TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL
Automaatikainstituut

BORIS GORDON, EDUARD PETLENKOV

ISS0010

SÜSTEEMITEOORIA

ÜLESANNETE KOGU

TTÜ KIRJASTUS
2007

Parandatud 2009

Kaane kujundanud Ann Gornischeff

ISBN 978-9985-59-688-3

EESSÕNA

Käesolev ülesannete kogu on mõeldud kasutamiseks abimaterjalina õppeaines ISS0010 Süsteemiteooria. Kogu täiendab Hanno Sillamaa õpikut “Süsteemiteooria”, millel on olnud juba neli trükki. Iga peatüki alguses on toodud viide selle õpiku (Hanno Sillamaa. Süsteemiteooria, TTÜ kirjastus) vastavatele teoreetilistele peatükkidele. Kui selles õpikus vastavat materjali ei ole, siis on antud viide teisele raamatule (K. Ogata. Modern control engineering, 2002).

Ülesannete kogu on kasutamiseks nii harjutustundides, kontrolltöödeks ja eksamiteks ettevalmistamisel kui ka kursuse iseseisval läbimisel. See sisaldab ülesandeid põhiliste teoreetilise kursuse käigus läbivõetavate teemade kohta.

Igas peatükis on nn näidisülesanded (täieliku lahenduskäiguga) ja ülesanded iseseisvaks lahendamiseks (mille kohta on ülesannete kogu lõpus toodud vastused ja mõnikord ka vahetulemused).

Autorid on kasutanud samu tähiseid, mis on kasutusel H. Sillamaa raamatus, välja arvatud diskreetsete süsteemide maatriksite tähistus, kus F ja G asemel kasutatakse kreeka tähti Φ ja Γ. Selle aine õpetamise pikaajaline kogemus näitas sellise ülesannete kogu vajalikkust. Kõik märkused, soovitused ja teated avastatud vigadest on teretulnud.

Autorid tänavad oma kolleegi professor Ennu Rüsterni asjalike märkuste ja soovituste eest ülesannete kogu ettevalmistamise käigus.

SISUKORD

1. LAPLACE'I TEISENDUS

Antud peatükk, mis oma sisu poolest sobiks rohkem matemaatikaalasesse õppematerjali, on toodud siin selleks, et oleks võimalus natukene korrata Laplace'i teisendust, kuna meie kursuse raames tuleb seda kasutada küllaltki tihti. Selle peatüki teoreetilisi aluseid saab leida H. Sillamaa õpikust ptk. 2.3.

Laplace'i integraalne teisendusvalem loob üksühese vastavuse originaalfunktsioonide ja kujutisfunktsioonide vahel. Originaali ja kujutise vastavust tähistame järgmiselt: $x(t) \xleftrightarrow{\mathrm{L}} X(s)$ või $X(s) = L(x(t))$ või $x(t) = L^{-1}(X(s))$. Laplace'i teisenduse ja tema omaduste tabelid asuvad vastavalt lisas 1 ja lisas 2.

Näidisülesanne N 1.1

Leiame originaali $x(t)$, mis vastab Laplace'i kujutisele $X(s) = \dfrac{5(s^2+5s+10)}{(s+3)(s+4)(s+5)}$.

Lahenduskäik

Lahutame kujutise $X(s)$ osamurdudeks:

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{5s^2+25s+50}{(s+3)(s+4)(s+5)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+4)} + \frac{C}{(s+5)} = \\
&= \frac{A(s+4)(s+5)+B(s+3)(s+5)+C(s+3)(s+4)}{(s+3)(s+4)(s+5)} = \\
&\frac{As^2+9As+20A+Bs^2+8Bs+15B+Cs^2+7Cs+12C}{(s+3)(s+4)(s+5)} = \\
&= \frac{s^2(A+B+C)+s(9A+8B+7C)+20A+15B+12C}{(s+3)(s+4)(s+5)}
\end{aligned}
$$

Nüüd paneme kirja lineaarsete võrrandite süsteemi. Meil on 3 tundmatut ja 3 võrrandit. Järelikult laheneb süsteem üheselt.

$$
\begin{cases}
A+B+C=5 \\
9A+8B+7C=25 \\
20A+15B+12C=50
\end{cases}
$$

Lahendades süsteemi, saame $A=10,\ \ B=-30,\ \ C=25.$
Seega,

$$
X(s) = \frac{5s^2+25s+50}{(s+3)(s+4)(s+5)} = \frac{10}{(s+3)} - \frac{30}{(s+4)} + \frac{25}{(s+5)}
$$

Kordajate *A*, *B* ja *C* leidmiseks, kui nimetajad on ühekordsed reaalsed poolused, eksisteerib ka lihtsam leidmise viis resiidide kaudu (tihti saab arvutust teha isegi peast):

$$
A = \underset{s\to-3}{res}\frac{5(s^2+5s+10)}{(s+4)(s+5)} = \frac{5\left[(-3)^2+5(-3)+10\right]}{\left[(-3)+4\right]\left[(-3)+5\right]} = 10
$$

$$B = \underset{s \to -4}{res} \frac{5(s^2+5s+10)}{(s+3)(s+5)} = \frac{5\left[(-4)^2+5(-4)+10\right]}{\left[(-4)+3\right]\left[(-4)+5\right]} = -30$$

$$C = \underset{s \to -5}{res} \frac{5(s^2+5s+10)}{(s+3)(s+4)} = \frac{5\left[(-5)^2+5(-5)+10\right]}{\left[(-5)+3\right]\left[(-5)+4\right]} = 25$$

Tänu Laplace'i teisenduse lineaarsuse omadustele

$$L^{-1}(\sum_i \lambda_i X_i(s)) = \sum_i \lambda_i L^{-1}(X_i(s)) \text{, kus } \lambda_i \text{ on konstandid.}$$

Järelikult,

$$x(t) = L^{-1}(X(s)) = L^{-1}\left(\frac{5s^2+25s+50}{(s+3)(s+4)(s+5)}\right) = L^{-1}\left(\frac{10}{(s+3)} - \frac{30}{(s+4)} + \frac{25}{(s+5)}\right) =$$

$$= 10L^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)}\right) - 30L^{-1}\left(\frac{1}{(s+4)}\right) + 25L^{-1}\left(\frac{1}{(s+5)}\right) \overset{tabelist}{=} 10e^{-3t} - 30e^{-4t} + 25e^{-5t}$$

Näidisülesanne N 1.2

Leiame funktsioonile $x(t) = 10e^{-2t} + (t-2)e^{-5(t-2)} + e^{-t}\sin 2t$ vastava Laplace'i kujutise $X(s)$.

Lahenduskäik

$$x(t) = 10x_1(t) + x_2(t-2) + x_3(t) \text{, kus } x_1(t) = e^{-2t},\ x_2(t) = te^{-5t},\ x_3(t) = e^{-t}\sin 2t$$

$$X(s) = L(x(t)) = L\left(10x_1(t) + x_2(t-2) + x_3(t)\right) = 10L(x_1(t)) + e^{-2s}L(x_2(t)) + L(x_3(t)) =$$

$$= 10L\left(e^{-2t}\right) + e^{-2s}L\left(te^{-5t}\right) + L\left(e^{-t}\sin 2t\right) \overset{tabelist}{=} \frac{10}{s+2} + \frac{e^{-2s}}{(s+5)^2} + \frac{2}{(s+1)^2+2^2} =$$

$$= \frac{10}{s+2} + \frac{e^{-2s}}{(s+5)^2} + \frac{2}{s^2+2s+5}$$

Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks

IL 1.1

Leida originaal $x(t)$, mis vastab Laplace'i kujutisele $X(s) = \dfrac{-8s^2 + 5}{(s+1)(s^2 + 4s + 13)}$.

IL 1.2

Leida funktsioonile $x(t) = 2e^{-3(t-3)} + (t-2)e^{-5(t-2)} + e^{-t}\cos 2t$ vastava Laplace'i kujutise $X(s)$.

IL 1.3

Leida originaal $x(t)$, mis vastab Laplace'i kujutisele $X(s) = \dfrac{10(s+3)^2}{s(s+2)(s^2+1)}$.

IL 1.4

Leida originaal $x(t)$, mis vastab Laplace'i kujutisele $X(s) = \dfrac{13(s+5)^2}{s(s+1)(s^2+25)}$.

IL 1.5

Leida originaal $x(t)$, mis vastab Laplace'i kujutisele $X(s) = \dfrac{20(s+4)^2}{s(s+2)(s^2+16)}$.

IL 1.6

Leida originaal $x(t)$, mis vastab Laplace'i kujutisele $X(s) = \dfrac{26(s+3)^2}{s(s+2)(s^2+9)}$.

2. ÜLEKANDEMUDEL, HILISTUMISEGA SÜSTEEMIDE ÜLEKANDEFUNKTSIOONID JA SIIRDEPROTSESSID

Selle peatüki teoreetilisi aluseid saab leida H. Sillamaa õpikust ptk. 1.7.3, 2.4 ja 2.5.

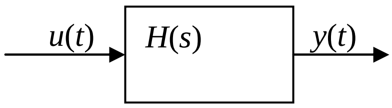
Nagu näeme oma kursuse käigus, võib süsteemidel olla palju erinevaid mudeleid. Üks lihtsamatest mudelitest on nn ülekandemudel, mis seob omavahel ainult sisendeid ja väljundeid. Seda mudelit saame kasutada vaid siis, kui süsteemil ei ole sisemisi akumulatsioone ehk siis juhul, kui algolek on nulline. Kui need tingimused on täidetud, on süsteemi sisendi ja väljundi kujutised seotud ülekandefunktsiooniga väga lihtsa seose kaudu:

$$Y(s) = U(s)H(s)$$

kus
$Y(s)$ on väljundi kujutis,
$U(s)$ on sisendi kujutis ja
$H(s)$ on ülekandefunktsioon.

Eeldades nulliseid algolekuid, saab ülekandefunktsiooni kasutada siirdeprotsesside arvutamisel.

Näidisülesanne N 2.1



Antud: sisendsignaal $u(t) = 2\cos 5t$ ja ülekandefunktsioon $H(s) = \dfrac{(s^2+25)(s-8)}{s^2(s^2+16)}$.

Leida $y(t)$.

Kontrollida tulemust piirväärtusteoreemidega.

Lahenduskäik

$$Y(s) = U(s)H(s)$$

$$U(s) = L[u(t)] = \frac{2s}{s^2+25}$$

$$Y(s) = \frac{2s}{(s^2+25)}\frac{(s^2+25)(s-8)}{s^2(s^2+16)} = \frac{2(s-8)}{s(s^2+16)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s^2+16)} =$$

Leiame A resiididega $A = \underset{s\to 0}{res}\dfrac{2(s-8)}{(s^2+16)} = -1$

$$= \frac{-1}{s} + \frac{Bs+C}{(s^2+16)} = \frac{-(s^2+16)+s(Bs+C)}{s\ (s^2+16)}$$

Kuna kahel võrdsel murrul on võrdsed nimetajad, saame võrdsustada ka lugejad:

$$\frac{2(s-8)}{s(s^2+16)} = \frac{-(s^2+16)+s(Bs+C)}{s(s^2+16)}$$

$$2s - 16 = -s^2 - 16 + Bs^2 + Cs$$

Kuna kaks polünoomi on võrdsed, siis peavad olema võrdsed ka sama astmenäitajaga S ees olevad tegurid mõlemal pool võrrandit:

$$\begin{array}{ll} s^2 & 0 = -1 + B, \quad \text{siit } B = 1 \\ s & 2 = C \end{array}$$

Vabaliikmete võrdsus on kontrolliks.

Märkus: peale osamurdudeks jagamist, kui osa tundmatuid õnnestub lugejas leida resiidide kaudu, saame alati võrrandeid rohkem kui tundmatuid. Seega on alati olemas ka kontrollimise võimalus:

$$Y(s) = \frac{-1}{s} + \frac{s+2}{(s^2+16)} = \frac{-1}{s} + \frac{s}{(s^2+16)} + \frac{4}{2(s^2+16)}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = -\mathbf{1}(t) + \cos 4t + \frac{1}{2}\sin 4t$$

Siin on $\mathbf{1}(t)$ Heaviside'i funktsioon

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } \ t > 0 \\ 0, & \text{kui } \ t \le 0 \end{cases} \qquad \mathbf{1}(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} s^{-1}$$

Eespool saadud tulemused kontrollime piirväärtusteoreemidega:

1) $\lim\limits_{t\to 0+} x(t) = \lim\limits_{s\to\infty} sX(s)$

$$\lim_{t\to 0+} y(t) = \lim_{t\to 0+}\left[-\mathbf{1}(t) + \cos 4t + \frac{1}{2}\sin 4t\right] = -1 + 1 + \frac{1}{2}0 = 0$$

$$\lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} s\frac{2(s-8)}{s(s^2+16)} = \lim_{s\to\infty}\frac{\frac{2s}{s^2} - \frac{16}{s^2}}{\frac{s^2}{s^2} + \frac{16}{s^2}} = \frac{\frac{2}{\infty} - \frac{16}{\infty}}{\frac{1}{1} + \frac{16}{\infty}} = \frac{0-0}{1+0} = 0$$

Seega saime esimese piirväärtusteoreemi järgi, et $0 = 0$.

Märkus: kui $s -> \infty$, siis jagame nii lugeja kui ka nimetaja polünoomide kõik liidetavad läbi s-ga maksimaalses astmes ja saame sõltuvalt polünoomide astmetest ühe kolmest variandist:

$$\frac{0+0+0}{1+0+0} = 0 \ \text{ või } \ \frac{1+0+0}{1+0+0} = 1 \ \text{ või } \ \frac{k+0+0}{1+0+0} = k$$

2) $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{s\to 0} sX(s)$

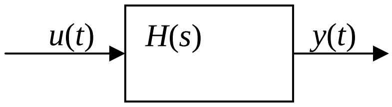
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}\left[-\mathbf{1}(t) + \cos 4t + \frac{1}{2}\sin 4t\right] = -1 + 0 + 0 = -1$$

$$\lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{2(s-8)}{s(s^2+16)} = \frac{-16}{16} = -1$$

Seega saime teise piirväärtusteoreemi järgi, et $-1 = -1$.

Märkus: kaks piirväärtusteoreemi ei ole omavahel kuidagi seotud, seega ei maksa ülesande kontrollimise juures üritada saavutada nende väärtuste omavahelist võrdsust.

Näidisülesanne N 2.2



Antud: $H(s) = \dfrac{(s+1)e^{-s}}{(s+2)^2(s^2+4)}$

$u(t) = \delta(t-1)$

Leida $y(t)$, $y(0)$, $y(\infty)$.

Siin on $\delta(t)$ deltaimpulss ehk Diraci impulss.

Omadused

1) $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) f(t) dt = f(0)$ 2) $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1,$ $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$

$\delta(t) \overset{L}{\leftrightarrow} 1$

Lahendus

$Y(s) = H(s)U(s)$

$U(s) = L[\delta(t-1)] = e^{-s}$, sest $L[\delta(t)] = 1$ ja $e^{-\tau s} X(s) \overset{L}{\longleftrightarrow} x(t-\tau)$

Seega,

$$Y(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)^2(s^2+4)} e^{-2s}$$

$$Y(s) \overset{L}{\longleftrightarrow} \tilde{y}(t-2) \qquad y(t) = \tilde{y}(t-2)\text{, kus } \tilde{y}(t) = L^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+2)^2(s^2+4)}\right)$$

$$\tilde{Y}(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+4s+4} + \frac{Cs+D}{s^2+4} =$$

$$= \frac{As^3+4As+Bs^2+4B+Cs^3+4Cs^2+4Cs+Ds^2+4Ds+4D}{(s+2)^2(s^2+4)} =$$

$$= \frac{(A+C)s^3+(B+4C+D)s^2+(4A+4C+4D)s+4B+4B}{(s+2)^2(s^2+4)}$$

Järelikult,

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+4C+D=0 \\ 4A+4C+4D=1 \\ 4B+4D=1 \end{cases} \Leftarrow$$

Lineaarsete võrrandite süsteem: 4 sõltumatut võrrandit, 4 tundmatut.

Lahendades, saame $A = \dfrac{1}{16}$, $B = 0$, $C = -\dfrac{1}{16}$, $D = \dfrac{1}{4}$

KONTROLLIGE!

$$\tilde{Y}(s)=\frac{1}{16}\frac{s}{(s+2)^2}-\frac{1}{16}\frac{s-4}{s^2+4}=\frac{1}{16}\left(\frac{s+2-2}{(s+2)^2}-\frac{s}{s^2+4}+2\frac{2}{s^2+4}\right)=$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{s+2}-\frac{2}{(s+2)^2}-\frac{s}{s^2+4}+2\frac{2}{s^2+4}\right)\overset{L}{\longleftrightarrow}\frac{1}{16}(e^{-2t}-2te^{-2t}-\cos(2t)+2\sin(2t))\mathbf{1}(t)=\tilde{y}(t)$$

Siin on $\mathbf{1}(t)$ Heaviside'i funktsioon

$$\mathbf{1}(t)=\begin{cases}1, & \text{kui} \quad t>0\\ 0, & \text{kui} \quad t\le 0\end{cases}, \qquad \mathbf{1}(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}s^{-1}$$

$$y(t)=\tilde{y}(t-2)=\frac{1}{16}(e^{-2(t-2)}-2te^{-2(t-2)}-\cos(2(t-2))+2\sin(2(t-2))\mathbf{1}(t-2)$$

$y(0)=0$, sest $\mathbf{1}(-2)=0$

$$y(\infty)=\lim_{t\to\infty}y(t)=\frac{1}{16}(0-\lim_{t\to\infty}2te^{-2(t-2)}-0+0)=-\frac{1}{8}\lim_{t\to\infty}te^{-2(t-2)}=-\frac{1}{8}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{2(t-2)}}\overset{\text{L'Hospital}}{=}$$

$$\overset{\text{L'Hospital}}{=}-\frac{1}{8}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2e^{2(t-2)}}=0$$

Eespool saadud tulemused kontrollime piirväärtusteoreemidega.

Piirväärtusteoreemid:
$$\lim_{t\to 0+}x(t)=\lim_{s\to\infty}sX(s)$$
$$\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to 0}sX(s)$$

$$y(0)=\lim_{s\to\infty}sY(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s(s+1)}{(s+2)^2(s^2+4)}e^{-2s}=\lim_{s\to\infty}\frac{s^2+s}{(s^4+4s^3+8s^2+16s+16)e^{2s}}=$$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{1+s^{-1}}{(s^2+4s^1+8+16s^{-1}+16s^{-2})e^{2s}}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0$$

$$y(\infty)=\lim_{s\to 0}sY(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s(s+1)}{(s+2)^2(s^2+4)}e^{-2s}=\frac{0}{16}=0$$

Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks

IL 2.1

Antud: väljund $y(t)$ ja ülekandefunktsioon $H(s)$

$$y(t) = 3\times\mathbf{1}(t) - 2e^{-t} - e^{-4t} \qquad\qquad H(s) = \frac{2(s+2)}{s\ (s\ \ +1)}$$

Leida sisend $u(t)$ ning selle alg- ja lõppväärtused.

IL 2.2

Antud: ülekandefunktsioon $H(s)$ ja sisend $u(t)$

$$H(s) = \frac{(s+1)e^{-s}}{(s^2+4)s}, \quad u(t) = \mathbf{1}(t-2)$$

Leida $y(t)$, $y(0)$, $y(3)$

IL 2.3

Antud: ülekandefunktsioon $H(s)$ ja sisend $u(t)$

$$H(s) = \frac{(s^3+1)e^{-2s}}{s(s+2)(s+3)}, \quad u(t) = \delta(t-1)$$

Leida $y(t)$, $y(1)$, $y(\infty)$

IL 2.4

Antud: ülekandefunktsioon $H(s)$ ja sisend $u(t)$

$$H(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+5s+6)}, \quad u(t) = e^{-(t-4)}\mathbf{1}(t-4)$$

Leida $y(t)$, $y(0)$, $y(3)$, $y(4)$, $y(7)$, $y(6)$ y(∞)

IL 2.5

Antud: ülekandefunktsioon $H(s)$ ja sisend $u(t)$

$$H(s) = \frac{s+e^{-s}}{s^2+4s+5}, \quad u(t) = \mathbf{1}(t-1)$$

Leida $y(t)$, $y(0)$, $y(1)$, $y(\infty)$

3. SÜSTEEMIDE KOMPOSITSIOON

Selle peatüki teoreetilisi aluseid saab leida H. Sillamaa õpikust ptk. 2.4.

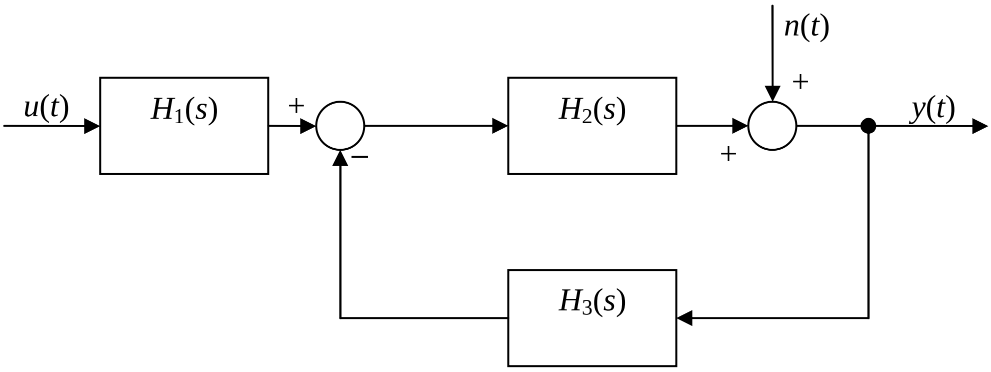
Kõige lihtsamad kahe süsteemi ühendamise viisid on järgmised:

- järjestikune, kus ülekandefunktsioonid korrutuvad: $Y(s) = H_2(s)H_1(s)U(s)$
- paralleelne, kus ülekandefunktsioonid liituvad: $Y(s) = (H_1(s) + H_2(s))U(s)$
- tagasisidestatud, kus $Y(s) = \dfrac{H_1(s)}{1 - H_2(s)H_1(s)}U(s)$

Kasutades neid kolme ühendamisviisi, saame komponeerida küllaltki keerulisi süsteeme, mille ühised ülekandefunktsioonid leiame nende valemite kaudu.

Näidisülesanne N 3.1

Kolm süsteemi on ühendatud järgmise skeemi järgi. On teada nende ülekandefunktsioonid $H_1(s)$, $H_2(s)$, $H_3(s)$ ja kaks sisendit $u(t)$, $n(t)$. Leida süsteemide kompositsiooni väljund $y(t)$.



Antud: $H_1(s) = H_3(s) = \dfrac{40(s+50)}{s+40} \quad H_2(s) = \dfrac{10}{s(s+50)}$

$u(t) = 2 \cdot \mathbf{1}(t) \quad n(t) = \delta(t)$

Leida $y(t)$, $y(0)$, $y(\infty)$

Lahenduskäik

$$H_{uy} = \frac{H_1H_2}{1+H_2H_3}; \qquad H_{ny} = \frac{1}{1+H_2H_3}$$

$$Y(s) = H_{uy}(s)U(s) + H_{ny}(s)N(s)$$

$$H_1H_2 = H_2H_3 = \frac{400}{s(s+40)}; \quad 1+H_2H_3 = 1 + \frac{400}{s(s+40)} = \frac{s^2+40s+400}{s(s+40)}$$

$$H_{uy}(s) = \frac{400}{s(s+40)} \cdot \frac{s(s+40)}{s^2+40s+400} = \frac{400}{s^2+40s+400}$$

$$H_{ny}(s) = \frac{s(s+40)}{s^2+40s+400}$$

$$U(s) = L[u(t)] = L[2 \cdot \mathbf{1}(t)] = \frac{2}{s}$$

$$N(s) = L[n(t)] = L[\delta(t)] = 1$$

$$Y(s) = \frac{800}{s(s^2 + 40s + 400)} + \frac{s(s+40)}{s^2 + 40s + 400}$$

$$\frac{800}{s(s^2 + 40s + 400)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s^2 + 40s + 400)} \Rightarrow A = 2\,;B = -2\,;C = -80 \text{ (Kontrollige!)}$$

$$\frac{800}{s(s^2 + 40s + 400)} = \frac{2}{s} - 2\frac{s+40}{(s+20)^2} = \frac{2}{s} - 2\left(\frac{1}{s+20} + \frac{20}{(s+20)^2}\right) \overset{L}{\longleftrightarrow} 2 - 2e^{-20t} - 40te^{-20t}$$

$$\frac{s(s+40)}{s^2 + 40s + 400} = \frac{s^2 + 40s + 400 - 400}{(s+20)^2} = 1 - \frac{400}{(s+20)^2} \overset{L}{\longleftrightarrow} \delta(t) - 400te^{-20t}$$

$$y(t) = 2 - 2e^{-20t} - 40te^{-20t} + \delta(t) - 400te^{-20t}$$

$$y(0) = \lim_{t\to 0}(2 - 2e^{-20t} - 40te^{-20t} + \delta(t) - 400te^{-20t}) = 2 - 2 + \lim_{t\to 0}\delta(t) = 0 + \lim_{t\to 0}\delta(t) = \infty$$

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty}(2 - 2e^{-20t} - 40te^{-20t} + \delta(t) - 400te^{-20t}) = 2$$

Kontrollime piirväärtusteoreemidega:

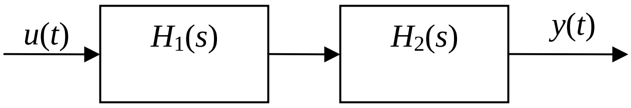
$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty}\left(\frac{800}{s^2 + 40s + 400} + \frac{s^2(s+40)}{s^2 + 40s + 400}\right) = 0 + \lim_{s\to\infty}\frac{s^3 + 40s^2}{s^2 + 40s + 400} = \infty$$

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{800}{s^2 + 40s + 400} + \frac{s^2(s+40)}{s^2 + 40s + 400}\right) = \frac{800}{400} = 2$$

Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks

IL 3.1

Kaks süsteemi ülekandefunktsioonidega $H_1(s)$ *ja* $H_2(s)$ on ühendatud järjestikku. Leida nendest koostatud süsteemi ülekandefunktsioon $H(s)$, impulsskaja $h(t)$ ja hüppekaja $g(t)$ ning nende väärtused kohal ∞.

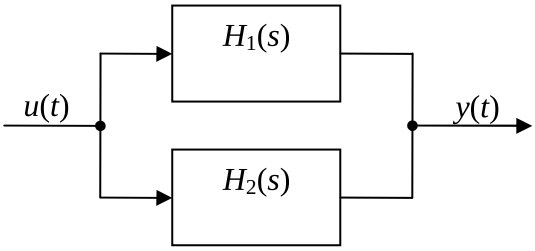


Antud: $H_1(s) = \dfrac{10(s+20)}{s+40}$, $H_2(s) = \dfrac{5}{s+20}$

Leida $H(s)$, $h(t)$, $g(t)$, $h(\infty)$, $g(\infty)$

IL 3.2

Kaks süsteemi ülekandefunktsioonidega $H_1(s)$ ja $H_2(s)$ on ühendatud paralleelselt. Leida nendest koostatud süsteemi ülekandefunktsioon $H(s)$, impulsskaja $h(t)$ ja hüppekaja $g(t)$ ning nende väärtused kohal ∞.

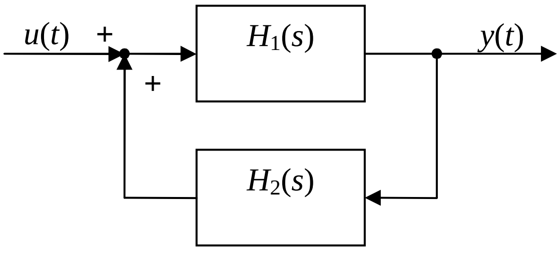


Antud: $H_1(s) = \dfrac{s+1}{s+2}$, $H_2(s) = \dfrac{2}{s+5}$

Leida $H(s)$, $h(t)$, $g(t)$, $h(\infty)$, $g(\infty)$

IL 3.3

Kaks süsteemi ülekandefunktsioonidega $H_1(s)$ ja $H_2(s)$ on ühendatud positiivse tagasisidega. Leida nendest koostatud süsteemi ülekandefunktsioon $H(s)$, impulsskaja $h(t)$ ja hüppekaja $g(t)$ ning nende väärtused kohal ∞.

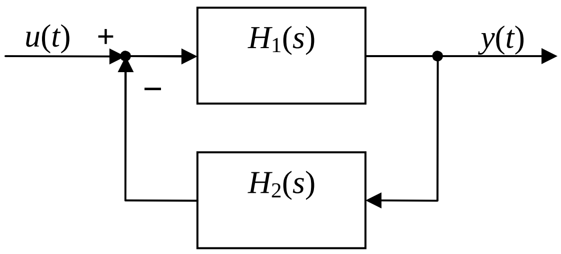


Antud: $H_1(s)=\dfrac{10(s+20)}{s+40}$, $H_2(s)=\dfrac{5}{s+20}$

Leida $H(s)$, $h(t)$, $g(t)$, $h(\infty)$, $g(\infty)$

IL 3.4

Kaks süsteemi ülekandefunktsioonidega $H_1(s)$ ja $H_2(s)$ on ühendatud negatiivse tagasisidega. Leida nendest koostatud süsteemi ülekandefunktsioon $H(s)$, impulsskaja $h(t)$ ja hüppekaja $g(t)$ ning nende väärtused kohal ∞.

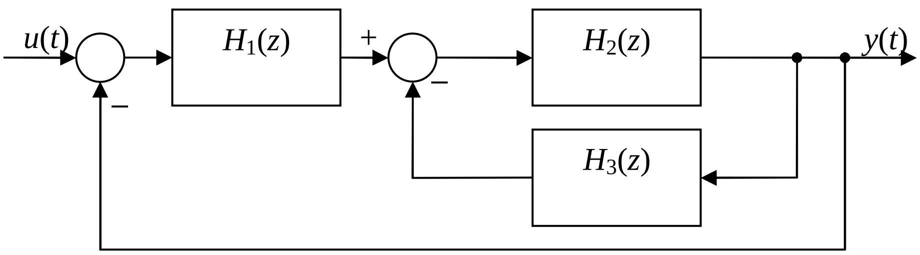


Antud: $H_1(s)=\dfrac{10(s+20)}{s+40}$, $H_2(s)=\dfrac{5}{s+20}$

Leida $H(s)$, $h(t)$, $g(t)$, $h(\infty)$, $g(\infty)$

IL 3.5

Kolm diskreetaja süsteemi on ühendatud järgmise skeemi järgi.

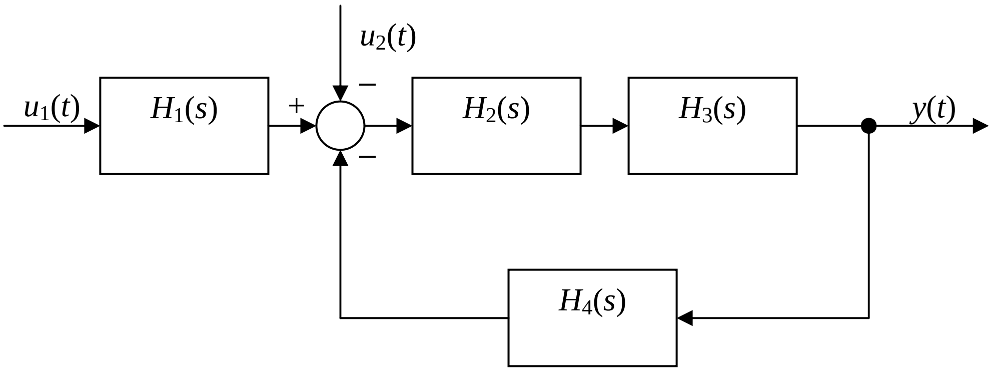


Antud: $H_1(z)=\dfrac{-3(z-0{,}1)}{z-0{,}9}$, $H_2(s)=\dfrac{z-0{,}9}{(z+1)^2}$, $H_3(s)=\dfrac{z-0{,}5}{z-0{,}9}$, $u(k)=1\ \forall k\geq 0$

Leida $H_{uy}(z)$, staatiline ülekandetegur, $y(k)$, kui $k=0,1,2,3,\infty$

IL 3.6

Pidevaja MISO süsteem on koostatud lihtsatest SISO süsteemidest.



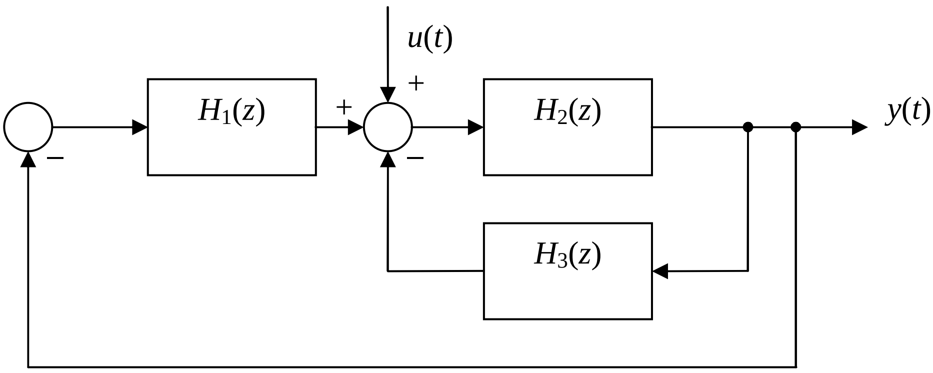
Antud: $H_1(s) = \dfrac{s+2}{s+4}$, $H_2(s) = \dfrac{2}{s+2}$, $H_3(s) = \dfrac{1}{s}$, $H_4(s) = \dfrac{2s+4}{s+4}$

$u_1(t) = \mathbf{1}(t) \qquad n(t) = 2\delta(t)$

Leida $y(t)$

IL 3.7

Kolm diskreetaja süsteemi moodustavad süsteemide kompositsiooni.



Antud: $H_1(z) = \dfrac{-3(z-0{,}1)}{z-0{,}9}$, $H_2(z) = \dfrac{z-0{,}9}{(z+1)^2}$, $H_2(z) = \dfrac{z-0{,}5}{z-0{,}9}$, $u(k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \geq 0 \end{cases}$

Leida $H_{uy}(z)$, staatiline ülekandetegur, $y(k)$, kui k = 0, 1, 2, 3, 4, ∞

4. LINEAARSE PIDEVAJA SÜSTEEMI OLEKUMUDEL, SELLE LAHEND JA MAATRIKSEKSPONENDI LEIDMINE

Selle peatüki teoreetilisi aluseid saab leida H. Sillamaa õpikust ptk. 3.1–3.3.

Olekumudel avaldub üldkujul järgmise valemi kaudu:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \\ Y(t) = C(t)X(t) + D(t)U(t) \end{cases}$$

Selle võrrandisüsteemi lahendamisel saame

$$\begin{cases} X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau \\ Y(t) = Ce^{At}X(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau + DU(t) \end{cases}$$

Selles lahendis olevat maatrikseksponenti saame leida kahel meetodil:

1) kasutades Laplace'i teisendust

$$\mathrm{e}^{\mathrm{At}} \xleftrightarrow{L} (sE - A)^{-1}$$

2) spektraallahutuse meetodil (Sylvester-Lagrange'i valem)

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{n} Z_{i1}e^{\lambda_i t}$$

$$\text{kus} \qquad Z_{i1} = \left. \frac{\prod_{k=1}^{n}(A - \lambda_k E)}{\prod_{k=1}^{n}(\lambda_i - \lambda_k)} \right|_{k \neq i}$$

Näidisülesanne N 4.1

Antud: süsteemne maatriks *A*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Leida maatrikseksponent e^{At}

Lahenduskäik

1. Laplace'i teisenduse meetodiga:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad (sE - A) = \begin{bmatrix} s & s & -4 \\ -2 & s+5 & -2 \\ -1 & -1 & s+3 \end{bmatrix}$$

det(*sE* – *A*) = … = (*s* + 3)(*s* + 1)(*s* + 4)

$$(sE-A)^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

$$\begin{bmatrix} (s+5)(s+3)-2 & -5(s+3)+4 & -10+4(s+5) \\ 2(s+3)+2 & s(s+3)-4 & 2s+8 \\ 2+s+5 & s-5 & s(s+5)+10 \end{bmatrix}=$$

$$\frac{1}{(s+1)(s+3)(s+4)}\begin{bmatrix} s^2+8s+13 & -5s-11 & 4s+10 \\ 2s+8 & s^2+3s-4 & 2s+8 \\ s+7 & s-5 & s^2+5s+10 \end{bmatrix}=...=$$

$$\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & -6 & 6 \\ 6 & -6 & 6 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix}+\frac{1}{s+3}\cdot\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}+\frac{1}{s+4}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 9 & -6 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 6 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}+\frac{1}{s+3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}+\frac{1}{s+4}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Vastus

$$e^{At}\xleftrightarrow{L}(sE-A)^{-1};\quad e^{At}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\cdot e^{-t}+\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}\cdot e^{-3t}+\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\cdot e^{-4t}$$

2. Spektraallahutuse meetodiga (Sylvester-Lagrange'i valem):

$$e^{At}=\sum_{i=1}^{n} z_{i1}e^{\lambda t}$$

$$|\lambda E-A|==\begin{vmatrix} \lambda & 5 & -4 \\ -2 & \lambda+5 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

$$\det|\lambda E-A|=(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda+1)$$

$$\lambda_1=-3$$
$$\lambda_2=-4$$
$$\lambda_3=-1$$

$$i=1,\quad z_{1i}=\frac{(A-\lambda_2 E)(A-\lambda_3 E)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{(-3+4)(-3+1)}=$$

$$
=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 4 & -2\\ 2 & -4 & 2\\ 4 & -8 & 4\end{vmatrix}}{-2}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ -2 & 4 & -2\end{vmatrix}
$$

$$
i=2,\quad z_{2i}=\frac{(A-\lambda_1 E)(A-\lambda_3 E)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}=\frac{\begin{vmatrix}3 & -5 & 4\\ 2 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & -5 & 4\\ 2 & -4 & 2\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}}{(-4+3)(-4+1)}=
$$

$$
=\frac{\begin{vmatrix}-3 & 9 & -6\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & -9 & 6\end{vmatrix}}{3}=\begin{vmatrix}-1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}
$$

$$
i=3,\quad z_{3i}=\frac{(A-\lambda_1 E)(A-\lambda_2 E)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}=\frac{\begin{vmatrix}3 & -5 & 4\\ 2 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}4 & -5 & 4\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{(-1+3)(-1+4)}=\frac{\begin{vmatrix}6 & -6 & 6\\ 6 & -6 & 6\\ 6 & -6 & 6\end{vmatrix}}{6}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}
$$

Vastus

$$
e^{At}=\sum_{i=1}^{n} z_{i1}e^{\lambda t}=
$$

$$
=e^{-3t}\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ -2 & 4 & -2\end{vmatrix}+e^{-4t}\begin{vmatrix}-1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}+e^{-t}\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}
$$

Nagu näha, saime kahel meetodil samad tulemused.

Märkus: nagu näha kahe meetodi võrdusest, võib omaväärtuste (polünoomi juurte) nummerdamise järjekord olla suvaline. Sellest sõltub vaid lõpptulemuses olevate liidetavate järjekord.

Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks

IL 4.1

Leida kahel meetodil maatrikseksponent e^{At} maatriksi A jaoks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

IL 4.2

Leida maatrikseksponent e^{At} maatriksi A jaoks

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

IL 4.3

Leida maatrikseksponent e^{At} maatriksi A jaoks

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

IL 4.4

Leida maatrikseksponent e^{At} maatriksi A jaoks

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

5. DIFERENTSIAALVÕRRANDITE SÜSTEEMI JA OLEKUMUDELI SEOS

Selle peatüki teoreetilisi aluseid saab leida H. Sillamaa õpikust ptk. 2.1 ja K. Ogata raamatust ptk. 3.5.

Selles peatükis vaatleme seda, kuidas teisendada süsteemi kirjeldust diferentsiaalvõrrandite süsteemi kaudu kirjelduseks olekumuutujate kaudu. Samas tuletame meelde ka matemaatika-kursusest teadaolevate diferentsiaalvõrrandite süsteemide teisendusi (n järku diferentsiaalvõr-randi teisendamine esimest järku võrrandite süsteemiks, milles on n võrrandit).

Näidisülesanne N 5.1

Süsteem on antud diferentsiaalvõrrandite süsteemi abil:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y_1(t)}{dt^2} = -u(t) + y_2(t) \\ \dfrac{d^2 y_2(t)}{dt^2} = 2u(t) \end{cases}$$

Leida selle süsteemi olekumudel

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases}$$

kui kaks olekut on valitud järgmiselt:

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1(t) \\ x_2(t) = y_2(t) \end{cases} \quad (*)$$

Lahenduskäik

Määrame antud süsteemi järgu. Selleks on 4 (kõigi võrrandite maksimaalsete järkude summa). Seega, kuna 2 olekut meil juba on, võime valida veel 2 olekut, kuid mitte meelevaldselt.

Näiteks loogiline on valida neid olekuid nii:

$$\begin{cases} x_3(t) = \dfrac{dx_1(t)}{dt} = \dfrac{dy_1(t)}{dt} \\ x_4(t) = \dfrac{dx_2(t)}{dt} = \dfrac{dy_2(t)}{dt} \end{cases} \quad (**)$$

Märkus: seda laadi valik ei ole ühene, seega ka kogu lahenduskäik ei ole ühene, vastus ei ole ühene ja järelikult ka olekumudel ei ole ühene. Kuid need mudelid on alati sama järku!

Kui puuduvat kahte olekut valida just sel moel (**), siis diferentseerides neid kahte võrrandit ja võrdsustades esimesed ja kolmandad liikmed, saame

$$\begin{cases} \dfrac{dx_3(t)}{dt} = \dfrac{d^2 y_1(t)}{dt^2} = -u(t) + y_2(t) = -u(t) + x_2(t) \\ \dfrac{dx_4(t)}{dt} = \dfrac{d^2 y_2(t)}{dt^2} = 2u(t) \end{cases} \quad (***)$$

Pannes võrrandid (**) ja (***) kokku, saame süsteemi:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_3(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_4(t) \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} = -u(t) + x_2(t) \\ \dfrac{dx_4(t)}{dt} = 2u(t) \end{cases}$$

Sellele võrrandisüsteemile lisame võrrandisüsteemi (*)

$$\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \end{cases}$$

ja läheme üle maatrikskujule

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

Kokku saame süsteemi kujul

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases}$$

mis ongi otsitav olekumudel, kus maatriksid on vastavalt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ja } D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Näidisülesanne N 5.2

Süsteemi kirjeldab diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 10x_1(t) - 2x_2(t) + 7u(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + 12u(t) \\ y_1(t) = 2x_2(t) \\ y_2(t) = 11x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases}$$

Leiame selle süsteemi olekumudeli

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases}$$

Tähistused

n – süsteemi siseolekute arv;
r – süsteemi sisendite arv;
m – süsteemi väljundite arv;

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ – $n \times 1$ süsteemi siseolekute vektor;

$U = u = u(t)$ – $r \times 1$ süsteemi sisend;

$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ – $m \times 1$ süsteemi väljundite vektor;

$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix}$ – $n \times 1$ siseolekute tuletiste vektor;

A – $n \times n$ olekutemaatriks (süsteemimaatriks);
B – $n \times r$ sisenditemaatriks;
C – $m \times n$ väljunditemaatriks;
D – $m \times r$ otsesidemaatriks.

Lahenduskäik

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10x_1 - 2x_2 + 7\,u \\ \dot{x}_2 = \quad x_1 + 0x_2 + 12u \\ y_1 = \quad 0x_1 + 2x_2 + \ 0u \\ y_2 = 11x_1 + 3x_2 + \ 0u \end{cases} \xRightarrow{\text{maatrikskujul}} \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 11 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

järelikult,

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix} U \\ Y = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 11 & 3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} U \end{cases}$$ ning seega $A = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$ ja $D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks

IL 5.1

Leida süsteemi $\frac{d^3 y(t)}{dt^3} = -2u(t)$ olekumudel, valides olekumuutuja $x_1(t)$ järgnevalt:

$$x_1(t) = y(t)$$

IL 5.2

Leida süsteemi $\frac{d^4 y(t)}{dt^4} = 3u(t)$ olekumudel, valides kaks olekumuutujat järgnevalt:

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dfrac{dx_1(t)}{dt} \end{cases}$$

IL 5.3

Leida süsteemi $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} - 2x_1(t) = x_2(t) + 3u(t) \\ \dfrac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + 4\dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) \end{cases}$ olekumudel, valides väljundi $y(t)$ järgnevalt:

$$y(t) = \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + 3x_1$$

IL 5.4

Leida süsteemi $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) + 3x_3(t) + u_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + u_1(t) + 2u_3(t) \end{cases}$ olekumudel.

IL 5.5

Leida süsteemi $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + 10x_2(t) + 2u_1(t) - u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - x_3(t) + 2u_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = 3x_3(t) + u_2(t) \\ y_1(t) = x_2(t) + u_1(t) \\ y_2(t) = 2x_1(t) + x_3(t) - 5u_3(t) + u_1(t) \end{cases}$ olekumudel.

6. ÜLEKANDEKARAKTERISTIKUD

Selle peatüki teoreetilisi aluseid saab leida H. Sillamaa õpikust ptk. 2.6.

Süsteemide omaduste uurimisel süsteemi sisendisse antakse tihti järgmisi testsignaale:

- ühikhüppe, seega $u(t) = \mathbf{1}(t)$. Sellisel juhul nimetatakse väljundit hüppekajaks ja tähistatakse $g(t)$;
- δ-impulss ehk Diraci impulss, seega $u(t) = \delta(t)$. Sellisel juhul nimetatakse väljundit impulsskajaks ja tähistatakse $h(t)$.

Tänu sellele, et $\mathbf{1}(t) \xleftrightarrow{L} s^{-1}$, saame $g(t) \xleftrightarrow{L} s^{-1}H(s) = \dfrac{H(s)}{s}$

Tänu sellele, et $\delta(t) \xleftrightarrow{L} 1$, saame $h(t) \xleftrightarrow{L} H(s)$

Hüppekaja ja impulsskaja on omavahel seotud järgmiselt:

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} + g(0)\delta(t) \qquad g(t) = g(0) + \int_0^t h(\tau)d\tau$$

mis g(0) = 0 puhul lihtsustub kujuni

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \text{ ja } g(t) = \int_0^t h(\tau)\,d\tau$$

Näidisülesanne N 6.1

Leiame ülekandefunktsiooni järgi hüppekaja ja impulsskaja ning nende alg- ja lõppväärtused.

Antud: $H(s) = \dfrac{12(5s-8)}{s^2 + 20s + 96}$

Leida $g(t),\ h(t),\ g(0),\ h(0),\ g(\infty),\ h(\infty)$

Lahenduskäik

Hüppekaja on süsteemi väljundreaktsioon $g(t)$ sisendisse (hetkel $t = 0$) antud ühikhüppelisele signaalile $u(t) = \mathbf{1}(t)$.

Sisendi Laplace'i teisendus annab $U(s) = L(u(t)) = L(\mathbf{1}(t)) = \dfrac{1}{s}$

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s) = \frac{12(5s-8)}{s^2 + 20s + 96} \cdot \frac{1}{s}$$

Seega,

$$g(t) = L^{-1}\left(\frac{H(s)}{s}\right)$$

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{12(5s-8)}{s(s+8)(s+12)} = -\frac{1}{s} + \frac{18}{s+8} - \frac{17}{s+12} \overset{L}{\Leftrightarrow} g(t) = \left(-1 + 18e^{-8t} - 17e^{-12t}\right)\mathbf{1}(t)$$

$$g(0) = -1 + 18 - 17 = 0$$

$$g(\infty) = -1 + 18 \cdot 0 - 17 \cdot 0 = -1$$

Kasutades piirväärtusteoreeme, saame

$$g(0) = \lim_{t \to +0} g(t) = \lim_{s \to \infty} sG(s) = \lim_{s \to \infty} s \frac{H(s)}{s} = \lim_{s \to \infty} H(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{12(5s-8)}{s^2 + 20s + 96} = 0$$

$$g(\infty) = \lim_{t \to \infty} g(t) = \lim_{s \to 0} H(s) = \lim_{s \to 0} \frac{12(5s-8)}{s^2 + 20s + 96} = -\frac{12 \cdot 8}{96} = -1$$

Impulsskaja on süsteemi väljundreaktsioon $h(t)$ sisendisse ajahetkel $t = 0$ antavale ideaalsele impulsile $u(t) = \sigma(t)$.

Sisendi Laplace'i teisendus $U(s) = L(u(t)) = L(\sigma(t)) = 1$

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s) = H(s)$$

$$h(t) = L^{-1}(H(s))$$

$$H(s) = \frac{12(5s-8)}{(s+8)(s+12)} = -\frac{144}{s+8} + \frac{204}{s+12} \overset{L}{\Leftrightarrow} h(t) = \left(-144e^{-8t} + 204e^{-12t}\right)\mathbf{1}(t)$$

$$h(0) = -144 + 204 = 60$$

$$h(\infty) = 0$$

Kontrollime piirväärtusteoreemidega:

$$h(0) = \lim_{s \to \infty} sH(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{12s(5s-8)}{s^2 + 20s + 96} = \lim_{s \to \infty} \frac{60s^2 - 96s}{s^2 + 20s + 96} = 60$$

$$h(\infty) = \lim_{s \to 0} sH(s) = \lim_{s \to 0} \frac{60s^2 - 96s}{s^2 + 20s + 96} = 0$$

Märkus: kui hüppekaja on teada, siis impulsskaja leidmine on väga lihtne. **Impulsskaja on hüppekaja tuletis**. Seda seost on väga mugav kasutada ka tulemuste kontrollimiseks.

Kontrollime:

$$g'(t) = \left(-1 + 18e^{-8t} - 17e^{-12t}\right)' = 0 - 8 \cdot 18e^{-8t} - 12 \cdot (-17)e^{-12t} = -144e^{-8t} + 204e^{-12t} \text{ m.o.t.t.}$$

Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks

IL 6.1

On teada süsteemi ülekandefunktsioon:

$$H(s) = \frac{s^2 + 3}{s^2 + 2s + 5}$$

Leida selle süsteemi impulsskaja ja hüppekaja ning nende alg- ja lõppväärtused.

IL 6.2

On teada süsteemi ülekandefunktsioon:

$$H(s) = \frac{10s^2 - 32s + 96}{s^4 + 2s^3 + 16s^2 + 32s}$$

Leida süsteemi impulsskaja ning selle alg- ja lõppväärtused.

IL 6.3

Süsteemi sisendisse ülekandefunktsiooniga $H(s)$ anti deltafunktsioon $\delta(t)$. Milline signaal on süsteemi väljundis? Leida selle signaali väärtused ajahetkel $t = 0$ ja $t = \infty$.

$$H(s) = \frac{\left(s^3 - 8s^2 - 48s + 64\right)}{s(s+2)\left(s^2 + 16\right)}$$

IL 6.4

Leida hüppekaja $g(t)$ ülekandefunktsiooni $H(s)$ järgi.

$$H(s) = \frac{\left(9s^3 + 20s^2 + 78s + 81\right)}{\left(s^3 + 3s^2 + 9s + 27\right)}$$

7. OLEKUMUDELI JA ÜLEKANDEMUDELI SEOS. ÜLEKANDEFUNKTSIOONIDE, IMPULSSKAJADE JA HÜPPEKAJADE MAATRIKSID

Selle peatüki teoreetilisi aluseid saab leida H. Sillamaa õpikust ptk. 3.5.

Kui on tegemist süsteemiga, millel on mitu sisendit ja mitu väljundit, siis sellel süsteemil on ülekandefunktsiooni, impulsskaja ja hüppekaja asemel ülekandefunktsioonide, impulsskajade ja hüppekajade maatriksid.

Ülekandefunktsioonide maatriks: $H(s) = C(sE - A)^{-1}B + D$

Impulsskajade maatriks: $H(t) = Ce^{At}B + D < \delta(t) >$

Hüppekajade maatriks: $G(t) = CA^{-1}(e^{At} - B)B + D$

Näidisülesanne N 7.1

Antud: süsteem on antud oma olekumudeliga:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Leida süsteemi impulsskajade maatriks $H(t)$.

Lahenduskäik

1. Leiame kõigepealt maatrikseksponendi Laplace'i teisenduse kaudu:

$$\det(sE - A) = \det\begin{bmatrix} s-3 & -2 \\ -2 & s-3 \end{bmatrix} = (s-3)^2 - 4 = (s-1)(s-5); \quad s_1 = 1, \quad s_2 = 5$$

$$e^{At} \xleftrightarrow{L} (sE - A)^{-1} \quad (sE - A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s-5)}\begin{bmatrix} s-3 & -2 \\ -2 & s-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-3}{(s-1)(s-5)} & \frac{-2}{(s-1)(s-5)} \\ \frac{-2}{(s-1)(s-5)} & \frac{s-3}{(s-1)(s-5)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\frac{1}{2}}{(s-1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(s-5)} & \frac{-\frac{1}{2}}{(s-1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(s-5)} \\ \frac{-\frac{1}{2}}{(s-1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(s-5)} & \frac{\frac{1}{2}}{(s-1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(s-5)} \end{bmatrix} \xleftrightarrow{L} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} e^{t} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} e^{5t} = e^{At}$$

2. Nüüd leiame spektraallahutuse meetodil maatrikseksponendi ja näitame, et mõlemad meetodid annavad sama tulemuse:

$$\det(\lambda E - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda-3 & -2 \\ -2 & \lambda-3 \end{bmatrix} = (\lambda-3)^2 - 4 = (\lambda-1)(\lambda-5); \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5$$

$$Z_{i1} = \left. \frac{\prod_{k=1}^{n} (A - \lambda_k E)}{\prod_{k=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_k)} \right|_{k \neq i}$$

$$\lambda_1 = 1; \quad Z_{11} = \frac{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}{1-5}$$

$$\lambda_2 = 5; \quad Z_{21} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}{5-1}$$

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{n} Z_{i1} e^{\lambda_i t}; \quad e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} e^{t} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} e^{5t}$$

3. Nüüd leiame süsteemi impulsskajade maatriksi $H(t)$.

$$H(t) = Ce^{At}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} e^{t} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} e^{5t} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} e^{t} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e^{5t} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} e^{t}$$

Märkus: antud süsteemil on 2 sisendit ja 2 väljundit, seega on ka loogiline, et me saime impulsskajade maatriksi, mis koosneb neljast elemendist:

$$H(t) = \begin{bmatrix} H_{11}(t) & H_{12}(t) \\ H_{21}(t) & H_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$H_{11}(t)$ esimesest sisendist esimesse väljundisse,

$H_{22}(t)$ teisest sisendist teise väljundisse,

$H_{12}(t)$ teisest sisendist esimesse väljundisse,

$H_{21}(t)$ esimesest sisendist teise väljundisse.

Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks

IL 7.1

Antud: süsteem on antud oma olekumudeliga:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Leida süsteemi impulsskajade maatriks $H(t)$.

$$H(t) = Ce^{At}B$$

IL 7.2

Antud: süsteem on antud oma olekumudeliga:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Leida süsteemi ülekandefunktsioonide maatriks $H(s)$.

$$H(s) = C(sE - A)^{-1}B$$

IL 7.3

Antud: süsteem on antud oma olekumudeliga:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

Leida süsteemi impulsskajade maatriks $H(t)$.

$$H(t) = Ce^{At}B$$

IL 7.4

Antud: süsteem on antud oma olekumudeliga:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Leida süsteemi impulsskajade maatriks $H(t)$.

$$H(t) = Ce^{At}B$$

8. SIIRDEPROTSESSIDE ARVUTUS DIFERENTSIAALVÕRRANDIST

Selle peatüki teoreetilisi aluseid saab leida K. Ogata raamatust ptk. 2-7.

Sisendi ja väljundi omavahelisi seoseid kirjeldab pidevaja süsteemi puhul diferentsiaalvõrrand

$$f\left(y, \frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{d^n y}{dt}, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^m u}{dt}\right) = 0 \quad (*)$$

kus $m \le n$

Kui diferentsiaalvõrrand (*) on n-ndat järku, siis öeldakse, et süsteem on n-ndat järku.

Lähtudes funktsioonist (*), on võimalik süsteemi täielikult analüüsida ning arvutada siirdeprotsessid ka mittenulliste algtingimuste puhul. n-ndat järku diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks on vaja n algolekut.

Kui f on lineaarne funktsioon, siis diferentsiaalvõrrandi (*) poolt kirjeldav süsteem on lineaarne n-ndat järku pidevaja süsteem.

n-ndat järku diferentsiaalvõrrand on esitatav ka n esimest järku diferentsiaalvõrrandite süsteemi abil.

Süsteemi kirjeldav mudel jaguneb kaheks osaks. Süsteemi sisend tekitab sundliikumist ning vabaliikumine on põhjustatud mittenulliste algtingimuste poolt ($y(0) \neq 0$ ja $x(0) \neq 0$).

Sundliikumise Laplace'i teisendus on ülekandefunktsioon korda sisendi Laplac'i teisendus:

$$Y_s(s) = H(s) \cdot U(s)$$

Näidisülesanne N 8.1

Süsteem on antud diferentsiaalvõrrandiga

$$\begin{cases} \dfrac{d^3 y(t)}{dt^3} + y(t) = 2\dfrac{d^2 u(t)}{dt^2} + 3\dfrac{du(t-1)}{dt} \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \\ u(t) = \sin t \end{cases}$$

Leida impulsskaja $h(t)$, hüppekaja $g(t)$, sundliikumise võrrand $y_s(t)$, vabaliikumise võrrand $y_v(t)$, süsteemi väljund $y(t)$ ning väljundi alg- ja lõppväärtused $y(0)$, $y(\infty)$.

Lahenduskäik

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \overset{L}{\Leftrightarrow} s^n X(s) - s^{n-1} x(0) - s^{n-2} \frac{dx}{dt}(0) - \ldots - s\frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}}(0) - \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}(0)$$

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} \overset{L}{\Leftrightarrow} s^3 Y(s) - s^2 y(0) - s\dot{y}(0) - \ddot{y}(0) = s^3 Y(s) - s^2$$

$$u(t) = \sin t \Rightarrow u(0) = \sin 0 = 0$$

$$\dot{u}(t) = \sin' t = \cos t \Rightarrow \dot{u}(0) = \cos 0 = 1$$

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} \overset{L}{\Leftrightarrow} s^2U(s) - su(0) - \dot{u}(0) = s^2U(s) - 1$$
$$\frac{du(t-1)}{dt} \overset{L}{\Leftrightarrow} e^{-s}L\left(\frac{du(t)}{dt}\right) = e^{-s}\left(sU(s) - u(0)\right) = e^{-s}sU(s)$$

Rakendades Laplace'i teisendust diferentsiaalvõrrandile, saame

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + y(t) = 2\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 3\frac{du(t-1)}{dt}$$
$$\Downarrow L$$
$$s^3Y(s) - s^2 + Y(s) = 2s^2U(s) - 2 + 3e^{-s}sU(s)$$
$$Y(s)\left(s^3 + 1\right) = U(s)\left(2s^2 + 3se^{-s}\right) + s^2 - 2$$
$$Y(s) = \frac{2s^2 + 3se^{-s}}{s^3 + 1}U(s) + \frac{s^2 - 2}{s^3 + 1}$$
$$u(t) = \sin t \overset{L}{\Leftrightarrow} U(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$
$$Y(s) = \underbrace{\frac{2s^2 + 3se^{-s}}{\left(s^3 + 1\right)\left(s^2 + 1\right)}}_{\text{sundliikumine}} + \underbrace{\frac{s^2 - 2}{s^3 + 1}}_{\text{vabaliikumine}}$$

Sundliikumine näitab, kuidas süsteemi sisend mõjutab tema väljundit. Vabaliikumine näitab süsteemi väljundi sõltuvust algtingimustest. Ülekandekarakteristikute eelduseks on nullised algtingimused. Järelikult, hüpekaja ja impulsskaja arvutamisel me ei arvesta vabaliikumist. Ainult sundliikumine, kus $u(t) = \mathbf{1}(t)$ hüppekaja puhul ja $u(t) = \sigma(t)$ impulsskaja puhul.

Järelikult,

$$H(s) = \frac{2s^2 + 3se^{-s}}{s^3 + 1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{2s-1}{s^2 - s + 1}\right) + \left(-\frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{s^2 - s + 1}\right)e^{-s} =$$
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{s+1} + 2\frac{s - 0{,}5}{(s - 0{,}5)^2 + \left(\sqrt{3}/2\right)^2}\right) +$$
$$+ \left(-\frac{1}{s+1} + \frac{s - 0{,}5}{(s - 0{,}5)^2 + \left(\sqrt{3}/2\right)^2} + \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}/2}{(s - 0{,}5)^2 + \left(\sqrt{3}/2\right)^2}\right)e^{-s}$$
$$h(t) = L^{-1}\left(H(s)\right) = \frac{2}{3}\left(e^{-t} + 2e^{0{,}5t}\cos\left(\sqrt{3}/2\, t\right)\right)\cdot \mathbf{1}(t) +$$
$$+ \left(-e^{-(t-1)} + e^{0{,}5(t-1)}\cos\left(\sqrt{3}/2\,(t-1)\right) + \sqrt{3}e^{0{,}5(t-1)}\sin\left(\sqrt{3}/2\,(t-1)\right)\right)\cdot \mathbf{1}(t-1)$$
$$h(0) = \frac{2}{3}\left(1 + 2\right) = 2$$
$$h(\infty) = \infty$$

$$g(t)=L^{-1}\left(\frac{H(s)}{s}\right)=L^{-1}\left(\frac{2s^2+3se^{-s}}{s\left(s^3+1\right)}\right)$$

$$\frac{H(s)}{s}=\frac{2s^2+3se^{-s}}{s\left(s^3+1\right)}=\frac{2s}{s^3+1}+\frac{3e^{-s}}{s^3+1}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{s+1}+\frac{s+1}{s^2-s+1}\right)+\left(\frac{1}{s+1}-\frac{s-2}{s^2-s+1}\right)e^{-s}=$$

$$=-\frac{2}{3}\frac{1}{s+1}+\frac{2}{3}\frac{s-0{,}5}{(s-0{,}5)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}/2}{(s-0{,}5)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}+$$

$$+\left(\frac{1}{s+1}-\frac{s-0{,}5}{(s-0{,}5)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}+\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}/2}{(s-0{,}5)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}\right)e^{-s}\overset{L}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{L}{\Leftrightarrow}g(t)=\left(-\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{0{,}5t}\cos\left(\sqrt{3}/2\ t\right)+\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{0{,}5t}\sin\left(\sqrt{3}/2\ t\right)\right)\cdot\mathbf{1}(t)+$$

$$+\left(e^{-(t-1)}-e^{0{,}5(t-1)}\cos\left(\sqrt{3}/2\,(t-1)\right)+\sqrt{3}e^{0{,}5(t-1)}\sin\left(\sqrt{3}/2\,(t-1)\right)\right)\cdot\mathbf{1}(t-1)$$

Saab kontrollida, et $h(t)=g'(t)$.

Siirdeprotsessi kirjeldavates valemites esineb eksponent positiivses astmes $e^{0{,}5t}$, järelikult on antud süsteem mittestabiilne ja piirväärtusteoreemid ei kehti.

Kui $u(t)=\sin t$, siis leiame süsteemi väljundi $y(t)$, eeldades mittenulliseid algtingimusi:

$$y(t)=y_s(t)+y_v(t)$$

$$Y_s(s)=\frac{2s^2+3se^{-s}}{\left(s^3+1\right)\left(s^2+1\right)}=\frac{2s^2}{\left(s^3+1\right)\left(s^2+1\right)}+\frac{3s}{\left(s^3+1\right)\left(s^2+1\right)}e^{-s}$$

$$\frac{2s^2}{\left(s^3+1\right)\left(s^2+1\right)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+1}+\frac{2s+2}{s^2-s+1}-\frac{3s+3}{s^2+1}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+1}+2\frac{s-0{,}5+1{,}5}{(s-0{,}5)^2+3/4}-3\frac{s+1}{s^2+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{s+1}+\frac{2}{3}\frac{s-0{,}5}{(s-0{,}5)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}/2}{(s-0{,}5)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}-\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}\overset{L}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{L}{\Leftrightarrow}\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{0{,}5t}\cos\left(\sqrt{3}/2\ t\right)+\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{0{,}5t}\sin\left(\sqrt{3}/2\ t\right)-\cos t-\sin t$$

$$\frac{3s}{(s^3+1)(s^2+1)}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{s+1}-2\frac{s-2}{s^2-s+1}+\frac{3s-3}{s^2+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{s+1}-2\frac{s-0{,}5-1{,}5}{(s-0{,}5)^2+3/4}+3\frac{s}{s^2+1}-3\frac{1}{s^2+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{s+1}-2\frac{s-0{,}5}{(s-0{,}5)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}+\frac{3}{(s-0{,}5)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}+3\frac{s}{s^2+1}-3\frac{1}{s^2+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{s+1}-2\frac{s-0{,}5}{(s-0{,}5)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}+2\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}/2}{(s-0{,}5)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}+3\frac{s}{s^2+1}-3\frac{1}{s^2+1}\right)\overset{L}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{L}{\Leftrightarrow}\frac{1}{2}\left(-e^{-t}-2e^{0{,}5t}\cos\left(\sqrt{3}/2\;t\right)+2\sqrt{3}e^{0{,}5t}\sin\left(\sqrt{3}/2\;t\right)+3\cos t-3\sin t\right)$$

$$y_s(t)=L^{-1}(Y_s(s))=L^{-1}\left(\frac{2s^2+3se^{-s}}{(s^3+1)(s^2+1)}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(3e^{-t}+2e^{0{,}5t}\cos\left(\sqrt{3}/2\;t\right)+2\sqrt{3}e^{0{,}5t}\sin\left(\sqrt{3}/2\;t\right)-3\cos t-3\sin t\right)\cdot\mathbf{1}(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(-e^{-(t-1)}-2e^{0{,}5(t-1)}\cos\left(\sqrt{3}/2\;(t-1)\right)+2\sqrt{3}e^{0{,}5(t-1)}\sin\left(\sqrt{3}/2\;(t-1)\right)+3\cos(t-1)-\right.$$

$$\left.-3\sin(t-1)\right)\cdot\mathbf{1}(t-1)$$

$$Y_v(s)=\frac{s^2-2}{s^3+1}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{s+1}+\frac{4s-5}{s^2-s+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{s+1}+4\frac{s-0{,}5}{(s-0{,}5)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}-2\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}/2}{(s-0{,}5)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}\right)$$

$$Y_v(s)\overset{L}{\Leftrightarrow}y_v(t)$$

$$y_v(t)=\frac{1}{3}\left(-e^{-t}+4e^{0{,}5t}\cos\left(\sqrt{3}/2\;t\right)-2\sqrt{3}e^{0{,}5t}\sin\left(\sqrt{3}/2\;t\right)\right)\cdot\mathbf{1}(t)$$

$$y(t)=y_s(t)+y_v(t)=\frac{1}{3}\left(2e^{-t}+6e^{0{,}5t}\cos\left(\sqrt{3}/2\;t\right)-3\cos t-3\sin t\right)\cdot\mathbf{1}(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(-e^{-(t-1)}-2e^{0{,}5(t-1)}\cos\left(\sqrt{3}/2\;(t-1)\right)+2\sqrt{3}e^{0{,}5(t-1)}\sin\left(\sqrt{3}/2\;(t-1)\right)+3\cos(t-1)-\right.$$

$$\left.-3\sin(t-1)\right)\cdot\mathbf{1}(t-1)$$

$$y(0)=\frac{1}{3}(2+6-3)=\frac{5}{3}$$

$$y(\infty)=\infty$$

Näidisülesanne N 8.2

Lineaarse pidevaja süsteemi ülekandefunktsioon $H(s)=\dfrac{s}{s^2+3s+2}$. Leiame selle süsteemi vabaliikumise võrrandi $y_v(t)$, kui on teada, et $y(0)=1$ ja $\dot{y}(0)=-1$ ning $u(t)=\sin t$.

Lahenduskäik

$$H(s)=\frac{s}{s^2+3s+2}=\frac{Y(s)}{U(s)},\ \text{kui}\ \ y(0)=\dot{y}(0)=u(0)=0$$
$$s^2Y(s)-sy(0)-\dot{y}(0)+3\big(sY(s)-y(0)\big)+2Y(s)=sU(s)-u(0)$$
$$Y(s)\big(s^2+3s+2\big)-sy(0)-\dot{y}(0)-3y(0)=sU(s)-u(0)$$
$$Y(s)\big(s^2+3s+2\big)=sU(s)+sy(0)+\dot{y}(0)+3y(0)-u(0)$$
$$Y(s)=\frac{s}{s^2+3s+2}U(s)+\frac{sy(0)+\dot{y}(0)+3y(0)-u(0)}{s^2+3s+2}$$

Tõepoolest, kui $y(0)=\dot{y}(0)=u(0)=0,$ siis $Y(s)=\dfrac{s}{s^2+3s+2}U(s)$ ja $\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{s}{s^2+3s+2}$.

Kui algtingimused on mittenullised, siis tekib vabaliikumine:

$$Y_v(s)=\frac{sy(0)+\dot{y}(0)+3y(0)-u(0)}{s^2+3s+2}=\frac{s-1+3-0}{s^2+3s+2}=\frac{s+2}{s^2+3s+2}=\frac{s+2}{(s+2)(s+1)}=\frac{1}{s+1}$$
$$y_v(t)=e^{-t}$$

Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks

IL 8.1

Süsteem on antud diferentsiaalvõrrandiga

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + \dfrac{dy(t)}{dt} = u(t-2) \\ y(0) = 2 \\ \dot{y}(0) = 0 \\ u(t) = e^{-(t-1)} \end{cases}$$

Leida sundliikumise võrrand $y_s(t)$, vabaliikumise võrrand $y_v(t)$, väljundi avaldis $y(t)$, väljundi väärtused $y(1)$, $y(0)$, $y(\infty)$ avaldisest $y(t)$, $y(0)$, $y(\infty)$ kontrolliks kasutage piirväärtusteoreeme.

IL 8.2

Süsteem on antud diferentsiaalvõrrandiga

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 4y(t) = \dfrac{du(t)}{dt} \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 2 \\ u(t) = \mathbf{1}(t-2) \end{cases}$$

Leida diferentsiaalvõrrandi Laplace'i kujutis $Y(s)$, impulsskaja $h(t)$, hüppekaja $g(t)$, sundliikumise võrrand $y_s(t)$, vabaliikumise võrrand $y_v(t)$, süsteemi väljund $y(t)$ ning väljundi väärtus alghetkel $y(0)$.

IL 8.3

Süsteem on antud diferentsiaalvõrrandiga

$$\begin{cases} \dfrac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}) = \dfrac{d^2u(t-3)}{dt^2} \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \\ \ddot{y}(0) = 0 \\ u(t) = e^{-2(t-1)} \end{cases}$$

Leida diferentsiaalvõrrandi Laplace'i kujutis $Y(s)$, sundliikumise võrrand $y_s(t)$, vabaliikumise võrrand $y_v(t)$, süsteemi väljundi avaldis $y(t)$, väljundi alg- ja lõppväärtused $y(0)$, $y(\infty)$ avaldisest $y(t)$, $y(0)$, $y(\infty)$ kontrolliks kasutage piirväärtusteoreeme.

IL 8.4

On antud lineaarse pidevaja süsteemi ülekandefunktsioon $H(s) = \dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)}$. Leida selle süsteemi väljundi Laplace'i kujutis $Y(s)$ ja piirväärtus $y(\infty)$, kui $y(0) = 1$ ja $\dot{y}(0) = 1$ ning $u(t) = 1 - e^{-t}$.

9. DISKREETAJA SÜSTEEMIDE ANALÜÜS

Selle peatüki teoreetilisi aluseid saab leida H. Sillamaa õpikust ptk. 4.

Sisendi ja väljundi omavahelisi seoseid diskreetaja süsteemis kirjeldab *n*-ndat järku diferentsiaalvõrrand

$$f\,(y(k),\ldots,y(k-n),u(k),\ldots,u(k-m))=0 \quad (*)$$

Lähtudes funktsioonist (*), on võimalik diskreetaja süsteemi täielikult analüüsida ning arvestada ka mittenulliseid algtingimusi.

Kui *f* on lineaarne funktsioon, siis diferentsiaalvõrrandi (*) poolt kirjeldatav diskreetaja süsteem on lineaarne *n*-ndat järku diskreetaja süsteem.

n-ndat järku diferentsiaalvõrrand on esitatav ka *n* esimest järku diferentsiaalvõrrandite süsteemi abil ja süsteem on esitatav ka olekumudeli kujul. Eeldades nulliseid algolekuid, saame leida ka ülekandemudeli ning ülekandekarakteristikud.

Näidisülesanne N 9.1

Diskreetset süsteemi kirjeldab lineaarse diferentsiaalvõrrandite süsteem. On antud ka olekute algväärtused ja diskreetne sisendsignaal:

$$\begin{cases} x_1(k+1)=\dfrac{1}{4}x_2(k)+u(k) \\ x_2(k+1)=-\dfrac{1}{2}x_1(k)+x_2(k)+u(k) \\ y(k)=x_1(k)+x_2(k) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0)=1 \\ x_2(0)=0 \end{cases} \qquad u(k)=1, \quad k\ge 0$$

Leiame selle süsteemi olekumudeli, väljundi väärtused $y[0]$, $y[1]$, $y[2]$, $y[3]$ ja $y[\infty]$ ning diskreetse ülekandefunktsiooni.

Lahenduskäik

Diskreetse olekumudeli üldkuju:

$$\begin{cases} X(k+1)=\Phi X(k)+\Gamma U(k) \\ Y(k)=CX(k)+DU(k) \end{cases}$$

Vaadeldav süsteem on teist järku SISO (ühe sisendiga ja ühe väljundiga) süsteem. Selle süsteemi puhul

$$X(k)=\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \text{ – siseolekute vektor, } X(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ – algolek}$$

$$\begin{cases} X(k+1)=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}X(k)+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}U(k) \\ Y(k)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}X(k)+\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}U(k) \end{cases}, \text{ järelikult } \Phi=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},\ \Gamma=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Esimene võimalus, kuidas leida väljundväärtusi, on kasutada olekumudelit:

$$Y(0) = CX(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$X(1) = \Phi X(0) + \Gamma U(0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$Y(1) = CX(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{3}{2}$$

$$X(2) = \Phi X(1) + \Gamma U(1) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Y(2) = CX(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{9}{8} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{17}{8}$$

$$X(3) = \Phi X(1) + \Gamma U(1) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{9}{8} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{23}{16} \end{bmatrix}$$

$$Y(3) = CX(3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{23}{16} \end{bmatrix} = \frac{43}{16} \text{ jne}$$

Seega, $y(0) = 1$, $y(1) = 1{,}5$, $y(2) = 2{,}125$, $y(3) \approx 2{,}69$ jne. Selle meetodiga võib $y(\infty)$ leidmine osutuda mõnikord väga keeruliseks.

Teine võimalus on rakendada **Z**-teisendust:

$$x(k+1) \overset{Z}{\Leftrightarrow} zX(z) - zx(0)$$

Rakendame **Z**-teisendust olekumudelile:

$$\begin{cases} X(k+1) = \Phi X(k) + \Gamma U(k) \\ Y(k) = CX(k) \end{cases} \overset{Z}{\Leftrightarrow} \begin{cases} zX(z) - zX(0) = \Phi X(z) + \Gamma U(z) \\ Y(z) = CX(z) \end{cases}$$

Siit saame

$$\begin{cases} zX(z) - \Phi X(z) = \Gamma U(z) + zX(0) \\ Y(z) = CX(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (zE - \Phi) X(z) = \Gamma U(z) + zX(0) \\ Y(z) = CX(z) \end{cases}, \quad \text{kus } E \text{ on ühikmaatriks}$$

$$\begin{cases} X(z) = (zE - \Phi)^{-1} \Gamma U(z) + (zE - \Phi)^{-1} zX(0) \\ Y(z) = CX(z) \end{cases}$$

Järelikult,

$$Y(z) = \underbrace{C(zE-\Phi)^{-1}\Gamma U(z)}_{\text{sundliikumine}} + \underbrace{C(zE-\Phi)^{-1}zX(0)}_{\text{vabaliikumine}}$$

Ülekandefunktsioon on süsteemi karakteristik nullistel algolekutel. Kui $X(0)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, siis $H(z)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}$.

Järelikult,

$$H(z)=C(zE-\Phi)^{-1}\Gamma$$

$$(zE-\Phi)^{-1}=\begin{bmatrix} z & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & z-1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{z(z-1)+\frac{1}{8}}\begin{bmatrix} z-1 & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & z\end{bmatrix}$$

$$C(zE-\Phi)^{-1}=\frac{1}{z(z-1)+\frac{1}{8}}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} z-1 & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{z-1-\frac{1}{2}}{z^2-z+\frac{1}{8}} & \dfrac{\frac{1}{4}+z}{z^2-z+\frac{1}{8}}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{z-\frac{3}{2}}{z^2-z+\frac{1}{8}} & \dfrac{z+\frac{1}{4}}{z^2-z+\frac{1}{8}}\end{bmatrix}$$

$$H(z)=C(zE-\Phi)^{-1}\Gamma=\begin{bmatrix}\dfrac{z-\frac{3}{2}}{z^2-z+\frac{1}{8}} & \dfrac{z+\frac{1}{4}}{z^2-z+\frac{1}{8}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\frac{2z-1{,}25}{z^2-z+0{,}125}$$

Siis leiame selle diskreetse süsteemi väljundi **Z**-teisenduse $Y(z)$:

$$Y(z)=H(z)U(z)+C(zE-\Phi)^{-1}zX(0)$$

$$C(zE-\Phi)^{-1}zX(0)=\begin{bmatrix}\dfrac{z^2-\frac{3}{2}z}{z^2-z+\frac{1}{8}} & \dfrac{z^2+\frac{1}{4}z}{z^2-z+\frac{1}{8}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{z^2-1{,}5z}{z^2-z+0{,}125}$$

$$u(k)=1,\quad k\ge 0 \overset{Z}{\Leftrightarrow} U(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)=\frac{2z-1{,}25}{z^2-z+0{,}125}\cdot\frac{z}{z-1}+\frac{z^2-1{,}5z}{z^2-z+0{,}125}=\frac{z(2z-1{,}25)+z(z-1)(z-1{,}5)}{(z^2-z+0{,}125)(z-1)}=$$

$$=\frac{2z^2-1{,}25z+z^3-2{,}5z^2+1{,}5z}{(z^2-z+0{,}125)(z-1)}=\frac{z^3-0{,}5z^2+0{,}25z}{z^3-2z^2+1{,}125z-0{,}125}=\frac{8z^3-4z^2+2z}{8z^3-16z^2+9z-1}$$

Jagades siis lugeja nimetajaga, esitame $Y(z)$ kujul

$$Y(z)=y_0+y_1z^{-1}+y_2z^{-2}+\ldots+y_nz^{-n}+\ldots=\sum_{i=0}^{\infty}y_iz^{-i}\text{ , kus } y(k)=y_k \quad \forall k\ge 0$$

k on takti number ja järelikult on see täisarv.

Jagame siis avaldise $Y(z)=\dfrac{8z^3-4z^2+2z}{8z^3-16z^2+9z-1}$ lugeja nimetajaga läbi.

Tulpjagamine:

$$
\begin{array}{l|l}
8z^3-4z^2+2z & 8z^3-16z^2+9z-1 \\
\hline
-\underline{8z^3-16z^2+9z-1} & 1+\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{17}{8}z^{-2}+\frac{43}{16}z^{-3}+\ldots \\
\qquad 12z^2-7z+1 & \\
\qquad -\underline{12z^2-24z+\frac{27}{2}-\frac{3}{2}z^{-1}} & \\
\qquad\qquad 17z-\frac{25}{2}+\frac{3}{2}z^{-1} & \\
\qquad\qquad -\underline{17z-34+\frac{153}{8}z^{-1}-\frac{17}{8}} & \\
\qquad\qquad\qquad \frac{43}{2}-\frac{141}{8}z^{-1}+\frac{17}{8} & \\
\qquad\qquad\qquad \ldots &
\end{array}
$$

$$Y(z)=1+\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{17}{8}z^{-2}+\frac{43}{16}z^{-3}+\ldots \text{ ning}$$

$$y(0)=1,\ \ y(1)=\frac{3}{2}=1{,}5,\ \ y(2)=\frac{17}{8}=2{,}125,\ \ y(3)=\frac{43}{16}\approx 2{,}69$$

Väärtuse $y(0)$ kontrollimiseks ning $y(\infty)$ leidmiseks kasutame piirväärtusteoreeme.

Piirväärtusteoreemid diskreetaja süsteemide jaoks:

$$\lim_{k\to 0+}x(k)=\lim_{z\to\infty}\frac{z-1}{z}X(z)$$

$$\lim_{k\to\infty}x(k)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}X(z)$$

$$y(0)=\lim_{z\to\infty}\frac{z-1}{z}\cdot\frac{8z^3-4z^2+2z}{8z^3-16z^2+9z-1}=\lim_{z\to\infty}\frac{z-1}{z}\cdot\frac{8z^3-4z^2+2z}{(8z^2-8z+1)(z-1)}=\lim_{z\to\infty}\frac{8z^2-4z+2}{8z^2-8z+1}=\frac{8}{8}=1$$

$$y(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\cdot\frac{8z^3-4z^2+2z}{(8z^2-8z+1)(z-1)}=\lim_{z\to 1}\frac{8z^2-4z+2}{8z^2-8z+1}=\frac{8-4+2}{8-8+1}=6$$

Näidisülesanne N 9.2

Diskreetaja süsteemi kirjeldav diferentsiaalvõrrandite süsteem:

$$\begin{cases} x_1(k+2)=x_2(k)+u(k) \\ x_2(k+1)=x_1(k)-2u(k) \\ y(k)=x_2(k) \end{cases} \qquad u(k)=\begin{cases} 1, \mathit{kui}\ k=0 \\ 0 \quad \forall k>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(0)=2 \\ x_1(1)=1 \\ x_2(0)=0 \end{cases}$$

Leiame selle süsteemi olekumudeli, ülekandefunktsiooni ja väljundi väärtused $y(k)$, $k = 0,\ldots,5$

Lahenduskäik

Kuna $x_1(k+2) = x_2(k) + u(k)$ on teist järku diferentsiaalvõrrand, peame kolmanda siseoleku sisse viima.

Olgu $x_3(k+1) = x_1(k+1)$, siis

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_3(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) - 2u(k) \\ x_3(k+1) = x_2(k) + u(k) \\ y(k) = x_2(k) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = x_1(1) = 1 \end{cases}$$

Seega, olekumudel

$$\begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} U(k) \\ Y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X(k) \end{cases} \qquad X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ülekandefunktsioon:

$$H(z) = C(zE - \Phi)^{-1}\Gamma$$

$$(zE-\Phi)^{-1} = \begin{bmatrix} z & 0 & -1 \\ -1 & z & 0 \\ 0 & -1 & z \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z^3-1}\begin{bmatrix} z^2 & z & 1 \\ 1 & z^2 & z \\ z & 1 & z^2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{z^3-1}\begin{bmatrix} z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \\ 1 & z & z^2 \end{bmatrix}$$

$$C(zE-\Phi)^{-1}\Gamma = \frac{1}{z^3-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \\ 1 & z & z^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z^3-1}\begin{bmatrix} z & z^2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-2z^2+1}{z^3-1}$$

$$H(z) = \frac{-2z^2+1}{z^3-1}$$

Väljundi leidmiseks kasutame valemit $Y(z) = H(z)U(z) + C(zE-\Phi)^{-1}zX(0)$:

$$C(zE-\Phi)^{-1}zX(0) = \frac{z}{z^3-1}\begin{bmatrix} z & z^2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2z^2+z}{z^3-1}$$

$$u(k) = \delta(k) \overset{z}{\Leftrightarrow} U(z) = 1$$

$$Y(z) = \frac{-2z^2+1}{z^3-1} + \frac{2z^2+z}{z^3-1} = \frac{z+1}{z^3-1} = \frac{1}{z^2-z+1} = z^{-2} + z^{-3} + z^{-5} + \ldots$$

See tähendab, et $y(0) = y(1) = y(4) = 0$, $y(2) = y(3) = y(5) = 1$

Näidisülesanne N 9.3

Leida impulsskaja viis esimest diskreeti $h(1),\ h(2),\ h(3),\ h(4),\ h(5)$ neljal erineval meetodil, kui diskreetne süsteem on antud oma olekumudeliga:

$$\begin{cases} X(k+1) = \Phi X(k) + \Gamma U(k) \\ Y(k) = CX(k) + DU(k) \end{cases}$$

kus on teada maatriksid:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3{,}5 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = 0$$

algolek $X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja sisendsignaal $u(k) = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}$

Lahenduskäik

Meetod A (iteratsiooni meetod, kasutades olekumudelit)

$$X(k+1) = \Phi X(k) + \Gamma U(k) \qquad\qquad h(k) = CX(k)$$

Kuna tegemist on impulsskajaga, siis väljundsignaali tähistasime mitte üldkujul $Y(k)$, vaid $h(k)$. Kuna $D = 0$, siis olekumudeli teine võrrand lihtsustus.

$k = 0;\quad x(1) = \Phi X(0) + \Gamma U(0) =$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3{,}5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \qquad h(0) = CX(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$k = 1;\quad x(2) = \Phi X(1) + \Gamma U(1) =$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3{,}5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \qquad h(1) = CX(1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1$$

$k = 2;\quad x(3) = \Phi X(2) + \Gamma U(2) =$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3{,}5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 0 = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \end{bmatrix} \qquad h(2) = CX(2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} = 4{,}5$$

$k = 3;\quad x(4) = \Phi X(3) + \Gamma U(3) =$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3{,}5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 0 = \begin{bmatrix} 18 \\ 4{,}5 \end{bmatrix} \qquad h(3) = CX(3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \end{bmatrix} = 9$$

$k = 4;\quad x(5) = \Phi X(4) + \Gamma U(4) =$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3{,}5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 4{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 0 = \begin{bmatrix} 81 \\ -81 \end{bmatrix} \qquad h(4) = CX(4) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 4{,}5 \end{bmatrix} = 40{,}5$$

$k = 5$

$$h(5) = CX(5) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 81 \\ -81 \end{bmatrix} = 81$$

Meetodite B ja C ühine algus (diskreetse ülekandefunktsiooni leidmine)

$$H(z) = C[zE - \Phi]^{-1}\Gamma$$

$$\det[zE - \Phi] = \det\begin{bmatrix} z-4 & -2 \\ 3{,}5 & z+4 \end{bmatrix} = (z-4)(z+4) + 7 = z^2 - 9 = (z-3)(z+3)$$

$$[zE-\Phi]^{-1}=\frac{1}{(z-3)(z+3)}\begin{bmatrix} z+4 & 2 \\ -3{,}5 & z-4 \end{bmatrix}$$

$$H(z)=C[zE-\Phi]^{-1}\Gamma=[2 \quad 1]\frac{1}{\det}\begin{bmatrix} z+4 & 2 \\ -3{,}5 & z-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}=...=\frac{z+4{,}5}{(z-3)(z+3)}$$

Meetod B1 (korrutades **Z**-ga ja kasutades **Z**-teisendust)

Kuna $H(z)\overset{z}{\Leftrightarrow}h(k)$ ja **Z**-teisenduse tabelis on olemas selline rida $\frac{z}{z-a}\overset{z}{\Leftrightarrow}a^k$, siis tuleks ülekandefunktsioon jagada osamurdudeks (näiteks resiidide kaudu) nii, et lugejas oleks **Z**:

$$H(z)=\frac{z+4{,}5}{(z-3)(z+3)}=\frac{1{,}25}{z-3}-\frac{0{,}25}{z+3}$$

Korrutame võrrandi mõlemad pooled **Z**-ga. Hiljem (et midagi ei muutuks) tuleks teha jagamine **Z**-ga. Sellele aga vastab aja vallas nihutamine ühe takti võrra “tagasi”.

$$zH(z)=1{,}25\frac{z}{z-3}-0{,}25\frac{z}{z+3}$$

$h(k)$, mis vastaks **Z**-teisenduse kaudu $zH(z)$-le, on $1{,}25\times 3^k-0{,}25(-3)^k$; kui teeme nihutamise ühe takti võrra “tagasi”, siis saame, et $h(k)$, mis vastab **Z**-teisenduse kaudu $H(z)$-le, on $1{,}25\times 3^{k-1}-0{,}25(-3)^{k-1}$.

Arvutame meid huvitavaid impulsskaja diskreete saadud valemi kaudu:

$$h(k)=1{,}25\times 3^{k-1}-0{,}25(-3)^{k-1}, \qquad \text{kui } k>0$$

$k=1$ $\quad h(1)=1{,}25\times 3^0-0{,}25(-3)^0=1{,}25-0{,}25=1$

$k=2$ $\quad h(2)=1{,}25\times 3^1-0{,}25(-3)^1=3(1{,}25+0{,}25)=4{,}5$

$k=3$ $\quad h(3)=1{,}25\times 3^2-0{,}25(-3)^2=9(1{,}25-0{,}25)=9$

$k=4$ $\quad h(4)=1{,}25\times 3^3-0{,}25(-3)^3=27(1{,}25+0{,}25)=40{,}5$

$k=5$ $\quad h(5)=1{,}25\times 3^4-0{,}25(-3)^4=81(1{,}25-0{,}25)=81$

Meetod B2 (jagades **Z**-ga ja kasutades **Z**-teisendust)

Selleks et rakendada **Z**-teisendust, saab kasutada ka teist moodust – jagada ülekandefunktsiooni avaldise mõlemad pooled **Z**-ga läbi, tükeldada saadud avaldis osamurdudeks ja avaldada siis sellest avaldisest $H(z)$:

$$H(z)=\frac{z+4{,}5}{(z-3)(z+3)} \qquad \frac{H(z)}{z}=\frac{z+4{,}5}{z(z-3)(z+3)}=\frac{-\frac{1}{2}}{z}+\frac{\frac{2{,}5}{6}}{z-3}+\frac{\frac{1{,}5}{18}}{z+3}$$

$$H(z)=z\frac{-\frac{1}{2}}{z}+z\frac{\frac{2{,}5}{6}}{z-3}+z\frac{\frac{1{,}5}{18}}{z+3}=-\frac{1}{2}+\frac{1{,}25}{3}\left(\frac{z}{z-3}\right)+\frac{0{,}25}{3}\left(\frac{z}{z+3}\right)$$

Rakendame saadud avaldisele **Z**-teisendust ja saame

$$h(k)=\frac{1{,}25}{3}3^k+\frac{0{,}25}{3}(-3)^k$$

Märkus: **Z**-teisenduse kasutamisel kadus esimene liige ära $\boldsymbol{\delta}$ funktsiooni omaduste tõttu:

$$\boldsymbol{\delta}(k) = \begin{cases} 1 & \text{kui } k = 0 \\ 0 & \text{kui } k \neq 0 \end{cases}$$

On kerge näidata, et saadud valem on $h(k)$ arvutamiseks kergesti teisendatav kujule, mis saadi meetodiga **B1**. Seega on ka tulemused samad, mis meetodil **B1**.

$h(1) = 1$ $\quad h(2) = 4{,}5$ $\quad h(3) = 9$ $\quad h(4) = 40{,}5$ $\quad h(5) = 81$

Meetod C (arendades diskreetse ülekandefunktsiooni Lorani ritta)

Meetod rajaneb valemil

$$H(z) = h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \ldots + h(n)z^{-n} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)z^{-i}$$

Sellisele kujule saame ülekandefunktsiooni teisendada, jagades lugeja nimetajaga (nn tulp-jagamine):

$$\begin{array}{l|l}
z + 4{,}5 & z^2 - 9 \\ \cline{2-2}
\underline{z + 0 - 9z^{-1}} & 1z^{-1} + 4{,}5z^{-2} + 9z^{-3} + 40{,}5z^{-4} + 81z^{-5} \ldots \\
\quad _\,4{,}5 + 9z^{-1} & \\
\quad \underline{4{,}5 + 0z^{-1} - 40{,}5z^{-2}} & \\
\qquad _\,9z^{-1} + 40{,}5z^{-2} & \\
\qquad \underline{9z^{-1} + 0z^{-2} - 81z^{-3}} & \\
\qquad\quad _\,40{,}5z^{-2} + 81z^{-3} & \\
\qquad\quad \underline{40{,}5z^{-2} + 0z^{-3} - 364{,}5z^{-4}} & \\
\qquad\qquad _\,81z^{-3} + 364{,}5z^{-4} & \\
\qquad\qquad \underline{81z^{-3} + 0z^{-4} - 729z^{-5}} & \\
\qquad\qquad \ldots &
\end{array}$$

Nagu näha, annavad kõik neli meetodit samu tulemusi:

$h(1) = 1$ $\quad h(2) = 4{,}5$ $\quad h(3) = 9$ $\quad h(4) = 40{,}5$ $\quad h(5) = 81$

Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks

IL 9.1

On antud diskreetaja süsteemi ülekandefunktsioon

$$H(z)=\frac{z-0{,}5}{(z-0{,}1)(z-0{,}3)\left(3z^2+2z+1\right)}$$

Leida selle süsteemi hüppekaja $g(k)$ väärtused punktides $k=0,1,2,3,\infty$

IL 9.2

On antud diskreetaja süsteemi olekumudel

$$\begin{cases} x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(k) & x(0)=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\\ y(k)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x(k) & u(k)=1,\quad k\geq 0\end{cases}$$

Leida $y(k)$, k = 0, 1, 2, 3; ülekandefunktsioon $H(z)$; hüppekaja punktides $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$.

IL 9.3

On antud ühe sisendiga ja ühe väljundiga diskreetaja süsteemi kirjeldav diferentsiaalvõrrand

$$\begin{cases} x(k+3)=2u(k)-0{,}5x(k+2)\\ y(k)=x(k)\end{cases}$$

Leida selle süsteemi olekumudel, ülekandefunktsioon ja hüppekaja väärtused taktidel $k=0,1,2,3,\infty$

IL 9.4

Leida impulsskaja viis esimest diskreeti $h(1)$, $h(2)$, $h(3)$, $h(4)$, $h(5)$ neljal erineval meetodil, kui diskreetne süsteem on antud oma olekumudeliga:

$$\begin{cases} X(k+1)=\Phi X(k)+\Gamma U(k)\\ Y(k)=CX(k)\end{cases}\qquad \text{kus}\ \ \Phi=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1{,}5 & -2\end{bmatrix},\ \ \Gamma=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix},\ \ C=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$$

tingimusel, et $\begin{cases} x=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\\ u(k)=\begin{cases}1, & \text{kui}\quad k=0\\ 0, & \text{kui}\quad k\neq 0\end{cases}\end{cases}$

IL 9.5

Leida impulsskaja viis esimest diskreeti $h(1)$, $h(2)$, $h(3)$, $h(4)$, $h(5)$ neljal erineval meetodil, kui diskreetne süsteem on antud oma olekumudeliga:

$$\begin{cases} X(k+1)=\Phi X(k)+\Gamma U(k)\\ Y(k)=CX(k)\end{cases}\qquad \text{kus}\ \ \Phi=\begin{bmatrix}3 & -3\\ -2 & -2\end{bmatrix},\ \ \Gamma=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix},\ \ C=\begin{bmatrix}2 & 4\end{bmatrix}$$

tingimusel, et $\begin{cases} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ u(k) = \begin{cases} 1, & \text{kui} \quad k = 0 \\ 0, & \text{kui} \quad k \neq 0 \end{cases} \end{cases}$

IL 9.6

Leida impulsskaja viis esimest diskreeti $h(1),\ h(2),\ h(3),\ h(4),\ h(5)$ neljal erineval meetodil, kui diskreetne süsteem on antud oma olekumudeliga:

$$\begin{cases} X(k+1) = \Phi X(k) + \Gamma U(k) \\ Y(k) = CX(k) \end{cases} \qquad \text{kus} \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

tingimusel, et $\begin{cases} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ u(k) = \begin{cases} 1, & \text{kui} \quad k = 0 \\ 0, & \text{kui} \quad k \neq 0 \end{cases} \end{cases}$

10. SÜSTEEMIDE STABIILSUS, JUHITAVUS JA JÄLGITAVUS

Selle peatüki teoreetilisi aluseid saab leida H. Sillamaa õpikust ptk. 5.1, 5.3 ja 5.4.

Süsteemi stabiilsus näitab, kas süsteemi siseolekud, kui sisend puudub (või on võrdne nulliga) ja süsteemi algolek erineb tasakaaluolekust, lähevad teatud tasakaaluolekusse või mitte.

Juhitavus näitab, kas süsteemi saab viia etteantud olekusse suvalisest algolekust lõpliku aja jooksul. See omadus on väga oluline olekuregulaatori sünteesil (vt. peatükk 11).

Jälgitavus näitab, kas on võimalik määrata kõikide süsteemi olekute väärtused lõpliku aja jooksul, kui on teada ainult sisendi ja väljundi väärtused. See omadus on väga oluline olekutaastaja sünteesil (vt. peatükk 12).

Näidisülesanne N 10.1

On teada süsteemi diskreetaja olekumudel

$$\begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} U(k) \\ Y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(k) \end{cases}$$

Määrame selle süsteemi juhitavust, jälgitavust ja stabiilsust.

Lahenduskäik

Juhitavuse määramiseks peame leidma juhitavuse maatriksi.

Juhitavuse maatriks $Q_c = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \Phi^2\Gamma & \dots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix}$, kus n on süsteemi järk.

Kuna antud juhul on tegemist teist järku süsteemiga ($n = 2$), siis

$$Q_c = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Kui juhitavuse maatriksi astak on võrdne süsteemi järguga $rank(Q_c) = n,$ siis süsteem on täielikult juhitav.

Kui juhitavuse maatriksi astak on süsteemi järgust väiksem $rank(Q_c) < n,$ siis süsteemil on mittejuhitavad olekud.

Ainuke juhitavuse maatriksi Q_c 2×2 alammaatriks on see maatriks ise.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} - 2 = -\frac{9}{4} \neq 0$$

Järelikult, $rank(Q_c) = 2$ ning antud süsteem on täielikult juhitav.

Jälgitavuse määramiseks paneme kirja jälgitavuse maatriksi:

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ C\Phi^2 \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix}, \text{ kus } n \text{ on süsteemi järk.}$$

Analoogiliselt juhitavuse määramisega: kui jälgitavuse maatriksi astak on võrdne süsteemi järguga $rank(Q_o) = n,$ siis süsteem on täielikult jälgitav.

Kui jälgitavuse maatriksi astak on süsteemi järgust väiksem $rank(Q_o) < n,$ siis süsteemil on mittejälgitavad olekud.

Vaadeldava teist järku süsteemi jaoks $Q_o = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ning $rank(Q_0) = 2.$ Seega, antud süsteem on ka täielikult jälgitav.

Stabiilsuse määramiseks kasutame Ljapunovi kriteeriumit. Selleks leiame süsteemi poolused:

$$\det(zE - \Phi) = \det \begin{bmatrix} z-1 & -1 \\ \frac{1}{4} & z \end{bmatrix} = z^2 - z + \frac{1}{4} = \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 = 0$$

$$z_1 = z_2 = \frac{1}{2}$$

Mõlemad poolused paiknevad ühikringi sees ja järelikult on antud diskreetaja süsteem stabiilne.

Näidisülesanne N 10.2

On antud pidevaja süsteemi kirjeldav diferentsiaalvõrrandite süsteem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -0{,}02x_1 + u_1 \\ \dot{x}_2 = 0{,}01x_1 - 0{,}01x_2 + 0{,}01u_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 \\ y = x_3 \end{cases}$$

Kontrollime süsteemi juhitavust, jälgitavust ja stabiilsust.

Lahenduskäik

Süsteemi olekumudel:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -0{,}02 & 0 & 0 \\ 0{,}01 & -0{,}01 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}01 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U(t) \\ Y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X(t) \end{cases}$$

Süsteemi juhitavuse maatriks:

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}02 & 0 & 4\cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0{,}01 & 0{,}01 & -1\cdot 10^{-4} & -3\cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}01 & 0{,}01 & -1\cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Leidub vähemalt üks maatriksi Q_c 3×3 alammaatriks, mille determinant on nullist erinev:

$$\det\begin{bmatrix} 0 & -0{,}02 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}01 & -1\cdot 10^{-4} \\ 0 & 0 & 0{,}01 \end{bmatrix} = 2\cdot 10^{-6} \neq 0$$

Järelikult, $rank(Q_c) = 3$ ja seega on süsteem täielikult juhitav.

Süsteemi jälgitavuse maatriks:

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}01 & -0{,}01 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(Q_0) = -0{,}01 \neq 0$$

Seega on süsteem täielikult jälgitav.
Stabiilsuse kontrollimiseks leiame süsteemi poolused:

$$\det(sE - A) = \det\begin{bmatrix} s+0{,}02 & 0 & 0 \\ 0{,}01 & s+0{,}01 & 0 \\ 0 & 1 & s \end{bmatrix} = s(s+0{,}02)(s+0{,}01) = 0$$

Seega, poolused on $\lambda_1 = -0{,}02$, $\lambda_2 = -0{,}01$, $\lambda_1 = 0$. Kuna üks poolustest asub imaginaarteljel, siis süsteem on mitteasümptootiliselt stabiilne.

Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks

IL 10.1

Kontrollida süsteemi $\begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} U(k) \\ Y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(k) \end{cases}$ juhitavust, jälgitavust ja stabiilsust.

IL 10.2

Kontrollida süsteemi $\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} U(t) \\ Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} X(t) \end{cases}$ juhitavust, jälgitavust ja stabiilsust.

IL 10.3

Süsteemi impulsskaja on $h(t) = e^{-t} + te^{-2t}$. Kas süsteem on stabiilne?

IL 10.4

Süsteem on antud diferentsiaalvõrrandiga

$$\ddot{x}(t) = u(t) - x(t)$$

Leidke süsteemi poolused. Kas süsteem on stabiilne?

IL 10.5

Määrata süsteemi stabiilsus, juhitavus ja jälgitavus, kui süsteem on antud oma kolme maatriksiga:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 6 & -8 & 0 \\ 3 & 3 & -8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Joonistada süsteemi olekugraaf.

IL 10.6

Määrata süsteemi stabiilsus, juhitavus ja jälgitavus, kui süsteem on antud oma kolme maatriksiga:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 5 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Joonistada süsteemi olekugraaf.

IL 10.7

Määrata süsteemi stabiilsus, juhitavus ja jälgitavus, kui süsteem on antud oma kolme maatriksiga:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 6 & -7 & 0 \\ 3 & 3 & -7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Joonistada süsteemi olekugraaf.

11. STABILISEERIMISSÜSTEEM EHK OLEKUREGULAATOR

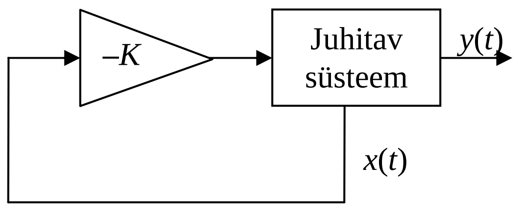
Selle peatüki teoreetilisi aluseid saab leida K. Ogata raamatust ptk. 12-1; ptk. 12-4.

Kui süsteem ei ole stabiilne, aga on juhitav (vt. peatükk 10), siis seda on võimalik stabiliseerida, kasutades negatiivset tagasisidet. Kui süsteem on juhitav, siis seda on võimalik viia ka etteantud olekusse. Kui tagasisides ei ole integraatorit, võib tekkida staatiline viga.

Näidisülesanne N 11.1

On antud süsteem, mille olekuvõrrandi maatriksid on

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\text{ ning algolek } x(0)=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$



Kontrollime selle süsteemi stabiilsust ja kui süsteem on mittestabiilne, projekteerime negatiivse tagasisidega stabiliseerimissüsteemi $u(t)=-Kx(t)$ niimoodi, et uus suletud süsteem oleks stabiilne ja selle siirdeprotsessi aeg oleks kolmest sekundist väiksem ($t_s \le 3$). Tagasiside on oleku järgi. Vastav ühendus on näidatud joonisel. Siin on $-K$ lihtsalt maatrikskorrutise $-Kx(t)$ realiseeriv plokk. Seejärel kontrollime tagasisidestatud süsteemi stabiilsust ja leiame väljundi piirväärtuse $y(\infty)$.

Lahenduskäik

Antud süsteemi stabiilsuse kontroll:

$$\det(sE-A)=\begin{bmatrix}s-1 & 0\\ -2 & s-3\end{bmatrix}=(s-1)(s-3)=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=1, \lambda_2=3$$

$\lambda_1, \lambda_2>0,$ järelikult on süsteem mittestabiilne.

Selleks et stabiliseerimissüsteem oleks realiseeritav, peab esialgne süsteem olema juhitav. Kontrollime süsteemi juhitavust.

Juhitavuse kontroll:

$$Q_c=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\qquad rank(Q_c)=2$$

Süsteem on juhitav.

Süsteemi käitumist määravad tema poolused ehk karakteristliku polünoomi juured. Suletud süsteem on teist järku. Selle süsteemi soovitav karakteristlik polünoom on $\varphi(s)=s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$, kus ξ $(0<\xi<1)$ on sumbuvus ja ω_n on omavõnke(resonants-)sagedus.

Siis poolused

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2\omega_n^2 - \omega_n^2}$$

Selleks et süsteem oleks stabiilne, peab pooluste reaalne osa olema negatiivne ehk $\xi\omega_n > 0.$

Kuna $0 < \xi < 1,$ siis $\omega_n > 0.$

Siirdeprotsessi aeg $t_s \approx \dfrac{4{,}6}{\xi\omega_n}$. Kui $\xi\omega_n = 2,$ siis $t_s \approx 2{,}3\text{sec} < 3\text{sec}.$

Võime valida $\xi = 0{,}5$ ja $\omega_n = 4.$ Siis soovitav suletud süsteemi karakteristlik polünoom $\varphi(s) = s^2 + 4s + 16$.

Olekumudelist teame, et $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$ Kui $u(t) = -Kx(t),$ siis $\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t)$.

Rakendades Laplace'i teisendust, saame

$$sX(s) - x(0) = AX(s) - BKX(s)$$
$$(sE - A + BK)X(s) = x(0)$$

$X(s) = (sE - A + BK)^{-1} x(0)$ – suletud süsteemi vabaliikumise võrrand.

Sellest võrrandist avaldub karakteristlik polünoom järgmiselt:

$$\varphi(s) = \det(sE - A + BK)$$

Leiame siis sellise vektori $K = [k_1 \quad k_2]$, et $\varphi(s) = \det(sE - A + BK) = s^2 + 4s + 16.$

$$\det(sE - A + BK) = \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] \right| = \begin{vmatrix} s-1+k_1 & k_2 \\ -2 & s-3 \end{vmatrix} =$$
$$= s^2 + s(k_1 - 4) + 3 - 3k_1 + 2k_2 = s^2 + 4s + 16$$

Lahendades lineaarsete võrrandite süsteemi (2 võrrandit, 2 tundmatut), leiame k_1 ja k_2 :

$$\begin{cases} k_1 - 4 = 4 \\ 3 - 3k_1 + 2k_2 = 16 \end{cases} \Rightarrow k_1 = 8, \;\; k_2 = 18{,}5$$
$$K = [k_1 \quad k_2] = [8 \quad 18{,}5]$$

Kontrollime suletud süsteemi stabiilsust:

$$X(s) = (sE - A + BK)^{-1} x(0)$$
$$Y(s) = CX(s) = C(sE - A + BK)^{-1} x(0)$$

Siit on näha, et suletud süsteemi poolused on võrrandi $\det(sE - A + BK) = 0$ juured.

$$\det(sE - A + BK) = s^2 + 4s + 16 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 \;\; = -2 \pm 2\sqrt{1-4} = -2 \pm 2\sqrt{3}i$$

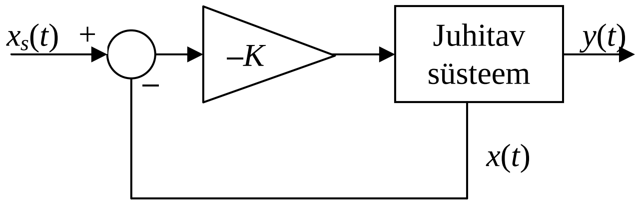
Mõlemate pooluste reaalne osa on negatiivne. Järelikult on suletud süsteem stabiilne!

$$Y(s) = CX(s) = C(sE - A + BK)^{-1} x(0) = \frac{1}{s^2 + 4s + 16} [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} s-3 & -k_2 \\ 2 & s-1+k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{s^2 + 4s + 16} [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} s-3 & -18{,}5 \\ 2 & s+7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{s+56}{s^2 + 4s + 16} [-s+5 \quad s+25{,}5] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{s+56}{s^2 + 4s + 16}$$

Piirväärtusteoreemiga leiame

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^2 + 56s}{s^2 + 4s + 16} = 0$$

Näidisülesanne N 11.2



On antud pidevaja süsteem, mille olekuvõrrandi maatriksid on

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ning algolek } x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Projekteerime sellise olekuregulaatori, kus $u(t) = K[x_s(t) - x(t)]$. Kontrollime juhtimissüsteemi sobivust, kui $x_s = \begin{bmatrix} 2 \cdot \mathbf{1}(t) \\ e^{-t} \end{bmatrix}$

Lahenduskäik

Eelmises näites kontrollisime, et antud süsteem on mittestabiilne ja juhitav.

Kõigepealt peame valima soovitud suletud süsteemi karakteristliku polünoomi $\varphi(s)$.

Kui suletud süsteemi karakteristlik polünoom on $\varphi(s) = s^2 + 4s + 16 = (s+2)^2 + 12$, siis see süsteem on stabiilne ja võnkuv ning $\lim_{t\to\infty}(x_s(t) - x(t)) \to 0$.

Olekuvõrrand: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$.

Juhtimissüsteemi struktuuri kohaselt $u(t) = K[x_s(t) - x(t)]$.

Siis $\dot{x}(t) = Ax(t) + BK[x_s(t) - x(t)]$.

Rakendades Laplace'i teisendust, saame

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BK(X_s(s) - X(s))$$

$$sX(s) - AX(s) + BKX(s) = BKX_s(s) + x(0)$$
$$(sE - A + BK)X(s) = BKX_s(s) + x(0)$$
$$X(s) = (sE - A + BK)^{-1} BKX_s(s) + (sE - A + BK)^{-1} x(0)$$

$$\det(sE - A + BK) = \begin{vmatrix} s - 1 + k_1 & k_2 \\ -2 & s - 3 \end{vmatrix} = s^2 + s(k_1 - 4) + 3 - 3k_1 + 2k_2 = s^2 + 4s + 16$$

$K = [8 \;\; 18{,}5]$, järelikult sobib selle juhtimisülesande lahendamiseks sama regulaator *K*, mis oli arvutatud eelmises näites, sest juhitav objekt ja suletud süsteemi soovitud karakteristlik polünoom on samad.

Suletud süsteemi analüüs:

kontrollime regulaatori sobivust.

$$(sE - A + BK)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 4s + 16}\begin{bmatrix} s-3 & -k_2 \\ 2 & s-1+k_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+4s+16}\begin{bmatrix} s-3 & -18{,}5 \\ 2 & s+7 \end{bmatrix}$$

$$x_s(t) = \begin{bmatrix} 2\cdot 1(t) \\ e^{-t} \end{bmatrix} \overset{L}{\Leftrightarrow} X_s(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s} \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$(sE - A + BK)^{-1} BKX_s(s) = \frac{1}{s^2+4s+16}\begin{bmatrix} s-3 & -18{,}5 \\ 2 & s+7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}[8 \quad 18{,}5]\begin{bmatrix} \frac{2}{s} \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^2+4s+16}\begin{bmatrix} s-3 & -18{,}5 \\ 2 & s+7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}[8 \quad 18{,}5]\begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+4s+16}\begin{bmatrix} s-3 \\ 2 \end{bmatrix}\left(\frac{16}{s} + \frac{18{,}5}{s+1}\right) =$$

$$= \frac{34{,}5s + 16}{s(s+1)(s^2+4s+16)}\begin{bmatrix} s-3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{34{,}5s^2 - 34{,}5s - 48}{s(s+1)(s^2+4s+16)} \\ \frac{69s+32}{s(s+1)(s^2+4s+16)} \end{bmatrix}$$

Kuna $x(0) \neq 0$, siis

$$(sE - A + BK)^{-1} x(0) = \frac{1}{s^2+4s+16}\begin{bmatrix} s-3 & -18{,}5 \\ 2 & s+7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+4s+16}\begin{bmatrix} s-40 \\ 2s+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-40}{s^2+4s+16} \\ \frac{2s+16}{s^2+4s+16} \end{bmatrix}$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} \frac{34{,}5s^2 - 34{,}5s - 48}{s(s+1)(s^2+4s+16)} + \frac{s-40}{s^2+4s+16} \\ \frac{69s+32}{s(s+1)(s^2+4s+16)} + \frac{2s+16}{s^2+4s+16} \end{bmatrix}$$

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0}\begin{bmatrix} \frac{34{,}5s^2 - 34{,}5s - 48}{(s+1)(s^2+4s+16)} + \frac{s(s-40)}{s^2+4s+16} \\ \frac{69s+32}{(s+1)(s^2+4s+16)} + \frac{s(2s+16)}{s^2+4s+16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{48}{16} \\ \frac{32}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_s(\infty) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_s(\infty) - x(\infty) = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Juhtimissüsteem läheb stabiilseks, aga juhtimisel jääb staatiline viga, sest $x_s(\infty) \neq x(\infty)$.

Näidisülesanne N 11.3

On antud diskreetne teist järku süsteem:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 10 & -5 \end{bmatrix} \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Arvutame sellise regulaatori $u(k) = -Kx(k)$, et suletud süsteem oleks finiitne (s.t karakteristlik polünoom $\varphi(z) = z^2$ – kõige kiirem diskreetne juhtimissüsteem).

Lahenduskäik

$$\det(zE - \Phi) = \begin{vmatrix} z-5 & -5 \\ -10 & z+5 \end{vmatrix} = (z-5)(z+5) - 50 = z^2 - 75 = 0 \quad \Rightarrow z_{1,2} = \pm 5\sqrt{3}$$

Poolused paiknevad ühikringist väljaspool. Järelikult on antud diskreetne süsteem mittestabiilne.

Stabiliseerimissüsteemi arvutus:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$
$$x(k+1) = \Phi x(k) - \Gamma K x(k)$$

$$\Updownarrow Z$$
$$zX(z) - zx(0) = \Phi X(z) - \Gamma K X(z)$$
$$zX(z) - \Phi X(z) + \Gamma K X(z) = zx(0)$$

$zX(z) = (zE - \Phi + \Gamma K)^{-1} zx(0)$ - suletud süsteemi vabaliikumise võrrand.

$$\phi(z) = \det(zE - \Phi + \Gamma K) = \begin{vmatrix} z-5+k_1 & -5+k_2 \\ -10-k_1 & z+5-k_2 \end{vmatrix} = (z-5+k_1)(z+5-k_2) + (10+k_1)(-5+k_2) =$$
$$= z^2 + z(k_1 - k_2) + 15k_2 - 75$$
$$z^2 + z(k_1 - k_2) + 15k_2 - 75 = z^2 \;\Rightarrow\; k_1 = k_2 = 5 \qquad K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Suletud süsteemi analüüs:

$$X(z) = (zE - \Phi + \Gamma K)^{-1} x(0) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ -15 & z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{z^2} \begin{bmatrix} z & 0 \\ 15 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{z} \\ \dfrac{-4z+75}{z^2} \end{bmatrix}$$

$x(\infty)$ leiame piirväärtusteoreemist:

$$x(\infty) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} \begin{bmatrix} \frac{5}{z} \\ \frac{-4z+75}{z^2} \end{bmatrix} = \lim_{z\to 1} \begin{bmatrix} \frac{5(z-1)}{z^2} \\ \frac{(z-1)(-4z+75)}{z^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(k+1) = (\Phi - \Gamma K)x(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 15 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

$$x(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 15 & 0 \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 15 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 75 \end{bmatrix}$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 15 & 0 \end{bmatrix} x(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 15 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ jne}$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \forall k \geq 2$$

Kuna teist järku juhtimissüsteem on finiitne, lähevad tema siseolekud paika kahe taktiga.

Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks

IL 11.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0{,}2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \varphi(s) = s^2 - 2s + 1$$

Kontrollige, kas pidevaja süsteem on stabiilne? Kui süsteem on mittestabiilne, siis sünteesige stabiliseerimissüsteem $u(t) = -Kx(t)$, kui on võimalik.

IL 11.2

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kontrollige, kas antud pidevaja süsteem on stabiilne. Kui ei ole, siis sünteesige stabiliseerimissüsteem $u(t) = -Kx(t)$, et suletud süsteemi poolused oleksid $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$. Leidke $x(\infty)$, kui $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

IL 11.3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0{,}2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sünteesige olekuregulaator $u(t) = K\left[x_s(t) - x(t)\right]$.

Antud hulgast valige selline karakteristlik polünoom, mille puhul juhtimissüsteem on kõige kiirem:

$$\begin{cases} \varphi(s) = s^2 - s + 4 \\ \varphi(s) = s^2 - 4s + 4 \\ \varphi(s) = s^2 - 4 \\ \varphi(s) = s^2 + 4s + 4 \\ \varphi(s) = s^2 + 5s + 6 \\ \varphi(s) = s^2 + 9s + 20 \end{cases}$$

Leidke $x(\infty)$, kui $x_s(t) = \begin{bmatrix} 2 \cdot \mathbf{1}(t) \\ -\mathbf{1}(t) \end{bmatrix}$

IL 11.4

$$\Phi = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Kontrollige, kas antud diskreetaja süsteem on stabiilne. Kui süsteem on mittestabiilne, sünteesige stabiliseerimissüsteem $u(k) = -Kx(k)$, kui see on võimalik.

Valige selline karakteristlik polünoom, et $x(2)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$:

$$\begin{cases}\varphi(z)=z^2-2\\ \varphi(z)=z^2\\ \varphi(z)=z^2-z\\ \varphi(z)=z^2-0{,}2z\end{cases}$$

Arvutage $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$, kui $x(0)=\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$.

12. JÄLGIMISSÜSTEEM EHK OLEKUTAASTAJA

Selle peatüki teoreetilisi aluseid saab leida K. Ogata raamatust ptk. 12-5; pt.12-7.

Kui süsteemi siseolekud ei ole mõõdetavad, siis juhul, kui süsteem on jälgitav (vt. peatükk 10), on siseolekuid võimalik arvutada, lähtudes teadaolevatest sisendite ja väljundite väärtusest. Taastatud siseolekuid võib kasutada stabiliseerimissüsteemi või olekuregulaatori sünteesil (vt. peatükk 11).

Näidisülesanne N 12.1 – Pidevaja jälgimissüsteem

Olgu antud pidevaja süsteem olekumudeliga:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Olekute väärtused $x(t)$ ei ole mõõdetavad ja on tundmatud. Me teame ainult sisendi $u(t)$ ja väljundi $y(t)$ väärtuseid. Olekuregulaatori projekteerimiseks on vaja hinnata olekute väärtusi. Selleks koostame olekutaastaja ja kontrollime, kas oleku hinnang koondub tegelikule oleku väärtusele.

Lahenduskäik

Selleks et olekuid saaks hinnata sisendi ja väljundi alusel, peab süsteem olema jälgitav.

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -7 & 9 \end{bmatrix} \ \det(Q_o) = 9 + 14 = 23 \neq 0 \ \Rightarrow \ rank(Q_o) = 2$$

Süsteem on täielikult jälgitav.

Suletud süsteemi soovitud käitumist määrab karakteristlik polünoom.

Olgu $\varphi_L(s) = s^2 + 4s + 16$

Kui $x(t)$ on tegelik siseolek ja $\hat{x}(t)$ on oleku hinnang, siis olekutaastajaga süsteemi tööd kirjeldab olekuvõrrand

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + LC\left[x(t) - \hat{x}(t)\right]$$

Siin on $x(t) - \hat{x}(t) = \tilde{x}(t)$ jälgimissüsteemi viga (tegeliku oleku ja oleku hinnangu vahe).

Lahutame selle võrrandi objekti olekumudelist:

$$\begin{array}{rl} & \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ - & \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + LC\tilde{x}(t) \\ \hline & \dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) - LC\tilde{x}(t) \end{array}$$

$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t)$ on olekutaastajaga suletud süsteemi vabaliikumise võrrand. Meie ülesandeks on leida olekutaastaja maatriksi *L*. Kuna tegemist on teist järku süsteemiga, siis

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sE - A + LC) = \varphi_L(s)$$

$$\left|\begin{bmatrix} s+5 & -1 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 & -2l_1 \\ l_2 & -2l_2 \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} s+5+l_1 & -1-2l_1 \\ -1+l_2 & s+4-2l_2 \end{vmatrix} = s^2 + s(9+l_1-2l_2) + 19 + 2l_1 - 9l_2 =$$

$$= s^2 + 4s + 16 \;\Rightarrow\; l_1 = -\frac{39}{5},\, l_2 = -\frac{7}{5} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} -\frac{39}{5} \\ -\frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

Suletud süsteemi analüüs:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t) \;\overset{L}{\Leftrightarrow}\; s\tilde{X}(s) - \tilde{x}(0) = (A - LC)\tilde{X}(s)$$
$$\tilde{X}(s) = (sE - A + LC)^{-1}\tilde{x}(0)$$

Siin on $\tilde{x}(0)$ jälgimissüsteemi viga alghetkel.

Valime juhusliku hinnangu algväärtuse. Olgu $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, siis

$$\tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(sE - A + LC)^{-1} = \begin{bmatrix} s - \frac{14}{5} & \frac{73}{5} \\ -\frac{12}{5} & s + \frac{34}{5} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 4s + 16}\begin{bmatrix} s + \frac{34}{5} & -\frac{73}{5} \\ \frac{12}{5} & s - \frac{14}{5} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X}(s) = (sE - A + LC)^{-1}\tilde{x}(0) = \frac{1}{s^2 + 4s + 16}\begin{bmatrix} s + \frac{34}{5} & -\frac{73}{5} \\ \frac{12}{5} & s - \frac{14}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-2s - \frac{141}{5}}{s^2 + 4s + 16} \\ \dfrac{s - \frac{38}{5}}{s^2 + 4s + 16} \end{bmatrix}$$

Kontroll: $$\tilde{x}(0) = \lim_{s\to\infty} s\tilde{X}(s) = \lim_{s\to\infty} \begin{bmatrix} \dfrac{s\left(-2s - \frac{141}{5}\right)}{s^2 + 4s + 16} \\ \dfrac{s\left(s - \frac{38}{5}\right)}{s^2 + 4s + 16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{x}(t) = \lim_{s\to 0} s\tilde{X}(s) = \lim_{s\to 0} \begin{bmatrix} \dfrac{s\left(-2s - \frac{141}{5}\right)}{s^2 + 4s + 16} \\ \dfrac{s\left(s - \frac{38}{5}\right)}{s^2 + 4s + 16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mõlema siseoleku hinnangute vead lähenevad nullile. Järelikult koonduvad siseolekute hinnangud tegelike siseolekute väärtustele. See tähendab, et olekutaastaja saab oma ülesandega hakkama. m.o.t.t.

Näidisülesanne N 12.2 – Diskreetaja jälgimissüsteem

On antud diskreetaja süsteem oma olekumudeli maatriksitega:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ülesandeks on leida sellele süsteemile olekutaastaja. Tagasisidestatud süsteem on antud: $\varphi(z) = z^2$. Antud juhul on olekutaastajaga süsteem finiitne ja olekute hinnangud peavad koonduma kahe taktiga, sest jälgitava süsteemi järk on 2.

Lahenduskäik

Veendume, et süsteem on jälgitav:

$$Q_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ ning } rank(Q_o) \qquad \text{Süsteem on täielikult jälgitav.}$$

Olekutaastaja arvutus:

$$\hat{x}(k+1) = \Phi\hat{x}(k) + \Gamma u(k) + LC(\hat{x}(k) - x(k))$$

Siin on $x(k) - \hat{x}(k) = \tilde{x}(k)$ oleku taastamise viga.

Diskreetaja olekuvõrrand: $x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$

$$\tilde{x}(k+1) = \Phi\tilde{x}(k) - LC\tilde{x}(k)$$
$$\tilde{x}(k+1) = (\Phi - LC)\tilde{x}(k)$$
$$\Updownarrow z$$
$$z\tilde{X}(z) - \tilde{x}(0) = (\Phi - LC)\tilde{X}(z)$$
$$z\tilde{X}(z) - \tilde{x}(0) = (\Phi - LC)\tilde{X}(z)$$
$$\tilde{X}(z) = (zE - \Phi + LC)^{-1}\tilde{x}(0)$$
$$\det(zE - \Phi + LC) = \varphi(z)$$
$$\begin{vmatrix} z+1+l_1 & 2+l_1 \\ -2+l_2 & z+1+l_2 \end{vmatrix} = z^2 + z(2 + l_1 + l_2) + 5 + 3l_1 - l_2 = z^2 \Rightarrow l_1 = -1{,}75,\ l_2 = -0{,}25$$
$$L = \begin{bmatrix} -1{,}75 \\ -0{,}25 \end{bmatrix}$$

Analüüs:

Valime juhusliku alghinnangu $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Siis $\tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\tilde{x}(k+1) = (\Phi - LC)\tilde{x}(k)$$
$$\tilde{x}(1) = (\Phi - LC)\tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} 0{,}75 & -0{,}25 \\ 2{,}25 & -0{,}75 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}25 \\ 3{,}75 \end{bmatrix}$$
$$\tilde{x}(2) = (\Phi - LC)\tilde{x}(1) = \begin{bmatrix} 0{,}75 & -0{,}25 \\ 2{,}25 & -0{,}75 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1{,}25 \\ 3{,}75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ jne}$$

…

$$\tilde{x}(\infty)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \tilde{x}_1(\infty)=0,\;\; \tilde{x}_2(\infty)=0$$

Kontrolliks kasutame veel piirväärtusteoreeme:

$$\tilde{X}(z)=\left(zE-\Phi+LC\right)^{-1}\tilde{x}(0)=\frac{1}{z^2}\begin{bmatrix}z+0{,}75 & -0{,}25\\ 2{,}25 & z-0{,}75\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{2z+1{,}25}{z^2}\\ \dfrac{z+3{,}75}{z^2}\end{bmatrix}$$

See tähendab, et

$$\tilde{X}_1(z)=\frac{2z+1{,}25}{z^2} \qquad \tilde{X}_2(z)=\frac{z+3{,}75}{z^2}$$

$$\tilde{x}_1(\infty)=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{z}\tilde{X}_1(z)=\lim_{z\to1}\frac{(z-1)(2z+1{,}25)}{z^3}=0$$

$$\tilde{x}_2(\infty)=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{z}\tilde{X}_2(z)=\lim_{z\to1}\frac{(z-1)(z+3{,}75)}{z^3}=0 \text{ m.o.t.t.}$$

Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks

IL 12.1

Antud:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \varphi_L(s) = s^2 + 8s + 16$$

Olekutaastaja: $\hat{\dot{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + LC[x(t) - \hat{x}(t)]$

Leida L, $\tilde{x}(\infty)$

IL 12.2

Antud diskreetaja süsteem

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0{,}2 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Antud hulgast valige sobiv karakteristlik polünoom

$$\begin{cases} \varphi_L(z) = z^2 - 4 \\ \varphi_L(z) = z^2 \\ \varphi_L(z) = z^2 - 1{,}5z \end{cases}$$

ja sünteesige olekutaastaja

$$\hat{x}(k+1) = \Phi\hat{x}(k) + \Gamma u(k) + LC(\hat{x}(k) - x(k))$$

IL 12.3

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 3 \\ -0{,}2 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Valige karakteristlik polünoom

$$\begin{cases} \varphi_L(z) = z^2 + 2z + 1 \\ \varphi_L(z) = z^2 - 2z + 1 \\ \varphi_L(z) = z^2 - 3z + 2 \\ \varphi_L(z) = z^2 - 0{,}5z + 0{,}06 \end{cases}$$

ja sünteesige sellele diskreetaja süsteemile olekutaastaja

$$\hat{x}(k+1) = \Phi\hat{x}(k) + \Gamma u(k) + LC(\hat{x}(k) - x(k))$$

Tõestage, et olekutaastaja saab oma ülesandega hakkama.

13. MITTELINEAARSED SÜSTEEMID JA NENDE LINEARISEERIMINE

Selle peatüki teoreetilisi aluseid saab leida H. Sillamaa õpikust ptk. 5.2 ja K. Ogata raamatust ptk. 3-10.

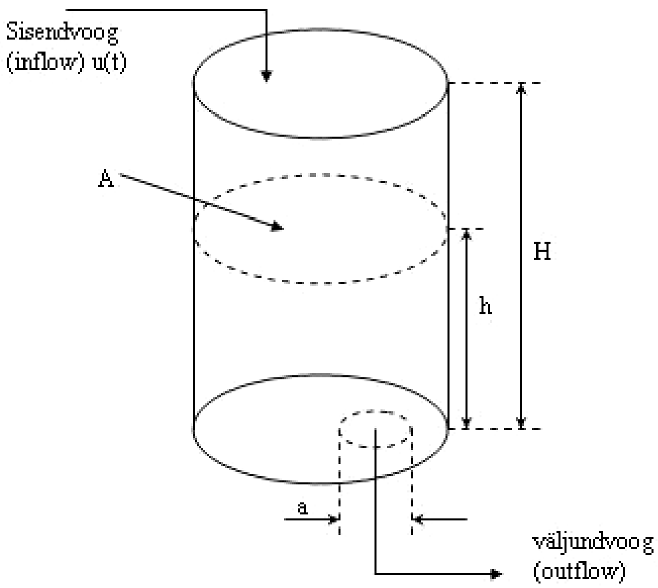
Enamik süsteemide analüüsi ja juhtimise algoritmidest põhineb lineaarsel mudelil. Samal ajal on enamik reaalsetest süsteemidest mittelineaarsed. Selleks et neid juhtida ja analüüsida, võib kasutada kas mittelineaarseid või lineariseerituid mudeleid ja algoritme. Mittelineaarsetest meetoditest räägitakse ainete ISS0021 Automaatjuhtimissüsteemid ja ISS0022 Automaatjuhtimissüsteemide jätkukursus raames.

Süsteemi saab lineariseerida tööpunkti ümbruses (vt. näidisülesanne N13.1) või tasakaaluolekus (vt. näidisülesanne N13.2). Saab määrata ka mittelineaarse süsteemi stabiilsust tasakaaluolekus.

Näidisülesanne N 13.1

Mittelineaarse süsteemi lineariseerimist vaatleme praktilisel näitel.

On antud paak:



Paagi aluses on auk diameetriga a.

A on paagi aluse pindala; H on paagi kõrgus; h on vedelikunivoo.

Vaatleme paaki, kus $A = 0{,}02 m^2$ (aluse diameeter $d \approx 16 cm$), $H = 0{,}5 m$, $a = 4 cm$.

Vedelikunivood paagis reguleeritakse sisendvoo muutmisega. Seega on sisendvoog süsteemi sisendiks $u(t)$ ja vedelikunivoo $h(t)$ on süsteemi väljundiks. Leiame selle süsteemi mittelineaarse mudeli ja lineariseerime ta tasakaalupunkti ümbruses, kui sisendvoog $u_0 = 0{,}3 \frac{dal}{s}$.

Lahenduskäik

Tegemist on ühemõõtmelise süsteemiga (üks sisend, üks väljund). A, a, H on konstantsed.

V on vedeliku ruumala paagis, mille muutus on sisendvoo ja väljundvoo vahe:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = u(t) - outflow(t) \\ V(t) = Ah(t) \end{cases} \Rightarrow A\frac{dh}{dt} = u(t) - outflow(t)$$

Voo ühik on $\left[\frac{m^3}{s}\right]$. Selleks et arvud ei oleks mudelis liiga väiksed ($1\frac{m^3}{s}$ on väga suur voog ja tegelik voog on umbes 100 korda väiksem), hakkame mõõtma sisendvoogu dekaliitrites sekundis $\left[\frac{dal}{s}\right]$.

$$1\frac{m^3}{s} = 100\frac{dal}{s} \Rightarrow 1\frac{dal}{s} = \frac{1}{100}\frac{m^3}{s}$$

ning

$$A\frac{dh}{dt} = \left(u(t) - 100 \cdot outflow(t)\right)/100$$

Olgu siis vedelikunivoo normeeritud vahemikus $0-st$ $1-ni$. Süsteemi väljund $y(t)$ näitab vedelikunivood paagi kõrguse suhtes:

$$y(t) = \frac{h(t)}{H}$$

Kui $h(t) = H$ (paak on täis), siis $y(t) = 1$; kui $h(t) = 0$ (paak on tühi), siis $y(t) = 0$ jne.

$$h(t) = y(t) \cdot H \Rightarrow AH\frac{dy}{dt} = \left(u(t) - 100 \cdot outflow(t)\right)/100$$

Paskali seaduse järgi $P = \rho gh$, kus

P on vedeliku rõhk;

ρ on vedeliku tihedus;

$g \approx 9{,}8\frac{m}{s^2}$ on vaba langemise kiirendus.

Torichelli valem ütleb, et $\rho gh = \frac{\rho v^2}{2}$, kus v on väljuva vedelikuvoo kiirus.

$$v^2 = 2gh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}, \text{ sest } v \geq 0$$

Väljundvoog on väljundvoo kiirus korda augu pindala ($S = \frac{\pi a^2}{4}$):

$$outflow(t) = Sv = S\sqrt{2gh} = \frac{\pi a^2}{4}\sqrt{2gh}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{100AH}\left(u(t) - 25\pi a^2\sqrt{2gH}\sqrt{y(t)}\right) = k_1\left(u(t) - k_2\sqrt{y(t)}\right), \text{ kus}$$

k_1 ja k_2 on konstandid:

$$k_1 = \frac{1}{100AH} = 1 \qquad k_2 = 25\pi a^2\sqrt{2gH} \approx 0{,}4$$

Seega kirjeldab süsteemi mittelineaarne diferentsiaalvõrrand:

$$\frac{dy}{dt} = u(t) - 0{,}4\sqrt{y(t)} \quad \Leftarrow \text{ mittelineaarse süsteemi mudel}$$

Mittelineaarset süsteemi saab analüüsida tasakaalupunktides – punktides, kus siirdeprotsess stabiliseerub. Antud juhul $\frac{dy}{dt}=0$. See tähendab, et antud konstantse sisendi u_0 (sisendvoo) puhul stabiliseerub süsteemi väljund tasakaalupunkti juures y_0 ja väljund jääb konstantseks (vedeliku kõrgus paagis ei muutu).

$$\frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow u(t)-0{,}4\sqrt{y(t)}=0$$

Staatika võrrand: $y=\frac{25}{4}u^2$

Kui $u_0(t)=0{,}3\frac{dal}{s}$, siis $y_0=\frac{25}{4}\cdot\frac{9}{100}=\frac{9}{16}$ $\left(h_0=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}=\frac{9}{32}=0{,}2813m\right)$

Lineariseerimine tasakaalupunktis ($u_0=0{,}3,\quad y_0=0{,}5625$):

$$\frac{dy(t)}{dt}=f\big(u(t),y(t)\big)\Rightarrow f\big(u(t),y(t)\big)=u(t)-0{,}4\sqrt{y(t)}$$

Punkti (u_0,y_0) ümbrus: $\begin{cases}u=u_0+\Delta u\\ y=y_0+\Delta y\end{cases}$

$$f\big(u_0+\Delta u,y_0+\Delta y\big)=f\big(u_0,y_0\big)+\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u_0}\Delta u+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y_0}\Delta y$$

Staatika võrrandi tõttu $f\big(u_0,y_0\big)=0$

$$\frac{dy(t)}{dt}=f\big(u(t),y(t)\big)\Rightarrow f\big(u_0+\Delta u,y_0+\Delta y\big)=\frac{d\big(y_0+\Delta y(t)\big)}{dt}=\frac{d\big(\Delta y(t)\big)}{dt}$$

$$\frac{d\big(\Delta y(t)\big)}{dt}=\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u_0}\Delta u+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y_0}\Delta y=\Delta u-\frac{0{,}4}{2\sqrt{y_0}}\Delta y=\Delta u-\frac{4}{15}\Delta y$$

$\dot{\Delta y}=\Delta u-\frac{4}{15}\Delta y\overset{L}{\Leftrightarrow}s\Delta Y(s)=\Delta U(s)-\frac{4}{15}\Delta Y(s)$, kui alghetkel on süsteem tasakaaluolekus (s.t $\Delta u(0)=\Delta y(0)=0$)

$$\Delta Y(s)=\frac{1}{s+{}^4\!/_{15}}\Delta U(s)\Rightarrow H(s)=\frac{1}{s+{}^4\!/_{15}}$$

Tasakaalupunktis on süsteem stabiilne, sest poolus $\lambda=-{}^4\!/_{15}$ on negatiivne.

Lineariseeritud mudeli analüüs:

Kui süsteem on tasakaaluolekus ($u_0=0{,}3,\ y_0={}^4\!/_{15}$) ja sisendvoog suureneb $0{,}01\frac{dal}{s}$ võrra (s.t $u(t)=0{,}31\frac{dal}{s}$, $\Delta u=0{,}01\frac{dal}{s}$), siis mittelineaarsest staatika võrrandist leiame $y=6{,}25\cdot0{,}31^2=0{,}6006$. See tähendab, et $\lim_{t\to\infty}y(t)=0{,}6006$.

Lineariseeritud mudelist: $\Delta Y_m(s) = \dfrac{1}{s + 4/15}\Delta U(s) = \dfrac{0{,}01}{s\left(s + 4/15\right)}$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\Delta y_m(t)\right) = \lim_{s\to 0}\frac{0{,}01}{s + 4/15} = \frac{3}{80}$$

$$y_m(\infty) = y_0 + \Delta y_m(\infty) = 0{,}6$$

Lineariseeritud mudeli viga selles punktis $e\big|_{\Delta u=0{,}01} = y(\infty) - y_m(\infty) = 0{,}0006$

Kui $\Delta u = 0{,}1\dfrac{dal}{s}$ $\left(u(t) = 0{,}4\dfrac{dal}{s}\right)$, siis $y = 6{,}25 \cdot 0{,}4^2 = 1$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\Delta y_m(t)\right) = \lim_{s\to 0}\frac{0{,}1}{s + 4/15} = \frac{3}{8}$$

$$y_m(\infty) = y_0 + \Delta y_m(\infty) = 0{,}9378$$

Lineariseeritud mudeli viga selles punktis $e\big|_{\Delta u=0{,}1} = y(\infty) - y_m(\infty) = 0{,}0622.$ Viga on juba umbes 100 korda suurem.

Seega, mida väiksem on $\Delta u,$ seda täpsem on lineariseeritud mudel. Lineariseeritud mudel on korrektne ainult tasakaalupunkti väikeses ümbruses.

Näidisülesanne N 13.2

Lineariseerida süsteem tema tasakaalupunktide ümbruses ja kontrollida süsteemi stabiilsust nendes punktides. Süsteem on antud järgmisel kujul:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^3 \end{cases}$$

Lahenduskäik

1. Otsime tasakaalupunktid $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$ => $\begin{cases} -2x_1 + x_2^2 = 0 \\ x_1 + x_2^3 = 0 \end{cases}$

Lahendades seda võrrandite süsteemi, saame:

Punkt I $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ Punkt II $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{8} \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

2. Leiame jakobiaani üldkujul: $$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2x_2 \\ 1 & -3x_2^2 \end{bmatrix}$$

3. Leiame jakobiaani väärtuse esimeses tasakaalupunktis:

$$A_I = \begin{bmatrix} -2 & 2x_2 \\ 1 & -3x_2^2 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Kontrollime süsteemi stabiilsust esimeses tasakaalupunktis:

$$\lambda E - A_I = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 0 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} \qquad \det(\lambda E - A_I) = \lambda(\lambda + 2) = 0 \qquad \lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 < 0$$

Esimeses tasakaalupunktis on mittelineaarne süsteem mitteasümptootiliselt stabiilne.

5. Leiame jakobiaani väärtuse teises tasakaalupunktis:

$$A_{II} = \begin{bmatrix} -2 & 2x_2 \\ 1 & -3x_2^2 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{matrix} x_1 = \frac{1}{8} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{matrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

6. Kontrollime süsteemi stabiilsust teises tasakaalupunktis:

$$\lambda E - A_{II} = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ -1 & \lambda + \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda E - A_{II}) = (\lambda + 2)(\lambda + \frac{3}{4}) - 1 = \lambda^2 + \frac{11}{4}\lambda + \frac{1}{2} = 0 \qquad \lambda_3 < 0 \qquad \lambda_4 < 0$$

Teises tasakaalupunktis on mittelineaarne süsteem asümptootiliselt stabiilne.

Vastus

Mittelineaarsel süsteemil on 2 tasakaalupunkti:

Punkt I $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ Punkt II $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{8} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

Esimeses tasakaalupunktis on mittelineaarne süsteem mitteasümptootiliselt stabiilne:

$$(\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 < 0)$$

Teises tasakaalupunktis on mittelineaarne süsteem asümptootiliselt stabiilne:

$$(\lambda_3 < 0 \qquad \lambda_4 < 0)$$

Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks

IL 13.1

Leidke mittelineaarse süsteemi $\frac{dy}{dt} = u(t) - 0{,}4\sqrt{y(t)}$ lineariseeritud mudel tasakaalupunkti $u_0 = 0{,}2$ ümbruses.

IL 13.2

Kontrollige, kas mittelineaarne süsteem $\frac{dy}{dt} = u(t) - y^2(t) + 3$ on tasakaalupunktides stabiilne või mitte, kui $u_0 = 1$.

IL 13.3

Lineariseerida süsteem tema tasakaalupunktide ümbruses ja kontrollida süsteemi stabiilsust nendes punktides. Süsteem on antud järgmisel kujul:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 4x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 9x_1^2 \end{cases}$$

IL 13.4

Lineariseerida süsteem tema tasakaalupunktide ümbruses ja kontrollida süsteemi stabiilsust nendes punktides. Süsteem on antud järgmisel kujul:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_1^2 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 6x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

LISA 1

OPERAATORTEISENDUSED

L-TEISENDUS		Z-TEISENDUS	
X(s)	**x(t)** $\forall t<0 \Rightarrow x(t) = 0$	**x[kT]** $\forall k<0 \Rightarrow x[kT] = 0$	**X(z)**
1	$\delta(t)$	$\delta[kT]$	1
$e^{-\tau s}$	$\delta(t-\tau)$	$\delta[(k-m)T]$	z^{-m}
s^{-1}	$1(t)$	$1[kT]$	$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$
s^{-2}	t	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{s-\ln a}$	a^t	a^{kT}	$\frac{z}{z-a^T}$
—	—	$(-1)^k a^{kT} = a^{kT}\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a^T}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\sin k\omega T$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	$\cos k\omega T$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$e^{-\alpha t}\sin \omega t$	$e^{-\alpha kT}\sin k\omega T$	$\frac{ze^{-\alpha T}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-\alpha T}\cos\omega T+e^{-2\alpha T}}$
$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$e^{-\alpha t}\cos \omega t$	$e^{-\alpha kT}\cos k\omega T$	$\frac{z(z-e^{-\alpha T}\cos\omega T)}{z^2-2ze^{-\alpha T}\cos\omega T+e^{-2\alpha T}}$
$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\sinh \omega t$	$\sinh \omega kT$	$\frac{z\sinh\omega T}{z^2-2z\cosh\omega T+1}$
$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\cosh \omega t$	$\cosh \omega kT$	$\frac{z(z-\sinh\omega T)}{z^2-2z\cosh\omega T+1}$
$\frac{as+b}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$ae^{-\alpha t}\cos \omega t + \frac{b-a\alpha}{\omega}e^{-\alpha t}\sin \omega t$	$de^{-\alpha kT}\cos k\omega T + e^{-\alpha kT}\sin k\omega T$	$\frac{dz(z-c)}{(z-\rho)^2+\gamma^2} \quad (\rho^2+\gamma^2 \le 1)$ $\alpha = -\frac{1}{2T}\ln(\rho^2+\gamma^2)$ $\omega = \arctan\frac{\gamma}{\rho}$

OPERAATORTEISENDUSTE OMADUSED

LAPLACE'I TEISENDUS $\forall t < 0 \Rightarrow x(t) = 0$ $\quad \mathbf{x(t)} \xleftrightarrow{L} \mathbf{X(s)}$	**Z-TEISENDUS** $\forall k < 0 \Rightarrow x[t] = 0$ $\quad \mathbf{x[kT]} \xleftrightarrow{Z} \mathbf{X(z)}$

LINEAARSUS

$$aX(s) + by(s) \xleftrightarrow{L} ax(t) + by(t) \qquad ax[kT] + by[kT] \xleftrightarrow{Z} aX(z) + bY(z)$$

AJAMASTAABI MUUTUS

$$aX(as) \xleftrightarrow{L} x\left(\frac{t}{a}\right) \qquad a^{-k}x[kT] \xleftrightarrow{Z} X(az)$$

AJAARGUMENDI NIHE

$$e^{-\tau s}X(s) \xleftrightarrow{L} x(t-\tau) \qquad x[(k-m)T] \xleftrightarrow{Z} z^{-m}X(z)$$

$$e^{\tau s}\left(X(s) - \int_0^{\tau} x(t)e^{-\tau s}dt\right) \xleftrightarrow{L} x(t+\tau) \qquad x[(k+m)T] \xleftrightarrow{Z} z^{-m}\left(X(z) - \sum_{j=0}^{k-1} x[jT]z^{-j}\right)$$

KONVOLUTSIOON

$$X(s)\cdot Y(s) \xleftrightarrow{L} \int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_0^t x(t-\tau)y(\tau)d\tau$$

$$\sum_{\nu=0}^{k} x[\nu T]y[(k-\nu)T] = \sum_{\nu=0}^{k} x[(k-\nu)T]y[\nu T] \xleftrightarrow{Z} X(z)Y(z)$$

PIIRVÄÄRTUSSEOSED

$$\lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{t\to+0} x(t) = x(+0)$$

$$\lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{t\to\infty} x(t)$$

$$\lim_{k\to+0} x[kT] = x[+0] = \lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z-1}{z} X(z)$$

$$\lim_{k\to\infty} x[kT] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} X(z)$$

TULETISE KUJUTIS

$$sX(s) - x(+0) \xleftrightarrow{L} \frac{d}{dt}x(t)$$

$$s^2X(s) - \dot{x}(+0) - sx(+0) \xleftrightarrow{L} \frac{d^2}{dt^2}x(t)$$

DIFERENTSI KUJUTIS

$$\Delta x[kT] = x[(k+1)T] - x[kT] \xleftrightarrow{Z} (z-1)X(z) - zx[+0]$$

$$\Delta^2 x[kT] = \Delta x[(k+1)T] - \Delta x[kT] \xleftrightarrow{Z} (z-1)^2X(z) - z(z-1)x[+0] - z\Delta x[+0]$$

INTEGRAALI KUJUTIS

$$\frac{1}{s}X(s) \xleftrightarrow{L} \int_0^t x(\tau)d\tau$$

SUMMA KUJUTIS

$$\sum_{\nu=0}^{k} x[\nu T] \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z-1}X(z)$$

KUJUTISARGUMENDI MUUTUS

$$X(s+a) \xleftrightarrow{L} e^{-at}x(t)$$

$$X(s-a) \xleftrightarrow{L} e^{at}x(t)$$

LISA 3

ÜLESANNETE VAHETULEMUSED JA VASTUSED

IL 1.1

Vahetulemus: $X(s) = \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{Bs+C}{s^2+4s+13}$, kus $A = -0{,}3 \qquad B = -7{,}7 \qquad C = 8{,}9$

Vastus: $x(t) = -0{,}3e^{-t} - 7{,}7e^{-2t}\cos 3t + 8{,}1e^{-2t}\sin 3t$

IL 1.2

Vastus: $X(s) = \dfrac{2e^{-3s}}{s+3} + \dfrac{e^{-2s}}{(s+5)^2} + \dfrac{s+1}{s^2+2s+5}$

IL 1.3

Vahetulemus: $X(s) = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+2} + \dfrac{Cs+D}{s^2+1}$, kus $A = 45 \qquad B = -1 \qquad c = -44 \qquad D = 8$

Vastus: $x(t) = 45 \times \mathbf{1}(t) - e^{-2t} - 44\cos t + 8\sin t$

IL 1.4

Vahetulemus: $X(s) = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+1} + \dfrac{Cs+D}{s^2+25}$, kus $A = 13 \qquad B = -8 \qquad c = -5 \qquad D = 5$

Vastus: $x(t) = 13 \times \mathbf{1}(t) - 8e^{-t} - 5\cos 5t + \sin 5t$

IL 1.5

Vahetulemus: $X(s) = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+2} + \dfrac{Cs+D}{s^2+16}$, kus $A = 10 \qquad B = -2 \qquad c = -8 \qquad D = 16$

Vastus: $x(t) = 10 \times \mathbf{1}(t) - 2e^{-2t} - 8\cos 4t + 4\sin 4t$

IL 1.6

Vahetulemus: $X(s) = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+2} + \dfrac{Cs+D}{s^2+9}$, kus $A = 13 \qquad B = -1 \qquad c = -12 \qquad D = 24$

Vastus: $x(t) = 13 \times \mathbf{1}(t) - e^{-2t} - 12\cos 3t + 8\sin 3t$

IL 2.1

Vahetulemus: $U(s) = \dfrac{3}{s+4}$

Vastus: $u(t) = 3e^{-4t} \qquad u(0) = 3$ ja $u(\infty) = 0$

IL 2.2

Vastused: $y(t) = -\dfrac{1}{4}(\cos 2(t-3) + \dfrac{1}{2}\sin 2(t-3) - 1 - (t-3))\mathbf{1}(t-3)$

$y(0) = 0 \qquad y(3) = 0$

IL 2.3

Vastused: $y(t) = \left(\delta(t-3) + \frac{21}{6} e^{-2(t-3)} - \frac{52}{6} e^{-3(t-3)} + \frac{1}{6} \right) \mathbf{1}(t-3)$ $\quad y(1) = 0 \quad y(\infty) = \frac{1}{6}$

IL 2.4

Vastused: $y(t) = \left(\frac{5}{4} e^{-(t-4)} - \frac{1}{2}(t-4) e^{-(t-4)} - \frac{5}{4} e^{-2(t-4)} - \frac{3}{4} e^{-2(t-4)} + \frac{3}{4} e^{-3(t-4)} \right) \mathbf{1}(t-4)$

$y(0) = 0 \quad y(3) = 0 \quad y(4) = 0 \quad y(5) = \frac{3}{4} e^{-1} - 2e^{-2} + \frac{3}{4} e^{-3} \approx 0{,}0426$

$y(6) = -\frac{1}{4} e^{-3} - 2e^{-6} + \frac{3}{4} e^{-9} \approx -0{,}0173 \quad y(\infty) = 0$

IL 2.5

Vastused: $y(t) = e^{-2(t-1)} \sin(t-1) \mathbf{1}(t-1) + \frac{1}{5} \left(1 - e^{-2(t-2)} \cos(t-2) - 2e^{-2(t-2)} \sin(t-2) \right) \mathbf{1}(t-2)$

$y(0) = 0 \quad y(1) = 0 \quad y(\infty) = \frac{1}{5}$

IL 3.1

Vastused: $H(s) = \frac{50}{s+40} \quad h(t) = e^{-40t} \mathbf{1}(t) \quad g(t) = \frac{5}{4} \left(1 - e^{-40t} \right) \mathbf{1}(t) \quad h(\infty) = 0 \quad g(\infty) = \frac{5}{4}$

IL 3.2

Vastused: $H(s) = \frac{s^2 + 8s + 9}{(s+2)(s+5)} \quad h(t) = \delta(t) + \left(2e^{-5t} - e^{-2t} \right) \mathbf{1}(t)$

$g(t) = \left(0{,}9 + 0{,}5e^{-2t} - 0{,}4e^{-5t} \right) \mathbf{1}(t) \quad h(\infty) = 0 \quad g(\infty) = 0{,}9$

IL 3.3

Vastused: $H(s) = \frac{10(s+20)}{s-10} \quad h(t) = 10\delta(t) + 300e^{10t} \mathbf{1}(t)$

$h(\infty) = \infty \quad g(t) = \left(30e^{10t} - 20 \right) \mathbf{1}(t) \quad g(\infty) = \infty$

IL 3.4

Vastused: $H(s) = \frac{10(s+20)}{s+90} \quad h(t) = 10\delta(t) + 700e^{-90t} \mathbf{1}(t)$

$h(\infty) = 0 \quad g(t) = \frac{1}{9} \left(20 + 70e^{-90t} \right) \mathbf{1}(t) \quad g(\infty) = \frac{20}{9}$

IL 3.5

Vastused: $H_{uy}(z) = \frac{-3(z-0{,}1)}{z^2 + 0{,}8} \quad H_{uy}(z)\big|_{z=1} = -1{,}5$

$y(0)=0 \quad y(1)=-3 \quad y(2)=-2{,}7 \quad y(3)=-0{,}3 \quad y(\infty)=-1{,}5$

IL 3.6

Vastus: $y(t)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}-10te^{-2t}-8t^2e^{-2t}\right)1(t)$

IL 3.7

Vastused: $H(z)=\frac{z-0{,}9}{z^2+0{,}8} \qquad H_{uy}(z)\Big|_{z=1}=\frac{1}{18}$

$y(0)=0 \quad y(1)=1 \quad y(2)=-0{,}9 \quad y(3)=-0{,}8 \quad y(4)=0{,}72 \quad y(\infty)=0$

IL 4.1

Vahetulemus: $\lambda_1=-1 \qquad \lambda_2=-2 \qquad \lambda_3=-3$

Vastus: $e^{At}=e^{-t}\,\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6 & 5 & 1\\ -6 & -5 & -1\\ 6 & 5 & 1\end{bmatrix}+e^{-2t}\begin{bmatrix}-3 & -4 & -1\\ 6 & 8 & 2\\ -12 & -16 & -4\end{bmatrix}+e^{-3t}\,\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ -6 & -9 & -3\\ 18 & 27 & 9\end{bmatrix}$

IL 4.2

Vahetulemus: $\lambda_1=-2 \qquad \lambda_2=-3 \qquad \lambda_3=-4$

Vastus: $e^{At}=e^{-2t}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}+e^{-3t}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & -3 & 4\\ -1 & -3 & 4\end{bmatrix}+e^{-4t}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -4\\ 0 & 3 & -3\end{bmatrix}$

IL 4.3

Vahetulemus: $\lambda_1=-1 \qquad \lambda_2=-2 \qquad \lambda_3=-4$

Vastus: $e^{At}=e^{-t}\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+e^{-2t}\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+e^{-4t}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

IL 4.4

Vahetulemus: $\lambda_1=-1 \qquad \lambda_2=-4 \qquad \lambda_3=-5$

Vastus: $e^{At}=e^{-t}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}+e^{-4t}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}+e^{-5t}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1{,}5 & 1\end{bmatrix}$

IL 5.1

Vastus: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ja $D = 0$

IL 5.2

Vastus: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ja $D = 0$

IL 5.3

NB! Vaata märkust näidisülesandes N 5.1.

Vastus 1: kui valime $x_3(t) = \frac{dx_2(t)}{dt}$, siis

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ ja } D = 0$$

Vastus 2: kui valime $x_3(t) = \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2}$, siis

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ja } D = 0$$

Loomulikult pole need kaks ainsad valikuvariandid, kuid nad on kõige loogilisemad.

IL 5.4

Vastus: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

IL 5.5

Vastus: $A = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

IL 6.1

Vastused: $h(t) = \left(\sigma(t) - 2e^{-t}\cos 2t\right)\mathbf{1}(t)$ $\qquad g(t) = \frac{1}{5}\left(3 + 2e^{-t}\cos 2t - 4e^{-t}\sin 2t\right)\mathbf{1}(t)$

$h(0) = \infty \qquad h(\infty) = 0 \qquad g(0) = 1 \qquad g(\infty) = \frac{3}{5}$

IL 6.2

Vahetulemus: $H(s) = \frac{3}{s} - \frac{5}{s+2} + \frac{2s}{s^2+16}$

Vastused: $h(t) = 3\times\mathbf{1}(t) - 5e^{-2t} + 2\cos 4t \qquad h(0) = 0 \qquad h(\infty) = 3$

IL 6.3

Vahetulemus: $H(s) = \frac{2}{s} - \frac{3}{s+2} + \frac{2s-16}{s^2+16}$

Vastused: $h(t) = 2\times 1(t) - 3e^{-2t} + 2\cos 4t - 4\sin 4t$, $h(0) = 1$, $h(\infty) = 2$

IL 6.4

Vahetulemus: $H(s) = \frac{3}{s} + \frac{4}{s+3} + \frac{2s+5}{s^2+9}$

Vastused: $g(t) = 3\times\mathbf{1}(t) + 4e^{-3t} + 2\cos 3t + \frac{5}{3}\sin 3t \qquad g(0) = 9 \qquad g(\infty) = 3$

IL 7.1

Vahetulemus: maatrikseksponent $e^{At} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} e^{-2t} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} e^{-5t}$

Vastus: $H(t) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5 \\ -20 \end{bmatrix} e^{-5t}$

Märkus: antud süsteemil on üks sisend ja kaks väljundit, seega on ka loogiline, et saime impulsskajade maatriksi, mis koosneb kahest elemendist:

$$H(t) = \begin{bmatrix} H_{11}(t) \\ H_{21}(t) \end{bmatrix}$$

$H_{11}(t)$ – esimesest sisendist esimesse väljundisse;
$H_{21}(t)$ – esimesest sisendist teise väljundisse.

IL 7.2

Vastus: $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix} 2s+9 & -2s+12 \\ -3 & 6s \end{bmatrix}$

Märkus: antud süsteemil on kaks sisendit ja kaks väljundit, seega on ka loogiline, et saime ülekandefunktsioonide maatriksi, mis koosneb neljast elemendist:

$$H(t)=\begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$\mathrm{H}_{11}(s)$ – esimesest sisendist esimesse väljundisse;
$\mathrm{H}_{22}(s)$ – teisest sisendist teise väljundisse;
$\mathrm{H}_{12}(s)$ – teisest sisendist esimesse väljundisse;
$\mathrm{H}_{21}(s)$ – esimesest sisendist teise väljundisse.

Kõigil neljal ülekandefunktsioonil on kaks samasugust poolust ja üks erinev null.

IL 7.3

Vahetulemus: maatrikseksponent $e^{At}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} e^{t} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} e^{4t}$

Vastus: $H(t)=\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} e^{t} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} e^{4t}$

IL 7.4

Vahetulemus: maatrikseksponent $e^{At}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{2t}$

Vastus: $H(t)=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} e^{2t}$

IL 8.1

Vastused: $y_s(t)=\left(\mathbf{1}(t-3)-e^{-(t-3)}-(t-3)e^{-(t-3)}\right)\cdot\mathbf{1}(t-3)$ $\quad y_v(t)=2\cdot\mathbf{1}(t)$ $\quad y(1)=2$

$y(t)=\left(\mathbf{1}(t-3)-e^{-(t-3)}-(t-3)e^{-(t-3)}\right)\cdot\mathbf{1}(t-3)+2\cdot\mathbf{1}(t)$ $\quad y(0)=2$ $\quad y(\infty)=3$

IL 8.2

Vastused: $Y(s)=\frac{s}{s^2+4}U(s)+\frac{s+2}{s^2+4}=\frac{e^{-2s}}{s^2+4}+\frac{s+2}{s^2+4}$ $\quad h(t)=\cos 2t\cdot\mathbf{1}(t)$

$g(t)=\frac{1}{2}\sin 2t\cdot\mathbf{1}(t)$ $\quad y_s(t)=\frac{1}{2}\sin\left(2(t-2)\right)\cdot\mathbf{1}(t-2)$ $\quad y_v(t)=\left(\cos 2t+\sin 2t\right)\cdot\mathbf{1}(t)$

$y(t)=\frac{1}{2}\sin\left(2(t-2)\right)\cdot\mathbf{1}(t-2)+\left(\cos 2t+\sin 2t\right)\cdot\mathbf{1}(t)$ $\quad y(0)=1$

IL 8.3

Vastused: $Y(s)=\frac{e^{-3s}}{s+2}U(s)+\frac{1}{s}=\frac{e^{-4s}}{(s+2)^2}+\frac{1}{s}$ $\quad y_s(t)=(t-4)e^{-2(t-4)}\cdot\mathbf{1}(t-4)$

$y_v(t)=\mathbf{1}(t)$ $\quad y(t)=(t-4)e^{-2(t-4)}\cdot\mathbf{1}(t-4)+\mathbf{1}(t)$ $\quad y(0)=1$ $\quad y(\infty)=1$

IL 8.4

Vastused: $Y(s)=\dfrac{s^3+6s^2+6s+2}{s(s+1)^2(s+3)}$ $\qquad y(\infty)=\dfrac{2}{3}$

IL 9.1

Vastused: $g(0)=g(1)=g(2)=0 \qquad g(3)=\dfrac{1}{3} \qquad g(\infty)=0$

IL 9.2

Vastused: $y(0)=1 \qquad y(1)=3 \qquad y(2)=13 \qquad y(3)=47$

$$H(z)=\frac{2z}{z^2-3z-2} \qquad g(0)=0 \; g(1)=2 \qquad g(2)=8 \qquad g(3)=30 \qquad g(4)=108$$

IL 9.3

Vastused:

kui täiendavate siseolekute valik on selline $\begin{cases} x_1(k+1)=2u(k)-0{,}5x_1(k) \\ x_2(k+1)=x_1(k) \\ x_3(k+1)=x_2(k) \\ y(k)=x_3(k) \end{cases}$

siis olekumudel $\begin{cases} X(k+1)=\begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X(k)+\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U(k) \\ Y(k)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X(k) \end{cases}$

$$H(z)=\frac{2}{z^3+0{,}5z^2} \qquad g(0)=g(1)=g(2)=0 \qquad g(3)=2 \qquad g(\infty)=\frac{4}{3}$$

IL 9.4

Vahetulemus: $H(z)=\dfrac{-16}{(z-1)(z+1)}$

Vastus: $h(1)=0 \qquad h(2)=-16 \qquad h(3)=0 \qquad h(4)=-16 \qquad h(5)=0$

IL 9.5

Vahetulemus: $H(z)=\dfrac{6z-32}{z^2-z-12}$

Vastus: $h(1)=6 \qquad h(2)=-26 \qquad h(3)=46 \qquad h(4)=-266 \qquad h(5)=286$

IL 9.6

Vahetulemus: $H(z)=\dfrac{-5}{z-2}$

Vastus: $h(1)=-5 \qquad h(2)=-10 \qquad h(3)=-20 \qquad h(4)=-40 \qquad h(5)=-80$

IL 10.1

Vastused: täielikult juhitav, täielikult jälgitav, mittestabiilne

IL 10.2

Vastused: täielikult juhitav, täielikult jälgitav, stabiilne

IL 10.3

Vastus: stabiilne, sest $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = 0$

IL 10.4

Vastus: poolused $\lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i,$ süsteem on mittestabiilne

IL 10.5

Vahetulemused: $\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = -5 \qquad \lambda_3 = -6$

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 2 & -10 & 50 \\ 3 & -15 & 75 \end{bmatrix};\ \det Q_c = 0 \ \Rightarrow\ RankQ_c \neq 3;\ RankQ_c \neq 2;\ RankQ_c = 1$$

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 6 & -8 & -18 \\ -84 & -32 & 156 \end{bmatrix};\ \det Q_o \neq 0 \ \Rightarrow\ RankQ_o = 3$$

Vastus: süsteem on stabiilne, osaliselt juhitav (ühe sisendi järgi) ja täielikult jälgitav

IL 10.6

Vahetulemused: $\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -2 \qquad \lambda_3 = -4$

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 10 \\ -2 & 4 & -8 \\ -6 & 10 & -18 \end{bmatrix};\quad \det Q_c = 0 \ \Rightarrow\ RankQ_c \neq 3;\quad RankQ_c = 2$$

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 5 & -7 & 6 \\ -17 & 19 & 18 \end{bmatrix};\quad \det Q_o = 0 \ \Rightarrow\ RankQ_o \neq 3;\quad RankQ_o = 2$$

Vastus: süsteem on stabiilne, osaliselt juhitav (kahe sisendi järgi) ja osaliselt jälgitav (kahe väljundi järgi)

IL 10.7

Vahetulemused: $\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -4 \qquad \lambda_3 = -5$

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 17 \\ 3 & -9 & 33 \\ 4 & -13 & 49 \end{bmatrix}; \qquad \det Q_c = 0 \;\; => \;\; RankQ_c \neq 3;\;\; RankQ_c = 2$$

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 17 & -9 \\ 47 & -97 & 49 \end{bmatrix}; \qquad \det Q_o = 0 \;\; => \;\; RankQ_o \neq 3; \quad RankQ_o = 2$$

Vastus: süsteem on stabiilne, osaliselt juhitav (kahe sisendi järgi) ja osaliselt jälgitav (kahe väljundi järgi)

IL 11.1

Vastus: süsteem on mittestabiilne ja mittejuhitav

IL 11.2

Vastused: $K = \begin{bmatrix} 7 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad x(\infty) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

IL 11.3

Vastused: $K = \begin{bmatrix} 6 & -4 \end{bmatrix}$ $\qquad x(\infty) = \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ -2{,}4 \end{bmatrix}$

IL 11.4

Vastused: $\varphi(z) = z^2$ $\qquad K = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$ $\qquad x(1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ $\qquad x(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

IL 12.1

Vastused: $L = \begin{bmatrix} \frac{25}{4} \\ \frac{73}{4} \end{bmatrix}$ $\qquad \tilde{x}(\infty) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

IL 12.2

Vastused: $\varphi(z) = z^2$ (mõlemad poolused on stabiilsed), $L = \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} \\ \frac{29}{45} \end{bmatrix}$

IL 12.3

Vastus: $L = \begin{bmatrix} -0{,}3 \\ -0{,}18 \end{bmatrix}$ $\qquad \tilde{x}(\infty) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sõltumata $\hat{x}(0)$ valikust

Tõestus:

$$\tilde{x}_1(z) = \frac{z\tilde{x}_1(0) + 3\tilde{x}_2(0)}{z^2 - 0{,}5z + 0{,}06}$$

$$\tilde{x}_2(z) = \frac{z\tilde{x}_2(0) - 0{,}2\tilde{x}_1(0) - 0{,}5\tilde{x}_2(0)}{z^2 - 0{,}5z + 0{,}06}$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}_1(\infty) &= \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\tilde{x}_1(z) = 0 \\ \tilde{x}_2(\infty) &= \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\tilde{x}_2(z) = 0 \end{aligned}\right\} \text{see ei sõltu } \tilde{x}(0)\text{-st. Järelikult ei sõltu ka } \hat{x}(0) \text{ valikust}$$

Seega, hindamise viga läheneb nullile, sõltumata alghinnangu valikust. m.o.t.t.

IL 13.1

Vastus: $u_0 = 0{,}2$ $\quad y_0 = 0{,}25$ $\qquad H(s) = \dfrac{1}{s + 0{,}4}$

IL 13.2

Vastus: süsteem on stabiilne tasakaalupunktis $u_0 = 1$ $\quad y_0 = 2$ ja mittestabiilne tasakaalupunktis $u_0 = 1$ $\quad y_0 = -2$

IL 13.3

Vahetulemus: Punkt I $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $\qquad$ Punkt II $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{9} \\ x_2 = \dfrac{4}{81} \end{cases}$

Jakobiaani väärtus üldkujul: $\qquad A = \begin{bmatrix} -8x_1 & 1 \\ 1 - 18x_1 & 0 \end{bmatrix}$

Vastus: mittelineaarsel süsteemil on kaks tasakaalupunkti:

Esimeses tasakaalupunktis on mittelineaarne süsteem mittestabiilne ($\lambda_1 < 0$; $\lambda_2 > 0$).

Teises tasakaalupunktis on mittelineaarne süsteem asümptootiliselt stabiilne ($\lambda_{3,4} = a \pm jb$, kus $a < 0$).

IL 13.4

Vahetulemus: Punkt I $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $\qquad$ Punkt II $\begin{cases} x_1 = -2{,}5 \\ x_2 = -5 \end{cases}$

Jakobiaani väärtus üldkujul: $A = \begin{bmatrix} 3+4x_1 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

Vastus: mittelineaarsel süsteemil on kaks tasakaalupunkti:

Esimeses tasakaalupunktis on mittelineaarne süsteem mittestabiilne ($\lambda_1 < 0$; $\lambda_2 > 0$).

Teises tasakaalupunktis on mittelineaarne süsteem asümptootiliselt stabiilne ($\lambda_3 < 0$; $\lambda_4 < 0$).