

TALLINNA POLYTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

№ 268

**ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ
И
АВТОМАТИКЕ**

СБОРНИК СТАТЕЙ

VI

Er. 6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

268

1968

УДК 621

ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ
И
АВТОМАТИКЕ

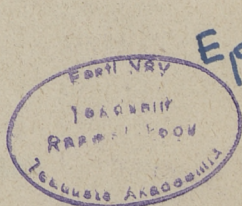
СБОРНИК СТАТЕЙ

VI

ТАЛЛИН 1968

С о д е р ж а н и е

	Стр.
1. О.М. Пикков. Релейные преобразователи частотно-импульсного сигнала автоматического контроля со счетчиками импульсов	3
2. О.М. Пикков. Вероятностные соотношения релейного преобразования частотно-импульсного сигнала	21
3. Х.В. Силламаа. Метод расчета усилителей с обратной связью	33
4. И.Ю. Эйскоп. Влияние изменения питающих напряжений на усиление усилителей	45
5. Х.А. Таммет. Определение проходной характеристики канального транзистора.	53
6. Х.И. Хаак, В.Р. Хейнрихсен. Частотные свойства датчиков Холла.	59
7. П.М. Плакк. Об измерении электрических свойств электролитов с большой проводимостью	73
8. Я.М. Вьрк. Оптимальный фильтр на основе минимума отношения среднеквадратичной ошибки к среднеквадратичному значению полезного сигнала	97
9. Э.А. Хансен, М.Э. Пуусепп. К вопросу определения количественного влияния условий производства на параметры радиоэлементов.	107



Er. 8678

УДК 621 374 382

О.М. Пикков

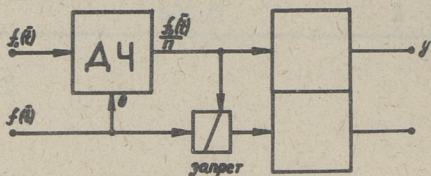
РЕЛЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ ЧАСТОТНО-ИМПУЛЬСНОГО
СИГНАЛА АВТОМАТИЧЕСКОГО КОНТРОЛЯ СО СЧЕТЧИКАМИ
ИМПУЛЬСОВ

При релейном преобразовании частотно-импульсного сигнала (ЧИС) автоматического контроля часто встречается случай, когда частота $f_0(\bar{t})$ опорных импульсов значительно отличается от частоты $f(\bar{t})$ информационных импульсов. Такое положение возникает прежде всего тогда, когда с целью достижения лучшей стабильности частоты опорных импульсов источником последних применяется генератор гармонических колебаний с последующим формированием импульсов. В этом случае в составе релейного преобразователя применяется делитель частоты импульсов опорной частоты $f_0(\bar{t})$ до получения

$$\frac{f_0(\bar{t})}{n} = f(\bar{t}) \text{ ср.б.}$$

Делитель частоты представляет собой счетчик импульсов с объемом, равным коэффициенту деления n . Функциональная схема релейного преобразователя с делителем-счетчиком приведена на фиг. I.

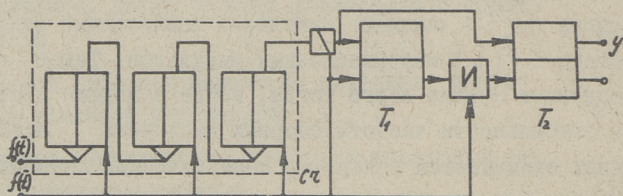
Делитель может быть реализован с помощью двоичного счетчика на триггерах или накопительного счетчика в сочетании с разрядным устройством. В случае большого значения n и невысокой разрешающей способности нуля органа применяемых накопительных счетчиков в состав делителя могут быть включены последовательно несколько каскадов.



Фиг. 1. Функциональная схема релейного преобразователя с делителем частоты импульсов опорной последовательности

Могут быть применены также кольцевые счетчики в каскадном соединении.

Схема релейного преобразователя с двоичным счетчиком приведена на фиг. 2.



Фиг. 2. Схема релейного преобразователя с двоичным счетчиком

С приходом на вход преобразователя очередного информационного импульса $f(\bar{t})$ счетчик и триггер T_1 промежуточной памяти ставятся в нулевое состояние. С этого момента начинается счет опорных импульсов $f_0(\bar{t})$ счетчиком. Если длительность интервала времени $\tau[n]$ между двумя последовательными информационными импульсами $f(\bar{t})$ больше, чем $\frac{n}{f_0(\bar{t})} = n\tau_0[n]$, то происходит переполнение счетчика, и триггер T_1 промежуточной памяти ставится в состояние I. Одновременно с этим переключается в состояние I и окончательный триггер T_2 и выдается сигнал $\frac{f_0(\bar{t})}{n} > f(\bar{t})$. Если же длительность интервала времени $\tau[n]$ между двумя последовательными информационными импульсами $f(\bar{t})$ меньше, чем $\frac{n}{f_0(\bar{t})} = n\tau_0[n]$, то импульс переполнения счетчика не выдается и со следующим импульсом из последовательности $f(\bar{t})$

оконечный триггер T_2 переключается в состояние "0", означающее $\frac{f_0(\bar{t})}{n} < f(\bar{t})$ (или остается в этом состоянии, если до этого уже находился в нем).

Накопительные счетчики обычно строятся по одному из двух наиболее известных принципов работы: ферромагнитные накопительные счетчики, использующие частичное перемагничивание магнитных сердечников с ППГ, и конденсаторные накопительные счетчики, использующие ступенчатый заряд (разряд) конденсатора памяти.

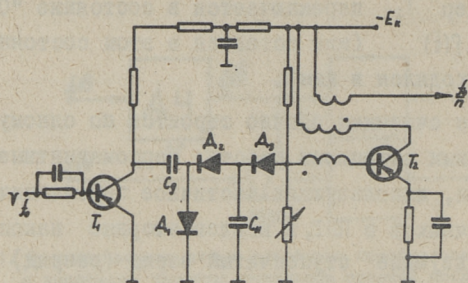
Первые из них хорошо известны [1], обладают долговременной памятью и дают хорошие результаты в широком диапазоне температур окружающей среды, но требуют применения сердечников из специального высококачественного магнитного материала и индивидуальной подгонки при наладке.

Вторые имеют менее долговременную память, особенно в сочетании с транзисторными ключами, но не содержат дефицитных материалов и значительно легче налаживаются. При условии, что считываемые импульсы следуют регулярно и с весьма высокой частотой, небольшое время памяти конденсаторных накопительных счетчиков не является ограничивающим. Режим делителей опорных частот $f_0(\bar{t})$ в релейных преобразователях вполне позволяет применять там относительно простые конденсаторные накопительные счетчики. Принципиальная схема одного каскада простого конденсаторного накопительного счетчика [2] приведена на фиг. 3, эквивалентная схема его на фиг. 4.

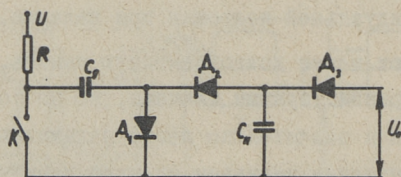
Работа простого конденсаторного счетчика описана в приложении. Там выводится также формула его максимального объема, который равняется

$$n_{\text{макс}} = \text{Ent} \left[\frac{0,37U}{\Delta U_{0 \text{ макс}}} \right], \quad (I)$$

где $\Delta U_{0 \text{ макс}}$ — максимальное значение нестабильности опорного напряжения и нultz-органа.



Фиг. 3. Принципиальная схема каскада простого конденсаторного накопительного счетчика



Фиг. 4. Эквивалентная схема каскада простого конденсаторного накопительного счетчика

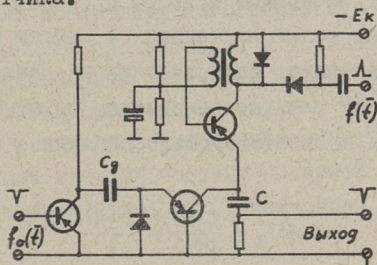
Значительно лучшие результаты дает применение линейного накопительного счетчика. В этом случае передаваемые в конденсатор C_1 элементарные заряды, а также ступеньки напряжения $\Delta U(n)$ все равны, и напряжение U_0 может быть выбрано значительно большим, близким по величине напряжению U . Это способствует увеличению объема счетчика при той же разрешающей способности нуля-органа.

При линейном способе передачи заряда максимально возможный объем счетчика (при выборе $U_0 = U$ и $\Delta U(n) = \Delta U_{0 \text{ макс}}$)

$$n_{\text{макс}} = Ent \left[\frac{U}{\Delta U_{0 \text{ макс}}} \right]. \quad (2)$$

Сравнивая максимальные объемы простого (1) и линейного (2) накопительных счетчиков, заметим, что при равных условиях линейный может иметь объем в e раз больше. Это наглядно свидетельствует о преимуществах применения линейных накопительных счетчиков.

На фиг. 5 приведена принципиальная схема линейного накопительного счетчика.



Фиг. 5. Принципиальная схема линейного накопительного счетчика

В принципе своей работы релейный преобразователь ЧИС со счетчиком относится к асинхронным устройствам: последовательности информационных $f(\bar{t})$ и опорных $f_0(\bar{t})$ импульсов между собой не синхронизированы. Момент появления импульса $f(\bar{t})$ занимает случайное место в промежутке между двумя импульсами из последовательности $f_0(\bar{t})$. Поэтому процесс срабатывания такого преобразователя (появления выходного сигнала y) приобретает характер случайного события.

Обозначим через $P(n)$ вероятность появления импульсов из последовательности $f_0(\bar{t})$ в интервале $\tau[n]$ между двумя импульсами из последовательности $f(\bar{t})$. (Появление n импульсов $f_0(\bar{t})$ в интервале $\tau(n)$ означает срабатывание устройства и выдачи сигнала y). Заметим, что при

$$\tau[n] - n\tau_0 < 0 \quad (\xi < 0) \quad P(n) = 0, \quad (3)$$

$$\tau[n] - n\tau_0 = \xi\tau_0 \quad (0 < \xi < 1) \quad 0 < P(n) < 1, \quad (4)$$

$$\tau[n] - n\tau_0 = \tau_0 \quad (\xi > 1) \quad P(n) = 1. \quad (5)$$

Закон распределения вероятности момента появления импульса $f(\bar{t})$ в интервале τ_0 - линейный. Поэтому и $P(n) = f(\xi)$ имеет линейный характер в интервале $0 < \xi < 1$.

$$\left. \begin{aligned} P(n) &= \xi \\ P(n-1) &= 1 - P(n) = 1 - \xi \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

где $P(n-1)$ - вероятность несрабатывания преобразователя.

Наличие двух возможных исходов процесса в зоне $0 < \xi < 1$ согласно (6) при малых значениях ξ может повлечь за собой большие задержки. Если считать все отдельные циклы сравнения $\tau[n]$ с $n\tau_0$ независимыми, то вероятностное время до появления соответствующего события $y = 1$ в зоне $0 < \xi < 1$

$$MT_3 = \frac{\tau[n]}{P(n)} = \frac{\tau[n]}{\xi} \quad (7)$$

Абсолютная ширина зоны неопределенного исхода процесса равняется τ_0 . Во избежание увеличения погрешности работы преобразователя от зоны неопределенного исхода, целесообразно сделать ширину этой зоны меньше допустимой погрешности $\delta_{\text{доп}}$ преобразователя. Чтобы относительная ширина зоны неопределенности

$$\delta_n = \frac{\tau_0}{\tau[n]} \quad (8)$$

стала меньше допустимой погрешности преобразования ($\delta_n < \delta_{\text{доп}}$), объем счетчика следует выбрать

$$n = \frac{\tau[n]}{\tau_0} > \frac{1}{\delta_{\text{доп}}} \quad (9)$$

Было бы неправильно ограничиваться рассмотрением импульсных последовательностей $f(\bar{t})$ и $f_0(\bar{t})$ как вполне детерминированных процессов. Последовательность информационных интервалов $\tau[n]$ и опорная последовательность $\tau_0[n]$, в общем, являются случайными дискретными процессами.

Из них последняя, $\tau_0[n]$, является стационарной последовательностью, состоящей из двух частей: полезной $\tau_{0c}[n]$, представляющей собой собственно опорный сигнал, и $\tau_{0ф}[n]$, представляющей его флуктуацию. Следовательно,

$$\tau_o[n] = \tau_{oc}[n] + \tau_{of}[n].$$

Обычно у опорной последовательности $\tau_o[n]$ флуктуационная составляющая $\tau_{of}[n]$ настолько мала, что ее можно пренебречь. Поэтому можно считать, что

$$\tau_o[n] = \tau_{oc}[n],$$

и опорная последовательность $\tau_o[n]$ по своему характеру приближается к детерминированному импульсному потоку.

Информационная импульсная последовательность $\tau[n]$ в переходных режимах контролируемого параметра является нестационарным случайным процессом, а в установившемся режиме параметра — стационарным случайным процессом. Ограничимся рассмотрением только последнего случая. Можно считать, что в стационарном режиме информационная импульсная последовательность состоит из двух частей: полезной $\tau_c[n]$, называемой сигналом, и мешающей $\tau_n[n]$, называемой помехой. Таким образом

$$\tau[n] = \tau_c[n] + \tau_n[n]. \quad (10)$$

Известно, что случайные дискретные процессы можно характеризовать средним значением случайной дискретной функции $\tau[n]$ по времени

$$\overline{\tau[n]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \tau[n] \quad (11)$$

или по множеству — математическим ожиданием

$$\widetilde{\tau[n]} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau[n] p(\tau[n]) d\tau[n] = M\{\tau[n]\}, \quad (12)$$

где $p(\tau[n])$ — одномерная плотность распределения вероятности, характеризующая вероятность того, что $\tau[n]$ принимает значения между $\tau[n]$ и $\tau[n] + d\tau[n]$. Согласно эргодическому свойству [3]

$$\overline{\tau[n]} = \widetilde{\tau[n]}$$

и, следовательно,

$$\tau[n] = M\{\tau[n]\}.$$

Математическое ожидание информационной последовательности

$$M\{\tau[n]\} = M\{\tau_c[n] + \tau_n[n]\} = M\{\tau_c[n]\} + M\{\tau_n[n]\}. \quad (13)$$

Из них математическое ожидание сигнала

$$M\{\tau_c[n]\} = \tau_c[n],$$

потому что в стационарном режиме $\tau_c[n]$ является постоянной детерминированной величиной.

Помеха $\tau_n[n]$ является центрированной стационарной случайной дискретной функцией с математическим ожиданием, равным нулю

$$M\{\tau_n[n]\} = 0.$$

Следовательно,

$$M\{\tau[n]\} = \tau_c[n], \quad (14)$$

т.е. полезным сигналом является математическое ожидание информационной последовательности импульсов.

Среднее значение квадрата информационной последовательности $\tau[n]$ определяется уравнением

$$\overline{\tau^2[n]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \tau^2[n]. \quad (15)$$

Подставив (10) в (15), получим [4]

$$\begin{aligned} \overline{\tau^2[n]} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N (\tau_c[n] + \tau_n[n])^2 = \\ &= \overline{\tau_c^2[n]} + \overline{\tau_n^2[n]} + 2\{\overline{\tau_c[n] \cdot \tau_n[n]}\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $\overline{\tau_c^2[n]}$ - среднее значение квадрата сигнала.

В стационарном режиме $\tau_c[n]$ является постоянной величиной, и его среднее значение квадрата $\overline{\tau_c^2[n]} = 0$

$\overline{\tau_n^2[n]}$ - среднее значение квадрата помехи;

$\overline{\tau_c[n] \cdot \tau_n[n]} = R_{\tau_c \tau_n}$ - взаимно-корреляционная функция последовательностей импульсов сигнала и помехи. Если $\tau_c[n]$ и $\tau_n[n]$ взаимно не коррелированы, как это большей частью бывает, то

$$\overline{\tau_c[n] \cdot \tau_n[n]} = 0,$$

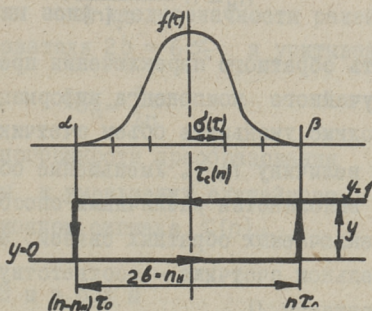
и среднее значение квадрата информационной импульсной последовательности равно среднему значению квадрата (дисперсии) последовательности помехи

$$\overline{\tau^2[n]} = \overline{\tau_n^2[n]}.$$

Наличие дисперсии в информационной последовательности импульсов (флуктуация) требует для нормальной работы релейного преобразователя введения в его характеристику зоны неоднозначности. Требуемая ширина зоны неоднозначности характеристики релейного преобразователя зависит от значения среднего квадратического отклонения информационной последовательности

$$\sigma_{\tau} = \sqrt{\tau^2 [n]} .$$

Предполагаем, что импульсная информационная последовательность $\tau [n]$ является нормальной и стационарной [5]. Случайный переход релейного преобразователя с зоной неоднозначности из одного состояния в другое при стационарном и нормальном распределении длительностей информационных интервалов $\tau [n]$ определяется вероятностью q выхода помехи $\tau_n [n]$ за пределы участка $2b = \beta - \alpha$ (Фиг.6).



Фиг. 6. Взаимное расположение вероятности случайного информационного сигнала и релейной характеристики с зоной неоднозначности

Вероятность этого события [5]

$$q = 1 - p(\alpha < \tau_n [n] < \beta) = 1 - \Phi^* \left(\frac{\beta - \tau_c [n]}{\sigma_{\tau}} \right) - \Phi^* \left(\frac{\alpha - \tau_c [n]}{\sigma_{\tau}} \right), \quad (I7)$$

где Φ^* - нормированная функция Лапласа.

При $[\alpha] = \beta = b$

$$q = 1 - p(|\tau_n [n]| < b) = 1 - 2\Phi^* \left(\frac{b}{\sigma_{\tau}} \right) \quad (I8)$$

необходимо выбрать ширину зоны неоднозначности $2b$ релейного преобразователя так, чтобы вероятность q стала достаточно малой. Рекомендуется выбрать $b > 3\sigma\tau$. При $b = 3\sigma\tau$, $q = 0,0027$; при $b = 4\sigma\tau$, $q = 0,00006$.

Создание зоны неоднозначности у релейных преобразователей ЧИС со счетчиком производится изменением объема счетчика n' выходным сигналом преобразователя y .

$$\left. \begin{aligned} n' &= n & \text{при } y &= 0 \\ n' &= n - n_n & \text{при } y &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Ширина зоны неоднозначности $2b$ и n_n между собой связаны

$$n_n = n \frac{2b}{\tau_c[n]}. \quad (20)$$

При выборе $2b = 6\sigma\tau$ необходимо значение

$$n_n = n \frac{6\sqrt{\tau^2[n]}}{\tau_c[n]}. \quad (21)$$

Чтобы избежать обратного переключения преобразователя под действием случайного компонента информационного сигнала $\tau_n[n]$, необходимо уменьшать объем счетчика в момент срабатывания на величину n_n . Уменьшение объема счетчика на величину n_n выполняется различными способами: при помощи введения переключаемых обратных связей, а в конденсаторном накопительном счетчике — соответствующим изменением опорного напряжения U_0 .

Наличие случайного компонента $\tau_n[n]$ в информационном сигнале вносит еще и значительную погрешность в работу релейного преобразователя.

Как видно из фиг. 6, эта погрешность состоит в том, что релейный преобразователь может переключаться в состояние $y = 1$ не только при $\tau_c[n] \geq n\tau_0$, а уже при $\tau[n] = \tau_c[n] + \tau_n[n] \geq n\tau_0$. Вероятность этого события

$$\begin{aligned} P(y=1) &= P(\tau[n] > n\tau_0) = P(\tau_n[n] > b) = \\ &= 0,5 - \Phi^*\left(\frac{n\tau_0 - \tau_c[n]}{\sigma\tau}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Значения $P(y=1) = f(n\tau_c - \tau_c[n])$ приведены в таблице I.

Т а б л и ц а I

$n\tau_c - \tau_c[n]$	0	σ_τ	$2\sigma_\tau$	$3\sigma_\tau$	$4\sigma_\tau$
$P(y=1)$	0,5	0,15866	0,02275	0,00135	0,000032

Из таблицы I видно, что вероятность $P(y=1)$ срабатывания релейного преобразователя станет практически ощутимой при $n\tau_c - \tau_c[n] \leq 3\sigma_\tau$. Поэтому зону $3\sigma_\tau$, где практически может уже произойти срабатывание, приходится считать погрешностью δ_n преобразования, обусловленной случайной помехой информационной последовательности $\tau_n[n]$

$$\delta_n \approx \frac{3\sigma_\tau}{\tau_c[n]} \quad (23)$$

При выборе ширины зоны неоднозначности релейной характеристики преобразователя $2b = 6\sigma_\tau$ и учитывая (20),

$$\delta_n = \frac{n_n}{2n} \quad (24)$$

Для уменьшения погрешности преобразования δ_n следует принимать все меры к уменьшению случайного компонента $\tau_n[n]$ в информационном сигнале $\tau[n]$.

В ы в о д ы

1. В релейных преобразователях ЧИС автоматического контроля с делением опорной частоты $f_0(\bar{t})$ в качестве делителей с успехом могут быть применены конденсаторные накопительные счетчики.

2. При равных условиях объем линейных конденсаторных накопительных счетчиков по сравнению с объемом простых в e раз больше.

3. Из-за дискретного характера объема счетчика появляется зона неопределенности (8). Чтобы ширина этой зоны стала меньше допустимой погрешности преобразователя $\delta_{\text{доп}}$, следует выбрать объем счетчика $n > \frac{1}{\delta_{\text{доп}}}$.

4. Последовательность информационных интервалов $\tau[n]$ содержит в себе некоторый случайный компонент $\tau_n[n]$, среднее квадратическое отклонение которого $\sigma_\tau = \sqrt{\tau^2[n]}$. Во избежание случайного перехода релейного преобразователя из одного состояния в другое под действием этой помехи $\tau_n[n]$, необходимо ввести в характеристику преобразователя зону неоднозначности, шириной $2b \geq 6\sigma\tau$.

5. Наличие случайного компонента $\tau_n[n]$ в информационном сигнале $\tau[n]$ приносит с собой также погрешность преобразования δ_n , практически равную

$$\delta_n = \frac{3\sigma\tau}{\tau_c[n]}$$

Приложение

Расчет максимального объема простого конденсаторного накопительного счетчика

Предполагая диоды D_1 , D_2 и D_3 идеальными, работа в эквивалентной схеме фиг. 4 происходит следующим образом: очередной выходной импульс каскада счетчика, генерируемый блокинг-генератором на T_2 , разряжает интегрирующий конденсатор $C_{и}$, и напряжение $U_{си}$ станет равным нулю. (На эквивалентной схеме фиг. 4 разрядное устройство не показано). Этот момент является исходным состоянием счетчика. Первый импульс (замыкание ключа K), поступающий после этого на вход счетчика, разряжает и дозирующий конденсатор $C_{д}$. По окончании импульса (размыканием ключа K) через D_2 последовательно включенные конденсаторы $C_{д}$ и $C_{и}$ заряжаются через сопротивление R до напряжения U . Заряды при этом равные:

$$Q_{сд} = Q_{си} = Q = U_{сд}C_{д} = U_{си}C_{и} = U \frac{C_{д}C_{и}}{C_{д}+C_{и}} \quad (I)$$

Отсюда находим напряжение на интегрирующем конденсаторе $C_{и}$ после первого импульса

$$U_{си(1)} = U \frac{C_g}{C_g + C_{и}} \quad (2)$$

При замыкании снова ключа К Д₂ заперт, заряд Q_{си} и напряжение U_{си} сохраняются, а дозирующий конденсатор C_г разряжается через диод Д₁ и ключ К. Если ключ К снова разомкнут (после окончания второго импульса), то напряжение U_{си} на интегрирующем конденсаторе будет

$$U_{си(2)} = U_{си(1)} + (U - U_{си(1)}) \frac{C_g}{C_g + C_{и}} = U \frac{C_g}{C_g + C_{и}} \left(1 + \frac{C_{и}}{C_g + C_{и}} \right) \quad (3)$$

Третий импульс повысит U_{си} до величины

$$U_{си(3)} = U \frac{C_g}{C_g + C_{и}} \left[1 + \left(\frac{C_{и}}{C_g + C_{и}} \right) + \left(\frac{C_{и}}{C_g + C_{и}} \right)^2 \right]; \quad (4)$$

n-й импульс повысит U_{си} до величины

$$U_{си(n)} = U \frac{C_g}{C_g + C_{и}} \left[1 + \left(\frac{C_{и}}{C_g + C_{и}} \right) + \left(\frac{C_{и}}{C_g + C_{и}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{C_{и}}{C_g + C_{и}} \right)^{n-1} \right] \quad (5)$$

Так U_{си} продолжает расти до достижения при m импульсе значения U₀. Тогда открывается диод Д₃, сработает снова блокинг-генератор на транзисторе Т₂, C_и разряжается до нуля и на выходе появляется импульс переполнения счетчика. На основе частной суммы геометрического ряда

$$S_m = \frac{1 - x^{m+1}}{1 - x},$$

$$U \frac{C_g}{C_g + C_{и}} \left[\frac{1 - \left(\frac{C_{и}}{C_g + C_{и}} \right)^{m+1}}{1 - \left(\frac{C_{и}}{C_g + C_{и}} \right)} \right] = U_0 \quad (6)$$

Отсюда находим m - объем накопительного счетчика (требуемое количество импульсов для достижения напряжения U_{си} до U₀).

$$m = \frac{\ln \left(1 - \frac{U_0}{U} \right)}{\ln \left(\frac{C_{и}}{C_g + C_{и}} \right)} - 1 \quad (7)$$

Поскольку действительный объем счетчика n может составлять только целое число импульсов, то n является наименьшим целым числом, превышающим m

$$\begin{aligned} n &= [Ent m] + 1 = Ent \left[\frac{\ln \left(1 - \frac{U_0}{U} \right)}{\ln \left(\frac{C_{и}}{C_{г} + C_{и}} \right)} - 1 \right] + 1 = \\ &= Ent \left[\frac{\ln \left(1 - \frac{U_0}{U} \right)}{\ln \left(\frac{C_{и}}{C_{г} + C_{и}} \right)} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Амплитуда последней, n -й ступеньки напряжения $U_{си}$

$$\Delta U(n) = U_{си(n)} - U_{си(n-1)} = U \frac{C_{г}}{C_{г} + C_{и}} \left(\frac{C_{и}}{C_{г} + C_{и}} \right)^{n-1}, \quad (9)$$

т.е. значительно меньше, чем амплитуда первой ступеньки

$$\Delta U(1) = U_{си(1)}.$$

Их соотношение

$$\frac{\Delta U(n)}{\Delta U(1)} = \left(\frac{C_{и}}{C_{г} + C_{и}} \right)^{n-1}. \quad (10)$$

Уменьшение $\Delta U(n)$ происходит вследствие постепенного уменьшения напряжения на дозирующем конденсаторе $U_{сг}(n) = U - U_{си(n-1)}$ с ростом $U_{си}(n)$ и соответствующего уменьшения передаваемого к $C_{и}$ заряда. При большом объеме счетчика n соотношение $\frac{\Delta U(n)}{\Delta U(1)} \ll 1$. В пределе, когда $U_0 \rightarrow U$ и $\Delta U_{(\infty)} \rightarrow 0$, объем счетчика n станет неопределенным.

Критерием при определении оптимального значения опорного напряжения U_0 является разрешающая способность разрядного устройства (нуль-органа). Чтобы объем счетчика оставался строго определенным числом n , величина n -й ступеньки $\Delta U(n)$ должна быть больше нестабильности уровня срабатывания разрядного устройства. При выражении этой нестабильности как результирующей нестабильности опорного напряжения ΔU_0 , условием однозначности объема счетчика является

$$\Delta U(n) \geq \Delta U_{0 \text{ макс}}. \quad (11)$$

Принимая это неравенство на пределе как равенство и учитывая (9), получаем

$$U \frac{C_g}{C_g + C_{и}} \left(\frac{C_{и}}{C_g + C_{и}} \right)^{n-1} = \Delta U_{о макс} \quad (I2)$$

или

$$\frac{C_g}{C_g + C_{и}} \left(\frac{C_{и}}{C_g + C_{и}} \right)^{n-1} = \frac{\Delta U_{о макс}}{U} \quad (I3)$$

Логарифмируя, получаем

$$(n-1) \ln \left(\frac{C_{и}}{C_g + C_{и}} \right) = \ln \left(\frac{\Delta U_{о макс}}{U} \right) + \ln \left(\frac{C_g + C_{и}}{C_g} \right) \quad (I4)$$

или

$$n \ln \left(\frac{C_{и}}{C_g + C_{и}} \right) = \ln \left(\frac{\Delta U_{о макс}}{U} \right) + \ln \left(\frac{C_g + C_{и}}{C_g} \right) + \ln \left(\frac{C_{и}}{C_g + C_{и}} \right) \quad (I5)$$

Вставляем в (I5) выражение для n из (8) и, объединяя два последних члена в правой стороне, получаем

$$\text{Ent} \left[\ln \left(1 - \frac{U_0}{U} \right) \right] = \ln \left(\frac{\Delta U_{о макс}}{U} \right) + \ln \left(\frac{C_{и}}{C_g} \right) \quad (I6)$$

Преобразуем

$$\text{Ent} \left[\ln \left(\frac{U - U_0}{U} \right) - \ln \left(\frac{\Delta U_{о макс}}{U} \right) \right] = \ln \left(\frac{C_{и}}{C_g} \right); \quad (I7)$$

$$\text{Ent} \left[\ln \left(\frac{U - U_0}{\Delta U_{о макс}} \right) \right] = \ln \left(\frac{C_{и}}{C_g} \right); \quad (I8)$$

$$\text{Ent} \left(\frac{U - U_0}{\Delta U_{о макс}} \right) = \frac{C_{и}}{C_g}, \quad (I9)$$

а также

$$\frac{U - U_0}{\Delta U_{о макс}} \approx \frac{C_{и}}{C_g} \quad (20)$$

Исходим снова из (8)

$$n = \text{Ent} \left[\frac{\ln \left(1 - \frac{U_0}{U} \right)}{\ln \left(\frac{C_{и}}{C_g + C_{и}} \right)} \right] = \text{Ent} \left[\frac{\ln \left(\frac{U - U_0}{U} \right)}{\left[-\ln \left(1 + \frac{C_g}{C_{и}} \right) \right]} \right] \quad (21)$$

Поскольку

$$\frac{C_g}{C_{и}} < < 1, \text{ то } \ln \left(1 + \frac{C_g}{C_{и}} \right) \approx \frac{C_g}{C_{и}},$$

$$n = \text{Ent} \left[\frac{\ln \left(\frac{U-U_0}{U} \right)}{-\left(\frac{Cg}{Cи} \right)} \right] = \text{Ent} \left[\frac{Cи}{Cg} \ln \left(\frac{U}{U-U_0} \right) \right]. \quad (22)$$

Вставляя в (22) $\frac{Cи}{Cg}$ из (20), получаем

$$n = \text{Ent} \left[\frac{U-U_0}{\Delta U_{0 \text{ макс}}} \ln \left(\frac{U}{U-U_0} \right) \right]. \quad (23)$$

Для определения U_0 , при котором n является максимальным

$$\frac{\partial}{\partial U_0} \left[\frac{U-U_0}{\Delta U_{0 \text{ макс}}} \ln \left(\frac{U}{U-U_0} \right) \right] = 0$$

дает

$$\ln \left(\frac{U}{U-U_0} \right) = 1, \quad (24)$$

откуда

$$\frac{U}{U-U_0} = e; \quad 1 - \frac{U_0}{U} = \frac{1}{e} = 0,37$$

и

$$\frac{U_0}{U} = 1 - \frac{1}{e} = 0,63; \quad U_{0 \text{ опт}} = 0,63 U.$$

Теперь из (20) вытекает также:

$$\frac{Cи}{Cg} = \frac{U-U_0}{\Delta U_{0 \text{ макс}}} = \frac{U-U_0}{U} \cdot \frac{U}{\Delta U_{0 \text{ макс}}} = \frac{1}{e} \cdot \frac{U}{\Delta U_{0 \text{ макс}}} = \frac{0,37U}{\Delta U_{0 \text{ макс}}}.$$

При выборе $U_0 = U_{0 \text{ опт}}$ из (23) $n = n_{\text{ макс}}$,

$$n_{\text{ макс}} = \text{Ent} \left(\frac{Cи}{Cg} \right) = \text{Ent} \left(\frac{0,37U}{\Delta U_{0 \text{ макс}}} \right). \quad (25)$$

Л и т е р а т у р а

1. Р.А. Л и п м а н. Ферротранзисторный элемент выдержки времени. Приборостроение, 3, 1964, 10-12.

2. В.П. С и г о р с к и й, Л.С. С и т в и к о в и Л.Л. У т я к о в. Многоустойчивые элементы дискретной техники. Энергия, Москва 1966, 231-232.

3. Я.З. Ц ы п к и н. Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, Москва 1963, 239-240.

4. Ю.Т. Ту. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. Машиностроение, Москва 1964, 604-605.

5. Н.А. Л и в ш и ц, В.Н. П у г а ч е в. Вероятностный анализ систем автоматического управления. II. Советское Радио, Москва 1963, 122-125.

O.Pikkov

The automatic control pulse signal relay converters
with pulse counters

Summary

This paper contains some structure circuits of the automatic control pulse signal relay converters with counters in the reference pulse canal. For this purpose the variants of using simple and linear condenser accumulator counters are compared. The necessary capacity of the counter as well as the width of the dual zone of the relay characteristics and statistical conversion error for stationary pulse information signal with some Gaussian random pulse train component present are determined.

УДК 621.374.383

О.М. Пикков

ВЕРоятностные соотношения РЕЛЕЙНОГО
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТОТНО-ИМПУЛЬСНОГО
СИГНАЛА

В в е д е н и е

Частотно-импульсный сигнал автоматического контроля может быть представлен как последовательность временных интервалов $\tau[n]$, длительность которых, в общем, является случайной величиной.

В работе рассмотрены различные вероятностные соотношения, возникающие при прохождении случайного импульсного потока $\tau[n]$ через релейный преобразователь с характеристикой, имеющей зону неоднозначности. Предполагается мгновенное и самостоятельное действие всех отдельных импульсов потока $\tau[n]$, т.е. рассматривается $\tau[n]$ как поток непрерывных случайных величин, распределенных по нормальному закону, а само устройство релейного преобразователя без свойств накопления ("памяти"). Свойствами памяти обладает характеристика преобразователя только в пределах зоны неоднозначности, где состояние выходного сигнала зависит от предыдущих значений $\tau[n]$.

Вероятности переходов и состояний

Наиболее широко применяемой в автоматическом контроле и управлении нелинейной характеристикой является составная релейная характеристика с зоной неоднозначности.

Выходной сигнал такого преобразователя может быть выра-
жен нелинейной функцией

$$y = \Psi(\tau) = \Psi_1(\tau) + \Psi_2(\tau), \quad (I)$$

где

$$\Psi_1(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{если } \tau[n] > \Delta_2 \\ 0 & \text{если } \tau[n] < \Delta_1 \end{cases}$$

и

$$\Psi_2(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{если } \Delta_1 < \tau[n, n+1, \dots] < \Delta_2 < \tau[n-1] \\ 0 & \text{если } \tau[n-1] < \Delta_1 < \tau[n, n+1, \dots] < \Delta_2 \end{cases},$$

т.е. значение выходного сигнала такого релейного преобразователя $y = f_2(\tau, \Delta_1, \Delta_2)$ в зоне неоднозначности зависит от предистории: $y = 1$ если пребыванию $\tau[n, n+1, \dots]$ в этой зоне предшествовало пребывание в зоне $\tau[n-1] > \Delta_2$ и $y = 0$, если пребыванию $\tau[n, n+1, \dots]$ в этой зоне предшествовало пребывание в зоне $\tau[n-1] < \Delta_1$.

Если $\tau[n]$ является стационарным случайным импульсным процессом, можно предположить, что вероятность прихода $\tau[n]$ справа в зону неоднозначности $\Delta_2 - \Delta_1$ (вероятность, что $\Psi_2(\tau) = 1$) равна относительному времени пребывания $\tau[n]$ в зоне $\tau[n] > \Delta_2$ [1].

$$\mu_1 = \frac{\int_{\Delta_2}^{\infty} \varphi_1(\tau[n]) d\tau}{\int_{-\infty}^{\Delta_1} \varphi_1(\tau[n]) d\tau + \int_{\Delta_2}^{\infty} \varphi_1(\tau[n]) d\tau}, \quad (2)$$

где $\varphi_1(\tau[n])$ - плотность распределения случайной величины $\tau[n]$.

Вероятность прихода $\tau[n]$ слева в зону неоднозначности (вероятность, что $\Psi_2(\tau) = 0$) равна

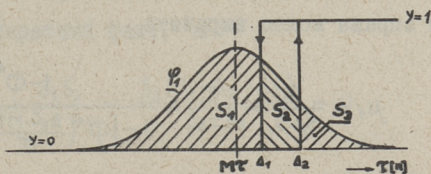
$$\mu_2 = 1 - \mu_1.$$

Математическое ожидание выходного сигнала релейного преобразователя, таким образом, находится по формуле

$$M_y = P_{y=1} = \int_{-\infty}^{\Delta_1} \Psi_1(\tau) \varphi_1(\tau[n]) d\tau + \int_{\Delta_2}^{\infty} \Psi_1(\tau) \varphi_1(\tau[n]) d\tau + \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} [\mu_1 \Psi_2(\tau) + \mu_2 \Psi_2(\tau)] \varphi_1(\tau[n]) d\tau. \quad (3)$$

Предполагаем, что плотность вероятности $\varphi_1(\tau[n])$ входного сигнала распределена по нормальному закону. Образование выходного сигнала релейного преобразователя с зоной неоднозначности шириной $\Delta_2 - \Delta_1$ в этом случае поясняется фиг. 1.

Фиг. 1. Взаимное расположение нормально распределенного сигнала $\tau[n]$ и характеристики релейного преобразователя с зоной неоднозначности



Оттуда видно, что уровни Δ_1 и Δ_2 делят площадь между кривой функции плотности распределения $\varphi_1(\tau)$ и осью абсцисс на три отдельных участка: S_1 , S_2 и S_3 .

Согласно нормальному закону распределения

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \int_{-\infty}^{\Delta_1} \varphi_1(\tau) d\tau = \Phi^*\left(\frac{\Delta_1 - M\tau}{\sigma}\right) \\ S_2 &= \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \varphi_1(\tau) d\tau = \Phi^*\left(\frac{\Delta_2 - M\tau}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{\Delta_1 - M\tau}{\sigma}\right) \\ S_3 &= \int_{\Delta_2}^{\infty} \varphi_1(\tau) d\tau = 1 - \Phi^*\left(\frac{\Delta_2 - M\tau}{\sigma}\right) \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

где $\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ и

$\frac{\Delta_2 - M\tau}{\sigma}$ - расстояние от правого конца зоны неоднозначности до центра рассеивания $M\tau$, нормированное через среднее квадратичное отклонение; $\frac{\Delta_1 - M\tau}{\sigma}$ - аналогичное расстояние от левого конца зоны неоднозначности, причем эти расстояния считаются положительными, если конец расположен справа от центра рассеивания $M\tau$, и отрицательными в противном случае.

Площади S_1 , S_2 , S_3 характеризуют вероятность попадания случайной величины $\tau[n]$, подчиненной нормальному за-

кону с параметрами $M\tau, \sigma$ на соответствующие интервалы $[-\infty, \Delta_1]$, $[\Delta_1, \Delta_2]$ или $[\Delta_2, \infty]$.

При этом очевидно,

$$S_1 + S_2 + S_3 = 1. \quad (5)$$

Согласно (2), вероятность прихода в зону неоднозначности справа можно выразить

$$\mu_1 = \frac{S_3}{S_1 + S_3} = \frac{S_3}{1 - S_2} = \frac{1 - \Phi^*\left(\frac{\Delta_2 - M\tau}{\sigma}\right)}{1 - [\Phi^*\left(\frac{\Delta_2 - M\tau}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{\Delta_1 - M\tau}{\sigma}\right)]}. \quad (6)$$

Противоположное событие — вероятность прихода в зону неоднозначности $\Delta_2 - \Delta_I$ слева — определяется аналогично

$$\mu_2 = \frac{S_1}{S_1 + S_3} = \frac{S_1}{1 - S_2} = \frac{\Phi^*\left(\frac{\Delta_1 - M\tau}{\sigma}\right)}{1 - [\Phi^*\left(\frac{\Delta_2 - M\tau}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{\Delta_1 - M\tau}{\sigma}\right)]}. \quad (7)$$

Очевидно, что μ_1 и μ_2 образуют полную группу, т.е.

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{S_3}{S_1 + S_3} + \frac{S_1}{S_1 + S_3} = 1. \quad (8)$$

Теперь, исходя из известного значения μ_1 , можно определить вероятность нахождения в зоне неоднозначности со значением выходного сигнала $y = I$, которая получается равной

$$\mu_1 \frac{S_2}{S_1 + S_2 + S_3} = \mu_1 S_2.$$

Таким образом, выходной сигнал релейного преобразователя имеет значение $y = I$ с суммарной вероятностью

$$P_{y=I} = \mu_1 S_2 + S_3 \quad (9)$$

Совершенно аналогично можно вычислить, что выходной сигнал релейного преобразователя имеет значение $y = 0$ с суммарной вероятностью

$$P_{y=0} = \mu_2 S_2 + S_1 \quad (10)$$

Вероятности $P_{y=1}$ и $P_{y=0}$ также должны образовать полную группу несовместных событий, т.е. сумма их вероятности должна быть равна единице. Действительно,

$$P_{y=1} + P_{y=0} = \mu_1 S_2 + S_3 + \mu_2 S_2 + S_1 = (\mu_1 + \mu_2) S_2 + S_3 + S_1 = 1 \quad (II)$$

Попутно отметим интересный факт, что

$$P_{y=1} = S_3 + \mu_1 S_2 = S_3 + \frac{S_3 S_2}{S_1 + S_3} = \frac{S_3 (S_1 + S_2 + S_3)}{S_1 + S_3} = \mu_1 \quad (I2)$$

и аналогично

$$P_{y=0} = S_1 + \mu_2 S_2 = S_1 + \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_3} = \frac{S_1 (S_1 + S_2 + S_3)}{S_1 + S_3} = \mu_2 \quad (I3)$$

В работе релейного преобразователя можно вообще наблюдать четыре отдельных режима с соответствующими вероятностями:

а) выход переключается от 0 на 1:

$$P_{y_{0 \rightarrow 1}} = P(1/0) = S_3 = 1 - \Phi^* \left(\frac{\Delta_2 - M\tau}{\sigma} \right), \quad (I4)$$

б) на выходе $y = 1$:

$$P_{y=1} = \mu_1 = \frac{S_3}{1 - S_2} = \frac{1 - \Phi^* \left(\frac{\Delta_2 - M\tau}{\sigma} \right)}{1 - [\Phi^* \left(\frac{\Delta_2 - M\tau}{\sigma} \right) - \Phi^* \left(\frac{\Delta_1 - M\tau}{\sigma} \right)]} \quad (I5)$$

в) выход переключается от 1 на 0:

$$P_{y_{1 \rightarrow 0}} = P(0/1) = S_1 = \Phi^* \left(\frac{\Delta_1 - M\tau}{\sigma} \right) \quad (I6)$$

г) на выходе $y = 0$:

$$P_{y=0} = \mu_2 = \frac{S_1}{1 - S_2} = \frac{\Phi^* \left(\frac{\Delta_1 - M\tau}{\sigma} \right)}{1 - [\Phi^* \left(\frac{\Delta_2 - M\tau}{\sigma} \right) - \Phi^* \left(\frac{\Delta_1 - M\tau}{\sigma} \right)]} \quad (I7)$$

Необходимая ширина неоднозначной зоны

Когда ширина зоны неоднозначности $\Delta_2 - \Delta_1$ характеристики преобразователя мала по сравнению с рассеиванием входного сигнала, то вслед за переходом в положение $y = I$ (с вероятностью $P(I/O)$, согласно формуле (I4)) под влиянием флуктуации входного сигнала может следовать возвращение обратно в положение $y = 0$ (с вероятностью $P(O/I)$ - формула (I6)) даже при сохранении среднего значения входного сигнала $m\tau$. Такое возвращение под влиянием статистических флуктуаций происходит, если два следующих друг за другом входного сигнала $\tau[n]$ и $\tau[n+1]$ попадают на интервалы $[\Delta_2, \infty]$ и $[-\infty, \Delta_1]$ соответственно. Поскольку $\tau[n]$ и $\tau[n+1]$ независимы, то двумерная вероятность, что $\tau[n]$ находится в интервале $[\Delta_2, \infty]$ и $\tau[n+1]$ в интервале $[-\infty, \Delta_1]$ (при неизменном значении $m\tau$) будет

$$P\{\tau[n], \tau[n+1], [\Delta_2, \infty], [-\infty, \Delta_1]\} = P\{\tau[n], [\Delta_2, \infty]\} P\{\tau[n+1], [-\infty, \Delta_1]\}. \quad (I8)$$

Согласно формулам (I4) и (I6)

$$P\{\tau[n], [\Delta_2, \infty]\} = P_{y_{0 \rightarrow 1}} = S_3 = 1 - \Phi^*\left(\frac{\Delta_2 - m\tau}{\sigma}\right)$$

и

$$P\{\tau[n+1], [-\infty, \Delta_1]\} = P_{y_{1 \rightarrow 0}} = S_1 = \Phi^*\left(\frac{\Delta_1 - m\tau}{\sigma}\right).$$

Следовательно, двумерная вероятность

$$P\{\tau[n], \tau[n+1], [\Delta_2, \infty], [-\infty, \Delta_1]\} = S_1 S_3. \quad (I9)$$

Для удовлетворительной работы устройства необходимо, чтобы найденная (I9) вероятность была бы достаточно малой.

$$S_1 S_3 < \varepsilon \quad (20)$$

где ε - допустимая остаточная вероятность неточной работы. В определенном значении S_2 вероятность (I9) имеет максимальное значение при

$$S_1 = S_3 = \frac{S_1 + S_3}{2} = \frac{1 - S_2}{2}$$

и равна:

$$P\{\tau[n], \tau[n+1], [\Delta_2, \infty], [-\infty, \Delta_1]\}_{\max} = [S_1 S_2]_{\max} = \left(\frac{S_1 + S_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{1 - S_2}{2}\right)^2. \quad (21)$$

Откуда на основании (20)

$$S_2 > 1 - 2\sqrt{\varepsilon}, \quad (22)$$

и необходимая ширина зоны неоднозначности

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \left| 2 \arg \Phi^*(S_2) \right| = \left| 2 \arg \Phi^*(1 - 2\sqrt{\varepsilon}) \right|, \quad (23)$$

где $\arg \Phi^*(x)$ — функция, обратная $\Phi^*(x)$, т.е. такое значение аргумента, при котором нормальная функция распределения равна x [2].

Задавшись допустимыми значениями остаточной вероятности неточной работы ε , можно по (23) определить необходимую ширину зоны неоднозначности характеристики $\Delta_2 - \Delta_1$. Некоторые значения $[\Delta_2 - \Delta_1] = f(\varepsilon)$ приведены в таблице I.

Т а б л и ц а I

ε	10^{-10}	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}
$\Delta_2 - \Delta_1$	8,22 σ	7,67 σ	7,08 σ	6,45 σ	5,76 σ

Время ожидания перехода в стационарном режиме

Согласно (14) S_3 является вероятностью p перехода выхода преобразователя от состояния 0 до I при появлении одного входного сигнала $\tau[n]$ (со средним значением $m\tau < \Delta_2$).

На основании закона Пуассона

$$P(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad (24)$$

где $a = p\tau$; p — количество входных сигналов $\tau[n]$, можно определить вероятность R_1 , что в течение серии входных сиг-

налов $T = \sum_1^n \tau[n]$ происходит не менее одного события ($k \geq 1$), где $\tau[n] > \Delta_2$. Эта вероятность

$$R_1 = \sum_{m=1}^{\infty} P_m = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} P_m = 1 - P_0 = 1 - e^{-a}. \quad (25)$$

Одновременно это является вероятностью перехода выходного сигнала релейного преобразователя в состоянии $Y = I$ в течение этой серии.

В таблице 2 приведены значения $R_1(a)$.

$a = np$	0	0,01	0,1	0,25	0,5	1	2	3	5
$P_0(a)$	1	0,99	0,9048	0,7788	0,6065	0,3679	0,1353	0,0498	0,0067
$R_1(a)$	0	0,01	0,0952	0,2212	0,3935	0,6321	0,8647	0,9502	0,9933

В стационарном режиме ($p = S_3 = \text{const.}$, $m\tau = \text{const.}$), заданная вероятностью перехода $R_1(a)$, можно получить необходимое для этого количество n входных сигналов $\tau[n]$ в серии

$$n = \frac{\ln\left(\frac{1}{1-R_1}\right)}{p}, \quad (26)$$

а также длительность этой серии

$$T = \sum_1^n \tau[n] \approx nm\tau = \frac{\ln\left(\frac{1}{1-R_1}\right)}{p} m\tau, \quad (27)$$

являющейся временем ожидания перехода выходного сигнала от состояния 0 до I.

Динамическая погрешность в квазистационарном режиме

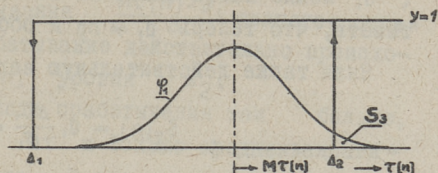
Представим теперь процесс в квазистационарном режиме $\sigma = \text{const.}$ с линейно изменяющимся средним значением

$$m\tau[n] = m\tau[n-1] + \nabla m\tau[n], \quad (28)$$

где $\nabla m\tau[n] = \Delta\tau = \text{const.}$

На фиг. 2 изображена функция $\varphi(\tau[n])$ плотности вероятности входного сигнала нормального распределения со средним значением $m\tau[n]$, которое с каждым периодом двигается вправо на величину $\frac{\Delta\tau}{\sigma}$. На этой фигуре изображен также уро-

Фиг. 2. Движение математического ожидания сигнала $m\tau[n]$ к уровню срабатывания Δ_2



вень срабатывания релейного преобразователя Δ_2 , который стоит неподвижно.

С движением $m\tau[n]$ вправо, вероятность $p[n]$ с каждым шагом увеличивается

$$p[n] = S_3[n] = 1 - \Phi^*\left(\frac{\Delta_2 - m\tau[n]}{\sigma}\right). \quad (29)$$

Учитывая, что $1 - \Phi^*(-x) = \Phi^*(x)$, вероятность

$$p[n] = \Phi^*\left(\frac{m\tau[n] - \Delta_2}{\sigma}\right)$$

и суммарная вероятность

$$a = \sum_n p[n] = \sum_n S_3[n] = \sum_n \Phi^*\left(\frac{m\tau[n] - \Delta_2}{\sigma}\right). \quad (30)$$

Движением $m\tau[n]$ вправо с постоянным шагом $\frac{\Delta\tau}{\sigma}$ (выражение шага в единицах σ принято с целью нормирования) образуется функция

$$\begin{aligned} S_{\Sigma}(\eta) &= \frac{\Delta\tau}{\sigma} a = \frac{\Delta\tau}{\sigma} \sum_n p[n] = \frac{\Delta\tau}{\sigma} \sum_n S_3[n] = \\ &= \frac{\Delta\tau}{\sigma} \sum \Phi^*\left(\frac{m\tau[n] - \Delta_2}{\sigma}\right), \end{aligned} \quad (31)$$

которую можно интерпретировать как некоторую площадь между кривой $\Phi^*(x)$ и линией абсциссы. Эта же площадь может быть выражена и вычислена как функция расстояния $x = \left(\frac{m\tau[n] - \Delta_2}{\sigma}\right)$

$$S_{\Sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x_n} \Phi^*(x) dx. \quad (32)$$

Имея график $S_{\Sigma}(x)$, зададим вероятность срабатывания релейного преобразования $R_1(a)$ и находим соответствующее значение

$$a_1 = \ln\left(\frac{1}{1 - R_1}\right) \quad (33)$$

(α_1 можно найти также по таблице 2, только необходимо учитывать, что теперь $\alpha_1 \neq \text{пр}$ и обозначает (30)).

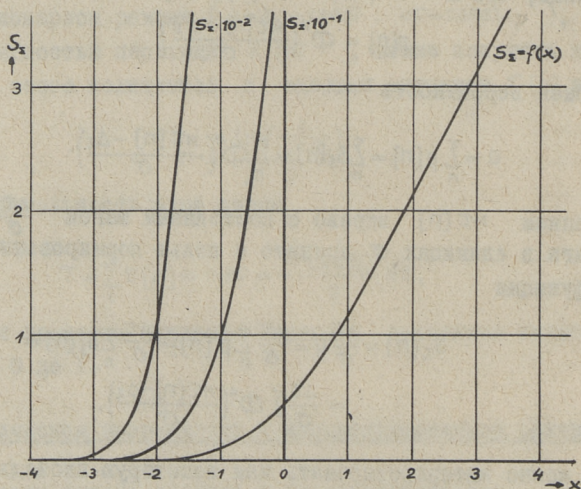
Зная также действительную величину $\frac{\Delta\tau_1}{\sigma_1}$, находим

$$S_{\Sigma}(\eta)_1 = \alpha_1 \frac{\Delta\tau_1}{\sigma_1} = S_{\Sigma}(x)_1. \quad (34)$$

По значению функции $S_{\Sigma}(x)_1$ находим его аргумент x , который и является искомой величиной.

$$x_1 = \left(\frac{m\tau[\eta] - \Delta_2}{\sigma} \right)_1 = \text{arg} S_{\Sigma}(x)_1. \quad (35)$$

Найденное таким образом значение x содержит величину $m\tau[\eta]$, при которой релейный преобразователь в динамическом режиме $\Delta\tau_1 = \text{const}$. срабатывает с вероятностью $R_1(\alpha)$.

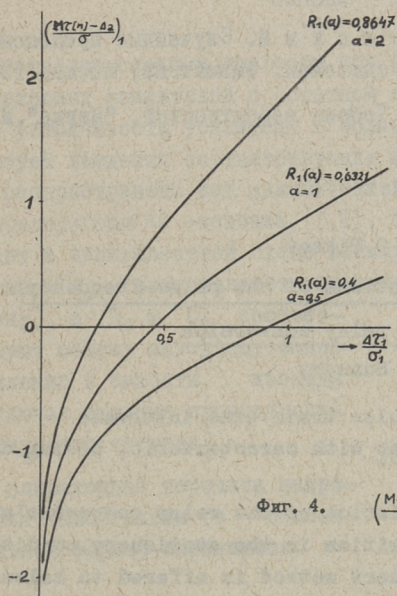


Фиг. 3. $S_{\Sigma} = f(x)$

На фиг. 3. приведен график $S_{\Sigma}(x)$, при помощи которого практически можно определять точку срабатывания $(x)_I$ релейного преобразователя в квазистационарном режиме $\Delta\tau = \text{const}$. и $\sigma = \text{const}$. Еще более наглядно представлена зависимость точки срабатывания $(x)_I$ релейного преобразователя графиком на фиг. 4, где изображена $(x)_I = f\left(\frac{\Delta\tau}{\sigma}\right)$ при трех различных выбранных вероятностях $R_1(\alpha)$. Из фиг. 4 отчетливо видно, что на всех значениях $S_{\Sigma} = \alpha_1 \frac{\Delta\tau}{\sigma} < 0,45$

точка вероятностного срабатывания $\frac{m\tau[n] - \Delta_2}{\sigma}$ является отрицательной, означающей, что срабатывание действительно происходит раньше достижения $m\tau[n]$ уровня Δ_2 .

Эта динамическая погрешность срабатывания тем больше, чем меньше шаг передвижения $\Delta\tau$ и больше среднеквадратическое отклонение σ сигнала. В пределе, когда $\Delta\tau \rightarrow 0$ и режим приближается к стационарному, погрешность срабатывания $\Delta_2 - m\tau[n]$ может достигать до -4σ и больше. При этом время ожидания момента срабатывания может стать весьма значительным (27).



Фиг. 4. $\left(\frac{m\tau[n] - \Delta_2}{\sigma}\right) = f\left(\frac{\Delta\tau_1}{\sigma_1}\right)$

З а к л ю ч е н и е

1. В статическом режиме вероятность $P_{y=1}$ пребывания выходного сигнала релейного преобразователя с зоной неоднозначности в состоянии $y = 1$ равна вероятности μ , прихода входного сигнала в зону неоднозначности $\Delta_2 - \Delta_1$ справа.

2. Во избежание возвращения преобразователя под влиянием статистических флуктуаций приходится увеличивать ширину зоны неоднозначности $\Delta_2 - \Delta_1$ до 8σ и более.

3. В динамическом режиме при медленном изменении математического ожидания $m\tau[n]$ срабатывание релейного преобразователя происходит раньше достижения $m\tau[n]$ уровня Δ_2 .

4. Вероятностную величину динамической погрешности срабатывания можно определить по предложенному методу, который основывается на законе Пуассона и определении суммарной средней вероятности при помощи функции $\int \Phi^*(x)$.

Л и т е р а т у р а

1. А.А. П е р в о з в а н с к и й. Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. Физматгиз, Москва 1962.

2. Е.С. В е н ц е л ь. Теория вероятностей. "Наука", Москва 1964.

O.Pikkov

The probability relations of the pulse-frequency
signal relay conversion

Summary

Passing the random pulse train time intervals through the relay converter with characteristic, having dual zone are considered.

Probability characteristics of the relay converter's output signal state and transition in the stationary condition are given and a graphic chart method is offered to calculate a probable dynamic error in the quasi - stationary condition with $\Delta\tau = \text{const}$ and $\sigma = \text{const}$. Probability density of the $\tau[n]$ is presumed to be Gaussian.

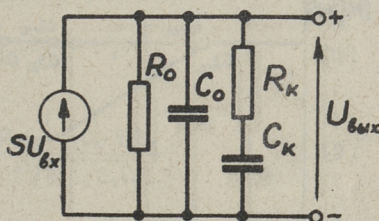
УДК 621.375.13

Х.В. Силламаа

МЕТОД РАСЧЕТА УСИЛИТЕЛЕЙ С ОБРАТНОЙ
 СВЯЗЬЮ

Наиболее сложным вопросом при расчете электронных широкополосных усилителей с обратной связью является обеспечение устойчивости усилителя в области высоких частот. Это требует введения соответствующих корректирующих цепей. Широко распространена при динамической коррекции параллельная корректирующая RC-цепочка [1,2], применение которой обычно ведет к эквивалентной схеме каскада, согласно фиг.1. В этой схеме $SU_{вх}$ представляет управляемый источник тока (крутизну), а R_0 и C_0 соответствуют общему выходному сопротивлению и емкости каскада (включая входные проводимости следующего каскада).

Операторная передача напряжения такой схемы (в относительной форме) выражается



Фиг. 1

$$K(p) = \frac{K(p)}{K(0)} = \frac{1 + p R_k C_k}{1 + p(R_k C_k + R_0 C_0 + R_0 C_k) + p^2 R_0 R_k C_0 C_k}, \quad (1)$$

- где $C_k R_k = T_k$ — постоянная времени корректирующей цепи;
 $C_0 R_0 = T_0$ — постоянная времени некорректированного каскада;
 $K(0) = SR_0$ — усиление каскада для средних частот.

Она может быть представлена в форме

$$k(p) = \frac{(1+pT_K)}{(1+pT_a)(1+pT_b)} \quad (2)$$

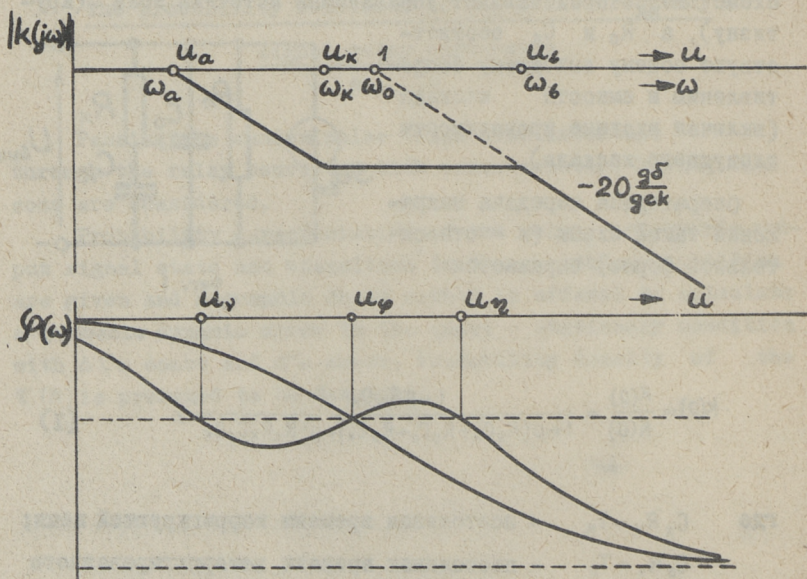
Здесь постоянные времени T_a и T_b , соответствующие полюсам передаточной функции $k(p)$, могут быть найдены решением уравнений

$$\begin{aligned} T_a T_b &= T_o T_K, \\ T_a + T_b &= T_o + \left(1 + \frac{R_o}{R_K}\right) T_K, \end{aligned} \quad (3)$$

которые эквивалентны одному квадратному уравнению относительно T_a и T_b

$$\left(\frac{T_o}{T_{a,b}}\right)^2 - \left[1 + \frac{R_o}{R_K} \left(1 + \frac{C_o}{C_K}\right)\right] \left(\frac{T_o}{T_{a,b}}\right) + \frac{T_o}{T_K} = 0, \quad (4)$$

где обозначение $T_{a,b}$ указывает, что двумя корнями данного уравнения являются как T_a , так и T_b .



Фиг.2

Логарифмические частотные характеристики передачи напряжения представлены на фиг. 2. Если провести нормализацию частот по $\omega_0 = \frac{1}{T_0}$, то относительные величины частот излома асимптотической логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ) выражаются

$$u_a = \frac{\omega_a}{\omega_0} = \frac{T_0}{T_a}; \quad u_b = \frac{\omega_b}{\omega_0} = \frac{T_0}{T_b}; \quad u_k = \frac{\omega_k}{\omega_0} = \frac{T_0}{T_k}. \quad (5)$$

Пользуясь еще сокращенным обозначением

$$\gamma = 1 + \frac{R_a}{R_k}, \quad (6)$$

можно квадратное уравнение (4) переписать в форме

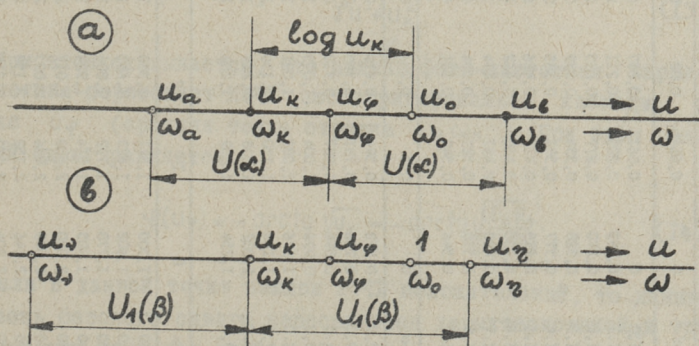
$$u_{a,b}^2 - (u_k + \gamma)u_{a,b} + u_k = 0. \quad (7)$$

Для нахождения частотной характеристики передачи напряжения при заданных параметрах каскада и корректирующей цепи необходимо решение уравнения (7). Пользуясь логарифмическими частотными характеристиками, эту процедуру целесообразно провести логарифмически в видоизмененной форме, представив одно решение уравнения (7) в виде

$$\log u_b = \frac{1}{2} \log u_k + \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}), \quad (8)$$

где

$$\alpha = \frac{u_k + \gamma}{2\sqrt{u_k}} = \frac{R_0 C_0 + R_k C_k + R_0 C_k}{2\sqrt{R_0 R_k C_0 C_k}}. \quad (9)$$



Фиг. 3

Функция $U(\alpha) = \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})$

α	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	0	0,061	0,087	0,106	0,122	0,137	0,150	0,162	0,173	0,183
1,1	0,193	0,201	0,211	0,219	0,227	0,235	0,243	0,250	0,257	0,264
1,2	0,270	0,277	0,283	0,289	0,295	0,301	0,307	0,312	0,318	0,323
1,3	0,328	0,334	0,339	0,344	0,349	0,354	0,358	0,363	0,368	0,372
1,4	0,377	0,381	0,385	0,390	0,394	0,398	0,402	0,406	0,410	0,414
1,5	0,419	0,422	0,426	0,430	0,433	0,437	0,440	0,444	0,448	0,451
1,6	0,455	0,458	0,462	0,465	0,468	0,472	0,475	0,478	0,481	0,485
1,7	0,488	0,491	0,494	0,497	0,500	0,503	0,506	0,509	0,512	0,515
1,8	0,518	0,521	0,524	0,527	0,530	0,532	0,535	0,538	0,541	0,543
1,9	0,546	0,549	0,551	0,554	0,557	0,559	0,562	0,564	0,567	0,570
α	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2,0	0,572	0,596	0,619	0,641	0,661	0,680	0,699	0,717	0,734	0,750
3,0	0,766	0,781	0,795	0,809	0,823	0,836	0,849	0,861	0,873	0,885
4,0	0,896	0,907	0,918	0,929	0,939	0,949	0,959	0,968	0,978	0,987
5,0	0,996	1,004	1,013	1,021	1,029	1,038	1,046	1,054	1,061	1,069
6,0	1,076	1,083	1,091	1,098	1,105	1,111	1,112	1,125	1,131	1,138
7,0	1,144	1,150	1,156	1,162	1,168	1,174	1,180	1,186	1,191	1,197
8,0	1,202	1,208	1,213	1,219	1,224	1,229	1,234	1,239	1,244	1,249
9,0	1,254	1,259	1,264	1,268	1,273	1,278	1,282	1,287	1,291	1,296
α	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9
10	1,300	1,341	1,380	1,415	1,447	1,477	1,505	1,531	1,556	1,579
20	1,602	1,623	1,643	1,663	1,681	1,699	1,716	1,732	1,748	1,763
30	1,778	1,792	1,806	1,819	1,832	1,845	1,857	1,869	1,881	1,892
40	1,903	1,914	1,924	1,935	1,945	1,954	1,964	1,973	1,982	1,991
50	2,000	2,009	2,017	2,025	2,033	2,041	2,049	2,057	2,065	2,072
60	2,079	2,086	2,093	2,100	2,107	2,114	2,121	2,127	2,134	2,140
70	2,146	2,152	2,158	2,164	2,170	2,176	2,182	2,188	2,193	2,199
80	2,204	2,210	2,215	2,220	2,225	2,230	2,236	2,241	2,246	2,250
90	2,255	2,260	2,265	2,270	2,274	2,279	2,283	2,288	2,292	2,297

далее $U_\alpha \approx \log 2\alpha$

Тогда (см. Фиг. 3а) прежде всего находят точку U_{φ} как среднюю точку отрезка $\omega_k \omega_o$, которая соответствует первой составляющей выражения (8). Далее необходимо вычислить вспомогательную функцию

$$U(\alpha) = \log u_{\alpha} = \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) \quad (= \log e \cdot \text{Arch} \alpha), \quad (10)$$

для облегчения которой приведена таблица этой функции (таблица I). Это даст вторую составляющую выражения (8), и геометрическим сложением по (8) найдем точку ω_b (отложив найденный отрезок от точки ω_{φ}). Так как согласно формуле (3)

$$U_{\sigma} U_b = U_k, \quad (11)$$

то точку ω_{σ} также легко найти, отложив отрезок $U(\alpha)$ левее от точки ω_{φ} (см. Фиг. 3а). Тем самым все точки излома ЛАЧХ найдены и характеристика может быть далее построена общеизвестным способом.

Расчет логарифмической фазо-частотной характеристики (ЛФЧХ) после определения частот излома ω_{σ} и ω_b может быть проведен известными способами, согласно формуле (2), а именно

$$\varphi(u) = \text{arctg} \frac{u}{U_k} - \text{arctg} \frac{u}{U_{\sigma}} - \text{arctg} \frac{u}{U_b}, \quad (12)$$

или

$$\varphi_u = -\text{arctg} \frac{u^3 + U_k(U_k + \delta - 1)u}{\delta u^2 + U_k^2}. \quad (13)$$

При этом оказывается, что данная фазо-частотная характеристика пересекает ЛФЧХ нескорректированной каскады в точке u_{φ} (средняя точка отрезка $\omega_k \omega_o$). При этом фазовый сдвиг равняется

$$\varphi(u_{\varphi}) = -\text{arctg} \sqrt{u_k} = -\text{arctg} \sqrt{\frac{C_o R_o}{C_k R_k}}. \quad (14)$$

Если в данной точке наклон ЛФЧХ положительный, то данный уровень фазового сдвига пересекается характеристикой в трех точках, как показано на Фиг. 2 (в общем случае несимметрично). Условие положительного наклона ЛФЧХ в точке u_{φ} выражается соотношением

$$\beta = \frac{\delta - 1}{2\sqrt{U_k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_0 C_k}{R_k C_0}} > 1, \quad (15)$$

а крайние точки ЛФЧХ, обозначаемые U_γ и U_η и имеющие фазовый сдвиг φ (U_φ), могут быть найдены (приравнивая формулы (13) и (14)) формулой

$$U_{\gamma, \eta} = U_k \left[\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1} \right]. \quad (16)$$

Для нахождения этих точек может быть применена методика, аналогичная вышерассмотренной. Для этого (см. фиг. 3б) необходимо, вычислив прежде всего (или найдя из табл. I) вспомогательную функцию

$$u_1(\beta) = \log \left[\beta + \sqrt{\beta^2 - 1} \right], \quad (17)$$

отложить эту величину из точки U_k вдоль частотной оси в обе стороны (с конечными точками U_γ и U_η). И тем самым искомые точки определены. Полученные точки полезны для уточнения вида ЛФЧХ (например, экспериментальные фазовые сдвиги соответствуют точкам около середин отрезков $U_\gamma U_\varphi$ и $U_\varphi U_\eta$). Другие характерные параметры ЛФЧХ не могут быть представлены простыми аналитическими выражениями и находятся численными расчетами.

При расчете усилителей с обратной связью обычно при выборе корректирующих цепей исходят из заданного запаса по фазовому сдвигу [1,2], которая принимается в пределах 10..25 град на один каскад. Для данной минимально-фазовой эквивалентной схемы каскада это позволяет исходить из заданного среднего наклона ЛАЧХ. Приближенный средний наклон наиболее просто рассчитывается как наклон прямой, проходящий через средние точки прямых участков асимптотической частотной характеристики (точки 1 и 2, соответствующие частотам $U_1 = \sqrt{U_a U_k}$ и $U_2 = \sqrt{U_b U_k}$ на фиг. 5). Выражение для среднего наклона получается

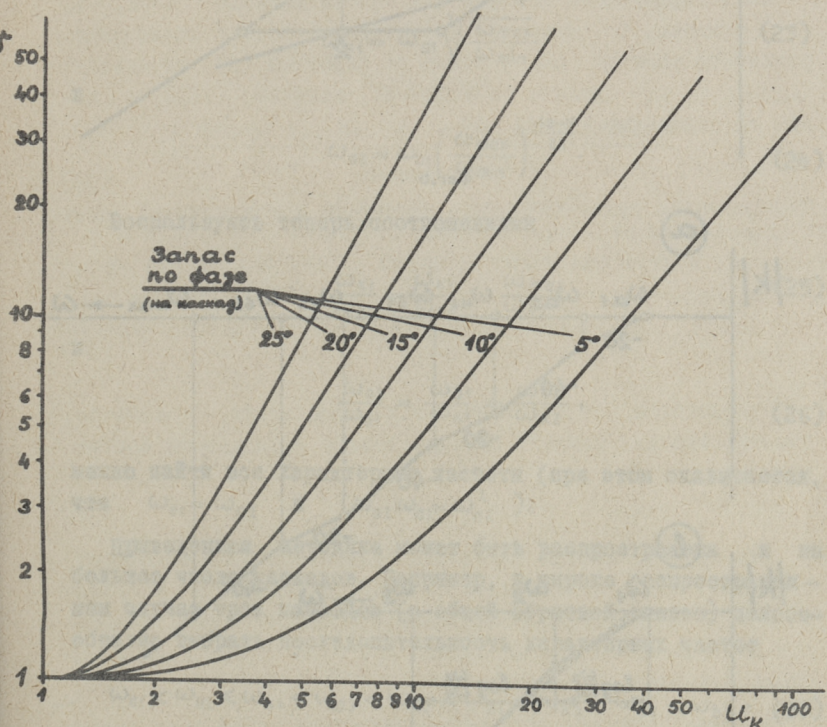
$$\nu = \frac{20}{1 - \frac{\log U_a}{\log U_b}} \left[\frac{q\delta}{\text{дек}} \right]. \quad (18)$$

Если считать средний наклон заданным, то, пользуясь уравнениями (8) и (II), можно получить трансцендентное уравне-

ние для выбора подходящих u_k и γ по заданному γ

$$U \left(\frac{u_k + \gamma}{2\sqrt{u_k}} \right) = \frac{\log u_k}{2(\frac{\gamma}{10} - 1)} \quad (19)$$

Из последнего уравнения видно, что средним наклонам $\gamma > 10$ дб/дек соответствует $u_k > 1$, а $\gamma < 10$ дб/дек соответствует $u_k < 1$. Для облегчения расчетов на фиг. 4 приведен график решений уравнения (19).



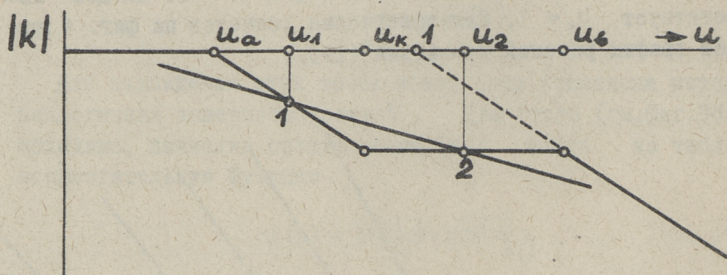
Фиг.4

В случае двух последовательно включенных каскадов целесообразно для получения постоянного среднего наклона ЛАЧХ выбрать параметры каскадов, согласно следующей последовательности

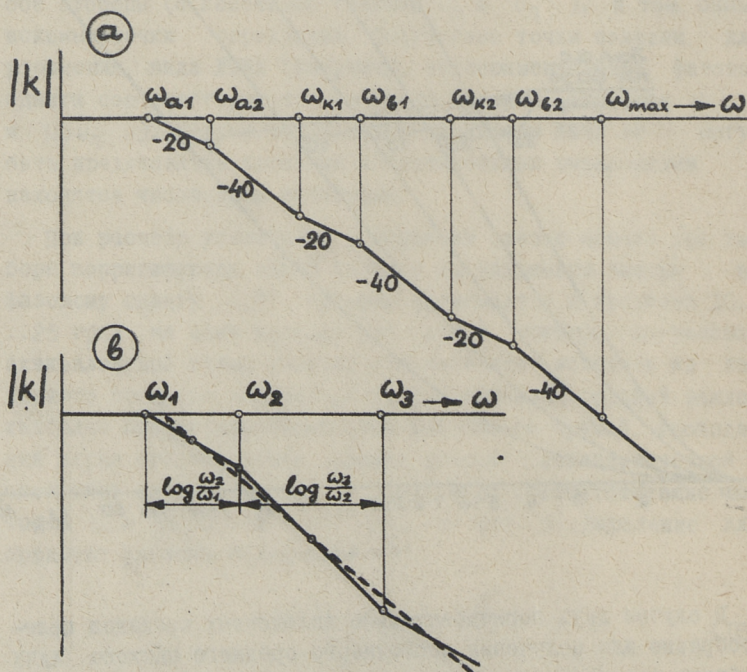
$$\omega_{a1} < \omega_{a2} < \omega_{k1} < \omega_{b1} < \omega_{k2} < \omega_{b2} \quad (20)$$

Тогда ЛАЧХ будет иметь вид, показанный на фиг. 6а. Если вычислить средний наклон характеристики для участка кривой, показанной на фиг. 6б, то получим

$$\gamma = 20 \frac{\log \frac{\omega_2}{\omega_1} + 2 \log \frac{\omega_3}{\omega_2}}{\log \frac{\omega_3}{\omega_1}} \text{ [дБ/дек]}. \quad (21)$$



Фиг. 5



Фиг. 6.

Отсюда для заданного наклона $20 < \gamma < 40$ гб/гек получим целесообразное значение частоты ω_2 из соотношения

$$\log \frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(2 - \frac{\gamma}{20}\right) \log \frac{\omega_3}{\omega_1}. \quad (22)$$

Если теперь задан диапазон частот $\omega_{\min} \div \omega_{\max}$ в пределах которого необходимо соблюдать заданный средний наклон (зависит от желаемой глубины обратной связи), то при двух последовательно включенных каскадах целесообразно в соответствии с (19) выбирать $\omega_{a1} = \omega_{\min}$, а далее

$$\omega_{k1} = \omega_{a1} \sqrt[3]{\frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}}} \quad (23)$$

и

$$\omega_{a2} = \omega_{a1} \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}}\right)^{\frac{40-\gamma}{60}}. \quad (24)$$

Воспользуясь теперь соотношениями

$$\frac{\omega_{k1}}{\omega_{a1}} = \frac{\omega_{k2}}{\omega_{k1}} = \frac{\omega_{\max}}{\omega_{k2}} \quad (25)$$

и

$$\frac{\omega_{a2}}{\omega_{a1}} = \frac{\omega_{b1}}{\omega_{k1}} = \frac{\omega_{b2}}{\omega_{k2}}, \quad (26)$$

можно найти все характерные частоты (при этом оказывается, что $\omega_{a1} = \omega_{a2}$ и $\omega_{a2} \omega_{a1} = \omega_{a2}^2$).

Приведенная методика может быть распространена и на большее число каскадов. Например, в широко распространенном случае трех каскадов (с общей обратной связью) целесообразно выбрать последовательность характерных частот

$$\omega_{a1} < \omega_{a2} < \omega_{k1} < \omega_{a3} < \omega_{k2} < \omega_{b1} < \omega_{k3} < \omega_{b2} < \omega_{b3}. \quad (27)$$

Далее, совершенно аналогично получаются расчетные соотношения: $\omega_{a1} = \omega_{\min}$, а

$$\omega_{k1} = \omega_{a1} \sqrt[4]{\frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}}}, \quad (28)$$

$$\omega_{a2} = \omega_{a1} \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}}\right)^{\frac{40-\gamma}{80}} \quad (29)$$

и далее

$$\frac{\omega_{к1}}{\omega_{д1}} = \frac{\omega_{к2}}{\omega_{к1}} = \frac{\omega_{к3}}{\omega_{к2}} = \frac{\omega_{б3}}{\omega_{к3}} \quad (30)$$

и

$$\frac{\omega_{д2}}{\omega_{д1}} = \frac{\omega_{д3}}{\omega_{к1}} = \frac{\omega_{б1}}{\omega_{к2}} = \frac{\omega_{б2}}{\omega_{к3}} \quad (31)$$

откуда легко найти все характерные частоты (при этом $\omega_{д1} = \omega_{д3}$ и $\omega_{б3} = \omega_{б1}$).

Если характерные частоты для одного каскада ($\omega_{д}$, $\omega_{б}$, $\omega_{к}$) найдены, то, зная еще характерную частоту нескорригированного каскада ω_0 , можно по формулам (5) определить $U_{д}$, $U_{б}$ и $U_{к}$ (должно соблюдаться, конечно, (II)), а далее на основании формул (3)

$$\gamma = U_{д} + U_{б} - U_{к} \quad (32)$$

Теперь можно сразу вычислить параметры корректирующей цепи

$$R_{к} = \frac{R_0}{\gamma - 1}, \quad (33)$$

$$C_{к} = C_0 \frac{\gamma - 1}{U_{к}} \quad (34)$$

При расчете многокаскадных схем необходимо, конечно, учесть, что для каждого каскада должно соблюдаться соотношение

$$\omega_{дi} < \omega_{бi} < \omega_{кi} \quad (35)$$

Это требует иногда изменения (уменьшения) ω_0 некоторых каскадов, что наиболее целесообразно осуществить увеличением R_0 (тем самым увеличивается усиление). Для уменьшения влияния шумов целесообразно при этом первые каскады выбрать наиболее узкополосными.

Наконец, отметим, что данная методика может быть легко видоизменена, приняв для аппроксимируемой кривой ЛАЧХ оптимальную по Боде частотную характеристику усилителя [2,3].

Л и т е р а т у р а

1. Г.В. В о й ш в и л л о. Усилители низкой частоты на электронных лампах. Связьиздат, 1959.

2. Б.Я. Л у р ь е. Проектирование транзисторных усилителей глубокой обратной связью. Связь. 1965.

3. А.Д. А р т ы м. Электрические корректирующие цепи и усилители. Энергия. 1965.

H.Sillamaa

A Method for Design Feedback Amplifiers

Summary

A simple grafoanalytic procedure in frequency domain for design amplifiers having transfer functions with all real poles and nulls is presented. The method can be applied for cascaded amplifiers using simple RC correcting filters.

УДК 621.375.24

И. Ю. Эйскоп

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПИТАЮЩИХ НАПРЯЖЕНИЙ НА
 УСИЛЕНИЕ УСИЛИТЕЛЕЙ

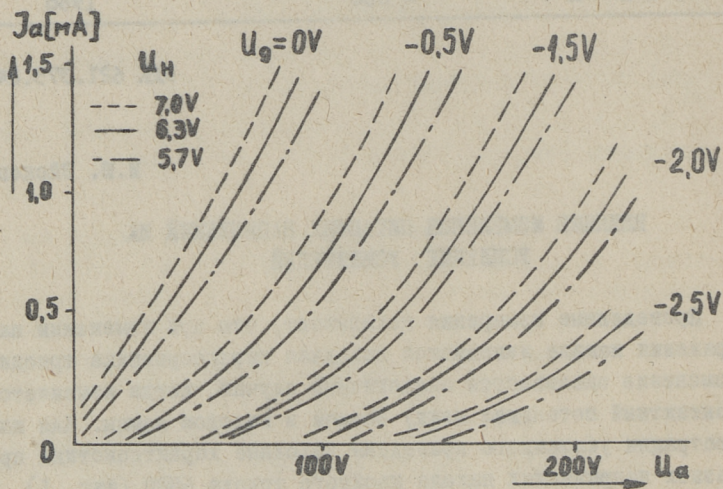
Проведенные измерения показывают, что при изменении напряжения накала изменяется выходная характеристика триода. Изменение оказывается аналогичным случаю, когда изменяется контактный потенциал между сеткой и катодом лампы. Для иллюстрации указанного приведены выходные характеристики при разных напряжениях накала двойного триода 6Н2П (фиг. 1) и пентода 6Ж1П в триодном включении (фиг. 2). Анализ характеристик дает, что изменение напряжения накала на $\pm 10\%$ от номинального, т. е. $\pm 0,63$ в, эквивалентно изменению контактного потенциала на $\pm 0,098$ в у 6Н2П и $\pm 0,125$ в у 6Ж1П (как для триодного так и для пентодного включения). Это вызывает сдвиг рабочей точки лампы и изменение коэффициента усиления каскада. Для расчетов читается последовательно с источником сигнала E_c включенной э.д.с. эквивалентного потенциала E_k (фиг. 3).

Усилитель на триоде

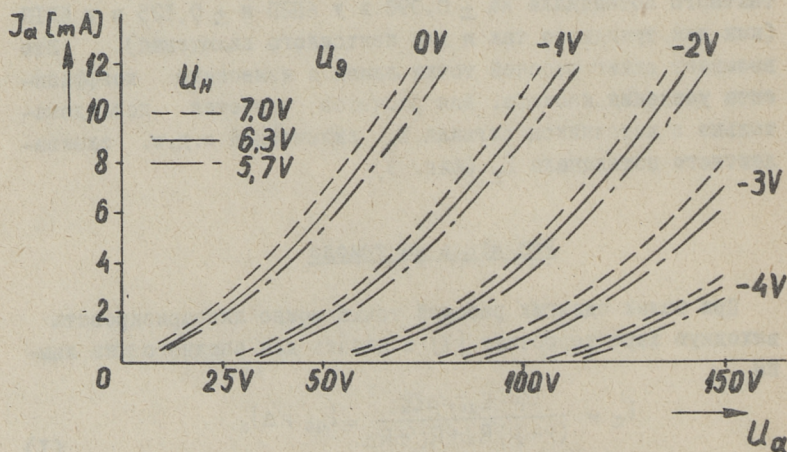
При малых сдвигах рабочей точки можно линеаризировать выходную характеристику $[I]$ и писать для анодного тока лампы

$$I_a = \frac{U_n - E_{a0} + \mu E_k}{(1 + \mu) R_k + R_i + R_a} = I_{a0} + \Delta I_a \quad (1)$$

где μ , R_i , E_{a0} - параметры триода,
 R_a ; R_k - анодное и катодное сопротивления,
 I_{a0} - ток анода до изменения напряжения накала.

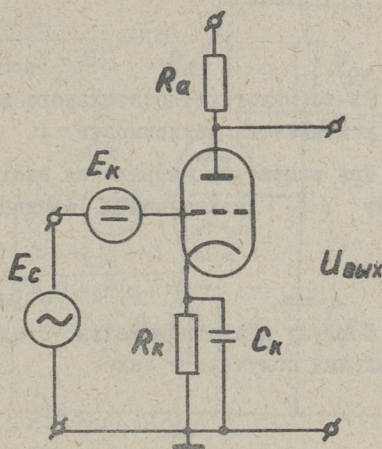


Фиг. 1. Выходные характеристики лампы 6Н2П (один триод) при разных напряжениях накала



Фиг. 2. Выходные характеристики лампы 6Ж1П (триодное включение) при разных напряжениях накала

Фиг. 3. Триодный усилитель с эдс. эквивалентного контактного потенциала E_k



Видно, что изменение напряжения накала вызывает изменение анодного тока на величину

$$\Delta I_a = \frac{\mu E_k}{(1 + \mu) R_k + R_i + R_a} \quad (2)$$

и можно определить относительное изменение тока анода

$$\delta I_a = \frac{\Delta I_a}{I_{a0}} = \frac{\mu E_k}{U_n - E_{a0}} \quad (3)$$

Внутреннее сопротивление триода зависит от тока анода по формуле (2)

$$R_i = \frac{\mu}{\alpha I_a^n} \quad (4)$$

где α — постоянная величина.

Исследования показывают, что для современных ламп показатель степени $n > 0,33$. Для ламп 6Н2П и 6Ж1П (триодное включение) $n = 0,63$ и $0,60$ соответственно.

На основе формул (3) и (4) можно писать для первого приближения, что относительное изменение внутреннего сопротивления

$$\delta R_i = -n \delta I_a \quad (5)$$

На основе формул (3) и (5) получено для относительного изменения коэффициента усиления

$$\delta K = \frac{\mu E_k R_i}{(U_n - E_{a0})(R_i + R_a)} \quad (6)$$

Из-за малого относительного изменения тока анода здесь не учитывается зависимость μ от тока анода [3].

При изменении напряжения анодного питания U_n на величину ΔU_n можно найти анодный ток по формуле

$$I'_a = \frac{U_n - E_{a0} + \Delta U_n}{(1 + \mu)R_k + R_i + R_a} = I_{a0} - \Delta I'_a \quad (7)$$

Формулу для относительного изменения внутреннего сопротивления получают в виде

$$\delta R_i = -\mu \frac{\Delta I'_a}{I_{a0}} = -\mu \frac{\Delta U_n}{U_n - E_{a0}} \quad (8)$$

Последнему соответствует относительное изменение усиления

$$\delta K = \frac{\mu R_i}{R_i - R_a} \cdot \frac{\Delta U_n}{U_n - E_{a0}} \quad (9)$$

При одновременном изменении напряжений накала и анодного питания, изменение усиления найдут методом наложения как сумму относительных изменений.

Аналогичным путем можно вычислить ожидаемый дрейф нуля усилителей постоянного тока [4].

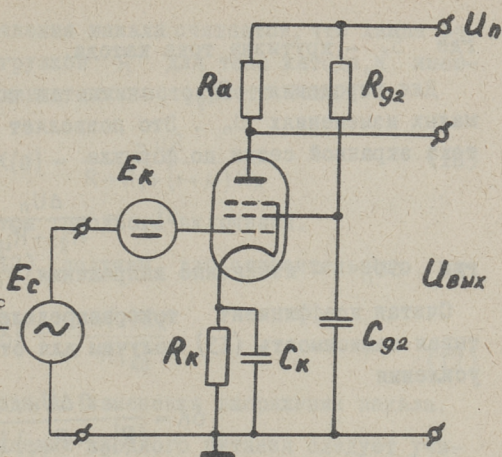
Усилитель на пентоде

При изменении напряжения накала э.д.с. эквивалентного контактного потенциала E_k изменяется медленно, поэтому следует определить коэффициент усиления для постоянного тока данного усилителя (фиг. 4) [5].

$$K(0) = \frac{S R_a}{1 + S_k R_k} \cdot \frac{R_{ig2}}{R_{ig2} + R_{g2}} \quad (10)$$

где S, S_k — крутизны тока анода и катода,
 R_{ig2} — внутреннее сопротивление цепи экранной сетки,
 R_a, R_k — анодное и катодное сопротивления.

Фиг. 4. Пентодный усилитель с эдс. эквивалентного контактного потенциала E_k



Читая внутреннее сопротивление по анодной цепи бесконечным, можем вычислить изменение тока анода от E_k по формуле

$$\Delta I_a = \frac{1}{R_a} K(0) E_k \quad (II)$$

Известно [2], что крутизна пентода зависит от тока анода по формуле

$$S = b \cdot I_a^n, \quad (I2)$$

где b - постоянная величина.

Исследования дадут, что для современных пентодов показатель степени $n > 0,33$. Например, для 6ЖП $n = 0,467$.

Учитывая зависимости II и I2 получаем, что относительное изменение усиления

$$\delta K = n \frac{\Delta I_a}{I_{a0}} \quad (I3)$$

При изменении напряжения анодного питания U_n изменяется ток экранной сетки, что вызывает изменения крутизны S и усиления.

При этом следует учитывать, что из-за катодного сопротивления увеличивается динамическое сопротивление цепи экранной сетки [6] и с достаточной точностью определяется формулой

$$R'_{ig2} = R_{ig2}(1 + S_k R_k),$$

где S_k - крутизна тока катода.

Для упрощения R'_{ig2} считается постоянной величиной при малых изменениях U_n . Это позволяет определить изменение тока экранной сетки по формуле

$$\Delta I_{g2} = \frac{\Delta U_n}{R_{g2} + R'_{ig2}} \quad (14)$$

где ΔU_n - изменение напряжения U_n .

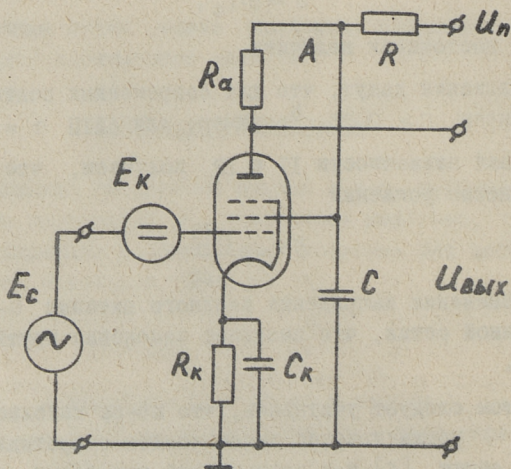
Считая коэффициент токораспределения постоянным и учитывая зависимость (13), получим для относительного изменения усиления

$$\delta K = \frac{n \Delta U_n}{(R'_{ig2} + R_{g2}) I_{g20}} \quad (15)$$

где I_{g20} - ток экранной сетки до изменения U_n .

Пентодный усилитель с комбинированной развязкой

Для экономии деталей и упрощения схемы здесь имеется общая развязывающая цепочка для анодной и экранной цепей (Фиг. 5) [6].



Фиг. 5. Схема пентодного усилителя с комбинированной развязкой

При изменении напряжения накала считается, что лампа работает как триод с нагрузкой R для тока катода, и имеющийся коэффициент усиления для постоянного тока

$$K(0) = \frac{-\mu R}{R + R_i + (1 + \mu) R_k}, \quad (16)$$

где μ , R_i - параметры триодного включения.

Учитывая формулу (12), получим для относительного изменения усиления

$$\delta K = \frac{n K(0) E_k}{R I_{k0}}. \quad (17)$$

где I_{k0} - ток катода до изменения напряжения накала.

При изменении напряжения анодного питания следует учитывать, что между точкой A (фиг. 5) и землей схема имеет динамическое сопротивление для медленно изменяющихся напряжений [7]

$$R_A = R_i + R_k(1 + \mu). \quad (18)$$

Зная это динамическое сопротивление, можем вычислить изменение тока катода ΔI_k при данной ΔU_n по формуле

$$\Delta I_k = \frac{\Delta U_n}{R + R_A}. \quad (19)$$

Считая коэффициент токораспределения постоянной и учитывая зависимость (13), получим для относительного изменения усиления

$$\delta K = \frac{n \Delta U_n}{(R + R_A) I_{k0}}. \quad (20)$$

Изменение параметров лампы от изменения питающих напряжений вызывает у пентодного усилителя с комбинированной развязкой изменение частотной характеристики каскада на низких частотах. Если выбором величин R , C , R_k и C_k обеспечена равномерная частотная характеристика до самых низких частот [6], то при повышении питающих напряжений появляется завал низких частот, а понижение питающих напряжений вызывает подъем на низких частотах.

Л и т е р а т у р а

1. А.А. Р и з к и н. Основы теории и расчета электронных усилителей. Энергия, 1965.

2. Б.М. Ц а р е в. Расчет и конструирование электронных ламп. Госэнергоиздат, 1952.

3. Н. R o t h e, W. K l e e n. Grundlagen und Kennlinien der Elektronenröhren. 2. Aufl., 1943.

4. И. Э й с к о п. Электронные измерительные приборы, ч. I. Ротапринт ТПИ, 1962.

5. Г.В. В о й ш в и л л о. Усилители низкой частоты на электронных лампах. Связьиздат, 1963.

6. И. Э й с к о п. Пентодный усилитель с комбинированной развязкой. Труды ТПИ, серия А, № 234, Таллин, 1966.

7. И. Э й с к о п. Электронные измерительные приборы, ч. II. Ротапринт ТПИ, 1963.

I. Eiskop

Der Einfluss von Speisespannungen auf die Verstärkung der Verstärker

Zusammenfassung

Dieser Beitrag analysiert den Einfluss von Heiz- und Anodenspannungen auf die Verstärkung der Trioden- und Pentodenverstärker. Es wird die Veränderung der Röhrenkennlinien der Heizspannung beschrieben. Diese Veränderung wird reicherisch mit der Einführung des äquivalenten Kontaktpotentials behandelt.

Für die Berechnung des Einflusses der Anodenspannung auf die Verstärkung wird das Verhältnis der Steilheit von Anodenstrom angewendet.

Die im Beitrag gegebenen Grundzüge sind auch für die Bestimmung der Nullpunkt Konstanz der Gleichstromverstärker gebräuchlich.

УДК 621.382.322

Х.А. Таммет

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ
 КАНАЛЬНОГО ТРАНЗИСТОРА

Проходная характеристика канального (полевого) транзистора с р-п переходом, описывающая зависимость тока стока I_c от напряжения между затвором и истоком U_{3u} , зависит от типа и конструкции транзистора — характера р-п перехода, характера распределения примеси в канале, отношения концентрации примеси в канале и в области затвора и т.д. Так как проходная характеристика $I_c = f(U_{3u})$ при $U_{cu} = \text{const.}$ определяет также зависимость крутизны $S = -\frac{dI_c}{dU_{3u}}$ от напряжения U_{3u} , она представляет значительный интерес при исследовании усилительных свойств и режимов работы канальных транзисторов.

Теоретические формулы проходной характеристики найдены, при соответствующих допущениях рядом авторов [1, 2, 5, 6, 7], основываясь на ряде идеализированных моделей канального транзистора. Основная теория Шокли [2, 5] предполагает, что объемный заряд распределен однородно в канале и переход является резким. Тогда в режиме насыщения ($U_{cu} \geq U_0$) ток стока

$$I_c = I_{c0} \left\{ 1 - \frac{U_{3u}}{U_0} \left[3 - 2 \left(\frac{U_{3u}}{U_0} \right)^{1/2} \right] \right\}, \quad (1)$$

где I_{c0} — ток стока при $U_{3u} = 0$,
 U_0 — напряжение отсасывания,
 U_{cu} — напряжение между стоком и истоком.

Отсюда крутизна

$$S = -\frac{dI_c}{dU_{3u}} = S_0 \left[1 - \left(\frac{U_{3u}}{U_0} \right)^{1/2} \right], \quad (2)$$

где при $U_{3u} = 0$ крутизна $S_0 = \frac{3I_{c0}}{U_0}$.

При линейном распределении заряда [2, 6]

$$I_c = I_{c0} \left\{ 1 - \frac{U_{3u}}{U_0} \left[\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{U_{3u}}{U_0} \right)^{2/3} \right] \right\}, \quad (3)$$

откуда

$$S = S_0 \left[1 - \left(\frac{U_{3u}}{U_0} \right)^{2/3} \right], \quad (4)$$

причем

$$S_0 = \frac{5}{2} \frac{I_{c0}}{U_0}.$$

В некоторых работах [4, 8] экспериментально было проверено соответствие характеристик канальных транзисторов, изготовленных по диффузионной технологии, к теоретическим и найдено, что теоретические характеристики ввиду принятых допущений значительно отличаются от экспериментальных. Лучшие результаты дает аппроксимация проходной характеристики степенной функцией

$$I_c = I_{c0} \left(1 - \frac{U_{3u}}{U_0} \right)^n. \quad (5)$$

По данным литературы [2, 4] показатель степени имеет значение от 1,98 до 2,20 в зависимости от метода изготовления транзистора. На основе этого при анализе цепей с канальными транзисторами n принимается равным 2,0 [8].

В настоящей работе были экспериментально исследованы характеристики канальных транзисторов новой эпитаксиально-планарной конструкции (тип 2N3823 фирмы Texas Instruments Ltd.) в количестве 10 шт. Для определения характера проходной характеристики более наглядно представлять результаты измерения в виде функции

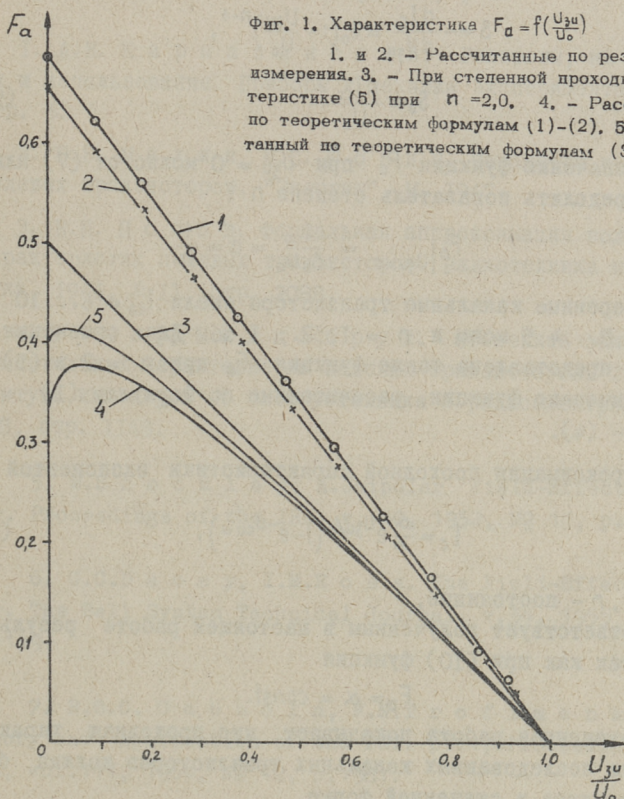
$$F = \frac{I_c}{S} = f\left(\frac{U_{3u}}{U_0}\right) \quad (6)$$

или нормализованной функции

$$F_d = \frac{F}{I_{c0}} = \frac{I_c}{S \cdot U_0} = f\left(\frac{U_{3u}}{U_0}\right). \quad (6a)$$

По измеренным характеристикам $I_c = f(U_{3u})$ и $S = f(U_{3u})$ были рассчитаны значения функции F_a . Две крайние по значению функции F_a представлены на фиг. 1, где видна их близость к линейному закону в пределах ошибок измерения

$$F_a = a(1 - \frac{U_{3u}}{U_0}). \quad (7)$$



Подставляя (6а) в (7) и учитывая, что $S = -\frac{dI_c}{dU_{3u}}$, получаем уравнение

$$\frac{dI_c}{I} = -\frac{dU_{3u}}{aU_0(1 - \frac{U_{3u}}{U_0})},$$

интегрирование которого дает

$$\ln I_c = \ln(1 - \frac{U_{3u}}{U_0})^{\frac{1}{a}} + C_1,$$

откуда проходная характеристика

$$I_c = C_2 \left(1 - \frac{U_{3u}}{U_0}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (8)$$

Сравнивая полученную степенную характеристику (8) с (5), видим, что $C_2 = I_{c0}$ и $a = \frac{1}{n}$. Таким образом линейность экспериментальной характеристики (6а) показывает, что проходная характеристика имеет форму (5). Тогда и крутизна

$$S = -\frac{dI_c}{dU_{3u}} = S_0 \left(1 - \frac{U_{3u}}{U_0}\right)^{n-1},$$

где

$$S_0 = \frac{n I_{c0}}{U_0} \quad (9)$$

По значению функции F_a при $U_{3u} = 0$ можно от (7) или от (9) определить показатель степени n :

$$F_a|_{U_{3u}=0} = \frac{I_{c0}}{S_0 U_0} = a = \frac{1}{n}.$$

Измеренные канальные транзисторы имели $I_{c0} = 6 \dots 10$ ма, $S_0 = 3,8 \dots 4,5$ мсим и $n = 1,52 \dots 1,56$. Для сравнения на фиг. 1 представлена также функция F_a при $n = 2$ в (5) и теоретические функции, рассчитанные по формулам (1) - (2) и (3) - (4).

Аппроксимация проходной характеристики экспонентой [3]

$$I_c = \frac{\alpha}{n} e^{U_{3u}/\alpha} (1 - e^{-U_{cu}/\alpha}), \quad (10)$$

где α , n - постоянные,

не соответствует полученным в настоящей работе результатам, так как при (10) функция

$$F_a = \alpha = \text{const.}$$

Проведенная работа показывает, что проходная характеристика исследованных канальных транзисторов должна быть представлена в степенной форме

$$I_c = I_{c0} \left(1 - \frac{U_{3u}}{U_0}\right)^n.$$

При этом полученное значение показателя $n = 1,5 \dots 1,6$ у канальных транзисторов эпитаксиально-планарной конструкции типа 2N3823 отличается от значений, приведенных в литературе [2, 8] для других видов конструкции. По величине n можно оценить конструкцию канала и характер рас-

предела примесей, а также величину контактного сопротивления истока R_u , которое уменьшает крутизну канального транзистора [I] согласно соотношению

$$S \approx \frac{S'}{1+S'R_u}$$

Л и т е р а т у р а

1. А.Н. Кармазинский. Унитроны, их особенности и использование. Приборы и техника эксперимента, 1965, №3, стр. 5.

2. Б.В. Малин, М.С. Сонин. Параметры и свойства полевых транзисторов. "Энергия", М. 1967.

3. В.П. Попов. Формальная аппроксимация вольтамперных характеристик полевых транзисторов. Радиотехника и электроника, 1966, № II, стр. 2088.

4. Ричер, Миддлбрук. Степенной закон экспериментальных характеристик полевых транзисторов. Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. 1963, № 8, стр. II48.

5. W.S h o s k l e y. A.Unipolar Field-Effect Transistor. Proceedings of the IRE, v. 40, 1952, N^o 11, p.1313,1365.

6. G.C.D a s e y, I.M.R o s s. The Field-Effect Transistor. The Bell System Technical Journal, v.34, 1955 N^o 11, p.1149.

7. R.S.C. C o b b o l d, F.N.T r o f i m e n k o f f. Theory and Application of the FET. pt.1, Proceedings of the IEE, vol.111, 1964, N^o 12, p.1981.

8. W.G o s l i n g. Design of Small Signal Amplifiers Using Field-Effect Transistors. Electronic Engineering, 1966, Sept., p.568.

H. Tammet

Determination of the Transfer Characteristic
of Field Effect Transistor

Summary

Theoretical transfer characteristics, describing the dependence of drain current I_c on gate-source voltage U_{gs} are given as (1), (3) by [5,6], and experimental characteristics are approximated as (5) in [4,8].

In the present paper the results of measurements of 10 FE Transistors 2N3823 are represented by a function F_a (6a) on figure 1 (1 and 2). The linear form of the function F_a (7) shows that transfer characteristics of measured transistors should have the form of (8) or (5). Measured epitaxial-planar transistors had the power of transfer characteristics (5) n between 1,52 and 1,56, which was different from commonly used figures in literature [2, 4, 8] $n = 1,92 \dots 2,20$ for the FETs of other construction.

The author would like to express his sincere thanks to Prof. Robert Magnusson of Chalmers University of Technology, Sweden, for his guidance and encouragement.

УДК 621.382.61

Х.И. Хаак, В.Р.Хейнрихсен

ЧАСТОТНЫЕ СВОЙСТВА ДАТЧИКОВ ХОЛЛА

В в е д е н и е

При использовании датчиков Холла на высоких частотах наблюдаются некоторые особенности, которые обусловлены наличием вихревых токов в датчике. Известно, что в широком диапазоне частот напряжение Холла почти не зависит от частоты рабочего тока. Однако о зависимости напряжения Холла от частоты магнитной индукции имеются в литературе противоречивые сведения. Так, в работе [1] приведены теоретический анализ и экспериментальные данные, подтверждающие, что при повышении частоты магнитной индукции вихревые токи приводят к повышению напряжения Холла, а в работах [2] и [3] утверждается, что напряжение Холла не должно зависеть от частоты. Для выяснения этого вопроса рассмотрим более подробно работу датчика в переменных электрических и магнитных полях.

I. Уравнения поля

Поведение датчика Холла в электромагнитном поле описывается уравнениями Максвелла в следующем виде:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta} \quad (\text{Ia}) \quad \bar{\delta} = \gamma \bar{E} + C_H \gamma \bar{\delta} \times \bar{B} \quad (\text{Iв})$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (\text{Iб}) \quad \bar{B} = \mu \bar{H} \quad (\text{Iг})$$

где C_H — коэффициент Холла материала датчика,

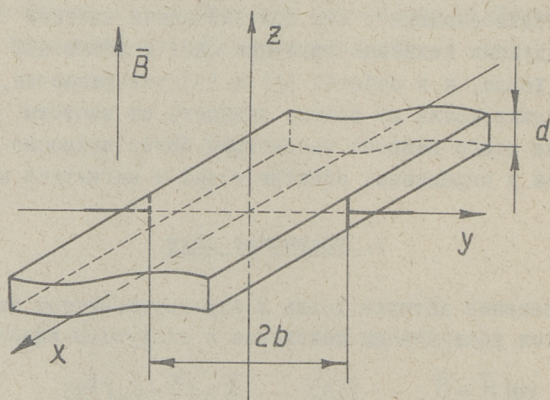
γ — удельная проводимость материала датчика,

μ - магнитная проницаемость материала датчика.

В системе уравнений (I) C_H и γ можно считать частотно-независимыми при выполнении условия $\omega\tau \ll 1$, где τ - время релаксации носителей. На частотах ниже 1 ГГц это условие обычно выполняется. Также не учитываем зависимости удельной проводимости γ и коэффициента Холла C_H от магнитной индукции, что справедливо при выполнении условия $\mu B \ll 1$, где μ - подвижность носителей тока.

Пренебрегаем также токами смещения. С погрешностью 1% это справедливо в случае датчиков из высокоомного германия и кремния до частот порядка 100 МГц, а для материалов с большой удельной проводимостью эта граничная частота еще выше.

С целью дальнейшего упрощения уравнений (I) приведем задачу к одномерной. Для этого предполагаем, что датчик представляет тонкую пластинку, расположенную между полюсами из материала с высокой магнитной проницаемостью. Тогда $|\bar{B}| = B_z$ (фиг. 1). Предполагая, что датчик имеет бесконечную длину $|\bar{D}| = \delta_x$. Для датчиков конечной длины получаемые результаты применимы лишь приближенно, так как точный расчет в этом



Фиг. 1

случае очень сложный. расчет, приведенный в [3] для конечных датчиков, является неточным, так как использованное там условие симметрии $E(x,y) = E(x,-y)$ не выполняется при $B_z \neq 0$.

Учитывая приведенные упрощения, получаем систему уравнений (1) в виде

$$\delta_x = r E_x \quad (2a) \quad E_y = C_H \delta_x B_z \quad (2б)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (2в) \quad \delta_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (2г)$$

$$(2д)$$

Для краткости в дальнейшем при обозначении δ , B и H не будем применять индексы x и z .

Уравнения системы (2) являются уравнениями плоской электромагнитной волны в проводящей среде. Учитывая, что ток датчика I и магнитный поток через датчик Φ являются синусоидальными с круговыми частотами соответственно ω_I и ω_H , можно получить решение системы (2) для H и δ в символической форме в виде суммы двух компонентов:

$$\dot{H}_{mco} \operatorname{ch} \alpha_n y + \dot{H}_{mq1} \operatorname{sh} \alpha_I y = \dot{H}_{mc} + \dot{H}_{mq} \quad (3a)$$

$$\dot{\delta}_{mco} \operatorname{ch} \alpha_I y + \dot{\delta}_{mq1} \operatorname{sh} \alpha_n y = \dot{\delta}_{mc} + \dot{\delta}_{mq}, \quad (3б)$$

где

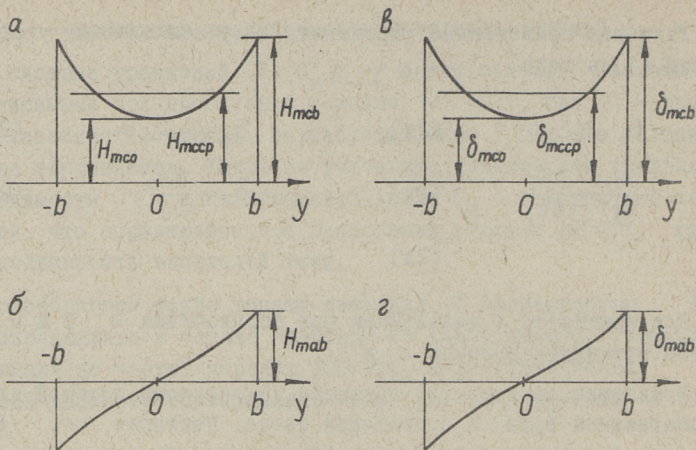
$$\alpha_n = \sqrt{j \omega_n \mu \delta} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega_n \mu \delta}{2}} = (1+j) K_n \quad (4a)$$

$$\alpha_I = \sqrt{j \omega_I \mu \delta} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega_I \mu \delta}{2}} = (1+j) K_I. \quad (4б)$$

В уравнении (3a) первая компонента \dot{H}_{mc} является симметричной относительно координаты y , то есть $\dot{H}_{mc} = \dot{H}_{mc}(-y)$ и представляет собой сумму приложенного магнитного поля и поля вихревых токов в датчике, обусловленных этим полем. На фиг. 2a представлена эпюра этой компоненты. Величина \dot{H}_{mco} является комплексной амплитудой этой компоненты на оси x датчика ($y = 0$).

Вторая компонента \dot{H}_{mq} является антисимметричной относительно координаты y (фиг. 2б) и представляет магнитное поле тока датчика.

В уравнении (3б) $\dot{\delta}_{mc}$ выражает комплексную амплитуду плотности рабочего тока в датчике с учетом поверхностного



Фиг. 2

эффекта (фиг. 2в). Компонента $\dot{\delta}_{m0}$ выражает плотность вихревых токов, обусловленных приложенным магнитным полем (фиг. 2г).

2. Входное сопротивление датчика

Для исследования частотной зависимости входного сопротивления датчика можно использовать формулы поверхностного эффекта в ленточном проводнике [4], согласно которым внутреннее сопротивление единицы длины проводника определяется отношением напряженности электрического поля на поверхности проводника к величине тока.

Напряженность электрического поля можно найти из (3б) с учетом (2а). Так как при определении сопротивления имеет роль лишь первая компонента (3б), получаем

$$\dot{E}_m = \frac{\dot{\delta}_{mco}}{\gamma} \operatorname{ch} \alpha_1 y. \quad (5)$$

Ток датчика равен

$$\dot{I}_m = d \int_{-b}^b \dot{\delta}_m dy = d \int_{-b}^b \dot{\delta}_{mco} \operatorname{ch} \alpha_1 y dy = 2d \delta_{mco} \frac{\operatorname{sh} \alpha_1 b}{\alpha_1}. \quad (6)$$

Следовательно, погонное сопротивление

$$Z = \frac{\dot{E}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\delta_{mco} \alpha_I}{r 2d \delta_{mco}} \cdot \frac{ch \alpha_I b}{sh \alpha_I b} = \frac{1}{2bd r} \alpha_I b cth \alpha_I b. \quad (7)$$

Так как сопротивление единицы длины постоянному току

$$r_0 = \frac{1}{2bd r}, \quad (8)$$

можно выразить относительное изменение модуля сопротивления

$$\Delta_z = \frac{|Z|}{r_0} = |\alpha_I b cth \alpha_I b| = \sqrt{2} \kappa_I b \sqrt{\frac{ch 2\kappa_I b + \cos 2\kappa_I b}{ch 2\kappa_I b - \cos 2\kappa_I b}}. \quad (9)$$

Фаза комплексного сопротивления Z определяется выражением

$$\begin{aligned} \varphi_z &= \text{arctg} \frac{\text{Im}(\alpha_I b)}{\text{Re}(\alpha_I b)} + \text{arctg} \frac{\text{Im}(cth \alpha_I b)}{\text{Re}(cth \alpha_I b)} = \\ &= 45^\circ - \text{arctg} \frac{\sin 2\kappa_I b}{sh 2\kappa_I b}. \end{aligned} \quad (10)$$

Если входное сопротивление (7) разделить на активную и реактивную составляющую, получаем

$$\Delta_r = \frac{r}{r_0} = \kappa_I b \frac{sh 2\kappa_I b + \sin 2\kappa_I b}{ch 2\kappa_I b - \cos 2\kappa_I b}; \quad (11)$$

$$\Delta_x = \frac{x}{r_0} = \kappa_I b \frac{sh 2\kappa_I b + \sin 2\kappa_I b}{ch 2\kappa_I b - \cos 2\kappa_I b}. \quad (12)$$

Графики зависимостей (9), (10), (11) и (12) приведены на фиг. 3 и 4.

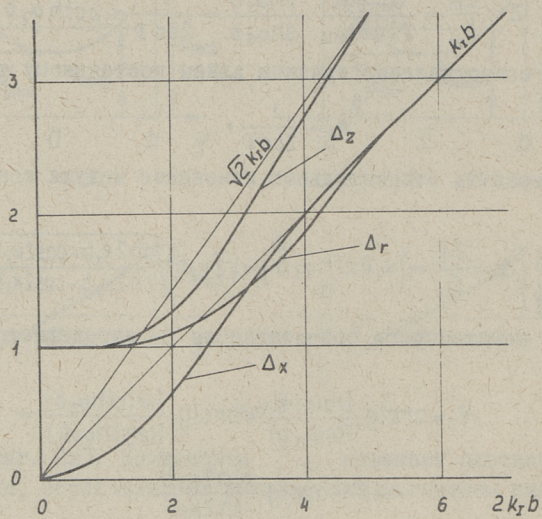
Погонное индуктивное сопротивление x можно выразить через погонную индуктивность

$$L = \frac{\mu b}{2d} \cdot \frac{1}{2\kappa_I b} \cdot \frac{sh 2\kappa_I b - \sin 2\kappa_I b}{ch 2\kappa_I b - \cos 2\kappa_I b}. \quad (13)$$

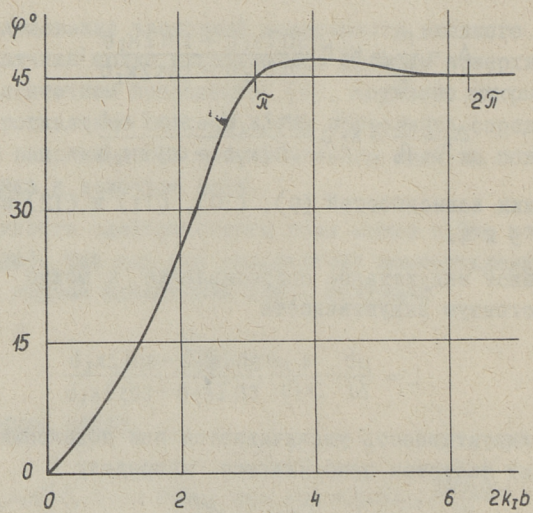
Эта индуктивность увеличивается при понижении частоты и на низких частотах приближается к пределу

$$L_0 = \lim_{\kappa_I \rightarrow 0} L = \frac{\mu b}{6d}.$$

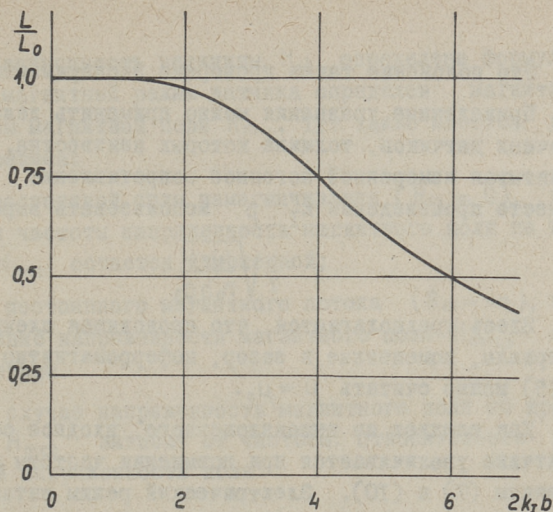
График функции $\frac{L}{L_0}$ изображен на фиг. 5.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5

Все вышеприведенные соотношения отличаются от соответствующих уравнений поверхностного эффекта в ленточном проводнике тем, что в формулах вместо толщины ленты применяется ширина датчика. Это обусловлено влиянием ферромагнитных полюсов, наличие которых сильно увеличивает влияние поверхностного эффекта.

Изменение сопротивления было проверено экспериментально на бронзовой ленте толщиной $d = 0,09$ мм и шириной 15 мм, которая была расположена между полюсами из феррита. Для получения зависимости I , на фиг. 6, понадобилась частота до 5 кгц. Некоторое расхождение с расчетным графиком 2 можно объяснить конечной магнитной проницаемостью феррита и неточностью определения воздушного зазора.

Следует отметить, что ширина ферромагнитных полюсов и ленты (датчика) в рассматриваемом случае равны. Увеличение ширины полюсов вызывает дополнительную индуктивность $L_{\text{внешн}}$ которая в вышеприведенных уравнениях не учитывается.

Также необходимо, чтобы лента (датчик) была бы расположена между полюсами плотно, без дополнительного зазора. Однако приведенные формулы применимы и в случае, если воздушный зазор d_3 больше толщины датчика d . При условии $2b \gg d_3$ можно показать, что для этого надо в уравнениях умножить величину K_r на

$$\beta = \sqrt{\frac{d}{d_3}} \quad (14)$$

Это положение также проверено экспериментально.

Приведенные уравнения можно применить даже в случае пленочных датчиков, толщина которых неизвестна. В этом случае, учитывая измеренной погонное сопротивление ρ_0 , следует вместо произведения $\kappa_I \beta$ использовать выражение

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_n \mu}{\rho_0 b d_3}} \quad (15)$$

Здесь предполагается, что проводящая пленка и другие материалы, помещенные в зазор, неферромагнитны, так что в (15) можно считать $\mu \approx \mu_0$.

Как следует из вышеизложенного, входное сопротивление датчика увеличивается при повышении частоты согласно уравнениям (7) и (10). Электрический режим питания датчика при этом определяется внутренним сопротивлением источника питания R_i . Можно выделить два характерных режима:

- 1) режим генератора тока ($R_i = \infty$);
- 2) режим генератора напряжения ($R_i = 0$).

3. Расчет напряжения Холла

Напряжение Холла определяется напряженностью электрического поля в направлении оси y

$$\begin{aligned} U_H &= \int_{-b}^b E_y dy = C_H \int_{-b}^b \delta B dy = C_H \mu \int_{-b}^b \frac{\partial H}{\partial y} H dy = \\ &= C_H \mu \int_{H_{-b}}^{H_b} H dH = \frac{C_H \mu}{2} (H_b^2 - H_{-b}^2) = \\ &= \frac{C_H \mu}{2} (H_b + H_{-b})(H_b - H_{-b}) = C_H \mu H_{cb} \int_{-b}^b \delta dy = \frac{C_H \mu}{d} H_{cb} I, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$H_{cb} = \frac{H_b + H_{-b}}{2}, \quad I = d \int_{-b}^b \delta dy.$$

Согласно уравнению (16) частотная зависимость напряжения Холла определена частотной зависимостью тока датчика I и полусуммой напряженностей магнитного поля на краях датчика H_{cb} .

Частотная зависимость величины H_{cb} определена формулой (3а). Однако магнитный режим датчика определен магнитным сопротивлением магнитной цепи R_m . Тут также имеется два характерных режима:

1) режим постоянной силы намагничивания ($R_m = 0$), где при изменении частоты напряженность магнитного поля на краях датчика H_{mcb} остается измененной;

2) режим постоянного магнитного потока ($R_m = \infty$), где среднее значение напряженности магнитного поля H_{mccp} является неизменным.

Во втором случае напряженность магнитного поля на краях датчика H_{mcb} зависит от частоты. Относительное изменение этой напряженности поля

$$\Delta_H = \frac{\dot{H}_{mcb}}{\dot{H}_{mccp}} = \frac{\dot{H}_{mco} \operatorname{ch} \alpha_n b}{\frac{1}{2b} \int_{-b}^b \dot{H}_{mco} \operatorname{ch} \alpha_n y dy} \quad (17)$$

Если сравнивать (17) с уравнениями (5) и (6), нетрудно видеть, что выражения для Δ_H и φ_H по форме аналогичны выражениям для Δ_z (9) и φ_z (10). Следовательно,

$$\Delta_H = |\alpha_n b \operatorname{cth} \alpha_n b| = \sqrt{2} k_n b \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2k_n b + \cos 2k_n b}{\operatorname{ch} 2k_n b - \cos 2k_n b}}, \quad (18)$$

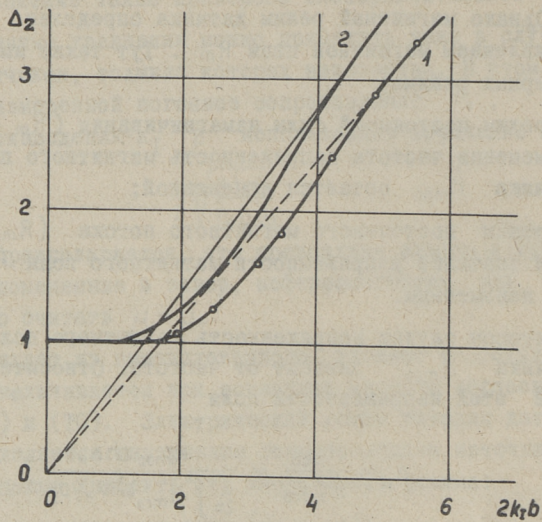
$$\varphi_H = 45^\circ - \operatorname{arctg} \frac{\sin 2k_n b}{\operatorname{sh} 2k_n b}. \quad (19)$$

Зависимости (18) и (19) можно определить с помощью графиков фиг. 3 и фиг. 4, заменив k_I на k_n .

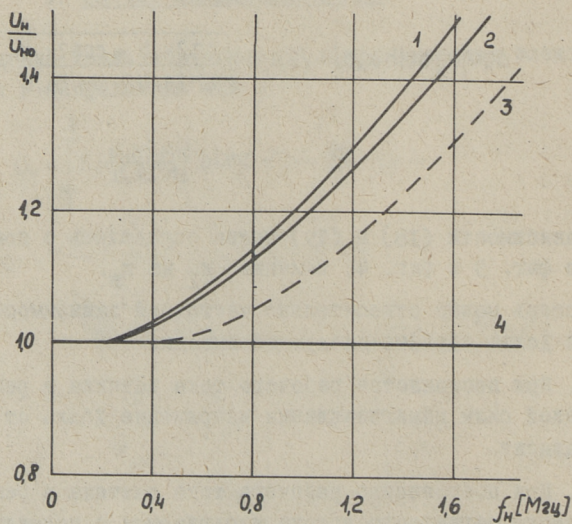
Теперь можно относительно частотной зависимости напряжения Холла сделать следующие выводы:

1. При постоянстве рабочего тока датчика в режиме постоянной силы намагничивания напряжение Холла от частоты не зависит.

2. При постоянстве рабочего тока датчика в режиме постоянного магнитного потока наблюдается с повышением частоты рост напряжения Холла пропорционально изменению Δ_H .



Фиг. 6.



Фиг. 7

3. Если частоты приложенного магнитного поля и рабочего тока датчика равны ($\omega_n = \omega_1$), возможно компенсация роста напряжения Холла путем выбора подходящей величины внутреннего сопротивления источника питания R_i .

В качестве проверки рассмотрим эксперимент, описанный в работе [1]. Измерено относительное изменение напряжения Холла при постоянном рабочем токе и высокочастотной магнитной индукции (фиг. 7). Кривая 1, рассчитанная для напряжения Холла в [1], соответствует случаю постоянства величины H_{mco} в (3а) (случай, который в практике не встречается). Кривая 2 соответствует режиму постоянного магнитного потока, прямая 4 - режиму постоянной силы намагничивания.

Измеренная зависимость 3 указывает на то, что режим магнитной цепи близок к режиму постоянного магнитного потока. В этом режиме на краях датчика магнитное поле вихревых токов складывается с приложенным магнитным полем и напряженность магнитного поля на краях датчика растет, что согласно (16) приведет к росту напряжения Холла.

4. Энергетические соотношения

Потери мощности в датчике, расположенном в высокочастотном магнитном и электрическом поле, обусловлены входным и вихревыми токами. Для обеспечения нормального режима работы сумма потерь не должна превышать допустимой мощности рассеивания, т.е.

$$P_{bx} + P_{вихр} \leq P_{гон}. \quad (20)$$

Потери, вызванные входным током с учетом частотной зависимости сопротивления (II), определяются соотношением

$$P_{bx} = \Delta_r r_0 l I^2 = \xi I^2, \quad (21)$$

где l - длина датчика.

Потери, обусловленные вихревыми токами, согласно (3б), определяются зависимостью

$$P_{вихр} = \frac{ld}{2r} \int_{-b}^b |\delta_{ms1} \operatorname{sh} \alpha_{ny}|^2 dy \frac{ld}{4r k_n} |\delta_{ms1}|^2 (\operatorname{sh} 2k_n b - \sin 2k_n b), \quad (22)$$

где $|\delta_{маг}| = 2k_H H_{мсо}$.

Учитывая (3а) и (4а), получим

$$|H_{сб}| = |H_{cb}| \sqrt{\frac{2}{\operatorname{ch} 2k_H b + \cos k_H b}}$$

Окончательно потери за счет вихревых токов

$$P_{вухр} = \xi'' H_{мсб}^2, \quad (23)$$

где

$$\xi'' = \frac{2ld}{\gamma} \frac{\operatorname{sh} 2k_H b - \sin 2k_H b}{\operatorname{ch} 2k_H b + \cos 2k_H b}$$

Следовательно, общие потери

$$P_{гон} \leq \xi' I^2 + \xi'' H_{мсб}^2. \quad (20а)$$

С другой стороны, согласно (16) напряжение Холла пропорционально

$$U_H = I H_{мсб}. \quad (24)$$

Определив из соотношения $\frac{\partial U_H}{\partial H_{мсб}} = 0$ оптимальные значения напряженности

$$H_{мсб \text{ opt}} = \sqrt{\frac{P_{гон}}{2\xi''}} \quad (25)$$

и тока

$$I_{opt} = \sqrt{\frac{P_{гон}}{2\xi'}}, \quad (26)$$

увидим, что при этом потери со стороны вихревых токов составляют половину допустимых потерь.

В режиме питания датчика от генератора напряжения U согласно (9) ток

$$I = \frac{U}{\Delta_z \Gamma_0 l} \quad (27)$$

и оптимальное значение напряжения согласно выражениям (26) и (21)

$$U_{opt} = \sqrt{\frac{P_{гон} \Gamma_0 l \Delta_z^2}{2\Delta_n}}$$

В случае магнитной цепи с неизменным значением магнитной индукции оптимальным будет согласно (25) и (17)

$$H_{ср \text{ opt}} = \sqrt{\frac{P_{opt}}{2\xi'' \Delta_H^2}}$$

Л и т е р а т у р а

1. F. K u h r t, H. J. L i p p m a n n, K. W i e h l. Über das Frequenzverhalten von Hallgeneratoren. Archiv der Elektrischen Übertragung, Band 13, August 1959, 341-347.
2. W. H a r t e l. Proprietes et applications du generateur Hall. A.I.M. - N^o 1, 1961, 11-40.
3. I. d e S a b a t a. Influenta curentilor turbionari asupra comportarii generatorului Hall. Buletinul stiintific si tehnic al institutu lui politehnic Timisoara. Serie Noua, Tomul 9 (23). Farc 2. Julie-Decemberie 1964.
4. В. А. Г о в о р к о в. Электрические и магнитные поля. ГЭИ, М.-Л. 1960.

H. Haak, V. Heinrichsen

Die Frequenzabhängigkeit des Hallgenerators

Zusammenfassung

Im folgenden werden die Eigenschaften eines Hallgenerators beschrieben, der unter gleichzeitiger Einwirkung eines Magnetfeldes und elektrischen Feldes steht. Es werden die Frequenzabhängigkeit des Widerstandes und der Hallspannung bei verschiedenen Arbeitsbedingungen dargelegt und die optimalen Werte des Eingangssignals unter Inbetrachtung der Frequenzabhängigkeit gegeben.

УДК 621.9.0023

П.М. Плакк

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ
ЭЛЕКТРОЛИТОВ С БОЛЬШОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

В в е д е н и е

Водные растворы концентрированных электролитов и различные коллоидные системы, как живые ткани, кровь, пищевые продукты, известковые растворы и т.д., образуют группу веществ, имеющих относительно большую электропроводность и высокую диэлектрическую проницаемость. посредством электрических свойств представляется возможным охарактеризовать состав, физическое состояние, влагосодержание и пр. этих веществ. Поэтому измерение электрических свойств таких веществ имеет большое значение в целом ряде отраслей науки. Кроме того, изменение электрических свойств веществ можно использовать при автоматизации производственных процессов и разработке датчиков. Измерение электрических свойств веществ является сложной задачей, в которой на первом месте стоят электротехнические вопросы. Интерпретирование же результатов измерения является в основном электрохимической проблемой.

Измерению электрических свойств веществ с большой проводимостью посвящено много научно-исследовательских работ. Представлено много данных о численных значениях электрических свойств различных веществ, о зависимости этих значений от состава вещества и т.д. Однако результаты мно-

гих исследовательских работ противоречивы, в связи с чем представлен ряд расходящихся точек зрения при трактовке электрической сущности веществ с большой проводимостью. Зачастую какое-либо истолкование берется за основу при признании одних результатов измерения правильными, а других неправильными. Например, К.П. Смирн в своей обширной монографии [1, гл.3, п.6, стр.90/91] утверждает: "... во многих определениях диэлектрической проницаемости электролитических растворов имеются большие ошибки. Неясно, возрастает ли диэлектрическая проницаемость с повышением концентрации или же уменьшается". По теоретическим соображениям он ставит под сомнение результаты целого ряда работ, не указывая, однако, при этом, какие измерительно-технические критерии признают их результаты неправильными.

К сожалению, в литературе имеется также ряд работ, в которых представленные данные об электрических свойствах веществ не согласуются с общедействующими законами электротехники. Например, Л.И. Ратнер и В.В. Помазков [2] представляют следующие результаты измерения для строительных материалов, которые измерены при частота $f = 1000 \text{ Гц}$

а) Полуводный технический гипс:

электропроводность $\sigma = 18 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ [2 (рис. 2)]; диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 9$; тангенс угла диэлектрических потерь $\text{tg } \delta = 18 \cdot 10^{-2}$ [2 (рис. 9)].

б) Быстротвердеющий цемент:

$\sigma = 25 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ [2 (рис. 5)], $\epsilon = 7$, $\text{tg } \delta = 25 \cdot 10^{-2}$ [2 (рис. 10)].

Проверяя эти результаты по известной в электротехнике формуле

$$\text{tg } \delta = \frac{\sigma}{2\pi f \epsilon_0 \epsilon} \quad (1)$$

получаем рассчитанные по σ и ϵ значения $\text{tg } \delta$: для гипса $3,6 \cdot 10^5$ и для цемента $6,4 \cdot 10^5$. Эти значения по сравнению с измеренными в 10^6 раз больше!

Следовательно, при измерении электрических свойств веществ с большой проводимостью можно получить глубоко ошибочные результаты, если при измерении веществ с большим $\operatorname{tg} \delta$ формально применять те предписания и устройства, которые разработаны для веществ с относительно малым $\operatorname{tg} \delta$.

Несомненно, что из приведенных в литературе в корне расходящихся данных только одни могут быть правильными; однако признать результаты измерений правильными или неправильными можно только на основе глубокого анализа применяемой методики измерений и измерительной аппаратуры. Поэтому измерение электрических величин веществ с большой проводимостью необходимо рассматривать, исходя из положений теоретической электротехники.

Настоящая статья в основном и посвящена анализу вопросов техники измерения.

Измерение электропроводности веществ с большой проводимостью переменным током звуковой частоты производится без особого труда. При определении же диэлектрической проницаемости сталкиваемся с двоякими трудностями: во-первых, отсутствие необходимых измерительных устройств и, во-вторых, введение в испытуемую пробу дополнительных сопротивлений и емкостей, относительно значений которых сейчас еще нет полной ясности. В нижеследующем рассматриваем эти вопросы более подробно.

I. Об электродах с изолированными поверхностями

При измерении диэлектрической проницаемости веществ с большой проводимостью основная трудность заключается в том, что большая электропроводность пробы шунтирует ее емкость. Вследствие этого колебательные контуры перестают резонировать и измерительные мосты становятся нечувствительными относительно регулирования емкости. Для преодоления измерительно-технических трудностей применяются, с одной стороны, электроды с изолированными поверхностями, т.н. бесконтактная система, и, с другой стороны, пытаются повысить чувствительность моста. Эти вопросы автор настоящей работы (в дальнейшем автор) рассматривает в статье [3]. Там получены выводы: а) каж-

дый метод измерения и измерительный прибор имеет (при заданной частоте измерения) ограниченный диапазон измерения. Он не может применяться для измерения диэлектрической проницаемости веществ, проводимость которых превышает известное предельное значение. Измерительные устройства, основывающиеся на резонансных цепях и мосты переменного тока не в состоянии измерять диэлектрическую проницаемость веществ с большой проводимостью; б) электроды с изолированными поверхностями (если они применяются для преодоления вышеотмеченных измерительно-технических трудностей) не позволяют измерять диэлектрическую проницаемость веществ с большой проводимостью.

При этом следует отметить, что в литературе имеется целый ряд работ, в которых подчеркивается, что диэлектрическую проницаемость веществ с большой проводимостью возможно измерять именно при помощи электродов с изолированными поверхностями. Подавляющее большинство соответствующих работ рассматривает т.н. титрацию высокой частоты. Обширный обзор этих работ представлен в монографии К. Крузе и Р. Хубера [4]. Так как эта монография является одним из основных источников, опираясь на который утверждается, якобы система с изолированными электродами применима также и при измерении диэлектрической проницаемости проводящих веществ, то проанализируем представленный в ней материал.

В монографии К. Крузе и Р. Хубера [4] обстоятельно рассматривается электрическая сторона измерительной пробы в случае электродов с изолированными поверхностями. Исходят из конкретной эквивалентной схемы и составляются точные уравнения, которые связывают величины, измеренные в системе с изолированными электродами, с подлинными величинами пробы (без учета влияния изоляционного слоя). Формулы (35) и (58) в монографии по содержанию тождественны с формулами (5) и (6) автора, представленными в статье [3]. Эти формулы в обеих работах являются основой для дальнейшего развития проблемы. Тем самым в исходных основах работ [4] и [3] расхождений нет, обе они описывают проблему без какого-либо упрощения. Расхождение имеет место в дальнейших направлени-

ях развития проблемы. В монографии исходят из известных до настоящего времени методов измерения и пытаются преодолеть вышеназванные измерительно-технические трудности применением электродов с изолированными поверхностями. Вся работа в основном и посвящена выяснению оптимальных отношений, при которых измерительная аппаратура с наибольшей чувствительностью реагировала бы на изменение электрических свойств жидкостей. Видим многочисленные кривые, где показатель того или другого измерительного прибора зависит от концентрации жидкости. Нигде, однако, не показывается, какую долю от показания обуславливает диэлектрическая проницаемость вещества и какую долю электропроводность. Весь представленный материал является великолепным доказательством того, что в системе с изолированными электродами возможно получить только субъективные показания измерительной аппаратуры, которые зависят от суммарного электрического состояния измеряемого вещества; однако не представляется возможным определить диэлектрическую проницаемость измеряемого вещества. Эта точка зрения ясно вычитывается в следующих местах монографии: стр. 12 последний абзац, стр. 15 третий абзац, стр. 16 второй и третий абзац, стр. 96 нижний абзац и т.д. Также рисунки 9, 52, 53, 55, 59, 61, 62, 63 и др. показывают, что по ним не представляется возможным в случае большой проводимости вещества определить его диэлектрическую проницаемость (верхняя плоская часть кривых).

В итоге следует отметить, что монография К. Крузе и Р. Хубера и приведенная в ней литература (175 источников) не доказывают возможность измерять диэлектрическую проницаемость веществ с большой проводимостью в системе с изолированными электродами, а, наоборот, показывают, что такое определение невозможно.

В работе [3] автор также исходил из указанных выше формул (5) и (6) и анализировал образующиеся погрешности измерения в зависимости от тангенса угла потерь. Анализ пока-

зад, что для измерения диэлектрической проницаемости проводящих веществ следует пользоваться классическими электродами, в которых вещество находится в гальваническом контакте с электродами. Так как мосты переменного тока и измерительные приборы, базирующиеся на резонансе колебательных контуров, не могут в этом случае работать, то автором был предложен т.н. двухполюсник - измеритель емкости, для которого вышеуказанная задача является посильной. При анализе автор исходил из измерительно-технических условий, которые безоговорочно следует выполнять. В противном случае результаты измерений не имеют решающего значения.

Во многих работах изолированные электроды рекомендуются еще и потому, что при их использовании отсутствует мешающее влияние поляризации электродов. Если предположить, что в случае классических электродов поляризация действительно создает непреодолимые трудности, то можно применять и электроды с изолированными поверхностями, однако только при условии, если $C_0 \gg C_x$ и $\operatorname{tg} \delta_x$ является умеренным (см. статья 3, стр. 71, второй абзац сверху, и табл. I). Из табл. I явствует, что в случае отношения $C_0/C_x = 2000$ при $\operatorname{tg} \delta_x = 5$, C_x отличается от измеренного значения C_e на 1%, а при $\operatorname{tg} \delta_x = 10$ - на 5%. Последовательную емкость C_0 можно, однако, заменить емкостью изоляционного слоя электродов. Если применять для изоляции электродов лак с $\varepsilon \approx 2$ и измерять водные растворы с $\varepsilon \approx 80$, то толщина изоляционного слоя может составлять только $0,6 \cdot 10^{-6}$ часть от расстояния между электродами! Непригодность электродов с изолированными поверхностями доказывает также представленный в пункте 4 настоящей статьи количественный анализ погрешностей измерения.

2. О мосте переменного тока и частоте измерения

подавляющее большинство измерений диэлектрической проницаемости веществ с большой проводимостью произведено при помощи моста переменного тока. Принципиально мостом можно измерять емкость реального конденсатора, независимо от

проводимости его диэлектрика. Практически же при реализации моста возникает целый ряд трудностей, из которых наиболее существенным является уменьшение чувствительности моста по мере увеличения проводимости измерительной пробы. Этот вопрос всесторонне рассмотрен К.Б. Карандеевым [5]. Точность измерения емкости уменьшается с повышением тангенса угла диэлектрических потерь измеряемого вещества. Наиболее благоприятные условия для измерения емкости имеем при $\operatorname{tg} \delta = 0 - 1$, и большинство производимых промышленностью мостов предусматривается именно для этого предела. В случае исследования веществ с большой проводимостью ($\operatorname{tg} \delta \gg 1$) некоторыми исследователями созданы уникальные мосты. Один из таких мостов описывается Х.Шваном в [6], который приводит также анализ чувствительности моста и погрешностей измерения. Из представленной в статье [6] формулы (12) явствует, что соотношение относительных погрешностей измерения равно тангенсу угла диэлектрических потерь пробы, т.е.

$$\frac{\Delta C_2}{C_2} : \frac{\Delta G_2}{G_2} = \operatorname{tg} \delta.$$

Каждый мост имеет известную уравнивающую чувствительность относительно проводимостей. Исходя из этого, заданная погрешность измерения емкости определяет максимально допустимый тангенс угла диэлектрических потерь. Последний, в свою очередь, вместе с проводимостью пробы определяет минимальную частоту измерений (формула (1)). Чем больше проводимость вещества, тем больше начальная частота, при которой можно измерять его диэлектрическую проницаемость. Также и в случае уникальных мостов для измерения емкостей целесообразно иметь $\operatorname{tg} \delta$ пробы до 10, так как значения, получаемые при $\operatorname{tg} \delta = 50 \div 100$, являются весьма неточными. Результаты измерений диэлектрической проницаемости проводящих веществ при низкой частоте, где тангенс угла диэлектрических потерь пробы достигает сотен и тысяч, с измерительно-технической точки зрения являются неправдоподобными.

Например, в статье [6] в качестве чувствительности уравнивания моста для сопротивлений приводится 0,3%. Тогда при $\operatorname{tg} \delta = 100$ можно измерять емкости с погрешностью в 3%. При этом не анализируется точно влияние всех паразитных элементов и соединительных проводов, которые в свою очередь

могут увеличить погрешность измерений. В этой же статье приводятся данные об измерениях центрифугированной крови при частоте 10 кгц только до угла потерь $\operatorname{tg} \delta = 24$, а не до 100.

Достоверность измерения емкости при большом $\operatorname{tg} \delta$ возможно повысить следующим образом. Пусть проба представляет собой параллельное соединение емкости C_e и проводимости G_e . (Это представление является правильным при достаточно высокой частоте, при которой граничный слой между веществом и электродом можно рассматривать как замыкание). И пусть эти величины будут определены мостом переменного тока, приведенного в [6] типа, погрешность которого относительно измерения активной проводимости равна $\Delta G_e / G_e = a$. Тогда

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{G_e}{2\pi f C_e} \quad (2)$$

и

$$\frac{\Delta C_e}{C_e} = a \operatorname{tg} \delta \quad ([6] \text{ формула (I2)}) \quad (3)$$

откуда абсолютная погрешность измерения емкости

$$\Delta C_e = a C_e \operatorname{tg} \delta \quad (4)$$

Затем соединим параллельно с пробой конденсатор большой емкости $C_1 = n C_e$, практически без соединительных проводов. Конструктивно поместим пробу в соответствующую полость конденсатора C_1 (фиг. 1), получаем т.н. измерительную пробу. Измеряя ее значения тем же мостом переменного тока, получаем

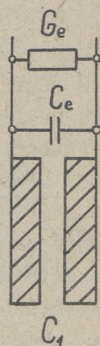
$$C_2 = C_1 + C_e = (n+1) C_e$$

и

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{G_e}{2\pi f (n+1) C_e} = \frac{\operatorname{tg} \delta}{n+1}$$

Тем самым относительная погрешность измерения емкости измерительной пробы

$$\frac{\Delta C_2}{C_2} = \frac{\Delta C_e}{(n+1) C_e} = a \frac{\operatorname{tg} \delta}{n+1} \quad (5)$$



Фиг. 1. Схема для выяснения уменьшения тангенса угла потерь измерительной пробы

Так как емкость конденсатора C_1 возможно измерить со значительно большей точностью, чем точность измерения C_e , то абсолютная погрешность измерения емкости измерительной пробы ΔC_2 является примерно равной погрешности измерения емкости пробы ΔC_e , т.е.

$$\Delta C_e \approx \Delta C_2 = \alpha(n+1) C_e \frac{\operatorname{tg} \delta}{n+1} = \alpha C_1 \operatorname{tg} \delta.$$

Полученный результат является тождественным с формулой (4). Следовательно, параллельное соединение C_1 не изменяет абсолютное значение ошибки измерения емкости пробы. При этом подходящим выбором C_1 представляется возможным привести угол потерь $\operatorname{tg} \delta_2$ измерительной пробы в подходящий для измерения предел значений I - IO. Тогда исчезает неуверенность при уравнивании моста и благодаря большой результирующей емкости влияние паразитных элементов ничтожно мало. Следовательно, параллельное включение C_1 образцом повышает достоверность данных измерения.

Описанный способ успешно применялся автором в работах [3, 7, 8], где измерения производились при помощи двухполюсника - измерителя емкости.

3. О влиянии электрического двойного слоя и поляризации

При классических электродах, где измеряемое вещество находится в непосредственном контакте с металлом электрода, имеет место явление поляризации, которая считается основным источником погрешностей измерения. Выяснению сущности граничного слоя между электродом из инертного металла и электролитическим раствором при переменном токе посвящено много тщательно проведенных научно-исследовательских работ, начиная с конца прошлого столетия до настоящего времени. Х. Фрике в своей работе [9] 1932 г. приводит результаты всех проведенных до того времени работ. Между прочим, он приходит к заключению, что наши познания в части поляризации при переменном токе неудовлетворительны как в экспериментальной, так и в теоретической части. Следующее подведение итогов сделано Нунг-Чи Чангом и Г. Яффе [10], а также Г. Яффе и Я.А. Ридером [11] в 1952 г. В этой работе

также отмечается, что несмотря на все экспериментальные усилия в течение почти 70 лет, наши познания об эффекте поляризации в электролите в случае переменного тока еще далеки от удовлетворительных. Это положение осталось таким же и по сей день.

Автор провел анализ экспериментальных работ Г.Джонса и С.М. Кристьяна [12], И. Вольфа [13], С.С.Мурдока и Э.Э. Циммермана [14], Г.Яффе и Я.А. Ридера [11]. В большинстве из них сделана попытка выразить поляризационную емкость формулой $C = C_1 f^{-m}$, так как этого требует имеющаяся теория. При этом результаты работ [11 и 14] не подчиняются указанной формуле, но весьма хорошо описываются формулой $C = C_1 - \alpha \lg f$, где C_1 и α являются константами, f — частота измерения.

При всех этих работах для измерений пользовались мостом переменного тока, при помощи которого измерялись сопротивление и емкость электролитической ячейки (пробы). Последние разделены либо по последовательной, либо по параллельной эквивалентной схеме на сопротивление и емкость пограничного слоя и на сопротивление расположенного последовательно с ними вещества. Следует, однако, отметить, что мост переменного тока не дает достаточной информации для составления физически обоснованной электрической эквивалентной схемы пограничного слоя. В случае моста невозможно также определить, какие были при измерении ток и напряжение в электролитической ячейке. При этом нет никакой возможности для изменения силы тока по усмотрению; эта сила тока образуется само собой в зависимости от величин сопротивления плеч моста и размеров электролитической ячейки.

В случае указанных выше работ емкость и сопротивление поляризации принимались величинами, которые не зависят от тока и напряжения. Такое предположение неправдоподобно, так как пограничный слой электрод-жидкость, который в случае высоких частот и малых плотностей тока можно рассматривать как естественный (возникающий без тока) электрический двойной слой, переходит при больших плотностях тока и низких частотах в сильно поляризованный слой, напряжение которого может превысить напряже-

ние разложения водорода и кислорода. В этом случае зависимость между напряжением и током является нелинейной. Синусоидальному току соответствует несинусоидальное напряжение, вид которого в свою очередь сильно зависит от плотности тока на электродах. При больших плотностях тока это ясно выражается на осциллограммах в статье Г.А.Бегунова и С.В. Горбачева [15, рис. 1-4]. Опыты Лвтора показали, что нелинейная связь между напряжением и током простирается до сравнительно малых плотностей тока и поляризационная емкость очень сильно зависит от плотности тока. Например, при измерении переменным током в 25 гц для поляризационной емкости водного раствора 0,1 н КНО₃ в случае платиновых электродов были получены следующие значения:

Плотность тока через ячейку ма/см ²	Поляризационная емкость мкф/см ²
0,09	31
0,13	31
2,2	54
4,5	90

Уже при сравнительно умеренных плотностях тока поляризационная емкость начинает повышаться. Приведенные выше значения плотности тока имеют место в случае моста переменного тока, при измерении которым могут получиться значения поляризационной емкости, колеблющиеся в пределах нескольких сотен процентов. Тем самым теряет смысл одно из основных преимуществ моста - большая точность измерения.

В последние годы предложен ряд схем для усовершенствования моста переменного тока, например в [16, 17]. Но и эти схемы не вносят существенных изменений, так как все еще остается основной недостаток моста - отсутствие возможности регулирования силы тока по усмотрению и его измерения. Для получения достоверных данных относительно пограничного слоя при переменном токе следует применять непосредственные измерения напряжения, тока и сдвига фаз, которые обеспечат полную информацию об электрической сущности пограничного слоя.

Влияние поляризации электродов при измерении диэлектрической проницаемости веществ с большой проводимостью

рассматривает также Х. Шван в своей статье [18]. Его точка зрения при оценке влияния поляризации и представленная им расчетная формула использовались позже другими исследователями. При выведении своей формулы Х. Шван применяет некоторые упрощающие условия. Зачастую они, однако, невыполнены и тогда формула Х. Швана создает ложное представление о влиянии поляризации на измерение диэлектрической проницаемости. Формула Х. Швана [18, (5b)]:

$$C = C_s \left[1 + \frac{1}{\omega^2 C_s C_p R^2} \right]$$

получается при предположении, что $\operatorname{tg} \delta \gg 1$ и $R_p \ll R_s$, причем поляризационный слой электродов представлен по последовательной, а вещество по параллельной эквивалентной схеме. В формуле обозначают:

C_p — емкость поляризации на поверхности раздела электрод-вещество,

R_p — обусловленное поляризационным слоем (последовательное) сопротивление,

C_s — емкость, изображающая измеряемое вещество,

R_s — сопротивление (параллельное), изображающее измеряемое вещество,

C и R — емкость и сопротивление эквивалентной схемы, которые определяются непосредственно измерением по параллельной эквивалентной схеме.

Для иллюстрации влияния поляризационной емкости Х. Шван представляет следующий пример измерения диэлектрической проницаемости крови: частота измерений $f = 10$ кгц, емкость пробы крови $C_s = 90$ пФ, $C_p = 10$ МКФ и $R \approx R_s = 160$ ом. По формуле [18, (5b)] получают соотношение между определенной путем измерения емкостью C пробы крови и действительной емкостью C_s пробы крови $C/C_s = 12$. Тем самым поляризация искажает результаты измерения до неузнаваемости. Рассчитывая, однако, для этого же случая тангенс угла диэлектрических потерь пробы крови, получаем, что

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\omega C_s R_s} = 1100!$$

В предыдущем пункте было показано, что измерение мостом не имеет никакой ценности при таком $\operatorname{tg} \delta$. Следовательно,

Х. Шваном предложен нереальный пример, так как при частоте 10 кгц мостом все равно нельзя измерить емкость этой пробы крови. Второй ошибкой формулы Х. Швана является то обстоятельство, что при малых частотах условие $R_p \ll R_s$ не выполнено, а, наоборот, $R_p > R_s$.

Конечно, определение электрических свойств крови имеет большое значение. Автором измерена при помощи двухполюсника - измерителя емкости - диэлектрическая проницаемость свежей крови при частоте 6,3 Мгц. Измерение произведено в течение 20 сек. после взятия пробы крови. Результаты показали, что диэлектрическая проницаемость крови сильно изменяется под действием лекарств и алкоголя, в течение короткого времени после их добавления. Такое явление легко объяснимо, если предположить, что кровь не есть плазма и случайная смесь формовых элементов, но частично ориентированная система, причем ориентация может изменяться под действием внешних влияний. По-видимому, для измерения электрических свойств крови следует разработать значительно лучшие измерительные приборы, чем приборы, используемые до настоящего времени.

Некоторыми исследователями вышеприведенная формула Х. Швана была применена для выяснения влияния поляризации также и при измерениях высокими частотами, где $\operatorname{tg} \delta$ имеет величину порядка 1-10. Таким образом, применяя эту формулу в случае, для которого она недействительна, делаются глубоко ошибочные выводы о влиянии поляризации электродов.

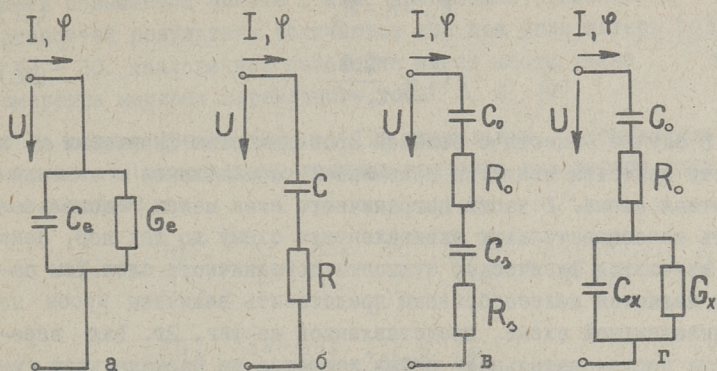
Исходя из условия, что $R_p \ll R_s$, схема классических электродов Х. Швана приводит к применяемой автором схеме электродов с изолированными поверхностями [3, рис. I], и ее точное решение, без какого-либо упрощения, дает формулу [3, (9)]. Решая емкость вышеупомянутой пробы крови по этой формуле при еще измеряемом мостом $\operatorname{tg} \delta_x = 50$, и принимая в виде упрощения, что емкость пробы крови не изменится, если мы для уменьшения $\operatorname{tg} \delta_x$ увеличим частоту измерения до 220 кгц, получим, что $C_e / C_x = 1,023$ и ошибка измерения составит только 2,3%. Если повысим еще частоту измерения и $\operatorname{tg} \delta_x = 10$, то получим при отношении емкостей указанной пробы и поляризации, что $C_e / C_x = 1,001$, т.е. ошибка теперь составляет только 0,1%.

Автор считает, что влияние поляризации электродов на измерение электрических свойств проводящих веществ при низких частотах очень велико и его упрощенный учет может привести к значительной ошибке измерения емкости. Имеющиеся в литературе данные относительно переходного слоя электрод — вещество недостаточны для того, чтобы точно учитывать его влияние. Дальнейшая работа автора и была направлена на решение этого вопроса.

4. О точности измерения электрических свойств веществ

Многие исследователи [11, 13, 14 и др.] указывают на "старение или историю" электродов, что изменяет величины пограничного слоя из пробы в пробу даже при тех же самых электродах и веществах. Тем самым становится сомнительной возможность использования параллельных проб, и точность измерения приходится оценивать в случае каждой отдельной пробы. Одной из основ оценки может быть предельная относительная погрешность измерения, которую, с одной стороны, обуславливает измерительный прибор и, с другой стороны, — пограничный слой между электродом и веществом. Предположим, что при измерении применяются малые плотности тока, при которых в отношении напряжения и тока пробы имеется линейный элемент. При измерении можем определить: частоту используемого переменного тока f , существующие на клеммах пробы напряжение U и ток I и угол сдвига фазы φ между ними. Полученные значения измерительных данных являются приближенными и их предельная относительная погрешность определена свойствами измерительного прибора. Вычисляя на основе приближенных величин электрические параметры вещества (последние также являются приближенными) можем их в свою очередь охарактеризовать предельной относительной погрешностью измерения.

На основе измеренных напряжения U , тока I и угла сдвига фазы φ можем составить либо параллельную (фиг. 2а), либо последовательную (фиг. 2б) эквивалентную схему, которая охватывает величины как вещества, так и пограничного слоя.



Фиг. 2. Эквивалентная схема пробы

На основе известных в электротехнике формул величины эквивалентной схемы можно выразить в виде

$$C_e = \frac{I}{2\pi f U} \sin \varphi \quad (6)$$

$$G_e = \frac{I}{U} \cos \varphi \quad (7)$$

$$C = \frac{I}{2\pi f U \sin \varphi} \quad (8)$$

и

$$R = \frac{U}{I} \cos \varphi \quad (9)$$

Проба представляет собой реальный конденсатор с большими потерями, причем угол потерь $\delta = \pi/2 - \varphi$. Тангенс угла потерь в случае данного вещества и частоты измерения является постоянной величиной и выражается, согласно эквивалентной схеме, формулой

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{ctg} \varphi = \frac{G_e}{2\pi f C_e} = 2\pi f C R. \quad (10)$$

Величины пограничного слоя и вещества расположены в пробе последовательно, вследствие чего для вычисления целесообразно выразить данные измерения по последовательной эквивалентной схеме (фиг. 2б). Пусть величины C_0 и R_0 пограничного слоя будут определены особо также по последовательной эквивалентной схеме, тогда из схемы фиг. 2в можем выразить величины вещества следующим образом:

$$R_s = R - R_0 \quad (II)$$

$$C_s = \frac{C_0 C}{C_0 - C} \quad (I2)$$

В случае веществ с большой проводимостью физически в части вещества является правильной параллельная эквивалентная схема. В части пограничного слоя можем использовать последовательную эквивалентную схему до тех пор, пока не изучается физическая сущность пограничного слоя. Тем самым является целесообразным представить величины пробы по эквивалентной схеме, представленной на фиг. 2г. Для пересчета последовательной схемы вещества на параллельную схему необходимый тангенс угла потерь и другие величины выражаются формулами:

$$\operatorname{tg} \delta_s = \operatorname{tg} \delta_x = 2\pi f C_s R_s = \frac{G_x}{2\pi f C_x} = 2\pi f \frac{C_0 C}{C_0 - C} (R - R_0), \quad (I3)$$

$$G_x = \frac{1}{R_s} \frac{\operatorname{tg}^2 \delta_x}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_x} = \frac{1}{R_s} \sin^2 \delta_x = \frac{1}{R - R_0} \sin^2 \delta_x, \quad (I4)$$

$$C_x = C_s \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_x} = C_s \cos^2 \delta_x = \frac{C_0 C}{C_0 - C} \cos^2 \delta_x \quad (I5)$$

Соответствующие данным измерения величины эквивалентной схемы, которые рассчитываются формулами (6) - (9), определимы нижеприведенной предельной относительной погрешностью, при этом Δ -н обозначают предельную абсолютную погрешность соответствующей величины.

$$\frac{\Delta G_e}{G_e} = \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} + \operatorname{ctg} \delta \Delta \varphi, \quad (I6)$$

$$\frac{\Delta C_e}{C_e} = \frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta f}{f} + \operatorname{tg} \delta \Delta \varphi. \quad (I7)$$

Из этих формул явствует, что величины обеих эквивалентных схем (фиг. 2а и 2б) определимы одинаковой предельной относительной погрешностью. Для проводящих веществ определение значения сопротивления R возможно с большой точностью. Точность же определения емкости C зависит от тангенса угла потерь пробы, а предельная относительная погреш-

ность повышается вместе с ним. Приемлемые относительно погрешностей результаты получаются еще при угле потерь $\text{tg} \delta = 10 - 20$. Аналогичное положение имеет место также при измерении мостами переменного тока [5, 6, 19].

На основе формул (9) - (II) предельные относительные погрешности определения величин вещества выражаются следующим образом:

$$\frac{\Delta \text{tg} \delta_x}{\text{tg} \delta_x} = \frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta C_0}{C_0} + \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta C_0 + \Delta C}{C_0 - C} + \frac{\Delta R + \Delta R_0}{R - R_0}, \quad (18)$$

$$\frac{\Delta G_x}{G_x} = \frac{\Delta R + \Delta R_0}{R - R_0} + 2 \text{ctg} \delta_x \Delta \delta_x, \quad (19)$$

$$\frac{\Delta C_x}{C_x} = \frac{\Delta C_0}{C_0} + \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta C_0 + \Delta C}{C_0 - C} + 2 \text{tg} \delta_x \Delta \delta_x. \quad (20)$$

В случае классических электродов емкость пограничного слоя $C_0 \gg C$. При достаточно высокой частоте $R \gg R_0$ и тогда все величины вещества определимы со сравнительно малой предельной погрешностью. Ограничивающей становится при этом погрешность $\frac{\Delta C}{C}$, которая повышается с ростом $\text{tg} \delta_x$ угла потерь вещества (так как при вышеупомянутых условиях $\text{tg} \delta \approx \text{tg} \delta_x$).

Если заданы измерительная аппаратура и предельная относительная погрешность диэлектрической проницаемости, то формулы (17) и (20) определяют максимально допустимый тангенс угла потерь вещества $\text{tg} \delta_x$, а из последнего можем по формуле (I) найти минимальную частоту измерения.

При особо низких частотах R_0 по степени величины становится сравнимым с R , и погрешность измерения значительно увеличивается.

В системе с изолированными электродами проба соответствует эквивалентной схеме на фиг. 2г, причем $R_0 = 0$ и C_0 представляет собой емкость изоляционного слоя электродов. Выбрав в случае веществ с высокой проводимостью $C_0 = C_x$, тогда $C \approx 0,5 C_0$ и погрешность определения емкости вещества $\frac{\Delta C_x}{C_x}$ увеличивается примерно на величину погрешности измерения емкости $\frac{\Delta C}{C}$. Однако последняя сама вели-

ка, так как $\operatorname{tg} \delta$ является большим. Если для уменьшения $\operatorname{tg} \delta$ выбрать $C_0 \ll C_x$, то $C \approx C_0$ и погрешность $\frac{\Delta C_x}{C_x}$ увеличится очень быстро за счет члена $\frac{\Delta C_0 + \Delta C}{C_0 - C}$. Вышеприведенное именно и является причиной, почему систему с изолированными электродами не представляется возможным применять для измерения диэлектрической проницаемости проводящих веществ.

При измерении классическими электродами при достаточно высокой частоте сопротивление пограничного слоя R_0 приближается к нулю и емкость $C_0 \gg C_s$. Тем самым пограничный слой представляет собой малое полное сопротивление, пренебрежение которым и определение C_s по C приводит к небольшой дополнительной погрешности b , т.е.

$$\frac{C_s - C}{C_s} = b. \quad (21)$$

Заменяя C при помощи формулы (I2) и введя при помощи формулы (I5) C_x , получим:

$$\frac{C_0}{C_x} = (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_x) \frac{1+b}{b}. \quad (22)$$

Здесь C_0 и C_x - заданные электродами и веществом величины, b - заданная дополнительная погрешность измерения, и определяемой величиной является тангенс угла потерь вещества $\operatorname{tg} \delta_x$. Так как, согласно формуле (I), последний зависит от удельной проводимости вещества σ , его диэлектрической проницаемости ϵ и от частоты f , то формулы (22) и (I) определяют минимальную частоту измерений, выше которой можем не учитывать влияние пограничного слоя и выразить погрешность $C_s = C$ в пределах b .

Для оценки степени величины минимальной частоты измерений в таблице I приведены ее приближенные значения для водного раствора KCl при условии, что независимо от концентрации раствора $\epsilon = 80$ и C_0 экстраполировано на основе данных автора.

Из таблицы видим, что частоты, при которых можем пренебречь влиянием пограничного слоя, являются достаточно высокими, и определение ϵ при низких частотах без учета пограничного слоя становится даже в случае платинированных элект-

тродов сомнительным. Начиная с вышеприведенных частот, можем применять также изложенный в пункте 2 способ для уменьшения $\text{tg } \delta$ измерительной пробы.

Т а б л и ц а I

Минимальная частота измерений в герцах для водного раствора KCl , если дополнительная погрешность $b = 1\%$.

Концентрация Материал электродов	0,01 н	0,1 н	1 н
Никель	$0,6 \cdot 10^6$	$3,8 \cdot 10^6$	$31 \cdot 10^6$
Платина	$0,3 \cdot 10^6$	$2,5 \cdot 10^6$	$19 \cdot 10^6$
Платинированная платина	$15 \cdot 10^3$	$0,2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$

При низкочастотном измерении диэлектрической проницаемости следует учитывать влияние пограничного слоя, для чего необходимо знать с достаточной точностью его величины.

В ы в о д ы

1. Измерение диэлектрической проницаемости веществ с большой проводимостью является сложной задачей; при этом первостепенное значение имеют электротехнические вопросы. В то же время интерпретация результатов измерения относится в основном к электрохимической проблеме. Настоящая статья рассматривает главным образом измерительно-технические вопросы.

2. Электроды с изолированными поверхностями или т.н. бесконтактная система не позволяет измерять диэлектрическую проницаемость веществ с большой проводимостью. Для этой цели следует применять классические электроды, где вещество находится в непосредственном контакте с электродами.

3. При помощи современных измерительных устройств диэлектрическая проницаемость проводящих веществ определима до угла диэлектрических потерь вещества $\text{tg } \delta_x = 10$, ориенти-

ровочное определение порядка величины может происходить до $\operatorname{tg} \delta_x = 100$. В случае больших углов потерь измерение теряет смысл. Следовательно, каждое вещество через свою удельную проводимость и диэлектрическую проницаемость наперед определяет частоту, начиная с которой (в сторону повышения) возможно измерять диэлектрическую проницаемость этого вещества.

4. При помощи конденсатора большой емкости, соединенного параллельно с пробой, возможно уменьшить тангенс угла диэлектрических потерь измерительной пробы до значения, требуемого для измерения. Тем самым увеличивается достоверность измерительных данных, а абсолютное значение погрешности емкости остается неизменным.

5. Литературные данные относительно пограничного слоя между электродом из инертного металла и электролитическим раствором при переменном токе являются недостаточными. Они получены измерением мостом переменного тока в предположении, что емкость пограничного слоя не зависит от плотности тока. Проведенные автором прямые измерения показали, что емкость пограничного слоя весьма сильно зависит от плотности тока. Для измерения величин пограничного слоя мост переменного тока не подходит, так как в случае его применения отсутствует возможность регулирования силы тока по усмотрению и его измерения. Для этого следует применять прямое измерение напряжения, тока и сдвига фаз.

6. Х. Шван в своей статье [18] рассматривает влияние поляризации электродов в случае веществ с большой проводимостью. Он представляет упрощенную расчетную формулу [18, (5в)]. При низких и высоких частотах эти предпосылки не выполняются, ввиду чего указанная формула создает неправильное представление о влиянии поляризации электродов при измерении диэлектрической проницаемости.

7. Точность измерения электрических свойств вещества целесообразно оценивать по предельной относительной погрешности. Последняя зависит, с одной стороны, от измерительного устройства и, с другой стороны, от пограничного слоя. Представлены эквивалентные схемы пробы и формулы для вычисления величин вещества и для оценки возникающих погрешностей.

8. В случае проводящих веществ сопротивление вещества определимо с большой точностью. В то же время погрешность определения емкости пропорциональна тангенсу угла потерь и через него определяет частоты измерения. При высоких частотах пограничный слой теряет свое значение и его можно рассматривать как короткое замыкание в пределах известной дополнительной погрешности. Представлена таблица I частот измерения, при которых пограничный слой создает дополнительную погрешность в 1%. Произведен анализ погрешностей измерения для электродов с изолированными поверхностями и показано, что этот способ неприемлем также с точки зрения погрешностей измерения.

Л и т е р а т у р а

1. Charles Phelps Smyth. Dielectric Behavior and Structure. Mc Graw-Hill Book Company, INC. New-York 1955, 90/91.
2. Л.И. Ратнер, В.В. Помазков. К вопросу об исследовании гидратации и структурообразования вяжущих веществ электрическими методами. Воронежский инженерно-строительный институт, Труды пробл.лаб.силикатных мат.и конструкций, вып. I, Воронеж 1964, 37.
3. П.М. Плакк. Об измерении диэлектрической проницаемости веществ с большой проводимостью. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 207, 1963, 63.
4. K. C r u s e, R. H u b e r. Hochfrequenztitration. Ver. Chemie, GMBH, Weinheim, 1957, 12-96.
5. К.Б. Карандеев. Мостовые методы измерений. Гос. Издат. Техн.Лит. Украинской ССР, Киев 1953, 80-93.
6. H. S c h w a n. Die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von Blut bei Niederfrequenz. Z. Naturforschung 3 b. 1948, 361-367.
7. П.М. Плакк. Двухполюсник - измеритель емкости. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 193, 1962, 3.

8. П. М. П л а к к. Об измерении диэлектрической проницаемости сыпучих материалов. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 220, 1965, 163.
9. Н. F r i s k e. The Theory of Electrolytic Polarization. Philos. Mag. 14, 1932, 310.
10. H u n g - C h i S h a n g, G. J a f f e. Polarization in Electrolytic Solutions I. J. chem. Physics, 20, 1952, 1071.
11. G. J a f f e, J. A. R i d e r. Polarization in Electrolytic Solution II. J. chem. Physics, 20, 1952, 1077.
12. G. J o n e s, S. M. C h r i s t i a n. The Measurement of the Conductance of Electrolytes. J. Amer. chem. Soc. 57, 1935, 272.
13. I. W o l f f. A Study of Polarization Capacity and Electrode Condition. Physics, 7, 1936, 203.
14. С. С. М у р д о с к, Е. Е. З и м м е р м а н н. Polarization Impedance at Low Frequencies. Physics, 7, 1936, 211.
15. Г. А. Б е г у н о в, С. В. Г о р б а ч е в. Электрохимические процессы на переменнопольаризуемом электроде. Ж.Ф.Х. 35, 1961, 2636.
16. Н. Г. Б а р д и н а. Кинетика окислительно-восстановительных реакций на окисленных электродах. Ж.Ф.Х. 37, 1963, 1932.
17. В. Н. К о в т у н, В. П. Г а л у ш к о. Измерение основных составляющих комплексного сопротивления электрода. Ж.Ф.Х. 39, 1965, 1028.
18. H. S c h w a n. Elektrodenpolarisation und ihr Einfluss auf die Bestimmung dielektrischer Eigenschaften von Flüssigkeiten und biologischen material. Z. Naturforschung, B. 6 b, N. 3, 1951, 121.
19. И. Н. К р о т к о в. Точные измерения электрических емкости и индуктивности. Издат. Комитета Станд. Мер и Изм. Приборов при Сов. Мин. СССР, Москва 1966, II-22, 47-84.

Über die Messung elektrischer Eigenschaften von
Elektrolyten mit grosser Leitfähigkeit

Zusammenfassung

1. Das Messen der Dielektrizitätskonstanten von Stoffen mit grosser Leitfähigkeit ist eine komplizierte Aufgabe, bei welcher elektrotechnische Fragen an erster Stelle stehen. Die Interpretation der Messergebnisse ist dagegen ein elektrochemisches Problem. Die vorliegende Arbeit befasst sich hauptsächlich mit messtechnischen Fragen.

2. Elektroden mit isolierten Oberflächen, das sogenannte Kontaktfreie System, gestatten nicht die Messung der Dielektrizitätskonstanten von Stoffen mit hoher Leitfähigkeit. Zu dem Zwecke müssen klassische Elektroden verwendet werden, bei welchen der zu messende Stoff in unmittelbarem Kontakt mit den Elektroden steht.

3. Mit den heutigen Messgeräten ist die Dielektrizitätskonstante messbar bis zu einem Verlustwinkel des Stoffes $\operatorname{tg} \delta_x = 10$, eine orientierende Bestimmung der Grössenordnung ist möglich bis $\operatorname{tg} \delta_x = 100$. Bei grösseren Verlustwinkeln verliert die Messung ihren Sinn. Folglich daher bestimmt jeder Stoff durch seine spezifische Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante im voraus die Frequenz, von der an aufwärts es möglich ist, die Dielektrizitätskonstante zu messen.

4. Mit Hilfe eines mit dem Messkörper parallel geschalteten Kondensators von grosser Kapazität kann man den Verlustwinkel der Messprobe auf den notwendigen Wert herabsetzen. Damit wird die Glaubwürdigkeit der Messergebnisse erhöht, der Absolutwert des Messfehlers der Kapazitätsmessung bleibt jedoch unverändert.

5. Die in der Literatur veröffentlichten Daten über die Grenzschicht zwischen einer Elektrode aus inertem Metall und einer Elektrolytlösung sind bei Benutzung von Wechselstrom ungenügend. Diese Daten sind bei Messungen mit der Wechsel-

strombrücke erhalten unter der Voraussetzung, dass die Kapazität der Grenzschicht von der Stromdichte unabhängig ist. Die vom Autor durchgeführten direkten Messungen zeigen, dass die Kapazität der Grenzschicht sehr stark von der Stromdichte abhängt. Daher ist die Wechselstrombrücke ungeeignet für Messen der Eigenschaften von Grenzflächen, denn bei ihr fehlt die Möglichkeit einer willkürlichen Regulierung und Messung der Stromstärke. Anstatt dessen muss man direkt die Spannung, Stromstärke und die Phasenverschiebung messen.

6. H. Schwan befasst sich in seiner Arbeit [18] mit dem Einfluss der Elektrodenpolarisation bei Stoffen mit hoher Leitfähigkeit. Unter gewissen Voraussetzungen gibt er eine Gleichung zur vereinfachten Berechnung [18 (5b)]. Bei niedrigen und hohen Frequenzen sind jedoch die Voraussetzungen nicht gültig und die zitierte Gleichung erzeugt eine falsche Vorstellung von dem Einfluss der Polarisation bei der Messung der Dielektrizitätskonstanten.

7. Die Genauigkeit der Messung von elektrischen Eigenschaften eines Stoffes ist zweckmässig nach dem Höchstwert des relativen Messfehlers zu schätzen. Einerseits hängt dieser ab von der Messapparatur und andererseits von der Grenzschicht. Die Arbeit enthält Equivalentschemata des Probekörpers und Gleichungen zur Berechnung der Grössen sowie zur Abschätzung der entstehenden Fehler.

8. Der Widerstand leitender Stoffe ist mit grosser Genauigkeit messbar. Dagegen ist der Fehler der Kapazitätsmessungen proportional dem Tangens des Verlustwinkels und bestimmt damit die minimale Messfrequenz. Bei hohen Frequenzen verliert die Grenzschicht ihre Bedeutung und in den Grenzen eines zusätzlichen Fehlers kann man sie als kurzgeschlossen betrachten. In der Arbeit sind Daten über Messfrequenzen gegeben (Tabelle 1), bei welchen die Grenzschicht einen zusätzlichen Fehler von 1% erzeugt. Es ist eine Analyse der Versuchsergebnisse gegeben für Elektroden mit isolierten Oberflächen und gezeigt, dass dieses System auch vom Standpunkt der Versuchsfehler nicht annehmbar ist.

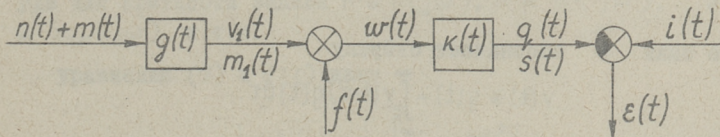
УДК 62-505.15

Я. М. Вьрк

ОПТИМАЛЬНЫЙ ФИЛЬТР НА ОСНОВЕ МИНИМУМА
 ОТНОШЕНИЯ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ ОШИБКИ К
 СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОМУ ЗНАЧЕНИЮ ПОЛЕЗНОГО
 СИГНАЛА

Для синтеза оптимального фильтра критерии минимума отношения среднеквадратичной ошибки к среднеквадратичному значению сигнала предложен Е. Вошни в [1,2]. В [3] получена передаточная функция для фильтра на основе данного критерия, без учета условия физической осуществимости для случая, когда сигнал и шум некоррелированные стационарные случайные функции с нормальным распределением и нулевым математическим ожиданием.

В настоящей статье исследуется та же задача, но с учетом условий физической осуществимости для получения выражения передаточной функции фильтра, когда шумы действуют как на входе, так и на выходе заданной части системы (фиг.1).



Фиг. 1

Предполагается, что полезный сигнал $m(t)$ и шумы $n(t)$ и $f(t)$ стационарные случайные функции с нормальным распределением и равными нулю математическими ожиданиями. Известны их автокорреляционные и взаимные корреляционные функции $R_{mm}(\tau)$, $R_{nn}(\tau)$, $R_{ff}(\tau)$, $R_{mn}(\tau)$, $R_{mf}(\tau)$ и $R_{nf}(\tau)$

или соответствующие спектральные плотности $S_{mm}(\omega)$, $S_{nn}(\omega)$, $S_{ff}(\omega)$, $S_{mn}(\omega)$, $S_{mf}(\omega)$ и $S_{nf}(\omega)$, где $S_{mm}(\omega)$, $S_{nn}(\omega)$ и $S_{ff}(\omega)$ дробно-рациональные функции от ω^2 ; $g(t)$ есть импульсная функция заданной части системы, а $G(j\omega)$ - соответствующая передаточная функция этой же части. Требуется определить импульсную функцию $K(t)$ фильтра или передаточную функцию $K(j\omega)$ так, чтобы

$$I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\overline{\varepsilon^2(t)}}{S^2(t)} = \min, \quad (I)$$

и удовлетворяющей условию физической осуществимости

$$K(t) \equiv 0, \quad t < 0.$$

Здесь $\overline{\varepsilon^2(t)}$ - среднеквадратическая ошибка на выходе фильтра

$S^2(t)$ - среднеквадратичное значение полезного сигнала на выходе фильтра.

Соответственно фиг. I получим

$$v(t) = m(t) + n(t), \quad (2)$$

$$v_1(t) = v(t) * g(t), \quad (3)$$

$$m_1(t) = m(t) * g(t), \quad (4)$$

$$w(t) = f(t) + v(t) * g(t), \quad (5)$$

$$g(t) = w(t) * K(t), \quad (6)$$

$$s(t) = m_1(t) * K(t), \quad (7)$$

где знак $*$ обозначает свёртку

$$v(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t-\tau)g(\tau) d\tau.$$

Желаемая величина выхода

$$i(t) = m(t) * h(t), \quad (8)$$

где $h(t)$ - желаемая импульсная функция. Соответствующая передаточная функция есть $H(j\omega)$.

Ошибка системы

$$\varepsilon(t) = i(t) - q(t). \quad (9)$$

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varepsilon^2(t) dt \quad (10)$$

$$\overline{s^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s^2(t) dt \quad (11)$$

Корреляционная функция

$$R_{ab}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a(t)b(t+\tau) dt. \quad (12)$$

Спектральная плотность

$$S_{ab}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ab}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (13)$$

откуда

$$R_{ab}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ab}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (14)$$

Подставляем уравнения (6), (8) и (9) в (10), применяя затем (12) с совместной перестановкой операций усреднения и интегрирования, и наконец — (13), получим

$$I_2 = \overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (S_{mm} H H^* + S_{ww} K K^* - S_{wm} K^* H - S_{mw} K H^*) d\omega, \quad (15)$$

где для краткости записи $H = H(j\omega)$, $H^* = H(-j\omega)$, $S_{mm} = S_{mm}(j\omega)$ и т.д.

уравнения (7) и (11) дают

$$I_1 = \overline{s^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{m,m} K K^* d\omega. \quad (16)$$

Итак, придется минимизировать функционал (1)

$$I_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (S_{mm} H H^* + S_{ww} K K^* - S_{wm} K^* H - S_{mw} K H^*) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{m,m} K K^* d\omega} \quad (17)$$

Данный функционал I представляет собой заданную функцию (отношение) от функционалов I_2 и I_1 . Для того, чтобы функция $K(j\omega)$ соответствовала экстремуму функционала (17), необходимо, чтобы она соответствовала экстремуму приведенного функционала

$$I_\theta = \theta I_1 [K(j\omega)] + I_2 [K(j\omega)] \quad (18)$$

при некотором значении параметра θ [4].

Если функция $K(j\omega)$ придает экстремум функционалу I_θ , то первая вариация

$$\delta I_\theta = \frac{\partial I_\theta [K(j\omega) + \gamma Z(j\omega)]}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} = 0, \quad (19)$$

где γ — некоторое малое число, а $Z(j\omega)$ — любая физически реализуемая передаточная функция, причем

$$(K + \gamma Z)^* = K^* + \gamma Z^*.$$

Из уравнений (15), (16), (18) и (19) получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ Z^* [K(S_{m,m}\theta + S_{ww}) - H S_{wm}] \right\} d\omega + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ Z [K^*(S_{m,m}\theta + S_{ww}) - H^* S_{mw}] \right\} d\omega = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

откуда [5]

$$K(j\omega, \theta) = \frac{1}{\Psi} \left[\frac{H S_{wm}}{\Psi^*} \right]_+, \quad (21)$$

где $S_{m,m}\theta + S_{ww} = \Psi\Psi^*$. Знак $+$ обозначает, что при разложении в простые дроби функций в квадратных скобках придется

отбросить все члены, содержащие полюсы в нижней полуплоскости.

Используя уравнения (2) - (6), (12), (13) найдем [6]

$$S_{wm} = S_{mm} G^* + S_{nn} G^* + S_{fm} \quad (22)$$

$$S_{mw} = S_{mm} G + S_{nn} G + S_{mf} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Psi\Psi^* = & S_{mm} G^* G \Theta + S_{mm} G^* G + S_{nn} G^* G + S_{nn} G^* G + \\ & + S_{nn} G^* G + S_{ff} + S_{mf} G^* + S_{fm} G + S_{nf} G^* + S_{fn} G. \end{aligned} \quad (24)$$

Определенная таким образом передаточная функция $K(j\omega, \Theta)$ придает экстремум функционалу (18). Значение параметра $\Theta = \Theta_0$, отвечающее экстремуму функционала (17), можно определить двумя способами [4].

По первому способу

$$\frac{\frac{\partial I}{\partial I_1}}{\frac{\partial I}{\partial I_2}} = \Theta_0, \quad (25)$$

причем частные производные вычисляются при значениях $K(j\omega, \Theta)$, полученного из (21). Уравнения (1) и (25) дают

$$-\frac{I_2}{I_1} \Big|_{K=K(j\omega, \Theta_0)} = \Theta. \quad (26)$$

Интегралы I_2 и I_1 можно вычислить, используя таблицы интегралов [6]. Относительно Θ_0 получим алгебраическое уравнение.

По второму способу найденное из уравнения (21) значение $K(j\omega, \Theta)$ подставляется в уравнение (17). Минимизируемый функционал I является функцией от Θ . Искомое Θ_0 найдем из уравнения

$$\frac{dI(\Theta)}{d\Theta} = 0. \quad (27)$$

При нахождении функции $I(\Theta)$ интегралы I_2 и I_1 можно вычислить при помощи таблиц интегралов [6]. Относительно Θ_0 получим из (27) алгебраическое уравнение.

В обоих случаях из корней алгебраического уравнения методом проб следует определить тот корень, который соответствует искомому экстремуму функционала (17).

Достаточные условия достижения минимума функционала (17) включают [4]:

а) достаточные условия достижения экстремума приведенного функционала (18), которым одновременно и является уравнение (19) [6],

б) достаточные условия минимума функции $I(\theta)$ в точке θ_0 , т.е.

$$\left. \frac{dI(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0 \quad (28)$$

$$\left. \frac{d^2I(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} > 0 \quad (29)$$

в) условие, чтобы функция $\varphi(\alpha)$ имеет положительную производную в точке $\alpha = 0$, где

$$\varphi(\alpha) = \frac{I_2 + \frac{\alpha}{\partial I_1}}{I_1 + \frac{\alpha}{\partial I_2}}, \quad (30)$$

откуда получим

$$\frac{I_1}{\partial I_1} - \frac{I_2}{\partial I_2} > 0 \quad (31)$$

при $\theta = \theta_0$.

Предложенная методика применима в случае, когда полученное из (26) или (27) θ_0 допускает представление

$$S_{m_1 m_1} \theta + S_{ww} \text{ в виде } \psi \psi^*.$$

Пример. Рассмотрим простой случай, когда сигнал и шум на входе некоррелированы, заданная часть системы отсутствует

$$S_{mm} = \frac{a}{1+\omega^2}; \quad S_{nn} = 1; \quad S_{mn} = S_{nm} = 0;$$

$$G(j\omega) = 1; \quad H(j\omega) = 1; \quad f(t) = 0.$$

Согласно (21), (22), (24)

$$K(j\omega) = \frac{a}{(e+1)(e+j\omega)}, \quad (32)$$

где

$$e = \sqrt{a(1+\theta) + 1}. \quad (33)$$

Подставляя (32) в (17) получим после вычисления интегралов

$$I(e) = \frac{e(e+1)^3 + a^2 + a - ae - 2ae^2}{a^2},$$

откуда при помощи (26) и (33) найдем

$$\theta_0 = -\frac{2}{\sqrt{a}}$$

и

$$e = \sqrt{a} - 1.$$

Для $K(j\omega)$ получим окончательно

$$K(j\omega) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1+j\omega}, \quad (34)$$

которая будет физически осуществимой передаточной функцией, когда $a > 1$.

$$I = \frac{\overline{\varepsilon^2(t)}}{S^2(t)} = \frac{2}{\sqrt{a}}.$$

Согласно (15), (22), (23), (24) и (34)

$$I_2 = \overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{a}{(\sqrt{a}-1)}. \quad (35)$$

Как показывает проверочный расчет по формулам (28), (29) и (31), достаточные условия минимума функционала (17) выполнены.

Для сравнения найдем те же данные для фильтра на основе минимума среднеквадратичной ошибки.

Физически осуществимая передаточная функция [6]

$$K_o(j\omega) = \frac{a}{(b+1)(b+j\omega)},$$

где

$$b = \sqrt{a+1}.$$

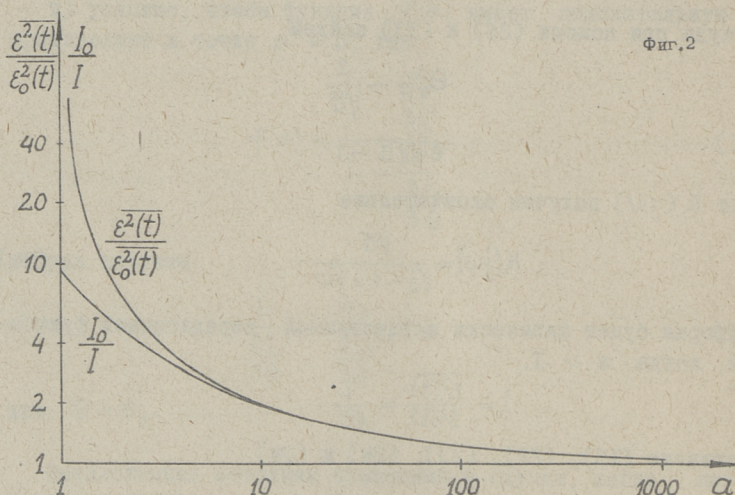
Отношение среднеквадратичных значений ошибки и полезного сигнала на выходе фильтра

$$I_o = \frac{\overline{\varepsilon_o(t)}}{\overline{S_o^2(t)}} = \frac{2b}{(b-1)^2}. \quad (36)$$

Среднеквадратичное значение ошибки

$$\overline{\varepsilon_o^2(t)} = \frac{a}{b+1}. \quad (37)$$

Полученные результаты сравнения изображены на фигуре 2.



Как видно, при малых a фильтра на основе данной критерий дает заметное улучшение отношения ошибка-сигнал по сравнению с фильтром на основе минимума среднеквадратичной ошибки.

Л и т е р а т у р а

1. E.G. W o s c h n i. Informationstheoretische Untersuchungen über den Nachrichtenfluss bei Systemen mit Optimalfiltern und Ableitung des verbesserten, informationstheoretisch begründeten Kriteriums für Optimalfilter, Regelungstechnik, 12, 1965, 585-592.

2. E.G. W o s c h n i. Das Problem der Optimierung in informationstheoretischer Sicht und eine neue Art informationstheoretisch-optimaler Filter, A E Ü, 11, 1966, 599-605.

3. M. K r a u s s. Das informationstheoretisch optimale Filter nach dem Kriterium des mittleren quadratischen relativen Übertragungsfehlers, MSR, 7, 1967, 265-272.

4. Н.И. А н д р е е в. Корреляционная теория статистически оптимальных систем, Наука, М. 1966.

5. С.С. Ц я н ь. Техническая кибернетика. ИИЛ, М, 1956.

6. Дж. К. Н ь ю т о н, Л.А. Г у л д, Дж. Ф. К а й з е р Теория линейных следящих систем, ФМЛ, М, 1961.

J.Vörk

Optimal Filter with Minimum Noise to Signal Ratio

Summary

The ratio of mean square error and the mean square value of signal has been recommended [1,2] as a criterion for the filter syntheses. In the paper the physically realizable transfer function of the filter is derived in the presence of normal stationary random signal and noises.

УДК 658.21:621.37/39

Э.А. Хансен, М.Э. Пуусепп

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЛИЧЕСТВЕННОГО
ВЛИЯНИЯ УСЛОВИЙ ПРОИЗВОДСТВА НА ПАРА-
МЕТРЫ РАДИОЭЛЕМЕНТОВ

1. В в е д е н и е

Как известно, обработка научно-обоснованных норм вакуумной гигиены и микроклимата, а также обеспечение их соблюдения является одним из важнейших требований при проектировании новых и реконструкции существующих производственных зданий радиопромышленности [1].

При этом, как правило, производство современных типов радиоэлементов (особенно на базе твердого тела) требует соблюдения весьма высокой стабильности норм микроклимата в подготовительных и сборочных цехах. В результате этого усложняются системы кондиционирования и возрастает стоимость проектируемых объектов.

Однако анализ типовых схем технологических процессов производства некоторых типов радиоэлементов позволяет сделать вывод, что, как правило, только часть характеристических технологических операций требует соблюдения повышенных норм на электронно-вакуумную гигиену и микроклимат [2].

Отсюда следует, что установлению оптимальных общих требований к проектируемым объектам должен в каждом конкретном случае предшествовать количественный анализ степени влияния стабильности микроклимата на эксплуатационные параметры выпускаемой продукции с целью выяснения особо чувствительных технологических операций.

В настоящей работе сделана попытка решения вышеподнятой проблемы с помощью корреляционного анализа.

2. Методика

В данном случае нас будет интересовать не столько форма, сколько само существование и сила корреляционной связи.

Как известно, простейшей характеристикой силы статистической связи между случайными величинами x и y является математическое ожидание произведения отклонений x и y от их средних значений [3]. Этот показатель называется моментом связи или ковариацией:

$$\mu_{xy} = \text{cov}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

где: N — число измерений,
 \bar{x}, \bar{y} — средние значения x и y .

Однако величина μ_{xy} не инвариантна к единицам измерения, в которых выражены x и y , и поэтому сама по себе не может служить показателем связи. Для исключения этого обстоятельства рассматривают ковариацию нормированных отклонений:

$$x' = \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} \quad \text{и} \quad y' = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y},$$

где: σ_x и σ_y — стандартные отклонения x и y .

Ковариация нормированных отклонений x и y называется коэффициентом корреляции:

$$r_{xy} = \text{cov}(x', y') = \frac{1}{N \cdot \sigma_y \cdot \sigma_x} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \quad (\text{I})$$

Коэффициент корреляции показывает степень линейной зависимости \bar{x} и \bar{y} , т.е. характеризует силу связи вида

$$\bar{y} = a\bar{x} + b.$$

При этом $|r_{xy}| \leq 1$. Если $r_{xy} = 0$, линейной корреляции не существует; если $r_{xy} = |1|$, имеет место функциональная зависимость между x и y .

Если зависимость между x и y является нелинейной, то коэффициент корреляции лишь с некоторым приближением может рассматриваться как показатель силы связи. Даже в случае $r_{xy} = 0$ между x и y может существовать сильная нелинейная корреляция.

Показателем, учитывающим нелинейность исследуемой корреляции, является корреляционное отношение η , которое может быть рассчитано после составления корреляционной таблицы [3]:

$$\eta_{yx} = \sqrt{\frac{N \sum_x \frac{(\sum_y n_{yx} \cdot y)^2}{n_x} - \left(\sum_x \sum_y n_{yx} \cdot y\right)^2}{N \sum_y n_y \cdot y^2 - \left(\sum_y n_y \cdot y\right)^2}} \quad (2)$$

$$\eta_{xy} = \sqrt{\frac{N \sum_y \frac{(\sum_x n_{yx} \cdot x)^2}{n_y} - \left(\sum_x \sum_y n_{yx} \cdot x\right)^2}{N \sum_x n_x \cdot x^2 - \left(\sum_x n_x \cdot x\right)^2}},$$

где x, y — середины интервалов разбиения соответствующей величины,

n_{xy} — частота совместного появления наблюдаемых величин,

n_x, n_y — частота появления наблюдаемых величин в определенном интервале разбиения.

Корреляционное отношение может принимать значения от нуля до единицы, при этом $\eta \geq |r|$. В случае линейной корреляции $\eta = |r|$. По величине разности $(\eta - |r|)$ можно судить о степени нелинейности исследуемой связи.

В случае корреляции между случайной величиной y и случайными величинами x_1, x_2, \dots, x_k коэффициент множественной корреляции $R_y / x_1, x_2, \dots, x_k$ определяется [4]:

$$R = \sqrt{1 - \frac{A}{a_{yy}}}, \quad (3)$$

где A — определитель матрицы парных коэффициентов корреляции:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \Gamma_{x_1 y} & \Gamma_{x_2 y} & \dots & \Gamma_{x_k y} \\ \Gamma_{y x_1} & 1 & \Gamma_{x_2 x_1} & \dots & \Gamma_{x_k x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{y x_k} & \Gamma_{x_1 x_k} & \Gamma_{x_2 x_k} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Δ_{yy} - определитель минора элемента $\Gamma_{yy} = 1$, который получится из матрицы A вычеркиванием y -й строки и y -го столбца.

Все характеристики корреляционной связи выражают ту часть полной колебательности функции y , которая обусловлена изменчивостью аргумента x (аргументов x_1, x_2, \dots, x_k).

После вычисления значений характеристик корреляционной связи требуется оценить их значимость.

Согласно [5], критические значения парного коэффициента корреляции r_{kp} и множественного коэффициента корреляции R_{kp} определяются:

$$r_{kp} = \frac{t(q)}{\sqrt{t_{q, N-2}^2 + N-2}}, \quad (4)$$

где $t(q)$ - значение t - распределения студента для q %-й доверительной вероятности с $(N-2)$ степенями свободы.

$$R_{kp} = \left[1 + \frac{N-k-1}{F(q) \cdot k} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

где $F(q)$ - значение F - распределения Фишера для q %-й доверительной вероятности с k степенями свободы для числителя и $(N-k-1)$ степенями свободы для знаменателя.

Функции $t(q)$ и $F(q)$ табулированы [3,5].

Критические значения для корреляционных отношений η_{yx} и η_{xy} не подлежат элементарному определению.

Таким образом, определение существования и силы корреляционной связи сводится к следующей схеме:

- 1) по формуле (1) вычисляется коэффициент корреляции r ;
- 2) по формуле (2) вычисляются корреляционные отношения η_{yx} и η_{xy} ;
- 3) в случае множественной корреляции вычисляется из выражения (3) коэффициент множественной корреляции

$R_{y/x_1, x_2, \dots, x_k}$

4) для пунктов 1 и 3 по формулам (4) и (5) оценивается значимость полученных результатов.

Рассмотрим пример применения вышеприведенной методики.

3. Эксперимент

При анализе производства одного из типов радиоэлементов было обнаружено регулярное периодическое колебание средних значений (в пределах ТУ) ряда основных эксплуатационных параметров выпускаемой продукции во времени. Периодом этих колебаний оказался приблизительно один календарный год. Несмотря на то, что производство ведется в кондиционированных помещениях, возникла гипотеза о влиянии метеорологических условий на стабильность значений эксплуатационных параметров.

Был поставлен следующий эксперимент. В течение 15 месяцев (с января 1965 года по март 1966 года) фиксировались ежемесячные средние значения 14 важнейших эксплуатационных параметров ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{14}$) выпускаемой продукции и характеристики метеорологических условий (температура T и влажность B). На основе полученного статистического материала были по вышеприведенной методике определены коэффициенты корреляции r_{T, ε_i} и r_{B, ε_i} , корреляционные отношения η_{T, ε_i} , $\eta_{\varepsilon_i, T}$, η_{B, ε_i} , $\eta_{\varepsilon_i, B}$ и коэффициенты множественной корреляции $R_{\varepsilon_i/T, B}$ (см. таблицу I). Расчеты были проведены на цифровых электронно-вычислительных машинах типа "Минск-2" и "Урал-4".

Как видно из таблицы I, между значениями эксплуатационных параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ и ε_{14} и температурой и влажностью окружающей среды обнаружена значимая корреляционная связь.

Т а б л и ц а I

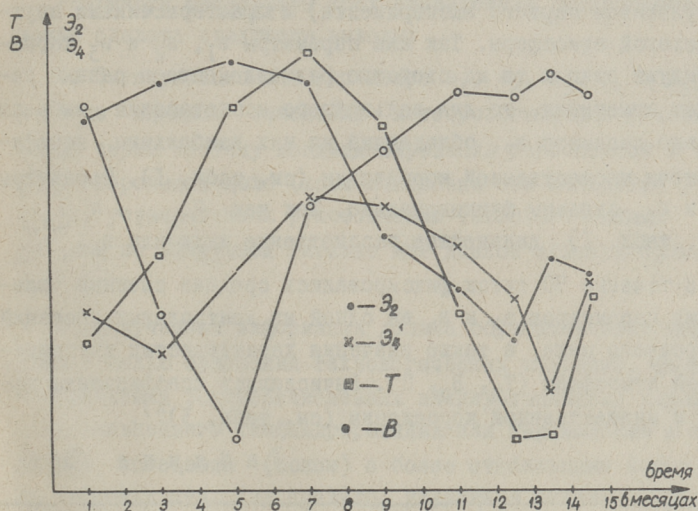
Ξ	r_{T,Ξ_i}	η_{T,Ξ_i}	$\eta_{\Xi_i T}$	r_{B,Ξ_i}	η_{B,Ξ_i}	$\eta_{\Xi_i B}$	$R_{\Xi_i/T,B}$
Ξ_1	+0,66	0,68	0,67	-0,76	0,72	0,74	0,77
Ξ_2	+0,64	0,64	0,65	-0,76	0,79	0,79	0,80
Ξ_3	+0,56	0,58	0,56	-0,73	0,74	0,73	0,75
Ξ_4	+0,75	0,77	0,78	-0,03	0,12	0,14	0,90
Ξ_5	+0,52	0,54	0,57	+0,10	0,19	0,15	0,56
Ξ_6	+0,51	0,53	0,55	-0,27	0,31	0,28	0,51
Ξ_7	+0,33	0,33	0,35	+0,22	0,24	0,23	0,32
Ξ_8	+0,35	0,37	0,39	-0,31	0,31	0,32	0,35
Ξ_9	+0,25	0,27	0,26	+0,39	0,39	0,41	0,39
Ξ_{10}	+0,36	0,37	0,40	+0,19	0,22	0,24	0,55
Ξ_{11}	+0,21	0,25	0,22	-0,44	0,44	0,44	0,45
Ξ_{12}	+0,13	0,15	0,17	+0,09	0,15	0,17	0,13
Ξ_{13}	-0,16	0,19	0,19	-0,07	0,12	0,11	0,09
Ξ_{14}	-0,77	0,78	0,79	+0,39	0,41	0,41	0,77

П р и м е ч а н и е: здесь и в дальнейшем в квадратах корреляционные характеристики, значимые с доверительной вероятностью 90%.

Для иллюстрации на фигуре I приведены изменения параметров Ξ_2 и Ξ_4 , а также температуры T и влажности B в течение эксперимента.

Для подтверждения и проверки полученных результатов были проведены два дополнительных эксперимента.

Во-первых, в течение двух месяцев фиксировались характеристики внутрицеховой атмосферы (температура $T_{ц}$, влажность $B_{ц}$ и запыленность П) и метеорологических условий (температура T и влажность B). При этом не обнаруживалось случаев выхода характеристик внутрицеховой атмосферы за пределы, установленных нормами вакуумной гигиены для данной отрасли промышленности.



Фиг.1. Изменение параметров ϵ_2 , ϵ_4 , температуры T и влажности B окружающей среды

На основании полученного материала была вычислена матрица парных коэффициентов корреляции (таблица 2)

Таблица 2

T	B	$T_{ц}$	$B_{ц}$	Π	
I	-0,21	+0,51	+0,26	+0,27	T
	I	-0,40	+0,06	-0,07	B
		I	+0,15	+0,19	$T_{ц}$
			I	+0,19	$B_{ц}$
				I	Π

Как видно из таблицы 2, температура и влажность окружающей среды оказывают значимое влияние на все характеристики внутрицеховой атмосферы.

Во-вторых, было проведено исследование существования корреляционной связи между эксплуатационными параметрами, подверженными влиянию метеорологических условий (согласно результатам первого эксперимента) и характеристиками внутрицеховой атмосферы. Так как параметры ε_1 , ε_2 и ε_3 характеризуют одно и то же свойство радиоэлемента в разных режимах измерения, то для дальнейшего исследования выбрали только параметр ε_2 , обладающий из них наибольшим коэффициентом множественной корреляции (см. табл. I). Параметры ε_4 и ε_{T_4} связаны функционально. Так как $R_{\varepsilon_4/T, B} > R_{\varepsilon_{44}/T, B}$ (см. табл. I) дальнейшее рассмотрение включили ε_4 .

В течение 50 суток фиксировались средние сменные значения параметров ε_2 и ε_4 на одной из контрольных операций сборочного цеха, а также значения характеристик внутрицеховой атмосферы ($T_{ц}$, $B_{ц}$, Π). Вычислялись коэффициенты парной и множественной корреляции (см. табл. 3)^{х)}.

Т а б л и ц а 3

ε	$r_{T_{ц} \varepsilon_i}$	$r_{B_{ц} \varepsilon_i}$	r_{Π / ε_i}	$R_{\varepsilon_i / T_{ц}, B_{ц}, \Pi}$
ε_2	+0,25	-0,24	-0,09	0,34
ε_4	+0,27	-0,02	+0,08	0,29

Как видно, и в этом случае наблюдается чувствительность параметра ε_2 к температуре и влажности, а параметр ε_4 — к температуре внутри сборочного цеха^{хх)}

х) Так как результаты первого эксперимента (см. табл. I) показали правильность линейной аппроксимации исследуемых зависимостей (r не на много превышает r), корреляционные отношения из-за большой трудоемкости здесь не вычислялись.

хх) Здесь следует отметить, что несмотря на то, что запыленность Π по результатам последнего эксперимента не оказывает ощутимого влияния на исследуемые параметры, соблюдение норм на нее является обязательным, так как любое нарушение требований вакуумной гигиены может привести к снижению надежности и срока службы радиоэлементов.

4. В ы в о д ы

Резюмируя результаты трех проведенных экспериментов, можно сделать следующие выводы:

1. Эксплуатационные параметры ε_1 , ε_2 , ε_3 , ε_4 и ε_{I4} подвержены влиянию изменений метеорологических условий, которые через систему кондиционирования переносятся в атмосферу сборочного цеха (хотя изменения эти находятся в пределах, установленных руководящими технологическими материалами по вакуумной гигиене для данной отрасли промышленности).

2. Полученная информация должна обрабатываться технологами с целью выяснения технологических операций, формирующих значения вышеперечисленных эксплуатационных параметров и их дальнейшего скаффандрирования или перемещение в специальные помещения (боксы) с более стабильными показателями микроклимата. Как правило, улучшение системы кондиционирования для больших помещений практически затруднено и экономически не оправдано.

Л и т е р а т у р а

1. Э. Х а н с е н. Вопросы проектирования радиотехнических предприятий. Труды ТПИ, серия А, № 234, Таллин 1966.

2. G. B. G i l l a m, G-E's Clean Room Semiconductor Pilot Plant. Air Engineering, 1964, No 2, p. 24-25, 40.

3. Н. В. С м и р н о в, И. В. Д у н и н - Б а р к о в - с к и й. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. Изд. "Наука", Москва 1965.

4. Я. И. Л у к о в с к и й. Теория корреляции и ее применение к анализу производства. Госстатиздат, Москва 1958.

5. Я. Я н к о. Математико-статистические таблицы. Госстатиздат, Москва 1961.

E.Hansen, M.Puusepp

Zur Frage der Bestimmung des quantitativen
Einflusses der Produktionsbedingungen auf
die Parameter der Radioeinzelteile

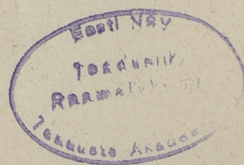
Zusammenfassung

In dem vorliegenden Artikel empfiehlt man, den Einfluss des Mikroklimas und der Vakuumhygiene auf die Kenngrößen der Radioeinzelteile in ihrem Herstellungsprozess mittels Korrelationsanalyse abzuschätzen. Die reichliche Datenverarbeitung wird dabei mit den Elektronenrechenmaschinen durchgeführt. Auch wird die empfehlende Methode dazu gegeben. Das durchgeführte Experiment illustriert die Nützlichkeit der obenerwähnten Methode und beweist seine Effektivität bei der Ausarbeitung optimaler Herstellungsbedingungen.

ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ
И АВТОМАТИКЕ
СБОРНИК СТАТЕЙ
У1
ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Редактор Г. Вяльмяэ
Технический редактор Л. Лоопер

Сдано в печать 20/У1 1968.
Подписано к печати 8/Х 1968, Бумага 60x90/16.
Печ.л. 7,25, + прилож. 0,5 печ.л. Уч.изд. л. 5,8.
Тираж 500. МВ-08903. Зак № 721 Ротапринт ТПИ,
Таллин, Пикк ялг 14.
Цена 58 коп.



ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ
И
АВТОМАТИКЕ
СБОРНИК СТАТЕЙ У1

УДК 621.374.382

О.М. П и к к о в. Релейные преобразователи частотно-импульсного сигнала автоматического контроля со счетчиками импульсов
стр. 3.

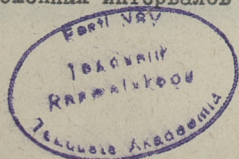
Рассматриваются структурные схемы релейных преобразователей сигнала автоматического контроля со счетчиками в канале опорных импульсов. Сравниваются варианты применения для этой цели простых и линейных конденсаторных накопительных счетчиков. Определяется необходимый объем счетчика, а также ширина зоны неоднозначности релейной характеристики и величина внесенной погрешности преобразования при наличии в составе стационарного информационного импульсного сигнала нормального случайного компонента.

Таблиц 1. Фигур 10. Библиографий 5.

УДК 621.374.383

О.М. П и к к о в. Вероятностные соотношения релейного преобразования частотно-импульсного сигнала стр. 21

Рассматривается прохождение случайного импульсного потока временных интервалов $\tau [n]$ через релейный преобразо-



ватель с характеристикой, имеющей зону неоднозначности. Приведены вероятностные характеристики состояния и перехода выходного сигнала релейного преобразователя в стационарном режиме и предложен графоаналитический метод расчета динамической погрешности срабатывания в квазистационарном режиме $\Delta\tau = \text{const.}$ и $\sigma = \text{const.}$

Распределение $\tau[\eta]$ при этом предполагается нормальным.

Таблиц 2. Фигур 4. Библиографий 2.

УДК 621.375.13

Х.В. С и л л а м а а. Метод расчета усилителей в обратной связи стр. 33

В статье излагается методика расчета многокаскадного усилителя с простыми корректирующими RC фильтрами в области высоких частот. При условии, что все полюсы и нули передаточной функции вещественны, найдена методика для определения их рационального расположения (и переадресации), исходя из желаемой логарифмической амплитудно-частотной характеристики.

Таблиц 1. Фигур 6. Библиографий 3.

УДК 621.375.24

И.Ю. Э й с к о п. Влияние изменения питающих напряжений на усиление усилителей, стр. 45

В работе анализируется зависимость усиления от напряжения анодного питания и напряжения накала триодных и пентодных усилителей. Приведены экспериментальные данные об изменении выходной характеристики лампы при изменении напряжения накала. Явление описывается математически, введением эквивалентного контактного потенциала между сеткой и катодом лампы.

Для расчета изменения усиления от напряжения анодного питания применяется зависимость между крутизной и током анода лампы. Приведены уточненное значение этой зависимости для ламп типа 6Н2П и 6Ж1П.

Фигур 5. Библиографий 7.

УДК 621.382.322

Х.А. Т а м м е т. Определение проходной характеристики канального транзистора стр. 53

В работе указывается на различие экспериментальных проходных характеристик канальных транзисторов от теоретических. Свойства проходных характеристик канальных транзисторов представлены в виде функции

$$F_{\alpha} = \frac{I_c}{S \cdot U_0} = f\left(\frac{U_{3u}}{U_0}\right),$$

которая является линейной при полученных результатах измерений. Следовательно, в этом случае проходная характеристика должна иметь степенную форму. Измеренные эпитаксиально-планарные транзисторы типа 2N3823 в количестве 10 шт. имели значение показателя проходной характеристики в пределах 1,52 ... 1,56, что значительно отличается от обычно в литературе применяемых величин 1,98...2,20.

Фигур 1. Библиографий 8.

УДК 621.382.61

Х.И. Х а а к, В.Р. Х е й н р и х с е н.

Частотные свойства датчиков Холла
стр. 59

В статье рассмотрены особенности работы датчика Холла в скрещенных переменных электрических и магнитных полях. Полученные результаты позволяют определить частотные зависимости сопротивления и холловского напряжения датчика при различных

режимах питания токового и магнитного канала. Анализируются оптимальные значения входных сигналов с учетом частотных зависимостей.

Фигур 7. Библиографий 4.

УДК 621.9.0023

П.М. П л а к к. Об измерении электрических свойств электролитов с большой проводимостью
стр. 73

В статье рассматриваются трудности встречающиеся в измерении электрических свойств электролитов с большой проводимостью. Показывают, что электроды с изолированными поверхностями и мост переменного тока не могут справиться с этой задачей. Вместо них следует применять классические электроды и непосредственное измерение напряжения, тока и сдвига фаз. Анализируется действие электрического двойного слоя электродов и поляризации на точность измерения электрических свойств веществ. Даются формулы для определения погрешностей измерений и минимальной частоты измерения.

Таблиц 1. Фигур 2. Библиографий 19.

УДК 62-505.15

Я.М. В ы р к. Оптимальный фильтр на основе минимума отношения среднеквадратичной ошибки к среднеквадратичному значению полезного сигнала стр. 97

Рассматривается задача синтеза физически осуществимой передаточной функции фильтра, когда полезный сигнал и шумы есть стационарные случайные функции с нормальным распределением и

равными нулю математическими ожиданиями. Известны их автокорреляционные и взаимные корреляционные функции. Шумы действуют как на входе, так и на выходе заданной части системы. Дается пример.

Фигур 2. Библиографий 6.

УДК 658.21:621.37/39

Э.А. Хансен, М.Э. Пуусепп

К вопросу определения количественного влияния условий производства на параметры радиоэлементов стр.107

Для количественной оценки степени влияния характеристик микроклимата и вакуумной гигиены на параметры радиоэлементов в процессе их производства предлагается применять математический аппарат корреляционного анализа, позволяющий с помощью электронно-вычислительных машин обрабатывать большие количества информации.

Изложены основные положения предлагаемой методики. Приведен иллюстрирующий пример применения ее к определению оптимальных требований к условиям производства одного из типов радиоэлементов.

Таблиц 3. Фигур 1. Библиографий 5.

Цена 58 коп.