



MITTELINEAARSETE LIIKUMISVÖRRANDITE LEIDMINE KATSE- JA NUMBRILISTEST ANDMETEST

Bakalaureusetöö

Üliõpilane: Annaliisa Kangur

Üliõpilaskood: 206314YAFB

Juhendaja: Dmitri Kartofelev, PhD, Küberneetika instituut, teadur

Õppekava: Rakendusfüüsika

Autorideklaratsioon

Kinnitan, et olen koostanud antud lõputöö iseseisvalt ning seda ei ole kellegi teise poolt varem kaitsmisele esitatud. Kõik töö koostamisel kasutatud teiste autorite tööd, olulised seisukohad, kirjandusallikatest ja mujalt pärinevad andmed on töös viidatud.

Autor: Annaliisa Kangur

Töö vastab bakalaureusetööle esitatavatele nõuetele.

Juhendaja: Dmitri Kartofelev

Sisukord

Abstract	4
Annotatsioon.....	5
Lühendite-mõistete sõnastik.....	6
1. Sissejuhatus.....	7
2. Teoreetiline taust	8
2.1. SINDy algoritm	8
2.2. Mittelineaarse ostsillaatori näide	10
3. SINDy testimine	12
3.1. Ette teadaolevad süsteemid	12
3.1.1. Lotka-Volterra kahe konkureeruva liigi mudel	12
3.1.2. Lotka-Volterra kiskja-saak mudel	13
3.2. Tundmatud süsteemid	14
3.2.1. Fotopletüsmogrammi signaal	15
3.2.2. Elektrokardiogrammi signaal.....	16
4. Kokkuvõte.....	18
Tänuavaldused	19
Kasutatud kirjandus.....	20
Lisad.....	22
Lisa 1. SINDy meetodil mittelineaarse võrrandsüsteemi leidmise kood	22
Lisa 2. Abifailide sisu	23
Lisa 3. Lihtlitsents.....	26

Abstract

Discovery of Nonlinear Equations of Motion from Experimental and Numerical Data

This bachelor's thesis explores how nonlinear differential equations describing the dynamics of physical, ecological and biological systems can be identified directly from relevant data. The study is based on the SINDy (Sparse Identification of Nonlinear Dynamics) method, which applies sparse regression to extract essential terms from a large set of candidate functions to construct the system of ODEs describing the underlying dynamics.

The analysis covers five different cases, including known models – a nonlinear oscillator and two Lotka–Volterra population models – as well as real-world measurement data, such as selected photoplethysmogram (PPG) and electrocardiogram (ECG) signals. All systems are treated as second-order differential equations systems or systems of two first order equations.

Results are evaluated by comparing the equations identified by SINDy with either the original system models or the measured time series solutions. The aim of the thesis is to determine in which cases the SINDy method can accurately reconstruct the system.

Annotatsioon

Käesolevas bakalaureusetöös uuritakse, kuidas on võimalik andmepõhiselt leida mittelineaarseid diferentsiaalvõrrandeid, mis kirjeldavad füüsikaliste, ökoloogiliste või bioloogiliste süsteemide dünaamikat. Töö põhineb SINDy (Sparse Identification of Nonlinear Dynamics) meetodil, mis kasutab hõredat regressiooni, et tuvastada olulised liikmed suurest hulgast kandidaاتفunktsioonidest, eesmärgiga koostada liikumisvõrrandid.

Analüüsi käigus käsitletakse viit erinevat juhtumit, sealhulgas teadaolevaid mudeleid – mittelineaarne ostsillaator ning kaks erinevat Lotka–Volterra populatsioonimudelit – ja reaalseid katseandmeid, nagu fotopletüsmogrammi (FPG) ning elektrokardiogrammi (EKG) signaalid. Kõiki süsteeme käsitletakse teist järku dünaamiliste diferentsiaalvõrranditena või kahe esimest järku võrrandisüsteemina.

Tulemusi hinnatakse võrreldes SINDy poolt tuvastatud võrrandeid kas originaalmudelite või mõõteandmete põhjal saadud lahenditega. Töö eesmärk on uurida, millistel juhtudel suudab SINDy meetod taastada süsteemi täpselt ning millal jääb mudeli täpsus või tõlgendatavus ebapiisavaks.

Lühendite-mõistete sõnastik

SINDy - *Sparse Identification of Nonlinear Dynamics* (eesti keeles *Mittelineaarse süsteemi leidmine hõreda regressiooni meetodil*)

EKG – elektrokardiogramm

FPG - fotopletüsmogramm

1. Sissejuhatus

Loodusteaduses, inseneriteaduses ja meditsiinis esinevaid protsesse saab tihti kirjeldada mittelineaarsete võrrandsüsteemidega. Nähtused nagu füüsikalised võnkumised, populatsioonide dünaamika või südame elektriline aktiivsus ei allu lihtsamatele lineaarsetele diferentsiaalvõrranditele. Mittelineaarsed süsteemid kirjeldavad aperioidilist ja kvasiperioidilist ja kaootilist dünaamikat. [1-2].

Traditsiooniliste meetodite piiratus sellistes olukordades on viinud uute andmepõhiste meetodite tekkimiseni. Üheks selliseks on SINDy (*Sparse Identification of Nonlinear Dynamics*) meetod, mille esitasid Brunton, Proctor ja Kutz [1-2]. SINDy algoritm on aktuaalne teema mittelineaarsete probleemide uurimisega tegelevate teadlaste seas. Viimastel aastatel on SINDy algoritmi rakendatud erinevate probleemide uurimiseks [4-5]. Algoritmi võimekust ja kasutusala laiendatakse pidevalt, vrd. [5-11].

SINDy võimaldab hõreda regressiooni meetodi abil leida mittelineaarseid diferentsiaalvõrrandeid otse andmetest. Kasutatakse kandidaatfunktsioonide kogumikku (nt. polünoomide liikmed, trigonomeetrilised funktsioonid), millest vähimruutude ja LASSO-regressiooni meetodite abil valitakse välja vaid kõige olulisemad liikmed. [1-3]

Käesolevas bakalaureusetöös rakendan SINDy algoritmi teist järku mittelineaarsete diferentsiaalvõrrandite leidmiseks, kuid SINDy meetodit on võimalik rakendada ka kõrgemat järku süsteemidele. Töö eesmärk on uurida, kui täpselt on võimalik süsteemi dünaamikat taastada ainult andmete põhjal – ilma süsteemi teadmata – ning kas SINDy meetod suudab leida teist järku võrrandsüsteemid ka keerukamate mõõtmisandmete korral. [1, 3]

Käesolevas töös katsetan ette teadaolevaid süsteeme – nagu mittelineaarne ostsillaator ning Lotka–Volterra populatsioonimudelid: kahe konkureeriva liigi mudel ja kiskja-saak mudel. Seejärel püüan SINDy meetodil leida liikumisvõrrandid reaalsete mõõtmisandmete põhjal, kasutades fotopletüsmogrammi (FPG) ja elektrokardiogrammi (EKG) signaale. Eeldan, et uuritavad süsteemid on kirjeldatud kui teist järku mittelineaarsete diferentsiaalvõrrandite abil. [1-3]

Uurimuse oodatav tulemus on, et SINDy meetod suudab teada olevate süsteemide korral tuvastada korrektsed või neile ligilähedase võrrandsüsteemid ja keerukamate süsteemide korral võib mudeli täpsus jääda puudulikuks ehk SINDy meetod võib ebaõnnestuda. [1, 3]

2. Teoreetiline taust

2.1. SINDy algoritm

Töö aluseks olen kasutanud Steven L. Brunton, Joshua L. Proctor ja J. Nathan Kutz poolt kirjutatud artiklit [1, 3] ja artikli autorite poolt kirjutatud ja minu poolt kohandatud Matlabi koodi (Lisa 1). Koodid on olemas ka Pythoni teegi kujul, nimega pySINDy [12].

Dünaamilise süsteemi liikumist või käitumist kirjeldatakse mittelineaarsete diferentsiaalvõrrandite abil. SINDy meetod võimaldab need võrrandid numbriliste- ja katseandmete põhjal automaatselt leida. Meetod lähtub eeldusest, et vaid väike osa muutujate mittelineaarsetest kombinatsioonidest mängivad süsteemi kirjeldamisel olulist rolli. Näiteks kahe muutujaga (2D) süsteemi korral on kandidaatsüsteemid moodustatud vabade muutujate kõikvõimalikest kombinatsioonidest kuni mingi kindla astmeni, siin töös astmeni 5. Kandidaatsüsteemide hulgast valitakse välja vaid need funktsioonid, millel on nullist erinev koefitsient. Selleks kasutatakse hõreda regressiooni meetodit, mis aitab tuvastada vaid olulisi kandidaatsüsteeme. [1-3, 13]

Dünaamilise süsteemi üldkuju:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = f(\mathbf{X}(t)), \quad (1)$$

kus $\mathbf{X}(t)$ on süsteemi olekuvektor ja $\dot{\mathbf{X}}(t)$ selle ajatuletis. Funktsioon f on tundmatu mittelineaarne funktsioon, mida soovime leida. Kogutud või mõõdetud andmete põhjal koostatakse oleku ja tuletise vektorid $\mathbf{X}$ ja $\dot{\mathbf{X}}$ [1, 3, 13]:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t_1) \\ \mathbf{x}^T(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(t_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t_1) & x_2(t_1) & \cdots & x_n(t_1) \\ x_1(t_2) & x_2(t_2) & \cdots & x_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(t_m) & x_2(t_m) & \cdots & x_n(t_m) \end{bmatrix}, \quad (2a)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^T(t_1) \\ \dot{\mathbf{x}}^T(t_2) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}^T(t_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t_1) & \dot{x}_2(t_1) & \cdots & \dot{x}_n(t_1) \\ \dot{x}_1(t_2) & \dot{x}_2(t_2) & \cdots & \dot{x}_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{x}_1(t_m) & \dot{x}_2(t_m) & \cdots & \dot{x}_n(t_m) \end{bmatrix}. \quad (2b)$$

Seejärel koostatakse kandidaatsüsteemide maatriks $\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{X})$, mis võib sisaldada näiteks järgmiseid liikmeid [13]:

$$\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} | & | & | & | & & | & | & \\ 1 & \mathbf{X} & \mathbf{X}^2 & \mathbf{X}^3 & \cdots & \sin(\mathbf{X}) & \cos(\mathbf{X}) & \cdots \\ | & | & | & | & & | & | & \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Kandidaatsüsteemide kogumiku $\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{X})$ valimisel lähtutakse:

- süsteemi olekutest, nt $x(t)$, $y(t)$;

- polünoomi astmest p – see määrab, kui kõrge astmeni polünoomiaalsed liikmed kaasatakse, nt. : $x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4, x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5$;
- võimalike trigonomeetriliste liikmete, nagu $\sin(x), \cos(x), \sin(xy)$, jne. kasutamist;
- süsteemi muutujate koguarvust n – antud juhul $n = 2$, kuna siin töös kasutame kahemõõtmelisi (2D) süsteeme. [3]

Seejärel püütakse leida sobiv $f(\mathbf{X}(t))$, mis seob $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{X})$ ja $\dot{\mathbf{X}}$ [13]:

$$\dot{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{X})\boldsymbol{\Xi}, \quad (4)$$

kus $\boldsymbol{\Xi}$ on koefitsientide maatriks, mille iga veerg ξ_k kirjeldab vastava oleku muutumise dünaamikat:

$$\boldsymbol{\Xi} = [\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_k]. \quad (5)$$

Maatriksi $\boldsymbol{\Xi}$ leidmiseks rakendatakse vähimruutude meetodit [13]:

$$\xi_k = \arg \min_{\xi'_k} \|\dot{\mathbf{X}}_k - \boldsymbol{\theta}(\mathbf{X})\xi'_k\|_2, \quad (6)$$

kus ξ'_k tähendab kandidaatliiget, mida optimeeritakse, erinevalt lõplikust liikmest ξ_k . Saadakse maatriks $\boldsymbol{\Xi}$, mis sisaldab palju mittevajalikke liikmeid ξ_k , sest kaasatud on kõik kandidaatfunktsioonid. Seetõttu kasutatakse hõredat regressiooni, LASSO regressiooni (L_1), et suruda paljud liikmed ξ_k nulliks, jättes ainult olulised liikmed alles. Järgnev valem (7), kujutab endast vähimruutude meetodi ja hõreda regressiooni määramise kombinatsiooni [13]:

$$\xi_k = \arg \min_{\xi'_k} \|\dot{\mathbf{X}}_k - \boldsymbol{\theta}(\mathbf{X})\xi'_k\|_2 + \lambda \|\xi'_k\|_1, \quad (7)$$

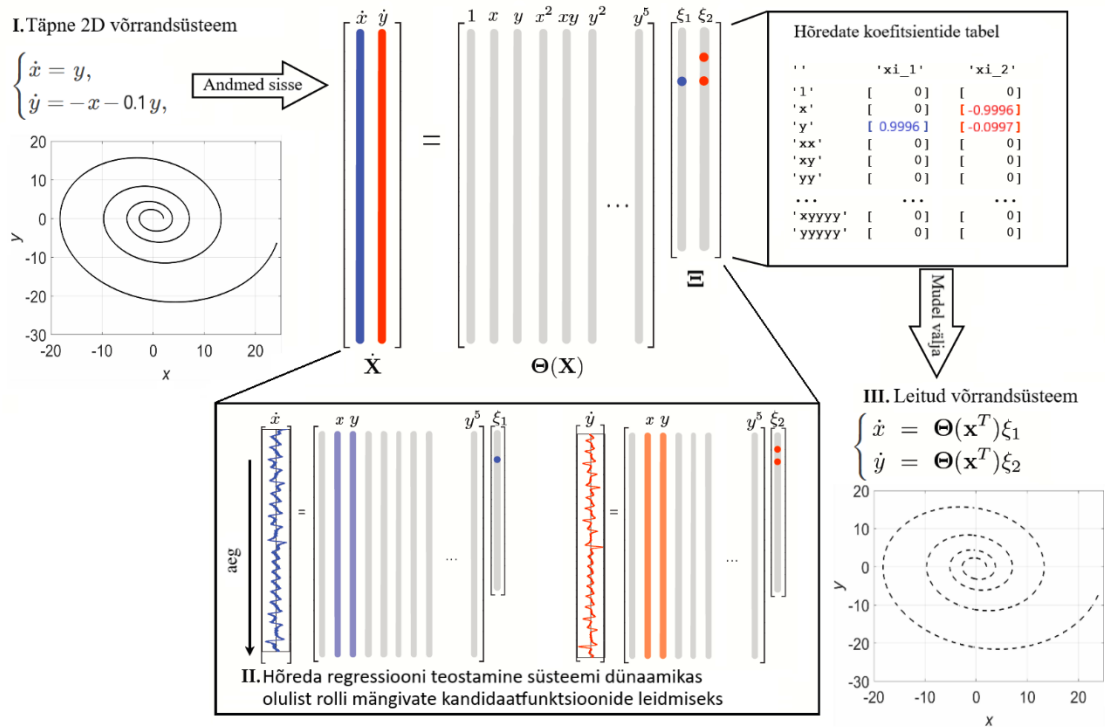
kus λ on hõredat regressiooni määrav parameeter. Kui λ on liiga suur, siis võidakse olulised liikmed välja jätta, kui λ on liiga väike, lubatakse rohkem liikmeid läbi.

Kokkuvõtvalt, väikesed koefitsiendid nullitakse, seejärel korraldatakse regressiooni ainult nullist erinevate liikmetega ja väljastatakse koefitsientide maatriks, mis sisaldab liikmeid, mis on süsteemi dünaamika kirjeldamiseks olulised. Lõpuks kõikidest leitud liikmetest moodustatakse dünaamiline süsteem:

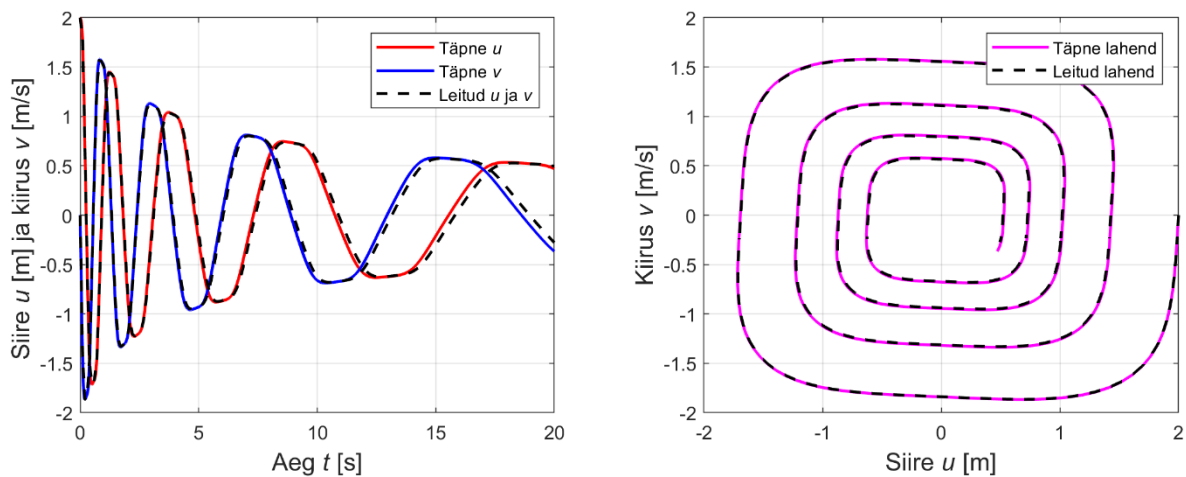
$$\dot{x}_k = \boldsymbol{\theta}(x)\xi_k \quad (8)$$

ja olemegi saanud lahendi. [13]

SINDy meetodi näitlikustamiseks on Joonisel 1 näidatud protsessid, mida algoritm teostab.



Joonis 1. SINDy algoritmi skeem, demonstreeritud teist järku differentsiaalvõrrandi lahendiga ehk kahe esimest järku võrrandsüsteemi lahendiga. [1]



Joonis 2. Vasakpoolsel joonisel on kujutatud süsteemi (9) lahendeid. Parempoolsel joonisel on kujutatud sama olukorra faasiportree.

2.2. Mittelineaarse ostsillaatori näide

Demonstreerime SINDy algoritmi kasutamist rakendades seda allpool defineeritud süsteemi lahendile. Anname ette mittelineaarse võrrandsüsteemi:

$$\begin{cases} \dot{u} = au^3 + bv^3, \\ \dot{v} = cu^3 + dv^3, \end{cases} \quad (9)$$

kus koefitsientide väärtused on $a = -0.1, b = 2, c = -2, d = -0.1$ [3]. Valime algtingimusteks $u(0) = 2 \text{ m}$ ja $v(0) = 0 \text{ m/s}$. Andmete genereerimiseks valime lahendi aegrea vahemikul $[0, 20]$ s, ajasammuga $\Delta t = 0.1 \text{ s}$. Joonisel 2 müra ei kujutata. Müra lisatakse, et simuleerida reaalsemaid mõõtetetingimusi. Igale valimile vahemikus $[0, 20]$ s, lisatakse kindla amplituudiga valge müra: nihke u valimitele 0.05 m ja kiiruse v valimitele 0.05 m/s .

Parim tulemus tuli, valides kandidaatfunktsioonide suurimaks astmeks $p = 4$ ja hõredat regressiooni määravaks parameeteriks $\lambda = 0.05$. SINDy poolt leitud võrrandid:

$$\begin{cases} \dot{u} = -0.10095u^3 + 2.0001v^3 \approx -0.1u^3 + 2v^3 \\ \dot{v} = -2.0020u^3 - 0.10048v^3 \approx -2u^3 - 0.1v^3 \end{cases} \quad (10)$$

Nagu näha, leitud võrrandsüsteem vastab esialgsele võrrandsüsteemile (9). Suurim erinev liige on $|2.0020 - 2.2| = 0.0020$, mis on 0.1% . Saame öelda, et meetod töötab. Jooniselt 2 näeme, et SINDy meetodil leitud siire u ja kiirus v on üsna sarnased täpsetele lahenditele. Ka faasiportreel on täpne ja leitud lahend trajektoorid väga ligilähedased. [3]

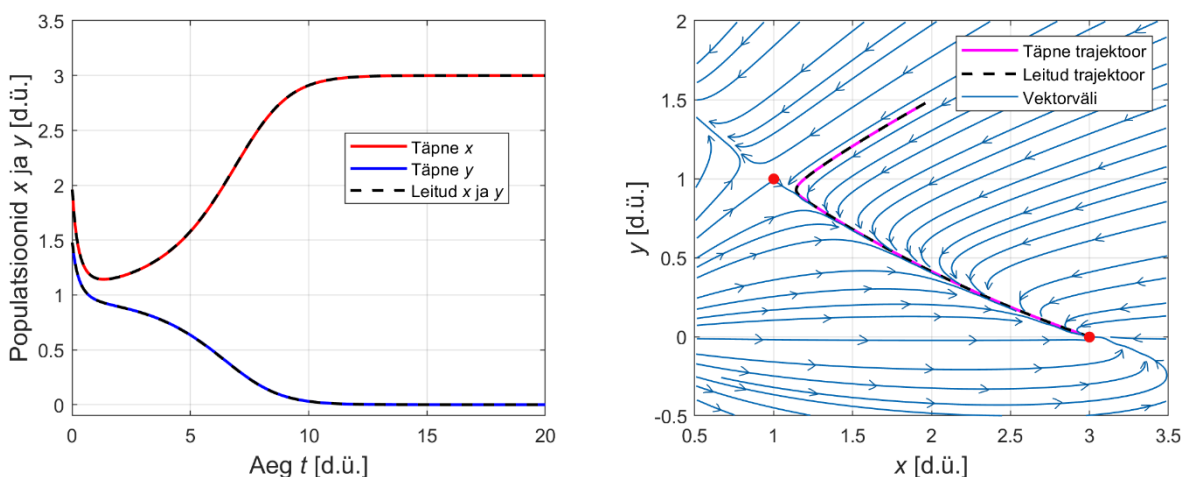
3. SINDy testimine

Selles peatükis testime SINDy meetodit kõigepealt ette teadaolevate liikumisvõrrandite korral. Anname ette võrrandsüsteemi, genereerime andmed ja uurime, kas SINDy algoritm suudab algse võrrandsüsteemi leida. Seejärel katsetame, kas SINDy algoritmi suudab leida lahendi katseandmete põhjal, kui võrrandsüsteem pole ette teada.

3.1. Ette teadaolevad süsteemid

Valisin teadaolevateks süsteemideks Lotka-Volterra mudelid. Järgnevalt teeme kaks erinevat võrrandsüsteemi katsetust, esmalt kahe konkureeriva liigi mudeli ja seejärel kiskja-saak mudeli kohta. [2, 14, 15]

3.1.1. Lotka-Volterra kahe konkureeriva liigi mudel



Joonis 3. Vasakpoolsel joonisel on kujutatud süsteemi (11) lahendeid. Populatsioon ei saa olla negatiivne. Parempoolsel joonisel on kujutatud sama olukorra faasiportree (ja vektorväli, mille leidis SINDy). Punase täpiga on märgitud püsipunktid. Integreerimine teostati kasutades Matlabi ODE-integraatorit Runge-Kutta 4,5, ajasammuga $\Delta t = 0.01$ s.

Vaatame kahe erineva populatsiooni dünaamikat, kuidas nende arvukus muutub konkureerides sama ressursi pärast. Sellist konkurentsi võib esineda näiteks taimede vahel samal kasvualal, jäneste ja lammaste vahel samas toidupiirkonnas või kahe bakteriliigi vahel Petri tassis, kus mõlemad toituvad glükoosist, mida lisatakse tassi konstantse kiirusega. Üldjuhul suretab üks liik teise välja. [2, 14, 15]

Konkurentsi mudeli korral kehtivad eeldused, et tegemist on suletud süsteemiga, toimub pidev kasv ajas, keskkond on konstante, kõik sama populatsiooni isendid käituvad ühtemoodi, süsteemi koefitsiendid on konstantsed ja välised tegurid puuduvad. [2, 14, 15]

Populatsioonide x ja y dünaamika on kirjeldatav süsteemiga, normeeritud ja dimensioonitult kujul:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + bx^2 + cxy, \\ \dot{y} = dy + ey^2 + fxy, \end{cases} \quad (11)$$

kus koefitsientide väärtused on valitud meelevaldselt, $a = 3$, $b = -1$, $c = -2$, $d = 2$, $e = -1$, $f = -1$, siin a tähistab x -populatsiooni kasvumäära, d tähistab y -populatsiooni kasvumäära, c ja f tähistavad, mitu korda tugevamalt mõjutab teine populatsioon esimest, $b = e$ kirjeldab seda, kui suurt populatsiooni suudab ökoloogia kannab [2, 14, 15]. Valime populatsioonide algtingimused $x(0) = 2$ d. ü. ja $y(0) = 1.5$ d. ü. ning rakendame SINDy algoritmi.

Parim tulemus tuli, valides kandidaاتفunktsioonide suurimaks astmeks $p = 2$ ja hõredat regressiooni määravaks parameeteriks $\lambda = 0.07$. Leitud võrrandsüsteem:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2.9947x - 0.99821x^2 - 1.9963xy \approx 3x - 1x^2 - 2xy \\ \dot{y} = 1.9949y - 0.99733y^2 - 0.99791xy \approx 2y - 1y^2 - 1xy. \end{cases} \quad (12)$$

Nagu näha, leitud võrrandsüsteem vastab esialgsele võrrandsüsteemile (11). Suurim erinev liige on $|2.9947 - 3| = 0.0053$, mis on 0.18%. SINDy meetod leidis võrrandsüsteemi üsna täpselt.

Jooniselt 3 näeme, et mõlema populatsioonide arv langeb enne tasakaalu saavutamist. x sureb välja ja y saavutavad maksimaalse populatsiooni. Faasiportreelt näeme, et valitud lahend läheneb ühele süsteemi püsipunktidele, milleks on $(x, y) = (0.0, 3.0)$. Näeme, et kui see juhtub, väheneb üks populatsioon nullini, samas kui teine suureneb maksimaalse populatsioonini - ökoloogia kandevõimeni. [2, 16]

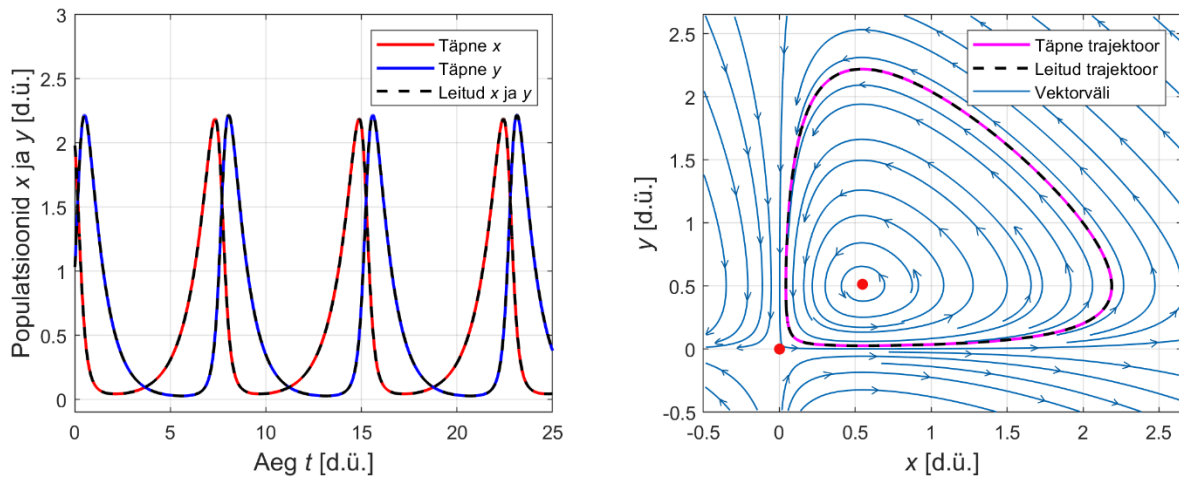
3.1.2. Lotka-Volterra kiskja-saak mudel

Kiskja ja saakloomade populatsiooni arvukuse dünaamika mudel. Kiskja-saak mudelisse sobivad näiteks ahven-koger, jänes-hunt. [2, 14, 15]

Saakloomade x ja kiskja y populatsiooni dünaamikat kirjeldatav süsteem, normeeritud ja dimensioonitult kujul:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta xy, \\ \dot{y} = \gamma \beta xy + \delta y, \end{cases} \quad (13)$$

kus koefitsientide väärtused: $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = -1.1$, $\delta = -1.2$, siin x on saakloomade arvukus, y kiskjate arvukus. α tähistab saakloomade kasvu, β on kiskjate röövimise määr, γ on assimilatsiooni efektiivsus ja δ on kiskjate loomuliku suremuse määr [2, 14, 15]. Valime populatsioonide algtingimused $x(0) = 2$ d. ü. ja $y(0) = 1$ d. ü. ning rakendame SINDy algoritmi.



Joonis 4. Vasakpoolsel joonisel on kujutatud süsteemi (12) lahendeid. Populatsioon ei saa olla negatiivne. Parempoolsel joonisel on kujutatud sama olukorra faasiportree (ja vektorväli, mille leidis SINDy). Punase täpiga on märgitud püsipunktid. Integreerimine teostati kasutades Matlabi ODE-integraatorit Runge-Kutta 4,5, ajasammuga $\Delta t = 0.01$ s.

Parim tulemus tuli, valides kandidaatsüsteemide suurimaks astmeks $p = 2$ ja hõredat regressiooni määravaks parameeteriks $\lambda = 0.001$.

Leitud võrrandsüsteem:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0.99985x - 1.9998xy \approx 1x - 2xy \\ \dot{y} = 2.1997xy - 1.1998y \approx (-1.1) \cdot (-2)xy - 1.2y \end{cases} \quad (14)$$

Jooniselt 4 näeme, et saakloomade x ja kiskjate y arvukused muutuvad tsükliliselt. Algtingimusena oleme määranud, et saakloomi on 2 korda rohkem kui kiskjaid, mis on näha ka jooniselt, et saakloomade arvukus esialgu kasvab, kuna kiskjaid on vähe. Kui saakloomi on palju, hakkavad kiskjad kiiremini paljunema, kui kiskjaid on palju, siis hakkab saakloomade arvukus langema. Lõpuks kiskjate arvukus langeb, kuna toitu pole piisavalt ja tsükel kordub. Faasiportreelt näeme, et trajektoorid on suletud kõverad – populatsioonid võnguvad perioodiliselt. Püsipunkte on 2 - punktis $(x, y) = (0.0, 0.0)$ on sadulpunkt ja punktis $(x, y) = (0.5454, 0.5)$ on (Kolmogorovi stabiilne) tsenter [2, 16]. Leitud võrrandsüsteem vastab etteantud võrrandsüsteemile (13). Suurim erinev liige on $|2.1997 - 2.2| = 0.003$, mis on 0.014%.

Kasutatuna SINDy meetodit võrrandite leidmiseks, näeme, et mõlema Lotka-Volterra mudeli korral olid võrrandid kergesti leitavad, meetod töötas. [1, 3]

3.2. Tundmatud süsteemid

Järgnevalt katsetame SINDy meetodit kahe tundmatu süsteemi korral, fotopletüsmogrammi ja elektrokardiogrammi signaalide korral. Siinkohal kasutame me mõõteandmeid ja soovime teada saada, kas SINDy meetod suudab leida neile vastavad võrrandid. [17, 18]

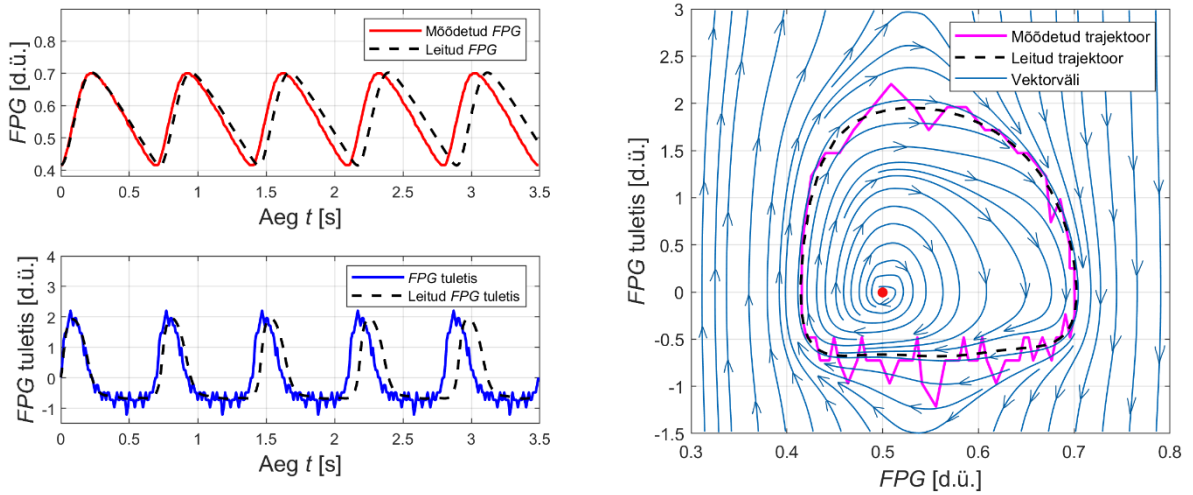
3.2.1. Fotopletüsmogrammi signaal

Fotopletüsmogramm (FPG) on meetod, mis kasutab valguse neeldumist ja peegeldumist, et mõõta verevoolu muutusi veresoontes. FPG signaali abil saab hinnata mitmeid füsioloogilisi parameetreid, nagu pulss, vererõhk ja hapnikuküllastust (SpO_2). [18]

Kasutasin internetist kättesaadavat FPG signaali andmeid [19]. Signaali mõõtmisagedus on 100 valimit sekundis ehk iga 0.01 s tagant tehti üks mõõtmine. Allikas [19] ei täpsusta signaali ühikuid, seega eeldame ühikute dimensioonitult kuju.

Kasutame allika [19] signaali periodiseeritud kuju. Periodiseeritud signaali saime valides meelevaldselt ühe perioodi. Võrrandi muutujatena kasutan siinkohal FPG signaali ja selle tuletist.

Parim tulemus tuli, valides kandidaاتفunktsioonide suurimaks astmeks $p = 5$ ja hõredat regressiooni määravaks parameeteriks $\lambda = 0.01$.



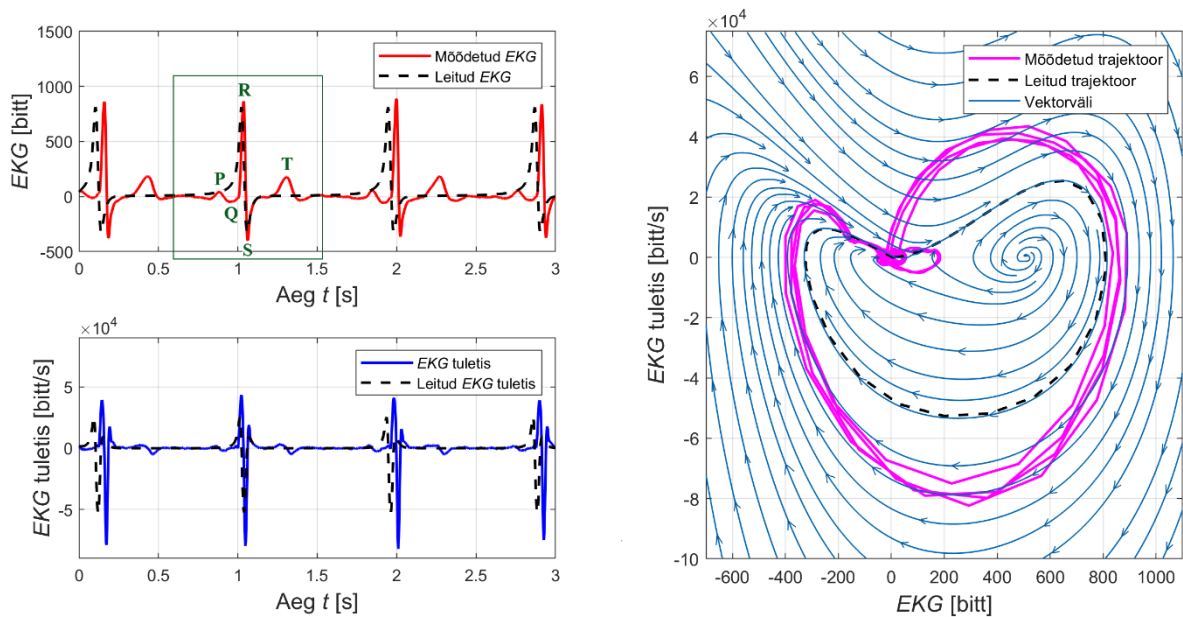
Joonis 5. Vasakpoolsel joonisel on kujutatud FPG signaali ja selle tuletise aegread. Parempoolsel joonisel on kujutatud sama olukorra faasiportree (ja vektorväli, mille leidis SINDy). Punase täpiga on märgitud püsipunkt. Integreerimine teostati kasutades Matlabi ODE-integraatorit Runge-Kutta 4,5, ajasammuga $\Delta t = 0.01$ s.

Joonisel 5 kujutatud faasiportreel on näidatud üks püsipunkt $(FPG, FPG \text{ tuletis}) = (0.5, 0.0)$. Tegemist on ebastabiilse spiraaliga, mis tähendab, et ümbritsev vektorväli surutakse sellest punktis eemale. SINDy poolt leitud kinnine trajektoori on piirtsükkel kuna saab näidata, et ümbritsev vektorväli läheneb sellele nii seest- kui ka väljastpoolt. Stabiilne piirtsükkel on mittelineaarne nähtus, millel puudub analoog lineaarsetes süsteemides.[2, 16] Leitud võrrandsüsteem:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 19927.023527 - 183128.95123x - 2533.0696513y + \\ + 674337.0758x^2 + 2008.083234xy + 749.44953889y^2 - \\ - 1240818.4697x^3 - 67254.805632x^2y - 4463.8192664xy^2 - \\ - 243.033129y^3 + 1138609.1529x^4 + 87497.266772x^3 + \\ + 8711.0721836x^2y^2 + 751.49771171xy^3 + 41.851187256y^4 - \\ - 416227.20204x^5 - 41434.64822x^4y - 5543.8829285x^3y^2 - \\ - 550.89580665x^2y^3 - 81.437418626xy^4 + 0.24205966526y^5 \end{cases} \quad (15)$$

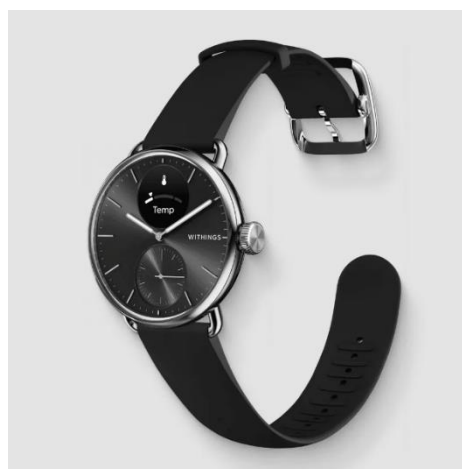
Leitud võrrandsüsteem on väga paljude liikmetega, SINDy mudel ei suutnud leida lahendit, mis on hõre kandidaatsfunktsioonide ruumis. Saadud tulemust saab seletada sellega, et FPG signaal pole 2-järku mittelineaarne ostsillaator [1-2]. Originaalandmete (mitteperioodiline) signaal andis veel halvema tulemuse.

3.2.2. Elektrokardiogrammi signaal



Joonis 7. Vasakpoolsel joonisel on kujutatud EKG signaali ja selle tuletise aegread. Parempoolsel joonisel on kujutatud sama olukorra faasiportree (ja vektorväli, mille leidis SINDy). Integreerimine teostati kasutades Matlabi ODE-integraatorit Runge-Kutta 4,5, ajasammuga $\Delta t = 0.0033$ s.

EKG mõõtmiseks kasutasin nutikella Withings ScanWatch 2 (Joonis 6). Antud kell on saanud Ameerika Ühendriikide Toidu- ja Ravimiameti Food and Drug Administration (FDA) poolt heakskiidu ehk see seade on läbinud ranged testid ning on USA-s tunnustatud kui usaldusväärne meditsiiniline abivahend. [20]



Joonis 6. Withings ScanWatch 2 [13].

Möötsin nutikellaga enda EKG signaali. Ühe mõõtmise aeg on 30 sekundit. Signaali mõõtmisagedus on 300 valimit sekundis ehk iga 0.0033 s tagant tehti üks mõõtmine. Matlabi koodi (Lisa1) lugesin sisse mõõtmisandmete vektori, milles on 9000 valimit. [21-22]

Parim tulemus tuli, valides kandidaاتفunktsioonide suurimaks astmeks $p = 3$ ja hõredat regressiooni määravaks parameeteriks $\lambda = 0.0001$.

Jooniselt 7 näeme, et SINDy suudab modelleerida EKG signaali üldkuju ja tsüklilisust, kuid jääb hätta väikeste P-, T- ja Q-lainete (vt. Joonis 7) tuvastamises. SINDy-ga saadud signaal on siledam. Samamoodi ka EKG tuletise korral ei suutnud SINDy tabada signaali järske muutuseid. Kuna EKG signaal sisaldab järske piike ja keerukamaid dünaamilisi mustreid, siis on need omadused raskesti modelleeritavad madala astme kandidaاتفunktsioonidega, mida meetod kasutab. Kandidaاتفunktsioonide suurim aste kasutatud koodis on 5, see ilmselt jäi liiga väikeseks. [2]

Leitud võrrandsüsteem:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -47.7003y + 12.7022x^2 + 0.260551xy - 0.0250877x^3 - 0.000163314x^2y. \end{cases} \quad (16)$$

SINDy poolt leitud võrrandsüsteemi saab lugeda hõredaks, aga kuna lahend on vale, siis järeltame, et EKG signaal pole kirjeldatav teist järku mittelineaarse ostsillaatoriga.

4. Kokkuvõte

Antud töös katsetasin SINDy meetodit viiel erineval juhtumil: mittelineaarsel ostsillaatoril, kahel ette teadaoleval Lotka-Volterra mudelil (konkureerivad liigid ja kiskja-saak mudelitel) ning kahel tundmatul süsteemil (fotopletüsmogrammi ja elektrokardiogrammi signaalidel). Kasutatud on Matlabi skriptimiskeskonnad kirjutatud SINDy algoritmi koodi (Lisa 1) ja abifaile `poolData.m`, `sparseGalerkin.m` ja `sparsifyDynamics.m` (Lisa 2. Abifailid).

Peatükis 2.2 demonstreerisin, kuidas SINDy meetodit rakendada mittelineaarse ostsillaatori näitel. Andsin ette diferentsiaalvõrrandid, mille põhjal genereerisin numbrilised andmed. Seejärel rakendasin nende andmete peal SINDy algoritmi, mis kasutas vähimruutude ja hõreda regressiooni meetodit, leidmaks hõredat lahendit. Esialgse ja leitud võrrandite suurima liikmeerinevus oli vaid 0.1%. Jooniselt 2 näeme ka, et täpsete ja leitud lahendite aegread ja faasiportree langevad hästi kokku. Seega võime järeldada, et SINDy algoritm toimis edukalt.

Peatükis 3.1.1 Kasutasin teadaolevat Lotka-Volterra kahe konkureeriva liigi mudelit. Andsin ette vastava populatsioonide dünaamikat kirjeldava võrrandsüsteemi, mille põhjal genereerisin numbrilised andmed. Seejärel rakendasin nende andmete peal SINDy algoritmi leidmaks süsteemi hõredat lahendit. Esialgse ja leitud võrrandi suurim erinev liige oli 0.18%. Jooniselt 3 näeme ka, et täpsete ja leitud lahendite aegread ja faasiportree langevad samuti hästi kokku. Seega saame öelda, et SINDy algoritm töötas edukalt ka bioloogilise mudeli korral.

Peatükis 3.1.2 Katsetasin Lotka-Volterra kiskja-saak mudelit. Andsin ette kahe liigi tsüklilist dünaamikat kirjeldava võrrandsüsteemi, mille põhjal genereerisin andmed ja seejärel rakendasin SINDy algoritmi, leidmaks süsteemi hõredat lahendit. Esialgse ja leitud võrrandi suurim erinev liige oli 0.014%. Jooniselt 4 näeme ka, et täpsete ja leitud lahendite aegread ja faasiportree langevad hästi kokku. Seega saame öelda, et SINDy suutis edukalt leida ka tsüklilise süsteemi dünaamika.

Järgnevalt uurisin kahe tundmatu süsteemi mõõtmisandmeid, mille liikumisvõrrandid pole ette teada. Peatükis 3.2.1 katsetasin SINDy meetodit fotopletüsmogrammi (FPG) signaali korral. Kasutasin periodiseeritud mõõteandmeid, ning rakendasin SINDy algoritmi. Parim tulemus tuli, kui valisin kandidaاتفunktsioonide suurimaks astmeks $p = 5$ ja hõredat regressiooni määravaks parameetriks $\lambda = 0.01$. Leitud võrrandsüsteemi liikmete hulk oli suur, seega SINDy ei suutnud leida hõrendat lahendit. Võib järeldada, et FPG signaali ei saa kirjeldada lihtsa teist järku mittelineaarse ostsillaatori mudelina.

Peatükis 3.2.1 katsetasin SINDy meetodit elektrokardiogrammi (EKG) signaali korral. Kasutasin enda mõõdetud andmeid, mille peal rakendasin SINDy algoritmi. Parim tulemus tuli, kui valisin kandidaاتفunktsioonide suurimaks astmeks $p = 3$ ja hõredat regressiooni määravaks parameetriks $\lambda = 0.0001$. Kuigi saadud võrrand oli hõre, ei suutnud mudel kirjeldada EKG signaali olulisi elemente. Seega EKG signaal ei ole piisavalt hästi kirjeldatav teist järku mittelineaarse ostsillaatorina ja SINDy meetod ei andnud rahuldavat tulemust.

Tänuavaldused

Soovin tänada oma bakalaureusetöö juhendajat Dmitri Kartofelevi konstruktiivse tagasiside, suunamise ja abi eest Matlabi koodi modifitseerimisel, mis olid selle töö valmimisel hindamatu väärtusega.

Kasutatud kirjandus

- [1] S. L. Brunton, J. L. Proctor ja J. N. Kutz, "Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, kd 113, nr 15, lk 3932–3937, 2016.
- [2] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2. tr., Avalon Publishing, 2015.
- [3] S. L. Brunton, J. L. Proctor ja J. N. Kutz, "Supporting Information for: Discovering governing equations from data: Sparse identification of nonlinear dynamical systems," 2016. Kasutatud 22. mai 2025: <https://www.pnas.org/doi/full/10.1073/pnas.1517384113#supplementary-materials>
- [4] B. Lenfesty, S. Bhattacharyya ja K. Wong-Lin, "Uncovering Dynamical Equations of Stochastic Decision Models Using Data-Driven SINDy Algorithm," *Neural Computation*, kd 37, nr 3, lk 569–587, 2025. DOI: [10.1162/neco_a_01736](https://doi.org/10.1162/neco_a_01736)
- [5] Y.-X. Jiang, X. Xiong, S. Zhang jt., "Modeling and prediction of the transmission dynamics of COVID-19 based on the SINDy-LM method," *Nonlinear Dynamics*, kd 105, lk 2775–2794, 2021. DOI: [10.1007/s11071-021-06707-6](https://doi.org/10.1007/s11071-021-06707-6)
- [6] J. Wentz ja A. Doostan, "Derivative-based SINDy (DSINDy): Addressing the challenge of discovering governing equations from noisy data," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, kd 413, art. nr 116096, 2023. DOI: [10.1016/j.cma.2023.116096](https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116096)
- [7] S. L. Brunton, J. L. Proctor ja J. N. Kutz, "Sparse Identification of Nonlinear Dynamics with Control (SINDyC)," *IFAC-PapersOnLine*, kd 49, nr 18, lk 710–715, 2016. DOI: [10.1016/j.ifacol.2016.10.249](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.10.249)
- [8] U. Fasel, J. N. Kutz, B. W. Brunton ja S. L. Brunton, "Ensemble-SINDy: Robust sparse model discovery in the low-data, high-noise limit, with active learning and control," *Proceedings of the Royal Society A*, kd 478, art. nr 20210904, 2022. DOI: [10.1098/rspa.2021.0904](https://doi.org/10.1098/rspa.2021.0904)
- [9] G. T. Naozuka, H. L. Rocha, R. S. Silva jt., "SINDy-SA framework: enhancing nonlinear system identification with sensitivity analysis," *Nonlinear Dynamics*, kd 110, lk 2589–2609, 2022. DOI: [10.1007/s11071-022-07755-2](https://doi.org/10.1007/s11071-022-07755-2)
- [10] L. Rosafalco, P. Conti, A. Manzoni, S. Mariani ja A. Frangi, "EKF–SINDy: Empowering the extended Kalman filter with sparse identification of nonlinear dynamics," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, kd 431, art. nr 117264, 2024. DOI: [10.1016/j.cma.2024.117264](https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.117264)
- [11] K. Kaheman, J. N. Kutz ja S. L. Brunton, "SINDy-PI: a robust algorithm for parallel implicit sparse identification of nonlinear dynamics," *Proceedings of the Royal Society A*, kd 476, art. nr 20200279, 2020. DOI: [10.1098/rspa.2020.0279](https://doi.org/10.1098/rspa.2020.0279)
- [12] "PySINDy – Python implementation of SINDy," Kasutatud 22. mai 2025: <https://pypi.org/project/pysindy/>
- [13] "Sparse identification of non-linear dynamics," Kasutatud 22. mai 2025: https://en.wikipedia.org/wiki/Sparse_identification_of_non-linear_dynamics
- [14] "Lotka–Volterra equations," Kasutatud 22. mai 2025: https://en.wikipedia.org/wiki/Lotka%E2%80%93Volterra_equations
- [15] D. Kartofelev, "Lecture 5: Lotka-Volterra models," 2024. Kasutatud 22. mai 2025: https://www.tud.ttu.ee/web/dmitri.kartofelev/YFX1560/LectureNotes_5.pdf

- [16]D. Kartofelev, "Lecture 4: 2-D homogeneous linear systems, classification of fixed points in 2-D systems, the Lyapunov stability, basin of attraction," 2024. Kasutatud 22. mai 2025: https://www.tud.ttu.ee/web/dmitri.kartofelev/YFX1560/LectureNotes_4.pdf
- [17]Santiagoat21, "PPG signal dataset," Kasutatud 22. mai 2025: <https://github.com/Santiagoat21/PPG-signal-dataset>
- [18]"Photoplethysmogram," Kasutatud 22. mai 2025: <https://en.wikipedia.org/wiki/Photoplethysmogram>
- [19]"Elektrokardiogramm," Kasutatud 22. mai 2025: <https://et.wikipedia.org/wiki/Elektrokardiogramm>
- [20]"FDA clears Withings ScanWatch for atrial fibrillation detection," *American Academy of Sleep Medicine*, 13. okt 2021. Kasutatud 22. mai 2025: <https://aasm.org/fda-clears-withings-scanwatch-for-atrial-fibrillation-detection/>
- [21]"Withings ScanWatch 2," Kasutatud 22. mai 2025: <https://www.withings.com/eu/en/scanwatch>
- [22]"ScanWatch 2 – Understanding my ECG," Kasutatud 22. mai 2025: <https://support.withings.com/hc/en-us/articles/17091636264081-ScanWatch-2-Understanding-my-ECG-re>

Lisad

Lisa 1. SINDy meetodil mittelineaarse võrrandsüsteemi leidmise kood

Siin on autori poolt kergelt modifitseeritud originaalne SINDy meetodi kood, mis on kirjutatud Steven L. Bruntoni poolt [1-2]. Kasutan kahemõõtmelise mittelineaarse ostsillaatori mudeli koodi. Teised töös kasutatud näited saab arvutada sarnase koodi alusel. Antud SINDy algoritm on Matlabi (R2021a) skriptimiskeeles kirjutatud kood.

```
clear all, close all, clc
addpath('./utils');

%% generate Data, Nonlinear system
polyorder = 4;           % search space up to fifth order polynomials
usesine = 0;             % no trig functions
n = 2;                   % 2D system
A = [-0.1 2; -2 -0.1];   % System coefficient matrix
rhs = @(x) A*x.^3;        % ODE right hand side - non-linear system, cubic
tspan = [0:0.01:20];     % time span
x0 = [2; 0];             % initial conditions
options = odeset('RelTol', 1e-10, 'AbsTol', 1e-10*ones(1, n));
[t, x] = ode45(@(t, x) rhs(x), tspan, x0, options); % integrate

%% compute Derivative
eps = 0.05;              % noise strength
for i = 1:length(x)
    dx(i, :) = A*(x(i, :).^3)';
end
dx = dx + eps*randn(size(dx)); % add noise

%% pool Data (i.e., build library of nonlinear time series)
Theta = poolData(x, n, polyorder, usesine);
m = size(Theta, 2);

%% compute Sparse regression: sequential least squares
lambda = 0.05;           % lambda is our sparsification knob.
Xi = sparsifyDynamics(Theta, dx, lambda, n)

%% integrate true and identified systems
[tA, xA] = ode45(@(t, x) rhs(x), tspan, x0, options); % true model
[tB, xB] = ode45(@(t, x) sparseGalerkin(t, x, Xi, polyorder, usesine), tspan,
x0, options); % approximate

%% FIGURES!!
figure('Position', [100 100 1000 350]) % Non-linear 2D system
subplot(1,2,1); % [left bottom width height]
plot(tA, xA(:, 1), 'r', 'LineWidth', 1.5)
hold on
plot(tA, xA(:, 2), 'b-', 'LineWidth', 1.5)
plot(tB(1:10:end), xB(1:10:end, 1), 'k--', 'LineWidth', 1.5)
hold on
plot(tB(1:10:end), xB(1:10:end, 2), 'k--', 'LineWidth', 1.5)
grid on
xlabel('Aeg \it{t} \rm{[s]}', 'FontSize', 13);
ylabel('Siire \it{u} \rm{[m] ja kiirus} \it{v} \rm{[m/s]} ', 'FontSize', 13)
legend('Täpne \it{u}', 'Täpne \it{v}', 'Leitud \it{u} \rm{[ja] \it{v}}')
```

```

% Phase portrait
subplot(1,2,2);
dtA = [0; diff(tA)];
plot(xA(:, 1), xA(:, 2), 'm', 'LineWidth', 1.5);
hold on
dtB = [0; diff(tB)];
plot(xB(:, 1), xB(:, 2), 'k--', 'LineWidth', 1.5);
grid on
xlabel('Siire \it{u} \rm{[m]}', 'FontSize', 13);
ylabel('Kiirus \it{v} \rm{[m/s]}', 'FontSize', 13);
legend('Täpne lahend', 'Leitud lahend');
exportgraphics(gcf, 'Joonis2_Mittelineaarne süsteem.png', 'Resolution', 250) %
save figure to current directory

%% Display coefficients in a table
funkid0 = poolDataLIST({'x','y'}, Xi, n, polyorder, usesine);
disp(table(funkid0,Xi(:,1),Xi(:,2),'VariableNames',{'Võrrandi liige', 'x_tul',
'y_tul'})));

% Function for generating equations
fmt = @(c) strjoin(strcat(num2str(c(c~=0)),'*',funkid0(c~=0)), ' + ');
dxdt = fmt(Xi(:,1)); if isempty(dxdt), dxdt = '0'; end
dydt = fmt(Xi(:,2)); if isempty(dydt), dydt = '0'; end

%% Show formed equations
disp('Leitud võrrandid:');
disp(['dx/dt = ' dxdt]);
disp(['dy/dt = ' dydt]);

```

Lisa 2. Abifailide sisu

1. **poolData.m** – siin koostatakse kandidaatfunktsioonide maatriks $\theta(X)$.

```

function yout = poolData(yin,nVars,polyorder,usesine)
% Copyright 2015, All Rights Reserved
% Code by Steven L. Brunton
% For Paper, "Discovering Governing Equations from Data:
%           Sparse Identification of Nonlinear Dynamical Systems"
% by S. L. Brunton, J. L. Proctor, and J. N. Kutz

n = size(yin,1);
% yout =
zeros(n,1+nVars+(nVars*(nVars+1)/2)+(nVars*(nVars+1)*(nVars+2)/(2*3))+11);

ind = 1;
% poly order 0
yout(:,ind) = ones(n,1);
ind = ind+1;

% poly order 1
for i=1:nVars
    yout(:,ind) = yin(:,i);
    ind = ind+1;
end

if(polyorder>=2)
    % poly order 2
    for i=1:nVars

```

```

        for j=i:nVars
            yout(:,ind) = yin(:,i).*yin(:,j);
            ind = ind+1;
        end
    end
end

if(polyorder>=3)
    % poly order 3
    for i=1:nVars
        for j=i:nVars
            for k=j:nVars
                yout(:,ind) = yin(:,i).*yin(:,j).*yin(:,k);
                ind = ind+1;
            end
        end
    end
end

if(polyorder>=4)
    % poly order 4
    for i=1:nVars
        for j=i:nVars
            for k=j:nVars
                for l=k:nVars
                    yout(:,ind) = yin(:,i).*yin(:,j).*yin(:,k).*yin(:,l);
                    ind = ind+1;
                end
            end
        end
    end
end

if(polyorder>=5)
    % poly order 5
    for i=1:nVars
        for j=i:nVars
            for k=j:nVars
                for l=k:nVars
                    for m=l:nVars
                        yout(:,ind) =
yin(:,i).*yin(:,j).*yin(:,k).*yin(:,l).*yin(:,m);
                        ind = ind+1;
                    end
                end
            end
        end
    end
end

if(usesine)
    for k=1:10;
        yout = [yout sin(k*yin) cos(k*yin)];
    end
end

```

2. sparsifyDynamics.m – see funktsioon teostab vähimruutude meetodit ja hõredat regressioon

```

function Xi = sparsifyDynamics(Theta,dXdt,lambda,n)
% Copyright 2015, All Rights Reserved
% Code by Steven L. Brunton
% For Paper, "Discovering Governing Equations from Data:
%     Sparse Identification of Nonlinear Dynamical Systems"
% by S. L. Brunton, J. L. Proctor, and J. N. Kutz

% compute Sparse regression: sequential least squares
Xi = Theta\dXdt; % initial guess: Least-squares

% lambda is our sparsification knob.
for k=1:10
    smallinds = (abs(Xi)<lambda); % find small coefficients
    Xi(smallinds)=0; % and threshold
    for ind = 1:n % n is state dimension
        biginds = ~smallinds(:,ind);
        % Regress dynamics onto remaining terms to find sparse Xi
        Xi(biginds, ind) = Theta(:,biginds)\dXdt(:,ind);
    end
end
end

```

3. sparseGalerkin.m - siin kasutatakse leitud koefitsiente, et hinnata süsteemi dünaamikat, kasutatakse poolData.m, et esitada hetkeseisule sobiv kandidaatide rida.

```

function dy = sparseGalerkin(t,y,ahat,polyorder,usesine)
% Copyright 2015, All Rights Reserved
% Code by Steven L. Brunton
% For Paper, "Discovering Governing Equations from Data:
%     Sparse Identification of Nonlinear Dynamical Systems"
% by S. L. Brunton, J. L. Proctor, and J. N. Kutz

yPool = poolData(y',length(y),polyorder,usesine);
dy = (yPool*ahat)';

```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks¹

Mina, Annaliisa Kangur (*autori nimi*)

1. Annan Tallinna Tehnikaülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

„Mittelineaarsete liikumisvõrrandite leidmine katse- ja numbrilistest andmetest“,
(*lõputöö pealkiri*)

mille juhendaja on Dmitri Kartofelev,
(*juhendaja nimi*)

1.1 reprodutseerimiseks lõputöö säilitamise ja elektroonse avaldamise eesmärgil, sh Tallinna Tehnikaülikooli raamatukogu digikogusse lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2 üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tallinna Tehnikaülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas Tallinna Tehnikaülikooli raamatukogu digikogu kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. Olen teadlik, et käesoleva lihtlitsentsi punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest ning muudest õigusaktidest tulenevaid õigusi.

23.05.2025 (kuupäev)

¹ Lihtlitsents ei kehti juurdepääsupiirangu kehtivuse ajal vastavalt üliõpilase taotlusele lõputööle juurdepääsupiirangu kehtestamiseks, mis on allkirjastatud teaduskonna dekaani poolt, välja arvatud ülikooli õigus lõputööd reprodutseerida üksnes säilitamise eesmärgil. Kui lõputöö on loonud kaks või enam isikut oma ühise loomingulise tegevusega ning lõputöö kaas- või ühisautor(id) ei ole andnud lõputööd kaitsvale üliõpilasele kindlaksmääratud tähtajaks nõusolekut lõputöö reprodutseerimiseks ja avalikustamiseks vastavalt lihtlitsentsi punktidele 1.1. ja 1.2, siis lihtlitsents nimetatud tähtaja jooksul ei kehti.