

Л. К. НАРЕЦ

О РАСПАДЕ СИСТЕМ  
КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИМСТИТУТА  
ТАЛЛИН, 1957





Ep. 6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED  
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Серия А

№ 121

1957

Л. К. НАРЕЦ

О РАСПАДЕ СИСТЕМ  
КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО

ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

ТАЛЛИН, 1957.

Эр. 22.90



Л. К. Нарец

О РАСПАДЕ СИСТЕМ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Издательство Таллинского Политехнического Института

\*

Редактор К. Оллик

Технический редактор А. Тамм

Корректор Р. Ээк

Сдано в набор 24 IX 1957. Подписано к печати 3. III 1958. Бумага 45×84  $\frac{1}{16}$ . Печатных листов 3,00. По формату 60×92 печатных листов 2,67. Учетно-издательских листов 2,65. Тираж 800. МВ-01746. Заказ № 518.

Типография «Пунане Тяхт», Таллин, ул. Пикк 54/58

Цена 1 руб. 80 коп.



## ВВЕДЕНИЕ

Было показано\*, что расчет статически неопределимых конструкций значительно облегчается, если для решения систем канонических уравнений применить вычислительные методы линейной алгебры. Затрачиваемое на расчет время сокращается за счет применения матричных операций и использования всех вычислительных возможностей малых счетных машин (арифмометров). Эти методы позволяют решать системы уравнений с двумя-тремя десятками неизвестных с практически разумной тратой времени. Возникают поэтому возможность и необходимость сделать первые шаги в вопросе решения систем уравнений с большим числом неизвестных и выяснить теоретические и практические возможности для решения таких систем. В связи с трудностью поставленной задачи при ограниченном объеме статьи мы вынуждены применять обозначения теории матриц и ссылаться на ряд теорем. Выводы мы приводим лишь те, на которые не можем сослаться в других работах. Мы сделаем все возможное, чтобы работа была понятна специалисту по строительной механике, мало знакомому с теорией матриц.

### 1. ПРОБЛЕМА РАСПАДА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Систему линейных алгебраических уравнений можно записать в нескольких формах:  
в развернутой

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= a_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= a_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= a_4, \end{aligned} \quad (1)$$

\* См. [9], [6], [7], [10], [11],[13], [14], [15], [16].

таблично

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} \quad (2)$$

и в матричных символах

$$A\bar{x} = \bar{a}. \quad (3)$$

В (2) и (3), помимо записи чисел в таблицах (матрицах), указаны и операции над ними. Развернутая запись (1) разъясняет, что подразумевается под термином «умножения матрицы  $A$  на столбец неизвестных  $x$ » и что следует понимать под знаком равенства. Операция умножения матрицы на столбец состоит из простых операций — «умножения строк на столбцы». Запишем для ясности, например, произведение первой строки  $A$  на столбец  $\bar{x}$ :

$$\| a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \| \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = a_1; a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_1. \quad (4)$$

Отметим, что произведение строки на столбец в числах выполняется на арифмометре методом накопления за один вычислительный прием без записи промежуточных результатов. Это обстоятельство и определяет сокращение времени при выполнении матричных операций на арифмометре и общую экономию времени при решении систем линейных алгебраических уравнений.

Допустим, что, вместо неизвестных  $\bar{x}$ , мы введем известные  $\bar{y}$ , определяемые такими линейными выражениями:

$$\bar{x} = Q\bar{y} + \bar{q}; \begin{cases} x_1 = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + q_{13}y_3 + q_{14}y_4 + q_1, \\ x_2 = q_{21}y_1 + q_{22}y_2 + q_{23}y_3 + q_{24}y_4 + q_2, \\ x_3 = q_{31}y_1 + q_{32}y_2 + q_{33}y_3 + q_{34}y_4 + q_3, \\ x_4 = q_{41}y_1 + q_{42}y_2 + q_{43}y_3 + q_{44}y_4 + q_4. \end{cases} \quad (5)$$

Подставив (5) в (3) в символах, мы (формально) получим матричную запись операции подстановки:

$$AQ\bar{y} + A\bar{q} = \bar{a}; AQ = C; \bar{a} - A\bar{q} = \bar{c}; C\bar{y} = \bar{c} \quad (6)$$

Подставив же в развернутой форме (5) в (1), мы выясним смысл операции умножения матрицы на матрицу и одно-



временно получим правило для определения элементов  $c_{ik}$  матрицы  $C = AQ$ . Здесь мы опять встретились с операцией умножения строки на столбец. Например,  $c_{23}$ ,  $c_3$  определяются так:

$$c_{23} = \left\| \begin{array}{cccc} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} q_{13} \\ q_{23} \\ q_{33} \\ q_{34} \end{array} \right\| ; c_3 = a_3 - \left\| \begin{array}{cccc} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{array} \right\|$$

И так, переход от неизвестных  $x$  к неизвестным  $y$  (операция подстановки) связана с операцией преобразования  $A$  путем умножения  $A$  на матрицу  $Q$  справа.

Можно преобразовать систему уравнений (1) еще и другим путем: умножить последовательно первое, второе и т.д. уравнения на какие-то определенным образом выбранные числа  $p_{11}$ ,  $p_{12}$ ,  $p_{13}$  . . . и в результате сложить все уравнения. Мы получим таким путем новое уравнение с прежними неизвестными. Это уравнение можно принять за первое уравнение новой преобразованной системы уравнений. Подобным же образом мы можем получить второе уравнение преобразованной системы уравнений (умножением на другие числа  $p_{21}$ ,  $p_{22}$ , . . .) и т.д. Указанное преобразование системы уравнений (1) равносильно умножению обеих частей (3) слева на матрицу преобразования  $P$ :

$$PA\bar{x} = P\bar{a}; PA = B; P\bar{a} = \bar{b}; B\bar{x} = \bar{b}, \quad (7)$$

где

$$P = \left\| \begin{array}{cccc} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{array} \right\| \quad B = \left\| \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array} \right\|$$

Здесь мы также встречаемся с операцией умножения строки на столбец; например, элементы  $b_{41}$  и  $b_3$  преобразованной матрицы  $B$  и  $b_3$  будут определяться так:

$$b_{41} = \left\| \begin{array}{cccc} p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{array} \right\| ; b_3 = \left\| \begin{array}{cccc} p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \right\|$$

Указанное преобразование называется *преобразованием А посредством Р умножением слева*.

Из изложенного следует, что преобразование матрицы умножением справа и слева имеет совершенно различный смысл, и поэтому при умножении матриц нельзя менять порядка следования матриц-сомножителей, так как вообще

$$A \cdot B \neq BA.$$

Однако, бывают такие матрицы (они встретятся в дальнейшем), произведение которых не зависит от порядка следования сомножителей. Такие матрицы носят название перестановочных (коммутирующих) матриц.

Из изложенного видно, что матричная символика вызвана стремлением кратко записывать довольно сложные выражения и зависимости: линейные выражения (1), (5); операции подстановки (6); преобразования систем уравнений умножением слева и справа и т.п. Все матричные операции, кажущиеся сложными на первый взгляд, имеют вполне определенный и простой смысл. Поэтому можно матричные операции рассматривать отдельно, не записывая каждый раз полностью те выражения, куда они входят; например: в запись систем линейных уравнений, в запись линейных выражений, в запись замены переменных в линейных выражениях и т.д. При отсутствии навыка при пользовании матричной символикой могут возникнуть некоторые затруднения, но эти затруднения на основании изложенного всегда можно преодолеть, возвратясь к развернутым выражениям и к тем зависимостям, которые записываются в матричных символах. В ближайших выражениях мы будем писать параллельно с матричной записью и развернутые записи, но последние все реже и реже. Многие примеры и доказательства мы проведем в развернутой форме для матриц невысокого порядка, — матричная запись их будет автоматически приводить к обобщению.

Проблему распада системы линейных алгебраических уравнений в общем виде можно сформулировать так: «Для данной матрицы *A* найти такую матрицу преобразования *Q* для умножения справа и матрицу преобразования *P* для умножения слева, чтобы в результате таких преобразований получилась бы матрица *B* простой напе-



ред заданной структуры». Поставленная проблема в матричной символике запишется так:

$$PAQ = B. \quad (8)$$

Простейшей из возможных матриц  $B$  будет являться единичная матрица  $I$ , которая имеет такой вид:

$$B = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

При таком выборе матрицы  $B$  система уравнений окажется решенной относительно  $\bar{y}$ :

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1, \\ y_2 &= b_2, \\ y_3 &= b_3, \\ y_4 &= b_4; \end{aligned} \quad \bar{b} = P\bar{a}. \quad (10)$$

Несколько более сложную систему уравнений мы получим, если после преобразования  $A$  посредством  $P$  и  $Q$  мы получим матрицу  $B$  в виде диагональной матрицы  $D$ :

$$B = D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

что дает соответствующую систему уравнений относительно неизвестных  $\bar{y}$  —

$$\begin{aligned} d_{11}y_1 &= b_1, \\ d_{22}y_2 &= b_2, \\ d_{33}y_3 &= b_3, \\ d_{44}y_4 &= b_4. \end{aligned} \quad \bar{b} = P\bar{a}. \quad (12)$$

Можно предположить, что в некоторых случаях (ниже мы их подробно рассмотрим) матрицу  $A$  можно будет преобразовать к квазидиагональной форме

$$B = \begin{array}{|cc|c|cc|} \hline b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b_{33} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & b_{44} & b_{45} \\ 0 & 0 & 0 & b_{54} & b_{55} \\ \hline \end{array} \quad (13)$$

с соответствующей системой уравнений

$$\begin{aligned} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 &= b_1, \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 &= b_2, \\ b_{33}y_3 &= b_3, \\ b_{44}y_4 + b_{45}y_5 &= b_4, \\ b_{54}y_4 + b_{55}y_5 &= b_5. \end{aligned} \quad \bar{b} = P\bar{a}. \quad (14)$$

Приведение матрицы заданной системы уравнений к квазидиагональному виду, если такое приведение не требует затраты большого времени, снижает трудоемкость решения системы уравнений с первоначально заданной матрицей. Дело в том, что при решении системы уравнений число вычислительных операций приблизительно пропорционально кубу числа неизвестных совместно решаемой системы уравнений. Поэтому число операций при решении системы уравнений (14), например, будет приблизительно в семь с половиной раз меньше числа операций при решении соответствующей первоначальной системы уравнений. Нижеизложенные методы, главным образом, будут касаться методов приведения заданной системы уравнений к квазидиагональному виду, т.е. к распавшейся системе уравнений.

Порядок написания уравнений и порядок следования неизвестных можно выбрать любым образом. Поэтому при распаде системы уравнений получаемые при распаде матрицы по внешнему виду могут не походить на квазидиагональные. Например, переменив в (14) и (13) порядок следования уравнений и неизвестных, мы получим по внешнему виду другие матрицы:



$$\begin{array}{rcl}
 b_{11}y_1 & + & b_{12}y_2 & = & b_1, \\
 & b_{33}y_3 & & = & b_3, \\
 & b_{55}y_5 & + & b_{54}y_4 & = & b_5, \\
 b_{21}y_1 & + & b_{22}y_2 & = & b_2, \\
 & b_{55}y_5 & + & b_{44}y_4 & = & b_4.
 \end{array} \quad (15)$$

$$B^* = \left\| \begin{array}{cccccc}
 b_{11} & 0 & 0 & b_{12} & 0 & \\
 0 & b_{33} & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & b_{55} & 0 & b_{54} & \\
 b_{21} & 0 & 0 & b_{22} & 0 & \\
 0 & 0 & b_{45} & 0 & b_{44} & 
 \end{array} \right\| \quad (16)$$

Назовем такой вид распада «распадом с матрицей в форме решета».

В матрице (13) можно сделать группировку элементов, выделив отдельные клетки-субматрицы. Как следует из (14), каждая диагональная клетка является матрицей системы уравнений, но с меньшим числом неизвестных.

Квазидиагональная матрица является примером клеточных матриц (см. ниже); она обобщает понятие диагональной матрицы.

*Теорема о существовании двух матриц преобразования  $P$  и  $Q$ , которые преобразуют заданную матрицу  $A$  (совместной линейной системы уравнений) в заданную матрицу  $B$ , выбранную так, чтобы соответствующая система уравнений распалась или приняла желаемый для нас более простой вид.*

Предположим, что обратимая\* матрица  $A$  определяет систему линейных уравнений

$$\overline{Ax} = \overline{a}. \quad (17)$$

Допустим еще, что матрицу  $A$  можно представить в виде произведения целесообразно выбранных обратимых матриц  $L$  и  $G$ :

$$A = LG, \quad (18)$$

---

\* Обратная матрица к  $A$  обозначается  $A^{-1}$ . Заданная и ее обратная матрица связаны соотношением  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ , где  $I$ -единичная матрица [см. (9)]. Умножая (17) слева на  $A^{-1}$  получаем общее решение (17):  $x = A^{-1}\overline{a}$ , пригодное для любых  $\overline{a}$ . Умножение на  $I$  подобно умножению на единицу, поэтому символ  $I$  часто опускается.

следовательно,  $G$  определяется равенством

$$G = L^{-1}A. \quad (19)$$

Умножая (17) слева на  $L^{-1}$ , учитывая (19), получим

$$G\bar{x} = L^{-1}\bar{a}. \quad (20)$$

Предполагаем также, что обратимую матрицу  $B$  мы также можем представить в виде произведения матриц  $M$  и  $N$ :

$$B = MN. \quad (21)$$

Назначить матрицу  $B$  можно по-разному. Например: положить, что  $B = I$  — единичная матрица, что  $B$  — диагональная матрица, треугольная, квазидиагональная и т.п. Если заданная матрица является матрицей канонических уравнений метода сил, то можно потребовать, чтобы  $B$  была матрицей канонических уравнений метода деформаций и наоборот. Произвольную матрицу  $A$  можно заменить матрицей  $B$  легко решаемого трехчленного, пятичленного вида и т.п.

В (20) мы можем произвести замену неизвестных

$$\bar{x} = Q\bar{y}, \quad (22)$$

потребовав, чтобы матрица  $Q$  удовлетворяла условию

$$GQ = N. \quad (23)$$

При обратимости  $G$  это условие всегда выполнимо, а потому

$$Q = G^{-1}N. \quad (24)$$

Подставляя (22) в (20), учитывая (24) и что  $G^{-1} \cdot G = I$ , получим:

$$N\bar{y} = L^{-1}\bar{a}. \quad (25)$$

Умножая последнее равенство слева на  $M$ , получим

$$MN\bar{y} = ML^{-1}\bar{a}.$$

По (21)  $MN = B$ ; обозначая

$$\bar{b} = ML^{-1}\bar{a}, \quad (26)$$



получим желаемый результат

$$B\bar{y} = \bar{b}. \quad (27)$$

Остается еще найти выражение, определяющее  $P$ . Из (21), (23) и (19) следует, что матрица  $B$  получается из  $A$  умножением слева на  $P$  и справа на  $Q$ . В самом деле:

$$B = MN = MGQ = ML^{-1}AQ = PAQ. \quad (28)$$

Одновременно следует, что

$$P = ML^{-1}. \quad (29)$$

Итак, матрицы  $P$  и  $Q$  определены полностью (24), (29) — теорема, изложенная на стр. 9, доказана.

При доказательстве на матрицы  $A$ ,  $L$ ,  $G$ ,  $B$  мы наложили лишь условия их обратимости. В остальном их выбор может быть любым. Отсюда следует, что существует бесчисленное множество матриц  $P$  и  $Q$ , которые преобразуют  $A$  в  $B$ . Для целей вычислительной практики из этого множества возможных матриц  $P$  и  $Q$  надо выбрать такие, получение которых потребует наименьшей затраты времени.

Приведенное доказательство одновременно дает и вычислительный алгоритм для получения матриц  $P$  и  $Q$ . Нельзя, конечно, предположить, что этот алгоритм является единственно возможным, и что он во всех случаях решает поставленную задачу при минимальной затрате времени для получения матриц  $P$  и  $Q$ .

Ниже мы увидим, что для определенного вида матриц, не применяя приведенный алгоритм, можно будет найти матрицы  $P$  и  $Q$ , приводящие к распаду, почти без вычислений или при малой вычислительной работе. Для матриц других видов мы при прямом отыскании  $P$  и  $Q$  встретимся с большими затруднениями, а приведенный алгоритм хотя и приведет к желаемому результату, но потребует больших вычислений. Проще будет решить систему уравнений с матрицей  $A$ , чем преобразовывать ее в матрицу  $B$  более простого вида. Но так или иначе, теорема о существовании матриц  $P$  и  $Q$  говорит, что попытки их найти какими-либо иными средствами отнюдь не безнадежны.

В качестве примеров на применение полученной тео-

ремы изложим теорию нескольких эффективных методов решения систем линейных уравнений, предназначенных для вычислений на арифмометре. Эти методы еще очень редко применяются в строительной механике, а потому изложение их теории представляет самостоятельный интерес. С другой стороны, изложение этих методов на основе применения теоремы существования облегчит дальнейшее развитие темы.

## 2. МЕТОД БАНАХЕВИЧА\*

Положим в (21), что  $M$  — единичная матрица [см. (9)]; тогда  $B = N$ .

Выберем матрицу  $B$  с таким расчетом, чтобы преобразованная система уравнений легко решалась. Так как система уравнений с треугольной матрицей вида

$$\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 &= b_1, \\ x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 &= b_2, \\ x_3 + b_{34}x_4 &= b_3, \\ x_4 &= b_4 \end{aligned} \quad (30)$$

решается очень легко. Примем, что  $B$  — верхнетреугольная матрица

$$B = \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 1 & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & 1 & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Положим в (18), что  $G = B$ ; следовательно

$$A = LB. \quad (31)$$

Примем, что  $L$  — нижнетреугольная матрица вида

$$L = \begin{vmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{vmatrix}$$

\* См. [26] стр. 44, [27] стр. 21, 249, 251, 260, 264, 317, [18] стр. 87.



Непосредственно получаем:

по (29)

$$P = L^{-1}, \quad (32)$$

по (24)

$$Q = G^{-1}N = B^{-1}B = I, \quad (33)$$

по (26)

$$\bar{b} = L^{-1}\bar{a}. \quad (34)$$

Наша задача свелась к определению элементов матриц  $L$  и  $B$  по наложенному условию (31). При условии, что  $|A| \neq 0$  и что все последовательные главные миноры матрицы не равны нулю —

$$A_{1,2,\dots,\kappa}^{1,2,\dots,\kappa} \neq 0; \quad \kappa = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (35),$$

все элементы  $L$  и  $B$  всегда можно определить.\* Они определяются последовательно из условия (31). Допустим, что уже вычислены элементы первых двух строк  $L$  и  $B$  и что надо вычислить элементы третьей строки  $L$ . Умножая третью строку  $L$  последовательно на первый, второй, третий столбец  $B$ , получим три матричных уравнения для определения  $l_{31}$ ,  $l_{32}$ ,  $l_{33}$ :

$$l_{31}l_{32}l_{33}0 \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = a_{31}; \quad l_{31}l_{32}l_{33}0 \cdot \begin{vmatrix} b_{12} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = a_{32}; \quad l_{31}l_{32}l_{33}0 \cdot \begin{vmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = a_{33},$$

откуда

$$l_{31} = a_{31}, \quad l_{32} = a_{32} - l_{31}b_{12}, \quad l_{33} = a_{33} - l_{31}b_{13} - l_{32}b_{23}.$$

При вычислениях, проводимых на арифмометре, указанные формулы не записываются. Значения искомых элементов определяются методом накопления. Величины

\* В весьма редких в практике случаях, когда не соблюдается условие (35), один из диагональных элементов матрицы  $L$  окажется равным нулю. В этом случае вычисление дальнейших элементов  $L$  и  $B$  станет невозможным. Но если решаемая система уравнений совместна ( $[A] \neq 0$ ), то соответствующей перестановкой строк и столбцов матрицы  $A$ , т. е. изменением порядка следования неизвестных и изменением порядка написания уравнений, можно добиться удовлетворения (35).

$l_{31}, l_{32}, l_{33}$  вписываются непосредственно в таблицы без всяких других записей. Детальное описание метода Банахевича опускаем.

### 3. МЕТОД ХОЛЕЦКОГО, \* НАЗЫВАЕМЫЙ ТАКЖЕ МЕТОДОМ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

Метод Холецкого применим к решению симметричных систем уравнений. Он возник ранее метода Банахевича. Все рассуждения проводятся так, как было уже изложено в пункте 2, но, поскольку сейчас матрица  $A$  симметричная и ее элементы удовлетворяют условию

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad (36)$$

основная зависимость (31) записывается иначе:

$$A = M'M^{**} \quad (37)$$

Нижнетреугольная матрица  $M'$  является транспонированной по отношению к верхнетреугольной матрице  $M$ .

$$M' = \begin{vmatrix} m'_{11} & 0 & 0 & 0 \\ m'_{21} & m'_{22} & 0 & 0 \\ m'_{31} & m'_{32} & m'_{33} & 0 \\ m'_{41} & m'_{42} & m'_{43} & m'_{44} \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} \end{vmatrix} \quad (38)$$

Взаимно транспонированными называются две матрицы, строки одной из которых являются столбцами другой, т.е.

$$m'_{ii} = m_{ii}; \quad m'_{ik} = m_{ki}; \quad i, k = 1, 2, \dots, n. \quad (39)$$

Вычисления элементов матриц  $M'$  и  $M$  во всем аналогично вычислению элементов матриц  $L$  и  $B$  в пункте 2. Для вычисления диагональных элементов необходимо извлекать квадратные корни, почему этот метод и получил свое второе название\*.

\* См. [18] стр. 87 и след.; [20].

\*\* Для транспонированных матриц применяется также обозначение  $M^{(TP)}$  и для элементов —  $m^{(TP)}_{ik}$  и  $m'_{ik}$ . См. [28].

\* См. [6], [7].



#### 4. ВАРИАНТ ГМ-МЕТОДА

ГМ-метод возник как вариант метода Гаусса, основной идеей которого является последовательное исключение неизвестных из заданной системы уравнений. ГМ-метод построен для полного использования всех вычислительных особенностей счетных машин, почему и получил свое название ( $M$  — машинный, матричный). Приведем сейчас вариант ГМ-метода, приняв в (21), что матрица  $B$  — единичная матрица

$$B = I. \quad (40)$$

Поскольку  $B$  — единичная матрица, мы можем принять, что  $M$  и  $N$  также единичные матрицы. В выражении (18) примем, что  $L$  — нижнетреугольная матрица, а  $G$  — верхнетреугольная матрица точно такого же вида, который получается при решении системы уравнений по алгоритму Гаусса, т.е. вида

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{vmatrix}; \quad G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ 0 & 0 & g_{33} & g_{34} \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{vmatrix} \quad (41)$$

При выбранных таким образом матрицах  $B, M, N, L, C$  получаем:

по (29) 
$$P = L^{-1}, \quad (42);$$

по (24) 
$$Q = G^{-1}, \quad (43);$$

по (26) 
$$\bar{b} = L^{-1}a. \quad (44).$$

Система уравнений (27) примет вид полностью распавшейся системы

$$\bar{y} = \bar{b}. \quad (45)$$

На основании (22) и (45) мы можем вернуться к первоначальным неизвестным  $\bar{x}$  и получить общее решение, пригодное для вычисления  $\bar{x}$  при любой заданной правой части  $\bar{a}$ :

$$x = G^{-1}L^{-1}\bar{b}. \quad (46)$$

Элементы матриц  $L$  и  $G$  можно определить теми же приемами, что и в пунктах 2 и 3. Но они могут быть получены и иначе — по обобщенному правилу исключения\*. Обращение треугольных матриц производится очень легко. Обратная матрица к нижнетреугольной матрице будет также нижнетреугольной матрицей, обратная к верхнетреугольной — также верхнетреугольной. Поэтому  $L^{-1}$  и  $G^{-1}$  будут иметь такой вид:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & 1 & 0 \\ \lambda_{41} & \lambda_{42} & \lambda_{43} & 1 \end{pmatrix} \quad (47) \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ 0 & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ 0 & 0 & \gamma_{33} & \gamma_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{44} \end{pmatrix} \quad (48)$$

Само же обращение будет производиться на основании зависимостей

$$LL^{-1} = I, \quad GG^{-1} = I. \quad (49)$$

При вычислениях на арифмометре каждый элемент вычисляется без всяких промежуточных записей. Объем вычислений при обращении треугольных матриц исключительно мал. Если  $A$  — симметричная матрица, то между строками  $L$  и столбцами  $G$  обнаруживается такая зависимость: элементы  $i$ -той строки  $G$ , поделенные на свой диагональный элемент, равны элементам  $i$ -того столбца матрицы  $L$ . Поэтому в случае симметричной  $A$  достаточно обратить только матрицу  $L$ . Элементы матрицы  $G^{-1}$  получаются делением столбцов матрицы  $L^{-1}$  на диагональный элемент с последующим транспонированием в строки матрицы  $G^{-1}$ . Поскольку существует только одна обратная матрица, мы, произведя в (47) умножение матриц  $G^{-1}$  и  $L^{-1}$ , могли бы записать (47) в обычной форме через обратную к  $A$  матрицу:

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{a}. \quad (50)$$

Таким образом, мимоходом мы получили теорему: *обратная матрица от произведения двух матриц равна произведению обратных матриц множителей, взятому в обратном порядке:*

$$A^{-1} = (L \cdot G)^{-1} = G^{-1}L^{-1}. \quad (51)$$

Опираясь на это равенство, мы могли бы получить (47)

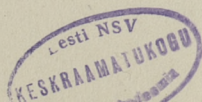
\* См. [6], [7].



из (41) непосредственно. Но тогда бы мы не проиллюстрировали теорему пункта 1. Если ставится жесткое требование: получить общее решение (17) с минимумом вычислений и притом так, чтобы вычисления неизвестных по общей формуле были бы также наименьшими, то общему решению (46) следует отдать предпочтение перед общим решением в форме (50). Дело в том, что матрица  $A$  может иметь много нулевых элементов. Наружные, «габаритные» элементы  $A$  остаются нулевыми (на соответствующих местах) и в матрицах  $L^{-1}$  и  $G^{-1}$ . Матрица  $A^{-1}$  обычно не содержит нулевых элементов. Поэтому, применяя общее решение в форме (50), мы выполняем дополнительную работу по перемножению матриц и усложняем вычисление неизвестных. Формула (47), однако, обладает тем недостатком, что надо записать «промежуточный результат» — произведение  $L^{-1}\bar{b}$  — и полученный вектор вновь помножить на  $G^{-1}$ . Количество же вычислений по сравнению с вычислениями по (50) одинаково или меньше (последнее случается чаще).

## 5. КЛЕТОЧНЫЕ МАТРИЦЫ

Мы уже встречались с понятием матрицы, разбитой на клетки, когда говорили о квазидиагональной матрице (п. 1). На клетки может быть разбита любая матрица. Разбивка на клетки является только группировкой (по каким-либо признакам) элементов заданной матрицы, при которой никаких вычислений не производится. Условимся разбивку матрицы на клетки всегда производить так, чтобы на главной диагонали образовались квадратные клетки (существуют названия: блоки, ящики и др.). В строительной механике, когда говорят о групповых неизвестных, групповых перемещениях и т.п., тоже используют понятие «клетка», но только применяют другую терминологию. При умножении клеточных матриц (матриц, разбитых на клетки) правило умножения числовых матриц обобщается и заменяется правилом умножения строки клеток (комплекс чисел) на столбец клеток матрицы множителя. Записывать клетки мы будем большими буквами, так как «клетка» является матрицей. Мы не исключаем случая, когда какая-либо из диагональ-



ных клеток будет состоять из одного элемента, т.е. будет простым числом. В дальнейшем матрицы преобразования  $P$  и  $Q$  мы будем применять только в виде диагональных (и квазидиагональных матриц (клеточных) и будем предполагать, что диагональные клетки  $P$  и  $Q$ , стоящие на одних и тех же местах, имеют один и тот же порядок. Преобразовываемую матрицу  $A$  мы также будем предполагать разбитой на клетки и притом так, чтобы на главной диагонали  $A$  располагались клетки такого же порядка, как на соответствующих местах матриц  $P$  и  $Q$ . В развернутом виде клеточные матрицы  $P, A, Q$  будут записываться так:

$$P = \begin{vmatrix} P_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{44} \end{vmatrix}; \quad A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}; \quad Q = \begin{vmatrix} Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{vmatrix}. \quad (52)$$

Результат преобразования  $A$  посредством умножения слева на  $P$  и справа на  $Q$ , где  $P$  и  $Q$  — квазидиагональные матрицы, будет относительно простым:

$$S = PAQ = \begin{vmatrix} P_{11}A_{11}Q_{11} & P_{11}A_{12}Q_{22} & P_{11}A_{13}Q_{33} & P_{11}A_{14}Q_{44} \\ P_{22}A_{21}Q_{11} & P_{22}A_{22}Q_{22} & P_{22}A_{23}Q_{33} & P_{22}A_{24}Q_{44} \\ P_{33}A_{31}Q_{11} & P_{33}A_{32}Q_{22} & P_{33}A_{33}Q_{33} & P_{33}A_{34}Q_{44} \\ P_{44}A_{41}Q_{11} & P_{44}A_{42}Q_{22} & P_{44}A_{43}Q_{33} & P_{44}A_{44}Q_{44} \end{vmatrix}. \quad (53)$$

Каждая клетка матрицы  $S$  может быть вычислена по формулам

$$S_{ik} = P_{ii} A_{ik} Q_{kk}, \quad S_{ki} = P_{kk} A_{ki} Q_{ii}. \quad (54)$$

Формулы (54) позволяют выполнить преобразование (53) по отдельным клеткам, что упрощает вычисления.

Учитывая, что правила умножения клеточных матриц и обычных числовых матриц аналогичны, мы можем применить формулы (54) и в том случае, когда  $P$  и  $Q$  — обыкновенные диагональные числовые матрицы.



## 6. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Ортогональные преобразования в строительную механику корабля были введены И. Г. Бубновым\*, П. Ф. Папковичем, А. А. Курдюмовым и др. Позднее, для целей общей строительной механики, они были применены А. А. Уманским и И. Л. Жодзишским\*\*. В ГДР эти преобразования помещены Х. Бальдауфом\*\*\* в учебник по строительной механике как «обязательный материал». Вопросы, связанные с ортогональным преобразованием, в настоящее время чрезвычайно бурно (особенно за рубежом) развиваются и совершенствуются, и те вычисления, которые недавно считались трудными и трудоемкими, уже перестали быть таковыми. Мы ограничимся лишь самыми необходимыми сведениями и сообщим о наиболее совершенных для практического применения методах.

Решая какую-нибудь статически неопределимую систему методом сил\*\*\*\* с выбранными неизвестными силами  $x$  и известной матрицей единичных перемещений  $A$ , можно поставить вопрос: *нельзя ли выбрать новые групповые неизвестные (силы) так, чтобы групповые перемещения по их направлению были бы пропорциональны числу  $\lambda$* ? Поставленная задача при трех неизвестных формулируется так:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= \lambda x_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= \lambda x_3, \\ \overline{Ax} &= \lambda x. \end{aligned}$$

Система уравнений такого вида носит название «вековой» (или характеристической). Эта система уравнений имеет отличные от нуля решения, если ее вековой определитель равен нулю при вообще различных значениях  $\lambda$ . Разворачивая вековой определитель в алгебраический

\* См. [1]

\*\* См. [24]

\*\*\* См. [26]

\*\*\*\* При методе деформаций рассуждения аналогичны.

полиномом\*, мы получим вековое (характеристическое) уравнение.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^3 - S_1 \lambda^2 + S_2 \lambda - S_3 = 0;$$

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda I| = (-\lambda)^n + S_1(-\lambda)^{n-1} + S_2(-\lambda)^{n-2} + \dots + S_n = 0. \quad (55)$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^n a_{ii}; \quad S_2 = \sum_{i < k} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ a_{ki} & a_{kk} \end{vmatrix}; \quad S_3 = \sum_{i < k < l} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} & a_{il} \\ a_{ik} & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{il} & a_{lk} & a_{ll} \end{vmatrix};$$

$i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad l = 1, 2, \dots, n.$

Каждому корню (собственному числу)  $\lambda_i$  уравнения (55) будет соответствовать свой собственный вектор (значение  $x_i$  при полученном  $\lambda_i$ ). Будем нормировать собственный вектор так, чтобы сумма квадратов его элементов

\* Для разворачивания определителя третьего порядка проще всего использовать общую формулу.  $\Delta(\lambda) = \lambda^3 - S_1 \lambda^2 + S_2 \lambda - S_3 = 0$ ;  $S_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ .

$$S_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad S_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$S_1$  и  $S_2$  вычисляются на арифмометре одним приемом.  $S_3$  — по элементам строки с одной промежуточной записью. Для разворачивания определителя до десятого порядка можно применить метод неопределенных коэффициентов см. [21], [19], [20]. Необходимые значения определителей проще всего вычисляются по ГМ-методу. Определитель равен произведению диагональных элементов матрицы  $G: \Delta = g_{11} g_{23} \dots g_{nn}$ . Для этой же цели можно применить вариант метода Крылова (см. [17], [21], [28], [8]). Этот метод имеет недостатки как теоретического, так и чисто вычислительного характера. Лучшими качествами обладает мало известный в СССР метод Гессенберга (см. [27] стр. 316). Для определения корней векового уравнения на арифмометре следует применить метод Лобачевского — Греффе (см. [22], [23], [28], или метод Ньютона в комбинации с методом Горнера [22], [23]). В последнее время появился вариант этого метода (Лемер [28]), в котором при вычислениях нет необходимости прибегать к логарифмам. Все вычисления производится на арифмометре, извлечения корней высоких степеней не требуется. Мы не имеем здесь возможности изложить все эти методы, хотя и отлично сознаем, что от их практической эффективности зависит эффективность предлагаемых вариантов решения проблемы распада. Указанные методы значительно более совершенны, чем другие методы, описанные в технической литературе.



была бы равной единице. Совокупность всех нормированных собственных векторов образует ортогональную матрицу  $\Omega$ , вычисленную по отношению к  $A$ :

$$\Omega = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \dots & \omega_{nn} \end{vmatrix}$$

Ортогональные матрицы обладают рядом свойств, упрощающих вычисления. Сейчас для нас важно следующее:

$$\Omega^{-1} = \Omega', \quad (57)$$

что говорит о чрезвычайно простой обратимости ортогональных матриц: *обратная матрица к ортогональной равна ее транспонированной*. Поставленная задача таким образом разрешима: можно найти групповые силы с групповыми перемещениями, пропорциональными собственным числам. Эти направления сил и перемещений называются главными или собственными, чем подчеркивается их принадлежность к матрице  $A$ . Все главные векторы сил и перемещений взаимно ортогональны:

$$\Omega' \Omega = \Omega \Omega' = I. \quad (58)$$

Величина («длина») векторов перемещений равна собственным числам. Все изложенное аналогичным образом можно распространить и на метод деформаций.

Умножая  $A$  справа на ее ортогональную матрицу и слева на транспонированную, мы преобразуем  $A$  к диагональной матрице, на главной диагонали которой стоят собственные числа.

$$\Omega' A \Omega = \Lambda; \quad \Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} \quad (59)$$

Преобразование вида (59) называется ортогональным преобразованием. Ортогональное преобразование является частным видом преобразования матрицы  $A$  умножением

слева и справа на выбранные каким-либо образом матрицы  $P$  и  $Q$ . При ортогональном преобразовании

$$P = \Omega' \text{ и } Q = \Omega. \quad (60)$$

Скалярной матрицей называется диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят одинаковые числа:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = aI. \quad (61)$$

Ниже мы будем использовать свойство, что (скалярная) матрица не изменяется при ортогональном преобразовании

$$\Omega' S \Omega = S. \quad (62)$$

Собственные числа и векторы можно найти также и итеративными методами\*. Особенностью этих методов является то, что в процессе последовательных приближений одновременно получают собственные числа и собственные векторы. Процесс последовательных приближений иногда сходится очень медленно (требуется несколько десятков приближений). Существуют несколько предложений для ускорения процесса приближений. Укажем на один прием, хотя и немного трудоемкий, но простой и всегда ведущий к значительному сокращению числа приближений. При применении этого приема итерируется не матрица  $A$ , а ее степени  $A^2 = A \cdot A$  или  $A^4 = A^2 \cdot A^2$ . В этом случае число приближений сокращается соответственно в два и четыре раза.

Степенные матрицы обладают рядом свойств, которые мы используем в дальнейшем:

1. Матрица  $A$  в степени  $n$  имеет те же собственные векторы, что и матрица  $A$ . Собственные числа матрицы  $A^n$  равны  $n$ -степеням собственных чисел матрицы  $A$ .

2. Степенные матрицы взаимно перестановочны:

$$A^m \cdot A^n = A^n \cdot A^m = A^{m+n}. \quad (63)$$

\* См. [19] Пункт 81, стр. 207 и след.



3. Любая матрица  $B$ , перестановочная с матрицей  $C$ , может быть определена линейным выражением

$$B = p_1 C^{n-1} + p_2 C^{n-2} + \dots + p_{n-1} C + p_n I, \quad (64)$$

где  $n$  — порядок матрицы  $C$ ,  $p_1, p_2, \dots, p_n$  — произвольные числа. Этим выражением исчерпывается все множество линейно независимых перестановочных матриц\*. Перестановочные матрицы обладают для нас важными качествами. Собственные векторы, следовательно, и соответствующие ортогональные матрицы у всех перестановочных матриц одинаковы. Собственные числа определяются выражением, аналогичным с (64):

$$\lambda_B = p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n. \quad (65)$$

Для практических вычислений главный интерес составляет то, что у различных матриц могут быть одни и те же собственные векторы (ортогональные матрицы), что значительно сокращает вычисления. Поэтому формула (64) заслуживает внимания как критерий наличия одинаковых собственных векторов\*\*. В перестановочности матриц можно, конечно, убедиться, произведя умножение матриц и меняя порядок матриц-сомножителей. Но на это обычно тратится больше времени, чем при применении (64). Матрица  $B$  будет перестановочной с  $C$  и в том случае, когда степень матричного многочлена будет и больше, и меньше  $n$ . В этом случае также будет справедлива и формула (64). Такие матрицы будут линейно зависеть от матриц вида  $B$ .

## 7. ТРИ СЛУЧАЯ РАСПАДА ПРИ ОРТОГОНАЛЬНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ С КВАЗИДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

### I случай

Ничего не теряя в общности изложения, лишь для простоты записи предположим, что матрица  $A$  имеет четвертый порядок и что она разбита на четыре клетки, которые являются перестановочными матрицами (64).

\* См. [25]. Глава VIII.

\*\* См. примеры в пунктах 8, 9, 10.

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right\| \quad (66)$$

Если матрица  $A$  — симметричная матрица, то существуют еще дополнительные условия симметрии:

$$a_k = a_{ki}, \quad A_{21} = A'_{12} \quad (67).$$

Поскольку клетки  $A$  — перестановочные матрицы, то для каждой из них существует общая для всех клеток ортогональная матрица. Ввиду этого очень легко будет составить матрицы преобразования  $P$  и  $Q$ .

Для этого надо будет решить вековое уравнение только для одной клетки, найти собственные векторы и соответствующую ортогональную матрицу. Матрицы преобразования  $P$  и  $Q$  будут ортогональными квазидиагональными матрицами. Запишем их в обычном виде и в форме клеточных матриц.

$$P = \left\| \begin{array}{cc|cc} \omega_{11}\omega_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{12}\omega_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \omega_{11}\omega_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{12}\omega_{22} & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \Omega'_{11} & 0 \\ 0 & \Omega'_{11} \end{array} \right\|; \quad Q = \Omega = \left\| \begin{array}{cc|cc} \omega_{11}\omega_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{21}\omega_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \omega_{11}\omega_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{21}\omega_{22} & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \Omega_{11} & 0 \\ 0 & \Omega_{11} \end{array} \right\|; \quad P = Q' \quad (68)$$

Так как  $P$  и  $Q$  — квазидиагональные матрицы, то результат преобразования мы можем сразу записать, используя формулу (53):

$$PAQ = \left\| \begin{array}{cc} \Omega'_{11} & 0 \\ 0 & \Omega'_{11} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} \Omega_{11} & 0 \\ 0 & \Omega_{11} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} \Omega'_{11} A_{11} \Omega_{11} & \Omega'_{11} A_{12} \Omega_{11} \\ \Omega'_{11} A_{21} \Omega_{11} & \Omega'_{11} A_{22} \Omega_{11} \end{array} \right\| = \Omega' A \Omega^*$$

Поскольку диагональные клетки — перестановочные матрицы, то на основании (59) матрица  $PAQ$  примет форму решета, где на главной диагонали каждой клетки окажутся собственные числа (соответствующие данной клетке).

$$\Omega' A \Omega = PAQ = \left\| \begin{array}{ccc} \lambda_{11} & 0 & \lambda_{13} \\ 0 & \lambda_{22} & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & \lambda_{33} \\ 0 & \lambda_{42} & 0 \end{array} \right\|; \quad \bar{b} = P\bar{a} = \left\| \begin{array}{c} \omega_{11}a_1 + \omega_{21}a_2 \\ \omega_{12}a_1 + \omega_{22}a_2 \\ \omega_{11}a_3 + \omega_{21}a_4 \\ \omega_{12}a_3 + \omega_{22}a_4 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{array} \right\| \quad (69)$$

\* Это написано только для пояснения.



После перестановки порядка следования неизвестных и уравнений соответствующая система уравнений примет вид:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{11}y_1 + \lambda_{13}y_3 &= b_1,^* \\
 \lambda_{31}y_1 + \lambda_{33}y_3 &= b_3, \\
 \lambda_{22}y_2 + \lambda_{24}y_4 &= b_2, \\
 \lambda_{42}y_2 + \lambda_{44}y_4 &= b_4,
 \end{aligned} \tag{70}$$

Все изложенное без каких-либо ограничений обобщается на матрицы любого порядка, разбитые на любое число клеток. Так как вычисление собственных чисел для других клеток по известным собственным векторам не составляет большого труда, главная тяжесть вычислений падает на решение векового уравнения только для одной клетки. Вопрос о перестановочности клеток решается на этапе составления системы уравнений.

## II случай

В практике решения систем канонических уравнений строительной механики нередко бывает, что внедиагональные клетки являются скалярными матрицами или являются диагональными матрицами, которые можно преобразовать в скалярные матрицы. В этом случае матрица  $A$  будет иметь такой вид:

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & s_1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & s_1 \\ \hline s_2 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & s_2 & a_{43} & a_{44} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} A_{11}S_1 \\ S_2A_{22} \end{array} \right\| \tag{71}$$

Так как скалярная матрица перестановочна с любой матрицей [см. (64)], то этот случай будет отличаться от первого только внешней формой матрицы  $A$ . Все останется без изменений, как и в первом случае, только внедиагональные клетки придется просто переписать. Как уже говорилось выше, ортогональное преобразование не изменяет скалярных матриц.

\* Решение системы с матрицей в форме решета, или с переставленными строками и столбцами. По всем изложенным в пункте 2 методам решение требует одинакового числа выкладок и записей.

$$PAQ = \begin{vmatrix} \lambda_{11} 0 & s_1 & 0 \\ 0 \lambda_{22} & 0 & s_1 \\ \hline s_2 & 0 & \lambda_{33} 0 \\ 0 & s_2 & 0 \lambda_{44} \end{vmatrix}; \quad \bar{b} = P\bar{a} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix} \quad (72)$$

### III случай

Предположим, что клетка  $A_{22}$  матрицы  $A$  является диагональной матрицей, а клетки  $A_{12}$  и  $A_{21}$  имеют несколько столбцов, ортогональных к собственным векторам клетки  $A_{11}$ . В этом случае нет необходимости, чтобы порядок клеток  $A_{11}$  и  $A_{22}$  был бы одинаков. Чтобы подчеркнуть эту особенность, в качестве примера матрицы  $A$  возьмем матрицу пятого порядка:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} & a_{14} a_{15} \\ a_{21} a_{22} a_{23} & a_{24} a_{25} \\ a_{31} a_{32} a_{33} & a_{34} a_{35} \\ \hline a_{41} a_{42} a_{43} & d_{44} 0 \\ a_{51} a_{52} a_{53} & 0 \ d_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} A_{12} \\ A_{21} D_{22} \end{vmatrix} \quad (73)$$

В качестве матриц преобразования примем матрицы  $P$  и  $Q$  в таком виде:

$$P = \begin{vmatrix} \omega_{11} \omega_{21} \omega_{31} & 0 & 0 \\ \omega_{12} \omega_{22} \omega_{32} & 0 & 0 \\ \omega_{13} \omega_{23} \omega_{33} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Omega'_{11} & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix}; \quad Q = \begin{vmatrix} \omega_{11} \omega_{12} \omega_{13} & 0 & 0 \\ \omega_{21} \omega_{22} \omega_{23} & 0 & 0 \\ \omega_{31} \omega_{32} \omega_{33} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Omega_{11} & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} \quad (74)$$

Матрицы преобразования  $P$  и  $Q$  и в этом случае следует рассматривать как квазидиагональные матрицы ортогонального преобразования. Наличие единичной клетки ничего не изменяет, так как единичная матрица обладает всеми свойствами ортогональной матрицы. Полагаем, что клетка  $\Omega_{11}$  является ортогональной матрицей по отношению к клетке  $A_{11}$ . Рассмотрим внедиагональную клетку после выполнения преобразования посредством  $P$  и  $Q$  (53):

$$\Omega'_{11} A_{12} I = \begin{vmatrix} \omega_{11} \omega_{21} \omega_{31} \\ \omega_{12} \omega_{22} \omega_{32} \\ \omega_{13} \omega_{23} \omega_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$



По предположению некоторые столбцы клетки  $A_{12}$  ортогональны к некоторым собственным векторам клетки  $A_{11}$ ; поэтому при умножении  $\mathcal{Q}'_{11}$  на  $A_{12}$  часть элементов станет нулями, а некоторая часть может быть отличной от нуля. Случай, что все элементы станут нулями, не исключается.\* При последующем умножении на единичную матрицу никаких изменений не произойдет. Итак, после проведенного ортогонального преобразования во внедиагональных клетках окажется много нулей. Число нулей зависит от того, всем или не всем собственным векторам клетки  $A_{11}$  ортогональны столбцы внедиагональных клеток. При указанных матрицах  $P$  и  $Q$  клетка  $A_{11}$  преобразуется в диагональную матрицу, на диагонали которой окажутся собственные числа  $\lambda_i$ , а клетка с диагональной матрицей  $D_{22}$ , для которой преобразование сведется к умножению слева и справа на единичные матрицы, останется без изменений. Вся матрица  $A$  после преобразования примет вид неправильного решета.

$$PAQ = \left\| \begin{array}{ccc|cc} \Lambda_{11} 0 & 0 & 0 & b_{15} \\ 0 & \Lambda_{22} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{33} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & d_{33} 0 \\ b_{51} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{array} \right\| \quad (75)$$

Число единичных клеток в матрицах  $P$  и  $Q$  может быть и более одной. Рассмотренный третий случай очень часто встречается при расчете симметричных статически неопределимых конструкций с простой и сложной симметрией (см. пункт 8, 9, 10), т.е. тех конструкций, которые могут быть рассчитаны весьма популярным приемом преобразования нагрузки на прямо и кососимметрическую (говорим о простом и об обобщенном приеме).

\* Возможны самые разнообразные распределения нулей в клетках  $A_{12}$  и  $A_{21}$ . Все зависит от характера элементов клетки.

## 8. МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НАГРУЗКИ НА ПРЯМО И КОСОСИММЕТРИЧЕСКУЮ \* КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Метод преобразования нагрузки на прямо и кососимметрическую обычно воспринимается как сильный метод, возникающий почти интуитивно при каждом исследовании и по этой причине не нуждающийся в теоретическом обосновании. Такое суждение, однако, не открывает дороги для дальнейшего развития и обобщения этого метода, а иногда приводит к неверным выводам. Обычно этот метод применяют к расчету только геометрически симметричных конструкций, и поэтому возникают утверждения, что к расчету несимметричных конструкций он не применим. Однако можно в геометрически несимметричной конструкции подобрать соотношения линейных размеров и жесткостей для стержней так, что метод преобразования нагрузки будет применим без изменений. Те элементарные сведения по теории матриц, которые мы изложили для того, чтобы обогатить теоретические средства строительной механики, позволят нам показать, что метод преобразования нагрузки является частным случаем применения ортогонального преобразования. Этот более общий метод будет применим к широкому классу конструкций, для которых условие симметрии не будет являться обязательным. Мы показали выше, что любую систему уравнений можно привести к распаду. Вопрос состоит лишь в том, с какой затратой сил и времени это выполняется. А последнее целиком и полностью зависит от характера матрицы левой части системы канонических уравнений. По этой причине возможность применения метода преобразования нагрузки зависит только от характера матрицы левой части. Преобразование правой части (зависящей от нагрузок) играет только второстепенную роль. Для большей ясности дальнейшее изложение теории мы проведем на примерах. Но во избежание недоразумений подчеркнем, что примерам мы отводим главным образом иллюстративную роль. В примерах для большей

---

\* См. [2], [3], [5].



ясности будет содержаться много материала, который можно будет свободно опустить при практических вычислениях. Системы уравнений по этим же соображениям не будут содержать большого числа уравнений, для решения которых, собственно говоря, и предназначена излагаемая теория.

### Пример 1.

На вкладном листе № 1 приведен расчет симметричной рамы методом деформаций. Эту раму, как обычно бывает в практике, надо рассчитать на несколько (пять-шесть) видов нагрузки. Составляя матрицу канонических уравнений, мы приняли такой порядок записи неизвестных и уравнений, при котором одинаковые элементы, стоящие на главной диагонали, группируются попарно. Соответственно этому и была произведена разбивка матрицы на клетки. Первое, на что мы обращаем внимание, это то, что все диагональные клетки являются перестановочными матрицами. Приняв во внимание (64) и приняв простейшее, что

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$

мы замечаем, что все диагональные клетки матрицы  $A$  могут быть получены из  $C$  и единичной матрицы  $I$  путем умножения на нижеследующие множители:

$$A_{11} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 32 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; A_{22} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 48 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; A_{33} = 8 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 40 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$A_{44} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 24 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; A_{55} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, все диагональные клетки  $A$  будут перестановочными матрицами и будут иметь одинаковые собственные векторы и одинаковые ортогональные матрицы. По формуле (65) определятся сразу и собственные числа.

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1; \lambda_c = \pm 1. \lambda_{11} = 32, 32;$$

$$\lambda_{22} = 8 \cdot (\pm 1) + 48 = 56, 40; \lambda_{33} = 8 \cdot (\pm 1) + 40 = 48, 32;$$

$$\lambda_{44} = 24, 24; \lambda_{55} = 6, 6.$$

Далее замечаем, что клетки  $A_{12}, A_{13}, A_{23}, A_{34}$  и симметрично им расположенные клетки  $A_{21}, A_{31}, A_{32}, A_{43}$  будут скалярными матрицами (61), и, следовательно, они будут инвариантными при ортогональном преобразовании (62). Поскольку матрицы  $A_{11}, A_{44}, A_{55}$  являются вырожденными, вторая компонента их собственных векторов может быть взята произвольно. Чтобы не было этой неопределенности, рассмотрим не вырожденные клетки  $A_{22}, A_{33}$ . Подставляя сюда уже ранее вычисленные для них собственные числа 56, 40, 48, 32 и полагая  $x_2 = 1$  (одна компонента собственного вектора всегда может быть взята произвольно), получим для первой компоненты значение  $x_1 = 1$  и  $x_1 = -1$ . Матрица собственных векторов для всех диагональных клеток  $A$  получится такой:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Нормируя к единице, получим соответствующую ортогональную матрицу:

$$\Omega_{11} = \Omega_{22} = \Omega_{33} = \Omega_{44} = \Omega_{55} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

Просматривая клетки  $A_{15}, A_{25}, A_{35}, A_{45}$ , замечаем, что их строки (столбцы) ортогональны к строкам и столбцам матрицы собственных векторов. Мы встретились здесь с третьим случаем, при котором возникает распад системы уравнений (п. 7). Но одновременно для клеток  $A_{15}, A_{25}$  удовлетворяются и условия первого случая (п. 7). Соответственно третьему случаю, для клетки  $\Omega_{55}$  квазидиагональной ортогональной матрицы преобразования мы выбрали единичную матрицу. В данном примере эту клетку можно было выбрать такой же, как и остальные. На вкладном листе № 1 приведены матрицы преобразования  $\Omega', \Omega$  и матрица  $S = \Omega' A Q$ , полученная в результате проведенного преобразования. Матрица  $S$  в результате ортогонального преобразования при симметричной  $A$  всегда будет получаться симметричной. Матрица  $S$  получена нами в форме решета. Ее можно переписать в явной квазидиагональной форме, что и выполнено на вкладном листе № 2. Как мы уже говорили выше, распавшаяся







Пример I. Расчет симметричной рамы  
на симметричную и несимметричную нагрузки

Ω' ASD										Σ	1случ 2случ		BЭ										1случ симм нагр		2случ несимм нагр				
1	2	5	6	7	8	3	4	9	10		1	2	1	2	5	6	7	8	3	4	9	10	Σ	M <sup>2</sup>	M <sub>1</sub>	Σ	M <sup>2</sup>	M <sub>2</sub>	
1	32,000	4,000	4,000							44,000	42,426	M <sub>0-1</sub>	2,828							2,828	-3,000	1	-0,297	-0,241	1	0,042	-2,857	-2,775	
2	8,000	40,000		4,000						52,000	42,426	M <sub>1-0</sub>	5,657							5,657	-3,000	2	1,137	-1,633	2	-0,005	2,667	2,198	
5	4,000		34,000	8,000						36,000	-1,886	M <sub>1-1</sub>	11,314	3,657					5,657		3,066	5	0,108	3,066	5	-0,088		6,137	
6		4,000	4,000	32,000						44,000		M <sub>2-1</sub>	5,657	11,314					11,314	5,657	6	-0,169	11,101	6	0,023			4,804	
7					40,000	8,000	4,000			42,426	55,757	M <sub>2-4</sub>		5,657					5,657	-3,000	7		6,432	7	0,083			-6,192	
8						8,000	24,000	4,000		42,426	31,757	M <sub>2-3</sub>		5,657					16,971		8		3,215	8	0,035			-6,771	
3							4,000	56,000	8,000	-4,243	4,243	M <sub>1-5</sub>	9,657	2,828				4,828	5,657	-3,000	4		-1,334	4	0,427	-2,667	-3,935		
4								4,000	8,000	32,000	-4,243	M <sub>5-1</sub>	2,828	5,657				2,828	5,657	-3,000	9		-0,243	9	2,450	2,667	0,007		
9									4,243	4,243	6,000	M <sub>1-8</sub>		5,657	2,828				5,657	-3,000	10		-3,955	10	1,200			-2,743	
10									-4,243	-4,243	6,000	M <sub>8-1</sub>		5,657	11,314	11,314	5,657				-3,000			4,169				-2,424	
L										G										Σ		1случ 2случ		нагр нагр					
1	32,000	4,000	4,000							44,000	42,426	M <sub>0-2</sub>			5,657	16,971													1,553
2	8,000	40,000		4,000						52,000	42,426	M <sub>2-5</sub>			5,657	16,971													1,277
5	4,000		34,000	8,000						36,000	-1,886	M <sub>2-3</sub>			5,657	16,971													1,352
6		4,000	4,000	32,000						44,000		M <sub>3-7</sub>			5,657	16,971													1,362
7					40,000	8,000	4,000			42,426	55,757	M <sub>3-2</sub>			5,657	16,971													1,309
8						8,000	24,000	4,000		42,426	31,757	M <sub>3-7</sub>			5,657	16,971													1,309
3							4,000	56,000	8,000	-4,243	4,243	M <sub>3-10</sub>			5,657	16,971													1,309
4								4,000	8,000	32,000	-4,243	M <sub>3-4</sub>			5,657	16,971													1,309
9									4,243	4,243	6,000	M <sub>3-9</sub>			5,657	16,971													1,309
10									-4,243	-4,243	6,000	M <sub>3-4</sub>			5,657	16,971													1,309

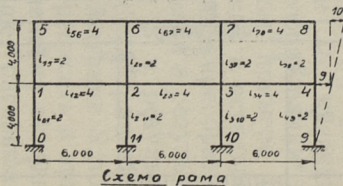
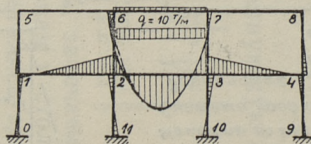
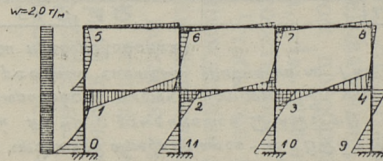


Схема рамы



1случ. Симметричная нагрузка



2случ. Несимметричная нагрузка

- Примечание:
- 1 Три решения системы уравнений удерживалось пять знаков после запятой для сокращения места в таблице и вписывалось три знака с соответствующим округлением
  - 2 Ordнаты эпор вычислялись с тремя знаками
  3. Защитривованные клеткн не участвуют в вычислениях
  - 4 Данные для примера взяты из книги И. П. Прокофьев, "Теория сооружений" ч. II, 1940 стр. 238 и след.



система уравнений с матрицей в форме решета или (безразлично) в форме квазидиагональной матрицы решается по ГМ-методу с одинаковым числом выкладок. По этой причине распавшуюся матрицу обычно переписывать не требуется. А если ставится цель — получить минимум записей, то следует удовлетвориться формой решета. После изучения теории и приобретения навыков в ее использовании нет надобности в выписывании матриц  $\Omega'$  и  $\Omega$ . Элементы матрицы  $S$  выписываются сразу.

Правая часть преобразуется умножением  $\bar{a}$  слева на матрицу  $\Omega'$ . В примере симметричная нагрузка принята в первом случае нагрузок. Здесь решается только одна система с четырьмя неизвестными. Несимметричная нагрузка фигурирует во втором случае нагрузок. Здесь необходимо решить порознь системы уравнений с четырьмя и шестью неизвестными. Особенность ГМ-метода, как известно, состоит в том, что преобразование левой части не зависит от преобразования правой части и что большая часть работы падает на преобразование левой части. Все эти особенности, снижающие трудоемкость вычислений, сохраняются и в данном случае.

Решая систему уравнений с матрицей  $S$ , мы получаем значения неизвестных  $\bar{y}$ . Значения неизвестных  $\bar{x}$  определяются по формуле (22) или (60):

$$\bar{x} = Q\bar{y} = \Omega\bar{y} \quad (76)$$

Главной задачей при расчете рам является построение эпюр изгибающих моментов. Покажем, что для решения этой задачи нет надобности переходить от неизвестных  $\bar{y}$  к неизвестным  $\bar{x}$  и что можно ограничиться вычислением только неизвестных  $\bar{y}$ . В работах\* было показано, что вычисление изгибающих моментов на концах стержней, составляющих раму, определяется матричной формулой:

$$\bar{M} = B\bar{x} + \bar{M}^0, \quad (77)$$

где через  $\bar{M}$  обозначена вся совокупность (вектор) изгибающих моментов на концах стержней,  $B$ -матрица перехода от неизвестных  $\bar{x}$  к указанным моментам,  $M^0$ -вектор

\* См. [6], [7], [11], [13], [14].

изгибающих моментов в основной системе. Формула (77) после подстановки в нее (76) примет такой вид:

$$\bar{M} = B\Omega\bar{y} + \bar{M}^0, \quad (78),$$

откуда следует, что, вместо вычисления  $\bar{x}$  по (76), можно вычислить матрицу  $B\Omega$  и затем определять значение изгибающих моментов по неизвестным  $\bar{y}$ , минуя вычисление  $\bar{x}$  по (76). Такое решение целесообразно проводить при очень большом числе правых частей. На вкладном листе № 2 проведено вычисление моментов по указанному варианту. Там помещена матрица  $B\Omega$ , по которой непосредственно по неизвестным  $\bar{y}$  вычислены изгибающие моменты на концах стержней, составляющих раму. Не будем останавливаться на вопросах детального сопоставления изложенного метода с общеизвестным методом преобразования нагрузки на прямо- и кососимметрическую. Эта связь чрезвычайно прозрачна и поэтому ее легко установить. Заметим лишь, что в клетке ортогонального преобразования как при не нормированных собственных векторах

$$\Omega_{ii} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$

так и при нормированных собственных векторах

$$\Omega_{ii} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

первый вектор соответствует симметричной нагрузке, второй — кососимметричной нагрузке. В изложенном методе все вычислительные процессы проходят автоматически. По этой причине его целесообразно применять при большом числе правых частей. В отличие от общепринятого варианта изложенный метод всегда дает симметричную распавшуюся матрицу и поэтому никогда не приходится прибегать ни к каким приемам симметризации.



«Ключ»  
для определения реакций и опорных моментов  
четырёхпролетной свободно опертой неразрезной балки

Владной лист №3.  
Нарец Л.К.

Составлен инж. У. Нигуль

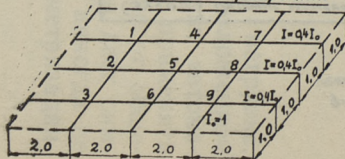
Случай загрузки	Опорные моменты и реакции от распределенных нагрузок					Опорные моменты и реакции от единичных смещений					
Обозначения											
Множитель	$q_1 l^2$	$q_2 l^2$	$q_3 l^2$	$q_4 l^2$	$q l^2$	$\frac{EJ}{l^2}$	$\frac{EJ}{l^2}$	$\frac{EJ}{l^2}$	$\frac{EJ}{l^2}$	$\frac{EJ}{l^2}$	
Опорные моменты	$M_0 - M_1$	0,06697	0,04910	-0,01340	0,00446	0,10715	-1,60714	3,64287	-2,57143	0,64287	-0,10714
	$M_2 - M_3$	-0,01786	0,05358	0,05358	-0,01786	0,07144	0,42857	-2,57144	4,28571	-2,57144	0,42857
	$M_4 - M_5$	0,00447	-0,01340	0,04911	0,06697	0,10715	-0,10714	0,64287	-2,57143	3,64287	-1,60714
Множитель	$q_1 l$	$q_2 l$	$q_3 l$	$q_4 l$	$q l$	$\frac{EJ}{l^3}$	$\frac{EJ}{l^3}$	$\frac{EJ}{l^3}$	$\frac{EJ}{l^3}$	$\frac{EJ}{l^3}$	
Опорные реакции	$A_0$	0,43305	-0,04911	0,01340	-0,00447	0,39287	1,60714	-3,64287	2,57143	-0,64287	0,10714
	$A_1$	0,65179	0,54461	-0,08032	0,02679	1,14287	-3,64286	9,85716	-9,42858	3,85716	-0,64286
	$A_2$	-0,10716	0,57144	0,57144	-0,10716	0,92856	2,57143	-9,42858	13,71428	-9,42858	2,57143
	$A_3$	0,02679	-0,08032	0,54461	0,65179	1,14287	-0,64286	3,85716	-9,42858	9,85716	-3,64286
	$A_4$	-0,00447	0,01340	-0,04911	0,43305	0,39287	0,10714	-0,64287	2,57143	-3,64287	1,60714

Преобразование с квазидиagonalной матрицей Случай симметрии перекрытия относительно двух осей

A										S = Ω <sup>1</sup> AΩ (Решето)										
	1	7	3	9	2	8	4	6	5		1	7	3	9	2	8	4	6	5	
1	10,35002	0,19286	3,85716	/	-9,42858	/	-0,47143	/	/	1	6,30000	/	/	/	/	/	/	/	/	/
7	0,19286	10,35002	/	3,85716	/	-9,42858	-0,47143	/	/	7	/	6,68572	/	/	/	/	/	-0,66670	/	/
3	3,85716	/	10,35002	0,19286	-9,42858	/	/	/	/	3	/	/	14,01432	/	/	/	/	/	/	/
9	/	3,85716	0,19286	10,35002	/	-9,42858	/	-0,47143	/	9	/	/	/	14,40004	-13,33403	/	/	/	-0,66670	/
2	-9,42858	/	-9,42858	/	14,20714	0,19286	/	/	-0,47143	2	/	/	/	-13,33403	14,01428	/	/	/	/	/
8	/	-9,42858	/	-9,42858	0,19286	14,20714	/	/	-0,47143	8	/	/	/	/	-13,33403	14,40000	/	/	/	-0,66670
4	-0,47143	-0,47143	/	/	/	/	10,54287	3,85716	-9,42858	4	/	-0,66670	/	/	/	/	/	6,68571	/	/
6	/	/	-0,47143	-0,47143	/	/	3,85716	10,54287	-9,42858	6	/	/	/	/	-0,66670	/	/	/	14,40003	-13,33403
5	/	/	/	/	-0,47143	-0,47143	-9,42858	-9,42858	14,39999	5	/	/	/	/	/	-0,66670	/	/	-13,33403	14,39999

Ω <sup>1</sup>										Ω										
	1	7	3	9	2	8	4	6	5		1	7	3	9	2	8	4	6	5	
1	1/2	-1/2	-1/2	1/2	/	/	/	/	/	1	1/2	1/2	1/2	1/2	/	/	/	/	/	/
7	1/2	1/2	-1/2	-1/2	/	/	/	/	/	7	-1/2	1/2	-1/2	1/2	/	/	/	/	/	/
3	1/2	-1/2	1/2	-1/2	/	/	/	/	/	3	-1/2	-1/2	1/2	1/2	/	/	/	/	/	/
9	1/2	1/2	1/2	1/2	/	/	/	/	/	9	1/2	-1/2	-1/2	1/2	/	/	/	/	/	/
2	/	/	/	/	1/√2	-1/√2	/	/	/	2	/	/	/	/	1/√2	1/√2	/	/	/	/
8	/	/	/	/	1/√2	1/√2	/	/	/	8	/	/	/	/	-1/√2	1/√2	/	/	/	/
4	/	/	/	/	/	/	1/√2	-1/√2	/	4	/	/	/	/	/	/	1/√2	1/√2	/	/
6	/	/	/	/	/	/	1/√2	1/√2	/	6	/	/	/	/	/	/	-1/√2	1/√2	/	/
5	/	/	/	/	/	/	/	/	1	5	/	/	/	/	/	/	/	/	/	1

Схема перекрытия



Значения жесткостей

$$i_1 = \frac{I}{L} = 1,00000 ; \quad \frac{i_1}{L^2} = 1,00000 ;$$

$$i_2 = \frac{I}{L} = 0,20000 ; \quad \frac{i_2}{L^2} = 0,05000 .$$

Ω <sup>1</sup> A <sub>12</sub>					Квазидиagonalная матрица Ω <sup>1</sup> AΩ в явном виде										
	1	2	8	4	6		1	2	3	4	7	6	8	9	5
1	/	/	/	/	/	1	6,30000	/	/	/	/	/	/	/	/
7	/	/	/	-0,47143	0,47143	7	/	14,01428	-13,33403	/	/	/	/	/	/
3	-9,42858	-9,42858	/	/	/	3	/	/	-13,33403	14,01432	/	/	/	/	/
9	-9,42858	-9,42858	-0,47143	-0,47143	/	9	/	/	/	/	6,68571	-0,66670	/	/	/
2	/	/	/	/	/	2	/	/	/	/	-0,66670	6,68572	/	/	/
8	/	/	/	/	/	8	/	/	/	/	/	/	14,40003	-0,66670	-13,33403
4	/	/	/	/	-0,66670	4	/	/	/	/	/	/	-0,66670	-13,33403	14,40004
6	/	/	/	/	-0,66670	6	/	/	/	/	/	/	-0,66670	-13,33403	14,40004
5	/	/	/	/	-13,33403	5	/	/	/	/	/	/	-13,33403	-0,66670	14,39999



## 9. РАСПАД СИСТЕМЫ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ДЕФОРМАЦИЙ \* ДЛЯ СЕТЧАТЫХ КОНСТРУКЦИЙ, ОБЛАДАЮЩИХ ДВУМЯ ОСЯМИ СИММЕТРИИ.

Мы рассмотрим основной тип сетчатых конструкций — систему перекрестных балок. Другие сетчатые конструкции — системы неразрезных балок, опирающиеся на однотипные рамы, на арки и другие упругие опоры — будут рассчитываться аналогично. Для сетчатых конструкций удобно применить обобщенный метод деформаций, введя в основную систему, вместо балок с защемленными концами, систему неразрезных балок на шарнирных жестких опорах. Для таких балок заблаговременно можно составить вспомогательные таблицы (назовем их для краткости «ключами»), в которых помещены опорные изгибающие моменты, реакции, возникающие при единичном смещении опор, а также опорные изгибающие моменты и реакции опор от внешних нагрузок. Пример такого ключа помещен на вкладном листе № 3. Крутящими моментами при расчете сетчатых конструкций обыкновенно пренебрегают\*\*, так как их влияние обычно весьма невелико. При наличии указанных ключей и при пренебрежении крутящими моментами обобщенный метод деформаций, по сравнению с обычным методом деформаций, сокращает число неизвестных в три раза, что убедительно доказывает его преимущества. За неимением места не будем останавливаться на весьма интересном вопросе, что обобщенный метод деформаций, обобщенный метод сил, метод групповых неизвестных и некоторые другие методы являются также методами, ведущими к распаду систем канонических уравнений, и подчинены изложенной выше теории.

### Пример 2.

На вкладном листе № 4 приведены схемы перекрытия и исходная матрица  $A$ , составленная по ключу вкладного листа № 3. Каждое каноническое уравнение составлено из условия, что в наложенной против вертикального

\* См. [4], [5].

\*\* См. [4], [11], [13], [12].

смещения узла связи реактивное усилие от всех смещений и внешних сил равно нулю. Система уравнений составлена так, что реакции от смещений симметрично расположенных узлов 1, 7, 9, 3 сгруппированы в клетке  $a_{11}$ . Реакции следующих симметрично расположенных узлов 2, 4, 8, 6, 5 сгруппированы в клетке  $A_{11}$ . Реакция центрального узла 5 образует клетку, состоящую из одного элемента. Рассматриваемое перекрытие симметрично относительно двух осей. Поэтому для определения собственных векторов и собственных чисел мы можем использовать соображения, основанные на симметрии конструкции, и не производить раскрытие векового определителя, вычисление собственных чисел и векторов общими математическими методами. Так как элементы клетки  $A_{11}$  связаны только с перемещениями узлов 1, 7, 9, 3, то рассматривая возможные перемещения этих узлов, мы должны считать, что узлы 2, 4, 8, 6, 5 неподвижны (на них наложены связи). Для ортогональной матрицы  $\Omega_{11}$ , соответствующей  $A_{11}$ , в силу симметрии перекрытия относительно двух осей можно сразу указать, какими должны быть столбцы. По величине компоненты столбцов должны быть одинаковыми, а знаки должны быть подобраны так, чтобы столбцы между собой были ортогональны. Внизу слева на вкладном листе № 5 показаны векторы возможных перемещений. Эти векторы выбраны по принципу, очень близкому к тому, что и в методе преобразования нагрузки на прямо и кососимметричную: мы наперед устанавливаем значение неизвестных. Но здесь мы имеем дело с симметрией относительно двух осей. После нормирования ортогональная клетка  $\Omega_{11}$  примет тот вид, который приведен в матрицах  $\Omega'$ ,  $\Omega$  ортогонального преобразования (вкл. л. № 4). Клетка  $A_{22}$  является распавшейся (вырожденной) матрицей. По этой причине соответствующую ортогональную матрицу мы выбрали также вырожденной, подобно тому, как то было у нас в примере 1. Но в силу того, что клетка  $A_{22}$  — вырожденная, соответствующую ортогональную матрицу можно было бы выбрать такой же, как и у  $A_{11}$ , т. е. принять, что  $\Omega_{22} = \Omega_{11}$ . Рассматривая клетку  $A_{12}$ , мы заметим, что столбцы этой клетки будут ортогональны к собственным векторам клеток  $A_{11}$  и  $A_{22}$ , поэтому при ортогональном преобразовании там возникнет много нулей (пункт 7, случай 3). Преобра-



зование клетки выполняется по формуле (54) (см. вкладной лист № 4 матрицы  $\Omega'_{11} A_{12}$  и  $\Omega'_{11} A_{12} \Omega_{22}$ ). На том же вкладном листе приведена преобразованная матрица  $S = \Omega' A \Omega$ , вверху справа записанная в виде «решета», внизу — в явной квазидиагональной форме. Система уравнений после ортогонального преобразования распалась на независимые группы: с одним неизвестным, две системы уравнений с двумя неизвестными и одна система уравнений с четырьмя неизвестными. Последняя система уравнений по пункту 7 (случай 3) еще может распаться на две системы уравнений с двумя неизвестными в каждой. В самом деле: диагональные субклетки  $S_{44}$  (квазидиагональной матрицы) являются вырожденными матрицами. Поэтому компоненты их собственных векторов могут быть выбраны любым образом, например, так, чтобы соответствующие собственные векторы были бы ортогональны к столбцам внедиагональных субклеток ( $S_{44}$ ). Условия третьего случая удовлетворены. Очевидно, существуют еще и какие-то другие матрицы  $P$  и  $Q$ , близкие к  $\Omega'$  и  $\Omega$ , которые сразу преобразовывали бы систему уравнений с матрицей  $A$  к четырем системам уравнений с двумя неизвестными и к одному уравнению с одним неизвестным\*. На вкладном листе № 5 для примера проведено решение распавшейся системы уравнений с матрицей в форме решета.

## 10. РАСПАД СИСТЕМЫ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ДЕФОРМАЦИЙ В СЛУЧАЕ НЕСИММЕТРИЧНЫХ СЕТЧАТЫХ КОНСТРУКЦИЙ

И. Г. Бубнов для расчета судовых перекрытий\*\* (типа перекрестных балок) предложил метод, сводящий расчет таких перекрытий к решению системы дифференциальных уравнений четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Для разделения системы дифференциальных

\* Проблема распада в общем виде в этой работе ставится впервые. Целеустремленных теорем, направленных на решение этой проблемы, не имеется ни в математике, ни в строительной механике. Поэтому в первой работе, посвященной этой проблеме, нельзя дать вполне законченное решение.

\*\* См. [1].

уравнений И. Г. Бубнов применил метод преобразования к главным осям (преобразование к собственным функциям, или к «главным изгибам» по терминологии П. Ф. Папковича).

Существуют глубокие и далеко идущие аналогии в решении систем линейных дифференциальных уравнений и в решении систем линейных алгебраических уравнений. Собственным функциям в аналитической задаче соответствуют собственные векторы в задаче алгебраической. Поскольку И. Г. Бубнов первым в строительной механике применил собственные функции при решении статической задачи, нижеследующий метод, ведущий к распаду систем алгебраических уравнений, будем называть методом И. Г. Бубнова. В алгебраическом варианте метода И. Г. Бубнова число ограничений, накладываемых на конструкцию перекрытия, меньше, чем в первоначальном аналитическом варианте. Необходимые рассуждения мы проведем в предположении, что применяется метод деформаций. Все рассуждения с незначительными изменениями можно повторить и в том случае, когда применяется метод сил и за неизвестные приняты силы взаимодействия балок одного и другого направления. Изложение метода проведем на примере расчета перекрытия, изображенного на вкладном листе № 6.

### Пример 3

На вкладном листе № 6 элементы матрицы  $A$  написаны в общем виде. Буквой  $\alpha$  обозначены реакции при изгибе перекрестных связей (прогонов, стрингеров) и буквой  $a$  обозначены те же реакции, но возникающие от изгиба балок главного направления (перекрестные балки). При составлении матрицы предполагаем, что все балки главного направления имеют одинаковое закрепление концов (это ограничение можно снять) и одинаковый момент инерции  $I_0$ . Относительно прогонов предполагаем, что они имеют одинаковые закрепления на опорах (это ограничение тоже можно снять) и что моменты инерции их различны. Расстояния между балками обоих направлений могут быть любыми (наличие различных расстояний потребует только составления соответствующих ключей).



$\Omega^* A \Omega$										$\Sigma$	$\Omega^*$ в Прав. части	
1	7	3	9	2	8	4	6	5	1случ		2случ	
1	6,30000									6,30000	0,50000	
7		6,68572								6,01902	0,50000	
3			14,01432							0,68029	0,50000	
9				14,40004						0,39931	0,50000	2,00000
2					14,01428					0,68025		
8						14,40000				0,39927		4,41421
4							6,68571			6,01901		
6								14,40003	-13,33403	0,39930		1,41421
5									14,39999	0,39926		1,00000

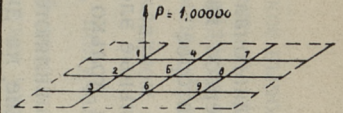
  

L										B		$\Sigma$	$\Omega^* b$	
1	7	3	9	2	8	4	6	5	1случ	2случ	1случ		2случ	
1	6,30000									6,30000	0,50000			
7		6,68572								6,01902	0,50000			
3			14,01432							0,68029	0,50000			
9				14,40004						0,39931	0,50000	2,00000		
2					19,2748					1,32748	0,47573			
8						1,05309				0,76905	0,46298	3,26615		
4							6,61923			6,61923	0,04986			
6								14,18353	-13,53450	0,64903	0,16236	2,48891		
5									12,6833	1,26833	0,30529	4,43563		

$\bar{x} = \Omega \bar{u}$	
1случ	2случ
1	0,46280
7	0,00686
3	0,30796
9	0,01068
2	0,51939
8	0,01258
4	0,17563
6	0,16518
5	0,2070

$\bar{u}$	
1случ	2случ
1	0,07936
7	0,07554
3	0,37665
9	0,39418
2	0,85837
8	0,37616
4	0,00753
6	0,24113
5	0,24070



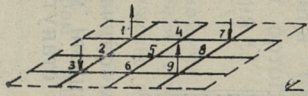
1случай нагрузки



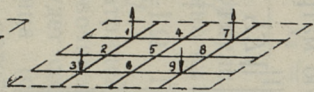
2случай нагрузки

Примечание: Заштригованные клетки не участвуют в вычислениях

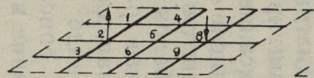
Главные формы перемещений и реакций выделенных симметрических узлов.



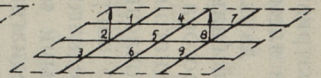
1 форма  $\lambda_1 = 6,30000$



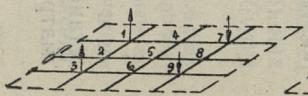
2 форма  $\lambda_2 = 6,68572$



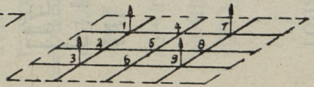
1 форма  $\lambda_1 = 14,01428$



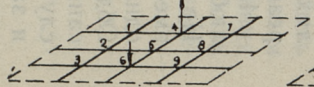
2 форма  $\lambda_2 = 14,40000$



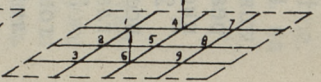
3 форма  $\lambda_3 = 14,01432$



4 форма  $\lambda_4 = 14,40004$



1 форма  $\lambda_1 = 6,68571$



2 форма  $\lambda_2 = 14,40003$





тическое выполнение этого преобразования очень простое. Элемент  $a_{ik}$  преобразуемой матрицы  $A$  надо умножить на произведение элементов  $d_{ii}$  и  $d_{kk}$  диагональной матрицы. В этом преобразовании надо вычислять квадратные корни\*.

На вкладном листе № 6 приведена матрица  $[\frac{1}{Ei}] A [\frac{1}{\sqrt{Ei}}]$ , получающаяся в результате преобразования с указанной диагональной матрицей. Полученная матрица уже полностью удовлетворяет условиям пункта 7 (первый и второй случай) и, следовательно, эта матрица может быть приведена к форме решета последующим ортогональным преобразованием с матрицами  $\Omega'$  и  $\Omega$ . Для определения собственных чисел и векторов достаточно будет решить в данном примере только одну вековую систему уравнений третьего порядка:

$$\begin{aligned} \frac{a_{11} I_0}{l^3 I_1} x_1 + \frac{a_{12} I_0}{l^3 \sqrt{I_1 I_2}} x_2 + \frac{a_{13} I_0}{l^3 \sqrt{I_1 I_3}} x_3 &= \mu x_1, \\ \frac{a_{21} I_0}{l^3 \sqrt{I_1 I_2}} x_1 + \frac{a_{22} I_0}{l^3 I_2} x_2 + \frac{a_{23} I_0}{l^3 \sqrt{I_2 I_3}} x_3 &= \mu x_2, \\ \frac{a_{31} I_0}{l^3 \sqrt{I_1 I_3}} x_1 + \frac{a_{32} I_0}{l^3 \sqrt{I_2 I_3}} x_2 + \frac{a_{33} I_0}{l^3 I_3} x_3 &= \mu x_3. \end{aligned}$$

Определив  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ , находим по формуле (65) собственные числа клеток  $A_{ii}$ , что и выполнено на вкладном листе № 6 в матрице  $S = \Omega' [\frac{1}{\sqrt{Ei}}] A [\frac{1}{\sqrt{Ei}}] \Omega$ . Поскольку после преобразования с диагональной матрицей все диагональные клетки становятся перестановочными матрицами, то всем диагональным клеткам будет соответствовать только одна ортогональная матрица (см. конец пункта 6). Таким образом, все клетки ортогональных квазидиагональных матриц преобразования  $\Omega'$  и  $\Omega$  будут

\* Квадратные корни извлекаются на арифмометре с большой быстротой методом последовательных приближений. Имея приближенно  $\sqrt{N} \simeq x_i$ ;  $i = 0, 1, 2 \dots$  лучшее приближение получаем по формуле  $x_{i+1} = 0,5 (\frac{N}{x_i} + x_i)$  Даже при очень грубо намеченном  $x_0$  хорошая точность достигается при втором приближении. См. [20], [28].

одинаковыми. Учитывая, что в начале мы применили преобразование с диагональной матрицей (куда входили жесткости прогонов), оба повторных преобразования мы можем объединить в одно, с матрицами преобразования

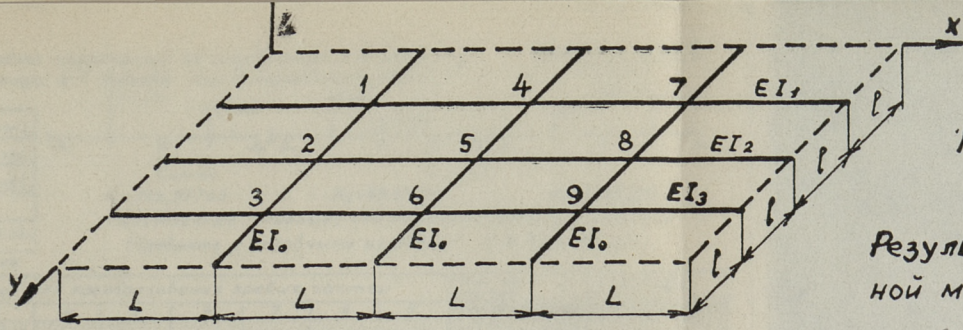
$$P = \Omega' [d], \quad Q = [d] \Omega$$

Счастливым обстоятельством приведенного метода является то, что для получения матрицы  $S = PAQ$  не придется вовсе производить указанные умножения матриц, так как результат такого умножения уже заранее известен (см. вкладной лист № 6 матрицу  $S = PAQ = \Omega' \left[ \frac{1}{\sqrt{EI}} \right]$

$A \left[ \frac{1}{\sqrt{EI}} \right] \Omega$ . Поэтому внедиагональные клетки заполняются непосредственно по коэффициентам ключей, диагональные элементы вычисляются суммированием ранее вычисленных чисел  $\mu_i$  с соответствующими вторыми членами, также получаемыми по ключам. Таким образом, матрица  $S = PAQ$  в форме решета после вычисления собственных чисел и векторов одной клетки может быть сейчас же записана (см. вкладной лист № 7, матрицу  $S$  внизу).

Сейчас мы можем снять то наложенное выше ограничение, что балки главного направления должны обладать одинаковой жесткостью. Продумывая матрицу  $\left[ \frac{1}{\sqrt{EI}} \right] A \left[ \frac{1}{\sqrt{EI}} \right]$  (вк. л. № 6) и (64) убеждаемся, что при различных жесткостях балок главного направления диагональные клетки останутся коммутативными (переместительными — пункт 6), а потому и в этом случае у всех диагональных клеток будут одни и те же собственные векторы и ортогональные матрицы. Изменяются только собственные числа. Если жесткость всех балок главного направления одинакова, то на одинаковых местах в клетках главной диагонали будут стоять одинаковые собственные числа  $\mu_i$ , при различных жесткостях собственные числа  $\mu_i$ , вычисленные для одной избранной балки главного направления, для других балок (клеток) должны быть умножены на соответствующее соотношение жесткостей. Для получения окончательных значений диагональных элементов  $S$  к вычисленным собственным числам надо прибавить второй член, содержащий реактивный коэффициент прогона (стрингера). Можно также





Матрица обобщенного метода деформаций при расчете перекрытий.

Результаты преобразования посредством диагональной матрицы и квазидиагональной ортогональной матрицы.

**A** (Матрица соотв. обобщенному методу деформаций)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$a_{11} \frac{EI_0}{L^3} + \alpha_{11} \frac{EI_1}{L^3}$	$a_{12} \frac{EI_0}{L^3}$	$a_{13} \frac{EI_0}{L^3}$	$\alpha_{12} \frac{EI_1}{L^3}$			$\alpha_{13} \frac{EI_1}{L^3}$		
2	$a_{21} \frac{EI_0}{L^3}$	$a_{22} \frac{EI_0}{L^3} + \alpha_{22} \frac{EI_2}{L^3}$	$a_{23} \frac{EI_0}{L^3}$		$\alpha_{22} \frac{EI_2}{L^3}$			$\alpha_{23} \frac{EI_2}{L^3}$	
3	$a_{31} \frac{EI_0}{L^3}$	$a_{32} \frac{EI_0}{L^3}$	$a_{33} \frac{EI_0}{L^3} + \alpha_{33} \frac{EI_3}{L^3}$			$\alpha_{33} \frac{EI_3}{L^3}$			$\alpha_{33} \frac{EI_3}{L^3}$
4	$\alpha_{21} \frac{EI_1}{L^3}$			$a_{44} \frac{EI_0}{L^3} + \alpha_{44} \frac{EI_1}{L^3}$	$a_{42} \frac{EI_0}{L^3}$	$a_{43} \frac{EI_0}{L^3}$	$\alpha_{43} \frac{EI_1}{L^3}$		
5		$\alpha_{21} \frac{EI_2}{L^3}$		$a_{21} \frac{EI_0}{L^3}$	$a_{22} \frac{EI_0}{L^3} + \alpha_{22} \frac{EI_2}{L^3}$	$a_{23} \frac{EI_0}{L^3}$		$\alpha_{23} \frac{EI_2}{L^3}$	
6			$\alpha_{21} \frac{EI_3}{L^3}$	$a_{31} \frac{EI_0}{L^3}$	$a_{32} \frac{EI_0}{L^3}$	$a_{33} \frac{EI_0}{L^3} + \alpha_{33} \frac{EI_3}{L^3}$			$\alpha_{23} \frac{EI_3}{L^3}$
7	$\alpha_{31} \frac{EI_1}{L^3}$			$\alpha_{32} \frac{EI_1}{L^3}$			$a_{77} \frac{EI_0}{L^3} + \alpha_{77} \frac{EI_1}{L^3}$	$a_{72} \frac{EI_0}{L^3}$	$a_{73} \frac{EI_0}{L^3}$
8		$\alpha_{31} \frac{EI_2}{L^3}$			$\alpha_{32} \frac{EI_2}{L^3}$		$a_{21} \frac{EI_0}{L^3}$	$a_{22} \frac{EI_0}{L^3} + \alpha_{22} \frac{EI_2}{L^3}$	$a_{23} \frac{EI_0}{L^3}$
9			$\alpha_{31} \frac{EI_3}{L^3}$			$\alpha_{32} \frac{EI_3}{L^3}$	$a_{31} \frac{EI_0}{L^3}$	$a_{32} \frac{EI_0}{L^3}$	$a_{33} \frac{EI_0}{L^3} + \alpha_{33} \frac{EI_3}{L^3}$

$\left[ \frac{1}{\sqrt{EI_{ij}}} \right] A \left[ \frac{1}{\sqrt{EI_{ij}}} \right]$  Результат преобразования с диагональной матрицей.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$\frac{a_{11} I_0}{L^3 I_1} + \frac{\alpha_{11}}{L^3}$	$\frac{a_{12} I_0}{L^3 \sqrt{I_1 I_2}}$	$\frac{a_{13} I_0}{L^3 \sqrt{I_1 I_3}}$	$\frac{\alpha_{12}}{L^3}$			$\frac{\alpha_{13}}{L^3}$		
2	$\frac{a_{21} I_0}{L^3 \sqrt{I_1 I_2}}$	$\frac{a_{22} I_0}{L^3 I_2} + \frac{\alpha_{22}}{L^3}$	$\frac{a_{23} I_0}{L^3 \sqrt{I_2 I_3}}$		$\frac{\alpha_{22}}{L^3}$			$\frac{\alpha_{23}}{L^3}$	
3	$\frac{a_{31} I_0}{L^3 \sqrt{I_1 I_3}}$	$\frac{a_{32} I_0}{L^3 \sqrt{I_2 I_3}}$	$\frac{a_{33} I_0}{L^3 I_3} + \frac{\alpha_{33}}{L^3}$			$\frac{\alpha_{33}}{L^3}$			$\frac{\alpha_{33}}{L^3}$
4	$\frac{\alpha_{21}}{L^3}$			$\frac{a_{44} I_0}{L^3 I_1} + \frac{\alpha_{44}}{L^3}$	$\frac{a_{42} I_0}{L^3 \sqrt{I_1 I_2}}$	$\frac{a_{43} I_0}{L^3 \sqrt{I_1 I_3}}$	$\frac{\alpha_{43}}{L^3}$		
5		$\frac{\alpha_{21}}{L^3}$		$\frac{a_{21} I_0}{L^3 \sqrt{I_1 I_2}}$	$\frac{a_{22} I_0}{L^3 I_2} + \frac{\alpha_{22}}{L^3}$	$\frac{a_{23} I_0}{L^3 \sqrt{I_2 I_3}}$		$\frac{\alpha_{23}}{L^3}$	
6			$\frac{\alpha_{21}}{L^3}$	$\frac{a_{31} I_0}{L^3 \sqrt{I_1 I_3}}$	$\frac{a_{32} I_0}{L^3 \sqrt{I_2 I_3}}$	$\frac{a_{33} I_0}{L^3 I_3} + \frac{\alpha_{33}}{L^3}$			$\frac{\alpha_{23}}{L^3}$
7	$\frac{\alpha_{31}}{L^3}$			$\frac{\alpha_{32}}{L^3}$			$\frac{a_{77} I_0}{L^3 I_1} + \frac{\alpha_{77}}{L^3}$	$\frac{a_{72} I_0}{L^3 \sqrt{I_1 I_2}}$	$\frac{a_{73} I_0}{L^3 \sqrt{I_1 I_3}}$
8		$\frac{\alpha_{31}}{L^3}$			$\frac{\alpha_{32}}{L^3}$		$\frac{a_{21} I_0}{L^3 \sqrt{I_1 I_2}}$	$\frac{a_{22} I_0}{L^3 I_2} + \frac{\alpha_{22}}{L^3}$	$\frac{a_{23} I_0}{L^3 \sqrt{I_2 I_3}}$
9			$\frac{\alpha_{31}}{L^3}$			$\frac{\alpha_{32}}{L^3}$	$\frac{a_{31} I_0}{L^3 \sqrt{I_1 I_3}}$	$\frac{a_{32} I_0}{L^3 \sqrt{I_2 I_3}}$	$\frac{a_{33} I_0}{L^3 I_3} + \frac{\alpha_{33}}{L^3}$

$S = \Omega^T \left[ \frac{1}{\sqrt{EI_{ij}}} \right] A \left[ \frac{1}{\sqrt{EI_{ij}}} \right] \Omega$  Преобразование приводящее к распаду системы уравнений (решето).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$\mu_1 + \frac{\alpha_{11}}{L^3}$			$\frac{\alpha_{12}}{L^3}$			$\frac{\alpha_{13}}{L^3}$		
2		$\mu_2 + \frac{\alpha_{22}}{L^3}$			$\frac{\alpha_{22}}{L^3}$			$\frac{\alpha_{23}}{L^3}$	
3			$\mu_3 + \frac{\alpha_{33}}{L^3}$			$\frac{\alpha_{33}}{L^3}$			$\frac{\alpha_{33}}{L^3}$
4	$\frac{\alpha_{21}}{L^3}$			$\mu_1 + \frac{\alpha_{22}}{L^3}$			$\frac{\alpha_{23}}{L^3}$		
5		$\frac{\alpha_{21}}{L^3}$			$\mu_2 + \frac{\alpha_{22}}{L^3}$			$\frac{\alpha_{23}}{L^3}$	
6			$\frac{\alpha_{21}}{L^3}$			$\mu_3 + \frac{\alpha_{22}}{L^3}$			$\frac{\alpha_{23}}{L^3}$
7	$\frac{\alpha_{31}}{L^3}$			$\frac{\alpha_{32}}{L^3}$			$\mu_1 + \frac{\alpha_{33}}{L^3}$		
8		$\frac{\alpha_{31}}{L^3}$			$\frac{\alpha_{32}}{L^3}$			$\mu_2 + \frac{\alpha_{33}}{L^3}$	
9			$\frac{\alpha_{31}}{L^3}$			$\frac{\alpha_{32}}{L^3}$			$\mu_3 + \frac{\alpha_{33}}{L^3}$

$S = \Omega^T \left[ \frac{1}{\sqrt{EI_{ij}}} \right] A \left[ \frac{1}{\sqrt{EI_{ij}}} \right] \Omega$  Переписанная в явной квазидиагональной форме (распад).

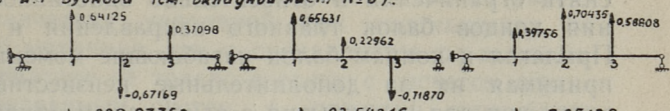
	1	4	7	2	5	8	3	6	9
1	$\mu_1 + \frac{\alpha_{11}}{L^3}$	$\frac{\alpha_{12}}{L^3}$	$\frac{\alpha_{13}}{L^3}$						
4	$\frac{\alpha_{21}}{L^3}$	$\mu_1 + \frac{\alpha_{22}}{L^3}$	$\frac{\alpha_{23}}{L^3}$						
7	$\frac{\alpha_{31}}{L^3}$	$\frac{\alpha_{32}}{L^3}$	$\mu_1 + \frac{\alpha_{33}}{L^3}$						
2				$\mu_2 + \frac{\alpha_{11}}{L^3}$	$\frac{\alpha_{12}}{L^3}$	$\frac{\alpha_{13}}{L^3}$			
5				$\frac{\alpha_{21}}{L^3}$	$\mu_2 + \frac{\alpha_{22}}{L^3}$	$\frac{\alpha_{23}}{L^3}$			
8				$\frac{\alpha_{31}}{L^3}$	$\frac{\alpha_{32}}{L^3}$	$\mu_2 + \frac{\alpha_{33}}{L^3}$			
3							$\mu_3 + \frac{\alpha_{11}}{L^3}$	$\frac{\alpha_{12}}{L^3}$	$\frac{\alpha_{13}}{L^3}$
6							$\frac{\alpha_{21}}{L^3}$	$\mu_3 + \frac{\alpha_{22}}{L^3}$	$\frac{\alpha_{23}}{L^3}$
9							$\frac{\alpha_{31}}{L^3}$	$\frac{\alpha_{32}}{L^3}$	$\mu_3 + \frac{\alpha_{33}}{L^3}$



Пример расчета перекрытия по алгебраическому варианту метода И.Г Бубнова (см. вкладной лист №6).

Вкладной лист №7  
Насе, Л.К

$I_1=1$	$I_2=1$	$I_3=1$	$I_4=1$
1	4	8	$I_4=0,4L$
2	5	9	$I_5=0,6L$
3	6	9	$I_6=0,8L$
0,0	2,00	2,00	2,00
$L=8,00$			



$\lambda_1 = 389,97760$        $\lambda_2 = 83,59216$        $\lambda_3 = 5,05128$

Собственные (главные) векторы реакций и перемещений (Сравните с „главными изгибами“ П.Ф. Палковича)

Схема перекрытия

$-\Omega^* [d]$  Матрица для преобразования правых частей

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Знач. прав. частей	$\bar{b}$	$\bar{b}^* = \Omega^* [d] \bar{b}$	
									случ. нагр.	случ. нагр.	случ. нагр.	случ. нагр.
86776	2,45266	1,77794							-2,07143	-1,00000	-5,12628	-1,58824
93511	0,83845	-2,27273							-3,71428	-1,00000	6,87734	-1,50083
77794	2,57192	1,85969							-7,07143	-1,00000	-26,38638	-6,20955
			2,86776	-2,45266	1,17314				-2,07143	-1,00000	-5,12628	-1,58824
			2,93511	0,83845	-2,27273				-3,71428	-1,00000	6,87734	-1,50083
			1,77794	2,57192	1,85969				-7,07143	-1,00000	-26,38638	-6,20955
						2,86776	-2,45266	1,17314	-2,07143	-1,00000	-5,12628	-1,58824
						2,93511	0,83845	-2,27273	-3,71428	-1,00000	6,87734	-1,50083
						1,77794	2,57192	1,85969	-7,07143	-1,00000	-26,38638	-6,20955

$\Omega$  Матрица для возвращения к первоначальным неизвестным

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Знач. неизвест.	$\bar{u}$	$\bar{u} = \Omega [d] \bar{u}$	
									случ. нагр.	случ. нагр.	случ. нагр.	случ. нагр.
86776	2,93511	1,77794							-0,01301	-0,00403	-7,39162	-1,84751
45266	0,83845	2,57192							0,07905	-0,01725	-10,87599	-2,58715
17314	-2,27273	1,85967							-4,26692	-1,00414	-8,12999	-1,83289
			2,86776	2,93511	1,77794				-0,01331	-0,00412	-9,30898	-2,44929
			2,45266	0,83845	2,57192				0,08604	-0,01878	-14,53937	-3,45189
			1,17314	-2,27273	1,85967				-5,69386	-1,33995	-10,79987	-2,45402
						2,86776	2,93511	1,77794	-0,01301	-0,00403	-7,39162	-1,84751
						2,45266	0,83845	2,57192	0,07905	-0,01725	-10,87604	-2,58717
						1,17314	-2,27273	1,85967	-4,26694	-1,00415	-8,13002	-1,83291

$[d] A [d] \Omega$  в явной квазидиагональной записи

1	4	7	2	5	8	3	6	9	$\Sigma$	$\bar{b}^* = \Omega^* [d] \bar{b}$	
									сл. нагр.	сл. нагр.	
9,83476	-9,42858	3,85716							394,26334	-5,12628	-1,58824
4,42858	403,69188	-9,42858							384,83472	-5,12628	-1,58824
8,5716	-9,42858	399,83476							394,26334	-5,12628	-1,58824
			93,39932	-9,42858	3,85716				87,82790	6,87734	-1,50083
			-9,42858	97,25644	-9,42858				78,39928	6,87734	-1,50083
			3,85716	-9,42858	93,39932				87,82790	6,87734	-1,50083
						14,90844	-9,42858	3,85716	4,33702	-26,38638	-6,20955
						-9,42858	18,76556	-9,42858	-0,09160	-26,38638	-6,20955
						3,85716	-9,42858	14,90844	9,33702	-26,38638	-6,20955

$G \Sigma^*$  Правые части

1	4	7	2	5	8	3	6	9	$\Sigma$	сл. нагр.	сл. нагр.
9,83476	-9,42858	3,85716							394,26334	-5,12628	-1,58824
0,2358	403,46955	-9,33763							394,13192	-5,24716	-1,62570
0,0965	-0,02314	399,58146							399,58146	-5,14824	-1,61054
			93,39932	-9,42858	3,85716				87,82790	6,87734	-1,50083
			-0,10095	96,30462	-9,03920				87,26542	7,57161	-1,65234
			0,04130	-0,09396	92,39160				92,39160	7,30398	-1,59394
						14,90844	-9,42858	3,85716	9,33702	-26,38638	-6,20955
						-0,63243	12,80264	-6,98920	5,81344	-43,07392	-10,13666
						0,25872	-0,54592	10,09497	10,09497	-43,07461	-10,13692

$[d] A [d] \Omega$  Запись в форме „решета“.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\Sigma$	$\bar{b}^* = \Omega^* [d] \bar{b}$	
									сл. нагр.	сл. нагр.	
9,83476			-9,42858			3,85716			394,26334	-5,12628	-1,58824
	93,39932			-9,42858			3,85716		87,82790	6,87734	-1,50083
		14,90844			-9,42858			3,85716	9,33702	-26,38638	-6,20955
4,42858			403,69188			-9,42858			384,83472	-5,12628	-1,58824
	-9,42858			97,25644			-9,42858		78,39928	6,87734	-1,50083
		-9,42858			18,76556			-9,42858	-0,09160	-26,38638	-6,20955
8,5716			-9,42858			399,83476			394,26334	-5,12628	-1,58824
	3,85716			-9,42858			96,39932		87,82790	6,87734	-1,50083
		3,85716			-9,42858			14,90844	9,33702	-26,38638	-6,20955



снять ограничения и относительно однотипности опирания концов балок главного направления и прогонов. Прилагая к концам балок изгибающие моменты, силы и принимая их за дополнительные неизвестные, расчет ведем как для перекрытия с однотипным опиранием концов балок. Значение этих дополнительно введенных неизвестных определяется по действительным условиям закрепления концов балок. Указанное, конечно, требует добавочных вычислений.

Правые части преобразованной системы уравнений определяются по уже много раз встречавшейся формуле

$$\bar{b} = P\bar{a} = \Omega'[d]\bar{a}.$$

Для большей ясности матрица  $\Omega'd$  записана на вкладном листе № 7. По известной же формуле

$$\bar{x} = Q\bar{y} = [d]\Omega\bar{y}$$

выполняется и переход к первоначальным неизвестным (вкл. л. № 7) matr.  $Q = [d]\Omega$ . При балках главного направления одинаковой жесткости нет надобности выписывать матрицы  $\Omega'$  и  $\Omega$ , так как у них все клетки одинаковы. На вкладном листе № 7 матрица  $S$  в форме решета переписана в явной квазидиагональной форме, и в таком же виде по ГМ-методу произведено решение распавшейся системы уравнений. В последнем числовом примере, как и во всех ранее приведенных, мы сделали больше вычислительных таблиц, чем требуется на самом деле при практическом расчете, производимом лицом, вполне овладевшим теорией и практикой применения изложенных методов. Это может создать ложное представление о большой трудоемкости изложенных методов. Учитывая, что матричная символика и таблично-машинные методы вычислений только в самое последнее время начали проникать в строительную механику, мы при ограниченном объеме статьи старались написать ее как можно яснее. Все помещенные «лишние» таблицы помогут читателю без пояснительного текста выяснить многие детали и сделать нужные сопоставления. По этой причине мы отказались от внешних «эффектов легкости» при изложении чрезвычайно мало изученных вопросов. В этой работе мы ста-

рались заинтересовать проблемой распада систем линейных алгебраических уравнений как специалистов по строительной механике, так и специалистов по вычислительной математике не только в связи с расчетом статически неопределимым систем, а, пожалуй, еще более в связи с методом сеток и его многочисленных вариантов. Поэтому мы дали теорему о существовании матриц для преобразований, приводящих к распаду. Все изложенное безусловно можно усовершенствовать, безусловно найдутся еще новые пути. Но для полного решения проблемы распада необходимо, чтобы многие ученые разных специальностей вложили свой труд и дарование.

Первая редакция этой работы была закончена в 1955 году. Сейчас мы изложили работу 1955 года, сократив ее содержание более чем в два раза. В последнюю редакцию мы не включили ряд позднее возникших методов, ведущих к распаду, предложенных кандидатом математических наук К. Ратассепп, и несколько наших методов.

---

## ЛИТЕРАТУРА

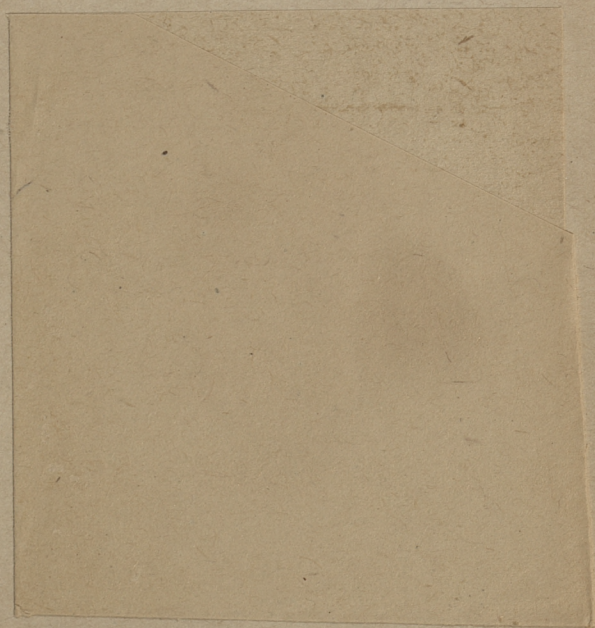
1. И. Г. Бубнов. Строительная механика корабля. Ч. I и II СПб 1912—1914.
2. И. П. Прокофьев, Теория сооружений, II ч. 1940.
3. И. М. Рабинович. Курс строительной механики, Ч. II, 1955.
4. Ostenfeld C. Lastverteilende Querverbände. Kopenhagen, 1930.
5. И. М. Рабинович. Методы расчета рам, Ч. II, ОНТИ 1934, стр. 80—82.
6. Л. К. Нарец. Расчет рам по ГМ-методу, Сборник исследований по строительной механике. № 6, 1954, стр. 246.
7. Л. К. Нарец. Расчет статически неопределимых систем машинными методами. Труды Таллинского политехнического института. Серия А, № 54, 1954. Ожидается новое издание.
8. В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. ГИТЛ, 1950. Ожидается новое издание.
9. Л. К. Нарец. Доклад на семинаре Института механики АН СССР 15 дек. 1950 г.
10. Л. К. Нарец и Ю. А. Каширский. Упрощение решения восьмичленных уравнений при расчете цилиндрических оболочек по методу В. З. Власова. Труды Уральского политехнического института. Сборник 44, стр. 45—57. ГИЛ по строительству и архитектуре. Москва 1953.



11. О. Т. Роотс. Расчет и электро моделирование перекрестных балок. Диссертация (на эстонском языке). Таллин, 1954, ТПИ.
12. Р. Н. Ээк. Расчет методом деформаций набора корпуса судна как пространственной рамной системы. Доклад на научной конференции в ТПИ 1955 г. апрель. Труды ТПИ, № 106, 1957.
13. В. В. Чуватов. Расчет рам и плит на упругом основании. Диссертация. Свердловск, УПИ, 1953.
14. К. К. Оллик. Расчет балочных конструкций на упругом основании. Диссертация (на эстонском языке). Таллин, 1953, ТПИ.
15. Н. В. Литвинов, О решении бесконечной системы канонических уравнений теории упругости для полосы. Украинский математический журнал. Киев, 1955, VII № 2.
16. М. В. Литвинов, Обчислення коефіцієнтів впливу для складених сіткових областей за допомогою матричних перетворень. Доповіді АН Укр. РСР, 3, 1955
17. Фрезер, Дункан, Коллар, Теория матриц и ее приложения. И. Л. 1950.
18. Фокс, Хаски, Вилькинсон, Заметки о решении совместных систем линейных алгебраических уравнений. Успехи математических наук ТУ выпуск 3/37, 1950, стр. 87 и след.
19. В. Э. Милн. Численное решение дифференциальных уравнений. И. Л. 1955 г. Глава IX, стр. 169—212. «Эта глава составлена для удобства читателя, недостаточно хорошо знакомого с матрицами» (цитата из предисловия).
20. Е. Г. Ларченко. Техника вычислений. Геодезиздат. Москва 1952, нов. изд. 1956.
21. Г. Вейленд. Представление векового уравнения в виде многочлена. УМН, 1947. ТП, выпуск 4 (20) стр. 151.
22. А. К. Смирнов. Курс высшей математики Т I, 1937. Правило Горнера стр. 399 и след. Способ Ньютона стр. 414.
23. Д. Скарборо. Численные методы математического анализа. ГТТИ 1934. Метод Греффе, стр. 197.
24. А. А. Уманский и И. Л. Жодзишский, Пространственная работа некоторых типов инженерных конструкций. Исследования. Массивные и стержневые конструкции. МСПМ НИИ по строительству. Москва, 1952, стр. 104.
25. Ф. Р. Гандмахер. Теории матриц. ГИТТЛ, Москва, 1953. Гл. XVIII § 2, стр. 182.
26. H. Baldauf, Hochgradig statish unbestimmte Tragwerke S. Hirzel Verlag. Leipzig, 1956, стр. 44, 95.
27. Rudolf Z u r m ü h l. Matrizen. Springer-Verlag 1950. стр. 316.
28. А. С. Хаусхолдер. Основы численного анализа. И. Л. Москва, 1956, стр. 130.

Для читателя, мало знакомого с матрицами, рекомендуем читать литературу в такой последовательности: (20), (19), (18), (17), (27); (25), (6), (7), (26).







1 р. 80 к.