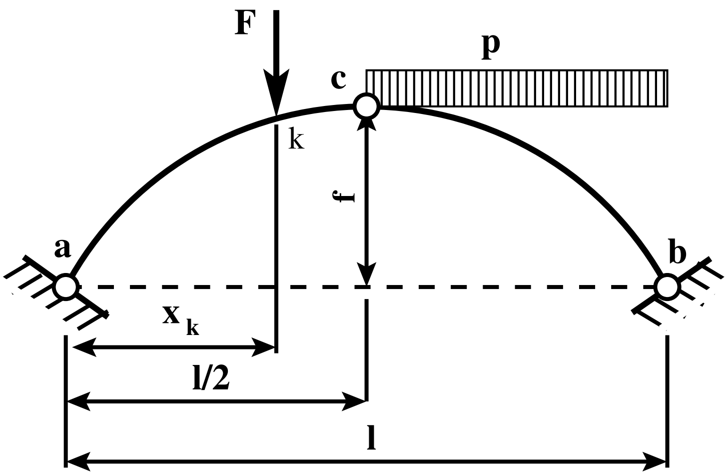
1918
TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL
MEHAANIKAINSTITUUT

Andres Lahe

Ehitusmehaanika

Varrassüsteemi mehaanika



Tallinn
2003

Dokumendi koostas: Andres Lahe, 2003-04-29
e-mail: alahe@staff.ttu.ee
http://staff.ttu.ee/~alahe/
Tallinna Tehnikaülikool
Mehaanikainstituut
http://www.ttu.ee/

Õppevahend on vormindatud tekstitöötlusprogrammiga LaTeX (loe: lateh). Tekstitöötlusprogramm LaTeX on programmi TeX (loe: teh) makropakett. TeX erineb kirjastuste süsteemidest *VENTURA* ja *PageMaker* selle poolest, et ta on *public domain'i* produkt. LaTeX-is kirjutatud teksti on võimalik töödelda msdos, UNIX (Linux) ja teistel arvutitel. LaTeX disainib aruandeid, artikleid, raamatuid. Vastavad stiilifailid (*.sty failid) valivad pealkirjade suuruse, numeratsiooni, jooniste ja valemite paigutuse, aitavad koostada sisukorda, panevad indekseid, kirjandusviiteid jne.
LaTeX'i kohta loe kodulehelt: http://staff.ttu.ee/~alahe/

ISBN 9985-59-385-5

Mente et manu

(*TTÜ moto*)

Elektronraamat ehitusmehaanika kursuse EME3010 5.0 AP 6 3-0-3 E S ; EME3020 3.5 AP 4 2-0-2 E S ja Ehitusmehaanika I EME0011[1] 3,0 AP 3,5 1,5-0-2 E S ;
Ehitusmehaanika II EME0012[2] 3,0 AP 3,5 1,5-0-2 E K
kuulajatele Tallinna Tehnikaülikoolis. Ülesannete lahendamiseks on vaja installeerida numbriliste arvutuste programm *GNU Octave* (vt C.1 lk 205).
Õppeaine tööprogrammi saab aadressilt[3]. Internetis oleva tööprogrammi[4] kirjanduse viidetega saab vormistada raamatukogu nõudesedelid. Klõpsates esitamisele tuleva iseseisva ülesande numbri järel olevale kastikesele, satute selle ülesande tekstile ja joonisele.
Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks on saadaval ka elektronraamatuna[5].
Õppevahendis on kasutatud õpiku [Rää75][6] määranguid, liigitusi ja näiteid.

Käesolevat e-raamatut saab lugeda aadressil:
`http://staff.ttu.ee/~alahe/`

- Õppevahendid, konspektid

Tänan oma abikaasat Lilja Lahe't mõistva suhtumise eest e-raamatu kirjutamisse. Kulutasin selleks palju oma vaba aega.
Suur aitäh keeletoimetaja Juhan Nurme'le teksti silumise eest.

Andres Lahe

---

[1] http://ar.va.ttu.ee/v/v/p/ois.ineti_aine.andmed?AINEKESE_ID=29394&TAG=1
[2] http://ar.va.ttu.ee/v/v/p/ois.ineti_aine.andmed?AINEKESE_ID=29414&TAG=1
[3] http://staff.ttu.ee/~alahe/tudeng/EME3010t03.pdf
[4] http://staff.ttu.ee/~alahe/tooprogramm.html
[5] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/ylesanded/itoopdf.pdf
[6] http://www.lib.ttu.ee/dbs/item.asp?bkirjenr=b13036889

Sisukord

Joonised

Tabelid

Osa I

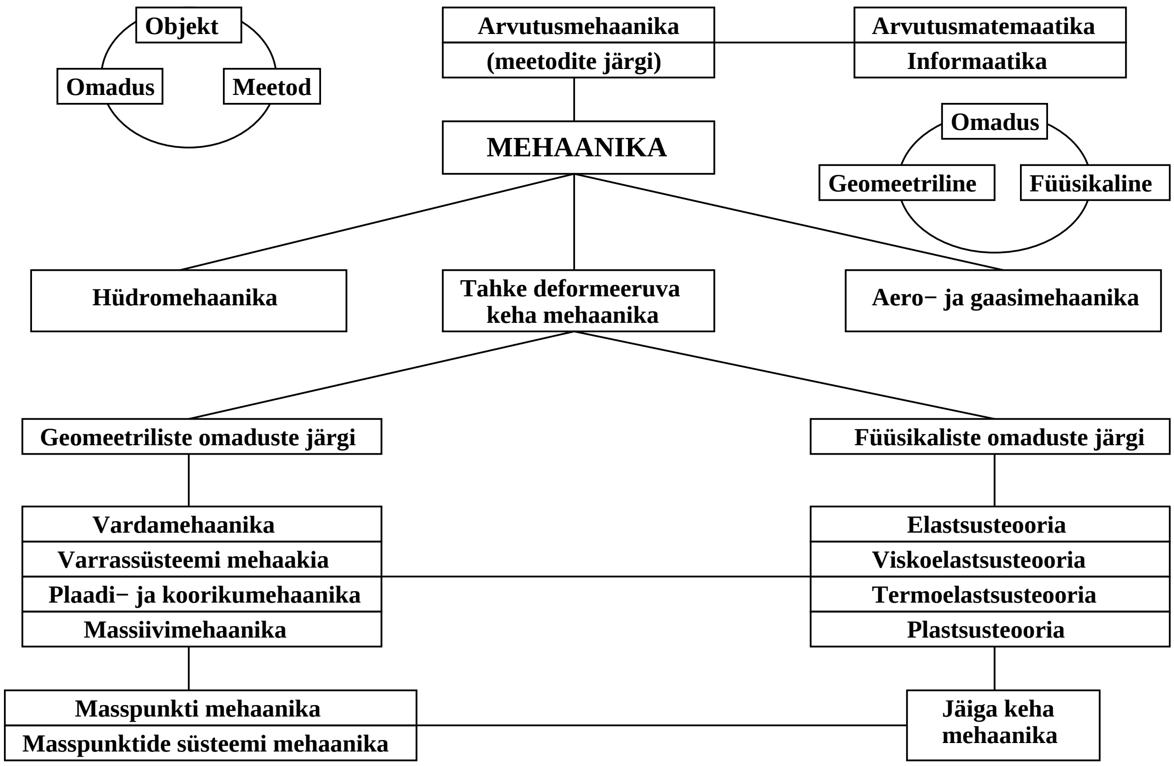
Staatiliselt määratud süsteemid

Peatükk 1

Sissejuhatus

1.1 Varrassüsteemide koht mehaanikas

Mehaanika on teadus, mis käsitleb vedelike, tahkete kehade ja gaaside liikumist (paigalseisu) neile rakendatud jõudude mõjul. Klassikaline mehaanika uurib makrokehade



Joonis 1.1. Varrassüsteemi koht mehaanikas

paigalseisu ja liikumist valguse kiirusest tunduvalt väiksemate kiiruste juures. Valguse kiirusele lähedaste kiiruste ja mikroosakeste puhul rakendatakse relativistlikku mehaanikat ja kvantmehaanikat.

Vaatleme klassikalist mehaanikat ja nimetame seda lühiduse mõttes mehaanikaks. Varrassüsteemide mehaanika koha määramiseks võtame aluseks mõisted *objekt, omadus* ja *meetod* (vt joonis 1.1).

Mehaanika üheks *objektiks* on tahked kehad. Tahkeid kehi võib liigitada nende geomeetriliste ja füüsikaliste omaduste järgi. Üheks geomeetriliseks omaduseks on kuju. *Geomeetrilise kuju* (omaduse) järgi on tahked kehad *vardad, plaadid* ja *koorikud* ning *massiivid*. *Füüsikaliste omaduste* põhjal räägitakse elastsetest, plastsetest, viskoelastsetest jne kehadest.
Abstraktsioonina loetakse tahket keha vahel jäigaks, vahel vaadeldakse jäika keha masspunktina.
Mehaanika objektide liikumise kirjeldamiseks ja nende omaduste uurimiseks kasutatakse *teooriaid*, mida võib liigitada selle järgi, missuguse omaduse nad seavad esikohale (fookusesse). Füüsikaliste omaduste uurimisega tegelevad elastsusteooria, plastsusteooria, viskoelastsusteooria (vt joonis 1.1). Abstraktse jäiga keha liikumist uurib teoreetiline mehaanika.

Tahke keha geomeetriliste omaduste alt loeme vardamehaanika, *varrassüsteemi mehaanika*, plaadi- ja koorikumehaanika ning massiivimehaanika (joonis 1.1).

Vardamehaanikas on kasutusel järgmised teooriad: Bernoulli[1] vardateooria, Navier'[2] vardateooria, elastsusteooria, viskoelastsusteooria jne. Edaspidi vaatleme põhiliselt Bernoulli vardateooriat, mida käsitleti tehnilises mehaanikas.

Iga teooria kasutab objektide (kehade) liikumise ja nende omaduste uurimiseks kindlapiirilisi uurimisviise ehk *meetodeid*. Näiteks kasutatakse vardateoorias varda tasakaaluvõrrandite koostamiseks *lõikemeetodit*, tasakaaluvõrrandite lahendamiseks võib aga kasutada Gaussi meetodit. Varda deformatsioonide pidevusvõrrandi koostamisel kasutatakse toe eemaldamise võtet. Pingete ja deformatsioonide vaheline seos leitakse katseliselt. Näeme, et üks teooria vajab erinevaid meetodeid. Igale meetodile on võimalik koostada algoritm.

1.2 Lõikemeetod

Lõikemeetodi eesmärk on keha (süsteemi) jaotamisega osadeks muuta sisejõud vaadeldava osa suhtes välisjõududeks, et nende määramiseks rakendada tasakaalutingimusi ([Jür85] lk 12).
Vaatleme õpikutes [Jür85] [MR96] [Rää75] leiduvaid lõikemeetodi erinevaid määranguid.
Lõikemeetodi määranguid:

- ([Jür85] lk 12) Tasakaalus kehast mõtteliselt väljalõigatud osa on ka tasakaalus. Vaadeldavale kehast väljalõigatud osale mõjub jõudude süsteem, milles tuntud välisjõudude kõrval *rakendatakse tundmatuid jõude* lõikepindadel, *asendamaks lahtilõikamata keha vastavaid sisejõudusid*. Lõikepindadel mõjuvad tundmatud jõud, mis on võrdsed sisejõududega, määratakse vaadeldava osa tasakaalutingimustest.

[1] Jakob Bernoulli, sveitsi matemaatik, 1655–1705.
[2] Louis Marie Navier, prantsuse insener ja füüsik, 1785–1836.

- ([MR96] lk 15) Kohas, kus soovitakse leida sisejõude, sooritatakse läbi varda kujuteldav lõige, mis jaotab varda kaheks. Et *kogu varras on tasakaalus, siis peab tasakaalus olema ka kumbki tema mõtteline osa. Ükskõik kummale osale rakendatud sisejõude saab arvutada osa tasakaakutingimustest.*

- ([Rää75] lk 316) Sisejõudude töö arvutamiseks eraldatakse vardast, varda teljega kahe perpendikulaarse lõikega lõpmatult lühike element pikkusega ds. *Kahe naaberosa mõju sellele eraldatud elemendile asendatakse jõududega*, mis arvuliselt on võrdsed terve varda nendes lõigetes esinevate sisejõududega. *Eraldatud elemendi suhtes mõjuvad need jõud välisjõududena.*

- ([Rää75] lk 369) ... kui läbilõigatud kohtades on rakendatud nendes ristlõigetes esinevate *sisejõududega arvuliselt võrdsed jõud*, mida edaspidi *lihtsuse pärast nimetatakse ka sisejõududeks.*

Välja arvatud tehnilise mehaanika õpikus ([MR96] lk 15), kus lõikepinnale rakendatakse sisejõudu) ei ole õpikutes [Jür85] lk 12 ja [Rää75] lk 316 lõikepinnale rakendatud jõud sisejõud (vt "Eraldatud elemendi suhtes mõjuvad need jõud välisjõududena"). Rajajõudude mõiste selgitamiseks kirjutame pikijõu diferentsiaalseose

$$\frac{dN_x}{dx} = -q_x\left(x\right) \tag{1.1}$$

ehk

$$\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) = -q_x\left(x\right) \tag{1.2}$$

Korrutame avaldise (1.2) suvalise siirdega $\hat{u}$ ja integreerime üle tala pikkuse l

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)\hat{u}dx = -\int_a^b q_x\left(x\right)\hat{u}dx \tag{1.3}$$

Võrrandi (1.3) parempoolne liige väljendab väliskoormuse q_x tööd W_v siirdel $\hat{u}$. On võimalik näidata, et koondkoormuse F_{xi} töö varda telje punkti i siirdel $\hat{u}_i$ on $F_{xi}\hat{u}_i$. Seega

$$W_v = \int_a^b q_x\left(x\right)\hat{u}dx + F_{xi}\hat{u}_i \tag{1.4}$$

Võrrandi (1.3) vasakpoolset avaldist integreerime ositi valemi

$$\boxed{\int_a^b udv = uv\mid_a^b - \int_a^b vdu} \tag{1.5}$$

järgi, võttes u ja dv järgmiselt:

$$\int_a^b \underbrace{\hat{u}}_{u} \underbrace{\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) dx}_{dv}$$

saame avaldise

$$\int_a^b \hat{u} d\left(EA\frac{du}{dx}\right) = \underbrace{\left(EA\frac{du}{dx}\right)}_{N_x} \hat{u} \,|_a^b - \int_a^b \underbrace{\left(EA\frac{du}{dx}\right)}_{N_x} \underbrace{\frac{d\hat{u}}{dx}}_{\hat{\lambda}} dx \tag{1.6}$$

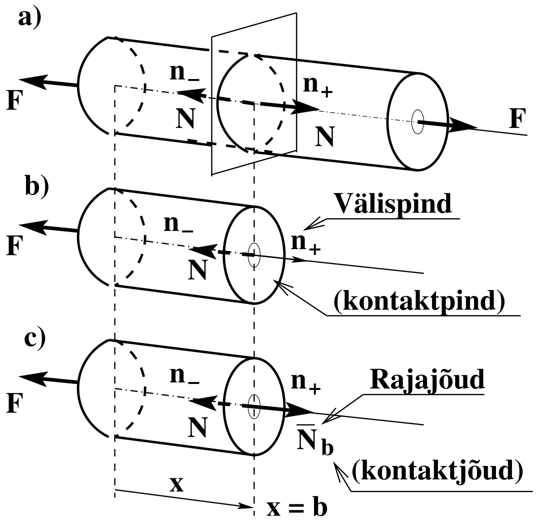
Võrrandi (1.6) parema poole esimene liige väljendab rajajõudude $\overleftrightarrow{N}_x$ tööd W_r rajasiiretel $\hat{u}$. Võrrandi (1.6) parema poole teine liige kirjeldab sisejõudude tööd W_s. Võttes arvesse välisjõudude töö avaldise (1.4) ja rajajõudude töö avaldise (1.6), võib integraali (1.3) kirjutada kujul

$$\underbrace{\overleftrightarrow{N}_x \hat{u}}_{W_r} |_a^b \underbrace{- \int_a^b N_x \hat{\lambda} dx}_{W_s} = -\underbrace{(\int_a^b q_x(x)\,\hat{u} dx + F_{xi}\hat{u}_i)}_{W_v} \tag{1.7}$$

Rajajõudu $N_x \,|^b$ avaldises (1.6) tähistatakse $\overleftrightarrow{N}_{xb}$ (joonis 1.2). Kui rajajõudu tähistatakse N_x-ga, siis on see mugavusest, kusjuures peab aru saama, et see ei ole sisejõud N_x. Rajajõu väärtus punktis b on võrdne sisejõu väärtusega selles punktis. Nende suunad punktis b on vastupidised (joonis 1.2).
Nagu selgub avaldisest (1.6), on rajajõudude mõiste üldisem kui toereaktsioonide (joonis 3.1) ja kontaktjõudude mõiste. Välisjõud avaldises (1.4) on kui joon- ja punktallikas. Rajajõude võib vaadelda kui vooge läbi pinna (punkti) (1.6). Rajajõudude ja välisjõudude olemused on erinevad.
Rajajõudude mõistet vaatlevad W.B. Krätzig ja U. Wittek [KW90]. F. Hartmanni „Ehitumehaanika matemaatilistes alustes“ [Har85] käsitletakse neid mõisteid põhjalikult.

Vaadeldud lõikemeetodi määrangutest selguvad järgmised lõikemeetodi sammud:

- Vaadeldava varda (joonis 1.2a) sisepindadel n_+, n_- (*kontaktpindadel [MR96] lk 9)* mõjuvad *sisejõud on paarisjõud*, mis koosnevad kahest võrdvastupidisest jõust või momendist.
- Vardast eraldatakse mõttelise lõikega üks osa ja edasi vaadeldakse seda osa (teine osa jääb vaatlusest välja). Selle osa pinnanormaal n_+ määrab vaadeldava osa *välispinna* (joonis 1.2b).
- Vardast mõttelise lõikega eraldatud osa tasakaalustamiseks rakendame selle välispinnale n_+ *rajajõudu* (kontaktjõudu) $\overleftrightarrow{\mathbf{N}}_{\mathbf{b}}$ (joonis 1.2c) (vaadeldavale osale ei rakendata sisejõude ega ka äravisatud osa sisejõude, sest need ei ole vaatluse all), mis on võimelised tasakalustama vaadeldavat osa. Arvuliselt on see *rajajõud* võrdne vastava sisejõuga, kuid vastupidise suunaga.



Joonis 1.2. Sisejõud ja kontaktjõud

- Koostame vardast mõttelise lõikega eraldatud osale tasakaalutingimused. Leitud *rajajõud* (kontaktjõud) $\overleftrightarrow{\mathbf{N}}_{\mathbf{b}}$ (joonis 1.2c) on arvuliselt võrdsed vastavate sisejõududega.

1.3 Sisejõud ja rajajõud

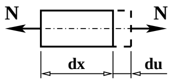
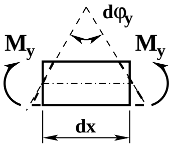
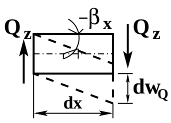
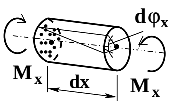
Tehnilises mehaanikas [MR96] kasutusel olevad sisejõudude mõisted on joonisel 1.3. *Tahke keha sisejõududena mõistame jõudusid keha osade vahel, mis säilitavad keha terviklikkuse ja annavad talle iseloomuliku mahu- ja kujukindluse mõõdukate välisjõudude mõju all [Jür85].*

Varda toereaktsioonid on joonisel 3.1.

1.4 Sise- ja rajasiirded

Sisesiireteks on *pikkuse muut [MR95]* Λ, *paindenurk* Ψ , *lihe, lihke [MR95]* B_z, *väändenurk* Θ (joonis 1.3). Terminit sisesiire kasutavad W.B. Krätzig ja U. Wittek [KW90]. Tehnilises mehaanikas [MR95] nimetatakse neid *põhideformatsioonideks*.

Rajasiirded $u\,|_a^b$ avaldises (1.6) on varda siirded punktides a ja b. Rajasiirete ja rajajõudude arv on vastavuses. Kui üks nendest on ette antud, siis teine tuleb leida. Rajasiirete ja rajajõudude üheks osaks on toesiirded ja toereaktsioonid. Vaata etteantud ja tundmatuid toetingimusi (joonis 3.1).

Tööseisund	Prinkus [MR95]	Sisejõud [MR96]	Ristlõike jäikus	Elastsus-seosed	Deformatsiooni-energia [MR96]
Pike 	Pikkeprinkus $\lambda = \frac{du}{dx}$ $\lambda^* = \frac{\Lambda}{L}$ siin $\Lambda = \Delta u$	Pikkejõud N	Pikke-jäikus EA	$N = EA\lambda$	$dU_N = \frac{1}{2}N\lambda dx$
Paine 	Paindeprinkus $\psi = \frac{d\varphi_y}{dx}$ $\psi^* = \frac{\Psi}{L}$ siin $\Psi = \Delta\varphi_y$	Paindemo-ment M_y	Painde-jäikus EI_y	$M_y = EI_y\psi_y$	$dU_M = \frac{1}{2}M_y\psi_y dx$
Lõige 	Lõikeprinkus $-\beta_z = \frac{dw_Q}{dx}$ $-\beta_z^* = \frac{B_z}{L}$ siin $B_z = \Delta w_Q$	Põikjõud Q_z	Lõike-jäikus GA_{red}	$Q_Z = GA_{red}\beta_z$	$dU_Q = \frac{1}{2}Q_z\beta_z dx$
Vääne 	Väändeprinkus $\vartheta = \frac{d\varphi_x}{dx}$ $\vartheta^* = \frac{\Theta}{L}$ siin $\Theta = \Delta\varphi_x$	Väändemo-ment M_x	Väände-jäikus GI_x	$M_x = GI_x\vartheta$	$dU_\gamma = \frac{1}{2}M_x\vartheta dx$

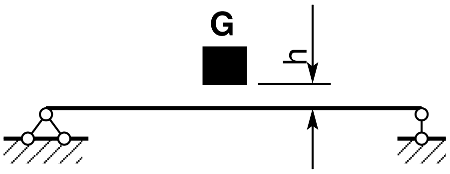
Joonis 1.3. Varda tööseisundid

1.5 Koormused ja koondatud jõud

Koormusi liigitatakse ajas muutumise järgi *dünaamilisteks* ja *staatilisteks*. Kui koormus muutub ajas nii aeglaselt, et konstruktsiooni deformeerumisel võib inertsjõu hüljata, siis nimetatakse koormust *staatiliseks*. Suuruselt, sihilt, suunalt või asukohalt muutuvat koormust nimetatakse *dünaamiliseks*. Edaspidi piirdume ainult staatiliste koormuste vaatlemisega. Koormused esinevad alati kas kogu konstruktsiooni või selle osa ulatuses hajutatult *lauskoormustena*, mida võib jaotada ruum-, pind- ja joonkoormusteks.

Ruumkoormus rakendub tavaliselt massi kaudu (raskusjõud, inertsjõud jne) ja on ruumis hajutatud. Ruumkoormust mõõdetakse selle intensiivsusega $\vec{q}\ (x, y, z)$, mis näitab vaadeldava punkti vahetus läheduses ruumiühikule mõjuvat jõudu N/m^3, kN/m^3 jne.

Pindkoormus rakendub konstruktsiooni kogu pinnale või selle osadele ja väljendab teiste kehade vahetut kontaktmõju. Pindkoormuse intensiivsus $\vec{q}\ (x, y)$ näitab pinna-



Joonis 1.4. Löök kõrguselt $h = 0$

Joonisel 1.4 on tehnilise mehaanika näide, kus raskuse G kukkumine (löök) kõrguselt $h = 0$ kutsub esile kaks korda suuremad sisejõud ja siirded kui staatiline koormus.

ühikule mõjuvat jõudu vaadeldavas punktis N/m^2, kN/m^2.

Joonkoormus on nii taandatud ruum- kui ka pindkoormus intensiivsusega $\vec{q}\,(x)$, mille mõõtühikuks on N/m, kN/m, vt tabelit 1.1.

Tabel 1.1. Koormused

Indeksid	*Koormus*	*Tähis*	*Mõõtühik*	*Mõõde*
$F_{z\,v\,j}$ põhjus, koht, siht	*Koondkoormus*	F_z, F_x	N, kN, MN	$[F]$
	Moment	$\mathcal{M}_y$, $\mathcal{M}_x$	Nm, kNm, MNm	$[FL]$
	Joonkoormus	q_z, q_x	N/m, kN/m, MN/m	$[F/L]$
	Lausmoment	m_x, m_y, m_z	N, kN, MN	$[FL/L]$

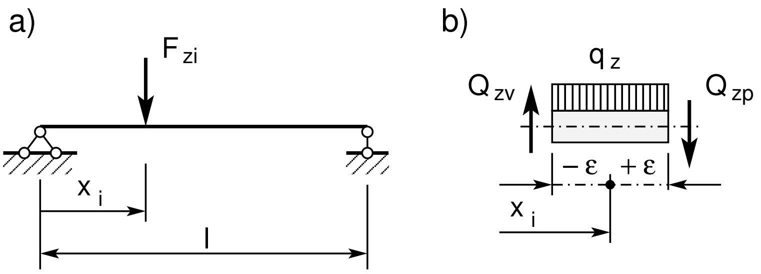
Sageli mõjub pind- ja joonkoormus konstruktsiooni üldmõõtmetega võrreldes väikesele pinnale (joonele). Sellist koormust loetakse ühte punkti koondatud *punkt-* ehk *koondkoormuseks*, mille tähiseks on $\vec{F}$ ja mõõtühikuks N/m, kN/m. Koondkoormus esitatakse enamasti projektsioonidena F_x, F_y, F_z, (tabel 1.1).

Vahel taandub koormus jõupaariks, mille toimet hinnatakse *momendiga*. Momendi tähisena kasutatakse tähti $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}_y$ ja $\mathcal{M}_z$, mis väljendavad momendi mõju telje x, y, z suhtes.

Suhteliselt harva esineb hajutatud moment m ehk *lausmoment*. Lausmomendi projektsioonid on m_x, m_y ja m_z ning mõõtühikud N, kN (tabel 1.1).

Vaatleme joonkoormuse q_z koondamist koondkoormuseks F_z (joonis 1.5). Olgu koondkoormuse F_z rakenduspunkti koordinaat x_i. Koondjõu väärtus avaldub joonkoormuse kaudu järgmiselt:

$$F_{zi} = q_z \cdot 2\varepsilon \tag{1.8}$$



Joonis 1.5. Koondjõud

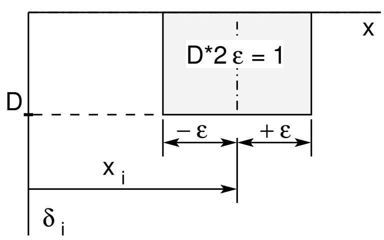
ehk

$$F_{zi} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} q_z\left(x\right)\, dx \tag{1.9}$$

Varda ristlõiget, kus mõjub koondatud koormus, nimetame *iseäraseks ehk singulaarseks ristlõikeks*. Vaatleme varda elementi (joonis 1.5) pikkusega 2ε. Parempoolses ristlõikes mõjub põikjõud Q_{zp} ja vasakpoolses ristlõikes põikjõud Q_{zv}. Need põikjõud erinevad üksteisest $q_z \cdot \varepsilon$ võrra. Kui nüüd vähendada varda elemendi pikkust ($\lim_{\varepsilon \to 0}$), siis saab ühes ristlõikes kaks erinevat põikjõudu Q_{zp} ja Q_{zv}. Selline ristlõige on *iseärane ristlõige*.

Võtame kasutusele deltafunktsiooni δ_i (joonis 1.6). Lisaks avaldisele (1.11) võib kirjutada järgmise seose:

$$\int_0^l F_{zi}\delta\left(x - x_i\right)\, dx = \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} F_{zi}\delta\left(x - x_i\right)\, dx = F_{zi} \tag{1.10}$$



Joonis 1.6. Deltafunktsioon

Joonisel 1.6 on deltafunktsioon $\delta_i = \delta\left(x - x_i\right)$. See funktsioon on aproksimeeritud ristkülikulise kujuga, mille pindala $D \cdot \varepsilon = 1$, kui $\varepsilon \to 0$ ning $D \to \infty$

$$\int_0^l \delta\left(x - x_i\right)\, dx = \\ = \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \delta\left(x - x_i\right)\, dx = 1 \tag{1.11}$$

kus ε on meelevaldselt väike positiivne arv.

1.6 Aproksimatsiooni tasemed. Mudelid

Tegeliku konstruktsiooni aproksimeerimine[3] on inseneripraktikas üheks raskemaks ülesandeks (joonis 1.7). Tegelikku konstruktsiooni pole alati võimalik otseselt uurida kui

[3] **Aproksimeerimine**, *lähendamine* – objekti asendamine mingi teise, temast teatavas mõttes vähe erineva objektiga.

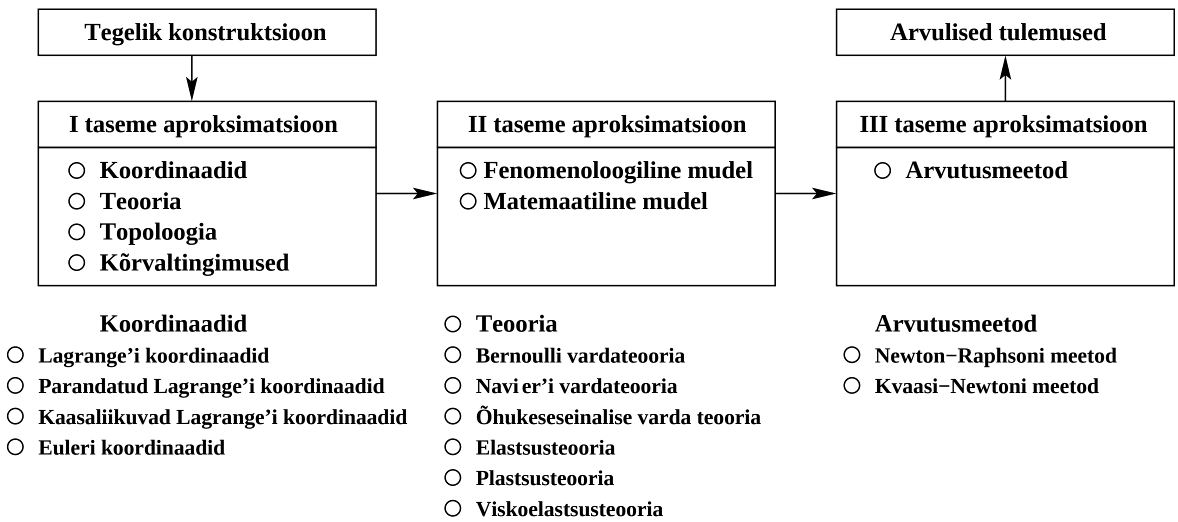
tervikut, sest konstruktsiooni olekuparameetrite arv on suur. *Olekuparameetrite* all mõistame füüsikalisi suurusi, mis iseloomustavad süsteemi olekut. *Välisteks olekuparameetriteks* on välisjõud ja väliste väljade tugevus. *Sisemisteks olekuparameetriteks* on sisejõud, siseenergia, temperatuur jne. Erinevate olekuparameetrite kirjeldamiseks on olemas erinevaid teooriaid: Bernoulli[4] vardateooria, Navier'i[5] vardateooria, elastsus teooria, viskoelastsusteooria jne. Parameetrite hulga vähendamiseks peab tegema lihtsustavaid hüpoteese. Nende hüpoteeside aluseks on kas vaatlus (katsetused), teoreetilised kaalutlused või tehakse need intuitiivselt [Krä91a].

Kaasaliikuvate Lagrange'i[6] koordinaatide abil on võimalik kirjeldada suuri deformatsioone ja stabiilsuse kadu.

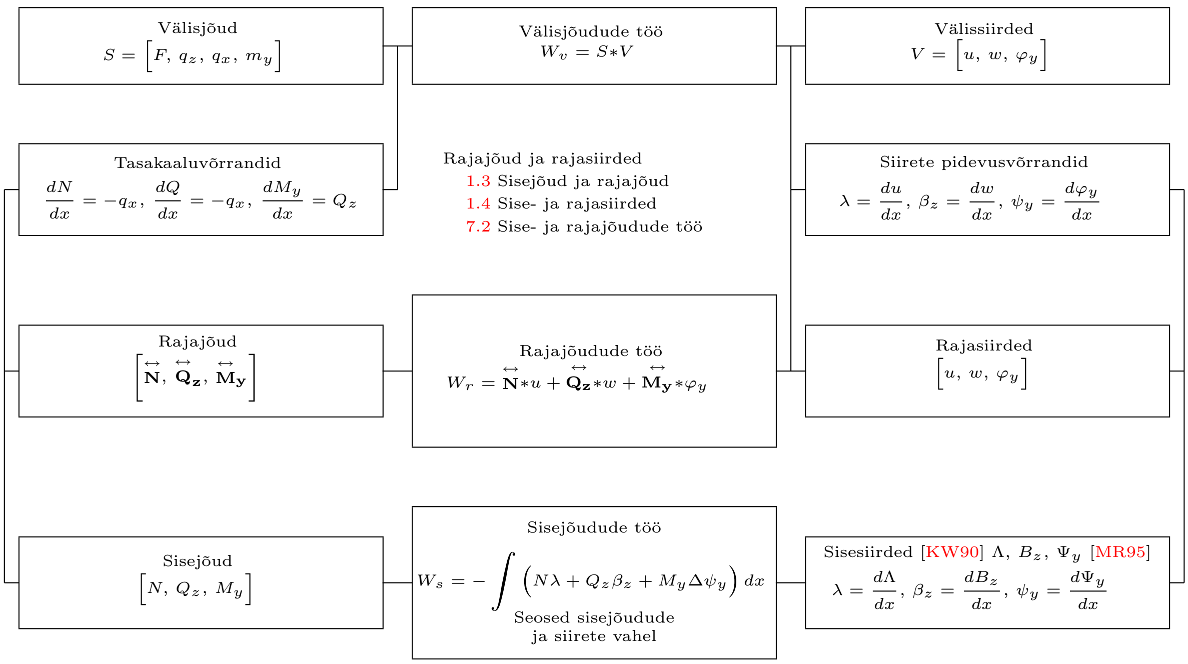
Varraste asukohti kirjeldatakse topoloogiaga. Absoluutselt sirgeid vardaid tegelikkuses ei esine, seega jälle aproksimatsioon. Konstruktsioonis on vardad omavahel ühendatud kas jäigalt või liigenditega.

Vaadeldav teooria koosneb fenomenoloogilisest[7] ja matemaatilisest mudelist. Siin tehakse teise taseme aproksimatsioonid. Fenomenoloogilise mudeli [8] struktuuriskeem on joonisel 1.8. Matemaatiline mudel kirjeldab fenomenoloogilise mudeli kvalitatiivseid liikmeid. Kolmanda taseme aproksimatsioonid tehakse arvutusmeetodi valikul. Üldiselt ei ole arvutusmeetodis võimalik kõiki arvutusmudeli muutujaid arvestada. Võib osutuda, et osa muutujaid tuleb elimineerida. Tavaliselt on selle taseme aproksimatsioonide üle hea kontroll, sest on võimalik anda vea hinnang.

[4]Jakob Bernoulli, šveitsi matemaatik, 1654–1705.
[5]Louis Marie Henri Navier, prantsuse insener ja füüsik, 1785–1836.
[6]Joseph Louis de Lagrange, prantsuse matemaatik ja mehaanikateadlane, 1736–1813.
[7]**Fenomen** *(< kr phainomenos 'nähtavale ilmuv')* – juhtum, meeltega tajutav olukord või fakt.
[8]**Mudel** – süsteemi, teooria või fenomeni kirjeldus, mis arvestab nende tuntud omadusi ja mida võib kasutada nende omaduste uurimiseks.



Joonis 1.7. Aproksimatsiooni tasemed



Joonis 1.8. Varda fenomenoloogilise mudeli strukruuriskeem

Varrassüsteemide mehaanikas on fookuses geomeetriline omadus – kuju, mille füüsikaliste omaduste kirjeldamiseks valitakse sobiv teooria ja seejärel sobivad meetodid. Kõikides teooriates, mida varrassüsteemid kasutavad, esinevad järgmised mõisted (joonis 1.8): välisjõud (F), välissiirded (V), sisejõud (N, Q, M; $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$), sisesiirded ($+Lambda, B, \Psi, \Theta$; $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy},\ \epsilon_{xy}$), rajajõud ($\overleftrightarrow{\mathbf{N}},\ \overleftrightarrow{\mathbf{Q_z}},\ \overleftrightarrow{\mathbf{M_y}}$), rajasiirded ($\Delta u, \Delta w, \Delta\varphi_y$), tasakaaluvõrrandid, siirete pidevusvõrrandid, olekuvõrrandid, rajatingimused.

Rajajõudude mõiste üldistab toereaktsioone ja varraste vahel mõjuvaid kontaktjõude. Rajasiirded on tugede vajumised ja varraste siirded ning pöörded ühendustes (liigendites). Joonisel 1.8 toodud mõisteid on käsitletud tehnilises mehaanikas varda teoorias.

Taskaaluvõrrandid seostavad sisejõud välisjõududega. Siirete pidevuse võrrandid loovad seosed sisesiirete (tehnilises mehaanikas varda pikkuse muut) ja välissiirete vahel. *Geomeetriliselt mittelineaarses* teoorias on sisesiirete ja välissiirete vahelised seosed mittelineaarsed.

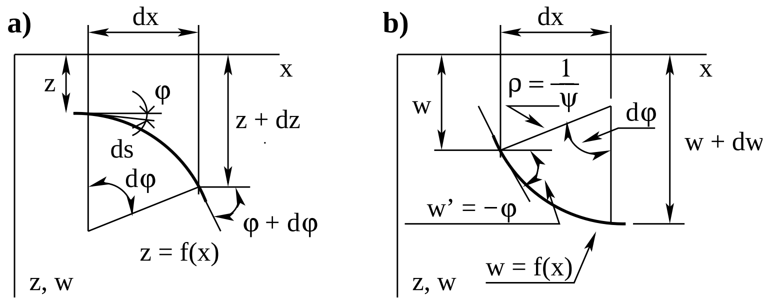
Rajajõud ristlõike välispinnal on võrdsed ja suunatud vastupidi vastavate sisejõududega ristlõike sisepinnal. Rajasiireteks on toe siirded ja varraste ühenduspunktides (sõlmedes) varraste vastastikused siirded ja pöörded.

Füüsikaliselt lineaarse vardateooria olekuvõrrandid (elastsusseosed) väljenduvad Hooke'i[9] seaduse kaudu.

[9]Robert Hooke, inglise füüsik, 1635–1703.

1.7 Lihtsustused varda paindeteoorias

Vaatleme joone kõverust diferentsiaalgeomeetrias ja elastse joone kõverust tehnilises mehaanikas



Joonis 1.9. Joone kõverus

Tähistame joone $z = f(x)$ kõveruse ψ_j-ga ja elastse joone $w = f(x)$ kõveruse ψ_p-ga. Joone element ds (joonis 1.9)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + (z')^2} \tag{1.12}$$

kus

$$z' = \frac{dz}{dx} = tan\,\varphi, \quad \varphi = arctan\,\frac{dz}{dx} \tag{1.13}$$

Elastse joone element ds

$$ds = \varrho d\varphi, \quad \frac{1}{\varrho} = \psi = \frac{d\varphi}{ds} \tag{1.14}$$

siin

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\,(arctan\,z')}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{z''}{1 + (z')^2}\,\frac{dx}{dx\sqrt{1 + (z')^2}} \tag{1.15}$$

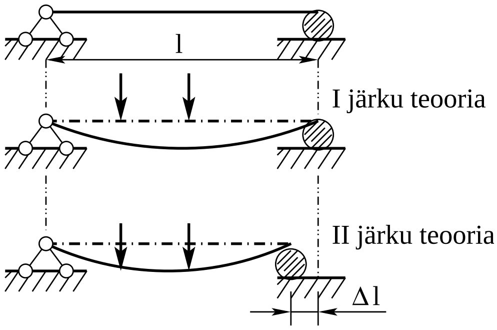
Joone kõverus ψ_j

$$\psi_j = \frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{z''}{\left[1 + (z')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{1.16}$$

siin on ϱ joone kõverusraadius. Teeme lihtsustused

- lihtsustus $tan\,\varphi \approx \varphi$, millest järeldub

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{z''}{\sqrt{1 + (z')^2}} \tag{1.17}$$



Joonis 1.10. Tala deformatsioon

- lihtsustus $tan\,\varphi \approx \varphi$, $ds \approx dx$, millest järeldub

$$\psi_j = \frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds} = z'' \tag{1.18}$$

Kuna elastse joone kõverus $\psi_p = -\psi_j$, siis

$$\psi \equiv \psi_p = -w'' \tag{1.19}$$

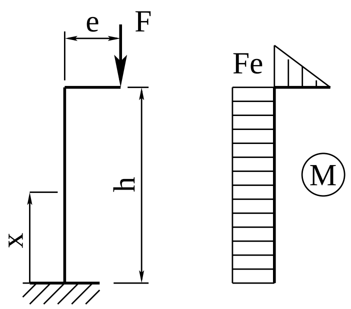
Avaldis (1.19) on lineaarne diferentsiaalvõrrand.

Lineaarses ehk esimest järku teoorias (I järku teoorias) kasutatakse seost (1.19)

$$\psi = -w'', \quad ds \approx dx, \quad \frac{dw}{dx} = w' = -\varphi,$$
$$tan\,\varphi \approx \sin\varphi \approx \varphi, \quad \cos\varphi \approx 1 \tag{1.20}$$

Diferentsiaalseoste (tasakaalutingimuste) koostamisel lähtutakse deformeerumata kujust (algmõõtmete printsiibist) (joonis 1.10).

Joonisel 1.11 on ekstsentrilise surve paindemomendi epüür I järku teoorias, kus ei



Joonis 1.11. Ekstsentriline surve

arvestata varda deformatsiooni. Üldistatud Hooke'i seadus I järku teoorias

$$M_y = -EI_y w'' \tag{1.21}$$

Teist järku teoorias (II järku teoorias) arvestatakse varda deformeerunud kuju diferentsiaalseoste (tasakaalutingimuste) koostamisel. Joonisel 1.12 on esitatud jõu ja momendi vaheline seos. Kui esimest järku teoorias on seos lineaarne, siis teist järku teoorias mittelineaarne.

$$M(x) = \underbrace{Fe}_{I\ \ j\ddot{a}rku\ \ teooria} + \underbrace{F\left[w_1(x) + w_2(,F)\right]}_{lisa\ \ liikmed} \tag{1.22}$$

kus

$$w_1(x,F) = f\left(1 - \frac{x}{h}\right) \tag{1.23}$$

Kolmandat järku teooriat (III järku teooriat) kasutatakse eriti saledate konstruktsioonide ja ka vedrude arvutamiseks. Arvestatakse deformeerunud kuju ja kõveruse täpset avaldist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{z''}{\left[1 + (z')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{1.24}$$

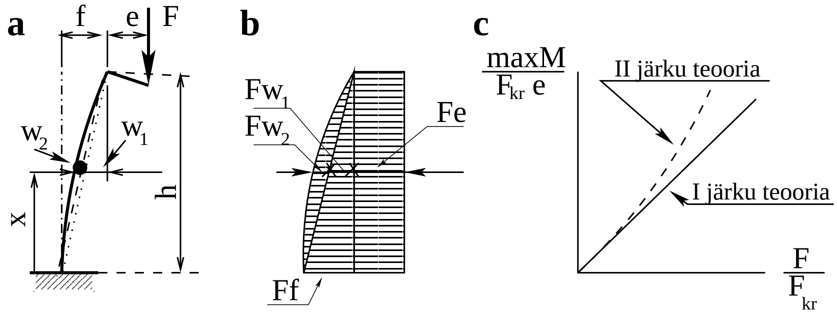
ehk

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{z''}{\sqrt{1 + (z')^2}} \tag{1.25}$$

Ehituskonstruktsioonide arvutamisel III järku teooriat peaaegu ei kasutata.

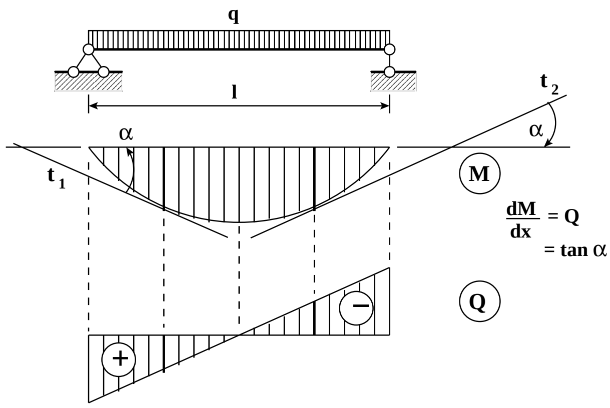
1.8 Epüüridja diferentsiaalseosed

Varraste põikjõu märgi määramiseks vaatleme joonist 1.13. Paindemomendi tuletise geomeetriliseks tõlgenduseks punktis on selles punktis paindemomendi epüüri puutuja



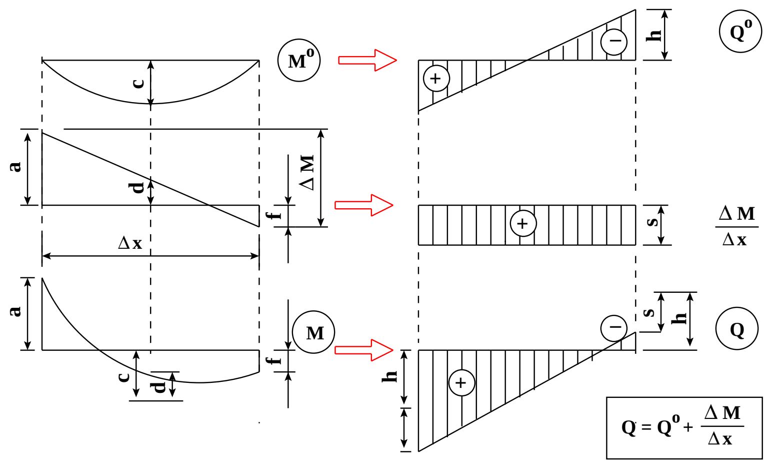
Joonis 1.12. Ekstsentriline surve II järku teoorias

t_1 (t_2) tõusunurga tangens ($\tan\alpha$). Põikjõu märk oleneb puutuja (joonis 1.13) pööramise suunast (puutujat pöörame nii, et ta ühtiks varda teljega, seejuures $\alpha < \frac{\pi}{2}$): vastupäeva pöörates on põikjõud positiivne ja päripäeva pöörates negatiivne.



Joonis 1.13. Põikjõu märgi määramine

Põikjõud horisontaalses vardas leiame epüüride liitmisena (joonis 1.14). Joonisel



Joonis 1.14. Põikjõud horisontaalses vardas

1.14 on näidatud paindemomendid ja nendele vastavad põikjõud. Lineaarselt muutuva paindemonendi korral võime diferentsiaalseose (1.26) asendada

$$Q = \frac{dM}{dx} \tag{1.26}$$

$$Q = \frac{\Delta M}{\Delta x} \tag{1.27}$$

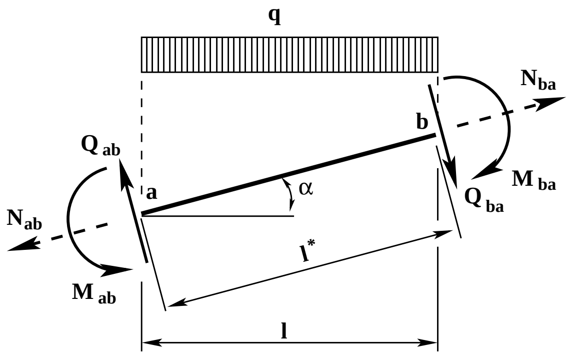
diferentsseosega (1.27).

$$Q = Q^{(0)} + \frac{\Delta M}{\Delta x} \tag{1.28}$$

siin on $Q^{(0)}$ vastava lihttala põikjõud.

1.9 Põikjõud vardas

Põikjõu leidmiseks kaldu olevas vardas (joonist 1.15) koostame tasakaaluvõrrandi varda lõpu b kohta



Joonis 1.15. Põikjõud kaldu vardas

$$\Sigma M_b = 0: \quad Q_{ab} \cdot l^* - M_{ab} + M_{ba} - (q \cdot l) \cdot \frac{l}{2} = 0 \tag{1.29}$$

$$Q_{ab} = \frac{(q \cdot l)}{2} \cdot \frac{l}{l^*} + \frac{M_{ab} - M_{ba}}{l^*} \tag{1.30}$$

$$Q_{ab} = Q_{ab}^{(0)} \cdot \cos\alpha + \frac{M_{ab} - M_{ba}}{l} \cdot \cos\alpha \tag{1.31}$$

ning tasakaaluvõrrandi varda alguse a kohta

$$\Sigma M_a = 0: \quad Q_{ba} \cdot l^* - M_{ab} + M_{ba} + (q \cdot l) \cdot \frac{l}{2} = 0 \tag{1.32}$$

$$Q_{ba} = -\frac{(q \cdot l)}{2} \cdot \frac{l}{l^*} + \frac{M_{ab} - M_{ba}}{l^*} \tag{1.33}$$

$$Q_{ba} = Q_{ba}^{(0)} \cdot \cos\alpha + \frac{M_{ab} - M_{ba}}{l} \cdot \cos\alpha \tag{1.34}$$

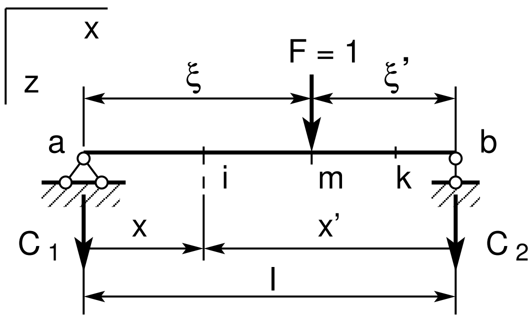
kus $l^* = \frac{l}{\cos\alpha}$

Peatükk 2

Tala mõjujooned

2.1 Mõjujoone mõiste

Liikuvat koormust tuleb arvestada sildade, kraanatalade ja teiste tehnoehitiste projekteerimisel. Paigalseisva koormuse puhul kujutati varraste sisejõude epüüridel. Koormus oli fikseeritud ja sisejõud olid varda telje (x-koordinaadi) funktsioonid. Liikuva koormuse puhul fikseeritakse ristlõige ja leitakse selles sisejõud või toereaktsioon sõltuvalt koormuse asukohast. Ristlõigete jaoks koostatakse graafikud (mõjujooned).
Mõjujoon on graafik, mis kujutab konstruktsioonil liikuvast ja suunda säilitavast ühikjõust tingitud toereaktsiooni, sisejõu, siirde vms suurust arvutusskeemi kindlas ristlõikes. Mõjujoone ja epüüri erinevust selgitame *mõjufunktsiooni* $M(x, \xi)$ abil. Mõjufunktsiooni üheks muutujaks on ristlõike asukoht x (joonis 2.1) ja teiseks muutujaks jõu asukoht ξ. Tala elastse joone diferentsiaalvõrrandi $\frac{d^4w}{dx^4} = -\frac{d^2M}{dx^2} = 0$ lahendina



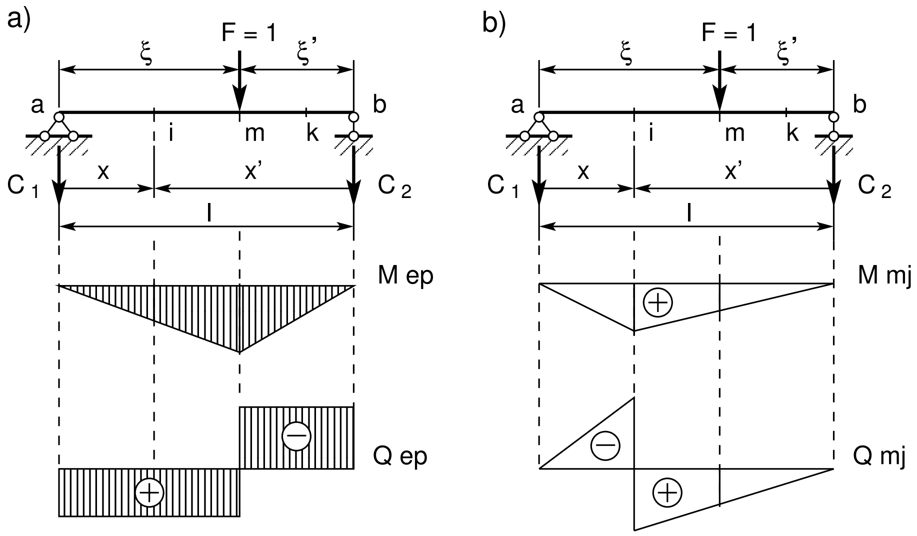
Joonis 2.1. Liikuv koormus

järgmistel rajatingimustel $M(0) = 0$, $M(l) = 0$ saab leida mõjufunktsiooni (Greeni[1] funktsiooni)

$$M(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(l-\xi)}{l}, & kui \quad x \leq \xi \\ \frac{\xi(l-x)}{l}, & kui \quad x \geq \xi \end{cases} \tag{2.1}$$

[1]Georg Green, inglise füüsik ja matemaatik, 1793–1841.

Epüüride ja mõjujoonte võrdlemiseks vaatleme mõjufunktsiooni (2.1). Epüüride saamiseks fikseerime muutuja ξ ($\xi = a_m$) ja mõjujoonte saamiseks muutuja x ($x = a_i$).



Joonis 2.2. Epüürid ja mõjujooned

Epüüride puhul fikseerime muutuja ξ ($\xi = a_m$)

$$M\,(x,\,\xi) = \begin{cases} \frac{x(l-a_m)}{l}, & kui \quad x \le a_m \\ \frac{a_m(l-x)}{l}, & kui \quad x \ge a_m \end{cases} \tag{2.2}$$

Mõjujoonte puhul fikseerime muutuja x ($x = a_i$)

$$M\,(x,\,\xi) = \begin{cases} \frac{a_i(l-\xi)}{l}, & kui \quad a_i \le \xi \\ \frac{\xi(l-a_i)}{l}, & kui \quad a_i \ge \xi \end{cases} \tag{2.3}$$

Avaldistega (2.2) ja (2.3) leitud graafikud on joonisel 2.2. Põikjõudude epüüride ja mõjujoonte saamiseks tuleb võtta vastavad tuletised, mida me tegema ei hakka. Mõjujoonte leidmist vaatleme eraldi.

2.2 Toereaktsioonide mõjujooned

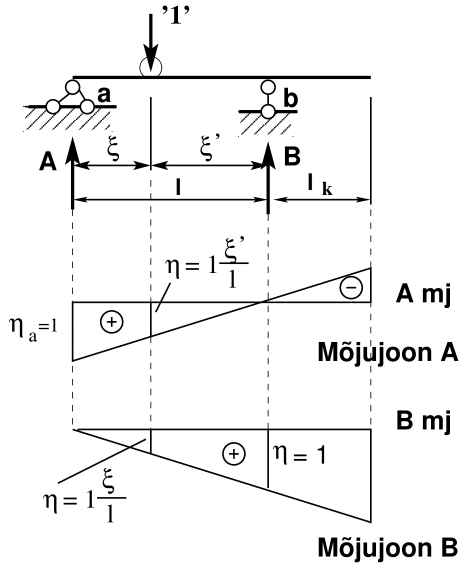
Staatiline meetod
Tala avas liigub koondatud koormus $F = 1$, mille kaugus toest a on ξ ja toest b $\xi' = l - \xi$. Tasakaalutingimusest $\Sigma M_b = 0$

$$\sum M_b = 0; \quad -Al + F \cdot (1 - \xi) = 0 \tag{2.4}$$

saame

$$A = F \cdot \frac{l - \xi}{l} = \frac{\xi'}{l} \tag{2.5}$$

Toereaktsioon A on muutuja ξ' lineaarne funktsioon (joonisel 2.3 sirgjoon).
Sarnaselt leiame tasakaalutingimusest $\sum M_a = 0$



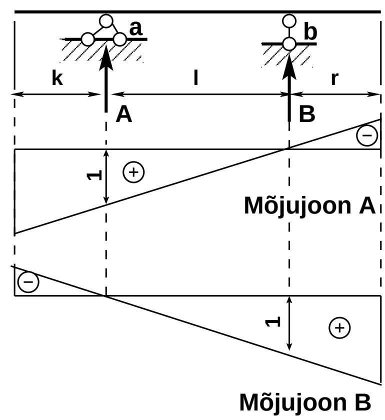
Joonis 2.3. Toereaktsioonide A ja B mõjujooned

$$\sum M_a = 0; \quad -Bl + F \cdot \xi = 0 \tag{2.6}$$

toereaktsiooni B

$$B = F \cdot \frac{\xi}{l} = \frac{\xi}{l} \tag{2.7}$$

on joonisel 2.3 näidatud sirgjoon.
Konsoolidega tala toereaktsioonide mõjujooned on joonisel 2.4.

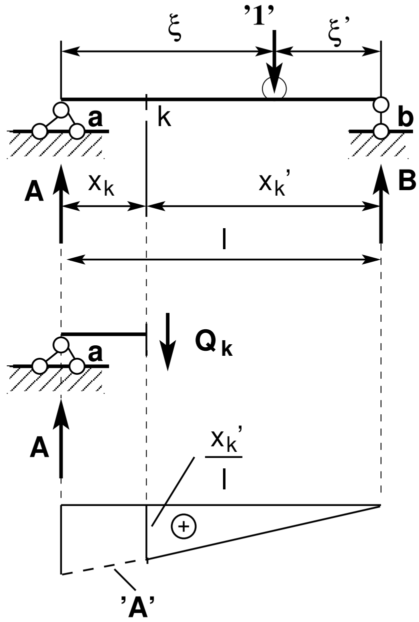


Joonis 2.4. Konsoolidega tala toereaktsioonide mõjujooned

2.3 Põikjõu mõjujooned

Staatiline meetod
Vaatleme kahte juhtu.

- Liikuv koormus asub ristlõike k ja toe b vahel (joonis 2.5).
  Tasakaalutingimusest $\Sigma Y = 0$ saame $Q_k - A = 0$; $Q_k = A$. Vahemikus $x_k \leq \xi \leq l$ on mõjujoon sarnane toereaktsiooni A mõjujoonega (avaldis 2.5).

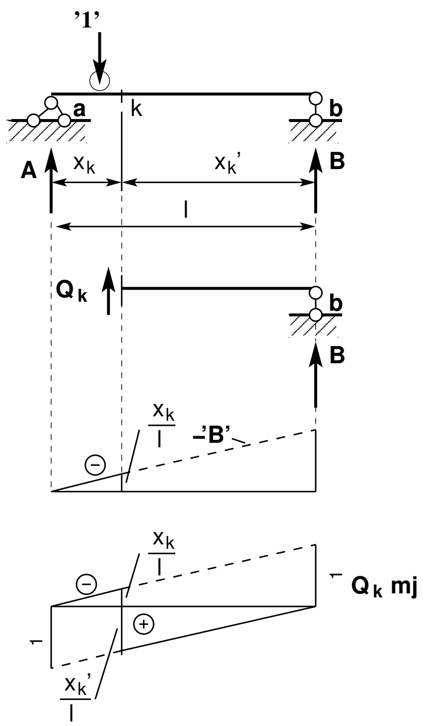


Joonis 2.5. Põikjõu mõjujoone vasak pool

- Liikuv koormus asub toe a ja ristlõike k vahel (joonis 2.6).
  Tasakaalutingimusest $\Sigma Y = 0$ saame $Q_k + B = 0$; $Q_k = -B$. Vahemikus $0 \leq \xi \leq x_k$ on mõjujoon sarnane toereaktsiooni -B mõjujoonega (2.7).

Põikjõu Q_k mõjujoon

$$Q_k = \begin{cases} A = \frac{(l-\xi)}{l}, & kui \quad a_k \leq \xi \leq l \\ -B = -\frac{\xi}{l}, & kui \quad 0 \leq \xi \leq a_k \end{cases} \tag{2.8}$$

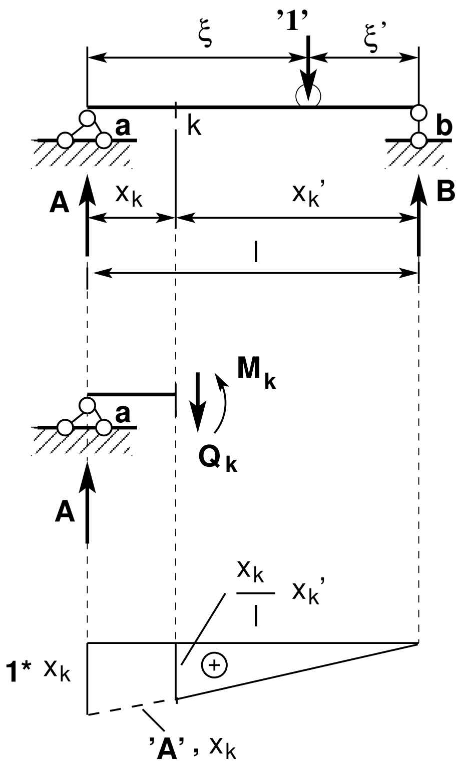


Joonis 2.6. Põikjõu Q_k mõjujoon

2.4 Paindemomendi mõjujooned

Staatiline meetod
Vaatleme kahte juhtu.

- Liikuv koormus asub ristlõike k ja toe b vahel (joonis 2.7).
  Tasakaalutingimusest $\Sigma M_k = 0$ saame $M_k - A \cdot x_k = 0$; $M_k = A \cdot x_k$. Vahemikus $x_k \leq \xi \leq l$ on mõjujoon sarnane toereaktsiooni A mõjujoonega, mis on korrutatud x_k.
- Liikuv koormus asub toe a ja ristlõike k vahel (joonis 2.8).
  Tasakaalutingimusest $\Sigma M_k = 0$ saame $M_k - B \cdot x_k = 0$; $M_k = B \cdot x'_k$. Vahemikus $0 \leq \xi \leq x_k$ on mõjujoon sarnane toereaktsiooni B mõjujoonega, mis on korrutatud x'_k.



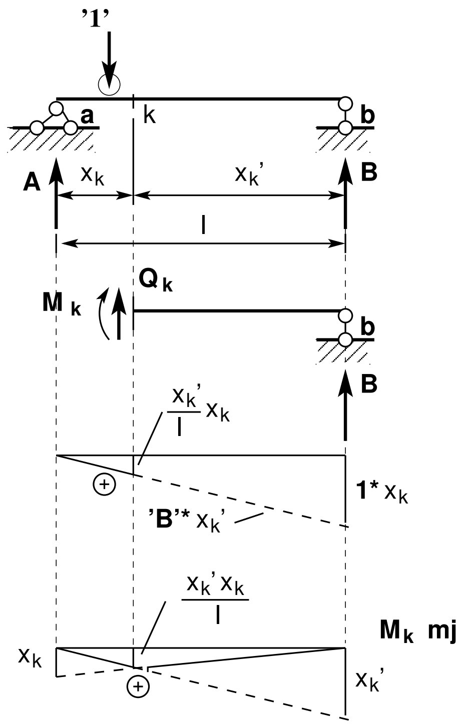
Joonis 2.7. Paindemomendi vasak pool

Paindemomendi M_k mõjujoon

$$M_k = \begin{cases} a_k \cdot A = a_k \cdot \frac{(l-\xi)}{l}, & kui \quad a_k \leq \xi \leq l \\ (l - a_k) \cdot B = (l - a_k) \cdot \frac{\xi}{l}, & kui \quad 0 \leq \xi \leq a_k \end{cases} \tag{2.9}$$

kus a_k on ristlõike k kaugus vasakust toest (x_k).

Konsoolidega tala paindemomendi ja põikjõu mõjujooned õpikust [DK62] on toodud joonisel 2.10.

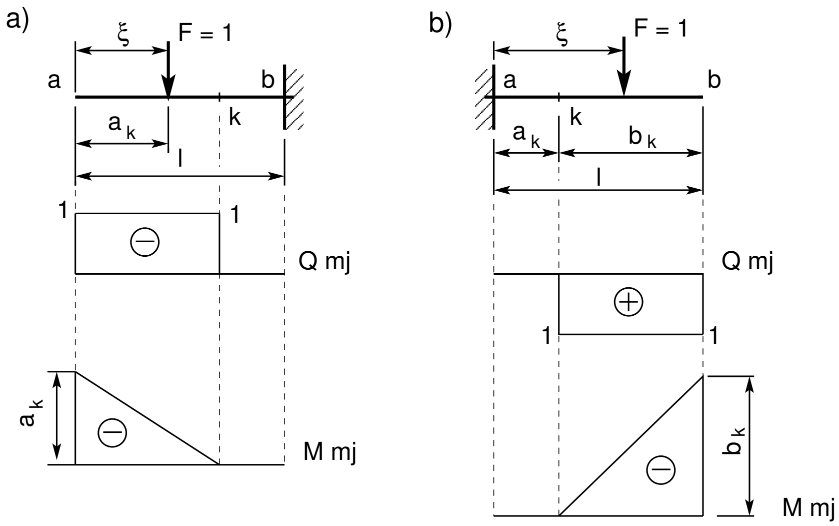


Joonis 2.8. Paindemomendi M_k mõjujoon

2.5 Konsooli mõjujooned

2.5.1 Põikjõu mõjujoon

Konsooli (joonis 2.9 a) põikjõu mõjujoon lõike k jaoks koosneb kahest sirgest. Kui ühikjõud asetseb lõikest k paremal, on põikjõud lõikes k null. Kui ühikjõud asetseb



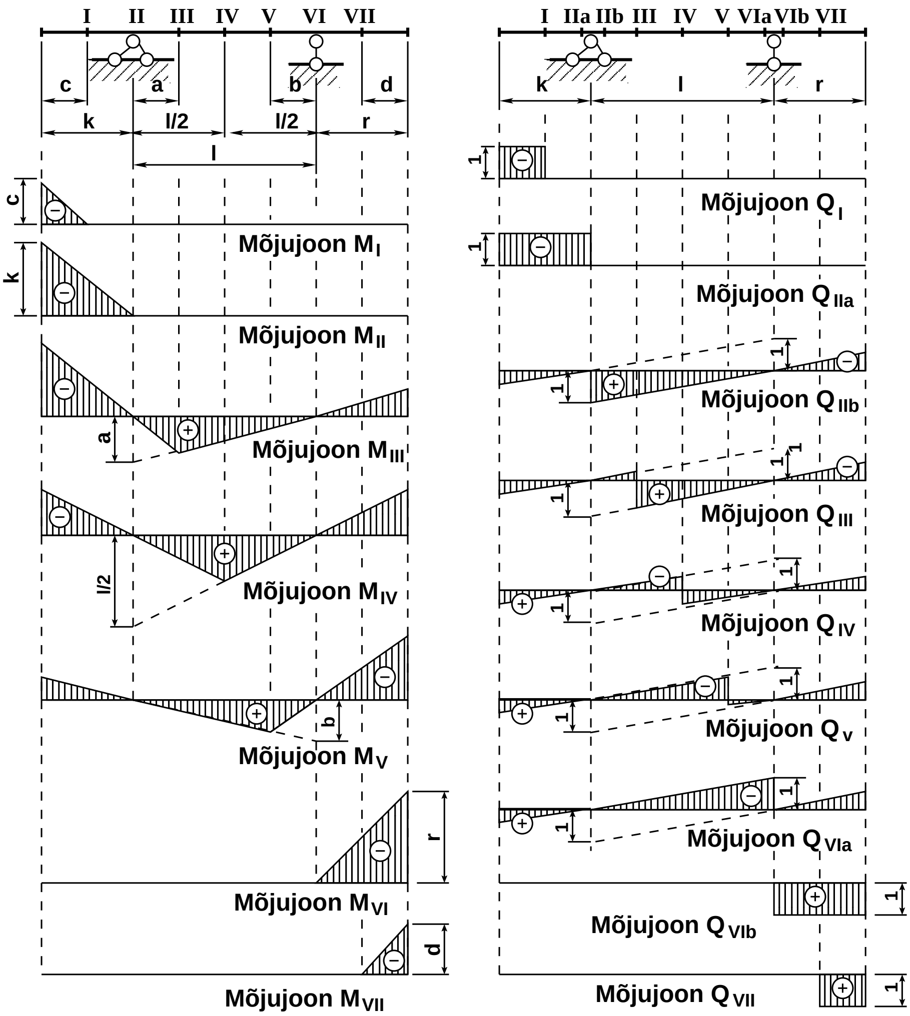
Joonis 2.9. Konsooli mõjujooned.

lõikest k vasakul, on lõikes k põikjõud $Q_k = -1$. Põikjõu Q_k mõjujoon on joonisel 2.9 a). Joonisel 2.9 b on toodud parempoolse konsooli ristlõike k põikjõu Q_k mõjujoon. Erinevus vaskpoolsest on põikjõu märgis.

2.5.2 Paindemomendi mõjujoon

Konsooli lõike k paindemomendi mõjujoon M_k on joonisel 2.9 a. Kui ühikjõud on lõike k ja toe vahel, siis $M_k = 0$. Kui ühikjõud asetseb vasakul pool lõiget k (joonis 2.9 a), siis

$$M_k = -F \cdot (a_k - \xi) \tag{2.10}$$



Joonis 2.10. Momendi ja põikjõu mõjujooned

2.6 Mõjujoonte kasutamine

Tuleb teada, kuidas kasutada mõjujooni toereaktsioonide, sisejõudude ja siirete leidmiseks.
Mõjujoone iga ordinaat η_i näitab otsitavat suurust ühikulisest koormusest $F_i^* = 1$ (vt joonis 2.11). Kui talale mõjub koormus F_i, siis leime otsitava suuruse Z_k avaldisest $Z_k = F_i \cdot \eta_i$. Mitme koondatud jõu olemasolul summeerime need (vt avaldist 2.11).

$$Z_k = F_1 \cdot \eta_1 + F_2 \cdot \eta_2 + \ldots + F_i \cdot \eta_i \tag{2.11}$$

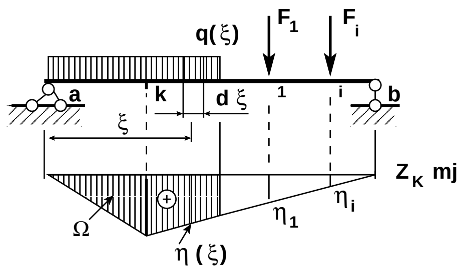
siin on F_1, F_i koondatud jõud ja η_1, η_i vastavate jõudude all olevad ordinaadid mõjujoonel (joonis 2.11). Ühtlaselt jaotatud koormusest ($q = konst$) põhjustatud sisejõu Z_k (joonis 2.11) saame avaldisest (2.12)

$$Z_k = \int_a^c q\,(\xi)\,\eta\,(\xi)\,d\xi = q \cdot \Omega \tag{2.12}$$

kus Z_k on sisejõud ning Ω mõjujoone pindala (vt joonisel 2.11 viirutatud osa) ja kogu koormusest (vt joonist 2.11) avaldisega (2.13).

$$Z_k = F_1 \cdot \eta_1 + F_i \cdot \eta_i + q \int_a^c \eta\,(\xi)\, d\xi = F_1 \cdot \eta_1 + F_i \cdot \eta_i + q \cdot \Omega \tag{2.13}$$

siin on F_1, F_i koondatud jõud ja η_1, η_i vastavate jõudude all olevad ordinaadid mõjujoonel (joonis 2.11).



Joonis 2.11. Mõjujoonte kasutamine

Näide 2.1 *Arvutada joonisel 2.12 kujutatud konsoolidega tala toereaktsioon* A, *põikjõud* Q_a^p *toest* a *paremal, põikjõud* Q_a^v *toest* a *vasakul, paindemoment* M_k, *põikjõud* Q_k *lõikes* k. *Talale mõjuv koormus ja vajalikud mõjujooned on joonisel 2.12. Kasutades avaldist (2.13), saame toereaktsiooni* A *väärtuseks*

$$A = 4 * 1.2 + 5 * 0.4 + 2\frac{0.4 * 2}{2} - 2\frac{0.2 * 1}{2} = 7.4\,kN \tag{2.14}$$

Põikjõud Q_a^p *toest* a *paremal leiame avaldisega*

$$Q_a^p = 4 * 0.2 + 5 * 0.4 + 2\frac{0.4 * 2}{2} - 2\frac{0.2 * 1}{2} = 3.4\,kN \tag{2.15}$$

Põikjõud Q_a^v *toest* a *vasakul arvutame avaldisega*

$$Q_a^v = -4 * 1.0 = -4.0\,kN \tag{2.16}$$

Paindemomendi M_b *väärtuseks toel* b *saame*

$$M_b = -2\frac{1.0 * 1}{2} = -1.0\,kNm \tag{2.17}$$

Paindemoment M_k *ristlõikes* k *on*

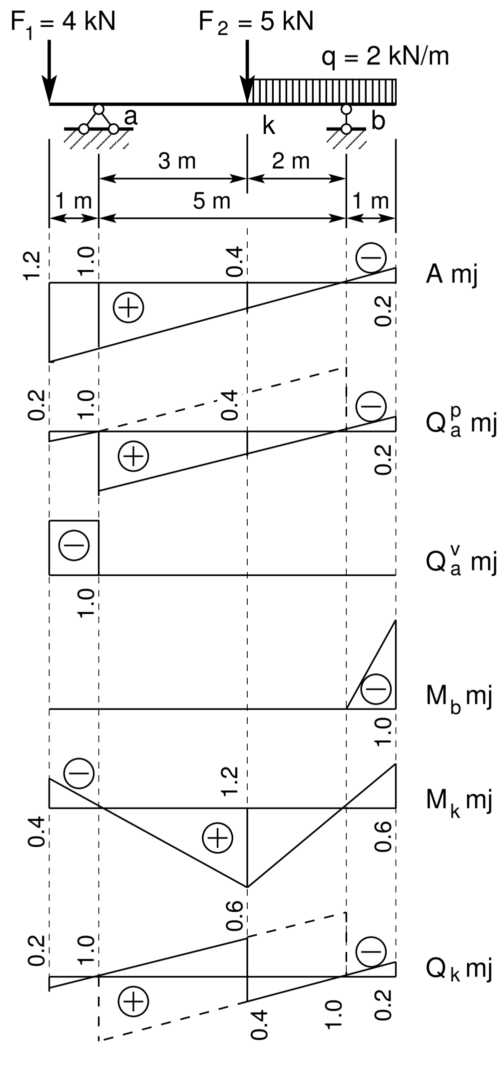
$$M_k = -4.0 * 0.4 + 5 * 1.2 + 2\frac{1.2 * 2}{2} - -2\frac{0.6 * 1}{2} = 6.2\,kNm \tag{2.18}$$

Ristlõikes k *on põikjõul kaks väärtust. Parempoolse põikjõu väärtuse* Q_k^p *(2.19) saab, kui kasutada mõjujoone vasakpoolset väärtust*

$$Q_k^p = 4.0 * 0.2 - 5 * 0.6 + 2\frac{0.4 * 2}{2} - 2\frac{0.2 * 1}{2} = -1.6\,kNm \tag{2.19}$$

Vasakpoolse põikjõu väärtuse Q_k^v *(2.20) saab, kui kasutada mõjujoone parempoolset väärtust*

$$Q_k^v = 4.0 * 0.2 + 5 * 0.6 + 2\frac{0.4 * 2}{2} - 2\frac{0.2 * 1}{2} = 3.4\,kNm \tag{2.20}$$



Joonis 2.12. Sisejõu leidmine mõjujoonte abil

Peatükk 3

Varrassüsteemide liigitus

3.1 Varrassüsteemide liigituse alused

Varrassüsteemiks nimetatakse varraste kogumit, milles iga varda asend ja asendi muutus on määratud ülejäänud varraste asendi muutusega.

Varraskonstruktsiooni liigitamisel võetakse arvesse järgmisi varrassüsteemi omadusi:

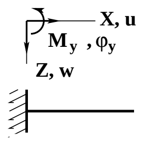
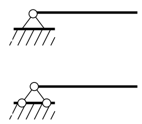
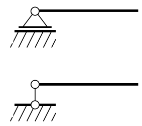
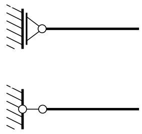
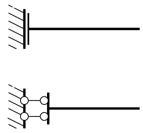
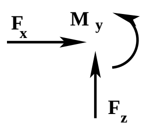
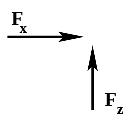
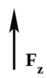
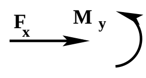
- varda telgjoone kuju
- varda tööseisundit (joonis 1.3)
- varraskonstruktsiooni toesidemete arvu
- liigendite arvu.

Esmalt vaatleme, kas konstruktsioon on valmistatud sirgetest või kõveratest varrastest või kasutatakse mõlemaid, s.t tegemist on segasüsteemiga. *Järgnevalt* uurime, milline on varraste tööseisund (joonis 1.3). Näiteks *sirgetest varrastest valmistatud varrassüsteemi, mille vardad töötavad pikkele, nimetatakse talaskeemiks. Sirgetest varrastest valmistatud varrassüsteemi, mille vardad töötavad liittööseisundis, nimetatakse raamskeemiks*. Edaspidi vaatleme liigendite arvu ja räägime kolme liigendiga, kahe liigendiga ja liigenditeta raamskeemist.

Kõvera telgjoonega varrast, mis töötab ainult tõmbele, nimetame *vandiks* (kasutatakse ka nimetust *niit*, *niidivõrrand*) ja nendest moodustatud varrassüsteemi *vantskeemiks*. Kõvera telgjoonega varrastest valmistatud varrassüsteemi, mille vardad töötavad liittööseisundis (võimalik on valida selline varraste telgjoone kuju, et varrassüsteem töötab ainult survele), nimetatakse *kaarskeemiks*. Liigendite arvu alusel eristatakse kolme liigendiga, kahe liigendiga ja liigenditeta kaarskeemi.

Tuleb vahet teha sõrestikkonstruktsiooni ja sõrestikskeemi vahel, sest sõrestikkonstruktsioone on võimalik arvutada nii sõrestikskeemi kui ka raamskeemi järgi.

Sõrestikskeemi, talaskeemi, raamskeemi, kaarskeemi, vantskeemi ja segaskeemi üldnimetuseks on *arvutusskeem*. Ühel konstruktsioonil võib olla mitu arvutusskeemi. See sõltub tehtud aproksimatsioonidest.

	Jäik tugi	Paigal-seisev liigendtugi	Liikuv liigendtugi		Vaba ots	Liikuv pöör-dumatu tugi
Tugede sümbolid						
Toe-tingimused: ette antud ja tundmatud	$F_x = ?,\ u = 0$ $F_z = ?,\ w = 0$ $M_y = ?,\ \varphi_y = 0$	$F_x = ?,\ u = 0$ $F_z = ?,\ w = 0$ $M_y = 0,\ \varphi_y = ?$	$F_x = 0,\ u = ?$ $F_z = ?,\ w = 0$ $M_y = 0,\ \varphi_y = ?$	$F_x = ?,\ u = 0$ $F_z = 0,\ w = ?$ $M_y = 0,\ \varphi_y = ?$	$F_x = 0,\ u = ?$ $F_z = 0,\ w = ?$ $M_y = 0,\ \varphi_y = ?$	$F_x = ?,\ u = 0$ $F_z = 0,\ w = ?$ $M_y = ?,\ \varphi_y = 0$
Toe siirde tähis ja arv	−− 0	φ_y 1	$u,\ \varphi_y$ 2	$w,\ \varphi_y$ 2	$u,\ w,\ \varphi_y$ 3	w 1
Toereakt-sioonid ja nende arv	3	2	1	1	0	2

Joonis 3.1. Toed ja toereaktsioonid

3.2 Toed ja toereaktsioonid

Lihtsuse mõttes vaatleme tasapinnalist konstruktsiooni. Kirjeldame toereaktsioonide $\overleftrightarrow{F}_x$, $\overleftrightarrow{F}_z$ ja $\overleftrightarrow{M}_y$ tööd W_t tugede siiretel u, w ja φ_y

$$W_t = \overleftrightarrow{F}_x \cdot u + \overleftrightarrow{F}_z \cdot w + \overleftrightarrow{M}_y \cdot \varphi_y \tag{3.1}$$

Toereaktsioonid kuuluvad rajajõudude hulka, tugede siirded ja pöörded rajasiirete hulka. Rajatingimustest antakse ette kas toereaktsioon või toe siire (pööre). Kui toed ei vaju, siis on tugede siire (pööre) null. Arvutusskeemil kasutatavate tugede sümbolid on joonisel 3.1. Joonisel 3.1 on järgmised toed:

- *Jäik tugi* ei võimalda siirdeid ega pööret, tema vabadusastmete arv on null. Tundmatuid toereaktsioone on kolm. Tundmatute toereaktsioonide ja vabadusastmete summa on kolm;
- *Paigalseisev liigendtugi* võimaldab ainult pööret. Vabadusastmete arv on üks. Tundmatuteks on horisontaalne ja vertikaalne toereaktsioon ning pööre. Tundmatute toereaktsioonide ja vabadusastmete summa on kolm;
- *Liikuv liigendtugi* võimaldab pööret ja ühes sihis siiret. Vabadusastmete arv on kaks. Tundmatuteks on üks toereaktsioon, pööre ja siire;
- *Vaba ots* võimaldab siirdeid ja pöördeid. Vabadusastmete arv on kolm, need on ka tundmatuteks. Toereaktsioonid puuduvad;
- *Liikuv pöördumatu tugi* võimaldab siiret ühes sihis. Vabadusastmete arv on üks. Tundmatuteks on toemoment, üks toereaktsioon (joonisel 3.1 on selleks horisontaalne toereaktsioon) ja siire.

3.3 Kontaktjõud ja liigendid

Liigendite sümbolid arvutusskeemi jaoks ja kontaktjõudude tähised on joonisel 3.2. Nii nagu tugede ja toereaktsioonide vaatlemisel kasutame töö mõistet ka kontaktjõudude ja liigendite vaatlemisel.

Vaatleme hõõrdevabu liigendeid, mille kontaktjõudude töö on null nii nagu toereaktsioonidel

$$W_k = \overset{\leftrightarrow}{N}_x \cdot \Delta u + \overset{\leftrightarrow}{Q}_z \cdot \Delta w + \overset{\leftrightarrow}{M}_y \cdot \Delta \varphi_y \tag{3.2}$$

siin vaatleme kontaktjõudude $\overset{\leftrightarrow}{N}_x$, $\overset{\leftrightarrow}{Q}_z$, $\overset{\leftrightarrow}{M}_y$ tööd W_k kontaktpindade vastastikustel siiretel ja pööretel Δu, Δw, $\Delta \varphi_y$, kus

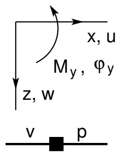
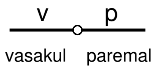
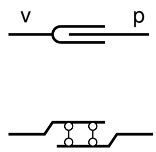
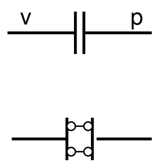
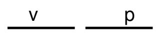
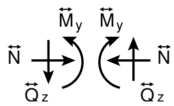
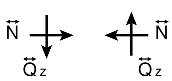
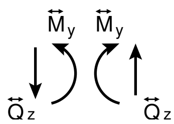
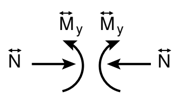
$$\Delta u = u_p - u_v, \qquad \Delta w = w_p - w_v, \qquad \Delta \varphi_y = \varphi_{yp} - \varphi_{yv} quad \tag{3.3}$$

Avaldises (3.3) tähistavad indeksid p ja v siirdeid ja pöördeid liigendist paremal ja vasakul. Varda otsa ristlõikepinda kirjeldame tema pinnanormaaliga. Varda ristlõikepinda, mille pinnanormaal on suunatud varraste ühenduse poole, nimetatakse *kontaktpinnaks*, kontaktpindadel mõjuvaid jõude kontaktjõududeks. Varda otsa ristlõikepind, mille pinnanormaal on suunatud varda sisse, on *sisepind*. Sisepinnal mõjuvad jõud on *sisejõud*. Kontaktjõud ja sisejõud varda otsa ristlõikes on võrdsed, kuid suunalt erinevad. Sisejõud leitakse kontaktjõudude kaudu.

3.4 Rajajõud ja sõlmpunktid

Arvutite kasutamise tõttu tuleb vaatluse alla võtta nii konstruktsioonielemendid (vardad) kui ka nende ühenduspunktid, nn sõlmpunktid.

Varrassüsteemide uurimise põhiliseks probleemiks on rajatingimuste kirjeldamine. Täpsemalt käsitletakse seda probleemi tala-, sõrestik-, raam- ja kaarskeemide juures.

	Jäik ühendus	Paindemomendi liigend	Normaaljõu liigend	Põikjõu liigend	Vabad otsad
Ühenduste sümbolid. Vastastikused siirded	 $\Delta u = u_p - u_v$ $\Delta w = w_p - w_v$ $\Delta\varphi_y = \varphi_p - \varphi_v$				
Kontakti-tingimused sõlmedes: ette antud ja tundmatud	$\updownarrow N_x = ?,\ \Delta u = 0$ $\updownarrow Q_z = ?,\ \Delta w = 0$ $\updownarrow M_y = ?,\ \Delta\varphi_y = 0$	$\updownarrow N_x = ?,\ \Delta u = 0$ $\updownarrow Q_z = ?,\ \Delta w = 0$ $\updownarrow M_y = 0,\ \Delta\varphi_y = ?$	$\updownarrow N_x = 0,\ \Delta u = ?$ $\updownarrow Q_z = ?,\ \Delta w = 0$ $\updownarrow M_y = 0,\ \Delta\varphi_y = ?$	$\updownarrow N_x = ?,\ \Delta u = 0$ $\updownarrow Q_z = 0,\ \Delta w = ?$ $\updownarrow M_y = ?,\ \Delta\varphi_y = 0$	$\updownarrow N_x = 0,\ \Delta u = ?$ $\updownarrow Q_z = 0,\ \Delta w = ?$ $\updownarrow M_y = 0,\ \Delta\varphi_y = ?$
Vastastikuste siirete tähis ja vabadusastmete arv	0	$\Delta\varphi_y$ 1	Δu 1	Δw 1	$\Delta u,\ \Delta w,\ \Delta\varphi_y$ 3
Kontaktjõud ja nende arv	 3	 2	 2	 2	0

Joonis 3.2. Kontaktjõud ja liigendid

3.5 Arvutusskeem

Arvutusskeem on ehituskonstruktsiooni, masina vms kujutis, mille alusel tehakse arvutusi.

Valitud arvutusskeemist oleneb arvutuse täpsus ja keerukus. Alati on võimalik valida täpsem arvutusskeem ja täpsem teooria, kuid siis muutuvad arvutused keerulisemaks. Täpsemaid teooriaid on vaja selleks, et kindlaks teha lihtsamate teooriate kehtivuse piirid. Arvutusskeem sisaldab vähemalt järgmist informatsiooni [KW90]:

- kõigi sõlmpunktide asukohti koos mõõtmetega

- varraste telgjooni
- tugede ja liigendite asukohti
- kõigi varraste ristlõikejäikusi
- koormusi
- kohalike telgede positiivseid suundi.

Arvutis tuleb arvutusskeemi toetada arvutustabeliga [KW90].
Arvutusskeem ja arvutustabel sõltuvad vaadeldavast konstruktsioonist.

Peatükk 4

Staatikaga määratav mitmesildeline tala

4.1 Staatikaga määratav mitmesildeline tala

Liigenditeta mitmesildeline tala on toeraktsioonide suhtes staatikaga määramatu. Staatilise määramatuse aste leitakse valemiga (10.1)

$$n = t - 3 \tag{4.1}$$

kus t on toesidemete arv.

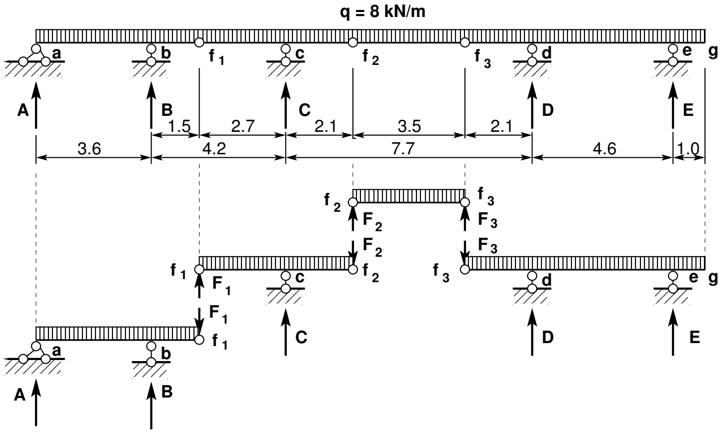
Mitmesildeline tala on staatikaga määratav, kui lihtliigendite arv l on võrdne ilma liigenditeta tala staatikaga määramatuse astmega (10.1)

$$l = t - 3 \tag{4.2}$$

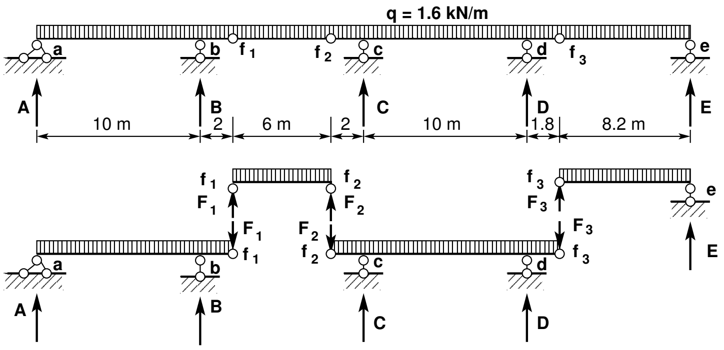
kus t on toesidemete arv.
Liigendite asetus peab olema niisugune, mis tagab mitmesildelise tala geomeetrilise muutumatuse.
Geomeetriliselt muutumatus staatikaga määratavas mitmesildelises talas ei ole *ühes sildes* rohkem kui *kaks* ja *kahes* naabersildes rohkem kui *kolm* liigendit. Kahes naabersildes peab olema vähemalt üks liigend [Rää75].

4.2 Põhiosad ja lisaosad

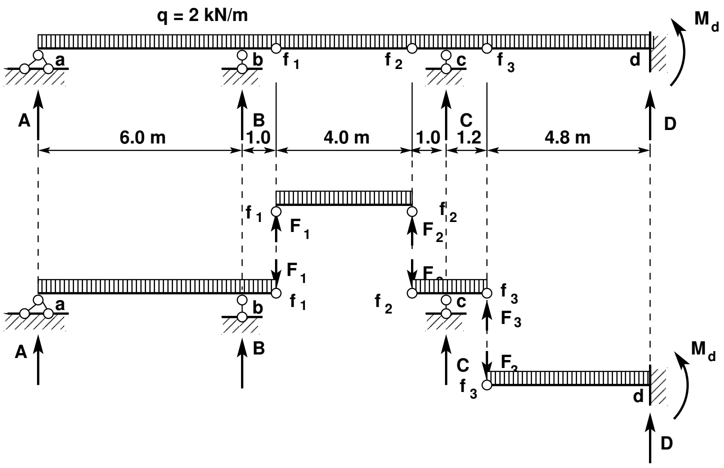
Staatikaga määratavad mitmesildelised talad koosnevad *põhi-* ja *lisaosadest*. *Põhiosa* on geomeetriliselt muutumatu ka siis, kui naaberosad on eemaldatud. *Lisaosad* muutuvad naaberosade eemaldamisel mehanismideks.
Joonisel 4.1 on põhiosad $a - f_1$ ja $f_3 - g$. Lisaosadeks on $f_1 - f_2$ ja $f_2 - f_3$.
Joonisel 4.2 on põhiosad $a - f_1$ ja $f_2 - f_3$. Lisaosadeks on $f_1 - f_2$ ja $f_3 - e$.
Joonisel 4.3 on põhiosad $a - f_1$ ja $f_3 - d$. Lisaosadeks on $f_1 - f_2$ ja $f_2 - f_3$.
"Korrusskeemide" joonistamisel (joonised 4.1 – 4.3) võib ette kujutada, et niisugune on montaaži järjekord. Põhiosad saab monteerida ilma naabertaladeta.



Joonis 4.1. Gerberi tala 1. Lisaosad ja põhiosad



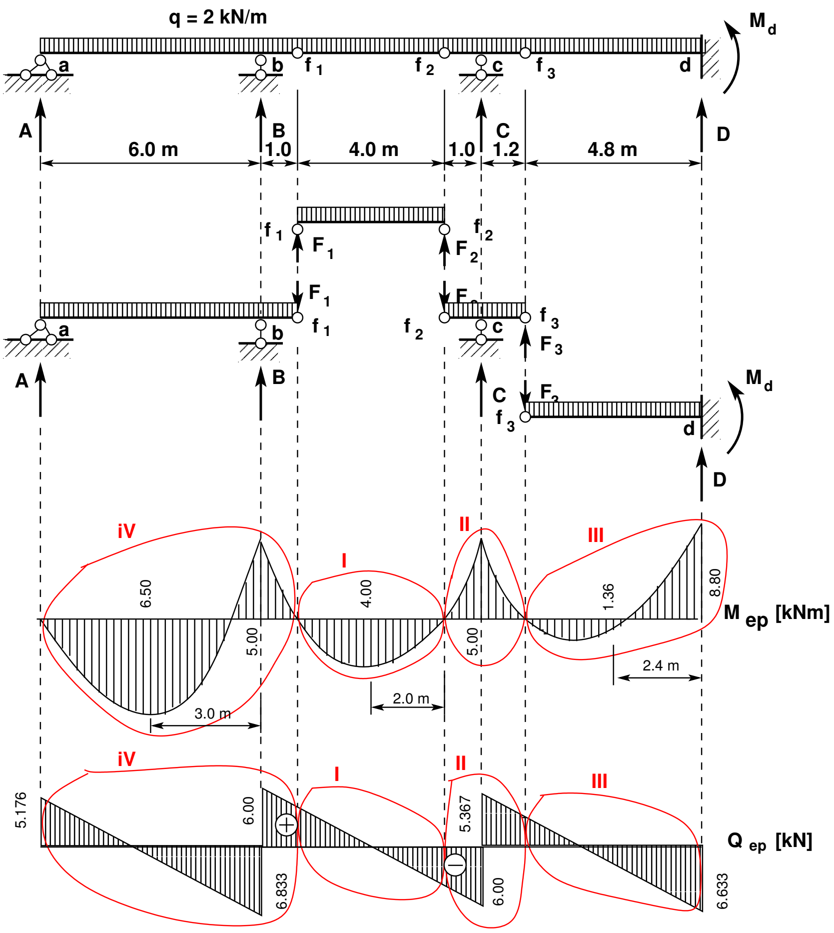
Joonis 4.2. Gerberi tala 2



Joonis 4.3. Gerberi tala 3

4.3 Sisejõudude arvutus

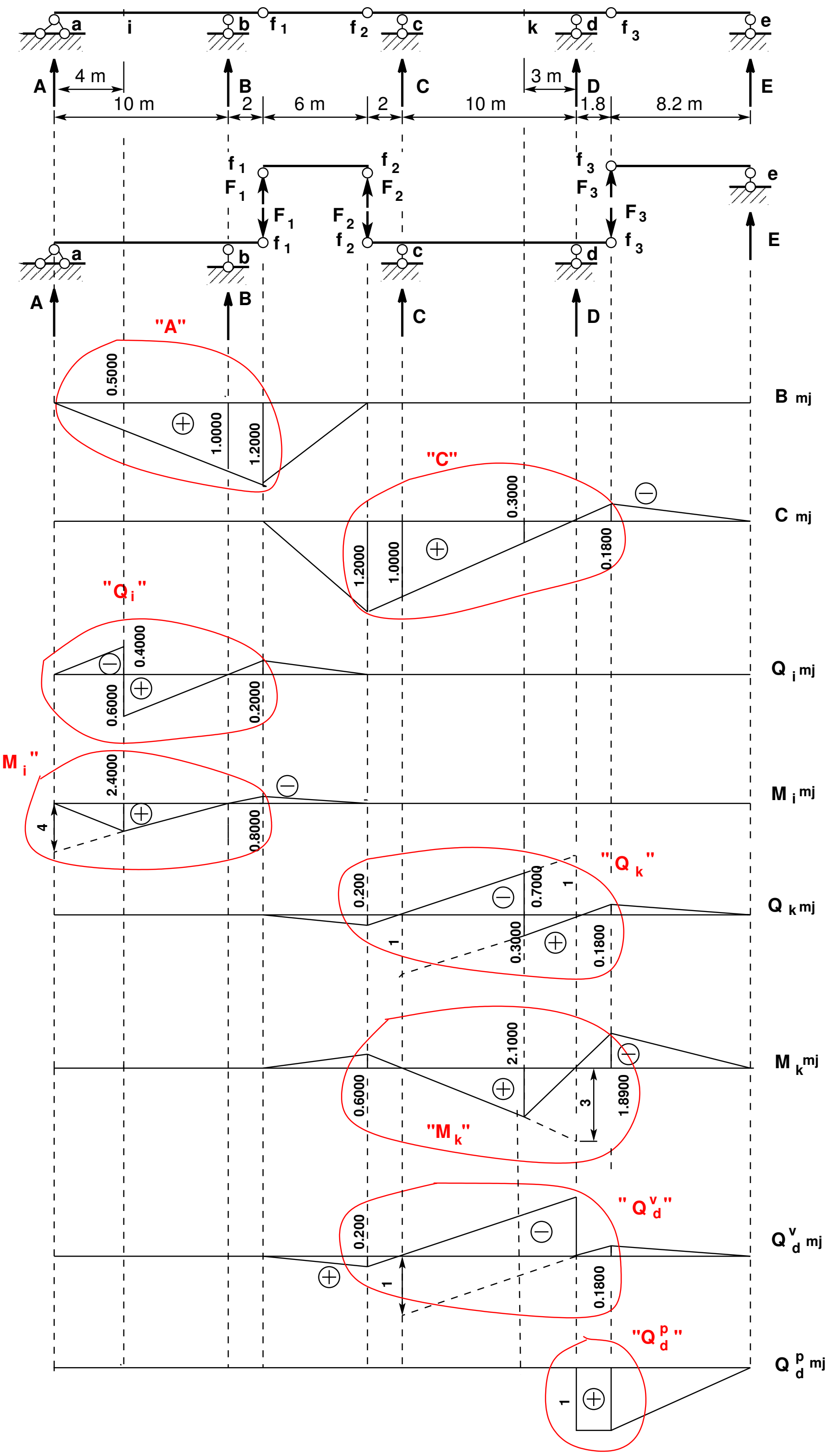
Sisejõudude arvutust alustatakse lisaosadest (vt joonist 4.4). Lisaosade liigendites määratavad jõud rakendatake allpool olevale talale vastupidiste suundadega (vt joonist 4.4).



Joonis 4.4. Gerberi tala 3 epüürid

4.4 Gerberi tala mõjujooned

Staatiliselt määratud mitmesildelise tala (joonis 4.5) mõjujoonte leidmisel kasutame joonisel 2.10 toodud konsoolidega tala paindemomendi ja põikjõu mõjujooni.
Gerberi tala (joonis 4.5) toereaktsioonide A ja C mõjujoonte leidmisel joonistame vastava konsoolidega tala (joonis 2.4) toereaktsioonide mõjujooned joonisele 4.5.



Joonis 4.5. Gerberi tala 2 mõjujooned

Kui vaadeldava tala toereaktsioon sõltub naabertalal liikuvast ühikkoormusest, siis jätkame seda mõjujoont. Ühikjõu liikumisel sõlme f_2, on jõud $F_1 = 0$ (joonis 4.5) ja

sellest tulenevalt $B = 0$. Selle väärtuse kanname joonisel 4.5 ühikjõu alla.
Jätkame toereaktsiooni C mõjujoont sõlmest f_2 vasakule. Ühikjõu liikumisel sõlme f_1, on reaktsioon $F_2 = 0$ ja sellest tulenevalt $C = 0$. Selle väärtuse kanname joonisel 4.5 ühikjõu alla.
Põikjõu Q_i ja paindemomendi M_i mõjujoonte leidmisel joonestame vastavad mõjujooned joniselt 2.10 joonisele 4.5 ringi. Ühikkoormuse liikumisel naaberosale jälgime reaktsiooni F_1 muutumist. Kui ühikjõud on sõlmes f_2 on $F_1 = 0$. Selle väärtuse kanname ühikjõu alla (st sõlme f_2 alla).

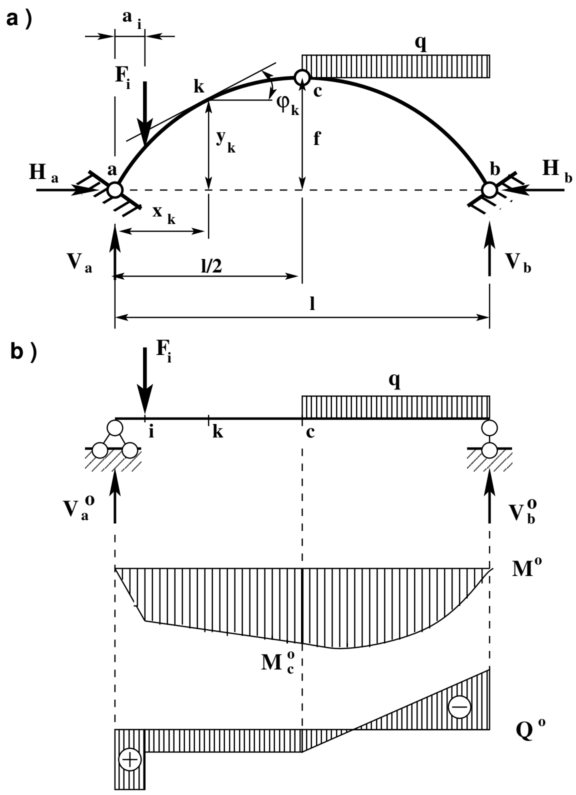
Peatükk 5

Kolme liigendiga kaar ja raam

5.1 Üldmõisted

Kahele toele toetuvast ühest või mitmest surutud kõverast vardast moodustatud konstruktsiooni, milles vertikaalne koormus põhjustab nii vertikaalseid kui ka horisontaalseid toereaktsioone, nimetatakse kaareks.

Kolme liigendiga kaare toeliigendeid a ja b (joonis 5.1) nimetatakse *kannaliigenditeks*



Joonis 5.1. Kolme liigendiga kaar

ja keskmist liigendit c *lukuliigendiks*. Lukuliigendi vertikaalset kaugust toeliigendeid ühendavast sirgest nimetatakse *kaare kõrguseks* ja tähistatakse tähega f (vt joonist 5.1). Kaare kõrguse ja *silde* l suhet $\frac{f}{l}$ nimetatakse kaare *tõusuks*.

5.2 Toereaktsioonide ja sisejõudude arvutus

5.2.1 Vertikaalne koormus

Toereaktsioonide vertikaalsed komponendid tähistame V_a ja V_b (joonis 5.1) ja leiame tugede a ja b kohta kirjutatud tasakaaluvõrranditest (5.2).

$$\Sigma M_b = 0; \quad -V_a \cdot l + F_i \cdot (l - a_i) + q \cdot \frac{l^2}{2} = 0 \tag{5.1}$$

$$\Sigma M_a = 0; \quad -V_b \cdot l + F_i \cdot a_i + q \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{4}\right) = 0 \tag{5.2}$$

Horisontaalsed toereaktsioonid H_a ja H_b leiame *lukuliigendi* c kohta kirjutatud tasakaaluvõrrandist (5.3).

$$\Sigma M_c^v = 0; \quad -H_a \cdot f + V_a \cdot \frac{l}{2} + F_i \cdot \left(\frac{l}{2} - a_i\right) = 0 \tag{5.3}$$

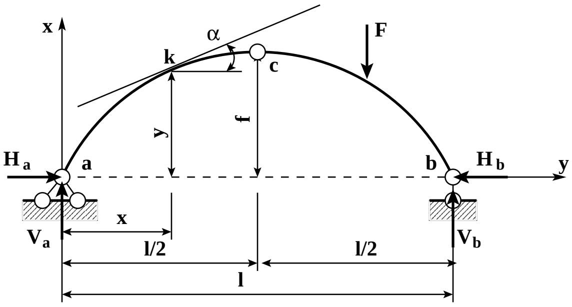
$$H_a = H_b = \frac{M_c^o}{f} \tag{5.4}$$

5.3 Kaare telgjoone võrrandid

Kaare telgjooneks on ruutparabool, mille võrrand on

$$y = \frac{4f\, x\, (l - x)}{l^2} \tag{5.5}$$

Kaare sille l, tõus f ja kaare telje puutuja kaldenurk φ on näidatud joonisel 5.2. Kaare



Joonis 5.2. Kaare telgjoon

telje puutuja kaldenurga siinuse ja koosinuse leiame valemitega

$$\sin\varphi = \frac{\left(1-2\frac{x}{l}\right)}{\sqrt{\left(\frac{l}{4f}\right)^2+\left(1-2\frac{x}{l}\right)^2}} \tag{5.6}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4f}{l}\right)^2\left(1-2\frac{x}{l}\right)^2}} \tag{5.7}$$

Tähistades

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \xi' = \frac{(l-x)}{l} \tag{5.8}$$

saame

$$y = 4f\xi\xi' \tag{5.9}$$

$$\sin\varphi = \frac{(1-2\xi)}{\sqrt{\left(\frac{l}{4f}\right)^2+(1-2\xi)^2}} \tag{5.10}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4f}{l}\right)^2(1-2\xi)^2}} \tag{5.11}$$

Kaare telgjooneks on ringi kaar, mille võrrand on

$$y = \sqrt{R^2-\left(\frac{l}{2}-x\right)^2}-(R-f) \tag{5.12}$$

Avaldises (5.12) on R kaare telje kõverusraadius, mille arvutame järgmise valemiga:

$$R = \frac{(l^2+4f^2)}{8f} \tag{5.13}$$

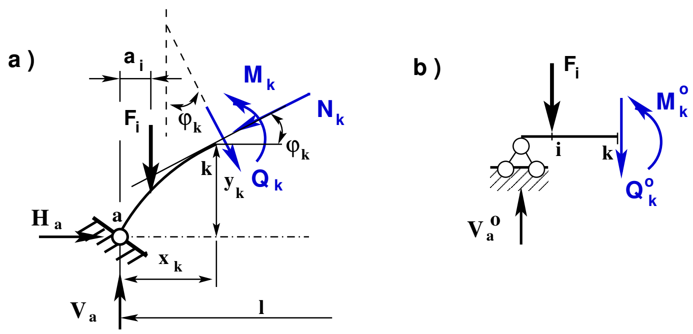
Kaare telje puutuja kaldenurga siinuse ja koosinuse leiame valemitega

$$\sin\varphi = \frac{l}{R}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{l}\right) \tag{5.14}$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{l}{R}\right)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{l}\right)^2} \tag{5.15}$$

5.4 Kaare sisejõud

Kaare sisejõudude arvutamise valemite kirjutamiseks vaatame joonist 5.1. Teeme mõttelises ristlõikes k mõttelise lõike ja vaatleme vaskule poole jäävat osa (joonis 5.3). Ristlõikes k koostatud momentide tasakaaluvõrrand



Joonis 5.3. Kolme liigendiga kaare sisejõud

$$M_k = V_a \cdot x_k - F_i \cdot a_i - H \cdot y \tag{5.16}$$

ehk

$$M_k = M_k^o - H \cdot y \tag{5.17}$$

Jõudude projektsioonide tasakaaluvõrrand Q_k suunale

$$Q_k = (V_a - F_i) \cos \varphi_k - H \cdot \sin \varphi_k \tag{5.18}$$

ehk

$$Q_k = Q_k^o \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k \tag{5.19}$$

Jõudude projektsioonide tasakaaluvõrrand N_k suunale

$$N_k = (V_a - F_i) \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k \tag{5.20}$$

ehk

$$Q_k = Q_k^o \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k \tag{5.21}$$

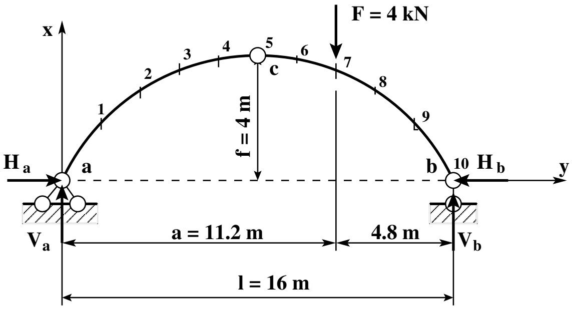
Sisejõud kaare lõikes x arvutame järgmiste valemitega:

$$M_x = M_x^o - H \cdot y \tag{5.22}$$

$$Q_x = Q_x^o \cos \varphi - H \sin \varphi \tag{5.23}$$

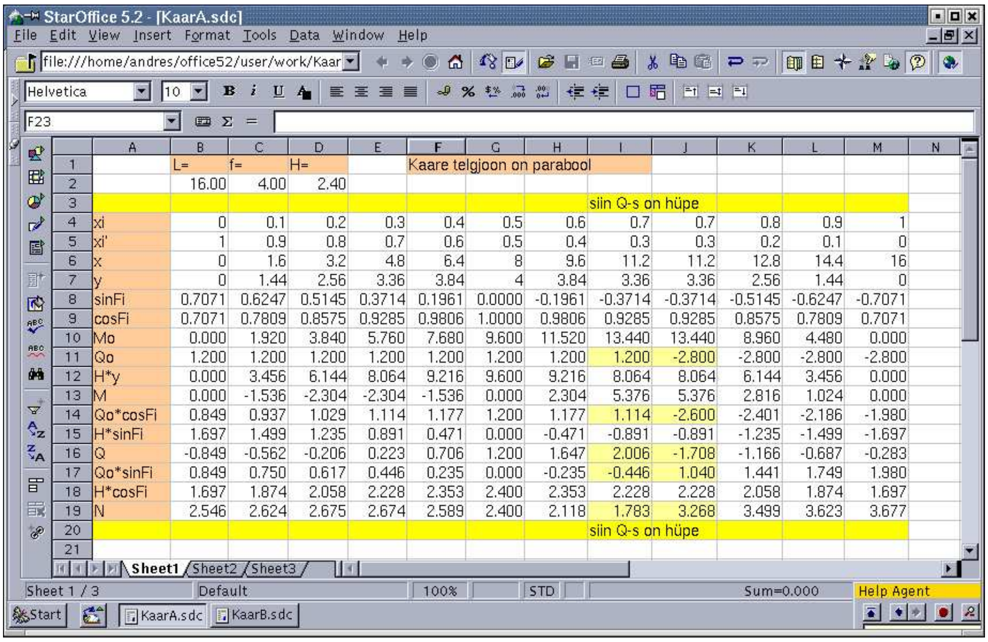
$$N_x = Q_x^o \sin \varphi + H \cos \varphi \tag{5.24}$$

Näide 5.1 *Arvutada joonisel 5.4 toodud kaare sisejõud. Kaare telgjooneks on parabool.*



Joonis 5.4. Kaar A. Koormused

Kaare horisontaalsed toereaktsioonid leiame avaldisega (5.4). Kaare telgjoone võrrandi (5.9), $\sin\varphi$ *ja* $\cos\varphi$ *(5.11) ja sisejõudude (5.24) avaldised kanname tabelarvutusse 5.5. See tabelarvutus on arvutivõrgus – KaarA.sdc*[1]*. Tabelarvutusega leitud sisejõud on joonisel 5.5.*



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		L=	f=	H=		Kaare telgjoon on parabool								
2		16.00	4.00	2.40										
3									siin Q-s on hüpe					
4	xi	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.7	0.8	0.9	1	
5	xi'	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.3	0.2	0.1	0	
6	x	0	1.6	3.2	4.8	6.4	8	9.6	11.2	11.2	12.8	14.4	16	
7	y	0	1.44	2.56	3.36	3.84	4	3.84	3.36	3.36	2.56	1.44	0	
8	sinFi	0.7071	0.6247	0.5145	0.3714	0.1961	0.0000	-0.1961	-0.3714	-0.3714	-0.5145	-0.6247	-0.7071	
9	cosFi	0.7071	0.7809	0.8575	0.9285	0.9806	1.0000	0.9806	0.9285	0.9285	0.8575	0.7809	0.7071	
10	Mo	0.000	1.920	3.840	5.760	7.680	9.600	11.520	13.440	13.440	8.960	4.480	0.000	
11	Qo	1.200	1.200	1.200	1.200	1.200	1.200	1.200	1.200	-2.800	-2.800	-2.800	-2.800	
12	H*y	0.000	3.456	6.144	8.064	9.216	9.600	9.216	8.064	8.064	6.144	3.456	0.000	
13	M	0.000	-1.536	-2.304	-2.304	-1.536	0.000	2.304	5.376	5.376	2.816	1.024	0.000	
14	Qo*cosFi	0.849	0.937	1.029	1.114	1.177	1.200	1.177	1.114	-2.600	-2.401	-2.186	-1.980	
15	H*sinFi	1.697	1.499	1.235	0.891	0.471	0.000	-0.471	-0.891	-0.891	-1.235	-1.499	-1.697	
16	Q	-0.849	-0.562	-0.206	0.223	0.706	1.200	1.647	2.006	-1.708	-1.166	-0.687	-0.283	
17	Qo*sinFi	0.849	0.750	0.617	0.446	0.235	0.000	-0.235	-0.446	1.040	1.441	1.749	1.980	
18	H*cosFi	1.697	1.874	2.058	2.228	2.353	2.400	2.353	2.228	2.228	2.058	1.874	1.697	
19	N	2.546	2.624	2.675	2.674	2.589	2.400	2.118	1.783	3.268	3.499	3.623	3.677	
20									siin Q-s on hüpe					
21														

Joonis 5.5. Kaar A. Tabelarvutus

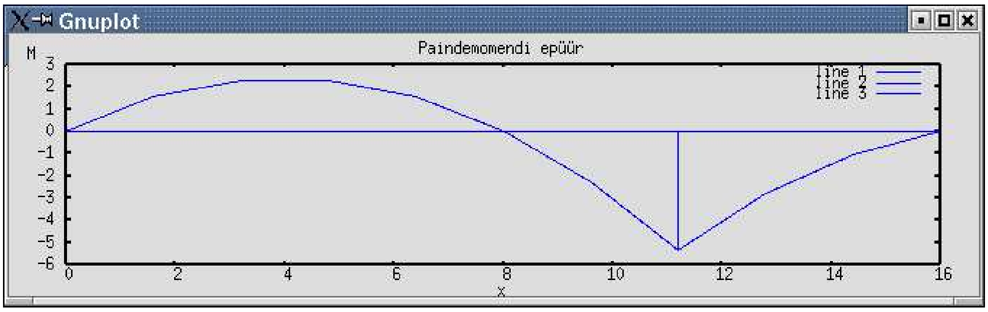
Järgnevalt teisendame tabelarvutusega saadud tabeli, mis on joonisel 5.5, andmed programmide Octave[2] (matlab) *andmeteks.*
Selleks

- *avame StarOffice'ga (OpenOffice*[3]*) uue teksti dokumendi;*
- *avame StarCalc'iga tabeli KaarA.sdc;*

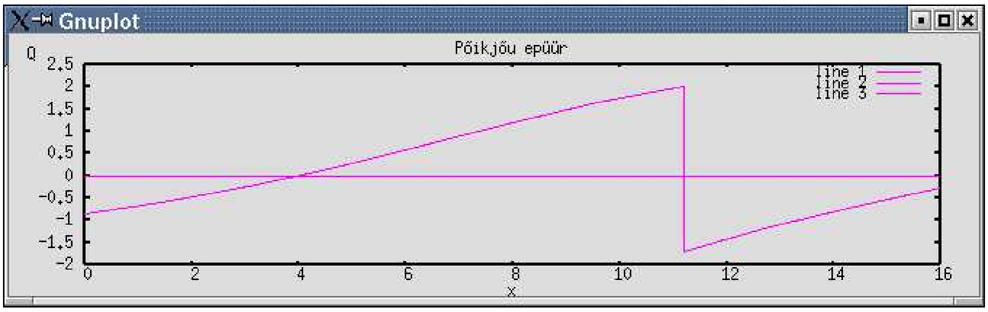
[1] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/
[2] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/dtoops/node32.html
[3] http://www.openoffice.org/dev_docs/source/1.0.2/index.html

- *kopeerime tabeli ja asetame ('Paste Special'), kui formateerimata teksti ('unformatted text') uude teksti documenti ja salvestame (.sdw);*
- *salvestame veel kord kui teksti (.txt) faili;*
- *teksti redaktoriga avame selle (.txt) faili ja salvestame octave failina (.m);*
- *töötleme seda faili (vt Programm C.5 KaarA1.m). Lisades ”[”, ”];” ja plot( ) käsud ja asendades korrutusmärgi ”*”vektori nimetustes ”_ ”märgiga.*

Programmi C.5 KaarA1.m (lk 213) abil leiame paindemomendi (5.6), põikjõu (5.7) ja normaaljõu (12.3) epüürid. Joonistel (5.6, (5.7), (5.8) on epüürid joonistatud, kui kaar oli



Joonis 5.6. Kaar A. Paindemomendi epüür



Joonis 5.7. Kaar A. Põikjõu epüür

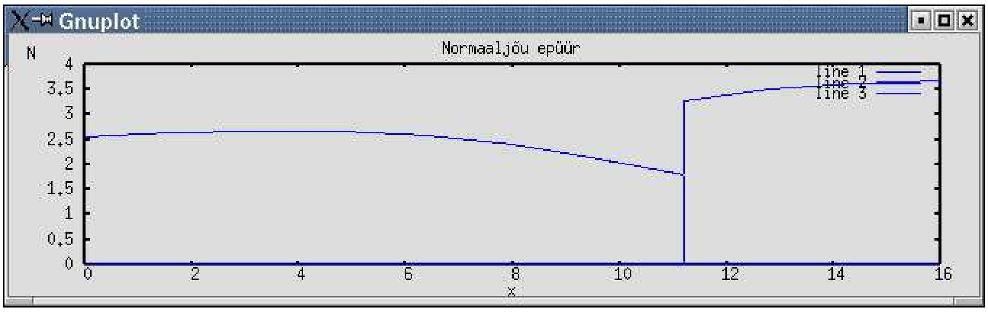
jaotatud 10-neks. Antud epüüride puhul suurema jaotusega (30 punkti) epüürid langevad hästi kokku 10-ne punktise jaotusega. Mitte alati ei ole see nii (vt joonist 5.14).

Näide 5.2 *Arvutada joonisel 5.9 toodud kaare sisejõud. Kaare telgjooneks on ringjoon.*

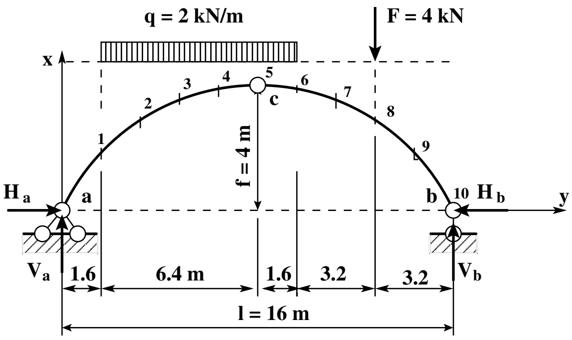
Kaare horisontaalsed toereaktsioonid leiame avaldisega (5.4). Kaare telgjoone võrrandi (5.12), (5.13), $\sin\varphi$ *ja* $\cos\varphi$ *(5.15), sisejõudude (5.24) avaldised kanname tabelarvutusse 5.10. See tabelarvutus on arvutivõrgus – KaarB.sdc[4]. Tabelarvutusega leitud sisejõud on joonisel 5.10.*

Tabelarvutusega saadud tabeli, mis on joonisel 5.10, andmed teisendame nagu programmi C.5 (lk 213) andmed.

4 http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/

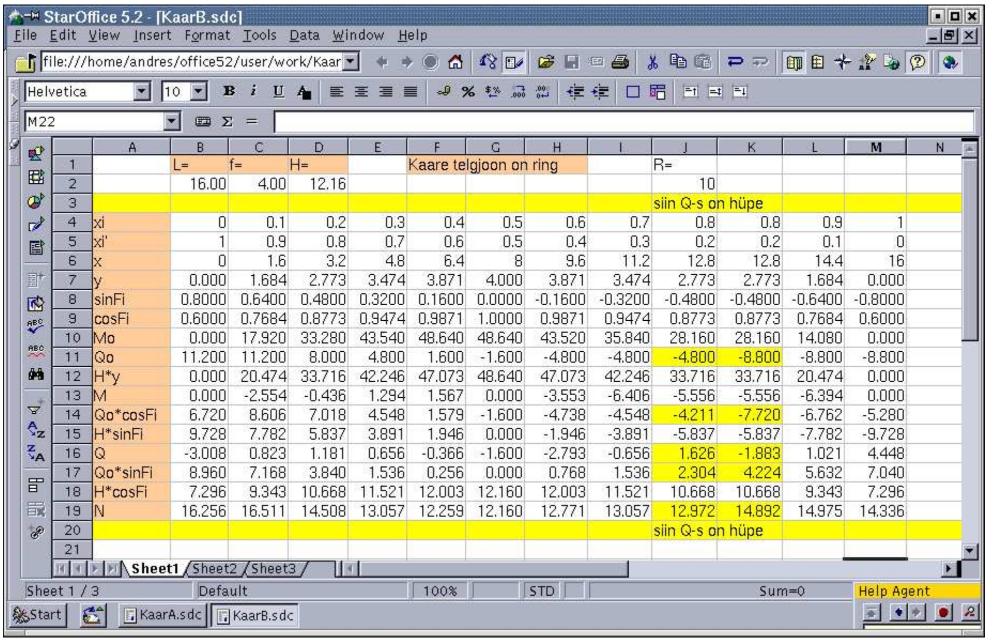


Joonis 5.8. Kaar A. Normaaljõu epüür



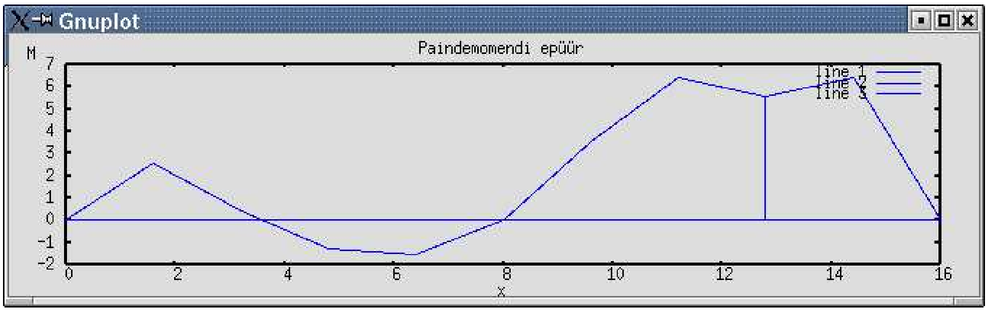
Joonis 5.9. Kaar B. Koormused

Programmi C.6 KaarB1.m (lk 215) abil leiame paindemomendi (5.13), põikjõu (5.12) ja normaaljõu (5.13) epüürid. Joonistel (5.11, (5.12), (5.13) on epüürid joonistatud, kui kaar oli jaotatud kümneks. Täpsemate epüüride saamiseks oleks vaja rohkem punkte (suuremat jaotust). Vaata joonist 5.14, kus on toodud graafikud kümnene ja kolmekümne jaotuse puhul.

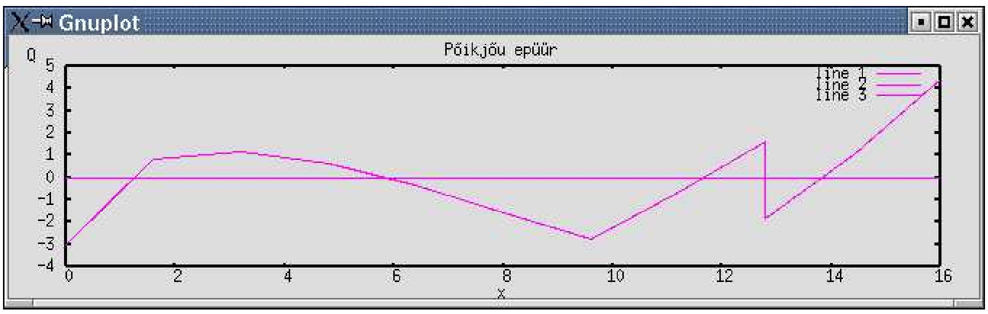


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		L=	f=	H=		Kaare telgjoon on ring				R=				
2		16.00	4.00	12.16						10				
3										siin Q-s on hüpe				
4	xi	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.8	0.9	1	
5	xi'	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.2	0.1	0	
6	x	0	1.6	3.2	4.8	6.4	8	9.6	11.2	12.8	12.8	14.4	16	
7	y	0.000	1.684	2.773	3.474	3.871	4.000	3.871	3.474	2.773	2.773	1.684	0.000	
8	sinFi	0.8000	0.6400	0.4800	0.3200	0.1600	0.0000	-0.1600	-0.3200	-0.4800	-0.4800	-0.6400	-0.8000	
9	cosFi	0.6000	0.7684	0.8773	0.9474	0.9871	1.0000	0.9871	0.9474	0.8773	0.8773	0.7684	0.6000	
10	Mo	0.000	17.920	33.280	43.540	48.640	48.640	43.520	35.840	28.160	28.160	14.080	0.000	
11	Qo	11.200	11.200	8.000	4.800	1.600	-1.600	-4.800	-4.800	-4.800	-8.800	-8.800	-8.800	
12	H*y	0.000	20.474	33.716	42.246	47.073	48.640	47.073	42.246	33.716	33.716	20.474	0.000	
13	M	0.000	-2.554	-0.436	1.294	1.567	0.000	-3.553	-6.406	-5.556	-5.556	-6.394	0.000	
14	Qo*cosFi	6.720	8.606	7.018	4.548	1.579	-1.600	-4.738	-4.548	-4.211	-7.720	-6.762	-5.280	
15	H*sinFi	9.728	7.782	5.837	3.891	1.946	0.000	-1.946	-3.891	-5.837	-5.837	-7.782	-9.728	
16	Q	-3.008	0.823	1.181	0.656	-0.366	-1.600	-2.793	-0.656	1.626	-1.883	1.021	4.448	
17	Qo*sinFi	8.960	7.168	3.840	1.536	0.256	0.000	0.768	1.536	2.304	4.224	5.632	7.040	
18	H*cosFi	7.296	9.343	10.668	11.521	12.003	12.160	12.003	11.521	10.668	10.668	9.343	7.296	
19	N	16.256	16.511	14.508	13.057	12.259	12.160	12.771	13.057	12.972	14.892	14.975	14.336	
20										siin Q-s on hüpe				
21														

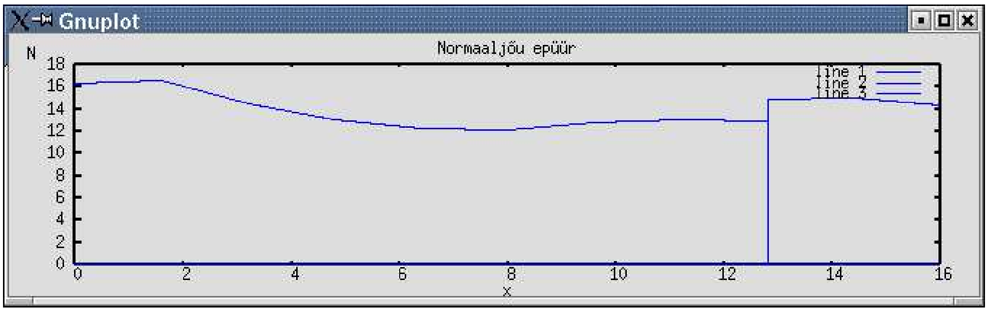
Joonis 5.10. Kaar B



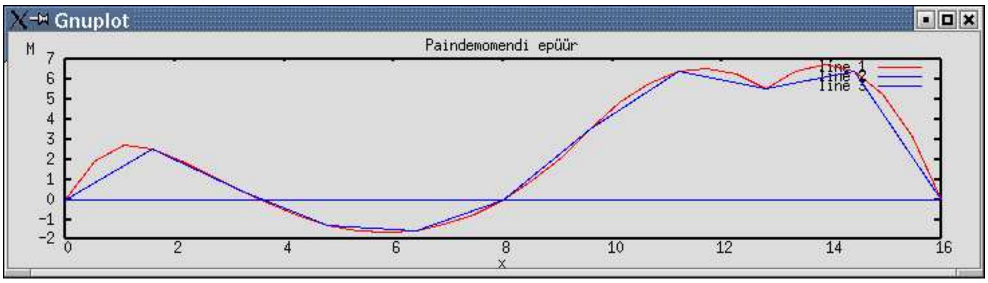
Joonis 5.11. Kaar B. Paindemomendi epüür



Joonis 5.12. Kaar B. Põikjõu epüür



Joonis 5.13. Kaar B. Normaaljõu epüür



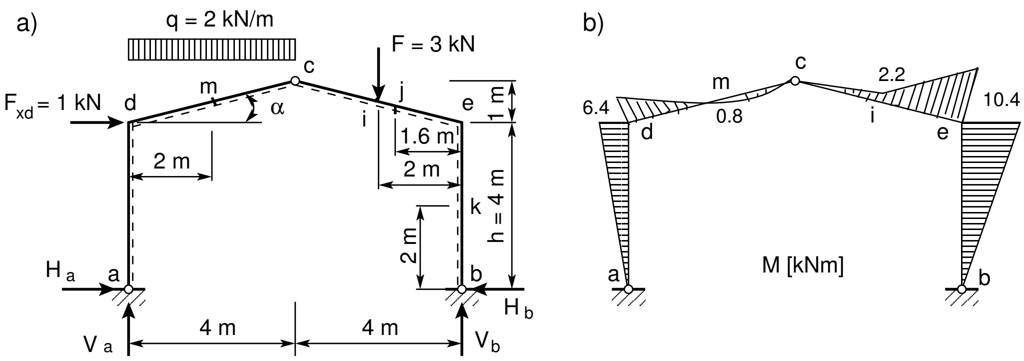
Joonis 5.14. Kaar B. Paindemomendi epüür kolmekümne jaotusega

5.5 Kolme liigendiga raam

Kolme liigendiga raami arvutamisel kehtivad kolme liigendiga kaare jaoks tuletatud valemid. Raamil võetakse tõmme positiivsena ja surve negatiivsena.

5.5.1 Kolme liigendiga raami arvutus

Näide 5.3 *Koostada joonisel 5.15 kuiutatud kolme liigendiga raami sisejõudude epüürid (näide on võetud näidisülesannetest [ER83] lk 47)* $\cos\alpha = 0.9701$, $\sin\alpha = 0.2425$.



Joonis 5.15. Kolme liigendiga raam

Vertikaalsete toereaktsioonide arvutus

$$\sum M_b = 0; \qquad V_a \cdot 8 + 1 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 0 \quad V_a = 6.25\,kN \tag{5.25}$$

$$\sum M_a = 0; \qquad -V_b \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \quad V_b = 4.75\,kN \tag{5.26}$$

Vertikaalsete toereaktsioonide arvutuse kontroll

$$\sum Y = 0; \qquad 6.25 + 4.75 - 2 \cdot 4 - 3 = 0 \quad 0 = 0 \tag{5.27}$$

Horisontaalsete toereaktsioonide arvutus

$$\sum M_c^v = 0; \qquad -H_a \cdot 5 + 6.25 \cdot 4 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \quad H_a = 1.6\,kN \tag{5.28}$$

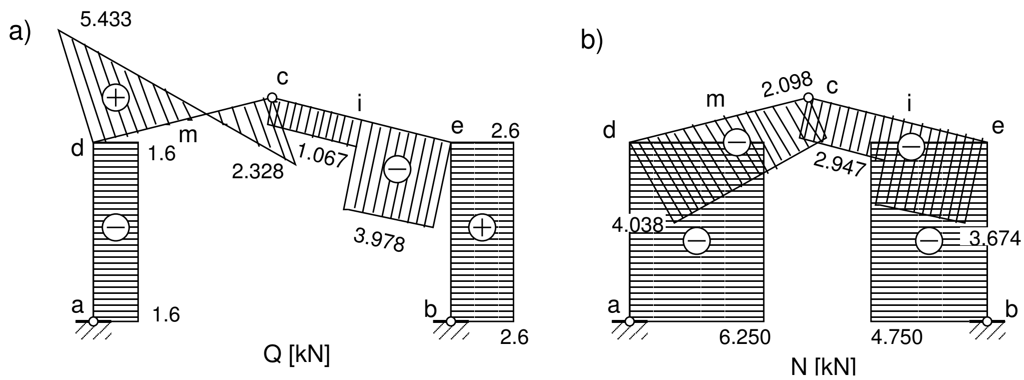
$$\sum M_c^p = 0; \qquad -H_b \cdot 5 + 4.75 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 0 \quad H_b = 2.6\,kN \tag{5.29}$$

Horisontaalsete toereaktsioonide arvutuse kontroll

$$\sum X = 0; \qquad 1.6 + 1 - 2.6 = 0 \quad 0 = 0 \tag{5.30}$$

Paindemomendi epüüri (vt joonis 5.15 b) ordinaatide arvutus

$$\begin{aligned}
M_d &= -1.6 \cdot 4 = -6.4\, kNm && (5.31)\\
M_m &= 6.25 \cdot 2 - 1.6 \cdot 4.5 - 1 \cdot 0.5 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 0.8\, kNm && (5.32)\\
M_m &= 2 \cdot \frac{4^2}{8} - \frac{6.4}{2} = 0.8\, kNm && (5.33)\\
M_i &= 4.45 \cdot 2 - 2.6 \cdot 4.5 = -2.2\, kNm && (5.34)\\
M_i &= 3 \cdot \frac{4}{4} - \frac{10.4}{2} = -2.2\, kNm && (5.35)\\
M_e &= -2.6 \cdot 4 = -10.4\, kNm && (5.36)
\end{aligned}$$



Joonis 5.16. Kolme liigendiga raami sisejõud

Põikjõu epüüri (vt joonis 5.16 a) ordinaatide arvutus

$$\begin{aligned}
Q_{ad} &= -1.6\, kN && (5.37)\\
Q_{dc} &= 6.25 \cdot 0.9701 - (1.6 + 1.0) \cdot 0.2425 = 5.433\, kN && (5.38)\\
Q_{cd} &= (6.25 - 2 \cdot 4) \cdot 0.9701 - 2.6 \cdot 0.2425 = -2.328\, kN && (5.39)\\
Q_{ci} &= (6.25 - 2 \cdot 4) \cdot 0.9701 + 2.6 \cdot 0.2425 = -1.067\, kN && (5.40)\\
Q_{ie} &= -4.5 \cdot 0.9701 + 2.6 \cdot 0.2425 = -3.978\, kN && (5.41)
\end{aligned}$$

Pikijõu epüüri (vt joonis 5.16 b) ordinaatide arvutus

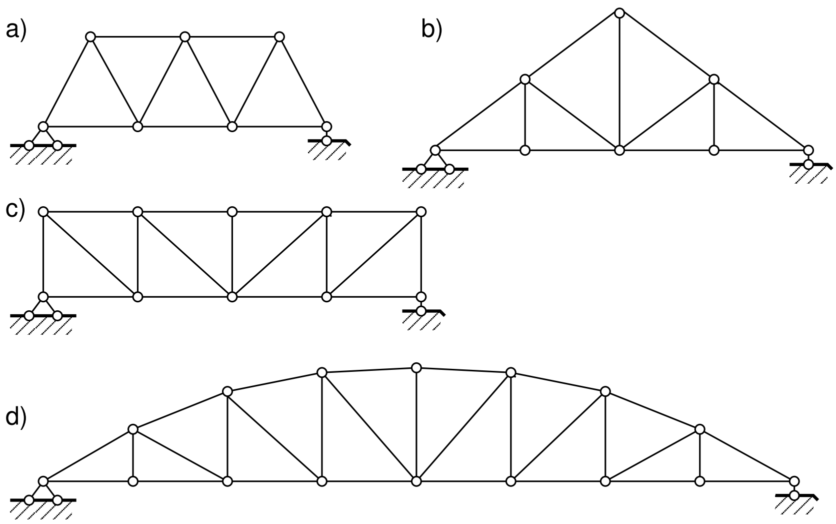
$$\begin{aligned}
N_{ad} &= -6.25\, kN && (5.42)\\
N_{dc} &= 6.25 \cdot 0.2425 - (1.6 + 1.0) \cdot 0.9701 = -4.038\, kN && (5.43)\\
N_{cd} &= (2 \cdot 4 - +6.25) \cdot 0.2425 - 2.6 \cdot 0.9701 = -2.098\, kN && (5.44)\\
N_{ci} &= (6.25 - 2 \cdot 4) \cdot 0.2425 + 2.6 \cdot 0.9701 = -2.947\, kN && (5.45)\\
N_{ie} &= -4.5 \cdot 0.2425 + 2.6 \cdot 0.9701 = -3.674\, kN && (5.46)
\end{aligned}$$

Peatükk 6

Sõrestikskeemid

6.1 Sõrestikskeemide liigitus

Varrassüsteemide mehaanikas võetakse arvutusskeemide liigitamise aluseks varda telgjoone kuju, varda tööseisund (joonis 1.3), toesidemete arv, liigendite arv.
Otstes hõõrdevabade liigenditega ühendatud sirgetest varrastest geomeetriliselt muutumatut konstruktsiooni, mis on koormatud vaid hõõrdevabades liigendites, nimetatakse *sõrestikskeemiks*.
Sõrestikskeemi vardad töötavad ainult pikkele. Sõrestiku ülemised vardad (joonis 6.1)



Joonis 6.1. Sõrestikskeemide liigitus

moodustavad *ülemise vöö*, alumised vardad *alumise vöö*. Vöödevahelised vardad moodustavad *sõrestikuvõrgu*. Võrgu vertikaalseid vardaid nimetatakse *postideks* ja kaldvardaid *diagonaalideks*. Horisontaalse vöö kahe naabersõlme vahekaugust nimetatakse *paneeli pikkuseks*. Sõrestikke liigitatakse

- ülesande järgi – katusesõrestikud, sillasõrestikud, kraanasõrestikud jne

- toereaktsioonide järgi – talasõrestikud, konsoolsõrestikud, konsoolidega talasõrestikud; kaar-, raam- ja rippsõrestikud; kombineeritud sõrestikud
- kuju järgi – paralleelvöödega sõrestikud (joonis 6.1 a); kolmnurksõrestikud (joonis 6.1 b); kõvera vööga sõrestikud (joonis 6.1 d)
- võrgu järgi – diagonaalvõrguga sõrestikud (joonis 6.1 a); post-diagonaalvõrguga sõrestikud (joonis 6.1 c).

6.2 Staatiliselt määratud sõrestike arvutus

Staatiliselt määratud sõrestike sisejõudude leidmiseks koostatakse tasakaaluvõrrandid. Tasakaaluvõrrandite koostamiseks kasutatakse *lõikemeetodit*. Sõrestiku arvutusskeemist eraldatakse üks sõlm või osa sõrestikust ja teiste osade mõju asendatakse läbilõigatud varraste kontaktjõududega (rajajõududega). Eraldatud sõlme või sõrestikuosa tasakaalutingimustest leitakse läbilõigatud varraste kontaktjõud. Kontaktjõud on läbilõigatud varda välispinnal. Läbilõigatud varda ristlõike sisepinnal on kontaktjõuga võrdne sisejõud.
Esimese märgikokkuleppe puhul loetakse kontaktjõud positiivseks, kui tema suund ühtib kohaliku telje positiivse suunaga. Teise märgikokkuleppe puhul loetakse kontaktjõud positiivseks, kui tema suund ühtib kohaliku telje positiivse suunaga. Arvutuse tulemusena saadud miinusmärk näitab, et oletus oli vale ja kontaktjõud on vastupidise suunaga. Staatiliselt määratud tasandsõrestikus ei ole liigseid sidemeid. Liigsidemete arv on null.

$$n = n_v + n_t - 2 * n_s \tag{6.1}$$

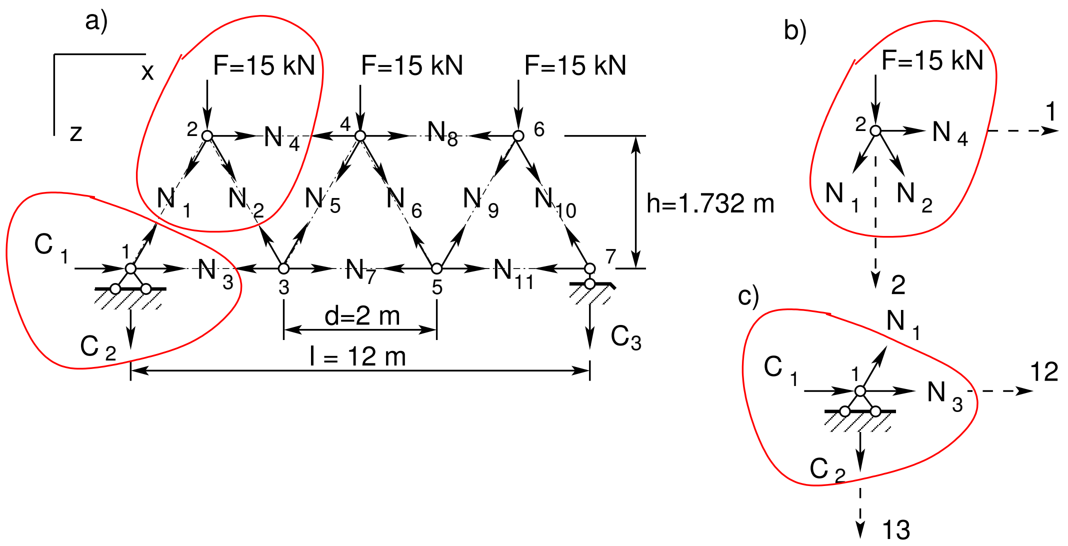
kus n_v on sõrestikuvarraste arv, n_t toesidemete arv, n_s sõrestikusõlmede arv. Sõrestikuvarraste kontaktjõudude arvutamisel kasutatakse

- sõlmede eraldamise võtet
- momendipunkti võtet
- projektsioonide võtet

Nende võtete abil koostatakse tasakaaluvõrrandid. Kui tasakaaluvõrrandid koostatakse ja lahendatakse käsitsi, siis on otstarbekas koostada võrrandid nii, et seal oleks ainult üks tundmatu.

6.2.1 Sõlmede eraldamise võte

Eraldame lõikega sõrestikskeemist sõlmed (joonis 6.2) ja koostame nende jaoks tasakaalutingimused. Tasandil võib iga sõlme jaoks koostada kaks teineteisest sõltumatut tasakaaluvõrrandit $2 * n_s$.
Toereaktsioonide määramiseks kasutatakse n_t (staatiliselt määratud tasandraami puhul $n_t = 3$) võrrandit. Sõltumatute tasakaaluvõrrandite üldarv on $2 * n_s - n_t$.



Joonis 6.2. Sõlmede eraldamise võte

Näide 6.1 *Vaatleme joonisel 6.2 toodud sõrestikskeemi. Eraldame lõikega sõlmed. Arvutame sõrestikuvarraste suunakoosinused (vt joonis 6.3).*

$$\cos\alpha = \frac{\Delta x}{l} \tag{6.2}$$

$$\cos\beta = \frac{\Delta z}{l} \tag{6.3}$$

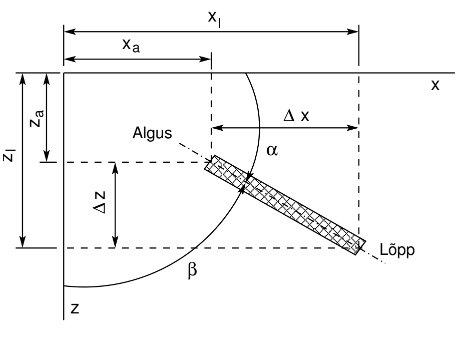
kus l *on varda pikkus*

$$l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2} \tag{6.4}$$

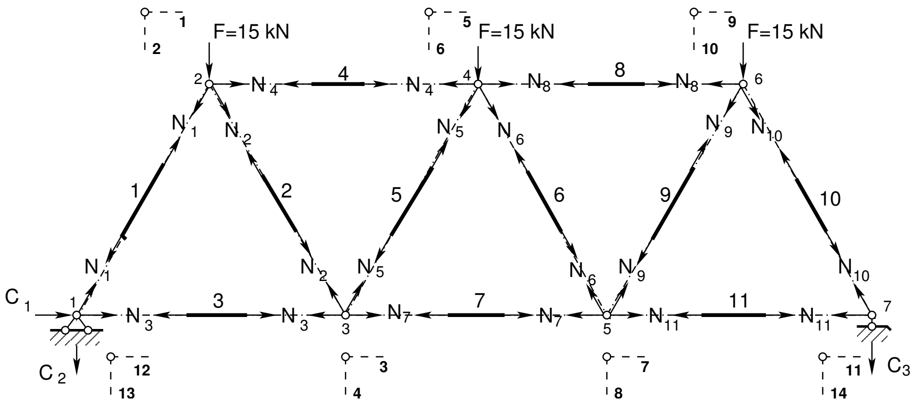
siin

$$\Delta x = x_L - x_A \tag{6.5}$$

$$\Delta z = z_L - z_A \tag{6.6}$$

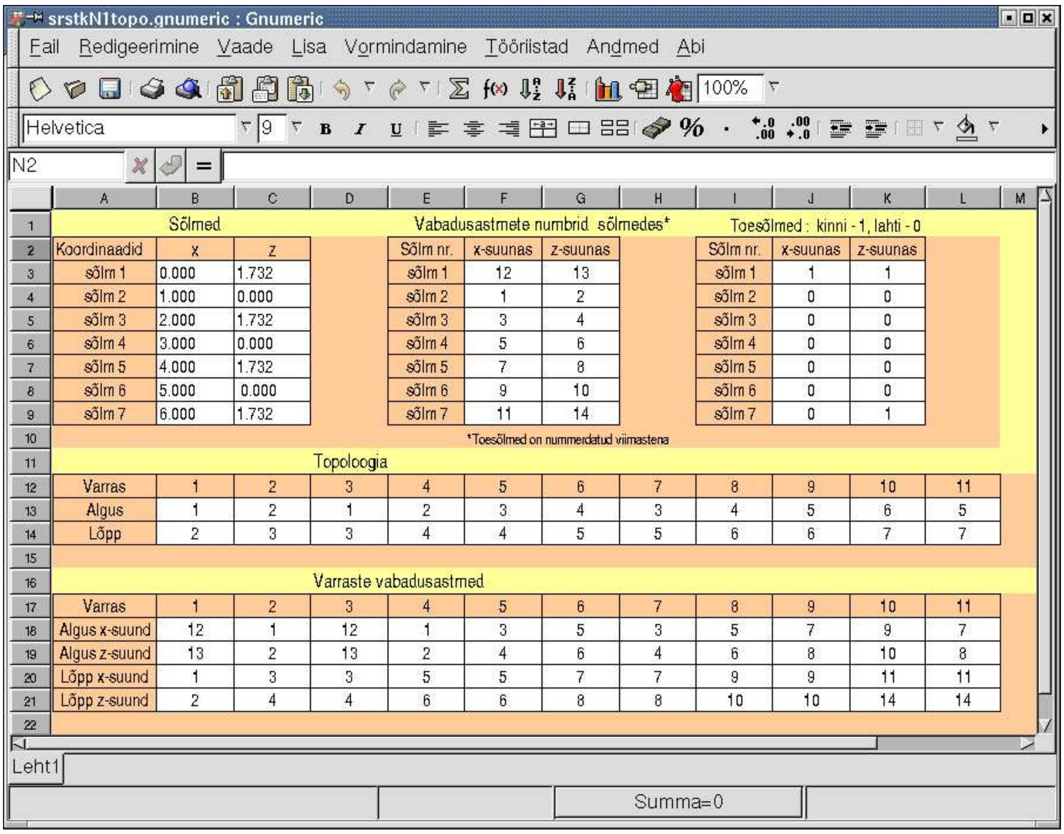


Joonis 6.3. Varda suunakoosinused



Joonis 6.4. Varraste eraldamise võte

ja x_A, z_A, x_L, z_L on varda alguse ning lõpu koordinaadid. Sõrestiku (joonis 6.2) sõlmede koordinaadid on toodud joonisel 6.5 tabelina „Sõlmed". Valime varraste algused ja lõpud nii, nagu on näidatud joonisel 6.5 tabelis „Topoloogia". Arvutusprogrammiga C.11 (vt lisa C.4 lk 228) leiame varraste koosinused. Varraste koosinuste väärtused on joonisel 6.6 tabelis „Varraste suunakoosinused" ridades „Algus cosA" ja „Algus cosB".


srstkN1topo.gnumeric : Gnumeric

Fail Redigeerimine Vaade Lisa Vormindamine Tööriistad Andmed Abi

Sõlmed				Vabadusastmete numbrid sõlmedes*				Toesõlmed: kinni - 1, lahti - 0		
Koordinaadid	x	z		Sõlm nr.	x-suunas	z-suunas		Sõlm nr.	x-suunas	z-suunas
sõlm 1	0.000	1.732		sõlm 1	12	13		sõlm 1	1	1
sõlm 2	1.000	0.000		sõlm 2	1	2		sõlm 2	0	0
sõlm 3	2.000	1.732		sõlm 3	3	4		sõlm 3	0	0
sõlm 4	3.000	0.000		sõlm 4	5	6		sõlm 4	0	0
sõlm 5	4.000	1.732		sõlm 5	7	8		sõlm 5	0	0
sõlm 6	5.000	0.000		sõlm 6	9	10		sõlm 6	0	0
sõlm 7	6.000	1.732		sõlm 7	11	14		sõlm 7	0	1

*Toesõlmed on nummerdatud viimastena

Topoloogia

Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Algus	1	2	1	2	3	4	3	4	5	6	5
Lõpp	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7

Varraste vabadusastmed

Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Algus x-suund	12	1	12	1	3	5	3	5	7	9	7
Algus z-suund	13	2	13	2	4	6	4	6	8	10	8
Lõpp x-suund	1	3	3	5	5	7	7	9	9	11	11
Lõpp z-suund	2	4	4	6	6	8	8	10	10	14	14

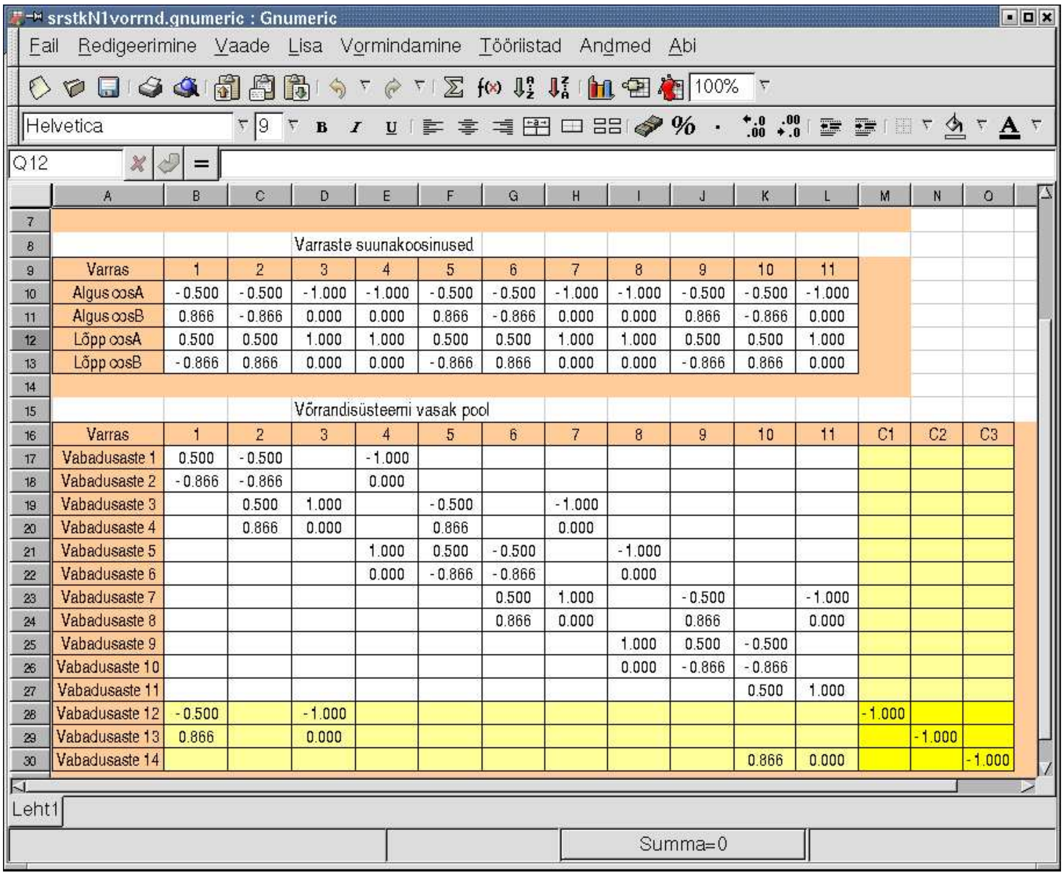
Leht1

Summa=0

Joonis 6.5. Sõrestiku topoloogia

Joonisel 6.6 on tabelisse „Varraste suunakoosinused" kantud varraste (joonis 6.4) suuna-

koosinused joonisel 6.2 näidatud sisejõudude suundade alusel.



	Varraste suunakoosinused										
Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Algus cosA	-0.500	-0.500	-1.000	-1.000	-0.500	-0.500	-1.000	-1.000	-0.500	-0.500	-1.000
Algus cosB	0.866	-0.866	0.000	0.000	0.866	-0.866	0.000	0.000	0.866	-0.866	0.000
Lõpp cosA	0.500	0.500	1.000	1.000	0.500	0.500	1.000	1.000	0.500	0.500	1.000
Lõpp cosB	-0.866	0.866	0.000	0.000	-0.866	0.866	0.000	0.000	-0.866	0.866	0.000

	Võrrandisüsteemi vasak pool												
Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	C1	C2	C3
Vabadusaste 1	0.500	-0.500		-1.000										
Vabadusaste 2	-0.866	-0.866		0.000										
Vabadusaste 3		0.500	1.000		-0.500		-1.000							
Vabadusaste 4		0.866	0.000		0.866		0.000							
Vabadusaste 5				1.000	0.500	-0.500		-1.000						
Vabadusaste 6				0.000	-0.866	-0.866		0.000						
Vabadusaste 7						0.500	1.000		-0.500		-1.000			
Vabadusaste 8						0.866	0.000		0.866		0.000			
Vabadusaste 9								1.000	0.500	-0.500				
Vabadusaste 10								0.000	-0.866	-0.866				
Vabadusaste 11										0.500	1.000			
Vabadusaste 12	-0.500		-1.000									-1.000		
Vabadusaste 13	0.866		0.000										-1.000	
Vabadusaste 14										0.866	0.000			-1.000

Joonis 6.6. Võrrandisüsteemi vasak pool

Sõlmede vabadusastmete suunad nummerdame nii, nagu on näidatud joonisel 6.5 tabelis „Vabadusastmete numbrid sõlmedes". Nii koostame sõlme 2 *tasakaaluvõrrandid suundadele* 1 *ja* 2.

$$\sum Suunas_1 = 0; \quad N_1 \cos\alpha_{2-1} + N_2 \cos\alpha_{2-3} + N_4 \cos\alpha_{2-4} = 0 \tag{6.7}$$

$$\sum Suunas_2 = 0; \quad N_1 \cos\beta_{2-1} + N_2 \cos\beta_{2-3} + N_4 \cos\beta_{2-4} = 0 \tag{6.8}$$

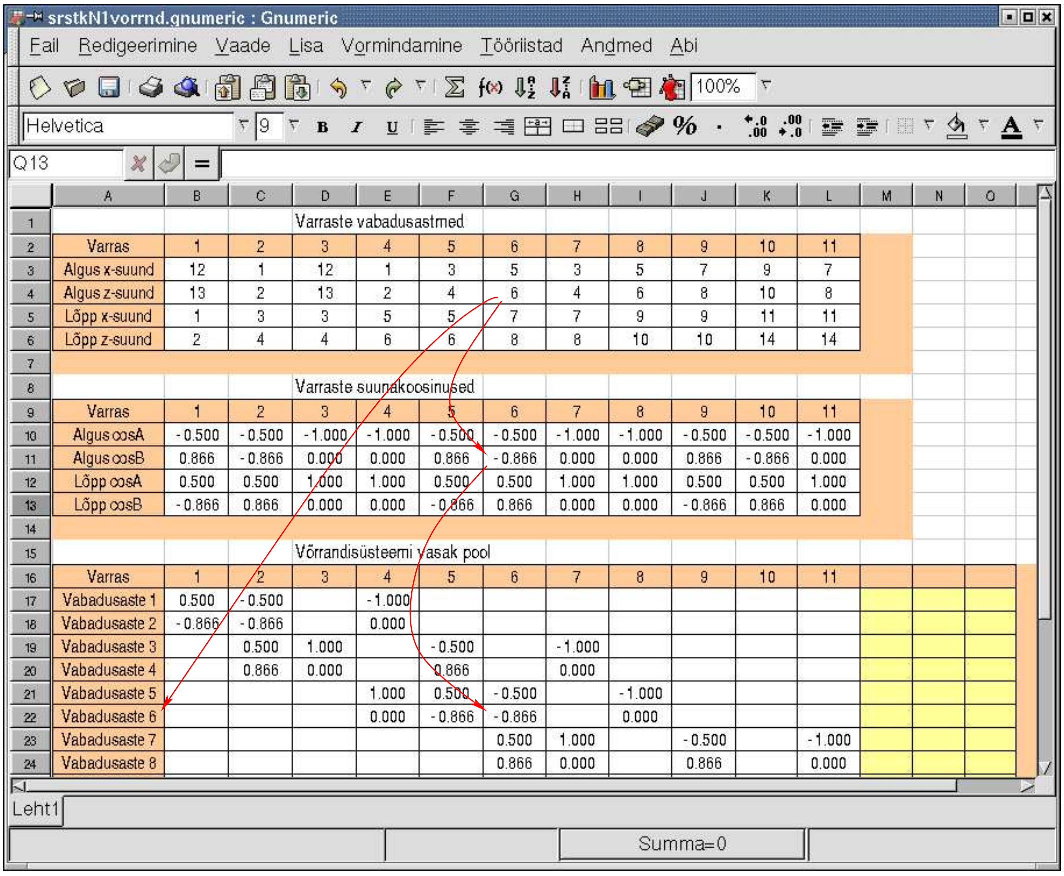
Sõlmes 1 *on tasakaaluvõrrandid suundadele* 12 *ja* 13.

$$\sum Suunas_{12} = 0; \quad N_1 \cos\alpha_{1-2} + N_3 \cos\alpha_{1-3} + C1 = 0 \tag{6.9}$$

$$\sum Suunas_{13} = 0; \quad N_1 \cos\beta_{1-2} + N_3 \cos\beta_{1-3} + C2 = 0 \tag{6.10}$$

Nii nagu võrrandid (6.7), (6.8), (6.9) ja (6.10) koostatakse võrrandid igas sõlmes. Saame võrrandisüsteemi (6.11).

$$\mathbf{GX} = \mathbf{S} \tag{6.11}$$



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1				Varraste vabadusastmed								
2	Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	Algus x-suund	12	1	12	1	3	5	3	5	7	9	7
4	Algus z-suund	13	2	13	2	4	6	4	6	8	10	8
5	Lõpp x-suund	1	3	3	5	5	7	7	9	9	11	11
6	Lõpp z-suund	2	4	4	6	6	8	8	10	10	14	14
7												
8				Varraste suunakoosinused								
9	Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
10	Algus cosA	-0.500	-0.500	-1.000	-1.000	-0.500	-0.500	-1.000	-1.000	-0.500	-0.500	-1.000
11	Algus cosB	0.866	-0.866	0.000	0.000	0.866	-0.866	0.000	0.000	0.866	-0.866	0.000
12	Lõpp cosA	0.500	0.500	1.000	1.000	0.500	0.500	1.000	1.000	0.500	0.500	1.000
13	Lõpp cosB	-0.866	0.866	0.000	0.000	-0.866	0.866	0.000	0.000	-0.866	0.866	0.000
14												
15				Võrrandisüsteemi vasak pool								
16	Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
17	Vabadusaste 1	0.500	-0.500		-1.000							
18	Vabadusaste 2	-0.866	-0.866		0.000							
19	Vabadusaste 3		0.500	1.000		-0.500		-1.000				
20	Vabadusaste 4		0.866	0.000		0.866		0.000				
21	Vabadusaste 5				1.000	0.500	-0.500		-1.000			
22	Vabadusaste 6				0.000	-0.866	-0.866		0.000			
23	Vabadusaste 7						0.500	1.000		-0.500		-1.000
24	Vabadusaste 8						0.866	0.000		0.866		0.000

Joonis 6.7. Võrrandisüsteemi koostamine

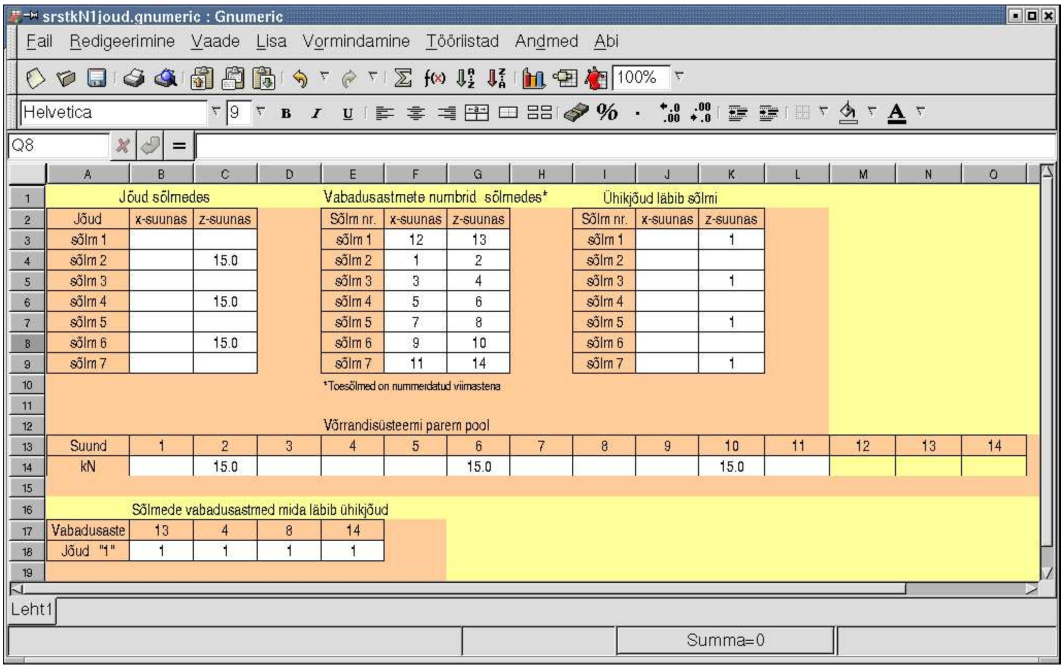
kus $\mathbf{X}$ *koosneb sõrestikuvarraste sisejõudude vektorist* $\mathbf{N}$ *ja toereaktsioonide vektorist* $\mathbf{C}$, $\mathbf{S}$ *on koormusvektor. Tasakaaluvõrrandite süsteemi vasak pool on joonisel 6.6.*
Koormusvektor S ehk võrrandisüsteemi parem pool on joonisel 6.8. Koormusvektori saame jõu väärtuste, vt tabel „Jõud sõlmedes", kandmisel tabelisse „Võrrandisüsteemi parem pool" vastavalt tabelile „Vabadusastmete numbrid sõlmedes".

Võrrandisüsteemi saame koostada ka kõigi varraste (joonis 6.4) vabadusastmete ja nende suunakoosinuste abil (vt joonis 6.7). Arvutusprogramm C.11 kasutab moodust, kus sõlmede tasakaaluvõrrandid saadakse kõigi varraste suunakoosinuste võrrandisüsteemi kandmisega. Toereaktsioonide leidmiseks lisatakse võrrandisüsteemi (joonis 6.6) negatiivne ühikmaatriks.

Mõjujoonte ordinaatide leidmiseks kasutame võrrandisüsteemi (6.11) vasaku poole $\mathbf{G}$ *pöördmaatriksit* $\mathbf{G}'$ *(joonis 6.9), mMõjujoonte vajalike ordinaatide väljatoomiseks pöördmaatriksist* $\mathbf{G}'$

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}' * \mathbf{S} \tag{6.12}$$

vaatleme joonist 6.2 ja teeme kindlaks, milliseid sõlmi läbib ühikjõud. Nii näiteks „sõdutee all" puhul läbib ühikjõud sõlmi 1, 3, 5 ja 7. Need sõlmed ja nendele vastavad vabadusastmed on joonisel 6.8. Vabadusastmete järgi valitakse pöördmaatriksist $\mathbf{G}'$ *veerud (vt joonis 6.9).*



srstkN1joud.gnumeric : Gnumeric

Jõud sõlmedes

Jõud	x-suunas	z-suunas
sõlm 1		
sõlm 2		15.0
sõlm 3		
sõlm 4		15.0
sõlm 5		
sõlm 6		15.0
sõlm 7		

Vabadusastmete numbrid sõlmedes*

Sõlm nr.	x-suunas	z-suunas
sõlm 1	12	13
sõlm 2	1	2
sõlm 3	3	4
sõlm 4	5	6
sõlm 5	7	8
sõlm 6	9	10
sõlm 7	11	14

*Toesõlmed on nummerdatud viimastena

Ühikjõud läbib sõlmi

Sõlm nr.	x-suunas	z-suunas
sõlm 1		1
sõlm 2		
sõlm 3		1
sõlm 4		
sõlm 5		1
sõlm 6		
sõlm 7		1

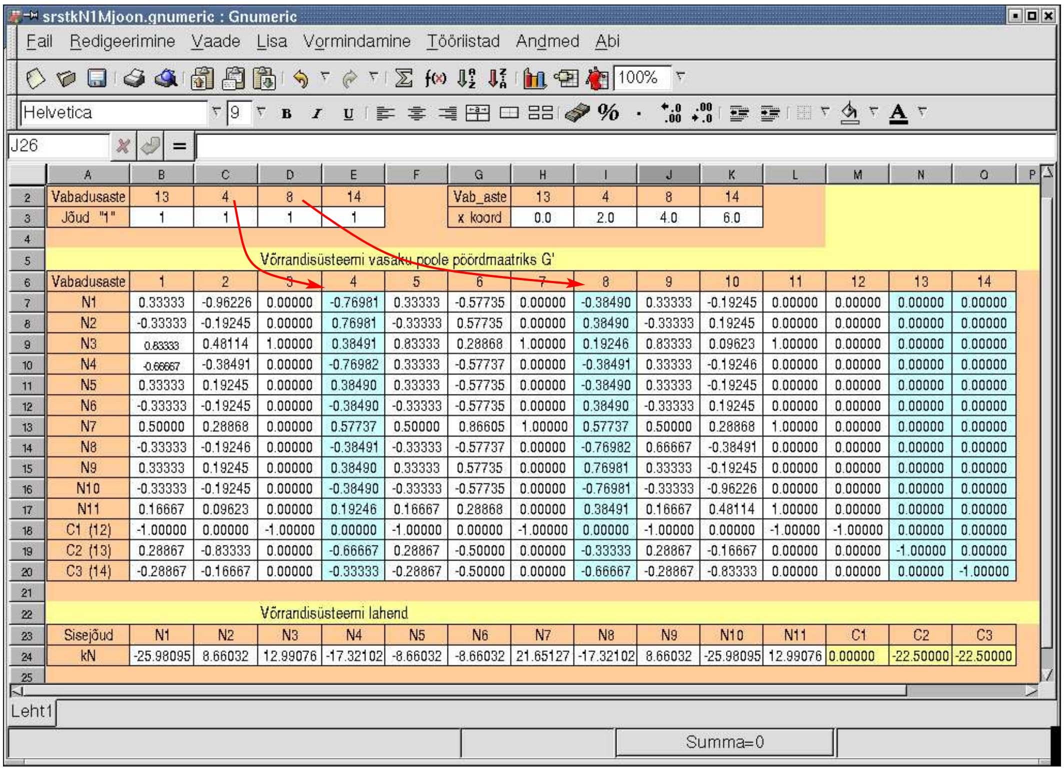
Võrrandisüsteemi parem pool

Suund	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
kN		15.0				15.0				15.0				

Sõlmede vabadusastmed mida läbib ühikjõud

Vabadusaste	13	4	8	14
Jõud "1"	1	1	1	1

Joonis 6.8. Jõud sõlmedes



srstkN1Mjoon.gnumeric : Gnumeric

Vabadusaste	13	4	8	14
Jõud "1"	1	1	1	1

Vab_aste	13	4	8	14
x koord	0.0	2.0	4.0	6.0

Võrrandisüsteemi vasaku poole pöördmaatriks G'

Vabadusaste	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
N1	0.33333	-0.96226	0.00000	-0.76981	0.33333	-0.57735	0.00000	-0.38490	0.33333	-0.19245	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N2	-0.33333	-0.19245	0.00000	0.76981	-0.33333	0.57735	0.00000	0.38490	-0.33333	0.19245	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N3	0.83333	0.48114	1.00000	0.38491	0.83333	0.28868	1.00000	0.19246	0.83333	0.09623	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N4	-0.66667	-0.38491	0.00000	-0.76982	0.33333	-0.57737	0.00000	-0.38491	0.33333	-0.19246	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N5	0.33333	0.19245	0.00000	0.38490	0.33333	-0.57735	0.00000	-0.38490	0.33333	-0.19245	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N6	-0.33333	-0.19245	0.00000	-0.38490	-0.33333	-0.57735	0.00000	0.38490	-0.33333	0.19245	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N7	0.50000	0.28868	0.00000	0.57737	0.50000	0.86605	1.00000	0.57737	0.50000	0.28868	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N8	-0.33333	-0.19246	0.00000	-0.38491	-0.33333	-0.57737	0.00000	-0.76982	0.66667	-0.38491	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N9	0.33333	0.19245	0.00000	0.38490	0.33333	0.57735	0.00000	0.76981	0.33333	-0.19245	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N10	-0.33333	-0.19245	0.00000	-0.38490	-0.33333	-0.57735	0.00000	-0.76981	-0.33333	-0.96226	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N11	0.16667	0.09623	0.00000	0.19246	0.16667	0.28868	0.00000	0.38491	0.16667	0.48114	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
C1 (12)	-1.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	-1.00000	-1.00000	0.00000	0.00000
C2 (13)	0.28867	-0.83333	0.00000	-0.66667	0.28867	-0.50000	0.00000	-0.33333	0.28867	-0.16667	0.00000	0.00000	-1.00000	0.00000
C3 (14)	-0.28867	-0.16667	0.00000	-0.33333	-0.28867	-0.50000	0.00000	-0.66667	-0.28867	-0.83333	0.00000	0.00000	0.00000	-1.00000

Võrrandisüsteemi lahend

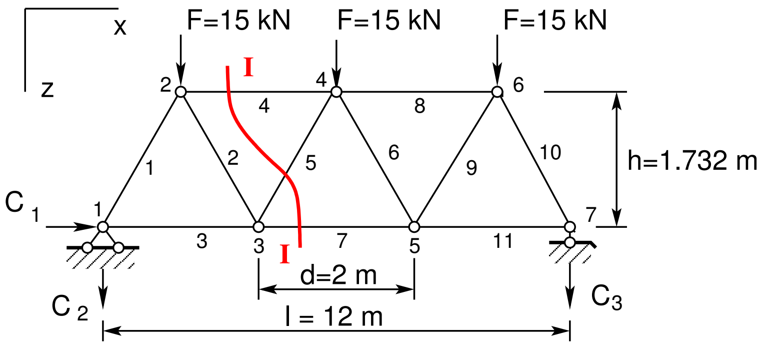
Sisejõud	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7	N8	N9	N10	N11	C1	C2	C3
kN	-25.98095	8.66032	12.99076	-17.32102	-8.66032	-8.66032	21.65127	-17.32102	8.66032	-25.98095	12.99076	0.00000	-22.50000	-22.50000

Joonis 6.9. Vasaku poole pöördmaatriks G'

6.2.2 Momendipunkti võte

Momendipunkti võtte eeliseks on, et ta võimaldab leida sisejõu ühes sõrestikuvardas sõltumata teiste sõrestikuvarraste sisejõududest.

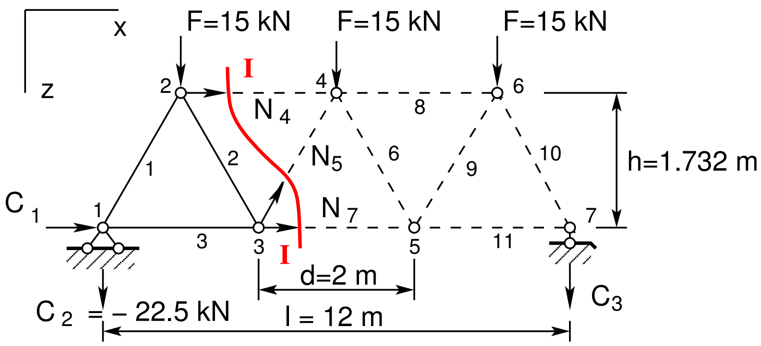
Momendipunkti võtet nimetatakse ka Ritteri[1] lõikemeetodiks.



Joonis 6.10. Lõige I-I

Momendipunkti võtte puhul jagatakse sõrestiku arvutusskeem lõikega kaheks osaks (joonis 6.10). Lõigatakse läbi varras, mille sisejõudu otsitakse (näiteks varras 7) ja *veel kaks varrast* (vardad 4 ja 5, vt lõiget I-I). Nende kahe läbilõigatud varda sihtide lõikepunkti nimetatakse *momendipunktiks* ehk *Ritteri punktiks*. Varda 4 ja 5 sihtide lõikepunktiks on 4, mis on varda 7 sisejõu N_7 leidmise momendipunkt. Varda 4 ja 5 sisejõu (N_4, N_5) moment momendipunkti (sõlmpunkt 4) suhtes on null.

Vaatleme lõikest I-I vasakule (paremale) jäävat sõrestikuosa (joonis 6.11).



Joonis 6.11. Momendipunkti võte

Koostame selle sõrestikuosa kohta momentide tasakaalu tingimuse momendipunkti 4 suhtes (6.13)

$$\Sigma M_4 = 0; \quad N_7 * h + F * d + C2 * 1.5d = 0 \tag{6.13}$$

Toereaktsioon $C1 = 0$ ja sisejõu N_4 ning N_5 õlg momendipunkti 4 suhtes on null. Toereaktsiooni $C2$ väärtuseks on *-22.5*, sest toereaktsiooni suund on vastupidi joonisel

[1] August Ritter, insener ja mehaanikaprofessor Hannoveris ja Aachenis 1826–1908.

oletatuga. Tingimusest (6.13) avaldame sisejõu N_7

$$N_7 = -\frac{F * d + C2 * 1.5d}{h} = \frac{M_4^o}{h} \tag{6.14}$$

kus M_4^o on sõrestikule vastava lihttala moment punkti 4 suhtes.

Sõrestikuvarda sisejõu N_4 leidmiseks on momentpunktiks sõlmpunkt 3. Selle punkti suhtes on momentide tasakaalu tingimus

$$\Sigma M_3 = 0; \quad -N_4 * h + F * 0.5d + C2 * d = 0 \tag{6.15}$$

Tingimusest (6.15) avaldame sisejõu N_4

$$N_4 = -\frac{F * 0.5d + C2 * d}{h} = -\frac{M_3^o}{h} \tag{6.16}$$

kus M_3^o on sõrestikule vastava lihttala moment punkti 3 suhtes.

Sõrestikuvarda sisejõu N_5 leidmiseks momendipunkti võte ei kõlba, sest kahe *ülejäänud varda* (varras 4 ja 7) sihid ei lõiku (om ∞).

6.2.3 Projektsioonide võte

Paralleelvöödega sõrestiku diagonaali sisejõudu (N_5) (joonis 6.10) ei saa leida momentide tasakaalu tingimusest, kuna momendipunkt on lõpmatuses.

Kahe läbilõigatud paralleelse vöö risttelje kohta kirjutatud jõudude projektsioonide tasakaalu tingimus (6.17), (joonis 6.11)

$$\Sigma Z = 0; \quad -N_5 * \cos{(n,z)} + F + C2 = 0 \tag{6.17}$$

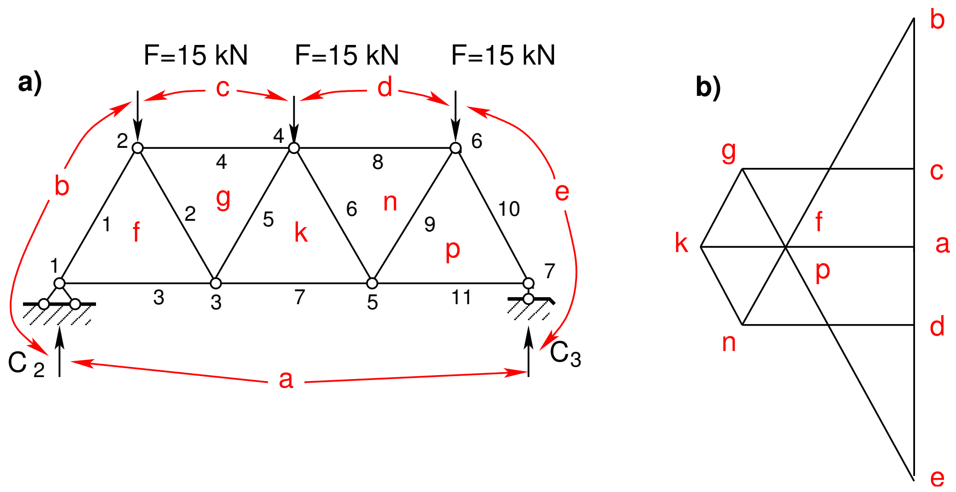
kus $\cos{(n,z)}$ väärtuse saab joonise 6.6 tabelist „Varraste suunakoosinused”.
Kantud varraste (joonis 6.4) suunakoosinuste väärtused on toodud joonisel 6.6 tabelis „Varraste suunakoosinused” ridades „Algus cosA” ja „Algus cosB”. Sisejõu N_5 suund ühtib varda 5 suunaga $3-4$. Nii saab $\cos{(n,z)} = -0.866$. Võrrandist (6.17) saame avaldada sisejõu N_5

$$N_5 = -\frac{F + C2}{\cos{(n,z)}} = \frac{Q_{3-4}^o}{\cos{(n,z)}} \tag{6.18}$$

kus Q_{3-4}^o on sõrestikule vastava lihttala põikjõud sõlmede 3 ja 4 vahel.

6.2.4 Maxwelli-Cremona diagramm

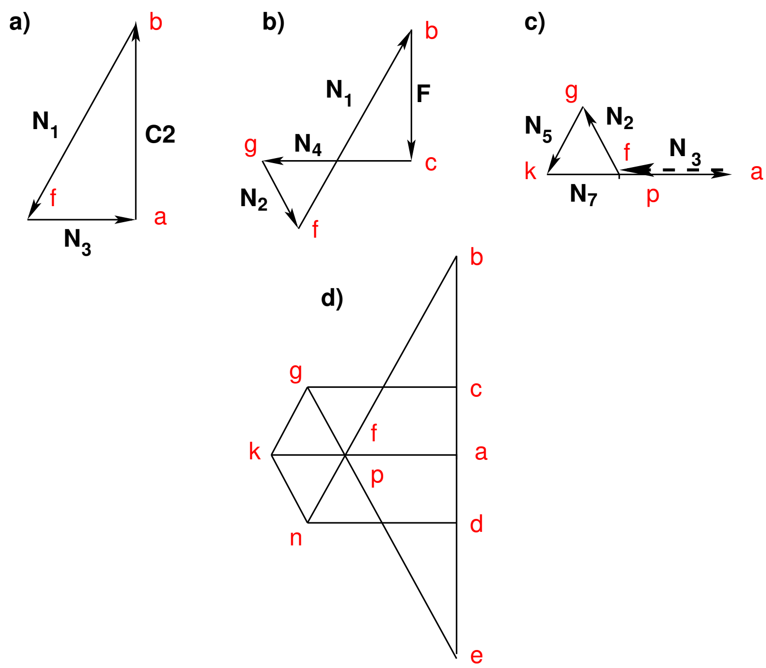
Sõrestikuvarraste sisejõudude graafilisel leidmisel konstrueeritskse Maxwelli-Cremona diagramm (sisejõudude diagramm). Sisejõudude diagrammi võib koostada käsitsi või arvutiprogrammiga *DesignView*.
Sisejõudude diagrammi koostamist selgitame joonise 6.12 abil. Sõrestiku väliskontuuril kahe naabervälisjõuga ja vööga piiratud pinda tähistatakse tähega (või numbriga).



Joonis 6.12. Maxwelli-Cremona diagramm

Need pinnad ja varrastega ümbritsetud pinnad on *väljad*. Joonisel 6.12 a on sõrestikku ümbritsevad väljad a, b, c, d, e ning sõrestikuvarrastega ümbritsetud väljad f, g, k, n, p. Välis- ja sisejõud märgitakse kahe tähega, mis näitavad, milliste väljade vahel jõud asub. Toereaktsiooni $C2$ tähistatakse $a-b$ ja sõlmes 2 rakendatud jõudu F $b-c$.

Välisjõudude hulknurk koostatakse järjekorras, nagu neid kohatakse päripäeva liikumisel ümber sõrestiku. Joonisel 6.12 b) on välisjõud $b-c$, $c-d$, $d-e$, $e-a$ ja $a-b$. Sisejõudude määramine põhineb vaadeldava jõu tasakaalustamisel jõududega, mil-



Joonis 6.13. Jõuhulknurgad

le sihid ühtivad sõrestikuvarraste telgjoonte sihtidega (joonis 6.13). Sisejõudude diagrammi koostamist alustatakse sõlmest, mis on moodustatud kahest vardast (sõlm 1, joonis 6.12 a). Toereaktsiooni $C2$ tasakaalustame varraste 1 ja 3 sisejõududega (joonis 6.13). Nende varraste sihid lõikuvad punktis f (joonis 6.12 b).

Leitud sisejõudude märgi määramiseks liigume ümber sõlme *1* päripäeva (joonis 6.12 a). Liikudes väljalt b väljale f, näeme diagrammilt (joonis 6.12 b), et jõud mõjub sõlme *1* suunas, s.t varras b-f on surutud. Liikudes väljalt f väljale a, näeme diagrammilt, et varras f-a on tõmmatud. Joonisel 6.13 b ja c on näidatud sõlmi *2* ja *3* tasakaalustavate jõudude hulknurgad. Varda sisejõud esineb diagrammi kahe naabersõlme jõuhulknurgas vastupidiste suundadega (sisejõud N_1, joonis 6.13 a ja b). sisjõudude diagrammis (joonis 6.12 b) jõudude suundi ei märgita.

6.3 Talasõrestike mõjujooned

6.3.1 Mõjujoonte leidmine arvutiga

Sõrestiku sõlmede eraldamisel saadud tasakaaluvõrrandid (vt näide 6.1 joonis 6.6) esitame võrrandiga

$$\mathbf{G} * \mathbf{s} = \mathbf{S} \tag{6.19}$$

kus $\mathbf{G}$ on *tasakaalumaatriks* ja $\mathbf{s}$ sisejõudude ja toereaktsioonide vektor, $\mathbf{S}$ sõlmkoormuste vektor (tähistused on võetud õpikust [KW90]).

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}\,(N,\,N) & \mathbf{G}\,(N,\,C) \\ \mathbf{G}\,(C,\,N) & \mathbf{G}\,(C,\,C) \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \vdots \\ N_i \\ \vdots \\ C1 \\ C2 \\ C3 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} F_{x,\,1} \\ F_{z,\,1} \\ F_{x,\,2} \\ F_{z,\,3} \\ \vdots \\ F_{x,\,i} \\ F_{z,\,i} \\ \vdots \\ F_{C1} \\ F_{C2} \\ F_{C3} \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

kus $\mathbf{G}\,(C,\,C)$ on negatiivne ühikmaatriks

$$\mathbf{G}\,(C,\,C) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

Lahendades võrrandisüsteemi (6.19), saame

$$\mathbf{s} = \mathbf{G}^{-1} * \mathbf{S} = \mathbf{b} * \mathbf{S} \tag{6.22}$$

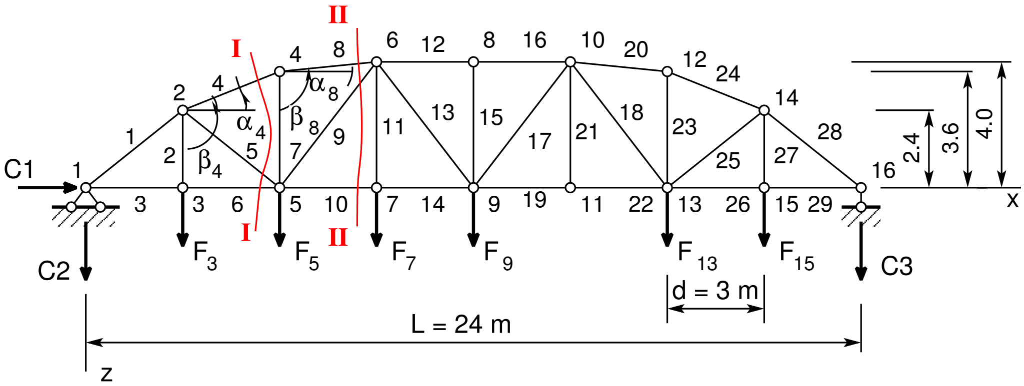
kus **b** on *pööratud tasakaalumaatriks*, mille struktuur on (vt näide 6.1 joonis 6.9)

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}\,(N,\,F) & \mathbf{b}\,(N,\,C) \\ \mathbf{b}\,(C,\,F) & \mathbf{b}\,(C,\,C) \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

Maatriksit **b** võiksime nimetada ka mõjumaatriksiks, sest tema elemendid määravad kõikide mõjujoonte ordinaadid.
Maatriksiga $\mathbf{b}\,(N,\,F)$ saame määrata sisejõud N_i sõluvalt väliskoormusest F_j. Valides väliskoormuse $F_j = 1$, saame mõjujoone ordinaadid.

6.4 Sõrestiku arvutamise näited

Näide 6.2 *Leida joonisel esitatud sõrestikuvarraste sisejõud arvutiprogrammiga C.12 lk 238. Kontrollida sõrestiku kolmanda paneeli varraste sisejõude ja konstrueerida nende mõjujooned. Sõrestikule mõjub koormus $F_3 = 5\,kN$, $F_5 = 10\,kN$, $F_7 = 4\,kN$, $F_9 = 8\,kN$, $F_{13} = 4\,kN$, $F_{15} = 8\,kN$. Sõrestiku mõõtmed on arvutusskeemil 6.14.*



Joonis 6.14. Sõrestiku sisejõud

Sõrestikuvarraste sisejõudude leidmiseks arvutil lisame arvutustabelid (tabel 6.1 ja 6.2). Sõrestikusõlmede kirjeldamiseks valime x-telje sõrestiku alumisse vöösse ja z-telje vertikaalselt sõlmest 1 alla (joonis 6.14). Sõlmpunktide koordinaadid ja sõlmedes mõjuvad koormused on esitatud tabelina 6.1.

Sõrestikuvardaid kirjeldame sõlmede abil, andes varda alguse ja lõpu sõlme numbri. Varraste kirjeldus (topoloogia) on tabelis 6.2. Sõrestiku sisejõud arvutame programmiga srstkN2.m C.12 lk 238. Arvutiprogrammis langevad toereaktsioonide ja koormuste positiivsed suunad kokku koordinaattelgede positiivsete suundadega.
Tulemused kirjutame päevikusse 6.1.

Päevik 6.1 `%srstkN2.out`

```
octave:2> diary srstkN2.out
octave:3> diary on
octave:4> srstkN2
SolmedeArv = 16
ElementideArv = 29
```

Tabel 6.1. Sõrestiku arvutustabel I

Sõlm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0.0	3.0	3.0	6.0	6.0	9.0	9.0	12.0	12.0	15.0
Z	0.0	-2.4	0.0	-3.0	0.0	-4.0	0.0	-4.0	0.0	-4.0
F_z	0.0	0.0	5.0	0.0	10.0	0.0	4.0	0.0	8.0	0.0

Sõlm	11	12	13	14	15	16
X	15.0	18.0	18.0	21.0	21.0	24.0
Z	0.0	-3.6	0.0	-2.4	0.0	0.0
F_z	0.0	0.0	4.0	0.0	8.0	0.0

Tabel 6.2. Sõrestiku arvutustabel II

Varras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Algus	1	2	1	2	2	3	4	4	5	5	6	6	6	7	8
Lõpp	2	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	8	9	9	9

Varras	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Algus	8	9	10	9	10	10	11	12	12	13	13	14	14	15
Lõpp	10	10	13	11	12	11	13	13	14	14	15	15	16	16

```
-----------------------------------------------------------
ans = Sõlmpunktide ja Elementide arv on 16,29
Kui SolmedeArv ja ElementideArv on õiged vajuta klahvile Enter
-----------------------------------------------------------
================================
 Sõlmede koordinaadid
     X        Z
-----------------------------
    0.00000    0.00000
    3.00000   -2.40000
    3.00000    0.00000
    6.00000   -3.60000
    6.00000    0.00000
    9.00000   -4.00000
    9.00000    0.00000
   12.00000   -4.00000
   12.00000    0.00000
   15.00000   -4.00000
   15.00000    0.00000
   18.00000   -3.60000
   18.00000    0.00000
   21.00000   -2.40000
   21.00000    0.00000
   24.00000    0.00000
```

```
-----------------------------
=============================
Elementide topoloogia
Algus  Lõpp
-----------------------------
   1   2
   2   3
   1   3
   2   4
   2   5
   3   5
   4   5
   4   6
   5   6
   5   7
   6   7
   6   8
   6   9
   7   9
   8   9
   8  10
   9  10
  10  13
   9  11
  10  12
  10  11
  11  13
  12  13
  12  14
  13  14
  13  15
  14  15
  14  16
  15  16
-----------------------------
===============================
 Toesõlmed
 X-suunas  Z-suunas
-----------------------------
  1  1
  0  0
  0  0
  0  0
  0  0
  0  0
  0  0
  0  0
  0  0
  0  0
  0  0
  0  0
  0  0
```

```
  0  0
  0  0
  0  1
-----------------------------
================================
 Sõlmede vabadusastmete numbrid
  X-suunas   Z-suunas
--------------------------------
  30  31
   1   2
   3   4
   5   6
   7   8
   9  10
  11  12
  13  14
  15  16
  17  18
  19  20
  21  22
  23  24
  25  26
  27  28
  29  32
-----------------------------
==============================
Elementide suunakoosinused
cosAlpha  cosBeta
-----------------------------
   0.78087  -0.62470
   0.00000   1.00000
   1.00000   0.00000
   0.92848  -0.37139
   0.78087   0.62470
   1.00000   0.00000
   0.00000   1.00000
   0.99123  -0.13216
   0.60000  -0.80000
   1.00000   0.00000
   0.00000   1.00000
   1.00000   0.00000
   0.60000   0.80000
   1.00000   0.00000
   0.00000   1.00000
   1.00000   0.00000
   0.60000  -0.80000
   0.60000   0.80000
   1.00000   0.00000
   0.99123   0.13216
   0.00000   1.00000
   1.00000   0.00000
   0.00000   1.00000
```

```
   0.92848   0.37139
   0.78087  -0.62470
   1.00000   0.00000
   0.00000   1.00000
   0.78087   0.62470
   1.00000   0.00000
-----------------------------
=============================
 Jõud sõlmedes
 X-suunas  Z-suunas
-----------------------------
   0   0
   0   0
   0   5
   0   0
   0  10
   0   0
   0   4
   0   0
   0   8
   0   0
   0   0
   0   0
   0   4
   0   0
   0   8
   0   0
-----------------------------
=============================
 Varraste sisejõud
    N
-----------------------------
  -32.61591
    5.00000
   25.46875
  -32.08661
    5.53603
   25.46875
    7.94444
  -30.05531
   -1.75347
   30.84375
    4.00000
  -31.87500
    1.71875
   30.84375
    0.00000
  -31.87500
    8.28125
   -4.21875
   26.90625
  -24.59071
```

```
   0.00000
  26.90625
   6.50000
 -26.25268
   1.40068
  23.28125
   8.00000
 -29.81455
  23.28125
  -0.00000
 -20.37500
 -18.62500
-----------------------------
=============================
 Ühikjõud sõlmedes
 X-suunas  Z-suunas
-----------------------------
  0  1
  0  0
  0  1
  0  0
  0  1
  0  0
  0  1
  0  0
  0  1
  0  0
  0  1
  0  0
  0  1
  0  0
  0  1
  0  1
-----------------------------
=============================
 Mõjujooned N(i)-le sõlmedes. Viimased kaks on
 toereaktsioonide mõjujooned
-----------------------------
 Columns 1 through 8:

   0.00000  -1.40068  -1.20059  -1.00049  -0.80039  -0.60029  -0.40020  -0.20010
   0.00000   1.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.00000   1.09375   0.93750   0.78125   0.62500   0.46875   0.31250   0.15625
   0.00000  -0.67315  -1.34629  -1.12191  -0.89753  -0.67315  -0.44876  -0.22438
   0.00000  -0.60029   0.40020   0.33350   0.26680   0.20010   0.13340   0.06670
   0.00000   1.09375   0.93750   0.78125   0.62500   0.46875   0.31250   0.15625
   0.00000   0.16667   0.33333   0.27778   0.22222   0.16667   0.11111   0.05556
   0.00000  -0.63053  -1.26106  -1.05089  -0.84071  -0.63053  -0.42035  -0.21018
   0.00000   0.26042   0.52083  -0.60764  -0.48611  -0.36458  -0.24306  -0.12153
   0.00000   0.46875   0.93750   1.40625   1.12500   0.84375   0.56250   0.28125
   0.00000   0.00000   0.00000   1.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.00000  -0.37500  -0.75000  -1.12500  -1.50000  -1.12500  -0.75000  -0.37500
```

```
   0.00000  -0.15625  -0.31250  -0.46875   0.62500   0.46875   0.31250   0.15625
   0.00000   0.46875   0.93750   1.40625   1.12500   0.84375   0.56250   0.28125
   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.00000  -0.37500  -0.75000  -1.12500  -1.50000  -1.12500  -0.75000  -0.37500
   0.00000   0.15625   0.31250   0.46875   0.62500  -0.46875  -0.31250  -0.15625
   0.00000  -0.12153  -0.24306  -0.36458  -0.48611  -0.60764   0.52083   0.26042
   0.00000   0.28125   0.56250   0.84375   1.12500   1.40625   0.93750   0.46875
   0.00000  -0.21018  -0.42035  -0.63053  -0.84071  -1.05089  -1.26106  -0.63053
   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   1.00000   0.00000   0.00000
   0.00000   0.28125   0.56250   0.84375   1.12500   1.40625   0.93750   0.46875
   0.00000   0.05556   0.11111   0.16667   0.22222   0.27778   0.33333   0.16667
   0.00000  -0.22438  -0.44876  -0.67315  -0.89753  -1.12191  -1.34629  -0.67315
   0.00000   0.06670   0.13340   0.20010   0.26680   0.33350   0.40020  -0.60029
   0.00000   0.15625   0.31250   0.46875   0.62500   0.78125   0.93750   1.09375
   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   1.00000
   0.00000  -0.20010  -0.40020  -0.60029  -0.80039  -1.00049  -1.20059  -1.40068
   0.00000   0.15625   0.31250   0.46875   0.62500   0.78125   0.93750   1.09375
   0.00000  -0.00000  -0.00000  -0.00000  -0.00000  -0.00000  -0.00000  -0.00000
  -1.00000  -0.87500  -0.75000  -0.62500  -0.50000  -0.37500  -0.25000  -0.12500
   0.00000  -0.12500  -0.25000  -0.37500  -0.50000  -0.62500  -0.75000  -0.87500

 Column 9:

   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
```

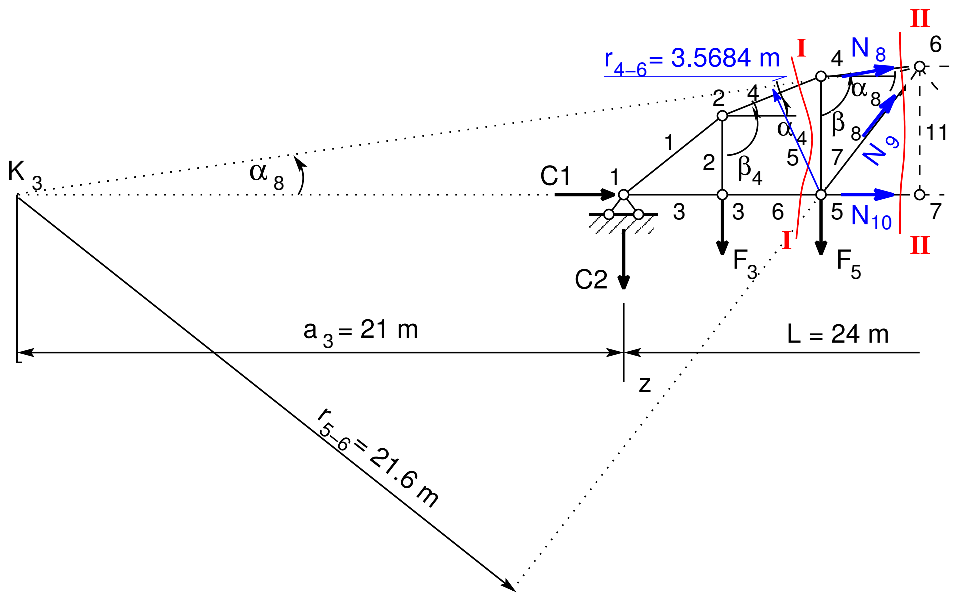
```
   0.00000
   0.00000
  -1.00000
-----------------------------
=============================
 Mõjujoone x koordinaadid
-----------------------------
   0   3   6   9  12  15  18  21  24
-----------------------------
octave:5> diary off
```

%%%%%%%%

Päevikust 6.1 saame kontrollida sisestatud sõlmede koordinaate ja varraste topoloogiat. Varda 4 *ja* 8 *suunakoosinused saame päevikust* $\cos\alpha_4 = 0.92848$, $\cos\beta_4 = -0.37139$, $\cos\alpha_8 = 0.99123$, $\cos\beta_8 = -0.13216$. *Kontrollime leitud toereaktsioonide väärtusi* $C2 = -20.375\,kN$, $C3 = -18.625\,kN$, *koostades tasakaalutingimuse Z-teljele* $\sum Z = 0$

$$-20.375 - 18.625 + 5 + 10 + 4 + 4 + 8 + 8 = 0\,kN \tag{6.24}$$

Sisejõudude leidmiseks eraldame lõikega $II - II$ *sõrestiku vasakpoolse osa ja vaatleme selle tasakaalu (joonis 6.15). Varda* 10 *momendipunktiks on sõlm* 6 *(joonis 6.15). Varda momen-*



Joonis 6.15. Sõrestiku vasakpoolne osa

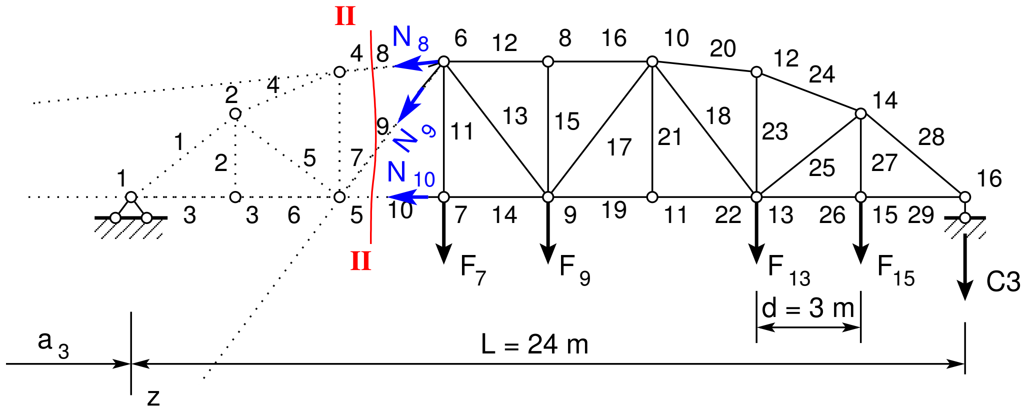
dipunkti otsimiseks teeme lõike $II - II$ *läbi* kolme *varda. Fikseerime varda, mille sisejõudu otsime. Selle varda momendipunkt on seal, kus* kaks *ülejäänud varrast lõikuvad. Sisejõu* N_{10} *sihi kaugus sõlmest* 6 $r_{5-7} = 4.0\,m$. *Momendipunkti kohta koostatud tasakaalutingimusest*

$$\sum M_6 = 0: \qquad -N_{10} * r_{5-7} - F_5 * d - F_3 * 2d - C2 * 3d = 0 \tag{6.25}$$

saame

$$N_{10} = \frac{M_5^o}{r_{5-7}} = \frac{-10 * 3 - 5 * 6 + 20.375 * 9}{4} = 30.84\,kN \tag{6.26}$$

siin tähistab M_5^o *vastava lihttala paindemomenti punkti* 5 *suhtes antud koormusest. Varda* 8



Joonis 6.16. Sõrestiku parempoolne osa

momendipunktiks on sõlm 5*. Varda momendipunkti otsimiseks teeme lõike* $II - II$ *läbi* kolme *varda. Fikseerime varda, mille sisejõudu otsime. Selle varda momendipunkt on seal, kus* kaks *ülejäänud varrast lõikuvad. Sisejõu* N_8 *sihi kaugus sõlmest* 5 *on* $r_{4-6} = h_2 * \cos\alpha_8 = 3.5684\,m$*. Siin* $h_2 = 3.6\,m$*. Momendipunkti* 5 *kohta koostatud tasakaalutingimusest*

$$\sum M_5 = 0: \qquad -N_8 * r_{4-6} - F_3 * d - C2 * 2d = 0 \tag{6.27}$$

tuleneb

$$N_8 = -\frac{M_5^o}{r_{4-6}} = \frac{5 * 3 - 20.375 * 6}{3.5684} = -30.06\,kN \tag{6.28}$$

kus M_5^o *tähistab vastava lihttala paindemomenti punkti* 5 *suhtes antud koormusest. Märk - näitab, et ülemised kiud on surutud.*

Sõrestikuvarda 8 *momendipunktiks on sõlm* 5*. Varda momendipunkti otsimiseks teeme lõike* $I - I$ *(joonis 6.15) läbi* kolme *varda. Fikseerime varda, mille sisejõudu otsime. Selle varda momendipunkt on seal, kus* kaks *ülejäänud varrast lõikuvad. Koostame lõikega* $I - I$ *eraldatud osa kohta tasakaalutingimuse, millest saame analoogiliselt varda* 8 *sisejõuga*

$$N_4 = -\frac{M_5^o}{r_{2-4}} = \frac{5 * 3 - 20.375 * 6}{3.3425} = -32.09\,kN \tag{6.29}$$

siin on sisejõu N_4 *sihi kaugus sõlmest* 5 $r_{2-4} = h_2 * \cos\alpha_4 = 3.3425\,m$*, kus* $h_2 = 3.6\,m$*.*

Varda 9 *momendipunkti otsimiseks teeme lõike* $II - II$ *(joonis 6.15) läbi* kolme *varda. Fikseerime varda* 9*, milles otsime sisejõudu. Selle varda momendipunkt on seal, kus* kaks *ülejäänud varrast (vardad* 10 *ja* 8*) lõikuvad. Joonisel 6.15 on see punkt tähistatud* K_3*-ga. Koostame selle punkti kohta tasakaaluvõrrandi*

$$\sum M_{K3} = 0: \quad -N_9 * r_{5-6} + F_5 * (a_3 + 2d) + F_3 * (a_3 + d) + C2 * a_3 = 0 \tag{6.30}$$

kus $r_{5-6} = 21.6\,m$ *ja* $a_3 = 21\,m$ *(joonis 6.15). Tasakaaluvõrrandist (6.30) saame*

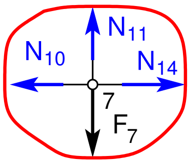
$$N_9 = \frac{10 * 27 + 5 * 24 - 20.375 * 21}{21.6} = -1.75\,kN \tag{6.31}$$

Sõlme *7* tasakaalutingimusest Z-teljele

$$\sum Z = 0: \qquad -N_{11} + F_7 = 0 \tag{6.32}$$

saame

$$N_{11} = 4\,kN \tag{6.33}$$



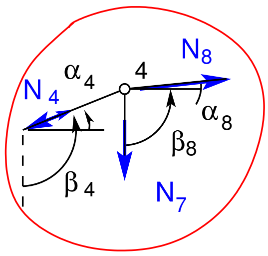
Joonis 6.17. Sõlme 7 tasakaal

Sõlme *4* tasakaalutingimusest Z-teljele

$$\sum Z = 0: \quad N_7 - N_8 * \cos\beta_8 + N_4 * \cos\beta_4 = 0 \tag{6.34}$$

saame avaldisi (6.28) ja (6.29) kasutades

$$N_7 = \frac{M_5^o}{r_{4-6}} * \cos\beta_8 - \frac{M_5^o}{r_{2-4}} * \cos\beta_4 \tag{6.35}$$



Joonis 6.18. Sõlme 4 tasakaal

Varraste 11 *ja* 7 *sisejõu leidmiseks lõikame sõlmed* 7 *ja* 4 *välja (joonis 6.17 ja 6.18).*

Võttes arvesse seosed $r_{4-6} = h_2 * \cos\alpha_8$ *ja* $r_{2-4} = h_2 * \cos\alpha_4$*, saame*

$$N_7 = \frac{M_5^o}{h_2}\left(\frac{\cos\beta_8}{\cos\alpha_8} - \frac{\cos\beta_4}{\cos\alpha_4}\right) \tag{6.36}$$

ehk arvestades seoseid (6.2) ja (6.3) saame

$$N_7 = \frac{M_5^o}{h_2}(\tan\alpha_4 - \tan\alpha_8) = \frac{20.375 * 6 - 5 * 3}{3.6}\left(\frac{1.2}{3} - \frac{0.4}{3}\right) = 7.94\,kN \tag{6.37}$$

Sõrestiku sisejõude võib leida ka lõikest $II-II$ *paremale jääva osa (joonis 6.16) vaatlemisega.*

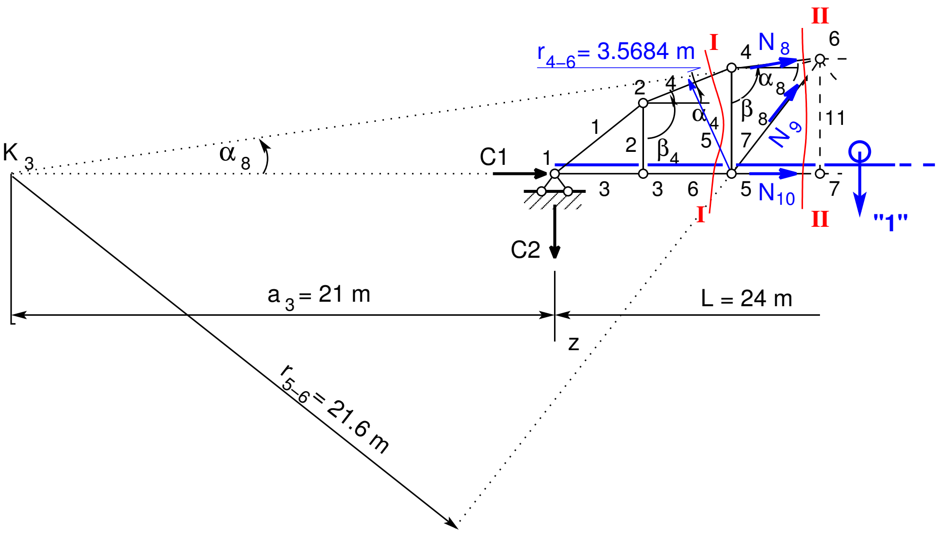
Mõjujoonte *konstrueerimiseks jagame lõikega* $II-II$ *sõrestiku kaheks osaks (joonis 6.23). Kui ühikjõud liigub läbilõigatud paneelist paremal, siis vaatleme vasakpoolse osa tasakaalu (joonis 6.19) ja kui ühikjõud liigub läbilõigatud paneelist vasakul, siis vaatleme parempoolse osa tasakaalu (joonis 6.20).*

Varda 10 *momendipunktiks on sõlm* 6 *(joonis 6.19). Sisejõu* N_{10} *sihi kaugus sõlmest* 6 $h_3 = 4.0\,m$*. Momendipunkti kohta koostatud tasakaalutingimusest*

$$\sum M_6 = 0: \qquad -N_{10} * h_3 - C2 * 3d = 0 \tag{6.38}$$

saame

$$N_{10} = \frac{M_5^o}{r_{5-7}} = -\frac{C2 * 3d}{h_3} = \frac{9}{4} \tag{6.39}$$



Joonis 6.19. Sõrestik. Ühikjõud paremal

Varda 10 mõjujoon (joonis 6.23) on sarnane lihttala mõjujoonega M_5^o ristlõike 5 jaoks, mille ordinaadid on jagatud $h_3 = 4\,m$-ega. Varda 10 mõjujoone iseloomuliku ordinaadi saame, kui korrutame toereaktsiooni $C2$ mõjujoone ordinaadid $-\frac{9}{4}$-ga.

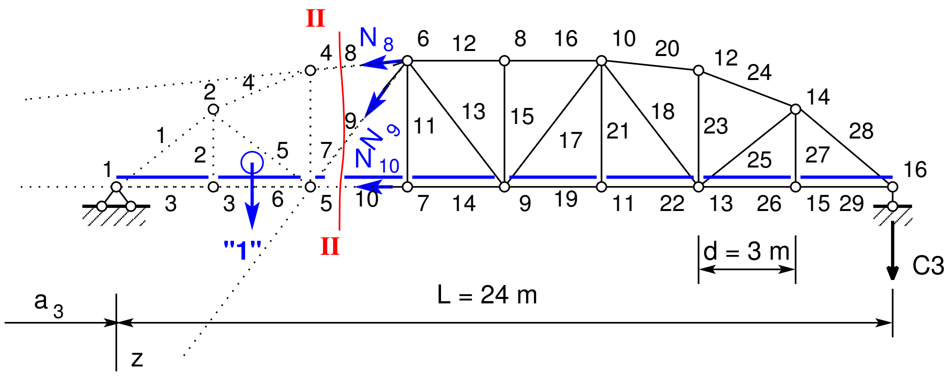
Varda 8 momendipunktiks on sõlm 5. Sisejõu N_8 sihi kaugus sõlmest 5 on $r_{4-6} = h_2 * \cos\alpha_8 = 3.5684\,m$. Siin $h_2 = 3.6\,m$. Momendipunkti 5 kohta koostatud tasakaalutingimusest

$$\sum M_5 = 0: \qquad -N_8 * r_{4-6} + C2 * 2d = 0 \tag{6.40}$$

saame

$$N_8 = -\frac{M_5^o}{r_{4-6}} = \frac{C2 * 2d}{r_{4-6}} = \frac{6}{3.5684} \tag{6.41}$$

kus M_5^o on sõrestikule vastava lihttala paindemomendi mõjujoon punkti 5 suhtes. Varda 8 mõjujoon on joonisel 6.23. Varda 8 mõjujoon sarnaneb lihttala mõjujoonega M_5^o, mille ordinaadid on jagatud r_{4-6}-ga.



Joonis 6.20. Sõrestik. Ühikjõud vasakul

Sõrestikuvarda 4 momendipunktiks on sõlmpunkt 5. Koostame lõikega $I - I$ eraldatud sõrestikuosa (joonis 6.15) kohta tasakaalutingimuse, millest saame varda 8 sisejõu

$$N_4 = -\frac{M_5^o}{r_{2-4}} = \frac{C2 * 2d}{r_{2-4}} = \frac{6}{3.3425} \tag{6.42}$$

kus sisejõu N_4 sihi kaugus sõlmest 5 on $r_{2-4} = h_2 * \cos\alpha_4 = 3.3425\,m$.

Varda 9 momendipunktiks on varraste 8 ja 10 sihtide lõikepunkt K_3. Sisejõu N_9 sihi kaugus punktist K_3 on $r_{4-6} = 21.6\,m$. Momendipunkti K_3 kohta koostatud tasakaalutingimusest

$$\sum M_{K3} = 0: \quad -N_9 * r_{5-6} + C2 * a_3 = 0 \tag{6.43}$$

kus $a_3 = 21\,m$ (joonis 6.19), saame

$$N_9 = \frac{C2 * a_3}{r_{5-6}} = -\frac{21}{21.6} \tag{6.44}$$

Liikuva koormuse all (läbilõigatud paneelist paremal) sarnaneb varda N_9 mõjujoon toereaktsiooni $C2$ mõjujoonega, mille ordinaadid on korrutatud a_3/r_{5-6}-ga.

Kui koormus liigub vasakul pool läbilõigatud paneeli, siis vaatleme sõrestiku parempoolse osa tasakaalu (joonis 6.20). Varda 9 momendipunkti K_3 kohta koostatud tasakaalutingimusest

$$\sum M_{K3} = 0: \quad -N_9 * r_{5-6} + C3 * (a_3 + L) = 0 \tag{6.45}$$

kus $a_3 = 21\,m$ (joonis 6.19), saame

$$N_9 = -\frac{C3 * (a_3 + L)}{r_{5-6}} = \frac{21 + 24}{21.6} = \frac{45}{21.6} \tag{6.46}$$

Liikuva koormuse all (läbilõigatud paneelist vasakul) sarnaneb varda N_9 mõjujoon toereaktsiooni $C3$ mõjujoonega, mille ordinaadid on korrutatud $(a_3 + L)/r_{5-6}$-ga (joonis 6.23).

Varda 11 mõjujoone leidmiseks lõikame sõrestikust (joonis 6.23) välja sõlme 7 (joonis 6.21).

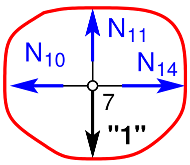
Varda 7 mõjujoone leidmiseks lõikame sõrestikust (joonis 6.23) välja sõlme 4 (joonis 6.22).

Sõlme *7* tasakaalutingimusest Z-teljele

$$\sum Z = 0 : \qquad -N_{11} + 1 = 0 \tag{6.47}$$

saame

$$N_{11} = 1 \tag{6.48}$$



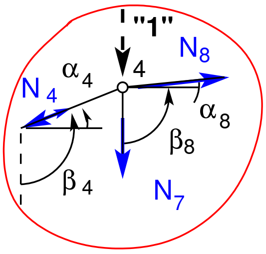
Joonis 6.21. Sõlm 7

Sõlme *4* tasakaalutingimusest Z-teljele

$$\sum Z = 0 : \quad N_7 - N_8 * \cos\beta_8 + N_4 * \cos\beta_4 = 0 \tag{6.49}$$

saame avaldisi (6.28) ja (6.29) kasutades

$$N_7 = \frac{M_5^o}{r_{4-6}} * \cos\beta_8 + \frac{M_5^o}{r_{2-4}} * \cos\beta_4 \tag{6.50}$$



Joonis 6.22. Sõlm 4

Võttes arvesse seosed $r_{4-6} = h_2 * \cos\alpha_8$ ja $r_{2-4} = h_2 * \cos\alpha_4$, (6.2), (6.3), saame

$$N_7 = \frac{M_5^o}{h_2}(\tan\alpha_4 - \tan\alpha_8) = \frac{M_5^o}{3.6}\left(\frac{1.2}{3} - \frac{0.4}{3}\right) \tag{6.51}$$

Varda N_7 mõjujoon sarnaneb lihttala mõjujoonega M_5^o, mille ordinaadid on korrutatud $\frac{1}{3.6}\left(\frac{1.2}{3} - \frac{0.4}{3}\right)$ (joonis 6.23).

Mõjujoonte abil arvutame sisejõud valemiga

$$N_i = \sum F_j * \eta_{ij} = F_j * \eta_{ij} \tag{6.52}$$

kus η_{ij} on sisejõu N_i mõjujoone ordinaat sõlmes j *ja F_j on koormus sõlmes* j.

$$N_{10} = 5 * 0.4688 + 10 * 0.9375 + 4 * (1.4063 + 0.5625) + \\ +8 * (1.1250 + 0.2812) = 30.84\, kN$$

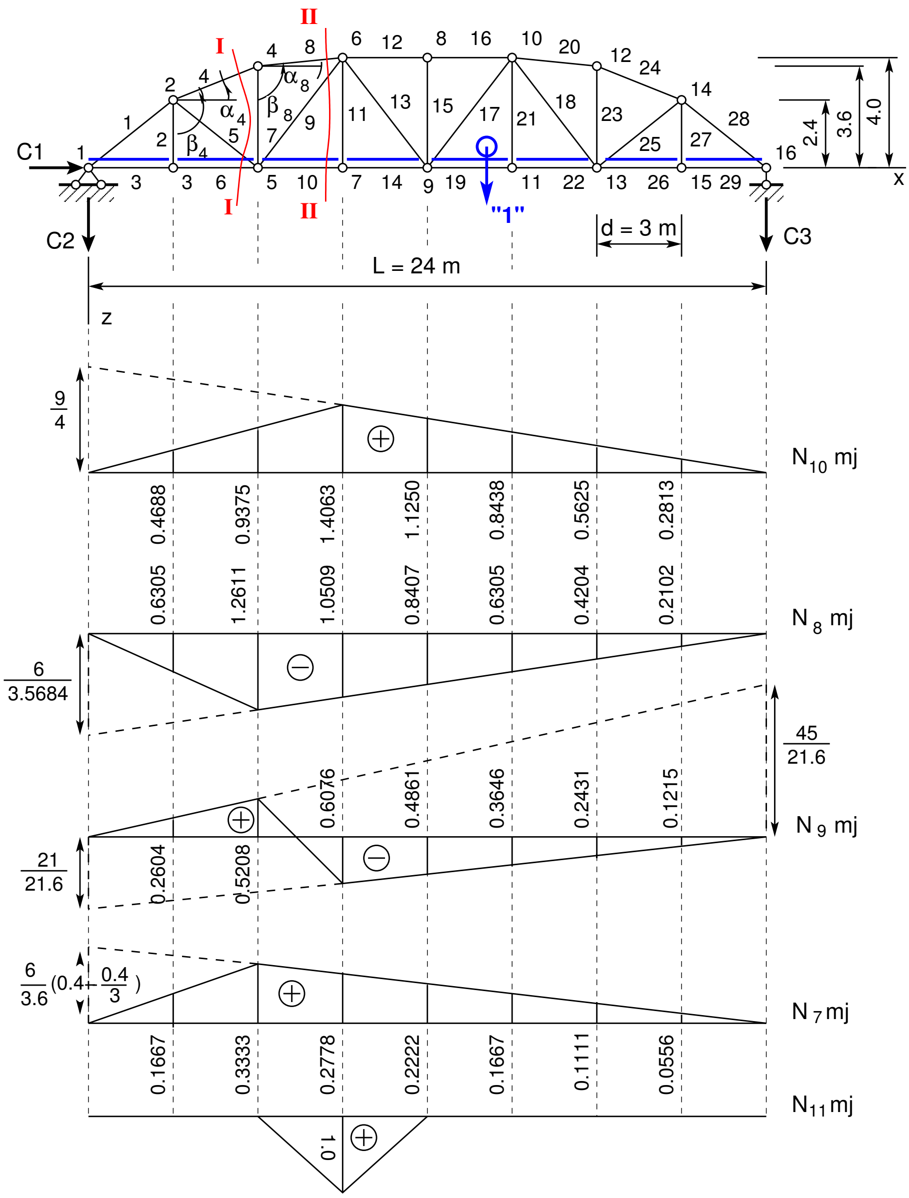
$$N_8 = -\left[5 * 0.6305 + 10 * 1.2611 + 4 * (1.0509 + 0.4204) + \\ +8 * (0.8407 + 0.2102)\right] = -30.06\, kN$$

$$N_9 = 5 * 0.2604 + 10 * 0.5208 + 4 * (0.6076 + 0.2430) + \\ +8 * (0.4861 + 0.1215) = -1.75\, kN$$

$$N_{11} = 4 * 1.000 = 4.00\, kN$$

$$N_7 = 5 * 0.1667 + 10 * 0.3333 + 4 * (0.2778 + 0.1111) + \\ +8 * (0.2222 + 0.0556) = 7.94\, kN$$

Tabelis 6.3 on otseselt ja mõjujoonte abil leitud sisejõudude võrdlus.



Joonis 6.23. Sõrestiku mõjujooned

Tabel 6.3. Varraste sisejõudude võrdlus

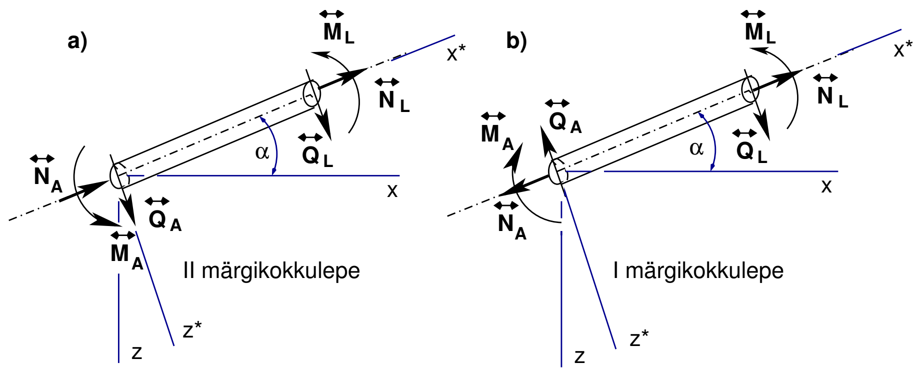
Varras	N_i otseselt $[kN]$	N_i mõjujoontega $[kN]$
10	30.84	30.84
8	-30.06	-30.06
9	-1.75	-1.75
11	4.00	4.00
7	7.94	7.94

Peatükk 7

Siirete arvutus

7.1 Märgikokkulepped

Rajajõudude (kontaktjõudude) positiivse suuna määramisel on kasutusel kaks märgikokkulepet (joonis 7.1, kus on kasutusel parema käe teljestik, vt joonis A.1). *Esimene*



Joonis 7.1. Märgikokkulepped

märgikokkulepe (joonis 7.1 b) on tuttav tehnilisest mehaanikast. *Teine märgikokkulepe* (joonis 7.1 a) on vajalik varrassüsteemide tasakaaluvõrrandite algoritmide koostamiseks.

Võrreldes I märgikokkulepet II märgikokkuleppega, näeme, et varda lõpus olevad rajajõudude (kontaktjõudude) suunad langevad kokku. Varda alguses on rajajõudude suunad vastasmärgilised. *Sisejõude* leitakse rajajõudude kaudu. Sisejõudude märgid ei tohi sõltuda rajajõudude märgikokkuleppest.

Sisejõudude märgireeglid on raamatus [MR96] lk 35 „Tõmbejõu loeme positiivseks", „Survejõu loeme negatiivseks"; lk 45 „Põikjõu range märgireegel: positiivseks loeme põikjõudu, mis *positiivset sisepinda* nihutab koordinaattelje positiivses suunas või *negatiivset sisepinda* koordinaattelje negatiivses suunas", „Põikjõu märgi tööreegel: positiivseks loeme põikjõudu, mis nihutab *positiivset sisepinda* päripäeva"; lk 43 „Paindemomendi loeme positiivseks, kui varda positiivsed kiud on tõmmatud".

Tehnilises mehaanikas (tugevusõpetuses) langevad sisejõudude märgireeglid ja rajajõudude (kontaktjõudude) märgireeglid (I märgikokkulepe) kokku. Kasutades II märgikokkulepet, tuleb sisejõudude märgi määramisel rajajõudude (kontaktjõudude) kaudu varda alguses arvestada nende erinevaid märke. Rõhutame, et sisejõud on varda *sisepinnal* ja rajajõud (kontaktjõud) mõjuvad varda *välispinnal*.

7.2 Sise- ja rajajõudude töö

Tööde avaldise (1.7) pikkel kirjutame kujule

$$\underbrace{\overset{\leftrightarrow}{N}_x \hat{u} \,|_a^b}_{W_r} \underbrace{- \int_a^b N_x \hat{\lambda} dx}_{W_s} + (\underbrace{\int_a^b q_x (x) \hat{u} dx + F_{xi} \hat{u}_i}_{W_v}) = 0 \tag{7.1}$$

Kui vaadelda avaldises (7.1) $\hat{u}$-d kui *virtuaalset siiret*, siis väljendab see avaldis *virtuaalsiirete printsiipi*. Kirjutame võrrandi (7.1) ringi järgmiselt:

$$W^{(p)} = W_r^{(p)} + W_s^{(p)} + W_v^{(p)} = 0 \tag{7.2}$$

kus

$$W_r^{(p)} = \overset{\leftrightarrow}{N}_x \hat{u} \,|_a^b \tag{7.3}$$

$$W_s^{(p)} = - \int_a^b N_x \hat{\lambda} dx \tag{7.4}$$

$$W_v^{(p)} = \int_a^b q_x (x) \hat{u} dx + F_{xi} \hat{u}_i \tag{7.5}$$

Avaldist (7.2) nimetatakse *energiateoreemiks pikkel*: rajajõudude, sisejõudude ja välisjõudude tööde summa on null. Avaldises (7.2) esinevat tööd $W^{(p)}$ on *passiivtööd*, kuna vaadeldavad jõud ei kutsunud esile virtuaalsiirdeid $\hat{u}$.

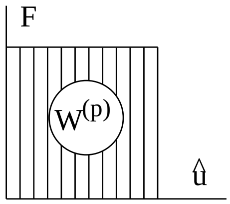
Kui vaadeldav jõud sõltub siiretest ja pööretest, siis tööd, mida need jõud teevad nendel siiretel ja pööretel, nimetatakse *aktiivtööks* (joonis 7.3). Aktiivtööde *energiateoreem* [KW90]

$$W^{(a)} = W_r^{(a)} + W_s^{(a)} + W_v^{(p)} = 0 \tag{7.6}$$

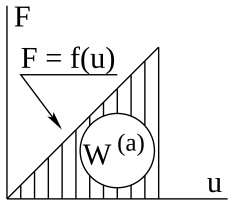
kus

$$W_r^{(a)} = \frac{1}{2} \overset{\leftrightarrow}{N}_x \hat{u} \,|_a^b \tag{7.7}$$

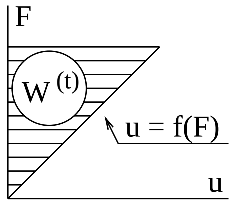
$$W_s^{(a)} = -\frac{1}{2} \int_a^b N_x \hat{\lambda} dx \tag{7.8}$$



Joonis 7.2. Passiivtöö



Joonis 7.3. Aktiivtöö



Joonis 7.4. Täiendtöö

$$W_v^{(a)} = \frac{1}{2}\int_a^b q_x\left(x\right)\hat{u}dx + F_{xi}\hat{u}_i \tag{7.9}$$

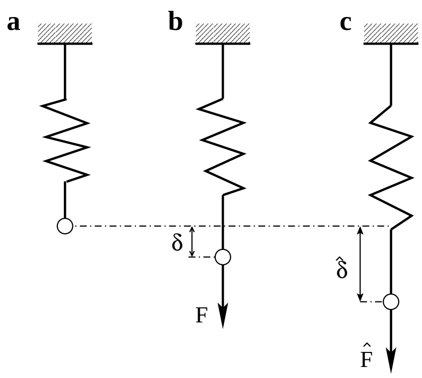
Sisejõudude töö avaldisel (7.8) on miinusmärk. Sisejõudude *potentsiaalne energia* Π_s ehk *deformatsioonienergia (joonis 1.3)* U on arvuliselt võrdne sisejõudude tööga, kuid vastupidise märgiga

$$\Pi_s = U = -W_s^{(a)} = \frac{1}{2}\int_a^b N_x\hat{\lambda}dx \tag{7.10}$$

7.3 Töö ja energia

Vaatleme vedrut (joonis 7.5 a) kui lihtsaimat elementi, et selgitada vardamehaanika printsiipe. Rakendame vedrule jõu F ja $\hat{F}$ (joonis 7.5 a, b). Vedru jäikusega c siirded δ, $\hat{\delta}$ on jõududega proportsionaalsed

$$F = k\delta, \quad \hat{F} = k\hat{\delta} \tag{7.11}$$



Joonis 7.5. Vastastikune töö

siin on k vedru jäikus.
Siirete δ, $\hat{\delta}$ erinevate arvuliste väärtuste korral kirjutame samasuse

$$\underbrace{\delta k}_{F}\hat{\delta} - \delta k\hat{\delta} = 0 \tag{7.12}$$

Kui asendame avaldise (7.12) δk jõuga F, saame

$$F\hat{\delta} - \delta k\hat{\delta} = 0 \tag{7.13}$$

Seda triviaalset samasust nimetatakse *vedru esimeseks samasuseks* [Har85]

$$G\left(\delta, \hat{\delta}\right) \equiv F\hat{\delta} - \delta k\hat{\delta} = 0, \quad \forall\delta, \hat{\delta} \tag{7.14}$$

siin tuleb tähistust $\forall\delta, \hat{\delta}$ lugeda kõigi $\delta, \hat{\delta}$ puhul. Avaldis (7.14) väljendab *energiateoreemi*, s.t välisjõudude ja sisejõudude tööde summa on null. Samasus (7.14) jääb kehtima, kui vahetame δ ja $\hat{\delta}$ ning F ja $\hat{F}$ ära

$$G\left(\hat{\delta}, \delta\right) \equiv \hat{F}\delta - \hat{\delta}k\delta = 0, \quad \forall\delta, \hat{\delta} \tag{7.15}$$

Vedru teise samasuse saame, kui lahutame avaldisest (7.14) avaldise (7.15)

$$B\left(\delta, \hat{\delta}\right) \equiv G\left(\delta, \hat{\delta}\right) - G\left(\hat{\delta}, \delta\right) = F\hat{\delta} - \hat{F}\delta \tag{7.16}$$

Avaldis (7.16) väljendab Betti[1] teoreemi (*tööde vastastikkuse teoreemi*): *esimese koormusolukorra välisjõudude võimalik töö teise koormusolukorra jõudude poolt põhjustatud siiretel on võrdne teise koormusolukorra välisjõudude võimaliku tööga esimese koormusolukorra jõudude poolt põhjustatud siiretel.*

Vaatleme vedru aktiivtööd $W^{(a)}$ (joonis 7.3). Elastse vedru *deformatsioonienergia* U (vedru sisejõudude potentsiaalne energia Π_s) on võrdne vedru aktiivtööga $W_s^{(a)}$, kuid vastupidise märgiga

$$U(\delta) = \Pi_s(\delta) = -W_s^{(a)}(\delta) = \frac{1}{2}\delta k\hat{\delta} \tag{7.17}$$

Energiateoreem (7.14) aktiivtöö korral

$$\frac{1}{2}G(\delta, \delta) \equiv \frac{1}{2}F\delta - \frac{1}{2}\delta k\delta = 0 \tag{7.18}$$

Vedru potentsiaalne energia $\Pi(\delta)$ koosneb sisejõudude potentsiaalsest energiast $\Pi_s^{(a)}$ ja välisjõudude potentsiaalsest energiast $\Pi_v^{(a)}$

$$\Pi(\delta) = \Pi_v^{(a)} + \Pi_s^{(a)} = \frac{1}{2}\delta k\delta - \frac{1}{2}F\delta \tag{7.19}$$

siin

$$\Pi_v = W_v \tag{7.20}$$

ja W_v on välisjõudude töö.
Vedru potentsiaalse energia (7.19) esimene variatsioon on funktsionaal $\Pi(\delta)$

[1]Enrico Betti, itaalia ehitusinsener, 1823–1892.

7.4 Tööde vastastikkuse teoreem

Tööde vastastikkuse teoreem (Betti teoreemi): *esimese koormusolukorra välisjõudude võimalik töö teise koormusolukorra jõudude poolt põhjustatud siiretel on võrdne teise koormusolukorra välisjõudude võimaliku tööga esimese koormusolukorra jõudude poolt põhjustatud siiretel*. Sisejõudude tööde vastastikkuse teoreem *pikkel* on toodud avaldisega (A.26) lk 193.

$$\int_0^l N_x \frac{\hat{N}_x}{EA} dx = \int_0^l \hat{N}_x \frac{N_x}{EA} dx \tag{7.21}$$

ja *paindel* avaldisega (A.41)

$$\underbrace{\int_0^l M_y \frac{\hat{M}_y}{EI_y} dx}_{W_s^{I)}} = \underbrace{\int_0^l \hat{M}_y \frac{M_y}{EI_y} dx}_{W_s^{II)}} \tag{7.22}$$

Raja- ja välisjõudude töö vastastikkuse teoreem *pikkel* on toodud avaldisega (A.22) lk 193.

$$\underbrace{\overleftrightarrow{N}_x \; \hat{u}}_{W_r^I} |_0^l + \underbrace{\int_0^l q_x(x)\, \hat{u} dx + F_{xi} \hat{u}_i}_{W_v^I} = \underbrace{\hat{\overleftrightarrow{N}}_x \; u}_{\hat{W}_r^{II}} |_0^l + \underbrace{\int_0^l \hat{q}_x(x)\, u dx + \hat{F}_{xi} u_i}_{\hat{W}_v^{II}} \tag{7.23}$$

ja *paindel* avaldisega (A.39)

$$\begin{aligned} &\underbrace{\left[\overleftrightarrow{Q}_z \; \hat{w} + \overleftrightarrow{M}_y \; \hat{\varphi}_y\right] |_0^l}_{W_r^I} + \underbrace{\int_0^l q_z(x)\, \hat{w} dx + F_{zi} \hat{w}_i}_{W_v^I} = \\ &\qquad = \underbrace{\left[\hat{\overleftrightarrow{Q}}_z \; w + \hat{\overleftrightarrow{M}}_y \; \varphi_y\right] |_0^l}_{W_r^{II}} + \underbrace{\int_0^l \hat{q}_z(x)\, w dx + F_{zi} \hat{w}_i}_{W_v^{II}} \end{aligned} \tag{7.24}$$

siin on Q_z, M_y, p_z, w ja φ_y esimese koormusolukorra jõud ja siirded,
ning $\hat{Q}_z$, $\hat{M}_y$, $\hat{p}_z$, $\hat{w}$ ja $\hat{\varphi}_y$ teise koormusolukorra jõud ja siirded.

7.5 Siirete vastastikkuse teoreem

Siirete vastastikkuse teoreem on tööde vastastikkuse teoreemi erijuht.
Siirete vastastikkuse teoreem (J. Maxwell[2]):*kohas k mõjuvale jõule 1_k vastav üldistatud siire, mis on põhjustatud ühikjõust kohas i, võrdub jõule 1_i vastava üldistatud siirdega, mis on põhjustatud ühikjõust kohas k.*

[2]James Clerk Maxwell, inglise füüsik, 1831–1879.

7.6 Reaktsioonide vastastikkuse teoreem

Reaktsioonide vastastikkuse teoreem (J. Rayleigh[3]): *sideme j ühiksiirdest põhjustatud reaktsioon sidemes i võrdub sideme i ühiksiirdest põhjustatud reaktsiooniga sidemes j.*

7.7 Siirete arvutamine

Konstruktsiooni mingi punkti siirde arvutamisel vaadeldakse konstruktsiooni arvutusskeemi kahte tasakaaluolukorda. Ühe olukorrana vaadeldakse koormuse põhjustatud tasakaaluolukorda p ja arvutusskeemis tekkivaid sisejõude tähistatakse sel juhul N_p, Q_p, M_p. Teise olukorrana vaadeldakse tasakaaluolukorda, kus arvutusskeemile mõjub ainult üks otsitavale siirdele vastav üldistatud ühikjõud 1_i. Selles tasakaaluolukorras i sisejõud ja reaktsioonid tähistatakse väikeste tähtedega n_i, q_i, m_i ja c_i.
Võimaliku töö avaldised pikkel (A.18) ja paindel (A.37) on

$$W^p = F_{xi}\hat{u}_i + \int_0^l q_x\left(x\right)\hat{u}dx + \overleftrightarrow{N}_x\ \hat{u}\ |_0^l - \int_0^l N_x\hat{\lambda}dx = 0 \tag{7.25}$$

$$W^p = F_{zi}\hat{w}_i + \int_0^l q_z\left(x\right)\hat{w}dx + \left[\overleftrightarrow{Q}_z\ \hat{w} + \overleftrightarrow{M}_y\ \hat{\varphi}_y\right] |_0^l - \int_0^l M_y\hat{\psi}_y dx = 0 \tag{7.26}$$

Kirjutagem lahti avaldistes (7.25) ja (7.26) esinevad rajaväärtused

$$\overleftrightarrow{N}_x\ \hat{u}\ |_a^b = \overleftrightarrow{N}_{xb}\ \hat{u}_b - \overleftrightarrow{N}_{xa}\ \hat{u}_a \tag{7.27}$$

$$\left[\overleftrightarrow{Q}_z\ \hat{w} + \overleftrightarrow{M}_y\ \hat{\varphi}_y\right] |_a^b = \overleftrightarrow{Q}_{zb}\ \hat{w}_b + \overleftrightarrow{M}_{yb}\ \hat{\varphi}_{yb} - \overleftrightarrow{Q}_{za}\ \hat{w}_a - \overleftrightarrow{M}_{ya}\ \hat{\varphi}_{ya} \tag{7.28}$$

Tugede siirete mõju arvestamisel võetakse kasutusele II märgikokkulepe. See kokkulepe avaldub toe siirde ja toereaktsiooni korrutises, vt R. Räämet [Rää75] lk 335: „*Korrutis $\Delta c_j \cdot r'_{jk}$ on positiivne, kui paigutise ja reaktsiooni suunad ühtivad, ja negatiivne, kui nad on vastassuunalised.*" Võtame kasutusele parema käe teljestiku (joonis A.1). Seome x-telje varda teljega nii, et x-telg on suunatud varda algusest A lõppu B. Võtame kasutusele II märgikokkuleppe, mille puhul varda lõpus olevate rajajõudude suunad langevad kokku I märgikokkulepes kasutusel olevate suundadega. Varda alguses olevate rajajõudude suunad on vastupidised I märgikokkulepes kasutusel olevate suundadega. Seega langevad varda alguses olevad rajajõudude suunad kokku varda lõpus olevate rajajõudude suundadega. Selgituse kohaselt võtame avaldistes (7.25) ja (7.26) kasutusele

[3]John William Rayleigh, inglise füüsik, 1842–1919, 1904. a Nobeli preemia.

järgmised tähised:

$$\begin{array}{ccc} F_{xi} \cdot \hat{u}_i & \equiv & ,,1_i'' \cdot u_i \\ N_x \cdot \hat{\lambda} & \equiv & n_i \cdot \frac{N_p}{EA} \\ \overset{\leftrightarrow}{N}_x \cdot \hat{u} \mid_a & \equiv & -C_a^{(N)} \cdot u_a \\ \overset{\leftrightarrow}{N}_x \cdot \hat{u} \mid^b & \equiv & C_b^{(N)} \cdot u_b \\ F_{zi} \cdot \hat{w}_i & \equiv & ,,1_i'' \cdot w_i \\ M_y \cdot \hat{\psi}_y & \equiv & m_i \cdot \frac{M_p}{EI} \\ \overset{\leftrightarrow}{M}_y \cdot \hat{\varphi}_y \mid_a & \equiv & -C_a^{(M_y)} \cdot \varphi_a \\ \overset{\leftrightarrow}{M}_y \cdot \hat{\varphi}_y \mid^b & \equiv & C_b^{(M_y)} \cdot \varphi_b \\ \overset{\leftrightarrow}{Q}_z \cdot \hat{w} \mid_a & \equiv & -C_a^{(Q_z)} \cdot w_a \\ \overset{\leftrightarrow}{Q}_z \cdot \hat{w} \mid^b & \equiv & C_b^{(QZ)} \cdot w_b \end{array} \tag{7.29}$$

Üldistatud ühikjõu $,,1_i''$ rakendamisel $q_x(x) = 0$ ja $q_z(x) = 0$. Koormuse põhjustatud tasakaaluolukorra $,,p''$ arvutusskeemis tekkivad sisejõud N_p, Q_p, M_p ja siire leitakse üldistatud ühikjõu $,,1_i''$ sihis järgmiste avaldistega:

$$,,1_i'' \cdot u_i = \int_a^b n_i \frac{N_p}{EA} dx - C_b^{(N)} \cdot u_b - C_a^{(N)} \cdot u_a \tag{7.30}$$

$$,,1_i'' \cdot w_i = \int_a^b m_i \frac{M_p}{EI} dx - C_b^{(Q_z)} \cdot w_b - C_a^{(Q_z)} \cdot w_a - C_b^{(M_y)} \cdot \varphi_b - C_a^{(M_y)} \cdot \varphi_a \tag{7.31}$$

Siin on ühikjõust $,,1_i$ põhjustatud rajajõudude (kontaktjõudude $,,C''$– *contact force* [KW90]) $C_a^{(N)}$, $C_b^{(N)}$, $C_a^{(Q_z)}$, $C_b^{(Q_z)}$, $C_a^{(M_y)} \cdot \varphi_a$, $C_a^{(M_y)} \cdot \varphi_b$ ja toe siirete u_a, u_b, w_a, w_b, φ_a, φ_b korrutised positiivsed siis, kui nende suunad ühtivad.

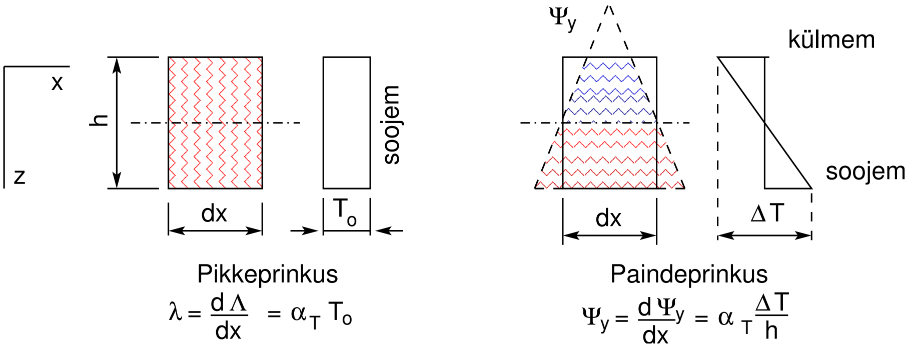
7.8 Siirded temperatuuri muutusest

Joonisel 7.6 on vardast eraldatud elementaarlõik pikkusega dx. Temperatuuri muutust z-telje positiivsel poolel tähistame $T_{(+)}$ ja z-telje negatiivsel poolel $T_{(-)}$. Temperatuuri tõusmisel varda elementaarlõigu ülemised ja alumised kiud pikenevad $\alpha_T \cdot T_{(+)}dx$ ja $\alpha_T \cdot T_{(-)}dx$. Varda elementaarlõigu pikenemine

$$\lambda = \alpha_T \cdot T_0 \tag{7.32}$$

kus α_T on materjali joonpaisumistegur. Näiteks ehitusterasel (St 37) $\alpha_T = 1.1 \cdot 10^{-5}\, K^{-1}$. Kui ristlõige on mõlema peatelje suhtes sümmeetriline, siis arvutatakse temperatuuri muut telgjoonel valemiga

$$T_0 = \frac{1}{2} \left(T_{(+)} + T_{(-)} \right) \tag{7.33}$$



Joonis 7.6. Prinkused temperatuuri muutusest

Kui aga ristlõige ei ole peatelje suhtes sümmeetriline, siis arvutatakse temperatuuri muut telgjoonel järgmise avaldisega:

$$T_0 = \frac{1}{h}\left(h_{ülemine} \cdot T_{(+)} + h_{alumine} \cdot T_{(-)}\right) \tag{7.34}$$

kus $h_{ülemine}$ ja $h_{alumine}$ on tala ristlõike ülemiste ja alumiste kiudude kaugused varda telgjoonest.
Ülemiste ja alumiste kiudude erinevast temperatuuri muutusest tingitud varda kõverdumist nimetatakse temperatuuri mitteühtlasest muutusest põhjustatud prinkuseks ψ_y

$$\psi_y = \alpha_T \frac{1}{h} \Delta T \tag{7.35}$$

siin

$$\Delta T = \left(T_{(+)} - T_{(+)}\right) \tag{7.36}$$

Temperatuuri muutusest põhjustatud siirete arvutamiseks asendame valemites (7.25), (7.26) $\hat{\lambda}$ ja $\hat{\psi}_y$ avaldistega (7.32), (7.35). Koormusest põhjustatud siirete arvutamiseks valemitest (7.30), (7.31) saab järgmised temperatuuri muutusest põhjustatud siirete arvutamise avaldised:

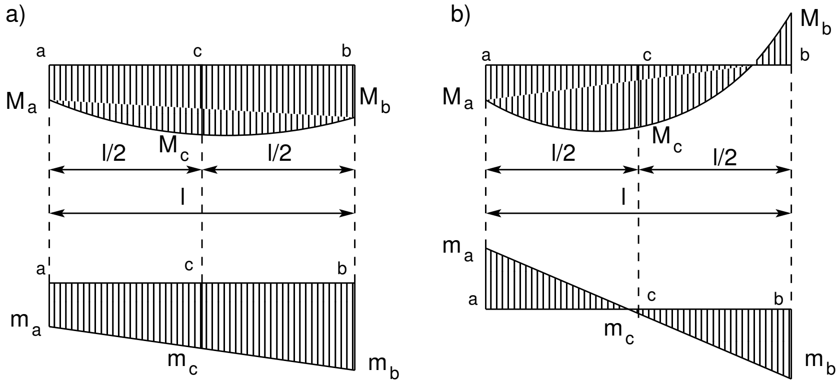
$$,,1_i'' \cdot u_i = \int_a^b n_i \alpha_T \cdot T_0 dx - C_b^{(N)} \cdot u_b - C_a^{(N)} \cdot u_a \tag{7.37}$$

$$,,1_i'' \cdot w_i = \int_a^b m_i \alpha_T \frac{1}{h} \Delta T dx - C_b^{(Q_z)} \cdot w_b - C_a^{(Q_z)} \cdot w_a - C_b^{(M_y)} \cdot \varphi_b - C_a^{(M_y)} \cdot \varphi_a \tag{7.38}$$

Avaldises (7.37) esineva integraali märk sõltub sisejõu n_i ja temperatuurist põhjustatud pikkeprinkuse $\alpha_T \cdot T_0$ märkidest. Kui sisejõud n_i ja $\alpha_T \cdot T_0$ on ühemärgilised, siis on integraali märk positiivne.
Avaldises (7.38) esineva integraali märgi võib määrata ka varda deformeerunud kuju järgi: kui ühikjõust põhjustatud kõverus $\frac{mn_i}{EI}$ ja temperatuuri mitteühtlasest muutusest põhjustatud kõverus $\alpha_T \frac{1}{h} \Delta T$ on ühesuunalised, siis on korrutis positiivne vastupidisel juhul negatiivne. Viimase kõveruse hindamisel arvestame, missugused kiud pikenevad ja missugused lühenevad.

7.9 Numbriline integreerimine

Paljude varraskonstruktsiooni ülesannete lahendamisel tuleb arvutada siirdeid. Sirgetest varrastest koosneva konstruktsiooni elementide siirded leitakse valemitega (7.30) ja (7.31), milles on piki- ja paindemomentide integraalid. Vaatleme nende integraalide numbrilist integreerimist. Kasutame lühiduse mõttes järgmist tähistust $m_i \frac{M_p}{EI} \equiv f(x)$. Seega vaatleme integraali $\int_a^b f(x)\, dx$ numbrilist integreerimist.



Joonis 7.7. Märgikokkulepped

7.9.1 Simpsoni valem

Simpsoni[4] valemi puhul jagame *pideva funktsiooni* $f(x)$ integreerimisel lõigu $[a, b]$ pikkusega l poolels ($l/2$ ja $l/2$) ja saame

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{l}{6}\left[f(a) + 4 \cdot f(c) + f(b)\right] \tag{7.39}$$

kus $f(a)$ – funktsiooni väärtus lõigu alguses,
$f(c)$ – funktsiooni väärtus lõigu keskel,
$f(b)$ – funktsiooni väärtus lõigu lõpus.
Simpsoni valem (7.39) annab täpse tulemuse kuni kuuppolünoomini.
Simpsoni valemi (7.39) kuju integreerimisvahemiku a-b paarisarvuliseks n võrdseks osaks jagamisel $\Delta s = l/n$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(s)\, ds \quad \approx \quad & \frac{\Delta s}{3}\left[f_0 + 4 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + 4 \cdot f_3 + 2 \cdot f_4 + \ldots \right. \\ & \left. \ldots + 2 \cdot f_{n-2} + 4 \cdot f_{n-1} + f_n\right] \end{aligned} \tag{7.40}$$

Joonisel 7.7 a on koormusest põhjustatud epüüri M_p ja ühikjõust põhjustatud epüüri m_i ordinaadid ühesuguste märkidega. Joonisel 7.7 b on epüüridel M_p ja m_i otstes erinevad märgid. Siirete arvutamiseks rakendame Simpsoni valemit (7.39)

$$\int_a^b m_i \cdot \frac{M_p}{EI} dx = \frac{l}{6}\left[m_a \frac{M_a}{EI} + 4 \cdot m_c \frac{M_c}{EI} + m_b \frac{M_b}{EI}\right] \tag{7.41}$$

[4]T. Simpson sai selle valemi 1743. aastal.

Valemis (7.41) on korrutised $m_a\frac{M_a}{EI}$, $m_c\frac{M_c}{EI}$ ja $m_b\frac{M_b}{EI}$ positiivsed, kui ühikjõust ja koormusest põhjustatud epüüride ordinaadid on varda samal poolel, ja negatiivsed, kui epüüride ordinaadid on vastupidiste märkidega. Näiteks joonisel 7.7 b on lõigu algul (punktis a) ja lõpus (punktis b) epüüride ordinaatide korrutis negatiivne, kuna ordinaadid on suunatud eri poole. Lõigu keskel (punktis c) on epüüride ordinaatide korrutis positiivne. Simpsoni valemiga (7.41) saab täpse tulemuse lineaarsete epüüride korrutise, lineaarsete ja ruutparaboolse epüüri korrutise korral. Kõrgemat järku epüüride korrutise puhul tuleb kasutada *3/8* valemit (7.47).
Numbrilisel integreerimisel Simpsoni valemiga (7.41) kasutame arvutusprogrammi *Octave*. Vekrorite **a** (7.42) ja **b** (7.43) korrutamiseks kasutame elememt-element korrutamist (vt paragrahvi B.5 avaldist (B.24) lk 201). Korrutamise tulemus on näidatud avaldisega (7.44)

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= [m_a \quad m_c \quad m_b] && (7.42)\\ \mathbf{b} &= [M_a \quad M_c \quad M_b] && (7.43)\\ \mathbf{a}.^*\mathbf{b} &= [m_a \cdot M_a \quad m_c \cdot M_c \quad m_b \cdot M_b] && (7.44) \end{aligned}$$

Võtame kasutusele Simpsoni valemi kordajaid sisaldava vektori **smps**, mille transponeeritud kuju on toodod avaldisega (7.45)

$$\mathbf{smps}' = \frac{1}{6}\left[\frac{l}{EI} \quad 4\cdot\frac{l}{EI} \quad \frac{l}{EI}\right] \tag{7.45}$$

Element-element korrutamisega saadud tulemuse (7.44) korrutame skalaarselt (vt avaldist B.14 lk 199) vektoriga (7.45). Tulemuseks on Simpsoni valem (7.41).

$$\begin{aligned} \mathbf{a}.^*\mathbf{b} * \mathbf{smps} &= \frac{1}{6}[m_a \cdot M_a \quad m_c \cdot M_c \quad m_b \cdot M_b]\begin{bmatrix} \frac{l}{EI} \\ 4\cdot\frac{l}{EI} \\ \frac{l}{EI} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{l}{6}\left[m_a\frac{M_a}{EI} + 4\cdot m_c\frac{M_c}{EI} + m_b\frac{M_b}{EI}\right] && (7.46) \end{aligned}$$

7.9.2 Simpsoni *3/8* valem

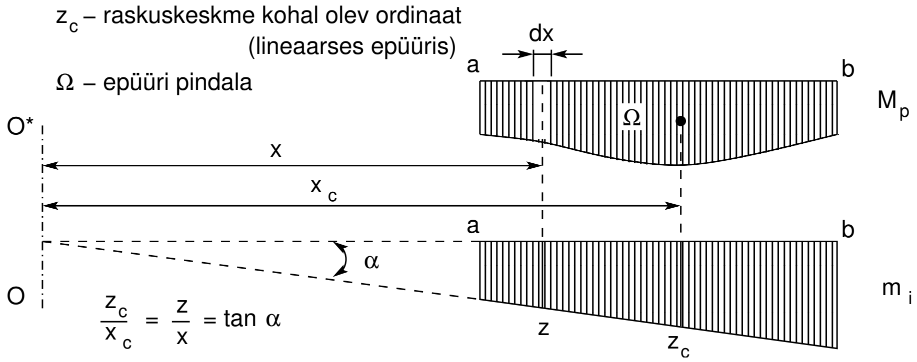
Simpsoni *3/8* valemit kasutades jagame *pideva funktsiooni* $f(x)$ integreerimisel lõigu $[a, b]$ pikkusega l kolmeks ($l/3$, $l/3$ ja $l/3$) ja saame

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{l}{8}[f(a) + 3\cdot f(c) + 3\cdot f(d) + f(b)] \tag{7.47}$$

kus $f(a)$ – funktsiooni väärtus lõigu alguses,
$f(c)$ – funktsiooni väärtus $\frac{1}{3}$ lõigul $[a, b]$,
$f(d)$ – funktsiooni väärtus $\frac{2}{3}$ lõigul $[a, b]$,
$f(b)$ – funktsiooni väärtus lõigu lõpus.

7.9.3 Vereštšagini võte

Vereštšagini[5] võte integraali arvutamisel, kui $EI = konst$ ja üks epüüridest on lineaarne. Joonisel 7.8 on ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüür lineaarne ja tema ordinaadi



Joonis 7.8. Vereštšagini võte

m_i saab avaldada $m_i = z = x \cdot tan\alpha$. Siirde valemi integraali teisendame kujule

$$\Delta_{ip} = \int_a^b m_i \frac{M_p}{EI} dx = \frac{tan\alpha}{EI} \int_a^b x \cdot M_p dx \tag{7.48}$$

Epüüri M_p staatiline moment telje OO^* suhtes

$$\Omega \cdot x_c = \int_a^b x \cdot M_p dx \tag{7.49}$$

Siirde valemi integraalis (7.48) asendame $\int_a^b x \cdot M_p dx$ avaldisega (7.49). Jooniselt 7.8 näeme, et $x_c \cdot tan\alpha = z_c$, kus viimane on koormusest põhjustatud paindemomendi epüüri pindala Ω raskuskeskme kohal olev ordinaat z_c teises *lineaarselt* muutuvas epüüris. Eelnenut arvesse võttes avaldub siirde valemi integraal (7.48) järgmiselt:

$$\Delta_{ip} = \Omega \cdot x_c \frac{1}{EI} \tag{7.50}$$

Seega on paindemomendi epüüride m_i, M_p ordinaatide korrutise integraal lõigul $[a, b]$ võrdne korrutisega, mille üheks teguriks on epüüri pindala ja teiseks teguriks epüüri pindala raskuskeskme kohal olev ordinaat teises lineaarselt muutuvas epüüris.
Korrutis $\Omega \cdot z_c$ on positiivne, kui koormusest põhjustatud paindemomendi epüür M_p ja ordinaat z_c on sama märgiga. Joonisel 7.9 on näidatud lihtsate epüüride pindalad ja nende raskuskeskmete kaugused.
Epüüri raskuskeskme arvutamise asemel on lihtsam kasutada Simpsoni valemit.

[5]A. N. Vereštšagin, Moskva Raudteetranspordi Inseneride Instituudi üliõpilane, esitas selle valemi 1925. aastal.

7.9.4 Siirete arvutamise näited

Näide 7.1 *Vaatleme siirete arvutust 1) koormusest, 2) temperatuuri muutusest, 3) tugede siiretest (näide on võetud raamatust [Rää75] lk 346). Arvutada joonisel 7.10 a) kujutatud murtud varda arvutusskeemi ristlõike* c *vertikaalsiire, toeristlõike* a *horisontaalsiire ja toeristlõike* b *pööre 1) koormusest, 2) temperatuuri muutusest, 3) tugede siiretest. Temperatuur tõuseb sisepoolel* $10\,^{o}C$ *ja välispool vasakul ning üleval* $20\,^{o}C$ *ja paremal* $10\,^{o}C$ *võrra. Varraste ristlõiked on sümmeetrilised, ristlõigete inertsimomendid* $I_1 = I_3 = I$ *ja* $I_2 = 2I$ *ning ristlõigete kõrgused* $h_1 = h_3 = 50\,cm$ *ja* $h_2 = 60\,cm$*. Joonpaisumistegur* $\alpha = 2.1{*}10^{-5}$*. Tugi* a *vajub* $\Delta a_z = 2\,cm$ *ja tugi* b $\Delta b_z = 1\,cm$ *ning nihkub vasakult paremale* $\Delta b_x = 0.5\,cm$ *võrra.*

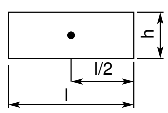
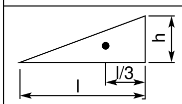
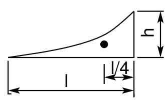
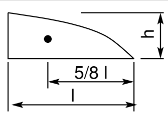
Koormusest põhjustatud paindemomendi epüür on joonisel 7.10 b. Ristlõike c *vertikaalsiirde arvutamiseks rakendatakse sinna ühikjõudu. Ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüür on joonisel 7.10 c. Vertikaalsiirde* w_{cp} *arvutamiseks vaatleme epüüri* M_p *(joonis 7.10 b) ja epüüri* m_c *(joonis 7.10 c). Määrame integreerimisrajad (korrutisel* $m_c \cdot M_p$ *ei tohi vaadeldaval lõigul olla murdepunkte).*

$$w_{cp} = \int_c^d m_c \frac{M_p}{E2I} dx + \int_e^c m_c \frac{M_p}{E2I} dx \tag{7.51}$$

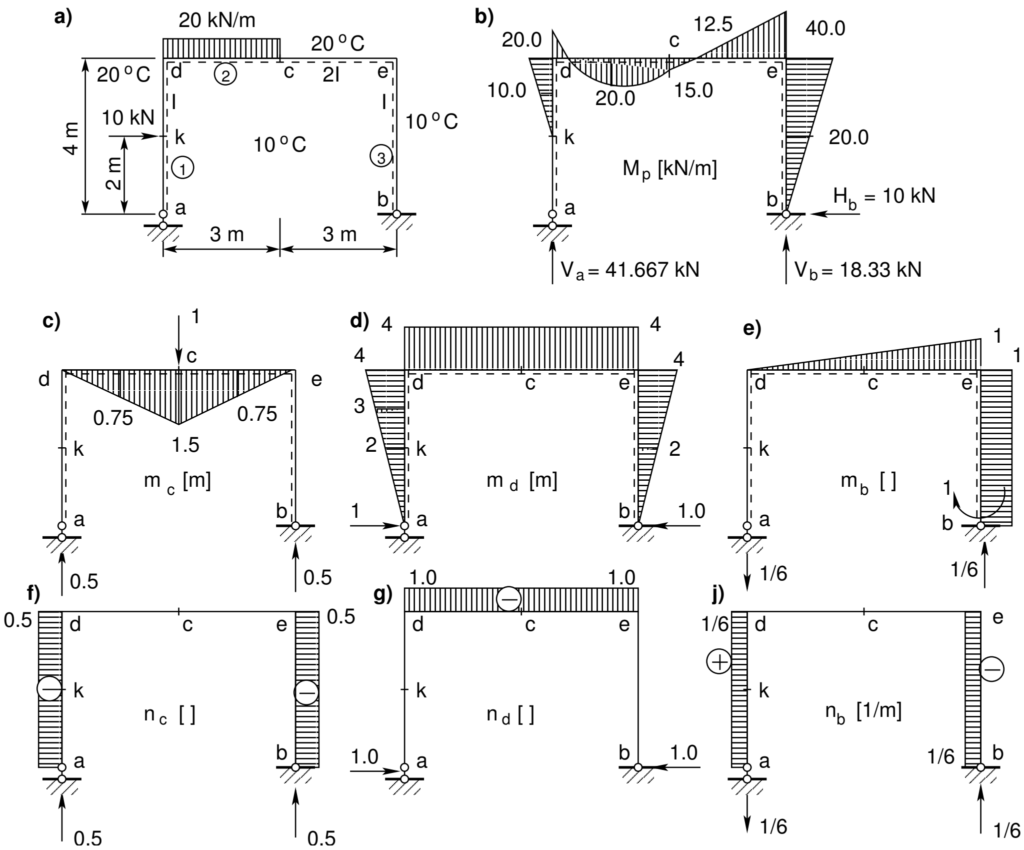
Avaldise (7.51) mõlemad integraalid arvutame Simpsoni valemi (7.41) järgi

$$\begin{aligned} w_{cp} &= \frac{3.0}{6E2I}\left[0 * 20.0 + 4 * 0.75 * 20.0 + 1.5 * 15.0\right] + \\ &+ \frac{3.0}{6E2I}\left[1.5 * 15.0 - 4 * 0.75 * 12.5 + 0 * 40.0\right] = \\ &= 16.875 \frac{1.0}{EI} \approx 16.9 \frac{1.0}{EI}\, cm \end{aligned} \tag{7.52}$$

Ristlõikesse a *rakendatud horisontaalsest ühikjõust põhjustatud paindemomendi epüür on joonisel 7.10 d). Toeristlõike* a *horisontaalsiirde arvutamiseks vaatleme epüüri* M_p *(joonis 7.10 b)*

<table>
<tr><th>Epüüri kuju</th><th>Epüüri pindala</th><th>Raskuskeskme kaugus</th></tr>
<tr><td></td><td>l*h</td><td>1/2 l</td></tr>
<tr><td></td><td>1/2 l*h</td><td>1/3 l</td></tr>
<tr><td></td><td>1/3 l*h</td><td>1/4 l</td></tr>
<tr><td></td><td>2/3 l*h</td><td>5/8 l</td></tr>
</table>

Joonis 7.9. Epüüride pindalad



Joonis 7.10. Siirete arvutus

ja epüüri m_d (joonis 7.10 d. Määrame integreerimisrajad (korrutisel $m_d \cdot M_p$ ei tohi vaadeldaval lõigul olla murdepunkte).

$$u_{ap} = \int_d^k m_d \frac{M_p}{EI} dx + \int_c^d m_d \frac{M_p}{E2I} dx + \int_e^c m_d \frac{M_p}{E2I} dx + \int_b^e m_d \frac{M_p}{E2I} dx \tag{7.53}$$

Avaldise (7.53) esimesed kaks integraali arvutame Simpsoni valemi (7.41) järgi. Viimase kahe integraali arvutamiseks kasutame Vereštšagini võtet (7.50).

$$\begin{aligned} u_{ap} &= \frac{2.0}{6EI}\left[2*0+4*3*10.0+4.0*20.0\right]+ \\ &+\frac{3.0}{6E2I}\left[4*20.0-4*4*20.0-4*15.0\right]+ \\ &+\frac{1.0}{E2I}(12.5*3)*4+\frac{1.0}{EI}\left(\frac{1}{2}40.0*4\right)\left(\frac{2}{3}4\right)=280\frac{1.0}{EI}m \end{aligned} \tag{7.54}$$

Toeristlõikesse b *rakendatud ühikmomendist põhjustatud paindemomendi epüür on joonisel 7.10 e. Määrame integreerimisrajad (korrutisel $m_e \cdot M_p$ ei tohi vaadeldaval lõigul olla murdepunkte).*

$$\varphi_{bp} = \int_d^c m_e \frac{M_p}{EI} dx + \int_c^e m_e \frac{M_p}{E2I} dx + \int_e^d m_e \frac{M_p}{E2I} dx \tag{7.55}$$

Avaldise (7.55) esimesed kaks integraali arvutame Simpsoni valemi (7.41) järgi. Viimase integraali arvutamiseks kasutame Vereštšagini võtet (7.50).

$$\begin{aligned}\varphi_{bp} &= \frac{3.0}{6E2I}\left[0*20.0-4*0.25*20.0-0.5*15.0\right]+\\&+\frac{3.0}{6E2I}\left[-0.5*15.0+4*0.75*12.5+1*40.0\right]+\\&+\frac{1.0}{EI}\left(\frac{1}{2}40.0*4\right)*1=\\&=90.625\frac{1.0}{EI}rad\approx 90.6\frac{1.0}{EI}rad\end{aligned}\tag{7.56}$$

Sümmeetriliste ristlõigetega varraste puhul arvutatakse temperatuuri muutus varda telgjoonel valemiga (7.33)

$$T_{01} = \frac{1}{2}\left(T_{(+)}+T_{(-)}\right)=\frac{1}{2}(10+20)=15\,^oC\tag{7.57}$$

$$T_{02} = T_{01}=15\,^oC\tag{7.58}$$

$$T_{03} = \frac{1}{2}(10+10)=10\,^oC\tag{7.59}$$

Temperatuuri muutused varraste alumiste ja ülemiste kiudude vahel on järgmised (7.36):

$$\Delta T_1 = \Delta T_2=\left(T_{(+)}-T_{(+)}\right)=10-20=-10\,^oC\tag{7.60}$$

$$\Delta T_3 = 10-10=0\,^oC\tag{7.61}$$

Siirded temperatuuri muutusest arvutatakse valemitega (7.37), (7.38)

$$\Delta_{iT}=\int_a^b n_i\alpha_T\cdot T_0dx+\int_a^b m_i\alpha_T\frac{1}{h}\Delta Tdx\tag{7.62}$$

Ristlõike c *vertikaalsiire temperatuuri muutusest*

$$\begin{aligned}w_{ct} &= 1.2*10^{-5}\left[15\left(-\frac{1}{2}*4\right)+10\left(-\frac{1}{2}*4\right)\right]+\\&\quad +1.2*10^{-5}\left[-\frac{10}{0.6}*\frac{1.5*6.0}{2}\right]=\\&= -15*10^{-4}\,m=-1.5\,mm\end{aligned}\tag{7.63}$$

Toeristlõike a *horisontaalsiire temperatuuri muutusest*

$$\begin{aligned}u_{at} &= 1.2*10^{-5}\left[15\,(0*4)+15\,(-1*6)+10\,(0*4)\right]+\\&\quad +1.2*10^{-5}\left[-\frac{10}{0.5}\left(-\frac{4*4.0}{2}\right)+\frac{-10}{0.6}\,(-4*6.0)+\frac{0}{0.5}\,(4*4.0)\right]=\\&= 564*10^{-5}\,m=5.64\,mm\end{aligned}\tag{7.64}$$

Toeristlõike b *pööre temperatuuri muutusest*

$$\begin{aligned}\varphi_{bt} &= 1.2*10^{-5}\left[15\left(\frac{1}{6}*4\right)+15\,(0*6)+10\,(0*4)\right]\\&\quad +1.2*10^{-5}\left[-\frac{10}{0.6}\left(-\frac{1*6.0}{2}\right)+\frac{0}{0.5}\,(-1*4.0)\right]=\\&= 64*10^{-5}\,rad=0.00064\,rad\end{aligned}\tag{7.65}$$

Siirded tugede nihkumisest arvutatakse valemitega (7.30), (7.31)

$$\begin{aligned} \Delta_{ic} &= -C_b^{(N)} \cdot u_b - C_a^{(N)} \cdot u_a - \\ &\quad -C_b^{(Q_z)} \cdot w_b - C_a^{(Q_z)} \cdot w_a - C_b^{(M_y)} \cdot \varphi_b - C_a^{(M_y)} \cdot \varphi_a \end{aligned} \tag{7.66}$$

$$w_{cr} = -\left(-2 * 0.5 - 1 * 0.5\right) = 1.5\,cm \tag{7.67}$$

$$u_{ar} = -\left(-0.5 * 1\right) = 0.5\,cm \tag{7.68}$$

$$\varphi_{cr} = -\left(2 * \frac{1}{600} - 1 * \frac{1}{600}\right) = -\frac{1}{600}\,rad \tag{7.69}$$

Näide 7.2 *Vaatleme eelmist näidet 7.1. Teostame arvutused arvutiprogrammiga Octave (vt lõik C.5 programm C.13 lk 251). Numbrilisel integreerimisel kasutame Simpsoni valemit (7.46 lk 104). Moodustame ühikepüüridest (vt joonist 7.10 c, d ja e) maatriksi* Mx *ja koormusest põhjustatud paindemomendi epüürist maatriksi* Mp

$$\mathbf{Mx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & -2.0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & -2.0 & 0 \\ 0 & -3.0 & 0 \\ 0 & -4.0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & -4.0 & 0.0 \\ 0.75 & -4.0 & -0.25 \\ 1.5 & -4.0 & -0.5 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1.5 & -4.0 & -0.5 \\ 0.75 & -4.0 & -0.75 \\ 0 & -4.0 & -1.0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & -4.0 & -1.0 \\ 0 & -2.0 & -1.0 \\ 0 & 0.0 & -1.0 \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} \\ post\ \ 1\ \ (pool\ \ postist\ \ 1) \\ \\ \dots \\ \\ post\ \ 1\ \ (pool\ \ postist\ \ 1) \\ \\ \dots \\ \\ riiv\ \ (pool\ \ riivist) \\ \\ \dots \\ \\ riiv\ \ (pool\ \ riivist) \\ \\ \dots \\ \\ post\ \ 2 \\ \\ \end{matrix} \quad \mathbf{Mp} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -10 \\ -20 \\ \dots \\ -20 \\ 20 \\ 15 \\ \dots \\ 15 \\ -12.5 \\ -40 \\ \dots \\ -40 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.70}$$

Võtame kasutusele Simpsoni valemi kordajaid sisaldava vektori **smps** *ja varda telgjoonel tem-*

peratuuri kirjeldava vektori $\mathbf{T_o}$*, mille transponeeritud kuju on toodod avaldisega (7.71)*

$$\mathbf{smps} = \frac{1}{6} * \begin{bmatrix} h2/I2 \\ 4*h2/I2 \\ h2/I2 \\ \dots \\ h2/I2 \\ 4*h2/I2 \\ h2/I2 \\ \dots \\ L05/I1 \\ 4*L05/I1 \\ L05/I1 \\ \dots \\ L05/I1 \\ 4*L05/I1 \\ L05/I1 \\ \dots \\ h2/I2 \\ 4*h2/I2 \\ h2/I2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ post\ \ 1\ \ (pool\ \ postist\ \ 1) \\ \\ \dots \\ \\ post\ \ 1\ \ (pool\ \ postist\ \ 1) \\ \\ \dots \\ \\ riiv\ \ (pool\ \ riivist) \\ \\ \dots \\ \\ riiv\ \ (pool\ \ riivist) \\ \\ \dots \\ \\ post\ \ 2 \\ \\ \end{array} \quad ; \quad \mathbf{T_o} = 1.2 * 10^{-5} \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \\ \dots \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ \dots \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ \dots \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ \dots \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \tag{7.71}$$

siin

$$\begin{array}{rclrcl} h & = & 4; & h2 & = & h/2; \\ L & = & 6; & L05 & = & L/2; \\ I1 & = & 2; & I2 & = & 1; \end{array}$$

Simpsoni valemi abil pindalat integreerides ei ole vaja ristlõike inertsimomente $I1$*,* $I2$*. Järgnevalt avaldame simpsoni valemi kordajaid sisaldava vektori* $\mathbf{smps0'}$ *(7.72)*

$$\mathbf{smps0'} = \frac{1}{6} * \Big[\underbrace{h2 \quad 4*h2 \quad h2}_{pool\,posti\ \ 1} \quad \underbrace{h2 \quad 4*h2 \quad h2}_{pool\,posti\ \ 1} \\ \underbrace{L05 \quad 4*L05 \quad L05}_{pool\,riivi} \quad \underbrace{L05 \quad 4*L05 \quad L05}_{pool\,riivi} \\ \underbrace{h \quad 4*h \quad h}_{post\ \ 2} \Big] \tag{7.72}$$

Ühikjõust põhjustatud normaaljõu epüüridest (vt joonis 7.10 f, g ja j) moodustame maatriksi Nx *ja temperatuuri muutusi alumiste ja ülemiste kiudude vahel kirjeldava vektori* Tp *(7.73)*

(paine temperatuurist)

$$\mathbf{Nx} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.0 & 1/6 \\ -0.5 & 0.0 & 1/6 \\ -0.5 & 0.0 & 1/6 \\ \dots & \dots & \dots \\ -0.5 & 0.0 & 1/6 \\ -0.5 & 0.0 & 1/6 \\ -0.5 & 0.0 & 1/6 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1.0 & 0.0 \\ 0 & -1.0 & 0.0 \\ 0 & -1.0 & 0.0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1.0 & 0.0 \\ 0 & -1.0 & 0.0 \\ 0 & -1.0 & 0.0 \\ \dots & \dots & \dots \\ -0.5 & 0.0 & -1/6 \\ -0.5 & 0.0 & -1/6 \\ -0.5 & 0.0 & -1/6 \end{bmatrix} ; \begin{matrix} \\ post\ \ 1\ \ (pool\ \ postist\ \ 1) \\ \\ \dots \\ \\ post\ \ 1\ \ (pool\ \ postist\ \ 1) \\ \\ \dots \\ \\ riiv\ \ (pool\ \ riivist) \\ \\ \dots \\ \\ riiv\ \ (pool\ \ riivist) \\ \\ \dots \\ \\ post\ \ 2 \\ \\ \end{matrix} \quad \mathbf{Tp} = \begin{bmatrix} -10 \setminus Hpost \\ -10 \setminus Hpost \\ -10 \setminus Hpost \\ \dots \\ -10 \setminus Hpost \\ -10 \setminus Hpost \\ -10 \setminus Hpost \\ \dots \\ -10 \setminus Hriiv \\ -10 \setminus Hriiv \\ -10 \setminus Hriiv \\ \dots \\ -10 \setminus Hriiv \\ -10 \setminus Hriiv \\ -10 \setminus Hriiv \\ \dots \\ 0 \setminus Hpost \\ 0 \setminus Hpost \\ 0 \setminus Hpost \end{bmatrix} \tag{7.73}$$

siin
Hpost – posti ristlõike kõrgus,
Hriiv – riivi ristlõike kõrgus.
Vekrorite $\mathbf{Mx}'$ *(7.70) ja* $\mathbf{Mp}$ *(7.70) korrutamiseks kasutame element-element korrutamist (vt paragrahvi B.5 avaldist (B.24) lk 201). Tulemuse korrutame veel vektoriga* **smps** *(7.71)*

$$\mathbf{W} = \mathbf{Mx}'.*[\mathbf{Mp}';\mathbf{Mp}';\mathbf{Mp}'] * \mathbf{smps} = \begin{bmatrix} 16.875 \\ 280.000 \\ 90.625 \end{bmatrix} \tag{7.74}$$

Saadud tulemus langeb kokku avaldistega (7.52), (7.54) ja (7.56).
Siirete arvutamiseks temperatuurist transponeerime ning korrutame **Tp** *ja* **To** *avaldised (7.73) ja (7.71) joonpaisumisteguriga (talpha* $= 2.1{*}10^{-5}$*) läbi.*

$$\mathbf{TpT} = talpha * \mathbf{Tp}' \tag{7.75}$$

$$\mathbf{ToT} = talpha * \mathbf{To}' \tag{7.76}$$

Korrutame epüürid temperatuuri ja temperatuuri erinevustega

$$\mathbf{MxTTp} \;=\; \mathbf{Mx}'.^{*}\,[\mathbf{TpT};\quad \mathbf{TpT};\quad \mathbf{TpT}] \tag{7.77}$$

$$\mathbf{NxTTo} \;=\; \mathbf{Nx}'.^{*}\,[\mathbf{ToT};\quad \mathbf{ToT};\quad \mathbf{ToT}] \tag{7.78}$$

Leiame siirded temperatuurist

$$\mathbf{WT} = \mathbf{MxTTp} * \mathbf{smps0} + \mathbf{NxTTo} * \mathbf{smps0} = \begin{bmatrix} -1.5000e^{-03} \\ 5.6400e^{-03} \\ 6.4000e^{-04} \end{bmatrix} \tag{7.79}$$

Leitud tulemus (7.79) ühtib tulemustega (7.63), (7.64) ja (7.65).

Osa II

Staatiliselt määramatud süsteemid

Peatükk 8

Staatikaga määramatute konstruktsioonide arvutus

8.1 Staatikaga määramatu konstruktsioon

Konstruktsiooni arvutusskeem on staatikaga määramatu, kui kõik sisejõud ja toereaktsioonid ei ole arvutatavad ainult tasakaaluvõrranditest.
Staatikaga määramatu konstruktsiooni arvutamisel esineb kahte liiki tundmatuid.

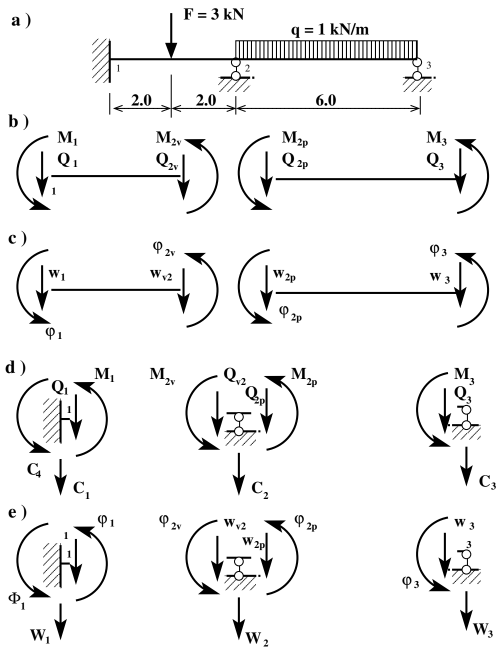
Joonisel 8.1 a on näidatud tala, mille sisejõudude ja toereaktsioonide leidmiseks ei piisa staatika tasakaaluvõrranditest.
Tundmatute arv n

$$n = 8 \times n_{varras} + n_{tugi}; \quad (8 = 4_{jõudu} + 4_{siiret})$$

kus n_{varras} – varraste arv;
n_{tugi} – toereaktsioonide arv.
Tasakaalu- ja siirdevõrrandid

$$\begin{aligned} n_{varda\ \ tasakaalu} &= 2 \times n_{varras} \\ n_{varda\ \ siire} &= 2 \times n_{varras} \\ n_{sõlme\ \ tasakaalu} &= 2 \times n_{sõlm} \\ n_{sõlme\ \ siire} &= 2 \times n_{sõlm} \end{aligned}$$

Toetingimused on võrrandites:
$n_{sõlme\ \ tasakaalu}$ sisaldab võrrandit $M_3 = 0$;
$n_{sõlme\ \ siire}$ sisaldab nelja võrrandit $\varphi_1 = 0$, $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, $w_3 = 0$.
Ülejäänud kaks $n_{sõlme\ \ siire}$ siirdevõrrandit seovad sõlmes *2* siirded ja pöörded.



Joonis 8.1. Tundmatud ja võrrandid

Varraste otstes esinevaid rajajõude ehk kontaktjõude (vahel lihtsuse mõttes nime-

tatakse neid ka sisejõududeks vt [Rää75] lk 369) ja toereaktsioone nimetatakse *staatikalisteks tundmatuteks* (staatikalisteks rajatingimusteks). Varraste otstes esinevaid rajasiirdeid nimetatakse *kinemaatilisteks tundmatuteks* (kinemaatilisteks rajatingimusteks). Nüüdisaegne arvutustehnika võimaldab neid tundmatuid arvutada ühel ajal. Üheks selliseks meetodiks on rajaelementide meetod (REM) [Har87]. Täpse lahendi rajajõududele ja rajasiiretele saab EST meetodiga [Lah97a], [Lah97b], [Lah98a], [Lah98b].
Suurte hõredate mittesümmeetriliste võrrandisüsteemide lahendamiseks on loodud häid meetodeid.
Kui kõiki tundmatuid ei arvutata ühel ajal, koostatakse võrrandisüsteem esialgu leitavatele tundmatutele ehk *lisatundmatutele*. Ülejäänud teised tundmatud arvutatakse koormuse ja lisatundmatute funktsioonidena. Sõltuvalt sellest, missugused tundmatud võetakse lisatundmatuteks, jagatakse arvutusmeetodid järgmiselt:

- *Jõumeetodi* puhul valitakse lisatundmatuteks varraste otstes olevad rajajõud. Lisatundmatute leidmiseks koostatakse võrrandisüsteem geomeetriliste pidevustingimuste alusel.

- *Siirde- ehk deformatsioonimeetodi* puhul valitakse lisatundmatuteks raami sõlmede siirded. *Kinemaatiliste lisatundmatute* leidmiseks koostatakse võrrandisüsteem sõlmede tasakaalutingimuste alusel.

- *Segameetodi* puhul võetakse lisatundmatuteks osalt siirded ja osalt jõud.

- *Tervikmeetodi* (ingl *Integrity Method*) puhul koostatakse võrrandisüsteem kõigi tundmatute kohta (ei tehta vahet lisatundmatute ja ülejäänud tundmatute vahel) korraga.

Staatiliselt määramatute konstruktsioonide üheks iseloomulikumaks iseärasuseks on see, et nende sisejõudude jaotus oleneb varraste ristlõike jäikusest. Tugede siirded ja ka temperatuuri muutus kutsuvad esile sisejõude.

8.2 Staatikaga määramatute konstruktsioonide omadused

Loetelu on võetud raamatust [Rää75].

1. Staatikaga määramatul konstruktsioonil on lõpmata palju lahendeid, mis rahuldavad tasakaalutingimusi, kuid ainult üks neist rahuldab ka deformatsioonide pidevuse tingimusi.

2. Staatikaga määramatul konstruktsioonil on liigsidemeid. *Liigside* on niisugune element, mille eemaldamisel ülejäänud konstruktsiooniosa on ikka geomeetriliselt muutumatu.

3. Tingimata vajalikes sidemetes on sisejõud leitavad tasakaalutingimustega. Tingimata vajaliku sideme eemaldamisel muutub osa konstruktsioonist geomeetriliselt muutuvaks.

4. Temperatuuri muutus, tugede siirded ja konstruktsiooni elementide mõõtmete ebatäpsus võib põhjustada staatikaga määramatus konstruktsioonis sisejõudusid. Tingimata vajalikes sidemetes need mõjud sisejõudusid ei põhjusta.

5. Staatikaga määramatu konstruktsiooni sisejõud olenevad varraste jäikusest.

6. Staatikaga määramatus konstruktsioonis võivad esineda pinged ka ilma koormuseta. Neid pingeid nimetatakse *eelpingeteks*.

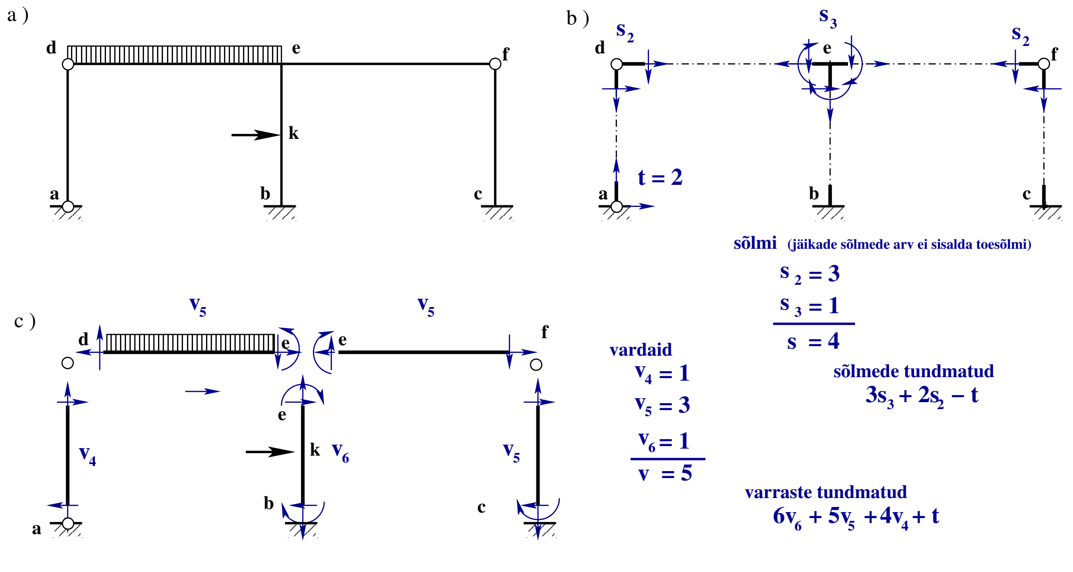
Peatükk 9

Jõumeetod

Konstruktsiooni varraste arv v (vt joonis 9.1) koosneb kolmest osast.

$$v = v_6 + v_5 + v_4 \tag{9.1}$$

kus v_6 on mõlemast otsast jäigalt kinnitatud varraste arv, v_5 ühest otsast jäigalt ja teises otsas liigendiga kinnitatud varraste arv, v_4 mõlemast otsast liigendiga kinnitatud varras. Varraste otstes olevad rajajõud koos toereaktsioonidega on



Joonis 9.1. Tundmatute üldarv

$$6 \cdot v_6 + 5 \cdot v_5 + 4 \cdot v_4 + t \tag{9.2}$$

siin on t liigendtugede toesidemete arv.
Konstruktsiooni sõlmede arv s

$$s = s_3 + s_2 \tag{9.3}$$

kus s_2 on liigendsõlmede arv ja s_3 jäikade sõlmede arv, mis ei sisalda jäikasid toesõlmi. Varraste ja sõlmede kohta saab kirjutada

$$3 \cdot v + 3 \cdot s_3 + 2 \cdot s_2 \tag{9.4}$$

tasakaaluvõrrandit. Lisatundmatute arv n on võrdne staatikaliste tundmatute üldarvu (9.2) ja tasakaaluvõrrandite (9.4) arvu vahega

$$n = 6 \cdot v_6 + 5 \cdot v_5 + 4 \cdot v_4 + t - 3 \cdot v - 3 \cdot s_3 - 2 \cdot s_2 \tag{9.5}$$

mida nimetatakse *staatilise määramatuse astmeks*. Kui asetada avaldisse (9.5) varraste üldarv v (9.1), saab

$$n = 3 \cdot v_6 + 2 \cdot v_5 + v_4 + t - 3 \cdot s_3 - 2 \cdot s_2 \tag{9.6}$$

Valemis (9.6) tähistab t ainult liigendtugede toesidemete arvu. Ülesannet nimetatakse n-kordselt staatikaga määramatuks.

9.1 Raamid

9.1.1 Staatikalise määramatuse aste

Avaldis (9.6) kehtib kõigi varrastest moodustatud konstruktsioonide kohta. Raamide staatikalise määramatuse astet saab arvutada lihtsamate valemitega.
Kui konstruktsioonis on nii liigendita kui ka liigenditega suletud kontuure, siis saab staatikalise määramatuse astet arvutada valemiga (9.7)

$$n = 3 \cdot m_1 - l_1 \tag{9.7}$$

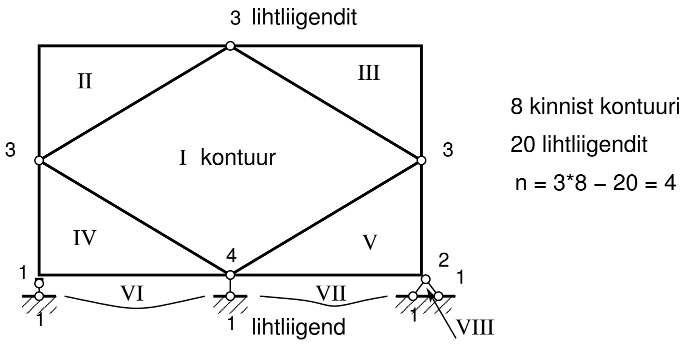
siin on m_1 suletud (nii liigendita kui ka liigenditega) kontuuride arv,
l_1 – lihtliigendite arv.
Näiteks raamil (joonis 9.1 a) on suletud kontuuride arv $m_1 = 2$ ja lihtliigendeid $l_1 = 3$. Seega on staatilise määramatuse aste n

$$n = 3 \cdot m_1 - l_1 = 3 \cdot 3 - 3 = 3 \tag{9.8}$$

kolm. Joonisel 9.2 näidatud raamil on 8 kinnist kontuuri ja 20 lihtliigendit.

$$n = 3 \cdot m_1 - l_1 = 3 \cdot 8 - 20 = 4 \tag{9.9}$$

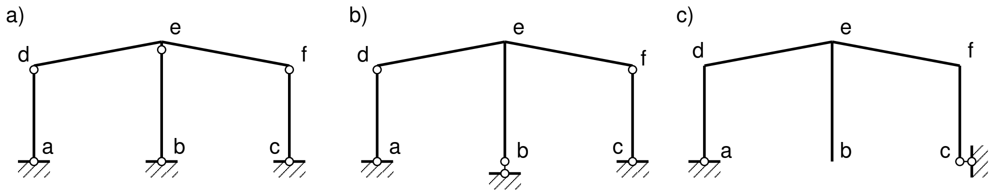
Lihtliigendite arv on ühe võrra väiksem selles liigendis kinnitatud kehade arvust. Näiteks on joonisel 9.2 all vasakus nurgas üks lihtliigend (kinnitatud üks jäik nurk ja toe varras). Samal joonisel üleval keskel olevas liigendis on ühendatud neli keha (varrast) ja lihtliigendite arv on kolm.



Joonis 9.2. Kinnised kontuurid ja lihtliigendid.

9.1.2 Põhiskeem ja lisatundmatud

Staatikaga määramatust raamist saadakse liigsidemete eemaldamisel staatikaga määratav raam. Selliselt saadud uut staatikaga määratavat skeemi nimetatakse *põhiskeemiks*. Jõumeetodi puhul on eemaldatud sidemete asemel rakendatud jõud lisatundmatuteks. Liigsidemeteks võib valida sidemed, mille eemaldamisel skeem ei ole geomeetriliselt muutuv (vt joonis 9.3 a ja b) või hetkmuutuv (joonis 9.3 c).



Joonis 9.3. Geomeetriliselt ja hetkmuutuvad skeemid

9.1.3 Võrrandid lisatundmatute arvutamiseks

Lisatundmatute X_i leidmiseks koostatakse võrrandid staatikaga määramatu skeemi siirete pidevustingimuste alusel.
Arvutusskeemi suvalise punkti siire arvutatakse jõudude sõltumatuse printsiibi alusel.

$$\Delta_k = \delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \ldots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{k0} \tag{9.10}$$

kus Δ_{k0} on ristlõike k siire koormusest, temperatuurist ja tugede vajumisest põhjustatud siire põhiskeemis; δ_{ki} on ristlõike k siire lisatundmatust $X_i = 1$.
Kui arvutusskeem on n korda staatikaga määramatu, siis koostatakse n võrrandit:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\Delta_1 & = & \delta_{11}X_1 & + & \delta_{12}X_2 & + & \ldots & + & \delta_{1n}X_n & + & \Delta_{10} \\
\Delta_2 & = & \delta_{21}X_1 & + & \delta_{22}X_2 & + & \ldots & + & \delta_{2n}X_n & + & \Delta_{20} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\Delta_k & = & \delta_{k1}X_1 & + & \delta_{k2}X_2 & + & \ldots & + & \delta_{kn}X_n & + & \Delta_{k0} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\Delta_n & = & \delta_{n1}X_1 & + & \delta_{n2}X_2 & + & \ldots & + & \delta_{nn}X_n & + & \Delta_{n0}
\end{array} \tag{9.11}$$

ehk

$$\Delta_k = \delta_{ki}X_i + \Delta_{k0} \qquad (k,i = 1,2,\ldots,n) \tag{9.12}$$

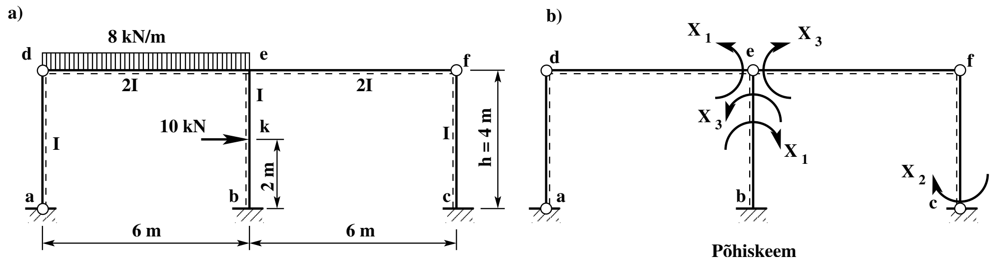
Võrrandisüsteemi (9.12) nimetatakse *jõumeetodi kanooniliseks võrrandisüsteemiks*. Võrrandisüsteemi (9.11),(9.12) kordajad δ_{ij} ja Δ_{i0} leitakse valemitega

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= \sum \int_0^{l_j} \left(\frac{m_i m_j}{EI} + \frac{n_i n_j}{EA} + k_j \frac{q_i q_j}{EA} \right) dx \\
\Delta_{ip} &= \sum \int_0^{l_j} \left(\frac{m_i M_p^0}{EI} + \frac{n_i N_p^0}{EA} + k_j \frac{q_i Q_p^0}{EA} \right) dx \\
\Delta_{it} &= \sum \int_0^{l_j} \alpha_j \left(\frac{\Delta t_j}{h_j} m_i + t_{0j} n_i \right) dx \\
\Delta_{ir} &= -\sum \Delta c_j r'_{ji} \\
\Delta_{i0} &= \Delta_{ip} + \Delta_{it} + \Delta_{ir}
\end{aligned} \tag{9.13}$$

kus α_j – varda j materjali temperatuuri-joonpaisumistegur;
k_j – tegur, mis arvestab nihkepindete ebaühtlast jaotumist varda j ristlõikes, näiteks ristkülikulise ristlõike puhul $k_j = 1.2$.
Võrrandisüsteemi (9.11),(9.12) kordajad δ_{ij} ja Δ_{i0} leidmiseks kasutame numbrilist integreerimist (vt näidet (9.1) ja programmi C.14 lk 255).

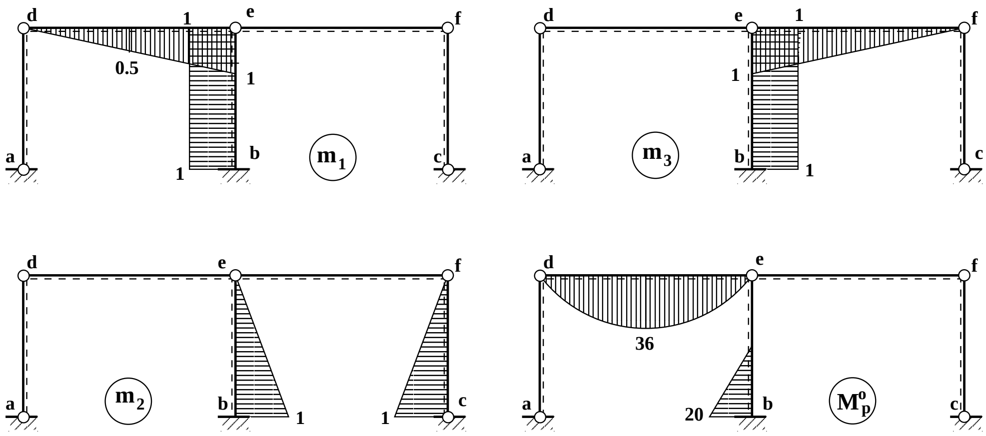
9.1.4 Raami arvutamise näited

Näide 9.1 *Koostada joonisel 9.4 a näidatud raamile paindemomendi epüür, kasutades arvutusprogrammi Octave (programm C.14 lk 255). Raami kõrgus $h = 4\,m$ ja avad $l = 6\,m$. Raami riivile d-e on rakendatud ühtlaselt jaotatud koormus $q = 8\,kN/m$ ja posti b-e keskele koondatud jõud $F = 10\,kN$. Raami postide ristlõike jäikus $I_2 = I$ ja riivide ristlõike jäikus $I_1 = 2I$.*



Joonis 9.4. Raam ja põhiskeemi

Joonisel 9.4 b on näidatud valitud põhiskeem. Selle põhiskeemile vastavad ühikjõududest ja koormusest põhjustatud momendid on näidatud joonisel 9.5.
Jõumeetodi kanoonilise võrrandisüsteemi koostamiseks ja lahendamiseks arvutusprogrammiga Octave (programm C.14 lk 255) esitame ühikjõududest ja koormusest põhjustatud momendid maatriksitena Mx ja M_p (vt avaldised (9.14) ja (9.15)). Nendes sõltub avaldistes elementide arv integreerimispiirkondade arvust (kasutame Simpsoni valemit (7.41), kus on momendi väärtused alguses, keskel ja lõpus). Raami varras, millel on koondatud jõud, on jagatud punktis k *kaheks. Vaatleme põhiskeemi epüüre joonisel 9.5. Iga varda otsas ja lõpus ning varda $d-e$*



Joonis 9.5. Põhiskeemi epüürid

keskel tähistame momendid järgmiselt:
Momentide märgi võtame kokkuleppeliselt. Jooniselt 9.19 võtame positiivse märgiga väärtused, mis asetsevad punktiirjoonega tähistatud poolel ja kanname maatriksisse (9.15) (vt programm C.14).

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} M_{ad}\\ M_{adk}\\ M_{da}\\ \dots\\ M_{de}\\ M_{dek}\\ M_{ed}\\ \dots\\ M_{ek}\\ M_{ekk}\\ M_{ke}\\ \dots\\ M_{kb}\\ M_{kbk}\\ M_{bk}\\ \dots\\ M_{fe}\\ M_{fek}\\ M_{ef}\\ \dots\\ M_{fc}\\ M_{fck}\\ M_{cf} \end{bmatrix};\ \mathbf{Mx}=\begin{bmatrix} m^1_{ad} & m^2_{ad} & m^3_{ad}\\ m^1_{adk} & m^2_{adk} & m^3_{adk}\\ m^1_{da} & m^2_{da} & m^3_{da}\\ \dots & \dots & \dots\\ m^1_{de} & m^2_{de} & m^3_{de}\\ m^1_{dek} & m^2_{dek} & m^3_{dek}\\ m^1_{ed} & m^2_{ed} & m^3_{ed}\\ \dots & \dots & \dots\\ m^1_{ek} & m^2_{ek} & m^3_{ek}\\ m^1_{ekk} & m^2_{ekk} & m^3_{ekk}\\ m^1_{ke} & m^2_{ke} & m^3_{ke}\\ \dots & \dots & \dots\\ m^1_{kb} & m^2_{kb} & m^3_{kb}\\ m^1_{kbk} & m^2_{kbk} & m^3_{kbk}\\ m^1_{bk} & m^2_{bk} & m^3_{bk}\\ \dots & \dots & \dots\\ m^1_{ef} & m^2_{ef} & m^3_{ef}\\ m^1_{efk} & m^2_{efk} & m^3_{efk}\\ m^1_{fe} & m^2_{fe} & m^3_{fe}\\ \dots & \dots & \dots\\ m^1_{fc} & m^2_{cfc} & m^3_{fc}\\ m^1_{fck} & m^2_{fck} & m^3_{fck}\\ m^1_{cf} & m^2_{cf} & m^3_{cf} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \textit{post}\ \ 1\\ \\ \dots\\ \\ \textit{riiv}\ \ 1\\ \\ \dots\\ \\ \textit{pool postist}\ \ 2\\ \\ \dots\quad ;\\ \\ \textit{pool postist}\ \ 2\\ \\ \dots\\ \\ \textit{riiv}\ \ 2\\ \\ \dots\\ \\ \textit{post}\ \ 3\\ \\ \end{array}\ \mathbf{Mp}=\begin{bmatrix} M^o_{ad}\\ M^o_{adk}\\ M^o_{da}\\ \dots\\ M^o_{ed}\\ M^o_{edk}\\ M^o_{de}\\ \dots\\ M^o_{ek}\\ M^o_{ekk}\\ M^o_{ke}\\ \dots\\ M^o_{kb}\\ M^o_{kbk}\\ M^o_{bk}\\ \dots\\ M^o_{ef}\\ M^o_{efk}\\ M^o_{fe}\\ \dots\\ M^o_{fc}\\ M^o_{fck}\\ M^o_{cf} \end{bmatrix} \qquad (9.14)$$

Raami varras, millel on koondatud jõud, on jagatud kaheks. Nii tuleb kokku 6 integreerimispiirkonda.

Igas piirkonnas on kirjeldatud 3 ordinaati (alguses, keskel, lõpus). Kokku 3x6=18 väärtust igalt epüürilt (ühikepüüridelt => Mx ja Mp0 epüüürilt => Mp). Paremaks jälgimiseks on maatriksites (9.15) integreerimispiirkonnad eraldatud punktiiriga.

$$\mathbf{Mx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0.0 & -1 \\ 1 & -0.25 & -1 \\ 1 & -0.5 & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & -0.5 & -1 \\ 1 & -0.75 & -1 \\ 1 & -1.0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{array}{c} \\ \mathit{post}\ 1 \\ \\ \dots \\ \\ \mathit{riiv}\ 1 \\ \\ \dots \\ \\ \mathit{pool}\ \mathit{postist}\ 2 \\ \\ \dots \\ \\ \mathit{pool}\ \mathit{postist}\ 2 \\ \\ \dots \\ \\ \mathit{riiv}\ 2 \\ \\ \dots \\ \\ \mathit{post}\ 3 \\ \\ \end{array} \quad \mathbf{Mp} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 36 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 10 \\ 20 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \mathit{post}\ 1 \\ \\ \dots \\ \\ \mathit{riiv}\ 1 \\ \\ \dots \\ \\ \mathit{pool}\ \mathit{postist}\ 2 \\ \\ \dots \\ \\ \mathit{pool}\ \mathit{postist}\ 2 \\ \\ \dots \\ \\ \mathit{riiv}\ 2 \\ \\ \dots \\ \\ \mathit{post}\ 3 \\ \\ \end{array} \tag{9.15}$$

Ühikepüüride korrutamiseks kasutame element-element korrutamist (vt paragrahvi B.5 avaldist (B.24) lk 201). Integreerime numbriliselt Simpsoni valemi (7.41) järgi. Selleks korrutame element-element korrutamisega saadud tulemuse skalaarselt (vt avaldist B.14 lk 199) *vektoriga (9.16).*

$$\mathbf{smps^T} = \frac{1}{6} * \begin{bmatrix} h/I2 \\ 4*h/I2 \\ h/I2 \\ \dots \\ L/I1 \\ 4*L/I1 \\ L/I1 \\ \dots \\ h2/I2 \\ 4*h2/I2 \\ h2/I2 \\ \dots \\ h2/I2 \\ 4*h2/I2 \\ h2/I2 \\ \dots \\ L/I1 \\ 4*L/I1 \\ L/I1 \\ \dots \\ h2/I2 \\ 4*h2/I2 \\ h2/I2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ post\ \ 1 \\ \\ \dots \\ \\ riiv\ \ 1 \\ \\ \dots \\ \\ pool\ \ postist\ \ 2 \\ \\ \dots \\ \\ pool\ \ postist\ \ 2 \\ \\ \dots \\ \\ riiv\ \ 2 \\ \\ \dots \\ \\ post\ \ 3 \\ \\ \end{matrix} \tag{9.16}$$

siin

$$\begin{array}{rcl rcl} h & = & 4; & h2 & = & h/2; \\ L & = & 6; & L05 & = & L/2; \\ I1 & = & 2; & I2 & = & 1; \end{array}$$

Jõumeetodi kanoonilise võrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} \delta_{11}x_1 & \delta_{12}x_2 & \delta_{13}x_3 \\ \delta_{21}x_1 & \delta_{22}x_2 & \delta_{23}x_3 \\ \delta_{31}x_1 & \delta_{32}x_2 & \delta_{33}x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta_{1p} \\ -\Delta_{2p} \\ -\Delta_{3p} \end{bmatrix} \tag{9.17}$$

ehk

$$\delta_{ij}x_i = -\Delta_{ip} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{9.18}$$

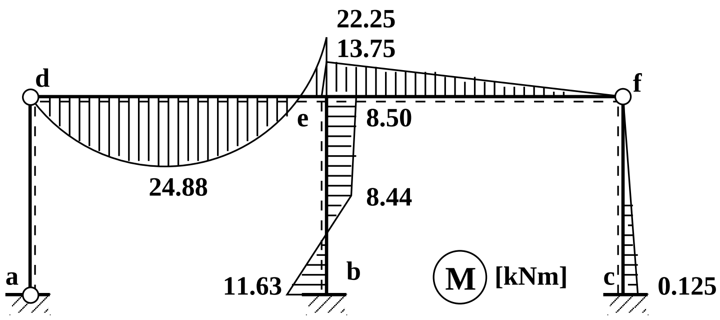
koostab ja lahendab arvutiprogramm Octave ise. Saadud lahendit x_i (i=1,2,3) kasutame paindemomentide arvutamiseks.
Paindemomendid arvutatakse ühikepüüride m_1, m_2, m_3 (joonis 9.5) korrutamisega vastavate x_i-dega

$$M_p = m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3 + M_p^0 \tag{9.19}$$

Võrrandi (9.19) kirjutame maatrikskujule

$$\mathbf{M} = \mathbf{Mx} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{Mp} \tag{9.20}$$

Saadud tulemuste põhjal koostame (programm C.14) epüüri (joonis 9.6).



Joonis 9.6. Paindemomendi epüür *Octave*'ga

Peatükk 10

Jätkuvtalad

Jätkuvtalaks nimetatakse liigenditeta mitmesildelist tala.
Tasapinnalise geomeetriliselt muutumatu kujundi kinnitamiseks on vaja kolme toesidet. Jätkuvtalal on toesidemeid rohkem kui kolm, seepärast on ta staatikaga määramatu. *Staatilise määramatuse aste* leitakse valemiga (10.1)

$$n = t - 3 \tag{10.1}$$

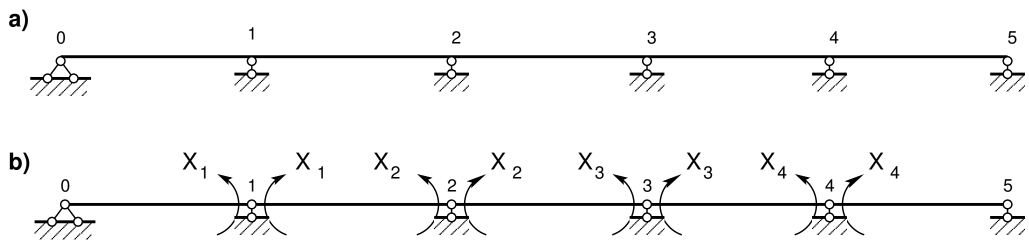
kus t on toesidemete arv

10.1 Põhiskeem ja lisatundmatud

Põhiskeem ja lisatundmatud tuleb valida nii, et kanoonilise võrrandisüsteemi (10.2) kordajaid oleks lihtne arvutada.

$$\delta_{ij} X_j + \Delta_{ip} = 0, \qquad (i, j = 1, 2, 3, ..., n) \tag{10.2}$$

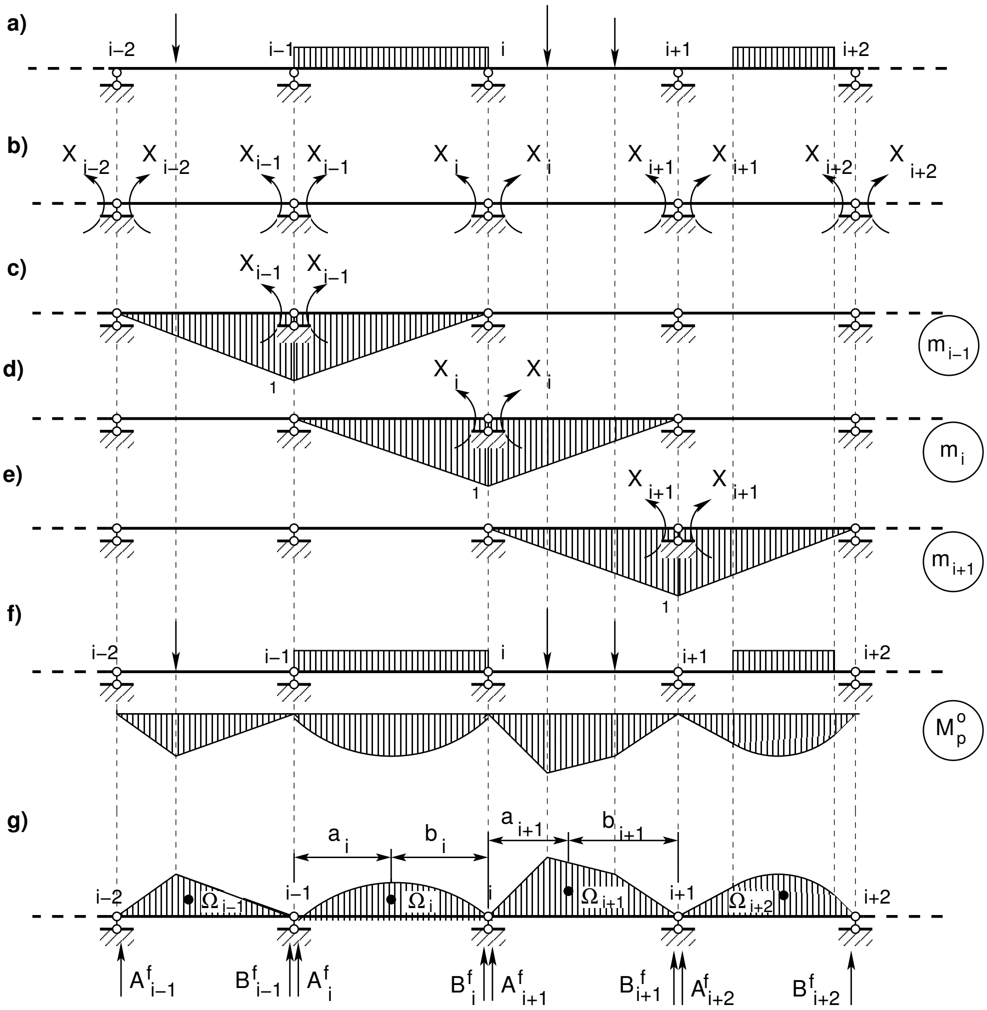
Joonisel 10.1 on lisatundmatuteks valitud toemomendid.



Joonis 10.1. Jätkuvtala põhiskeem

10.2 Kanoonilised võrrandid

Valime jätkuvtala (joonis 10.2 a) põhiskeemi nii, et tundmatuteks on toemomendid X_i (joonis 10.2 b). Võrrandisüsteemi (10.2) kordajad leiame avaldisega



Joonis 10.2. Jätkuvtala ühikepüürid

$$\delta_{i\,j} = \sum_{i=1}^{n} \int_0^l \frac{m_i m_j}{EI} ds \tag{10.3}$$

siin on n varraste arv ja EI ristlõike jäikus.

$$\Delta_{i\,p} = \sum_{i=1}^{n} \int_0^l \frac{m_i M_p^o}{EI} ds \tag{10.4}$$

Ühikepüüride (joonis 10.2 c, d,e) korrutamisel ja integreerimisel saame järgmised nullist erinevad kordajad $\delta_{i\,j}$

$$EI_o \delta_{i\,i-1} = \frac{1 \cdot 1 \cdot l_i I_o}{6 I_i} \tag{10.5}$$

$$EI_o \delta_{i\,i} = \frac{1 \cdot 1 \cdot l_i I_o}{3 I_i} + \frac{1 \cdot 1 \cdot l_{i+1}}{3 I_{i+1}} \tag{10.6}$$

$$EI_o\delta_{i\,i+1} = \frac{1\cdot 1\cdot l_{i+1}I_o}{6I_{i+1}} \tag{10.7}$$

Koormusliikme $\Delta_{i\,p}$ integreerimisel kasutame Vereštšagini võtet 7.9.3 lk 105.

$$EI_o\Delta_{i\,p} = \Omega_i\frac{1\cdot a_iI_o}{l_iI_i} + \Omega_{i+1}\frac{1\cdot b_{i+1}I_o}{l_{i+1}I_{i+1}} \tag{10.8}$$

Toe i kohta koostatud pidevusvõrrand on

$$\ldots + \delta_{i\,i-1}X_{i-1} + \delta_{i\,i}X_i + \delta_{i\,i+1}X_{i+1} + \ldots + \Delta_{i\,p} = 0 \tag{10.9}$$

Avaldistes (10.5), (10.6), (10.7) ja (10.8) võtame kasutusele järgmised tähistused

$$l'_i = l_i\frac{I_0}{I_i} \tag{10.10}$$

$$B^f_i = \Omega_i\frac{a_i}{l_i} \tag{10.11}$$

$$A^f_{i+1} = \Omega_{i+1}\frac{b_{i+1}}{l_{i+1}} \tag{10.12}$$

ning asetame võrrandisse (10.9). Saame kolme momendi võrrandi (10.13)

$$l'_iX_{i-1} + 2\left(l'_i + l'_{i+1}\right)X_i + l'_{i+1}X_{i+1} = -6B^f_i\frac{I_0}{I_i} - 6A^f_{i+1}\frac{I_0}{I_{i+1}} \tag{10.13}$$

kus $l'_i = l_i\frac{I_0}{I_i}$, ning A^f_{i+1}, B^f_i on fiktiivsed koormused. Fiktiivsed koormused A^f_i, B^f_i on toodud tabelis 10.1 [Rää75]. Ühtlaselt jaotatud koormuse q, ühtlase ristlõike jäikuse ($I_i = I_0$) puhul on avaldis (10.14) ning koondatud jõu F_k puhul avaldised (10.15) ja (10.16).

$$6A^f_i = 6B^f_i = \frac{ql_i^3}{4} \tag{10.14}$$

$$6A^f_i = F_kl_i^2\cdot\xi_k\cdot\xi'_k\left(1+\xi'_k\right) \tag{10.15}$$

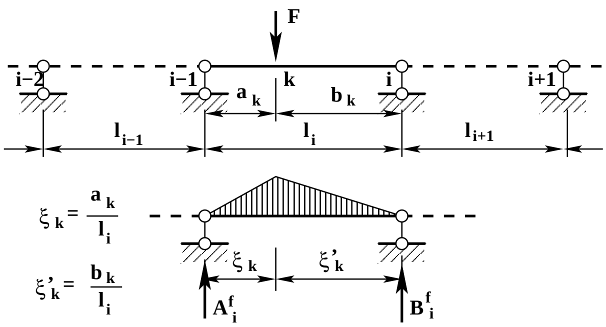
$$6B^f_i = F_kl_i^2\cdot\xi_k\cdot\xi'_k\left(1+\xi k\right) \tag{10.16}$$

Siin $\xi_k = \frac{a_k}{l_i}$ ja $\xi'_k = \frac{b_k}{l_i}$ (vt joonis 10.3).

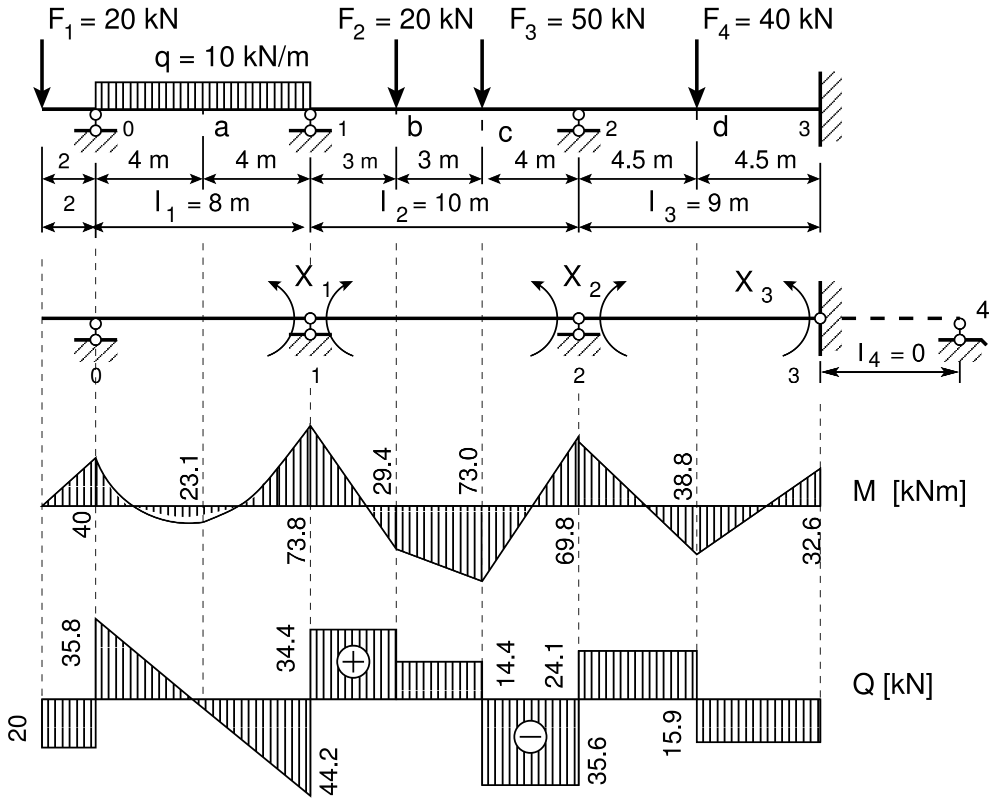
10.3 Kolme momendi võrrandiga arvutamise näited

Näide 10.1 *Arvutada joonisel 10.4 a) esitatud jätkuvtala toemomendid kolme momendi võrrandiga ning kujutada paindemomendi ja põikjõu epüürid. Andmed: $l_1 = 8\,m$, $l_2 = 10\,m$, $l_3 = 9\,m$; $F_1 = 20\,kN$, $F_2 = 20\,kN$, $F_3 = 50\,kN$, $F_4 = 40\,kN$, $q = 10\,kN/m$; $EI = konst$. Staatikaga määramatuse aste $n = 3$. Lisatundmatuteks on toemomendid X_1, X_2 ja X_3 (joonis 10.4 b). Näide on võetud raamatust [ERL85].*

Kolme momendi võrrandi (10.13) vabaliikmed koondatud jõu puhul leiame avaldistega (10.15) ja (10.16).



Joonis 10.3. Jätkuvtala tähised



Joonis 10.4. Jätkuvtala. Kolme momendi võrrand

Ühtlasest koormusest põhjustatud vabaliikmed leiame avaldisega (10.14). Tugede 1, 2 ja 3 kohta koostatud kolme momendi võrrandid on järgmised:

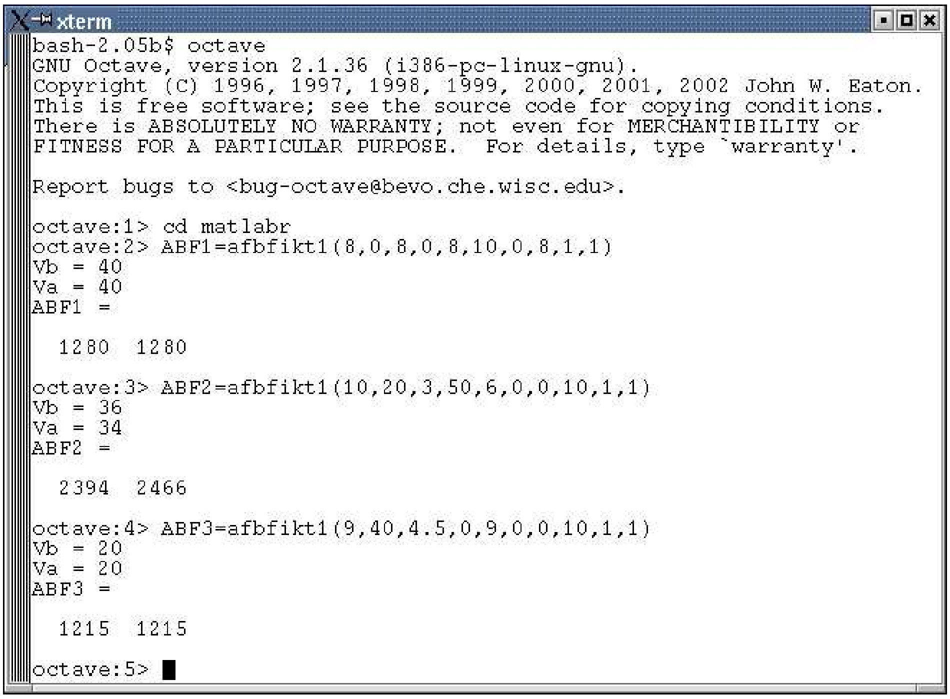
$$
\begin{array}{lclclcl}
l_1 \cdot X_o & + & 2\,(l_1 + l_2) \cdot X_1 & + & l_2 \cdot X_2 & = & -6B_1^f - 6A_2^f \\
l_2 \cdot X_1 & + & 2\,(l_2 + l_3) \cdot X_2 & + & l_3 \cdot X_3 & = & -6B_2^f - 6A_3^f \\
 & + & l_3 \cdot X_2 & + & 2l_3 \cdot X_3 & = & -6B_3^f
\end{array}
\tag{10.17}
$$

kus toemoment X_o ja koormusliikmed $6A_i^f$, $6B_i^f$ on

$$X_o = -F_1 \cdot 2 = -20{*}2 = -40\,kNm$$

$$
\begin{aligned}
6B_1^f &= \frac{ql_1^3}{4} = \frac{10{*}8^3}{4} = 1280\,kNm^2 \\
6A_2^f &= F_2 l_2^2 {\cdot} \xi_2 {\cdot} \xi_2' \left(1+\xi_2'\right) + F_3 l_2^2 {\cdot} \xi_3 {\cdot} \xi_3' \left(1+\xi_3'\right) = \\
&= 20 * 10^2 * 0.3 * 0.7 * (1+0.7) + 50 * 10^2 * 0.6 * 0.4 * (1+0.4) = \\
&= 2394\,kNm^2 \\
6B_2^f &= F_2 l_2^2 {\cdot} \xi_2 {\cdot} \xi_2' \left(1+\xi_2\right) + F_3 l_2^2 {\cdot} \xi_3 {\cdot} \xi_3' \left(1+\xi_3\right) = \\
&= 20 * 10^2 * 0.3 * 0.7 * (1+0.3) + 50 * 10^2 * 0.6 * 0.4 * (1+0.6) = \\
&= 2466\,kNm^2 \\
6A_3^f &= 6B_3^f = 40 * 9^2 * 0.5 * 0.5 * (1+0.5) = 1215\,kNm^2
\end{aligned}
\tag{10.18}
$$

Vabaliikmete arvutamiseks võib kasutada Octave'i funktsiooni C.15 lk 258. Funktsiooni afbfikt1.m kasutamist jälgi joonisel 10.5.



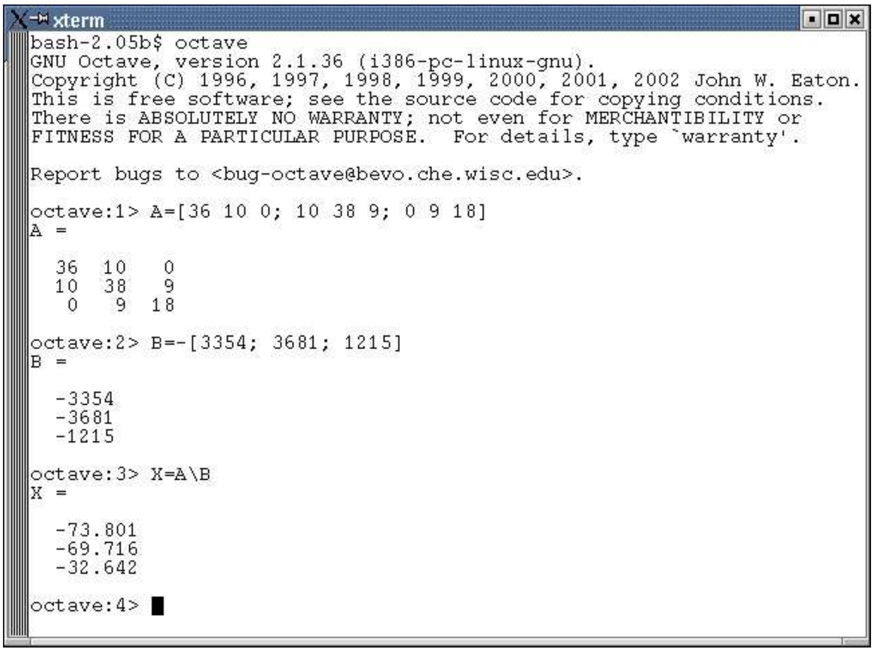
Joonis 10.5. Fiktiivsete koormuste leidmine

Pärast toemomendi X_o ja vabaliikmete $6A_i^f$, $6B_i^f$ arvväärtuste (10.18) asetamist võrrandisse (10.13) saame järgmise võrrandisüsteemi:

$$
\begin{bmatrix} 36 & 10 & 0 \\ 10 & 38 & 9 \\ 0 & 9 & 18 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}
= -
\begin{bmatrix} 3354 \\ 3681 \\ 1215 \end{bmatrix}
\tag{10.19}
$$

ehk

$$
\mathbf{A} * \mathbf{X} = \mathbf{B}
\tag{10.20}
$$



Joonis 10.6. Kolme momendi võrrandisüsteemi lahendamine

kus

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 36 & 10 & 0 \\ 10 & 38 & 9 \\ 0 & 9 & 18 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = -\begin{bmatrix} 3354 \\ 3681 \\ 1215 \end{bmatrix} \tag{10.21}$$

Võrrandisüsteemi lahendame arvutiprogrammiga Octave (vt lõik C.1 lk 205).
Võrrandisüsteemi (10.19) lahend on

$$X_1 = -73.801\,kNm; \qquad X_2 = -69.716\,kNm; \qquad X_3 = -32.642\,kNm \tag{10.22}$$

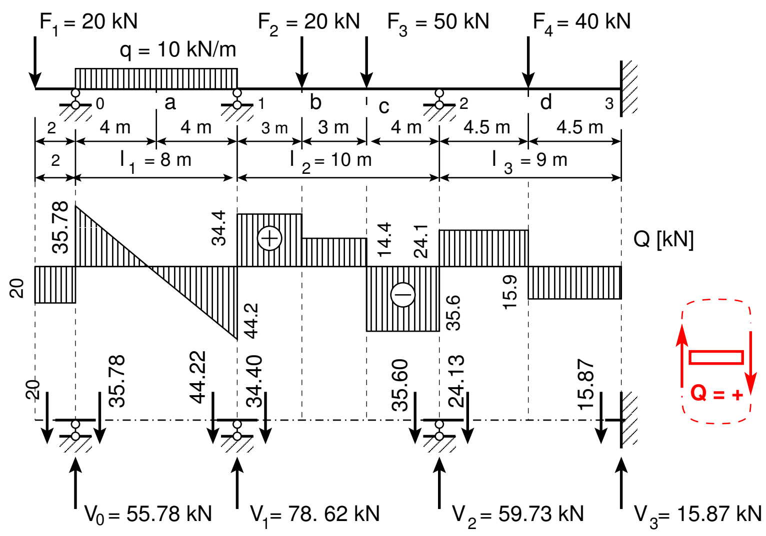
Paindemomendi ja põikjõu epüüri (joonis 10.4) lõigetes a, b, c *ja* d *leiame järgmise avaldistega:*

$$M_k = M_k^o + X_{i-1} * \xi_k' + X_i * \xi_k \tag{10.23}$$

$$Q_k = Q_k^o + \frac{\Delta M}{\Delta x} \tag{10.24}$$

kus ξ_k ja ξ_k' on ristlõike k *mõõduta kaugused vasakust ja paremast toest (vt joonis 10.3 lk 130). Põikjõu Q_k ja $\Delta M/\Delta x$ kohta on selgitus joonisel 1.14 (vt lk 30).*

$$\begin{aligned} M_a &= \frac{10 * 8^2}{8} - 40 * 0.5 - 73.80 * 0.5 = 23.100\,kNm \\ M_b &= (20 * 0.7 + 50 * 0.4) * 0.3 * 10 - 0.7 * 73.80 - 0.3 * 69.72 = \\ &= 29.424\,kNm \\ M_c &= (20 * 0.3 + 50 * 0.6) * 0.4 * 10 - 0.4 * 73.80 - 0.6 * 69.72 = \\ &= 72.648\,kNm \\ M_d &= 20 * 4.5 - 0.5 * 69.72 - 0.5 * 32.64 = 37.82\,kNm \end{aligned} \tag{10.25}$$



Joonis 10.7. Jätkuvtala. Toereaktsioonid

$$
\begin{aligned}
Q_{0\,1} &= 40 + \frac{-73.78+40}{8} = 35.78\,kN \\
Q_{1\,0} &= -40 + \frac{-73.78+40}{8} = 44.225\,kN \\
Q_{1\,2} &= 20*0.7+50*0.4+\frac{-69.78+73.78}{10} = 34.41\,kN \\
Q_{2\,1} &= -20*0.3-50*0.6+\frac{-69.78+73.78}{10} = -35.59\,kN \\
Q_{2\,3} &= 20+\frac{-32.61+69.78}{9} = 24.12\,kN \\
Q_{3\,2} &= -20+\frac{-32.61+69.78}{9} = -15.88\,kN
\end{aligned}
\tag{10.26}
$$

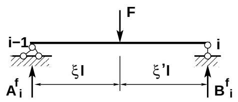
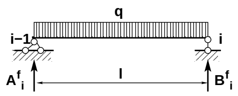
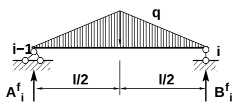
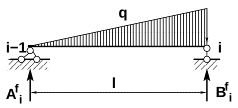
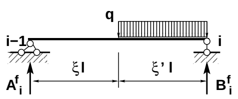
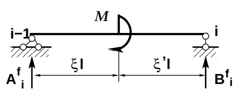
Konsoolis on põikjõud $Q_a^{(v)} = -20\,kN$.
Jätkuvtala vertikaalsed toereaktsioonid V_i *(vt joonis 10.7) leiame põikjõu epüüri abil.*

$$
\begin{aligned}
V_0 &= 20+35.78 = 55.78\,kN \\
V_1 &= 44.25+34.41 = 78.66\,kN \\
V_2 &= 35.59+24.12 = 59.71\,kN \\
V_3 &= 15.88\,kN
\end{aligned}
\tag{10.27}
$$

Kontrollime tasakaalu

$$
\begin{aligned}
\Sigma Y = 0; \qquad & 20+10*8+20+50+40-55.78-78.66-59.71-15.88 = 0 \\
& 210-210.03 = 0
\end{aligned}
\tag{10.28}
$$

Tabel 10.1. Valemid vabaliikmete arvutamiseks

Jrk. nr	*Skeem*	$6\frac{I_0}{I_i}A_i^f$	$6\frac{I_0}{I_i}B_i^f$
1		$Fl_il_i'\xi\xi'\left(1+\xi'\right)$	$Fl_il_i'\xi\xi'\left(1+\xi\right)$
2		$\frac{1}{4}ql_i^2l_i'$	$\frac{1}{4}ql_i^2l_i'$
3		$\frac{5}{32}ql_i^2l_i'$	$\frac{5}{32}ql_i^2l_i'$
4		$\frac{7}{60}ql_i^2l_i'$	$\frac{2}{15}ql_i^2l_i'$
5		$\frac{1}{4}ql_i^2l_i'\xi'^2\left(2-\xi'^2\right)$	$\frac{1}{4}ql_i^2l_i'\xi'^2\left(2-\xi'\right)^2$
6		$-Ml_i'\left(1-3\xi'^2\right)$	$Ml_i'\left(1-3\xi^2\right)$

10.4 Jätkuvtalade arvutus fookussuhtega

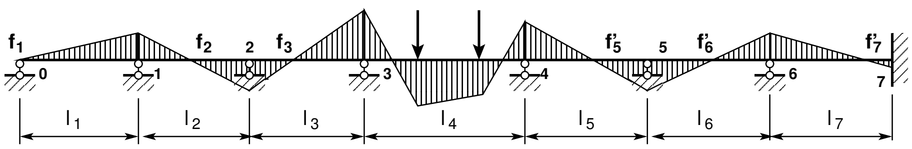
10.4.1 Fookussuhted

Jätkuvtala arvutamisel *fookussuhtega* koormatakse ainult ühte sillet (joonis 10.8). Koormatud sildest kaugemal asetseval toel on toemoment väiksem kui koormatud sildele lähemal asetseval toel. Kuna koormamata silde paindemomendid on erinevate märkidega, siis on igas koormamata sildes paindemomendi epüüris üks nullpunkt. Seda nullpunkti nimetatakse *fookuseks*. Fookus asub koormatud sildest kaugemal asetsevale toele lähemal. Koormatud sildest vasakul asetsevaid nullpunkte (joonisel 10.8 f_1, f_2 ja f_3) nimetatakse *vasakpoolseteks fookusteks*. Koormatud sildest paremal asetsevaid nullpunkte (joonisel 10.8 f_5', f_6' ja f_7') nimetatakse *parempoolseteks fookusteks*.

Fookuste asukohad ei olene koormusest. Koormatud silde paindemomendi epüüri nullpunktid olenevad koormusest ega ole seepärast fookused.

Sildes on kaks fookust: *vasakpoolne fookus* f_i ja *parempoolne fookus* f_i'.

Vasakpoolseks fookussuhteks nimetatakse vasakpoolse fookuse kauguste suhet parem- ja vasakpoolsest toest (vt joonis 10.9 d), kus vasakpoolne kaugus on c_{i-1} ja parempoolne



Joonis 10.8. Jätkuvtala fookused

kaugus $(l_{i-1} - c_{i-1})$).

$$k_{i-1} = \frac{(l_{i-1} - c_{i-1})}{c_{i-1}} \tag{10.29}$$

Parempoolseks fookussuhteks nimetatakse parempoolse fookuse kauguste suhet vasak- ja parempoolsest toest (vt joonist 10.9 d), kus vasakpoolne kaugus on $\left(l_{i+1} - c'_{i+1}\right)$ ja parempoolne kaugus c'_{i+1}).

$$k'_{i+1} = \frac{\left(l_{i+1} - c'_{i+1}\right)}{c'_{i+1}} \tag{10.30}$$

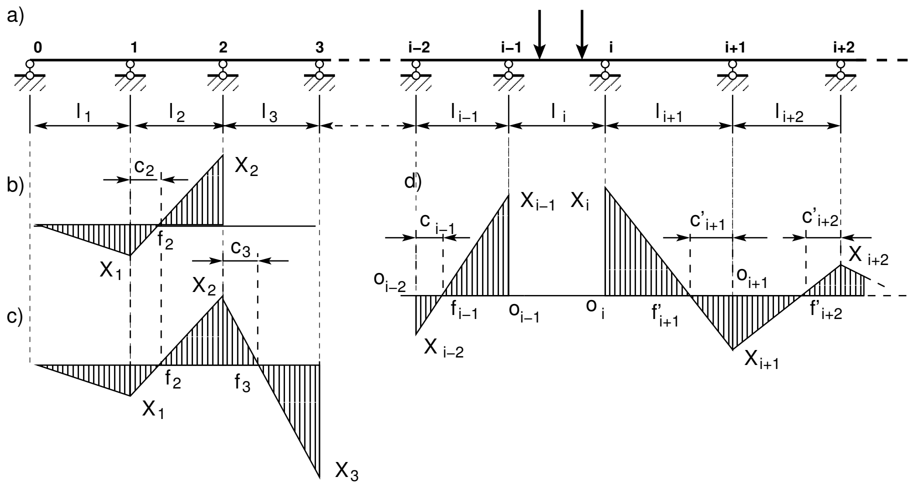
Kuna koormatud sildest kaugemal asetseval toel on toemoment väiksem kui koormatud sildele lähemal asetseval toel, siis vasak- ja parempoolse fookussuhte k_{i-1} ja k'_{i+1} *arvväärtus on suurem kui üks*.

Joonisel 10.9 sarnastest kolmnurkadest $\triangle X_{i-1} o_{i-1} f_{i-1}$ ja $\triangle X_{i-2} o_{i-2} f_{i-1}$ saame

$$\frac{X_{i-1}}{X_{i-2}} = -\frac{(l_{i-1} - c_{i-1})}{c_{i-1}} = -k_{i-1} \tag{10.31}$$

ja kolmnurkadest $\triangle X_{i1} o_i f'_{i-1}$ ja $\triangle X_{i+1} o_{i+1} f'_{i-1}$

$$\frac{X_i}{X_{i+1}} = -\frac{\left(l_{i+1} - c'_{i+1}\right)}{c'_{i+1}} = -k'_{i+1} \tag{10.32}$$



Joonis 10.9. Jätkuvtala fookussuhted

Fookussuhete avaldiste saamiseks vaatleme joonist 10.9 b ja sõlme*1* kohta kirjutame välja kolme momendi võrrandi (10.13), arvestades, et avad on koormamata.

$$l'_1 X_0 + 2\,(l'_1 + l'_2)\,X_1 + l'_2 X_2 = 0 \tag{10.33}$$

siin $X_0 = 0$ ja

$$2\,(l'_1 + l'_2)\,X_1 + l'_2 X_2 = 0 \tag{10.34}$$

ning

$$\frac{X_2}{X_1} = -\frac{2\,(l'_1 + l'_2)}{l'_2} = -k_2 \tag{10.35}$$

Sõlme *2* kohta on kolme momendi võrrand

$$l'_2 X_1 + 2\,(l'_2 + l'_3)\,X_2 + l'_3 X_3 = 0 \tag{10.36}$$

Võrrandist (10.35) avaldame $X_1 = -\frac{X_2}{k_2}$ ja astame võrrandisse (10.36)

$$-\,l'_2 \frac{X_2}{k_2} + 2\,(l'_2 + l'_3)\,X_2 + l'_3 X_3 = 0 \tag{10.37}$$

Siit saame

$$\frac{X_3}{X_2} = -\left[2 + \frac{l'_2}{l'_3}\left(2 - \frac{1}{k_2}\right)\right] = -k_3 \tag{10.38}$$

Sõlme *3* kohta saame

$$l'_3 X_2 + 2\,(l'_3 + l'_4)\,X_3 + l'_4 X_4 = 0 \tag{10.39}$$

Võrrandist (10.38) avaldame $X_2 = -\frac{X_3}{k_3}$ ja astame võrrandisse (10.39)

$$-\,l'_3 \frac{X_3}{k_3} + 2\,(l'_3 + l'_4)\,X_3 + l'_4 X_4 = 0 \tag{10.40}$$

Siit saame

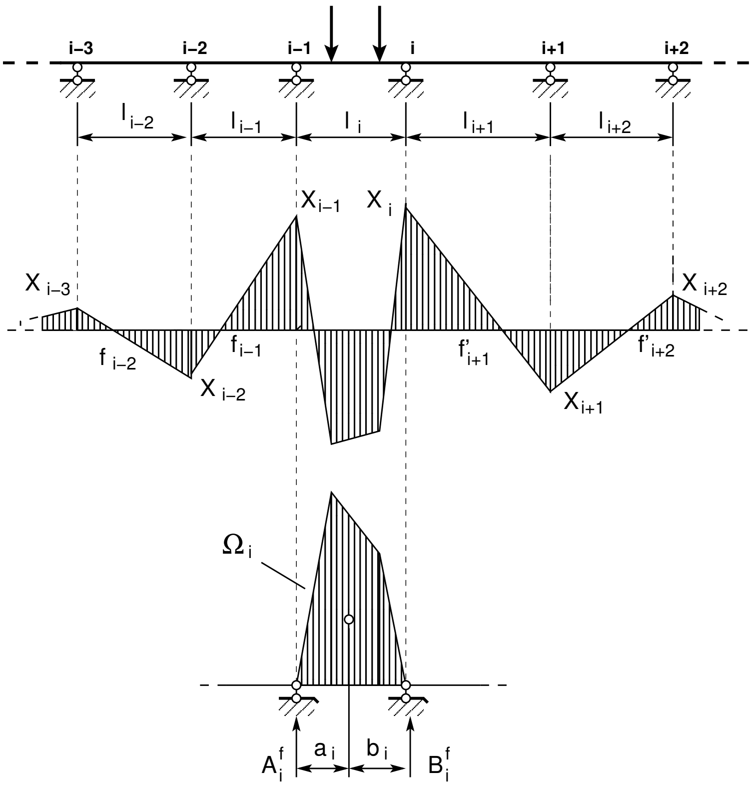
$$\frac{X_4}{X_3} = -\left[2 + \frac{l'_3}{l'_4}\left(2 - \frac{1}{k_3}\right)\right] = -k_4 \tag{10.41}$$

Üldistame saadud avaldised (10.35), (10.38) ja (10.41). Vasakpoolseteks fookussuheteks on avaldis (10.42)

$$k_j = 2 + \frac{l'_{j-1}}{l'_j}\left(2 - \frac{1}{k_{j-1}}\right), \qquad X_{j-1} = -\frac{X_j}{k_j} \tag{10.42}$$

Samamoodi saadakse valem ka parempoolsete fookussuhete arvutamiseks

$$k'_j = 2 + \frac{l'_{j+1}}{l'_j}\left(2 - \frac{1}{k'_{j+1}}\right), \qquad X_j = -\frac{X_{j-1}}{k'_j} \tag{10.43}$$



Joonis 10.10. Jätkuvtala toemomendid

10.4.2 Koormatud silde toemomendid

Joonisel 10.10 esitatud tala tugede *i-1* ja *i* kohta kirjutame kolme momendi võrrandi (10.13)

$$
\begin{aligned}
l'_{i-1}X_{i-2} + 2\left(l'_{i-1} + l'_i\right) X_{i-1} + l'_i X_i &= -6A_i^f \frac{I_0}{I_i} \\
l'_i X_{i-1} + 2\left(l'_i + l'_{i+1}\right) X_i + l'_{i+1} X_{i+1} &= -6B_i^f \frac{I_0}{I_i}
\end{aligned}
\tag{10.44}
$$

Võrranditest (10.44) elimineerime momendid valemite (10.42) ja (10.43) abil momendid X_{i-2} ja X_{i+1}

$$
X_{i-2} = -\frac{X_{i-1}}{k_{i-1}}, \qquad X_{i+1} = -\frac{X_i}{k'_{i+1}}
\tag{10.45}
$$

Arvestades seoseid (10.45), esitame võrrandisüsteemi (10.44) järgmisel kujul:

$$
\begin{bmatrix} 2 + \frac{l'_{i-1}}{l'_i}\left(2 - \frac{1}{k_{i-1}}\right) & 1 \\ 1 & 2 + \frac{l'_{i+1}}{l'_i}\left(2 - \frac{1}{k'_{i+1}}\right) \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} X_{i-1} \\ X_i \end{bmatrix}
= -\begin{bmatrix} 6A_i^f \frac{I_0}{I_i l'_i} \\ 6B_i^f \frac{I_0}{I_i l'_i} \end{bmatrix}
\tag{10.46}
$$

ehk

$$\left[\begin{array}{cc} k_i & 1 \\ 1 & k'_i \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} X_{i-1} \\ X_i \end{array}\right] = -\left[\begin{array}{c} \frac{6A_i^f}{l_i} \\ \frac{6B_i^f}{l_i} \end{array}\right] \tag{10.47}$$

siin

$$\frac{1}{l_i} = \frac{I_0}{I_i l'_i} \tag{10.48}$$

st koormusliikmetes ei ole redutseeritud pikkused.
Võrrandisüsteemi (10.47) lahend ja toemomendid on

$$X_{i-1} = -\frac{6A_i^f k'_i - 6B_i^f}{l_i\left(k_i k'_i - 1\right)} \tag{10.49}$$

$$X_i = -\frac{6B_i^f k_i - 6A_i^f}{l_i\left(k_i k'_i - 1\right)} \tag{10.50}$$

Kui äärmised toed on liigendtoed (s.t $k_i = \infty$, $k'_i = \infty$), siis avaldiste (10.49), (10.50) kasutamisel tekib määramatus $\frac{\infty}{\infty}$ ning see tuleb avada

$$\begin{aligned} k'_n = \infty; \qquad X_n = 0; \qquad X_{n-1} &= -\frac{6A_n^f k'_n - 6B_n^f}{l_n\left(k_n k'_n - 1\right)} * \frac{\frac{1}{k'_n}}{\frac{1}{k'_n}} = \\ &= -\frac{6A_n^f - \frac{6B_n^f}{k'_n}}{l_n\left(k_n - \frac{1}{k'_n}\right)} = -\frac{6A_n^f}{l_n k_n} \end{aligned} \tag{10.51}$$

$$\begin{aligned} k_1 = \infty; \qquad X_0 = 0; \qquad X_1 &= -\frac{6B_1^f k_1 - 6A_1^f}{l_1\left(k_1 k'_1 - 1\right)} * \frac{\frac{1}{k_1}}{\frac{1}{k_1}} = \\ &= -\frac{6B_1^f - \frac{6A_1^f}{k_1}}{l_1\left(k'_1 - \frac{1}{k_1}\right)} = -\frac{6B_1^f}{l_1 k'_1} \end{aligned} \tag{10.52}$$

10.5 Fookussuhetega arvutamise näited

Näide 10.2 *Arvutada joonisel 10.11 c esitatud jätkuvtala toemomendid fookussuhetega ning kujutada paindemomendi ja põikjõu epüürid. Andmed: $l_1 = 8\,m$, $l_2 = 10\,m$, $l_3 = 9\,m$. Tala on koormatud ajutise koormusega sillete kaupa:*

1. *koormusvariant: koormatud on kolmas sille $F_4 = 40\,kN$ (joonis 10.11 a);*
2. *koormusvariant: koormatud on teine sille $F_2 = 20\,kN$ ja $F_3 = 50\,kN$ (joonis 10.11 b);*
3. *koormusvariant: koormatud on konsool $F_1 = 20\,kN$ (joonis 10.11 c);*
4. *koormusvariant: koormatud on esimene sille $q = 10\,kN/m$ (joonis 10.11 d).*

Sillete ristlõikejäikused $EI = konst$. Näide on järg näitele 10.1 lk 129.
Fookussuhted joonisel 10.11 c esitatud tala jaoks arvutame valemitega (10.42) ja (10.43)

$$\begin{aligned} k_1 &= \infty \\ k_2 &= 2 + \frac{l_1}{l_2}\left(2 - \frac{1}{k_1}\right) = 2 + \frac{8}{10}\left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 3.6 \\ k_3 &= 2 + \frac{l_2}{l_3}\left(2 - \frac{1}{k_2}\right) = 2 + \frac{10}{9}\left(2 - \frac{1}{3.6}\right) = 3.9136 \end{aligned} \tag{10.53}$$

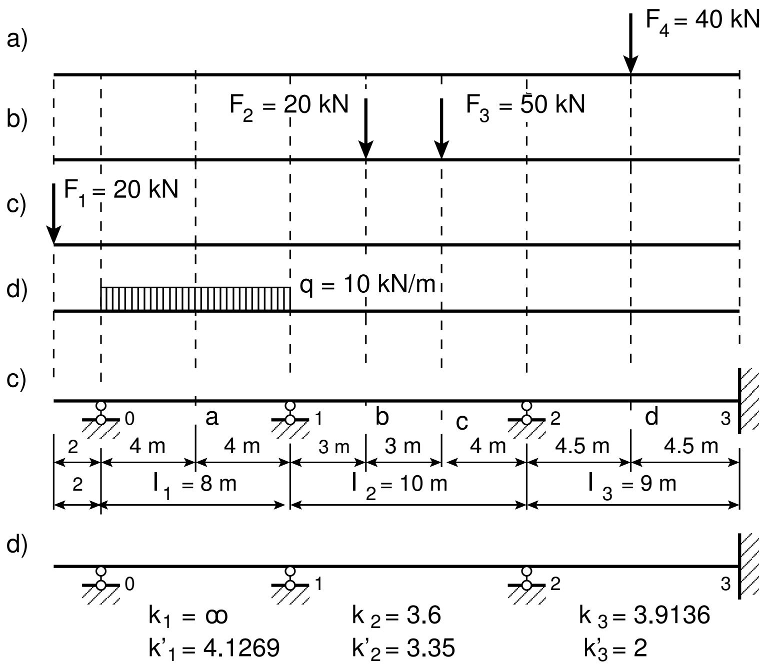
Samamoodit arvutame ka parempoolsed fookussuheted

$$\begin{aligned} k'_3 &= 2 \\ k'_2 &= 2 + \frac{l_3}{l_2}\left(2 - \frac{1}{k'_3}\right) = 2 + \frac{9}{10}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = 3.35 \\ k'_1 &= 2 + \frac{l_2}{l_1}\left(2 - \frac{1}{k'_2}\right) = 2 + \frac{10}{8}\left(2 - \frac{1}{3.35}\right) = 4.1269 \end{aligned} \tag{10.54}$$

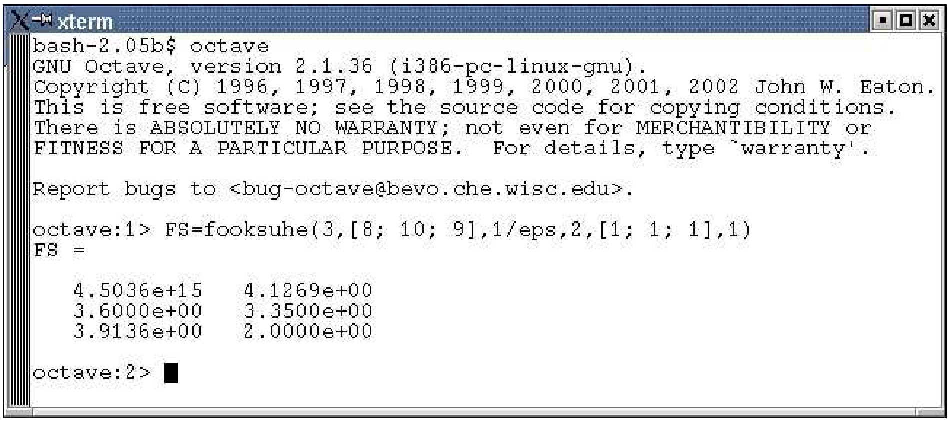
Fookussuheid võib arvutada Octave'i funktsiooni C.16 (vt 260) abil. Arvutamise näide on joonisel 10.12. Kus esimese ava fookussuhe $k_1 = \infty \sim \frac{1}{eps}$. Siin on eps arvutil lõpmatult väike suurus (arvuti null). Tema pöördväärtus on lõpmatult suur arv (arvuti lõpmatus).

Tulemused näitame joonisel 10.11 d.

Fookussuhetega leiame toemomendid eraldi iga silde koormusest. Alustame kolmandast sildest (vt joonis 10.11 a ja 10.14). Kolmanda silde koormamisel tekkinud toemomendid arvutame valemitega (10.49) ja (10.50). Nendes esinevad koormusliikmed $6A_i^f$, $6B_i^f$ on juba leitud näites



Joonis 10.11. Jätkuvtala. Fookussuhted



Joonis 10.12. Fookussuhete arvutamine

10.1 lk 129 (vt avaldis 10.18 lk 131)

$$X_{2\,3} = -\frac{6A_3^f k_3' - 6B_3^f}{l_3\,(k_3 k_3' - 1)} = -\frac{1215 * 2 - 1215}{9 * (3.9136 * 2 - 1)} = -19.774\,kNm \qquad (10.55)$$

$$X_{3\,3} = -\frac{6B_3^f k_3 - 6A_3^f}{l_3\,(k_3 k_3' - 1)} = -\frac{1215 * 3.9136 - 1215}{9 * (3.9136 * 2 - 1)} = -57.613\,kNm \qquad (10.56)$$

Toemomente võib arvutada Octave'i funktsiooni C.17 (vt 261) abil. Arvutamise näide on joonisel 10.13, kus esimese ava fookussuhe $k_1 = \infty \sim \frac{1}{eps}$. *Siin on eps arvutil lõpmatult väike suurus (arvuti null). Tema pöördväärtus on lõpmatult suur arv (arvuti lõpmatus).*

Toemomendi $X_{1\,3}$ *leiame vasakpoolse fookussuhtega (10.42)*

$$X_{1\,3} = -\frac{X_{2\,3}}{k_2} = \frac{19.774}{3.6} = 5.493\,kNm \qquad (10.57)$$

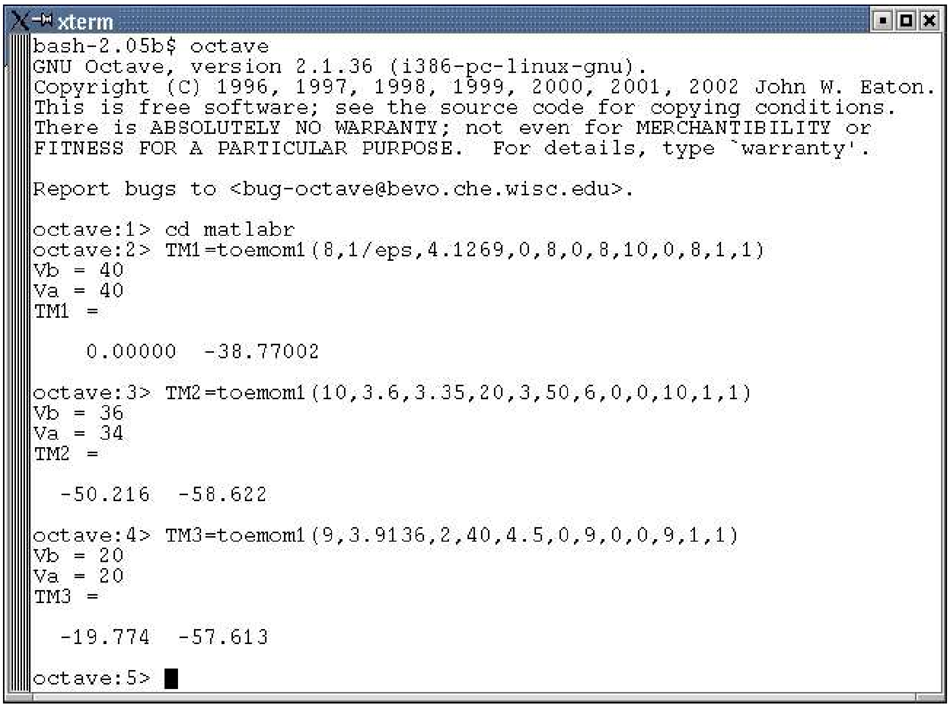
Leitud toemomendid $X_{i\,3}$ *kanname epüürile (joonis 10.14).*
Kolmanda ava keskel oleva paindemomendi epüüri ordinaadi arvutamiseks kasutame valemit (10.23).

$$\begin{aligned} M_d &= M_d^o + X_2 * \xi_d' + X_3 * \xi_d = 20 * 4.5 - 19.774 * 0.5 - 57.613 * 0.5 = \\ &= 51.306\,kNm \end{aligned} \qquad (10.58)$$

Teise silde koormamisel tekkinud toemomendid arvutame valemitega (10.49) ja (10.50). Nendes esinevad koormusliikmed $6A_i^f$, $6B_i^f$ *on juba leitud näites 10.1 lk 129 (vt avaldis 10.18 lk 131)*

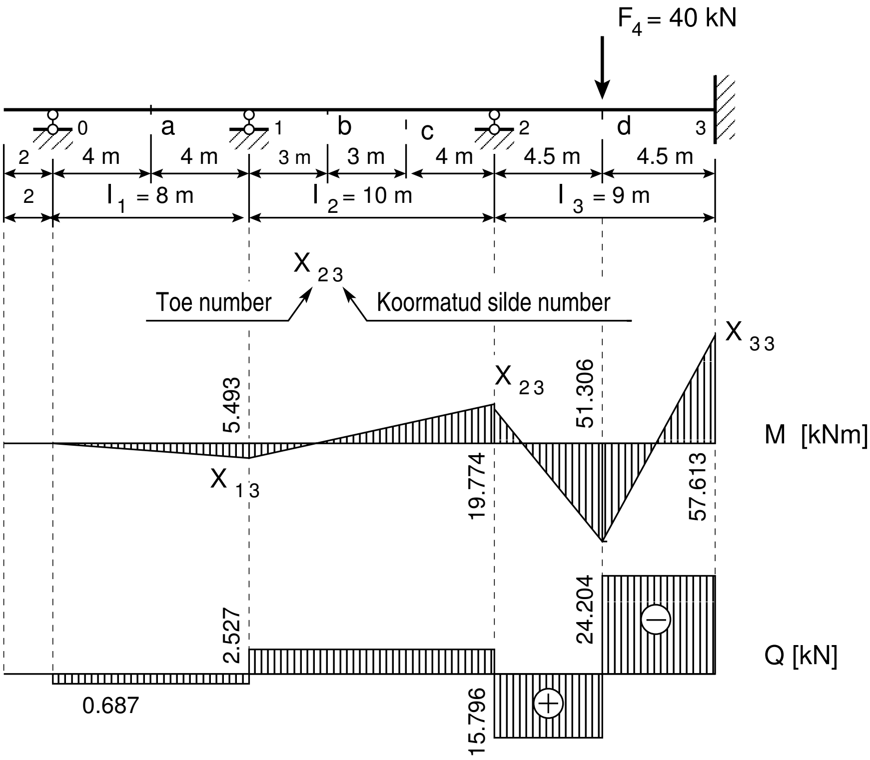
$$X_{1\,2} = -\frac{6A_2^f k_2' - 6B_2^f}{l_2\,(k_2 k_2' - 1)} = -\frac{2394 * 3.35 - 2468}{10 * (3.6 * 3.35 - 1)} = -50.198\,kNm \qquad (10.59)$$

$$X_{2\,2} = -\frac{6B_2^f k_2 - 6A_2^f}{l_2\,(k_2 k_2' - 1)} = -\frac{2468 * 3.6 - 2394}{10 * (3.6 * 3.35 - 1)} = -58.687\,kNm \qquad (10.60)$$

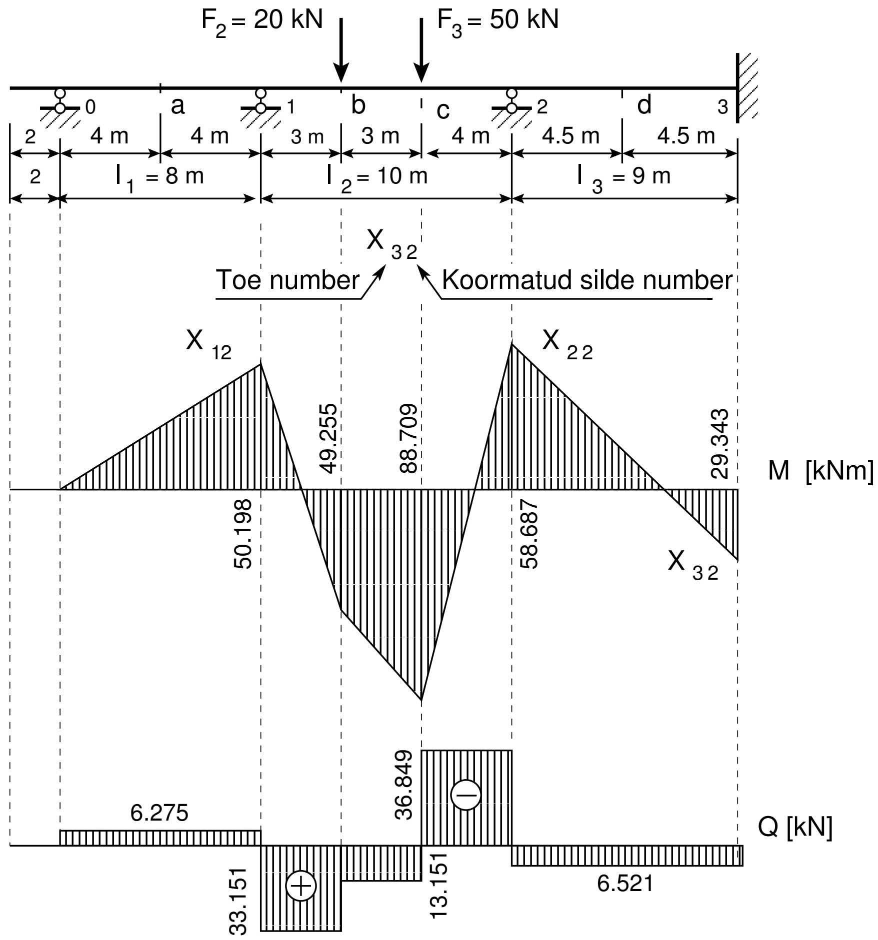


```
bash-2.05b$ octave
GNU Octave, version 2.1.36 (i386-pc-linux-gnu).
Copyright (C) 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002 John W. Eaton.
This is free software; see the source code for copying conditions.
There is ABSOLUTELY NO WARRANTY; not even for MERCHANTIBILITY or
FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE.  For details, type `warranty'.

Report bugs to <bug-octave@bevo.che.wisc.edu>.

octave:1> cd matlabr
octave:2> TM1=toemom1(8,1/eps,4.1269,0,8,0,8,10,0,8,1,1)
Vb = 40
Va = 40
TM1 =

    0.00000  -38.77002

octave:3> TM2=toemom1(10,3.6,3.35,20,3,50,6,0,0,10,1,1)
Vb = 36
Va = 34
TM2 =

  -50.216  -58.622

octave:4> TM3=toemom1(9,3.9136,2,40,4.5,0,9,0,0,9,1,1)
Vb = 20
Va = 20
TM3 =

  -19.774  -57.613

octave:5>
```

Joonis 10.13. Toemomentide arvutamine



Joonis 10.14. Fookussuhted. Koormus kolmandal sildel



Joonis 10.15. Fookussuhted. Koormus teisel sildel

Parempoolse toemomendi $X_{3\,2}$ leiame parempoolse fookussuhtega (10.43)

$$X_{3\,2} = -\frac{X_{2\,2}}{k_3'} = \frac{58.687}{2} = 29.343\,kNm \tag{10.61}$$

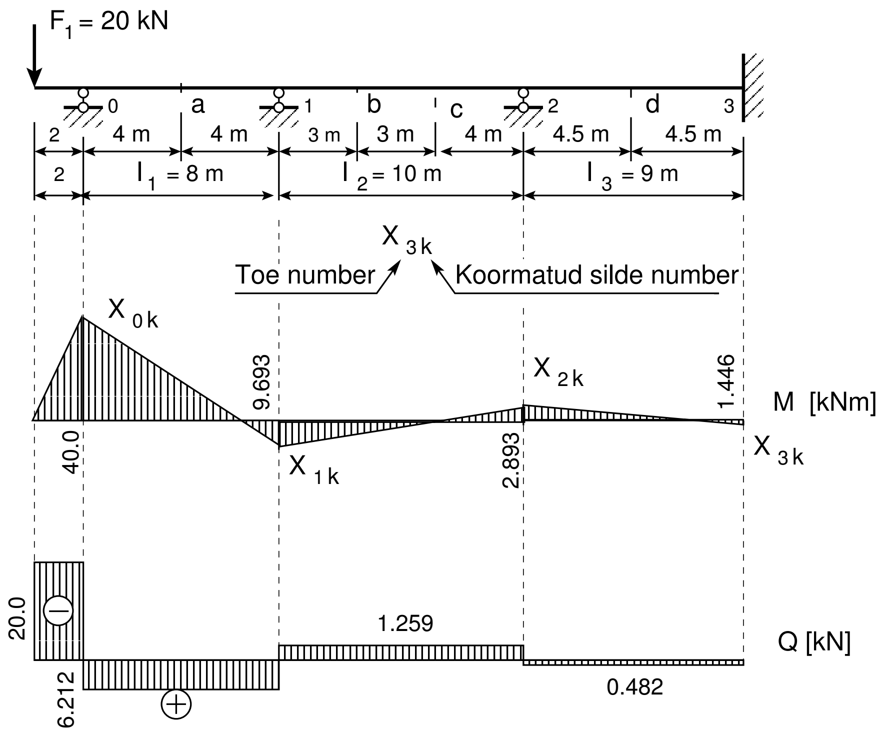
Arvutame teise ava lihttala toereaktsioonid V_1 ja V_2 koormusest F_2 ja F_3 . Kasutame toereaktsioonide mõjujooni (vt avaldist (2.11), siin on toeraktsiooni A_i jaoks $\eta_i = \xi_i'$ ja toeraktsiooni B_i jaoks – $\eta_i = \xi_i$).

$$\begin{aligned} V_1 &= F_2 * \xi_b' + F_3 * \xi_c' = 20 * 0.7 + 50 * 0.4 = 34\,kN \\ V_2 &= F_2 * \xi_b + F_3 * \xi_c = 20 * 0.3 + 50 * 0.6 = 36\,kN \end{aligned} \tag{10.62}$$

Teise ava ristlõigetes b *ja* c *olevate paindemomendi epüüri ordinaatide arvutamiseks kasutame valemit (10.23).*

$$\begin{aligned} M_b &= M_b^o + X_1 * \xi_b' + X_2 * \xi_b = 34 * 0.3 * 10 - 50.198 * 0.7 - 58.687 * 0.3 = \\ &= 49.255\,kNm \\ M_c &= M_s^o + X_1 * \xi_b' + X_2 * \xi_b = 36 * 0.4 * 10 - 50.198 * 0.7 - 58.687 * 0.3 = \\ &= 88.709\,kNm \end{aligned} \tag{10.63}$$

Konsoolil mõjuv koormus tekitab toel 0 momendi $X_{0\,k} = -40\,kNm$ (joonis 10.16). Parempoolsed toemomendid $X_{i\,k}$ leiame parempoolse fookussuhtega (10.43)



Joonis 10.16. Fookussuhted. Koormus konsoolil

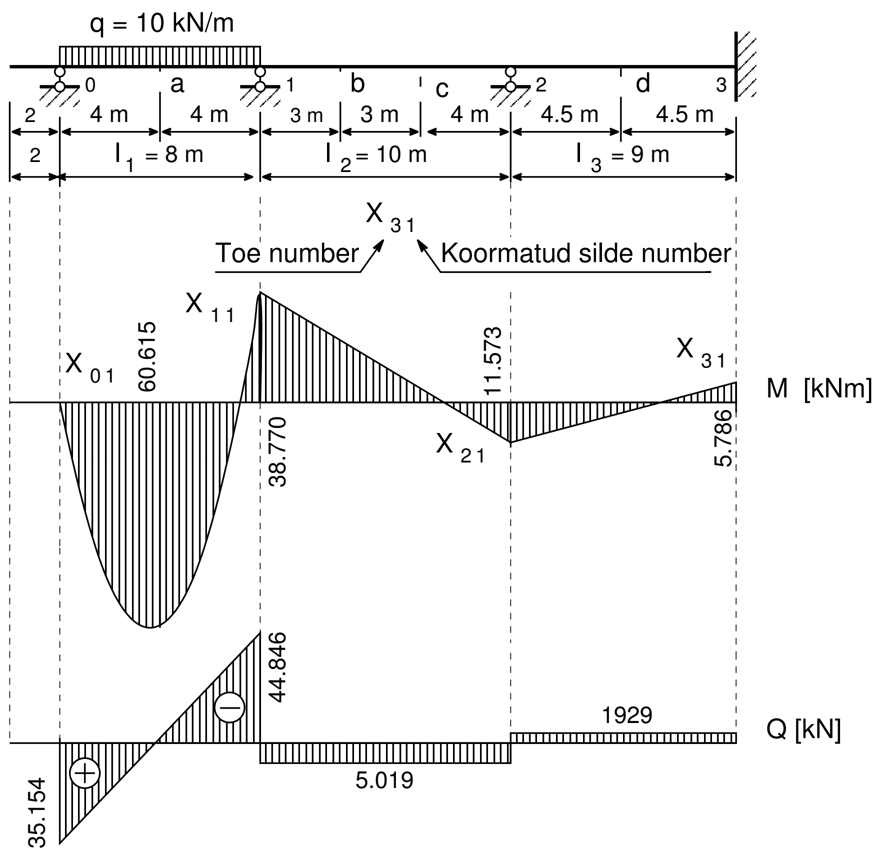
$$\begin{aligned}
X_{1\,k} &= -\frac{X_{0\,k}}{k'_1} = -\frac{-40.0}{4.1269} = 9.693\,kNm \\
X_{2\,k} &= -\frac{X_{1\,k}}{k'_2} = -\frac{9.693}{3.35} = -2.893\,kNm \\
X_{3\,k} &= -\frac{X_{2\,k}}{k'_3} = -\frac{-2.893}{2} = 1.446\,kNm
\end{aligned} \tag{10.64}$$

Esimese ava koormamisel leiame momendi toel 1 $X_{1\,1}$. Toel 0 on moment $X_{0\,1} = 0$ ja vasakpoolne fookussuhe $k_1 = \infty$. Toereaktsiooni $X_{1\,1}$ määramiseks kasutame valemit (10.52). Fiktiivne toereaktsioon $6B^f_1 = 1280\,kNm^2$ on leitud varem (vt avaldisi (10.18) lk 131).

$$X_{1\,1} = -\frac{6B^f_1}{l_1 k'_1} = -\frac{1280}{8 * 4.1269} = -38.770\,kNm \tag{10.65}$$

Parempoolsed toemomendid leiame parempoolsete fookussuhetega (10.43)

$$\begin{aligned}
X_{2\,1} &= -\frac{X_{1\,1}}{k'_2} = -\frac{-38.770}{3.35} = 11.573\,kNm \\
X_{3\,1} &= -\frac{X_{2\,1}}{k'_3} = -\frac{11.573}{2} = -5.786\,kNm
\end{aligned} \tag{10.66}$$



Joonis 10.17. Fookussuhted. Koormus esimesel sildel

Esimese ava ristlõikes a *oleva paindemomendi epüüri ordinaadi leidmiseks kasutame valemit (10.23).*

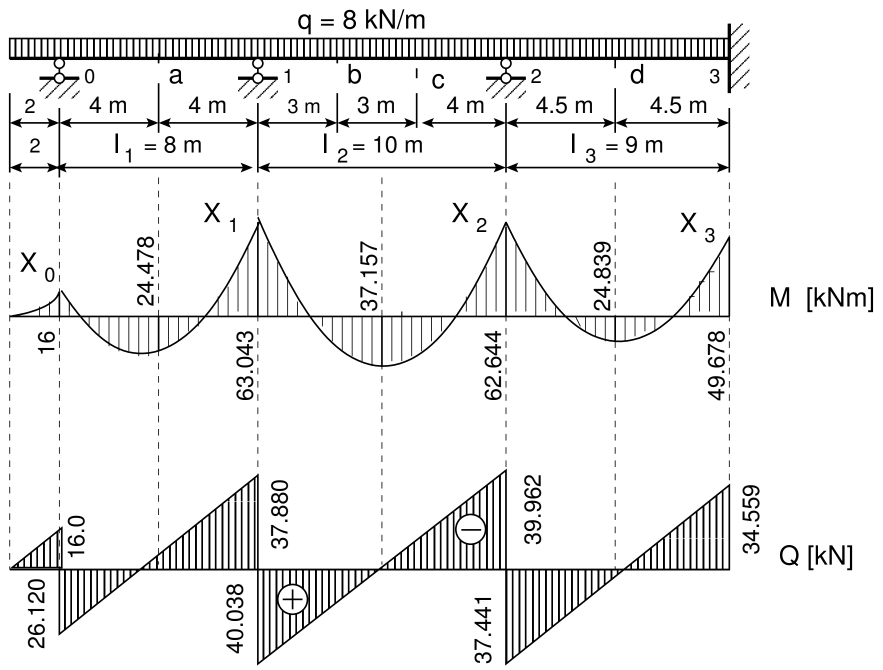
$$
\begin{aligned}
M_a &= M_a^o + X_0 * \xi'_a + X_1 * \xi_a = \frac{10 * 8^2}{8} - 0.0 * 0.5 - 38.770 * 0.5 = \\
&= 60.515\, kNm
\end{aligned} \tag{10.67}
$$

Saadud tulemused kanname joonisele 10.17.
Talale (joonis 10.18) mõjub alaline koormus $q = 8\,kN/m$*. Toemomendid leiame kolme momendi võrrandiga (10.13). Tugede* 1, 2 *ja* 3 *kohta koostatud kolme momendi võrrandid (10.68) on sarnased võrranditega (10.17)*

$$
\begin{array}{lllll}
l_1 \cdot X_o & + \; 2\,(l_1 + l_2) \cdot X_1 & + \; l_2 \cdot X_2 & = & -6B_1^f - 6A_2^f \\
l_2 \cdot X_1 & + \; 2\,(l_2 + l_3) \cdot X_2 & + \; l_3 \cdot X_3 & = & -6B_2^f - 6A_3^f \\
 & + \; l_3 \cdot X_2 & + \; 2l_3 \cdot X_3 & = & -6B_3^f
\end{array} \tag{10.68}
$$

kus toemoment X_o *ja koormusliikmed* $6A_i^f$, $6B_i^f$ *on*

$$
\begin{aligned}
X_o &= -\frac{q \cdot 2^2}{2} = -\frac{8 \cdot 2^2}{2} = -16\, kNm \\
6B_1^f &= \frac{q l_1^3}{4} = \frac{8 * 8^3}{4} = 1024\, kNm^2
\end{aligned}
$$



Joonis 10.18. Alaline koormus

$$
\begin{aligned}
6A_2^f &= \frac{ql_2^3}{4} = \frac{8*10^3}{8} = 2000\,kNm^2 \\
6B_2^f &= 6A_2^f = 2000\,kNm^2 \\
6A_3^f &= 6B_3^f = \frac{ql_3^3}{4} = \frac{8*9^3}{4} = 1458\,kNm^2
\end{aligned}
\tag{10.69}
$$

Vabaliikmete arvutamiseks võib kasutada Octave'i funktsiooni C.15 lk 258. Funktsiooni afbfikt1.m kasutamist jälgi joonisel 10.5. Pärast toemomendi X_o ja vabaliikmete $6A_i^f$, $6B_i^f$ arvväärtuste (10.69) asetamist võrrandisse (10.68) saame järgmise võrrandisüsteemi:

$$
\begin{bmatrix} 36 & 10 & 0 \\ 10 & 38 & 9 \\ 0 & 9 & 18 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}
= -\begin{bmatrix} 2896 \\ 3458 \\ 1458 \end{bmatrix}
\tag{10.70}
$$

ehk

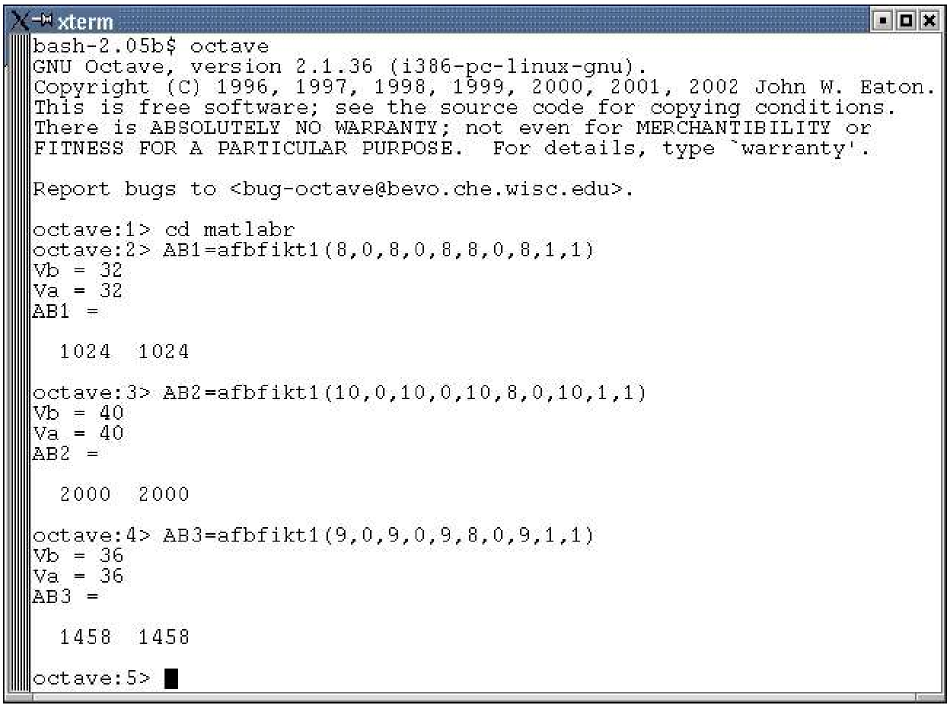
$$
\mathbf{A} * \mathbf{X} = \mathbf{B} \tag{10.71}
$$

kus

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 36 & 10 & 0 \\ 10 & 38 & 9 \\ 0 & 9 & 18 \end{bmatrix}; \qquad
\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}; \qquad
\mathbf{B} = -\begin{bmatrix} 2896 \\ 3458 \\ 1458 \end{bmatrix}
\tag{10.72}
$$

Võrrandisüsteemi lahendame arvutiprogrammiga Octave (vt lõik C.1 lk 205). Võrrandisüsteemi (10.70) lahend on

$$
X_1 = -63.043\,kNm; \qquad X_2 = -62.644\,kNm; \qquad X_3 = -49.678\,kNm \tag{10.73}
$$



```
bash-2.05b$ octave
GNU Octave, version 2.1.36 (i386-pc-linux-gnu).
Copyright (C) 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002 John W. Eaton.
This is free software; see the source code for copying conditions.
There is ABSOLUTELY NO WARRANTY; not even for MERCHANTIBILITY or
FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE.  For details, type `warranty'.

Report bugs to <bug-octave@bevo.che.wisc.edu>.

octave:1> cd matlabr
octave:2> AB1=afbfikt1(8,0,8,0,8,8,0,8,1,1)
Vb = 32
Va = 32
AB1 =

  1024  1024

octave:3> AB2=afbfikt1(10,0,10,0,10,8,0,10,1,1)
Vb = 40
Va = 40
AB2 =

  2000  2000

octave:4> AB3=afbfikt1(9,0,9,0,9,8,0,9,1,1)
Vb = 36
Va = 36
AB3 =

  1458  1458

octave:5>
```

Joonis 10.19. Alalise koormuse fiktiivsed reaktsioonid

Leitud toemomendid (10.73) kanname joonisele 10.18.

Peatükk 11

Deformatsioonimeetod

11.1 Geomeetrilise määratuse aste

Sirgetest varrastest moodustatud raami *geomeetrilise määramatuse aste*, s.t lisatundmatute arv, leitakse valemiga (11.1)

$$n^* = s_3 + w \tag{11.1}$$

kus w

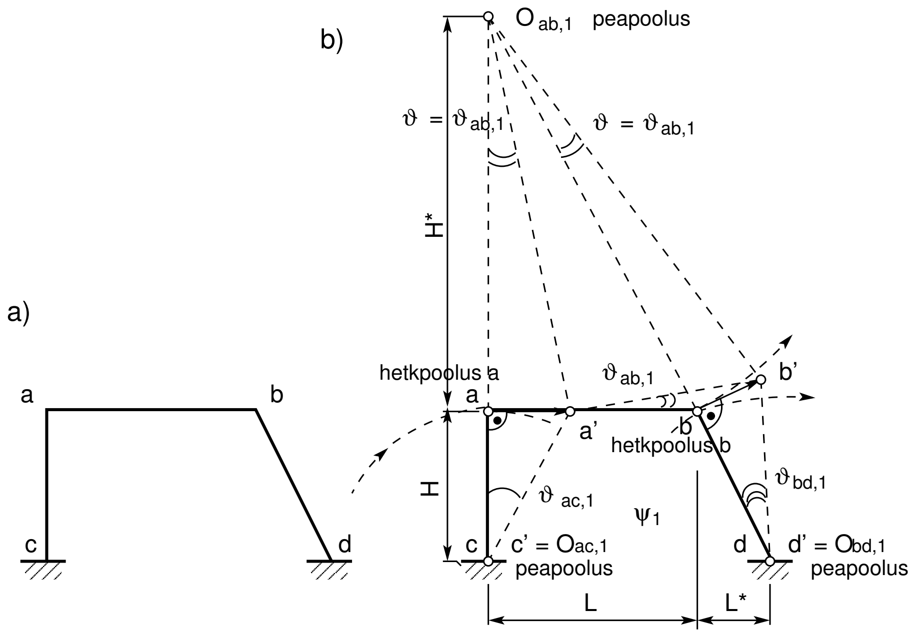
$$w = 2s - v - t \tag{11.2}$$

on *raami vabadusaste* ja tähistab varraste pöördenurki määravate sõltumatute geomeetriliste parameetrite arvu. Geomeetrilise määramatuse aste (11.1) võrdub jäikade sõlmede (ilma toesõlmedeta) arvuga, kui raami vabadusaste (11.2) on null või negatiivne

$$n^* = s_3, \qquad w \leq 0 \tag{11.3}$$

Viltu olevate postidega raamide varrasahela pöörded leitakse poolusplaanist (joonis 11.1). Varrasahela ühele vardale antakse ühikpööre ja teiste varraste pöörded leitakse selle varda pöörde funktsioonina.
Joonisel 11.1 kujutatud varrasahela paigutusolukorras ψ_1 pöörduvad vardad $\overline{ca}$ ja $\overline{db}$ ümber toesõlme c ja d. Nende varraste peapoolusteks on toesõlmed $c \equiv O_{ac,1}$ ja $d \equiv O_{bd,1}$. Liigend a ühendab vardaid $\overline{ac}$ ja $\overline{ab}$ ning on nende varraste liikumise *hetkpoolus*.
Varda $\overline{ab}$ peapoolus asub vektoriga $\overrightarrow{aa'}$ risti oleval sirgel. Liigend b ühendab vardaid $\overline{ab}$ ja $\overline{db}$ ning on nende varraste liikumise *hetkpoolus*. Varda $\overline{ab}$ peapoolus asub ka vektoriga $\overrightarrow{bb'}$ risti oleval sirgel. Nende risti olevate sirgete lõikepunktiks on $O_{ab,1}$. See punkt $O_{ab,1}$ on varda $\overline{ab}$ peapoolus. Varras $\overline{ab}$ pöördub ümber peapooluse $O_{ab,1}$ uude asendisse $a'b'$. Paigutusolukorras ψ_1 antakse vardale $\overline{ab}$ pöördenurk $\vartheta_{ac,1} = 1$ (vt joonist 11.1). Kolmnurkadel $\Delta aa'O_{ab,1}$ ja $\Delta aa'c$ on ühine külg aa'. Sellest tingimusest saame

$$\begin{aligned} H \cdot \vartheta_{ac,1} &= -H^* \cdot \vartheta_{ab,1} \\ \vartheta_{ab,1} &= -\frac{H}{H^*} \cdot \vartheta_{ac,1} \end{aligned} \tag{11.4}$$



Joonis 11.1. Poolusplaan ja varraste pöörded

Kolmnurkadel $\Delta bb'O_{ab,1}$ ja $\Delta bb'd$ on ühine külg bb'. Siit saame

$$\begin{aligned} \overline{bO_{ab,1}} \cdot \vartheta_{ab,1} &= -\overline{bd} \cdot \vartheta_{bd,1} \\ \vartheta_{bd,1} &= -\frac{\overline{bO_{ab,1}}}{\overline{bd}} \cdot \vartheta_{ab,1} \end{aligned} \tag{11.5}$$

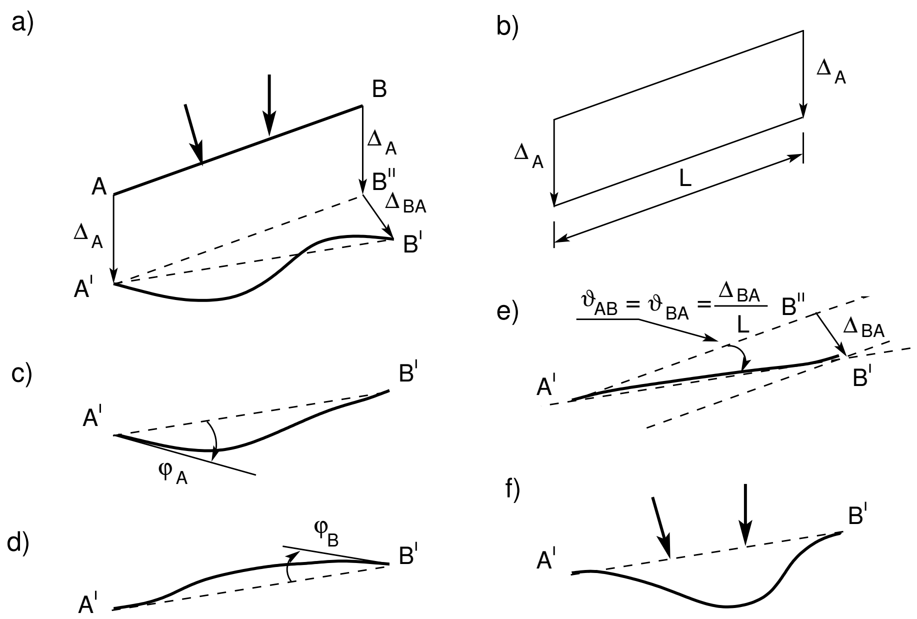
Seoses (11.5) avaldame pöörde $\vartheta_{ab,1}$ pöörde $\vartheta_{ac,1}$ kaudu.

$$\vartheta_{bd,1} = \frac{H}{H^*} \frac{\overline{bO_{ab,1}}}{\overline{bd}} \cdot \vartheta_{ac,1} = \vartheta_{ac,1} \tag{11.6}$$

11.2 Kinnitusmomendid

Vaatleme konstruktsiooni varrast AB (joonis 11.2 a). Temale mõjuvate jõudude mõjul liigub varras uude asendisse $A'B'$. Varda asendi $A'B'$ saame järgmiste sõltumatute liikumiste tulemusena:

- varda mõlemad otsad siirduvad ühe ja sama suuruse võrra Δ_A (joonis 11.2 b);
- ühe varda otsa siire on risti varda teljega, näiteks varda otsa B'' siirdumine punkti B' (joonis 11.2 e). Varda otsa siire on $\Delta_B A$ ja pööre ϑ_{AB};
- varda otsa A' pööre nurga φ_A võrra. Varda elastse joone kuju on joonisel (joonis 11.2 c);
- varda otsa B' pööre nurga φ_B võrra. Varda elastse joone kuju on joonisel (joonis 11.2 d);



Joonis 11.2. Varda deformatsioon

- varda telje punktide siirded. Varda otsad ei siirdu ega pöördu (joonis 11.2 f)).

Paindemomendid M_{jk} ja M_{kj} arvutatakse varda otste ristlõigetes koormusest tekkiva paindemomendi $M_{jk}^{(p)}$, $M_{kj}^{(p)}$ ja sõlmede j, k pöörete φ_j, φ_k ning varda pöördest ϑ_{jk} tekkivate paindemomentide summeerimisega

$$\begin{aligned} M_{jk} &= M_{jk}^{(p)} + 4 \cdot i_{jk} \cdot \varphi_j + 2 \cdot i_{jk} \cdot \varphi_k - 6 \cdot i_{jk} \cdot \vartheta_{jk} \\ M_{kj} &= M_{kj}^{(p)} + 2 \cdot i_{jk} \cdot \varphi_j + 4 \cdot i_{jk} \cdot \varphi_k - 6 \cdot i_{jk} \cdot \vartheta_{jk} \end{aligned} \tag{11.7}$$

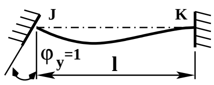
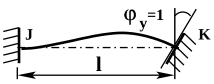
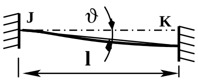
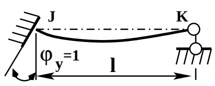
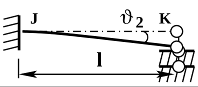
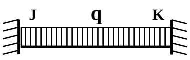
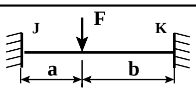
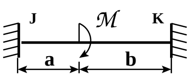
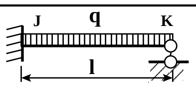
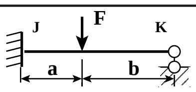
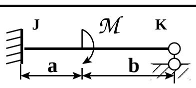
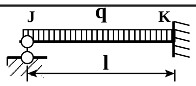
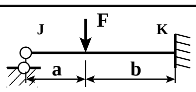
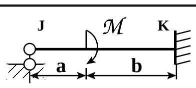
Siin on varda mõlemad otsad jäigalt kinnitatud ega ole summeerimist indeksite j ja k järgi.
Varda ots j on jäigalt kinnitatud. Varda otsas k on liigend

$$\begin{aligned} M_{jk} &= M_{jk}^{(p)} + 3 \cdot i_{jk} \cdot \varphi_j - 3 \cdot i_{jk} \cdot \vartheta_{jk} \\ M_{kj} &= 0 \end{aligned} \tag{11.8}$$

Siin ei ole summeerimist indeksite j ja k järgi.

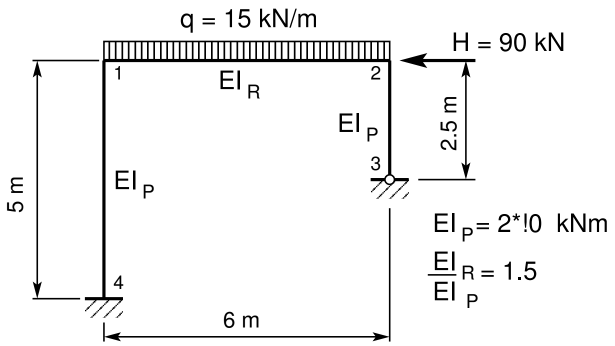
Kinnitusmomendid on toodud tabelis 11.1 leheküljel 150.

Tabel 11.1. Kinnitusmomendid ja põikjõud

Jrk.nr	*Skeem*	M_{JK}	M_{KJ}	Q_{JK}	Q_{KJ}
A		$4i$	$2i$	$-\frac{6i}{l}$	
B		$2i$	$4i$	$-\frac{6i}{l}$	
1		$-6i\vartheta_1$	$-6i\vartheta_1$	$\frac{12i\vartheta_1}{l}$	
C		$3i$	$-$	$-\frac{3i}{l}$	
2		$-3i\vartheta_2$	$-$	$-\frac{3i\vartheta_2}{l}$	
3		$-\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql}{2}$
4		$-\xi\eta^2 Fl$	$\xi^2\eta Fl$	$(1+2\xi)\,\eta^2 F$	$-\xi^2\,(1+2\eta)\,F$
5		$\eta\,(2-3\eta)\,\mathcal{M}$	$\xi\,(2-3\xi)\,\mathcal{M}$	$-\left(1-\xi^2-\eta^2\right)\frac{3\mathcal{M}}{l}$	
6		$-\frac{ql^2}{8}$	$-$	$\frac{5ql}{8}$	$-\frac{3ql}{8}$
7		$-\eta\left(1-\eta^2\right)\frac{Fl}{2}$	$-$	$\frac{\eta}{2}\left(3-\eta^2\right)F$	$-\frac{\xi^2}{2}\,(3-\xi)\,F$
8		$\left(1-3\eta^2\right)\frac{\mathcal{M}}{2}$	$-$	$-\frac{3}{2}\left(1-\eta^2\right)\frac{\mathcal{M}}{l}$	
9		$-$	$\frac{ql^2}{8}$	$\frac{3ql}{8}$	$-\frac{5ql}{8}$
10		$-$	$\xi\left(1-\xi^2\right)\frac{Fl}{2}$	$\frac{\eta^2}{2}\,(3-\eta)\,F$	$-\frac{\xi}{2}\left(3-\xi^2\right)F$
11		$-$	$\left(1-3\xi^2\right)\frac{\mathcal{M}}{2}$	$\frac{3}{2}\left(1-\xi^2\right)\frac{\mathcal{M}}{l}$	
	$\xi = \frac{a}{l}$ $\quad \eta = \frac{b}{l}$				

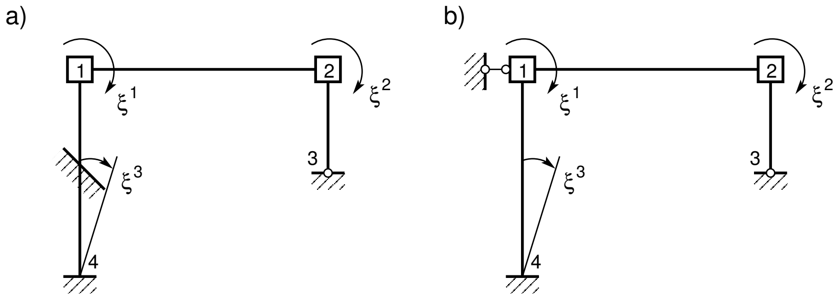
11.3 Deformatsioonimeetodiga arvutamise näited

Näide 11.1 *Leiame joonisel 11.3 näidatud raami sisejõudude jaotuse deformatsioonimeetodiga. Raam on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega* $q_z = 15\ \frac{kN}{m}$ *ning horisontaalse jõuga* $H = 90\ \ kN$. *Raami posti ristlõike jäikus* $EI_P = 2 * 10^4\ \ kNm^2$ *ja raami riivi ristlõike jäikus* $EI_R = 1.5 EI_P$. *Raami ava on* $6\ \ m$, *postide pikkused* $5\ \ m$ *ja* $2.5\ \ m$. *Sarnast raami, kus vaadeldud koormusele on lisaks veel postidele rakendatud kaks vertikaalset jõudu* $F = 750\ \ kN$, *on vaadeldud deformeerunud olukorra järgi [Bor79a].*



Joonis 11.3. Raam

Raami geomeetriliselt määratud põhiskeem ja siirdeolukorda määravad sõlmede pöörded ξ^1, ξ^2 *ja varda pööre* ξ^3 (φ_1, φ_2 *ja* ψ_1) *on näidatud joonisel 11.4 a. Joonisel 11.4 b on takistatud varda pöörde asemel sõlme takistatud siire.*



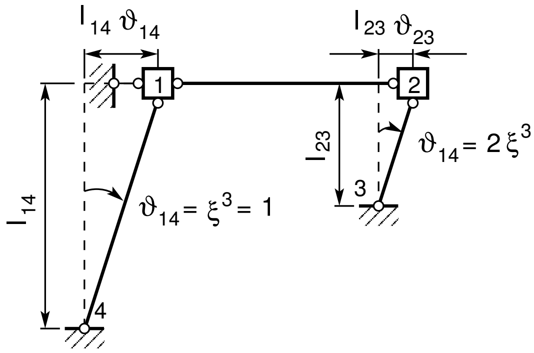
Joonis 11.4. Geomeetriliselt määratud põhiskeem

Raami virtuaalsed siirded (varrasahel) on joonisel 11.5.

Deformatsioonimeetodi koormusliikmete arvutamiseks vaatleme joonist 11.6 ja kasutame tabelit 11.1 lk 150.

$$M_{12}^0 = -M_{21}^0 = -q_z \frac{l^2}{12} = -15 \frac{6^2}{12} = -45\ \ kNm \tag{11.9}$$

$$M_{14}^0 = -M_{41}^0 = M_{23}^0 = 0 \tag{11.10}$$

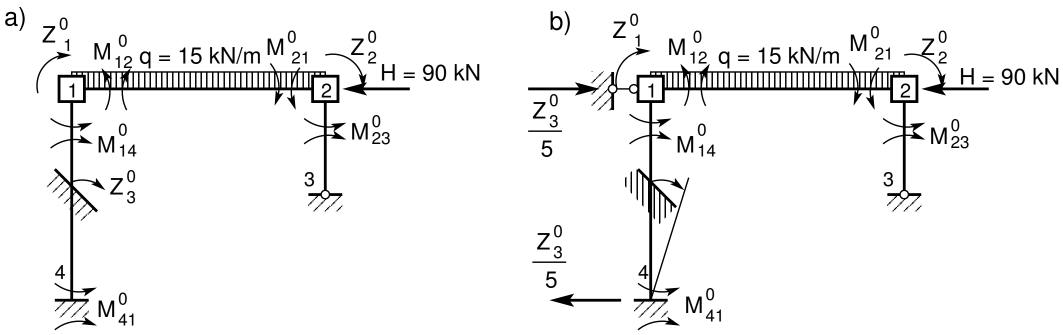


Joonis 11.5. Varrasahel

Esitame varraste kinnitusmomendid veeruvektorina

$$M^0 = \begin{bmatrix} M^0_{12} \\ M^0_{21} \\ M^0_{14} \\ M^0_{41} \\ M^0_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad kNm \tag{11.11}$$

Veeruvektori sisestamine arvutiprogrammiga Octave on näidatud (B.7) lk 198.



Joonis 11.6. Kinnitusmomendid

Koormusliikme Z_1^0 *leiame sõlme* $\boxed{1}$ *tasakaalust*

$$Z_1^0 = M^0_{12} + M^0_{14} = -45 + 0 = -45 \;\; kNm \tag{11.12}$$

Koormusliikme Z_2^0 *leiame sõlme* $\boxed{2}$ *tasakaalust*

$$Z_2^0 = M^0_{21} + M^0_{23} = 45 + 0 = 45 \;\; kNm \tag{11.13}$$

Koormusliikme Z_3^0 *leidmiseks vaatleme jõudude ja momentide võimalikku tööd varrasahela (joonis 11.5) siiretel. Posti pööret* ξ^3 *takistavas sidemes tekkiva reaktsioonimomendi* Z_3^0 *esitame jõupaarina. Jõud on rakendatud varda mõlemas otsas risti varda teljega ja jõudude suurusteks on reaktsioonimoment* Z_3^0 *jagatud varda pikkusega* 5 *(joonis 11.6).*
Varrasahela võimalik töö

$$Z_3^0 \delta\vartheta_{14} - H\delta\left(l_{23}\vartheta_{23}\right) = 0 \tag{11.14}$$

Kinnitusmomentide M^0_{12}, M^0_{21} võimalik töö on null, sest varras $1-2$ ei pöördu. Virtuaalpööre $\delta\vartheta_{14}$ ja siire $\delta\,(l_{23}\vartheta_{23})$ avalduvad virtuaalpöörde $\delta\xi^{23}$ kaudu

$$\delta\vartheta_{14} = \delta\xi^3, \qquad \delta\,(l_{23}\vartheta_{23}) = 2.5{*}2\delta\xi^3 \tag{11.15}$$

Arvestades virtuaalsiirete avaldisi (11.15), saame varrasahela võimaliku töö

$$\left[Z^0_3 - H{*}5\right]\delta\xi^3 = 0 \tag{11.16}$$

millest avaldame koormusliikme Z^0_3

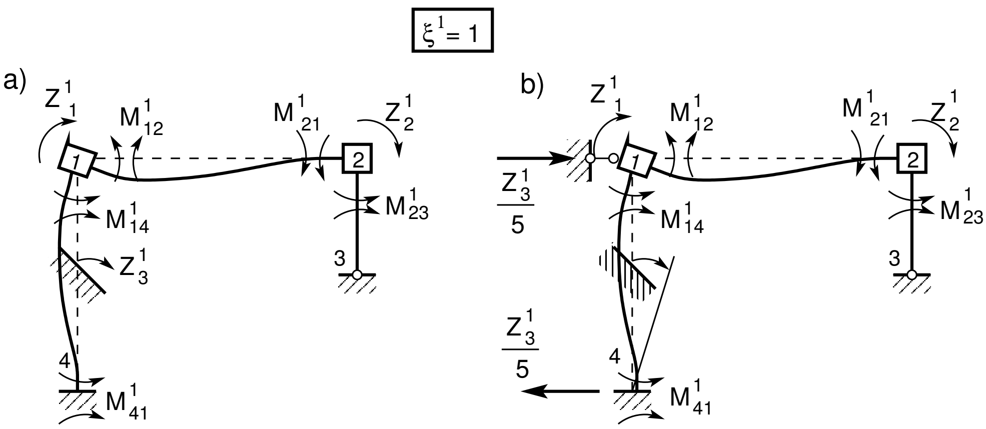
$$Z^0_3 = H{*}5 = 90{*}5 = 450\ \ kNm \tag{11.17}$$

Koormusliikmed esitame veeruvektorina $-Z^0$. Vastupidiseid märke kasutame eesmärgina viia koormusliikmed võrrandisüsteemi paremale poole.

$$-\,Z^{\ominus} = \begin{bmatrix} -Z^0_1 \\ -Z^0_2 \\ -Z^0_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ -45 \\ -450 \end{bmatrix} \ \ kNm \tag{11.18}$$

Veeruvektori sisestamist arvutiprogrammiga Octave on näidatud (B.7) lk 198.

Varraste reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{1}$ *pöördest (joonis 11.7)*



Joonis 11.7. Reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{1}$ pöördest

$$M^1_{12} = 4\,\frac{EI_R}{l_{12}}, \qquad \frac{1}{EI_P}M^1_{12} = 4\,\frac{1.50}{6} = 1.0 \tag{11.19}$$

$$M^1_{21} = 2\,\frac{EI_R}{l_{12}}, \qquad \frac{1}{EI_P}M^1_{21} = 2\,\frac{1.50}{6} = 0.5 \tag{11.20}$$

$$M^1_{14} = 4\,\frac{EI_P}{l_{14}}, \qquad \frac{1}{EI_P}M^1_{14} = 4\,\frac{1.0}{5} = 0.8 \tag{11.21}$$

$$M_{41}^1 = 2\,\frac{EI_P}{l_{14}}, \qquad \frac{1}{EI_P}M_{41}^1 = 2\,\frac{1.0}{5} = 0.4 \tag{11.22}$$

$$M_{23}^1 = 0 \tag{11.23}$$

Esitame varraste reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{1}$ *pöördest* ξ^1 5×3 *maartiksi* M^{123} *veeruna*

$$M^{123} = \begin{bmatrix} M_{12}^1 & . & . \\ M_{21}^1 & . & . \\ M_{14}^1 & . & . \\ M_{41}^1 & . & . \\ M_{23}^1 & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} EI_P \begin{bmatrix} 1.0 & . & . \\ 0.5 & . & . \\ 0.8 & . & . \\ 0.4 & . & . \\ 0 & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \tag{11.24}$$

Maatriksi sisestamist arvutiprogrammis Octave vaatleme pärast pöördest ξ^2 *ja* ξ^2 *varraste reaktsioonimomentide leidmist.*
Sõlmede reaktsioonimomendid *sõlme* $\boxed{1}$ *pöördest (joonis 11.7) saame vastava sõlme tasakaalust. Sõlme* $\boxed{1}$ *tasakaalust (joonis 11.7) saame*

$$Z_1^1 = M_{12}^1 + M_{14}^1 = EI_P\,(1.0 + 0.8) = 1.8EI_P \tag{11.25}$$

Sõlme $\boxed{2}$ *tasakaalust*

$$Z_2^1 = M_{21}^1 + M_{23}^1 = EI_P\,(0.5 + 0) = 0.5EI_P \tag{11.26}$$

Reaktsioonimomendi Z_3^2 *leidmiseks vaatleme varraste reaktsioonimomentide võimalikku tööd varrasahela (joonis 11.5) siiretel. Posti pööret* ξ 3 *takistavas sidemes tekkiva reaktsioonimomendi* Z_3^2 *esitame jõupaarina. Jõud on rakendatud varda mõlemas otsas risti varda teljega ja jõudude suurusteks on reaktsioonimoment* Z_3^2 *jagatud varda pikkusega* 5 *(joonis 11.7).*
Varraste reaktsioonimomentide võimalik töö sõlme $\boxed{1}$ *pöördest*

$$Z_3^1\delta\vartheta_{14} + \left(M_{14}^1 + M_{41}^1\right)\delta\vartheta_{14} = \left[Z_3^1 + \left(M_{14}^1 + M_{41}^1\right)\right]\delta\vartheta_{14} = 0 \tag{11.27}$$

Võrrandist (11.27) saame

$$Z_3^1 = -\left(M_{14}^1 + M_{41}^1\right) = -EI_P\,(0.8 + 0.4) = -1.2EI_P \tag{11.28}$$

Sõlmede ja varraste pöörete leidmiseks alustame võrrandisüsteemi koostamist. Võrrandisüsteemi tundmatute ees olevatest kordajatest moodustame 3×3 *maartiksi* A*, mille esimene veerg on*

$$A = \begin{bmatrix} Z_1^1 & . & . \\ Z_2^1 & . & . \\ Z_3^1 & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = EI_P \begin{bmatrix} 1.8 & . & . \\ 0.5 & . & . \\ -1.2 & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \tag{11.29}$$

Varraste reaktsioonimomendid *sõlme* $\boxed{2}$ *pöördest (joonis 11.8)*

$$M_{12}^2 = 2\,\frac{EI_R}{l_{12}}, \qquad \frac{1}{EI_P}M_{12}^2 = 2\,\frac{1.5}{6} = 0.5 \tag{11.30}$$

$$M_{21}^2 = 4\,\frac{EI_R}{l_{12}}, \qquad \frac{1}{EI_P} M_{21}^2 = 4\,\frac{1.5}{6} = 1.0 \tag{11.31}$$

$$M_{14}^2 = M_{41}^2 = 0 \tag{11.32}$$

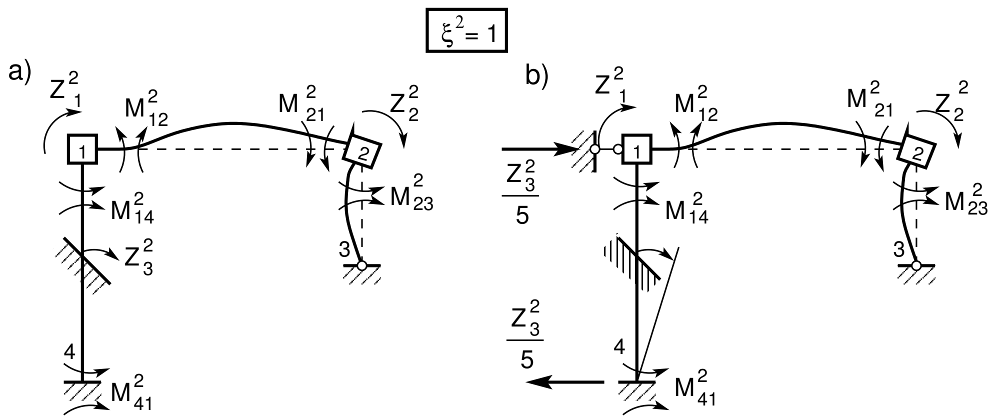
$$M_{23}^2 = 3\,\frac{EI_P}{l_{23}}, \qquad \frac{1}{EI_P} M_{23}^2 = 3\,\frac{1.0}{2.5} = 1.2 \tag{11.33}$$

Esitame varraste reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{2}$ *pöördest* ξ^2 $5{\times}3$ *maatriksi* M^{123} *teise veeruna*

$$M^{123} = \begin{bmatrix} M_{12}^1 & M_{12}^2 & . \\ M_{21}^1 & M_{21}^2 & . \\ M_{14}^1 & M_{14}^2 & . \\ M_{41}^1 & M_{41}^2 & . \\ M_{23}^1 & M_{23}^2 & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = EI_P \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & . \\ 0.5 & 1 & . \\ 0.8 & 0 & . \\ 0.4 & 0 & . \\ 0 & 1.2 & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \tag{11.34}$$

Maatriksi sisestamist arvutiprogrammis Octave vaatleme pärast pöördest ξ^3 *varraste reaktsioonimomentide leidmist.*

Sõlmede reaktsioonimomendid *sõlme* $\boxed{2}$ *pöördest (joonis 11.8) saame vastava sõlme ta-*



Joonis 11.8. Reaktsioonimomendid sõlme $\boxed{2}$ pöördest

sakaalust. Sõlme $\boxed{1}$ *tasakaalust (joonis 11.8) saame*

$$Z_1^2 = M_{12}^2 + M_{14}^2 = EI_P\,(0.5+0) = 0.5EI_P \tag{11.35}$$

ja sõlme $\boxed{2}$ *tasakaalust*

$$Z_2^2 = M_{21}^2 + M_{23}^2 = EI_P\,(1.0+1.2) = 2.2EI_P \tag{11.36}$$

Reaktsioonimomendi Z_2^2 *leidmiseks vaatleme varraste reaktsioonimomentide võimalikku tööd varrasahela (joonis 11.5) siiretel. Posti pööret* ξ^3 *takistavas sidemes tekkiva reaktsioonimomendi* Z_3^1 *esitame jõupaarina. Jõud on rakendatud varda mõlemas otsas risti varda teljega ja jõudude suurusteks on reaktsioonimoment* Z_2^2 *jagatud varda pikkusega 5 (joonis 11.5). Varraste reaktsioonimomentide võimalik töö sÕlme* $\boxed{2}$ *pöördest* $(\vartheta_{23} = 2\vartheta_{14})$ *(joonis 11.5)*

$$Z_3^2 \delta\vartheta_{14} + M_{23}^2 \delta\vartheta_{23} = \left[Z_3^2 + 2M_{23}^2\right] \delta\vartheta_{14} = 0 \tag{11.37}$$

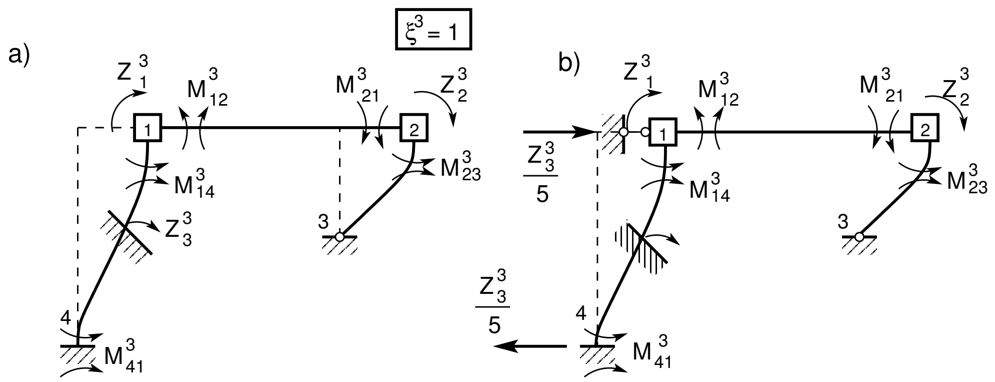
Võrrandist(11.27) saame

$$Z_3^2 = -M_{23}^2 = -EI_P 2{*}1.2 = -2.4EI_P \tag{11.38}$$

Lisame võrrandisüsteemi tundmatute ees olevate kordajate maatriksile A (11.29) teise veeru

$$A = \begin{bmatrix} Z_1^1 & Z_1^2 & . \\ Z_2^1 & Z_2^2 & . \\ Z_3^1 & Z_3^2 & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = EI_P \begin{bmatrix} 1.8 & 0.5 & . \\ 0.5 & 2.2 & . \\ -1.2 & -2.4 & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \tag{11.39}$$

Varraste reaktsioonimomendid *varda $1-2$ siirdest (joonis 11.9)*



Joonis 11.9. Reaktsioonimomendid varda pöördest

$$M_{12}^3 = M_{21}^3 = 0 \tag{11.40}$$

$$M_{14}^3 = -6\frac{EI_P}{l_{14}}, \qquad \frac{1}{EI_P}M_{14}^3 = -6\,\frac{1}{5} = -1.2 \tag{11.41}$$

$$M_{41}^3 = M_{14}^3 = -1.2 \tag{11.42}$$

$$M_{23}^3 = -3\,\frac{EI_P}{l_{23}}, \qquad \frac{1}{EI_P}M_{23}^3 = -3\,\frac{1}{2.5} = -2.4 \tag{11.43}$$

Esitame varraste reaktsioonimomendid varda pöördest ξ^3 $5{\times}3$ maatriksi M^{123} kolmanda veeruna

$$M^{123} = \begin{bmatrix} M_{12}^1 & M_{12}^2 & M_{12}^3 \\ M_{21}^1 & M_{21}^2 & M_{21}^3 \\ M_{14}^1 & M_{14}^2 & M_{14}^3 \\ M_{41}^1 & M_{41}^2 & M_{41}^3 \\ M_{23}^1 & M_{23}^2 & M_{23}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = EI_P \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & -1.2 \\ 0.4 & 0 & -1.2 \\ 0 & 1.2 & -2.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \tag{11.44}$$

Maatriksi sisestamist arvutiprogrammis Octave on näidatud (B.3) lk 197.
Sõlmede reaktsioonimomendid *varda* $1-2$ *siirdest (joonis 11.9) saame vastava sõlme tasakaalust. Sõlme* $\boxed{1}$ *tasakaalust (joonis 11.9) saame*

$$Z_1^3 = M_{12}^3 + M_{14}^3 = EI_P\,(0-1.2) = -1.2EI_P \tag{11.45}$$

ja sõlme $\boxed{2}$ *tasakaalust*

$$Z_2^3 = M_{21}^3 + M_{23}^3 = EI_P\,(0-2.4) = -2.4EI_P \tag{11.46}$$

Reaktsioonimomendi Z_2^3 *leidmiseks vaatleme varraste reaktsioonimomentide võimalikku tööd varrasahela (joonis 11.5) siiretel. Posti pööret* ξ^3 *takistavas sidemes tekkiva reaktsioonimomendi* Z_2^3 *esitame jõupaarina. Jõud on rakendatud varda mõlemas otsas risti varda teljega ja jõudude suuruseks on reaktsioonimoment* Z_2^3 *jagatud varda pikkusega* 5 *(joonis 11.9). Varraste reaktsioonimomentide võimalik töö varda* $\boxed{3}$ *pöördest (*$\vartheta_{23} = 2\vartheta_{14} = \xi^3$*) j(oonis 11.5)*

$$Z_3^3\delta\vartheta_{14} + \left(M_{14}^3 + M_{14}^3\right)\delta\vartheta_{14} + M_{23}^3\delta\vartheta_{23} = \left[Z_3^3 + M_{14}^3 + M_{41}^3 + 2M_{23}^3\right]\delta\vartheta_{14} = 0 \tag{11.47}$$

Võrrandist (11.47) saame

$$Z_3^3 = -\left(M_{14}^3 + M_{41}^3\right) - 2M_{23}^3 = -EI_P\,[-1.2*1 - 1.2*1 - 2*1.2] = 7.2EI_P \tag{11.48}$$

Lisme võrrandisüsteemi tundmatute ees olevate kordajate maatriksile A (11.27) kolmanda veeru

$$A = \begin{bmatrix} Z_1^1 & Z_1^2 & Z_1^3 \\ Z_2^1 & Z_2^2 & Z_2^3 \\ Z_3^1 & Z_3^2 & Z_3^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = EI_P\begin{bmatrix} 1.8 & 0.5 & -1.2 \\ 0.5 & 2.2 & -2.4 \\ -1.2 & -2.4 & 7.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \tag{11.49}$$

Maatriksi sisestamist arvutiprogrammiga Octave on näidatud (B.3) lk 197.
Sõlmede ja varraste pöörete leidmiseks koostasime võrrandisüsteemi

$$\mathbf{A}\xi = \mathbf{Z}^{\ominus} \tag{11.50}$$

kus maatriks $\mathbf{A}$ *on leitud avaldisega (11.49) ja vektor* $\mathbf{Z}^{\ominus}$ *(11.18) ning vektor* ξ

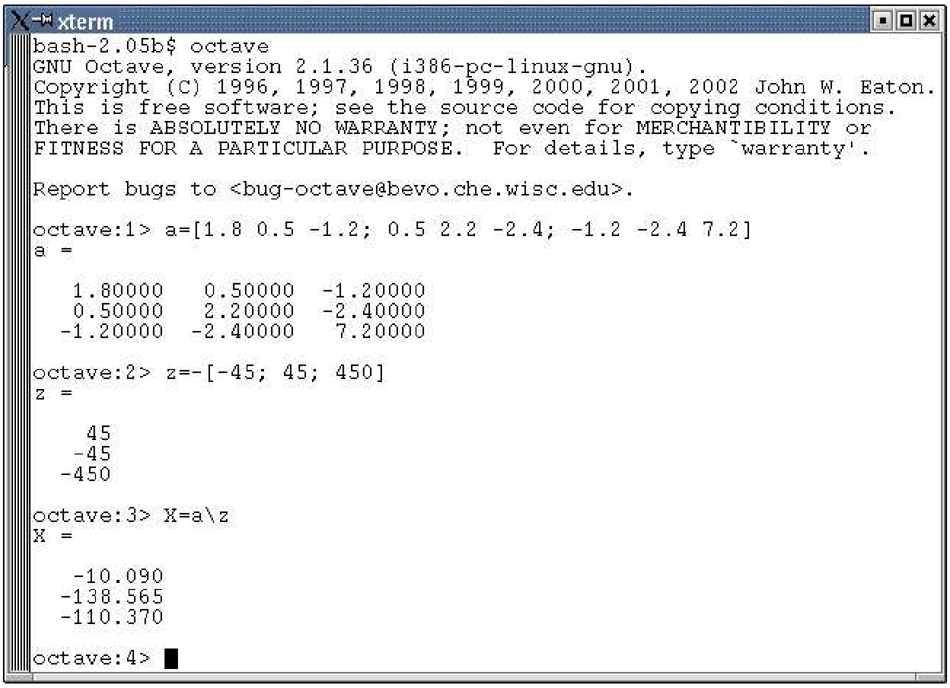
$$\xi = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \tag{11.51}$$

Võtame kasutusele uue muutuja $\mathbf{A} = EI_P\xi$ *ja maartiksi* $\mathbf{a} = EI_P\mathbf{A}$ *ning esitame võrrandisüsteemi (11.50) järgmisel kujul:*

$$\mathbf{aX} = \mathbf{Z}^{\ominus} \tag{11.52}$$

ehk

$$\begin{bmatrix} 1.8 & 0.5 & -1.2 \\ 0.5 & 2.2 & -2.4 \\ -1.2 & -2.4 & 7.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ -45 \\ -450 \end{bmatrix} \tag{11.53}$$



Joonis 11.10. Pöördenurkade arvutamine

Võrrandisüsteemi (11.52) võib lahendada maatriksi $\mathbf{a}$ *pöördmaatriksi* $\mathbf{a^{-1}}$ *abil*

$$\mathbf{X} = \mathbf{a^{-1}Z}^{\ominus} \tag{11.54}$$

Arvutiprogrammiga Octave lahendame võrrandisüsteemi (11.53) Gaussi elimineerimismeetodiga (vt avaldist (11.55) ja joonist 11.10).

$$X = a \setminus z \tag{11.55}$$

kus $z = Z^{\ominus}$.
Võrrandisüsteemi (11.52) lahend

$$\begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix} = EI_P \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.090 \\ -138.565 \\ -110.370 \end{bmatrix} \tag{11.56}$$

Momendid varraste otstes leiame avaldisega

$$\mathbf{M} = \mathbf{M^0} + \mathbf{M^{123}}\xi \tag{11.57}$$

ehk

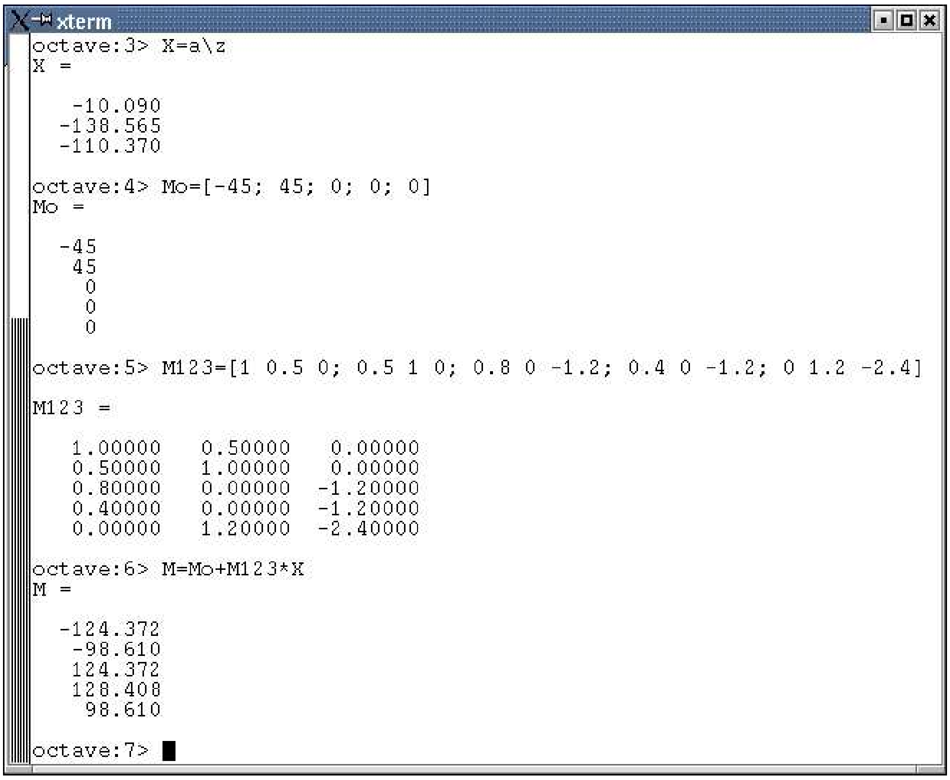
$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{14} \\ M_{41} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{12}^0 \\ M_{21}^0 \\ M_{14}^0 \\ M_{41}^0 \\ M_{23}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{12}^1 & M_{12}^2 & M_{12}^3 \\ M_{21}^1 & M_{21}^2 & M_{21}^3 \\ M_{14}^1 & M_{14}^2 & M_{14}^3 \\ M_{41}^1 & M_{41}^2 & M_{41}^3 \\ M_{23}^1 & M_{23}^2 & M_{23}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \tag{11.58}$$

kus maatriks $\mathbf{M^0}$ *on toodud avaldisega (11.11) ja maatriks* $\mathbf{M^{123}}$ *avaldisega (11.44). Momentide avaldise (11.57), (11.58) esitame leitud* $\mathbf{X}$ *kaudu*

$$\mathbf{M} = \mathbf{M^0} + \frac{1}{EI_P}\mathbf{M^{123}}\mathbf{X} \tag{11.59}$$

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{14} \\ M_{41} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & -1.2 \\ 0.4 & 0 & -1.2 \\ 0 & 1.2 & -2.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10.090 \\ -138.565 \\ -110.370 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -124.372 \\ -98.610 \\ 124.372 \\ 128.408 \\ 98.610 \end{bmatrix} \tag{11.60}$$

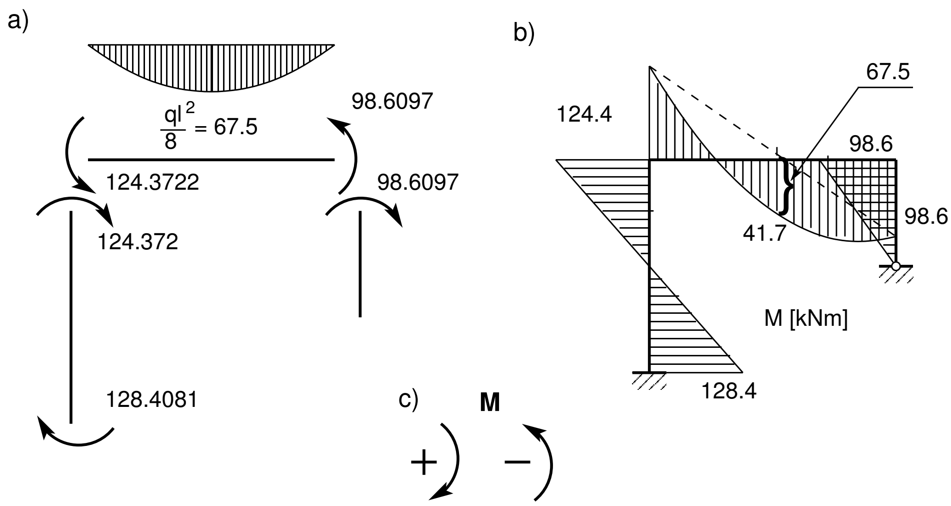
Momentide väärtused varraste otstes arvutame arvutiprogrammiga Octave (joonis 11.11).



Joonis 11.11. Momendid varda otstes

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{14} \\ M_{41} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -124.372 \\ -98.610 \\ 124.372 \\ 128.408 \\ 98.610 \end{bmatrix} \tag{11.61}$$

Leitud momendid varraste otstes (11.61) kanname joonisele 11.12 b. Momendi positiivne ja negatiivne suund on näidatud joonisel 11.12 c. Joonisel 11.12 a on varda $1-2$ *lihttala pain-*

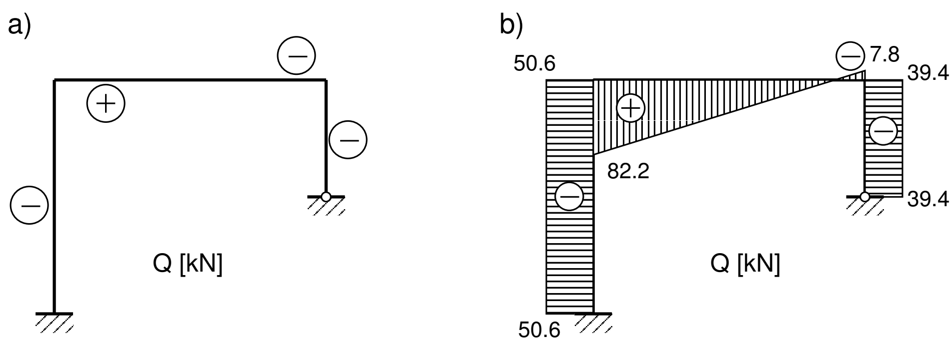


Joonis 11.12. Momendid varda otstes ja paindemomendi epüür

demomendi epüür jaotatud koormusest q_z. Joonisel 11.12 b on raami paindemomendi epüür. Joonisel 11.12 c on paindemomendi positiivne ja negatiivne suund. Raami varraste põikjõu märgi määramiseks vaatleme esmalt joonist 1.13 lk 30. Paindemomendi tuletise geomeetriliseks tõlgenduseks punktis on selles punktis paindemomendi epüüri puutuja tõusunurga tangens ($\tan\alpha$). Põikjõu märk oleneb puutuja (joonis 1.13) pööramise suunast (puutujat pöörame nii, et ta ühtiks varda teljega, seejuures $\alpha < \frac{\pi}{2}$): vastupäeva pöörates on põikjõud positiivne ja päripäeva pöörates negatiivne.

Raami varda $1-4$ paindemomendi epüüri (joonis 11.12) puutuja ühtimiseks varda teljega tuleb teda pöörata päripäeva, s.t põikjõu märk on miinus (joonis 1.13 lk 30). Kanname põikjõu märgi joonisele 11.13 a. Raami varda $2-3$ paindemomendi epüüri (joonis 11.12) puutuja ühtimiseks varda teljega tuleb teda pöörata päripäeva, s.t põikjõu märk on miinus (joonis 1.13). Raami varda $1-2$ paindemomendi epüüri alguses (joonis 11.12) puutuja ühtimiseks varda teljega tuleb teda pöörata vastupäeva, s.t põikjõu märk on pluss (joonis 1.13).

Põikjõu arvutamiseks vaatleme joonist 11.12 ja 1.14. Varda $1-4$ põikjõud, mille märk peab



Joonis 11.13. Raami põikjõu märk ja epüür

tulema miinus

$$Q_{14} = Q_{41} = \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{-124.4 - 128.4}{5} = -50.6\ \ kN \tag{11.62}$$

Varda 2 − 3 põikjõud, mille märk peab tulema miinus

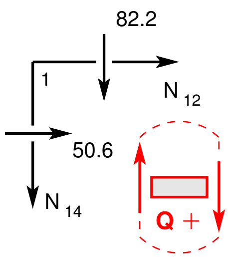
$$Q_{23} = Q_{32} = \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{-98.6 - 0}{2.5} = -39.4\ \ kN \tag{11.63}$$

Varda 1 − 2 põikjõu arvutamisel leiame vastava lihttala põikjõu Q^o ja põikjõu momentidest $Q^M = \frac{\Delta M}{\Delta x}$

$$Q_{12} = Q^o + \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{15{\cdot}6}{2} + \frac{98.6 + 124.4}{6.0} = 45 + 37.2 = 82.2\ \ kN \tag{11.64}$$

$$Q_{21} = Q^o + \frac{\Delta M}{\Delta x} = -\frac{15{\cdot}6}{2} + \frac{98.6 + 124.4}{6.0} = -45 + 37.2 = -7.8\ \ kN \tag{11.65}$$

Leitud põikjõud on kantud joonisele 11.13 b.

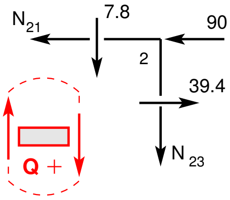


Joonis 11.14. Sõlme $\boxed{1}$ tasakaal

Joonisel 11.14 on näidatud sõlmele $\boxed{1}$ mõjuvad jõud

$$\sum X = 0, \qquad N_{12} = -50.6\,kN \tag{11.66}$$

$$\sum Z = 0, \qquad N_{14} = -82.2\,kN \tag{11.67}$$



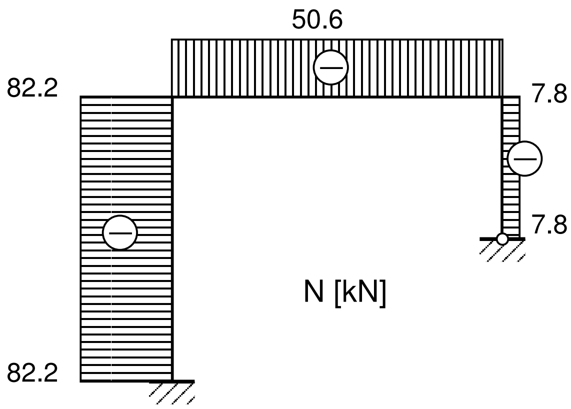
Joonis 11.15. Sõlme $\boxed{2}$ tasakaal

Joonisel 11.15 on näidatud sõlmele $\boxed{2}$ mõjuvad jõud

$$\sum X = 0, \qquad N_{21} = -90 + 39.4 = -50.6\,kN \tag{11.68}$$

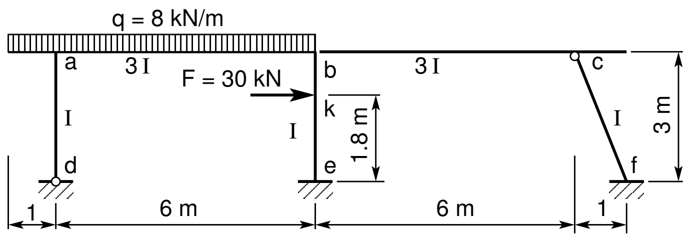
$$\sum Z = 0, \qquad N_{23} = -7.8\,kN \tag{11.69}$$

Raami varrastes mõjuva normaaljõu leidmiseks lõikame välja sõlmed $\boxed{1}$ ja $\boxed{2}$ (joonis 11.14 ja 11.15). Kanname joonisele kõik sõlmele mõjuvad jõud. Normaaljõud N_{12}, N_{14}, N_{21}, N_{23}, mida me otsime, näitame positiivses suunas. Põikjõud kanname joonisele nende mõjumise suunas. Positiivne põikjõud pöörab vaadeldavat elementi päripäeva (joonised 11.14 ja 11.15). Leitud normaaljõud kanname joonisele 11.16.

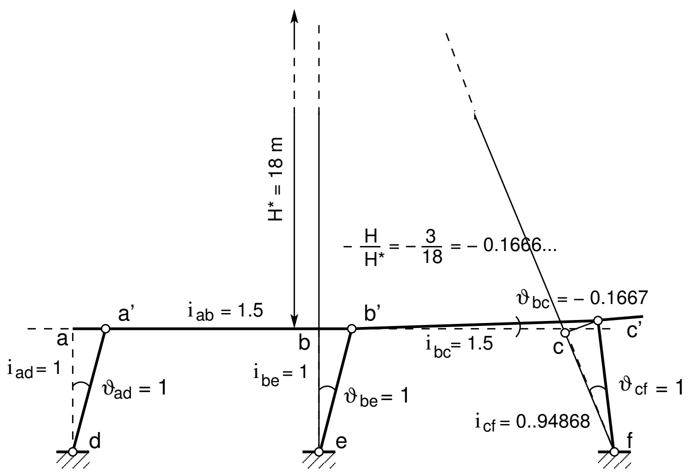


Joonis 11.16. Raami normaaljõu epüür

Näide 11.2 *Leiame joonisel 11.17 näidatud raami sisejõudude jaotuse deformatsioonimeetodiga. Raami riivide ristlõike jäikus EI_R on kolm korda suurem kui postidel $EI_R = 3{*}EI_P$. Raami vertikaalne koormus $q = 8\,kN/m$ ja horisontaalne koormus keskmisele postile $F = 30\,kN$. Joonisel 11.18 on näidatud vaadeldava raami varrasahel. Raami kõigi varraste pöörded ϑ_{ij}*



Joonis 11.17. Raam II



Joonis 11.18. Raami varrasahel II

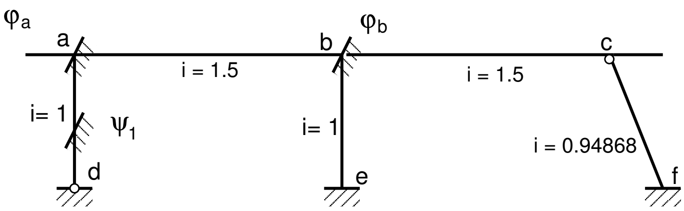
avaldame esimese varda ad *pöörde ϑ_{ad} kaudu. Varda* bc *pöörde leidmisel kasutame avaldist (11.6).*

$$\vartheta_{bc} = -\frac{H}{H^*} \cdot \vartheta_{ad} = -\frac{3}{18} \cdot 1 \tag{11.70}$$

Raami varraste jäikuste $i = \frac{EI}{l}$ arvutamisel võtame varda ad *jäikuse $i_{ad} = \frac{EI_{ad}}{l_{ad}}$ aluseks, s.t* baasjäikuseks.

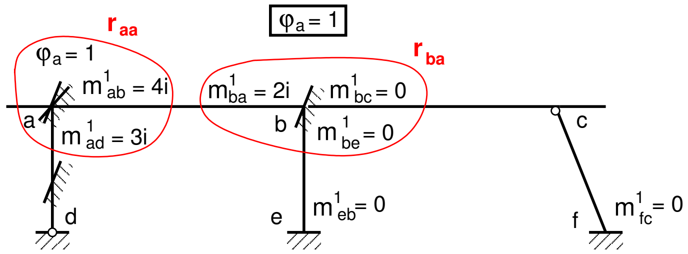
$$\begin{aligned}
i_o &= \frac{EI_{ad}}{l_{ad}} = \frac{1}{3} \\
i_{ad} &= \frac{\frac{EI_{ad}}{l_{ad}}}{i_o} = \frac{1}{3}\frac{3}{1} = 1 \\
i_{ab} &= \frac{\frac{EI_{ab}}{l_{ab}}}{i_o} = \frac{3}{6}\frac{3}{1} = 1.5 \\
i_{bc} &= \frac{\frac{EI_{bc}}{l_{bc}}}{i_o} = \frac{3}{6}\frac{3}{1} = 1.5 \\
i_{be} &= \frac{\frac{EI_{be}}{l_{be}}}{i_o} = \frac{1}{3}\frac{3}{1} = 1 \\
i_{cf} &= \frac{\frac{EI_{cf}}{l_{cf}}}{i_o} = \frac{1}{3.1623}\frac{3}{1} = 0.94868
\end{aligned} \tag{11.71}$$

Raami geomeetriliselt määratud põhiskeem on joonisel 11.19.



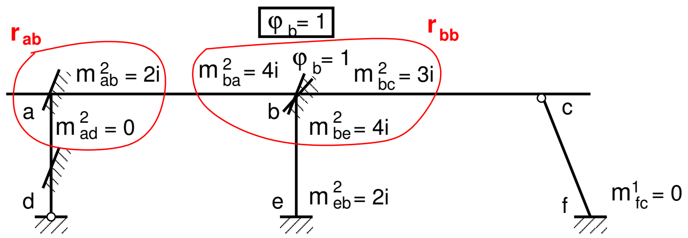
Joonis 11.19. Geomeetriliselt määratud põhiskeem II

Raami sõlme a *pööramisel ühikulise nurga võrra* $\varphi_a = 1$ *tekkivad momendid on arvutatud tabelis 11.1 toodud valemite alusel. Tulemused on kantud joonisele 11.20. Joonistel 11.20–11.22 kasutatakse järgmisi tähistusi* m^k_{mn} *momentide märkimiseks: indeks* k *kirjeldab deformeerunud olukorda (k = 1, 2, 3);* m *ja* n *tähistavad varda algust ja lõppu. Raami sõlme* b



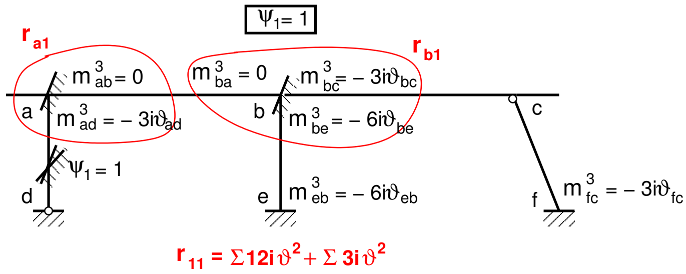
Joonis 11.20. Sõlme a pööre φ_a

pööramisel ühikulise nurga võrra $\varphi_b = 1$ *tekkivad momendid on arvutatud tabelis 11.1 toodud valemitega. Tulemused on kantud joonisele 11.21. Raami varda* ad *pööramisel ühikulise nurga*



Joonis 11.21. Sõlme b pööre φ_b

võrra $\psi_1 = 1$ *tekkivad momendid on arvutatud tabelis 11.1 toodud valemitega. Tulemused on kantud joonisele 11.22. Momentide* m^k_{mn} *avaldised, mis on joonistel 11.20– 11.22, kanname*



Joonis 11.22. Varda ad pööre ψ_1

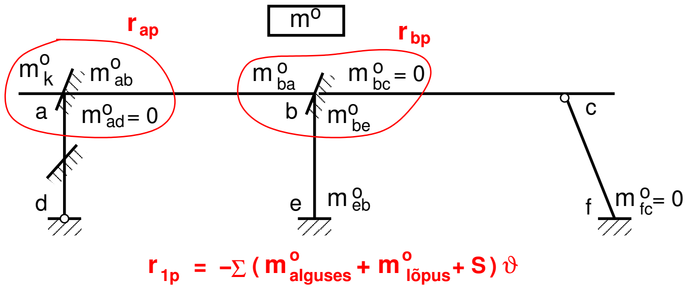
maatriksisse mx.

$$
\mathbf{M}=\begin{bmatrix} M_{da}\\ M_{ad}\\ \dots\\ M_{ab}\\ M_{ba}\\ \dots\\ M_{be}\\ M_{eb}\\ \dots\\ M_{bc}\\ M_{cb}\\ \dots\\ M_{cf}\\ M_{fc} \end{bmatrix};\ \mathbf{mx}=\begin{bmatrix} m^1_{da} & m^2_{da} & m^3_{da}\\ m^1_{ad} & m^2_{ad} & m^3_{ad}\\ \dots & \dots & \dots\\ m^1_{ab} & m^2_{ab} & m^3_{ab}\\ m^1_{ba} & m^2_{ba} & m^3_{ba}\\ \dots & \dots & \dots\\ m^1_{be} & m^2_{be} & m^3_{be}\\ m^1_{eb} & m^2_{eb} & m^3_{eb}\\ \dots & \dots & \dots\\ m^1_{bc} & m^2_{bc} & m^3_{bc}\\ m^1_{cb} & m^2_{cb} & m^3_{cb}\\ \dots & \dots & \dots\\ m^1_{cf} & m^2_{cf} & m^3_{cf}\\ m^1_{fc} & m^2_{fc} & m^3_{fc} \end{bmatrix}\begin{array}{l} \mathit{varras\ \ 1\ \ post}\\ \\ \dots\\ \mathit{varras\ \ 2\ \ riiv}\\ \\ \dots\\ \mathit{varras\ \ 3\ \ post}\\ \\ \dots\qquad ;\\ \mathit{varras\ \ 4\ \ riiv}\\ \\ \dots\\ \mathit{varras\ \ 5\ \ post}\\ \\ \end{array}\mathbf{mp}=\begin{bmatrix} m^o_{da}\\ m^o_{ad}\\ \dots\\ m^o_{ab}\\ m^o_{ba}\\ \dots\\ m^o_{be}\\ m^o_{eb}\\ \dots\\ m^o_{bc}\\ m^o_{cb}\\ \dots\\ m^o_{cf}\\ m^o_{fc} \end{bmatrix} \qquad (11.72)
$$

ehk

$$
\mathbf{mx}=\begin{bmatrix} 0*eli\,(1) & 0*eli\,(1) & 0*eli\,(1)*deta\,(1)\\ 3*eli\,(1) & 0*eli\,(1) & -3*eli\,(1)*deta\,(1)\\ \dots & \dots & \dots\\ 4*eli\,(2) & 2*eli\,(2) & 0*eli\,(2)*deta\,(2)\\ 2*eli\,(2) & 4*eli\,(2) & 0*eli\,(2)*deta\,(2)\\ \dots & \dots & \dots\\ 0*eli\,(3) & 4*eli\,(3) & -6*eli\,(3)*deta\,(1)\\ 0*eli\,(3) & 2*eli\,(3) & -6*eli\,(3)*deta\,(1)\\ \dots & \dots & \dots\\ 0*eli\,(4) & 3*eli\,(4) & -3*eli\,(4)*deta\,(4)\\ 0*eli\,(4) & 0*eli\,(4) & 0*eli\,(4)*deta\,(4)\\ \dots & \dots & \dots\\ 0*eli\,(5) & 0*eli\,(5) & 0*eli\,(5)*deta\,(5)\,;\\ 0*eli\,(5) & 0*eli\,(5) & -3*eli\,(5)*deta\,(5) \end{bmatrix}\begin{array}{l} \mathit{varras\ \ 1\ \ post}\\ \\ \dots\\ \mathit{varras\ \ 2\ \ riiv}\\ \\ \dots\\ \mathit{varras\ \ 3\ \ post}\\ \\ \dots\qquad ;\\ \mathit{varras\ \ 4\ \ riiv}\\ \\ \dots\\ \mathit{varras\ \ 5\ \ post}\\ \\ \end{array}\mathbf{mp}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \dots\\ Mab\\ Mba\\ \dots\\ Mbe\\ Meb\\ \dots\\ 0\\ 0\\ \dots\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} \qquad (11.73)
$$

Jaotatud ja koondatud koormusest tekkivad kinnitusmomendid on arvutatud funktsiooni kinnmom1.m C.19 lk 265 abil tabelis 11.1 toodud valemitega. Tulemused on kantud joonisele 11.23.



Joonis 11.23. Varda kinnitusmomendid koormusest II

Võrrandisüsteemi vasku poole kordajad arvutame Octave'iga järgmiselt:

$$\begin{aligned}
r(1,1) &= 3*eli(1)+4*eli(2)\\
r(1,2) &= 2*eli(2)\\
r(2,1) &= r(1,2)\\
r(2,2) &= 4*eli(2)+4*eli(3)+3*eli(4)\\
r(1,3) &= -3*eli(1)*deta(1)\\
r(3,1) &= r(1,3)\\
r(2,3) &= -6*eli(6)*deta(6)-3*eli(4)*deta(4)\\
r(3,2) &= r(2,3)\\
r(3,3) &= 3*eli(1)*deta(1)^2+12*eli(3)*deta(3)^2+3*eli(4)*deta(4)^2+\\
&\quad +3*eli(5)*deta(5)^2
\end{aligned} \tag{11.74}$$

Võrrandisüsteemi parem pool. Kordajate leidmiseks kasutame Octave'i funktsiooni kinnmom1.m C.19 lk 265, mis on kirjutatud tabeli 11.1 alusel.

$$\begin{aligned}
r(1p) &= Mab+4\\
r(2p) &= Mba+Mbe\\
r(3p) &= -(Meb+Mbe+30*1.8)*deta(3)
\end{aligned} \tag{11.75}$$

Võrrandisüsteemi (11.76)

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1p}\\ r_{2p}\\ r_{3p} \end{bmatrix} \tag{11.76}$$

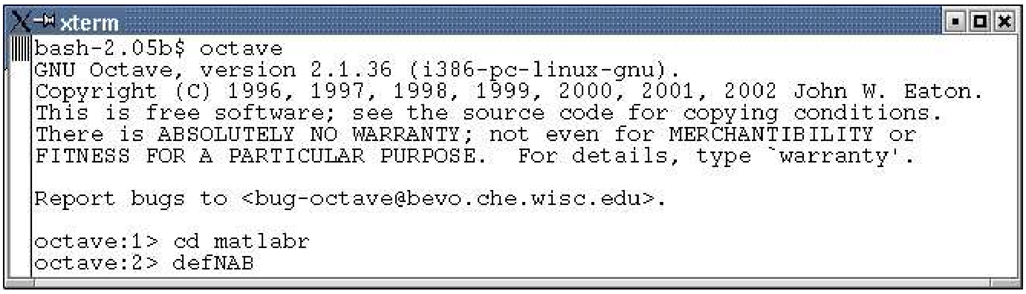
ehk

$$\mathbf{r}*\mathbf{x}=\mathbf{r_p} \tag{11.77}$$

koostamiseks ja lahendamiseks kasutame Octave'i (vt joonis 11.24 ja programm C.18 lk 263). Lahendamisel saadud tulemuste salvestamiseks avame päeviku "diary defNAB.out" (vt Päevik 11.1).

Päevik 11.1 `%defNAB.out`

```
octave:2> diary defNAB.out
octave:3> diary on
octave:4> defNAB
```



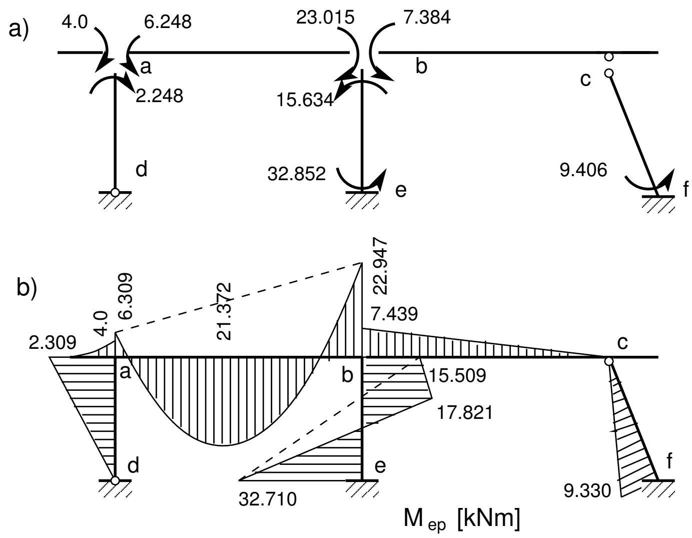
Joonis 11.24. Deformatsioonimeetod *Octave*'iga

```
varraste_pikkused_l =

  3.0000  6.0000  3.0000  6.0000  3.1623

varraste_ristloigete_jaikused_EI =

  1  3  1  3  1

varraste_poordenurdad_deta =

   1.00000   0.00000   1.00000  -0.16670   1.00000

varraste_jaikused_i =

  1.00000  1.50000  1.00000  1.50000  0.94868

mx =

   0.00000   0.00000   0.00000
   3.00000   0.00000  -3.00000
   6.00000   3.00000   0.00000
   3.00000   6.00000   0.00000
   0.00000   4.00000  -6.00000
   0.00000   2.00000  -6.00000
   0.00000   4.50000   0.75015
   0.00000   0.00000   0.00000
   0.00000   0.00000   0.00000
   0.00000   0.00000  -2.84605

Vb = 24
Va = 24
Vb = 18
Va = 12
mp =

    0.00000
    0.00000
  -24.00000
   24.00000
```

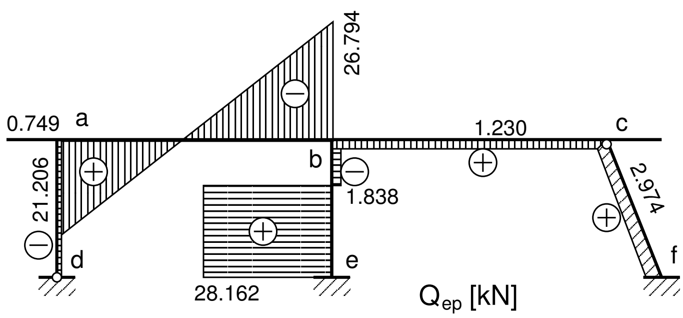
```
   12.96000
   -8.64000
    0.00000
    0.00000
    0.00000
    0.00000

r =

    9.0000    3.0000   -3.0000
    3.0000   14.5000   -5.2499
   -3.0000   -5.2499   17.9711

rp =

  -20.000
   36.960
  -58.320

x =

   4.0482
  -2.1995
   3.2785

M =

    0.00000
    2.30929
   -6.30929
   22.94744
  -15.50887
  -32.70980
   -7.43858
    0.00000
    0.00000
   -9.33064

octave:5> diary off
```

%%%%%%%%

Arvutusega saadud momendid varraste otstes (vt Päevik 11.1) kanname joonisele 11.25 a. Joonise 11.25 a põhjal joonestame momendi epüüri 11.25 b. Põikjõu epüür on joonisel 11.26.



Joonis 11.25. Momendid varraste otstes



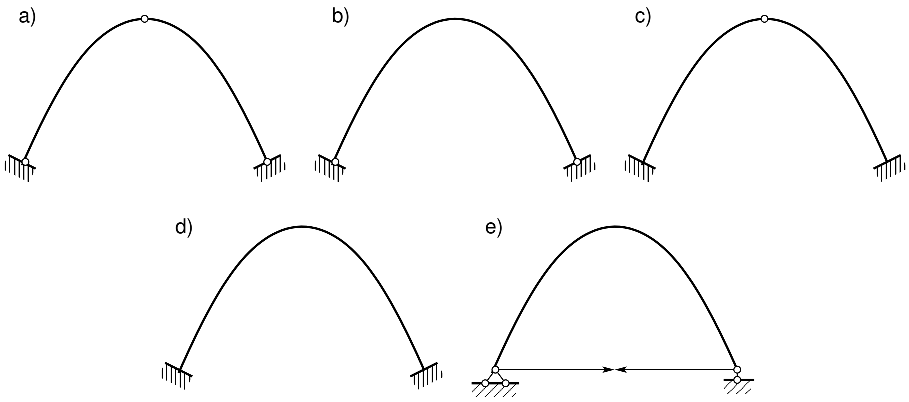
Joonis 11.26. Põikjõu epüür

Peatükk 12

Kaared ja võlvid

12.1 Kaarkonstruktsioonid

Olenevalt liigendite arvust nimetatakse neid kolme, kahe, ühe liigendiga või liigenditeta kaarteks (joonis 12.1). Kolme liigendiga kaar on staatikaga määratav, teised kaared on staatikaga määramatud. Staatiliselt määramatu kaare sisejõud olenevad kaare telje



Joonis 12.1. Kaared

kujust ja ka ristlõike mõõtmetest. Kaare ristlõike esialgsed mõõtmed valitakse ligikaudsete valemitega või kogemuste põhjal. Lõplikud ristlõike mõõtmed ja telje kuju peavad vastama arvutuslike sisejõudude jaotusele (insener valib ja siis kontrollib arvutustega). Sümmeetriliste kaarte puhul võib ristlõike inertsimomendi muutuse piki kaare telge valida järgmiste avaldistega [Rää75]:

- liigenditeta kaare jaoks

$$\frac{I_c}{I} = 1 - (1 - n)\left(\frac{x}{l_1}\right)^r \tag{12.1}$$

- kahe liigendiga kaare jaoks

$$\frac{I_c}{I} = 1 + (1 - n)\left(\frac{x}{l_1}\right)^r \tag{12.2}$$

$$I = I_c \cos\varphi \tag{12.3}$$
$$n = \frac{I_c}{I_k \cos\varphi_k} \tag{12.4}$$

kus x – kaare telje abstsiss (koordinaatide alguspunkt lukuristlõike raskuskeskmes);
φ – nurk kaare telje puutuja ja horisontaali vahel;
I_c – lukuristlõike inertsimoment;
I – ristlõike, mille abstsiss on x, inertsimoment;
l_1 – pool sillet;
l_k – kaare kannaristlõike inertsimoment;
φ_k – nurk telje puutuja ja horisontaali vahel kaare kannas;
Enamikul juhtudel võetakse valemites (12.1), (12.2), $r = 1$ ja valemis (12.2) sageli ka $n = 1$.

Väikese kõverusega kaarkonstruktsioonides ($\frac{\varrho}{h} > 5$, milles ϱ on kõverusraadius ja h kaare ristlõike kõrgus) arvutatakse siirded järgmise avaldisega:

$$\Delta_{ip} = \int_0^{l_j} \left(\frac{m_i M_p}{EI} + \frac{n_i N_p}{EA} - \frac{m_i N_p}{EA\varrho} - \frac{n_i M_p}{EA\varrho} + k_j \frac{q_i Q_p}{EA} \right) ds \tag{12.5}$$

Avaldises (12.5) on kolmanda ja neljanda liikme ees miinus, sest *kaarskeemis võetakse tõmbejõud negatiivsena.*

12.2 Kahe liigendiga kaar

Kahe liigendiga kaar (joonis 12.2 a) on staatikaga ühekordselt määramatu. Põhiskeemiks võetakse kõver tala (joonis 12.2 b). Lisatundmatuks võetakse toe b toereaktsiooni horisontaalne komponent $X_1 = H$.
Ühiktundmatust X_1 tekivad sisejõud

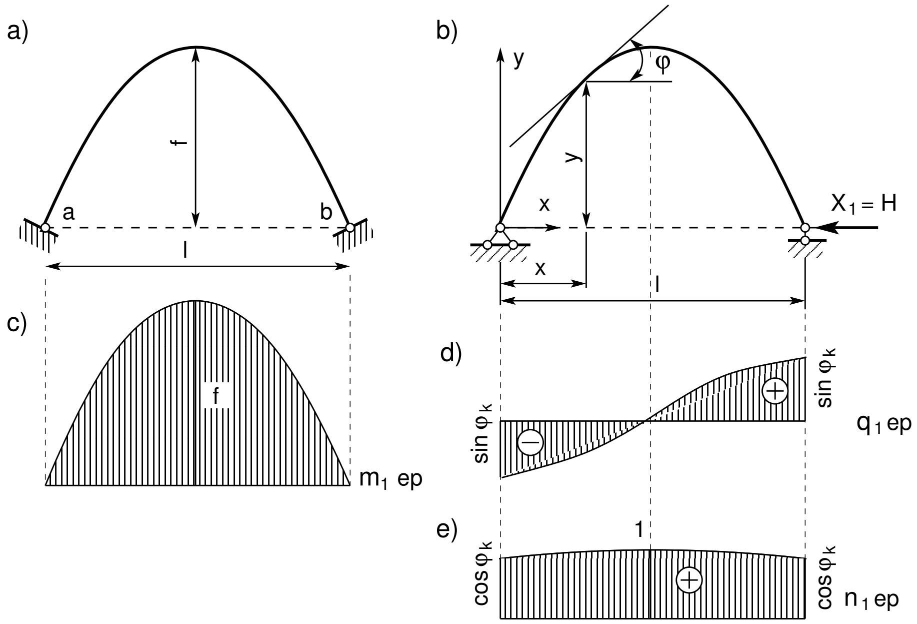
$$m_1 = -y \tag{12.6}$$
$$q_1 = -\sin\varphi \tag{12.7}$$
$$n_1 = \cos\varphi \tag{12.8}$$

mille epüürid on joonistel 12.2 c, 12.2 d, 12.2 e.
Vertikaalsest koormusest põhjustatud sisejõud põhiskeemis arvutatakse valemitega

$$M_p^0 = M^0 \tag{12.9}$$
$$Q_p^0 = Q^0 \cos\varphi \tag{12.10}$$
$$N_p^0 = Q^0 \sin\varphi \tag{12.11}$$

kus M^0 ja Q^0 on paindemoment ja põikjõud kaarele vastavas lihttalas.
Jõumeetodi kanooniline võrrand

$$\delta_{1\,1} X_1 + \Delta_{1\,p} = 0 \tag{12.12}$$



Joonis 12.2. Kahe liigendiga kaar

kus $\delta_{1\,1}$ ja $\Delta_{1\,p}$ leidmisel arvestatakse pikijõu mõju.

$$\delta_{1\,1} = \int_0^l \frac{m_1 \cdot m_1}{EI} ds + \int_0^l \frac{n_1 \cdot n_1}{EA} ds + k \int_0^l \frac{q_1 \cdot q_1}{GA} ds \tag{12.13}$$

$$\Delta_{1\,p} = \int_0^l \frac{m_1 \cdot M_p^0}{EI} ds + \int_0^l \frac{n_1 \cdot N_p^0}{EA} ds + k \int_0^l \frac{q_1 \cdot Q_p^0}{GA} ds \tag{12.14}$$

Avaldistes (12.13) ja (12.14) ei ole arvestatud kõveruse $\frac{1}{\varrho}$ mõju.
Kui avaldiste (12.13), (12.14)) analüütiline integreerimine osutub tülikaks, kasutatakse numbrilist integreerimist.
Pärast lisatundmatu X_1 leidmist arvutatakse sisejõud järgmiste avaldistega:

- koormusest

$$M_p = M_p^0 - y \cdot X_{1\,p} \tag{12.15}$$
$$Q_p = Q_p^0 - \sin\varphi \cdot X_{1\,p} \tag{12.16}$$
$$N_p = Q_p^0 + \cos\varphi \cdot X_{1\,p} \tag{12.17}$$

- temperatuuri muutusest

$$M_t = -y \cdot X_{1\,t} \tag{12.18}$$
$$Q_t = -\sin\varphi \cdot X_{1\,t} \tag{12.19}$$
$$N_t = \cos\varphi \cdot X_{1\,t} \tag{12.20}$$

- tugede siiretest

$$M_r = -y \cdot X_{1\,r} \tag{12.21}$$
$$Q_r = -\sin\varphi \cdot X_{1\,r} \tag{12.22}$$
$$N_r = \cos\varphi \cdot X_{1\,r} \tag{12.23}$$

Tõmbiga kahe liigendiga kaare (vt joonis 12.2 e) arvutamisel võib võtta tundmatuks tõmbis tekkiva tõmbejõu X_1. Võrreldes kahe liigendiga kaare arvutamisega on erinevus siirete $\delta_{1\,1}$ ja $\Delta_{1\,t}$ arvutamisel. Arvesse tuleb võtta temperatuuri muutus.

$$\delta_{1\,1} = \int_0^l \frac{m_1 \cdot m_1}{EI} ds + \int_0^l \frac{n_1 \cdot n_1}{EA} ds + k \int_0^l \frac{q_1 \cdot q_1}{GA} ds + \frac{1 \cdot l}{E_t A_t} \tag{12.24}$$
$$\Delta_{1\,t} = -(\alpha - \alpha_t)\, t_0 l - \alpha \Delta_t \int_0^l \left(\frac{y}{h\cos\varphi}\right) dx \tag{12.25}$$

Avaldistes (12.24) ja (12.25) ei ole arvestatud kõveruse $\frac{1}{\varrho}$ mõju.

12.3 Kahe liigendiga kaare arvutamise näited

Näide 12.1 *Arvutada kahe liigendiga kaare (joonis 12.3), mille pool sillet on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega* p, *horisontaalreaktsioon* H *ja sisejõudude* M, Q *ja* N *ordinaadid. Andmed:* $l = 32\,m$; $l_1 = 16\,m$; $f = 4\,m$; $A_c = 0.845\,m^2$ ($h_c = 1.3\,m; b_c = 0.65\,m$); $I_c = 0.12\,m^4$; $\frac{I_c}{I\cos\varphi} = 1$; $y = 4f\xi\xi'$; $\xi = \frac{x}{l}$; $p = 80\,\frac{kN}{m}$ *(näide on võetud raamatust [Rää75] lk 521 ja 524).*

Kaare ristlõike muutus

$$\frac{I_c}{I} = \cos\varphi \;\; ; \qquad \frac{A_c}{A} = \sqrt[3]{\cos\varphi} \tag{12.26}$$

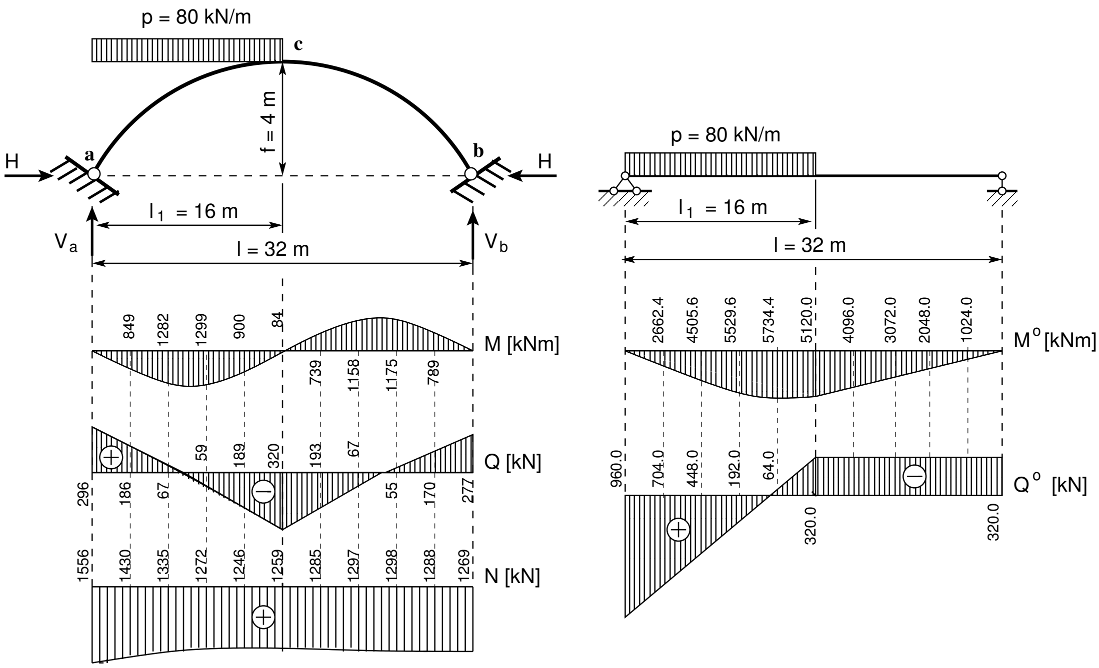
Jõumeetodi kanoonilise võrrandi kordajad $EI_c\,\delta_{1\,1}$ *ja* $EI_c\,\Delta_{1\,p}$ *arvutatakse järmiste integraalidega*

$$\begin{aligned} EI_c\,\delta_{1\,1} &= \int_0^s y^2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{I}\int_0^l \cos^2\varphi \frac{A_c}{A} ds = \\ &= \int_0^s y^2 \frac{I_c}{I} dx + \frac{I_c}{I}\int_0^l \cos\varphi \sqrt[3]{\cos\varphi}\, dx \end{aligned} \tag{12.27}$$
$$EI_c\,\Delta_{1\,p} = -\int_0^s y M_p^0 \frac{I_c}{I} ds = -\int_0^s y M_p^0 \cos\varphi\, ds = -\int_0^l y M_p^0\, dx \tag{12.28}$$

Simpsoni valemiga (7.40 lk 103) numbriliseks integreerimiseks vajalikud suurused on näidatud Octave'iga lahendamise päevikus 12.1, kus $EI_c\,\delta_{1\,1} = 277.39$ *ja* $EI_c\,\Delta_{1\,p} = -3.4953e+05$.

$$H = X_1 = -\frac{EI_c\,\Delta_{1\,p}}{EI_c\,\delta_{1\,1}} = \frac{3.4953e+05}{277.39} = 1260.1\,kN \tag{12.29}$$

Numbriliselt leitud lahend $H = 1260.1\,kN$ *(vt programm C.25 lk 275) langeb kokku analüütiliselt leitud toereaktsiooniga* $H = 1259\,kN$ *(vt õpik [Rää75] lk 521). Joonisel 12.3 toodud*



Joonis 12.3. Kahe liigendiga kaar

analüütiliselt leitud sisejõudude epüüre on võimalik võrrelda numbriliselt leitutega (vt Päevik 12.1).
Lahendamisel saadud tulemused on toodud päevikus "diary kaarSjPr1.out" (vt Päevik 12.1).

Päevik 12.1 `%kaarSjPr1.out`

```
octave:27> diary kaarSjPr1.out
octave:28> diary on
octave:29> kaarSjPr1
l = 32
f = 4
F1 = 0
F2 = 0
qz = 80
aF1 = 32
aF2 = 32
aqA = 0
aqL = 16
NT = 20
NN = 22
Ic = 0.12000
Ac = 0.84500
Vb = 320
Va = 960
EIcDelta =  -3.4953e+05
EIcdelta = 277.39
H = 1260.1
-----
  Kahe liigendiga kaar
```

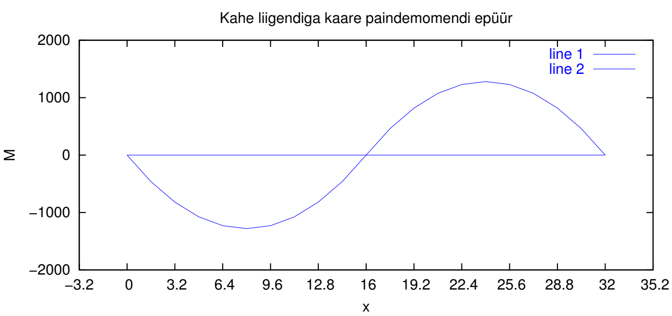
x	y	y^2	cosFi	cosFi^(1/3)	cosFi*cosFi^(1/3)
0.00000	0.00000	0.00000	0.89443	0.96349	0.86177
1.60000	0.76000	0.57760	0.91192	0.96973	0.88432
3.20000	1.44000	2.07360	0.92848	0.97557	0.90579
4.80000	2.04000	4.16160	0.94386	0.98092	0.92585
6.40000	2.56000	6.55360	0.95783	0.98574	0.94417
8.00000	3.00000	9.00000	0.97014	0.98995	0.96039
9.60000	3.36000	11.28960	0.98058	0.99348	0.97419
11.20000	3.64000	13.24960	0.98894	0.99630	0.98528
12.80000	3.84000	14.74560	0.99504	0.99834	0.99339
14.40000	3.96000	15.68160	0.99875	0.99958	0.99834
16.00000	4.00000	16.00000	1.00000	1.00000	1.00000
17.60000	3.96000	15.68160	0.99875	0.99958	0.99834
19.20000	3.84000	14.74560	0.99504	0.99834	0.99339
20.80000	3.64000	13.24960	0.98894	0.99630	0.98528
22.40000	3.36000	11.28960	0.98058	0.99348	0.97419
24.00000	3.00000	9.00000	0.97014	0.98995	0.96039
25.60000	2.56000	6.55360	0.95783	0.98574	0.94417
27.20000	2.04000	4.16160	0.94386	0.98092	0.92585
28.80000	1.44000	2.07360	0.92848	0.97557	0.90579
30.40000	0.76000	0.57760	0.91192	0.96973	0.88432
32.00000	-0.00000	0.00000	0.89443	0.96349	0.86177
32.00000	-0.00000	0.00000	0.89443	0.96349	0.86177

Lihttala sisejõud ja kahe liigendiga kaar

x	y	Qo	Mo	y*Mo
0.0000e+00	0.0000e+00	9.6000e+02	0.0000e+00	0.0000e+00
1.6000e+00	7.6000e-01	8.3200e+02	1.4336e+03	1.0895e+03
3.2000e+00	1.4400e+00	7.0400e+02	2.6624e+03	3.8339e+03
4.8000e+00	2.0400e+00	5.7600e+02	3.6864e+03	7.5203e+03
6.4000e+00	2.5600e+00	4.4800e+02	4.5056e+03	1.1534e+04
8.0000e+00	3.0000e+00	3.2000e+02	5.1200e+03	1.5360e+04
9.6000e+00	3.3600e+00	1.9200e+02	5.5296e+03	1.8579e+04
1.1200e+01	3.6400e+00	6.4000e+01	5.7344e+03	2.0873e+04
1.2800e+01	3.8400e+00	-6.4000e+01	5.7344e+03	2.2020e+04
1.4400e+01	3.9600e+00	-1.9200e+02	5.5296e+03	2.1897e+04
1.6000e+01	4.0000e+00	-3.2000e+02	5.1200e+03	2.0480e+04
1.7600e+01	3.9600e+00	-3.2000e+02	4.6080e+03	1.8248e+04
1.9200e+01	3.8400e+00	-3.2000e+02	4.0960e+03	1.5729e+04
2.0800e+01	3.6400e+00	-3.2000e+02	3.5840e+03	1.3046e+04
2.2400e+01	3.3600e+00	-3.2000e+02	3.0720e+03	1.0322e+04
2.4000e+01	3.0000e+00	-3.2000e+02	2.5600e+03	7.6800e+03
2.5600e+01	2.5600e+00	-3.2000e+02	2.0480e+03	5.2429e+03
2.7200e+01	2.0400e+00	-3.2000e+02	1.5360e+03	3.1334e+03
2.8800e+01	1.4400e+00	-3.2000e+02	1.0240e+03	1.4746e+03
3.0400e+01	7.6000e-01	-3.2000e+02	5.1200e+02	3.8912e+02
3.2000e+01	-3.5527e-15	-3.2000e+02	0.0000e+00	0.0000e+00
3.2000e+01	-3.5527e-15	-3.2000e+02	0.0000e+00	0.0000e+00

```
-----------------------------------------------------------------------
  Kaare sisejõud
------------------------------------------------------------
      N             Q             M                 x
------------------------------------------------------------
    1.5564e+03    2.9513e+02    0.0000e+00    0.0000e+00
    1.4905e+03    2.4163e+02    4.7595e+02    1.6000e+00
    1.4314e+03    1.8567e+02    8.4790e+02    3.2000e+00
    1.3796e+03    1.2740e+02    1.1159e+03    4.8000e+00
    1.3357e+03    6.7028e+01    1.2798e+03    6.4000e+00
    1.3001e+03    4.8339e+00    1.3398e+03    8.0000e+00
    1.2733e+03   -5.8848e+01    1.2958e+03    9.6000e+00
    1.2556e+03   -1.2363e+02    1.1477e+03    1.1200e+01
    1.2474e+03   -1.8906e+02    8.9573e+02    1.2800e+01
    1.2489e+03   -2.5469e+02    5.3973e+02    1.4400e+01
    1.2601e+03   -3.2000e+02    7.9722e+01    1.6000e+01
    1.2745e+03   -2.5668e+02   -3.8187e+02    1.7600e+01
    1.2857e+03   -1.9303e+02   -7.4267e+02    1.9200e+01
    1.2936e+03   -1.2954e+02   -1.0027e+03    2.0800e+01
    1.2984e+03   -6.6666e+01   -1.1618e+03    2.2400e+01
    1.3001e+03   -4.8339e+00   -1.2202e+03    2.4000e+01
    1.2989e+03    5.5574e+01   -1.1778e+03    2.5600e+01
    1.2950e+03    1.1423e+02   -1.0345e+03    2.7200e+01
    1.2888e+03    1.7087e+02   -7.9050e+02    2.8800e+01
    1.2804e+03    2.2527e+02   -4.4565e+02    3.0400e+01
    1.2701e+03    2.7730e+02    4.4767e-12    3.2000e+01
    1.2701e+03    2.7730e+02    4.4767e-12    3.2000e+01
-----------------------------------------------------------
ans = 1
ans = 2
ans = 3
ans = 4
ans = 5
octave:30> diary off
%%%%%%%%%
```

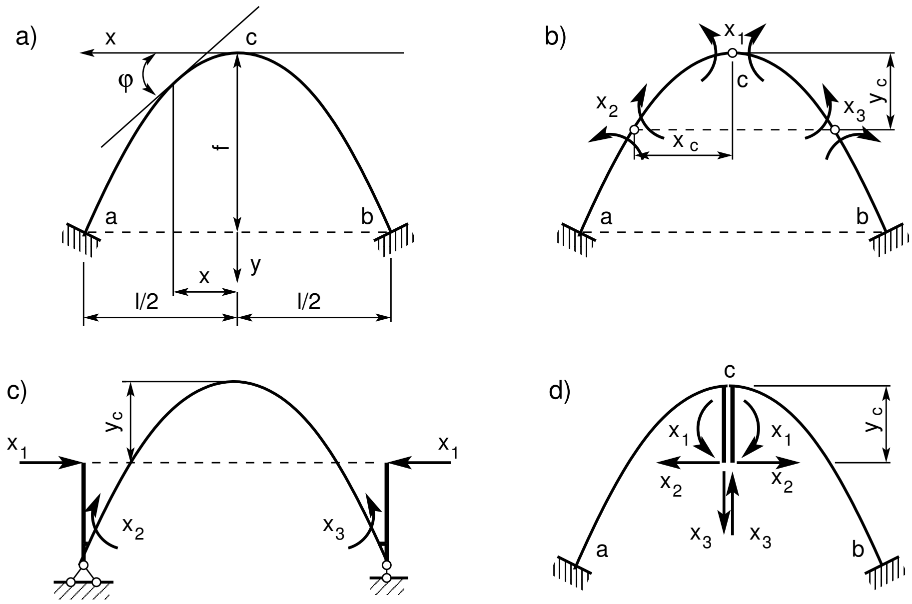
Programm C.25 joonistab ka kaare sisejõudude epüürid. Joonisel 12.4 on kahe liigendiga kaare paindemomendi epüür.



Joonis 12.4. Kahe liigendiga kaare paindemomendi epüür

12.4 Liigendita sümmeetriline kaar

Liigendita sümmeetriline kaar on kolmekordselt staatikaga määramatu (joonis 12.5). Lisatundmatu valikul on soovitatav, et võrrandisüsteemis (12.30)



Joonis 12.5. Liigendita sümmeetriline kaar

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \Delta_{3p} \end{bmatrix} = 0 \tag{12.30}$$

võrduksid kõik kõrvalpaigutised $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$ ja $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$ nulliga. Kui põhiskeemis on jäikade konsoolide otsad kaare elastsuskeskmes, siis kõrvalpaigutis $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$.

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & . & . \\ . & \delta_{22} & . \\ . & . & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \Delta_{3p} \end{bmatrix} = 0 \tag{12.31}$$

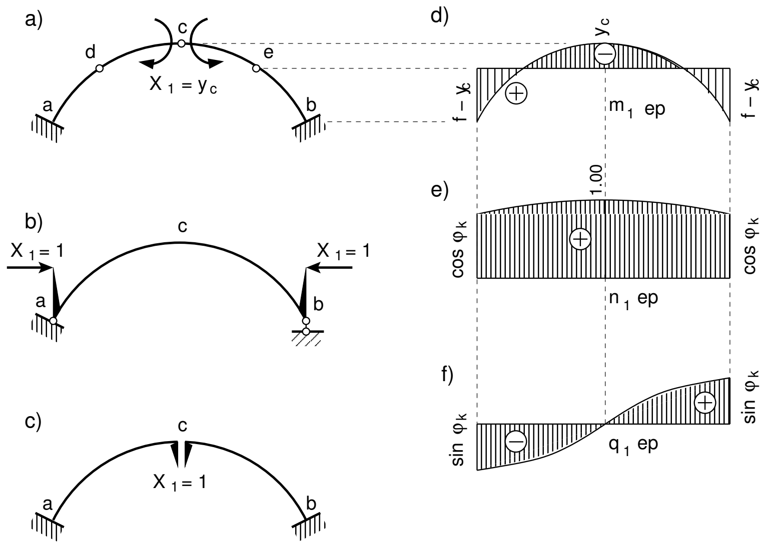
võrrandisüsteemi lahendid on

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} \\ X_2 &= -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}} \\ X_3 &= -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}} \end{aligned} \tag{12.32}$$

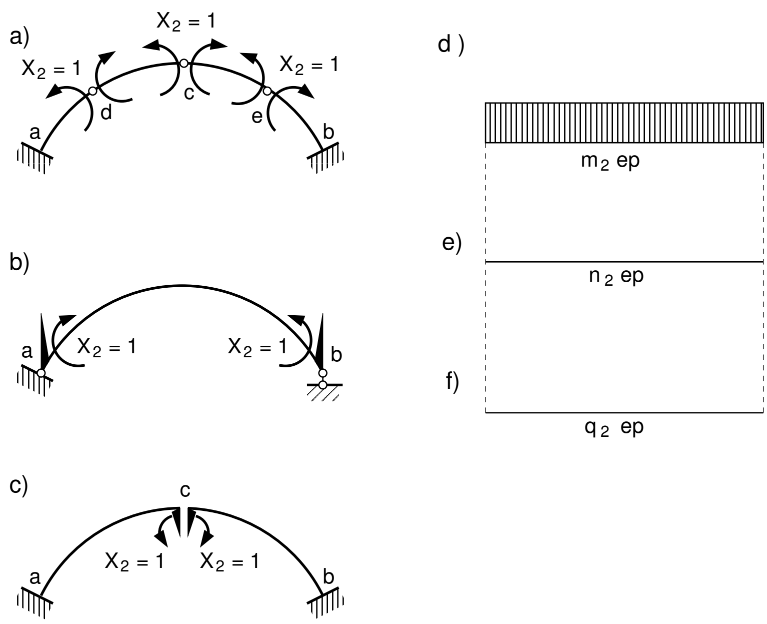
Võtame kasutusele järgmised tundmatud:

- kolme liigendiga kaares sümmeetriline tundmatu $X_1 = y_c$ (vt joonis 12.6 a), sümmeetriline grupptundmatu $X_2 = 1$ (vaata joonis 12.7 a)) ja antisümmeetriline grupptundmatu $X_3 = x_c$ (vaata joonis 12.8 a));

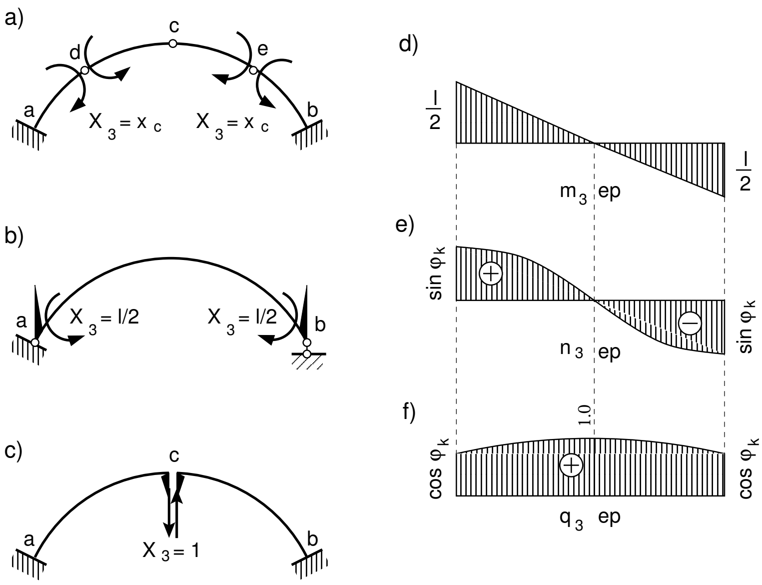
- kõvera tala puhul sümmetrilised grupptundmatud $X_1 = 1$ (vt joonis 12.6 b), $X_2 = 1$ (vt joonis 12.7 b) ja antisümmeetriline grupptundmatu $X_3 = \frac{l}{2}$ (vt joonis 12.8 b);
- kahe konsooliga põhiskeemis $X_1 = 1$ (vt joonis 12.6 c), $X_2 = 1$(vt joonis 12.7 c)), $X_3 = 1$ (vaata joonis 12.8 c).



Joonis 12.6. Liigendita kaar. Tundmatu X_1



Joonis 12.7. Liigendita kaar. Tundmatu X_2



Joonis 12.8. Liigendita kaar. Tundmatu X_3

Kõigi kolme põhiskeemi jaoks on nendest tundmatutest põhjustatud sisejõudude avaldised ühesugused [Rää75]:

$$\begin{array}{rclrclrcl} m_1 & = & y - y_c; & n_1 & = & \cos\varphi; & q_1 & = & -\sin\varphi \\ m_2 & = & 1; & n_2 & = & 0; & q_1 & = & 0 \\ m_3 & = & -x; & n_3 & = & \sin\varphi; & q_3 & = & \cos\varphi \end{array} \tag{12.33}$$

Kaare elastsuskeskme ordinaat y_c määratakse tingimusest $EI_c\delta_{1\,2} = 0$. Avaldise (12.5) abil saame

$$\begin{aligned} EI_c\delta_{1\,2} &= \int m_1 m_2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c}\int n_1 n_2 \frac{A_c}{A} ds - \\ & -\frac{I_c}{A_c}\int \frac{m_1 n_2}{\varrho}\frac{A_c}{A_c} ds - \frac{I_c}{A_c}\int \frac{n_1 m_2}{\varrho}\frac{A_c}{A_c} ds + \\ & + k\frac{E}{G}\frac{I_c}{A_c}\int q_1 q_2 \frac{A_c}{A} ds = 0 \end{aligned} \tag{12.34}$$

Arvestades avaldisi (12.33), kirjutame valemi (12.34) ringi

$$EI_c\delta_{1\,2} = \int (y - y_c)\frac{I_c}{I} ds - \frac{I_c}{I}\int \frac{\cos\varphi}{\varrho}\frac{A_c}{A_c} ds = 0 \tag{12.35}$$

Võrrandist (12.35) avaldame elastsuskeskme ordinaadi y_c

$$y_c = \frac{\int y \frac{I_c}{I} ds - \frac{I_c}{A_c}\int \frac{\cos\varphi}{\varrho}\frac{A_c}{A_c} ds}{\int \frac{I_c}{I} ds} \tag{12.36}$$

Koormusest põhjustatud siirete Δ_{1p}, Δ_{2p} ja Δ_{3p} arvutamiseks on soovitatav lahutada koormus sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks. Sümmeetrilisest koormusest saame siirded Δ_{1p} ja Δ_{2p} ning antisümmeetrilisest koormusest siirde Δ_{3p}.

$$\begin{aligned} EI_c\delta_{ij} &= \int m_i m_j \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int n_i n_j \frac{A_c}{A} ds - \\ &-2\frac{I_c}{A_c} \int \frac{m_i n_j}{\varrho} \frac{A_c}{A_c} ds + k\frac{E}{G}\frac{I_c}{A_c} \int q_i q_j \frac{A_c}{A} ds = 0 \end{aligned} \tag{12.37}$$

siin $i = j$, (j = 1, 2, 3) ja joone $y = y(x)$ kõverusraadius $\varrho = \frac{1}{\psi}$ (joone kõverus ψ_j – avaldis (1.16))

$$\varrho = \frac{1}{\psi} = \frac{\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{y''} \tag{12.38}$$

$$\begin{aligned} EI_c\Delta_{ip} &= \int m_i M_p^0 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int n_i N_p^0 \frac{A_c}{A} ds - \\ &-\frac{I_c}{A_c} \int \frac{m_i N_p^0}{\varrho} \frac{A_c}{A} ds - \frac{I_c}{A_c} \int \frac{n_i M_p^0}{\varrho} \frac{A_c}{A} ds + \\ &+k\frac{E}{G}\frac{I_c}{A_c} \int q_i Q_p^0 \frac{A_c}{A} ds \end{aligned} \tag{12.39}$$

kus M_p^0, Q_p^0, N_p^0 on paindemoment, põik- ja pikijõud staatikaga määratavas põhiskeemis, mis saadakse liigendita kaarest kolme sideme eemaldamisega.

Kui valemites (12.37) ja (12.39) kasutada sisejõudude avaldisi (12.33), saame

$$\begin{aligned} EI_c\delta_{11} &= \int (y - y_c)^2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int \cos^2\varphi \frac{A_c}{A} ds - \\ &-2\frac{I_c}{A_c} \int \frac{(y - y_c)\cos\varphi}{\varrho} \frac{A_c}{A} ds + \\ &+k\frac{E}{G}\frac{I_c}{A_c} \int \sin^2\varphi \frac{A_c}{A} ds \end{aligned} \tag{12.40}$$

$$EI_c\delta_{22} = \int \frac{I_c}{I} ds \tag{12.41}$$

$$\begin{aligned} EI_c\delta_{33} &= \int x^2 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int \sin^2\varphi \frac{A_c}{A} ds + \\ &+2\frac{I_c}{A_c} \int \frac{x\sin\varphi}{\varrho} \frac{A_c}{A} ds + \\ &+k\frac{E}{G}\frac{I_c}{A_c} \int \cos^2\varphi \frac{A_c}{A} ds \end{aligned} \tag{12.42}$$

$$\begin{aligned} EI_c\Delta_{1p} &= \int (y - y_c) M_p^0 \frac{I_c}{I} ds + \frac{I_c}{A_c} \int N_p^0 \cos\varphi \frac{A_c}{A} ds - \\ &-\frac{I_c}{A_c} \int \frac{(y - y_c) N_p^0}{\varrho} \frac{A_c}{A} ds - \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{I_c}{A_c}\int\frac{M_p^0\cos\varphi}{\varrho}\frac{A_c}{A}ds- \\
& -k\frac{E}{G}\frac{I_c}{A_c}\int Q_p^0\sin\varphi\frac{A_c}{A}ds \qquad (12.43)\\
EI_c\Delta_{2p} &= \int M_p^0\frac{I_c}{I}ds-\frac{I_c}{A_c}\int\frac{N_p^0}{\varrho}\frac{A_c}{A}ds \qquad (12.44)\\
EI_c\Delta_{3p} &= -\int xM_p^0\frac{I_c}{I}ds+\frac{I_c}{A_c}\int N_p^0\sin\varphi\frac{A_c}{A}ds+ \\
& +\frac{I_c}{A_c}\int\frac{xN_p^0}{\varrho}\frac{A_c}{A}ds-\frac{I_c}{A_c}\int\frac{M_p^0\sin\varphi}{\varrho}\frac{A_c}{A}ds+ \\
& +k\frac{E}{G}\frac{I_c}{A_c}\int Q_p^0\cos\varphi\frac{A_c}{A}ds \qquad (12.45)
\end{aligned}
$$

Pärast tundmatute leidmist (vt avaldised (12.32)) arvutatakse sisejõud

$$
\begin{aligned}
M_p &= M_p^0+(y-y_c)\,X_1+X_2-xX_3 \\
N_p &= N_p^0+X_1\cos\varphi+X_3\sin\varphi \qquad (12.46)\\
Q_p &= Q_p^0-X_1\sin\varphi+X_3\cos\varphi
\end{aligned}
$$

12.5 Liigendita kaare arvutamise näited

Näide 12.2 *Arvutada liigendita kaare (joonis 12.9), mis on koormatud jaotatud koormusega* q *(*$q_c=10\,\frac{kN}{m}$*,* $q_k=50\,\frac{kN}{m}$ *) sisejõudude* M, Q *ja* N *ordinaadid. Andmed:* $l=32\,m$*;* $l_1=16\,m$*;* $f=4\,m$*;* $A_c=0.845\,m^2$ *(*$h_c=1.3\,m; b_c=0.65\,m$*);* $I_c=0.12\,m^4$*;* $G=0.425E$*;* $\frac{I_c}{A_c}=0.142\,m^2$*. Kaare telgjooneks on ruutparabool*

$$
y=\frac{4fx^2}{l^2} \qquad (12.47)
$$

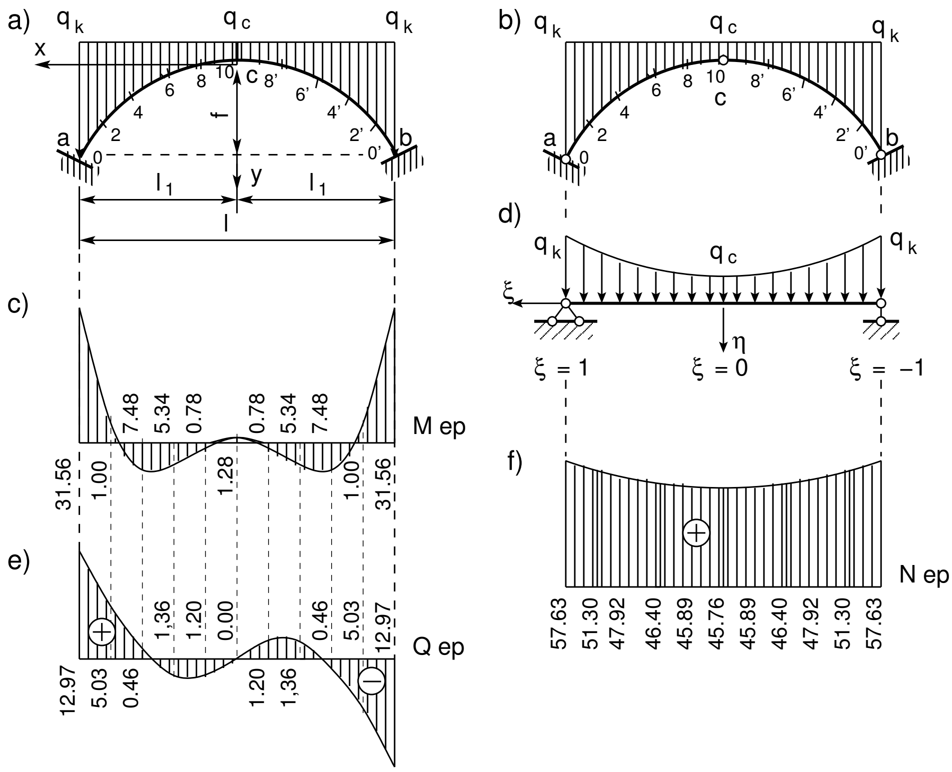
Näide on võetud raamatust [Rää75] lk 536. Kaare ristlõige on jääva laiusega ja kõrgus muutub selliselt, et

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{I_c}{\cos\varphi} \qquad (12.48)\\
A &= \frac{A_c}{\sqrt[3]{\cos\varphi}} \qquad (12.49)
\end{aligned}
$$

Kaare elastsuskeskme ordinaat y_c *arvutatakse avaldisega (12.36) kus*

$$
\frac{I_c}{I}=\cos\varphi,\qquad \frac{A_c}{A}=\sqrt[3]{\cos\varphi},\qquad ds=\frac{dx}{\cos\varphi} \qquad (12.50)
$$

$$
y_c=\frac{\int_0^{l/2}y\,dx-\frac{I_c}{A_c}\int_0^{l/2}\frac{1}{\varrho}\sqrt[3]{\cos\varphi}\,dx}{\int_0^{l/2}dx} \qquad (12.51)
$$



Joonis 12.9. Liigenditeta kaar

Kaare kõveruse ϱ leiame valemiga (12.38)

$$\varrho = \frac{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{\sqrt{\left(1+\frac{64f^2x^2}{l^4}\right)^3}}{\frac{8f}{l^2}} \tag{12.52}$$

Vastava lihttala paraboolse jaotusega koormuse saame kirjeldada avaldisega

$$\begin{aligned} q(\xi) &= N_1 \cdot q_k + N_2 \cdot q_c + N_1 \cdot q_k = \\ &= \frac{1}{2}\xi(\xi-1)\cdot q_k + \left(1-\xi^2\right)\cdot q_c + \frac{1}{2}\xi(\xi+1)\cdot q_k = \\ &= q_c + (q_k - q_c)\,\xi^2 \end{aligned} \tag{12.53}$$

siin on $\xi = \frac{x}{l/2}$ mõõtmeteta koordinaat, mille null on tala keskel, N_i on kujufunktsioonid (Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi kordajad).
Lihttala (joonis 12.9 d) paindemomendi ja põikjõu epüüri ordinaadid paraboolsest koormusest

$$\begin{aligned} M^0(\xi_k) &= V_a \cdot \left(\frac{l}{2} - x_k\right) - \int_{x_k}^{l/2} (x - x_k)\cdot q\,dx = \\ &= V_a \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\xi_k\right) - \int_{\xi_k}^{1} q(\xi)\cdot(1-\xi_k)\,\frac{l^2}{4}\,d\xi = \\ &= V_a \cdot \frac{l}{2}(1-\xi_k) - q_c \cdot \left(\frac{1}{2} - \xi_k + \frac{\xi_k^2}{2}\right)\frac{l^2}{4} - (q_k - q_c)\left(\frac{1}{4} - \frac{\xi_k}{3} + \frac{\xi_k^4}{12}\right)\frac{l^2}{4} \end{aligned} \tag{12.54}$$

$$
\begin{aligned}
Q^0(\xi_k) &= V_a - \int_{x_k}^{l/2} q\,dx = V_a - \int_{\xi_k}^{1} q\,\frac{l}{2} d\xi = \\
&= V_a - q_c \cdot (1-\xi_k)\,\frac{l}{2} - (q_k - q_c)\left(\frac{1}{3} - \frac{\xi_k^3}{3}\right)\frac{l}{2} \qquad (12.55)
\end{aligned}
$$

kus V_a on lihttala toereaktsioon antud koormusest

$$
V_a = q_c \frac{l}{2} + (q_k - q_c)\,\frac{l^2}{6} \qquad (12.56)
$$

Lihttala paindemomendi ja põikjõu epüüri ordinaatide arvutamiseks paraboolsest koormusest saame kasutada funktsiooni lihttalaPrbKSj.m (C.4 vt lk 212) ja programmi lihttalaPrbKSjPr.m (C.2 vt lk 207).
Koormusest põhjustatud siirete leidmiseks arvutatakse sisejõudude M_p^0, N_p^0, Q_p^0 epüüride ordinaadid kolme liigendiga kaare (joonis 12.9 b) jaoks, mille kaks liigendit on kannaristlõigetes. Nende sisejõudude leidmiseks kaares (paraboolse telgjoone kujuga) kasutame Octave'i funktsiooni kaarPrbSTMSj.m (C.28 vt lk 290) ja programmi kaarPrbSTMSjPr.m (C.26 vt lk 280). Viimasel programm arvutab ka elastsuskeskme ordinaadi (vt avaldist(12.36)), kus

$$
\begin{aligned}
\int y \frac{I_c}{I} ds &\approx 21.33333\,m^2 \qquad (12.57) \\
\frac{I_c}{A_c} \int \frac{\cos\varphi}{\varrho} \frac{A_c}{A_c} ds &\approx 0.62765\,m^2 \qquad (12.58) \\
\int \frac{I_c}{I} ds &= 16\,m \qquad (12.59)
\end{aligned}
$$

ja

$$
y_c = \frac{21,33333 - 0.62765}{16} = 1.3294\,m \qquad (12.60)
$$

Programmiga kaarPrbSTMSjPr.m C.26 saab arvutada õpikus [Rää75] lk 538 toodud valemitega. Toereaktsioonid:

$$
\begin{aligned}
V_{ap}^0 &= q_c \frac{l}{2} + \frac{1}{3}(q_k - q_c)\,\frac{l}{2} = 1 \cdot 16 + \frac{16}{3} \cdot 4 = \frac{1120}{3}\,kN \qquad (12.61) \\
H_p^0 &= \left[1120 \cdot \frac{16}{3} - 16 \cdot 8.0 - \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot \frac{16}{3}\right]/4 = \frac{1600}{3}\,kN \qquad (12.62)
\end{aligned}
$$

Pikijõud lukuliigendis on $N_{cp}^0 = H_p^0$.
Sisejõud staatikaga määratavas põhiskeemis:

$$
\begin{aligned}
M_{xp}^0 &= N_{cp}^0 y - q_c \frac{x^2}{2} - 4\,(q_x - q_c)\,\frac{x^4}{12 \cdot l^2} = \\
&= \frac{1600}{3} y - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{768} \qquad (12.63) \\
N_{xp}^0 &= N_{cp}^0 \cos\varphi + \left[q_c x + 4\,(q_x - q_c)\,\frac{x^3}{3 \cdot l^2}\right] \sin\varphi = \\
&= \frac{1600}{3} \cos\varphi + \left(x + \frac{x^3}{192}\right) \sin\varphi \qquad (12.64) \\
Q_{xp}^0 &= -\frac{1600}{3} \sin\varphi + \left(x + \frac{x^3}{192}\right) \cos\varphi \qquad (12.65)
\end{aligned}
$$

Siirete $EI_c\delta_{11}$ ja $EI_c\delta_{22}$ arvutamisel avaldistega (12.40), (12.41) ja (12.43), (12.44) kasutame seoseid (12.50)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}EI_c\delta_{11} &= \int_0^{l/2} (y-y_c)^2\,dx + \frac{I_c}{A_c}\int_0^{l/2} \cos\varphi\sqrt[3]{\cos\varphi}\,dx + \\
&+ k\frac{E}{G}\frac{I_c}{A_c}\int_0^{l/2} \sin^2\varphi\, tg\,\varphi\sqrt[3]{\cos\varphi}\,dx \qquad (12.66)\\
\frac{1}{2}EI_c\delta_{22} &= \int_0^{l/2} dx = 16\,m \qquad (12.67)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}EI_c\Delta_{1p} &= \int_0^{l/2} (y-y_c)\,M_p^0\,dx + \frac{I_c}{A_c}\int_0^{l/2} N_p^0\sqrt[3]{\cos\varphi}\,dx - \\
&- k\frac{E}{G}\frac{I_c}{A_c}\int_0^{l/2} Q_p^0 tg\,\varphi\sqrt[3]{\cos\varphi}\,dx \qquad (12.68)\\
\frac{1}{2}EI_c\Delta_{2p} &= \int_0^{l/2} M_p^0\,dx \qquad (12.69)
\end{aligned}
$$

Avaldistes (12.66)–(12.69) ei ole arvestatud kõveruse $\frac{1}{\varrho}$ mõju.
Programmiga kaarPrbSTMSjPr.m C.26 arvutatud võrrandisüsteemi kordajad

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{1}{2}EI_c\delta_{11} &=& 25.407\,m \\
\frac{1}{2}EI_c\delta_{22} &=& 16\,m \\
\frac{1}{2}EI_c\Delta_{1p} &=& 1929.9\,kNm^2 \\
\frac{1}{2}EI_c\Delta_{2p} &=& 1820.3\,kNm^2
\end{array} \qquad (12.70)
$$

Võrrandisüsteemi lahend

$$
X_1 = -75.959\,kNm; \qquad X_2 = -113.77\,kNm; \qquad X_3 = 0 \qquad (12.71)
$$

Liigenditeta kaare paindemomendi M_p, normaaljõu N_p ja põikjõu Q_p epüüri ordinaadid arvutame järgmiste valemite abil:

$$
\begin{array}{rcl}
M_p &=& M_p^0 + (y-y_c)\,X_1 + X_2 - xX_3 \\
N_p &=& N_p^0 + X_1\cos\varphi + X_3\sin\varphi \\
Q_p &=& Q_p^0 - X_1\sin\varphi + X_3\cos\varphi
\end{array} \qquad (12.72)
$$

programmiga C.26. Programm C.26 joonestab ka nende sisejõudude epüürid.

Osa III

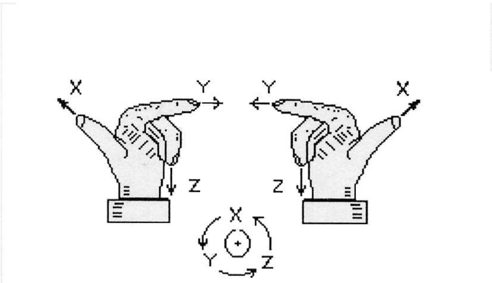
Lisad

Lisa A

Mõisteid vardateooriast

A.1 Kohalik ja üldteljestik

Varraskonstruktsiooni iga vardaga seostatakse teljestik nii, et x-telg ühtib varda teljega (vt joonis 7.1, teljed x^* ja z^*). Nimetame neid kohalikeks teljestikeks. Konstruktsiooni varraste asukoha ja nende suuna kirjeldamiseks kasutame üldteljestikku (teljed x ja z). Kasutame ainult parema käe teljestikku (joonis A.1). Vaadates telje positiivsest otsast, loeme pööret positiivseks z-teljest x-telje suunas, x-teljest y-telje suunas ja y-teljest z-telje suunas. Joonisel A.1 on näidatud nii parema käe kui ka vasaku käe teljestik. Tasapinnaliste konstruktsioonide kirjeldamisel vaatame y-telje positiivsest otsast, nii näeme x- ja z-telge. Positiivne pöördenurk on z-teljest x-telje suunas. Parema käe teljestiku puhul on positiivne pööre vastupäeva. Vasaku käe teljestiku korral on positiivne pööre päripäeva. Siirete ja jõuvektorite kirjeldamiseks kohalikes ja üldkoordinaatides on vajalikud koordinaatide teisendused.

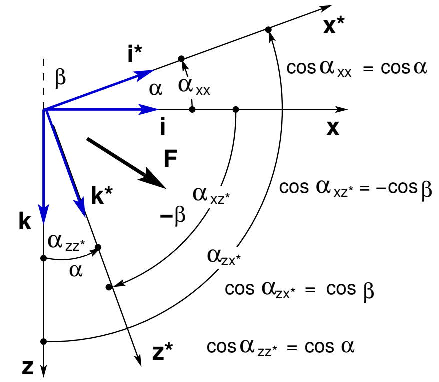


Joonis A.1. Vasaku ja parema käe teljestik

Joonisel A.1 on näidatud positiivse pöördenurga suund. Vaadates telje positiivsest otsast, loeme pööret positiivseks z-teljest x-telje suunas, x-teljest y-telje suunas ja y-teljest z-telje suunas.

A.2 Koordinaatide teisendus

Koordinaatide teisendusvalemite tuletamiseks vaatleme joonist A.2. Olgu koordinaadid xyz üldkoordinaadid ja $x^*y^*z^*$ kohalikud koordinaadid. Vaatleme veel parema käe kolmikuid $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ja $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*$. Need on ühikvektorite kolmikud, mis määravad ära koordinaattelgede suunad. Joonisel A.2 on ühikvektorid $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{j}^*$ suunatud vaataja poole.



Joonis A.2. Koordinaatide teisendus

Vektori $\vec{F}$ projektsioonid telgedele xz on F_x, F_z ja telgedele x^*x^* on F_x^*, F_z^*. Seega

$$\vec{\mathbf{F}} = F_x \cdot \vec{\mathbf{i}} + F_z \cdot \vec{\mathbf{k}} = F_x^* \vec{\mathbf{i}^*} + F_z^* \vec{\mathbf{k}^*}, \qquad \begin{cases} \cdot \vec{\mathbf{i}^*} \\ \cdot \vec{\mathbf{k}^*} \end{cases}, \quad \begin{cases} \cdot \vec{\mathbf{i}} \\ \cdot \vec{\mathbf{k}} \end{cases} \tag{A.1}$$

Korrutame avaldise (A.1) vektoriga $\vec{\mathbf{i}^*}$ ja vektoriga $\vec{\mathbf{k}^*}$. Võtame arvesse, et risti olevate vektorite skalaarkorrutis (*sisekorrutis*) on null. Saame

$$\begin{array}{rclclcl} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{i}^*} & = & F_x^* & = & F_x \cdot \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{i}^*} & + & F_z \cdot \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{i}^*} \\ \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{k}^*} & = & F_z^* & = & F_x \cdot \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{k}^*} & + & F_z \cdot \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{k}^*} \end{array} \tag{A.2}$$

Pöördseoste leidmiseks korrutame avaldist (A.1) vektoriga $\vec{\mathbf{i}}$ ja vektoriga $\vec{\mathbf{k}}$. Pöördseosed on

$$\begin{array}{rclclcl} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{i}} & = & F_x & = & F_x^* \cdot \vec{\mathbf{i}^*} \cdot \vec{\mathbf{i}} & + & F_z^* \cdot \vec{\mathbf{k}^*} \cdot \vec{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{k}} & = & F_z^* & = & F_x^* \cdot \vec{\mathbf{i}^*} \cdot \vec{\mathbf{k}} & + & F_z^* \cdot \vec{\mathbf{k}^*} \cdot \vec{\mathbf{k}} \end{array} \tag{A.3}$$

Ühikvektorite skalaarkorrutis võrdub nende positiivsete suundade vahelise nurga koosinusega

$$\begin{array}{rclcl} \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{i}^*} & = & \vec{\mathbf{i}^*} \cdot \vec{\mathbf{i}} & = & \cos\alpha_{xx^*}, \\ \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{k}^*} & = & \vec{\mathbf{k}^*} \cdot \vec{\mathbf{k}} & = & \cos\alpha_{zz^*}, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{k}^*} & = & \cos\alpha_{xz^*} \\ \vec{\mathbf{i}^*} \cdot \vec{\mathbf{k}} & = & \cos\alpha_{zx^*} \end{array} \tag{A.4}$$

Telje x^* suunakoosinused tähistame järgmiselt $\cos\alpha_{xx^*} = \cos\alpha$ ja $\cos\alpha_{zx^*} = \cos\beta$ ($\cos\beta = \cos(90^o + \alpha) = -\sin\alpha$). Jooniselt A.2 näeme, et

$$\begin{array}{rcl} \cos\alpha_{xx^*} & = & \cos\alpha, \\ \cos\alpha_{zz^*} & = & \cos\alpha, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \cos\alpha_{zx^*} & = & \cos\beta \\ \cos\alpha_{xz^*} & = & -\cos\beta \end{array} \tag{A.5}$$

Varda lõpu ja alguse koordinaatide (joonis 7.1) x_L, z_L, x_A, z_A järgi saab need suunakoosinused arvutada

$$\cos\alpha = \frac{x_L - x_A}{l} \tag{A.6}$$

$$\cos\beta = \frac{z_L - z_A}{l} \tag{A.7}$$

kus l on varda pikkus

$$l = \sqrt{(z_L - z_A)^2 + (x_L - x_A)^2} \tag{A.8}$$

Nüüd avaldame koordinaatteisendused järgmiselt:

$$\begin{bmatrix} F_x^* \\ F_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ -\cos\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\cos\beta \\ \cos\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x^* \\ F_z^* \end{bmatrix} \tag{A.10}$$

Võrreldes avaldistes (A.9) ja (A.10) koordinaatide teisendusmaatrikseid, näeme, et nendes on read ja veerud ära vahetatud, s.t ühe saab teisest *transponeerimisel*. Asendades võrrandis (A.9) F_x ja F_z nende avaldistega võrrandis (A.10), saame maatrikskorrutise

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ -\cos\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\cos\beta \\ \cos\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.11}$$

Siin annab maatriksi korrutamine tema transponeeritud kujuga ühikmaatriksi. Selliseid maatrikseid nimetatakse *ortogonaalseteks maatriksiteks*. Nendel on hea omadus, et pöördmaatriks võrdub tema transponeeritud kujuga (mõlemal juhul on korrutiseks ühikmaatriks).

A.3 Varda tööd

Varda tööde leidmiseks kasutame ositi integreerimise valemit (A.12)

$$\boxed{\int_a^b u dv = uv \mid_a^b - \int_a^b v du} \tag{A.12}$$

A.3.1 Varda töö pikkel

Kirjutame pikijõu diferentsiaalseose

$$\frac{dN_x}{dx} = -q_x(x) \tag{A.13}$$

ehk

$$\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) = -q_x(x) \tag{A.14}$$

kus $N_x = EA\frac{du}{dx}$.
Korrutame avaldise (A.14) suvalise siirdega $\hat{u}$ ja integreerime üle tala pikkuse l

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)\hat{u}dx = -\int_a^b q_x(x)\,\hat{u}dx \tag{A.15}$$

Võrrandi (A.15) parempoolne liige väljendab väliskoormuse q_x tööd W_v siirdel $\hat{u}$. On võimalik näidata, et koondkoormuse F_{xi} töö varda telje punkti i siirdel $\hat{u}_i$ on $F_{xi}\hat{u}_i$. Seega

$$W_v = \int_a^b q_x(x)\,\hat{u}dx + F_{xi}\hat{u}_i \tag{A.16}$$

Võrrandi (A.15) vasakpoolset avaldist integreerime ositi valemi (A.12) järgi, võttes u ja dv järgmiselt:

$$\int_a^b \underbrace{\hat{u}}_{u}\underbrace{\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)dx}_{dv}$$

saame avaldise

$$\int_a^b \hat{u}d\left(EA\frac{du}{dx}\right) = \underbrace{\left(EA\frac{du}{dx}\right)}_{N_x}\hat{u}\,|_a^b - \int_a^b \underbrace{\left(EA\frac{du}{dx}\right)}_{N_x}\underbrace{\frac{d\hat{u}}{dx}}_{\hat{\lambda}}dx \tag{A.17}$$

Võrrandi (A.17) parema poole esimene liige väljendab rajajõudude $\overleftrightarrow{N}_x$ tööd W_r rajasiiretel $\hat{u}$. Võrrandi (A.17) parema poole teine liige kirjeldab sisejõudude tööd W_s. Võttes arvesse välisjõudude töö avaldise (A.16) ja rajajõudude töö avaldise (A.17), võib integraali (A.15) kirjutada kujul

$$\underbrace{\overleftrightarrow{N}_x\,\hat{u}}_{W_r}\,|_a^b \underbrace{-\int_a^b N_x\hat{\lambda}dx}_{W_s} = -\,(\underbrace{\int_a^b q_x(x)\,\hat{u}dx + F_{xi}\hat{u}_i}_{W_v}) \tag{A.18}$$

Kui vaadelda avaldises (A.18) $\hat{u}$-d kui virtuaalsiiret, siis väljendab see avaldis virtuaalsiirete printsiipi.
Jätkame võrrandi (A.17) viimase liikme ositi integreerimist

$$-\int_0^l \underbrace{\left(EA\frac{d\hat{u}}{dx}\right)}_{u} \underbrace{\frac{du}{dx}}_{dv} dx = -\underbrace{\left(EA\frac{d\hat{u}}{dx}\right)}_{\hat{N}_x} u\,|_0^l + \int_0^l \frac{d}{dx}\underbrace{\left(EA\frac{d\hat{u}}{dx}\right)}_{\hat{N}_x} udx \tag{A.19}$$

Võttes arvesse saadud avaldise (A.19), võime avaldise (A.18) kirjutada kujul

$$\underbrace{\overset{\leftrightarrow}{N}_x\,\hat{u}}_{W_r}|_0^l - \underbrace{\overset{\leftrightarrow}{\hat{N}}_x\,u}_{\hat{W}_r}|_0^l + \int_0^l \frac{d}{dx}\underbrace{\left(EA\frac{d\hat{u}}{dx}\right)}_{\hat{N}_x} udx = -\underbrace{\int_0^l q_x(x)\,\hat{u}dx - F_{xi}\hat{u}_i}_{W_v} \tag{A.20}$$

Võrrandi (A.20) vasaku poole viimase liikme sisu selgitamiseks võtame vaatluse alla teise (II) koormusolukorra. Võrrandi (A.15), (A.16) eeskujul saame järgmise võrrandi:

$$\int_0^l \frac{d}{dx}\left(EA\frac{d\hat{u}}{dx}\right) udx = -\int_0^l \hat{q}_x(x)\,udx - \hat{F}_{xi}u_i \tag{A.21}$$

Võrranditest (A.20) ja (A.21) saab

$$\underbrace{\overset{\leftrightarrow}{N}_x\,\hat{u}}_{W_r^I}|_0^l + \underbrace{\int_0^l q_x(x)\,\hat{u}dx + F_{xi}\hat{u}_i}_{W_v^I} = \underbrace{\overset{\leftrightarrow}{\hat{N}}_x\,u}_{\hat{W}_r^{II}}|_0^l + \underbrace{\int_0^l \hat{q}_x(x)\,udx + \hat{F}_{xi}u_i}_{\hat{W}_v^{II}} \tag{A.22}$$

tööde vastastikkuse teoreemi tõestuse välis- ja rajajõudude kohta pikkel. Sisejõudude tööde vastastikkuse teoreemi tõestamiseks kirjutame virtuaalsiirete printsiibi (A.18) ringi järgmisele kujule

$$-W_s^{(p)} = W_r^{(p)} + W_v^{(p)} \tag{A.23}$$

Kuna avaldise (A.22) põhjal on esimese (I) ja teise (II) koormusolukorra tööd ($W_r^I + W_v^I = \hat{W}_r^{II} + \hat{W}_v^{II}$) võrdsed, siis on avaldise (A.23) põhjal ka sisejõudude tööd võrdsed

$$W_s^{(I)} = W_s^{(II)} \tag{A.24}$$

ehk

$$\int_0^l \underbrace{\left(EA\frac{du}{dx}\right)}_{N_x} \underbrace{\frac{d\hat{u}}{dx}}_{\hat{\lambda}} dx = \int_0^l \underbrace{\left(EA\frac{d\hat{u}}{dx}\right)}_{\hat{N}_x} \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\lambda} dx \tag{A.25}$$

Seega tööde vastastikkuse teoreem pikkel on

$$\int_0^l N_x\frac{\hat{N}_x}{EA}dx = \int_0^l \hat{N}_x\frac{N_x}{EA}dx \tag{A.26}$$

A.3.2 Varda töö paindel

Paindemomendi ja põikjõu tööde avaldise saamisel lähtume diferentsiaalseostest

$$\frac{d^2M_y}{dx_2} = \frac{dQ_z}{dx} = -q_z(x) \tag{A.27}$$

ja Bernoulli hüpoteesist

$$\varphi_y = -\frac{dw}{dx} \tag{A.28}$$

$$\psi_y = -\frac{d^2w}{d^2} \tag{A.29}$$

$$\gamma = 0 \tag{A.30}$$

ning seostest

$$M_y = \frac{EI_y d\varphi}{dx}, \qquad Q_z = \frac{dM_y}{dx} \tag{A.31}$$

$$-\frac{d^2}{dx^2}EI_y\frac{d^2w}{dx^2} = -q_z(x) \tag{A.32}$$

Nii nagu pikkejõu puhul korrutame võrrandi (A.32) siirdega $\hat{w}$ ja integreerime üle varda l

$$-\int_0^l \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}EI_y\frac{d^2w}{dx^2}\right)\hat{w}dx = -\int_0^l q_z(x)\,\hat{w}dx \tag{A.33}$$

Võrrandi (A.33) parempoolne liige väljendab väliskoormuse tööd W_v siirdel $\hat{w}$. Koondkoormuse F_{zi} töö varda telje punkti i siirdel $\hat{w}_i$ on $F_{zi}\hat{w}_i$. Seega

$$W_v = \int_0^l q_z(x)\,\hat{w}dx + F_{zi}\hat{w}_i \tag{A.34}$$

Võrrandi (A.33) vasakpoolset liiget integreerime ositi

$$-\int_0^l \underbrace{\hat{w}}_{u}\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}EI_y\frac{d^2w}{dx^2}\right)dx}_{dv} = -\underbrace{\left(\frac{d}{dx}EI_y\frac{d^2w}{dx^2}\right)}_{Q_z}\hat{w}\,|_0^l + \\ +\int_0^l \frac{d}{dx}\underbrace{\left(EI_y\frac{d^2w}{dx^2}\right)}_{-M_y}\underbrace{\frac{d\hat{w}}{dx}}_{-\hat{\varphi}_y}dx \tag{A.35}$$

Avaldise (A.35) viimast liiget integreerime veel üks kord

$$\int_0^l \underbrace{\frac{d\hat{w}}{dx}}_{u}\underbrace{\frac{d}{dx}\left(EI_y\frac{d^2w}{dx^2}\right)dx}_{dv} = \underbrace{\left(EI_y\frac{d^2w}{dx^2}\right)}_{-M_y}\underbrace{\frac{d\hat{w}}{dx}}_{-\hat{\varphi}_y}|_0^l - \int_0^l \underbrace{\left(EI_y\frac{d^2w}{dx^2}\right)}_{-M_y}\underbrace{\frac{d^2\hat{w}}{dx^2}}_{-\hat{\psi}_y}dx \tag{A.36}$$

Arvestades saadud avaldisi (A.35) ja (A.36) võime võrrandi (A.33) esitada võimalike tööde (passiivtööde) summana (virtuaalsiirete printsiip paindel)

$$\underbrace{\left[Q_z\hat{w}+M_y\hat{\varphi}_y\right]}_{W_r^{(p)}}|_0^l - \underbrace{\int_0^l M_y\hat{\psi}_y dx}_{W_s^{(p)}} = \underbrace{-\int_0^l q_z\left(x\right)\hat{w}dx - F_{zi}\hat{w}_i}_{-W_v^{(p)}} \tag{A.37}$$

Paindel tööde vastastikkuse teoreemi tõestamiseks jätkame avaldise (A.37) teise liikme ositi integreerimist

$$\begin{aligned}
-\int_0^l \underbrace{\left(EI_y\frac{d^2\hat{w}}{dx^2}\right)}_{-\hat{M}_y}\underbrace{\frac{d^2w}{dx^2}}_{-\psi_y}dx &= -\underbrace{\frac{dw}{dx}}_{-\varphi_y}\underbrace{\left(EI_y\frac{d^2\hat{w}}{dx^2}\right)}_{-\hat{M}_y}|_0^l + \int_0^l \underbrace{\frac{d}{dx}\left(EI_y\frac{d^3\hat{w}}{dx^3}\right)}_{-\hat{Q}_z}\frac{dw}{dx} = \\
&= w\underbrace{\left(EI_y\frac{d^3\hat{w}}{dx^3}\right)}_{-\hat{Q}_z}|_0^l - \underbrace{\left(EI_y\frac{d^2\hat{w}}{dx^2}\right)}_{-\hat{M}_y}\underbrace{\frac{dw}{dx}}_{-\varphi_y}|_0^l - \int_0^l \underbrace{\left(EI_y\frac{d^4\hat{w}}{dx^4}\right)}_{\hat{p}_z}wdx
\end{aligned} \tag{A.38}$$

Saadud seosed (A.38) asetame avaldisse (A.37), kust saab tööde vastastikkuse teoreemi paindel

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\left[\overleftrightarrow{Q}_z\,\hat{w}+\overleftrightarrow{M}_y\,\hat{\varphi}_y\right]|_0^l}_{W_r^I} + \underbrace{\int_0^l q_z\left(x\right)\hat{w}dx + F_{zi}\hat{w}_i}_{W_v^I} = \\
&\qquad = \underbrace{\left[\overleftrightarrow{\hat{Q}}_z\,w+\overleftrightarrow{\hat{M}}_y\,\varphi_y\right]|_0^l}_{W_r^{II}} + \underbrace{\int_0^l \hat{q}_z\left(x\right)wdx + F_{zi}\hat{w}_i}_{W_v^{II}}
\end{aligned} \tag{A.39}$$

siin Q_z, M_y, p_z, w ja φ_y on esimese koormusolukorra jõud ja siirded
ning $\hat{Q}_z$, $\hat{M}_y$, $\hat{p}_z$, $\hat{w}$ ja $\hat{\varphi}_y$ teise koormusolukorra jõud ja siirded.
Arvestades saadud avaldisi (A.37), (A.39), saame sisejõudude vastastikuse töö paindel

$$\underbrace{\int_0^l M_y\hat{\psi}_y dx}_{W_s^{I)}} = \underbrace{\int_0^l \hat{M}_y\psi_y dx}_{W_s^{II)}} \tag{A.40}$$

ehk

$$\underbrace{\int_0^l M_y\frac{\hat{M}_y}{EI_y}dx}_{W_s^{I)}} = \underbrace{\int_0^l \hat{M}_y\frac{M_y}{EI_y}dx}_{W_s^{II)}} \tag{A.41}$$

Lisa B

Maatriksid

B.1 Maatriksi mõiste

Maatriksiks nimetatakse ridadesse ja veergudesse korrastatud arvude (või nende sümbolite) massiivi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m3} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{B.1}$$

ehk lühidalt

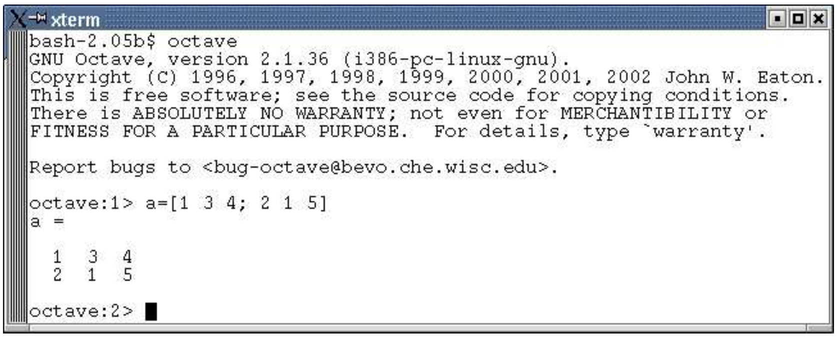
$$\mathbf{A} = [a_{ij}]\,, \quad (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n) \tag{B.2}$$

kus a_{ij} on maatriksi $\mathbf{A}$ i-nda rea ja j-nda veeru element.

Arvutiprogrammis Octave[1] (vt ka Matlab[2]) sisestatakse maatriks

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

järgmiselt $a = [\ 1\ 3\ 4;\ \ 2\ 1\ 5\ ]$ (vt joonis B.1).



Joonis B.1. Maatriksi sisestamine *Octave*'iga

[1] http://staff.ttu.ee/~alahe/aOctave.html
[2] http://staff.ttu.ee/~alahe/aMatlab.html

B.2 Rea- ja veeruvektor

Maatriksit, mis koosneb ainult ühest reast, nimetatakse reavektoriks

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

Arvutiprogrammis *Octave* (*Matlab*) sisestatakse reavektor b

$$b = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \tag{B.6}$$

järgmiselt
b=[4 3 5]

Maatriksit, mis koosneb ainult ühest veerust, nimetatakse veeruvektoriks

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \tag{B.5}$$

Arvutiprogrammis *Octave* (*Matlab*) sisestatakse veeruvektor c

$$c = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{B.7}$$

järgmiselt
c=[3; 8; 2]

Üleminek reavektorilt veeruvektorile ja vastupidi teostatakse *Octave*'is (*Matlab*'is) ülakomaga. Näiteks
d=*b*′
ja reavektor b (B.6) muudetakse veeruvektoriks d

$$d = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{B.8}$$

B.3 Maatriksite liitmine ja lahutamine

Maatriksite liitmine (lahutamine) on võimalik siis ja ainult siis, kui nad on üht ja sama järku, s.t kui neil on ühesugune arv veergusid ja ühesugune arv ridu. Näiteks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) \end{bmatrix} \tag{B.9}$$

Järgmise näite

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \tag{B.10}$$

puhul tähistame avaldise (B.10) vasakul pool olevad maatriksid a, b ja sisestame nad *Octave*'is (*Matlab*'is) järgmiselt:

a=[1 3 4;
2 1 5]

b=[2 0 −3;
−1 3 2]

ning seejärel sisestame järgmise avaldise
c=a+b
Tulemuseks saame

$$c = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \tag{B.11}$$

B.4 Vektorite ja maatriksite korrutamine

Reavektori **b** (B.4) ja veeruvektori **c** (B.5) korrutis on vektorite **b** ja **c** vastavate elementide korrutiste summa. Sellist korrutist nimetatakse *vektorite skalaarkorrutiseks*

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = b_1c_1 + b_2c_2 + \dots + b_nc_n \tag{B.12}$$

ehk lühidalt

$$\mathbf{bc} = b_ic_i \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{B.13}$$

Veeruvektori **c** (B.5) ja reavektori **b** (B.4) korrutis on maatriks, mille elementideks on vektorielementide korrutis. Sellist korrutist nimetatakse *vektorite diaad- ehk otsekorrutiseks*

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1b_1 & c_1b_2 & \dots & c_1b_n \\ c_2b_1 & c_2b_2 & \dots & c_2b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_mb_1 & c_mb_2 & \dots & c_mb_n \end{bmatrix} \tag{B.14}$$

ehk lühidalt

$$\mathbf{c} \otimes \mathbf{b} = b_ic_j \quad , \qquad (i = 1, 2, ..., m; \quad j = 1, 2, ..., n) \tag{B.15}$$

Maatriksi **A** korrutiseks veeruvektoriga **c** nimetatakse veeruvektorit **d**, mille elemendid on maatriksi **A** ridade elementide ja veeruvektori **c** vastavate elementide korrutiste summad

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n) \\ (a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n) \\ \vdots \\ (a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \dots + a_{mn}c_n) \end{bmatrix} \tag{B.16}$$

ehk lühidalt

$$\mathbf{Ac} = a_{ij}c_j \quad , \qquad (i = 1, 2, ..., m; \quad j = 1, 2, ..., n) \tag{B.17}$$

Analoogiliselt leitakse reavektori **b** korrutis maatriksiga **A**, mis kujutab endast reavektorit **r**

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_m \end{bmatrix} \tag{B.18}$$

kus

$$\begin{array}{rcl} r_1 & = & (b_1a_{11} + b_2a_{21} + \ldots + b_na_{n1}) \\ r_2 & = & (b_1a_{12} + b_2a_{22} + \ldots + b_na_{n2}) \\ \vdots & = & \vdots \\ r_m & = & (b_1a_{1m} + b_2a_{2m} + \ldots + b_na_{nm}) \end{array} \tag{B.19}$$

ehk lühidalt

$$\mathbf{bA} = b_ia_{ij} \quad , \qquad (i = 1, 2, ..., n; \quad j = 1, 2, ..., m) \tag{B.20}$$

Maatriksite omavahelist korrutamist võime vaadelda kui ühe maatriksi mitmekordset korrutamist vektoritega, milleks on jaotatud teine maatriks. Maatriksite **A** ja **B** korrutiseks **C** nimetatakse maatriksit, mille elemendid on maatriksi **A** i-nda rea ja maatriksi **B** j-nda veeru vastavate elementide korrutiste summad

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}; & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ b_{31} & b_{32} & b_{3j} & \dots & b_{31k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nj} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix} & = \ \mathbf{B} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{1j} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & c_{2j} & \dots & c_{2k} \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{ij} & \dots & c_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{mj} & \dots & c_{mk} \end{bmatrix} & = \ \mathbf{C} \end{array}$$

kus maatriksi element c_{ij} on järgmine:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj} \tag{B.21}$$

ehk lühidalt

$$\mathbf{AB} = a_{il}b_{lj} \quad , \qquad (l = 1, 2, ..., n; \quad i = 1, 2, ..., m; \quad j = 1, 2, ..., k) \tag{B.22}$$

Oluline on, et maatriksite veergude ja ridade arvud oleksid omavahel kooskõlas. Sisestame *Octave*'is (*Matlab*'is) järgmised maatriksid a ja b

a=[1 3;
2 0;
−3 1]

b=[2 1 0;
3 4 −1]

ning seejärel teostame korrutamise
c=a∗b
Tulemuseks saame

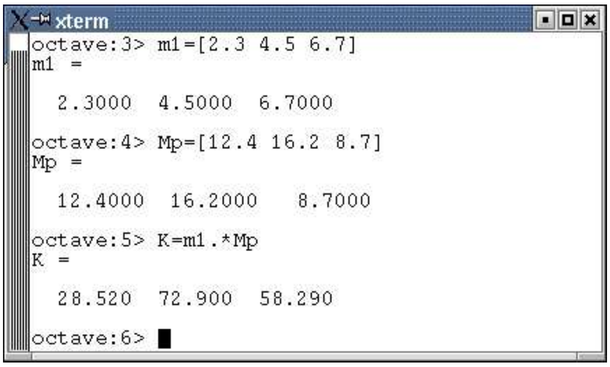
$$c = \begin{bmatrix} 11 & 13 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{B.23}$$

B.5 Maatriksite element-element korrutamine

Maatriksite element-element[3] [4] [5] kaupa korrutamine (*ingl – element-by-element multiplication*).

$$\mathbf{A}.^{*}\mathbf{B} = a_{ij}b_{ij} \qquad (\textit{siin ei ole summeerimist } i \textit{ ja } j \textit{ järgi}) \tag{B.24}$$

Vektorite $m1 = [2.3\ 4.5\ 6.7]$, $M_p = [2.3\ 4.5\ 6.7]$ element-elemendi kaupa korrutamine $K = m1.^{*}M_p$ annab tulemuseks $K = [28.52\ 72.90\ 58.29]$ (vt joonis B.2). Seda korrutamist saab kasutada Simpsoni valemiga numbrilisel integreerimisel.



Joonis B.2. Maatriksite ja vektorite element-element korrutamine

[3] http://www-math.unice.fr/laboratoire/help/info/octave/octave_27.html
[4] http://www-math.unice.fr/laboratoire/help/info/octave/octave_toc.html
[5] http://www-ccs.ucsd.edu/matlab/techdoc/basics/getting8.html

B.6 Osamaatriksid

Üldjuhul võime $(m \times n)$-maatriksi $\mathbf{A}$ jaotada osamaatriksiteks $\mathbf{A_{ij}}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} & \dots & \mathbf{A_{1n}} \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{22}} & \dots & \mathbf{A_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A_{m1}} & \mathbf{A_{m2}} & \dots & \mathbf{A_{mn}} \end{bmatrix} \tag{B.25}$$

B.7 Maatriksite transponeerimine

Maatriksi $\mathbf{A}$ transponeeritud maatriksiks on $\mathbf{A}^T$ (*Octave*'is (*Matlab*'is) $\mathbf{A}'$, mis saadakse maatriksist $\mathbf{A}$ ridade ümbervahetamisel veergudeks, s.t maatriksi $\mathbf{A}$ read ja veerud on ümber vahetatud.

Kui näiteks $\mathbf{A}$ on $(m \times n)$-maatriks

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \tag{B.26}$$

$$(i = 1, 2, ..., m; \quad j = 1, 2, ..., n)$$

siis $\mathbf{A}$ transponeeritud maatriks $\mathbf{A}^T$ on $(n \times m)$-maatriks

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ji} \end{bmatrix} \tag{B.27}$$

$$(i = 1, 2, ..., m; \quad j = 1, 2, ..., n)$$

Maatriksite transponeerimisel kehtivad seaduspärasused.

- Maatriksite transponeerimine on reflektiivne, s.t transponeeritud maatriksi $\mathbf{A}^T$ transponeerimisel saame maatriksi $\mathbf{A}$

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A} \tag{B.28}$$

- Maatriksite transponeeritud summa on võrdne transponeeritud maatriksite summaga

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \tag{B.29}$$

- Maatriksite korrutise transponeerimine on samane transponeeritud maatriksite korrutisega võetud vastupidises järjekorras

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \tag{B.30}$$

B.8 Pöördmaatriksid

Pöördmaatriksiks nimetatakse maatriksit $\mathbf{A}$ korrutamisel neutraliseerivat maatriksit $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \tag{B.31}$$

s.t pöördmaatriks $\mathbf{A}^{-1}$ on maatriks, millega maatriksi $\mathbf{A}$ korrutamisel saame ühikmaatriksi $\mathbf{I}$.

Ühikmaatriksiks nimetatakse $(n \times n)$-ruutmaatriksit, mille peadiagonaalil asetsevate elementide väärtus on 1, mujal asetsevate elementide väärtus aga 0. Näiteks

$$\mathbf{I}_{(3\times3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.32}$$

Maatriksi $\mathbf{A}$ pöördmaatriks $\mathbf{A}^{-1}$ eksisteerib üksnes siis, kui on täidetud tingimused:

- maatriks $\mathbf{A}$ peab olema ruutmaatriks
- maatriksi $\mathbf{A}$ determinant ei tohi olla null.

Ruutmaatriksit, mille determinant on null, nimetatakse *singulaarseks maatriksiks*.
Pöördmaatriksite omadused.

- Maatriksi $\mathbf{A}$ pöördmaatriksi $\mathbf{A}^{-1}$ pöördmaatriks on võrdne maatriksiga $\mathbf{A}$, s.t

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A} \tag{B.33}$$

- Kahe üht ja sama järku ruutmaatriksi korrutise pöördmaatriks on võrdne nende pöördmaatriksite korrutisega vastupidises järjekorras, s.t

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \tag{B.34}$$

- Transponeeritud maatriksi $\mathbf{A}^T$ pöördmaatriks on võrdne pöördmaatriksi $\mathbf{A}^{-1}$ transponeeritud maatriksiga, s.t

$$\left(\mathbf{A}^{T}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T} \tag{B.35}$$

Arvutiprogrammiga *Octave*'is (*Matlab*'is) leitakse maatriksi a

$$a = \begin{bmatrix} 11/3 & -3 & 1/3 \\ -7/3 & 3 & -2/3 \\ 2/3 & -1 & 1/3 \end{bmatrix} \tag{B.36}$$

pöördmaatriks $a1$ funktsiooni $inv\,(...)$ abil
$a1{=}inv\,(a)$
Tulemuseks on

$$a1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix} \tag{B.37}$$

Kontrolliks korrutame maatriksi a maatriksiga $a1$. Tulemuseks peab olema ühikmaatriks.

Lisa C

Arvutiprogrammid

C.1 Programmist Octave

Arvutiprogrammiga *Octave*[1] on lihtne teha maatriksarvutusi. Arvutiprogrammi käske[2] võib leida Internetist. Arvutiprogrammi *Octave* kohta saab viiteid lehekülgedelt[3] [4]. Kasutatavad failid on *.m* laiendiga. Need *.m* laiendiga failid töötavad ka *Matlab*'iga. Erinevused ilmnevad graafika kasutamisel. *Octave* on tasuta tarkvara, mis on *Windows*'i jaoks, vt *Installing Octave in Windows*[5] ja Linux'ile.
Kui oled instaleerinud *Octave*, siis tee oma failide hoidmiseks kataloog (minul on Linux'is kataloog 'matlabr': /home/andres/matlabr/) Octave instaleerimisega tekkis sinu kodukataloogis fail '.octaverc'. Selles failis on:
LOADPATH = [":/usr/local/share/octave/sitem//", LOADPATH];
Sellele lisan enda tehtud kataloogid: matlabr, matlem, matrem
mis asuvad samas kataloogis kus .octaverc (/home/andres/)
LOADPATH = [": /matlabr//", LOADPATH];
LOADPATH = [": /matlem//", LOADPATH];
LOADPATH = [": /matrem//", LOADPATH];
Nendest kataloogidest leiab *Octave* kõik '*.m' laiendiga failid.
UNIX failide *Windows*'i (DOS) failideks salvestamiseks kõlbab pfe editor (pfe101i.zip), mida aitab leida FileWatcher: http://filewatcher.org/
Windows'is fail 'octaverc' asub kataloogis:
/GNU/octave/usr/local/share/octave/2.1.31/m/startup/
Seal ridadele:
gnuplot_binary = 'pipe-gnuplot...'
putenv('TMPDIR', '....)
lisan rea, mis viitab kataloogile D:\Matlabr:
path(:/cygdrive/d/Matlabr') või annan *Octave*'is käsu:

[1] http://www.octave.org/doc/octave_toc.html
[2] http://webber.physik.uni-freiburg.de/~frpe/Vorlesungen/SS2002/refcard-a4.pdf
[3] http://staff.ttu.ee/~alahe/aOctave.html
[4] http://staff.ttu.ee/~alahe/aMatlab.html
[5] http://web.hhs.se/personal/psoderlind/Software/Software.htm

cd /cydrive/d/Matlabr
Täpsemalt vaata *Running Octave in Windows*[6]".
Kui kasutate UNIX'is kirjutatud .m faili (näiteks `http://staff.ttu.ee/~alahe/tudeng/eesarvud.m`) ja tahate, et ta töötaks *Windows*'is, siis avage ta PFE editoriga ja salvestage DOS-failina (näiteks D:\Matlabr\eesarvud.m).

C.2 Arvutiprogramme tala arvutamiseks

Programm C.1 *lihttalaSjPr.m*[7]

```
%lihttalaSjPr.m
%Arvutiprogramm tala sisejõudude leidmiseks
%==========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-04-29
%                e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                Mehaanikainstituut
%                http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%==========================================================================
%
l=16  % Lihttala ava
F1=4; % Esimese koondatud jõu väärtus
F2=0; % Teise koondatud jõu väärtus
qz=2.0   % Ühtlaselt jaotatud koormus
aF1=12.8; % Esimese koondatud jõu asukoht
aF2=16.0; % Teise koondatud jõu asukoht
aqA=1.6 % Ühtlaselt jaotatud koormuse algus
aqL=9.6 % Ühtlaselt jaotatud koormus  lõpp
NT=10   % Tala  jaotuste arv
NN=NT+2 % Tala jaotuste arv + 1 + koondatud jõudude arv
%
```

[6] `http://web.hhs.se/personal/psoderlind/Software/Software.htm`
[7] `http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/lihttalaSjPr.m`

```
SP=lihttalaSj(NT,NN,l,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL);
%
disp('---------------------------------')
disp('       Q         M          x    ')
disp('---------------------------------')
SP'
disp('---------------------------------')
%%%%%%%%%%
Y0=zeros(1,NN);
plot(SP(3,:),-SP(2,:),"3",SP(3,:),Y0,"3")
title('Paindemomendi epüür')
      xlabel('x')
      ylabel('M')
%
replot    % octave

pause (5) % octave

plot(SP(3,:),SP(1,:),"3",SP(3,:),Y0,"3")
title('Põikjõu epüür')
      xlabel('x')
      ylabel('Q')
%
replot    % octave
%
%%%%
%
```

Programm C.2 *lihttalaPrbKSjPr.m*[8]

```
%lihttalaPrbKSjPr.m
%%%%
%lihttalaPrbKSjPr.m
%Arvutiprogramm tala sisejõudude leidmiseks
% paraboolse jaotusega koormusest
%============================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-04-29
%                e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                Mehaanikainstituut
%                http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
```

[8] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/lihttalaPrbKSjPr.m

```
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%==========================================================================
%
l=32  % Lihttala ava
qk=50.0   % Jaotatud koormus alguses
qc=10.0   % Jaotatud koormus keskel
NN=20   % Tala  jaotuste arv
%
SP=lihttalaPrbKSj(NN,l,qk,qc);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
disp('  Lihttala sisejõud  ')
disp('-------------------------------------')
disp('      Q          M         x        ')
disp('-------------------------------------')
SP'
disp('-------------------------------------')
%pause
%
%%%%%%%%%%%%%
Y0=zeros(1,NN+1);
%%%%%%%%%%%%%
figure(1)
gset encoding iso_8859_1
%%%%%%%%%%%%%
plot(SP(3,:),-SP(2,:),"3",SP(3,:),Y0,"3")
title('Lihttala paindemomendi epüür (epüür on tõmmatud kiu poolel)')
  gset border 31
  gset xtics 3.2
  gset ytics 500.0
  gset nolabel
      xlabel('x')
      ylabel('M')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "LihtTalaM.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%
```

```
%%%%%%%%%%%%%%
figure(2)
%%%%%%%%%%%%%
NXP=size(SP);
NX=NXP(1,2);
AgX=[SP(3,1) SP(3,1)];
AgZ=[0 SP(1,1)];
LgX=[SP(3,NX) SP(3,NX)];
LgZ=[0 SP(1,NX)];
%%%%%%%%%%%%%
plot(AgX,AgZ,"3",SP(3,:),SP(1,:),"3",LgX,LgZ,"3",SP(3,:),Y0,"3")
title('Lihttala põikjõu epüür')
  gset border 31
  gset xtics 3.2
  gset ytics 100.0
  gset nolabel
      xlabel('x')
      ylabel('Q')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "LihtTalaQ.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%
%%%%%%%%%%%
```

C.2.1 Arvutifunktsioonid tala arvutamiseks

Programm C.3 *lihttalaSj.m*[9]

```
%lihttalaSj.m
function Sj=lihttalaSj(NT,NN,l,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL)
%lihttalaSj.m
% Lihttala sisejõudude Q ja M arvutamise programm
%===========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-04-29
%                 e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                 http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                 Mehaanikainstituut
%                 http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
```

[9] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/lihttalaSj.m

```
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%==========================================================================
%
%
%       % Lihttala ava
%       % Esimese koondatud jõu väärtus
%       % Teise koondatud jõu väärtus
%qz     % Ühtlaselt jaotatud koormus
%aF1    % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2    % Teise koondatud jõu asukoht
%aqA    % Ühtlaselt jaotatud koormuse algus
%aqL    % Ühtlaselt jaotatud koormus  lõpp
%NT     % Tala  jaotuste arv
%NN=NT+2 % Tala jaotuste arv + 1 + koondatud jõudude arv
%Va  --  Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%x1 --  Tala jaotuste koordinaadid. Koondatud jõu all kordub.
%S1 -- Sisejõud: S(1,:) -- põikjõud; S(2,:) -- paindemoment
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
samm=l/NT;
 eps1=0.000001;
x=0;
xi=0;
j=0;
Vb=(F1*aF1+F2*aF2+qz*(aqL-aqA)*(aqL+aqA)/2)/l;
Vb
Va=(F1*(l-aF1)+F2*(l-aF2)+qz*(aqL-aqA)*(l-(aqL+aqA)/2))/l;
Va
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for j=1:NN
Y0(1,j)=0;
end
%
for j=1:NN
 for i=1:2
   S1(i,j)=0;
 end
end
%%
```

```
for i=1:NN
%
if (x-aF1) < eps1
      delta1=0;
      aF1kord=0;
      xaF1=0;
else
     if aF1kord < eps1
         delta1=1;
         x=x-samm;
         xaF1=(x-aF1);
         aF1kord=1;
     else
         delta1=1;
         xaF1=(x-aF1);
     end
end
if (x-aF2) < eps1
   delta2=0;
   aF2kord=0;
         xaF2=0;
else
     if aF2kord < eps1
            delta1=1;
            x=x-samm;
            xaF2=(x-aF2);
           aF2kord=1;
     else
         delta2=1;
         xaF2=(x-aF2);
     end
end
%
if (x-aqA) < eps1
   xaqA=0;
else
   xaqA=(x-aqA);
end
   if (x-aqL) < eps1
      xaqL=0;
   else
      xaqL=(x-aqL);
   end
%
Y=[1 0; x 1];
FA=[Va 0]';
FK=[F1*delta1 F1*xaF1*delta1]'+[F2*delta2 F2*xaF2]';
Fq=[qz*xaqA qz*(1/2)*xaqA^2]'-[qz*xaqL qz*(1/2)*xaqL^2]';
%
S=Y*FA-FK-Fq;
S1(:,i)=S;
x1(1,i)=x;
```

```
x=x+samm;
end
%%%%%%%%%%
%Sj(1,:1)=S1(1,:);  % Põikjõud
%Sj(2,:)=S1(2,:);  % Paindemoment
%Sj(3,:)=x1(2,:);  % koordinaat x
Sj=[S1(1,:);S1(2,:);x1(1,:)];

endfunction
%
```

Programm C.4 *lihttalaPrbKSj.m*[10]

```
%lihttalaPrbKSj.m
function Sj=lihttalaPrbKSj(NN,l,qk,qc)
%lihttalaPrbKSj.m
% Lihttala sisejõudude Q ja M arvutamise programm
% paraboolse jaotusega koormusest
%=========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-04-29
%                 e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                 http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                 Mehaanikainstituut
%                 http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=========================================================================
%
%l      % Lihttala ava
%q     % Jaotatud koormus
%qk     % Jaotatud koormus tala alguses
%qc     % Jaotatud koormus tala keskel
%NN     % Tala  jaotuste arv (peab olema paarisarv)
%Va  --  Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%x1 --  Tala jaotuste koordinaadid.
```

[10] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/lihttalaPrbKSj.m

```
%S1 -- Sisejõud: S(1,:) -- põikjõud; S(2,:) -- paindemoment
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Npool=NN/2+1;
l1=l/2
samm=l/NN
 eps1=0.000001;
x(1,1)=0.0;
xi=0;
j=0;
Va=qc*l1+(1/3)*(qk-qc)*l1
Vb=Va
%Vb=(qc*l*l1+(2*(1/3)*(qk-qc)*l1)*l1)/l
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Mk=Va*(l1-xi*l1)-qc*l1*l1/2-(1/3)*(qk-qc)*l1*(3*l1/4)
M(1,1)=Va*(l1-xi*l1)-l1^2*(qc*(1/2-xi+-xi^2/2)+(qk-qc)*(1/4-xi/3+xi^4/12));
Q(1,1)=0;
for j=2:Npool
xi=xi+samm/l1;
x(1,j)=x(1,j-1)+samm;
%M(1,j)=Va*(l1-xi*l1)-l1^2*(qc*(1/2-xi^2/2)+(qk-qc)*(1/4-xi^4/4));
M(1,j)=Va*(l1-xi*l1)-l1^2*(qc*(1/2-xi+xi^2/2)+(qk-qc)*(1/4-xi/3+xi^4/12));
Q(1,j)=Va-l1*(qc*(1-xi)+(qk-qc)*(1/3-xi^3/3));
end
%
for j=1:Npool
MT(1,j)=M(1,Npool-j+1);
QT(1,j)=Q(1,Npool-j+1);
end
%
for i=1:Npool-1
MT(1,Npool+i)=M(1,i+1);
QT(1,Npool+i)=-Q(1,i+1);
x(1,Npool+i)=x(1,Npool+i-1)+samm;
end
%
%%%%%%%%%%
%Sj(1,:1)=S1(1,:);  % Põikjõud
%Sj(2,:)=S1(2,:);  % Paindemoment
%Sj(3,:)=x1(2,:);  % koordinaat x
Sj=[QT; MT; x];
endfunction
%
```

C.3 Arvutiprogramme kaare arvutamiseks

Programm C.5 *KaarA1.m*[11]

```
%KaarA1.m
% Kaare tabelarvutusega saadud andmed plottimiseks
```

[11] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/KaarA1.m

```
%clc;
% L= f= H= Kaare telgjoon on parabool
% 16.00 4.00 2.40
%siin Q-s on hüpe
xi=[0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.7 0.8 0.9 1];
xip=[1 0.9 0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.3 0.2 0.1 0];
x=[0 1.6 3.2 4.8 6.4 8 9.6 11.2 11.2 12.8 14.4 16];
y=[0 1.44 2.56 3.36 3.84 4 3.84 3.36 3.36 2.56 1.44 0];
sinFi=[0.7071 0.6247 0.5145 0.3714 0.1961 0.0000 -0.1961 -0.3714 -0.3714 -0.5145
-0.6247 -0.7071];
cosFi=[0.7071 0.7809 0.8575 0.9285 0.9806 1.0000 0.9806 0.9285 0.9285 0.8575 0.7809
0.7071];
Mo=[0.000 1.920 3.840 5.760 7.680 9.600 11.520 13.440 13.440 8.960 4.480 0.000];
Qo=[1.200 1.200 1.200 1.200 1.200 1.200 1.200 1.200 -2.800 -2.800 -2.800 -2.800];
H_y=[0.000 3.456 6.144 8.064 9.216 9.600 9.216 8.064 8.064 6.144 3.456 0.000];
M=[0.000 -1.536 -2.304 -2.304 -1.536 0.000 2.304 5.376 5.376 2.816 1.024 0.000];
Qo_cosFi=[0.849 0.937 1.029 1.114 1.177 1.200 1.177 1.114 -2.600 -2.401 -2.186
-1.980];
H_sinFi=[1.697 1.499 1.235 0.891 0.471 0.000 -0.471 -0.891 -0.891 -1.235 -1.499
-1.697];
Q=[-0.849 -0.562 -0.206 0.223 0.706 1.200 1.647 2.006 -1.708 -1.166 -0.687 -0.283];
Qo_sinFi=[0.849 0.750 0.617 0.446 0.235 0.000 -0.235 -0.446 1.040 1.441 1.749 1.980];
H_cosFi=[1.697 1.874 2.058 2.228 2.353 2.400 2.353 2.228 2.228 2.058 1.874 1.697];
N=[2.546 2.624 2.675 2.674 2.589 2.400 2.118 1.783 3.268 3.499 3.623 3.677];
%                              siin Q-s on hüpe

xM=[11.2 11.2];
yM=[0 5.38];
% figure(1), axes('Position',[0.1, 0.2, 0.8, 0.3]) %matlab
plot(x,y0,"3",x,-M,"3",xM,-yM,"3")
title('Paindemomendi epüür')
      xlabel('x')
      ylabel('M')
%      text(2.0,0.3,'ALFA')
%      text(2.6,0.1,'BETA')
replot    % octave
pause (3) % octave

xM=[11.2 11.2];
yQ=[0 -1.71];
% figure(2),  axes('Position',[0.1, 0.2, 0.8, 0.3]) %matlab
plot(x,y0,"4",x,Q,"4",xM,yQ,"4")
title('Põikjõu epüür')
      xlabel('x')
      ylabel('Q')
replot     % octave
pause (3)  % octave

xM=[11.2 11.2];
yN=[0 1.78];
% figure(3),  axes('Position',[0.1, 0.2, 0.8, 0.3]) %matlabis
plot(x,y0,"3",x,N,"3",xM,yN,"3")
```

```
title('Normaaljõu epüür')
      xlabel('x')
      ylabel('N')
replot    % octave
pause (5) % octave

%clear
clc;    % octave
```

Programm C.6 *KaarB1.m*[12]

```
%KaarB1.m
% L= f= H= Kaare telgjoon on ring R=
%       16.00   4.00    12.16                              10
%siin Q-s on hüpe
xi=[0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.8 0.9 1];
xip=[1 0.9 0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.2 0.1 0];
x=[0 1.6 3.2 4.8 6.4 8 9.6 11.2 12.8 12.8 14.4 16];
y=[0.000 1.684 2.773 3.474 3.871 4.000 3.871 3.474 2.773 2.773 1.684 0.000];
sinFi=[ 0.8000 0.6400 0.4800 0.3200 0.1600 0.0000 -0.1600 -0.3200 -0.4800 -0.4800
-0.6400 -0.8000];
cosFi=[0.6000 0.7684 0.8773 0.9474 0.9871 1.0000 0.9871 0.9474 0.8773 0.8773 0.7684
0.6000];
Mo=[0.000 17.920 33.280 43.540 48.640 48.640 43.520 35.840 28.160 28.160 14.080
0.000];
Qo=[11.200 11.200 8.000 4.800 1.600 -1.600 -4.800 -4.800 -4.800 -8.800-8.800 -8.800];
H_y=[0.000 20.474 33.716 42.246 47.073 48.640 47.073 42.246 33.716 33.716 20.474
0.000];
M=[0.000 -2.554 -0.436 1.294 1.567  0.000 -3.553 -6.406 -5.556 -5.556 -6.394 0.000];
Qo_cosFi=[6.720 8.606 7.018 4.548 1.579 -1.600 -4.738 -4.548 -4.211 -7.720 -6.762
-5.280];
H_sinFi =[9.728 7.782 5.837 3.891 1.946 0.000 -1.946 -3.891 -5.837 -5.837 -7.782
-9.728];
Q=[-3.008 0.823 1.181 0.656 -0.366 -1.600 -2.793 -0.656 1.626 -1.883 1.021 4.448];
Qo_sinFi=[8.960 7.168 3.840 1.536 0.256 0.000 0.768 1.536 2.304 4.224 5.632 7.040];
H_cosFi=[7.296 9.343 10.668 11.521 12.003 12.160 12.003 11.521 10.668 10.668 9.343
7.296];
N=[16.256 16.511 14.508 13.057 12.259 12.160 12.771 13.057 12.972 14.892 14.975
14.336];
% siin Q-s on hüpe

xM=[12.8 12.8];
yM=[0 5.556];
% figure(1), axes('Position',[0.1, 0.2, 0.8, 0.3]) %matlab
plot(x,y0,"3",x,-M,"3",xM,yM,"3")
title('Paindemomendi epüür')
      xlabel('x')
      ylabel('M')
%      text(2.0,0.3,'ALFA')
%      text(2.6,0.1,'BETA')
```

[12]http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/KaarB1.m

```
replot    % octave
pause (3) % octave

xM=[12.8 12.8];
yQ=[0 -1.883];
% figure(2),  axes('Position',[0.1, 0.2, 0.8, 0.3]) %matlab
plot(x,y0,"4",x,Q,"4",xM,yQ,"4")
title('Põikjõu epüür')
      xlabel('x')
      ylabel('Q')
replot     % octave
pause (3)  % octave

xM=[12.8 12.8];
yN=[0 12.972];
% figure(3),  axes('Position',[0.1, 0.2, 0.8, 0.3]) %matlabis
plot(x,y0,"3",x,N,"3",xM,yN,"3")
title('Normaaljõu epüür')
      xlabel('x')
      ylabel('N')
replot    % octave
pause (5) % octave
%clear
clc;    % octave
```

Programm C.7 *kaarRngSjPr.m*[13]

```
%kaarRngSjPr.m
% Kaare sisejõudude M, Q ja N arvutamise programm
% Kaare telgjooneks on ringi osa
%=========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-04-29
%                 e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                 http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                 Mehaanikainstituut
%                 http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
```

[13] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kaarRngSjPr.m

```
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%==========================================================================
%
%
% Vastava lihttala sisejõud leiame programmi
% lihttalaSj.m abil.
 NT=30   % Tala  jaotuste arv
 NN=NT+2 % Tala jaotuste arv + 1 + koondatud jõudude arv
l=16  % Kaare ava
f=4   % Kaare kõrgus
l=16  % Lihttala ava
F1=4 % Esimese koondatud jõu väärtus
F2=0; % Teise koondatud jõu väärtus
qz=2.0   % Ühtlaselt jaotatud koormus
aF1=12.8 % Esimese koondatud jõu asukoht
aF2=16.0; % Teise koondatud jõu asukoht
aqA=1.6 % Ühtlaselt jaotatud koormuse algus
aqL=9.6 % Ühtlaselt jaotatud koormus  lõpp
%H -- Kaare horisontaalne reaktsioon
%x1 --  Tala jaotuste koordinaadid. Koondatud jõu all kordub.
%SR(1,:) -- normaaljõud SR(2,:) -- põikjõud; SR(3,:) -- paindemoment
%Va  --  Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Y0=zeros(1,NN);
%
SP=lihttalaSj(NT,NN,l,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL);
%
SR=kaarRngSj(NT,NN,l,f,F1,aF1,F2,aF2,SP);
%%%%%%%%%%%%%%%%%
disp('---------------------------------------------------------------------')
disp('      N          Q           M         x          y          y* ')
disp('---------------------------------------------------------------------')
SR'
disp('---------------------------------------------------------------------')
%pause
%
%%%%%%%%%%%%%
figure(1)

plot(SR(4,:),-SR(3,:),"3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Paindemomendi epüür')
      xlabel('x')
      ylabel('M')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "KaarRngM.pdf"
replot    % octave
```

```
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%
%%%%%%%%%%%%%%
figure(2)

plot(SR(4,:),SR(2,:),"3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Põikjõu epüür')
      xlabel('x')
      ylabel('Q')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "KaarRngQ.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%%%%%%%%%%%%%
figure(3)

plot(SR(4,:),SR(1,:),"3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Normaaljõu epüür')
      xlabel('x')
      ylabel('N')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "KaarRngN.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%%%%%%%%%%
figure(4)
```

```
%
plot(SR(4,:),SR(5,:),"3",SR(4,:),SR(6,:),"4")
title('Survejoon')
      xlabel('x')
      ylabel('Q')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps enhanced color solid "Helvetica" 16
gset size 0.9,0.7
gset linestyle 1 linewidth 8.0 % See ei tööta postscript eps puhul
gset output "Survejoon.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%
%pause (3) % octave
 clear
%%%%%kõik
```

Programm C.8 *kaarPrbSjPr.m*[14]

```
%kaarPrbSjPr.m
% Kaare sisejõudude M, Q ja N arvutamise programm
% Kaare telgjooneks on parabool
%=========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-04-29
%                  e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                  http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                  Mehaanikainstituut
%                  http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
```

[14] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kaarPrbSjPr.m

```
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====================================================================
%
% Vastava lihttala sisejõud leiame programmi
% lihttalaSj.m abil.
 NT=10   % Tala  jaotuste arv
 NN=NT+2 % Tala jaotuste arv + 1 + koondatud jõudude arv
l=16  % Kaare ava
f=4   % Kaare kõrgus
l=16  % Lihttala ava
F1=4 % Esimese koondatud jõu väärtus
F2=0; % Teise koondatud jõu väärtus
qz=0.0   % Ühtlaselt jaotatud koormus
aF1=11.2 % Esimese koondatud jõu asukoht
aF2=16.0; % Teise koondatud jõu asukoht
aqA=16.0 % Ühtlaselt jaotatud koormuse algus
aqL=16.0 % Ühtlaselt jaotatud koormus  lõpp
%H -- Kaare horisontaalne reaktsioon
%x1 --  Tala jaotuste koordinaadid. Koondatud jõu all kordub.
%SR(1,:) -- normaaljõud SR(2,:) -- põikjõud; SR(3,:) -- paindemoment
%Va  --  Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Y0=zeros(1,NN);
%
SP=lihttalaSj(NT,NN,l,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL);
%%%%%%%%%%%%%%%%%
disp('  Lihttala sisejõud  ')
disp('--------------------------------------')
disp('      Q          M         x        ')
disp('--------------------------------------')
SP'
disp('--------------------------------------')
%pause
%
%%%%%%%%%%%%
%
SR=kaarPrbSj(NT,NN,l,f,F1,aF1,F2,aF2,SP);
%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%
disp('  Kaare sisejõud  ')
disp('------------------------------------------------------------------')
disp('      N          Q           M         x          y          y* ')
disp('------------------------------------------------------------------')
SR'
disp('------------------------------------------------------------------')
%pause
%
%%%%%%%%%%%%
figure(1)

plot(SR(4,:),-SR(3,:),"3",SR(4,:),Y0,"3")
```

```
title('Paindemomendi epüür')
      xlabel('x')
      ylabel('M')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "KaarPrbM.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%
%%%%%%%%%%%%%%
figure(2)

plot(SR(4,:),SR(2,:),"3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Põikjõu epüür')
      xlabel('x')
      ylabel('Q')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "KaarPrbQ.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%%%%%%%%%%%%%
figure(3)

plot(SR(4,:),SR(1,:),"3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Normaaljõu epüür')
      xlabel('x')
      ylabel('N')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "KaarPrbN.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
```

```
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%%%%%%%%%%
figure(4)

%
plot(SR(4,:),SR(5,:),"3",SR(4,:),SR(6,:),"4")
title('Survejoon')
      xlabel('x')
      ylabel('Q')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps enhanced color solid "Helvetica" 16
gset size 0.9,0.7
gset linestyle 1 linewidth 6.0 % See ei tööta postscript eps puhul
gset output "SurvejoonPrb.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%
%pause (3) % octave
 clear
%%%%%%%%%%%%%%%%
```

C.3.1 Arvutifunktsioonid kaare arvutamiseks

Programm C.9 *kaarRngSj.m*[15]

```
function Sr=kaarRngSj(NT,NN,l,f,F1,aF1,F2,aF2,Sj)
%kaarRngSj.m
% Kaare sisejõudude M, Q ja N arvutamise programm
% Kaare telgjooneks on ringi osa
%=======================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-03-26
%                  e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                  http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)   2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                  Mehaanikainstituut
%                  http://www.ttu.ee/
%
```

[15] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kaarRngSj.m

```
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%==========================================================================
%
% Vastava lihttala sisejõud leiame programmi
% lihttalaSj.m abil.
% NT    % Tala  jaotuste arv
% NN=NT+2 % Tala jaotuste arv + 1 + koondatud jõudude arv
%l   % Kaare ava
%f    % Kaare kõrgus
%H   % Kaare horisontaalne reaktsioon
%aF1   % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2   % Teise koondatud jõu asukoht
%x1 --  Tala jaotuste koordinaadid. Koondatud jõu all kordub.
%
%Sj -- Lihttala sisejõud:
% Sj(1,:) -- põikjõud;  Sr(2,:) -- paindemoment;
% Sj(3,:) -- x koordinaat;
%Sr -- Kaare sisejõud:
% Sr(1,:) -- normaaljõud;  Sr(2,:) -- põikjõud;
% Sr(3,:) -- paindemoment; Sr(4,:) -- x koordinaat;
% Sr(5,:) -- y koordinaat; Sr(6,:) -- y* survejoon
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 eps1=0.000001;
 eps2=0.0001;
aKord=0;
Mk=0;
lk=l/2;
for i=1:NN
 if  aKord < eps1
    if (Sj(3,i)-lk) <= eps2
       aKord=0;
    else
      aKord=1;
       Mk=Sj(2,i-1);
       xKsk=Sj(3,i-1);
    end
else
    Tyhi=0;
```

```
 end
end
%
 H=Mk/f
%
samm=l/NT;
x=0;
j=0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for i=1:NN
%
 if (x-aF1) < eps1
      delta1=0;
      aF1kord=0;
      xaF1=0;
      xv(1,i)=x;
 else
     if aF1kord < eps1
         delta1=1;
         x=x-samm;
         xv(1,i)=x;
         xaF1=(x-aF1);
         aF1kord=1;
     else
         delta1=1;
      xv(1,i)=x;
         xaF1=(x-aF1);
     end
 end
 if (x-aF2) < eps1
   delta2=0;
   aF2kord=0;
    xv(1,i)=x;
         xaF2=0;
 else
     if aF2kord < eps1
            delta1=1;
            x=x-samm;
            xv(1,i)=x;
            xaF2=(x-aF2);
           aF2kord=1;
     else
         delta2=1;
         xv(1,i)=x;
         xaF2=(x-aF2);
     end
 end
%
xi(i)=xv(1,i)/l;
xip(i)=(l-xv(1,i))/l;
Rr=(l^2+4*f^2)/(8*f);
```

```
y(1,i)=sqrt(Rr^2-(l/2-xv(1,i))^2)-(Rr-f);
sinFi(i)=(l/Rr)*(1/2-xv(1,i)/l);
cosFi(i)=sqrt(1-(l/Rr)^2*(1/2-xv(1,i)/l)^2);
M(1,i)=Sj(2,i)-H*y(1,i);
Q(1,i)=Sj(1,i)*cosFi(i)-H*sinFi(i);
N(1,i)=Sj(1,i)*sinFi(i)+H*cosFi(i);
ys(1,i)=Sj(2,i)/H;
%
x=x+samm;
end
%
%%%%%%%%%%
%Sr(1,:)=N(1,:);    % Normaaljõud
%Sr(2,:)=Q(1,:);    % Põikjõud
%Sr(3,:)=M(1,:);    % Paindemoment
%Sr(4,:)=xv(1,:);   % x koordinaat
%Sr(5,:)=y(1,:);    % y koordinaat
%Sr(6,:)=ys(1,:);   % Y* survejoone koordinaat
%
Sr=[N(1,:); Q(1,:); M(1,:); xv(1,:);y(1,:);ys(1,:)];
%
endfunction
%
```

Programm C.10 *kaarPrbSj.m*[16]

```
function Sr=kaarPrbSj(NT,NN,l,f,F1,aF1,F2,aF2,Sj)
%kaarPrbSj.m
% Kaare sisejõudude M, Q ja N arvutamise programm
% Kaare telgjooneks on parabool
%==========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-02-25
%                  e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                  http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                  Mehaanikainstituut
%                  http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
```

[16] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kaarPrbSj.m

```
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%==========================================================================
%
% Vastava lihttala sisejõud Sj leiame programmi
% lihttalaSj.m abil.
% NT    % Tala  jaotuste arv
% NN=NT+2 % Tala jaotuste arv + 1 + koondatud jõudude arv
%l   % Kaare ava
%f    % Kaare kõrgus
%H   % Kaare horisontaalne reaktsioon
%aF1   % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2   % Teise koondatud jõu asukoht
%x1 --  Tala jaotuste koordinaadid. Koondatud jõu all kordub.
%
%Sj -- Lihttala sisejõud:
% Sj(1,:) -- põikjõud;  Sr(2,:) -- paindemoment;
% Sj(3,:) -- x koordinaat;
%Sj -- Kaare sisejõud:
% Sr(1,:) -- normaaljõud;  Sr(2,:) -- põikjõud;
% Sr(3,:) -- paindemoment; Sr(4,:) -- x koordinaat;
% Sr(5,:) -- y koordinaat; Sr(6,:) -- y* survejoon
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 eps1=0.000001;
 eps2=0.0001;
aKord=0;
Mk=0;
lk=l/2;
for i=1:NN
 if  aKord < eps1
    if (Sj(3,i)-lk) <= eps2
       aKord=0;
    else
      aKord=1;
       Mk=Sj(2,i-1);
       xKsk=Sj(3,i-1);
    end
else
    Tyhi=0;
 end
end
%
 H=Mk/f
%
samm=l/NT;
x=0;
j=0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for i=1:NN
%
 if (x-aF1) < eps1
```

```
      delta1=0;
      aF1kord=0;
      xaF1=0;
      xv(1,i)=x;
 else
     if aF1kord < eps1
         delta1=1;
         x=x-samm;
         xv(1,i)=x;
         xaF1=(x-aF1);
         aF1kord=1;
     else
         delta1=1;
      xv(1,i)=x;
         xaF1=(x-aF1);
     end
 end
 if (x-aF2) < eps1
   delta2=0;
   aF2kord=0;
    xv(1,i)=x;
         xaF2=0;
 else
     if aF2kord < eps1
            delta1=1;
            x=x-samm;
            xv(1,i)=x;
            xaF2=(x-aF2);
           aF2kord=1;
     else
         delta2=1;
         xv(1,i)=x;
         xaF2=(x-aF2);
     end
 end
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
xi(i)=xv(1,i)/l;
xip(i)=(l-xv(1,i))/l;
y(1,i)=4*f*xi(i)*xip(i);
sinFi(i)=(1-2*xi(i))/sqrt((l/(4*f))^2+(1-2*xi(i))^2);
cosFi(i)=1/sqrt(1+((4*f)/l)^2*(1-2*xi(i))^2);
M(1,i)=Sj(2,i)-H*y(1,i);
Q(1,i)=Sj(1,i)*cosFi(i)-H*sinFi(i);
N(1,i)=Sj(1,i)*sinFi(i)+H*cosFi(i);
ys(1,i)=Sj(2,i)/H;
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
x=x+samm;
end
```

```
%
%%%%%%%%%%
%Sr(1,:)=N(1,:);   % Normaaljõud
%Sr(2,:)=Q(1,:);   % Põikjõud
%Sr(3,:)=M(1,:);   % Paindemoment
%Sr(4,:)=xv(1,:);  % x koordinaat
%Sr(5,:)=y(1,:);   % y koordinaat
%Sr(6,:)=ys(1,:);  % Y* survejoone koordinaat
%
Sr=[N(1,:); Q(1,:); M(1,:); xv(1,:);y(1,:);ys(1,:)];
%
endfunction
```

C.4 Arvutiprogramme sõrestiku arvutamiseks

Programm C.11 *srstkN1.m*[17]

```
%srstkN1.m
% Sõrestiskeemi varraste sisejõudude ja mõjujoonte
% leidmine
%======================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-03-03
%                 e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                 http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                 Mehaanikainstituut
%                 http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%======================================================================
%
 eps1=0.000001;
%==========
```

[17] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/srstkN1.m

```
% Varda ristlõike jäikus
EA=10000;
%==========
% Sõlmede koordinaadid
%==========
krdn=[ 0  1.732; % sõlm 1
1 0; % sõlm 2
2 1.732; % sõlm 3
3 0; % sõlm 4
4 1.732; % sõlm 5
5 0; % sõlm 6
6 1.732]; % sõlm 7
%==========
SARV=size(krdn);
NSARV=SARV(1,1);
%disp('----------------------------')
disp('===============================')
disp(' Sõlmede koordinaadid ')
disp('     X        Z ')
disp('----------------------------')
disp([krdn])
disp('----------------------------')
%%%
%==========
% Elemendid ja liigendid
%==========
selemjl=[1 2 1 1 0 1 1 0 ... % jõudude liigendid
0 0 1 0 0 1;    % varras 1
2 3 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 2
1 3 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 3
2 4 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 4
3 4 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 5
4 5 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 6
3 5 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 7
4 6 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 8
5 6 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 9
6 7 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 10
5 7 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1]; % varras 11
%==========
selem=[selemjl(:,1) selemjl(:,2)];
jliigend=[selemjl(:,3) selemjl(:,4) selemjl(:,5) selemjl(:,6) selemjl(:,7) selemjl(:,8)];
%disp('----------------------------')
```

```
%disp('----------------------------')
disp('============================')
disp('Elementide topoloogia ')
disp('Algus  Lõpp ')
disp('----------------------------')
disp([selem])
disp('----------------------------')
%%%%%%%%%%%%
%==========
% Toesõlmed x ja z suunas
%==========
tsolm=[ 1  1 % sõlm 1
0 0; % sõlm 2
0 0; % sõlm 3
0 0; % sõlm 4
0 0; % sõlm 5
0 0; % sõlm 6
0 1]; % sõlm 7
%==========
%disp('----------------------------')
disp('==============================')
disp(' Toesõlmed ')
disp(' X-suunas  Z-suunas ')
disp('----------------------------')
disp([tsolm])
disp('----------------------------')
%%%
% Vabadusastmete nummerdamine
%vabastmnr
%NSARV
Nloe=0;
for i=1:NSARV
 if tsolm(i,1) <= eps1
      Nloe=Nloe+1;
      vabastmnr(i,1)=Nloe;
 end
 if tsolm(i,2) <= eps1
      Nloe=Nloe+1;
      vabastmnr(i,2)=Nloe;
 end
   eimidagi=1;
end
%
for i=1:NSARV
 if tsolm(i,1) >= eps1
      Nloe=Nloe+1;
      vabastmnr(i,1)=Nloe;
 end
 if tsolm(i,2) >= eps1
      Nloe=Nloe+1;
      vabastmnr(i,2)=Nloe;
 end
```

```
   eimidagi=1;
end
%
%disp('----------------------------')
disp('===============================')
disp(' Sõlmede vabadusastmete numbrid ')
disp('  X-suunas   Z-suunas ')
disp('-------------------------------')
disp([vabastmnr])
disp('----------------------------')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%pause
%
% Varda suunakoosinused
EARV=size(selem);
NEARV=EARV(1,1);
for i=1:NEARV
LkoordN=selem(i,2);
AkoordN=selem(i,1);
DeltaX(i)=krdn(LkoordN,1)-krdn(AkoordN,1);
DeltaZ(i)=krdn(LkoordN,2)-krdn(AkoordN,2);
VGRx(i,1)=krdn(AkoordN,1);
VGRx(i,2)=krdn(LkoordN,1);
VGRz(i,1)=krdn(AkoordN,2);
VGRz(i,2)=krdn(LkoordN,2);
end
%
%Varda pikkus
%lvarras
for i=1:NEARV
lvarras(i,1)=sqrt(DeltaX(i)^2+DeltaZ(i)^2);
end
%
for i=1:NEARV
cosAlpha(i,1)=DeltaX(i)/lvarras(i,1);
cosBeta(i,1)=DeltaZ(i)/lvarras(i,1);
end
%
%disp('----------------------------')
disp('=============================')
disp('Elementide suunakoosinused ')
disp('cosAlpha  cosBeta ')
disp('----------------------------')
disp([cosAlpha cosBeta])
disp('----------------------------')
%
%%%%%
%Võrrandisüsteemi vasak pool
VVask=zeros(NEARV,NEARV);
NvvYhik=NEARV+3;
YhikVVask=-eye(3);
VVask(NEARV+1:NvvYhik,NEARV+1:NvvYhik)=YhikVVask;
```

```
%
for i=1:NEARV
SsolmA=selem(i,1);
SsolmL=selem(i,2);
XAsolm=vabastmnr(SsolmA,1);
ZAsolm=vabastmnr(SsolmA,2);
XLsolm=vabastmnr(SsolmL,1);
ZLsolm=vabastmnr(SsolmL,2);
VVask(XAsolm,i)=-cosAlpha(i,1);
VVask(ZAsolm,i)=-cosBeta(i,1);
VVask(XLsolm,i)=cosAlpha(i,1);
VVask(ZLsolm,i)=cosBeta(i,1);
end
%
%%%%%%%%%%%%%
%Võrrandisüsteemi parempool
%VParem
%==========
% Jõud sõlmedes
%==========
VJoud=[ 0  0; % sõlm 1
0 15; % sõlm 2
0 0; % sõlm 3
0 15; % sõlm 4
0 0; % sõlm 5
0 15; % sõlm 6
0 0]; % sõlm 7
%==========
%disp('-----------------------------')
disp('=============================')
disp(' Jõud sõlmedes ')
disp(' X-suunas  Z-suunas')
disp('-----------------------------')
disp([VJoud])
disp('-----------------------------')
%
%%%%%%%%%%%%%%%%
VParem=zeros(NEARV+3,1);
for i=1:NSARV
Xsuunas=vabastmnr(i,1);
Zsuunas=vabastmnr(i,2);
VParem(Xsuunas,1)=VJoud(i,1);
VParem(Zsuunas,1)=VJoud(i,2);
end
%
%VVask
%pause
%%%%%%%%%%%%%%
%XX=inv(VVask)*VParem;
XX=VVask\VParem;
%
disp('=============================')
```

```
disp(' Varraste sisejõud ')
disp('    N')
disp('-----------------------------')
disp([XX])
disp('-----------------------------')
%
%%%%%%%%%%%%%
%Mõjujoonte leidmiseks
VVaskP=inv(VVask);
%%%%%%%%%%%%%%%
%VVaskP
%
%==========
% Ühikjõud sõlmedes
%==========
YJoudS=[0  1; % sõlm 1
0 0; % sõlm 2
0 1; % sõlm 3
0 0; % sõlm 4
0 1; % sõlm 5
0 0; % sõlm 6
0 1]; % sõlm 7
%==========
%disp('-----------------------------')
disp('=============================')
disp(' Ühikjõud sõlmedes ')
disp(' X-suunas  Z-suunas')
disp('-----------------------------')
disp([YJoudS])
disp('-----------------------------')
%
%%%%%%%%%%%%%%%%
% Leian mõjujoone koordinaadid
jx=0;
jz=0;
Xsuunas=zeros(1,1);
Zsuunas=zeros(1,1);
for i=1:NSARV
if YJoudS(i,1) >= eps1
  jx=jx+1;
  Xsns=vabastmnr(i,1);
Xsuunas(jx,1)=Xsns;
end
if YJoudS(i,2) >= eps1
  jz=jz+1;
   Zsns=vabastmnr(i,2);
Zsuunas(jz,1)=Zsns;
end
  eimidagi=1;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
```

```
MjNsi=size(VVaskP);
MjN=MjNsi(1,1);
MjARVz=size(Zsuunas);
NMjARVz=MjARVz(1,1);
%
MjARVx=size(Xsuunas);
NMjARVx=MjARVx(1,1);
%
%
% Mõjujoonte maatriks MjZ (kõigile varrastele ja tugedele)
if NMjARVz > 1
  for i=1:NMjARVz
     NzS=Zsuunas(i,1);
     for j=1:MjN
       MjZ(j,i)=VVaskP(j,NzS);
     end
  end
end
%%%%%%%%%%
% Mõjujoonte maatriks MjX (kõigile varrastele ja tugedele)
if NMjARVx > 1
  for i=1:NMjARVx
      NxS=Xsuunas(i,1);
      for j=1:MjN
        MjX(j,i)=VVaskP(j,NxS);
      end
  end
end
%%%%%%%%%%
% Koordinaadid mõjujoontele
NKo=0;
for i=1:NSARV
  for j=1:NMjARVz
        absvahe=abs(vabastmnr(i,2)-Zsuunas(j,1));
     if absvahe <= eps1
       NKo=NKo+1;
      Xmjk(NKo,1)=krdn(i,1);
     end
      eimidagi=1;
   end
end
%
%NKo=0;
%for i=1:NSARV
%  for j=1:NMjARVz
%         absvahe=abs(vabastmnr(i,2)-Zsuunas(j,1));
%     if absvahe <=  eps1
%      NKo=NKo+1;
%      Zmjk(NKo,1)=krdn(i,2);
%     end
%      eimidagi=1;
%   end
```

```
%end
%
disp('=============================')
disp(' Mõjujooned N(i)-le sõlmedes. Viimased kaks on ')
disp(' toereaktsioonide mõjujooned')
disp('-----------------------------')
disp([MjZ])
disp('-----------------------------')
%MjZ
%
disp('=============================')
disp(' Mõjujoone x koordinaadid ')
disp('-----------------------------')
disp([Xmjk'])
disp('-----------------------------')
%
MX0=size(Xmjk);
NMX=MX0(1,1);
Y00=zeros(NMX,1);
%
%%%%%%%%%%%
figure(1)
 gset border 3
% gset key outside top
 gset nokey
plot(VGRx(1,:),-VGRz(1,:),"3",VGRx(2,:),-VGRz(2,:),"3",...
VGRx(3,:),-VGRz(3,:),"3",VGRx(4,:),-VGRz(4,:),"3",VGRx(5,:),...
-VGRz(5,:),"3",VGRx(6,:),-VGRz(6,:),"3",VGRx(7,:),-VGRz(7,:),"3",...
VGRx(8,:),-VGRz(8,:),"3",VGRx(9,:),-VGRz(9,:),"3",VGRx(10,:),...
-VGRz(10,:),"3",VGRx(11,:),-VGRz(11,:),"3")
title('Sõrestikskeem')
  gset xtics 1
  gset ytics 1
%  gset nolabel
      xlabel('x')
      ylabel('z')
%%Sõlmede numbrid
  eval(sprintf('gset label "1" at %f,%f',krdn(1,1),-(krdn(1,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "2" at %f,%f',krdn(2,1),-(krdn(2,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "3" at %f,%f',krdn(3,1),-(krdn(3,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "4" at %f,%f',krdn(4,1),-(krdn(4,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "5" at %f,%f',krdn(5,1),-(krdn(5,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "6" at %f,%f',krdn(6,1),-(krdn(6,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "7" at %f,%f',krdn(7,1),-(krdn(7,2)+0.17)))
%Jne
%%% Varraste numbrid
  eval(sprintf('gset label "1" at %f,%f',(VGRx(1,1)+VGRx(1,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(1,1)+VGRz(1,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "2" at %f,%f',(VGRx(2,1)+VGRx(2,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(2,1)+VGRz(2,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "3" at %f,%f',(VGRx(3,1)+VGRx(3,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(3,1)+VGRz(3,2))/2))
```

```
  eval(sprintf('gset label "4" at %f,%f',(VGRx(4,1)+VGRx(4,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(4,1)+VGRz(4,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "5" at %f,%f',(VGRx(5,1)+VGRx(5,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(5,1)+VGRz(5,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "6" at %f,%f',(VGRx(6,1)+VGRx(6,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(6,1)+VGRz(6,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "7" at %f,%f',(VGRx(7,1)+VGRx(7,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(7,1)+VGRz(7,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "8" at %f,%f',(VGRx(8,1)+VGRx(8,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(8,1)+VGRz(8,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "9" at %f,%f',(VGRx(9,1)+VGRx(9,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(9,1)+VGRz(9,2))/2))
eval(sprintf('gset label "10" at %f,%f',(VGRx(10,1)+VGRx(10,2))/2+0.1,...
-(VGRz(10,1)+VGRz(10,2))/2))
eval(sprintf('gset label "11" at %f,%f',(VGRx(11,1)+VGRx(11,2))/2+0.1,...
-(VGRz(11,1)+VGRz(11,2))/2))
%
%JNE
%
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "SrstkSkeem.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%
%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%
figure(2)
 gset border 31
% gset key outside top
  gset nokey
plot(Xmjk(:,1),MjZ(5,:),"3",Xmjk(:,1),YOO,"3")
title('Varda N5 mõjujoon')
  gset border 31
  gset xtics 1
  gset ytics 0.1
  gset nolabel
      xlabel('x')
      ylabel(' ')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "N5mj.pdf"
```

```
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%
%%%%%%%%%%%%%%
figure(3)

plot(Xmjk(:,1),MjZ(2,:),"3",Xmjk(:,1),Y00,"3")
title('Varda N2 mõjujoon')
      xlabel('x')
      ylabel(' ')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "N2mj.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%%%%%%%%%%%%%
figure(4)

plot(Xmjk(:,1),MjZ(4,:),"3",Xmjk(:,1),Y00,"3")
title('Varda N4 mõjujoon')
      xlabel('x')
      ylabel(' ')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "N4mj.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%%%%%%%%%%
figure(5)
```

```
%
plot(Xmjk(:,1),MjZ(7,:),"3",Xmjk(:,1),Y00,"3")
title('Varda N7 mõjujoon')
      xlabel('x')
      ylabel(' ')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps enhanced color solid "Helvetica" 16
gset size 0.9,0.7
gset linestyle 1 linewidth 8.0 % See ei toota postscript eps puhul
gset output "N7mj.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%
%pause (3) % octave
 clear
%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Programm C.12 *srstkN2.m*[18]

```
%srstkN2.m
% Sõrestiskeemi varraste sisejõudude ja mõjujoonte
% leidmine
%
%==========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-03-03
%                  e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                  http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                  Mehaanikainstituut
%                  http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
```

[18] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/srstkN2.m

```
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=======================================================================
%
 eps1=0.000001;
%==========
% Varda ristlõike jäikus
EA=10000;
%==========
% Sõlmede koordinaadid
%==========
krdn=[ 0  0.0; % sõlm 1
3 -2.4; % sõlm 2
3 0.0; % sõlm 3
6 -3.6; % sõlm 4
6 0.0; % sõlm 5
9 -4.0; % sõlm 6
9 0.0; % sõlm 7
12 -4.0; % sõlm 8
12 0.0; % sõlm 9
15 -4; % sõlm 10
15 0; % sõlm 11
18 -3.6; % sõlm 12
18 0.0; % sõlm 13
21 -2.4; % sõlm 14
21 0.0; % sõlm 15
24 0]; % sõlm 16
%==========
SARV=size(krdn);
NSARV=SARV(1,1);
%disp('----------------------------')
disp('==============================')
disp(' Sõlmede koordinaadid ')
disp('     X        Z ')
disp('----------------------------')
disp([krdn])
disp('----------------------------')
%%%
%==========
% Elemendid ja liigendid
%==========
selemjl=[1 2 1 1 0 1 1 0 ... % jõudude liigendid
0 0 1 0 0 1;    % varras 1
2 3 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 2
1 3 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 3
2 4 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 4
2 5 1 1 0 1 1 0 ...
```

```
0 0 1 0 0 1; % varras 5
3 5 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 6
4 5 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 7
4 6 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 8
5 6 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 9
5 7 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 10
6 7 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 11
6 8 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 12
6 9 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 13
7 9 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 14
8 9 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 15
8 10 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 16
9 10 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 17
10 13 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 18
9 11 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 19
10 12 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 20
10 11 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 21
11 13 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 22
12 13 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 23
12 14 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 24
13 14 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 25
13 15 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 26
14 15 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 27
14 16 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1; % varras 28
15 16 1 1 0 1 1 0 ...
0 0 1 0 0 1]; % varras 29
%
%==========
selem=[selemjl(:,1) selemjl(:,2)];
```

```
jliigend=[selemjl(:,3) selemjl(:,4) selemjl(:,5) selemjl(:,6) selemjl(:,7) selemjl(:,8)];
%disp('-----------------------------')
%disp('-----------------------------')
disp('=============================')
disp('Elementide topoloogia ')
disp('Algus  Lõpp ')
disp('-----------------------------')
disp([selem])
disp('-----------------------------')
%%%%%%%%%%%%
%==========
% Toesõlmed x ja z suunas
%==========
tsolm=[ 1  1 % sõlm 1
0 0; % sõlm 2
0 0; % sõlm 3
0 0; % sõlm 4
0 0; % sõlm 5
0 0; % sõlm 6
0 0; % sõlm 7
0 0; % sõlm 8
0 0; % sõlm 9
0 0; % sõlm 10
0 0; % sõlm 11
0 0; % sõlm 12
0 0; % sõlm 13
0 0; % sõlm 14
0 0; % sõlm 15
0 1]; % sõlm 16
%==========
%disp('-----------------------------')
disp('===============================')
disp(' Toesõlmed ')
disp(' X-suunas  Z-suunas ')
disp('-----------------------------')
disp([tsolm])
disp('-----------------------------')
%%%
% Vabadusastmete nummerdamine
%vabastmnr
%NSARV
Nloe=0;
for i=1:NSARV
 if tsolm(i,1) <= eps1
      Nloe=Nloe+1;
      vabastmnr(i,1)=Nloe;
 end
 if tsolm(i,2) <= eps1
      Nloe=Nloe+1;
      vabastmnr(i,2)=Nloe;
 end
   eimidagi=1;
```

```
end
%
for i=1:NSARV
 if tsolm(i,1) >= eps1
      Nloe=Nloe+1;
      vabastmnr(i,1)=Nloe;
 end
 if tsolm(i,2) >= eps1
      Nloe=Nloe+1;
      vabastmnr(i,2)=Nloe;
 end
   eimidagi=1;
end
%
%disp('-----------------------------')
disp('================================')
disp(' Sõlmede vabadusastmete numbrid ')
disp('  X-suunas   Z-suunas ')
disp('--------------------------------')
disp([vabastmnr])
disp('-----------------------------')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%pause
%
% Varda suunakoosinused
EARV=size(selem);
NEARV=EARV(1,1);
for i=1:NEARV
LkoordN=selem(i,2);
AkoordN=selem(i,1);
DeltaX(i)=krdn(LkoordN,1)-krdn(AkoordN,1);
DeltaZ(i)=krdn(LkoordN,2)-krdn(AkoordN,2);
VGRx(i,1)=krdn(AkoordN,1);
VGRx(i,2)=krdn(LkoordN,1);
VGRz(i,1)=krdn(AkoordN,2);
VGRz(i,2)=krdn(LkoordN,2);
end
%
%Varda pikkus
%lvarras
for i=1:NEARV
lvarras(i,1)=sqrt(DeltaX(i)^2+DeltaZ(i)^2);
end
%
for i=1:NEARV
cosAlpha(i,1)=DeltaX(i)/lvarras(i,1);
cosBeta(i,1)=DeltaZ(i)/lvarras(i,1);
end
%
%disp('-----------------------------')
disp('==============================')
disp('Elementide suunakoosinused ')
```

```
disp('cosAlpha  cosBeta ')
disp('----------------------------')
disp([cosAlpha cosBeta])
disp('----------------------------')
%
%%%%
%Võrrandisüsteemi vasak pool
VVask=zeros(NEARV,NEARV);
NvvYhik=NEARV+3;
YhikVVask=-eye(3);
VVask(NEARV+1:NvvYhik,NEARV+1:NvvYhik)=YhikVVask;
%
for i=1:NEARV
SsolmA=selem(i,1);
SsolmL=selem(i,2);
XAsolm=vabastmnr(SsolmA,1);
ZAsolm=vabastmnr(SsolmA,2);
XLsolm=vabastmnr(SsolmL,1);
ZLsolm=vabastmnr(SsolmL,2);
VVask(XAsolm,i)=-cosAlpha(i,1);
VVask(ZAsolm,i)=-cosBeta(i,1);
VVask(XLsolm,i)=cosAlpha(i,1);
VVask(ZLsolm,i)=cosBeta(i,1);
end
%
%%%%%%%%%%%%%
%Võrrandisüsteemi parem pool
%VParem
%==========
% Jõud sõlmedes
%==========
VJoud=[ 0  0; % sõlm 1
0 0; % sõlm 2
0 5; % sõlm 3
0 0; % sõlm 4
0 10; % sõlm 5
0 0; % sõlm 6
0 4; % sõlm 7
0 0; % sõlm 8
0 8; % sõlm 9
0 0; % sõlm 10
0 0; % sõlm 11
0 0; % sõlm 12
0 4; % sõlm 13
0 0; % sõlm 14
0 8; % sõlm 15
0 0]; % sõlm 16
%==========
%disp('----------------------------')
disp('============================')
disp(' Jõud sõlmedes ')
disp(' X-suunas  Z-suunas')
```

```
disp('----------------------------')
disp([VJoud])
disp('----------------------------')
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%
VParem=zeros(NEARV+3,1);
for i=1:NSARV
Xsuunas=vabastmnr(i,1);
Zsuunas=vabastmnr(i,2);
VParem(Xsuunas,1)=VJoud(i,1);
VParem(Zsuunas,1)=VJoud(i,2);
end
%
%%%%%%%%%%%%%%%%
%XX=inv(VVask)*VParem;
XX=VVask\VParem;
%
disp('============================')
disp(' Varraste sisejõud ')
disp('    N')
disp('----------------------------')
disp([XX])
disp('----------------------------')
%
%%%%%%%%%%%%%%
%Mõjujoonte leidmiseks
VVaskP=inv(VVask);
%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%==========
% Ühikjõud sõlmedes
%==========
YJoudS=[0  1; % sõlm 1
        0  0; % sõlm 2
0 1; % sõlm 3
0 0; % sõlm 4
0 1; % sõlm 5
0 0; % sõlm 6
0 1; % sõlm 7
0 0; % sõlm 8
0 1; % sõlm 9
0 0; % sõlm 10
0 1; % sõlm 11
0 0; % sõlm 12
0 1; % sõlm 13
0 0; % sõlm 14
0 1; % sõlm 15
0 1]; % sõlm 16
%==========
%disp('----------------------------')
disp('============================')
disp(' Ühikjõud sõlmedes ')
```

```
disp(' X-suunas  Z-suunas')
disp('----------------------------')
disp([YJoudS])
disp('----------------------------')
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Leian mõjujoone koordinaadid
jx=0;
jz=0;
Xsuunas=zeros(1,1);
Zsuunas=zeros(1,1);
for i=1:NSARV
if YJoudS(i,1) >= eps1
  jx=jx+1;
  Xsns=vabastmnr(i,1);
Xsuunas(jx,1)=Xsns;
end
if YJoudS(i,2) >= eps1
  jz=jz+1;
   Zsns=vabastmnr(i,2);
Zsuunas(jz,1)=Zsns;
end
  eimidagi=1;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
MjNsi=size(VVaskP);
MjN=MjNsi(1,1);
MjARVz=size(Zsuunas);
NMjARVz=MjARVz(1,1);
%
MjARVx=size(Xsuunas);
NMjARVx=MjARVx(1,1);
%
%
% Mõjujoonte maatriks MjZ (kõigile varrastele ja tugedele)
if NMjARVz > 1
  for i=1:NMjARVz
     NzS=Zsuunas(i,1);
     for j=1:MjN
       MjZ(j,i)=VVaskP(j,NzS);
     end
  end
end
%%%%%%%%%%%
% Mõjujoonte maatriks MjX (kõigile varrastele ja tugedele)
if NMjARVx > 1
  for i=1:NMjARVx
      NxS=Xsuunas(i,1);
      for j=1:MjN
        MjX(j,i)=VVaskP(j,NxS);
      end
```

```
  end
end
%%%%%%%%%%%
% Koordinaadid mõjujoontele
NKo=0;
for i=1:NSARV
  for j=1:NMjARVz
         absvahe=abs(vabastmnr(i,2)-Zsuunas(j,1));
     if absvahe <= eps1
       NKo=NKo+1;
      Xmjk(NKo,1)=krdn(i,1);
     end
      eimidagi=1;
   end
end
%
%NKo=0;
%for i=1:NSARV
%  for j=1:NMjARVz
%         absvahe=abs(vabastmnr(i,2)-Zsuunas(j,1));
%     if absvahe <=  eps1
%      NKo=NKo+1;
%      Zmjk(NKo,1)=krdn(i,2);
%     end
%      eimidagi=1;
%   end
%end
%
disp('=============================')
disp(' Mõjujooned N(i)-le sõlmedes. Viimased kaks on ')
disp(' toereaktsioonide mõjujooned')
disp('-----------------------------')
disp([MjZ])
disp('-----------------------------')
%MjZ
%
disp('=============================')
disp(' Mõjujoone x koordinaadid ')
disp('-----------------------------')
disp([Xmjk'])
disp('-----------------------------')
%
MX0=size(Xmjk);
NMX=MX0(1,1);
Y00=zeros(NMX,1);
%
%%%%%%%%%%%%
figure(1)
 gset border 3
% gset key outside top
 gset nokey
plot(VGRx(1,:),-VGRz(1,:),"3",VGRx(2,:),-VGRz(2,:),"3",VGRx(3,:),-VGRz(3,:),"3",...
```

```
VGRx(4,:),-VGRz(4,:),"3",VGRx(5,:),-VGRz(5,:),"3",VGRx(6,:),-VGRz(6,:),"3",...
VGRx(7,:),-VGRz(7,:),"3",VGRx(8,:),-VGRz(8,:),"3",VGRx(9,:),-VGRz(9,:),"3",...
VGRx(10,:),-VGRz(10,:),"3",VGRx(11,:),-VGRz(11,:),"3",VGRx(12,:),...
-VGRz(12,:),"3",VGRx(13,:),-VGRz(13,:),"3",VGRx(14,:),-VGRz(14,:),"3",...
VGRx(15,:),-VGRz(15,:),"3",VGRx(16,:),-VGRz(16,:),"3",VGRx(17,:),...
-VGRz(17,:),"3",VGRx(18,:),-VGRz(18,:),"3",VGRx(19,:),-VGRz(19,:),"3",...
VGRx(20,:),-VGRz(20,:),"3",VGRx(21,:),-VGRz(21,:),"3",VGRx(22,:),...
-VGRz(22,:),"3",VGRx(23,:),-VGRz(23,:),"3",VGRx(24,:),-VGRz(24,:),"3",...
VGRx(25,:),-VGRz(25,:),"3",VGRx(26,:),-VGRz(26,:),"3",VGRx(27,:),...
-VGRz(27,:),"3",VGRx(28,:),-VGRz(28,:),"3",VGRx(29,:),-VGRz(29,:),"3")
%
title('Sõrestikskeem')
  gset xtics 3
  gset ytics 1
%  gset nolabel
      xlabel('x')
      ylabel('z')
%%Sõlmede numbrid
  eval(sprintf('gset label "1" at %f,%f',krdn(1,1),...
  -(krdn(1,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "2" at %f,%f',krdn(2,1),...
  -(krdn(2,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "3" at %f,%f',krdn(3,1),...
  -(krdn(3,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "4" at %f,%f',krdn(4,1),...
  -(krdn(4,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "5" at %f,%f',krdn(5,1),...
  -(krdn(5,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "6" at %f,%f',krdn(6,1),...
  -(krdn(6,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "7" at %f,%f',krdn(7,1),...
  -(krdn(7,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "8" at %f,%f',krdn(8,1),...
  -(krdn(8,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "9" at %f,%f',krdn(9,1),...
  -(krdn(9,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "10" at %f,%f',krdn(10,1),...
  -(krdn(10,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "11" at %f,%f',krdn(11,1),...
  -(krdn(11,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "12" at %f,%f',krdn(12,1),...
  -(krdn(12,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "13" at %f,%f',...
  krdn(13,1),-(krdn(13,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "14" at %f,%f',...
  krdn(14,1),-(krdn(14,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "15" at %f,%f',...
  krdn(15,1),-(krdn(15,2)+0.17)))
  eval(sprintf('gset label "16" at %f,%f',...
  krdn(16,1),-(krdn(16,2)+0.17)))
%Jne
%%% Varraste numbrid
```

```
  eval(sprintf('gset label "1" at %f,%f',(VGRx(1,1)+VGRx(1,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(1,1)+VGRz(1,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "2" at %f,%f',(VGRx(2,1)+VGRx(2,2))/2+0.1...
  ,-(VGRz(2,1)+VGRz(2,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "3" at %f,%f',(VGRx(3,1)+VGRx(3,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(3,1)+VGRz(3,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "4" at %f,%f',(VGRx(4,1)+VGRx(4,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(4,1)+VGRz(4,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "5" at %f,%f',(VGRx(5,1)+VGRx(5,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(5,1)+VGRz(5,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "6" at %f,%f',(VGRx(6,1)+VGRx(6,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(6,1)+VGRz(6,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "7" at %f,%f',(VGRx(7,1)+VGRx(7,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(7,1)+VGRz(7,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "8" at %f,%f',(VGRx(8,1)+VGRx(8,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(8,1)+VGRz(8,2))/2+0.17))
  eval(sprintf('gset label "9" at %f,%f',(VGRx(9,1)+VGRx(9,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(9,1)+VGRz(9,2))/2))
eval(sprintf('gset label "10" at %f,%f',(VGRx(10,1)+VGRx(10,2))/2+0.1,...
-(VGRz(10,1)+VGRz(10,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "11" at %f,%f',(VGRx(11,1)+VGRx(11,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(11,1)+VGRz(11,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "12" at %f,%f',(VGRx(12,1)+VGRx(12,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(12,1)+VGRz(12,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "13" at %f,%f',(VGRx(13,1)+VGRx(13,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(13,1)+VGRz(13,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "14" at %f,%f',(VGRx(14,1)+VGRx(14,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(14,1)+VGRz(14,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "15" at %f,%f',(VGRx(15,1)+VGRx(15,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(15,1)+VGRz(15,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "16" at %f,%f',(VGRx(16,1)+VGRx(16,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(16,1)+VGRz(16,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "17" at %f,%f',(VGRx(17,1)+VGRx(17,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(17,1)+VGRz(17,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "18" at %f,%f',(VGRx(18,1)+VGRx(18,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(18,1)+VGRz(18,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "19" at %f,%f',(VGRx(19,1)+VGRx(19,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(19,1)+VGRz(19,2))/2))
eval(sprintf('gset label "20" at %f,%f',(VGRx(20,1)+VGRx(20,2))/2+0.1,...
-(VGRz(20,1)+VGRz(20,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "21" at %f,%f',(VGRx(21,1)+VGRx(21,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(21,1)+VGRz(21,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "22" at %f,%f',(VGRx(22,1)+VGRx(22,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(22,1)+VGRz(22,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "23" at %f,%f',(VGRx(23,1)+VGRx(23,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(23,1)+VGRz(23,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "24" at %f,%f',(VGRx(24,1)+VGRx(24,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(24,1)+VGRz(24,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "25" at %f,%f',(VGRx(25,1)+VGRx(25,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(25,1)+VGRz(25,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "26" at %f,%f',(VGRx(26,1)+VGRx(26,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(26,1)+VGRz(26,2))/2))
```

```
  eval(sprintf('gset label "27" at %f,%f',(VGRx(27,1)+VGRx(27,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(27,1)+VGRz(27,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "28" at %f,%f',(VGRx(28,1)+VGRx(28,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(28,1)+VGRz(28,2))/2))
  eval(sprintf('gset label "29" at %f,%f',(VGRx(29,1)+VGRx(29,2))/2+0.1,...
  -(VGRz(29,1)+VGRz(29,2))/2))
%
%JNE
%
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "SrstkSkeem.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%
%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%
figure(2)
 gset border 31
% gset key outside top
  gset nokey
plot(Xmjk(:,1),MjZ(5,:),"3",Xmjk(:,1),Y00,"3")
title('Varda N5 mõjujoon')
  gset border 31
  gset xtics 3
  gset ytics 0.2
  gset nolabel
      xlabel('x')
      ylabel(' ')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "N5mj.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%
%%%%%%%%%%%%%
```

```
figure(3)

plot(Xmjk(:,1),MjZ(2,:),"3",Xmjk(:,1),Y00,"3")
title('Varda N2 mõjujoon')
      xlabel('x')
      ylabel(' ')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "N2mj.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%%%%%%%%%%%%
figure(4)

plot(Xmjk(:,1),MjZ(4,:),"3",Xmjk(:,1),Y00,"3")
title('Varda N4 mõjujoon')
      xlabel('x')
      ylabel(' ')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "N4mj.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%%%%%%%%%%
figure(5)

%
plot(Xmjk(:,1),MjZ(7,:),"3",Xmjk(:,1),Y00,"3")
title('Varda N7 mõjujoon')
      xlabel('x')
      ylabel(' ')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps enhanced color solid "Helvetica" 16
gset size 0.9,0.7
```

```
gset linestyle 1 linewidth 8.0 % See ei toota postscript eps puhul
gset output "N7mj.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%
%pause (3) % octave
%%%%%%%%%%
figure(6)

%
plot(Xmjk(:,1),MjZ(9,:),"3",Xmjk(:,1),Y00,"3")
title('Varda N9 mõjujoon')
      xlabel('x')
      ylabel(' ')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps enhanced color solid "Helvetica" 16
gset size 0.9,0.7
gset linestyle 1 linewidth 8.0 % See ei toota postscript eps puhul
gset output "N9mj.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%
%pause (3) % octave
 clear
%%%%%%%%%%%%%%%%

%%
```

C.5 Arvutiprogramme siirete arvutamiseks

Programm C.13 *siireNA.m*[19]

```
%siireNA.m
%
% Siirete arvutus. Ühikepüüride abil ja koormusepüüri abil siirete
% arvutamine. Temperatuurist siirete arvutamine.
```

[19] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/siireNA.m

```
%===========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-03-27
%                e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                Mehaanikainstituut
%                http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%===========================================================================
%
% Raami varras, millel on koondatud jõud, on jagatud kaheks. Pool riivist
% on koormatud lauskoormusega. Riiv tuleb jagada kaheks osaks. Simpsoni
% valemi järgi integreerimisel on 5 integreerimispiirkonda. Igal
% integreerimispiirkonnal on kirjeldatud 3 ordinaati (alguses, keskel, lõpus).
% Kokku 3X5=15 väärtust igalt epüürilt.
%  (ühikepüüridelt=>Mx-i ja Mp epüüürilt =>Mp-isse).
%=============
talpha=1.2*0.00001
%=============
h=4
h2=h/2
L=6
L05=L/2
I1=2
I2=1
%=============
Hpost=0.5
Hriiv=0.6
%==========
% Momendi ühikepüüride ordinaadid
%==========
Mx=[0.0   0.0   0.0; % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
   0.0   -1.0   0.0;
   0.0   -2.0   0.0;
   0.0   -2.0   0.0; % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
   0.0   -3.0   0.0;
   0.0   -4.0   0.0;
```

```
   0.0   -4.0   0.0; % varras 2 (pool riivist)
   0.75  -4.0  -0.25;
   1.5   -4.0  -0.5;
   1.5   -4.0  -0.5; % varras 2 (pool riivist)
   0.75  -4.0  -0.75;
   0.0   -4.0  -1.0;
   0.0   -4.0  -1.0; % varras 3 (post)
   0.0   -2.0  -1.0;
   0.0    0.0  -1.0]
%===================
MxT=Mx';
%===================
% Normaaljõu ühikepüüride ordinaadid
%===================
Nx=[-0.5   0.0   1/6; % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
   -0.5    0.0   1/6;
   -0.5    0.0   1/6;
   -0.5    0.0   1/6; % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
   -0.5    0.0   1/6;
   -0.5    0.0   1/6;
    0.0   -1.0   0.0; % varras 2 (pool riivist)
    0.0   -1.0   0.0;
    0.0   -1.0   0.0;
    0.0   -1.0   0.0; % varras 2 (pool riivist)
    0.0   -1.0   0.0;
    0.0   -1.0   0.0;
   -0.5    0.0  -1/6; % varras 3 (post)
   -0.5    0.0  -1/6;
   -0.5    0.0  -1/6]
%===================
NxT=Nx';
%============
% Koormuse epüüri ordinaadid
%============
Mp=[0;  % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
    0;
    0;
    0;  % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
   -10;
  -20;
  -20;  % varras 2 (pool riivist)
   20;
   15;
   15;  % varras 2 (pool riivist)
  -12.5;
  -40;
  -40;  % varras 3 (post)
  -20;
    0]
%=========
MpT=Mp';
%=============
```

```
% Simpsoni valemi kordajad (paine EI)
%============
smps=1/6*[h2/I2;  % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
        4*h2/I2;
          h2/I2;
          h2/I2;  % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
        4*h2/I2;
          h2/I2;
         L05/I1;  % varras 2 (pool riivist)
      4*L05/I1;
        L05/I1;
        L05/I1;  % varras 2 (pool riivist)
      4*L05/I1;
        L05/I1;
          h/I2;  % varras 3 (post)
        4*h/I2;
          h/I2];
%============
smps0=1/6*[h2;  % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
        4*h2;
          h2;
          h2;  % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
        4*h2;
          h2;
        L05;  % varras 2 (pool riivist)
      4*L05;
        L05;
          L05;  % varras 2 (pool riivist)
        4*L05;
          L05;
        h;  % varras 3 (post)
      4*h;
        h];
%============
% Siirded koormusest
%====================
W=MxT.*[MpT; MpT; MpT]*smps
%====================
% Temperatuuri erinevus
%============
Tp=talpha*[-10/Hpost;  % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
    -10/Hpost;
    -10/Hpost;
  -10/Hpost;  % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
  -10/Hpost;
  -10/Hpost;
   -10/Hriiv;  % varras 2 (pool riivist)
   -10/Hriiv;
   -10/Hriiv;
  -10/Hriiv;  % varras 2 (pool riivist)
  -10/Hriiv;
  -10/Hriiv;
```

```
    0/Hpost;  % varras 3 (post)
    0/Hpost;
    0/Hpost];
%============
% Temperatuur teljel
%============
To=talpha*[15;  % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
    15;
    15;
  15;  % varras 1 (pool postist, kus on koondatud jõud)
  15;
  15;
   15;  % varras 2 (pool riivist)
   15;
   15;
  15;  % varras 2 (pool riivist)
  15;
  15;
   10;  % varras 3 (post)
   10;
   10];
%==========
TpT=Tp';
ToT=To';
MxTTp=MxT.*[TpT; TpT; TpT];
NxTTo=NxT.*[ToT; ToT; ToT];
%
%=====================
WT=MxTTp*smps0+NxTTo*smps0
%=====================
%
%%%%%%%%%
```

C.6 Arvutiprogramme raami arvutamiseks. Jõumeetod

Programm C.14 *joumNA.m*[20]

```
%joumNA.m
%
% Jõumeetod. Ühikepüüride abil võrrandisüsteemi kordajate ja
% vabaliikmete leidmine. Paindemomendi epüüri ordinaatide arvutamine.
%======================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-03-26
%                  e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                  http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                  Mehaanikainstituut
%                  http://www.ttu.ee/
```

[20] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/joumNA.m

```
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%==========================================================================
%
% Raami varras, millel on koondatud jõud, on jagatud kaheks. Nii tuleb 6 varrast.
% Igal vardal on kirjeldatud 3 ordinaati (alguses, keskel, lõpus). Kokku 3X6=18
% väärtust igalt epüürilt (ühikepüüridelt=>a-sse ja Mp0 epüüürilt==>f-i).
%==========
% Ühikepüüride ordinaadid
%==========
Mx=[0.0  0.0   0.0; % varras 1 (post)
   0.0   0.0   0.0;
   0.0   0.0   0.0;
   0.0   0.0   0.0; % varras 2 (riiv)
   0.5   0.0   0.0;
   1.0   0.0   0.0;
   1.0   0.0  -1.0; % varras 3 (pool postist, kus on koondatud jõud)
   1.0  -0.25 -1.0;
   1.0  -0.5  -1.0;
   1.0  -0.5  -1.0; % varras 4 (pool postist, kus on koondatud jõud)
   1.0  -0.75 -1.0;
   1.0  -1.0  -1.0;
   0.0   0.0   1.0; % varras 5 (riiv)
   0.0   0.0   0.5;
   0.0   0.0   0.0;
   0.0   0.0   0.0; % varras 6 (post)
   0.0   0.5   0.0;
   0.0   1.0   0.0]
%==================
MxT=Mx';
%============
% Koormuse epüüri ordinaadid
%============
Mp=[ 0; % varras 1 (post)
    0;
    0;
    0;   % varras 2 (riiv)
   36;
```

```
    0;
    0;  % varras 3 (pool postist, kus on koondatud jõud)
    0;
    0;
    0;  % varras 4 (pool postist, kus on koondatud jõud)
   10;
   20;
    0;  % varras 5 (riiv)
    0;
    0;
    0;  % varras 6 (post)
    0;
    0]
%==========
MpT=Mp';
%=============
% Simpsoni valemi kordajad
%=============
h=4;
h2=h/2;
L=6;
L05=L/2;
I1=2;
I2=1;
%============
smpsT=1/6*[h;    % varras 1 (post)
         4*h;
           h;
        L/I1;  % varras 2 (riiv)
      4*L/I1;
        L/I1;
          h2;  % varras 3 (pool postist, kus on koondatud jõud)
        4*h2;
          h2;
          h2;  % varras 4 (pool postist, kus on koondatud jõud)
        4*h2;
          h2;
        L/I1;  % varras 5 (riiv)
      4*L/I1;
        L/I1;
           h;  % varras 6 (post)
         4*h;
           h ]
%============
smps=smpsT' ;
%============
%
% Võrrandisüsteemi kordajate maatriksi 'a' leidmine

b1=MxT.*[MxT(1,:); MxT(1,:); MxT(1,:)]*smpsT;

b2=MxT.*[MxT(2,:); MxT(2,:); MxT(2,:)]*smpsT;
```

```
b3=MxT.*[MxT(3,:); MxT(3,:); MxT(3,:)]*smpsT;
%===========
a=[b1 b2 b3]
%===========
% Võrrandisüsteemi vabaliikmed
%=====================
b=MxT.*[MpT; MpT; MpT]*smpsT
%=====================
% Võrrandisüsteemi tundmatute leidmine
%=====================
%x=-inv(a)*b  % inv(a)- leiab 'a' pöördmaatriksi
x=-a\b % lahend on leitud Gaussi eliminatsiooniga võrrandisüsteemist a*x=b
%     % võrrandisüsteemist a*x=b
%=====================
% Momendiepüüri arvutamine
%=====================
M=Mx*x+Mp
%=====================
MT=M' ;
% Kinemaatiline kontroll
delta1=MxT(1,:).*MT*smpsT
delta2=MxT(2,:).*MT*smpsT
delta3=MxT(3,:).*MT*smpsT
% Suhtelise vea arvutamine
%pros1=delta1/( abs(MxT(1,:)).*abs(MT)*smpsT)*100
%pros2=delta1/( abs(MxT(2,:)).*abs(MT)*smpsT)*100
%pros3=delta1/( abs(MxT(3,:)).*abs(MT)*smpsT)*100

%%%%%%%%%
```

C.7 Arvutiprogramme jätkuvtala arvutamiseks

C.7.1 Arvutifunktsioonid jätkuvtala arvutamiseks

Programm C.15 *afbfikt1.m*[21]

```
%afbfikt1.m
function ABf=afbfikt1(l,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL,EI,EIo)
%afbfikt1.m
% Jätkuvtala fiktiivsete toereaktsioonide
% 6*Af ja 6*Bf arvutamise programm
% võtab arvesse 2 koondatud jõudu aF1, aF2
% ja ühe jaotatud koormuse
%============================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-02-25
%                  e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                  http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
```

[21] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/afbfikt1.m

```
%               Mehaanikainstituut
%               http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%========================================================================
%
%N      % Tala sillete arv
%l      % Lihttala ava
%F1     % Esimese koondatud jõu väärtus
%F2     % Teise koondatud jõu väärtus
%qz     % Ühtlaselt jaotatud koormus
%aF1    % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2    % Teise koondatud jõu asukoht
%aqA    % Ühtlaselt jaotatud koormuse algus
%aqL    % Ühtlaselt jaotatud koormus  lõpp
%%%%%%%%%%%%%
%ABf -- Fiktiivsed toereaktsioonid:
%       ABf(1,1) -- 6*Af;
%       ABf(1,2) -- 6*Bf
%%%%%
%Va -- Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% eps1=0.000001;
li=l*EIo/EI;
xi1=aF1/l;
xi2=aF2/l;
xip1=1-xi1;
xip2=1-xi2;
xqa=aqA/l;
xql=aqL/l;
%%%%
Vb=(F1*aF1+F2*aF2+qz*(aqL-aqA)*(aqL+aqA)/2)/l;
Vb
Va=(F1*(l-aF1)+F2*(l-aF2)+qz*(aqL-aqA)*(l-(aqL+aqA)/2))/l;
Va
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Af=qz*l^2*li/4;
```

```
%Bf=Af;
Af(1,1)=0;
Bf(1,1)=0;
Af(1,1)=Af(1,1)+qz*l^2*li*xql^2*(2-xql^2)/4;
Bf(1,1)=Bf(1,1)+qz*l^2*li*xql^2*(2-xql)^2/4;
%%%%%%%%%%
Af(1,1)=Af(1,1)+F1*l*li*xi1*xip1*(1+xip1);
Af(1,1)=Af(1,1)+F2*l*li*xi2*xip2*(1+xip2);
Bf(1,1)=Bf(1,1)+F1*l*li*xi1*xip1*(1+xi1);
Bf(1,1)=Bf(1,1)+F2*l*li*xi2*xip2*(1+xi2);
%%
ABf=[Af(1,1) Bf(1,1)];

endfunction

%%%%%%%%%
```

Programm C.16 *fooksuhe.m*[22]

```
%fooksuhe.m
function kvp=fooksuhe(N,lv,kvs,kps,EI,EIo)
%fooksuhe.m
% Fookussuhete arvutamise programm
% kvp(i,1)   % vasakpoolsed fookussuhted
% kvp(i,2)   % parempoolsed fookussuhted
%===========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-02-25
%                e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                Mehaanikainstituut
%                http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%===========================================================================
%
%N      % Tala sillete arv
```

[22] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/fooksuhe.m

```
%l(i)   % Lihttala avade vektor  l(i,1)
%kv(1)  % Esimese silde vasakpoolne fookussuhe
%kp(N)  % Viimase silde parempoolne fookussuhe
%EI(i)  % Tala sillete ristlõigete jäikused
%EIo    % Tala silde ristlõike baasjäikus
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
eps1=0.000000000001;
lopmatus1=1/eps1;
kv(1)=kvs;
kp(N)=kps;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 for i=1:N
   li(i)=lv(i)*EIo/EI(i);
 end
%%
 for j=2:N
   kv(j)=2+(li(j-1)/li(j))*(2-1/kv(j-1));
 end
%%
     N1=N-1;
 for j=1:N1
   jp=N-j;
   kp(jp)=2+(li(jp+1)/li(jp))*(2-1/kp(jp+1));
 end
%
kvp=[kv kp];
%%%%%%%%%%

endfunction

%%%%%%%%%
```

Programm C.17 *toemom1.m*[23]

```
%toemom1.m
function TM=toemom1(l,kv,kp,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL,EI,EIo)
%toemom1.m
% Jätkuvtala toemomentide arvutus
% võtab arvesse 2 koondatud jõudu aF1, aF2
% ja ühe jaotatud koormuse qz
%==========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-05-21
%                 e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                 http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                 Mehaanikainstituut
%                 http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
```

[23] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/toemom1.m

```
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=====================================================================
%
%N      % Tala sillete arv
%l      % Lihttala sille
%kv     % Vasakpoolne fookussuhe
%kp     % Parempoolne fookussuhe
%F1     % Esimese koondatud jõu väärtus
%F2     % Teise koondatud jõu väärtus
%qz     % Ühtlaselt jaotatud koormus
%aF1    % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2    % Teise koondatud jõu asukoht
%aqA    % Ühtlaselt jaotatud koormuse algus
%aqL    % Ühtlaselt jaotatud koormus  lõpp
%%%%%%%%%%%%%
%TM  -- Toemomendid:
%       TM(1,1) -- vasakpoolne toemoment;
%       TM(1,2) -- parempoolne toemoment;
%%%%
%Va -- Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%%%%%%%%%%%%%%%%%
ABf=afbfikt1(l,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL,EI,EIo);
%%%%%%%
 eps1=0.000000001;
 KA=1/eps1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%
A6f=ABf(1,1);
B6f=ABf(1,2);
%%%%%%%%%
if kv > KA
     Mv(1,1)=0;
     Mp(1,1)=-B6f/(l*kp);
else
   if kp > KA
     Mp(1,1)=0;
     Mv(1,1)=-A6f/(l*kv);
   else
     Mv(1,1)=-(A6f*kp-B6f)/(l*(kv*kp-1));
     Mp(1,1)=-(B6f*kv-A6f)/(l*(kv*kp-1));
   end
```

```
end
%%%%%%%%%%%%%
TM=[Mv(1,1) Mp(1,1)];

endfunction

%%%%%%%%%
```

C.8 Arvutiprogramme deformatsioonimeetodiga arvutamiseks

Programm C.18 *defNAB.m*[24]

```
%defNAB.m
%
% Deformatsioonimeetod.
% Paindemomendi epüüri ordinaatide arvutamine.
%======================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-04-29
%                e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                Mehaanikainstituut
%                http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%======================================================================
%
%ne - varraste arv
%nr1 - baasvarda number (varras mille jäikuse võtame üheks)
%l(i) - varraste pikkused
%EI(i)- varraste ristlõigete jäikused
%deta(i)- varraste pöördenurgad
%
%
```

[24] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/defNAB.m

```
ne=5;
l=[3 6.0 3.0 6 3.16227766];
varraste_pikkused_l=l
EI=[1 3 1 3 1];
varraste_ristloigete_jaikused_EI=EI
deta=[1 0 1 -0.1667 1.0];
varraste_poordenurdad_deta=deta
eli0=EI(1)/l(1);          % valin baasjäikuseks 1. varda jäikuse
%
% Arvutan varraste jäikused EI(i)/l(i)
 for i=1:ne
     eli(i)=EI(i)/l(i);
 end
%
% Arvutan varraste redutseeritud jäikused (EI(i)/l(i))/eli0
 for i=1:ne
     eli(i)=eli(i)/eli0;
 end
%
varraste_jaikused_i=eli'   % trükin 'eli' välja
%==========
% varraste kinnitusmomendid sõlmede pööretest
%
%==========
mx=[0*eli(1) 0*eli(1)   0*eli(1)*deta(1); % varras 1 (post)
    3*eli(1) 0*eli(1)  -3*eli(1)*deta(1); %     sõlme pööre "a"
    4*eli(2) 2*eli(2)   0*eli(2)*deta(2); % varras 2 (riiv) sõlme pööre "a"
    2*eli(2) 4*eli(2)   0*eli(2)*deta(2); %             sõlme pööre "b"
    0*eli(3) 4*eli(3)  -6*eli(3)*deta(3); % varras 3 (post) sõlme pööre "b"
    0*eli(3) 2*eli(3)  -6*eli(3)*deta(3); %
    0*eli(4) 3*eli(4)  -3*eli(4)*deta(4); % varras 4 (riiv) sõlme pööre "b"
    0*eli(4) 0*eli(4)   0*eli(4)*deta(4); %
    0*eli(5) 0*eli(5)   0*eli(5)*deta(5); % varras 5 (post)
    0*eli(5) 0*eli(5)  -3*eli(5)*deta(5)] %
%===========
% Aab=kinnmom1(l,F1,aF1,F2,aF2,qz) %kinni vaskul ja paremal
% Aao=kinnmom2(l,F1,aF1,F2,aF2,qz) %kinni vaskul
% Aob=kinnmom3(l,F1,aF1,F2,aF2,qz) %kinni paremal
  Aab=kinnmom1(l(2),0,l(2),0,l(2),8); %kinni vaskul
  Aeb=kinnmom1(l(3),30,1.8,0,l(3),0);
%============
Mab=Aab(1,1);
Mba=Aab(1,2);
Meb=Aeb(1,1);
Mbe=Aeb(1,2);
%============
% Koormuse epüüri ordinaadid
%============
mp=[0;  % varras 1 (post)
    0;
  Mab;  % varras 2 (riiv)
  Mba;
```

```
  Mbe;  % varras 3 (poost)
  Meb;
    0;  % varras 4 (riiv)
    0;
    0;  % varras 6 (post)
    0]
%==========
r(1,1)=3*eli(1)+4*eli(2);
r(1,2)=2*eli(2);
r(2,1)=r(1,2);
r(2,2)=4*eli(2)+4*eli(3)+3*eli(4);
r(1,3)=-3*eli(1)*deta(1);
r(3,1)=r(1,3);
r(2,3)=-6*eli(3)*deta(3)-3*eli(4)*deta(4);
r(3,2)=r(2,3);
r(3,3)=3*eli(1)*deta(1)^2+12*eli(3)*deta(3)^2 ...
       +3*eli(4)*deta(4)^2+3*eli(5)*deta(5)^2;
%==========
r
%==========
r1p=-(Meb+Mbe+30*1.8)*deta(3);
rp=[Mab+4; Mba+Mbe; r1p]  % siin Mab'le on lisatud konsooli moment
%x=-inv(r)*rp
x=-r\rp
M=mx*x+mp
%kõik
%

%%%%%%%%%
```

C.8.1 Arvutifunktsioonid deformatsioonimeetodiga arvutamiseks

Programm C.19 *kinnmom1.m*[25]

```
%kinnmom1.m
function AB=kinnmom1(l,F1,aF1,F2,aF2,qz)
%kinnmom1.m
% deformatsioonimeetodi kinnitusmomendid koormusest
% võtab arvesse 2 koondatud jõudu aF1, aF2
% ja ühe jaotatud koormuse silde ulatuses
%=========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-04-29
%                  e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                  http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                  Mehaanikainstituut
%                  http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
```

[25] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kinnmom1.m

```
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%==========================================================================
%
%l      % Varda pikkus
%F1     % Esimese koondatud jõu väärtus
%F2     % Teise koondatud jõu väärtus
%aF1    % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2    % Teise koondatud jõu asukoht
%qz     % Ühtlaselt jaotatud koormus
%%%%%%%%%%%%%
%AB -- Kinnitusmomendid koormusest:
%       AB(1,1) -- vasakpoolne moment;
%       AB(1,2) -- parempoolne moment;
%%%%
%Va -- Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% eps1=0.000001;
xi1=aF1/l;
xi2=aF2/l;
xip1=1-xi1;
xip2=1-xi2;
%%%
Vb=(F1*aF1+F2*aF2+qz*l^2/2)/l;
Va=(F1*(l-aF1)+F2*(l-aF2)+qz*l^2/2)/l;
Va
Vb
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
Am(1,1)=0;
Bm(1,1)=0;
Am(1,1)=Am(1,1)-qz*l^2/12;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+qz*l^2/12;
%%%%%%%%%%
Am(1,1)=Am(1,1)-F1*l*xi1*xip1^2;
Am(1,1)=Am(1,1)-F2*l*xi2*xip2^2;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+F1*l*xi1^2*xip1;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+F2*l*xi2^2*xip2;
%%
```

```
AB=[Am(1,1) Bm(1,1)];

endfunction

%%%%%%%%
```

Programm C.20 *kinnmom2.m*[26]

```
%kinnmom2.m
function AB=kinnmom2(l,F1,aF1,F2,aF2,qz)
%kinnmom2.m (vasakul jäik tugi, paremal 0)
% deformatsioonimeetodi kinnitusmomendid koormusest
% võtab arvesse 2 koondatud jõudu aF1, aF2
% ja ühe jaotatud koormuse silde ulatuses
%==========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-04-29
%                 e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                 http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                 Mehaanikainstituut
%                 http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%==========================================================================
%
%l      % Varda pikkus
%F1     % Esimese koondatud jõu väärtus
%F2     % Teise koondatud jõu väärtus
%aF1    % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2    % Teise koondatud jõu asukoht
%qz     % Ühtlaselt jaotatud koormus
%%%%%%%%%%%%%%
%AB -- Kinnitusmomendid koormusest:
%       AB(1,1) -- vasakpoolne moment;
%       AB(1,2) -- parempoolne moment;
%%%%
%Va -- Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
```

[26] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kinnmom2.m

```
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% eps1=0.000001;
xi1=aF1/l;
xi2=aF2/l;
xip1=1-xi1;
xip2=1-xi2;
%%%
Vb=(F1*aF1+F2*aF2+qz*l^2/2)/l;
Va=(F1*(l-aF1)+F2*(l-aF2)+qz*l^2/2)/l;
Va
Vb
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
Am(1,1)=0;
Bm(1,1)=0;
Am(1,1)=Am(1,1)-qz*l^2/8;
%%%%%%%%%%
Am(1,1)=Am(1,1)-F1*l*xip1*(1-xip1^2)/2;
Am(1,1)=Am(1,1)-F2*l*xip2*(1-xip2^2)/2;
Bm(1,1)=0;
%%
AB=[Am(1,1) Bm(1,1)];

endfunction

%%%%%%%%%
```

Programm C.21 *kinnmom3.m*[27]

```
%kinnmom3.m
function AB=kinnmom3(l,F1,aF1,F2,aF2,qz)
%kinnmom3.m  (vaskul 0, paremal jäik tugi)
% deformatsioonimeetodi kinnitusmomendid koormusest
% võtab arvesse 2 koondatud jõudu aF1, aF2
% ja ühe jaotatud koormuse silde ulatuses
%==========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-04-29
%                 e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                 http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                 Mehaanikainstituut
%                 http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
```

[27] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kinnmom3.m

```
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%===========================================================================
%
%l      % Varda pikkus
%F1     % Esimese koondatud jõu väärtus
%F2     % Teise koondatud jõu väärtus
%aF1    % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2    % Teise koondatud jõu asukoht
%qz     % Ühtlaselt jaotatud koormus
%%%%%%%%%%%%%
%AB -- Kinnitusmomendid koormusest:
%       AB(1,1) -- vasakpoolne moment;
%       AB(1,2) -- parempoolne moment;
%%%%
%Va -- Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%%%%%%%%%%%%%%%%%
% eps1=0.000001;
xi1=aF1/l;
xi2=aF2/l;
xip1=1-xi1;
xip2=1-xi2;
%%%
Vb=(F1*aF1+F2*aF2+qz*l^2/2)/l;
Va=(F1*(l-aF1)+F2*(l-aF2)+qz*l^2/2)/l;
Va
Vb
%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
Am(1,1)=0;
Bm(1,1)=0;
Am(1,1)=0;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+qz*l^2/8;
%%%%%%%%%
Am(1,1)=0;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+F1*l*xi1*(1-xi1^2)/2;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+F2*l*xi2*(1-xi2^2)/2;
%%
AB=[Am(1,1) Bm(1,1)];

endfunction

%%%%%%%%%
```

Programm C.22 *kinnmom4.m*[28]

```
%kinnmom4.m
function AB=kinnmom4(l,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL)
%kinnmom4.m
% deformatsioonimeetodi kinnitusmomendid koormusest
% võtab arvesse 2 koondatud jõudu aF1, aF2
% ja ühe jaotatud koormuse qz
%==========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-04-29
%                  e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                  http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                  Mehaanikainstituut
%                  http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%==========================================================================
%
%l       % Varda pikkus
%F1      % Esimese koondatud jõu väärtus
%F2      % Teise koondatud jõu väärtus
%aF1     % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2     % Teise koondatud jõu asukoht
%qz      % Ühtlaselt jaotatud koormus
%aqA     % Ühtlaselt jaotatud koormuse algus
%aqL     % Ühtlaselt jaotatud koormus  lõpp
%%%%%%%%%%%%%%
%AB -- Kinnitusmomendid koormusest:
%        AB(1,1) -- vasakpoolne moment;
%        AB(1,2) -- parempoolne moment;
%%%%%
%Va -- Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Valem on võetud õpikust Wilfried B. Krätzig, Tragwerke 2,
% Springer_Verlag 1990, leheküljelt 170 ja on võetud
```

[28] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kinnmom4.m

```
% I märgikokkulepe märgid.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% eps1=0.000001;
xi1=aF1/l;
xi2=aF2/l;
xip1=1-xi1;
xip2=1-xi2;
%
a=(aqA+aqL)/2;
b=(l-a);
c=aqL-aqA;
alf=a/l;
bet=b/l;
gam=c/l;
%%%%
Vb=(F1*aF1+F2*aF2+qz*(aqL-aqA)*(aqL+aqA)/2)/l;
Va=(F1*(l-aF1)+F2*(l-aF2)+qz*(aqL-aqA)*(l-(aqL+aqA)/2))/l;
Va
Vb
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
Am(1,1)=0;
Bm(1,1)=0;
Am(1,1)=Am(1,1)-qz*c*(a*bet^2+(l-3*b)*gam^2/12);
Bm(1,1)=Bm(1,1)+qz*c*(b*alf^2+(l-3*a)*gam^2/12);
%%%%%%%%%%
Am(1,1)=Am(1,1)-F1*l*xi1*xip1^2;
Am(1,1)=Am(1,1)-F2*l*xi2*xip2^2;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+F1*l*xi1^2*xip1;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+F2*l*xi2^2*xip2;
%%
AB=[Am(1,1) Bm(1,1)];

endfunction

%%%%%%%%%
```

Programm C.23 *kinnmom5.m*[29]

```
%kinnmom5.m
function AB=kinnmom5(l,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL)
%kinnmom5.m (vasakul jäik tugi, paremal liigend 0)
% deformatsioonimeetodi kinnitusmomendid koormusest
% võtab arvesse 2 koondatud jõudu aF1, aF2
% ja ühe jaotatud koormuse qz
%==========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-04-29
%                 e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                 http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                 Mehaanikainstituut
```

[29] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kinnmom5.m

```
%               http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%=========================================================================
%
%l      % Varda pikkus
%F1     % Esimese koondatud jõu väärtus
%F2     % Teise koondatud jõu väärtus
%aF1    % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2    % Teise koondatud jõu asukoht
%qz     % Ühtlaselt jaotatud koormus
%aqA    % Ühtlaselt jaotatud koormuse algus
%aqL    % Ühtlaselt jaotatud koormus  lõpp
%%%%%%%%%%%%%%
%AB -- Kinnitusmomendid koormusest:
%       AB(1,1) -- vasakpoolne moment;
%       AB(1,2) -- parempoolne moment;
%%%%%
%Va -- Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Valem on võetud õpikust Wilfried B. Krätzig, Tragwerke 2,
% Springer_Verlag 1990, leheküljelt 170 ja on võetud
% I märgikokkulepe märgid.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% eps1=0.000001;
xi1=aF1/l;
xi2=aF2/l;
xip1=1-xi1;
xip2=1-xi2;
%
a=(aqA+aqL)/2;
b=(l-a);
c=aqL-aqA;
alf=a/l;
bet=b/l;
gam=c/l;
%%%%
```

```
Vb=(F1*aF1+F2*aF2+qz*l^2/2)/l;
Va=(F1*(l-aF1)+F2*(l-aF2)+qz*l^2/2)/l;
Va
Vb
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
Am(1,1)=0;
Bm(1,1)=0;
Am(1,1)=Am(1,1)-qz*(alf*(1+bet)-gam^2/4)*b*c/2;
%%%%%%%%%%
Am(1,1)=Am(1,1)-F1*l*xip1*(1-xip1^2)/2;
Am(1,1)=Am(1,1)-F2*l*xip2*(1-xip2^2)/2;
Bm(1,1)=0;
%%
AB=[Am(1,1) Bm(1,1)];

endfunction

%%%%%%%%%
```

Programm C.24 *kinnmom6.m*[30]

```
%kinnmom6.m
function AB=kinnmom6(l,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL)
%kinnmom6.m (vasakul liigend 0, paremal jäik tugi)
% deformatsioonimeetodi kinnitusmomendid koormusest
% võtab arvesse 2 koondatud jõudu aF1, aF2
% ja ühe jaotatud koormuse qz
%==========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-04-29
%                  e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                  http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                  Mehaanikainstituut
%                  http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
```

[30] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kinnmom6.m

```
%==========================================================================
%
%l      % Varda pikkus
%F1     % Esimese koondatud jõu väärtus
%F2     % Teise koondatud jõu väärtus
%aF1    % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2    % Teise koondatud jõu asukoht
%qz     % Ühtlaselt jaotatud koormus
%aqA    % Ühtlaselt jaotatud koormuse algus
%aqL    % Ühtlaselt jaotatud koormus  lõpp
%%%%%%%%%%%%%
%AB -- Kinnitusmomendid koormusest:
%       AB(1,1) -- vasakpoolne moment;
%       AB(1,2) -- parempoolne moment;
%%%%%
%Va -- Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Valem on võetud õpikust Wilfried B. Krätzig, Tragwerke 2,
% Springer_Verlag 1990, leheküljelt 170 ja on võetud
% I märgikokkulepe märgid.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% eps1=0.000001;
xi1=aF1/l;
xi2=aF2/l;
xip1=1-xi1;
xip2=1-xi2;
%
a=(aqA+aqL)/2;
b=(l-a);
c=aqL-aqA;
alf=a/l;
bet=b/l;
gam=c/l;
%%%%
Vb=(F1*aF1+F2*aF2+qz*l^2/2)/l;
Va=(F1*(l-aF1)+F2*(l-aF2)+qz*l^2/2)/l;
Va
Vb
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
Am(1,1)=0;
Bm(1,1)=0;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+qz*(bet*(1+alf)-gam^2/4)*a*c/2;
%%%%%%%%%%
Am(1,1)=0;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+F1*l*xi1*(1-xi1^2)/2;
Bm(1,1)=Bm(1,1)+F2*l*xi2*(1-xi2^2)/2;
%%
AB=[Am(1,1) Bm(1,1)];

endfunction
```

%%%%%%%%%

C.9 Arvutiprogramme staatiliselt määramatu kaare arvutamiseks

Programm C.25 *kaarSjPr1.m*[31]

```
%kaarSjPr1.m
%
%kaarSjPr1.m
%Arvutiprogramm kahe liigendiga kaare sisejõudude leidmiseks
%===========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-05-16
%                e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                Mehaanikainstituut
%                http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%===========================================================================
%
l=32  % Kaare sille
f=4  % Kaare tõus
F1=0 % Esimese koondatud jõu väärtus
F2=0  % Teise koondatud jõu väärtus
qz=80.0   % Ühtlaselt jaotatud koormus
aF1=32.0   % Esimese koondatud jõu asukoht
aF2=32.0 % Teise koondatud jõu asukoht
aqA=0.0 % Ühtlaselt jaotatud koormuse algus
aqL=16.0 % Ühtlaselt jaotatud koormus  lõpp
NT=20   % Kaare  jaotuste arv peab olema paaris arv
NN=NT+2 % Kaare jaotuste arv + 1 + koondatud jõudude arv
Ic=0.12  % Ristlõike inertsimoment lukuliigendis
```

[31] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kaarSjPr1.m

```
Ac=0.845 % Ristlõike pindala lukuliigendis
%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
SP=lihttalaSj(NT,NN,l,F1,aF1,F2,aF2,qz,aqA,aqL);
%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
SR=kaarPrbSj(NT,NN,l,f,F1,aF1,F2,aF2,SP);
%%%%%%%%%%%%%%%%%
xv=SR(4,:);
y=SR(5,:);
sinFi=SR(7,:);
cosFi=SR(8,:);
NNX=size(cosFi);
NNM=NNX(1,2);
%
for j=1:NNM
 j3cosFi(1,j)=cosFi(1,j)^(1/3);
 cj3csFi(1,j)=cosFi(1,j)*j3cosFi(1,j);
 y2(1,j)=y(1,j)^2;
 Qo(1,j)=SP(1,j);
 Mo(1,j)=SP(2,j);
 yMo(1,j)=y(1,j)*Mo(1,j);
end
%
samm=SR(4,2)-SR(4,1);
%
NS=0; NS2=1; yMo4=0; yMo2=0; NNL=NNM/2-1; NNL1=NNM/2-2;
dy14=0; dy24=0; dy12=0; dy22=0;
for j=1:NNL
NS=NS+2;
yMo4=yMo4+yMo(1,NS); % Simpsoni valemis 4*yMo4
dy14=dy14+y2(1,NS);
dy24=dy24+cj3csFi(1,NS);
end
%
for j=1:NNL1
NS2=NS2+2;
yMo2=yMo2+yMo(1,NS2); % Simpsoni valemis 2*yMo2
dy12=dy12+y2(1,NS2);
dy22=dy22+cj3csFi(1,NS2);
end
%
% Simpsoni valemi järgi integreerimine
EIcDelta=-(samm/3)*(yMo(1,1)+4*yMo4+2*yMo2+yMo(1,NN))
EIcdelta=(samm/3)*(y2(1,1)+4*dy14+2*dy12+y2(1,1))+...
(Ic/Ac)*(samm/3)*(cj3csFi(1,1)+4*dy24+2*dy22+cj3csFi(1,1))
H=-EIcDelta/EIcdelta
%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
SR2Li=kaarPrbSj1(H,NT,NN,l,f,F1,aF1,F2,aF2,SP);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%SR1=SR(1:4,:);
```

```
%SR2=SR(5:8,:);
%%%%%%%%%%%%%%%%%
SPry=[xv' y' y2' cosFi' j3cosFi' cj3csFi'];
SPry1=[xv' y' Qo' Mo' yMo'];
%%%%%%%%%%%%%%%%%
disp('  Kahe liigendiga kaar  ')
disp('------------------------------------------------------------------------------')
disp('        x        y          y^2       cosFi   cosFi^(1/3) cosFi*cosFi^(1/3)')
disp('------------------------------------------------------------------------------')
SPry
disp('------------------------------------------------------------------------------')
%pause
%%%%%%%%%%%%%%%%%
disp('  Lihttala sisejõud ja kahe liigendiga kaar ')
disp('------------------------------------------------------------------------ --')
disp('        x        y               Qo               Mo           y*Mo')
disp('-------------------------------------------------------------------------')
SPry1
disp('-------------------------------------------------------------------------')
%pause
%%%%%%%%%%%%%%%%%
SRoo1=SR2Li(1:4,:);
%SRoo2=SR2Li(5:8,:);
%%%%%%%%%%%%%%%%%
disp('  Kaare sisejõud  ')
disp('---------------------------------------------------')
disp('      N           Q            M           x     ')
disp('---------------------------------------------------')
SRoo1'
disp('---------------------------------------------------')
%
%%%%%%%%%%%%%

Y0=zeros(1,NN);
%%%%%%%%%%%%%
figure(1)
%%%%%%%%%%%%%
plot(SP(3,:),-SP(2,:),"3",SP(3,:),Y0,"3")
title('Lihttala paindemomendi epüür')
  gset border 31
  gset xtics 3.2
  gset ytics 1000.0
  gset nolabel
      xlabel('x')
      ylabel('M')
gset encoding iso_8859_1
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "LihtTalaM.pdf"
replot    % octave
%
gset terminal x11
```

```
gshow terminal
%
replot    % octave
%pause (2) % octave
%
%%%%%%%%%%%%%
figure(2)
%%%%%%%%%%%%
NXP=size(SP);
NX=NXP(1,2);
AgX=[SP(3,1) SP(3,1)];
AgZ=[0 SP(1,1)];
LgX=[SP(3,NX) SP(3,NX)];
LgZ=[0 SP(1,NX)];
%%%%%%%%%%%%
plot(AgX,AgZ,"3",SP(3,:),SP(1,:),"3",LgX,LgZ,"3",SP(3,:),Y0,"3")
title('Lihttala põikjõu epüür')
  gset border 31
  gset xtics 3.2
  gset ytics 500.0
  gset nolabel
      xlabel('x')
      ylabel('Q')
gset encoding iso_8859_1
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "LihtTalaQ.pdf"
replot    % octave
%pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%
replot    % octave
%pause (2) % octave

%%%%%%%%%%%%
%Kahe liigendiga kaar
%%%%%%%%%%%%
figure(3)
%%%%%%%%%%%%%
 gset offset 0.01, 0.01, 0.03, 0.03
plot(SR(4,:),-SR(3,:),"3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Kahe liigendiga kaare paindemomendi epüür')
  gset border 31
  gset xtics 3.2
  gset ytics 1000.0
  gset nolabel
      xlabel('x')
      ylabel('M')
gset encoding iso_8859_1
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
```

```
gset output "KaarPrbM.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%
%pause
%%%%%%%%%%%%%%
figure(4)
%%%%%%%%%%%%%%
 gset offset 0.01, 0.01, 0.03, 0.03
NXP=size(SR);
NX=NXP(1,2);
AgX=[SR(4,1) SR(4,1)];
AgZ=[0 SR(2,1)];
LgX=[SR(4,NX) SR(4,NX)];
LgZ=[0 SR(2,NX)];
%%%%%%%%%%%%%
plot(AgX,AgZ,"3",SR(4,:),SR(2,:),"3",LgX,LgZ,"3",SR(4,:),Y0,"3")
%plot(SR(4,:),SR(2,:),"3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Kahe liigendiga kaare põikjõu epüür')
  gset border 31
  gset xtics 3.2
  gset ytics 500.0
  gset nolabel
      xlabel('x')
      ylabel('Q')
gset encoding iso_8859_1
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "KaarPrbQ.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot    % octave
%%%%%%%%%%%%%
figure(5)
%%%%%%%%%%%%%
 gset offset 0.01, 0.01, 0.03, 0.03
NXP=size(SR);
NX=NXP(1,2);
AgX=[SR(4,1) SR(4,1)];
AgZ=[0 SR(1,1)];
LgX=[SR(4,NX) SR(4,NX)];
LgZ=[0 SR(1,NX)];
```

```
%%%%%%%%%%%%%
plot(AgX,AgZ,"3",SR(4,:),SR(1,:),"3",LgX,LgZ,"3",SR(4,:),Y0,"3")
%plot(SR(4,:),SR(1,:),"3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Kahe liigendiga kaare normaaljõu epüür')
  gset border 31
  gset xtics 3.2
  gset ytics 500.0
  gset nolabel
      xlabel('x')
      ylabel('N')
gset encoding iso_8859_1
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "KaarPrbN.pdf"
replot    % octave
%
gset terminal x11
%
replot    % octave
%pause (2) % octave
%%%%%%%%%

%%%%%kõik

%%%%%%%%%
```

Programm C.26 *kaarPrbSTMSjPr.m*[32]

```
%kaarPrbSTMSjPr.m
% Kaare sisejõudude M, Q ja N arvutamise programm
% Kaare telgjooneks on parabool
% Kaar on koormatud paraboolse koormusega
%======================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-05-22
%                  e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                  http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                  Mehaanikainstituut
%                  http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
```

[32] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kaarPrbSTMSjPr.m

```
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%==========================================================================
%
% Vastava lihttala sisejõud leiame programmi
% lihttalaPrbKSj.m abil.
%
%%%%%
l=32  % Kaare ava
l1=l/2;
f=4.0   % Kaare kõrgus
%
%l=32  % Lihttala ava
qk=50.0   % Jaotatud koormus alguses ja lõpus
qc=10.0   % Jaotatud koormus keskel
NN=20   % Tala  jaotuste arv
Ic=0.12
Ac=0.845
G=0.425
krist=1.2
%
%H -- Kaare horisontaalne reaktsioon
%x1 --  Tala jaotuste koordinaadid. Koondatud jõu all kordub.
%SR(1,:) -- normaaljõud SR(2,:) -- põikjõud; SR(3,:) -- paindemoment
%Va  --  Vasakpoolse toereaktsiooni väärtus
%Vb -- Parempoolse toereaktsiooni väärtus
%%%%%%%%%%%%%%%%%
Y0=zeros(1,NN+1);
%
SP=lihttalaPrbKSj(NN,l,qk,qc);
%%%%%%%%%%%%%%%%
disp('  Lihttala sisejõud; x-koordinaat vasakult toelt ')
disp('-----------------------------------------')
disp('      Q            M              x      ')
disp('-----------------------------------------')
SP'
disp('-----------------------------------------')
%pause
%
%%%%%%%%%%%%
%
SR=kaarPrbSTMSj(NN,l,f,SP);
%%%%%%%%%%%%%%%%%
SR1=SR(1:4,:);
SR2=SR(5:8,:);
%
NN1=NN+1;
NNpool=NN/2;
NNpool1=NNpool+1;
NNpool2=NNpool+2;
```

```
%
for j=1:NNpool1
x(1,j)=SR(4,j);
roo1(1,j)=((1+64*f^2*x(1,j)^2/l^4)^(3/2))/(8*f/l^2);
end
%
for j=1:NNpool1
 roo(1,j)=roo1(1,NNpool2-j); % ümberpaigutus nii, et
%                            % x-koordinaat vasakult toelt
end
%
for j=NNpool2:NN1
 roo(1,j)=roo1(1,j-NNpool);  % ümberpaigutus nii, et
%                            % x-koordinaat vasakult toelt
end
%
for j=1:NN+1
x(1,j)=SR(4,j);
y(1,j)=f-SR(5,j);  %y-kordinaadi algus lukuliigendisse
sinFi(1,j)=SR(7,j);
cosFi(1,j)=SR(8,j);
end
%
SR3=[y; sinFi; cosFi; roo];
%%%%%%%%%%%%%%%%%
disp('Staatiliselt määratud kaare sisejõud; x-koordinaat vasakust kannast')
disp('-------------------------------------------------')
disp('       N          Q           M          x     ')
disp('-------------------------------------------------')
SR1'
disp('-------------------------------------------------')
%
disp('y-kordinaadi algus lukuliigendis ')
disp('-------------------------------------------------')
disp('        y            sinFi          cosFi      roo   ')
disp('-------------------------------------------------')
SR3'
disp('-------------------------------------------------')
%pause
%
%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%
%xv=SR(4,:);
%y=SR(5,:);
NNX=size(cosFi);
NNM=NNX(1,2);
%
for j=1:NNM
 j3cosFi(1,j)=cosFi(1,j)^(1/3);
 cj3csFi(1,j)=cosFi(1,j)*j3cosFi(1,j);
 roocosFi(1,j)=j3cosFi(1,j)/roo(1,j);
 y2(1,j)=y(1,j)^2;
```

```
 tanFi(1,j)=sinFi(1,j)/cosFi(1,j);
 sintg3juur(1,j)=sinFi(1,j)*tanFi(1,j)*j3cosFi(1,j);
 Mo(1,j)=SR(3,j);
 Qo(1,j)=SR(2,j);
 No(1,j)=SR(1,j);
end
%
samm=SR(4,2)-SR(4,1);
%
NS=0; NS2=1; y4=0; y2=0; NNL=NNM/2-1; NNL1=NNM/2-2;
dy14=0; dI4=0; dI2=0; dy22=0;
%
for j=1:NNL/2+1
NS=NS+2;
y4=y4+y(1,NS);  % Simpsoni valemis 4*y4
dI4=dI4+roocosFi(1,NS);
end
%
for j=1:NNL1/2
NS2=NS2+2;
y2=y2+y(1,NS2);  % Simpsoni valemis 2*y2
dI2=dI2+roocosFi(1,NS2);
end
%
NNLk=NNL/2+NNL1/2+2;
% Simpsoni valemi järgi integreerimine
Yul1=(samm/3)*(y(1,1)+4*y4+2*y2+y(1,NNLk));
Yul2=(Ic/Ac)*(samm/3)*(roocosFi(1,1)+4*dI4+2*dI2+roocosFi(1,NNLk));
disp('Elastsuskeskme ordinaat Yc: ')
Yc=(Yul1-Yul2)/l1
%
%%%%%%%%%%%%%%%%
%
yMyc(1,1)=0;
No3juurcos(1,1)=0;
Qotg3juurcos(1,1)=0;
%
for j=1:NNM
yMyc(1,j)=y(1,j)-Yc;
yMyc2(1,j)=yMyc(1,j)^2;
yMycMo(1,j)=yMyc(1,j)* Mo(1,j);
No3juurcos(1,j)=No(1,j)*j3cosFi(1,j);
Qotg3juurcos(1,j)=Qo(1,j)*tanFi(1,j)*j3cosFi(1,j);
end
%
%%%%%%%%%%
NS=0; NS2=1;
%NNL=NNM/2-1; NNL1=NNM/2-2;
yruut4=0; yruut2=0;
cskuupjuur4=0; cskuupjuur2=0;
sntg4=0; sntg2=0;
%
```

```
yM4=0; yM2=0;
No3juur4=0; No3juur2=0;
Qotg3jr4=0; Qotg3jr2=0;
MoI4=0; MoI2=0;
%
for j=1:NNL/2+1
NS=NS+2;
yruut4=yruut4+yMyc2(1,NS);  % Simpsoni valemis 4*y4
cskuupjuur4=cskuupjuur4+cj3csFi(1,NS);
sntg4=sntg4+sintg3juur(1,NS);
%
yM4=yM4+yMycMo(1,NS);
No3juur4=No3juur4+No3juurcos(1,NS);
Qotg3jr4=Qotg3jr4+Qotg3juurcos(1,NS);
MoI4=MoI4+ Mo(1,NS);
end
%
for j=1:NNL1/2
NS2=NS2+2;
yruut2=yruut2+yMyc2(1,NS2);  % Simpsoni valemis 2*y2
cskuupjuur2=cskuupjuur2+cj3csFi(1,NS2);
sntg2=sntg2+sintg3juur(1,NS2);
%
yM2=yM2+yMycMo(1,NS2);
No3juur2=No3juur2+No3juurcos(1,NS2);
Qotg3jr2=Qotg3jr2+Qotg3juurcos(1,NS2);
MoI2=MoI2+ Mo(1,NS2);
end
%
% Simpsoni valemi järgi integreerimine
EIdelta11p=(samm/3)*((yMyc2(1,1)+4*yruut4+2*yruut2+yMyc2(1,NNLk))+...
(Ic/Ac)*(cj3csFi(1,1)+4*cskuupjuur4+2*cskuupjuur2+cj3csFi(1,NNLk))+...
(krist/G)*(Ic/Ac)*(sintg3juur(1,1)+4*sntg4+2*sntg2+sintg3juur(1,NNLk)));
EIDelta1p=(samm/3)*((yMycMo(1,1)+4*yM4+2*yM2+yMycMo(1,NNLk))+...
(Ic/Ac)*(No3juurcos(1,1)+4*No3juur4+2*No3juur2+No3juurcos(1,NNLk))-...
(krist/G)*(Ic/Ac)*(Qotg3juurcos(1,1)+4*Qotg3jr4+2*Qotg3jr2+Qotg3juurcos(1,NNLk)) );
EIDelta2p=(samm/3)*(Mo(1,1)+4*MoI4+2*MoI2+Mo(1,NNLk));
disp('Võrrandisüsteemi kordajad: ')
EIdelta11p
EIdelta22p=l1
EIDelta1p
EIDelta2p
disp('Võrrandisüsteemi lahend: ')
X1=-EIDelta1p/EIdelta11p
X2=-EIDelta2p/EIdelta22p
X3=0
%Sisejõudude epüürid
%
for j=1:NNM
Mep(1,j)=Mo(1,j)+yMyc(1,j)*X1+X2;
Nep(1,j)=No(1,j)+X1*cosFi(1,j);
Qep(1,j)=Qo(1,j)-X1*sinFi(1,j);
```

```
end
%
disp('Liigenditeta kaare epüüride ordinaadid ')
disp('       Mep        Qep         Nep  ')
[Mep' Qep' Nep' ]
%pause
%%%%%%%%%%%%
figure(1)
%%%%%%%%%%%%
 gset offset 0.01, 0.01, 0.03, 0.03
NXP=size(SR);
NX=NXP(1,2);
AgX=[SR(4,1) SR(4,1)];
AgZ=[0 -Mep(1,1)];
LgX=[SR(4,NX) SR(4,NX)];
LgZ=[0 -Mep(1,NX)];
%%%%%%%%%%%%
plot(AgX,AgZ,"3",SR(4,:),-Mep,"3",LgX,LgZ,"3",SR(4,:),Y0,"3")
%%Põhiskeem
%plot(SR(4,:),-SR(3,:),"3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Paindemomendi epüür Mep')
  gset border 31
  gset xtics 3.2
  gset ytics 100.0
  gset nolabel
      xlabel('x')
      ylabel('M')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "KaarPrbMep.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%
%pause
%%%%%%%%%%%%%
figure(2)
%%%%%%%%%%%%%
 gset offset 0.01, 0.01, 0.03, 0.03
NXP=size(SR);
NX=NXP(1,2);
AgX=[SR(4,1) SR(4,1)];
AgZ=[0 Qep(1,1)];
LgX=[SR(4,NX) SR(4,NX)];
LgZ=[0 Qep(1,NX)];
```

```
%%%%%%%%%%%%%
plot(AgX,AgZ,"3",SR(4,:),Qep,"3",LgX,LgZ,"3",SR(4,:),Y0,"3")
%%Põhiskeem
%plot(AgX,AgZ,"3",SR(4,:),SR(2,:),"3",LgX,LgZ,"3",SR(4,:),Y0,"3")
%plot(SR(4,:),SR(2,:),"3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Põikjõu epüür Qep')
  gset border 31
  gset xtics 3.2
  gset ytics 100.0
  gset nolabel
      xlabel('x')
      ylabel('Q')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
gset output "KaarPrbQep.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%pause
%%%%%%%%%%%%%
figure(3)
%%%%%%%%%%%%%
 gset offset 0.01, 0.01, 0.03, 0.03
NXP=size(SR);
NX=NXP(1,2);
AgX=[SR(4,1) SR(4,1)];
AgZ=[0 Nep(1,1)];
LgX=[SR(4,NX) SR(4,NX)];
LgZ=[0 Nep(1,NX)];
%%%%%%%%%%%%%
plot(AgX,AgZ,"3",SR(4,:),Nep,"3",LgX,LgZ,"3",SR(4,:),Y0,"3")
%%Põhiskeem
%plot(AgX,AgZ,"3",SR(4,:),SR(1,:),"3",LgX,LgZ,"3",SR(4,:),Y0,"3")
%plot(SR(4,:),SR(1,:),"3",SR(4,:),Y0,"3")
title('Normaaljõu epüür Nep')
  gset border 31
  gset xtics 3.2
  gset ytics 100.0
  gset nolabel
      xlabel('x')
      ylabel('N')
gset encoding iso_8859_1
%gshow encoding
gset terminal postscript eps color solid "Helvetica" 14
gset size 0.9,0.6
```

```
gset output "KaarPrbNep.pdf"
replot    % octave
pause (1) % octave
%
gset terminal x11
%gshow terminal
%
replot    % octave
pause (2) % octave
%%%%%%%%%
%clear
%%%%%%%%%%%%%%%%
%
```

C.9.1 Arvutifunktsioonid staatiliselt määramatu kaare arvutamiseks

Programm C.27 *kaarPrbSj1.m*[33]

```
% kaarPrbSj1.m
function Sr=kaarPrbSj1(H,NT,NN,l,f,F1,aF1,F2,aF2,Sj)
%kaarPrbSj1.m
% Kaare sisejõudude M, Q ja N arvutamise programm
% H kaare horisontaalne reaktsioon on arvutatud varem
% Kaare telgjooneks on parabool
%==========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-05-16
%                 e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                 http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                 Mehaanikainstituut
%                 http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%==========================================================================
%
```

[33] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kaarPrbSj1.m

```
% Vastava lihttala sisejõud Sj leiame programmi
% lihttalaSj.m abil.
% NT    % Tala  jaotuste arv
% NN=NT+2 % Tala jaotuste arv + 1 + koondatud jõudude arv
%l   % Kaare ava
%f    % Kaare kõrgus
%H   % Kaare horisontaalne reaktsioon
%aF1   % Esimese koondatud jõu asukoht
%aF2   % Teise koondatud jõu asukoht
%x1 --  Tala jaotuste koordinaadid. Koondatud jõu all kordub.
%
%Sj -- Lihttala sisejõud:
% Sj(1,:) -- põikjõud;  Sr(2,:) -- paindemoment;
% Sj(3,:) -- x koordinaat;
%Sj -- Kaare sisejõud:
% Sr(1,:) -- normaaljõud;  Sr(2,:) -- põikjõud;
% Sr(3,:) -- paindemoment; Sr(4,:) -- x koordinaat;
% Sr(5,:) -- y koordinaat; Sr(6,:) -- y* survejoon
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 eps1=0.000001;
 eps2=0.0001;
aKord=0;
Mk=0;
lk=l/2;
for i=1:NN
 if  aKord < eps1
    if (Sj(3,i)-lk) <= eps2
       aKord=0;
    else
      aKord=1;
       Mk=Sj(2,i-1);
       xKsk=Sj(3,i-1);
    end
else
    Tyhi=0;
 end
end
%%%%%%%%%%%%%%%
% H=Mk/f
%%%%%%%%%%%%%%%
samm=l/NT;
x=0;
j=0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for i=1:NN
%
 if (x-aF1) < eps1
      delta1=0;
      aF1kord=0;
      xaF1=0;
      xv(1,i)=x;
```

```
 else
     if aF1kord < eps1
         delta1=1;
         x=x-samm;
         xv(1,i)=x;
         xaF1=(x-aF1);
         aF1kord=1;
     else
         delta1=1;
      xv(1,i)=x;
         xaF1=(x-aF1);
     end
 end
 if (x-aF2) < eps1
   delta2=0;
   aF2kord=0;
    xv(1,i)=x;
         xaF2=0;
 else
     if aF2kord < eps1
            delta1=1;
            x=x-samm;
            xv(1,i)=x;
            xaF2=(x-aF2);
           aF2kord=1;
     else
         delta2=1;
         xv(1,i)=x;
         xaF2=(x-aF2);
     end
 end
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
xi(i)=xv(1,i)/l;
xip(i)=(l-xv(1,i))/l;
y(1,i)=4*f*xi(i)*xip(i);
sinFi(1,i)=(1-2*xi(i))/sqrt((l/(4*f))^2+(1-2*xi(i))^2);
cosFi(1,i)=1/sqrt(1+((4*f)/l)^2*(1-2*xi(i))^2);
M(1,i)=Sj(2,i)-H*y(1,i);
Q(1,i)=Sj(1,i)*cosFi(1,i)-H*sinFi(1,i);
N(1,i)=Sj(1,i)*sinFi(1,i)+H*cosFi(1,i);
ys(1,i)=Sj(2,i)/H;
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
x=x+samm;
end
%
%%%%%%%%%%
%Sr(1,:)=N(1,:);   % Normaaljõud
%Sr(2,:)=Q(1,:);   % Põikjõud
```

```
%Sr(3,:)=M(1,:);   % Paindemoment
%Sr(4,:)=xv(1,:);  % x koordinaat
%Sr(5,:)=y(1,:);   % y koordinaat
%Sr(6,:)=ys(1,:);  % Y* survejoone koordinaat
%Sr(7,:)=sinF(1,:);
%Sr(8,:)=cosFi(1,:);
%
Sr=[N(1,:); Q(1,:); M(1,:); xv(1,:); y(1,:); ys(1,:); sinFi(1,:); cosFi(1,:)];
%
endfunction
```

```
%%%%%%%%
```

Programm C.28 *kaarPrbSTMSj.m*[34]

```
%kaarPrbSTMSj.m
function Sr=kaarPrbSTMSj(NN,l,f,Sj)
%kaarPrbSj.m
% Kaare sisejõudude M, Q ja N arvutamise programm
% Kaare telgjooneks on parabool
%==========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2003-05-22
%                  e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                  http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                  Mehaanikainstituut
%                  http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%==========================================================================
%
% Vastava lihttala sisejõud Sj leiame programmi
% lihttalaSj.m abil.
% NN    % Tala  jaotuste arv
%l   % Kaare ava
%f    % Kaare kõrgus
%H    % Kaare horisontaalne reaktsioon
```

[34] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/kaarPrbSTMSj.m

```
%x1 --  Tala jaotuste koordinaadid. Koondatud jõu all kordub.
%
%Sj -- Lihttala sisejõud:
% Sj(1,:) -- põikjõud;  Sr(2,:) -- paindemoment;
% Sj(3,:) -- x koordinaat;
%Sj -- Kaare sisejõud:
% Sr(1,:) -- normaaljõud;  Sr(2,:) -- põikjõud;
% Sr(3,:) -- paindemoment; Sr(4,:) -- x koordinaat;
% Sr(5,:) -- y koordinaat; Sr(6,:) -- y* survejoon
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 eps1=0.000001;
 eps2=0.0001;
aKord=0;
Mk=0;
lk=l/2;
samm=l/NN;
Npool=NN/2;
NN2=Npool+1;
x=0;
j=0;
Mk=Sj(2,NN2)
%
 H=Mk/f
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i=1:NN+1
%
 xv(1,i)=x;
xi(i)=xv(1,i)/l;
xip(i)=(l-xv(1,i))/l;
y(1,i)=4*f*xi(i)*xip(i);
sinFi(1,i)=(1-2*xi(i))/sqrt((l/(4*f))^2+(1-2*xi(i))^2);
cosFi(1,i)=1/sqrt(1+((4*f)/l)^2*(1-2*xi(i))^2);
M(1,i)=Sj(2,i)-H*y(1,i);
Q(1,i)=Sj(1,i)*cosFi(1,i)-H*sinFi(1,i);
N(1,i)=Sj(1,i)*sinFi(1,i)+H*cosFi(1,i);
ys(1,i)=Sj(2,i)/H;
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
x=x+samm;
end
%
%%%%%%%%%%
%Sr(1,:)=N(1,:);   % Normaaljõud
%Sr(2,:)=Q(1,:);   % Põikjõud
%Sr(3,:)=M(1,:);   % Paindemoment
%Sr(4,:)=xv(1,:);  % x koordinaat
%Sr(5,:)=y(1,:);   % y koordinaat
%Sr(6,:)=ys(1,:);  % Y* survejoone koordinaat
%Sr(7,:)=sinF(1,:);
%Sr(8,:)=cosFi(1,:);
```

```
%
Sr=[N(1,:); Q(1,:); M(1,:); xv(1,:); y(1,:); ys(1,:); sinFi(1,:); cosFi(1,:)];
%
endfunction

%%%%%%%%%
```

C.10 Arvutiprogramme kriitilise koormuse arvutamiseks

Eesarvude leidmiseks kasutame *Octave*'i või *Matlab*'i programmi *eesarvud.m*. Eesarvude graafikuid näitab programm *eesagraf.m*.

Programm C.29 *eesarvud.m*[35]

```
%eesarvud.m
%EESARVUD A, B, C, V, A+B, A-B
% varda piki-põikpaindel
%==========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2001-01-22
%                 e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                 http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                 Mehaanikainstituut
%                 http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%==========================================================================
%
l1='';mark='';S1='';EJ1='';xx='';xx1='';xxx='';xxxx='';yy='';x11x='';
xyyx='';xyL='';xyLy='';xl1='';
l=0; S=0; EJ=0;
 eps1=0.000001;
 lukk='lahti';
```

[35] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/eesarvud.m

```
 lahti='lahti';
%%%Lehekülg nr.2 %%%%%%%%%
  if strcmp(lukk,lahti)
%disp('  VARDA TUNNUSARV PIKIPÕIKPAINDEL  ')
% nu=input('Sisesta varda pikkus  l=');
disp('      EESARVUD PIKIPÕIKPAINDEL   ')
   l=input('Sisesta varda pikkus  l=');
        l1=sprintf('%g',l);
  end
  lukk='lahti';
%    märgi tingimus
    mlukk='lahti'    ;
         mlahti='lahti';
     if strcmp(mlukk,mlahti)
%    märgi tingimus, edasi on end
        mark='x';
         mark1='-';
         mark2='+';
     niinaa = ((strcmp(mark,mark2))|(strcmp(mark,mark1))) ;
%
         while ( niinaa - 1) ~= 0
         mark='x';
%disp('')
%disp('      EESARVUD PIKIPÕIKPAINDEL   ')
disp('Sisejõud  S  ')
disp('Survel:märk - ( S<=0, N<=0 );  Tõmbel:märk + ( S>=0, N>=0 )  ')
   mark=input('Ütle kas  + või - märk=  ','s');
     niinaa = ((strcmp(mark,mark2))|(strcmp(mark,mark1))) ;
     end
          mlukk='lahti';
   end
%  märgi end
  S=input('Ütle S-i väärtus.  S=');
   S1=sprintf('%g',S);
  EJ=input('Ütle varda paindejäikus   EJ=');
   EJ1=sprintf('%g',EJ);
    if S==0
         nu=0;
    else
         nu=l*sqrt(S/EJ);
    end
%  Surve
%%%Lehekülg nr.3 %%%%%%%%%
    if strcmp(mark1,mark) == 1
       if nu <=eps1
nu=nu+eps1; A=4.0+eps1; B=2.0+eps1; C=3.0+eps1; V=1.0+eps1;
AB=A+B; BA=A-B; ALFA=1/C; BETA=B/(A*C); S=0.0;
xx='   Pikijõud puudub : S= ';
%  '   mõõt      S        ';
sdim=size(xx);
sdim1=sdim(2);
xx1(1,1:sdim1)=xx;
```

```
sdim2=sdim1+1;
mdim=size(mark);
mdim1=mdim(2);
markb1(1,1:mdim1)=mark;
mdim2=sdim1+mdim1;
xxx(1,1:sdim1)=xx1(1,1:sdim1);
xxx(1,sdim2:mdim2)=markb1(1,1:mdim1);
  else
     cs=cos(nu); ss=sin(nu);
    alumineA=2*(1-cs)-nu*ss;
    ulemineA=nu*(ss-nu*cs);
    A=ulemineA/alumineA;
    ulemineB=nu*(nu-ss);
    B=ulemineB/alumineA;
    ulemineC=nu*nu*ss;
    C=ulemineC/(ss-nu*cs);
    V=12*(2*(1-cs)-nu*ss)/(nu*ulemineC);
    AB=A+B; BA=A-B;
    ALFA=1/C; BETA=B/(A*C);
xx='   Pikijõud survel : S= ';
%  '   mõõt        S        ';
sdim=size(xx);
sdim1=sdim(2);
xx1(1,1:sdim1)=xx;
sdim2=sdim1+1;
mdim=size(mark);
mdim1=mdim(2);
markb1(1,1:mdim1)=mark;
mdim2=sdim1+mdim1;
xxx(1,1:sdim1)=xx1(1,1:sdim1);
xxx(1,sdim2:mdim2)=markb1(1,1:mdim1);
%%%Lehekülg nr.4 %%%%%%%%%
%
    end
  end
%%%%%%%%%%%%%%%%%
%     Tõmme
%    else
       if strcmp(mark2,mark) == 1
       if nu <=eps1
nu=nu+eps1; A=4.0+eps1; B=2.0+eps1; C=3.0+eps1; V=1.0+eps1;
AB=A+B; BA=A-B; ALFA=1/C; BETA=B/(A*C); S=0.0;
xx='   Pikijõud puudub : S= ';
%  '   mõõt       S         ';
sdim=size(xx);
sdim1=sdim(2);
xx1(1,1:sdim1)=xx;
sdim2=sdim1+1;
mdim=size(mark);
mdim1=mdim(2);
markb1(1,1:mdim1)=mark;
mdim2=sdim1+mdim1;
```

```
xxx(1,1:sdim1)=xx1(1,1:sdim1);
xxx(1,sdim2:mdim2)=markb1(1,1:mdim1);
  else
     cs=cosh(nu); ss=sinh(nu);
    alumineA=-2*(1-cs)-nu*ss;
    ulemineA=nu*(ss-nu*cs);
    A=ulemineA/alumineA;
    ulemineB=nu*(nu-ss);
    B=ulemineB/alumineA;
    ulemineC=nu*nu*ss;
    C=ulemineC/(-(ss-nu*cs));
    V=12*(2*(1-cs)+nu*ss)/(nu*ulemineC);
    AB=A+B; BA=A-B;
    ALFA=1/C; BETA=B/(A*C);
xx='   Pikijõud tõmbel : S= ';
%  '   mõõt        S        ';
sdim=size(xx);
sdim1=sdim(2);
xx1(1,1:sdim1)=xx;
sdim2=sdim1+1;
%%%Lehekülg nr.5 %%%%%%%%
mdim=size(mark);
mdim1=mdim(2);
markb1(1,1:mdim1)=mark;
mdim2=sdim1+mdim1;
xxx(1,1:sdim1)=xx1(1,1:sdim1);
xxx(1,sdim2:mdim2)=markb1(1,1:mdim1);
%
    end
  end
%%%%%%%%%%%%%
%välja trükkimiseks
sdim=size(xxx);
sdim1=sdim(2);
xxx(1,1:sdim1)=xxx;
sdim2=sdim1+1;
mdim=size(S1);
mdim1=mdim(2);
xS1(1,1:mdim1)=S1;
mdim2=sdim1+mdim1;
xxxx(1,1:sdim1)=xxx(1,1:sdim1);
xxxx(1,sdim2:mdim2)=xS1(1,1:mdim1);
xxxx=xxxx;
%
yy='';
yy=' Varda ristlõike paindejäikus EJ= ';
Edim=size(yy);
Edim1=Edim(2);
xyx(1,1:Edim1)=yy;
Edim2=Edim1+1;
Jdim=size(EJ1);
Jdim1=Jdim(2);
```

```
xEJ1(1,1:Jdim1)=EJ1;
Jdim2=Edim1+Jdim1;
xyyx(1,1:Edim1)=xyx(1,1:Edim1);
xyyx(1,Edim2:Jdim2)=xEJ1(1,1:Jdim1);
%
sdim=size(xxxx);
sdim1=sdim(2);
xxxx(1,1:sdim1)=xxxx;
sdim2=sdim1+1;
%%%Lehekülg nr.6 %%%%%%%%%
mdim=size(xyyx);
mdim1=mdim(2);
mdim2=sdim1+mdim1;
xllx(1,1:sdim1)=xxxx(1,1:sdim1);
xllx(1,sdim2:mdim2)=xyyx(1,1:mdim1);
%
    abcv=[nu A B AB C BA V];
    abca=[ALFA BETA];
disp(' ')
  Y1='     nu   |    A    |    B    |  A+B   |    C    |  A-B   |    V ';
disp('------------------------------------------------------------------')
disp('------------------------------------------------------------------')
     disp(xllx)
disp('------------------------------------------------------------------')
     disp(Y1)
disp('------------------------------------------------------------------')
disp(abcv)
%
yy='';
yy='    Varda pikkus l=';
Edim=size(yy);
Edim1=Edim(2);
xyL(1,1:Edim1)=yy;
Edim2=Edim1+1;
Jdim=size(l1);
Jdim1=Jdim(2);
xl1(1,1:Jdim1)=l1;
Jdim2=Edim1+Jdim1;
xyLx(1,1:Edim1)=xyL(1,1:Edim1);
xyLx(1,Edim2:Jdim2)=xl1(1,1:Jdim1);
%
  Y2='   ALFA   |  BETA   |   ';
disp('----------------------------')
disp('----------------------------')
     disp(xyLx)
disp('----------------------------')
     disp(Y2)
disp('----------------------------')
     disp(abca)
%
%%%%kõik
```

Programm C.30 *eesagraf.m*[36]

```
%eesagraf.m
% Eesarvude (sks Vorzahlen) graafikud
% (piki-põikpaine, stabiilsus)
%===========================================================================
% PROGRAMMI KOOSTAS Andres Lahe,   2000-03-21
%                  e-mail: alahe@staff.ttu.ee
%                  http://staff.ttu.ee/~alahe/
% Copyright (c)  2003 Tallinna Tehnikaülikool
%                  Mehaanikainstituut
%                  http://www.ttu.ee/
%
% Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda levitada ja/või muuta vastavalt
% GNU üldise avaliku litsentsi tingimustele, nagu need on sõnastanud
% Vaba Tarkvara Fond; kas litsentsi versioonis number 2 või (vastavalt
% Teie valikule) ükskõik millises hilisemas versioonis.
%
% Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA
% IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA
% või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS.
% Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.
%
% Te peaksite olema saanud GNU üldise avaliku litsentsi koopia koos selle
% programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga.
% 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA
%
% Täpsemalt vaata GNU litsentsi: http://linux.ee/materjalid/gpl/
%===========================================================================
%
disp(' Eesarvud survel ')
clear
   igr=1;
   eps1=0.000001;
disp(' Oota!  Arvutan!!  ')
   for nu=0.0:0.02:10.0
      if nu <=eps1
         A=4.0+eps1; B=2.0+eps1; C=3.0+eps1; V=1.0+eps1; AB=A+B; BA=A-B;
         ALFA=1/C; BETA=B/(A*C);
      else
         cs=cos(nu); ss=sin(nu);
         alumineA=2*(1-cs)-nu*ss;
         ulemineA=nu*(ss-nu*cs);
         A=ulemineA/alumineA;
         ulemineB=nu*(nu-ss);
         B=ulemineB/alumineA;
         ulemineC=nu*nu*ss;
         C=ulemineC/(ss-nu*cs);
         V=12*(2*(1-cs)-nu*ss)/(nu*ulemineC);
         AB=A+B; BA=A-B;
         ALFA=1/C;
```

[36] http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/octave/eesarvud.m

```
         BETA=B/(A*C);
      end
%%%%
      if A >= 15.0
         A = 15.0;
      end
      if A <= -15.0
         A = -15.0;
      end
%%%
                   ygr(igr,1)=A;
                   ygr1(igr,1)=A;
      if B >= 15.0
         B = 15.0;
      end
      if B <= -15.0
         B = -15.0;
      end
                   ygr(igr,2)=B;
                   ygr2(igr,2)=B;
      if AB >= 15.0
         AB = 15.0;
      end
      if AB <= -15.0
         AB = -15.0;
      end
                   ygr(igr,3)=AB;
                   ygr3(igr,3)=AB;
      if C >= 15.0
         C = 15.0;
      end
      if C <= -15.0
         C = -15.0;
      end
                   ygr(igr,4)=C;
                   ygr4(igr,4)=C;

      if BA >= 15.0
         BA = 15.0;
      end
      if BA <= -15.0
         BA = -15.0;
      end
                   ygr(igr,5)=BA;
                   ygr5(igr,5)=BA;
      if V >= 50.0
         V = 50.0;
      end
      if V <= -50.0
         V = -50.0;
      end
                   ygrV(igr)=V;
```

```
                 xgr(igr)=nu;
      if ALFA >= 15.0
         ALFA = 15.0;
      end
      if ALFA <= -15.0
         ALFA = -15.0;
      end
                 ygrALB(igr,1)=ALFA;
      if BETA >= 15.0
         BETA = 15.0;
      end
      if BETA <= -15.0
         BETA = -15.0;
      end
                 ygrALB(igr,2)=BETA;
                 xgr(igr)=nu;
          igr=igr+1;
   end
%%%
      ygrY=[0.0 0.0];
      ygrX=[0.0 10];
%
%clearplot
       axis([0.0 10.0 -20.0 20.0])
 axis('on')
%
% figure(1), axis([0.0 10.0 -20.0 20.0]), axis on;
figure(1)
 axis([0.0 10.0 -15.0 15.0])
      plot(xgr,ygr,ygrX,ygrY,'k')
%plot( xgr,ygr1,'k -',xgr,ygr2,'k --',xgr,ygr3,'k -.',...
xgr,ygr4,'k :',xgr,ygr5,'k -.', ygrX,ygrY,'k')
%
title('Eesarvud  A, B, A+B, C, A-B survel st. S>0, N<0 ')
  gset border 31
  gset xtics 2
  gset ytics 2.0
  gset nolabel
      xlabel('nu')
      text(5.9,2.7,'C')
% set label "C*" at graph 5.9, graph 2.7
% vaata: http://t16web.lanl.gov/Kawano/gnuplot/label2-e.html#4.4
% http://octave.sourceforge.net/index/plotcontrol.html
      text(2.0,3.8,'A')
      text(7.0,3.5,'A')
      text(8.0,3.0,'A-B')
      text(1.5,2.9,'C')
      text(2.6,5.8,'A+B')
      text(4.8,5.3,'B')
      text(7.2,-8.1,'B')
      text(3.7,-8.1,'C')
      text(1.5,0.5,'A-B')
```

```
      text(8.4,7.4,'C')
%      text(0.5,-3.0,'  A=4*fi2(nu)')
%      text(0.5,-6.0,'  B=2*fi3(nu)')
%      text(0.5,-9.0,'A+B=6*fi4(nu)')
%      text(0.5,-12.0,'  C=3*fi1(nu)')
%print -depsc figur1v
%print -deps figure1m
%
replot
pause (1) % octave
%
clearplot
%
 axis('off')
       axis([0.0 10.0 -35.0 35.0])
 axis('on')
%%%%%%%%%%%%%
figure(2)
 axis([0.0 10.0 -35.0 35.0])
      plot(xgr,ygrV,ygrX,ygrY,'k')
title('Eesarv  V survel st. S>0, N<0 ')
  gset border 31
  gset xtics 2
  gset ytics 5.0
  gset nolabel
      xlabel('nu')
      text(2.0,5.0,'V')
      text(4.0,-5.2,'V')
%
%   legend('A')
      ygrY=[0.0 0.0];
      ygrX=[0.0 10];
%
replot
pause (1) % octave
%
clearplot
 axis('off')
       axis([0.0 10.0 -15.0 15.0])
 axis('on')
%%%%%%%%%%%%%
figure(3)
 axis([0.0 10.0 -15.0 15.0])
      plot(xgr,ygrALB(:,1),xgr,ygrALB(:,2),ygrX,ygrY,'k')
title('Eesarvud  ALFA, BETA survel st. S>0, N<0 ')
  gset border 31
  gset xtics 2
  gset ytics 5.0
  gset nolabel
      xlabel('nu')
      text(5.1,1.2,'ALFA')
      text(2.0,-0.8,'BETA')
```

```
      text(3.8,-1.4,'BETA')
      text(1.6,1.2,'ALFA')
%
%      ygrY=[0.0 0.0];
%      ygrX=[0.0 10];
%
replot
pause (1) % octave
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
disp(' Eesarvud tõmbel ')
clear
   igr=1;
   eps1=0.000001;
disp(' Oota!  Arvutan!!  ')
   for nu=0.0:0.02:14.95
      if nu <=eps1
         A=4.0+eps1; B=2.0+eps1; C=3.0+eps1; V=1.0+eps1; AB=A+B; BA=A-B;
         ALFA=1/C; BETA=B/(A*C);
      else
         cs=cosh(nu); ss=sinh(nu);
         alumineA=-2*(1-cs)-nu*ss;
         ulemineA=nu*(ss-nu*cs);
         A=ulemineA/alumineA;
         ulemineB=nu*(nu-ss);
         B=ulemineB/alumineA;
         ulemineC=nu*nu*ss;
         C=ulemineC/(-(ss-nu*cs));
         V=12*(2*(1-cs)+nu*ss)/(nu*ulemineC);
         AB=A+B; BA=A-B;
         ALFA=1/C;
         BETA=B/(A*C);
      end
%%%%
      if A >= 20.0
         A = 20.0;
      end
%      if A <= -20.0
%         A = -20.0;
%      end
%%%
                   ygr(igr,1)=A;
%                   ygr1(igr,1)=A;
      if B >= 20.0
         B = 20.0;
      end
%      if B <= -20.0
%         B = -20.0;
%      end
                   ygr(igr,2)=B;
%                   ygr2(igr,2)=B;
      if AB >= 20.0
```

```
         AB = 20.0;
      end
%      if AB <= -20.0
%         AB = -20.0;
%      end
                   ygr(igr,3)=AB;
%                   ygr3(igr,3)=AB;
      if C >= 20.0
         C = 20.0;
      end
%      if C <= -20.0
%         C = -20.0;
%      end
                   ygr(igr,4)=C;
%                   ygr4(igr,4)=C;

      if BA >= 20.0
         BA = 20.0;
      end
%      if BA <= -20.0
%         BA = -20.0;
%      end
                   ygr(igr,5)=BA;
%                   ygr5(igr,5)=BA;
      if V >= 20.0
         V = 20.0;
      end
      if V <= -10.0
         V = -10.0;
      end
                   ygrV(igr)=V;
                   xgr(igr)=nu;
      if ALFA >= 20.0
         ALFA = 20.0;
      end
%      if ALFA <= -20.0
%         ALFA = -20.0;
%      end
                   ygrALB(igr,1)=ALFA;
      if BETA >= 20.0
         BETA = 20.0;
      end
%      if BETA <= -20.0
%         BETA = -20.0;
%      end
                   ygrALB(igr,2)=BETA;
                   xgr(igr)=nu;
            igr=igr+1;
   end
%%%
      ygrY=[0.0 0.0];
      ygrX=[0.0 15.0];
```

```
%
  axis('off')
  axis('on')
%      xyaxis=[0.0 10.0 -15.0 15.0];
      axis([0.0 10.0 -15.0 15.0])
%
clearplot
 axis('off')
       axis([0.0 10.0 -5.0 15.0])
 axis('on')
%%%%%%%%%%%%%
figure(4)
 axis([0.0 10.0 -5.0 15.0])
      plot(xgr,ygr,ygrX,ygrY,'k')
%plot( xgr,ygr1,'k -',xgr,ygr2,'k --',xgr,ygr3,'k -.',...
xgr,ygr4,'k :',xgr,ygr5,'k -.', ygrX,ygrY,'k')
%print -depsc figure5
%print -deps figure5m
title('Eesarvud  A, B, A+B, C, A-B tõmbel st. S<0, N>0 ')
  gset border 31
  gset xtics 2
  gset ytics 1.0
  gset nolabel
      xlabel('nu')
      text(4.7,2.0,'B')
      text(2.6,5.6,'A')
      text(2.6,7.5,'A+B')
      text(4.8,4.3,'C')
      text(2.3,3.5,'A-B')
%
%
replot
pause (1) % octave
%
clearplot
%
 axis('off')
       axis([0.0 10.0 -0.5 1.5])
 axis('on')
%%%%%%%%%%%%%
figure(5)
 axis([0.0 15.0 -0.5 1.5])
      plot(xgr,ygrV,ygrX,ygrY,'k')
title('Eesarv  V tõmbel st. S<0, N>0 ')
  gset border 31
  gset xtics 2
  gset ytics 0.2
  gset nolabel
      xlabel('nu')
      text(2.4,0.7,'V')
%
      ygrY=[0.0 0.0];
```

```
      ygrX=[0.0 15.0];
%
replot
pause (1) % octave
%
clearplot
%
figure(6)
 axis([0.0 15.0 -0.1 0.4])
      plot(xgr,ygrALB(:,1),xgr,ygrALB(:,2),ygrX,ygrY,'k')
title('Eesarvud  ALFA, BETA tõmbel st. S<0, N>0 ')
  gset border 31
  gset xtics 2
  gset ytics 0.05
  gset nolabel
      xlabel('nu')
      text(2.0,0.3,'ALFA')
      text(2.6,0.1,'BETA')
%
replot
pause (1) % octave
%
%clearplot
 disp('Eesarvude graafikutest on kõik. ')

clearplot
 clear
 clc
%%%%

%%%%
```

Lisa D

GNU Üldine Avalik Litsents

GNU Üldine Avalik Litsents

EESSÕNA

Enamik tarkvara litsentse on loodud selleks, et võtta Teilt õigus tarkvara jagada ja muuta. Vastukaaluks on GNU Üldine Avalik Litsents mõeldud selleks, et tagada Teile vabadus jagada ja muuta vaba tarkvara - kindlustada, et tarkvara oleks vaba kõigile selle kasutajatele. Käesolev Üldine Avalik Litsents kehtib enamiku Free Software Foundation'i tarkvara ja mistahes programmide kohta, mille autorid lubavad seda litsentsi kasutada. (Mõni Free Software Foundation'i tarkvara on vastavalt kaitstud GNU Üldise Avaliku Teegilitsentsiga). Ka Teie võite oma programmi suhtes käesoleva litsentsi tingimusi kehtestada.

Rääkides vabast tarkvarast peame silmas vabadust, mitte hinda. Üldised Avalikud Litsentsid on loodud selleks, et tagada Teile järgnevat: õigust levitada koopiaid vabast tarkvarast (soovi korral ka levitamise eest tasu võttes), tarkvara lähtetekstide kättesaadavust, õigust tarkvara muuta ning kasutada tarkvara osi uute vaba tarkvaratoodete loomisel ning kindlustada, et Te olete teadlik eelpoolnimetatud õigustest.

Teie õiguste tagamiseks on vaja rakendada mõningaid piiranguid, et keegi ei saaks Teilt neid õigusi ära võtta või nõuda Teie loobumist neist õigustest. Tarkvara muutmisel või selle koopiate levitamisel kätkevad need piirangud Teie jaoks teatud kohustusi. Näiteks levitades taolise programmi koopiaid, kas tasuta või levitamise eest tasu võttes, peate Te saajatele andma kõik need õigused, mis on ka Teil endal. Te peate kindlustama, et ka nemad saavad või võivad soovi korral saada lähteteksti. Et programmi saajad teaksid oma õigusi, peate neid teavitama käesoleva Litsentsi tingimustest.

Meie kaitseme Teie õigusi kaheastmeliselt:

1. anname tarkvarale autoriõiguse ja
2. pakume Teile käesolevat litsentsi, mis annab Teile seadusliku õiguse kopeerida, levitada ja/või muuta tarkvara.

Samuti tahame nii iga autori kui ka meie endi kaitseks kindlustada, et igaüks mõistab, et vabal tarkvaral pole garantiid. Kui keegi tarkvara muudab ja edasi annab, peavad selle saajad teadma, et nende omanduses pole originaal vältimaks teiste poolt põhjustatud probleemide mõju originaali autori mainele.

Lõpuks, iga vaba programmi ähvardab pidevalt tarkvara patenteerimine. Me soovime vältida ohtu, kus vaba programmi levitajad omandavad individuaalse patendi litsentsi, muutes selle enda omandiõiguse objektiks. Sellise olukorra vältimiseks oleme selgitanud, et iga taoline patent tuleb litsenseerida kõigile vabaks kasutamiseks või üldse mitte litsenseerida.

Järgnevad kopeerimise, levitamise ja muutmise täpsed terminid ning tingimused.

Kopeerimise, levitamise ja muutmise terminid ja tingimused.

0. Käesolev litsents kehtib iga programmi või muu teose puhul, mis sisaldab autoriõiguse omaniku märget selle kohta, et antud programmi võib levitada vastavalt käesoleva Üldise Avaliku Litsentsi tingimustele. ”Programm” on edaspidi ükskõik milline eelnevale tingimusele vastav programm või teos, ”Programmil põhinev teos” tähendab kas Programmi või ükskõik millist autorikaitse all olevat programmil põhinevat teost; lahti seletatuna teost, mis sisaldab Programmi või selle osa, kas sõnasõnaliselt või muudetult ja/või tõlgituna teise keelde. (Siin ja edaspidi on tõlkimine kaasatud piiranguteta termini ”muutmine” alla). Iga litsensiaat on edaspidi ”Teie”.

Litsents ei laiene muudele tegevustele kui kopeerimine, levitamine ja muutmine; need ei ole Litsentsiga kaetud. Programmi töötamise protsessil pole kitsendusi ja Programmi väljund on kaitstud vaid siis, kui selles sisaldub teos, mis põhineb Programmil (sõltumatuna sellest, et see on Programmi tööprotsessi poolt valmistatud). Kas see on tõene, sõltub sellest mida Programm teeb.

1. Teie võite kopeerida ja levitada sõnasõnalisi koopiaid Programmi lähtetekstist nii, nagu olete selle saanud, igas vormis, eeldusel, et Teie avaldate arusaadavalt ja sobivalt igal koopial vastava autoriõiguse märke ja garantii välistamise märke: hoiate puutumatuna kõik märked, mis viitavad käesolevale Litsentsile ja igasugusele garantii puudumisele ning annate kõigile Programmi saajatele käesoleva Litsentsi koopia Programmiga kaasa. Te võite võtta tasu koopia füüsilise kättetoimetamise akti eest ja võite oma valiku kohaselt pakkuda tasu eest omapoolset garantiikaitset.

2. Teie võite muuta Programmi koopiat või koopiaid või ükskõik millist selle osa, luues nii Programmil põhineva teose ning kopeerida ja levitada selliseid muudatusi või teoseid vastavalt punkti 1 tingimustele, eeldades, et Te täidate kõik järgnevad tingimused:

a) Te peate kaasama muudetud failile silmatorkavad märked, mis teatavad Teie poolt tehtud muudatused failides ja iga muudatuse kuupäeva.

b) Te peate andma kõigile kolmandatele osapooltele selle Litsentsi tingimuste kohaselt Litsentsi tervikuna igasugusele teosele, mida Te levitate või avalikustate, mis tervikuna või osaliselt sisaldab Programmi või põhineb Programmil või selle osal.

c) Kui muudetud Programm loeb normaalse tööprotsessi käigus käske interaktiivselt, peate Te tagama, et tavaliseks interaktiivseks kasutamiseks käivitamisel kõige tavapärasemal viisil kas trükitakse või kuvatakse märge, mis sisaldab vastatavat märget autoriõigusest ja märget garantii puudumise kohta (või märget Teie poolt pakutava garantii kohta) ning et kasutajad võivad Programmi käesolevate tingimuste kohaselt edasi levitada, teatades kasutajale, kuidas näha koopiat käesolevast Litsentsist. (Erand: Kui Programmi ise on interaktiivne, kuid tavapärase kasutamise protsessi käigus ei trüki sellist teadaannet, siis ei pea Teie Programmil põhinev teos vastavat teadaannet trükkima).

Need nõuded kehtivad muudetud teosele kui tervikule. Kui selgelt eristatavad osad teosest ei põhine Programmil ja neid võib põhjendatult lugeda iseseisvateks ja eraldiseisvateks teosteks, siis käesoleva Litsents ja selle tingimused ei laiene nimetatud osadele, kui Te levitate neid iseseisvate teostena. Kui Te levitate nimetatud osi kui osa tervikust, milleks on Programmil põhinev teos, siis terviku levitamine peab järgima käesoleva Litsentsi tingimusi, mille teistele litsensiaatidele antud õigused laienevad ülejäänud tervikule, seega igale üksikule osale, olenemata sellest, kes autor oli.

Seega pole käesoleva punkti eesmärk nõuda õigusi või vaidlustada Teie õigusi teosele, mille Te oled tervikuna loonud; pigem on eesmärk kasutada õigust suunata Programmil põhinevate teoste või ühisteoste levitamist.

Lisaks, ainuüksi asjaolu, et teise teose, mis ei põhine Programmil, Programmiga (või Programmil põhineva teosega) ühtsesse levitamis- või säilitusvormi liitmine ei muuda nimetatud teost Litsentsi alla kuuluvaks.

3. Teie võite Programmi (või punkt 2 kohaselt Programmil põhinevat teost) kopeerida ja levitada objektkoodina või käivitataval kujul vastavalt punktide 1 ja 2 kohaselt eeldusel, et Te täidate vähemalt ühe järgnevatest nõuetest:

a) Lisate sellele täieliku vastava masinloetava lähteteksti, mida peab levitama vastavalt punktides 1 ja 2 toodud tingimustele, vormis, mida kasutatakse valdavalt tarkvara vahendustegevuses; või

b) Lisate sellele kirjaliku vormi, kehtivusega vähemalt kolm aastat, millega annad mistahes kolmandatele osapooltele tasu eest, mis ei ületa Teie poolt lähteteksti füüsilisel kujul levitamise hinda, täieliku masinloetava koopia vastavast lähtetekstist, mida levitatakse vastavalt punktides 1 ja 2 toodud tingimustele, vormis, mida kasutatakse valdavalt tarkvara vahendustegevuses; või

c) Lisate sellele informatsiooni, mille Teie saite ja mis puudutab vastava lähteteksti levitamise pakkumist. (See alternatiiv on lubatud vaid mitteärilisel levitamisel, kui Te oled saanud Programmi koos vastava pakkumisega objektkoodina või käivitatavas vormis vastavalt käesoleva punkti alapunktile b).

Teose lähteteksti all mõeldakse muudatuste tegemiseks eelistatumat teose vormi. Käivitatava teose täielik lähtetekst tähendab kogu lähteteksti tervikuna koos kõigi selles sisalduvate moodulitega, lisades ükskõik millised sellega seotud liidese definitsioonifailid ning skriptid, mida kasutatakse käivitatava teose kompileerimise ja paigaldamise kontrollimiseks. Erandina ei pea levitatav lähtetekst sisaldama midagi, mida tavaliselt levitatakse kas lähteteksti või masinkoodi vormis) koos põhiliste operatsioonisüsteemi komponentidega (kompilaator, kernel ja nii edasi), millel käivitatava töö protsess toimub, välja arvatud kui nimetatud komponent ise lisandub käivitatavale.

Kui käivitatava vormi või objektkoodi levitamine toimub ligipääsu pakkumisega määratud kohas, siis ligipääsu pakkumine lähteteksti kopeerimiseks samast kohast loetakse võrdseks lähteteksti levitamisega, kuigi kolmandad osapooled pole kohustatud kopeerima lähteteksti koos objektkoodiga.

4. Te ei tohi kopeerida, muuta, edasi litsenseerida või levitada Programmi välja arvatud juhul, kui seda lubab käesolev Litsents. Igasugune muu katse kopeerida, muuta, sublitsenseerida või levitada Programmi on õigustühine ja peatab automaatselt Teile käesoleva Litsentsiga antud õigused. Siiski, osapoolte, kes on saanud Teilt koopiad või õigused käesoleva Litsentsi alusel, litsentsid ei kaota kehtivust nii kaua, kuni taolised osapooled täidavad täielikult kehtestatud tingimusi.

5. Teilt ei nõuta Litsentsi aktsepteerimist, kuna Te pole sellele alla kirjutanud. Kuid miski muu peale käesoleva Litsentsi ei anna Teile õigust muuta või levitada Programmi või Programmil põhinevat teost. Need tegevused on seadusega keelatud, kui Te ei aktsepteeri käesoleva Litsentsi tingimusi. Sellest tulenevalt Programmi (või igasugust Programmil põhinevat teost) muutes või levitades annate Teie märku nõustumisest Litsentsi terminite ja tingimustega Programmi või Programmil põhineva teose kopeerimisel, levitamisel või muutmisel.

6. Iga kord kui Te levitate Programmi (või ükskõik millist Programmil põhinevat teost), saab saaja automaatselt originaallitsensiaarilt litsentsi kopeerida, levitada ja muuta Programmi vastavalt käesoleva Litsentsi terminitele ja tingimustele. Teie ei või kehtestada lisapiiranguid vastuvõtjale antud õiguste kasutamisele. Teie ei vastuta käesoleva Litsentsi täitmise eest kolmandate osapoolte poolt.

7. Kui kohtulahendi või väidetava patendiõiguse rikkumise tagajärjel või mõnel muul põhjusel (mis ei piirdu patendiga seotud küsimustega) on Teile pandud kohustusi, mis on vastuolus käesoleva Litsentsi tingimustega, siis ei vabasta need Teid käesoleva Litsentsi tingimuste täitmisest. Kui Te ei suuda levitada, samaaegselt täites käesoleva Litsentsi tingimusi ja teisi kohustusi, siis ei tohi Te Programmi üldse levitada. Näiteks kui patendilitsents ei luba Teil litsentsitasuta Programmi edasi levitada neile, kes on saanud Teilt või Teie kaudu Programmi koopia, siis ainus võimalus täita nimetatud patendilitsentsi ja käesoleva Litsentsi tingimusi on loobuda Programmi levitamisest.

Kui käesoleva punkti mõni osa osutub mingil asjaolul kehtetuks või mitterakendatavaks, siis käesoleva punkti ülejäänud osa loetakse rakendatavaks ja punkt tervikuna loetakse rakendatavaks ülejäänud tingimustel.

Käesoleva punkti eesmärk ei ole kellegi ajendamine patendi- või muude õiguste rikkumiseks või nende kehtivuse vaidlustamiseks; käesoleva punkti ainus eesmärk on vaba tarkvara levitamise süsteemi terviklikkuse kaitsmine, mida kasutavad avalike litsentside kasutajad. Paljud isikud on andnud suure panuse tarkvara laiale sektorile, mida levitatakse läbi nimetatud süsteemi usaldades järjekindlat süsteemi rakendumist; autor/annetaja on otsustaja, kas ta soovib tarkvara levitada mõne teise süsteemi kaudu ja litsensiaat ei saa seda valikut mõjutada.

Selle punkti eesmärk on täpselt selgitada, mida soovitakse käesoleva Litsentsi ülejäänud osaga saavutada.

8. Kui Programmi levitamist ja/või kasutamist piiratakse mõnedes riikides kas patentide või autoriõigusega, võib autoriõiguse omanik, kes on Programmi litsenseerinud, lisada kindla geograafilise piirangu, jättes nimekirjast välja mainitud riigid, et levitamine oleks lubatud vaid nimekirjas toodud riikides või riikide vahel. Nimetatud juhul Litsents liitub piiranguga, nagu see on ära toodud käesoleva Litsentsi põhiosas.

9. Free Software Foundation võib aegajalt välja anda ümbertöötatud ja/või uusi versioone Üldisest Avalikust Litsentsist. Need uued versioonid on käesoleva Litsentsi versiooniga sarnase sisuga, kuid võivad erineda detailides, osundades uusi probleeme või huviobjekte.

Igale versioonile antakse unikaalne versiooninumber. Kui programmis tuuakse ära selle kohta kehtiva käesoleva litsentsi versiooninumber ja lisatakse märge "kõik hilisemad versioonid", siis on teil võimalik valida, kas järgida selle või ükskõik millise hilisema Free Software Foundation'i poolt avaldatava versiooni tingimusi. Kui Programm ei täpsusta käesoleva litsentsi versiooninumbrit, on Teil võimalus valida ükskõik milline Free Software Foundation'i poolt avaldatud käesoleva Litsentsi versioon.

10. Kui Te soovite Programmi osi liita teiste vabade programmidega, mille levitamise tingimused on erinevad, siis kirjutage loa saamiseks autorile. Tarkvara puhul, mis on autoriõigusega kaitstud Free Software Foundation'i poolt, kontakteeruge Free Software Foundation'iga, mõnikord me teeme erandeid. Meie otsuse määravad kaks eesmärki: säilitada vaba staatus meie vaba tarkvara igasugustele derivaatidele ja edendada tarkvara jagamist ning taaskasutamist üldiselt.

GARANTII PUUDUMINE

11. KUNA PROGRAMM ON LITSENSEERITUD TASUTA, PUUDUB PROGRAMMIL IGASUGUNE GARANTII ULATUSENI, MIDA LUBAB RAKENDATAV SEADUS. KUI KIRJALIKULT POLE TEISITI SÄTESTATUD, SIIS AUTORIÕIGUSE OMANIKUD JA/VÕI MUUD OSAPOOLED PAKUVAD PROGRAMMI "NII, NAGU TA ON" ILMA IGASUGUSE VÄLJENDATUD VÕI OLETATAVA GARANTIITA, KAASA ARVATUD, KUID MITTE AINULT, KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI JA MINGILE KINDLALE EESMÄRGILE SOBIVUSE GARANTIITA. KOGU PROGRAMMI KVALITEEDI JA TOIMIMISE RISK LANGEB TEILE. KUI PROGRAMM ON PUUDULIK, KANNATE TEIE KÕIK TEENINDUSE, PARANDUSE VÕI TAASTAMISE KULUD.

12. MITTE MINGIL JUHUL, VÄLJA ARVATUD SIIS, KUI SEDA NÕUAB RAKENDATAV SEADUS VÕI KIRJALIKULT ON TEISITI KOKKU LEPITUD, POLE ÜKSKI AUTORIÕIGUSE OMANIK VÕI KOLMAS OSAPOOL, KES VÕIB MUUTA JA/VÕI LEVITADA PROGRAMMI VASTAVALT ÜLALPOOL TOODUD TINGIMUSTELE, TEIE EES VASTUTAV KAHJUSTUSTE EEST, KAASA ARVATUD IGASUGUSED ÜLDISED, SPETSIIFILISED, JUHUSLIKUD VÕI TAGAJÄRJEL TEKKINUD KAHJUD, MIS TULENEVAD KAS PROGRAMMI KASUTAMISEST VÕI VÕIMATUSEST PROGRAMMI KASUTADA (KAASA ARVATUD, KUID MITTE AINULT, TEIE VÕI KOLMANDATE OSAPOOLTE ANDMETE KADUMINE VÕI ANDMETE MUUTMINE VÕI PROGRAMMI VÕIMETUS TÖÖTADA KOOS MISTAHES TEISTE PROGRAMMIDEGA), ISEGI SIIS, KUI VALDAJAT VÕI MUUD OSAPOOLT ON TEAVITATUD SELLISTE KAHJUDE VÕIMALIKKUSEST.

Terminite ja tingimuste lõpp.

Kuidas rakendada oma uutele programmidele neid termineid ja tingimusi?

Kui Te loote uue programmi ja soovite, et sellest oleks võimalikult laiale üldsusele kasu, on parim võimalus selleks muuta oma tarkvara vabaks, mida igaüks saaks edasi levitada ja muuta vastavalt käesolevatele tingimustele.

Et seda teha, lisage oma programmile järgnevad märkused. Kindlaim on lisada need märked iga lähtefaili algusse, et võimalikult efektiivselt teatada garantii puudumisest: igal failil peaks olema vähemalt üks äutoriõiguse" rida ja viide kohale, kust võib leida tervikliku märkuse.

Üks rida, mis sisaldab programmi nime ja otstarbe lühikirjeldust.

Copyright (C) YYYY autori nimi

Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda edasi levitada ja/või muuta vastavalt GNU Üldise Avaliku Litsentsi tingimustele, nagu need on Vaba Tarkvara Fondi poolt avaldatud; kas Litsentsi versioon number 2 või (vastavalt Teie valikule) ükskõik milline hilisem versioon.

Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS. Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.

Te peaks olema saanud GNU Üldise Avaliku Litsentsi koopia koos selle programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga, 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA

Samuti lisa informatsioon, kuidas Teiega kontakteeruda kas posti või meili teel.

Kui programm on interaktiivne, siis lisage väljundisse käivitamisel kuvatav märkus:

Gnomovision versioon 69, Copyright (C) aastaarv, autori nimi

Gnomovision on ILMA IGASUGUSE GARANTIITA; detailidega tutvumiseks trüki "show w". See on vaba tarkvara ja sa oled teretulnud seda edasi levitama teatud kindlate tingimuste alusel; detailidega tutvumiseks trüki "show c".

Hüpoteetilised käsud "show w" ja "show c" peaksid olema vastavad osad GNU Üldisest Avalikust Litsentsist. Muidugi võivad Teie poolt kasutatavad käsud olla teise nimetusega kui "show w" või "show c"; need võivad olla isegi hiireklõpsud või menüü osad - ükskõik, mis sobib Teie programmiga.

Kui Te töötate programmeerijana, peaksite Te laskma oma tööandjal või koolil alla kirjutada autoriõiguslike pretensioonide loobumise kohta käivale dokumendile. Siin on näidis, muutke ise nimed:

Yoyodyne, Inc., loobub kõigist autoriõigustest programmile Gnomovision, mille on kirjutanud James Hacker.

See Üldine Avalik Litsents ei anna õigust liita Teie programmi omandiõiguslike programmidega. Kui Teie programm on alamfunktsioonide teek, on Teil kasulikum lubada linkimist teegiga. Kui Te tahate seda teha, siis kasutage GNU Üldist Avalikku Teegilitsentsi käesoleva Litsentsi asemel.

GNU Üldine Avalik Litsents on leheküljelt `http://linux.ee/materjalid/gpl/`

GNU Üldine Avalik Litsentsi kohta saab lugeda

- `http://www.dsl.org/`
- `http://www.gnu.ai.mit.edu/philosophy/philosophy.html`
- `http://www.gnu.org/philosophy/license-list.html#SoftwareLicenses`
- `http://www.dsl.org/copyleft/non-software-copyleft.shtml#what`
- `http://www.dsl.org/copyleft/non-software-copyleft.shtml`

- http://www.dsl.org/copyleft/
- http://opencontent.org/opl.shtml
- http://kuutorvaja.eenet.ee/tutvustus/gnulinux.html

Kirjandus

[Bor79a] F. W. Bornscheuer. Berechnungsverfaren nach Theorie II. Ordnung. Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart, 1979. 151

[Bor79b] F. W. Bornscheuer. Übertragunsverfaren. Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart, 1979.

[Bor79c] F. W. Bornscheuer. Schnittkräfte Statisch Bestimter Tragwerke. Teil B. Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart, 1979.

[DK62] А. В. Дарков и В. И. Кузнецов. *Строительная механика.* Moskva: Высшая Школа, 1962. 38

[EP67] R. Eek, L. Poverus. *Ehitusmehaanika II.* Tallinn: Valgus, 1967.

[ER83] R. Eek, R. Räämet. Ehitusmehaanika näidis ülesanded I. Tallinn: Tallinna Polütehniline Instituut, 1983, 99 lk. 66

[ERL85] R. Eek, R. Räämet, A. Lahe. Ehitusmehaanika näidis ülesanded II. Tallinn: Tallinna Polütehniline Instituut, 1985, 100 lk. 129

[ER77] R. Eek, R. Räämet. Ehitusmehaanika näidis ülesanded III. Tallinn: Tallinna Polütehniline Instituut, 1977, 51 lk.

[Har85] F. Hartmann. *The Mathematical Foundation of Structural Mechanics.* Berlin Heidelberg New York Tokyo, Springer-Verlag, 1985. 20, 98

[Har87] F. Hartmann. *Methode der Randrlemente.* Berlin Heidelberg New York Tokyo, Springer-Verlag, 1987. 116

[Jür85] A. Jürgenson. *Tugevusõpetus.* Tallinn: Valgus, 1985. 18, 19, 21

[Krä91a] W. B. Krätzig. Statik der Tragwerke, 4.Finite Berechnungsmethoden (4.a Grundlagen; Stabtragwerke). Bochum, Ruhr - Universität Bochum, Fakultät für Bauingenieurwesen, 1991. 25

[KW90] W. B. Krätzig and U. Wittek. *Tragwerke 1. Theorie und Berechnungsmethoden statisch bestimter Stabtragwerke.* Berlin Heidelberg NewYork, Springer - Verlag, 1990. 20, 21, 26, 48, 49, 79, 96, 101

[Krä91b] W. B. Krätzig. *Tragwerke 2. Theorie und Berechnungsmethoden statisch unbestimter Stabtragwerke.* Berlin Heidelberg NewYork, Springer - Verlag, 1991.

[Lah97a] A. Lahe. *The transfer matrix and the boundary element method*, Proc. Estonian Acad. Sci. Engng., 1997, 3, 1. p. 3–12. 116

[Lah97b] A. Lahe. *The EST method for the frame analysis*. Proc.Thenth Nordic Seminar on Computational Mechanics, October 24-25, 1997, Tallinn, Tallinn Technical University, 1997, p. 202–205. 116

[Lah98a] A. Lahe. *The EST method for the frame analysis in second order theory.*, Proc. of the NSCM-11: Nordic Seminar on Computational Mechanics, October 16-17, 1997, Royal Institute of Technology, Department of Structural Engineering, Stockholm, TRITA-BKN. Bulletin 39, Stockholm, 1998, p.167–170. 116

[Lah98b] A. Lahe. *Computer Aided Learning of Structural Mechanics with EHMEH.*, Proc. 4^{th} International Conference on Computer Aided Learning and Instruction in Science and Engineering, (CALISE'98), june 15-17, 1998, Chalmers University of Technology Göteborg, Göteborg, 1998, p.72–79. 116

[Lah98c] A. Lahe. *CAL program for Truss.* Proc. 4^{th} International Conference on Computer Aided Learning and Instruction in Science and Engineering, (CALISE'98), june 15-17, 1998, Chalmers University of Technology Göteborg, Göteborg, 1998, p. 483–484.

[MR95] J. Metsaveer, U. Raukas. *Varda deformatsioonid ja siirded.* Tallinn: Tallinna Tehnikaülikool, Mehaanikainstituut, 1995. 21, 22, 26

[MR96] J. Metsaveer, U. Raukas. *Varda sisejõud ja pinged.* Tallinn: Tallinna Tehnikaülikool, Mehaanikainstituut, 1996. 18, 19, 20, 21, 22, 95

[PW94] W. D. Pilkey, W. Wunderlich. *Mechanics of Structures. Variational and Computational Methods.* CRC Press, Boca Raton Ann Arbor London Tokyo, 1994.

[Rää75] R. Räämet. *Ehitusmehaanika.* Tallinn: Valgus, 1975. 3, 18, 19, 51, 100, 106, 116, 129, 171, 174, 180, 182, 184

[RT83] R. Räämet, Ü. Tärno. *Ehitusmehaanika. Programm ja kontrolltööde ülesanded.* Tallinn: TPI Ehitusmehaanika kateeder, 1983, 72 lk.

[ERL88] *Р. Рямет, Р. Еек, А. Лахе. Строительная механика. Программа и задачи.* Таллинн: ТПИ Кафедра строительной механики, 1988, 70 стр.

[Ter86] Terasprofiilide tabelid. Tallinn: Tallinna Polütehniline Instituut, 1986, 12 lk.

Aineregister