TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 371

ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И АВТОМАТИКЕ

Сборник статей

XII

ТАЛЛИН 1974

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 371 1974

УДК 621

ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И АВТОМАТИКЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ
XII

Таллин 1974

ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И АВТОМАТИКЕ
Сборник статей XII
Таллинский политехнический институт
Редактор А. Аннус
Технический редактор Л. Лоопер
Сборник утвержден коллегией Трудов ТПИ 3/УII 1974

Подписано к печати 31/X 1974
Бумага 60x90/16. Печ. л. 9,0 + 0,5 прилож.
Уч.-изд. л. 6,5. Тираж 350. МВ - 09807. Зак. № 658
Ротапринт ТПИ, Таллин, ул, Коскла, 2/9

Цена 65 коп.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
371 1974

УДК. 621.372.63

Х.В. Силламаа

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВА МНОГОПОЛЮСНИКОВ

Теория эквивалентных схем применительно ко многополюсникам имеет целью указать пути эквивалентной замены заданного многополюсника совокупностью соединенных многополюсников, выбранных по определенным признакам. Общее решение этой задачи требует прежде всего выяснения общих связей, действующих во множестве всех многополюсников $\mathfrak{M}$. Обсуждение этих проблем и является предметом данной работы.

Множество автономных многополюсников. Согласно [1], любой автономный многополюсник с сосредоточенными параметрами может быть описан гибридными уравнениями

$$\begin{bmatrix} V_{\bar{\gamma}} \\ I_{\bar{\varrho}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\bar{\gamma}\varrho} & M_{\bar{\gamma}\gamma} \\ B_{\bar{\varrho}\varrho} & Y_{\bar{\varrho}\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\varrho} \\ V_{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{\bar{\gamma}o} \\ I_{\bar{\varrho}o} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

где ϱ обозначает множество полюсов со свободными полюсными токами (вектор I_{ϱ}), а γ – множество полюсов со свободными потенциалами. Множества $\bar{\varrho}$ и $\bar{\gamma}$ обозначают дополнения множеств ϱ и γ относительно всего множества n полюсов, а $V_{\bar{\gamma}o}$ и $I_{\bar{\varrho}o}$ соответствуют автономным (задающим) параметрам многополюсника. Предполагается, что переменные в (1) могут либо иметь временную форму, либо являться изображениями по Лапласу или Фурье. Соответственно все элементы гибридной матрицы (параметры) многополюсника в (1) должны принадлежать к определенному полю параметров цепи $\mathcal{P}$ (вещественных или комплексных чисел, дробно-рациональных функций комплексной переменной).

Известно [2,3], что любой автономный многополюсник можно разложить на соединение неавтономного многополюсника с уравнением (I) при нулевых $V_{\bar{\gamma}0}$ и $I_{\bar{\rho}0}$; идеальных двухполюсных источников тока с задающими токами из $I_{\bar{\rho}0}$, присоединенных параллельно на зажимы множества $\bar{\rho}$, а также идеальных двухполюсных источников напряжения с задающими напряжениями из $V_{\bar{\gamma}0}$, присоединенных последовательно в цепь соответствующих полюсов из множества $\bar{\gamma}$. Поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться изучением структуры множества всех неавтономных многополюсников $\mathring{\mathfrak{M}}$. Это множество прежде всего можно разложить на непересекающие подмножества $\mathring{\mathfrak{M}}_n$ по количеству полюсов многополюсника.

<u>Многополюсники и множества матриц многополюсников</u>. Любой неавтономный многополюсник M_n можно согласно (I) характеризовать по крайней мере одной гибридной матрицей H_n, однако множество всех гибридных матриц $\mathcal{H}_n$, размеры которых $n \times n$, содержит обычно целый класс $\mathcal{H}_n$ гибридных матриц, соответствующих данному многополюснику. Такой класс назван Такером классом комбинаторно эквивалентных матриц [4,5]. Появление названного класса обусловлено возможностью представления уравнений многополюсника (I) при различном разбиении полюсов на подмножества ρ, $\bar{\rho}$ и γ, $\bar{\gamma}$. Различные гибридные матрицы данного многополюсника $H_{n1}, H_{n2}, \ldots$ могут быть найдены частичным обращением системы (I) вокруг любого ненулевого минора некоторой исходной гибридной матрицы (4). В итоге количество различных гибридных матриц, содержащихся в классе комбинаторной эквивалентности $\mathcal{H}_n$ и соответствующих заданным обозначениям полюсов, определяется количеством различных ненулевых миноров гибридной матрицы. Будем описанный класс гибридных матриц обозначать X_n, причем $X_n \subset \mathcal{H}_n$. От каждой матрицы класса X_n всевозможными перестановками нумерации полюсов можно получить подклассы $\mathfrak{X}_n$, называемые далее пермутационными подклассами гибридных матриц. Очевидно, $\mathfrak{X}_n \to \mathcal{H}_n | X_n$. В итоге класс комбинаторной эквивалентности $\mathcal{H}_n$ может содержать до $(2n)!$ различных гибридных матриц, соответствующих

единственному многополюснику. Ввиду того, что $\mathcal{K}_n$ является классом эквивалентности, можно образовать фактормножество $\mathcal{K}_n|\mathcal{K}_n$, причем существует взаимно-однозначное соответствие

$$\mathcal{K}_n | \mathcal{K}_n \longleftrightarrow \mathring{\mathfrak{M}}_n, \tag{2}$$

позволяющее заменить исследование множества многополюсников исследованием множества гибридных матриц.

Некоторые классы $\mathcal{K}_n$ могут содержать матрицы, обладающие $\rho = \Phi$ (тогда $\bar{\rho} = \gamma$ и $\bar{\gamma} = \Phi$). Такие многополюсники называются адмитансными [I] и их можно характеризовать матрицей проводимостей Y_n, единственной при заданной нумерации полюсов. Поэтому для изучения множества адмитансных многополюсников $\mathring{\mathcal{A}}_n \subset \mathring{\mathfrak{M}}_n$ удобнее исходить из множества матриц проводимостей $\mathcal{Y}_n \subset \mathcal{K}_n$. Здесь каждому адмитансному многополюснику соответствует единственный пермутационный подкласс $\mathcal{Y}_n$ матриц проводимостей. Действительно, при перенумерации полюсов векторы полюсных токов I и потенциалов V адмитансного многополюсника преобразуются

$$I' = P_n I\,; \quad V' = P_n V, \tag{3}$$

где P_n - $n \times n$ матрица перестановок, отличающаяся наличием в каждой строке и столбце ровно одного ненулевого элемента, равного I. В результате уравнения адмитансного многополюсника преобразуются

$$I = Y_n V \longrightarrow I' = P_n Y_n P_n^T V', \tag{4}$$

если считать, что $P_n^{-1} = P_n^T$. Таким образом, пермутационный класс матриц проводимостей

$$\mathcal{Y}_n = \left\{ Y_{ni} \,|\, Y_{ni} = P_{ni} Y_{no} P_{ni}^T \right\} \tag{5}$$

окажется подклассом подобных матриц и в то же время классом эквивалентности. Поэтому имеет место взаимно-однозначное соответствие

$$\mathcal{Y}_n | \mathcal{Y}_n \longleftrightarrow \mathring{\mathcal{A}}_n. \tag{6}$$

Разумеется, любой адмитансный многополюсник может обладать и гибридными матрицами в полном соответствии с (2). Однако пользоваться (6) для характеристики адмитансных многополюсников удобнее ввиду более простой структуры классов $\mathcal{Y}_n$ по сравнению с классами $\mathcal{H}_n$.

<u>Соединение многополюсников</u>. Для решения задач теории эквивалентных схем ограничение множествами $\mathring{\mathfrak{M}}$ и $\mathring{A}$ недостаточно, так как при соединении многополюсников существенную роль играет взаимный порядок соединения полюсов. Поэтому необходимо различать отдельные представители в пределах пермутационных классов.

Операции соединения всех полюсов двух адмитансных многополюсников соответствует, как известно, суммирование соответствующих матриц проводимостей. При частичном соединении полюсов можно соединяемые многополюсники заранее дополнить изолированными полюсами и тогда задачу можно опять сводить к соединению всех полюсов. При добавлении многополюснику изолированных полюсов матрица проводимостей (либо гибридная матрица в пределах подмножества полюсов $\bar{\varrho} \cap \gamma$) дополняется парами нулевых строк и столбцов. Таким образом, соединению адмитансных многополюсников всегда можно ставить в соответствие сумму матриц проводимостей. Если считать различными все адмитансные многополюсники, имеющие различную нумерацию полюсов, то между таким множеством $\hat{A}$ и множеством матриц проводимостей $\mathcal{Y}$ порождается операцией соединения изоморфное соответствие.

Если же соединяется адмитансный многополюсник с неадмитансным, то последний целесообразно представить каноническими уравнениями

$$\begin{bmatrix} V'_{\bar{\gamma}} \\ I'_{\bar{\varrho}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M'_{\bar{\gamma}\gamma} \\ B'_{\bar{\varrho}\varrho} & Y'_{\bar{\varrho}\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I'_{\varrho} \\ V'_{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V'_{\bar{\gamma}0} \\ I'_{\bar{\varrho}0} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

что согласно [I] всегда возможно, другими словами, любой класс $\mathcal{H}_n$ содержит гибридную матрицу с $Z_{\bar{\gamma}\varrho} = 0$. Уравнения же адмитансного многополюсника можно в согласии с (7) разложить на соответствующие блоки

$$\begin{bmatrix} I_{\rho} \\ I''_{\bar\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y''_{\rho\bar\gamma} & Y''_{\rho\gamma} \\ Y''_{\bar\rho\bar\gamma} & Y''_{\bar\rho\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V''_{\bar\gamma} \\ V''_{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I''_{\rho o} \\ I''_{\bar\rho o} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Далее получается, что результирующий многополюсник после соединения окажется неадмитансным и обладает уравнениями типа (7), причем

$$Z_{\bar\gamma\rho} = 0; \quad M_{\bar\gamma\gamma} = M'_{\bar\gamma\gamma}; \quad B_{\bar\rho\rho} = B'_{\bar\rho\rho};$$

$$Y_{\bar\rho\gamma} = Y'_{\bar\rho\gamma} + Y''_{\bar\rho\gamma} + Y''_{\bar\rho\bar\gamma} M'_{\bar\gamma\gamma} - B'_{\bar\rho\rho} Y''_{\rho\gamma} - B'_{\bar\rho\rho} Y''_{\rho\bar\gamma} M'_{\bar\gamma\gamma}; \tag{9}$$

$$V_{\bar\gamma o} = V'_{\bar\gamma o}; \quad I_{\bar\rho o} = I'_{\bar\rho o} + I''_{\bar\rho o} - B'_{\bar\rho\rho} I''_{\rho o} + (Y''_{\bar\rho\bar\gamma} - B'_{\bar\rho\rho} Y''_{\rho\bar\gamma}) V'_{\bar\gamma o}.$$

В этом случае соединению многополюсников уже явно не соответствует простая алгебраическая операция на множестве гибридных матриц. То же относится к случаю соединения двух неадмитансных многополюсников. Поэтому изоморфная связь между соединением многополюсников и определенной операцией над матрицами многополюсника имеет место лишь в пределах множества адмитансных многополюсников.

Таким образом, при решении задач соединения приходится иметь дело со многополюсниками, снабженными определенной нумерацией полюсов и дополненными нужным (в общем, произвольным) количеством изолированных полюсов. Будем такой объект называть элементором. Согласно вышеизложенному, каждому элементору $Э_n$ соответствует множество гибридных матриц

$$Э_n \longrightarrow X_n \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X^{(o)}_{n+i}\right), \tag{10}$$

где X_n было подмножеством класса комбинаторной эквивалентности $\varkappa_n$, соответствующим определенной нумерации полюсов, а $X^{(o)}_{n+i}$ получается прибавлением матрицам X_n пар нулевых пар строк и столбцов, соответствующих дополнению изолированных полюсов. Нетрудно убедиться, что множество гибридных матриц (10) является классом эквивалентности. Порядок элементора $Э_n$ определяется классом X_n, не содержащим гибридных матриц с нулевыми парами строк и столбцов.

Адмитансному элементору можно сопоставить определенное множество матриц проводимостей из $\mathfrak{Y}$. Тогда X_n в (10) заменяется единственной матрицей проводимостей Y_n, а $X^{(o)}_{n+i}$ – матрицей $Y^{(o)}_{n+i}$, полученной от Y_n прибавлением нулевых пар строк и столбцов. Введением понятия элементора по (I0) множество всех гибридных матриц $\mathcal{H}$, так же, как и матриц проводимостей $\mathcal{Y}$, может быть разбито на непересекающиеся элементор-множества Э_n. Соединение многополюсников реализуется определенными представителями соответствующих элементор-множеств.

Скалярно подобные многополюсники. Для решения задач составления эквивалентных схем целесообразно ввести ещё один класс многополюсников, называемый классом скалярно подобных многополюсников $\mathcal{M}_n$. Будем называть многополюсники скалярно подобными, если при произвольно заданных потенциалах существуют пары всех полюсов, полюсные токи которых имеют равные отношения λ, где скаляр λ принадлежит некоторому полю скаляров $\Lambda \subset \mathcal{P}$ (например, $\Lambda = \mathcal{R}$ – поле вещественных чисел). Нетрудно убедиться, что матрицы проводимостей скалярно подобных многополюсников после подходящей перенумерации полюсов связаны соотношением

$$Y_n'' = \lambda Y_n', \quad \lambda \in \Lambda. \tag{II}$$

Путем частичного обращения в (II) можно получить аналогичное соотношение для скалярно подобных гибридных матриц

$$H_n' = \begin{bmatrix} Z'_{\bar{\gamma}\varrho} & M'_{\bar{\gamma}\gamma} \\ B'_{\bar{\varrho}\varrho} & Y'_{\bar{\varrho}\gamma} \end{bmatrix}; \quad H_n'' = \begin{bmatrix} \lambda^{-1} Z'_{\bar{\gamma}\varrho} & M'_{\bar{\gamma}\gamma} \\ B'_{\bar{\varrho}\varrho} & \lambda Y'_{\bar{\varrho}\gamma} \end{bmatrix}; \quad \lambda \in \Lambda. \tag{I2}$$

Очевидно, каждому значению скаляра λ соответствует единственный многополюсник из $\mathcal{M}_n$, т.е. имеет место

$$\mathcal{M}_n \longleftrightarrow \Lambda. \tag{I3}$$

При установлении соответствия (I3) единичному скаляру в принципе можно сопоставить любой многополюсник из $\mathcal{M}_n$. В случае $\Lambda = \mathcal{R}$ появляется возможность линейного упорядочения всех многополюсников из $\mathcal{M}_n$.

Согласно вышеизложенному, каждому многополюснику $M_{ni} \in \mathcal{M}_n$ соответствует класс комбинаторно эквивалентных гибридных матриц $\mathcal{H}_n$. Если теперь для любого $H_{ni} \in \mathcal{X}_n \subset \mathcal{H}_n$ образовать множество гибридных матриц в соответствии с (I2) для всех $\lambda \in \Lambda$, то получим множество гибридных матриц, обозначаемое $\Lambda \mathcal{X}_n$.

Объединение множеств ΛX_n для всех $H_{ni} \in \mathcal{X}_n$ ведет нас ко множеству гибридных матриц, обозначаемому $\Lambda \mathcal{X}_n$, которое соответствует классу скалярно подобных многополюсников

$$\mathcal{M}_n \longleftrightarrow \Lambda \mathcal{X}_n . \qquad (14)$$

Если множество гибридных матриц ΛX_n дополнить всевозможными парами нулевых строк и столбцов в соответствии с (10), то получаемое множество соответствует классу скалярно подобных элементоров $\Lambda Э_n$.

В случае скалярно подобных адмитансных многополюсников каждому многополюснику класса $\mathcal{M}_n$ соответствует единственный пермутационный класс $\mathcal{Y}_n$. Тем самым классу скалярно подобных адмитансных многополюсников соответствует множество $\Lambda \mathcal{Y}_n$ матриц проводимостей. Аналогично можно образовать класс скалярно подобных адмитансных элементоров.

Умножение матрицы проводимостей на λ согласно (11) или преобразование гибридной матрицы по (12) можно толковать как замену данного многополюсника на некоторую другую из данного класса скалярного подобия. Например, адмитансные двухполюсники с матрицей проводимости

$$\begin{bmatrix} y & -y \\ -y & y \end{bmatrix}$$

при вещественном y в исходной матрице и при множестве скаляров $\Lambda = \mathcal{R}$ (вещественные числа) образуют класс резисторов, где различным λ соответствуют резисторы различной проводимости; при исходном $y = Cs$ получим класс конденсаторов различной емкости и т.д.

<u>Предельные многополюсники</u>

Если класс скалярного подобия строится над множеством вещественных чисел, то появляется возможность расширения класса путем введения так называемых предельных многополюсников, соответствующих пределу $\lambda \to \infty$ в (11) или (12) (для гибридной матрицы можно рассматривать также предел $\lambda \to 0$ в (12)). Ясно, что для класса скалярного подобия адмитансных многополюсников предельные многополюсники уже не обладают матрицей проводимостей. Вычисление гибридных матриц предельных многополюсников возможно косвенным путем. Если провести частичное обращение уравнений исходного многополюсника до получения гибридной формы (I) с $Y_{\bar{\gamma}\gamma} = 0$ (такое преобразование всегда возможно), то после образования на базе (I2) общего выражения матрицы данного класса скалярного подобия уже нетрудно переходить к пределу

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \begin{bmatrix} \lambda^{-1} Z_{\bar{\gamma}\varrho} & M_{\bar{\gamma}\gamma} \\ B_{\bar{\varrho}\varrho} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M_{\bar{\gamma}\gamma} \\ B_{\bar{\varrho}\varrho} & 0 \end{bmatrix}. \qquad (I5)$$

Полученная матрица предельного многополюсника соответствует так называемому трансактансному многополюснику [I], характеризуемому нулевыми значениями всех иммитансных параметров. Таким образом, любой класс скалярно подобных адмитансных многополюсников обладает трансактансным предельным многополюсником, причем последние могут у различных классов даже совпадать (различие в $Z_{\bar{\gamma}\varrho}$ в (I5) на результате не сказывается). С другой стороны, любой трансактансный многополюсник может рассматриваться как предельный некоторого класса скалярного подобия адмитансных многополюсников. Для этого достаточно в трансактансную матрицу в соответствии с (I5) ввести блок $\lambda^{-1} Z_{\bar{\gamma}\varrho}$ такой, что $\det Z_{\bar{\gamma}\varrho} \neq 0$, что дает возможность от гибридной матрицы перейти к адмитансной форме

$$\lambda \begin{bmatrix} Z^{-1}_{\bar{\gamma}\varrho} & -Z^{-1}_{\bar{\gamma}\varrho} M_{\bar{\gamma}\gamma} \\ B_{\bar{\varrho}\varrho} Z^{-1}_{\bar{\gamma}\varrho} & -B_{\bar{\varrho}\varrho} Z^{-1}_{\bar{\gamma}\varrho} M_{\bar{\gamma}\gamma} \end{bmatrix}, \qquad (I6)$$

явно представляющей некоторый класс скалярного подобия, предельным многополюсником которого является трансактансный многополюсник, соответствующий (I5). Ввиду свободы в выборе $Z_{\bar{\gamma}\varrho}$ можно даже получить различные возможные классы.

Таким образом, множество трансактансных многополюсников может рассматриваться как множество предельных многополюсников множества адмитансных многополюсников. Но в соответствии с (7), (8) и (9) любой неадмитансный многополюсник может рассматриваться как соединение некоторого трансактансного и адмитансного многополюсников. Действительно, любой неадмитансный многополюсник обладает гибридной матрицей типа (7), а такую матрицу получим при соединении, например, трансактансного многополюсника с уравнением

$$\begin{bmatrix} V_{\bar{\gamma}} \\ I_{\bar{\varrho}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M_{\bar{\gamma}\gamma} \\ B_{\bar{\varrho}\varrho} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\varrho} \\ V_{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{\bar{\gamma}0} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{I7}$$

и адмитансного многополюсника с уравнением

$$\begin{bmatrix} I_{\varrho} \\ I_{\bar{\varrho}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_{\bar{\varrho}\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{\bar{\gamma}} \\ V_{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_{\bar{\varrho}0} \end{bmatrix}. \tag{I8}$$

Тем самым множество предельных многополюсников можно дополнить всеми неадмитансными многополюсниками и в итоге множество всех неавтономных многополюсников $\mathring{\mathcal{M}}$ можно рассматривать как состоящую из множества адмитансных многополюсников $\mathring{\mathcal{A}}$ и из множества предельных многополюсников, включающих все неадмитансные многополюсники. Таким образом, множество адмитансных многополюсников приобретает центральную роль во множестве всех многополюсников. В то же время в $\mathring{\mathcal{A}}$ существуют операции, изоморфные суммированию и умножению на скаляр матриц проводимостей. Эти операции индуцируют во множестве адмитансных многополюсников алгебраическую структуру векторного пространства, которая может быть использована при решении задач теории эквивалентных схем. Однако подробное обсуждение этих проблем должно стать предметом уже отдельной статьи.

Литература

I. Рехепапп Ю.А., Силламаа Х.В. Матричное описание многополюсников. - Радиотехника, т.27, 1972, № I2, с. 26-3I.

2. Зелях Э.В. Основы общей теории линейных электрических схем. - М., АН СССР, I95I.

3. Блажкевич Б.I. Основні методи аналізу лінійних електричних кіл. - Київ, Вид. АН УРСР, I96I.

4. T u c k e r, A.W. A combinatorial equivalence of matrices. - Proc. symp. in appl. math. v. X. Combinatorial analysis. AMS. Providence. 1960, pp. 129-140.
5. T u c k e r, A.W. Principal pivot transforms of square matrices. - SIAM Review, v. 5, 1963, No 4, p. 305.

H. Sillamaa

Some General Properties of the Set of Multipoles

Summary

In this paper some mutual connections of multipole classes in the set of all multipoles are discussed together with consideration of their interrelations with various classes of multipole hybrid and admittance matrices. The analysis has been oriented to problems of forming equivalent networks for multipoles. A new class of scalar similarity of multipoles has been introduced and boundary multipoles of that class have been defined. It has been shown that all nonadmittant multipoles may be considered as a boundary set for the set of admittant multipoles.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 371 1974

УДК 621.372.061

В.Р. Мяннама, Х.В. Силламаа

ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ НУЛЕЙ В АДЪЮНКТАХ RC-ТРЁХПОЛЮСНИКА

<u>Введение</u>. Параметры обратимых трёхполюсников выражаются через отношения так называемых базисных адъюнкт (БА) Δ, Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{1122} и Δ_{12} [1]. Для RC-цепей такие адъюнкты являются полиномами от комплексной частоты s, коэффициенты которых определяются значениями элементов цепи. Нули главных адъюнкт Δ, Δ_{11}, Δ_{22} и Δ_{1122} – вещественные отрицательные (одно- или многократные); Δ_{12} может иметь также комплексные нули [2].

Кратности вещественного отрицательного нуля s_e в БА Δ, Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{1122} и Δ_{12}, обозначенные далее через a, b_1, b_2, c и β_{12} соответственно, будут различными, образуя некоторую комбинацию кратностей нуля s_e (ККН) [3]. Такая ККН может быть обозначена либо через (a, b_1, b_2, c, β_{12}), либо через ($a'+N'$, $b_1'+N'$, $b_2'+N'$, $c'+N'$, $\beta_{12}'+N'$)$\equiv$(a', b_1', b_2', c', β_{12}')$+N'$. ($N'=\min(a, b_1, b_2, c, \beta_{12})$ – кратность общего для всех БА нуля (ОН) s_e). В дальнейшем, имея в виду минимальную кратность β_{12} (или β_{12}'), однозначно определяемую через кратности a, b_1, b_2 и c (a_1', b_1', b_2' и c') [3], будем ККН обозначать через $(a', b_1', b_2', c)+N'$.

Согласно [3] можно по так называемым редуцированным кратностям a', b_1', b_2' и c' различать 15 разнообразных ККН, тесно связанных со свойствами компактности Z-, G-, H- и Y-параметров в полюсе s_e.

Ниже рассматривается методика составления систем исходных уравнений (СИУ) для реализации кратного нуля s_e в БА RC-трёхполюсника, имеющего полную структуру* с неотрицательными элементами. Следовательно, в результате решения такой СИУ можно в параметрах RC-трёхполюсника реализовать заданный нуль или полюс s_e. При учёте дополнительных связей между БА ((7.I) из [5] и др.), упомянутые системы уравнений могут также служить основой при составлении СИУ для реализации RC-трёхполюсников по трём независимым параметрам и общему для всех БА множителю.

В [3] показано, что при наличии кратного нуля s_e в адъюнктах БА RC-трёхполюсника, элементы последнего должны удовлетворять по крайней мере $H'_{N'} = N'(N'+5)/2 + K$ условиям (в зависимости от ККН $K = 0$; I; 2 или 3). Поэтому СИУ для реализации таких нулей содержат также $H'_{N'}$ уравнений. Число независимых емкостей в реализуемых цепях не может, конечно, быть меньше, чем $\max(a, b_1, b_2, c, \beta_{12})$.

<u>Исходные адъюнкты</u>. Разности кратностей a, b_1, b_2 и c нуля s_e определяются выражениями [3]:

$$|a-b_1| \in L; \ |a-b_2| \in L; \ |b_1-c| \in L; \ |b_2-c| \in L; \quad L = \{0,1\}. \quad (\mathrm{I})$$

Поэтому при реализации нуля s_e с заданной кратностью в одной или некоторых из БА, кратность такого нуля в остальных БА не может уже оказаться меньшей, чем миниально возможная по (I). По этой причине для реализации нуля s_e с ККН $(a', b'_1, b'_2, c') + N'$ достаточно реализовать такой нуль лишь в некоторых из БА, называемых исходными адъюнктами (ИА). Кратность нуля s_e в ИА приведена в таблице I.

---

* Такой структуре соответствует полный граф. Частные, например, последовательно-параллельные структуры также рассматриваемы как полные структуры, которые имеют нулевые значения некоторых элементов.

Таблица I

ККН		Кратность нуля s_e			
№	$(a'\,b_1'\,b_2'\,c')+N'$	Δ	Δ_{11}	Δ_{22}	Δ_{1122}
I	(0000) + N'	N'	N'	N'	×
		N'	N'	×	N'
		N'	×	N'	N'
		×	N'	N'	N'
2	(1000) + N'	$N'+1$	×	×	N'
3	(0100) + N'	×	$N'+1$	N'	×
4	(0010) + N'	×	N'	$N'+1$	×
5	(000I) + N'	N'	×	×	$N'+1$
6	(100I) + N'	$N'+1$	×	×	$N'+1$
7	(0110) + N'	×	$N'+1$	$N'+1$	×
8	(II00) + N'	$N'+1$	$N'+1$	×	×
9	(I0I0) + N'	$N'+1$	×	$N'+1$	×
I0	(0I0I) + N'	×	$N'+1$	×	$N'+1$
II	(00II) + N'	×	×	$N'+1$	$N'+1$
I2	(2II0) + N'	$N'+2$	×	×	×
I3	(I20I) + N'	×	$N'+2$	×	×
I4	(I02I) + N'	×	×	$N'+2$	×
I5	(0II2) + N'	×	×	×	$N'+2$

х – адъюнкта не входит в состав ИА.

<u>СИУ для реализации N-кратного нуля s_e в Δ</u>. Методику составления СИУ будем сначала объяснять на примере реализации N-кратного нуля s_e в одной из главных адъюнкт, например в Δ. Согласно [4], RC-цепь S, содержащую множитель $(s - s_e)^N$ в определителе Δ, можем рассматривать как уравновешенный при $s = s_e$ N-порт, порты которого образуются из клеммных пар некоторых независимых элементов $x_1, \ldots, x_N$ цепи S и имеют при $s = s_e$ нулевые входные проводимости. Совокупность всех элементов такой цепи должна подчиняться $H_N = N(N+1)/2$ условиям, из которых $H_N - N$ относятся к условиям равновесия N-порта, а остальные N – к условиям согласования элементов $x_1, \ldots, x_N$ с соответствующими портами. Условия равновесия заключаются, в общем, в равенстве нулю всех

взаимных (недиагональных) элементов гибридной матрицы N-порта, а условия согласования означают нулевую сумму проводимости (или сопротивления) элемента x_i ($i = 1,2,\dots,N$) и входной проводимости (или сопротивления) соответствующего порта.

Оказывается, что условия равновесия и согласования могут быть выражены через определители цепей, полученных из исходной цепи S закорачиванием и (или) удалением некоторых элементов из $x_1,\dots,x_N$. Вводим для таких определителей (адъюнкт) обозначение Δ^{γ_r} ($\Delta_{11}^{\gamma_r}$, $\Delta_{22}^{\gamma_r}$, $\Delta_{1122}^{\gamma_r}$), где так называемый вектор процедур

$$\gamma_r \in \left\{ \alpha_r,\ \alpha_r(i,j,\dots),\ \ \beta_r(i,j) \right\} \tag{2}$$

показывает, какие элементы цепи S должны быть закорочены и (или) отключены. Множество векторов в (2) содержит следующие векторы:

$\alpha_r = [\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_N]$ - r-мерный (основной) вектор процедур;

$\alpha_r(i,j,\dots)$ - r-мерный вектор, полученный из α_r путем замены $\ell_i, \ell_j, \dots$ на $\bar{\ell}_i, \bar{\ell}_j \dots$

$\beta_r(i,j)$ - $(r-1)$-мерный вектор, полученный из α_r при опускании ℓ_i и при замене ℓ_p ($p=f(i,j)$) на $\bar{\ell}_p$.

Компоненты векторов α_r, $\alpha_r(i,j,\dots)$ и $\beta_r(i,j)$ выражаются следующим образом:

$$\ell_i = l_i \ \text{или}\ \bar{l}_i\,;$$

$$\bar{\ell}_i = \begin{cases} \bar{l}_i, & \text{если } \ell_i = l_i\,; \\ l_i, & \text{если } \ell_i = \bar{l}_i\,, \end{cases} \tag{3}$$

где

l_i - процедура закорачивания элемента x_i;

$\bar{l}_i$ - процедура отключения элемента x_i;

Далее обозначим:

$\underline{x}_i$ - проводимость (сопротивление) элемента x_i;

${}^*f = f(s)\big|_{s=s_e}$ для любой функции от s (например ${}^*\underline{x}_i$, ${}^*\Delta^{\gamma_r}$ и т.д.).

Пользуясь вышеприведенными обозначениями, можем условия равновесия упомянутого N-порта представить в виде:

$$\frac{{}^*\Delta^{\alpha_N}}{{}^*\Delta^{\alpha_N(i)}} = \frac{{}^*\Delta^{\alpha_N(i+m)}}{{}^*\Delta^{\alpha_N(i,\,i+m)}}\,; \quad i=1,2,\dots,N; \quad m=1,2,\dots,(N-i), \tag{4a}$$

то есть проводимость (или сопротивление) порта i $(i=1,2,\ldots,N)$ не зависит при $s=s_e$ от нагрузок других портов. Условия согласования представим в виде:

$$\frac{{}^*\Delta^{\alpha_N}}{{}^*\Delta^{\alpha_N(i)}} = -{}^*\underline{X}_i\,; \qquad i=1,2,\ldots,N. \tag{4б}$$

Из (4а) и (4б) вытекает:

$$\begin{cases} {}^*\Delta^{\alpha_N} + {}^*X_i \cdot {}^*\Delta^{\alpha_N(i)} = 0\,; \\ {}^*\Delta^{\alpha_N(i+m)} + {}^*X_i \cdot {}^*\Delta^{\alpha_N(i,i+m)} = 0\,. \end{cases} \tag{5}$$

Левые стороны уравнений (5) представляют собой разложения некоторых определителей по $\underline{X}_i$, поэтому СИУ (5) для реализации в Δ множителя $(s-s_e)^N$ можем представить в виде:

$${}^*\Delta^{\beta_N(i,j)} = 0 \tag{6}$$

с

$$\beta_N(i,j) = [\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{i-1},\ell_{i+1},\ldots,\ell_{p-1},\bar{\ell}_p,\ell_{p+1},\ldots,\ell_N], \tag{7}$$

где

$$i=1,2,\ldots,N; \quad j=1,2,\ldots,(N-i+1); \; p=i+j-1. \tag{8}$$

Представление условий равновесия в виде (4а) не является, однако, единственно возможным. Нетрудно показывать, что $H_N - N$ условий равновесия могут по портам распределяться различным образом (в (4а) для порта i имеем $N-1$ условий). Поэтому переменные j и p из (7) можно выбирать и иным способом, например:

$$i=1,2,\ldots,N; \; j=1,2,\ldots,q+1; \; p=\begin{cases} i+j-1, & \text{если } N \geq i+j-1, \\ i+j-N-1, & \text{если } N < i+j-1, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$q = \begin{cases} (N-1)/2, & \text{если } N \text{ - нечетное число;} \\ N/2-1, & \text{если } N \text{ - четное, } i \text{ - нечетное;} \\ N/2, & \text{если } N \text{ - четное, } i \text{ - четное.} \end{cases}$$

Выбор j и p по (9) соответствует максимально равномерному распределению условий равновесия между портами $1,\ldots,N$.

<u>СИУ для реализации различных ККН</u>. Рассмотрим составление одной из возможных СИУ для реализации ККН № I, приняв за ос-

нову первую из четырёх (возможных в этом случае) комплектов ИА, представленных в таблице I: Δ, Δ_{11} и Δ_{22}.

Пусть на основе (5) при $N = N'$, то есть по уравнениям

$$^*\Delta^{\beta_{N'}(i,j)} = 0 \qquad (10)$$

реализован N'-кратный нуль s_e в Δ. Чтобы множитель $(s-s_e)^{N'}$ возник одновременно и в адъюнктах Δ_{11} и Δ_{22}, необходимо, чтобы вход, образованный внешними клеммами RC-трёхполюсника, находился в равновесии со всеми портами рассмотренного выше N-порта (при $N = N'$ и $s = s_e$). Для этого должны быть выполнены следующие (либо эквивалентные) условия равновесия:

$$\frac{^*\Delta^{\alpha_{N'}}}{^*\Delta_{11}^{\alpha_{N'}}} = \frac{^*\Delta^{\alpha_{N'}(1)}}{^*\Delta_{11}^{\alpha_{N'}(1)}} = \frac{^*\Delta^{\alpha_{N'}(2)}}{^*\Delta_{11}^{\alpha_{N'}(2)}} = \ldots = \frac{^*\Delta^{\alpha_{N'}(N')}}{^*\Delta_{11}^{\alpha_{N'}(N')}}; \qquad (11а)$$

$$\frac{^*\Delta^{\alpha_{N'}}}{^*\Delta_{22}^{\alpha_{N'}}} = \frac{^*\Delta^{\alpha_{N'}(1)}}{^*\Delta_{22}^{\alpha_{N'}(1)}} = \frac{^*\Delta^{\alpha_{N'}(2)}}{^*\Delta_{22}^{\alpha_{N'}(2)}} = \ldots = \frac{^*\Delta^{\alpha_{N'}(N')}}{^*\Delta_{22}^{\alpha_{N'}(N')}}. \qquad (11б)$$

При учёте (4б) с $N = N'$, получим из (11а) и (11б):

$$^*\Delta_{11}^{\beta_{N'}(i,1)} = 0; \quad ^*\Delta_{22}^{\beta_{N'}(i,1)} = 0. \qquad (12)$$

Таким образом, (10) и (12) образуют одну из возможных СИУ для реализации ККН № I. Другие, эквивалентные СИУ для такой ККН, могут быть составлены аналогично (составляя, например, сначала уравнения для реализации $(s-s_e)^N$ в Δ_{11} или Δ_{22}, или же, принимая за основу другой возможный комплект ИА). Учитывая специфику всех остальных ККН, можем на основе соответствующих ИА составить для них СИУ таким же образом.

Полученные описанным путем СИУ для ККН № I-I5 представлены в таблице 2 (для ККН № I в таблице 2 приводятся I2 эквивалентных вариантов, а для ККН № 6-II — по два эквивалентных варианта).

<u>П р и м е ч а н и е I</u>. Если в состав ИА данной ККН входит адъюнкта Δ_{11} ($\Delta_{22}, \Delta_{1122}$), то элементы $x_1, \ldots, x_r$, по которым определяется вектор α_r (следовательно, и $\beta_r(i\ j)$), должны быть независимыми также при структуре цепи, полученной путем закорачивания внешних клемм I и 3 (клемм 2 и 3 или клемм I, 2 и 3 соответственно).

Таблица 2

<table>
<tr><th rowspan="2">ККН №</th><th colspan="2">$^{*}\Delta^{\beta_r(i,k)} = 0$</th><th colspan="2">$^{*}\Delta_{11}^{\beta_r(i,k)} = 0$</th><th colspan="2">$^{*}\Delta_{22}^{\beta_r(i,k)} = 0$</th><th colspan="2">$^{*}\Delta_{1122}^{\beta_r(i,k)} = 0$</th></tr>
<tr><th>r</th><th>k</th><th>r</th><th>k</th><th>r</th><th>k</th><th>r</th><th>k</th></tr>
<tr><td rowspan="6">I</td><td>N'</td><td>j
1
1</td><td>N'</td><td>1
j
1</td><td>N'</td><td>1
1
j</td><td colspan="2">×</td></tr>
<tr><td>N'</td><td>j
1
1</td><td>N'</td><td>1
j
1</td><td colspan="2">×</td><td>N'</td><td>1
1
j</td></tr>
<tr><td rowspan="2">N'</td><td rowspan="2">j
1
1</td><td colspan="2" rowspan="2">×</td><td>N'</td><td>1
j
1</td><td>N'</td><td>1
1
j</td></tr>
<tr><td rowspan="2">N'</td><td rowspan="2">1
j
1</td><td rowspan="2">N'</td><td rowspan="2">1
1
j</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">×</td><td rowspan="2">N'</td><td rowspan="2">j
1
1</td></tr>
<tr><td colspan="2">×</td><td>N'</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>N'+1</td><td>j</td><td colspan="2">×</td><td colspan="2">×</td><td>N'</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">×</td><td>N'+1</td><td>j</td><td>N'</td><td>1</td><td colspan="2">×</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">×</td><td>N'</td><td>1</td><td>N'+1</td><td>j</td><td colspan="2">×</td></tr>
<tr><td>5</td><td>N'</td><td>1</td><td colspan="2">×</td><td colspan="2">×</td><td>N'+1</td><td>j</td></tr>
<tr><td>6</td><td>N'+1</td><td>j
1</td><td colspan="2">×</td><td colspan="2">×</td><td>N'+1</td><td>1
j</td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="2">×</td><td>N'+1</td><td>j
1</td><td>N'+1</td><td>1
j</td><td colspan="2">×</td></tr>
<tr><td>8</td><td>N'+1</td><td>j
1</td><td>N'+1</td><td>1
j</td><td colspan="2">×</td><td colspan="2">×</td></tr>
<tr><td>9</td><td>N'+1</td><td>j
1</td><td colspan="2">×</td><td>N'+1</td><td>1
j</td><td colspan="2">×</td></tr>
<tr><td>I0</td><td colspan="2">×</td><td>N'+1</td><td>j
1</td><td colspan="2">×</td><td>N'+1</td><td>1
j</td></tr>
<tr><td>II</td><td colspan="2">×</td><td colspan="2">×</td><td>N'+1</td><td>j
1</td><td>N'+1</td><td>1
j</td></tr>
<tr><td>I2</td><td>N'+2</td><td>j</td><td colspan="2">×</td><td colspan="2">×</td><td colspan="2">×</td></tr>
<tr><td>I3</td><td colspan="2">×</td><td>N'+2</td><td>j</td><td colspan="2">×</td><td colspan="2">×</td></tr>
<tr><td>I4</td><td colspan="2">×</td><td colspan="2">×</td><td>N'+2</td><td>j</td><td colspan="2">×</td></tr>
<tr><td>I5</td><td colspan="2">×</td><td colspan="2">×</td><td colspan="2">×</td><td>N'+2</td><td>j</td></tr>
</table>

П р и м е ч а н и е 2. Векторы процедур $\beta_{r_1}(i,j)$ и $\beta_{r_2}(i,1)$, которые относятся к различным ИА некоторой ККН (см. таблицу 2), составляются по основным векторам процедур α_{r_1} и α_{r_2}, причем при $r_1 = r_2$ (ККН № 1, 6-II) можно выбирать $\alpha_{r_1} = \alpha_{r_2}$, а при $r_1 > r_2$ (ККН № 2-5) α_{r_2} можно составлять из элементов α_{r_1}.

П р и м е ч а н и е 3. Для сокращения объема вычислений при решении СИУ целесообразно выбирать $\ell_i = l_i$ $(\bar{\ell}_i = \bar{l}_i)$, $i = 1,2,\ldots,r$, чем достигаются минимальные порядки адъюнкт ${}^*\Delta^{\beta_r(i,j)}$, ${}^*\Delta_{11}^{\beta_r(i,j)}$, ${}^*\Delta_{22}^{\beta_r(i,j)}$ и ${}^*\Delta_{1122}^{\beta_r(i,j)}$.

Примеры

Рассмотрим примеры применения таблицы 2 и выражений (7), (8) и (9) при составлении конкретных СИУ для некоторых ККН.

1. ККН № 15:(0112) + 0. Согласно таблице I из [3], такой ККН соответствует некомпактный полюс s_e в Y-параметрах цепи.

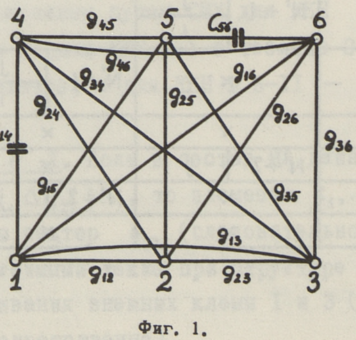
По таблице 2 имеем: ${}^*\Delta_{1122}^{\beta_2(i,j)} = 0$. Составим векторы процедур $\beta_2(i,j)$ по (7) и (8), учитывая примечание 3:

$$\beta_2(1,1) = \ell_2 = l_2; \quad \beta_2(1,2) = \bar{\ell}_2 = \bar{l}_2; \quad \beta_2(2,1) = \ell_1 = l_1.$$

Следовательно, СИУ выражается в виде:

$${}^*\Delta_{1122}^{l_2} = 0; \quad {}^*\Delta_{1122}^{\bar{l}_2} = 0; \quad {}^*\Delta_{1122}^{l_1} = 0.$$

Задаваясь структурой RC-трёхполюсника (фиг. 1) и выбирая $x_1 = C_{14}$, $x_2 = g_{45}$ и $s_e = -1$, получим для такой СИУ форму (после раскрытия адъюнкт):



Фиг. 1.

$$\begin{cases}(D+g_{46}-C_{56})(A+B-C_{14})+D(g_{46}-C_{56})=0;\\ D(A+g_{46}-C_{14})(B-C_{56})+g_{46}(A-C_{14})(B-C_{56})-B\cdot C_{56}(A+g_{46}-C_{14})=0;\\ (B+g_{45})(D+g_{46})-C_{56}(B+D+g_{45}+g_{56})=0,\end{cases}$$

где

$$A=g_{15}+g_{16};\quad B=g_{24}+g_{25}+g_{26};\quad D=g_{34}+g_{35}+g_{36}.$$

Выбираем в качестве неизвестных C_{14}, C_{56} и g_{45} и задаемся значениями остальных элементов, например, так: $g_{24}=1/2$; $g_{34}=5/4$; $g_{15}=1/2$; $g_{25}=1$; $g_{35}=1/2$; $g_{16}=1/4$; $g_{26}=1/4$; $g_{36}=1/2$; $g_{46}=3$; g_{12}, g_{23}, g_{13} – произвольные. Тогда решением СИУ является: $C_{14}=4$; $C_{56}=8/3$; $g_{45}=6$, а Y-параметры RC-трёхполюсника с такими значениями элементов выражаются в виде:

$$Y_{11}=\frac{\Delta_{22}}{\Delta_{1122}}=g_{12}+g_{23}+\frac{229/64(s+639/3664)}{(s+1)};$$

$$Y_{22}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{1122}}=g_{12}+g_{13}+\frac{311/192(s+3357/4976)}{(s+1)};$$

$$Y_{12}=\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{1122}}=g_{12}+\frac{97/64(s+287/1552)}{(s+1)},$$

причём $\Delta_{1122}=128(s+1)^2$.

Таким образом, RC-трёхполюсник с некомпактным полюсом в Y-параметрах может иметь полностью "компактную" структуру.

2. ККН (1000) + 3. Такой ККН соответствует компактный полюс s_e Z-параметров при наличии трёхкратного ОН s_e в БА.

По таблице 2: ${}^*\Delta^{\beta_4(i,j)}=0$; ${}^*\Delta_{1122}^{\beta_3(i,1)}=0$.

Составим векторы $\beta_4(i,j)$ и $\beta_3(i,1)$ по (7) и (9), учитывая примечания 1 и 3. Пусть $\alpha_4=[l_1,l_2,l_3,l_4]$ и $\alpha_3=[l_1,l_2,l_3]$. Тогда

$$\beta_4(1,1)=[l_2,l_3,l_4];\quad \beta_4(1,2)=[\bar{l}_2,l_3,l_4];$$

$$\beta_4(2,1)=[l_1,l_3,l_4];\quad \beta_4(2,2)=[l_1,\bar{l}_3,l_4];\quad \beta_4(2,3)=[l_1,l_3,\bar{l}_4];$$

$$\beta_4(3,1)=[l_1,l_2,l_4];\quad \beta_4(3,2)=[l_1,l_2,\bar{l}_4];$$

$$\beta_4(4,1)=[l_1,l_2,l_3];\quad \beta_4(4,2)=[\bar{l}_1,l_2,l_3];\quad \beta_4(4,3)=[l_1,\bar{l}_2,l_3];$$

$$\beta_3(1,1)=[l_2,l_3];\quad \beta_3(2,1)=[l_1,l_3];\quad \beta_3(3,1)=[l_1,l_2].$$

В итоге СИУ получит вид:

$${}^*\Delta^{[l_2,l_3,l_4]}=0;\quad {}^*\Delta^{[\bar{l}_2,l_3,l_4]}=0;\quad \dots;\quad {}^*\Delta^{[l_1,\bar{l}_2,l_3]}=0;$$

$${}^*\Delta_{1122}^{[l_2,l_3]}=0;\quad {}^*\Delta_{1122}^{[l_1,l_3]}=0;\quad {}^*\Delta_{1122}^{[l_1,l_2]}=0$$

и содержит 13 уравнений.

Решение систем (нелинейных) исходных уравнений, вытекающих из таблицы 2, составляет самостоятельную проблему, рассмотрение которой не вмещается в рамки настоящей статьи.

Литература

1. П и а н Л. д е. Теория линейных активных цепей. –М.–Л., "Энергия", 1967.
2. Б а н д м а н О.Л. Синтез электронных RC-схем. – М., "Наука", 1966.
3. М я н н а м а В.Р. О вещественных нулях в адъюнктах матрицы RC-трёхполюсника. –"Тр. Таллинск. политехн. ин-та", № 350, 1973, с. 27-36.
4. М я н н а м а В.Р. Кратные нули в определителе RC-цепи. – "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", № 350, 1973. с.39-50.
5. F i a l k o w, A. The matrix of a transformerless network. – Quart. appl. math., 1964, v. 22, No 1, pp. 57-70.

V. Männama, H. Sillamaa

Initial Equations for Realization of Real Zeros in Adjuncts of Three Terminal RC Network

Summary

A method for the composition of initial equation systems for the realization of three terminal RC networks (RC three-poles) with a given multiple zero s_e in adjuncts of the node admittance matrix has been presented. By the solution of these systems three terminal RC networks with a prescribed compactness property at the pole s_e of Z-,G-,H- or Y-parameters may be realized. Some examples are given.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 371 1974

УДК 518.5:621.372.061.2

Э.А. Рюстерн

НАХОЖДЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ПО АМПЛИТУДНЫМ ИЛИ ФАЗОВЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Введение. В настоящей статье приводится метод нахождения дробнорациональных передаточных функций по заданной логарифмической амплитудно-частотной характеристике (ЛАЧХ) или фазо-частотной характеристике (ФЧХ) на ЭВМ, базирующийся на разложении соответствующей импульсной функции по функциям Лагерра. Исходные разложения даны следующим образом:

I) для импульсной функции

$$h(t) = \sum_0^\infty a_k l_k(t); \tag{I}$$

2) для частотной характеристики

$$V(u) = 2\cos\frac{u}{2}\sum_0^\infty (-1)^k a_k e^{-j(k+\frac{1}{2})u}, \tag{2}$$

где $l_k(t)$ – функция Лагерра порядка k и

$$u = \arctan 2\omega. \tag{3}$$

Поскольку частотная характеристика дана в виде ЛАЧХ или ФЧХ, то вместе с разложениями (I) и (2) будем рассматривать и разложение

$$\ln V(u) = L(u) + j\varphi(u) = 2\cos\frac{u}{2}\sum_0^\infty (-1)^k b_k e^{-j(k+\frac{1}{2})u}, \tag{4}$$

где $L(u) = \ln|V(u)|$.

Если четную функцию $L(u)$ разложить по косинусам

$$L(u) = c_0 + c_1\cos u + c_2\cos 2u + \ldots \tag{5}$$

и нечетную функцию $\varphi(u)$ по синусам

$$\varphi(u) = d_1\sin u + d_2\sin 2u + \ldots, \tag{6}$$

то коэффициенты b_k легко вычисляются по коэффициентам c_i и d_i согласно алгоритму, описанному в [I]. Для перехода от разложения (4) к разложению (2) необходимо вычислить экспоненту от разложения (4) по алгоритму, описанному в [2]. Этот переход от разложения (4) к разложению (2) является точным (т.е. конечным).

Известен ряд методов [3, 4, 5] построения дробнорациональной передаточной функции на основе лагерровского разложения импульсной функции (I). Все вышеназванные методы имеют один и тот же недостаток - они позволяют построить лишь такие передаточные функции, у которых степень числителя равна степени знаменателя. При аппроксимации частотных характеристик по форме ЛАЧХ или ФЧХ можно предопределить дополнительные параметры передаточной функции, например, количество нулей в начале координат и бесконечности и т.д. Кроме того, часто **известна** некоторая часть искомой передаточной функции (фиксированные нули и полюсы). Поэтому в настоящей статье приводится способ построения дробнорациональной передаточной функции в общем виде

$$F(s) = F_0(s)\,\frac{c_p s^p + c_{p-1} s^{p-1} + \dots + c_q s^q}{d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_0}, \qquad (7)$$

где $F_0(s)$ - фиксированная часть передаточной функции.

Сочетая алгоритмы вычисления лагерровского разложения (2) по заданной ЛАЧХ или ФЧХ с алгоритмом построения дробнорациональных передаточных функций на основе разложения (2), получим метод нахождения передаточных функций по ЛАЧХ или ФЧХ, который приемлем в случае произвольных ЛАЧХ и ФЧХ.

<u>Вычисление разложения (4) по заданной частотной характеристике</u>. Известно, что в случае минимально-фазовых передач составляющие частотной характеристики ЛАЧХ и ФЧХ связаны с преобразованием Гильберта [6,7]. Следовательно, для полного определения частотной характеристики необходимо знать лишь одну из составляющих. Однако надо учесть, что по преобразова-

нию Гильберта ЛАЧХ определяет ФЧХ и наоборот только с точностью до постоянного слагаемого.

Пусть дана ЛАЧХ. Исходя из разложения (5) и согласно [1], получим

$$b_k = c_0 + \sum_{n=1}^{k} (-1)^n c_n , \qquad (8)$$

при $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Пусть дана ФЧХ. В этом случае применим вышеизложенный алгоритм с некоторыми изменениями: вместо $\varphi(\omega)$ разложим четную функцию $\varphi(\omega)/\omega$ и затем на коэффициентах b_k произведем обратное преобразование, которое соответствует дифференцированию во временной области. Так как ЛАЧХ и ФЧХ могут иметь компоненты, которые преобразование Гильберта не учитывает, то во многих приложениях необходимо применить более общий алгоритм.

Исходя из разложений (5), (6) и согласно [1], получим

$$b_k = c_0 + \sum_{n=1}^{k} (-1)^n c_n + (-1)^k (k+\tfrac{1}{2})(c_{k+1} + d_{k+1}), \qquad (9)$$

при $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Можно показать, что алгоритм аппроксимации частотных характеристик неминимально-фазовых передач работает и в случае аппроксимации минимально-фазовых частотных характеристик. В том случае $c_{k+1} + d_{k+1} = 0$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$, и тем самым формула (9) сводится к формуле (8).

Из формул (5) и (6) видно, что вычисление коэффициентов сведено к гармоническому анализу. Следует отметить, что обычно ЛАЧХ и ФЧХ даны в виде таблицы, и для определения передаточной функции порядка n следует вычислить $2n+1$ коэффициентов разложения (2). Если количество точек невелико и порядок искомой передаточной функции невысок, то могут быть использованы обычные методы (например, схема Рунге). При большом количестве точек (т.е. при аппроксимации сложных частотных характеристик) предпочтение следует отдать методам FFT.

Построение дробнорациональной передаточной функции на основе разложения (I). Выделение фиксированной части передаточной функции $F_o(s)$ из разложения (I) сводится к делению разложения (I) на разложение $F_o(s)$. Результат этого действия $\grave{A} = \{\grave{a}_o, \grave{a}_1, \grave{a}_2, \ldots\}$ будем аппроксимировать с передаточной функцией

$$F_1(s) = \frac{c_p s^p + c_{p-1} s^{p-1} + \ldots + c_q s^q}{d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \ldots + d_o}. \tag{IO}$$

Введем замену $s = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+z}{1-z}$, получим

$$F_1(z) = \frac{(1+z)^q (1-z)^{n-p} C_{p-q}(z)}{D_n(z)}, \tag{II}$$

где $C_{p-q}(z)$ и $D_n(z)$ - многочлены порядка $p-q$ и n соответственно.

Справедливо соотношение

$$F_1(z) = (1-z) \sum_0^{\infty} \grave{a}_k z^k. \tag{I2}$$

Предположим, что известны первые $N+1$ коэффициент разложения $\grave{A}$. Коэффициенты многочлена $D_n(z)$ определяем по алгоритму, описанному [4].

Далее, из соотношений (II) и (I2) получим

$$C_{p-q}(z) = \frac{D_n(z) \cdot \sum_0^N \grave{a}_k z^k}{(1+z)^q (1-z)^{n-p-1}}, \tag{I3}$$

откуда коэффициенты многочлена $C_{p-q}(z)$ вычисляются путем приравнивания коэффициентов одноименных степеней правой и левой частей уравнения (I3). Тем самым передаточная функция (IO) найдена.

Экспериментальные результаты. Алгоритм реализован на ЭВМ "Минск-22" в виде программы, имеющей модульную структуру и динамическое распределение памяти. Программа оперирует частотными характеристиками, представленными в виде таблиц, содержащими не более 256 точек. Входными характеристиками программы являются I) ЛАЧХ, 2) ФЧХ, 3) ЛАЧХ и ФЧХ одновременно, 4) функция группового запаздывания. При нахождении передаточных функций по заданной функции группового запаздывания, применяется алгоритм, описанный в [8]. Выходными характеристиками программы являются:

I. Дробнорациональная передаточная функция (коэффициенты, нули и полюсы) или дробнорациональная передаточная функция с запаздывающим компонентом.

2. Частотная характеристика с функцией группового запаздывания.

3. Переходная характеристика.

Вся выходная информация получается в виде таблиц. При идентификации времени чистого запаздывания применяется алгоритм, описанный в [9]. Переходная характеристика и функция группового запаздывания вычисляются по алгоритмам, описанным в [IO] и [II] соответственно.

Некоторые результаты испытания программы представлены в следующих примерах.

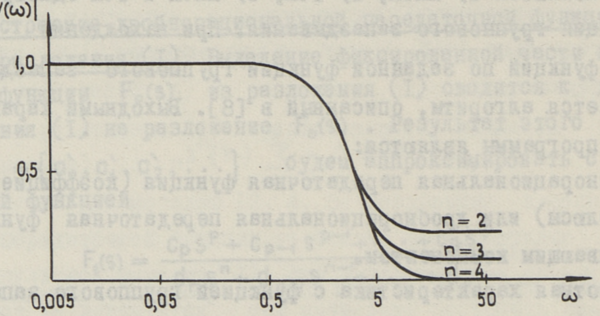
<u>Пример I</u>. Найдем дробнорациональные передаточные функции для идеального всепропускающего фильтра

$$V(\omega) = e^{-j\omega} .$$

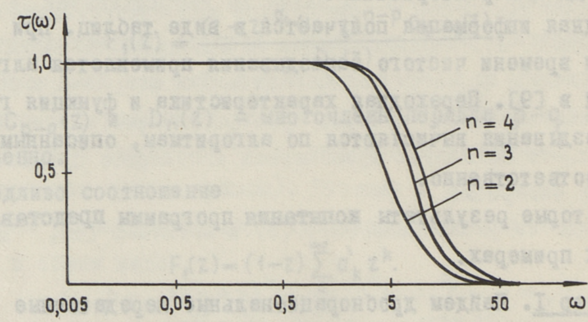
Нули и полюсы полученных передаточных функций представлены в таблице I. Соответствующие амплитудно-частотные характеристи-

Таблица I

Порядок	Нули	Полюсы
2	$4.071 \pm j3.210$	$-2.075 \pm j1.341$
3	9.987	-2.886
	$3.211 \pm j5.804$	$-2.458 \pm j2.551$
4	$2.760 \pm j7.509$	$-3.003 \pm j1.137$
	$13.45 \pm j16.75$	$-2.359 \pm j3.576$



Фиг. 1. Амплитудно-частотные характеристики.



Фиг. 2. Функции группового запаздывания.

ки и функции группового запаздывания приведены на фиг. I и 2 соответственно. Ограничимся передаточной функцией четвертого порядка, поскольку дальнейшее повышение порядка не улучшает частотных характеристик, ввиду появления диполей в передаточных функциях.

Пример 2. Найдем передаточную функцию для полосового фильтра, имеющего следующие параметры:

I) нижняя частота среза 0,794 rad/s;

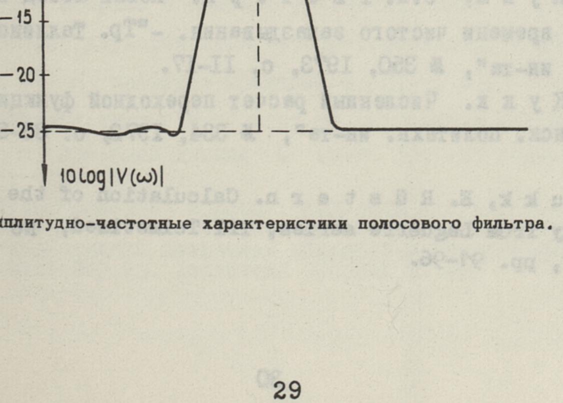
2) верхняя частота среза I,259 rad/s;

3) наклон в переходной области IOO dlg/dec;

Таблица 2

Нули	Полюсы
$-0.1329 \pm j0.2164$	-0.0127
-0.01644	-0.6908
-3.156	$-0.07706 \pm j0.7876$
$-0.03858 \pm j0.4390$	$-0.2326 \pm j0.9274$
$-0.2396 \pm j2.230$	$-0.1223 \pm j1.247$
$-1.451 \pm j2.392$	$-0.5604 \pm j1.302$

4) минимальное ослабление в полосе задерживания 25 dlg. Нули и полюсы передаточной функции десятого порядка представлены в таблице 2. Амплитудно-частотная характеристика приведена на фиг. 3.



Фиг. 3. Амплитудно-частотные характеристики полосового фильтра.

Л и т е р а т у р а

I. V. K u k k, E. R ü s t e r n. A generalized algorithm for the approximation of frequency response using Laguerre series. 1974, IEEE Int. Symp. on Circuits, San Francisco, April 1974.

2. В. К у к к. Машинный метод обработки трансцендентных передаточных функций. - Изв. вузов СССР, Радиоэлектроника, 1974, № 6.

3. K. S t e i g l i t z. Rational transform approximation via the Laguerre spectrum. J. Franklin Inst., Vol. 280, 1965, pp. 387-394.

4. В. К у к к. Рациональная аппроксимация передаточной функции. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", сер. А, № 288, 1970, с. 71-78.

5. G. S a l o m o n s s o n. Linear network synthesis with Laguerre polynomials. Ericsson Technics, Vol. 27, 1971, pp. 90-94.

6. D.F. T u t t l e. Network synthesis, Vol. 1, John Wiley, New York, 1958.

7. L.A. S a d e h, C.A. D e s o e r. Linear system theory: the state space approach, McGraw-Hill, New York, 1963.

8. В.А. К у к к, Э.А. Р ю с т е р н. Нахождение передаточной функции по заданной функции группового запаздывания. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", № 350, 1973, с. 19-26.

9. В.А. К у к к. Э.А. Р ю с т е р н. Новый метод идентификации времени чистого запаздывания. -"Тр. Таллинск. политехн. ин-та", № 350, 1973, с. II-I7.

10. В.А. К у к к. Численный расчет переходной функции "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", № 334, 1972, с. 83-89.

II. V.K u k k, E. R ü s t e r n. Calculation of the group delay from Laguerre series, TPI Toimetised, No 334, 1972, pp. 91-96.

E. Rüstern

Determination of Transfer Functions from Amplitude or Phase Responses

Summary

This paper presents a method for the computation of rational transfer functions from the given logarithmic amplitude or phase responses. The method is based on the application of Laguerre series of impulse response which may be found from the expansion of the logarithmic amplitude or phase response in Fourier series.

The results of computer experiments are presented.

Л и т е р а т у р а

I. V. K u k k, E. R ü s t e r n. A generalized algorithm for the approximation of frequency response using Laguerre [illegible] ...uits, San Francisco, [illegible]

2. В. К у к к. Машинный метод обработки трансцендентных передаточных функций. – Изв. вузов СССР, Радиоэлектроника, 1974, № 6.

3. K. S t e i g l i t z. Rational transform approximation via the Laguerre spectrum. J. Franklin Inst., Vol. 280, 1965, pp. 387–394.

4. В. К у к к. Рациональная аппроксимация передаточной функции. – "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", сер. А, № 288, 1970, с. 71–78.

5. G. [illegible] with Laguerre polynomials. Ericsson Technics, Vol. 27, 1971, pp. 90–94.

6. D.F. T u t t l e. Network synthesis, Vol. 1, John Wiley, New York, 1958.

7. L.A. Z a d e h, C.A. D e s o e r. Linear system theory: the state space approach, McGraw-Hill, New York, 1963.

8. В.А. К у к к, Э.А. Р ю с т е р н. Нахождение передаточной функции по заданной функции группового запаздывания. – "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", № 350, 1973, с. 19–26.

9. В.А. К у к к, Э.А. Р ю с т е р н. Новый метод идентификации времени чистого запаздывания. – "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", № 350, 1973, с. 11–17.

IO. В.А. К у к к. Численный расчет переходной функции "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", № 334, 1972, с. 83–89.

II. V. K u k k, E. R ü s t e r n. Calculation of the group delay from Laguerre series, TPI Toimetised, No 334, 1972, pp. 91–96.

IE

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
№ 371 1974

УДК 621.317.727.1

Р.Р. Иыерс, Х.К. Росс

РАСЧЕТ ТРАНСФОРМАТОРА СО ЖГУТОВОЙ ОБМОТКОЙ I

Уравнения жгутовой обмотки. Обмотки специальных трансформаторов, таких как индуктивные делители напряжения (ИДН) и трансформаторы измерительных мостов переменного тока, для получения тесной индуктивной связи выполняются соединением из проводов одного или нескольких жгутов, намотанных на общий тороидальный сердечник. Конструкция жгута, скрученного из отдельных проводов, обусловливает тесную связь между проводами жгута и поэтому определяет высокую точность передач напряжений и токов трансформатора.

Ниже выведены уравнения узловых напряжений жгутовой обмотки (несоединённого жгута), полученные при рассмотрении её в виде многопроводной линии. Далее, на основе полученных уравнений жгута приведены примеры расчета передач трансформаторов, обмотки которых получаются путем определённого соединения проводов жгута. Ограничимся рассмотрением установившегося синусоидального режима как наиболее типичного для измерительных трансформаторов.

В [1] * впервые с помощью уравнений линии рассмотрен широкополосный двухпроводный автотрансформатор, а общий анализ линии из n проводов приведен в [2, 3, 4].

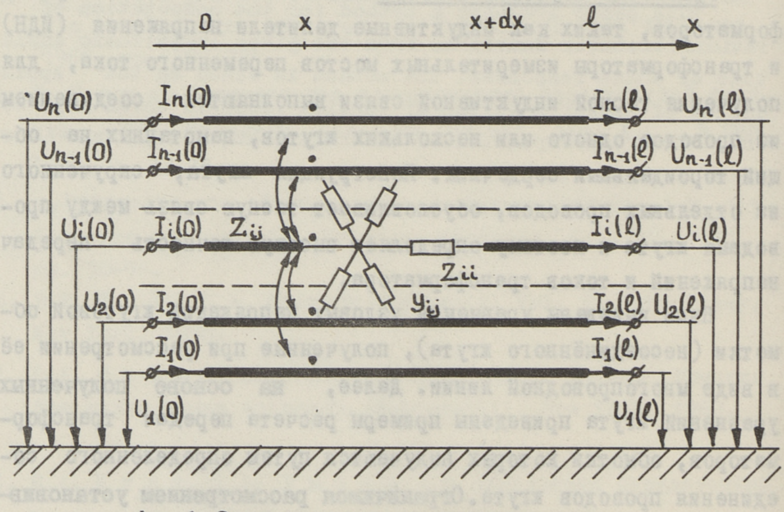
Рассмотрим жгутовую обмотку на сердечнике как связанную линию из n проводов длиной l (фиг. 1), где каждый провод

* Литература приведена в конце следующей статьи: Р.Р. Иыерс, Х.К. Росс. Расчет трансформатора со жгутовой обмоткой II. Расчет индуктивных делителей напряжения, соединённых по схеме Кельвина-Варлея. Настоящий сборник с. 41.

i $(i = 1,\ldots,n)$ характеризуется равномерно распределёнными параметрами на единицу длины жгута:

$Z_{ii} = r_{ii} + j\omega L_{ii}$, $Z_{ij} = j\omega M_{ij}$ – собственные и взаимные импедансы проводов жгута;

$Y_{ij} = g_{ij} + j\omega C_{ij}$ – взаимные проводимости проводов внутри жгута. Проводимостей от проводов на землю и между проводами разных смежных витков жгута ввиду их малости не учитываем.



Фиг. 1. Схема замещения n-проводного жгута.

Предполагаем, что линия по оси x однородная, тогда уравнением системы проводов является

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} U(x) \\ I(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Z_1 \\ y & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U(x) \\ I(x) \end{bmatrix}, \tag{I-1}$$

где $U(x), I(x)$ – n-мерные векторы напряжений и токов;

Z_1, y – $n\times n$ симметрические матрицы с недиагональными элементами $Z_{1ij} = -Z_{ij}$, $y_{ij} = -Y_{ij}$ при $i,j = 1,\ldots,n$; $i \neq j$. Диагональные элементы определяются как

$$Z_{1ii} = -Z_{ii}\,,$$
$$y_{ii} = -\sum_{j=1,\, i\neq j}^{n} y_{ij}. \tag{I-2}$$

Условие (I-2) выражает важное свойство нулевых сумм строк и столбцов матрицы Y ввиду принятого выбора базиса напряжений.

Обозначим переходную матрицу системы (I-I) при $x = l$

$$\exp \begin{bmatrix} 0 & Z_1 \\ Y & 0 \end{bmatrix} l = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

компоненты которой можно выражать через бесконечные ряды по произведениям $Z_1 Y$

$$\begin{aligned} A_{11} &= I + \frac{1}{2!} Z_1 Y l^2 + \frac{1}{4!} Z_1 Y Z_1 Y l^4 + \ldots, \\ A_{12} &= (I + \frac{1}{3!} Z_1 Y l^2 + \frac{1}{5!} Z_1 Y Z_1 Y l^4 + \ldots) Z_1 l, \\ A_{21} &= Y l (I + \frac{1}{3!} Z_1 Y l^2 + \frac{1}{5!} Z_1 Y Z_1 Y l^4 + \cdots), \\ A_{22} &= I + \frac{1}{2!} Y Z_1 l^2 + \frac{1}{4!} Y Z_1 Y Z_1 l^4 + \ldots, \end{aligned} \tag{I-3}$$

где I - единичная матрица.

Решение уравнения (I-I) в точке $x = l$, как известно, выражается

$$\begin{bmatrix} U(l) \\ I(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U(0) \\ I(0) \end{bmatrix}. \tag{I-4}$$

Выражая из (I-4) I и сохраняя выбранное на фиг. I направление токов, получим уравнения узловых напряжений для жгута, рассмотренного как $2n$ -полюсника

$$\begin{bmatrix} I(0) \\ -I(l) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} -A_{12}^{-1} A_{11} & A_{12}^{-1} \\ \hline -A_{21} + A_{22} A_{12}^{-1} A_{11} & -A_{22} A_{12}^{-1} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} U(0) \\ U(l) \end{bmatrix}. \tag{I-5}$$

В уравнение (I-5) посредством (I-3) входят параметры жгутовой обмотки: элементы матриц Z_1 и Y и скаляр l. Матрица проводимостей Y характеризует только жгут, а элементы матрицы Z_1 отражают и свойства жгута, и свойства сердечника. Поставим задачу разделения Z_1 на части, характеризующие отдельно свойства жгута и свойства сердечника. Для этого вводим (дефинируем) матрицы Z_L и Z_M и разъясняем физическую сущность их элементов.

Сперва вводим $n \times n$ матрицу погонных импедансов взаимных индуктивностей рассеяния проводов жгута $Z_L = [j \omega L'_{ik}]$, элементы которого определяются индуктивностями частных двухпроводных линий из проводов i и k при $i, k = 1, \ldots, n$. Элементы матрицы Z_L можно легко выражать через элементы схемы замещения как $j\omega L'_{ik} = j\omega(L_{ii} + L_{kk} - 2M_{ik})$, $L'_{ii} = 0$ и измерять на низких частотах.

Усреднением по всем недиагональным элементам L'_{ik} можно определить среднюю величину погонной индуктивности рассеяния для одного провода

$$L_0 = \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{i,k=1;\, i \neq k} L'_{ik},$$

которую используют в [5, 6] для анализа однородной модели жгута.

Предполагаем, что собственные индуктивности всех проводов жгута равны $(L_{ii} = L_{kk} = L'')$. Этому способствует одинаковая длина проводов, скрутка жгута и сердечник с большой магнитной проницаемостью.

Далее вводим $n \times n$ матрицу $Z_M = [j\omega M_c]$, все элементы которой равны

$$j\omega M_c = j\omega(L'' - L_0).$$

Можно показать, что определённая таким образом величина M_c численно равна среднему из всех взаимных импедансов жгутовой обмотки

$$M_c = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{n} M_{ik},$$

следовательно, матрица Z_M характеризует среднюю индуктивную связь отдельных проводов, обусловленную в первую очередь сердечником трансформатора. Теперь, обозначив через $\mathrm{diag}[r_{ii}]$ диагональную матрицу погонных активных сопротивлений проводов и через $[j\omega L_0]$ матрицу, все члены которой равны $j\omega L_0$, можно матрицу Z_1 представить в виде двух слагаемых

$$Z_1 = (-\mathrm{diag}[r_{ii}] - [j\omega L_0] + \tfrac{1}{2} Z_L) - Z_M = Z - Z_M.$$

Вообще существует множество способов разделения матрицы жгутовой обмотки Z_1 на две матрицы, у одного из которых (Z_M) все члены равны, но приведённое разделение отличается тем, что матрица Z_M описывает полностью и только влияние сердечника на работу трансформатора, и матрица Z характеризует только жгут и не зависит от расположения жгута на сердечнике.

Далее целесообразно в уравнениях (I-4) отдельно выделить составляющие, зависящие от Z и $Z_м$. Учитывая свойство (I-2) матрицы $У$, получим

$$Z_м У = У Z_м = 0.$$

Обозначив

$$\exp\begin{bmatrix} 0 & Z \\ У & 0 \end{bmatrix} l = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

получим из уравнений (I-3) соотношения

$$B_{11} = A_{11}, \quad B_{12} = A_{12} + Z_м,$$
$$B_{21} = A_{21}, \quad B_{22} = A_{22}$$

и уравнение (I-4) можем заменить эквивалентным уравнением

$$\begin{bmatrix} U(l) \\ I(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U(0) \\ I(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (I\text{-}6)$$

где

$$E = j\omega M_c l \sum_{i=1}^{n} I_i(0) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (I\text{-}6а)$$

Уравнение (I-6) указывает, что жгутовую обмотку можно рассматривать как жгут без сердечника, где каждый провод содержит зависимый от полного тока жгута источник напряжения ε (эдс., обусловленную общим магнитным потоком), а параметры жгута Z и $У$ не зависят от сердечника.

Зависимый источник напряжения ε можно выразить и через импеданс сердечника для одного витка Z_F, и через количество витков жгута w:

$$\varepsilon = w^2 Z_F \sum_{i=1}^{n} I_i(0). \qquad (I\text{-}6б)$$

Уравнения узловых напряжений, вытекающие из (I-6), получим в виде

$$\begin{bmatrix} I(0) \\ -I(l) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} -B_{12}^{-1} B_{11} & B_{12}^{-1} \\ \hline -B_{21} + B_{22} B_{12}^{-1} B_{11} & -B_{22} B_{12}^{-1} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} U(0) \\ U(l) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{12}^{-1} E \\ -B_{22} B_{12}^{-1} E \end{bmatrix}. \qquad (I\text{-}7)$$

Источник напряжения ε можем исключить путем суммирования n первых уравнений в системе уравнений (I-7) и, выразив оттуда ε, снова поставить его в уравнение (I-7).

В частном случае поперечно однородной модели жгута, где при $i, j = 1, \ldots n$

$$Z_{ii} = z = r + j\omega L, \; Z_{ij} = 0, \; Y_{ij} = y = g + j\omega C$$

матрицы Z и Y можно выражать как

$$Z = -zI, \quad Y = -yY_0,$$

где I – единичная матрица и

$$Y_0 = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{bmatrix}.$$

Для Y_0 выполняется соотношение

$$Y_0 Y_0 = nY_0.$$

Используя это, можем вычислить компоненты переходной матрицы по (I-3)

$$B_{11} = B_{22} = I + Y_0 b,$$
$$B_{12} = -zl\,(I + Y_0 a),$$
$$B_{21} = -yl\,(1 + na)\,Y_0,$$

которые содержат матрицы I и Y_0, а также скаляры

$$a = \frac{1}{n}\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma l}{\gamma l} - 1\right); \; b = \frac{2}{n}\operatorname{sh}^2\frac{\gamma l}{2}; \; \gamma = \sqrt{nzy}.$$

Уравнения (I-7) для однородной модели принимают вид

$$\begin{bmatrix} I\,(0) \\ -I\,(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_2 & Y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U\,(0) \\ U\,(l) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -J \\ J \end{bmatrix}, \qquad \text{(I-8)}$$

где элементы матриц Y_1 и Y_2 получаются в виде

$$Y_{1ij} = \begin{cases} [zl\,(1+na)]^{-1}\,[1 + a + (n-1)b] & \text{при } i = j \\ [zl\,(1+na)]^{-1}\,[a-b] & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

и

$$Y_{2ij} = \begin{cases} -[zl(1+na)]^{-1}\,[1+a] & \text{при } i = j \\ -[zl(1+na)]^{-1}\,a & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

$$J = \frac{\varepsilon}{zl}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Анализ конкретных трансформаторов на основе уравнений жгута (I-5),(I-7),(I-8) приведен в следующей статье.

R. Jõers, H. Ross

Analysis of the Multi-wire Transmission Line Transformer I

Equations of Distributed Parameter Transformer

Summary

A distributed model of an electric transformer consisting of n coupled RLC transmission lines has been analysed. Equations of the transformer as a 2n-pole have been presented.

Источник напряжения e можем исключить путем суммирования n первых уравнений в системе уравнений (1-7) и, выразив оттуда e, снова поставить его в уравнение (1-7).

Для [illegible] однородной модели (1-7), где при $i,j = 1,\dots,n$

$$Z_{ii} = z = r + j\omega L, \quad Z_{ij} = 0, \quad Y_{ij} = y = g + j\omega C$$

матрицы Z и Y можно выразить как

$$Z = -zI, \quad Y = -yY_0,$$

где I — единичная матрица и

$$Y_0 = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

Для Y_0 выполняется соотношение

$$Y_0^2 = nY_0.$$

Используя это, можем вычислить компоненты переходной матрицы по (1-[illegible])

$$B_{12} = -zl\,(I + Y_0 a),$$

$$B_{21} = -yl\,(1 + na)\,Y_0,$$

которые содержат матрицы I и Y_0, а также скаляры

$$a = \frac{1}{n}\left(\frac{\mathrm{sh}\,\gamma l}{\gamma l} - 1\right); \quad b = \frac{2}{n}\,\mathrm{sh}^2\frac{\gamma l}{2}; \quad \gamma = \sqrt{nzy}.$$

Уравнения (1-7) для однородной модели принимают вид

$$\begin{bmatrix} I(0) \\ -I(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_2 & Y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U(0) \\ U(l) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -J \\ J \end{bmatrix}, \qquad (1-8)$$

где элементы матриц Y_1 и Y_2 получаются в виде

$$Y_{1ij} = \begin{cases} [zl(1+na)]^{-1}\,[1+b+(n-1)b] & \text{при } i=j \\ [zl(1+na)]^{-1}\,b & \text{при } i\neq j \end{cases}$$

$$Y_{2ij} = \begin{cases} -[zl(1+na)]^{-1}\,[1+a] & \text{при } i=j \\ -[zl(1+na)]^{-1}\,a & \text{при } i\neq j \end{cases}$$

и

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 371 1974

УДК 621.317.727.1

Р.Р. Иыерс, Х.К. Росс

РАСЧЕТ ТРАНСФОРМАТОРА СО ЖГУТОВОЙ ОБМОТКОЙ II

Расчет индуктивных делителей напряжения, соединённых по схеме Кельвина-Варлея. В настоящей статье рассматривается анализ индуктивного делителя напряжения (ИДН) на основе уравнений несоединённого жгута, полученных в предыдущей статье.

Соединение ИДН по схеме Кельвина-Варлея получается при соединении последовательно всех n проводов жгута так, что

$$U_k(0) = U_{k+1}(l) = V_k \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{2-1}$$

а клеммы с напряжениями $U_n(0) = V_n$, $U_1(l) = V_0$ остаются несоединёнными.

Таким образом, ИДН можно рассматривать как $(n+1)$-полюсник с потенциалами и токами клеммов V_i и I_i $(i = 0, \ldots, n)$, полученный из жгутовой обмотки как $2n$-полюсника. Нумерация клеммов определена уравнением (2-1).

В случае поперечно однородной модели из уравнения (1-8) получим после соединения жгута уравнение ИДН в матричном виде

$$I = Y_4 V + J_1, \tag{2-2}$$

где Y_4 - неопределённая матрица узловых проводимостей ИДН и

$$J_1 = \frac{\varepsilon}{zl} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ток намагничивания можно определить путем суммирования первых n членов в (1-8), учитывая (2-1). В итоге получим

$$\sum_{i=1}^{n} I_i(0) = \frac{1}{zl} \left[U_n(0) - U_1(l) - n w^2 Z_F \sum_{i=1}^{n} I_i(0) \right],$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} I_i(0) = (V_n - V_0) / (zl + n w^2 Z_F).$$

Теперь, учитывая (I-6б), получим коэффициент при J_1 , равный

$$\frac{\varepsilon}{zl} = \frac{w^2 Z_F}{zl(zl+nw^2 Z_F)}(V_n - V_0) = y_3(V_n - V_0),$$

следовательно,

$$J_1 = \begin{bmatrix} -y_3 & 0 & \cdots & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y_3 & 0 & \cdots & 0 & -y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n \\ V_{n-1} \\ \cdots \\ V_1 \\ V_0 \end{bmatrix} = y_5 V.$$

Тогда уравнение (2-2) можем переписать в виде

$$I = y_4 V + y_5 V = y_6 V. \qquad (2\text{-}3)$$

Матрица y_6 приведена в таблице I.

Для нахождения передач ИДН от входной клеммы n к клемме m при общей клемме 0 необходимо исходить из истинной определённой матрицы y' , соответствующей короткому замыканию входа. Матрицу y' порядка $n-1$ получим из y_6 вычеркиванием строк и столбцов 0 и n (в таблице I охвачена пунктиром).

Определитель матрицы y' равен

$$\Delta' = \frac{1}{n}\left(\frac{\operatorname{sh} nx}{\operatorname{sh} x}\right)^2 [zl(1+na)]^{-(n-1)}, \qquad (2\text{-}4)$$

адъюнкты (алгебраические дополнения)

$$\Delta'_{ij} = \begin{cases} \frac{2}{n}[zl(1+na)]^{-(n-1)} \frac{\operatorname{sh} nx}{\operatorname{sh} x} \operatorname{ch}(i-j)x \frac{\operatorname{sh}(n-i)x \cdot \operatorname{sh} jx}{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x} & i \geq j \\ \frac{2}{n}|zl(1+na)|^{-(n-1)} \frac{\operatorname{sh} nx}{\operatorname{sh} x} \operatorname{ch}(i-j)x \frac{\operatorname{sh}(n-j)x \cdot \operatorname{sh} ix}{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x} & i \leq j. \end{cases} \qquad (2\text{-}5)$$

В уравнениях (2-4), (2-5) и далее принято обозначение $x = \gamma l/2$, а индексы соответствуют таблице I.

Коэффициент передачи напряжения определен как

$$K_{um} = \frac{\Delta_{nm,00}}{\Delta}; \quad m = 1, \ldots, n-1,$$

где $\Delta_{nm,00}$ - двойная адъюнкта неопределённой матрицы y_6 , которую можно разложить по столбцу n и выразить через адъюнкту матрицы y'

Таблица I

Неопределённая матрица узловых проводимостей ИДН

$$
Y_б = [zl(1+na)]^{-1}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
n & n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 0
\end{array}
\\
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c}
1+a+(n-1)b-Y_3zl(1+na) & -(1+b) & -b & -b & -b & \dots & -b & -a+Y_3zl(1+na) \\ \hline
-(1+b) & 2+2b(n-1) & -(1+2b) & -2b & -2b & \dots & -2b & -b \\ \hline
-b & -(1+2b) & 2+2b(n-1) & -(1+2b) & -2b & \dots & -2b & -b \\ \hline
-b & -2b & -(1+2b) & 2+2b(n-1) & -(1+2b) & \dots & -2b & -b \\ \hline
-b & -2b & -2b & -(1+2b) & 2+2b(n-1) & \dots & -2b & -b \\ \hline
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline
-b & -2b & -2b & -2b & -2b & \dots & 2+2b(n-1) & -(1+b) \\ \hline
-a+Y_3zl(1+na) & -b & -b & -b & -b & \dots & -(1+b) & 1+a+(n-1)b-Y_3zl(1+na)
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c}
n \\ n-1 \\ n-2 \\ n-3 \\ n-4 \\ \dots \\ 1 \\ 0
\end{array}
$$

$$\Delta_{nm,00} = \Delta'_{n-1,m} + b\sum_{k=1}^{n-1} \Delta'_{k,m},$$

откуда, используя (2-5), получим

$$K_{um} = \frac{\operatorname{sh} mx \cdot \operatorname{ch}(n-m)x}{\operatorname{sh} nx}. \qquad (2\text{-}6)$$

Выходной импеданс между клеммами 0 и m (при короткозамкнутом входе) получим совершенно аналогично

$$Z_{vm,0} = \frac{\Delta_{nn,mm,00}}{\Delta} = \frac{zl}{x} \cdot \frac{\operatorname{sh} mx \cdot \operatorname{sh}(n-m)x}{\operatorname{sh} nx}. \qquad (2\text{-}7)$$

Входная проводимость между клеммами 0 и n в режиме холостого хода на выходе определяется

$$y_s = \frac{\Delta_{00}}{\Delta}.$$

Здесь числитель можем разложить по строке n, используя выражение для K_{um}

$$\Delta_{00} = \Delta\left[1 + a + (n-1)b - y_3 zl(1+na) - b\sum_{i=1}^{n-1} K_{ui} - K_{un-1}\right]\cdot\left[zl(1+na)\right]^{-n},$$

откуда

$$y_s = \frac{1}{n(zl + nw^2 Z_p)} + \frac{x}{zln}\left[(n-1)\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} - n\frac{\operatorname{sh}(n-1)x}{\operatorname{sh} nx \cdot \operatorname{sh} x}\right]. \qquad (2\text{-}8)$$

Уравнения (2-6), (2-7), (2-8) по существу совпадают с результатами [6], которые были выведены из дискретной модели при помощи предельного перехода и **содержали** параметры дискретной модели.

При $n > 3$ получение поперечно-однородного жгута принципиально невозможно и в реальных жгутах наблюдаются сильные неоднородности межпроводной емкости и индуктивности, поэтому расчет коэффициента передачи напряжения с учетом параметров реальных жгутов и статистическая оценка рассеяния частотных погрешностей при разных комбинациях соединений проводов жгута в обмотке представляют большой интерес.

Анализ неоднородного жгута возможен лишь численно на ЭВМ. При этом более удобно написать программу для уравнения (I-5), чем для уравнения (I-7).

При расчете сделаем следующие упрощения:

I. В матрице Y учитываем только емкостную часть межпроводных проводимостей

$$Y_{ij} = -j\omega C_{ij}, \ (i \neq j).$$

2. Если в расчетах ограничимся рассмотрением только модуля коэффициента передачи напряжения, то в матрице Z_1 можем не учитывать активные сопротивления проводов, что сильно упрощает и ускоряет расчеты, так как имеем дело лишь с матрицами, члены которых действительные числа. Обоснованием такого упрощения можем считать то, что в случае однородной модели можно согласно [6] получить при разложении $|K_{um}|$ в ряд по ω выражение

$$|K_{nm}| \approx \varkappa\left[1 - \frac{(1-\varkappa)(1-2\varkappa)}{12} n^3 L_0 C_0 l^2 \omega^2 (1-K_1)\right], \qquad (2\text{-}9)$$

где

$$K_1 = \frac{4\varkappa^2 - 9\varkappa + 7}{120} \cdot \frac{n^3 r_1^2 C_0 l^2}{L_0},$$

$\varkappa = \frac{m}{n}$ - геометрический коэффициент передачи;

L_0, C_0, r_1 - средние погонные индуктивность рассеяния, емкость и активное сопротивление провода жгута.

Практически всегда $K_1 < 0{,}01$, поэтому для однородного ИДН влиянием r_1 на модуль K_{um} можно пренебрегать. Следовательно, при несильной неоднородности можно также ожидать малое влияние r_1.

Начальными данными для примера расчета необходимо взять измеренные параметры некоторого конкретного жгута. В данном случае использовался жгут IO x 0,62 ПЭВ-2 длиной 8,4 м. Его измеренные данные приведены в табл. 2. Из этих данных определялись элементы матрицы жгутовой обмотки

$$Z_1 l = [-j\omega(L'' - \tfrac{1}{2}L')l], \quad Yl = [-j\omega Cl].$$

Составленная программа вычисляла для конкретной частоты ω сначала неопределённую матрицу жгута как $2n$ -полюсника, затем неопределённую матрицу ИДН, а уже оттуда был найден модуль коэффициента передачи напряжения $|K_{um}|$.

Т а б л и ц а 2

Измеренные параметры жгутовой обмотки 10 х 0,62 мм ПЭВ-2 длиной l = 8,4 м на каркасе сердечника 60/100-40 при $\mu_{отн}$ = 1

1. Индуктивности всех частных двухпроводных линий из полного жгута: $L'_{ij} \cdot l$ (мкГ).

0	5,35	6,17	7,08	4,72	6,71	4,33	7,18	5,79	4,72
5,35	0	4,69	5,53	5,27	4,89	5,52	4,61	5,38	4,28
6,17	4,69	0	4,22	4,28	7,18	7,20	6,21	7,48	5,41
7,08	4,53	4,22	0	6,31	6,29	7,55	4,30	7,30	6,10
4,72	5,27	4,28	6,31	0	7,55	6,40	7,32	7,33	4,77
6,71	4,89	7,18	6,29	7,55	0	6,21	4,28	4,30	5,88
4,33	5,52	7,20	7,55	6,40	6,21	0	7,20	4,31	4,56
7,18	4,61	6,21	4,30	7,32	4,28	7,20	0	6,21	6,16
5,79	5,38	7,48	7,30	7,33	4,30	4,31	6,21	0	5,30
4,72	4,28	5,41	6,10	4,77	5,88	4,56	6,16	5,30	0

Средняя индуктивность рассеяния провода $L_0 \cdot l$ = 2,75 мкГ

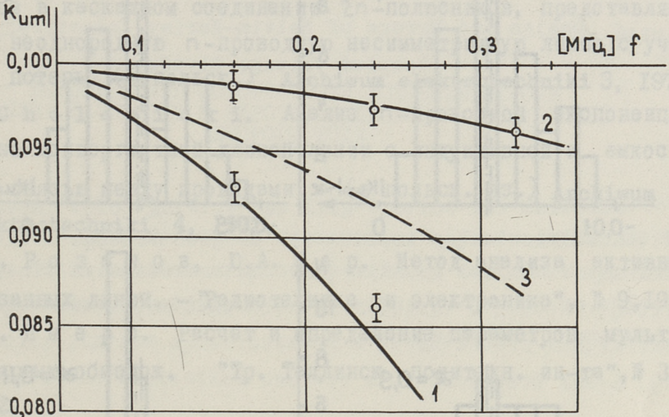
2. Емкость между проводами полного жгута $C_{ij} \cdot l$ (пф)

0	227	086	033	672	111	805	077	209	526
227	0	447	553	301	407	217	540	248	699
086	446	0	858	831	9,2	9,2	089	9,3	274
033	553	858	0	049	062	9,3	845	9,3	115
672	301	831	049	0	022	049	9,3	9,3	540
111	407	9,2	062	022	0	049	845	845	208
805	217	9,2	9,3	049	049	0	9,3	845	553
077	540	089	845	9,3	845	9,3	0	049	106
209	248	9,3	9,3	9,3	845	845	049	0	274
526	699	274	115	540	208	553	106	274	0

Средняя емкость между проводами $C_0 \cdot l$ = 305 пф

3. Индуктивность провода жгута $L'' \cdot l$ = 24,6 мкГ.

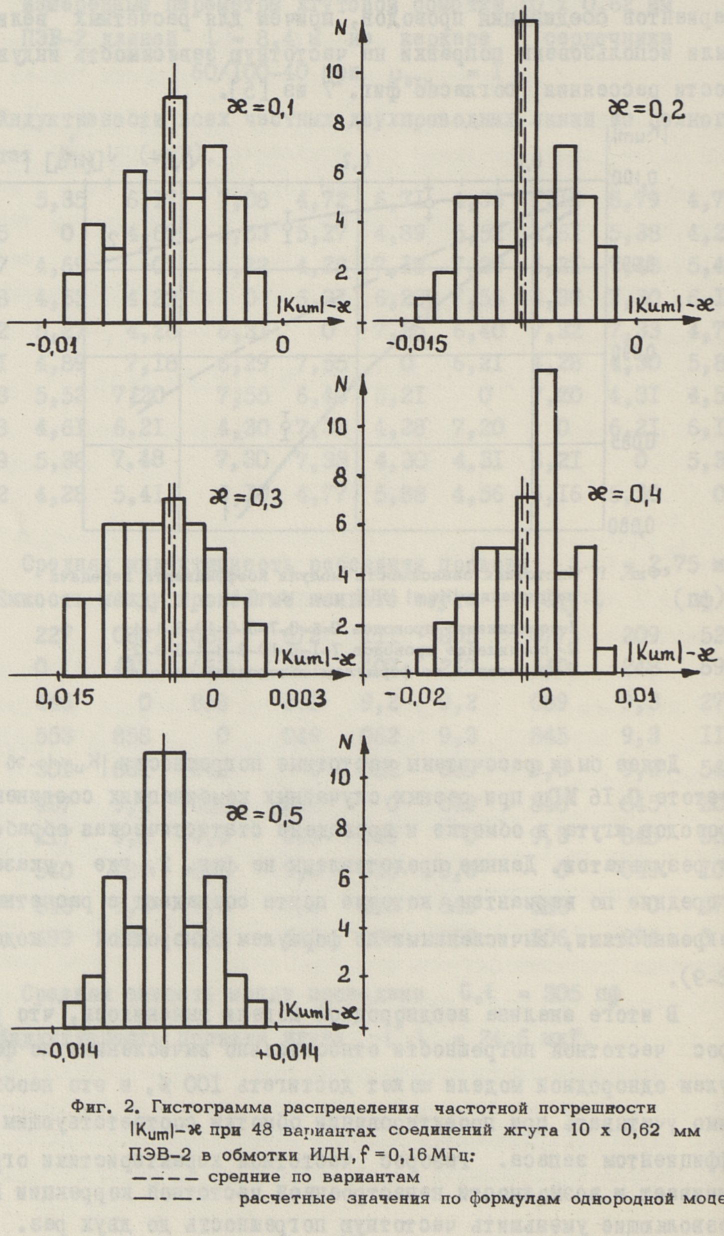
На фиг. I представлены расчетные и измеренные частотные характеристики $|K_{um}|$ для найденных наилучшего и наихудшего вариантов соединения проводов, причем для расчётных величин были использованы поправки на частотную зависимость индуктивности рассеяния, согласно фиг. 7 из [5].



Фиг. 1. Частотная зависимость модуля коэффициента передачи напряжения $|K_{um}|$ ИДН при $\varkappa = 0{,}1$:
1 – соединение проводов 2-3-6-7-5-9-10-8-1-4;
2 – соединение проводов 7-1-5-10-8-3-4-6-9-2;
3 – расчетный по формулам однородной модели.

Далее были рассчитаны частотные погрешности $|K_{um}| - \varkappa$ на частоте 0,16 МГц при разных случайных комбинациях соединений проводов жгута в обмотке и проведена статистическая обработка результатов. Данные представлены на фиг. 2, где указаны и средние по вариантам, которые почти совпадают с расчетными погрешностями, вычисленными по формулам однородной модели (2-9).

В итоге анализа неоднородной модели выяснилось, что разброс частотной погрешности относительно вычисленных по формулам однородной модели может достигать 100 %, и это необходимо учитывать при проектировании обмотки соответствующим коэффициентом запаса. Разброс частотной характеристики ограничивает и возможности ненастроенной частотной коррекции ИДН, позволяющие уменьшить частотную погрешность до двух раз.



Фиг. 2. Гистограмма распределения частотной погрешности $|K_{um}| - \varkappa$ при 48 вариантах соединений жгута 10 х 0,62 мм ПЭВ-2 в обмотки ИДН, $f = 0{,}16$ МГц:
– – – – средние по вариантам
—·—·—· расчетные значения по формулам однородной модели.

Литература

1. C.I. R u t h r o f f. Some broadband transformers. Proc. IRE, Vol. 47, August 1957.

2. Z. T r z a s k a. Определение мгновенных напряжений и токов в каскадном соединении 2n-полюсников, представляющем неоднородную n-проводную несимметричную линию с учетом потерь. (в польск.) Archiwum elektrotechniki 3, 1972.
3. T. C h o l e w i c k i. Анализ n-проводной экспоненциально-конвергентной длиной линии с индуктивной и емкостной связью между проводами. - (в польск. яз.) Archiwum elektrotechniki 4, 1972.
4. М.Я. Р о з а н о в, Ю.А. Ш е р. Метод анализа активных связанных линий. - "Радиотехника и электроника", № 9, 1969.
5. Р.Р. И ы е р с. Расчет и определение параметров мультифилярных обмоток. "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", № 334, 1972.
6. Х.В. С и л л а м а а, И.Ю. Э й с к о п. Индуктивный делитель напряжения как четырехполюсник с распределёнными параметрами. - Сб.: Устройства и элементы систем автоматизации научных экспериментов, Новосибирск, 1970.

R. Jôers, H. Ross

Analysis of the Multi-wire Transmission Line Transformer II

Design and Errors of Kelvin-Varley Inductively Coupled Voltage Divider

Summary

Formulas for voltage gain and driving point impedances of the Kelvin-Varley inductively coupled voltage divider have been obtained by using uniform transmission line. The results of numerical analysis of nonuniform transmission line transformer are discussed.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

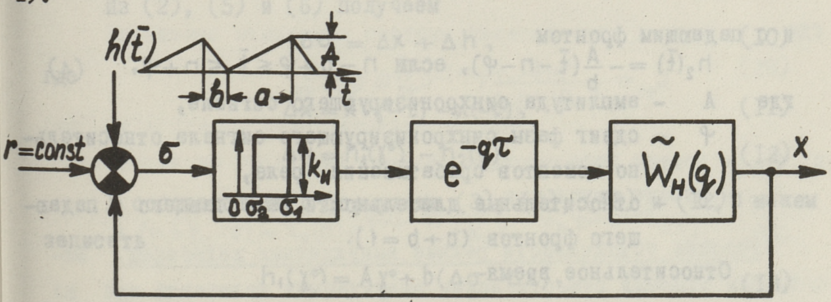
№ 371 1974

УДК 62-50

Э.Э. Велмре

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА В СИСТЕМЕ С ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ВТОРОГО РОДА

Автоматические системы с широтно-импульсной модуляцией второго рода (ШИМ-2) широко применяются в различных областях техники. Такие системы являются релейными системами, работающими в режиме вынужденных колебаний [1,2]. В данной работе исследуются условия существования и устойчивости вынужденных колебаний в автоматической системе с однополярной ШИМ-2 (фиг. 1).



Фиг. 1. Блок-схема автоматической системы с ШИМ-2.

Устойчивая непрерывная часть l-го порядка с передаточной функцией

$$\tilde{W}_н(q) = \frac{P_н(q)}{Q_н(q)} \tag{1}$$

имеет простые ненулевые полюсы.

Релейный элемент имеет несимметричную характеристику с петлей гистерезиса шириной

$$\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 , \tag{2}$$

где σ_I, σ_2 - пороги срабатывания и отпускания реле.

Предполагается, что реле вводит в систему относительное запаздывание

$$\tau = \frac{t_3}{T},$$

где $t_з$ - время запаздывания,

T - период вынужденных колебаний, т.е. период синхронизирующего сигнала.

В дальнейшем включаем запаздывание в передаточную функцию эквивалентной непрерывной части

$$\tilde{W}_э(q) = e^{-q\tau}\, \tilde{W}_н(q).$$

Периодическое внешнее воздействие (синхронизирующий сигнал) пусть имеет треугольную форму с нарастающим фронтом

$$h_1(\bar{t}) = \frac{A}{a}(\bar{t} - n - \varphi), \text{ если } n + \varphi \leq \bar{t} \leq n + a + \varphi \tag{3}$$

и с падающим фронтом

$$h_2(\bar{t}) = -\frac{A}{b}(\bar{t} - n - \varphi), \text{ если } n - b + \varphi \leq \bar{t} \leq n + \varphi, \tag{4}$$

где A - амплитуда синхронизирующего сигнала,

φ - сдвиг фазы синхронизирующего сигнала относительно моментов срабатывания реле,

a, b - относительные длительности нарастающего и падающего фронтов $(a + b = 1)$.

Относительное время

$$\bar{t} = \frac{t}{T} = n + \varepsilon ,$$

где $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

Моменты времени n = 0, I, 2, ... соответствуют моментам срабатывания реле.

<u>Условия существования режима вынужденных колебаний</u>. Для возможности существования вынужденных колебаний необходимо выполнение следующих условий:

I. Условия переключения реле

$$r - h_2(n) - x(n - \tau) = \sigma_1 , \tag{5}$$

$$\left.\frac{d\sigma}{d\bar t}\right|_{\bar t=n} > 0, \qquad (5a)$$

$$r - h_1(n+\gamma_n) - x(n+\gamma_n-\tau) = \sigma_2, \qquad (6)$$

$$\left.\frac{d\sigma}{d\bar t}\right|_{\bar t=n+\gamma_n} < 0. \qquad (6a)$$

2. Условия осуществления вынужденных колебаний с периодом T

$$0 < h_2(n) < A, \qquad (7)$$

$$0 < h_1(n+\gamma_n) < A. \qquad (8)$$

3. Условие установившегося режима вынужденных колебаний

$$\gamma_n = \mathrm{const} = \gamma^\circ. \qquad (9)$$

В силу условия (9) все интервалы повторения эквивалентны. Поэтому в дальнейшем рассмотрим движение системы на первом интервале повторения $0 \leqslant \bar t \leqslant 1$, принимая $n = 0$.

Из (2), (5) и (6) получаем

$$\Delta\sigma = \Delta x + \Delta h, \qquad (10)$$

где

$$\Delta x = x(\gamma^\circ - \tau) - x(-\tau), \qquad (11)$$

$$\Delta h = h_1(\gamma^\circ) - h_2(0). \qquad (12)$$

В соответствии с формулами (3), (4), (10) и (12) можем записать

$$h_1(\gamma^\circ) = A\gamma^\circ + b(\Delta\sigma - \Delta x), \qquad (13)$$

$$h_2(0) = A\gamma^\circ - a(\Delta\sigma - \Delta x). \qquad (14)$$

Подставляя (13) в (8) и (14) в (7), получаем

$$A > \frac{a(\Delta\sigma - \Delta x)}{\gamma^\circ}; \qquad (15)$$

$$A > -\frac{b(\Delta\sigma - \Delta x)}{\gamma^\circ}; \qquad (16)$$

$$A > -\frac{a(\Delta\sigma - \Delta x)}{1-\gamma^\circ}; \qquad (17)$$

$$A > \frac{b(\Delta\sigma - \Delta x)}{1-\gamma^\circ}; \qquad (18)$$

Из (5а) и (6а) вытекает

$$A > b\dot{x}(-\tau); \tag{19}$$

$$A > -a\dot{x}(\gamma^{\circ}-\tau). \tag{20}$$

Неравенства (15) - (20) являются условиями существования вынужденных колебаний в системе с однополярной ШИМ-2.

Формулы для Δx, $\dot{x}(-\tau)$ и $\dot{x}(\gamma^{\circ}-\tau)$ найдем, используя результаты работы [3]:

$$\Delta x = k_{и}\sum_{\nu=1}^{l} c_{\nu 0}\left[\frac{e^{q_\nu\gamma^{\circ}}+e^{q_\nu(1-\gamma^{\circ})}-2e^{q_\nu}}{1-e^{q_\nu}}e^{-q_\nu\tau}-1\right], \tag{21}$$

$$\dot{x}(-\tau) = k_{и}\sum_{\nu=1}^{l} c'_{\nu 0}\frac{e^{q_\nu}-e^{q_\nu(1-\gamma^{\circ})}}{1-e^{q_\nu}}e^{-q_\nu\tau}, \tag{22}$$

$$\dot{x}(\gamma^{\circ}-\tau) = k_{и}\sum_{\nu=1}^{l} c'_{\nu 0}\frac{e^{q_\nu\gamma^{\circ}}-e^{q_\nu}}{1-e^{q_\nu}}e^{-q_\nu\tau}, \tag{23}$$

где

$$c_{\nu 0} = \frac{P_{н}(q_\nu)}{q_\nu Q'_{н}(q_\nu)}, \quad c'_{\nu 0} = q_\nu c_{\nu 0}$$

и q_ν - полюсы передаточной функции (1);

$k_{и}$ - высота импульсов.

<u>Условия устойчивости режима вынужденных колебаний</u>. Выполнение условий существования вынужденных колебаний ещё не достаточно для реализации этого периодического режима. Нужно, чтобы этот режим был устойчивым. Для проверки устойчивости исследуется поведение системы при малых исчезающих возмущениях, вызывающих отклонение от установившегося периодического режима.

Как известно [4], разомкнутую систему с ШИМ можно представить в виде системы нелинейных разностных уравнений

$$x_\nu[n+1] = x_\nu[n]e^{q_\nu}+k_{и}c_{\nu 0}e^{q_\nu}(1-e^{-q_\nu\gamma_n}). \tag{24}$$

Выходная величина системы будет

$$x[n] = \sum_{\nu=1}^{l} x_\nu[n]. \qquad (25)$$

В случае малых отклонений от установившегося режима

$$x_\nu[n] = x^\circ_\nu[n] + \delta x_\nu[n], \qquad (26)$$

а также

$$\gamma_n = \gamma^\circ + \delta\gamma_n. \qquad (27)$$

Подставляя (26) и (27) в (24) и используя разложение

$$e^{-q_\nu \delta\gamma_n} \approx 1 - q_\nu \delta\gamma_n,$$

получаем для составляющей возмущённого движения

$$\delta x_\nu[n+1] = \delta x_\nu[n]\, e^{q_\nu} + k_и c'_{\nu 0}\, e^{q_\nu(1-\gamma^\circ)}\, \delta\gamma_n. \qquad (28)$$

Уравнение замыкания системы записывается в виде

$$\delta\gamma_n = -\varkappa\, \delta x(n + \gamma_n - \tau), \qquad (29)$$

где $\varkappa$ = I/A – чувствительность ШИМ.

Исходя из уравнений

$$x_\nu(n+\gamma_n-\tau) = x_\nu[n]\, e^{q_\nu(\gamma_n-\tau)} + k_и c_{\nu 0}\left[e^{q_\nu(\gamma_n-\tau)} - 1\right], \qquad (30)$$

можем показать, что

$$\delta\gamma_n = -\varkappa \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{l} \delta x_\nu[n] \left.\dfrac{\partial x_\nu(n+\gamma_n-\tau)}{\partial x_\nu[n]}\right|_{\gamma^\circ}}{1 + \varkappa \sum\limits_{\nu=1}^{l} \left.\dfrac{\partial x_\nu(n+\gamma_n-\tau)}{\partial \gamma_n}\right|_{\gamma^\circ}}. \qquad (31)$$

Из (30) находим, что

$$\left.\frac{\partial x_\nu(n+\gamma_n-\tau)}{\partial x_\nu[n]}\right|_{\gamma^\circ} = e^{q_\nu(\gamma^\circ-\tau)}, \qquad (32)$$

и

$$\frac{\partial x_\nu(n+\gamma_n-\tau)}{\partial \gamma_n}\Big|_{\gamma^\circ} = (q_\nu x_\nu^\circ[n] + k_и c'_{\nu 0})\, e^{q_\nu(\gamma^\circ-\tau)}. \tag{33}$$

Поскольку

$$x_\nu^\circ[n] = k_и c_{\nu 0}\,\frac{e^{q_\nu} - e^{q_\nu(1-\gamma^\circ)}}{1-e^{q_\nu}},$$

то из (33) вытекает, что

$$\frac{\partial x_\nu(n+\gamma_n-\tau)}{\partial \gamma_n}\Big|_{\gamma^\circ} = \dot{x}(\gamma^\circ-\tau). \tag{34}$$

Подставляя (32) и (34) в (31), получаем

$$\delta\gamma_n = -\varkappa_э \sum_{\nu=1}^{l} \delta x_\nu[n]\, e^{q_\nu(\gamma^\circ-\tau)}, \tag{35}$$

где

$$\varkappa_э = \frac{\varkappa}{1+\varkappa\dot{x}(\gamma^\circ-\tau)}. \tag{36}$$

После подстановки (35) в (28), получаем

$$\delta x_\nu[n+1] = \delta x_\nu[n]\, e^{q_\nu} - k_и \varkappa_э c'_{\nu 0}\, e^{q_\nu(1-\gamma^\circ)} \sum_{\nu=1}^{l} \delta x_\nu[n]\, e^{q_\nu(\gamma^\circ-\tau)}. \tag{37}$$

Подвергнем систему уравнений (37) дискретному преобразованию Лапласа.
После несложных преобразований, получаем

$$Y^*(q) = -Y^*(q)\, k_и \varkappa_э \sum_{\nu=1}^{l} c'_{\nu 0}\,\frac{e^{q_\nu(1-\tau)}}{e^{q} - e^{q_\nu}}, \tag{38}$$

где

$$Y^*(q) = \sum_{\nu=1}^{l} e^{q_\nu(\gamma^\circ-\tau)} X_\nu^*(q),$$

$$X_\nu^*(q) = D\left\{\delta x_\nu[n]\right\}.$$

Выражение (38) является уравнением замкнутой линейной импульсной системы с передаточной функцией

$$W^*(q) = k_и \varkappa_э \sum_{\nu=1}^{l} c'_{\nu 0} \frac{e^{q_\nu(1-\tau)}}{e^q - e^{q_\nu}}. \qquad (39)$$

Об устойчивости в малом положения равновесия системы (38) можно судить по коэффициентам характеристического многочлена этой системы [3].

<u>Определение области устойчивых вынужденных колебаний в случае $l = 2$</u>. В качестве примера рассмотрим систему с ШИМ-2 заднего фронта (a=I, b = 0). Пусть передаточная функция непрерывной части такой системы имеет вид

$$\tilde{W}_н(q) = \frac{\beta_1 \beta_2}{q^2 + \beta_2 q + \beta_1 \beta_2}, \qquad (40)$$

где β_1, β_2 - относительные постоянные времени.
Полюсы передаточной функции (40):

$$q_{1,2} = -\frac{\beta_2}{2} \pm j\sqrt{\beta_1 \beta_2 - \left(\frac{\beta_2}{2}\right)^2}.$$

В рассматриваемом случае a = I, b = 0 условия существования вынужденного режима упрощаются. Из (15) - (20) получим

$$A > \frac{\Delta\sigma - \Delta x}{\gamma^\circ}; \quad (41) \qquad A > -\frac{\Delta\sigma - \Delta x}{1-\gamma^\circ}; \quad (42)$$

$$A > -\dot{x}(\gamma^\circ - \tau); \quad (43) \qquad A > 0. \quad (44)$$

Условия устойчивости режима вынужденных колебаний в случае l = 2 можно представить в виде

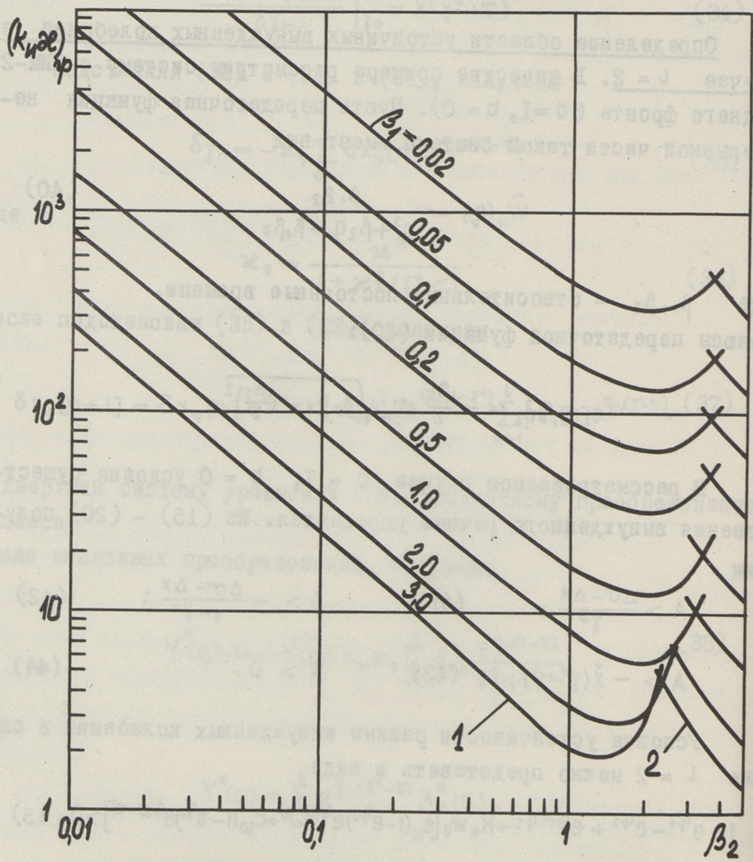
$$1 - e^{q_1} - e^{q_2} + e^{q_1+q_2} + k_и \varkappa_э \left[c'_{10}(1-e^{q_2})e^{q_1(1-\tau)} + c'_{20}(1-e^{q_1})e^{q_2(1-\tau)}\right] > 0, \quad (45)$$

$$1 + e^{q_1} + e^{q_2} + e^{q_1+q_2} + k_и \varkappa_э \left[c'_{10}(1+e^{q_2})e^{q_1(1-\tau)} + c'_{20}(1+e^{q_1})e^{q_2(1-\tau)}\right] > 0, \quad (46)$$

$$1+e^{q_1+q_2}+k_и æ_э e^{q_1+q_2}\left[c'_{10}e^{-q_1\tau}+c'_{20}e^{-q_2\tau}\right]>0. \qquad (47)$$

На фиг. 2 приведены границы областей устойчивых вынужденных колебаний в случае идеального ШИМ-2 ($\Delta\sigma=0$, $\tau=0$) и $\gamma^\circ=0{,}5$, рассчитанные из условий (41) – (47). Области устойчивости лежат ниже этих границ. Следовательно, для нормальной работы автоматической системы с ШИМ-2 необходимо, чтобы

$$k_и æ<(k_и æ)_{гр},$$

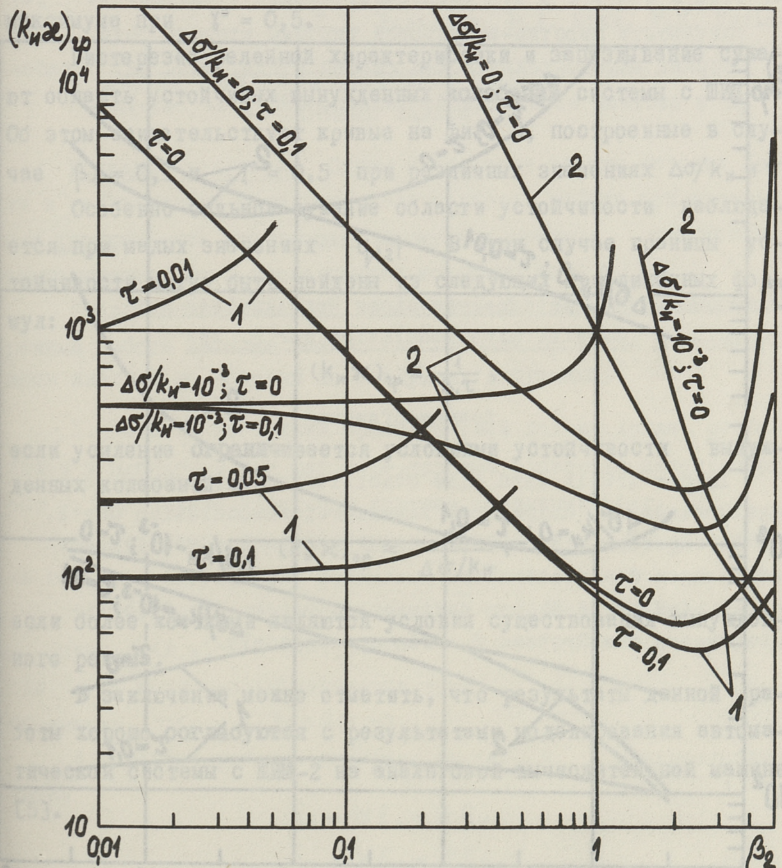


Фиг. 2. Границы устойчивости в случае идеального ШИМ-2 ($\Delta\sigma=0$, $\tau=0$) и $\gamma^\circ=0{,}5$.

Кривые 1 – из условий (45) – (47), кривые 2 – из условий (41) – (44).

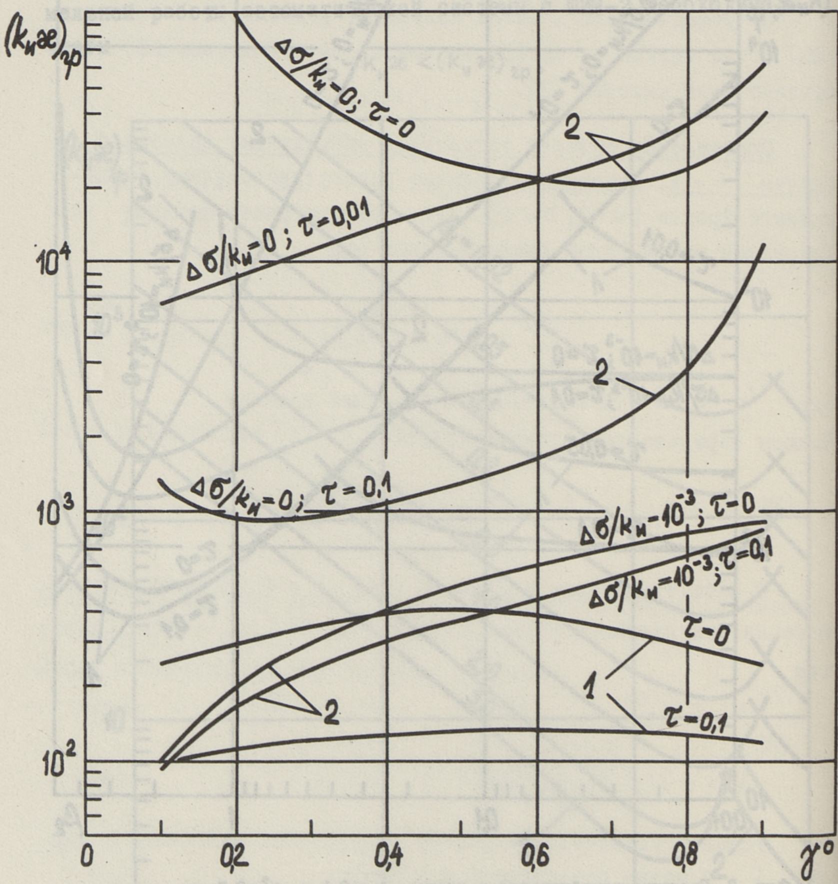
где $(k_и \varkappa)_{гр}$ - граничное усиление.

Для малых модулей полюсов $|q_{1,2}|$ можно границы устойчивости аппроксимировать выражением $(k_и \varkappa)_{гр} \approx \frac{8}{\beta_1 \beta_2}$.



Фиг. 3. Границы устойчивости в случае $\beta_1=0,1$ и $\gamma^\circ=0,5$ при различных значениях $\Delta\sigma$ и τ.

Кривые 1 - из условий (45) - (47),
кривые 2 - из условий (41) - (44).



Фиг. 4. Границы устойчивости в случае $\beta_1=0{,}1$, $\beta_2=0{,}2$ при различных значениях $\Delta\sigma$ и τ.

Кривые 1 – из условий (45) – (47), кривые 2 – из условий (41) – (44).

Если $\gamma^\circ \neq 0{,}5$, то

$$(k_и\, \varkappa)_{гр} \approx \frac{4}{\beta_1 \beta_2 [1 - 2\gamma^\circ(1-\gamma^\circ)]}.$$

Из этой формулы следует, что граничное усиление достигает максимума при $\gamma^\circ = 0{,}5$.

Гистерезис релейной характеристики и запаздывание сужают область устойчивых вынужденных колебаний системы с ШИМ-2. Об этом свидетельствуют кривые на фиг. 3, построенные в случае $\beta_1 = 0{,}1$ и $\gamma^\circ = 0{,}5$ при различных значениях $\Delta\sigma/k_и$ и τ.

Особенно сильное сужение области устойчивости наблюдается при малых значениях $|q_{\gamma 1,2}|$. В этом случае границы устойчивости могут быть найдены из следующих приближённых формул:

$$(k_и\, \varkappa)_{гр} \approx \frac{1}{\beta_1 \tau},$$

если усиление ограничивается условиями устойчивости вынужденных колебаний и

$$(k_и\, \varkappa)_{гр} \approx \frac{\gamma^\circ}{\Delta\sigma/k_и},$$

если более жёсткими являются условия существования вынужденного режима.

В заключение можно отметить, что результаты данной работы хорошо согласуются с результатами моделирования автоматической системы с ШИМ-2 на аналоговой вычислительной машине [5].

Литература

I. W. Leonhard. Regelkreis mit gesteuertem Stromrichter als nichtlineares Abtastproblem. ETZ-A, B. 86, Nr. 16, 1965, S. 513-520.

2. Е.Г. Орлов. Квазиустановившиеся процессы в дискретной системе регулирования с вынуждающим периодическим сигналом. - Изв. вузов, Электромеханика, № 2, 1970, с.181-187.

3. Я.З. Ц ы п к и н. Теория линейных импульсных систем. - М., Физматгиз, 1963.

4. G.J. M u r p h y, S.H.W u. A stability criterion for pulse-width-modulated feedback control systems. - IEEE Trans., Vol. AC-9, No 4, 1964, pp. 434-441.

5. Э.Э. В е л ь м р е. Экспериментальное исследование устойчивости широтно-импульсной системы второго рода. - Сборник научно-технических статей ПТНИИ, вып. 12, "Приборы и системы автоматики", Таллин, 1969, с. 145-151.

E. Velmre

Stabilitätsanalyse eines Regelkreises mit Impulsbreitenmodulation der 2. Art

Zusammenfassung

In der Arbeit wird eine Stabilitätsuntersuchung des Regelkreises mit unipolarer Impulsbreitenmodulation der 2. Art durchgeführt. Es werden die Existenz- und Stabilitätsbedingungen des stationären Zustandes des Systems abgeleitet. Auf Grund dieser Bedingungen werden die Stabilitätsgrenzen des Systems 2. Ordnung ermittelt.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 371 1974

УДК.621.382.61

Г.Х. Вяльямяэ, В.А. Кукк, И.И. Тильк

ДАТЧИК ХОЛЛА В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ: ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

Исходные положения. Одним из случаев работы датчика Холла в неоднородном магнитном поле является работа при частичном пронизывании его площади магнитным потоком, результаты экспериментального исследовании которого даны в [1].

Представляет интерес более точный анализ названного режима работы датчика Холла. Для решения проблемы в последующем анализе мы исходим из следующих допущений:

1. Бесконечно тонкий прямоугольный датчик Холла расположен в плоскости X-y так, что токовые электроды параллельны оси y; холловские электроды считаем точечными (фиг. 1).

2. Магнитное поле имеет лишь компоненту, направленную по оси z.

3. Угол между векторами тока $\vec{j}$ и электрического поля $\vec{E}$ равен $\Theta(x,y) = u \cdot B(x,y)$,

где u - подвижность носителей тока.

Обозначим $\tau(x,y) = \tan\Theta(x,y)$.

4. Краевые условия показаны на фиг. 3, следовательно, имеем

$$j_x = \sigma E_x - \varkappa E_y$$
$$j_y = \varkappa E_x + \sigma E_y, \tag{1}$$

где σ - электропроводность, а

$$\varkappa = \sigma \cdot \tau(x,y).$$

Обозначив потенциал через $\varphi(x,y)$, получим, ввиду того, что $\operatorname{div}\vec{j} = 0$:

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = \sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial \varkappa}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varkappa \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} +$$

$$+\frac{\partial \varkappa}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\varkappa\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\sigma\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=$$

$$=\sigma\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+\sigma\left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=0 \qquad (2)$$

или, после деления на σ,

$$\Delta\varphi=\tau_y\varphi_x-\tau_x\varphi_y=0, \qquad (3)$$

где Δ - оператор Лапласа.

В частности, при однородном магнитном поле ($B=\mathrm{const}$) получим уравнение Лапласа:

$$\Delta\varphi=0. \qquad (4)$$

Последняя задача решается относительно легко. Её общее решение (с применением конформных отображений) дано Виком [2] и исследовано многими авторами [4, 5, 6, 7].

Решение уравнения (3) существенно труднее, особенно с точки зрения получения каких-то общих результатов. Частные решения получаются методом сеток столь же просто, как и при решении (4).

В настоящей работе рассматривается случай, когда магнитное поле постоянно в направлении оси y, т.е. $B(x,y)=B(x)$ или $\tau(x,y)=\tau(x)$. Тогда уравнение (3) примет вид:

$$\Delta\varphi-\tau_x\varphi_y=0. \qquad (5)$$

<u>Метод сеток</u>. Для решения уравнения (5) был использован метод сеток в простейшем исполнении.

На квадратной сетке (фиг. 2) уравнение (5) аппроксимировалось [3] выражением

$$\frac{\varphi_{i+1,j}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i-1,j}}{h^2}+\frac{\varphi_{i,j+1}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i,j-1}}{h^2}-\tau_i'\,\frac{\varphi_{i,j+1}-\varphi_{i,j-1}}{2h}=0$$

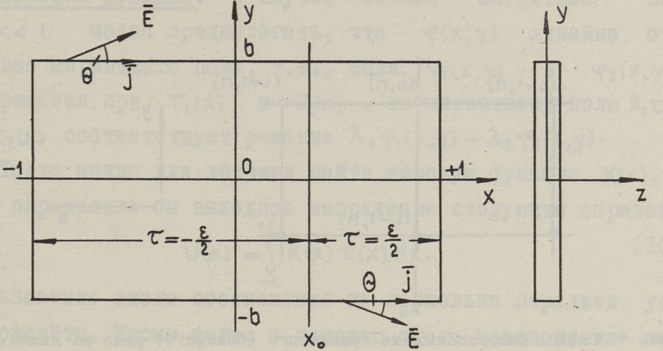
где $\varphi_{ij}=\varphi(x_i,y_j)$, $\tau_i'=\tau_x(x_i)$.

В (боковых) граничных узлах использовалась аппроксимация (фиг. 3а,б).

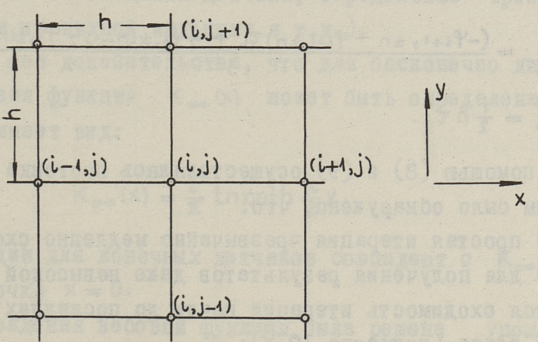
$$\frac{(-\varphi_{i+1,\pm n}+\varphi_{i-1,\pm n})\tau_i}{2h}+\frac{-3\varphi_{i,\pm n}+4\varphi_{i,\pm(n-1)}-\varphi_{i,\pm(n-2)}}{2h}=0 \qquad (7)$$

Соответствующие итерации:

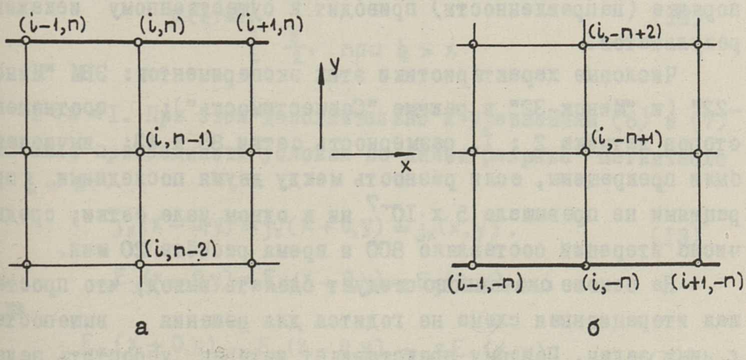
$$\varphi_{i,j}=\frac{\varphi_{i+1,j}+\varphi_{i-1,j}+(1-p_i)\varphi_{i,j+1}+(1+p_i)\varphi_{i,j-1}}{4}, \qquad (8)$$



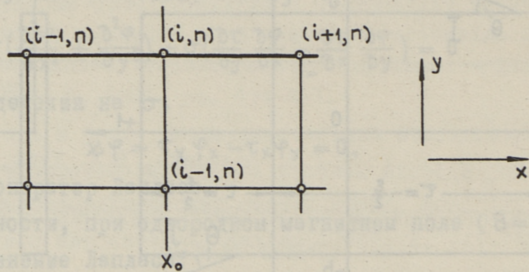
Фиг. 1. Датчик Холла.



Фиг. 2. Схема аппроксимации внутреннего узла квадратной сетки.



Фиг. 3. Схемы аппороксимации граничных (боковых) узлов.



Фиг. 4. Схемы аппороксимации граничного (бокового) узла на линии скачка магнитной индукции.

$$\varphi_{i,\pm n} = \frac{(-\varphi_{i+1,\pm n} + \varphi_{i-1,\pm n})\tau_i + 4\varphi_{i,\pm(n-1)} - \varphi_{i,\pm(n-2)}}{3}, \qquad (9)$$

где $p_i = \frac{1}{2} h \tau_i'$.

С помощью (8) и (9) осуществлялась прогонка всей сетки. При этом было обнаружено, что:

I) простая итерация чрезвычайно медленно сходится;

2) для получения результатов даже невысокой точности требуется сходимость итераций почти до последних битов машинного слова (примерно 10^{-8});

3) сходимость итерационного процесса существенно зависит от стратегии прогонки сетки; соблюдение определённого порядка (направленности) приводит к существенному искажению результатов.

Числовые характеристики этих экспериментов: ЭВМ "Минск-22" (и "Минск-32" в режиме "Совместимость"); соотношение сторон датчика 2 : I, размерность сетки 85 x 43; вычисления были прекращены, если разность между двумя последними итерациями не превышала 5×10^{-7} ни в одном узле сетки; среднее число итераций составляло 800 и время расчёта 20 мин.

На основе сказанного следует сделать вывод, что простейшая итерационная схема не годится для решения вышепоставленных задач. Поэтому представляет интерес упростить задачу с помощью линеаризации.

Весовая функция. В случае слабых магнитных полей $|\tau| \ll 1$ можно предполагать, что $\varphi(x,y)$ линейно относительно магнитного поля, т.е., если $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ есть решения при $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$, то магнитному полю $\lambda_1\tau_1(x) + \lambda_2\tau_2(x)$ соответствует решение $\lambda_1\varphi_1(x,y) + \lambda_2\varphi_2(x,y)$.

Тогда можно для датчика найти весовую функцию $K(x)$, которая определяла бы выходное напряжение следующим образом:

$$U(x) = \int_{-1}^{+1} K(x)\,\tau(x)\,dx. \tag{10}$$

Использование этого соотношения на несколько порядков ускоряет расчёты. Кроме того, с помощью этого соотношения можно решить ряд интересных задач (определение зависимости выходного напряжения от смещения датчика, определение требуемого распределения магнитной индукции и т.д.).

Отметим без доказательства, что для бесконечно длинного датчика весовая функция $K_\infty(x)$ может быть определена аналитически и имеет вид:

$$K_\infty(x) = \frac{2}{\pi}\ln\coth\frac{\pi}{2}x. \tag{11}$$

Весовые функции для конечных датчиков совпадают с $K_\infty(x)$ в окружности точки $x = 0$.

Для нахождения весовой функции была решена упомянутая краевая задача при следующем распределении индукции:

$$\tau(\xi) = \begin{cases} -\dfrac{\varepsilon}{2}, & \text{при } \xi < x \\ \dfrac{\varepsilon}{2}, & \text{при } \xi > x \end{cases} \tag{12}$$

для $-1 < x < 1$. При этом дополнительно к уравнениям (6) и (7) нужно было присоединить условия на линии разрыва магнитного поля $\xi = x$:

$$j_x(x-0,y) = j_x(x+0,y) = j_x(x,y). \tag{13}$$

$$E_y(x-0,y) = E_y(x+0,y) = E_y(x,y),$$

откуда

$$E_x(x+0,y) - E_x(x-0,y) = \varepsilon E_y(x,y), \tag{14}$$

которая была аппроксимирована следующим образом (фиг. 2, 4):

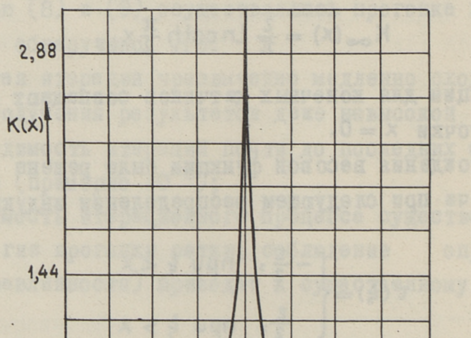
$$\varphi_{i+1,j}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i-1,j}=\frac{\varepsilon}{2}(\varphi_{i,j+1}-\varphi_{i,j-1}). \qquad (15)$$

При каждом значении x определили выходное напряжение U и получили функцию $N(x)=U(x)$, из которой $K(x)$ определилась как

$$K(x)=\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{dN(x)}{dx}. \qquad (16)$$

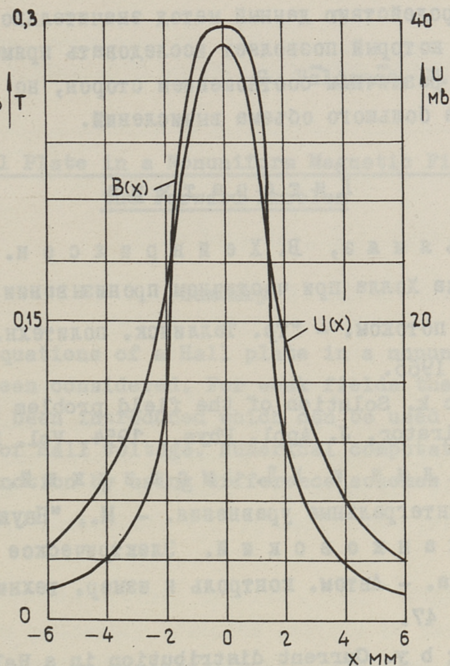
(Функции $\frac{1}{\varepsilon}N(x)$ и $K(x)$ аналогичны переходной и импульсной характеристикам в теории линейных систем).

Весовая функция, рассчитанная для датчика с соотношением сторон 2 : I, представлена на фиг. 5. На фиг. 6 и 7 представлены два распределения магнитной индукции и рассчитанные с помощью (I0) зависимости выходного напряжения от смещения датчика в этих полях.

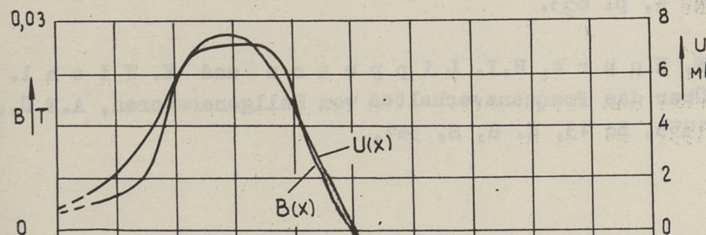


Фиг. 5. Весовые функции.

Заключение. Разработана методика расчета выходных характеристик датчика Холла численным методом на основе уравнений поля в датчике Холла. Метод исследования датчика Холла в неоднородном магнитном поле с применением весовой функции всесторонне оправдал себя.



Фиг. 6. Распределение магнитной индукции B(x) и зависимость выходного напряжения U(x) от перемещения датчика Холла.



Фиг. 7. Распределение магнитной индукции B(x) и зависимость выходного напряжения U(x) от перемещения датчика Холла.

По быстродействию данный метод значительно превосходит метод сеток, который позволяет исследовать прямоугольные датчики Холла с различным соотношением сторон, но требует много времени из-за большого объема вычислений.

Литература

I. Г. Вяльямяэ, В. Хейнрихсен. Исследование датчика Холла при частичном пронизывании его площади магнитным потоком. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", сер. А, № 220, 1965.

2. R.F. Wick. Solution of the field problem of the Germanium quirator, J. Appl. Phys., 1954, Vol. 25, No 6, p. 741.

3. С.Г. Михлин и Х.Л. Смолицкий. Дифференциальные и интегральные уравнения. - М., "Наука", 1965.

4. Р.В. Рожанковский. Электрическое поле в датчиках Холла. - Автом. контроль и измер. техника, 1963, вып. 7, с. 47.

5. D. Midgby. Current distribution in a Hall plate. Industrial Electronics, 1963, Vol. 1, No 7, p. 383.

6. I.P. Newsome. Determination of the electrical characteristics of Hall plates, Proc. IEE, 1963, Vol. 110, No 4, p. 653.

7. F. Kuhrt, H.I. Lippmann und K. Wiehl. Über das Frequenzverhalten von Hallgeneratoren, A.E.Ü., 1959, Bd 13, H. 8, S. 341.

G. Väljamäe, V. Kukk, J. Tilk

Hall Plate in a Nonuniform Magnetic Field: the Forward Problem

Summary

Field equations of a Hall plate in a nonuniform magnetic field have been considered. For weak fields the weighting function has been introduced which can be used for fast computation of Hall voltage. Numerical computation of the weighting function by using difference schemes has been considered.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 371 1974

УДК. 621. 382. 61

Г.Х. Вяльямяэ, В.А. Кукк, И.И. Тильк

ДАТЧИК ХОЛЛА В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ: ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Постановка задачи. На практике встречаются случаи, когда при перемещении датчика Холла в неоднородном магнитном поле необходимо обеспечить заданную $U(x)$ (выходного напряжения) в зависимости от перемещения. По существу это означает, что для задачи, приведенной в [1], необходимо решить обратную задачу.

В [1] найденная весовая функция $K(x)$ характеризовала степень влияния различных областей датчика на выходное напряжение и позволяла при заданном распределении магнитной индукции $B(x)$ просто найти зависимость выходного напряжения датчика от перемещения. Используя аналогичную методику, введем понятие обратной весовой функции $M(x)$.

Обратная весовая функция. Для решения этой задачи нужно определить обратную весовую функцию $M(x)$ такую, что

$$M(x) * K(x) = \delta(x), \qquad (1)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция.

Обозначим

$$\tau(x) = \tan\Theta(x) = \tan(u \cdot B(x)), \qquad (2)$$

где $\Theta(x)$ – угол Холла,
u – подвижность носителей тока,
$B(x)$ – магнитная индукция.

Тогда

$$\tau(x) = M(x) * U(x). \qquad (3)$$

Нахождение $M(x)$ легко осуществляется с помощью преобразования Фурье [2]:

$$M(x) = F^{-1}\left(\frac{1}{FK(x)}\right), \qquad (4)$$

где F и F^{-1} – прямое и обратное преобразования Фурье.

Для нахождения обратной весовой функции $M(x)$ находим весовую функцию $K(x)$ по методике, приведенной в [I].

Численное решение задачи (4) затруднительно из-за того, что $K(x)$ обращается в бесконечность при $x = 0$, а $M(x)$ имеет еще более сложную особенность при $x = 0$. Поэтому из всех функций была выделена главная часть, соответствующая бесконечно длинному датчику. Обозначим соответствующие функции индексом ∞.

Тогда имеем

$$K(x) = K_{\infty}(x) + k(x), \qquad (5)$$

$$FK(x) = F_{\infty}(x) + f(x), \qquad (6)$$

$$\frac{1}{FK(x)} = \frac{1}{F_{\infty}(x)} + g(x), \qquad (7)$$

$$F^{-1}\frac{1}{FK(x)} = M(x) = F^{-1}\frac{1}{F_{\infty}(x)} + F^{-1}g(x) =$$

$$= M_{\infty}(x) + h(x), \qquad (8)$$

где $g(x)$ вычисляется следующим образом:

$$g(x) = \frac{1}{F_{\infty}(x) + f(x)} - \frac{1}{F_{\infty}(x)}. \qquad (9)$$

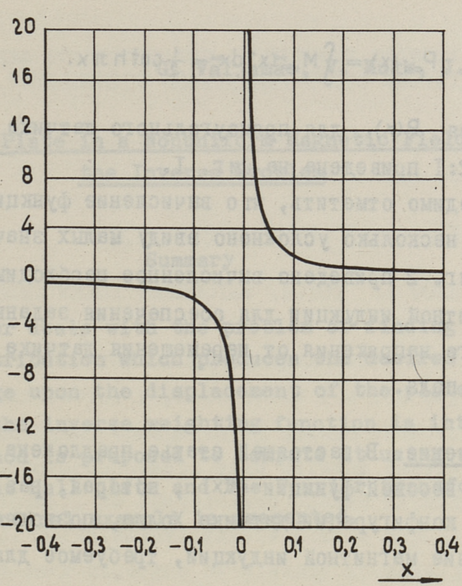
В действительности вычислялась

$$P(x) = \int M(x)\,dx, \qquad (10)$$

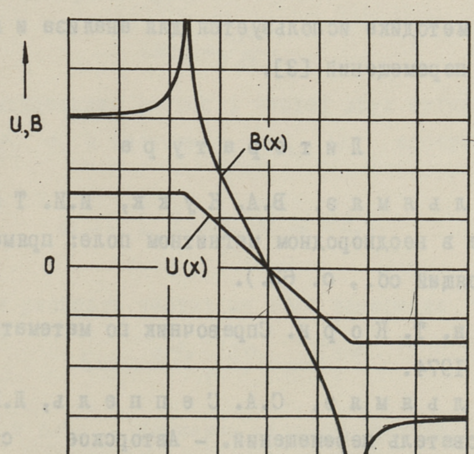
так как $P(x)$ имеет менее слабую особенность при $x = 0$. Тогда свертка (3) приводится к виду

$$\tau(x) = P(x) * \frac{dU(x)}{dx}, \qquad (11)$$

которая использовалась в действительных расчетах. Без доказательства отметим, что



Фиг. 1. Обратная весовая функция P(x).



Фиг. 2. Заданная зависимость U (x) и расчётное распределение магнитной индукции B(x).

$$P_\infty(x) = \int M_\infty(x)\,dx = \frac{1}{2}\coth \pi x. \qquad (12)$$

Функция $P(x)$ для прямоугольного датчика с соотношением сторон 2:I приведена на фиг. I.

Необходимо отметить, что вычисление функции $g(x)$ (уравнение (9)) несколько усложнено ввиду малых значений функции $f(x)$ На фиг. 2 приведено вычисленное необходимое распределение магнитной индукции для обеспечения заданной зависимости выходного напряжения от перемещения датчика относительно магнитного поля.

Заключение. В настоящей статье предложена методика для нахождения весовой функции $M(x)$, которая, раз вычисленная для данной конфигурации датчика Холла, позволяет вычислить распределение магнитной индукции, требуемое для получения заданной зависимости напряжения от перемещения датчика в этом поле.

Данная методика используется для анализа и проектирования датчика перемещений [3].

Литература

I. Г.Х. Вяльямяэ, В.А. Кукк, И.И. Тильк. Датчик Холла в неоднородном магнитном поле: прямая задача - (См. настоящий сб., с. 63.).

2. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике. - М., "Наука", 1974.

3. Г.Х. Вяльямяэ, С.А. Сеппель, Л.К. Эйнер. Преобразователь перемещений. - Авторское свидетельство № 418874 от 14/II 1972.

G. Väljamäe, V. Kukk, J. Tilk

Hall Plate in a Nonuniform Magnetic Field: the Inverse Problem

Summary

This paper deals with the problem of finding the magnetic field distribution which produces the desired dependence of Hall voltage upon the displacement of the plate. To solve this problem the inverse weighting function is introduced and numerical method is proposed to compute it using weighting function of the Hall plate and the Fourier transform techniques. A practical example is presented.

[illegible] (12)

функция $f(x)$ для прямоугольного датчика с соотношением сторон 2:1 приведена [illegible].

Необходимо отметить, что вычисление функции $g(x)$ (уравнение (9)) несколько усложнено ввиду малых значений функции $f(x)$. На фиг. 2 приведено вычисленное необходимое распределение магнитной индукции для обеспечения заданной зависимости выходного напряжения от перемещения датчика относительно [illegible] для данной конфигурации [illegible] распределения магнитной индукции, требуемое для получения заданной зависимости напряжения от перемещения датчика в этом поле.

Данная методика используется для анализа и проектирования датчика перемещений [3].

Литература

1. Г.Х. Вильямяэ, В.А. Кукк, Ю.Х. Тийк. Датчик Холла в неоднородном магнитном поле: прямая задача. – (См. настоящий сб., с. 63.).

2. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике. – М., "Наука", 1974.

3. Г.Х. Вильямяэ, [illegible]. Преобразователь перемещения. – Авторское свидетельство № 418874 от 14/II 1972.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 371 1974

УДК 621.317.761

В.К. Корсен, О.М. Пикков, А.Э. Ярвальт

ОБ ИЗМЕРЕНИИ МАЛЫХ РАЗНОСТЕЙ ЧАСТОТ НА ФОНЕ ШУМОВ

Введение. Предлагаемый метод предназначен для измерения разности угловых частот двух сигналов 1 и 2 в случаях, когда время измерения (цикл измерения) T должно быть короче периода разности частоты (например, если сигналы появляются только на некоторое время), но значительно больше периодов самих сигналов 1 и 2. Тогда вместо классического определения частоты (число полных периодов за единицу времени) удобнее применять обобщенное определение мгновенной угловой частоты [1] как скорость измерения фазы колебания:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{1}$$

Тогда мгновенная разность частот двух сигналов 1 и 2 (с фазами φ_1, φ_2 и частотами ω_1, ω_2 соответственно) выражается:

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{dt} = \frac{d\Delta\varphi}{dt}. \tag{2}$$

Средняя разность частот за цикл измерения T равняется:

$$\delta\omega = \frac{\Delta\varphi_к - \Delta\varphi_н}{T} = \frac{\delta\Delta\varphi}{T}, \tag{3}$$

где $\Delta\varphi_к$ и $\Delta\varphi_н$ – значение разности фаз сигналов соответственно в конце и в начале цикла измерения T.

Таким образом, $\delta\omega$ характеризуется приростом (набегом) разности фаз за цикл T. Если $\delta\omega$ не меняется за T, то текущее значение фазового сдвига $\Delta\varphi$ можно выражать:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_н + \delta\omega \cdot t. \tag{4}$$

Одним из наиболее распространенных методов измерения фазового сдвига является образование широтно-импульсномодулированного (ШИМ) сигнала [I]. Для этого в моменты прохождения сигнала с положительной производной через нулевой (или другой выбранный) уровень в каналах сигналов I и 2 образуются короткие импульсы. Полученные импульсные сигналы подаются на разные входы фазометрическо го триггера (ФТ), на одном из выходов которого образуется вышеуказанный ШИМ сигнал с коэффициентом заполнения

$$\gamma' = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}. \tag{5}$$

ШИМ сигнал на другом выходе имеет коэффициент заполнения

$$\gamma'' = 1 - \gamma'. \tag{6}$$

Так как $T \gg \frac{1}{\omega}$, то можно считать, что коэффициенты заполнения γ' (5) и γ'' (6), следовательно, и средние (за период сигнала I) значения выходных напряжений ФТ ($\bar{U}_1$ и $\bar{U}_2$ соответственно) изменяются во времени плавно. При амплитуде выходных импульсов ФТ U_0

$$\bar{U}_1 = \gamma' U_0 = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} U_0 \tag{7}$$

и

$$\bar{U}_2 = \gamma'' U_0 = U_0\left(1 - \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\right). \tag{8}$$

Такие системы могут работать в том случае, когда текущие значения $\Delta\varphi$ за T не проходят через значения 0 и 2π, в противном случае соотношения (5) и (6) не выполняются. С помощью дополнительного устройства, которое при необходимости меняет знак одного из входных сигналов, нетрудно обеспечить условие $0 < \Delta\varphi_н < 2\pi$. Учитывая (4), это условие сводится к $0 < \delta\omega < \frac{\pi}{T}$.

Метод интегрирования. С появлением шумов в сигналах I и 2 появляются также флюктуации моментов прохождения сигналов через нулевой уровень, что вызывает погрешность и в определении $\delta\omega$. Для уменьшения этой погрешности следует результат измерения $\delta\Delta\varphi$ вырабатывать усреднением за все время T, а не использовать только значения $\varphi_н$ и $\Delta\varphi_к$ [2].

Так как сигнал о значении $\Delta\varphi$ на выходе ФТ имеется в аналоговой форме, то в качестве усредняющего устройства удобно использовать интегратор, выполненный на операционном усилителе.

Рассмотрим два варианта процесса интегрирования. В обоих вариантах цикл измерения разделен на две равные части T_I и T_2.

В первом варианте за первый полуцикл интегрируется $\overline{U}_1$, тогда

$$U_I = \overline{U}_1 = U_0 \frac{\Delta\varphi}{2\pi}, \tag{9}$$

и в середине цикла с помощью инвертора меняется знак интегрируемого сигнала

$$U_{II} = -\overline{U}_1 = -U_0 \frac{\Delta\varphi}{2\pi}. \tag{10}$$

Электронный интегратор, обладающий постоянной времени τ, совершает при нулевых начальных условиях операцию:

$$U_{вых}(t) = -\frac{1}{\tau}\int_0^t U_{вх}\,dt. \tag{11}$$

Тогда в конце цикла выходное напряжение интегратора:

$$U_T = -\frac{1}{\tau}\int_0^{T/2} U_0 \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\,dt - \frac{1}{\tau}\int_{T/2}^{T} -U_0\frac{\Delta\varphi}{2\pi}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{\tau}\int_0^{T/2} \frac{\Delta\varphi_н + \delta\omega t}{2\pi} U_0\,dt + \frac{1}{\tau}\int_{T/2}^{T} \frac{\Delta\varphi_н + \delta\omega t}{2\pi} U_0\,dt =$$

$$= -\frac{U_0 T \Delta\varphi_н}{4\pi\tau} - \frac{U_0 T^2 \delta\omega}{16\pi\tau} + \frac{U_0 T \Delta\varphi_н}{4\pi\tau} + \frac{3U_0 T^2 \delta\omega}{16\pi\tau} =$$

$$= \frac{U_0 T^2 \delta\omega}{8\pi\tau}. \qquad (12)$$

Во втором варианте за T_I к выходному сигналу ФТ прибавляется напряжение $-0{,}5\,U_0$, тогда

$$U_I = \overline{U}_1 - 0{,}5\,U_0 = U_0\left(\frac{\Delta\varphi}{2\pi} - 0{,}5\right), \qquad (13)$$

а в середине цикла вход интегратора переключается на второй выход ФТ и

$$U_{II} = \overline{U}_2 - 0{,}5\,U_0 = U_0\left(1 - \frac{\Delta\varphi}{2\pi} - 0{,}5\right) = U_0\left(0{,}5 - \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\right). \qquad (14)$$

Тогда в конце цикла на выходе интегратора:

$$U_т - \frac{1}{\tau}\int_0^{T/2} U_0\left(\frac{\Delta\varphi}{2\pi} - 0{,}5\right)dt - \frac{1}{\tau}\int_{T/2}^{T} U_0\left(0{,}5 - \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{\tau}\int_0^{T/2} \frac{\Delta\varphi_н + \delta\omega t - \pi}{2\pi} U_0 dt - \frac{1}{\tau}\int_{T/2}^{T} \frac{\pi - (\varphi_н + \delta\omega t)}{2\pi} U_0 dt =$$

$$= \frac{U_0 T(\Delta\varphi_н - \pi)}{4\pi\tau} - \frac{U_0 T^2 \delta\omega}{16\pi\tau} + \frac{U_0 T(\Delta\varphi_н - \pi)}{4\pi\tau} + \frac{3U_0 T^2 \delta\omega}{16\pi\tau} =$$

$$= \frac{U_0 T^2 \delta\omega}{8\pi\tau}. \qquad (15)$$

Обозначаем

$$\frac{U_0 T}{4\pi\tau} = A. \qquad (16)$$

Назовем члены, которые вызваны начальной разностью фаз $\Delta\varphi_н$ и которые сокращаются в выражениях $U_т$ (12) и (15), балластом Б.

В первом варианте

$$Б_I = -\frac{U_0 T \Delta\varphi_н}{4\pi\tau} = -A\Delta\varphi_н, \qquad (17)$$

во втором варианте

$$Б_{II} = -\frac{U_0 T(\Delta\varphi_н - \pi)}{4\pi\tau} = -A(\Delta\varphi_н - \pi). \qquad (18)$$

При помощи специальной схемы выбора начальных фаз сигналов (которая в соответствующих случаях меняет фазу одного из входных сигналов I или 2 на π), можно обеспечить $0<\Delta\varphi_н<\pi$, а следовательно,

$$-A\pi < Б_I < 0 \tag{I9}$$

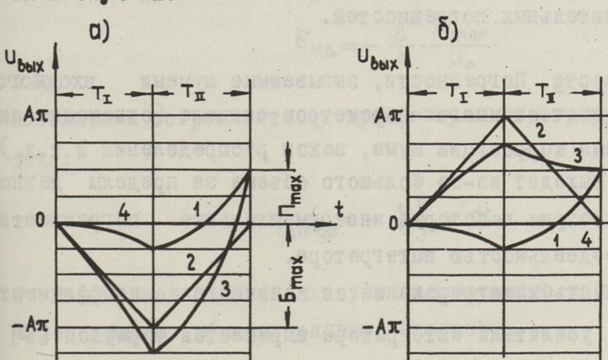
и

$$0 < Б_I < A\pi. \tag{I9a}$$

Составляющие выходного напряжения, вызванные полезным сигналом, не зависят от варианта. Полезный сигнал на выходе интегратора в конце цикла составляет для обоих вариантов

$$П = \frac{U_0 T^2 \delta\omega}{8\pi\tau} = \frac{AT}{2}\delta\omega. \tag{20}$$

На фиг. Ia даны кривые изменения выходного напряжения интегратора во времени для первого варианта, а на фиг. Iб – для второго варианта. На обоих графиках кривые соответствуют предельным случаям:



Фиг. 1. Кривые изменения выходного напряжения интегратора во времени.

I. Максимальный полезный сигнал ($\delta\omega T = \pi$) без балласта ($Б = 0$).

2. Максимальное абсолютное значение балласта ($|Б| = A\pi$) без полезного сигнала ($\delta\omega = 0$).

3. Максимальный полезный сигнал и балласт одновременно ($\delta\omega T = \pi$; $|Б| = A\pi$).

4. Отсутствуют полезный сигнал и балласт ($\delta\omega = 0$; $Б=0$).

Все остальные случаи, которые соответствуют промежуточным значениям полезного сигнала и балласта, не выходят с площади, охватываемой этими кривыми.

По фиг. I видно, что второй вариант имеет преимущества перед первым:

I. При одинаковой величине полезного сигнала на выходе ($Б_{max} = \frac{A\pi}{2}$) первый вариант требует общего объема (область линейности) интегратора $\frac{7}{4}$ $A\pi$, а второй $\frac{5}{4}$ $A\pi$. Следовательно, полезный сигнал в первом варианте составляет 28,6 %, а во втором - 40 % от объема интегратора.

2. Значительно легче конструировать переключатель сигнала для переключения входа интегратора в середине цикла, так как сигнал на обоих выходах ФТ имеет одинаковый знак.

3. Отсутствует инвертор, который может оказаться источником дополнительных погрешностей.

Погрешности. Погрешности, вызываемые шумами входного сигнала, зависят от многих параметров сигнала (отношение сигнал-шум, время корреляции шума, закон распределения и т.д.) и анализ их выходит из-за большого объема за пределы данной статьи. Рассмотрим некоторые инструментальные погрешности, вызванные неидеальностью интегратора.

Погрешность интегрирования от конечного коэффициента усиления K усилителя интегратора выражается формулой [3]

$$\Delta u_{вых}(t) = -\frac{1}{K\tau}\int_0^t u_{вых}\,dt, \qquad (21)$$

где $u_{вых}$ - выходное напряжение интегратора.

Составляющая в подынтегральном выражении, обусловленная полезным сигналом, вызывает систематическую погрешность, которая может быть учтена при калибровке прибора.

Составляющая, обусловленная балластом, вносит погрешность, пропорциональную балласту. По фиг. I видно, что подынтегральное выражение в формуле (21) для балласта имеет значение $\frac{БT}{2}$, следовательно, соответствующая погрешность может достигать величины

$$\Delta u_{вых\,кБ} = -\frac{1}{K\tau} \cdot \frac{Б_{max}T}{2}. \qquad (22)$$

Учитывая, что максимальный полезный сигнал $П_{max} = \frac{Б_{max}}{2}$, получим соответствующую приведенную погрешность:

$$\delta_{кБ} = -\frac{1}{K} \cdot \frac{T}{\tau}. \qquad (23)$$

Так как (20)

$$П_{max} = \frac{U_o T}{8\tau},$$

то

$$\frac{T}{\tau} = \frac{8 П_{max}}{U_o} \qquad (24)$$

и

$$\delta_{кБ} = -\frac{8}{K} \cdot \frac{П_{max}}{U_o}. \qquad (25)$$

Абсолютная погрешность от дрейфа нуля интегрирующего усилителя:

$$\Delta u_{вых\,др} = -\frac{1}{\tau}\int_0^T u'\,dt. \qquad (26)$$

Считая приведенное ко входу интегрирующего усилителя напряжение дрейфа u' постоянным, получаем

$$|\Delta u'_{вых}| = u'\frac{T}{\tau}. \qquad (27)$$

Учитывая (24), получаем приведенную погрешность

$$|\delta_{u'вых}| = \frac{\Delta u'_{вых}}{П_{max}} = u'\,\frac{8 П_{max}}{U_o} : П_{max} = 8\,\frac{U'}{U_o}. \qquad (28)$$

Приведенная погрешность от входного тока усилителя интегратора

$$\delta u_i = \frac{\Delta u_i}{П_{max}} = \frac{1}{П_{max}C}\int_0^T i_{вх}\,dt = \frac{T i_{вх}}{П_{max}C}, \qquad (29)$$

если считать входной ток $i_{вх}$ постоянным за цикл.

При использовании в интеграторе лампового усилителя все три вида рассмотренных погрешностей оказываются порядка десятых долей процента.

Рассмотренный способ показал хорошие результаты при измерении сигналов с частотой порядка 2 кГц и разностью частот до 0,5 Гц при цикле измерения I секунды и умеренном отношении сигнал-шум.

Литература

I. Г.Я. Мирский. Радиоэлектронные измерения. - М., "Энергия", 1969.

2. В.К. Корсен, О.М. Пикков, А.Э.-И. Ярвальт. Способ измерения малых разностей частот двух сигналов. - Авторское свидетельство СССР № 359606, Бюллетень № 35, 1972.

3. Е. Менджицкий. Операционные усилители постоянного тока. М., "Энергия", 1967.

V. Korsen, O. Pikkov, A. Järvalt

Measuring of Small Frequency Differences of Two Signals with Noise

Summary

Two averaging methods of measuring small frequency differences have been compared. One of them has been proved having some advantages. The analysis of accuracy is given.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 371 1974

УДК 621.317.384

А.Э. Ярвальт

ДИНАМИЧЕСКАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ СРЕДНЕЙ МОЩНОСТИ

Увеличение частоты работы электроэнергетических устройств и сложные формы временных зависимостей тока и напряжения предъявляют повышенные требования к измерительным преобразователям мощности (ИПМ).

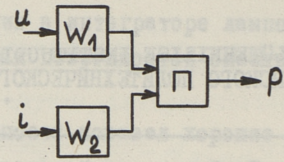
В литературе [1] дается описание различных схем ИПМ, приводятся результаты экспериментального исследования и анализ статических погрешностей, но отсутствует анализ динамических погрешностей при различных входных сигналах, что затрудняет их проектирование и оценку динамической погрешности измерения мощности.

В статье предпринята попытка найти выражения для оценки динамической погрешности измерения средней мощности. Анализ ИПМ сделан по структурной схеме (фиг. 1), где W_1 учитывает передаточную функцию датчика напряжения и канала напряжения перемножителя П, W_2 учитывает передаточную функцию датчика тока и канала тока П.

Динамической погрешностью ИПМ будем называть относительную разность среднего значения выходного сигнала и выходного сигнала идеального ИПМ с тем же коэффициентом преобразования:

$$\delta = \frac{P - P_{ug}}{P_{ug}} \cdot 100\,\% . \tag{1}$$

Предположим, что все полюсы передаточных функций W_1 и W_2, p_i и p_q соответственно простые и вещественные. Это предположение не снижает общности выражений, но упрощает их вид.



Фиг. 1. Структурная схема ИПМ.

Комплексные коэффициенты передачи представим в виде:

$$W_1 = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{ja_i + 1}, \qquad (2)$$

$$W_2 = \sum_{q=1}^{l} \frac{B_q}{jb_q + 1}, \qquad (3)$$

где $a_i = -\frac{\omega}{p_i}$ и $b_q = -\frac{\omega}{p_q}$ – относительные частоты.

Динамическая погрешность при синусоидальных входных сигналах с разностью фаз φ:

$$\delta_1 = \left\{ \frac{1}{W_1(0)\,W_2(0)} \sum_{i,q}^{k+l} \frac{A_i B_q [1 + a_i b_q - (b_q - a_1)\,tg\,\varphi]}{(1+a_i^2)(1+b_q^2)} - 1 \right\} \cdot 100\%. \qquad (4)$$

При идентичных каналах погрешность не зависит от разности фаз сигналов. При разности фаз сигналов, близких к $\frac{\pi}{2}$, погрешность сильно зависит от разности фазовых характеристик каналов $\Delta\varphi(\omega)$:

$$\delta_1 \approx \Delta\varphi(\omega)\,tg\,\varphi \cdot 100\,\%. \qquad (5)$$

Например, при $\varphi = 89^0$ и $\Delta\varphi(\omega) = 1^0$, $\delta_1 = 100\,\%$.

Несинусоидальные сигналы могут быть представлены в виде ряда Фурье:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(jn\omega)\,e^{jn\omega t} \qquad (6)$$

$$i(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} I(jn\omega)\, e^{jn(\omega t+\varphi)}. \qquad (7)$$

Учитывая выражение для среднего значения произведения двух функций одного периода, разложенных в ряд Фурье [2], получим:

$$P=\sum_{i,q}^{k+l} A_i B_q \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{U(jn\omega)\, I(-jn\omega)}{(1+jna_i)(1-jnb_q)} e^{jn\varphi}. \qquad (8)$$

Так как входные сигналы зависят от конкретных цепей, в которых измеряется мощность, для оценки погрешности целесообразно выбрать типовые входные сигналы, которые содержат не меньше гармоник, чем действительные сигналы. Тогда оценка погрешности, определяемая по типовым сигналам, будет завышенной.

Если входные сигналы содержат нечётные и четные гармоники, целесообразно выбрать в качестве типового сигнала пилообразные сигналы:

$$u(t)=\frac{U_m}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{jn} e^{jn\omega t} \qquad (9)$$

$$i(t)=\frac{I_m}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{jn} e^{jn(\omega t+\varphi)} \qquad (10)$$

Учитывая (2), (3) и (8)

$$P=\frac{U_m I_m}{\pi^2}\sum_{i,q}^{k+l} A_i B_q \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{jn\varphi}}{n^2(1+jna_i)(1-jnb_q)}. \qquad (11)$$

Бесконечные суммы могут быть представлены в "замкнутом" виде [3]:

$$P=\frac{U_m I_m}{\pi^2}\sum_{i,q}^{k+l}\frac{A_i B_q}{a_i+b_q}\left\{a_i\left[\frac{\varphi^2}{2}-(\pi+a_i)\varphi+\frac{\pi^2+3\pi a_i+3a_i^2}{3}-\right.\right. \qquad (12)$$

$$-\frac{2\pi a_i e^{-\frac{\pi}{a_i}}}{1-e^{-\frac{2\pi}{a_i}}}\Bigg] + b_q\left[\frac{\varphi^2}{2}-(\pi-b_q)\varphi+\frac{\pi^2-3\pi b_q+3b_q^2}{3}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\pi b_q e^{\frac{\pi}{b_q}}}{1-e^{\frac{2\pi}{b_q}}}\right]\Bigg\}.$$

$$P_{ug}=\frac{W_1(0)\,W_2(0)}{\pi^2}\left(\frac{\varphi^2}{2}-\pi\varphi+\frac{\pi^2}{3}\right)U_m I_m. \tag{I3}$$

При идентичных каналах с передаточными функциями первого порядка динамическая погрешность:

$$\delta_2=\frac{a^2-\pi a\,\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\varphi-\pi}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{a}}}{\dfrac{\varphi^2}{2}-\pi\varphi+\dfrac{\pi^2}{3}}\cdot 100\,\%. \tag{I4}$$

Погрешность приближается к бесконечности, если

$$\varphi=\pi\left(1-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right).$$

При $1{,}31 \leqslant \varphi \leqslant 1{,}36\,\pi$

$$|\delta_2| \leqslant |\delta_{2,\varphi=0}|.$$

Если $a \ll \pi$, то

$$\delta_{2,\varphi=0}=-\frac{3}{\pi}a. \tag{I5}$$

Если один или оба входные сигналы содержат только нечётные гармоники, то целесообразно выбрать в качестве типовых сигналов последовательности прямоугольных импульсов:

$$u(t)=\frac{2U_m}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{j(2n-1)}e^{j(2n-1)\omega t} \tag{I6}$$

$$i(t)=\frac{2I_m}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{j(2n-1)}e^{j(2n-1)(\omega t+\varphi)} \tag{I7}$$

Учитывая (2), (3) и (8)

$$P=\frac{2U_mI_m}{\pi^2}\sum_{i,q}^{k+l}\frac{A_iB_q}{a_i+b_q}\Big\{a_1\Big[-\pi\varphi+\frac{\pi^2+2\pi a_i}{2}-\pi a_i\Big(1+\mathrm{th}\,\frac{\pi}{2a_i}\Big)e^{-\frac{\varphi}{a_i}}\Big]+b_q\Big[-\pi\varphi+\frac{\pi^2-2\pi b_q}{2}+\pi b_q\Big(1-\mathrm{th}\,\frac{\pi}{2b_q}\Big)e^{\frac{\varphi}{b_q}}\Big]\Big\} \tag{18}$$

$$P_{ug}=\frac{2W_1(0)W_2(0)}{\pi^2}\Big(\frac{\pi}{2}-\varphi\Big)U_mI_m. \tag{19}$$

При идентичных каналах с передаточными функциями первого порядка

$$\delta_3=\frac{a\,\mathrm{sh}\,\frac{\varphi-\frac{\pi}{2}}{a}}{\Big(\frac{\pi}{2}-\varphi\Big)\mathrm{ch}\,\frac{\pi}{2a}}\cdot 100\,\%. \tag{20}$$

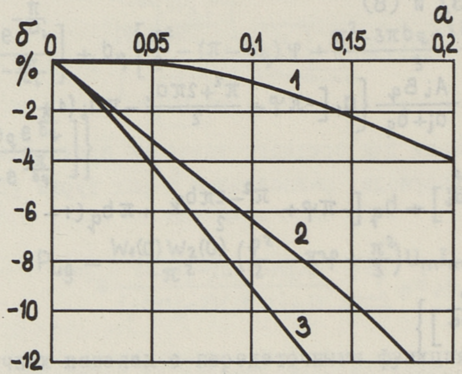
Погрешность максимальна при $\varphi=0$

$$\delta_{3,\varphi=0}=-\frac{2a\,\mathrm{th}\,\frac{\pi}{2a}}{\pi}\cdot 100\,\%. \tag{21}$$

При $a<<\frac{\pi}{2}$

$$\delta_{3,\varphi=0}\approx-\frac{2a}{\pi}. \tag{22}$$

На фиг. 2 приведены зависимости динамической погрешности от относительной частоты при различных типовых сигналах и $\varphi=0$.



Фиг. 2. Зависимость динамической погрешности от относительной частоты при идентичных каналах тока и напряжения и при $\varphi = 0$,
1 - синусоидальные сигналы;
2 - последовательности прямоугольных импульсов;
3 - пилообразные сигналы.

Выводы.

I. При проектировании и налаживании ИПМ необходимо добиться идентичности каналов тока и напряжения, чтобы уменшить зависимость динамической погрешности от разности фаз сигналов.

2. Динамическая погрешность измерения мощности несинусоидальных сигналов может быть оценена погрешностью измерения мощности типовых сигналов, которые содержат не больше гармоник, чем действительные сигналы.

Литература

I. В.Л. Б е н и н, В.У. К и з и л о в. Статические измерительные преобразователи электрической мощности. - М., "Энергия", 1972.

2. А. А н г о. Математика для электро- и радиоинженеров. М., "Наука", 1965.

3. А. М. З а е з д н ы й. Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи. Л., "Энергия", 1972.

A. Järvalt

Dynamic Error in Average Power Measurement

Summary

The problems encountered in power measurement are discussed.

The error in nonsinusoidal signals average power measurement have been estimated by the dynamic error of saw-toothed signals.

Фиг. 2. Зависимость динамической погрешности от относительной частоты при идентичных каналах тока и напряжения и при $\varphi = 0$.

1 – синусоидальные сигналы;
2 – последовательности прямоугольных импульсов;
3 – пилообразные сигналы.

Выводы.

1. При проектировании и налаживании ИПМ необходимо добиться идентичности каналов тока и напряжения, чтобы уменьшить зависимость динамической погрешности от разности фаз сигналов.

2. Динамическая погрешность измерения мощности несинусоидальных сигналов может быть оценена погрешностью измерения мощности типовых сигналов, которые содержат не больше гармоник, чем действительные сигналы.

Литература

1. В.Л. Бенин, В.У. Кизилов. Статические измерительные преобразователи электрической мощности. – М., "Энергия", 1972.
2. А. Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. М., "Наука", 1965.
3. А. И. [illegible]. Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи. Л., "Энергия", 1972.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 371 1974

УДК 621.317.725.083.92

Х.И. Мяги, Э.А. Рюстерн

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПОВЕРКИ ЦИФРОВЫХ ВОЛЬТМЕТРОВ

Повышение требований к поверке цифровых вольтметров (ЦВ) постоянного тока по систематическим погрешностям и характеристикам флюктуации существенно увеличит трудоемкость поверочной процедуры. Выполнение этой процедуры с помощью существующих в настоящее время образцовых приборов с ручной регулировкой требует от оператора выполнения большого количества манипуляций, таких как настройка контрольного оборудования на нужный выходной параметр, проверка стабильности измерительного сигнала, визуальная оценка погрешности поверяемого прибора во всех поверяемых точках и т.д., а также таких операций, как запись данных, выполнение трудоёмких расчётов над данными для определения характеристик погрешности и заполнение сопровождающих документов.

Производительность труда при выполнении описанной трудоемкой процедуры поверки остаётся низкой. Вся процедура требует от оператора постоянного напряжённого внимания, что приведет к быстрому утомлению и из-за этого ещё большему снижению производительности труда и увеличению влияния субъективных факторов на результаты поверки.

Решением проблемы является создание и внедрение автоматических систем контроля (АСК) параметров ЦВ. Применение АСК резко снижает требования к квалификации оператора, значительно сокращает время поверки, повышает ее качество и эффективность и уменьшает влияние субъективных факторов на результаты поверки. Минимизация числа ручных манипуляций и сокращение времени процедуры поверки - основные критерии при создании АСК.

АСК параметров ЦВ можно разделить на АСК с применением программного устройства и АСК с применением универсальной электронной цифровой вычислительной машины (ЭЦВМ).

АСК с применением программного устройства представляет собою комплекс аппаратуры поверки с программным управлением, который полностью находится на рабочем месте оператора. Программы, соответствующие отдельным операциям, заложены в структуру программного устройства, причем переход от одной операции к другой осуществляется оператором. Перечень различных операций поверки у АСК такого типа небольшой, т.е. система является специализированной, рассчитанной на узкий класс операций поверки.

АСК с применением центральной ЭЦВМ является универсальной системой, позволяющей одновременно выполнить поверку различного типа измерительных приборов по различным программам операторами, работающими на различных рабочих местах. На рабочих местах операторов в такой АСК предусмотрен минимум аппаратуры; калибраторы измеряемой величины (например, напряжения) и устройство связи с ЭЦВМ. Управление процедурой поверки и выполнение всех необходимых вычислений осуществляется автоматически по программам, хранимым в памяти ЭЦВМ. Перечень различных процедур поверки большой и ограничивается лишь объемом памяти машины.

Ниже рассматриваются некоторые аспекты создания АСК параметров ЦВ с применением программного устройства.

В основу построения программируемого устройства заложен интегрирующий метод поверки ЦВ. Метод состоит в том, что известному входному напряжению, подаваемому на вход ЦВ от калибратора, суммируется ступенчато изменяющееся дополнительное напряжение, величина которого выражается формулой (I).

$$U_{доп.i} = U_0\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{M} - \frac{1}{2M}\right), \qquad (I)$$

где U_0 – напряжение, равное единице квантования прибора;

M – количество ступеней (целесообразно выбирать M = 5, IO, 20);

i – порядковый номер ступени.

Из формулы следует, что среднее значение дополнительного напряжения за все М измерений равно нулю, поэтому оно не влияет на усредненный результат измерения. Разрешающая способность поверки увеличивается до значения порядка $\frac{U_0}{2M}$.

Данный метод удобен при автоматической поверке систематической погрешности ЦВ или изменения его показаний, так как он позволяет принудительно подавать контрольное напряжение на вход поверяемого прибора и не требует регулировки входного напряжения ЦВ, как это производится при других методах поверки. Также упрощается обработка результатов измерения. Если использовать интегрирующий метод поверки, можно при применении только действий сложения и вычитания построить арифметическое устройство (АУ) для обработки результатов поверки, что намного упрощает аппаратуру. АУ определяет систематическую составляющую погрешности, согласно формуле (2).

$$\bar{\Delta}_{сист.} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(A_i - N), \qquad (2)$$

где М – IO (IOO);

A_i – показание поверяемого прибора,

N – значение эталонного напряжения.

Случайная составляющая погрешности (флюктуации) определяется согласно формуле (3).

$$\bar{\Delta}_{случ.} = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}\left|\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(\Delta_i - \bar{\Delta}_{сист.})\right|, \qquad (3)$$

где

L = IO,

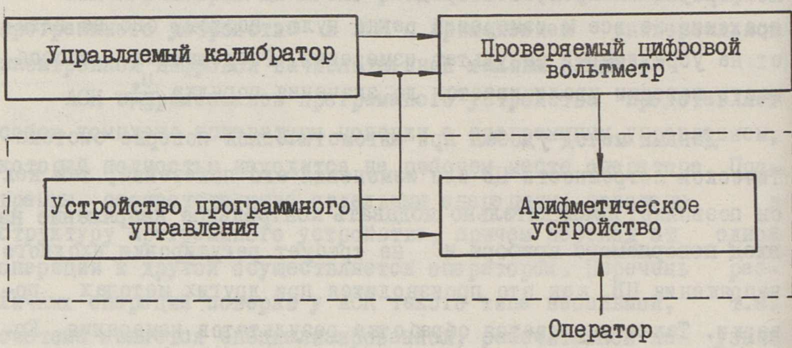
M = IO,

$\Delta_i = A_i - N$.

$\bar{\Delta}_{сист.}$ – определяется по формуле (2) для систематической составляющей при М = IOO.

Блок-схема АСК с программным устройством приведена на фиг. (I).

Калибратор, используемый в АСК с применением программных устройств, должен быть дистанционно управляемый. Про-



Фиг. 1. Блок-схема устройства автоматической поверки.

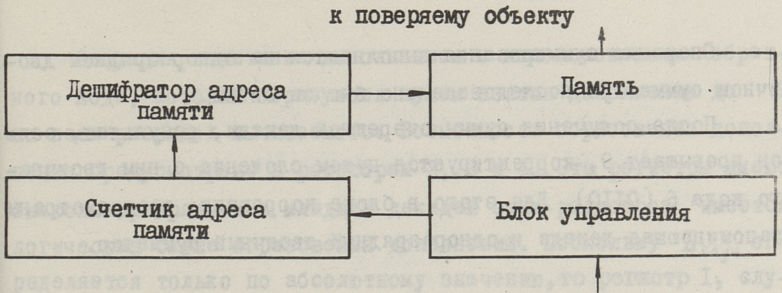
граммное устройство кроме цифровой памяти значений контрольных точек должно вырабатывать сигналы ступенчатого сдвига выходного напряжения калибратора. Блок-схема программного устройства приведена на фиг. (2).

АСК с программным устройством имеет в своем составе АУ для выполнения вычислений, связанных с определением систематической и случайной составляющих погрешности (по формулам (2) и (3) соответственно).

ЦВ вырабатывают результат измерения в двоично-десятичной системе кодирования с весовыми коэффициентами 8-4-2-I. При этом разрядность кода не превышает шести полных плюс один неполный десятичный разряд. Время выдачи очередного показания ЦВ равно IO - 20 мс. Следовательно, требования по быстродействию АУ весьма низки. Программное устройство является автономным блоком, с которым оснащаются рабочие места операторов. Поэтому в качестве основных критерий при создании как АСК в целом, так и АУ следует выбрать простоту обращения и минимум затрат на аппаратуру.

Предъявленным выше требованиям удовлетворяет АУ последовательного действия, выполняющее операции сложения и вычитания над двоично-десятичными числами кода 8-4-2-I. Блок-схема такого АУ представлена на фиг. 3.

В его состав входят четыре сдвигающих регистра, одноразрядный двоичный сумматор с запоминанием переноса, блок



Фиг. 2. Блок-схема программного устройства.

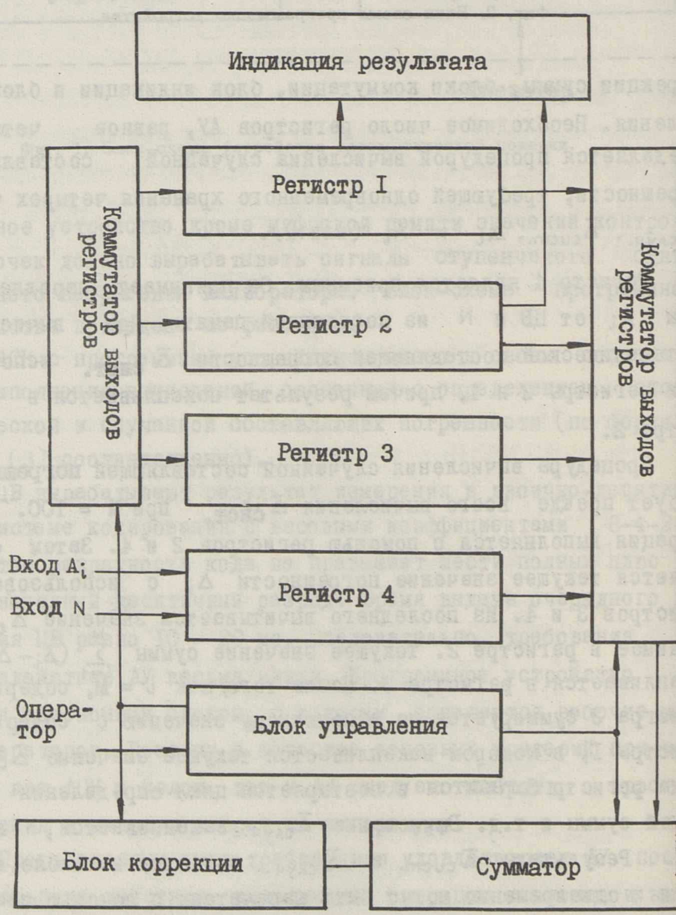
коррекции суммы, блоки коммутации, блок индикации и блок управления. Необходимое число регистров АУ, равное четырем, определяется процедурой вычисления случайной составляющей погрешности, требующей одновременного хранения четырех чисел ($\bar{\Delta}_{случ.}$, $\bar{\Delta}_{сист.}$, Δ_i и A_i (или N)).

Регистр 4 является приемным. Он принимает параллельные коды A_i от ЦВ и N из постоянной памяти. При вычислении систематической составляющей погрешности $\bar{\Delta}_{сист.}$ используются регистры 2 и 4, причем результат накапливается в регистре 2.

Процедура вычисления случайной составляющей погрешности требует прежде всего вычисления $\bar{\Delta}_{сист.}$ при $M = 100$. Эта операция выполняется с помощью регистров 2 и 4. Затем определяется текущее значение погрешности Δ_i с использованием регистров 3 и 4. Из последнего вычитывается значение $\bar{\Delta}_{сист.}$, хранимое в регистре 2. Текущее значение суммы $\sum_{i=1}^{M}(\Delta_i - \bar{\Delta}_{сист.})$ накапливается в регистре 3. После того, как $i = M$, содержимое регистра 3 суммируется по абсолютному значению с содержимым регистра I, в котором накапливается текущее значение $\bar{\Delta}_{случ.}$. Тогда регистр 3 гасится и повторяется цикл определения следующей суммы и т.д. Вычисление $\bar{\Delta}_{случ.}$ заканчивается, когда $j = L$. Результаты $\bar{\Delta}_{сист.}$ и $\bar{\Delta}_{случ.}$ выдаются на табло индикации и одновременно могут быть напечатаны с помощью печатающего устройства.

Операция суммирования выполняется на одноразрядном двоичном сумматоре последовательно бит за битом.

После получения суммы очередной декады, результат, если он превышает 9, корректируется путем сложения с ним двоичного кода 6 (0110). Для этого в блоке коррекции предусмотрены запоминающая декада и одноразрядный двоичный сумматор.



Фиг. 3. Блок-схема арифметического устройства.

Операция вычитания выполняется с использованием обратного кода, который образуется путем взятия дополнения до 9 во всех разрядах вычитаемого. Возможность образования дополнения предусмотрена в регистрах 2, 3 и 4. Эти регистры имеют знаковые разряды и в младших декадах этих регистров имеется логическая схема образования дополнений. Поскольку $\bar{\Delta}_{случ.}$ определяется только по абсолютному значению, то регистр I, служащий для её хранения, не содержит указанных средств. M и L выбираются кратными IO. Тем самым операция деления результата суммирования на M и L сводится к сдвигу запятой вправо на соответствующее число разрядов.

Количество разрядов в регистрах выбрано равным семи полным десятичным разрядам. Поскольку в процессе вычислений происходит накопление сумм погрешностей, а не сумм показаний ЦВ, то опасности переполнения регистров не возникает.

Блоки коммутации входов и выходов регистров обеспечивают присоединение к сумматору только той пары регистров, которая участвует в суммировании в данной процедуре.

Блок управления вырабатывает все последовательности сигналов, необходимых для автоматического выполнения АУ описанных выше процедур.

Блок программного управления с АУ построен на микросхемах и помещен в корпус с размерами I20x480x420 мм.

Литература

I. Государственная система обеспечения единства измерений. Организация и порядок проведения государственных испытаний средств измерений. ГОСТ 8.00I-7I. М., I97I.

2. H. Schmid. BCD: Logic of many uses, Electronic Design, No 13, 1973, pp. 90-95.

3. H. Schmid. BCD multiplication, Electronic Design, No 14, 1973, pp. 62-69.

H. Mägi, E. Rüstern

Automation of Digital Voltmeter Testing

Summary

Some problems of designing automatic systems for testing digital voltmeters in their production process have been discussed. A system consisting of a programmable unit and arithmetic unit has been described in more detail.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 371 1974

УДК 621.317.39:532.137

Б.И. Гордон, Ю.К. Реммель, Л.К. Эйнер

ПРИБЛИЖЁННАЯ ТЕОРИЯ Н-ОБРАЗНОГО КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДАТЧИКА

В теории низкочастотных колебательных вискозиметров колебательный датчик описывается при помощи механической модели с одной степенью свободы, состоящей из сосредоточенных масс и распределённых упругих элементов. Малость перемещений воспринимающего элемента (зонда) датчика в большинстве случаев позволяет ограничиться анализом линеаризованного уравнения одномерного движения колебательного преобразователя [I, 2, 3].

Диапазон измерения величины $\eta\rho$ (η – динамическая вязкость, ρ – плотность измеряемой жидкости) колебательным датчиком определяется свойствами механического колебательного преобразователя, которые в использованном в [2] изложении выражаются произведением

$$\omega_0 M_0^2 S^{-2},$$

где ω_0 – собственная частота ненагруженного преобразователя;

M_0 – масса подвижных частей колебательной системы;

S – эффективная рабочая поверхность зонда колебательной системы.

Чувствительность преобразователя зависит также от добротности колебательной системы и увеличивается с повышением добротности.

Всеобщим недостатком низкочастотных колебательных вискозиметров обычной конструкции [I, 5, 6] является то, что они практически негерметизируемы, то есть герметизация связана со слишком высокими издержками для приборов широкого применения. Также затруднено измерение малых вязкостей колебательным методом, так как это предполагает создание датчика, который характеризуется малым отношением M_0/S и низкой собственной частотой колебательной системы. Одновременно требуется относительно высокое и стабильное значение добротности системы. Поэтому превысить метрологические показатели приборов, описанных в [I, 5], весьма трудно.

Отмеченные выше недостатки колебательных вискозиметров в большей мере могут быть устранены применением колебательного датчика принципиально новой конструкции - датчика с Н-образным плоским резонатором [7].

Н-образный плоский резонатор (плоский твинтор) представляет собой сдвоенный камертон несколько своеобразной конструкции (фиг. 1). Две уравновешенные плоские пластинки соединены между собой упругой перемычкой. Оси, на которых подвешивается резонатор, проходят через центры тяжести пластинок, так что пластинки полностью уравновешены. Упругий поперечный стержень резонатора механически соединяет обе пластинки между собой в плоскости вращательных колебаний пластинок.

Такая конструкция резонатора сохраняет в большей мере все положительные характеристики массивных и стержневых твинторов, применяемых в новейших устройствах тональной телеметрии [8].

Рассмотрим малоамплитудное колебательное движение Н-образного резонатора в вязкой (ньютоновской) жидкости при условии (фиг. 2), что

$$a_{макс} \ll l, \quad l \leq R, \tag{I}$$

где $a_{макс}$ - максимальная амплитуда смещения торцевых элементов пластинки.

Относительное смещение осей качания пластинок при выполнении условия (I) определяется зависимостью

$$\frac{\Delta l}{l} = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \tag{2}$$

где α - угол поворота пластинки в радианах.

Если упругая перемычка резонатора имеет длину 5 - 20 мм, то α практически не превышает 0,01 - 0,02 рад. Тогда $\Delta l/l$ имеет порядок величины 10^{-4} и необходимая подвижность ножек резонатора легко обеспечивается тонкими амортизирующими прокладками или просто технологическим люфтом в опорах.

При колебании резонатора в жидкости уравнение моментов для каждой пластинки можно записать в общеизвестном виде

$$(J + \Delta J)\ddot{\varphi} + (B + \Delta B)\dot{\varphi} + C\varphi = M(t), \tag{3}$$

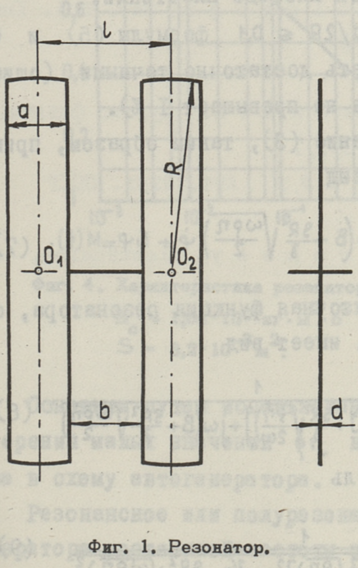
где J - момент инерции пластинки относительно опорной точки O_1 или O_2;

B - затухание;

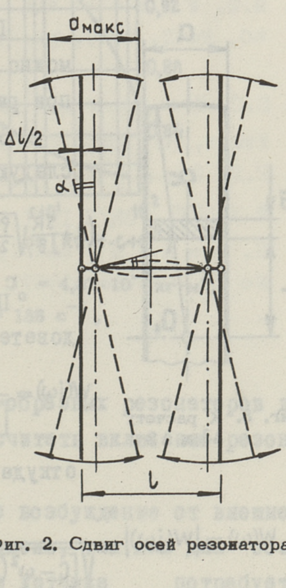
C - жесткость упругой перемычки;

φ - угол поворота пластинки;

ΔJ, ΔB - соответственно, дополнительный момент инерции и затухание из-за взаимного воздействия резонатора и жидкости.



Фиг. 1. Резонатор.



Фиг. 2. Сдвиг осей резонатора.

Так как механическое комплексное сопротивление жидкости колебательному движению пластинчатого зонда в своей плоскости равно (на единицу площади боковой поверхности пластинки) [3]:

$$z_1 = \sqrt{\frac{\omega\rho\eta}{2}}\,(1+j), \tag{4}$$

то дополнительный момент приближенно равен (фиг. 3)

$$\Delta J = 2a\sqrt{\frac{\rho\eta}{2\omega}}\int_{-R}^{R} r^2 dr = \frac{SR^2}{3}\sqrt{\frac{\rho\eta}{2\omega}} \tag{5}$$

и дополнительное затухание

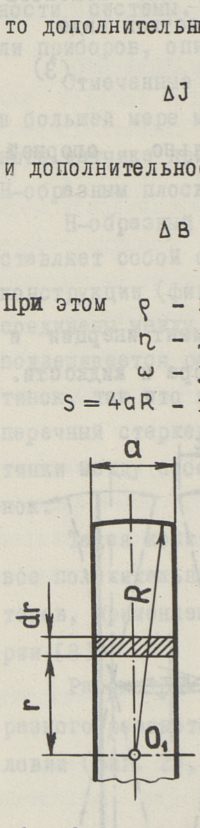
$$\Delta B - 2a\sqrt{\frac{\omega\rho\eta}{2}}\int_{-R}^{R} r^2 dr = \frac{SR^2}{3}\sqrt{\frac{\rho\eta}{2\omega}}. \tag{6}$$

При этом ρ – плотность жидкости;

η – динамическая вязкость жидкости;

ω – угловая частота колебаний; $j = \sqrt{-1}$;

$S = 4aR$ – величина боковой площади пластинки.



Фиг. 3. К расчету ΔJ и ΔB.

При $a/2R \leqslant 0{,}1$ формулы (5) и (6) можно считать достаточно точными (ошибка при расчёте не превышает I %).

Уравнение (3), таким образом, примет следующий вид

$$\left(J+\frac{SR^2}{3}\sqrt{\frac{\rho\eta}{2\omega}}\right)\ddot{\varphi}+\left(B+\frac{SR^2}{3}\sqrt{\frac{\omega\rho\eta}{2}}\right)\dot{\varphi}+C\varphi=M(t). \tag{7}$$

Передаточная функция резонатора, следовательно, имеет вид

$$W(j\omega)=\frac{1}{\left[C-\omega^2\left(J+\frac{SR^2}{3}\sqrt{\frac{\rho\eta}{2\omega}}\right)\right]+j\omega\left(B+\frac{SR^2}{3}\sqrt{\frac{\omega\rho\eta}{2}}\right)}, \tag{8}$$

откуда модуль

$$W(\omega)=\left|W(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{\left[C-\omega^2\left(J+\frac{SR^2}{3}\sqrt{\frac{\rho\eta}{2\omega}}\right)\right]^2+\omega^2\left(B+\frac{SR^2}{3}\sqrt{\frac{\omega\rho\eta}{2}}\right)^2}} \tag{9}$$

и фаза

$$\psi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\omega\left(B + \frac{SR^2}{3}\sqrt{\frac{\omega\rho\eta}{2}}\right)}{C - \omega^2\left(J + \frac{SR^2}{3}\sqrt{\frac{\rho\eta}{2\omega}}\right)}\right). \quad (10)$$

При резонансных колебаниях в воздухе

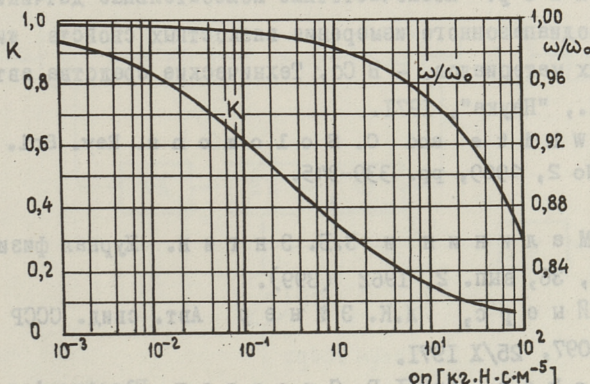
$$W(\omega)_{\rho\eta=0} = \frac{1}{\omega B_o}; \quad B_o = B_{\rho\eta=0}; \quad J_o = J_{\rho\eta=0}; \quad \omega_o = \omega_{\rho\eta=0}.$$

При резонансных колебаниях в ньютоновской жидкости, то есть при

$$C - \omega^2\left(J + \frac{SR^2}{3}\sqrt{\frac{\rho\eta}{2\omega}}\right) = 0 \quad (11)$$

из (9) определяются приведенные амплитудно-частотные характеристики резонатора (фиг. 4):

$$K(\omega, \rho\eta) = \frac{W(\omega)}{W(\omega)_{\rho\eta=0}} = \frac{1}{1 + \frac{SR^2}{3B_o}\sqrt{\frac{\omega\rho\eta}{2}}}. \quad (12)$$



Фиг. 4. Характеристика резонатора при $J_o = 4{,}37 \cdot 10^{-6}$ кг·м^2, $B_o = 1{,}04 \cdot 10^{-5}$ кг·м^2·с$^{-1}$, $\omega_o = 138$ с$^{-1}$, $S = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ м^2.

Основным путем использования Н-образных резонаторов для измерения малых значений $\rho\eta$ надо считать включение резонатора в схему автогенератора.

Резонансное или полурезонансное возбуждение от внешнего генератора постоянной частоты затруднено, так как для обеспечения необходимой чувствительности датчика потребуется стабильность генератора порядка 0,01 % (собственная частота резонатора при практически приемлемых его размерах лежит в пределах от 10 до 100 Гц).

Л и т е р а т у р а

1. А.Н. С о л о в ь е в, А.Б. К а п л у н. Вибрационный метод измерения вязкости жидкостей. Новосибирск, "Наука", 1970.
2. В.Н. К р у т и н, И.Б. С м и р н и ц к и й. Акустический журнал, т. XII, № 1, 1966.
3. Л.Э й н е р. О расчёте нагрузки и применимости низкочастотных колебательных датчиков вязкости. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", сер. А, № 234, 1966, с. 33.
4. Л. Э й н е р. Низкочастотные колебательные датчики для широкодиапазонного измерения вязкостных свойств жидкообразных материалов. - В Сб. Технические средства автоматики, М., "Наука", 1971.
5. M.S. W h i t e and C. S o l o m o n s. Rev. Sci. Instr., 40, No 2, 1969, pp. 339-345.
6. Ю.С. М а л и н и н и З.Б. Э н т и н. Журнал физической химии, 36, вып. 2, 1962 (399).
7. Р.Р. Й ы е р с, Л.К. Э й н е р Авт. свид. СССР № 315097, 25/X 1971.
8. H. B a k e n and I.R. C r e s s e y. Electronics, 40, No 20, October 1967.

B. Gordon, Ü. Remmel, L. Einer

Approximated Theory of H-type Vibration Pick-up

Summary

This article deals with the construction and the characteristics of the H-type resonator (twintor) for measuring the viscosity of liquids. It is shown that the main mode to operate with H-type resonator for measuring the small values of the viscosity is to switch it into a selfmaintained circuit.

стабильность генератора порядка 0,01 % (собственная частота резонатора при практически приемлемых его размерах лежит в пределах от 10 до 100 Гц).

Л и т е р а т у р а

1. А.Н. С о л о в ь е в, А.Б. К а п л у н. Вибрационный метод измерения вязкости жидкостей. Новосибирск, "Наука", 1970.
2. В.Н. К [illegible] журнал, т. XII, № 1, 1966.
3. Л. Э й н е р. О расчёте нагрузки и применимости низкочастотных колебательных датчиков вязкости. – "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", сер. А, № 234, 1966, с. 83.
4. Л. Э й н е р. Низкочастотные колебательные датчики для широкодиапазонного измерения вязкостных свойств жидкостей разных материалов. – В сб. Технические средства автоматики, М., "Наука", 1971.
5. M.S. W h i t e and C. E o l o m o n s. Rev. Sci. Instr. 40, No 2, 1969, pp. 339-345.
6. Ю.С. М е л ь н и ч е н к о и З.Б. Э й т и н. Журнал физической химии, 36, вып. 2, 1962 (399).
7. Р.Р. Я в е р с, Л.К. Э й н е р. Авт. свид. СССР № 315097, 25/X 1971.
8. H. B a k e n and I.R. C r e s s e y. Electronics, 40, No 20, October 1967.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

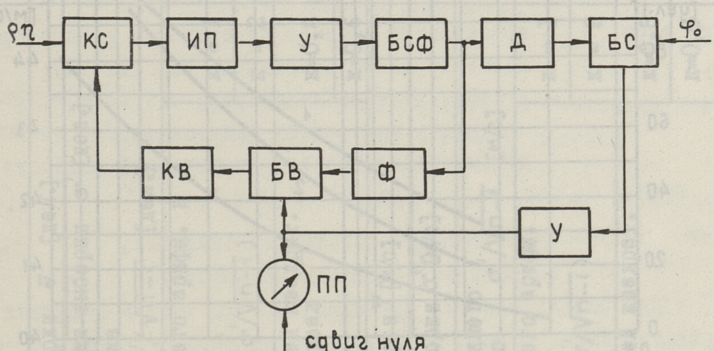
№ 371 1974

УДК 621.317.39:532.137

Б.И. Гордон, Ю.К. Реммель, Л.К. Эйнер

ВИСКОЗИМЕТР С Н-ОБРАЗНЫМ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМ ДАТЧИКОМ

Точная калибровка. Калибровка опытного вискозиметра с Н-образным колебательным датчиком [1, 2], собранного по схеме фиг. 1, проводилась при помощи пяти калибровочных жидкостей-смесей авиабензина и машинного масла "Индустриальное-12" разной концентрации.



Фиг. 1. Функциональная схема вискозиметра:

КС - колебательная система;
ИП - индуктивный преобразователь;
У - усилитель;
БСФ - блок сдвига фазы;
Д - детектор;
БС - блок сравнения;
Ф - формирователь;
БВ - блок возбуждения;
КВ - катушка возбуждения;
ПП - показывающий прибор.

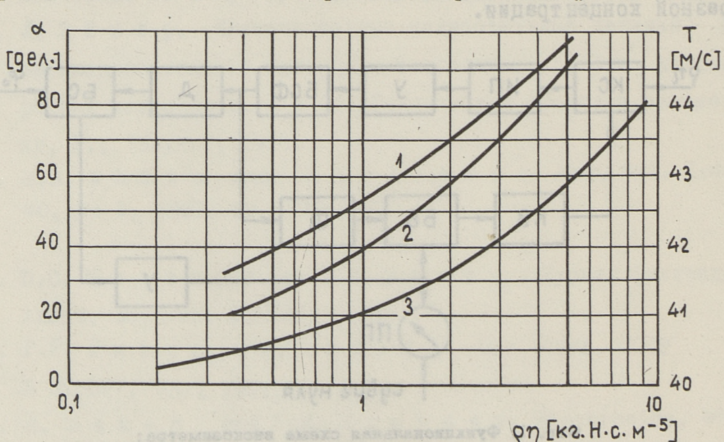
Для получения одной точки кривой $\alpha = f(\rho\eta)$ и одной точки кривой $T = f(\rho\eta)$, при равных внешних условиях, следующая серия из трех опытов с одной и той же жидкостью проводилась одновременно:

1. Динамическая вязкость жидкости η измерялась вискозиметром Гэпплера, как средняя пяти измерений.

2. Измерением веса определенного объема жидкости на аналитических весах определялась плотность жидкости ρ .

3. Определялись отсчёт α по шкале калибруемого вискозиметра и значение периода колебаний T зонда на частотомере-хронометре Ф 599, соответствующие данному $\rho\eta$, как средние пяти измерений.

Повторением опытов со всеми калибровочными жидкостями строились кривые $\alpha = f(\rho\eta)$ и $T = f(\rho\eta)$. Для проверки повторяемости измерений было проведено по 10 серий измерений в каждой точке кривой $\alpha = f(\rho\eta)$ и по 15 серий измерений в каждой точке кривой $T = f(\rho\eta)$. Результаты обработки данных такого эксперимента методом малых выборок [3] для каждой точки приведены в таблице 1. По полученным результатам построены окончательные калибровочные кривые на фиг. 2.



Фиг. 2. Калибровочные кривые вискозиметра: 1 – $\alpha = f(\rho\eta)$ по ПП; 2 – $T = f(\rho\eta)$ по частотомеру; 3 – $T = f(\rho\eta)$ расчетная по формуле (19).

Как следует из вышесказанного, описанный метод калибровки довольно трудоемок (в данном случае было проведено 75 серий измерений). Поэтому была сделана попытка разработать приближенную методику калибровки меньшей трудоемкости, подходящую для ускоренной калибровки колебательных вискозиметров.

<u>Приближенная калибровка</u>. Линеаризованное уравнение одномерного движения нагруженного низкочастотного измерительного резонатора имеет вид [2]

Т а б л и ц а I

	$\rho\eta$ [кг. Н. с. м$^{-5}$]		0,35	0,75	I,I5	2,70	5,50
Измерение α по шкале вискозиметра	Среднее арифметическое выборки $\bar{\alpha}$ [дел.]		3I,I5	45,8I	55,I2	77,43	97,93
	Средняя квадратическая ошибка выборки σ' [дел.]		0,90	0,6I	0,70	I,28	I,29
	Средняя квадратическая ошибка среднего арифметического $\sigma'/\sqrt{n-1}$ [дел.]		0,30	0,20	0,23	0,43	0,43
	Вероятность попадания среднего арифм. в доверительный интервал $P(\bar{\alpha}-k\sigma'/\sqrt{n-1}<\alpha<\bar{\alpha}+k\sigma'/\sqrt{n-1})$	к = I	0,657	0,657	0,657	0,657	0,657
		к = 2	0,923	0,923	0,923	0,923	0,923
	Вероятность попадания средней квадрат. ошибки в доверительный интервал $P(k\sigma'<\sigma<\sigma'/k)$	к=0,8	0,565	0,565	0,565	0,565	0,565
		к=0,6	0,9I9	0,9I9	0,9I9	0,9I9	0,9I9
Измерение периода колебаний Т	Среднее арифметическое выборки $\bar{T}$ [м/с]		40,69	4I,08	4I,38	42,I2	43,I8
	Средняя квадрат. ошибка выборки σ' [м/с]		0,0687	0,0550	0,05I6	0,04I8	0,07I0
	Средняя квадрат. ошибка среднего арифметического $\sigma'/\sqrt{n-1}$ [м/с]		0,0I84	0,0I47	0,0I38	0,0II2	0,0I98
	Вероятность попадания среднего арифм. в доверит. интервал $P(\bar{T}-k\sigma'/\sqrt{n-1}<T<\bar{T}+k\sigma'/\sqrt{n-1})$	к = I	0,666	0,666	0,666	0,666	0,666
		к = 2	0,935	0,935	0,935	0,935	0,935
	Вероятность попадания средней квадрат. ошибки в доверит. интервал $P(k\sigma'<\sigma<\sigma'/k)$	к=0,8	0,733	0,733	0,733	0,733	0,733
		к=0,6	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980

$$(J_0+\Delta J)\ddot{\varphi}+(B_0+\Delta B)\dot{\varphi}+C\varphi = m(t), \qquad (I)$$

где J_0 - момент инерции пластинки резонатора относительно опорной точки[I];
B_0 - собственное затухание;
C - жесткость упругой перемычки;
$m(t)$ - момент, приложенный к пластинке;
$\Delta J, \Delta B$ - соответственно, дополнительный момент инерции и затухание из-за взаимного воздействия резонатора и жидкости.

В случае резонанса (лишь этот режим используется в данном вискозиметре) уравнение (I) преобразуется в

$$(B_0+\Delta B)\dot{\varphi} = m(t), \qquad (2)$$

где суммарное затухание

$$B = B_0+\Delta B = B_0 + S\,\frac{R^2}{3}\sqrt{\frac{\omega\rho\eta}{2}}. \qquad (3)$$

при этом S - эффективная рабочая поверхность резонатора;
R - половина длины пластинки (см. фиг. 4);
ω - угловая частота колебаний;
ρ - плотность измеряемой жидкости;
η - динамическая вязкость измеряемой жидкости

и $m(t) = k\,i^2(t)$, (4)

где $i(t)$ - суммарный ток обмоток возбуждения;
k - коэффициент пропорциональности.

Для определенности предположим, что токи в обмотках возбуждения имеют форму, изображенную на фиг. 3. В первом приближении они описываются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= I_m(1+\sin\omega t) \\ i_2 &= I_m(1-\sin\omega t) \end{aligned}\right\}. \qquad (5)$$

Подставив уравнения (5) поочередно в (4), получим

$$\left.\begin{aligned} m_1(t) &= k i_1^2(t) = k I_m^2 (1+\sin\omega t)^2 \\ m_2(t) &= k i_2^2(t) = k I_m^2 (1-\sin\omega t)^2 \end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

Так как $m_1(t)$ и $m_2(t)$ противоположно направлены, то суммарный момент, действующий на резонатор, равен

$$m(t) = m_2(t) - m_1(t). \qquad (7)$$

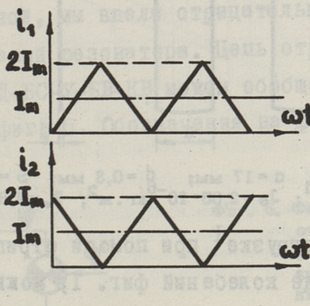
[I] Здесь и в дальнейшем индексом "О" обозначаем величину при колебании резонатора в воздухе.

Подставив в (7) значения из (6), получим

$$m(t) = 4kI_m^2 \sin\omega t. \qquad (8)$$

Приравняв уравнения (2) и (8), получим

$$B\cdot\dot{\varphi} = 4kI_m^2 \sin\omega t. \qquad (9)$$



Фиг. 3. Токи в обмотках возбуждения.

Проинтегрировав это уравнение при условии, что максимальное отклонение резонатора φ_m будет при $\omega t = \frac{\pi}{2}$, получим

$$B\varphi_m = \frac{4kI_m^2}{\omega}, \qquad (10)$$

откуда

$$I_m^2 = \frac{\varphi_m}{4k} B\omega, \qquad (11)$$

и, обозначив

$$k' = \frac{\varphi_m}{4k}, \qquad (12)$$

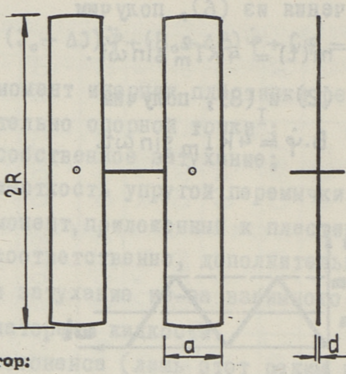
получим

$$I_m^2 = k' B\omega. \qquad (13)$$

Уравнение (13) действительно для нагруженного зонда. В случае колебаний зонда в воздухе получим

$$I_{mo}^2 = k'_o B_o \omega_o. \qquad (14)$$

Ввиду того, что амплитуда колебаний φ_m поддерживается по-



Фиг. 4. Резонатор:

$2R = 93{,}5$ мм; $a = 17$ мм; $d = 0{,}3$ мм; $S = 3{,}19 \cdot 10^3$ мм^2;
$\omega_0 = 158{,}3$ с$^{-1}$; $J_0 = 2{,}65 \cdot 10^{-6}$ кг.м^2; $B_0 = 4{,}82 \cdot 10^{-6}$ кг.м^2.с$^{-1}$.

стоянной при любой нагрузке[1] при помощи отрицательной обратной связи по амплитуде колебаний фиг. I, можно принять

$$k_0' = k'. \tag{I5}$$

Поделив (I3) на (I4), учитывая (I5), получаем

$$\bar{I}_m^2 = \frac{I_m^2}{I_{m0}^2} = \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{B}{B_0} = \bar{\omega}\bar{B}. \tag{I6}$$

Из уравнения (I6), учитывая (3), получаем

$$\bar{I}_m = \sqrt{\bar{\omega}\left(1 + \frac{SR^2}{3B_0}\sqrt{\frac{\omega\rho\eta}{2}}\right)}. \tag{I7}$$

Из [2] (уравнение (II)) при условии резонанса имеем

$$C - \omega^2\left(J_0 + \frac{SR^2}{3}\sqrt{\frac{\rho\eta}{2\omega}}\right) = 0. \tag{I8}$$

Отсюда, путем преобразований, получаем уравнение четвертой степени относительно ω

$$\omega^4 - \frac{K^2}{2}\rho\eta\omega^3 - 2\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4 = 0, \tag{I9}$$

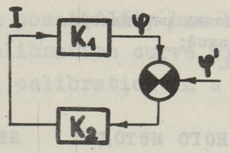
где $K = \dfrac{SR^2}{3J_0}$.

---

[1] Это утверждение справедливо в пределах, в которых коэффициент усиления цепи обратной связи достаточен для удержания амплитуды постоянной.

Таким образом, по (I7), используя (I9), можем довольно просто получить калибровочную кривую, аналогичную полученной экспериментально (фиг. 2).

Сравнение двух видов калибровки. Наш вискозиметр был реализован по схеме фиг. I. Для поддерживания амплитуды колебаний постоянной, мы ввели отрицательную обратную связь по амплитуде колебаний резонатора. Цепь отрицательной обратной связи ИЛ-У-БСФ-Д-БС-У-БВ-КВ можем обобщенно привести к виду, показанному на фиг. 5. Обозначения на фигуре:



Фиг. 5. Обобщенная схема отрицательной обратной связи по амплитуде колебаний резонатора.

I - ток возбуждения резонатора;

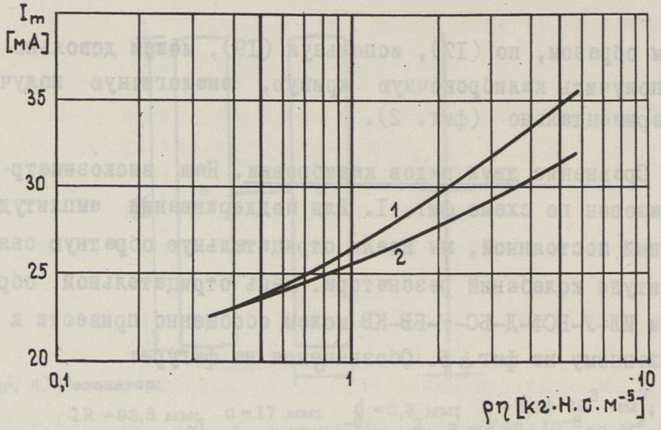
φ - амплитуда колебаний;

φ' - заданная амплитуда колебаний. При выводе формулы (I7) мы предположили, что амплитуда колебаний остается постоянной при всех значениях $\rho\eta$. В действительности это не так из-за конечности коэффициентов K_1 и K_2. Полученные по формуле (I7) значения токов $\bar{I}_m$ должны быть перемножены на поправочный коэффициент $\sqrt{\bar{\varphi}}$, где $\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\varphi_0}$.

Учитывая формулу (II) и фиг. 5, можем показать, что

$$\sqrt{\bar{\varphi}} = -\frac{\bar{I}_m}{2K_1K_2} + \sqrt{1 + \frac{1}{K_1K_2} + \left(\frac{\bar{I}_m}{2K_1K_2}\right)^2}. \qquad (20)$$

На фиг. 6 показаны калибровочные кривые, полученные экспериментально и расчетным путем, учитывая поправку $\sqrt{\bar{\varphi}}$. Несовпадение экспериментальной кривой относительно расчетной в конце шкалы не превышает I0 %. Кривые на фиг. 6 отличаются от кривой α на фиг. 2 лишь тем, что для получения α мы измеряли только часть тока возбуждения и смещали нуль показывающего прибора.



Фиг. 6. Кривые тока возбуждения резонатора:
1 – расчетная с поправкой;
2 – экспериментальная.

В итоге преимуществом приближенного метода является значительно меньшее число измерений. Измерению подлежат только B_o, ω_o, I_{mo}, K_1 и K_2; дополнительно нужны конструктивные параметры резонатора S, J_o и расчетные значения ω по уравнению (I9).

Литература

I. Л.К. Эйнер, Р.Р. Йыерс и Х.Э. Нурм. Авторское свидетельство № 298868, 2I/IУ I97I.

2. Б.И. Гордон, Ю.К. Реммель, Л.К. Эйнер. Приближенная теория Н-образного колебательного датчика. – (См. наст. сб., с. I03).

3. Т.А. Агекян. Основы теории ошибок для астрономов и физиков. – М., "Наука", I972.

B. Gordon, Ü. Remmel, L. Einer

Viscometer with H-type Vibration Pick-up

Summary

In this article the results of experimental calibration of the viscometer are given. The H-type vibration pick-up operates in self-maintained circuits and is enveloped with negative regeneration feedback by amplitude of oscillation.

A possibility has been shown for simplified estimate of the calibration curve with a view to make easier the experimental calibration in a viscometer of this type.

В итоге преимуществом приближенного метода является значительно меньшее число измерений. Измерению подлежат только B_0 , ω_0 , I_{m0}, K_1 и K_2 ; дополнительно нужны конструктивные параметры резонатора S , J_0 и расчетные значения ω по уравнению (19).

Литература

1. Л.К. Эйнер, Р.Р. Хмара и Х.Э. Нурм. Авторское свидетельство № 230083, 21/IV 1971.
2. Б.М. Гордон, Ю.К. Реммель, Л.К. Эйнер. Приближенная теория Н-образного колебательного датчика. – (См. наст. сб., с. 103).
3. Т.А. Агекян. Основы теории ошибок для астрономов и физиков. – М., "Наука", 1972.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 371 · 1974

УДК 621.373.431.1

С.А. Инютин, С.А. Сеппель

ТРАНЗИСТОРНЫЙ МУЛЬТИВИБРАТОР С ЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОГО МОДУЛИРОВАНИЯ, УПРАВЛЯЕМЫЙ В ЦЕПЯХ ЗАРЯДА КОНДЕНСАТОРОВ

Введение. В автоматике и измерительной технике широко применяются широтно-импульсные модуляторы (ШИМ) [1]. Распространенным видом электронного ШИМ является управляемый транзисторный мультивибратор.

Как правило, к ШИМ предъявляется требование линейности характеристики модулирования. Обычно это достигается применением сложных цепей управления, содержащих также активные элементы [2, 3]. Поэтому представляет интерес выявление более простых способов линеаризации характеристики модулирования, не приводящих к существенному усложнению схемы мультивибратора и осуществляемых с помощью минимального количества дополнительных элементов.

В [4, 5] предложен способ линеаризации, заключающийся в одновременном введении управляющего напряжения в цепи заряда и разряда конденсаторов мультивибратора. Способ принципиально простой, однако наиболее точная линеаризация характеристики модулирования достигается при низкоомных зарядных цепях конденсаторов мультивибратора. Это ведет к повышению требований к коэффициенту усиления транзисторов и снижению нагрузочной способности мультивибратора.

В данной работе проводится исследование мультивибратора, управляемого напряжением только в цепях заряда конденсаторов (в коллекторных цепях транзисторов) мультивибратора, причем линеаризация характеристики модулирования достигается выбором оптимального отношения между сопротивлением резисторов заряда и разряда конденсаторов.

Принцип работы управляемого мультивибратора. Принципиальная схема мультивибратора показана на фиг. I. Работа мультивибратора описывается следующими упрощенными уравнениями, в которых индексы I и 2 относятся соответственно к транзисторам TI и T2, а время t отсчитывается от момента запирания транзисторов:
напряжение база-эмиттер транзисторов

$$\begin{cases} u_{эб1} = (U + U_2)\, e^{-\frac{t}{\tau_р}} - U, \\ u_{эб2} = (U + U_1)\, e^{-\frac{t}{\tau_р}} - U; \end{cases} \qquad (I)$$

напряжение коллектор-эмиттер транзисторов

$$\begin{cases} u_{кэ1} = -(U + u)(1 - e^{-\frac{t}{\tau_з}}), \\ u_{кэ2} = -(U - u)(1 - e^{-\frac{t}{\tau_з}}), \end{cases} \qquad (2)$$

где U – напряжение питания мультивибратора;
u – напряжение управления мультивибратором;
U_1 и U_2 – напряжение на обкладках конденсаторов в моменты запирания транзисторов;
$\tau_р = R_р C$ и $\tau_з = R_з C$ – постоянные времени соответственно разряда и заряда конденсаторов.

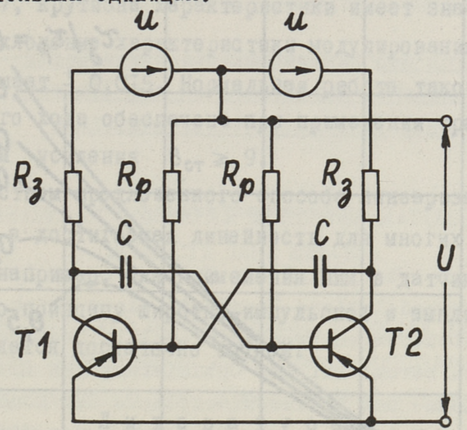
Из уравнений (I) и (2) можно вывести соотношения, определяющие длительность открытого состояния транзисторов:

$$\begin{cases} t_1 = \tau_р \ln \dfrac{2U + u - (U + u)\, e^{-\frac{t_2}{\tau_з}}}{U}, \\ t_2 = \tau_р \ln \dfrac{2U - u - (U - u)\, e^{-\frac{t_1}{\tau_з}}}{U}. \end{cases} \qquad (3)$$

Подстановкой t_1 и t_2 можно соотношения (3) привести к виду

$$\begin{cases} t_1 = \tau_р \ln \left\{ 2 + x - \dfrac{1 + x}{\left[2 - x - (1 - x)\, e^{-\frac{t_1}{\tau_з}}\right]^{\frac{\tau_р}{\tau_з}}} \right\}, \\ t_2 = \tau_р \ln \left\{ 2 - x - \dfrac{1 - x}{\left[2 + x - (1 + x)\, e^{-\frac{t_2}{\tau_з}}\right]^{\frac{\tau_р}{\tau_з}}} \right\}, \end{cases} \qquad (4)$$

где $x = u/U$ выражает напряжение управления мультивибратором в относительных единицах.



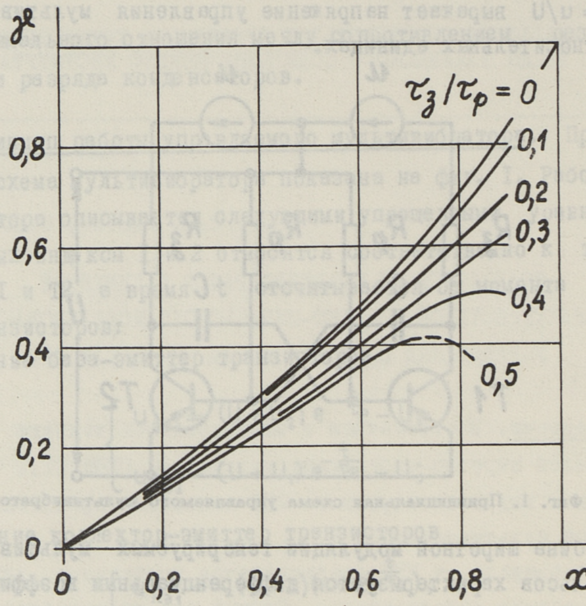
Фиг. 1. Принципиальная схема управляемого мультивибратора.

Глубина широтной модуляции генерируемых мультивибратором импульсов характеризуется дифференциальным коэффициентом заполнения

$$\gamma = \frac{t_1 - t_2}{t_1 + t_2}. \tag{5}$$

Зависимость $\gamma = f(x)$ является характеристикой модулирования ШИМ. Очевидно линейность этой характеристики в значительной степени зависит от отношения $\tau_з/\tau_р = R_з/R_р$, но ввиду трансцендентности уравнений (4) анализ зависимости линейности характеристики модулирования ШИМ от параметра $\tau_з/\tau_р$ в общем виде не представляется возможным. Поэтому дальнейший анализ был проведен путем расчета на ЭВМ семейства характеристик $\gamma = f(x)$ при различных значениях параметра $\tau_з/\tau_р$.

Расчет характеристик модулирования. При численном расчете характеристик модулирования использован метод простых итераций, причем расчеты сходятся примерно за IO итераций с точностью до 0,00I. Изменения аргумента x и параметра $\tau_з/\tau_р$ заданы в пределах от 0 – I. Расчеты проведены на ЭВМ "Наири-С" по программе в языке АП. Результаты расчетов представлены в виде графиков на фиг. 2.



Фиг. 2. Характеристики модулирования управляемого мультивибратора.

Выводы и заключение. Анализ графиков на фиг. 2 показывает, что, варьируя значением параметра $\tau_з/\tau_р$, можем получить характеристики модулирования с различной кривизной и крутизной. Идеально линейных характеристик принципиально получить невозможно. Наиболее линейной является характеристика модулирования при глубине модуляции до $x = 0,6$, если параметр $\tau_з/\tau_р$ находится в пределах 0,25 - 0,3. При этом отклонения характеристики модулирования от линейной не превышают $\pm$ 0,03.

Исходя из результатов теоретического анализа были проведены также экспериментальные исследования, которые подтвердили правильность теоретических выводов. Некоторое расхождение теоретических и экспериментальных результатов вызвано реальными характеристиками транзисторов, в первую очередь остаточными падениями напряжений на переходах транзисторов. На базе экспериментальных результатов можно считать оптимальным значением параметра $\tau_з/\tau_р = 0,2$. При этом линейный участок характеристики модулирования доходит до глубины модуляции $\gamma = 0{,}7$, крутизна характеристики имеет значение $d\gamma/dx = 0{,}71$, а отклонение характеристики модулирования от линейной не превышает $\pm 0{,}015$. Нормальная работа такого ШИМ в режиме холостого хода обеспечена при применении транзисторов с коэффициентом усиления $B_{ст} \geqslant 9$.

Достоинством предложенного способа линеаризации является простота, а достигаемая линейность для многих практических целей, например, для применения ШИМ в датчиках мощности, работающих по принципу широтно-импульсной и амплитудной модуляции, является достаточно точной.

Литература

1. В.И. Анисимов, А.П. Голубев. Транзисторные модуляторы. - М., "Энергия", 1964.
2. В.Л. Бенин, В.У. Кизилов. Статические измерительные преобразователи электрической мощности. - Библиотека по автоматике. М., "Энергия", 1972.
3. С. Исибаси, И. Нитта. Преобразователи мощности в напряжение постоянного тока и мощности в импульсную частоту. "Кэйсоку то Сэйгё", 1966, т. 5, № 6.
4. С.А. Сеппель. Управляемый мультивибратор на двух транзисторах с линейной характеристикой модулирования. - Сборник научно-технических статей ПТНИИ "Технические средства и системы автоматики", вып. 10. М., "Энергия", 1969.
5. С.А. Сеппель, Ю.А. Тислер, Ю.А. Унт. Широтно-импульсный модулятор. Авт. свид. № 357665, кл. Н 03к 3/281 от 7/VIII 1972.

S. Injutin, S. Seppel

Durch den Ladestromkreis steuerbarer Transistor-Multivibrator mit linearer Pulslängenmodulations-Kennlinie

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein Verfahren zur Linearisierung der Pulslängenmodulations-Kennlinie eines durch den Ladestromkreis steuerbaren Transistor-Multivibrators vorgestellt. Das Verfahren beruht auf der Optimierung des Größenverhältnisses der Lade- und Entladewiderstände der Kondensatoren.

Es werden Unterlagen zur Berechnung der Widerstände gegeben und Linearitätsabweichungen der Modulationskennlinie untersucht.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 371 1974

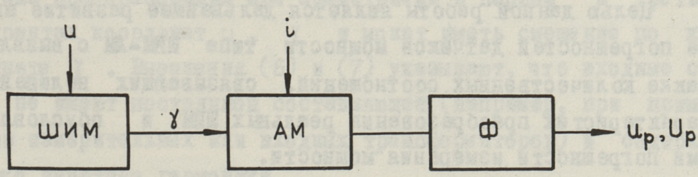
УДК 621.317.784 + 621.376.54

С.А. Сеппель

АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЯ ДАТЧИКОВ МОЩНОСТИ ТИПА ШИМ-АМ

<u>Введение</u>. Датчики электрической мощности типа ШИМ-АМ, осуществляющие перемножение измеряемого напряжения и тока по принципу широтно-импульсной и амплитудной модуляции, получили широкое распространение.

Структурная схема датчиков мощности типа ШИМ-АМ приведена на фиг. I. Входными сигналами датчика являются мгновенные значения измеряемого напряжения u и тока i. В широтно-импульсном модуляторе ШИМ происходит преобразование входного сигнала u в последовательность импульсов, характеризуемую коэффициентом γ, которым чаще всего является длительность или коэффициент заполнения генерируемых ШИМ импульсов.



Фиг. 1. Структурная схема датчика мощности типа ШИМ-АМ.

В данной статье подвергается анализу работа так называемых датчиков мгновенной мощности, у которых **генерируемые** ШИМ импульсы имеют повышенную частоту повторения, а коэффициент γ пропорционален мгновенному значению напряжения u. Основным достоинством таких датчиков является то, что они измеряют мощность правильно также при несинусоидальных входных сигналах u и i (при нелинейном потребителе мощности).

В амплитудном модуляторе АМ второй входной сигнал i умножается на коэффициент γ. Из выходного сигнала АМ с помощью фильтра Ф, в зависимости от его частотных свойств, выделяется либо сигнал u_p, пропорциональный мгновенному значению измеряемой мощности p, либо его среднее значение (постоянная составляющая) U_p, пропорциональное измеряемой активной мощности P.

По датчикам электрической мощности опубликовано много работ, в которых в основном приводятся описания конкретных разработок. Наиболее систематизированный материал по датчикам мощности изложен в [I].

При разработке датчиков удовлетворение требованиям, предъявляемым к АМ и Ф, особых затруднений не вызывает. Более сложным является обеспечение точной работы ШИМ, от которой в конечном итоге зависит точность работы датчика в целом. Однако зависимость погрешностей датчика от реальных характеристик ШИМ до сих пор изучена недостаточно глубоко или дается ей лишь качественная оценка.

Целью данной работы является дальнейшее развитие анализа погрешностей датчиков мощности типа ШИМ-АМ с выявлением также количественных соотношений, связывающих нелинейности характеристик преобразования реальных ШИМ и обусловленные ими погрешности измерения мощности.

<u>Анализ погрешностей</u>. Работа датчиков мощности с реальными ШИМ (АМ и Ф считаются идеальными) описывается следующими соотношениями, представленными в относительных единицах:

$$\begin{cases} \gamma = \gamma(u), \\ u_p = \gamma i, \\ U_p = \frac{1}{T}\int_0^T u_p dt, \end{cases} \qquad (I)$$

где T – период входных сигналов u и i.

Для идеального датчика мощности

$$\begin{cases} \gamma = u, \\ u_{p0} = \gamma i = ui = p, \\ U_{p0} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T u_{p0}\,dt = \frac{1}{T}\int\limits_0^T ui\,dt = P. \end{cases} \qquad (2)$$

Любая характеристика преобразования $\gamma(u)$ реальных ШИМ может быть представлена в виде степенного ряда Тэйлора

$$\gamma(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \cdots \qquad (3)$$

Входные периодические сигналы u и i можно разложить в гармонические ряды Фурье

$$\begin{cases} u(\omega t) = U_0 + U_1 \sin\omega t + U_2 \sin 2\omega t + \ldots \\ i(\omega t) = I_0 + I_1 \sin(\omega t + \varphi) + I_2 \sin(2\omega t + \varphi) + \ldots \end{cases} \qquad (4)$$

В целях упрощения анализа далее ограничимся следующим представлением исходных данных:

$$\gamma(u) = a_0 + a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5, \qquad (5)$$

$$u(\omega t) = U_1 \sin\omega t + U_3 \sin 3\omega t + U_5 \sin 5\omega t, \qquad (6)$$

$$i(\omega t) = I_1 \sin(\omega t + \varphi) + I_3 \sin(3\omega t + \varphi) + I_5 \sin(5\omega t + \varphi). \qquad (7)$$

Эти упрощенные исходные данные соответствуют типичным практическим случаям. Выражение (5) означает, что характеристика преобразования ШИМ симметрична в первом и третьем квадрантах координат u, γ и может иметь смещение по координате γ. Выражения (6) и (7) указывают, что входные сигналы не имеют постоянной составляющей (например, при применении измерительных или входных трансформаторов) и содержат только нечетные гармоники.

Совместное решение (5) и (6) дает гармонический состав выходного сигнала ШИМ

$$\gamma(\omega t) = \gamma_0 + \gamma_1 \sin\omega t + \gamma_3 \sin 3\omega t + \gamma_5 \sin 5\omega t, \qquad (8)$$

где постоянная составляющая

$$\gamma_0 = a_0 \qquad (9)$$

и амплитуды соответствующих гармоник

$$\Big[\; \gamma_1 = a_1 U_1 + \tfrac{3}{4} a_3 U_1^3 + \tfrac{5}{8} a_5 U_1^5,$$

$$
\begin{cases}
\gamma_3 = -\frac{3}{4} a_3 U_1^3 - \frac{5}{16} a_5 U_1^5 + \\
\quad + a_1 U_3 + \frac{3}{4} a_3 U_3^3 + \frac{5}{8} a_5 U_3^5, \\
\gamma_5 = \frac{5}{80} a_5 U_1^5 + a_1 U_5 + \frac{3}{4} a_3 U_5^3 + \frac{5}{8} a_5 U_5^5.
\end{cases} \tag{10}
$$

Выходные сигналы реального и идеального датчиков мощности определяются формулами

$$
\begin{cases}
u_p = (\gamma_1 I_1 \sin^2 \omega t + \gamma_3 I_3 \sin^2 3\omega t + \gamma_5 I_5 \sin^2 5\omega t)\cos\varphi, & (11) \\
u_{p0} = (U_1 I_1 \sin^2 \omega t + U_3 I_3 \sin^2 3\omega t + U_5 I_5 \sin^2 5\omega t)\cos\varphi = p, & (12) \\
U_p = \frac{1}{2}(\gamma_1 I_1 + \gamma_3 I_3 + \gamma_5 I_5)\cos\varphi, & (13) \\
U_{p0} = \frac{1}{2}(U_1 I_1 + U_3 I_3 + U_5 I_5)\cos\varphi = P. & (14)
\end{cases}
$$

Далее несложно определить погрешности измерения реальных датчиков мощности.

Наиболее просто выражаются относительные погрешности измерения мгновенной мощности

$$
\delta_p = \frac{u_p - u_{p0}}{u_{p0}} = \frac{a_0}{u} + a_1 + a_3 u^2 + a_5 u^4 = \gamma - u. \tag{15}
$$

Следовательно, относительные погрешности измерения мгновенной мощности равны относительным отклонениям характеристик преобразования ШИМ от идеальной линейной характеристики. Отсюда легко уточнить требования к ШИМ, удовлетворяющие заданной точности датчика мгновенной мощности.

В большинстве встречающихся на практике случаев датчики мощности используются для измерения активной мощности (среднего значения мгновенной мощности). Для таких датчиков относительные погрешности измерения определяются формулой

$$
\delta_p = \frac{U_p - U_{p0}}{U_{p0}} = \frac{(\gamma_1 - U_1)I_1 + (\gamma_3 - U_3)I_3 + (\gamma_5 - U_5)I_5}{U_1 I_1 + U_3 I_3 + U_5 I_5}. \tag{16}
$$

Отсюда следует, что при принятых исходных данных смещение характеристики преобразования ШИМ погрешностей измерения теоретически не вызывает. Однако смещение может косвенно ухудшать работу ШИМ и его наличия следует избегать. Как правило, устранение смещения осуществляется легко.

Интерес представляет анализ работы датчика в некоторых частных режимах измерения.

Режим а

$$\begin{cases} u = 1\cdot\sin\omega t, \\ i = I_1 \sin(\omega t + \varphi). \end{cases} \qquad (17)$$

В этом режиме относительные погрешности измерения определяются формулой

$$\delta_p = \gamma_1 - 1 = a_1 + \frac{3}{4}a_3 + \frac{5}{8}a_5 - 1. \qquad (18)$$

Оказывается, что при работе датчика в таком режиме погрешности отсутствуют, если выполняется условие

$$a_1 + \frac{3}{4}a_3 + \frac{5}{8}a_5 = 1. \qquad (19)$$

Выполнение этого условия возможно для всех реальных ШИМ и достигается правильной калибровкой (изменением общего коэффициента передачи) датчика в данном (номинальном) режиме.

Режим б

$$\begin{cases} u = 1\cdot\sin\omega t, \\ i = I_1 \sin(\omega t + \varphi) + I_3 \sin(3\omega t + \varphi) + I_5 \sin(5\omega t + \varphi). \end{cases} \qquad (20)$$

Такой режим является характерным для практики. В этом случае погрешности датчика, правильно калиброванного для режима а, определяются формулой

$$\delta_p = -\left(\frac{1}{4}a_3 + \frac{5}{16}a_5\right)\frac{I_3}{I_1} + \frac{1}{16}a_5\frac{I_5}{I_1}. \qquad (21)$$

Режим в

$$\begin{cases} u = U_1 \sin\omega t, \\ i = I_1 \sin(\omega t + \varphi). \end{cases} \qquad (22)$$

Относительные отклонения напряжения U_1 от номинального $U_1 = 1$ на δU обусловливают дополнительные погрешности, определяемые формулой

$$\delta_{pU} = \left(\frac{3}{2}a_3 + \frac{5}{2}a_5\right)\delta U. \qquad (23)$$

Дополнительных погрешностей не возникает, если выполняется условие

$$a_5 = -\frac{3}{5}a_3. \tag{24}$$

Выполнение этого условия сложно, но осуществимо. Практически это означает, что при неизбежной нелинейности характеристики преобразования ШИМ она должна иметь S-образную форму и на этой характеристике нужно выбрать оптимальную глубину модуляции ШИМ (оптимальный размах входного сигнала u).

Режим г

$$\begin{cases} u = U_1 \sin\omega t, \\ i = I_1 \sin(\omega t+\varphi) + I_3 \sin(3\omega t+\varphi) + I_5 \sin(5\omega t+\varphi). \end{cases} \tag{25}$$

Этот режим является наиболее обобщенным. В этом случае дополнительно к погрешностям, определяемым формулой (21), возникают погрешности вследствие относительного отклонения измеряемого напряжения на δU

$$\delta_{pu} = \left[\left(\frac{3}{2}a_3 + \frac{5}{2}a_5\right)\ \left(\frac{3}{4}a_3 + \frac{25}{16}a_5\right)\frac{I_3}{I_1} + \frac{5}{16}a_5\frac{I_5}{I_1}\right]\delta U. \tag{26}$$

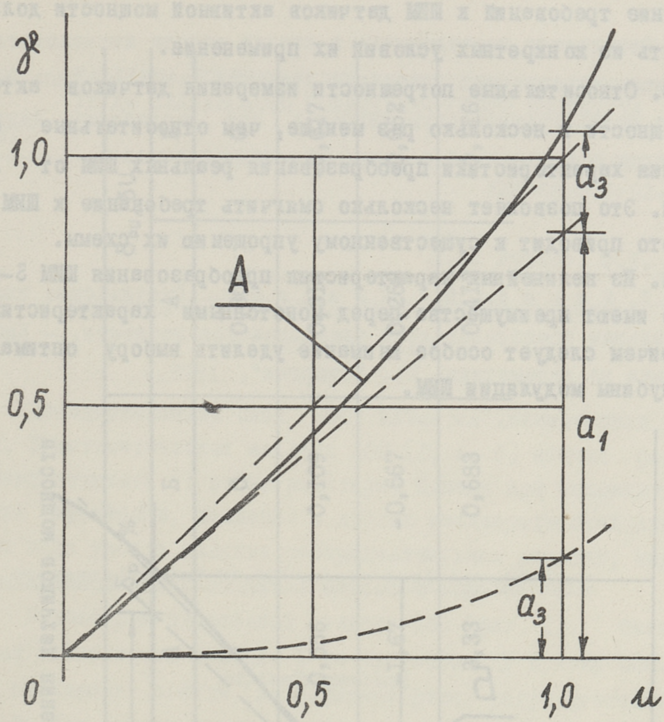
Численные примеры погрешностей измерения. Полученные аналитические выражения погрешностей иллюстрируются ниже численными примерами для работы датчиков мощности в режимах, к которым могут быть качественно приведены встречающиеся на практике случаи.

За основу типичных нелинейных характеристик преобразования ШИМ приняты следующие:

кривая А: $\gamma = 0{,}85u + 0{,}2u^3$, (фиг. 2),

кривая Б: $\gamma = 0{,}925u + 0{,}2u^3 - 0{,}12u^5$. (фиг. 3).

Обе кривые соответствуют правильной калибровке датчиков мощности согласно условию (19), а кривая Б удовлетворяет также условию (24). Следует отметить, что в целях наглядности нелинейность этих кривых выбрана значительно большей, чем достигаемая минимальная нелинейность реальных ШИМ.



Фиг. 2. Типовая характеристика преобразования ШИМ – А —— $\gamma = 0{,}85u + 0{,}2u^3$.

Численные значения основных и дополнительных погрешностей измерения датчиков мощности приведены в таблице I. Они соответствуют случаям, когда измеряемое напряжение $u = 1 \cdot \sin\omega t$, а кривая измеряемого тока имеет форму, указанную в таблице.

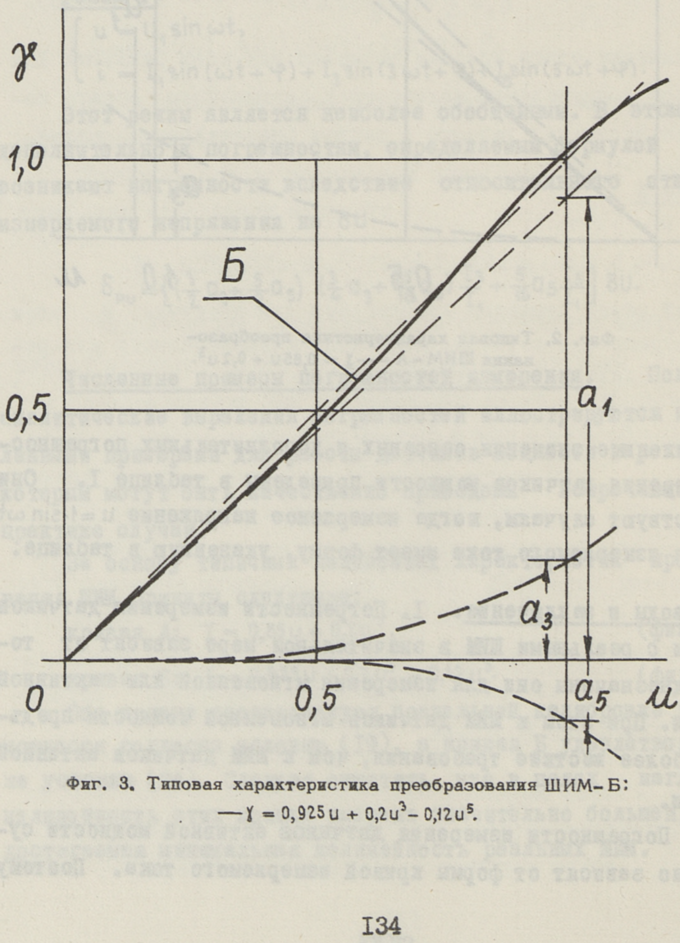
Выводы и заключение. I. Погрешности измерения датчиков мощности с реальными ШИМ в значительной мере зависят от того, предназначены они для измерения мгновенной или активной мощности. При этом к ШИМ датчиков мгновенной мощности предъявляют более жесткие требования, чем к ШИМ датчиков активной мощности.

2. Погрешности измерения датчиков активной мощности существенно зависят от формы кривой измеряемого тока. Поэтому

уточнение требований к ШИМ датчиков активной мощности должно исходить из конкретных условий их применения.

3. Относительные погрешности измерения датчиков активной мощности в несколько раз меньше, чем относительные отклонения характеристики преобразования реальных ШИМ от линейной. Это позволяет несколько смягчить требование к ШИМ, если это приводит к существенному упрощению их схемы.

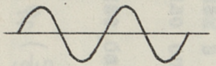
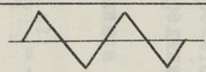
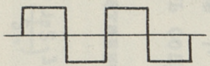
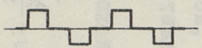
4. Из нелинейных характеристик преобразования ШИМ S-образные имеют преимущества перед монотонными характеристиками, причем следует особое внимание уделить выбору оптимальной глубины модуляции ШИМ.



Фиг. 3. Типовая характеристика преобразования ШИМ-Б: $\gamma = 0{,}925u + 0{,}2u^3 - 0{,}12u^5$.

Т а б л и ц а I

Погрешности измерения датчиков мощности

$i(\omega t)$		δ_p, %		$\delta_{pU}/\delta U$	
		А	Б	А	Б
	$\frac{I_3}{I_1} = 0;\ \frac{I_5}{I_1} = 0$	0	0	0,300	0
	$\frac{I_3}{I_1} = -\frac{1}{9};\ \frac{I_5}{I_1} = \frac{1}{25}$	0,556	0,I09	0,3I9	-0,0I7
	$\frac{I_3}{I_1} = \frac{1}{3};\ \frac{I_5}{I_1} = \frac{1}{5}$	-I,67	-0,567	0,263	0,062
	$\frac{I_3}{I_1} = \frac{2}{3};\ \frac{I_5}{I_1} = \frac{1}{5}$	3,33	0,683	0,4I3	-0,II6

Результаты проведенного в данной работе количественного анализа погрешностей измерения датчиков мощности типа ШИМ-АМ могут иметь практическую ценность при разработке датчиков мощности и придать ей большую целенаправленность.

Литература

I. В.Л. Бенин, В.У. Кизилов. Статические измерительные преобразователи электрической мощности. - Библиотека по автоматике, М., "Энергия", 1972.

S. Seppel

Meßfehleranalyse eines PLM-AM Leistungsgebers

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Leistungsgeber vorgestellt, die das Multiplizieren von Strom und Spannung nach dem Pulslängenmodulations- und Amplitudenmodulationsverfahren durchführen. Es werden die Beziehungen zwischen der Unlinearität der Übertragungskennlinie des Pulslängenmodulators und des Meßfehlers untersucht und numerische Werte des Meßfehlers für typische Betriebszustände gebracht.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 371 1974

УДК 66.096:62-501.72

Ю.Ю. Ребане, Ю.И. Каллас

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИКИ РЕАКТОРА КИПЯЩЕГО СЛОЯ

Псевдоожиженный слой (ПОС) является динамической системой. В математических моделях ПОС [1, 4, 6] обычно рассматривают отдельно от всего реактора. Однако при описании пульсации порозности, давления и других неоднородностей кипящего слоя надо учесть влияние распределительных решеток, надслоевого пространства, мощности насоса и т.д.

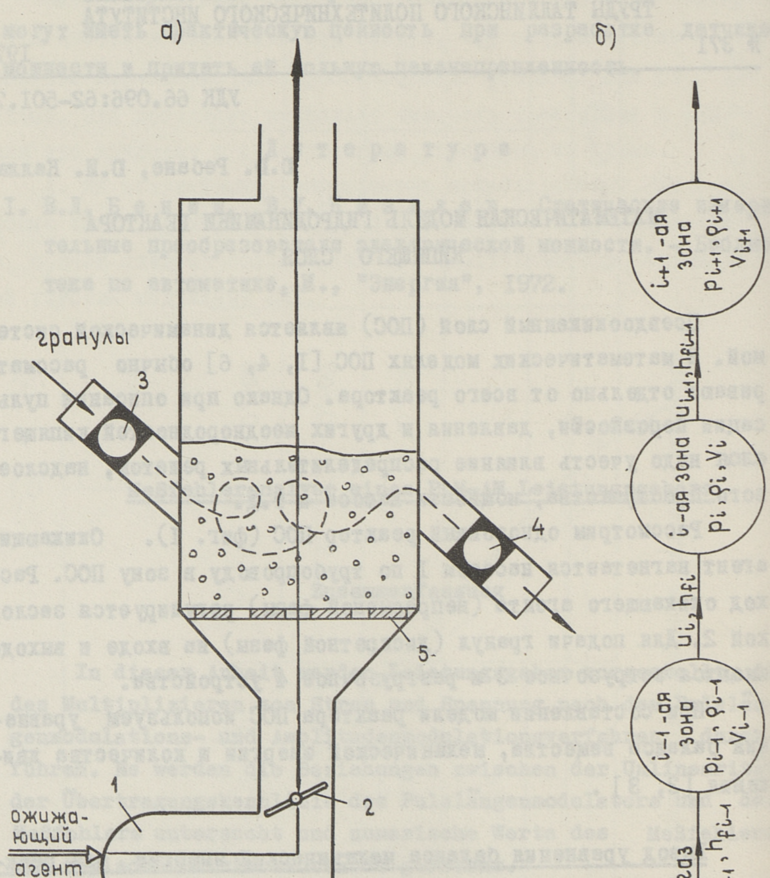
Рассмотрим однозонный реактор ПОС (фиг. 1). Ожижающий агент нагнетается насосом 1 по трубопроводу в зону ПОС. Расход ожижающего агента (непрерывной фазы) регулируется заслонкой 2. Для подачи гранул (дискретной фазы) на входе и выходе имеются загрузочное 3 и разгрузочное 4 устройства.

При составлении модели реактора ПОС используем уравнения баланса вещества, механической энергии и количества движения [2, 3].

<u>Вывод уравнения баланса механической энергии для реактора ПОС</u>. Реактор ПОС можно рассматривать как некоторый трубопровод, по которому под действием насоса проходит поток ожижающего агента. ПОС является переменным сопротивлением этому потоку. Выделяем в реакторе r зон, так чтобы для каждой зоны можно было определить сопротивление потоку и кинетическую энергию.

Напишем уравнение баланса механической энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}u_f^2\sum_{i=1}^{r}V_i\varrho_f\left(\frac{S}{S_i}\right)^2\right]=-\left(\frac{u_f S}{S_r}\right)^3\frac{\varrho_f S}{2}-u_f\varrho_f S L g- \qquad (1)$$



Фиг. 1. а) Реактор псевдоожиженного слоя:
1 – насос; 2 – заслонка; 3, 4 – загрузочное и разгрузочное устройства; 5 – распределительная решетка.
б) Обозначение узлов при выведении уравнений 13 – 16.

$$-u_f\rho_f S\int\limits_{p_0}^{p_r}\frac{dp}{\rho_f(p)}-u_f\rho_f S\Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{r}h_{fi}+h_{fk}\Big)+\eta W, \qquad (I)$$

где

$$h_{fi}=\frac{2f_p(Re)L_i S^2 u_f^2}{D_i S_i^2}, \quad i\neq k. \qquad (2)$$

Левая часть уравнения (I) выражает скорость возрастания кинетической энергии по всему реактору. В правой части слагаемые по порядку учитывают: скорость потерь кинетической энергии на выходе; скорость производства работы гравитационными силами, давлением окружающей среды, силами трения, перепадом давления на ПОС и источником внешней механической энергии.

Кинетическую энергию в ПОС и надслоевом пространстве рассчитываем по формуле:

$$E_k=\frac{1}{2}\rho_f u_f^2\left[V_k+\frac{M}{\rho_k(1-\varepsilon)S}\Big(\frac{1}{\varepsilon^2}-1\Big)\right]=\frac{1}{2}\rho_f u_f^2 V_k'. \qquad (3)$$

Если ПОС стационарный и потери в слое можно считать равными весу слоя, то:

$$h_{fk}=\frac{\Delta p_k S}{\rho_f S}=\frac{F_k}{\rho_f S}=\frac{Mg}{\rho_f S}. \qquad (4)$$

Подставляя (3), (4) в (I), при $\rho_f=\mathrm{const}$, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_f=\frac{1}{V_k'+\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{r}V_i\big(\frac{S}{S_i}\big)^2}\left[-\frac{u_f^2 S^4}{2S_r^3}-gV-S\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{r}h_{fi}-\frac{M_s g}{\rho_f}+\frac{\eta W}{\rho_f u_f}\right]. \qquad (5)$$

<u>Вывод системы уравнений динамики ПОС</u>. В действительности ПОС находится в движении и $F=(M_s,u_f,u_s,\varepsilon..)\neq Mg$. Идеализируем ПОС таким образом, что скорости движения непрерывной и дискретной фаз и порозность слоя считаем одинаковыми по всему слою.

Для вывода уравнения движения дискретной фазы исходим из баланса количества импульса для всей зоны:

$$\frac{d}{dt}(M_s u_s) = F_f - F_y + F_B - F_h - F_e + F_p + m u_{s0} - m u'_s\,, \qquad (6)$$

где в правой части слагаемые по порядку выражают: силу межфазного воздействия; силу, ускоряющую присоединенную массу дискретной фазы относительно жидкости; силу Бассе, учитывающую отклонение течения от установившегося состояния; силу трения между частицами [I]; гравитационную силу; силу давления (Архимеда).

Сила межфазного воздействия в начале псевдоожижения $F_{0f}(\varepsilon_0)$ определяется по модели пористого слоя, при витании $F_{1f}(\varepsilon=1)$ по модели одиночного шара в потоке жидкости [2]. В промежуточной области происходит постепенный переход от первой модели ко второй в зависимости от порозности слоя ε. Принимая эту зависимость экспоненциальной, получаем:

$$F_f = F_{0f}(\varepsilon)\left[1 - \exp\left(-\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon-\varepsilon_0}\right)\right] + F_{1f}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon-\varepsilon_0}\right), \qquad (7)$$

где

$$F_{0f}(\varepsilon) = \frac{\rho_f (u_f - u_s)^2 M_{s_0}}{\rho_K d_s \varepsilon^3}\left(\frac{150}{Rep} + 1{,}75\right); \qquad Rep = \frac{\rho_f (u_f - u_s) d_s}{\mu(1-\varepsilon)};$$

$$F_{1f}(\varepsilon) = \frac{\rho_f (u_f - u_s)^2 M_s}{\rho_K d_s \varepsilon^3} \cdot \frac{3}{4}\left(\frac{24}{Re} + 0{,}48\right); \qquad Re = \frac{\rho_f (u_f - u_s) d_s}{\mu}.$$

Остальные силы рассчитаем по формулам [I]:

$$F_y = \frac{1}{2} M_s \frac{d}{dt}(u_f - u_s); \qquad F_e = \rho_K S L (1-\varepsilon) g = Mg;$$

$$F_B = \frac{g}{2} M_s \rho_f^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} R_s^{-1} \rho_K^{-1} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\frac{d}{dt}(u_f - u_s)}{\sqrt{t_1 - \tau}}\, d\tau; \qquad F_p = \frac{\rho_f M_s g}{\rho_K}.$$

Баланс вещества в ПОС для дискретной фазы:

$$\frac{d}{dt} M_s = m_s - m'_s \qquad (8)$$

и для непрерывной фазы:

$$\frac{d}{dt} M_f = \rho_f u_s \varepsilon S. \qquad (9)$$

Производя дифференцирование в левой части уравнения (6) и учитывая (8), получаем:

$$M_s \frac{du_s}{dt} = F_f - F_y + F_B - F_h - F_e + F_p + m_s(u_{so} - u_s). \qquad (10)$$

Для вывода уравнения порозности используем уравнение баланса вещества дискретной фазы (8):

$$\frac{d}{dt} M_s = \rho_s \frac{dV_K''}{dt} + V_K'' \frac{d\rho_s}{dt} = m_s - m_s'. \qquad (11)$$

Учитывая, что $\rho_s = (1-\varepsilon)\rho_K$;

$$L_K = \frac{M_s}{(1-\varepsilon)\rho_K S}; \quad \frac{d}{dt} V_K'' = u_s S;$$

получаем:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{(1-\varepsilon)^2 \rho_K S u_f}{M_s} - \frac{(m_s - m_s')(1-\varepsilon)}{M_s}. \qquad (12)$$

Скорость непрерывной фазы определяется формулой (5), в которую подставляем $F_K = F_f - F_y + F_B + F_p$.

В итоге, объединив уравнения (5), (8), (9), (10), (12), получаем систему, описывающую гидродинамику реактора ПОС.

<u>Особенности моделирования реактора ПОС при изотермическом ожижении газом</u>. В случае ожижения ПОС газом плотность газа в отличие от жидкости изменяется в отдельных узлах реактора. Принимая каждый узел за реактор идеального смешения (фиг. 1б), давление в котором рассчитывается по уравнению состояния идеального газа, выведем также уравнения баланса вещества и механической энергии для i-го узла:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{V_i}\Big[\frac{u_i u_{i+1} S_{i+1}}{2} - \frac{1}{2}\frac{u_{i+1} S_{i+1} \rho_i}{u_i} + \frac{S_i \rho_{i-1} g L_{i1}}{\rho_i} - \frac{u_{i+1} S_{i+1} g L_{i2}}{u_i} - \frac{S_i \rho_{i-1}}{\rho_i}\int_{p_{i-1}}^{p_i} \frac{dp}{\rho} - \frac{S_i \rho_{i-1} h_{fi}}{\rho_i} + \frac{\eta W}{u_i \rho_i}\Big], \qquad (13)$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \frac{1}{V_i}\Big[u_{fi} \rho_{fi-1} S_i - u_{fi+1} \rho_{fi} S_{i+1}\Big], \qquad (14)$$

$$p_{fi} = \rho_{fi} RT. \qquad (15)$$

Если перепад давления между узлами не более 10 %, то интеграл в (13) можно вычислить по формуле:

$$\int_{p_{i-1}}^{p_i} \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{p_i - p_{i-1}}{\rho_{cpi}}, \quad \text{где} \quad \rho_{cpi} = \frac{\rho_{i-1} + \rho_i}{2}$$

и

$$h_{fi} = \frac{2 f_p(Re) L_i m_{fi}^2}{\rho_{cpi}^2 D_i}.$$

Для слоя ПОС уравнение (14) имеет вид:

$$\frac{\partial \rho_{fk}}{dt} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\rho_k}{M_s} \left[u_{fk} \rho_{fk-1} S_k + u_{k+1} \rho_k S_{k+1} - u_s \varepsilon S \right]. \qquad (16)$$

Объединяя уравнения для каждого звена в одну систему, получаем общую модель реактора при ожижении газом.

Индексы. S – дискретная фаза; f – непрерывная (жидкость, газ) фаза реактора ПОС; $'$ – выходной поток; o – величины входных потоков; $i = 1 \ldots k \ldots r$ – номер зоны, где k – ПОС и r – выход.

Обозначения. t – время [sek]; T – температура [°K]; L, S, V – высота, свободное сечение и объем реактора ПОС [m, m^2, m^3]; V_k'', V_k – свободный объем ПОС и ПОС с надслоевым пространством [m^3]; $f(Re), D_i, L_i$ – коэффициент сопротивления, характерные размеры (диаметр и длина трубы) при вычислении потерь трения [–, m, m]; Re, R_{ep} – число Рейнольдса [–]; d_s, R_s – диаметр и радиус гранул [m]; u – скорость [m/sek]; u_f – скорость жидкости в свободном сечении реактора ПОС [m/sek]; m – массовый поток $\left[\frac{kg}{sek}\right]$; ρ, ρ_k – плотность и кажущая плотность; g – ускорение силы тяжести $\left[\frac{m}{sek^2}\right]$; F – сила [N]; p – давление $\left[\frac{N}{m^2}\right]$; E – кинетическая энергия [J]; h_f – потери на трение $\left[\frac{J}{kg}\right]$; W, η – мощность и коэффициент полезного действия источника внешней механической энергии $\left[\frac{J}{sek}\right]$; M –

масса [kg]; ε - порозность слоя (доля жидкости) [-]; μ - вязкость $\left[\frac{N \cdot sek}{m^2}\right]$.

Литература

1. С. С о у. Гидродинамика многофазных систем. - М., "Мир", 1971.
2. К.О. Б е н н е т т и Дж. Е. М а й е р с. Гидродинамика, теплообмен и массообмен. - М., "Недра", 1966.
3. Б.Н. Ю д а е в. Теплопередача. - М., "Высшая школа", 1973.
4. Ю.Ю. Р е б а н е, О.А. А а р н а. Математическое моделирование реакторов псевдоожиженного слоя. - "Тр. Таллинск. политехн. ин-та", № 359, 1974.
5. М.Э. А э р о в, О.М. Т о д е с. Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим слоем. - Л., "Химия", 1968.
6. И.О. П р о т о д ь я к о н о в, О.В. М у р а т о в, В.И. С а р ж. Математическая модель пульсаций порозности псевдоожиженного слоя. - Хим. пром. ТОХТ № 7, № 3, с. 221-223, (1973).

J. Rebane, J. Kallas

Mathematical Model of Hydrodynamics of Fluidized Bed Reactor

Summary

The equation of mechanical energy of the fluidized bed reactor has been developed. The influence of fluidized bed is considered as variable resistance in mechanical energy balance. Two-phase model of the fluidized bed has been worked out for the determination of the resistance. Peculiarities of modelling while fluidizing with gas have also been treated.

Содержание

Стр.

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 371 1974

ТРУДЫ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И АВТОМАТИКЕ

Сборник статей XII

УДК 621.372.63

Некоторые общие свойства множества многополюсников. Силламаа Х.В. "Труды Таллинского политехнического института", 1974, № 371, с.3-12.

В статье изучаются связи отдельных классов многополюсников во множестве всех многополюсников, а также их взаимоотношения с различными классами гибридных матриц и матриц проводимостей. В основу анализа положены свойства, существенные для составления эквивалентных схем многополюсников. Путем введения класса скалярно подобных многополюсников и предельных многополюсников такого класса показана возможность рассмотрения всех неадмитансных многополюсников как предельных относительно множества адмитансных многополюсников.

Библиографий 5.

УДК 621.372.061

Исходные уравнения для реализации вещественных нулей в адъюнктах RC-трехполюсника. Мяннама В.Р., Силламаа Х.В. "Труды Таллинского политехнического института", № 371, с.13-22.

Приводится метод составления систем исходных уравнений для реализации RC-трехполюсников с заданным кратным нулем s_e в адъюнктах матрицы узловых проводимостей. По таким системам возможна реализация RC-трехполюсников, у которых Z-,G-,H- или (и) Y-параметры содержат полюс S_e с заданным свойством компактности. Приводятся примеры.

Фигур I, таблиц 2, библиографий 5.

УДК 518.5:621.372.061.2

Нахождение передаточных функций по амплитудным или фазовым характеристикам. Рюстерн Э.А. "Труды Таллинского политехнического института", 1971, № 371, с. 23-31.

Предложен метод для нахождения дробно-рациональных передаточных функций по заданной логарифмической амплитурно-частотной или фазо-частотной характеристике. В основе метода лежит разложение соответствующей импульсной функции по функциям Лагерра, которое вычислимо с разложением логарифмической амплитудно-частотной или фазо-частотной характеристики в ряд Фурье. Приемлем в случае произвольных частотных характеристик.

Метод реализован на ЭВМ "Минск-22".

Фигур 3, таблиц 2, библиографий II.

УДК 621.317.727.I

Расчет трансформатора со жгутовой обмоткой I (Уравнения жгутовой обмотки). Иерс Р.Р., Росс Х.К. "Труды Таллинского политехнического института", 1974, № 371, с. 33-39

Жгутовая обмотка рассматривается как многопроводная длинная линия,для расчета которй выведены уравнения узловых проводимостей обмотки как $2n$-полюсника.Проведено разделение параметров жгута и сердечника в уравнениях жгутовой обмотки.

Фигур I, библиографий 6.

УДК 621.317.727.1

Расчет трансформатора со жгутовой обмоткой II (Расчет индуктивных делителей напряжения, соединенных по схеме Кельвина-Варлея). Иыерс Р.Р. Росс Х.К. "Труды Таллинского политехнического института", 1974, № 371, с. 41-50.

Исходя из уравнений жгутовой обмотки исследованы свойства индуктивного делителя напряжения при автотрансформаторном соединении проводов жгута. Получены формулы для поперечно однородного жгута. Приводятся результаты численного решения уравнений неоднородного жгута.

Фигур 2, таблиц 2, библиографий 6.

УДК 62.50

Исследование устойчивости установившегося режима в системе с широтно-импульсной модуляцией второго рода. Велмре Э.Э. "Труды Таллинского политехнического института", 1974, № 371, с. 51-62.

Рассматривается установившийся (вынужденный) режим в автоматической системе с однополярной широтно-импульсной модуляцией второго рода, непрерывная часть которой имеет ненулевые простые полюсы, а релейный элемент - гистерезисную характеристику и запаздывание. Развертывающий (синхронизирующий) сигнал имеет треугольную форму. Получены условия существования и устойчивости вынужденного режима. В качестве примера определены границы устойчивости вынужденного режима в широтно-импульсной системе с непрерывной частью второго порядка.

Фигур 4, библиографий 5.

УДК 621.382.61

<u>Датчик Холла в неоднородном магнитном поле: прямая задача</u>. Вяльямяэ Г.Х., Кукк В.А., Тильк И.И. "Труды Таллинского политехнического института", 1974, № 371, с. 63-72.

Рассмотрена методика численного расчета выходных характеристик датчика Холла (ДХ) в неоднородном магнитном поле. На основе уравнений поля в ДХ вычислена весовая функция, характеризующая влияние различных зон ДХ на выходное напряжение. Дан простой способ вычисления выходных характеристик ДХ с применением весовой функции.

Фигур 7, библиографий 7.

УДК 621.382.61

<u>Датчик Холла в неоднородном магнитном поле: обратная задача</u>. Вяльямяэ Г.Х., Кукк В.А., Тильк И.И. "Труды Таллинского политехнического института", 1974 , № 371, с.73-77.

В статье рассмотрен способ расчета обратной весовой функции, позволяющей определить необходимое распределение магнитной индукции для обеспечения заданной зависимости выходного напряжения датчика Холла при его перемещении в магнитном поле.

Фигур 2, библиографий 3.

УДК 621.317.761

<u>Об измерении малых разностей частот на фоне шумов</u>. Корсен В.К., Пикков О.М., Ярвальт А.Э. "Труды Таллинского политехнического института", 1974, № 371, с. 79-86.

В статье рассматриваются возможности измерения малых разностей частот в том случае, когда время измерения меньше периода разностной частоты.

В таких случаях измерение разности путем образования разностной частоты затруднено. Более подходящими оказываются методы, которые основаны на измерении прироста разности фаз. В данной статье рассматриваются два варианта таких измерителей, причем с целью подавления помех (шума) результат измерения вырабатывается в них усреднением с помощью электронного интегратора. Сравнение вариантов показывает, что второй метод более удобный для реализации.

Приводится методика расчета инструментальных погрешностей.

Фигур I, библиографий 3.

УДК 621.317.384

Динамическая погрешность измерения средней мощности
Ярвальт А.Э. "Труды Таллинского политехнического института", 1974, № 371, с. 87-93.

В статье рассматривается определение динамической погрешности измерения средней мощности при негармонических входных сигналах. В качестве оценок погрешности приняты погрешности при типовых входных сигналах в виде последовательности прямоугольных импульсов и пилообразных входных сигналов. Приведены зависимости динамической погрешности от относительной частоты при синусоидальных и принятых типовых сигналах.

Фигур 2, библиографий 2.

УДК 621.317.725.083.92

Автоматизация поверки цифровых вольтметров. Мяги Х.И. Рюстерн Э.А. "Труды Таллинского политехнического института", 1974, № 371, с. 95-102.

В статье рассматриваются возможности построения автоматических средств поверки цифровых вольтметров (ЦВ) постоянного тока для производственных условий. Система построена с применением программного устройства, который содержит арифметическое устройство для обработки результатов поверки.

Фигур 3, библиографий 3.

УДК 621.317.39:532.137

Приближенная теория Н-образного колебательного датчика. Эйнер Л.К., Реммель Ю.К., Гордон Б.И. "Труды Таллинского политехнического института", 1974, № 371, с. 103-109.

Рассматриваются конструкция и приближенные характеристики датчика с Н-образным резонатором (твинтором) при измерении вязкости жидкостей. Показывается, что основным путем использования Н-образных резонаторов для измерения малых значений вязкостей надо считать включение резонаторов в схему автогенератора.

Фигур 4, библиографий 8.

УДК 621.317.39:532.137

Вискозиметр с Н-образным колебательным датчиком. Эйнер Л.К., Реммель Ю.К., Гордон Б.И. "Труды Таллинского политехнического института", 1974, № 371, с. 111-119.

Приводятся результаты экспериментальной калибровки вискозиметра с Н-образным колебательным датчиком, работающего в автогенераторном режиме и охваченного отрицательной обратной связью по амплитуде колебаний. Показана возможность приближенной оценки калибровочной кривой в целях облегчения проведения экспериментальной калибровки вискозиметров данного типа.

Таблиц 1, фигур 6, библиографий 3.

УДК 621.373.431.1

Транзисторный мультивибратор с линейной характеристикой широтно-импульсного модулирования, управляемый в цепях заряда конденсаторов. Инютин С.А., Сеппель С.А. "Труды Таллинского политехнического института", 1974, № 371, с. 121-126.

Исследуется способ линеаризации характеристики модулирования широтно-импульсного модулятора, построенного на базе транзисторного мультивибратора, управляемого непосредственно напряжением в цепях заряда конденсаторов мультивибратора. Способ линеаризации основан на выборе оптимального отношения сопротивления резисторов заряда и разряда конденсаторов. Приводятся рекомендации по выбору сопротивления резисторов мультивибратора и характеризуется достигаемая линейность характеристики модулирования.

Фигур 2, библиографий 5.

УДК 621.317.784+621.376.54

Анализ погрешностей измерения датчиков мощности типа ШИМ-АМ. Сеппель С.А., "Труды Таллинского политехнического института", 1974, № 371, с.127-136.

Исследуется работа датчиков мощности, осуществляющих перемножение мгновенных значений измеряемого напряжения и тока по принципу широтно-импульсной и амплитудной модуляции (ШИМ-АМ). Выведены соотношения, связывающие нелинейность характеристики преобразования ШИМ и обусловленные ею погрешности измерения мощности. Приведены численные примеры погрешностей для характерных режимов работы датчиков мощности.

Таблиц 1, фигур 3, библиографий 1.

УДК 66.096:62-501.72

Математическая модель гидродинамики реактора псевдоожиженного слоя. Ребане Ю.Ю., Каллас Ю.И. "Труды Таллинского политехнического института", 1974, № 371, с. 137-143.

Балансом механической энергии описано движение ожижающей жидкости в реакторе. В этом уравнении псевдоожиженный слой учитывается переменным сопротивлением, для определения которого составлена двухфазная модель динамики слоя. Также рассматриваются особенности моделирования при ожижении газом. Полученная модель учитывает влияние других частей реактора на гидродинамики слоя.

Фигур 1, библиографий 6.

УДК 621.317.39:532.137

[illegible]

Рассматриваются [illegible] характери-
стики датчика с Н-образным резонатором (пьезометром) для из-
мерения вязкости жидкостей. Показывается, что основным пу-
тем использования Н-образных резонаторов [illegible]
дах измерений вязкостей надо считать включение резонаторов
в схему [illegible]

[illegible]

УДК 621.317.39:532.137

[illegible]

[illegible] вискозиметра с Н-образным колебательным датчиком, работающего
в автогенераторном режиме [illegible] об-
ратной связью по амплитуде колебаний. Показана возможность
приближенной оценки калибровочной кривой [illegible]
ния проведения экспериментальной калибровки вискозиметров
данного типа.

[illegible]

УДК 621.373.431.1

[illegible]

Цена 65 коп.