. Матрица влияния кососимметричной нагрузки.



$$b = \begin{pmatrix} M_{10} \\ M_{20} \\ M_{2(x)} \\ M_{2(l_p-x)} \\ M_{30} \\ M_{40} \end{pmatrix} = P u v l_p \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{g_H}{[x]} - (v-u) \frac{g_H}{\theta} \\ -\frac{2g_H+3}{[x]} - (v-u) \frac{g_H}{\theta} \\ \frac{g_B(g_H+2)}{[x]} + \frac{u}{v} + (v-u) \left[\frac{(v-u)g_B(6g_H+1)}{\theta} + \frac{u}{v} \right] \\ \frac{g_B(g_H+2)}{[x]} + \frac{u}{v} - (v-u) \left[\frac{(v-u)g_B(6g_H+1)}{\theta} + \frac{u}{v} \right] \\ -\frac{2g_H+3}{[x]} + (v-u) \frac{g_H}{\theta} \\ \frac{g_H}{[x]} + (v-u) \frac{g_H}{\theta} \end{pmatrix}$$

Здесь $u = \frac{x}{l_p}$; $v = \frac{l_p - x}{l_p}$; $[x] = 2g_B + g_B g_H + 2g_H + 3$; $\theta = g_B + 6g_B g_H + g_H$

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{[x]} + (v-u) \frac{1}{3\theta} \\ \frac{g_H+2}{[x]} + (v-u) \frac{6g_H+1}{3\theta} \\ -\frac{g_H+2}{[x]} + (v-u) \frac{6g_H+1}{3\theta} \\ \frac{1}{[x]} + (v-u) \frac{1}{3\theta} \\ (v-u) \frac{l_{cr}(3g_H+1)}{3\theta} \end{pmatrix} \cdot P u v l_p \frac{1}{4 i_{cr}}$$



Фиг. 13. Матрица влияния.

свойств объемной функции рамы-контура в пространстве независимых весовых параметров, управляющих функцией веса (объем), рамы, как это было показано для частного случая портальной рамы (см. [2]).

Проведенное сопоставление методов сил и методов перемещений свидетельствует о двойственной природе этих методов, о сопряженности пространств внутренних сил и перемещений. При этом показывается равноправность обоих методов (в смысле математической обусловленности) с логическим предпочтением метода сил при проведении статического анализа и метода перемещений — при проведении кинематического анализа рамы.

Л и т е р а т у р а

1. Ф и л и н А.П. Матрицы в статике стержневых систем и некоторые элементы использования ЭЦМ. Госстрой, Л.-М., 1966.

2. И е г и Э.М., К о п п е л ь П.И. Свойства рамной конструкции в пространстве весовых параметров. — Тр. Таллинск. политехн. ин-та, Строительная механика, № 428, Таллин, 1977.

E. Jögi, P. Koppel

Analogy of Force and Displacement Methods by
Properties Analysis of Frame Construction in
Space of Weight Parameters

Summary

The paper deals with collations between the force method and the displacement method for statical and kinematical analysis of a frame in the space of weight parameters.

Statical and kinematical properties of a contour frame in the space of state on the axes, which are taken as the nondimensional ratio parameters of stiffness, and geometrical measures of the frame are investigated. Functional correspondences of internal forces and displacements to the initial weight parameters of the system are represented.

The calculation results of the two-parametrical frame are graphically illustrated.

Э.М. Иеги, П.И. Коппель

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПРИЛОЖЕНИИ К
РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПЛОСКИХ РАМ

Метод конечных элементов рассматривается в приложении к статическому расчету плоских рамных систем. При этом, статический расчет многоконтурной рамы проводится на двух уровнях. На первом уровне осуществляется статический расчет одноконтурной системы (рамы-контура) с конечным элементом - стержень и на втором уровне - осуществляется статический расчет многоконтурной системы с конечным элементом - контур.

Такая методика статического расчета позволяет проводить оптимизацию рам также на двух уровнях: на первом уровне - исследуются свойства рамы-контура в пространстве весовых параметров и решается вопрос об оптимальных внутриконтурных весовых параметрах; на втором уровне - исследуются свойства системы контуров в пространстве весовых параметров и решается вопрос об оптимальных межконтурных весовых параметрах. Взаимодействие первого и второго уровней учитывается путем проведения итерационных перерасчетов с обратным переходом от второго уровня к первому.

Первый уровень. Проводится статический расчет рамы-контура произвольного очертания с конечным элементом - стержень, обладающим шестью степенями свободы (для двух узлов):

$$w(0) = (w_1, w_2, w_3); \quad w(l) = (w_4, w_5, w_6).$$

Принимая аппроксимирующую функцию прогибов $y(x) = w(x)$ в виде алгебраического полинома $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, уравнение углов поворота определится как произвольная функция в виде:

$$\varphi(x) = w'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2.$$

Координатные функции $H_j(x)$ определяются из граничных условий для единичных перемещений узлов ($w_j = 1$; $j = 2, 3, 5, 6$) и приводятся в таблице I.

Т а б л и ц а I

Координатные функции $H_j(x)$;

$w_2 = 1$ $w_3 = w_5 = w_6 = 0$	$w_3 = 1$ $w_2 = w_5 = w_6 = 0$	$w_5 = 1$ $w_2 = w_3 = w_6 = 0$	$w_6 = 1$ $w_2 = w_3 = w_5 = 0$
$a_0 = 1$	$a_0 = 0$	$a_0 = 0$	$a_0 = 0$
$a_1 = 0$	$a_1 = -1$	$a_1 = 0$	$a_1 = 0$
$a_2 = -\frac{3}{l^2}$	$a_2 = \frac{2}{l}$	$a_2 = \frac{3}{l^2}$	$a_2 = \frac{1}{l}$
$a_3 = \frac{2}{l^3}$	$a_3 = -\frac{1}{l^2}$	$a_3 = -\frac{2}{l^3}$	$a_3 = -\frac{1}{l^2}$
$H_2(x) = [l^3 - 3(x^2 + 2x^3)] \frac{1}{l^3}$	$H_3(x) = -(l^2 x - 2lx + x^3) \frac{1}{l^2}$	$H_5(x) = (3lx^2 - 2x^3) \frac{1}{l^3}$	$H_6(x) = (lx^2 - x^3) \frac{1}{l^2}$

Уравнение прогибов $w(x)$ в стержне (s) запишется через координатные функции H_j так, что $w_s(x) = \sum_j H_j \cdot w_j$ для $j = 2, 3, 5, 6$.

Изгибающий момент в стержне (s) определится из дифференциального уравнения изогнутой оси стержня:

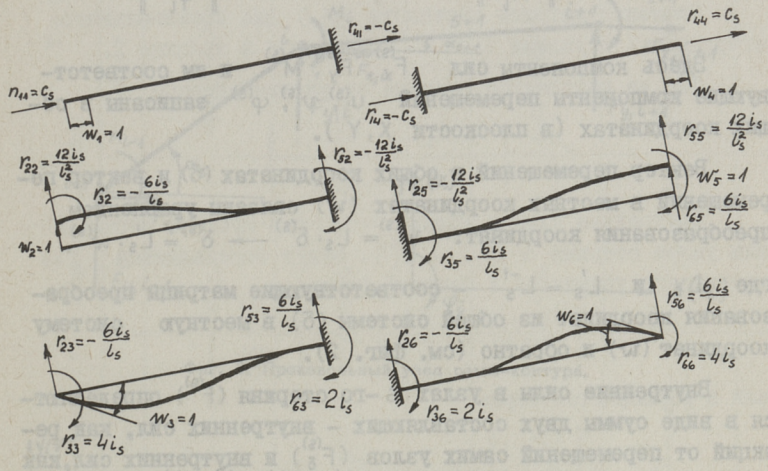
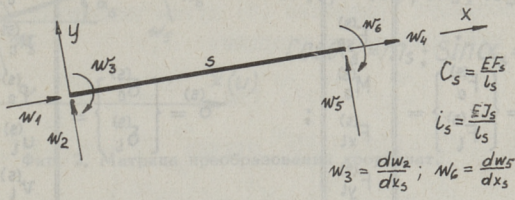
$$M_s(x) = EJ_s \cdot w_s''(x), \text{ где } w_s''(x) = \sum_j H_j'' \cdot w_j. \quad (I)$$

Элементы матрицы жесткости (s) с постоянным поперечным сечением будут определяться в форме интеграла Мора:

$$r_{ij} = EJ_s \int_{l_s} M_{is} M_{js} dx, \quad i, j = 2, 3, 5, 6; \quad r_{ij} = \frac{E F_s}{l_s}, \quad i, j = 1, 4.$$

Принцип образования коэффициентов r_{ij} с очевидностью выявляется на фиг. I. Здесь же приводится система коэффициентов r_{ij} , составляющая матрицу жесткости элемента (s) в местных координатах - $K_w^{(s)}$.

Стержень (s), как конечный элемент рамы, обладает шестью степенями свободы так, что внутренние силы в стержне ($F^{(s)}$) и соответствующие узловые перемещения ($\delta^{(s)}$) описываются шестью компонентами (три - в начальном (0) и три - в конечном (l) узлах стержня):



$K_w^{(w)}$

$r_i \backslash w_j$	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
r_1	C_s	0	0	$-C_s$	0	0
r_2	0	$\frac{12 I_s}{l_s^2}$	$-\frac{6 I_s}{l_s}$	0	$-\frac{12 I_s}{l_s^2}$	$-\frac{6 I_s}{l_s}$
r_3	0	$-\frac{6 I_s}{l_s}$	$4 I_s$	0	$\frac{6 I_s}{l_s}$	$2 I_s$
r_4	$-C_s$	0	0	C_s	0	0
r_5	0	$-\frac{12 I_s}{l_s^2}$	$\frac{6 I_s}{l_s}$	0	$\frac{12 I_s}{l_s^2}$	$\frac{6 I_s}{l_s}$
r_6	0	$-\frac{6 I_s}{l_s}$	$2 I_s$	0	$\frac{6 I_s}{l_s}$	$4 I_s$

Фиг. 1. Матрица жесткости стержня (S) в местных координатах.

$$F^{(s)} = \begin{Bmatrix} F_{x0}^{(s)} \\ F_{y0}^{(s)} \\ M_0^{(s)} \\ F_{xl}^{(s)} \\ F_{yl}^{(s)} \\ M_l^{(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x^{(s)} \\ F_y^{(s)} \\ M^{(s)} \\ F_{xl}^{(s)} \\ F_{yl}^{(s)} \\ M_l^{(s)} \end{Bmatrix}; \quad \delta^{(s)} = \begin{Bmatrix} \delta_0^{(s)} \\ \delta_l^{(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0^{(s)} \\ v_0^{(s)} \\ \varphi_0^{(s)} \\ u_l^{(s)} \\ v_l^{(s)} \\ \varphi_l^{(s)} \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

Здесь компоненты сил $F_x^{(s)}$, $F_y^{(s)}$, $M^{(s)}$ и им соответствующие компоненты перемещений $u^{(s)}$, $v^{(s)}$, $\varphi^{(s)}$ записаны в общих координатах (в плоскости X, Y).

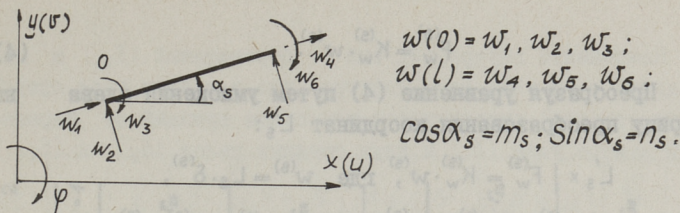
Вектор перемещений в общих координатах (δ) и вектор перемещений в местных координатах (w) связаны уравнением преобразования координат: $w^{(s)} = L_s \cdot \delta^{(s)} \rightarrow \delta^{(s)} = L_s' \cdot w^{(s)}$,

где L_s и $L_s' = L_s^{-1}$ — соответствующие матрицы преобразования координат из общей системы (δ) в местную систему координат (w) и обратно (см. фиг. 2).

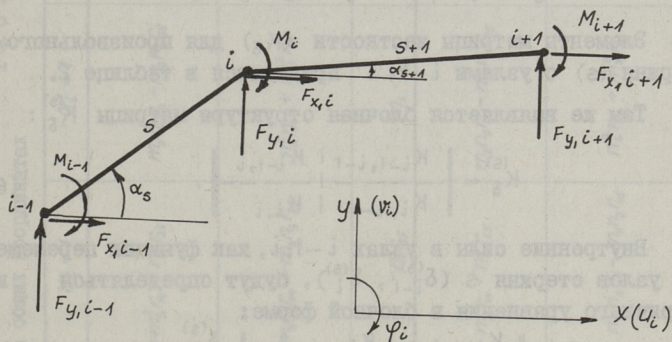
Внутренние силы в узлах s -го стержня ($F^{(s)}$) определяются в виде суммы двух составляющих — внутренних сил, как реакций от перемещений самих узлов ($F_{\delta}^{(s)}$) и внутренних сил, как реакций от нагрузки по стержню ($F_p^{(s)}$): $F^{(s)} = F_{\delta}^{(s)} + F_p^{(s)}$, при этом, первая компонента внутренних сил ($F_{\delta}^{(s)}$) связана с перемещениями узлов (δ) через матрицу жесткости элемента ($K_{\delta}^{(s)}$):

$$F^{(s)} = \begin{Bmatrix} F_{x0}^{(s)} \\ F_{y0}^{(s)} \\ M_0^{(s)} \\ F_{xl}^{(s)} \\ F_{yl}^{(s)} \\ M_l^{(s)} \end{Bmatrix} = K_{\delta}^{(s)} \cdot \begin{Bmatrix} u_0^{(s)} \\ v_0^{(s)} \\ \varphi_0^{(s)} \\ u_l^{(s)} \\ v_l^{(s)} \\ \varphi_l^{(s)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_{x0} \\ P_{y0} \\ \pi_0 \\ P_{xl} \\ P_{yl} \\ \pi_l \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

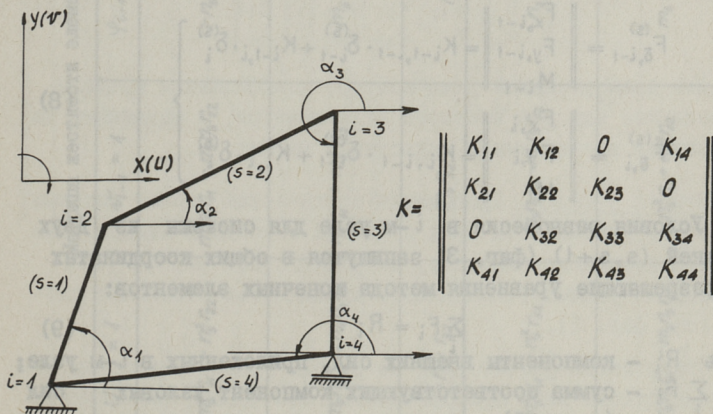
Матрица жесткости стержня (s) в общих координатах ($K_{\delta}^{(s)}$) устанавливается из следующих матричных преобразований. Известно, что



Фиг. 2. Матрица преобразования координат.



Фиг. 3. Произвольный узел рамы-контура.



Фиг. 4. Рама-контур произвольного очертания.

$$F_w^{(s)} = K_w^{(s)} \cdot w^{(s)}. \quad (4)$$

Преобразуя уравнение (4) путем умножения слева на матрицу преобразования координат L'_s :

$$L'_s \times | F_w^{(s)} = K_w^{(s)} \cdot w^{(s)}, \text{ где } w^{(s)} = L_s \cdot \delta^{(s)},$$

получим $L'_s \cdot F_w^{(s)} = L'_s \cdot K_w^{(s)} \cdot L_s \cdot \delta^{(s)}$, откуда $F_\delta^{(s)} = K_\delta^{(s)} \cdot \delta^{(s)}$,

$$\text{где } F_\delta^{(s)} = L'_s \cdot F_w^{(s)}; \quad K_\delta^{(s)} = L'_s \cdot K_w^{(s)} \cdot L_s. \quad (5)$$

Элементы матрицы жесткости (K_δ) для произвольного стержня (s) с узлами $i-1, i$ приводятся в таблице 2.

Там же выявляется блочная структура матрицы $K_\delta^{(s)}$:

$$K_\delta^{(s)} = \left\| \begin{array}{c|c} K_{i-1, i-1} & K_{i-1, i} \\ \hline K_{i, i-1} & K_{i, i} \end{array} \right\|. \quad (6)$$

Внутренние силы в узлах $i-1, i$, как функции перемещений узлов стержня s ($\delta_{i-1}^{(s)}, \delta_i^{(s)}$), будут определяться из матричного уравнения в блочной форме:

$$F_\delta^{(s)} = \left\| \begin{array}{c|c} K_{i-1, i-1} & K_{i-1, i} \\ \hline K_{i, i-1} & K_{i, i} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \delta_{i-1}^{(s)} \\ \delta_i^{(s)} \end{array} \right\|, \quad (7)$$

или в развернутой форме:

$$\left. \begin{aligned} F_{\delta, i-1}^{(s)} &= \left\| \begin{array}{c} F_{x, i-1} \\ F_{y, i-1} \\ M_{i-1} \end{array} \right\| = \left. \begin{array}{l} K_{i-1, i-1} \cdot \delta_{i-1}^{(s)} + K_{i-1, i} \cdot \delta_i^{(s)} \\ \\ \end{array} \right\} \\ F_{\delta, i}^{(s)} &= \left\| \begin{array}{c} F_{x, i} \\ F_{y, i} \\ M_i \end{array} \right\| = \left. \begin{array}{l} K_{i, i-1} \cdot \delta_{i-1}^{(s)} + K_{i, i} \cdot \delta_i^{(s)} \\ \\ \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Условия равновесия в i -м узле для системы из двух стержней (s, s+1) (фиг. 3) запишутся в общих координатах как разрешающие уравнения метода конечных элементов:

$$\sum_i F_i = R_i. \quad (9)$$

Здесь R_i - компоненты внешних сил, приложенных в i -м узле;
 $\sum_i F_i$ - сумма соответствующих компонент узловых сил (реакций), определяемая как сумма двух слагаемых:

$$\sum_i F_i = F_{\delta i} + F_{p i} = \sum_{s, s+1} \sum_m K_{i m} \cdot \delta_m \sum_{s, s+1} F_{p i},$$

где

$$m = i-1, i, i+1.$$

Матрица жесткости элемента (S) в общих координатах

$\bar{S}_i = 1$	$U_{i-1} = 1$	$\bar{N}_{i-1} = 1$	$\varphi_{i-1} = 1$	$U_i = 1$	$\bar{N}_i = 1$	$\varphi_i = 1$
$F_{y, i-1}$	$m_s^2 r_{44} + m_s^2 r_{22}$	$m_s r_{34} - m_s r_{52}$	$-r_s \cdot r_{23}$	$m_s^2 r_{44} + m_s^2 r_{25}$	$m_s r_{34} - m_s r_{525}$	$-r_s \cdot r_{26}$
$F_{y, i-1}$	$m_s r_{34} - m_s r_{52}$	$m_s^2 r_{44} + m_s^2 r_{22}$	$m_s \cdot r_{23}$	$m_s r_{34} - m_s r_{525}$	$m_s^2 r_{44} + m_s^2 r_{25}$	$m_s \cdot r_{26}$
M_{i-1}	$-m_s \cdot r_{32}$	$m_s r_{32}$	r_{33}	$-r_s r_{35}$	$m_s \cdot r_{35}$	r_{36}
$F_{y, i}$	$m_s^2 r_{44} + m_s^2 r_{32}$	$m_s r_{34} - m_s r_{52}$	$-r_s \cdot r_{33}$	$m_s^2 r_{44} + m_s^2 r_{55}$	$m_s r_{34} - m_s r_{55}$	$-r_s \cdot r_{36}$
$F_{y, i}$	$m_s r_{34} - m_s r_{52}$	$m_s^2 r_{44} + m_s^2 r_{32}$	$m_s \cdot r_{33}$	$m_s r_{34} - m_s r_{545}$	$m_s^2 r_{44} + m_s^2 r_{55}$	$m_s r_{36}$
M_i	$-m_s \cdot r_{62}$	$m_s r_{62}$	r_{63}	$-m_s r_{65}$	$m_s r_{65}$	r_{66}

Компонента внутренних сил от перемещений (F_{δ_i}) в произвольном i -м узле рамы-контура (где в каждом узле сходятся два стержня) определяется как сумма влияний от перемещений самого узла (δ_i) и двух смежных узлов (δ_{i-1}) и (δ_{i+1}):

$$F_{\delta_i} = K_{i,i-1} \cdot \delta_{i-1} + K_{i,i} \cdot \delta_i + K_{i,i+1} \cdot \delta_{i+1}. \quad (I0)$$

Для замкнутой рамы-контура произвольного очертания (см. фиг. 4) матрица (суперматрица) жесткости системы (K) имеет блочную форму с элементами - матрицами $K_{i,m}$ ($i, m = 1, 2, 3, 4$):

$$K = \begin{array}{c|cccc} i & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} \\ 2 & K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 \\ 3 & 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ 4 & K_{41} & 0 & K_{43} & K_{44} \end{array} \quad (II)$$

Общая форма коэффициентов матрицы жесткости рамы-контура произвольного очертания приводится в таблице 3.

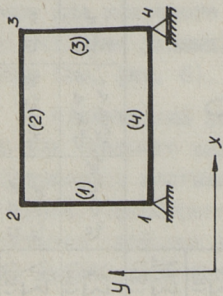
Матрица внутренних сил (F_{δ}) от перемещений узлов определится из матричного уравнения $F_{\delta} = K \cdot \delta$ или в развернутой форме:

$$F_{\delta} = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cccc} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & 0 & K_{43} & K_{44} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{array} \right\|. \quad (I2)$$

Для прямоугольной рамы-контура коэффициенты матрицы определяются как для частного вида контура, с заданными направлениями косинусами и приводятся на фиг. 5.

Второй уровень. Проводится статический расчет системы контуров с учетом всех трех степеней свободы в каждом узле рамы для конечного элемента, выбранного как контур-рама (с четырьмя узлами), обладающего двенадцатью степенями свободы (см. фиг. 6).

Статический расчет рамы на втором уровне иллюстрируется для частного вида прямоугольного конечного элемента, обладающего вертикальной (или ортогональной) упругой симметрией. Пренебрегая продольными деформациями стержней и учитывая свойства упругой симметрии контура, строится базис линейно-независимых перемещений (фиг. 7 а) и им соот-



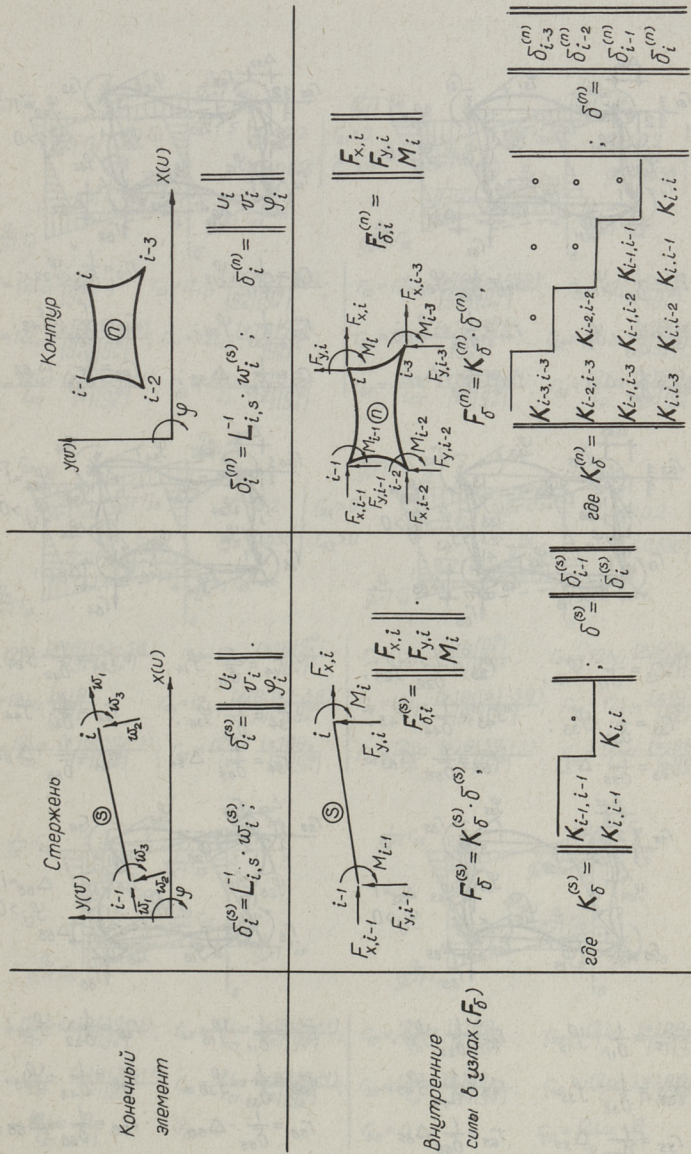
\backslash	$\cos \alpha_{ij} = m_s$	$\sin \alpha_{ij} = r_s$
1	0	1
2	1	0
3	0	-1
4	-1	0

K_{11}	K_{12}	0	K_{13}
K_{21}	K_{22}	K_{23}	0
0	K_{32}	K_{33}	K_{34}
K_{41}	0	K_{43}	K_{44}

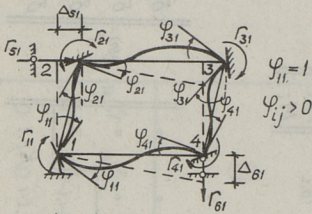
$K =$

\backslash	1	2	3	4
$\sum X_i$	$r_{44}^{(1)} + r_{22}^{(1)}$	$r_{52}^{(1)}$		$r_{44}^{(1)}$
$\sum Y_i$	0	0	0	0
$\sum M_i$	$-r_{32}^{(1)}$	$-r_{62}^{(1)}$		$-r_{35}^{(1)}$
$\sum X_i$	$r_{25}^{(1)}$	$r_{55}^{(1)} + r_{44}^{(1)}$	$r_{44}^{(2)}$	
$\sum Y_i$	0	0	0	0
$\sum M_i$	$-r_{35}^{(1)}$	$-r_{65}^{(1)}$	$r_{44}^{(2)}$	
$\sum X_i$				
$\sum Y_i$				
$\sum M_i$				
$\sum X_i$				
$\sum Y_i$				
$\sum M_i$				
$\sum X_i$	$r_{44}^{(1)}$	0	0	$r_{55}^{(1)}$
$\sum Y_i$	0	0	0	0
$\sum M_i$	$-r_{35}^{(1)}$	$-r_{65}^{(1)}$	$r_{44}^{(2)}$	$r_{65}^{(1)}$
$\sum X_i$				
$\sum Y_i$				
$\sum M_i$				
$\sum X_i$	$r_{44}^{(1)}$	0	0	$r_{55}^{(1)}$
$\sum Y_i$	0	0	0	0
$\sum M_i$	$-r_{35}^{(1)}$	$-r_{65}^{(1)}$	$r_{44}^{(2)}$	$r_{65}^{(1)}$
$\sum X_i$				
$\sum Y_i$				
$\sum M_i$				
$\sum X_i$	$r_{44}^{(1)}$	0	0	$r_{55}^{(1)}$
$\sum Y_i$	0	0	0	0
$\sum M_i$	$-r_{35}^{(1)}$	$-r_{65}^{(1)}$	$r_{44}^{(2)}$	$r_{65}^{(1)}$

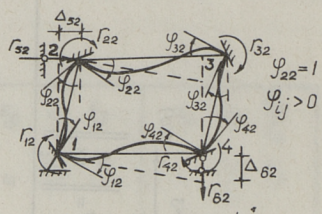
Фиг. 5. Матрица жесткости прямоугольной рамы-контра.



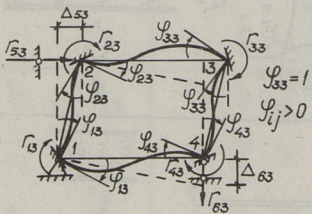
Фиг. 6. Конечные элементы рамы.



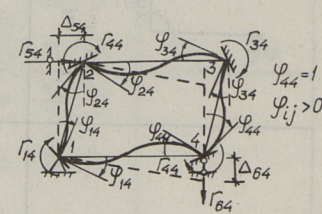
$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{1}{\delta_{11}} \cdot \varphi_{11}; & r_{21} &= \frac{1}{\delta_{22}} \cdot \varphi_{21}; \\ r_{31} &= \frac{1}{\delta_{33}} \cdot \varphi_{31}; & r_{41} &= \frac{1}{\delta_{44}} \cdot \varphi_{41}; \\ r_{51} &= \frac{1}{\delta_{55}} \cdot \Delta 51; & r_{61} &= \frac{1}{\delta_{66}} \cdot \Delta 61. \end{aligned}$$



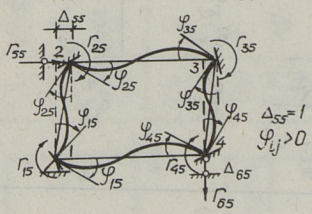
$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{1}{\delta_{11}} \cdot \varphi_{12}; & r_{22} &= \frac{1}{\delta_{22}} \cdot \varphi_{22}; \\ r_{32} &= \frac{1}{\delta_{33}} \cdot \varphi_{32}; & r_{42} &= \frac{1}{\delta_{44}} \cdot \varphi_{42}; \\ r_{52} &= \frac{1}{\delta_{55}} \cdot \Delta 52; & r_{62} &= \frac{1}{\delta_{66}} \cdot \Delta 62. \end{aligned}$$



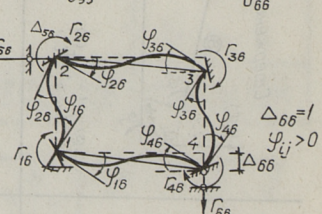
$$\begin{aligned} r_{13} &= \frac{1}{\delta_{11}} \cdot \varphi_{13}; & r_{23} &= \frac{1}{\delta_{22}} \cdot \varphi_{23}; \\ r_{33} &= \frac{1}{\delta_{33}} \cdot \varphi_{33}; & r_{43} &= \frac{1}{\delta_{44}} \cdot \varphi_{43}; \\ r_{53} &= \frac{1}{\delta_{55}} \cdot \Delta 53; & r_{63} &= \frac{1}{\delta_{66}} \cdot \Delta 63. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} r_{14} &= \frac{1}{\delta_{11}} \cdot \varphi_{14}; & r_{24} &= \frac{1}{\delta_{22}} \cdot \varphi_{24}; \\ r_{34} &= \frac{1}{\delta_{33}} \cdot \varphi_{34}; & r_{44} &= \frac{1}{\delta_{44}} \cdot \varphi_{44}; \\ r_{54} &= \frac{1}{\delta_{55}} \cdot \Delta 54; & r_{64} &= \frac{1}{\delta_{66}} \cdot \Delta 64. \end{aligned}$$

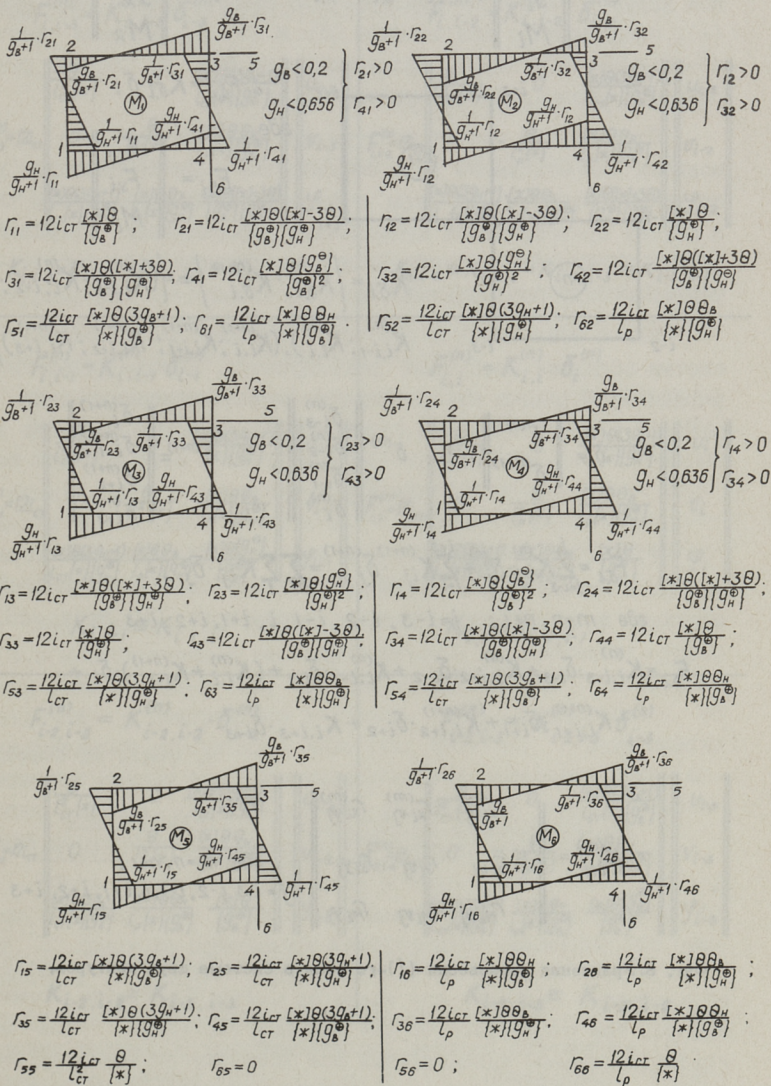


$$\begin{aligned} r_{15} &= \frac{1}{\delta_{11}} \cdot \varphi_{15}; & r_{25} &= \frac{1}{\delta_{22}} \cdot \varphi_{25}; \\ r_{35} &= \frac{1}{\delta_{33}} \cdot \varphi_{35}; & r_{45} &= \frac{1}{\delta_{44}} \cdot \varphi_{45}; \\ r_{55} &= \frac{1}{\delta_{55}} \cdot \Delta 55; & r_{65} &= \frac{1}{\delta_{66}} \cdot \Delta 65. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} r_{16} &= \frac{1}{\delta_{11}} \cdot \varphi_{16}; & r_{26} &= \frac{1}{\delta_{22}} \cdot \varphi_{26}; \\ r_{36} &= \frac{1}{\delta_{33}} \cdot \varphi_{36}; & r_{46} &= \frac{1}{\delta_{44}} \cdot \varphi_{46}; \\ r_{56} &= \frac{1}{\delta_{55}} \cdot \Delta 56; & r_{66} &= \frac{1}{\delta_{66}} \cdot \Delta 66. \end{aligned}$$

Фиг. 7а. Базис кинематического расчета.



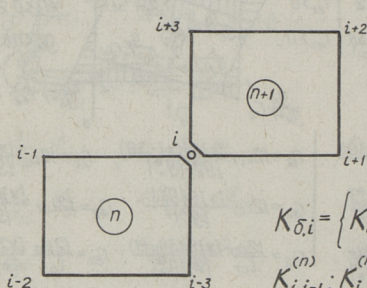
Фиг. 76. Эпюры внутренних сил (M_i) для контура с вертикальной осью упругой симметрии.

Система разрешающих уравнений МКЭ:

$$\Sigma F_i = R_i$$

Здесь:

$$F_i = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \end{Bmatrix}; \quad F_i = F_{\delta,i} + F_{p,i}; \quad R_i = \begin{Bmatrix} X_R \\ Y_R \\ M_R \end{Bmatrix}$$



$$F_{\delta,i} = K_{\delta,i} \cdot \delta;$$

где

$$F_{\delta,i} = \begin{Bmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \\ M_i \end{Bmatrix}$$

$$K_{\delta,i} = \left\{ K_{\delta,i}^{(n)}, K_{\delta,i}^{(n+1)} \right\} = \left\{ (K_{i,i-3}^{(n)}; K_{i,i-2}^{(n)}; K_{i,i-1}^{(n)}; K_{i,i}^{(n)}), (K_{i,i}^{(n+1)}; K_{i,i+1}^{(n+1)}; K_{i,i+2}^{(n+1)}; K_{i,i+3}^{(n+1)}) \right\}$$

$$\delta = \begin{Bmatrix} \delta^{(n)} \\ \delta^{(n+1)} \end{Bmatrix}; \quad \delta^{(n)} = \begin{Bmatrix} \delta_{i-3}^{(n)} \\ \delta_{i-2}^{(n)} \\ \delta_{i-1}^{(n)} \\ \delta_i^{(n)} \end{Bmatrix}; \quad \delta^{(n+1)} = \begin{Bmatrix} \delta_i^{(n+1)} \\ \delta_{i+1}^{(n+1)} \\ \delta_{i+2}^{(n+1)} \\ \delta_{i+3}^{(n+1)} \end{Bmatrix}$$

$$F_{\delta,i} = \sum_{j=i-3}^i K_{ij}^{(n)} \cdot \delta_j^{(n)} + \sum_{j=i}^{i+3} K_{ij}^{(n+1)} \cdot \delta_j^{(n+1)} = \sum_m \sum_j K_{ij} \cdot \delta_j,$$

где $m=n, n+1$; $j=i-3, i-2, i-1, i, i+1, i+2, i+3$.

$$F_{\delta,i} = K_{i,i-3}^{(n)} \cdot \delta_{i-3}^{(n)} + K_{i,i-2}^{(n)} \cdot \delta_{i-2}^{(n)} + K_{i,i-1}^{(n)} \cdot \delta_{i-1}^{(n)} + (K_{i,i}^{(n)} + K_{i,i}^{(n+1)}) \cdot \delta_i + K_{i,i+1}^{(n+1)} \cdot \delta_{i+1} + K_{i,i+2}^{(n+1)} \cdot \delta_{i+2} + K_{i,i+3}^{(n+1)} \cdot \delta_{i+3}$$

$$K_{i,j}^{(m)} = \begin{Bmatrix} \Gamma_{x_i u_j}^{(m)} & \Gamma_{x_i v_j}^{(m)} & \Gamma_{x_i \varphi_j}^{(m)} \\ \Gamma_{y_i u_j}^{(m)} & \Gamma_{y_i v_j}^{(m)} & \Gamma_{y_i \varphi_j}^{(m)} \\ \Gamma_{M_i u_j}^{(m)} & \Gamma_{M_i v_j}^{(m)} & \Gamma_{M_i \varphi_j}^{(m)} \end{Bmatrix}, \quad \text{где } m=n, n+1; \\ j=i-3, i-2, i-1, i, i+1, i+2, i+3$$

Фиг. 8. Уравнения равновесия (i)-го узла в системе двух контуров.

Элементы матрицы жесткости контура ($K_{\sigma}^{(n)}$) с вертикальной осью упругой симметрии, как конечного элемента рамы

$$F_{i,i-3}^{(n)} = K_{i,i-3}^{(n)} \cdot \delta_{i-3}^{(n)}$$

$$F_{i,i-3}^{(n)} = 12I_{CT} \begin{vmatrix} -\frac{\theta}{l_{CT}^2 [x]} & 0 & \frac{[x]\theta(3g_{\sigma}+1)}{l_{CT}[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} \\ 0 & \frac{\theta}{l_p^2 [x]} & \frac{[x]\theta\theta_H}{l_p[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} \\ \frac{[x]\theta(3g_{\sigma}+1)}{l_{CT}[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} & \frac{[x]\theta\theta_H}{l_p[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} & \frac{[x]\theta([x]-3\theta)}{g_{\sigma}^{\oplus}\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_{i-3} \\ V_{i-3} \\ \varphi_{i-3} \end{vmatrix}$$

$$K_{i,i-3} \equiv K_{i-3,i} \equiv K_{i-2,i-1} \equiv K_{i-1,i-2}$$

$$F_{i,i-2}^{(n)} = K_{i,i-2}^{(n)} \cdot \delta_{i-2}^{(n)}$$

$$F_{i,i-2}^{(n)} = 12I_{CT} \begin{vmatrix} -\frac{\theta}{l_{CT}^2 [x]} & 0 & \frac{[x]\theta(3g_{\sigma}+1)}{l_{CT}[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} \\ 0 & -\frac{\theta}{l_p^2 [x]} & \frac{[x]\theta\theta_H}{l_p[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} \\ \frac{[x]\theta(3g_{\sigma}+1)}{l_{CT}[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} & \frac{[x]\theta\theta_H}{l_p[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} & \frac{[x]\theta([x]-3\theta)}{g_{\sigma}^{\oplus}\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_{i-2} \\ V_{i-2} \\ \varphi_{i-2} \end{vmatrix}$$

$$K_{i,i-2} \equiv K_{i-2,i} \equiv K_{i-1,i-3} \equiv K_{i-3,i-1}$$

$$F_{i,i-1}^{(n)} = K_{i,i-1}^{(n)} \cdot \delta_{i-1}^{(n)}$$

$$F_{i,i-1}^{(n)} = 12I_{CT} \begin{vmatrix} \frac{\theta}{l_{CT}^2 [x]} & 0 & \frac{[x]\theta(3g_{\sigma}+1)}{[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} \\ 0 & -\frac{\theta}{l_p^2 [x]} & \frac{[x]\theta\theta_H}{l_p[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} \\ \frac{[x]\theta(3g_{\sigma}+1)}{l_{CT}[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} & \frac{[x]\theta\theta_H}{l_p[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} & \frac{[x]\theta\{g_{\sigma}^{\oplus}\}}{g_{\sigma}^{\oplus}\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_{i-1} \\ V_{i-1} \\ \varphi_{i-1} \end{vmatrix}$$

$$K_{i,i-1} \equiv K_{i-1,i}$$

$$F_{i,i}^{(n)} = K_{i,i}^{(n)} \cdot \delta_i^{(n)}$$

$$F_{i,i}^{(n)} = 12I_{CT} \begin{vmatrix} \frac{\theta}{l_{CT}^2 [x]} & 0 & \frac{[x]\theta(3g_{\sigma}+1)}{l_{CT}[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} \\ 0 & \frac{\theta}{l_p^2 [x]} & \frac{[x]\theta\theta_H}{l_p[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} \\ \frac{[x]\theta(3g_{\sigma}+1)}{l_{CT}[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} & \frac{[x]\theta\theta_H}{l_p[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} & \frac{[x]\theta}{g_{\sigma}^{\oplus}\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_i \\ V_i \\ \varphi_i \end{vmatrix}$$

$$K_{i,i} \equiv K_{i-1,i-1}$$

$$F_{i-2,i-2}^{(n)} = K_{i-2,i-2}^{(n)} \cdot \delta_{i-2}^{(n)}$$

$$F_{i-2,i-2}^{(n)} = 12I_{CT} \begin{vmatrix} \frac{\theta}{l_{CT}^2 [x]} & 0 & \frac{[x]\theta(3g_{\sigma}+1)}{l_{CT}[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} \\ 0 & \frac{\theta}{l_p^2 [x]} & \frac{[x]\theta\theta_H}{l_p[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} \\ \frac{[x]\theta(3g_{\sigma}+1)}{l_{CT}[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} & \frac{[x]\theta\theta_H}{l_p[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} & \frac{[x]\theta}{g_{\sigma}^{\oplus}\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_{i-2} \\ V_{i-2} \\ \varphi_{i-2} \end{vmatrix}$$

$$K_{i-2,i-2} \equiv K_{i-3,i-3}$$

$$F_{i-2,i-3}^{(n)} = K_{i-2,i-3}^{(n)} \cdot \delta_{i-3}^{(n)}$$

$$F_{i-2,i-3}^{(n)} = 12I_{CT} \begin{vmatrix} \frac{\theta}{l_{CT}^2 [x]} & 0 & \frac{[x]\theta(3g_{\sigma}+1)}{l_{CT}[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} \\ 0 & -\frac{\theta}{l_p^2 [x]} & \frac{[x]\theta\theta_H}{l_p[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} \\ \frac{[x]\theta(3g_{\sigma}+1)}{l_{CT}[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} & \frac{[x]\theta\theta_H}{l_p[x]\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} & \frac{[x]\theta\{g_{\sigma}^{\oplus}\}}{g_{\sigma}^{\oplus}\{g_{\sigma}^{\oplus}\}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_{i-3} \\ V_{i-3} \\ \varphi_{i-3} \end{vmatrix}$$

$$K_{i-2,i-3} \equiv K_{i-3,i-2}$$

ветствующих внутренних сил и реакций (фиг. 7 б). Элементы матрицы жесткости контура ($K_{\delta}^{(n)}$), как конечного элемента рамы, приводятся в табл. 4. При этом учитываются свойства взаимности элементов матрицы ($K_{\delta}^{(n)}$), вытекающие из вертикальной упругой симметрии контура. Для произвольного узла рамы (i), соединяющего два контура (n) и ($n+1$), матрица жесткости имеет структуру, приведенную на фиг. 8. Система разрешающих уравнений МКЭ приводится там же.

Статический расчет контура или системы контуров проводится для заданного вида воздействия с учетом краевых условий на границе. При этом с очевидностью выявляется, что в случае пренебрежения продольными деформациями стержней расчет рамы методом конечных элементов совпадает с расчетом по методу перемещений (см. [1]).

МКЭ в приложении к расчету и оптимизации стержневых систем обладает свойствами регулярности, хорошо удовлетворяющим требованиям алгоритмизации при постановке задачи расчета и проектирования сложных рамных систем на ЭВМ.

Л и т е р а т у р а

И. Иегги Э.М., Коппель П.И. Аналогия метода сил и метода перемещений при анализе свойств рамной конструкции в пространстве весовых параметров. См. наст. сб., с.3.

E. Jögi, P. Koppel

An Application of the Finite Elements Method on the Optimum Problem of Plane Framed Structures

Summary

The paper deals with a statical calculation method of a contour frame in any shape by using the Finite Elements Method. The comparison of the FEM and the slope and deflections method demonstrates the identity of the optimum problem solutions on a plane framed redundant structure.

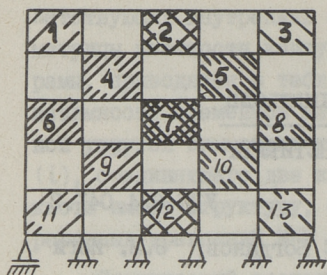
СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ И ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ МНОГОКОНТУРНЫХ РАМ

Статический расчет и оптимальное проектирование многоконтурных рам представляет собой сложную многопараметрическую задачу с числом параметров управления, в общем случае, равным числу элементов рамы без единицы.

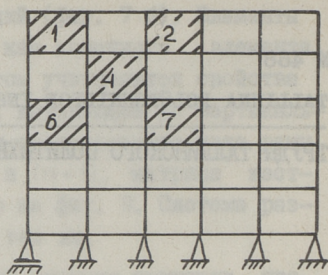
Многоконтурная рамная система может рассматриваться как совокупность контуров-рам, при этом контур-рама выступает как конечный элемент многоконтурной рамы. При таком рассмотрении системы степень статической неопределимости рамы в целом значительно понижается, а параметры управления системой разделяются, позволяя доводить решение оптимизационной задачи до численного результата.

Можно показать, что статический расчет любого контура (n) в многоконтурной раме приводится к разрешающему уравнению семи моментов так, что для каждой группы контуров-звездочки с центральным контуром (n_0), выделенной по определенному алгоритму в раме (см. фиг. 1), разрешающие уравнения метода сил представляются как уравнения семи моментов в узлах. Расчетная схема звездочки и структура уравнений неразрывности в узлах рамы представлены на фиг. 2.

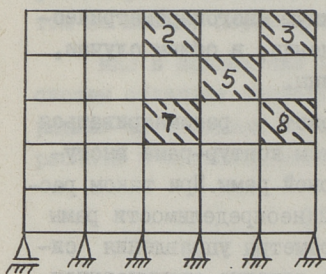
Общая форма уравнения семи моментов для i -го узла в раме, соединяющего контуры (n) и ($n+1$), представлена на фиг. 3. Здесь же приводятся коэффициенты уравнения при неизвестных $M_j - \Delta_i(M_j)$, для $j = i-3, i-2, i-1, i, i+1, i+2, i+3$, как функции приведенных податливостей контура - $B_{ij}^{(k)}$, зависящих только от внутриконтурных весовых параметров $(q_s)^{(k)}$ этого K -го контура, где $K = n, n+1$. Приведенная податливость контура $B_{ij}^{(k)}$ описывается как алгебраическая сум-



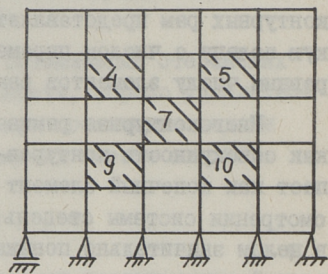
Расчетная схема рамы



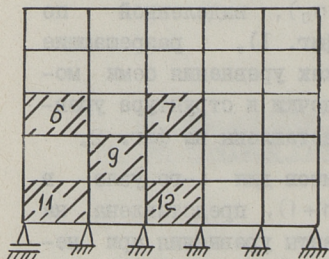
1^я звездочка $n_0 = 4$



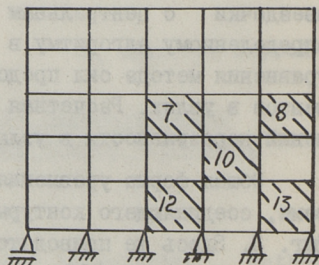
2^я звездочка $n_0 = 5$



3^я звездочка $n_0 = 7$

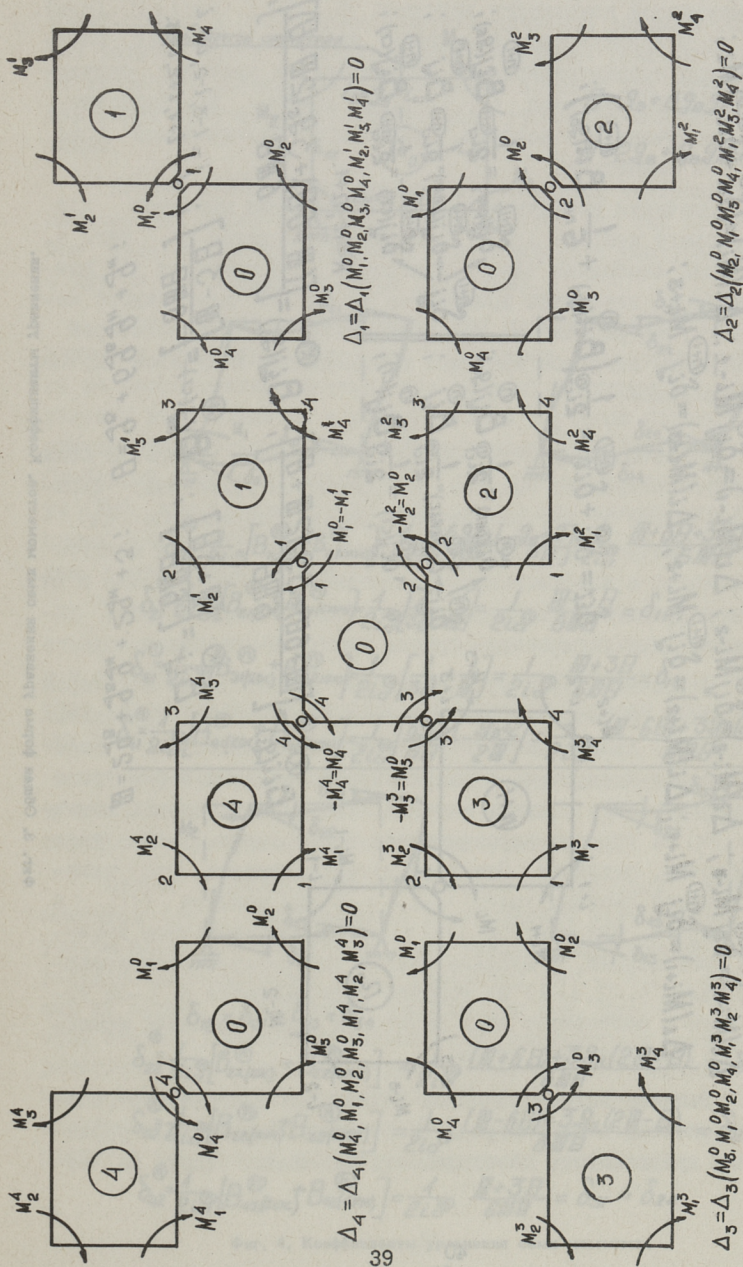


4^я звездочка $n_0 = 9$



5^я звездочка $n_0 = 10$

Фиг. 1. Алгоритм формирования звездочек в многоконтурной раме с центральным контуром n_0 .

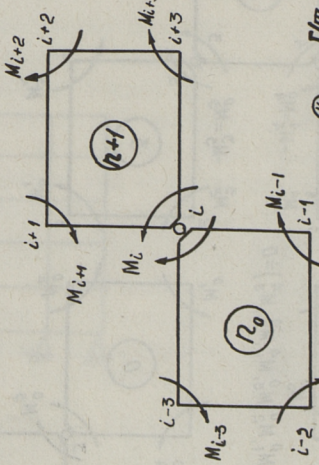


фиг. 2. Расчетная схема звездочки.

$$\Delta_i = \Delta_i(M_{i-3}) + \Delta_i(M_{i-2}) + \Delta_i(M_{i-1}) + \Delta_i(M_i) + \Delta_i(M_{i+1}) + \Delta_i(M_{i+2}) + \Delta_i(M_{i+3}) + \Delta_{ip} = 0$$

$$\Delta_i(M_{i-3}) = \delta_{ij}^{(0)} M_{i-3}; \quad \Delta_i(M_{i-2}) = \delta_{ij}^{(0)} M_{i-2}; \quad \Delta_i(M_{i-1}) = \delta_{ij}^{(0)} M_{i-1}; \quad \Delta_i(M_i) = (\delta_{ii}^{(0)} + \delta_{ii}^{(n+1)}) M_i;$$

$$\Delta_i(M_{i+1}) = \delta_{ij}^{(n+1)} M_{i+1}; \quad \Delta_i(M_{i+2}) = \delta_{ij}^{(n+1)} M_{i+2}; \quad \Delta_i(M_{i+3}) = \delta_{ij}^{(n+1)} M_{i+3};$$



$$\delta_{ii}^{(0)} = \delta_{ii}^{(0)} + \delta_{ii}^{(n+1)} = \frac{1}{2i_{cr}^{(0)}} (B_{ii}(q_M) + \frac{1}{6} \frac{P_{n+1}}{P_{n+1}} B_{ii}(q_B));$$

$$\delta_{ij}^{(0)} \begin{cases} \delta_{ij}^{(0)}(PM) = \frac{1}{2i_{cr}^{(0)}} B_{ij}(q_M); \\ \delta_{ij}^{(0)}(AM) = \frac{1}{2i_{cr}^{(0)}} B_{ij}; \\ \delta_{ij}^{(0)}(CT) = \frac{1}{2i_{cr}^{(0)}} B_{ij}(CT); \end{cases} \quad \delta_{ij}^{(n+1)} \begin{cases} \delta_{ij}^{(n+1)}(PM) = \frac{1}{2i_{cr}^{(n+1)}} B_{ij}(q_B); \\ \delta_{ij}^{(n+1)}(AM) = \frac{1}{2i_{cr}^{(n+1)}} B_{ij}; \\ \delta_{ij}^{(n+1)}(CT) = \frac{1}{2i_{cr}^{(n+1)}} B_{ij}(CT); \end{cases}$$

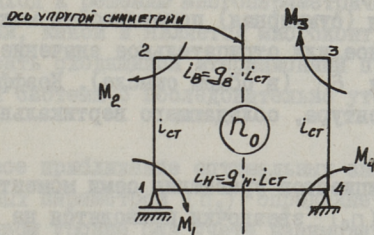
$K = R, R+1.$

$$B_{ii}(q_S)^{(K)} = \frac{[H + 6H] + 3q_S(2H + H)}{6HH}; \quad B_{ij}(q_S)^{(K)} = \frac{[H - 6H] + 3q_S(2H - H)}{6HH};$$

$$B_{ij}^{(K)} = \frac{[H + 3H]}{6HH}; \quad B_{ij}^{(K)}(CT) = \frac{[H - 3H]}{6HH}; \quad j = i-3, i-2, i-1, i, i+1, i+2, i+3.$$

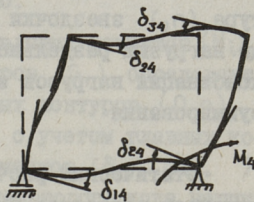
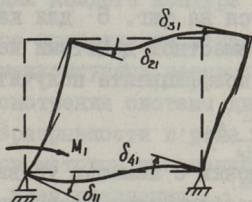
$$H = 2q_B + q_{B^*M} + 2q_M + 3; \quad H = q_B + 6q_{0M} + q_M;$$

Фиг. 3. Общая форма уравнения семи моментов, Коэффициенты уравнения.



$$B = g_B + 6g_B g_H + g_H ;$$

$$\mathbb{H} = 2g_B + g_B g_H + 2g_H + 3 ;$$

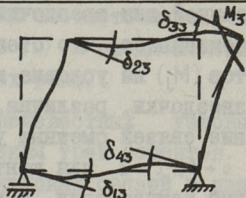
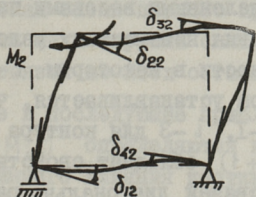


$$\delta_{44}^{(1)} = \frac{1}{2i_{CT}} [B_{44}^{(1)} + B_{44}^{(2)}] = \frac{1}{2i_{CT}} \left[\frac{6g_B + 1}{6B} + \frac{g_B + 2}{2\mathbb{H}} \right] = \frac{1}{2i_{CT}} \frac{\mathbb{H} + 6B + 3g_B(2\mathbb{H} + B)}{6B\mathbb{H}} = \delta_{44}$$

$$\delta_{21}^{(1)} = \frac{1}{2i_{CT}} [B_{21}^{(1)} + B_{21}^{(2)}] = \frac{1}{2i_{CT}} \left[\frac{1}{3B} - \frac{1}{\mathbb{H}} \right] = \frac{1}{2i_{CT}} \frac{\mathbb{H} - 3B}{6B\mathbb{H}} = \delta_{12} ;$$

$$\delta_{31}^{(1)} = \frac{1}{2i_{CT}} [B_{31}^{(1)} + B_{31}^{(2)}] = \frac{1}{2i_{CT}} \left[\frac{1}{3B} + \frac{1}{\mathbb{H}} \right] = \frac{1}{2i_{CT}} \frac{\mathbb{H} + 3B}{6B\mathbb{H}} = \delta_{13}$$

$$\delta_{41}^{(1)} = \frac{1}{2i_{CT}} [B_{41}^{(1)} + B_{41}^{(2)}] = \frac{1}{2i_{CT}} \left[\frac{6g_B + 1}{6B} - \frac{g_B + 2}{2\mathbb{H}} \right] = \frac{1}{2i_{CT}} \frac{(\mathbb{H} - 6B) + 3g_B(2\mathbb{H} - B)}{6B\mathbb{H}} = \delta_{41}$$



$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{43} = \delta_{34}$$

$$\delta_{22}^{(1)} = \frac{1}{2i_{CT}} [B_{22}^{(1)} + B_{22}^{(2)}] = \frac{1}{2i_{CT}} \frac{(\mathbb{H} + 6B) + 3g_B(2\mathbb{H} + B)}{6B\mathbb{H}} = \delta_{33}$$

$$\delta_{32}^{(1)} = \frac{1}{2i_{CT}} [B_{32}^{(1)} + B_{32}^{(2)}] = \frac{1}{2i_{CT}} \frac{(\mathbb{H} - 6B) + 3g_B(2\mathbb{H} - B)}{6B\mathbb{H}} = \delta_{23}$$

$$\delta_{42}^{(1)} = \frac{1}{2i_{CT}} [B_{42}^{(1)} + B_{42}^{(2)}] = \frac{1}{2i_{CT}} \frac{\mathbb{H} + 3B}{6B\mathbb{H}} = \delta_{31} = \delta_{24}$$

Фиг. 4. Коэффициенты уравнения семи моментов.

ма податливостей контура в i -м направлении (узел i) от j -ых воздействий (M_j) раздельно от симметричной и косо-симметричной компоненты нагрузки $V_{ij}^{(k)} = V_{ij}^{(k)}(\text{кос}) + V_{ij}^{(k)}(\text{сим})$. При этом приведенная (суммарная) податливость может получить или положительное или отрицательное значение, определяя знак перемещения δ_{ij} (в общем смысле). Коэффициенты δ_{ij} получены для контура, обладающего вертикальной осью упругой симметрии.

Значения коэффициентов уравнения семи моментов для некоторого контура (n_0) звездочки приводятся на фиг. 4. Значения свободных членов уравнения семи моментов для контура (n_0) звездочки приводятся на фиг. 5 для каждого кода нагрузки раздельно. При совместном действии некоторой комбинации нагрузок значение коэффициента получится путем суммирования

$$\Delta_{ip}^{\sum K_n} = \sum_{K_n} \Delta_{ip}$$

Статический расчет звездочки с помощью уравнения семи моментов позволяет выделить коэффициенты уравнения, зависящие только от внутриконтурных весовых параметров (g_s) — как параметров управления при оптимизации каждого контура раздельно, и коэффициентов уравнений, зависящих также и от межконтурных весовых параметров (G_n) — как параметров управления при оптимизации группы контуров-звездочки.

Матричная форма уравнений семи моментов для некоторой звездочки с разделенными весовыми параметрами приводится на фиг. 6. Анализ системы уравнений семи моментов, записанной для звездочки, с разделенными весовыми параметрами показывает, что степень влияния неизвестных узловых моментов (M_j) на условие неразрывности в некотором i -ом узле звездочки, различна. При этом устанавливается, что влияние связей смежных узлов $i-1, i-3$ для контура (n) и $i+1, i+3$ для контура ($n+1$) обладает свойством взаимной компенсации, а влияние связей диагонально расположенных узлов ($i-2, i+2$) на условие неразрывности в i -ом узле хотя и составляет лишь некоторую долю влияния момента M_i , должно быть учтено.

Решение оптимизационной задачи для многопараметрической системы в многомерном пространстве параметров управления предполагает необходимость разбиения задачи на от-

дельные этапы, с выделением параметров управления, существенно влияющих на результат оптимизации на каждом этапе. Такой подход к решению многопараметрической оптимизационной задачи, какой и является многоконтурная рама, позволяет построить сходящийся итерационный процесс для оптимизации общей системы с последовательно уточняющимися приближениями.

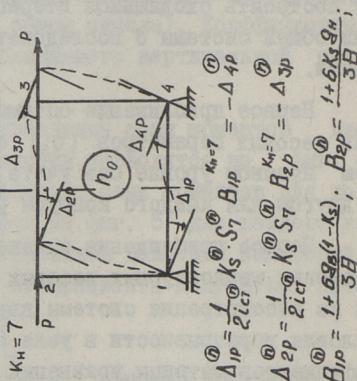
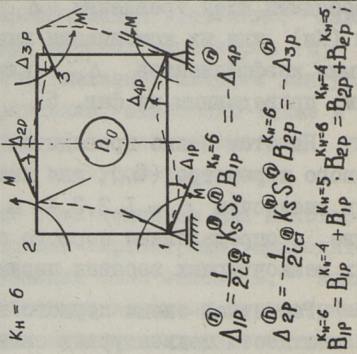
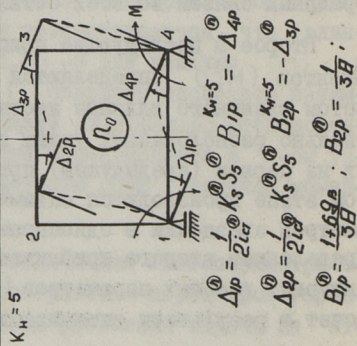
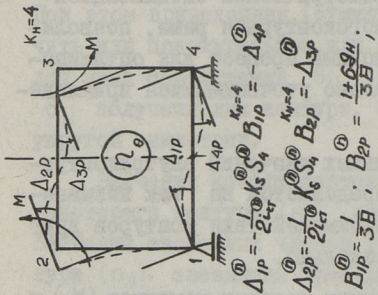
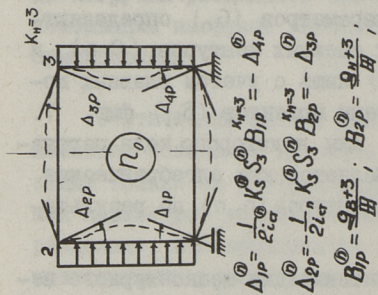
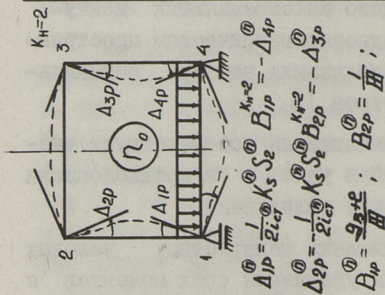
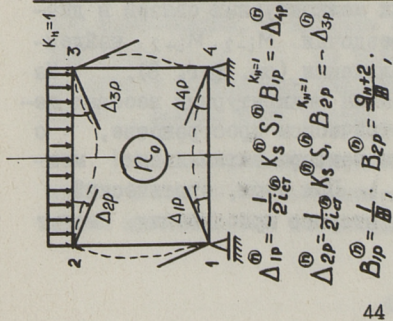
Первое приближение оптимальных значений внутриконтурных весовых параметров (q_s) определяется на так называемом нулевом уровне без учета взаимодействия контуров друг с другом для каждого контура отдельно.

Первое приближение неизвестных узловых моментов (M_i) и значения межконтурных весовых параметров (G_n) определяются из рассмотрения системы двух смежных контуров ($0, n$) и условия неразрывности в узле (i) лишь с учетом главных коэффициентов матрицы уравнений семи моментов (δ_{ii}) фиг. 7. Свободный член уравнения $\Delta_{ip}^{(K_n)}$ для некоторого кода нагрузки (K_n) или их комбинации вычисляется как алгебраическая сумма коэффициентов $\Delta_{ip}^{(n)}$ для контуров (n_0, n) по результатам, приведенным на фиг. 5.

На этом этапе проводится оптимизация межконтурного весового параметра (G_n), для каждого из обрамляющих контуров звездочки $n = 1, 2, 3, 4$ в однопараметрическом пространстве, с определением первого приближения вектора оптимальных межконтурных весовых параметров (G_n).

Расчетная схема первого приближения соответствует учету жесткости межконтурных связей в узле (i) и предположению шарнирных связей во всех остальных узлах рамы.

Второе и последующие приближения неизвестных узловых моментов ($M_i^{(k)}$) определяются из уравнения трех моментов с учетом взаимного влияния жестких межконтурных связей в диагонально расположенных узлах звездочки M_{i-2}, M_{i+2} , найденных на первом (предыдущем) приближении (см. фиг. 8). На этом этапе производится оптимизация межконтурных весовых параметров звездочки в однопараметрическом пространстве, с определением второго приближения вектора оптимальных межконтурных весовых параметров (G_n). При этом, статический расчет и результаты оптимизации второго приближения могут



Фиг. 5. Свободные члены уравнения семи моментов.

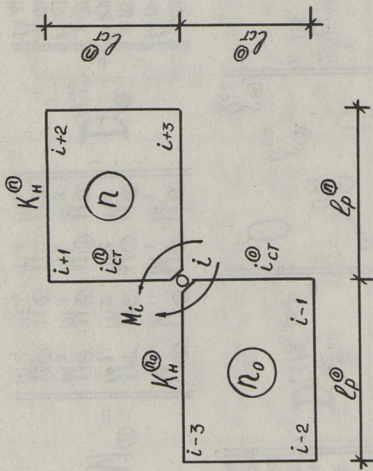
$$\begin{aligned}
 \Delta_1 = 0 &\rightarrow \delta_{41}^{(0)} M_1^{(0)} + \delta_{12}^{(0)} M_2^{(0)} + \delta_{13}^{(0)} M_3^{(0)} + \delta_{14}^{(0)} M_4^{(0)} + \delta_{41}^{(1)} M_1^{(1)} + \delta_{12}^{(1)} M_2^{(1)} + \delta_{13}^{(1)} M_3^{(1)} + \delta_{14}^{(1)} M_4^{(1)} + \Delta_{1p}^{(0)} + \Delta_{1p}^{(1)} = 0 \\
 \Delta_2 = 0 &\rightarrow \delta_{21}^{(0)} M_1^{(0)} + \delta_{22}^{(0)} M_2^{(0)} + \delta_{23}^{(0)} M_3^{(0)} + \delta_{24}^{(0)} M_4^{(0)} + \delta_{21}^{(1)} M_1^{(1)} + \delta_{22}^{(1)} M_2^{(1)} + \delta_{23}^{(1)} M_3^{(1)} + \delta_{24}^{(1)} M_4^{(1)} + \Delta_{2p}^{(0)} + \Delta_{2p}^{(1)} = 0 \\
 \Delta_3 = 0 &\rightarrow \delta_{31}^{(0)} M_1^{(0)} + \delta_{32}^{(0)} M_2^{(0)} + \delta_{33}^{(0)} M_3^{(0)} + \delta_{34}^{(0)} M_4^{(0)} + \delta_{31}^{(1)} M_1^{(1)} + \delta_{32}^{(1)} M_2^{(1)} + \delta_{33}^{(1)} M_3^{(1)} + \delta_{34}^{(1)} M_4^{(1)} + \Delta_{3p}^{(0)} + \Delta_{3p}^{(1)} = 0 \\
 \Delta_4 = 0 &\rightarrow \delta_{41}^{(0)} M_1^{(0)} + \delta_{42}^{(0)} M_2^{(0)} + \delta_{43}^{(0)} M_3^{(0)} + \delta_{44}^{(0)} M_4^{(0)} + \delta_{41}^{(1)} M_1^{(1)} + \delta_{42}^{(1)} M_2^{(1)} + \delta_{43}^{(1)} M_3^{(1)} + \delta_{44}^{(1)} M_4^{(1)} + \Delta_{4p}^{(0)} + \Delta_{4p}^{(1)} = 0
 \end{aligned}$$

$$D^{(0)} M^{(0)} + D^{(1)} \times M^{(1)} + D_p^{(0)} + D_p^{(1)} = 0 \Rightarrow (D_{(g_s)}^{(0)} + D_{i,l}(g_s^n, \epsilon_n)) M^{(0)} + \bar{D}^{(1)} \times M^{(1)} + D_{(g_s)}^{(0)} + D_{p(g_s)}^{(1)} = 0$$

Т.К. $M_i^{(n)} = M_i^{n-i}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned}
 D_{(g_s)}^{(0)} = & \begin{vmatrix} \delta_{11}^{(0)} & \delta_{12}^{(0)} & \delta_{13}^{(0)} & \delta_{14}^{(0)} \\ \delta_{21}^{(0)} & \delta_{22}^{(0)} & \delta_{23}^{(0)} & \delta_{24}^{(0)} \\ \delta_{31}^{(0)} & \delta_{32}^{(0)} & \delta_{33}^{(0)} & \delta_{34}^{(0)} \\ \delta_{41}^{(0)} & \delta_{42}^{(0)} & \delta_{43}^{(0)} & \delta_{44}^{(0)} \end{vmatrix}; D_{i,l}(g_s^n, \epsilon_n) = \begin{vmatrix} \delta_{11}^{(1)} & \delta_{12}^{(1)} & \delta_{13}^{(1)} & \delta_{14}^{(1)} \\ \delta_{21}^{(1)} & \delta_{22}^{(1)} & \delta_{23}^{(1)} & \delta_{24}^{(1)} \\ \delta_{31}^{(1)} & \delta_{32}^{(1)} & \delta_{33}^{(1)} & \delta_{34}^{(1)} \\ \delta_{41}^{(1)} & \delta_{42}^{(1)} & \delta_{43}^{(1)} & \delta_{44}^{(1)} \end{vmatrix} \\
 M^{(0)} = & \begin{vmatrix} M_1^{(0)} \\ M_2^{(0)} \\ M_3^{(0)} \\ M_4^{(0)} \end{vmatrix}; M^{(1)} = \begin{vmatrix} M_1^{(1)} \\ M_2^{(1)} \\ M_3^{(1)} \\ M_4^{(1)} \end{vmatrix}; \bar{D}^{(1)}(g_s^n, \epsilon_n) = \begin{vmatrix} \delta_{12}^{(1)} & \delta_{13}^{(1)} & \delta_{14}^{(1)} \\ \delta_{23}^{(1)} & \delta_{24}^{(1)} & \delta_{34}^{(1)} \\ \delta_{34}^{(1)} & \delta_{42}^{(1)} & \delta_{43}^{(1)} \\ \delta_{41}^{(1)} & \delta_{42}^{(1)} & \delta_{43}^{(1)} \end{vmatrix} \\
 M^{(1)} = & \begin{vmatrix} M_1^{(1)} & M_1^{(2)} & M_1^{(3)} & M_1^{(4)} \\ M_2^{(1)} & M_2^{(2)} & M_2^{(3)} & M_2^{(4)} \\ M_3^{(1)} & M_3^{(2)} & M_3^{(3)} & M_3^{(4)} \\ M_4^{(1)} & M_4^{(2)} & M_4^{(3)} & M_4^{(4)} \end{vmatrix}; D_{p(g_s)}^{(0)} = \begin{vmatrix} \Delta_{1p}^{(0)} \\ \Delta_{2p}^{(0)} \\ \Delta_{3p}^{(0)} \\ \Delta_{4p}^{(0)} \end{vmatrix}; D_{p(g_s)}^{(1)} = \begin{vmatrix} \Delta_{1p}^{(1)} \\ \Delta_{2p}^{(1)} \\ \Delta_{3p}^{(1)} \\ \Delta_{4p}^{(1)} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Фиг. 6. Матричная форма уравнений семи моментов для звездочки с разделенными весовыми параметрами.



$$G_n = \frac{i_{CT}^{\text{II}}}{i_{CT}^{\text{I}}}; \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

$$B_{ii}(q_n) = \left[\frac{(H+6H) + 3q_n(2H+H)}{6HH} \right]^{\text{II}}$$

$$B_{ii}(q_n) = \left[\frac{(H+6H) + 3q_n(2H+H)}{6HH} \right]^{\text{I}}$$

$$H = 2q_B + q_B q_n + 2q_n + 3;$$

$$H = q_B + 6q_B q_n + q_n;$$

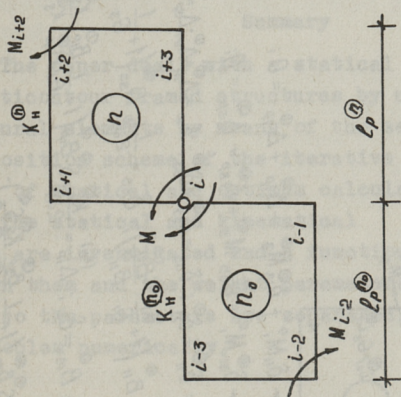
$$\delta_{ii} M_i + \Delta_{ip} = 0 \Rightarrow (\delta_{ii} + \delta_{ii}^{\text{II}}) M_i + (\Delta_{ip} + \Delta_{ip}^{\text{II}}) = 0$$

$$\delta_{ii} = \delta_{ii}^{\text{I}} + \delta_{ii}^{\text{II}} = \frac{1}{2i_{CT}^{\text{I}}} \cdot B_{ii}(q_n) + \frac{1}{2i_{CT}^{\text{II}}} \cdot B_{ii}(q_n) = \frac{1}{2i_{CT}^{\text{I}}} B_{ii}^{\text{I}} / \left(1 + \frac{1}{G_n} \cdot \frac{B_{ii}^{\text{II}}}{B_{ii}^{\text{I}}} \right);$$

$$\Delta_{ip}^{\text{I}} = \Delta_{ip} + \Delta_{ip}^{\text{II}} = \frac{1}{2i_{CT}^{\text{I}}} K_S^{\text{I}} S^{\text{I}} B_{ip} + \frac{1}{2i_{CT}^{\text{II}}} K_S^{\text{II}} S^{\text{II}} B_{ip} = \frac{K_S^{\text{I}} S^{\text{I}} B_{ip}}{2i_{CT}^{\text{I}}} \left(1 + \frac{1}{G_n} \cdot \frac{B_{ip}^{\text{II}}}{B_{ip}^{\text{I}}} \cdot \frac{K_S^{\text{II}} S^{\text{II}}}{K_S^{\text{I}} S^{\text{I}}} \right);$$

$$M_i = - \frac{\Delta_{ip}^{\text{I}}}{\delta_{ii}^{\text{I}}} = - K_S^{\text{I}} S^{\text{I}} \frac{B_{ip}^{\text{I}}}{B_{ii}^{\text{I}}} \left(\frac{G_n + p_{ip} \delta^{\text{II}}}{G_n + p_{ii} \delta^{\text{II}}} \right); \quad \text{где } p_{ip} = \frac{B_{ip}^{\text{II}}}{B_{ip}^{\text{I}}}; \quad \delta^{\text{II}} = \frac{K_S^{\text{II}} S^{\text{II}}}{K_S^{\text{I}} S^{\text{I}}}; \quad p_{ii} = \frac{B_{ii}^{\text{II}}}{B_{ii}^{\text{I}}}.$$

фиг. 7. Первое приближение для неизвестных \$M_i\$ в звездочке.



$$\begin{cases} \Delta i = \Delta i (M_{i-2}) + \Delta i (M_i) + \Delta i (M_{i+2}) + \Delta i p = 0 \\ \Delta i_{i-2} = \Delta i_{i-2} (M_{i-2}) + \Delta i (M_i) + \Delta i_{i-2} p = 0 \\ \Delta i_{i+2} = \Delta i_{i+2} (M_{i+2}) + \Delta i (M_i) + \Delta i_{i+2} p = 0 \end{cases}$$

$$\delta_{i,i-2}^{(k-1)} M_{i-2} + \delta_{i,i}^{(k)} M + \delta_{i,i+2}^{(k-1)} M_{i+2} + \Delta i p = 0$$

ГДЕ $K = 2, 3, \dots, P$; K - порядок приближения

Условие окончания итерации:

$$|M^{(k)} - M^{(k-1)}| \leq \epsilon$$

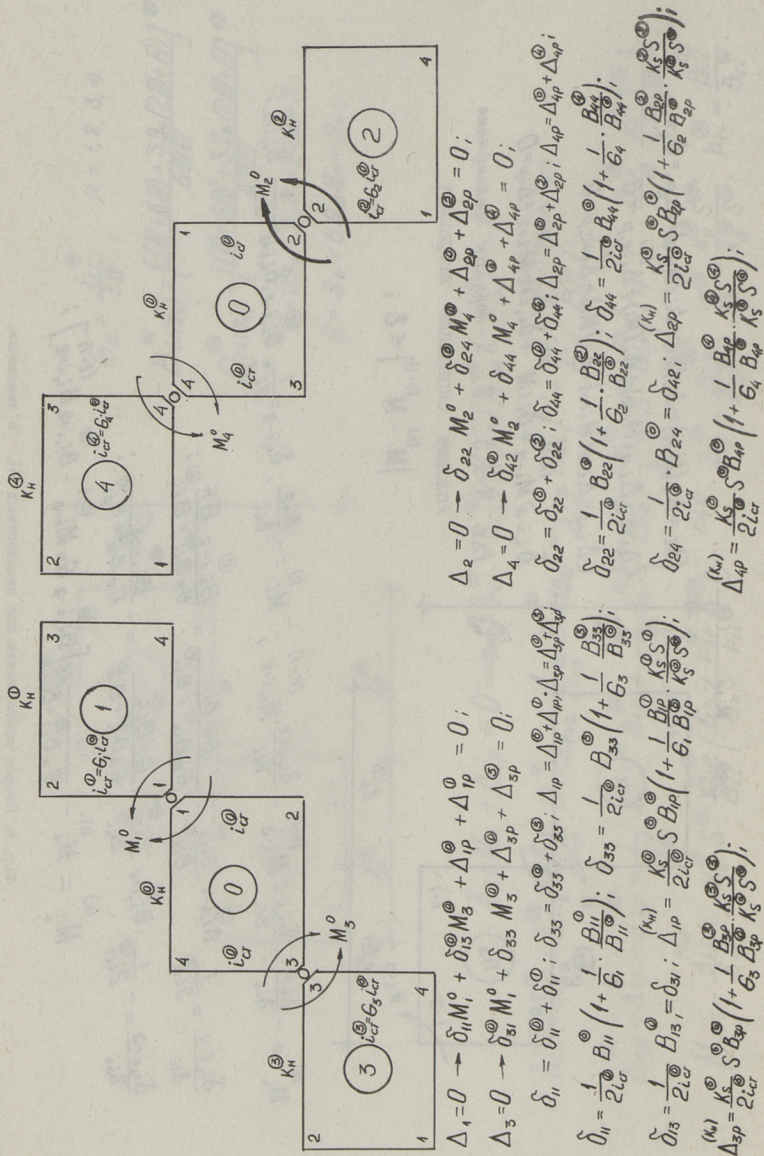
$$M_i^{(k)} = -\frac{\Delta i p}{\delta_{ii}} - \frac{\delta_{i,i-2}^{(k-1)}}{\delta_{ii}} M_{i-2} - \frac{\delta_{i,i+2}^{(k-1)}}{\delta_{ii}} M_{i+2}; \quad M_i^{(1)} = -\frac{\Delta i p}{\delta_{ii}}; \quad \delta_{i,i-2} = \frac{1}{2l_p} B_{i,i-2} \delta_{i,i+2} = \frac{1}{2l_p} B_{i,i+2}$$

$$\frac{\delta_{i,i-2}}{\delta_{ii}} = \frac{1}{2l_p} \frac{B_{i,i-2} \cdot 2l_p}{B_{ii}} \cdot \frac{b_n B_{ii}}{b_n B_{ii} + B_{ii}} = \frac{B_{i,i-2} b_n}{b_n B_{ii} + B_{ii}}$$

$$\frac{\delta_{i,i+2}}{\delta_{ii}} = -\frac{1}{2l_p} \frac{B_{i,i+2} \cdot 2l_p}{B_{ii}} \cdot \frac{b_n B_{ii}}{b_n B_{ii} + B_{ii}} = -\frac{B_{i,i+2} b_n}{b_n B_{ii} + B_{ii}}$$

$$M_i^{(k)} = M_i^{(1)} - \frac{1}{b_n B_{ii} + B_{ii}} [B_{i,i-2} b_n M_{i-2} - B_{i,i+2} b_n M_{i+2}]$$

Фиг. 8. Второе приближение для неизвестных M_i в звездочке.



Фиг. 9. Диагональная система контуров звездочки.

считаться достаточно точными (в меру точности способа звездочек), удовлетворяющими цели задачи оптимизации сложных многоконтурных рамных систем.

Оптимальные значения межконтурных весовых параметров звездочки (G_n) уточняются в двухпараметрическом пространстве для диагональной системы из трех контуров (см. фиг. 9) с учетом жесткости межконтурных по диагоналям звездочки. Разрешающие уравнения имеют здесь вид системы двух уравнений с двумя неизвестными узловыми моментами для каждой диагонали звездочки отдельно.

S. Bogdanov, E. Jögi

Stress Analysis and Optimum Design of Multicontour Frames

Summary

The paper deals with a statical calculation method of multicontour framed structures by using cruciform sub-structural elements by means of the seven moments equation. A composition scheme of the iterative procedure by the stages of statical and optimum calculation is made up.

The statical and kinematical properties of the system are investigated and a functional correspondence between them and the weight parameters is determined. In doing so the parameters are separated, which enables to solve the problem numerically.

В.М. Корсунский, Л.Ю. Поверус

ВОЛНЫ В СЛОИСТЫХ ПЛАСТИНАХ И ОБОЛОЧКАХ

Последнее время уделяется большое внимание техническим задачам и численным методам при исследовании распространения упругих волн в слоистых пластинах. Целью настоящей работы является разработка математической модели и составление соответствующего алгоритма и программы для численного исследования слоистых пластин и оболочек.

Метод решения в настоящей работе является весьма близким к одному из методов решения, разработанных в статьях [1, 2 и 3]. Алгоритм и программа составлены таким образом, что они легко применимы для слоистых оболочек. Математической моделью настоящей работы является трехмерная теория упругости, уравнения движения которой рассматриваются методом трехмерных сеток. Предложенная разностная схема является явной.

I. Исследуется распространение волн в трехслойной бесконечной пластине, на ограниченную область верхней поверхности которой действует осесимметричная распределенная нагрузка, монотонно изменяющаяся по сложному закону по времени. Все три слоя — изотропные пластины (I, II, III), но с различными упругими постоянными E_x, ν_x, G_x ($x = I, II, III$). Дифференциальные уравнения осесимметричного движения этих слоев в безразмерных переменных

$$p = \frac{r}{h_1}, \quad \xi = \frac{z}{h_1}, \quad u = \frac{u_1}{h_1}, \quad \tau = \frac{c_{III} t}{h_1}$$

представляются в следующем виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{\partial u}{p \partial p} - \frac{u}{p^2} + K_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - (1 - K_x^2) \frac{\partial^2 \omega}{\partial p \partial \xi} = \frac{\partial^2 u}{K_{IX}^2 \partial \tau^2}, \quad (I)$$

$$K_x^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial \omega}{r \partial r} \right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + (1 - K_x^2) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \xi} + \frac{\partial u}{r \partial \xi} \right) = \frac{\sigma^2 \omega}{K_{1x}^2 \partial \tau^2},$$

где r, z - цилиндрические координаты;
 u_1, u_3 - перемещения в направлении r и z соответственно;
 t - время;
 h_1 - толщина первого слоя;
 C_{III} - скорость волны расширения в третьем слое, имеющая наибольшее значение среди подобных скоростей;
 E_x - модуль Юнга ($x = I, II, III$);
 ν_x - коэффициент Пуассона;
 G_x - модуль сдвига:

$$C_{1x}^2 = (2G_x + \lambda_x) / \rho_x^* = (1 - \nu_x) E_x / (1 + \nu_x)(1 - 2\nu_x) \rho_x^*,$$

$$C_{2x}^2 = G_x / \rho_x^* = E_x / 2(1 + \nu_x) \rho_x^*,$$

$$K_x^2 = C_{2x}^2 / C_{1x}^2,$$

$$K_{1x}^2 = C_{1x}^2 / C_{III}^2,$$

где $x = I, II, III$ соответственно слоям.

Безразмерные напряжения в слоях вычисляются по формулам:

$$\sigma_{\xi x} = (1 - \nu_x) \frac{\partial w}{\partial \xi} + \nu_x \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right),$$

$$\tau_{r\xi x} = \frac{1}{2}(1 - 2\nu_x) \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \right).$$

Связь с размерными напряжениями

$$\text{где } \sigma_{\xi x} = \frac{\nu_x}{\lambda_x} \sigma_{\xi x}^*, \quad \tau_{r\xi x} = \frac{\nu_x}{\lambda_x} \tau_{r\xi x}^*,$$

$$\frac{\nu_x}{\lambda_x} = (1 + \nu_x)(1 - \nu_x) / E_x = \frac{1}{K_{3x}},$$

$x = I, II, III$ соответственно слоям.

Неизвестные функции u, ω должны удовлетворять крайевым условиям:

А. На оси симметрии нагрузки перемещение и касательные напряжения равны нулю. Отсюда

$$u = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0. \quad (2)$$

Б. На верхней поверхности пластины $\xi = 0$ нормальные напряжения равны внешней нагрузке $f_i(\tau)$:

$$\frac{1-\nu_i}{\kappa_i} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \nu_i \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} \right) = f_i(\tau), \quad i = a, b, c,$$

где

$$\begin{aligned} f_a(\tau) &= f(\tau), & 0 \leq \rho \leq \rho_a, \\ f_b(\tau) &= f(\tau) \frac{\rho_b - \rho}{\rho_b - \rho_a}, & \rho_a \leq \rho \leq \rho_b, \\ f_c(\tau) &= 0, & \rho_b \leq \rho, \end{aligned} \quad (3)$$

а касательное напряжение равно нулю

$$\frac{\partial \omega}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0. \quad (4)$$

В. На поверхностях раздела между слоями перемещения нормальные и касательные напряжения предполагаются непрерывными

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x+1}, \quad \sigma_{\xi x} \kappa_{3,x} = \sigma_{\xi, x+1} \cdot \kappa_{3, x+1} \quad (x = I, II) \\ \omega_x &= \omega_{x+1}, \quad \tau_{\rho \xi x} \kappa_{3,x} = \tau_{\rho \xi, x+1} \cdot \kappa_{3, x+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Г. На нижней поверхности пластины $\xi = \xi_{III}$ нормальные и касательные напряжения равны нулю

$$\sigma_{\xi III} = 0, \quad \tau_{\rho \xi III} = 0. \quad (6)$$

На функции u, ω , кроме краевых, наложены также и начальные условия

$$u \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = \omega \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (7)$$

Таким образом, в невозмущенной области, за фронтами волн расширения и сдвига перемещения отсутствуют, т.е. равны нулю.

Задача решается методом конечных разностей. Выбираем шаги сетки l_ξ, l_ρ, l_τ в направлениях ξ, ρ, τ соответственно. Введем обозначения

$$\rho = i l_\rho, \quad \xi = j l_\xi, \quad \tau = n l_\tau, \quad i = 0, 1, 2, \dots, j = 0, 1, \dots$$

Используя явную схему типа крест, выпишем разностные уравнения для системы (I)

$$\begin{aligned} u_{ij,n} &= 2u_{ij,n-1} - u_{ij,n-2} + \kappa_{ix}^2 \left\{ D_\rho^2 [u_{ij}] + D_\rho^1 [u_{ij}] / i - u_{ij} / i^2 + \right. \\ &\quad \left. + \kappa_x^2 D_\xi^2 [u_{ij}] + (1 - \kappa_x^2) D_{\rho \xi}^2 [\omega_{ij}] \right\} \Big|_{n-1} \cdot l_\tau^{-2}. \end{aligned}$$

$$w_{ij,n} = 2w_{ij,n-1} - w_{ij,n-2} + \kappa_x^2 l_x^{-2} \left\{ \kappa_x^2 (D_p^2 [w_{ij}] + D_p^1 [w_{ij}] / i) + D_\xi^1 [w_{ij}] + (1 - \kappa_x^2) (D_p^2 [u_{ij}] + D_\xi^1 [u_{ij}] / i) \right\} \Big|_{n-1}. \quad (8)$$

Здесь $D_\xi^2, D_p^2, D_\xi^1, D_p^1, D_p^2$ разностные аналоги операторов дифференцирования функции в точке (p, ξ)

$$\frac{\partial u}{\partial p} \approx D_p^1 [u_{ij}] = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2l_p},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \approx D_\xi^1 [u_{ij}] = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2l_\xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} \approx D_p^2 [u_{ij}] = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{l_p^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \approx D_\xi^2 [u_{ij}] = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{l_\xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p \partial \xi^2} \approx D_{p\xi}^2 [u_{ij}] = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4l_p l_\xi^2}.$$

Таким образом, значения функций u, ω в каждый момент определяются их значениями в двух предыдущих моментах. Из начальных условий (7) следует

$$u_{ij,0} = \omega_{ij,0} = u_{ij,1} = \omega_{ij,1} = 0. \quad (9)$$

Система (8) справедлива лишь для внутренних точек. Здесь внутренними считаются точки, не лежащие на оси симметрии, на верхней и нижней поверхности пластины и на поверхностях раздела. В отличие от [3] требуем, чтобы прифронтовые точки удовлетворяли системе (8). При выборе достаточно гладкой нагрузки $f(\tau)$ вторые производные перемещений будут непрерывны и последнее требование будет удовлетворено.

Применение системы (8) к прифронтовым точкам приводит к значительному упрощению вычислительной процедуры.

Уравнения для граничных точек находятся из крайних условий:

А. На оси симметрии $p = 0$ выполняется условие (2).

Применяя разностную формулу для односторонней производной, получим

$$u_{0jn} = 0, \\ \omega_{0jn} = \frac{4}{3}\omega_{1jn} - \frac{1}{3}\omega_{2jn}. \quad (10)$$

При $j \geq 1$ члены правой части формулы (10) определяются из (8).

Б. Применяя разностные формулы к уравнениям (3), (4), получим

$$-\frac{1-\gamma_I}{2l_\xi}(\omega_{i2} - 4\omega_{i1} + 3\omega_{i0}) + \frac{\gamma_I}{2l_p}(u_{i+1,0} - u_{i-1,0}) + \frac{\gamma_I}{l_p}u_{i0} = f_i(\tau) \\ \frac{\omega_{i+1,0} - \omega_{i-1,0}}{l_p} - \frac{u_{i2} - 4u_{i1} + 3u_{i0}}{l_\xi} = 0. \quad (11)$$

Все компоненты перемещений определены на момент времени n (для простоты записи индекс опущен), компоненты перемещений при $j = 1, 2$ находятся из (8). Переносим эти члены в правую часть и опустив индекс j , получим

$$A(-u_{i-1} + \frac{2}{l}u_i + u_{i+1}) + B\omega_i = \varphi_i, \quad (12) \\ C u_i + D(\omega_{i+1} - \omega_{i-1}) = \psi_i,$$

где

$$A = \frac{1-\gamma_I}{l_p}, \quad B = -3\frac{1-\gamma_I}{l_\xi}, \quad C = -\frac{3}{l_\xi}, \quad D = \frac{1}{l_p}, \\ \varphi_i = 2f_i(\tau) + \frac{B}{3}(4\omega_{i1} - \omega_{i2}), \quad (13) \\ \psi_i = \frac{C}{3}(4u_{i1} - u_{i2}).$$

Из второго уравнения системы (12) находим

$$u_i = \frac{D}{C}(\omega_{i-1} - \omega_{i+1}) + \frac{\psi_i}{C}. \quad (14)$$

Из (12) получим систему для определения ω_i , используя систему (10) при $j = 0$, уравнение (14),

$$\omega_0 - \frac{4}{3}\omega_1 + \frac{1}{3}\omega_2 = 0 \\ 2\omega_0 + (1+\alpha)\omega_1 - 2\omega_2 - \omega_3 = z_1 \\ \dots \dots \dots \\ -\omega_{i-2} + \frac{2}{l}\omega_{i-1} + (2+\alpha)\omega_i - \frac{2}{l}\omega_{i+1} - \omega_{i+2} = z_i \\ \dots \dots \dots \\ -\omega_{N-3} + \frac{2}{N-1}\omega_{N-2} + (2+\alpha)\omega_{N-1} - \frac{2}{N-1}\omega_N = z_{N-1} \quad (15)$$

$$-\omega_{N-2} + \frac{2}{N} \omega_{N-1} + (2+\alpha) \omega_N = z_N,$$

где
$$\alpha = \frac{C \cdot B}{A \cdot D} = \left(\frac{3l_p}{l_\xi} \right)^2,$$

$N+1$ индекс точки на фронте $u_{N+1} = \omega_{N+1} = 0,$

а
$$z_i = \frac{C}{A \cdot D} \varphi_i + \frac{1}{D} \left(\psi_{i-1} - \frac{2}{i} \psi_i - \psi_{i+1} \right).$$

В. Пусть x номер поверхности раздела пластин ($x = I, II$).

Аппроксимируя уравнения (5) разностными формулами, получим

$$\begin{aligned} & K_{3x} \left[\frac{1-\gamma_x}{l_\xi} (3\omega_{i,j_x} - 4\omega_{i,j_x-1} + \omega_{i,j_x-2}) + \frac{\gamma_x}{2l_p} (u_{i+1,j_x} - u_{i-1,j_x}) + \frac{\gamma_x}{il_p} u_{i,j_x} \right] = \\ & = K_{3,x+1} \left[-\frac{1-\gamma_{x+1}}{l_\xi} (\omega_{i,j_x+2} - 4\omega_{i,j_x+1} + \omega_{i,j_x}) + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma_{x+1}}{2l_p} (u_{i+1,j_x} - u_{i-1,j_x}) + \frac{\gamma_{x+1}}{il_p} u_{i,j_x} \right] \end{aligned} \quad (I6)$$

$$\begin{aligned} & K_{3x} \frac{1-2\gamma_x}{l_p} (\omega_{i+1,j_x} - \omega_{i-1,j_x}) + K_{3x} \frac{1-2\gamma_x}{l_\xi} (3u_{i,j_x} - 4u_{i,j_x-1} + u_{i,j_x-2}) = \\ & = K_{3,x+1} \left[\frac{1-2\gamma_{x+1}}{l_p} (\omega_{i+1,j_x} - \omega_{i-1,j_x}) - \frac{1-2\gamma_{x+1}}{l_\xi} (u_{i,j_x+2} - 4u_{i,j_x+1} + u_{i,j_x}) \right]. \end{aligned}$$

Все компоненты перемещений определены в момент времени n (для простоты записи индекс опущен). Компоненты перемещений при $j = j_* \pm 1$ $j_* \pm 2$ находятся из (8). Поступив так же, как и в случае Б, приходим снова к системе (I5) для нахождения и к уравнению (I4) для нахождения ω_i . Используемые в (I3) переменные рассчитываются по следующим формулам

$$\begin{aligned} A &= \frac{K_{3,x} \gamma_x - K_{3,x+1} \gamma_{x+1}}{l_p}, \quad B = 3 \frac{K_{3,x} (1-\gamma_x) + K_{3,x+1} (1-\gamma_{x+1})}{l_\xi}, \\ C &= 3 \frac{K_{3,x} (1-2\gamma_x) + K_{3,x+1} (1-2\gamma_{x+1})}{l_\xi}, \end{aligned}$$

$$D = \frac{K_{3,x}(1-2\nu_x) - K_{3,x+1}(1-2\nu_{x+1})}{l_p}, \quad (17)$$

$$\alpha = \frac{B \cdot C}{A \cdot D},$$

$$\varphi_i = K_{3,x} \frac{1-\nu_x}{l_\xi} (4\omega_{i,j_x-1} - \omega_{i,j_x-2}) + K_{3,x+1} \frac{1-\nu_{x+1}}{l_\xi} (4\omega_{i,j_x+1} - \omega_{i,j_x+2}),$$

$$\psi_i = K_{3,x} \frac{1-2\nu_x}{l_\xi} (4u_{i,j_x-1} - u_{i,j_x-2}) - K_{3,x+1} \frac{1-2\nu_{x+1}}{l_\xi} (4u_{i,j_x+1} - u_{i,j_x+2}).$$

Г. Для нижней поверхности пластин выпишем сразу окончательные результаты. Функции u_i и w_i при $j = j_m$ удовлетворяют уравнениям (14), (15) соответственно, а коэффициенты $A, B, C, D, \varphi_i, \psi_j$ вычисляются по формулам

$$A = \frac{\nu_m}{l_p}, \quad B = 3 \frac{1-\nu_m}{l_\xi}, \quad C = \frac{3}{l_\xi}, \quad D = \frac{1}{l_p},$$

$$\varphi_i = \frac{B}{3} (4\omega_{i,j_m-1} - \omega_{i,j_m-2}),$$

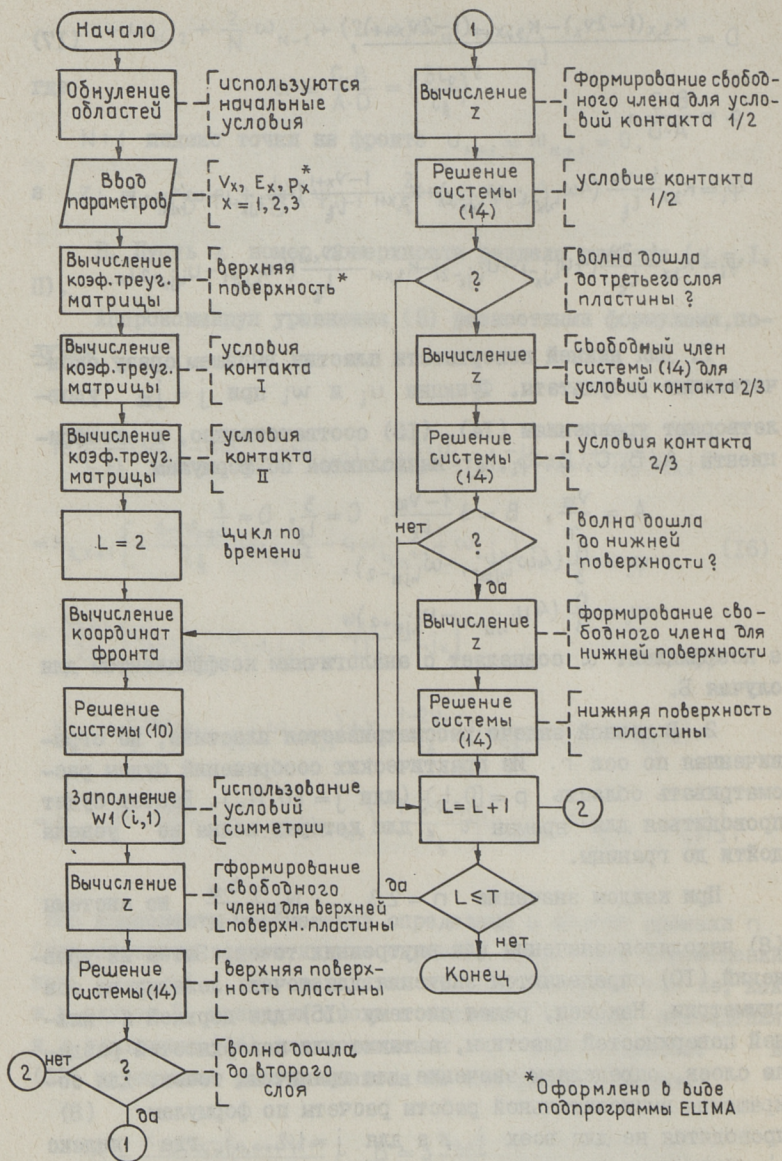
$$\psi_i = \frac{C}{3} (4u_{i,j_m-1} - u_{i,j_m-2}),$$

а коэффициент α совпадает с аналогичным коэффициентом для случая Б.

2. В данной задаче рассматривается пластина, не ограниченная по оси r . Из практических соображений будем рассматривать область $r = [0, L)$ (или $j = [0, N_0)$). Расчет будет проводиться для времен τ , для которых волна не успела дойти до границы.

При каждом значении $n = 2, 3, \dots, N_0 \frac{l_p C_{i,III}}{l_\tau C_{i,I}}$ из системы

(8) находятся значения для внутренних точек. Затем из уравнений (10) определяются значения для точек, лежащих на оси симметрии. Наконец, решая систему (15) для верхней и нижней поверхностей пластины, а также для поверхностей раздела слоев, определяем значение для граничных точек. Для сокращения вычислительной работы расчеты по формулам (8) проводятся не для всех j , а для $j = 1, 2, \dots, j_*$, где индекс j_* указывает положение фронта. В первом слое $j_* = n l_\tau K_{i,I}$, во втором $j_* = n l_\tau K_{i,II} - j_I l_\xi C_{i,II} / C_{i,I}$, где j_I толщина первого слоя; в третьем слое $j_* = n l_\tau - j_I l_\xi C_{i,III} / C_{i,I} - (j_{II} - j_I) l_\xi C_{i,III} / C_{i,II}$, где



Фиг. 1. Блок-схема алгоритма.

$j_{II} - j_I$ толщина второго слоя. Из тех же соображений расчеты на поверхностях раздела слоев и на нижней поверхности пластины проводятся только в том случае, если фронт успел дойти до них.

В системе (15) не был определен номер N , где N - индекс фронта. Значение N вычисляется по формуле

$$N = p_a + n l_{\tau} c_{II} c_{III}^{-1} = p_a + n l_{\tau} k_{II}.$$

Система (15) решается методом Гаусса. Заметим, что k уравнений системы (15) при $N=k$ совпадут с первыми k уравнениями такой же системы, но при $N=N_0 (N_0 > k)$. Если теперь к "большой" системе при $N=N_0$ применить метод Гаусса, то первые k уравнения треугольной "большой" системы совпадут с уравнениями "малой" системы, преобразованной аналогичным образом. Это свойство системы (15) позволяет один раз привести ее к треугольному виду, и при каждом $N < N_0$ использовать коэффициенты этой "большой" матрицы для нахождения решения. Блок-схема алгоритма приведена на фиг. 1.

3. Рассмотрим задачу о распространении волн в упругой трехслойной оболочке. Предположим, что удачным выбором системы координат можно добиться, чтобы контур сечения оболочки был прямоугольником. Предположим также, что линии раздела слоев перейдут в прямые линии в новой системе координат. Уравнения движения (1) и формулы для вычисления напряжений в новой системе координат изменяются, но метод решения, описанный в первом пункте останется пригодным.

Л и т е р а т у р а

1. П о в е р у с Л.Ю., Р я я м е т Р.К. Распространение упругих волн в трансверсально-изотропной и изотропной толстой пластине. Распространение упругих и упругопластических волн (материалы У Всесоюзного симпозиума) Алма-Ата, 1973, с. 282-288.

2. П о в е р у с Л.Ю., М я н н и л А.Ю. Исследование распространения упругих волн в сферической оболочке. Теория оболочек и пластин - труды IX Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, 24-28 декабря 1973 г. Л., Судостроение, 1975, с. 212-215.

3. К я э р д и Х.Х., М я н н и л А.Ю., П о в е р у с Л.Ю. Распространение упругих волн в слоистых преградах. -

V. Korsunski, L. Poverus

Elastische Wellen in geschichteten Platten
und Schalen

Zusammenfassung

Auf Grund der Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie wird ein mathematisches Modell zur Erforschung von elastischen Wellen in geschichteten Platten und Schalen dargelegt. Als Untersuchungsmethode wird die dreidimensionale Differenzenmethode gewählt. Es werden einige wichtige Grundzüge des Rechenalgorithmuses und des Rechenprogramms "Fortran" wie auch einige numerische Beispiele beigefügt.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРАВНОВЕШИВАЮЩИХ ПОПЕРЕЧНЫХ
МОМЕНТОВ В ПРОДОЛЬНЫХ ТРЕЩИНАХ-ШАРНИРАХ
В ОБОЛОЧКАХ СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ

С точки зрения передачи поперечных изгибающих моментов через неармированную (с точки зрения традиционного армирования – рабочая арматура в растянутой зоне) продольную трещину важную роль играют поперечные нормальные силы T_y , которые, как правило, в упругих оболочках средней длины за счет их малости имеют незначительную роль [1]. Продольные трещины, вызванные действием изгибающих моментов, всегда способны передавать нормальные относительно их внутренние силы. Передача этих усилий через трещины открывает возможность создания типичного деформирования состояния поперечного сечения оболочек средней длины, т.е. вызывает близкие к естественным изгибающим моментам поперечные моменты. Моментное состояние поперечного сечения вблизи трещины зависит от величины поперечной нормальной силы T_y и ее эксцентриситета в трещине относительно центра тяжести сечения [2]. При проектировании железобетонных оболочек расчет с эксцентриситетом силы T_y применим только в том случае, когда кривизна криволинейной части u рассматриваемой точки под влиянием нагрузки увеличивается. Этому случаю соответствуют оболочки положительной или нулевой Гауссовой кривизны с отрицательными поперечными изгибающими моментами. Особое внимание надо обратить на кинематику поперечного сечения.

Для определения поперечных нормальных сил $T_y(x,s)$ для единичной полоски в определенных точках α поперечного сечения применяются условия равновесия в направлении касательной. В общем случае поперечные нормальные силы зависят от следующих компонентов: I) от нагрузки на по-

верхность криволинейной части $q - T_{yq}$; 2) от нагрузки на бортовой элемент $q_0(x) - T_{yq_0}$; 3) от приращения сдвигающих сил в бортовом элементе $- T_{y\zeta_B}$; 4) от вертикальных опорных реакций r при опирании бортовых элементов $- T_{yr}$; 5) от влияния криволинейной продольной арматуры в оболочках с поперечными трещинами $- T_{yN_d}$; 6) от приращения сдвигающих сил в криволинейной части соответственно T_{yI} , T_{yi} ; 7) от перенаправляющей силы в криволинейной части $T_x(x)/R_1$ соответственно T_{yaI}^R, T_{yai}^R .

Общие формулы для расчета поперечных нормальных сил T_y для всех случаев имеют вид (для любой точки α поперечного сечения):

$T_y(x) = T_{yq} + T_{yq_0} + T_{y\zeta_B} + T_{yr} + T_{yN_d} + T_{yI} + T_{yi} + T_{yaI}^R + T_{yai}^R$,
где применены следующие обозначения

$$T_{yq} = q R (\alpha_0 - \alpha) \sin \alpha; \quad (1)$$

$$T_{yq_0} = q_0(x) \sin \alpha; \quad (2)$$

$$T_{y\zeta_B} = \left\{ K_2 \left[a_0 + \frac{4x(L-x)}{L^2} a_0^* \right] + K_1 \left[a_I + \frac{4x(L-x)}{L^2} a_I^* \right] \right\} b_0(x) \sin \alpha = \sum \zeta_A \cdot \sin \alpha; \quad (3)$$

$$T_{yr} = K_4 \left[a_0 + \frac{4x(L-x)}{L^2} a_0^* \right] \sin \alpha = r \cdot \sin \alpha; \quad (4)$$

$$T_{yN_d} = K_3 \left[\frac{xL}{2} \left(1 - \frac{x}{L} \right) a_I + \left(\frac{xL}{3} - \frac{2x^3}{3L^2} \left(L - \frac{x}{2} \right) \right) a_I^* \right] \frac{1}{R_d} \sin \alpha = N_{дв.верт.} \cdot \sin \alpha; \quad (5)$$

если $\alpha \geq \varphi$, тогда

$$T_{yI} = \left[a_I + \frac{4x(L-x)}{L^2} a_I^* \right] R \sin(\alpha_0 - \alpha); \quad (6)$$

если $\alpha < \varphi$, тогда

$$T_{yI} = \left[a_I + \frac{4x(L-x)}{L^2} a_I^* \right] R \left\{ \left[\frac{1}{\varphi} \cos(\alpha - \varphi) + \sin(\varphi - \alpha) - \frac{1}{\varphi} \right] + \left[\sin(\alpha_0 - \alpha) + \sin(\alpha - \varphi) \right] \right\};$$

если $\alpha \geq \varphi$, тогда $T_{yi} = 0$;

если $\alpha < \varphi$, тогда

$$T_{yi} = R \sum_{i=1}^n \left\{ \cos \alpha \left[\frac{\sin \left(\frac{i\pi + \varphi + \frac{i\pi\alpha}{\varphi} + \alpha \right) \sin \left(\frac{i\pi + \varphi - \frac{i\pi\alpha}{\varphi} - \alpha \right)}{\frac{i\pi}{\varphi} + 1} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\sin\left(\frac{i\pi - \varphi + \frac{i\pi\alpha}{\varphi} - \alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{i\pi - \varphi - \frac{i\pi\alpha}{\varphi} + \alpha}{2}\right)}{\frac{i\pi}{\varphi} - 1} - \\
 & - \sin\alpha \left[\frac{\cos\left(\frac{i\pi + \varphi + \frac{i\pi\alpha}{\varphi} + \alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{i\pi + \varphi - \frac{i\pi\alpha}{\varphi} - \alpha}{2}\right)}{\frac{i\pi}{\varphi} + 1} - \right. \\
 & \left. - \frac{\cos\left(\frac{i\pi - \varphi + \frac{i\pi\alpha}{\varphi} - \alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{i\pi - \varphi - \frac{i\pi\alpha}{\varphi} + \alpha}{2}\right)}{\frac{i\pi}{\varphi} - 1} \right] a_i;
 \end{aligned}$$

$$T_{y\sigma_I}^R = \frac{\varphi - \alpha}{R_1} \left\{ \frac{4x(L-x)}{L^2} a_I + \left[\frac{Lx}{3} - \frac{2}{3} \frac{x^3}{L^2} \left(L - \frac{x}{2} \right) \right] a_I^* \right\} \sin\alpha;$$

$$T_{y\sigma_i}^R = \frac{1}{R_1} \sum_{i=1}^n (\sin i\pi + \sin i\pi \frac{\alpha}{\varphi}) a_i. \quad (7)$$

В частном случае у точки № 0 у конька оболочки отдельные члены получают вид (цилиндрическая упругая оболочка):

$$T_{yq} = T_{yq_0} = T_{y\xi_B} = T_{y\tau} = T_{yN_\sigma} = T_{y\sigma_I}^R = T_{y\sigma_i}^R = 0;$$

$$T_{yI} = R a_I (\sin\alpha_0 - \frac{1 - \cos\alpha_0}{\alpha_0});$$

$$T_{yi} = R a_i \frac{(-1)^{i+1} \cos\alpha_0 + 1}{\frac{i\pi}{\alpha_0} - \frac{\alpha_0}{i\pi}}.$$

У точки № 8 у бортового элемента:

$$T_{yq} = T_{yI} = T_{yi} = T_{y\sigma_I}^R = T_{y\sigma_i}^R = 0;$$

$$T_{yq_0} = q_0(x) \sin\alpha_0; \quad T_{y\xi_B} = \sum \xi_A \cdot \sin\alpha_0; \quad T_{y\tau} = r \cdot \sin\alpha_0;$$

$$T_{yN_\sigma} = N_{\text{дверт.}} \cdot \sin\alpha_0.$$

Для лучшего определения, обобщения и сравнения поперечных нормальных сил T_y в оболочках разных типов и разными размерами применяется метод безразмерных параметров. При поверхностях, для которых направляющей является часть круга, сравнение производится относительно двухшарнирной арки единичной шириной, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q . Горизонтальная реакция определяется в виде

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-2qR^4(\psi_{0b} - \alpha_0\psi_{ab})10^4}{2R^3(\psi_{bb} + A)10^4} \approx$$

$$\approx qR \frac{\psi_{0b} - \alpha_0\psi_{ab}}{\psi_{bb}}.$$

При отношениях $\frac{\delta}{R} \approx \frac{1}{100}$ член $A = \frac{J}{R^2F}(\alpha_0 + \sin\alpha_0 \cdot \cos\alpha_0)$ имеет незначительную величину. Величины ψ_{0b} , ψ_{ab} и ψ_{bb} определяются в зависимости от угла открывания α_0 (см. табл. I).

Т а б л и ц а I

α_0	ψ_{0b}	ψ_{ab}	ψ_{bb}
25°	II, 35II	70, 92I	20, 335
30°	27, 7004	I43, 005	49, 794
35°	58, 5053	256, 242	I05, 599
40°	III, 046	420, 455	20I, 405
45°	I94, 090	644, 077	353, 98I

После определения неизвестного X_1 нормальные силы в арке определяются в виде

$$N = -Q^0 \sin\alpha - X_1 \cos\alpha \quad \text{или} \quad N = -\cos\alpha \cdot (Q^0 \operatorname{tg}\alpha - X_1),$$

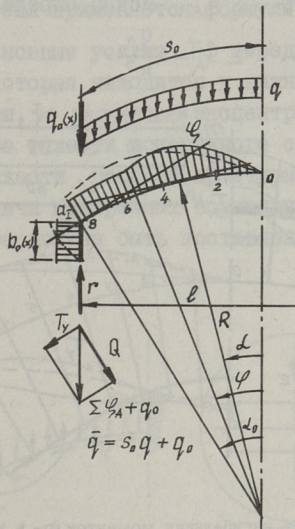
где Q^0 поперечная сила в балке пролетом арки.

Безразмерные параметры поперечных нормальных сил T_y определяются в виде

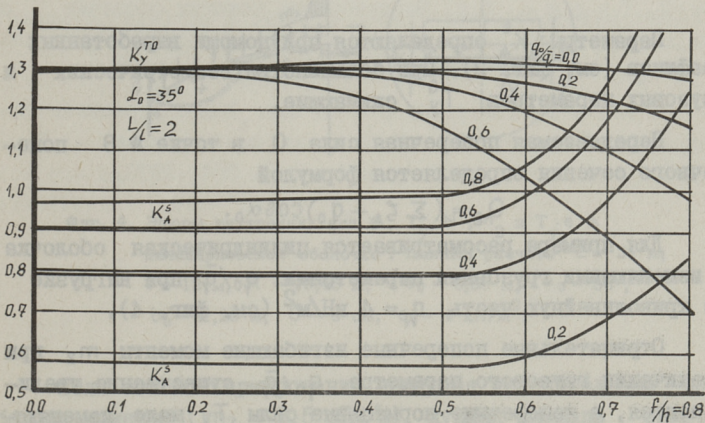
$$K_y^T = \frac{T_y}{N}.$$

В двухшарнирной арке сжимающие усилия N во всех сечениях арки. Сжимающие усилия увеличиваются в направлении опор. Значительные сжимающие усилия T_y имеются и в сечениях у конька оболочки. Как выясняется из теоретических расчетов и экспериментов в цилиндрических оболочках эти усилия больше по сравнению с усилиями в арке. Таким образом, параметр K_y^T (см. фиг. 2) имеет значения $K_y^T > 1$. В средних зонах, как правило, $T_y \leq N$. Основные расхождения можно наблюдать в зонах у продольных бортовых элементов. Здесь $T_y \ll N$ и при некоторых геометрических и грузовых параметрах усилия в оболочках переходят на растяжение.

Несмотря на незначительную горизонтальную жесткость продольного бортового элемента у бортового элемента развиваются поперечные нормальные силы T_y . Эти усилия вместе с



Фиг. 1. Схема для расчета поперечных нормальных сил T_y .



Фиг. 2. Графики для определения коэффициентов $K_y^{T_0}$ и K_a^S в зависимости от геометрических и грузовых параметров f/h и q_0/\bar{q} .

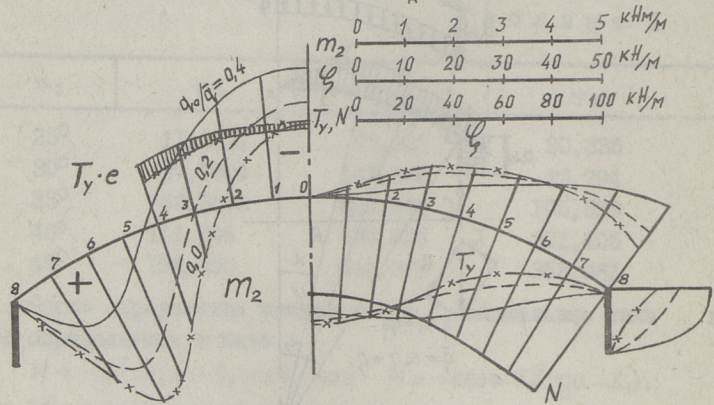
поперечными силами в плите криволинейной части дают результирующую силу в вертикальном направлении.

У бортового элемента поперечные нормальные силы можно найти при помощи формулы

$$T_y^B = (\sum \zeta_A + q_0) \sin \alpha_0.$$

Суммарное приращение сдвигающих сил в пределах высоты бортового элемента $\sum \zeta_A$ можно определить при помощи формулы

$$\sum \zeta_A = \frac{q_0}{K_A^S}.$$



Фиг. 3. Эпюры поперечных изгибающих моментов m_2 в упругих оболочках и в оболочках с продольными трещинами.

Параметры K_A^S определяются при помощи выработанных графиков (см. фиг. 2). При большинстве геометрических и грузовых параметров T_y^B сжимающие.

Передаваемая поперечная сила Q в точке № 8 поперечного сечения определяется формулой

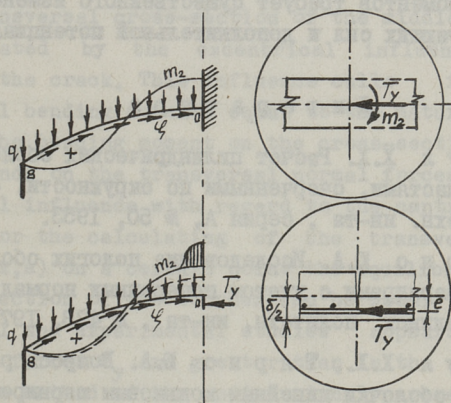
$$Q_8 = (\sum \zeta_A + q_0) \cos \alpha_0.$$

Для примера рассматривается цилиндрическая оболочка с изменяющимися грузовыми параметрами q_0/\bar{q} при нагрузке на криволинейную часть $q_1 = 4 \text{ кН/м}^2$ (см. фиг. 4).

Отрицательные поперечные изгибающие моменты m_2 при увеличении грузового параметра q_0/\bar{q} существенно увеличиваются, а поперечные нормальные силы T_y мало изменяются. Самое благоприятное распределение сжимающих попереч-

ных нормальных сил имеет место в сечениях у конька оболочки, где они в широкой зоне почти постоянные. В направлении бортового элемента сжимающие усилия уменьшаются. Общая площадь сжимающих сил на протяжении всего поперечного сечения оболочки около двух раз меньше общей площади сжимающих сил в двухшарнирной арке. Для определений поперечных нормальных сил применяется формула $T_y = K_y^T N$.

Так как основные усилия T_y передаются через поперечную арматуру, которая находится у нижней поверхности криволинейной части, то расчетным эксцентриситетом удобно применять от центра тяжести поперечного сечения единой полоски до центра тяжести рабочей арматуры (см. фиг. 4). Для улучшения передачи поперечных нормальных сил T_y распределительная арматура должна быть поставлена над поперечной арматурой.



Фиг. 4. Эпюры внутренних сил ξ , T_y , N , m_2 и $T_y \cdot e$ в цилиндрической оболочке. Данные расчета $L = 24$ м, $l = 12$ м, $R = 10,46$ м, $S_0 = 6,39$ м, $\alpha_0 = 35^\circ$, $b_0 = 1,26$ м, $\delta = 8$ см, $q = 4$ кН/м².

Если основой армирования являются положительные изгибающие моменты ($m_2 = 2,5$ кНм/м) нужная площадь арматуры составляет $F_d = 2$ см²/м. Поперечная арматура требуется и с

точки зрения минимального армирования железобетонных скатных конструкций ($\mu = 0,15\%$). В нашем примере минимальная площадь арматуры составляет $1,2 \text{ см}^2/\text{м}$, которая при арматуре А1 передает поперечные нормальные силы $\text{кН/м} < 25 \text{ кН/м}$. Принимая, что работает и бетонное сечение между арматурными стержнями, общие передаваемые силы составляют $75 \text{ кН/м} > 49 \text{ кН/м}$. Такое армирование с арматурой положительных моментов у нижней поверхности с точки зрения разных расчетных схем самое надежное.

Как выясняется из фиг. 3, влияние частичного восприятия поперечных изгибающих моментов в сечении № 0 имеет место при грузовых параметрах $q_0/\bar{q} \geq 0,2$. При таких параметрах расчеты производятся с учетом частичного шарнира [3]. Если локальные поперечные изгибающие моменты $M = T_y \cdot e$ получаются больше естественных (см. фиг. 4), то их невозможно учитывать в расчетах, так как создание увеличения отрицательных моментов требует существенного изменения приращения сдвигающих сил и дополнительной потенциальной энергии.

Л и т е р а т у р а

1. Л а у л Х.Х. Расчет цилиндрических оболочек с криволинейными частями, очерченными по окружности. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, серия А, № 50, 1953.

2. Т я р н о Ю.А. Исследование пологих оболочек с дискретными шарнирами с учетом поперечных нормальных сил T_y . - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, № 428, 1977.

3. Л а у л Х.Х., Т я р н о Ю.А. Вопросы расчета цилиндрической оболочки линейным коньковым шарниром. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, серия А, № 296, 1970.

About the Balancing Transversal Bending Moments in the
Longitudinal Cracks-hinges of the Middle Span Shells

Summary

The transversal normal forces have a very important role to transfer the bending moments across the unreinforced longitudinal cracks (unreinforced from the point of view of the traditional reinforcement - the working reinforcement takes place in the zone of tensile forces). In the elastic shells these small transversal normal forces T_y have an important role. The typical displacement of the transversal cross-section of the middle span shells can be created by the excentrical influence of the forces on the crack. This influence calls forth the transversal bending moments equal to the natural bending moments. The bending moment on the cross-section near the crack depends on the transversal normal forces T_y and the excentrical influence with regard to the centre of the gravity. For the calculating of the transversal normal forces $T_y(x,s)$ on a certain point the equilibrium conditions in the direction of the toucher can be used. From the theoretical and experimental studies appears that in the shells the forces T_y are greater than in the same size arches. The method of the undimensional parameters is used for the calculation, generalization and comparison of the transversal normal forces T_y .

О МОДЕЛИ ДВУХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Энергия движется по энергетическим полям. Она течет с более плотных мест к местам меньшей плотности. Носителями энергии являются элементарные частицы матриц, твердая материя и масса воды и газа.

Диффузное движение энергии характеризует частный ток энергии, который равняется отношению градиента плотности энергии к сопротивлению среды

$$\vec{q} = \frac{\text{grad } U}{r}.$$

В электрическом потенциальном поле эта связь характеризуется законом Ома

$$\vec{I} = \frac{\text{grad } U}{R}.$$

Частный ток энергии векторная величина. Она показывает количество энергии, которая проходит через единицу площади в единицу времени в заданном направлении.

Наиболее известные явления поточности энергии, кроме электрических и магнитных полей, еще и в физических областях температуры, диффузии и прочих.

Стационарно стабилизированное поточное поле подвергается в таком случае дифференциальному уравнению типа Лапласа:

$$\nabla^2 U = 0.$$

В случае наличия местных источников действительно уравнение Пуассона:

$$\nabla^2 U = I(x, y).$$

При распределении количества электричества, тепла и диффундируемого вещества действительно дифференциальные уравнения одной степени выше, а показывающие интенсивность тока на одну степень ниже.

В строительной механике известна следующая многоэтажная дифференциальная связь:

$$p - Q - M - \varphi - v,$$

где p — интенсивность нагрузки;

Q — поперечная сила;

M — изгибающий момент;

φ — угол поворота;

v — перемещение.

Наличие всех "трехэтажных" потенциальных величин можно рассматривать как поточное явление, поэтому в современной вычислительной технике применяют наряду с машинами дискретного действия и аналоговые машины непрерывного действия. Особо применяются электрические модели, где измерение нужных параметров проще.

Ниже приводятся некоторые примеры моделирования плоской задачи теории упругости. Такой же закономерности подчиняются и поля: теплового и магнитного потока и скорости течения движущей жидкости.

Условия равновесия напряжения в нагруженной пластинке выражаются в дифференциальных уравнениях

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

На месте нагрузки:

$$X_n = \sigma_x l + \tau_{xy} m,$$

$$Y_n = \tau_{xy} l + \sigma_y m.$$

Через перемещение („ u ” „ v ”) эти условия выражаются уравнениями Лапласа:

$$\nabla^2 u = 0,$$

$$\nabla^2 v = 0.$$

Если рассматривать материал с малым коэффициентом Пуассона (0,10–0,15), то эти поля связаны между собой на основании симметричной теории упругости лишь законом парности касательных напряжений.

Аналогия между механическими и электрическими величинами:

Механические

Электрические

Сила $P(N)$

Ток $J(A)$

Перемещение $u, v(m)$

Потенциал $u(V)$.

Уравнение равновесия соответствует первому закону Кирхгофа: (сумма поступающих и исходящих токов равняется нулю).

Закон Гука

$$u = \left(\frac{l}{EF} \right) P$$

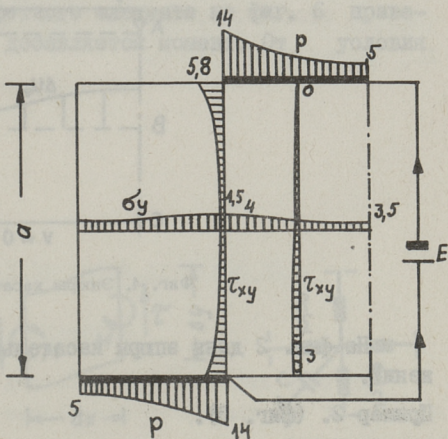
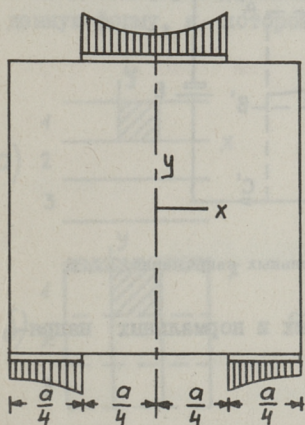
соответствует закону Ома:

$$U = RI.$$

Условие непрерывности деформации соответствует второму закону Кирхгофа. (Разница потенциалов по закрытому периметру равняется нулю) [1, 2].

Применение двух, более простых уравнений, вместо би-гармонического уравнения [5], математически проще. Однако электрическая модель этого сложная. Энергия переносится с нагруженного поля через трансформаторную связь на другое поле. А в задачах, где основными деформациями являются сдвиги, часто в местах максимальных напряжений не действует закон парности касательных напряжений.

В таком случае рекомендовано [3] применять при моделировании лишь одно поле деформации.



Фиг. 1. Схема загрузки пластинки.

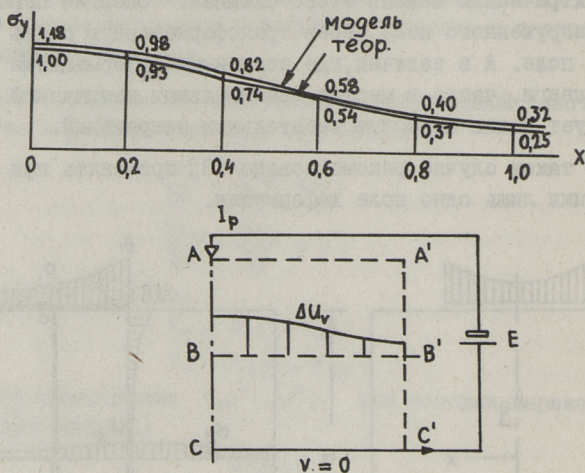
Фиг. 2. Эпюры касательных и нормальных напряжений.

Ниже приводятся некоторые примеры решения вышеуказанных задач.

Пример 1 (фиг. 1).

Пластинка размерами $a \times a$ опирается на опоры шириною $0,25 a$ и $0,25 a$, и нагружается на верхнем краю шириною в $0,5 a$. Сеть сопротивлений, применяемая при моделировании, имеет сопротивления $R_x = R_{nj}$, если коэффициент Пуассона $\mu \approx 0$, модуль упругости $E = 2G$, так как весь угол сдвига $\gamma = \gamma_x + \gamma_y$ в ходе приведен в моделируемое поле.

В таком случае Δ_x соответствует $2\Delta_y$ при наличии равных сопротивлений, и квадратная моделирующая сетка (15x15) сопротивлений дает возможность смоделировать половину рассматриваемой пластинки.

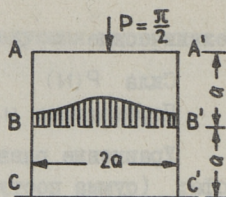


Фиг. 4. Эпюры касательных напряжений.

На фиг. 2 даны эпюры касательных и нормальных напряжений.

Пример 2. (фиг. 3).

Блок, опирающийся на жесткое основание, нагружен в середине силой. При выборе размеров моделей учтены при-



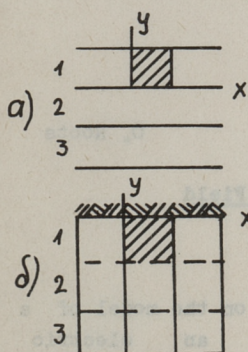
Фиг. 3. Схема загрузки блока.

мечания предыдущей задачи. Фигура 4 приводит схему модели и результаты решения в сравнении с теоретическим решением. Заданы эпюры нормальных напряжений в среднем сечении.

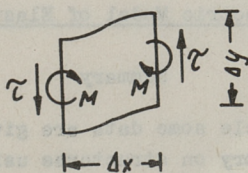
Вышеописанная модель дает возможность исследовать вопросы концентрации напряжений измерительных датчиков в напряженном бетоне и задачи распределения напряжений в стенбалках и прочее.

Совместно с усовершенствованием вычислительных машин дискретного действия развились и аналоговые машины, хотя применение простых аналоговых машин дает возможность при исследовании различных физических явлений наблюдать процессы с качественно новой точки зрения.

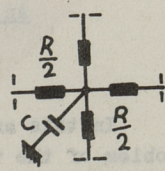
Вычислительные машины непрерывного действия дают возможность при применении [3] модели двух полей дать трансформирующие связи касательных напряжений более правильно, чем это дает так называемая симметричная теория упругости ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$). Так можно рассчитывать в зависимости от условий закрепления края $\tau_{yx} = 0$, показанных на схеме „а“ (фиг.5), на схеме „б“ $\tau_{xy} = 0$. Как показывают исследования, можно применять условия симметрии ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$) практически лишь начиная с третьего ряда элементов. Во втором ряду дает достаточную точность даже линейная интерполяция на основе соседних первого и третьего рядов. Также правильнее применять для деформации дискретного элемента на фиг. 6 приведенную форму, к которой добавляется момент. От условия



Фиг. 5. Схема расчетных элементов.



Фиг. 6. Схема элемента с моментом.



Фиг. 7. Узел электрической модели.

равновесия получаем ($\delta = 1$)

$$M = \frac{\tau_{\Delta x \Delta y}}{2}.$$

При решении динамических задач следует в узловые точки поставить заземленные емкости (фиг. 7). Можно предположить, что применение данной модели дает возможность исследовать поля скоростей плоской задачи теории упругости.

При моделировании динамических задач возможно применение и электрических элементов другого вида, [4] приводит пример R-C-L модели, которая дает возможность найти напряжение деформации при динамической нагрузке круглой пластинки.

Л и т е р а т у р а

1. Г у т е н м а х е р Л.И. Электрические модели. Киев, Техника, 1975.
2. К е р о п я н К.К. Электрическое моделирование и численные методы в теории упругости, М., Стройиздат, 1973.
3. Р о о т с О.Т. Электрическая модель плоской задачи теории упругости. -Тр. Таллинск. политехн. ин-та, № 375, 1975.
4. Р о о т с О.Т. Распространение ударной волны в круглой плите. -Тр. Таллинск. политехн. ин-та, № 297, 1970.
5. У г о д ч и к о в А.П. и др. Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах. М., Высшая школа, 1970.

O. Roots

An Electric Model of Elastic Field

Summary

In this article some data are given on the model of a problem of the theory on structures using an electric analogy model.



Цена 70 коп.