

№.6.7  
1487

ISSN 0136-3549  
0203-9745

TALLINNA  
POLÜTEHNILISE INSTITUUDI  
TOIMETISED  
487

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА

ТРИ  
'80

ОПТИМАЛЬНЫЕ  
СИСТЕМЫ  
И АЛГОРИТМЫ





Ep. 6.7

487

**ТРИ  
'80**

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

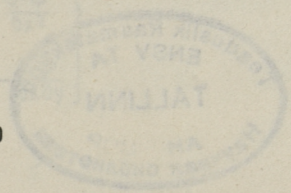
УДК 624.041



ОПТИМАЛЬНЫЕ  
СИСТЕМЫ  
И АЛГОРИТМЫ

Строительная механика XI

Таллин 1980



24



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ  
АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Математическая модель формулируется как разрешающее уравнение Сен-Венана для функции Эри в плоской задаче теории упругости с выявленными параметрами оптимизации, выбранными как осевые параметры жесткостей  $q_x = E_x \cdot h(x, y)$ ,  $q_y = E_y \cdot h(x, y)$  и их соотношение  $\frac{q_y}{q_x} = \frac{E_y}{E_x} = e(x, y)$ .

Краевые условия задачи описываются по рамной аналогии, позволяющей предварительно установить оптимальный закон распределения параметров жесткостей вдоль границы (по контуру).

Формулируется целевая функция оптимизационной задачи — либо как минимум дисперсии значений главных напряжений для пластины постоянной толщины, либо как минимум объемной функции для пластины переменной толщины.

Уравнения равновесия для плоской задачи теории упругости, где внутренние силы определяются через функцию Эри, имеют известный вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + X_p &= 0 \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + Y_p &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (I)$$

где

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ Y_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ X_y &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$Z_z = \sigma_z \cdot h(x, y) = -\nu_z \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)$$

и напряжения вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{h(x, y)} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{1}{h(x, y)} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{1}{h(x, y)} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}; \\ \sigma_z &= -\frac{\nu_z}{h(x, y)} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Проекции объемных сил вычисляются здесь для переменной толщины  $h = h(x, y)$ , так что  $X_p = \bar{X} \cdot h(x, y)$ ;  $Y_p = \bar{Y} \cdot h(x, y)$ .

Уравнение совместности Сен-Венана запишется после подстановки  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0,$$

где

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_y} (\sigma_y - \nu_x \sigma_x) = \frac{1}{g_y} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \nu_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right);$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_x} (\sigma_x - \nu_y \sigma_y) = \frac{1}{g_x} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right);$$

так что

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = -\frac{1}{g_{xy}} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{1}{g_y} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \nu_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \frac{1}{g_x} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \right] + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{1}{g_{xy}} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем безразмерную характеристику жесткости ( $e$ ), как соотношение осевых параметров (функций) жесткостей в направлениях осей  $x, y$ , равное соотношению модулей упругости первого рода:

$$e = \frac{g_y}{g_x} = \frac{E_y \cdot h(x, y)}{E_x \cdot h(x, y)} = \frac{E_y}{E_x} = e(x, y). \quad (5)$$

Соотношение коэффициентов Пуассона определится из равенства коэффициентов обобщенного закона Гука ( $a_{ij} = a_{ji}$ ), так, что

$$a_{12} = a_{21} \rightarrow \frac{\nu_x}{E_y} = \frac{\nu_y}{E_x} \rightarrow \frac{\nu_x}{\nu_y} = \frac{E_y}{E_x} = e(x, y). \quad (6)$$

Модуль упругости второго рода  $G = \frac{g_{xy}}{h(x,y)}$  определится (см. [1]) из формулы:

$$G = E_y \cdot \frac{1}{f(e)},$$

где

$$f(e) = (1 + \nu_x) + e(1 + \nu_y),$$

а его безразмерная характеристика, определится как соотношение осевой жесткости  $g_y = E_y \cdot h(x,y)$  к угловой  $g_{xy} = G \cdot h(x,y)$ ;

$$\frac{g_y}{g_{xy}} = f(e) = (1 + \nu_x) + e(1 + \nu_y). \quad (7)$$

Уравнение совместности деформации с учетом введенных связей (5), (6), (7) запишется в операторной форме:

$$A_1 + A_2 \cdot e + A_3 \cdot f(e) = 0, \quad (8)$$

где операторы  $A_1, A_2, A_3$  вычисляются в результате дифференцирования:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{1}{g_y} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \nu_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{1}{g_y^2} \frac{\partial g_y}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \nu_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{g_y} \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - \nu_x \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial \nu_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \right] = \\ &= \left[ \frac{2}{g_y^3} \left( \frac{\partial g_y}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{g_y^2} \frac{\partial^2 g_y}{\partial x^2} \right] \cdot \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \nu_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - \\ &- \frac{2}{g_y^2} \cdot \frac{\partial g_y}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - \nu_x \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial \nu_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{g_y} \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \nu_x \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} - 2 \frac{\partial \nu_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^2 \nu_x}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \\ &= \frac{1}{g_y} \left\{ \left[ 2 \left( \Theta_x^y \right)^2 - \Theta_{xx}^y \right] \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \nu_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - 2 \Theta_x^y \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - \nu_x \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - \Theta_x^y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \nu_x \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} - 2 \Theta_x^y \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - \Theta_{xx}^y \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right\}; \quad (9') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 \cdot e &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \frac{1}{g_x} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\frac{1}{g_x^2} \frac{\partial g_x}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{g_x} \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} - \nu_y \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial \nu_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \frac{2}{g_x^3} \left( \frac{\partial g_x}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{g_x^2} \cdot \frac{\partial^2 g_x}{\partial y^2} \right] \cdot \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \gamma_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - \\
&- \frac{2}{g_x^2} \cdot \frac{\partial g_x}{\partial y} \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} - \gamma_y \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \\
&+ \frac{1}{g_x} \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} - \gamma_y \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} - 2 \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = \\
&= \frac{e}{g_y} \left\{ \left[ 2(\Theta_y^x)^2 - \Theta_{yy}^x \right] \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \gamma_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - 2\Theta_y^x \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} - \gamma_y \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} - \Theta_y^y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \right. \\
&\left. + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \gamma_x \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\Theta_y^y \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} - \Theta_{yy}^y \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\}; \quad (9'')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 f(e) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{1}{g_{xy}} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right] = \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left[ - \frac{1}{g_{xy}^2} \cdot \frac{\partial g_{xy}}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{g_{xy}} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} \right] = \\
&= \left[ \frac{2}{g_{xy}^3} \left( \frac{\partial g_{xy}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial g_{xy}}{\partial y} \right) - \frac{1}{g_{xy}^2} \cdot \frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial x \partial y} \right] \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \\
&- \frac{1}{g_{xy}^2} \left( \frac{\partial g_{xy}}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial g_{xy}}{\partial y} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{1}{g_{xy}} \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = \\
&= \frac{f(e)}{g_y} \left\{ \left( 2\Theta_x^{xy} \cdot \Theta_y^{xy} - \Theta_{xy}^{xy} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \Theta_x^{xy} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - \Theta_y^{xy} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right\}. \quad (9''')
\end{aligned}$$

В описание операторов введены обозначения для производных от функций жесткости ( $g_x, g_y, g_{xy}$ ) и упругости ( $\gamma_x, \gamma_y$ ), характеризующих относительную интенсивность их изменения на осях  $x, y$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial g_y}{\partial x} \cdot \frac{1}{g_y} &= \Theta_x^y; & \frac{\partial g_x}{\partial y} \cdot \frac{1}{g_x} &= \Theta_y^x; & \frac{\partial g_{xy}}{\partial x} \cdot \frac{1}{g_{xy}} &= \Theta_x^{xy}; & \frac{\partial g_{xy}}{\partial y} \cdot \frac{1}{g_{xy}} &= \Theta_y^{xy}; \\
\frac{\partial^2 g_y}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{g_y} &= \Theta_{xx}^y; & \frac{\partial^2 g_x}{\partial y^2} \cdot \frac{1}{g_x} &= \Theta_{yy}^x; & \frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial x \partial y} \cdot \frac{1}{g_{xy}} &= \Theta_{xy}^{xy}; \\
\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} &= \Theta_x^y; & \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x^2} &= \Theta_{xx}^y; & \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} &= \Theta_y^x; & \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial y^2} &= \Theta_{yy}^x.
\end{aligned} \right\} \quad (10)$$



Переменные параметры (функции)  $\Theta$  могут рассматриваться как параметры управления в оптимизационной задаче пластин переменной толщины. Связи между ними устанавливаются с учетом того, что

$$\begin{aligned}
 g_{xy} &= g_y \cdot \frac{1}{f(e)} = g_x \frac{e}{f(e)}, \quad \text{где } f(e) = f(e, \nu_x, \nu_y); \\
 \left. \begin{aligned}
 \Theta_x^{xy} &= \frac{\partial g_{xy}}{\partial x} \cdot \frac{1}{g_{xy}} = \left[ \frac{\partial g_y}{\partial x} \cdot \frac{1}{f(e)} - \frac{g_y}{f(e)^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right] \cdot \frac{f(e)}{g_y} = \Theta_x^y - \Theta_x^f; \\
 \Theta_y^{xy} &= \frac{\partial g_{xy}}{\partial y} \cdot \frac{1}{g_{xy}} = \left[ \frac{\partial g_y}{\partial y} \cdot \frac{1}{f(e)} - \frac{g_y}{f(e)^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right] \cdot \frac{f(e)}{g_y} = \Theta_y^y - \Theta_y^f, \\
 \text{где } \Theta_x^f &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{f(e)}; \quad \Theta_y^f = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{1}{f(e)}; \\
 \Theta_y^y &= \frac{\partial g_y}{\partial y} \cdot \frac{1}{g_y} = \frac{\partial}{\partial y} (e g_x) \cdot \frac{1}{g_y} = \Theta_y^x + \Theta_y^e, \quad \text{где } \Theta_y^e = \frac{\partial e}{\partial y} \cdot \frac{1}{e}; \\
 \Theta_{xy}^{xy} &= \frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial x \partial y} \cdot \frac{1}{g_{xy}} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial g_y}{\partial y} \cdot \frac{1}{f(e)} - \frac{g_y}{f(e)^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right] \cdot \frac{f(e)}{g_y} = \\
 &= \left\{ \frac{\partial^2 g_y}{\partial x \partial y} \cdot \frac{1}{f(e)} - \frac{1}{f(e)^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{2 g_y}{f(e)^3} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{f(e)^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{g_y}{f(e)^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right\} \cdot \frac{f(e)}{g_y} = \\
 &= \Theta_{xy}^y - \Theta_y^y \cdot \Theta_x^f - \Theta_x^y \Theta_y^f + 2 \Theta_x^f \Theta_y^f - \Theta_{xy}^f.
 \end{aligned} \right\} \quad (II)
 \end{aligned}$$

Оператор  $A_3$  запишется с учетом полученных выше связей в следующей форме:

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \frac{1}{g_y} \left\{ \left[ 2(\Theta_x^y - \Theta_x^f)(\Theta_y^y - \Theta_y^f) - (\Theta_{xy}^y - \Theta_x^y \Theta_y^f - \Theta_x^y \Theta_y^f + 2\Theta_x^f \Theta_y^f - \Theta_{xy}^f) \right] \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \right. \\
 &\quad \left. - (\Theta_x^y - \Theta_x^f) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - (\Theta_y^y - \Theta_y^f) \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

или с учетом (II) в окончательном виде:

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \frac{1}{g_y} \left\{ \left[ 2\Theta_x^y (\Theta_y^x - \Theta_y^e) - \Theta_{xy}^y - \Theta_x^f (\Theta_y^x - \Theta_y^e) - \Theta_y^f \cdot \Theta_x^y + \Theta_{xy}^f \right] \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \right. \\
 &\quad \left. - (\Theta_x^y - \Theta_x^f) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - (\Theta_y^x + \Theta_y^e - \Theta_y^f) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right\}. \quad (9''')
 \end{aligned}$$

После группировки членов уравнения (8) с учетом описания операторов (9', 9'', 9''') разрешающее уравнение Сен-Венана для функции Эри запишется в табличной форме (см. табл. I).

## Общая форма уравнения Сен-Венана

NN	$\theta$	$A_1 \times 1$	$A_2 \times e$		$A_3 \times f(e)$	$\theta_y^e = \frac{\partial e}{\partial y}$
0	1	2	3	4	$\theta_x^f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{f}$	$\theta_y^e = \frac{\partial e}{\partial y} \cdot \frac{1}{e}$
1.		$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \gamma_x \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}$ $- 2\theta_x^y \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - \theta_{xx}^y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} - \gamma_y \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}$ $- 2\theta_y^x \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - \theta_{yy}^x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}$	$\theta_x^f = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y}$	$\theta_y^e = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$
2	$-\theta_x^y = -\frac{\partial g_y}{\partial x} \cdot \frac{1}{g_y}$  $-\theta_y^x = -\frac{\partial g_x}{\partial y} \cdot \frac{1}{g_x}$	$2(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - \gamma_x \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2})$ $- 2\theta_x^y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$	$2(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} - \gamma_y \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y})$ $- 2\theta_y^x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2}$	$\theta_x^f = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$	$-\theta_y^e = -2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$
3	$2(\theta_x^y)^2 = 2(\frac{\partial g_y}{\partial x})^2 \cdot \frac{1}{g_y^2}$ $2(\theta_y^x)^2 = 2(\frac{\partial g_x}{\partial y})^2 \cdot \frac{1}{g_x^2}$ $2\theta_x^y \cdot \theta_y^x$	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \gamma_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \gamma_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$	$\theta_x^f = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$	
4	$-\theta_{xx}^y = -\frac{\partial^2 g_y}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{g_y}$ $-\theta_{yy}^x = -\frac{\partial^2 g_x}{\partial y^2} \cdot \frac{1}{g_x}$	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \gamma_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \gamma_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$	$\theta_x^f = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$	
5	$-\theta_y^e = \frac{\partial e}{\partial y} \cdot \frac{1}{e}$			$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y}$	$\theta_x^f = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$	

Первая строка таблицы определяет разрешающее уравнение для ортотропной пластины с постоянной толщиной при  $e = \text{const}$ :

$$\nabla^4 \varphi(e) = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + e \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \alpha \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \quad (I2)$$

где  $\alpha = f(e) - \nu_x - e \nu_y = 1 + e$ .

Для ортотропной пластины с переменной толщиной, но постоянным соотношением ( $e = \text{const}$ ) в разрешающее уравнение войдут лишь элементы обрaмленной матрицы (4x4), а введенные параметры ( $\theta$ ), как производные функции жесткости, примут смысл производных толщины пластины  $h = h(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial h}{\partial x}; & \theta_y &= \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial h}{\partial y}; \\ \theta_{xx} &= \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}; & \theta_{yy} &= \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}; & \theta_{xy} &= \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (I3)$$

Если осевые жесткости ортотропной пластины описываются функциями с разделенными переменными, так что  $q_y = q_y(y)$  и  $q_x = q_x(x)$ , то параметры  $\theta_x^y, \theta_y^x, \theta_{xy}^y$  обращаются в нуль, безразмерная характеристика  $e = \frac{q_y(y)}{q_x(x)}$  будет являться функцией двух переменных  $e = e(x, y)$ , а разрешающее уравнение составится из I и 5 строк таблицы общей формы уравнения Сен-Венана.

Если осевые жесткости пластины симметричны относительно координат ( $x, y$ ), так что  $q_x = q_y = q(x, y)$ , то коэффициенты Пуассона также симметричны  $\nu_x = \nu_y = \nu(x, y)$ , а безразмерная характеристика жесткости  $e = \frac{q_y}{q_x} = 1$ . Тогда симметричные коэффициенты равны между собой:  $\theta_x^y = \theta_y^x = \theta$ ;  $\theta_{xx}^y = \theta_{yy}^x = \theta''$  и разрешающее уравнение составится из первых четырех строк таблицы общей формы уравнения.

Условия на границе описываются по рамной аналогии, так что:

$$\left. \begin{aligned} X_N &= \bar{X}_x \cdot l + \bar{X}_y \cdot m = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right); \\ Y_N &= \bar{Y}_x \cdot l + \bar{Y}_y \cdot m = -\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right), \end{aligned} \right\} \quad (I4)$$

где  $l = \frac{dy}{ds}$ ;  $m = -\frac{dx}{ds}$ .

Функция Эри на границе ( $\bar{\varphi}$ ) имеет смысл изгибающего момента в сечении ( $s$ ):

$$\bar{\varphi}(s) = \int_{x_0}^{x_s} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} dx + \int_{y_0}^{y_s} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} dy + M_0,$$

а подинтегральные функции — смысл компонент поперечных сил на осях  $x$ ,  $y$ :

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = \int_s Y_N ds + R_y(0) = R_y(s); \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} = \int_s X_N ds + R_x(0) = R_x(s). \quad (I5)$$

Так, что

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(s) &= \int_{x_0}^{x_s} R_y dx + \int_{y_0}^{y_s} R_x dy + M_0 = \\ &= R_y(x_s - x_0) + R_x(y_s - y_0) + M_0 = M_s. \end{aligned} \quad (I6)$$

При этом существенно отметить, что для балки-стенки с переменной жесткостью функция Эри ( $\bar{\varphi}$ ) на границе должна удовлетворять требованиям однозначности (неразрывности) перемещений на контуре, являясь функцией не только координат ( $x$ ,  $y$ ), но и жесткостей ( $\bar{q}_x \cdot h$ ;  $\bar{q}_y \cdot h$ ), так что

$$\varphi(s) = M_s = M(\bar{x}, \bar{y}, \bar{q}_x, \bar{q}_y)$$

или, после разделения переменных:

$$M_s = M_1(\bar{x}, \bar{y}) + M_2(\bar{x}, \bar{y}) \cdot M_3(\bar{q}_x) + M_4(\bar{x}, \bar{y}) \cdot M_5(\bar{q}_y). \quad (I7)$$

Нормальная производная функции напряжений  $\bar{\varphi}(s)$  определяет продольную силу ( $N$ ) в сечении ( $s$ ):

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial n} = R_y \cdot l - R_x \cdot m = N_s. \quad (I8)$$

Условия равновесия на границе с учетом (I5) запишутся в форме:

$$\left. \begin{aligned} X_N &= \frac{\partial R_x}{\partial y} \cdot l - \frac{\partial R_y}{\partial x} \cdot m = \frac{\partial}{\partial y} (R_x \cdot l - R_y \cdot m) = \frac{\partial}{\partial y} Q_s; \\ Y_N &= \frac{\partial R_x}{\partial x} \cdot l + \frac{\partial R_y}{\partial y} \cdot m = \frac{\partial}{\partial x} (R_x \cdot l - R_y \cdot m) = \frac{\partial}{\partial x} Q_s, \end{aligned} \right\} \quad (I9)$$

где  $Q_s$  — поперечная сила в сечении ( $s$ ):  $Q_s = R_x \cdot l - R_y \cdot m$ .

Формулировка задачи оптимизации распределения функции (параметров) жесткости в балке-стенке с использованием рамной аналогии позволяет предварительно решать вопрос об оптимальном распределении функции жесткости по контуру; уста-

навливая уровень перепада функции жесткости в пластине.

Задача оптимизации пластины решается для функции цели, выбранной либо как минимум среднеквадратичных отклонений величины главных напряжений, либо как минимум объемной функции пластины.

Для анизотропных (или ортотропных) пластин с постоянной толщиной исследуется функция цели, соответствующая минимуму дисперсии главных напряжений или иначе — минимум среднего значения квадрата отклонения величины главных напряжений от их среднего значения:

$$D_{\sigma} = \iint_{\Omega} (\sigma - \bar{\sigma})^2 p(\sigma) d\sigma \rightarrow \min$$

или, для дискретного множества точек ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),

$$D_{\sigma} = \sum_{i=1}^n (\sigma_{cp} - \sigma_i)^2 \cdot \frac{1}{n} \rightarrow \min. \quad (20)$$

Значения главных напряжений в пространстве осевых параметров жесткостей ( $q_x, q_y$ ) выступают здесь как случайные величины, однозначно определяющиеся в случайных точках с координатами ( $q_x, q_y$ ) или на оси их безразмерной характеристики  $e = \frac{q_y}{q_x}$ . Выбранная таким образом функция цели как минимум дисперсии расчетных (главных) напряжений соответствует условию максимального приближения к равнопрочной системе.

Для пластины с переменной толщиной исследуется объемная функция пластины:

$$V = \iint_{\Omega} h(x, y) dx dy,$$

для переменной толщины пластины, ограниченной снизу из условия прочности:

$$h(x, y) \geq \frac{\Phi(x, y)}{[\sigma]}$$

где  $\Phi(x, y)$  — функция расчетных усилий, соответствующая выбранному критерию прочности, характеризующему напряженное состояние материала в каждой точке.

Задача минимизации объемной функции пластины, удовлетворяющей условию прочности

$$V = \iint_{\Omega} h(x, y) dx dy \geq \frac{1}{[\sigma]} \iint_{\Omega} \Phi(x, y) dx dy \rightarrow \min, \quad (21)$$

приводит к решению уравнения Эйлера-Остроградского для функционала объема пластины  $\Phi[\varphi(x, y)]$  с ограничением из условия прочности:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \Phi_r \} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{ \Phi_s \} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ \Phi_t \} = 0, \quad (22)$$

где  $\Phi_r = \frac{\partial}{\partial r} \Phi$ ,  $\Phi_s = \frac{\partial}{\partial s} \Phi$ ,  $\Phi_t = \frac{\partial}{\partial t} \Phi$ ,

а  $\Phi = \Phi(r, s, t)$  — явная функция новых переменных  $r, s, t$ :

$$r = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad s = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}; \quad t = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

Так, например, для третьей теории прочности

$$\Phi [\varphi(x, y)] = \left[ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = [(t-r)^2 + 4s^2]^{\frac{1}{2}},$$

так что

$$\Phi_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{r-t}{\Phi}; \quad \Phi_s = \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{4s}{\Phi}; \quad \Phi_t = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{t-r}{\Phi}$$

и уравнение (22) примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{r-t}{\Phi} \right\} + 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ \frac{s}{\Phi} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{t-r}{\Phi} \right\} = 0, \quad (23)$$

где  $r-t = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -(t-r)$ ;  $s = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$  (24)

или после подстановки (24) в (23):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{1}{\Phi(x, y)} \right] + 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{1}{\Phi(x, y)} \right] + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \cdot \frac{1}{\Phi(x, y)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Для равнопрочной пластины с толщиной, выбранной на границе прочности:

$$h(x, y) = \frac{1}{[\sigma]} \cdot \Phi(x, y) \rightarrow \Phi(x, y) = [\sigma] \cdot h(x, y) \quad (26)$$

уравнение Эйлера-Остроградского (25) после подстановки (26) преобразуется в уравнение неразрывности Сен-Венана (4), тождественно обращающееся в нуль (при  $e = \gamma_x = \gamma_y = 1$  и  $f(e) - (1 + \gamma_x) + e(1 + \gamma_y) = 4$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{1}{h(x, y)} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{1}{h(x, y)} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right] + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \frac{1}{h(x, y)} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Отсюда устанавливается физический смысл условия Эйлера-Остроградского в вариационной задаче для функционала объема пластины переменной толщины при воздействии на нее произвольной контурной нагрузки, как условия равнопрочности системы. Отсюда вытекает, что условие минимума функции объема пластины совпадает с условием равнопрочности системы (и на границе и в области) не только для дискретных, но и для континуальных систем.

Приложение математической модели иллюстрируется на некоторых примерах оптимизации прямоугольных блок-стенок (см. [II]).

### Л и т е р а т у р а

И. К о п п е л ь П.И. Некоторые результаты оптимизации ортотропной балки-стенки. См. наст. сб., с. 15.

E. Jögi

#### The Mathematical Model of a Problem of Optimizing Anisotroping Plate of Variable Thickness

#### Summary

Equations are worked out for solving a problem of flat strained (or flat deformed) state in the most general case of anisotropy of a plate of variable thickness.

The design also has calculations of the parameters of optimization as a function of the plate's hardness or their correlation.

The regional conditions of the problem are described by a frame analogy, which makes it possible to carry out the most optimum distribution of hardness along the boarders for a wall with variable thickness and hardness.

The aimed function as a function of material's volume is formulated and its connection with the tension's function is determined.





### НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОПТИМИЗАЦИИ ОРТОТРОПНОЙ БАЛКИ-СТЕНКИ

Разрешающее уравнение Сен-Венана для функции Эри ( $\varphi$ ) ортотропной пластины постоянной толщины получится из [1] для частного случая, когда производные от непрерывной функции жесткостей (или толщины) равны нулю:

$$\nabla^4 \varphi(q) = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} q + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} [f(q) - q \gamma_x - \gamma_y] + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, \quad (1)$$

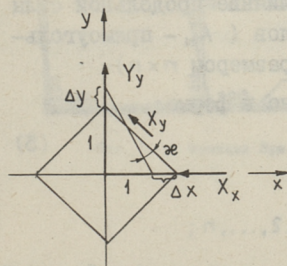
где  $f(q) = 1 + q + q \gamma_x + \gamma_y$ .

Введя коэффициенты  $\alpha = \frac{f(q) - q \gamma_x - \gamma_y}{q} = \frac{1}{q} (1 + q)$ ;  $\beta = \frac{1}{q}$ .

получим 
$$\nabla^4 \varphi(q) = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (2)$$

Величины констант  $\alpha$  и  $\beta$  устанавливаются из закона Гука:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= a_{11} X_x + a_{12} X_y \\ e_{yy} &= a_{21} X_y + a_{22} Y_y \\ e_{xy} &= a_{66} X_y \end{aligned} \right\} \text{Здесь: } \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_x}; & a_{12} &= -\frac{\gamma_x}{E_y}; \\ a_{22} &= \frac{1}{E_y}; & a_{21} &= -\frac{\gamma_y}{E_x}; \\ a_{66} &= \frac{1}{G}; & a_{12} &= a_{21}. \end{aligned}$$



откуда  $\frac{E_x}{E_y} = \frac{\gamma_y}{\gamma_x} = q$ .

$$\varkappa = \frac{\sigma}{2E_x} (1 + q + q \gamma_x + \gamma_y);$$

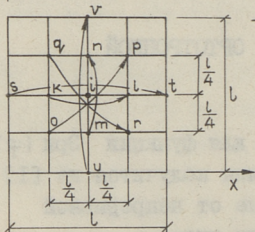
$$\gamma = 2\varkappa = \frac{\sigma}{E_x} (1 + q + q \gamma_x + \gamma_y);$$

$$e_{xy} = \frac{1}{G} X_y = \sigma \frac{1 + q + q \gamma_x + \gamma_y}{E_x} = \sigma \frac{1}{G},$$

$$\text{где } G = \frac{E_x}{1 + g + g\gamma_x + \gamma_y} = \frac{E_x}{f(g)}.$$

Сеточное уравнение для  $i$ -й точки квадратной сетки в общей форме имеет вид:

$$y \uparrow \quad a_i \varphi_i + a_k (\varphi_k + \varphi_l) + a_m (\varphi_m + \varphi_n) + a_p (\varphi_o + \varphi_p + \varphi_q + \varphi_r) + a_s (\varphi_s + \varphi_t) + a_u (\varphi_u + \varphi_v) = 0, \quad (3)$$



$$\text{где } a_i = 6 + 4\alpha + 6\beta; \quad a_p = \alpha;$$

$$a_k = -(2\alpha + 4); \quad a_s = 1;$$

$$a_m = -(2\alpha + 4\beta); \quad a_u = \beta.$$

Матричная форма системы алгебраических уравнений метода сеток имеет следующую структуру:

$$A \cdot \varphi + A_r \cdot \bar{\varphi} + A_0 = 0, \quad (4)$$

где  $A = \{a_{ij}\}$  - матрица коэффициентов внутренних узлов, отражающая их взаимное влияние на функцию  $(\varphi)$ ;

$i, j = 1, 2, \dots, n$ ;  $n$  - число внутренних узлов;

$A_r = \{\bar{a}_{km}\}$  - матрица коэффициентов контурных узлов, отражающая их влияние на функцию  $(\varphi)$  внутренних узлов;

$k = 1, 2, \dots, n$ ;  $m = n+1, n+2, \dots, n+r$ ;  $r$  - число контурных узлов,

$A_0 = |A_\varphi + A_N|$  - матрица коэффициентов внеконтурных узлов, равная сумме двух матриц  $A_\varphi$  и  $A_N$ ;

$A_\varphi$  - отражающей влияние функции  $(\varphi)$  приграничного узла ( $A_\varphi$  - диагональная матрица  $n$ -го порядка);

$A_N$  - отражающей влияние продольной силы контурных узлов ( $A_N$  - прямоугольная матрица размером  $n \times r$ ).

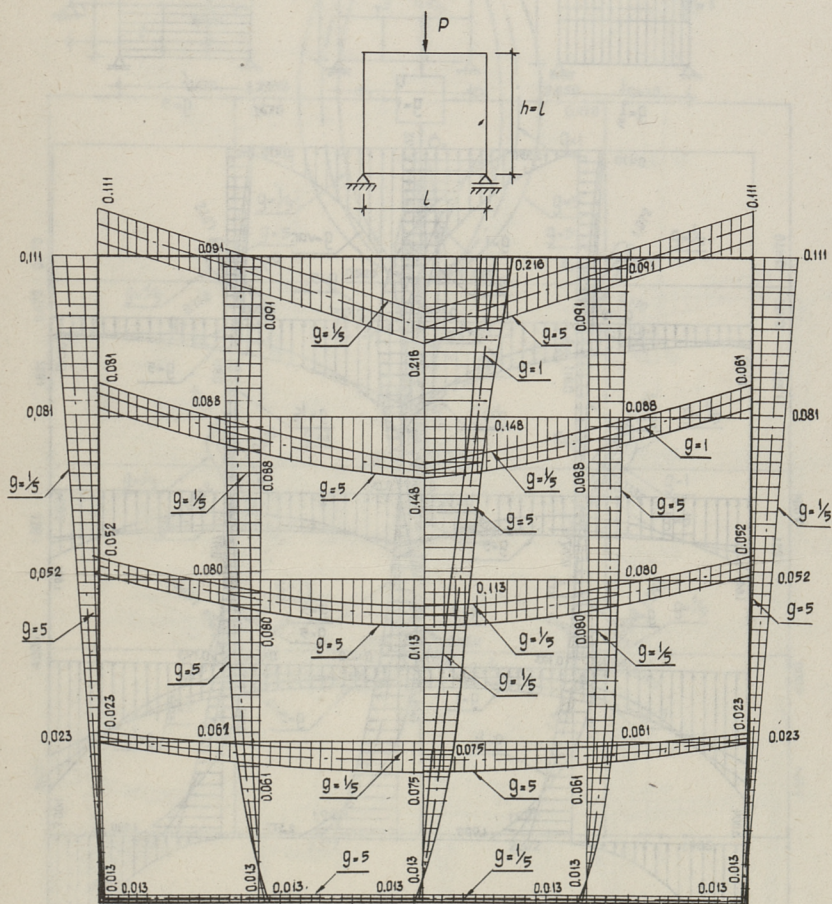
Уравнение (4) может быть записано в форме:

$$D \varphi + \bar{D}_p \cdot (Pl) = 0, \quad (5)$$

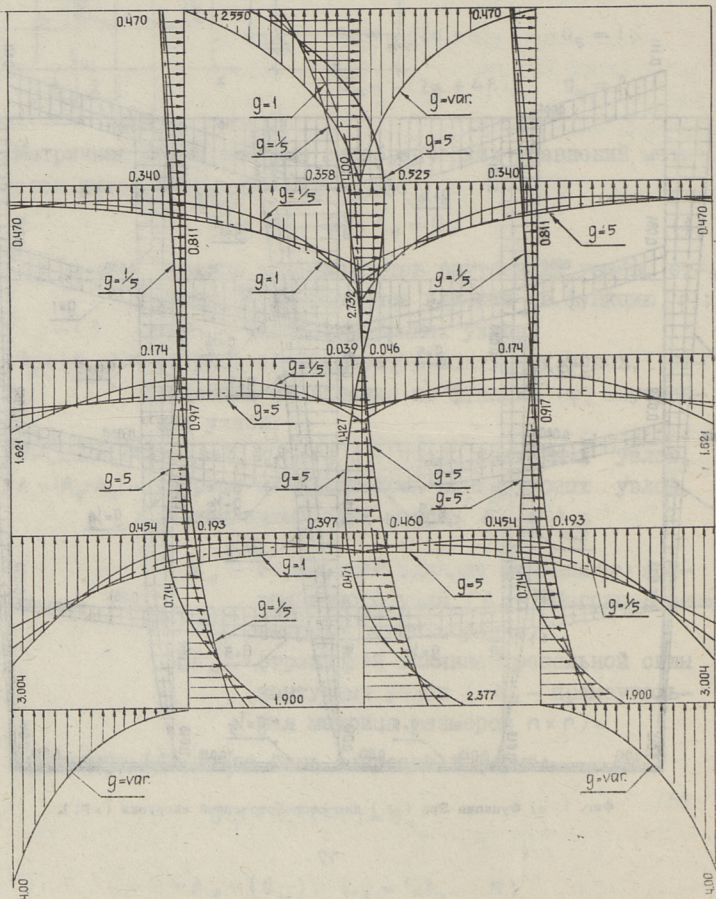
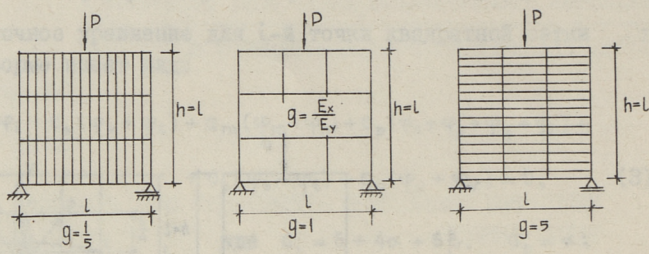
где

$$D = A + A_\varphi = \{d_{ij}\}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$$

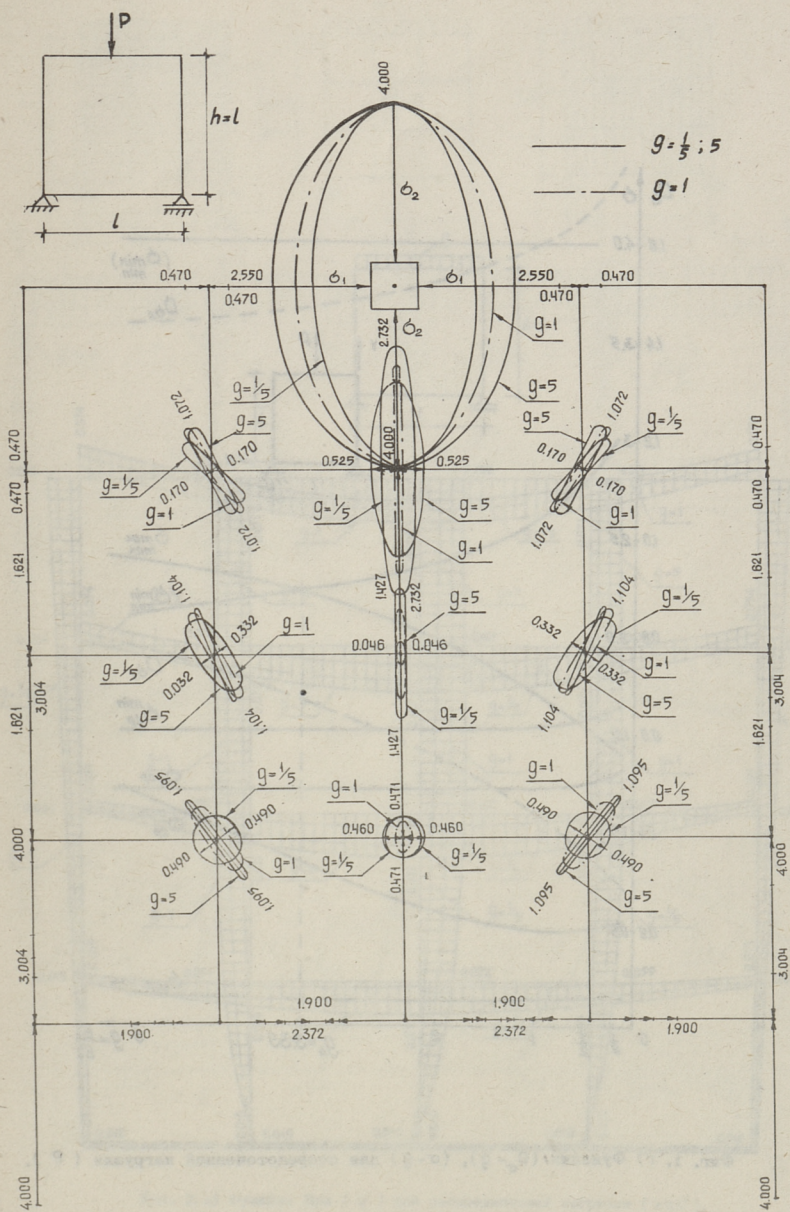
$$\bar{D}_p = A_r \bar{\varphi} + A_N \cdot \bar{N} \cdot 2\lambda = \{\bar{d}_{km}\}; \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad m = n+1, n+2, \dots, n+r.$$



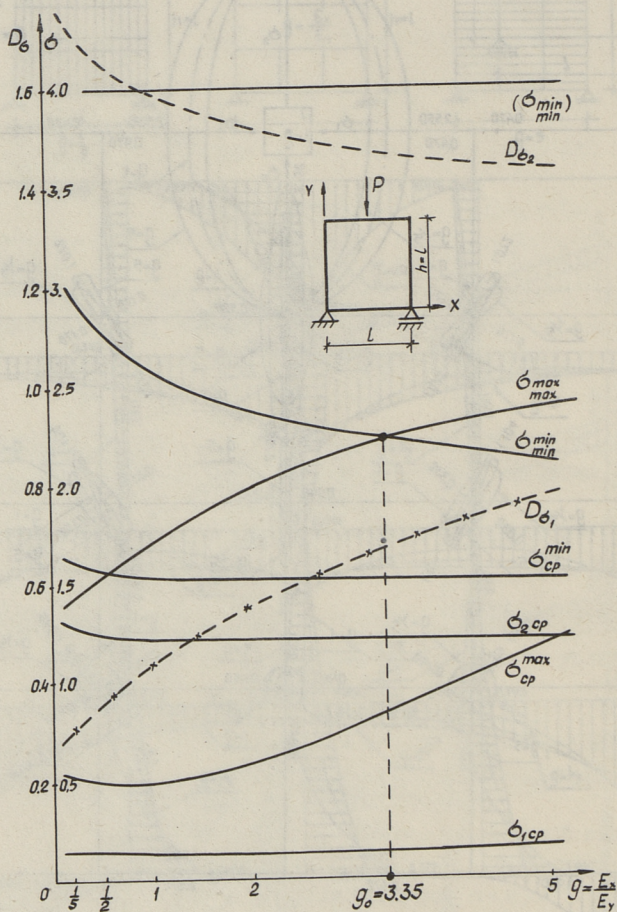
Фиг. 1. а) Функция Эри ( $\varphi$ ) для сосредоточенной нагрузки ( $\times PL$ ).



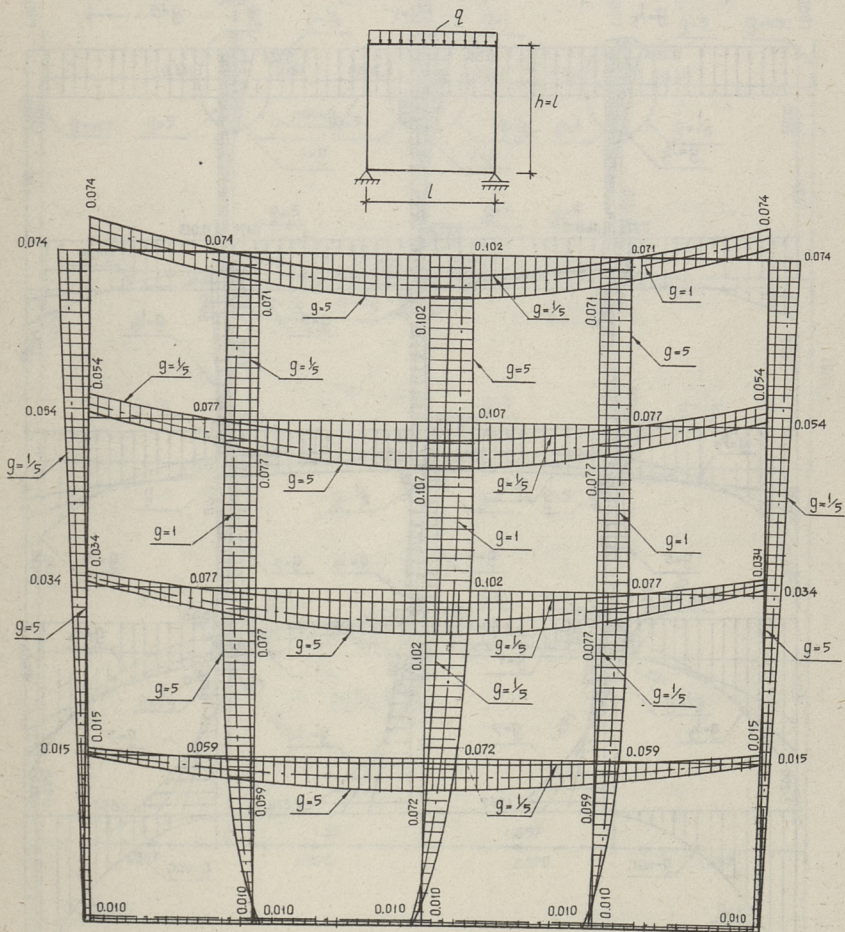
Фиг. 1. б) Напряжения ( $\sigma_x, \sigma_y$ ) от сосредоточенной нагрузки ( $\times \frac{P}{l}$ ).



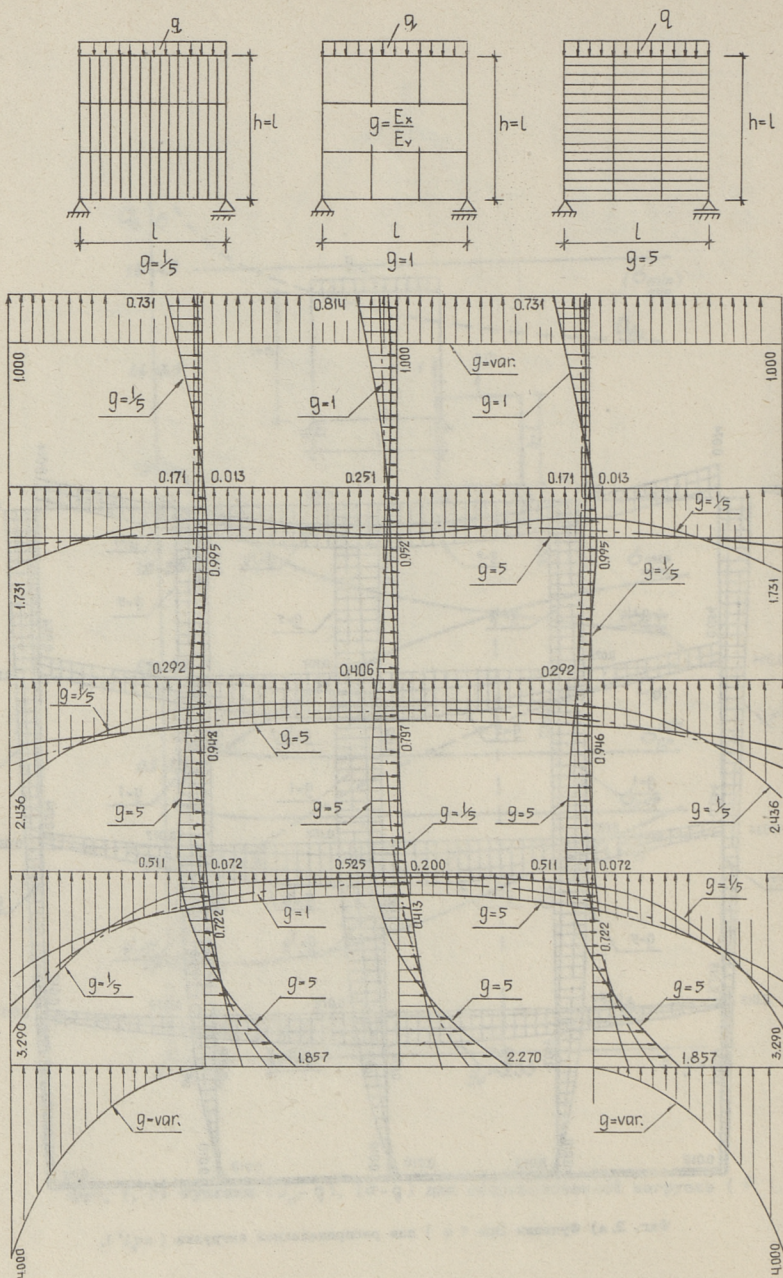
Фиг. 1. в) Главные напряжения в узлах сетки от сосредоточенной нагрузки ( $\times \frac{P}{l}$ ).



Фиг. 1. г) Функции  $(D_\sigma - g)$ ,  $(\sigma - g)$  для сосредоточенной нагрузки  $(P)$ .

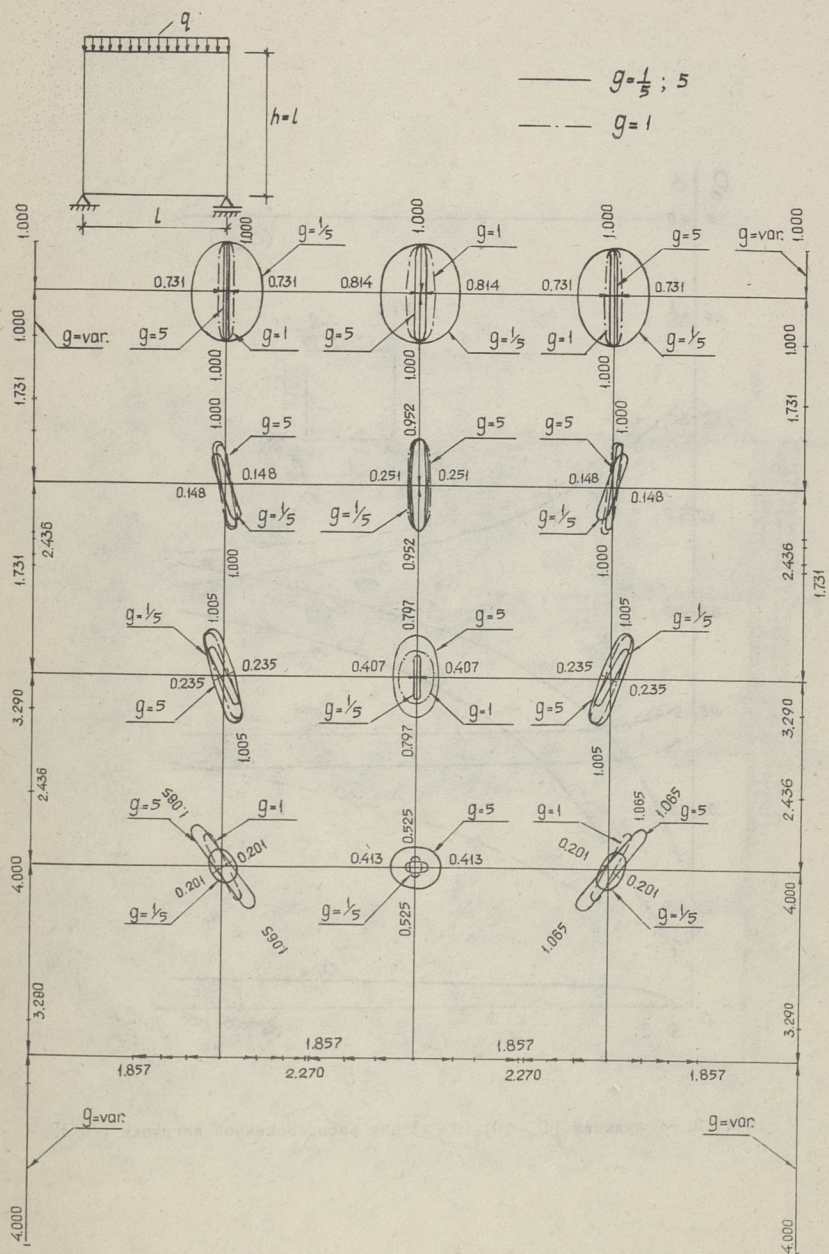


Фиг. 2. а) Функция Эри ( $\phi$ ) для распределенной нагрузки ( $\times q l^4$ ).

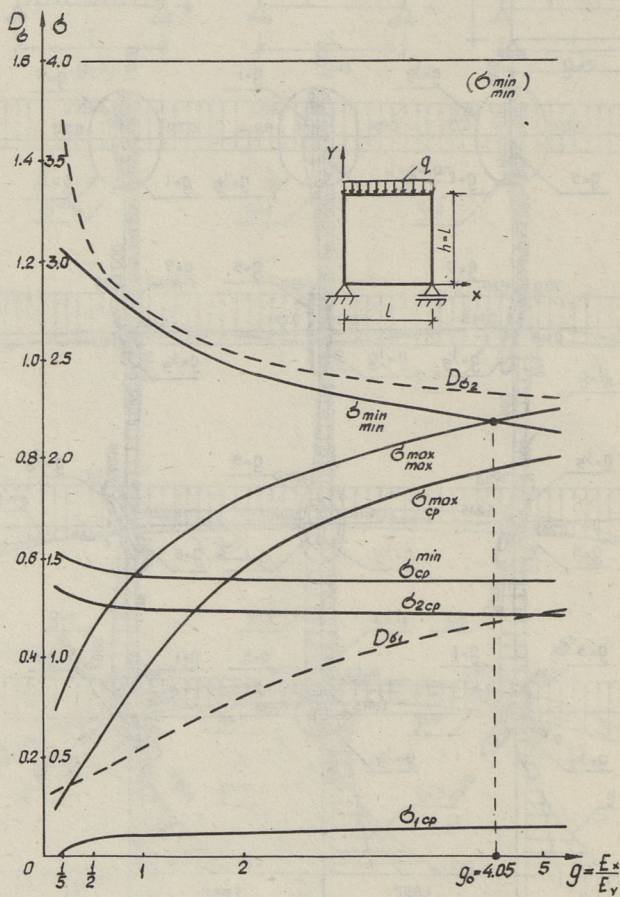


Фиг. 2. б) Напряжения ( $\sigma_x, \sigma_y$ ) от распределенной нагрузки ( $\times q$ ).

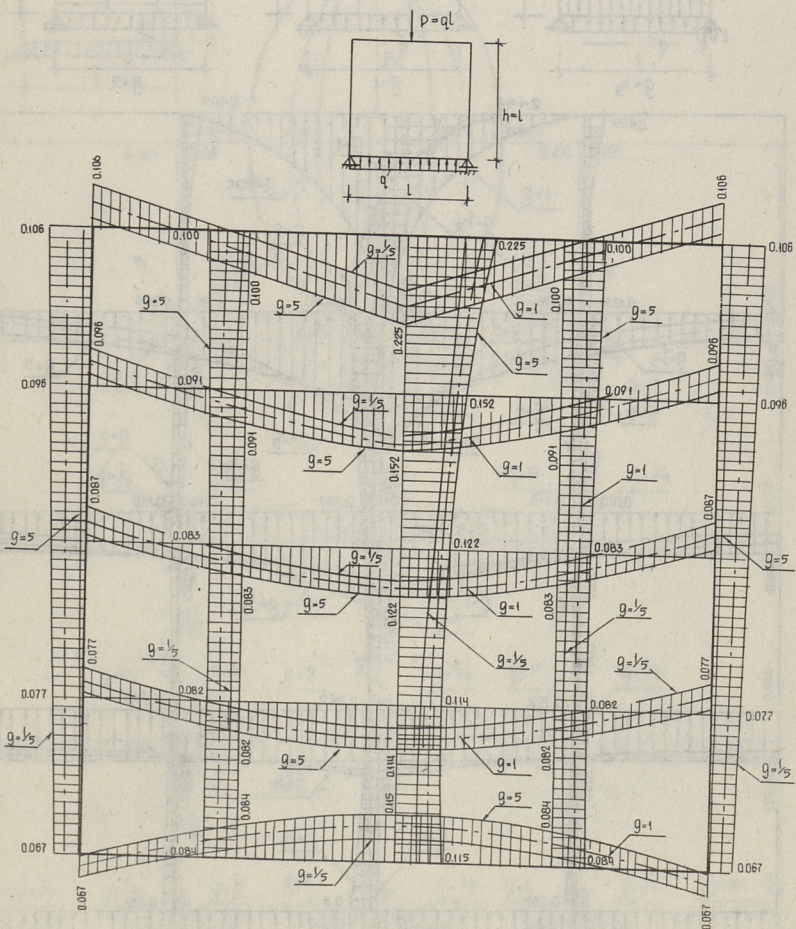




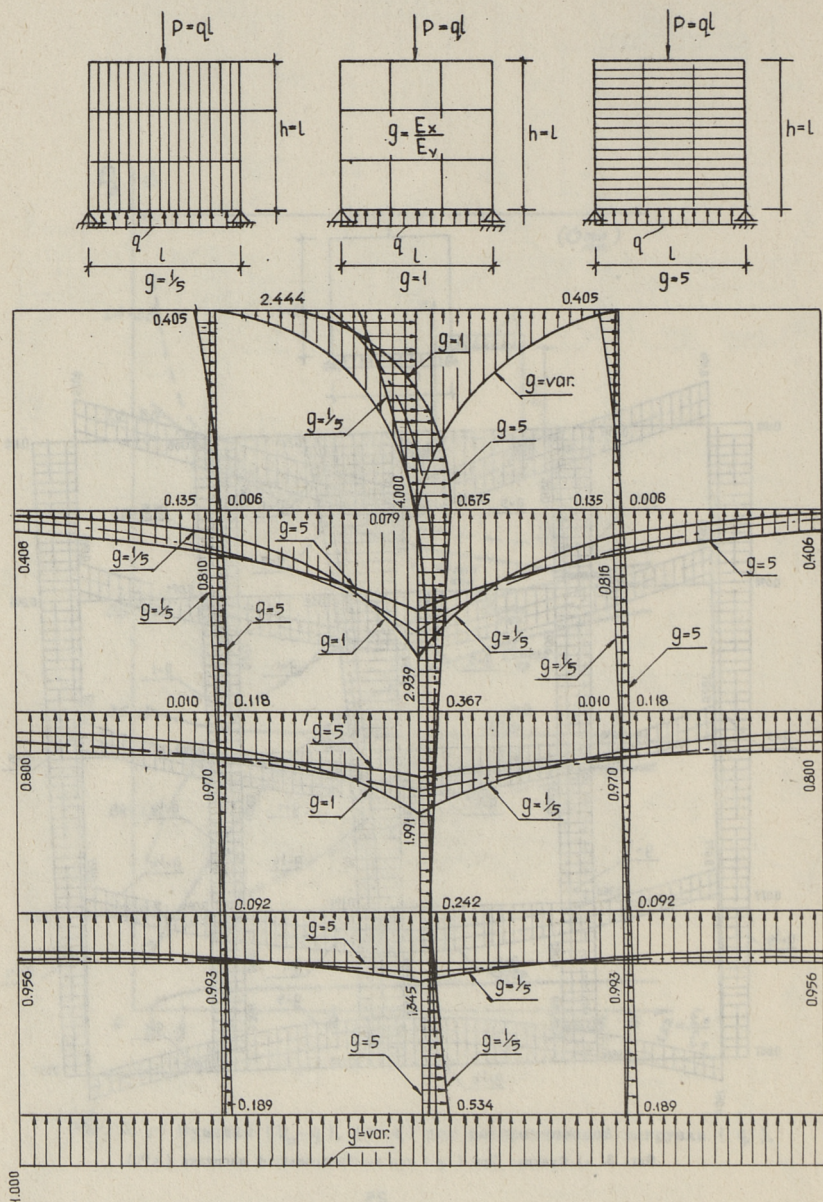
Фиг. 2. в) Главные напряжения в узлах сетки от распределенной нагрузки ( $\times g$ ).



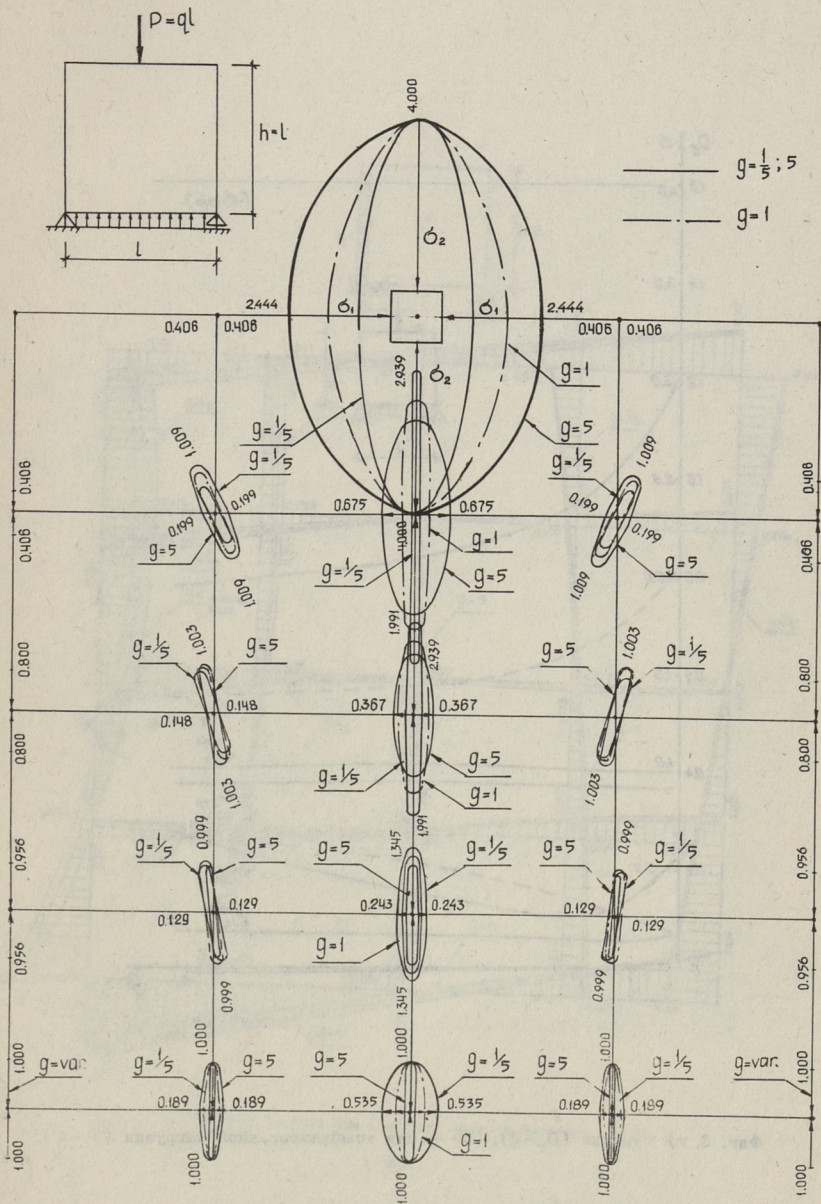
Фиг. 2. г) Функции  $(D_\sigma - q)$ ,  $(\sigma - q)$  для распределенной нагрузки  $(q)$ .



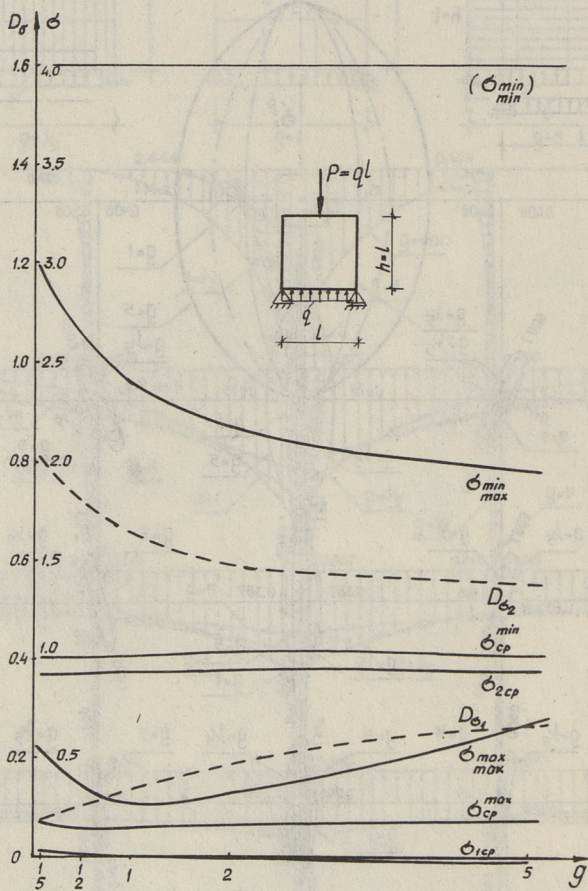
Фиг. 3. а) Функция Эри ( $\phi$ ) для комбинированной нагрузки ( $\times PL$ ).



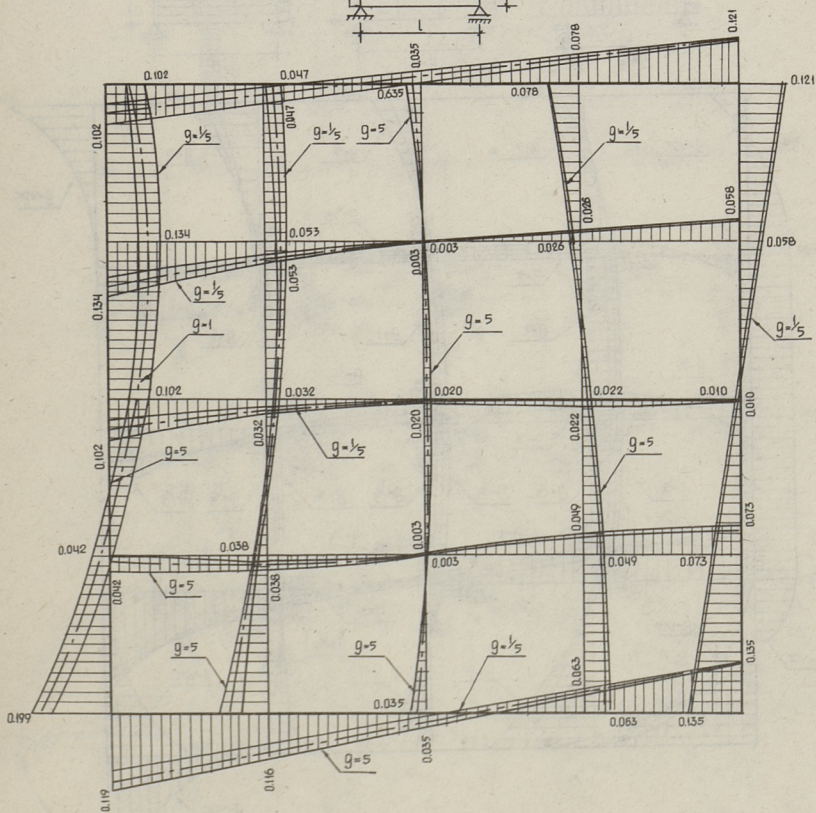
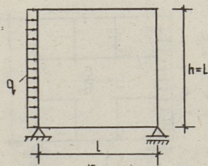
Фиг. 3. б) Напряжения ( $\sigma_x, \sigma_y$ ) от комбинированной нагрузки ( $\times \frac{P}{l}$ ).



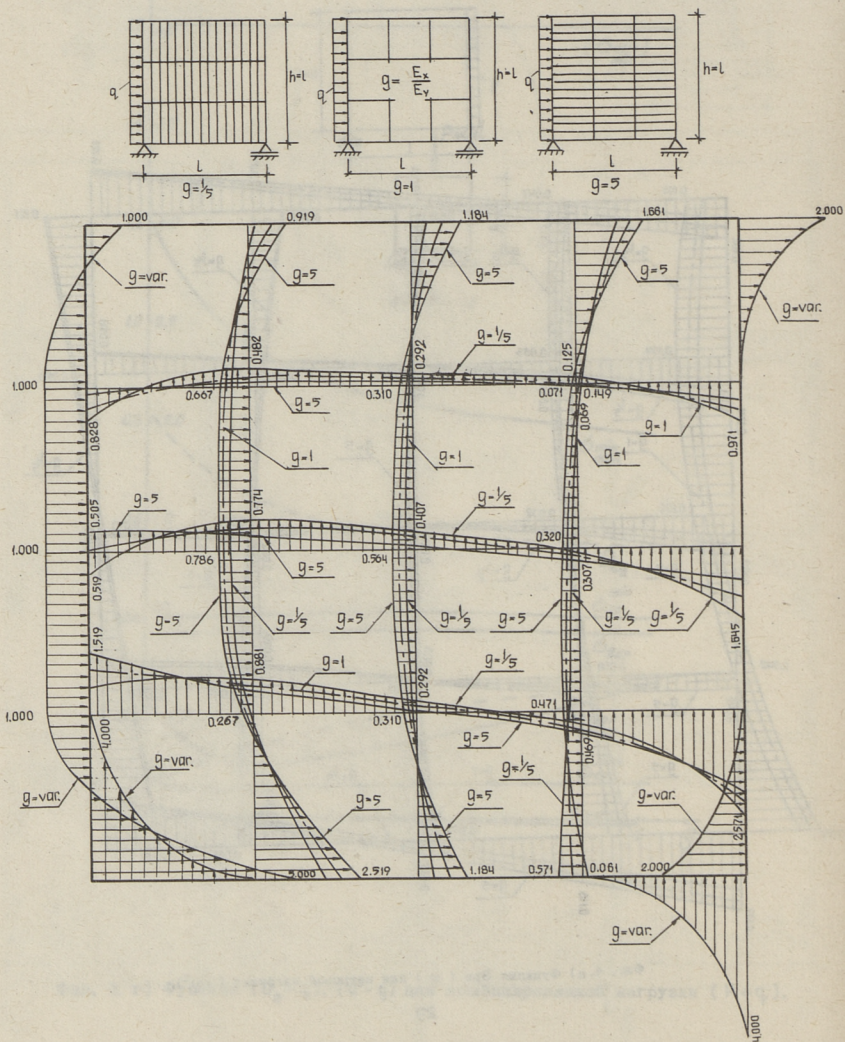
Фиг. 3. в) Главные напряжения в узлах сетки от комбинированной нагрузки ( $\times \frac{p}{l}$ ).



Фиг. 3. г) Функции  $(D_\sigma - g)$ ,  $(\sigma - g)$  для комбинированной нагрузки  $(P+q)$ .

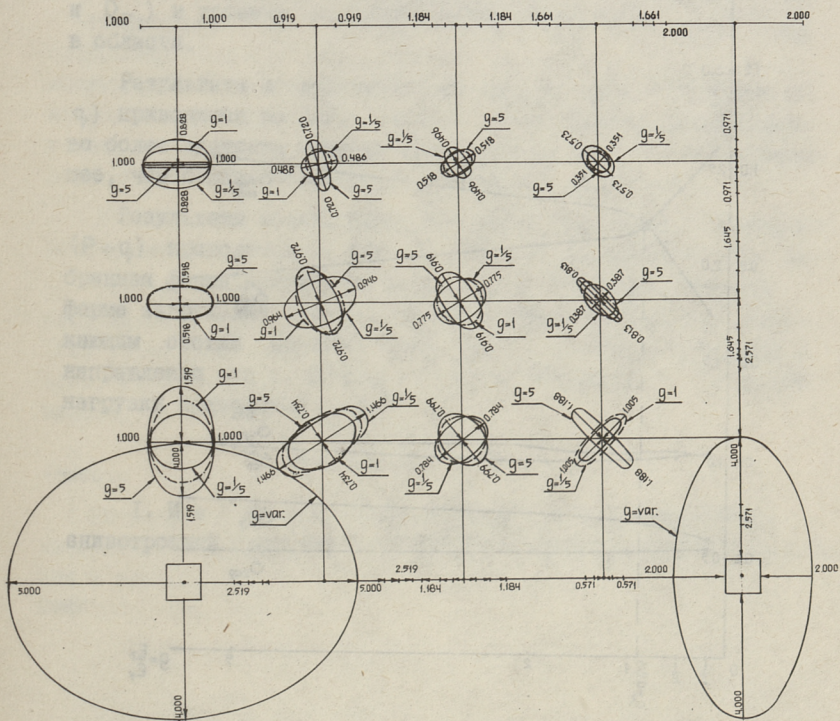
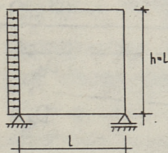


Фиг. 4. а) Функция Эри ( $\varphi$ ) для ветровой нагрузки ( $\times q l^2$ ).

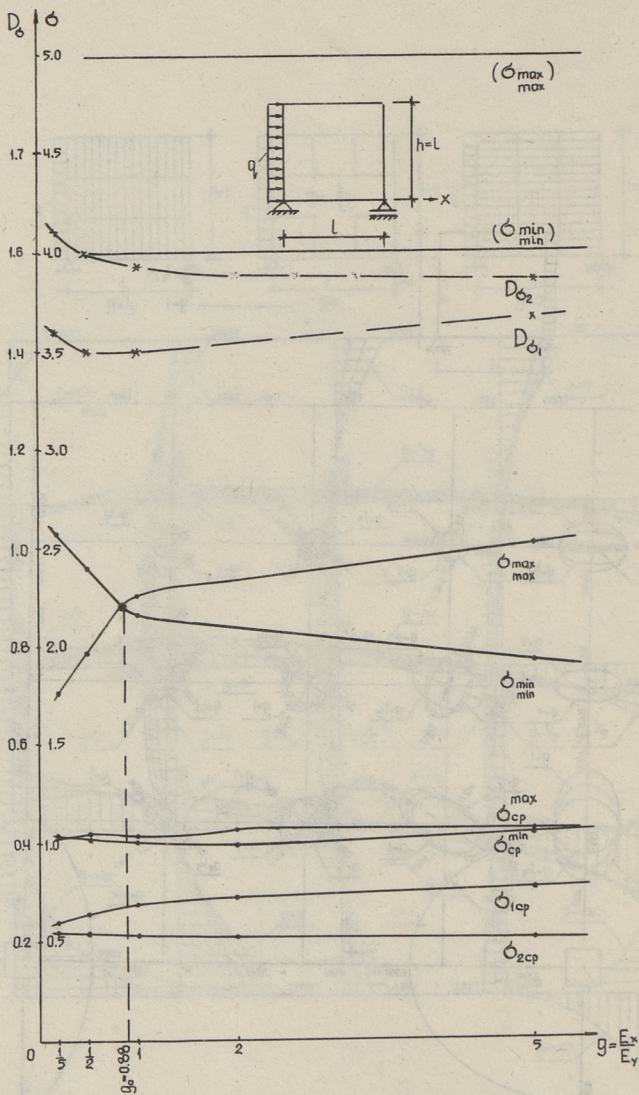


Фиг. 4. б) Напряжения ( $\sigma_x, \sigma_y$ ) от ветровой нагрузки ( $xq$ ).





Фиг. 4, в) Главные напряжения в узлах сетки от ветровой нагрузки ( $\times q$ ),



Фиг. 4. г) Функции  $(D_0 - q)$ ,  $(\sigma - q)$  для ветровой нагрузки.

- $D$  - матрица коэффициентов при неизвестных ( $\varphi_i$ );  
 $\bar{D}_p$  - матрица свободных членов от единичных граничных воздействий ( $P_l = 1$ );  
 $\bar{\varphi}$  и  $\bar{N}$  - матрицы-столбцы от единичных воздействий;  
 $P_l$  - параметр граничного воздействия.

Общее решение системы для функции напряжений (Эри):

$$\varphi = -D^{-1} \cdot \bar{D}_p(P_l), \quad (6)$$

где  $D^{-1}$  - матрица коэффициентов влияния.

Задача оптимизации ортотропных систем рассматривается для квадратных балок-стенок при значениях параметра жесткости  $q = \frac{E_x}{E_y} = \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1, 2, 5$ . В качестве функции цели исследуется дисперсия распределения главных напряжений ( $D_{\sigma_1}$  и  $D_{\sigma_2}$ ) и уровень значений главных напряжений  $\sigma_{\min}$  и  $\sigma_{\max}$  в области.

Результаты исследования для простых форм загрузки ( $P, q$ ) приводятся на фиг. 1 и 2. Здесь выявляется преимущество более жесткого армирования в направлении оси  $x$  тем больше, чем больше значение параметра жесткости ( $q$ ).

Результаты исследования для комбинированной нагрузки ( $P+q$ ) приводятся на фиг. 3. При этом выявляется, что выбранная форма комбинаций нагрузок соответствует простой форме загрузки ( $P$ ) при новых граничных условиях с вытекающим отсюда преимуществом более жесткого армирования в направлении оси  $x$ . Результаты исследования для ветровой нагрузки приводятся на фиг. 4.

#### Л и т е р а т у р а

1. И е г и Э.М. Математическая модель оптимизации анизотропной пластины переменной толщины. См. наст. сб., с.3.

Some Results of Orthotroping Beam-Wall  
Optimization

Summary

A resolving equation for the investigation of the flat tense state of orthotroping beam-wall with the description of regional conditions with a frame analogy is made in the design.

The problem of the influence of the orthotropy factor on the tense state of a wall is examined and the criterion of choosing its optimum meaning is determined.

As an aim function the distribution dispersion of the quantity of main tensities and the level of their values in the region is chosen.

The task of the optimization is solved for square beam-walls.

Э.М. Иеги, М.К. Ныммэ

К ПОСТРОЕНИЮ АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ  
СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В статье разрабатывается алгоритм статического расчета пространственных стержневых систем по методу конечных элементов (МКЭ), приспособленный для оптимизации пространственных конструкций.

Формируется матрица жесткости системы как структурная суперматрица с элементами-подматрицами, соответствующими матрицам жесткости подсистем. При этом последовательно формируется матрица жесткости узла, стержня как системы двух узлов, контура, как системы четырех стержней и параллелепипеда как системы двух контуров.

Исследуются свойства матриц жесткостей и методика их формирования с минимальной исходной информацией.

Равновесие узла ( $i$ ) в пространственной системе стержней, сходящихся в этом узле ( $i-1, i-2, \dots, i-n_i$ ) описывается (без учета внешних сил) в матричной форме на фиг. 1. При этом, учет внешних сил, приложенных в этом узле, осуществляется так, что

$$F_i = K_i \cdot \delta = R_i;$$

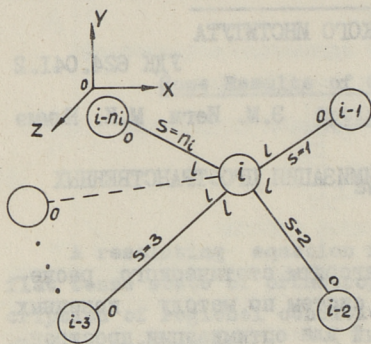
(вместо  $F_i = K_i \cdot \delta$  без учета внешних сил).

Матрица жесткости ( $K_i$ ) составляется здесь как последовательность (строка) матриц жесткостей стержней ( $s$ ), входящих в систему ( $s = 1, 2, \dots, n$ ), приложенных к узлу ( $i$ ) концами ( $e$ ) так, что

$$K_{ii} = \sum_{s=1}^{n_i} K_{ee}^s, \text{ а } K_{ij}^s = K_{e0}^s.$$

Содержание матриц  $K_{ee}^{(s)}$  и  $K_{e0}^{(s)}$  выявляется из структуры матрицы жесткости для стержня ( $s$ ) в общих координатах ( $K_s$ ), определяющейся через матрицу жесткости в местных координатах

тах ( $K_w^{(s)}$ ) и матрицу направляющих косинусов ( $L_s$ ) (см. фиг. 2).



$$F_i = K_i \cdot \delta^{(i)} = 0, \text{ где}$$

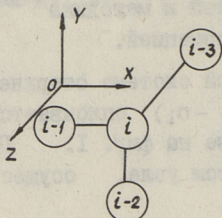
$$F_i = \begin{pmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{pmatrix}; \quad \delta^{(i)} = \begin{pmatrix} \delta_i \\ \delta_{i-1} \\ \vdots \\ \delta_{i-n} \end{pmatrix};$$

$K_i = K_{i,i} K_{i,i-1} K_{i,i-2} \dots K_{i,i-n_i}$  так, что

$$K_{i,i} = \sum_{s=1}^{n_i} K_{i,i}^s = \sum_{s=1}^{n_i} K_{ii}^s;$$

$K_{i,j}^s = K_{i,0}^s$ , где  $j = i-1, i-2, \dots, i-n_i$ ;  $s = 1, 2, \dots, n_i$ .

Для узла с ортогональной системой стержней:

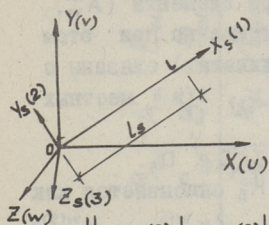


$$F_i = \begin{pmatrix} K_{i,i} K_{i,i-1} K_{i,i-2} K_{i,i-3} \end{pmatrix} \cdot \delta = 0;$$

$$F_i = \begin{pmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{pmatrix}; \quad \delta^{(i)} = \begin{pmatrix} \delta_i^{(i)} \\ \delta_{i-1}^{(i)} \\ \delta_{i-2}^{(i)} \\ \delta_{i-3}^{(i)} \end{pmatrix}, \text{ где } \delta_j^{(i)} = j = i, i-1, i-2, i-3 \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \\ \varphi_{xj} \\ \varphi_{yj} \\ \varphi_{zj} \end{pmatrix}$$

Фиг. 1. Равновесие узла в пространственной системе стержней.

Анализ свойств матрицы жесткости стержня (s) показывает, что элементы матрицы  $K_s$  обладают частичной симметрией



$$K_s = L_s^{-1} K_w(s) L_s, \quad \text{где:}$$

$$L_s = \Gamma[\lambda_s, \lambda_s, \lambda_s, \lambda_s]; \quad \lambda_s =$$

$$\begin{matrix} X & Y & Z \\ \left\| \begin{array}{ccc} K & L & m \\ n & \rho & S \\ t & u & v \end{array} \right\| & \begin{matrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{matrix} \end{matrix}$$

$$K_w(s) = \begin{matrix} \left\| \begin{array}{cc} K_{oo}^{w(s)} & K_{oL}^{w(s)} \\ K_{Lo}^{w(s)} & K_{LL}^{w(s)} \end{array} \right\| = \begin{matrix} \left\| \begin{array}{cc} K_{F_o\Delta_o}^{w(s)} & K_{F_o\varphi_o}^{w(s)} \\ K_{M_o\Delta_o}^{w(s)} & K_{M_o\varphi_o}^{w(s)} \end{array} \right\| & \left\| \begin{array}{cc} K_{F_o\Delta_L}^{w(s)} & K_{F_o\varphi_L}^{w(s)} \\ K_{M_o\Delta_L}^{w(s)} & K_{M_o\varphi_L}^{w(s)} \end{array} \right\| \end{matrix}, \quad \text{где:}$$

$$F_o^w = \begin{matrix} \left\| \begin{array}{c} F_{x_o}^w \\ F_{y_o}^w \\ F_{z_o}^w \end{array} \right\|; \quad M_o^w = \begin{matrix} \left\| \begin{array}{c} M_{x_o}^w \\ M_{y_o}^w \\ M_{z_o}^w \end{array} \right\|; \quad \Delta_o^w = \begin{matrix} \left\| \begin{array}{c} W_{1o} \\ W_{2o} \\ W_{3o} \end{array} \right\|; \quad \varphi_o^w = \begin{matrix} \left\| \begin{array}{c} \varphi_{1o} \\ \varphi_{2o} \\ \varphi_{3o} \end{array} \right\|;$$

$$F_L^w = \begin{matrix} \left\| \begin{array}{c} F_{x_L}^w \\ F_{y_L}^w \\ F_{z_L}^w \end{array} \right\|; \quad M_L^w = \begin{matrix} \left\| \begin{array}{c} M_{x_L}^w \\ M_{y_L}^w \\ M_{z_L}^w \end{array} \right\|; \quad \Delta_L^w = \begin{matrix} \left\| \begin{array}{c} W_{1L} \\ W_{2L} \\ W_{3L} \end{array} \right\|; \quad \varphi_L^w = \begin{matrix} \left\| \begin{array}{c} \varphi_{1L} \\ \varphi_{2L} \\ \varphi_{3L} \end{array} \right\|.$$

$$K_s = \begin{matrix} \left\| \begin{array}{cc} K_{oo}^s & K_{oL}^s \\ K_{Lo}^s & K_{LL}^s \end{array} \right\| = \begin{matrix} \left\| \begin{array}{cc} K_{F_o\Delta_o}^s & K_{F_o\varphi_o}^s \\ K_{M_o\Delta_o}^s & K_{M_o\varphi_o}^s \end{array} \right\| & \left\| \begin{array}{cc} K_{F_o\Delta_L}^s & K_{F_o\varphi_L}^s \\ K_{M_o\Delta_L}^s & K_{M_o\varphi_L}^s \end{array} \right\| \end{matrix}, \quad \text{где:}$$

$$F_o = \begin{matrix} \left\| \begin{array}{c} F_{x_o} \\ F_{y_o} \\ F_{z_o} \end{array} \right\|; \quad M_o = \begin{matrix} \left\| \begin{array}{c} M_{x_o} \\ M_{y_o} \\ M_{z_o} \end{array} \right\|; \quad \Delta_o = \begin{matrix} \left\| \begin{array}{c} u_o \\ v_o \\ w_o \end{array} \right\|; \quad \varphi_o = \begin{matrix} \left\| \begin{array}{c} \varphi_{x_o} \\ \varphi_{y_o} \\ \varphi_{z_o} \end{array} \right\|;$$

$$F_L = \begin{matrix} \left\| \begin{array}{c} F_{x_L} \\ F_{y_L} \\ F_{z_L} \end{array} \right\|; \quad M_L = \begin{matrix} \left\| \begin{array}{c} M_{x_L} \\ M_{y_L} \\ M_{z_L} \end{array} \right\|; \quad \Delta_L = \begin{matrix} \left\| \begin{array}{c} u_L \\ v_L \\ w_L \end{array} \right\|; \quad \varphi_L = \begin{matrix} \left\| \begin{array}{c} \varphi_{x_L} \\ \varphi_{y_L} \\ \varphi_{z_L} \end{array} \right\|.$$

Фиг. 2. Матрица жесткости стержня.

свойств, вытекающей из свойств коэффициентов матрицы

$K_{w(s)}$  (см. фиг. 3) так, что все элементы матрицы жесткостей  $K_{w(s)}$  и  $K_s$  описываются через четыре элемента ( $A_w^{(s)}$ ,  $B_w^{(s)}$ ,  $C_w^{(s)}$ ,  $D_w^{(s)}$ ) и ( $A_s, B_s, C_s, D_s$ ), соответственно при этом все элементы матрицы  $K_s$  (в общих координатах) связаны с соответствующими элементами матрицы  $K_{w(s)}$  (в местных координатах) преобразованием вида:

$$R_s = \lambda_s' R_w^{(s)} \lambda_s, \text{ где } R_s = A_s, B_s, C_s, D_s.$$

Симметрия свойств матриц  $K_{w(s)}$  и  $K_s$  описывается как симметрия подматриц ( $K_{00}^{w(s)}$  и  $K_{ee}^{w(s)}$ ) или ( $K_{oe}^{w(s)}$  и  $K_{eo}^{w(s)}$ ) для матрицы в местных координатах ( $K_{w(s)}$ ), совпадающее с симметрией подматриц ( $K_{00}^s$  и  $K_{ee}^s$ ) или ( $K_{oe}^s$  и  $K_{eo}^s$ ) для матрицы в общих координатах ( $K_s$ ) следующим образом:

$$K_{00} = \begin{vmatrix} A_{00} & B_{00} \\ B'_{00} & C_{00} \end{vmatrix}; \quad K_{ee} = \begin{vmatrix} A_{ee} & -B_{ee} \\ -B'_{ee} & C_{ee} \end{vmatrix},$$

$$R_{ee} = (-1)^{s+t} R_{00}, \text{ где } R_{ee} = \vee A_{ee} \vee B_{ee} \vee C_{ee}$$

$$R_{00} = \vee A_{00} \vee B_{00} \vee C_{00}$$

так, что:

$$A_{ee} = (-1)^2 A_{00}; \quad B_{ee} = (-1)^3 B_{00}; \quad C_{ee} = (-1)^4 C_{00}$$

$$K_{oe} = \begin{vmatrix} -A_{oe} & B_{oe} \\ -B'_{oe} & D_{oe} \end{vmatrix}; \quad K_{eo} = \begin{vmatrix} -A_{eo} & -B_{eo} \\ B'_{eo} & D_{eo} \end{vmatrix},$$

$$R_{eo} = (-1)^{s+t} R_{oe}, \text{ где } R_{eo} = \vee A_{eo} \vee B_{eo} \vee C_{eo}$$

$$R_{oe} = \vee A_{oe} \vee B_{oe} \vee C_{oe}$$

так, что:

$$A_{eo} = (-1)^2 A_{oe}; \quad B_{eo} = (-1)^3 B_{oe}; \quad D_{eo} = (-1)^4 D_{oe};$$

$s+t$  - сумма индексов  $s$ -й строки и  $t$ -го столбца в подматрице.

Равновесие стержня ( $s$ ) в системе двух узлов ( $i, j$ ) описывается (без учета внешних сил) в матричной форме на фиг.4.

Матрица жесткости ( $K^s$ ) составляется здесь как квазидиагональная матрица с элементами-подматрицами жесткостей, соответствующих каждому из узлов ( $K_i, K_j$ ) раздельно так, что

$$K^s = \begin{vmatrix} K_i & 0 \\ 0 & K_j \end{vmatrix} \text{ при этом матрицы } K_i \text{ и } K_j$$

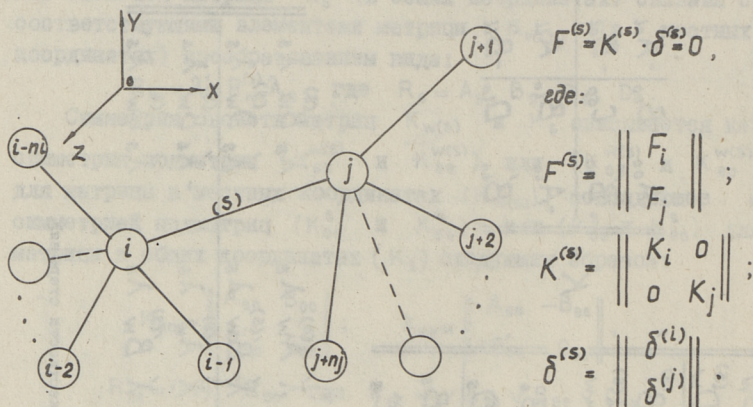
имеют структуру, показанную там же.



$$\begin{aligned}
 K_{W^{(S)}} &= \begin{vmatrix} K_{00}^{W(S)} & K_{0l}^{W(S)} \\ K_{l0}^{W(S)} & K_{ll}^{W(S)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_w^{(S)} & B_w^{(S)} & -A_w^{(S)} & B_w^{(S)} \\ B_w^{(S)} & C_w^{(S)} & -B_w^{(S)} & D_w^{(S)} \\ -A_w^{(S)} & -B_w^{(S)} & A_w^{(S)} & -B_w^{(S)} \\ B_w^{(S)} & D_w^{(S)} & -B_w^{(S)} & C_w^{(S)} \end{vmatrix}, \\
 K &= \begin{vmatrix} A_{00} & B_{00} & -A_{0l} & B_{0l} \\ B'_{00} & C_{00} & -B'_{0l} & D_{0l} \\ -A_{l0} & -B_{l0} & A_{ll} & -B_{ll} \\ B'_{l0} & D_{l0} & -B'_{ll} & C_{ll} \end{vmatrix} \\
 K &= \begin{vmatrix} A_s & B_s & -A_s & B_s \\ B'_s & C_s & -B'_s & D_s \\ -A_s & -B_s & A_s & -B_s \\ B'_s & D_s & -B'_s & C_s \end{vmatrix}, \\
 K_s &= \begin{vmatrix} \lambda'_s A_w^{(S)} \lambda_s & \lambda'_s B_w^{(S)} \lambda_s & -\lambda A_w^{(S)} \lambda_s \\ \lambda'_s B_w^{(S)} \lambda_s & \lambda'_s C_w^{(S)} \lambda_s & -\lambda B_w^{(S)} \lambda_s \\ -\lambda'_s A_w^{(S)} \lambda_s & -\lambda'_s B_w^{(S)} \lambda_s & \lambda A_w^{(S)} \lambda_s \\ \lambda'_s B_w^{(S)} \lambda_s & \lambda'_s D_w^{(S)} \lambda_s & -\lambda B_w^{(S)} \lambda_s \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Фиг. 3. Структура матрицы жесткости стержня.

Статический расчет пространственных систем наиболее часто представляется как последовательность статических расчетов плоских структур, с учетом пространственности



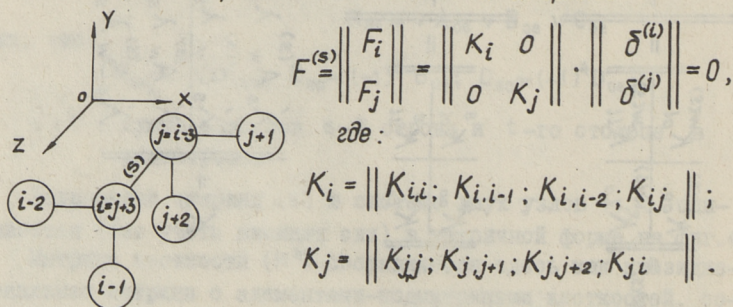
$$K_i = \begin{Bmatrix} K_{i,i}; & K_{i,i-m}; & K_{i,j} \end{Bmatrix} \quad \text{где } m=1,2,\dots, n_i;$$

$$\delta^{(i)} = (\delta_i, \delta_{i-m}, \delta_j)'$$

$$K_j = \begin{Bmatrix} K_{j,j}; & K_{j,j+p}; & K_{j,i} \end{Bmatrix} \quad \text{где } p=1,2,\dots, n_j.$$

$$\delta^{(j)} = (\delta_j, \delta_{j+p}, \delta_i)'$$

Для стержня с ортогональной системой стержней:



Фиг. 4. Равновесие стержня в системе двух узлов.

действия сил и перемещений. С этой целью исследуется равновесие плоской стержневой системы контура как с учетом, так и без учета ветровых связей в его плоскости (см. фиг. 5). Здесь приводится общая структура матрицы жесткости контура с учетом и без учета ветровых связей так, что

$$K_{n\lambda} = \{K_{ij}\}, \quad \text{где } i, j = 1, 2, 3, 4.$$

При этом: I) матрицы  $K_{ii}$  (для  $j = i$ ) отражают влияние единичных перемещений  $i$ -го узла на внутренние силы этого же узла, образуясь из суммы матриц жесткостей стержней, сходящихся в этом узле ( $i$ )

$$K_{ii} = \sum_{s=1}^m K_{ii}^{(s)};$$

где  $m$  - число стержней, сходящихся в узле ( $i$ );

2) матрицы  $K_{i,j}$  (для  $i \neq j$ ) отражают влияние единичных перемещений  $j$ -го узла на внутренние силы узла ( $i$ ), являясь матрицей жесткости одного ( $s$ -го) стержня  $K_{ij}$ , где  $s$  - переменный индекс стержней, соединяющих узлы ( $i, j$ ).

Матрица жесткости контура ( $K_{n\lambda}$ ) отражает ее топологические свойства и может быть всегда представлена как произведение полной матрицы жесткости плоской системы-контура ( $K_{n\lambda}$ ), учитывающей все взаимные связи узлов для  $i, j = 1, 2, 3, 4$  и  $s = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  на матрицу инцидентности ( $J$ ), описывающей существующие (I) и несуществующие связи (0) в системе.

Матрица жесткости для контура без ветровых связей ( $K_{n\lambda}^0$ ) получится как произведение:

$$K_{n\lambda}^0 = K_{n\lambda} \cdot J,$$

где  $J$  матрица элементов Кронекера (0, I) так, что:

$$\begin{cases} a_{ij} = 0, & \text{если нет связи } i-j; \\ a_{ij} = 1, & \text{если есть связь } i-j. \end{cases}$$

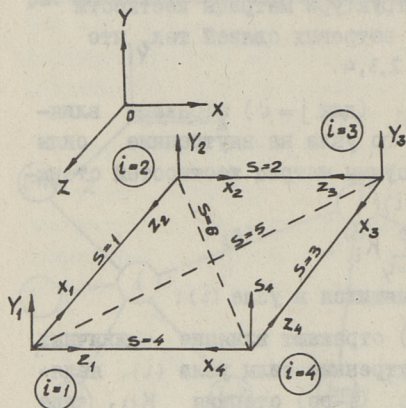
Анализ структуры матрицы жесткости контура (см. фиг. 6) ( $K_{n\lambda}$ ) показывает, что:

I) она обладает симметрией, отражающей симметрию свойств для каждого стержня ( $s = 1, 2, 3, 4$ ) отдельно для всех подматриц ( $K_{ij}$ ) при  $i \neq j$ ,  $i = j = 1, 2, 3, 4$  так, что

$$K_{ij} = (-1)^{s+t} K_{ji}, \quad \text{где } s, t - \text{внутренние индексы элементов в подматрице.}$$

$$K_{ij} = (R_{st}), \quad \text{где } s, t = 1, 2.$$

2) элементы матрицы, расположенные на главной диагонали  $K_{ii}$  для  $i=1, 2, 3, 4$  образуются алгебраическим суммированием элементов матриц жесткостей стержней (концов 0



$$F_{n\lambda} = K_{n\lambda} \cdot \delta^{(n\lambda)} = 0$$

$$F_{n\lambda} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad \delta^{(n\lambda)} = \begin{Bmatrix} \delta^{(1)} \\ \delta^{(2)} \\ \delta^{(3)} \\ \delta^{(4)} \end{Bmatrix}$$

$$K_{n\lambda} = \{K_{ij}\} \quad \text{где:} \\ i, j = 1, 2, 3, 4$$

С учетом ветровых связей :

$$K_{n\lambda} = \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{Bmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{aligned} K_{ii} &= \sum_{s=1}^3 K_{ii}^{(s)}, \\ K_{ij} &= K_{ij}^{(s)}, \end{aligned}$$

для  $s=1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

Без учета ветровых связей :

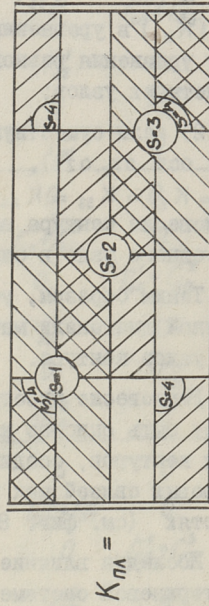
$$K_{n\lambda}^0 = \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & 0 & K_{43} & K_{44} \end{Bmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{aligned} K_{ii} &= \sum_{s=1}^2 K_{ii}^{(s)}, \\ K_{ij} &= K_{ij}^{(s)}, \end{aligned}$$

для  $s=1, 2, 3, 4$ .

$$K_{n\lambda}^0 = K_{n\lambda} \cdot J, \quad \text{где} \quad J = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Фиг. 5. Равновесие плоской стержневой системы (контур).

$\frac{S_i}{F_i}$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$i=1$	$A_4 + A_1; -B_4 + B_1$ $-B'_4 + B'_1; C_4 + C_1$ $K_{11}; K_{21}$	$-A_1; B_1$ $-B'_1; D_1$ $K_{12}$	0	$-A_4; -B_4$ $B'_4; D_4$ $K_{14}; K_{24}$
$i=2$	$-A_1; -B_1$ $B'_1; D_1$ $K_{21}; K_{22}$	$A_1 + A_2; -B_1 + B_2$ $-B'_1 + B'_2; C_1 + C_2$ $K_{22}; K_{23}$	$-A_2; B_2$ $-B'_2; D_2$ $K_{23}; K_{24}$	0
$K_{n1} =$	0	$-A_2; -B_2$ $B'_2; D_2$ $K_{32}; K_{33}$	$A_2 + A_3; -B_2 + B_3$ $-B'_2 + B'_3; C_2 + C_3$ $K_{33}; K_{34}$	$-A_3; B_3$ $-B'_3; D_3$ $K_{34}; K_{35}$
$i=4$	$-A_4; B_4$ $-B'_4; D_4$ $K_{41}; K_{42}$	0	$-A_3; -B_3$ $B'_3; D_3$ $K_{43}; K_{44}$	$A_3 + A_4; -B_3 + B_4$ $-B'_3 + B'_4; C_3 + C_4$ $K_{44}; K_{45}$



Фиг. 6. Структура матрицы жесткости контура.

или  $e$ ), сходящихся в узле так, что  $R^{\oplus} = \sum R_s^{\oplus}$  для  $(s)$ , сходящихся в узле  $i$ , где  $R = \sqrt{A \vee B \vee C}$  (см. фиг. 6). Развернутая форма подматриц главной диагонали матрицы плоскости контура ( $K_{ii}$ ) для  $i = 1, 2, 3, 4$  приводится на фиг. 7, где  $K_{ii} = (r_{ij})$ ,  $r_{ij}$  — элементы матрицы жесткости стержня в местных координатах.

Из структуры матрицы ( $K_{ii}$ ) вытекает, что:

1) если существует одна ось упругой симметрии контура ( $\parallel$  оси  $oz$ ), т.е. если  $i_4 = \frac{EJ_1}{l_1} = i_3 = \frac{EJ_3}{l_2}$ , то  $K_{22} = (-1)^{s+t} K_{33}$ ;  $K_{44} = (-1)^{s+t} K_{44}$  и матрица жесткости ( $K_{\text{пл}}$ ) в уравнении равновесия контура выражается в матрицу уравнения равновесия двух узлов ( $\wedge \wedge 4 \wedge 2 \wedge 3$ ) в системе четырех узлов;

2) если существуют две оси упругой симметрии контура ( $\parallel$  оси  $ox, oz$ ), т.е. если  $i_1 = i_2 = i_3 = i_4$ , то  $K_{11} = K_{22} = K_{33} = K_{44}$ , матрица жесткости ( $K_{\text{пл}}$ ) в уравнении равновесия контура выражается в матрицу уравнения равновесия одного узла в системе четырех узлов.

Таким образом, устанавливается, что коэффициенты на главной диагонали матрицы жесткости ( $K_{\text{пл}}$ ) отражают симметрию узлов контура.

Равновесие пространственной системы (параллелепипеда) может быть описано как равновесие системы, составленной из двух контуров, соединенных в узлах, с учетом или без учета ветровых связей как в горизонтальных и в вертикальных плоскостях (см. фиг. 8).

Исследуя влияние принципа индексации узлов и стержней в стержневой системе установлено, что наиболее компактная структура матрицы жесткости соответствует следующим принципам присвоения индексов:

1) индекс  $i$ -го узла в системе присваивается узлу, соответствующему началу координат  $x, y, z$  (в системе общих координат) так, чтобы конечный элемент (стержень, контур, параллелепипед) располагался в положительном квадрате;

2) индексы последующих узлов в контуре присваиваются в счетном порядке в направлениях осей (от старшей к младшей);

3) индекс стержня ( $s$ ) совпадает с индексом узла ( $i$ ) в начале местных координат ( $w_s$ ) так, что  $s = i$  в сечении  $x_s = 0$ .

Для пространственной системы стержней с двумя (или более) контурами, связанными между собой, матрица жесткости

$$K_{11} = \begin{vmatrix} r_{11}^4 + r_{33}^1 & 0 & 0 & 0 & r_{35}^1 & 0 \\ 0 & r_{22}^4 + r_{22}^1 & 0 & r_{26}^1 & 0 & r_{26}^4 \\ 0 & 0 & r_{33}^4 + r_{11}^1 & 0 & r_{35}^4 & 0 \\ \hline 0 & r_{25}^1 & 0 & r_{44}^4 + r_{66}^1 & 0 & 0 \\ r_{35}^1 & 0 & r_{35}^4 & 0 & r_{55}^4 + r_{55}^1 & 0 \\ 0 & r_{26}^4 & 0 & 0 & 0 & r_{66}^4 + r_{44}^1 \end{vmatrix}$$

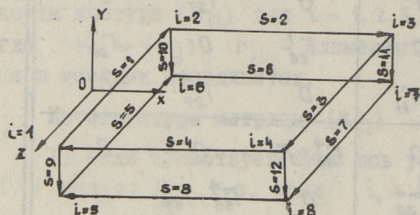
$$K_{22} = \begin{vmatrix} r_{33}^1 + r_{11}^2 & 0 & 0 & 0 & -r_{35}^1 & 0 \\ 0 & r_{22}^1 + r_{22}^2 & 0 & -r_{26}^1 & 0 & r_{26}^4 \\ 0 & 0 & r_{11}^1 + r_{33}^2 & 0 & r_{35}^4 & 0 \\ \hline 0 & -r_{26}^1 & 0 & r_{66}^1 + r_{44}^2 & 0 & 0 \\ -r_{35}^1 & 0 & r_{35}^2 & 0 & r_{55}^1 + r_{55}^2 & 0 \\ 0 & r_{26}^2 & 0 & 0 & 0 & r_{44}^1 + r_{66}^2 \end{vmatrix}$$

$$K_{33} = \begin{vmatrix} r_{11}^2 + r_{33}^3 & 0 & 0 & 0 & -r_{35}^3 & 0 \\ 0 & r_{22}^2 + r_{22}^3 & 0 & -r_{26}^3 & 0 & -r_{26}^2 \\ 0 & 0 & r_{33}^2 + r_{11}^3 & 0 & -r_{35}^2 & 0 \\ \hline 0 & -r_{26}^3 & 0 & r_{44}^2 + r_{66}^3 & 0 & 0 \\ -r_{35}^3 & 0 & -r_{35}^2 & 0 & r_{55}^2 + r_{55}^3 & 0 \\ 0 & -r_{26}^2 & 0 & 0 & 0 & r_{66}^2 + r_{44}^3 \end{vmatrix}$$

$$K_{44} = \begin{vmatrix} r_{33}^3 + r_{11}^4 & 0 & 0 & 0 & r_{35}^3 & 0 \\ 0 & r_{22}^3 + r_{22}^4 & 0 & r_{26}^2 & 0 & -r_{26}^4 \\ 0 & 0 & r_{11}^3 + r_{33}^4 & 0 & -r_{35}^4 & 0 \\ \hline 0 & r_{26}^3 & 0 & r_{66}^3 + r_{44}^4 & 0 & 0 \\ r_{35}^3 & 0 & -r_{35}^4 & 0 & r_{55}^3 + r_{55}^4 & 0 \\ 0 & -r_{26}^4 & 0 & 0 & 0 & r_{44}^3 + r_{66}^4 \end{vmatrix}$$

Фиг. 7. Подматрицы главной диагонали матрицы жесткости контура.

составляется как квазидиагональная матрица жесткостей каждого контура раздельно ( $K_{\text{пл}}^{(1)}, K_{\text{пл}}^{(2)}$ ), с учетом связей между ними ( $K^{(1)(2)}, K^{(2)(1)}$ ) (см. фиг. 9).



$$F_{\text{np}} = K_{\text{np}} \cdot \delta^{(\text{np})} \quad \text{где:}$$

$$F_{\text{np}} = \{ F_i \mid i = 1, 2, \dots, 8; \}$$

$$\delta^{(\text{np})} = \{ \delta^i \mid i = 1, 2, \dots, 8; \}$$

$$K_{\text{np}} = \{ K_{ij} \mid ij = 1, 2, \dots, 8. \}$$

- с учетом ветровых связей :

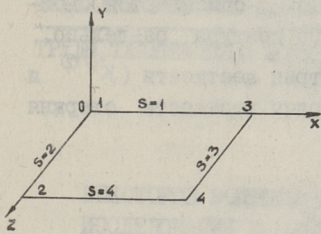
$$K_{\text{np}}^0 = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} \\ K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} \end{pmatrix}$$

- без учета ветровых связей :

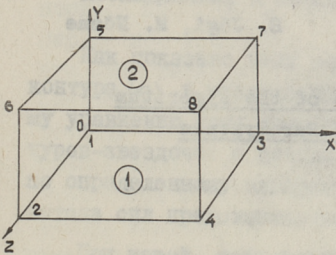
$$K_{\text{np}} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{44} & K_{15} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 & K_{26} & 0 & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & 0 & 0 & K_{37} & 0 \\ K_{41} & 0 & K_{43} & K_{44} & 0 & 0 & 0 & K_{48} \\ K_{51} & 0 & 0 & 0 & K_{55} & K_{56} & 0 & K_{58} \\ 0 & K_{62} & 0 & 0 & K_{65} & K_{66} & K_{67} & 0 \\ 0 & 0 & K_{73} & 0 & 0 & K_{76} & K_{77} & K_{78} \\ 0 & 0 & K_{83} & K_{84} & 0 & 0 & K_{87} & K_{88} \end{pmatrix}$$

Фиг. 8. Равновесия пространственной стержневой системы (группы контуров).





$$K_{\text{пл}} = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & K_{24} \\ K_{31} & 0 & K_{33} & K_{34} \\ 0 & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{vmatrix}$$



$$K_{\text{пр}} = \begin{vmatrix} K_{\text{пл}}^{(1)} & K_{\text{пл}}^{(1)(2)} \\ K_{\text{пл}}^{(2)(1)} & K_{\text{пл}}^{(2)} \end{vmatrix}; \text{ где:}$$

$$K_{\text{пл}}^{(1)(2)} = \begin{vmatrix} K_{15} & & & 0 \\ & K_{26} & & \\ & & K_{37} & \\ 0 & & & K_{48} \end{vmatrix}; K_{\text{пл}}^{(2)(1)} = \begin{vmatrix} K_{51} & & & 0 \\ & K_{62} & & \\ & & K_{73} & \\ 0 & & & K_{84} \end{vmatrix}$$

$$K_{\text{пр}} = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & K_{15} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & K_{24} & 0 & K_{26} & 0 & 0 \\ K_{31} & 0 & K_{33} & K_{34} & 0 & 0 & K_{37} & 0 \\ 0 & K_{42} & K_{43} & K_{44} & 0 & 0 & 0 & K_{48} \\ \hline K_{51} & 0 & 0 & 0 & K_{55} & K_{56} & K_{57} & 0 \\ 0 & K_{62} & 0 & 0 & K_{65} & K_{66} & 0 & K_{68} \\ 0 & 0 & K_{73} & 0 & K_{75} & 0 & K_{77} & K_{78} \\ 0 & 0 & 0 & K_{84} & 0 & K_{86} & K_{87} & K_{88} \end{vmatrix}$$

Фиг. 9. Структура матрицы жесткости параллелепипеда.

Свойства элементов матрицы жесткости параллелепипеда, расположенных на главной диагонали ( $K_{nn}$ ), описываются свойствами матриц жесткостей для каждого контура отдельно.

Свойства побочных элементов матриц жесткости ( $K^{(1)(2)}$  и  $K^{(2)(1)}$ ) описываются свойствами матрицы жесткости стержня (s) в системе двух узлов.

E. Jögi, M. Nõmme

Some Problems of the Formation of the Algorithm  
of Optimization of Spatial Bar Systems

Summary

Some problems of the application of the method of finite elements are examined for forming the algorithm of the optimization of spatial systems.

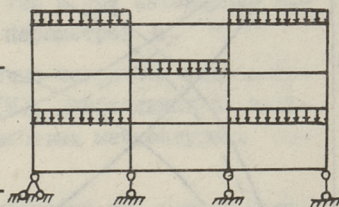
General matrix forms of the static (kinematic) calculations with the method of finite elements are brought. Properties of the stiffness matrix and its relations with the parameters of management of the optimization are investigated.

### НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПОСТРОЕНИЯ АЛГОРИТМА ИССЛЕДОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ МНОГОКОНТУРНЫХ РАМ

Как показано нами ранее [1], статический расчет любого контура ( $n$ ) в многоконтурной раме приводится к разрешающему уравнению семи моментов так, что для каждой группы контуров-звездочек с центральным контуром ( $n_0$ ), вычисленных по определенному алгоритму, в раме разрешающее уравнение метода сил представляется как уравнение семи моментов.

При такой постановке задача решается точно. Одним из приближенных способов расчета и оптимизации многоконтурных рам является метод звездочек, основанный на эффекте затухающего влияния узловых моментов.

В связи с существованием эффекта затухающего влияния узловых моментов для рамных конструкций представляет интерес изучение законов изменения лишних неизвестных от раскрытия статической неопределенности, выбранных нами как узловые моменты, как функции от межконтурных весовых параметров  $G_s$ .



Фиг. 1. Схема рамы.

Для исследования нами была принята девятиконтурная рама с равномерно распределенной нагрузкой, действующей по закону шахматного поля, с вертикальной осью симметрии в смысле жесткости (см. фиг. 1).

На фиг. 2 представлены результаты исследований лишних неизвестных как по точному методу (уравнение семи моментов), так и по первому приближению, выбранному исходя из предположения, что наиболее существенное влияние на значение лиш-

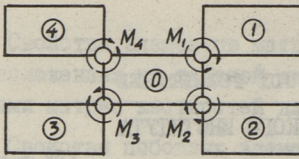


Схема точного расчета  
 $M_1 = -M_4$ ;  $M_2 = -M_3$

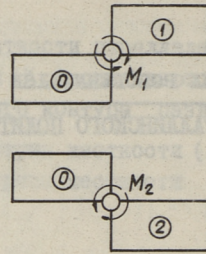
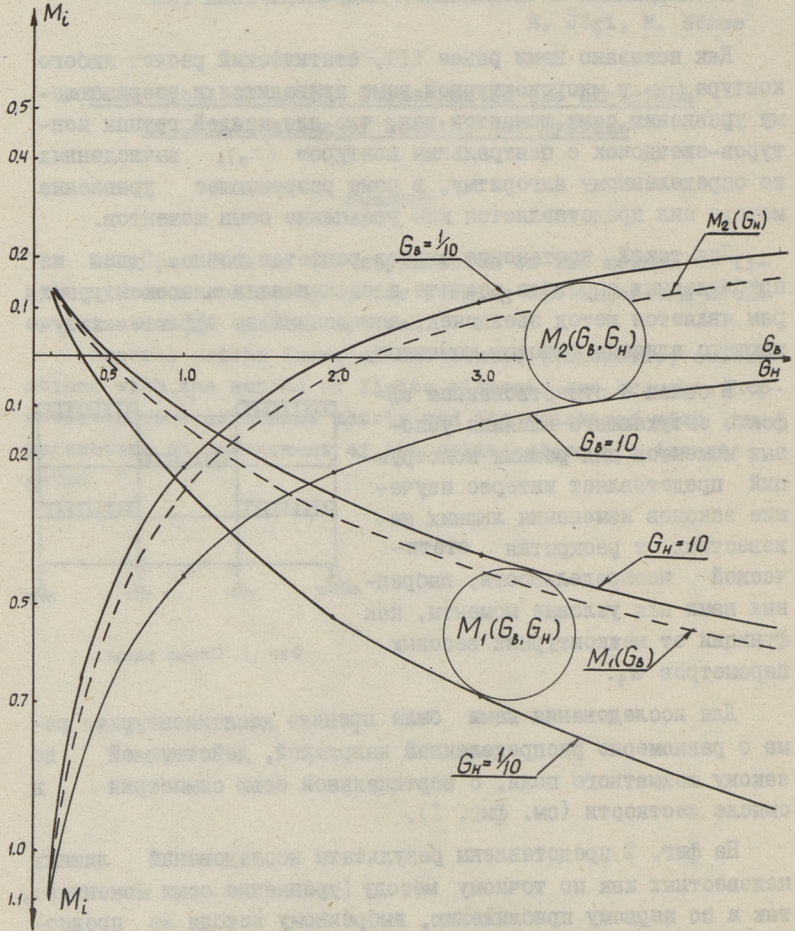


Схема первого приближения



Фиг. 2. Изменение лишних неизвестных при точном расчете  $M_i(G_b, G_n)$  и в первом приближении  $M_1(G_b)$ ;  $M_2(G_n)$ .

него неизвестного оказывает жесткость смежных контуров, примыкающих к узлу (см. фиг. 2).

Из фиг. 2 вытекает, что лишние неизвестные как функции от межконтурных весовых параметров, изменяются в определенном интервале, при точном решении, а лишние неизвестные, найденные по первому приближению, лежат внутри области изменения точного их значения, являясь как бы средним статистическим крайних значений. Поэтому для первого приближения оптимизации можно воспользоваться первым приближением для нахождения лишних неизвестных, что существенным образом упрощает вычислительный и исследовательский процесс и позволяет значительно снизить степень сложности задачи оптимизации. Учитывая, что оптимизационная задача является цикличной, на следующих этапах при необходимости всегда можно уточнить значение лишних неизвестных.

При введении такого упрощения для нахождения лишних неизвестных задача оптимизации звездочки, в отличие от точного метода (см. фиг. 3,а), распадается на несколько самостоятельных вычислительных процессов, как при нахождении внутренних усилий ( $M$ ), так и при нахождении выходных жесткостных межконтурных параметров  $G_s$ .

На фиг. 3,б представлен в блочно-матричном виде алгоритм нахождения внутренних сил ( $M$ ), необходимых в дальнейшем для нахождения выходных весовых межконтурных параметров  $G_s$ .

На фиг. 3,в представлен развернутый вид блоков матрицы  $V_I$  для звездочки, не зависящий от приложенной нагрузки.

Алгоритм нахождения объема звездочки на нижней границе и значение выходных жесткостных параметров показаны на фиг. 4.

Алгоритм нахождения объемной функции на верхней границе показан на фиг. 5.

Как доказано нами ранее [2], оптимальное значение принимает система в точках, соответствующих решению уравнения:

$$[G_s] = \lambda_s G_s, \quad (I)$$

$$B = B_p + B_1 M$$

а)

$$B = \begin{vmatrix} B_1^{(1)} & B_2^{(1)} & B_3^{(1)} & B_4^{(1)} \\ B_1^{(2)} & B_2^{(2)} & B_3^{(2)} & B_4^{(2)} \\ B_1^{(3)} & B_2^{(3)} & B_3^{(3)} & B_4^{(3)} \\ B_1^{(4)} & B_2^{(4)} & B_3^{(4)} & B_4^{(4)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1^{(1)} & - & - & - \\ - & B_1^{(2)} & - & - \\ - & - & B_1^{(3)} & - \\ - & - & - & B_1^{(4)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{vmatrix}$$

$$б) B = \begin{vmatrix} B_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \\ B_3^{(1)} \\ B_4^{(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \\ B_3^{(1)} \\ B_4^{(1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1^{(1)} & - \\ - & B_1^{(1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M_1 \\ M_4 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} B_2^{(2)} \\ B_3^{(2)} \\ B_4^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_2^{(2)} \\ B_3^{(2)} \\ B_4^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1^{(2)} & - \\ - & B_1^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M_2 \\ M_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} B_1^{(1)} & - & - & - \\ - & B_1^{(2)} & - & - \\ - & - & B_1^{(3)} & - \\ - & - & - & B_1^{(4)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & - & - & - \\ - & 2 & - & - \\ - & - & 3 & - \\ -3 & -4 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Ключ к составлению матрицы  $B_1$

$$B_1^{(1)} = \begin{vmatrix} -(3+2g_b)\Theta - g_b\Xi \\ g_b(\Theta - \Xi) \\ g_b(\Theta - \Xi) \\ g_b(\Theta + \Xi) \\ g_b(\Theta + \Xi) \\ g_b\Xi - (3+2g_b)\Theta \\ g_b\Xi - (3+2g_b)\Theta \\ g_b(1+6g_b)\Xi + g_b(2+g_b)\Theta \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{2\Xi\Theta}; \quad B_1^{(2)} = \begin{vmatrix} g_b(\Xi - \Theta) \\ (3+2g_b)\Theta + g_b\Xi \\ -g_b(1+6g_b)\Xi - g_b(2+g_b)\Theta \\ (3+2g_b)\Theta - g_b\Xi \\ (3+2g_b) - g_b\Xi \\ -g_b(\Theta + \Xi) \\ -g_b(\Theta + \Xi) \\ g_b(\Xi - \Theta) \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{2\Xi\Theta}$$

в)

$$B_1^{(3)} = \begin{vmatrix} g_b(\Xi - \Theta) \\ g_b\Xi - (3+2g_b)\Theta \\ g_b\Xi - (3+2g_b)\Theta \\ g_b(2+g_b)\Theta + g_b(1+6g_b)\Xi \\ -(3+2g_b)\Theta - g_b\Xi \\ g_b(\Theta - \Xi) \\ g_b(\Theta - \Xi) \\ g_b(\Theta + \Xi) \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{2\Xi\Theta}; \quad B_1^{(4)} = \begin{vmatrix} (3+2g_b)\Theta + g_b\Xi \\ -g_b(\Theta + \Xi) \\ -g_b(\Theta + \Xi) \\ g_b(\Theta - \Theta) \\ g_b(\Theta - \Theta) \\ (3+2g_b)\Theta + g_b\Xi \\ -g_b(1+6g_b)\Xi - g_b(2+g_b)\Theta \\ (3+2g_b)\Theta - g_b\Xi \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{2\Xi\Theta}$$

$$\text{где: } \Xi = 2g_b + g_b g_n + 2g_n + 3; \quad \Theta = g_b + 6g_b g_n + g_n$$

Фиг. 3.

- Блочно-матричный вид точного расчета.
- Блочно-матричный вид первого приближения.
- Развернутый вид блоков матрицы  $B_1$  для \*

$$[V_n] = \sum_{s=0}^4 [V_s] = 2[V_b] + [V_o] + 2[V_n] = 2[V_b^s] \cdot \Phi_{[g_b^s]} + [V_o^s] \cdot \Phi_{[g_o^s]} + 2[V_n^s] \cdot \Phi_{[g_n^s]} =$$

$$2[F_{CT}^s] \cdot l_{CT}^s \cdot \Phi_{[g_b^s]} + [F_{CT}^o] \cdot l_{CT}^o \cdot \Phi_{[g_o^s]} + 2[F_{CT}^n] \cdot l_{CT}^n \cdot \Phi_{[g_n^s]} =$$

$$[F_{CT}^o] \cdot l_{CT}^o \cdot \Phi_{[g_o^s]} \cdot \left[ 2 \frac{[F_{CT}^s] \cdot l_{CT}^s \cdot \Phi_{[g_b^s]}}{[F_{CT}^o] \cdot l_{CT}^o \cdot \Phi_{[g_o^s]}} + 1 + 2 \frac{[F_{CT}^n] \cdot l_{CT}^n \cdot \Phi_{[g_n^s]}}{[F_{CT}^o] \cdot l_{CT}^o \cdot \Phi_{[g_o^s]}} \right];$$

учитывая, что

$$\frac{[F_s]}{[F_b]} = \left( \frac{M_s}{M_b} \right)^{K_i}; [G_s] = \frac{[J_s]}{[J_b]} \cdot \frac{1}{\lambda_s} = \left( \frac{M_s}{M_b} \right)^{m_i} \cdot \frac{1}{\lambda_s} \rightarrow \frac{[F_s]}{[F_b]} = ([G_s] \cdot \lambda_s)^{n_i} \quad \text{где: } n_i = \frac{K_i}{m_i} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$K_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$m_i = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}};$$

получим общую форму

$$[V_n] = [V_o] \cdot \Theta_{[g]}$$

$$\Theta_{[g]} = 2\Theta_{[g_b]} + 1 + 2\Theta_{[g_n]}$$

$$\Theta_{[g_b]}^s = [G_b]^n \cdot \lambda^{n_i+1} \cdot \Theta_b; \quad \Theta_{[g_n]}^n = [G_n]^{n_i} \cdot \lambda^{n_i+1} \cdot \Theta_n;$$

$$\Theta_b = \frac{\Phi_{[g]}^s}{\Phi_{[g]}^o} = \frac{[a_b^s] + 2 + [a_n^s]}{[a_b^o] + 2 + [a_n^o]} = \frac{2 + \lambda_b^{n_i+1} ([G_b^s]^{n_i} + [G_n^s]^{n_i})}{2 + \lambda_o^{n_i+1} ([G_b^o]^{n_i} + [G_n^o]^{n_i})}; \quad \Theta_n = \frac{\Phi_{[g]}^n}{\Phi_{[g]}^o} = \frac{[a_b^n] + 2 + [a_n^n]}{[a_b^o] + 2 + [a_n^o]} = \frac{2 + \lambda_n^{n_i+1} ([G_b^n]^{n_i} + [G_n^n]^{n_i})}{2 + \lambda_o^{n_i+1} ([G_b^o]^{n_i} + [G_n^o]^{n_i})}$$

Фиг. 4. Объем рамы на нижней границе.

$$V_n = 2V_b^s + V_o^o + 2V_n^n = 2F_{CT}^s \cdot l_{CT}^s \cdot \Phi_g^s + F_{CT}^o \cdot l_{CT}^o \cdot \Phi_g^o + 2F_{CT}^n \cdot l_{CT}^n \cdot \Phi_g^n;$$

1 Опорный контур центральной

$$V_n = F_{CT}^o \cdot l_{CT}^o \cdot \Phi_g^o \left\{ 2 \frac{F_{CT}^s \cdot l_{CT}^s \cdot \Phi_g^s}{F_{CT}^o \cdot l_{CT}^o \cdot \Phi_g^o} + 1 + 2 \frac{F_{CT}^n \cdot l_{CT}^n \cdot \Phi_g^n}{F_{CT}^o \cdot l_{CT}^o \cdot \Phi_g^o} \right\} = F_{CT}^o \cdot l_{CT}^o \cdot \Phi_g^o [2\Theta_b + 1 + 2\Theta_n]$$

2 Опорный контур верхнего яруса

$$V_n = F_{CT}^s \cdot l_{CT}^s \cdot \Phi_g^s \left\{ 2 + \frac{F_{CT}^o \cdot l_{CT}^o \cdot \Phi_g^o}{F_{CT}^s \cdot l_{CT}^s \cdot \Phi_g^s} + 2 \frac{F_{CT}^n \cdot l_{CT}^n \cdot \Phi_g^n}{F_{CT}^s \cdot l_{CT}^s \cdot \Phi_g^s} \right\} = \frac{F_{CT}^s \cdot l_{CT}^s}{G_b^{n_i} \cdot \lambda^{n_i+1}} \cdot [2\Theta_b + 1 + 2\Theta_n]$$

3 Опорный контур нижнего яруса

$$V_n = F_{CT}^n \cdot l_{CT}^n \cdot \Phi_g^n \left\{ 2 + \frac{F_{CT}^o \cdot l_{CT}^o \cdot \Phi_g^o}{F_{CT}^n \cdot l_{CT}^n \cdot \Phi_g^n} + 2 \frac{F_{CT}^s \cdot l_{CT}^s \cdot \Phi_g^s}{F_{CT}^n \cdot l_{CT}^n \cdot \Phi_g^n} \right\} = \frac{F_{CT}^n \cdot l_{CT}^n}{G_n^{n_i} \cdot \lambda^{n_i+1}} \cdot [2\Theta_b + 1 + 2\Theta_n]$$

Общая форма:

$$V_n = V_b \cdot \Theta_b$$

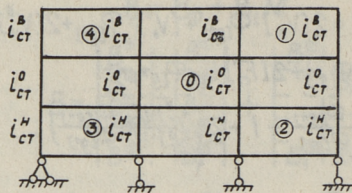
$$\Theta_b = 2\Theta_b + 1 + 2\Theta_n$$

$$\Theta_b = G_b^{n_i} \cdot \lambda^{n_i+1} \cdot \Phi_b; \quad \Theta_n = G_n^{n_i} \cdot \lambda^{n_i+1} \cdot \Phi_n$$

$$\Phi_b = \frac{\Phi_g^s}{\Phi_g^o} = \frac{a_b^s + 2 + a_n^s}{a_b^o + 2 + a_n^o} = \frac{2 + \lambda_b^{n_i+1} ([G_b^s]^{n_i} + [G_n^s]^{n_i})}{2 + \lambda_o^{n_i+1} ([G_b^o]^{n_i} + [G_n^o]^{n_i})}; \quad \Phi_n = \frac{\Phi_g^n}{\Phi_g^o} = \frac{a_b^n + 2 + a_n^n}{a_b^o + 2 + a_n^o} = \frac{2 + \lambda_n^{n_i+1} ([G_b^n]^{n_i} + [G_n^n]^{n_i})}{2 + \lambda_o^{n_i+1} ([G_b^o]^{n_i} + [G_n^o]^{n_i})}$$

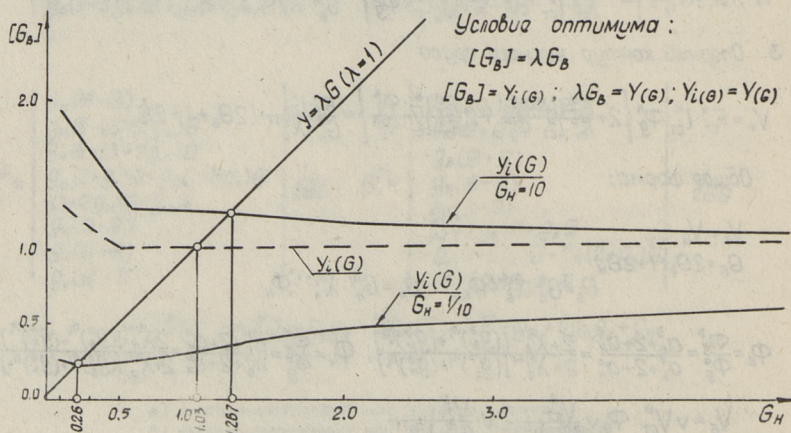
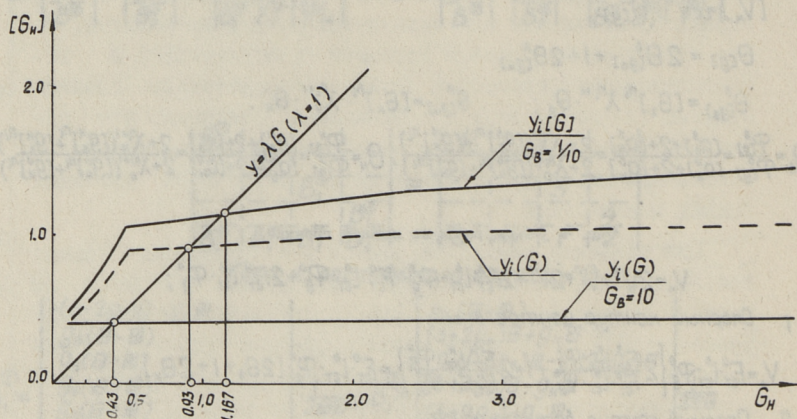
$$V_b = V_{CT}^o \cdot \Phi_b \sqrt{\frac{V_{CT}^s}{G_b^{n_i} \cdot \lambda^{n_i+1}}} \sqrt{\frac{V_{CT}^n}{G_n^{n_i} \cdot \lambda^{n_i+1}}}$$

Фиг. 5. Объемная функция рамы на верхней границе.



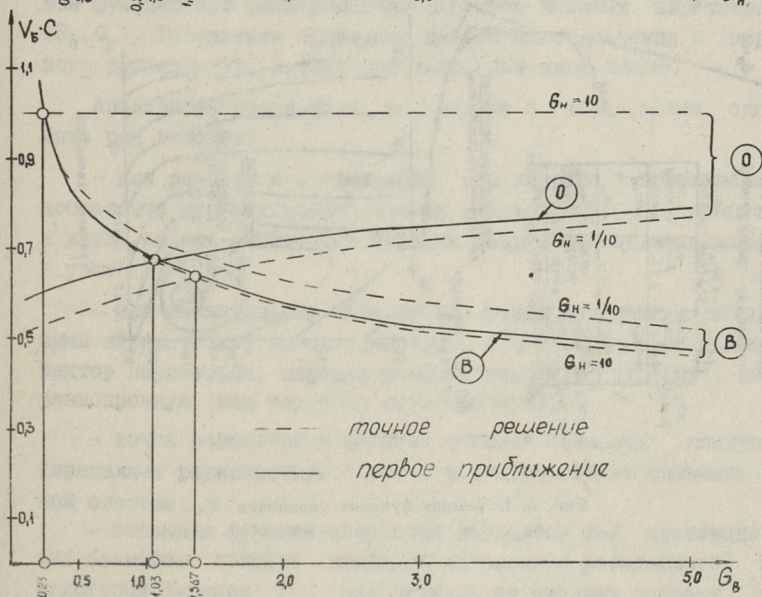
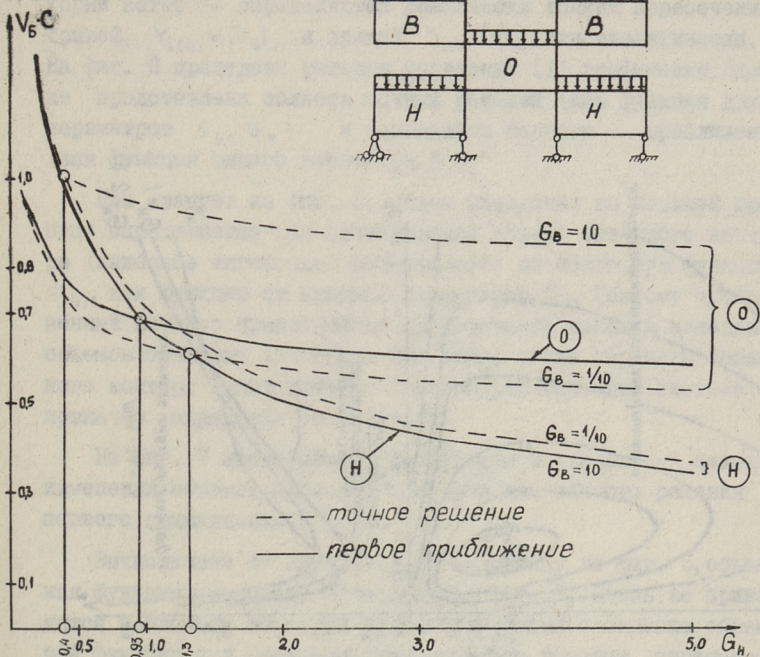
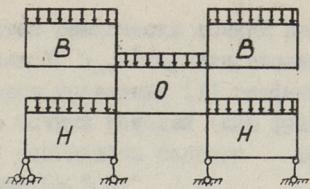
$$G_B = \frac{i_{CT}^B}{i_{CT}^O} = \frac{J_{CT}^B}{J_{CT}^O} \cdot \frac{i_{CT}^B}{i_{CT}^O} = \frac{J_{CT}^B}{J_{CT}^O} \cdot \lambda_B$$

$$G_H = \frac{i_{CT}^H}{i_{CT}^O} = \frac{J_{CT}^H}{J_{CT}^O} \cdot \frac{i_{CT}^H}{i_{CT}^O} = \frac{J_{CT}^H}{J_{CT}^O} \cdot \lambda_H$$

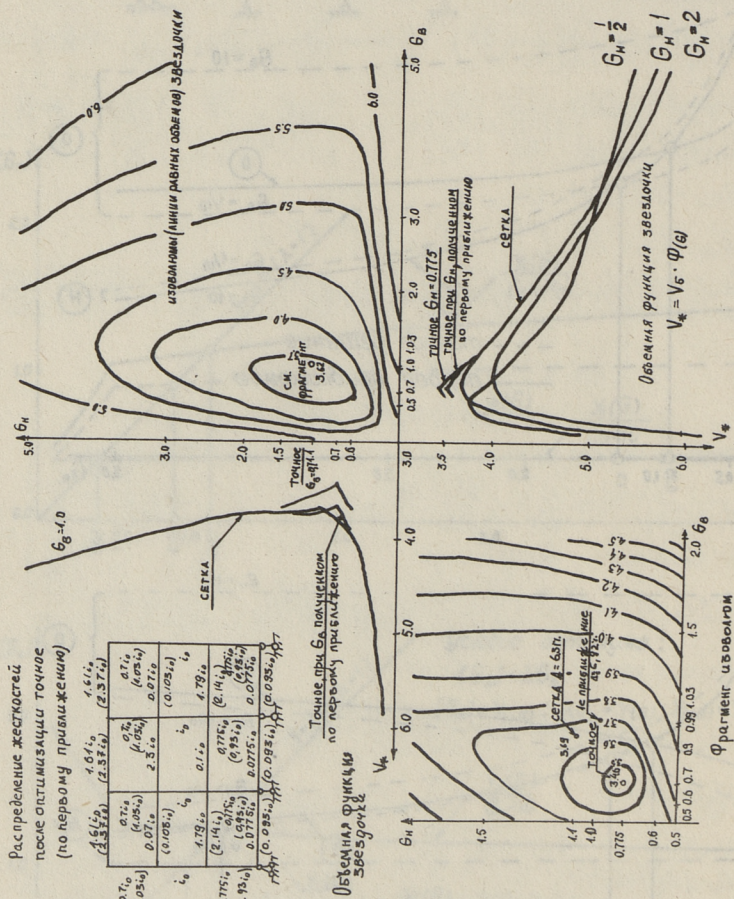


Фиг. 6. Функция весовых межконтурных параметров  $[G_B]$ - $G_B$ ;  $[G_H]$ - $G_H$  и их оптимальные значения при точной постановке и в первом приближении (---).





Фиг. 7. Объем базисных контуров  $V_B = v_B \cdot v_H \cdot v_D$ .



Фиг. 8. Объемная функция звездочки  $V_*$ .

корни которого определяются графически точкой пересечения кривой  $Y_{i(G)} = [G_s]$  и прямой  $Y_{(G)} = \lambda G_s$  или аналитически. На фиг. 6 приведены решения уравнения (I) графически. Здесь же представлена область точных решений (как функция двух параметров  $G_B, G_H$ ) и результаты первого приближения (как функция одного параметра  $G$ ).

Как следует из фиг. 5, объем звездочки на верхней границе определяется как произведение объема базисного контура (наиболее интенсивно работающего) на некоторую функцию  $\Phi_{(G)}$ , как функцию от входных параметров  $G_s$ . Поэтому существенный интерес представляет исследование законов изменения объемов базисных контуров. При этом, точка перемены базисного контура будет соответствовать равнопрочной системе, однозначно определяя ее значение.

На фиг. 7 представлены результаты исследований законов изменения объемов базисных контуров для точного решения и первого приближения.

Вычисленная по алгоритму, приведенному на фиг. 5, объемная функция звездочки приведена на фиг. 8. Здесь же приводятся изоболы объемной функции, а также изменение объемной функции при фиксировании одного из весовых параметров ( $G_B, G_H$ ). Результаты приведены для точного значения и первого приближения, а также по выбранной нами сетке.

Анализируя результаты, полученные в работе, можно сделать ряд выводов:

- для расчета и оптимизации, для первого приближения, достаточно при нахождении лишних неизвестных учитывать влияние на них жесткостей смежных контуров, соединяющихся в узле  $i$ ;

- при исследовании зависимости между входными и выходными параметрами, решая уравнение  $[G_s] = \lambda_s G_s$ , получаем вектор параметров, определяющий оптимальную систему как равнопрочную (или частично равнопрочную);

- точка пересечения функций объемов базисных контуров определяет равнопрочную систему и соответствует оптимальной системе;

- объемная функция звездочки находится как произведение базисного контура (наиболее интенсивно работающего) и некоторой функции  $\Phi$ , как функции от входных весовых и метрических параметров;

- для анализа системы достаточно воспользоваться первым приближением, дающим уже на первом шаге расхождение с точным значением порядка 7 %. Точное значение возможно получить на последующих шагах итерации;

- используя предложенный алгоритм можно поставить задачу, как итерационную, на ЭВМ с доведением до численного результата.

#### Л и т е р а т у р а

1. Богданов С.С., Иегги Э.М. Статический расчет и оптимальное проектирование многоконтурных рам. - Тр.Таллинск. политехн. ин-та, № 468, 1979.

2. Богданов С.С., Иегги Э.М. Геометрические характеристики сечений и их связи в пространстве параметров. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, № 444, 1978.

S. Bogdanov

#### Some Problems of Building an Algorithm of Investigation and Optimization of Semicontoured Frames

#### Summary

The effect of the fading influence of the main moments on the tensely deformed state of the contours in a semicontoured frame is investigated.

A simplified algorithm of approximate investigation and optimization of semicontoured frames with pointing out its reality is determined in the article.

The dependence between the output and input weight parameters of a frame and their connection with its volume function are determined.

The volume function of the frame on its upper and lower borders as the functions of input or output weight parameters accordingly are calculated in the article. The optimum frame is determined as an equally firm (or partly firm) system in all calculated sections.

The constructed algorithm allows one to get the numerical results of optimization of semicontoured frames.

## ОПТИМИЗАЦИЯ РАМ ПРИ СЛОЖНЫХ ФОРМАХ ЗАГРУЖЕНИЯ

Рассматривается задача оптимизации рам с расчетной схемой нагружения, соответствующей комбинации постоянных и временных нагрузок, при этом нагрузку, составленную из простых форм нагружений, будем называть сложной формой нагружения.

Имеющиеся алгоритмы и методы оптимизации конструкций [1, 2] рассматриваются в приложении к простым формам нагружения и не затрагивают вопросов оптимизации при сложных формах нагружения.

Исследуя задачу оптимизации при сложных формах нагружения (не затрагивая вопросов геометрической и физической нелинейности и вопросов устойчивости), можно сказать, что с одной стороны, при нахождении внутренних сил в упруго-линейных системах справедлив принцип независимости действия сил

$$[g_s] = \frac{[J_s]}{[J_B]} = \left( \frac{M_{s \max}}{M_{B \max}} \right)^{m_i} = \left( \frac{\sum_{K_H=1}^{K_H=t} M_s^{K_H}}{t} \right)^{m_i}, \quad (I)$$

где  $K_H$  - простая форма нагружения;

$K_H = 1, 2, \dots, t$ ;

$t$  - число простых форм нагружения;

$m_i = \sqrt{3/2} \sqrt{5/3}$  - степень нелинейности связи между изгибающим моментом и моментом инерции сечения.

С другой стороны [(см. 2)] оптимальные значения весовых параметров ( $g_{s \text{ опт}}$ ) находятся из уравнения  $[g_s] = \lambda g_s$  для каждого  $g_s$  отдельно, как точка пересечения двух функций: кривой  $y_i = [g_s]$  и прямой  $y = \lambda g_s$ .

Общая форма вычисления оптимального  $q_s$  для каждой формы загрузки примет вид:

$$\left[ \frac{M_s^{(1)} + M_s^{(2)} + \dots + M_s^{(n)}}{M_B^{(1)} + M_B^{(2)} + \dots + M_B^{(n)}} \right]^{m_i} = \lambda q_s. \quad (2)$$

Введем некоторую оценку ( $\Delta q_s$ ) искажения принципа суперпозиций при определении оптимального параметра ( $q_{s \text{ опт}}$ ) сложной формы загрузки так, что

$$\Delta q_s = \left( \frac{M_s^{(1)} + M_s^{(2)} + \dots + M_s^{(n)}}{M_B^{(1)} + M_B^{(2)} + \dots + M_B^{(n)}} \right)^{m_i} - \left[ \left( \frac{M_s^{(1)}}{M_B^{(1)}} \right)^{m_i} + \left( \frac{M_s^{(2)}}{M_B^{(2)}} \right)^{m_i} + \dots + \left( \frac{M_s^{(n)}}{M_B^{(n)}} \right)^{m_i} \right], \quad (3)$$

где  $\left( \frac{M_s^{(K)}}{M_B^{(K)}} \right)^{m_i}$  - значение выходного весового параметра стержня ( $s$ ) от простой формы загрузки  $K_H$ .

Тогда из (2) с учетом (1) получим:

$$[q_s^{(1)}] + [q_s^{(2)}] + \dots + [q_s^{(n)}] + \Delta q_s = \lambda q_s, \quad (4)$$

где  $[q_s]$  - значение выходного и  
 $q_s$  - входного весового параметра стержня ( $s$ ).

Из (4) видно, что принцип суперпозиции, справедливый для нахождения внутренних сил, не может быть использован для нахождения оптимальных значений весовых параметров, требуя учета поправки  $\Delta q_s$ .

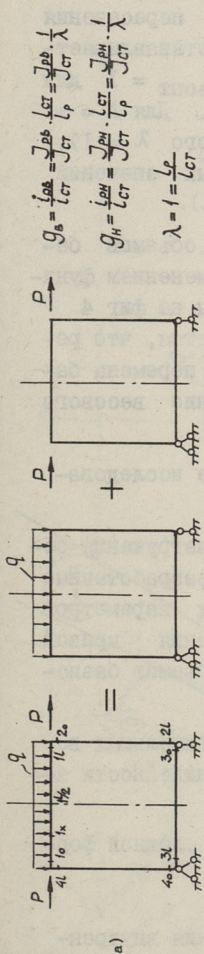
Далее покажем, что величина  $\Delta q_s$  зависит от соотношения параметров нагрузок простых форм загрузений ( $S_1$  и  $S_2$ ), введенных на фиг. 1, б.

Рассмотрим задачу оптимизации контура для сложной формы загрузки, состоящей из двух простых форм загрузения (см. фиг. 1, а).

Введем параметр управления нагрузкой, как соотношение параметров нагрузок простых форм загрузений,  $A = \frac{S_1}{S_2}$  (см. фиг. 1, б).

Изгибающий момент в каждом сечении определяется как функция четырех параметров:  $M_s = M_s(A; q_B; q_H; \lambda)$ .

Закон изменения  $[q_s] = [q_s](q_B; q_H; \lambda)$  на множестве весовых ( $q_s = q_B; q_H$ ) и метрических ( $\lambda$ ) параметров изучен в [2]. Исследуем закон изменения  $[q_s] = [q_s](A)$  в зависимости от параметра управления нагрузкой ( $A$ ).



$$g_b = \frac{q \cdot l_0}{l_{CT}} = \frac{q \cdot l_0}{l_{CT}} \cdot \frac{l_{CT}}{l_p} = \frac{q \cdot l_0}{l_p} \cdot \lambda$$

$$g_H = \frac{P}{l_{CT}} = \frac{q \cdot l_0}{l_{CT}} \cdot \frac{l_{CT}}{l_p} = \frac{q \cdot l_0}{l_p} \cdot \lambda$$

$$\lambda = l = \frac{l_p}{l_{CT}}$$

$1_0$	$-K_1 \gamma_1$	$S_1 +$	$\Phi_2$	$-AK_1 \gamma_1 + \Phi_2$	$S_2$
$1_x$	$K_1 [\frac{q}{2} (l_p - x) - \gamma_1]$	$(1 - \frac{x}{l_p}) \Phi_2$	$AK_1 [\frac{q}{2} (l_p - x) - \gamma_1] + (1 - \frac{x}{l_p}) \Phi_2$		
$1/2$	$1 - K_1 \gamma_1$	$0$	$A(1 - K_1 \gamma_1) + 0$		
$1l$	$-K_1 \gamma_1$	$-\Phi_2$	$-AK_1 \gamma_1 - \Phi_2$		
$2_0$	$-K_1 \gamma_1$	$-\Phi_2$	$-AK_1 \gamma_1 - \Phi_2$		
$2l$	$K_1 \gamma_2$	$1 - \Phi_2$	$AK_1 \gamma_2 + (1 - \Phi_2)$		
$3_0$	$K_1 \gamma_2$	$1 - \Phi_2$	$AK_1 \gamma_2 + (1 - \Phi_2)$		
$3l$	$K_1 \gamma_2$	$-(1 - \Phi_2)$	$AK_1 \gamma_2 - (1 - \Phi_2)$		
$4_0$	$K_1 \gamma_2$	$-(1 - \Phi_2)$	$AK_1 \gamma_2 - (1 - \Phi_2)$		
$4l$	$-K_1 \gamma_1$	$\Phi_2$	$-AK_1 \gamma_1 + \Phi_2$		

где:  $S_1 = \frac{q l_0^2}{8}$ ;  $K_1 = \frac{2}{3}$ ;  $S_2 = P l_{CT}$ ;  $K_2 = \frac{1}{2}$ ;  $A = \frac{S_1}{S_2} = \frac{q l_0^2}{8 P l_{CT}} = \frac{q l_0 \lambda}{8 P}$

Фиг. 1. а) Формирование сложной формы загрузки.  
б) Формирование параметра управления А.

На фиг. 2 представлено изменение функции  $[q_s] - q_s$  для параметров нагрузок с  $A = 0$  и  $A = \infty$ . При этом выявляется, что они определяют граничные значения для всей области  $[q_s] - q_s$  по параметру  $A$ , отражая одну из двух простых форм загрузки (с выраженной второй формой).

На фиг. 3 представлены функции  $[q_s] = [q_s](A)$  по параметру  $A$  для  $A = 1/2, 1, 2, 4, \infty$ . Оптимальные значения параметров  $q_b$  построены для  $\lambda = 1$ , как точка пересечения кривой  $y_i = [q_s]$  с прямой  $y = \lambda q_s$ . При этом устанавливается, что значение оптимального параметра  $q_b = q_{b \text{ опт}} = 1$  для  $A = 0, 1/2, 1, 2$ ;  $q_b = q_{b \text{ опт}} = 2,4$  для  $A = 4$ . Для  $A = \infty$  оптимального решения нет (для области выбранного  $\lambda = 1$ ). В работе [3] показано существование оптимальных значений весового параметра в зависимости от метрики ( $\lambda$ ).

Результаты исследования законов изменения объемов базисных элементов  $V_b(q_s)$  в сопоставлении с изменением функции выходных весовых параметров  $[q_s]$  приведены на фиг 4 для  $A = 1$  и на фиг. 5 для  $A = 4$ . Здесь выявляется, что решение уравнения  $[q_s] = \lambda q_s$ , соответствует точке перемены базисного элемента, определяя оптимальное значение весового параметра ( $q_{s \text{ опт}}$ ).

В дополнение к вышеизложенному проведенное исследование позволяет сделать выводы:

- при оптимизации рам для сложных форм загрузки остаются справедливы все принципы оптимизации, разработанные для простых форм. Оптимальное значение весовых параметров  $q_s$  может определяться либо как точка пересечения кривой  $y_i = [q]$ , либо как точка пересечения функций объемов базисных элементов,

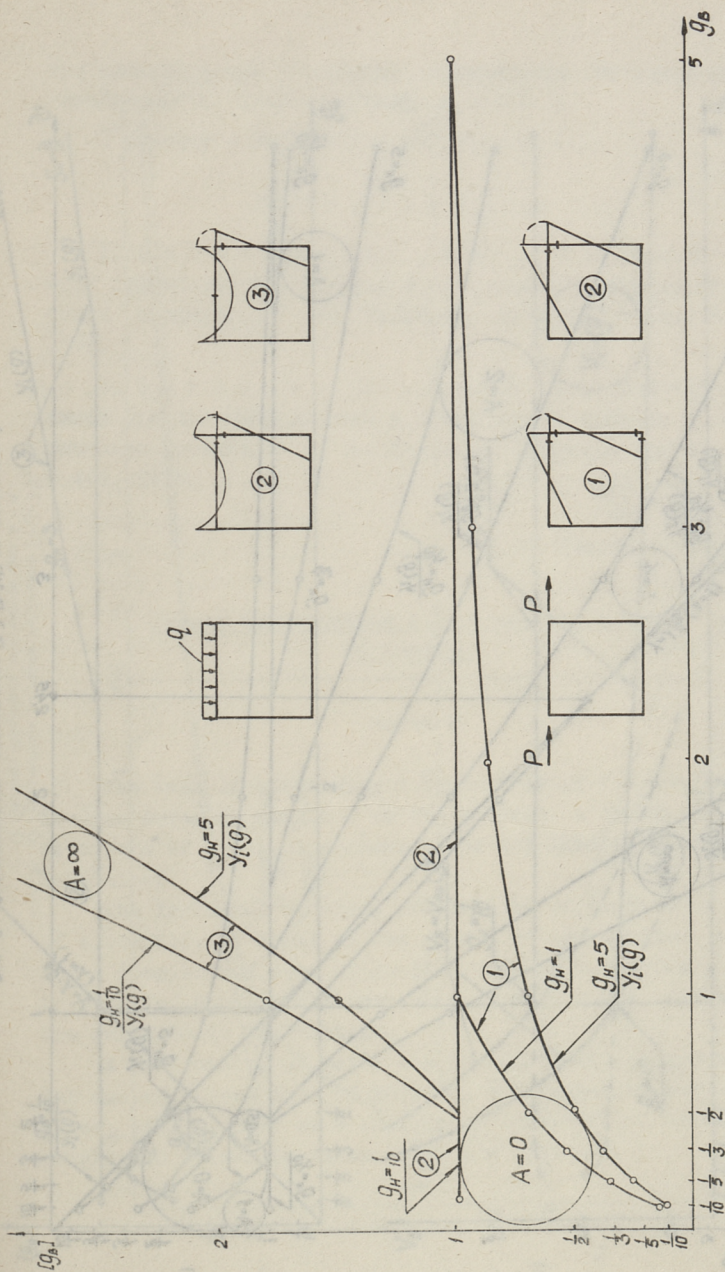
- принцип суперпозиции для определения оптимальных весовых параметров рамы не справедлив в силу нелинейности задачи,

- в области изменения функции  $[q_s] - q_s$ , для сложной формы загрузки можно установить три участка:

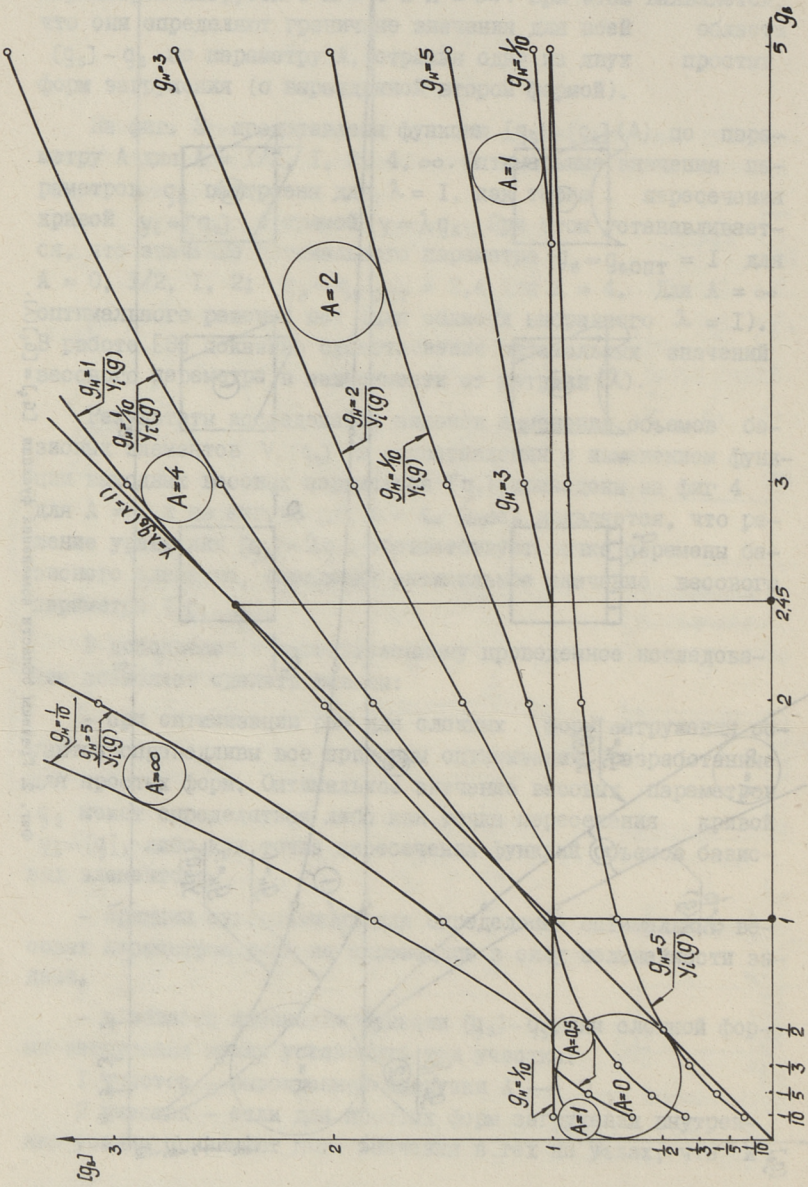
1 участок - вырожденной нагрузки  $A \rightarrow 0$

2 участок - если для простых форм загрузки внутренние усилия принимают max значения в тех же узлах, что и

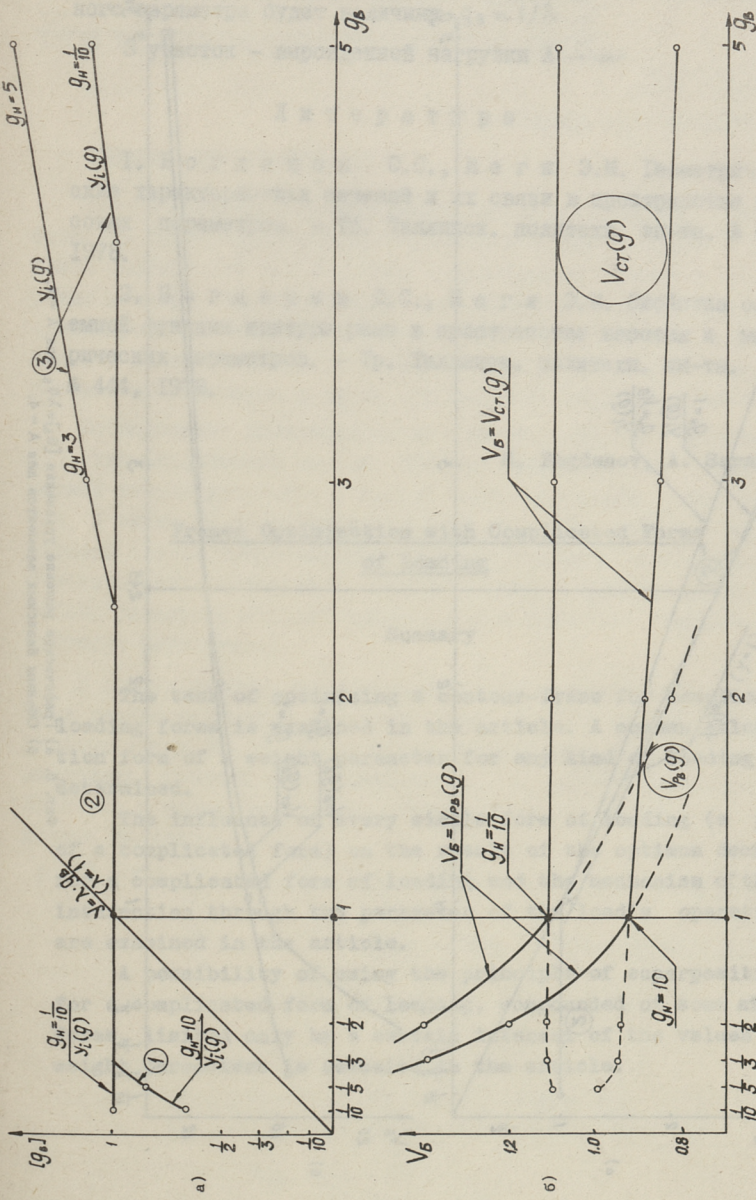




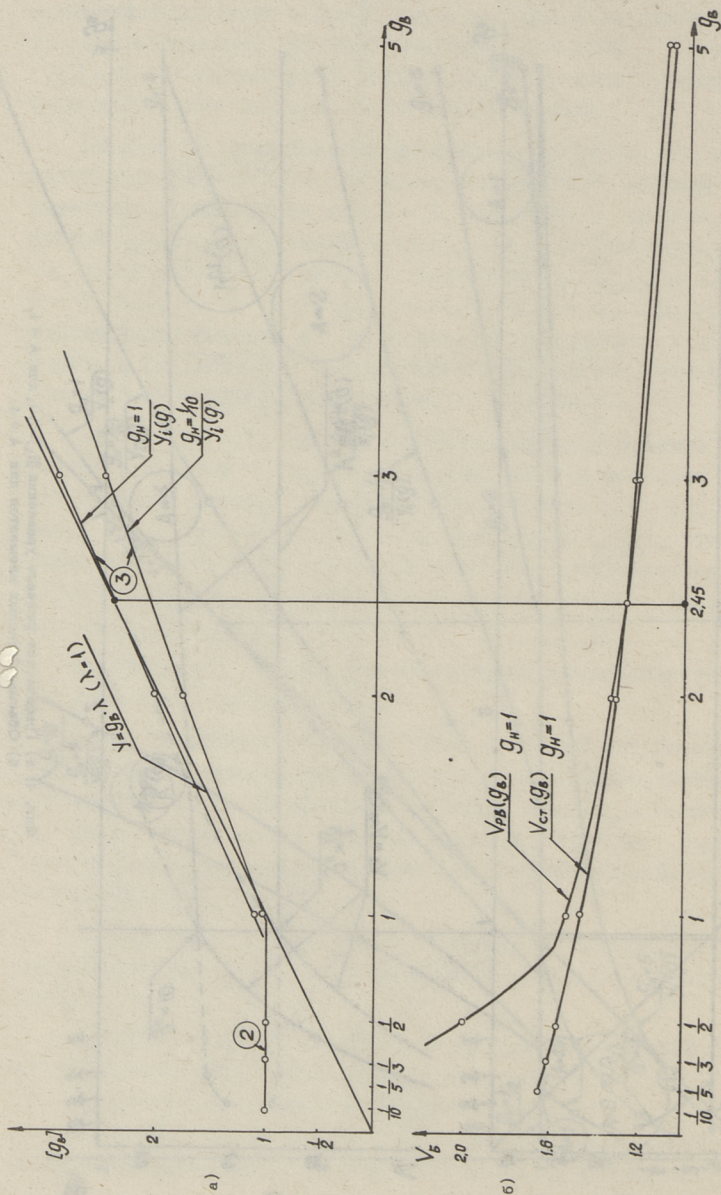
Фиг. 2. Границы области изменения функции  $[G_s] = [G_s](A)$ .



Фиг. 3. Функциональная зависимость  $[G_2] = [G_1](A)$  по параметру  $A$ .



Фиг. 4. а) Графическое решение уравнения  $[g_n] = \lambda g_b$  для  $A = 1$ .  
 б) Объемы базисных элементов для  $A = 1$ .



Фиг. 5. а) Графическое решение уравнения  $[G_s] = \lambda G_s$  для  $A = 4$ .  
 б) Объемы базисных элементов для  $A = 4$ .

для сложной формы загрузки, оптимальным значением входного параметра будет величина  $q_s = 1/\lambda$

3 участок - вырожденной нагрузки  $A \rightarrow \infty$ .

### Л и т е р а т у р а

1. Богданов С.С., Иегги Э.М. Геометрические характеристики сечений и их связи в пространстве весовых параметров. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та. № 444, 1978.

2. Богданов С.С., Иегги Э.М. Свойства объемной функции контура рамы в пространстве весовых и метрических параметров. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та. № 444, 1978.

S. Bogdanov, A. Sarap

### Frames Optimization with Complicated Forms of Loading

#### Summary

The task of optimizing a contour-frame for complicated loading forms is examined in the article. A common calculation form of a weight parameter for any kind of loading is determined.

The influence of every simple form of loading (a part of a complicated form) on the result of the optimum decision for a complicated form of loading and the mechanism of their interaction through the parameter of the load's operating are examined in the article.

A possibility of using the principle of superpositions for a complicated form of loading, compounded of some simple forms, limited only by a certain interval of the values of weight parameters is revealed in the article.



## ДИНАМИКА СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН

Работа посвящена исследованию волновых процессов деформации трехслойных осесимметричных пластин, которые в плане бесконечные или конечные с различными способами опирания контура. Кратковременная распределенная нагрузка (действует осесимметрично на некоторую ограниченную область в центре лицевой поверхности пластины) плавно возрастает до максимума и затем сравнительно медленно убывает.

Исследование производится на основе предыдущей работы [1], где разработаны модели, которые базируются на трехмерной теории упругости с учетом трансверсальной изотропии, а также на базе теории пластин типа Тимошенко. В настоящей статье представляется краткое описание алгоритмов с некоторыми дополнениями. Основной целью является анализ работы различных моделей пластин и сопоставление соответствующих результатов.

В первую очередь рассматривается решение задачи на основе теории упругости. Пластина трехслойная с толщиной отдельных слоев  $h_1, h_2, h_3$ . Внешние несущие слои из одного материала. Средний слой, наполнитель, из другого материала. Пластина в плане бесконечная. Применяются следующие безмерные величины:

$$\varphi = \frac{r}{h_1}, \quad \zeta = \frac{z}{h_1}, \quad \vartheta = \frac{\theta}{h_1} - \text{цилиндрические координаты пластины};$$

$$u = \frac{u_r}{h_1}, \quad w = \frac{u_z}{h_1} - \text{перемещения в направлении } \varphi \text{ и } \zeta;$$

$$\tau = \frac{c_{1xm}t}{h_1} - \text{время,}$$

$$\sigma_{\rho x} = \sigma_{rx}/K_{3x}, \quad \sigma_{\vartheta x} = \sigma_{\theta x}/K_{3x};$$

$$\sigma_{\zeta x} = \sigma_{zx}/K_{3x} - \text{нормальные напряжения};$$

$$\tau_{\rho \zeta x} = \tau_{rzx}/K_{3x} - \text{касательное напряжение, где}$$

$$K_{3x} = \frac{E_x}{(1+\nu_x)(1-2\nu_x)}.$$

В настоящей работе рассматриваются пластины со слоями из изотропного материала. Осесимметричное движение изотропных слоев описывается следующими дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial u}{\rho \partial \rho} - \frac{u}{\rho^2}\right) + K_{nx}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + (1 - K_{nx}^2) \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \xi} &= \frac{1}{K_{1mx}^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \\ K_{nx}^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{\partial w}{\rho \partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + (1 - K_{nx}^2) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \xi} + \frac{\partial u}{\rho \partial \xi}\right) &= \frac{1}{K_{1mx}^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \end{aligned} \quad (I)$$

где  $K_{nx} = C_{2x} / C_{1x}$ ,  $K_{1mx} = C_{1x} / C_{1xm}$ ;

$C_{1x}$  — скорость волны расширения;

$C_{2x}$  — скорость волны искажения;

$C_{1xm}$  — наибольшая скорость волны расширения среди скоростей слоев;

$x = 1, 2, 3$  берутся в соответствии с номером слоя.

Решение уравнений движения происходит с применением математической модели конечных разностей — методом трехмерных сеток, который основательно описан в наших ранних работах, в том числе и в работе [1]. Основными искомыми величинами являются перемещения  $u$  и  $w$  в узлах сетки. При определении их во внутренних точках сетки используется явная процедура типа крест. Для определения перемещений в остальных точках сетки нужно удовлетворить соответствующие начальные, граничные и фронтовые условия. Фронт определяется методом геометрической оптики.

Ниже кратко описываются упомянутые условия.

На верхней поверхности пластины нормальные напряжения должны равняться внешней нагрузке. Касательные напряжения равны нулю.

На оси симметрии нагрузки перемещение  $u = 0$  и касательное напряжение равно нулю. На фронте волны расширения перемещения также равны нулю.

Условия контакта на поверхностях раздела между слоями следующие. На первой поверхности раздела между слоями:

$$1. u_1 = u_2 \quad 2. w_1 = w_2 \quad 3. \sigma_{\xi 1} = \frac{K_{32}}{K_{31}} \sigma_{\xi 2} \quad 4. \tau_{\rho \xi 1} = \frac{K_{32}}{K_{31}} \tau_{\rho \xi 2} \quad (2)$$



На второй поверхности раздела:

$$\begin{aligned}
 1. \quad u_2 = u_3 \quad 2. \quad w_2 = w_3 \quad 3. \quad \frac{K_{32}}{K_{31}} \sigma_{\xi 2} = \frac{K_{33}}{K_{31}} \sigma_{\xi 3} \\
 4. \quad \frac{K_{32}}{K_{31}} \tau_{\rho \xi 2} = \frac{K_{33}}{K_{31}} \tau_{\rho \xi 3} \quad (3)
 \end{aligned}$$

На нижней поверхности пластины нормальные и касательные напряжения равны нулю.

Задачи на основе теории упругости запрограммированы и решены на машине ЕС-1022 А. Мяннил.

В рамках настоящей работы исследования проводятся над слоистыми пластинами двух вариантов. Характеристики материалов этих пластин следующие:

первый вариант

$$\begin{aligned}
 E_1 = E_3 = 2,1 \cdot 10^6 \frac{\text{КГС}}{\text{СМ}^2}, \quad \nu_1 = \nu_3 = 0,3, \quad \rho_1^* = \rho_3^* = 7,95 \cdot 10^6 \frac{\text{КГС} \cdot \text{С}^2}{\text{СМ}^4}, \\
 E_2 = 0,7 \cdot 10^6 \frac{\text{КГС}}{\text{СМ}^2}, \quad \nu_2 = 0,21, \quad \rho_2^* = 2,45 \cdot 10^6 \frac{\text{КГС} \cdot \text{С}^2}{\text{СМ}^4}, \quad (4)
 \end{aligned}$$

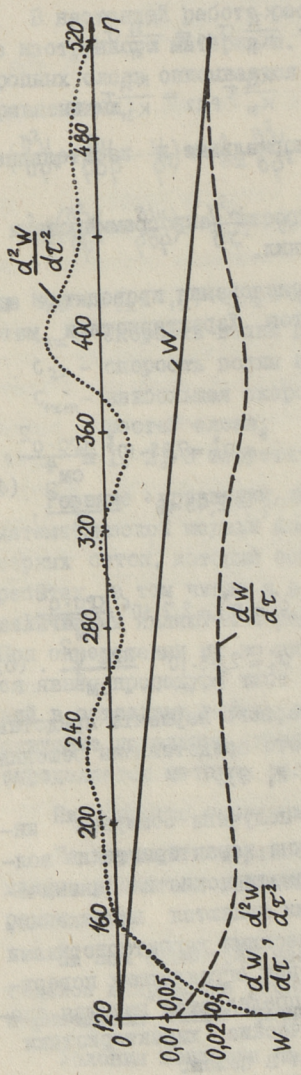
второй вариант

$$\begin{aligned}
 E_1 = E_3 = 0,7 \cdot 10^6 \frac{\text{КГС}}{\text{СМ}^2}, \quad \nu_1 = \nu_3 = 0,34, \quad \rho_1^* = \rho_3^* = 2,7 \cdot 10^6 \frac{\text{КГС} \cdot \text{С}^2}{\text{СМ}^4}, \\
 E_2 = 0,7 \cdot 10^6 \frac{\text{КГС}}{\text{СМ}^2}, \quad \nu_2 = 0,21, \quad \rho_2^* = 2,45 \cdot 10^6 \frac{\text{КГС} \cdot \text{С}^2}{\text{СМ}^4}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

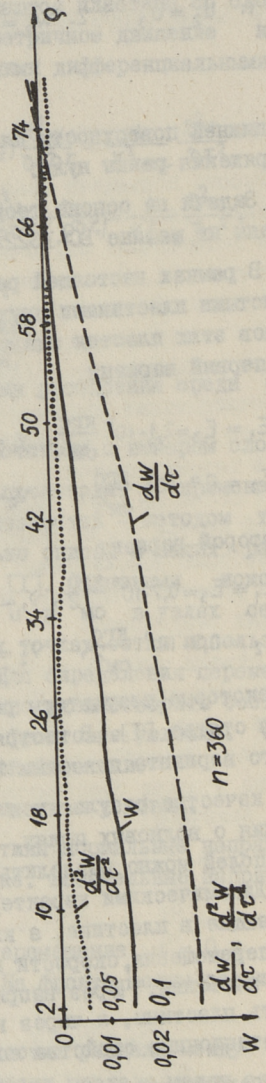
Некоторые результаты решения первого варианта представлены в статье [1]. В настоящей работе представлены решения второго варианта пластины (фиг. 1, 2, 3).

В качестве результатов расчета получена обширная информация о волновых полях. Полученные характеристики волновых полей можно разделить на кинематические и динамические. Динамическими характеристиками являются напряжения, возникающие в пластине, а кинематическими характеристиками будут перемещения, скорости и ускорения ограждающих поверхностей пластины. Через напряжения определяется несущая способность пластины, а через кинематические характеристики эксплуатационные свойства сооружения в целом.

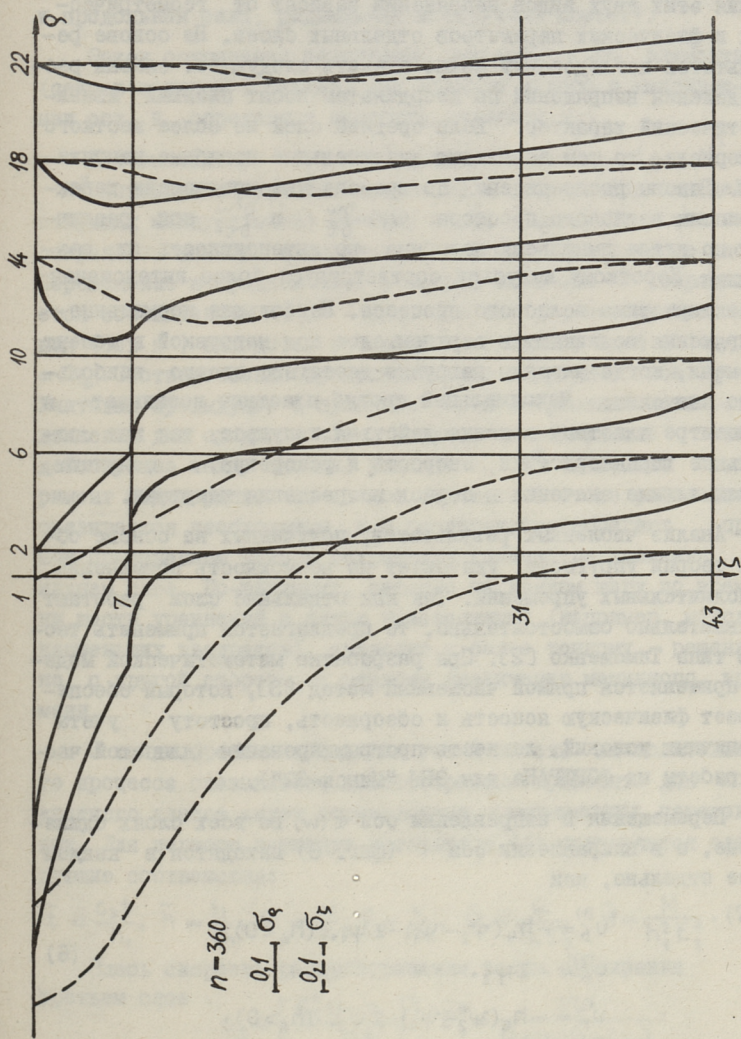
В трехслойной пластине внешние несущие слои подвергаются действию нормальных напряжений несимметричного характера. Эти напряжения, действующие в направлении, параллельном свободной поверхности пластины, можно разделить на



Фиг. 1. Кинематические характеристики пластины  $W$ ,  $\frac{\partial W}{\partial \tau}$  и  $\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}$  в зависимости от числа слоев  $n$  по времени в эллипторе на нижней поверхности пластины.



Фиг. 2. Кинематические характеристики пластины  $W$ ,  $\frac{\partial W}{\partial \tau}$  и  $\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}$  в сечении на нижней поверхности пластины при  $n = 360$ .



Фиг. 3. Напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\phi$  в сечении пластины при  $n = 360$ .

основе понятий теории пластины на два вида — напряжения изгибного и напряжения цепного характера. Законы распределения этих двух видов напряжений зависят от геометрических и физических параметров отдельных слоев. На основе результатов исследований можно сказать следующее: законы распределения напряжений по координатам носят плавный квазистатический характер. Если средний слой из более жесткого материала, то там возникают значительные изгибные напряжения. Законы распределения по времени кинематических характеристик волнового процесса  $w$ ,  $\frac{\partial w}{\partial \tau}$  и  $\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}$  при различных по длине импульсах подобны, но интенсивность их различная. Короткому импульсу соответствует более интенсивная характеристика волнового процесса. Наибольшие нормальные напряжения возникают в верхнем слое под нагрузкой в момент времени, когда внешняя нагрузка достигает своего наибольшего значения. Максимальный прогиб пластины возникает в эпицентре пластины в конце действия импульса, так как остальные характеристики, скорость и ускорение, получают максимальные значения в период возрастания нагрузки.

Анализ численных результатов, полученных на основе общей теории упругости, указывает на возможность применения дополнительных упрощений. Так как отдельные слои работают сравнительно самостоятельно, то предлагается применить теорию типа Тимошенко [2]. При разработке математической модели применяется прямой численный метод [3], который обеспечивает физическую ясность и обзорность, простоту учета граничных условий, легкость программирования (для этой части работы на ФОРТРАНе для ЭВМ "Минск-32").

Перемещения в направлении оси  $z$  ( $w$ ) во всех слоях одинаковые, а в направлении оси  $r$  (фиг. 6) находятся в каждом слое отдельно, как

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= -h_4(\psi_2 - \psi_1) - z\psi_1, \quad (h_4 < 0), \\ u_r^{(2)} &= -z\psi_2, \\ u_r^{(3)} &= -h_6(\psi_2 - \psi_3) - z\psi_3, \quad (h_6 > 0). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\psi_{1,2,3}$  — углы поворота слоев.

Из уравнения (6) определяются радиальные и окружные деформации ( $\epsilon_r$  и  $\epsilon_\varphi$ ). Угловые деформации вычисляются как  $\chi = -\psi + w'$ .

Из закона Гука получаются путем интегрирования внутренние усилия  $Q$ ,  $T$ ,  $M_r$  и  $M_\varphi$  (соответственно поперечная и продольная сила, радиальный и окружный момент).

Закон сохранения количества движения  $i$ -го элемента (сектор с углом  $I$  радиан) как единого целого в направлении оси  $z$  определяет скорость элемента  $v_i$ .

Для вычисления пяти неизвестных  $\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \Delta\omega_3, N^I$  и  $N^{II}$  (приращений угловых скоростей и сдвигающихся сил, действующих между слоями) имеются шесть уравнений: законы сохранения момента и количества движения для каждого слоя. Перемещение в среднем слое в направлении оси  $r$  определяется соотношением  $u_r^{(2)} = -z\psi_2$ . Это значит, что нулевая линия (ось  $r$ ) находится в середине среднего слоя и  $|h_4| = |h_6|$ . Соответственно продольная сила в среднем слое  $T_2 = 0$ . Учитывая предыдущее и применяя закон сохранения количества движения для среднего слоя, получаются сдвигающие силы, действующие между слоями, равными  $N^I = N^{II}$ . Численный эксперимент подтвердил, что точное соблюдение этого равенства оказывается необходимым, и в расчетах пренебрегают прямым применением закона сохранения количества движения в нижнем слое. По-видимому, решение на каждом шагу по времени шести уравнений с пятью неизвестными (например, методом наименьших квадратов), приводит к более точному решению, но, с другой стороны, к резкому увеличению машинного времени.

С точки зрения соблюдения устойчивости вычислительного процесса оказывается целесообразным применять для конкретного класса задач определенных безразмерных переменных. Для первого варианта материалов (4) применяются следующие соотношения:

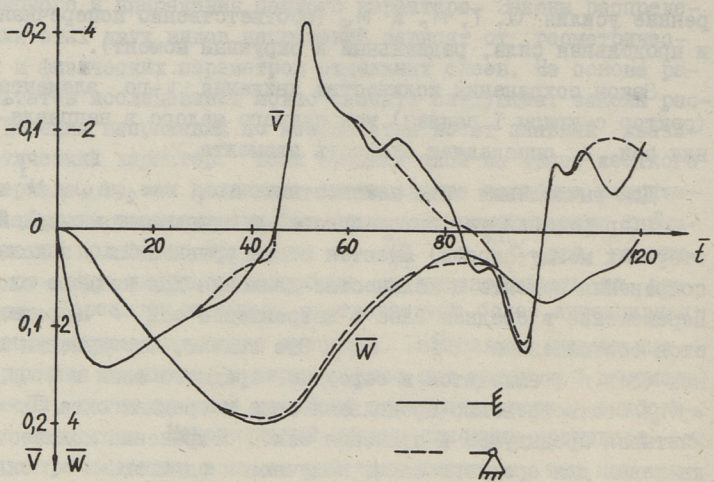
$$\bar{t} = \frac{c_3 t}{h_1}, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_1}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{v} = \frac{v}{c_3}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{h_1 E_3^*}, \quad \bar{M} = \frac{M}{h_1^2 E_3^*}. \quad (7)$$

Здесь скорость распространения волны расширения в третьем слое

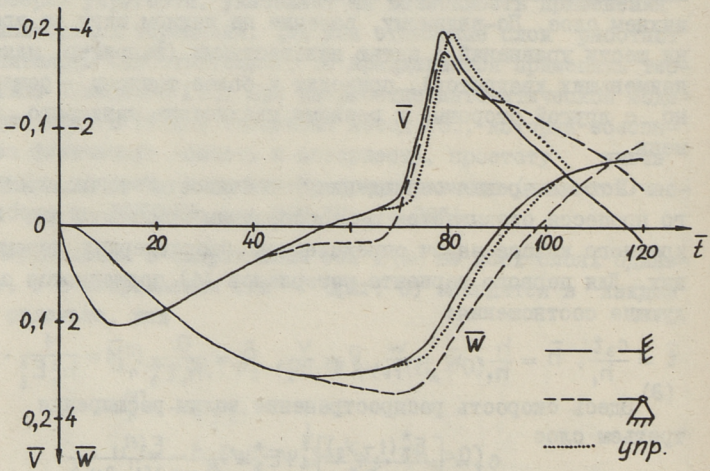
$$c_3 = \left[ \frac{E_3^* (1 - \nu_3)}{\rho_3^*} \right]^{\frac{1}{2}}; \quad E_3^* = \frac{E_3}{(1 + \nu_3)(1 - 2\nu_3)}$$

( $\rho_3^*$  - плотность материала,  $\nu$  - коэффициент Пуассона).

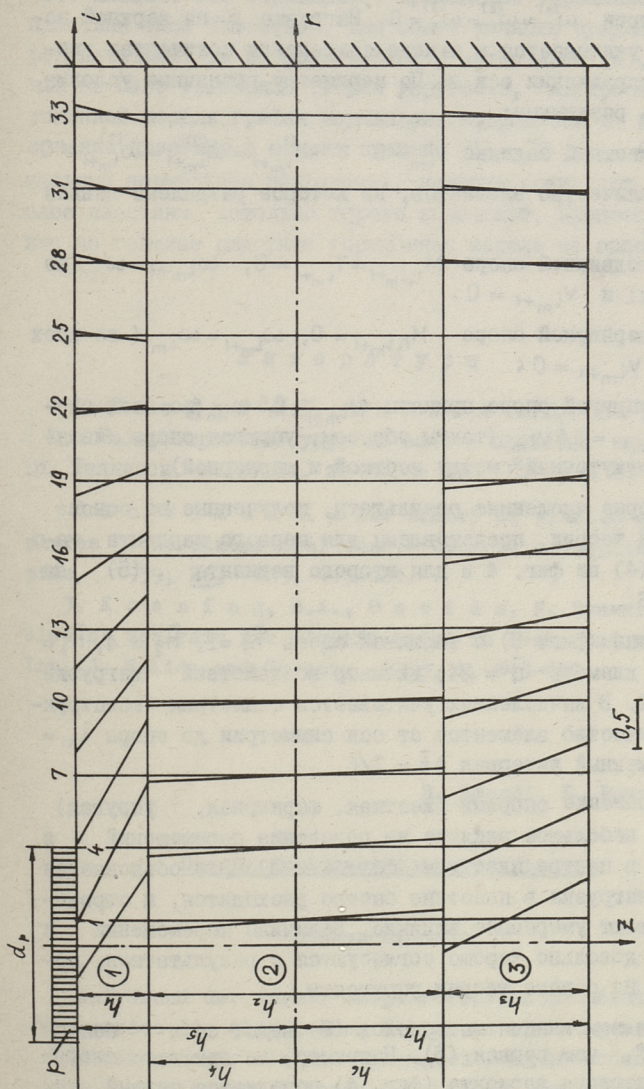
Для второго варианта материалов (5) заменяются  $c_3$  и  $E_3$  соответственно  $c_2$  и  $E_2$ .



Фиг. 4. Зависимость перемещений  $\bar{w}$  и скоростей  $\bar{v}$  в центре пластины от времени  $\bar{t}$  для первого варианта материалов (5) при различном опирании пластины по контуру.



Фиг. 5. Зависимость перемещений  $\bar{w}$  и скоростей  $\bar{v}$  в центре пластины от времени  $\bar{t}$  для второго варианта материалов (6) при различном опирании пластины по контуру.



Фиг. 6. Нормальные напряжения  $\bar{\sigma}_r$  для второго варианта материалов (6) в момент времени  $t = 30$ .

В работе применяются следующие граничные условия. На оси симметрии  $\omega_1^{(1)} = \omega_1^{(2)} = \omega_1^{(3)} = 0$ . Нагрузка  $p$  на верхней поверхности учитывается в законе сохранения количества движения в направлении оси  $z$ . По периметру граничные условия могут быть различные:

1) в жесткой заделке  $V_{i_m} = 0$  и  $\omega_{i_{m+1}}^{(1)} = \omega_{i_{m+1}}^{(2)} = \omega_{i_{m+1}}^{(3)} = 0$  ( $i_m$  - количество элементов, на которое разделена данная пластина);

2) в подвижной опоре  $M_{r, i_{m+1}} = T_{i_{m+1}} = 0$ ,  $\omega_{i_{m+1}} = \omega_{i_m}$  (во всех слоях) и  $V_{i_{m+1}} = 0$ ;

3) в шарнирной опоре  $M_{r, i_{m+1}} = 0$ ,  $\omega_{i_{m+1}} = \omega_{i_m}$  (во всех слоях) и  $V_{i_{m+1}} = 0$ ;

4) в упругой опоре приняты  $\omega_{i_{m+1}} = 0,5 \omega_{i_m}$  (во всех слоях) и  $V_{i_{m+1}} = 0,5 V_{i_m}$  (таким образом, упругая опора является "промежуточной" между жесткой и шарнирной).

Некоторые численные результаты, полученные на основе упрощенной теории, представлены для первого варианта материалов (4) на фиг. 4 и для второго варианта (5) на фиг. 5 и 6.

Пластина (фиг. 6) с толщиной слоев  $\bar{h}_1 = 1$ ,  $\bar{h}_2 = 4$ ,  $\bar{h}_3 = 2$  имеет диаметр  $\bar{d} = 24$ ; диаметр воздействий нагрузки  $\bar{d}_p = 2,54$ . В вычислениях учитывается симметрия конструкций; количество элементов от оси симметрии до опоры  $i_m = 36$ , временной интервал  $\Delta \bar{t} = 1/6$ .

Варьирование опорами (жесткая, шарнирная, упругая) оказывает небольшое влияние на поведение перемещений и скоростей в центре пластины (фиг. 4 и 5). Это объясняется тем, что нагрузка в пластине быстро расходится, и отражения оказывают умеренное влияние. Величины перемещений и скоростей довольно хорошо согласуются с результатами, полученными на основе теории упругости.

Вторая комбинация материалов (6) ведет себя более "спокойно", чем первая (5). Например, на графике скоростей для первого варианта (фиг. 4) появляется первый пик при  $\bar{t} \approx 50$ , а для второго варианта только при  $\bar{t} \approx 80$  (фиг. 5).

Как видно из графиков, при данных нагрузках переменные меняются как по времени, так и по координатам (см. также



[1]) плавно. Это оправдывает применение упрощенной теории пластины типа Тимошенко. Для более точного сравнения с результатами для второго варианта материалов (6), полученных на базе уравнений теории упругости, построен для упрощенной модели график нормальных напряжений в радиальном сечении пластины в момент времени  $\bar{t} = 30$  (фиг. 6). Максимальные нормальные напряжения, которые возникают в верхнем слое пластины, довольно хорошо совпадают. Процесс затухания по толщине пластины упрощенная модель не описывает.

### Л и т е р а т у р а

1. К я э р д и Х.Х., М я н н и л А.Ю., П о в е р у с Л.Ю. Распространение упругих волн в слоистых преградах. - Тр. Таллинск. политехн. ин-та, № 428, 1977, с. 25-34.

2. Y u, Y i Y u a n. A new theory of elastic sandwich plates - one-dimensional case. - Journal of Applied Mechanics, 1959, 26, N 3, 415-421.

3. K o e n i n g, H.A., D a v i d s, N. Dynamical finite element analysis for elastic waves in beams and plates. - Int. J. Solids and Struct., 1968, 4, 643-660.

H. Käerdi, L. Poverus

### Die Dynamik geschichteter Platten

#### Zusammenfassung

Auf Grund der vorher ausgearbeiteten mathematischen Modelle werden die elastischen Wellen in einer geschichteten Platte untersucht. Als Bewegungsgleichungen werden die Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie sowie der Plattentheorie Timoschenkos benutzt. Die Berechnungen werden nach der dreidimensionalen Differenzenmethode und der Finite-Element Methode durchgeführt. Es sind einige numerische Resultate mit zugehörigen Analysen beigefügt.

## С о д е р ж а н и е

1. Э.М. Иеги. Математическая модель задачи оптимизации анизотропной пластины переменной толщины . . . . .	3
2. П.И. Кошель. Некоторые результаты оптимизации ортотропной балки-стенки . . . . .	15
3. Э.М. Иеги, М.К. Нымме. К построению алгоритма оптимизации пространственных стержневых систем	35
4. С.С. Богданов. Некоторые вопросы построения алгоритма исследования и оптимизации многоконтурных рам. . . . .	49
5. Э.С. Богданов, А.А. Сарап. Оптимизация рам при сложных формах нагружения. . . . .	59
6. Х.Х. Кяэрди, Л.Ю. Поверус. Динамика слоистых пластин. . . . .	69

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Труды ТПИ № 487

ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И АЛГОРИТМЫ

Строительная механика XI

Редактор Р. Ээк. Техн. ред. В. Ранник

Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 27 февр. 1980 г.

Подписано к печати 28 окт. 1980.

Бумага 60x90/16. Печ. л. 5 + 0,25 приложение

Уч.-изд. л 5,08. Тираж 300

МВ-09017

Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскла, 2/9. Зак. № 521

Ц е н а 75 коп.



ТПИ, Таллин, 1980



Цена 75 коп.