

BIOMEDITSIIINITEHNIKA KESKUS

Elektromagnetväljad ja lained LBR5010 loengute konspekt.

Hiie Hinrikus

SISSEJUHATUS

Elektrodünaamika on osa teoreetilisest füüsikast, nimelt elektromagnetilise välja teooriast, ja käsitleb suhteliselt kiiretoimelisi dünaamilisi protsesse elektro-magnetilises väljas. Kuna raadiotehnikas kasutatakse elektromagnetilisi signaale, annab elektrodünaamika raadiotehnika füüsikalised alused. Käesolevas kursuses vaadeldaksegi elektrodünaamikat selle tehnilise rakenduse aspektist raadiotehnikas. Kaasaegses füüsikas on elektromagnetiliste nähtuste osas teooria lõpetatud. Lähtudes füüsikalistest seadustest on põhimõtteliselt lahendatav iga ülekanne elektri ja magnetismi vallast. Paljudel juhtudel aga ei ole praktiliselt enam vajadust konkreetse ülesande lahendamisel lähtuda üldistest füüsikaseadustest. Kui on tegemist suhteliselt väikese kiirusega muutuvate protsessidega ja elektromagnetilise laine pikkus on suur võrreldes süsteemide ja elementide mõõtmetega l ,

$$\lambda \gg l$$

võib teooriat tunduvalt lihtsustada, viies sisse pinge ja integraalse voolu mõisted. Sel juhul kasutatakse praktikas mitte enam elektrodünaamika, vaid koondpara-meetritega ahelate arvutusmeetodeid. Kui on tegemist väga kiirete elektro-magnetiliste protsessidega ja lainepikkus λ on äärmiselt väike

$$\lambda \ll l$$

nagu optilises diapsoonis, on samuti praktiliselt kasutatav lihtsustatud teooria geomeetrilise optika seaduste ja meetodite näol.

Juhul aga, kui lainepikkused on võrreldavad süsteemide ja elementide mõõtmetega

$$\lambda \approx l$$

ei ole teooria lihtsustamine võimalik. Sel juhul tuleb ka praktiliselt kasutada üldisi elektrodünaamika meetodeid. Otsest rakendust leiavad elektrodünaamika mee-todid ülikõrgsageduse (meeter-, detsimeeter-, sentimeeter- ja millimeeterlained) diapsoonis ning samuti infrapunases ja osalt ka optilises diapsoonis, eriti kui on tegemist monokromaatilise kiirgusega nagu kvantelektroonika süsteemides. Käesolev tehnilise elektrodünaamika kursus on seega otseselt baasiks reale rakendusliku iseloomuga kursustele (raadiolainete levimine, ülikõrgsagedus -seadmed ja -antennid, ülikõrgsagedus- ja kvantseadised). Kursus koosneb kahest osast. Üldteoreetiline osa hõlmab Maxwelli võrrandid ja otsese järel-duse-na neist elektromagnetilise välja teoreemid ning elektromagnetilise

kiirguse teooria. Üdteoreetilise osa baasil vaadeldakse kursuses konkreetseid küsimusi, mis leiavad edasist arendamist rakendusliku iseloomuga kursustes.

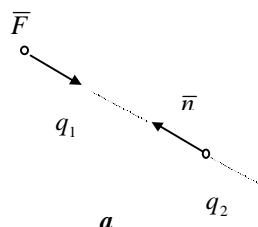
1 Elektromagnetiline väli

Esimeses, oma iseloomult ettevalmistavas peatükis toome sisse põhilised elektrilised ja magnetilised parameetrid, mida kasutatakse kogu kursuse jooksul, meenutame põhilisi seadusi ja keskkondade ning väljade omadusi.

1.1 Elektrivälja parameetrid

1.1.1 Elektrivälja tugevus

Mis on väli? Sellele lihtsale küsimusele ei ole sugugi kerge vastata. Välja saab mõista ainult tema mõju kaudu teatud kindlatele objektidele, mis selle välja mõjule alluvad. Nii võib välja mõista kui ruumi osa, kus on olemas tingimused sellise mõju tekkeks. Näiteks elektriväljas tekib jõud, mis mõjutab selles asetsevat elektrilaengut. Gravitatsiooniväljas mõjutab jõud selles asetsevat massi.



Joon. 1.1

Välja mõiste selgitamiseks lähtume tuntud fundamentaalseadustest. Võtame näitena elektri-välja. Vaatleme kahest punktilaengust q_1 ja q_2 koosnevat süsteemi vaakumis (joon. 1.1). Vastavalt Coulombi seadusele mõjutavad laengud teineteist jõuga

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{n}, \quad (1.1.1)$$

kusjuures jõud \vec{F} [N] on suunatud mööda laenguid ühendavat sirget ühikvektori \vec{n} suunas. Laengu suurused on antud kulonites ja nendevaheline kaugus r meetrites. Võrdelisusteguril on SI-süsteemis kuju $\frac{1}{4\pi \epsilon_0}$, kusjuures nn. elektriline konstant $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \left[\frac{F}{m} \right]$ on sisse viidud dimensiooni kindlustamiseks.

Nii siin kui ka edaspidi kasutame ainult SI-süsteemi.

Seda seadust võib vaadelda kahes osas.

Esiteks, süsteemi kahest laengust võime vaadelda ka ekvivalentsel kujul kui laengut q_1 , mis asub laengu q_2 poolt tekitatud elektriväljas ja millele mõjub jõud (1.1.1). Laengut mõjutab elektriline Lorenzi jõud

$$\vec{F}_{LE} = q_1 \vec{E}, \quad (1.1.2)$$

\vec{E} on vaatluspunktis olemas sõltumata sellest, kas seal laengut on või ei.

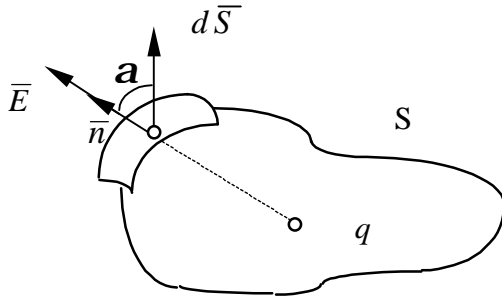
Teiseks võimegi vaadelda suurust \vec{E} vaatluspunktis. Suhet

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{LE}}{q_1} = \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{n} \quad (1.1.3)$$

nimetatakse elektrivälja tugevuseks.

*****Elektrivälja tugevus on jõud, mis mõjutab üht laenguühikut elektriväljas.*****

Valem (1.1.2) määrab elektriväljas olevale laengule mõjuva jõu ja on aluseks liikumisvõrrandi koostamisel. Valem (1.1.3) seob elektrivälja tema allikaga, laenguga q_2 ja on väljavõrrand. Siit tuleneb, näiteks, et elektrivälja tugevus muutub pöördvõrdeliselt kauguse ruuduga selle allikast, punktlaengust.



Joon. 1.2

Välja tugevuse vektori \vec{E} voog Ψ_E läbi pinna määratakse seda pinda läbivate jõujoonte arvuga. Seega vektori \vec{E} voog läbi pinnaelemendi $d\vec{s}$ elektriväljas (joon. 1.2.)

$$d\Psi_E = \vec{E} d\vec{s}. \quad (1.1.4)$$

Kui ümbritseme laengu q kinnise pinnaga S , siis elektrivälja tugevuse vektori

voog läbi kinnise pinna S võrdub

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{s} = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{n} d\vec{s} = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \alpha}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_w d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (1.1.5)$$

kus $d\Omega = \frac{\cos \alpha}{r^2}$ on ruumnurga element ja \vec{n} on ühikvektor, mis on suunatud piki pinnanormaali. Elektrivälja tugevuse vaakumis seob laenguga **Gaussi valem**

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.1.6)$$

*****Kinnisest pinnast väljuv elektrivälja voog on võrdeline piiratud laenguga.*****

Gaussi valem ei esita piiravaid tingimusi laengu iseloomule ja on maksev nii staatiliste kui ka ajaliselt muutuvate laengute puhul, liikuvate ja liikumatute laengute puhul. Gaussi valem kehtib hajutatud laengute suhtes.

1.1.2 Elektriline induktsioon

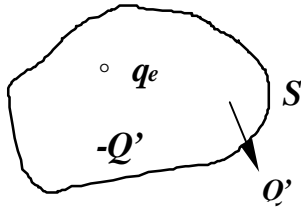
Vaatleme elektrivälja **dielektrilises keskkonnas**. Elektrivälja mõjul leiab aset dielektriku polariseerumine, kuna aine elementaarsed elektrilised laengud q_e nihkuvad välise elektrivälja mõjul $d\vec{l}$ võrra. Elementaarne elektriline polarisatsioonimoment

$$\vec{P} = q_e d\vec{l}, \quad (1.1.7)$$

kus $d\vec{l}$ on positiivse ja negatiivse laengu suhtelise nihke vektor. Dielektriku polarisatsioonivektor

$$\vec{P} = \Sigma \vec{P}. \quad (1.1.8)$$

Ümbritseme dielektrikus elektrivälja tekitava laengu q_e kinnise pinnaga S (joon. 1.3). Seoses polarisatsiooniga elementaarsed laengud nihkuvad ja laengu q_e poolt tekitatud elektrivälja mõjul teatud laengu hulk Q' läbib kinnise pinna S



Joon. 1.3

$$Q' = \oint_S \bar{P} d\bar{s} \quad (1.1.9)$$

Järelikult tekib pinna sees asuvas dielektrikus kompenseerimata laeng

$$-Q' = -\oint_S \bar{P} d\bar{s}, \quad (1.1.10)$$

mis põhimõtteliselt ei erine primaarsest laengust q_e .

Kasutame **Gaussi valemi**

$$\oint_S \bar{E} d\bar{s} = \frac{q}{\epsilon_0} - \frac{Q'}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_S \bar{P} d\bar{s}. \quad (1.1.11)$$

$$\text{Siit} \quad \oint_S (\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}) d\bar{s} = q. \quad (1.1.12)$$

$$\text{Integreeritav suurus} \quad \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} = \bar{D} \quad (1.1.13)$$

on elektrilise induktsiooni vektor $\bar{D} \left[\frac{C}{m^2} \right]$.

Elektrilist induktsiooni seob laenguga nn. üldistatud **Gaussi valem**

$$\oint_S \bar{D} d\bar{s} = q. \quad (1.1.14)$$

*****Elektrilise induktsiooni voog läbi kinnise pinna võrdub selle pinna poolt ümbritsetud laenguga.*****

Lineaarses keskkonnas on polarisatsioon võrdeline teda tekitanud elektriväljaga

$$\bar{P} = \epsilon_0 k_E \bar{E}, \quad (1.1.15)$$

kus k_E on dielektriline vastuvõtlikkus.

$$\text{Siis (I materiaalne võrrand) } \bar{D} = \epsilon_0 \epsilon \bar{E}, \quad (1.1.16)$$

kus $\epsilon = 1 + k_E$ on keskkonna suhteline läbitavus, dimensioonita suurus, mis näitab, mitu korda on elektrilise induktsiooni vektor antud keskkonnas suurem või väiksem kui vaakumis.

Praktikas kasutatakse sageli absoluutset dielektrilist läbitavust

$$\epsilon_a = \epsilon \epsilon_0, \quad (1.1.17)$$

mis omab dimensiooni $\left[\frac{F}{m} \right]$, nagu ϵ_0 .

1.2 Magnetvälja parameetrid

1.2.1 Magnetiline induktsioon ja magnetvälja tugevus

Looduses ei ole vabu magnetilisi laenguid magnetväli ei mõjuta liikumatut elektrilaengut. Sellepärast võib magnetvälja parameetrid sisse tuua, lähtudes liikuvast

elektrilaengust magnetväljas. Liikuvale laengule magnetväljas mõjub **magnetiline Lorenzi jõud**

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}, \quad (1.2.1)$$

kus $\vec{v} \left[\frac{m}{sek} \right]$ on laengu liikumise kiirus ja \vec{B} on vektor, mis peab määrama magnetiliste jõujoonte suuna ja tiheduse. Seega vektor $\vec{B} [T]$ on magnetilise induksiooni vektor.

*****Magnetvälja jõukarakteristik on magnetilise induksiooni vektor \vec{B} .*****

Magnetilise induksiooni vektor **vaakumis** on võrdeline magnetvälja tugevusega \vec{H}

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (1.2.2)$$

kus \vec{H} omab dimensiooni $\left[\frac{A}{m} \right]$ ja μ_0 on võrdelisustegur, valitud dimensiooni kindlustamiseks. SI-süsteemis $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{H}{m} \right]$.

Kui vaakum asendada mingi keskkonnaga, siis vektor \vec{B} muutub. Elementaarsete momentide ümberorienteerumisel välise magnetvälja mõjul tekib sisemine magnetväli, mis muudab vektori \vec{B} . Välise magnetvälja mõjul tekkinud ühikulise ruumala magnetilist momenti \vec{M} nimetatakse magneetumuseks. **Magnetilises keskkonnas**

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}. \quad (1.2.3)$$

Lineaarses keskkonnas

$$\vec{M} = k_m \vec{H}, \quad (1.2.4)$$

kus k_m on aine magnetiline vastuvõtlikkus.

$$\text{Siis (II materiaalne võrrand) } \vec{B} = \mu_0 \mathbf{m} \vec{H} \quad (1.2.5)$$

ja $\mathbf{m} = 1 + k_m$ on keskkonna suhteline magnetiline läbitavus. Ta on dimensioonita suurus ja näitab, mitu korda on magnetilise induksiooni vektor \vec{B} antud keskkonnas suurem või väiksem kui vaakumis.

Praktikas kasutatav absoluutne magnetiline läbitavus

$$\mathbf{m}_a = \mu_0 \mathbf{m} \quad (1.2.6)$$

mis omab dimensiooni $\left[\frac{H}{m} \right]$, nagu μ_0 .

1.2.2 Koguvoolu seadus

Analoogiliselt elektrilise induksioonivektori voole läbi pinna võib välja arvutada ka magnetilise induksioonivektori voo läbi pinna. Elementaarne magnetvoog läbi pinnaelemendi $d\vec{s}$

$$d\Psi_M = \vec{B} d\vec{s} \quad (1.2.7)$$

Täielik magnetvoog läbi kinnise pinna Ψ_M [Wb]

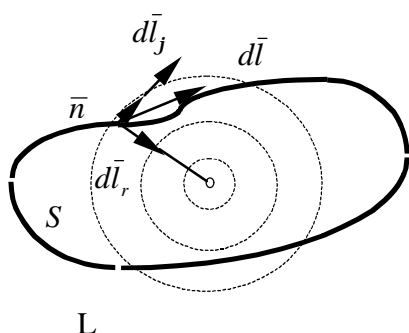
$$\Psi_M = \oint_S \vec{B} d\vec{s} \quad (1.2.8)$$

Kuna looduses **vabu magnetilisi laenguid ei ole**, on kerge näha, et

$$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0 \quad (1.2.9)$$

s.t. magnetilise induksioonivektori voog läbi kinnise pinna võrdub nulliga.

Seos (1.2.9) ei võimalda siduda magnetvälja tema allikatega. Et saada magnetvälja ja tema allika seost, vaatleme kinnise pinna asemel kinnise kontuuriga L ümbritsetud pinda S (joon. 1.4),



Joon. 1.4

mida läbib vool (liikuv laeng). Kui vool on suunatud mööda sirget risti pinnaga, kujutavad magnetilised jõujooned kontsentrisi ringe tsentriga vooluelemendil. Arvutame magnetvälja tsirkulatsiooni mööda kontuuri L . Liikumist piki kontuuri elementi võib jagada liikumiseks mööda magnetilise jõujoone puutujat $d\vec{l}_j$ ja liikumiseks mööda normaali jõujoonele $d\vec{l}_r$ (mis tsirkulatsiooni ei anna)

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_L \vec{H} (d\vec{l}_j + d\vec{l}_r) = \oint_L \vec{H} d\vec{l}_j = \oint_L \vec{H} r d\vec{j} = \vec{H} r 2\pi. \quad (1.2.10)$$

Pika sirge juhtme magnetvälja suurus on määratud **Biot'-Savart'i seadusega**

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}. \quad (1.2.11)$$

Asendades (1.2.11) seosesse (1.2.10), saame

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_\Sigma. \quad (1.2.12)$$

Valem (1.2.12) on üldise iseloomuga, kuna sama seos kehtib iga pinda läbiva voolu kohta ja iga pinda läbiv voolukomponent peab olema pinnaga risti, seega saame **koguvoolu seaduse**

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_\Sigma. \quad (1.2.13)$$

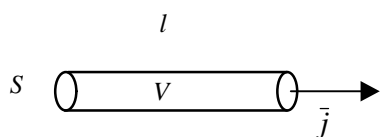
*****Magnetvälja tsirkulatsioon mööda pinna kinnist kontuuri võrdub voolude summaga, mis läbivad selle kontuuri poolt ümbritsetud pinda.*****

1.3 Üldistatud Ohmi seadus

Elektrit juhtivas keskkonnas tekib elektrivälja toimel elektrivool (**III materiaalne võrrand**)

$$\vec{j} = \mathbf{s}\vec{E}, \quad (1.3.1)$$

kus $\vec{j} \left[\frac{A}{m^2} \right]$ on ruumvoolu tihedus ja $\mathbf{s} \left[\frac{1}{\Omega m} \right]$ on keskkonna erijuhtivus.



Joon. 1.5

Valem (1.3.1) on üldistatud Ohmi seadus. **Ohmi seadus diferentsiaalsel kujul** on üldise iseloomuga, kehtib piiranguteta. Seadus integraalsel kujul, mis sisaldab pinget, on rakendatav ainult potentsiaalsete väljade puhul. Kui on tegemist potentsiaalsete väljadega, võib valemi 1.3.1 kergesti teisendada integraalsele kujule. Vaatleme näiteks juhtmehõõiku pillusega l , ristlõike pindalaga S ja ruumalaga V (joon. 1.5), eeldades, et juhe on homogeenne ja väljatugevuse jaotus on ühtlane. Integreerime seost 1.3.1 üle ruumi V

$$\int_V \vec{j} dV = \int_V \mathbf{s}\vec{E} dV. \quad (1.3.2)$$

Kuna kõik suurused omavad ühtlase jaotuse, siis võib seose 1.3.2 kirjutada kujul

$$\vec{j}S\bar{l} = \mathbf{s}\vec{E}\bar{l}S. \quad (1.3.3)$$

Arvestades, et $\vec{E}\bar{l} = U$, $\vec{j}S\bar{l} = I$ ja $R = \frac{l}{\mathbf{s}S}$ saame $I = \frac{U}{R}$, s.t. Ohmi seaduse integraalse kujuna. Tavaliselt integraalsel kujul kasutatav Ohmi seadus $U=IR$ on kehtiv ainult potentsiaalsete väljade puhul, kui võib rääkida pingest. Kui eksisteerivad ka kõrvalised elektromotoorsed jõud, lisandub Ohmi seaduses kõrvaliste jõudude poolt tekitatud elektrivälja tugevus

$$\vec{j} = \mathbf{s}(\vec{E} + \vec{E}_K) \quad (1.3.4)$$

1.4 Keskkondade tüübid

Sisseviidud suurused, mida edasises kursuses kasutame, võib jagada kolme gruppi.

1. Elektromagnetilise välja parameetrid:

$$\text{väljatugevused} \quad \vec{E} \left[\frac{V}{m} \right], \quad \vec{H} \left[\frac{A}{m} \right];$$

$$\text{induktsioonivektorid} \quad \vec{D} \left[\frac{C}{m^2} \right], \quad \vec{B} [T].$$

Väljatugevused ja induktsioonivektorid on seotud vaakumis elektrilise konstandi ja magnetilise konstandi abil:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \left[\frac{F}{m} \right], \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{H}{m} \right].$$

2. Väljaallikate parameetrid:

ruumvoolu tihedus $\bar{j} \left[\frac{A}{m^2} \right]$, pindvoolu tihedus $\bar{j}' \left[\frac{A}{m} \right]$;

elektrilaeng $q [C]$;

laengu ruumtihedus $\mathbf{r} \left[\frac{C}{m^3} \right]$;

laengu pindtihedus $\mathbf{r}' \left[\frac{C}{m^2} \right]$.

3. Keskkondade parameetrid:

absoluutne või suhteline dielektriline läbitavus $\mathbf{e}_a \left[\frac{F}{m} \right]$, \mathbf{e} (dimensioonita);

absoluutne või suhteline magnetiline läbitavus $\mathbf{m}_a \left[\frac{H}{m} \right]$, \mathbf{m} (dimensioonita);

erijuhtivus $\mathbf{s} \left[\frac{1}{\Omega m} \right]$.

Elektri ja magnetilise induktsiooni vektorid on keskkonnas seotud vastavate väljatugevuse vektoritega keskkonna parameetrite kaudu, nn. **materiaalsete võrranditega**

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \mathbf{e}_0 \mathbf{e} \bar{E} \\ \bar{B} &= \mathbf{m}_0 \mathbf{m} \bar{H} . \\ \bar{j} &= \mathbf{s} \bar{E} \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Olenevalt keskkonna parameetrite iseloomust eristatakse eri tüüpi keskkondi. Võib eristada kolme üldist jaotust.

1. Keskkonnad jagunevad **isotroopseteks** ja **anisotroopseteks**.

Isotroopses keskkonnas on \mathbf{e} , \mathbf{m} ja \mathbf{s} skalaarsed suurused. Seega on väljatugevuse ja induktsioonivektorid teineteisega paralleelsed

$$\bar{D} \parallel \bar{E}; \bar{B} \parallel \bar{H}; \bar{j} \parallel \bar{E}.$$

Anisotroopses keskkonnas on üks keskkonna parameetritest teist rangi **tensor**, elektrilise anisotroopia puhul \mathbf{e} (või \mathbf{s}), magnetilise anisotroopia puhul \mathbf{m} . Näiteks võib \mathbf{m} üldjuhul omada 9 sõltumatut liiget

$$\mathbf{m}_{ij} = \begin{vmatrix} \mathbf{m}_{xx} & \mathbf{m}_{xy} & \mathbf{m}_{xz} \\ \mathbf{m}_{yx} & \mathbf{m}_{yy} & \mathbf{m}_{yz} \\ \mathbf{m}_{zx} & \mathbf{m}_{zy} & \mathbf{m}_{zz} \end{vmatrix}. \quad (1.4.2)$$

Anisotroopia puhul keskkonna magnetilised või elektrilised omadused sõltuvad väljavektori orientatsioonist keskkonna suhtes, s.t. keskkond ise omab nagu mingit orientatsiooni. Seos induktsiooni- ja väljavektorite vahel muutub küllalt keeruliseks

$$\begin{aligned} B_x &= \mathbf{m}_{xx} H_x + \mathbf{m}_{xy} H_y + \mathbf{m}_{xz} H_z \\ B_y &= \mathbf{m}_{yx} H_x + \mathbf{m}_{yy} H_y + \mathbf{m}_{yz} H_z . \\ B_z &= \mathbf{m}_{zx} H_x + \mathbf{m}_{zy} H_y + \mathbf{m}_{zz} H_z \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Sageli on keskkonna anisotroopia seotud mingi välise faktoriga, mis keskkonna mikrostruktuuri mõjutades orienteerib keskkonna. Näiteks on magnetiliselt anisotroopne ferriit välises magnetväljas. Ioonsfääri elektriline anisotroopia on seotud Maa magnetväljaga.

2. Keskkonnad jagunevad **lineaarseteks ja mittelineaarseteks.**

Lineaarse keskkonna parameetrid ei sõltu väljavektorite amplituudist

$$\mathbf{e} \neq f(\bar{E}), \mathbf{m} \neq f(\bar{H}) \text{ ega } \mathbf{s} \neq f(\bar{E}).$$

Mittelineaarse keskkonna parameetrid sõltuvad väljavektorite suurusest

$$\text{kas } \mathbf{e} = f(\bar{E}), \mathbf{m} = f(\bar{H}) \text{ või } \mathbf{s} = f(\bar{E}).$$

Näiteks pooljuht kujutab elektriliselt mittelineaarset keskkonda. Suurte väljatugevuste puhul võivad muutuda mittelineaarseteks ka mõõdukate väljatugevuste jaoks lineaarsed dielektrikud. Näiteks atmosfääris hakkavad ilmneva mittelineaarsed efektid elektrivälja tugevuse puhul 5kV/cm.

3. Keskkonnad võivad olla kas **homogeensed** või **mittehomogeensed.**

Homogeense keskkonna parameetrid ei sõltu koordinaatidest

$$\mathbf{e} \neq \mathbf{e}(x, y, z), \mathbf{m} \neq \mathbf{m}(x, y, z) \text{ või } \mathbf{s} \neq \mathbf{s}(x, y, z).$$

Keskkonda võib lugeda homogeenseks ainult teatud tingimustel: piiratud ruumis (näiteks õhk toas või lainejuhi sees), mitte arvestades pindefekte jne. Homogeensust eeldatakse teatud lähenduses teoreetiliste ülesannete lahendamisel, kuna see hõlbustab oluliselt lahenduse käiku. Ebahomogeense keskkonna parameetrid sõltuvad koordinaatidest, s.t.

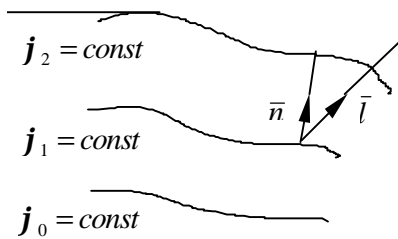
$$\mathbf{e} = \mathbf{e}(x, y, z), \mathbf{m} = \mathbf{m}(x, y, z) \text{ või } \mathbf{s} = \mathbf{s}(x, y, z).$$

Ebahomogeense keskkonna omadused on ruumi erinevates osades erinevad. Rangelt võttes on peaaegu alati tegemist mittehomogeense keskkonnaga. Näiteks atmosfääri dielektriline läbitavus erineb küll ühest väga vähe, maalähedastes kihtides murdumisnäitaja $n = 1,00026-1,00038$. Temperatuurist, suhtelisest niiskusest ja rõhust tingitud murdumisnäitaja muutused on suurusjärgus $10^{-5} - 10^{-6}$ (murdumisnäitaja gradient kõrgusest on $4 \cdot 10^{-5} \text{ km}^{-1}$). Sellistest väikestest muutustest on küllalt, et tekitada tugevaid elektromagnetilise kiirguse fluktuatsioone optilises diapasoonis, mis on tingitud atmosfääri turbulentsidest ja raadiolaine "paindumist" ümber Maa.

1.5 Skalaarsed ja vektorväljad

Vaatleme mõningaid matemaatilisi mõisteid välja teooriast, mida kasutame hiljem elektromagnetilise välja omaduste kirjeldamisel.

Skalaarne väli on ruumi osa, mille iga punkt iseloomustab teatud skalaarse suuruse \mathbf{j} väärtus (temperatuuri, tiheduse, potentsiaali jne. väljad). Skalaarse väljas (vt. joon. 1.6) eksisteerivad nn. ekvipotentsiaalsed pinnad, millel suurus \mathbf{j} omab konstantse väärtuse, s.t. $\mathbf{j}_i(x, y, z) = \text{const}$.



Joon. 1.6

potentsiaalses väljas on seotud potentsiaali muutusega. Nii ka skalaarset välja iseloomustab mitte selle suurus, vaid muutus, õigemini muutuse kiirus.

Välja muutumist iseloomustab skalaarse suuruse tuletis teatud suunas. Kui tuletis on võetud ekvipotentsiaalse pinna perpendikulaari \bar{n} suunas, iseloomustab ta ilmselt välja kõige suuremat võimalikku muutust. Sellist tuletist nimetatakse välja **gradiendiks**.

$$\text{grad}j \equiv \nabla j = \frac{\partial j}{\partial n} \bar{n}, \quad (1.5.1)$$

$$\nabla j = \frac{\partial j}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial j}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial j}{\partial z} \bar{k}.$$

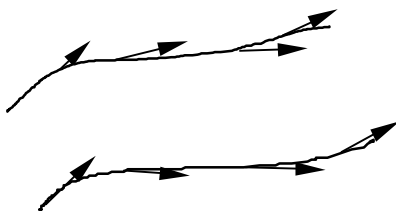
Gradient on skalaarse välja ruumiline tuletis.

Välja muutuse mingis teises suunas \bar{l} määrab välja gradiendi projektsioon suunale \bar{l}

$$dj = \text{grad}j \cdot d\bar{l}. \quad (1.5.2)$$

Kuna gradient on seotud suunaga, on gradient vektor. Gradient on skalaarse välja ammendav karakteristik.

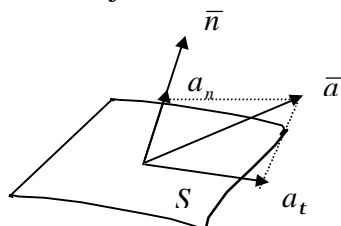
Vektorväli on ruumi osa, mille iga punkti iseloomustab teatud vektor, selle suurus ja suund:



Joon. 1.7

Vektorväljad on elektri- ja magnetväli, gravitatsiooniväli jne. Jooned, millele väljavektorid igas punktis on puutujaks, on välja jõujooned (joon. 1.7). Vektorvälja iseloomustamiseks on ilmselt vähe ainult välja suuruse muutuse määramisest. Välja jõujooned võivad omada väga erinevat struktuuri. Põhiliselt võib eristada kaht tüüpi jõujooni: lahknevaid ja keeriselisi. Nii iseloomustavad ka

vektorvälja kaks suurust: **vektorvälja hoovus ja tsirkulatsioon**.

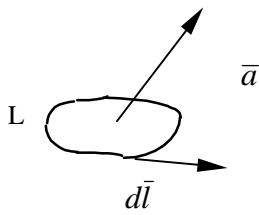


Joon. 1.8

Vektorvälja hoovus Ψ läbi pinna S (joon. 1.8) on seotud vektori normaalkomponentidega pinnale

$$d\bar{s} = \bar{n} ds$$

$$\Psi \equiv \int_S \bar{a} d\bar{s} = \int_S \bar{a} \bar{n} ds = \int_S a_n ds \quad (1.5.3)$$



Joon. 1.9

Vektorvälja tsirkulatsioon piki kontuuri L (joon. 1.9) on seotud vektori puutujakomponendiga kontuurile L

$$C \equiv \oint_L \bar{a} d\bar{l} = \oint_L a_t dl. \quad (1.5.4)$$

On selge, et hoovus ja tsirkulatsioon sõltuvad pinna ja kontuuri valikust, mille jaoks need arvutatakse. Nii ei saa need suurused olla vektorvälja üheselt määratud parameetriteks. Küll võivad aga olla sellisteks

parameetriteks vastavad diferentsiaalsed suurused, mis arvutatakse lõpmatult väikese ruumi osa jaoks.

Vektorvälja omaduste kirjeldamiseks kasutatakse kahte matemaatilist mõistet: divergentsi ja rootorit.

Välja divergents ehk hajumine välja antud punktis on piir, mille saavutab vektori voog läbi kinnise pinna S sama pinnaga piiratud ruumis $\Delta V \rightarrow 0$.

$$\text{div } \bar{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \bar{a} d\bar{s}. \quad (1.5.5)$$

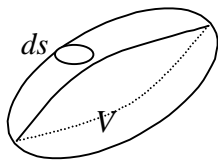
*****Divergents on vektorvälja skalaarne ruumiline tuletis.*****

$$\text{div } \bar{a} \equiv \nabla \bar{a} = \frac{\mathcal{I} a_x}{\mathcal{I} x} + \frac{\mathcal{I} a_y}{\mathcal{I} y} + \frac{\mathcal{I} a_z}{\mathcal{I} z}. \quad (1.5.6)$$

Välja punktid, kus $\text{div } \bar{a} > 0$, on välja allikad. Punktid, kus $\text{div } \bar{a} < 0$ kujutavad neelu. Kui $\text{div } \bar{a} = 0$, on tegemist allikavabade väljade ehk nn. solenoidaalsete väljadega. Divergentsi definitsioonist 1.5.5 on näha, et solenoidaalsetes väljades on jõujooned kinnised.

Otseselt divergentsi definitsioonist tuleneb nn. **Gaussi valem**

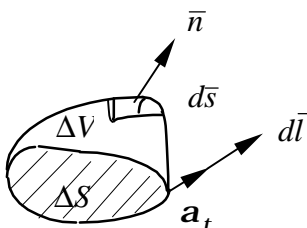
$$\int_V \text{div } \bar{a} dV = \oint_S \bar{a} d\bar{s}. \quad (1.5.7)$$



Joon. 1.10

Vektori voog läbi kinnise pinna võrdub selle vektori divergentsi ruumiintegraaliga üle selle pinna poolt piiratud ruumi (joon. 1.10).

Vektorvälja rootor ehk keeris on seotud väljavektori tsirkulatsiooniga. Rootori komponent \bar{n} suunas (joon. 1.11) on piir, mille saavutab vektori tsirkulatsioon mööda suunaga \bar{n} perpendikulaarset pinda ΔS ümbritsevat kontuuri L , kui, $\Delta S \rightarrow 0$.



Joon. 1.11

$$(\text{rot } \bar{a})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_L \bar{a} d\bar{l}.$$

*****Rootor on vektorvälja vektoriaalne ruumiline**

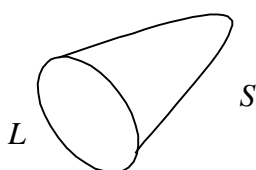
*tuletis.****

Roor on vektor ja omab vastavalt kolme komponenti. Üldisel kujul

$$\text{rot } \bar{a} \equiv [\nabla \bar{a}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad (1.5.9)$$

Seosest 1.5.8 järeldub **Stokesi valem**

$$\int_S \text{rot } \bar{a} d\bar{s} = \oint_L \bar{a} d\bar{l} \quad (1.5.10)$$



Joon. 1.12

Vektori tsirkulatsioon piki kinnist kontuuri võrdub roori hoovusega läbi selle kontuuri poolt ümbritsetud pinna (joon 1.12). Kui vektorvälja roor võrdub nulliga, on väli keeristevaba. Väljakarakteristikud omavad rea matemaatilisi seoseid. Nimetame neist mõned, millel on konkreetne füüsikaline mõte.

1. Kui vektor on mingi skalaarse funktsiooni gradient, on väli potentsiaalne. Näiteks, kui

$$\bar{E} = -\text{grad } \mathbf{j},$$

on tegemist potentsiaalse elektriväljaga, kusjuures \mathbf{j} on skalaarne elektrostaatiline potentsiaal (üldjuhul elektriväli potentsiaal ei ole).

$$\text{rot grad } \mathbf{j} = 0.$$

2. Potentsiaalne väli on keeristevaba. Kui vektorvälja roor võrdub nulliga, võib seda vektorit kujutada mingi skalaarse välja gradiendina. Näiteks, kui

$$\text{rot } \bar{E} = 0,$$

võib eeldada, et

$$\bar{E} = -\text{grad } \mathbf{j}$$

ja tegemist on potentsiaalse väljaga

$$\text{div rot } \bar{a} = 0.$$

3. Roorväljas allikad puuduvad. Kui mingi vektori divergents võrdub nulliga, võib seda vektorit kujutada mingi vektorvälja roorina.

Näiteks tingimusest
võib eeldada, et

$$\begin{aligned} \text{div } \bar{B} &= 0, \\ \bar{B} &= \text{rot } \bar{A}. \end{aligned}$$

2 Elektromagnetilise välja võrrandid

Elektromagnetilise välja võrrandid sisaldavad rea faktide teoreetilist üldistust. Need võrrandid ei ole tuletatavad matemaatiliselt. Väljavõrrandid on looduseadus, mis on väljendatud matemaatilisel kujul.

Elektromagnetilise välja võrrandeid nimetatakse **Maxwelli võrrandeiks**, sest esimesena koondas elektromagnetilise välja seadused nelja võrrandisse James Clerk Maxwell 1873 aastal oma töös "A Treatise on Electricity and Magnetism". Sellel võrrandisüsteemil baseerub kogu elektromagnetiliste nähtuste teooria. Maxwelli võrrandid määravad seosed elektriliste ja magnetiliste nähtuste vahel ja väljade seosed väljaallikatega. Maxwelli võrrandeid võib kasutada nii integraalsel kui diferentsiaalsel kujul. Mõlemad vormid on samaväärsed.

2.1 Elektromagnetilise välja võrrandid integraalsel kujul

Esimene Maxwelli võrrand on koguvoolu seaduse üldistus. Koguvoolu seaduses (vt. 1.2.13)

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_\Sigma.$$

I_Σ on kõikide võimalike voolude summa, mis läbivad kontuuriga L piiratud pinna S

$$I_\Sigma = \int_S \vec{j}_\Sigma d\vec{s} \quad (2.1.1)$$

kus \vec{j}_Σ on summaarse voolu tihedus. Juhtivusvoolu pindtiheduse \vec{j} kohta on kehtiv Ohmi seadus (vt. 1.3.1)

$$\vec{j} = \mathbf{s} \vec{E}.$$

Seega keskkonnas, mis ei juhi elektrit, s.t. $\mathbf{s} = 0$ muutub ka juhtivusvool nulliks. Kui vaadelda seoses (1.2.13) ainult juhtivusvoolu, jõuame järeldusele, et elektrit mittejuhtivas keskkonnas ka magnetväli puudub (kuna magnetvälja puhul on tegemist solenoidaalse väljaga, tähendab väljavektori tsirkulatsiooni puudumine ka välja puudumist), mis ilmselt ei ole õige. Maxwell eeldas, et seos (1.2.13) kehtib ka üldjuhul, s.t. ka keskkonnas, mis ei juhi elektrit (dielektrikus või vaakumis) ja tõi sisse nn. **nihkevoolu mõiste**.

Elektrilise süsteemi näitena, kus domineerivad nihkevoolud, võib olla kondensaator vahelduvvoolu-ahelas. Vahelduv vool võib tsirkuleerida katete vahel isegi sellel juhul kui nad on eraldatud ideaalse dielektrikuga või asuvad vaakumis ja järelikult juhtvoolu tekkimine on võimatu. Järelikult vahelduvale elektrilineväljale ja juhtvoole kaasneb magnetväljatekkimine.

Dielektrikus tekib elektrivälja mõjul polarisatsioon. Polarisaatsioonilaeng (vt. 1.1.18)

$$Q' = \int_S \vec{P} d\vec{s}.$$

Polarisaatsioonilaengu muutus annab voolu, mis kujutab endast nihkevoolu dielektrikus

$$I_{nd} = \frac{\int Q'}{\int t} = \int_S \frac{\int P}{\int t} d\bar{s}, \quad (2.1.2)$$

millele vastab nihkevoolu tihedus dielektrikus

$$\bar{j}_{nd} = \frac{\int \bar{P}}{\int t}. \quad (2.1.3)$$

Vastavalt Maxwelli eeldusele koguvoolu seaduse üldisest iseloomust peavad nihkevoolud eksisteerima ka vaakumis. Vaatleme elektrilise induksioonivektori \bar{D} (vt. 1.1.13) ajalist muutust

$$\frac{\int \bar{D}}{\int t} = \mathbf{e}_0 \frac{\int \bar{E}}{\int t} + \frac{\int \bar{P}}{\int t}. \quad (2.1.4)$$

Teine liidetav summas on nihkevoolu tihedus dielektrikus. Järelikult peab ka esimene liidetav omama nihkevoolu tiheduse dimensiooni ja vastama nihkevoolu tihedusele vaakumis ($\bar{P} = 0$)

$$\bar{j}_{nv} = \mathbf{e}_0 \frac{\int \bar{E}}{\int t}. \quad (2.1.5)$$

Summaarse nihkevoolu tihedus

$$\bar{j}_n = \bar{j}_{nv} + \bar{j}_{nd} = \frac{\int \bar{D}}{\int t}, \quad (2.1.6)$$

seega

*****elektrilise induksiooni vektori muutus määrab nihkevoolu tiheduse.*****

Voolude summa, mis läbivad pinna S (vt. 2.1.1) võib seega avaldada kujul

$$I_\Sigma = \int_S (\bar{j}_n + \bar{j}) d\bar{s} = \int_S \left(\frac{\int \bar{D}}{\int t} + \bar{j} \right) d\bar{s}. \quad (2.1.7)$$

Asendades (2.1.7) koguvoolu seaduses, saame I **Maxwelli võrrandi**

$$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = \int_S \frac{\int \bar{D}}{\int t} d\bar{s} + \int_S \bar{j} d\bar{s}. \quad (2.1.8)$$

*****Magnetvälja tsirkulatsioon mööda pinna kinnist kontuuri võrdub elektrilise induksiooni voo muutusega läbi selle kontuuriga piiratud pinna ja juhtivusvooluga läbi selle pinna.*****

Teine Maxwelli võrrand on elektromagnetilise induksiooni seaduse -- nn. Faraday seaduse üldistus. Kui juhe lõikab magnetilisi jõujooni, tekib selle juhtme otstes elkromootor jõud, mis on võrdeline ajaühikus lõigatud jõujoonte arvuga, s.t. induksioonivoo Ψ_M muutusega

$$\mathbf{x} = \oint_L \bar{E} d\bar{l} = - \frac{\int \Psi_M}{\int t}. \quad (2.1.9)$$

Seos 2.1.9 on kehtiv ainult potentsiaalse välja erijuhul. Üldjuhul tekitab magnetilise induksiooni voo muutus elektrilise väljavektori keerise

$$\oint_L \bar{E} d\bar{l} = - \frac{\int \Psi_M}{\int t}. \quad (2.1.10)$$

Asendades Ψ_M seosest 1.2.8, saame Maxwelli II võrrandi integraalse kuju

$$\oint_L \bar{E} d\bar{l} = - \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{s}. \quad (2.1.11)$$

*****Elektrivälja tsirkulatsioon mööda pinna kinnist kontuuri võrdub magnetilise induksiooni voo muutusega läbi selle kontuuriga ümbritsetud pinna.*****

Kolmas Maxwelli võrrand on üldistatud Gaussi teoreem (vt. 1.1.13)

$$\oint_S \bar{D} d\bar{s} = q.$$

Neljas Maxwelli võrrand kinnitab, et looduses vabu magnetilisi laenguid ei ole ja et magnetvälja jõujooned on kinnised (vt. 1.2.9)

$$\oint_S \bar{B} d\bar{s} = 0.$$

Maxwelli võrrandsüsteemi **integraalne kuju** on järgmine:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_L \bar{H} d\bar{l} = \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} d\bar{s} + \int_S \bar{j} d\bar{s} \\ \oint_L \bar{E} d\bar{l} = - \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{s} \\ \oint_S \bar{D} d\bar{s} = q \\ \oint_S \bar{B} d\bar{s} = 0 \end{array} \right. \quad (2.1.12)$$

Esimene võrrand näitab, et elektrilise induksiooni voo muutusele ja juhtivusvoolule kaasneb magnetvälja tsirkulatsioon.

Teine võrrand näitab, et magnetilise induksiooni voo muutusele kaasneb elektrivälja tsirkulatsioon.

Kolmas võrrand näitab, et elektrilaeng tekitab elektrilise induksiooni voo.

Neljas võrrand näitab, et magnetvälja jõujooned on kinnised.

2.2 Maxwelli võrrandid diferentsiaalsel kujul

Teisendame võrrandsüsteemi (2.1.12) diferentsiaalsele kujule.

Esimese võrrandi teisendamiseks kasutame Stokesi valemit (1.5.10)

$$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = \int_{S'} \text{rot } \bar{H} d\bar{s}.$$

Asendades võrrandisse, saame

$$\int_{S'} \text{rot } \bar{H} d\bar{s} = \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} d\bar{s} + \int_S \bar{j} d\bar{s}.$$

Kuna pinnad S ja S' on mõlemad piiratud ühe ja sama kontuuriga L , on ilmselt $S'=S$. Sel juhul integraalide võrdsuse korral peavad olema võrdsed ka integreeritavad suurused ja saame Maxwelli I võrrandi **diferentsiaalsel kujul**

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{j}.$$

Teise võrrandi teisendamiseks kasutame Stokesi valemit 1.5.10

$$\text{Asendame võrrandisse} \quad \int_{S'} \operatorname{rot} \bar{E} d\bar{s} = - \int_S \frac{\bar{j} \bar{B}}{\bar{j} t}.$$

Pindade S ja S' võrdsus lähtub asjaolust, et nad on piiratud kontuuriga L . Seega võime võrdsustada ka diferentsiaalsed suurused ja saame II Maxwelli võrrandi diferentsiaalsel kujul

$$\operatorname{rot} \bar{E} = - \frac{\bar{j} \bar{B}}{\bar{j} t}. \quad (2.2.2)$$

Kolmanda võrrandi teisendamiseks kasutame Gaussi valemit 1.5.7

$$\oint_S \bar{D} d\bar{s} = \int_V \operatorname{div} \bar{D} dV.$$

Samuti avaldame laengu q laengu ruumitiheduse kaudu.

$$q = \int_{V'} \mathbf{r} dV$$

Asendades võrrandisse, saame

$$\int_V \operatorname{div} \bar{D} dV = \int_{V'} \mathbf{r} dV.$$

Ruumid V ja V' on ümbritsetud ühe ja sellesama kinnise pinnaga S , järelikult $V'=V$. Sel juhul järeldub integraalide võrdsusest ka integreeritavate suuruste võrdsus ja saame Maxwelli III võrrandi diferentsiaalsel kujul

$$\operatorname{div} \bar{D} = \mathbf{r}. \quad (2.2.3)$$

Analoogiliselt teisendame Gaussi valemit kasutades diferentsiaalsele kujule ka IV Maxwelli võrrandi:

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0. \quad (2.2.4)$$

Seega on Maxwelli võrrandisüsteem diferentsiaalsel kujul järgmine

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{H} = \frac{\bar{j} \bar{D}}{\bar{j} t} + \bar{j} \\ \operatorname{rot} \bar{E} = - \frac{\bar{j} \bar{B}}{\bar{j} t} \\ \operatorname{div} \bar{D} = \mathbf{r} \\ \operatorname{div} \bar{B} = 0 \end{cases}. \quad (2.2.5)$$

I ja II võrrand seovad omavahel elektrilisi ja magnetilisi nähtusi. Magnetvälja rootor on seotud ajas muutuva elektrilise induktsiooniga ja juhtivusvooluga. Elektrivälja rootor tekitatakse muutuva magnetilise induktsiooni poolt. Seega on vahelduvad elektri- ja magnetväli lahutamatu seotud: ei saa olla vahelduvat elektrivälja ilma magnetväljata ja vastupidi.

III ja IV võrrand seovad välja nende allikatega. Elektrivälja allikaks on laengutihedus. Magnetväli on allikatevaba, solenoidaalne väli.

Koos materiaalsete võrranditega (1.4.1) sisaldab Maxwelli võrrandisüsteem kogu elektromagnetilise teooria alused.

2.3 Maxwelli võrrandid komplekskujul

Tehnikas pakuvad põhilist huvi vahelduvad elektromagnetilised väljad. Sageli on tegemist perioodiliste protsessidega, mida võib kujutada kui harmoonilist võnkumist. Selliseid protsesse kirjeldatakse matemaatiliselt harmooniliste funktsioonide abil. Neid protsesse nimetatakse monokromaatilisteks. Realseid protsesse võib kujutada kui monokromaatiliste protsesside kombinatsioone. Sellepärast annab monokromaatiliste protsesside vaatlemine küllalt üldiselt rakendatavaid tulemusi ja omab suurt tähtsust. Monokromaatiliste protsesside puhul muutuvad kõik väljade parameetrid kui harmoonilised funktsioonid ajast:

$$\bar{A} = A_0 \cos(\omega t + \mathbf{j}), \quad (2.3.1)$$

kus \bar{A} on mingi väljavektor, A_0 on vektori amplituud, ω on ringsagedus ja \mathbf{j} on alfaas. Kuna monokromaatiliste protsesside puhul ajaliste muutuste iseloom on teada, võib väljavõrrandeid lihtsustada. Selleks kasutatakse komplekssete amplituudide meetodit. Vastavalt **Euleri** valemile

$$e^{i(\omega t + \mathbf{j})} = \cos(\omega t + \mathbf{j}) + i \sin(\omega t + \mathbf{j}).$$

Seega võime väljavektori (2.3.1) avaldada kompleksse suuruse kaudu

$$\bar{A} = \operatorname{Re} A_0 e^{i(\omega t + \mathbf{j})} = \operatorname{Re} A_0 e^{i\mathbf{j}} e^{i\omega t}. \quad (2.3.2)$$

Suurust, mis ei sisalda enam teadaolevat ajalist sõltuvust, küll aga amplituudi ja faasi, nimetatakse kompleksseks amplituudiks

$$\dot{\bar{A}} = A_0 e^{i\mathbf{j}}. \quad (2.3.3)$$

Väljavektori \bar{A} (samuti skalaarse parameetri) võime avaldada tema kompleksse amplituudi kaudu

$$\bar{A} = \operatorname{Re} \dot{\bar{A}} e^{i\omega t}. \quad (2.3.4)$$

Kuna üleminek komplekselt amplituudilt vastava parameetri momentväärtusele on lihtne, kasutatakse komplekssete amplituudide meetodit väga laialdaselt. Kasutame komplekssete amplituudide meetodit Maxwelli võrrandisüsteemi puhul.

Väljendame välja ja väljaallikate parameetrid komplekssete amplituudide kaudu:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\operatorname{Re} \dot{\bar{H}} e^{i\omega t}) = \frac{\mathcal{I}}{t} (\operatorname{Re} \dot{\bar{D}} e^{i\omega t}) + \operatorname{Re} \dot{\bar{j}} e^{i\omega t} \\ \operatorname{rot}(\operatorname{Re} \dot{\bar{E}} e^{i\omega t}) = -\frac{\mathcal{I}}{t} (\operatorname{Re} \dot{\bar{B}} e^{i\omega t}) \\ \operatorname{div}(\operatorname{Re} \dot{\bar{D}} e^{i\omega t}) = \operatorname{Re} \dot{\bar{r}} e^{i\omega t} \\ \operatorname{div}(\operatorname{Re} \dot{\bar{B}} e^{i\omega t}) = 0 \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Kuna Maxwelli võrrandsüsteem on lineaarsete diferentsiaalvõrrandite süsteem, siis rahuldavad seda nii kompleksed suurused kui ka nende reaali- ja imaginaariosad. Ajaline sõltuvus taandub võrranditest välja.

$$\text{Arvestades, et antud juhul } \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}t} = i\omega$$

saame Maxwelli võrrandsüsteemi kujul

$$\begin{cases} \text{rot } \dot{\vec{H}} = i\omega\dot{\vec{D}} + \dot{\vec{j}} \\ \text{rot } \dot{\vec{E}} = -i\omega\dot{\vec{B}} \\ \text{div } \dot{\vec{D}} = \dot{\vec{r}} \\ \text{div } \dot{\vec{B}} = 0 \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Kompleksseid amplituude kasutades võib välja kirjutada ka materiaalsed võrrandid (1.4.1)

$$\begin{aligned} \dot{\vec{D}} &= \mathbf{e}_a \dot{\vec{E}} \\ \dot{\vec{B}} &= \mathbf{m}_a \dot{\vec{H}} \\ \dot{\vec{j}} &= \mathbf{s} \dot{\vec{E}} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Edasi viime sisse kompleksse dielektrilise läbitavuse. Teisendame esimest võrrandit (2.3.6) kasutades (2.3.7)

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\vec{H}} &= i\omega \mathbf{e}_a \dot{\vec{E}} + \mathbf{s} \dot{\vec{E}} \\ \text{rot } \dot{\vec{H}} &= i\omega \left(\mathbf{e}_a - i \frac{\mathbf{s}}{\omega} \right) \dot{\vec{E}} \end{aligned}$$

Seega komplekssele dielektrilisele läbitavusele vastab suurus

$$\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e}' - i\mathbf{e}'' = \mathbf{e}_a - i \frac{\mathbf{s}}{\omega} = \mathbf{e}_a \left(1 - i \frac{\mathbf{s}}{\omega \mathbf{e}_a} \right), \quad (2.3.8)$$

kus $\mathbf{e} = \mathbf{e}_a$ ja $\mathbf{e}'' = \frac{\mathbf{s}}{\omega}$.

$$\text{Suhet } \frac{\mathbf{e}''}{\mathbf{e}'} = \frac{\mathbf{s}}{\omega \mathbf{e}_a} = \text{tg } \mathbf{s} \quad (2.3.9)$$

nimetatakse kaonurga tangensiks. On näha, et

$$\text{tg } \mathbf{s} = \frac{\mathbf{s} \dot{\vec{E}}}{\omega \mathbf{e}_a \dot{\vec{E}}} = \frac{\dot{\vec{j}}}{\dot{\vec{j}}_n}$$

*****Kaonurga tangens määrab juhitavusvoolude ja nihkevoolude suhte.*****

Kaod on seotud ainult juhtivusvooludega. Samuti näitab suhe (2.3.9), kas domineerivad keskkonna metallilised või dielektrilised omadused. Nii kaod kui ka keskkonna iseloom sõltuvad mitte ainult keskkonna parameetritest vaid ka sagedusest.

Kui $\omega \mathbf{e}_a \gg \mathbf{s}$, domineerivad nihkevoolud, välja seos juhtivusvooluga on nõrk, kaod väikesed. Suhteliselt kõrgetel sagedustel domineerivad elektromagnetilise välja lainelised omadused.

Kui $we_a \ll s$, domineerivad juhtivusvoolud, väljad on tugevalt seotud juhtivusvooludega ja on oma struktuurilt sarnased alalisvoolu väljale. Nihkevoolud on juhtivusvooludega võrreldes väikesed, tegemist on kvaasistatsionaarsete protsessidega.

Kasutades kompleksset dielektrilist läbitavust võime I Maxwelli võrrandile anda kuju

$$\text{rot } \dot{\bar{H}} = i w \tilde{e} \dot{\bar{E}},$$

mis on sarnane Maxwelli II võrrandi kujule süsteemis (2.3.6).

Üldjuhul on ka magnetiline läbitavus kompleksne suurus. Näiteks ferromagneetikute puhul tekivad kaod magnetiseerumisel ja seoses hüstereesiga faasinihe \mathbf{j}_M vektorite \bar{H} ja \bar{B} vahel

$$\dot{\bar{B}} = |\tilde{m}| \dot{\bar{H}} e^{-i j_M}, \quad \tilde{m} = \frac{\dot{\bar{B}}}{\dot{\bar{H}}} = |\tilde{m}| e^{-i j_M}.$$

Üldjuhul $\tilde{m} = m' - i m''$.

Kasutades kompleksseid keskkondade läbitavusi, võib võrrandisüsteemi (2.3.6) teisendada kujule

$$\begin{cases} \text{rot } \dot{\bar{H}} = i w \tilde{e} \dot{\bar{E}} \\ \text{rot } \dot{\bar{E}} = -i w \tilde{m} \dot{\bar{H}} \end{cases} \quad (2.3.11)$$

Seosed (2.3.11) kujutavad Maxwelli võrrandisüsteemi komplekskujul. III ja IV võrrand langevad süsteemist välja, kuna nad ei ole enam sõltumatud, vaid on tuletatavad I ja II võrrandist. Sõltumatute võrrandite arvu vähenemine väljavõrrandite süsteemis on seletatav sellega, et eeldades perioodilist sõltuvust ajast me kitsendasime vaadeldavate nähtuste diapasooni.

2.4 Pidevuse võrrand

Otseseks järeltuleks Maxwelli võrranditest on nn. pidevuse võrrand. Võtame divergentsi I võrrandi mõlemast poolest

$$\text{div rot } \bar{H} = \text{div} \frac{\int \bar{D}}{\int t} + \text{div } \bar{j}.$$

Kuna

$$\text{div rot } \bar{H} = 0$$

ja Maxwelli III võrrandist

$$\text{div} \frac{\int \bar{D}}{\int t} = \frac{\int \mathbf{r}}{\int t}$$

saame pidevuse võrrandi kujul

$$\text{div } \bar{j} + \frac{\int \mathbf{r}}{\int t} = 0. \quad (2.4.1)$$

*****Juhtivusvoolu tiheduse välja allikaks on muutuv laengutihedus.*****

Vaatleme voolutiheduse välja ruumi mingis osas, mis ei sisalda muutuvaid laenguid.

Siis $\frac{\int \mathbf{r}}{\int t} = 0$ ja $\text{div } \bar{j} = 0$.

Järelikult vool kas puudub üldse või on vaadeldavas ruumi sisenevate voolujoonte arvuga. Järeldus on õige ka iga teise ruumiosa kohta, milles puuduvad muutuvad laengud. Seega voolujooned on pidevad.

Pidevuse võrrandist tuleneb laengu jäävuse seadus.

Integreerime võrrandi 2.3.1 ruumis V

$$\int_V \operatorname{div} \bar{j} dV = -\frac{1}{t} \int_V \mathbf{r} dV$$

Vastavalt Gaussi valemile

$$\int_V \operatorname{div} \bar{j} dV = \oint_S \bar{j} d\bar{s}.$$

Kuna

$$\oint_S \bar{j} d\bar{s} = I \text{ ja } \int_V \mathbf{r} dV = q,$$

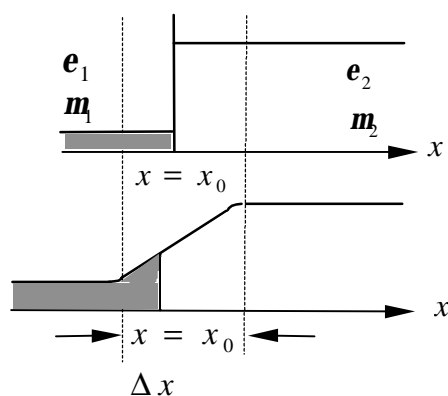
saame

$$I = -\frac{1}{t} q.$$

Laengu muutus ruumis V võrdub sellest ruumist väljuva vooluga. Järelikult laengu hulk on jääv. Seadus, mida tavaliselt vaadeldakse kui iseseisvat, on tuletatav Maxwelli võrranditest.

3 Piirtingimused

Elektromagnetilise välja võrrandid sisaldavad ruumilisi tuletisi väljatugevuse ja induksioonivektoritest. Et need tuletised oleksid määratud, peavad nii väljavektorid kui ka keskkonna parameetrid olema pidevad funktsioonid koordinaatidest. Tegelikult tuleb sageli kokku puutuda juhistega, kus keskkonna parameetrite pidevuse nõue on rikutud. Veelgi enam — sellised olukorrad esinevad sagedasti ja omavad elektromagnetismis suurt tähtsust. Näitena võib tuua metallpinnad, mis puutuvad kokku õhuga või mõne teise dielektrikuga. Väljavõrrandeid ei ole sellistel juhtudel otseselt võimalik kasutada. Teooria peab aga võimaldama lahendada ülesandeid väljade arvutamiseks ka juhtudel, kui keskkonna parameetrid muutuvad hüppeliselt. Järelikult on vajalikud täiendavad tingimused, mis seoksid välja ja induksioonivektoreid kahe keskkonna piiril. Selliseid tingimusi nimetatakse piirtingimusteks.



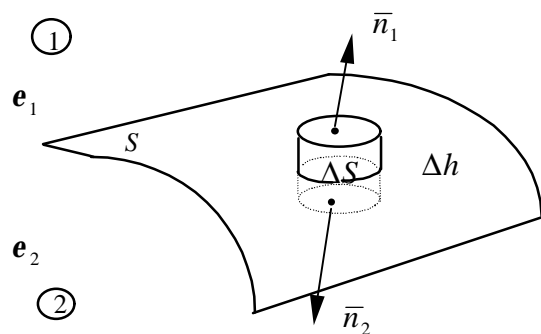
Joon. 3.1

Nagu kõik teisedki elektromagnetvälja seaduspärasused, tuletatakse ka piirtingimused Maxwelli võrranditest. Kas siin ei teki vastuolu — need võrrandid ei tööta ju siis, kui keskkonna parameetrid järsult muutuvad? Selleks, et tulemuseni jõuda, kasutatakse erilist võtet. Kõigepealt eeldatakse, et kahe keskkonna piir (vt. joon. 3.1) omab lõplikku paksust Δx mille ulatuses keskkonna parameetrite muutus väärtuselt e_1, m_1 väärtuseni e_2, m_2 on pidev. Keskkonna parameetrite pideva muutuse korral võib piiritsoonis kasutada Maxwelli võrrandeid. Edasi lähendatakse piiritsooni paksus

nullile. Saadud seosed väljatugevuse ja induksioonivektorite komponentide vahel annavadki piirtingimused kahe keskkonna piiril. Selline lähenemine on tüüpiline ülesannete lahendamisel, mis sisaldavad nn. hüppeid.

Elektri- ja magnetvälja seosed allikatega on Maxwelli võrrandites erinevad. Erinevad on ka väljade hoovusi või keeriseid kirjeldavad seosed. Sellepärast on loomulik eeldada, et piirtingimused elektri- ja magnetvälja, aga ka nende väljade puutuja- ja ristkomponentide jaoks keskkondade eralduspinnale on erinevad.

3.1 Elektriväljade vektorite piirtingimused



Joon. 3. 2

Vaatleme kõigepealt **elektrilise induksioonivektori ja väljatugevuse normaalkomponentide** muutust kahe keskkonna piiril. Selleks ehitame läbi kahe keskkonna kokkupuutepinna silindri kõrgusega Δh ja põhja pindalaga ΔS (vt. joon. 3.2), mis asub osaliselt mõlemas keskkonnas. Üldjuhul võib kahe keskkonna eralduspinnas S asuda pindlaeng q' .

Pindlaengu tihedus

$$\mathbf{r}' = \lim \frac{\Delta q'}{\Delta S}, \quad (3.1.1)$$

kus $\Delta q'$ on pinnaelemendil ΔS asuv pindlaeng. Silindri kõrguse Δh ulatuses toimub dielektrilise läbitavuse muutus suuruselt ϵ_1 suuruseni ϵ_2 . Silindri ristlõige valitakse küllalt väike, et lugeda väljavektorite ja teiste suuruste jaotust ΔS ulatuses ühtlaseks. Edasi, lähtudes **III Maxwelli** võrrandist, arvutame elektrilise induktsiooni voo läbi silindri pinna S'

$$\oint_{S'} \bar{D}' d\bar{s} = \int_V \mathbf{r}' dV. \quad (3.1.2)$$

Kuna silindri sees on ainult keskkondade eralduspinnal asuv pindlaeng, siis

$$\int_V \mathbf{r}' dV = \mathbf{r}' \Delta S.$$

Kasutades suuruste ühtlast jaotust ΔS ulatuses, kirjutame võrrandi 3.1.2 välja kujul

$$\bar{D}_1 \bar{n}_1 \Delta S + \bar{D}_2 \bar{n}_2 \Delta S + \Psi_{kiilg} = \mathbf{r}' \Delta S. \quad (3.1.3)$$

Siin tähistab indeks 1 vastavaid suurusi esimeses, indeks 2 teises keskkonnas ja Ψ_{kiilg} on induktsiooni voog läbi silindri külgsinna.

Nüüd lähendame $\Delta h \rightarrow 0$. Siis ka $\Psi_{kiilg} \rightarrow 0$ ja $\bar{n}_1 = -\bar{n}_2 = \bar{n}$ kus \bar{n} on keskkondade eralduspinna normaal. Võrrandist 3.1.3 saame

$$(\bar{D}_1 - \bar{D}_2) \bar{n} = \mathbf{r}' \quad (3.1.4)$$

või

$$D_{1n} - D_{2n} = \mathbf{r}'. \quad (3.1.4a)$$

*****Elektrilise induktsiooni vektori normaalkomponendi muutus kahe keskkonna piiril võrdub pindlaengu tihedusega eralduspinnal.*****

Kui keskkondade eralduspinnal pindlaengud puuduvad, s.t. $\mathbf{r}' = 0$, siis

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (3.1.5)$$

*****Elektrilise induktsiooni vektori normaalkomponent kahe keskkonna piiril ei muutu.*****

Tingimustest (3.1.5) saame vastavad seosed ka elektrivälja tugevuse normaalkomponentide jaoks

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 E_{1n} &= \mathbf{e}_2 E_{2n}, \\ \frac{E_{1n}}{E_{2n}} &= \frac{\mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_1}. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

*****Elektrivälja tugevuse normaalkomponent kahe keskkonna piiril muutub pöördvärde-liselt nende keskkondade dielektrilisele läbitavusele.*****

Vaatleme nüüd **elektrivälja tugevuse ja induktsioonivektori puutujakomponentide** muutust kahe keskkonna piiril. Selleks lõikame kahe keskkonna eralduspinna läbi tasapinnaga P , mis on risti eralduspinna elemendiga punktis 0. Pinnal P võtame täisnurkse kontuuri L ($A B C D$), mis läbib jaotuspinda (joon. 3.3). Kontuuri pikkus

$$\Delta l = AB = CD$$

on paralleelne eralduspinna S ja pinna P lõikejoone puutujaga punktis O \vec{t} (ühikvektor) ja on küllalt väike, et lugeda väljavektorite ja teiste suuruste jaotust ühtlaseks Δl ulatuses. Kontuuri kõrgus

$$\Delta h = AD = BC$$

on paralleelne eralduspinna S normaaliga punktis O \vec{n} (ühikvektor). Ühikvektorid \vec{n} , \vec{t} ja normaal pinnale P punktis O \vec{N} on omavahel risti

$$\vec{t} = [\vec{N}\vec{n}]$$

Arvutame elektrivälja tugevuse tsirkulatsiooni piki kontuuri L , kasutades II Maxwelli võrrandit integraalkujul

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S'} \vec{B} d\vec{s}, \quad (3.1.7)$$

kus $S' = \Delta l \Delta h$ on ristküliku $A B C D$ pindala. Arvestades integreeritavate suuruste ühtlast jaotust, võime 3.1.7 kirjutada kujul:

$$\vec{E}_1 \vec{t} \Delta l - \vec{E}_2 \vec{t} \Delta l + C_K = \frac{\int \vec{B}}{\int t} \vec{N} \Delta l \Delta h \quad (3.1.8)$$

kus C_K on tsirkulatsioon piki kontuuri kõrgust. Kui $\Delta h \rightarrow 0$, siis ka $C_K \rightarrow 0$. Võrrandi parem pool sisaldab magnetilise induktsiooni vektori voo muutust läbi pinna S' . Ilmselt pinna S vähenemisega nullini muutub ka induktsioonivektori voog läbi pinna nulliks ja võrrandi parem pool

$$\frac{\int \vec{B}}{\int t} \vec{N} \Delta l \Delta h \rightarrow 0.$$

Kui $\Delta h \rightarrow 0$, saame võrrandist 3.1.8 tingimuse

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \vec{t} = 0 \quad (3.1.9)$$

või

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (3.1.10)$$

*****Elektrilise induktsiooni vektori puutujakomponent kahe keskkonna piiril muutub võrdeliselt keskkondade dielektrilistele läbitavustele.*****

3.2 Magnetvälja vektorite piiritingimused

Vaatleme eraldi magnetvälja normaal- ja puutujakomponente kahe keskkonna piiril, kasutades punktis 3.1 kasutatule analoogilist lähenemisviisi.

Magnetvälja normaalkomponentide piiritingimuste tuletamisel vaatleme samuti silindrit läbi kahe keskkonna eralduspinna S (joon. 3.2). Lähtudes Maxwelli IV võrrandist arvutame magnetilise induktsiooni vektori voo läbi silindri pinna S' :

$$\oint_{S'} \vec{B} d\vec{s} = 0 \quad (3.2.1)$$

Eeldades integreeritavate suuruste ühtlast jaotust saame 3.2.1 kujul

$$\vec{B}_1 \vec{n}_1 \Delta S + \vec{B}_2 \vec{n}_2 \Delta S + \Psi_{M \text{ kül } g} = 0, \quad (3.2.2)$$

kus $\Psi_{M_{kül_g}}$ on magnetilise induktsiooni voog läbi silindri külgpinna. Kui $\Delta h \rightarrow 0$ siis ka $\Psi_{M_{kül_g}} \rightarrow 0$ ja $\bar{n}_1 = -\bar{n}_2 = \bar{n}$. Seosest 3.2.2 saame sel juhul

$$(\bar{B}_1 - \bar{B}_2)\bar{n} = 0 \quad (3.2.3)$$

Järelikult

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (3.2.4)$$

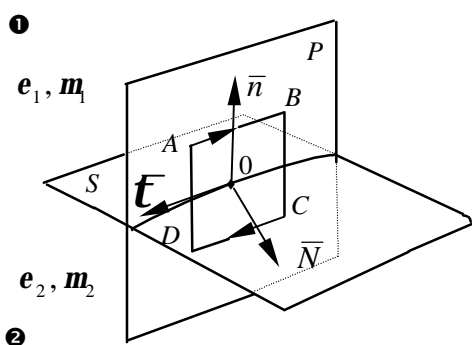
*****Magnetilise induktsiooni vektori normaalkomponent kahe keskkonna piiril ei muutu.*****

See reegel langeb kokku vastava seosega elektrivälja jaoks juhul, kui on tegemist mittemetalliliste keskkondadega.

Vastav seos magnetvälja tugevuse normaalkomponendi jaoks oleks/on

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{m_2}{m_1} \quad (3.2.5)$$

*****Magnetvälja tugevuse vektori normaalkomponent kahe keskkonna piiril muutub pöördvõrdeliselt nende keskkondade magnetilistele läbitavustele.*****



Joon. 3.3

Magnetvälja tugevuse ja induktsioonivektori puutujakomponentide piiritingimused tuletatakse Maxwelli I võrrandist, vaadeldes kontuuri L läbi kahe keskkonna eralduspinna (vt. joon. 3.3)

$$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = \int_{S'} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} d\bar{s} + \int_{S'} \bar{j} d\bar{s} \quad (3.2.6)$$

kus S' on ristküliku ABCD pindala, AD on Δh ja AB on Δl . Eeldades integreeritavate suuruste ühtlast jaotust, saame

$$\bar{H}_1 \epsilon \Delta l - \bar{H}_2 \epsilon \Delta l + C_{kõrg} = \left(\frac{\bar{j} \bar{D}}{t} + \bar{j} \right) \bar{N} \Delta l \Delta h \quad (3.2.7)$$

kus $C_{kõrg}$ on magnetvälja tsirkulatsioon mööda ristküliku kõrgust Δh . Kui $\Delta h \rightarrow 0$ siis ka $C_{kõrg} \rightarrow 0$ ja $\frac{\bar{j} \bar{D}}{t} \bar{N} \Delta l \Delta h \rightarrow 0$.

Teine liige võrrandi paremal poolel $\bar{j} \bar{N} \Delta l \Delta h$ võib tingimusel $\Delta h \rightarrow 0$ käituda erinevalt — kas muutuda nulliks või omada mingit lõplikku piirväärtust.

Kui

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \bar{j} \Delta h \Delta l = 0$$

saame võrrandist 3.2.7 tingimusel $\Delta h \rightarrow 0$ seose

$$(\bar{H}_1 - \bar{H}_2) \epsilon = 0 \quad (3.2.8)$$

ja piiritingimuse magnetvälja puutujakomponendile

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (3.2.9)$$

*****Magnetvälja puutujakomponent kahe keskkonna piiril ei muutu.*****

Vastav tingimus magnetilise induktsiooni vektori puutujakomponendile on

$$\frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{m_1}{m_2} \quad (3.2.10)$$

*****Magnetilise induktsiooni vektori puutujakomponent kahe keskkonna piiril muutub võrdeliselt nende keskkondade magnetilisele läbitavusele.*****

Kui teine liige võrrandi paremal pool omab lõplikku piirväärtust, siis tingimused 3.2.8 - 3.2.10 muutuvad.

Piirväärtus annab **pindvoolu tiheduse** $\bar{j}' \left[\frac{A}{m} \right]$

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\bar{j}' \Delta h \Delta l}{\Delta l} = \bar{j}' \quad (3.2.11)$$

Seega teine liige paremal pool kujutab endast pindvoolu ristkomponenti pinnale P :

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \bar{j}' \bar{N} \Delta h = \bar{j}' \bar{N} \quad (3.2.12)$$

Pindvoolude puhul magnetvälja puutujakomponendi piiritingimus on järgmine

$$(\bar{H}_1 - \bar{H}_2) \bar{\epsilon} = \bar{j}' \bar{N} \quad (3.2.13)$$

või

$$H_{1t} - H_{2t} = j'_N \quad (3.2.14)$$

*****Magnetvälja puutujakomponendi muutus kahe keskkonna piiril võrdub temaga ristsuunalise pindvoolu tihedusega.*****

3.3 Kokkuvõte piirtingimustest

Piirtingimused elektriliste ja magnetiliste vektorite jaoks on sarnased. Kui on tegemist keskkondadega, mille pinnal puuduvad pindvoolud ja pindlaengud (dielektrikud, suhteliselt väikese elektrijuhtivusega keskkonnad), s.t.

$$\mathbf{r}' = \bar{j}' = 0, \quad \mathbf{r}' \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

siis induktsioonivektorite normaalkomponendid on pidevad, väljatugevuste normaalkomponendid muutuvad aga pöördvõrdeliselt läbitavusele

$$D_{1n} = D_{2n}; \quad \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_1}$$

$$B_{1n} = B_{2n}; \quad \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{m_2}{m_1}$$

Väljatugevuse vektorite puutujakomponendid on pidevad, välja induktsioonivektorite puutujakomponendid muutuvad aga võrdeliselt läbitavusele:

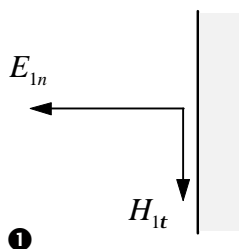
$$\frac{D_{1p}}{D_{2p}} = \frac{\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2}; \quad E_{1t} = E_{2t}$$

$$\frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{m_1}{m_2}; \quad H_{1t} = H_{2t}$$

Elektrijuhi pinnal tekkivad pindlaengud ja pindvoolud. Pindlaengud muudavad ainult elektrilise induktsiooni vektori normaalkomponenti $D_{1n} - D_{2n} = \mathbf{r}'$.

Pindvoolud muudavad ainult magnetvälja tugevuse puutujakomponenti $H_{1t} - H_{2t} = j'_N$.

$$\mathbf{S} = 0$$



$$\mathbf{S} \rightarrow \infty$$

Ideaalsel elektrijuhil on lõpmatult suurt elektrijuhtivus, s.t. $\mathbf{S} \rightarrow \infty$. Ideaalses juhis vahelduvad elektromagnetilised väljad ei saa eksisteerida - ideaalne juht lühistab elektrivälja ära. Samuti ei saa olla ideaalse juhi sees elektrostaatilist välja - laengud jaotuvad juhi pinnal nii, et summaarne väli juhis võrdub nulliga. Vastasel korral liiguksid need laengud välja mõjul edasi. Seega ideaalne juhi puhul muutuvad kõik väljakomponendid teises keskkonnas nulliks (joon. 3.4).

Joon. 3.4

$$E_{2n} = E_{2t} = H_{2n} = H_{2t} = 0$$

Kasutades piirtingimusi, avaldame väljakomponendid esimeses keskkonnas, arvestades, et ideaalse juhi pinnal on pindlaengud ja pindvoolud:

$$E_{1t} = 0, \text{ (seosest 3.1.10, kui } E_{2t} = 0)$$

$$E_{1n} = \frac{\mathbf{r}'}{\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1} \text{ (seosest 3.2.14, kui } H_{2t} = 0)$$

$$H_{1t} = \vec{j}'_N \text{ (seosest 3.2.14, kui } H_{2t} = 0) \text{ ja}$$

$$H_{1n} = 0 \text{ (seosest 3.2.5, kui } H_{2n} = 0)$$

*****Seega ideaalse elektrijuhi pinnal on elektriväli risti pinnaga ja magnetiväli pinnaga paralleelne.*****

Oluline on märkida, et *****magnetvälja puutujakomponent võrdub temaga ristsuunalise pindvoolu tihedusega.*****

Nagu tavaliselt, on magnetväli risti temaga seotud elektrivooluga. Elektrivool omakorda, vastavalt Ohmi seadusele, on paralleelne elektrivälja tugevusele. Loomulikult, ideaalses elektrijuhis voolutihedus muutuks lõpmatu suureks ja seda seadust sellisel kujul ei ole võimalik kasutada (muutub ju elektrivälja juhile paralleelne komponent juhi pinnal võrdseks nulliga). Kuna magnetväli on omakorda alati risti elektriväljaga, on sellele ristsuunaline vool elektriväljaga samasuunaline.

Piirtingimused kehtivad alati, igasugustes süsteemides ja igasugustel tingimustel. Neid muuta ei ole võimalik. Nii on elektromagnetilise laine levil liinis välja struktuur selline, et piirtingimused on automaatselt täidetud. Metallist liinis saab elektriväli olla ainult risti seintel. Kui on olemas ka elektrivälja pikikomponent, siis see muutub seina ääres võrdseks nulliga. Nii tekib liinis keerulisema struktuuriga laine, mis omab väljatugevuse miinimume ja maksimume liini ristlõikes. Piirtingimused määravad välja käitumise nii metallist kui ka dielektrikust süsteemides.

4.1 Väljavektorite lainevõrrandid

Maxwelli I ja II võrrand kirjeldavad seoseid ajas muutuvate elektri- ja magnetväljade vahel. Elektrilise induksiooni muutus tekitab magnetvälja, vahelduv magnetväli tekitab omakorda elektrivälja jne.:

$$\frac{\mathcal{H}\bar{E}}{\mathcal{H}t} \rightarrow \text{rot } \bar{H}(t); \quad \rightarrow \frac{\mathcal{H}\bar{H}}{\mathcal{H}t} \rightarrow \text{rot } \bar{E}(t)$$

Vahelduvad elektri- ja magnetväli ergutavad teineteist. See asjaolu ongi aluseks elektromagnetilise välja ja energia levimisele ruumis.

Maxwelli I ja II võrrand sisaldavad aga nii elektri- kui ka magnetvälja vektoreid, kusjuures mõlemad väljatugevused on ühes ja samas võrrandis sees ja neid ei saa lahutada. Selliste võrrandite kasutamine leviprotsessi kirjeldamiseks on ebamugav. Tuletame võrrandi, mis iseloomustaks samuti elektromagnetilise energia levimist ruumis, kuid sisaldaks ainult ühe, kas elektri- või magnetvälja vektori. Sellise võrrandi võib tuletada Maxwelli võrrandisüsteemist.

Võtame aluseks I Maxwelli võrrandi ja võtame rootori selle mõlemast poolest:

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{H} &= \mathbf{e}_a \frac{\mathcal{H}\bar{E}}{\mathcal{H}t} + \bar{j} \mid \text{rot} \\ \text{rot rot } \bar{H} &= \mathbf{e}_a \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}t} \text{rot } \bar{E} + \text{rot } \bar{j} \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Kasutame vektorsamasust $\text{rot rot } \bar{H} = \text{grad div } \bar{H} - \nabla^2 \bar{H}$ ja asendame Maxwelli II võrrandist $\text{rot } \bar{E}$ ja IV võrrandist $\text{div } \bar{H} = 0$

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \bar{H} &= -\mathbf{e}_a \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}t} \mathbf{m}_a \frac{\mathcal{H}\bar{H}}{\mathcal{H}t} + \text{rot } \bar{j} \\ \nabla^2 \bar{H} - \mathbf{e}_a \mathbf{m}_a \frac{\mathcal{H}^2 \bar{H}}{\mathcal{H}t^2} &= -\text{rot } \bar{j} \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Saadud seos on lainevõrrand magnetvälja vektori \bar{H} jaoks.

Lainevõrrandi elektrivälja vektori \bar{E} jaoks saame, lähtudes II Maxwelli võrrandist

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{E} &= -\mathbf{m}_a \frac{\mathcal{H}\bar{H}}{\mathcal{H}t} \\ \text{rot rot } \bar{E} &= -\mathbf{m}_a \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}t} \text{rot } \bar{H} \end{aligned}$$

Teisendame, kasutades vektorsamasust ja I Maxwelli võrrandit

$$\text{grad div } \bar{E} - \nabla^2 \bar{E} = -\mathbf{m}_a \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}t} \left(\mathbf{e}_a \frac{\mathcal{H}\bar{E}}{\mathcal{H}t} + \bar{j} \right)$$

III Maxwelli võrrandist asendame

$$\text{div } \bar{E} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{e}_a}$$

ja muudame märgid:

$$\nabla^2 \bar{E} - \mathbf{e}_a \mathbf{m}_a \frac{\mathcal{I}^2 \bar{E}}{\mathcal{I} t^2} = \text{grad} \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{e}_a} + \mathbf{m} \frac{\mathcal{I} \bar{j}}{\mathcal{I} t} \quad (4.1.3)$$

Tulemuseks on lainevõrrand elektrivälja vektori jaoks.

Lainevõrrandi tüüpiline kuju sisaldab teisi osatuletisi mööda aega ja ruumi, koordinaate, kirjeldades seega protsesse, mis muutuvad üheaegselt nii ajas kui ruumis. Aeg ja ruum on võrrandis sees sümmeetriliselt. Selle võrrandi paremat poolt nimetatakse ka d'Alamberti operaatoriks, neljamõõtmelise ruumi teiseks ruumtuletiseks, kusjuures neljandaks mõõtmeks on aeg. Aeg on imaginaarne koordinaat, sellepärast oleks esimene tuletis mööda neljandast koordinaati imaginaarne ja teine tuletis on miinusemärgiga.

Võrrandi paremal pool on väljaallikad, voolu- ja laengutihedused. Väljavektorite lainevõrrandis on allikad sees ebamugaval kujul, nende funktsioonide kaudu. Sellepärast kasutatakse väljavektorite lainevõrrandeid tavaliselt siis, kui uuritakse välju ilma allikateta ruumis. Allikad võrduvad siis nullile ja võrrand muutub homogeenseks. Ilma allikaid arvestamata on võimalik saada välja struktuur ja selle omadused, määrateluks jääb välja amplituud. Nii kasutatakse homogeenset lainevõrrandit näiteks liinis, kus laine levib, kuid allikad puuduvad.

Edasi vaatleme harmoonilisi elektromagnetilisi protsesse ilma voolude ja laenguteta ruumis. Läheme võrrandites (4.1.2) ja (4.1.3) üle komplekssetele amplituudidele eeldades, et, $\bar{j} = \mathbf{r} = 0$, sealjuures $\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I} t^2} \rightarrow -\mathbf{w}^2$. Saame lainevõrrandid

komplekssel kujul:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \dot{\bar{E}} + \tilde{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{m}} \mathbf{w}^2 \dot{\bar{E}} &= 0 \\ \nabla^2 \dot{\bar{H}} + \tilde{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{m}} \mathbf{w}^2 \dot{\bar{H}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Seda võrrandit nimetatakse Helmholti võrrandiks.

Lainevõrrand harmooniliste protsesside jaoks sisaldab ainult ühe parameetri (kui vaadelda voolude ja laenguteta ruumi)

$$\begin{aligned} \text{Arvu} \quad \tilde{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{m}} \mathbf{w}^2 &= k^2 \\ k &= \mathbf{w} \sqrt{\tilde{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{m}}} \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

***** nimetatakse lainearvuks. Ainsa parameetrina lainevõrrandis on lainearv määrava tähtsusega suurus, tema iseloom määrab elektromagnetilise laine omadused.*****

Vaatleme elektrivälja lainevõrrandit (4.1.4) kõige lihtsamal juhul, kui väli muutub ainult mööda ühte koordinaati z. Siis tasapinnas xy on välja väärtused konstantsed. Sellist samafaasiliste väljatugevuste pinda nimetatakse laine frondiks. Antud juhul front kujutab tasapinda xy. Sel juhul on tegemist nn. tasapinnalise lainega.

Kuna

$$\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I} x} = \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I} y} = 0; \quad \nabla^2 xy = 0$$

saame lainevõrrandi kujul

$$\frac{\partial^2 \dot{\bar{E}}}{\partial z^2} + k^2 \dot{\bar{E}} = 0 \quad (4.1.6)$$

See on harmooniliste võnkumiste võrrand piki koordinaati z ja selle võrrandi lahendi üldkuju

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_0' e^{-ikz} + \dot{\vec{E}}_0^* e^{-ikz}$$

sisaldab kaks vastassuunas liikuvat lainet. Minnes komplekselt amplituudilt üle reaalsele väljatugevusele, saame

$$\vec{E} = \text{Re } \dot{\vec{E}} = \vec{E}_0' \cos(\omega t - kZ) + \vec{E}_0'' \cos(\omega t + kZ) \quad (4.1.7)$$

elektromagnetilise laine, mis liigub piki koordinaati z . Harmoonilise funktsiooni argument sisaldab nii aega kui koordinaati. Nii nagu lainevõrrandis on sümmeetriliselt sees ajaline ja ruumiline sõltuvus, nii on see ka selle võrrandi lahendis. Ajaline sõltuvus äärab väljatugevuse harmoonilise muutuse kindlas ruumi punktis kui $z = \text{const}$. Ruumiline sõltuvus kirjeldab laine faasi ruumilist jaotust, antud juhul piki koordinaati z , kindlal ajamomendil, kui $t = \text{const}$.

Ka üldjuhul on lainevõrrandi lahendiks elektromagnetiline laine, sellepärast seda võrrandit nimetataksegi lainevõrrandiks.

4.2 Potentsiaalide lainevõrrandid

Väljavektorite lainevõrrandid sisaldavad paremal pool väljaallikaid, voolu- ja laengutihedusi. Seosed väljaallikatega ei oma aga praktiliseks kasutamiseks mugavat kuju. Sellepärast kasutatakse elektromagnetiliste väljade sidumiseks väljaallikatega spetsiaalseid mõisteid, nn. elektrodünaamilisi potentsiaale.

Elektrodünaamilised potentsiaalid ise on määratud väljaallikatega ja ning potentsiaalide kaudu võib avaldada väljavektorid ja

$$\vec{j}, \mathbf{r} \rightarrow \vec{A}, \mathbf{j} \rightarrow \vec{E}, \vec{H}$$

Elektrodünaamilised potentsiaalid viiakse sisse selliselt, et lihtsustada väljade arvutamist antud väljaallikate järgi.

Vastavalt Maxwelli IV võrrandile $\text{div } \vec{B} = 0$

Vektorsamasusest on teada, et $\text{div } \text{rot } \vec{a} = 0$

Järelikult võime ka vektori \vec{B} avaldada mingi teise vektori rootorina

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (4.2.1)$$

kus \vec{A} on välja magnetiline potentsiaal ehk elektrodünaamiline vektorpotentsiaal.

Väljavektori \vec{H} võib avaldada vektorpotentsiaali \vec{A} kaudu.

$$\vec{H} = \frac{1}{\mathbf{m}_a} \text{rot } \vec{A} \quad (4.2.2)$$

Asendame (4.2.2) II Maxwelli võrrandisse:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\mathbf{j}}{\mathbf{t}} \text{rot } \vec{A} \quad \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\mathbf{j}\vec{A}}{\mathbf{t}} \right) = 0$$

Vektorsamasusest $\text{rot } \text{grad } B = 0$

järeldub, et mingi skalaarse suuruse gradiendina võib avaldada ka vektori

$$\bar{E} + \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}t} = -\text{grad } \mathbf{j} \quad (4.2.3)$$

Siin on \mathbf{j} välja elektriline potentsiaal ehk skalaarne elektrodünaamiline potentsiaal.

Kerge on näha, et staatilise välja puhul, kui $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}t} = 0$ langeb \mathbf{j} kokku elektrostaatilise potentsiaaliga. Üldjuhul

$$\bar{E} = -\text{grad } \mathbf{j} - \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}t} \quad (4.2.4)$$

Toome sisse elektrodünaamiliste potentsiaalide lainevõrrandid. Vektorpotentsiaali lainevõrrandi võib tuletada I Maxwelli võrrandist. Avaldame Maxwelli I võrrandisse väljavektorid potentsiaalide kaudu seostest (4.2.2) ja (4.2.4):

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{H} &= \mathbf{e}_a \frac{\mathcal{I} \bar{E}}{\mathcal{I}t} + \bar{\mathbf{j}} \\ \frac{1}{\mathbf{m}} \text{rot rot } \bar{A} &= -\mathbf{e}_a \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}t} \left(\text{grad } \mathbf{j} + \frac{\mathcal{I} \bar{A}}{\mathcal{I}t} \right) + \bar{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

Kasutame vektorsamasust:

$$\begin{aligned} \text{grad div } \bar{A} - \nabla^2 \bar{A} &= -\mathbf{e}_a \mathbf{m}_a \text{grad } \frac{\mathcal{I} \bar{\mathbf{j}}}{\mathcal{I}t} - \mathbf{e}_a \mathbf{m}_a \frac{\mathcal{I}^2 \bar{A}}{\mathcal{I}t^2} + \mathbf{m}_a \bar{\mathbf{j}} \\ \nabla^2 \bar{A} - \mathbf{e}_a \mathbf{m}_a \frac{\mathcal{I}^2 \bar{A}}{\mathcal{I}t^2} &= -\mathbf{m}_a \bar{\mathbf{j}} + \text{grad} \left(\text{div } \bar{A} + \mathbf{e}_a \mathbf{m}_a \frac{\mathcal{I} \bar{\mathbf{j}}}{\mathcal{I}t} \right) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Vektorpotentsiaal \bar{A} toodi sisse seosega (4.2.1), määrates tema rootori. Sellega ei ole aga vektor veel üheselt määratud. Kuna vektori divergents ja rootor on teineteisest sõltumatud, võib vektorpotentsiaali divergentsile püstitada täiendava tingimuse

$$\text{div } \bar{A} = -\mathbf{e}_a \mathbf{m}_a \frac{\mathcal{I} \bar{\mathbf{j}}}{\mathcal{I}t} \quad (4.2.6)$$

Sellise nn. kalibreerimistingimuse sissetoomine lihtsustab tunduvalt võrrandit 4.2.5. Vektorpotentsiaali lainevõrrandi saame kujul

$$\nabla^2 \bar{A} - \mathbf{e}_a \mathbf{m}_a \frac{\mathcal{I}^2 \bar{A}}{\mathcal{I}t^2} = -\mathbf{m}_a \bar{\mathbf{j}} \quad (4.2.7)$$

Lainevõrrandi skalaarse potentsiaali jaoks saame Maxwelli III võrrandist:

$$\text{div } \mathbf{e}_a \bar{E} = \mathbf{r},$$

asendades siia seosest (4.2.4),

$$\text{div grad } \mathbf{j} - \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}t} \text{div } \bar{A} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{e}_a}$$

Asendades $\text{div } \bar{A}$ seosest (4.2.6), saame teades et $\text{div grad } \mathbf{j} \equiv \nabla^2 \mathbf{j}$:

$$\nabla^2 \mathbf{j} - \mathbf{e}_a \mathbf{m}_a \frac{\mathcal{I}^2 \mathbf{j}}{\mathcal{I}t^2} = -\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{e}} \quad (4.2.8)$$

See on lainevõrrand skalaarse potentsiaali jaoks.

Väljapotentsiaalide lainevõrrandid on mittehomogeensed d'Alambert'i võrrandid: vasakul pool lainevõrrandi tüüpiline kuju, teised tuletised sümmeetriliselt mööda aega ja koordinaate, paremal pool väljaallikad. Erinevus väljavektorite lainevõrranditest seisneb selles, et potentsiaalide võrrandites allikad on sees lihtsaimal võimalikul kujul. Ruumis, kus voolud ja laengud puuduvad, s.t. $\mathbf{r}=0$ ja $\bar{\mathbf{j}}=0$, ja, saame homogeensed d'Alambert'i võrrandid

$$\begin{aligned}\nabla^2 \bar{A} - \mathbf{e}_a \mathbf{m}_a \frac{\nabla^2 \bar{A}}{t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \bar{\mathbf{j}} - \mathbf{e}_a \mathbf{m}_a \frac{\nabla^2 \bar{\mathbf{j}}}{t^2} &= 0\end{aligned}\tag{4.2.9}$$

Kuna potentsiaalid tuuakse sisse spetsiaalselt väljade sidumiseks allikatega, ei kasutata praktiliselt homogeenseid lainevõrrandeid potentsiaalide jaoks.

Kui on tegemist harmooniliste elektromagnetiliste võnkumistega, on otstarbekas üle minna välja potentsiaalide komplekssetele amplituudidele $\dot{\bar{A}} = \bar{A}_0 e^{i\mathbf{j} \cdot \mathbf{r}}$ ja $\bar{\mathbf{j}} = \mathbf{j}_0 e^{i\mathbf{j} \cdot \mathbf{r}}$ ja.

Lainevõrrandid komplekssete amplituudide jaoks saavad kuju

$$\begin{aligned}\nabla^2 \dot{\bar{A}} + \tilde{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{m}} \omega^2 \dot{\bar{A}} &= \tilde{\mathbf{m}} \dot{\bar{\mathbf{j}}} \\ \nabla^2 \dot{\bar{\mathbf{j}}} + \tilde{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{m}} \omega^2 \dot{\bar{\mathbf{j}}} &= -\frac{\mathbf{r}}{e_a}\end{aligned}\tag{4.2.10}$$

Nende võrrandite lahendite üldkuju tasapinnalise laine puhul on samasugune nagu võrranditel (4.1.7) väljatugevuste jaoks: kaks vastassuunas levivat lainet. Erinevus seisneb selles, et kui võrrandites (4.1.7) jääb amplituud põhimõtteliselt määramatuks (allikad puuduvad), siis nüüd on allikate järgi võimalik potentsiaalilaine amplituud üheselt määrata. Potentsiaalide lainevõrrandis esineb samuti üksainus parameeter, mis ühtib väljavektorite lainevõrrandis esineva parameetriga. Selleks parameetriks on lainearv $K = \omega \sqrt{\tilde{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{m}}}$.

5 Staatilised ja statsionaarsed väljad

Elektromagnetilisi välju kirjeldavad üldjuhul Maxwelli võrrandid

$$\text{rot } \bar{H} = \mathbf{e}_a \frac{\int \bar{E}}{\int t} + \bar{j}$$

$$\text{rot } \bar{E} = -\mathbf{m}_a \frac{\int \bar{H}}{\int t}$$

$$\text{div } \bar{D} = \mathbf{r}$$

$$\text{div } \bar{B} = 0$$

materiaalsed võrrandid

$$\bar{D} = \mathbf{e}_a \bar{E}$$

$$\bar{B} = \mathbf{m}_a \bar{H}$$

$$\bar{j} = \sigma \bar{E}$$

väljapotentsiaalide lainevõrrandid

$$\nabla^2 \bar{A} - \mathbf{e}_a \mathbf{m}_a \frac{\int^2 \bar{A}}{\int t^2} = -\mathbf{m} \bar{j}$$

$$\nabla^2 \bar{j} - \mathbf{e}_a \mathbf{m}_a \frac{\int^2 \bar{j}}{\int t^2} = -\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{e}_a}$$

Erijuhtudel, kui neis võrrandis domineerivad teatud liikmed ja osa liikmeist on tähtsusetud (või muutuvad nulliks), on tegemist teatud elektromagnetiliste väljade eriliigiga. Nii eristatakse kolme väljade alaliiki.

1. **Staatilised väljad** on liikumatute laengute väljad, neis väljades puudub vool. Sel juhul

$$\mathbf{r} = \text{const}$$

$$\bar{j} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$$

2. **Statsionaarsed väljad** on alalisvoolu väljad. Sel juhul

$$\mathbf{r} = \text{const}$$

$$\bar{j} = \text{const}$$

$$\frac{\int}{\int t} \rightarrow 0$$

3. **Kvaasistatsionaarsed väljad** on suhteliselt madalasageduslikud vahelduvvoolu väljad. Sel juhul ajalisi tuletisi sisaldavad liikmed on väga väikesed ja väljade omadused ei erine praktiliselt statsionaarsete väljade omadustest.

Kvaasistatsionaarsuse tingimus

$$\mathbf{e}_a \frac{\int \bar{E}}{\int t} \ll \bar{j}$$

Kui on tegemist ülalnimetatud väljaliikidega, siis Maxwelli võrrandsüsteemis muutuvad liikmed, mis seovad omavahel elektrilisi ja magnetilisi nähtusi, väikeseks ja neid võib mitte arvestada. Sel juhul elektri- ja magnetväli ei ole omavahel seotud ja Maxwelli

võrrandsüsteem jaguneb elektrivälja: $rot \bar{E} = 0$, $div \bar{D} = \mathbf{r}$ ja magnetvälja võrrandiks: $rot \bar{H} = \bar{j}$ (või $rot \bar{H} = 0$), $div \bar{B} = 0$.

5.1 Staatilised väljad

Elektrostaatilises väljas

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= const \\ \bar{j} &= 0 \end{aligned}$$

ja väli ei muutu ajas, s.t. $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$

Elektrostaatilist välja kirjeldavad üldisest süsteemist ülalmainitud tingimustel saadud võrrandid

$$rot \bar{E} = 0 \quad (5.1.1)$$

$$div \bar{B} = \mathbf{r} \quad (5.1.2)$$

$$\bar{D} = \mathbf{e}_a \bar{E}. \quad (5.1.3)$$

Kuna on tegemist potentsiaalse väljaga ja võib sisse viia elektrostaatilise potentsiaali

$$\bar{E} = -grad \mathbf{j} \quad (5.1.4)$$

Elektrostaatiline potentsiaal langeb kokku skalaarse elektrodünaamilise potentsiaaliga

$$\bar{E} = -grad \mathbf{j} - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t},$$

kui on täidetud staatilise (või statsionaarse) välja tingimus ja $\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \rightarrow 0$.

Asendame (5.1.4) võrrandisse (5.1.2)

$$-div grad \mathbf{j} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{e}_a}; \quad \nabla^2 \mathbf{j} = -\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{e}_a}. \quad (5.1.5)$$

Oluline on märkida, et võrrand (5.1.5) tuleneb otseselt lainevõrrandist skalaarse potentsiaali jaoks (5.2.8) staatilise laengu puhul. Kui $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = 0$, siis ilmselt ka $\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0$

ja teine liige lainevõrrandi vasakul poolel muutub nulliks.

Saadud võrrand (5.1.5) on **skalaarne Poissoni võrrand**. Selle võrrandi lahendi

üldkuju on teada ja avaldub nn. allika funktsiooni $\frac{\mathbf{r}}{r}$ kaudu

$$\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi \mathbf{e}_a} \int_V \frac{\mathbf{r}}{r} dV \quad (5.1.6)$$

Lahendi vastavust tegelikkusele on kerge näidata, lähtudes Gaussi teooriast punktlaengu jaoks. Samuti on kerge näidata, et punktlaengu erijuhul lahendi üldkuju (5.1.6) taandub Coulombi seadustele. Vaatleme viimast varianti. Punktlaengu puhul

$r=const$ ja $\int_V r dV = q$.

Punktlaengu elektrostaatiline potentsiaal

$$\mathbf{j} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5.1.7)$$

Elektrostaatilise välja tugevus

$$\bar{\mathbf{E}} = -\text{grad } \mathbf{j} = -\text{grad } \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

kus $\bar{\mathbf{n}}$ on radiaalselt suunatud ühikvektor. Järelikult

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \bar{\mathbf{n}} \quad (5.1.8)$$

mis vastab Coulombi seadusest saadud elektrivälja tugevusele (vt. 1.1.2).

Piiritingimused elektrostaatilises väljas vastavad üldistele piiritingimustele (vt. p. 3)

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \text{ja} \quad D_{1n} - D_{2n} = \mathbf{r}'$$

Juhtiva keskkonna sees muutub elektrostaatiline väli nulliks, sest muidu tekiks vool $\bar{\mathbf{j}} = \mathbf{s}\bar{\mathbf{E}}$ ja väli ei oleks enam staatiline. Välja puudumist juhtiva keskkonna sees võib seletada sellega, et seal vabalt liikuvad ühenimelised laengud tõukuvad ja asetuvad juhi pinnal nii, et nende väljad juhi sees kompenseeruvad. Järelikult tekib pindlaeng \mathbf{r}

$$E_{2t} = E_{2n} = 0 \quad \text{järeldub, et}$$

$$E_{1t} = 0$$

$$E_{1n} = \frac{\mathbf{r}'}{\epsilon_0}$$

elektrostaatiline väli on suunatud risti juhtiva keskkonna pinnaga. Juhi pind on seega ekvipotentsiaalne pind, kus $\mathbf{j} = \text{const}$.

Iga isoleeritud juhtivat keha võib iseloomustada mahtuvusega C , mis näitab laengu hulka, mis kulub keha potentsiaali tõstmiseks ühe ühiku võrra

$$C = \frac{q}{\mathbf{j}} \quad [F]. \quad (5.1.9)$$

5.2 Statsionaarsed väljad

5.2.1 Alalisvoolumagnetväli

Alalisvoolu magnetvälja valemid saadakse üldiselt elektromagnetilise välja valemite tingimusel, et $\bar{\mathbf{j}} = \text{const}$. Ja $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$:

$$\text{rot } \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{j}} \quad (5.2.1)$$

$$\text{div } \bar{\mathbf{B}} = 0 \quad (5.2.2)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mu_0 \bar{\mathbf{H}} \quad (5.2.3)$$

Kuna $\text{div } \bar{\mathbf{B}} = 0$, on tegemist solenoidaalse väljaga, mida võib kujutada mingi vektori rootorina (kuna $\text{div } \text{rot } \bar{\mathbf{a}} = 0$):

$$\bar{\mathbf{B}} = \text{rot } \bar{\mathbf{A}}$$

Kuna \bar{A} on magnetiline vektorpotentsiaal, sama mis elektrodünaamiline vektorpotentsiaal (vt. 4.2.1). Kuna Vektor ei ole üheselt määratud oma rootoriga, võib esitada täiendavad tingimused sellel vektori divergentsile. Kuna alalisvoolu magnetväli ei oma allikaid, võib eeldada, et ka magnetilise potentsiaali väli on allikatevaba, s.t.

$$\operatorname{div} \bar{A} = 0 \quad (5.2.4)$$

Samale nõudele taandub ka üldine kalibreerimistingimus (4.2.6), kui $\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0$.

Asendame \bar{H} potentsiaali kaudu võrrandis (5.2.1)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} &= \mathbf{m}_a \bar{\mathbf{j}} \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} - \nabla^2 \bar{A} &= \mathbf{m}_a \bar{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

Kasutades tingimust (5.2.4), saame **Poissoni vektorvõrrandi**

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mathbf{m}_a \bar{\mathbf{j}} \quad (5.2.5)$$

Saadud võrrand tuleneb otseselt elektrodünaamilise vektorpotentsiaali lainevõrrandist (4.2.7) alalisvoolu puhul. Kui $\bar{\mathbf{j}} = \text{const}$, siis ilmselt ei muutu ajas ka väljapotentsiaal $\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = 0$ ja teine liige lainevõrrandi vasakult poolt langeb välja.

Poissoni vektorvõrrandi lahendi üldkuju on teada ja avaldub allika funktsiooni $\frac{\bar{\mathbf{j}}}{r}$ kaudu

$$\bar{A} = \frac{\mathbf{m}_a}{4\pi} \int_V \frac{\bar{\mathbf{j}}}{r} dV \quad (5.2.6)$$

Magnetiliselt potentsiaalilt võib üle minna magnetväljale seoses 4.2.2 abil:

$$\bar{H} = \frac{1}{\mathbf{m}_a} \operatorname{rot} \bar{A} = \frac{1}{4\pi} \int_V \operatorname{rot} \frac{\bar{\mathbf{j}}}{r} dV \quad (5.2.7)$$

5.2.2 Alalisvoolu elektriväli

Kuna alalisvool saab eksisteerida ainult elektrijuhtivust omavas keskkonnas $\mathbf{s} \neq 0$, vaatleme ka väljavõrrandeid juhtivas keskkonnas, eeldades, et $\bar{\mathbf{j}} = \text{const}$ ja protsessid ei muutu ajas $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$. Järelikult ka $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = 0$ ja $\mathbf{r} = \text{const}$.

Juhtivusvoolu omadusi kirjeldavad üldistatud omadused Ohmi seadus 1.3.1 ja pidevuse võrrand 2.3.1. Alalisvoolu elektrivälja võrrandid on

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0 \quad (5.2.10)$$

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{j}} = 0 \quad (5.2.11)$$

$$\bar{\mathbf{j}} = \mathbf{s} \bar{E} \quad (5.2.12)$$

Kuna $\operatorname{rot} \bar{E} = 0$, on tegemist potentsiaalse väljaga

$$\bar{E} = -\operatorname{grad} \mathbf{j}$$

ja skalaarne potentsiaal \mathbf{j} langeb kokku elektrostaatilise välja potentsiaaliga.

Kuna $\text{div } \vec{j} = 0$, ei oma alalisvoolu voolujooned allikaid ja on kinnised jooned. Kuna alalisvoolu väli ei oma allikaid, ei saa ka elektrilaeng olla alalisvoolu tekitajaks (statsionaarses väljas $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = 0$ ja $\mathbf{r} = \text{const}$).

*****Alalisvoolu võib tekitada ainult kõrvaline elektromotoorne jõud*****

Piiritingimused alalisvoolu elektrivälja jaoks võib saada üldistest piiritingimustest:

$$E_{1t} = E_{2t}$$

Kuna $\text{div } \vec{j} = 0$, ja on kerge tõestada, et $j_{n1} = j_{n2}$ voolutiheduse normaal komponent on pidev.

Voolutiheduse puutujakomponent jaoks saame piiritingimused seosest $E_{1t} = E_{2t}$. Kasutades Ohmi seadust:

$$\frac{\vec{j}_{1t}}{\mathbf{s}_1} = \frac{\vec{j}_{2t}}{\mathbf{s}_2}$$

$$\frac{\vec{j}_{1t}}{\vec{j}_{2t}} = \frac{\mathbf{s}_1}{\mathbf{s}_2}$$

Kuna juhtivas keskkonnas eksisteerib alalisvool, ei ole juhi pind enam ekvipotentsiaalseks pinnaks nagu elektrostaatikaks. Samuti ei ole elektriväli juhi pinnale risti, vaid omab puutujakomponenti $\vec{E}_t = \frac{\vec{j}}{\mathbf{s}}$.

Kerge on näidata, et elektrijuhi ja dielektriku piiril kui $\mathbf{s}_1 \gg \mathbf{s}_2$ siis $\frac{E_{1t}}{E_{2t}} \ll 1$.

Praktiliselt võibelektrijuhi pinnal lugeda $E_t \approx 0$. Seega elektrostaatilise ja alalisvoolu väljade piiritingimused elektrijuhi ja dielektriku piiril praktiliselt ei erine.

Formaalne elektrostaatiline analoogia seisneb selles, et kasutatakse elektrostaatiliste ja alalisvooluväljade sarnasust statsionaarsete elektriväljade uurimisel.

Elektrostaatilise välja võrrandid ilma laenguteta ruumis $\mathbf{r} = 0$	Alalisvoolu elektrivälja võrrandid juhtivas keskkonnas
$\text{rot } \vec{E} = 0$	$\text{rot } \vec{E} = 0$
$\text{div } \vec{D} = 0$	$\text{div } \vec{j} = 0$
$\vec{D} = \mathbf{e}_0 \mathbf{e} \vec{E}$	$\vec{j} = \mathbf{s} \vec{E}$
$\nabla^2 \mathbf{j} = 0$	$\nabla^2 \mathbf{j} = 0$
Piiritingimused metalli pinnal	
$E_t = 0$	$E_t \approx 0$
$D_{1n} = \mathbf{r}'$	$\vec{j}_{1n} = \vec{j}_{2n}$
Juhtivas keskkonnas välja ei ole.	Juhtivas keskkonnas on väli.

Võrrandid ja piiritingimuste poolt määratud väljastruktuur on mõlemal juhul sarnased, kui viia vastavusse

$$\vec{D} \rightarrow \vec{j}$$

$$\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{s}$$

Seda analoogiat kasutatakse stacionaarsete väljade arvutamisel ja väljastruktuuri eksperimantaalsel uurimisel (elektrolüütilise vanni meetod).

6 Elektromagnetiline kiirgus

Kõige üldisemal juhul, kui on tegemist ajas muutuvate väljadega ja need muutused on kiired, tuleb nii Maxwelli võrrandites kui ka lainevõrrandis arvestada kõiki liikmeid. Raskemaks muutub ka lainevõrrandi lahendi leidmine. Arvestades elektrodünaamilisi, kiiresti muutuvaid protsesse, kirjeldab lainevõrrandi lahend üldjuhul elektromagnetilise kiirguse seost väljaallikatega -- voolude ja laengutega. Väljaallikateks on sel juhul kõrvalised voolud ja kõrvalised laengud, mille struktuur ja suurus on antud ega muutu.

Selle ülesande lahendamisele võib läheneda kahel erineval viisil: esimene, näitlik, aga matemaatiliselt mitte eriti range lähenemine põhineb analoogia kasutamisel statsionaarse väljaga, eeldades ajaliste ja ruumiliste muutuste sõltumatust. Teine, matemaatiliselt korrektne lähenemine on lainevõrrandi lahendamine, kasutades muutujate asenduse võtet.

Selleks, et asja olemust näitlikumaks teha, kasutame lainevõrrandi lahendi üldkuju saamisel analoogiat statsionaarse väljaga.

Elektrodünaamiliste potentsiaalide lainevõrrandid (4.2.7) ja (4.2.8) on nn. d'Alambert'i võrrandid

$$\nabla^2 \bar{A} - \epsilon_a \mathbf{m}_a \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mathbf{m}_a \bar{\mathbf{j}}_K$$

$$\nabla^2 \mathbf{j} - \epsilon_a \mathbf{m}_a \frac{\partial^2 \mathbf{j}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{r}_K}{\epsilon_a}$$

mis sisaldavad nii ruumilisi (esimene liige) kui ka ajalisi (teine liige) tuletisi potentsiaalidest. Tuletised ruumist ja ajast esinevad teineteisest sõltumatutena.

Kui on tegemist erijuhuga, kus $\bar{\mathbf{j}}_K$ ja \mathbf{r}_K ei muutu ajas (alalisvool ja staatiline laeng), siis on loomulik järeldada, et ka nende poolt tekitatud väljade potentsiaalid ei muutu ajas. Sel juhul lainevõrrandid taanduvad staatilise ja statsionaarse välja võrrandideks (5.2.5) ja (5.1.5), mis omavad Poissoni võrrandi kuju:

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mathbf{m}_a \bar{\mathbf{j}}_K$$

$$\nabla^2 \mathbf{j} = -\frac{\mathbf{r}_K}{\epsilon_a}$$

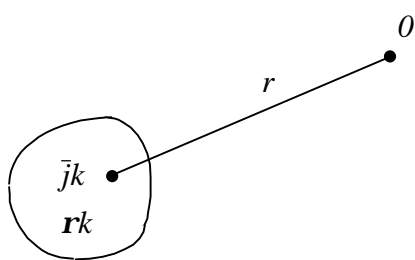
Nende võrrandite lahendid on teada (vt. 5.2.5 ja 5.1.6) ja avalduvad allika funktsioonide kaudu

$$\bar{A} = \frac{\mathbf{m}_a}{4\pi \epsilon_a} \int_V \frac{\bar{\mathbf{j}}_K}{r} dV$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi \epsilon_a} \int_V \frac{\mathbf{r}_K}{r} dV$$

Poissoni võrrandite lahendid määravad välja ruumilise struktuuri. Kui välja allikateks oleksid mitte staatilised laengud ja voolud, siis nende poolt tekitatud väljade struktuur ilmselt oleks sama, küll aga hakkaksid muutuma sõltuvalt ajast väljapotentsiaalide väärtused, järgides väljaallika väärtuse muutust.

Vaatleme väljaallikate $\bar{\mathbf{j}}_K$ ja \mathbf{r}_K poolt tekitatud välja potentsiaalide punktis O r kaugusel väljaallikatest (joon. 6.1). Väljaallikate väärtused sõltuvad ajast $\bar{\mathbf{j}}_K = \bar{\mathbf{j}}_K(t)$ ja $\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_K(t)$



Joon. 6. 1

Kui elektromagnetiline väli leviks lõpmatu suuruse kiirgusega $v \rightarrow \infty$, siis potentsiaalide väärtused punktis 0 igal ajamomendil t vastaksid väljaallikate väärtustele selsamal ajamomendil. Eelnevale ajamomendile vastav potentsiaali väärtus oleks liikunud lõpmatult kaugemale. Potentsiaali väärtused kauguse suurenemisega vähenevad monotoonselt ja välja iseloom on samasugune kui elektrostaatilisel väljal. See on tüüpiline kvaasistatsionaarse välja pilt.

Kuna elektromagnetiline väli levib ruumis aga lõpliku kiirusega $v = \text{const}$, siis väljal kulub teepikkuse r läbimiseks aega

$$\Delta t = \frac{r}{v},$$

kus v on elektromagnetilise välja levimiskiirus (valguse kiirus).

Seega väli, mis tekitatakse väljaallika poolt ajamomendil t , jõuab punkti 0 Δt võrra hiljem. Väli, mis ajamomendil t on jõudnud punkti 0 , on tekitatud väljaallika poolt varasemal ajamomendil

$$t' = t - \Delta t = t - \frac{r}{v}$$

ja vastab seega väljaallika väärtusele mitte ajamomendil t , vaid varasemal ajamomendil t' :

$$\text{kas } \bar{j}_k \left(t - \frac{r}{v} \right) \text{ või } \mathbf{r}_k \left(t - \frac{r}{v} \right).$$

Järelikult väljapotentsiaalid, mis on lainevõrrandi lahendeiks üldjuhul, väljenduvad väljaallikate kaudu kujul

$$\bar{A}(t) = \frac{\mathbf{m}_a}{4\mathbf{p}_v} \int \frac{\bar{j}_k \left(t - \frac{r}{v} \right)}{r} dv \quad (6.1.1)$$

$$\mathbf{j}(t) = \frac{1}{4\mathbf{p}_e} \int \frac{\mathbf{r}_k \left(t - \frac{r}{v} \right)}{r} dv \quad (6.1.2)$$

Neid potentsiaale nimetatakse **hilinevateks potentsiaalideks**.

Rangemalt võib hilinevaid potentsiaale tuletada d'Alambert'i võrrandi lahenduse käigust.

Vaatleme lihtsuse mõttes ühemõõtmelist juhtu, kus $\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}Z} = \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}Y} = 0$.

$$\text{Siis} \quad \frac{\mathcal{I}^2 \mathbf{j}}{\mathcal{I}X^2} - \mathbf{e}_a \mathbf{m}_a \frac{\mathcal{I}^2 \mathbf{j}}{\partial t^2} = - \frac{\mathbf{r}_k(t)}{\mathbf{e}_a}$$

Läheme üle koordinaatide süsteemi, mis liigub elektromagnetilise välja levimiskiirusega piki telge. Viime sisse uued muutujad

$$\mathbf{x} = t - \frac{x}{v}$$

$$\mathbf{h} = t + \frac{x}{v}$$

Siis

$$t = \frac{1}{2}(\mathbf{h} + \mathbf{x})$$

$$x = \frac{v}{2}(\mathbf{h} - \mathbf{x})$$

$$\frac{\mathbf{j}}{\mathbf{j}X} = \frac{\mathbf{j}}{\mathbf{j}x} \frac{\mathbf{j}x}{\mathbf{j}X} + \frac{\mathbf{j}}{\mathbf{j}h} \frac{\mathbf{j}h}{\mathbf{j}X} = \frac{1}{n} \left(-\frac{\mathbf{j}}{\mathbf{j}x} + \frac{\mathbf{j}}{\mathbf{j}h} \right)$$

$$\frac{\mathbf{j}}{\mathbf{j}t} = \frac{\mathbf{j}}{\mathbf{j}x} + \frac{\mathbf{j}}{\mathbf{j}h}$$

Lainevõrrand omandab kuju

$$\frac{1}{v^2} \left(\frac{\mathbf{j}}{\mathbf{j}h} - \frac{\mathbf{j}}{\mathbf{j}x} \right)^2 \mathbf{j} - \frac{1}{v^2} \left(\frac{\mathbf{j}}{\mathbf{j}h} + \frac{\mathbf{j}}{\mathbf{j}x} \right)^2 \mathbf{j} = -\frac{\mathbf{r}_K}{\mathbf{e}_a},$$

kus on arvestatud, et $\frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}_a \mathbf{m}_a}} = v$.

Saadud kuju võib teisendada vastavalt valemile

$$(a-b)^2 - (a+b)^2 = 4ab$$

$$4 \frac{\mathbf{j}^2 \mathbf{j}}{\mathbf{j}x \mathbf{j}h} = -v^2 \frac{\mathbf{r}_K}{\mathbf{e}_a}$$

Integreerides mööda üht muutujat \mathbf{x} , saame mingi funktsiooni

$$\frac{\mathbf{j} \mathbf{j}}{\mathbf{j}h} = F(\mathbf{h})$$

Integreerides veel kord mööda teist muutujat \mathbf{h} , saame

$$\mathbf{j} = \int F(\mathbf{h}) d\mathbf{h} + C(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{h}) + f_2(\mathbf{x})$$

Seega

$$\mathbf{j} = f_1 \left(t + \frac{x}{v} \right) + f_2 \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

väljapotsiaal on funktsioon hilinevast argumentidist.

Selgitame lahendi mõtte. Igas ruumi punktis $x=const.$ väli muutub ajas, igal antud ajamomendil on väli erinev erinevatel x väärtustel. On ilmne, et väli omab ühesuguse väärtuse punktis x ajamomendil t , kui $t = \frac{x}{v} = const.$ (või $t + \frac{x}{v} = const.$), s.t. kui

$$x = const. + vt$$

Seega kui mingil momendil $t=0$ mingis ruumi punktis x väli omas teatud väärtust, siis aja t möödumisel väli omab sama väärtust vt kaugusel esialgselt kohast.

*****Järelikult kõik elektromagnetilise välja väärtused levivad ruumis kiirusega v .*****

Nii tekib ruumis **elektromagnetiline laine**, millega kaasneb elektromagnetiline kiirgus.

Kui elektromagnetiline väli leviks lõpmatu suure kiirusega $v \rightarrow 0$, siis hilinevad potentsiaalid langevad kokku staatiliste ja statsionaarsete väljade potentsiaalidega. Sama juhtub, kui väljaallikate muutused on nii aeglased, et $\Delta t = \frac{r}{v}$

jooksul nende väärtused praktiliselt ei muutu. Välja kvaasistatsionaarsuse tingimus sõltub seega allika ajalast muutust iseloomustava ajakonstandist T , mis harmoonilise sõltuvuse puhul on võnkumise periood, ja Dt suhtest, $T \gg Dt$. Seda tingimust, arvestades seost $Tv = \lambda$, on otstarbekas teisendada kujule

$$\lambda \gg r.$$

Kaugusel väljaallikast, mis on oluliselt väiksemad kui lainepikkus, võib potentsiaali ajalisi hilineid mitte arvestada. Sel juhul elektrodünaamika probleem taandub elektrostaatikaks.

*****Elektromagnetilise välja lainelised omadused tulenevad valguskiirguse lõplikust väärtusest. Elektromagnetilise välja lainelised omadused domineerivad suhteliselt kõrgetel sagedustel ja on otseselt tingitud potentsiaalide hilineemisest.*****

Vaatleme harmooniliselt võnkuvate allikate $\vec{j}_K(t)$ ja $\mathbf{r}_K(t)$ poolt tekitatud välju. Kasutades komplekssete amplituudide meetodit, saame väljapotentsiaalide lainevõrrandid kujul (4.2.10)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \dot{\vec{A}} + \tilde{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{m}} \omega^2 \dot{\vec{A}} &= -\tilde{\mathbf{m}} \dot{\vec{j}}_K \\ \nabla^2 \dot{\mathbf{j}} + \tilde{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{m}} \omega^2 \dot{\mathbf{j}} &= -\frac{\dot{\mathbf{r}}_K}{\mathbf{e}_a}, \end{aligned}$$

kus $\dot{\vec{j}}_K = j_{0K} e^{i\mathbf{j}_j}$ ja $\mathbf{r}'_K = \mathbf{r}_{0K} e^{i\mathbf{j}_r}$ on väljaallikate kompleksed amplituudid. Komplekssete lainevõrrandite lahendid avalduvad väljaallikate komplekssete amplituudide kaudu vastavalt (6.1.1) ja (6.1.2), arvestades potentsiaalide hilineid. Potentsiaali hilineid toob sisse täiendava faasinihke. Selgitame lähemalt:

$$\begin{aligned} \vec{j}_K(t) &= \vec{j}_{K0} \cos(\omega t + \mathbf{j}_j) \\ \vec{j}_K\left(t - \frac{r}{v}\right) &= \vec{j}_{K0} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) + \mathbf{j}_j\right] = \vec{j}_{K0} \cos\left(\omega t - \omega \frac{r}{v} + \mathbf{j}_j\right) \end{aligned}$$

Avaldades $\vec{j}_K\left(t - \frac{r}{v}\right)$ kompleksse amplituudi kaudu, saame

$$\vec{j}_K\left(t - \frac{r}{v}\right) = \text{Re} \vec{j}_{K0} e^{i\left(\omega t - \omega \frac{r}{v} + \mathbf{j}_j\right)} = \text{Re} \dot{\vec{j}}_K e^{i\omega \frac{r}{v}}$$

Liige $e^{i\omega \frac{r}{v}}$ sisaldab potentsiaali hilineemisega seotud faasinihet

$$\omega \frac{r}{v} = r \omega \sqrt{\mathbf{e}_a \mathbf{m}_a} = kr,$$

kus on arvestatud, et $v = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}_a \mathbf{m}_a}}$

Aja Δt jooksul, mis kulub väljal levimiseks väljaallikast vaatluspunkti, muutub ka laengutiheduse $\mathbf{r}_K(t)$ faas kr võrra. Järelikult lainevõrrandite lahendid potentsiaalide komplekssete amplituudide jaoks omandavad kuju

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\tilde{\mathbf{m}}}{4\mathbf{p}_v} \int \frac{\dot{\vec{j}}_K e^{-i\mathbf{k}r}}{r} dV \quad (6.1.3)$$

$$\dot{\mathbf{j}} = \frac{1}{4\mathbf{p}_e} \int \frac{\dot{\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{k}r}}{r} dV \quad (6.1.4)$$

Vaatleme näitena kõige lihtsamat juhust, võnkuva suurusega punktlaengu

$$q_K = q_{K0} \cos \omega t$$

poolt tekitatud välja. Sel juhul $r=const.$, $\int_V \dot{r} dv = \dot{q}$ ja saame elektrilise potentsiaali kompleksse amplituudi:

$$\mathbf{j} = \frac{q_K}{4\pi\epsilon_a r} e^{-ikr}$$

Skalaarne elektriline väljapotentsiaal

$$\mathbf{j} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_a r} \cos(\omega t - kr) \quad (6.1.5)$$

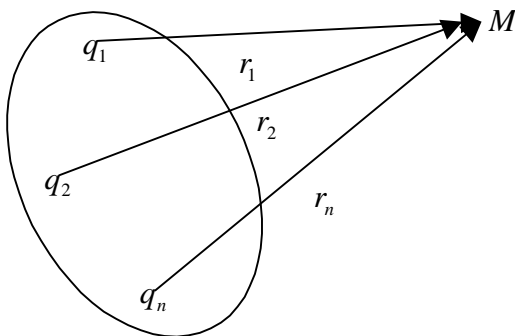
Skalaarse väljapotentsiaali konstantsed väärtused $\mathbf{j} = const.$ omavad sfääri kuju ja levivad ruumis kiirusega v . Järelikult tekitab punktallikas sfäärilise elektromagnetilise laine.

Võrdleme harmoonilise funktsiooni argumente seostes (6.1.5) ja (4.1.7) tasapinnalise laine jaoks. Seostes (4.1.6)-(4.1.7) puhtmatemaatiliselt saadud väljavektori väärtuse harmooniline võnkumine mööda telge z peegeldab tegelikult elektrodünaamilise välja potentsiaali \mathbf{j} hilinemist, millega ongi seotud elektromagnetilise laine tekkimine.

Üldjuhul, kui kõrvalised laengud ja voolud omavad mingit jaotust ruumis V , on vaja välja leidmiseks kasutada lahendite üldkuju (6.1.1) või (6.1.3) ning kõigi laengute ja voolude mõju arvestades välja arvutada potentsiaalid.

Vaatleme näitena punktlaengute süsteemi $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ poolt tekitatud välja. Üksikute laengute poolt tekitatud elektrilised potentsiaalid $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3, \dots, \mathbf{j}_n$ liituvad ja summaarne potentsiaal

$$\mathbf{j}_\Sigma = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_a r_1} e^{-ikr_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_a r_2} e^{-ikr_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_a r_3} e^{-ikr_3} + \dots + \frac{q_n}{4\pi\epsilon_a r_n} e^{-ikr_n} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_3 + \dots + \mathbf{j}_n$$



Joon. 6.2

See on superpositsiooni printsiip -- erinevate allikate poolt tekitatud väljad liituvad. Superpositsiooni printsiip kehtib lineaarses keskkonnas. Sellest printsiibist võib teha ka väga olulise järelduse: väli välja ei mõjuta. Samas ruumis võivad eksisteerida erineva sagedusega ja erineva amplituudiga elektromagnetilised väljad, kuid nendevaheline mõju puudub. See kehtib seni, kuni keskkond on lineaarne. Välja mõju väljale toimib ainult mittelineaarse keskkonna kaudu. Nii ei ole

võimalik muuta elektromagnetilise kiirguse levi suunda, kallutada valguskiirt välja abil, ükskõik kui tugev see väli ka ei ole. Koosmõju tekib ainult siis, kui keskkonna omadused tugeva välja mõjul hakkavad muutuma.

Superpositsiooni printsiipi kasutatakse keerulise struktuuriga väljaallikate (suurte antennide) poolt tekitatavate väljade arvutamiseks. Kuna ülesande lahendamine üldjuhul on väga keeruline, arvutatakse elektrodünaamika meetoditega kõige lihtsamate kiirgusallikate väljad. Keerulisema struktuuriga allikate kiirgusväljad aga arvutatakse, liites elementaarsete kiirgurite väljad, lähtudes superpositsiooni printsiibist.

7 Tasapinnaline elektromagnetiline laine

Kursuse esimeses osas vaatlesime elektromagnetilise välja üldisi omadusi, lähtudes väljavõrranditest. Kursuse teises osas vaatleme üht osa elektromagnetilisest väljast - välja, mis omab harmoonilist sõltuvust ajast ja levib ruumis, nimelt elektromagnetilist lainet. Laine omaduste tundmaõppimisel ei ole oluline teada selle amplituudi, sellepärast võib piirduda homogeenise lainevõrrandi lahendamisega, mis oluliselt lihtsustab ülesannet.

Lainevõrrand monokromaatilise laine jaoks ilma voolude ja laenguteta ruumis

$$\begin{aligned}\nabla^2 \dot{\vec{E}} + \mathbf{w}^2 \tilde{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{m}} \dot{\vec{E}} &= 0 \\ \nabla^2 \dot{\vec{H}} + \mathbf{w}^2 \tilde{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{m}} \dot{\vec{H}} &= 0\end{aligned}\quad (7.1)$$

Paljudel praktiliselt olulistel juhtudel võib lugeda, et tegemist on tasapinnalise lainega. Nii on praktiliselt tasapinnaline vabas ruumis leviv laine kaugel allikast, mil selle poolt tekitatud sfäärilise laine kõverusraadius on nii suur, et vaatlustel piiratud ruumi osas võib kõverust mitte arvestada. Nii on see ka laine levil liinis, sest liin suunab lainet ja see levib ainult ühes suunas nii, et väljastruktuur leviga ristsuunas ei muutu. Sellepärast vaatleme tasapinnalise laine kui kõige lihtsama laine levi.

Tasapinnalise laine front on tasapind ja laine omadused sõltuvad ainult ühest koordinaadist. Kui tasapinnaline laine levib piki z telge, siis

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow 0 \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \rightarrow 0; \quad \nabla_{xy} = 0$$

ja lainevõrrand lihtsustub

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}}{\partial z^2} + \mathbf{w}^2 \tilde{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{m}} \dot{\vec{E}} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \dot{\vec{H}}}{\partial z^2} + \mathbf{w}^2 \tilde{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{m}} \dot{\vec{H}} &= 0\end{aligned}\quad (7.2)$$

Lainevõrrandi lahend tasapinnalise laine jaoks

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}} &= \vec{E}_0 e^{-ikz} + \vec{E}'_0 e^{+ikz} \\ \dot{\vec{H}} &= \vec{H}_0 e^{-ikz} + \vec{H}'_0 e^{+ikz},\end{aligned}\quad (7.3)$$

kus lainearv

$$k = \mathbf{w} \sqrt{\tilde{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{m}}}$$

sisaldab kaht vastassuunas levivat lainet. Ruumiline faasijaotus, mis on tingitud välja momentväärtuste hilinemisest allika momentväärtustega võrreldes, omab erinevates liikmetes vastassuunalisi sõltuvusi koordinaadist: esimeses liikmes faas hilinemine z suurenedes suureneb, teises liikmes faas ennetab allika faasi ja z suurenedes ennetus suureneb, järelikult väli levib vastassuunas. Kui vaadelda ainult üht levimissuunda, saame tasapinnalise laine väljatugevuste jaoks seosed

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\mathbf{w}t - kz) \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 \cos(\mathbf{w}t - kz)\end{aligned}\quad (7.4)$$

7.1 Tasapinnaline laine ideaalses keskkonnas

Vaatleme elektromagnetilist lainet kõige lihtsamal juhul, kui tasapinnaline laine levib ideaalses isotroopses homogeenes lineaarses keskkonnas. Ideaalses keskkonnas puuduvad kaod, ($\mathbf{s} = 0$, $\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e}_a$, $\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{m}_a$), $\tilde{\mathbf{e}}$ ja $\tilde{\mathbf{m}}$ on reaalarvud. Siis ka $k = \mathbf{w} \sqrt{\mathbf{e}_a \mathbf{m}_a}$ on reaalne suurus. Lainevõrrandi lahend saab kuju (7.4), kompleksse amplituudi puhul (7.3).

Toome sisse põhilised laine parameetrid.

Laine **faasikiirus** v on faasitasapinna levimiskiirus. Faasitasapind määratakse tingimusest

$$\mathbf{w}t - kz = \text{const.}$$

Faasikiiruse saame seosest

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\mathbf{w}}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}_a \mathbf{m}_a}} = \frac{c}{\sqrt{\mathbf{e} \mathbf{m}}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0}}$$

kus $c = 3.10^8 \frac{m}{\text{sec}}$ on valguse kiirus vaakumis.

Valemist nähtub, et faasikiirus sõltub keskkonna omadustest, milles laine levib: valguse kiirus vaakumis on jagatud keskkonna murdumisnäitajaga. Tavaliselt on murdumisnäitaja suurem kui üks ja faasikiirus väiksem kui valguse kiirus vaakumis. Kuid võib esineda ka juhte, mil murdumisnäitaja on väiksem kui üks - nii on see näiteks plasmas, vabalt liikuvatest laengutest koosnevas keskkonnas, mille suhteline dielektriline läbitavus on väiksem kui üks. Sel juhul on faasikiirus suurem valguse kiirusest vaakumis. Vastuolu ühe kaasaegse füüsika põhipostulaadiga ei teki, sest faasikiirus ei ole füüsikaline suurus, vaid - faasitasapinna kui abstraktse mõiste edasikandumise kiirus. Faasikiirus võib olla suurem valguse levi kiirusest vaakumis.

Lainepikkust võib defineerida kahel viisil, mis sisuliselt kattuvad. Esiteks, laine-pikkus on lähim kaugus kahe samafaasilise punkti vahel: kui ruumiline faasinihe $kz = 2\mathbf{p}$, siis $z = \mathbf{l}$ ja

$$\mathbf{l} = \frac{2\mathbf{p}}{k} = \frac{v}{f}.$$

Teiseks, lainepikkus on perioodi jooksul läbitud tee pikkus:

kuna $f = 1/T$, kus T on periood, siis

$$\lambda = vT$$

Ülaltoodud seostest võib saada kasuliku seose lainepikkuse ja lainearvu vahel.

Lainearv

$$k = \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}} = \frac{2\mathbf{p}f}{v} = \frac{\mathbf{w}}{v}$$

Lainearv määrab laine ruumilise faasijaotuse: iga lainepikkuse ulatuses faas muutub 2π võrra.

Vaatleme tasapinnalise laine omadusi levil kadudeta vabas ruumis. Rida omadusi on üldised ja kehtivad praktiliselt alati laine levi puhul vabas ruumis, ka siis, kui on tegemist allika (antenni) poolt tekitatud väljaga ja tegelikult sfäärilise lainega.

1. Laine on ristlaine, elektri- ja magnetväli ei oma komponenti laine levimissuunas

$$E_z = H_z \sim 0$$

See laine omadus järeldub I ja II Maxwelli võrrandist

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= i\omega \vec{E} \\ \text{rot } \vec{E} &= -i\omega \vec{H} \end{aligned}$$

eeldusel, et $\frac{I_x}{I_y} = \frac{I_z}{I_y} = 0$.

Kirjutame Maxwelli võrrandid komponentide kaupa, arvestades, et

$$\frac{I_x}{I_y} = \frac{I_z}{I_y} = 0:$$

$$i\omega \vec{E}_x = -\frac{I_y \dot{H}_y}{I_z} = ik\dot{H}_y$$

$$i\omega \vec{E}_y = \frac{I_y \dot{H}_x}{I_z} = -ik\dot{H}_x$$

$$i\omega \vec{E}_z = 0$$

$$i\omega \vec{H}_x = \frac{I_y \dot{E}_y}{I_z} = -ik\dot{E}_y$$

$$i\omega \vec{H}_y = \frac{I_y \dot{E}_x}{I_z} = ik\dot{E}_x$$

$$i\omega \vec{H}_z = 0$$

Järelikult $E_z = H_z = 0$.

2. Väljavektorid \vec{E} ja \vec{H} on teineteisega risti.

Tõestame, et $\vec{E} \vec{H} = 0$, kasutades eelmises punktis väljakirjutatud seoseid:

$$\vec{E} \vec{H} = \dot{E}_x \dot{H}_x + \dot{E}_y \dot{H}_y = \frac{k}{\omega m_a} \dot{H}_y \dot{H}_x + \left(-\frac{k}{\omega m_a} \right) \dot{H}_x \dot{H}_y$$

3. \vec{E} ja \vec{H} ristkomponentide suhe määratakse keskkonna lainetakistusega W_0 . Miks nimetatakse seda suhet lainetakistuseks? Tavalises vooluahelas on takistus pingelaengu ja samasuunalise voolu suhe. Üldjuhul, kui on tegemist lainega, tuleb pinge asemel arvestada elektrivälja tugevusega. Juhtivusvoolu, kui laine levib ideaalses keskkonnas, kus $\sigma = 0$, ei ole. Kuna juhtivusvool on alati seotud temale ristsuunalise magnetväljaga, võib juhtivusvoolu sellega asendada. Nii tulebki takistuse mõistesse sisse elektrivälja tugevus ja temale samasuunalise voolu asemel ristsuunaline magnetväli.

Kasutades p. 1 väljakirjutatud seoseid

$$\begin{aligned} \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} &= \frac{k}{\omega e_a} = \frac{\omega \sqrt{e_a m_a}}{\omega e_a} = \sqrt{\frac{m_a}{e_a}} = W_0 \\ -\frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x} &= +\frac{k}{\omega e_a} = +\sqrt{\frac{m_a}{e_a}} = W_0 \end{aligned}$$

Vaakumis

$$W_0 = \sqrt{\frac{m_0}{e_0}} = 120 \text{ p}[\Omega]$$

Kuna \mathbf{e}_a ja \mathbf{m}_a kadudeta keskkonnas on reaalsed, siis on ka W_0 reaalarv ja \bar{E} ja \bar{H} on omavahel faasis.

4. Elektromagnetilise energia ülekande on määratud Poyntingi vektoriga. Poyntingi vektor määratakse elektri- ja magnetvälja tugevuse vektorkorrutisega:

$$\bar{P} = \bar{E} \times \bar{H}$$

Vektor $\bar{E} \times \bar{H} = \left[\frac{V}{m} \times \frac{A}{m} \right] = \left[\frac{W}{m^2} \right]$ omab võimsuse pindtiheduse dimensiooni.

Dimensioonist järeldub, et tegemist on võimsuse pindtihedusega ehk energiavoo tihedusega ajaühikus.

*****vektor kujutab endast energiavoo tihedust ajaühikus ja iseloomustab energia levimist ruumis.*****

Poyntingi vektor, mis seob energiavoo tiheduse väljavektoriga \bar{E} ja \bar{H} , võimaldab määrata energiavoo igas ruumi punktis ja omab seega tähtsat kohta elektrodünaamikas. Poyntingi vektori suund määrab energia ülekande, seega laine levi suuna. Selle vektori, kui \bar{E} ja \bar{H} vektorkorrutise, suund on määratud nende kahe vektori vastastikkuse orientatsiooniga. Kui

üks neist, kas \bar{E} või \bar{H} , muudab oma faasi, s.t. muutub vastassuunaliseks, muutub ka laine levi suund. Nii juhtub näiteks elektromagnetilise laine peegeldumisel metallist: elektrivälja muudab peegeldusel oma faasi ja peegeldunud laine levi suund on vastupidine langevale lainele.

Poyntingi vektori väärtuse võib avaldada, kasutades lainetakistust, ka ainult ühe, kas elektri- või magnetvälja kaudu.

$$\langle \bar{P} \rangle = \text{Re} \dot{\bar{P}} = \text{Re} \frac{1}{2} \dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^* = \bar{n}_z \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{W_0} = \bar{n}_z \frac{1}{2} H_0^2 W_0$$

Järgmine omadus on erinev ideaalse tasapinnalise laine ja allika (antenni) poolt tekitatud sfäärilise laine jaoks.

5a. Ideaalne tasapinnaline laine on homogeenne, laine amplituud ei muutu:

$$E_0 = \text{const.}$$

See omadus tuleneb energia jäävuse seadusest - ideaalse tasapinnalise laine levil Poyntingi vektor jääb paralleelseks iseendaga, energia ruumilist hajumist ei toimu, samuti ei toimu ka neeldumist. Kuna sellistel tingimustel Poyntingi vektori väärtus ei muutu, siis on konstantne ka elektrivälja tugevus.

5b. Allika poolt tekitatud sfäärilise laine amplituud väheneb kui $\frac{1}{r}$, kus r on kaugus allikast.

Vaatleme punktallikat, mis kiirgab ruumi võimsuse P . Võimsuse pindtiheduse keskmise väärtuse kaugusel r allikast saame, kui jagame kiirgusvõimsuse kera pindalaga, mille raadius on r . Seega Poyntingi vektori väärtus kaugusel r allikast

$$\bar{P} = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Poyntingi vektor sõltub kaugusest kui $\frac{1}{r^2}$, järelikult elektrivälja tugevus sõltub

kaugusest kui $\frac{1}{r}$. Nii on see kõikide antennide puhul, sõltumata antenni tüübist.

7.2 Tasapinnaline laine reaalses keskkonnas

Reaalses keskkonnas leiavad aset elektromagnetilise energia kaod. Sel juhul ekvivalentsed dielektriline ja magnetiline läbitavus on komplekssed.

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon' - i\epsilon'' = \epsilon_a - i \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{w}} = \epsilon_a \left(1 - i \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{w}\epsilon_a} \right)$$

Elektrilised kaod leiavad aset, kui

$$\mathbf{S} \neq 0; \quad \operatorname{tg} \mathbf{S} = \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{w}\epsilon} \neq 0$$

Kui $\tilde{\epsilon}$ on $\tilde{\mathbf{m}}$ kompleksed, siis on ka lainearv \tilde{k} kompleksne suurus

$$k = \mathbf{w} \sqrt{\tilde{\epsilon} \tilde{\mathbf{m}}} = \mathbf{g}$$

Laine levikonstant \mathbf{g} on kompleksne suurus

$$\mathbf{g} = \mathbf{b} - i\mathbf{a}$$

Kadudega keskkonnas lainevõrandi lahend monokromaatilise laine jaoks sisaldab üldjuhul kaks vastassuunas levivat lainet

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\mathbf{a}z} e^{-i\mathbf{b}z} + \vec{E}'_0 e^{\mathbf{a}z} e^{i\mathbf{b}z}$$

Esimese laine amplituud muutub nulliks, kui $z \rightarrow \infty$. Teise laine amplituud lõpmatuses suureneb piiramatult. Selline laine ei saa eksisteerida. Vastassuunas leviv laine ei kirjelda tegelikkust ja jäetakse sellepärast lahendist välja kui ebareaalne.

Tasapinnaline laine reaalses keskkonnas väljendub seosega

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\mathbf{a}z} \cos(\mathbf{w}t - \mathbf{b}z)$$

Komplekse levimiskonstandi reaalosa nn. **faasikonstant** \mathbf{b} määrab laine parameetrid:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{w}}{v} = \frac{2\mathbf{p}}{l}$$

laine faasikiirus

$$v_f = \frac{\mathbf{w}}{\mathbf{b}}$$

lainepikkus

$$l = \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{b}}$$

Komplekse levimiskonstandi imaginaarosa nn. **sumbuvuskonstant** \mathbf{a} määrab laine amplituudi sumbuuse levimisel ruumis. Sumbuvus kauguse l läbimisel

$$\frac{E_0(z)}{E_0(z+l)} = e^{\mathbf{a}l}$$

$$L[\text{nep}] = \ln \frac{E_0(Z)}{E_0(Z+l)} = \mathbf{a}l$$

$$L[\text{dB}] = 20 \lg \frac{E_0(Z)}{E_0(Z+l)} = \mathbf{a}l 20 \lg e \approx 8,69 \mathbf{a}l$$

$$1 \text{ dB} = 8,69 \text{ nep}, \quad \mathbf{a} \left[\frac{\text{nep}}{m} \right]$$

Lainetakistus on samuti kompleksne suurus

$$W_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{m}' - i\mathbf{m}''}{\epsilon' - i\epsilon''}} = |W_0| e^{i\psi}$$

Kadudega ruumis elektri- ja magnetvälja vektorid omavad faasinihet \mathbf{j}_w :

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \frac{\dot{E}}{W_0} = \frac{E_0}{|W_0|} e^{-az} e^{-ibz} e^{-ij_w t} \\ \bar{E} &= \bar{E}_0 e^{-az} \cos(\mathbf{w}t - \mathbf{b}z) \\ \bar{H} &= \frac{\bar{E}_0}{|W_0|} e^{-az} \cos(\mathbf{w}t - \mathbf{b}z - \mathbf{j}_w)\end{aligned}$$

Poyntingi vektori keskvaartus

$$\langle \bar{P} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\bar{E}} \dot{\bar{H}}^*] = \frac{1}{2} \bar{n}_z \frac{E_0^2}{|W_0|} \cos \mathbf{j}_w$$

sõltub väljavektorite vahelisest faasinurgast.

Vaatleme tasapinnalist lainet ruumis, mis omab ainult elektrilisi kadusid:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{e}} &= \mathbf{e}_a \left(1 - i \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{w} \mathbf{e}_a} \right); \tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{m}_a \\ \mathbf{e}'' &= \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{w}}; \mathbf{m}' = 0\end{aligned}$$

ja $\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{m}_a$ on reaalarv.

Laine omaduste selgitamiseks avaldame kompleksse levimiskonstandi reaali- ja imaginaarosade keskkonna parameetrite $\tilde{\mathbf{e}}$ ja $\tilde{\mathbf{m}}$ kaudu

$$\mathbf{g} = \mathbf{w} \sqrt{\tilde{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{m}}} = \mathbf{w} \sqrt{\mathbf{e}_a \mathbf{m}_a \left(1 - i \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{w} \mathbf{e}_a} \right)} = \mathbf{b} - i \mathbf{a}$$

Arvestades, et $\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{w} \mathbf{e}_a} = \tan \mathbf{d}$, saame võrrandi

$$\mathbf{w} \sqrt{\mathbf{e}_a \mathbf{m}_a (1 - i \tan \mathbf{d})} = \mathbf{b} - i \mathbf{a}.$$

Võtame ruutu

$$\mathbf{w}^2 \mathbf{e}_a \mathbf{m}_a (1 - i \tan \mathbf{d}) = \mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2 - 2i \mathbf{a} \mathbf{b}.$$

Võrdsustame reaali- ja imaginaarosad

$$\begin{cases} \mathbf{w}^2 \mathbf{e}_a \mathbf{m}_a = \mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2 \\ \mathbf{w}^2 \mathbf{e}_a \mathbf{m}_a \tan \mathbf{d} = 2 \mathbf{a} \mathbf{b} \end{cases}$$

Saadud võrrandisüsteemist avaldame \mathbf{a} ja \mathbf{b} :

$$\mathbf{b} = \mathbf{w} \sqrt{\frac{\mathbf{e}_a \mathbf{m}_a}{2} (\sqrt{1 + \tan^2 \mathbf{d}} + 1)} = k \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{1 + \tan^2 \mathbf{d}} + 1)}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{w} \sqrt{\frac{\mathbf{e}_a \mathbf{m}_a}{2} (\sqrt{1 + \tan^2 \mathbf{d}} - 1)} = k \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{1 + \tan^2 \mathbf{d}} - 1)}$$

siin $k = \mathbf{w} \sqrt{\mathbf{e}_a \mathbf{m}_a}$ on lainerv samade parameetritega, kuid ilma kadudeta keskkonnas. Teised laine parameetrid avalduvad samuti $\tan \mathbf{d}$ kaudu.

Faasikiirus

$$v_f = \frac{\mathbf{w}}{\mathbf{b}} = \frac{v}{\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{1 + \tan^2 \mathbf{d}} + 1)}}$$

kus $v = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}_a \mathbf{m}_a}}$.

Lainetakistus $\dot{W}_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{m}_a}{\mathbf{e}_a(1 - i \tan \mathbf{d})}} = |W_0| e^{j \mathbf{w}}$

kus

$$|W_0| = \sqrt{\frac{\mathbf{m}_a}{\mathbf{e}_a}} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \mathbf{d}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{m}_a}{\mathbf{e}_a}} \sqrt{\cos \mathbf{d}}$$

$$\mathbf{j}_w = \frac{1}{2} \arctan \tan \mathbf{d} = \frac{\mathbf{d}}{2}.$$

7.3 Dispersioon

Iseloomulikuks efektiks kadudega keskkonnas on nn. **dispersioon**.

*****Dispersioon on tingitud keskkonna parameetrite sõltuvusest sagedusest.*****

Kui kas $\tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{e}}(f) = \mathbf{e}_a \left(1 - i \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{w} \mathbf{e}_a} \right)$

või $\tilde{\mathbf{m}} = \tilde{\mathbf{m}}(f),$

siis sõltuvad sagedusest ka nii faasikiirus

$$v_f = v_f(f)$$

kui ka keskkonna murdumisnäitaja

$$n = n(f).$$

Sel juhul polükromaatilise signaali erinevatele sageduspotentsiaalidele vastavad ruumis erinevad faasitasapinnad, mis levivad erinevate kiirustega. Laine murdumise puhul mittehomogeenses keskkonnas levivad erinevad sageduskomponendid erinevaid teid mööda ja signaal jaguneb ruumiliselt monokromaatilisteks signaalideks. Sellist nähtust kasutatakse laialdaselt optikas. Laine levimisel homogeenses dispersiooniga keskkonnas (või ka normaalsel langemisel sellise keskkonna pinnale) ei toimu sageduskomponentide ruumilist eraldumist ja dispersioon avaldub signaali moonutustes, mis on tingitud signaali erinevate komponentide faaside suhtelistest nihetest.

Kuna dispersiooni puhul signaali erinevad sageduskomponendid levivad erinevate faasikiirustega, ei saa signaali levimiskiirust enam samastada faasikiirusega. Sel juhul signaali levimiskiirust iseloomustab nn. **grupikiirus**, mille võib sisse tuua kui signaali moodustava lainete grupi levimiskiiruse, s.t. signaali **mähisjoone** levimiskiiruse.

Vaatleme signaali, mis koosneb kahest lähedasest sageduskomponendist f_1 ja f_2 . Vastavad monokromaatilised lained

$$E_1 = E_0 \cos(\mathbf{w}_1 t - \mathbf{b}_1 z)$$

$$E_2 = E_0 \cos(\mathbf{w}_2 t - \mathbf{b}_2 z)$$

Signaal

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos \frac{1}{2} [(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)t - (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)z] \times \cos \frac{1}{2} [(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)t - (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)z]$$

Grupikiiruse määramine mähisjoone muutumatuse tingimustest.

$$(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)t - (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)z = const.$$

$$v_{gr} = \frac{dz}{dt} = \lim_{b_1 \rightarrow b_2} \frac{\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2}{-\mathbf{b}_2} = \frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{l}}$$

Grupikiiruse võib teisendada kujule

$$v_{gr} = \frac{d(v_f \mathbf{b})}{d\mathbf{b}} = v_f + \frac{dv_f}{d\mathbf{b}} = v_f + \mathbf{b} \frac{dv_f}{d\mathbf{l}} \times \frac{d\mathbf{l}}{d\mathbf{b}} = v_f - \mathbf{l} \frac{dv_f}{d\mathbf{l}}$$

Tavalise positiivse difraktsiooni puhul $\frac{f}{\mathbf{l}} \rightarrow 0$ on

grupikiirus faasikiirusest väiksem.

*****Grupikiirus langeb kokku energia levimiskiirusega ruumis.*****

Energia levimiskiiruse võib arvutada seosest

$$v_w = \frac{P}{W}$$

Kui kadusid ei esine $tg \mathbf{s} \rightarrow 0$, siis kaob ka dispersioon. Saadud seostest on

näha, et sel juhul $\mathbf{b} \rightarrow k, \mathbf{a} \rightarrow 0, v_f = v_{gr} = v, W_0 \rightarrow \sqrt{\frac{m_a}{\mathbf{e}_a}}, \tan \mathbf{d} \rightarrow 0$.

7.4 Lained dielektrikus ja elektrijuhis

Ideaalses dielektrikus kadusid ei esine ja $\mathbf{e}'' = \mathbf{m}' = 0$. Reaalses dielektrikus võivad esineda ka kaod. Keskkonna dielektrilised omadused määratakse tingimustega:

$$\tan \mathbf{d} = \frac{\mathbf{S}}{w \mathbf{e}_a} \ll 1.$$

Arvestades sellist tingimust võib levimiskonstandi reaalosa valemit teisendada

$$\mathbf{b} = k \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{1 + \tan^2 \mathbf{d}} + 1)} \approx k \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \tan^2 \mathbf{d} + 1\right)} \approx k \left(1 + \frac{1}{8} \tan^2 \mathbf{d}\right) \approx k$$

Dielektrikus faasikonstant langeb praktiliselt kokku lainearvuga ideaalses keskkonnas.

Sumbuvuskonstant

$$\mathbf{a} = k \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{1 + \tan^2 \mathbf{d}} - 1)} \approx k \frac{1}{2} tg \mathbf{d} = \frac{\mathbf{S}}{2} \sqrt{\frac{m_a}{\mathbf{e}_a}}$$

Erinevalt ideaalsest keskkonnast esinevad reaalses dielektrikus kaod.

Faasikiirus

$$v_f = \frac{w}{\mathbf{b}} = \frac{1}{\sqrt{m_a \mathbf{e}_a}}$$

ei sõltu sagedusest. Kuna kaod on reaalses dielektrikus väikesed, võib dispersiooni praktiliselt mitte arvestada.

Levimistingimused reaalses dielektrikus on lähedased levimistingimustele ideaalses kadudeta keskkonnas.

Ideaalses elektrijuhis $\mathbf{s} \rightarrow \infty$.

Reaalses elektrijuhis on täidetud tingimus

$$\tan \mathbf{d} = \frac{\mathbf{s}}{w\mathbf{e}_a} \gg 1.$$

Sel juhul võib \mathbf{a} ja \mathbf{b} avaldise teisendades mitte arvestada liidetavat 1:

$$\mathbf{b} = \sqrt{\frac{w\mathbf{m}_a\mathbf{s}}{2}}$$

$$\mathbf{a} = \sqrt{\frac{w\mathbf{m}_a\mathbf{s}}{2}}$$

$$v_f = \frac{w}{\mathbf{b}} = \sqrt{\frac{2w}{\mathbf{m}_a\mathbf{s}}}$$

Reaalses elektrijuhis esinevad suured kaod ja tugev dispersioon.

Ideaalses elektrijuhis tingimusel $\mathbf{s} \rightarrow \infty$

$$\mathbf{b} \rightarrow \infty$$

$$\mathbf{a} \rightarrow \infty$$

$$v_f \rightarrow 0$$

$$\mathbf{l} \rightarrow \frac{v_f}{f} \rightarrow 0.$$

Sumbuvas ideaalses elektrijuhis on lõpmatu suur ja **vahelduv elektromagnetiline väli ei saa ideaalses elektrijuhis eksisteerida.**

8 Levi isotroopses mittehomogeenses keskkonnas

Üldjuhul on keskkond mittehomogeenne, kui selle parameetrid sõltuvad koordinaadist (koordinaatidest).

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}(x, y, z)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(x, y, z)$$

See sõltuvus võib omada erinevat iseloomu.

1. Kõige lihtsamal juhul koosneb mittehomogeenne keskkond kahest homogeenest keskkonnast, mis on teineteisest eraldatud mingi pinnaga (metall - õhk, maa - õhk, dielektrik - õhk). Veel lihtsamal juhul on eralduspind tasapind. Kahe erinevate parameetritega keskkonna piiril esineb murdumine ja peegeldumine.

2. Keskkonna parameetrid võivad omavad sujuvat sõltuvust koordinaatidest (koordinaadist). Näiteks atmosfääri ruumis muutuvad füüsikalised parameetrid, rõhk, temperatuur tihedus, suhteline niiskus tingivad ka elektriliste parameetrite ruumilise muutuse. Kui järske parameetrite muutusi ei toimu, võib peegeldumisi mitte arvestada ja levil pidevalt mittehomogeenses keskkonnas vaadelda ainult murdumist (laine levi suunamuutust).

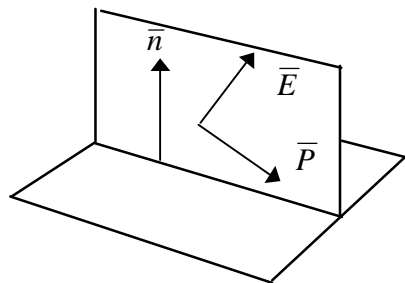
3. Üldjuhul võib keskkond olla väga keeruline: nii järsud kui ka sujuvad muutused võivad olla statistilised, toimuda nii ruumis kui ka ajas muutuvad (näiteks tahkete osakeste ja turbulentside liikumine atmosfääris). Sellisel juhul toimub peale laine trajektoori muutuse ka hajumine keskkonna mittehomogeensustel.

Vaatleme eraldi neid erijuhte, alustades kõige lihtsamast.

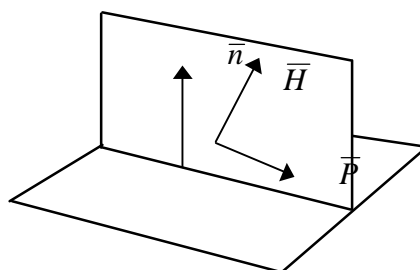
8.1 Lainete peegeldumine kahe keskkonna piiril

Peegeldustingimused on määratud piiritingimustega, s.t. tulenevad Maxwelli võrranditest. Piiritingimused on normaal- ja puutujakomponentidele erinevad. Järelikult on ka peegeldumine erinev, s. t. sõltuvalt laine polarisatsioonist väljatugevuste orientatsioonist peegelduva pinna suhtes.

Peegeldustingimusi eristatakse vertikaalse ja horisontaalse polarisatsiooni puhul. Vertikaalse polarisatsiooni juhul on elektrivälja polariseeritud langemistasapinnas magnetväli on sellega risti (langemistasapinna määravad pinna normaal ja langeva laine Poyntingi vektor).



a) vertikaalne polarisatsioon



b) horisontaalne polarisatsioon

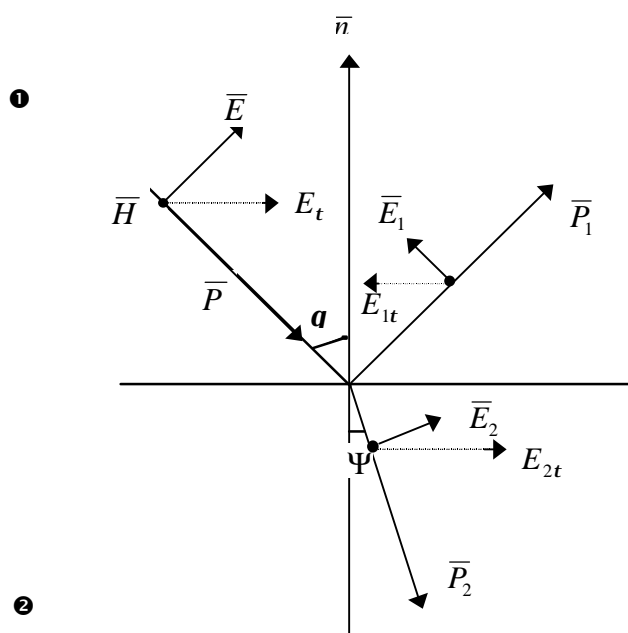
Joon. 8. 1

Horisontaalse polarisatsiooni juhul on magnetväli langemistasapinnas, elektrivälja on selle tasapinnaga risti, s.t. puutujaks peegeldavale pinnale.

Murdumisel ja peegeldumisel peavad olema täidetud

piiritingimused kahe keskkonna piiril: induksioonivektorite normaalkomponendid ja väljavektorite puutujakomponendid on kahe dielektriku piiril pidevad, ei muutu.

Alustame vertikaalse polarisatsiooniga laine peegeldumisest kahe keskkonna piiril, eeldades, et see piir on tasapinnaline (joon. 8. 2).



Joon. 8. 2

Vaatleme juhtu, kus keskkondade magnetilised omadused ei muutu. Vastavalt rangetele piiritingimustele

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$H_{1t} = H_{2t}$$

Tähistame langeva laine Poyntingi vektor on \bar{P} , elektrivälja tugevus \bar{E} ja magnetvälja tugevus \bar{H} . Peegeldunud laine jaoks esimeses keskkonnas on vastavad suurused \bar{P}_1, \bar{E}_1 ja \bar{H}_1 ning murdunud laine jaoks teises keskkonnas \bar{P}_2, \bar{E}_2 ja \bar{H}_2 .

$$\text{Peegeldustegur } R = \frac{E_1}{E}$$

on peegeldunud ja langeva laine amplituudide suhe. Peegeldusel võib muutuda ka faas, sellepärast on peegeldustegur kompleksne ja

seda on otstarbekas määratleda kui peegeldunud ja langeva laine elektrivälja tugevuste komplekssete amplituudide suhet.

Rakendades rangeid piiritingimusi, saame kahe keskkonna eralduspinnal kirjeldada välja kahe võrrandiga

$$E \cos q - E_1 \cos q = E_2 \cos y \quad (1)$$

$$H + H_1 = H_2 \quad (2)'$$

mis sisaldavad nii elektri- kui ka magnetvälja tugevusi. Kuna peegeldustegur avaldub elektrivälja kaudu, asendame teises võrrandis magnetvälja, kasutades elektri- ja magnetvälja vahelist seost lainetakistuse kaudu

$$\bar{H} = \frac{\bar{E}}{W} = \frac{\bar{E}}{120p} \sqrt{\epsilon}$$

$$E \sqrt{\epsilon_1} + E_1 \sqrt{\epsilon_1} = E_2 \sqrt{\epsilon_2} \quad (2a)$$

Peale langeva ja peegeldunud laine amplituudide sisaldub neis võrrandites ka murdunud laine amplituud, mida peegeldustegur ei sisalda.

Mittevajaliku suuruse välistamiseks avaldame võrranditest (1) ja (2a) E_2 :

$$E_2 = E \frac{\cos q}{\cos y} - E_1 \frac{\cos q}{\cos y} \quad (1)$$

$$E_2 = E \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} + E_1 \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \quad (2a)$$

Võrdsustades võrrandite paremad pooled omavahel, saame võrrandi, mis sisaldab ainult E ja E_1 :

$$E \frac{\cos \mathbf{q}}{\cos \mathbf{y}} - E_1 \frac{\cos \mathbf{q}}{\cos \mathbf{y}} = E \sqrt{\frac{\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2}} + E_1 \sqrt{\frac{\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2}}.$$

Peegeldustegur

$$R_n = \frac{E_1}{E} = \frac{\frac{\cos \mathbf{q}}{\cos \mathbf{y}} - \sqrt{\frac{\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2}}}{\frac{\cos \mathbf{q}}{\cos \mathbf{y}} + \sqrt{\frac{\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2}}}$$

Viimane avaldis sisaldab peale langemisnurka \mathbf{q} ka murdumisnurka \mathbf{y} . Need nurgad on seotud Snelliuse seadusega:

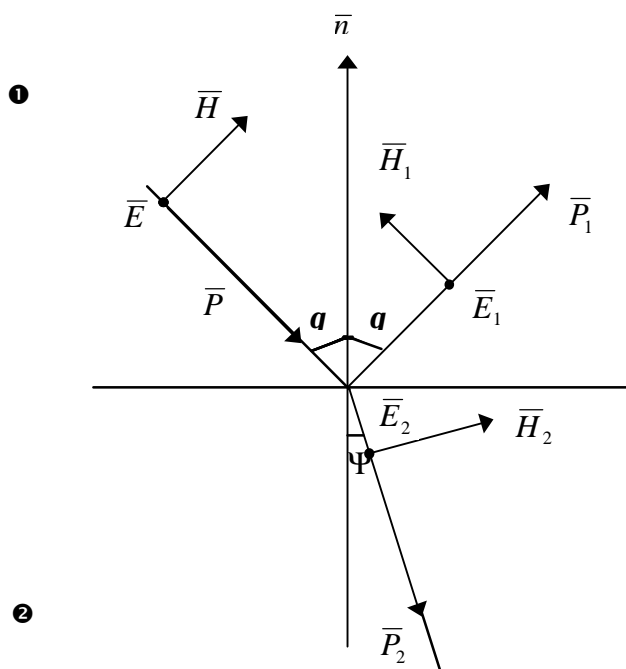
$$\sqrt{\mathbf{e}_1} \sin \mathbf{q} = \sqrt{\mathbf{e}_2} \sin \mathbf{y}.$$

Avaldame

$$\cos \mathbf{y} = \sqrt{1 - \sin^2 \mathbf{y}} = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2} \sin^2 \mathbf{q}}.$$

Asendades $\cos \mathbf{y}$ R_v valemisse saame lõplikul kujul valemi vertikaalse polarisatsiooniga laine peegeldusteguri jaoks kahe dielektriku piiril:

$$R_v = \frac{\mathbf{e}_2 \cos \mathbf{q} - \sqrt{\mathbf{e}_1} \sqrt{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \sin^2 \mathbf{q}}}{\mathbf{e}_2 \cos \mathbf{q} + \sqrt{\mathbf{e}_1} \sqrt{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \sin^2 \mathbf{q}}}. \quad (8.1.1)$$



Horizontaalse polarisatsiooni puhul (joon. 8.3) on väljade seosed keskkondade eralduspinnal erinevad ning võrrandid (1) ja (2) omandavad kuju

$$E + E_1 = E_2 \quad (1)$$

$$H \cos \mathbf{q} - H_1 \cos \mathbf{q} = H_2 \cos \mathbf{y} \quad (2)$$

Viies läbi teisendused, mis on analoogilised vertikaalse polarisatsiooniga laine peegeldusteguri tulelusele, saame peegeldusteguri horisontaalse polarisatsiooniga laine jaoks kujul

Joon. 8. 3

$$R_h = \frac{E_1}{E} = \frac{\sqrt{\mathbf{e}_1} \cos \mathbf{q} - \sqrt{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \sin^2 \mathbf{q}}}{\sqrt{\mathbf{e}_1} \cos \mathbf{q} + \sqrt{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \sin^2 \mathbf{q}}}. \quad (8.1.2)$$

Valemid 8.1.1 ja 8.1.2 kehtivad juhul, kui on tegemist peegeldusega ilma kadudeta keskkonnas. Peegeldustegurid sõltuvad nii keskkondade murdumisnäitajate

erinevusest kui ka langemisnurgast. Eristada võib langemist elektriliselt hõredamast keskkonnast tihedamasse, $e_1 < e_2$ ja tihedamast hõredamasse, $e_1 > e_2$.

Üleminekul hõredamast keskkonnast tihedamasse on peegeldusteguri moodul vertikaalse langemise puhul $q = 0^\circ$ väiksem kui 1 ja nurga q suurenedes hakkab suurenema. See sõltuvus horisontaalse polarisatsiooni puhul on monotoonne, aga vertikaalse polarisatsiooni puhul) esineb niinimetatud täieliku murdumise nurk.

Peegeldustegur muutub nulliks, kui

$$e_2 \cos q = \sqrt{e_1} \sqrt{e_2 - e_1 \sin^2 q}.$$

Tingimusel $e_1 < e_2$ on võimalik seda võrrandit rahuldada, kui $q = q_B$;

$$\sin q_B = \sqrt{\frac{e_2}{e_1 + e_2}} \quad \text{või} \quad \cos q_B = \sqrt{\frac{e_1}{e_1 + e_2}}.$$

Nurk q_B on täieliku murdumise nurk, Brewsteri nurk. Horisontaalse polarisatsiooni puhul täieliku murdumise nähtust ei esine, sest peegeldusteguri lugeja ei saa muutuda nulliks ühegi nurga q väärtuse puhul.

Täielik murdumine leiab aset ainult ühe fikseeritud nurga $q = q_B$ suuruse puhul.

Täieliku murdumise nähtust kasutatakse näiteks gaaslaserites: gaaslahendustoru optilised aknad on paigutatud Brewsteri nurga all. Selliste laserite kiirgus on lineaarselt polariseeritud (horisontaalse polarisatsiooni jaoks on kaod suuremad peegelduste arvel akendest ja seepärast hakkab laser genereerima ühel fikseeritud polarisatsioonil).

Horisontaale polarisatsiooni puhul, kui $e_2 > e_1$ on komponentide E_1 ja E märgid vastupidised, keskkondade lahtuspinnal on võnkumised langevas ja pegeldunud laines vastandfaasides ja järelikult muutub laine faas peegeldumisel hüppeliselt p võrra.

Vertikaalse polarisatsiooni juhul, kui $e_2 > e_1$,

kui $q < q_B$ on komponentide E_1 ja E märgid samad, keskkondade lahtuspinnal on võnkumised langevas ja pegeldunud laines vastandfaasides ja järelikult muutub laine faas peegeldumisel hüppeliselt p võrra.

kui $q > q_B$ on komponentide E_1 ja E märgid vastupidised ja faasi hüpped ei ole.

Üleminekul tihedamast keskkonnast hõredamasse on peegeldusteguri kasv langemisnurga suurenedes veelgi kiirem. Kui $e_1 > e_2$, muutub nii vertikaalse kui ka horisontaalse polarisatsiooniga laine peegeldusteguri valemi lugeja teises liikmes olev tegur

$$\sqrt{e_2 - e_1 \sin^2 q} = 0,$$

kui

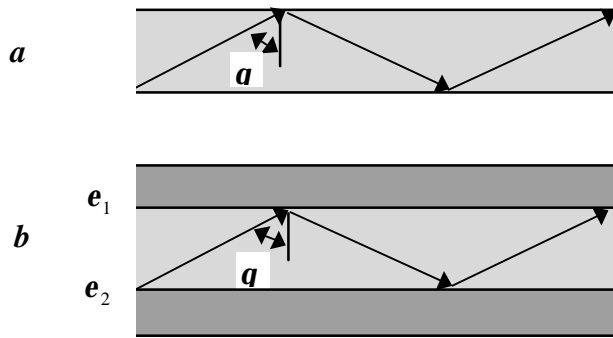
$$\sin q_{kr} = \sqrt{\frac{e_2}{e_1}}.$$

Kui $q > q_{kr}$, muutub ruutjuure alune avaldis negatiivseks. Järelikult kõikide nurkade puhul, mis on suuremad kriitilisest nurgast

$$q = q_{kr},$$

muutub peegeldusteguri moodul nii vertikaalse kui ka horisontaalse polarisatsiooni puhul võrdseks ühega. q muutudes selles piirkonnas võib muutuda ainult peegeldusteguri faas. q_{kr} on täieliku sisepeegelduse nurk.

Täieliku sisepeegelduse efekt leiab kasutamist dielektrilistes liinides nii mikrolaine kui ka optilises diapsoonis (joon. 8.5).



a) laine levi dielektrilises liinis
b) kahekihiline optiline kiud, $e_2 > e_1$

Joon. 8. 5

Kui laine levib piki liini nii, et langemisnurk liini seinale $q = q_{kr}$, ei välju elektromagnetilise kiirguse energia dielektrikust. Selleks, et garanteerida täielikku sisepeegelduse tingimuste homogeenus, kasutatakse kahekihilisi liine, optilist kiudu, mille välimise kihi dielektriline läbitavus $e_1 < e_2$.

Kodune ülesanne: Seletada, miks vertikaalselt polariseeritud laine peegeldub metallist samafaasiliselt, aga horisontaalselt polariseeritud

laine vastufaasiliselt (lähtuda piiritingimustest metalli pinnal).

8.2 Pindefekt

Kui keskkond, millele elektromagnetiline laine langeb, on metallist. $\frac{s}{we_a} \gg 1$ on selle efektiivne dielektriline läbitavus väga suur.

$$\tilde{e}_2 = e_a \left(1 - i \frac{s}{we_a} \right)$$

$$|\tilde{e}_2| = \sqrt{e_a^2 + \left(\frac{s}{w} \right)^2} \approx \frac{s}{w}$$

Ideaalse metalli puhul $s \rightarrow \infty$ $|\tilde{e}_2| \rightarrow \infty$ ja $R_v = 1$ ning $R_h = -1$. Ideaalsest metallist laine peegeldub täielikult.

Reaalse metalli puhul peegeldustegur on küll väga lähedane ühele, aga mingi osa kiirguse energiast siiski levib teise keskkonda. Elektromagnetilise laine omadused reaalse metalli pinnal määratakse nn. ligikaudsete piiritingimustega, mis koosnevad kahest reeglist:

- 1) elektrijuhis levib laine alati risti pinnaga
- 2) elektrivälja puutujakomponent on reaalse metalli pinnal väike, võrreldes normaalkomponendiga.

Esimese reegli paikapidavust on kerge näidata, lähtudes Snelliuse seadusest

$$n_1 \sin q = n_2 \sin g.$$

Kuna $n_1 = \sqrt{e_1 m}$ ja $n_2 = \sqrt{e_2 m}$ siis $n_2 \gg n_1$ ja järelikult $g \rightarrow 0$.

Viimane tingimus ei olene laine langemisnurgast, vaid ainult keskkondade dielektriliste läbitavuste suhetest. Järelikult, sõltumata langemisnurgast,

***** elektromagnetiline laine levib elektrijuhis alati risti pinnaga. *****

Elektrijuhi pinnaga perpendikulaarne Poyntingi vektor joon. 8.2. määratakse \bar{E} ja \bar{H} puutujakomponentidega pinnale. Järelikult reaalse elektrijuhi pinnal peab elektrivälja omama ka puutujakomponenti. Teises keskkonnas

$$\begin{aligned}\bar{E}_2 &= \mathbf{t}E_{2t}; \bar{H}_2 = \mathbf{t}H_{2t} \\ \frac{E_2}{H_2} &= W_2 = \sqrt{i \frac{\mathbf{m}_a \mathbf{w}}{\mathbf{s}_2}}\end{aligned}\quad (8.2.1)$$

Kasutades rangeid piirtingimusi $E_{2t} = E_{1t}$ ja $H_{2t} = H_{1t}$ saame seosest 8.2.1

$$\frac{E_{1t}}{H_{1t}} = W_2 \quad (8.2.2)$$

Saadud seos kujutab nn. Leontovitsi ligikaudset piirtingimust:

*****Väljakomponendid reaalse elektrijuhi pinnal määratakse juhtiva keskkonna parameetritega.*****

Kuna elektriväljal reaalse juhi pinnal on puutujakomponent, määrab väljastruktuuri juhi pinnal puutuja- ja normaalkomponendi suhe $\frac{E_{1t}}{E_{1n}}$.

Seosest 8.5.2 $E_{1t} = W_2 H_{1t}$.

Esimeses keskkonnas E_{1n} ja H_{1t} on seotud lainetakistuse kaudu $E_{1n} = W_1 H_{1t}$.

Meid huvitav suhe

$$\frac{E_{1t}}{E_{1n}} = \frac{W_2}{W_1} = \sqrt{i \frac{\mathbf{w} e_{a1}}{\mathbf{s}_2}} \ll 1.$$

Järelikult on elektrivälja puutujakomponent reaalse elektrijuhi pinnal normaalkomponendiga võrreldes väike. Välja struktuuri määramisel võib lugeda praktiliselt, et $E_{1t} \approx 0$. E_{1t} määrab elektrijuhi pinnal leviva laine kaod elektrijuhis.

Kui on tegemist ideaalse elektrijuhiga, siis

$$\mathbf{s}_2 \rightarrow \infty, W_2 \rightarrow 0 \text{ ja } E_t \rightarrow 0$$

ning kadusid ei esine, sest väli ei tungi üldse elektrijuhi sisse.

Reaalses elektrijuhis elektromagnetiline laine levib kui reaalses kadudega

keskkonnas, kusjuures laine amplituud väheneb

eksponentsiaalselt $E_0 e^{-ax}$ (joon. 8.3). Sügavust

Δ , mille kaugusel pinnast välja amplituud

väheneb e korda, nimetatakse **pindkihi**

sügavuseks või skinnkihi sügavuseks:

$$\Delta = \frac{1}{a} = \sqrt{\frac{2}{\mathbf{w} \mathbf{m}_a \mathbf{s}}} \quad (8.2.3)$$

Elektrijuhis vahelduv elektromagnetiline väli

levib praktiliselt ainult pindkihti. Kuna on

tegemist juhtiva keskkonnaga, kaasnevad

väljaga elektrijuhi pinnal ka pindkihti

koondunud juhtivusvoolud. Juhtivusvoolud

tingivad oomilised kaod pindkihis, mis määratakse pindtakistusega.

Juhtivusvoolude (ja nendega seotud oomiliste kadude) kirjeldamiseks tuuakse sisse elektrijuhi kompleksne pindtakistus

$$\dot{z} = \frac{E_t}{j'} = \frac{\dot{E}_t}{\dot{H}_t} = W_2 = \sqrt{i \frac{\mathbf{w} \mathbf{m}_a}{\mathbf{s}}} = (1+i) \sqrt{\frac{\mathbf{w} \mathbf{m}_a}{2\mathbf{s}}}$$

Oomilised kaod on seotud kompleksse pindtakistuse reaalosaga

$$R_p = \text{Re } \dot{z} = \sqrt{\frac{\mathbf{w} \mathbf{m}_a}{2\mathbf{s}}}$$

Elektrijuhi pindtakistus

$$R_p = \frac{1}{s\Delta} = \sqrt{\frac{w\mathbf{m}_a}{2s}}. \quad (8.5.4)$$

Ideaalse elektrijuhi puhul

$$s \rightarrow \infty; \Delta \rightarrow 0; R_p \rightarrow 0$$

ja kadusid elektrijuhi pinnal ei esine.

Pindkihi paksus sõltub mitte ainult metalli erijuhtivusest, vaid ka sagedusest. Oluline on märkida, et

$$\Delta \sim \frac{1}{\sqrt{f}} \text{ ja } R_p \sim \sqrt{f}.$$

Kui $f \rightarrow 0$, on pindkihi paksus lõpmatult suur ja välja (ning ka voolu) jaotus juhtmes ühtlane. Sageduse tõusuga pindkihi paksus hakkab vähenema, voolud koonduvad juhtme pinnale. Mikrolainediapasoonis on pindkihi paksus suurusjärgus 10^{-6} m. See asjaolu võimaldab kasutada mikrolainesüsteemides õhukest hea elektrijuhtivusega pinnakatet. Konstruktsioonides kasutatakse isegi dielektrilist materjali (plastmasse) ja metalliseeritakse ainult elektromagnetilise kiirgusega kokku puutuvad pinnad (näiteks parabolantennidel nõgus pool).

8.3 Sujuvalt muutuvate parameetritega mittehomogeenne keskkond

8.3.1 Kiire võrrand

Nagu nähtub valemitest 8.1.1 ja 8.1.2, kui \mathbf{e}_1 ja \mathbf{e}_2 erinevus ei ole suur, on väike ka peegeldustegur. Nii võib lugeda, et keskkonna parameetrite sujuval muutumisel võib peegeldusi praktiliselt mitte arvestada.

Peegelduste puudumise, puhta murdumise tingimusteks loetakse murdumisnäitaja suhtelise muutuse väiksust lainepikkuse ulatuses.

$$\frac{1}{n} \left| \frac{dn}{dl} \right| \mathbf{I}_n \ll 1$$

Kuna $\mathbf{I}_n = \frac{\mathbf{I}_0}{n}$, siis ülaltoodud tingimust võib formuleerida ka kujul

$$\frac{1}{n^2} \left| \frac{dn}{dl} \right| \mathbf{I}_0 \ll 1$$

Sujuvalt muutuva murdumisnäitajaga keskkonnas võib lahendada lainevõrrandi. Lahendi erinevus, võrreldes leviga homogeenes keskkonnas, seisneb selles, et lainearv $k = \mathbf{w}\sqrt{\mathbf{e}_a \mathbf{m}_a}$ muutub funktsiooniks trajektooriga, kuna murdumisnäitaja sõltub koordinaatidest.

Elektrivälja kompleksne amplituud

$$\dot{E} = E_0 e^{-ikl}$$

kus

$$k = \mathbf{w}\sqrt{\mathbf{e}_a \mathbf{m}_a} = k_0 n(l).$$

Arvestades murdumisnäitaja muutust piki levi trajektoori

$$\dot{E} = E_0 \exp\left(-ik_0 \int n(l) dl\right)$$

Kui ei ole teada funktsiooni $n(l)$ konkreetne kuju, ei ole üldjuhul võimalik lahendit täpsustada, laine omadusi saab kirjeldada, lähtudes faasitasapinna võrrandist

$$\mathbf{w}t - k_0 \int n(l) dl = \text{const.}$$

Homogeenses keskkonnas, kui $n = \text{const.}$

$$\mathbf{w} - k_0 n \frac{dl}{dt} = 0,$$

faasikiirus

$$\frac{dl}{dt} = v = \frac{\mathbf{w}}{k_0 n}.$$

Mittehomogeenses keskkonnas

$$\mathbf{w}t - k_0 \mathbf{y}(x, y, z) = \text{const.}$$

$$\mathbf{w} - k_0 \frac{\nabla \mathbf{y}}{\nabla l} \frac{dl}{dt} = 0,$$

kus $\frac{\nabla \mathbf{y}}{\nabla l} = |\text{grad} \mathbf{y}|$ piki levi trajektoori.

Faasikiirus mittehomogeenses keskkonnas

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\mathbf{w}}{k_0 |\text{grad} \mathbf{y}|} = v.$$

Võrdsustades faasikiirused homogeenses ja mittehomogeenses keskkonnas

$$\frac{\mathbf{w}}{k_0 n} = \frac{\mathbf{w}}{k_0 |\text{grad} \mathbf{y}|},$$

saame seose

$$\text{grad} \mathbf{y} = n \bar{l},$$

kus \bar{l} on ühikvektor levi suunas, kiire puutuja

$$\frac{\nabla}{\nabla l} \text{grad} \mathbf{y} = \frac{\nabla}{\nabla l} (n \bar{l}).$$

Lõplikult saame kiire võrrandi kujul:

$$\frac{\nabla}{\nabla l} (n \bar{l}) = \text{grad} n$$

Kiire võrrand, mille vasakul pool on laine levitrajektoori puutuja muutus piki trajektoori, kirjeldab laine (kiire) suuna muutust levil sujuvalt mittehomogeenses keskkonnas.

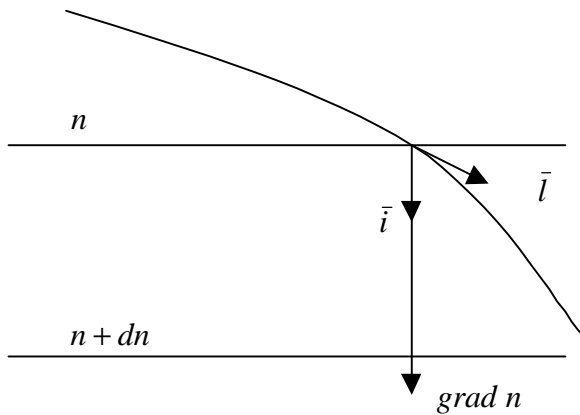
8.3.2 Kihiline mudel

Paljudel juhtudel on tegemist keskkonnaga, mille parameetrid muutuvad praktiliselt sõltuvalt ainult ühest koordinaadist. Nii võib lugeda, et tegemist on homogeensete kihtidega, kusjuures erinevate kihtide parameetrid erinevad. Tüüpilise kihiliselt homogeense keskkonnana vaadeldakse atmosfääri, mille murdumisnäitaja sõltub regulaarselt kõrgusest. Kihiliselt homogeense keskkonna mudelit kasutatakse ka elektromagnetilise laine levil inimkehas. Keha vaadeldakse kui silindrit (pead kui kera), milles vahelduvad kihid, mille elektrilised parameetrid vastavad nahale, rasvkoele, lihaskoele, luule. Viimases mudelis on kihtide paksused fikseeritud ja murdumisnäitaja muutused üleminekul ühest kihis teise märgatavad, nii et ei ole tegemist puhta murdumisega, vaid tuleb arvestada ka peegeldusi erinevatelt kihtidelt.

Vaatleme kihiliselt homogeense keskkonna mudelit, mille murdumisnäitaja muutub vertikaalsuunas (joon. 8.7), s.t. $\text{grad} n$ on vertikaalne vektor. Kihhi paksuse

võib valida suvaliselt, kuid see peab tagama küllalt väikese murdumisnäitaja muutuse kihtide vahel, et kindlustada peegelduste puudumine. Lähtume kiire võrrandist.

$$\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}l}(n\bar{l}) = grad n.$$



Joon. 8.7

Korrutame mõlemat poolt vertikaalse ühikvektoriga \bar{i} vektoriaalselt.

$$\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}l}n\bar{l} \times \bar{i} = grad n \times \bar{i}.$$

Võrrandi paremal pool on kahe paralleelse vektori korrutis, järelikult

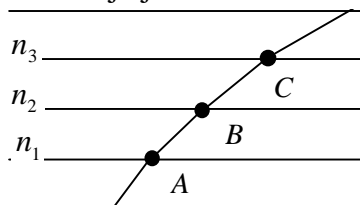
$$\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}l}n\bar{l} \times \bar{i} = 0 \text{ ja}$$

$$\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}l}n \sin \mathbf{q} = 0.$$

Siit saame kiire võrrandi kihiliselt homogeense keskkonna jaoks.

$$n \sin \mathbf{q} = const.$$

Sama tulemuseni võib jõuda, lähtudes Snelliuse seadusest. Rakendame murdumise seadust järjest kiire üleminekul ühest kihist teise.



Joon. 8.8

Punktis A $n_1 \sin \mathbf{q}_1 = n_2 \sin \mathbf{q}_2$

punktis B $n_2 \sin \mathbf{q}_2 = n_3 \sin \mathbf{q}_3$

punktis C $n_3 \sin \mathbf{q}_3 = n_1 \sin \mathbf{q}_1$

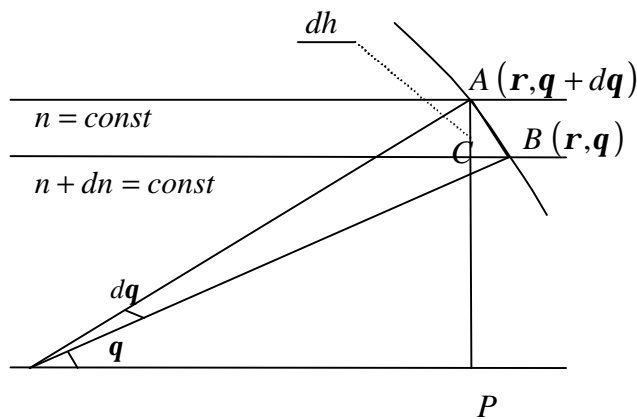
 $n_i \sin \mathbf{q}_i = n_{i+1} \sin \mathbf{q}_{i+1}$

Nendest võrdsustest järeldub, et

$$n \sin \mathbf{q} = const.$$

Laine paindub suurema murdumisnäitaja poole, s.t. murdumisnäitaja suurenedes murdumisnurk väheneb ja vastupidi.

Võib arvutada välja ka laine trajektoori kõverusraadiuse. Vaatleme elementaarset kihti paksusega dn , mille ulatuses murdumisnäitaja muutub väärtuselt n kuni väärtuseni $n + dn$ ja kiire suund muutub nurga $d\mathbf{q}$ võrra. Vastavalt (joon. 8.9).



Joon. 8.9

Edasi rakendame elementaarse kihi jaoks kiire võrrandit:

$$\begin{aligned} n \sin q &= (n + dn) \sin(q + dq) = \\ &= (n + dn)(\sin q \cos dq + \cos q \sin dq) = \\ &= n \sin q \cos dq + n \cos q \sin dq + dn \sin q \cos dq + dn \cos q \sin dq \end{aligned}$$

Teisendame võrrandit, arvestades asjaolu, et suurused dn ja q on väikesed ja võib eeldada, et

$$\begin{aligned} \cos dq &\approx 1 & dn \, dq &\approx 0 \\ \sin dq &\approx dq & dn \cos q \sin dq &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Peale teisendusi saame

$$n \, dq \cos q = -dn \sin q$$

Kõverusraadius

$$r = -\frac{dh}{\frac{1}{n} dn \sin q} = \frac{n}{\sin q} \frac{1}{-\frac{dn}{dn}}$$

Kõverusraadius on positiivne, kui murdumisnäitaja gradient $\frac{dn}{dh}$ on negatiivne ja vastupidi.

Trajektor paindub kõrgema murdumisnäitaja suunas.

Näitena võib vaadata elektromagnetilise laine levi troposfääris. Troposfääri murdumisnäitaja, mille keskmine suurus maapinnal on 1,0003(4), väheneb sõltuvalt kõrgusest normaalses troposfääris $\frac{dn}{dh} = -4 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{km}}$. Muutus on tingitud õhu tiheduse ja suhtelise niiskuse vähenemisest kõrguse tõusuga. Kui suuname laine horisontaalselt väikese nurga all maapinna suhtes, võib kõverusraadiuse valemis lugeda, et $n \approx 1$ ja $\sin q \approx 1$.

Seega kõverusraadius $r = \frac{1}{4 \times 10^{-5}} = 25000 \approx 4R_0$, kus $R_0 = 6370 \text{ km}$ on Maa raadius. Troposfääris ei levi elektromagnetiline kiirgus mööda sirgjoont. Vaatamata sellele, et murdumisnäitaja võrdub praktiliselt ühega, on selle gradient küllaldane, et levi trajektoori painutada.

$$\text{Kõverusraadius } r = \frac{AB}{dq}$$

$$ABC \sim OAP$$

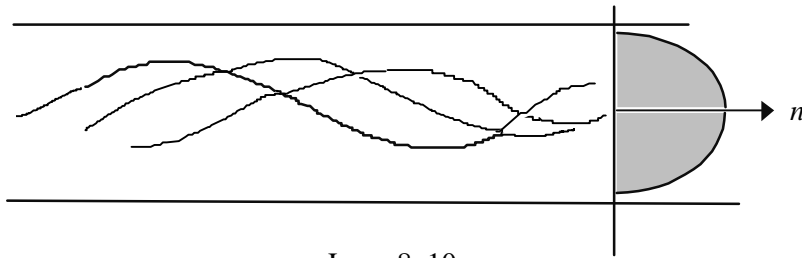
$$\frac{AC}{OP} = \frac{AB}{OA}$$

$$\frac{dh}{r \cos(q + dq)} = \frac{AB}{r}$$

$$r \cos(q + dq) = \frac{AB}{r}$$

Arvestades asjaolu, et nurga muutus on väike

$$r = \frac{dh}{dq \cos(q + dq)} \approx \frac{dh}{dq \cos q}$$



Joon. 8. 10

Muutuva murdumisnäitajaga levikeskkond võib olla ka kunstlikult tekitatud. Kiire omadust painduda kõrgema murdumisnäitaja suunas ka-

sutatakse optilises kius: kiud on tehtud selliselt, et selle ristlõikes murdumisnäitaja suureneb kiu tsentri suunas. Optiline kiir (Joon. 8.10) levil sellises nn. isefokuseerivas (selfor) kius paindub keskele ja kiirguse energia kiust ei välju.

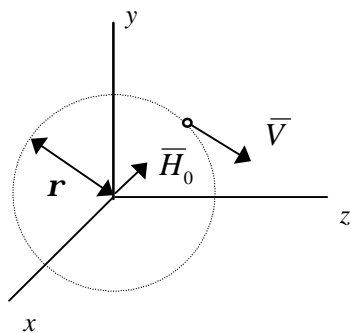
9 Levi anisotroopses keskkonnas

Vaatleme ideaalset homogeenet lineaarset anisotroopset keskkonda. Anisotroopses keskkonnas üks selle parameetritest, kas dielektriline läbitavus või magnetiline läbitavus muutub tensoriks. Tavaliselt on anisotroopia tekitajaks alaline magnetväli. Elektriliselt anisotroopne on alalises magnetväljas asuv plasma (ioniseeritud gaas, vabalt liikuvatest laengutest koosnev keskkond). Magnetiliselt anisotroopne on alalisse magnetvälja paigutatud ferriit (dielektriliste omadustega ferromagnetik). Efektid, mis tekivad levil nii elektriliselt (\mathbf{e} on tensor) kui ka magnetiliselt (\mathbf{m} on tensor) anisotroopses keskkonnas, on sarnased. Sellepärast piirdume elektriliselt anisotroopse keskkonna vaatlusega.

9.1 Anisotroopse keskkonna elektrilised omadused

Alalises magnetväljas asuvale liikuvale laengule mõjub magnetiline Lorenzi jõud

$$\vec{F}_M = q\mathbf{m}_0\vec{v} \times \vec{H}_0, \quad \mathbf{m} = 1$$



Joon. 9. 1

kus q on laengu suurus, \vec{v} selle liikumiskiirus ja \vec{H}_0 alaline magnetväli. Lorenzi jõu mõjul, mis on risti esialgse liikumissuunaga ja alalise magnetvälja suunaga, hakkab laeng tiirlema ümber alalise magnetvälja suuna. Orbiidi raadiuse tsentrifugaaljõu ja Lorenzi jõu tasakaal (joon. 9. 1).

$$\frac{mv^2}{r} = q\mathbf{m}_0vH_0,$$

kus m on liikuva laengu mass. Orbiidi raadius

$$r = \frac{mv}{q\mathbf{m}_0H_0}.$$

Tiirlemise periood T ja vastav ringsagedus ω_L võrduvad

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{q\mathbf{m}_0H_0}; \quad \omega_L = \frac{2\pi}{T} = \frac{q}{m} \mathbf{m}_0H_0. \quad (9.1.1)$$

Laengu tiirlemise sagedust alalises magnetväljas nimetatakse güromagnetilise resonantsi sageduseks. Kui elektron tiirleb Maa magnetväljas ($H_0 = 40 \frac{A}{m}$), on see sagedus 1,4 MHz.

Selleks, et kirjeldada sellise ümber alalise magnetvälja tiirlevatest laengutest koosneva keskkonna mõju temas levivale elektromagnetilisele lainele, tuleb määrata keskkonna dielektriline läbitavus.

Alustame laine levist isotroopses ioniseeritud gaasis, kui väline magnetväli puudub. Võrdsustame ühelt poolt efektiivse nihkevoolu selles keskkonnas

$$\vec{j}_n = \mathbf{e}_a \frac{\nabla \cdot \vec{E}}{\nabla t}, \quad \dot{\vec{j}}_n = i\mathbf{w}\mathbf{e}_a \dot{\vec{E}} \quad (9.1.2)$$

tegeliku keskmise summaarse voolutihedusega

$$\dot{\vec{j}}_s = i\mathbf{w}\mathbf{e}_0 \dot{\vec{E}} + q\dot{\vec{n}}N, \quad (9.1.3)$$

kus esimene liige on nihkevool vaakumis ja teine liige konvektsioonivool, mis on tingitud laengute liikumisest. Suurus N on laengute ruumtihedus (arv ühes ruumiühikus). Laengu liikumise kiiruse saame selle liikumisvõrrandist laine elektrivälja mõjul:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = q\bar{E} \quad (9.1.4)$$

$$i\omega m \dot{\bar{n}} = q\dot{\bar{E}} \quad (9.1.5)$$

$$\dot{\bar{n}} = \frac{q}{i\omega m} \dot{\bar{E}}$$

Asendades $\dot{\bar{n}}$ avaldise (9.1.4) summaarse voolutiheduse valemisse (9.1.3) ja võrdsustades $\dot{\bar{j}}_n = \dot{\bar{j}}_s$ saame võrrandi

$$i\omega \mathbf{e}_a \dot{\bar{E}} = i\omega \mathbf{e}_0 \dot{\bar{E}} + \frac{q^2 N}{i\omega m} \dot{\bar{E}}.$$

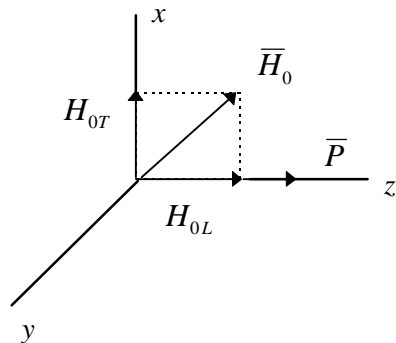
Sellest võrrandist isotroopse plasma efektiivne dielektriline läbitavus

$$\mathbf{e}_a = \mathbf{e}_0 - \frac{q^2 N}{m\omega^2} = \mathbf{e}_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right), \quad (9.1.6)$$

kus $\omega_0^2 = \frac{q^2 N}{m\mathbf{e}_0}$ on niinimetatud plasma sagedus. Kui $\omega = \omega_0$, siis $\mathbf{e} = 0$ ja laine levi plasmas lakkab. Üldjuhul on suhteline dielektriline läbitavus

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{e}_a}{\mathbf{e}_0} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} < 1.$$

Edasi vaatleme laine levi välises alalises magnetväljas olevas plasmas.



Joon. 8.2

Selleks tuleb lahendada laengu liikumise võrrand elektromagnetilise laine ja välise magnetvälja mõjul koos välja kirjeldavate võrranditega (I ja II Maxwelli võrrand). Vaatleme üldjuhtu, kui laine levi suuna (vektor \bar{P}) ja alalise magnetvälja suuna vahel on suvaline nurk. Alalise magnetvälja võib jagada kaheks komponendiks: H_{0L} , mis on paralleelne laine levi suunale ja H_{0T} , mis on risti laine levi suunale.

Oletame, et laine magnetväli \bar{H} on väike võrreldes alalise magnetväljaga \bar{H}_0 . Välise alalise magnetvälja mõjul lisandub laengu liikumise võrrandisse (9.1.4) magnetiline Lorenzi jõud

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = q\bar{E} + q\mathbf{m}_0 \bar{v} \times \bar{H}_0 \quad (9.1.7)$$

Maxwelli I võrrandis tuleb arvestada konvektsioonivoolu

$$\text{rot} \bar{H} = \mathbf{e}_a \frac{\mathcal{I} \bar{E}}{\mathcal{I} t} + q\bar{v} N. \quad (9.1.8)$$

II Maxwelli võrrand omab traditsioonilist kuju

$$\text{rot} \bar{E} = -\mathbf{m}_0 \frac{\mathcal{I} \bar{H}}{\mathcal{I} t}. \quad (9.1.9)$$

Saame süsteemi kolmest lineaarsest vektorvõrrandist (9.1.7), (9.1.8) ja (9.1.9).

$$\begin{cases} \text{rot } \bar{H} = \mathbf{e}_a \frac{\mathcal{I} \bar{E}}{\mathcal{I} t} + q \bar{v} N \\ \text{rot } \bar{E} = -\mathbf{m}_0 \frac{\mathcal{I} \bar{H}}{\partial t} \\ m \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = q \bar{E} + q \mathbf{m}_0 \bar{v} \times \bar{H}_0 \end{cases} \quad (9.1.10)$$

Vektorvõrrandite süsteemilt saab üle minna skalaarsete võrrandite süsteemile - iga võrrand kirjutatakse välja vektori kolme skalaarse komponendi jaoks. Tekib süsteem 9 lineaarsest skalaarsest diferentsiaalvõrrandist. Selleks, et lineaarsete võrrandite süsteem omaks mittetriviaalset lahendit, peab selle determinant võrduma nulliga. Determinandi võrdsustamine nulliga annab ruutvõrrandi keskkonna dielektrilise läbitavuse jaoks. Kuna ruutvõrrandi lahend omab kahte võimalikku väärtust, omab ka dielektriline läbitavus kaht väärtust:

$$\mathbf{e}_{1,2} = \mathbf{e}_0 \left(1 - \frac{\mathbf{w}_0^2}{\mathbf{w}^2} \frac{1}{1 \pm \mathbf{h} \frac{\mathbf{w}_L}{\mathbf{w}} \sqrt{1 + \mathbf{h}^2}} \right) \quad (9.1.11)$$

kus $\mathbf{h} = \frac{\mathbf{w}_T \mathbf{w}}{2 \mathbf{w}_L (\mathbf{w}^2 - \mathbf{w}_0^2)}$;

$\mathbf{w}_L = \frac{q \mathbf{m}_0}{m} H_{0L}$ on laengu tiirlemissagedus magnetvälja pikikomponendi mõjul ja

$\mathbf{w}_T = \frac{q \mathbf{m}_0}{m} H_{0T}$ on laengu tiirlemissagedus magnetvälja ristkomponendi mõjul.

Erinevus isotroopse plasma dielektrilisest läbitavusest on määratud täiendava teguriga suhte $\mathbf{w}_0^2 / \mathbf{w}^2$ juures.

Detailsem lahenduskäik on järgmine. Väljavõrrandid (Maxwelli I ja II võrrand) ühendatakse üheks võrrandiks (nagu lainevõrrandi tuletuse käiguski).

$$\text{rot rot } \bar{E} = -\mathbf{m}_0 \mathbf{e}_a \frac{\mathcal{I}^2 \bar{E}}{\mathcal{I} t^2} - \mathbf{m}_0 N q \frac{\mathcal{I} \bar{v}}{\mathcal{I} t}.$$

Vaatleme ajas harmooniliselt muutuvaid protsesse. Minnes üle komplekssetele amplituudidele saame süsteemi kahest võrrandist:

$$\begin{cases} \text{rot rot } \dot{\bar{E}} = \mathbf{m}_0 \mathbf{e}_a \mathbf{w}^2 \dot{\bar{E}} - i \mathbf{m}_0 q N \mathbf{w} \dot{\bar{v}} \\ i \mathbf{w} \dot{\bar{v}} = \frac{q}{m} \dot{\bar{E}} + \frac{q \mathbf{m}_0}{m} \dot{\bar{v}} \times \bar{H}_0 \end{cases}$$

Kirjutame välja skalaarsed võrrandid kõigi vektorite \bar{E} ja $\dot{\bar{v}}$ komponentide jaoks.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{m}_0 \mathbf{e}_a \mathbf{w}^2 \dot{E}_x + \mathbf{m}_0 \mathbf{e}_a \mathbf{w}^2 \dot{E}_x - i\mathbf{m}_0 Nq \mathbf{w} \dot{n}_x = 0 \\ -\mathbf{m}_0 \mathbf{e}_a \mathbf{w}^2 \dot{E}_y + \mathbf{m}_0 \mathbf{e}_a \mathbf{w}^2 \dot{E}_y - i\mathbf{m}_0 Nq \mathbf{w} \dot{n}_y = 0 \\ \mathbf{m}_0 \mathbf{e}_a \mathbf{w}^2 \dot{E}_z - i\mathbf{m}_0 Nq \mathbf{w} \dot{n}_z = 0 \\ -i\mathbf{w} \dot{v}_x + \frac{q}{m} \dot{E}_x + \frac{q\mathbf{m}_0 \dot{v}_y}{m} \dot{H}_{0L} = 0 \\ -i\mathbf{w} \dot{v}_y + \frac{q}{m} \dot{E}_y + \frac{q\mathbf{m}_0}{m} \dot{v}_z \dot{H}_{0T} - \frac{q\mathbf{m}_0}{m} \dot{v}_x \dot{H}_{0L} = 0 \\ -i\mathbf{w} \dot{v}_z + \frac{q}{m} \dot{E}_z - \frac{q\mathbf{m}_0}{m} \dot{H}_{0T} \dot{v}_y = 0 \end{array} \right.$$

Võrdsustades võrrandsüsteemi determinendi nulliga, saame võrrandi

$$\left[1 - \frac{\mathbf{w}_0^2}{\mathbf{w}^2(1-\mathbf{e})} \right] \left[\left(1 - \frac{\mathbf{w}_0^2}{\mathbf{w}^2} \right) \left(1 - \frac{\mathbf{w}_0^2}{\mathbf{w}^2} \frac{1}{1-\mathbf{e}} \right) \frac{\mathbf{w}}{\mathbf{w}_T} - \frac{\mathbf{w}_T}{\mathbf{w}} \right] - \frac{\mathbf{w}_0^2}{\mathbf{w}\mathbf{w}_T} \left(1 - \frac{\mathbf{w}_0^2}{\mathbf{w}^2} \right) = 0$$

See võrrand on ruutvõrrand \mathbf{e} jaoks. Lahend omab kuju (9.1.11). Kuna levil ühes ja samas keskkonnas ühel ja samal sagedusel dielektriline läbitavus omab kaht võimalikku väärtust, on tegemist nn. kahekordse murdumise nähtusega. Elektromagnetiline laine jaguneb nagu kaheks erinevaks laineks, mis levivad erinevate kiirustega (kuna \mathbf{e}_1 ja \mathbf{e}_2 on erinevad).

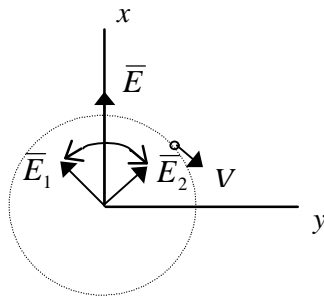
Kuidas seda seletada? Üldjuhul ei ole võimalik enam edasi minna. Vaatleme kaht erijuhtu, nn. pikilevi ja ristlevi.

9.2 Pikilevi

Alustame ühest lihtsamast juhust, kui alaline magnetväli on suunatud piki laine levi suunda, s.t. $\overline{H}_0 \parallel \overline{P}$. Siis

$$H_{0T} = 0, \mathbf{w}_T = 0 \quad q = 0 \quad \text{ja vastavalt valemile (9.1.11)}$$

$$\mathbf{e}_{1,2} = 1 - \frac{\mathbf{w}_0^2}{\mathbf{w}^2} \frac{1}{\left(1 \pm \frac{\mathbf{w}_L}{\mathbf{w}} \right)} = 1 - \frac{\mathbf{w}_0^2}{\mathbf{w}(\mathbf{w} \pm \mathbf{w}_L)} \quad (9.2.1)$$



Joon. 9.3

Oletame, et piki z telge, mööda alalise magnetväljasuunda, levib lineaarse polarisatsiooniga laine (joon. 9.3). Tasapinnas XY tiirlevad laetud osakesed, nende liikumistrajektorid on ringid, mille tsentriks on alaline magnetväli. Lineaarselt polariseeritud laine \overline{E} võib jagada kaheks ringpolariseeritud laineks \overline{E}_1 ja \overline{E}_2 . Nende lainete elektrivälja vektorid pöörlevad vastassuundades ringsagedustega \mathbf{w} .

$$E_{1x} = \frac{E_0}{2} \cos\left(\mathbf{w}t - \frac{\mathbf{w}}{v}z\right) \quad E_{1y} = -\frac{E_0}{2} \sin\left(\mathbf{w}t - \frac{\mathbf{w}}{v}z\right)$$

$$E_{2x} = \frac{E_0}{2} \cos\left(\mathbf{w}t - \frac{\mathbf{w}}{v}z\right) \quad E_{2y} = \frac{E_0}{2} \sin\left(\mathbf{w}t - \frac{\mathbf{w}}{v}z\right)$$

Kahe ringpolariseeritud laine summa annab igal ajamomendil lineaarse polarisatsiooniga laine.

Üks osalainetest E_2 pöörleb samasuunaliselt laengu tiirlemisega. Teine osalaine E_1 pöörleb laengu tiirlemisele vastassuunas. Ilmselt on laine E_2 koosmõju tiirleva laenguga suurem, sest nende vahel mõjuvate jõudude suund perioodi jooksul muutub vähem (kui sagedused w_L ja w on võrdsed, ei muutu üldse). Laine E_1 koosmõju tiirleva laenguga on väiksem, sest erinevatel orbiidi osadel nende vahel mõjuvate jõudude suund muutub - kord toimub energia ülekanne lainelt osakesele, kord vastupidi.

Lainetele E_1 ja E_2 vastab ilmselt erinev dielektriline läbitavus, kuna laine E_1 jaoks alalise magnetvälja mõju tiirleva laengu kaudu on väiksem, on selle laine dielektriline läbitavus on lähedasem isotroopse plasma dielektrilisele läbitavusele. Sel juhul peab valemi (9.2.1) nimetajas olema märk + ja

$$\mathbf{e}_1 = 1 - \frac{w_0^2}{w} \frac{1}{w + w_L}$$

Laine E_2 koosmõju tiirleva laenguga on suurem, dielektriline läbitavus erineb rohkem isotroopse plasma dielektrilisest läbitavusest. Valemi nimetajas tuleb valida märk - ja

$$\mathbf{e}_2 = 1 - \frac{w_0^2}{w} \frac{1}{w - w_L}$$

Kuna lainete E_1 ja E_2 dielektrilised läbitavused on erinevad, siis on erinevad ka nende lainete faasikiirused

$$v_1 = \frac{c}{\sqrt{\mathbf{e}_1}}; \quad v_2 = \frac{c}{\sqrt{\mathbf{e}_2}}$$

Kui lained on läbinud anisotroopses plasmas teepikkuse l , on erinevate lainete elektrivälja komponendid saanud algfaasiga võrreldes erinevad faasinihked :

$$E_{1x} = \frac{E_0}{2} \cos\left(\mathbf{w}t - \frac{l\mathbf{w}}{c} \sqrt{\mathbf{e}_1}\right) E_{1y} = -\frac{E_0}{2} \sin\left(\mathbf{w}t - \frac{l\mathbf{w}}{c} \sqrt{\mathbf{e}_1}\right)$$

$$E_{2x} = \frac{E_0}{2} \cos\left(\mathbf{w}t - \frac{l\mathbf{w}}{c} \sqrt{\mathbf{e}_2}\right) E_{2y} = \frac{E_0}{2} \sin\left(\mathbf{w}t - \frac{l\mathbf{w}}{c} \sqrt{\mathbf{e}_2}\right)$$

Siit järeldub, et sama aja jooksul samal teepikkusel l on lainete E_1 ja E_2 polarisatsioonitasapinnad pöördunud erinevate nurkade võrra esialgse asendi suhtes. Lainete E_1 ja E_2 summa, lineaarse polarisatsiooniga laine, polarisatsioonitasapind on pöördunud esialgse asendi suhtes (joon. 9.4) nurga Y võrra. Seda on kerge näidata, liites lainete E_1 ja E_2 elektriväljad

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = E_0 \cos\left[\frac{\mathbf{w}l}{2c} (\sqrt{\mathbf{e}_1} - \sqrt{\mathbf{e}_2})\right] \times \cos\left[\mathbf{w}t - \frac{\mathbf{w}l}{2c} (\sqrt{\mathbf{e}_1} + \sqrt{\mathbf{e}_2})\right]$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = E_0 \sin\left[\frac{\mathbf{w}l}{2c} (\sqrt{\mathbf{e}_1} - \sqrt{\mathbf{e}_2})\right] \times \cos\left[\mathbf{w}t - \frac{\mathbf{w}l}{2c} (\sqrt{\mathbf{e}_1} + \sqrt{\mathbf{e}_2})\right]$$

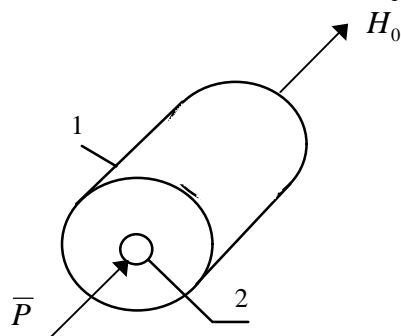
Polarisatsioonitasapinna pöördenuk

$$\Psi = \frac{\mathbf{w}l}{2c} (\sqrt{\mathbf{e}_1} - \sqrt{\mathbf{e}_2})$$

Polarisatsioonitasapinna pöördemist pikilevil anisotroopses keskkonnas nimetatakse Faraday efektiks. Looduslikult esineb Faraday efekt plasmas elektromagnetilise

kiirguse levil läbi ionosfääri. Sellepärast ei ole võimalik kosmilise side puhul detsimeeter- ja pikematel lainetel kasutada lineaarse polarisatsiooniga antenne: vastuvõetava kiirguse polarisatsioonitasapinna juhuslik pöörlemine tekitab vastuvõetava võimsuse nivoo kõikumisi. Ka lühematel lainetel esineb Faraday efekt ionosfääris, aga selle mõju on nõrgem, kuna plasma dielektriline läbitavus sageduse suurenedes läheneb ühele.

Faraday efekt esineb pikilevi puhul ka magnetiliselt anisotroopses keskkonnas - alalise magnetvälja paigutatud ferriidis. See nähtus on kasutusel mikrolainesüsteemide ferriidilülites, tsirkulaatorites jm.



Joon. 9. 5

Joon. 9.5. on ferriit mikrolaineliinis, kus 1 - silindriline lainejuht, 2- ferriit,

Faraday efekt esineb ka optilises diapsoonis: levil anisotroopses kristallis piki kristalli telje suunda laine polarisatsiooni tasapind pöörduv.

9.3 Ristlevi

Teise erijuhuna vaatleme elektromagnetilise laine levi plasmas risti alalise magnetvälja suunaga $\vec{H}_0 \perp \vec{P}$. Siis

$$H_{0L} = 0 \text{ ja } w_L = 0.$$

Plussmärgi puhul valemis (9.11)

$$e_1 = 1 - \frac{w_0^2}{w^2}$$

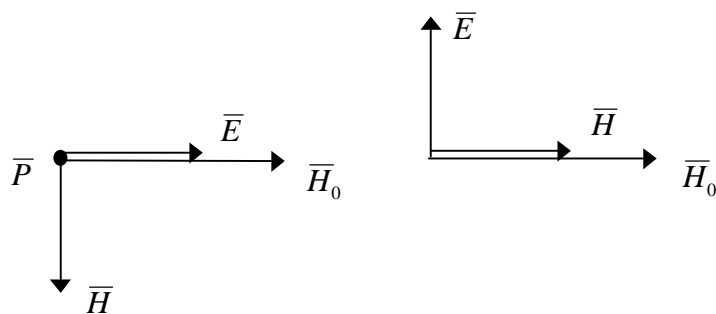
on dielektriline läbitavus samasugune kui isotroopses keskkonnas. Selline dielektriline läbitavus vastab nn. tavalisele lainele.

Miinusmärgi puhul valemis (9.1.11) saame dielektrilise läbitavuse

$$e_2 = 1 - \frac{w_0^2}{w^2} \frac{w^2 - w_0^2}{w^2 - w_0^2 - w_T^2},$$

mis erineb isotroopse keskkonna dielektrilisest läbitavusest. See dielektriline läbitavus vastab nn. ebatavalisele lainele.

Millest on ristlaine puhul tingitud dielektriliste läbitavuste erinevus, millal on laine tavaline, millal ebatavaline?



Joon. 9. 6

Kui laine levib risti alalise magnetvälja suunaga (joon. 9.6), võib elektrivälja tugevus omada kaht komponenti: paralleelset alalise magnetväljaga ja risti alalise magnetväljaga. Laine mõjutab laetud osakest elektrilise Lorenzi jõuga

$$\vec{F}_E = q\vec{E},$$

mis on paralleelne elektrivälja tugevusega. Selle jõu mõjul tekib laetud osakese kiiruse komponent \vec{v}_E , mis on paralleelne elektrivälja tugevusega $\vec{v}_E \parallel \vec{E}$.

Kui elektrivälja tugevus on paralleelne alalise magnetväljaga \vec{H}_0 , siis ka laine poolt tekitatud kiiruse komponent on paralleelne vektorile $\vec{H}_0 \parallel \vec{v}_E$. Sel juhul magnetiline Lorenzi jõud

$$\vec{F}_H = q \vec{v}_E \times \vec{H}_0 = 0.$$

Alalise magnetvälja olemasolu ei mõjuta laetud osakese ja laine koosmõju. Laine levib samuti kui ilma välise magnetväljata, s.t. isotroopses keskkonnas. Tegemist on tavalise lainega.

Kui elektrivälja tugevus on polariseeritud risti alalise magnetväljaga $\vec{E} \perp \vec{H}_0$, siis ka $\vec{v}_E \perp \vec{H}_0$ ja magnetiline Lorenzi jõud $\vec{F}_H \neq 0$. Sellisel juhul mõjutab alaline magnetväli laine pool tekitatud laengu liikumist. Laine koosmõju alalise magnetväljaga laetud osakese liikumise kaudu on olemas. Selline polarisatsioon vastab ebataavalisele lainele.

Ristlevi puhul suvaline lineaarse polarisatsiooni laine jaguneb kaheks lineaarselt polariseeritud laineeks, tavaliseks ja ebataavaliseks, millele vastavad erinevad faasikiirused ja murdumisnäitajad. Selline kahekordne murdumine leiab aset anisotroopsetes kristallides (Nicol'i prisma islandi paost, Wallastoni prisma jt.). Nendest kristallidest valmistatakse optilisi polarisaatoreid või polarisatsiooni analüsaatoreid optilistes side- või mõõtesüsteemides.

Ka ferriidid töötavad ristmagnetväljas, neid kasutatakse täisnurksetes lainejuhtides. Sellises süsteemis ühes suunas leviv laine on tavaline, vastassuunas leviv laine ebataavaline. Ristmagnetväljas töötavate ferriitide abil võib teha seadmeid, mis ühes suunas lasevad laine läbi praktiliselt kadudeta, aga vastassuunas leviv laine sumbub peaaegu täielikult.

10 Lained liinides

Siiani vaatlesime elektromagnetilise laine levi vabas ruumis, kus puudusid laine levitingimusi mõjutavad tegurid, peale selle keskkonna, milles laine levis. Praktikas on sageli vaja kindlustada elektromagnetilise energia ülekannet ainult ühes vajalikus suunas, s.t. laine levi ainult kindlas kanalis, piiratud ruumi osas. Selleks kasutatakse spetsiaalseid lainet suunavaid süsteeme, ülekandeliine. Liinid välistavad energia hajumise ruumis ja peavad kindlustama minimaalsed kaod. Liinide omaduste teoreetilisel määramisel lähtutakse lainevõrrandist. Lainevõrrandi lahendamisel on eelduseks, et:

1) Vaadeldav piirkond ei sisalda väljaallikaid, s.t. $\vec{j}_k = 0$ ja $\mathbf{r}_k = 0$; Lahendatakse homogeenet lainevõrrandit. Selline lähenemine ei võimalda määrata laine amplituudi liinis: amplituud on määratud allikatega. Välja struktuur liinis ja laine parameetrid ei sõltu laine amplituudist (võib muuta generaatorist liini antavat võimsust, amplituud muutub, laine struktuur ja parameetrid jäävad samaks).

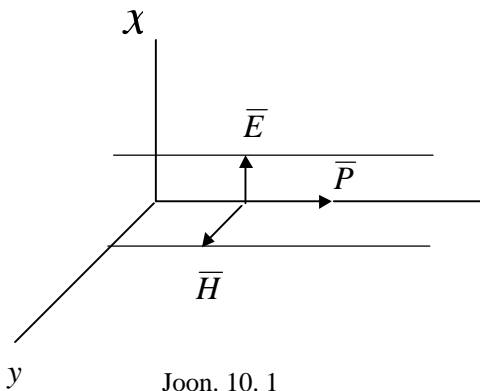
2) Piki liini levib tasapinnaline laine levimiskonstandiga h , s.t. $\vec{E}, \vec{H} \sim e^{-ihz}$. See tähendab, et kõik laine komponendid levivad liinis ühe ja sama kiirusega, nende omavahelised seosed levi käigus ei muutu. Laine struktuur levil liinis on muutumatu.

Kirjutame välja lainevõrrandi liinis. Esimesest eeldusest järgneb, et aluseks tuleb võtta homogeenne lainevõrrand (vt. 4.1.4)

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$$

kus lainearv $k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$.



Joon. 10.1

Oletame, et energia ülekannet liinis toimub piki z -telge (joon. 10.1). Sel juhul, vastavalt teisele eeldusele, väli levib külglainena piki z telge ja $\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -ih$.

Operaatori ∇^2 võib teisendada kujule

$$\nabla^2 = \nabla_{xy}^2 - h^2.$$

Asendades lainevõrrandi üldkujusse, saame

$$\nabla_{xy}^2 \vec{E} + (k^2 - h^2) \vec{E} = 0 \quad (10.1)$$

$$\nabla_{xy}^2 \vec{H} + (k^2 - h^2) \vec{H} = 0 \quad (10.2)$$

Lainevõrrandid 10.1 ja 10.2 on aluseks ülesannete lahendamisel laine levi puhul liinis.

10.1 Lainete tüübid liinides

Elektromagnetiline väli süsteemis võib omada üldjuhul 6 erinevat komponenti, nelja rist- ja kaht pikikomponenti, mis kõik levivad külglainena piki z -telge:

$$E_x; E_y; H_x; H_y; \sim e^{-ihz}$$

$$E_z; H_z; \sim e^{-ihz}$$

Elektrodünaamilise ülesande lahendamise tulemusena peab leidma kõik väljakomponendid ja laine levikonstandi süsteemis h , sest üldjuhul $h \neq k$. Kas selleks peab lainevõrrandit kuus korda lahendama, iga komponendi jaoks eraldi? Ilmneb, et väljavõrrandite abil on võimalik ristkomponendid avaldada pikikomponentide E_z ja H_z kaudu. See asjaolu kergendab tunduvalt väljastruktuuri arvutust liinides, sest langeb ära vajadus elektrodünaamilise ülesande lahendamiseks kõikide väljakomponentide jaoks.

Lähtume I ja II Maxwelli võrrandist. Kirjutame I ja II Maxwelli võrrandi välja komponentide kaupa

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}_z}{\partial Y} - \frac{\mathcal{H}_y}{\mathcal{Z}} &= i\omega \mathbf{e}_a \dot{E} & \frac{\mathcal{E}_z}{\mathcal{Z}} - \frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{Z}} &= -i\omega \mathbf{m}_a \dot{H}_x \\ \frac{\mathcal{H}_x}{\mathcal{Z}} - \frac{\mathcal{H}_z}{\mathcal{X}} &= i\omega \mathbf{a}_a \dot{E}_y & \frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{Z}} - \frac{\mathcal{E}_z}{\mathcal{X}} &= -i\omega \mathbf{m}_a \dot{H}_y \\ \frac{\mathcal{H}_y}{\mathcal{X}} - \frac{\mathcal{H}_x}{\mathcal{Y}} &= i\omega \mathbf{e}_a \dot{E}_z & \frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{X}} - \frac{\mathcal{E}_z}{\mathcal{Y}} &= -i\omega \mathbf{m}_a \dot{H}_z \end{aligned}$$

Asendades I Maxwelli võrrandis \dot{H}_y ja \dot{H}_x väärtused, kasutades II võrrandit, saame \dot{E}_x ja \dot{E}_y avaldada \dot{H}_z ja \dot{E}_z kaudu. Analoogiliselt võib II võrrandist avaldada \dot{H}_x ja \dot{H}_y , asendades \dot{E}_y ja \dot{E}_x I võrrandist.

Välja ristkomponentide avaldised pikikomponentide kaudu saame kujul

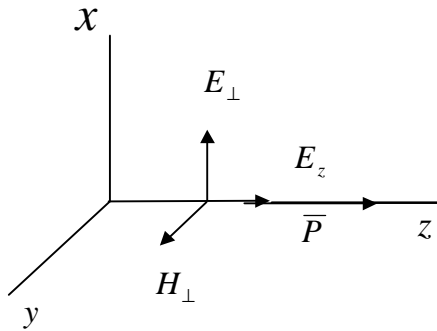
$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= \frac{i}{h^2 - k^2} \left(\omega \mathbf{m}_a \frac{\mathcal{H}_z}{\mathcal{Y}} + h \frac{\mathcal{E}_z}{\mathcal{X}} \right) \\ \dot{E}_y &= \frac{i}{h^2 - k^2} \left(-\omega \mathbf{m}_a \frac{\mathcal{H}_z}{\mathcal{X}} + h \frac{\mathcal{E}_z}{\mathcal{Y}} \right) \\ \dot{H}_x &= \frac{i}{h^2 - k^2} \left(h \frac{\mathcal{H}_z}{\mathcal{X}} - \omega \mathbf{e}_a \frac{\mathcal{E}_z}{\mathcal{Y}} \right) \\ \dot{H}_y &= \frac{i}{h^2 - k^2} \left(h \frac{\mathcal{H}_z}{\mathcal{Y}} + \omega \mathbf{e}_a \frac{\mathcal{E}_z}{\mathcal{X}} \right) \end{aligned} \tag{10.1.1}$$

Seoste 9.1.1 väljakirjutamisel on arvestatud, et $k = \omega \sqrt{\mathbf{e}_a \mathbf{m}_a}$ ja $\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{Z}} \rightarrow -ih$.

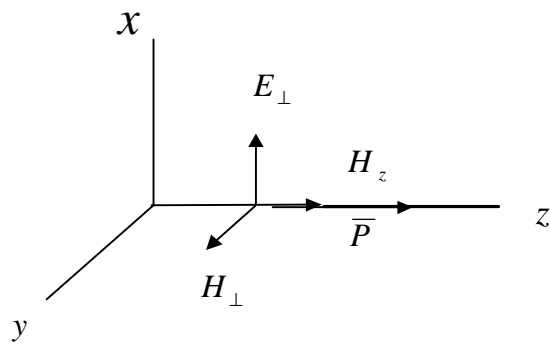
Energia levimist z suunas iseloomustab samasuunaline Poyntingi vektor, mis määratakse \bar{E} ja \bar{H} ristkomponentidega. Kui \bar{E} ja \bar{H} ristkomponendid muutuvad nulliks, siis võrdub nulliga ka pikisuunaline Poyntingi vektor ja levimine liinis puudub. Kuna väljavektorite ristkomponendid avalduvad pikikomponentide kaudu, võib lähtudes seosest 9.1.1 järeldada, et elektromagnetiline laine suunavas süsteemis levib ainult siis, kui:

- 1) kas E_z või H_z või nad mõlemad erinevad nullist;
- 2) $E_z = H_z = 0$ ja $h^2 - k^2 = 0$;

Esimesel juhul on tegemist nn. pikilainetega, kus kogu välja struktuur määratakse E_z (või H_z) kaudu. Teisel juhul on tegemist ristlainega, millel puudub levisuunaline komponent.



Joon. 10. 2



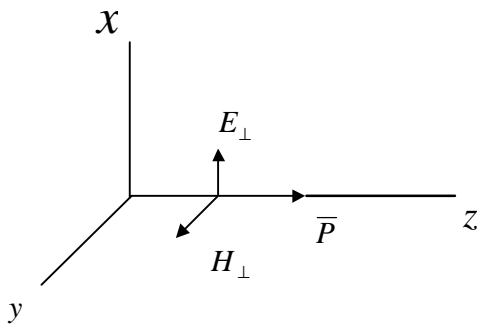
Joon. 10. 3

Eristatakse kolme tüüpi pikilaineid:

elektrilised lained (E-tüüpi või TM-tüüpi) esinevad liinis, kui $E_z \neq 0$ ja $H_z = 0$ (joon. 10. 2);

magnetilised lained (H-tüüpi või TE-tüüpi) esinevad liinis, kui $E_z = 0$, aga $H_z \neq 0$ (joon. 10. 3);

segilained (EH-tüüpi) esinevad liinis, kui $E_z \neq 0$ ega $H_z \neq 0$.



Joon. 10. 4

Pikilainete puhul on iseloomulik, et välja pikikomponent pöörab summaarse väljatugevuse (kas elektri- või magnetvälja vektori) teatud nurga alla liini risttasapinna (XY tasapind) suhtes. Selle tulemusena Poyntingi vektor ei ole paralleelne liini teljega (z telg), vaid on suunatud teatud nurga all selle telje suhtes. Laine levib mööda murdjoont või kõverjoont nii, et üldine kulgliikumine piki liini telge toimub.

Ristlainete ehk TEM puhul $h = k$ (joon. 10.4). Ristlaine puhul elektri- ja magnetväli omavad ainult ristkomponenti, Poyntingi vektor on igas z telje punktis paralleelne selle teljega. Laine levib rangelt paralleelselt liini teljega.

Rist- ja pikilained levivad liinis erineval moel, erinevad on ka nende lainete omadused.

10.2 Ristlainete omadused

Alustame ristlainete omadustest, kuna need erinevad vähe laine omadustest levil vabas ruumis.

Vaatleme lainevõrrandeid (10.1) ja (10.2) ristlainetega TEM liinis. Sel juhul

$$E_z = H_z = 0 \text{ ja } h^2 - k^2 = 0$$

võrrandid 10.1 ja 10.2 teisenduvad kujule

$$\nabla_{xy}^2 \dot{\vec{E}} = 0 \quad (10.2.1)$$

$$\nabla_{xy}^2 \dot{\vec{H}} = 0 \quad (10.2.2)$$

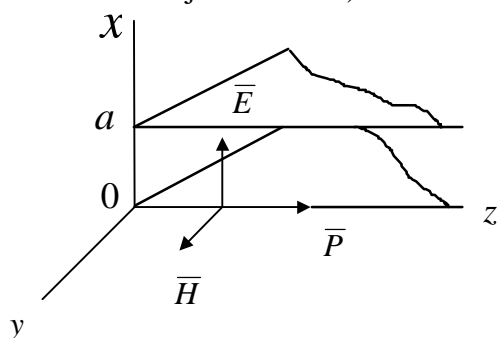
Seosed 10.2.1 ja 10.2.2 on Laplace'i võrrandid, mis kirjeldavad staatilisi ja statsionaarseid välju. Järelikult:

1) TEM-lainete puhul väljastruktuur liini ristlõikes langeb kokku staatiliste ja alalisvoolu väljade struktuuriga;

2) väljad on potentsiaalsed, järelikult TEM-lainega ülekandeliinide puhul võib sisse tuua pinget;

3) TEM-lained ei saa levida süsteemis, mille ristlõike konfiguratsioon ei võimalda staatilise elektrivälja eksisteerimist.

Vaatleme näitena kõige lihtsamat TEM-lainega liini. Selline süsteem peab sisaldama kaks teineteisest isoleeritud metallkonstruktsiooni (muidu ei ole võimalik potentsiaalse välja olemasolu).



Joon. 10.5

Kõige lihtsamal juhul on tegemist kahe paralleelse piiramatute mõõtmetega metallplaadiga (joon. 10.5). Lahendame elektrivälja struktuuri leidmiseks võrrandi (10.2.1)

$$\nabla_{xy}^2 \dot{\vec{E}} = 0$$

Kuna $\frac{\partial}{\partial y} = 0$, lihtsustub võrrand kujule

$$\frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}}{\partial x^2} = 0$$

(10.2.3)

Piiritingimused määrame eeldusest, et süsteem on

ideaalsest elektrijuhist

Võrrandi 10.2.3 lahend

$$E_t = E_y = 0, \text{ kui } x = 0 \text{ ja } x = a. \quad (10.2.4)$$

$$\dot{\vec{E}} = c_1 x + c_2$$

$$\dot{E}_x = c_{1x} x + c_{2x}$$

$$\dot{E}_y = c_{1y} y + c_{2y}$$

Rakendame piiritingimusi. Kui $x = 0$

$$\dot{E}_y = c_{2y} = 0$$

$$x = a$$

$$\dot{E}_y = c_{1y} a = 0$$

Järelikult ka $c_{1y} = 0$ ja $E_y \equiv 0$.

Elektrivälja $\dot{\vec{E}}_x$ iseloom ei ole määratud piiritingimustega. Vaatleme sellepärast III Maxwelli võrrandit. Kuna antud juhul $\mathbf{r} = 0$, saame

$$\text{div } \mathbf{e}\dot{\vec{E}} = 0$$

$$\mathbf{e} \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial x} = c_{1x} = 0$$

Järelikult $\dot{\vec{E}}_x = \text{const.}$

Magnetvälja võib arvutada elektrivälja järgi, kasutades Maxwelli võrrandeid, I võrrandist

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = i\omega \epsilon_a \dot{E}_x$$

$$i\omega \dot{H}_y = i\omega \epsilon_a \dot{E}_x$$

$$\dot{H}_y = \sqrt{\frac{\mathbf{e}_a}{\mathbf{m}_a}} \dot{E}_x$$

Järelikult elektri- ja magnetvälja ristkomponentide suhe antud juhul langeb kokku vaba keskkonna lainetakistusega W_0 :

$$\frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \sqrt{\frac{\mathbf{m}_a}{\mathbf{e}_a}} = W_0$$

II Maxwelli võrrandist

$$\frac{\nabla \dot{E}_z}{\nabla Y} - \frac{\nabla \dot{E}_y}{\nabla Z} = -i\omega \mathbf{m}_a \dot{H}_x$$

Järelikult kahe paralleelse plaadi vahel leviva TEM-laine elektri- ja magnetväli omavad kumbki ühe komponendi; elektriväli on suunatud risti, magnetväli paralleelselt plaatidega.

Üldjuhul määrab ristlaine omadused asjaolu, et

$$h = k = \omega \sqrt{\mathbf{e}_a \mathbf{m}_a}$$

Järelikult faasikiirus

$$v_f = v_{gr} = v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}_a \mathbf{m}_a}}$$

ja lainepikkuse süsteemis

$$I_s = \frac{v_0}{f} = I_0,$$

kus I_0 on lainepikkus vabas ruumis.

TEM-laine omadused liinis praktiliselt ei erine laine omadustest vabas ruumis.

- 1) ristlaine parameetrid liinis langevad kokku laine parameetritega levil vabas ruumis;
- 2) TEM-lainega liinis ei esine dispersiooni (kui kadusid mitte arvestada);
- 3) süsteemid ei oma kriitilisi mõõtmeid ja väljastruktuur on kõikidel sagedustel sarnane.

10.3 Pikilainete omadused

10.3.1 Dispersioonivõrrand

Ka pikilainete omaduste uurimisel lähtume lainevõrranditest (10.1) ja (10.2)

$$\nabla^2_{xy} \dot{E} + (k^2 - h^2) \dot{E} = 0$$

$$\nabla^2_{xy} \dot{H} + (k^2 - h^2) \dot{H} = 0$$

Pikilainete puhul, erinevalt ristlainetest, teine liige ei muutu nulliks ja suurus

$$k^2 - h^2 = \mathbf{g}^2 \tag{10.3.1}$$

omab mingi lõpliku väärtuse, mille tähistame \mathbf{g}^2 . Seoses (10.3.1)

$$k = \frac{2\mathbf{p}}{I_0}$$

on lainearv vabas ruumis;

$$h = \frac{2\mathbf{p}}{I_s}$$

on nn. pikilainearv, mis iseloomustab faasijaotust piki z-telge.

Kuna suurus g^2 määratakse lainearvude ruutude vahega, on g puhul ka tegemist lainearvuga.

$$g = \frac{2p}{I_{kr}}$$

on nn. ristlainearv, mis on seotud kriitilise lainepikkusega I_{kr} ja määratakse süsteemi geomeetriaga: liini ristlõike mõõtmed peavad olema küllalt suured, et laine saaks selles levida (umbes pool lainepikkust peab liini ristlõikesse ära mahtuma).

Seosest (10.3.1.1) võib avaldada pikilainearvu

$$h = \sqrt{k^2 - g^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{g}{k}\right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{I_0}{I_{kr}}\right)^2} \quad (10.3.2)$$

Ülaltoodud seos kujutab **dispersioonivõrrandit**.

Vaatleme laine levi liinis erinevatel juhtudel.

Kui $k^2 > g^2$, on h reaalarv ja piki z -telge levib elektromagnetiline laine

$$\dot{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{-ihz}$$

Kui $k^2 < g^2$, muutub h imaginaarseks $h \rightarrow -ih$ ja z suunas väli sumbub eksponentsiaalselt

$$\dot{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{-hz}$$

Kriitiline piir laine levimise jaoks liinis on nende kahe parameetri võrdsus

$$g = k,$$

millest alates laine levi liinis lakkab. Sagedust, mis on määratud kriitilise tingimusega nimetatakse kriitiliseks sageduseks:

$$f_{kr} = \frac{v_0}{I_{kr}} = \frac{g v_0}{2p}. \quad (10.3.3)$$

Alates kriitilisest sagedusest muutub võimatuks pikilaine levimine antud liinis. Suurused f_{kr} ja I_{kr} on antud liini parameetrid ja määratakse selle ristlõike geomeetriaga.

Esimene erinevus rist- ja pikilainete omadustes seisneb selles, et *****pikilained võivad levida suunavas süsteemis alles alates teatud kriitilisest sagedusest, mis on määratud süsteemi geomeetriaga.*****

Pikilaine parameetrid suunavas süsteemis määratakse, lähtudes dispersiooni-võrrandist (10.3.2):

$$\text{levimiskonstant} \quad h = k \sqrt{1 - \left(\frac{I_0}{I_{kr}}\right)^2} \quad (10.3.4)$$

$$\text{faasikiirus} \quad v_f = \frac{w}{h} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{I_0}{I_{kr}}\right)^2}} \quad (10.3.5)$$

$$\text{lainepikkus süsteemis} \quad I_s = \frac{I_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{I_0}{I_{kr}}\right)^2}} \quad (10.3.6)$$

$$\text{grupikiirus} \quad v_{gr} = \frac{dw}{dh} = v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{I_0}{I_{kr}}\right)^2} \quad (10.3.7)$$

Ideaalses, ilma kadudeta suunavas süsteemis

$$v_f v_{gr} = v_0^2 \quad (10.3.8)$$

Nagu nähtub seostest (10.3.4) ja (10.3.7), esineb pikilainete puhul dispersioon.

Teine erinevus rist- ja pikilainete omadustes esineb selles, et

*****pikilainete puhul esineb dispersioon ka ideaalsetes ilma kadudeta liinides.*****

Vaatleme laine parameetrite iseloomu sõltuvalt signaali sagedusest.

1. Kui $f \gg f_{kr} (I \ll I_{kr})$,

siis dispersiooni ruutjuur $\sqrt{1 - \left(\frac{I_0}{I_{kr}}\right)^2} \rightarrow 1$

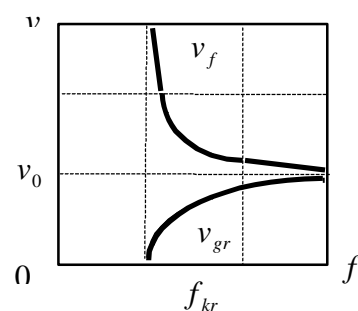
ja $h \approx k; v_f \approx v_0; I_S \approx I_0$ ja $v_{gr} \approx v_0$.

Suhteliselt kõrgetel sagedustel pikilainete omadused ei ilmne ja laine parameetrid ei erine oluliselt ristlaine omadest.

2. Kui $f > f_{kr} (I_0 < I_{kr})$,

siis $0 < \sqrt{1 - \left(\frac{I_0}{I_{kr}}\right)^2} < 1$

ja $h < k, v_f > v_0, I_S > I_0, v_{gr} < v_0$



Joon. 10.6

See on pikilainega liini tavaline töörežiim. Lainepikkus ja faasikiirus on suuremad, pikilainearv ja grupikiirus väiksemad kui levil vabas ruumis.

3. Kui $f \rightarrow f_{kr} (I_0 \rightarrow I_{kr})$, siis $\sqrt{1 - \left(\frac{I_0}{I_{kr}}\right)^2} \rightarrow 0$

ja $h \rightarrow 0, v_f \rightarrow \infty, I_S \rightarrow \infty, v_{gr} \rightarrow 0$.

Re iimi lähenedes kriitilisele energia levimine süsteemis lakkab.

4. Kui $f < f_{kr} (I_0 > I_{kr})$, siis $h \rightarrow -ih$ ja väli ei oma enam lainelist iseloomu. Imaginaarne levikonstant

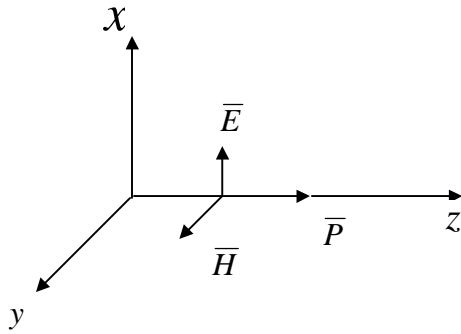
kirjeldab välja eksponentsiaalset sumbumist. See on nn. ülekritiline režiim. Välja sumbumine toimub väga järsult - ülekritilisest liinilõigust pikkusega alla sajaniku lainepikkuse peegeldub laine praktiliselt täielikult.

10.3.2 Brillouini kontseptsioon

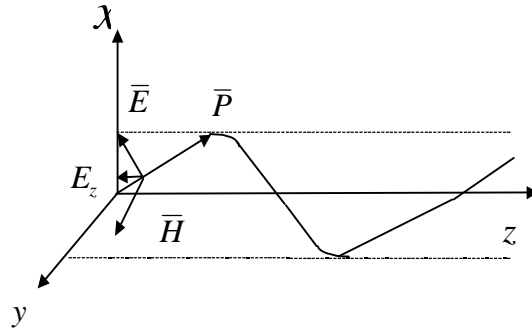
Vastavalt Brillouini kontseptsioonile võib pikilaineid kujutada ristlainete kombinatsioonina. Sellist lähenemist nimetatakse ka **partsiaallainete ehk osalainete printsiibiks**. Need põhimõtted muudavad pikilainete omadused näitlikumaks.

Energia levimine piki z-telge võib toimuda kahel viisil:

1) Poyntingi vektor on suunatud rangelt paralleelselt z-teljega (joon. 10. 7). Sel juhul E ja H omavad ainult ristkomponente ja piki z-telge levib TEM-laine.



Joon. 10.7



Joon. 10.8

2) Poyntingi vektor on suunatud z -telje suhtes nurga all ja energia levimine toimub mööda kõverjoont (joon. 10.8), kusjuures üldine kulgliikumine ja energia ülekande toimub piki

z -telge. Sel juhul peab keskkond olema mittehomogeenne, et muuta laine levimissuunda (näiteks võib toimuda peegeldumine liini seintelt). Sel juhul omavad väljatugevused (üks neist) komponenti piki z -telge ja tegemist on TM või TE-tüüpi lainega.

Ülaltoodu põhjal võib otsustada, missugustes tingimustes võivad levida TEM- või TE- ja TM-lained.

Ainult TEM-lained võivad levida ideaalsest juhust homogeenes ühejuhtmelises liinis. Ümbritseva ruumi homogeenus (ja lõpmatud mõõtmed) välistavad laine kõverjoonelise levimise võimaluse. Mitteideaalse elektrijuhi puhul võivad tekkida ka pikilained, kuna väli levib ka metalli sisse. Samuti levib TEM-laine ideaalses (ilma kadudeta) vabas ruumis.

Ainult TE-, TM- või EH -lained võivad levida lainejuhtides (k.a. optiline kiud), kuna lainejuhi ristlõike konfiguratsioon ei võimalda elektrostaatilise välja eksisteerimist.

Selle seisukoha paikapidavust võib näidata I Maxwelli võrrandist lähtudes:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S (\vec{j} + \vec{j}_n) d\vec{s}.$$

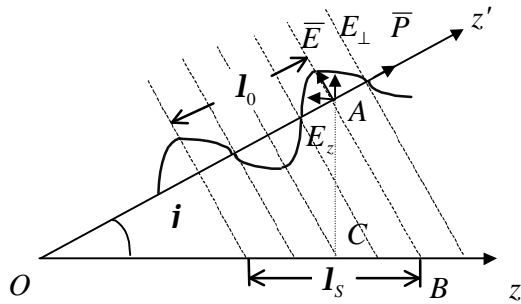
Oletame, et õõnsas metalltorus levib ristlaine. Siis magnetväli omab ainult ristkomponenti, mis kutsub esile pikivoolu. Kuna lainejuhi sees juhtivusvoolud puuduvad, peab tekkima nihkvoolu j_n pikikomponent, mis on seotud samasuunalise elektriväljaga

$$\vec{j}_n = \mathbf{e}_a \frac{\nabla \cdot \vec{E}}{\nabla t}.$$

Kuna \vec{E} ei oma pikikomponenti, siis järelikult ka

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = 0$$

ja väli ei saa omada ka ristkomponente ning muutub samaselt nulliks.



Joon. 10.9

(joon. 10.9). Piki z' -telge nurga \mathbf{j} all teljega z levib tasapinnaline TEM-laine. Laine faasisasipindade lõikumine z -teljega määrab faasisaotuse piki z -telge. Faasikiirus piki z' -telge

$$v_0 = \frac{\Delta z'}{\Delta t} = \frac{OA}{\Delta t}.$$

Faasikiirus piki z -telge

$$v_f = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{OB}{\Delta t} = \frac{v_0}{\cos \mathbf{j}}.$$

Lainepikkus TEM-laine jaoks on I_0 . Lainepikkuse kui samafaasiliste punktide vaheline kaugus z -teljel

$$I_s = \frac{I_0}{\cos \mathbf{j}}.$$

Kuna tee kaldjoont mööda on pikem kui otsesuunas, on grupikiirus piki z -telge väiksem laine levimiskiirusest piki z' $v_0 : v_{gr} = \frac{OC}{\Delta t} = v_0 \cos \mathbf{j}$.

Sama seos kehtib ka levimiskonstantide suhte

$$h = k \cos \mathbf{j}.$$

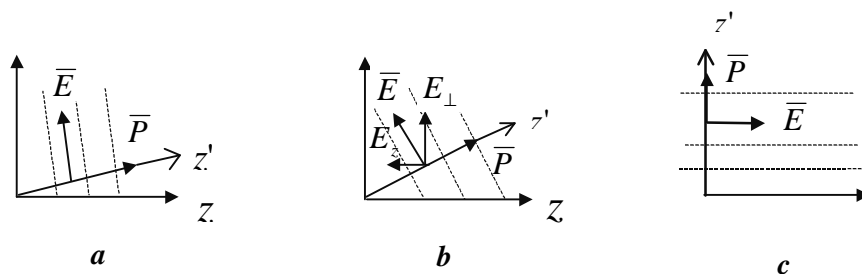
Väljatugevuse pikikomponent

$$E_z = E \sin \mathbf{j}.$$

Võrreldes partsiaallainete printsiibist lähtudes saadud seoseid järeldustega dispersioonivõrrandist (10.3.2) vt. (10.3.4-10.3.7) näeme, et

$$\cos \mathbf{j} \Rightarrow \sqrt{1 - \left(\frac{I_0}{I_{kr}} \right)^2}.$$

Vaatleme pikilaine omaduste muutumist sõltuvalt sagedusest (joon. 10.10).



Joon. 10.10

1. Kui $f \gg f_{kr}$ ($I_0 \ll I_{kr}$),

Nii TEM- kui ka TE-, TM- ja EH-lained võivad levida koaksiaalliinis, kahejuhtmelses liinis, lapikliinis jne., sest nende ristlõike struktuur võimaldab elektrostaatilise välja olemasolu. Teisest küljest on olemas pikilainete levimiseks vajalikud peegeldustingimused.

Seletame **pikilainete omadused, lähtudes Brillouini** kontseptsioonist

siis
$$\sqrt{1 - \left(\frac{I_0}{I_{kr}}\right)^2} \rightarrow 1; \cos \mathbf{j} \rightarrow 1; \mathbf{j} \rightarrow 0.$$

Sel juhul TEM-laine levib praktiliselt paralleelselt z -teljega. Järelikult piki z -telge leviva laine omadused ei erine oluliselt ristlaine omadustest:

$$h \approx k; \mathbf{I}_s \approx \mathbf{I}_0; v_f \approx v_0; v_{gr} \approx v_0$$

$$\text{ja } E_z \approx 0.$$

2. Kui $f > f_{kr} (I_0 < I_{kr})$,

$$0 < \sqrt{1 - \left(\frac{I_0}{I_{kr}}\right)^2} < 1; 0 < \cos \mathbf{j} < 1, 0 < \mathbf{j} < 90^\circ$$

siis
$$h = k \cos \mathbf{j}, v_f = \frac{v_0}{\cos \mathbf{j}}, v_{gv} = v_0 \cos \mathbf{j}$$

$$\mathbf{I}_s = \frac{I_0}{\cos \mathbf{j}}; E_z = E \sin \mathbf{j},$$

mis langevad kokku valemitega (10.3.1.2) ja (10.3.1.4-10.3.1.7). Tuleb märkida, et sageduse vähenemisega väljatugevuse pikikomponent kasvab. Järelikult avalduvad tugevamini ka pikilainete omadused.

3. Kui $f \rightarrow f_{kr} (I_0 \rightarrow I_{kr})$,

siis
$$\sqrt{1 - \left(\frac{I_0}{I_{kr}}\right)^2} \rightarrow 0; \cos \mathbf{j} \rightarrow 0; \mathbf{j} \rightarrow 90^\circ.$$

Sel juhul levib ristlaine praktiliselt risti z -teljega ja laine parameetrid ei kirjelda enam lainelist protsessi piki z -telge: $h \rightarrow 0; v_f \rightarrow \infty; \mathbf{I}_s \rightarrow \infty; v_{gr} \rightarrow 0$.

Laine levimine piki z -telge lakkab: kuna laine omab ainult pikikomponenti, siis Poyntingi vektori z -suunaline komponent muutub nulliks, s.t. energia ülekanne piki liini lakkab.

1. Väljad

1. Mis on skalaarse välja ruumiline tuletis?
2. Mis on vektorvälja ruumiline tuletis?
3. Mis on elektrivälja tugevus? Elektrilise induktsiooni vektor?
4. Mis tingimusel vektorvälja hoovus läbi kinnise pinna võrdub nullile?
5. Mis vahe on juhtivus- ja nihkevoolul?
6. Kas homogeenne keskkond võib olla anisotroopne?
7. Leida elektriline induktsioon kaugusel r punklaengust q .
8. Kui suur on magnetvälja tugevus 1 meetri kaugusel sirgjooneliselt kulgevast alalisvoolust tugevusega 1 A? vahelduvvoolust sagedusega 50 Hz ?
9. Näidata et, $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$, kus \vec{A} on suvaline vektor.
10. Näidata et, $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$.
11. Näidata, et kui \vec{R} on raadiusvektor, mis on suunatud koordinaatide alguspunktist punkti x, y, z , siis
 - a) $\nabla * \vec{R} = 3$,
 - b) $\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}$ kui $\vec{R} \neq 0$.

2. Väljavõrrandid

1. Mis tekitab alalise elektrivälja? Alalise magnetvälja?
2. Mis tekitab vahelduva elektrivälja? Vahelduva magnetvälja?
3. Mis saab tekitada alalisvoolu?
4. Mitmel aksioomil baseerub elektromagnetism? Nimetada need.
5. Milline seadus seob elektrivälja selle allikaga?
6. Milline seadus seob magnetvälja selle allikaga?
7. Kas laengu jäävuse seadus on sõltumatu või tuletatav?
8. Miks Maxwelli neljandast võrrandist jäeldub, et vabu magnetilisi laenguid ei ole?

9. Millistel juhtudel kasutatakse kompleksset amplituudi?
10. Mida sisaldab kompleksne amplituud?
11. Kuidas on seotud magnetvälja tugevus ja magnetiline potentsiaal?
12. Kuidas on seotud elektrivälja tugevus ja elektriline potentsiaal?
13. Miks ideaalses elektrijuhis saab eksisteerida ainult alalisvoolu väli?
14. On antud elektromagnetvälja vektor \vec{E} . Näidata et vektor \vec{E} ja magnetilise induktsiooni vektor \vec{B} on teineteise suhtes perpendikulaarsed.
15. On antud magnetvälja vektor \vec{H} . Näidata, et vektor \vec{H} ja juhtivusvoolu / koguvoolu tiheduse vektor on perpendikulaarsed.
16. Mingil ajamomendil kehal on elektriline laeng q . Keha iseloomustavad dielektriline läbitavus $\epsilon = 2,5$ ja erijuhtivus $\sigma = 10^{-14} \frac{1}{\Omega m}$. Määrata ajavahemik, mille jooksul iga (sisemise piirkonna ?) laeng kahaneb kaks korda. Kuhu "kaob" laeng?
17. Nimetage teile tuntud juhtivusevoolu tekkimise põhjused – nii elektrilise kui ka mitteelektrilise päritoluga.
18. Kirjutage välja Maxwelli võrrandite süsteem ristkoordinaatides.
19. Milline on ideaalse dielektriku ja ideaalse juhi kompleksne dielektriline läbitavus?

3. Piiritingimused

1. Kuidas on suunatud elektri- ja magnetväli õhus elektrijuhi pinna vahetus läheduses?
2. Millele võrdub pindvoolu tihedus elektrijuhi pinnal?
3. Kuidas on suunatud pindvoolud elektrijuhi pinnal?
4. Näidata, et pindvoolud on risti magnetväljale
5. Näidata millal ja kui palju muutub väljade \vec{E} , \vec{D} ja \vec{H} jõujoonte arv üleminekul keskkondade eralduspiirist. Miks ei muutu magnetilise induktsiooni \vec{B} jõujoonte arv?
6. Keskkonnad on eraldatud laetud pinnaga, ja ühes keskkonnas väli puudub. Kui suur on elektriväli teises keskkonnas?

4. Väljavektorite lainevõrrandid

5. Staatilised ja statsionaarsed väljad

1. Mis põhjused sunnivad kirjutama mitte $\vec{E} = \text{grad } \varphi$, vaid $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, kuigi arvestades et $\text{rot grad } \varphi = 0$ on mõlemad väljendid samaväärsed?
2. Leida punktlaengu väli tema potentsiaali kaudu.
3. *Leida planeedi Maa sfääri mahtuvus. $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$
4. *Sfääri mahtuvus lõpmatus vaakumis on $1 f$

. Leid sfääri diameeter.

6. Elektromagnetiline kiirgus

1. Mille poolest erinevad kvaasistatsionaarne ja düünaamiline (laineline) väli?
2. Välja kirjutada harmooniline elektriline võnkumine ja tasapinnaline elektromagnetiline laine.
3. Milline on kvaasistatsionaarsuse tingimus?
4. Kui kaugel juhtmest võib lugeda välja kvaasistatsionaarseks, kui juhtmes on vool sagedusega 50 Hz?
5. Kui kaugel traatatennist võib lugeda välja kvaasistatsionaarseks, kui antenni ergutatakse 300 MHz vooluga?
6. Milline on erinevus elektromagnetilise laine ja elektrilise võnkumise vahel?
7. Kas elektromagnetväli võib säilida, kui seda tekitanud allikad (voolud ja laengud) kaovad (lülitatakse välja)?
8. Kuidas muutub kiirgusvälja tugevus sõltuvalt kaugusest?
9. Kaugus antennist kiirgusväljas väheneb 2 korda. Kui palju muutub elektrivälja tugevus?

7. Tasapinnaline elektromagnetiline laine

1. Arvutada vase jaoks välja sumbuuse koefitsenid dB/m, kui sagedus $f =$

10 Hz; 1000 Hz; 10 Hz ja 10^6 Hz.

8 Levi isotroopses mittehomoogeenses keskkonnas

1. Tasapinnaline homogeenne elektromagnetlaineline langeb normaalselt keskkondade eralduspinnale, millele magnetiline ja dielektriline läbituvus on vastavalt $\mu_1 = 1; \epsilon_1 = 5; \mu_2 = 1; \epsilon_2 = 1$. Arvutada peegeldus- ja läbitavustegurid.

2. Lahendada eelmine ülesanne järgmistel tingimustel.

a) $\mu_1 = 1, \epsilon_1 = 1, \mu_2 = 5, \epsilon_2 = 1$

b) $\mu_1 = 1, \epsilon_1 = 3, \mu_2 = 1,5, \epsilon_2 = 1$

c) $\mu_1 = 1, \epsilon_1 = (5 - j0,2), \mu_2 = 1, \epsilon_2 = 1$

d) $\mu_1 = 1, \epsilon_1 = 1, \mu_2 = 1, \epsilon_2 = (5 - j0,05)$

3. Joonistada langemisnurga sõltuvuse graafik murdumisnurgast laine jaoks, mis levib keskkonnast 1 keskkonda 2 (keskkondade läbitavused on toodud tabelis):

Esimene keskkond	Teine keskkond
a) $\mu_1 = 1, \epsilon_1 = 1$	$\mu_2 = 1, \epsilon_2 = 10$
b) $\mu_1 = 3, \epsilon_1 = 1$	$\mu_2 = 1, \epsilon_2 = 1$
c) $\mu_1 = 1, \epsilon_1 = 2$	$\mu_2 = 1, \epsilon_2 = 3$
d) $\mu_1 = 2, \epsilon_1 = 2$	$\mu_2 = 1, \epsilon_2 = 1$

5. Millistel juhtudel laine faas peegeldusela) ei muutu

b. muutub 180°

c. muutub mingil teisel viisil..

5. Kirjutada elektri- ja magnetvälja vektori komponendid laine jaoks, mis on täielikult peegeldunud kahe dielektriku eralduspinnast.

6. Arvutage pindkihi sügavus järgmiste keskkondade jaoks

a) $\mu = 1$	$\epsilon' = 100$	$\sigma = 2 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\Omega m}$
b) $\mu = 1$	$\epsilon' = 1$	$\sigma = 2 \cdot 10^{-15} \frac{1}{\Omega m}$
c) $\mu = 100$	$\epsilon' = 1$	$\sigma = 1 \frac{1}{\Omega m}$

d) $\mu = 1$	$\epsilon' = 1$	$\sigma = 10^7 \frac{1}{\Omega m}$
--------------	-----------------	------------------------------------

Sagedus on võrdne $f = 10 \text{ MHz}$

- Kui suur on pindkihi paksus vasest liinis, kui lainepikkus on 3 cm; 30 cm; 3 m (vase).
- Kui paks peaks olema vasest pinnakate, et alusmaterjal välja praktiliselt ei mõjutaks (küllaldaseks võib lugeda väljatugevuse vähenemist 10 korda).

10. Lained liinis

- Näidata, et kriitilisel sagedusel f_w kaob E-lainete elektriline ristkomponent ja H-lainete magnetiline ristkomponent, aga kui $f \rightarrow \infty$ kaovad \bar{E} ja \bar{H} pikikomponendid.
- Arvutada välja milline osa välja energiast leevib liinis, kui $f = 0,9f_w$; $f = 0,5f_w$; $f = 0,3f_w$ ja $f = 0,1f_w$.
- Mis on kriitiline režiim laineleivil liinis?
- Miks pikilaine puhul on kriitiline režiim, aga ristlaine puhul ei ole?
- Miks ei saa pikilaine levida metallseintega liinis, kui liini laius on väiksem kui pool lainepikkust?
- Milles seisneb dispersioon?
- Kas on võimalik katseliselt määrata dispersiooni olemasolu liinis?
- Kas lainepikkus muutub, kui laine levib jäigast(tühjast) koaksiaalliinist koaksiaalkaablistesse?
- Millega seletada rist- ja pikilainete lainepikkuste ja levikiiruste erinevust ühel ja samal sagedusel?
- Kuidas sõltuvad levitingimused laine tüübist liinis?
- Millised on rist- ja pikilainete omaduste erinevused?
- Kas ühes ja samas liinis ühel ja samal sagedusel võivad levida üheaegselt erinevate lainepikkustega lained?
- Kui lai peab olema metallist lainejuht, et selles saaks levida laine sagedusega 10 GHz?
- Kui suur on ühe- ja mitmemoodilise optilise kiudliini diameeter kui lainepikkus on 1μ ?
- Kas lainepikkus muutub, kui laine levib koaksiaalliinist lainejuhti?

16. Kas lainepikkus muutub, kui laine levib jäigast(tühjast) koaksiaalliinist koaksiaalkaablistesse?

12. Resonaatorid

1. Kas resonatori resonantssagedus muutub, kui resonatori pikkust suurendada poole laine võrra?
2. Kas resonatori hüvetegur muutub, kui resonatori pikkust suurendada poole laine võrra?
3. Kas magnetiliselt aktiivne element tuleb paigutada lühisresonaatori otsa või veerandlaine kaugusele otsast? Miks?
4. Kas elektriliselt aktiivne element tuleb paigutada lühisresonaatori otsa või veerandlaine kaugusele otsast? Miks?

13. Elektromagnetlaine

1. Kas lainepikkus muutub, kui laine levib õhust dielektrikusse?
2. Milles avaldub dispersioon?
3. Mis on Poyntingi vektor?
4. Antud on laine elektri- ja magnetvälja vektorid. Kuidas määrata laine levi suunda?
5. Kuidas saab muuta elektromagnetlaine levi suunda?
6. Mis on lainetakistus?

Levi erijuhud

1. Mis juhtub laine levil mittehomogeenses keskkonnas?
2. Kuidas levib laine kihiliselt mittehomogeenses keskkonnas?
3. Millele võrdub peegeldustegur peegeldumisel ideaalsest elektrijuhist?
4. Kas laine võib ilma peegelduseta levida ühest keskkonnast teise, erineva dielektrilise läbitavusega keskkonda?
5. Kuidas sõltub pindkihi paksus metallile langeva laine sagedusest?
6. Millised efektid ilmnevad laine levil anisotroopses keskkonnas?

xx. Kirjuta välja kulglaine ja seisulaine.

xy. Kirjuta välja kulg- ja seisulaine kompleksed amplituudid.