TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 313

ОЧЕРКИ ПО ОБРАБОТКЕ ИНФОРМАЦИИ И ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Таллин 1971

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 313 1971

УДК 681.3.01
519.1
513.88

ОЧЕРКИ ПО ОБРАБОТКЕ ИНФОРМАЦИИ И ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Таллин 1971

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 313 1971
УДК 681.3.01

Л.К. Выханду

ОБ ИНТЕГРИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ ОБРАБОТКИ ДИСКРЕТНОЙ ИНФОРМАЦИИ

1. Исследовательский процесс реализуется в основном по петле, где следующими друг за другом фазами служат сбор данных, их анализ, формулировка, проверка и усовершенствование модели. За последние годы произошли большие изменения в методике всех этих фаз. В сборе данных все шире используются методы планирования эксперимента, которые дают экономию как при организации эксперимента, так и при его математическом анализе и формулировке моделей.

Но наряду с "хорошими" задачами существует очень много других, где массовый сбор данных без всякого плана минимизации количества данных просто необходим. Сюда относятся задачи, связанные с анализом разных анкетных опросов. Средний объем таких анкет 1500-5000 объектов, количество признаков, которыми эти объекты описываются, обычно колеблется от 200 до 1000.

Другой важный класс задач связан с обработкой экономической информации в обычном смысле как для решения отдельных задач, так и в режиме создания АСУ разных уровней (В. Шураков, В.Каплинский [1], Г.Новиков, Э.Фаренбрух [2]).

Третий класс задач относится к процессам поиска, обработки и размножения информационных материалов. Из таких систем распространения информации хорошо известны "Пусто-Непусто" и "Кристалл" [3].

В практике все эти задачи обычно решаются отдельно. Наш опыт показывает, что создание системы программирования, связывающей эти классы задач, является вполне возможным и, кроме того, экономным подходом.

Уже в 1964 году были под руководством автора в лаборатории Биофизики и ВЦ Тартуского государственного университета созданы для ЭВМ "Урал-4" первые комплексные программы для статистической обработки данных [8]. С 1967 года в ВЦ Таллинского политехнического института работает система обработки анкет, которая уже имеет зачатки универсальности.

Под руководством автора программист Т.Н. Кала создал программы, которые дают возможность довольно экономно решать задачи, связанные с обработкой анкет.

Даем краткое описание возможностей программ, так как они в печати раньше не появлялись.

2. Программы обработки анкет в ВЦ ТПИ.

Начальные данные оформляются в виде таблицы

$$\begin{array}{c|cccc|} & P_1 & P_2 & \dots & P_M \\ \hline O_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1M} \\ O_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ O_N & a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NM} \\ \hline \end{array},$$

где $O_1, O_2, \dots, O_N$ объекты и $P_1, P_2, \dots, P_M$ признаки объектов. Программы налагают следующие ограничения. Количество признаков у одного объекта – не более 500. Каждый признак может иметь до 99 градаций, но на устройстве широкой печати можно печатать частотные таблицы только тогда, когда по меньшей мере у одного признака число градаций не больше 14.

Программа составляет частотные таблицы между признаками. Для двух заданных признаков печатается таблица следующей формы:

$$\begin{array}{ccccc|c} S_{00} & \dots & S_{0i} & \dots & S_{0n} & B_0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccc|c}
S_{j0} & \ldots & S_{ji} & \ldots & S_{jn} & B_j \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
S_{m0} & \ldots & S_{mi} & \ldots & S_{mn} & B_m \\
\hline
A_0 & \ldots & A_i & \ldots & A_n & N
\end{array}
$$

В этой таблице частот между двумя признаками A и B A_i обозначает количество анкет с градацией i признака A. Внутри таблицы S_{ji} – общее количество анкет, для которых градации j и i встречались одновременно. N – общее количество анкет. Легко увидеть, что

$$N = \sum_i A_i = \sum_j B_j ,$$

$$A_i = \sum_j S_{ji} ,$$

$$B_j = \sum_i S_{ji} ,$$

где $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$.

Вместе с частотами вычисляются следующие статистические показатели:

1. Относительная доля каждой частоты в сумме строки $b_{ji} = S_{ji} : B_j$; относительная доля каждой частоты в сумме столбца $a_{ji} = S_{ji} : A_i$; относительная доля каждой частоты в общем количестве анкет $c_{ji} = S_{ji} : N$; относительная доля частоты каждой градации признака A в общем количестве анкет $d_i = A_i : N$; относительная доля частоты каждой градации признака B в общем количестве анкет $e_j = B_j : N$.

2. Коэффициент $\chi^2 = (S-1)N$,

3. Коэффициент Пирсона $C = \sqrt{\frac{S-1}{S}}$,

4. Коэффициент Чупрова $T = \sqrt{\frac{S-1}{\sqrt{mn}}}$,

5. Коэффициент взаимной информации $T(i,j) = I(i) + I(j) - I(i,j)$,

6. Коэффициент Нильсона

$$K = \sqrt{1 - \left(\frac{\sum A_i^2 \sum B_j^2}{N^2 \sum S_{ji}^2}\right)^2 \cdot \frac{N^2}{\sqrt{N^4 - \sum A_i^2 \sum B_j^2}}},$$

где $i = 0, 1, \ldots, n, \quad j = 0, 1, \ldots, m,$

$$S = \sum_{i,j} \frac{S_{ji}^2}{A_i B_j}, \quad I(i) = \sum_i d_i \lg_2 d_i, \quad I(j) = \sum_j e_j \lg_2 e_j,$$

$$I(i,j) = \sum_{i,j} c_{ji} \lg_2 c_{ji} \quad [4].$$

Для представления вопроса надо просто указать номера признаков, между которыми таблица вычисляется и печатается, напр., 25 - 137. Программы составлены так, что можно получить частотные таблицы, до пятимерных включительно, но практически имеет смысл использовать только т.н. разрезные таблицы типа А - В - С. В этом варианте для каждого значения признака С печатается частотная таблица между признаками А и В. В случае четырехмерной таблицы $A - B - C - D$ выдаются двумерные таблицы частот для всех сочетаний признаков C и D. При составлении многомерных частотных таблиц надо учитывать, чтобы произведение числа градаций всех участвующих признаков было меньше 5000.

Очень часто при составлении частотных таблиц встречаются логические ограничения.

В этом случае при оформлении вопроса сперва указывается, между какими признаками составляются частотные таблицы и после разделителя " ; " пишут в конъюнктивной нормальной форме заданное ограничение. Например, выражение 25-137-4 ; 68(5 $\vee$ 6) $\wedge$ 73(2), означает, что требуется найти в разрезе 4-го признака статистические таблицы между признаками 25 и 137, а при этом учитываются только объекты, у которых 68-й признак имеет или пятую или шестую градацию и одновременно 73-й признак имеет вторую градацию.

Очень полезными служебными программами оказались следующие:

1. Образование распакованных анкет на МЛ. Это дает возможность удобного и быстрого выполнения специальных желаний клиента при помощи подходящего для ЭВМ "Минск-22" алгоритмического языка. На разных языках имеется уже много программ стандартной статистической обработки данных. Конечно, при этом скорость обработки анкет падает по сравнению со специальной программой на машинном коде, но главное то, что не

надо повторно перфорировать материал и не терять дорогостоящее время программиста.

2. Образование новых признаков в анкете.

Часто из введенных данных надо по каким-то правилам образовать новые признаки. В нашей программе для этого существуют две возможности.

В первом варианте задается список признаков $\{p_i \mid p_i \in P\}$ и ряд полуинтервалов $(0, a_1)$, $[a_1, a_2)$, $[a_2, a_3), \ldots, [a_k, \infty)$. Проверяют, сколько признаков d из списка p_i удовлетворяет заданному условию (например, если признаками являются оценки на прочитанные книги, то условие может быть такое:"сколько книг у данного объекта получили хорошую оценку?"). Соответственно полученному числу d присваивают новому признаку значения

$$dd = \begin{cases} 0, & \text{если } d < a_1, \\ 1, & \text{если } d \geqslant a_1, \\ 2, & \text{если } d \geqslant a_2, \\ \ldots & \\ k, & \text{если } d \geqslant a_k. \end{cases}$$

Во втором варианте надо задать ряд логических выражений в конъюнктивной нормальной форме (т.н. ограничения). Для каждого ограничения задан номер признака и значение градации, которое следует присвоить признаку, если условие выполнено. Например, если для признака номер I5 "возраст" заданы следующие градации:

0–I0 лет = I,
II–I5 лет = 2,
I6–I7 лет = 3,
I8–I9 лет = 4,
20–24 года = 5,
25–29 лет = 6,
30–49 лет = 7,
50–59 лет = 8,
60 и больше = 9,

то мы можем составить новый признак, скажем, с номером I93:

$$I93(0) = I5(0)$$
$$I93(I) = I5(I \vee 2 \vee 3),$$

$$I93(2) = I5(4 \vee 5 \vee 6),$$
$$I93(3) = I5(7 \vee 8),$$
$$I93(4) = I5(9).$$

В практической работе этот вариант образования новых признаков оказался необходимым по двум причинам. Во-первых, неопытные составители анкет стремятся к ненужной и недостигаемой точности при создании градаций признаков. После проведения анкеты они убеждаются в крушении своих надежд и должны практически снова составить шкалу градации признаков, чтобы получить приемлемые результаты. Во-вторых, использование логических ограничений дает нам в руки мощное оружие создания обобщенных понятий из начальных признаков. Эти обобщения во многом облегчают и ускоряют работу исследователей при составлении аналитических таблиц.

3. Сопряжение повторно проведенных анкет. Довольно часто исследователи работают по схеме, которая приведена в вводном предложении этой статьи. Сперва проводится анкета и анализируется при помощи ЭВМ. На основании полученных результатов составляются новые вопросы, на которые от тех же объектов получают дополнительные ответы. В большинстве случаев новые результаты не исследуют раздельно, а вместе с ранее полученными. Поэтому необходимо иметь программу сопряжения, которая объединяет новые и старые данные в однородный массив в смысле упаковки признаков и обращения к объектам. Эта программа многократно использовалась. Единственное ограничение - общее количество старых и новых признаков не должно быть больше 500.

Практическая эксплуатация этих программ показала их хорошую и удобную для клиента применяемость. За 4 года существования этих программ при их помощи обрабатывались более 30 анкет. Самое большое количество анкетируемых было 20000. Скорость работы программ зависит от количества логических ограничений, но в среднем за час печатается 200-250 статистических таблиц.

На базе этой маленькой системы программ обработки анкет в настоящее время в лаборатории научной организации учебного процесса ТПИ строится информационная система для учета и анализа работы всех студентов ТПИ.

Опыт работы показал, что систему обработки анкет можно усовершенствовать до уровня довольно универсальной методики обработки дискретной информации вообще.

3. Основные черты системы обработки дискретной информации. В 1969 году между Эстонским радио и кафедрой вычислительной математики ТПИ был заключен договор, на основании которого открылась возможность создания системы обработки дискретной информации ("СОДИ") для ЭВМ "Раздан-3". Параметры ЭВМ "Раздан-3" следующие: оперативная память 32К слов по 48 битов, скорость работы 20000 операций в сек., объем одной магнитной ленты 320000 слов.

Так как для ЭВМ "Раздан-3" в это время эффективного математического обеспечения не было, особенно для задач обработки информации, то перед нами стоял вопрос выбора стратегии хотя бы частичного решения этой проблемы.

Одной из наиболее важных частей каждой системы программирования является управление вводом-выводом. Ведь в крупном плане любая работа на ЭВМ реализуется в трех стадиях - ввод, обработка и вывод. Как указывают в своей книге Фишер и Суиндл [5] "совершенно точно установлено, что 40 % всей работы программиста затрачивается на программирование процессов ввода-вывода. По мере того как вычислительные машины становятся более быстрыми и сложными, все труднее становится обеспечить эффективное использование как их вычислительных, так и внешних устройств. Следовательно, возрастает роль и значение системы управления вводом-выводом". Конечно, для программистов проще всего было бы составить только 1-2 варианта ввода, которые должны учитываться пользователями, но в зависимости от вида и сущности начальных данных полезно иметь многие варианты ввода.

В системе "СОДИ" выработаны следующие варианты ввода.

Вариант 1. Данные перфорированы на перфоленту в международном коде М-2. Между признаками находится знак разделения " ␣ ".

Вариант 2. Анкеты перфорированы в международном коде М-2. Для каждого признака выделено постоянное количество десятичных знаков. Используется вспомогательный массив, где показано, сколько битов каждый признак занимает.

Вариант 3. Анкеты на дуальных перфокартах. Все признаки расположены по столбцам. Вспомогательный массив указывает для столбцов перфокарты (начиная с первого) количество свободных позиций со знаком минус (–) и число позиций, занятых под признаком, со знаком (+).

Если, например, I2 позиций первого столбца имеют следующие значения: I - свободная, 2 - муж, 3 жена, 4 - возраст меньше 20 лет, 5 - возраст до 30 лет, 6 - возраст 30 лет и больше, 7,8 - свободные, 9 - русский, I0 - эстонец, II - другая национальность, I2 - свободная, то этот столбец кодируется так: -I, +2, +3, -2, +3, -I.

Наш опыт показывает, что такой вариант использования дуальных перфокарт, при котором в каждом столбце может быть несколько признаков, практически очень эффективен. Например, для медицинских исследований нам удалось на одну карту разместить более 200 признаков. Использование дуальных карт очень удобно во всех случаях, когда информация собирается постепенно. Автоматическая перфорация и ввод в ЭВМ при помощи указанной схемы описания признаков дает большой выигрыш во времени и средствах, особенно при большом количестве объектов.

Вариант 4. Анкеты на дуальных перфокартах. Все признаки расположены по строкам. Составляется аналогичная схема описания.

Вариант 5. Перфокарта, перфорированная обычным способом для счетно-перфорационных машин типа Т-5М. Составляется схема расположения признаков.

Вариант 6. Стандартная перфокарта для ЭВМ "Раздан-3", где для каждого признака выделено фиксированное количество десятичных знаков. Составляется схема расположения признаков.

Вариант 7. Анкета перфорирована на перфоленту в коде М-2. Каждому значению каждого признака выделен свой кодировочный номер. Вспомогательный массив дает описание того, каким образом каждый признак в отдельности собирается из множества возможных кодировочных номеров. Это практично для случая, когда каждый объект имеет сравнительно мало ответов из всех возможных (т.н. "пустые" анкеты).

Этот вариант ввода имеет принципиальное значение и в том случае, когда "СОДИ" будут использовать для организации работы информационно-поисковой системы. Тогда для каждого документа дают его дескрипторное описание, причем каждый дескриптор имеет свой номер, который перфорируется.

Вариант 8. Если данные имеют иерархическую структуру, то повторяющиеся части данных перфорируют только один раз. Дополнительно задаются массивы описания всех уровней иерархической структуры. Количество уровней неограниченное.

Программы ввода дают клиенту довольно большую свободу в выборе представления начальных данных. В зависимости от своих возможностей и технических средств он выбирает подходящий вариант ввода. При вводе данные проверяются и на АЦПУ выдается анализ ошибок вместе с номером объекта и позиции ошибок на перфоносителе. Неправильные значения заменяются нулем. Их можно поток исправить.

4. Интегрирование разных систем обработки информации.

Вопросы организации программирования в "СОДИ" рассмотрены в статье [6], а принципы организации больших массивов информации в "СОДИ" представлены в [7], поэтому мы остановимся только на логике организации обработки конкретных задач.

Принципы модульности программ, универсальность использования логических ограничений и сопряжения дают нам вместе с автоматическим распределением памяти в руки удобное оружие для решения довольно широкого класса информационно-логических задач.

I. Статистический анализ анкет. После ввода данных можно вычислить для частотных таблиц по желанию клиента около 20 разных статистических показателей, которые позволяют анализировать взаимосвязь между признаками в случае номинальных, ординальных и интервальных шкал. Кроме того, вычисляются показатели, позволяющие провести непараметрические сравнения между отдельными строками или столбцами статистических таблиц. Так как эти методы не представляют особого интереса с точки зрения логики системы, то здесь мы их точного описания не представляем.

2. Дисперсионный анализ. В системе имеется модуль, который для заданного множества вычисляет суммы элемнтов и их квадратов. Так как любая схема дисперсионного анализа описывается логическими ограничениями относительно независимых переменных, то нам остается только задать эти ограничения, и для каждого множества объектов, определенных этими ограничениями, применять модуль суммирования элементов и их квадратов. Однавременно можно использовать около 100 ограничений.

3. Экономические вычисления. Многие стандартные расчеты можно вести к следующему примеру вычисления зарплаты. Все объекты заданы своими характеристиками как анкеты. Каждый вариант вычисления зарплаты задается стандартными логическими ограничениями. Для объекта выбирается подходящее логическое выражение и все виды налогов вычисляются как новые признаки. Анкеты расширяются методом сопряжения в течение одного года, потом вычисляются отпускные и анкета сокращается до минимума. Как только появляются какие-то новые варианты вычисления зарплаты, то их включение предельно простое. Выписывается новое логическое ограничение и соответствующие формулы вычисления налогов.

4. Информационный поиск. Документы описываются дескрипторами и вводятся в ЭВМ в двух разных формах. Первая форма - их краткое описание через дескрипторы - вводится в т.н. активную часть информационного архива. Вторая форма - полный текст документа - идет в т.н. пассивную часть архива. Поисковые образы документов задаются логическими условиями или в дизъюнктивной, или в конъюнктивной форме, и поиск происходит только по активной части архива. Образуется массив номеров документов, удовлетворяющих поисковым образам, и упорядочивается. Потом из пассивной части архива выводятся нужные документы. Этим достигается большая скорость работы по сравнению с объединенным архивом.

Нами введено здесь понятие окружности поискового образа, которое дает возможность методами ассоциативного программирования эффективно найти заданное количество ближайших к поисковому образу документов.

5. <u>Заключение</u>. Описанный подход дает возможность интегрировать в единую систему такие варианты применения ЭВМ, которые обычно решаются в отдельности. Этим достигается существенная экономия времени программиста, а также средств, выделенных на создание конкретной проблемы в области обработки данных. Элементарный, но довольно общий принцип гласит здесь так: системы обработки информации по объему программ не меньше трансляторов стандартных языков программирования. Следовательно, применение методов программирования, которые используются при написании трансляторов, уместно и здесь. Использование модулей, которые решают большую часть логических проблем для программиста, облегчает не только программирование, но одновременно является и хорошей основой для создания языка и транслятора обработки данных.

Литература

I. В. Шураков, В. Каплинский. Программирование учетно-статистических задач для ЭЦВМ "Минск-22". Изд. "Статистика", М. , 1967.

2. Г. Новиков, Э. Фаренбрух. Автоматизация программирования учетно-статистических задач для ЭВМ "Минск-22". Изд. "Статистика", М., 1971.

3. Е. Юпатов, И. Коровякова, В. Тарасов. Отраслевая автоматизированная система информационного обеспечения "Кристалл-Легпром" Изд. "Статистика", М., 1970.

4. А. Нильсон. Некоторые свойства сумм квадратов вероятностей и их математико-статистические приложения. Изв. АН ЭССР, серия техн. и физ.-матем, наук, XIУ, 1965, <u>I</u>, 79-93.

5. Ф. Фишер, Д Суиндл. Системы программирования. Изд. "Статистика", М., 1971.

6. Т. Микли. Организация программирования в системе "СОДИ". (См. наст. сб., стр. 15).

7. Т. Микли, М. Томбак. Принципы организации больших массивов информации в системе "СОДИ". Наст. сб. стр.

8. Programme kõigile. I. Tartu, 1968.

L. Vyhandu

On integrated data processing systems

Summary

A natural way to integrate data processing systems is suggested in this article. One guarantees lower programming costs and a possibility of novel approaches to many practical problems.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 313 1971

УДК 681.3.01

Т.Ю. Микли

ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ "СОДИ"

Эффективное использование современной ЭВМ невозможно без создания системы программирования для конкретной машины. Так как машина "Раздан-3" не имела ни одной удовлетворительной системы программирования, то нам пришлось начинать с самого начала. Первым шагом была организация библиотеки стандартных программ. Языком программирования остался машинный код.

Классом задач, с которым нам пришлось считаться, являлись информационно-логические задачи, наиболее характерными среди которых являются создание информационно-поисковых систем, экономические расчеты, создание систем обработки статистической информации, составление трансляторов [1].

Общими чертами этих задач являются большой объем обрабатываемой информации и логический характер процесса обработки. Из рассматриваемого класса задач вытекает ряд специфических проблем, связанных как со скоростью обработки, так и с техникой программирования. В качестве основного метода при решении этих проблем в системе "СОДИ" используется ассоциативное программирование [4].

Первой задачей, которая была решена в системе "СОДИ", является обработка статистической информации. Реализация этой задачи зависит непосредственно от пожеланий заказчика, главным образом в области ввода, вывода и исправления информации. Исходная информация представляется на различных носителях (перфокарты, перфоленты, дуаль-карты), имеются многообразные формы вывода.

Программирование такой системы приводит к повторению некоторых частей программ. Если выделить эти части и представить их стандартными программами (модулями), то появляется возможность использовать их при программировании других задач, особенно если эти программы можно представить более универсальными алгоритмами. Необходимо учитывать, что начальные данные могут использоваться для многих программ, поэтому их следует хранить длительное время.

Поставлены следующие основные требования при проектировании системы:

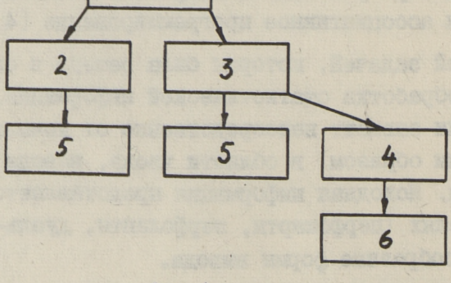
I. Охватить максимально возможное количество расчетов по данной теме.

2. Стандартизировать участки различных программ.

3. Составить программы так, чтобы в них можно было легко внести изменения.

По вышеуказанным причинам в системе "СОДИ" используется принцип модульного программирования. При этом под модулем понимается часть программы, снабженная специальными данными и ограничениями, которые необходимы для объединения этой части с другими в единую программу [3].

Рабочая программа имеет иерархическую структуру. Компановка программы начинается с модуля, который называем основным модулем. Каждый модуль может содержать переход к другим модулям на любом уровне. Например, рабочая программа на фигуре I состоит из основного модуля I и модулей 2,3,4, 5,6.



Фиг. 1.

При повторном обращении модули заново не считываются. Для распознавания команд обращения к модулям используется следующий код:

$$0\ 131\ 00\ 00000\ NR,$$

где NR – номер модуля.

При компановке этот код заменяется командой "переход к подпрограмме" 0 131 00 00017 A, где A – начальный адрес модуля и командой возврата является содержимое индексной ячейки 00017 [2]. Все модули писались в машинном коде и были даны в форме стандартных программ.

Каждая стандартная программа состоит из двух частей: перерабатываемой и неперерабатываемой. Каждое слово СП будет отнесено к перерабатываемой или неперерабатываемой части в зависимости от того, изменяется или остается неизменной адресная часть его при установке СП на другое место памяти. В системе "СОДИ" условиями изменяемого адреса являются:

1) $a \leq a_1 \leq a + n_1$, где a_1 – изменяемый адрес, a – начальный адрес, n_1 – длина программы.

2) операционный код команды отличается от нуля.

Предполагается, что перерабатываемая и неперерабатываемая части СП представляют собой два сплошных массива ячеек памяти, следующих один за другим. При этом перерабатываемой частью считаются адреса $a \div a + n_2$,

где a – начальный адрес СП,

n_2 – длина перерабатываемой части.

Все СП должны быть написаны в действительных адресах, больших 1000. Входная информация для работы СП задается, как правило, в стандартных рабочих ячейках, либо в ячейках, следующих за кодом обращения к СП. В последнем случае при помощи индексной ячейки 17 внутренняя СП может использовать входную информацию.

Все стандартные программы необходимо построить так, что если за кодом обращения с адресом k стоит l строк входной информации, то после окончания работы СП должна передать управление по адресу $k + l + 1$.

В сложных стандартных программах перед обращением к внутренним СП ячейка 00017 должна быть освобождена.

Вся система программирования состоит из программы "Диспетчер" и модулей. Предполагается, что в системе "СОДИ" модули записаны в накопителе на магнитной ленте (НМЛ). На этом же НМЛ находится программа "Диспетчер" (в первой зоне) и массив сведений о каждом модуле. Назовем его массивом "Параметры" (во второй зоне).

На одном НМЛ возможно хранить 128 модулей, так что в каждой зоне находится один модуль и номером модуля является номер зоны НМЛ. Все модули имеют контрольную сумму, которые дополняются до $777777\ 77777\ 77777_8$. Дополнение вычисляется автоматически при записи программ.

Элемент массива "Параметры" (ПАР2) занимает одну строку и содержит следующие сведения о СП.

48 … 31	30 … 16	15 … 1
n_2	a	n_1

где n_1 – длина модуля,
a – начальный адрес модуля,
n_2 – длина перерабатываемой части.

"Диспетчер" служит для считывания и записи модуля на НМЛ, для компановки программы из модулей, для дублирования модулей, присваивания модулю нового номера, чтения модулей в ОЗУ с ПЛ или ПК.

Работа "Диспетчера" организована следующим образом. "Диспетчер" находится постоянно в ОЗУ в ячейках 00100–00577. Кроме того, в ячейках 00600–00777 находится массив "Параметры". Это существенно ускоряет отладку и при работе программ дает возможность последовательного подключения программ.

При обращении к "Диспетчеру" надо задавать информационную строку ПАР1, которая должна содержать следующие сведения:

48 … 46	45 … 37	36 … 31	30 … 16	15 … 1
T	K	S	A_1	A_2

где A_2 – номер модуля,
A_1 – новый номер модуля,
$A_1 \neq 0$ при присвоении нового номера модулю,

$$S = \begin{cases} 0, \text{ модуль считывается с НМЛ,} \\ 1, \text{ модуль находится в ОЗУ,} \\ 2, \text{ модуль читается с ПК,} \\ 3, \text{ модуль читается с ПЛ,} \end{cases}$$

$$K = \begin{cases} 0 \text{ – программа не компануется,} \\ 1 \text{ – на базе основного модуля компануется программа,} \end{cases}$$

$$T = \begin{cases} 0 \text{ – модуль на НМЛ не записывается,} \\ 1 \text{ – модуль записывается на НМЛ с номером } A_2, \text{ если } A_1 = 0 \text{ или } A_1, \text{ если } A_1 \neq 0. \end{cases}$$

Например, для считывания программы в ОЗУ надо задавать ПАРI.

0 000 00 00000 A_2.

Для записи программы, которая находится в ОЗУ, на НМЛ надо задавать ПАРI:

I 000 0I 00000 A_2.

В настоящее время система программирования охватывает более 600 модулей. В этой системе реализованы и внедрены программы обработки анкет для статистического анализа [2], а также система расчета гонорара для Комитета Эстонского радио и телевидения. В стадии внедрения находится система учета материалов для обувного комбината "Коммунар".

Для решения этих задач была разработана операционная система. Из всех модулей, входящих в эту систему, основными являются модули распределения памяти, модули для ввода и вывода данных, модули описания данных и т.д.

Главной проблемой на данном этапе является создание алгоритмического языка на базе системы "СОДИ".

Литература

1. А.И. К и т о в. Программирование информационно-логических задач. М., 1967.

2. Л.К. В ы х а н д у, М.О. Т о м б а к, Т.Ю. М и к л и и др. Система обработки дискретной информации. Таллин, 1970.

3. Ж. Б е р т э н, И. Р и т у, Ж. Р у ж и е. Работа ЭВМ с разделением времени. М., 1970.

4. D.E. K n u t h. The Art of Computer Programming. Vol. 1. Addison-Wesley, Mass. 1969.

T. Mikli

Organization of programming in a data processing system for computer "Razdan-3"

Summary

In this paper a general outlook on programming organization in the data processing system for a computer "Razdan-3" is given. The system is driven by a simple supervisor and it includes ready-made modules.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 313 1971

УДК 681.3.01

Т.Ю. Микли, М.О. Томбак

ПРИНЦИПЫ ОРГАНИЗАЦИИ БОЛЬШИХ МАССИВОВ ИНФОРМАЦИИ В СИСТЕМЕ "СОДИ"

I. Будем рассматривать обработку дискретной информации анкетного типа. Под информацией анкетного типа понимают информацию, где массив начальных данных представлен в виде объект-признака и зафиксирован смысл каждого признака и его значений.

Пусть имеются четыре признака со следующими возможными значениями:

I. Вид (медведь, заяц, слон, верблюд).
2. Размеры (большой, маленький).
3. Цвет (коричневый, серый, белый).
4. Характер (хороший, плохой).

Можем записать это в виде матрицы (будем это называть семантическим описанием анкеты).

$$\begin{pmatrix} \text{медведь} & \text{большой} & \text{коричневый} & \text{хороший} \\ \text{заяц} & \text{маленький} & \text{серый} & \text{плохой} \\ \text{слон} & - & \text{белый} & - \\ \text{верблюд} & - & - & - \end{pmatrix}$$

Так как разные признаки имеют различное количество возможных значений, то число строк матрицы равно максимальному количеству значений признаков (см. [3]).

Особенностью предлагаемых методов обработки информации является отсутствие данных о семантике признаков и их значений. Поэтому является целесообразным, наряду с введением семантического описания анкеты, и введение понятия характеристической матрицы описания анкеты. Для этого будем добавлять к возможным значениям каждого признака еще одно "не определено". Будем присваивать всем признакам порядковые натуральные числа. Значение признака "не определено" соответствует 0. Для вышеуказанного примера будем иметь матрицу.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & I & I & I \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & - & 3 & - \\ 4 & - & - & - \end{pmatrix}.$$

В общем случае, если имеем m признаков и i-й признак $(1 \leqslant i \leqslant m)$ имеет M_i различных значений, то получаем матрицу $m \times r$, где

$$r = \max_i \left\{ M_i \right\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

При этом общий вид элемента a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 0 \leqslant j \leqslant r)$ характеристической матрицы будет следующий

$$a_{ij} = \begin{cases} j, & \text{если } j \leqslant M_i, \\ -, & \text{если } j > M_i. \end{cases}$$

Допустимой траекторией в характеристической матрице будем называть вектор

$$T = (t_1, t_2, \ldots, t_m),$$

где $0 \leqslant t_i \leqslant M_i$.

Различных допустимых траекторий в характеристической матрице существует

$$\prod_{i=1}^{m} (M_i + 1). \qquad (I)$$

В произвольной характеристической матрице имеются две тривиально допустимые траектории:

нулевая траектория

$$0 = (0, 0, \ldots, 0)$$

и максимальная траектория

$$MAX = (M_I,\ M_2,\ \ldots,\ M_m).$$

Последняя, совместно с количеством признаков m, полностью определяет характеристическую матрицу описания данной анкеты.

Произвольную допустимую траекторию характеристической матрицы будем называть объектом. Будем обозначать множество возможных объектов через U. Из формулы (I) следует, что

$$\bar{\bar{U}} = \prod_{i=1}^{m} (M_i + 1).$$

Анкетой будем называть подмножество А, принадлежащее к произвольному множеству U $(A \subset U)$. Учитывая вышеизложенное, увидим, что анкета представляет $n \times m$ –матрицу с элементами из натуральных чисел

$$(1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 0 \leq t_{ij} \leq MAX(j)).$$

В таком виде можно представить социологическую, медицинскую, юридическую, биологическую, экономическую информацию. Такие задачи характеризуют:

I. Большое количество начальной информации. Количество объектов может достигать 200000 и количество признаков до 1000.

2. Сбор информации и перфорация осуществляется в разных местах в разное время.

3. Арифметических операций встречается мало. Большой удельный вес имеют логические условия.

4. Приходится решать много однотипных задач с полным просмотром всего массива начальной информации.

5. Структурные изменения, добавления, исправления и видоизменения объектов и признаков.

2. Для обработки анкет формируют массив АНК. Для обобщения представления информации воспользуемся понятием описания данных.

Описание данных состоит из элементов,

I. связанных с математической структурой анкеты;
2. необходимых для обработки данных;
3. необходимых для ввода объектов.

При описании данных исходят из величин, которые связаны с характеристической матрицей анкеты (т.е. количество признаков М и вектор МАХ).

При проектировании задач по обработке данных надо учитывать параметры вычислительной машины и объем информации. Получаем элементы описания данных, необходимые для обработки данных.

Во многих задачах необходимо хранить на магнитной ленте больше чисел, чем позволяет внешняя память ЭВМ (на одну магнитную ленту машины "Раздан-3" можно записать $3 \cdot 10^5$ машинных слов).

Существенным затруднением при обработке больших массивов является скорость вычислителя, особенно большое время по обмену с внешними устройствами памяти. Поэтому нужно обеспечить такую скорость работы программы, чтобы задачи оказались разрешимыми и были экономически оправданы.

Приемом для уменьшения объема количества информации по обмену может служить уплотнение массива значений признаков. Обычно для хранения одного значения признака достаточно всего нескольких битов и нет смысла занимать целую ячейку. Обработка уплотненного массива затрудняет составление программ для решения задач. Некоторое уменьшение рабочей скорости программ за счет обработки уплотненных массивов не идет в сравнение с потерями времени на дополнительные обращения к внешним устройствам памяти.

3. Введем понятие уплотнения информации. Для определения количества битов, нужных при представлении признака t_j, воспользуемся формулой

$$k_j = \min_{n \in N_j} \{n\},$$

$$N_j = \{ n \,/\, MAX(t_j) \leqslant 2^n \},$$

где k_j – нужное количество битов;

$MAX(t_j)$ – максимальное значение признака.

<u>Пример.</u> Пусть задан объект с признаками t_j ($j = 1, 2, 3, \ldots, 8$). Максимальные значения признаков следующие (в скобках дано нужное количество битов для записи соответствующего признака):

$MAX(t_1) = 500\ (9)$,
$MAX(t_2) = 128000\ (17)$,
$MAX(t_3) = 40\ (6)$,

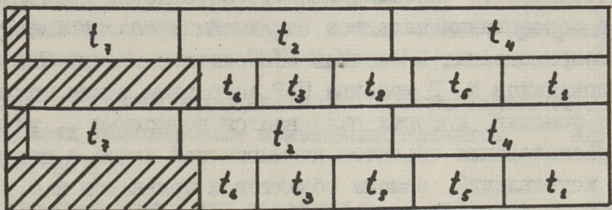
$$MAX\ (t_4) = 255000(I8),$$
$$MAX\ (t_5) = 255(8),$$
$$MAX\ (t_6) = II(4),$$
$$MAX\ (t_7) = 4000(I2),$$
$$MAX\ (t_8) = I20(7).$$

При уплотнении учитываются требования:

I) каждый объект начинается с новой ячейки;

2) не разрешается частичный перенос значения признака в новую ячейку.

Если мы имеем ячейку длиной в 48 битов, то два уплотненных объекта расположены в последовательных ячейках следующим образом (неиспользованные биты заштрихованы):



Фиг. 1

Для описания уплотненного объекта воспользуемся одномерными массивами ЯЧЕЙКА, МАСКА, СДВИГ длины М.

Массив ЯЧЕЙКА состоит из относительных адресов, которые показывают, в какой ячейке объекта расположен данный признак. Если признак t_j находится в k-й ячейке, то ЯЧЕЙКА $(j) = k$. Для приведенного выше примера массив ЯЧЕЙКА выглядит так: (2, I, 2, I, 2, 2, I, 2).

Массив МАСКА предназначен для выделения значений признаков и состоит из восьмеричных констант. Элемент МАСКА(j) выделяет j-й признак из ячейки k. Константа для выделения признака 3 в вышеприведенном примере имеет вид

МАСКА (3) = 0 000 00 00770 00000.

Вспомогательные массивы ЯЧЕЙКА, МАСКА, СДВИГ и МАХ обеспечивают автономность и увеличение скорости работы разных программ. Как видно из предыдущего, в дальнейшем нет необходимости знать, каким образом упакована информация в ячейках. Все рабочие программы отыскивают нужные им признаки с использованием массивов ЯЧЕЙКА, МАСКА, СДВИГ.

Вышеприведенные массивы ЯЧЕЙКА, МАСКА, СДВИГ относятся ко второму виду описания данных, т.е. к необходимым элементам описания данных. Они вычисляются исходя из массива МАХ.

Элементы описания данных, связанные с вводом объектов, находятся в зависимости от изображения информации на перфоносителях. Для распаковки объектов с перфолент и перфокарт применяется массив СХЕМА (см. [I]).

Те элементы описания данных, которые не принимают участия в образовании массивов, включаем в состав массива ПАР. Из вышеприведенных элементов относится в массив ПАР количество признаков М. В массиве ПАР сохраняем также такие данные, с помощью которых оказывается возможным вычисление месторасположения объектов на магнитной ленте с целью внесения исправлений, замены объектов и признаков и т.д. Массив ПАР содержит признаки типов ввода, данные о количестве и т.д.

Перечень возможных признаков и данных в массиве ПАР:

I) количество признаков М,
2) количество объектов на магнитной ленте,
3) количество объектов в последней зоне,
4) вместимость одной зоны магнитной ленты (в объектах),
5) признак наличия массива названий признаков и их значений,
6) количество ячеек одного объекта,
7) вариант ввода,
8) номер I зоны массива АНК,
9) длина массива АНК,
I0) номер последней зоны массива АНК,
II) номер зоны массива МАХ,
I2) номер зоны массивов ЯЧЕЙКА, МАСКА, СДВИГ,
I3) длина зоны массивов ЯЧЕЙКА, МАСКА, СДВИГ,
I4) номер зоны массива СХЕМА,
I5) длина зоны массива СХЕМА и т.д.

4. Произвольная рабочая программа использует массивы описания данных. Имеем дело с избытком информации. Большинство величин массива ПАР, а также массивы ЯЧЕЙКА, МАСКА, СДВИГ можно вычислять исходя из массива МАХ и количества признаков М. Такой избыток информации в массиве ПАР будет сохранен ради автономности работы системы и увеличения скорости рабочих программ.

Заказчик предъявляет вместе с начальными данными максимальные значения признаков и количество признаков М. Далее по программам описания данных определяют остальные элементы описания данных. Массивы ПАР, ЯЧЕЙКА, МАСКА, СДВИГ сохраняют вместе с массивом объектов на магнитной ленте [I].

Вспомогательные массивы ЯЧЕЙКА, МАСКА, СДВИГ для обработки анкетных данных были уже использованы программистом вычислительного центра ТПИ Т.Кала [2].

Следуя принципам ассоциативного программирования, во многих случаях упакованными признаками являются адреса связи (см. [4]).

В настоящее время для описания всех массивов информации в системе "СОДИ" используются массивы ЯЧЕЙКА, МАСКА, СДВИГ. Эти массивы образуются исходя из заданных максимальных значений. Каждый элемент массива ЯЧЕЙКА и соответствующий ему элемент массива СДВИГ упаковываются в одну ячейку, причем с этого момента массив, образованный таким образом, будем называть ЯЧЕЙКА.

5. Здесь приведем алгоритм для составления этих массивов. Алгоритм опишем в псевдоалголе. При этом будем использовать некоторые основные операторы из языка АЛГОЛ-60. Алгоритм зададим по шагам, некоторые известные процедуры только назовем. Вместо описания переменных будем предварительно объяснять их содержание. Комментарии используем произвольно. Для обозначения цикла используем краткую запись. Алгоритм предполагает, что в памяти заданы три массива MI, M2, M3 [I:M], которые соответствуют массивам МАХ, ЯЧЕЙКА, СДВИГ. При этом в ячейках массива MI в битах I $\div$ 33 находятся максимальные значения признаков (MAKS). Так как во время работы алгоритма элементы массивов MI, M2, M3 со-

стоят из нескольких изменяющихся полей, их при описании алгоритма будем рассматривать отдельно. Во время работы алгоритма элементы массива МI имеют следующую структуру:

```
48      40  39      34  33                      I
|____________|___________|__________________________|
   CELL        SHIFT              MAKS
```

Переменные SHIFT и CELL предназначены соответственно для промежуточного накопления констант сдвига и относительных адресов каждого признака. После окончания работы производится гашение этих переменных.

Элементы массива М2 во время работы имеют следующую структуру:

```
48      47 46                 I6 I5              I
|_________|____________________|___________________|
    T             BIT                  NR
```

и приобретают окончательную структуру при шаге S5

```
48                            I6 I5              I
|______________________________|___________________|
             SHIFT                     CELL
```

где NR - номер признака,
BIT - количество битов, необходимое для представления данного признака,
T - показывает, обработан ли данный признак.

Из такого представления вытекают следующие ограничения для упакованных чисел:

1) $\text{MAX}\ [j] \le 2^{33}-1;\quad j = 1, 2, 3, \ldots, M,$

2) $\text{ЯЧЕЙКА}\ [j] \le 2^{8}-1;\quad j = 1, 2, 3, \ldots, M.$

Вместе с образованием массива ЯЧЕЙКА алгоритмом производится попытка минимизации количества ячеек одного объекта. Наряду с вышеуказанными используются переменные K и L. Первая из них подсчитывает уже использованные биты, а другая — использованные ячейки.

S1: Для каждого признака вычисляется число битов.

```
FOR I: = 1(1)M DO BEGIN
BIT[I]:=entier (log2 MAKS[I] + 1);
NR[I]: = I; END;
```

S2: Сортировка массива M2 в убывающем порядке.

S3: K:=0; L:=1.

S4: Формирование промежуточного массива M2.

```
FOR I:=1(1)M DO BEGIN
IF T[I]=0 THEN BEGIN
IF K + BIT[I] ≤ 48 THEN BEGIN CELL[NR[I]]:=L;
M3[NR[I]]:=(2 ↑ BIT[I] - 1) × 2 ↑ K;
SHIFT[NR[I]]:=K; K:=K + BIT[I]; END
ELSE BEGIN FOR J:=I + 1(1)M DO
IF T(J)=0 THEN BEGIN
IF K + BIT[J] ≤ 48 THEN BEGIN
CELL NR[J]:=L; M3[NR[J]]:=(2↑BIT[J]-1)×2↑K;
SHIFT[NR[J]]:=K; K:=K + BIT[J]; T[J]=1; END; END;
L:=L + 1; K:=0; END; END; END;
```

S5: Упорядочение массивов MI и M2 к окончательному виду.

```
FOR I:=1(1)M DO BEGIN
M2[I]:=(SHIFT[I] + 64)×2↑15 + CELL[I];
M1[I]:=MAKS[I]; END
```

Программа этого алгоритма реализована модулем в системе "СОДИ" (см. [I]).

Литература

I. Л.К. Выханду, М.О. Томбак, Т.И. Микли и др. Система обработки дискретной информации. Таллин, 1970.

2. Л.К. Выханду. Об интегрированных системах обработки дискретной информации. Наст. сб., стр. 3.

3. Э. Хант, Дж. Марин, Ф. Стоун. Моделирование процесса формирования понятий на вычислительной машине. М., 1970.

4. D.E. Knuth. The Art of Computer Programming. Vol. 1. Addison-Wesley, Mass. 1969.

T.Mikli, M.Tombak

Principles of the data organization in a data processing system for computer "Razdan-3"

Summary

In this paper some viewpoints on the large volume data processing are given. To speed up data processing the packing of items is used. Special data description tables are used to assure the independence of data from the programs. An algorithm to form data description arrays is given.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 313 1971

УДК 591.1

И.Э. Муллат

О ЦИКЛИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ОБОБЩЕННЫХ ГРАФОВ

1. Введение. В последнее время внимание некоторых авторов привлечено к так называемой проблематике разложения полного графа на подграфы (полный граф - это система всех пар вершин). Обычно под разложением понимается разбиение графа на непересекающиеся части. Так, в некоторых работах рассматриваются разложения полного графа на плоские подграфы, в других изучаются разложения полного графа на многоугольники, обладающие дополнительно свойством цикличности, в частности, доказана возможность циклического представления некоторых полных графов в виде $4k$ угольников. Среди комбинаторных свойств свойство цикличности следует выделить особо, поскольку оно заключается в существовании у разложения "осевой" симметрии. Факт существования "осевой" симметрии часто используется в теории кодирования для построения так называемых циклических кодов, в связи с чем вопрос существования циклических разложений приобретает важное значение.

Среди работ, на которые следует обратить внимание в связи с кругом вопросов настоящей статьи, укажем лишь на работу [3], в которой рассматриваются разложения обобщенных графов.

Обобщенный граф G измерения d или d-граф (без петель) - это объединение двух множеств, а именно: множества $V(G)$, элементы которого называются вершинами, и множества $E(G)$, элементы которого называются ребрами измерения d. Ребро измерения d - это отношение между вершинами $V(G)$, называемое инцидентностью, такое, что точно одно ребро инцидентно d различным вершинам и каждые d вершин инцидентны вместе не более чем одному ребру. При $d=2$ получаем неориентированный граф в обычном смысле. Называем d-граф полным, если для каждых d вершин существует инцидентное им ребро (мы говорим, что эти d вершин соединены ребром).

Пусть d-граф $G=[V(G);\ E(G)]$, d-граф G' является подграфом G, если $V(G')\subset V(G), E(G')\subset E(G)$. Определяем объединение d-графов G_1 и G_2 следующим образом: $G_1\cup G_2=[V(G_1)\cup V(G_2);\ E(G_1)\cup E(G_2)]$. Если для данного d-графа G, где $G=\bigcup_{i=1}^{m} G_i$ выполнены условия, что $V(G_i)\neq\emptyset\ (i=1,\dots m)$, $E(G_i)\cap E(G_j)=\emptyset$ [I] для $i\neq j$, то говорят, что d-граф G разложен на m подграфов $G_1 G_2\cdots G_m$.

Пусть G_i – подграф d-графа G. Обозначим через G_i^c подграф d-графа G, у которого вершины v_1+1, v_2+1, ... v_d+1 (сложение по модулю [2] $|V(G)|$) соединены ребром тогда и только тогда, когда соединены ребром вершины $v_1 v_2\cdots v_d$ в подграфе G_i. Разложение d-графа G называется циклическим, если вместе с подграфом G_i оно содержит и подграф G_i^c.

2. Основная лемма. Рассмотрим конечное множество $\mathfrak{M}$ любой природы лишь с одним условием, что определено умножение справа на элементы группы S со следующими свойствами:

1. $xJ=x$,
2. $(xs_1)s_2=x(s_1\cdot s_2)$,

где J – единица группы S, $x\in\mathfrak{M}$ и $s_1, s_2\in S$. Предполагается, что $xs\in\mathfrak{M}$.

Пусть H_x группа тех элементов $s\in S$, для которых $xs=x$. Элемент $a\in S$ называется сопряженным в группе S с элементом $b\in S$, если существует элемент $t\in S$ такой, что $tat^{-1}=b$.

I Здесь $\emptyset$ – пустое множество.

2 Отметим, что, если $\mathfrak{N}$ – конечное множество, то через $|\mathfrak{N}|$ обозначается число его элементов.

Отношение сопряженности в группе S очевидно эквивалентность. Пусть $r_0 \in S$ и S_0 класс сопряженных в группе S элементов с представителем r_0. Будем говорить, что элемент $y \in \mathfrak{M}$ стационарен относительно r_0, если выполняется условие $yr_0 = y$.

<u>Лемма.</u> Во множестве $\mathfrak{M}$ существуют элементы,стационарные относительно элемента r_0 тогда и только тогда, когда хотя бы для одной группы H_x выполняется, что $H_x \cap S_0 \neq \emptyset$.

<u>Доказательство. Необходимость</u> условия леммы следует из определения.

<u>Достаточность.</u> Выберем элемент $r \in H_x \cap S_0$. Тогда очевидно, что $xr = x$. Вследствие того, что $r \in S_0$, элемент r можно записать в виде $r = trt^{-1}$. Имеем $xtr_0t^{-1} = x$ или $xtr_0 = xt$. Значит элемент $y = xt$ и $y \in \mathfrak{M}$ стационарен относительно элемента r_0.

3. <u>Теоремы существования циклических разложений полного обобщенного графа на подграфы с одинаковым числом ребер.</u>

Пусть φ – подстановка степени n, $\varphi(r)$ – число циклов длины r разложения подстановки в произведение независимых циклов. Множество целых чисел $\{\varphi(r)\}$, расположенных по порядку возрастания длин циклов $r = 1, 2, \dots n$, называется типом подстановки φ. Пусть π – подстановка вершин полного d-графа и πv образ вершины v. Индуцируется подстановка ребер

$$\pi_d : (v_1 v_2 \dots v_d) \longrightarrow (\pi v_1\, \pi v_2 \dots \pi v_d).$$

Выберем за множество $\mathfrak{M}$ множество всех разложений полного d-графа G на m подграфов G_i $(i=1,2,\dots m)$, каждый с одним и тем же числом ребер. Положим, что $|V(G)| = n$. Выберем за группу S симметрическую группу подстановок степени $\binom{n}{d}$. Умножение элемента $x \in \mathfrak{M}$ на $s \in S$ определим как замену ребер одновременно во всех подграфах G_i разложения графа G в соответствии с подстановкой s. Положим, что $\binom{n}{d}/m = N$. Пусть x разложение полного d-графа G на подграфы с одинаковым числом ребер, равным N. В качестве элемента множества $\mathfrak{M}$ разложение x определяет группу H_x. Предлагаем проверить, что H_x есть группа Кранца[3] $S_m[S_N]$. Определяем подстановку вершин полного d-графа как $cv = v+1 \pmod n$. Нетрудно заметить, что существование циклических разложений полного d-графа G на подграфы с одинаковым числом ребер эквивалентно существованию в выбранном нами множестве $\mathfrak{M}$ элементов, стационарных относительно c_d. Вследствие того, что подстановки равной степени с одним и тем же типом сопряжены в симметрической группе той же степени[4], вопрос существования указанных выше циклических разложений сводится, на основании леммы предыдущего параграфа, к вопросу о непустоте множества подстановок в группе $S_m[S_N]$ с типом подстановки ребер c_d.

<u>Теорема I.</u> Циклическое разложение полного d-графа на m подграфов с одинаковым числом ребер в случае числа n некратного d существует тогда и только тогда, когда разрешимо в целых числах уравнение

$$\sum_i \frac{n}{d_i} u_i = m, \tag{I}$$

где d_i – общие делители чисел N и n, а неизвестные $u_i \geq 0$.

<u>Доказательство.</u> Пусть P цикловой индекс[5] группы подстановок $S_m[S_N]$. Непосредственно из определения циклового индекса группы подстановок устанавливаем, что множество подстановок с типом $\{c_d\}$ в группе $S_m[S_N]$ не пусто тогда и только тогда, когда среди одночленов многочлена P имеется одночлен $x_n^{\binom{n-1}{d-1}/d}$. Предыдущее предложение верно вследствие того, что тип подстановки c_d $\{c_d\}$ следующий:

I. $c_d(r) = 0$ при $r \neq n$,

2. $c_d(r) = \binom{n-1}{d-1}/d$ при $r = n$.

Пусть $S_i(t_1 t_2 \cdots)$ – цикловой индекс симметрической группы подстановок S_i, записанный в переменных t_i. На основании теоремы 5 статьи [I] (см. стр. 98) имеем, что

---

[3] Определение см. [I], стр. 98.
[4] См. [2], стр. 66.
[5] Определение см. в [I], стр. 63.

$$P(x_1 x_2 \ldots) = S_m\left[S_N(x_1,\ldots),\ldots S_N(x_m\ldots)\right].$$

Правая часть предыдущего равенства получена подстановкой многочленов $S_N(x_j, x_{2j}\ldots)$ вместо переменных y_j в многочлене $S_m(y_1 y_2 \ldots)$. Заметим, что одночлен вида $x_n^{\binom{n-1}{d-1}/d}$ может в многочлене $S_m(y_1 y_2 \ldots)$ образовать одночлены вида $\prod_i y_{n/d_i}^{b_i}$ и только такого вида, где d_i – общие делители чисел N и n и, кроме того, $\sum_i \frac{n}{d_i} b_i = m$. Отсюда следует, что разрешимость уравнения (I) эквивалентна существованию одночлена $x_n^{\binom{n-1}{d-1}/d}$ в цикловом индексе P группы подстановок $S_m[S_N]$. В силу сделанных выше замечаний доказательство теоремы завершено.

Теорема 2. Циклическое разложение полного d-графа на m подграфов с одинаковым числом ребер в случае числа n кратного d существует тогда и только тогда, когда существует такое число k, что разрешимо в целых числах уравнение

$$\sum_i \frac{n}{d_i} u_i = m - \frac{n}{d.k}, \qquad (2)$$

где d_i – общие делители чисел N и n,

k – делитель числа n/d, число $(N-k)/d{\cdot}k$ – целое и неизвестные $u_i \geq 0$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы I устанавливаем, что множество подстановок с типом $\{c_d\}$ в группе $S_m[S_N]$ не пусто тогда и только тогда, когда среди одночленов многочлена P имеется следующий одночлен

$$x_{n/d} \cdot x_n^{\left[\binom{n-1}{d-1}-1\right]/d}.$$

Справедливость предшествующего утверждения следует из того факта, что тип подстановки c_d $\{c_d\}$ следующий:

1. $c_d(r) = 0$ при $r \neq n$ и n/d,
2. $c_d(r) = 1$ при $r = n/d$,
3. $c_d(r) = \left[\binom{n-1}{d-1} - 1\right]/d$ при $r = n$.

Вновь заметим, что $x_{n/d} \cdot x_n^{[\binom{n-1}{d-1}-1]/d}$ после замены в $S_m(y_1, y_2 \ldots)$ переменных y_j на многочлены $S_N(x_j, x_{2 \cdot j}, \ldots)$ могут образовать лишь одночлены вида $y_{n/d \cdot k} \cdot \prod_i y_{n/d_i}^{b_i}$ и только такого вида, где k – делитель числа n/d и число $(N-k)/d \cdot k$ – целое, d_i $(i = 1, 2, \ldots)$ – делители чисел N и n при условии, что $\sum_i \frac{n}{d_i} b_i = m - \frac{n}{d \cdot k}$. Отсюда следует, что существование числа k, при котором разрешимо уравнение (2) в целых числах, эквивалентно существованию одночлена $x_{n/d} \cdot x_n^{[(\binom{n-1}{d-1})-1]/d}$ в цикловом индексе P группы подстановок $S_m[S_N]$. Теорема доказана.

Литература

I. Н. Де Б р е й н. Теория перечисления Пойа. Сб. ст. "Прикладная комбинаторная математика". Изд. "Мир" М., 1968.

2. М. Х о л л. Теория групп. ИЛ. М., 1962.

3. B. Z e l i n k a. The decomposition of a complete generalized graph into two subgraphs isomorphic to each other. Časop. pěstov. mat., 1968, v. 93, No. 3, 278-283.

J.Mullat

On circle decomposition of a generalized graph

Summary

In this paper necessary and sufficient conditions for the circle decomposition of complete generalized d-graph onto equal-edge d-subgraphs are given. The method used to obtain the conditions for the decomposition is nonconstructive.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 313 1971

УДК 51:65.012.122

И.Э. Муллат

ОБ ОДНОМ ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВ

I. Введение. В работе рассматривается задача нахождения экстремума функции, определенной на всех подмножествах данного конечного множества. Описанный алгоритм построения экстремальных множеств использовался для решения некоторых задач классификации объектов с существенным привлечением аппарата однородных цепей Маркова. Предложенная в общем виде конструкция позволяет решать также определенные задачи на графах, например, выявление "связных" в некотором смысле подмножеств вершин заданного графа. Теоретическая основа конструкции формулируется в виде специальных правил отбора последовательностей подмножеств данного конечного множества и последовательностей его элементов, результатом которых является выделение экстремальных множеств.

Задачи подобного типа носят комбинаторный характер и относятся скорее всего к дискретному программированию. Определенный класс задач на конечных множествах успешно решается в работах Черенина [I,2] и Черенина и Хачатурова [3, 4]. В указанных работах рассматриваются функции, удовлетворяющие условию, которое заключается в том, что, если ω_1 и ω_2 два подмножества данного конечного множества, то

$$f(\omega_1) + f(\omega_2) \leq f(\omega_1 \cup \omega_2) + f(\omega_1 \cap \omega_2).$$

Это условие в некоторой степени отражает выпуклость функции f.

Определяющим моментом рассмотренного в статье класса функций является предположение о существовании для каждого элемента данного конечного множества чисел, характеризующих степень вхождения элемента в подмножество конечного множества и удовлетворяющих условиям пунктов I,2 (см. ниже).

В связи с данной работой следует обратить внимание также на работу Миркина [5]. В [5] ставится одна задача классификации, в которой нахождение оптимальной классификации сведено к нахождению специальной раскраски неориентированного графа. Оптимальная классификация в [5] характерезуется фактически значением максимума некоторой функции, совпадающей по форме с определением (I), однако в (I) вкладывается иное содержание, поскольку в определении функции в настоящей работе не рассматриваются множества разбиений данного конечного множества на непересекающиеся классы, как это делается в работе Миркина.

2. Пусть $\{H\}$ - множество подмножеств некоторого конечного множества $\mathfrak{M}$. Предположим, что для каждого множества $H \subset \mathfrak{M}$ задана функция π_H его элементов. Ниже мы называем совокупность $\{\pi_H\}$ системой весов на множестве H. Основные предположения относительно систем весов $\{\{\pi_H\}\}$ следующие:

Пункт I. Вес $\pi_H(\alpha)$ элемента $\alpha \in H$ действительное число.

Пункт 2. Существует следующая зависимость между системами весов различных подмножеств множества $\mathfrak{M}$: для любого элемента $\alpha \in H$ и любого $\beta \in H|\alpha$ выполняется

$\pi_{H|\alpha}(\beta) \leqslant \pi_H(\beta)$.

Иными словами, пункт 2 требует, чтобы в результате удаления любого элемента из множества H на оставшейся части $H|\alpha$ образовалась бы новая система весов $\{\pi_{H|\alpha}\}$, причем удаленный элемент α оказывал бы влияние на веса только в сторону уменьшения. Поясним эти два предположения примерами из теории графов, хотя существуют примеры и из других областей, однако менее доступные для краткого изложения. Рассматриваем неориентированные графы, то есть если существует отношение вершины x к y, то и обратно вершина y находится в отношении к x.

Пример I. Пусть $\mathfrak{M}$ – множество вершин графа G. Определяем систему весов $\{\pi_H\}$ на каждом подмножестве вершин H в виде совокупности чисел $\{\pi_H(\alpha)\}$, где $\alpha \in H$ и $\pi_H(\alpha)$ – число вершин множества H, находящихся в отношении G с вершиной α. Легко проверить достоверность пунктов I и 2, если вспомнить, что вместе с вершиной α нужно удалить и все ей инцидентные ребра графа.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{M}$ – множество ребер графа G (или множество пар вершин, находящихся в отношении G). Определяем систему весов $\{\pi_H\}$ на каждом подмножестве ребер H графа G в виде совокупности чисел $\{\pi_H(\alpha)\}$, где $\alpha \in H$, а $\pi_H(\alpha)$ – число треугольников множества ребер, содержащих ребро α. $\pi_H(\alpha)$ – число вершин из множества вершин, на котором построено множество H таких, что если x – указанная вершина и ребро $\alpha = [b, e]$, то $[b, x] \in H$ и $[e, x] \in H$.

В приведенных примерах мы использовали тот факт, что граф, с одной стороны, топологический объект, а с другой, – бинарное отношение.

Рассмотрим следующую функцию подмножеств

$$f(H) = \min_{\alpha \in H} \pi_H(\alpha), \tag{I}$$

где $H \subset \mathfrak{M}$.

Ниже мы предлагаем принцип, который выполняется для множества H такого, что на H достигается глобальный максимум функции вида (I). Принцип формулируется на языке некоторых последовательностей элементов множества $\mathfrak{M}$ и последовательностей подмножеств множества $\mathfrak{M}$.

Пусть $\bar{\alpha} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\}$

последовательность элементов множества $\mathfrak{M}$ и $k = |\mathfrak{M}|$. Определяем по $\bar{\alpha}$ последовательность множеств

$$\bar{H}(\bar{\alpha}) = \{H_0, H_1, \ldots, H_{k-1}\},$$

где

$$H_0 = \mathfrak{M}, \quad H_{i+1} = H_i | \alpha_i .$$

Определение I. Назовем последовательность элементов $\bar{\alpha}$ множества $\mathfrak{M}$ определяющей, если в последовательности множества $\bar{H}(\bar{\alpha})$ существует подпоследовательность

$$\bar{G} = \{ G_0, G_1, \ldots, G_p \}$$

такая, что

I° вес $\pi_{H_i}(\alpha_i)$ любого элемента из последовательности α, принадлежащего G_j, но не принадлежащего G_{j+1}, строго меньше $f(G_{j+1})$;

2° в G_p не существует такого собственного подмножества L, чтобы выполнялось условие

$$f(G_p) < f(L).$$

Определение 2. Подмножество H множества $\mathfrak{M}$ назовем определимым, если существует определяющая последовательность такая, что $H = G_p$.

Далее, ради удобства, мы расшифровываем обозначение $\{\pi_H\}$ как систему весов относительно множества H.

Теорема. На определенном множестве H функция $f(H)$ достигает глобального максимума. Существует единственное определимое множество. Все множества, на которых достигается глобальный максимум, лежат внутри определимого множества.

Доказательство. Пусть H – определимое множество. Допустим, что существует L такое, что $f(H) \leq f(L)$. Предположим, что[I] $L | H \neq \phi$. В противном случае останется доказать лишь единственность H, что будет осуществлено ниже. Пусть H_t наименьшее из множеств H_i $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$, которые включают $L | H$. Из этого факта легко установить, что существует элемент $l \in L$ такой, что $l \in H_t$, но $l \notin H_{t+1}$ ξ. Более того, вследствие $L | H \neq \phi$ $t < p$. Неравенство $t < p$ влечет существование хотя бы одного множества в последовательности множеств $\bar{G}$ такого, что

$$\pi_{H_t}(l) < f(G_j) \qquad (2)$$

[I] Здесь ϕ обозначает пустое множество.

и $j \geq t+1$. Так как $l \notin H_{t+1}$, но $G_j \subseteq H_{t+1}$, то $l \notin G_j$. Значит, справедливо неравенство

$$f(G_j) \leq f(G_p), \tag{3}$$

вытекающее как следствие из свойства I° определяющей последовательности.

Пусть теперь $m \in L$ и вес $\pi_L(m)$ минимален в системе весов относительно подмножества L. Неравенства (2) и (3) позволяют заключить, что $\pi_{H_t}(l) < \pi_L(m)$. Выше H_t выбиралось таким, что $L \subset H_t$, тогда, вспоминая основное свойство пункта 2 систем весов (удаление элементов), легко установить, что $\pi_L(l) \leq \pi_{H_t}(l)$, т.е. в системе весов относительно множества L существует вес, который меньше минимального. Мы пришли к противоречию и тем самым доказали, что на H достигается глобальный максимум и что множества, отличные от H, на которых тоже достигается глобальный максимум, могут разве лишь находиться внутри H. Нам остается доказать, что существует единственное определимое множество. Вследствие доказанного выше можно лишь предположить, что некоторое определимое множество H' включено в H, однако, проведя рассуждения относительно H, аналогичные проведенным выше для L, заключаем, что $H \subset H'$ и т.д.

<u>Следствие.</u> Пусть $\{R\}$ – система множеств, на которых функция (I) достигает глобального максимума. Тогда, если $H_1 \in \{R\}$ и $H_2 \in \{R\}$, то и $H_1 \cup H_2 \in \{R\}$.

<u>Доказательство.</u> По пункту 2 (основное свойство) $f(H_1) \leq f(H_1 \cup H_2)$, но и $f(H_1 \cup H_2) \leq f(H_1)$, что вытекает из доказанной теоремы, следовательно,

$$H_1 \cup H_2 \in \{R\}.$$

Ниже мы приводим конкретный алгоритм построения определяющих последовательностей элементов множества $\mathfrak{M}$. Ради удобства изложения алгоритм приводится в форме, которая сходна с блок-схемой некоторой программы для ЭВМ.

3. <u>Алгоритм.</u>

I. Полагаем множество $R = \mathfrak{M}$ последовательности $\bar{\alpha}$ и[2]

---

[2] У нас $\bar{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i \ldots\}$.

$\bar{\beta}$ пустыми, индекс $i = 0$.

II. Находим элемент μ с наименьшим весом относительно множества R, запоминаем значение $\lambda = \pi_R(\mu)$ и полагаем последовательность $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \mu$ затем $\bar{\beta} = \phi$.

III. Исключаем элемент μ из множества R и учитываем влияние изъятого элемента $\mu \in R$ на остальные, т.е. вычисляем все величины $\pi_{R|\mu}(\beta)$ для $\beta \in R|\mu$.

IУ. В случае, если существуют среди оставшихся элементы такие, что

$$\pi_{R|\mu}(\gamma) \leq \lambda, \tag{4}$$

то образуем последовательность указанных элементов

$$\bar{\gamma} = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s\}$$

и положим $\bar{\beta} = \bar{\beta}, \bar{\gamma}$.

У. Положим множество $R = R|\mu$ и элемент $\mu = \beta_{i+1}$ и возвращаемся к пункту III в случае, когда элемент β_{i+1} определен для последовательности $\bar{\beta}$, увеличивая при этом индекс i на единицу.

УI. В случае, когда последовательность $\bar{\alpha}$ исчерпала все множество $\mathfrak{M}$, построение закончено, в противном случае возвращаемся к пункту II, полагая индекс $i = 0$.

Докажем, что построенная с помощью изложенного алгоритма последовательность $\bar{\alpha}$ определяющая. Рассмотрим последовательность множеств $\bar{H}(\bar{\alpha})$ и в качестве подпоследовательности $\bar{G}$ выберем те множества, которые начинаются с элементов μ, найденных при прохождении пункта II настоящего алгоритма. Из того факта, что за G_j выбираются множества из последовательности $\bar{H}(\bar{\alpha})$, образовавшейся при прохождении пункта II, следует, что предварительно не выполнено условие (4) и элемент β_{i+1} не определен. Из вышесказенного следует свойство I^0 определяющей последовательности. Допустим, что свойство 2 определения I не выполняется, т.е. в последнем множестве G_p последовательности $\bar{G}$ существует такое подмножество L, что $f(G_p) < f(L)$.

Рассмотрим последовательность $\bar{\beta}$, которая образуется начиная с последнего прохождения пункта II описанного выше алгоритма и обозначим через λ_p наибольшее из всех значений λ

Исходя из допущения существования множества L и замечая, что $\lambda_p = f(G_p)$, приходим к неравенству $\lambda_p < f(L)$.

По построению последовательности $\bar{\beta}$ она должна исчерпать все множество $\mathfrak{M}$ вместе с последовательностью $\bar{\alpha}$, образовавшейся к моменту последнего прохождения в алгоритме через пункт II. Следовательно, можно рассмотреть множество элементов K последовательности $\bar{\beta}$, начинающееся с первого встретившегося элемента $l \in L$, где $L \subset K$. На основании вышесказанного получаем $\pi_K(l) = \lambda_p$ и, вспоминая основное свойство систем весов пункта 2 (удаление элементов), можем заключить, что подавно $\pi_L(l) \leq \lambda_p$. Мы пришли к противоречию, и тем самым доказали свойство 2^0 определения I для последовательности $\bar{\alpha}$. Таким образом, построение определяющих последовательностей осуществимо с помощью указанного выше алгоритма.

В связи с возможностью применения экстремальных задач на конечных множествах в распознавании образов желательно конкретизировать понятие системы весов относительно подмножества заданного конечного множества, что должно составить предмет дальнейших исследований.

В заключение отметим, что построение определяющих последовательностей было осуществлено практически на ЭВМ для одной задачи в теории графов, связанной с выявлением "достаточно полных" подграфов заданного графа. Мощность ребер графа составляла около 10^4.

Литература

I. В.П. Черенин. Решение некоторых комбинаторных задач оптимального планирования методом последовательных расчетов. Материалы к конференции по опыту и перспективам применения математических методов и ЭВМ в планировании, Новосибирск, 1962.

2. В.П. Черенин. Решение некоторых комбинаторных задач оптимального планирования методом последовательных расчетов. Научно-методические материалы эконом.-матем. семинара, вып.2 ЛЭММ и ВЦ АН СССР, М., 1962.

3. В.П. Черенин, В.Р. Хачатуров. Решение методом последовательных расчетов одного класса задач о размещении производства. Сб. Применение матем. методов и ЭВМ в эконом. исследованиях. Изд. "Наука", Узб. ССР, Ташкент, 1965.

4. В.П. Черенин, В.Р. Хачатуров. Решение методом последовательных расчетов одного класса задач о размещении производства. Сб. "Эконом.-матем. методы", вып.2, изд. "Наука", М., 1965.

5. Б.Г. Миркин. Задача классификации по качественным данным. Сб. "Матем. вопросы формирования эконом. моделей". Новосибирск, 1970.

J.Mullat

On the maximum principle for some set functions

Summary

This article deals with the problem of finding extremal points for the function given on all subsets of a finite set. The construction method for the function (1) results in the separation of extremal sets. The main feature of the construction method is based on an assumption that there exists a number set $\{\pi_H(\alpha)\}$ for every element α, where H is a subset of the finite set and $\alpha \in H$.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 313 1971

УДК 519.1

Г.А. Вейнер

ОБ АППРОКСИМАЦИИ СИММЕТРИЧНОГО РЕФЛЕКСИВНОГО БИНАРНОГО ОТНОШЕНИЯ ОТНОШЕНИЕМ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

1. Основные понятия. Определим бинарное отношение как подмножество декартового произведения двух непустых конечных множеств. Если $R \subset A \times B$ бинарное отношение, тогда мы можем представить это отношение* при помощи матрицы. Для этого введем матрицу $M = (m_{ij})$,

где
$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } (a,b) \notin R \\ 1 & \text{при } (a,b) \in R \end{cases}$$

и между множествами A (множествами B) и строками (столбцами) матрицы M существует взаимно однозначное соответствие.

Пусть $S \subset A \times B$ и $T \subset B \times C$ два отношения, тогда произведение $ST \subset A \times C$ определено упорядоченными парами (a,c), где $(a,b) \in S$ и $(b,c) \in T$. Обозначая матрицами M, N и Q соответственные матрицы отношений S, T и ST, можем, основываясь на работе [2], написать уравнение $Q = MN$, где правая сторона - булевское произведение матриц M и N. Булевское произведение мы получим, если учитываем, что $1+1=1$.

Если $R \subset A \times B$, то определим отношение $R^{-1} \subset B \times A$ следующим способом: $(b,a) \in R^{-1}$ тогда и только тогда, когда $(a,b) \in R$.

Теперь рассмотрим отношение $R \subset V \times V$ и определим еще отношение Δ через $(a,a) \in \Delta$, если только $a \subset V$. Заметим также, что $R^2 = RR$.

*В дальнейшем под отношением всегда понимается бинарное отношение.

Отношение называется соответственно рефлексивным, симметричным, транзитивным, если

$$1^\circ \quad \Delta \subset R$$
$$2^\circ \quad R = R^{-1}$$
$$3^\circ \quad R^2 \subset R.$$

Отношение, имеющее все эти свойства, называется отношением эквивалентности.

О. Оре показал в [3], что отношение R может быть представлено в виде графа G с множеством вершин V и что ребро (a,b) принадлежит G тогда и только тогда, когда пара $(a,b) \in R$.

Теорема (Ж. Риге, [2]). Отношение R есть отношение эквивалентности тогда и только тогда, когда $\Delta \subset R$ и $R = RR^{-1}R$.

2. Теорема. Если отношение R симметричное и рефлексивное, то оно является отношением эквивалентности тогда и только тогда, когда $R = R^2$.

Доказательство. Достаточность. Если $R = R^2$, то $R^2 \subset R$ и, следовательно, условия эквивалентности выполнены.

Необходимость. Из условий $R = R^{-1}$ и $R^2 \subset R$ получим подстановкой, что $R^{-1}R \subset R$. Тогда $R \subset RR^{-1}R \subset RR \subset R$, следовательно, $RR = R^2 \subset R$.

Отметим, что свойство транзитивности играет важную роль в дальнейшем. Геометрическое содержание свойств транзитивности следующее: если два ребра графа G имеют общую вершину, то остальные вершины данных ребер должны быть соединены ребром. Мы можем преобразовать отношение в отношение транзитивности при помощи удаления или введения ребер.

Дальше рассмотрим проблему аппроксимации рефлексивного симметрического отношения R отношением эквивалентности E при условии, что $|R-E|+|E-R|$ минимально. Здесь $|S|$ — число элементов множества S. Мы покажем возможность решения проблемы в случае, если граф G отношения R не содержит четырехугольника, у которого отсутствует диагональ.

Пусть $M = (a_{ij})$ матрица отношения R и $M^2 = (b_{ij})$. Выбираем пару соответствующих элементов матриц M и M^2 таких, что $a_{ij} = 0$ и $b_{ij} = 1$. Эта пара определяет строку i и столбец j. Далее рассмотрим две строки i и j матрицы M. Найдем столбец m такой, что $a_{im}=1$ и $a_{jm}=1$. Эти элементы матрицы определяют пару элементов отношения R, которые не удовлетворяют условию транзитивности. Так найдем все нетранзитивные пары элементов отношения R.

Построим граф G_t следующим образом:

I° вершины G_t в взаимно однозначном соответствии с теми элементами отношения R, которые не удовлетворяют условию транзитивности;

2° две вершины G_t соединены ребром тогда и только тогда, когда соответственные элементы отношения R не транзитивные.

О. Оре в [3] определяет вершинное покрытие графа подмножеством вершин таким, что по крайней мере одна вершина каждого ребра является элементом этого подмножества.

Тогда наша задача равносильна задаче нахождения вершинного покрытия P графа G_t такого, чтобы $|P|$ было наименьшее.

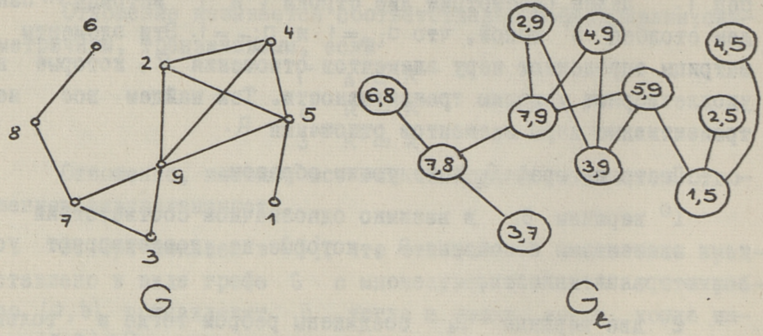
Эту задачу рассматривали многие авторы. Одно решение, приемлемое для решения на электронно-вычислительных машинах, опубликовано в работе А.Д. Закревского [4].

П р и м е р. Пусть $V=\{1,2,\dots,9\}$ и матрица

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&1&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0&1&0&1\\0&1&0&1&1&0&0&0&1\\1&1&0&1&1&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&1&1&1&0\\0&1&1&1&1&0&1&0&1\end{pmatrix}\qquad M^2=\begin{pmatrix}1&1&0&1&1&0&0&0&1\\&1&1&1&1&0&1&0&1\\&&1&1&1&0&1&1&1\\&&&1&1&0&1&0&1\\&&&&1&0&1&0&1\\&&&&&1&1&1&0\\&&&&&&1&1&1\\&&&&&&&1&1\\&&&&&&&&1\end{pmatrix}$$

Матрица M^2 симметричная, поэтому можем не писать элементы ниже главной диагонали. Элементы $a_{12}=0$ и $b_{12}=1$. В пятом столбце матрицы M находятся элементы $a_{15}=1$ и $a_{25}=1$. Соответствующие им элементы в отношении R (I,5) и (2,5).

На графе G не изображены петли.



Фиг. 1

Получим решение $R - E = \{(1,5),(3,9),(7,8),(7,9)\}$.

3. Отметим еще то обстоятельство, что Ц. Зан в [I] решает проблемы методом комбинаторного анализа. Задача решена для отношения,если граф G определен как объединение полных графов и G выражает структуру двухступенчатых иерархий.

Задача, решенная в работе Ц. Зана, представляет частный случай задачи, решенной в данной статье.

А.А. Зыков в статье [5]определил понятие вилки как части графа, которая содержит три вершины, соединенные двумя ребрами, и разработал рекурсивный метод для вычисления числа вилок. Метод, который мы рассмотрели выше, позволяет тоже найти это число, а при необходимости и соответствующие ребра.

Литература

I. C.T. Z a h n. Approximating symmetric relations by equivalent relations. J. Soc. Indust. Appl. Math., vol.12, No. 4, 1964.

2. Ж. Р и г е. Бинарные отношения, замыкания,соответствия. Галуа, Киб. сб. №7, М., I963.

3. О. О р е. Теория графов. Изд. "Наука", М., I968.

4. А.Д. З а к р е в с к и й. Алгоритический язык ляпас и автоматизация синтеза дискретных автоматов. Труды Томского гос. университета, Томск, I966.

5. А.А. З ы к о в. Функции от графов, определяемые линейными уравнениями. Известия Сиб. отд. АН СССР, № 5, 1959, № 9, 1960, № 12, 1960.

G. Veiner

On approximating symmetric and reflexive binary relation by equivalence relation

Summary

The problem of finding an equivalence relation E, which best approximates a given symmetric and reflexive relation R in the sense of minimizing the number of elements of $(E-R)\cup(R-E)$, is solved for a class of relations R if relation's graph G does not include a four-edge circuit not containing a diagonal.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 313 1971

УДК 518.5

А.А. Кревальд

ОБ ОДНОЙ МЕТОДИКЕ ИНФОРМАЦИОННОГО ИЗУЧЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Бурное развитие науки за последнее столетие отражается не только в возникновении новых теорий, новых наук и научных направлений, но и в новых, весьма эффективных методах исследования. К числу таких методов принадлежит и метод моделирования, хотя его возникновение и применение в отдельных науках прослеживается уже в далеком прошлом.

Моделью могут быть не только мысленные (идеальные) построения, выполненные как наглядно-образными, так и знаковыми средствами, но и различные материальные системы, причем не только искусственно созданные, но и естественные природные объекты. В том числе моделью может служить и человек.

Движения человека являются в общем случае пространственными. Одним видом человеческой деятельности, где структура движений имеет довольно большое значение, есть спорт. Все возрастающие спортивные результаты наводят спортсменов и тренеров вместе с учеными на поиски более рациональных вариантов техники, чтобы с максимальным эффектом реализовать физические качества спортсмена в спортивных результатах.

Возникает потребность выяснить и такие параметры, которые невозможно непосредственно измерить приборами. К числу таких параметров относятся, например, координаты центра тяжести, моменты инерции, кинетические моменты, положение оси выражения системы и т.д.

Во многих видах спорта комплекс движений состоит из чисто пространственных движений, однако существующие методы не позволяют провести точного анализа проведенных пространственных движений. Широко распространенный и используемый циклографический метод позволяет провести анализ с такими системами, которые возможно редуцировать на плоскости.

Исходя их таких потребностей и выработана методика для анализа кинематических и динамических пространственных движений.

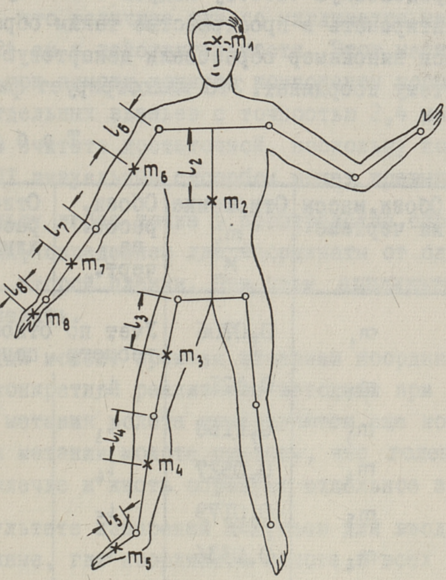
До настоящего времени было распространено положение, что человек есть биологическая система и что механические параметры, возникающие при движении человека, невозможно описать математическими методами. Сделан целый ряд попыток вычислить кинематические и динамические параметры, возникающие при движении человека, но получение точных цифровых результатов не было достигнуто из-за неудовлетворяемых измерительных приборов и большого объема вычислительных работ. Проведение точных вычислений стало возможным только в результате развития электроники и вычислительной техники.

В настоящей работе сделан краткий обзор о методике, при помощи которой возможно фиксировать пространственное движение человеческого тела и прорабатывать данные результатов на ЭВМ. При создании данной методики использована пространственная модель одной из наиболее сложных и динамических видов легкой атлетики - метания молота.

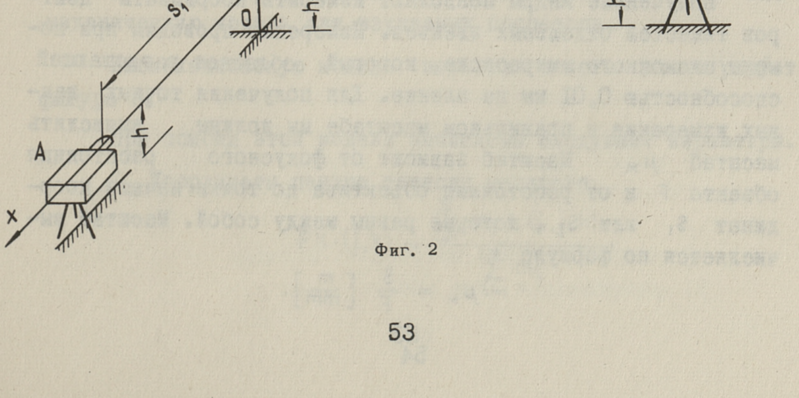
Для определения пространственного движения человеческого тела приходится фиксировать движение его отдельных частей. Для этого будем рассматривать человека как систему, состоящую из отдельных материальных точек. Относительные веса отдельных частей человеческого тела и отношение расстояния центров тяжестей отдельных звеньев от проксимальных концов их длин даны в таблице I. Данные таблицы I иллюстрирует фигура I. В таблице величина M означает общую массу человека.

Центры тяжести удлиненных частей тела лежат приблизительно на их продольной оси, ближе к проксимальному концу.

Дальнейшая проблема состоит в пространственной фиксации движения. Для этого используется киносъемка с двумя синхронными кинокамерами. Синхронность камер обеспечена при



Фиг. 1



Фиг. 2

помощи двух синхронных электродвигателей, которые гарантируют определенную частоту кадров – 25 герц. Кинокамеры надо ориентировать в пространстве таким образом, чтобы оптические оси кинокамер образовали декартовую прямоугольную систему координат. Это иллюстрирует фигура 2.

Таблица I

Часть тела	Обозн. массы на чертеже	Отношение $\frac{m_i}{M}$	Обозн. расст. на черт.	Отношение расстояния к длине звена
Голова	m_1	0,0706	Учет по отношению к геометр. центру	
Тело	m_2	0,421	l_2	0,44
Бедро	m_3	0,1158	l_3	0,44
Голень	m_4	0,0527	l_4	0,42
Стопа	m_5	0,0179	l_5	0,44
Плечо	m_6	0,0336	l_6	0,47
Предплечье	m_7	0,0228	l_7	0,42
Кисть	m_8	0,0084	l_8	0,42

Камеры A и B находятся в горизонтальной плоскости перпендикулярно друг к тругу на равном расстоянии h от земной поверхности. Оптические оси обеих камер пересекаются в точке O, которая является началом координатной системы. Производя съемку с таким образом ориентированными камерами, камера A фиксирует проекцию движения на YZ-плоскость и камера B на XZ-плоскость.

Полученные кадры позволяют измерить координаты центров тяжестей отдельных звеньев. Измерение проводим при помощи пленочного микроскопа, который обладает разрешающей способностью 0,01 мм на пленке. Для получения точных данных измерения в правильном масштабе мы должны вычислить масштаб μ_M. Масштаб зависит от фокусного расстояния объекта F и от расстояния объектива до точки начала координат S_1 или S_2, которые равны между собой. Масштаб вычисляется по формуле

$$\mu_M = \frac{S}{F} \left[\frac{m}{mm}\right].$$

Производя съемку от расстояния $S = S_1 = S_2 = 18$ м с объективом, фокусное расстояние которого $F = 75$ мм, получаем по формуле, что величине одного миллиметра на пленке соответствует 24 см в действительности. Этот масштаб позволяет определить при помощи нониуса компоненты координат центров тяжестей отдельных звеньев с точностью 2,4 мм. Эту точность можем считать достаточной, поскольку погрешность определения ЦТ визуальным способом может превышать 2 мм.

Поскольку любая точка в пространстве определена тремя координатами, определяем две координаты от одной пленки и третью от второй пленки. При этом аппликаты этих точек должны совпадать.

В каждый момент времени измеряем координаты всех звеньев тела. В конкретной реализации методики при исследовании параметров метания молота прибавляются еще координаты ЦТ молота. При метании молота считаем, что голень и стопа, а также предплечье и кисть образуют отдельное звено.

В результате измерений получаем для ввода в ЭВМ начальные данные, где координаты молота и всех звеньев в конкретный момент времени образуют одну строку. Число строк определяется количеством кадров H. Эту матрицу начальных данных для дальнейшего использования в программе преобразуем в трехмерный массив A (I:II, I:3, I: H), где первый индекс показывает порядковый номер измеряемой точки, второй соответствующую координату и третий - порядковый номер кадра.

Программа обработки начальных данных реализована в алгоритмическом языке "Велгол-3" на ЭВМ "Минск-22".

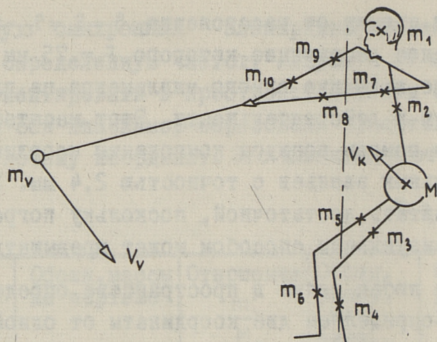
По измеренным параметрам можно вычислить прямо не измеряемые параметры, которые дают возможность создать биомеханическую модель для изучаемых процессов.

Биомеханическую модель метателя молота иллюстрирует фигура 3.

При помощи этой модели вычислены следующие параметры.

I. Координаты центра тяжести метателя

$$PK.(j,k) = \frac{\sum_{i=1}^{10} m_i A.(i,j,k)}{\sum_{i=1}^{10} m_i},$$



Фиг. 3

где $j = I, 2, 3, \ldots, I0$; $k = I, 2, \ldots, H$.

2. Скорость вращения центра тяжести метателя

$$BPK.(j,k) = \frac{PK.(j,k+1) - PK.(j,k-1)}{2\Delta t},$$

где $j = I, 2, 3$; $k = 2, 3, \ldots, H - I$; $\Delta t = 0{,}04\,s$.

3. Скорость вращения молота

$$BB.(j,k) = \frac{A.(11,j,k+1) - A.(11,j,k-1)}{2\Delta t},$$

где $j = I, 2, 3$; $k = 2, 3, \ldots, H - I$; $\Delta t = 0{,}04\,s$.

4. Момент инерции всей системы

$$ИНС.(k) = ИН0.(k) + \frac{M \times P.(k)^2}{9{,}81} + \frac{7{,}257 \times PB(k)^2}{9{,}81},$$

где $k = I, 2, \ldots, H$.

Кроме этих параметров вычисляются еще следующие параметры:

I) модели вектора скорости ЦТ метателя и молота;

2) радиус вращения молота от оси вращения системы;

3) радиус вращения центра тяжести метателя от оси вращения системы; угловая скорость и угловое ускорение молота;

4) моменты инерции метателя и молота;

5) центробежная сила молота;

6) кинетический момент и кинетическая энергия всей системы;

7) произведенная работа и мощность всей системы и т.д.

Фиксация координат одного броска молота на микроскопе требует времени примерно I2-I6 часов, перфорация примерно I-8 часов, ЭВМ "Минск-22" производит анализ одного броска за 25-30 минут.

Модель реализуется посредством параметрических графиков, где независимым параметром служит время. Конкретный анализ вышеуказанных параметров составляет предмет отдельной статьи.

A.Krevald

One possible way to study a dynamical system

Summary

A methodology to fix the movements of human body and to calculate the biomechanical characteristics on an electronic computer is described.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 313 1971

УДК 513.88

М.А. Абель

О КОЛЬЦЕ МАТРИЦ С УМНОЖЕНИЕМ ТИПА СВЕРТКИ

1. Пусть $A=(a_{nk}), B=(b_{nk}), C=(c_{nk}), \ldots$ - произвольные матрицы с комплексными элементами.

Сверткой матриц A и B называется матрица $C=A*B$, где

$$c_{nk} = \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} b_{n,k-\nu}. \tag{1}$$

Впервые это понятие было введено Вермсом [7] в 1952 г. Понятие свертки матриц возникает, когда рассматривается произведение функций[1]

$$a_n(z) = \sum_k a_{nk} z^k, \quad b_n(z) = \sum_k b_{nk} z^k,$$

ассоциированных с матрицами A и B.

Свертка матриц A и B имеет следующие свойства:

а) Свертка матриц A и B коммутативна и ассоциативна.

б) Если матрицы A и B треугольны, т.е. $a_{nk}=b_{nk}=0$ при $k>n$, то матрица $C=A*B$ обязательно не будет треугольной, но $c_{nk}=0$ при $k>2n$. В более общем случае, если матрицы A и B конечнострочны, т.е. $a_{nk}=0$ при $k>m_1$ и $b_{nk}=0$ при $k<m_2$, где m_1 и m_2 зависят от n, то матрица $C=A*B$ конечнострочна с $c_{nk}=0$ при $k \geq m_1+m_2$.

в) Если все элементы какой-то строки матрицы A равны нулю, то и все элементы соответствующей строки матрицы $C = A*B$ равны нулю при произвольной матрице B.

г) Единичной матрицей является матрица $U=(u_{nk})$ с $u_{n0}=1$ и $u_{nk}=0$ при $k \geq 1$ для всех n.

---

[1] Как правило, в дальнейшем $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$ заменяем через $\sum_k a_{nk}$.

Вермс [7] показал, что если все элементы в первом столбце матрицы A отличны от нуля, то существует обратная матрица матрицы A, которую обозначим через $A^{-1} = (a^{-1}_{nk})$, где для всех n

$$a^{-1}_{n0} = \frac{1}{a_{n0}} \tag{2}$$

и при $k \geq 1$

$$a^{-1}_{nk} = -\frac{1}{a_{n0}} \sum_{\nu=0}^{k-1} a^{-1}_{n\nu}\, a_{n,k-\nu}. \tag{3}$$

Если матрица A конечнострочна и существует обратная матрица A^{-1}, то матрица A^{-1}, вообще говоря, не является конечнострочной. Действительно, если матрицу A определить так, что

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0 \\ -1 & \text{при } k = 1 \\ 0 & \text{при } k \geq 2 \end{cases}$$

для всех n, то существует обратная матрица A^{-1}, но $a^{-1}_{nk} = 1$ для всех k и n.

В силу [7] нетрудно проверить, что множество матриц с комплексными элементами и с умножением типа свертки, при обычном определении сложения и умножения на число, является алгеброй. Эта алгебра называется алгеброй матриц со сверткой.

Матрица A называется идемпотентной матрицей, если $A * A = A \neq \Theta$, где $\Theta = (\Theta_{nk})$ - нулевая матрица, т.е. $\Theta_{nk} = 0$ для всех k и n.

Теорема I. Матрица A является идемпотентной матрицей в алгебре матриц со сверткой тогда и только тогда, когда выполнены условия а) для всех n имеем $a_{nk} = 0$ при $k \geq 1$ и б) первый столбец матрицы A состоит только из единиц или из единиц и нулей, но не только из нулей.

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица A идемпотентная. Из условия

$$\sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu}\, a_{n,k-\nu} = a_{nk} \quad (n, k = 0, 1, \ldots) \tag{4}$$

при $k=0$ следует[2] необходимость условия б), т.е. $a_{n0}=1$ для всех n или $a_{n0}=1$ для некоторых n и $a_{n0}=0$ для остальных n. В силу необходимости условия б) из условия (4) при $k=1$ следует $a_{n1}=0$ для всех n. Пусть $a_{n1} = a_{n2} = \ldots = a_{nm} = 0$ для всех n. Тогда условие (4) при $k=m+1$ имеет вид

$$2a_{n,m+1}\, a_{n0} = a_{n,m+1} \quad (n=0,1,\ldots),$$

откуда в силу того, что для всех n

$$2a_{n0}-1 \neq 0,$$

следует $a_{n,m+1}=0$ для всех n. В силу математической индукции из условия (4) следует необходимость условия а).

<u>Достаточность</u> условия теоремы непосредственная.

2. Рассмотрим множество всех таких матриц, которые переводят всякие сходящиеся последовательности в сходящиеся. Такие матрицы (см. [3]) называются K-матрицами или консервативными матрицами.

Матрица A является K-матрицей, если выполнены условия[3]

$$\lim_n a_{nk} = a_k, \tag{5}$$

$$\lim_n \sum_k a_{nk} = a \tag{6}$$

и

$$\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty . \tag{7}$$

Через $\rho(A) = a - \sum_k a_k$ обозначим характеристику K-матрицы (см. [8]). Если $\rho(A)=0$, то матрица A называется конулевой, а если $\rho(A)\neq 0$ — корегулярной. Если $a=1$ и $a_k=0$ для всех k, то характеристика $\rho(A)=1$. Тогда корегулярная матрица A называется регулярной.

Матрица A называется мультипликативной, если она K-матрица с $a_k=0$ для всех k.

---

[2] Из (4) следует и возможность, что $a_{n0}=0$ для всех n, но тогда, в силу математической индукции, из (4) следует $A=\Theta$.

[3] Под $\lim_n K_n$ понимаем $\lim_{n\to\infty} K_n$, а под $\lim_n a_{nk}$ — $\lim_{n\to\infty} a_{nk}$, где свободный индекс k пробегает все значения 0,1,2,...

Вермс [7] показал, что если сложение матриц и умножение на число определить обычным способом, а умножение матриц рассматривать в смысле свертки, то множество всех K-матриц образует коммутативное комплексное нормированное кольцо (банаховскую алгебру) с единичным элементом U при определении нормы матрицы A через (7). В дальнейшем последнее нормированное кольцо матриц обозначим через Γ^*.

Множество всех матриц, которые удовлетворяют только условию (7), образует тоже коммутативное комплексное нормированное кольцо с единичным элементом U, если алгебраические операции над матрицами и норму матриц определить так же, как в Γ^*. Это кольцо матриц обозначим через Φ^*.

Если в Γ^* и Φ^* свертку матриц заменить на обычное умножение матриц, то получаем некоммутативное комплексное нормированное кольцо с единичным элементом J (см. [3]), где J – единичная матрица в обычном смысле.

Вермс [7] показал, что если $A \in \Gamma^*$, то не всегда справедливо $A^{-1} \in \Gamma^*$. Возникает вопрос, каким условиям должна удовлетворять матрица A, чтобы из $A \in \Phi^*$ (или из $A \in \Gamma^*$) следовало бы $A^{-1} \in \Phi^*$ (соответственно $A^{-1} \in \Gamma^*$), если A^{-1} существует в алгебре матриц со сверткой?

Теорема 2. Для того, чтобы $A \in \Phi^*$ имела обратную матрицу A^{-1} с $A^{-1} \in \Phi^*$, необходимо выполнение условий

$$\inf_n |a_{n0}| > 0 \tag{8}$$

и

$$\inf_n \left|\sum_k a_{nk}\right| > 0. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть условие (8) не выполнено. В силу (2), (3) и того, что

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{\nu=0}^{k-1} a_{n\nu}^{-1} a_{n,k-\nu} \right| = K_n \geq 1$$

для всех n, получаем

$$\| A^{-1} \| = \sup_n \frac{K_n}{|a_{n0}|} = \infty,$$

т.е.

$$A^{-1} \bar{\in} \Phi^*.$$

Если $A\in\Phi^*$ и $A^{-1}\in\Phi^*$, то согласно правилу умножения Коши находим

$$\Big(\sum_k a_{nk}\Big)\Big(\sum_k a^{-1}_{nk}\Big)=\sum_k\Big(\sum_{\nu=0}^{k} a^{-1}_{n\nu}a_{n,k-\nu}\Big)=\sum_k u_{nk}$$

для всех n и, следовательно,

$$\Big(\sum_k a_{nk}\Big)\Big(\sum_k a^{-1}_{nk}\Big)=1. \tag{10}$$

В силу (10) получаем

$$\Big(\inf_n\Big|\sum_k a_{nk}\Big|\Big)^{-1}=\sup_n\Big|\sum_k a_{nk}\Big|^{-1}=\sup_n\Big|\sum_k a^{-1}_{nk}\Big|,$$

откуда следует необходимость условия (9).

<u>Теорема 3.</u> Если матрица A удовлетворяет условию

$$\|A\|<2\inf_n|a_{n0}| \tag{11}$$

с неконстантной $\{a_{n0}\}$, то условие (9) выполнено.

<u>Доказательство.</u> Из условия (11) следует

$$|a_{n0}|+\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|<2\inf_n|a_{n0}|,$$

откуда для всех n справедливо

$$|a_{n0}|-\inf_n|a_{n0}|<\inf_n|a_{n0}|-\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\le$$

$$\le|a_{n0}|-\Big|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\Big|\le$$

$$\le\Big|\sum_k a_{nk}\Big|.$$

Из последнего следует выполнение условия (9).

<u>Теорема 4.</u> Пусть матрица $A\in\Phi^*$ удовлетворяет условию (11). Если матрица A^{-1} существует в алгебре матриц со сверткой, то $A^{-1}\in\Phi^*$.

<u>Доказательство.</u> В силу (2) и (3) получаем

$$\sum_k|a^{-1}_{nk}|\le\frac{1}{|a_{n0}|}\Big(1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{k-1}|a^{-1}_{n\nu}a_{n,k-\nu}|\Big)=$$

$$= \frac{1}{|a_{n0}|}\left(1 + \sum_{\nu} |a_{n\nu}| \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|\right),$$

откуда

$$\sum_k |a^{-1}_{nk}| \left(2|a_{n0}| - \sum_k |a_{nk}|\right) \leq 1.$$

Так как

$$2|a_{n0}| - \sum_k |a_{nk}| \geq 2\inf_n |a_{n0}| - \|A\|,$$

то справедливо

$$\sum_k |a^{-1}_{nk}| \left(2\inf_n |a_{n0}| - \|A\|\right) \leq 1$$

и в силу условия (II) получаем

$$\|A^{-1}\| \leq \left(2\inf_n |a_{n0}| - \|A\|\right)^{-1} < \infty,$$

т.е.
$$A^{-1} \in \Phi^*.$$

Следствие I. Если матрица A такая, что $\|A\| < 1$ и $\inf_n |a_{n0}| \geq \frac{1}{2}$, то $A^{-1} \in \Phi^*$.

Доказательство следует из теоремы 4, так как условие (II) выполнено.

Теорема 5. Если матрица A такая, что $a_{nk} = a_{n0}\,\rho(n)^k$ с $\sup_n |\rho(n)| < 1$, то матрица $A \in \Phi^*$. Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу A^{-1} с $A^{-1} \in \Phi^*$, необходимо и достаточно выполнение условия (8).

Доказательство. Необходимость условия (8) следует из теоремы 2.

Достаточность. В силу (2) и (3) получаем, что для всех n

$$a^{-1}_{n0} = \frac{1}{a_{n0}}, \quad a^{-1}_{n1} = -\frac{\rho(n)}{a_{n0}} \quad \text{и} \quad a^{-1}_{nk} = 0$$

при $k \geq 2$. Тогда в силу условия (8) имеем

$$\|A^{-1}\| = \sup_n \frac{1 + |\rho(n)|}{|a_{n0}|} \leq \frac{1 + \sup_n |\rho(n)|}{\inf_n |a_{n0}|} < \infty,$$

т.е.
$$A^{-1} \in \Phi^*.$$

В силу теоремы 3 возникает следующий вопрос: существуют ли такие матрицы A из Φ^*, которые имеют обратную матрицу A^{-1} в Φ^*, но не удовлетворяют условию (II)?

Пусть матрица A такая, что $a_{nk} = \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^k$. Тогда существует обратная матрица A^{-1}. В силу теоремы 5, справедливо $A^{-1} \in \Phi^*$, но условие (II) не выполнено. Из последнего примера следует, что выполнение условия (II) слишком строго для существования обратной матрицы A^{-1} в Φ^* при произвольной матрице A из Φ^*.

<u>Теорема 6.</u> Если матрица $A \in \Gamma^*$ имеет обратную матрицу $A^{-1} \in \Phi^*$, то справедливо $A^{-1} \in \Gamma^*$.

<u>Доказательство.</u> Так как $A^{-1} \in \Phi^*$, то в силу теоремы 2 необходимо выполнение условий (8) и (9). Из того, что $A \in \Gamma^*$, следует выполнение условий

$$\lim_n a_{n0} \neq 0 \tag{I2}$$

и

$$\lim_n \sum_k a_{nk} \neq 0. \tag{I3}$$

В силу выполнения условий (I0) и (I3), следует, что существует конечный предел

$$\lim_n \sum_k a^{-1}_{nk} = \left(\lim_n \sum_k a_{nk}\right)^{-1}. \tag{I4}$$

Покажем, что при выполнении условия (I2) существуют и конечные пределы

$$\lim_n a^{-1}_{nk} = a^{-1}_k \tag{I5}$$

для всех k.

В силу (2) и условия (I2) получаем выполнение условий (I5) при $k=0$. Предположим, что условия (I5) выполнены при $k<m$. Тогда в силу (3) и условия (I2) условия (I5) являются выполненными и при $k=m$ и, следовательно, для всех фиксированных k.

При обычном умножении матриц аналогичный результат опубликован в [4,5,I0], а для треугольных матриц - уже в [9].

<u>Следствие 2.</u> Пусть матрица $A \in \Gamma^*$ удовлетворяет условию (II). Если обратная матрица A^{-1} существует в алгебре

матриц со сверткой, то $A^{-1} \in \Gamma^*$.

Следствие 3. Если матрица A такая, что $a_{nk} = a_{n0} \rho(n)^k$ с $\sup_n |\rho(n)| < 1$ и существуют пределы $\lim_n \rho(n)$ и $\lim_n a_{n0}$, то $A \in \Gamma^*$. Для того, чтобы матрица A имела обратную матрицу A^{-1} с $A^{-1} \in \Gamma^*$, необходимо и достаточно выполнение условия (8).

Следствие 4. Если матрица $A \in \Gamma^*$ такая, что $\|A\| < 1$ и $\inf_n |a_{n0}| \geq \frac{1}{2}$, то $A^{-1} \in \Gamma^*$.

Доказательство следствия 2 следует из теорем 4 и 6, следствия 3 - из теорем 5 и 6, а следствия 4 - из следствия I и теоремы 6.

3. Обозначим через c - пространство всех сходящихся последовательностей, через c_0 - пространство всех последовательностей, сходящихся к нулю, и через m - пространство всех ограниченных последовательностей. В соответствии с этими обозначениями множество всех матриц, которые переводят все сходящиеся последовательности в последовательности, сходящиеся к нулю, обозначим через $(c \to c_0)$; множество всех матриц, которые переводят все ограниченные последовательности в последовательности, сходящиеся к нулю,- через $(m \to c_0)$ и множество всех матриц, которые переводят все ограниченные последовательности в сходящиеся,- через $(m \to c)$.

Матрица A является матрицей из множества $(m \to c)$, если выполнены условия (5), (7) и

$$\lim_n \sum_k |a_{nk} - a_k| = 0 ; \tag{I6}$$

матрицей из множества $(m \to c_0)$, если выполнены условия (5), (7) и (I6) с $a_k = 0$ для всех k, и матрицей из множества $(c \to c_0)$, если выполнены условия (5), (6) и (7) с $a = 0$ и $a_k = 0$ для всех k.

Следствие 5. Регулярные матрицы, матрицы из множеств $(c \to c_0)$ и $(m \to c_0)$ не имеют обратной матрицы в Φ^*.

Доказательство следует из того, что для всех этих матриц $a_0 = 0$.

Лемма. Для того, чтобы элемент коммутативного нормированного кольца имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы он не принадлежал ни одному максимальному идеалу.

Доказательсто см. [I, стр. 2I,6].

Теорема 7. Множества $(m \to c_0)$ и $(c \to c_0)$ образуют собственный идеал в Γ^*, а множество $(m \to c)$ не образует.

Доказательство. Если $A, B \in (m \to c_0)$, то в силу $(A+B)x = Ax + Bx$ справедливо $(A+B) \in (m \to c_0)$. Аналогично, если $A, B \in (c \to c_0)$, то $(A+B) \in (c \to c_0)$.

Если $A \in (m \to c_0)$ и $B \in \Gamma^*$, то справедливо условие $C = A * B \in (m \to c_0)$, выполнение которого следует из

$$\lim_n c_{nk} = \lim_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} b_{n,k-\nu} = 0, \tag{I7}$$

$$\|C\| \leq \|A\| \|B\| < \infty \tag{I8}$$

и

$$\lim_n \sum_k |c_{nk}| \leq \lim_n \left(\sum_k |a_{nk}| \cdot \sum_k |b_{nk}| \right) \leq$$

$$\leq \|B\| \lim_n \sum_k |a_{nk}| = 0.$$

В силу (I7), (I8) и

$$\lim_n \sum_k c_{nk} = \lim_n \sum_k a_{nk} \lim_n \sum_k b_{nk} = ab \tag{I9}$$

из $A \in (c \to c_0)$ и $B \in \Gamma^*$ следует $C = A * B \in (c \to c_0)$. В силу того, что $(m \to c_0) \neq \Gamma^*$ и $(c \to c_0) \neq \Gamma^*$ эти множества образуют собственный идеал в Γ^*.

Из следствия 3 следует, что матрица A с $a_{nk} = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot \frac{1}{2^{k+1}}$ имеет обратную матрицу в Γ^*. Нетрудно проверить, что матрица $A \in (m \to c)$. В силу леммы множество $(m \to c)$ не является собственным идеалом в Γ^*.

Следствие 6. Множество всех K-матриц, которые удовлетворяют условию $a = 0$, образует собственный идеал в Γ^* и содержит идеалы $(m \to c_0)$ и $(c \to c_0)$.

Следствие 7. Множество всех К-матриц, которые удовлетворяют по крайней мере одному из следующих условий: $a=0$, $\sum_k a_k=0$ или $a_k=0$ для всех k, образует собственный идеал в Γ^*.

Доказательство следствий 6 и 7 аналогично доказательству теоремы 7. В доказательстве следствия 6 предположим, что числа a_k произвольные для всех k, а в доказательстве следствия 7 – что число a произвольное.

Следствие 8. Матрицы из Γ^*, которые удовлетворяют по крайней мере одному из следующих условий: $a=0, a_0=0, \sum_k a_k=0$ или $a_k=0$ для всех k, не имеют обратной матрицы в Γ^*.

Доказательство следует из следствий 6 и 7 в силу леммы.

4. Как показали Виланский и Целлер в [10], при обычном умножении К-матриц A и B выполнено условие

$$\rho(AB)=\rho(A)\rho(B).$$

Последнее условие не будет справедливым в Γ^*.

Теорема 8. Пусть $A,B\in\Gamma^*$. Для того, чтобы

$$\rho(A*B)=\rho(A)\rho(B), \tag{20}$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\Big(\sum_k a_k\Big)\Big(\sum_k b_k\Big)=\frac{1}{2}\Big(b\sum_k a_k+a\sum_k b_k\Big). \tag{21}$$

Доказательство. Пусть $C=A*B$. В силу (19) и

$$\lim_n c_{nk}=\lim_n\sum_{\nu=0}^{k}a_{n\nu}b_{n,k-\nu}=\sum_{\nu=0}^{k}a_\nu b_{k-\nu}$$

получим

$$\rho(C)=ab-\sum_k\sum_{\nu=0}^{k}a_\nu b_{k-\nu}=ab-\Big(\sum_k a_k\Big)\Big(\sum_k b_k\Big), \tag{22}$$

т.е. равенство (20) справедливо тогда и только тогда, когда выполнено условие (21).

Следствие 9. В множествах регулярных и конулевых матриц условие (21) выполнено.

Теорема 9. Пусть $A, B \in \Gamma^*$. Для того, чтобы матрица $A * B$ являлась конулевой, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\left(\sum_k a_k\right)\left(\sum_k b_k\right) = ab,$$

а регулярной - чтобы $ab = 1$ и хотя бы одна из матриц A, B являлась мультипликативной.

Доказательство следует из (22) и определения конулевых и регулярных матриц.

Следствие 10. Если матрицы A и B регулярные (или конулевые), то матрица $A * B$ является регулярной (соответственно конулевой).

Следствие 11. Если A - регулярная матрица и $B \in \Gamma^*$, то для того, чтобы матрица $A * B$ была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы $b = 1$.

Следствие 12. Если A - конулевая матрица с $a = \sum_k a_k = 1$ и $B \in \Gamma^*$ с $\rho(B) = 1$, то $A * B$ является регулярной.

Следствие 13. Если A - конулевая матрица с $a = \sum_k a_k = 0$ и $B \in \Gamma^*$, то матрица $C = A * B$ является конулевой с $c = \sum_k c_k = 0$.

Следствие 14. Если A - регулярная матрица и $B \in \Gamma^*$ с $b = 0$, то матрица $A * B$ является конулевой.

Доказательства следствий 10-14 следуют из теоремы 9 и из определения регулярных и конулевых матриц.

Следствие 15. Множество конулевых матриц с $a = \sum_k a_k = 0$ является собственным идеалом в Γ^*.

Доказательство следует из следствия 13 и из того, что характеристика ρ удовлетворяет условию

$$\rho(A + B) = \rho(A) + \rho(B).$$

Теорема 10. Если матрица $A \in \Gamma^*$ имеет обратную матрицу $A^{-1} \in \Phi^*$, то

$$\rho(A^{-1}) = -\frac{\rho(A)}{\sum_k a_k}.$$

Доказательство. Так как (согласно теореме 6) $A^{-1} \in \Gamma^*$, то в силу следствия 8 имеем $a \neq 0, a_0 \neq 0$ и $\sum_k a_k \neq 0$, и из[4]

---

[4] См. обозначение (15).

$$\sum_k a_k^{-1} = \frac{1}{a_0}\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{k-1} a_{k-\nu} a_\nu^{-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{a_0}\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_\nu a_\nu^{-1}\right)$$

следует

$$\sum_k a_k^{-1} = \left(\sum_k a_k\right)^{-1}. \qquad (23)$$

В силу (I4) и (23) получаем доказательство теоремы.

Следствие I6. Для того, чтобы матрица $A \in \Gamma^*$ имела конулевую обратную матрицу A^{-1}, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была конулевой.

Доказательство следует из теоремы I0.

Следствие I7. Для выполнения условия (2I) в множестве матриц A из Γ^* с $A^{-1} \in \Gamma^*$ необходимо и достаточно, чтобы матрица A была конулевой.

Доказательство. Необходимость. В силу (I0) и (23) условие (2I) с $B = A^{-1}$ равносильно условию $\rho(A)^2 = 0$, откуда следует, что матрица A конулевая.

Достаточность следует из следствия 9 и I6.

Замечание. В [2] Коган доказал следующую теорему (теорема I.I, стр. 53-55).

Теорема II. Если $A, B \in (m \to c)$, то $C = A * B \in (m \to c)$.

Доказательство этой теоремы у него является слишком громоздким. Здесь представим более краткое доказательство этой теоремы.

Доказательство. Так как $A, B \in \Gamma^*$, то для матрицы C условия (5) и (7) выполнены. В силу $\sum_\nu |a_\nu| < \infty$, из

$$\lim_n \sum_k |c_{nk} - c_k| \le \lim_n \sum_k \sum_{\nu=0}^{k} |a_{n\nu} b_{n,k-\nu} - a_\nu b_{k-\nu}| \le$$

$$\le \lim_n \sum_k \sum_{\nu=0}^{k} \left(|a_{n\nu} - a_\nu||b_{n,k-\nu}| + |b_{n,k-\nu} - b_{k-\nu}||a_\nu|\right) =$$

$$= \lim_{n} \sum_{\nu} |a_{n\nu} - a_{\nu}| \sum_{k} |b_{nk}| + \sum_{\nu} |a_{\nu}| \lim_{n} \sum_{k} |b_{nk} - b_{k}| \leqslant$$

$$\leqslant \|B\| \lim_{n} \sum_{\nu} |a_{n\nu} - a_{\nu}| + \sum_{\nu} |a_{\nu}| \lim_{n} \sum_{k} |b_{nk} - b_{k}| = 0$$

следует выполнение и условия (I6).

В этой работе он еще показал (теорема 2.I), что если $A \in (m - c_0)$ и $B \in \Gamma^*$, то $C = A * B \in (m - c)$, но из теоремы 7 следует точнее, что $C \in (m - c_0)$.

Литература

I. И.М. Гельфанд, Г.А. Райков, Г.Е.Шилов. Коммутативные нормированные кольца. Москва, I960.

2. Д.А. Коган. О некоторых свойствах сверток бесконечных матриц. Матем. зап. Уральск. ун-та, I965, 5, № 2, 52-58.

3. Р. Кук. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва, I960.

4. M.R. Parameswaran. On the reciprocal of a K - matrix. J. Indian. Math. Soc. (2), 2956, 20,329-331.

5. M.R. Parameswaran. Some applications of Banach functional methods to summability. Proc. Indian Acad. Sc. (Sec. A), 1956, 45, 377-384.

6. C.E. Rickart. General theory of Banach algebras, Van Nostrand, Princeton, 1960.

7. P. Vermes. Convolution of summability methods. J. Analyse Math., 1952, 2, 160-177.

8. A. Wilansky. An application of Banach linear functionals to summability. Trans. Amer. Math. Soc., 1947, 67, 59-68.

9. A. Wilansky. A necessary and sufficient condition that a summability method be stronger than convergence. Bull. Amer. Math. Soc. 1949, 55, 914-916.

10. A. Wilansky, K. Zeller. The inverse matrix in summability, reversible matrices. J. London Math. Soc. 1957, 32, 397-408.

M. Abel

On the ring of matrices with the convolution type multiplication

Summary

Let $A=(a_{nk})$, $B=(b_{nk})$, $C=(c_{nk})$, ... be arbitrary matrices with complex elements.

The convolution $C=A*B$ of matrices A and B is defined by (1).

The matrix A is called a K-matrix or a conservative matrix if the conditions (5), (6) and (7) are fulfilled. A K-matrix A is called coregular, if $\rho(A)=a-\sum_k a_k\neq 0$ and conull, if $\rho(A)=0$. Those definitions were given by Wilansky [8]. If $a=1$ and $a_k=0$ for every K, then $\rho(A)=1$ and the matrix A is called regular.

It was shown by Vermes [7] that the set of K-matrices in which the matrix multiplication is considered as a convolution, the matrix addition and scalar multiplication being defined as usual, form a commutative complex normed ring or Banach algebra with a unit element U and with norm (7). The set of matrices which fulfill only the condition (7) form also a commutative complex normed ring with unit element U. Those rings will further be marked by Γ^* and Φ^*.

The present paper considers the reversibility of matrices in the Φ^* and Γ^*, the ideals in the Γ^* and the conditions when the convolution of matrices A and B is regular or conull.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 313 1971

УДК 513.88

Ю.В. Ламп

МАТРИЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

I. Введение

В настоящей статье в качестве применения статей [I] [3, 4] рассматриваются преобразования обобщенных последовательностей [2] $\xi = \{x_\alpha\}_A$ элементов банахового пространства X в обобщенные последовательности $U\xi = \{U_\beta \xi\}_B$ элементов банахового пространства Y, где

$$U_\beta \xi = \sum_{\alpha \in A} \mathfrak{U}_{\beta\alpha} x_\alpha \quad (\beta \in B), \tag{I}$$

причем $\mathfrak{U}_{\beta\alpha}$ - непрерывные линейные операторы их X в Y. Суммы в соотношении (I) означают, что для каждого [3] $\beta \in B$

$$\left\{U_{\beta K} \xi\right\}_{K \in \mathfrak{F}(A)} \in mc\left(\mathfrak{F}(A), Y\right), \tag{2}$$

где

$$U_{\beta K} \xi = \sum_{\alpha \in K} \mathfrak{U}_{\beta\alpha} x_\alpha. \tag{3}$$

Если [4] $A = N^n$, то определение (2) суммы (I) не равносильно определению суммы (I) по Прингсхейму. Отметим толь-

---

[1] В настоящей статье будет использована несколько иная символика, чем в статьях [3,4].
[2] См. [3], стр.67 или [4], стр,85. Тем самым здесь A и B - направленные множества.
[3] Ср. [4], стр. 88. Через $\mathfrak{F}(A)$ обозначаем множество всех конечных подмножеств K из A, направленное по включению.
[4] См. [4], стр.89, примечание. Здесь $N = \{0,1,2,\dots\}$, а N^n - множество n-мерных векторов $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, где $\alpha_k \in N$ $(k \le n)$. Следовательно, $N^1 = N$.

ко, что результаты, которые мы получим для сумм, построенных по правилу (2), остаются в силе и для сумм, определенных по Прингсхейму, если только условие $\alpha \in K$ заменить условием $\alpha \leq \beta$.

Преобразования, заданные соотношением (I), будем называть матричными преобразованиями обобщенных последовательностей. Такие преобразования охватывают целый ряд известных преобразований, как например[5], матричные преобразования кратных последовательностей в банаховых пространствах, полунепрерывные преобразования и др.

В пункте 2 настоящей статьи применяются результаты статьи [3] на матричные преобразования обобщенных последовательностей.

В пункте 3 в некоторых конкретных случаях находятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы преобразование (I) являлось конулевым.

2. Матричные преобразования типа $\varrho(A,X) \to (B,Y)$.

I. Обозначения условий. Нас интересуют следующие условия для матричных преобразований (I).

a_1 для каждых $\beta \in B$ и $x \in X$ существует $\sum_A \mathfrak{U}_{\beta\alpha} x$,

a_2 для каждых $\beta \in B, \xi \in mc(A,X)$ и неконфинального[6] в A множества E существует $\sum_E \mathfrak{U}_{\beta\alpha} x_\alpha$,

a_3 для каждых $\beta \in B$ и $K \in \mathfrak{F}(A)$ имеет место

$$\sup_{\|x_\alpha\| \leq 1} \left\| \sum_K \mathfrak{U}_{\beta\alpha} x_\alpha \right\| \leq M_\beta,$$

a_3' для каждого $\beta \in B$ имеет место

$$\sum_A \|\mathfrak{U}_{\beta\alpha}\| < \infty,$$

b_1 для каждого $x \in X$ существует $\lim_B \sum_{\alpha \in A} \mathfrak{U}_{\beta\alpha} x$,

c_1 для каждых $x \in X$ и неконфинального в A множества[7]

---

[5] См. [3], стр. 69.

[6] См. [3], стр. 71.

[7] Здесь $\mathfrak{A}$ - алгебра подмножеств из A (см. [3], стр. 71).

$E \subset \mathfrak{A}$ существует $\lim_B \sum_{\alpha\in E} \mathfrak{A}_{\beta\alpha} x$,

c_2 для каждых $\xi \in mc(A,X)$ и неконфинального в A множества E существует $\lim_B \sum_{\alpha\in E} \mathfrak{A}_{\beta\alpha} x_\alpha$,

c_3 для каждых $x\in X$ и $\alpha\in A$ существует $\lim_B \mathfrak{A}_{\beta\alpha} x$,

d_1 для каждого $K\in\mathfrak{F}(A)$ имеет место

$$\sup_B \sup_{\|x_\alpha\|\le 1} \left\| \sum_{\alpha\in K} \mathfrak{A}_{\beta\alpha} x_\alpha \right\| \le M,$$

d_1' $\sup_B \sum_{\alpha\in A} \|\mathfrak{A}_{\beta\alpha}\| < \infty$,

d_2 для каждого $K\in\mathfrak{F}(A)$ имеет место

$$\limsup_B \sup_{\|x_\alpha\|\le 1} \left\| \sum_{\alpha\in K} \mathfrak{A}_{\beta\alpha} x_\alpha \right\| \le M,$$

d_2' $\limsup_B \sum_{\alpha\in A} \|\mathfrak{A}_{\beta\alpha}\| < \infty$,

d_3 $\sup_B \sup_{\alpha\in A} \|\mathfrak{A}_{\beta\alpha}\| < \infty$,

d_4 $\limsup_B \sup_{\alpha\in A} \|\mathfrak{A}_{\beta\alpha}\| < \infty$,

e_1 для каждых $x\in X$ и $\alpha\in A$ имеет место

$$\sum_B \|\mathfrak{A}_{\beta\alpha} x\| \le M\|x\|,$$

e_2 для каждого $x\in X$ имеет место

$$\sum_B \left\| \sum_{\alpha\in A} \mathfrak{A}_{\beta\alpha} x \right\| \le M\|x\|,$$

e_3 для каждых $\xi\in rcb(A,X)$ и $K\in\mathfrak{F}(A)$ имеет место

$$\sum_B \left\| \sum_{\alpha\in K} \mathfrak{A}_{\beta\alpha} x_\alpha \right\| \le M \sup_K \|x_\alpha\|.$$

7. <u>Необходимые и достаточные условия</u> для того, чтобы преобразование, заданное соотношением (I), являлось преобразованием типа[8]

1. $TMc(A,X) \to mc(B,Y)$: b_1, c_1, d_1;
2. $TMc(A,X) \to c(B,Y)$: a_3, b_1, c_1, d_2;

---

[8] Эти результаты являются прямыми следствиями соответствующих теорем статьи [3].
Пространства $rcb(A,X)$ и $rcb_0(A,X)$ введены в статье [4].

3. $TMc(A,X)$ (или $rcb(A,X)$) $\longrightarrow m(B,Y)$: a_1, d_1 ;

4. $mc(A,X) \longrightarrow mc(B,Y)$: b_1, c_2, d_1 ;

5. $mc(A,X) \longrightarrow c(B,Y)$: a_3, b_1, c_2, d_2 ;

6. $mc(A,X) \longrightarrow m(B,Y)$: a_1, a_2, d_1 ;

7. $rcb(A,X) \longrightarrow mc(B,Y)$: b_1, c_3, d_1 ;

8. $rcb_0(A,X) \longrightarrow mc(B,Y)$: c_3, d_1 ;

9. $rcb(A,X) \longrightarrow c(B,Y)$: a_3, b_1, c_3, d_2 ;

10. $rcb(A,X) \longrightarrow l(B,Y)$: e_2, e_3 ;

11. $l(A,X) \longrightarrow mc(B,Y)$: c_3, d_3 ;

12. $l(A,X) \longrightarrow c(B,Y)$: c_3, d_4 ;

13. $l(A,X) \longrightarrow l(B,Y)$: e_1 ,

14. $l(A,X) \longrightarrow m(B,Y)$: d_3 .

Если [9] $Y=R$, т.е. $\mathfrak{U}_{\beta\alpha}$ - непрерывные линейные функционалы на X, то аналогично [2] (примечание I) доказывается, что

$$\sup_{\|x_\alpha\|\leq 1}\left|\sum_K \mathfrak{U}_{\beta\alpha} x_\alpha\right| = \sum_K \|\mathfrak{U}_{\beta\alpha}\| \quad (\beta\in B, K\in\mathfrak{F}(A)).$$

В соответствующих теоремах тогда условия a_3, d_1, d_2 заменяются [10] соответственно условиям a_3', d_1', d_2'.

Теоремы 3 и 6 содержатся при $Y=R$ в следующем предложении.

15. $\rho(A,X) \longrightarrow m(B,R)$ (ρ -банахово пространство с нормой $\|\xi\| = \sup_A \|x_\alpha\|$) : d_1' .

Приведем для примера <u>доказательство теоремы I.</u>

<u>Необходимость.</u> Из условия (2), которое обеспечивает существование сумм в соотношении (I), вытекает, что для каждого $\beta\in B$ преобразование (3) является преобразованием типа $TMc \longrightarrow mc(\mathfrak{F}(A),Y)$. По теореме 2 статьи [3] для этого необходимо выполнение условия a_3. Так как

---

[9] Здесь R - множество всех действительных чисел.

[10] Надо учесть (см. [3], стр. 68), что $\sum_A \|\mathfrak{U}_{\beta\alpha}\| = \sup_{K\in\mathfrak{F}(A)} \sum_K \|\mathfrak{U}_{\beta\alpha}\| = \lim_{K\in\mathfrak{F}(A)} \sum_K \|\mathfrak{U}_{\beta\alpha}\|$.

$$\sup_{\|x_\alpha\|\le 1}\left\|\sum_A \mathfrak{U}_{\beta\alpha}x_\alpha\right\|\le \sup_{K\in\mathfrak{F}(A)}\sup_{\|x_\alpha\|\le 1}\left\|\sum_K \mathfrak{U}_{\beta\alpha}x_\alpha\right\|<\infty, \quad (4)$$

то операторы $U_\beta, (\beta\in B)$ в соотношении (I) являются непрерывными линейными операторами из TMC в Y (см. [3] стр. 72). Необходимость условий теоремы I вытекает теперь из теоремы 2 статьи [3].

Достаточность. По теореме 2 статьи [3] для существования преобразования (I) в смысле (2) достаточно выполнение условий a_1, a_3 и

a_1' для каждых $x\in X$ и неконфинального в A множества $E\subset\mathfrak{U}$ существует $\lim_{K\in\mathfrak{F}(A)\cap E}\sum_K \mathfrak{U}_{\beta\alpha}x=\sum_E \mathfrak{U}_{\beta\alpha}x\ (\beta\in B)$.

Так как выполнение условий b_1, c_1 и d_1 теоремы I влечет за собой выполнение условий a_1, a_1' и a_3, то, учитывая неравенство (4), утверждение нашей теоремы следует из теоремы 2 статьи [3].

3. Конулевые и корегулярные матричные преобразования

I. Преобразования типа $\rho(A,X)\to l(B,Y)$. Аналогично теореме I2 статьи [4] доказывается[II] следующая лемма.

Лемма I. Пусть $\rho(A,X)$ – банахово пространство. Тогда сильное преобразование U типа $\rho\to l(B,Y)$ является конулевым тогда и только тогда, когда для каждых $x\in X$ и $\beta\in B$ и непрерывного линейного функционала h на Y

$$\lim_{\gamma\in A} h\,U_\beta \Phi^\gamma x=0.$$

Как это следует из примера 7 статьи [4], преобразование (I) является сильным. Тогда из леммы I, учитывая следствие 9.6 работы [5], непосредственно вытекает

Теорема I6. Пусть $\rho(A,X)$ – банахово пространство. Тогда всякое преобразование (I) типа $\rho\to l(B,Y)$ является конулевым.

[II] Для этого надо найти общий вид непрерывного линейного функционала f на поле lU сильного преобразования U типа $\rho(A,X)\to l(B,Y)$, где $\rho(A,X)$ – банахово пространство. Оказывается, что $f(\xi)=\sum_A g_\alpha x_\alpha+\sum_B h_\beta U_\beta\xi$,

где $g_\alpha(\alpha\in A)$ – непрерывные линейные функционалы на X, $h_\beta(\beta\in B)$ – непрерывные линейные функционалы на Y, причем $\sum_A\|g_\alpha\|<\infty$, $\sup_B\|h_\beta\|<\infty$.

Примечание. Надо учесть (см. [4], стр. 9I, примечание), что все теоремы настоящего параграфа имеют смысл только для таких преобразований, которые можно разделить на конулевые и корегулярные. Так, например, ρ нельзя заменить через rcb, l, rc_0.

2. Преобразования типа $\rho(A,X) \to rcb(B,Y)$. Из теоремы I2 статьи [4], учитывая следствие 9.6 работы [5], следует следующая теорема.

Теорема I7. Пусть $\rho(A,X)$ – банахово пространство. Тогда преобразование (I) типа $\rho \to rcb(B,Y)$ является конулевым тогда и только тогда, когда для всех $x \in X$ и каждого непрерывного линейного функционала h на Y

$$\lim_{\gamma \in A} h\Big(\lim_B \Big(\sum_{\alpha \in A} \mathcal{U}_{\beta\alpha} x - \sum_{\substack{A \\ \alpha < \gamma}} \mathcal{U}_{\beta\alpha} x\Big)\Big) = 0.$$

Следствие I. Пусть $\rho(A,X)$ – банахово пространство. Тогда всякое преобразование (I) типа $\rho \to rcb_0(B,Y)$ является конулевым.

Следствие 2. Пусть $\rho(N^n,X)$ – банахово пространство. Тогда преобразование (I) типа $\rho \to rcb(B,Y)$ является конулевым тогда и только тогда, когда для всех $x \in X$ и каждого непрерывного линейного функционала h на Y

$$\lim_{\gamma \in N^n} h\Big(\lim_B \sum_{\alpha \in N^n} \mathcal{U}_{\beta\alpha} x - \sum_{\alpha < \gamma} \mathcal{U}_{\beta\alpha} x\Big) = 0.$$

Следствие 3. Пусть $\rho(N^n,X)$ – банахово пространство. Тогда преобразование (I) типа $\rho \to rcb(B,R)$ является конулевым тогда и только тогда, когда для каждого $x \in X$

$$\lim_B \sum_{\alpha \in N^n} \mathcal{U}_{\beta\alpha} x - \sum_{\alpha \in N^n} \lim_B \mathcal{U}_{\beta\alpha} x = 0.$$

3. Преобразования типа $\rho(A,X) \to rc(N^2,R)$. Аналогично доказательству теоремы I2 статьи [4], при помощи следствия 3 статьи [4] и теоремы из статьи [6] доказывается следующая

Теорема I8. Пусть $\rho(A,X)$ – банахово пространство. Тогда преобразование (I) типа $\rho \to rc(N^2,R)$ является конулевым тогда и только тогда, когда

1° $\lim_{\gamma \in A} \lim_{(m,n) \in N^2} \sum_{\substack{\alpha \in A \\ \alpha \nless \gamma}} \mathcal{U}_{mn,\alpha} x = 0$ для каждого $x \in X$,

$2^\circ \lim_{\gamma\in A} \lim_{m\in N} \sum_{\substack{\alpha\in A \\ \alpha\not<\gamma}} \mathfrak{U}_{mn,\alpha} x = 0$ для каждых $x\in X$ и $n\in N$,

$3^\circ \lim_{\gamma\in A} \lim_{n\in N} \sum_{\substack{\alpha\in A \\ \alpha\not<\gamma}} \mathfrak{U}_{mn,\alpha} x = 0$ для каждых $x\in X$ и $m\in N$.

Следствие 4. Пусть $\rho(N^n, X)$ – банахово пространство. Тогда преобразование (I) типа $\rho \to rc(N^2,R)$ является конулевым тогда и только тогда

$1^\circ \lim_{(m,n)\in N^2} \sum_{\alpha\in N^n} \mathfrak{U}_{mn,\alpha} x - \sum_{\alpha\in N^n} \lim_{N^2} \mathfrak{U}_{mn,\alpha} x = 0$
для каждого $x\in X$,

$2^\circ \lim_{m\in N} \sum_{\alpha\in N^n} \mathfrak{U}_{mn,\alpha} x - \sum_{\alpha\in N^n} \lim_{m\in N} \mathfrak{U}_{mn,\alpha} x = 0$
для каждых $x\in X$ и $n\in N$,

$3^\circ \lim_{n\in N} \sum_{\alpha\in N^n} \mathfrak{U}_{mn,\alpha} x - \sum_{\alpha\in N^n} \lim_{n\in N} \mathfrak{U}_{mn,\alpha} x = 0$
для каждых $x\in X$ и $m\in N$.

Литература

1. Н. Данфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.

2. Г. Кангро. О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. Изв. АН ЭССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1956, 5, 108-128.

3. Ю. Ламп. Преобразования обобщенных последовательностей. Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1968, 220, 67-84.

4. Ю. Ламп. О σ-полях преобразований обобщенных последовательностей. Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1968, 220, 85-103.

5. G. Choquet. Cours d'analyse, v. II. Paris, 1964.

6. J.D. Hill. On perfect summability of double sequences. Bull. Amer. Math. Soc., 1940, 46, 327-331.

J.Lamp

<u>Matrixtransformationen verallgemeinerter Folgen</u>

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel werden als Anwendungen der Artikel [3, 4] Matrixtransformationen verallgemeinerter Folgen in der Form (1) betrachtet, wo $U_{\beta\alpha}$ ($\alpha\in A$, $\beta\in B$; A,B - gerichtete Mengen) die linearen stetigen Operationen aus einem banachschen Raum X in den banachschen Raum Y darstellen. Die Summen in (1) sind mit Hilfe der Vorschrift (2) zu bestimmen.

Die betrachtete Transformation (1) umfasst als Sonderfälle verallgemeinerte Matrixtransformationen von Mehrfachfolgen, halbstetige Transformationen u.a.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 313 1971

УДК 513.88

Ю.В. Лamп

ПРИМЕНЕНИЕ УПОРЯДОЧЕННОСТИ В ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОБОБЩЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В настоящей статье мы покажем, как при помощи использования упорядоченности можно обобщить некоторые результаты из статьи [3]. Полученные при этом результаты по существу отличаются от соответственных общих результатов статьи [2].

I. Некоторые определения.

Определение I. Непустое множество E называется предупорядоченным[1], если для некоторых пар его элементов определено отношение порядка $\leqslant$, называемое предупорядочением, такое, что

1^0 $\xi \leqslant \xi$,

2^0 из $\xi \leqslant \eta$ и $\eta \leqslant \zeta$ вытекает $\xi \leqslant \zeta$.

Определенное на E отношение порядка $<$ называется строгим отношением порядка[2], если для него выполнены условия

1^{00} из $\xi < \eta$ и $\eta < \zeta$ вытекает $\xi < \zeta$,

2^{00} из $\xi < \eta$ вытекает $\xi \neq \eta$.

Соответствующее множество E называем строго частично упорядоченным.

---

[1] См.[6]. стр. 6.

[2] См. [6], стр.6.

Определение 2. Пусть[3] E - предупорядоченное множество, а $E_1 \subset E$. Множества

$$\{\xi \in E : \xi \geq E_1\}$$

и

$$\{\xi \in E : \xi \leq E_1\}$$

называются соответственно мажорантой и минорантой множества E_1. Множество[4]

$$\bar{E}_1 = \bigcup_{\eta \in E_1} \{\xi \in E : \xi \leq \eta\}$$

будем называть (начинающим) замыканием множества E_1. Множество E_1 является замкнутым (снизу), если $E_1 = \bar{E}_1$.

Определение 3. (Начинающим) покрытием [5] мажорированного множества[6] $E_1 \subset E$ будем называть миноранту мажоранты множества E_1. Множесто $E_1 \subset E$ называем (начинающей) секцией, если оно совпадает со своим (начинающим) покрытием.

По определению секция всегда является мажорированным множеством. Кроме того, она всегда замкнута. Незамкнутое множество не является обязательно секцией. Отсюда вытекает, что замыкание можорированного множества всегда содержится в своем покрытии.

Если E -строго частично упорядоченное множество, то для его подмножеств можно дать определения, аналогичные определениям 2 и 3. Будем соответственные понятия отличать только префиксами строго-, т.е. мы имеем также строго замкнутое множество, строгое покрытие, строгую секцию.

2. Введение упорядоченности среди обобщенных последовательностей. Пусть на некотором множестве E определены соотношение эквивалентности $\sim$ и строгое отношение порядка $\propto$, согласованные между собой, т.е.

$$\xi \propto \eta, \quad \xi' \sim \xi \text{ и } \eta' \sim \eta \Longleftrightarrow \xi' \propto \eta'.$$

---

[3] См. [I], стр. I4. Обозначение $\xi \geq E_1$ означает,что $\xi \geq \eta$ для каждого $\eta \in E_1$. Аналогично определяется обозначение $\xi \leq E_1$.

[4] См. [6], стр. 6.

[5] См. [6], стр. 7.

[6] Т.е. множества,имеющего мажоранту.

Если мы определим на E предупорядочение $\overset{\simeq}{}$ через

$$\xi \simeq \eta \Longleftrightarrow \xi \propto \eta \quad \text{или} \quad \xi \sim \eta,$$

то приведенные в пункте I понятия, которые применимы для элементов из класса вычетов $E/\sim$, состоящего из классов эквивалентности множества E, обобщаются и для элементов множества E.

На множестве $S = S(A, R)$ всех обобщенных последовательностей $\xi = \{x_\alpha\}_A$, $\eta = \{y_\alpha\}_A$ и др. с действительными координатами вводим следующие строгие отношения порядка[7]

$$\xi \overset{m}{\propto} \eta \Longleftrightarrow \left\{\frac{x_\alpha}{y_\alpha}\right\}_A \in m(A,R),$$

$$\xi \overset{mc}{\propto} \eta \Longleftrightarrow \left\{\frac{x_\alpha}{y_\alpha}\right\}_A \in mc_0(A,R),$$

$$\xi \overset{l}{\propto} \eta \Longleftrightarrow \left\{\frac{x_\alpha}{y_\alpha}\right\}_A \in l(A,R),$$

и соотношение эквивалентности

$$\xi \overset{m}{\sim} \eta \Longleftrightarrow \xi \overset{m}{\propto} \eta \text{ и } \eta \overset{m}{\propto} \xi.$$

Так как строгое отношение порядка $\overset{m}{\propto}$ согласовано с соотношением эквивалентности $\overset{m}{\sim}$, то мы можем ввести предупорядочение $\overset{m}{\simeq}$, определенное через

$$\xi \overset{m}{\simeq} \eta \Longleftrightarrow \xi \overset{m}{\propto} \eta \text{ или } \xi \overset{m}{\sim} \eta.$$

В связи с этим мы будем отличать приведенные в пункте I понятия префиксами m-, строго m-, строго mc-, строго l-. Например: m- покрытие, строго mc-замкнутое множество и т.д.

3. Основные результаты. Нас интересуют матричные преобразования в виде[8]

$$U\xi = \left\{\sum_{\alpha \in A} u_{\beta\alpha} x_\alpha\right\}_B, \tag{I}$$

[7] Мы считаем $\frac{0}{0} = 0$, но $\frac{a}{0} = \infty$ $(a \neq 0)$.

[8] См. наст. сб., стр. 73.

где A, B - направленные множества, а $u_{\beta\alpha}, x \in R$.

Суммы в выражении (I) означают, что для каждого $\beta \in B$

$$\left\{\sum_{\alpha\in K} u_{\beta\alpha} x_\alpha\right\}_{K\in\mathfrak{F}(A)} \in mc(\mathfrak{F}(A), R).$$

Пусть $\eta = \{y_\alpha\}_A$ - некоторая обобщенная последовательность из $S(A,R)$, а $T = T(B,R)$ - строго mc - мажорированное множество обобщенных последовательностей.

<u>Теорема I.</u> Для того, чтобы $\left\{\sum_{\alpha\in A} u_{\beta\alpha} x_\alpha\right\}_B \in T$ при всех $\xi \overset{m}{\propto} \eta$, необходимо, чтобы $\left\{\sum_{\alpha\in A} |u_{\beta\alpha} y_\alpha|\right\}_B$ принадлежало строгой m-миноранте строгой mc-мажоранты множества T.

<u>Доказательство.</u> Пусть $P = P(B,R)$ - строгая mc - мажоранта множества T, т.е. множество всех $\zeta = \{z_\beta\}_B$ таких, что

$$\left\{\frac{t_\beta}{z_\beta}\right\}_B \in mc_0(B,R) \quad \text{для каждого} \quad \vartheta = \{t_\beta\}_B \in T.$$

Тогда по предложению при всех $\xi \overset{m}{\propto} \eta$ мы имеем

$$\left\{\frac{\sum_{\alpha\in A} u_{\beta\alpha} x_\alpha}{z_\beta}\right\}_B \in mc_0(B,R),$$

где $\zeta \in P$ или

$$\left\{\sum_{\alpha\in A} \frac{u_{\beta\alpha} y_\alpha}{z_\beta} \cdot \frac{x_\alpha}{y_\alpha}\right\}_B \in mc_0(B,R).$$

Так как $\left\{\frac{x_\alpha}{y_\alpha}\right\}_A \in m(A,R)$, то преобразование

$$U\xi' = \left\{\sum_{\alpha\in A} \frac{u_{\beta\alpha} y_\alpha}{z_\beta} x'_\alpha\right\}_B,$$

где $\xi' = \{x'_\alpha\}_A = \left\{\frac{x_\alpha}{y_\alpha}\right\}_A$ является преобразованием типа $m(A,R) \to mc_0(B,R)$. По теореме I статьи [2] и пункта 2 статьи [3] для этого необходимо выполнение условия

$$\sum_{\alpha\in A} \left|\frac{u_{\beta\alpha} y_\alpha}{z_\beta}\right| \leq M \quad (\beta \in B, \zeta \in P),$$

или

$$\left\{\sum_{\alpha\in A} |u_{\beta\alpha} y_\alpha|\right\}_B \overset{m}{\propto} \{z_\beta\}_B,$$

т.е. обобщенная последовательность $\left\{\sum_{\alpha\in A} |u_{\beta\alpha} y_\alpha|\right\}_B$ принадлежит строгой m-миноранте множества P.

Аналогично теореме I при помощи теоремы II статьи [3] доказывается

<u>Теорема 2.</u> Для того, чтобы $\left\{\sum_{\alpha\in A} u_{\beta\alpha} x_\alpha\right\}_B \in T$ при всех $\xi \overset{l}{\propto} \eta$, необходимо, чтобы $\left\{\sup_{\alpha\in A} |u_{\beta\alpha} y_\alpha|\right\}_B$ принадлежало строгой m -миноранте строгой mc -мажоронты множества T.

Следующая теорема является обобщением теоремы I5 статьи [3], а также теоремы статьи [4] и теорем a), c) статьи [5].

Теорема 3. Пусть множество $T(B,R)$ – m– замкнуто. Для того, чтобы $\left\{\sum_{\alpha\in A} u_{\beta\alpha} x_\alpha\right\}_B \in T$ при всех $\xi \overset{m}{\propto} \eta$, необходимо и достаточно, чтобы $\left\{\sum_{\alpha\in A} |u_{\beta\alpha} y_\alpha|\right\}_B \in T$.

<u>Доказательство. Необходимость.</u> Так как

$$\left\{\sum_{\alpha\in A} u_{\beta\alpha} x_\alpha\right\}_B \in T = \overline{T},$$

то существует обобщенная последовательность $\vartheta = \{t_\beta\}_B \in T$ такая, что для $\xi \overset{m}{\propto} \eta$

$$\left|\sum_{\alpha\in A} \frac{u_{\beta\alpha} y_\alpha}{|t_\beta|} \cdot \frac{x_\alpha}{y_\alpha}\right| \leq M \quad (\beta\in B),$$

т.е. преобразование $\left\{\sum_{\alpha\in A} \frac{u_{\beta\alpha} y_\alpha}{|t_\beta|} x'_\alpha\right\}_B$ является преобразованием типа $m(A,R) \to m(B,R)$. Для этого по теореме I5 статьи [3] необходимо, чтобы

$$\sum_{\alpha\in A} |u_{\beta\alpha} y_\alpha| \leq M|t_\beta| \quad (\vartheta\in T,\ \beta\in B),$$

т.е.

$$\left\{\sum_A |u_{\beta\alpha} y_\alpha|\right\}_B \in \overline{T} = T.$$

<u>Достаточность.</u> Если $\xi \overset{m}{\propto} \eta$, т.е. $|x_\alpha| \leq M|y_\alpha|$, то

$$\left|\sum_{\alpha\in A} u_{\beta\alpha} x_\alpha\right| \leq \sum_{\alpha\in A} |u_{\beta\alpha} x_\alpha| \leq M \sum_{\alpha\in A} |u_{\beta\alpha} y_\alpha| \quad (\beta\in B).$$

Так как T – m–замкнуто, то из $\left\{\sum_{\alpha\in A} |u_{\beta\alpha} y_\alpha|\right\}_B \in T$ вытекает, что $\left\{\sum_{\alpha\in A} u_{\beta\alpha} x_\alpha\right\}_B \in T$.

Обобщением теоремы I4 статьи [3] является

<u>Теорема 4.</u> Пусть множество $T(B,R)$ – m–замкнуто. Для того, чтобы $\left\{\sum_{\alpha\in A} u_{\beta\alpha} x_\alpha\right\}_B \in T$ при всех $\xi \overset{l}{\propto} \eta$, необходи-

мо и достаточно, чтобы $\left\{\sup_{\alpha\in A}|u_{\beta\alpha}y_\alpha|\right\}_B \in T$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Литература

1. Н. Данфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы. Общая теория, М., 1962.

2. Ю. Ламп. Преобразования обобщенных последовательностей. Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1968, 220, 67-84.

3. Ю. Ламп. Матричные преобразования обобщенных последовательностей (см. наст. сб. стр. 73).

4. M. Vuilleumier. Transformations lineaires dans l'ensemble des suites ordonné. C. r. Acad. Sci., 1961, 252,497-498.

5. M. Vuilleumier. Theoremes du Type de Toeplitz-Schur dans l'ensemble ordonné des suites. C. r. Acad. Sci., 1964, 258, 1974-1975.

6. M. Vuilleumier. Comportement asymtétique des transformations lineaires des suites. Geneve, Imprimerie Kundig, 1966, These No. 1392.

J. Lamp

On the use of ordering in the theory of matrix transformations of directed families

Summary

In the present paper we have shown how to generalize some results of the article [3] when using ordering. It results in very different generalizations compared with the article [2].

Содержание

ОЧЕРКИ ПО ОБРАБОТКЕ ИНФОРМАЦИИ
И ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Таллинский политехнический институт

Редактор Ю. Ламп

Технический редактор Л. Лоопер

Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 6 июля 1971 года

Сдано в набор 18 окт. 1971 г. Подписано к печати 27 янв. 1972 г.
Бумага 60х90/16. Печ. л. 5,5 + приложение 0,25. Уч.-изд. л. 4,30.
Тираж 350. МВ-01919. Зак. № 55 . Ротапринт ТПИ, Таллин,
ул. Коскла, 2/9. Цена 43 коп.

Цена 43 коп.