

Ер. 6. /  
314

TALLINNA POLÜTEHNILISE  
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

№ 314

**СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ  
И  
СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА**

СБОРНИК СТАТЕЙ

XIII

ТАЛЛИН 1971





Ep. 6.1

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED  
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

№ 314

1971

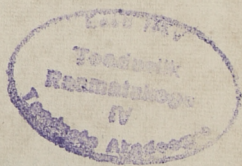
УДК 539  
624

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ  
И  
СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА

СБОРНИК СТАТЕЙ

XIII

1.0.9





УДК 539.384

И.И. Ааре, К.А. Лооритс

О РАСЧЕТЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ  
СКЛАДКОВ ПОКРЫТИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

1. В в е д е н и е

Одними из перспективных конструкций являются призматические складки, возведенные из железобетона или металла.

По сравнению с цилиндрическими оболочками они имеют ряд преимуществ: простая технология и высокая индустриальность изготовления, экономичность в использовании материала. Кроме того, следует отметить, что в истории применения складчатых конструкций не было случаев потери общей устойчивости.

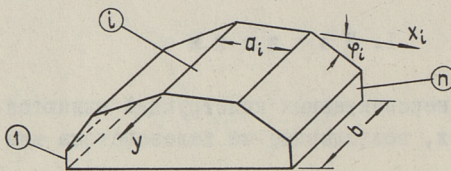
Несмотря на значительные преимущества складчатых конструкций, они применяются пока сравнительно редко.

Главной причиной, ограничивающей распространение складчатых конструкций, является отсутствие исчерпывающих данных об их работе.

В существующих методах расчета складок имеются многие допущения, которые оправдываются в теории цилиндрических оболочек, но при расчете складок оказывают значительное влияние на результаты расчета.

В настоящей статье дается решение металлической складки в перемещениях, т.е. неизвестными являются перемещения срединной поверхности  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Деформированное состояние складки рассматривается в нелинейной постановке. Поскольку трудно оценить удельный вес различных внутренних усилий и деформаций, метод строится так, чтобы влияние всех этих факторов было учтено с достаточной точностью.

В расчетной схеме грани складки рассматриваются как пластинки, нагруженные кроме внешней распределенной нагрузки еще контактными усилиями от соседних граней. При этом принимается что короткие стороны граней шарнирно опираются на диафрагмы. Диафрагмы считают для простоты идеальными, т.е. они рассматриваются как бесконечно жесткие в своей плоскости и как абсолютно гибкие из своей плоскости. При наличии продольных бортовых балок, они рассматриваются как крайние грани складок (Фиг. 1)



Фиг. 1. Схема складки.  
Толщина грани номер  $i - \delta_i$ .

## 2. Расчет

Основные уравнения теории пластинок имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{x,i}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_i}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{y,i}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_i}{\partial x_i} = 0; \quad (1)$$

$$D_i \nabla^2 \nabla^2 w_i = q_{z,i} + \delta_i \left( \sigma_{x,i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} + \sigma_{y,i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} + 2\tau_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i \partial y} \right). \quad (2)$$

Подставляя в (1) значения напряжений

$$\sigma_{x,i} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial y} \right)^2 \right]; \quad (3)$$

$$\sigma_{y,i} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial v_i}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right)^2 \right]; \quad (4)$$



$$\tau_i = \frac{E}{2(1+\mu)} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial y} \right] \quad (5)$$

приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial y} = - \frac{q_{x,i}}{K_i} - \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} - \\ - \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} - \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i \partial y}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial y} = - \frac{\partial w_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} - \\ - \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} - \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i \partial y}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$K_i = \frac{E \delta_i}{1-\mu^2}; \quad D_i = \frac{E \delta_i^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Учитывая граничные условия на концах складки

$$y=0; b, \quad u=0, \quad w=0, \quad \sigma_y=0, \quad M_x=0, \quad (8)$$

аппроксимируем функцию прогиба серединной поверхности грани выражением

$$w_i = w_i^* + \sum_k \sum_l w_{i,kl} \psi_k^l(x_i) \sin \frac{l\pi y}{b}, \quad k=0,1,2,\dots \quad l=1,3,\dots \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} w_i^* = b \sum_l (A_l^i \operatorname{ch} \frac{l\pi x_i}{b} + B_l^i \operatorname{sh} \frac{l\pi x_i}{b} + C_l^i \frac{x_i}{b} \operatorname{ch} \frac{l\pi x_i}{b} + \\ + D_l^i \frac{x_i}{b} \operatorname{sh} \frac{l\pi x_i}{b}) \sin \frac{l\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (10)$$

является частным решением уравнения (2),

$\psi_k(x_i)$  — тригонометрическая функция, которая зависит от условий соединения граней складки между собой.

Например, если грани складки соединены между собой шарнирно, целесообразно выбирать  $\psi_k(x_i)$  в виде

$$\psi_k(x_i) = \sin \frac{k\pi x_i}{a_i}; \quad k=1,2,3,\dots \quad (11)$$

Наоборот, при жестком соединении граней между собой имеет вид

$$\Psi_k(x_i) = \cos \frac{k\pi x_i}{a_i}; \quad k=0,1,2,3,\dots \quad (IIa)$$

Для упрощения дальнейших расчетов функция (10) разлагается в ряд Фурье:

$$w_i^* \approx \sum_k \sum_l f_{i,kl} \Psi_k(x_i) \sin \frac{l\pi y}{b}; \quad k=0,1,2,\dots \quad l=1,3,\dots \quad (12)$$

Далее при обозначении

$$w_{i,kl} + f_{i,kl} = a_{i,kl} \quad (13)$$

получим приближенную формулу для функции прогибов срединной поверхности складки в виде:

$$w_i \approx \sum_k \sum_l a_{i,kl} \Psi_k(x_i) \sin \frac{l\pi y}{b}; \quad (14)$$

Подставляя формулу (14) в уравнение равновесия (6) и (7) и разлагая компоненту нагрузки  $q_{x,i}$  в ряд Фурье в направлении оси  $x$ -ов

$$q_{x,i} = \sum_m \frac{4}{m\pi} q_{x,i} \xi_m(x_i), \quad (15)$$

где  $\xi_m(x_i)$  тригонометрическая функция, сдвинутая по сравнению с функцией  $\Psi_n(x_i)$  на половину периода, напомним решение уравнения (6), (7) в форме

$$u_i = u_i^* + \sum_p \sum_r e_{i,pr} \xi_p(x_i) \cos \frac{r\pi y}{b} + K_{1,i}(a_i - x_i); \quad (16)$$

$$v_i = v_i^* + \sum_p \sum_r e_{i,pr} \Psi_p(x_i) \sin \frac{r\pi y}{b} + K_{2,i}y; \quad p=(0),1,2,\dots \quad r=(0),2,4,\dots \quad (17)$$

где  $u_i^*$  и  $v_i^*$  частные решения уравнения равновесия (6) и (7), и имеют вид

$$u_i^* = b \sum_l \left[ \bar{A}_l^i \operatorname{sh} \frac{l\pi x_i}{b} + \bar{B}_l^i \operatorname{ch} \frac{l\pi x_i}{b} + \bar{C}_l^i \left( \frac{x_i}{b} \operatorname{sh} \frac{l\pi x_i}{b} - \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{2}{l\pi} \operatorname{ch} \frac{l\pi x_i}{b} \right) + \right. \\ \left. + \bar{D}_l^i \left( \frac{x_i}{b} \operatorname{ch} \frac{l\pi x_i}{b} - \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{2}{l\pi} \operatorname{sh} \frac{l\pi x_i}{b} \right) \right] \sin \frac{l\pi y}{b}; \quad l=1,3,5 \quad (18)$$

$$v_i^* = b \sum_l \left[ \bar{A}_l^i \operatorname{ch} \frac{l\pi x_i}{b} + \bar{B}_l^i \operatorname{sh} \frac{l\pi x_i}{b} + \bar{C}_l^i \left( \frac{x_i}{b} \operatorname{ch} \frac{l\pi x_i}{b} + \frac{1}{l\pi} \operatorname{sh} \frac{l\pi x_i}{b} \right) + \right. \\ \left. + \bar{D}_l^i \left( \frac{x_i}{b} \operatorname{sh} \frac{l\pi x_i}{b} + \frac{1}{l\pi} \operatorname{ch} \frac{l\pi x_i}{b} \right) \right] \cos \frac{l\pi y}{b}. \quad (19)$$



Сравнивая коэффициенты перед одинаковыми тригонометрическими функциями в левой и правой сторонах уравнений (6) и (7), выражаем коэффициенты  $c_{i,pr}$  и  $e_{i,pr}$  через компоненты нагрузки и пока неизвестные величины  $w_{i,kl}$  и  $a_{i,kl}$ . При этом величины  $a_{i,kl}$  будут стоять в выражениях  $c_{i,pr}$  и  $e_{i,pr}$  во второй степени.

Для определения неизвестных коэффициентов  $\bar{A}_i^i, \bar{B}_i^i, \bar{C}_i^i, \bar{D}_i^i, A_i^i, B_i^i, C_i^i, D_i^i$  в формулах (10), (18) и (19), используются условия сопряжения между соседними гранями складки и краевые условия на крайних гранях складки.

Условия сопряжения при жестком соединении граней между собой, следующие:

при :  $x_i = a_i$  и  $x_{i+1} = 0, i = 1, 2, \dots, (n-1)$

$$u_i \cos \varphi = u_{i+1} + w_i \sin \varphi = 0; \quad (a)$$

$$u_i - u_{i+1} \cos \varphi + w_{i+1} \sin \varphi = 0; \quad (b)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i} = \frac{\partial w_{i+1}}{\partial x_{i+1}}; \quad (c)$$

$$v_i = v_{i+1}; \quad (d)$$

$$M_{x,i} = M_{x,i+1}; \quad (e)$$

$$T_i = T_{i+1}; \quad (f)$$

$$N_{x,i} - N_{x,i+1} \cos \varphi_i + R_{x,i+1} \sin \varphi_i = 0; \quad (g)$$

$$N_{x,i+1} \sin \varphi_i - R_{x,i} + R_{x,i+1} \cos \varphi_i = 0, \quad (h) \quad (20)$$

где

$$M_{x,i} = -D_i \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} + \mu \frac{\partial^2 w_i}{\partial y_i^2} \right); \quad (21)$$

$$R_{x,i} = -D_i \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x_i^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i \partial y_i^2} \right]. \quad (22)$$

Здесь условия (a) - (d) являются геометрическими. Они выражают сохранность контакта между гранями в ходе деформирования складки. Условия (e) - (h) выражают статическое равновесие линий сопряжения граней.

При шарнирном соединении граней вместо условий с и e должны стать условия

$$M_{x,i} = 0; \quad c'$$

$$M_{x, i+1} = 0. \quad (e')$$

Краевые условия на свободных краях внешних граней имеют форму: при

$$x_1 = 0 \quad x_n = a_n; \quad M_x = 0, \quad \tau = 0, \quad \sigma_x = 0, \quad R_x = 0. \quad (23)$$

После определения коэффициентов  $\bar{A}_l^i - D_l^i$  через величины  $q_{k,i}, w_{i,kl}$  и  $a_{i,kl}$ , величины  $a_{i,kl}$  в свою очередь выражаются через  $w_{i,kl}$  и  $q_{k,i}$  при этом получаются иррациональные выражения.

После всех этих операций остаются единственными коэффициентами:  $w_{i,kl}$ , для вычисления которых применяется уравнение равновесия (2). Мембранные напряжения изогнутой срединной поверхности  $\sigma_{x,i}$ ,  $\sigma_{y,i}$  и  $\tau_i$  в уравнении (2) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} \sigma_{x,i} = & \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial w_i^*}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial v_i^*}{\partial y} \right] + \frac{E}{1-\mu^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_p \sum_r c_{i,pr} \xi_p(x_i) \cos \frac{r\pi y}{b} \right] + \right. \\ & + \mu \left[ \sum_p \sum_r \frac{r\pi}{b} e_{i,pr} \psi_p(x_i) \cos \frac{r\pi y}{b} \right] - (K_{1,i} - \mu K_{2,i}) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right)^2 + \\ & \left. + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial y} \right)^2 \right\} = \sigma_{x,i}^* + \sigma_{x,i}^1. \end{aligned} \quad (24)$$

Аналогично получаем

$$\sigma_{y,i} = \sigma_{y,i}^* + \sigma_{y,i}^1; \quad (25)$$

$$\tau_i = \tau_i^* + \tau_i^1. \quad (26)$$

Подставляя (18) и (19) в формулы (24) - (26), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{x,i} = & \frac{E}{1+\mu} \sum_l \pi \left[ \bar{A}_l^i \operatorname{ch} \frac{l\pi x_i}{b} + \bar{B}_l^i \operatorname{sh} \frac{l\pi x_i}{b} + \bar{C}_l^i \left( \frac{x_i}{b} \operatorname{ch} \frac{l\pi x_i}{b} - \frac{1}{\pi} \frac{1-\mu}{1+\mu} \operatorname{sh} \frac{l\pi x_i}{b} \right) + \right. \\ & \left. + \bar{D}_l^i \left( \frac{x_i}{b} \operatorname{sh} \frac{l\pi x_i}{b} - \frac{1}{\pi} \frac{1-\mu}{1+\mu} \operatorname{ch} \frac{l\pi x_i}{b} \right) \right] \sin \frac{l\pi y}{b} + \sigma_{x,i}^1; \quad l=1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{y,i} = & -\frac{E}{1+\mu} \sum_l \pi \left[ \bar{A}_l^i \operatorname{ch} \frac{l\pi x_i}{b} + \bar{B}_l^i \operatorname{sh} \frac{l\pi x_i}{b} + \bar{e}_l^i \left( \frac{x_i}{b} \operatorname{ch} \frac{l\pi x_i}{b} + \frac{1}{\pi} \frac{1+\mu}{1+\mu} \operatorname{sh} \frac{l\pi x_i}{b} \right) + \right. \\ & \left. + \bar{D}_l^i \left( \frac{x_i}{b} \operatorname{sh} \frac{l\pi x_i}{b} + \frac{1}{\pi} \frac{1+\mu}{1+\mu} \operatorname{ch} \frac{l\pi x_i}{b} \right) \right] \sin \frac{l\pi y}{b} + \sigma_{y,i}^1; \end{aligned} \quad (28)$$



$$\tau_i = \frac{E}{1+\mu} \sum_t \left[ \bar{A}_t^i \operatorname{sh} \frac{t\pi x_i}{b} + \bar{B}_t^i \operatorname{ch} \frac{t\pi x_i}{b} + \bar{C}_t^i \left( \frac{x_i}{b} \operatorname{sh} \frac{t\pi x_i}{b} + \frac{1}{t\pi} \frac{2\mu}{1+\mu} \operatorname{ch} \frac{t\pi x_i}{b} \right) + \right. \\ \left. + \bar{D}_t^i \left( \frac{x_i}{b} \operatorname{ch} \frac{t\pi x_i}{b} + \frac{1}{t\pi} \frac{2\mu}{1+\mu} \operatorname{sh} \frac{t\pi x_i}{b} \right) \right] \cos \frac{t\pi y}{b} + \tau_i^1. \quad (29)$$

Для того, чтобы иметь возможность сравнения коэффициентов в уравнении (2), выражения  $\sigma_{x,i}^*$ ,  $\sigma_{y,i}^*$  и  $\tau_i^*$  разлагаются в ряды Фурье, аналогичные выражениям  $\sigma_{x,i}^1$ ,  $\sigma_{y,i}^1$  и  $\tau_i^1$ . Таким образом получим

$$\sigma_{x,i}^* \approx \sum_s \sum_t r_{s,t}^i \Psi_s(x_i) \cos \frac{t\pi y}{b}; \quad s=0,1,2,\dots \quad t=0,2,4,\dots \quad (30)$$

$$\sigma_{y,i}^* \approx \sum_s \sum_t s_{s,t}^i \Psi_s(x_i) \cos \frac{t\pi y}{b}; \quad (31)$$

$$\tau_i^* \approx \sum_s \sum_t t_{s,t}^i \Psi_s(x_i) \sin \frac{t\pi y}{b}. \quad (32)$$

Подставляя теперь выражения мембранных напряжений в уравнение (2) и имея в виду, что  $\nabla^2 \nabla^2 w^* = 0$ , получаем после группирования членов с одинаковыми тригонометрическими функциями систему кубических уравнений для определения  $w_{i,kl}$ .

Все остальные неизвестные величины (усилия, перемещения) можно легко вычислить по найденным значениям.

### 3. Порядок вычисления

1) Подставляя (16) и (17) в уравнения равновесия (6), (7), выражаем  $c_{i,pr}$  и  $\theta_{i,pr}$  через  $q_{x,i}$ ,  $w_{i,kl}$  и  $\sigma_{i,kl}$ .

2) Выражаем  $\sigma_{x,i}^1$ ,  $\sigma_{y,i}^1$  и  $\tau_i^1$  через  $q_{x,i}$ ,  $w_{i,kl}$  и  $\sigma_{i,kl}$ .

3) Составляем и решаем систему линейных алгебраических уравнений (20), (23) относительно коэффициентов  $\bar{A}_t^i$ ,  $\bar{B}_t^i$ ,  $\bar{C}_t^i$ ,  $\bar{D}_t^i$ ,  $\bar{A}_t^i$ ,  $\bar{B}_t^i$ ,  $\bar{C}_t^i$  и  $\bar{D}_t^i$ , как функций от  $q_{x,i}$ ,  $w_{i,kl}$  и  $\sigma_{i,kl}$ .

4) При помощи найденных коэффициентов  $\bar{A}_t^i \div \bar{D}_t^i$  вычисляем  $\sigma_{i,kl}$  как функции от  $w_{i,kl}$  и  $q_{x,i}$ .

5) По значениям  $\bar{A}_l^i \div \bar{D}_l^i$  вычисляем  $r_{s,t}^i, s_{s,t}^i$  и  $t_{s,t}^i$  в формулах (30), (31), (32).

6) Подставляем все найденные величины в уравнение равновесия (2), группируем члены с одинаковыми тригонометрическими функциями и составляем таким образом систему кубических уравнений относительно  $w_{i,\kappa l}$ .

7) Решаем систему кубических уравнений и находим  $w_{i,\kappa l}$ .

8) Вычисляем все остальные интересующие нас величины.

J. Aare, K. Loorits

The Design of Metallic Folded Plates  
According to the Nonlinear Theory

S u m m a r y

This paper deals with the method of the design of metallic folded plates. The fundamental equations are derived from yields considering the geometrical non-linearity of construction.



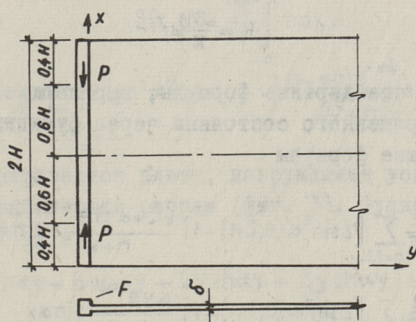
УДК 539.371

Л.А. Алликас

ПЛИТА, УСИЛЕННАЯ РЕБРАМИ

В работе исследуется плоское напряженное состояние системы ребра-плита. Предполагается, что 1) коэффициент Пуассона  $\mu = 0$ ; 2) внешняя нагрузка и контактное напряжение сдвига между ребрами и плитой приложены к оси ребра, 3) жесткость ребра при изгибе равна нулю и 4) нормальные напряжения равномерно распределены по поперечному сечению ребра.

Во-первых, рассматривается задача полубесконечной полосы, которая нагружена в торце по ребру двумя уравновешенными сосредоточенными усилиями (фиг.1).



Фиг. 1.

Функция напряжения  $F$ , предполагая, что  $\sigma_x(x,0) = 0$ , выбирается в виде

$$\tilde{F} = \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{\alpha} B e^{-\alpha y} \sin \alpha x, \quad (1)$$

где  $\alpha = \frac{n\pi}{2H}$ .

Коэффициент  $B$  определяется из условия контакта глита-ребро

$$\sigma_x(x, 0) = p(x) - \frac{\delta}{F} \int_0^x \tau dx, \quad (2)$$

где  $p(x)$  - нормальные напряжения в ребре от внешней нагрузки,

$\tau$  - контактное сдвигающее напряжение между ребрами и плитой.

Напряжения в ребре  $p(x) = P \cdot F = 1$ , разложенные в ряд Фурье, имеют вид

$$p(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{2 \sin^2 \alpha (0,2H) - 1}{n} \sin \alpha x \quad (3)$$

и из уравнения (2) получаем

$$B = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{2 \sin^2 \alpha (0,2H) - 1}{n+k}, \quad (4)$$

где  $k = \frac{\delta H}{\pi F}$ .

Используя стандартные формулы, выражающие компоненты плоского напряженного состояния через функцию напряжения, получим следующие формулы

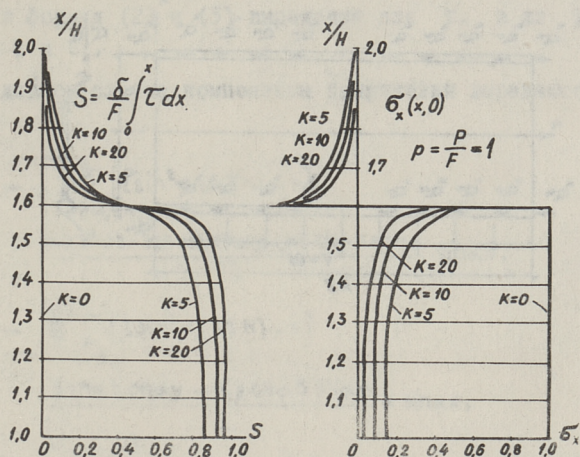
$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} [2 \sin^2 \alpha (0,2H) - 1] \frac{(-2+\alpha y) e^{-\alpha y}}{n+k} \sin \alpha x, \\ \sigma_y &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} [2 \sin^2 \alpha (0,2H) - 1] \frac{\alpha y e^{-\alpha y}}{n+k} \sin \alpha x, \\ \tau &= -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} [2 \sin^2 \alpha (0,2H) - 1] \frac{(-1+\alpha y) e^{-\alpha y}}{n+k} \cos \alpha x. \end{aligned} \quad (5)$$

Сходимость нормального напряжения вблизи ребра медленная. Для расчета напряжений в ребре  $\sigma_x(x, 0)$  предпочтительно использовать формулу (2).

Эпюры напряжений и рассчитанные по формуле (6) усилия



сдвига между ребрами и плитой  $S(x, 0)$  при  $n = 1, 3 \dots 101$  представлены на фиг. 2.



Фиг. 2.

$$S(x, 0) = \frac{\delta}{F} \int_0^x \tau dx = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \left[ 2 \sin^2 \alpha (0,2H) - 1 \right] \frac{(1-\alpha b) e^{-\alpha b}}{\frac{n^2}{K} + n} \sin \alpha x. \quad (6)$$

Далее рассматривается плита, нагруженная усилиями, приложенными к окаймляющим ребрам (фиг. 3). Функция напряжений выбирается в виде

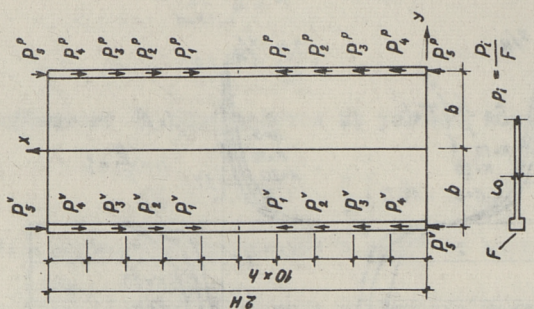
$$\tilde{F} = (A \operatorname{sh} \alpha y + B \operatorname{ch} \alpha y + C y \operatorname{sh} \alpha y + D y \operatorname{ch} \alpha y) \sin \alpha x. \quad (7)$$

Краевые условия

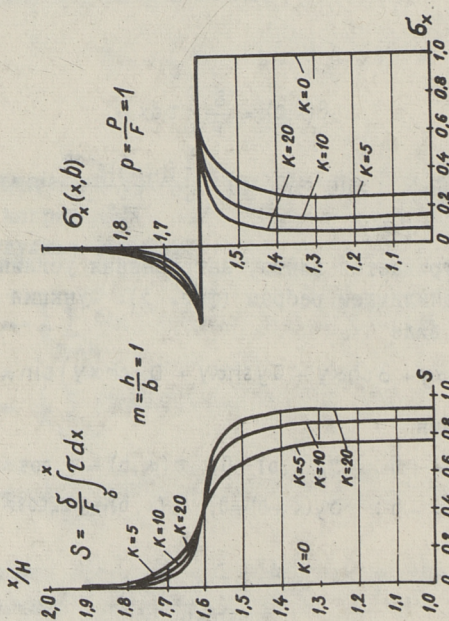
$$\begin{aligned} y = +b &: \sigma_y(x, b) = 0, \quad \tau(x, b) = \tau_n \cos \alpha x, \\ y = -b &: \sigma_y(x, -b) = 0, \quad \tau(x, -b) = -\tau_n \cos \alpha x \end{aligned} \quad (8)$$

дают

$$\begin{aligned} A = D = 0, \\ B = \frac{b \operatorname{sh} \alpha b}{\alpha (b + \operatorname{sh} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b)} \tau_n, \end{aligned} \quad (9)$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.



$$C = \frac{-ch\alpha b}{\alpha(\alpha b + sh\alpha b ch\alpha b)}, \tau_n$$

Принимая  $P_3 = F = 1$  и остальные силы равными нулю, получим из формул (2) и (3) выражения для  $\tau_n$  и из формулы (9) для  $B$  и  $C$ .

В данном случае компоненты напряжения выражаются в виде

$$\sigma_x = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} [2 \sin^2 \alpha (0,2H) - 1] \frac{(\alpha b sh\alpha b - 2ch\alpha b) ch\alpha y - \alpha y ch\alpha b sh\alpha y}{E} \sin \alpha x, \quad (10)$$

$$\sigma_y = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} [2 \sin^2 \alpha (0,2H) - 1] \frac{b sh\alpha b ch\alpha y - \alpha y ch\alpha b sh\alpha y}{E} \alpha \sin \alpha x,$$

$$\tau = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} [2 \sin^2 \alpha (0,2H) - 1] \frac{(\alpha b sh\alpha b - ch\alpha b - \alpha y ch\alpha b) sh\alpha y}{E} \cos \alpha x,$$

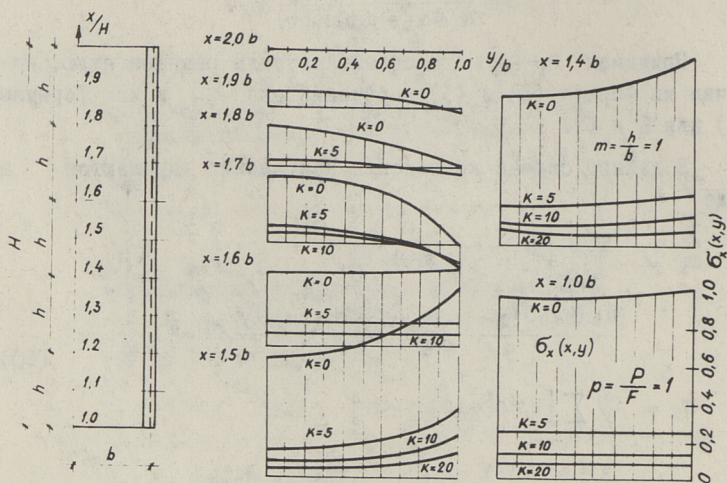
где  $E = 2\alpha ch^2 \alpha b + \frac{\delta}{F} (\alpha b + sh\alpha b ch\alpha b)$ .

Эпюры сдвигающей силы  $S(x, b)$  и напряжений ребер  $\sigma_x(x, b)$  представлены на фиг. 4, а диаграммы напряжений  $\sigma_x(x, y)$  при  $n = 1, 3, \dots, 101$  на фиг. 5.

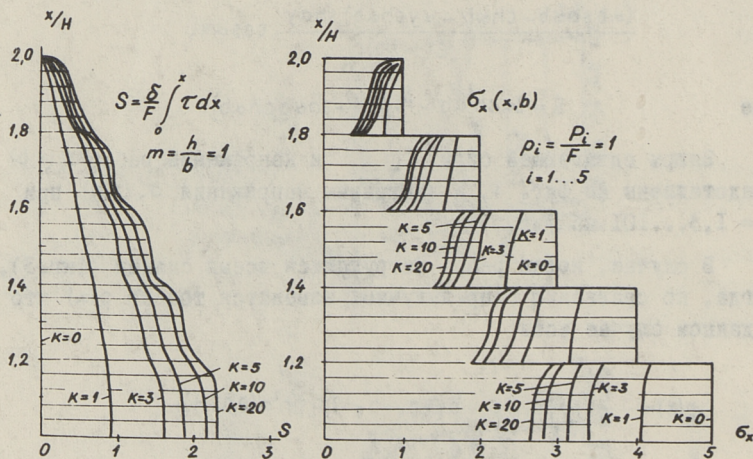
В случае, когда ребра нагружаются всеми силами (фиг. 3), тогда, по сравнению с предыдущим, изменится только  $p(\alpha)$  что в данном случае есть

$$p(\alpha) = -\frac{2}{H} \sum_{n=1,3,\dots} [p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 - 2p_2 \sin^2 \alpha (0,05H) - 2p_3 \sin^2 \alpha (0,1H) - 2p_4 \sin^2 \alpha (0,15H) - 2p_5 \sin^2 \alpha (0,2H)] \frac{\sin \alpha x}{\alpha}, \quad (11)$$

где  $p_i = P_i \cdot F$ .



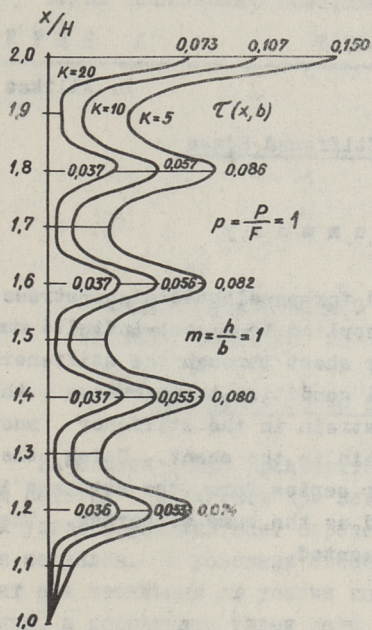
Фиг. 5.



Фиг. 6

Эпюры напряжений  $\sigma_x(x,b)$  и  $\tau(x,b)$  и сдвигающих сил  $S(x,b)$  для значений  $\rho_i = 1$  представлены на Фиг. 6 и 7.





Фиг. 7.

### Л и т е р а т у р а

1. А. Мелан. Ing.-Arciv, 3, Н-2, 1932.
2. Л. А л л и к а с. Труды ТПИ, серия А, №200, 1963.
3. Л. А л л и к а с. Труды ТПИ, серия А, №296, 1970.

A Plate With Stiffened Edges

S u m m a r y

Solutions are obtained for an elastic plane-stress problem on which loads are applied to a semi-infinite strip and to a finite rectangular sheet through the stiffeners (fig.1 and 3). The physical condition that governs the problem is that the axial strain in the stiffener must be equal to the normal strain in the sheet. Using the stress functions in Fourier series form, the stresses in the structures are obtained as the sums of series. The numerical examples are presented.



УДК 624.074  
 624.04

В.Р. Кульбах

К ВОПРОСУ СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА СЕДЛОВИДНЫХ  
 ВИСЯЧИХ ПОКРЫТИЙ ПО ДИСКРЕТНОЙ СХЕМЕ

Начальная форма сетевой поверхности

Начальная форма предварительно напряженной седловидной сетевой поверхности при заданных координатах контурных узлов и усилиях вант определяется условиями равновесия ее узлов. В условиях свободного взаимного скольжения вант при натяжении их усилия постоянны по длине каждой ванты, а координаты узлов сети определяются векторным уравнением [1]:

$$S_{oi} \left( \frac{\bar{r}_{i,k+1} - \bar{r}_{i,k}}{a_{i,k}} + \frac{\bar{r}_{i,k-1} - \bar{r}_{i,k}}{a_{i,k-1}} \right) + T_{ок} \left( \frac{\bar{r}_{i+1,k} - \bar{r}_{i,k}}{b_{i,k}} + \frac{\bar{r}_{i-1,k} - \bar{r}_{i,k}}{b_{i-1,k}} \right) = 0, \quad (1)$$

которому соответствует три скалярных условия равновесия

$$S_{oi} \left( \frac{x_{i,k+1} - x_{i,k}}{a_{i,k}} + \frac{x_{i,k-1} - x_{i,k}}{a_{i,k-1}} \right) + T_{ок} \left( \frac{x_{i+1,k} - x_{i,k}}{b_{i,k}} + \frac{x_{i-1,k} - x_{i,k}}{b_{i-1,k}} \right) = 0, \quad (2)$$

$$S_{oi} \left( \frac{y_{i,k+1} - y_{i,k}}{a_{i,k}} + \frac{y_{i,k-1} - y_{i,k}}{a_{i,k-1}} \right) + T_{ок} \left( \frac{y_{i+1,k} - y_{i,k}}{b_{i,k}} + \frac{y_{i-1,k} - y_{i,k}}{b_{i-1,k}} \right) = 0, \quad (3)$$

$$S_{oi} \left( \frac{z_{i,k+1} - z_{i,k}}{a_{i,k}} + \frac{z_{i,k-1} - z_{i,k}}{a_{i,k-1}} \right) + T_{ок} \left( \frac{z_{i+1,k} - z_{i,k}}{b_{i,k}} + \frac{z_{i-1,k} - z_{i,k}}{b_{i-1,k}} \right) = 0, \quad (4)$$

где  $\bar{r}_{i,k}$  - радиус-вектор узла  $i, k$ ,  
 $a_{i,k}$  - длина отрезка  $i$ -той несущей ванты между узлами  $i, k$  и  $i, k+1$ ,

$b_{i,k}$  - длина отрезка  $k$ -той стягивающей ванты между узлами  $i,k$  и  $i+1,k$ ,  
 $S_{oi}, T_{ok}$  - усилия предварительного напряжения  $i$ -той несущей и  $k$ -той стягивающей вант соответственно.

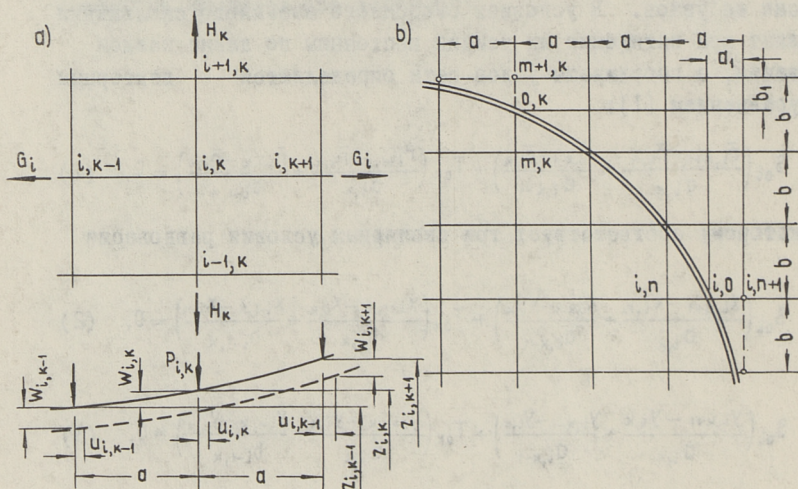
Ординаты узлов сети, ванты каждого семейства которой располагаются во взаимно параллельных вертикальных плоскостях, определяются системой уравнений (фиг. 1а)

$$G_{oi} \left( \frac{z_{i,k+1} - z_{i,k}}{a} + \frac{z_{i,k-1} - z_{i,k}}{a} \right) + H_{ok} \left( \frac{z_{i+1,k} - z_{i,k}}{b} + \frac{z_{i-1,k} - z_{i,k}}{b} \right) = 0, \quad (5)$$

где  $G_{oi}$  - горизонтальные составляющие условий (распоры) несущих вант,

$H_{ok}$  - те же, для стягивающих вант,

$a, b$  - шаг стягивающих и несущих вант соответственно.



Фиг. 1.

Система уравнений (5) содержит лишь по одному неизвестному для каждого узла сети. Распоры вант постоянны по всей длине каждой ванты. Поэтому система из уравнений (5) может



быть преобразована к виду, известному из конечно-разностного метода решения дифференциальных уравнений с частотными производными

$$z_{i,k} = \frac{(z_{i,k-1} + z_{i,k+1}) + \lambda(z_{i-1,k} + z_{i+1,k})}{2(1+\lambda)}, \quad (6)$$

где

$$\lambda = \frac{H_{0k} a}{G_{0i} b}$$

Для нахождения ординат приконтурных узлов сети (фиг. 1б) по формуле (6) необходимо ввести внеконтурные узлы с ординатами

$$z_{i,n+1} = \frac{z_{i,0} - \frac{a_1}{a} z_{i,n}}{1 - \frac{a_1}{a}} \quad (7)$$

или

$$z_{m+1,k} = \frac{z_{0,k} - \frac{b_1}{b} z_{m,k}}{1 - \frac{b_1}{b}} \quad (8)$$

Система из уравнений (6) может быть решена методом последовательных приближений.

#### Общие дискретные уравнения статики упругой сети при действии внешней нагрузки

Работа сети при действии внешней нагрузки определяется условиями равновесия и геометрическими уравнениями. В случае малых деформаций ( $\varepsilon < 1$ ) мы имеем систему исходных уравнений для сети с зафиксированными узлами в виде

$$S_{i,k-1} \frac{x_{i,k-1} - x_{i,k} + u_{i,k-1} - u_{i,k}}{a_{i,k-1}} + S_{i,k} \frac{x_{i,k+1} - x_{i,k} + u_{i,k+1} - u_{i,k}}{a_{i,k}} +$$

$$+ T_{i-1,k} \frac{x_{i-1,k} - x_{i,k} + u_{i-1,k} - u_{i,k}}{b_{i-1,k}} + T_{i,k} \frac{x_{i+1,k} - x_{i,k} + u_{i+1,k} - u_{i,k}}{b_{i,k}} + X_{ik} = 0; \quad (9)$$

$$S_{i,k-1} \frac{y_{i,k-1} - y_{i,k} + v_{i,k-1} - v_{i,k}}{a_{i,k-1}} + S_{i,k} \frac{y_{i,k+1} - y_{i,k} + v_{i,k+1} - v_{i,k}}{a_{i,k}} +$$

$$+ T_{i-1,k} \frac{y_{i-1,k} - y_{i,k} + v_{i-1,k} - v_{i,k}}{b_{i-1,k}} + T_{i,k} \frac{y_{i+1,k} - y_{i,k} + v_{i+1,k} - v_{i,k}}{b_{i,k}} + Y_{ik} = 0; \quad (10)$$

$$S_{i,k-1} \frac{Z_{i,k-1} - Z_{i,k} + W_{i,k-1} - W_{i,k}}{a_{i,k-1}} + S_{i,k} \frac{Z_{i,k+1} - Z_{i,k} + W_{i,k+1} - W_{i,k}}{a_{i,k}} +$$

$$+ T_{i-1,k} \frac{Z_{i-1,k} - Z_{i,k} + W_{i-1,k} - W_{i,k}}{b_{i,k-1}} + T_{i,k} \frac{Z_{i+1,k} - Z_{i,k} + W_{i+1,k} - W_{i,k}}{b_{i,k}} + Z_{i,k} = 0; \quad (11)$$

$$S_{i,k} = S_{0,i,k} + \frac{EF_i}{a_{i,k}^2} [(X_{i,k+1} - X_{i,k})(U_{i,k+1} - U_{i,k}) + (Y_{i,k+1} - Y_{i,k})(V_{i,k+1} - V_{i,k}) +$$

$$+ (Z_{i,k+1} - Z_{i,k})(W_{i,k+1} - W_{i,k}) + \frac{1}{2}(U_{i,k+1} - U_{i,k})^2 + \frac{1}{2}(V_{i,k+1} - V_{i,k})^2 + \frac{1}{2}(W_{i,k+1} - W_{i,k})^2]; \quad (12)$$

$$T_{i,k} = T_{0,i,k} + \frac{EF_k}{b_{i,k}^2} [(X_{i+1,k} - X_{i,k})(U_{i+1,k} - U_{i,k}) + (Y_{i+1,k} - Y_{i,k})(V_{i+1,k} - V_{i,k}) +$$

$$+ (Z_{i+1,k} - Z_{i,k})(W_{i+1,k} - W_{i,k}) + \frac{1}{2}(U_{i+1,k} - U_{i,k})^2 + \frac{1}{2}(V_{i+1,k} - V_{i,k})^2 + \frac{1}{2}(W_{i+1,k} - W_{i,k})^2]; \quad (13)$$

где  $u, v, w$  — составляющие перемещения узла  $i, k$ ,  
 $X, Y, Z$  — составляющие внешней нагрузки в узле  $i, k$ ,  
 $EF_i, EF_k$  — жесткость на растяжение  $i$ -той несущей  
и  $k$ -той стягивающей вант соответственно,  
 $S_{i,k}, T_{i,k}$  — усилие  $k$ -того отрезка  $i$ -той несущей ван-  
ты или  $i$ -того отрезка  $k$ -той стягивающей  
ванты соответственно.

Перемещения контурных узлов сети могут быть представлены как линейные функции от усилий крайних отрезков вант. При этом заранее должны быть построены линии влияния для указанных смещений. Система из уравнений (9)...(13) может быть решена методом естественной итерации, суть которого подробно объясняется при рассмотрении сети с плоскими вертикальными вантами. Общее количество уравнений в системе (9)...(13) составляет

$$5 \sum_{i=1}^m n_i + m + n,$$



где  $m$  - количество несущих вант сети,  
 $n$  - количество стягивающих вант сети,  
 $n_i$  - количество внутренних узлов  $i$ -той несущей ванта.

Дискретные уравнения для упругой сети с вертикальными вантами при действии вертикальной нагрузки

Опыт использования континуальной расчетной схемы, а также анализ уравнений дискретных упругих сетей [2] показывают, что горизонтальные смещения узлов сети, перпендикулярные плоскости рассматриваемой ванта, при действии вертикальной нагрузки, не оказывают существенного влияния на результаты расчета. С другой стороны известно, что горизонтальные составляющие усилий (распоры) вант при действии вертикальной нагрузки постоянны по всей длине каждой ванта. Поэтому третье уравнение равновесия узла  $i, k$  в таком случае может быть представлено в виде

$$G_i \frac{(z_{i,k-1} - 2z_{i,k} + z_{i,k+1}) + (w_{i,k-1} - 2w_{i,k} + w_{i,k+1})}{a} + H_k \frac{(z_{i-1,k} - 2z_{i,k} + z_{i+1,k}) + (w_{i-1,k} - 2w_{i,k} + w_{i+1,k})}{b} + P_{i,k} = 0, \quad (I4)$$

а геометрические уравнения в виде

$$\frac{G_i - G_{0i}}{EF_i} \left[ 1 + \left( \frac{z_{i,k+1} - z_{i,k}}{a} \right)^2 \right]^{3/2} = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{a} + \frac{w_{i,k+1} - w_{i,k}}{a} \left( \frac{z_{i,k+1} - z_{i,k}}{a} + \frac{w_{i,k+1} - w_{i,k}}{2a} \right), \quad (I5)$$

$$\frac{H_k - H_{0k}}{EF_k} \left[ 1 + \left( \frac{z_{i+1,k} - z_{i,k}}{b} \right)^2 \right]^{3/2} = \frac{v_{i+1,k} - v_{i,k}}{b} + \frac{w_{i+1,k} - w_{i,k}}{b} \left( \frac{z_{i+1,k} - z_{i,k}}{b} + \frac{w_{i+1,k} - w_{i,k}}{2b} \right), \quad (I6)$$

где  $G_i$  - полный распор  $i$ -той несущей ванта,

$H_k$  - полный распор  $k$ -той стягивающей ванты,  
 $a$  - шаг стягивающих вант,  
 $b$  - шаг несущих вант.

Из геометрических уравнений суммированием могут быть исключены горизонтальные смещения внутренних узлов сети:

$$\begin{aligned}
 & \frac{G_i - G_{oi}}{EF_i} \sum_{j=1}^m \left[ 1 + \left( \frac{z_{j,k+1} - z_{j,k}}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{u_{i,n+1} - u_{i,1}}{a} + \\
 & + \sum_{j=1}^m \frac{w_{j,k+1} - w_{j,k}}{a} \left( \frac{z_{j,k+1} - z_{j,k}}{a} + \frac{w_{j,k+1} - w_{j,k}}{2a} \right), \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{H_k - H_{ok}}{EF_k} \sum_{l=1}^n \left[ 1 + \left( \frac{z_{l+1,k} - z_{l,k}}{b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{v_{m+1,k} - v_{l,k}}{b} + \\
 & + \sum_{l=1}^n \frac{w_{l+1,l} - w_{l,l}}{b} \left( \frac{z_{l+1,l} - z_{l,l}}{b} + \frac{w_{l+1,l} - w_{l,l}}{2b} \right), \quad (18)
 \end{aligned}$$

где  $u_{i,n+1}$ ,  $u_{i,1}$ ,  $v_{m+1,k}$ ,  $v_{l,k}$  - перемещения опорных узлов  $i$ -той несущей и  $k$ -той стягивающей вант соответственно.

Разности горизонтальных смещений концевых узлов сети определяются упругими деформациями контура. Для определенности рассмотрим сеть с контуром из двух плоских наклонных арок, сечения которых развиты в плоскости кривизны арки и благодаря прикреплению к стойкам стенового каркаса могут смещаться только в горизонтальном направлении. В таком случае имеем

$$u_{i,n+1} - u_{i,1} = -\frac{2}{EJ} \left[ \sum_{j=1}^m (G_j - G_{oj}) \eta_{ij} + \sum_{l=1}^n (H_l - H_{ol}) \eta_{il} \cos \alpha \right], \quad (19)$$

$$v_{m+1,k} - v_{l,k} = -\frac{2}{EJ} \left[ \sum_{j=1}^m (G_j - G_{oj}) \frac{\eta_{kj}}{\cos \alpha} + \sum_{l=1}^n (H_l - H_{ol}) \eta_{kl} \right], \quad (20)$$

где  $\eta_{ij}$ ,  $\eta_{il}$  - ординаты линии влияния смещения опорного узла  $i$ -той несущей ванты в плоскости  $j$ -той несущей или  $l$ -той стягивающей ванты,



$\eta_{kj}$   $\eta_{kl}$  - те же, для  $k$ -той стягивающей ванты,  
 $\alpha$  - угол наклона контурных арок,  
 $EJ$  - изгибная жесткость контурных арок.

Система разрешающих уравнений теперь может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned}
 W_{i,k} = & \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{H_{k0}}{G_i b} \right)} \left[ (W_{i,k-1} + W_{i,k+1}) + \frac{H_{k0}}{G_i b} (W_{i-1,k} + W_{i+1,k}) + (Z_{i,k-1} - 2Z_{i,k} + Z_{i,k+1}) + \right. \\
 & \left. + \frac{H_{k0}}{G_i b} (Z_{i-1,k} - 2Z_{i,k} + Z_{i+1,k}) - \frac{P_{ik0}}{G_i} \right], \quad (21)
 \end{aligned}$$

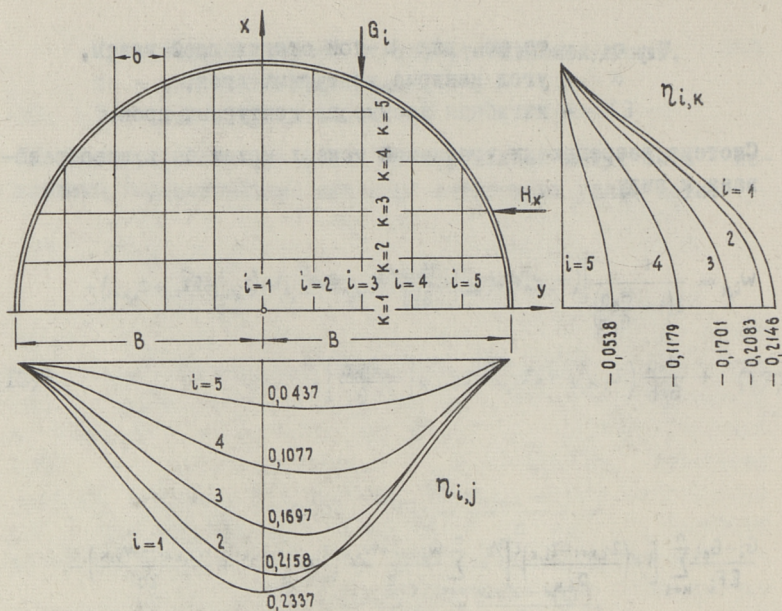
$$\begin{aligned}
 \frac{G_i - G_{0i}}{EF_i} \sum_{k=1}^n \left[ 1 + \left( \frac{Z_{i,k+1} - Z_{i,k}}{a_{i,k}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = & \sum_{k=1}^n \frac{W_{i,k+1} - W_{i,k}}{a} \left( \frac{Z_{i,k+1} - Z_{i,k}}{a} + \frac{W_{i,k+1} - W_{i,k}}{2a} \right) - \\
 - & \frac{2EF_i B^3}{\pi EJ a} \left[ \sum_{j=1}^m \frac{G_j - G_{0j}}{EF_j} \eta_{ij} + \sum_{l=1}^n \frac{H_l - H_{0l}}{EF_l} \eta_{il} \cos \alpha \right], \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{H_k - H_{0k}}{EF_k} \sum_{i=1}^m \left[ 1 + \left( \frac{Z_{i+1,k} - Z_{i,k}}{b_{i,k}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = & \sum_{i=1}^m \frac{W_{i+1,k} - W_{i,k}}{b} \left( \frac{Z_{i+1,k} - Z_{i,k}}{b} + \frac{W_{i+1,k} - W_{i,k}}{2b} \right) - \\
 - & \frac{2EF_i B^3}{\pi EJ b} \left[ \sum_{j=1}^m \frac{(G_j - G_{0j}) \eta_{kj}}{EF_j \cos \alpha} + \sum_{l=1}^n \frac{H_l - H_{0l}}{EF_l} \eta_{kl} \right]. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Для решения этой системы должны быть построены линии влияния смещений контурных арок. На фиг. 2 представлены линии влияния смещений ломаного кольца, состоящего из двух полукруглых арок единичного радиуса  $B = 1$  и единичной изгибной жесткости  $EJ = \frac{1}{\pi}$ .

Общее количество уравнений в системе (21)...(23) составляет

$$\sum_{i=1}^m n_i + m + n,$$



Фиг. 2.

т.е. намного меньше, нежели в общей системе (9)...(13). Для решения этой системы мы рекомендуем метод естественной итерации, заключающийся в последовательном решении системы из условий равновесия (21) относительно смещений  $w_{i,k}$  при заданных распорах и системы из геометрических уравнений (22) и (23) относительно распоров  $G_i$  и  $H_k$  при заданных смещениях  $w_{i,k}$ . При нахождении очередных приближений для распоров прогибы задаются по результатам двух предыдущих этапов решения системы (21)

$$w_{i,k} = w_{i,k}'' + k_1 (w_{i,k}' - w_{i,k}''),$$

где  $k_1 = 0,05$  - коэффициент итерации прогибов.

Очередное приближение для смещений  $w_{i,k}$  находится по результатам последних этапов решения системы из уравнений (22) и (23):

$$G_i = G_i'' + k_2 (G_i' - G_i''),$$

$$H_k = H_k'' + k_2 (H_k' - H_k''),$$

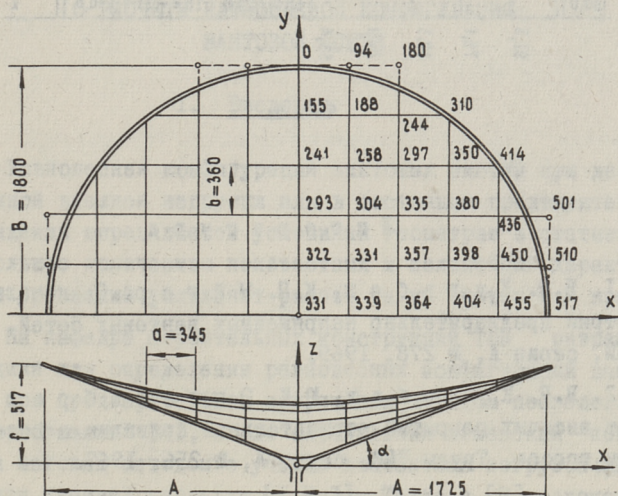


где  $k_1 = 0,1$  - коэффициент итерации распоров.

Введение коэффициентов итерации  $k_1$  и  $k_2$  необходимо для обеспечения сходимости процесса итерации.

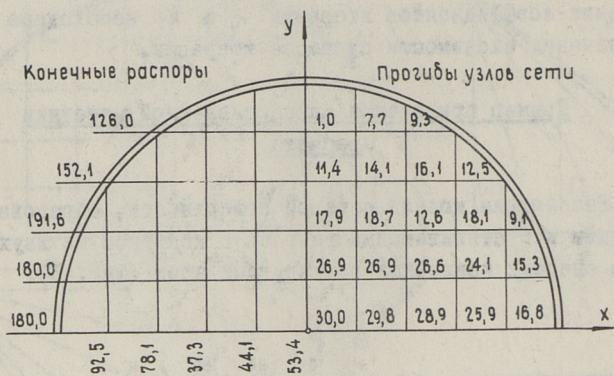
Пример приложения представленной методики  
расчета

Рассмотрим модель сетевой поверхности, образованную 9 несущими и 9 стягивающими вантами с контуром из двух свободно опертых наклонных полукруглых арок (Фиг. 3).



Фиг. 3.

Начальные ординаты узлов сети определены согласно формулам (6)...(8) при  $G_0 = H_0 = 100$  кГ. Смещения узлов сети и усилия вант при действии внешней нагрузки, определенные по системе из уравнений (21)...(23), при  $P_{i,k} = 7,59$  кГ,  $E F_i = E F_k = 0,002 \cdot 2,03 \cdot 10^6$  кГ и  $\frac{2 E F_i B^3}{\pi E J a} = 24$  представлены на схеме Фиг. 4. Результаты расчета хорошо сходятся с данными экспериментальных исследований, выполненных над указанной моделью на кафедре строительных конструкций Таллинского политехнического института.



Фиг. 4.

### Л и т е р а т у р а

1. В.Р. Кульбах, К.П. Нйгер. О начальной геометрии предварительно напряженных вантовых сетей. Труды ТПИ, серия А, № 278, 1969.

2. В.Р. Кульбах, Ю.К. Энгельбрехт. Расчет висячих покрытий отрицательной кривизны с конечным числом тросов. Труды ТПИ, серия А, № 256, 1967.

V.Kulbach

### On the Cable-Network Stress Analysis

The general nonlinear equations for the calculation of forces and displacement of discrete cable-network are given. Some considerations on the solution of these equations are presented. Further the network with vertical plane cables is examined. For the solution of the equation system in this case the method of natural iteration is recommended. This method is applicable for the calculation of forces and displacements of the network by means of electronic computer.



УДК 624.674

624.04

У.В.-Э. Мянд, В.Р. Кульбах

## О РАСЧЕТЕ РАВНОВЕСНОЙ КОНФИГУРАЦИИ ВАНТОВОЙ СЕТИ

### 1. Введение

Равновесная конфигурация вантовых систем при действии заданной внешней нагрузки или в состоянии предварительного напряжения определяется условиями геометрии и статики [5]. Но большое количество неизвестных и нелинейный характер системы уравнений усложняет расчет таких систем в практике.

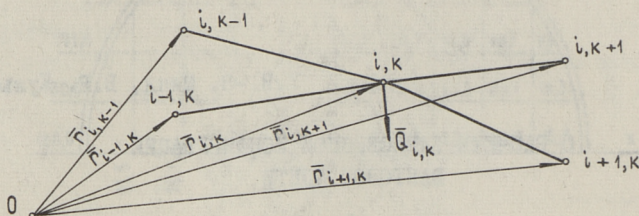
На кафедре строительных конструкций ТПИ разработана методика для определения равновесных конфигураций вантовой сети при предварительном напряжении методом последовательных приближений [4], и для определения изменений конфигурации шаговым методом с учетом контактных нагрузок при приложении внешней нагрузки [1,2,3]. Также в [8] изложена методика расчета висячих покрытий в связи с программированием расчета на ЭЦВМ "Минск-22" для определения равновесной конфигурации тросовой сети.

По предоставленной методике решается вантовая нелинейная система уравнений равновесия для всех точек сетки в отдельных взаимосвязанных группах, применяя метод последовательных приближений Ньютона. Приняты следующие общие допущения:

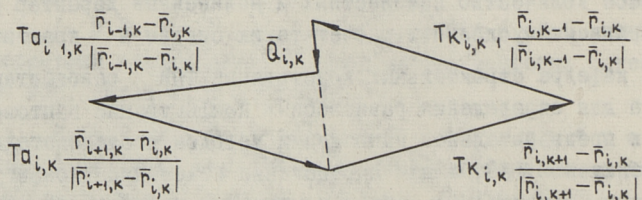
- 1) элементы кровли не участвуют в работе покрытия,
- 2) изгибной жесткостью вант пренебрегают,
- 3) внешняя нагрузка, вес вантовой сети и покрытия передаются только в узлах сети,
- 4) ванты сопротивляются только при растяжении.

## 2. Общие уравнения

Местонахождение узла сетки  $i, k$  на фиг. 1 определяется радиус-вектором  $\bar{r}_{i,k}$  вектор внешней нагрузки обозначается  $\bar{Q}_{i,k}$ , усилия в натягивающих и несущих тросах соответственно  $T_{a_{i,k}}$  и  $T_{k_{i,k}}$ .



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Равновесие нагруженного узла сетки характеризуется закрытым силовым многоугольником (Фиг. 2), исходя из которого имеем уравнение равновесия в виде:

$$T_{a_{i-1,k}} \frac{\bar{r}_{i-1,k} - \bar{r}_{i,k}}{|\bar{r}_{i-1,k} - \bar{r}_{i,k}|} + T_{a_{i,k}} \frac{\bar{r}_{i+1,k} - \bar{r}_{i,k}}{|\bar{r}_{i+1,k} - \bar{r}_{i,k}|} +$$



$$T_{K_{i,k-1}} \frac{\bar{r}_{i,k-1} - \bar{r}_{i,k}}{|\bar{r}_{i,k-1} - \bar{r}_{i,k}|} + T_{a_{i,k}} \frac{\bar{r}_{i,k+1} - \bar{r}_{i,k}}{|\bar{r}_{i,k+1} - \bar{r}_{i,k}|} + \bar{a}_{i,k} = 0. \quad (1)$$

Обозначаем длины векторов:

$$sq_{i,k} = |\bar{r}_{i+1,k} - \bar{r}_{i,k}| = \left[ \sum_{j=1}^3 (x_{j,i+1,k} - x_{j,i,k})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$$sk_{i,k} = |\bar{r}_{i,k+1} - \bar{r}_{i,k}| = \left[ \sum_{j=1}^3 (x_{j,i,k+1} - x_{j,i,k})^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

где  $x_{j,i,k}$  - координата узла  
 $j = 1, 2, 3$  - индекс размерности пространства по осям  $X, Y$  и  $Z$ .

Приравнивая геометрические и физические удлинения по закону Гука, имеем геометрические уравнения для сетки, в которой несущие и натягивающие ванты соединяются в узлах без скольжения:

$$T_{a_{i,k}} = T_{a_{i,k}}^0 + E_a \cdot F_{a_k} \left( \frac{sq_{i,k}}{sq_{i,k}^0} - 1 \right), \quad (4)$$

$$T_{k_{i,k}} = T_{k_{i,k}}^0 + E_k \cdot F_{k_i} \left( \frac{sk_{i,k}}{sk_{i,k}^0} - 1 \right), \quad (5)$$

где  $F_{a_k}$  и  $F_{k_i}^0$  - сечение натягивающих и несущих вант,  
 $E_a$  и  $E_k$  - модули упругости вант,  
 $i = 1, 2, \dots, m$  - число несущих вант,  
 $k = 1, 2, \dots, n$  - число натягивающих вант.

Индекс  $(^0)$  здесь и в дальнейшем обозначает величины при предварительном напряженном состоянии сетки.

### 3. Решение задачи на ЭЦВМ

При составлении программы для определения конфигурации равновесной вантовой сетки приняты следующие условия работы сетки:

а) Без учета трения между вантами в узлах под действием предварительных напряжений образуется геодезическая сеть. В уравнениях равновесия (1) будем иметь

$$T_{i,k} = T_{i,k}^{\circ} \text{ и } T_{k,i,k} = T_{k,i,k}^{\circ}. \quad (6)$$

В принципе возможен также учет трения, если известна связь между трением в узлах и изменением усилий в стрелках вант сети.

б) При заданной геометрии и известных начальных рас-  
порах  $Ha_k^{\circ}$  и  $Hk_i^{\circ}$  начальные усилия в отрезках вант ор-  
тогональной сети определяются зависимостями:

$$T_{i,k}^{\circ} = Ha_k^{\circ} \frac{sa_{i,k}^{\circ}}{x_{1,i+1,k} - x_{1,i,k}} \text{ и } T_{k,i,k}^{\circ} = Hk_i^{\circ} \frac{sk_{i,k}^{\circ}}{x_{2,i,k+1} - x_{2,i,k}}. \quad (7)$$

В случаях а) и б) задаются только координаты и конфи-  
гурация контура. Ванты могут не пересекаться на контуре.

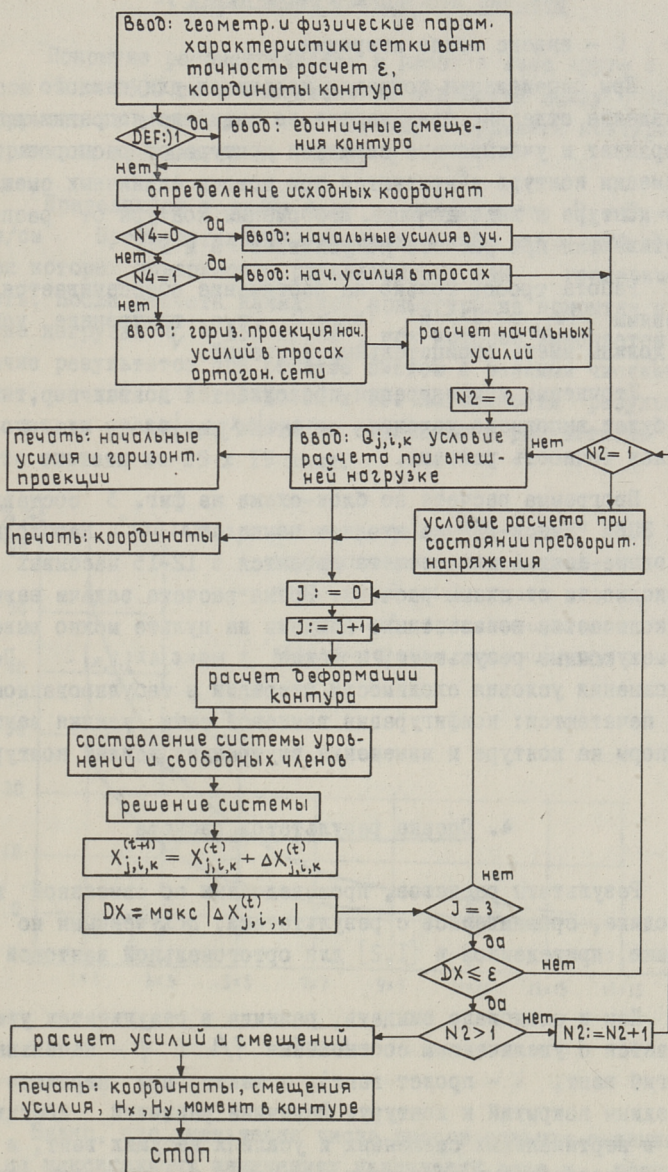
в) Приложена внешняя нагрузка, при которой находится  
конфигурация сетки и отличие ее от начальной конфигурации.  
При этом подставляем уравнения (2), (3), (4) и (5) в (1) и  
получаем новый вид разрешающих уравнений:

$$\begin{aligned} F_{j,i,k} = & \left( \frac{T_{i,k}^{\circ} - E_{\alpha} \cdot Fa_k}{sa_{i,k}^{\circ}} - \frac{E_{\alpha} \cdot Fa_k}{sa_{i,k}^{\circ}} \right) (x_{j,i+1,k} - x_{j,i,k}) + \\ & + \left( \frac{T_{i-1,k}^{\circ} - E_{\alpha} \cdot Fa_k}{sa_{i-1,k}^{\circ}} - \frac{E_{\alpha} \cdot Fa_k}{sa_{i-1,k}^{\circ}} \right) (x_{j,i-1,k} - x_{j,i,k}) + \\ & + \left( \frac{T_{k,i,k}^{\circ} - E_{\kappa} \cdot Fk_i}{sk_{i,k}^{\circ}} - \frac{E_{\kappa} \cdot Fk_i}{sk_{i,k}^{\circ}} \right) (x_{j,i+1,k} - x_{j,i,k}) + \\ & + \left( \frac{T_{k,i,k-1}^{\circ} - E_{\kappa} \cdot Fk_i}{sk_{i,k-1}^{\circ}} - \frac{E_{\kappa} \cdot Fk_i}{sk_{i,k-1}^{\circ}} \right) (x_{j,i,k-1} - x_{j,i,k}) + \beta_{j,i,k}, \end{aligned} \quad (8)$$

где индексы  $j = 1, 2, 3$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Для всех случаев неизвестными являются координаты уз-  
лов сети, поправочный вектор которых  $\Delta x_{j,i,k}$  находится  
из системы линейных уравнений с коэффициентами, определяе-  
мыми как частные производные функций (8) по неизвестным ве-  
личинам.





Фиг. 3.

Новые исходные величины

$$x_{j,i,k}^{(t+1)} = x_{j,i,k}^{(t)} + \Delta x_{j,i,k}^{(t)},$$

где  $t$  - индекс этапа итерации.

При определении поправок координат для каждого направления отдельно принимаются во внимание поправки других координат и учитываются смещения контура от распоров. Деформации контура учитываются при помощи единичных смещений для контура в виде матрицы. Деформации контура от распоров учитываются при расчете по условиям а и в.

Работа тросов только на растяжение обеспечивается условиями  $T_{a_{i,k}} \geq 0$  и  $T_{k_{i,k}} \geq 0$ , т.е. внутренние усилия не должны иметь отрицательных значений.

Уточнение конфигурации продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие  $\max |\Delta x_{j,i,k}| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  заданная точность решения.

Программа расчета по блок-схеме на фиг. 3 составлена для ЭЦВМ "Минск-22" на входном языке „MAGOL". Необходимые исходные данные для расчета вводятся в I2-I5 массивах в зависимости от схемы расчета. Время расчета задачи зависит от количества неизвестных. Ключами на пульте можно вывести промежуточные результаты, а также  $\max |\Delta x_{j,i,k}|$ . После выполнения условия сходимости итерации в табулированном виде печатаются: конфигурация вантовой сети, усилия вант, распоры на контуре и изменение внутренних усилий контура.

#### 4. Оценка результатов расчета

Результаты расчетов, произведенных по описанной выше методике, сравнивались с результатами, полученными по методике, приведенной в [1,2] для ортогональной вантовой сетки.

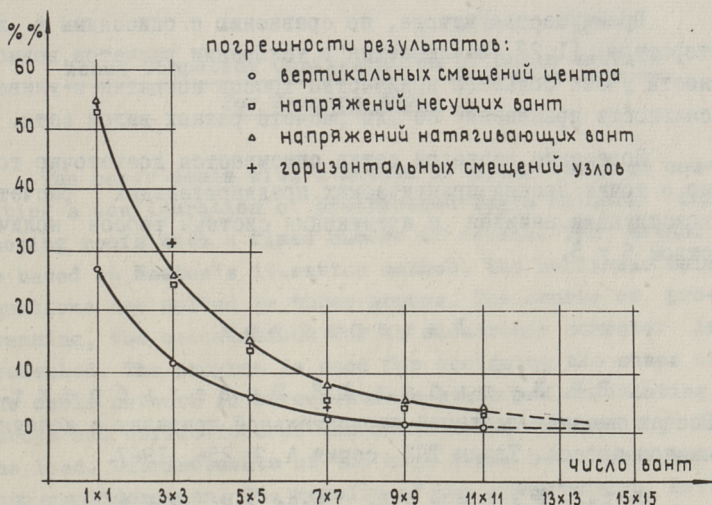
Как и следовало ожидать, разница в результатах увеличивается с увеличением соотношения  $f/l$  ( $f$  - начальный прогиб вант,  $l$  - пролет вант), а также при переходе от середины покрытий к контуру. Величина различий достигает 2 % в вертикальных смещениях и усилиях несущих вант, и 9 % - в горизонтальных смещениях и усилиях натягивающих вант.



## 5. Учет числа тросов при расчете

Покрытие рассматривается в плане в виде круга с радиусом  $R = 3600$  см и максимальной разностью между точками покрытия по вертикали  $h = 720$  см. Координаты контура по вертикали изменяются по закону  $z = h\left(\frac{v}{R}\right)^2$ .

Приведенная толщина вант по поверхности  $\delta_x = \delta_y = 0,075$  см/см. Предварительные напряжения  $\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = 2270$  кг/см<sup>2</sup>, при которых поверхность рассматривают как геодезическую сеть. После расчета начальной конфигурации покрытия приложена нагрузка  $q_v = 153$  кг/см<sup>2</sup>, при которой выясняется различие результатов при расчете систем с разными числами вант, начиная с 1 х 1 до 15 х 15. Погрешности результатов расчета в процентах взяты по отношению к результатам расчета системы из 15 х 15 вант.



Фиг. 4.

Видно, что уменьшение числа тросов сильнее сказывается на максимальных изменениях напряжений вант и горизонтальных смещениях узлов, и меньше на вертикальном смещении центра покрытия. Например, при системе из трех натягиваю-

ших и трех несущих вант погрешности в усилиях и горизонтальных смещениях достигли соответственно 25,3 и 31 %, а погрешность вертикального смещения центра - только 11,3 %. При переходе на систему из пяти натягивающих и пяти несущих вант погрешность в напряжениях достигает 15 %, а в вертикальном смещении центра - 6 %.

## 6. В ы в о д ы

Предлагаемый метод позволяет определить равновесную конфигурацию предварительно напряженной вантовой сети, с учетом внешней нагрузки и без нее при любых формах контура и заданных усилиях.

Метод обеспечивает возможность учета деформаций контура при известных единичных смещениях контура.

Задача без особых затруднений решается на ЭЦВМ.

Преимущество метода, по сравнению с описанным в литературе [1,2], заключается в ускорении расчетов, возможности учета большего количества тросов покрытия и универсальности применения ее для расчета разных видов сети.

Поведение вантовой сетки описывается достаточно точно с точки зрения практических предварительных расчетов конструкции начиная с применения системы тросов количеством 5 x 5.

## Л и т е р а т у р а

1. В.Р. Кульбах, Ю.К. Энгельбрехт. Расчет висячих покрытий отрицательной кривизны с конечным числом тросов. Труды ТПИ, серия А, № 256, 1967.

2. В.Р. Кульбах, Ю.К. Энгельбрехт. О некоторых результатах расчета висячих покрытий отрицательной кривизны с конечным числом тросов. Труды ТПИ, серия А, № 257, 1967.

3. В.Р. Кульбах, Ю.К. Энгельбрехт, У.В.-Э.Мянд. Влияние деформации контура на работу сетки седловидных висячих покрытий круглой формы в плане. Труды ТПИ, серия А, № 278, 1969.



4. В.Р. Кульбах, К.П. Йегер. О начальной геометрии предварительно напряженной вантовой сети. Труды ТПИ, серия А, № 278, 1969.

5. Э.Н. Кузнецов. Введение в теорию вантовых систем. Москва, 1969.

6. М.И. Левин, С.Ю. Ульм. Справочник по вычислительным методам (на эстонском языке). Таллин, 1966.

7. Программы для ЭВМ "Минск-22", № 4. Вычислительный центр ЭРСПО. Таллин, 1969.

8. У.В. Мяндр. О расчете висячих покрытий. Сборник докладов по строительству. Выпуск I, Таллин, 1971.

V. Kulbach, U. Mänd

About Computing Configuration of Cable Network  
for Hanging Roofs

The paper deals with a method of programming of computing a configuration of prestressed cable network for hanging roofs with a fixed number of cables. The method is based on Newton's iteration method. The nonlinear main equations are solved in three groups. The course of programming, the calculations for an electronic computer is presented. The program is used for designing the shape of the cable network in stress-strain-state and calculating forces and deflections of the cable network depending on the load. Displacements of the edge frame have been taken into consideration. The results of the computations have been compared with the results obtained by the method of Kulbach and Engelbrecht (1,2). Computing errors caused by the member of cables are determined.

## О г л а в л е н и е

	Стр.
И.И. Ааре, К.А. Лооритс. О расчете призматических металлических складок покрытия в нелинейной постановке. . . . .	3
Л.А. Алликас. Плита, усиленная ребрами . . . . .	II
В.Р. Кульбах. К вопросу статического расчета седловидных висячих покрытий до дискретной схеме . .	19
У.В.-Э. Мянд, В.Р. Кульбах. О расчете равновесной конфигурации вантовой сети . . . . .	29







СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ  
И  
СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА  
Сборник статей XIII

Таллинский политехнический институт

Редактор В. Райдна

Технический редактор Г. Гришина

Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 6/УП 1971

---

Подписано к печати 2/XII 1971.

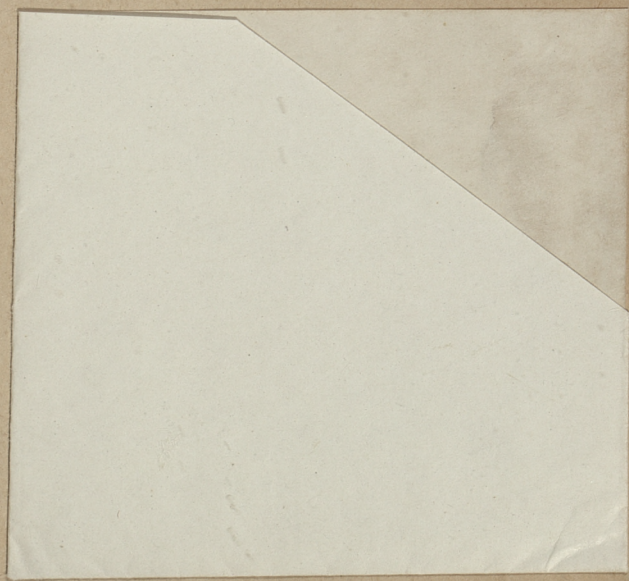
Бумага 60x90/16. Печ.л. 2,5+0,25. Учетно-изд.л. 1,88.

Тираж 350. МВ-11316. Зак. №670.

Ротапринт ТПИ, Таллин, Коскла, 2/9.

Ц е н а 20 коп.





Цена 20 коп.