

Er. 6.7
321

TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 321

**ТРУДЫ
ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ**

СБОРНИК СТАТЕЙ

IV

Таллин 1972

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 321

1972

УДК 624.04

ТРУДЫ
ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ

IV

Таллин 1972



УДК 624.074.4

Л. Ю. Поверус

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛНОВЫХ
ХАРАКТЕРИСТИК В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ НА БАЗЕ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТИПОШЕНКО

1. Введение

Исследование распространения упругих волн в оболочках производилось до сего времени главным образом на базе линейной теории оболочек. Определены скорости распространения фронтов волн, найдены закономерности распространения разрывов, определены перемещения, усилия, напряжения и прочие величины, характерные для распространения упругих волн деформации.

Геометрически нелинейная теория оболочек применена при изучении динамической устойчивости оболочки. В этой области исследования появился как у нас в Советском Союзе, так и в зарубежных странах ряд работ. Здесь следовало бы упомянуть работы Рота и Клоуспера [1], в которых рассматривается определение осевой критической силы для оболочки и работы школы ученых проф. А.С. Вольмира. Одна из последних, а именно работа В.Борисенко и А.Клопова [2], достойна особого внимания, потому что в ней применяются при рассмотрении движения оболочки в послекритической стадии гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных или так называемые дифференциальные уравнения типа Тимошенко.

В упомянутой работе исследуются осесимметричные упругие деформации кругоцилиндрической оболочки конечной длины, если на оболочку действует продольный удар. Один конец оболочки свободен, другой конец закреплен жестко. Численные

результаты решения получаются при помощи ЭВМ с применением метода сеток.

В последнее время при изучении переходных волновых процессов деформации уделяется намного больше внимания нелинейным явлениям, в том числе геометрически нелинейным задачам. В обзорном докладе на Всесоюзной конференции оболочек и пластин в Баку в 1965 г. Н.А. Алумяз уделит этой проблеме особое внимание и дал при этом ряд направляющих указаний для решения проблемы.

Появился ряд работ, которые были посвящены выводу нелинейных уравнений движения гиперболического типа. Здесь следовало бы в первую очередь упомянуть работу Германа и Арменакаса [3]. В этой работе представлена широко охватывающая теория, которая базируется на нелинейной трехмерной теории упругости. Учтено влияние деформации сдвига и инерции вращения. Из уравнений работы [3] можно, не учитывая влияния начальных напряжений, получить уравнения теории Тимошенко.

Далее следует упомянуть работу Л. Айнола [4]. В этой работе, исходя из обобщенного принципа Гамильтона, выводятся геометрически нелинейные уравнения типа Тимошенко для упругих оболочек. В качестве частного случая получаются линейные уравнения теории Тимошенко и нелинейные уравнения теории Кирхгофа-Лява.

Ряд исследователей, занимающихся не оболочками, а другими объектами, обратил внимание на особые явления, сопровождающиеся конечными деформациями рассматриваемого объекта. Например, Л.А. Поспелов в своей статье [5] рассматривает распространение продольной волны в упругом изотропном твердом теле и находит, что влияние нелинейности уравнений движения вызывает искажение профиля волны конечной амплитуды. Такое искажение может привести к образованию разрывов.

Аналогичным явлениям уделяет внимание Г.В. Витхэм в работе [6]. Применяя при исследовании распространения волн нелинейные уравнения гиперболического типа, он замечает резкие изменения амплитуд, частот и других характерных величин волны. Такое резкое изменение упомянутых величин называется шоком.

Возникновению резких разрывов при исследовании с помощью систем нелинейных гиперболических уравнений посвящены также статьи А. Джеффри [7], [8], работающего в области газовой динамики, но результаты работы которой вызывают интерес и с точки зрения теории оболочек.

В настоящей работе рассматривается распространение упругой нелинейной осесимметричной деформации в цилиндрической оболочке. Посвящено это главным образом изучению влияния геометрических нелинейных факторов на искажение волновых характеристик оболочки. Как известно, при решении нелинейных дифференциальных уравнений метод интегрального преобразования не применим. Перспективными методами являются здесь метод характеристик, вариационные методы и методы численного интегрирования, в частности и метод сеток.

2. Основные соотношения и уравнения

В настоящей работе рассматривается, как и в статье [10], которая была посвящена изучению распространения разрывов, кругоцилиндрическая оболочка с радиусом срединной поверхности R и толщиной $h = \text{const}$. Применяются те же обозначения, что и в упомянутой статье. Повторяем некоторые основные из них:

$u = \frac{u_1}{R}$; $w = \frac{w_1}{R}$; $\xi = \frac{x}{R}$ - безразмерные составляющие перемещения и координата,

$\tau = \frac{c_1 t}{R}$ - безразмерное время,

t - время.

$c_1 = [E / (1 - \nu^2) \rho]^{1/2}$ - скорость распространения продольной волны в оболочке,

E - модуль упругости,

ν - коэффициент Пуассона,

ρ - плотность материала,

ψ - угол поворота нормали срединной поверхности оболочки в плоскости xz ,

$\varepsilon^2 = \frac{h^2}{12R^2}$ - квадрат малого параметра.

Представим безразмерные продольные силы, поперечную силу и изгибающий момент в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 N_{\xi} &= u' + \frac{1}{2}(w')^2 - \nu w, \\
 N_{\theta} &= \nu \left[u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right] - w, \\
 Q_{\xi} &= \varkappa^2 (w' + \psi), \\
 M_{\xi} &= \varepsilon^2 \psi'.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Геометрически нелинейные уравнения движения типа Тимошенко осесимметричной деформации оболочки имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 u'' + w'w'' - \nu w' - \ddot{u} &= 0, \\
 \nu \left[u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right] - w + \left[\left(u' + \frac{1}{2}(w')^2 - \nu w \right) w' \right]' + \varkappa^2 (w'' + \psi') - \ddot{w} &= 0, \\
 \varepsilon^2 \psi'' - \varkappa^2 (w' + \psi) - \varepsilon^2 \dot{\psi}' &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

В работе [10] были выведены условия для разрывов при помощи вариационного принципа. Эти условия позволяют определить скорости распространения фронтовых разрывов. Представим их ниже:

$$\begin{aligned}
 -[\dot{u}] \lambda &= \left[u' + \frac{1}{2}(w')^2 - \nu w \right] \\
 -[\dot{w}] \lambda &= \left[\left(u' + \frac{1}{2}(w')^2 - \nu w \right) w' + \varkappa^2 (w' + \psi) \right] \\
 -[\dot{\psi}] \lambda &= [\psi'] \\
 \left[(u')^2 (\lambda^2 - 1) + \varepsilon^2 (\psi')^2 (\lambda^2 - 1) + (w')^2 \lambda^2 - \frac{3}{4}(w')^4 - \right. \\
 \left. - \varkappa^2 (w')^2 - 2u'(w')^2 \right] &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Особый интерес представляет из приведенных условий четвертое. При помощи условия можем определить скорости распространения фронтов или фронтовых разрывов.

3. Решение уравнений движения

Целью настоящей работы было определение искажения формы волны в полубесконечной оболочке в течение переходного процесса. Подходящим методом решения был бы, конечно, метод

характеристик, но здесь могут возникнуть осложнения после появления разрыва, поэтому был применен в качестве метода решения метод конечных разностей. Метод конечных разностей или метод сеток оказывает некоторый "размазывающий" эффект на решения, но так как в настоящем случае предполагается, что нагрузка, приложенная на торце оболочки, изменяется в течение времени весьма плавно, то принятое дополнительное фронтальное условие описывает действительное положение достаточно хорошо и размазывающий эффект не имеет большого влияния на точность расчета.

Так как рассматривается полубесконечная цилиндрическая оболочка, то для решения уравнений движения, кроме начальных условий, нужно задавать краевые условия и условия на фронте волны.

Начальные условия:

При $\tau = 0$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \tau} = w = \frac{\partial w}{\partial \tau} = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0. \quad (3.1)$$

Краевые условия:

При $\xi = 0$

$$w = \psi = 0 \quad N_{\xi} = \sigma_0 f(\tau). \quad (3.2)$$

Последнее условие с учетом, что $w = 0$ имеет в перемещениях следующий вид

$$\sigma_0 = u' + \frac{1}{2}(w')^2. \quad (3.3)$$

Условия на фронте:

$$u = w = \psi = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0. \quad (3.4)$$

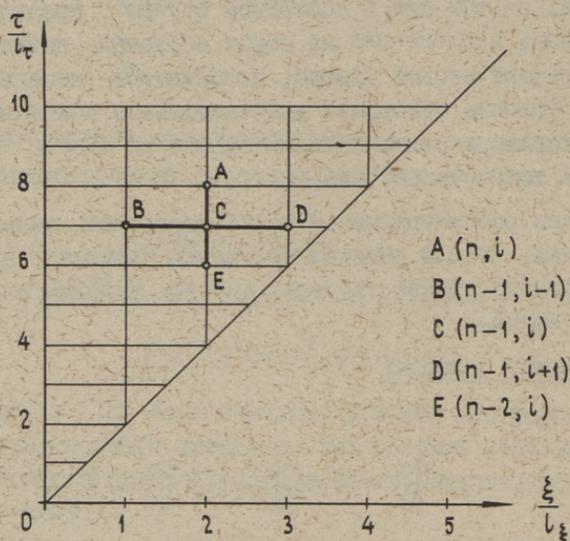
Последние условия из (3.4) называются дополнительными, и их можно поставить в случае плавного приложения нагрузки.

Для применения метода конечных разностей разбиваем безразмерные координаты ξ и τ на безразмерные шаги l_{ξ} и l_{τ} . Чтобы выбранная расчетная схема работала бы устойчиво, шаги сетки должны удовлетворять условие

$$l_\tau \leq l_\xi, \quad (3.5)$$

В нашем случае удобно выбрать

$$l_\tau = 0,5 l_\xi. \quad (3.6)$$



Фиг. 1.

На фиг. 1 на осях ξ и τ показана типичная конечно-разностная сетка, на которой отмечен волновой фронт и представлена схема составления явных разрешающих уравнений в конечных разностях. Представляем их в нижеследующей форме:

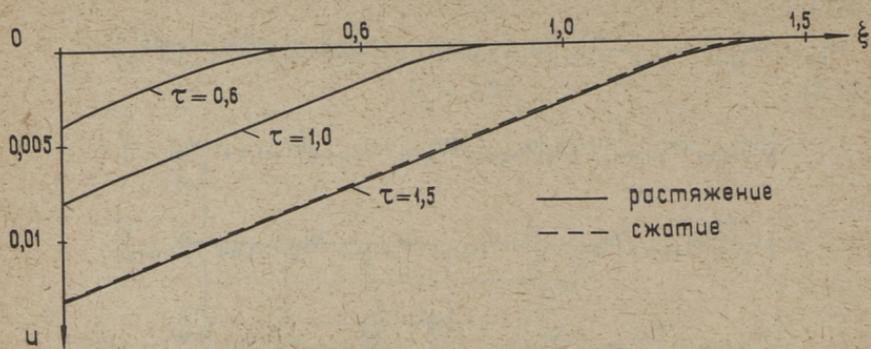
$$\begin{aligned}
 u_{i,n} = & 2u_{i,n-1} - u_{i,n-2} + l_\tau^2 l_\xi^2 (u_{i+1,n-1} - 2u_{i,n-1} + u_{i-1,n-1}) + \\
 & + \frac{1}{2} l_\tau^2 l_\xi^3 (w_{i+1,n-1} - w_{i-1,n-1})(w_{i+1,n-1} - 2w_{i,n-1} + w_{i-1,n-1}) - \\
 & - \frac{\gamma}{2} l_\tau^2 l_\xi^{-1} (w_{i+1,n-1} - w_{i-1,n-1}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{i,n} = & 2W_{i,n-1} - W_{i,n-2} + \frac{\nu}{2} \bar{L}_\tau^{-2} \left[(U_{i+1,n-1} - U_{i-1,n-1}) \bar{L}_\xi^{-1} + (W_{i+1,n-1} - W_{i-1,n-1})^2 \bar{L}_\xi^{-2} \right] - \\
& - \frac{1}{2} (W_{i+1,n-1} + W_{i-1,n-1}) + \frac{1}{2} \bar{L}_\xi^{-3} (U_{i+1,n-1} - 2U_{i,n-1} + U_{i-1,n-1}) (W_{i+1,n-1} - W_{i-1,n-1}) + \\
& + \frac{1}{2} \bar{L}_\xi^{-3} \left[\frac{3}{2} (W_{i+1,n-1} - W_{i-1,n-1})^2 + U_{i+1,n-1} - U_{i-1,n-1} - \nu \bar{L}_\xi (W_{i+1,n-1} + W_{i-1,n-1}) \right] \cdot \\
& \cdot (W_{i+1,n-1} - 2W_{i,n-1} + W_{i-1,n-1}) + \frac{\alpha \varepsilon^2}{2} \bar{L}_\xi^{-2} (W_{i+1,n-1} - 2W_{i,n-1} + W_{i-1,n-1}), \\
\Psi_{i,n} = & 2\Psi_{i,n-1} - \Psi_{i,n-2} + \bar{L}_\tau^{-2} \bar{L}_\xi^{-2} (\Psi_{i+1,n-1} - 2\Psi_{i,n-1} + \Psi_{i-1,n-1}) - \\
& - \frac{\alpha \varepsilon^2}{2} \bar{L}_\xi^{-1} \left[W_{i+1,n-1} - W_{i-1,n-1} + \bar{L}_\xi (\Psi_{i+1,n-1} + \Psi_{i-1,n-1}) \right]. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

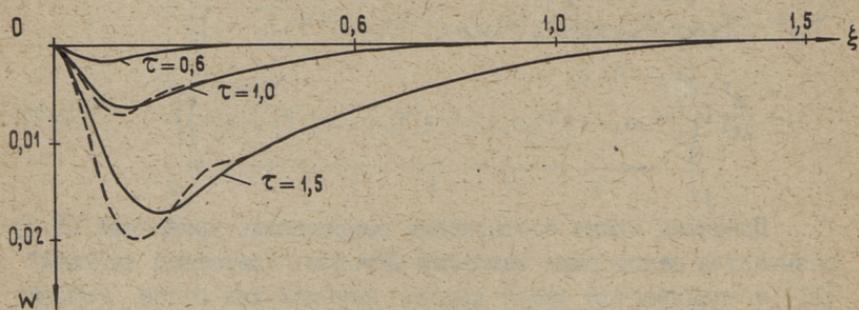
Принятая схема составления разрешающих уравнений (3.7) называется некоторыми авторами методом "прыгающей лягушки" [II] и оценивается среди других методов как более точный.

Уравнениями (3.7) можно определить перемещения в так называемых внутренних точках сетки. Кроме внутренних точек существуют в схеме расчета точки края оболочки ($\xi = 0$), точки фронта ($\xi = \tau$) и прифронтные точки, которые предшествуют непосредственно фронтным точкам.

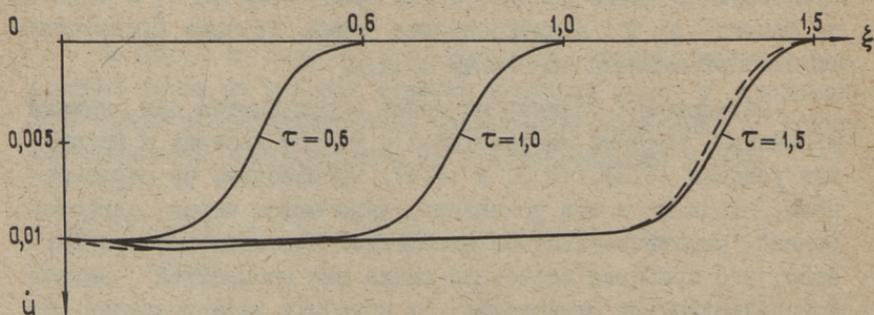
Перемещения упомянутых точек определяются при помощи уравнений, которые составляются с учетом краевых и фронтных условий (3.2), (3.3) и (3.4). Производные по перемещениям, входящие в эти уравнения, выражаются через односторонние конечноразностные отношения. Учитывая обстоятельство, что принятая расчетная схема для нелинейной задачи принципиально не отличается от подобных схем в случае линейной постановки, которые в литературе довольно основательно описаны [I2], [I3], считаем, что дальнейшее подробное описание расчетного алгоритма является излишним. Останемся лишь на некоторых основных этапах расчета.



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Продольная внешняя нагрузка, действующая на торце оболочки, возрастает весьма плавно и выражается следующей зависимостью:

$$\sigma_0 = A [\operatorname{th}(10\tau - 2) - \operatorname{th}(-2)]. \quad (3.8)$$

Подходящий шаг по координате или по времени выбран пробным расчетом. Принято, что шаг по времени $\Delta\tau = 0,025$. Некоторые результаты вычислений представлены на фигурах 2, 3 и 4. Сплошными линиями показаны изменения перемещений u , w и скорости \dot{u} по длине оболочки в случае растягивающей нагрузки, а пунктирными линиями в случае сжимающей нагрузки. Рассматриваются разные моменты времени. В местах, где видна только сплошная линия, нужно предполагать, что сплошная и пунктирная линия сливаются.

Задачу программировала в автокоде "АКИ" А.Мяннил.

Л и т е р а т у р а

1. R.S. Roth, J.M. Klossner. Nonlinear response of cylindrical shells subjected to dynamic axial load. AJAA Journal, 1964, vol. 3, No. 10.

2. В. Борисенко и А. Клопова. Закрытическая деформация в цилиндрической оболочке при ударе. П. М., № 10, 1966.

3. G. Негманн, А.Е. Агменакас. Dynamic behavior of cylindrical shells under initial stress. Proc. 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. 1962, v. 2, N.Y., 1963.

4. Л. Айнולה. Нелинейная теория типа Тимошенко для упругих оболочек. Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, т. 14, № 3, 1965.

5. Л.А. Поспелов. К распространению упругих волн конечной амплитуды. Акуст. журнал том XI, вып. 3, 1965.

6. G.V. Witham. Non-linear dispersive waves. Proc. Royal Society A-238-1393, 1965, p. 139-161.

7. A. Jeffrey. The development of jumps discontinuities in nonlinear hyperbolic systems of equations in two independent variables. Arch. Mat. Mech. Anal., 1963, vol. 14.

8. A. Jeffrey. On the formation of a converging shock wave in a gas of variable density. J. Math. Anal. Appl. 13.1.1965., p. 179-193.

9. A. Jeffrey, T. Taniuti. Non-linear wave propagation. Academic Press, New-York, 1964.

10. А. Лахе, Л. Поверус. Исследование условий распространения разрывов осесимметричной нелинейной деформации цилиндрической оболочки. Изв. АН ЭССР, т.19, серия физ.-матем. наук, № 4, 1970.

11. Чжоу Сун-чжин, Грейф. Численное определение волн напряжений в слоистых средах. Ракетная техника и космонавтика, № 6, 1968.

12. У. Нигул. О методах и результатах анализа переходных волновых процессов изгиба упругой плиты. Изв. АН ЭССР, т. XIV. Серия физ.-мат. и техн. наук, № 3, 1965.

13. Л.Ю. Поверус, Р.К. Рямяет. Распространение упругих волн в трансверсально-изотропной толстой пластине. Труды ТПИ, серия А, № 296, 1970.

L. Poverus

Die Forschung der Veränderung der nichtlinearen
achsensymmetrischen Wellencharakteristiken einer
zylindrischen Schale

Z u s a m m e n f a s s u n g

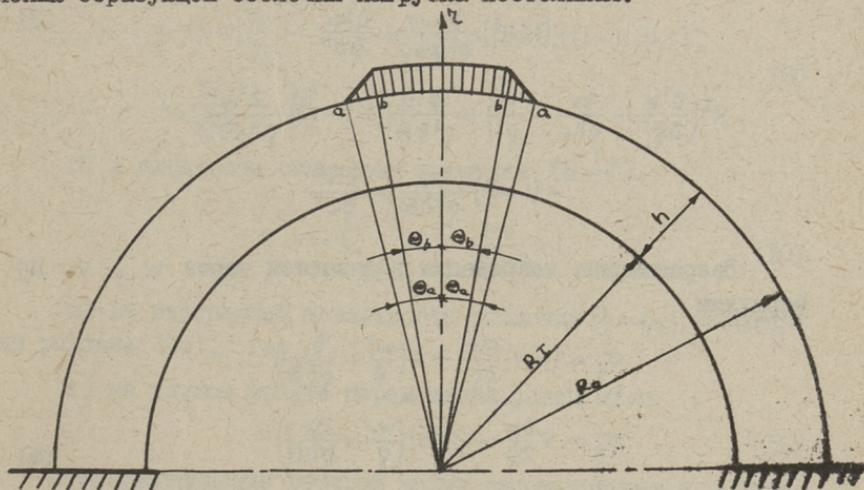
Mit Hilfe der geometrisch nichtlinearen Timoschenko-Gleichungen werden die Bewegungen einer halb-unendlichen zylindrischen Schale erforscht, wobei die Bewegungsgleichungen durch Differenzgleichungen ersetzt und numerische Resultate mit Hilfe einer elektronischen Rechenanlage erreicht werden.

УДК 624.074.4

Р.К. Ряжет, А.И. Мяннил

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ТОЛСТОСТЕННОЙ
 ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

В статье рассматривается распространение упругих волн в толстостенной цилиндрической оболочке, нагруженной быстроменяющейся распределенной нагрузкой (фиг. 1). По направлению образующей оболочки нагрузка постоянная.



Фиг. 1.

Используются следующие обозначения:

E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, λ, μ — константы Ляме, ρ^* — плотность массы, c_1, c_2 — скорости распространения волн расширения и сдвига, u_1, u_2 — перемещения соответственно в направлениях r и θ ; h — толщина оболочки,

r_0, r_1 - радиусы внешней и внутренней поверхности оболочки, $\varrho = r/h$ - безразмерная координата, τ - безразмерное время, $w = u_1/h, v = u_2/h$ - безразмерные перемещения, безразмерные напряжения обозначаются

$$\sigma_\varrho = \frac{\nu}{\lambda} \sigma_r, \quad \sigma_\theta = \frac{\nu}{\lambda} \sigma_\theta, \quad \sigma_z = \frac{\nu}{\lambda} \sigma_z, \quad \tau_{\varrho\theta} = \frac{\nu}{\lambda} \tau_{\varrho\theta}. \quad (I)$$

При этом

$$\begin{aligned} c_1^2 &= (2\mu + \lambda) / \varrho^* = (1-\nu) E / (1+\nu)(1-2\nu) \varrho^*, \\ c_2^2 &= \mu / \varrho^* = E / 2(1+\nu) \varrho^*, \\ k^2 &= c_2^2 / c_1^2 = \frac{1}{2} (1-2\nu) / (1-\nu). \end{aligned} \quad (2)$$

Дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях имеют вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial w}{\partial \varrho} - \frac{w}{\varrho^2} \right) + k^2 \frac{\partial^2 w}{\varrho^2 \partial \theta^2} + (1-k^2) \frac{\partial^2 v}{\varrho \partial \varrho \partial \theta} - \\ - (1+k^2) \frac{\partial v}{\varrho^2 \partial \theta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} k^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{v}{\varrho^2} \right) + \frac{\partial^2 v}{\varrho^2 \partial \theta^2} + (1-k^2) \frac{\partial^2 w}{\varrho \partial \varrho \partial \theta} + \\ + (1+k^2) \frac{\partial w}{\varrho^2 \partial \theta} = \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}. \end{aligned}$$

Безразмерные напряжения выражаются через w, v по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_\varrho &= (1-\nu) \frac{\partial w}{\partial \varrho} + \nu \left(\frac{w}{\varrho} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_\theta &= \nu \frac{\partial w}{\partial \varrho} + (1-\nu) \left(\frac{w}{\varrho} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_z &= \nu \left(\frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{w}{\varrho} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \tau_{\varrho\theta} &= \frac{1}{2} (1-2\nu) \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{v}{\varrho} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

При интегрировании системы уравнений (4) удовлетворяются следующие условия:

а) на внешней поверхности оболочки ($\varrho = \varrho_0$)

$$1. \sigma_i = f_i(\tau), \quad (i = a, b, c), \quad 2. \tau_{\varrho\theta} = 0. \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_a(\tau) &= f(\tau), & \text{при } 0 \leq \theta \leq \theta_b \\ f_b(\tau) &= f(\tau)(\theta_a - \theta)/(\theta_a - \theta_b), & \text{при } \theta_b \leq \theta \leq \theta_a \\ f_c(\tau) &= 0, & \text{при } \theta_a \leq \theta \end{aligned} \quad (6)$$

б) в плоскости симметрии нагрузки ($\theta = 0$)

$$1. v = 0, \quad 2. \tau_{\varphi\theta} = 0, \quad (7)$$

в) на внутренней поверхности оболочки ($\varrho = \varrho_1$):

$$1. \sigma_\varrho = 0, \quad 2. \tau_{\varphi\theta} = 0, \quad (8)$$

которые, представленные через перемещения w, v имеют следующий вид:

а) на внешней поверхности оболочки ($\varrho = \varrho_0$):

$$\begin{aligned} 1. (1-\nu) \frac{\partial w}{\partial \varrho} + \nu \left(\frac{w}{\varrho} + \frac{\partial v}{\varrho \partial \theta} \right) &= f_i(\tau), \quad (i=a, b, c), \\ 2. \frac{\partial w}{\varrho \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{v}{\varrho} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

б) в плоскости симметрии нагрузки ($\theta = 0$):

$$1. v = 0, \quad 2. \frac{\partial w}{\varrho \partial \theta} = 0, \quad (10)$$

в) на внутренней поверхности оболочки ($\varrho = \varrho_1$) действует условие (9с), где $f_c(\tau) = 0$,

г) на первом фронте перемещения равны нулю

$$1. w = 0, \quad 2. v = 0. \quad (11)$$

Распространение упругой волны рассматривается в начале движения, когда первый фронт не успел дойти до прямолинейного края. Уравнения (3) интегрируются методом конечных разностей. Применяется трехмерная сетка [1], [2]. Безразмерные шаги сетки по безразмерным координатам ϱ, θ, τ обозначим соответственно $l_\varrho, l_\theta, l_\tau$. Для обеспечения устойчивости расчетной схемы и для упрощения решения, было принято

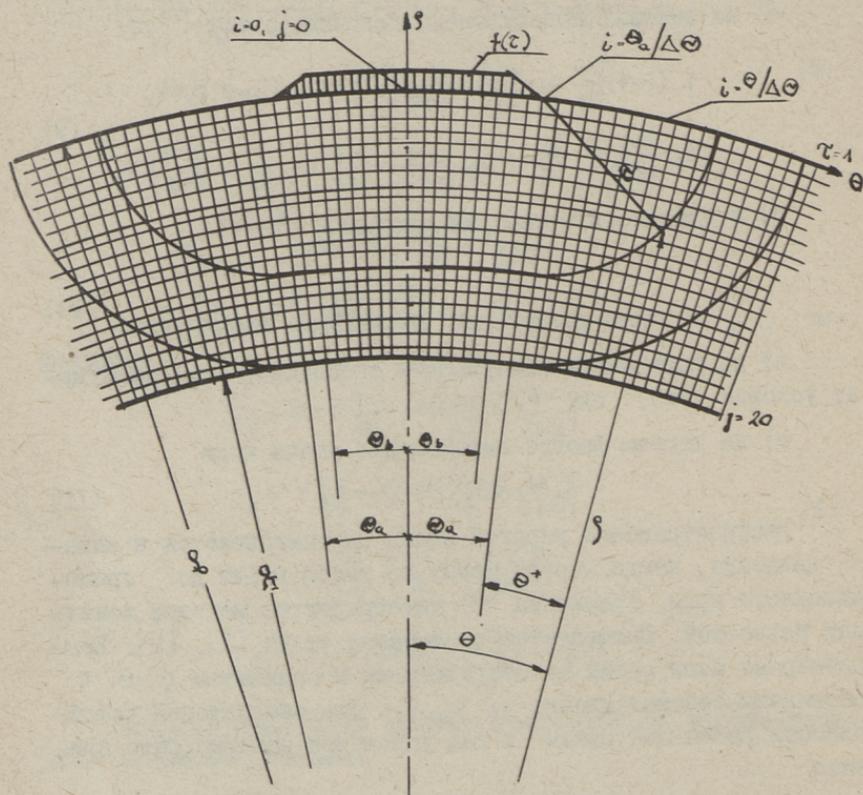
$$l_\tau = \frac{1}{2} l_\varrho. \quad (12)$$

Шаг l_θ переменный, зависящий от координаты ϱ , и выбирается таким образом, что $l_\theta \sim l_\varrho$. Шаг l_ϱ в направлении радиуса был принят

$$l_\varrho = \frac{1}{20}, \quad (13)$$

что обеспечивает численное дифференцирование с практически приемлемой точностью.

В примененном расчетном алгоритме есть условные нечетные временные слои, когда τ/l_τ равно нечетному числу, и четные слои, когда τ/l_τ равно четному числу. Внутренними точками называются все точки сетки, которые не находятся на внешней и на внутренней поверхности оболочки, не на плоскости симметрии и не в первом кругу $\varrho = \text{const}$ от первого фронта. Последние называются прифронтными точками. На сечении оболочки точки обозначены следующим образом (фиг. 2):



Фиг. 2.

и

$$\varrho_j = \varrho_0 - j l_\varrho, \quad \Theta_i = i \Delta \Theta, \quad (I4)$$

$$j = (\varrho_0 - \varrho_j) / l_\varrho, \quad i = \Theta_i / \Delta \Theta. \quad (I5)$$

В точке ϱ_j , Θ_i перемещения обозначаются $w_{ij n}$, $v_{ij n}$. На верхней поверхности оболочки $j = 0$ и на внутренней поверхности оболочки $j = 20$. На плоскости симметрии $i = 0$.

Расчет начинается со слоя $\tau = 3l_\tau$. На слоях $n = 3$, $n = 4$ нет внутренних точек, на всех следующих слоях они имеются. Далее представим расчетные формулы. Вначале даются расчетные формулы для слоев времени $n = \tau / l_\tau \geq 5$.

Формулы для расчета перемещений точки $i j$ получаются путем замены в дифференциальных уравнениях (3) и в условиях (9), (10) производных конечными разностями в первом приближении.

Формулы для внутренних точек:

$$\begin{aligned} w_{ij n} = & 2w_{ij, n-1} - w_{ij, n-2} + \\ & + (l_\tau / l_\varrho)^2 (w_{i, j+1, n-1} - 2w_{ij, n-1} + w_{i, j-1, n-1}) + \\ & + \frac{1}{2} l_\tau^2 / \varrho_j l_\varrho (w_{i, j-1, n-1} - w_{i, j+1, n-1}) - (l_\tau / \varrho_j)^2 w_{ij, n-1} + \\ & + k^2 (l_\tau / \varrho_j \Delta \Theta)^2 (w_{i+1, j, n-1} - 2w_{ij, n-1} + w_{i-1, j, n-1}) + \\ & + \frac{1}{4} (1 - k^2) (l_\tau^2 / \varrho_j l_\varrho \Delta \Theta) (v_{i+1, j-1, n-1} - v_{i-1, j-1, n-1} - \\ & - v_{i+1, j+1, n-1} - v_{i-1, j+1, n-1}) - \\ & - \frac{1}{2} (1 + k^2) (l_\tau^2 / \varrho_j^2 \Delta \Theta) (v_{i+1, j, n-1} - v_{i-1, j, n-1}); \end{aligned} \quad (I6)$$

$$\begin{aligned}
v_{ijn} &= 2v_{ij, n-1} - v_{ij, n-2} + \\
&+ k^2 (l_\tau / l_\rho)^2 (v_{i, j+1, n-1} - 2v_{ij, n-1} + v_{i, j-1, n-1}) + \\
&+ \frac{1}{2} k^2 l_\tau^2 / \rho_j l_\rho (v_{i, j-1, n-1} - v_{i, j+1, n-1}) - k^2 (l_\tau / \rho_j)^2 v_{ij, n-1} + \\
&+ (l_\tau / \rho_j \Delta \Theta)^2 (v_{i+1, j, n-1} - 2v_{ij, n-1} + v_{i-1, j, n-1}) + \\
&+ \frac{1}{4} (1 - k^2) (l_\tau^2 / \rho_j^2 \Delta \Theta) (w_{i+1, j-1, n-1} - w_{i-1, j-1, n-1} - \\
&\quad - w_{i+1, j+1, n-1} + w_{i-1, j+1, n-1}) + \\
&+ \frac{1}{2} (1 + k^2) (l_\tau^2 / \rho_j^2 \Delta \Theta) (w_{i+1, j, n-1} - w_{i-1, j, n-1}).
\end{aligned}$$

В плоскости симметрии ($i = 0$) вычисляются перемещения по формулам:

$$\begin{aligned}
1. \quad v_{0jn} &= 0, \\
2. \quad w_{0jn} &= \frac{4}{3} w_{ijn} - \frac{1}{3} w_{2jn}.
\end{aligned} \tag{17}$$

На первом фронте перемещения равны нулю:

$$\begin{aligned}
1. \quad v_{ijn} &= 0, & 2. \quad w_{ijn} &= 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Расстояние фронта от внешней поверхности оболочки обозначается f . Для точек оболочки, которые удовлетворяют неравенства

$$i \leq \Theta_a / \Delta \Theta, \tag{19}$$

можно написать:

$$f = \tau, \quad \text{если } \tau \leq 1 \quad (n \leq 40). \tag{20}$$

Если

$$i > \Theta_a / \Delta \Theta \tag{21}$$

и

$$\tau \leq \tau_j, \tag{22}$$

где

$$\tau_j = [2(\rho_0 - \rho_1) \rho_0 - (\rho_0 - \rho_1)^2]^{\frac{1}{2}} + [2(\rho_j - \rho_1) \rho_j - (\rho_j - \rho_1)^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{23}$$

тогда расположение фронта на поверхности j определяется в виде суммы двух углов

$$\theta_j = \theta_a + \theta_j^* \quad (24)$$

При этом

$$\begin{aligned} \theta_j^* &= \arcsin(d_j / \rho_j), \\ d_j &= (\tau^2 - a_j^2)^{\frac{1}{2}}, \\ a_j &= j l_\varphi + \frac{1}{2\rho_0} [\tau^2 - (j l_\varphi)^2]. \end{aligned} \quad (25)$$

Если условие (22) не выполнено, т.е.

$$\tau > \tau_j, \quad (26)$$

тогда расположение фронта на поверхности j определяется как сумма трех углов:

$$\theta_j = \theta_a + \theta_j^* + \theta_{j1}, \quad (27)$$

в которой

$$\begin{aligned} \theta_{\tau_j} &= \arcsin(d_{\tau_j} / \rho_j) \\ d_{\tau_j} &= (\tau^2 - a_{\tau_j}^2)^{1/2} \\ a_{\tau_j} &= j l_\varphi + \frac{1}{2\rho_0} [\tau^2 - (j l_\varphi)^2] \\ \theta_{j1} &= 180 (\tau - \tau_j) / \pi \rho_1. \end{aligned} \quad (28)$$

При выводе расчетных формул перемещений прифронтовых точек предполагается, что внешняя нагрузка изменяется во времени плавно.

В прифронтовых точках, индекс которых удовлетворяет условию (19), перемещение w рассчитывается по формуле

$$w_{i,jn} = \left(\frac{\alpha_{jn}}{1 + \alpha_{jn}} \right)^2 w_{i,j-1,n}. \quad (29)$$

Перемещения v рассчитываются при помощи аналогичных формул. На нечетных слоях $\alpha_{jn} = 1/2$ и на четных слоях $\alpha_{jn} = 1$.

Если выполнено условие (21), тогда на поверхности j индекс i прифронтовой точки определяется при помощи неравенств

$$\theta_j / \Delta\theta - 1 \leq i < \theta_j / \Delta\theta, \quad (30)$$

и перемещение определяется по формуле

$$w_{ijn} = \left(\frac{\beta_{ijn}}{1 + \beta_{ijn}} \right)^2 w_{i-1, j, n}, \quad (31)$$

где

$$\beta_{ijn} = \Theta_j / \Delta \Theta - i, \quad (32)$$

обозначает отношение расстояния прифронтной точки от фронта к шагу сетки $l_{j\Theta}$ на поверхности j .

Если

$$\Theta_j / \Delta \Theta - 1 > i, \quad (33)$$

тогда перемещения в прифронтных точках вычисляются по формуле:

$$w_{ijn} = \left(\frac{\alpha_{ijn}}{1 + \alpha_{ijn}} \right)^2 w_{i, j-1, n}, \quad (34)$$

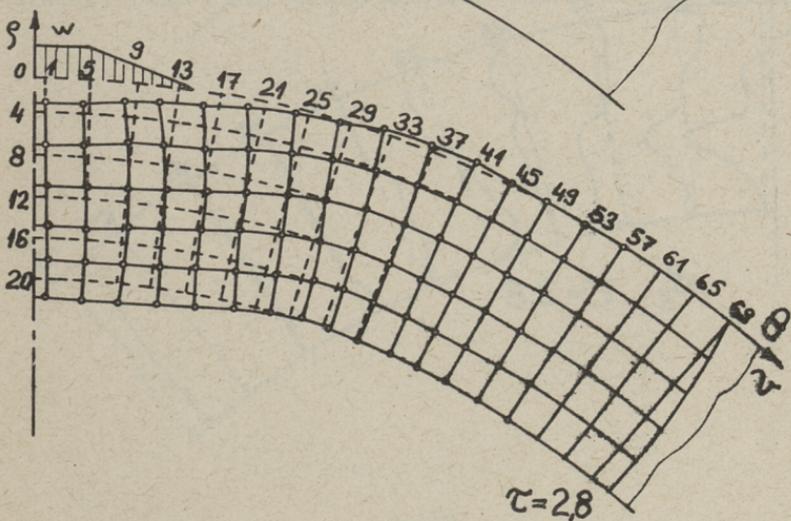
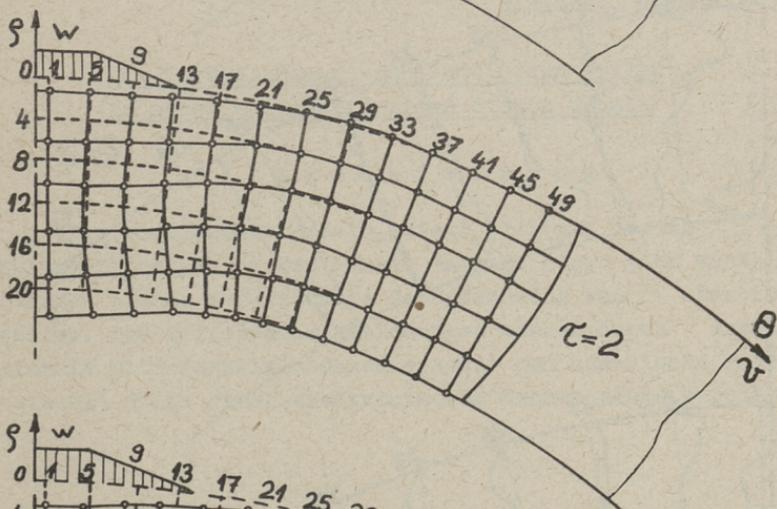
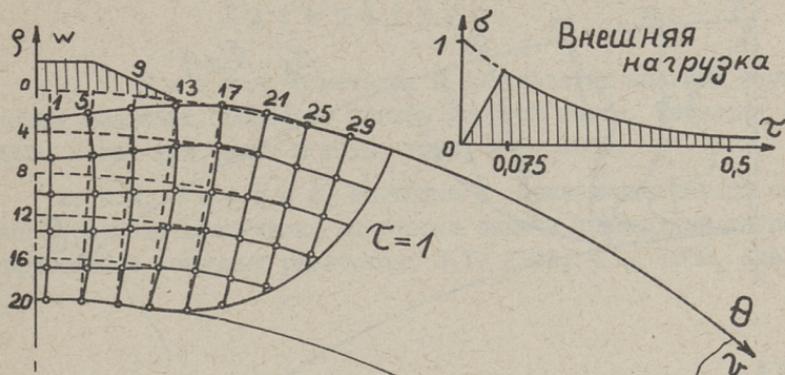
в которой α_{ijn} обозначает отношение расстояния прифронтной точки в направлении радиуса к шагу сетки l_{ρ} .

Перемещения w, v точек верхней поверхности оболочки вычисляются из системы уравнений. Система уравнений составляется на основании условий (9) и для вычисления перемещений применяются приведенные далее формулы, причем принимаем $j = 0$. На основании условий (9) можно составить столько уравнений, сколько имеется неизвестных перемещений на внешней поверхности оболочки. Эти уравнения решаются рекуррентными формулами.

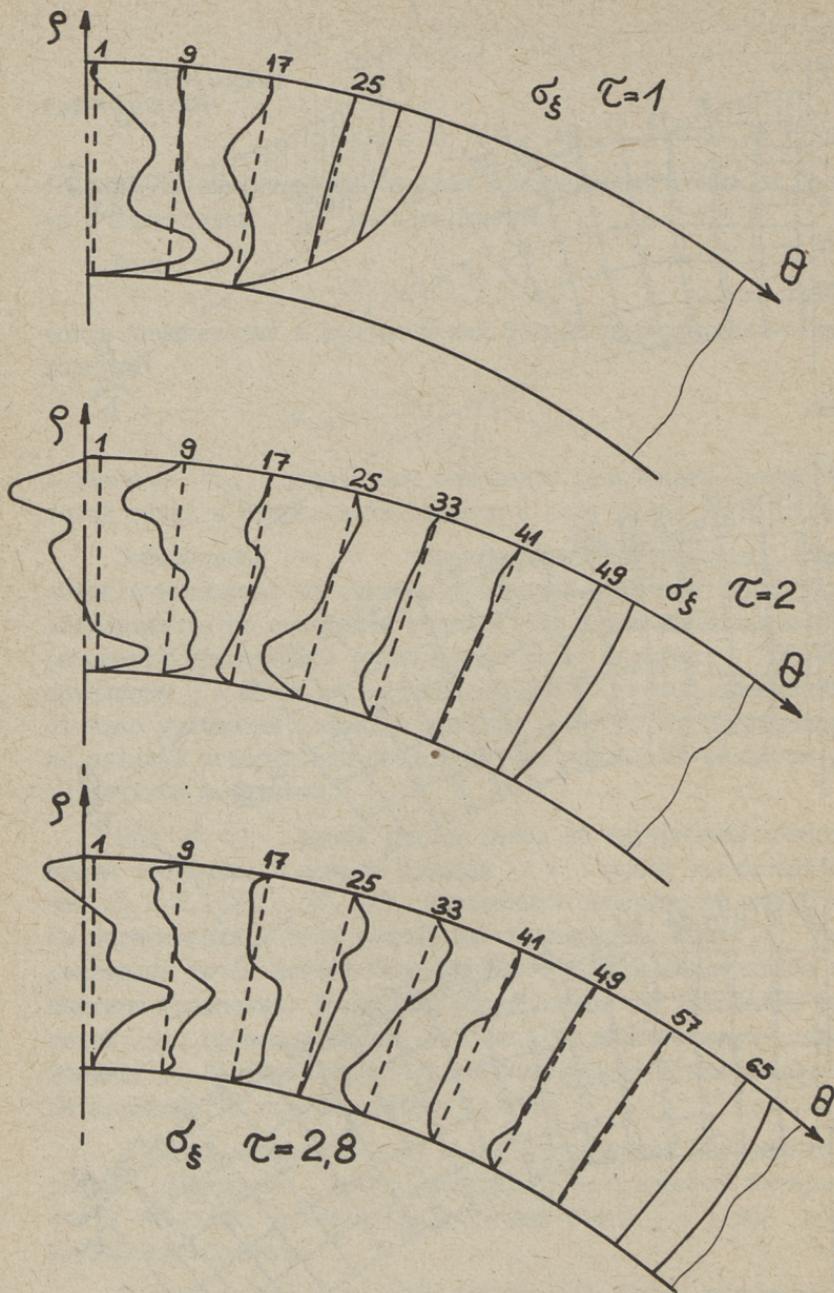
При $\tau < 1$ фронт еще не дошел до внутренней поверхности оболочки. В момент времени $\tau = 1$ фронт достигает точек $i = 0, 1, 2, \dots, \Theta_n / \Delta \Theta$ внутренней поверхности оболочки. Но перемещения в этих точках еще равны нулю. При $\tau > 1$ перемещения точек нижней поверхности оболочки вычисляются из системы уравнений. Уравнения составляются на основании условий (9), причем в первом условии (9) действителен только вариант с. Перемещения точек вычисляются по приведенным выше формулам, в которых индекс $j = 20$.

В слоях времени $n = 3, n = 4$ отсутствуют внутренние точки. Существуют только точки $i, j = 0$ внешней поверхности оболочки, а также прифронтные точки $j = 1$ на поверхности оболочки.

Задача решалась на ЭЦВМ "Минск-22". Часть результатов представлена на фиг. 3 и 4.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Л и т е р а т у р а

1. У. Н и г у л. О методах и результатах анализа переходных волновых процессов изгиба упругой плиты. Известия АН ЭССР, серия физ.-мат. и техн. наук, № 3, 1965.

2. П.М. В а р в а к. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. Некоторые задачи прикладной теории упругости в конечных разностях. Ч.1, 1949; ч.2, 1952, Киев.

R.Räamet, A.Männil

Die Fortpflanzung von elastischen Wellen in einer zylinderförmigen dicken Schale

Z u s a m m e n f a s s u n g

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der in einer zylinderförmigen dicken Schale infolge einer sich schnell ändernden Ladung verursachten Fortpflanzung von elastischen Wellen. Die Differenzialgleichungen werden durch dreidimensionale Differenzgleichungen ersetzt und numerische Endresultate mit Hilfe einer elektronischen Rechenanlage erreicht.

УДК 624.074.4:534.16

Х.Х. Клярди, Л.Ю. Поверус

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКАХ
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В настоящей работе исследуется распространение упругих волн в цилиндрической и сферической оболочках, если они нагружены равномерно распределенной кратковременной нагрузкой. В качестве метода решения используется прямой численный метод, который называется "дискретно-шаговым".

Эта задача была решена несколькими авторами. Мехта и Дэвидс [1] использовали эту же "дискретно-шаговую" численную процедуру. Судзуки [2] использовал преобразование Лапласа. Чжоу Сун-чжин и Грейф [3] решили эту задачу при помощи характеристических уравнений на границах и конечноразностной схемой во всех других точках. Результаты Судзуки соответствуют результатам Чжоу Сун-чжина и Грейфа. Однако численные результаты Мехта и Дэвидса заметно отличаются от результатов, полученных другими авторами.

В настоящей работе использован "дискретно-шаговый" метод (Мехта и Дэвидс), но численные результаты хорошо согласуются с результатами работ [2] и [3]. Следовательно, с точки зрения точности можно считать метод конечных элементов равнозначным другим более сложным методам.

В дальнейшем будет кратко приведен алгоритм расчета цилиндрических и сферических упругих волн, представленный в работе [1].

В случае применения метода конечных элементов вывод общего дифференциального уравнения движения является не-обязательным. Автоматически строятся решения, соответствующие отражению упругих волн напряжения от внутренней и внешней границ с заданными краевыми условиями. Процесс решения основан на использовании упорядоченной последовательности шагов, которая приводит от физических законов к результатам, представленным в численном виде.

Введем постоянные n_1 и n_2 , величина которых характеризует напряженное состояние конструкции.

$$\begin{aligned} n_1 = n_2 = 0 & \text{ - кольцо, плоское напряженное состояние,} \\ n_1 = 0, n_2 = 1 & \text{ - цилиндр, плоская деформация,} \\ n_1 = n_2 = 1 & \text{ - сфера.} \end{aligned} \quad (I)$$

Рассматриваемая конструкция разбивается на конечное число полуцилиндрических или полусферических элементов, толщина dr которых определяется выражением

$$dr = c_e \cdot dt, \quad (2)$$

где dt - произвольно выбранный промежуток времени,
 c_e - скорость распространения упругой волны,
 i -й элемент цилиндра или сферы представлен на
 фиг. I.

Расчет начинается с изучения состояния системы в заданный момент времени t .

Определяются площадь внутренней поверхности A_i i -го элемента, его внешний радиус r_{i+1} и его масса m_i .

Даются функции импульсов внутреннего и внешнего давления

$$p = p(t), \quad q = q(t). \quad (3)$$

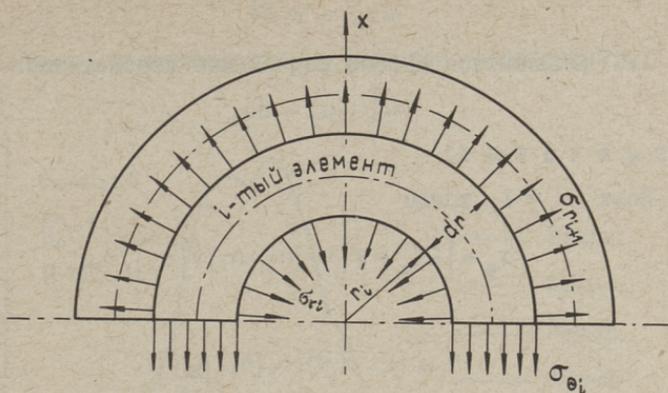
Процесс распространения волны рассчитывается по следующей схеме:

1. Вычисляется радиальная деформация

$$d\epsilon_r = (v_{i+1} - v_i) dt / dr, \quad (4)$$

где v_{i+1} и v_i - скорости точек тела.

2. Вычисляется полная (накопленная) радиальная деформация



Фиг. 1.

$$\varepsilon_r^{i+1} = \varepsilon_r^i + d\varepsilon_r. \quad (5)$$

3. Вычисляется окружная деформация

$$d\varepsilon_\theta = v_i dt / r_i. \quad (6)$$

4. Вычисляется полная окружная деформация

$$\varepsilon_\theta^i = \varepsilon_\theta^i + d\varepsilon_\theta. \quad (7)$$

5. Радиальное напряжение

$$\sigma_r^{i+1} = E_1 [(1 - \nu_2) \varepsilon_r^{i+1} + \nu (1 + \nu_2) \varepsilon_\theta^i], \quad (8)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

$$E_1 = E / \{ (1 + \nu) [1 - (1 + \nu_2) \nu] \}. \quad (9)$$

6. Окружное напряжение

$$\sigma_\theta^i = E_1 [\nu \varepsilon_r^{i+1} + \{1 - (\nu_2 - \nu_1) \nu\} \varepsilon_\theta^i]. \quad (10)$$

7. Применяется уравнение движения

$$dv = [(\sigma_r^{i+1} A_{i+1} - \sigma_r^i A_i) + \sigma_\theta^i (A_i - A_{i+1})] dt / m_i. \quad (11)$$

8. Вычисляется полная скорость

$$v_i = v_i + dv. \quad (12)$$

9. Определяется радиальное перемещение

$$du_r = v_i dt. \quad (13)$$

10. Вычисляется полное радиальное перемещение

$$u_r^i - u_r^{i-1} + du_r. \quad (14)$$

Примечание:

Если $i = I$, тогда

$$\sigma_\theta^1 = [E \varepsilon_\theta^1 + \nu \{1 + (\nu_2 - \nu_1) \nu\} \sigma_r^1] / \nu_1, \quad (15)$$

где

$$\nu_1 = (1 - \nu_2 \nu) [1 + (\nu_2 - \nu_1) \nu]. \quad (16)$$

Если $i = i_m$, тогда

$$\sigma_\theta^{i_m} = [E \varepsilon_\theta^{i_m} + \nu \{1 + (\nu_2 - \nu_1) \nu\} \sigma_r^{i_m+1}] / \nu_1. \quad (17)$$

Эти вычисления повторяются, начиная от $i = I$ до $i = i_m$, и затем происходит повторение вычислений до истечения заданного времени t_i .

Численные примеры

Все расчеты выполнены на ЭЦВМ Минск-22. Задача запрограммирована в коде "МАЛГОЛ".

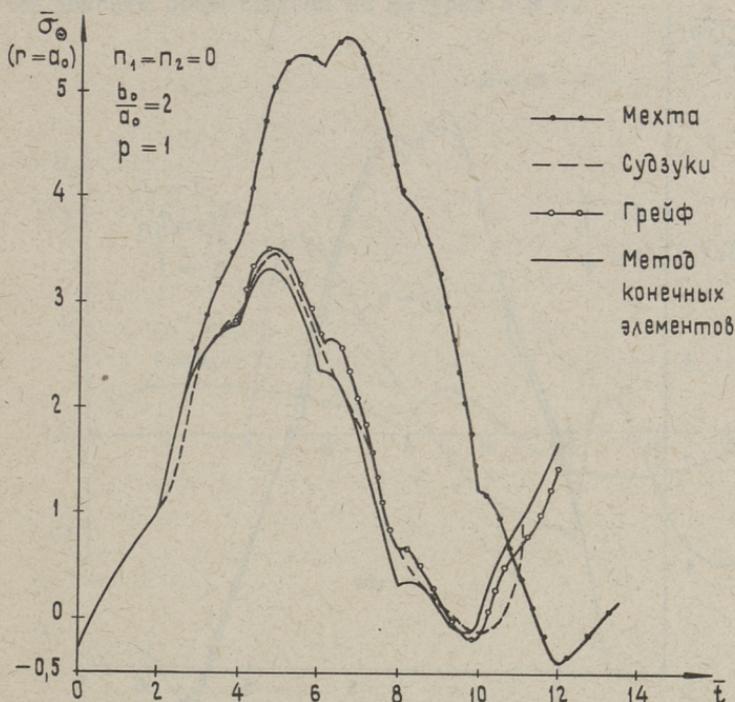
При выполнении численных примеров были использованы следующие безразмерные величины

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \frac{\sigma_r}{p_0}; & \bar{\sigma}_\theta &= \frac{\sigma_\theta}{p_0}; & \bar{\nu} &= \frac{\nu E}{p_0 c_e}; & \bar{t} &= \frac{t c_e}{a_0}; \\ \bar{u}_r &= \frac{u_r E}{p_0 a_0}; & d\bar{r} &= \frac{dr}{a_0}; & \bar{r}_i &= \frac{r_i}{a_0}. \end{aligned} \quad (18)$$

Во всех примерах $\nu = 0,3$.

В качестве первого примера рассматривается пластинка с отверстием ($\nu_1 = \nu_2 = 0$), на внутренней поверхности которой действует внутреннее давление типа Хевисайда. Результаты и некоторые данные представлены на фиг. 2. Отмечается сравнительно хорошее совпадение с результатами Судзуки (получено при помощи интегрального преобразования) и Грейфом (совме-

стный метод характеристик и конечных разностей).

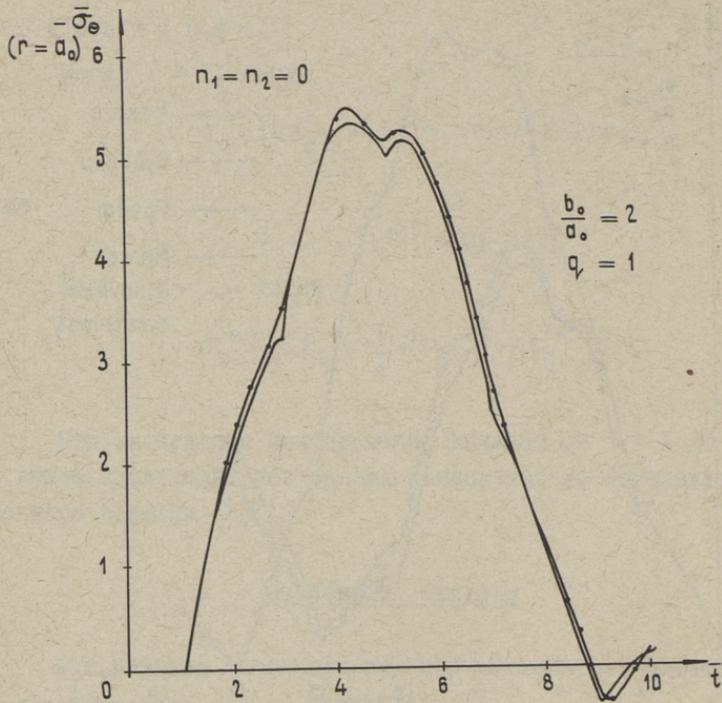


Фиг. 2.

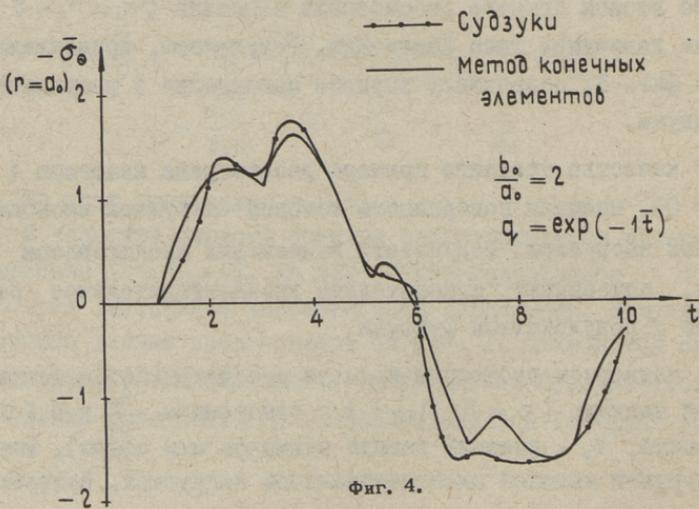
Во втором примере рассмотрена пластина ($n_1 = n_2 = 0$) с внешним давлением типа Кевисайда. Результаты, представленные на фиг. 3, показывают хорошее совпадение с результатами Судзуки.

В качестве третьего примера рассмотрена пластина ($n_1 = n_2 = 0$), внешняя поверхность которой нагружена экспоненциальной нагрузкой. Результаты вычислений представлены на фиг. 4, показывают сравнительно удовлетворительное совпадение с результатами Судзуки.

В четвертом расчетном примере рассматривается толсто-стенный цилиндр ($n_1 = 0; n_2 = 1$) с отношением $\frac{b_0}{a_0} = 5$ (a_0 - внутренний, b_0 - внешний радиус цилиндра или сферы), который нагружен внешней экспоненциальной нагрузкой. Нагрузка

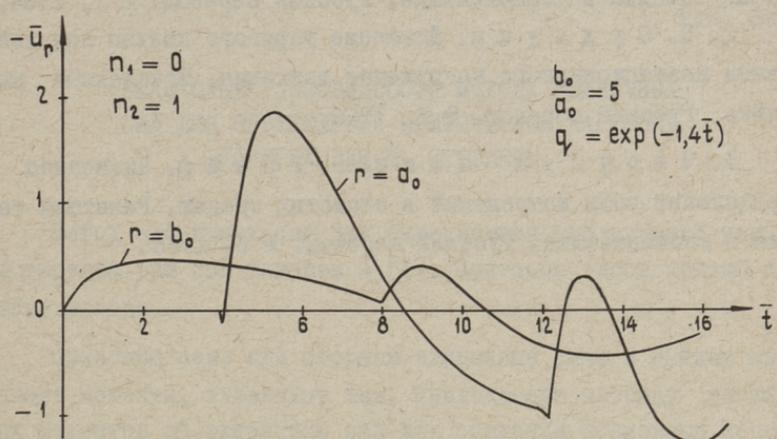


Фиг. 3.

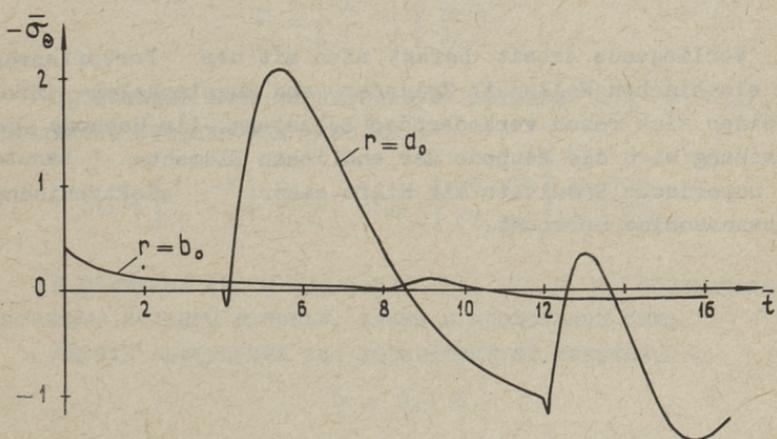


Фиг. 4.

достигает почти нулевого значения, когда фронт волны доходит до внутренней поверхности цилиндра. Некоторые результаты решения представлены на фигурах 5 и 6.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Л и т е р а т у р а

1. П.К. М е х т а, Н.Д э в и д с. Прямой численный метод расчета цилиндрических и сферических упругих волн. Ракетная техника и космонавтика. Русский перевод. № 1, 1966.

2. С. С у д з у к и. Движение упругого кольца под действием нестационарного нагружения давления. Прикладная механика. Русский перевод. № 2, 1966.

3. Ч ж о у С у н - ч ж и н, Р. Г р е й ф. Численное определение волн напряжений в слоистых средах. Ракетная техника и космонавтика. Русский перевод. № 6, 1968.

H.Käerdi, L.Poverus

Die Forschung der Fortpflanzung von elastischen Wellen in Zylinder- und Kugelschalen mit Hilfe der Methode der endlichen Elementen

Z u s a m m e n f a s s u n g

Vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Fortpflanzung von elastischen Wellen in Zylinder- und Kugelschalen infolge einer sich rasch verändernden Belastung. Als Methode der Forschung wird die Methode der endlichen Elemente benutzt und numerische Resultate mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine erreicht.

УДК 624.041.2

Р.Н. Ээк

НЕКОТОРЫЕ РАЗНОВИДНОСТИ МЕТОДА ЕДИНИЧНЫХ
СИЛ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ
УПРУГИХ РАМ И СТЕРЖНЕЙ

Метод единичных сил для определения критической нагрузки упругих рам был изложен в [1]. Повторим здесь кратко сущность метода.

Приложим раме или стержню единичные силы и найдем изгибающие моменты, вызванные ими. Приведенную матрицу изгибающих моментов от единичных сил для создания возможных перемещений обозначим через B_1 и приведенную матрицу изгибающих моментов для определения перемещений характерных точек обозначим через B_2 . Упругие свойства рамы характеризует матрица податливости F , которая для отдельного стержня или участка постоянного поперечного сечения i следующая:

$$F = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} J_0 l_i \\ J_i l_0 \end{vmatrix} \quad (1)$$

Продольные силы характеризуют матрицы G_{VV} и G_{MM} . Для отдельного стержня или участка i

$$G_{VV} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} N_i l_0 \\ N_0 l_i \end{vmatrix}; \quad G_{MM} = \begin{vmatrix} 0,8 & 0,7 \\ 0,7 & 0,8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} N_i l_i^3 J_0^2 \\ N_0 l_0^3 J_i^2 \end{vmatrix} \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) через J_0 , l_0 и N_0 обозначены эталонные моменты инерции, длина и продольная сила.

Работу внутренних сил характеризует матрица D :

$$D = B_1' F B_1 \quad (3)$$

Перемещения отдельных точек рамы характеризуются матрицей V :

$$V = B_2' F B_1. \quad (4)$$

Работу внешних сил характеризует матрица A :

$$A = V' G_{VV} V + B_1' G_{MM} B_1. \quad (5)$$

Параметр критической силы λ находим из условия

$$\text{Det}(D\lambda - A) = 0, \quad (6)$$

и критическую силу N_0 находим по формуле

$$N_0 = \frac{6EJ_0}{\lambda_{\max} l_0^2}. \quad (7)$$

В этом решении возможны следующие изменения.

Формулу (6) для определения параметра λ можно в развернутом виде с учетом выражений (3) - (5) записать так:

$$\text{Det} \left\{ B_1' [F\lambda - (F B_2 G_{VV} B_2' F + G_{MM})] B_1 \right\} = 0. \quad (8)$$

Если $B_1 = B_2$, то матрица в квадратных скобках и матрица B_1 - квадратные матрицы одного и того же порядка. Значения параметра λ не меняются, если матрицу B_1 отбросить. Следовательно, можно параметр λ найти из уравнения

$$\text{Det} [F\lambda - (F B_2 G_{VV} B_2' F + G_{MM})] = 0. \quad (9)$$

Если сжатые стержни разделены на достаточно большое количество участков, то при вычислении работы внешних сил можно влиянием изгибающих моментов на концах участков пренебречь, т.е. считать, что стержни между характерными точками прямые. Тогда формулу (9) можно переписать без матрицы G_{MM} :

$$\text{Det} [F(E\lambda - B_2 G_{VV} B_2' F)] = 0. \quad (10)$$

Опять-таки значения параметра λ не меняются, если в этой формуле отбросить матрицу F перед круглыми скобками. Для определения параметра λ получим следующее уравнение:

$$\text{Det}(E\lambda - B_2 G_{VV} B_2' F) = 0. \quad (11)$$

В формулах (I0) и (II) E — единичная матрица. Следовательно, задача сводится к определению старшего собственного значения матрицы $B_2 G_{VV} B_2' F$.

Формула (II) по существу совпадает с формулой (УШ.17) в [2], полученной другим путем.

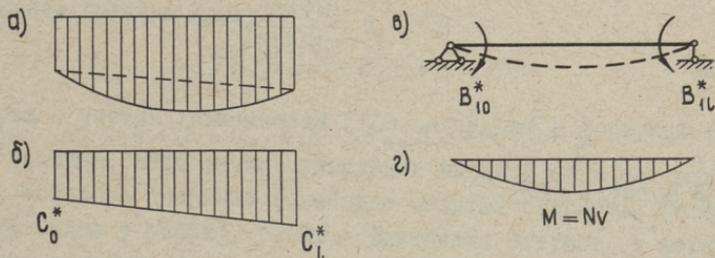
Для статически определимых стержней можно получить более точные формулы на основе идеи С.П.Тимошенко, т.е. не только при вычислении работы внешних сил, но и при вычислении работы внутренних сил следует учитывать усилия, вызванные внешней нагрузкой.

Дадим характерным точкам стержня единичные перемещения перпендикулярно оси стержня. Значения изгибающих моментов, вызванных внешними силами на этих перемещениях, представим в виде матрицы $B_3^* = B_3 N_0$. Матрица действительных перемещений от единичных сил

$$V^* = V \frac{l_0^3}{6 E J_0}, \quad (I2)$$

где матрицу V найдем по выражению (4). Обозначим матрицу изгибающих моментов от внешних сил через G^* . Ее можно найти умножением матриц B_3^* и V^* :

$$C^* = B_3^* V^* = B_3 V \frac{N_0 l_0^3}{6 E J_0}. \quad (I3)$$



Фиг. 1.

Эпюра изгибающих моментов между характерными точками состоит из двух частей (фиг. 1, а): линейная часть (фиг. 1, б), где изгибающие моменты на концах рассматриваемого участка

соответствуют матрице C^* , и парабола третьей степени (фиг. (I, r)), где изгибающие моменты равны произведению продольной силы и перемещения. Перемещения вызваны изгибающими моментами B_2^* на концах рассматриваемого участка.

Обозначим изгибающие моменты на концах стержня, вызванные внешними силами, через C_0^* и C_l^* , изгибающие моменты, вызванные единичными силами, обозначим через B_{10}^* и B_{1l}^* . Выражение изгибающего момента будет следующим (см. [I], формула (I)):

$$M = C_0^* \left(1 - \frac{x}{l}\right) + C_l^* \frac{x}{l} + \frac{Nl^2}{6EJ} \left[B_{10}^* \left(2 \frac{x}{l} - 3 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right) + B_{1l}^* \left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right) \right]. \quad (I4)$$

Элементы δ_{jk}^* матрицы работы внутренних сил D^* найдем по формуле

$$\delta_{jk}^* = \int_0^l \frac{M_j M_k}{EJ} dx. \quad (I5)$$

Подставив в формулу (I5) выражения изгибающих моментов соответственно (I4) и обобщив результат на всю систему, получим матрицу работы внутренних сил

$$D^* = D \frac{N_0^2 l^7}{216(EJ_0)^2}, \quad (I6)$$

где

$$D = C'FC + C'G_{mm}B_1 + B_1'G_{mm}C + B_1'KB_1. \quad (I7)$$

В формуле (I7)

$$C = B_3V \quad (I8)$$

и для отдельного участка i

$$K = \begin{vmatrix} 32 & 31 \\ 31 & 32 \end{vmatrix} \left\| \frac{N_i^2 l_i^5 J_0^3}{70 N_0^2 l_0^5 J_i^3} \right. \quad (I9)$$

Матрицы F и G_{mm} найдем по формулам (I) и (2).

Матрицу работы внешних сил A найдем по формуле (5).

Параметр критической силы λ_{\max} определим из выражения

$$\text{Det}(A\lambda - D) = 0 \quad (20)$$

и критическую силу N_0 найдем по формуле (7).

Для нахождения матрицы B_3 не обязательно построить эпюры изгибающих моментов, вызванных продольными силами на единичных перемещениях. Вместо этого можно матрицу B_3 найти по следующей формуле:

$$B_3 = B_2 G_{vv} \quad (21)$$

Аналогично формулам (9) и (II) можно и для этого способа вывести упрощенные формулы.

Рассмотрим и здесь случай, когда $B_1 = B_2$. Выпишем формулу (20) в развернутом виде с учетом выражений (4), (5), (17), (18) и (21). Отбросив матрицы B_1 , получим

$$\text{Det} [(FHF + G_{mm})\lambda - (FHFHF + FNG_{mm} + G_{mm}HF + K)] = 0. \quad (22)$$

В формуле (22)

$$H = B_2 G_{vv} B_2' \quad (23)$$

Если считать, что изгибающие моменты между характерными точками меняются линейно, то в формуле (22) можно отбросить слагаемые, где фигурируют матрицы G_{mm} и K . После упрощения получим формулу

$$\text{Det}(G_{vv}\lambda - B_2'FB_2) = 0, \quad (24)$$

которая с учетом зависимости (21) совпадает с формулой (II).

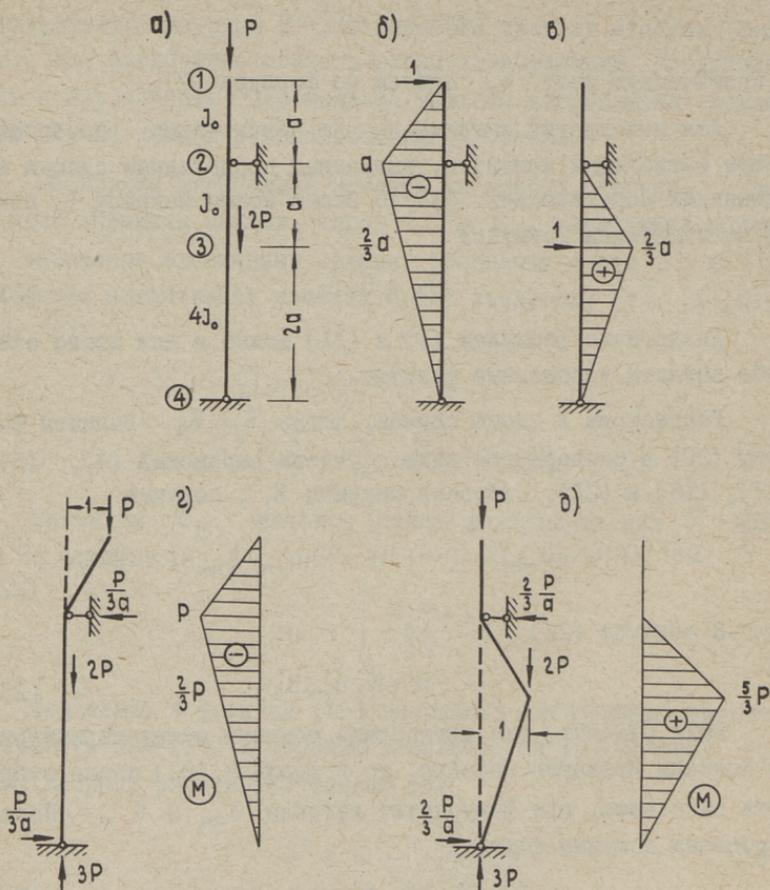
Наконец, если точка приложения внешней силы не может иметь бокового смещения (свободно опертый стержень, нагруженный силой у опоры), то B_3 — единичная матрица, и формула (24) приобретает следующий вид:

$$\text{Det}(G_{vv}\lambda - F) = 0. \quad (25)$$

Пример:

В качестве примера определим критическую силу для стержня, изображенного на фиг. 2, а. В расчетах $l_0 = a$ и $N_0 = P$.

Эпюры изгибающих моментов от единичных сил, приложенных перпендикулярно к стержню, изображены на фиг. 2, б и 2, в.



Фиг. 2.

Из них для получения первого приближения (матрица B_1) используется только эпюра 2, б; для построения матрицы B_2 нужны обе эпюры. Эпюры изгибающих моментов, вызванных внешней нагрузкой при единичных перемещениях характерных точек, изображены на фиг. 2, г и 2, д. По этим эпюрам построим матрицу B_3 но, как уже сказано, матрицу B_3 можно получить и по формуле (2I) из матрицы B_2 .

Соответственно этим эпюрам матрицы B_1 , B_2 и B_3 следующие (нулевые строчки - первая и четвертая - пропущены):

$$B_1 = \begin{vmatrix} -3 \\ -2 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{3}; \quad B_2 = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{3}; \quad B_3 = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{3}. \quad (a)$$

$$P_{кр} = \frac{6 E J_0}{\lambda_{\max} a^2} = k \frac{E J_0}{a^2} \quad (г)$$

Для коэффициента k отдельные формулы дадут следующие значения:

формула (8) : $k = 0,691244$

формула (9) : $k = 0,655015$

формула (20): $k = 0,661622$

формула (22): $k = 0,653523$

формула (II) или (24): $k = 0,699754$.

По принципам энергетического метода самым точным из них является наименьшее значение: $k = 0,653523$ (формула (22)). Погрешность других формул по сравнению с этим значением: формула (9) - 0,23%, формулы (8) и (20) (первое приближение) - 5,78 % и 2,29 %; формула (II) (упрощенная формула) - 7,04 %.

Л и т е р а т у р а

1. Р.Н. Э в к. Определение критической нагрузки и частот собственных колебаний упругих рам методом единичных сил. Труды ТПИ, серия А, № 297, Таллин, 1970.

2. А.Ф. С м и р н о в, А.В. А л е к с а н д р о в, Н.Н. Ш а п о ш н и к о в, Б.Я. Л а щ е н и к о в. Расчет сооружений с применением вычислительных машин. Стройиздат, М., 1964.

Some Variants of Unit Force Method for
Determinating Critical Loads for Elastic
Frames and Bars

S u m m a r y

On the base of the method, described in /1/, some simplified matrix formulae for determinating critical loads for elastic frames and bars are derived. A matrix variant of the Timoshenko method is described. For estimating accuracy of various formulae an example is given.

УДК 532.72.001.57:681.3

Л.И. Руга, Ю.А. Старкопф

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЕЙ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, ПРИ ПОМОЩИ ЭЦВМ

Каждое поле энергии обусловлено перемещением энергии, имеющим при всех полях одинаковую причину и механизм. Перенос энергии в конечном счете всегда происходит в сторону меньшей объемной плотности ее.

Под общим названием "поле энергии" можно рассматривать разные виды переноса различных субстанций, как, например, поток тепла или электричества, перемещение различных частиц в воздухе или в воде (диффузия), распространение ударной волны в массиве или в конструкции, и т.д.

Многие виды явления течения (поля энергии) описываются одним и тем же дифференциальным уравнением, т.е. они подобны. Учитывая критерии подобия можно при помощи одного поля (модели) с большим успехом исследовать и описать все остальные. В качестве модели целесообразно применить электрическое поле, которое достаточно подробно обследовано и для которого имеется сравнительно точная измерительная аппаратура.

В связи с развитием вычислительной техники все больше и больше находит применение ЭЦВМ для решения дифференциального уравнения, описывающего данную группу полей энергии. При решении дифференциального уравнения с частными производными удобно применить метод сеток, вполне соответствующий принципу работы дискретной ЭЦВМ.

Особенно достоверные результаты дает одновременное применение модельного поля и ЭЦВМ.

Авторы настоящей статьи одновременно применили электрическую модель в ЭЦВМ для исследования турбулентной диффузии вещества в прямолинейном потоке при условиях стационарного поступления на оси водотока. Некоторые результаты моделирования опубликованы [1,2]. Настоящая статья дает основные результаты исследования этой проблемы, полученные при помощи ЭЦВМ.

Процесс перемешивания вещества с водой реки при малой глубине описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$K_y \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - v_x \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где S — показатель концентрации вещества,
 K_y — коэффициент турбулентной диффузии,
 v_x — скорость течения потока.

Для решения уравнения (1) на ЭВМ Минск-22 при различных ширинах впуска была составлена программа. Перед составлением программы уравнение (1) переписали в следующем виде:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{K_y}{v_x} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \quad (1a)$$

или

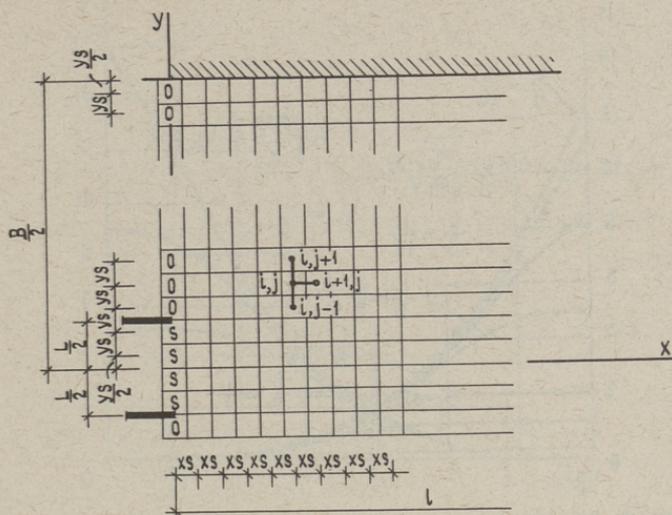
$$\frac{\partial S}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}, \quad (2)$$

где

$$a^2 = \frac{K_y}{v_x} = \text{const.}$$

Для определения концентрации вещества $S = s(x, y)$ методом сеток, река была разбита на конечные элементы шагом соответственно xS и yS (фиг. 1). Для конечного элемента было выведено разностное уравнение.

В точке $(i+1, j)$ (фиг. 2) концентрация выражается разностным уравнением

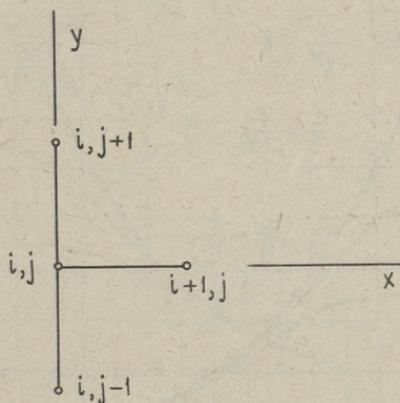


Фиг. 1. L — ширина впуска

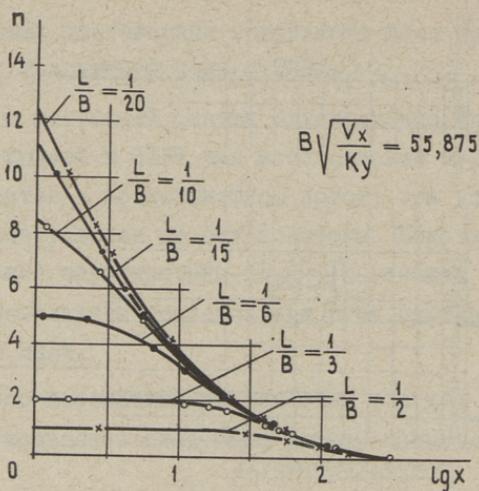
B — ширина реки

$S = S_{x=0}$ — начальная концентрация

l — длина исследуемого участка



Фиг. 2.



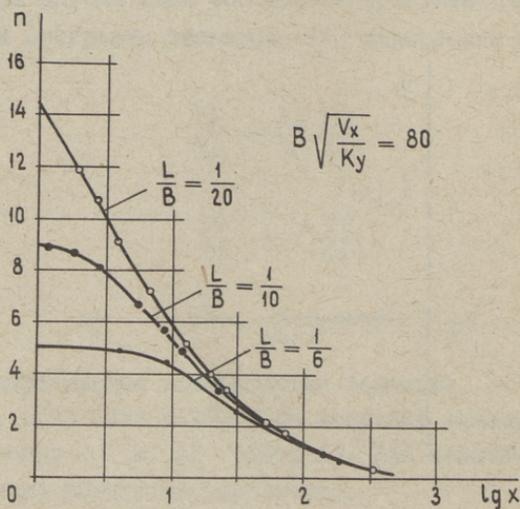
Фиг. 3. Изменение максимума концентрации вещества в зависимости от координаты и ширины впуска.

На фигуре:

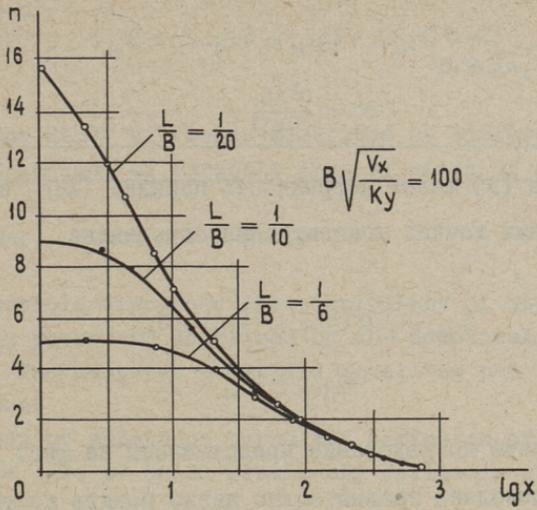
$$n = \frac{S_{\max}}{S_0} - 1 \quad \text{где}$$

S_{\max} — значение максимума концентрации

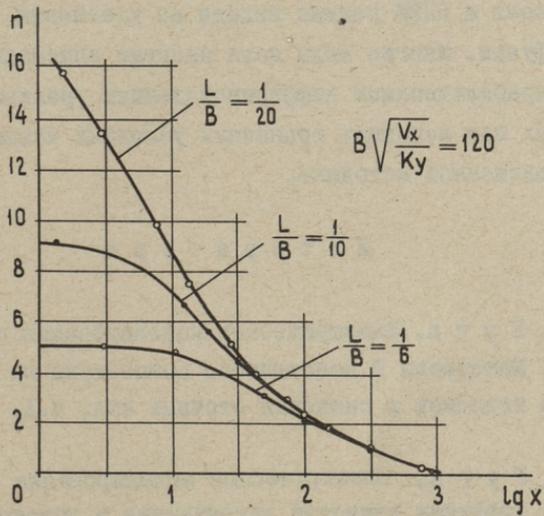
$$S_0 = S_{x=0} \frac{L}{B}$$



Фиг. 3а.



Фиг. 36.



Фиг. 3в.

$$S_{i+1,j} = \sigma (S_{i,j+1} - 2S_{i,j} + S_{i,j-1}) + S_{i,j}, \quad (3)$$

где
$$\sigma = \frac{a^2 \chi S}{(yS)^2}.$$

Формула (3) имеет погрешность порядка $(\chi S)^4$, если $\sigma = \frac{1}{6}$.

В крайних точках концентрация определена разностным уравнением

$$S_{i+1,j} = \sigma (S_{i,j-1} - S_{i,j}) + S_{i,j}, \quad (4)$$

то есть
$$S_{i,j+1} = S_{i,j}.$$

Результаты исследования представлены на фиг. 3.

ЭЦВМ позволяет сравнительно легко решить поставленную задачу и при изменяющемся по течению живом сечении реки или канала. Возможно и учесть кривизну реки, различное распределение скорости течения в живом сечении, коэффициент турбулентной диффузии K_z и другие факторы.

Поставленная нами задача о применении одновременно модельного поля и ЭЦВМ решена исходя из уравнения турбулентной диффузии. Многие виды поля энергии описываются аналогичными параболическими дифференциальными уравнениями, решение которых при заданных граничных условиях можно провести по вышеизложенной методике.

Л и т е р а т у р а

1. Л.И. Р у г а. Электрическое моделирование смешения сточных вод. Материалы III всесоюзного симпозиума по вопросам самоочищения водоемов и смешения сточных вод, ч. I. Москва-Таллин, 1969.

2. Л.И. Р у г а. Электрическое моделирование процесса турбулентной диффузии вещества загрязнения в водотоках. Сб. статей по санитарной технике УП. Труды ТПИ, серия А, № 309, Таллин, 1971.

The Study of Fields Described by Differential
Equations of Parabola Type by means of a Computer

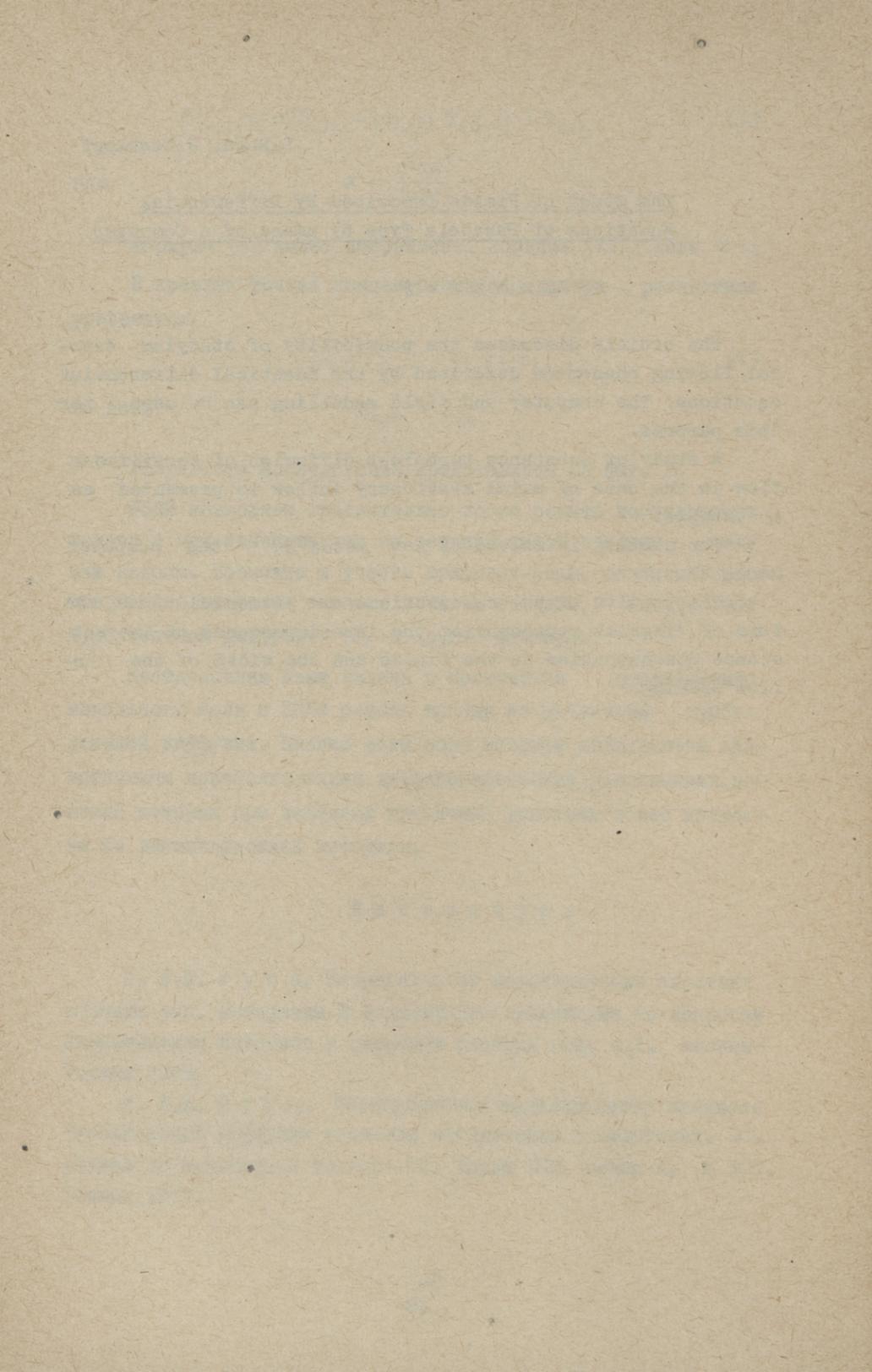
S u m m a r y

The article discusses the possibility of studying several flowing phenomena described by the identical differential equations. The computer and field modelling can be used for this purpose.

A study of substance turbulent diffusion of rectilinear flow in the case of axial stationary inflow is presented as an example.

The problem is solved by net metod on the computer Minsk-22.

The results of the calculations are presented in the form of diagrams representing the interdependence of the substance concentration in the fields and the width of the inflow opening.



УДК 624.072

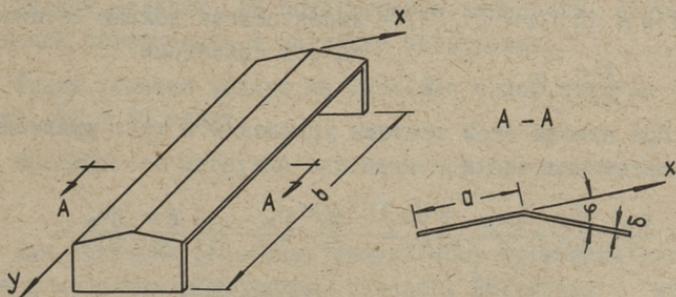
И.И. Ааре, К.А. Лооритс

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ
 СКЛАДОК ПОКРЫТИЯ

Наряду с прочностью и жесткостью одним из критериев работоспособности тонкостенных складчатых конструкций является их общая устойчивость. Хотя в истории применения складок покрытия не было случаев потери устойчивости [1], данный вопрос имеет особую важность для проектирования складчатых конструкций.

Применяя нелинейную теорию расчета металлических призматических складок, описанную в статье авторов [2], можно наряду с перемещениями и напряжениями складки определить и её критическую нагрузку.

В качестве примера рассмотрим расчет симметричной двугранной складки, которая не имеет бортовых балок (фиг. 1).



Фиг. 1. Схема двугранной складки.

$$a = 100 \text{ mm}$$

$$b = 1000 \text{ mm}$$

$$\delta = 1 \text{ mm}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 0,2 \quad (\varphi = 22^\circ 38')$$

$$l = 196,1 \text{ mm}$$

$$f = 19,6 \text{ mm}$$

Следует отметить, что такие складки из-за слишком маленькой жесткости практического значения не имеют, но из-за простоты такая задача хорошо подходит для контроля алгоритма.

Параметры рассчитываемой складки выбраны так, чтобы результаты расчета легко проверялись экспериментом:

$$a = 10 \text{ см}, \quad b = 100 \text{ см}, \quad c = 0,1 \text{ см}, \quad \varphi = 22^{\circ}38'.$$

Материалом граней складки предполагается использовать алюминиевый сплав Д16-Т, у которого модуль упругости $E = 0,7 \times 10^6 \text{ кг/см}^2$, а коэффициент Пуассона $\mu = 0,25$.

Внешняя нагрузка — равномерно распределенная нагрузка, действующая по направлению нормали срединной поверхности граней.

Принимая во внимание симметричность конструкции и характер нагрузки, можем граничные условия представить в следующем виде:

$$a) \text{ на краю } x = 0 \quad M_x = 0 \quad (1)$$

$$R_x = 0 \quad (2)$$

$$\sigma_x = 0 \quad (3)$$

$$\tau = 0 \quad (4)$$

б) на краю $x = a$ (линия соприкосновения граней)

$$\delta \sigma_x \cdot \text{tg } \varphi/2 - R_x = 0 \quad (5) \text{ — условие равновесия внутренних усилий на линии облома}$$

$$\tau = 0 \quad (6)$$

$$u + w \cdot \text{tg } \varphi/2 = 0 \quad (7) \text{ — линия облома должна оставаться на оси симметрии}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

При помощи этой системы уравнений и трех уравнений равновесия пластинки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (10)$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q_z + \delta \left(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad (\text{II})$$

где

$$D = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)}; \quad (\text{I2})$$

найдем все неизвестные величины в выражениях перемещений точек срединной поверхности складки.

В связи с большим объемом вычислительной работы для решения двугранных симметричных складок составлена программа для ЭЦВМ "Минск-22" в алгоритмическом языке МАЛГОЛ-22. Из-за небольшой емкости МОЗУ "Минск-22" вся программа разделена на 7 подпрограмм.

В первой подпрограмме составляется и решается система уравнений граничных условий (I) ÷ (8).

II-IV подпрограммы составляют систему кубических уравнений относительно неизвестных параметров нормальных перемещений. Для этого используются уравнения равновесия (9) ÷ (II).

В пятой подпрограмме эта система кубических уравнений решается методом Ньютона при конкретной величине нагрузки, причем в качестве первого приближения используется решение задачи в линейной постановке [3].

VI подпрограмма вычисляет перемещения точек срединной поверхности складки, VII подпрограмма вычисляет напряжения срединной поверхности и изгибные напряжения.

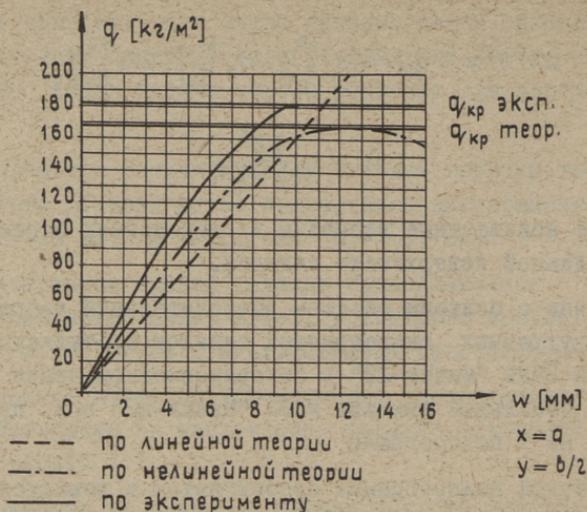
Время решения задачи на ЭЦВМ для одной степени нагрузки 40 ÷ 60 минут.

Критическая нагрузка определяется при помощи кривой

$$w = f(q_z).$$

Для проверки расчетных результатов проведены эксперименты с моделями двугранных складок. Параметры моделей такие же, как и у математической модели.

Загрузка моделей проводилась на специальном стенде при помощи резиновых воздушных подушек. При таком нагружении обеспечена гидростатическая нагрузка.



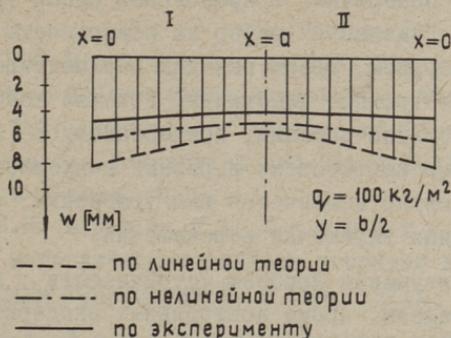
Фиг. 2. Сравнение теоретических и экспериментальных результатов.

На фиг. 2 изображены графики $w = f(q_z)$ для точки складки $x = a$, $y = b/2$. На графике сравниваются расчетные результаты, вычисляемые при помощи линейной теории [3] и нелинейной теории с результатом экспериментов.

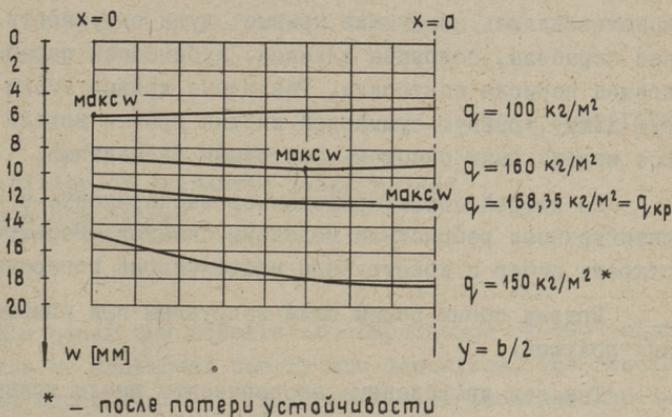
Как видно, конфигурация экспериментальной кривой сравнительно хорошо совпадает с конфигурацией кривой, полученной при помощи нелинейной теории. Экспериментально найденные перемещения отличаются от теоретических примерно на 15–20 %, экспериментальная критическая нагрузка превышает теоретическую на 6–7 %.

На фигуре 3 представлены эпюры нормальных перемещений w при нагрузке $q_z = 100$ кг/м² в сечении $y = b/2$. Как видно, экспериментально найденная эпюра совпадает гораздо лучше с эпюрой, вычисленной по нелинейной теории. По линейной теории вычисленная эпюра имеет качественно другую конфигурацию.

Вычисления по нелинейной теории показывают, что при малых нагрузках максимальные прогибы на краю $x = 0$. Когда нагрузка приближается к критической, зона максимальных перемещений постепенно движется к линии облома. В момент, когда она достигает линии $x = a$, происходит потеря устойчивости (фиг. 4).



Фиг. 3. Сравнение теоретических и экспериментальных эпюр перемещений w .



Фиг. 4. Эпюры w при различных нагрузках по нелинейной теории.

Описанный пример дает возможность сделать следующие выводы:

1. Нормальные перемещения срединной поверхности складки при сравнительно малых нагрузках настолько велики, что применение линейной теории не оправдывается.

2. Расчетные результаты, вычисленные при помощи нелинейной теории сравнительно хорошо совпадают с экспериментальными результатами.

При наличии поперечных и продольных ребер удобно пользоваться методом "смазанья" ребер на поверхность граней складки. Таким образом, грани складки рассматриваются как конструктивно ортотропные пластинки. Решение таких складок, в принципе, аналогично решению, приведенному в [2], но в связи с различными жесткостями в разных направлениях граней складки несколько изменяется вид уравнений равновесия и аппроксимационных выражений перемещений.

Для общего изучения проблем устойчивости складчатых конструкций проведены, кроме контрольных экспериментов с двугранными складками, еще две серии экспериментов.

В первой серии испытывались наряду с четырехгранной складкой ряд цилиндрических оболочек с одинаковыми размерами в плане. В качестве направляющей криволинейной части использовались следующие кривые: дуга окружности, квадратная парабола, половина эллипса, кубическая парабола и половина периода синусоиды. Различные кривые имели одинаковую длину, равную суммарной ширине граней модели складки. Все модели были снабжены бортовыми элементами.

Во второй серии проводились эксперименты с четырех- и пятигранными ребристыми моделями складок. Варьировались жесткость ребер и конструкция места облома поперечных ребер.

Модели обеих серий были загружены при помощи воздушных подушек.

Так как проведенные эксперименты имели только качественный характер, излагаем только основные выводы:

1. При одинаковых размерах в плане и одинаковом расходе материала критическая нагрузка складки значительно (в 2-3 раза) выше критической нагрузки цилиндрических оболочек. Из разных моделей цилиндрических оболочек самую высокую критическую нагрузку и самые маленькие перемещения имела модель с направляющей линией кубической параболы.

2. При помощи поперечных и продольных ребер можно значительно увеличивать общую устойчивость и жесткость складок при относительно малом расходе металла.

3. Увеличение изгибной жесткости поперечных ребер в области их облома значительно увеличивает общую устойчивость ребристых складок.

Л и т е р а т у р а

1. J. E. G o l d b e r g, A. V. S e t l u r. Stability of Long-Span Folded Plate Structures. "Symposium on problems of interdependence of Design and Construction of Large-Span Shells for Industrial and Civil Buildings." USSR, Leningrad, 6-9 Sept. 1966.

2. И. И. А а р е, К. А. Л о о р и т с. О расчете призматических металлических складок покрытия в нелинейной постановке. Труды ТПИ, серия А, № 314, 1971.

3. К. А. Л о о р и т с. О расчете металлических складок покрытия. "IУ конференция молодых ученых и специалистов Прибалтики и Белорусской ССР по проблемам строительства". Строительные конструкции. Тезисы доклада. Рига, 1971.

U. Aare, K. Loorits

Stability of Prismatic Metal Folded Plate Structures

Summary

In this paper the results of computation of two slabs folded plate by nonlinear theory are described. The results are checked experimentally. This paper also includes the main points of experimental investigations of cylindrical shells and folded plates.

С о д е р ж а н и е

	Стр.
1. Л.Ю. Поверус. Исследование изменения осесимметричных волновых характеристик в цилиндрической оболочке на базе геометрически нелинейной теории типа Тимошенко.	3
2. Р.К. Ряжет, А.И. Мяннил. Распространение упругих волн в толстостенной цилиндрической оболочке.	13
3. Х.Х.Кяерди, Л.Ю. Поверус. Исследование распространения упругих волн в цилиндрической и сферической оболочках методом конечных элементов.	25
4. Р.Н. Ээк. Некоторые разновидности метода единичных сил для определения критической нагрузки упругих рам и стержней.	33
5. Л.И. Руга, Ю.А. Старкопф. Исследование полей, описываемых дифференциальным уравнением параболического типа, при помощи ЭЦВМ	43
6. И.И. Ааре, К.А. Лооритс. Об устойчивости призматических металлических складок покрытия	51

ТРУДЫ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ
Сборник статей 1У

Таллинский политехнический институт
Редактор Р. Ээк
Технический редактор Г. Гришина

Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 17/Х1 1971.

Сдано в набор 10/1 1972. Подписано к печати 13/1У 1972.
Бумага 60х90/16. Печ.л. 3,75 + 0,25 прилож.
Учетно-изд.л. 3,00. Тираж 400. МВ-03937. Зак. № 327.
Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскла, 2/9.
Ц е н а 30 коп.

ТРУДЫ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ
СБОРНИК СТАТЕЙ

IV

УДК 624.074.4

Л.Ю. Поверус

Исследование изменения осесимметричных волновых характеристик в цилиндрической оболочке на базе геометрической нелинейной теории типа Тимошенко
(стр. 3 - 12).

Рассматривается полубесконечная цилиндрическая оболочка, осесимметричное движение которой описывается при помощи геометрически нелинейной теории типа Тимошенко. Составлены расчетные алгоритмы для метода конечных разностей, которые затем решены на ЭЦВМ Минск-22. Исследуется случай, когда торец оболочки нагружен продольной медленно возрастающей и сжимающей нагрузкой.

Фигур 4, библиографий 13.

УДК 624.074.4

Р.К. Рямят, А.И. Мяннил

Распространение упругих волн в толстостенной цилиндрической оболочке (стр. 13 - 21).

В работе исследуется толстостенная цилиндрическая оболочка, на которую действует распределенная кратковременная нагрузка. Движение оболочки описывается при помощи уравнений линейной теории упругости, которые решаются при помощи

метода трехмерных сеток. Предполагается, что внешняя нагрузка, хотя изменяется весьма быстро, но достаточно плавно, и поэтому размазывающий эффект метода конечных разностей не оказывает большого влияния на точность расчета.

Задача решена на ЭВМ "Минск-22".

Фигур 4, библиографий 2.

УДК 624.074.4:534.16

Х.Х.Кларди, Л.Ю. Поверус

Исследование распространения упругих волн в цилиндрической и сферической оболочках методом конечных элементов (стр. 25 - 32).

В работе исследуется распространение упругих волн в цилиндрической и сферической оболочках, если они нагружены равномерно распределенной кратковременной нагрузкой. В качестве метода решения используется прямой численный метод, который называется "дискретно-шаговым".

Численные результаты хорошо согласуются с результатами Судзуки (преобразование Лапласа) и Чжоу Сун-чжина и Грейфа (характеристические уравнения на границах и конечноразностная схема во всех других точках).

Фигур 6, библиографий 3.

УДК 624.041.2

Р.Н. Ээк

Некоторые разновидности метода единичных сил для определения критической нагрузки упругих рам и стержней (стр. 33 - 41).

На основе метода, изложенного в [1], разработаны упрощенные матричные формулы для определения критической нагрузки упругих рам и стержней. Изложен матричный вариант метода С.П.Тимошенко. Для оценки точности разных формул приведен пример.

Фигур 2, библиографий 2.

Л.И. Руга, Ю.А. Старкофф

Исследование полей, описываемых дифференциальным уравнением параболического типа, при помощи ЭЦВМ (стр. 43-49).

В статье рассматриваются возможности исследования различных явлений течения, которые описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями. В качестве метода описываются моделирование полей и применение ЭЦВМ.

В качестве примера приведено исследование турбулентной диффузии в прямолинейном потоке при стационарном выпуске вещества в турбулентный поток. Задача решена методом сеток на ЭЦВМ Минск-22.

В результате расчетов приведены графики, которые показывают зависимость между концентрацией вещества и шириной выпуска.

Фигур 3. Библиографий 2.

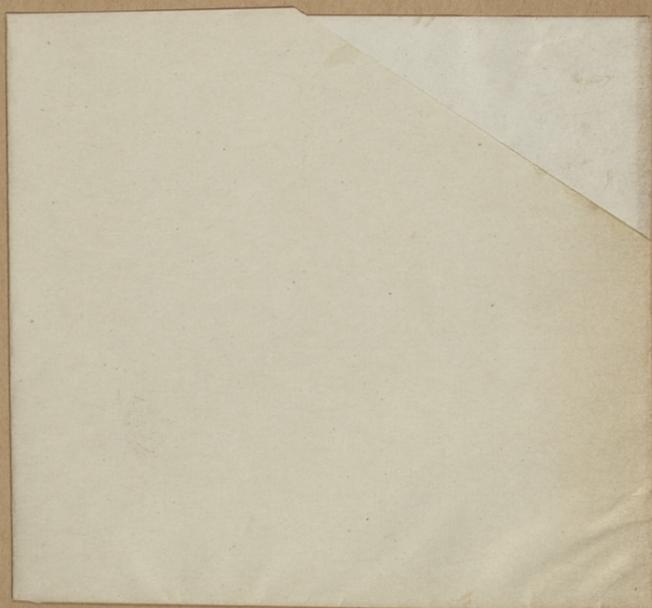
И.И. Ааре, К.А. Лооритс

Об устойчивости призматических металлических складок покрытия (стр. 51 - 57).

В статье приводятся результаты расчета и экспериментального исследования двугранных симметричных металлических складок при помощи нелинейной теории. Критическая нагрузка определяется при помощи кривой $w = f(q_z)$.

Кроме того представлены результаты экспериментального исследования цилиндрических оболочек и многогранных безреберных и ребристых складок.

Фигур 4, библиографий 3.



Цена 30 коп.