TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 118 1957

Б. А. ТИЙКМА

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРЕМЫ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ТАЛЛИН, 1957

Ep. 6. 7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 118 1957

Б. А. ТИЙКМА

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРЕМЫ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ТАЛЛИН, 1957

P 2287

Eesti NSV
Teaduste Akadeemia
KESKRAAMATUKOGU

В настоящем рекомендуется использование теоремы об изменении кинетической энергии при решении задач динамики, когда действующие силы или моменты постоянны.

Кинетическая энергия T движущегося твердого тела дается формулой:

$$2T = m v_c^2 + J\omega^2,$$

где v_c означает скорость центра масс, J момент инерции относительно оси вращения через центр масс и ω угловую скорость. Если обозначить через T_0 начальную кинетическую энергию и через A работу, то теорему кинетической энергии можно написать так:

$$T - T_0 = A.$$

Обыкновенно с помощью этой формулы определяют конечную или начальную скорость, угловую скорость, или расстояние (путь точки приложения силы). Но если требуется найти ускорение или угловое ускорение, то прибегают к принципу Даламбера-Лагранжа (к общему уравнению динамики) или рекомендуют применять уравнения Лагранжа II рода [1]. Но оба эти способа все же довольно трудоемки. Применение теоремы об изменении кинетической энергии (— сравнительно редко употребляемой [2]) оказывается более целесообразным.

Для иллюстрации этого способа решим задачу 934 из сборника Мещерского.

Данная задача принадлежит к динамике системы и решение ее проводится обыкновенно с помощью общего уравнения динамики. По теореме изменения кинетической энергии можно написать

$$\frac{P}{2g} v^2 + \frac{J\omega^2}{2} - T_0 = Ps \sin\alpha$$

или

$$\frac{P}{2g} r^2 \omega^2 + \frac{Q}{4g} r^2 \omega^2 \quad T_0 = Ps \sin\alpha .$$

Продифференцировав обе стороны (4) по времени, получаем

$$\frac{P}{g} r^2 \omega \varepsilon + \frac{Q}{2g} r^2 \omega \varepsilon = Pr \omega \sin \alpha, \tag{1}$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{2Pg \sin \alpha}{r(2P+Q)}.$$

Такой же результат можно получить применением общего уравнения динамики или уравнения Лагранжа II рода. Этот способ напоминает способ общего уравнения динамики, но при этом не требуется понятия возможного перемещения, хотя сокращение уравнения (1) на ω и напоминает сокращение на $\delta\varphi$, применяемое способом общего уравнения.

Из сказанного видно, что этот прием тесно связан с принципом Даламбера-Лагранжа и делает возможным быстрое и более элементарное решение одного широкого класса задач из области динамики системы.

Так как члены уравнения (1) представляют собой мощности сил инерций, взятые с обратным знаком (левые члены типа $J\varepsilon\omega$ или $Mom \cdot \omega$) и мощности активных сил (член на правой стороне), то этот способ можно назвать «способом сравнения мощностей активных сил и сил инерций».

Используя понятие мощности, можно для системы выписать тоже следующее уравнение

$$\Sigma (\bar{F}_i - m_i \bar{w}_i) \cdot \bar{v}_i = 0. \tag{2}$$

В случае системы со стационарными связями приходится предпочитать теорему кинетической энергии общему уравнению динамики.

С помощью теоремы изменения кинетической энергии можно вывести и уравнения Лагранжа II рода для системы со стационарными связями.

В обобщенных координатах при стационарных связях кинетическая энергия выражается так

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} A_{ik} (q_1, \dots q_s) \dot{q}_i \dot{q}_k, \tag{3}$$

где s означает число степеней свободы.

Известно, что

$$\frac{dT}{dt}=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\partial T}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt}\right]= \tag{4}$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\partial T}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{dq_i}{dt}\right]$$

или после преобразования

$$\frac{dT}{dt}=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right]\frac{dq_i}{dt} \quad \text{потому что} \tag{5}$$

по формуле Эйлера для однородных функций

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=2T \tag{6}$$

Теперь сравнение мощностей позволяет написать

$$\sum\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i\right]\frac{dq_i}{dt}=0 \quad (i=1\ldots s), \tag{7}$$

где Q_i означает обобщенную силу.

Здесь движение определено с помощью теоремы кинетической энергии и начальными обобщенными скоростями в любой начальный момент. Полагая все скорости, кроме одной, равными нулю, получаем уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i \tag{8}$$

Рассуждая аналогично при всех i получаем все уравнения Лагранжа.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Мещерский, Сборник задач по теор. мех., стр. 241.
2. А. Лойцянский — А. Лурье, Теор. мех. II, стр. 197.

Eesti NSV
KESKRAAMATUKOGU
Teaduste Akadeemia

Б. А. Тийкма

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРЕМЫ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

Издательство
Таллинского Политехнического Института

*

Редактор О. Сильде
Технический редактор А. Тамм
Корректор А. Рейгна

Сдано в набор 9 XI 1957. Подписано к печати 24 XII 1957. Бумага 54×84 1/16. Печатных листов 0,5. По формату 60×92 печатных листов 0,41. Учетно-издательских листов 0,19. Тираж 800.
МВ-08936. Заказ № 7350.

Типография «Коммунист», Таллин, ул. Пикк, 2.

Цена 15 коп.

Цена 15 коп.