TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL
Füüsikainstituut

Ülo Uder

FÜÜSIKA I

Loengukonspekt

TTÜ
KIRJASTUS

Kolmas, parandatud trükk

Kaane kujundanud Ann Gornischeff

ISBN 9985-59-603-X
ISBN 9789949483075 (pdf)
OÜ·INFOTRÜKK

Eessõna kolmandale trükile

Kolmas trükk erineb eelmistest vormistuse poolest. Põhimõttelisi parandusi on vähe.

Ü. Uder
Tallinnas, jaanuar 2006. a.

Eessõna esimesele trükile

Käesolev kaheosaline füüsikaõpik on koostatud loegumaterjali alusel, mida autor on peaaegu kahe aastakümne jooksul lugenud Tallinna Tehnikaülikooli tehnilise haru esimese kursuse üliõpilastele. Kogu selle aja vältel on pidevalt vähendatud füüsikale ettenähtud loengutundide mahtu, mistõttu on järjest keerulisemaks läinud üliõpilastele soovitava õpiku leidmine. Olemasolevad õpikud on kirjutatud märksa ulatuslikuma kursuse jaoks ja nendest üksikute osade väljanoppimine ei võimalda anda süstemaatilist ettevalmistust. Siin esitatu peaks moodustama selle minimaalse osa tehnikakõrgkooli füüsikakursusest, mis küllalt seotult, mõttearenduse lünkadeta, esitaks vajalikud algteadmised füüsikalise maailmapildi omandamiseks. See võimaldab ilma raskusteta, iseseisvalt tutvuda muude allikate kaudu kõigi nende küsimustega, mis käesolevast on välja jäänud. Peale erirelatiivsusteooria elementide hõlmab siin esitatu ainult klassikalist füüsikat, vastates tehnikaülikooli kahele esimesele semestrile (32 + 32 loengutundi). Sellele peab järgnema kaasaegse füüsika kursus, mida Tallinna Tehnikaülikoolis loetakse teisel kursusel, kuid see ei ole üliõpilastele kohustuslik. Seda tuleks üliõpilastel siiski valida, et ettevalmistus ei jääks möödunud sajandite tasemele.

Avaldan tänu S. Pikkale, L. Kurikule, V. Siniveele, A. Saugale ja teistele kolleegidele abi eest loengukonspekti ettevalmistamisel ja vormistamisel.

Ü. Uder
Tallinnas, aprill 1993. a.

1. Füüsika aine

Selles punktis tuleb anda vastus küsimusele, mis on füüsika, millega see tegeleb ja milline on füüsika seos teiste teaduste ning tehnikaga?

"Füüsika" tuleneb kreekakeelsest sõnast φυσις (lad. physis) - loodus. See sõna tähistas antiikteaduses kogu loodusteadust. Hiljem jagunes viimane mitmeks eriharuks: füüsikaks, keemiaks, astronoomiaks, geoloogiaks, bioloogiaks jne. Füüsika uurib kõige elementaarsemaid süsteeme looduses, kõige lihtsamaid mateeria liikumisvorme ja nende vastastikuseid muundumisi. Sõna "liikumisvorm" tähendab siin mis tahes muutumist, protsessi tegelikkuses. Lihtsamad liikumisvormid on: mehaanilised, soojuslikud, elektromagnetilised jne. Keemia, bioloogia, geoloogia jt. loodusteadused uurivad keerulisemaid süsteeme looduses, kõrgemaid mateeria liikumisvorme. Kuid lihtsamad liikumisvormid esinevad ka kõigis kõrgemates. Näiteks bioloogilised süsteemid võtavad osa mehaanilisest liikumisest, neis toimub soojuslik liikumine jne. Seepärast on lihtsamad liikumisvormid ka kõige üldisemad, mistõttu selle osa jaoks loodusteadusest on jäetud ka kõige üldisem nimi - füüsika. Niisugune üleüldisus, kõikehaaravus tingib füüsika tähtsa koha kõigi teiste loodusteaduste seas. Füüsika on neile mitmeti aluseks. Näiteks keemia puhul seletab füüsika keemiliste elementide perioodilisuse, aatomitevaheliste jõudude tekkemehhanismi jne. Tänapäevale on iseloomulik füüsika ulatuslik levimine naaberteadustesse, mida põhjustab füüsika katsetehnika areng. On võimalik uurida füüsikaliste meetoditega ka keerulisemate süsteemide kõige lihtsamaid ja põhilisemaid seaduspärasusi. Nii on füüsika muutumas universaalseks loodusõpetuseks, oma nime vääriliseks.

Definitsioonina kirjutame:

füüsika on teadus mateeria kõigi vormide liikumise ja vastastikuse seose kõige üldisematest ja põhilisematest seaduspärasustest.

Kuidas toimub seaduspärasuste avastamine füüsikas? See algab *vaatlustega*, mida tehakse looduslikes tingimustes esinevate või siis kunstlikult esilekutsutud nähtuste - *eksperimentide* kohta. Saadud teadmiste alusel esitatakse esialgsed oletused toimuva tekkemehanismi ja selles valitsevate seoste kohta - luuakse *hüpotees*. See ei ole veel *teaduslik teooria*. Hüpoteesi on tarvis kontrollida, selle kehtivust tõestada. Selleks tuleb korraldada uusi eksperimente uutes tingimustes, uutes olukordades. Ainult need hüpoteesid, mis kannatavad välja igakülgse kontrolli ja ennustavad õigesti ka uusi, varem mittetuntud nähtusi, lähevad teadusesse *füüsikalise teooriana*. Teised jäävad kõrvale. Võib osutuda, et mõninga aja möödudes avastatakse uusi fakte, mis ei ole kooskõlas senise teooriaga. Siis tuleb esitada täiuslikum hüpotees ja kontrollida seda igakülgsetes eksperimentides jne. Tavaliselt ei lükka uus teooria vana ümber, vaid näitab, et vana on rakendatav kitsamates tingimustes. Näiteks kehtib Newtoni mehaanika Einsteini relatiivsusteooria järgi täpselt suurte kehade aeglasel liikumisel. Nii ei ole füüsika valmis, muutumatu, vaid areneb pidevalt.

Füüsika areng on tihedalt seotud inimeste praktiliste vajadustega. Näiteks antiikaja mehaanika tekkis seoses tolleaegse ehitus- ja sõjatehnika nõudmistega. Peale aurumasina leiutamist XIX sajandil tekkis vajadus ehitada hästi ökonoomseid soojusmasinaid. Nende ülesannete lahendamisel sündis uus füüsikaharu - soojusõpetus. Füüsika areng on vajalik tehnika probleemide lahendamisel. Tihti paneb see areng isegi aluse tehnika uutele suundadele. Näiteks aatomituuma lõhestusprotsessi avastamine ja uurimine XX sajandil pani aluse tuumaenergeetikale. Tänu tahke keha füüsika edusammudele tekkis mikroelektroonika. Ilma selleta ei oleks olemas tänapäevast mikroprotsessortehnikat, arvutustehnikat jm.

Ja vastupidi - tehnika areng on vajalik füüsika arenguks. Füüsika ja tehnika koostöö muutub aja möödudes ikka tihedamaks ja tihedamaks. Nende kaasaegsed probleemid on lahendatavad ainult selle koostöö tulemusena - teadlaste suurte kollektiivide poolt, mis koondavad endas nii füüsikuid kui ka paljude tehnikaharude esindajaid - insenere. Kaasaegne füüsik peab olema hea insener ja inseneril tuleb hästi tunda füüsikat.

I KLASSIKALISE MEHAANIKA FÜÜSIKALISED ALUSED

2. Mehaanika ja selle jaotus. Klassikaline mehaanika

Eespool kasutasime mõistet liikumisvorm üldises tähenduses. Mõtlesime sellega mateeria igasugust muutumist, mistahes protsessi looduses. Mehaanika uurib kõige lihtsamat liikumisvormi - kehade ümberpaiknemist ruumis. Täpsemalt,

mehaanika on teadus, mis käsitleb kehade paigalseisu ja liikumist neile rakendatud jõudude mõjul.

Lihtne mehaaniline liikumine esineb ka kõigis keerulisemates liikumisvormides. Et keerulisemast aru saada, peab kõigepealt selge olema lihtsam nendes. Muidugi ei tähenda see, et keerulisema saab taandada lihtsamale, et näiteks bioloogilisi protsesse saaks mehaanilistega seletada. Mehaanilisi tuleb seal siiski arvestada.

Mehaanika on füüsika haru, mis saavutas kõrge arengutaseme kõige varem (17.-18. sajandil). Tema peamised osad - teoreetiline ja rakendusmehaanika, elastsete ja voolavate kehade mehaanika - eraldusid füüsikast, muutudes iseseisvateks teadusteks. Füüsikas vaadeldakse nüüd ainult kõige üldisemaid mehaanika printsiipe ja seisukohti, peamiselt neid, mis on vajalikud soojuse, elektromagnetismi, optika, aatomi- ja tuumafüüsika käsitlemisel.

Mehaanika jaotatakse osadeks: *dünaamika*, *staatika*, *kinemaatika*. Dünaamikas toimub liikumist tekitavate põhjuste väljaselgitamine, staatika tegeleb kehade tasakaalutingimuste uurimisega ja kinemaatika käsitleb liikumist sõltumatult seda tekitavatest põhjustest.

Kinemaatika loojaks peetakse Galileid (1564-1642). Dünaamika põhiseadused sõnastas Newton (1643-1727). Kepler, Galilei, Huygens jt. suurkujud olid lahendanud küll palju dünaamika eriküsimusi, kuid Newton oli esimene, kes sõnastas dünaamika põhiseadused terviklikul kujul. See pani aluse mehaanika kiirele arengule. Areng seisnes peamiselt mehaanika matemaatiliste meetodite täiustamises ja mehaanika kasutamises üha uuemates valdkondades. Newtoni seaduste füüsikalist sisu see ei muutnud. Mehaanika edusammudest tingitult sai Newtonist niisugune autoriteet, et ≈200 aasta vältel ei tekkinud teadlastel mõtteid Newtoni mehaanika võimalikest puudustest. Selline olukord muutus alles 20. sajandil. A. Einsteini (1879-1955) loodud *relatiivsusteooria* näitas, et Newtoni mehaanika ei ole rakendatav ülisuurte kiirustega liikumisel. Mõnevõrra hiljem leiti, et ka üliväikeste osakeste puhul – aatomite, molekulide, elektronide jne. maailmas – see mehaanika ei kehti. Seal on rakendatav nn *kvantmehaanika*.

Kuid relativistlik ja kvantmehaanika ei lükka Newtoni tõdesid ümber. Need näitavad, et Newtoni mehaanika on nende üks erijuhtusid. Kui kiirus on väike ja tegemist on suure kehaga, siis relatiivsusteooria või kvantmehaanika annab sama tulemuse nagu Newtoni oma. Kuid Newtoni mehaanika järgi saadakse see märksa lihtsamalt. Seepärast ei ole Newtoni mehaanika kaotanud oma tähtsust. Et eristada Newtoni mehaanikat uuema aja mehaanikast ja rõhutada selle suurt tähtsust nii teaduse ajaloos üldse kui ka tänapäeval, nimetatakse see mehaanika *klassikaliseks*. Mõisteid "klassikaline mehaanika" ja "Newtoni mehaanika" kasutataksegi ühes ja samas tähenduses.

3. Klassikalise mehaanika aegruum

Mehaaniliseks liikumiseks nimetatakse keha asendi muutumist ruumis aja jooksul.

See definitsioon näib meile lihtsana, kuid tegelikult sisaldab ta palju keerulist. Kõigepealt selgub siit, et liikumise mõistega on väga lähedalt seotud ruumi ja aja mõisted. Igasugune liikumine toimub ruumis ja ajas. Kuid mis on ruum, mis on aeg? Missugused on nende omadused? Kuidas määrata keha asendit ruumis? Kuidas mõõta aega? Need on küsimused, millele on püütud leida täpseid vastuseid ammustest aegadest tänapäevani. Aja jooksul on ruumi ja aja mõisted täpsustunud, kuid ka keerulisemaks muutunud. Ilmneb, et nad on niivõrd üldised, et neid ei saagi defineerida. Siiski, on jäänud üks võimalus – kasutada veel üldisemat mõistet "mateeria".

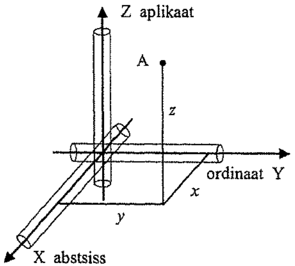
Aeg ja ruum on mateeria eksisteerimise põhivormid.

Nende omadustest teame, et ruum on kolmemõõtmeline, aeg – ühemõõtmeline ja ühesuunaline. Keha asukoha määramiseks ruumis on tarvis näidata 3 kaugust mingist kolmest kehast, mis on valitud nn *taustsüsteemiks*. Selles seisnebki ruumi kolmemõõtmelisus. Samast selgub ka, et asukoht on alati suhteline. Me saame rääkida asukohast ainult kui keha asendist mingite teiste kehade suhtes. Mingit absoluutset asukohta ruumis ei ole. Veel võib rääkida ruumi *homogeensusest* ja *isotroopsusest* – selle omadused ei olene asukohast ega liikumissuunast ruumis.

Aeg on samuti suhteline ja homogeenne. Seda arvestatakse mingi ühe sündmuse toimumishetkest alates. Aja ühesuunalisus tuleneb sellest, et kõik nähtused kulgevad ajas selle kasvu suunas. Ajas tagasiliikumist ei esine.

Klassikalises mehaanikas eeldatakse, et aeg ei olene ruumist ega ruum ajast, s.t aeg ei olene asukohast ja ruum ei muutu ajas. Relatiivsusteooria ütleb, et see on tõepoolest nii, kui vaatleme ruumi ja aega aeglaselt liikuvate kehade puhul. Kiirel liikumisel tekib aja ja ruumi vahel seos. Teisiti öeldes, klassikalises mehaanikas ruumi ja aja omadused ei sõltu kehadest ega nende liikumisest. Peale selle, siin võib kehadevaheline mõju levida lõpmatu suure kiirusega. Relatiivsusteooria piirab seda valguse kiirusega.

Tingimisi liikumatuid kehi, mille suhtes on otsustatud määrata keha asendit ruumis, nimetatakse taustsüsteemiks.
Üheks lihtsamaks taustsüsteemiks on kolm üksteisega risti olevat ja ühes kohas lõikuvat varrast (Joon. 1).



Joon. 1

Keha A asukoht on määratud, kui on teada selle kaugused varrastest või nende poolt määratud tasanditest.

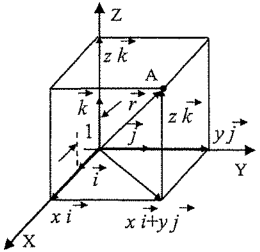
Lihtsustame seda taustsüsteemi nii, et laseme varraste diameetritel kahaneda 0-ni, s.t asendame need sirgetega. Siis saame idealiseeritud süsteemi, matemaatilise mõiste, mida nimetatakse *koordinaatsüsteemiks*. See on Cartesiuse koordinaadistik [Descartes (1596-1650)]. Kaugusi x, y, z nimetatakse *koordinaatideks*. Teljed ja vastavad kaugused-koordinaadid kannavad nimetusi *abstsiss*, *ordinaat* ja *aplikaat*.

Keha liikumisel koordinaadid muutuvad ajas. Seda tähistatakse nii:

$$\begin{cases} x = f_1(t) = x(t); \\ y = f_2(t) = y(t); \\ z = f_3(t) = z(t). \end{cases} \qquad (1)$$

Liikumine on antud, kui on teada need funktsioonid (valemid), mis võimaldavad määrata keha koordinaate mis tahes ajahetkel. Selliseid valemeid nimetatakse ka *liikumisseadusteks*. Süsteem (1) ütleb, et mis tahes kõverjooneline liikumine on lahutatav sirgjoonelisteks, kusjuures viimased on sirgjoonelised liikumise algusest lõpuni – x-, y- ja z-telje sihis toimuvad liikumised.

Avaldistele lihtsama üleskirjutusviisi saamiseks kasutatakse koordinaatide asemel *kohavektorit* (või *raadiusvektorit*) $\vec{r}$ (Joon. 2).



Joon. 2

Võtame kasutusele koordinaattelgede suunalised ühikvektorid $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, nn *ordid*. Siis võime kirjutada

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}, \qquad (2)$$

mis on näha jooniselt 2.

Kohavektori pikkus, s.o punkti A kaugus koordinaattelgede algusest, on arvutatav valemiga

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (3)$$

Kohavektori abil on liikumisseadused (1) üles kirjutatavad ühe vektorvalemina

$$\vec{r} = \vec{f}(t). \qquad (1')$$

Näitena esitame ühtlaselt kiireneva liikumise mööda X-telge:

$$\begin{cases} x = v_0 t + \dfrac{a t^2}{2}; \\ y = 0; \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{või} \quad \vec{r} = (v_0 t + \frac{a t^2}{2})\vec{i}\,. \qquad (1'')$$

§ 1. Ainepunkti kinemaatika

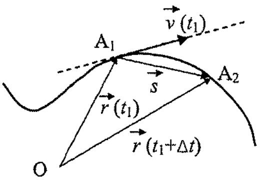
4. Ainepunkti kiirus

Kõige lihtsamaks mehaaniliseks liikumiseks on *ainepunkti* (mõnikord nimetatakse *massipunktiks*) liikumine.

Ainepunktiks nimetatakse keha, mille mõõtmed ja kuju võib jätta arvestamata tema liikumise kirjeldamisel.

Kuivõrd selline lihtsustus on õigustatud, see oleneb liikumisülesandest. Ühte ja sama keha võib ühtedes olukordades vaadelda ainepunktina, teistes mitte. Näiteks Maa. Liikumisel ümber Päikese võib teda mõnikord vaadelda ainepunktina, kuid pöörlemisel ümber oma telje mitte. Punkti pöörlemisest ei ole mõtet rääkida.

Liikugu ainepunkt mööda meelevaldset ruumilist trajektoori (Joon. 3).



Joon. 3

Punkt O olgu koordinaatsüsteemi alguspunkt. Ajahetkel t_1 läbigu ainepunkt punkti A_1 ja väike ajavahemik Δt hiljem, hetkel $t_2 = t_1 + \Delta t$, punkti A_2. Öeldakse, et ainepunkt on nihkunud punktist A_1 punkti A_2. Vektorit $\vec{s}$, mis viib esimesest punktist teise, nimetatakse *nihkevektoriks*. Punkti A_1 ja A_2 asukohta näitavate kohavektorite abil on see arvutatav nii:

$$\vec{s} = \vec{r}(t_1 + \Delta t) - \vec{r}(t_1) = \Delta\vec{r}\,.$$

Järelikult,

nihkevektor näitab kohavektori muutust ainepunkti liikumisel ühest kohast teise.

Sirgjoonelisel liikumisel nihkevektori suund ühtib liikumise suunaga ja suurus näitab tihti läbitud teepikkust. Kõverjoonelisel see nii ei ole. Läbikäidud teepikkus on punkte A_1 ja A_2 ühendava kaare pikkus. Kui aga vaadeldav ajavahemik Δt on küllalt väike, siis võib kaart pidada kõõluga kokkulangevaks ja nihkevektori pikkus võrdub küllalt täpselt kaarepikkusega, s.t teepikkusega. Seepärast võib *keskmise kiiruse* kaarel A_1A_2 arvutada nii:

$$\vec{v}_k = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Vektori $\vec{v}_k$ suund ühtib nihkevektori $\Delta \vec{r}$ suunaga, sest jagamisel skalaarse suurusega Δt vektori suund ei muutu – $\vec{v}_k$ on $\Delta \vec{r}$-ist lihtsalt Δt korda lühem.

Kiiruse punktis A_1 ehk *hetkkiiruse* ajahetkel t_1 saame, kui vähendame ajavahemikku Δt piiramatult ($\Delta t \to 0$)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \vec{r}\,'. \qquad (4)$$

Matemaatikas nimetatakse sellist piirväärtuse leidmist *tuletise võtmiseks*. Punktiga tähistatakse aja järgi võetavat tuletist, ülakomaga tähistamine on üldisem. Seepärast võib öelda, et

kiirus trajektoori mingis punktis on selles punktis võetud kohavektori esimene tuletis aja järgi.

Kuidas mõista vektorist tuletise võtmist? See on nagu tuletise võtmine ikka – konstantse vektori tuletis on 0, summa tuletis on võrdne liidetavate tuletiste summaga jne. Kohavektor on avaldatav punkti koordinaatide kaudu valemiga (2). Selles on $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ konstantsed vektorid, x, y ja z aga muutuvad ajas

$$\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}. \qquad (2')$$

Tuletis tuleb võtta ainult funktsioonidest $x(t)$, $y(t)$ ja $z(t)$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\cdot\vec{i} + \dot{y}\cdot\vec{j} + \dot{z}\cdot\vec{k} = v_x\cdot\vec{i} + v_y\cdot\vec{j} + v_z\cdot\vec{k}. \qquad (5)$$

Seega on koordinaadi tuletise arvväärtus ühtlasi ka kiirusvektori komponendiks (projektsiooniks vastavale teljele):

$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v_z = \dot{z}.$$

Ka siit järeldub, et meelevaldset kõverjoonelist liikumist võib käsitleda kui liitliikumist, mis on saadud kolme koordinaattelje sihis toimuva sirgliikumise liitmise tulemusena, kusjuures liidetavad liikumised (ja kiirused) on üksteisest sõltumatud. Näite (1") puhul kolme liidetava liikumise kiirused avalduvad nii:

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = v_0 + a \cdot t; \\ v_y = 0; \\ v_z = 0 \end{cases} \qquad \text{ehk} \qquad \vec{v} = (v_0 + a \cdot t) \cdot \vec{i},$$

s.t kiirus on x-telje sihiline.

Missugune on kiiruse suund üldjuhul, kõverjoonelisel liikumisel (Joon. 3)? $\Delta\vec{r} / \Delta t$ suund ühtis $\Delta\vec{r}$ ehk nihkevektori suunaga. Piirile $\Delta t \to 0$ üle minnes punkt A_2 läheneb punktile A_1. Seejuures nihkevektor (kõõl A_1A_2) läheneb puutujale, mis on tõmmatud trajektoorile punktist A_1. Järelikult läheneb samale puutujale ka kiirus. Nii on hetkkiirus alati trajektoori puutuja suunaline (Joon. 3). Näiteks ringliikumisel on kiirus ringjoone puutuja suunaline.

[Katse sädemete liikumise jälgimiseks käiamisel.]

Väga ilmekas näide on ka auto liikumine kurvis pärast sattumist jäisele teepinnale, millal juhitavus täielikult kaob.

Sirgjoonelisel liikumisel asub kiirusvektor alati sirgel, millel toimub liikumine.

5. Ainepunkti kiirendus

Kiirenduseks nimetatakse kiiruse muutumise kiirust.

Sellisest definitsioonist järgneb, et kiirendus arvutub analoogiliselt kiirusega – tuletise abil. Kiiruse puhul, valemis (4), leidsime tuletise kohavektorist aja järgi ja saime selle muutumise kiiruse ehk lihtsalt kiiruse. Võttes tuletise kiirusest, saame *kiiruse muutumise kiiruse*

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \vec{v}'. \tag{6}$$

See ongi *kiirendus*.

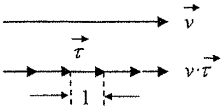
Kuidas arvutuvad kiirenduse komponendid a_x, a_y, a_z ? Need on sirgjooneliste liikumiste kiirendused, milliste summana me kõverjoonelist liikumist käsitlesime. Nagu kiiruse puhulgi, nii arvutatakse needki tuletise abil, seekord kiiruse komponentidest:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}\,; \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}\,; \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}\,. \qquad (7)$$

Kõverjoonelisel liikumisel jagatakse kiirendus sageli komponentideks teisel viisil. Järgnevalt vaatlemegi seda.

Esmalt kirjutame kiirusvektori üles kahe teguri korrutisena

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}\,.$$



Joon. 4

Esimene tegur võrdugu kiiruse suurusega (mooduliga), teine on siis kiiruse suunaline ühikvektor. Vektor $\vec{v}$ on asendatud ühikvektorite ($|\vec{\tau}| = 1$) summaga (Joon. 4).

Asetame saadud avaldise valemisse (6). Korrutisest tuletise võtmise reegleid arvestades saame valemi, kus esimene liidetav on $\vec{\tau}$ suunaline vektor, s.t kiiruse või trajektoori puutuja suunaline.

$$\vec{a} = \frac{d(v \cdot \vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}\,.$$

Seepärast nimetatakse esimest *tangentsiaalseks* – puutujasuunaliseks. Selle suurus võrdub tuletisega *dv/dt* – *kiiruse suuruse muutumise kiirusega*

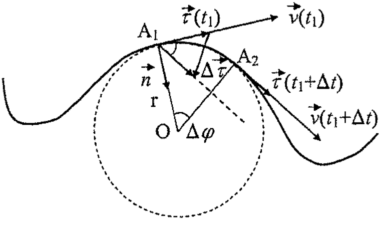
$$a_\tau = \frac{dv}{dt}\,. \qquad (8)$$

Seega

tangentsiaalne kiirenduse komponent näitab, kui kiiresti kiirus muutub suuruse poolest.

Sama tähendus on kiirendusel teatavasti ka sirgjoonelisel liikumisel. Kõverjoonelisel on kiirendusel veel teinegi komponent $v \cdot d\vec{\tau} / dt$. Mida see näitab?

Võtame trajektooril jällegi kaks teineteisele hästi lähedast punkti A_1 ja A_2. Joonise selguse mõttes joonistame need siiski küllalt kaugele teineteisest (Joon. 5).



Joon. 5

Kui kaar A_1A_2 on küllalt väike, siis võib seda vaadelda osana mingist ringjoonest, s.t ühel tasapinnal asuvana. Valides sama tasandi meie joonise tasandiks, saame seal ringjoont näidata. Seda ringjoont nimetatakse trajektoori *kõverusringjooneks* piirkonnas A_1A_2. Selle raadiust r nimetatakse trajektoori *kõverusraadiuseks* ja pöördväärtust $1/r$ – *kõveruseks* antud kohas. Ainepunkti liikumisel muutub nii kõverusringjoone keskpunkti O asukoht kui ka raadius r. Samuti muutub kiiruse $\vec{v}$ suurus ja suund. Suuna muutust kirjeldabki ühikvektori $\vec{\tau}$ tuletis aja järgi – $d\vec{\tau}\,/\,dt$. Seda hakkame nüüd leidma.

$\vec{\tau}$ vektor on kaarel A_1A_2 liikudes pöördunud nurga $\Delta\varphi$ võrra. Vektori muutuse tähistame $\Delta\vec{\tau}$. Arvestame, et $\Delta t \to 0$. S.t $\Delta\varphi \to 0$ ja $\Delta\tau \to 0$ ning joonisel kujutatud kaks kolmnurka on võrdhaarsed kolmnurgad kaduvväikese tipunurgaga $\Delta\varphi$. Seepärast võime aluse ehk tipunurga vastaskülje ja sama nurga vastas seisva kaarepikkuse arvutada ühesuguselt:

$$\Delta\tau = \tau\cdot\Delta\varphi; \qquad A_1A_2 = \Delta s = r\cdot\Delta\varphi\,.$$

Esimene võrdus lihtsustub veelgi $\tau = 1$ tõttu. Vektorina on $\Delta\vec{\tau}$ risti trajektooriga. Tähistades $\vec{n}$-ga sellesuunalise ühikvektori, võime kirjutada

$$\Delta\vec{\tau} = \Delta\tau\cdot\vec{n} = \Delta\varphi\cdot\vec{n}\,.$$

Nurga $\Delta\varphi$ saame avaldada kaarepikkuse Δs kaudu

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}.$$

Nende võrduste abil leiamegi tuletise $d\vec{\tau}\,/\,dt$:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s\cdot\vec{n}}{r\cdot\Delta t} = \frac{\vec{n}}{r}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\vec{n}}{r}\cdot v,$$

sest viimane piirväärtus annab kiiruse suuruse v. Saadud tulemus, korrutatuna veel kord kiirusega v, annabki kiirenduse teise komponendi. Et see on risti trajektooriga, siis nimetatakse komponenti *normaalseks*. Ristiolekut trajektooriga näitab ühikvektor $\vec{n}$. Seega *normaalkiirenduse* suurus arvutub

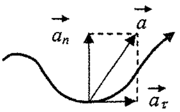
$$a_n = \frac{v^2}{r}. \tag{9}$$

Normaalkiirendus kirjeldab kiiruse suuna muutumise kiirust.

Nii võime lõpuks kiirenduse jaoks kirjutada

$$\vec{a} = a_\tau\cdot\vec{\tau} + a_n\cdot\vec{n} = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau} + \frac{v^2}{r}\cdot\vec{n}. \tag{10}$$

Joonisel 6 näitame saadud vektorite asetust trajektoori suhtes.



Joon. 6

Näitena võib tuua sõidu autoga. Auto esirattad, kui need ei ole vedavad ega pidurda, annavad autole normaalkiirenduse (muudavad kiiruse suunda), vedavad tagarattad aga – tangentsiaalse kiirenduse (muudavad kiiruse suurust).

Üldisemal juhul, kui kiirusvektor ei püsi oma muutumise käigus küllalt täpselt ühel tasandil, on kiirendusel veel tasandiga ristuv komponent, mida nimetatakse *sagitaalseks*. Selle juhu jätame siin käsitlemata.

6. Ringliikumine. Nurkkiirus ja -kiirendus

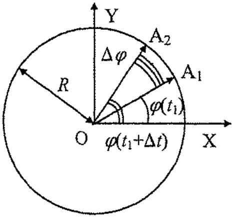
Kõige lihtsamaks kõverjooneliseks liikumiseks on *ringliikumine*. See on liikumine, mille trajektoor on ringjoon. Sel juhul trajektoori kõverusraadius ei muutu ajas. Konstantse kõverusraadiuse tähistame tähega R. Normaalkiirendus avaldub siis

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \qquad (9')$$

Ringliikumisel nimetatakse seda tavaliselt *kesktõmbekiirenduseks*, sest ta on alati suunatud ringi keskpunkti.

Ringjoonelistest on kõige lihtsam *ühtlane ringliikumine*. Selle puhul $a_\tau = 0$. Kiirus ei muutu suuruse poolest, suund aga muutub. Seepärast $a_n \neq 0$. Normaalkiirendus saab võrduda nulliga üksnes sirgjoonelisel liikumisel.

Punkti asukohta ringjoonel võib määrata ka nurgaga φ (Joon. 7).



Joon. 7

Kui koordinaatide alguspunkt O on võetud ringi tsentrisse, siis kohavektor muutub ainult suuna poolest. Olgu see aja Δt jooksul pöördunud nurga $\Delta\varphi$ võrra. Ajaühikus sooritatud pöördenurk on siis $\Delta\varphi/\Delta t$. Seda nimetatakse *keskmiseks nurkkiiruseks* ajavahemikul Δt või kaarel A_1A_2. Vähendame ajavahemikku piiramatult:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \varphi'. \quad (11)$$

See annab nurkkiiruse punktis A_1 või ajahetkel t_1, s.t *hetknurkkiiruse*. Leiame seose kiirusega v, mida nurkkiiruse kasutamisel nimetatakse *lineaar-* ehk *joonkiiruseks*. Selleks avaldame kesknurga $\Delta\varphi$ kaarepikkuse $\Delta s = A_1A_2$ kaudu

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R}$$

ja asetame valemisse (11):

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{R \cdot \Delta t} = \frac{1}{R} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{R}.$$

Seega

$$v = \omega \cdot R. \qquad (12)$$

Joonkiirus näitab ajaühikus läbitavat kaarepikkust, nurkkiirus aga ajaühikus raadiuse poolt moodustatud pöördenurka. Seepärast ongi nendevaheline seos täpselt samasugune nagu kaarepikkuse ja sellele vastava kesknurga vahel: $\Delta s = \Delta\varphi R$. Seda võrdust ajaga jagades saamegi ühel pool võrdusmärki joonkiiruse ja teisel pool R kordajana nurkkiiruse ω.

Valem (12) kehtib ka meelevaldsel kõverjoonelisel liikumisel, ainult R tuleb asendada muutuva kõverusraadiusega r.

Valemi (12) abil võib normaalkiirenduse avaldada nurkkiiruse kaudu

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R. \qquad (13)$$

Tangentsiaalse kiirenduse jaoks leiame

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega \cdot R)}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt}.$$

Saadud nurkkiiruse tuletist aja järgi nimetatakse *nurkkiirenduseks*. Tähistame selle ε-ga. Siis

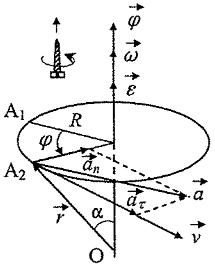
$$a_\tau = \varepsilon \cdot R. \qquad (14)$$

Saime (12)-ga täiesti analoogilise seose. Seepärast nimetatakse a_τ tihti *joonkiirenduseks*.

Ühtlase ringliikumise puhul, kui $a_\tau = 0$, on ka $\varepsilon = 0$.

7. Pöörlemist kirjeldavate suuruste vektoriseloom

Kiiruse ($\vec{v}$), kiirenduse ($\vec{a}$), tangentsiaal- ($\vec{a}_\tau$) ja normaalkiirenduse ($\vec{a}_n$) vektoriaalsuses oleme juba veendunud. Osutub, et ka nurk (φ), nurkkiirus (ω) ja -kiirendus (ε) on vektor. See selgub asjaolust, et pöördenurga arvväärtus üksinda ei anna meile täit ettekujutust pöördest. Keha võib pöörduda ümber mitmesuguse telje. Seepärast on tarvis näidata ka telje asendit ruumis, mille ümber toimub pöörlemine. Telje üks suundadest omistataksegi nurgavektorile $\vec{\varphi}$. Valitakse see *kruvireegli* järgi (Joon. 8).

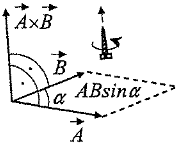


Joon. 8

Kui pöördenurk on vektor, siis sellest võetud tuletis aja järgi [vt valemit (11)], s.t nurkkiirus $\vec{\omega}$ on samuti vektor. Analoogiliselt leiame, et ka nurkkiirendus ε on vektor. $\vec{\omega}$ on alati nurgavektoriga samasihiline, kuid $\vec{\varepsilon}$ ei lange üldiselt kokku pöörlemisteljega. Teljesihiline on see ainult fikseeritud telje puhul. Näiteks siis, kui pöörleva keha telg on asetatud laagritesse. Sel juhul on $\vec{\varepsilon}$ nurkkiirusvektori $\vec{\omega}$ suunaline kiireneva ja vastassuunaline aeglustuva pöörlemise puhul.

Joonisel 8 kujutatakse kiirenevat pöörlemist. $\vec{a}_\tau$ on kiiruse $\vec{v}$ ja $\vec{\varepsilon}$ – nurkkiiruse $\vec{\omega}$ suunaline. Pöörlemistelje asendi muutumisel võib $\vec{\varepsilon}$ omada kõikvõimalikke teisi asendeid $\vec{\omega}$ suhtes. Sel juhul nurkkiirendus näitab nii $\vec{\omega}$ suuruse kui ka suuna muutumise kiirust.

Seoses vaadeldud suuruste vektor-iseloomuga tekib küsimus, kas valemeid (12) - (14) saab kirjutada ka vektorkujul? Vastus on jaatav, kui me kasutame matemaatilist tehet *vektorkorrutis* $\vec{A} \times \vec{B}$. See on vektor, mis asub risti nii $\vec{A}$- kui ka $\vec{B}$-vektoriga ja omab suurust $AB\sin\alpha$ (Joon. 9).



Joon. 9

Korrutise suund määratakse kruvireegli abil (esimest vektorit teisele üle väiksema nurga pöörates).

Võtame koordinaattelgede alguspunkti O pöörlemisteljele joonisel 8. Pöörleva punkti asukohta näidaku kohavektor $\vec{r}$. Selle abil saabki valemi (12) üles kirjutada vektorkujul

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,, \qquad (12')$$

sest $\vec{v}$ on tõepoolest risti nii $\vec{\omega}$ kui ka $\vec{r}$-ga (Joon. 8) ja selle suuruse jaoks saab vektorkorrutise reeglite järgi leida valemi (12)

$$v = \omega \cdot r \cdot \sin\alpha = \omega \cdot R .$$

Analoogiliselt võib üles kirjutada ka valemi (13) ja (14):

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) ; \qquad (13')$$

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} . \qquad (14')$$

Tuleb rõhutada, et tegurite järjekord on siin tähtis!

8. Tahke keha kulgev ja pöörlev liikumine

Liikumisülesannetes käsitletakse tahket keha tavaliselt ainepunktidest koosnevana, kusjuures nende vahekaugused on muutumatud (nn *jäiga kehana*). Sel juhul võib keha meelevaldse liikumise lahutada kaheks lihtsamaks liikumiseks, mis toimuvad teineteisest sõltumatult. Need on *kulg-* ja *pöördliikumine.*

Kulgliikumisel ehk translatoorsel liikumisel jäävad kõik ainepunkte ühendavad mõttelised sirged kogu liikumise kestel iseenesega paralleelseks.

Pöördliikumisel moodustavad kõik ainepunktid ringjooni ümber ühise telje, mida nimetatakse pöörlemisteljeks.

Võtame ühe näite. Kujutame pliiatsi liikumist nii, et selle kõik punktid moodustaks ringjooni, kuid pliiats jäägu iseenesega kogu liikumise vältel paralleelseks ega pöörelgu ümber oma sümmeetriatelje. Liikumine on translatoorne, mitte pöördliikumine. Kõik punktid moodustavad küll ringjooni, kuid mitte ümber ühise telje.

Kulgliikumisel on keha kõigi punktide trajektoorid ühesugused. Seepärast on ühesugused ka kiirused ja kiirendused. Kogu keha liikumist võib kirjeldada ainult ühe ainepunkti liikumise kirjeldamisega. Tavaliselt võetakse selleks keha massikese. Massikeskme asukoha arvutusvalemi leiame hiljem.

Pöördliikumisel ei ole kõigi punktide trajektoorid ühesugused. Need on küll ringjooned, kuid raadiused on ringjoontel erinevad. Seepärast on erinevad ka joonkiirused ja -kiirendused. Ühesugune on nii pöördenurk, nurkkiirus kui ka nurkkiirendus. Seepärast eelistataksegi kehade pöörlemise kirjeldamisel nurksuurusi. Joonsuurused on neist raadiuse abil lihtsalt leitavad [vt valemit (12), (13) ja (14)]. Need on võrdelised pöörlemisraadiusega. Teljelähedastel punktidel on joonsuurused väiksemad, kaugematel aga suuremad.

§ 2. Ainepunkti ja tahke keha translatoorse liikumise dünaamika

9. Inertsiseadus ja inertsiaalsed taustsüsteemid

Paljud füüsika seadused sõnastatakse ideaalsete objektide või ideaalsete protsesside jaoks. Nii on ka *Newtoni I* ehk *inertsiseadusega*. Siin vaadeldakse ideaalset liikumist, sellist, mis on vaba igasugustest takistustest, mõjutustest. Esimesena tõi füüsikasse kujutluse niisugusest liikumisest Galilei. Tema arvates pidi keha sel juhul liikuma *igavesti* ja *jääva kiirusega*. Descartes lisas sellele mõtte, et vaba keha jätkab oma liikumist *sirgjooneliselt*. Newton võttis need järeldused kokku üheks dünaamika põhiseaduseks.

Iga keha püsib paigal või liigub ühtlaselt sirgjooneliselt seni, kuni teiste kehade mõju ei muuda sellist liikumisolekut.

Seejuures Newton rõhutas, et ühtlase sirgjoonelise liikumise olek ei ole mitte ainult teiste kehade mõju puudumise tulemus, vaid kui igale kehale omane visa püüd säilitada sellist liikumise olekut. Kui seda mitte arvestada, siis võib näiteks arvata, et vaba keha lihtsalt "hõljub ruumis", korrapäratult ja sihitult oma asendit muutes. Kuid see ei ole nii. Vaba keha käitub täpselt Newtoni I seaduse kohaselt. Veel enam, kui teised kehad püüavad sellist olekut muuta, siis ta avaldab vastupanu - püüab takistada teisi kehi oma liikumisolekut muutmast. Sellist

kõigi kehade visa püüdu säilitada paigalseisu või ühtlase sirgjoonelise liikumise olekut nimetatakse inertsiks.

Sõna tuleneb vastavast ladinakeelsest sõnast (inertsia), mis tähendab loidust, raskesti liikumapandavust. Füüsikalist suurust, millega mõõdetakse kehade inertsust, nimetatakse *massiks*. Tavaliselt tähistatakse tähega m.

Inertsiseaduses räägitakse paigalseisust ja liikumisest. Kuid need mõisted ei ole absoluutsed. Keha on paigal või liigub mingi taustsüsteemi suhtes. Seepärast tekib küsimus, kas see seadus kehtib igasuguses taustsüsteemis? Kas näiteks kiirendusega liikuvas trollibussis kehtib inertsiseadus? Ilmselt ei. Sest kui seal ei mõju meile mingeid jõudusid, s.t me ei toetu istepingile või ei hoia kinni käepidemest, siis me ei seisa paigal ega liigu ka ühtlaselt ja sirgjooneliselt. Liigume kiirendusega, vastupidises suunas trollibussi kiirendusega. S.t niisuguses süsteemis on jõu rakendamine vajalik keha paigalpüsimiseks.

Teisiti on olukord siis, kui taustsüsteem ise liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt, s.t on välismõjudest vaba. Näiteks ühtlaselt liikuva laeva kajutis me ei märka kõrvalekaldumisi inertsiseadusest.

Materiaalset taustsüsteemi, milles inertsiseadus kehtib täiesti täpselt, nimetatakse inertsiaalseks taustsüsteemiks.

Inertsiseaduse kontroll võimaldabki kindlaks teha, kas taustsüsteem liigub ühtlaselt sirgjooneliselt või mitte. Kui see liigub kiirendusega, siis ka kõik vabad kehad liiguvad selles kiirendusega, ainult süsteemi kiirendusele vastupidisega. Need säilitavad ühtlast sirgjoonelist liikumist, mistõttu taustsüsteemi suhtes näivad liikuvat kiirendusega. Meile tundub, et kehale mõjub jõud, sest kogemus ütleb, et ainult jõu mõjul toimub kiirendusega liikumine. Sellist jõudu nimetatakse *inertsijõuks*.

Vabale kehale mõjuv inertsijõud ei ole siiski reaalne jõud. Selle väite heaks tõestuseks on asjaolu, et inertsijõud ei põhjusta vaba keha deformeerumist. Näiteks kui samas kiirendusega liikuvas trollibussis liigub vaba pall kiirendusega, siis ei ole see deformeerunud. Alles põrkumisel mingi kehaga hakkab pallile mõjuma reaalne jõud, mis sunnib palli muutma ühtlast sirgjoonelist liikumist inertsiaalse taustsüsteemi suhtes. Kuid see jõud ei ole inertsijõud. Inertsijõud on jõud, millega pall mõjutab teisi kehi, mis ei võimalda sellel jätkata endist liikumist. Nüüd ei ole pall enam vaba.

Absoluutselt inertsiaalseid looduslikke taustsüsteeme ei ole olemas. Tavaliselt loetakse inertsiaalseks Maaga seotud süsteemi. Maa pöörlemise kiirendus - kesktõmbekiirendus on Maa suure raadiuse tõttu väike, mistõttu ei avaldu praktilistel juhtudel, täppismõõtmistel aga küll. Täpsemalt inertsiaalne on Päikesega seotud taustsüsteem, kuid ka see liigub väikese kiirendusega galaktikate mõju tulemusena.

Kui üks vajaliku täpsusega inertsiaalne taustsüsteem on leitud, siis on inertsiaalne ka iga teine süsteem, mis liigub esimese suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt, s.t inertsiaalseid taustsüsteeme saab põhimõtteliselt olla kuitahes palju. Näiteks praktiliselt inertsiaalsed on Maaga ja selle pinnal ühtlaselt liikuva kehaga seotud taustsüsteemid.

10. Liikumishulk, jõud ja impulss. Newtoni II seadus

Inertsiseaduse puhul rääkisime keha liikumisolekust ja selle muutumisest. Millal see olek on hästi püsiv?

[Katsed erineva massiga vankrikestega roobasteel.]

Katsed ja muu praktika näitab, et keha liikumist on raske muuta, kui keha mass on suur ja see liigub suure kiirusega. Seepärast ongi füüsikas võetud kasutusele liikumisolekut kirjeldav suurus, mis võrdub massi ja kiiruse korrutisega

$$\vec{L} = m \cdot \vec{v} . \qquad (15)$$

Seda nimetatakse *liikumishulgaks*. $\vec{L}$ on kiiruse suunaline vektor, sest kiirus on korrutatud skalaarse suurusega - massiga.

Keha liikumishulk muutub ainult teiste kehade mõjul (vt Newtoni I seadust). Mõju iseloomustamiseks võetakse kasutusele suurus, mida nimetatakse *jõuks*.

Jõud on füüsikaline suurus, millega mõõdetakse ühe keha mõju teisele, mille tulemusena muutub nende liikumishulk.

Jõud on seda suurem, mida kiiremini see liikumishulka muudab. Seepärast võibki jõu avaldada liikumishulga tuletisena

$$\vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt} . \qquad (16)$$

Jõud on võrdeline ajaühikus toimuva liikumishulga muutusega.

Sisuliselt on see *Newtoni II seadus*, sest valemi (15) abil võime kirjutada (kui keha mass on konstantne)

$$\vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} .$$

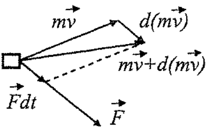
Tihti kirjutataksegi Newtoni II seadus kujul

$$d(m \cdot \vec{v}) = \vec{F} \cdot dt . \qquad (16')$$

Vasakpoolne avaldis on *liikumishulga muutus*, parempoolset - jõu ja selle mõjumisaja korrutist - nimetatakse *jõuimpulsiks*. Seepärast sõnastatakse Newtoni II seadus järgmiselt (umbes nii sõnastas selle ka Newton).

Liikumishulga muutus on võrdeline jõuimpulsiga ja toimub jõu mõjumise suunas.

Selgitame seda joonise 10 abil. Hetkel, millal keha liigub suunas $m\vec{v}$, hakkab sellele mõjuma jõud $\vec{F}$. Aja dt möödudes on keha liikumishulk muutunud täpselt jõuimpulsi $\vec{F}dt$ võrra, mille suund langeb kokku jõu suunaga.



Joon. 10

(16') nimetatakse ka *liikumishulga muutumise seaduseks*. See on üldisem kui $\vec{F} = m\cdot\vec{a}$, sest kehtib ka muutuva massiga kehade liikumisel. Niisugusel juhul

$$d(m\vec{v}) = \vec{v}\,dm + m\,d\vec{v}.$$

Et liikumishulk $m\vec{v}$ on sedavõrd otseselt seotud jõuimpulsiga ehk lihtsalt impulsiga (ühe muutus on võrdne teisega), siis sageli nimetatakse ka $m\vec{v}$ impulsiks.

11. Ainepunktide süsteemi dünaamika. Newtoni III seadus

Reaalse keha või kehade süsteemi liikumise kirjeldamisel on mõnikord kasulik vaadelda seda ainepunktidest koosnevana. Ainepunktide vahel mõjuvad jõud. Süsteemi võidakse mõjutada ka väljastpoolt (näiteks gravitatsioonijõuga). Seepärast jaotatakse ainepunktidele mõjuvad jõud kaheks - *sise-* ja *välisjõududeks*. Sisejõud mõjuvad süsteemi või keha osade (ainepunktide) vahel, välisjõud - antud süsteemi osade ja sellest väljaspool asuvate kehade vahel. Nagu koolifüüsikast teada, kehade mõju on alati vastastikune. Seda väljendab *Newtoni III seadus*.

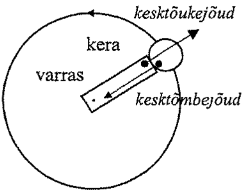
Mõjuga kaasneb alati võrdne ja vastassuunaline vastumõju.

Kui üks keha (või ainepunkt) mõjutab teist jõuga $\vec{F}_{21}$ ja teine esimest jõuga $\vec{F}_{12}$, siis

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{17}$$

Kumba neist nimetada mõjuks, kumba vastumõjuks, ei ole mitte millegagi määratud. Kõrvalseisja, vaatleja seisukohast on see mõnikord võimalik.

Üheks mõju ja vastumõju paari näiteks on *kesktõmbe-* ja *kesktõukejõud* ringliikumisel (Joon. 11).



Joon. 11

Kesktõmbejõud (varras) annab kerale kesktõmbe- ehk normaalkiirenduse. Kesktõukejõud on kera vastumõju vardale. Vektorid on joonistatud teineteise suhtes nihutatult, et oleks eristatavad nende rakenduspunktide asukohad.

Kui summeerida kõik süsteemi osadele mõjuvad sisejõud, saame tulemuseks 0. See on järeldus Newtoni III seadusest - jõud koonduvad summas paarikaupa välja.

Vaatleme N ainepunktist koosnevat süsteemi. Olgu

m_i - i-nda ainepunkti mass ($i = 1,2,3,\ldots N$),

v_i - i-nda ainepunkti kiirus,

f_i - i-ndale ainepunktile mõjuv jõud (üldjuhul sise- ja välisjõu summa).

Siis võime iga ainepunkti kohta kirjutada Newtoni II seaduse

$$d(m_i\vec{v}_i) = \vec{f}_i dt .$$

Summeerime need N võrdust

$$\sum_{i=1}^{N} d(m_i\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i dt$$

ja teisendame

$$d(\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i) = dt\sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i .$$

Saime kaks summat

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i \qquad (18)$$

- *süsteemi liikumishulga* ja

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i \tag{19}$$

– süsteemile mõjuva *välisjõudude resultandi*, sest nagu äsja sai öeldud sisejõud koonduvad summas välja. Seega

$$d\vec{L} = \vec{F} \cdot dt .$$

Näitame, et süsteemi liikumishulga $\vec{L}$ võime omistada ühele punktile süsteemis, kui samasse punkti koondada kogu süsteemi mass M, mis on ainepunktide masside summa

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i :$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \right) = M \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M} \right) .$$

Tähistame sulgudes oleva avaldise $\vec{r}_M$-ga

$$\vec{r}_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i . \tag{20}$$

Siis saame, et

$$\vec{L} = M \frac{d\vec{r}_M}{dt} = M \cdot \vec{v}_M .$$

Nii ongi süsteemi liikumishulk omistatud punktile massiga M, mille asukohta näitab kohavektor $\vec{r}_M$ ja liikumiskiiruseks on $\vec{v}_M$, kohavektori tuletis aja järgi. Seda punkti nimetatakse süsteemi *massikeskmeks* või *inertsikeskmeks*. Seega valem (20) on massikeskme kohavektori arvutusvalem.

Kõigi ettevõetud tähistuste tõttu võtab algselt kirjutatud summade võrdsus kuju

$$d(M \cdot \vec{v}_M) = \vec{F} \cdot dt \tag{21}$$

– süsteemi massikeskme jaoks kehtib täpselt sama Newtoni II seadus, mis ühe ainepunkti puhul. (21) nimetatakse ka *massikeskme liikumise seaduseks*. Sellest järgneb veel, et kogu süsteemile rakendatud jõudude summa, resultantjõu $\vec{F}$ võime samuti rakendada massikeskmele.

Rõhutame veel kord, et käsitletud dünaamika käis translatoorse liikumise kohta. Süsteem asus tingimustes, kus ei tekkinud pöörlevat liikumist.

12. Liikumishulga ehk impulsi jäävuse seadus

Süsteemi massikeskme liikumise seaduse abil võime lihtsalt jõuda liikumishulga jäävuse seaduseni. Vaatleme juhtumit, mille puhul süsteemile välisjõudusid ei mõju, s.t $\vec{F}=0$. Sellist süsteemi nimetatakse *suletuks* või *isoleerituks*. Valemist (21) saame, et

$$d(M\vec{v}_M)=0$$

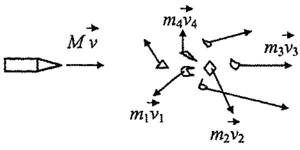
- süsteemi liikumishulk ei muutu, see on konstantne ajas

$$M\vec{v}_M=\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i=\overrightarrow{const}. \qquad (22)$$

Tavaliselt väljendatakse seda seaduspärasust lausega

suletud süsteemi liikumishulk on jääv.

Joonisel 12 on skemaatiliselt kujutatud ühte näidet - mürsku vahetult enne lõhkemist ja hetk pärast seda.



Joon. 12

Kui õnnestuks määrata kõigi kildude liikumishulgad ja need summeerida, saaksime tulemuseks täpselt $M\vec{v}$ - mürsu liikumishulga enne lõhkemist. Kildude liikumishulkade summa ei olene lõhkelaengu tugevusest, sest sisejõud ei saa süsteemi liikumishulka muuta (nende resultant on 0).

Liikumishulk on vektoriaalne suurus. Seepärast on vektor ka võrduses (22) olev konstant. Vektor on konstantne ainult siis, kui selle kõik komponendid on eraldi võetuna konstantsed. Seepärast kehtib seadus (22) ka eraldi mingi ühe liikumissuuna kohta. Teistes, sõltumatutes suundades võivad mõjuda jõud ja nendes liikumishulk ei ole jääv. Näiteks liikumisel mööda raudteed tihti rakendatakse liikumishulga jäävuse seadust, kuigi Maa mõjutab rongi. See mõju on liikumissuunaga risti. Liikumise sihis (näiteks x-telje sihis) võib kehtida liikumishulga jäävuse seadus

$$\sum_{i=1}^{N} m_i v_{ix} = const_x . \qquad (22')$$

Sama võib mõnikord kehtida ka teiste koordinaattelgede sihis. Suletud kehade süsteemi puhul see nii ongi - seadus kehtib kõigi kolme telje sihis eraldi, seega ka vektorkujul.

Esitatud kehadesüsteemi omadus tuleneb ruumi ja aja homogeensusest, s.t sellest, et ruumi ja aja omadused ei olene nihkest ruumis ega nihkest ajas. Lähtudes nendest eeldustest, võib samuti liikumishulga jäävuse seadust tuletada.

Võib nimetada palju nähtusi, mille aluseks on impulsi jäävuse seadus. Seistes näiteks libedal põrandal on võimatu paigast nihutada rasket eset ilma, et ise ei hakkaks libisema vastupidises suunas. Samal nähtusel põhineb ka rakettide ja teiste reaktiivmootorite töö.

[Katse raketi või kahuri mudeli tagasijooksu jälgimiseks laskmisel ja reaktiivpöörlemise tekitamiseks vee väljavoolamisega S-kujulise toru otstest.]

13. Töö kõverjoonelisel liikumisel

Jõu mõju liikuvale kehale oleneb jõu suunast. Näiteks liikumisele horisontaalsel teel ei ole vertikaalsel raskusjõul mingit mõju, kui hõõrdumise võib jätta arvestamata. Seevastu on mõju oluline, kui jõud mõjub horisontaalselt. Mõju tulemuseks on kiiruse muutumine. Muutuse suurus oleneb jõu mõjumise ajast või tee pikkusest, millel mõju esineb. Seepärast ongi füüsikas tarvitusele võetud suurus, mis oleneks nii jõu suurusest, selle mõjumissuunast kui ka teepikkusest. See kannab *töö* nime. *Mehaaniline töö* on seda suurem, mida suurem on kehale mõjuv jõud ja mida rohkem keha selle jõu mõjul nihkub

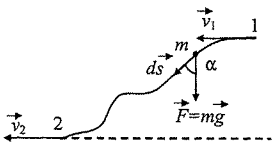
$$A = F \cdot s \cdot \cos\alpha . \qquad (23)$$

s on siin nihke suurus ja $F\ \cos\alpha$ – *nihkesuunaline jõu komponent.* Definitsioonina kirjutame:

mehaaniline töö on kehale nihke suunas mõjuva jõu ja nihke suuruse korrutis.

Nihke suhtes risti mõjuv jõud tööd ei tee.

Valem (23) kehtib ainult muutumatu, konstantse suuruse- ja suunaga jõu puhul. Muutuva jõu juhul või ka siis, kui nihkumine toimub mööda kõverjoont ja jõud suunda ei muuda, seda valemit kasutada ei saa. Näiteks libisegu keha alla mööda kõverat kaldpinda (Joon. 13).



Joon. 13

Kehale mõjugu ainult raskusjõud. Jõu ja nihke vaheline nurk (α) muutub pidevalt. Ei ole teada, millist väärtust sobib kasutada valemis (23). Et siiski saaks tööd arvutada, toimitakse järgmiselt. Kogu liikumistee jaotatakse elementaarseteks niheteks $d\vec{s}$. Nii väikesteks, et selle ulatuses võib nurga ja jõu suuruse muutuse jätta arvestamata. Siis saab jälle rakendada valemit (23), mis annab *elementaartöö δA* nihkel ds

$$\delta A = F \cdot ds \cdot \cos\alpha\,.$$

Kogu töö on selliste elementaartööde summa teel punktist 1 punktini 2. Vastav tehe kannab integraali leidmise nime

$$A = \int_s F \cdot \cos\alpha \cdot ds\,. \qquad (23')$$

Öeldakse, et integraal võetakse üle kõverjoone s, mis tähistab kogu trajektoori punktist 1 punktini 2.

Integraali saab üles kirjutada lihtsamalt, kui kasutada *vektorite skalaarkorrutise* tehet

$$\vec{C}\vec{B} = CB\cos\alpha\,.$$

α on nurk vektori $\vec{C}$ ja $\vec{B}$ vahel. Korrutise võib avaldada ka vektorite komponentide kaudu:

$$(C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k})(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}) = C_xB_x\vec{i}\vec{i} + C_xB_y\vec{i}\vec{j} +$$
$$+ C_xB_z\vec{i}\vec{k} + C_yB_x\vec{j}\vec{i} + C_yB_y\vec{j}\vec{j} + C_yB_z\vec{j}\vec{k} + C_zB_x\vec{k}\vec{i} +$$
$$+ C_zB_y\vec{k}\vec{j} + C_zB_z\vec{k}\vec{k}\,.$$

Arvestades ühikvektorite $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ risti olekut üksteisega, võime võtta nulliks kõik skalaarkorrutised, milles korrutatakse erinevaid vektoreid. Iseendaga korrutamisel on tulemuseks 1, sest vektor on ühikulise pikkusega ja vektoritevaheline nurk sel juhul 0. Nii saame

$$\vec{C}\vec{B} = CB\cos\alpha = C_xB_x + C_yB_y + C_zB_z\,.$$

Sellise tehte abil võibki kirjutada

$$A = \int_s \vec{F}d\vec{s}\,. \qquad (23'')$$

Vektori diferentseerimine tähendab selle komponentide diferentseerimist. Kui

$$\vec{s} = s_x\vec{i} + s_y\vec{j} + s_z\vec{k}\,,$$

siis

$$d\vec{s} = \vec{i}\,ds_x + \vec{j}ds_y + \vec{k}ds_z\,,$$

kus ds_x, ds_y, ds_z on vastavalt x-, y- ja z-telje suunalised nihked.

Jõu $\vec{F}$ töö elementaarnihkel $d\vec{s}$ võib olla nii positiivne ($0 \leq \alpha < 90^\circ$) kui ka negatiivne ($90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$). Kui $\alpha = 90^\circ$, siis töö on 0.

14. Kineetiline energia

Olgu joonisel 13 kujutatud liikumisel keha kiirus punktis 1 $\vec{v}_1$ ja punktis 2 $\vec{v}_2$. Avaldame jõu töö nende kiiruste kaudu. Selleks teisendame töö valemit (23") järgmiselt:

$$A = \int_s \vec{F}d\vec{s} = \int_s m\vec{a}d\vec{s} = \int_s m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{s} = \int_s m\frac{d\vec{s}}{dt}d\vec{v} = \int_s m\vec{v}d\vec{v}\,.$$

Millega võrdub $\vec{v}d\vec{v}$? Skalaarkorrutise definitsiooni järgi saame

$$\vec{v}d\vec{v} = v_xdv_x + v_ydv_y + v_zdv_z\,.$$

Diferentseerimisel kehtivad samad reeglid, mis tuletise võtmisel. Seepärast

$$v_x dv_x = \tfrac{1}{2} d(v_x^2)$$

ja kolme liidetava summa annab

$$\tfrac{1}{2} d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \tfrac{1}{2} d(\vec{v}\vec{v}) = \tfrac{1}{2} d\vec{v}^2 .$$

Nii saame lõpuks töö jaoks

$$A = \int_s m\tfrac{1}{2} d(\vec{v}^2) = \int_s d\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right) = \frac{m\vec{v}^2}{2}\Bigg|_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} = \frac{m\vec{v}_2^2}{2} - \frac{m\vec{v}_1^2}{2} .$$

Tulemus ei olene trajektoori kujust, vaid ainult olukorrast selle alg- ja lõpp-punktis. Töö võrdub mingi suuruse

$$W_k = \frac{m\vec{v}^2}{2} \tag{24}$$

muuduga

$$A = \Delta W_k . \tag{25}$$

See suurus kannabki nimetust *kineetiline energia*, mis võimaldab tehtud arvutuste tulemust väljendada järgmise lausega.

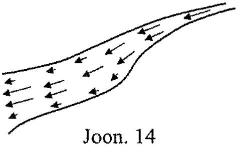
Jõu poolt sooritatud töö mõõdab kineetilise energia muutust.

Kui joonisel 13 näidatud juhul esineks hõõrdumine, siis tuleks ka hõõrdejõu tööd arvestada. See jõud on alati vastassuunaline nihkega $d\vec{s}$ ($\alpha = 180^\circ$, $\cos\alpha = -1$). Seepärast on hõõrdejõu töö alati negatiivne, mis tähendab kineetilise energia vähendamist. Keha ei saavuta allalibisemisel nii suurt kiirust $\vec{v}_2$, kui hõõrdumise puudumisel.

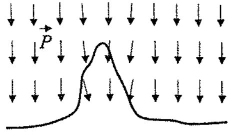
15. Vektorväli

Vaatleme näiteks vee voolamist jões (Joon. 14). Jõe muutliku laiuse või sügavuse tõttu on muutlik ka vedelikuosakeste kiirus jões. Selle iseloomustamiseks võime igasse vedeliku punkti joonistada vastava kiirusvektori. Saadud vektorite kogumit nimetatakse *vektorväljaks*. Üldiselt on see

ruumi osa, mille igale punktile vastab kindel vektor.



Joon. 14



Joon. 15

Toodud näites on välja vektoriks kiirus. Seepärast nimetatakse seda välja ka *vedeliku voolukiiruste väljaks*.

Välja vektoriks võib olla iga vektor. Joonisel 15 on selleks raskusjõud. Iga punkti jaoks võib joonistada vektori $\vec{P}$, mis on mingi massiga m keha raskus. Selles näites on väljavektor praktiliselt konstantne vektor. Ainult suure mäemassiivi juures on see mõningal määral kaldunud mäemassiivi poole, vertikaalsihiga võrreldes. Ka kõrguse olulisel muutmisel hakkab $\vec{P}$ vähenema kõrgusega. Võime rääkida raskusjõu väljast.

Raskusjõud oleneb välja asetatud keha massist. Et välja vektor ei oleneks sellest ja iseloomustaks ainult Maa välja, jagame vektori $\vec{P}$ massiga m. Nii saame *ühikmassile mõjuva raskusjõu*

$$\vec{g} = \frac{\vec{P}}{m}. \qquad (26)$$

Tavaliselt nimetatakse seda *raskuskiirenduseks*. $\vec{g}$ ei olene massist m, kui vastav keha ei ole just väga suur. Seepärast on see Maad ja selle lähedast ruumi iseloomustav suurus. $\vec{g}$ välja nimetatakse Maa *gravitatsiooniväljaks* ja vektorit ennast - gravitatsioonivälja *tugevuseks* antud punktis.

Veel võib vektorvälja näitena tuua elektrivälja, magnetvälja, tuumajõudude välja jne. Esialgu toodi välja mõiste füüsikasse formaalselt - kui vahend nähtuste graafiliseks kirjeldamiseks. Hiljem leiti, et paljudele väljadele vastab ka materiaalne objekt tegelikkuses. Seda hakati nimetama *füüsikaliseks väljaks*. Nüüd teame, et kõigi kehade ümber on olemas gravitatsiooniväli, laetud kehade puhul ka elektriväli jne. Väli on *teine mateeria eksisteerimise viis*, mida meie kaasajal tunneme. Esimesena õpiti tundma ainet.

Füüsikaline väli on materiaalne objekt, mille kaudu aine osakesed mõjutavad üksteist.

Ühe keha mõju teisele ei saa toimuda ilma kehi ühendava materiaalse objektita. Ilma sellise ühenduseta esinevat mõju nimetatakse *kaugmõjuks*. Kaugmõju olemasolu ei ole seni eksperimentaalselt avastatud. Füüsikas arvestatakse ainult lähimõjuga, s.t igasugune mõju kandub edasi ainult välja või aine kaudu.

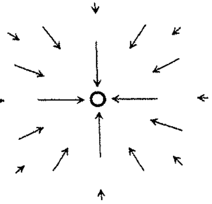
16. Töö tsentraalse jõu väljas

Vektori võib lahutada komponentideks või avaldada mitme vektori summana. Seepärast võib ka ühe vektorvälja lahutada mitmeks väljaks. Kõige lihtsam (lihtsaim liidetav) on *homogeenne väli*.

Homogeenseks nimetatakse välja, mille vektorid on igas ruumipunktis ühesuguse suuruse ja suunaga.

Teisiti öeldes, välja vektor on ruumis konstantne. Näitena võib tuua gravitatsioonivälja tasase maapinna lähedal. Küllalt lihtne on ka *tsentraalne väli*.

Tsentraalseks (kitsamas mõttes) nimetatakse välja, mille vektorite pikendused lõikuvad ühes nn tsentraalses punktis (Joon. 16).



Joon. 16

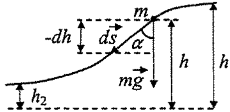
Selline on näiteks elektriväli punktlaengu ümber, gravitatsiooniväli punktmassi (ainepunkti) ümber jne.

Mõistele saame praktilisema väärtuse kui seda üldistame. ***Tsentraalne on ka väli, mis koosneb joonisel 16 näidatud lihtsate väljade summast.*** Summal on samad omadused kui üksikutel liidetavatel. Sellisel juhul on tsentraalne näiteks igasuguse keha gravitatsiooniväli, sest seda võib vaadelda koosnevana ainepunktide väljadest, kusjuures iga punkti oma on joonisel 16 näidatud omadustega. Ka homogeenne väli saab olla tsentraalne. Sellisel juhul asub tsenter lõpmata kaugel vaatluskohast.

Arvutame töö keha nihutamisel homogeenses raskusväljas. Keha liikugu mööda mingit kõverjoonelist teed, näiteks kõveral kaldpinnal hõõrdumisvabalt (Joon. 17). Arvutame raskusjõu töö keha nihkumisel kõrguselt h_1 kõrgusele h_2:

$$A = \int_s \vec{F} d\vec{s} = \int_s m\vec{g} d\vec{s} = \int_s mgds \cos\alpha =$$

$$= -\int_s mgdh = -mg \int_s dh = -mgh \Big|_{h_1}^{h_2} = -mgh_2 + mgh_1 .$$



Joon. 17

Tulemus ei olene trajektoori kujust, vaid ainult selle alg- ja lõpp-punkti asendist. Töö võrdub mingi suuruse

$$W_p = mgh \tag{27}$$

muuduga, võetuna "−"-märgiga

$$A = -\Delta W_p . \tag{28}$$

W_p nimetatakse *potentsiaalseks energiaks*. See ei ole üheselt määratud suurus, sest kõrgust h võime mõõta mitmesuguselt, meelevaldse nivoo suhtes. Seevastu töö on ühene – kõrguste vahe ei olene h mõõtmise algnivoo valikust.

Sama töö, mille meie 14. punktis arvutasime kineetilise energia muudu kaudu, oleme siin avaldanud potentsiaalse energia muudu kaudu. Seega mõõdab töö mõlema muutu. Nii on alati, igasuguse energia muundumise puhul, kus tehakse tööd. Tööga mõõdetud määral läheb energiat üle ühest liigist teise.

Valem (27) kehtib ainult homogeenses väljas, (28) on aga kasutatav igasuguse tsentraalse jõuvälja puhul, kus töö on potensiaalse energia muutuse mõõduks. W_p arvutusvalem oleneb sel juhul väljast.

Potentsiaalse energia mõistet saab sisse tuua ainult tsentraalses väljas (üldtähenduses). Selle energia muutus, võetuna vastandmärgiga, annab tsentraalse jõu töö ainepunkti nihutamisel ühest kohast teise. Seejuures ei olene töö trajektoori kujust, vaid keha potentsiaalsete energiate vahest trajektoori algus- ja lõpp-punktis. *Mittetsentraalsete jõudude* esinemisel potentsiaalse energia mõistet kasutada ei saa. Näiteks hõõrdejõu puhul see mõjub alati liikumisele vastu, mistõttu töö oleneb ka trajektoori kujust ja ühele ruumipunktile ei saa omistada mingit potentsiaalse energia väärtust, mis arvestaks hõõrdejõu tööd üleminekul ühest punktist teise. Viimase asjaolu tõttu nimetatakse mittetsentraalseid jõuvälju ka *mittepotentsiaalseteks* ja tsentraalseid - *potentsiaalseteks*. Mõlemat sorti jõudude olemasolul võib mõnikord potentsiaalse energia mõistet ka kasutada, kuid see arvestab siis ainult välja tsentraalset osa.

17. Mehaanilise energia jäävuse seadus

Kasutades valemeid (25) ja (28), mis kehtivad ühe ja sama liikumise juures, saame kirjutada

$$\Delta W_k + \Delta W_p = 0. \tag{29}$$

Järelikult esineb vaadeldud liikumisel tsentraalsete jõudude väljas üks suurus

$$W = W_k + W_p ,$$

mille muutus on 0

$$\Delta W = 0 . \tag{29'}$$

Seda suurust nimetatakse keha *mehaaniliseks energiaks* ja valem (29) või (29') väljendab *mehaanilise energia jäävuse seadust*. Et seadus kehtib ainult tsentraalses väljas, siis nimetatakse tsentraalseid jõudusid ka *konservatiivseteks* (lad. sõnast conservatio - säilimine). Mittetsentraalsete jõudude olemasolul mehaaniline energia ei säili, vaid hajub. Seepärast nimetatakse selliseid jõudusid *dissipatiivseteks* (dissipatio - hajumine). Tekivad teised, mittemehaanilised energialiigid. Näiteks soojus. Samad nimetused on kasutusel ka vastavate väljade juures.

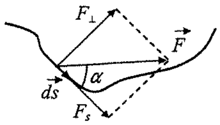
Potentsiaalset energiat ei saa omistada ainult ühele kehale. See tuleneb vastastikmõjust teiste kehadega. Seepärast on ta alati kehade süsteemi energia. Võime küll rääkida ühe keha osade vastastikmõju potentsiaalsest energiast, kuid siis oleme juba keha lahutanud mitmeks osaks ja tegemist on ikkagi kehade süsteemiga. Vastavaid kehade süsteeme nimetatakse samuti konservatiivseteks ja dissipatiivseteks. Need mõisted võimaldavadki sõnastada jäävusseaduse.

Suletud konservatiivse süsteemi mehaaniline energia on jääv. Kuid see energia võib üle minna ühest liigist teise - kineetilisest potentsiaalseks või vastupidi. Seejuures on energia muundumise mõõduks töö, mis mõõdab nii kineetilise kasvu kui ka potentsiaalse kahanemist. Sellisel juhul on väljajõudude töö positiivne. Kui aga kineetiline energia kahaneb ja potentsiaalne kasvab, siis on see töö negatiivne. Välja jõule vastu mõjuva jõu (Newtoni III seaduse järgi vastumõju) puhul on kõik märgid vastupidised.

Dissipatiivses süsteemis kehtib ainult *üldine energia jäävuse seadus*, kus tuleb arvesse võtta kõiki energialiike.

18. Potentsiaalse energia ja jõu vaheline seos

Potentsiaalse energia kaudu on võimalik arvutada kehale mõjuvat konservatiivset jõudu. Vastava seose leidmiseks arvutame tööd elementaarnihkel (Joon. 18).



Joon. 18

Seda teeme kahel viisil - jõu ja potentsiaalse energia muudu kaudu. Elementaarnihkel $d\vec{s}$ jõu suurus ja suund praktiliselt ei muutu. Saame kasutada valemit (23)

$$\delta A = F ds \cos\alpha = F_s ds .$$

Tööd teeb ainult nihkesuunaline jõu komponent F_s (Joon. 18). Teisest küljest võime sama tööd arvutada nihkel $d\vec{s}$ esineva keha potentsiaalse energia muudu dW_p kaudu [valem (28)]

$$\delta A = -dW_p .$$

Nii saame

$$F_s ds = -dW_p ;$$

$$F_s = -\frac{dW_p}{ds} .$$

Paremal pool võrdusmärki saime tuletise potentsiaalsest energiast, võetuna $d\vec{s}$ suunas. See on potentsiaalse energia muutus $d\vec{s}$ -suunalisel pikkusühikul. Tulemus osutub suuruselt võrdseks ja märgilt vastupidiseks samasuunalise jõu komponendiga.

Kordame sama mõttekäiku 3 korda - kord X-telje, siis Y-telje ja lõpuks Z-telje suunas. Nii saame nende telgede suunalised jõu komponendid:

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial W_p}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial W_p}{\partial z}.$$

Tuletisi x-, y- ja z-koordinaatide järgi nimetatakse *osatuletisteks*. Nende võtmisel vaadeldakse teisi koordinaate konstantidena. Seepärast tähistatakse ka tuletise võtmist teisiti. Kogu jõu jaoks saame

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial W_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W_p}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Matemaatiliste tehete kogumikku, mida sooritatakse viimase avaldise sulgudes, tähistatakse lühidalt *grad* ja nimetatakse *gradiendi leidmiseks*. Seega

$$\vec{F} = -grad\, W_p. \tag{30}$$

Gradiendi leidmine on vektori leidmine. Seepärast ei ole sõnale *grad* vektori tähist tarvis kirjutada, s.t ilma vektori märgita on võrduse parem pool vektoravaldis.

Seega, kui meil on teada mingis potentsiaalses väljas keha potentsiaalse energia olenevus ruumikoordinaatidest

$$W_p = W_p(x,y,z),$$

siis võib jõu määrata sellest funktsioonist gradienti leides. Gradiendi leidmine sisaldab endas kolme osatuletise võtmist. Jõu kolm komponenti on nendega võrreldes vastandmärgilised.

19. Gradiendi füüsikaline tähendus

Võtame konkreetse näite. Vaatleme liikumist homogeenses raskusväljas (Joon. 19). Antud juhul potentsiaalne energia oleneb ainult y-koordinaadist

$$W_p = W_p(x,y,z) = mgy.$$

Leiame osatuletised:

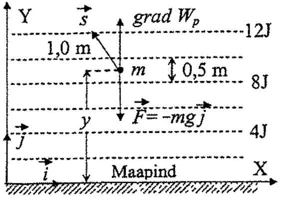
$$\frac{\partial W_p}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial W_p}{\partial y} = mg; \quad \frac{\partial W_p}{\partial z} = 0.$$

Järelikult,

$$grad\, W_p = 0\cdot\vec{i} + mg\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k} = mg\vec{j}.$$

Jõu jaoks saame

$$\vec{F} = -mg \cdot \vec{j} = \vec{P}.$$



Joon. 19

Mõlemad vektorid on näidatud ka joonisel 19. Gradiendi vektor on suunatud ülespoole, on $\vec{j}$-vektoriga samasuunaline, jõud, keha raskus, aga allapoole, on vastassuunaline vektoriga $\vec{j}$ ja mg suurune. Ilmselt keegi ei kahtle tulemuse õigsuses.

Samal joonisel on näidatud ka potentsiaalse energia samaväärtusnivoosid. Nende suhtes näitab gradiendi suund potentsiaalse energia kõige kiirema kasvamise suunda. Energia kasvab ka näiteks suunas $\vec{s}$, kuid mitte nii kiiresti. Sõna "kiirus" tähendab siin nn *ruumilise muutumise kiirust.* Tavaline kiirus on muutus ajaühikus, see aga muutus pikkusühikul. Joonisel toodud arvude järgi on potentsiaalse energia kasvu kiirus vertikaalses suunas

$$\frac{2\mathrm{J}}{0{,}5\mathrm{m}} = 4\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}} = 4\mathrm{N}\,(= mg \text{ üldjuhul}).$$

Suunas $\vec{s}$ saame väiksema kiiruse

$$\frac{3\mathrm{J}}{1\mathrm{m}} = 3\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}} < mg.$$

Mingist skalaarsest suurusest gradiendi leidmine annab suuna, milles see suurus kasvab kõige kiiremini. Seda näitab gradiendi kui vektori suund. Gradiendi suurus, selle arvuline väärtus näitab kasvukiiruse arvväärtust – skalaarse suuruse muutust pikkusühikul, mis on võetud samas kõige kiirema kasvu suunas. Seejuures gradiendi x-komponent annab kasvukiiruse X-telje sihis, y-komponent Y-telje sihis ja z-komponent Z-telje sihis ning nende vektorsumma – maksimaalse kasvukiiruse. Vastupidine vektor, toodud näites $\vec{P}$, näitab kõige kiirema kahanemise suunda W_p jaoks. Seega võib raskusjõud olla mõõdetud 1N asemel ka ühikutes 1 J/m.

Teise näitena võtame temperatuuri auditooriumis. Oletame, et meie teame selle sõltuvust ruumikoordinaatidest $T(x,y,z)$. *gradT* leidmine annab siis meile x-, y- ja z-väärtustega määratud punktis, mille juures seda teeme, teada suuna, milles temperatuur kasvab kõige kiiremini, ja selle kasvukiiruse arvväärtuse kraadides meetri kohta.

20. Absoluutselt elastne tsentraalpõrge

Põrkeks nimetatakse keha liikumisoleku järsku muutust kokkupuutel teise kehaga.

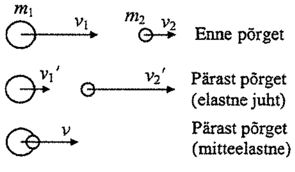
Kui seejuures kehadel ei teki *jääkdeformatsioone*, nimetatakse põrget *absoluutselt elastseks*. Pärast põrget võtavad kehad tagasi oma esialgse kuju.

Põrke juures kasutatakse mõistet *põrkejoon*. See on ***kehade kokkupuutepunktist kokkupuutuvate pindadega risti tõmmatud sirge.***

Kui kehade massikeskmed asuvad põrke ajal põrkejoonel, siis nimetatakse põrget *tsentraalseks*. Selline on kõige lihtsam põrge. Sest ei tule arvestada pöörleva liikumise tekkimisega. Kehad ei pöörle ka pärast põrget, kui nad ei pöörelnud enne seda. Kerakujuliste kehade põrge on alati tsentraalne.

Põrked jaotatakse veel *otse-* ja *kaldpõrgeteks*. Otsepõrkel asuvad kehade kiirused nii enne kui ka pärast põrget ühel ja samal sirgel, kaldpõrkel mitte. Kahe kera puhul võib nende kaldpõrke muuta otsepõrkeks taustsüsteemi vastava valikuga.

Vaatleme elastsete kerade otsepõrget (Joon. 20).



Joon. 20

Nagu öeldud, võib kaldpõrke alati selliseks teisendada. Ülesanne seisneb $\vec{v}_1'$ ja $\vec{v}_2'$ määramises. Kiirused võtsime kõik ühemärgilised ja ühesuunalised. Sellisel juhul saame täiesti üldised valemid kiirustele pärast tsentraalset otsepõrget. Vastassuunaliste liikumiste puhul on kiiruste väärtused lihtsalt negatiivsed.

Rakendame mehaanilise energia ja impulsi jäävuse seadust:

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 (v_1')^2}{2} + \dfrac{m_2 (v_2')^2}{2}; \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} m_1 [v_1^2 - (v_1')^2] = m_2 [(v_2')^2 - v_2^2]; \\ m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2). \end{cases}$$

Jagades võrdused pooliti, saame

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2.$$

Korrutame võrdust m_1-ga

$$m_1 v_1 + m_1 v_1' = m_1 v_2' + m_1 v_2.$$

Saadule liidame teise võrduse esialgsest süsteemist ($m_1 v_1'$-liikmed koonduvad)

$$2m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_2' + m_1 v_2.$$

Siit

$$v_2' = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}.$$

Analoogiliselt võime leida (või v_2' kiiruste seosvalemisse asetades), et

$$v_1' = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2) v_1}{m_2 + m_1}.$$

Vaatleme kahte erijuhtu.

1) $m_1 = m_2$, siis saame $v_2' = v_1$ ja $v_1' = v_2$. Kuulikesed vahetavad kiirusi. Kui näiteks enne põrget seisis teine paigal ($v_2 = 0$), siis pärast põrget jääb paigale esimene ($v_1' = 0$). Teine jätkab liikumist esimese kiirusega. Seda võime ka katseliselt jälgida.

[Katse ülesriputatud elevandiluust kuulikestega ja vankrikestega horisontaalteel. Kuulikesterea põrge.]

Need katsed on ilmekad näited liikumishulga ühelt kehalt teisele ülekandumise kohta.

2) $m_1 << m_2$; $v_2 = 0$. Kerge keha satub massiivsele paigalseisvale kehale. Selline juht esineb ka aatomifüüsikas, kui seal elektron põrkub aatomiga ja elektroni energiast ei piisa, et aatomit ergastada. Põrge on absoluutselt elastne ja teine keha esimesega võrreldes lõpmatult massiivne.

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \approx 0;$$

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \approx -v_1.$$

Kergem keha põrkub otse tagasi sama kiirusega, millega see suuremale langes. Massiivne jääb praktiliselt paigale.

21. Mitteelastne tsentraalpõrge

Antud juhul olgu kuulikesed niivõrd plastilised, et nad jääksid pärast põrget kokku (Joon. 20). Siis on süsteem mittekonservatiivne ja mehaanilise energia jäävuse seadust rakendada ei saa. Osa sellest kulub kuulikeste jäävaks deformeerimiseks. Kuid seda pole tarviski, sest üheainsa lõppkiiruse määramiseks piisab impulsi jäävuse seadusest.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v;$$

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Vaatleme jälle erijuhtusid.

1) $m_1 = m_2$. Tulemuseks saame $v = (v_1 + v_2)/2$. Kui teine keha seisis paigal ($v_2 = 0$), siis pärast põrget jätkavad nad liikumist koos poole väiksema kiirusega sellest, mis oli esimesel enne põrget, $v = v_1/2$.

[Katse ülesriputatud seatinakuulikeste põrkumisega. Analoogiline katse vankrikestega horisontaalteel.]

2) "Naela löömine puusse", $v_2 = 0$. Tulemuseks saame

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 .$$

Et nael saaks võimalikult suure kiiruse, peab kehtima võrratus $m_1 >> m_2$. Vasar peab olema naelast märksa suurema massiga.

3) "Metallitüki sepistamine alasil". Eeldus ja lõppkiiruse valem on identne eelmise juhu omaga. Kuid siin on tarvis, et sepistatav detail koos alasiga liiguks vähe. Väikese lõppkiiruse saamiseks peab $m_2 >> m_1$. Alas koos sepistatava detailiga peab olema vasarast märksa massiivsem.

Samale tulemusele jõuame, kui rakendame üldist energia jäävuse seadust. Kehade deformeerimiseks kulub mehaanilist energiat. See muundub kehade siseenergiaks - need soojenevad. Vastav soojushulk on arvutatav mehaanilise energia muutuse kaudu:

$$Q = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} =$$

$$= \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2} - \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} =$$

$$= \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} .$$

Lühidalt

$$Q = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} .$$

Vaadeldud 3) juhul ($v_2 = 0$) saame

$$Q = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 v_1^2}{2} .$$

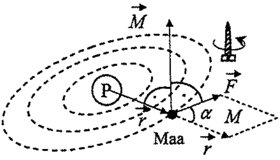
Vasara kineetilisest energiast $m_1 v_1^2 / 2$ läheb kehade deformeerimiseks osa $m_2 / (m_1 + m_2)$. Et see oleks võimalikult suur, peab olema $m_2 >> m_1$. Sellisel juhul $\approx 100\%$ löögi energiast kulutatakse kehade deformeerimiseks (muundub siseenergiaks).

§ 3. Pöördliikumise dünaamika

22. Jõumoment ja impulsimoment

Rakendame pöörlevale kehale mingi jõu. Mõju tulemuseks on tekkiv kiirendus. Millest see võiks oleneda? Katsetused näitavad, et see ei olene ainult jõu suurusest. Ka jõu rakenduspunkti asukoht ja jõu suund on tähtis. Näiteks ei kinnitata ukselinki (käepidet) ukse hingede lähedale, vaid ikka võimalikult kaugele. Samuti ei püüta ust avada sllega paralleelse jõu abil, vaid ristuvaga. Sest nii on ust kergem avada, seda liikuma panna. Järelikult ei piisa pöörlevale kehale avaldatava mõju kirjeldamisel ainult jõu mõistest. Tuleb kasutada nn *jõumomenti*.

Jõumomente on kaks. Üks on *jõumoment punkti suhtes*. Näiteks koordinaatide alguspunkti suhtes. Vaatleme näitena päikesesüsteemi (Joon. 21).



Joon. 21

Koordinaatide alguspunkti võib valida meelevaldselt. Võtame selle Päikese keskpunkti. Maa asukohta näitab siis kohavektor $\vec{r}$. Maale mõjugu jõud, näiteks Linnutee gravitatsioonijõud $\vec{F}$ (ei pea asuma Maa orbiidi tasandis). Jõumoment punkti P suhtes defineeritakse siis järgmise vektorkorrutise abil:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{33}$$

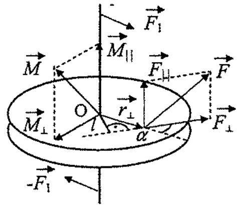
$\vec{M}$ on vektor pikkusega

$$M = rF \sin\alpha , \tag{33'}$$

mis asub risti $\vec{r}$ ja $\vec{F}$ poolt määratud tasandiga (Joon. 21).

Mõjugu süsteemile mitu jõudu erinevates punktides. Siis mõjub süsteemile ka mitu jõumomenti. Nende mõju võib mõnikord asendada ühe jõumomendi omaga. Seda nimetatakse *jõumomentide liitmiseks*. Sel juhul määratakse süsteemile mõjuvate jõudude momendid ja liidetakse need vektoriaalselt. Kõik jõumomendid peavad olema määratud ühe ja sama punkti suhtes, muidu ei ole liitmine põhjendatud.

Praktikas esineb tihti olukordi, kus pöörlev kehade süsteem ei ole vaba, vaid omab mingit fikseeritud telge, mille ümber toimub pöörlemine (Joon. 22). Sel juhul võetakse jõumomendi defineerimiseks vajaminev punkt pöörlemisteljele ja nii, et jõu rakenduspunkti kohavektor ($\vec{r}_\perp$) oleks teljega risti. Samasse punkti O joonistame ka momendi $\vec{M}$, mis on risti nii $\vec{r}_\perp$ - kui ka $\vec{F}$ -vektoriga.



Joon. 22

Lahutame jõu $\vec{F}$ kaheks komponendiks $\vec{F}_{\parallel}$ ja $\vec{F}_\perp$. Esimese võtame paralleelse pöörlemisteljega, teise sellega risti. Sama teeme jõumomendiga. $\vec{M}_{\parallel}$ on pöörlemisteljega paralleelne ja $\vec{M}_\perp$ sellega risti. Siis esineb järgmine vastavus: $\vec{M}_\perp$ on tekitatud jõu $\vec{F}_{\parallel}$ poolt ja $\vec{M}_{\parallel}$ jõu $\vec{F}_\perp$ poolt. Momendi $\vec{M}_\perp$ või jõu $\vec{F}_{\parallel}$ mõju kompenseeritakse laagrite poolt avaldatava vastureaktsiooni jõupaariga $\vec{F}_1$. Seepärast võib fikseeritud telge omava keha pöörlemise kirjeldamisel jätta teljega paralleelsed jõud vaatlusest välja ja öelda, et mõjuvate *jõudude moment pöörlemistelje suhtes* on pöörlemisteljega paralleelne. Selline jõumoment defineeritakse vektorite $\vec{r}_\perp$ ja $\vec{F}_\perp$ abil:

$$\vec{M}_{\parallel} = \vec{r}_\perp \times \vec{F}_\perp \; ; \tag{34}$$

$$M_{\parallel} = r_\perp F_\perp \sin\alpha = l \; F_\perp \; . \tag{34'}$$

Lõiku $l = r_\perp \sin\alpha$ nimetatakse *jõu* $\vec{F}_\perp$ (või $\vec{F}$) *õlaks*. See on ***jõu mõjumissirge kaugus pöörlemisteljest*** (Joon. 22).

Seega pöörlemistelge omavale kehale rakendatud jõu mõju oleneb selle ristkomponendi suurusest ja jõu õlast.

Kehale mõjuva mitme jõu puhul, mis võivad mõjuda ka erinevates punktides, saab nende momente asendada ühega. Selleks tuleb kõigi jõudude momendid arvutada ühe ja sama telje suhtes ning tulemused liita vektoriaalselt. Summaarse momendi mõju asendab kõigi teiste mõjusid koosvõetuna.

Analoogiline on olukord impulsiga pöörleval liikumisel. Impulss ei kirjelda liikumishulka (pöörlemishulka) õigesti. Seda teeb *impulsimoment*

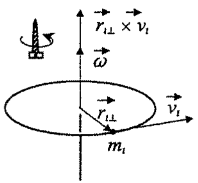
$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} . \tag{35}$$

See on *impulsimoment punkti suhtes*. Fikseeritud telge omava kehadesüsteemi korral võetakse $\vec{r}$ asemel $\vec{r}_\perp$ ja $\vec{v}$ asemel $\vec{v}_\perp$ ning siis on $\vec{N}$ suund kokkulangev pöörlemistelje omaga. Kui aga tegu on ainepunktiga kehas, siis kiirus $\vec{v}$ on juba iseenesest risti teljega, mistõttu selle ristkomponenti ei ole tarvis arvutada. Nendel juhtudel annab valem (35) *impulsimomendi telje suhtes*.

23. Inertsimoment

Valemi (35) järgi saab impulsimomenti arvutada ainult ainepunkti jaoks. Suuremate mõõtmetega keha puhul see ei kõlba, sest selle igal punktil on oma kohavektor $\vec{r}$ (või $\vec{r}_\perp$) ja kiirus $\vec{v}$ (või $\vec{v}_\perp$). Ei ole teada, millist väärtust võib valemis kasutada. Sel juhul jaotatakse keha ainepunktideks, arvutatakse iga ainepunkti impulsimoment valemi (35) järgi ja leitakse nende summa. Tulemus on *keha impulsimoment*

$$\vec{N}_{II} = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{r}_{i\perp} \times m_i \vec{v}_i . \tag{36}$$



Joon. 23

Tahke keha korral saame valemile anda lihtsama kuju, sest $\vec{v}_i$ on risti $\vec{r}_{i\perp}$-ga, mistõttu nende korrutisel on pöörlemistelje suund (Joon. 23). Sama telje suunaline on ka nurkkiiruse vektor $\vec{\omega}$. Seepärast võib $\vec{r}_{i\perp} \times \vec{v}_i$ arvutada järgmiselt. Algul leiame mooduli

$$|\vec{r}_{i\perp} \times \vec{v}_i| = r_{i\perp} v_i \sin 90^\circ = r_{i\perp} v_i = r_{i\perp}^2 \omega .$$

Kasutasime valemit (12). ω indeksit i ei vaja, sest tahke keha korral on selle kõigil punktidel sama nurkkiirus. Seega võib kirjutada

$$\vec{r}_{i\perp} \times \vec{v}_i = r_{i\perp}^2 \vec{\omega} ,$$

mistõttu kogu keha impulsimomendi jaoks saame avaldise

$$\vec{N}_{\text{ll}} = \vec{\omega} \sum_{i=1}^{\infty} m_i r_{i\perp}^2 .$$

Summa märgi taha jäänud avaldis kannab *ainepunkti inertsimomendi* nime.

Ainepunkti inertsimoment on tema massi ja pöörlemisraadiuse ruudu korrutis.

Paneme tähele seda, et kui teiste momentide (jõu- ja impulsimomendi) puhul korrutati vastavat suurust kohavektoriga (täpsemalt vastava vektori õlaga), siis siin tehakse seda pöörlemisraadiuse ruuduga.

Keha kõigi ainepunktide inertsimomentide summa kannab *keha inertsimomendi* nime

$$I = \sum_{i=1}^{\infty} m_i r_{i\perp}^2 . \qquad (37)$$

Keha impulsimoment avaldub siis

$$\vec{N}_{\text{ll}} = I \cdot \vec{\omega} . \qquad (38)$$

Meenutame, et translatoorset liikumist iseloomustav suurus – impulss – arvutati $\vec{L} = m\vec{v}$. Seega on pöörleva liikumise valem kujult sama. Kiiruse asemele on tulnud temaga analoogiline suurus $\vec{\omega}$ ja mass on asendunud inertsimomendiga I.

Inertsimoment iseloomustab keha inertsust pöörleval liikumisel. Teeme katse, mis demonstreerib, et siin keha inerts ei olene ainult massist, vaid ka selle asetusest pöörlemistelje suhtes. Veeretame mööda kaldpinda alla kaks võrdse massi- ja raadiusega silindrit. Üks olgu täissilinder (alumiiniumist), teine õõnes (vasest).

[Katse silindritega kaldpinnal.]

Täissilinder jõuab alla varem, sest selle massil on keskmiselt võttes väiksem pöörlemisraadius, seetõttu ka väiksem inerts ehk inertsimoment.

Inertsimoment oleneb pöörlemistelje asendist keha suhtes. Seepärast ei ole see ka mingi antud keha iseloomustav konstant (vt punkti 26 lõppu).

24. Pöördliikumise dünaamika põhiseadus

See on Newtoni II seadusega analoogiline seadus pöördliikumisel. Selle tuletamiseks lähtumegi Newtoni seadusest kujul (16). *i*-nda ainepunkti jaoks kirjutatuna saame

$$\vec{F}_i = \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt}.$$

Millega võrduks paremal pool võrdusmärki olev tuletis, kui seal asendada liikumishulk impulsimomendiga?

$$\frac{d\vec{N}_i}{dt} = \frac{d(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

Et $\vec{r}_i$ on pöörleva punkti kohavektor, siis selle tuletis on ainepunkti kiirus $\vec{v}_i$. Seepärast võrdub esimene vektorkorrutis nulliga, sest paralleelsete vektorite vektorkorrutis on alati 0 ($\sin 0^\circ = 0$). Teine annab korrutise $\vec{r}_i \times \vec{F}_i$, mis on jõumoment. Järelikult

$$\vec{M}_i = \frac{d\vec{N}_i}{dt}.$$

Summeerides üle kõigi ainepunktide süsteemis, saame paremal, tuletise märgi all, keha kogu impulsimomendi $\vec{N} = I\vec{\omega}$ ja vasakul – kehale mõjuvate välisjõudude momendi $\vec{M}$. Sisejõudude momentidele vastavad liikmed koonduvad summas välja Newtoni III seaduse põhjal.

$$\vec{M} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt}. \qquad (39)$$

Saime täpselt sama kujuga valemi, millest lähtusimegi. Tähistused on ainult teised. Saadu on *pöördliikumise dünaamika põhiseadus*. Tavaliselt kirjutatakse see üles kujul

$$d(I\vec{\omega}) = \vec{M}dt.$$

Impulsimomendi muutus on võrdeline jõumomendiga ja toimub jõumomendi suunas.

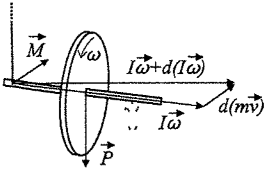
Erijuhul, kui pöörleva keha inertsimoment I on ajas muutumatu (konstantne), võib seaduse kirjutada ümber nii:

$$\vec{M} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\varepsilon};$$

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}. \qquad (39')$$

Kehale mõjuv jõumoment tekitab nurkkiirenduse, mis on võrdeline jõumomendiga ja pöördvõrdeline keha inertsimomendiga. Mõlemad valemid (39) ja (39') on täiesti analoogilised translatoorse liikumise vastavate valemitega.

Seaduse $d(I\vec{\omega}) = \vec{M}dt$ toimet illustreerib järgmine katse. Riputame üles ühte teljeotsa pidi horisontaalse teljega ratta ja toetame teist telje otsa ajutiselt käega (Joon. 24).



Joon. 24

Paneme ratta pöörlema ja laseme telje otsa lahti. Ratta raskus $\vec{P}$ tekitab horisontaalse jõumomendi $\vec{M}$. Selle mõjul muutub horisontaalne $I\vec{\omega}$ samuti horisontaalses suunas. Ratta telg hakkab pöörlema horisontaaltasandis ega lange mitte alla.

25. Impulsimomendi jäävuse seadus

See on 4. jäävusseadus klassikalises mehaanikas. Esimesed kolm on massi, energia ja liikumishulga e. impulsi jäävuse seadus. Impulsimomendi jäävuse seadus kehtib pöörlevate kehade süsteemis. Kui välisjõudusid ei mõju või nende summaarne moment on 0, siis valemist (39) saame võrduse

$$\frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = 0.$$

See tähendabki, et impulsimoment ei muutu ajas

$$I\vec{\omega} = \vec{const}. \qquad (40)$$

Tavaliselt esitatakse see seadus lausega

suletud kehade süsteemi impulsimoment on jääv.

[Katse väikese güroskoobiga.]

See säilitab pöörlemistelje (impulsimomendi) suunda ruumis, kui seadme korpusega sooritada erinevaid liigutusi.

Et impulsimoment on vektor, siis selle jäävus tähendab kõigi komponentide jäävust eraldi. Võrduse (40) võib asendada kolme skalaarse avaldisega, millest igaüks käsitleb pöörlemist ümber ühe koordinaattelje. Üldjuhul ei pea kõik kolm kehtima samaaegselt. Kui välisjõudude moment ei olegi 0, kuid null on selle mingi üks komponent, siis sama komponendi (telje) sihis kehtib ka impulsimomendi jäävuse seadus. Impulsimomendi teised komponendid võivad muutuda.

Teeme mõningaid järeldusi sellest jäävusseadusest.

1) Kui suletud süsteemi mingid osad panna süsteemisiseste jõudude mõjul pöörlema ühes suunas, siis selleks, et summaarne impulsimoment ei muutuks, peab ülejäänud süsteemi osa hakkama pöörlema vastassuunas. Seda võime jälgida katses pöördpingiga. Pingi vertikaalse telje suhtes raskusjõud momenti ei tekita. Seepärast võib pingil istujat koos pingiga vaadelda suletud süsteemina sellisel pöörlemisel.

[Katse pöördpingil vertikaalse teljega rattaga.]

Pingil istuja paneb pöörlema pingi pöörlemisteljega paralleelse teljega ratta. Istuja koos pingiga hakkab pöörlema vastassuunas. Pöörleva ratta telje vastassuunaliseks seadmisel hakkab ka pink koos sellel istujaga pöörlema vastassuunas.

2) Kui mingisugusel põhjusel muutub süsteemi inertsimoment, siis peab vastupidiselt muutuma (kasvama või kahanema) nurkkiirus (pöörlemiskiirus). Seda kasutavad näiteks iluuisutajad või balletiartistid *piruetí sooritamisel.* Pirueti sooritaja paneb end pöörlema

eemale sirutatud jala ja kätega. Jala ja käte lähendamisel kehale inertsimoment väheneb. Tulemuseks on pöörlemiskiiruse suurenemine. Käte eemaldamisel kiirus väheneb.

[Katse pöördpingil istuja väljasirutatud kätes hoitavate hantlitega.]

Pingil istuja hoiab väljasirutatud kätes hantleid. Pink pannakse aeglaselt pöörlema. Hantlite lähendamisel kehale pöörlemiskiirus kasvab, nende eemaldumisel väheneb.

26. Pöörleva keha kineetiline energia

Vaatleme pöörlevat keha ainepunktidest koosnevana. Kui mingi i-ndas ainepunkt massiga m_i pöörleb kiirusega v_i mööda ringjoont raadiusega $r_{i\perp}$ (Joon. 23), siis selle kineetiline energia on

$$W_i = \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Kuid $v_i = \omega \cdot r_{i\perp}$, seepärast

$$W_i = \tfrac{1}{2} m_i \omega^2 r_{i\perp}^2 .$$

Summeerime kõigi ainepunktide energiad. Saame keha kineetilise energia

$$W_k = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{\infty} m_i r_{i\perp}^2 .$$

Avaldisse jäänud summa ei ole midagi muud kui keha inertsimoment [vt valemit (37)]. Seepärast võime lõplikult kirjutada

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (41)$$

Nagu mitmel muul juhul saime jällegi translatoorse liikumise valemiga täiesti analoogilise valemi ($mv^2/2$). Nii on kõigi pöördliikumise valemitega.

Keha inertsimomenti ei leita tavaliselt valemi (37) järgi, vaid integreerimise teel, sest massi jaotus kehas on pidev. Vastavaid arvutusi käsitletakse teoreetilise mehaanika kursuses, mistõttu siin jätame need tegemata. Kirjutame üles ainult mõningad kineetilise energia arvutamisel vajaminevad tulemused.

1) Pikk peenike varras pöörlemas ümber telje, mis on risti vardaga ja läbib selle otspunkti

$$I = \tfrac{1}{3} ml^2 .$$

m on varda mass ja l selle pikkus.

2) Seesama varras pöörlemas ümber keskpunkti läbiva ja vardaga ristuva telje

$$I = \tfrac{1}{12} ml^2 .$$

3) Peenike rõngas raadiusega R rõnga sümmeetriatelje ümber pöörlemisel

$$I = mR^2 .$$

4) Ketas oma sümmeetriatelje ümber pööreldes (ka silinder, võll)

$$I = \tfrac{1}{2} mR^2 .$$

5) Kera, tsentrit läbiva telje ümber pööreldes

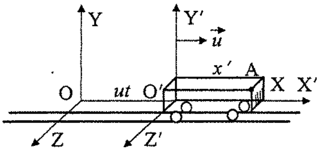
$$I = \tfrac{2}{5} mR^2 .$$

Inertsimoment on avaldatav keha massi ja mingi karakteerse mõõtme ruudu korrutisena, mille juurde kuulub keha geomeetrilisest kujust olenev dimensioonitu tegur.

§ 4. Relativistlik kinemaatika

27. Galilei relatiivsusprintsiip

Relatiivsusteooria ajalugu algab Galileist. Temale kuulub esimene *relatiivsusprintsiibi* selge ja järjekindel sõnastus. Vaatleme kahte inertsiaalset taustsüsteemi, millistest üks liigub teise suhtes kiirusega $\vec{u}$ (Joon. 25).



Joon. 25

Kummagi süsteemi koordinaatteljestiku võime valida suvaliselt. Kõige lihtsam on, kui võtame mõlemas ühe telje suhtelise kiiruse suunas, teised teljed aga omavahel paralleelsetena. Sellega ei ole tehtud mingeid kitsendusi üldjuhule. O-süsteem on paigal, O' liigub. Süsteemide materialiseerimiseks võime näiteks süsteemi O siduda maapinnaga ja O' – raudteel ühtlaselt liikuva vaguniga. Meid huvitagu, kuidas on omavahel seotud mingi ainepunkti A eri süsteemides määratud koordinaadid? Selleks punktiks võib olla näiteks vaguni nurka tähistav punkt. Vaguni pikkus, kõrgus ja laius on siis selle punkti koordinaatideks O' süsteemis: (x', y', z'). Mingeid põhimõttelisi kitsendusi me ei lisa, kui eeldame O' ja O kokkulangemist aja määramise alghetkel t=0. Joonisel 25 esitatud hetkeks $t \neq 0$ on siis O' nihkunud O suhtes teepikkuse ut võrra X telje sihis. Seepärast on ainepunkti A koordinaadid seotud järgmiselt:

$$\begin{cases} x = x' + ut\,; \\ y = y'\,; \\ z = z'\,; \end{cases} \qquad \text{või} \qquad \begin{aligned} x' &= x - ut\,; \\ y' &= y\,; \\ z' &= z\,. \end{aligned} \tag{42}$$

Neid nimetatakse *Galilei teisendusvalemiteks*.

Nüüd oletame, et ainepunkt A liigub vagunis, s.t selle koordinaadid x', y' ja z' muutuvad ajas. Kiiruse vagunis saame arvutada valemiga (5)

$$\vec{v}' = \dot{x}'\vec{i} + \dot{y}'\vec{j} + \dot{z}'\vec{k} .$$

Millise kiirusega liigub ainepunkt O-süsteemis? Valemi (5) ja (42) abil leiame:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = (\dot{x}' + u)\vec{i} + \dot{y}'\vec{j} + \dot{z}'\vec{k} =$$

$$= \dot{x}'\vec{i} + \dot{y}'\vec{j} + \dot{z}'\vec{k} + u\vec{i} = \vec{v}' + \vec{u} ;$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} . \qquad (43)$$

Kiirusele süsteemis O' tuleb liita süsteemide suhteline kiirus $\vec{u}$. See on täiesti üldine tulemus. Valem (43) on *klassikalise mehaanika kiiruste liitmise seadus.*

Leiame ka kiirenduste seose. Selleks tuleb (42)-st võtta kahekordne tuletis aja järgi. Saame

$$\ddot{x} = \ddot{x}', \quad \ddot{y} = \ddot{y}', \quad \ddot{z} = \ddot{z}'$$

ja järelikult

$$\vec{a} = \vec{a}' .$$

Kui nüüd eeldame, et ka keha mass ja temale mõjuv jõud ei olene koordinaatsüsteemist, siis saame, et Newtoni II seadus ei olene sellest. Kuna süsteemid on inertsiaalsed, siis ka Newtoni I seadus kehtib mõlemas. Seepärast võib öelda, et kogu mehaanika näeb mõlemas süsteemis välja ühtemoodi. Seda näitab ka meie igapäevane praktika. Näiteks käest lahti pääsenud ese kukub ühtemoodi ülevalt alla nii jaamahoone juures kui ka ühtlaselt liikuvas vagunis. Palli suudame visata ühesugusele kaugusele nii kooli võimlas kui ka liikuva reisilaeva spordisaalis jne. Need põhimõtted võtab kokku *klassikalise mehaanika* ehk *Galilei relatiivsusprintsiip.*

Kõik inertsiaalsed taustsüsteemid on nendes kulgevate mehaanikaprotsesside kirjeldamisel samaväärsed.

Printsiipi võib sõnastada ka teisiti.

Üleminekul ühest inertsiaalsüsteemist teise mehaanika seadused ei muutu.

Kui nähtustes midagi ei olene taustsüsteemi valikust, siis võib järeldada ka vastupidist, et ainult ühe taustsüsteemi sees tehtud vaatlused ei võimalda määrata taustsüsteemi liikumist. Näiteks olles suletud ühtlaselt liikuva laeva kajutisse nii, et puudub side välismaailmaga, ei suuda me mingit katset välja mõelda, mis näitaks laeva liikumist ja selle kiirust. Seepärast võib anda veel ühe relatiivsusprintsiibi sõnastuse.

Mitte mingisugused mehaanilised katsed ja vaatlused, mida tehakse inertsiaalsüsteemi sees, ei võimalda määrata selle liikumiskiirust.

28. Erirelatiivsusteooria postulaadid

Eelmises punktis esitatu on kõigile hästi arusaadav. Sellele vaatamata on juba Galilei aegadest alates arvatud nagu eksisteeriks üks eriline taustsüsteem, mis on maailmaruumi, nn *absoluutse ruumi* suhtes paigal. Liikumist selle suhtes hakati nimetama samuti absoluutseks. Mehaanilised katsed, nagu me veendusime, ei võimalda absoluutse liikumise kiirust määrata. Kuni erirelatiivsusteooria loomiseni siiski arvati, et ükskord niisugune nähtus leitakse. Võib-olla näiteks valguse liikumise kaasabil? Valgus pidi olema nn *maailmaeetri* lainetus. Eeter võis olla absoluutse ruumi suhtes paigal. Valguse kiirus selles on $c \approx 300\,000$ km/s. Inimesele kättesaadav suurim kiirus on Maa kiirus liikumisel ümber Päikese ≈ 35 km/s. Mõõtes valguse kiirust juhtudel, kui Maa liigub valgusele vastu ja valgusallikast eemale, võiks avastada absoluutset liikumist. Sellist katset sooritas ameeriklane A. Michelson 1881. a. alates mitu korda. Mingit valguse kiiruse olenevust Maa liikumissuunast ta ei avastanud, kuigi katse täpsus seda võimaldanuks. See ja teised füüsikalised faktid viisid 19. ja 20. sajandi vahetusel A. Einsteini mõttele, et relatiivsusprintsiip on universaalne loodusseadus.

Mitte mingisugused füüsikalised katsed ja vaatlused, mida tehakse inertsiaalsüsteemi sees, ei võimalda määrata selle liikumiskiirust.

Kõik inertsiaalsed taustsüsteemid on nendes kulgevate füüsikaliste protsesside kirjeldamisel samaväärsed.

Need on *üldise* ehk *Einsteini relatiivsusprintsiibi* sõnastused. Printsiip tähendab ühtlasi ka absoluutse ruumi ja absoluutse liikumise eitamist. Nendel mõistetel ei ole füüsikalist tähendust. Igasugune liikumine on alati suhteline.

Üldine relatiivsusprintsiip on üheks *erirelatiivsusteooria postulaadiks*, mille alusel see teooria on loodud. Teiseks on

valguse kiiruse olenematus nii valgusallika liikumisest kui ka inertsiaalsüsteemist, milles kiirust mõõdetakse.

Mis järeldub nendest postulaatidest? Pöördume tagasi joonise 25 juurde. Oletame, et alghetkel $t=0$, kui O' langeb kokku O-ga, toimub selles punktis valgussähvatus. Aja t möödumisel on siis valgus levinud O-süsteemis kaugusele

$$x = ct$$

ja O' süsteemis -

$$x' = ct,$$

s.t samale kaugusele mõlemast koordinaatide alguspunktist. Kuid O'-süsteem liikus valguse levimise ajal paremale. Seepärast oleks valgus justkui jõudnud kahte eri ruumipunkti x-telgede suunal. See ei ole võimalik. Teepikkused x ja x' peavad olema erinevad. Taustsüsteemist mitteoleneva c korral saavad need erineda ainult siis, kui ajad kummaski süsteemis on erinevad. Õige on kirjutada

$$x = ct$$

ja

$$x' = ct'.$$

Seega järgneb erirelatiivsusteooria postulaatidest otsekohe aja erinev kulgemine eri taustsüsteemides. See on vastuolus klassikalise ettekujutusega ajast. Sellist ettekujutust tuleb muuta.

29. Lorentzi teisendused

Kuidas teisenevad punkti koordinaadid üleminekul ühest taustsüsteemist teise erirelatiivsusteoorias? Vastuse leidmiseks jätkame äsja kirjeldatud katset. Oletame, et punktis, milleni valgus jõudis, asub peegel (näiteks vaguni seinal). See saadab valguse tuldud teed tagasi valgusallika asukohta. O-süsteemis kulub tagasiminekuks endine aeg t, kui valgusallikas on seal paigal. O'-süsteemis aga t'-st enam, sest valgusallikas on nihkunud valguse levimise ajal vasakule, jäänud vagunist maha, mistõttu valgusel tuleb tagasiliikumisel käia pikem tee kui x'. Olgu tagasiliikumise aeg t''. Siis liikus valgus tagasi teepikkuse $x'' = ct''$ võrra, jõudes punkti $x' - x'' = c(t' - t'')$ O'-süsteemis. Teisest küljest, valgusallikas on aja $t' + t''$ vältel nihkunud vasakule kiirusega u ja jõudnud punkti $-u(t' + t'')$, on jäänud niipalju koordinaatide algusest O' maha. Kui valgus jõudis tagasi allikani, peavad mõlemad avaldised andma sama asukoha

$$c(t' - t'') = -u(t' + t'') .$$

Oletame, et ajad eri süsteemides on seotud nii:

$$t' = t \cdot f(u) ,$$

s.t tuleb kasutada suhtelisest kiirusest u olenevat tegurit $f(u)$. Arvatavasti oleneb aegade erinevus ainult sellest kiirusest. See tegur tuleb määrata.

Valguse tagasiliikumise aja t teisendamisel tuleb ilmselt sama tegurit kasutada vastandmärgilise suhtelise kiirusega

$$t'' = t \cdot f(-u) ,$$

sest nüüd liigub valgus süsteemide suhtelise kiirusega võrreldes vastupidises suunas. Füüsikaliselt tähendab liikumissuuna vastupidiseks muutmine koordinaattelgede või suhtelise kiiruse vastandmärgiliseks muutmist. Nii saame

$$c[t \cdot f(u) - t \cdot f(-u)] = -u[t \cdot f(u) + t \cdot f(-u)] .$$

Peale selle peab kehtima

$$f(-u) \cdot f(u) \cdot t = t$$

- kui me läheme ühest süsteemist teise, s.t korrutame aega t teguriga $f(u)$ ja tuleme siis sealt jälle esialgsesse süsteemi tagasi - korrutame teguriga $f(-u)$, siis peame saama tagasi sama aja t. Sest tagasiteisendus on füüsikaliselt ekvivalentne otseteisendusega vastupidise kiirusega liikumisel ehk samamoodi telgede või suhtelise kiiruse vastandmärgiliseks muutmisega, nagu äsja selgitasime. Järelikult on

$$f(-u) = 1/f(u) .$$

Selle abil teisendame saadud võrdust ja leiame $f(u)$:

$$c[f(u) - 1/f(u)] = -u[f(u) + 1/f(u)] ;$$

$$c[f^2(u) - 1] = -u[f^2(u) + 1] ;$$

$$f^2(u) = \frac{c-u}{c+u} = \frac{(c-u)^2}{c^2-u^2} = \frac{(1-u/c)^2}{1-(u/c)^2} ;$$

$$f(u) = \pm \frac{1 - u/c}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}.$$

Kõlbab "+"-märk, sest aeg ei saa teisendamisel muutuda negatiivseks.

Leitud teguri abil jõuame aja teisendamise valemini

$$t' = t\frac{1 - u/c}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = \frac{t - ut/c}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}.$$

Edasi leiame seose koordinaatide jaoks

$$x' = ct' = \frac{ct - ux/c}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}.$$

Seega võib teisendusvalemid üles kirjutada nii

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \beta x/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \qquad (44)$$

kus $\beta = u/c$. Need ongi *Lorentzi* [hollandi füüsik (1853-1928)] *teisendusvalemid*. Kui $< < c$, siis $\beta \approx 0$ ja me saame siit Galilei teisendused (42). Kunagi ei saa olla $u > c$, sest siis juur muutuks imaginaarseks. Seepärast on c reaalsete objektide liikumise piirkiirus.

30. Samaaegsus

Seni vaadeldud sündmused (valgussähvatus, sattumine peeglile ja jõudmine tagasi valgusallikani) toimusid eri aegadel eri kohtades. Nüüd huvitagu meid sündmuste üheaegsuse küsimus. Esialgu leiame, millal on kaks sündmust samaaegsed ühes ja samas inertsiaalsüsteemis? Sellele on lihtne vastata ainult siis, kui sündmused toimuvad ühes ja samas kohas. Seda näitab samas kohas asuv kell. Samaaegsed sündmused toimuvad ühel ja samal ajahetkel. Keerulisem on olukord kahe sündmusega eri kohtades. Võiks ju öelda, et nad on samaaegsed, kui nendes punktides olevad kellad näitavad sündmuste toimumise hetkel sama aega. Kuid selleks peavad kellad olema sünkroniseeritud, s.t ühte aega näitama pandud. Mismoodi seda teha? Nad asuvad eri kohtades. Kokku viia, võrrelda ja siis tagasi asetada ei saa, sest nende käik (aja kulg) oleneb kellade liikumisest.

A. Einstein pani ette järgmise kellade sünkroniseerimise viisi. Kella A asukohast saadetakse välja valgussignaal ajahetkel t_{0A}. See jõuab teise kellani B selle näidu hetkel t_B ja peegeldub tagasi kella A asukohta viimase näidu t_A juures. Kui nüüd osutub õigeks võrdus

$$t_A - t_B = t_B - t_{0A},$$

siis on kellad sünkroniseeritud - valgus kulutab ühepalju aega nii edasi- kui tagasiliikumiseks. Avaldis on seda tüüpi, et kummagi kella näiduviga suurendab üht võrduse poolt, teist aga vähendab. Seepärast kehtib võrdus ainult siis, kui mõlemad kellad näitavad sama aega.

Seega tuleb *relativistlikus aegruumis* toimuvate sündmuste kirjeldamiseks sinna paigutada veel, lisaks koordinaatsüsteemile, kellad, mis kõik oleks eespoolkirjeldatud viisil sünkroniseeritud.

Oletame, et meie mõlema koordinaadistiku O ja O' (Joon. 25) kõik punktid on varustatud sünkroniseeritud kelladega. Kummalgi taustsüsteemil on omad kellad. Lorentzi teisendusvalemitest (44) saame mingi ühe sündmuse jaoks kirjutada

$$t_1' = \frac{t_1 - \beta x_1 / c}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ja teise jaoks -

$$t_2' = \frac{t_2 - \beta x_2 / c}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Ajahetkete erinevuseks saame

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \beta(x_2 - x_1)/c}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (45)$$

Olgu sündmused O-süsteemis samaaegsed, s.t $t_2 = t_1$. Siis saame kirjutada

$$t_2' - t_1' = \frac{-\beta(x_2 - x_1)/c}{\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0.$$

S.t O'-s need sündmused ei ole üldjuhul samaaegsed. Nad on ka siin samaaegsed ainult siis, kui toimuvad ühes ja samas kohas, s.t

$x_2 = x_1$. Koordinaadi x teisendusvalemist (44) võime leida, et siis on ka $x'_2 = x'_1$. Neid tõsiasju võime väljendada järgmiste lausetega.

Kui sündmused toimuvad ühes ja samas punktis, siis nende samaaegsus ei olene taustsüsteemi valikust.

S.t, kui need osutuvad samaaegseteks mingis ühes taustsüsteemis, siis on sündmused samaaegsed ka teistes. Teine lause on

samaaegsete sündmuste asukohaline kokkulangevus ei olene taustsüsteemi valikust.

S.t, kui ühes on asukoht kahel samaaegsel sündmusel sama, siis on see nii ka teistes taustsüsteemides.

Kuidas aru saada üldjuhul esinevast (erinevates kohtades toimuvate sündmuste) samaaegsuse kadumisest üleminekul ühest süsteemist teise? Selleks tuuakse tavaliselt niisugune näide. Kaks vaatlejat jälgivad rongi otstesse löövaid välkusid. Üks asub sel hetkel maapinnal rongi keskel, teine rongis ja samuti selle keskel. Maapealne näeb kahte välku üheaegselt löövat nii rongi algusesse kui ka lõppu. Rongis sõitja, vaatamata sellele, et asub samuti rongi keskel, ei näe neid samaaegsetena. Ta näeb etteotsa löövat välku varem. Sest sama aja jooksul, kui valgus sealt temani liigub, on rong teatud tee valgusele vastu liikunud, tagumisest otsast tuleva valguse eest aga ära nihkunud. Mõlemal vaatlejal on õigus.

31. Ajavahemike ja pikkuste suhtelisus. Intervall

Valem (45) näitab, et mis tahes protsessi kulgemise aeg ei ole üldiselt igas süsteemis ühesugune. Võib ju $t_2 - t_1$ tähendada mingi protsessi kestust. Olgu O-süsteemis protsess liikumatu, s.t alaku ja lõppegu samas kohas ($x_2 = x_1$). Siis saame sellest valemist protsessi kestvuseks O'-süsteemis, kus protsess liigub

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (46)$$

Et $\sqrt{1-\beta^2} < 1$, siis

$$t'_2 - t'_1 > t_2 - t_1$$

– *protsess kulgeb aeglasemalt selles taustsüsteemis, kus see liigub ruumis*. Kõige kiirem on protsess (kulub vähe aega) seal, kus tema asukoht ei muutu. Protsessiks võib näiteks olla inimese vananemine. Kiiresti ringisõitvas kosmosesõidukis olev astronaut vananeb aeglasemalt Maa-pealse mõõdusüsteemi mõttes, kui samal ajal Maal "paigalseisev" tema kaksikvend.

Analoogilise tulemuse saame valemitest (44) sündmuste vahekauguse kohta:

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1 - u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (47)$$

Võtame näiteks kiirusega u liikuva vaguni. Selle otspunktide asukohad mõõdeti O-süsteemis samaaegselt ($t_2 = t_1$) ja saadi vaguni pikkuseks $x_2 - x_1$. Mõõtmist võib teha näiteks eespoolkirjeldatud välkude jälgede järgi, mis need jätsid roobastele. O'-süsteemis, kus vagun seisab paigal, on tema pikkus siis

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (48)$$

Järelikult,

$$x_2' - x_1' > x_2 - x_1 .$$

Keha on kõige pikem selles taustsüsteemis, milles ta on paigal (O'-süsteem). Liikuv vagun (O-süsteemis) on mõõtmetelt lühem.

Viimast valemit ei saa tõlgendada nii, nagu oleks liikuvas süsteemis ($x_2' - x_1'$) vagun pikem kui paigalseisvas ($x_2 - x_1$), s.t võtta vagun paigalseisvana O-süsteemis ja vaadelda tema pikkust liikuvas süsteemis. Siis ei ole arvutatud vaguni otste kohad x_2' ja x_1' samaaegselt määratud (t_2' ei võrdu t_1'-ga) ja nende vahet ei saa lugeda vaguni pikkuseks. Kui aga vagun on paigal liikuvas süsteemis (eelmise seletuse puhul), on otspunktid ühes ja samas kohas igal ajahetkel ja meie võime neid mõõta ka erinevatel ajahetkedel. Vahe on ikkagi vaguni pikkus.

Klassikalises mehaanikas nimetatakse vahemikke $x_2 - x_1$ ja $t_2 - t_1$ *intervallideks*. Ajaline intervall ei olene seejuures ruumilisest ja need on muutumatud üleminekul ühest taustsüsteemist teise, s.t pikkus ja ajavahemik ei olene liikumisest. Teisiti öeldes, ruumi ja aja omadused ei muutunud liikumisega. Relativistlikus on kõik teisiti. Ruumi ja aja omadused sõltuvad kehade liikumisest ja olenevad teineteisest. Seepärast vaadeldakse kolme ruumikoordinaati x, y, z ja ajakoordinaati t kui ühe ruumi, nn *neljamõõtmelise aegruumi* punkti koordinaate

$$(x, y, z, ict) .$$

Ajalist koordinaati t korrutatakse tavaliselt imaginaarühikuga i, et lihtsustada mitmeid hilisemaid arvutusi, ja valguse kiirusega c, et dimensioonid oleksid kõigil koordinaatidel samad. Sellises ruumis arvutatakse kahe sündmuse vahelist "kaugust" nii, nagu ikka kaugust kahe punkti vahel [vt valemit (3)]

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (ict_2 - ict_1)^2} . \quad (49)$$

Seda nimetatakse *sündmustevaheliseks intervalliks* relatiivsusteooriaas.

Kontrollime, kuidas see intervall muutub üleminekul ühest taustsüsteemist teise. Kasutame valemit (45) ja (47). Nende puhul on mõlemad sündmused X-teljel, s.t $y_2 = y_1$, $z_2 = z_1$, $y_2' = y_1'$ ja $z_2' = z_1'$, mistõttu intervalli ruut võrdub

$$(s')^2 = (x_2' - x_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2 =$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)^2 - 2u(x_2 - x_1)(t_2 - t_1) + u^2(t_2 - t_1)^2}{1 - \beta^2} -$$

$$- c^2 \frac{(t_2 - t_1)^2 - 2\frac{\beta}{c}(t_2 - t_1)(x_2 - x_1) + \frac{\beta^2}{c^2}(x_2 - x_1)^2}{1 - \beta^2} =$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)^2(1 - \beta^2) - c^2(t_2 - t_1)^2(1 - \frac{u^2}{c^2})}{1 - \beta^2} =$$

$$= (x_2 - x_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = s^2 .$$

Seega,

intervall ei muutu üleminekul ühest inertsiaalsüsteemist teise.

Öeldakse ka, et intervall on *invariantne* üleminekul ühest inertsiaalsüsteemist teise. Klassikalises mehaanikas kehtib see eraldi ajalise ja ruumilise intervalli kohta. Relativistlikus mehaanikas moodustab ruum ja aeg ühtse terviku - aegruumi. Olenevalt kehade liikumisest muutuvad aegruumi omadused, kuid nii, et sündmustevaheline intervall (49) on invariantne. Viimane liidetav selles valemis on tegelikult negatiivne. i sulgude ette tuues saame i^2, mis võrdub -1-ga. Seepärast võib intervalli avaldisest teha järelduse, et kui ühest süsteemist teise üleminekul sündmuste ruumiline vahekaugus kasvab (kolm esimest liidetavat), siis kasvab ka nende ajaline erinevus ja vastupidi. Ilma selleta ei jääks intervall muutumatuks.

32. Kiiruste liitmise relativistlik valem (kiiruse teisendamine)

Kiiruse komponendid leitakse, nagu ikka [vt valemit (4)], koordinaatide ajalise tuletise kaudu. Antud juhul on kaks aega - t ja t'. Kummaski süsteemis tuleb kasutada oma aega:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad \text{jne.}$$

Kuid kiiruste seosvalemi saamiseks tuleb valemitest (44) võtta tuletisi ühe aja järgi. Sellest tekib vajadus võtta tuletist ühe süsteemi suurusest teise süsteemi aja järgi. Kuidas seda teha? Kasutame nn *muutuja vahetamise võtet*. Mingist priimita suurusest a tuletise t' järgi leiame nii:

$$\frac{da}{dt'} = \frac{da}{dt'} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{da}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'},$$

s.t võtame tuletise t järgi ja tulemust korrutame tuletisega dt/dt'. Viimase saab leida neljandast seosvalemist (44):

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{1 - \frac{\beta dx}{cdt}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1 - \frac{\beta v_x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Otsitav tuletis on selle pöördväärtus.

Nüüd võime leida tuletisi t' järgi avaldistest (44):

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\dfrac{dx}{dt'} - u\dfrac{dt}{dt'}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\dfrac{dx}{dt} - u}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{dt}{dt'} =$$

$$= \frac{v_x - u}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{\beta v_x}{c}} = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{\beta v_x}{c}};$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt'} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = v_y \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{\beta v_x}{c}}.$$

z-komponendi puhul saame viimasega kokkulangeva tulemuse. Nii saimegi *kiiruste teisendamise* ehk *liitmise relativistlikud valemid*:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{\beta v_x}{c}}; \qquad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{\beta v_x}{c}}; \qquad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{\beta v_x}{c}}. \tag{50}$$

Paneme tähele, et üleminekul ühest süsteemist teise ei muutu ainult kiiruse komponent, mis on suhtelise kiiruse u suunaline. Ka teised kiiruse komponendid muutuvad. Seetõttu ei kehti lihtne kiiruste liitmise reegel (43)

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}.$$

Selle saame ainult siis, kui $u << c$ ehk $\beta \approx 0$, s.t murdude nimetajad võrduvad 1-ga.

Rakendame saadud valemeid järgmisele huvitavale juhtumile. Üks valguskiir liikugu teisele vastu. Määrame nende suhtelise kiiruse. Selleks seome O'-süsteemi ühe valguskiirega. See liigub O-süsteemis kiirusega $+c$. Süsteemide suhteline kiirus u on siis c, s.t $\beta = 1$. Vastu liikuva valguse kiirus O-süsteemis on siis $v_x = -c$ ja O'-süsteemis v'_x. Viimane ongi otsitav valguskiirte suhteline kiirus. Valemitest (50) saame:

$$v'_x = \frac{-c - c}{1 + \dfrac{1 \cdot c}{c}} = -c; \qquad v'_y = 0; \qquad v'_z = 0.$$

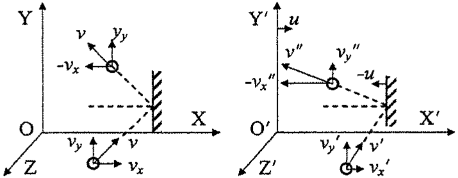
Valguskiirte suhteline kiirus ei ole mitte $-2c$, mis järgneks klassikalisest kiiruste liitmise seadusest (43), vaid $-c$.

§ 5. Relativistlik dünaamika

33. Relativistlik impulss ja mass

Üldine relatiivsusprintsiip nõuab, et kõik füüsikalised nähtused kulgeksid igas inertsiaalsüsteemis ühesuguste seaduspärasuste järgi. Võtame näiteks kehade põrkumise. Selles kehtib impulsi jäävuse seadus. Relativistlik impulss tuleb defineerida nii, et see seadus kehtiks igas inertsiaalsüsteemis.

Vaatleme kera elastset põrkumist hästi massiivselt seinalt (Joon. 26, esimene pool). O-süsteem on seotud seinaga.



Joon. 26

Selles süsteemis kiiruse y-komponent säilib põrke käigus. Seega säilib ka impulsi $m\vec{v}$ y-komponent. x-komponent muutub vastupidiseks seina mõju tõttu. Kiirusvektor moodustab seina normaaliga ühesuguse nurga nii enne kui ka pärast põrkumist (nn peegeldumisseadus).

Kuidas on olukord O'-süsteemis? Esmalt, enne joonise teise poole tegemist, arvutame kiirused selles süsteemis valemite (50) abil ($v_z = 0$). 1) enne põrget:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{\beta v_x}{c}}; \qquad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{\beta v_x}{c}}; \qquad v'_z = 0.$$

2) pärast põrget (v_x on muutnud märki):

$$v_x'' = \frac{-v_x - u}{1 + \frac{\beta v_x}{c}}; \qquad v_y'' = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{\beta v_x}{c}}; \qquad v_z'' = 0.$$

v_x' on v_x-st $\approx u$ võrra väiksem, v_y' erineb vähe v_y-st. $|v_x''|$ on $|v_x'|$-st $\approx 2u$ võrra suurem, v_y'' on v_y'-st väiksem. Neid tulemusi kajastab ka joonise 26 teine pool. Nii x- kui ka y-komponent on muutunud põrke käigus. Sama kehtib ka impulsi $m\vec{v}$ komponentide kohta. Et see juhtus x-komponendiga, on arusaadav (liikuva seina mõju), kuid miks vähenes impulsi y-komponent? Seinaga paralleelne komponent peab impulsi jäävuse seaduse järgi säilima. Seni ei ole leitud mingeid kiirete elementaarosakeste põrkeid, kus see seadus oleks rikutud.

Uurime v_y muutumise põhjust. See on määratud tuletisega $v_y = dy/dt$. Valemitest (44) näeme, et y ei muutu üleminekul ühest süsteemist teise. Seega on kiiruse muutumise põhjuseks aja t muutumine. Muutumatu y-komponendiga impulsi saamiseks tuleb see ehk defineerida ühesuguse aja järgi kõigis taustsüsteemides? Selleks sobib nn *omaaeg* – aeg süsteemis, kus keha on paigal. Tähistame selle τ-ga. Valemi (46) puhul on selleks aeg t. Diferentsiaalsete ajavahemike jaoks saame sellest valemist

$$dt' = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2}}. \qquad (46')$$

Süsteemide suhteline kiirus u on nüüd keha liikumise kiirus v'. Ühes on keha paigal, teises liigub kiirusega v'. Seega, vana impulsi

$$m\vec{v}' = m\frac{d\vec{r}'}{dt'}$$

asemele võtame O'-süsteemis

$$\vec{p}' = m\frac{d\vec{r}'}{d\tau} = m\frac{d\vec{r}'}{dt'\sqrt{1-\left(\frac{v'}{c}\right)^2}} = \frac{m\vec{v}'}{\sqrt{1-\left(\frac{v'}{c}\right)^2}}. \tag{51}$$

Sellise impulsi y-komponent säilib joonisel 26 kujutatud katses:

$$p'_y = \frac{mv'_y}{\sqrt{1-\frac{(v'_x)^2+(v'_y)^2}{c^2}}} = \frac{mv''_y}{\sqrt{1-\frac{(v''_x)^2+(v''_y)^2}{c^2}}} = p''_y.$$

z-komponendid on 0-d, s.t säilivad samuti. On soovitav seda võrdust iseseisvalt kontrollida.

Kui $v'/c \approx 0$, siis (51)-st saame klassikalise valemi

$$\vec{p}'_k = m\vec{v}'.$$

Valemit (51) tõlgendatakse siiski teisiti. m on seal nn keha *paigaloleku mass* - mass süsteemis, kus keha on paigal. Edaspidi tähistame selle m_0-ga. Kiirusega v liikuva keha mass on siis

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{52}$$

Sel juhul arvutatakse impulssi jällegi klassikalisel kujul valemiga $\vec{p} = m\vec{v}$. Valemist (52) aga selgub, et kiiruse kasvades kasvab ka keha mass, s.t keha inerts. See ongi põhjuseks, miks reaalset keha ei jõuta kiirendada kiiruseni $v=c$. Siis oleks keha mass ja energia lõpmatult suur ning niisuguse kiiruse saavutamiseks vajaminevat energiat ei ole kiirendajal kuskilt võtta.

Joonisel 26 O'-s näidatud kiiruse y-komponendi jäävuse rikkumine on meile arusaadav – ei kehti klassikaline kiiruste liitmise seadus. Impulsi y-komponendi mittejäävus tekkis aga sellest, et me eeldasime keha massi konstantsust. Massi muutuse arvestamisega jääb seinaga paralleelne impulsi komponent muutumatuks.

34. Relativistlik kineetiline energia

Klassikalisel juhul jõudsime kineetilise energia mõisteni jõu töö kaudu. Relativistlikul toimitakse samuti. Ka jõud defineeritakse siin klassikalisel viisil

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \tag{53}$$

kuid impulss $\vec{p}$ on juba relativistlik. Seda valemit nimetatakse ka *relativistliku dünaamika põhiseaduseks*.

Arvutame jõu poolt tehtava töö vaba keha kiirendamisel:

$$A = \int \vec{F} d\vec{s} = \int \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{s} = \int \vec{v} d\vec{p}.$$

Anname integraali märgi all seisvale avaldisele niisuguse kuju, et oskaksime integreerida. Selleks avaldame impulsi mooduli kiiruse kaudu valemist (51) ja võtame sellest tuletise v järgi:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \tag{54}$$

$$\frac{dp}{dv} = \frac{m_0}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2}}; \qquad d\vec{p} = \frac{m_0 d\vec{v}}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2}};$$

$$\vec{v} d\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v} d\vec{v}}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{m_0 \frac{1}{2} d(\vec{v}^2)}{\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{3/2}}.$$

Tähistades $q = v^2 / c^2$, võime töö jaoks kirjutada

$$A = \int \frac{m_0 c^2 dq}{2\left(\sqrt{1-q}\right)^3} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-q}} + A_0.$$

Integreerimiskonstandi A_0 määrame järgmiselt. Töö peab võrduma 0-ga, kui vaba keha ei kiirendatud (v=0; q=0):

$$0 = m_0c^2 + A_0\,; \qquad A_0 = -m_0c^2 .$$

Järelikult, vaba keha kiirendamiseks sooritatud töö, s.t keha kineetiline energia võrdub

$$W_k = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 . \qquad (55)$$

Kui $v << c$, siis võime ligikaudu kirjutada

$$\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{1}{1-\dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{c^2}} \approx 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

ja saada kineetilise energia jaoks

$$W_k = m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) - m_0c^2 = \frac{m_0v^2}{2}$$

– klassikalise valemi.

Relativistliku massi mõiste abil [vt valemit (52)] võib (55) üldjuhul ümber kirjutada ka nii:

$$W_k = mc^2 - m_0c^2 . \qquad (55')$$

m_0c^2 nimetatakse keha *paigalseisu energiaks*. See on

keha koostisosade vastastikuse seose ja sisemise liikumise energia.

Paigalseisuenergia ja kineetilise energia summa

$$W = m_0c^2 + W_k = mc^2 \qquad (56)$$

on *vaba keha koguenergia*. Seega,

keha relativistlik mass on ühtlasi tema koguenergia mõõt.

Öeldakse ka, et

mass ja energia on ekvivalentsed suurused.

Kui üks neist kasvab, siis kasvab ka teine ja vastupidi. See ei kehti mitte ainult mehaanikas. Iga energialiigiga on nii. Näiteks pange vee soojendamisel ei muutu see mitte ainult energiaküllasemaks, vaid ka inertsemaks, raskemaks. On soovitatav arvutada soojushulk, mis kulub pange vee raskuse kahekordistamiseks, ja võrrelda seda sama veehulga aurustamiseks kuluva soojushulgaga.

Seose (52) ja (54) abil saab koguenergia (56) avaldada impulsi kaudu

$$W = c\sqrt{p^2 + (m_0c)^2}\,. \tag{57}$$

Väikese impulsi puhul võib seda teisendada järgmiselt:

$$W = m_0c^2\sqrt{\left(\frac{p}{m_0c}\right)^2 + 1} \approx m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m_0^2c^2}\right) = m_0c^2 + \frac{p^2}{2m_0}\,.$$

Siit saame kineetilise energia jaoks

$$W_k = \frac{p^2}{2m_0}\,, \tag{58}$$

mis on klassikaline valem. Nii teisenevad kõik relatiivsusteooria valemid klassikalisteks keha kiiruse olulisel vähenemisel.

35. Üldrelatiivsusteooriast

Ligikaudu 10 aastat pärast erirelatiivsusteooria loomist üldistas A. Einstein seda mis tahes taustsüsteemidele ja lõi *üldrelatiivsusteooria*. Erirelatiivsusteoorias vaadeldi ainult inertsiaalseid taustsüsteeme, üldises võetakse arvesse ka kiirendusega liikuvad süsteemid. Selles mõttes see teooria üldisem ongi. Kiirendusega liiguvad tavaliselt vabad kehad gravitatsiooniväljas gravitatsioonijõu mõjul. Seetõttu on üldrelatiivsusteooria sisuliselt relativistlik gravitatsioonivälja teooria. See on kaasaegse *astrofüüsika* ja *kosmoloogia* teoreetiliseks aluseks.

Üldrelatiivsusteooria on üles ehitatud *ekvivalentsusprintsiibist* lähtudes. Nimelt

ei ole mingit põhimõttelist vahet gravitatsioonijõu ja inertsijõu vahel.

Näiteks tõusvas liftis ei saa meie kuidagi eristada gravitatsioonijõudu inertsijõust. Me ei oska lifti põranda surves jalgadele teha vahet selle osade vahel, mis on tingitud gravitatsioonist ja mis inertsist. On ükskõik, kas lift seisab paigal gravitatsiooniväljas või liigub kiirendusega oma mootori veojõu mõjul kaugel kõigist taevakehadest. Lift mõjutab meid mõlemal juhul ühesuguse jõuga.

Inertsijõu ja gravitatsioonijõu ekvivalentsust näitab ka see, et kõigil mõõtmistel, mis seni on sooritatud, ei ole suudetud vahet teha keha kaalumisel saadava massi ja inertsinähtustest määratava massi vahel. Esimest nimetatakse *raskeks*, teist *inertseks* massiks. Teisiti öeldes,

keha raske ja inertne mass on täpselt võrdsed.

Veel ühe näitena võib tuua nn *kaaluta oleku*. Vabalt langevas liftis või väljalülitatud mootoriga sõitvas kosmoselaevas on inertsijõud täpselt võrdne gravitatsioonijõuga. Sõiduk liigub kiirendusega, aga kiirendust me ei taju. Kõik füüsikalised nähtused kulgevad seal nii nagu inertsiaalsüsteemiski, kuigi süsteem tegelikult liigub kiirendusega. S.t *gravitatsioonivälja võib asendada inertsijõudude väljaga.*

Kiirenevalt liikuvate süsteemide matemaatilisel kirjeldamisel jõutakse välja *mittehomogeense ruumi mõisteni*. Massiivsete kehade ümber muutub *ruum kõveraks*. Seal hakkavad vabad kehad liikuma kiirendusega. Sellega seletataksegi gravitatsiooni. Kõveras ruumis on vaba keha kiirendusega liikumine niisama iseenesest mõistetav nähtus nagu ühtlane sirgjooneline liikumine "sirges" ehk eukleidilises ruumis.

III VÕNKUMISED JA LAINED

Selles peatükis käsitleme peamiselt mehaanilisi võnkumisi ja laineid, kuid enamik esitatavast kehtib ka teiste juures. Näiteks elektromagnetiliste ja optiliste juures. Seepärast me ei korda hiljem, elektrikursuses, optikas ja aatomifüüsikas analoogilist osa. Vajadusel viitame tagasi sellele peatükile.

§ 6. Võnkumised

36. Harmooniline võnkumine

Mis tahes füüsikaline suurus või süsteem võib võnkuda. Konkreetsuse mõttes kasutame mehaanilisi nähtusi, kuid öeldu kehtib ka kõigi teiste füüsikaliste protsesside puhul.

[Katsed mitmesuguste võnkumiste jälgimiseks.]

Võnkumiseks nimetatakse füüsikalise suuruse muutust, milles see kaldub oma keskmisest väärtusest kõrvale kord ühes, kord teises suunas.

Mehaaniline võnkumine on keha liikumine, milles see kaldub oma tasakaaluasendist kõrvale kord ühes, kord teises suunas.

Võnkumine võib olla perioodiline ja mitte. Perioodilistest on kõige lihtsam *harmooniline võnkumine.*

Harmooniliseks nimetatakse võnkumist, milles võnkuv suurus muutub ajas sinusoidaalse seaduspärasuse järgi.

Harmooniline ja sinusoidaalne - nendel sõnadel on füüsikas üks ja sama tähendus.

Harmooniline võnkumine tekib ühtlase ringliikumise projekteerimisel sirgele, mis asub ringliikumise tasandis.

[Katse ringjoonel liikuva pallikese varju saamiseks.]

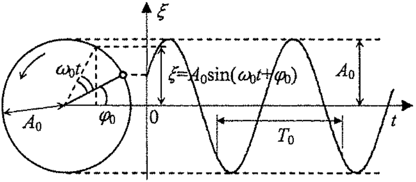
Varju tumedus näib olevat kõige suurem äärmistes asendites. See näitab, et võnkuv keha viibib nendes kohtades suurema osa ajast, keskmistes asendites aga vähe - neid läbitakse suure kiirusega.

Kui selline võnkumine "laiali laotada" võnkumisega ristuvas suunas, saamegi sinusoidi.

[Katse helihargilt ja pöörlevalt kaheksatahuliselt peeglilt peegelduva laserkiirega.]

Paigalseisva peegli ja heliseva hargi puhul saame võnkuva valguslaigu. Peegli pöörlemisel see laik joonistab ekraanile (seinale) sinusoidi.

Selgitame vastavate suuruste vahelisi seoseid skemaatiliselt joonisel 27.



Joon. 27

Raadiusega A_0 ja nurkkiirusega ω_0 pöörlev punkt asub ajahetkel $t_0 = 0$ asendis φ_0. Ajahetkeks t on nurk suurenenud $\omega_0 t$ võrra, omades väärtust

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0 . \qquad (59)$$

Võnkumise juures nimetatakse φ *faasiks* ja φ_0 *algfaasiks*. Faas kirjeldab olukorda, milles võnkuv keha antud hetkel viibib. Toome näiteid.

1) $\varphi = 0$ või $\pi = 180°$ - keha on tasakaaluasendis. 0 korral läbib seda ühes suunas, π korral aga vastassuunas.

2) $\varphi = \pi/2$ - ühes äärmises asendis, kõige kaugemal tasakaaluasendist. Seda kaugust A_0 nimetatakse võnkumise *amplituudiks*.

3) $\varphi = -\pi/2$ või $3\pi/2$- teises äärmises asendis. Iga 2π tagant hakkab füüsikaline olukord korduma, s.t

faasi muutumise perioodiks on 2π.

Faasiväärtuse 2π võib lugeda jällegi 0-ks, samuti 4π, -2π jne.

Faasidest räägitakse ka elektrivoolu korral. Kolmefaasilises voolus on antud hetkel voolu iseloomustaval suurusel (pingel või voolutugevusel) igas kolmes juhtmes isesugune faasi väärtus. Kui faas oleks kõigis alati ühesugune, siis oleks vool ühefaasiline. Sel juhul ei ole 3 juhtme kasutamisel mõtet.

Kuu faasid tulenevad samast mõistest.

Suurust ξ (Joon. 27), mis mõõdab kõrvalekaldumist tasakaaluasendist või nullväärtusest, nimetatakse *hälbeks*. Amplituud A_0 on siis *hälbe maksimaalväärtus*. Aega, mille jooksul hälve (keha, füüsikaline suurus) sooritab ühe täisvõnke, nimetatakse *võnkumise perioodiks* (T_0). Selle pöördväärtust, s.o võngete arvu ühes ajaühikus, nimetatakse *sageduseks*

$$\upsilon_0 = \frac{1}{T_0}.$$

Kui aeg muutub perioodi võrra, siis muutub faas 2π võrra. Valemist (59) saame tingimuse

$$\omega_0(t + T_0) + \varphi_0 - (\omega_0 t + \varphi_0) = 2\pi.$$

Siit

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\upsilon_0.$$

Võnkumise juures nimetatakse ω_0 *ringsageduseks* või *nurksageduseks*. See on ka *faasi muutumise kiirus*, sest näitab faasi muutust ajaühikus. Mõõtühikuks on rad/s.

Hälbe muutumist ajas kirjeldav avaldis (saadakse joonisel 27 kujutatud kolmnurga abil)

$$\xi = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

on üks näide *liikumisseadusest* (vt punkti 3). Võttes sellest tuletise aja järgi, saame keha liikumise kiiruse

$$\dot{\xi} = v_\xi = A_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = v_{max} \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Kiiruse faas on hälbe omast $\pi/2$ võrra ees. Näiteks kui ξ on alles 0, omab kiirus juba maksimaalset väärtust

$$v_{max} = A_0\omega_0 .$$

Teine tuletis annab kiirenduse

$$\ddot{\xi} = a_\xi = -A_0\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = a_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) .$$

Selle faas on $\pi/2$ võrra kiiruse või π võrra hälbe omast ees. Viimase võrduse võib ka nii ümber kirjutada:

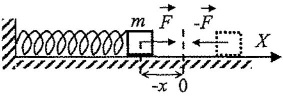
$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0 . \tag{60}$$

See on *harmoonilise võnkumise diferentsiaalvõrrand*. Sellist seost peavad rahuldama kõik võnkumisseadused (hälbe avaldised), mis kujutavad harmoonilisi võnkumisi.

37. Vedrupendel. Matemaatiline ja füüsikaline pendel

Kujutame joonisel 28 vedru külge kinnitatud keha liikumas hõõrdumisvabalt horisontaalsel pinnal. Keha väljaviimisel tasakaaluasendist 0 tekib alati sinna tagasi viiv jõud. Elastsete deformatsioonide piires on see võrdeline hälbega (*Hooke'i seadus*)

$$F = -k x .$$



Joon. 28

k on *vedru jäikus* - ühikdeformatsiooni põhjustav jõud. Mõõtühikuks on N/m. Avaldades jõu kiirenduse $a = \ddot{x}$ kaudu, saame

$$m\ddot{x} = -k x ;$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 .$$

See on harmoonilise võnkumise diferentsiaalvõrrand (60), milles võnkumise ringsageduse ruutu asendab kordaja k/m. Järelikult hakkab keha võnkuma harmooniliselt ringsagedusega

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} . \tag{61}$$

Võnkeperiood on siis

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} . \tag{62}$$

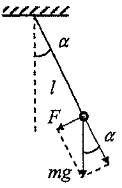
Need suurused olenevad keha massist ja vedru jäikusest (tühise vedru massi korral). Millise amplituudiga A_0 ja algfaasiga φ_0 keha võnkuma hakkab, see oleneb *algtingimustest* - kui suure jõuga keha tasakaaluasendist välja viiakse ja millisel ajahetkel see vabaks lastakse.

Eelöeldu põhjal võib ka väita, et

harmooniline võnkumine on võnkumine hälbega võrdelise ja tasakaaluasendi poole suunatud jõu mõjul.

Kui võrdelisus ei ole täpne, siis ei ole ka võnkumine täpselt harmooniline. Võnkumisseadus on sinusoidaalsest keerulisem.

Teise näitena vaatleme matemaatilist pendlit. Kaalutu ja venimatu niidi otsa on riputatud ainepunkt (Joon. 29).



Joon. 29

Tasakaalu poole viiv jõud arvutub valemiga

$$F = -mg\sin\alpha .$$

See põhjustab tangentsiaalse kiirenduse

$$a_\tau = \frac{F}{m} = -g\sin\alpha .$$

Sama kiirendus on avaldatav nurkkiirenduse $\ddot{\alpha}$ ja pöörlemisraadiuse l korrutisena [vt valemit (14)]. Nii saame tekkiva võnkumise diferentsiaalvõrrandiks

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0 .$$

Võrdlemisel valemiga (60) leiame, et üldjuhul ei ole võnkumine harmooniline. Sellise saame, kui paneme pendli võnkuma väikese amplituudiga - mõnekraadise nurga all. Siis võib, nurka radiaanides mõõtes, teha asenduse $\sin\alpha \approx \alpha$ ja võrrand muutub harmoonilise võnkumise omaks

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0 .$$

Nurksageduseks saame

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (63)$$

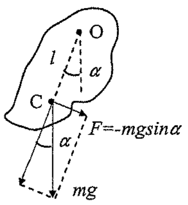
ja perioodiks

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{64}$$

Seega valemid (63)-(64) kehtivad ainult väikese amplituudiga võnkumiste puhul.

Kolmanda näitena vaatleme nn *füüsikalist pendlit.*

Füüsikaliseks pendliks nimetatakse iga reaalset keha, mis ripub kinnitatuna raskuskeskmega mittekokkulangevast punktist (Joon 30).



Joon. 30

Raskuskese asugu punktis C. Tasakaaluasendisse viiv jõud F põhjustab momendi

$$M = Fl = -mgl\sin\alpha\,.$$

Pöördliikumise dünaamika põhiseaduse (39') järgi võrdub see inertsimomendi I ja nurkkiirenduse $\ddot{\alpha}$ korrutisega. Inertsimoment peab olema arvutatud telje suhtes, mis läbib kinnituspunkti O ja on keha pöörlemisteljeks. Nii saame diferentsiaalvõrrandiks

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{I}\sin\alpha = 0\,.$$

Ka selle pendli võnkumine ei ole üldjuhul harmooniline. Ainult mõnekraadiste nurkade puhul saame sellise võnkumise

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{I}\alpha = 0\,.$$

Seega

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \tag{65}$$

ja

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}\,. \tag{66}$$

Kui tähistada

$$l' = \frac{I}{ml},$$

siis saame ringsageduse ja perioodi valemile anda matemaatilise pendli omaga kokkulangeva kuju. Suurust l' nimetatakse *füüsikalise pendli redutseeritud (taandatud) pikkuseks.*

Sellise pikkusega matemaatiline pendel võngub täpselt sama sagedusega nagu antud füüsikaline pendel.

Füüsikalise pendli periood oleneb pendli massist, massi paiknemisest pendli kinnituspunkti suhtes ja massikeskme kaugusest kinnituspunktist.

38. Harmoonilise võnkumise energia

Vaatleme veel kord vedrupendlit joonisel 28. Arvutame töö keha väljaviimisel tasakaaluasendist:

$$A = \int_0^x F dx = k \int_0^x x\, dx = \frac{1}{2} k x^2 .$$

Sama suur on vedrupendli potentsiaalne energia hetkel, mil hälve on x

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) . \qquad (67)$$

Hälbe järgi on energia muutumine paraboolne, ajas toimub see siinuse ruudu funktsiooni järgi.

Kuidas muutub kineetiline energia?

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) . \qquad (68)$$

Kiiruse järgi on muutus paraboolne, ajas - koosinuse ruudu funktsioon. Muutuste amplituud on sama mis potentsiaalsel energial, sest valemi (61) abil võime leida, et $m\omega_0^2 = k$. Seepärast saame kogu mehaanilise energia jaoks kirjutada

$$W = W_p + W_k = \frac{kA_0^2}{2}\left[\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)\right] = \frac{kA_0^2}{2} .$$

See säilib ajas. Ka amplituud säilib. Jätame meelde, et *võnkuva keha energia on võrdeline amplituudi ruuduga.* Seda on hiljem tarvis lainete ja kiirguste energia hindamisel. Potentsiaalne ja kineetiline energia muutub nii, et kui üks on 0, on teine maksimaalne $- k A_0^2 / 2 -$ ja vastupidi. Toimub pidev energia üleminek ühest liigist teise. Jõud, mis kehale mõjub, kord vähendab, kord suurendab selle kineetilist energiat. Olles alati suunatud tasakaaluasendi poole, see vähendab kineetilist keha kaugenemisel tasakaaluasendist, tasakaalu poole liikumisel aga suurendab.

39. Samas sihis toimuvate võnkumiste liitmine

Võnkuvale kehale võib samaaegselt mõjuda mitu tasakaaluasendi poole viivat jõudu. Neid võib liita ja vaadelda võnkumist ikkagi ühe jõu põhjustatud liikumisena. Võib ka liita erinevate jõudude poolt tekitatud liikumisi. Siis räägitakse *võnkumiste liitmisest*. Tulemus kannab *liitvõnkumise* nime.

Üks jõud eraldi võetuna põhjustagu võnkumist amplituudiga A_1 ja faasiga φ_1

$$\xi_1 = A_1 \sin \varphi_1 ,$$

teine - amplituudiga A_2 ja faasiga φ_2

$$\xi_2 = A_2 \sin \varphi_2 .$$

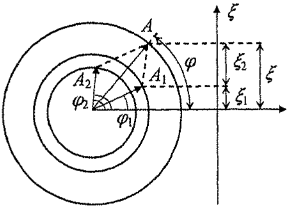
Missuguseks kujuneb keha liikumine siis, kui mõlemad jõud mõjuvad koos? Siin saame anda vastuse ainult juhul, kui summaarne jõud $F_1 + F_2$ ei põhjusta väljumist elastsuse piiridest, s.t ka summaarse jõu korral kehtib võrdeline sõltuvus nihke ja jõu vahel (Hooke'i seadus). Sellisel juhul on liitvõnkumise hälve ξ hälvete ξ_1 ja ξ_2 summa

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 .$$

Erinevate jõudude põhjustatud nihked liituvad. Et valitseb võrdeline seos summaarse jõu ja nihke vahel, siis on liitvõnkumine samuti harmooniline võnkumine mingi amplituudiga A ja faasiga φ:

$$A \sin \varphi = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 .$$

Kujutame seda liitmist joonisel 31 ringliikumiste abil - pöörlevate vektorite projektsioonide liitmisena.



Joon. 31

Liitvõnkumist kujutava pöörleva vektori saame liidetavaid võnkumisi kujutavate vektorite summeerimisega

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 .$$

Vertikaaltelje asemel võime projekteerimise teha ka horisontaalteljele. Sellisel juhul saame tulemuseks

$$A\cos\varphi = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 .$$

Leitud avaldiste suhe annab valemi *liitvõnkumise faasi* arvutamiseks

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} . \qquad (69)$$

Avaldiste ruututõstmine ja liitmine annab

$$A^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = A_1^2(\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1) +$$

$$+2A_1A_2(\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2) + A_2^2(\sin^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_2)$$

ehk

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) . \qquad (70)$$

See on *liitvõnkumise amplituudi* arvutusvalem. Summaarne amplituud oleneb nii liidetavate võnkumiste amplituudidest kui ka faasierinevusest - *faasivahest* $\varphi_2 - \varphi_1$. Viimasel on kaks erilist väärtust.

1) $\varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi$, kus $n = 0, \pm1, \pm2$, (paarisarv π-sid). Öeldakse, et võnkumised liituvad *samas faasis*. Valemist (70) saame

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2 ; \qquad A = A_1 + A_2 .$$

Amplituudid liituvad. Võnkumised tugevdavad teineteist maksimaalselt.

2) $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi$ (paaritu arv π-sid). Öeldakse, et võnkumised liituvad *vastasfaasis*. Sellisel juhul $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$ ja

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_1 - A_2)^2 ; \qquad A = A_1 - A_2 .$$

Amplituudid lahutuvad. Võnkumised nõrgendavad teineteist maksimaalselt. Kui $A_1 = A_2$, siis maksimaalsel tugevdamisel amplituud kahekordistub ja energia neljakordistub (vt punkti 38). Nõrgendamisel aga saavad mõlemad võrdseks 0-ga. Keha ei võngu, vaid püsib paigal, vaatamata sellele, et ta võtab osa kahest võnkumisest – kehale mõjub kaks vastassuunalist võnkumapanevat jõudu.

40. Tuiklemine

Vaatleme ühte samasihiliste võnkumiste liitmise erijuhtu – liidetavad võnkumised olgu harmoonilised. Siis on faasid avaldatavad lineaarfunktsioonidena

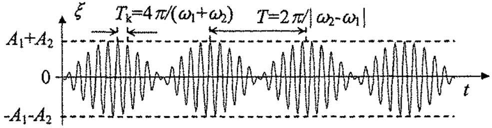
$$\varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_{01};$$

$$\varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_{02}.$$

Faasivahe on

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_{02} - \varphi_{01}.$$

See muutub samuti ajas lineaarselt. Seepärast muutub ka liitvõnkumise amplituudi ruut (70) ajas sinusoidaalselt. Muutumise ringsageduseks on $\omega_2 - \omega_1$. Võnkumised kord tugevdavad, kord kustutavad teineteist (Joon. 32).



Joon. 32

Joonis vastab juhule, kus $A_1 = A_2$. Selle võrduse mittekehtimisel amplituud ei kahane miinimumides nullini, vaid saavutab mingi väärtuse $A_1 - A_2$.

Kirjeldatud nähtust nimetatakse *tuiklemiseks*. Tuiklemise või faasivahe muutumise periood T on määratud liidetavate võnkumiste sageduste vahega (valem joonisel 32). Nähtust nimetatakse tuiklemiseks ainult siis, kui $|\omega_1 - \omega_2| << \omega_{1,2}$, s.t kui liituvad lähedaste sagedustega võnkumised. Suure sageduste vahe korral ei ole liitvõnkumise pilt nii lihtne. Selget amplituudi perioodilist suurenemist ja vähenemist ei ole märgata.

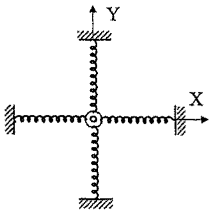
Sõna "tuiklemine" tuleneb vastavast kuulmisaistingust, millise tekitavad kõrvas kaks vähesel määral erineva sagedusega heli.

[Katse tuiklemise tekitamiseks kahe helihargi abil. Võib ka võimendada ja ostsillograafil nähtavaks muuta.]

Mõlema helihargi üheaegsel helisemisel tekib hääles tuiklemine. Nähtust kasutatakse muusikariistade häälestamisel. Kahe heli kõrgused langevad kokku, kui nende kooskõlamisel tuiklemise sagedus langeb alla ≈0,1 hertsi.

41. Ristuvates sihtides toimuvate võnkumiste liitmine

Selline juht võib esineda näiteks joonisel 33 näidatud kehade süsteemis.

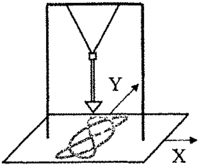


Joon. 33

Üks vedrude paar paneb keha võnkuma X-telje, teine Y-telje sihis. Kui hälbed on väikesed, siis on mõlemad võnkumised eraldi võetuna harmoonilised:

$$\begin{cases} x = A_x \sin(\omega_x t + \varphi_x); \\ y = A_y \sin(\omega_y t + \varphi_y). \end{cases}$$

Keha tegelik liikumine on nende liikumiste summa. Üldisel juhul tekivad väga keerulised trajektoorid. Vastavaid kujundeid uuris esimesena prantsuse teadlane Lissajous (1822-1880). Seepärast nimetatakse neid *Lissajous' kujunditeks*. Vaatleme mõningaid kujundeid katseliselt joonisel 34 kujutatud seadme abil.



Joon. 34

Ülesriputatud lehter liivaga pannakse võnkuma. Lehtrist väljavoolav liiv märgistab selle liikumise tee. Nööride V-kujuline osa saab võnkuda ainult "võllaga" ristuvas sihis, alumine osa aga nii X- kui ka Y-telje sihis. Osade pikkuste suhtest oleneb sageduse ω_x ja ω_y suhe. See koos A_x, A_y, φ_x ja φ_y väärtusega määrab trajektoori kuju.

[Katse Lissajous' kujundite saamiseks liivaga ja elektroonselt ostsillograafi ekraanil.]

Vaatleme ühte lihtsamat erijuhtu $\omega_x = \omega_y = \omega$. Leiame x ja y vahelise seose, mis ei sisalda aega. Seda nimetatakse *trajektoori võrrandiks*. Üleval esitatud süsteem määrab samuti trajektoori, kuid nn *parameetrilisel kujul*. Parameetriks on aeg.

Kirjutame liikumisseadused ümber järgmiselt:

$$\frac{x}{A_x} = \sin\omega t \cos\varphi_x + \cos\omega t \sin\varphi_x\,;$$

$$\frac{y}{A_y} = \sin\omega t \cos\varphi_y + \cos\omega t \sin\varphi_y\,.$$

Korrutame võrdusi vastavalt $\cos\varphi_y$ ja $\cos\varphi_x$ ning lahutame esimesest teise

$$\frac{x}{A_x}\cos\varphi_y - \frac{y}{A_y}\cos\varphi_x = \cos\omega t(\sin\varphi_x\cos\varphi_y - \cos\varphi_x\sin\varphi_y) =$$

$$= \cos\omega t\sin(\varphi_x - \varphi_y)\,.$$

Korrates sama siinustega, saame

$$\frac{x}{A_x}\sin\varphi_y - \frac{y}{A_y}\sin\varphi_x = -\sin\omega t(\sin\varphi_x\cos\varphi_y - \cos\varphi_x\sin\varphi_y) =$$

$$= -\sin\omega t\sin(\varphi_x - \varphi_y)\,.$$

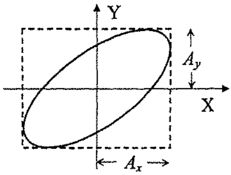
Tõstame saadud avaldised ruutu ja liidame

$$\left(\frac{x}{A_x}\right)^2+\left(\frac{y}{A_y}\right)^2-2\frac{xy}{A_xA_y}(\cos\varphi_x\cos\varphi_y+\sin\varphi_x\sin\varphi_y)=$$

$$=\sin^2(\varphi_x-\varphi_y)(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t).$$

Nii saime seose x ja y vahel – trajektoori võrrandi

$$\left(\frac{x}{A_x}\right)^2+\left(\frac{y}{A_y}\right)^2-2\frac{xy}{A_xA_y}\cos(\varphi_x-\varphi_y)=\sin^2(\varphi_x-\varphi_y). \quad (71)$$



Joon. 35

See on üldine *ellipsi* võrrand (Joon. 35). Ellips asub ristkülikus mõõtmetega $2A_x\times 2A_y$. Selle kuju ja asetus ristkülikus oleneb faasivahest φ_x - φ_y.

Vaatleme erijuhtusid.

1) Samas faasis liitumine:

$\varphi_x-\varphi_y=2n\pi$;

$\cos(\varphi_x-\varphi_y)=1$;

$\sin(\varphi_x-\varphi_y)=0$.

Saame vahe ruudu, mis võrdub nulliga:

$$\left(\frac{x}{A_x}-\frac{y}{A_y}\right)^2=0; \qquad y=\frac{A_y}{A_x}x.$$

Ellips on kõdunenud sirgeks (Joon. 36, punktkriipsjoon).

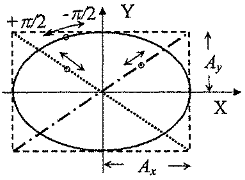
2) Vastasfaasis liitumine:

$\varphi_x-\varphi_y=(2n+1)\pi$; $\cos(\varphi_x-\varphi_y)=-1$; $\sin(\varphi_x-\varphi_y)=0$.

Saame nulliga võrduva summa ruudu:

$$\left(\frac{x}{A_x}+\frac{y}{A_y}\right)^2=0; \qquad y=-\frac{A_y}{A_x}x.$$

See on samuti sirge, kuid koordinaattasandi II ja IV veerandit läbiv (Joon. 36).



Joon. 36

3) $\varphi_x - \varphi_y = \pm\frac{\pi}{2}$;

$\cos(\varphi_x - \varphi_y) = 0$;

$\sin(\varphi_x - \varphi_y) = \pm 1$:

$$\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 = 1.$$

Saime koordinaattelgede suhtes sümmeetriliselt asetseva ellipsi (Joon. 36, pidev joon). Positiivse faasivahe puhul ($\varphi_x > \varphi_y$) toimub pöörlemine vastassuunas kellaosuti liikumisega, negatiivse puhul - päripidiselt. Suunda saab määrata algsetest liikumisseadustest, andes ajale järjest kasvavaid väärtusi ja jälgides vastavaid x ning y muutusi.

42. Sumbuvad võnkumised

Vaatleme veel kord vedrupendlit joonisel 28. Selle võib ka vertikaalseks pöörata ja võnkuma panna.

[Katse vertikaalse vedrupendliga.]

Erinevalt joonisel 28 vaadeldust tuleb praktikas arvestada ka hõõrdejõu olemasoluga. See on alati suunalt vastupidine keha kiirusega. Katsestendidel sooritatud mõõtmised näitavad, et esimeses lähenduses võib hõõrdejõu võtta võrdeliseks kiirusega

$$f = -\rho v = -\rho\dot{\xi},$$

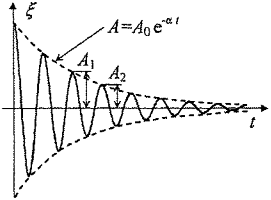
kus ρ on võrdetegur, nn *takistustegur*. Sel juhul võime Newtoni II seaduse üles kirjutada nii:

$$m\ddot{\xi} = F + f = -k\xi - \rho\dot{\xi}$$

ehk

$$\ddot{\xi} + \frac{\rho}{m}\dot{\xi} + \frac{k}{m}\xi = 0. \qquad (72)$$

See on *sumbuva võnkumise diferentsiaalvõrrand*. Hõõrde- või takistusjõu tõttu ei toimu võnkumine jääva amplituudiga. Amplituud ja seega ka keha võnkumise energia kahaneb pidevalt (Joon. 37).



Joon. 37

Mõõtmised näitavad, et amplituudi kahanemine on eksponentsiaalne

$$A = A_0e^{-\alpha t},$$

s.t hälve muutub seaduspärasuse

$$\xi = A_0e^{-\alpha t}\sin(\omega t + \varphi_0) \quad (73)$$

järgi. A_0 on amplituudi väärtus ajahetkel $t = 0$.

Kui suur on eksponendi astendajas olev kordaja α ja millise ringsagedusega ω toimub võnkumine? Vastusteni jõuame, kui nõuame, et (73) oleks diferentsiaalvõrrandi (72) lahendiks. Leiame tuletised.

$$\dot{\xi} = A_0e^{-\alpha t}(-\alpha)\sin(\omega t + \varphi_0) + A_0e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \varphi_0)\cdot\omega\,.$$

$$\ddot{\xi} = A_0e^{-\alpha t}(-\alpha)^2\sin(\omega t + \varphi_0) + A_0e^{-\alpha t}(-\alpha)\cos(\omega t + \varphi_0)\cdot\omega +$$
$$+ A_0e^{-\alpha t}(-\alpha)\omega\cos(\omega t + \varphi_0) + A_0e^{-\alpha t}\omega(-1)\sin(\omega t + \varphi_0)\cdot\omega =$$
$$= A_0e^{-\alpha t}(\alpha^2 - \omega^2)\sin(\omega t + \varphi_0) - A_0e^{-\alpha t}2\alpha\omega\cos(\omega t + \varphi_0)\,.$$

Asetame need avaldised ja (73) võrrandisse (72) ning võtame ühesugused liikmed kokku:

$$A_0e^{-\alpha t}\left(\alpha^2 - \omega^2 + \frac{k}{m} - \frac{\alpha\rho}{m}\right)\sin(\omega t + \varphi_0) -$$
$$- A_0e^{-\alpha t}\left(2\alpha\omega - \frac{\rho}{m}\omega\right)\cos(\omega t + \varphi_0) = 0\,.$$

Võrdus peab kehtima igal ajahetkel (Newtoni II seadus). Ajast olenemata saab avaldis olla null ainult siis, kui siinuse ja koosinuse kordajad on üksteisest sõltumatult võrdsed nulliga:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \omega^2 + \dfrac{k}{m} - \dfrac{\alpha\rho}{m} = 0\,; \\ 2\alpha\omega - \dfrac{\rho}{m}\omega = 0\,. \end{cases}$$

Teisest võrdusest saamegi tingimuse, mida peab rahuldama α

$$\alpha = \frac{\rho}{2m}\,. \tag{74}$$

Arvestame seda ja võrdusest (61) saadavat k/m väärtust esimeses süsteemi võrduses

$$\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\alpha^2 = 0\,.$$

Sellest leiame vajaliku tingimuse ω jaoks

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \tag{75}$$

– märgataval sumbumisel keha võngub väiksema nurksagedusega kui on ω_0. Takistusjõud põhjustab sageduse vähenemise. Suurust α nimetatakse *sumbuvuse teguriks*. Selle mõõtühik on 1/sek. Valemist $A = A_0 e^{-\alpha t}$ leiame, et aja $t = 1/\alpha$ puhul on $A = A_0 e^{-1} = A_0 / e$. Seega,

sumbuvuse tegur on aja pöördväärtus, mille vältel amplituud kahaneb $e \approx 2,72$ korda.

Tihti kasutatakse α asemel teist suurust sumbuvuse kirjeldamiseks. Selle saame, kui leiame mitu korda amplituud muutub perioodi jooksul (Joon. 37):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 e^{-\alpha t_1}}{A_0 e^{-\alpha(t_1+T)}} = \frac{1}{e^{-\alpha T}} = e^{\alpha T}\,. \tag{76}$$

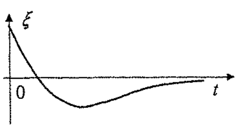
Astendajat αT kasutataksegi teise sumbuvust kirjeldava suurusena. Tähistame selle β-ga:

$$\beta = \alpha T = \ln\frac{A_1}{A_2}\,. \tag{76}$$

β nimetatakse *sumbuvuse logaritmiliseks dekremendiks*. See näitab

kahe järjestikuse amplituudi (võetud ühe perioodi tagant) suhte naturaallogaritmi.

Mida suurem on β (ja α), seda kiiremini võnkumine sumbub. Kui $\alpha > \omega_0$, siis muutub nurksagedus ω (ja periood T) imaginaarseks [vt valemit (75)]. Võnkumist praktiliselt ei toimugi. Algasendist väljaviidud keha läheb aperioodiliselt tagasi tasakaaluasendisse (Joon. 38). Kogu kehale antud energia kulub takistusjõu ületamiseks enne ühegi võnke sooritamist.

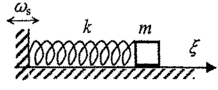


Joon. 38

43. Sundvõnkumine. Resonants

Kõiki seni vaadeldud võnkumisi nimetatakse *vabadeks*. Kehade süsteem viidi tasakaalust välja ja jäeti siis omaette, lasti vabaks. Tekkis võnkumine mingi sagedusega υ_0 (või υ). Seda nimetatakse *süsteemi vaba võnkumise sageduseks* ehk *omavõnkesageduseks*. Analoogiliselt on ka $T = 1/\upsilon$ *omavõnkeperiood*.

Nüüd oletame, et kehade süsteemile mõjub veel välisjõud, mis on perioodiliselt muutuv. Võtame näiteks joonisel 39 skemaatiliselt kirjeldatud juhu.



Joon. 39

Vedru kinnituspunkti nihutatakse edasi-tagasi nurksagedusega ω_s. Sellest tekib vedru lisadeformatsioon, mistõttu kehale m kandub üle sama sagedusega muutuv lisajõud

$$F_s = F_0 \sin(\omega_s t + \varphi_s)\,.$$

F_0 on selle jõu amplituud. Indeks s tähistab keha võnkuma sundivat jõudu. Nüüd on Newtoni II seadus üles kirjutatav järgmiselt:

$$m\ddot{\xi} = F + f + F_s\,.$$

Jõudude asendamisel vastavate avaldistega ja võrduse jagamisel m-ga saame

$$\ddot{\xi} + 2\alpha\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = a_0 \sin(\omega_s t + \varphi_s)\,. \qquad (77)$$

Seejuures kasutasime järgmisi tähistusi:

$$\frac{\rho}{2m} = \alpha; \qquad \frac{k}{m} = \omega_0^2; \qquad \frac{F_0}{m} = a_0 .$$

Võrdus (77) on *sundvõnkumise diferentsiaalvõrrand.* Vastab juhule, mil sundiv jõud muutub sinusoidaalselt. Üldjuhul võib muutumise seaduspärasus olla ka teistsugune.

Kuidas keha liikuma hakkab? Kohe pärast jõu mõjumise algust ei ole liikumise kirjeldamine lihtne. Lihtsamaks muutub see siis, kui jõud on mõjunud juba küllalt kaua. Katsed näitavad, et siis keha võngub harmooniliselt sama sagedusega, mis on sundival jõul

$$\xi = A\sin(\omega_s t + \varphi_0) .$$

Leiame sellise võnkumise amplituudi A ja algfaasi φ_0. Selleks on tarvis võtta tuletised:

$$\dot{\xi} = A\omega_s \cos(\omega_s t + \varphi_0);$$
$$\ddot{\xi} = -A\omega_s^2 \sin(\omega_s t + \varphi_0) .$$

Asetame need võrrandisse (77) ja teisendame seda:

$$A(\omega_0^2 - \omega_s^2)\sin(\omega_s t + \varphi_0) + 2\alpha\omega_s A\cos(\omega_s t + \varphi_0) = a_0 \sin(\omega_s t + \varphi_s);$$

$$\begin{aligned} A(\omega_0^2 - \omega_s^2)(\sin\omega_s t\cos\varphi_0 + \cos\omega_s t\sin\varphi_0) + \\ + 2\alpha\omega_s A(\cos\omega_s t\cos\varphi_0 - \sin\omega_s t\sin\varphi_0) = \\ = a_0(\sin\omega_s t\cos\varphi_s + \cos\omega_s t\sin\varphi_s) . \end{aligned}$$

Võrdus peab kehtima igal ajahetkel. See saab nii olla ainult siis, kui $\cos\omega_s t$ ja $\sin\omega_s t$ kordajad mõlemal pool võrdusmärki on eraldi võetult võrdsed:

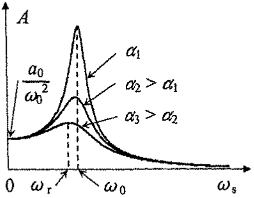
$$\begin{cases} A\left[(\omega_0^2 - \omega_s^2)\cos\varphi_0 - 2\alpha\omega_s \sin\varphi_0\right] = a_0 \cos\varphi_s ; \\ A\left[(\omega_0^2 - \omega_s^2)\sin\varphi_0 + 2\alpha\omega_s \cos\varphi_0\right] = a_0 \sin\varphi_s . \end{cases}$$

Võrduste ruututõstmisel ja summeerimisel saame valemi A jaoks:

$$A^2\left[(\omega_0^2 - \omega_s^2)^2 + 4\alpha^2\omega_s^2\right] = a_0^2 ;$$

$$A = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_s^2)^2 + 4\alpha^2\omega_s^2}} . \tag{78}$$

Kirjeldame seda seost graafiliselt joonisel 40.



Joon. 40

Graafikud on joonestatud kolme erineva sumbuvuse teguri arvväärtuse jaoks. Väikese sumbuvuse korral ***amplituud kasvab järsult, kui sundiva jõu sagedus (ω_s) läheneb süsteemi omavõnkesagedusele (ω_0 või ω).*** Sellist nähtust nimetatakse *resonantsiks*. Suure sumbuvuse korral on resonants nõrk (kõver lame) ja *resonantssagedus* (ω_r) erineb märgatavalt omavõnkesagedusest (ω_0 või ω). Valemist (78) võib leida amplituudi maksimumväärtusele vastava sageduse. Selleks tuleb leida $dA/d\omega_s$ ja võrrutada see nulliga. Nii saadakse valem resonantssageduse jaoks

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}. \tag{79}$$

On soovitatav teha seda iseseisvalt. Võrrelge ka tulemust (75)-ga.

[Katse vedrupendli resonantsi jälgimiseks eriseadmel.]

44. Sundvõnkumise faas

Sundvõnkumise algfaasi φ_0 leidmiseks jagame eespool kirjutatud süsteemi võrdused omavahel:

$$\frac{(\omega_0^2 - \omega_s^2)\sin\varphi_0 + 2\alpha\omega_s\cos\varphi_0}{(\omega_0^2 - \omega_s^2)\cos\varphi_0 - 2\alpha\omega_s\sin\varphi_0} = \tan\varphi_s.$$

Järgnevalt jagame murru lugeja ja nimetaja $(\omega_0^2 - \omega_s^2)\cos\varphi_0$-ga ja tähistame

$$\tan\varphi = \frac{2\alpha\omega_s}{\omega_0^2 - \omega_s^2}.$$

Siis saame

$$\frac{\tan\varphi_0 + \tan\varphi}{1 - \tan\varphi_0 \tan\varphi} = \tan\varphi_s$$

ehk

$$\tan(\varphi_0 + \varphi) = \tan\varphi_s .$$

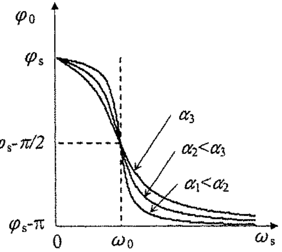
Järelikult,

$$\varphi_0 + \varphi = \varphi_s$$

ehk

$$\varphi_0 = \varphi_s - \varphi = \varphi_s - \arctan\frac{2\alpha\omega_s}{\omega_0^2 - \omega_s^2} . \qquad (80)$$

Kujutame saadud sõltuvust graafiliselt joonisel 41.



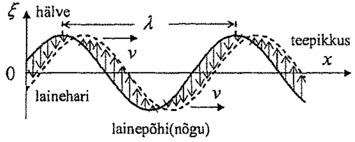
Joon. 41

Sundvõnkumine (φ_0) jääb alati sundivast jõust (φ_s) faasis maha ($\varphi_0 < \varphi_s$, arctan vahemikus 0 kuni π). Resonantsi puhul on mahajäämus peaaegu 90° ehk $\pi/2$ rad. Ringsageduse ω_s edasisel kasvamisel mahajäämus suureneb veelgi, lähenedes π-le, kui $\omega_s >> \omega_0$. Seega, resonantsi saavutamiseks on tarvis keha mõjutada jõuga, mis oleks hälbest faasis $\approx\pi/2$ võrra ees. Et ka keha kiirus on hälbest $\pi/2$ võrra ees (vt punkti 36), siis *on resonantsi puhul jõud samas faasis keha kiirusega*. Nii saavutabki jõu poolt arendatav võimsus - kiirus kord jõud - resonantsi puhul suurima väärtuse. Kehale kantakse energiat üle kõige intensiivsemalt. Amplituud kasvab märgatavalt isegi siis, kui mõjuv jõud ei olegi suur. ω_0 ja ω_s suure erinevuse puhul energia ülekanne on minimaalne. See läheneb 0-le, kui faasierinevus saab võrdseks π-ga - jõud on hälbega vastasfaasis.

§ 7. Lained

45. Võnkumise levimine keskkonnas. Rist- ja pikilainetus

Igasugune keskkond - tahke, vedel või gaasiline - on mingisugusel määral elastne. Kui selle mõni osake viia välja tasakaaluasendist ja lasta vabaks, siis hakkab osake võnkuma. Tekib sumbuv võnkumine, sest osake on seotud teiste samasuguste osakestega keskkonnas. Osa võnkeenergiast muundub soojuseks, osa kandub üle naaberosakestele. Need hakkavad samuti võnkuma. Nii tekib *võnkumise levimine ruumis*. Seda nähtust nimetataksegi *lainetuseks*. Keskkonna osa, milles võnkumine algselt tekitati, nimetatakse *laineallikaks*. Sõna "lainetus" tuleneb sellest, et seoses võnkumise levimisega on keskkonna osade hetkeline asetus laineline. Kõik keskkonnaosakesed ei võngu samas faasis. Laineallikast kaugemal asetsevatesse punktidesse jõuab võnkumine hiljem. Seal korratakse allika võnkumisi hilinemisega, mahajäämisega faasis, millest tekibki laineline liikumine (Joon. 42).



Joon. 42

Pidev joon kujutab keskkonnaosakeste hälbeid ühel ja samal ajahetkel. Hetk hiljem asuvad osakesed asendites, mis on näidatud punktiirjoonega. Vertikaalsed nooled näitavad osakeste nihkeid esitatud kahe ajamomendi vahel. Tekib laineharjade ja -põhjade liikumine võnkumise levimise suunas. Seejuures ei liigu keskkonnaosakesed selles (x-telje) suunas, vaid näiteks võnkumise levimissuunaga risti. Niisugust lainetust nimetatakse *ristlainetuseks*.

[Katse lainemasinal ja vedeliku pinnal (vannis) tekitatavate lainetega.]

Sama joonis 42 võib kujutada ka teist lainetüüpi, mida nimetatakse *pikilainetuseks*. Sellisel juhul osakesed võnguvad x-telje sihis, kuid nende hälvet võime ikkagi kujutada ξ-telje abil. See telg ei oma nüüd ruumitelje tähendust, on lihtsalt hälbe telg graafilisel joonisel. Sellises laines osakesed võnguvad laine levimise sihis, kuid lõppkokkuvõttes ei kandu ruumis edasi. Edasi kanduvad osakeste tihendused ja hõrendused, mis tekivad sellest, et kõik osakesed ei võngu ühes ja samas faasis.

[Katse pikilaine tekitamiseks lainemasinal.]

Põhimõtteliselt võib hälbe suund olla ka levimissuuna suhtes kaldu. Sellised lained saavad tekkida siiski ainult erilistes olukordades. Tavaliselt on laine kas piki- või ristlaine, või nende mingi kombinatsioon. Ristlained tekivad vedelate ja tahkete kehade pinnal, varrastes ja keeltes. Pikilainetus on aga nn *ruumlainetus*, levides aine sees. Näiteks hääl levib õhus pikilainetusena. Osakeste võnkumise faasierinevusest (mittesünkroonsusest) tekivad õhu hõrendused ja tihendused, mis levivad kiirusega $v \approx 340$ m/s. Kiirus oleneb keskkonna elastsusest ja tihedusest. Näiteks vees on levimiskiirus ≈ 1400 m/s.

Lainet iseloomustatakse *lainepikkusega* λ (Joon. 42). See on

laine levimise suunas võetud kahe lähima samas faasis võnkuva keskkonnaosakese vaheline kaugus.

Kui laine levib ühe lainepikkuse võrra, siis sooritab iga keskkonnaosake ühe täisvõnke. Selleks kulunud aeg, s.t võnkeperiood, on ühtlasi ka laine periood (T). Seega,

laine levib ühe lainepikkuse võrra oma perioodi jooksul.

Ühtlaste omadustega keskkonnas toimub levimine jääva kiirusega v. Seepärast võib kasutada ühtlase liikumise valemit $s = v \cdot t$:

$$\lambda = v \cdot T. \tag{81}$$

T on samal viisil seotud nurksagedusega ω ja sagedusega υ nagu võnkumise puhul:

$$T = \frac{1}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Kui leviv võnkumine on sinusoidaalne (harmooniline) ja keskkond on homogeenne, siis on ka laine sinusoidaalne (Joon. 42). Paneme tähele, et siin on abstsissteljeks ruumitelg x, mitte aeg, nagu see oli võnkumiste sinusoidi juures (Joon. 27). Sinusoidaalne laine on nii ajas kui ka ruumis sinusoidaalselt muutuv.

46. Sfääriline ja tasapinnaline laine

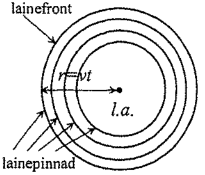
Olgu laineallika võnkumine harmooniline. Siis on selle hälve üles kirjutatav nii:

$$\xi_a = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Levigu see võnkumine homogeenses keskkonnas kiirusega v. Siis jõuab laine kaugusele r laineallikast ajaga r/v. Selle aja võrra hiljem hakkab seal toimuma samasugune võnkumine nagu laineallikalgi. Ainult amplituud on teine. Järelikult on hälve kaugusel r üles kirjutatav kujul

$$\xi = A \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) + \varphi_0\right].$$

Faas on iga sfäärilise pinna ulatuses konstantse väärtusega, mistõttu neid nimetatakse *samafaaspindadeks*. Kasutatakse ka nimetust *lainepind* (Joon. 43).



Joon. 43

Kõige esimest, mis tekkis kohe pärast võnkumise algust laineallikal ja liigub kõige ees, nimetatakse *lainefrondiks* (raadius $r = vt$). Seal on faasi väärtus pidevalt φ_0.

Kuidas muutub amplituud koos kaugenemisega laineallikast? Võnkumise energia, mis allikast väljub ja ruumis edasi kandub, jaotub järjest suuremale pinnale $S = 4\pi r^2$. Seega kasvab lainefrondil olevate võnkuvate osakeste arv võrdeliselt r^2-ga. Energia, mis tuleb ühe osakese kohta, kahaneb seepärast seaduspärasuse $\sim 1/r^2$ järgi. Punktis 38 leidsime, et võnkuva keha energia on võrdeline amplituudi ruuduga. Seepärast võib öelda, et amplituud kahaneb pöördvõrdeliselt kaugusega r. Järelikult,

$$\xi = \frac{A_1}{r} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) + \varphi_0\right]. \tag{82}$$

A_1 on pöördvõrdelise sõltuvuse võrdetegur, mis tähendab amplituudi väärtust ühikulisel kaugusel (r=1m) laineallikast.

Niiviisi saime *sfäärilise laine* hälbe avaldise, mis kehtib juhul, kui ei esine võnkumisenergia kadu levimisel. Tegelikult muundub mehaaniline energia osaliselt soojuseks osakeste vastastikuse hõõrdumise tõttu. Amplituud kahaneb kiiremini kui näitab valem (82). Kui kiiresti, oleneb kadude suurusest, s.t keskkonna omadustest (peamiselt elastsusest ja tihedusest). Esimeses lähenduses võib amplituudile kirjutada juurde samasuguse eksponentsiaalse teguri, mis esines sumbuvate võnkumiste juures, ainult antud juhul toimub „sumbumine" kaugusega laineallikast.

See nn *jooksva laine* hälbe avaldis kirjutatakse tavaliselt üles *lainearvu* abil

$$\kappa = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\upsilon}{v} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{83}$$

mis on

lainepikkuste arv, mis mahub teepikkusele 2π ühikut.

Lainearvu abil saame kirjutada

$$\xi = \frac{A_1}{r} \sin(\omega t - \kappa r + \varphi_0). \tag{82'}$$

$\kappa r = 2\pi \cdot r/\lambda$ mõõdab mahajäämust faasis, mis tuleneb võnkumise levimisest kaugusele r laineallikast - iga teele mahtuva lainepikkuse kohta 2π rad.

Väga suurel kaugusel laineallikast on lainefront ja -pinnad praktiliselt tasapinnad. Ka amplituud muutub seal väga vähe pöördvõrdelise olenevuse tõttu kaugusest. Seda võib pidada konstantseks. Seepärast võime laineallikast suurel kaugusel, mööda x-telge liikuva laine jaoks kirjutada

$$\xi = A_0 \sin(\omega t - \kappa x + \varphi_0). \tag{84}$$

Seejuures on lainefront ja lainepinnad x-teljega risti asuvad tasandid, mistõttu ka lainet nimetatakse *tasapinnaliseks*. Laine levimissuunaga ristuva tasandi ulatuses on selle kõigis punktides hälve ühesugune, samuti faas ja amplituud ning nende kaudu arvutatavad muud suurused (näiteks energia).

47. Lainete diferentsiaalvõrrand. Superpositsiooniprintsiip

Võrreldes võnkumisega, mis on ajas perioodiline nähtus, on laine perioodiline nii ajas kui ka ruumis, s.t hälve ξ muutub perioodiliselt nii t kui x muutudes. Periood ajas on $T = 2\pi / \omega$, ruumis aga $\lambda = 2\pi / \kappa$.

Võtame tasalaine avaldisest (84) kahekordse tuletise. Ühel juhul aja, teisel ruumikoordinaadi järgi:

$$t \text{ järgi:} \quad \ddot{\xi} = -\omega^2 \xi;$$

$$x \text{ järgi:} \quad \xi'' = -\kappa^2 \xi.$$

Seega peab kehtima võrdus

$$\frac{1}{\omega^2}\ddot{\xi} = \frac{1}{\kappa^2}\xi'' \quad \text{ehk} \quad \xi'' - \frac{\kappa^2}{\omega^2}\ddot{\xi} = 0.$$

ω ja κ jagatis on valemi (83) järgi võrdne laine kiirusega v. Nii saame kirjutada veelgi lihtsamalt

$$\xi'' - \frac{1}{v^2}\ddot{\xi} = 0. \tag{85}$$

See on *lainete diferentsiaalvõrrand*, mida homogeenses keskkonnas leviva laine hälve alati rahuldab. Üldisemal juhul, kui laine ei levi mitte täpselt x-telje sihis, saadakse ξ'' asemele kõigi koordinaatide järgi võetud teist järku osatuletiste summa

$$\Delta\xi = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}$$

ja diferentsiaalvõrrand omandab kuju

$$\Delta\xi - \frac{1}{v^2}\ddot{\xi} = 0. \tag{85'}$$

Antud juhul Δ ei tähista suuruse muutust, nagu varem, vaid on nn *Laplace'i operaator,* mis tähendab osatuletiste leidmist ja vastavaid tehteid nendega.

Võrrand (85') on lineaarne ξ suhtes. Sellest tuleneb, et kui on leitud kaks lahendit ξ_1 ja ξ_2, siis lahendiks on ka nende mingi lineaarne kombinatsioon $a\xi_1 + b\xi_2$. Seda üldistades võib väita, et kui lahenditeks on mingi arv n laineid

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots \xi_n,$$

siis on lahendiks ka nende summa (kordajad a, b, ... võib arvata ξ-de sisse)

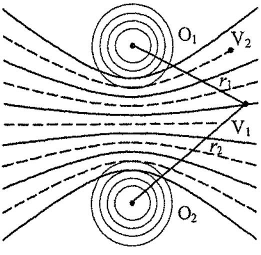
$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_n .$$

Praktikas tähendab see seda, et valem (85') kehtib ka sinusoidaalsest keerulisemate lainete puhul, nende mingi summa jaoks. Ainus piirav tingimus on, et summaarse laine amplituud ei või ületada keskkonna elastsuse piiri. Kui hälve ei ole enam võrdeline seda tekitava jõuga, ei kehti Hooke'i seadus, siis ei saa eespool kirjeldatud diferentsiaalvõrrandit kehtivaks pidada. Sel juhul öeldakse, et ei kehti lainete *superpositsiooniprintsiip* (lihtsa liitumise printsiip). Printsiibi kehtimisel võib igasuguse laine lahutada sinusoidaalseteks laineteks ja vastupidi - moodustada nendest summeerimise teel uusi laineid, mis kõik alluvad samale võrrandile (85'). Füüsikaliselt tähendab printsiibi kehtivus veel seda, et lained ei mõjuta üksteist nende levimisel samas ruumiosas. Üks laine võib teisest läbi minna nii, et ei tekita teineteises mitte mingisuguseid muutusi. Koosmõju alas lainete hälbed liituvad, tekitades mingi keerulisema lainepildi, kuid teineteisest lahkudes jätkavad liikumist nii, nagu ei olekski nende teele teisi laineid sattunud. Selline asjaolu näitab ka sinusoidaalsete lainete suurt tähtsust. Väga paljusid keerulisemaid laineid võib lahutada sinusoidaalseteks ja vastupidi - sinusoidaalsetest võib koostada keerulisemaid laineid.

Superpositsiooniprintsiip kehtib ka väljaspool mehaanikat. Ainult tänu sellele on näiteks võimalik suure hulga raadiosignaalide üksteist mittesegav levimine "eetris".

48. Lainete interferents

Olgu keskkonnas kaks võrdse sagedusega laineallikat (Joon. 44).



Joon. 44

Eraldi võetuna põhjustavad need mingis punktis V_1 järgmisi hälbeid:

$$\begin{cases} \xi_1 = A_1 \sin(\omega t - \kappa r_1 + \varphi_{01}); \\ \xi_2 = A_2 \sin(\omega t - \kappa r_2 + \varphi_{02}). \end{cases}$$

Olgu hälbed samasihilised (joonise tasandiga risti). Siis saame summaarse hälbe leidmist vaadelda kui samas sihis toimuvate võnkumiste liitmist, mida vaatlesime punktis 39. Seal leidsime, et liitumise tulemus oleneb faasierinevusest. Antud juhul võrdub see avaldisega

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \kappa(r_1 - r_2) + \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

ja see ei olene ajast. Põhjuseks on sageduste võrdsus. Kui punktis V_1 on faasivahe $2n\pi$, siis seal toimub alati võnkumiste maksimaalne tugevnemine ja lainetus suurima amplituudiga. Mingis teises punktis V_2 omab $r_1 - r_2$ teist väärtust, mis annab faasivaheks $(2n+1)\pi$. Seal võnkumised kustutavad teineteist maksimaalselt ja lainetus toimub minimaalse amplituudiga. Ühesugune kustutamine või tugevdamine esineb punktides, kus vahe $r_1 - r_2$ omab ühte ja sama väärtust. Tingimus $r_1 - r_2 = const$ määrab *hüperbooli* meie joonise tasandil, ruumis aga *hüperboloidse pinna*, mille fookusteks on laineallikad O_1 ja O_2. Ühe hüperbooli ulatuses toimub lainetuse tugevnemine (pidev joon), teise ulatuses nõrgenemine (kriipsjoon). Seejuures on nähtus ajas püsiv. Tekkinud pilti nimetatakse *interferentsipildiks* ja nähtust *interferentsiks*. Lainete maksimaalse tugevnemise kohti nimetatakse *interferentsimaksimumideks*. Seal $A = A_1 + A_2$. Maksimaalse nõrgenemise kohti nimetatakse *interferentsimiinimumideks*, kus

$A = A_1 - A_2$. Kui $A_1 = A_2$, siis on $A = 0$ miinimumides ja $A = 2A_1$ maksimumides. Arvestades seda, et laine energia on võrdeline amplituudi ruuduga, on viimasel juhul see miinimumides kahanenud 0-ni ja maksimumides kasvanud 4-kordseks, võrreldes ühe laine energiaga.

Interferents on lainete liitumisel tekkiv püsiv energia ümberpaiknemine ruumis, mis tuleneb lainete vastastikusest üksteise tugevdamisest ühtedes punktides ja nõrgendamisest teistes.

Interferentsiks ei nimetata iga lainete liitumisnähtust. Meelevaldsel liitumisel ei teki maksimum- ja miinimumalasid. Selleks peab faasierinevus olema ajas muutumatu. Ajas muutumatu on see ainult siis, kui lainete sagedused on täpselt ühesuurused. Ainult siis taanduvad aega sisaldavad liikmed (ωt) faasivahe arvutamisel välja.

Ajas konstantse faasivahega laineid nimetatakse koherentseteks.

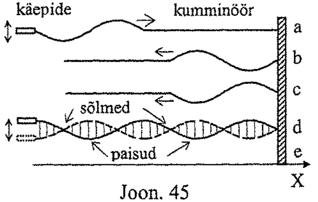
Sõna tuleneb vastavast ladinakeelsest sõnast, mis tähendab seostatust, kokkukuuluvust. Lained on niivõrd üksteisega seotud, et nende faasivahe on ajas konstantne. Kui ühes toimub mingi muutus faasiga, siis samasugune muutus esineb ka teise juures. Ainult *koherentsed lained* (samamoodi nimetatakse ka vastavaid laineallikaid) on suutelised tekitama interferentsi.

[Lainete interferentsi jälgimine vee pinnal vannis.]

49. Seisvad lained

Siin vaatleme lähemalt kahe sinusoidaalse laine liitumist, mis liiguvad teineteisele vastu. Neid saadakse näiteks laine peegeldumisel mingilt tõkkelt (Joon. 45).

Peegeldumisel esineb kaks äärmist juhtu b ja c. Juhul b faasimuutust ei toimu, juhul c võrdub see π-ga. Öeldakse, et faas on muutunud vastupidiseks. Esimene juhtum leiab aset näiteks siis, kui kumminööri ots on päris vaba või seotud mõne temast vähem jäigema pika nööriga toe külge ja peegeldumine toimub kumminööri otsalt. Teise juhtumiga on tegemist kumminööri jäigal sidumisel tugeva seina külge. Seinale langeva ja sealt peegelduva laine liitumisel tekib nn *seisev laine* (joonise osa d). Sellel on näha *paisusid* ja *sõlmi*. Sõlmedes on võnkumine kustunud, sealsed nööriosad seisavad paigal. Paisudes toimub võnkumine maksimaalse amplituudiga.



Joon. 45

Samas ei esine näivat liikumist piki nööri, nagu see on täheldatav jooksvate lainete juures [vt valemit (82) ja (84)]. Seepärast nimetataksegi sellist lainet seisvaks.

Juhul b tekib nööri otsa juures pais, juhul c - sõlm. Viimane juhtum ongi kujutatud joonise osal d.

[Katse seisva laine tekitamiseks kumminööris ja saelehes.]

Olgu X-telje suunas (Joon. 45, e) leviva ehk seinale langeva laine hälve

$$\xi_l = A\sin(\omega t - \kappa x + \varphi_0)\,.$$

Peegelduv laine liigub X-telje negatiivses suunas. Sellele vastava hälbe avaldise saame, kui teeme asenduse $x \to -x$. Oletame ka, et peegeldumisel laine amplituud ei muutu, faas aga muutub π võrra (juht c). Siis saame peegelduva laine hälbe jaoks kirjutada

$$\xi_p = A\sin(\omega t + \kappa x + \varphi_0 + \pi)\,.$$

Hälvete summa annab seisva laine hälbe

$$\xi = \xi_p + \xi_l = A[\sin(\omega t + \kappa x + \varphi_0 + \pi) + \sin(\omega t - \kappa x + \varphi_0)]\,.$$

Kasutame trigonomeetria valemit

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,.$$

Saame

$$\begin{aligned}\xi &= 2A\sin(\omega t + \varphi_0 + \pi/2)\cdot\cos(\kappa x + \pi/2) = \\ &= -2A\sin\kappa x\cdot\sin(\omega t + \varphi_0 + \pi/2)\,.\end{aligned}$$

Amplituud (viimase siinuse ees olev kordaja) muutub sinusoidaalselt teepikkusega x. Sõlmed tekivad kohtades, kus

$$\sin \kappa x = 0, \quad \text{s.t} \quad \kappa x = 2n \cdot \pi / 2; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{86}$$

paisud aga seal, kus

$$\sin \kappa x = \pm 1, \quad \text{s.t} \quad \kappa x = (2n+1) \cdot \pi / 2. \tag{87}$$

Seega on (86) antud juhul interferentsimiinimumi ja (87) - interferentsimaksimumi tingimuseks. Esimesel pilgul näib seisva laine faas olevat konstantne, s.t koordinaadist x mitteolenev. Kõik punktid justkui võnguksid sünkroonselt. Seepärast ei tekigi lainelist liikumist ei vasakule ega paremale. Tegelikult on faas konstantne ainult naabersõlmede vahelises alas. $\sin \kappa x$, s.t amplituud muudab märki sõlmest üleminekul. Negatiivset amplituudi tavaliselt ei kasutata. Ettetulev miinusmärk kantakse üle faasi:

$$-\sin(\omega t + \varphi_0 + \pi / 2) = \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi / 2 + \pi).$$

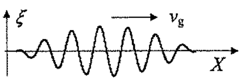
Seega muutub faas sõlmest üleminekul vastupidiseks. Naabervahes toimuvad võnkumised vastasfaasis.

[Katse seisva laine jälgimiseks lainemasinal.]

Seisva laine paisude või sõlmede vahekauguste mõõtmisega saab määrata κ, ω, v või λ. Nende kaudu võib leida mitmeid keskkonda iseloomustavaid suurusi. Seisvate lainete rakendusala on väga lai. Eriti suur tähtsus on neil *akustikas*. Ka igas muusikariistas tekib seisva laine seisund, kui see heliseb.

50. Lainepakett. Faasi- ja grupikiirus

Seni käsitlesime lõpmatu ulatusega laineid. Sellised tekivad pidevalt kiirgava laineallika puhul. Praktikas on kiirgusprotsess alati lõpliku kestusega. Tekivad alguse ja lõpuga lained (Joon. 46).



Joon. 46

Sellise laine sagedus ei ole kogu laine ulatuses konstantne. Lainet ei saa iseloomustada ühe täpse sagedusega. Kuid seda võib vaadelda koosnevana teatud hulgast sinusoidaalsetest lainetest erinevate amplituudide, sageduste ja algfaasidega. Niisugune asjaolu vastab superpositsiooniprintsiibile. Peaaegu alati on võimalik leida ideaalsete lainete summat, mis interferentsi tulemusena annaks reaalse laine. Niisugune lainete grupp kannabki *lainepaketi* nime. Sinusoidaalne on ideaalne laine. Reaalset saab kirjeldada nende paketina.

Tavaliselt levivad eri sagedusega lained keskkonnas erineva kiirusega. Niisugust nähtust nimetatakse *dispersiooniks*. Seepärast on ka lainepaketti kuuluvatel lainetel igaühel üldiselt isesugune kiirus, s.t v on mingi funktsioon sagedusest $v(\omega)$. See on nn *faasikiirus*, sest määrab samafaasiväärtuse edasikandumise kiiruse. Kontrollime öeldut. Võtame mingi faasi väärtuse

$$\omega t - \kappa x + \varphi_0 = const$$

ja nõuame, et see ajas ei muutuks. Siis peab selle tuletis aja järgi olema 0:

$$\omega - \kappa \frac{dx}{dt} = 0; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\kappa} = v.$$

Saime tõepoolest valemiga (83) määratud laine kiiruse. Seega punkt laines, mis omab ühte ja sama faasi väärtust, liigub kiirusega v, näiteks lainehari joonisel 46.

Oletame nüüd, et $\omega / \kappa = v(\omega)$, s.t faasikiirus oleneb sagedusest. Missuguse kiirusega liigub siis lainepakett - summaarne laine? Selle liikumist võime määrata mingi ühe koha või punkti põhjal paketis. Näiteks koha järgi, kus amplituud on maksimaalne. Maksimumkoht tekib seal, kus kõigil osalainetel on alati ühesugune faas. See annab tingimuse, et faas ei oleneks sagedusest. Seome eelmise kiiruse määramise tingimuse veel selle uue tingimusega. Võtame viimasest faasi tuletisest ka tuletise sageduse järgi ja nõuame, et see jääks ikkagi võrdseks nulliga

$$1 - \frac{d\kappa}{d\omega}\frac{dx}{dt} = 0.$$

Koordinaadi x tuletis annab nüüd mõlemat esitatud tingimust rahuldava punkti liikumise kiiruse. See ongi paketi liikumise kiirus

$$v_g = \frac{d\omega}{d\kappa}, \qquad (88)$$

mida nimetatakse tavaliselt laine *grupikiiruseks*.

Kui $\kappa = \omega / v$ [valem (83)] ja faasikiirus v ei olene sagedusest ω, siis $d\kappa / d\omega = 1/v$ ja $v_g = v$. S.t kui dispersioon puudub, siis grupikiirus on võrdne faasikiirusega. Kõik lained paketis liiguvad ühesuguse kiirusega, mistõttu ka kogu grupp liigub sama kiirusega.

Grupi- ja faasikiiruse erinevust võib ette kujutada järgmiselt. Joonisel 46 esitatud lainejada (pakett) liigub kiirusega v_g. Kui faasikiirus v on sellest suurem, siis liiguvad laine põhjad ja harjad paketi sees paketist kiiremini. Laineharju ja -põhjasid justkui tekib paketi tagumises otsas juurde ja esiotsas nad kaovad. Võib olla ka vastupidi, et faasikiirus on väiksem grupikiirusest. Siis liigub pakett laineharjadest-põhjadest kiiremini. Viimaseid tekib paketi esiotsas juurde ja tagumises nad kaovad. Kõik oleneb sellest, kas v kahaneb või kasvab sageduse kasvades.

[Katse ostsillograafi ekraanil 2 liituva sageduse abil lainepaketi modelleerimise ja grupi- ning faasikiiruse erinevuse jälgimise kohta.]

Grupikiirus annab ka laine energia edasikandumise kiiruse. Näiteks valguse grupikiirus on see, mis ei saa ületada väärtust c. Faasikiirus võib sellest ka suurem olla. Grupp on reaalne laine, sinusoidaalne aga ideaalne, mille kiirus (faasikiirus) võib olla meelevaldne. Täpselt sinusoidaalne laine energiat ei kanna. Selliseid tegelikkuses ei esine.

51. Statistiline ja termodünaamiline meetod makroskoopiliste nähtuste kirjeldamisel

Makroskoopiliseks nimetatakse nähtust, milles osaleb väga suur arv mikroosakesi - aatomeid, molekule, elektrone, ioone jne. See arv on ettekujutamatult suur. Näiteks 1 cm^3 õhus on normaaltingimustel $2{,}7 \cdot 10^{19}$ molekuli. Kas keegi suudab niisugust arvu ette kujutada? Selleks tuleb korraldada nende mingisugune loendamine. Näiteks kui võtta sellest 1 cm^3 suurusest õhuampullist välja igas sekundis 100 miljonit molekuli, siis saab see tühjaks alles ligikaudu 9000 aasta pärast! Nii suure hulga osakeste liikumise kirjeldamisest mehaanika võtetega ei tule midagi välja. Peab kasutama uusi, mehaanikalistest täiesti erinevaid meetodeid. Ajalooliselt on välja kujunenud kaks teineteist täiendavat viisi - *termodünaamiline* ja *statistiline* või *molekulaarkineetiline*.

Termodünaamika ehk üldine soojusõpetus on aksiomaatiline - see ehitatakse üles teatud *põhiprintsiipidele* või *alustele* ehk *põhiseadustele*. Need saadakse katseliste faktide üldistamise tulemusena. Siin aine siseehitusest praktiliselt ei räägita. Sama kehtib soojuse füüsikalise olemuse kohta. Soojus on mingi ainesisene liikumine, kuid missugune, seda ei konkretiseerita. Termodünaamika põhineb kolmel põhiprintsiibil. Kahe esimesega tutvutakse käesolevas kursuses.

Seevastu molekulaarfüüsika kasutab statistilist meetodit. See lähtub aine ehituse molekulaarkineetilisest teooriast. Soojus on siin aatomite-molekulide korrapäratu liikumine. Kõik makroskoopiliste kehade omadused saadakse mitmesuguste keskmistamiste teel. Keskmistatakse üle suure molekulide arvu kehas ja saadakse nn *statistilised keskmised*. Lähteandmeteks on molekulide konkreetsed omadused. Keskmistatud väärtused on seda täpsemad ja tõele lähedasemad, mida rohkem on osakesi süsteemis.

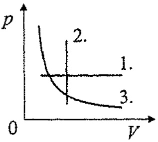
Seega on molekulaarfüüsika vähem üldine kui termodünaamika. Termodünaamikat võib rakendada igasuguse suurest arvust osakestest koosneva süsteemi jaoks. Osakeste konkreetsed omadused ei ole tähtsad. Osakeste suur arv annab süsteemile erilised omadused.

Molekulaarfüüsika täiendab termodünaamikat, võimaldab põhjendada tema printsiipe ja seletada mitmeid nähtusi, mida termodünaamika ei suuda teha. Siinkohal esitame ühe näite. Termodünaamiline süsteem, olles jäetud omaette, liigub alati mingi tasakaalu poole. Termodünaamika järgi jääks ta sellesse seisundisse lõpmata kauaks, kui vaid süsteemi väljastpoolt ei mõjutata. Seevastu molekulaarfüüsika ennustab juhuslike (iseeneslike) väljahüpete võimalikkust tasakaaluolekust. Niisuguseid nähtusi nimetatakse *fluktuatsioonideks*. Nii ei ole näiteks võimatu, et kõik auditooriumi õhu molekulid liiguksid järsku auditooriumi ühe nurga poole ja jätaksid meid õhupuuduse kätte, ainult et seesuguse sündmuse tõenäosus on ülimalt väike. Fluktuatsioonide tõenäosus on seda väiksem, mida rohkem on süsteemis osakesi. Ühe teooria järgi on isegi meie Universumi tekkimine üks fluktuatsioon mateeria teatud tasakaaluseisundist.

Termodünaamikas iseloomustatakse süsteemi nn *termodünaamiliste parameetritega*. Nendeks on näiteks rõhk, ruumala, temperatuur, siseenergia, entroopia jne. Parameetrid määravad *süsteemi seisundi*, analoogiliselt sellega, kuidas mehaanikas seda teevad kehade koordinaadid ja kiirused. Termodünaamilised parameetrid on *makroskoopilised suurused*. Need saadakse suure arvu osakestega süsteemis vastavate *mikroskoopiliste parameetrite* keskmistamise teel. Üksikute molekulide või väikese molekulide arvuga süsteemi jaoks ei ole termodünaamilistel parameetritel mõtet. Näiteks ei saa rääkida mõne molekuli puhul temperatuurist ja rõhust.

Süsteemi seisund muutub, kui muutuvad selle termodünaamilised parameetrid. Seisundi muutumist nimetatakse *protsessiks*. Seisund või protsess võib olla *tasakaaluline* ja *mittetasakaaluline*. Tasakaaluline on seisund, milles süsteem võib viibida lõpmatult kaua, kui vaid välistingimused seda lubavad. Ainult tasakaalulises seisundis on parameetrid täpselt määratavad. Järsu välismõjutuse tõttu läheb süsteem üle mittetasakaalulisse olekusse, milles parameetritel ei ole üldjuhul täpseid väärtusi. Kui aga välismõjutus on suhteliselt aeglane, siis muutuvad aeglaselt ka termodünaamilised parameetrid ja igal hetkel võib rääkida nende arvväärtustest. Seepärast saab sellist protsessi vaadelda kui üksikute tasakaaluliste seisundite jada. See ongi tasakaaluline protsess.

Tasakaalulises seisundis või protsessis valitseb parameetrite vahel kindel seos, mida nimetatakse vastavalt *oleku* ja *protsessi võrrandiks*. Üheks olekuvõrrandi näiteks on *ideaalse gaasi* oleku võrrand



Joon. 47

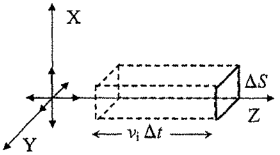
$$pV = \frac{m}{\mu} R\,T. \qquad (89)$$

Tasakaalulisi protsesse saab kirjeldada graafiliselt (Joon. 47). Iga graafiku punkt vastab mingile ühele tasakaalulisele olekule kindla rõhu p, ruumala V ja temperatuuriga T.

§ 8. Molekulaarkineetiline teooria ja termodünaamika I alus

52. Molekulaarkineetilise teooria põhivõrrand

Selle võrrandiga määratakse rõhk gaasis. Gaasi molekulid liiguvad kõikvõimalike kiirustega. Kui gaas on suletud paigalseisvasse anumasse, siis on kõik kiiruste suunad samaväärselt esindatud. Teisiti ei oleks gaasi liikumishulk 0. Gaasis peab molekule liikuma ühevõrra nii vasakule kui ka paremale, nii üles kui ka alla jne. Üksteisest sõltumatuid sihte on ruumis 3 ja suundi 6 (Joon. 48).



Joon. 48

Lihtsuse mõttes oletame, et molekulid liiguvadki ainult näidatud 6 suunas. Siis on iga koordinaattelje suunas liikuvaid 1/6 koguarvust. Olgu n molekulide arv ruumiühikus. Neist osal, arvuga n_i, on kiirus v_i ($i=1, 2, 3, \ldots\infty$, lõpmatult palju erinevaid kiirusi). Järelikult on $n = \sum_{i=1}^{\infty} n_i$.

Z-telje suunas liigub siis igas ruumiühikus $n_i/6$ molekuli kiirusega v_i. Arvutame seinaelemendile ΔS aja Δt jooksul langevate molekulide arvu. Need on molekulid, mis asuvad seinaelemendile ehitatud risttahukas pikkusega $v_i \Delta t$ ja liiguvad Z-telje suunas:

$$\frac{n_i}{6} \cdot v_i \, \Delta t \cdot \Delta S .$$

Molekulid põrkuvad seinalt tagasi ja annavad seinale impulsi $2mv_i$, kus m on molekuli mass (eeldame, et kõik molekulid on ühesuguse massiga). Üldimpulss on siis

$$\frac{n_i}{6} v_i \, \Delta t \, \Delta S \cdot 2mv_i .$$

Ajaühikus üleantud impulss ehk seinale mõjuv jõud [vt valemit (16)] on

$$\frac{n_i}{3} mv_i^2 \Delta S .$$

Jagades selle veel pinnatüki pindalaga ΔS, saame pinnaühikule mõjuva jõu ehk rõhu

$$p_i = \frac{1}{3} mn_i v_i^2 .$$

Kuid see on ainult ühe kiirusega v_i liikuvate osakeste tekitatud rõhk. Kogurõhu saamiseks tuleb summeerida üle kõigi kiiruste:

$$p = \frac{1}{3} m \sum_{i=1}^{\infty} n_i v_i^2 = \frac{1}{3} mn \frac{\sum_{i=1}^{\infty} n_i v_i^2}{n} .$$

Saadud murd tähendab *kiiruse ruudu keskväärtuse* arvutamise eeskirja. Tähistame selle järgmiselt:

$$\overline{v^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} n_i v_i^2 . \qquad (90)$$

Siin loetakse üles kõik molekulid (n_i), mis liiguvad ühe või teise kiirusega (v_i), summeeritakse nende kiiruste ruudud ja tulemus jagatakse molekulide üldarvuga. See on aritmeetilise keskmise arvutamine. Korrutades kiiruse ruudu keskväärtust molekuli massi poole väärtusega $(m/2)$, saame molekulide translatoorse liikumise *keskmise kineetilise energia*

$$\overline{w} = \frac{m\overline{v^2}}{2}. \tag{91}$$

Selle abil võib lõpuks kirjutada valemi

$$p = \frac{2}{3} n \overline{w}, \tag{92}$$

mis ongi *molekulaarkineetilise teooria põhivõrrand.*

Gaasi rõhk on võrdeline molekulide keskmise kineetilise energiaga ja nende arvuga ruumalaühikus.

Tulemus on üsna täpne, kuigi eeldused olid olukorda äärmiselt lihtsustavad. Seepärast on esitatu ka sobiv näide statistilise meetodi võimekuse kohta.

53. Molekulide keskmise kineetilise energia ja gaasi absoluutse temperatuuri vaheline seos

See seos on tuletatav olekuvõrrandi (89) ja põhivõrrandi (92) abil. Neist saame

$$\frac{2}{3} n \overline{w} \cdot V = NRT,$$

milles oleme tähistanud N-ga gaasi moolide arvu m/μ. nV on siin molekulide koguarv gaasis. Ühes moolis on neid siis

$$n_A = \frac{nV}{N} = 6{,}02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\mathrm{mol}}, \tag{93}$$

mis on tuntud universaalkonstant *Avogadro arv* [itaalia füüsik (1776-1856)]. Nii saame seose

$$\frac{2}{3} n_A \overline{w} = RT.$$

Edasi kasutame gaasi universaalkonstandi ja Avogadro arvu jagatist

$$k = \frac{R}{n_A} = \frac{8{,}31 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K \cdot mol}}}{6{,}02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\mathrm{mol}}} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}, \tag{94}$$

mida nimetatakse *Boltzmanni konstandiks* [austria füüsik (1844-1906)]. Punktis 55 leiame, et universaalkonstant R on ühe mooli gaasi paisumise töö selle soojendamisel 1 K võrra jääva rõhu juures. Seda molekulide arvuga moolis jagades saame töö, mida samas protsessis teeb keskmiselt üksainus molekul. See ongi Boltzmanni konstandi tähendus. Nii võime lõpuks kirjutada

$$\overline{w} = \frac{3}{2} kT. \qquad (95)$$

Molekulide keskmine kineetiline energia on võrdeline gaasi absoluutse temperatuuriga.

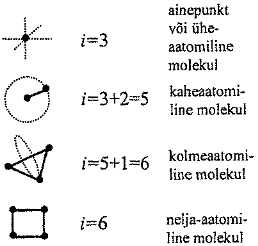
(95) on molekulide translatoorse liikumise kineetiline energia, sest rõhu valemi (92) tuletamisel arvestasime ainult seda liikumist. Molekulide pöörlev liikumine rõhku ei põhjusta, energiat aga omab küll. Seepärast on saadud tulemust tarvis üldistada. Osutub, et ka pöörlemise energia oleneb absoluutsest temperatuurist. Peale selle, kui molekul koosneb mitmest aatomist, siis võib sellel tekkida ka võnkuv liikumine. Katsed näitavad, et kõigi nende liikumiste keskmised energiad on võrdelised absoluutse temperatuuriga. Valemi (95) üldistamiseni jõuame sealse kordaja 3 tähenduse kaudu. See on translatoorsel liikumisel esinevate sõltumatute liikumiste arv (kolme ruumitelje sihis), mida nimetatakse ka *vabadusastmete arvuks*. Võrduse (95) järgi tuleb iga vabadusastme kohta keskmiselt energiat ½ kT. Osutub, et ka teiste sõltumatute liikumiste energia on keskmiselt võrdne ½ kT-ga. Üldenergia arvutamisel tuleb arvestada ka pöörleva ja võnkliikumise vabadusastmeid ja lisada 3-le nende arv. Kui öeldu õigeks osutub, siis kehtib nn *energia vabadusastmete vahel võrdjaotatuse printsiip*. Seega võime üldjuhul (95) asemele kirjutada valemi

$$\overline{w} = \frac{i}{2} kT, \qquad (95')$$

kus i on molekuli vabadusastmete arv.

Lisaks sõltumatute liikumiste arvu järgi määramisele võib kasutada ka järgmist vabadusastmete arvu määratlust.

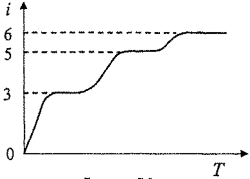
Vabadusastmete arvuks nimetatakse sõltumatute koordinaatide arvu, mis on vajalik süsteemi täpse asendi määramiseks ruumis (Joon. 49).



Joon. 49

Joonisel esitatu vastab jäikadele molekulidele. Temperatuuri kasvades võib molekulide põrkumisel tekkida molekulisisene aatomite võnkumine vastastikuse sideme sihis. Näiteks kaheaatomilisel molekulil lisandub üks võnkumise vabadusaste. Kuid võnkumise puhul (vt punkti 38) muutuvad ühesuguselt nii kineetiline kui ka potentsiaalne energia. Mõlemad omavad sama keskmist väärtust. Seepärast saab valemiga (95') määrata ka molekuli kogu mehaanilist energiat, kui võnkliikumise vabadusastmete arvu arvestada kahekordselt.

Tegelikult on i täisarvuline ainult kitsastes temperatuurivahemikes, sest vabalt valitud temperatuuri juures ei ole siiski kõik liikumised võrdväärselt esindatud. Kõigist võtab molekul osa ainult kõrgel temperatuuril. Temperatuuri alanedes liikumiste energiad ei kahane ühesuguselt. Mõni neist võib juba varakult kaduda. Kõigepealt lakkab võnkliikumine. Kokkupõrgetel saadav energia ei ole enam küllaldane võnkumiste tekitamiseks. Öeldakse, et võnkliikumise *vabadusastmed külmuvad kinni*. Madalamal temperatuuril ei tule neid arvestada. Edasisel temperatuuri alanemisel kaob ka pöörlev liikumine. Kõige viimasena lakkab translatoorne. Kui aine vahepeal tahkestus, siis selleks translatoorseks liikumiseks on aatomite või molekulide võnkumine tahke keha ruumvõre sõlmedes. Absoluutse 0 temperatuuri juures (ligikaudu -273°C) on kõik vabadusastmed kinni külmunud. Seega i valemis (95') ei ole üldjuhul konstantne suurus. See oleneb samuti temperatuurist. Veel tuleb arvestada, et i muutumine ei tähenda ka ühe täisarvu asendumist teisega. See peab olema keskmine kõigi gaasi molekulide jaoks. Temperatuuri tõustes ei hakka mitte kõik molekulid järsku pöörlema ja hiljem võnkuma. Liikumisest osavõtvate arv kasvab temperatuuriga pidevalt. Seepärast suureneb ka i pidevalt, omades täisarvule lähedasi väärtusi ainult teatud temperatuurivahemikes, kus kõigi molekulide vastavat liiki liikumised on ühesugusel määral esindatud (Joon. 50).



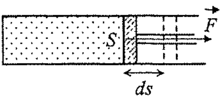
Joon. 50

Joonisel esitatu vastab kaheaatomilisele gaasile. Tasastel platoodel on i täisarv ja molekuli energia oleneb T-st täpselt võrdeliselt [vt valemit (95')]. Platoode vahelisel alal aga oleneb ka i temperatuurist ja keskmise energia sõltuvus temperatuurist on keerulisem.

54. Gaasi töö. Soojushulk ja siseenergia

Asetame gaasi anumasse, milles see võib paisuda (Joon. 51). Gaas avaldab kolvile jõudu, mis on arvutatav rõhu ja pindala korrutise kaudu

$$F = p \cdot S .$$



Joon. 51

Kui kolb nihkub elementaarnihke ds võrra, siis gaasi rõhk ja jõud praktiliselt ei muutu. Töö saame arvutada lihtsalt Fds. See on elementaartöö, mille tähistame δA-ga

$$\delta A = pS \cdot ds = p \cdot dV . \qquad (96)$$

dV on gaasi ruumala muutus kolvi elementaarnihkel. Kogu töö gaasi paisumisel ruumalalt V_1 ruumalani V_2 on

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV . \qquad (96')$$

Eest ära liikuvalt kolvilt tagasi põrkudes molekulid ei oma enam sama kiirust, millega nad kolvile langesid. Nende keskmine kineetiline energia on vähenenud, gaasi temperatuur on alanenud. Öeldakse, et gaas teeb tööd oma *siseenergia* arvel. Arvutatud töö mõõdabki siseenergia muutu.

Mis tahes keha siseenergiaks nimetatakse tema molekulide korrapäratu liikumise kineetilise energia, vastastikuse mõju potentsiaalse energia ja molekulisisese energia summat.
Selle energia hulka ei kuulu korrapärase liikumise energia, näiteks gaasi kui terviku liikumisel koos anumaga. Sama võib öelda gaasi potentsiaalse energia kohta välises jõuväljas (näiteks gravitatsiooniväljas).

Valemist (96) selgub, et gaas teeb tööd ainult siis, kui ruumala muutub. Töö on positiivne ruumala kasvamisel ja negatiivne selle kahanemisel. Negatiivne töö tähendab siseenergia kasvu. See esineb gaasi kokkusurumisel. Välisjõudude töö on siis positiivne. Seda tehakse mingi välise energiaallika kulul. Energia kandub sealt üle gaasile.

Gaasi siseenergia võib muutuda ka ilma tööd tegemata – *soojendamisel* või *jahutamisel*. Gaas viiakse kokkupuutesse temast kõrgemal või madalamal temperatuuril oleva kehaga. Kokkupuutepinnal esinevate molekulide kokkupõrgete tulemusena hakkavad külmema keha molekulid liikuma kiiremini ja soojema omad aeglasemalt. See tähendab energia üleminekut soojemalt kehalt külmemale. Vastavat ülekantavat energiakogust nimetatakse *soojuseks*.

Lisaks kirjeldatud viisidele võib energia ühelt kehalt teisele üle kanduda ka *soojuskiirguse* näol. Seda juhtu vaadeldakse kiirgusfüüsika osas, kaasaegse füüsika kursuses.

Tähistame soojushulka ja siseenergiat vastavalt tähega Q ja U. Kui siseenergia muutub nii soojendamise-jahutamise kui ka töö tulemusena, siis on siseenergia muutus võrdne gaasile antud soojushulga ja gaasi poolt sooritatud töö vahega

$$U_2 - U_1 = Q - A. \qquad (97)$$

See ongi *termodünaamika I põhiseadus*, *alus* või *printsiip*, mis ei tähenda midagi muud kui *energia jäävuse seadust*. Mõnikord kirjutatakse siin töö plussmärgiga. Siis tähendab A välisjõudude tööd, mida need jõud sooritavad gaasi ruumala muutes.

Tihti on tarvis vaadelda elementaarseid protsesse, kus siseenergia muutub lõpmatult väikese suuruse võrra. Sel juhul kirjutatakse termodünaamika I alus üles kujul

$$dU = \delta Q - \delta A. \qquad (97')$$

Soojushulga ja töö ees ei saa kasutada diferentsiaali tähist. dA tähendaks A muutust. Kuid gaasi ühele seisundile või olekule ei saa omistada mingit töö väärtust ja rääkida selle muutumisest, kui gaasi seisund muutub. Olek ei määra mingit tööd. Sama kehtib soojushulga kohta. Öeldakse ka nii, et

töö ja soojus ei ole keha oleku funktsioonid.

Teisiti on olukord siseenergiaga. Kui keha olek on täpselt määratud, siis on täpselt määratud ka selle siseenergia. Oleku muutumisel muutub ka U ja diferentsiaalses protsessis võib kirjutada dU. Viimases valemis kirjutatud soojushulk ja töö ei ole nende diferentsiaalid, vaid elementaarsed hulgad. Soojusest ja tööst saab rääkida ainult seoses mingi protsessiga. Väljend, et antud kehal on mingi hulk soojust, ei ole teaduslik. Kui keegi siiski nii räägib, siis on jutt siseenergiast, mitte soojusest.

Ideaalse gaasi siseenergia koosneb ainult molekulide liikumise kineetilisest energiast. Molekulide vastastikmõju ei arvestata. Soojusfüüsikas jäetakse välja ka molekulisisene energia, kuna see gaasi oleku muutudes ei muutu. Seepärast saab siseenergiat arvutada lihtsalt. N mooli gaasi jaoks saame valemi (95') ja (94) abil leida

$$U = N n_A \overline{w} = N n_A \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} NRT. \qquad (98)$$

Kui ideaalse gaasi kogus ja temperatuur on teada, siis on teada ka selle siseenergia. See vastab ka ülalöeldule, et siseenergia on oleku funktsioon.

55. Soojus ja töö isoprotsessidel

Isoprotsessiks nimetatakse sellist oleku muutumist, milles mingi olekut iseloomustav parameeter jääb konstantseks.

Nimetus tuleneb kreeka eesliitest iso-, mis tähendab sama-, võrd-.

Isokoorilisel protsessil on V=const (sirge 2 joonisel 47). Gaas asub jääva ruumalaga anumas. Muutub rõhk, kui muuta gaasi temperatuuri. Et ruumala ei muutu, siis gaas tööd ei tee ja

$$A = 0.$$

Termodünaamika I aluse ja valemi (98) abil leiame

$$Q = U_2 - U_1 = \frac{i}{2} NR(T_2 - T_1). \tag{99}$$

See on sarnane koolifüüsikast tuntud valemiga $Q = cm(t_2 - t_1)$. Massi asemel mõõdetakse ainekogust moolide arvuga ja erisoojuse asemele on tulnud avaldis

$$C_V = \frac{i}{2} R. \tag{100}$$

See on, järelikult,

soojushulk, mis kulub 1 mooli gaasi soojendamiseks 1K võrra jääval ruumalal.

Seda nimetatakse *moolsoojuseks jääval ruumalal.*

Edasi vaatleme *isobaarilist protsessi* (p=const, sirge 1 joonisel 47). Töö valemist (96') saame

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1). \tag{101}$$

Ruumala muutumisel saab rõhk konstantseks jääda ainult siis, kui muutub ka temperatuur. Arvutame sama töö temperatuuri muudu kaudu. Valemi (101) ja olekuvõrrandi (89) abil leiame

$$A = NR(T_2 - T_1). \tag{101'}$$

Protsessi liigist olenemata on ideaalse gaasi siseenergia muutus ikkagi määratav valemiga (99) [vt ka (98)]. Seepärast võime isobaarilise protsessi soojushulga arvutada nii:

$$Q = U_2 - U_1 + A = \frac{i}{2} NR(T_2 - T_1) + NR(T_2 - T_1);$$

$$Q = \frac{i+2}{2} NR(T_2 - T_1). \tag{102}$$

Kõrvutades seda jällegi keha soojendamiseks kuluva soojushulga valemiga, saame kirjutada

$$C_p = \frac{i+2}{2} R = C_V + R. \tag{103}$$

S.o *moolsoojus jääval rõhul.* Moolsoojusest jääval ruumalal erineb see gaasi universaalkonstandi võrra. Jääval rõhul gaasi soojendades tuleb lisaks gaasi siseenergia suurendamisele kompenseerida ka gaasi paisumisest tingitud jahtumist, mis vähendaks rõhku. Ühe mooli siseenergia muutust mõõdab C_V, paisumise tööd aga R. Seega,

gaasi universaalkonstant R on töö, mida 1 mool gaasi teeb isobaarilisel paisumisel, kui seda soojenda 1K võrra.

Valem (103) väljendab sedasama termodünaamika I alust (97), on ainult kirjutatud ühe mooli gaasikoguse jaoks temperatuuri muutmisel 1K võrra jääval rõhul.

Kolmas isoprotsess on *isotermiline protsess* (T=const, 3. joon joonisel 47). Oleku võrrandist (89) leiame, et pV=const. Rõhk on järelikult pöördvõrdeline ruumalaga. Siseenergia valemist (98) näeme, et ka see ei muutu – U=const. Seetõttu, termodünaamika I aluse järgi, protsessi töö võrdub gaasile antava soojushulgaga

$$A = Q = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{NRT}{V} dV = NRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = NRT \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} ;$$

$$A = Q = NRT \ln \frac{V_2}{V_1} . \qquad (104)$$

Saadud moolsoojuste valemid (100) ja (103) on õiged ainult nendes temperatuurivahemikes, kus i=const (vt graafikut joonisel 50). Seal on ka C_p ja C_V konstantne. Mujal see nii ei ole. Üldiselt ei kehti ka energia vabadusastmete vahel võrdjaotatuse seadus ja molekulide pöörleva liikumise ning võnkliikumise energia ei kasva pidevalt temperatuuri tõustes. Nende energiaseisundid on kvanditud, mistõttu energia võib muutuda ainult hüppeliselt. Kõike seda tuleb täpsemas teoorias arvestada. Kvantefektid avalduvad kõige enam madalatel temperatuuridel. Seal leitaksegi moolsoojustele teistsugused sõltuvused temperatuurist. Vastavad täpsemad valemid tuletatakse kvantmehaanikas.

56. Adiabaatiline protsess

Adiabaatiliseks nimetatakse protsessi, milles termodünaamilisel süsteemil ei ole soojusvahetust ümbritseva keskkonnaga.

S.t

$$Q = 0 .$$

Praktikas ei õnnestu süsteemi täielikult ümbritsevast isoleerida. Kuid tänu sellele, et soojusvahetus on suhteliselt aeglane protsess, võib seda tihti lugeda tühiseks kiiretes protsessides. Siis ongi protsess adiabaatiline.

Termodünaamika I alusest ja siseenergia valemist järgneb:

$$A = -(U_2 - U_1) = -\frac{i}{2} NR(T_2 - T_1). \qquad (105)$$

Adiabaatilises protsessis teeb gaas tööd oma siseenergia arvel. Töö on positiivne, kui temperatuur alaneb, siseenergia kahaneb. Sel juhul gaas paisub. Kokkusurumisel kehtib vastupidine - gaasi töö on negatiivne, siseenergia ja temperatuur kasvab.

Kuidas muutub rõhk ja ruumala? Nendevahelise seose leidmiseks lähtume I alusest diferentsiaalsel kujul (97'). Arvestame, et

$$\delta Q = 0; \quad \delta A = pdV; \quad dU = \frac{i}{2} NRdT.$$

Antud juhul mittevajaliku temperatuuri muudu dT elimineerime olekuvõrrandi $pV = NRT$ abil, seda diferentseerides.

$$pdV + Vdp = NRdT.$$

Nii saame kirjutada

$$\frac{i}{2}(pdV + Vdp) = -pdV;$$

$$\left(\frac{i}{2} + 1\right) pdV + \frac{i}{2} Vdp = 0.$$

Jagame võrdust $i/2$-ga ja tähistame

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{C_p}{C_V}. \qquad (106)$$

Siis saame

$$\gamma pdV + Vdp = 0.$$

Korrutades seda $V^{\gamma-1}$-ga, saame võrduse viia kujule

$$\gamma V^{\gamma-1} dV \cdot p + V^{\gamma} dp = 0,$$

millest selgub, et see on diferentsiaal korrutisest:

$$d(pV^{\gamma}) = 0.$$

Järelikult muutub rõhk ja ruumala adiabaatilisel protsessil nii, et

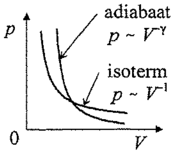
$$pV^{\gamma} = const\,. \qquad (107)$$

Kui ühes olekus on nende väärtused p_1 ja V_1, teises – p_2 ja V_2, siis

$$p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma}\,. \qquad (107')$$

(107) nimetatakse *adiabaadi võrrandiks*.

Võrdleme saadud sõltuvust joonisel 52 vastava sõltuvusega isotermilisel protsessil (pV=*const* ehk $p_1V_1 = p_2V_2$).



Joon. 52

Et $\gamma > 1$, siis adiabaatilisel protsessil muutub rõhk ruumala muutudes kiiremini kui isotermilisel protsessil. See põhjendub järgmiselt. Isotermilisel jääb temperatuur muutumatuks gaasi soojendamise-jahutamise ajal, adiabaatilisel aga mitte. Lisaks ruumala suurenemisele paisumisel langeb adiabaatilisel ka temperatuur. On kaks rõhku alandavat tegurit isotermilise protsessi ühe asemel. Seepärast alanebki rõhk adiabaatilisel paisumisel kiiremini kui isotermilisel.

57. Maxwelli kiiruste jaotus

Nagu varem juba märkisime, on gaasi molekulide kiirustel kõik suunad võrdväärselt esindatud. Sama ei kehti aga kiiruse suuruse kohta. Ühtesid kiirusi esineb rohkem, teisi vähem. Täpsemalt näitab seda *kiiruste jaotusseadus*. Selle tuletas teoreetiliselt inglise füüsik James Maxwell (1831-1879).

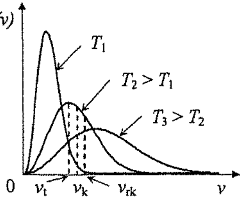
Mis on jaotust kirjeldava funktsiooni füüsikaline tähendus? Olgu gaasil ühes ruumiühikus n molekuli. Eraldame nendest osa dn, mis omavad kiirusi vahemikust v kuni $v+dv$. Jagame selle arvu kiirusvahemiku suurusega: dn/dv. Saame väljavalitud kiiruse v juures võetud kiiruste ühikvahemikku kuuluvate molekulide arvu. See moodustab kogu molekulide arvust osa $dn/dv/n$. Saadud tulemus oleneb ilmselt väljavalitud kiiruse arvväärtusest. Teisiti öeldes, on mingi funktsioon kiirusest $f(v)$. Seda nimetatakse jaotuse *tihedusfunktsiooniks*. Maxwell sai tulemuseks

$$\frac{1}{n}\frac{dn}{dv}=f(v)=Av^2e^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \tag{108}$$

Eespool öeldu põhjal

f(v) näitab, missugune osa kõigist molekulidest liigub antud kiiruse v juures võetud ühikvahemikus.

Nagu näha, see oleneb kiirusest v, temperatuurist T ja molekuli massist m. Kujutame tihedusfunktsiooni graafiliselt joonisel 53.



Joon. 53

Graafikud on joonistatud kolme erineva temperatuuri jaoks. Funktsiooni käitumist väikeste kiiruste juures määrab paraboolse kasvamise tegur v^2, suurte puhul aga eksponentsiaalse kahanemise tegur $\exp(-mv^2/2kT)$. Paigalseisvaid ja ülisuure kiirusega liikuvaid molekule praktiliselt ei ole olemas. Kõige enam on mingi vahepealse kiirusega molekule. Jaotusseaduse konstant A on määratav tingimusest, et

$$\int_0^\infty dn=\int_0^\infty f(v)n\,dv=n$$

– kõigisse kiirusvahemikesse kuuluvate molekulide arvude summa peab võrduma molekulide koguarvuga n. Sellest saame tingimuse

$$\int_0^\infty f(v)dv=1. \tag{109}$$

Seega joonisel 53 kujutatud kõverate alune pindala on alati 1, olenemata temperatuurist. Temperatuuri tõustes liigub kõvera maksimumkoht suuremate kiiruste poole, jaotus muutub lamedamaks ja laiemaks. Maksimumkohale vastavat kiirust v_t nimetatakse *tõenäoseimaks kiiruseks*. Sellise kiirusega liikuvaid molekule on gaasis kõige enam. Tingimusest $\partial f/\partial v=0$ saab leida valemi

$$v_t = \sqrt{\frac{2kT}{m}}\,. \tag{110}$$

Tihedusfunktsioon võimaldab arvutada ka *keskmise kiiruse* v_k ja *ruutkeskmise kiiruse* v_{rk} (Joon. 53):

$$v_k = \bar{v} = \int_0^\infty v f(v)\,dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\,; \tag{111}$$

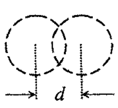
$$v_{rk} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\int_0^\infty v^2 f(v)\,dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}\,. \tag{112}$$

Viimane, *ruutjuur kiiruse ruudu keskväärtusest*, on kõige suurem kolme iseloomuliku kiiruse hulgas. See määrab molekuli keskmise kineetilise energia (vt punkti 52). Kõige väiksem on v_t. Valemites esinevad kordajad reastuvad järgmiselt: $2 < 8/\pi < 3$.

Maxwelli jaotus vastab gaasi tasakaalulisele olekule. Kui gaas on sellest välja viidud, siis teatud aja möödudes muutub kiiruste jaotus molekulide omavaheliste põrgete tulemusena jällegi tasakaaluliseks. Tasakaalu juures kehtib nn *detailse tasakaalu printsiip*. Põrkumiste tõttu muudavad molekulid kiirusi, kuid antud kiirusega molekulide arv siiski ei muutu, sest teiste põrkumiste tulemusena tekib neid samal ajal niisama palju juurde kui kaduma läheb. Nii on iga kiiruse puhul. Printsiip kehtib ainult täielikus kaoses, ebakorrapärases liikumises, süsteemi üldise tasakaalu puhul.

58. Molekulide efektiivne diameeter, keskmine vaba tee pikkus ja keskmine põrgete arv ajaühikus

Oma korrapäratul liikumisel põrkuvad molekulid tihti üksteisega. Seejuures lähenevad nad teineteisele teatud minimaalse kauguseni (Joon. 54). Seda kaugust d nimetataksegi molekuli *efektiivseks diameetriks* - s.t neid vaadeldakse sellise läbimõõduga keradena. Tegelikult ei ole molekulil mingit teravat välispiiri olemas ja d oleneb gaasi temperatuurist. Kõrgemal temperatuuril on kiirused kokkupõrgetel keskmiselt suuremad ja molekulid lähenevad üksteisele enam, d on väiksem.

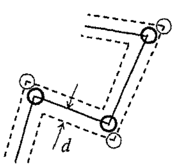


Joon. 54

Kahe järjestikuse põrke vahel molekul läbib mingi teepikkuse, mida nimetatakse *vabaks teepikkuseks*. See on muutuv suurus. Mõnikord õnnestub molekulil läbida üsna pikk tee, enne kui ta uuesti põrkub. Teinekord toimub kaks järjestikulist põrget väga kiiresti. Kuid vaba teepikkuse keskmine väärtus, arvutatuna üle suure hulga põrgete, on täiesti konstantne suurus. See muutub ainult siis, kui muutub gaasi olek. Keskmise vaba tee pikkuse $\bar{\lambda}$ saab arvutada keskmise kiiruse $\bar{v}$ abil, kui on teada *keskmine põrgete arv ajaühikus* $\bar{\upsilon}$:

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{\upsilon}}. \tag{113}$$

Leiame $\bar{\upsilon}$. Selleks oletame esialgu, et kõik molekulid seisavad paigal peale ühe, mis liigub teiste vahel ja põrkub nendega (Joon. 55).



Joon. 55

Molekuli trajektoori ümber on joonistatud "silinder" raadiusega *d*, mis on molekuli efektiivne diameeter. Molekul põrkub ainult nende teiste molekulidega, milliste keskpunktid jäävad joonistatud silindri sisse. Ühes sekundis molekul läbib teepikkuse $\bar{v}$. Sellel teel ta kohtub niisama pikas silindris olevate teiste molekulidega. Nende arv ongi põrgete arv ajaühikus.

$$\bar{\upsilon} = n \cdot \pi d^2 \cdot \bar{v}$$

- molekulide arvu gaasi ruumalaühikus korrutasime silindri ruumalaga.

Arvestame nüüd, et ka teised molekulid liiguvad. Nendel on samuti keskmine viirus $\bar{v}$. Kuid konkreetsetel kiirustel on erisugused suunad. Seepärast on molekulide suhteline kiirus kokkupõrkel keskmiselt niisugune, mille saame nende kiiruste liitmisel täisnurga all, mis on keskmine asend maksimaalse liitumise ja lahutumise asendi vahel. Suhteline kiirus on siis $\sqrt{2}$ korda suurem ühe molekuli keskmisest kiirusest. Nii saadakse õigeks tulemuseks

$$\bar{\upsilon} = \sqrt{2}\pi n d^2 \bar{v}. \tag{114}$$

Keskmise vaba tee jaoks saame

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}. \qquad (115)$$

Kui temperatuur ei muutu, siis on n võrdeline rõhuga p (isotermiline protsess - ruumala on pöördvõrdeline rõhuga). Järelikult on $\bar{\lambda}$ pöördvõrdeline rõhuga. Toome näitena õhu molekulide keskmised vaba tee pikkused 0°C juures erinevatel rõhkudel:

p	760 mmHg	1 mmHg	0,01 mmHg	10^{-4} mmHg	10^{-6} mmHg
$\bar{\lambda}$	$7\cdot10^{-6}$ cm	$5\cdot10^{-3}$ cm	0,5 cm	50 cm	50 m

Kui gaasi molekulide vaba tee keskmine pikkus ületab anuma mõõtmed, milles gaas asub, siis öeldakse, et seal on *vaakum*. Seega ei tähenda "vaakum" täielikku tühjust. Näiteks 10^{-10} mmHg juures on õhu igas cm^3-s veel miljoneid molekule. Laboratoorsetes tingimustes on saavutatud vaakumeid suurusjärguga 10^{-12} mmHg, mis ei küüni looduses esinevate märksa kõrgemate vaakumiteni. Kosmilistes udukogudes on 10^{-14} ja tähtedevahelises muus ruumis keskmiselt 10^{-17} mmHg.

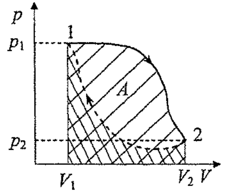
§ 9. Termodünaamika II alus (printsiip)

59. Ringprotsess. Pööratav ja mittepööratav protsess

Protsessiks nimetasime gaasi üleminekut ühest olekust teise. Olgu joonisel 56 need olekud tähistatud punktidega 1 ja 2. Punktidele vastab erinev rõhk, ruumala ja temperatuur. Ühest olekust teise võib gaas minna mitme protsessi tulemusena. Näiteks pideva joonega näidatud teed mööda. Sel juhul gaas paisub. Tehtav töö on [vt valemit (96)]

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

Integraali väärtust kujutab joonealune pindala (viirutatud vasakule langevate joontega). Olekust 2 võib gaas tagasi minna algolekusse 1 mingi teise seaduspärasuse järgi (kriipsjoon). Sel juhul surutakse gaasi kokku. Töö on negatiivne, kuid ikkagi võrdne joonistatud uue kõvera aluse pindalaga (viirutatud paremale langevate joontega). Kui see on A_{21}, siis kogu tööd



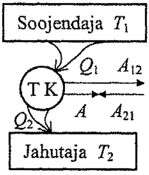
Joon. 56

$$A = A_{12} + A_{21}$$

kujutab kinnise trajektoori poolt ümbritsetud joonise osa pindala – viirutatud pindalade vahe. Seda tööd võib vaadelda ühe protsessi tööna, milles gaas läks olekust 1 olekusse 2 ja sealt mööda teist teed tagasi algolekusse 1. Sellist protsessi nimetatakse *ringprotsessiks*.

Protsessi, milles gaas pärast mitmes vaheolekus viibimist pöördub tagasi algolekusse, nimetatakse ringprotsessiks.
Eespool öeldu põhjal on ringprotsessi töö võrdne seda protsessi *pV*-diagrammil kirjeldava kõveraga piiratud pinnaosa pindalaga.

Praktikas realiseeruvad ringprotsessid *soojusmasinates* ja *külmutusmasinates*. Joonisel 57 kujutame soojusmasina tööd skemaatiliselt.



Joon. 57

Töötav keha TK sooritab pidevalt ringprotsesse. Protsessi esimesel poolel 1→2 (Joon. 56) on TK kontaktis soojendajaga, saab sealt soojushulga Q_1 ja teeb paisudes tööd A_{12}. Teises pooles 2→1 on gaas kontaktis jahutajaga ja gaasi surutakse kokku. Protsessi tulemusena antakse jahutajale soojushulk Q_2 ja tehakse tööd A_{21}. Kasuliku töö A saamiseks kulutatakse soojushulk Q_1. Q_2 läheb tavaliselt kaotsi. Seda uuesti kasutada masina töös ei saa. Seepärast on masina kasutegur

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \qquad (116)$$

Murru lugeja teisendamisel kasutasime energia jäävuse seadust.

Külmutusmasin töötab analoogiliselt, kuid *pööratud ringprotsessi* järgi.

Pööratuks nimetatakse protsessi, mis kulgeb päripidisega võrreldes täpselt vastupidises suunas.

Kujutades kõiki joonisel 56 ja 57 näidatud nooli vastupidiste suundadega, saame külmutusmasina tööd kirjeldava skeemi. Sel juhul võetakse jahutajalt soojushulk Q_2 ja antakse soojendajale soojushulk Q_1. Gaasi töö A on negatiivne (joonisel 57 suunatud TK poole), s.t seadmega peab olema ühendatud mingisugune väline jõuallikas, mis paneb masina tööle. Soojendajale (külmkapi korral toa õhule) antakse üle soojushulk

$$Q_1 = Q_2 + |A|.$$

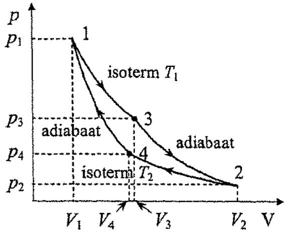
See tähendab, et külmkapp on toas ahju eest, mitte toa jahutaja.

Reaalsed protsessid ei ole tavaliselt täpselt pööratavad. Tegelikku protsessi ei saa muuta päripidisega vastupidiseks. Seda võib teha ainult ligikaudselt võttes ja mõningatel lihtsamatel juhtudel. Näiteks aurumasinat ei saa välise jõuallikaga muuta külmutusmasinaks ega külmkappi panna tööle soojusmasinana.

60. Carnot' ringprotsess ja selle kasutegur

Soojusmasin peab olema kohandatud kestvaks töötamiseks. Seepärast peab temas toimuv protsess olema *tsükliline*, s.t ringprotsess. Iga reaalse soojusmasina tsükli kõver pV-diagrammil on üldiselt isesuguse kujuga. Võib arvata, et sellest sõltub ka masina kasutegur. Sest nagu selgus, oleneb kasulik töö tsükli kujust. Prantsuse füüsik Nicolas Carnot (1796-1832) analüüsis soojusmasinate töötsükleid ja sai põhjapanevaid tulemusi. Ta leidis enam-vähem reaalsetest protsessidest koosneva tsükli, mille puhul soojusmasina kasutegur on suurim. See tsükkel kannab *Carnot' tsükli* ja vastav masin *Carnot' ideaalse soojusmasina* nime. Carnot' tsükkel koosneb kahest isotermist ja kahest adiabaadist (Joon. 58).

Ideaalne soojusmasin töötab joonisel näidatud noolte suunas, külmutusmasin – vastupidises. Tsükli töö jaguneb neljaks taktiks. Esimeses taktis 1→3 on gaas kontaktis soojendajaga ja saab soojushulga Q_1 (vt joonist 57). Gaas paisub isotermiliselt, omades temperatuuri T_1, mis on ka soojendaja temperatuuriks. Tehakse tööd [valem (104)]



Joon. 58

$$A_{13} = Q_1 = NRT_1 \ln\frac{V_3}{V_1}.$$

Teises taktis 3→2 on soojendaja kõrvaldatud ja gaas paisub adiabaatiliselt. Tehakse tööd [valem (105)]

$$A_{32} = C_V N(T_1 - T_2).$$

Kolmandas taktis 2→4 jahutatakse gaasi ja surutakse kokku isotermiliselt. Gaas on kontaktis jahutajaga, omab selle temperatuuri T_2, annab ära soojushulga Q_2 ja teeb tööd

$$A_{24} = -Q_2 = -NRT_2 \ln\frac{V_2}{V_4}.$$

Neljandas taktis 4→1 on gaas jahutajast eraldatud, selle kokkusurumine jätkub adiabaatiliselt. Gaasi töö on

$$A_{41} = C_V N(T_2 - T_1) = -C_V N(T_1 - T_2).$$

Tsükli kogu töö jaoks saame

$$A = A_{13} + A_{32} + A_{24} + A_{41} = Q_1 - Q_2.$$

Sellise lõpptulemuse oleks võinud kirjutada otse termodünaamika I aluse põhjal, kuid nüüd saime teada ka vastavate soojushulkade arvutusvalemid. Need võimaldavad kasuteguri jaoks kirjutada [valem (116)]

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2 \ln\frac{V_2}{V_4}}{T_1 \ln\frac{V_3}{V_1}}.$$

Arvutame logaritmide suhte. Selleks kirjutame üles võrrandite süsteemi, kasutades vastavaid isotermide ja adiabaatide võrrandeid

$$\begin{cases} p_1V_1 = p_3V_3\,; \\ p_4V_4 = p_2V_2\,; \\ p_1V_1^\gamma = p_4V_4^\gamma\,; \\ p_3V_3^\gamma = p_2V_2^\gamma\,. \end{cases}$$

Elimineerime rõhu p_1 ja p_2 vastavate võrduste jagamise teel:

$$\begin{cases} \dfrac{V_1}{V_1^\gamma} = \dfrac{p_3}{p_4}\dfrac{V_3}{V_4^\gamma}\,; \\ \dfrac{p_4}{p_3}\dfrac{V_4}{V_3^\gamma} = \dfrac{V_2}{V_2^\gamma}\,. \end{cases}$$

Edasi leiame

$$\frac{V_1}{V_1^\gamma} = \frac{V_4}{V_3^\gamma}\frac{V_2^\gamma}{V_2}\frac{V_3}{V_4^\gamma}; \quad \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_2}{V_4}\right)^{\gamma-1}$$

ehk

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{V_2}{V_4}.$$

Seega logaritmid taanduvad samuti välja ja

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \tag{116'}$$

Valem näitab, et kasutegur on seda suurem, mida suurem on soojendaja ja jahutaja temperatuuri vahe. Maksimaalne väärtus 1 saavutataks ainult siis, kui $T_2 = 0$. Kuid sellist jahutajat ei ole põhimõtteliselt võimalik ehitada. Ühegi keha temperatuur ei saa olla püsivalt absoluutne 0, kui sellele antakse pidevalt soojust.

[Töötava soojusmasina mudeli demonstreerimine.]

61. Termodünaamika II alus (printsiip)

Carnot' masina kasutegur on ideaalse soojusmasina kasutegur. Iga reaalse oma on sellest väiksem:

$$\eta_{\text{reaalne}} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \le \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \tag{117}$$

Võrdus võib kehtida ainult Carnot' ideaalse masina puhul. Kuna ideaalse kasutegur ei saanud võrduda ühega, siis võrratuse tõttu ei saa ka reaalse masina kasutegur olla 1. Sajaprotsendilise kasuteguri puhul oleks $Q_2 = 0$ ja see tähendaks kogu soojendajalt saadud soojushulga Q_1 jäägitut muutumist tööks A. Eelöeldu põhjal ei ole see võimalik. Selline tõsiasi ongi *termodünaamika II aluseks* või *printsiibiks*.

Igasugune soojusmasin, mille töö ainus tulemus on soojendajalt saadud kogu soojushulga jäägitu muutmine tööks, on võimatu!

Masinat, mis siiski peaks seda võimaldama, nimetatakse *II liiki igiliikuriks* või *perpetuum mobile*'ks. Esimest liiki on igiliikur, mis teeb tööd mittemillestki. See on vastuolus termodünaamika I alusega ehk energia jäävuse seadusega. Sellest ka nimetus *I liiki igiliikur*. II liiki igiliikur ei ole küll vastuolus energia jäävuse seadusega, kuid on vastuolus termodünaamika II printsiibiga.

Teist printsiipi võib ka muul viisil sõnastada. Selleks on tarvis sisse tuua uus mõiste - *entroopia*. Kirjutame võrratuse (117) üles järgmisel kujul:

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} \le 1 - \frac{T_2}{T_1};$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} \ge \frac{T_2}{T_1}.$$

Et absoluutne temperatuur T_2 ja ülekantud soojushulk Q_1 on positiivne, siis võib võrratust nendega jagada-korrutada, ilma et võrratuse märk muutuks

$$\frac{Q_2}{T_2} \ge \frac{Q_1}{T_1}$$

ehk

$$\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} \ge 0.$$

See avaldis ei tähenda midagi muud kui ühe suuruse

$$S = \frac{Q}{T} \tag{118}$$

muutu, mis peab olema positiivne:

$$S_2 - S_1 \geq 0 .$$

Suurust S hakati nimetama *taandatud soojushulgaks* ehk *entroopiaks*. Kehale antud soojushulk jagatakse üleandmise absoluutse temperatuuriga. Füüsikaliselt tähendab see siis

soojushulka, mis tuleb ühe ülekandetemperatuuri kraadi kohta (J/K).

S_2 eelmises võrratuses tähendab jahutaja entroopia kasvu - see sai soojust, S_1 aga - soojendaja entroopia kahanemist (andis soojust). Töötava keha seisund taastub tsükli lõppedes, tema entroopia ei muutu. Seepärast võib öelda, et $S_2 - S_1$ tähendab kogu soojusmasina entroopia muutust, mis toimus ühe tsükli vältel. Järelikult $S_2 - S_1 \geq 0$ tähendab, et iga reaalse soojusmasina entroopia kasvab selle töö käigus. Entroopia kasvu seadus ongi termodünaamika II printsiibi teine sõnastus.

Igas reaalses suletud süsteemis kulgevad protsessid süsteemi entroopia kasvu suunas.

Selle seaduse paikapidavust on igakülgselt kontrollitud.

Teist liiki igiliikuri puhul, kus $Q_2 = 0$, on ka $S_2 = 0$ ja entroopia muutus oleks $-S_1$, s.t negatiivne, sest $Q_1 > 0$ ja seega ka $S_1 > 0$. Soojusmasina entroopia kahaneks. Entroopia kasvu seadus oleks rikutud. Seesugune masin ei ole võimalik.

62. Entroopia ja süsteemi oleku tõenäosus

Olgu suletud süsteemil kaks võrdse energiaga seisundit. Asetame süsteemi ühte nendest ja jätame omaette. Kas süsteemis toimuvad protsessid viivad ta ühest seisundist teise või mitte? Kas see oleneb algolekust või ei esine millalgi üleminekut? Termodünaamika I printsiip ei võimalda nendele küsimustele vastata. See isegi ei põhjenda üleminekuprotsesside vajalikkust. Süsteem võib ühtemoodi viibida nii ühes kui ka teises olekus. Energia on neis samasugune.

Võtame konkreetse näite. Süsteem koosnegu kahest kehast, millede algtemperatuurid olgu erinevad. Soojusvahetuse tõttu üks keha annab ära soojushulga Q_1, teine saab juurde soojushulga Q_2. Esimene printsiip nõuab, et $Q_2 = Q_1$, kuid ei ütle midagi protsessi kulgemise suuna kohta - kas see soojushulk läks soojemalt kehalt külmemale või vastupidi. Süsteemi koguenergia nendel juhtudel ei muutu ja mõlemad protsessid on energia jäävuse seaduse seisukohalt ühtemoodi võimalikud. Tegelikult esineb aga alati soojuse üleminek soojemalt kehalt külmemale. Kuidas seda põhjendada?

Arvutame entroopia muutuse selles protsessis. Et soojuse üleminekul keha temperatuur muutub pidevalt, siis tuleb lähtuda diferentsiaalsest entroopia muutusest

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

ja seda integreerida. Kogu süsteemi entroopia muutus on esimese keha entroopia kahanemise (andis soojust) ja teise kasvu (sai soojust) vahe

$$-\int_0^{Q_1} \frac{\delta Q}{T_1} + \int_0^{Q_1} \frac{\delta Q}{T_2} = \int_0^{Q_1} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \delta Q \geq 0 .$$

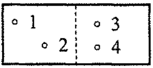
Entroopia kasvu seaduse järgi peab see muutus olema positiivne. On näha, et integraal saab omada positiivset väärtust ainult siis, kui kogu protsessi vältel on keskmiselt võttes $T_2 < T_1$ - soojus läheb üle soojemalt kehalt külmemale. Vastupidisel juhul oleks entroopia kasv negatiivne ehk see kahaneks. Seega võimaldab termodünaamika II printsiip otsustada, millises suunas võivad protsessid vaadeldavas süsteemis kulgeda, millises mitte.

Mille poolest need kaks süsteemi seisundit teineteisest veel erinevad? Miks toimub üleminek ühest teise, aga mitte vastupidi? Ja miks on üleminek üldse vajalik? See saab selgemaks, kui anname entroopia kasvu seadusele statistilise tõlgenduse.

Iseenese hooleks jäetud süsteem läheb üle vähem tõenäosest olekust enam tõenäosesse olekusse.

Milline olek on rohkem, milline vähem tõenäone? Sellele küsimusele vastab statistika nii:

enam tõenäone on see süsteemi olek, mille realiseerumisviiside arv on suurem.



Joon. 59

Võtame järgmise konkreetse näite (Joon. 59). Anumas on 4 molekuli. Jaotame anuma mõttes pooleks. Vaatleme 5 võimalikku gaasi olekut anumas ja määrame nende *realiseerumisviiside arvu*. Tulemused on esitatud järgmises tabelis.

Olek		Realiseerumisviisid		
Molekule vasakul	Molekule paremal	Vasakul molekulid	Paremal molekulid	Realiseerimisviise
0	4	-	1,2,3,4	1
1	3	1	2,3,4	4
		2	1,3,4	
		3	1,2,4	
		4	1,2,3	
2	2	1,2	3,4	6
		1,3	2,4	
		1,4	2,3	
		2,3	1,4	
		2,4	1,3	
		3,4	1,2	
3	1	1,2,3	4	4
		1,2,4	3	
		1,3,4	2	
		2,3,4	1	
4	0	1,2,3,4	-	1

Saime kokku $2^4 = 16$ erinevat oleku realiseerumisviisi. Nendest 6 on sellised, milles molekulide arv on anuma pooltes võrdne. See olek on ka kõige tõenäosem. Tõenäosuseks on $6/16=3/8$. Olek, kus ühes anuma pooles on 1 ja teises 3 molekuli, omab tõenäosust $4/16=1/4$ jne. Oleku realiseerumisviiside arvu W nimetatakse selle *termodünaamiliseks tõenäosuseks*. See tõenäosus ei ole normeeritud 1-le, tavaliselt on see väga suur arv.

Austria füüsik Ludvig Boltzmann näitas, et ***süsteemi entroopia on võrdeline tema oleku termodünaamilise tõenäosuse logaritmiga***

$$S = k \ln W . \qquad (119)$$

Võrdeteguriks k on meile juba varem tuntud Boltzmanni konstant. See valem on ka graveeritud L. Boltzmanni hauakivile ühel kalmistul Wienis.

Seega tähendab entroopia kasvamine sellist protsessi süsteemis, mille tulemusena süsteem läheb üle väiksema termodünaamilise tõenäosusega olekust suurema tõenäosusega olekusse. Vastupidine protsess ei ole suletud süsteemis võimalik.

Esitatud põhimõtet võib väljendada veel *korrapärase* ja *korrapäratu liikumise* mõiste abil. Soojuslik liikumine on täiesti korrapäratu liikumine, mehaaniline aga kõige korrapärasem. II liiki igiliikur oleks masin, mis muundaks soojuse, korrapäratu liikumise, jäägitult tööks - korrapäraseks mehaaniliseks liikumiseks. See on võimatu. Igas suletud süsteemis peab korrapäratus lõppkokkuvõttes kasvama, mitte kahanema. Korrapäratus on enam tõenäone kui korrapärasus.

Samasuguse mõttekäigu rakendamine kogu Universumile põhjustas filosoofias "maailma soojussurma" idee tekkimise - lõppude lõpuks jääb siin maailmas järele ainult soojuslik liikumine. Kõik korrapärased liikumisvormid kaovad. Kuid ei ole tõestatud, et Universum on suletud süsteem. Seadus kehtib ainult sellises süsteemis.

SISUKORD

II ERIRELATIIVSUSTEOORIA ELEMENTE

§ 4. Relativistlik kinemaatika

§ 5. Relativistlik dünaamika

III VÕNKUMISED JA LAINED

§ 6. Võnkumised