

345

TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 345

**МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА**

СБОРНИК СТАТЕЙ

УП

ТАЛЛИН 1973

Ep. 6.7

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 345

1973

УДК 518;
517;
51: 373;
531/534

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СБОРНИК СТАТЕЙ

VII

Таллин 1973

79.0.9

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

1973

1973

МАТЕМАТИКА
И
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

СЕРИЯ СТАТЬИ

VI



УДК 519.1

Г. Вейнер

О ДВУХ ФУНКЦИЯХ ОЦЕНКИ ПРИ АПРОКСИМАЦИИ
СИММЕТРИЧНОГО БИНАРНОГО ОТНОШЕНИЯ ОТНОШЕНИЕМ
ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

I. Введение

Пусть на конечном непустом множестве S определены бинарное симметричное отношение $R \subset S \times S$ и отношение эквивалентности $E \subset S \times S$. Определим расстояние между отношениями * следующим способом

$$\rho(E) = |R - E| + |E - R|,$$

где $|A|$ обозначает число элементов множества A .

В дальнейшем рассмотрим проблему отыскания отношения эквивалентности E_0 такого, что

$$E_0 = \min \rho(E). \quad (I)$$

Назовем это отношение E_0 оптимальным разбиением.

Выразим теперь отношение R в виде графа $G = (S, U)$ с множеством вершин S и множеством ребер U . При этом предполагаем, что ребро $(a, b) \in U$ тогда и только тогда, когда пара $(a, b) \in R$. Свойство рефлексивности в дальнейшем неважно, поэтому на графе G опускаем петли. Граф $G_i = (S_i, U_i)$ называем здесь подграфом графа G , если

$$I) \quad S_i \subset S.$$

* В этой статье под отношением всегда понимается бинарное отношение.

$$2) \quad U_i = (S_i \times S_i) \cap U.$$

Подграф G_i называем полным, если $U_i = S_i \times S_i - \{(a, a) \mid a \in S_i\}$.

Ц. Зан [I] рассматривает проблему нахождения E_0 , если граф G_R , соответствующий отношению R , имеет вид:

1) граф G_R содержит полный подграф с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$;

2) каждая вершина $v_k \in V$ есть вершина другого полного подграфа G_k при условии, что G_k содержит кроме v_k еще $m_k \geq 1$ вершин не принадлежащих V ;

3) $S_i \cap S_j = \emptyset$, если $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $i \neq j$;

4) все ребра графа G_R определены пунктами (1) - (3).

Теорема. (Ц. Зан [I]). Если граф отношения R имеет вид G_R , то классы оптимального разбиения E_0 следующие:

1) класс $C = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, где $0 \leq p \leq n$;

2) классы $G_{p+1}, G_{p+2}, \dots, G_{p+q}$, где $p+q = n$;

3) классы A_1, A_2, \dots, A_p , где $A_k = G_k - \{v_k\}$.

2. Функции оценки

Определение 1. Назовем здесь вилкой подграф

$$K = (\{a, b, c\}, \{(a, b), (b, c)\})$$

графа G . Пусть вершина a есть начальная вершина вилки K и ребро $(a, c) \notin U$ соответствует вилке K .

Ясно, что нахождение оптимального разбиения - это просто потеря вилок при помощи удаления или введения ребер так, чтобы выполнялось условие (1).

Определение 2. Пусть число $t_{(a,c)} > 0$, равное числу вилок, которое теряется, если введем ребро $(a, c) \notin U$. Назовем число $t_{(a,c)}$ степенью нетранзитивности ребра $(a, c) \notin U$.

Определение 3. Полный подграф G_i называется максимальным, если нельзя увеличить множество его вершин. Обозначим $|S_i| - 1 = m_i$.

Определение 4. Вершина a инцидентна подграфу G_i , если $a \in S_i$.

Определение 5. Пусть $V_{G_i}^a$ множество таких ребер, которые соответствуют следующим вилкам:

- 1) начало вилки a инцидентно подграфу G_i ,
- 2) ребра вилки удовлетворяют условиям $(a, b) \in U_i$ и $(b, j) \notin U_i$.

Определение 6. Пусть $T_a = \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$ обозначает множество максимальных полных подграфов инцидентных вершине a и пусть $M \neq \emptyset$ такое подмножество вершин графа G что

- 1) $k \geq 2$,
- 2) при каждой $G_i, G_j \in T_a$ и выполняется условие $U_i \cap U_j = \emptyset$.

Будем называть функцию

$$f(G_i^a) = \frac{1}{m_i} \left[m_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k m_j + \sum_{(a,c) \in V_{G_i}^a} \frac{1}{t_{(a,c)}} \right]$$

функцией оценки при вершине $a \in M$ на графе $G_i \in T_a$.

Определение 7. Функцию

$$f(G_i^a, G_j^a) = \begin{cases} \frac{f(G_i^a)}{f(G_j^a)} = s & \text{при } s \geq 1, \\ \frac{1}{s} & \text{в противном случае} \end{cases}$$

будем называть функцией оценки вершины $a \in M$ на графах $G_i, G_j \in T_a$.

Мы можем связать понятие последней функции с понятием вектора, так что этот вектор направлен от G_i в G_j , если

$$f(G_i^a, G_j^a) = s > 1 \text{ и в обратном направлении, если } f(G_i^a, G_j^a) = \frac{1}{s}.$$

3. Функции оценки в одном частном случае

Теорема. Пусть граф имеет вид G_R и все векторы функции направлены в подграф G_0 . Тогда множество классов G_{p+1} оптимального разбиения пусто.

Доказательство. Ясно, что каждая $f(G_i^{v_i}, G_o^{v_i})$ имеет вид

$$m_o : \frac{m_o m_i + \sum_{i=1}^n m_i - m_i}{m_o} > 1,$$

откуда получим

$$m_o - m_i > \frac{1}{m_o} \left[\sum_{i=1}^n m_i - m_i \right]. \quad (2)$$

Правая часть неравенства (2) положительна, поэтому $m_o > m_i$. Перепишем неравенство (2) для каждого G_i следующим образом

$$\begin{aligned} m_o^2 &> m_o m_1 + \sum_{i=1}^n m_i - m_1, \\ m_o^2 &> m_o m_2 + \sum_{i=1}^n m_i - m_2, \\ &\dots \dots \dots \\ m_o^2 &> m_o m_n + \sum_{i=1}^n m_i - m_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Суммируя неравенства (3) и учитывая, что $n = m_o + 1$, получим

$$\begin{aligned} (m_o + 1) m_o^2 &> m_o \sum_{i=1}^n m_i + m_o \sum_{i=1}^n m_i, \\ \frac{(m_o + 1) m_o}{2} &> \sum_{i=1}^n m_i. \end{aligned} \quad (4)$$

Последнее указывает, что удаление всех ребер подграфа G_o не оптимально.

Выберем индексы так, что $m_n \geq m_{n-1} \geq \dots \geq m_1$. Допустим теперь, что оптимально разбиение, которое получится удалением $l < n$ подграфов G_i так, что $i = n; n-1, \dots, n-l+1$. Тогда должно быть выполнено

$$\varphi(l) = \frac{m_o + m_{o-l+1} + \dots + m_{o-l+1}}{m_v + m_{v-l+1} + \dots + m_{v-l+1}} < 1, \quad (5)$$

где числитель - число удаленных ребер подграфа G_o .

При $l = 1$ неравенство (5) не действительно из-за неравенства (2), при $l = n$ из-за неравенства (4).

Выпишем разность

$$\varphi(l) - \varphi(l+1) = \frac{(m_0 + m_0 - 1 + \dots + m_0 - l + 1) [m_v + \dots + m_{v-l} - (m_v + \dots + m_{v-l+1})(m_0 - l)]}{(m_v + \dots + m_{v-l+1})(m_v + \dots + m_{v-l})}$$

Первый множитель в числителе и знаменателе этой дроби положительны. Второй множитель в числителе можем переписать в виде

$$(m_v + m_{v-1} + \dots + m_{v-l+1})(m_{v-l} - m_0 + 1).$$

При этом первый множитель также положителен, а второй множитель нет (из (2) следует, что $m_{v-l} < m_0$). Значит $\varphi(l)$ — монотонная функция, что и доказывает теорему.

Следствие 1. Если граф G имеет подграф в виде G_R , при удалении которого из графа G выполняется условие теоремы, то $G_0 \in E_0$.

Следствие 2. Если граф G имеет подграф G'_R , который отличается от G_R тем, что найдется хотя бы одна вершина v_i , у которой в графе G отсутствует подграф G_i и векторы подграфа G'_R удовлетворяют условию теоремы, то $G_0 \in E_0$.

Л и т е р а т у р а

1. С. Т. Z a h n. Approximating symmetric relations by equivalent relations. J. Soc. Indust. Appl. Math., vol. 12, No. 4, 1964.

2. Ж. Р и г е. Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа. Киб. сб. № 7, М., 1963.

3. К. Б е р ж. Теория графов и ее применение. Изд. иност. лит., М., 1962.

About Two Estimation Functions on Approximating
Symmetric Binary Relation by Equivalence Relation

Summary

This paper deals with the problem of finding an equivalence relation E , which best approximates a given symmetric relation R in the sense of minimizing the number of the elements of $(E-R) \cup (R-E)$. Two estimation functions, which are both applied to one special case, are defined.

УДК 517.521+517.521.8

Ф. Вихманн

О ВКЛЮЧЕНИИ МЕТОДОВ ВОРОНОГО-НЁРЛУНДА

Пусть $\rho_0 > 0$, $\rho_n \geq 0$, ($n > 0$). Последовательность $\{s_k\}$ называется суммируемой методом Вороного-Нёрлунда (WN, ρ_n) к числу s , если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n \rho_{n-k} s_k = s, \text{ где } P_n = \sum_{k=0}^n \rho_k.$$

Метод (WN, q_n) включает метод (WN, p_n) , если из $\{s_k\} \rightarrow s (WN, p_n)$ следует $\{s_k\} \rightarrow s (WN, q_n)$. Включение методов будем обозначать $(WN, q_n) \supset (WN, p_n)$. Методы называются равносильными, если каждый из них включает другой. Метод (WN, q_n) сильнее метода (WN, p_n) , если $(WN, q_n) \supset (WN, p_n)$ и методы не равносильны.

Лемма 1, ([1], теорема I6). Метод (WN, p_n) регулярен тогда и только тогда, когда $p_n = \sigma(P_n)$.

Пусть ¹

$$p(x) = \sum \rho_n x^n, \quad P(x) = \sum P_n x^n,$$

$$q(x) = \sum q_n x^n, \quad Q(x) = \sum Q_n x^n,$$

$$k(x) = \sum k_n x^n = \frac{q(x)}{p(x)}, \quad l(x) = \sum l_n x^n = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Лемма 2 ([1], теорема I9). При регулярных методах $(WN, q_n) \supset (WN, p_n)$ тогда и только тогда, когда

¹ Если индексы суммирования не обозначены, то они пробегает все значения от нуля до ∞ .

$$1^{\circ} \quad |k_0|P_n + |k_1|P_{n-1} + \dots + |k_n|P_0 = O(Q_n),$$

$$2^{\circ} \quad k_n = \sigma(Q_n).$$

Лемма 3 ([I], теорема 2I). Два регулярных метода (WN, p_n) и (WN, q_n) равносильны тогда и только тогда, когда

$$\sum |k_n| < \infty \quad \text{и} \quad \sum |l_n| < \infty.$$

Лемма 4 ([2], предложение 3). Если (WN, p_n) и (WN, q_n) регулярны, $(WN, q_n) \supset (WN, p_n)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n Q_n^{-1} = \infty$, то метод (WN, q_n) сильнее метода (WN, p_n) .

Лемма 5. Если

$$q_0 = 1, \quad \frac{q_{n+1}}{q_n} \geq \frac{q_n}{q_{n-1}} \quad (n=1, 2, \dots),$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} = 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n < \infty$, то метод (WN, q_n) равносильен методу сходимости $(C, 0)$.

Доказательство. Поскольку в случае метода сходимости $p_0 = 1, p_n = 0 (n > 0)$, то $k_n = q_n$ и $\sum |k_n| < \infty$. Так как

$$q_0 l_0 = 1,$$

$$\text{то} \quad q_n l_0 + q_{n-1} l_1 + \dots + q_0 l_n = 0 \quad (n > 0),$$

$$l_{n+1} = l_1(q_{n+1}q_{n-1} - q_n^2) + l_2(q_{n+1}q_{n-2} - q_nq_{n-1}) + \dots \\ \dots + l_n(q_{n+1}q_0 - q_nq_1).$$

Поскольку $l_0 = 1$, то, ввиду неотрицательности скобок, все $l_n (n > 0)$ будут неположительны. Так как $q_n \geq -l_n (n > 0)$, то $\sum |l_n| < \infty$.

Лемма 6 ([I], теорема 23). Если (WN, p_n) и (WN, q_n) регулярны, $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geq \frac{p_n}{p_{n-1}} (n > 0), p_0 = 1,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1, \quad \frac{q_{n+1}}{q_n} \geq \frac{p_{n+1}}{p_n} (n \geq 0), \text{ то } (WN, q_n) \supset (WN, p_n).$$

Лемма 7. Если

$$q_0 = 1, \quad \frac{q_{n+1}}{q_n} \geq \frac{q_n}{q_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n \neq 0,$$

то метод (WN, q_n) равносильен методу $(WN, 1)$.

Доказательство. По лемме 2 для включения $(WN, q_n) \supset (WN, 1)$, ввиду монотонного убывания последовательности $\{q_n\}$, необходимо и достаточно условие $n = O(Q_n)$, что очевидно выполнено. Обратное включение получается по лемме 6.

В работах [2, 3] найдены методы Вороного-Нёрлунда, которые соответственно сильнее метода Чезаро (C, α) ($\alpha \geq 0$) или которые сильнее метода (C, α) ($\alpha \geq 0$) и слабее метода (C, β) при любом β , $\beta > \alpha$. Ниже доказан результат о нахождении метода Вороного-Нёрлунда, который слабее заданного метода Вороного-Нёрлунда.

Теорема. Если

$$q_0 = 1, \quad \frac{q_{n+1}}{q_n} \geq \frac{q_n}{q_{n-1}} \quad (n > 0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} = 1$$

и $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \infty$, то $(WN, q_n) \supset (WN, p_n) \supset (C, 0)$,

где

$$p_n = \frac{q_n \ln^{\alpha_r} \ln^{\alpha_{r-1}} \dots \ln^{\alpha_1} C}{\ln^{\alpha_r} \ln^{\alpha_{r-1}} \dots \ln^{\alpha_1} \frac{C}{q_n}}$$

и $\alpha_r, \alpha_{r-1}, \dots, \alpha_1$ — зафиксированные положительные числа, а постоянная C выбрана так, что соответствующие логарифмы все положительны. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty,$$

то метод (WN, p_n) сильнее метода сходимости $(C, 0)$ и слабее метода (WN, q_n) .

Доказательство. Рассмотрим случай $r=1$. Из условия

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} \geq \frac{q_n}{q_{n-1}}$$

следует

$$\ln q_{n+1} - \ln q_n \geq \ln q_n - \ln q_{n-1}$$

и

$$\ln \frac{C}{q_{n+1}} - \ln \frac{C}{q_n} \leq \ln \frac{C}{q_n} - \ln \frac{C}{q_{n-1}}.$$

Поскольку последовательность $\{q_n\}$ монотонно убывает, то

$$0 < \ln \frac{C}{q_n} \leq \ln \frac{C}{q_{n+1}}.$$

Отсюда

$$\frac{\ln \frac{C}{q_n}}{\ln \frac{C}{q_{n+1}}} \geq \frac{\ln \frac{C}{q_{n-1}}}{\ln \frac{C}{q_n}} \quad (n > 0). \quad (I)$$

Очевидно, $p_0 = 1$. Поскольку при произвольном $\alpha_1 > 0$

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} \frac{\ln^{\alpha_1} \frac{C}{q_n}}{\ln^{\alpha_1} \frac{C}{q_{n+1}}} \geq \frac{q_n}{q_{n-1}} \frac{\ln^{\alpha_1} \frac{C}{q_{n-1}}}{\ln^{\alpha_1} \frac{C}{q_n}},$$

то

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \geq \frac{p_n}{p_{n-1}}.$$

Можно проверить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1$.

Так как

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \leq \frac{q_{n+1}}{q_n} \quad (n \geq 0).$$

то по лемме 6 $(WN, q_n) \supset (WN, p_n)$.

При произвольном r доказательство проводится по индукции. Если выполнено аналогичное неравенству (I) соотношение

$$\frac{\ln^{\alpha_r} \ln^{\alpha_{r-1}} \dots \ln^{\alpha_1} \frac{C}{q_n}}{\ln^{\alpha_r} \ln^{\alpha_{r-1}} \dots \ln^{\alpha_1} \frac{C}{q_{n+1}}} \geq \frac{\ln^{\alpha_r} \ln^{\alpha_{r-1}} \dots \ln^{\alpha_1} \frac{C}{q_{n-1}}}{\ln^{\alpha_r} \ln^{\alpha_{r-1}} \dots \ln^{\alpha_1} \frac{C}{q_n}}$$

то ввиду $\ln \ln^{\alpha_r} \ln^{\alpha_{r-1}} \dots \ln^{\alpha_1} \frac{C}{q_{n+1}} \geq \ln \ln^{\alpha_r} \ln^{\alpha_{r-1}} \dots \ln^{\alpha_1} \frac{C}{q_n} > 0$

последовательность

$$\left\{ \frac{\ln^{\alpha_{r+1}} \ln^{\alpha_r} \dots \ln^{\alpha_1} \frac{C}{q_n}}{\ln^{\alpha_{r+1}} \ln^{\alpha_r} \dots \ln^{\alpha_1} \frac{C}{q_{n+1}}} \right\}$$

будет при $\alpha_{r+1} > 0$ монотонно неубывающей. Очевидно, метод (WN, p_n) регулярен. Условия леммы 6 выполнены, и $(WN, q_n) \supset (WN, p_n)$.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \infty$, то по лемме 4 метод (WN, p_n) сильнее сходимости. Так как по известной теореме Штольца

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n}{P_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^{\alpha_r} \ln^{\alpha_{r-1}} \dots \ln^{\alpha_1} \frac{C}{q_n}}{\ln^{\alpha_r} \ln^{\alpha_{r-1}} \dots \ln^{\alpha_1} C} = \infty,$$

то метод (WN, q_n) сильнее метода (WN, p_n) .

Леммы 5 и 7 показывают, что условия $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$ существенны.

Примеры.

$$1^{\circ} \quad (WN, \frac{1}{n+1}) \supset (WN, \frac{\ln 2}{(n+1) \ln^{\alpha} 2(n+1)}).$$

При $0 < \alpha \leq 1$ последний метод сильнее метода сходимости, а при $\alpha > 1$ — совпадает с ним.

2^o Метод $(WN, \frac{\ln 2}{(n+1) \ln 2(n+1)})$ включает методы

$$\text{и} \quad (WN, \frac{\ln^2 2}{(n+1) \ln 2(n+1) \cdot \ln \frac{2(n+1) \ln 2(n+1)}{\ln 2}})$$

$$(WN, \frac{\ln 2 \cdot \ln \ln 3}{(n+1) \ln 2(n+1) \cdot \ln \ln \frac{3(n+1) \ln 2(n+1)}{\ln 2}}).$$

Первый из этих методов совпадает с методом сходимости, второй — сильнее его.

Л и т е р а т у р а

1. Г. Харди. Расходящиеся ряды. М., 1951.

2. G. G o f f m a n, H. H u n e k e. The Ordered Set of Nörlund Methods. Math. Z., 114, 1-8 1970.

3. J. D. H i l l. Nörlund Methods of Summability that Include the Cesaro Methods of ARR Positive Orders. Amer. J. Math., 67, 94-98 1945.

About Inclusion of Woronoy-Nörlund Methods

Summary

In this paper the following theorem is proved.

Theorem. If

$$q_0 = 1, \quad \frac{q_{n+1}}{q_n} \geq \frac{q_n}{q_{n-1}} \quad (n > 0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \infty,$$

then Woronoy-Nörlund methods satisfy the condition

$$(WN, q_n) \supset (WN, p_n) \supset (C, 0), \quad \text{where}$$

$$p_n = \frac{q_n \ln^{\alpha_r} \ln^{\alpha_{r-1}} \dots \ln^{\alpha_1} C}{\ln^{\alpha_r} \ln^{\alpha_{r-1}} \dots \ln^{\alpha_1} \frac{C}{q_n}}$$

with positive exponents $\alpha_r, \alpha_{r-1}, \dots, \alpha_1$. The constant C is so chosen that respective logarithms are positive. If $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \infty$, then (WN, p_n) is strictly stronger than $(C, 0)$ and strictly weaker than (WN, q_n) .

М. Левин

ПОСТРОЕНИЕ ДВУХ НАИЛУЧШИХ КВАДРАТУРНЫХ
 ФОРМУЛ

I. Постановка задачи

Пусть $M > 0$ — заданное число. Используем обозначения:

$W_{L_2}^{(2)}$ — класс функций $f(x)$, которые на отрезке $[0, 1]$ имеют абсолютно-непрерывную производную и удовлетворяют условию

$$\sqrt{\int_0^1 [f''(x)]^2 dx} \leq M,$$

$W_{g_{L_2}}^{(2)}$ — класс функций $f(x)$ таких, что $f(x) \in W_{L_2}^{(2)}$ и

$$f(0) + f(1) = f'(0) + f'(1) = 0.$$

Функции класса $W_{g_{L_2}}^{(2)}$ допускают представление

$$f(x) = \int_0^1 f''(t) g(x, t) dt, \quad (I)$$

где

$$g(x, t) = (x-t) E(x-t) - \frac{1}{2}(x-t) - \frac{1}{4},$$

$$E(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 0; \\ 1, & u > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим задачи построения наилучших квадратурных формул [I] вида

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + r_n(f), \quad (2)$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n B_k f(u_k) + C [f(0) + f(1)] + D [f'(0) + f'(1)] + R_n(f) \quad (3)$$

с симметричными узлами

$$x_k = 1 - x_{n+1-k}, \quad u_k = 1 - u_{n+1-k} \quad (4)$$

$$(k = 1, 2, \dots, [\frac{n}{2}])$$

соответственно в классах $W_{g_{L_2}}^{(2)}$ и $W_{L_2}^{(2)}$. Другими словами, будем искать значения x_k, u_k (удовлетворяющие условию (4)), A_k, B_k, C, D такие, что для них величины

$$r_n = \sup_{f \in W_{g_{L_2}}^{(2)}} |r_n(f)|, \quad R_n = \sup_{f \in W_{L_2}^{(2)}} |R_n(f)|$$

имеют наименьшее значение.

2. Формула (2) в классе $W_{g_{L_2}}^{(2)}$.

Подставляя (I) в формулу (2), мы получаем

$$r_n(f) = \int_0^1 f''(t) K(t) dt,$$

где

$$K(t) = \int_0^1 g(x, t) dx - \sum_{k=1}^n A_k g(x_k, t).$$

Так как

$$\sup_{f \in W_{g_{L_2}}^{(2)}} |r_n(f)| = M \cdot \sqrt{\int_0^1 [K(t)]^2 dt}, \quad (5)$$

то наилучшую формулу (2) в классе $W_{g_{L_2}}^{(2)}$ определяют узлы x_k (удовлетворяющее условию (4)) и веса A_k , дающие величине

$$U = \int_0^1 |K(t)|^2 dt$$

наименьшее значение.

Легко видеть, что

$$K(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}(1-\mu) + \frac{1}{4}(\mu - 2\gamma), & 0 \leq t \leq x_1 \\ \frac{1}{2}P_{2,i}(t), & x_i < t \leq x_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1); \\ \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}(1+\mu) + \frac{1}{4}(\mu + 2\gamma), & x_n < t \leq 1, \end{cases}$$

где $P_{2,i}(t)$ — многочлены 2-ой степени со старшим коэффициентом, равным 1,

$$\mu = \sum_{k=1}^n A_k, \quad \gamma = \sum_{k=1}^n A_k x_k. \quad (6)$$

Имея в виду условие (4), будем считать, что $x_1 = 1 - x_n$.

Найдем наименьшее значение (по переменным μ и γ) величины

$$J = \int_0^{x_1} P_{2,0}^2(t) dt + \int_{1-x_1}^1 P_{2,n}^2(t) dt, \quad (7)$$

где

$$P_{2,0}(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}(1-\mu) + \frac{1}{4}(\mu - 2\gamma),$$

$$P_{2,n}(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}(1+\mu) + \frac{1}{4}(\mu + 2\gamma).$$

Так как

$$P_{2,0}(0) + P_{2,n}(1) = P'_{2,0}(0) + P'_{2,n}(1) = 0,$$

то по формуле Тейлора

$$P_{2,0}(t) = \frac{t^2}{2} + \beta t + \alpha, \quad P_{2,n}(t) = \frac{(t-1)^2}{2} - \beta(t-1) - \alpha, \quad (8)$$

где

$$\alpha = P_{2,0}(0), \quad \beta = P'_{2,0}(0).$$

Подставим (8) в (7) и сделаем во втором интеграле (7) замену $t = u + (1 - x_1)$. После этого из условия

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial J}{\partial \beta} = 0$$

получим значения

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\frac{3}{8}x_1. \quad (9)$$

дающие наименьшее значение величине (7).

При значениях (9) имеем

$$J = \frac{1}{160} x_1^5. \quad (10)$$

Пусть теперь $\bar{P}_{2,0}(t)$ и $\bar{P}_{2,n}(t)$ есть многочлены (8) с параметрами (9),

$$L_{2,i}(t) = t^2 - t(x_i + x_{i+1}) + \frac{1}{6}(x_i^2 + x_{i+1}^2 + 4x_i x_{i+1}) -$$

многочлен Лежандра со старшим членом t^2 , приведенный к отрезку $[x_i, x_{i+1}]$.

Рассмотрим функцию

$$Q(t) = \begin{cases} \bar{P}_{2,0}(t), & t \in [0, x_1]; \\ \frac{1}{2} L_{2,i}(t), & t \in [x_i, x_{i+1}] \quad (i=1, 2, \dots, n-1); \\ \bar{P}_{2,n}(t), & t \in [x_n, 1]. \end{cases}$$

По построению функции $Q(t)$ очевидно, неравенство

$$\int_0^1 [K(t)]^2 dt \geq \int_0^1 [Q(t)]^2 dt.$$

Учитывая (10), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 [Q(t)]^2 dt &= \frac{x_1^5}{160} + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{4} L_{2,i}^2(t) dt = \\ &= \frac{x_1^5}{160} + \frac{1}{720} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^5. \end{aligned} \quad (II)$$

Величина (II) при условии $x_n = 1 - x_1$ достигает наименьшего значения при узлах ^I

$$x_k = 2 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + k - 1 \right) h \quad (k=1, 2, \dots, n); \quad (I2)$$

$$h = \frac{1}{2(2\sqrt{\frac{2}{3}} + n - 1)}.$$

Через $Q^*(t)$ обозначим ту функцию $Q(t)$, которая построена на узлах (I2).

Тогда, конечно, для формулы (2) имеем:

$$\int_0^1 [K(t)]^2 dt \geq \int_0^1 [Q^*(t)]^2 dt = \frac{h^4}{45}. \quad (I3)$$

Пусть теперь в формуле (2) узлы суть значения (I2). Если в этой формуле удастся выбрать веса A_k так, что $K(t) \equiv Q^*(t)$, то по (I3) это будет означать, что мы имеем наилучшую в классе $W_{g, l_2}^{(2)}$ формулу (2).

Из условия $K(t) \equiv Q^*(t)$ следует

$$P_{2,i+1}(t) - P_{2,i}(t) \equiv L_{2,i+1}(t) - L_{2,i}(t) \quad (i=1, 2, \dots, n-1),$$

откуда имеем сразу

$$A_{i+1} = 2h \quad (i=1, 2, \dots, n-1). \quad (I4)$$

Взяв $A_1 = A_n$, с учетом (I4), мы из равенства $\mu^{-1} = 2\beta$ (см. определение многочлена $P_{2,0}(t)$ и (8)) получим

$$A_1 = A_n = h \left(\frac{5}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} + 1 \right). \quad (I5)$$

^I Это легко получить по аналогии с таким же случаем в [2] (стр. 222-224)*.

Пусть теперь в формуле (2) узлы и веса — числа (I2), (I4), (I5). Рассматривая для этой формулы соответствующую ей функцию $K(t)$ на каждом из отрезков $[0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n], [x_n, 1]$, мы непосредственным подсчетом убеждаемся, что в данном случае действительно $K(t) \equiv Q^*(t)$.

Таким образом, узлы (I2) и веса (I4), (I5) являются узлами и весами наилучшей в классе $W_{qL_2}^{(2)}$ формулы (2).

Учитывая, что для этих узлов и весов (I3) превращается в равенство, мы по (5) имеем оценку для наилучшей формулы (2)

$$r_n = \frac{M}{3\sqrt{5}} h^2. \quad (I6)$$

Итак, доказана следующая

Теорема I. В классе $W_{qL_2}^{(2)}$ наилучшая квадратурная формула (2) характеризуется весами и узлами (I4), (I5) и (I2) и оценкой остатка (I6).

3. Формула (3) в классе $W_{L_2}^{(2)}$.

Воспользовавшись теоремой из [3], мы приходим к следующему результату.

Теорема 2. В классе $W_{L_2}^{(2)}$ наилучшая квадратурная формула (3) характеризуется весами (I4), (I5), $C = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}h$, $D = 0$, узлами (I2) и оценкой остатка

$$R_n = \frac{M}{3\sqrt{5}} h^2.$$

Замечание. Формулы, полученные в этой заметке, совпали с формулами, полученными ранее в работе [4].

Л и т е р а т у р а

1. С.М. Н и к о л ь с к и й. Квадратурные формулы. М., 1958.

2. В.И. К р ы л о в. Приближенное вычисление интегралов. М., 1967.

3. М. Л е в и н. Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1972, № 4.

4. М. Л е в и н. Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1969, № 2, 249–252.

The Construction of Two Best Quadrature Formulae

Summary

Let

$$W_{L_2}^{(2)} = \left\{ f(x) : f'(x) \text{ is on } [0, 1] \text{ absolute continuous,} \right. \\ \left. \|f''(x)\|_{L_2(0,1)} \leq M \right\},$$

$$W_{g_{L_2}}^{(2)} = \left\{ f(x) : f(x) \in W_{L_2}^{(2)}, f(0) + f(1) = f'(0) + f'(1) = 0 \right\}.$$

For the functions of classes $W_{g_{L_2}}^{(2)}$ and $W_{L_2}^{(2)}$ the best formulae (2) and (3) have been constructed.

УДК 517.521.8

Н. Палувер

О СУММИРОВАНИИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ МЕТОДОМ
 ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Пусть требуется найти сумму числового ряда

$$S = c_0 + c_1 + c_2 + \dots \quad (1)$$

Рассмотрим вспомогательный степенной ряд

$$S(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots \quad (2)$$

который при $x = 1$ совпадает с рядом (1). Предположим, что найдены такие последовательные дробно-рациональные приближения $S_m^{(k)}(x)$ ряда (2)

$$S_m^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m} \quad (3)$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots; k = m, k = m-1),$$

разложения которых в степенной ряд совпадают с исходным рядом (2) до члена $c_{m+k} x^{m+k}$ включительно. Если при $x = 1$ числовая последовательность $\{S_m^{(k)}(1)\}$ при $m \rightarrow \infty$ сходится и имеет конечный или бесконечный предел U , то этот предел и примем за обобщенную сумму ряда (1). При этом будем говорить, что числовой ряд (1) суммируем (P, Q) методом, т.е. методом дробно-рациональных приближений к сумме U . Дробно-рациональные приближения $S_m^{(k)}(1)$ можно при таком определении суммы рассматривать как обобщенные частичные суммы ряда (1).

Известные в настоящее время методы получения дробно-рациональных приближений степенных рядов, как то метод В.Висковатого, усовершенствованный А. Хованским [1], формула Обрешкова и другие трудно применимы для наших целей.

Поэтому укажем на следующую возможность непосредственного получения дробно-рациональных приближений, исходя из ряда (2). Сущность метода заключается в последовательном исключении из рядов, получаемых преобразованием ряда (2), членов, содержащих x , x^2 , x^3 и т.д. Проследим, как это сделано в таблице I, где получены первые четыре приближения.

Т а б л и ц а I

$$S - c_0 = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots \quad (2,1)$$

$$- \frac{c_1 x}{c_0} S = -c_1 x - \frac{c_1^2}{c_0} x^2 - \frac{c_1 c_2}{c_0} x^3 - \frac{c_1 c_3}{c_0} x^4 - \dots$$

$$(1 - \frac{c_1}{c_0} x) S - c_0 = (c_2 - \frac{c_1^2}{c_0}) x^2 + (c_3 - \frac{c_1 c_2}{c_0}) x^3 + A x^4 + \dots \quad (2,2)$$

$$- \frac{x}{c_1} (c_2 - \frac{c_1^2}{c_0}) (S - c_0) = - (c_2 - \frac{c_1^2}{c_0}) x^2 - \frac{c_2}{c_1} (c_2 - \frac{c_1^2}{c_0}) x^3 - B x^4 - \dots$$

$$(1 - \frac{c_2}{c_1} x) S - c_0 + (\frac{c_0 c_2}{c_1} - c_1) x = (c_3 - \frac{c_2^2}{c_1}) x^3 + C x^4 + \dots \quad (2,3)$$

$$- \frac{c_0 (c_1 c_3 - c_2^2) x}{c_1 (c_0 c_2 - c_1^2)} [(1 - \frac{c_1}{c_0} x) S - c_0] = - (c_3 - \frac{c_2^2}{c_1}) x^3 - D x^4 - \dots$$

$$[1 + \frac{(c_1 c_2 - c_0 c_3) x + (c_1 c_3 - c_2^2) x^2}{c_0 c_2 - c_1^2}] S - c_0 + \frac{(c_2^2 c_3 - 2 c_0 c_2 c_3 + c_1^3) x}{c_0 c_2 - c_1^2} = E x^4 + \dots \quad (2,4)$$

Прежде всего ряд (2) переписан в форме ^I (2,1). Под ним написан ряд (2), умноженные на $\Gamma_1 = -\frac{c_1 x}{c_0}$. Почленное суммирование обоих рядов дает преобразованный ряд (2,2), который уже не содержит первой степени x . Одновременно суммируются и выражения левее знаков равенства. Затем под рядом (2,2) пишется ряд (2,1), умноженные на $\Gamma_2 = -\frac{x}{c_1} (c_2 - \frac{c_1^2}{c_0})$,

^I Для упрощения записей в таблице I вместо $S(x)$ принято S .

и почленно суммируется с рядом (2,2). В результате получается преобразованный ряд (2,3), не содержащий членов с x и x^2 . Далее с рядом (2,3) суммируется ряд (2,2) умноженный на

$\Gamma_3 = -\frac{c_0(c_1c_3 - c_2^2)x}{c_1(c_0c_2 - c_1^2)}$. Это дает ряд (2,4), который не содержит также и члена с x^3 и т.д. Через A, B, C, D, E обозначены в рядах коэффициенты при x^4 .

Приравнивая нулю левые части соотношений (2,1), (2,2), (2,3) и (2,4), получаем следующие четыре первых дробно-рациональных приближения ряда (2):

$$\left. \begin{aligned} S_0^{(0)}(x) &= \frac{c_0}{1}; & S_1^{(0)}(x) &= \frac{c_0^2}{c_0 - c_1x}; & S_1^{(1)}(x) &= \frac{c_0c_1 + (c_1^2 - c_0c_2)x}{c_1 - c_2x}; \\ S_2^{(1)}(x) &= \frac{c_0(c_0c_2 - c_1^2) + (2c_0c_1c_2 - c_0^2c_3 - c_1^3)x}{c_0c_2 - c_1^2 + (c_1c_2 - c_0c_3)x + (c_1c_3 - c_2^2)x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Нетрудно проверить, что если эти приближения разложить (например, формальным делением) в степенные ряды, то эти ряды совпадут с рядом (2) до члена $c_{m+k}x^{m+k}$ (включительно), где k — степень числителя, а m — степень знаменателя приближения ($k = m, k = m-1$). Таким образом убеждаемся, что использованный в таблице I процесс элиминирования действительно позволяет получить необходимую последовательность дробно-рациональных приближений (3).

При вычислении дробно-рациональных приближений числового ряда (I) выкладки в таблице I сильно упрощаются, так как в этом случае соответствующие члены рядов можно численно просуммировать и к тому же нет надобности выписывать степеней x (так как $x = 1$). В качестве примера вычислим обобщенную частичную сумму первых 6 членов ряда

$$S = 2 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + \frac{2^5}{5} - \frac{2^6}{6} + \dots,$$

полученного из разложения

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad \text{при } x = 2.$$

Упрощая ряд, имеем:

$$S = 2 - 2 + \frac{8}{3} - 4 + \frac{32}{5} - \frac{32}{3} + \dots \quad (5)$$

В таблице 2 приведены полностью все вычисления согласно схеме, данной в таблице I.

Т а б л и ц а 2

$S - 2$	$= -2 + \frac{8}{3} - 4 + \frac{32}{5}$	$-\frac{32}{3}$	(5,1)
S	$= 2 - 2 + \frac{8}{3} - 4$	$+\frac{32}{5}$	
$2S - 2$	$= 0 + \frac{2}{3} - \frac{4}{3} + \frac{12}{5}$	$-\frac{64}{15}$	(5,2)
$\frac{1}{3}(S - 2)$	$= -\frac{2}{3} + \frac{8}{9} - \frac{4}{3}$	$+\frac{32}{15}$	
$\frac{7}{3}S - \frac{8}{3}$	$= 0 - \frac{4}{9} + \frac{16}{15}$	$-\frac{32}{15}$	(5,3)
$\frac{2}{3}(2S - 2)$	$= \frac{4}{9} - \frac{8}{9}$	$+\frac{24}{15}$	
$\frac{11}{3}S - \frac{12}{3}$	$= 0 + \frac{8}{45}$	$-\frac{8}{15}$	(5,4)
$\frac{2}{5}(\frac{7}{3}S - \frac{8}{3})$	$= -\frac{8}{45}$	$+\frac{32}{75}$	
$\frac{69}{15}S - \frac{76}{15}$	$= 0$	$-\frac{8}{75}$	(5,5)
$\frac{3}{5}(\frac{11}{3}S - \frac{12}{3})$	$=$	$\frac{8}{75}$	
$\frac{102}{15}S - \frac{112}{15}$	$=$	0	(5,6)

Как и в таблице I, ряд (5) переписан в форме (5,1). Под ним написан ряд (5) и почленно просуммирован с рядом (5,1) ($r_1 = 1$). В результате получен преобразованный ряд (5,2). К нему почленно прибавлен ряд (5,1), умноженный на $r_2 = \frac{1}{3}$ и т.д. При каждом сложении рядов складываются и соответствующие выражения левее знаков равенства.

Приравнивая нулю последнее дробно-рациональное приближение (5,6), получаем обобщенную частичную сумму 6 членов ряда I (5):

I В случае числовых рядов целесообразно вместо $S_m^{(k)}(x)$ писать S_n , $n = 0, 1, 2, \dots$

$$S_5 = \frac{112}{102} = 1,09804\dots$$

Как видно, мы получили приближенное значение $\ln 3$ с четырьмя верными знаками, несмотря на то, что ряд (5) расходитя. Таким образом, частичная (P, Q) -сумма оказалась равной приближенному значению той функции, разложением которой является ряд (5).

Нетрудно убедиться, что вычисления в таблице 2 можно производить не только по строкам слева направо, но и по столбцам сверху вниз. Это позволяет находить обобщенные частичные суммы последовательно, по отдельным членам ряда. Так например, последняя сумма (5,6), соответствующая шестому члену $(-\frac{32}{3})$ ряда (5), получена в таблице 2 заполнением последнего столбца, отделенного вертикальной линией. При этом используются только числа двух столбцов, непосредственно примыкающих слева и справа к вертикальной линии, и множители r_k ($k = 1, 2, \dots, 5$).

В общем случае вычисления по столбцам можно производить по следующей схеме.

Пусть через $c_{n,k}$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$; $c_{n,0} = c_{n,1} = c_n$) обозначены члены преобразованных рядов в n -ом столбце, т.е. в столбце, расположенном под членом c_n ряда (I). Предположим, что эти члены уже вычислены и что вычислены также множители r_k ($k=1, 2, \dots, n$). Тогда члены преобразованных рядов в $(n+1)$ -ом столбце вычисляются по рекуррентной формуле

$$c_{n+1,k+1} = c_{n+1,k} + c_{n,k-1} r_k, \quad (6)$$

$$k=1, 2, \dots, n; \quad c_{n+1,0} = c_{n+1,1} = c_{n+1}.$$

Далее находим при $k=n$ очередной множитель r_{n+1} из соотношения

$$r_{n+1} = -\frac{c_{n+1,n+1}}{c_{n,n}}. \quad (7)$$

Наконец вычисляем обобщенную частичную сумму $n+2$ членов ряда (I) по рекуррентной формуле

$$S_{n+2} = \frac{S_n + \lambda_n S_{n+1}}{1 + \lambda_n}, \quad (8)$$

где

$$\lambda_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{r_{n+1}(S_{n+1} - S_{n-1})}, \quad S_0 = 0, \quad S_1 = c_0, \quad S_2 = \frac{c_0^2}{c_0 - c_1},$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Эта формула связывает 4 последовательных частичных обобщенных суммы ряда (I).

В то время как соотношения (6) и (7) непосредственно вытекают из рассматриваемого способа получения дробно-рациональных приближений, требует вывод формулы (8) довольно громоздких выкладок.

Вычисления по указанной схеме начинаем с нахождения первого множителя

$$r_1 = -\frac{c_{1,1}}{c_{0,0}} = -\frac{c_1}{c_0}.$$

Затем вычисляем по формуле (6) члены рядов во втором столбце и т.д.

При машинном вычислении нужно для нахождения членов n -го столбца сохранять в памяти только члены $(n-1)$ -го столбца и все множители r_k .

В качестве второго примера найдем (P, Q) -сумму 6 членов ряда

$$S = 1 + 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + \dots + (n+1) 3^n + \dots \quad (9)$$

Этот ряд имеет ту особенность, что он получается из разложения в степенной ряд дробно-рациональной функции

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \quad (10)$$

при $x = 3$ Вычисления производим по строкам: они приведены в таблице 3.

Т а б л и ц а 3

$$S-1 = 6 + 27 + 108 + 405 + 1458 \quad (9,1)$$

$$-6S = -6 - 36 - 162 - 648 - 2430$$

$$-5S-1 = 0 - 9 - 54 - 243 - 972 \quad (9,2)$$

$$\frac{3}{2}(S-1) = 9 + \frac{81}{2} + \frac{324}{2} + \frac{1215}{2}$$

$$-\frac{7}{2}S - \frac{5}{2} = 0 - \frac{27}{2} - \frac{162}{2} - \frac{729}{2} \quad (9,3)$$

$$-\frac{3}{2}(-5S-1) = \frac{27}{2} + \frac{162}{2} + \frac{729}{2}$$

$$4S-1 = 0 \quad 0 \quad 0 \quad (9,4)$$

Как видно, вычисления в таблице прерываются на четвертом преобразовании, так как все члены ряда (9,4) оказываются равными нулю. Из этого заключаем, что левая часть соотношения (9,4) точно равна нулю, ввиду чего частичная сумма

$S_4 = \frac{1}{4}$ является точной (P, Q) -суммой ряда (9), т.е.

$S = \frac{1}{4}$. Сравнивая этот результат со значением дробно-рациональной функции (10) при $x=3$, убеждаемся, что в этом случае (P, Q) -сумма точно равна значению той функции, из разложения которой получен ряд (9).

Приведем, наконец, еще результаты вычислений суммы ряда

$$S = 1 - 1! + 2! - 3! + \dots \quad (II)$$

В (2-3) получено в качестве обобщенной суммы этого ряда двумя различными методами число $S = 0,5963\dots$. Вычисляя же (P, Q) -сумму 8 членов ряда, получаем $S_8 = 0,593\dots$. Это показывает, что (P, Q) -метод суммирует ряд (II) к той же сумме, что и другие методы.

Отметим, что применяемая в методе последовательность дробно-рациональных приближений (3) совпадает с главной зигзаговой диагональной последовательностью дробно-рациональных приближений в таблице Паде [4].

Нам кажется, что рассматриваемый метод суммирования является регулярным и что он не суммирует числовой ряд с действительными членами только в том случае, если функция, из разложения которой ряд получен, имеет при рассматриваемом значении аргумента одни лишь комплексные значения. Метод может быть использован для приближенных вычислений наряду с другими методами суммирования (5-7).

Л и т е р а т у р а

И. А. Н. Х о в а н с к и й. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., 1956.

2. Г.Х. Х а р д и. Расходящиеся ряды. М., 1951.

3. R. P e n n a c c h i. Somma di serie numeriche mediante la trasformazione quadratica $T_{2,2}$ "Calcolo" 5, № 1, 51-61 1968.

4. O. P e r r o n. Die Lehre von den Kettenbrüchen, Bd. 2, 1957.

5. К. Z e l l e r. Theorie der Limitierungsverfahren, 1958.

6. Г. К а н г р о. О суммировании бесконечных рядов при помощи матричных методов. Уч. зап. Тартуского ун-та, 1955, 37, 150-190.

7. Э. Р е й м е р с. Новые общие методы суммирования. Уч.зап. Тартуского ун-та, 1962, 129, 119-154.

N.Paluver

Über die Berechnung der Summen von Zahlenreihen
mit Hilfe der rationalen Näherungsbrüche

Zusammenfassung

Es wird für die Berechnung der verallgemeinerten Summen der Zahlenreihen ein auf rationale Näherungsbrüche gegründetes Verfahren vorgeschlagen. Es werden auch Formalen für die Berechnung verallgemeinerter Teilsummen der Reihe gegeben.

УДК 519.48

Я. Хенно

СВОБОДНЫЕ Ω -СИСТЕМЫ

Пусть Ω - область (может быть, пустая) операторов, т.е. символов операции, Ω_m - совокупность всех m -арных операторов из Ω . Если $\xi = \langle G, \Omega \rangle$ - универсальная алгебра с областью операции Ω (Ω -алгебра), то обозначим результат применения операции $\omega \in \Omega_m$, $m > 0$ к элементам $x_1, \dots, x_m \in G$ через $\sum_{\omega} x_i$ (или через $x_1 \dots x_m \omega$), а элемент, отмеченный в ξ операцией $\nu \in \Omega_0$, через 0_{ν} (иногда через 0_{ν}^{ξ}).

Пусть J - непустое подмножество множества всех целых неотрицательных чисел, $J \neq \{0\}$. Пусть $\bar{J} = J \setminus \{0\}$ (если $0 \notin J$, то $\bar{J} = J$). Назовем совокупность $A = \{A_n, n \in J\}$ непересекающихся Ω -алгебр $A_n = \langle A_n, \Omega \rangle$ Ω -системой (при $0 \notin J$ это определение приводит к рассмотренным в [1] Ω -системам Менгера), если для любых $n \in J$, $m \in \bar{J}$ всяких $x_1, \dots, x_m \in A_n$, $y \in A_m$ сопоставлен элемент $x_1 \dots x_m y \in A_n$ и выполняются тождества

$$x_1 \dots x_m (y_1 \dots y_l z) = (x_1 \dots x_m y_1) \dots (x_1 \dots x_m y_l) z, \quad (I)$$

$$x_1 \dots x_m \sum_{\omega} y_i = \sum_{\omega} x_1 \dots x_m y_i, \quad (2)$$

$$x_1 \dots x_m 0_{\nu}^m = 0_{\nu}^n \quad (3)$$

при любых $x_i, 0_{\nu}^n \in A_n, n \in J, y_i, 0_{\nu}^m \in A_m, z \in A_l, m, l \in \bar{J}, \omega \in \Omega$.

Примерами Ω -систем являются полугруппы ($J = \{1\}, \Omega = \phi$), кольца ($J = \{1\}, \Omega = \{+, -\}$), полигоны ($J = \{0, 1\}, \Omega = \phi$). При $\Omega = \phi, 0 \notin J$ Ω -система называется системой Менгера [1], при $J = \{m\} (m > 0)$ m -арным Ω -кольцом, при $J = \{m\}$,

($m > 0$), $\Omega = \phi$ m - полугруппой или оперативом Менгера.

Назовем Ω -систему $A = \{A_n, n \in J\}$ подсистемой Ω - системы $B = \{B_m, m \in J\}$, если $J \subseteq J$ все A_n являются Ω - подалгебрами в B_n и из $x_1, \dots, x_m \in A_n, n \in J, y \in B_m, m \in J$ следует $x_1 \dots x_m y \in A_n$.

Гомоморфизмом Ω - системы $A = \{A_n, n \in J\}$ в Ω - систему $B = \{B_m, m \in J\}$ (гомоморфизм определен только при $J \subseteq J$) называется такая совокупность $\tau = \{\tau_n, n \in J\}$ отображений $\tau_n: A_n \rightarrow B_n$, что

$$(x_1 \dots x_m y)^{\tau_n} = x_1^{\tau_n} \dots x_m^{\tau_n} y^{\tau_m}, \quad (4)$$

$$\left(\sum x_i\right)^{\tau_n} = \sum x_i^{\tau_n}, \quad (5)$$

$$0^{\tau_n} = 0_y. \quad (6)$$

Конгруэнцией Ω - системы $A = \{A_n, n \in J\}$ называется набор $\rho = \{\rho_n, n \in J\}$ конгруэнции ρ_n Ω - алгебр A_n , если из $x_i, x'_i \in A_n, y, y' \in A_m, n \in J, m \in J, x_i \rho x'_i, i=1, \dots, m, y \rho y'$ следует $(x_1 \dots x_m y) \rho_n (x'_1 \dots x'_m y')$.

Обычным образом определяется порожденная множеством X подсистема Ω - системы - это ее минимальная подсистема, содержащая X . Если X - порождающее множество Ω - системы $A = \{A_n, n \in J\}$, то $X_n = X \cap A_n \neq \phi$ при всяком $n \in J$, ибо если $X \subseteq \bigcup_{n \in J} A_n, J_1 \subset J, J_1 \neq J$, то X содержится в истинной подсистеме $A_1 = \{A_n, n \in J_1\}$ системы A и, следовательно, не может быть порождающим множеством для A .

Назовем Ω - систему $A = \{A_n, n \in J\}$ свободной (точнее, свободной в классе всех Ω - систем) над множеством образующих $X = \{X_n, n \in J\}, X_n \subseteq A_n$, если для всякой Ω - системы $B = \{B_n, n \in J\}$ любое отображение $\tau = \{\tau_n, n \in J\}, \tau_n: X_n \rightarrow B_n$ однозначно продолжимо до гомоморфизма $\rho(\tau): A \rightarrow B$.

Пусть $X = \{X_n, n \in J\}$ - произвольное множество, в котором дано разбиение на непустые непересекающиеся подмножества X_n . Определим индуктивно множества $W_n(X)$ слов w (над X) и вес $h(w)$ каждого слова w .

Определение I.

I.1. При всяком $n \in J$ все символы $x \in X_n$ являются словами веса 1 из $W_n(X)$. При всяком $n \in J$ и для всякого $v \in \Omega_0$ символ 0_v^n является словом веса 1 из $W_n(X)$.

Этим все слова веса 1 из всех множеств $W_n(X)$ определены. Пусть натуральное число $h > 1$ и все слова из всех множеств $W_n(X)$, $n \in J$ веса меньше h уже определены.

I.2. Если $w_1, \dots, w_m \in W_n(X)$, $n \in J$, $\omega \in \Omega_m$, $m > 0$, $\max_i h(w_i) = h - 1$, то выражение $\sum_{i=1}^m w_i$ есть слово из $W_n(X)$ веса h .

I.3. Если $w_1, \dots, w_m \in W_n(X)$, $n \in J$, $x \in X_m$, $m > 0$, $\max_i h(w_i) = h - 1$, то выражение $w_1 \dots w_m x$ есть слово из $W_n(X)$ веса h .

Назовем слова вида $\sum_{i=1}^m w_i$ суммами, вида $w_1 \dots w_m x$ — произведениями. Обозначим $\varepsilon_0(\sum_{i=1}^m w_i) = \omega$, $\varepsilon_i(\sum_{i=1}^m w_i) = w_i$ ($\omega \in \Omega_m$, $i = 1, \dots, m$), $\varepsilon_0(w_1 \dots w_m x) = x$, $\varepsilon_i(w_1 \dots w_m x) = w_i$.

Слова $w, w' \in W_n(X)$ являются равными ($w = w'$) только при $h(w) = h(w')$ по следующему индуктивному определению.

Определение II.

II.1. Если $h(w) = h(w') = 1$, то $w = w'$ тогда и только тогда, когда либо $w = 0_v^n$, $w' = 0_\mu^n$ и $v = \mu$, либо $w, w' \in X_n$ и w, w' равны как элементы множества X_n .

Пусть натуральное число $h > 1$ и равенство уже определено во всех случаях, когда $h(w) = h(w') < h$.

II.2. Если $h(w) = h(w') = h$, то $w = w'$ тогда и только тогда, когда либо w, w' обе суммы и $\varepsilon_0(w) = \varepsilon_0(w')$, $\varepsilon_i(w) = \varepsilon_i(w')$, $i = 1, \dots, m$, либо w, w' оба произведения $\varepsilon_0(w) = \varepsilon_0(w')$, $\varepsilon_i(w) = \varepsilon_i(w')$, $i = 1, \dots, m$.

Если $m \neq n$, то $W_n(X) \cap W_m(X) = \emptyset$.

Определим на всех множествах $W_n(X)$ при помощи I.1 и I.2 обычным образом все операции из Ω . Кроме того, сопоставим всяким $w_1, \dots, w_m \in W_n(X)$, $w \in W_m(X)$, $n \in J$, $m \in \bar{J}$ индукцией слово $w_1 \dots w_m w \in W_n(X)$, которое назовем произведением слов w_1, \dots, w_m, w .

Определение III.

III.1. Если $h(w)=1$ и $w \in X_m$, то произведение равно слову $w_1 \dots w_m w$, если же $w = 0_v^m$, то положим $w_1 \dots w_m 0_v^m = 0_v^n$.

Пусть натуральное число $h > 1$, $h(w)=h$ и произведение уже определено во всех случаях, когда $h(w) < h$.

III.2. Если $w \in \sum^{\omega} v_i$, то положим $w_1 \dots w_m w = \sum^{\omega} w_1 \dots w_m v_i$.

III.3. Если $w = v_1 \dots v_l x$, то положим $w_1 \dots w_m w = (w_1 \dots w_m v_1) \dots (w_1 \dots w_m v_l) x$.

Теорема I. Совокупность $W_j(x) = \{W_n(x), n \in J\}$ множеств слов $W_n(x)$ является Ω -системой, свободной над множеством образующих X .

Доказательство. Покажем сначала, что $W_j(x)$ — Ω -система, т.е. в ней выполняются тождества (I)–(3).

Тождества (2) и (3) следуют из определений III.2 и III.1. Покажем индукцией по $h(z)$, что в $W_j(x)$ выполняется тождество (I).

При $h(z)=1$ (I) следует из определений III.1 и III.3. Пусть натуральное число $h > 1$, $h(z)=h$ и (I) уже доказано во всех случаях, когда $h(z) < h$. Тогда при $z = w_1 \dots w_k x$ имеем

$$\begin{aligned} x_1 \dots x_m (y_1 \dots y_l z) &= x_1 \dots x_m ((y_1 \dots y_l w_1) \dots (y_1 \dots y_l w_k) x) = \\ &= (x_1 \dots x_m (y_1 \dots y_l w_1)) \dots (x_1 \dots x_m (y_1 \dots y_l w_k)) x, \\ (x_1 \dots x_m y_1) \dots (x_1 \dots x_m y_l) z &= ((x_1 \dots x_m y_1) \dots (x_1 \dots x_m y_l) w_1) \dots \\ &\dots ((x_1 \dots x_m y_1) \dots (x_1 \dots x_m y_l) w_k) x, \end{aligned}$$

но ввиду $h(w_i) < h$, $i=1, \dots, k$ по предположению индукции

$$x_1 \dots x_m (y_1 \dots y_l w_i) = (x_1 \dots x_m y_1) \dots (x_1 \dots x_m y_l) w_i. \quad \text{При}$$

$$z = \sum^{\omega} w_i \quad \text{доказательство аналогично.}$$

Из определений I и III ясно, что X — множество образующих Ω -системы $W_j(x)$. Остается доказать, что $W_j(x)$ свободна над X . Пусть $A = \{A_n, n \in J\}$ — произвольная Ω -система, $\tau = \{\tau_n, n \in J\}$, $\tau_n: X_n \rightarrow A_n$ — отображение множества X в систему A . Покажем, что τ однозначно продолжимо до гомоморфизма $\varphi = \varphi(\tau): W_j(x) \rightarrow A$.

Определим φ индукцией по весу слов. Положим $x^{\varphi} = x^{\tau}$ для всех $x \in X$, $(0_v^n)^{\varphi} = 0_v^n$. Если натуральное число $h > 1$,

$h(w) = h$ и для всех слов из $W(X)$ веса меньше h отображение ρ уже определено, то при $w = \sum_{i=1}^{\omega} \dot{w}_i$ положим $w^\rho =$

$$= \sum_{i=1}^{\omega} w_i^\rho \quad \text{и при } w = w_1 \dots w_m \chi \quad \text{положим } w^\rho = w_1^\rho \dots w_m^\rho \chi^\rho.$$

Непосредственно из определения следуют (5), (6), и точно так же, как выше при доказательстве тождества (I), можно индукцией по h показать, что (4) тоже выполняется, т.е. ρ - гомоморфизм.

Предположим, что существует еще гомоморфизм $\pi: W(X) \rightarrow B$ такой, что $\pi \neq \rho$, $x^\pi = x^\tau$ при всех $x \in X$. Пусть w - слово наименьшего веса среди всех слов из $W(X)$, для которых $w^\pi \neq w^\rho$. Так как $x^\pi = x^\tau = x^\rho$, $(0_y^n)^\pi = 0_y^n = 0_y^\rho$, то $h(w) > 1$. При

$$w = \sum_{i=1}^{\omega} w_i \quad \text{имеем } w^\pi = \sum_{i=1}^{\omega} w_i^\pi, \quad \text{при } w = w_1 \dots w_m \chi \quad \text{имеем } w^\pi = w_1^\pi \dots w_m^\pi \chi^\pi \quad \text{и так как } h(w_i) < h, \quad \text{то } w_i^\pi = w_i^\rho, \quad \text{следовательно, } w^\pi = w^\rho, \quad \text{т.е. } \pi \neq \rho \quad \text{неверно. Теорема доказана.}$$

Пусть $Z = \{Z_n, n \in \mathbb{J}\}$ - совокупность непустых непересекающихся множеств Z_n , такая, что Z_1 содержит точно два элемента z_1^1, z_2^1 (если $1 \in \mathbb{J}$; если $1 \notin \mathbb{J}$, то Z_1 пусто), а всякое $Z_m, m \in \mathbb{J}, m > 1$ - один элемент z^m .

Определим во всяком множестве $W_m(Z), m \in \mathbb{J}$ слова $v_t^m, u_t^m, t = 1, 2, \dots$

Определение IV.

IV.1. Положим $u_1^1 = z_1^1, u_1^m = z^m, m \in \mathbb{J}, m > 1$.

Пусть $t > 1$ и слова $u_1^m, \dots, u_{t-1}^m, m \in \mathbb{J}$ уже определены.

IV.2. Положим $u_t^1 = u_{t-1}^1 z_2^1, u_t^m = u_{t-1}^m u_1^m \dots u_1^m u_1^m = u_{t-1}^m z^m \dots z^m z^m, m > 1$.

IV.3. Положим при всех $t = 1, 2, \dots$, что $v_t^1 = u_{t+2}^1 u_1^1 = u_{t+2}^1 z_1^1, v_t^m = u_{t+2}^m u_2^m u_1^m \dots u_1^m u_1^m = u_{t+2}^m u_2^m z^m \dots z^m z^m, m > 1$.

Из определения IV индукцией по t легко вывести, что $h(w_1 \dots w_m u_t^m) = \max_i h(w_i) + t, h(w_1 \dots w_m v_t^m) = \max_i h(w_i) + t + 3$ при любых $w_1, \dots, w_m \in W_n(Z), n, m \in \mathbb{J}$. Отсюда следует, что $v_t^m = v_p^m$ только при $t = p$.

Теорема 2. Подсистема Q , которую в Ω -системе $W_J(Z)$

порождает множество $V = \{V_n, n \in J\}$, где $V_0 = Z_0, V_m = \{v_1^m, v_2^m, \dots\}$, $m \in \bar{J}$, свободна над этим множеством.

Доказательство. Для доказательства покажем, что Q изоморфна свободной над множеством $X = \{X_n, n \in J\}$ Ω -системе $W_J(X)$, где $X_0 = Z_0$, а всякое $X_m = \{x_1^m, x_2^m, \dots\}$ - счетно.

Определим отображение $\tau = \{\tau_n, n \in J\}$, $\tau_n: X_n \rightarrow V_n$. Положим, что τ_0 - тождественное отображение на $X_0 = V_0$ и $(x_t^m)^{\tau_m} = v_t^m$ для всяких $x_t^m \in X_m, m \in \bar{J}$. Так как $v_t^m \neq v_p^m$ при $t \neq p$, то τ будет взаимнооднозначным отображением на все множество V и так как $W_J(X)$ свободна над X , то τ однозначно продолжимо до эпиморфизма $\rho: W_J(X) \rightarrow Q$. Покажем, что ρ - взаимнооднозначно.

Предположим, что некоторые пары неравных слов из $W_J(X)$ отображаются при ρ в один элемент. Выберем среди всех таких пар слов пару $w_1, w_2 \in W_n(X), w_1 \neq w_2$, для которой $h(w_1)$ было бы наименьшим. Ясно, что $h(w_1) \leq h(w_2)$, иначе была бы выбрана пара w_2, w_1 .

Заметим, что если $w = 0_n^0$, то $w^\rho = 0_n^0, h(w^\rho) = 1$; если $w \in X_n$, то при $n = 0$ имеем $h(w^\rho) = 1$, но $w^\rho \neq 0_n^0$, а при $n > 0$ имеем $w^\rho \in V_n$ и согласно IV.3 слово w^ρ - произведение, $h(w^\rho) > 1$; если $w = a_1 \dots a_m x_t^m$ - произведение, то $w^\rho = a_1^\rho \dots a_m^\rho v_t^m$ - произведение, $h(w^\rho) > 1$; если $w = \sum a_i$ - сумма, то $w^\rho = \sum a_i^\rho$ - сумма, $h(w^\rho) > 1$ и $\varepsilon_0(w) = \varepsilon_0(w^\rho)$. Ввиду определения равенства слов невозможны случаи, когда $h(w_1) = h(w_2) = 1$, или когда $w_1 = 0_n^0$, или когда одно из слов w_1, w_2 - произведение или принадлежит множеству X_n , а другое - сумма, или когда w_1, w_2 оба суммы и $\varepsilon_0(w_1) \neq \varepsilon_0(w_2)$. Поэтому надо рассматривать лишь следующие случаи.

I. Случай $w_1 = x_t^n \in X_n, w_2 = a_1 \dots a_m x_s^m$. Тогда $w_1^\rho = v_t^n, w_2^\rho = a_1^\rho \dots a_m^\rho v_s^m$. Так как из $w_1^\rho = w_2^\rho$ следует $\varepsilon_0(w_1^\rho) = \varepsilon_0(w_2^\rho)$ и $\varepsilon_0(w_1^\rho) = \varepsilon_0(v_t^n) \in Z_n, \varepsilon_0(w_2^\rho) = \varepsilon_0(a_1^\rho \dots a_m^\rho v_s^m) \in Z_m$, то $n = m$.

Если $n=1$, то $w_1^p = v_t^1 = u_{t+2}^1 z_2^1$, $w_2^p = a_1^p v_s^n = a_1^p u_{s+2}^1 z_2^1$

и из $w_1^p = w_2^p$ следует $u_{t+2}^1 = \varepsilon_1(w_1^p) = \varepsilon_1(w_2^p) = a_1^p u_{s+2}^1$, $u_{t+1}^1 = \varepsilon_1(u_{t+2}^1) = \varepsilon_1(a_1^p u_{s+2}^1) = a_1^p u_{s+1}^1$ и т.д.. Если предполагать, что $s < t$, то после нескольких шагов получим $u_{t-s+1}^1 = a_1^p u_1^1$, $t-s+1 > 1$, что невозможно из-за $\varepsilon_0(u_{t-s+1}^1) = z_2^1 \neq z_1^1 = \varepsilon_0(a_1^p u_1^1)$. Если предполагать, что $s \geq t$, то получим $u_1^1 = a_1^p u_{s-t+1}^1$ и $s-t+1 \geq 1$, что опять невозможно из-за $h(u_1^1) = 1 < h(a_1^p) + s-t+1 = h(a_1^p u_{s-t+1}^1)$.

Если $n > 1$, то $w_1^p = v_t^m = u_{t+2}^n u_2^n \dots z^n$, $w_2^p = a_1^p \dots a_n^p v_s^n = a_1^p \dots a_n^p (u_{s+2}^n u_2^n \dots z^n) = (a_1^p \dots a_n^p u_{s+2}^n) (a_1^p \dots a_n^p u_2^n) (a_1^p \dots a_n^p z^n) \dots (a_1^p \dots a_n^p z^n)$, откуда $u_2^n = \varepsilon_2(w_1^p) = \varepsilon_2(w_2^p) = a_1^p \dots a_n^p u_2^n$, что опять невозможно из-за $h(u_2^n) = 2 < \max h(a_i^p) + 2 = h(a_1^p \dots a_n^p u_2^n)$.

2. Случай $w_1 = a_1 \dots a_m x_t^m$, $w_2 = b_1 \dots b_l x_s^l$. Точно так же, как в случае I, получим, что $m=l$.

Если $m=1$, то $w_1^p = a_1^p v_t^1 = a_1^p u_{t+2}^1 z_1^1$, $w_2^p = b_1^p u_{s+2}^1 z_1^1$.

Если предполагать, что $t > s$, то после нескольких шагов получим $a_1^p u_{t-s+1}^1 = b_1^p u_1^1$, $t-s+1 > 1$, что неверно, ибо $\varepsilon_0(a_1^p u_{t-s+1}^1) = z_1^1 \neq z_1^1 = \varepsilon_0(b_1^p u_1^1)$. Точно так же ведет к противоречию

предположение $s > t$, следовательно, $s=t$ и после нескольких шагов получим $a_1^p = b_1^p$. Так как $w_1 \neq w_2$, то $a_1 \neq b_1$, что из-за $h(a_1) < h(w_1)$, $a_1^p = b_1^p$ противоречит выбору слов w_1, w_2 .

Если $m > 1$, то $w_1^p = a_1^p \dots a_m^p v_t^m = a_1^p \dots a_m^p (u_{t+2}^m u_2^m u_1^m \dots u_1^m)$, $w_2^p = b_1^p \dots b_m^p v_s^m = b_1^p \dots b_m^p (u_{s+2}^m u_2^m u_1^m \dots u_1^m)$,

откуда

$$a_1^i \dots a_m^i u_{t+2}^m = b_1^i \dots b_m^i u_{s+2}^m, \quad (7)$$

$$a_1^i \dots a_m^i u_2^m = b_1^i \dots b_m^i u_2^m. \quad (8)$$

Из (8) получим

$$a_1^i \dots a_m^i u_1^m = \varepsilon_i(a_1^i \dots a_m^i u_2^m) = \varepsilon_i(b_1^i \dots b_m^i u_2^m) = b_1^i \dots b_m^i u_1^m,$$

откуда

$$a_i^i = \varepsilon_i(a_1^i \dots a_m^i u_1^m) = \varepsilon_i(b_1^i \dots b_m^i u_1^m) = b_i^i$$

при всех i . Из (7) получим теперь, что

$$\begin{aligned} \max h(a_i^i) + t + 2 &= h(a_1^i \dots a_m^i u_{t+2}^m) = h(b_1^i \dots b_m^i u_{s+2}^m) = \\ &= \max h(b_i^i) + s + 2 = \max h(a_i^i) + s + 2, \end{aligned}$$

откуда $s = t$. Так как $w_1 \neq w_2$, то существует индекс i такой, что $a_i \neq b_i$, но из-за $h(a_i) < h(w_1)$, $a_i^i = b_i^i$ это противоречит выбору слов w_1, w_2 .

3. Случай $w_1 = \sum a_i, w_2 = \sum b_i$. Тогда $w_1^i = \sum a_i^i, w_2^i = \sum b_i^i$

и из $w_1^i = w_2^i$ следует $a_i^i = \varepsilon_i(w_1^i) = \varepsilon_i(w_2^i) = b_i^i$ при всех i .

Так как $w_1 \neq w_2$, то существует индексу i такой, что $a_i \neq b_i$, но из-за $h(a_i) < h(w_1)$, $a_i^i = b_i^i$ это противоречит выбору слов w_1, w_2 . Теорема доказана.

Пусть $\mathcal{A} = \{A_n, n \in \mathbb{J}\}$ - произвольная Ω -система. Определим индуктивно множества $P_n, n \in \mathbb{J}$ полиномов (одноместных функций) над \mathcal{A} , ранг $g(p)$ и область определения $\sigma(p)$ каждого полинома p .

Определение U .

У.1. При всяком $n \in \mathbb{J}$ символ ξ^n есть единственный полином из P_n рангом I , $\sigma(\xi^n) = A_n$.

Пусть натуральное число $q > 1$ и все полиномы из всех множеств $P_n, n \in \mathbb{J}$ рангов меньше q уже определены.

У.2. Если $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \in A_n, q \in P_n, n \in J, \omega \in \Omega_m, m > 0$ и $g(q) = g - 1$, то выражение $a_1 \dots a_{i-1} q a_{i+1} \dots a_m \omega, i = 1, \dots, m$ есть полином рангом g из P_n с областью определения $\sigma(q)$.

У.3. Если $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \in A_n, q \in P_n, n \in J, a \in A_m, m \in \bar{J}$ и $g(q) = g - 1$, то выражение $a_1 \dots a_{i-1} q a_{i+1} \dots a_m a, i = 1, \dots, m$ есть полином рангом g из P_n с областью определения $\sigma(q)$.

У.4. Если $a_1, \dots, a_m \in A_n, q \in P_m, n \in J, m \in \bar{J}$ и $g(q) = g - 1$, то выражение $a_1 \dots a_m q$ есть полином рангом g из P_n с областью определения $\sigma(q)$.

Обычным образом определяется значение $p(a) \in A_n$ полинома $p \in P_n$ в точке $a \in \sigma(p)$.

Пусть ρ — такое бинарное отношение на Ω -системе \mathcal{A} , что $\rho \cap (A_n \times A_m) = \emptyset$ при $n \neq m, n, m \in J$. Обозначим $\bar{\rho} = \rho \cup \rho^{-1}$. Будем говорить, что последовательность полиномов $p_1, \dots, p_r \in P_n, n \in J$ $\bar{\rho}$ -соединяет слова $a, a' \in \mathcal{A}_n$, если существуют $a_i, a'_i, i = 1, \dots, r$ такие, что $a_i \bar{\rho} a'_i, a_i, a'_i \in \sigma(p_i), a = p_1(a_1), p_i(a'_i) = p_{i+1}(a_{i+1}), i = 1, \dots, r-1, p_r(a'_r) = a'$.

Так же, как и для обычных универсальных алгебр, можно показать (см., например, [2]), что минимальную содержащую $\bar{\rho}$ конгруэнцию θ Ω -системы \mathcal{A} можно определить так: для любых $a, a' \in A$ имеем $a \theta a'$ тогда и только тогда, когда $a = a'$ или существует последовательность полиномов, $\bar{\rho}$ -соединяющую a, a' .

Для свободных Ω -систем эту конструкцию можно упростить. Для этого определим множества $F_n \subseteq P_n, n \in J$ специальных полиномов над $\mathcal{W}_J(x)$.

Определение У1.

У1.1 $\xi^n \in F_n, n \in J$.

У1.2 $a_1 \dots a_m \xi^m \in F_n, n \in J$.

Пусть натуральное число $g > 1$ и все специальные полиномы над $\mathcal{W}_J(x)$ рангом меньше g уже определены.

У1.3 Если $q \in F_n$, то $a_1 \dots a_{i-1} q a_{i+1} \dots a_m \omega \in F_n$.

У1.4 Если $q_j \in F_n$, $x \in X_m$, то $a_1 \dots a_{i-1} q_j a_{i+1} \dots a_m x \in F_n$.

Лемма I. Пусть p — полином над $\omega_j(x)$, $a, a' \in \sigma(p)$ такие, что $q \bar{p} a'$. Если $p(a) \neq p(a')$, то существует соединяющая слова $w = p(a)$, $w' = p(a')$ последовательность специальных полиномов.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по $q(p)$. По У1.1 полином ранга 1 специальный, так что при $q(p) = 1$ полином p сам составляет искомую последовательность. Пусть $q > 1$, $q(p) = q$ и утверждение уже доказано для всех полиномов рангом меньше q .

1. Случай $p = w_1 \dots w_{i-1} q_j w_{i+1} \dots w_m \omega$. Ввиду $q(q) < q$ по предположению индукции существует соединяющая слова $q(a)$, $q(a')$ последовательность специальных полиномов q_1, \dots, q_r . Ввиду У.3 за искомую можно взять последовательность p_1, \dots, p_r , где $p_j = w_1 \dots w_{i-1} q_j w_{i+1} \dots w_m \omega$, $j = 1, \dots, r$.

2. Случай $p = w_1 \dots w_{i-1} q_j w_{i+1} \dots w_m w$. В этом случае применим вспомогательную индукцию по $h(w)$. Если $h(w) = 1$, то при $w = 0_v^m$ имеем $p(a) = 0_v^n = p(a')$, а при $w = x \in X_m$ доказательство аналогично таковому в случае 1. Пусть натуральное число $h > 1$, $h(w) = h$ и утверждение уже доказано во всех случаях, когда $h(w) < h$.

2.1. Если $w = \sum_{\kappa} a_{\kappa} \omega \in \Omega_{\kappa}$, то рассмотрим полиномы $q_j = w_1 \dots w_{i-1} q_j w_{i+1} \dots w_m a_{\kappa}$, $j = 1, \dots, \kappa$. Ввиду $q(q_j) < q$ существует по предположению индукции последовательность специальных полиномов, соединяющая слова $q_j(a)$, $q_j(a')$ и точно так же, как в случае 1 отсюда выводится, что существует последовательность специальных полиномов, соединяющая слова $p_j(a)$, $p_j(a')$, где $p_j = q_1(a) \dots q_{j-1}(a') q_j q_{j+1}(a) \dots q_{\kappa}(a) \omega$. Ввиду $p_j(a) = p_{j+1}(a)$ получим искомую последовательность, соединив соединяющие слова $p_j(a)$, $p_j(a')$ последовательности.

2.2. Если $w = a_1 \dots a_{\kappa} x$, то рассмотрим полиномы $q_j = w_1 \dots w_{i-1} q_j w_{i+1} \dots w_m a_j$, $j = 1, \dots, \kappa$ и проведем рассуждения, аналогичные таковым в случае 2.1.

3. Случай $p = w_1 \dots w_m q$. При $q(q) = 1$ полином p сам специальный. При $q(q) > 1$ образуем вспомогательный полином p' .

3.1. При $q = a_1 \dots a_{i-1} q' a_{i+1} \dots a_k \omega$ положим $q'' = w_1 \dots w_m q'$,
 $p' = (w_1 \dots w_m a_i) \dots (w_1 \dots w_m a_{i-1}) q'' (w_1 \dots w_m a_{i+1}) \dots (w_1 \dots w_m a_k) \omega$.

3.2. При $q = a_1 \dots a_{i-1} q' a_{i+1} \dots a_k \omega$ положим $q'' = w_1 \dots w_m q'$,
 $p' = (w_1 \dots w_m a_i) \dots (w_1 \dots w_m a_{i-1}) q'' (w_1 \dots w_m a_{i+1}) \dots (w_1 \dots w_m a_k) \omega$.

3.3. При $q = a_1 \dots a_k q'$ положим $p' = (w_1 \dots w_m a_1) \dots (w_1 \dots w_m a_k) q'$.

Во всех случаях $p'(a) = w$, $p'(a') = w'$. Поэтому в случаях 3.1 и 3.2 доказательство свелось, ввиду $q(p') = q(p)$, к рассмотренным выше случаям 1 и 2, а в случае 3.3 утверждение, ввиду $q(p') < q(p)$, верно по предположению индукции. Лемма доказана.

Из доказанной леммы и из приведенного выше определения минимальной содержащей отношение ρ конгруэнции следует

Теорема 3. Если ρ — такое бинарное отношение на свободной Ω -системе $W_1(X)$, что $\rho \cap (W_n(X) \times W_m(X)) = \emptyset$ при $n \neq m$, $n, m \in J$ и θ — минимальная содержащая ρ конгруэнция Ω -системы $W_1(X)$, то при всяких $w, w' \in W(X)$ имеем $w \theta w'$ тогда и только тогда, когда $w = w'$ или существует ρ -соединяющая слова w, w' последовательность специальных полиномов.

Л и т е р а т у р а

1. Я. В. Х и о н. m -арные Ω -кольцоида. Сиб. Матем. ж. 1967. УШ. 174-194.

2. G. G r ä t z e r. Universal Algebra. Pennsylvania, 1966.

Free Ω -system

Summary

Ω -systems - class of algebras with a scheme of operators that are a generalization of semigroups, S-systems, Menger systems etc., are defined. Free (in class of all Ω -systems) over arbitrary given set $X = \{x_n, n \in J\}$ of generators Ω -system $W_J(x)$ is described. It is proved that free Ω -system $W_J(Z)$, where $|Z_1| = 2$ (if $1 \in J$, $|Z_m| = 1$, $m > 1$) has a subsystem, free over such set $Y = \{y_n, n \in J\}$ of generators, that Y_m is a countable set for all $m \in J$, $m > 0$.

УДК 39I+624.074.4.00I.2

Т. Лийва

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ
КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ
ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ РАЗНЫХ ГРАНИЧНЫХ
УСЛОВИЯХ

I. Введение

В статьях [1-2] рассматриваются собственные неосесимметричные колебания оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны. При решении исходной системы уравнений равновесия оболочки используется метод асимптотического интегрирования.

В статье [1] эта задача рассмотрена при разных граничных условиях в первом приближении. Выяснено, что в зависимости от параметров оболочки и вида граничных условий порядок наименьшего значения параметра частоты $\lambda > 0$ может колебаться в пределах от $h^{\frac{2}{3}}$ до h^2 . В тех случаях, когда граничные условия не допускают нетривиальных изгибаний срединной поверхности, имеют место соотношения

$$\lambda = 0(h^{\frac{2}{3}}), \quad m = 0(h^{-\frac{1}{3}}). \quad (I.1)$$

Если же нетривиальные изгибания возможны, то

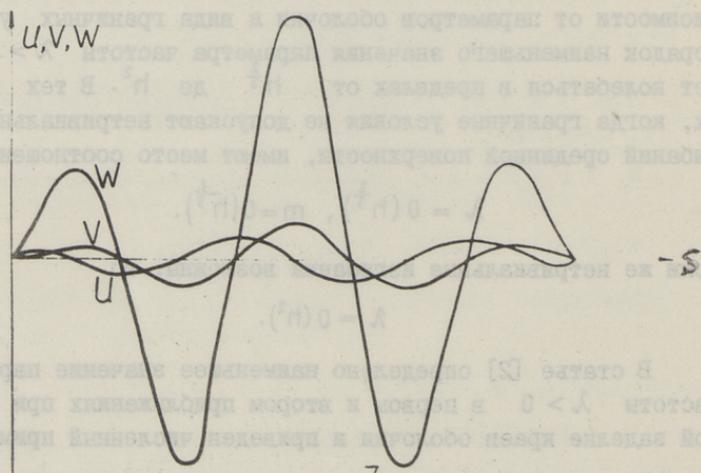
$$\lambda = 0(h^2). \quad (I.2)$$

В статье [2] определено наименьшее значение параметра частоты $\lambda > 0$ в первом и втором приближениях при жесткой заделке краев оболочки и приведен численный пример.

В настоящей статье проведен анализ собственных колебаний в первом и втором приближениях при разных граничных условиях. Сюда относятся также граничные условия, допускающие

перемещения чистого изгиба. В качестве примеров определены наименьшие частоты колебаний той части тора, где радиусы кривизны R_1 и R_2 имеют противоположные знаки.

Что касается вчислений первого и второго приближений, то трудности принципиального характера возникли лишь в первом приближении. Однако после вычислений в первом приближении осталось несколько невыясненных вопросов: какова погрешность наименьшего значения параметра частоты λ , какую поправку к решению дает учет нетангенциальных граничных условий, какое влияние оказывает на результаты член исходной системы уравнений равновесия оболочки, учитывающий жесткость срединной поверхности оболочки на изгиб и т.д. Ограничиваясь лишь первым приближением, невозможно было бы прийти к выводам, указанным в конце настоящей статьи. В случае жесткой заделки краев оболочки форма колебаний в первом приближении может быть найдена лишь после построения второго приближения [2]. В этом состоит особенность задачи в тех случаях, когда в первом приближении уравнения частот являются кратными. При дальнейшем уточнении (начиная со второго приближения) кратные корни порождают уже разные корни, но по величине они довольно близки друг другу.



Фиг. 1.

В численных же примерах обнаружен любопытный факт, что при жесткой заделке краев оболочки близким частотам соответствуют разные формы колебаний. В статье [2] приведен график собственных форм безмоментных колебаний, соответствующий только минимальной частоте $\lambda^{(1)} = 0,001180$. В настоящей статье приведен для сравнения аналогичный график, соответствующий частоте $\lambda^{(2)} = 0,001382$ (фиг. 1).

2. Результаты асимптотического интегрирования исходной системы уравнений

Решение установившихся колебаний оболочки вращения ищем в виде

$$u(s, \varphi, t) = u(s) e^{i\omega t} \cos m\varphi; \quad v(s, \varphi, t) = v(s) e^{i\omega t} \sin m\varphi$$

$$w(s, \varphi, t) = m \dot{w}(s) e^{i\omega t} \cos m\varphi; \quad (2.1a)$$

$$T_1(s, \varphi, t) = E h p(s) e^{i\omega t} \sin m\varphi; \quad T_2(s, \varphi, t) = E h q(s) e^{i\omega t} \cos m\varphi$$

$$S(s, \varphi, t) = E h r(s) e^{i\omega t} \sin m\varphi. \quad (2.1b)$$

Здесь u, v, w — проекции смещения точки срединной поверхности на направления образующей, параллели и направленной внутрь нормали, m — число волн по параллели, T_1, T_2 и S — внутренние усилия в оболочке, s — длина дуги образующей, изменяющаяся в пределах $s_1 \leq s \leq s_2$; φ — угол в окружном направлении, ω — собственная частота колебаний, B — расстояние до оси вращения, $\lambda = \gamma \omega^2 E^{-1}$ — параметр частоты, γ — плотность, σ — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга.

Пусть в качестве единицы длины принят характерный размер срединной поверхности. Тогда толщину оболочки h можно считать малой. Вводим малый параметр в виде

$$\varepsilon^6 = \frac{h^2}{12(1-\sigma^2)}. \quad (2.2)$$

Положим:

$$m = \frac{\varphi}{\varepsilon} \quad (2.3)$$

$$\lambda = \varepsilon^2 \lambda_1 + \varepsilon^3 \lambda_2 + \dots \quad (2.4)$$

Без ограничения общности считаем, что $R_1 < 0$; $R_2 > 0$.

Составляя линейные комбинации безмоментных интегралов исходной системы, получим ее вещественное безмоментное решение в следующем виде [2]:

$$\begin{aligned} u(s) = & C_1 [- (u_{01} + \lambda_2 \varepsilon u_{11}^{(\lambda)}) \sin \psi - \varepsilon u_{11}^{(0)} \cos \psi] + \\ & + C_2 [- (u_{02} + \lambda_2 \varepsilon u_{12}^{(\lambda)}) \sin \psi - \varepsilon u_{12}^{(0)} \cos \psi] + \\ & + C_3 [(u_{01} + \lambda_2 \varepsilon u_{11}^{(\lambda)}) \cos \psi - \varepsilon u_{11}^{(0)} \sin \psi] + \\ & + C_4 [(u_{02} + \lambda_2 \varepsilon u_{12}^{(\lambda)}) \cos \psi - \varepsilon u_{12}^{(0)} \sin \psi] \end{aligned} \quad [u, p] \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} v(s) = & C_1 [(v_{01} + \lambda_2 \varepsilon v_{11}^{(\lambda)}) \cos \psi - \varepsilon v_{11}^{(0)} \sin \psi] + \\ & + C_2 [(v_{02} + \lambda_2 \varepsilon v_{12}^{(\lambda)}) \cos \psi - \varepsilon v_{12}^{(0)} \sin \psi] + \\ & + C_3 [(v_{01} + \lambda_2 \varepsilon v_{11}^{(\lambda)}) \sin \psi + \varepsilon v_{11}^{(0)} \cos \psi] + \\ & + C_4 [(v_{02} + \lambda_2 \varepsilon v_{12}^{(\lambda)}) \sin \psi + \varepsilon v_{12}^{(0)} \cos \psi] \end{aligned} \quad [v, w]$$

Здесь

$$\psi(s) = \frac{\varphi}{\varepsilon} \int_{s_1}^s |\alpha| ds, \quad |\alpha| = \left| \frac{R_2}{B^2 R_1} \right|^{\frac{1}{2}} \quad \text{и } C_1, C_2, C_3, C_4 - \text{ произвольные постоянные.}$$

В формулах (2.14), (2.15) статьи [2] допущена ошибка. Следует учесть, что во втором приближении имеет место

$$\begin{aligned} v_{1k} = & \left| \frac{B}{\alpha R_2} \right|^{\frac{1}{2}} y; \\ p_{1k} = & \frac{2\alpha_k R_1^2 B}{(R_1 - R_2)^2} \left| \frac{B}{\alpha R_2} \right|^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{ds} + K_1(s, x, x', x'', \lambda_1), \end{aligned} \quad (2.6)$$

т.е. второе выражение (2.6) имеет второй дополнительный член. Необходимо также отметить, что в статье [2] все результаты численных примеров оказались правильными. Функции y и $\frac{dy}{ds}$ определяются из неоднородного уравнения в виде

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \left(g(s) \frac{dy}{ds} \right) - \frac{\rho^6}{q(s)} y + \rho^2 \frac{R}{2|\alpha|} \lambda_1 y = -\rho^2 \frac{R_2}{2|\alpha|} \lambda_2 x \pm \\ & \pm i \rho^5 \frac{R^2}{B^2} \left\{ 2 \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \frac{dx}{ds} + x \left[\frac{B'}{B} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} - 2 \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) + R_2 \left(\frac{1}{R_1} \right)' \right] \right\} \pm \\ & \pm i F_1(s, x, x', x'', x'''). \end{aligned} \quad (2.7)$$

В уравнении (2.7) знак плюс соответствует корням $\alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{\frac{R_2}{B^2 R_1}}$, а знак минус - корням $\alpha_3 = \alpha_4 = -\sqrt{\frac{R_2}{B^2 R_1}}$.

Неизвестный параметр λ_2 определяется из уравнения частоты. В формулах (2.21) статьи [2] следует учесть, что

$$\begin{aligned} y_1^{(0)}(s_2) = & - \frac{\rho^5 x_2(s_2)}{q(s_1)} \int_{s_1}^{s_2} x_1 \frac{R_2}{B^2} \left\{ 2 \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \frac{dx_1}{ds} + \right. \\ & + x_1 \left[\frac{B'}{B} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} - 2 \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) + R_2 \left(\frac{1}{R_1} \right)' \right] \Big\} ds - \\ & - \frac{x_2(s_2)}{q(s_1)} \int_{s_1}^{s_2} x_1 F_1(s, x, x', x'', x''', \lambda_1) ds. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Исходная система уравнений равновесия оболочки имеет также четыре интеграла типа краевого эффекта с показателем изменяемости $\frac{1}{2}$ (см. [2]).

3. Определение собственных частот колебаний

Целью следующих параграфов является определение наименьшего значения параметра частоты $\lambda > 0$, при котором существует решение исходной системы уравнений равновесия оболочки, удовлетворяющее граничным условиям одного из двух вариантов:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & u(s_1) = 0 & v(s_2) = 0 \\
 & v(s_1) = 0 & T_1(s_2) = 0 \\
 & w(s_1) = 0 & w(s_2) = 0 \\
 & \frac{dw}{ds}(s_1) = 0 & M(s_2) = 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & v(s_i) = 0 & w(s_i) = 0 \\
 & T_1(s_i) = 0 & M(s_i) = 0
 \end{aligned} \quad (i = 1, 2) \tag{3.2}$$

В первом приближении наши результаты являются решениями задач безмоментной теории при тангенциальных граничных условиях, что находится в полном соответствии с классической теорией. Согласно последней, безмоментная оболочка может нести лишь тангенциальную краевую нагрузку. Неувязки в нетангенциальных граничных условиях могут быть ликвидированы с помощью интегралов типа краевого эффекта, что и делается ниже.

а) граничные условия (3.1)

В первом приближении, для определения λ_1 , приходим к уравнению

$$x'_1(\lambda_1, s_2) = 0 \quad \text{или} \quad x_1(\lambda_1, s_2) = 0. \tag{3.3}$$

Однако оказывается, что второе из уравнений дает большее значение λ_1 . Во втором приближении, как выясняется ниже, влияние нетангенциальных граничных условий $w(s_i) = 0$ ($i=1,2$), $\frac{dw}{ds}(s_1) = 0$, $M(s_2) = 0$ и интегралов типа краевого эффекта пренебречь нельзя.

Уравнение для определения параметра λ_2 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & \lambda_2 \rho_{11}^{(\lambda)}(s_2) - \frac{1}{2} \rho_{02}(s_2) \frac{u_{11}^{(0)}(s_1)}{u_{02}(s_1)} \sin 2\psi_2 + \\
 & + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{(1-\sigma^2)\rho}{2A(s_2)} \frac{B'(s_2)}{B(s_2)R_2(s_2)} \left\{ w_{11}^{(0)}(s_2) - \frac{u_{11}^{(0)}(s_1)}{u_{02}(s_1)} w_{02}(s_2) \sin^2 \psi_2 \right\} + O(\varepsilon) = 0, \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

где

$$\psi_2 = \psi(s_2), \quad A(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}{R_2(s)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

В связи с тем, что корни уравнений (3.3) простые, для λ_2 (и последующих λ_k) получаются линейные уравнения. Формы колебаний в первом приближении для своего построения не требуют рассмотрения второго приближения.

б) граничные условия (3.2)

В первом приближении уравнением для определения λ_1 будет

$$x_1'(\lambda_1, s_2) x_2(\lambda_1, s_2) \sin^2 \psi_2 + x_1(\lambda_1, s_2) x_2'(\lambda_1, s_2) \cos^2 \psi_2 = 0 \quad (3.5)$$

В статье [1] уравнение (3.5) решено приближенно, в предположении, что

$$\left| \lambda_1 \varphi^2 \frac{R_2}{2|\alpha|} - \frac{\varphi^6}{g(s)} \right| \ll 1$$

(т.е. изучая только нижнюю часть спектра собственных колебаний) и получен следующий результат:

$$\lambda = \frac{\sin^2 \psi_2}{m^2 L_1 L_2} + \frac{m^4 h^2}{12(1-\sigma^2)} \frac{L_1}{L_2}, \quad (3.6)$$

где

$$L_1 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{g(s)}, \quad L_2 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{R_2}{2|\alpha|} ds.$$

Во втором приближении уравнение для определения параметра λ_2 будет в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \lambda_2 \left\{ [p_{01}(s_2) v_{12}^{(\lambda)}(s_2) + v_{02}(s_2) p_{11}^{(\lambda)}(s_2)] \sin^2 \psi_2 + \right. \\ & + [p_{02}(s_2) v_{11}^{(\lambda)}(s_2) + v_{01}(s_2) p_{12}^{(\lambda)}(s_2)] \cos^2 \psi_2 - v_{01}(s_2) p_{01}(s_2) \frac{p_{12}^{(\lambda)}(s_1)}{p_{01}(s_1)} \left. \right\} + \\ & + [p_{01}(s_2) v_{12}^{(0)}(s_2) + p_{11}^{(0)}(s_2) v_{02}(s_2) - v_{01}(s_2) p_{12}^{(0)}(s_2) - \\ & - v_{11}^{(0)}(s_2) p_{02}(s_2) + v_{01}(s_2) p_{02}(s_2)] \frac{v_{12}^{(0)}(s_1)}{v_{02}(s_1)} - \\ & - p_{01}(s_2) v_{02}(s_2) \frac{v_{12}^{(0)}(s_1)}{v_{02}(s_1)} \left. \right\} \sin \psi_2 \cos \psi_2 + \\ & + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{(1-\sigma^2) \varphi B'(s_2)}{2R_2(s_2)B(s_2)A(s_2)} \left\{ \lambda_2 [v_{11}^{(\lambda)}(s_2) w_{02}(s_2) - v_{12}^{(\lambda)}(s_2) w_{01}(s_2) + \right. \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
& + v_{01}(\delta_2) w_{01}(\delta_2) \frac{p_{12}(\delta_1)}{p_{01}(\delta_1)} \Big] \sin \psi_2 \cos \psi_2 - v_{11}^{(0)}(\delta_2) w_{02}(\delta_2) \sin^2 \psi_2 + \\
& + \left[v_{02}(\delta_2) w_{12}(\delta_2) \frac{v_{12}^{(0)}(\delta_1)}{v_{02}(\delta_1)} - w_{01}(\delta_2) v_{12}^{(0)}(\delta_2) \right] \cos^2 \psi_2 \Big\} + O(\varepsilon) = 0.
\end{aligned}$$

Здесь члены с множителем $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ являются факторами, учитывающими влияние нетангенциальных граничных условий. В том случае, когда граничные условия допускают нетривиальные изгибания ($\sin \psi_2 = 0$) в уравнении для λ_2 второе слагаемое, учитывающее более точно влияние тангенциальных условий, также будет малым. Однако третье слагаемое с множителем $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, учитывающее влияние нетангенциальных условий, не становится малым. Следовательно, в этом случае нетангенциальные граничные условия оказывают более сильное относительное влияние на частоту колебаний.

4. Численные примеры

В качестве примера найдем собственные частоты той части тора, где гауссовая кривизна отрицательна (см. 2, фиг. I). Вычисляются также и формы колебаний в первом приближении. За начальные данные примем следующие величины:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= 0,7854 & a &= 1,500 \\
\delta_2 &= 2,356 & h &= 0,0030 \\
\sigma &= 0,300 & R_1 &= -1,000.
\end{aligned}$$

В случае жесткой заделки краев оболочки минимальные собственные значения $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$ во втором приближении достигались при $m = 7$ [2]. Соответствующие им собственные формы безмоментных колебаний представлены, соответственно, на фиг. 2 статьи [2] и на фиг. I настоящей статьи.

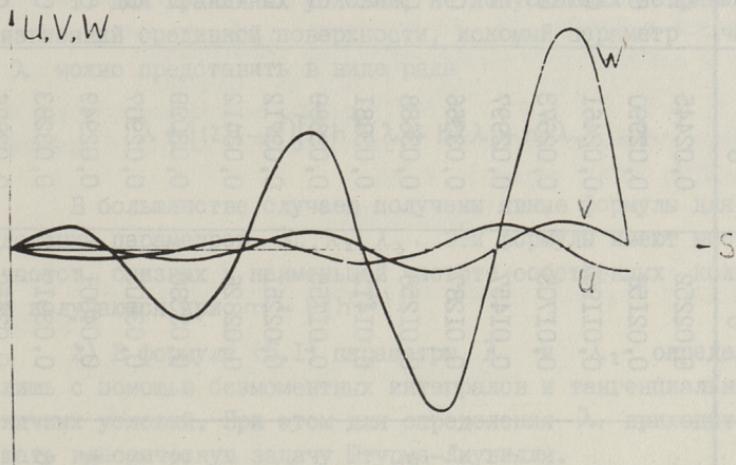
Пусть на обоих краях выполнены граничные условия (3.1). Для ряда значений m наименьшие собственные значения этой краевой задачи приведены в таблице I.

Наименьшее собственное значение достигается при $m = 5$. Собственные формы безмоментных колебаний при $m = 5$ и $\lambda_1 = 0,03977$ представлены на фиг. 2. Учет влияния нетангенци-

циальных граничных условий здесь не производится.

Т а б л и ц а I

m	4	5	6	7
λ_1	0,04947	0,03977	0,04259	0,05580
$\varepsilon^2 \lambda_1$	0,0004650	0,0003738	0,0004000	0,0005245



Фиг. 2.

Граничные условия (3.2) допускают нетривиальные изгибания. В этом случае в связи с тем, что частоты колебаний существенно зависят от положения параллелей $\delta = \delta_1$ и $\delta = \delta_2$, меняем длину образующей. Пусть

$$\delta_1 = \frac{\pi}{4} + n \frac{\pi}{180} \quad \text{радиан}, \quad \delta_2 = \frac{3\pi}{4} - n \frac{\pi}{180} \quad \text{радиан}.$$

Результаты вычислений по формуле (3.6) находятся в таблице 2.

5. Выводы

Результаты статей [1, 2] и настоящей статьи позволяют сделать следующие выводы:

Т а б л и ц а 2

	2	3	4	5	6	7	8
0	0,06270	0,002534	0,01420	0,02252	0,02445	0,04542	0,07860
I	0,06067	0,001550	0,01837	0,02158	0,02990	0,04837	0,07943
2	0,05745	0,001867	0,02242	0,011961	0,02461	0,05112	0,07926
3	0,05308	0,003701	0,02585	0,01705	0,02673	0,05289	0,07892
4	0,04769	0,007175	0,02817	0,01457	0,02997	0,05321	0,07943
5	0,04145	0,01230	0,01287	0,01287	0,03366	0,05221	0,08146
6	0,03460	0,01897	0,602819	0,01258	0,03688	0,05061	0,08495
7	0,02742	0,02693	0,02572	0,01412	0,03881	0,04951	0,08901
8	0,02026	0,03582	0,02169	0,01755	0,03889	0,04992	0,09232
9	0,01353	0,04514	0,01721	0,02251	0,03712	0,05237	0,09383
10	0,007889	0,05431	0,01244	0,02826	0,03412	0,05655	0,09338
11	0,003238	0,06269	0,008512	0,03380	0,03099	0,06139	0,09191
12	0,000717	0,06963	0,006032	0,03803	0,02907	0,06535	0,09108
13	0,000657	0,07451	0,006094	0,04001	0,02949	0,06710	0,09248
14	0,003758	0,07679	0,009176	0,03919	0,03283	0,06608	0,09665
15	0,01049	0,07610	0,01552	0,03559	0,03876	0,06292	0,1026

Удалось провести асимптотическое интегрирование системы уравнений неосесимметричных колебаний оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны. При различных граничных условиях получены выражения для частот и форм колебаний в виде рядов по степеням малого параметра.

В первом приближении получены простые формулы, пригодные для произвольных оболочек отрицательной гауссовой кривизны. При этом обнаружилось следующее:

1) для граничных условий, не допускающих нетривиальных изгибов срединной поверхности, искомый параметр частоты λ можно представить в виде ряда

$$\lambda = [12(1-\sigma^2)]^{\frac{2}{3}} h^{\frac{2}{3}} (\lambda_1 + h^{\frac{1}{3}} \lambda_2 + h^{\frac{2}{3}} \lambda_3 + \dots). \quad (5.1)$$

В большинстве случаев получены явные формулы для определения параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Эти формулы имеют место для частот, близких к наименьшей частоте собственных колебаний и получаются при $m = 0$ ($h^{-\frac{1}{3}}$).

2) В формуле (5.1) параметры λ_1 и λ_2 определяются лишь с помощью безмоментных интегралов и тангенциальных граничных условий. При этом для определения λ_1 приходится решать классическую задачу Штурма-Лиувилля.

3) Член λ_3 учитывает влияние нетангенциальных граничных условий.

4) В случае жесткой заделки краев оболочки форма колебаний в первом приближении может быть найдена лишь после построения второго приближения. В этом состоит особенность задачи в тех случаях, когда в первом приближении корни уравнения частот оказываются кратными.

5) В случае граничных условий, допускающих нетривиальные изгибы срединной поверхности для некоторых критических размеров оболочки, искомый параметр частоты λ представим в виде ряда.

$$\lambda = \frac{\sin^2 \psi_2}{m^2 L_1 L_2} + \frac{m^4 h^2 \cdot L_1}{12(1-\sigma^2) \cdot L_2} + h^{\frac{7}{6}} \lambda_3 + \dots \quad (5.2)$$

При $\sin \psi_2 = 0$ оболочка допускает деформации чистого изгиба. Тогда происходит резкое уменьшение параметра λ . Од-

нако третье слагаемое в ряде (5.2) $h^{\frac{7}{2}}\lambda_3$, учитывающее влияние нетангенциальных граничных условий, не становится малым. Следовательно, в этом случае нетангенциальные граничные условия оказывают более сильное относительное влияние на частоту колебаний.

Л и т е р а т у р а

1. Т.В. Л и й в а, П.Е. Т о в с т и к. Собственные неосесимметричные колебания оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны. Тр. УП всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. "Наука", М., 1970.

2. Т.В. Л и й в а. О собственных неосесимметричных колебаниях оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны. Труды ТПИ, 1970, серия А, № 293.

T.Liiva

Feststellung von asymmetrischen Schwingungen
der Umdrehungsschale der negativen Gaußschiefe
unter verschiedenen Randbedingungen

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel werden freie Schwingungen der dünnen elastischen Umdrehungsschale der negativen Gaußschiefe unter verschiedenen Randbedingungen betrachtet. Mit der asymptotischen Integralmethode wird der in der geringsten Frequenzschwingung liegende Spektrumteil erforscht. Als Beispiel werden die Frequenz und die Formen eines Teils der Ringfläche angeführt, wo die Gaußschiefe negativ ist. Zum Schluß des Artikels kommt man zu einigen Schlußfolgerungen.

УДК 531.314.2

Х. Рельвик

СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДВИЖЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ АНАЛОГОВ КИНЕТИЧЕСКОЙ
ЭНЕРГИИ

I. Обозначения

В настоящей работе мы будем придерживаться обозначений статьи [1].

Рассмотрим скалярные произведения

$$V^{l,n} = \frac{m}{2} \overset{(l)}{v} \cdot \overset{(n)}{v}. \quad (1)$$

Так как $V^{l,n} = V^{n,l}$, то достаточно изучить случай $l \leq n$.
Функции (1) мы будем называть аналогами кинетической энергии, так как в частном случае $l = n = 0$ они превращаются в кинетическую энергию T .

Кроме того, согласно обозначению обобщенной силы $Q_j = \bar{F} \cdot \bar{u}_j$ в уравнениях встречаются величины

$${}^l Q_j = \bar{F} \cdot \bar{u}_j. \quad (2)$$

2. Вспомогательные величины

Учитывая, что $\bar{v} = v^j \bar{u}_j$, имеем

$$\overset{(n)}{v} = \sum_{l=0}^n C_n^l v^l \bar{u}_j, \quad (3)$$

где

$$C_n^l = \frac{n!}{l!(n-l)!}.$$

Отсюда можно выписать следующие производные:

$$\frac{\partial \overset{(n)}{\bar{v}}}{\partial v^j} = \frac{\partial \overset{(n+1)}{\bar{v}}}{\partial \overset{(n+1)}{v^j}} = \bar{u}_j, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \overset{(n)}{\bar{v}}}{\partial \overset{(n-1)}{v^j}} = C_n^1 \dot{\bar{u}}_j + v^k \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \overset{(n-1)}{v^j}}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \overset{(n+1)}{\bar{v}}}{\partial \overset{(n)}{v^j}} = C_{n+1}^1 \dot{\bar{u}}_j + v^k \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \overset{(n)}{v^j}}. \quad (6)$$

Базисные векторы \bar{u}_k зависят от обобщенных координат, но их производные могут уже зависеть от обобщенных скоростей:

$$\dot{\bar{u}}_k = \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial q^j} \dot{q}^j = \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial q^j} v^j. \quad (7)$$

Производная n -го порядка выражается формулой

$$\bar{u}_k^{(n)} = \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p \left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial q^j} \right)^{(n-1-p)} v^j, \quad (8)$$

откуда

$$\frac{\partial \bar{u}_k^{(n)}}{\partial \overset{(n-1)}{v^j}} = \frac{\partial \bar{u}_k^{(n+1)}}{\partial \overset{(n)}{v^j}} = \frac{\partial \dot{\bar{u}}_k}{\partial v^j} = \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial q^j}. \quad (9)$$

3. Уравнения движения

Для составления уравнений движения по методу возможной мощности учтем закон Ньютона $m \dot{\bar{v}} = \bar{F}$. Проинтегрируем формулу этого закона:

$$m \overset{(n+1)}{\bar{v}} = \bar{F}. \quad (10)$$

Умножим обе части полученного равенства на возможную скорость $\{v^j\} \bar{u}_j$ (см. [I]):

$$m \overset{(n+1)}{\bar{v}} \cdot \{v^j\} \bar{u}_j = \bar{F} \cdot \{v^j\} \bar{u}_j$$

или, на основе произвольности

$$m \overset{(n+1)}{\bar{v}} \cdot \bar{u}_j = \bar{F} \cdot \bar{u}_j = {}^n Q_j. \quad (11)$$

Равенство (II) рассматривается в дальнейшем как самостоятельное, а не как полученное из закона Ньютона. Уравнения движения в обычном смысле получаются, если принять в нем $n = 0$. Если $n \neq 0$, то из (II) получаем (IO), а не закон Ньютона. При интегрировании (IO) получаем

$$m \dot{v} = \bar{F} + \bar{C}_1 t^{n-1} + \bar{C}_2 t^{n-2} + \dots + \bar{C}_n,$$

т.е. кроме верных возникают и лишние (неверные) решения.

Продифференцируем формулу (I) по $v_j^{(n)}$:

$$\frac{\partial V^{l,n}}{\partial v_j^{(n)}} = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial v_j^{(n)}} \cdot \dot{v} + \dot{v} \cdot \frac{\partial \dot{v}}{\partial v_j^{(n)}} \right) = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial v_j^{(n)}} \cdot \dot{v} + \dot{v} \cdot \bar{u}_j \right), \quad (I2)$$

где первый член в скобках отличен от нуля только в случае $l = n$. Тогда

$$\frac{\partial V^{l,n}}{\partial v_j^{(n)}} = \frac{1+\delta}{2} m \dot{v} \cdot \bar{u}_j \quad (I3)$$

и

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v_j^{(n)}} = \frac{1+\delta}{2} \left(m \dot{v} \cdot \bar{u}_j + m \dot{v} \cdot \dot{\bar{u}}_j \right), \quad (I4)$$

где

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{если } l = n, \\ 0, & \text{если } l < n. \end{cases}$$

Определив теперь коэффициенты объекта неголономности

γ_{jk}^s по формуле

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial q^j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial q^k} = \frac{\partial \dot{\bar{u}}_k}{\partial v^j} - \frac{\partial \dot{\bar{u}}_j}{\partial v^k} = \dots = \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial v^j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial v^k} = \gamma_{jk}^s \bar{u}_s, \quad (I5)$$

преобразуем производную (5):

$$\frac{\partial \dot{v}}{\partial v^j} = n \bar{u}_j + v^k \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial q^k} + \gamma_{jk}^s \bar{u}_s \right) = (n+1) \bar{u}_j + v^k \gamma_{jk}^s \bar{u}_s. \quad (I6)$$

Отсюда найдем еще одну частную производную

$$\frac{\partial V^{l,n}}{\partial v_j^{(n-1)}} = \frac{m}{2} \dot{v} \cdot \frac{\partial \dot{v}}{\partial v_j^{(n-1)}} + \frac{m}{2} \left[(n+1) \dot{\bar{u}}_j + v^k \gamma_{jk}^s \bar{u}_s \right], \quad (I7)$$

где по (4) и (5)

$$\frac{\partial \bar{v}^{(l)}}{\partial v^j} = \begin{cases} n \dot{u}_j + v^k \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial v^j}, & \text{если } l=n, \\ \bar{u}_j, & \text{если } l=n-1, \\ 0, & \text{если } l < n-1, \end{cases}$$

или

$$\frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j} = \frac{1+\delta}{2} m \bar{v}^{(l)} \cdot [(n+1) \dot{u}_j + v^k \gamma_{jk}^s \bar{u}_s] + \frac{\varepsilon}{2} m \bar{v}^{(l+1)} \cdot \bar{u}_j, \quad (18)$$

где

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{если } l = n, \\ 0, & \text{если } l \neq n \end{cases} \quad \text{и} \quad \varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{если } l = n-1, \\ 0, & \text{если } l \neq n-1. \end{cases}$$

После исключения из (14) и (16) члена с множителем \dot{u}_j получим окончательно:

$$A [(n+1) \frac{d}{dt} \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j} - \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j} + \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^s} v^k \gamma_{jk}^s] = {}^l Q_j, \quad (19)$$

где

$$A = \frac{2}{(1+\delta)(n+1) - \varepsilon} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{если } l = n, \\ \frac{2}{n}, & \text{если } l = n-1, \\ \frac{2}{n+1}, & \text{если } l < n-1. \end{cases}$$

Частный случай $l = 0$ представляет особый интерес, так как правая часть уравнения (19) совпадает с обобщенной силой:

$$A [(n+1) \frac{d}{dt} \frac{\partial V^{0,n}}{\partial v^j} - \frac{\partial V^{0,n}}{\partial v^j} + \frac{\partial V^{0,n}}{\partial v^s} v^k \gamma_{jk}^s] = Q_j. \quad (20)$$

В более узком случае, когда $n = 0$ (т.е. $A = \frac{1}{n+1} = 1$), из (20) получаем общеизвестные уравнения в квазикординатах

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dv^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j} + \frac{\partial T}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k = Q_j, \quad (21)$$

которые в случае голономной системы ($\gamma_{jk}^s = 0$) превращаются в уравнения Лагранжа II рода, так как $V^{0,0} = T$ — кинетическая энергия.

4. Компактные выражения уравнений движения

Уравнения Аппеля отличаются от уравнений Лагранжа II рода своей лаконичностью. Из уравнений (19) их вывести нельзя, но и они являются частным случаем более обширного класса уравнений.

Рассмотрим еще раз отношения (I3). Комбинацию $m \bar{v}^{(n+1)} \cdot \bar{u}_j = {}^n Q_j$ для составления уравнений (II) можно получить отсюда непосредственно без помощи других производных:

$$\frac{2}{1+\delta} \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j} = {}^{l-1} Q_j, \quad (22)$$

где $\delta = 1$, если $l = 0$ и $\delta = 0$, если $l < n$.

Выберем $l = n = 1$ (т.е. $\delta = 1$) и получаем, таким образом, уравнения Аппеля, так как $V^{1,1} = S$ — кинетическая энергия ускорения.

Мы видим, что уравнения Аппеля более естественны по форме, чем уравнения Лагранжа II рода. К сожалению это не ведет к облегчению в вычислениях.

Сохраняя $l = 1$, мы получаем при различных значениях n еще уравнения, содержащие Q_j ($n > 1$; $\delta = 0$):

$$2 \frac{\partial V^{1,n}}{\partial v^j} = Q_j, \quad n > 1. \quad (23)$$

Отсюда видно, что уравнений, близких по форме уравнениям Аппеля, бесконечно много.

5. Некоторые тождества

Рассмотрим кроме величин (I) и их первые производные по времени

$$\dot{V}^{l,n} = \frac{m}{2} \left(\frac{(l+1)}{\bar{v}} \cdot \frac{(n)}{\bar{v}} + \frac{(l)}{\bar{v}} \cdot \frac{(n+1)}{\bar{v}} \right) \quad (24)$$

и вычислим их частные производные

$$\frac{\partial \dot{V}^{l,n}}{\partial v^j} = \frac{m}{2} \left[(1+\varkappa) \frac{(l+1)}{\bar{v}} \cdot \bar{u}_j + (1+\delta)(n+\delta) \frac{(l)}{\bar{v}} \cdot \dot{\bar{u}}_j \right] + \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^s} v^k \gamma_{jk}^s, \quad (25)$$

где

$$\varkappa = \begin{cases} 1, & \text{если } l = n, \\ 1, & \text{если } l = n-1, \text{ и} \\ 0, & \text{если } l < n-1 \end{cases} \quad \delta = \begin{cases} 1, & \text{если } l = n, \\ 0, & \text{если } l \neq n. \end{cases}$$

Вычтем теперь (I4) и (I8) из (25):

$$\frac{\partial \dot{V}^{l,n}}{\partial v^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j} - \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j} = (\alpha - \delta - \varepsilon) \frac{m}{2} \bar{v} \cdot \bar{u}_j.$$

Но $\alpha - \delta - \varepsilon = 0$ независимо от значений l и n . Следовательно, но,

$$\frac{\partial \dot{V}^{l,n}}{\partial v^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j} = \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j}. \quad (26)$$

6. Преобразование уравнений движения

Подставляя из тождества (26) в уравнения (I9) величину

$$\frac{\partial V^n}{\partial v^j} \quad \text{получим уравнения движения}$$

$$A \left[(n+2) \frac{d}{dt} \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j} - \frac{\partial \dot{V}^{l,n}}{\partial v^j} + \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^s} v^k \gamma_{jk}^s \right] = {}^l Q_j, \quad (27)$$

где A см. у формулы (I9).

7. Другой вид тождеств

Вычислим производные по времени скалярного произведения (I):

$$V^{l,n} = \frac{m}{2} \left(\bar{v}^{(l+h)} \cdot \bar{v}^{(n)} + C_h \bar{v}^{(l+h-1)} \cdot \bar{v}^{(n+1)} + \dots + \bar{v}^{(l)} \cdot \bar{v}^{(n+h)} \right) \quad (27a)$$

и их частные производные (при условии $h > 1$):

$$\frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j} = \frac{m}{2} \left[\frac{\partial \bar{v}^{(l+h)}}{\partial v^j} \cdot \bar{v}^{(n)} + h \frac{\partial \bar{v}^{(l+h-1)}}{\partial v^j} \cdot \bar{v}^{(n+1)} + \dots + \bar{v}^{(l)} \cdot \bar{v}^{(n+h)} \right]. \quad (28)$$

Вчтя из равенства (28) равенство (I4), которое предварительно умножено на h , и сравнив результат с равенством (I7), получим

$$\frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j} - h \frac{d}{dt} \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j} = \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j} \quad (29)$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j} - \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j} \right) \quad (29a)$$

независимо от значений l и n .

8. Обобщенные тождества

Вычисления, аналогичные предыдущим, дают

$$\frac{\partial^{(h+1)} V^{l,n}}{\partial v^j^{(n+h)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^{(h)} V^{l,n}}{\partial v^j^{(n+h)}} = \frac{\partial^{(h)} V^{l,n}}{\partial v^j^{(n+h-1)}}. \quad (30)$$

Тождество (30) является обобщением известного равенства

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial v^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v^j} = \frac{\partial T}{\partial q^j}$$

1) в смысле любой высоты порядков h и $h+1$ производных и

2) в смысле более широкой функции $V^{l,n}$ по сравнению с кинетической энергией T .

Объединим еще тождества (29) и (30), учитывая, что по (12) и (27a)

$$\frac{\partial^{(h)} V^{l,n}}{\partial v^j^{(n+h)}} = \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j^{(n)}} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial^{(h)} V^{l,n}}{\partial v^j^{(n+h)}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j^{(n)}}. \quad (31)$$

Результат

$$\frac{\partial^{(h+1)} V^{l,n}}{\partial v^j^{(n+h)}} - (h+1) \frac{d}{dt} \frac{\partial^{(h)} V^{l,n}}{\partial v^j^{(n)}} = \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j^{(n-1)}} \quad (32)$$

повторяет (29), так как здесь число h заменяется $h+1$.

9. Дальнейшее обобщение уравнений движения

Подстановка тождеств (29) в уравнения (19) даёт

$$A \left[(n+h+1) \frac{d}{dt} \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j^{(n)}} - \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^j^{(n+h-1)}} + \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^s^{(n)}} \gamma_{jk}^s v^k \right] = {}^l Q_j, \quad (33)$$

где

$$A = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{если } l = n, \\ \frac{2}{n}, & \text{если } l = n-1, \\ \frac{2}{n+1}, & \text{если } l < n-1. \end{cases}$$

В частном случае $h=1$ уравнения (33) превращаются в (27).

С другой стороны, если подставить в уравнения (19) вместо тождеств (29) тождества (29а), имеем

$$A \left[\frac{n+1}{h} \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v_j^{(n+h-1)}} - \frac{n+h+1}{h} \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v_j^{(n-1)}} + \frac{\partial V^{l,n}}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k \right] = {}^l Q_j, \quad (34)$$

где А см. у формулы (33).

Уравнения (34) являются обобщением уравнений Ценова [3] или [4]. Действительно, пусть в (34) $l = n = 0$ и все $\gamma_{jk}^s = 0$ (т.е. система отсчета голономна). Тогда $A = \frac{1}{n+1}$, $V^{l,n} = T$ и уравнения (34) принимают вид

$$\frac{1}{h} \left[\frac{\partial T}{\partial q_j^{(h)}} - (1+h) \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] = Q_j, \quad (35)$$

т.е. мы получаем обобщенные уравнения Лагранжа II рода или уравнения Ценова.

10. Пример – применение компактных выражений уравнений движения в случае уравнений связей

Пусть при изучении движения требуется учесть уравнения связей

$$f_h(t, q^j, \dot{q}^j, \dots, q^j) = 0 \quad (36)$$

($h < s$; s – число степеней свободы), где требование линейности уравнения действует только относительно последнего аргумента \dot{q}^j . Относительно других аргументов уравнения (36) могут быть и нелинейными. Это требование, как известно, не является стеснительным, так как уравнения связей можно линеаризировать путем дифференцирования. При этом повышается порядок l , но в уравнениях (36) l не ограничено.

Составим функции

$$\begin{cases} W^{l,1} = V^{l,1} - Q_j \dot{v}^j, \\ W^{l,n} = V^{l,n} - \frac{1}{2} Q_j \dot{v}^j; \quad n > 1 \end{cases} \quad (37)$$

($V^{l,1} = S$ – кинетическая энергия ускорения). Подставим уравнения связей (36) в уравнения (37) и обозначим полученные таким образом функции звездочкой*:

$$\begin{cases} W^{*1,1} = v^{*1,1} - [Q_j \dot{v}^j]^*, \\ W^{*1,n} = v^{*1,n} - \frac{1}{2} [Q_j \dot{v}^j]^{(n)*}; \quad n > 1. \end{cases} \quad (38)$$

Тогда (при $\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{v}^j} = 0; \dots; \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{v}^i} = 0$)

$$\frac{\partial W^{*1,1}}{\partial \dot{v}^j} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial (2W^{*1,n})}{\partial \dot{v}^j} = 0; \quad n > 1. \quad (39)$$

Уравнения (39) вместе с уравнениями (36) образуют полную систему для решения проблемы. Они применимы аналогично тому, как применяются уравнения Ценова-Долапчиева [4], но 1) составление функций $W^{*1,n}$ не требует фиксирования некоторых переменных величин, как это нужно в функциях Ценова, 2) уравнения (39) годны и в случае неголономной системы отсчета (в случае квазиординат) и 3) в них нет лишних для расчетов членов, которые фигурируют в функциях Ценова.

II. Заключение

Мы видим, что путей обобщения дифференциальных уравнений движения много (притом далеко не все рассмотрены в настоящей статье).

Простейшими из всех возможных уравнений являются уравнения Лагранжа II рода и уравнения Аппеля. Но и другие, содержащие более высокие производные, могут оказаться интересными, как показывает литература (см. например, [3] и [4]).

Особенность предложенных здесь уравнений в том, что они общие для голономных и неголономных систем — в случае неголономной системы просто отпадают члены с коэффициентами γ_{jk}^5 . Этого нельзя сказать относительно уравнений Ценова, где в случае неголономной системы нужна целая аппаратура вспомогательных функций (см. [4]).

Л и т е р а т у р а

И. Х. Рельвик, О. Сильде. Метод уравнения возможной мощности с применением объекта неголономности.
Наст. сб. стр. 63

2. О. С и л ь д е, Б. Т и й к м а. Метод уравнения
возможной мощности. Труды ТПИ, серия А, № 293, 1970.

3. И. Ц е н о в. Об одной новой форме уравнений анали-
тической механики. ДАН 89 №11, 21-24, 1953.

4. В. D o l a p t s c h i e w. Über die verallgemei-
nerte Form der Lagrangeschen Gleichungen, welche auch die
Behandlung von nichtholonomen mechanischen Systemen gestat-
tet. ZAMP 17, S. 443 1966.

H. Relvik

Zusammensetzung der Differentialgleichungen
der Bewegung mit Hilfe der Analogien der ki-
netischen Energie

Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag werden mit Hilfe der Größen,
die analogisch der kinetischen Energie und der Energie der
Beschleunigung sind, die dynamischen Bewegungsgleichungen
eines Massenpunktes oder Systems gegeben. Als Ergebnis wird
eine Verallgemeinerung der Lagrangeschen, Appellschen und Ze-
noff-Dolaptschiewschen Gleichungen erhalten.

УДК 531.314.2

Х. Рельвик, О. Сильде

МЕТОД УРАВНЕНИЯ ВОЗМОЖНОЙ МОЩНОСТИ С ПРИМЕНЕНИЕМ
ОБЪЕКТА НЕГОЛОНОМНОСТИ

I. Введение

Непрерывно увеличивающийся объем науки заставляет серьезно заниматься вопросами методики обучения. Необходимо наиболее компактно и доходчиво передавать учащимся содержание данной дисциплины или отдельных ее разделов.

На основе этих соображений в данной статье предлагается метод уравнения возможной мощности, который может быть применен при изучении раздела динамики в курсе теоретической механики.

В основу этого метода положена теорема об изменении кинетической энергии механической системы и материальной точки. Эта теорема дает удобный способ решения задач в случае систем с одной степенью свободы при стационарных связях. Кроме того следует учесть важную роль закона сохранения энергии в современной физике. Поэтому целесообразно усилить роль этой теоремы в курсе теоретической механики.

Предлагаемый метод может быть широко использован в динамике механических систем при учете как голономных, так и неголономных связей.

Название "Метод уравнения возможной мощности" было дано нашим коллегой Б.А. Тийкма.

2. Уравнение возможной мощности

Кинетическая энергия механической системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i \quad (I)$$

(m_i - масса i -той точки системы, \bar{v}_i - ее вектор скорости). Дифференцируя получим ($\bar{a}_i = \dot{\bar{v}}_i$ - ускорение точки)

$$\dot{T} = \sum_i m_i \bar{a}_i \cdot \bar{v}_i. \quad (2)$$

Теорема кинетической энергии в форме производной имеет вид

$$\dot{T} = N, \quad (3)$$

где N - мощность действующих на систему сил:

$$N = \sum_i \bar{F}_i \cdot \bar{v}_i. \quad (4)$$

Уравнение (3) называется уравнением мощности механической системы.

Заменяя в (2) и (4) вектор скорости \bar{v}_i на вектор возможной скорости $\{v_i\}$, т.е. на совокупность векторов скоростей, какие точка могла бы иметь в данный момент при условиях задачи, получим из (4) уравнение

$$\sum_i m_i \bar{a}_i \cdot \{v_i\} = \sum_i \bar{F}_i \cdot \{v_i\}. \quad (5)$$

которое называется уравнением возможной мощности для данной механической системы.

Выражая \bar{v}_i через параметры скоростей данной механической системы v^j (которые могут быть как обобщенными так и квазискоростями) и через соответствующие базисные векторы \bar{u}_{ij}

$$\bar{v}_i = \sum_j v^j \bar{u}_{ij} = v^j \bar{u}_{ij} \quad (6)$$

(следуя методам тензорного исчисления, мы впредь будем опускать знак суммирования \sum , если индекс, по которому суммируют, встречается у одного множителя наверху, у другого внизу), получим для возможной скорости

$$\{v_i\} = \{v^j\} \bar{u}_{ij}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5) имеем

$$\sum_i m_i \bar{a}_i \cdot \bar{u}_{ij} \{v^j\} = \sum_i \bar{F}_i \cdot \bar{u}_{ij} \{v^j\} \quad (8)$$

как выражение уравнения возможной мощности. Обозначая

$$\sum_i m_i \bar{a}_i \cdot \bar{u}_{ij} = \xi_j \quad (9)$$

и

$$\sum_i \bar{F}_i \cdot \bar{u}_{ij} = Q_j \quad (\text{обобщенная сила}) \quad (10)$$

получим вместо (5) и (8)

$$\xi_j \{v^j\} = Q_j \{v^j\} \quad (11)$$

или еще короче

$$\{\dot{T}\} = \{N\}. \quad (12)$$

Уравнения (5), (8), (11) и (12) являются самыми общими уравнениями динамики. Из них можно вывести дифференциальные уравнения движения механической системы.

Для упрощения выводов в дальнейшем отбросим индекс i , т.е. будем делать вычисления для одной точки системы. В окончательных результатах введем снова индекс i и произведем суммирование над всеми точками.

Пример . Вывод уравнений Лагранжа II рода

Если все $\{v^j\}$ независимы, то (11) дает

$$\xi_j = Q_j \quad (13)$$

или по (9)

$$m \bar{a} \cdot \bar{u}_j = Q_j. \quad (14)$$

Из (1) получим

$$\frac{\partial T}{\partial v^j} = m \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial v^j} = m \bar{v} \cdot \bar{u}_j, \quad (15)$$

так как по (6)

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial v^j} = \bar{u}_j. \quad (16)$$

Дифференцируя (15) по времени имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v^j} = m \bar{a} \cdot \bar{u}_j + m \bar{v} \cdot \dot{\bar{u}}_j. \quad (17)$$

В случае голономных систем

$$\dot{u}_j = \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial q^k} v^k = \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial q^j} v^k = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q^j} \quad (18)$$

(q^j - обобщенные координаты).

Подставляя (18) в (17) и вычисляя $m_i \bar{u}_i \cdot \bar{u}_{i,j}$ получим из (14)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j} = Q_j, \quad (19)$$

т.е. уравнения Лагранжа II рода.

Пример I. Из сборника задач И.В.Мещерского (1970) задача № 48.31 .

Пусть длина нити в положении равновесия будет l_0 , а

$OP = l$ (фиг.1), \bar{u}_l и \bar{u}_φ - орты. Тогда $\bar{v} = l\dot{\varphi}\bar{u}_\varphi + l\dot{l}\bar{u}_l$;

$$\{v\} = \{\dot{\varphi}\} l \bar{u}_\varphi + \{\dot{l}\} \bar{u}_l,$$

откуда $\bar{u}_1 = \bar{u}_l$; $\bar{u}_2 = l\dot{\varphi}\bar{u}_\varphi$; $\bar{a} = \dot{\bar{v}} =$
 $= 2l\dot{\varphi}\bar{u}_\varphi + l\ddot{\varphi}\bar{u}_\varphi - l\dot{\varphi}^2\bar{u}_l + \ddot{l}\bar{u}_l,$

так как $\dot{\bar{u}}_\varphi = -\dot{\varphi}\bar{u}_l$; $\dot{\bar{u}}_l = \dot{\varphi}\bar{u}_\varphi$.

Следовательно $m\bar{a} \cdot \bar{u}_1 = m\ddot{l} - ml\dot{\varphi}^2$; $m\bar{a} \cdot \bar{u}_2 = 2ml\dot{l}\dot{\varphi} + ml^2\ddot{\varphi}$; $\bar{F} \cdot \bar{u}_1 =$
 $= mg \cos \varphi - c(l-l_0)$; $\bar{F} \cdot \bar{u}_2 = -mg l \sin \varphi$.

По (21) уравнения движения будут (перенеся все члены в одну сторону и сокращая):

$$\begin{cases} \ddot{l} - l\dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi + \frac{c}{m}(l-l_0) = 0 \\ \ddot{\varphi} + 2\dot{l}\dot{\varphi} + g \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

Пример 2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

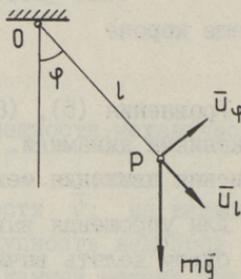
Пусть осью вращения будет Oz (фиг. 2). Тогда

$$\bar{\omega} = \omega \bar{k}; \quad \bar{v}_i = \omega \times \bar{\rho}_i = \omega (\bar{k} \times \bar{\rho}_i);$$

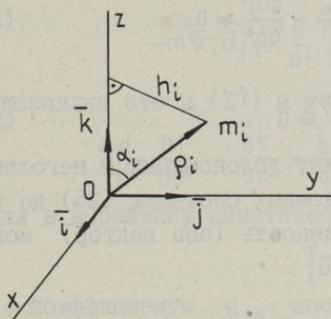
$$\{\bar{v}_i\} = \{\omega\} (\bar{k} \times \bar{\rho}_i); \quad \bar{u}_{i,1} = \bar{k} \times \bar{\rho}_i;$$

$$\bar{a}_i = \dot{\omega} (\bar{k} \times \bar{\rho}_i) + \omega [\bar{k} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i)]; \quad \dot{\omega} = \varepsilon;$$

$$m_i \bar{a}_i \cdot \bar{u}_{i,1} = m_i \varepsilon \cdot l_i \rho_i^2 \sin^2 \alpha_i = m_i h_i^2 \varepsilon$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

$$(\text{ибо } [\bar{k} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i)] \cdot (\bar{k} \times \bar{\rho}_i) = 0).$$

Следовательно,

$$\sum_i m_i \bar{\rho}_i \cdot \bar{u}_{i1} = \sum_i m_i h_i^2 \varepsilon = J_z \varepsilon$$

(J_z - момент инерции тела относительно оси Oz).

$$\begin{aligned} \sum_i \bar{F}_i \cdot \bar{u}_{i1} &= \sum_i \bar{F}_i \cdot (\bar{k} \times \bar{\rho}_i) = \\ &= \sum_i \bar{k} \cdot (\bar{\rho}_i \times \bar{F}_i) = M_z^{(e)} \end{aligned}$$

(момент внешних сил относительно оси Oz).

Получим по (I4)

$$J_z \varepsilon = M_z^{(e)}.$$

3. Объект неголономности и связанные с ним уравнения движения

Выразим в (I7) член $m \bar{v} \cdot \dot{\bar{u}}_j$ через T в том случае, когда v^j квазискорости (случай неголономной системы отсчета, где координаты явно не встречаются, но все же имеются частные производные функций по квазикоординатам).

Из уравнения (2) получим:

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial v^j} = m \bar{a} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial v^j} + m \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{a}}{\partial v^j} = m \bar{a} \cdot \bar{u}_j + m \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{a}}{\partial v^j}. \quad (20)$$

Из (6) получим дифференцированием:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \dot{v}^j \bar{u}_j + v^j \dot{\bar{u}}_j, \quad (21)$$

откуда

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial v^j} = \dot{\bar{u}}_j + v^k \frac{\partial \dot{\bar{u}}_k}{\partial v^j}. \quad (22)$$

Здесь надо иметь в виду, что \dot{v}^k и $\bar{u}_k (= \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^k})$ не содержат скоростей v^j , а $\dot{\bar{u}}_k$ содержит, ибо

$$\dot{\bar{u}}_k = \frac{d}{dt} (\bar{u}_k) = \frac{\partial \dot{\bar{u}}_k}{\partial q^j} v^j. \quad (23)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \dot{\bar{u}}_k}{\partial v^j} = \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial q^j}. \quad (24)$$

В случае голономной системы отсчета

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial q^j} = \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial q^k} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial q^j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial q^k} = 0, \quad (25)$$

а по (24) и

$$\frac{\partial \dot{\bar{u}}_k}{\partial v^j} - \frac{\partial \dot{\bar{u}}_j}{\partial v^k} = 0. \quad (26)$$

Тут и выявляется разница между голономными и неголономными системами отсчета: в неголономных системах (25) не равняется нулю. Доказано, что эту разность (она вектор) можно выразить через базисные векторы \bar{u}_j :

$$\frac{\partial \dot{\bar{u}}_k}{\partial v^j} - \frac{\partial \dot{\bar{u}}_j}{\partial v^k} = \gamma_{jk}^s \bar{u}_s, \quad s=1, 2, \dots, n. \quad (27)$$

($n = s' + 1$, где s' - число степеней свободы).

Мы выбрали разность (26) вместо ей равной (25) потому, что частные производные (26) можно вычислить. Из (27) вытекает, что $\gamma_{kj}^s = -\gamma_{jk}^s$. Но может случиться, что при нашем выборе v^j , базисных векторов \bar{u}_j не хватает для выражения всех разностей (27). Тогда путем частичного освобождения (точки, системы) от связей и прибавлением новых \bar{u}_s можем достигнуть, что уравнения (27) выполняются.

Числа γ_{jk}^s в (27) называются коэффициентами трехиндексного символа или коэффициентами объекта неголономности [6]. Они равны для всех точек системы (как и v^j). Если все $\gamma_{jk}^s = 0$, то система голономна и все $v^j = \dot{q}^j$. Важно, что эти γ_{jk}^s можно вычислить непосредственно, исходя из данных самой неголономной системы.

Вычтем (17) из (20), с учетом (22) и (27) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{T}}{\partial v^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v^j} &= m \bar{v} \cdot \frac{\partial \dot{\bar{u}}_k}{\partial v^j} v^k = m \bar{v} \cdot \left(\frac{\partial \dot{\bar{u}}_j}{\partial v^k} + \gamma_{jk}^s \bar{u}_s \right) v^k = \\ &= m \bar{v} \cdot \dot{\bar{u}}_j + \frac{\partial T}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k, \end{aligned} \quad (28)$$

так как

$$\frac{\partial \dot{\bar{u}}_j}{\partial v^k} v^k = \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial q^k} v^k = \dot{\bar{u}}_j \quad (\text{см. 24}), \quad (29)$$

и

$$m \bar{v} \cdot \bar{u}_s = \frac{\partial T}{\partial v^s} \quad (\text{см. 16}). \quad (30)$$

Из (28) имеем:

$$-m\ddot{v}_j, \dot{u}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v^j} - \frac{\partial T}{\partial v^j} + \frac{\partial T}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k. \quad (31)$$

Подставляя это в (17) и учтя (14), получим

$$2 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v^j} - \frac{\partial T}{\partial v^j} + \frac{\partial T}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k = Q_j; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (32)$$

Если в выражении кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} g_{jk} v^j v^k \quad (33)$$

все коэффициенты g_{jk} постоянны, то левая часть (28) равна нулю и (32) получит вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v^j} + \frac{\partial T}{\partial v^s} \gamma_{jk}^s v^k = Q_j; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (34)$$

Уравнения (32) и (34) пригодны и в случае квазискоростей v^j , так как устречающиеся в них выражения вычисляемы, если известны γ_{jk}^s и выражение для T .

Уравнения (32) и (34) без изменений применимы и к механической системе, если под T подразумевать кинетическую энергию системы.

Обозначим левую сторону равенств (19), (32) и (34) символом $\xi_j(T)$. Тогда уравнение возможной мощности пишется в виде

$$\xi_j(T) \{v^j\} = Q_j \{v^j\}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (35)$$

4. Некоторые приложения

I. Вычисление γ_{jk}^s для твердого тела. Пусть квазискоростями будут ω_j в выражении вектора мгновенной скорости $\bar{\omega} = \omega_1 \bar{i} + \omega_2 \bar{j} + \omega_3 \bar{k}$ (\bar{i}, \bar{j} и \bar{k} — орты координатной системы, неизменно связанной с телом). Скорость i -той точки тела

$$\bar{v}_i = \bar{\omega} \times \bar{\rho}_i = \omega_1 (\bar{i} \times \bar{\rho}_i) + \omega_2 (\bar{j} \times \bar{\rho}_i) + \omega_3 (\bar{k} \times \bar{\rho}_i).$$

Следовательно,

$$v^1 = \omega_1; \quad v^2 = \omega_2; \quad v^3 = \omega_3;$$

$$\bar{u}_1 = \bar{i} \times \bar{\rho}_i; \quad \bar{u}_2 = \bar{j} \times \bar{\rho}_i; \quad \bar{u}_3 = \bar{k} \times \bar{\rho}_i;$$

$$\dot{\bar{u}}_1 = \bar{\omega} \times (\bar{i} \times \bar{\rho}_i) = (\bar{\omega} \cdot \bar{\rho}_i) \bar{i} - (\bar{\omega} \cdot \bar{i}) \bar{\rho}_i;$$

$$\begin{aligned}\dot{\bar{U}}_2 &= (\bar{\omega} \cdot \bar{\varphi}_i) \bar{j} - (\bar{\omega} \cdot \bar{j}) \bar{\varphi}_i; \\ \frac{\partial \dot{\bar{U}}_2}{\partial \omega_1} &= (\bar{i} \cdot \bar{\varphi}_i) \bar{j}; \quad \frac{\partial \dot{\bar{U}}_1}{\partial \omega_2} = (\bar{j} \cdot \bar{\varphi}_i) \bar{i}; \\ \frac{\partial \dot{\bar{U}}_2}{\partial \omega_1} - \frac{\partial \dot{\bar{U}}_1}{\partial \omega_2} &= (\bar{i} \cdot \bar{\varphi}_i) \bar{j} - (\bar{j} \cdot \bar{\varphi}_i) \bar{i} = (\bar{i} \times \bar{j}) \times \bar{\varphi}_i = \\ &= \bar{k} \times \bar{\varphi}_i = \bar{U}_3 = \gamma_{12}^3 \bar{U}_3.\end{aligned}$$

Получим по (27):

$$\gamma_{12}^3 = -\gamma_{21}^3 = 1; \quad \gamma_{12}^1 = \gamma_{12}^2 = 0. \quad (36)$$

Другие γ_{jk}^s получаются циклической перестановкой индексов, так что $\gamma_{42}^3 = \gamma_{31}^2 = \gamma_{23}^1 = -\gamma_{21}^3 = -\gamma_{13}^2 = -\gamma_{32}^1 = 1$, а остальные равны нулю.

Несколько труднее, чем γ_{jk}^s вычисляются Γ_{jk}^s (символ Кристоффеля второго рода) из условий:

$$\Gamma_{jk}^s - \Gamma_{kj}^s = \gamma_{jk}^s. \quad (37)$$

С помощью Γ_{jk}^s можно вывести уравнения движения в легко запоминаемом виде

$$\dot{v}^s + \Gamma_{kl}^s v^k v^l = Q^s, \quad (38)$$

где Q^s получается из уравнений $g_{js} Q^s = Q_j$.

Пример 3. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки.

Пусть J_1, J_2 и J_3 - главные моменты инерции тела относительно координатных осей (для простоты принимаем, что оси являются главными осями инерции, но не представляет трудности задачу решить и в общем виде). Тогда

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2)$$

и для $\{\omega_i\}$ имеем (так как все g_{jk} постоянны, то можно пользоваться уравнениями (34)):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_1} + \frac{\partial T}{\partial \omega_3} \gamma_{12}^3 \omega_2 + \frac{\partial T}{\partial \omega_2} \gamma_{13}^2 \omega_3 = \\ = J_1 \dot{\omega}_1 + J_3 \omega_3 \omega_2 - J_2 \omega_2 \omega_3.\end{aligned}$$

$Q_1 = M_1$ - момент действующих сил относительно оси Ox . Следовательно:

$$J_1 \dot{\omega}_1 = (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = M_1.$$

Другие уравнения получаются циклической перестановкой индексов (уравнения Эйлера).

2. Уравнения движения твердого тела.

Из уравнения возможной мощности легко выводятся уравнения движения твердого тела в векторном виде

$$M \bar{a}_c = \bar{F}^{(e)} \quad (39)$$

$$\dot{\bar{L}}_A + M(\bar{v}_A \times \bar{v}_c) = \bar{M}_A^{(e)}, \quad (40)$$

где M — масса всей системы, \bar{a}_c — ускорение центра масс, \bar{L}_A — главный момент количеств движения, \bar{v}_c — скорость центра масс системы, \bar{v}_A — скорость точки, относительно которой вычисляются моменты, $\bar{F}^{(e)}$ и $\bar{M}_A^{(e)}$ — главный вектор и главный момент действующих на систему сил.

С помощью (40) удобно и в общем виде решаются например такие задачи, как качение любого твердого тела на плоскости (или другой поверхности).

5. Уравнения связей

Рассмотрим совсем кратко вопрос связей. Пусть даны уравнения связей

$$f_h = 0, \quad h = 1, 2, \dots, l; \quad l < s, \quad (41)$$

где f_h — функции координат, времени скоростей и их производных по времени любого порядка. Спрашивается, нельзя ли из f_h путем дифференцирования образовать вектор (будем обозначать его \bar{R}'_h), который можно бы связать с реакцией, вызванной связью f_h , так что

$$\bar{R}'_h \cdot \{\bar{v}\} = 0 \quad \bar{R}_h = \lambda^h \bar{R}'_h, \quad (42)$$

где \bar{R}_h — реакция связи. Тогда вместо (8) получилось бы равенство

$$m \bar{a} \cdot \bar{u}_j \{v^j\} = \bar{F} \cdot \bar{u}_j \{v^j\} + \lambda^h \bar{R}'_h \cdot \bar{u}_j \{v^j\} \quad (43)$$

(λ^h — множители Лагранжа). Оказывается, что такой \bar{R}'_h можно найти. Пусть k_h — наивысший порядок производной v^j в f_h ; тогда

$$\bar{\mathcal{R}}_h' \cdot \bar{v}_j = \frac{\partial f_h}{\partial v^j (k_h)}, \quad (44)$$

где

$$v^j (k_h) = \frac{d^{k_h} v^j}{dt^{k_h}}.$$

Если в выражении f_h имеются только координаты (нет скоростей и их производных), то в (44) на правой стороне будет $\frac{\partial f_h}{\partial q^j}$.

Для доказательства введем новую систему отсчета, положив

$$\bar{v}_j = A_{j'}^q \bar{v}_{q'}, \quad (45)$$

где $A_{j'}^q$ функции координат и времени. Тогда оказывается, что

$$\frac{\partial f_h}{\partial v^j (k_h)} = A_{j'}^q \frac{\partial f_h}{\partial v^{q'} (k_h)}, \quad (46)$$

т.е. $\frac{\partial f_h}{\partial v^j (k_h)}$ является вектором и (44) сохраняет свой вид.

Из равенства (43) с учетом (44) можно получить дифференциальные уравнения движения системы:

$$\mathcal{E}_j(T) = Q_j + \lambda^h \frac{\partial f_h}{\partial v^j (k_h)}, \quad (47)$$

$$h=1, 2, \dots, l; \quad j=1, 2, \dots, s \quad (\text{см. (I)}).$$

Уравнения (47) вместе с условиями (4I) дают $s+l$ уравнений для определения s неизвестных v^j и l неизвестных λ^h (есть еще одно уравнение для определения реакции нестационарной связи).

6. Заключение

I. Метод уравнения возможной мощности применим к системам с одной и с несколькими степенями свободы со стационарными и нестационарными, с голономными и неголономными связями.

2. Сравнение метода уравнения возможной мощности с другими известными методами динамики на примерах показало, что вычислительная работа в общем случае проще, выгоднее со стороны более четкой и общей постановки вопроса и дает почти единый подход к решению самых различных задач динамики.

3. Решение задач можно проводить и без вычисления кинетической энергии, хотя основой метода является теорема об изменении кинетической энергии.

4. Метод уравнения возможной мощности не пользуется понятиями как сила инерции, виртуальное перемещение и т.д. В нем главное: умение выбирать подходящие параметры скоростей (по возможности независимые), выбирать соответствующие базисные векторы (при надобности уметь найти их производные), умение найти выражение кинетической энергии (при использовании (19), (32) или (34)) и найти коэффициенты объекта неголономности $\gamma_j^s k$ (которые могут быть для наиболее часто встречающихся случаев заранее найдены).

5. Метод имеет значение в методическом смысле при построении курса динамики. Например, как частный случай он дает простой вывод уравнений Лагранжа II рода и тем самым позволяет изучить эти важные уравнения значительно раньше, чем при традиционном порядке изложения.

Л и т е р а т у р а

1. А.И. Л у р ь е. Аналитическая механика. Гос. изд. Физ.-мат. лит. Москва, 1961.

2. И.В. М е щ е р с к и й. Сб. задач по теоретической механике. Изд. "Наука", Гл. ред. Физ.-мат. лит. Москва, 1970.

3. Ю.И. Н е й м а р к, Н.А. Ф у ф а е в. Динамика неголономных систем. Изд. "Наука", Гл. ред. физ.-мат. лит. Москва, 1967.

4. О. С и л ь д е, Б. Т и й к м а К вопросу о применении в механике теоремы кинетической энергии. Труды ТПИ, серия А, № 261. 1968.

5. О. С и л ь д е, Б. Т и й к м а. Метод уравнения возможных мощностей. Труды ТПИ, серия А, № 293, Таллин, 1970.

6. И.А. Схоутен, Д. Дж. Стройк. Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. I. Гос. объедин. научно-техн. изд. НКТП СССР. Москва-Ленинград, 1939.

H. Relvik, O. Silde

Die Methode der Gleichung der möglichen
Leistung mit Gebrauch des Objectes der

Nichtholonomie

Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag wird auf Grund des Energiesatzes eine allgemeine Methode zur Berechnung der Aufgaben aus der Mechanik gegeben. Die Bewegungsgleichungen, die man mit Hilfe der Methode erhält, enthalten die Lagrangeschen und Appellschen Gleichungen und auch die Bewegungsgleichungen in Quasi-koordinaten.

Die Rechnungen nach der Methode der Gleichung der möglichen Leistung sind regelmäßig bedeutend einfacher als im Fall der anderen bekannten Methoden der Dynamik.

In die Reihe der Aufgaben, die man mit Hilfe dieser Methode lösen kann, gehen auch solche, wo man die Verbindungsgleichungen mit beliebig hoher Ordnung der Ableitungen der verallgemeinerten Geschwindigkeiten berücksichtigen muß. Die Verbindungsgleichungen können dabei auch nichtlinear sein.

А. Тюманок

О ДВИЖЕНИИ НАРАСТАЮЩЕГО СЛОЯ ЧАСТИЦ ПО
 ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

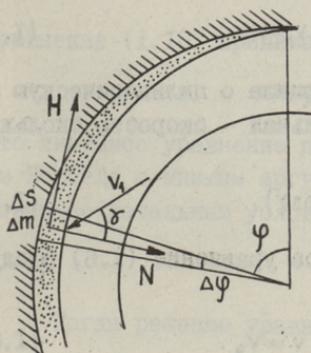
В мельницах роторного типа, как например дезинтегратор, происходит выбрасывание измельченного материала на кожух цилиндрической формы. На кожухе образуется движущийся слой, на который выпадают новые измельченные частицы. Вследствие этого непрерывно нарастает толщина слоя и меняется его скорость скольжения по кожуху. Для дальнейшей транспортировки и сепарации продуктов помола представляет интерес определение скорости скольжения слоя.

В настоящей статье выведено дифференциальное уравнение движения нарастающего слоя материала, скользящего по цилиндрической поверхности. Полученное нелинейное дифференциальное уравнение типа Риккати с переменными коэффициентами решается точно и приближенно.

1. Предположим, что из ротора поступает с интенсивностью Q кг/сек поток частиц, достигающих под углом γ со

скоростью v_1 цилиндрическую поверхность кругового кожуха радиуса r , на котором уже скользит слой материала (фиг. 1). Элемент материала с массой Δm , находящейся на дуге

Δs , скользит по цилиндрической поверхности с некоторой скоростью v . Имея ввиду рыхлость слоя сыпучего материала, можно считать соударение поступающего материала и слоя вполне неупругим.



Фиг. 1.

За интервал времени dt к элементу Δm добавляется масса

$$d\Delta m = \frac{Q}{2\pi} \Delta\varphi dt \quad (I.1)$$

с некоторой скоростью

$$\bar{v}_i = \{v_i \cos \gamma, v_i \sin \gamma\}. \quad (I.2)$$

На этот элемент действует нормальная реакция цилиндрической поверхности \bar{N} и сила трения \bar{H} . Предполагаем, что нормальная реакция превосходит собственный вес частиц настолько, что последним можно пренебречь.

Применим к этому элементу массой Δm теорему об изменении количества движения

$$(\Delta m + d\Delta m)(\bar{v} + d\bar{v}) - (\Delta m \bar{v} + d\Delta m \bar{v}_i) = (\bar{N} + \bar{H}) \Delta\varphi dt. \quad (I.3)$$

Принимаем, что слой начинает скользить и накапливаться из точки при $\varphi = 0$. Тогда масса элемента Δm будет пропорциональна времени движения и выразится формулой

$$\Delta m = \frac{Q}{2\pi} t \Delta\varphi. \quad (I.4)$$

Рассматривая векторное уравнение (I.3) по отдельным компонентам и учитывая (I.1), (I.4), получим формулу, определяющую нормальную реакцию:

$$N = \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{v^2}{r} t + v_i \cos \gamma \right). \quad (I.5)$$

Дифференциальное уравнение движения нарастающего слоя будет:

$$t \cdot \frac{dv}{dt} = -\frac{f}{r} v^2 t + v_0 - v, \quad (I.6)$$

где f — коэффициент трения материала о цилиндрическую поверхность скольжения, v_0 — начальная скорость скольжения слоя, определяемая формулой:

$$v_0 = v_i (\sin \gamma - f \cos \gamma). \quad (I.7)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (I.6) следует решать при начальных условиях

$$t = 0, \quad \varphi = 0, \quad v = v_0. \quad (I.8)$$

Обратим внимание, что уравнение (I.6) не содержит интенсивности потока Q , следовательно скорость нарастающего слоя от нее не зависит. Однако нужно отметить, что уравнение (I.6) при весьма малых интенсивностях потока может оказаться несправедливым, когда на цилиндрической поверхности слоя материала образовываться не будет, а будет иметь место движение совокупности изолированных, отдельно движущихся частиц.

Дифференциальное уравнение возрастающего слоя (I.6) можно упростить, если ввести безразмерные скорости u и время τ по формулам

$$v = v_0 u, \quad t = \frac{r}{v_0} \tau, \quad u = \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (I.9)$$

Тогда уравнение (I.6) принимает вид:

$$\tau \frac{du}{d\tau} = -f u^2 \tau + 1 - u. \quad (I.10)$$

Это уравнение следует решить при начальных условиях при $\tau = 0, \varphi = 0, u = 1.$ (I.11)

Уравнение (I.10) принадлежит уравнениям типа Риккати. В общем случае точное решение уравнения Риккати неизвестно.

2. В нашем случае уравнение (I.10) допускает построение точного решения. Сделав замену переменных [I]

$$u = \frac{y'(\tau_1)}{y(\tau_1)}, \quad \tau = \frac{\tau_1}{f}, \quad (2.1)$$

уравнение (I.10) принимает вид:

$$\tau_1 y'' + y' - y = 0. \quad (2.2)$$

Это линейное уравнение является дифференциальным уравнением Бесселя с мнимым аргументом. Его общее решение, удовлетворяющее начальным условиям (I.11), будет ([I] 2, I62.1)

$$y = J_0(2i\sqrt{\tau_1}). \quad (2.3)$$

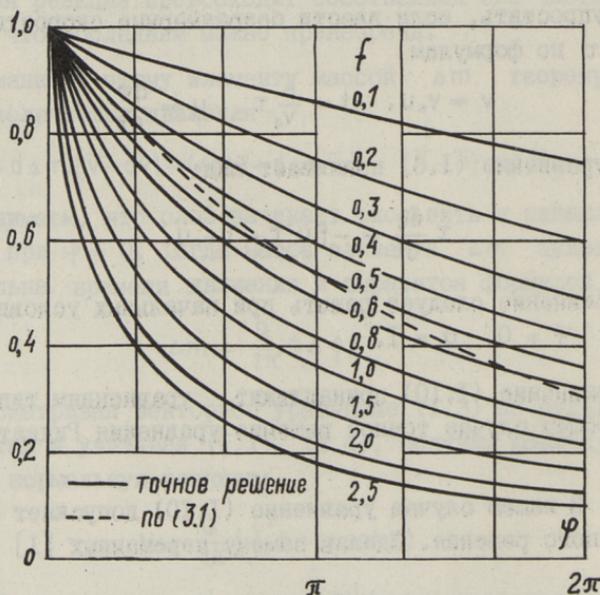
Тогда решение уравнения (I.10) выражается

$$u = \frac{I_1(2\sqrt{f\tau})}{\sqrt{f\tau} I_0(2\sqrt{f\tau})}, \quad (2.4)$$

где $I_0(\cdot)$, $I_1(\cdot)$ - функции Бесселя с мнимым аргументом. Формула (2.4) представляет скорость как функцию от времени движения. Закон движения получаем интегрированием (2.4)

$$\varphi = \int_0^{\tau} u dt = \frac{1}{f} \ln I_0(2\sqrt{f\tau}). \quad (2.5)$$

Решения (2.4) и (2.5) представлены функцией $u(\varphi)$ графически на фиг. 2 для различных коэффициентов трения.



Фиг. 2.

3. Практическое использование решения в виде (2.4) и (2.5) громоздко и не дает зависимости скорости u от угла φ в явном виде. Поэтому попытаемся найти приближенное решение, дающее непосредственную зависимость между u и φ . Будем искать приближенное решение уравнения (I.10) в виде

$$u = e^{-\sigma\varphi}, \quad (3.1)$$

где σ - коэффициент, подлежащий определению. Выбором (3.1) начальные условия (I.11) удовлетворены. Интересно отметить,

что при скольжении изолированной частицы ее скорость меняется по формуле

$$u = e^{-f\varphi}.$$

Скорость изолированной частицы существенно отличается от скорости движения возрастающего слоя. Так, например, для коэффициента трения $f = 0,6$ скорости будут:

$$\begin{array}{ll} \text{при } \varphi = \pi & u_{\text{слоя}} = 0,49, \quad u_{\text{изол.}} = 0,15; \\ \text{при } \varphi = 2\pi & u_{\text{слоя}} = 0,32, \quad u_{\text{изол.}} = 0,023. \end{array}$$

Для подстановки (3.1) в уравнение (1.10) предварительно выразим время τ интегрированием уравнения (3.1)

$$\tau = \frac{1}{\sigma} (e^{\sigma\varphi} - 1). \quad (3.2)$$

Тогда подставив в уравнение (1.10), (3.1) и (3.2), получим уравнение для определения коэффициента σ

$$f - \sigma - \sigma e^{\sigma\varphi} = 0. \quad (3.3)$$

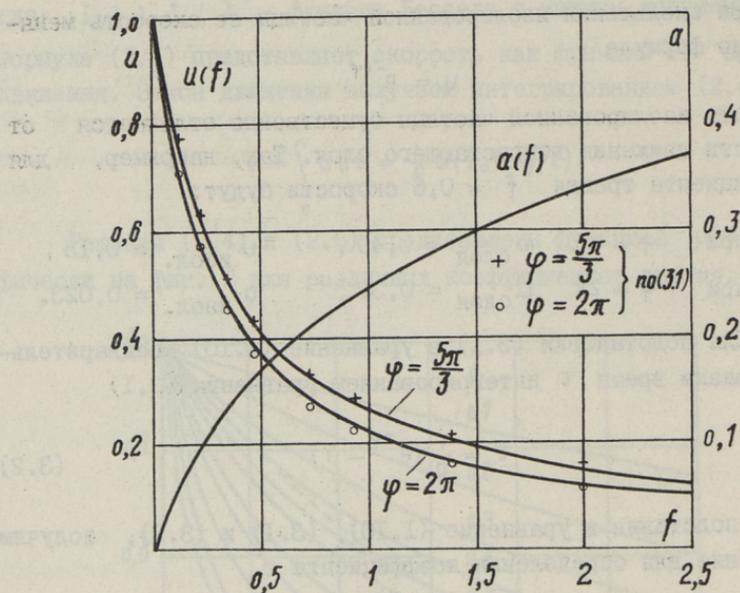
Удовлетворим это уравнение интегрально на отрезке $\varphi = [0, 2\pi]$ методом наименьших квадратов:

$$\frac{d}{d\sigma} \int_0^{2\pi} (f - \sigma - \sigma e^{\sigma\varphi})^2 d\varphi = 0. \quad (3.4)$$

Параметр σ определяется теперь из трансцендентного уравнения относительно σ . Удобнее это уравнение решить относительно коэффициента трения:

$$f = \sigma + \frac{(1+4\sigma\pi)e^{4\sigma\pi} + 4e^{2\sigma\pi} - 5}{8\pi(1+e^{2\sigma\pi})}. \quad (3.5)$$

Эта зависимость выражена графически на фиг. 3. Следует отметить, что приближенное решение (3.1) совпадает с точным лишь вблизи выходного отверстия $\varphi = 2\pi$. Изменение относительной скорости для $f = 0,6$ приведено на фиг. 2 прерывистой линией. Сравнение точного и приближенного решений приведено на фиг. 3 для двух точек на коже $\varphi = 300^\circ$ и $\varphi = 360^\circ$.



Фиг. 3 .

З а к л ю ч е н и е

Выведено дифференциальное уравнение нарастающего слоя мелких частиц, найдены точное решение этого уравнения и приближенное решение, дающее хорошее совпадение с точным решением вблизи выходного отверстия на коже.

Л и т е р а т у р а

Х. К а м к е. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, "Наука", М., 1971.

The Movement of a Growing Layer on a Cylindrical
Surface

Summary

The grinding product in a rotor mill, as in a desintegrator, for example, falls on a layer of particles moving along a cylindrical cover. The paper presents a differential equation of the growing and moving layer. The equation becomes Riccati type, nonlinear with variable coefficients. The exact solution of this equation and approximate solution more suitable for practical use has been given.

С о д е р ж а н и е

	Стр.
Г. Вейнер. О двух функциях оценки при аппроксимации симметричного бинарного отношения отношением эквивалентности	3
Ф. Вихманн. О включении методов Вороного-Нёрлунда	9
М. Левин. Построение двух наилучших квадратурных формул.	15
Н. Палувер. О суммировании числовых рядов методом дробнорациональных приближений.	21
Я. Хенно. Свободные \mathcal{R} -системы.	29
Т. Лийва. Определение собственных неосесимметричных колебаний оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны при разных граничных условиях.	41
Х. Рельвик. Составление дифференциальных уравнений движения при помощи аналогов кинетической энергии.	53
Х. Рельвик, О. Сильде. Метод уравнения возможной мощности применением объекта неголономности	63
А. Туманок. О движении нарастающего слоя частиц по цилиндрической поверхности.	75

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, Сборник статей УИ, Редактор
Ф. Вихманн. Техн. редактор Г. Гришина. Сборник утвержден коллегией Тру-
дов ТПИ 19/II 1973. Подписано к печати 27/УИ 1973. Бумага 60x90/16, Печ. л.
5,25+прилож. 0,5. Учетно-изд. л. 4,31. Тираж 350. МВ-07629. Зак. №495

Ротапринт ТПИ, Таллин, ул. Коскла, 2/9.

Цена 43 коп.

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СБОРНИК СТАТЕЙ УП

УДК 519.1

О двух функциях оценки при аппроксимации симметричного бинарного отношения отношением эквивалентности. Г. Вейнер. Труды Таллинского политехнического института, № 345, 1973, стр. 3-8.

В работе рассматривается проблема аппроксимации симметричного бинарного отношения R отношением эквивалентности E при условии, что сумма

$$|R - E| + |E - R|$$

минимальная. Определены две функции оценки. Эти функции использованы в одном частном случае.

УДК 517.512+517.512.8

О включении методов Вороного-Нёрлунда. Ф. Вихманы Труды Таллинского политехнического института, № 345, 1973, стр. 9-14.

В статье рассматривается построение метода Вороного-Нёрлунда, который был бы слабее заданного метода Вороного-Нёрлунда. Доказана следующая теорема:

Если $q_0 = 1$, $\frac{q_{n+1}}{q_n} \geq \frac{q_n}{q_{n-1}} (n > 0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} = 1$

и $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \infty$, то $(WN, q_n) \supset (WN, p_n) \supset (C, 0)$.

где

$$P_n = \frac{q_n \ln^{\alpha_r} \ln^{\alpha_{r-1}} \dots \ln^{\alpha_1} C}{\ln^{\alpha_r} \ln^{\alpha_{r-1}} \dots \ln^{\alpha_1} \frac{C}{q_n}}$$

и $\alpha_r, \alpha_{r-1}, \dots, \alpha_1$ зафиксированные положительные числа, а постоянная C выбрана так, что соответствующие логарифмы все положительны. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \infty$,

то (WN, p_n) сильнее $(C, 0)$ и слабее (WN, q_n) .

УДК 518:517-392

Построение двух наилучших формул. М. Левин.
Труды Таллинского политехнического института,
№ 345, 1973, стр. 15-20.

Пусть $W_{L_2}^{(2)}$ - класс функций $f(x)$, которые на отрезке $[0, 1]$ имеют абсолютно непрерывную производную и для которых $\|f''\|_{L_2} \leq M$;

$W_{g_{L_2}}^{(2)}$ - класс функций $f(x)$, которые принадлежат классу

$W_{L_2}^{(2)}$ и удовлетворяют условию $f(0) + f(1) = f'(0) + f'(1) = 0$.

Строятся формулы вида (с симметричными узлами: $x_j = 1 - x_{n+1-j}$)

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + C [f(0) + f(1)] + D [f'(0) + f'(1)] + R_n(f),$$

для которых величины

$$\sup_{f \in W_{g_{L_2}}^{(2)}} |R_n(f)| \quad \text{и} \quad \sup_{f \in W_{L_2}^{(2)}} |R_n(f)|$$

имеют наименьшие значения.

УДК 517.521.8

О суммировании числовых рядов методом дробнорациональных приближений. Н.Палувер. Труды Таллинского политехнического института. № 345, 1973, стр. 21-28.

В статье предлагается метод обобщенного суммирования числовых рядов, основанный на применении дробно-рациональных приближений. Даются формулы, не содержащие определителей, для последовательного вычисления частичных обобщенных сумм ряда. Приводятся примеры.

Библиографий 7.

УДК 519.48

Свободные Ω -системы. Я. Хенно. Труды Таллинского политехнического института, №345, 1973, стр. 29-40.

В работе вводится класс многоосновных алгебр, так называемой Ω -системы, который является естественным обобщением многих хорошо известных классов алгебраических систем — полугрупп, полигонов, систем Менгера, m -арных Ω -кольцоидов. Изучаются свободные (в классе всех Ω -систем)

Ω -системы и их конгруэнции. Доказано, что свободная над множеством $Z = \{Z_n, n \in J\}$ Ω -система имеет при $|Z_1| = 2$, $|Z_m| = 1$, $m > 1$ свободную над таким множеством $Y = \{Y_n, n \in J\}$ подсистему, что Y_m счетно при всяком $m \in J$, $m > 0$.

УДК 531.391+624.074.4.001.2

Определение собственных неосесимметричных колебаний оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны при различных граничных условиях. Т. Лийва. Труды Таллинского политехнического института, № 345, 1973, стр. 41-52.

Рассматриваются малые собственные колебания оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны при разных граничных условиях. Для исследования нижней части спектра собственных частот используется асимметрический метод интегрирования. Оболочка замкнута в окружном направлении и ограничена двумя параллелями. В конце статьи приведены выводы. В качестве примера найдены частоты и формы колебаний части тора, у которой радиусы кривизны имеют противоположные знаки.

УДК 531.314.2

Составление дифференциальных уравнений движения при помощи аналогов кинетической энергии. Х. Рельвик. Труды Таллинского политехнического института, № 345, 1973, стр. 53-62.

В статье составлены уравнения движения материальной точки и системы материальных точек при помощи величин, аналогичных кинетической энергии и энергии ускорения. Результаты оказываются обобщением уравнения Лагранжа, Апπεля, Ценова-Долапчиева и уравнений движения в квазикоординатах.

УДК 531.314.2

Метод уравнения возможной мощности с применением объекта неголономности. Х.Рельвик и О.Сильде. Труды Таллинского политехнического института, № 345, 1973, стр. 63-74.

Исходя из теоремы об изменении кинетической энергии в статье дается так называемый метод уравнения возможной мощности. Полученные уравнения движения механической системы материальных точек оказываются весьма общими. Они содержат, например, уравнения Лагранжа II рода, уравнения Аппеля, уравнения движения в квазикоординатах (квазискоростях) и т.д.

Вычислительная работа при пользовании методом уравнения возможной мощности в общем значительно меньше, чем в случае других известных методов динамики.

В ряд решаемых этим методом задач включается и учет уравнений связей, содержащих сколь угодно высокие производные скорости, линейных или нелинейных относительно этих производных.

Метод уравнения возможной мощности имеет и методическое значение. Он дает простой вывод уравнения Лагранжа II рода и позволяет изучить их во втузах раньше, чем при традиционном изложении.

УДК 621.926.47

О движении нарастающего слоя частиц по цилиндрической поверхности. А.Тюманок. Труды Таллинского политехнического института, № 345, 1973, стр. 75-82.

В помольных агрегатах роторного типа, как например дезинтегратор, измельченный материал вылетает и достигает с некоторой скоростью цилиндрического кожуха. На кожухе образуется движущийся нарастающий слой, толщина и масса которо-

го, по мере движения, изменяются. Выведено дифференциальное уравнение нарастающего слоя. Дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами является нелинейным уравнением типа Риккати. Приводится точное решение этого уравнения в функциях Бесселя с мнимым аргументом и приближенное решение, более удобное для практического применения.



Цена 43 коп.

19
Төрөөн
Раанатук
III
Төдүстөр