TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 89 1957

И. Х. МЕЙТРЕ

АТОМ ВОДОРОДА В КВАНТОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ СЛУЧАЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ТАЛЛИН, 1957

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 89 1957

И. Х. МЕЙТРЕ

АТОМ ВОДОРОДА В КВАНТОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ СЛУЧАЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

ТАЛЛИН, 1957

ВВЕДЕНИЕ

Как в классической теории электрона, так и в квантовой электродинамике мы встречаемся с трудностями, связанными с расходимостью интегралов. Одним способом преодоления вышеуказанных трудностей является введение минимальной длины. Снайдер[1)] показал, что относительно преобразований Лоренца существует инвариантное пространство-время, в котором имеется минимальная длина. В настоящей работе и находят применение операторы квантованного пространства Снайдера для подсчета энергии стационарных уровней атома водорода в релятивистском случае.

В первой части работы выводится общее выражение для релятивистской поправки энергии стационарных состояний атома водорода.

Во второй части работы выведенная формула применяется в случае $n=1$, $l=0$.

I. СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ АТОМА ВОДОРОДА В РЕЛЯТИВИСТСКОМ СЛУЧАЕ В КВАНТОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для получения релятивистского волнового уравнения в квантованном пространстве за исходное уравнение в работе берется уравнение Дирака в р-представлении:[3)]

$$[E+\alpha_0 E_0+c(\alpha_1 p_x+\alpha_2 p_y+\alpha_3 p_z)]\,V(p_x,p_y,p_z)+$$

$$+\frac{e^2}{2\pi^2 h}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{V(p'_x,p'_y,p'_z)\,dp'_x\,dp'_y\,dp'_z}{(p'_x-p_x)^2+(p'_y-p_y)^2+(p'_z-p_z)^2}=0, \tag{1}$$

где E — энергия стационарных состояний,

$E_0=mc^2$ — энергия покоя электрона,

c — скорость света,

$\alpha_i\,(i=0,1,2,3)$ — матрицы Дирака,

e — элементарный заряд и
h — константа Планка деленная на 2π.

Уравнение (1) представляет систему из четырех линейных интегральных уравнений функций V_1, V_2, V_3, V_4.

Для получения подходящего волнового уравнения в случае квантованного пространства в уравнении (1) операторы импульса p_x, p_y, p_z нужно заменить соответственными операторами квантованного пространства, выраженными через полярные углы ψ, ϑ, φ:

$$p_x = \frac{h}{a} tg\,\psi \sin\vartheta \cos\varphi$$

$$p_y = \frac{h}{a} tg\,\psi \sin\vartheta \sin\varphi$$

$$p_z = \frac{h}{a} tg\,\psi \cos\vartheta, \qquad (2)$$

где a — минимальная длина.

Области определений для полярных углов φ, ϑ, ψ берутся:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (3)$$

Для выполнения условия ортогональности собственных функций область определения полярного угла ψ надо брать в пределах $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$, что означает двойной учет каждой точки пространства импульсов. Во вторых интеграл оператора потенциальной энергии по всему пространству импульсов надо заменить интегралом по гиперсфере четырехмерного пространства, радиус которой $\frac{h}{a}$, причем в знаменателе подинтегрального выражения квадрат расстояния между двумя точками импульсного пространства заменяется квадратом расстояния между двумя точками гиперсферы[2)]. Тогда получаем вместо уравнения (1) волновое уравнение:

$$[E' + \alpha_0 E_0 + \frac{ch}{a} tg\,\psi\,(\alpha_1 \sin\vartheta\cos\varphi + \alpha_2 \sin\vartheta \sin\varphi + \alpha_3 \cos\vartheta)]\cdot$$

$$\cdot V'(\psi, \vartheta, \varphi) + \frac{e^2}{a} U V'(\psi, \vartheta, \varphi) = 0, \qquad (4)$$

которым и пользуемся в случае квантованного пространства. Интегральный оператор U в уравнении (4) имеет вид:

$$UV'(\psi,\vartheta,\varphi)=\frac{1}{2\pi^2}\iiint\frac{V'(\psi',\vartheta',\varphi')\sin^2\psi'd\psi'\sin\vartheta'd\vartheta'd\varphi'}{4\sin^2\frac{\omega}{2}}, \tag{5}$$

где $4\sin^2\frac{\omega}{2}$ есть квадрат расстояния между двумя точками гиперсферы, и

$$\begin{aligned}\cos\omega &= \cos\psi\cos\psi'+\sin\psi\sin\psi'\cos\gamma\\ \cos\gamma &= \cos\vartheta\cos\vartheta'+\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi').\end{aligned} \tag{6}$$

Собственные значения интегрального оператора U суть обратные величины всех положительных целых чисел n. Собственные же функции даются следующими выражениями:

$$\Psi_{nlm'}(\psi,\vartheta,\varphi)=Q^l_{n-1}(\cos\psi)Y_{lm'}(\vartheta,\varphi), \tag{7}$$

где

$$Y_{lm'}(\vartheta,\varphi)=P_l^{m'}(\cos\vartheta)\,e^{im'\varphi} \tag{8}$$

— шаровая функция, а $P_l^{m'}(\cos\vartheta)$, обобщенный полином Лежандра.

Функция $Q^l_\nu(\cos\psi)$ дается выражением:[2)]

$$Q^l_\nu(\cos\psi)=\sin^l\psi\frac{d^l Q_\nu(\cos\psi)}{d(\cos\psi)^l}, \tag{9}$$

где

$$Q_\nu(\cos\psi)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\nu-k)!}{k!(\nu-2k)!}(2\cos\psi)^{\nu-2k}. \tag{10}$$

Имея в виду связь функции Гегенбауэра $C_r^s(\cos\psi)$ с функцией $Q_\nu^l(\cos\psi)$, можно записать следующие интегральные равенства, которыми будем пользоваться в ходе расчетов:

$$\int_0^\pi Q_\nu^l(\cos\psi)\,Q_{\nu'}^l(\cos\psi)\sin^2\psi\,d\psi = \begin{cases} 0, & \text{при } \nu\neq\nu' \\ \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(l+\nu+1)!}{(\nu-l)!(\nu+1)}, & \text{при } \nu=\nu' \end{cases} \tag{11}$$

где l и ν целые числа.

На основании уравнения (4) можно волновое уравнение в квантованном пространстве представить системой из четырех интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\left(E'+\frac{e^2}{a}U+E_0\right)V_1'+\frac{ch}{a}tg\,\psi\left(\sin\vartheta\, e^{-i\varphi}V_4'+\cos\vartheta\, V_3'\right)=0\\
&\left(E'+\frac{e^2}{a}U+E_0\right)V_2'+\frac{ch}{a}tg\,\psi\left(\sin\vartheta\, e^{i\varphi}V_3'-\cos\vartheta\, V_4'\right)=0\\
&\left(E'+\frac{e^2}{a}U-E_0\right)V_3'+\frac{ch}{a}tg\,\psi\left(\sin\vartheta\, e^{-i\varphi}V_2'+\cos\vartheta\, V_1'\right)=0\\
&\left(E'+\frac{e^2}{a}U-E_0\right)V_4'+\frac{ch}{a}tg\,\psi\left(\sin\vartheta\, e^{i\varphi}V_1'-\cos\vartheta\, V_2'\right)=0,
\end{aligned} \tag{12}$$

где E' — энергия стационарных состояний атома водорода в релятивистском случае и

V_1', V_2', V_3', V_4' — компоненты волновой функции в случае квантованного пространства.

Приближениями для V_i' являются волновые функции в импульсном пространстве.

Принимая во внимание, что собственными функциями интегрального оператора U являются функции $Q_k^l(\cos\psi)\,Y_{lm'}(\vartheta,\varphi)$, где $k=0, 1, 2 \ldots$, и соответствующие собственные значения суть $\frac{1}{k+1}$, можем дать компоненты волновой функции системы уравнений (12) в виде бесконечных рядов:

$$\left.\begin{aligned}
V_1' &= \sum_{k=l+1}^{\infty} y_k Q_k^{l+1}(\cos\psi)\, Y_{l+1\, m'}(\vartheta,\varphi)\\
V_2' &= \sum_{k=l+1}^{\infty} y_k \frac{\sqrt{l+m'+2}}{\sqrt{l-m'+1}} Q_k^{l+1}(\cos\psi)\, Y_{l+1\, m'+1}(\vartheta,\varphi)\\
V_3' &= \sum_{k=l}^{\infty} x_k Q_k^{l}(\cos\psi)\, Y_{l\, m'}(\vartheta,\varphi)\\
V_4' &= -\sum_{k=l}^{\infty} x_k \frac{\sqrt{l-m'}}{\sqrt{l+m'+1}} Q_k^{l}(\cos\psi)\, Y_{l\, m'+1}(\vartheta,\varphi),
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

где x_k и y_k являются константами.

При таком выборе волновых функций система уравнений (12), состоящая из четырех уравнений, сводится к системе из двух уравнений, так как одна пара уравнений становится тождественной второй паре уравнений:

$$\sum_{k=l+1}^{\infty}\left(E'+\frac{e^2}{a}\frac{1}{k+1}+E_0\right) y_k Q_k^{l+1}(\cos\psi) + \\ + \frac{ch}{a} R_1 \operatorname{tg}\psi \sum_{k=l}^{\infty} x_k Q_k^{l}(\cos\psi) = 0 \qquad (14а)$$

$$\sum_{k=l}^{\infty}\left(E'+\frac{e^2}{a}\frac{1}{k+1}-E_0\right) x_k Q_k^{l}(\cos\psi) + \\ + \frac{ch}{a} R_2 \operatorname{tg}\psi \sum_{k=l+1}^{\infty} y_k Q_k^{l+1}(\cos\psi) = 0, \qquad (14б)$$

где

$$R_1=\sqrt{\frac{(l-m'+1)(2l+1)}{(l+m'+1)(2l+3)}} \quad \text{и} \quad R_2=\sqrt{\frac{(l+m'+1)(2l+3)}{(l-m'+1)(2l+1)}}. \qquad (15)$$

На основании системы уравнений (14а, 14б) находим выражение для энергии E' стационарных состояний атома. Обозначим разность энергии стационарного состояния E' и энергии покоя электрона $E_0=mc^2$ через W:

$$E'-E_0=W. \qquad (16)$$

Применяя теорию возмущений, представляем константы x_k и y_k и энергию W как разложения в ряд по степеням $\frac{1}{c}$:

$$\left.\begin{aligned} x_k &= x_k^{(0)} + \frac{1}{c} x_k^{(1)} + \frac{1}{c^2} x_k^{(2)} + \ldots \\ y_k &= \frac{1}{c} y_k^{(1)} + \frac{1}{c^2} y_k^{(2)} + \ldots \\ W &= E^{(0)} + \frac{1}{c} E^{(1)} + \frac{1}{c^2} E^{(2)} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Заменяем в системе уравнений (14а, 14б) x_k, y_k и E' из выражений по (17). Если ограничиться в выражении, полученном из (14а) членами, содержащими множитель c т. е. скорость света, а в выражении, полученном из (14б), членами несодержащими скорость света c, то получим:

$$2m \sum_{k=l+1}^{\infty} y_k^{(1)} Q_k^{l+1}(\cos\psi) + \frac{hR_1}{a} tg\,\psi \sum_{k=l}^{\infty} x_k^{(0)} Q_k^l(\cos\psi) = 0 \qquad (18а)$$

$$\frac{e^2}{a} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{x_k^{(0)}}{k+1} Q_k^l(\cos\psi) + E^{(0)} \sum_{k=l}^{\infty} x_k^{(0)} Q_k^l(\cos\psi) + \\ + \frac{hR_2}{a} tg\,\psi \sum_{k=l+1}^{\infty} y_k^{(1)} Q_k^{l+1}(\cos\psi) = 0. \qquad (18б).$$

Исключая член: $\sum\limits_{k=l+1}^{\infty} y_k^{(1)} Q_k^{l+1}(\cos\psi)$ из системы уравнения (18а, б), получим:

$$\frac{e^2}{a} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{x_k^{(0)}}{k+1} Q_k^l(\cos\psi) + E^{(0)} \sum_{k=l}^{\infty} x_k^{(0)} Q_k^l(\cos\psi) = \\ = \frac{h^2 tg^2\psi}{2ma^2} \sum_{k=l}^{\infty} x_k^{(0)} Q_k^l(\cos\psi). \qquad (19)$$

Это — уравнение для нерелятивистского случая в квантованном пространстве. $E^{(0)}$ представляет энергию стационарных состояний атома водорода в нерелятивистском случае в квантованном пространстве, которую П. Кард[2)] вычислил для случаев $l=0$ и $l=1$. Сумму $\sum_{k=l}^{\infty} x_k^{(0)} Q_k^l(\cos\psi)$ в выражении (19) можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=l}^{\infty} x_k^{(0)} Q_k^l(\cos\psi) = \frac{Q_{n-1}^l\left(\frac{\beta^2 tg^2\psi - 1}{\beta^2 tg^2\psi + 1}\right)}{(\beta^2 tg^2\psi + 1)^2} + f(\psi), \tag{20}$$

где $f(\psi)$ — поправочный член. Если предположить, что минимальная длина $\alpha \approx \frac{e^2}{mc^2}$, то $\beta = \frac{nh^2}{me^2\alpha} = 137^2 n$.

Для нахождения поправочного члена энергии $\frac{1}{c}E^{(1)}$ в выражении, получаемом из (14а), мы должны учесть члены, не содержащие c, а в выражении получаемом из (14б), члены с множителем $\frac{1}{c}$. Для $E^{(1)}$ получим выражение:

$$\frac{e^2}{a}\sum_{k=l}^{\infty}\frac{x_k^{(1)}}{k+1}Q_k^l(\cos\psi) + E^{(0)}\sum_{k=l}^{\infty}x_k^{(1)}Q_k^l(\cos\psi) + $$
$$+ E^{(1)}\sum_{k=l}^{\infty}x_k^{(0)}Q_k^l(\cos\psi) - \frac{h^2 tg^2\psi}{2ma^2}\sum_{k=l}^{\infty}x_k^{(1)}Q_k^l(\cos\psi) = 0. \tag{21}$$

Умножая полученное выражение (21) на сумму:

$$\sum_{k'=l}^{\infty} x_{k'}^{(0)} Q_{k'}^l(\cos\psi)\sin^2\psi\, d\psi \tag{22}$$

и интегрируя от 0 до π, получим на основе выражений (11) и (19), что $E^{(1)}=0$.

Для нахождения релятивистского поправочного члена, $\frac{1}{c^2}E^{(2)}$ мы должны в уравнении, получаемом из (14а) учесть члены, содержащие множитель $\frac{1}{c}$, а в уравнении, получаемом из (14б), члены, содержащие множитель $\frac{1}{c^2}$. Исключая член: $\sum\limits_{k=l+1}^{\infty} y_k^{(3)} Q_k^{l+1}(\cos\psi)$ из этой системы уравнений, получим:

$$\frac{e^2}{a}\sum_{k=l}^{\infty}\frac{x_k^{(2)}}{k+1}Q_k^l(\cos\psi)+E^{(0)}\sum_{k=l}^{\infty}x_k^{(2)}Q_k^l(\cos\psi)-$$

$$-\frac{h^2}{2ma^2}tg^2\psi\sum_{k=l}^{\infty}x_k^{(2)}Q_k^l(\cos\psi)+E^{(2)}\sum_{k=l}^{\infty}x_k^{(0)}Q_k^l(\cos\psi)-$$

$$-\frac{hR_2}{2ma}\,tg\,\psi\sum_{k=l+1}^{\infty}\left(\frac{e^2}{a}\frac{1}{k+1}+E^{(0)}\right)y_k^{(1)}Q_k^{l+1}(\cos\psi)=0. \tag{23}$$

Умножим уравнение (23) на сумму:

$$\sum_{k'=l}^{\infty}x_{k'}^{(0)}Q_{k'}^l(\cos\psi)\sin^2\psi\,d\psi \tag{24}$$

и интегрируем от 0 до π. Для преобразования результата применяем выражения (11), (18а), (19), (20) и имея в виду, что $Q_k^{l+1}(\cos\psi)\,Y_{l+1m'}(\vartheta,\varphi)$ является собственной функцией интегрального оператора U, мы можем выражение (23) записать в следующем виде:

$$E^{(2)}\int_0^{\pi}[M(\psi)+f(\psi)]^2\sin^2\psi\,d\psi=$$

$$=-\frac{h^2e^2}{4m^2a^3}\int_0^{\pi}tg\,\psi\,[M(\psi)+f(\psi)]\,\frac{U\{tg\,\psi\,[M(\psi)+f(\psi)]\,Y_{l+1m'}(\vartheta,\varphi)\}}{Y_{l+1m'}(\vartheta,\varphi)}\cdot$$

$$\cdot\sin^2\psi\,d\psi-\frac{h^2E^{(0)}}{4m^2a^2}\int_0^{\pi}tg^2\psi\,[M(\psi)+f(\psi)]^2\sin^2\psi\,d\psi\,, \tag{25}$$

где

$$M(\psi)=\frac{Q_{n-1}^l\left(\dfrac{\beta^2tg^2\psi-1}{\beta^2tg^2\psi+1}\right)}{(\beta^2tg^2\psi+1)^2}. \tag{26}$$

Таким образом энергия стационарных состояний атома водорода в квантованном пространстве в релятивистском случае дается формулой:

$$E' - mc^2 = E^{(0)} + \frac{1}{c^2}E^{(2)}, \tag{27}$$

где

$$E^{(0)} = -\frac{me^4}{2n^2h^2} + \varepsilon. \tag{28}$$

В случае[2)] $l=0$,

$$\varepsilon = \frac{me^4}{h^2}\frac{2n-1}{n^2\beta^2}. \tag{29}$$

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ АТОМА ВОДОРОДА В КВАНТОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ СЛУЧАЕ ДЛЯ $n=1$ и $l=0$.

Применим формулу (25) в случае $n=1$ и $l=0$.

Тогда:

$$Q_0\left(\frac{\beta^2 tg^2\psi - 1}{\beta^2 tg^2\psi + 1}\right) = 1, \qquad Y_{10}(\vartheta,\varphi) = P_1(\cos\vartheta) \tag{30}$$

и выражение для поправочного члена[2)] имеет вид:

$$f_0(\psi) = \frac{1}{2\beta^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k(\beta^2-1)^k\, tg^{2k}\psi}{\cos^2\psi(\beta^2 tg^2\psi+1)^{k+2}}. \tag{31}$$

Подставим выражение (28) в уравнение (25) и, пренебрегая членами, содержащими $[f_0(\psi)]^2$ и $\varepsilon f_0(\psi)$, можно уравнение (25) в случае $n=1$, $l=0$ записать в следующем виде:

$$E^{(2)}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{(\beta^2 tg^2\psi+1)^4}+\frac{2f_0(\psi)}{(\beta^2 tg^2\psi+1)^2}\right]sin^2\psi\,d\psi=$$

$$=\frac{\beta^2 m e^8}{4h^4}\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{tg^2\psi\,sin^2\psi\,d\psi}{(\beta^2 tg^2\psi+1)^4}-\right.$$

$$-\beta\int_0^{\pi}\frac{tg\,\psi}{(\beta^2 tg^2\psi+1)^2}\frac{U\left(\frac{tg\psi\,P_1(cos\,\vartheta)}{(\beta^2 tg^2\psi+1)^2}\right)}{P_1(cos\,\vartheta)}sin^2\psi\,d\psi+$$

$$+\int_0^{\pi}\frac{tg^2\psi\,sin^2\psi\,f_0(\psi)\,d\psi}{(\beta^2 tg^2\psi+1)^2}-$$

$$-\beta\int_0^{\pi}\frac{tg\,\psi\,sin^2\psi}{(\beta^2 tg^2\psi+1)^2}\frac{U\left[tg\,\psi\,f_0(\psi)\,P_1(cos\,\vartheta)\right]}{P_1(cos\,\vartheta)}d\psi-$$

$$\left.-\beta\int_0^{\pi}tg\,\psi\,sin^2\psi\,f_0(\psi)\frac{U\left(\frac{tg\,\psi\,P_1(cos\,\vartheta)}{(\beta^2 tg^2\psi+1)^2}\right)}{P_1(cos\,\vartheta)}d\psi\right]-$$

$$-\frac{m}{4}\frac{e^8}{h^4}\int_0^{\pi}\frac{tg^2\psi\,sin^2\psi\,d\psi}{(\beta^2 tg^2\psi+1)^4}. \tag{32}$$

Интеграл во втором члене правой части уравнения (32) можно выразить так:

$$-\beta\int_0^{\pi}\frac{tg\,\psi}{(\beta^2 tg^2\psi+1)^2}\frac{U\left(\frac{tg\,\psi\,P_1(cos\,\vartheta)}{(\beta^2 tg^2\psi+1)^2}\right)}{P_1(cos\,\vartheta)}sin^2\psi\,d\psi=$$

$$=-\frac{1}{2(\beta^2-1)^{3/2}}\int_0^{\pi}\frac{sin\,\psi\,arctg\left[(\beta^2-1)^{1/2}sin\,\psi\right]d\psi}{(\beta^2 tg^2\psi+1)^2}+$$

$$+\frac{1}{2(\beta^2-1)}\int_0^{\pi}\frac{tg^2\psi\,d\psi}{(\beta^2 tg^2\psi+1)^3}. \tag{33}$$

Выражение $U[tg\psi f_0(\psi) P_1(\cos\vartheta)]$ под интегралом четвертого члена правой части уравнения (32) может быть записано:

$$U[tg\psi f_0(\psi) P_1(\cos\vartheta)] = \frac{1}{2\beta^5} \frac{P_1(\cos\vartheta)}{tg\psi} [b_0 B_0' + b_1(B_0' - B_1') + b_2(B_0' - 2B_1' + B_2') + b_3(B_0' - 3B_1' + 3B_2' - B_3') + \ldots], \tag{34}$$

где

$$B_0' = \frac{\beta^2}{2(\beta^2-1)} \left\{ \frac{arc\,tg\,[(\beta^2-1)^{1/2}\sin\psi]}{(\beta^2-1)^{1/2}\sin\psi} - \frac{1}{1+(\beta^2-1)\sin^2\psi} \right\}. \tag{35}$$

Для нахождения величин B_k' воспользуемся рекурсивной формулой:

$$B'_{k+1} = \frac{1}{\beta^{2k}\,2(k+2)} \frac{d(\beta^{2k+1} B_k')}{d\beta}. \tag{36}$$

Выполнение интегрирования в уравнении (32) приводит к следующему равенству:

$$\frac{E^{(2)}}{c^2}\left(1 - \frac{2}{\beta^2}\right) = -\frac{1}{4}\frac{me^4}{2h^2}\left(\frac{e^2}{hc}\right)^2 + \frac{me^4}{2h^2}\left(\frac{e^2}{hc}\right)^2 \left[-\frac{9}{\beta^2} + \frac{6\ln\beta}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2}\frac{1}{4}\left(b_0 + \frac{7}{8}b_1 + \frac{37}{48}b_2 + \frac{11}{16}b_3 + \frac{397}{640}b_4 + \ldots\right)\right] - \frac{1}{\beta^2}\frac{1}{8}\left(\frac{e^2}{hc}\right)^2 \frac{me^4}{h^2}. \tag{37}$$

В этом выражении член $-\frac{1}{4}\frac{me^4}{2h^2}\left(\frac{e^2}{hc}\right)^2$ тождествен члену $-\frac{1}{2}\frac{me^4}{h^2n^3}\left(\frac{e^2}{hc}\right)^2\left[\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right]$ в формуле тонкой структуры, если $n=1$ и $j=\frac{1}{2}$.

В уравнении (37) коэффициенты b_i $(i=1, 2, 3 \ldots)$ являются отрицательными величинами. Коэффициент b_0, который определяется условием нормировки собственных функций, является положительной величиной ($b_0 < +8$). При решении системы уравнений, определяющих коэффициенты b_i, получаются:

$$-12{,}80 < b_1 < -12{,}53 \quad \text{и} \quad -2{,}74 < b_2 < -1{,}83. \quad (38)$$

Имея в виду, что $b_0 < +8$, $b_1 < -12{,}53$ и $b_2 < -1{,}83$, получаем, что минимальное значение поправки энергии, обусловленное поправочным членом $f_0(\psi)$, будет: $\frac{1{,}09}{\beta^2} \frac{me^4}{2h^2}\left(\frac{e^2}{hc}\right)^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. S. Snyder, Phys. Rev. 71, 38, 1947.

2. P. Kard, Vesiniku aatom kvanditud ruumis. Tartu, 1949.

3. A. Rubinowiez, Phys. Rev. 73, 1930, 1948.

И. Х. Мейтре

АТОМ ВОДОРОДА В КВАНТОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ СЛУЧАЕ

Издательство
Таллинского Политехнического Института

*

Редактор Г. Метс

Технический редактор А. Тамм

Корректор Л. Юуль

Сдано в набор 20 5. 1957. Подписано к печати 12. 06. 1957. Бумага 54×84 1/16. Печатных листов 1,0. По формату 60×92 печатных листов 0,82. Учетно-издательских листов 0,56. Тираж 800. МВ-04361. Заказ № 3259

Тип. «Коммунист», Таллин, ул. Пикк, 2.

Цена 45 коп.

Цена 45 коп.