Andres Lahe

VARRASSÜSTEEMIDE VÕNKUMINE

EST-meetod

Raamatus vaadeldakse varraskonstruktsioonide võnkumist rajaülesandena, s.t diferentsiaalvõrrandite lahendid peavad rahuldama rajatingimusi. Rajatingimusteks on siin pidevus- ja tasakaalutingimused sõlmedes, kõrvaltingimused (liigendid varraste otstes) ning toetingimused tugedel. Varda diferentsiaalvõrrandi lahendit kirjeldatakse algparameetrite meetodiga. Algparameetrite leidmiseks luuakse võrrandisüsteem, kus tundmatute vektori moodustavad piki- ja põiksiirded, paindenurgad, piki- ja põikjõud ning paindemomendid varda algul ja lõpus. Tundmatute vektoris on ka toereaktsioonid. Tundmatute kordajad moodustavad hõreda maatriksi. EST-meetodis erinevalt ülekandemaatriksmeetodist algparameetrite leidmisel ülekandemaatrikseid ei korrutata. Nii välditakse ümardusvigu, mis tekivad ülekandemaatriksite korrutamisel.

Autorist

Andres Lahe on sündinud 30. märtsil 1938 Kõnnu vallas Harjumaal. 1956 lõpetas Loksa keskkooli. 1956–1959 õppis Tartu Riiklikus Ülikoolis. 1964 lõpetas Tallinna Polütehnilise Instituudi tööstus- ja tsiviilehituse insenerina. 1965–1970 täiendas teadmisi Leningradi Riikliku Ülikooli matemaatika ja mehaanika teaduskonna kaugõppes. Õppis aspirantuuris Eesti Teaduste Akadeemia Küberneetika Instituudi juures, kus kaitses füüsika-matemaatikakandidaadi kraadi 1973. Kandidaaditöö teemaks oli mittelineaarne lainelevi plaatides ja koorikutes. 1959. aastast töötas Tallinna Tehnikaülikoolis ehitustöölise, laborandi, inseneri, dotsendi ja professorina. Aastast 2005 on Tallinna Tehnikaülikooli emeriitprofessor.

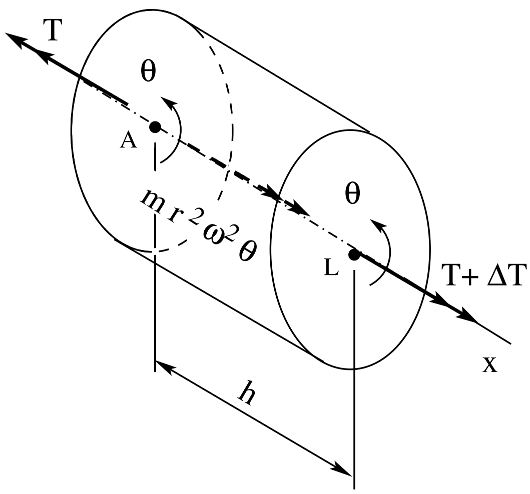
9 789949 832231 >

Ehituse ja arhitektuuri instituut

Andres Lahe

Varrassüsteemide võnkumine

EST-meetod



TTÜ KIRJASTUS

Retsenseerinud Eerik Peeker

Keeletoimetaja Aime-Rutt Hall

Kaane kujundanud Tiia Eikholm

ISBN 978-9949-83-223-1 (köites)

ISBN 978-9949-83-224-8 (pdf)

Tallinna Tehnikaülikooli kirjastus 2018

Mente et manu

Varraskonstruktsioonide võnkumist vaadeldakse siin rajaülesandena, s.t diferentsiaalvõrrandite lahendid peavad rahuldama rajatingimusi. Varda diferentsiaalvõrrandi lahend on väljendatav algparameetrite meetodiga: $\mathbf{z_x} = \mathbf{U^x z_a} + \mathring{\mathbf{z}}$. Vektori $\mathbf{z_a}$ elementideks on algparameetrid, s.o piki- ja põiksiirded, paindenurgad, piki- ja põikjõud ning paindemomendid varda algul. Seda vektorit nimetatakse olekuvektoriks varda algul, vektorit $\mathring{\mathbf{z}}$ aga varda koormusvektoriks. Olekuvektori elemente varda lõpus $\mathbf{z_l}$ [HRZ12, lk 5] nimetame lõppparameetriteks. Maatriks $\mathbf{U^x}$ on ülekandemaatriks. Olekuvektori elemendid $\mathbf{z_x}$ – piki- ja põiksiirded, paindenurgad, piki- ja põikjõud ning paindemomendid varda ristlõikes x (koordinaat varda teljel) – arvutatakse pärast seda, kui on leitud algparameetrid $\mathbf{z_a}$ varda algul (x = 0).

Varrassüsteemi algparameetrid võib leida ka ülekandemaatriksmeetodiga [PW94], [GV06]. Nimetatud meetodi puhul asendatakse eelmise varda i–1 lõpus olev olekuvektor $\mathbf{z_{i-1}}$ järgmise varda i alguses oleva olekuvektoriga $\mathbf{z_i}$. Nii saadakse ülekandemaatriksite korrutis $\mathbf{z_j} = \mathbf{U^j} \ldots \mathbf{U^2 U^1 z_a} = \mathbf{U z_a}$. Seda meetodit kasutades võib aga kaduda arvutustäpsus ümardusvigadest ülekandemaatriksite korrutamisel [PW94, lk 236], sest ülekandemaatriksite elemendid koosnevad suurtest ja väikestest arvudest.

EST-meetodit [Lah97] rakendades algparameetrite leidmisel ülekandemaatrikseid ei korrutata. Siin luuakse võrrandisüsteem $\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B}$, kus tundmatute vektori moodustavad olekuvektorid kõigi N varda alguses ja lõpus ($\mathbf{z_a^i}$, $\mathbf{z_l^i}$, i = 1, 2, ..., N) ning M toereaktsiooni ($\mathbf{C_j}$ (j = 1, 2, ..., M)). Nii on võrrandisüsteemis $2 \times \mathrm{N} + \mathrm{M}$ tundmatut. Tundmatute kordajatest moodustatakse hõre maatriks $\mathbf{spA}$. Võrrandisüsteem koosneb EST-meetodi põhivõrranditest $\mathbf{U^i z_a^i} - \mathbf{I z_l^i} = -\mathring{\mathbf{z}}_\mathbf{i}$ (i = 1, 2, ..., N, siin korduva indeksi i järgi ei summeerita) ja $\mathrm{N} + \mathrm{M}$ rajatingimusest. Toodud avaldises tähistavad $\mathbf{z_a^i}$ ja $\mathbf{z_l^i}$ olekuvektoreid varda alguses ja lõpus, $\mathbf{I}$ on ühikmaatriks ning $\mathring{\mathbf{z}}_\mathbf{i}$ varda koormusvektor.

Rajatingimusteks on:

- pidevustingimused sõlmedes, nt avaldised (3.89), (3.170);
- tasakaalutingimused sõlmedes, nt avaldised (3.90), (3.171);
- kõrvaltingimused liigenditele varraste otstes, nt avaldis (3.172);
- toetingimused tugedel, nt avaldised (3.91), (3.173).

Rajatingimuste määramist saame jälgida GNU Octave'is kirjutatud programmi väljavõttes 5.3.

EST-meetodi võrrandisüsteemi tundmatute kordajatest moodustatud hõreda maatriksi $\mathbf{spA}$ mustrit näeme joonistelt 3.18, 3.37, 4.21 ja 5.5.

EST-meetodi testimiseks on lisatud näiteülesandeid, millel on teiste meetoditega leitud lahendid (vt tabelid 3.3, 4.4, 5.3, 6.2).

Esimeses peatükis vaadeldakse võnkumist varda pikiteljel. Tuletatakse ülekandemaatriks varda pikke diferentsiaalvõrrandi lahendi kirjeldamiseks algparameetrite meetodiga (1.20). Koostatakse EST-meetodi põhivõrrandid algparameetrite leidmiseks pikkel (1.44). Uuritakse varda omavõnkesagedusi ja -vorme pikivõnkumisel.

Teises peatükis esitatakse ülekandemaatriks võlli väände diferentsiaalvõrrandi lahendi kirjeldamiseks algparameetrite meetodiga (2.19). Tuletatakse EST-meetodi põhivõrrandid algparameetrite leidmiseks väändel (2.43). Uuritakse võlli omavõnkesagedusi ja -vorme väändevõnkumisel.

Kolmas peatükk käsitleb Euleri-Bernoulli tala vaba- ja sundvõnkumist. Esitatakse ülekandemaatriks tala põiksiirde diferentsiaalvõrrandi lahendi kirjeldamiseks algparameetrite meetodiga (3.31). Koostatakse EST-meetodi põhivõrrandid tala paindel (3.34). Uuritakse tala omavõnkesagedusi ja -vorme paindevõnkumisel.

Neljandas peatükis on vaatluse all Timošenko tala võnkumine. Tuletatakse ülekandemaatriks tala põiksiirde ja paindenurga diferentsiaalvõrrandi lahendi kirjeldamiseks algparameetrite meetodiga (4.60). Luuakse EST-meetodi põhivõrrandid (4.61) algparameetrite leidmiseks paindel (arvesse on võetud suhteline nihkedeformatsioon). Uuritakse tala omavõnkesagedusi ja -vorme paindevõnkumisel.

Viiendas peatükis käsitletakse raamide võnkumist nii Euleri-Bernoulli kui ka Timošenko teooria järgi. Siirded ja sisejõud raami varraste otstes leitakse algparameetrite meetodiga (5.1). EST-meetodi raami võnkumise põhivõrrandid (5.3) Euleri-Bernoulli ja Timošenko teooria järgi erinevad ülekandemaatriksites (5.9) ja (5.11).

Kuuendas peatükis võetakse vaatluse alla sõrestikud. Vaadeldakse sõrestiku varda lausmassi koondamist sõlmedesse konsistentse ja diagonaalile keskendatud massimaatriksina.

Lisas A käsitletakse vektorite teisendusi kohalikest koordinaatidest üldkoordinaatidesse ja vastupidi.

Lisas B esitatakse EST-meetodiga lahendatud ülesandeid.

Lisas C on viited vabavara GNU Octave'i[1] [2] abil kirjutatud programmidele, kus kümnendkoha märkimiseks kasutatakse punkti. Ühtluse huvides eraldatakse kümnendkohad punktiga ka mujal.

Andres Lahe

[1] http://vabavara.eu/index.php?programm=501 (03.02.2016)

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/GNU_Octave (03.02.2016)

Sisukord

1 Varda pike **17**

1.1 Pikke ülekandemaatriks . . . 17
1.2 Koormusvektor pikkel . . . 20
1.3 Põhivõrrandid varda pikkel . . . 22
1.4 Koondmass pikkel . . . 23
1.5 Varda omavõnkesagedused pikkel . . . 24

2 Varda vääne **39**

2.1 Väände ülekandemaatriks . . . 39
2.2 Koormusvektor väändel . . . 42
2.3 Põhivõrrandid võlli väändel . . . 44
2.4 Pöörlev hooratas . . . 45
2.5 Võlli omavõnkesagedused . . . 45
2.6 Võlli omavõnkevormid . . . 48

3 Euleri-Bernoulli tala võnkumine **65**

3.1 Euleri-Bernoulli tala vabavõnkumine . . . 65
3.1.1 Tala vabavõnkumise diferentsiaalvõrrand . . . 65
3.1.2 Põhivõrrandid tala paindel . . . 69
3.1.3 Koondatud mass tala paindel . . . 70
3.2 Euleri-Bernoulli tala omavõnkesagedused . . . 71
3.3 Euleri-Bernoulli tala sundvõnkumine . . . 91
3.3.1 Koormusvektor paindel . . . 94

4 Timošenko tala võnkumine **123**

4.1 Timošenko tala diferentsiaalvõrrandid . . . 124
4.1.1 Timošenko tala diferentsiaalseosed . . . 124
4.1.2 Timošenko tala vabavõnkumise diferentsiaalvõrrand . . . 125
4.1.3 Timošenko tala ülekandemaatriks . . . 129
4.1.4 Timošenko tala põhivõrrandid . . . 133

5 Raamid **155**

5.1 Raami võnkumise põhivõrrandid . . . 155
5.1.1 Koondatud mass raamil . . . 159

5.2 Raami vabavõnkumine . . . 161
5.3 Raami sundvõnkumine . . . 174
5.3.1 Raami staatiline koormamine . . . 175
5.3.2 Raami antisümmeetriline sundvõnkumine . . . 182
5.3.3 Raami sümmeetriline sundvõnkumine . . . 189

6 Sõrestikud **197**
6.1 Sõrestiku ülekandemaatriks . . . 197
6.1.1 Sõrestikuvarda massi koondamine sõlmedesse . . . 199
6.1.2 Koondmassi element sõrestikul . . . 199
6.2 Sõrestiku omavõnkesagedused . . . 200

A Vektorite teisendused **217**
A.1 Kohalik ja üldteljestik . . . 217
A.2 Märgikokkulepped . . . 217
A.3 Koordinaatide teisendus . . . 218

B EST-meetodiga lahendatud ülesandeid **223**
B.1 Varda võnkumise arvutusi . . . 223
B.2 Raami sundvõnkumise arvutusi . . . 229
B.2.1 Jäikade sõlmedega põikraami antisümmeetriline sundvõnkumine . . . 229
B.2.2 Jäikade sõlmedega põikraami sümmeetriline sundvõnkumine . . . 240
B.3 Sõrestiku arvutusi staatilisel koormusel . . . 251
B.4 Valemeid . . . 252

C Arvutiprogrammid **255**
C.1 Programmid varda pikivõnkumise arvutamiseks . . . 255
C.2 Programmid võlli väändevõnkumise arvutamiseks . . . 262
C.3 Programmid tala võnkumise arvutamiseks . . . 268
C.3.1 Programmid Euleri-Bernoulli tala võnkumise arvutamiseks . . . 268
C.3.2 Programmid Timošenko tala võnkumise arvutamiseks . . . 275
C.3.3 Programmid jätkuvtala võnkumise arvutamiseks . . . 281
C.4 Programmid raami võnkumise arvutamiseks . . . 284
C.5 Programmid sõrestiku võnkumise arvutamiseks . . . 288
C.6 Varia . . . 292

Kirjandus **299**

Aineregister **307**

Näited

1.1 Konsoolvarda omavõnkumine . . . 26
1.2 Jäikade tugedega varda omavõnkumine . . . 31
1.3 Jäikade tugedega varda sundvõnkumine . . . 34

2.1 Konsoolvõlli omavõnkumine . . . 48
2.2 Jäigalt kinnitatud võlli omavõnkumine . . . 53
2.3 Hoorattaga konsoolvõlli omavõnkumine . . . 56
2.4 Hoorattaga võlli omavõnkumine . . . 60
3.1 Konsooltala omavõnkumine . . . 76
3.2 Jäikade tugedega tala omavõnkumine . . . 79
3.3 Viiesildeline jätkuvtala . . . 83
3.4 Paigalseisva ja liikuva liigendtoega tala sundvõnkumine . . . 95
3.5 Liikuva liigendtoe ja jäiga toega tala sundvõnkumine . . . 103
3.6 Koondatud massi kandev tala . . . 109
3.7 Kolmesildeline jätkuvtala . . . 114
4.1 Timošenko konsooltala omavõnkumine . . . 134
4.2 Jäikade tugedega Timošenko tala omavõnkumine . . . 137
4.3 Astmeliselt muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala omavõnkumine . . . 141
4.4 Muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala omavõnkumine . . . 147
5.1 Jäikade sõlmedega põikraami vabavõnkumine . . . 161
5.2 Muutuva ristlõikega põikraami vabavõnkumine . . . 169
5.3 Jäikade sõlmedega põikraami antisümmeetriline staatiline koormamine . . . 175
5.4 Jäikade sõlmedega põikraami sümmeetriline staatiline koormamine . . . 178
5.5 Jäikade sõlmedega põikraami antisümmeetriline sundvõnkumine . . . 182
5.6 Jäikade sõlmedega põikraami sümmeetriline sundvõnkumine . . . 189
6.1 Kahe vardaga tarindi omavõnkumine . . . 201
6.2 Koondmassi ja kahe vardaga tarindi omavõnkumine . . . 203
6.3 Sõrestiku T omavõnkumine . . . 207
6.4 Sõrestiku AM omavõnkumine . . . 209
6.5 Sõrestiku KB omavõnkumine . . . 212
A.1 Vektorite teisendus pöördel . . . 221
B.1 Varda S1 omavõnkumine . . . 223
B.2 Varda S2 omavõnkumine . . . 226

Joonised

1.1 Varda elementaarlõik pikkel . . . 17
1.2 Varda element pikkel . . . 20
1.3 Koondmass pikkel . . . 23
1.4 Pikijõud dünaamilisel koormusel . . . 24
1.5 Varda muutujate järjenumbrid pikkel . . . 24
1.6 Konsoolvarras . . . 26
1.7 Konsoolvarda muutujate järjenumbrid . . . 27
1.8 Konsoolvarda omavõnkesagedused . . . 29
1.9 Konsoolvarda omavõnkevormid . . . 30
1.10 Jäikade tugedega varras . . . 31
1.11 Jäikade tugedega varda muutujate järjenumbrid . . . 31
1.12 Jäikade tugedega varda omavõnkesagedused . . . 32
1.13 Jäikade tugedega varda omavõnkevormid . . . 34
1.14 Jäikade tugedega varda sundvõnkumine . . . 34
1.15 Jäikade tugedega varda muutujate järjenumbrid . . . 35
1.16 Sundiv jõud amplituudiga 100 N jäikade tugedega vardal . . . 37

2.1 Võlli elementaarlõik väändel . . . 39
2.2 Võlli element väändel . . . 41
2.3 Pöörlev hooratas . . . 45
2.4 Võlli muutujate järjenumbrid . . . 46
2.5 Konsoolvõll . . . 48
2.6 Konsoolvõlli muutujate järjenumbrid . . . 49
2.7 Konsoolvõlli omavõnkesagedused . . . 51
2.8 Konsoolvõlli omavõnkevormid . . . 53
2.9 Jäigalt kinnitatud võll . . . 53
2.10 Jäigalt kinnitatud võlli muutujate järjenumbrid . . . 54
2.11 Jäigalt kinnitatud võlli omavõnkesagedused . . . 55
2.12 Jäigalt kinnitatud võlli omavõnkevormid . . . 56
2.13 Hoorattaga konsoolvõll . . . 56
2.14 Hoorattaga konsoolvõlli muutujate järjenumbrid . . . 57
2.15 Hoorattaga konsoolvõlli elemendid ja muutujate järjenumbrid . . . 58
2.16 Hoorattaga konsoolvõlli omavõnkesagedused . . . 59
2.17 Hoorattaga konsoolvõlli omavõnkevormid . . . 60

2.18 Hoorattaga võll . . . 60
2.19 Hoorattaga võlli muutujate järjenumbrid . . . 61
2.20 Hoorattaga võlli omavõnkesagedused . . . 62
2.21 Hoorattaga võlli omavõnkevormid . . . 63

3.1 Koondatud mass . . . 70
3.2 Põikjõud dünaamilisel koormusel . . . 70
3.3 Tala muutujate järjenumbrid . . . 71
3.4 Konsooltala sagedusvõrrandi juured . . . 72
3.5 Jäikade tugedega tala sagedusvõrrandi juured . . . 74
3.6 Liikuva liigendtoe ja jäiga toega tala sagedusvõrrandi juured . . . 76
3.7 Konsooltala . . . 76
3.8 Konsooltala muutujate järjenumbrid . . . 77
3.9 Konsooltala omavõnkesagedused . . . 77
3.10 Konsooltala omavõnkevormid . . . 79
3.11 Jäikade tugedega tala . . . 79
3.12 Jäikade tugedega tala muutujate järjenumbrid . . . 80
3.13 Jäikade tugedega tala omavõnkesagedused . . . 81
3.14 Jäikade tugedega tala omavõnkevormid . . . 83
3.15 Viiesildeline jätkuvtala . . . 83
3.16 Viiesildelise jätkuvtala muutujate järjenumbrid . . . 85
3.17 Viiesildelise jätkuvtala omavõnkesagedused . . . 87
3.18 Viiesildelise jätkuvtala maatriksi spA muster . . . 88
3.19 Viiesildelise jätkuvtala muutujad omavõnkevormide arvutamiseks . . . 89
3.20 Viiesildelise jätkuvtala omavõnkevormid . . . 91
3.21 Paigalseisva ja liikuva liigendtoega tala . . . 95
3.22 Paigalseisva ja liikuva liigendtoega tala muutujate järjenumbrid . . . 95
3.23 Paigalseisva ja liikuva liigendtoega tala omavõnkesagedused . . . 96
3.24 Paigalseisva ja liikuva liigendtoega tala siirded eri sagedustel . . . 98
3.25 Paigalseisva ja liikuva liigendtoega tala momendid eri sagedustel . . . 99
3.26 Liikuva liigendtoe ja jäiga toega tala . . . 103
3.27 Liikuva liigendtoe ja jäiga toega tala muutujate järjenumbrid . . . 104
3.28 Liikuva liigendtoe ja jäiga toega tala omavõnkesagedused . . . 105
3.29 Liikuva liigendtoe ja jäiga toega tala epüürid sagedusel $\omega = 2562.4\,\mathrm{s}^{-1}$ . . . 106
3.30 Liikuva liigendtoe ja jäiga toega tala epüürid sagedusel $\omega = 9341.7\,\mathrm{s}^{-1}$ . . . 107
3.31 Koondatud massi kandev tala . . . 109
3.32 Koondatud massi kandva tala muutujate järjenumbrid . . . 110
3.33 Koondatud massi kandva tala omavõnkesagedused . . . 111
3.34 Koondatud massi kandva tala epüürid sagedusel $\omega = 30\,\mathrm{s}^{-1}$ . . . 112
3.35 Kolmesildeline jätkuvtala . . . 114
3.36 Kolmesildelise jätkuvtala muutujate järjenumbrid . . . 116
3.37 Kolmesildelise jätkuvtala maatriksi spA muster . . . 117
3.38 Kolmesildelise jätkuvtala omavõnkesagedused . . . 118
3.39 Kolmesildelise jätkuvtala omavõnkevormid . . . 119

3.40 Kolmesildelise jätkuvtala epüürid sagedusel $\omega = 100\,\mathrm{s}^{-1}$ 121

4.1 Timošenko tala 123
4.2 Talaelemendi tasakaal 124
4.3 Toetingimusi Timošenko talal 134
4.4 Timošenko konsooltala 134
4.5 Timošenko konsooltala muutujate järjenumbrid 135
4.6 Timošenko konsooltala omavõnkesagedused 136
4.7 Timošenko konsooltala omavõnkevormid 137
4.8 Jäikade tugedega Timošenko tala 138
4.9 Jäikade tugedega Timošenko tala muutujate järjenumbrid 138
4.10 Jäikade tugedega Timošenko tala omavõnkesagedused 139
4.11 Jäikade tugedega Timošenko tala omavõnkevormid 141
4.12 Astmeliselt muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala lapiti- ja servitiasendis 141
4.13 Astmeliselt muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala muutujate järjenumbrid 143
4.14 Astmeliselt muutuva ristlõikega lapitiasendis konsooltala omavõnkesagedused 144
4.15 Astmeliselt muutuva ristlõikega servitiasendis Timošenko konsooltala omavõnkesagedused 145
4.16 Astmeliselt muutuva ristlõikega servitiasendis Timošenko konsooltala omavõnkevormid 147
4.17 Muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala 147
4.18 Ristlõike inertsimomendi muutus 147
4.19 Pikkusühiku kohta tuleva massi muutus 148
4.20 Muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala muutujate järjenumbrid 149
4.21 Muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala maatriksi spA muster 151
4.22 Muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala omavõnkesagedused 152
4.23 Muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala omavõnkevormid 153

5.1 Raami elemendi jõudude ja siirete positiivsed suunad 155
5.2 Koondatud mass 160
5.3 Jäikade sõlmedega põikraam 161
5.4 Jäikade sõlmedega põikraami muutujate järjenumbrid 162
5.5 Jäikade sõlmedega põikraami maatriksi spA muster 165
5.6 Jäikade sõlmedega põikraami omavõnkesagedused 165
5.7 Jäikade sõlmedega põikraami muutujate muudetud järjenumbrid 167
5.8 Jäikade sõlmedega põikraami omavõnkevormid 168
5.9 Muutuva ristlõikega põikraam 169
5.10 Muutuva ristlõikega põikraami omavõnkesagedused 172
5.11 Muutuva ristlõikega põikraami omavõnkevormid 174
5.12 Sundvõnkumise piirkonnad 175
5.13 Jäikade sõlmedega põikraam koormusega $F_x = 1\,\mathrm{N}$ 175
5.14 Jäikade sõlmedega põikraami epüürid staatilisel koormusel $F_x = 1\,\mathrm{N}$ 178
5.15 Jäikade sõlmedega põikraam koormusega $F_z = 1\,\mathrm{N}$ 179
5.16 Jäikade sõlmedega põikraami epüürid staatilisel koormusel $F_z = 1\,\mathrm{N}$ 180

5.17 Jäikade sõlmedega põikraam antisümmeetrilise koormusega 182
5.18 Paindemomendi dünaamikategur k_d antisümmeetrilisel võnkumisel 184
5.19 Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 1.3627 \times 10^2\ \mathrm{s}^{-1}$ 186
5.20 Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 1.8889 \times 10^2\ \mathrm{s}^{-1}$ 189
5.21 Jäikade sõlmedega põikraam sümmeetrilise koormusega 189
5.22 Paindemomendi dünaamikategur k_d sümmeetrilisel võnkumisel 191
5.23 Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 7.2886 \times 10^2\ \mathrm{s}^{-1}$ 194
5.24 Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 7.3813 \times 10^2\ \mathrm{s}^{-1}$ 196

6.1 Sõrestiku varras 197
6.2 Koondmass 200
6.3 Kahe vardaga tarind 200
6.4 Sõlmes on kaks eri sirgeil asuvat varrast 201
6.5 Kahe vardaga tarindi muutujate järjenumbrid 202
6.6 Kahe vardaga tarindi omavõnkesagedused 203
6.7 Koondmassi ja kahe vardaga tarind 203
6.8 Koondmassi ja kahe vardaga tarindi muutujate järjenumbrid 204
6.9 Koondmassi ja kahe vardaga tarindi omavõnkesagedused 206
6.10 Koond- ja lausmassiga kahe vardaga tarindi omavõnkesagedused 206
6.11 Sõrestik T 207
6.12 Sõrestiku T muutujate järjenumbrid 207
6.13 Sõrestiku T koondmasside muutujate järjenumbrid 208
6.14 Sõrestiku T omavõnkesagedused 208
6.15 Sõrestik AM 209
6.16 Sõrestiku AM muutujate järjenumbrid 210
6.17 Sõrestiku AM koondmasside muutujate järjenumbrid 210
6.18 Sõrestiku AM omavõnkesagedused 211
6.19 Sõrestik KB 212
6.20 Sõrestiku KB muutujate järjenumbrid 213
6.21 Sõrestiku KB koondmasside muutujate järjenumbrid 213
6.22 Sõrestiku KB omavõnkesagedused 214

A.1 Vasaku ja parema käe teljestik 217
A.2 Märgikokkulepped 218
A.3 Koordinaatide teisendus 218
A.4 Varda suunakoosinused 219

B.1 Konsoolvarras S1 223
B.2 Konsoolvarda S1 muutujate järjenumbrid 224
B.3 Varda S1 omavõnkesagedused 225
B.4 Varda S1 omavõnkevormid 226
B.5 Konsoolvarras S2 226
B.6 Konsoolvarda S2 muutujate järjenumbrid 227
B.7 Varda S2 omavõnkesagedused 228

B.8 Varda S2 omavõnkevormid 229
B.9 Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 7.2216 \times 10\,\mathrm{s}^{-1}$ 232
B.10 Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 1.8599 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ 234
B.11 Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 7.300 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ 237
B.12 Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 1.206 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$ 240
B.13 Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 2.83 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ 242
B.14 Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 5.34 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ 245
B.15 Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 9.95084 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ 248
B.16 Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 1.2860274 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$ . . 250
B.17 Kahe vardaga tarind 251
B.18 Sõrestik T 251
B.19 Sõrestik AM 251
B.20 Sillasõrestik 252
B.21 Sillasõrestiku muutujad 252

Tabelid

1.1 Konsoolvarda sagedusvõrrandi juured . . . 29
1.2 Jäikade tugedega varda sagedusvõrrandi juured . . . 33

2.1 Konsoolvõlli eri meetodeil leitud sagedusvõrrandi juured . . . 51
2.2 Jäigalt kinnitatud võlli eri meetodeil leitud sagedusvõrrandi juured . . . 55

3.1 Konsooltala sagedusvõrrandi juured . . . 78
3.2 Jäikade tugedega tala sagedusvõrrandi juured . . . 81
3.3 Viiesildelise jätkuvtala omavõnkesagedused . . . 88
3.4 Paigalseisva ja liikuva liigendtoega tala leitud sagedusvõrrandi juured . . . 97
3.5 Liikuva liigendtoe ja jäiga toega talasagedusvõrrandi juured . . . 105

4.1 Timošenko konsooltala sagedusvõrrandi mõõduta juured . . . 136
4.2 Jäikade tugedega Timošenko tala sagedusvõrrandi mõõduta juured . . . 140
4.3 Astmeliselt muutuva ristlõikega lapitiasendis Timošenko konsooltala omavõnkesagedused . . . 144
4.4 Astmeliselt muutuva ristlõikega servitiasendis Timošenko konsooltala omavõnkesagedused . . . 145
4.5 Muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala omavõnkesagedused . . . 154

5.1 Jäikade sõlmedega põikraami omavõnkesagedused . . . 166
5.2 Muutuva ristlõikega põikraami omavõnkesagedused . . . 172
5.3 EST-meetodiga arvutatud ja katsega leitud omavõnkesageduste erinevus . . . 173
5.4 Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid staatilisel koormusel $F_x = 1\,\mathrm{N}$ 176
5.5 Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid staatilisel koormusel $F_z = 1\,\mathrm{N}$ 181
5.6 Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 1.3627\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ 184
5.7 Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 1.8889\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ 187
5.8 Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 7.2886\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ 191
5.9 Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 7.3813\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ 194

6.1 Sõrestiku T omavõnkesagedused . . . 209
6.2 Sõrestiku AM omavõnkesagedused . . . 211
6.3 Sõrestiku KB omavõnkesagedused . . . 215

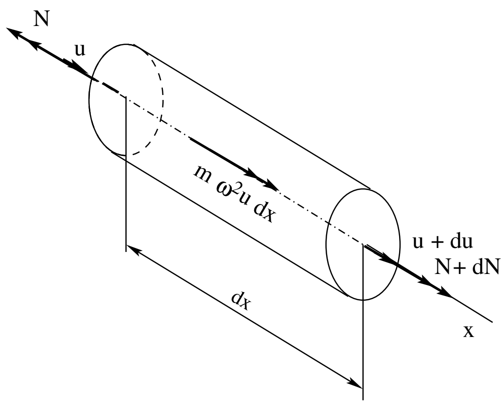
B.1 Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 7.2216\times10\,\mathrm{s}^{-1}$. 229

B.2 Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 1.8599 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ 232
B.3 Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 7.300 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$. 235
B.4 Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 1.206 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$. 237
B.5 Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 2.83 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ 240
B.6 Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 5.34 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$. 243
B.7 Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 9.95084 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ 245
B.8 Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 1.2860274 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$ 248

1. Varda pike

1.1 Pikke ülekandemaatriks

Vaatleme pikitelje sihis võnkuva varda elementaarlõiku pikkel (jn 1.1). Varda elementaarlõigu otstes mõjuvad pikijõud N ja $N + \mathrm{d}N$. Pikisiirde u juurdekasv on $\mathrm{d}u$. Elementaarlõigu inertsjõud on $(m\mathrm{d}x)\,\omega^2 u$, kus m on mass ühikpikkuse kohta, ω – võnkumise nurksagedus, u – pikisiire.



Joonis 1.1. Varda elementaarlõik pikkel

Vaadeldavate jõudude mõjul on varda elementaarlõik tasakaalus:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} + m\,\omega^2 u = 0 \tag{1.1}$$

Suhtelise normaaldeformatsiooni (normaalmoonde) $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ ja pikijõu N seos on

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{N}{EA} \tag{1.2}$$

kus EA on varda ristlõike pikkejäikus, E – (normaal)elastsusmoodul (Youngi[1] moodul), A – ristlõikepindala.

Asendades avaldises (1.1) pikijõu N suhtelise normaaldeformatsiooniga, saame teist järku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \frac{m\,\omega^2}{EA} u = 0 \tag{1.3}$$

ehk

$$u'' + \kappa^2 u = 0 \tag{1.4}$$

kus

$$\kappa^2 = \frac{m\,\omega^2}{EA} = \frac{\rho\,\omega^2}{E} \tag{1.5}$$

Täht ρ tähistab siin materjali tihedust.

[1]Thomas Young (1773–1829), inglise polümaat ja arst.

Diferentsiaalvõrrandi (1.4) lahendite süsteemi otsime kujul

$$u_1^* = \cos\kappa x, \quad u_2^* = \sin\kappa x \tag{1.6}$$

kus κ on diferentsiaalvõrrandi karakteristliku võrrandi lahend ehk pikkekarakteristik.

$$\kappa = \omega\sqrt{\frac{m}{AE}} = \omega\sqrt{\frac{\rho}{E}} \tag{1.7}$$

Varda piket iseloomustava karakteristikuna on kasutatud ka varda tunnusarvu pikkel $\epsilon_\circ$ [PL63]:

$$\epsilon_\circ = \ell\,\omega\sqrt{\frac{m}{AE}} = \ell\,\kappa \tag{1.8}$$

kus ℓ on varda pikkus.

Diferentsiaalvõrrandi lahendite süsteemi (1.6) nimetame lahendite fundamentaalsüsteemiks, sest Wronski[2] determinant[3] ei võrdu nulliga.

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos\kappa x & \sin\kappa x \\ -\kappa\,\sin\kappa x & \kappa\,\cos\kappa x \end{vmatrix} = \kappa \neq 0 \tag{1.9}$$

Diferentsiaalvõrrandi lahendite fundamentaalsüsteemi nimetatakse normeerituks [Kna17, lk 231], kui Wronski determinandi $W(x)$ väärtus kohal $x = 0$ on ühikmaatriks $I_{n\times n}$, s.o

$$W(0) = I_{2\times 2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

Lahendite süsteemi (1.6) normeerimiseks kirjutame välja Wronski determinandi W väärtuse kohal $x = 0$:

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \kappa \end{vmatrix} \tag{1.11}$$

Selleks et determinandi (1.11) väärtus oleks üks, jagame teise veeru κ-ga. Tulemuseks on ühikmaatriks

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{1.12}$$

Teeme samalaadse teisenduse normeerimata lahendite süsteemiga (1.6). Saame

$$u_1 = \cos\kappa x, \quad u_2 = \frac{1}{\kappa}\sin\kappa x \tag{1.13}$$

[2] Józef Maria Wronski (1776–1853), poola filosoof, matemaatik ja füüsik.
[3] Determinant, kus iga järgmine rida on eelmise rea tuletis.

Normeeritud lahendite fundamentaalsüsteemi (1.13) abil saame algtingimustega ülesande ehk Cauchy[4] ülesande.[5] Algtingimused ehk algparameetrid [Jür85, lk 248] valime vastavalt rajajõudude märgikokkuleppele.

Varda sisejõudude leidmisel kasutatakse rajajõudude määramiseks kahte erinevat märgikokkulepet (jn A.2). Esimese märgikokkuleppe puhul

$$u\,(x=0)=u_0, \quad u_0' = \frac{N\,(x=0)}{EA} = \frac{N_\circ}{EA} \tag{1.14}$$

ja teise märgikokkuleppe korral

$$u\,(x=0)=u_0, \quad u_0' = -\frac{N\,(x=0)}{EA} = -\frac{N_\circ}{EA} \tag{1.15}$$

Homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend esimese märgikokkuleppe järgi on

$$u_x = u_0 \cos \kappa x + \frac{N_\circ}{EA}\frac{1}{\kappa}\sin \kappa x \tag{1.16}$$

ning teise märgikokkuleppe korral

$$u_x = u_0 \cos \kappa x - N_\circ \frac{1}{EA}\frac{1}{\kappa}\sin \kappa x \tag{1.17}$$

Viimasel juhul on normaalsiirde tuletis koordinaadi x järgi

$$u_x' = -u_0 \kappa \sin \kappa x - N_\circ \frac{1}{EA}\cos \kappa x \tag{1.18}$$

mille korrutamisel EA-ga saame pikijõu

$$N_x = -u_0 EA\kappa \sin \kappa x - N_\circ \cos \kappa x \tag{1.19}$$

Teise märgikokkuleppe korral on varda (jn 1.2) ülekandevõrrand

$$\mathbf{Z_L}\,(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\cdot\mathbf{Z_A} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{1.20}$$

Siin on $\mathbf{Z_L}$, $\mathbf{Z_A}$ varda lõpus ja alguses olevad siirded ning pikijõud

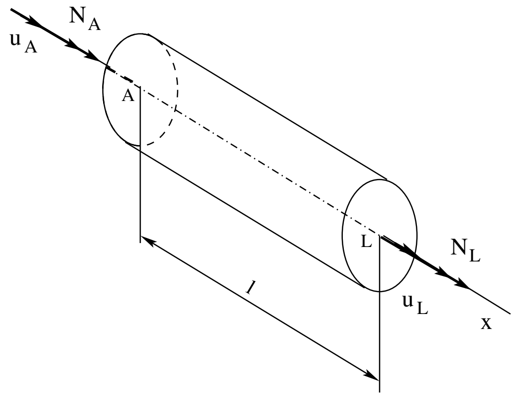
$$\mathbf{Z_L} = \begin{bmatrix} u_L \\ N_L \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_A} = \begin{bmatrix} u_A \\ N_A \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

ülekandemaatriks pikkel $\mathbf{U}$ avaldub (vt GNU Octave'i programm siiremPike.m)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos \kappa x & -\frac{1}{EA}\frac{1}{\kappa}\sin \kappa x \\ -EA\kappa \sin \kappa x & -\cos \kappa x \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

[4] Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), prantsuse matemaatik.
[5] `http://www.staff.ttu.ee/~kairik/dvloeng9_2013.pdf` (10.06.2017)

ning $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ on koormusvektor.



Joonis 1.2. Varda element pikkel

1.2 Koormusvektor pikkel

Vaatleme varda liikumisvõrrandit [SALŠ84, lk 184]

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{x}^2} = p_x\left(x,t\right) + \rho A\,\frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{t}^2} \tag{1.23}$$

Juhul kui talale mõjuv koormus muutub ajas viisil $p_x\left(x,\right) = n\left(x\right)\sin\theta t$, saame

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{x}^2} - \rho A\,\frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{t}^2} = n\left(x\right)\sin\theta t \tag{1.24}$$

Otsime sundvõnkumise kuju kahe funktsiooni korrutisena:

$$u\left(x,t\right) = f\left(x\right)\sin\theta t \tag{1.25}$$

Esimene tegur sõltub siin ainult koordinaadist x ja teine ainult ajast t.

Asetame saadud avaldise diferentsiaalvõrrandisse (1.24). Mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi vabaliikmele lisame lauskoormusega ekvivalentse üldistatud koormuse [YSM00]:

$$EAf''\left(x\right) + \rho A\,u^2\,f\left(x\right) = n\left(x\right) + F_x\left(x\right)\delta\left(x - x_\circ\right) \tag{1.26}$$

ehk

$$f''\left(x\right) + \kappa^2\,f\left(x\right) = \frac{n\left(x\right)}{EA} + \frac{F_x\left(x\right)\delta\left(x - x_\circ\right)}{EA} \tag{1.27}$$

Siin on

$F_x\left(x\right)\,\delta\left(x - x_\circ\right)$ lauskoormusega $n_x\left(x\right)$ ekvivalentne koondjõud;

$$\kappa^2 = \frac{m\,\omega^2}{EA} = \frac{\rho\,\omega^2}{E} \tag{1.28}$$

ning $\delta(x - x_\circ)$ on Dirac'i[6] deltafunktsioon.

Diferentsiaalvõrrandi (1.27) lahend $f(x)$ koosneb homogeensest lahendist $f_h(x)$ ja erilahendist $f_e(x)$, seega $f(x) = f_h(x) + f_e(x)$.

Homogeense diferentsiaalvõrrandi lahend teise märgikokkuleppe puhul $f_h(x) = u_h(x)$ on toodud avaldisega (1.17).

Mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi (1.27) erilahendit $f_e(x)$ otsime Cauchy valemi [Ste59] abil:

$$f_e(x) = \int_{x_\circ}^{x} G_n(x,\xi)\, g_n(\xi)\, d\xi \tag{1.29}$$

kus $G(x,\xi)$ on vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi normeeritud lahend. Täpsemalt,

$$f_e(x) = \int_{x_\circ}^{x} G_2(x,\xi)\, g_2(\xi)\, d\xi + \int_{x_\circ}^{x} G_1(x,\xi)\, g_1(\xi)\, d\xi \tag{1.30}$$

Siin kasutame normeeritud lahendite fundamentaalsüsteemi (1.13):

$$G_2(x,\xi) = f_2(x-\xi) = \frac{1}{\kappa}\sin\kappa(x-\xi) \tag{1.31}$$

$$G_1(x,\xi) = f_1(x-\xi) = \cos\kappa(x-\xi) \tag{1.32}$$

ja koormusfunktsioone $g_n(\xi)$:

$$g_2(\xi) = \frac{n_x(\xi)}{EA}, \quad g_1(\xi) = \frac{F_x(\xi)}{EA} \tag{1.33}$$

Vaatleme juhtu, kui $n_x/EA = const$. Erilahendi (1.30) saamiseks tuleb integreerida avaldis

$$f_{2\,e}(x) = \int_{x_\circ}^{x} G_2(x,t)\, g_2(t)\, d\xi = \frac{n_x}{EA}\frac{1}{\kappa}\int_{x_\circ}^{x} \sin\kappa(x-\xi)\, d\xi \tag{1.34}$$

Saame

$$\int_{a}^{x} \sin\kappa(x-\xi)\, d\xi = \frac{1}{\kappa}\cos\kappa(x-\xi)\Big|_a^x = \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa}\cos\kappa\langle x-a\rangle_+ \tag{1.35}$$

kus $\langle x-a\rangle_+$ on katkevusfunktsioon (ingl discontinuity function[7], singularity function[8]), mille tähistamiseks kasutame Macaulay[9] noolsulgusid [Fel16, lk 12-3] (sks Macaulay Klammern, ingl Macaulay brackets).

$$\langle x-a\rangle_+^n = (x-a)^n\, H(x-a) \tag{1.36}$$

[6] Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984), inglise füüsik.

[7] `http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/Structures.d/IAST.Lect12.d/IAST.Lect12.pdf` (11.06.2017)

[8] `https://en.wikipedia.org/wiki/Singularity_function` (11.06.2017)

[9] William Herrick Macaulay (1853–1936), inglise matemaatik.

kus $H\left(x-a\right)$ on Heaviside'i[10] funktsioon.

$$H\left(x-a\right)=\begin{cases}0, & kui \quad (x-a)<0\\ 1, & kui \quad (x-a)\geq 0\end{cases} \tag{1.37}$$

Asetame leitud integraali erilahendisse (1.34):

$$f_{2\,e}\left(x\right) \;=\; \frac{n_x}{E\,A}\frac{1}{\kappa^2}\left[1-\cos\kappa\left\langle x-a\right\rangle_+\right]=\frac{n_x}{E\,A}\frac{\ell^2}{\lambda^2}\left[1-\cos\frac{\lambda}{\ell}\left\langle x-a\right\rangle_+\right] \tag{1.38}$$

Siin võtame arvesse, et $\lambda=\kappa\ell$.

Mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi (1.27) teisele vabaliikmele ($F_x/EA = const$) vastava erilahendi leiame avaldist (1.30) integreerides:

$$f_{1\,e}\left(x\right)=\int_{x_0}^{x}G_1\left(x,\xi\right)g_1\left(t\right)d\xi=\frac{F_x}{E\,A}\int_{x_0}^{x}\cos\kappa\left(x-\xi\right)d\xi \tag{1.39}$$

Saame

$$\int_a^x\cos\kappa\left(x-\xi\right)d\xi=-\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\left(x-\xi\right)\Big|_a^x=\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\left\langle x-a\right\rangle_+ \tag{1.40}$$

Asetame leitud integraali erilahendisse (1.39):

$$f_{1\,e}\left(x\right) \;=\; \frac{F_x}{E\,A}\frac{1}{\kappa}\left[\sin\kappa\left\langle x-a\right\rangle_+\right]=\frac{F_x}{E\,A}\frac{\ell}{\lambda}\left[\sin\kappa\left\langle x-a\right\rangle_+\right] \tag{1.41}$$

Erilahenditest (1.38) ja (1.41) koostame koormusvektori $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ (1.20): $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}=\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathbf{n}}+\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}$.

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathbf{n}}=\begin{bmatrix}\overset{\circ}{u}_e\\ \overset{\circ}{N}_e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{2e}\\ E\,A f'_{2e}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{n_x}{E\,A}\dfrac{1}{\kappa^2}\left[1-\cos\kappa\left\langle x-a\right\rangle_+\right]\\ n_x\dfrac{1}{\kappa}\left[\sin\kappa\left\langle x-a\right\rangle_+\right]\end{bmatrix} \tag{1.42}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}=\begin{bmatrix}\overset{\circ}{u}_e\\ \overset{\circ}{N}_e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{1e}\\ E\,A f'_{1e}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{F_x}{E\,A}\dfrac{1}{\kappa}\left[\sin\kappa\left\langle x-a\right\rangle_+\right]\\ F_x\left[\cos\kappa\left\langle x-a\right\rangle_+\right]\end{bmatrix} \tag{1.43}$$

1.3 Põhivõrrandid varda pikkel

Pikke põhivõrrandid teise märgikokkuleppe puhul (1.20) saab kirjutada võrrandisüsteemina

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{Z_A}-\mathbf{I_{2\times 2}}\cdot\mathbf{Z_L}=-\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{1.44}$$

[10] Oliver Heaviside (1850–1925), inglise füüsik ja elektriinsener.

Lühemalt,

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{2\times4}\cdot\widehat{\mathbf{Z}}=-\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{1.45}$$

Siin

$$\widehat{\mathbf{Z}}=\begin{bmatrix}\mathbf{Z_A}\\ \mathbf{Z_L}\end{bmatrix} \tag{1.46}$$

ja $\widehat{\mathbf{UI}}_{2\times4}$ on laiendatud ülekandemaatriks $(U_{2\times2}\mid -I_{2\times2})$.

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{2\times4}=\left[\begin{array}{cc|cc}\cos\kappa\ell & -i_\circ\frac{1}{EA}\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell & -1 & 0\\ -\dfrac{1}{i_\circ}EA\kappa\sin\kappa\ell & -\cos\kappa\ell & 0 & -1\end{array}\right] \tag{1.47}$$

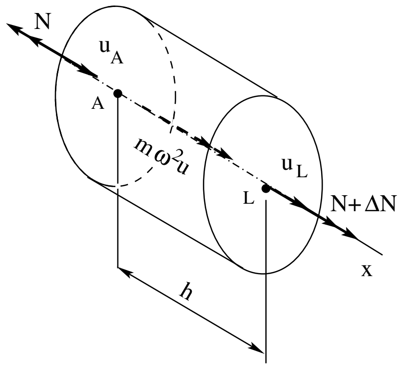
kus ℓ on varda elemendi pikkus, $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ – koormusvektor, $i_\circ$ – siirete u_i skaleerimistegur.

Ülekandemaatriksi (1.47) arvutame GNU Octave'i programmiga splvfmPike.m.

Siirete arvväärtused võrrandisüsteemis (1.44) erinevad sisejõudude arvväärtustest mitu suurusjärku, mis võib põhjustada arvutusraskusi. Korrutame siirete võrrandid skaleerimisteguriga. Sellist teisendust nimetatakse võrrandisüsteemi skaleerimiseks (ingl scaling) [Lah12, lk 384]. Peame arvestama, et skaleeritud võrrandisüsteemiga leitavad siirded on $i_\circ$ korda suuremad.

1.4 Koondmass pikkel

Vaatleme koondmassi pikkel (jn 1.3). Koondmassile mõjuvad pikijõud N, $N+\Delta N$ ja inertsjõud $m\omega^2u$.



Joonis 1.3. Koondmass pikkel

Siin on m koondmass, ω – võnkumise nurksagedus, u – pikisiire, $\Delta N=N_L-N_A$, kus N_A ja N_L on pikijõud koondmassi vasakul ja paremal küljel. Joonisel 1.3 tähistavad u_A ja u_L pikisiirdeid.

Koostame koondmassi tasakaaluvõrrandi

$$\Delta N+m\omega^2u=0 \tag{1.48}$$

Teise märgikokkuleppe korral saame tasakaaluvõrrandiks

$$N_L+m\omega^2u-N_A=0 \tag{1.49}$$

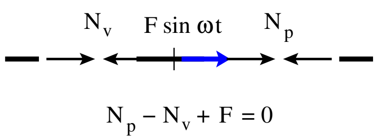
Lugedes pikisiirded võrdseks ja sidudes inertsjõu pikisiirdega u_L (splfHRmassPike.m), saame

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & \dfrac{1}{i_\circ}m\omega^2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_A\\ N_A\\ u_L\\ N_L\end{bmatrix}=0 \tag{1.50}$$

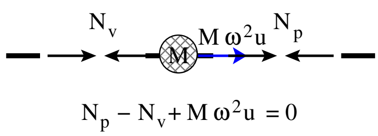
Inertsjõu võime siduda ka pikisiirdega u_A (splfHLmassPike.m):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{i_\circ} m\omega^2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ N_A \\ u_L \\ N_L \end{bmatrix} = 0 \tag{1.51}$$

Koondmass tekitab pikijõu epüüris katkevuse $M\omega^2 u$ (jn 1.4).



(a) Koondjõud ja pikijõud



(b) Koondmass ja pikijõud

Joonis 1.4. Pikijõud dünaamilisel koormusel

1.5 Varda omavõnkesagedused pikkel

Pikkusega ℓ ja pikkejäikusega EA varda omavõnkesageduse arvutamiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{1.52}$$

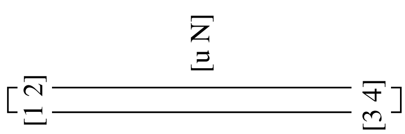
kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor:

$$\mathbf{Z} = \widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a} \\ \mathbf{Z_b} \end{bmatrix} \tag{1.53}$$

Vektori komponentideks on pikisiirded ja pikijõud varda ab alguses ning lõpus (1.21):

$$\mathbf{Z_a} = \begin{bmatrix} u_A^{(ab)} \\ N_A^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(1) \\ Z\,(2) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b} = \begin{bmatrix} u_L^{(ab)} \\ N_L^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(3) \\ Z\,(4) \end{bmatrix} \tag{1.54}$$

Muutujate $Z\,(i)$ (i = 1, 2, 3, 4) järjenumbrid on toodud joonisel 1.5.



Joonis 1.5. Varda muutujate järjenumbrid pikkel

Võrrandisüsteemi (1.52) kaks esimest võrrandit on põhivõrrandid (1.44). Ülejäänud kaks võrrandit saame rajatingimustest.

Konsoolvarda rajatingimused:

$$\begin{aligned} Z(1) &= u_A^{(ab)} &= 0 \\ Z(4) &= N_L^{(ab)} &= 0 \end{aligned} \tag{1.55}$$

Kahel toel töötava varda rajatingimused:

$$\begin{aligned} Z(1) &= u_A^{(ab)} &= 0 \\ Z(3) &= u_L^{(ab)} &= 0 \end{aligned} \tag{1.56}$$

Konsoolvarda omavõnkesagedused (sks Eigenfrequenzen, ingl natural frequencies, vn частоты собственных колебаний) määrame võrrandisüsteemi (1.57) determinandi nullisuse tingimusest:

$$\begin{bmatrix} \cos\kappa\ell & -i_\circ \frac{1}{EA}\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell & -1 & 0 \\ -\dfrac{1}{i_\circ} EA\kappa\sin\kappa\ell & -\cos\kappa\ell & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(1) \\ Z(2) \\ Z(3) \\ Z(4) \end{bmatrix} = 0 \tag{1.57}$$

Arvutame võrrandisüsteemi determinandi $det\,(A)$:

$$det\,(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos\kappa\ell & -i_\circ \frac{1}{EA}\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell & -1 \\ -\dfrac{1}{i_\circ} EA\kappa\sin\kappa\ell & -\cos\kappa\ell & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -i_\circ \frac{1}{EA}\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell & -1 \\ -\cos\kappa\ell & 0 \end{vmatrix} = -\cos\kappa\ell = 0 \tag{1.58}$$

Koosinus $\kappa\ell$ (1.7) on null, kui

$$\lambda_n = \kappa\ell = \ell\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}} = (2n-1)\,\frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.59}$$

Siin tähistab λ_n konsoolvarda sagedusvõrrandi ehk karakteristliku võrrandi (sks Frequenzgleichung, ingl frequency equation e characteristic equation e secular equation [Sob64, lk 334], vn уравнение частот) juuri, vrd [Yan05, lk 625].

Nüüd saame konsoolvarda omavõnkesagedused ω_n.

$$\boxed{\omega_n = (2n-1)\,\frac{\pi}{2\ell}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots} \tag{1.60}$$

Kahel toel töötava varda omavõnkesageduste määramiseks koostame võrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} \cos\kappa\ell & -i_\circ \frac{1}{EA}\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell & -1 & 0 \\ -\dfrac{1}{i_\circ} EA\kappa\sin\kappa\ell & -\cos\kappa\ell & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(1) \\ Z(2) \\ Z(3) \\ Z(4) \end{bmatrix} = 0 \tag{1.61}$$

Arvutame determinandi $det\,(A)$:

$$det\,(A) = -1 \cdot \begin{vmatrix} \cos\kappa\ell & -i_\circ \frac{1}{EA}\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell & 0 \\ -\dfrac{1}{i_\circ} EA\kappa\sin\kappa\ell & -\cos\kappa\ell & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -i_\circ \frac{1}{EA}\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell & 0 \\ -\cos\kappa\ell & -1 \end{vmatrix} = i_\circ \frac{1}{EA}\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell = 0 \tag{1.62}$$

Siinus $\kappa\ell$ (1.7) on null, kui

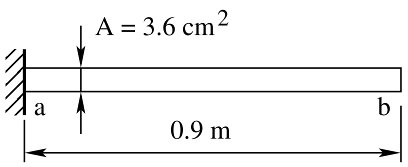
$$\lambda_n = \kappa\ell = \ell\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}} = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.63}$$

Siin tähistab λ_n jäigalt kinnitatud varda sagedusvõrrandi juuri, vrd [Yan05, lk 625].

Nüüd saame jäigalt kinnitatud varda omavõnkesagedused ω_n.

$$\boxed{\omega_n = (n-1)\frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots} \tag{1.64}$$

Näide 1.1 (konsoolvarda omavõnkumine). Leida joonisel 1.6 kujutatud konsoolvarda omavõnkesagedused ja -vormid (sks Eigenschwingungsformen[11] e Eigenformen, ingl natural modes, vn формы собственных колебаний).



Joonis 1.6. Konsoolvarras

[11] https://de.glosbe.com/de/de/Eigenschwingungsform (03.04.2017)

Andmed. Varda pikkus $\ell = 0.9\,\mathrm{m}$, ristlõikepindala $A = 3.6\,\mathrm{cm}^2$, elastsusmoodul $E = 200\,\mathrm{GPa}$, materjali tihedus $\rho = 7.80 \times 10^3\,\mathrm{kg/m}^3$.

Lahendus. Omavõnkesageduste arvutamiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{1.65}$$

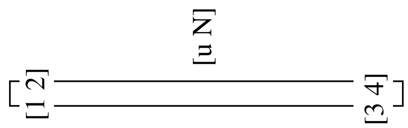
kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor:

$$\mathbf{Z} = \widehat{\mathbf{Z}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{Z_a} \\ \mathbf{Z_b} \end{array} \right] \tag{1.66}$$

Vektori $\widehat{\mathbf{Z}}$ elementideks on pikisiirded ja pikijõud varda ab alguses ning lõpus (1.21):

$$\mathbf{Z_a} = \left[\begin{array}{c} u_A^{(ab)} \\ N_A^{(ab)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} Z\,(1) \\ Z\,(2) \end{array} \right], \qquad \mathbf{Z_b} = \left[\begin{array}{c} u_L^{(ab)} \\ N_L^{(ab)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} Z\,(3) \\ Z\,(4) \end{array} \right] \tag{1.67}$$

Muutujate $Z\,(i)$ (i = 1, 2, 3, 4) järjenumbrid on toodud joonisel 1.7.



Joonis 1.7. Konsoolvarda muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (1.65) kaks esimest võrrandit on põhivõrrandid (1.47). Ülejäänud kaks võrrandit saame rajatingimustest.

$$\begin{array}{rcccl} Z\,(1) & = & u_A^{(ab)} & = & 0 \\ Z\,(4) & = & N_L^{(ab)} & = & 0 \end{array} \tag{1.68}$$

GNU Octave'i programmiga NaidePike1.m leiame hõreda võrrandisüsteemi (1.65) determinandi nullid. Determinandi arvutuse leiab programmi väljavõttes 1.1.

Väljavõte programmist 1.1 (NaidePike1.m) %

```
            # hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E);
IIv=1;
IJv=1;
           # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=0
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
####### Rajatingimused
spA=spSisestaArv(spA,3,1,1);  # $u_A$ - pikisiire
spA=spSisestaArv(spA,4,4,1);  # $T_L$ - $N_L$ - pikijõud

 spA determinant
D(j)=det(spA);
```

Võrrandisüsteemi (1.65) determinandi märk muutub nurksageduse ω vahemikus, mida täpsustatakse kuni etteantud täpsuseni $eps0$ (vt arvutuspäeviku väljavõte 1.1).

Väljavõte arvutuspäevikust 1.1 (NaidePike1.m)

```
octave:1> NaidePike1
l =  0.90000
E =  2.1000e+11
md =  7800
A =  3.6000e-04
EA =  75600000
Mass =  2.8080
baasi0 =  75600000
samm =  15
lop =  89090

Arvutuse algus.
NNK =  4
-------- Sparse matrix instantiation --------
  spA=sparse(NNK,NNK)

 Lähme esimest determinandi nulli täpsustama.
wf_enne =  9056.1
wf_parast =  9056.1
Oota! Arvutan.
***************
Arvutus on lõppenud.
octave:2>
```

Varda (jn 1.6) esimesed kuus omavõnkesagedust on: $\omega_1 = 9056.06881\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 2.71682064\times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 4.52803440\times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 6.33924817\times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_5 = 8.15046193\times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_6 = 9.96167569\times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$.

Võtame kasutusele sagedusvõrrandi juurte ja omavõnkesageduste seose

$$\lambda_i = \omega_i \sqrt{\frac{\rho A}{EA}}\ell \tag{1.69}$$

Programmiga NaidePike1.m arvutatud omavõnkesagedused ω_i teisendame sagedusvõrrandi juurteks λ_i: $\lambda_1 = 1.570796$, $\lambda_2 = 4.712389$, $\lambda_3 = 7.853982$, $\lambda_4 = 10.995574$, $\lambda_5 = 14.137167$, $\lambda_6 = 17.278760$.

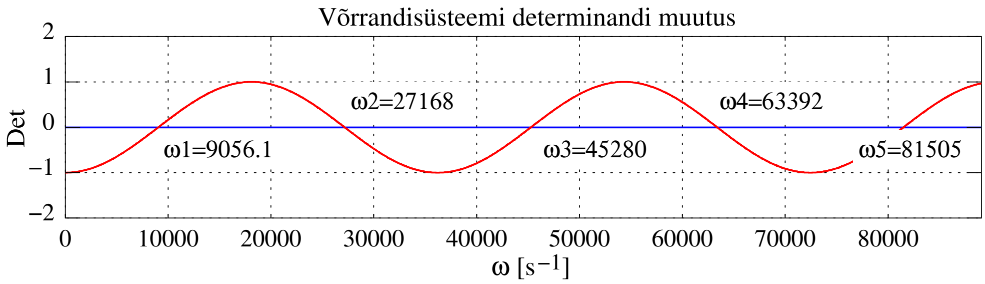
Konsoolvarda sagedusvõrrandi täpsed juured λ_n ja omavõnkesagedused ω_n arvutame valemitega (1.59) ja (1.60).

Tabelis 1.1 on toodud EST-meetodiga leitud konsoolvarda sagedusvõrrandi juured. Need ühtivad täpsete sagedusvõrrandi juurtega (vt (1.59)) ja spektraalelementide meetodi [Mal13, lk 40], [Bla05] abil leitutega.

Tabel 1.1. Konsoolvarda sagedusvõrrandi juured

Omavõnke-sagedus	EST-meetod		Täpne sagedusvõrrandi juur (1.59)
	$\omega\ \left[s^{-1}\right]$	λ	λ
1.	9056.06881	1.570796	1.570796
2.	27168.2064	4.712389	4.712389
3.	45280.3440	7.853982	7.853982
4.	63392.4817	10.995574	10.995574
5.	81504.6193	14.137167	14.137167
6.	99616.7569	17.278760	17.278760

Võrrandisüsteemi (1.65) determinandi sõltuvus nurksagedusest ω selgub jooniselt 1.8.



Joonis 1.8. Konsoolvarda omavõnkesagedused

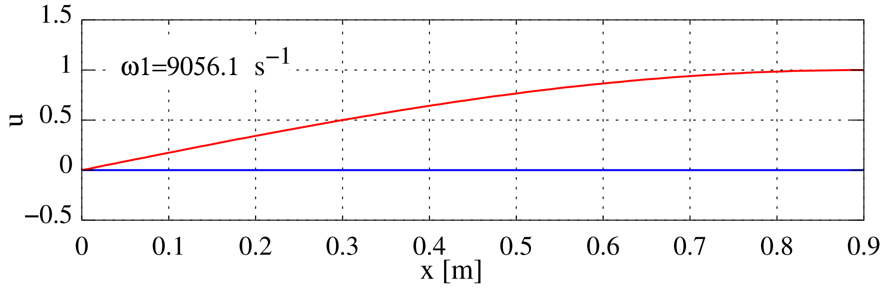
Valime pikisiirde skaleerimisteguri võrdseks ristlõike pikkejäikusega (baasi0 = EA). Nüüd saame suuremad amplituudid, kuid omavõnkesagedused jäävad samaks.

Omavõnkevormid sagedustel $\omega_1 = 9056.1\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 2.7168\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$ ja $\omega_3 = 4.5280\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$ leiame vastavalt GNU Octave'i programmidega NaidePike1w1.m, NaidePike1w2.m ning NaidePike1w3.m. Nendes programmides viime kolmanda veeru paremale poolele ja võrdsustame ühega. Hõreda võrrandisüsteemi lahendamisel vähimruutude meetodiga saame lahendist valida algparameetrid (vt programmi väljavõte 1.2).

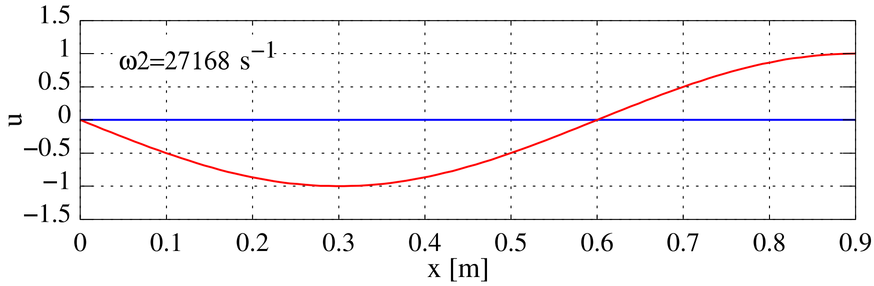
Omavõnkevormid on toodud joonisel 1.9.

Väljavõte programmist 1.2 (NaidePike1.m)

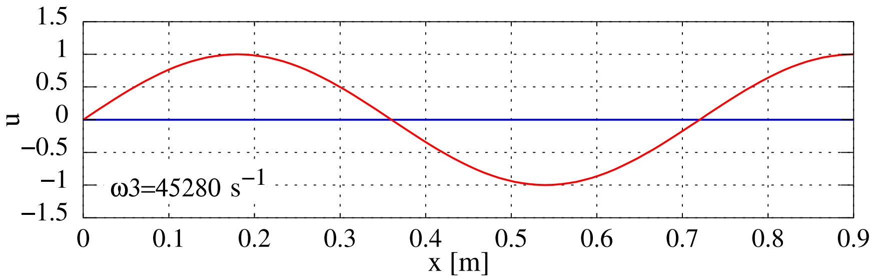
```
            # Hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E);
IIv=1;
IJv=1;
           # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=0
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
####### Rajatingimused
spA=spSisestaArv(spA,3,1,1);  # $u_A$ - pikisiire
spA=spSisestaArv(spA,4,4,1);  # $N_L$ - pikijõud
columns_to_remove = [3];
```



(a) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_1 = 9.0561 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$



(b) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_2 = 2.7168 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$



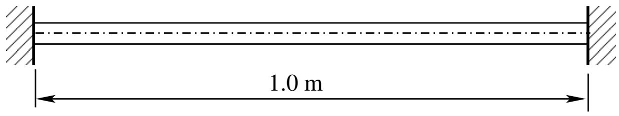
(c) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_3 = 4.5280 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$

Joonis 1.9. Konsoolvarda omavõnkevormid

```
Anull=full(spAnull);
B=Anull(:,columns_to_remove);
Anull(:,columns_to_remove)=[];
Cnull=Anull;
spCnull=sparse(Cnull)
B=-B
spCnullX=spCnull\B
Xvect = spCnullX;
SalgPar=Xvect(1:2,1) # Algparameetrid
xx=0;
Nmitmeks=100
xsammgr=l/Nmitmeks;
for ij=1:Nmitmeks+1
Xloikes(1,ij)=xx;
```

```
Xloikes(2,ij)=xx;

siirF=siiremVoll(baasi0,xx,d,wf,md,G);
siirded(1:2,ij)=siirF*SalgPar;
%siirdedXx=siirF*SalgParXx
%
xx=xx+xsammgr;
endfor
```

Näide 1.2 (jäikade tugedega varda omavõnkumine). Leida joonisel 1.10 kujutatud jäikade tugedega varda omavõnkesagedused ja -vormid.



Joonis 1.10. Jäikade tugedega varras

Andmed. Varda pikkus $\ell = 1.0\,\mathrm{m}$, ristlõikepindala $A = 4.0\,\mathrm{cm}^2$, elastsusmoodul $E = 210\,\mathrm{GPa}$, materjali tihedus $\rho = 7.86 \times 10^3\,\mathrm{kg/m}^3$ (cf. [CCD10, lk 41]).

Lahendus. Omavõnkesageduste arvutamiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{1.70}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor:

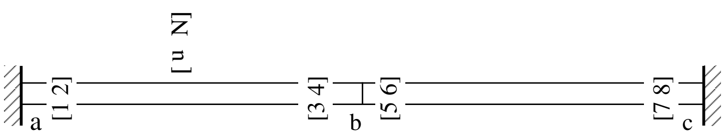
$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\mathbf{a}}^{(\mathbf{ab})} \\ \mathbf{Z}_{\mathbf{b}}^{(\mathbf{ab})} \\ \mathbf{Z}_{\mathbf{b}}^{(\mathbf{bc})} \\ \mathbf{Z}_{\mathbf{c}}^{(\mathbf{bc})} \end{bmatrix} \tag{1.71}$$

Vektori komponentideks on pikisiirded ja pikijõud varda elementide ab ja bc (jn 1.11) alguses ning lõpus:

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{a}}^{(\mathbf{ab})} = \begin{bmatrix} u_A^{(ab)} \\ N_A^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(1) \\ Z(2) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z}_{\mathbf{b}}^{(\mathbf{ab})} = \begin{bmatrix} u_L^{(ab)} \\ N_L^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(3) \\ Z(4) \end{bmatrix} \tag{1.72}$$

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{b}}^{(\mathbf{bc})} = \begin{bmatrix} u_A^{(bc)} \\ N_A^{(bc)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(5) \\ Z(6) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z}_{\mathbf{c}}^{(\mathbf{bc})} = \begin{bmatrix} u_L^{(bc)} \\ N_L^{(bc)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(7) \\ Z(8) \end{bmatrix} \tag{1.73}$$

Muutujate $Z\,(i)$ (i = 1, 2, ..., 8) järjenumbrid on toodud joonisel 1.11.



Joonis 1.11. Jäikade tugedega varda muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (1.70) neli esimest võrrandit on põhivõrrandid (1.47). Järgnevad sõlme b pidevus- ja tasakaaluvõrrand

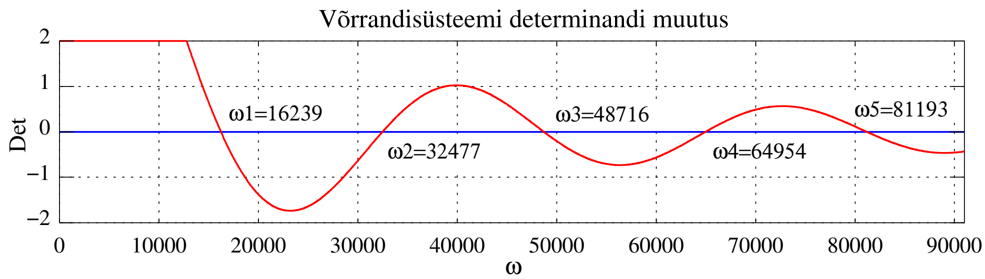
$$\begin{array}{rcccl} Z(3) - Z(5) & = & u_L^{(ab)} - u_A^{(bc)} & = & 0 \\ Z(4) + Z(6) & = & N_L^{(ab)} + N_A^{(bc)} & = & 0 \end{array} \tag{1.74}$$

Ülejäänud kaks võrrandit saame rajatingimustest.

$$\begin{array}{rcccl} Z(1) & = & u_A^{(ab)} & = & 0 \\ Z(7) & = & u_L^{(bc)} & = & 0 \end{array} \tag{1.75}$$

GNU Octave'i programmiga NaidePike2.m leiame hõreda võrrandisüsteemi (1.70) determinandi nullid. Varda (jn 1.10) esimesed kuus omavõnkesagedust on $\omega_1 = 1.62386 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 3.24772 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 4.87158 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 6.49543 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_5 = 8.11929 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_6 = 9.74315 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$.

Võrrandisüsteemi (1.70) determinandi sõltuvus nurksagedusest ω on toodud joonisel 1.12.



Joonis 1.12. Jäikade tugedega varda omavõnkesagedused

Võtame kasutusele sagedusvõrrandi juurte ja omavõnkesageduste seose

$$\lambda_i = \omega_i \sqrt{\frac{\rho A}{EA}}\ell \tag{1.76}$$

Programmiga NaidePike2.m leitud omavõnkesagedused ω_i teisendame sagedusvõrrandi juurteks λ_i: $\lambda_1 = 3.141593$, $\lambda_2 = 6.283185$, $\lambda_3 = 9.424778$, $\lambda_4 = 12.566371$, $\lambda_5 = 15.707963$, $\lambda_6 = 18.849556$.

Jäikade tugedega varda sagedusvõrrandi täpsed juured λ_n ja omavõnkesagedused ω_n arvutame valemitega (1.63) ja (1.64).

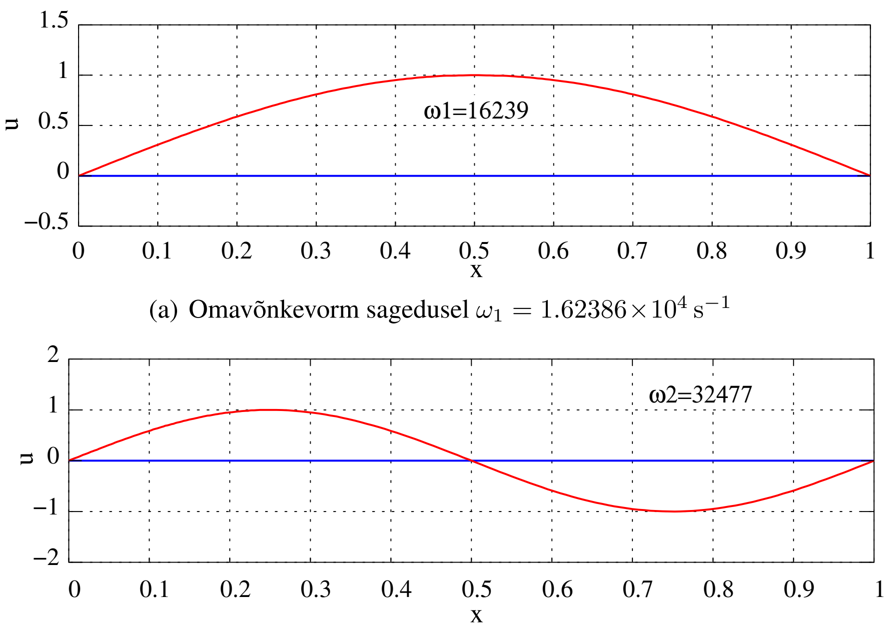
Tabelis 1.2 on toodud EST-meetodiga leitud jäikade tugedega varda sagedusvõrrandi juured. Need ühtivad täpsete sagedusvõrrandi juurtega (vt (1.63)) ja spektraalelementide meetodi [Mal13, lk 41] abil leitutega.

Tabel 1.2. Jäikade tugedega varda sagedusvõrrandi juured

Omavõnke-sagedus	EST-meetod		Täpne sage-dusvõrrandi juur (1.63)
	$\omega\ \left[s^{-1}\right]$	λ	λ
1.	16238.5874	3.141593	3.141593
2.	32477.1748	6.283185	6.283185
3.	48715.7622	9.424778	9.424778
4.	64954.3496	12.566371	12.566371
5.	81192.9370	15.707963	15.707963
6.	97431.5244	18.849556	18.849556

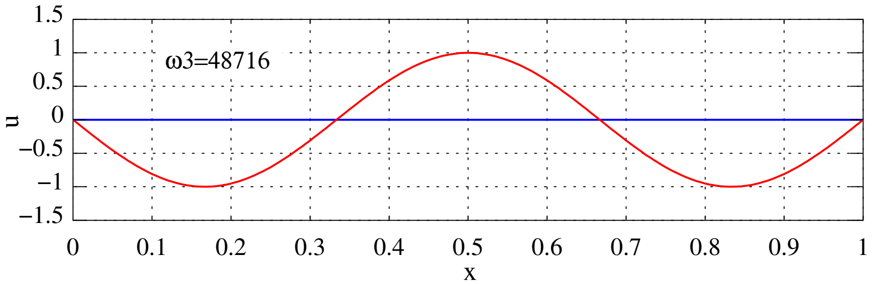
Omavõnkevormid sagedustel $\omega_1 = 1.62386\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 3.24772\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 4.87158\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 6.49543\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$ leiame vastavalt GNU Octave'i programmidega NaidePike2w1.m, NaidePike2w2.m, NaidePike2w3.m ja NaidePike2w4.m.

Omavõnkevormid leiab jooniselt 1.13.

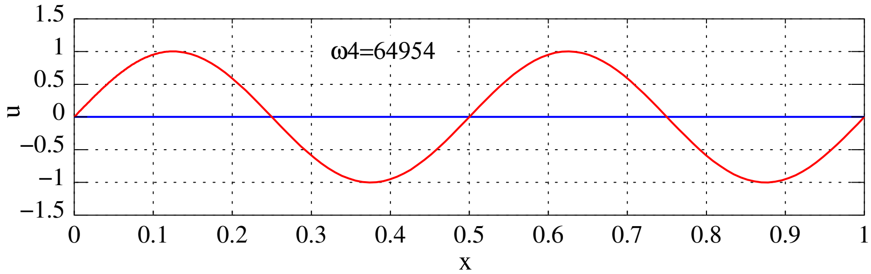


(a) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_1 = 1.62386\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$

(b) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_2 = 3.24772\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$



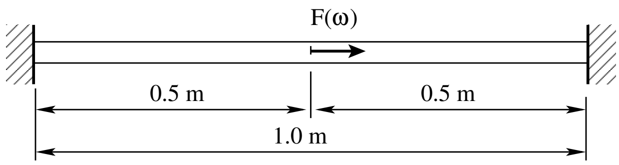
(c) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_3 = 4.87158 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$



(d) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_4 = 6.49543 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$

Joonis 1.13. Jäikade tugedega varda omavõnkevormid

Näide 1.3 (jäikade tugedega varda sundvõnkumine). Leida joonisel 1.14 kujutatud jäikade tugedega varda omavõnkesagedused. Koostada siirde ja pikijõu epüürid sundivast jõust, mille amplituud $F_b = 100\,\mathrm{N}$ ja sagedus $\omega_b = 9743.2\,\mathrm{s}^{-1}$, mis on 60% näites 1.2 leitud esimesest omavõnkesagedusest $\omega_1 = 16238.5874\,\mathrm{s}^{-1}$.



Joonis 1.14. Jäikade tugedega varda sundvõnkumine

Andmed. Varda pikkus $\ell = 1.0\,\mathrm{m}$, ristlõikepindala $A = 4.0\,\mathrm{cm}^2$, elastsusmoodul $E = 210\,\mathrm{GPa}$, materjali tihedus $\rho = 7.86 \times 10^3\,\mathrm{kg/m}^3$ (cf. [CCD10, lk 41]).

Lahendus. Omavõnkesageduste arvutamiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{1.77}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor:

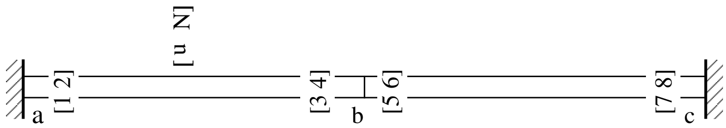
$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\mathbf{a}}^{(\mathbf{ab})} \\ \mathbf{Z}_{\mathbf{b}}^{(\mathbf{ab})} \\ \mathbf{Z}_{\mathbf{b}}^{(\mathbf{bc})} \\ \mathbf{Z}_{\mathbf{c}}^{(\mathbf{bc})} \end{bmatrix} \tag{1.78}$$

Vektori komponentideks on pikisiirded ja pikijõud varda elementide ab ja bc (jn 1.15) alguses ning lõpus:

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{a}}^{(\mathbf{ab})} = \begin{bmatrix} u_A^{(ab)} \\ N_A^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(1) \\ Z\,(2) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z}_{\mathbf{b}}^{(\mathbf{ab})} = \begin{bmatrix} u_L^{(ab)} \\ N_L^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(3) \\ Z\,(4) \end{bmatrix} \tag{1.79}$$

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{b}}^{(\mathbf{bc})} = \begin{bmatrix} u_A^{(bc)} \\ N_A^{(bc)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(5) \\ Z\,(6) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z}_{\mathbf{c}}^{(\mathbf{bc})} = \begin{bmatrix} u_L^{(bc)} \\ N_L^{(bc)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(7) \\ Z\,(8) \end{bmatrix} \tag{1.80}$$

Muutujate $Z\,(i)$ (i = 1, 2, ..., 8) järjenumbrid on toodud joonisel 1.15.



Joonis 1.15. Jäikade tugedega varda muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (1.77) neli esimest võrrandit on põhivõrrandid (1.47). Järgnevad sõlme b pidevus- ja tasakaaluvõrrand

$$\begin{aligned} Z\,(3) - Z\,(5) &= u_L^{(ab)} - u_A^{(bc)} &= 0 \\ Z\,(4) + Z\,(6) &= N_L^{(ab)} + N_A^{(bc)} &= 0 \end{aligned} \tag{1.81}$$

Ülejäänud kaks võrrandit saame rajatingimustest.

$$\begin{aligned} Z\,(1) &= u_A^{(ab)} &= 0 \\ Z\,(7) &= u_L^{(bc)} &= 0 \end{aligned} \tag{1.82}$$

GNU Octave'i programmiga NaidePike2Fx.m arvutame siirde u_d ja pikijõu N_d sundivast jõust sagedusel $\omega_b = 9.7432 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$. Dünaamikateguri k_d leidmiseks arvutame ka siirde u_{st} ja pikijõu N_{st} sundiva jõu amplituudi F_b staatilisel rakendamisel. Arvutused teeme GNU Octave'i programmiga NaidePike2FxStaat.m (kasutab funktsioone splvfmPikeStaat.m ja siiremPikeStaat.m). Leitud siirde ja pikijõu väärtused tala koormamisel sundiva jõuga (amplituud F_b) on esitatud arvutuspäeviku väljavõtetes 1.2 ja 1.3.

Väljavõte arvutuspäevikust 1.2 (NaidePike2Fx.m)

```
 1. element
l1 =  0.50000
Nmitmeks =  4

  x =     0.000        0.125        0.250        0.375        0.500
  u -  0.000e+00   1.254e-07   2.439e-07   3.489e-07   4.346e-07
  N -  8.507e+01   8.272e+01   7.579e+01   6.468e+01   5.000e+01
```

```
 2. element
l2 =  0.50000
Nmitmeks =  4

  x =     0.000       0.125       0.250       0.375       0.500
  u -   4.346e-07   3.489e-07   2.439e-07   1.254e-07   0.000e+00
  N - -5.000e+01  -6.468e+01  -7.579e+01  -8.272e+01  -8.507e+01
```

Väljavõte arvutuspäevikust 1.3 (NaidePike2FxStaat.m)

```
 1. element
l1 =  0.50000
Nmitmeks =  4

  x =     0.000       0.125       0.250       0.375       0.500
  u -   0.000e+00   7.440e-08   1.488e-07   2.232e-07   2.976e-07
  N -   5.000e+01   5.000e+01   5.000e+01   5.000e+01   5.000e+01

 2. element
l2 =  0.50000
Nmitmeks =  4

  x =     0.000       0.125       0.250       0.375       0.500
  u -   2.976e-07   2.232e-07   1.488e-07   7.440e-08  -5.294e-23
  N - -5.000e+01  -5.000e+01  -5.000e+01  -5.000e+01  -5.000e+01
```

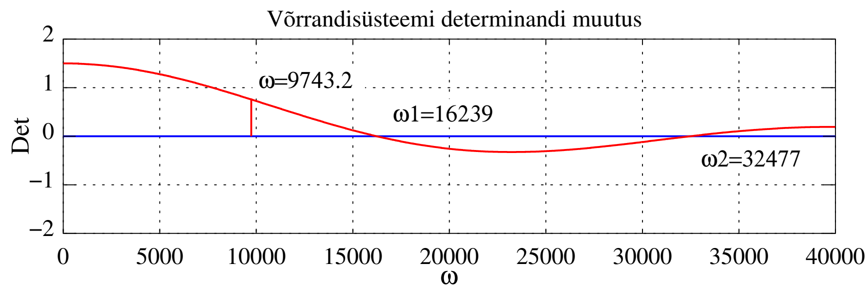
Pikisiirde ja pikijõu dünaamikategurid k_d^s ning k_d^N sagedusel $\omega_b = 9.7432 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$ on erinevad:

$$k_d^s = \frac{u_d^b}{u_{st}^b} = \frac{4.346 \times 10^{-7}}{2.976 \times 10^{-7}} = 1.4603 \tag{1.83}$$

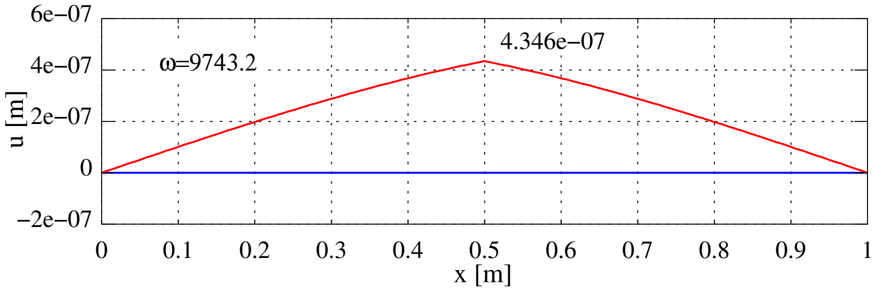
$$k_d^N = \frac{N_d^a}{N_{st}^a} = \frac{85.07}{50.0} = 1.7014 \tag{1.84}$$

Võrdsed on nad ainult ühe vabadusastmega süsteemi korral.

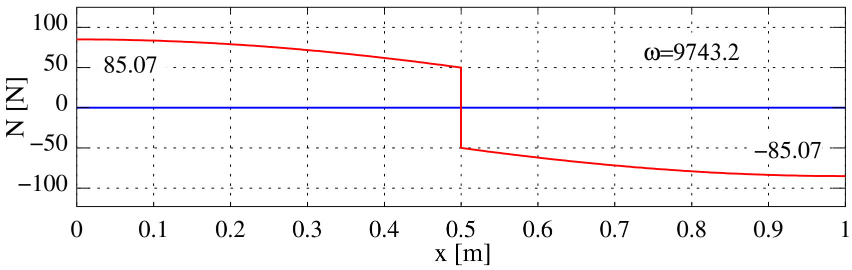
Joonisel 1.16 on jäikade tugedega varda pikisiirde ja pikijõu epüürid sundiva jõu sagedusel $\omega = 9.7432 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$.



(a) Võnkesagedus $\omega = 9.7432 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$



(b) Pikisiire



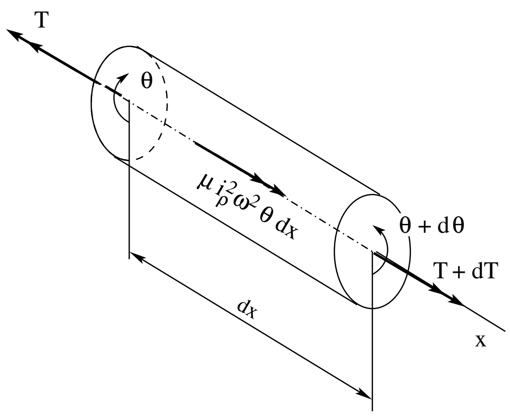
(c) Pikijõud

Joonis 1.16. Sundiv jõud amplituudiga $100\,\mathrm{N}$ jäikade tugedega vardal

2. Varda vääne

2.1 Väände ülekandemaatriks

Vaatleme võlli (jn 2.1) elementaarlõiku väändel. Võlli elementaarlõigu otstes mõjuvad väändemomendid T ja $T + \mathrm{d}T$. Väändenurga θ juurdekasv on $\mathrm{d}\theta$. Elementaarlõigu inertsjõud on $\mu i_\rho^2 \omega^2 \theta \mathrm{d}x$. Siin on i_ρ inertsiraadius (polaarinertsiraadius) x-telje suhtes, μ – mass ühikpikkuse kohta, ω – võnkumise nurksagedus, θ – väändenurk.



Joonis 2.1. Võlli elementaarlõik väändel

Vaadeldavate jõudude mõjul on võlli elementaarlõik tasakaalus:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} + i_\rho^2 \mu\, \omega^2 \theta = 0 \tag{2.1}$$

Suhtelise väändenurga $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x$ ja väändemomendi T jaoks kehtib seos

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \frac{T}{GI_p} \tag{2.2}$$

kus GI_p on väändejäikus, G – nihkeelastsusmoodul ehk nihkemoodul ehk Coulomb'i[1] moodul, I_p – polaarinertsimoment.

Asendades avaldises (2.1) väändemomendi T suhtelise väändenurgaga θ', saame teist järku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} + \frac{i_\rho^2 \mu\, \omega^2}{GI_p}\theta = 0 \tag{2.3}$$

ehk

$$\theta'' + \kappa^2 \theta = 0 \tag{2.4}$$

kus

$$\kappa^2 = \frac{i_\rho^2 \mu\, \omega^2}{GI_p} = \frac{\rho\, \omega^2}{G} \tag{2.5}$$

Siin tähistab ρ materjali tihedust.

[1] Charles Augustin de Coulomb (1736–1806), prantsuse füüsik ja insener.

Diferentsiaalvõrrandi (2.4) normeerimata lahendite süsteemi otsime kujul

$$\theta_1^* = \cos\kappa x, \quad \theta_2^* = \sin\kappa x \tag{2.6}$$

kus κ on diferentsiaalvõrrandi karakteristliku võrrandi lahend ehk väändekarakteristik.

$$\kappa = i_\rho \omega \sqrt{\frac{\mu}{GI_p}} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} \tag{2.7}$$

Võlli väänet iseloomustava karakteristikuna on kasutatud ka võlli *tunnusarvu väändel* $\epsilon_\circ$ [PL63].

$$\epsilon_\circ = \ell\, i_\rho\, \omega \sqrt{\frac{\mu}{GI_p}} = \ell\, \kappa \tag{2.8}$$

kus ℓ on võlli pikkus.

Lahendite süsteemi (2.6) normeerimiseks kirjutame välja Wronski determinandi

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos\kappa x & \sin\kappa x \\ -\kappa \sin\kappa x & \kappa \cos\kappa x \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

Wronski determinandi W väärtus kohal $x = 0$:

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \kappa \end{vmatrix} \tag{2.10}$$

Selleks et determinandi (2.10) väärtus oleks üks, jagame teise veeru κ-ga. Tulemuseks on ühikmaatriks

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{2.11}$$

Teeme sama teisenduse normeerimata lahendite süsteemis (2.6). Saame

$$\theta_1 = \cos\kappa x, \quad \theta_2 = \frac{1}{\kappa}\sin\kappa x \tag{2.12}$$

Võlli sisejõudude leidmisel kasutatakse rajajõudude (kontaktjõudude) määramiseks kaht erinevat märgikokkulepet (jn A.2). Esimese märgikokkuleppe puhul

$$\theta(x=0) = \theta_0, \quad \theta_0' = \frac{T(x=0)}{GI_p} = \frac{T_\circ}{GI_p} \tag{2.13}$$

ja teise märgikokkuleppe korral

$$\theta(x=0) = \theta_0, \quad \theta_0' = -\frac{T(x=0)}{GI_p} = -\frac{T_\circ}{GI_p} \tag{2.14}$$

Homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend esimese märgikokkuleppe puhul on

$$\theta_x = \theta_0 \cos \kappa x + \frac{T_\circ}{GI_p}\frac{1}{\kappa} \sin \kappa x \tag{2.15}$$

ning teise märgikokkuleppe kohaselt

$$\theta_x = \theta_0 \cos \kappa x - T_\circ \frac{1}{GI_p}\frac{1}{\kappa} \sin \kappa x \tag{2.16}$$

Nüüd on väändenurga tuletis koordinaadi x järgi

$$\theta_x' = -\theta_0 \kappa \sin \kappa x - T_\circ \frac{1}{GI_p} \cos \kappa x \tag{2.17}$$

mille korrutamisel väändejäikusega GI_p saame väändemomendi

$$T_x = -\theta_0 GI_p \kappa \sin \kappa x - T_\circ \cos \kappa x \tag{2.18}$$

Teise märgikokkuleppe korral on võlli (jn 2.2) ülekandevõrrand

$$\mathbf{Z_L}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z_A} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.19}$$

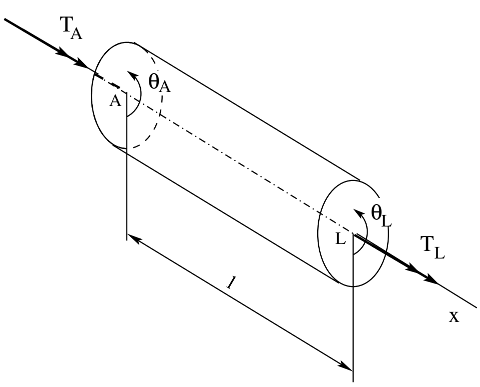
kus $\mathbf{Z_L}$, $\mathbf{Z_A}$ on väändenurgad ja -momendid võlli lõpus ja alguses

$$\mathbf{Z_L} = \begin{bmatrix} \theta_L \\ T_L \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_A} = \begin{bmatrix} \theta_A \\ T_A \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

ülekandemaatriks väändel $\mathbf{U}$ avaldub (vt GNU Octave'i programm siiremVoll.m)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos \kappa x & -\frac{1}{GI_p}\frac{1}{\kappa} \sin \kappa x \\ -GI_p \kappa \sin \kappa x & -\cos \kappa x \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

ning $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ on koormusvektor.



Joonis 2.2. Võlli element väändel

2.2 Koormusvektor väändel

Vaatleme võlli liikumisvõrrandit [Yan05, lk 620]

$$GI_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial \mathrm{x}^2} = p_x\left(x,t\right) + \rho I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial \mathrm{t}^2} \tag{2.22}$$

Juhul kui $p_x\left(x,t\right) = m_x\left(x\right)\sin\phi t$, saame siit

$$GI_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial \mathrm{x}^2} - \rho I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial \mathrm{t}^2} = m_x\left(x\right)\sin\phi t \tag{2.23}$$

Otsime sundvõnkumise kuju kahe funktsiooni korrutisena [SALŠ84, lk 196]:

$$\theta\left(x,t\right) = f\left(x\right)\sin\phi t \tag{2.24}$$

kus esimene tegur sõltub ainult koordinaadist x ja teine ainult ajast t.

Asetame saadud avaldise diferentsiaalvõrrandisse (2.23). Mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi vabaliikmele lisame lausmomendiga *ekvivalentse üldistatud koormuse* [YSM00].

$$GI_p f''\left(x\right) + \rho I_p\, \theta^2 f\left(x\right) = m_x\left(x\right) + \mathfrak{M}_x\left(x\right)\delta\left(x - x_\circ\right) \tag{2.25}$$

ehk

$$f''\left(x\right) + \kappa^2 f\left(x\right) = \frac{m_x\left(x\right)}{GI_p} + \frac{\mathfrak{M}_x\left(x\right)\delta\left(x - x_\circ\right)}{GI_p} \tag{2.26}$$

kus

$\mathfrak{M}_x\left(x\right)\delta\left(x - x_\circ\right)$ on lausmomendiga $m_x\left(x\right)$ ekvivalentne koondmoment;

$$\kappa^2 = \frac{i_\rho^2 \mu\, \omega^2}{GI_p} = \frac{\rho\, \omega^2}{G}; \tag{2.27}$$

$\delta\left(x - x_\circ\right)$ on Dirac'i deltafunktsioon.

Diferentsiaalvõrrandi (2.26) lahend $f\left(x\right)$ koosneb homogeensest lahendist $f_h\left(x\right)$ ja erilahendist $f_e\left(x\right)$, seega $f\left(x\right) = f_h\left(x\right) + f_e\left(x\right)$.

Homogeense diferentsiaalvõrrandi lahend teise märgikokkuleppe puhul $f_h\left(x\right) = \theta_h\left(x\right)$ on toodud avaldisega (2.16).

Mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi (2.26) erilahendit $f_e\left(x\right)$ otsime Cauchy valemi abil [Ste59]:

$$f_e\left(x\right) = \int_{x_\circ}^{x} G_n\left(x,\xi\right) g_n\left(\xi\right) d\xi \tag{2.28}$$

kus $G_n\left(x,\xi\right)$ on vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi normeeritud lahend. Täpsemalt,

$$f_e\left(x\right) = \int_{x_\circ}^{x} G_2\left(x,\xi\right) g_2\left(\xi\right) d\xi + \int_{x_\circ}^{x} G_1\left(x,\xi\right) g_1\left(\xi\right) d\xi \tag{2.29}$$

Siin kasutame normeeritud lahendite fundamentaalsüsteemi (2.12)

$$
\begin{aligned}
G_2(x,\xi) &= f_2(x-\xi) = \frac{1}{\kappa}\sin\kappa(x-\xi) && (2.30)\\
G_1(x,\xi) &= f_1(x-\xi) = \cos\kappa(x-\xi) && (2.31)
\end{aligned}
$$

ja koormusfunktsioone $g_n(\xi)$:

$$
g_2(\xi) = \frac{m_x(\xi)}{GI_p}, \quad g_1(\xi) = \frac{\mathfrak{M}_x(\xi)}{GI_p} \tag{2.32}
$$

Vaatleme juhtu, kui $m_x/GI_p = const$. Erilahendi (2.29) saamiseks tuleb integreerida avaldis

$$
f_{2\,e}(x) = \int_{x_\circ}^{x} G_2(x,t)\, g_2(t)\, d\xi = \frac{m_x}{GI_p}\frac{1}{\kappa}\int_{x_\circ}^{x}\sin\kappa(x-\xi)\, d\xi \tag{2.33}
$$

Siit integreerime

$$
\int_a^x \sin\kappa(x-\xi)\, d\xi = \frac{1}{\kappa}\cos\kappa(x-\xi)\Big|_a^x = \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa}\cos\kappa\langle x-a\rangle_+ \tag{2.34}
$$

kus $\langle x-a\rangle_+$ on katkevusfunktsioon.

$$
\langle x-a\rangle_+^n = (x-a)^n H(x-a) \tag{2.35}
$$

Siin on $H(x-a)$ Heaviside'i funktsioon.

$$
H(x-a) = \begin{cases} 0, & kui \quad (x-a) < 0 \\ 1, & kui \quad (x-a) \geq 0 \end{cases} \tag{2.36}
$$

Asetame leitud integraali erilahendisse (2.33):

$$
f_{2\,e}(x) = \frac{m_x}{GI_p}\frac{1}{\kappa^2}\left[1-\cos\kappa\langle x-a\rangle_+\right] = \frac{m_x}{GI_p}\frac{\ell^2}{\lambda^2}\left[1-\cos\frac{\lambda}{\ell}\langle x-a\rangle_+\right] \tag{2.37}
$$

kus on võetud arvesse, et $\lambda = \kappa\ell$.

Mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi (2.26) teisele vabaliikmele ($\mathfrak{M}_x/GI_p = const$) vastava erilahendi saame avaldist (2.29) integreerides:

$$
f_{1\,e}(x) = \int_{x_0}^{x} G_1(x,\xi)\, g_1(t)\, d\xi = \frac{\mathfrak{M}_x}{GI_p}\int_{x_0}^{x}\cos\kappa(x-\xi)\, d\xi \tag{2.38}
$$

Nüüd integreerime

$$
\int_a^x \cos\kappa(x-\xi)\, d\xi = -\frac{1}{\kappa}\sin\kappa(x-\xi)\Big|_a^x = \frac{1}{\kappa}\sin\kappa\langle x-a\rangle_+ \tag{2.39}
$$

Asetame leitud integraali erilahendisse (2.38):

$$f_{1\,e}(x) \;=\; \frac{\mathfrak{M}_x}{GI_p}\frac{1}{\kappa}\left[\,\sin\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right] = \frac{\mathfrak{M}_x}{GI_p}\frac{\ell}{\lambda}\left[\,\sin\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right] \tag{2.40}$$

Erilahenditest (2.37) ja (2.40) koostame koormusvektori $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ (2.19): $\overset{\circ}{\mathbf{Z}} = \overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathbf{m}} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathfrak{M}}$.

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\theta}_e \\ \overset{\circ}{T}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{2e} \\ GI_p f'_{2e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{m_x}{GI_p}\dfrac{1}{\kappa^2}\left[1-\cos\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right] \\ m_x\,\dfrac{1}{\kappa}\left[\,\sin\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right] \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathfrak{M}} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\theta}_e \\ \overset{\circ}{T}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1e} \\ GI_p f'_{1e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathfrak{M}_x}{GI_p}\dfrac{1}{\kappa}\left[\,\sin\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right] \\ \mathfrak{M}_x\left[\,\cos\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right] \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

2.3 Põhivõrrandid võlli väändel

Väände põhivõrrandid teise märgikokkuleppe puhul (2.19) saab kirjutada võrrandisüsteemina

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{Z_A} - \mathbf{I_{2\times 2}}\cdot\mathbf{Z_L} = -\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.43}$$

Lühemalt,

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{2\times 4}\cdot\widehat{\mathbf{Z}} = -\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{2.44}$$

kus

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_A} \\ \mathbf{Z_L} \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

ning $\widehat{\mathbf{UI}}_{2\times 4}$ on laiendatud ülekandemaatriks $\left(U_{2\times 2}\,|\,-I_{2\times 2}\right)$ (splvfmVoll.m) :

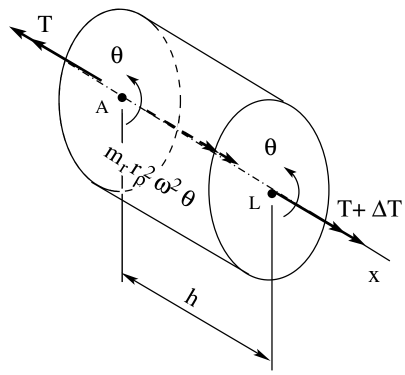
$$\widehat{\mathbf{UI}}_{2\times 4} = \left[\begin{array}{cc|cc} \cos\kappa\ell & -i_\circ\dfrac{1}{GI_p}\dfrac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell & -1 & 0 \\ -\dfrac{1}{i_\circ}GI_p\kappa\sin\kappa\ell & -\cos\kappa\ell & 0 & -1 \end{array}\right] \tag{2.46}$$

Siin on ℓ võlli elemendi pikkus, $i_\circ$ – väändenurga θ skaleerimistegur (võrrandisüsteemiga (2.44) leitavad väändenurgad on $i_\circ$ korda suuremad).

Võlli ülekandevõrranditele (2.44) lisame rajatingimused.

2.4 Pöörlev hooratas

Vaatleme hooratast joonisel 2.3. Hoorattale mõjuvad väändemomendid T, $T+\Delta T$ ja inertsjõud $\left(m_r r_\rho^2\right)\omega^2\theta$.



Joonis 2.3. Pöörlev hooratas

Siin on m_r hooratta mass, r_ρ – hooratta inertsiraadius x-telje suhtes, ω – võnkumise nurksagedus, θ – väändenurk, $\Delta T = T_L - T_A$, kus T_A ja T_L on väändemomendid hooratta vasakul ja paremal küljel. Joonisel 2.3 on θ_A ja θ_L väändenurgad.

Koostame hooratta tasakaaluvõrrandi

$$\Delta T + \left(m_r r_\rho^2\right)\omega^2\theta = 0 \tag{2.47}$$

Teise märgikokkuleppe korral saame tasakaaluvõrrandiks

$$T_L + \left(m_r r_\rho^2\right)\omega^2\theta - T_A = 0 \tag{2.48}$$

Võtame väändenurgad võrdseks ja seome inertsimomendi väändenurgaga θ_L (splfHRratas.m):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{i_\circ}\left(m_r r_\rho^2\right)\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ T_A \\ \theta_L \\ T_L \end{bmatrix} = 0 \tag{2.49}$$

Inertsimomendi võib siduda ka väändenurgaga θ_A (splfHLratas.m):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{i_\circ}\left(m_r r_\rho^2\right)\omega^2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ T_A \\ \theta_L \\ T_L \end{bmatrix} = 0 \tag{2.50}$$

2.5 Võlli omavõnkesagedused

Omavõnkesageduste arvutamiseks võllile pikkusega ℓ ja väändejäikusega GI_p koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{2.51}$$

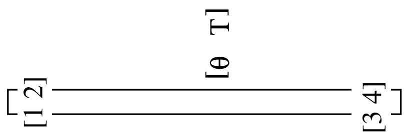
kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor.

$$\mathbf{Z} = \widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_A} \\ \mathbf{Z_L} \end{bmatrix} \tag{2.52}$$

Vektori komponentideks on väändenurgad ja -momendid võlli alguses ja lõpus (2.20):

$$\mathbf{Z_A} = \begin{bmatrix} \theta_A \\ T_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(1) \\ Z(2) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_L} = \begin{bmatrix} \theta_L \\ T_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(3) \\ Z(4) \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

Muutujate $Z(i)$ (i = 1, 2, 3, 4) järjenumbrid on toodud joonisel 2.4.



Joonis 2.4. Võlli muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (2.51) kaks esimest võrrandit on põhivõrrandid (2.43). Ülejäänud kaks võrrandit saame rajatingimustest.

Konsoolvõlli rajatingimused:

$$\begin{array}{ccccc} Z(1) & = & \theta_A & = & 0 \\ Z(4) & = & T_L & = & 0 \end{array} \tag{2.54}$$

Kahel toel töötava võlli rajatingimused:

$$\begin{array}{ccccc} Z(1) & = & \theta_A & = & 0 \\ Z(3) & = & \theta_L & = & 0 \end{array} \tag{2.55}$$

Konsoolvõlli omavõnkesagedused määrame võrrandisüsteemi determinandi nullisuse tingimusest:

$$\begin{bmatrix} \cos\kappa\ell & -i_\circ \frac{1}{GI_p}\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell & -1 & 0 \\ -\dfrac{1}{i_\circ}GI_p\kappa\sin\kappa\ell & -\cos\kappa\ell & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(1) \\ Z(2) \\ Z(3) \\ Z(4) \end{bmatrix} = 0 \tag{2.56}$$

Arvutame saadud võrrandisüsteemi determinandi:

$$det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos\kappa\ell & -i_\circ \frac{1}{GI_p}\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell & -1 \\ -\dfrac{1}{i_\circ}GI_p\kappa\sin\kappa\ell & -\cos\kappa\ell & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -i_\circ \frac{1}{GI_p}\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell & -1 \\ -\cos\kappa\ell & 0 \end{vmatrix} = -\cos\kappa\ell = 0 \tag{2.57}$$

Koosinus $\kappa\ell$ (2.7) on null, kui

$$\lambda_n = \kappa\ell = \ell\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}} = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.58}$$

Siin tähistab λ_n konsoolvõlli sagedusvõrrandi juuri, vrd [Yan05, lk 625].

Saame konsoolvõlli omavõnkesagedused ω_n:

$$\boxed{\omega_n = (2n-1)\,\frac{\pi}{2\ell}\sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots} \tag{2.59}$$

Kahel toel töötava võlli omavõnkesageduste määramiseks koostame võrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} \cos\kappa\ell & -i_\circ \frac{1}{GI_p}\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell & -1 & 0 \\ -\frac{1}{i_\circ}GI_p\kappa\sin\kappa\ell & -\cos\kappa\ell & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(1) \\ Z(2) \\ Z(3) \\ Z(4) \end{bmatrix} = 0 \tag{2.60}$$

Arvutame saadud võrrandisüsteemi determinandi:

$$det\,(A) = -1 \cdot \begin{vmatrix} \cos\kappa\ell & -i_\circ \frac{1}{GI_p}\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell & 0 \\ -\frac{1}{i_\circ}GI_p\kappa\sin\kappa\ell & -\cos\kappa\ell & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -i_\circ \frac{1}{GI_p}\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell & 0 \\ -\cos\kappa\ell & -1 \end{vmatrix} = i_\circ \frac{1}{GI_p}\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell = 0 \tag{2.61}$$

Siinus $\kappa\ell$ (2.7) on null, kui

$$\lambda_n = \kappa\ell = \ell\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}} = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.62}$$

Siin tähistab λ_n jäigalt kinnitatud võlli sagedusvõrrandi juuri, vrd [Yan05, lk 625].

Saame jäigalt kinnitatud võlli omavõnkesagedused ω_n:

$$\boxed{\omega_n = (n-1)\frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots} \tag{2.63}$$

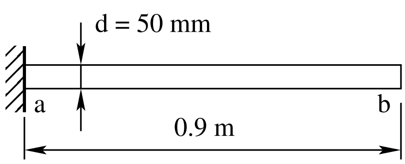
2.6 Võlli omavõnkevormid

Võlli omavõnkevormide määramiseks koostame hõreda võrrandisüsteemi mingil omavõnkesagedusel ω_n (vt [Lah12], [Lah14], [Lah16]). Koostatud võrrandisüsteemi determinant on null. Algparameetrite määramiseks viime võrrandisüsteemi ühe veeru paremale poolele. Saadud võrrandisüsteemi lahendamiseks kasutame vähimruutude meetodit (sks Methode der kleinsten Quadrate, ingl method of least squares).[2] [3] Hõreda võrrandisüsteemi, kus võrrandeid on rohkem kui tundmatuid, saab GNU Octave'is lahendada ka kurakaldkriipsuga (X = spA\B).

Erilist tähelepanu nõuab võrrandisüsteemi paremale poolele viidava veeru valik. Konsoolvõlli (jn 2.5) esimese kolme omavõnkevormi leidmiseks piisab võlli ühest elemendist, mille puhul viime kolmanda veeru võrrandisüsteemi (2.56) paremale poolele. Kolmandas veerus on tundmatu $Z\,(3) = \theta_L^{(ab)}$ kordajad. Pärast hõreda võrrandisüsteemi lahendamist saame algparameetrid $\theta_A^{(ab)} = Z\,(1)$ ja $T_A^{(ab)} = Z\,(2)$ (2.66). Väändenurgad leiame võrrandiga (2.19).

Jäigalt kinnitatud võlli omavõnkevormide leidmisel tuleb võll jagada vähemalt kaheks elemendiks, et oleks võimalik ühikuline siire võlli keskel. Võlli elementide pikkused valime vastavalt poollainete arvule.

Näide 2.1 (konsoolvõlli omavõnkumine). Leida joonisel 2.5 kujutatud konsoolvõlli omavõnkesagedused ja -vormid.



Joonis 2.5. Konsoolvõll

Andmed. Võlli pikkus $\ell = 0.9\,\mathrm{m}$, läbimõõt $d = 50\,\mathrm{mm}$, nihkeelastsusmoodul $G = 80\,\mathrm{GN/m^2}$, materjali tihedus $\rho = 7.80 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

Lahendus. Omavõnkesageduste arvutamiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{2.64}$$

kus $\mathbf{Z}$ on tundmatute vektor:

$$\mathbf{Z} = \widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a} \\ \mathbf{Z_b} \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

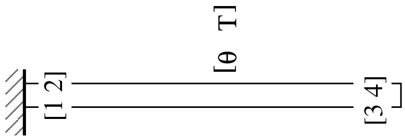
Vektori komponentideks on väändenurgad ja -momendid võlli ab alguses ning lõpus:

[2] https://www.gnu.org/software/octave/doc/v4.0.0/Linear-Least-Squares.html#XREFlscov (27.06.2016)

[3] https://fossies.org/dox/octave-4.0.2/lscov_8m_source.html (27.06.2016)

$$\mathbf{Z_a} = \begin{bmatrix} \theta_A^{(ab)} \\ T_A^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(1) \\ Z(2) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b} = \begin{bmatrix} \theta_L^{(ab)} \\ T_L^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(3) \\ Z(4) \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

Muutujate $Z(i)$ (i = 1, 2, 3, 4) järjenumbrid on toodud joonisel 2.6.



Joonis 2.6. Konsoolvõlli muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (2.64) kaks esimest võrrandit on põhivõrrandid (2.43). Ülejäänud kaks võrrandit saame rajatingimustest.

$$\begin{aligned} Z(1) &= \theta_A^{(ab)} &= 0 \\ Z(4) &= T_L^{(ab)} &= 0 \end{aligned} \tag{2.67}$$

GNU Octave'i programmiga NaideKvoll1.m leiame hõreda võrrandisüsteemi (2.56) determinandi nullid. Determinandi arvutuskäik selgub programmi väljavõttest 2.1.

Väljavõte programmist 2.1 (NaideKvoll1.m)

```
            # Võlli hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=splvfmVoll(baasi0,l,d,wf,md,G);
IIv=1;
IJv=1;
           # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=0
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
%  Rajatingimused
spA=spSisestaArv(spA,3,1,1);  # $theta_A$ - väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,4,4,1);  # $T_L$ - väändemoment

% spA determinant
D(j)=det(spA);
```

Võrrandisüsteemi (2.56) determinandi märk muutub nurksageduse ω vahemikus, mida täpsustatakse kuni etteantud täpsuseni $eps0$ (vt arvutuspäeviku väljavõte 2.1).

Väljavõte arvutuspäevikust 2.1 (NaideKvoll1.m)

```
octave:1> NaideKvoll1
eps0=0.000001
l =  0.90000 # m
d =  0.050000 # m
G =  8.0000e+10 # Pa
```

```
md =  7800 # KG/m3
GIp =  4.9087e+04 # Nm2
 baasi0=GIp
valemiga_w1 =  5589.5
valemiga_w2 =  1.6769e+04
valemiga_w3 =  2.7948e+04

Arvutuse algus.
NNK =  4

-------- Sparse matrix instantiation --------
  spA=sparse(NNK,NNK)

 Lähme esimest determinandi nulli täpsustama.
wf_enne =  5589.5
wf_parast =  5590

Oota! Arvutan.

 Lähme esimest determinandi nulli täpsustama.
wf_enne =  5589.5
wf_parast =  5589.5
Oota! Arvutan.

Arvutus on lõppenud.
octave:2>
```

Võlli (jn 2.5) esimesed kuus omavõnkesagedust: $\omega_1 = 5.589527018 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 1.6768581054 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 2.7947635090 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 3.9126689126 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_5 = 5.0305743163 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_6 = 6.1484797199 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$.

Võtame kasutusele sagedusvõrrandi juurte ja omavõnkesageduste seose

$$\lambda_i = \omega_i \sqrt{\frac{\rho}{G}}\ell \tag{2.68}$$

Programmiga NaideKvoll1.m leitud omavõnkesagedused ω_i teisendame sagedusvõrrandi juurteks λ_i: $\lambda_1 = 1.570796$, $\lambda_2 = 4.712389$, $\lambda_3 = 7.853982$, $\lambda_4 = 10.995574$, $\lambda_5 = 14.137167$, $\lambda_6 = 17.278760$.

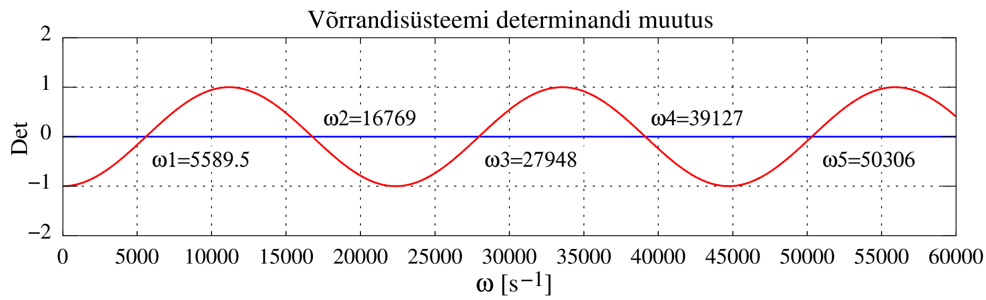
Konsoolvõlli sagedusvõrrandi täpsed juured λ_n ja omavõnkesagedused ω_n arvutame valemitega (2.58) ja (2.59).

Tabelis 2.1 võrreldakse EST-meetodiga leitud ja täpseid sagedusvõrrandi juuri (2.58).

Tabel 2.1. Konsoolvõlli eri meetodeil leitud sagedusvõrrandi juured

Omavõnke-sagedus	EST-meetod		Täpne sage-dusvõrrandi juur (2.58)
	$\omega\ [s^{-1}]$	λ	λ
1.	5589.52702	1.570796	1.570796
2.	16768.5811	4.712389	4.712389
3.	27947.6351	7.853982	7.853982
4.	39126.6891	10.995574	10.995574
5.	50305.7432	14.137167	14.137167
6.	61484.7972	17.278760	17.278760

Võrrandisüsteemi (2.64) determinandi sõltuvus nurksagedusest ω selgub jooniselt 2.7.



Joonis 2.7. Konsoolvõlli omavõnkesagedused

Valime pöördenurga skaleerimisteguri võrdseks väändejäikusega (baasi0 = GIp). Nüüd saame suuremad omavõnkevormi amplituudid, kuid omavõnkesagedused jäävad samaks.

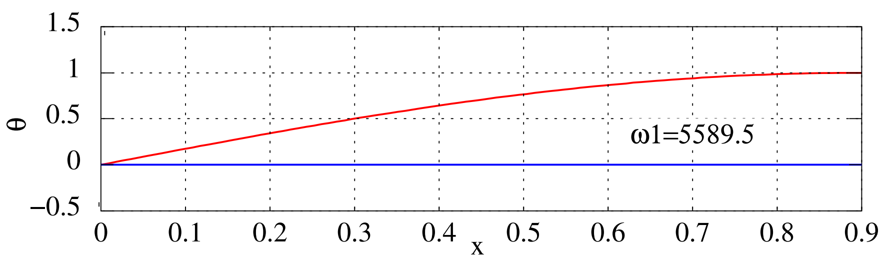
Omavõnkevormid sagedustel $\omega_1 = 5589.5\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 1.6769\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$ ja $\omega_3 = 2.7948\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$ leiame vastavalt GNU Octave'i programmidega NaideKvoll1w1.m, NaideKvoll1w2.m ning NaideKvoll1w3.m. Nendes programmides viime kolmanda, s.t tundmatu $Z(3)$ veeru paremale poolele ja võrdsustame ühega. Hõreda võrrandisüsteemi lahendamisel vähimruutude meetodiga saame lahendist valida algparameetrid (vt programmi väljavõte 2.2).

Väljavõte programmist 2.2 (NaideKvoll1w1.m)

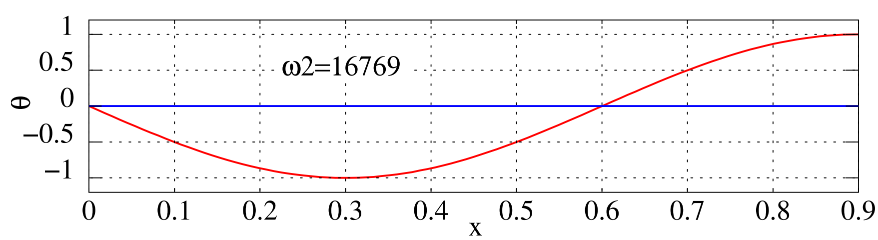
```
            # Võlli hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=splvfmVoll(baasi0,l,d,wf,md,G);
IIv=1;
IJv=1;
           # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=0
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);

% Rajatingimused
```

```
spA=spSisestaArv(spA,3,1,1);  # $theta_A$ - väändenurk
spA=spSisestaArv(spA,4,4,1);  # $T_L$ - väändemoment

columns_to_remove = [3];
Anull=full(spAnull);
B=Anull(:,columns_to_remove);
Anull(:,columns_to_remove)=[];
Cnull=Anull;

spCnull=sparse(Cnull)

B=-B
spCnullX=spCnull\B
Xvect = spCnullX;
SalgPar=Xvect(1:2,1) # Algparameetrid

xx=0;
Nmitmeks=100
xsammgr=l/Nmitmeks;

for ij=1:Nmitmeks+1
Xloikes(1,ij)=xx;
Xloikes(2,ij)=xx;
siirF=siiremVoll(baasi0,xx,d,wf,md,G);
siirded(1:2,ij)=siirF*SalgPar;
%siirdedXx=siirF*SalgParXx
%
xx=xx+xsammgr;
endfor
```

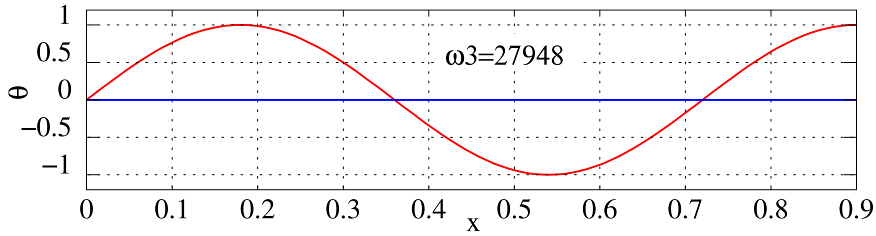
Konsoolvõlli omavõnkevormid esitame joonisel 2.8.



(a) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_1 = 5589.5\,\mathrm{s}^{-1}$



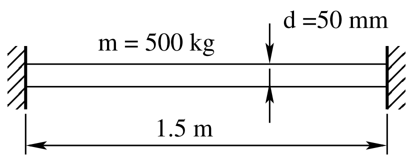
(b) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_2 = 1.6769\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$



(c) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_3 = 2.7948 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$

Joonis 2.8. Konsoolvõlli omavõnkevormid

Näide 2.2 (jäigalt kinnitatud võlli omavõnkumine). Leida joonisel 2.9 kujutatud võlli omavõnkesagedused ja -vormid.



Joonis 2.9. Jäigalt kinnitatud võll

Andmed. Võlli pikkus $\ell = 1.5\,\mathrm{m}$, läbimõõt $d = 50\,\mathrm{mm}$, mass $m = 500\,\mathrm{kg}$, nihkeelastsusmoodul $G = 80\,\mathrm{GN/m^2}$, materjali tihedus $\rho = 7.80 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

Lahendus. Omavõnkesageduste arvutamiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{2.69}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor:

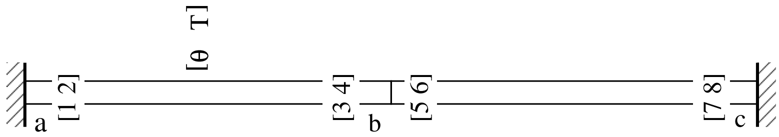
$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a^{(ab)}} \\ \mathbf{Z_b^{(ab)}} \\ \mathbf{Z_b^{(bc)}} \\ \mathbf{Z_c^{(bc)}} \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

Vektori komponentideks on väändenurgad ja -momendid võlli elementide ab ja bc (jn 2.10) alguses ja lõpus:

$$\mathbf{Z_a^{(ab)}} = \begin{bmatrix} \theta_A^{(ab)} \\ T_A^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(1) \\ Z\,(2) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b^{(ab)}} = \begin{bmatrix} \theta_L^{(ab)} \\ T_L^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(3) \\ Z\,(4) \end{bmatrix} \tag{2.71}$$

$$\mathbf{Z_b^{(bc)}} = \begin{bmatrix} \theta_A^{(bc)} \\ T_A^{(bc)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(5) \\ Z\,(6) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_c^{(bc)}} = \begin{bmatrix} \theta_L^{(bc)} \\ T_L^{(bc)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(7) \\ Z\,(8) \end{bmatrix} \tag{2.72}$$

Muutujate $Z\,(i)$ (i = 1, 2, ..., 8) järjenumbrid on toodud joonisel 2.10.



Joonis 2.10. Jäigalt kinnitatud võlli muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (2.69) neli esimest võrrandit on põhivõrrandid (2.43). Järgnevad sõlme b pidevus- ja tasakaaluvõrrand

$$
\begin{array}{rcccl}
Z\,(3) - Z\,(5) & = & \theta_L^{(ab)} - \theta_A^{(bc)} & = & 0 \\
Z\,(4) + Z\,(6) & = & T_L^{(ab)} + T_A^{(bc)} & = & 0
\end{array}
\tag{2.73}
$$

Ülejäänud kaks võrrandit saame rajatingimustest.

$$
\begin{array}{rcccl}
Z\,(1) & = & \theta_A^{(ab)} & = & 0 \\
Z\,(7) & = & \theta_L^{(bc)} & = & 0
\end{array}
\tag{2.74}
$$

GNU Octave'i programmiga NaideVoll2M.m leiame hõreda võrrandisüsteemi (2.69) determinandi nullid.

Jäigalt kinnitatud võlli (jn 2.9) esimesed kuus omavõnkesagedust: $\omega_1 = 6.707432422 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 1.3414864843 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 2.0122297265 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 2.6829729687 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_5 = 3.3537162108 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_6 = 4.0244594530 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$.

Võtame kasutusele sagedusvõrrandi juurte ja omavõnkesageduste seose

$$
\lambda_i = \omega_i \sqrt{\frac{\rho}{G}}\ell
\tag{2.75}
$$

Leitud omavõnkesagedused ω_i teisendame sagedusvõrrandi juurteks λ_i: $\lambda_1 = 3.141593$, $\lambda_2 = 6.283185$, $\lambda_3 = 9.424778$, $\lambda_4 = 12.566371$, $\lambda_5 = 15.707963$, $\lambda_6 = 18.849556$.

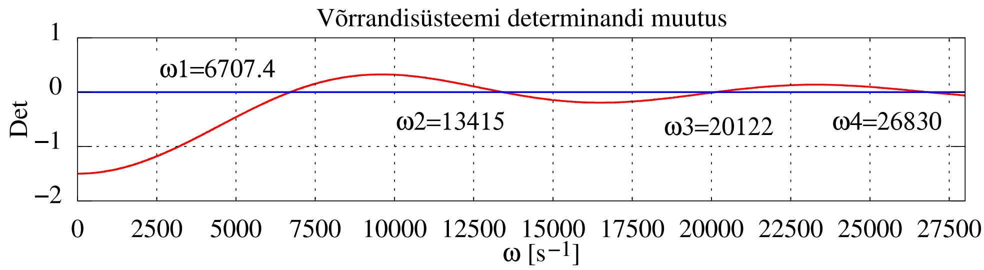
Jäigalt kinnitatud võlli sagedusvõrrandi täpsed juured λ_n ja omavõnkesagedused ω_n arvutame valemitega (2.62) ja (2.63).

Tabelis 2.2 võrreldakse EST-meetodiga leitud ja täpseid sagedusvõrrandi juuri (2.62).

Tabel 2.2. Jäigalt kinnitatud võlli eri meetodeil leitud sagedusvõrrandi juured

Omavõnke-sagedus	EST-meetod		Täpne sage-dusvõrrandi juur (2.62)
	$\omega\ \left[s^{-1}\right]$	λ	λ
1.	6707.43242	3.141593	3.141593
2.	13414.8648	6.283185	6.283185
3.	20122.2973	9.424778	9.424778
4.	26829.7297	12.566371	12.566371
5.	33537.1621	15.707963	15.707963
6.	40244.5945	18.849556	18.849556

Võrrandisüsteemi (2.69) determinandi sõltuvus nurksagedusest ω on kujutatud joonisel 2.11.



Joonis 2.11. Jäigalt kinnitatud võlli omavõnkesagedused

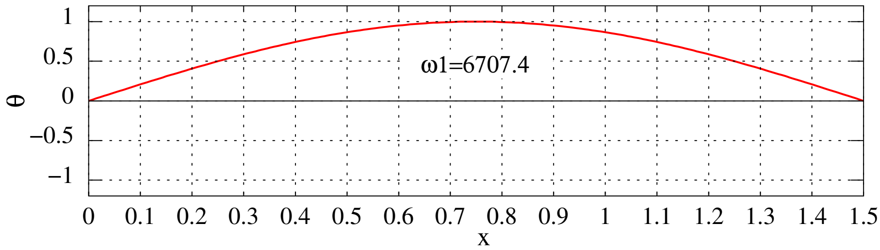
Omavõnkevormide määramisel jagame võlli pikkusega $\ell = 1.5\,\mathrm{m}$ kaheks elemendiks (jn 2.10). Võlli elementide pikkuse ℓ_i valime vastavalt poollainete arvule n: $\ell_1 = \ell/2n$ ja $\ell_2 = \ell - \ell_1$.

Esimese omavõnkesageduse $\omega_1 = 6707.4\,\mathrm{s}^{-1}$ puhul valime elementide pikkuseks $\ell_1 = 0.75\,\mathrm{m}$ ja $\ell_2 = 0.75\,\mathrm{m}$. Viime saadud võrrandisüsteemis kolmanda veeru paremale poolele. Lahendanud hõreda võrrandisüsteemi vähimruutude meetodiga, valime lahendist algparameetrid. Võrrandisüsteemi koostamiseks ja lahendamiseks kasutatakse GNU Octave'i programmi NaideVoll2Mw1.m.

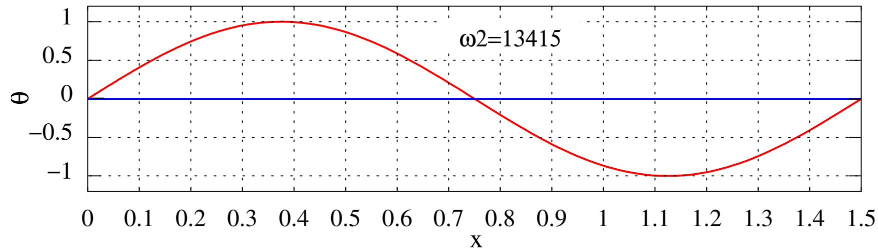
Teise omavõnkesageduse $\omega_2 = 13415\,\mathrm{s}^{-1}$ korral valime elementide pikkuseks $\ell_1 = 0.375\,\mathrm{m}$ ja $\ell_2 = 1.125\,\mathrm{m}$. Saadud võrrandisüsteemis viime kolmanda veeru paremale poolele. Võrrandisüsteemi koostamiseks ja lahendamiseks kasutatakse GNU Octave'i programmi NaideVoll2Mw2.m.

Kolmanda omavõnkesageduse $\omega_3 = 20122\,\mathrm{s}^{-1}$ puhul valime elementide pikkuseks $\ell_1 = 0.25\,\mathrm{m}$ ja $\ell_2 = 1.25\,\mathrm{m}$. Saadud võrrandisüsteemis viime kolmanda veeru paremale poolele. Võrrandisüsteemi koostamiseks ja lahendamiseks kasutatakse GNU Octave'i programmi NaideVoll2Mw3.m.

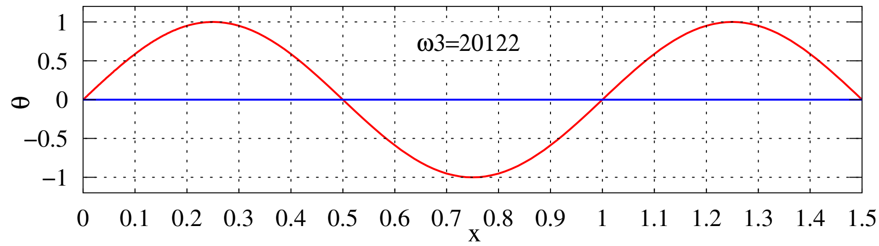
Omavõnkevormid on toodud joonisel 2.12.



(a) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_1 = 6707.4\,\mathrm{s}^{-1}$



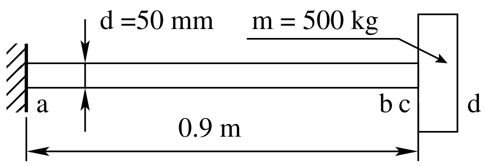
(b) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_2 = 13415\,\mathrm{s}^{-1}$



(c) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_3 = 20122\,\mathrm{s}^{-1}$

Joonis 2.12. Jäigalt kinnitatud võlli omavõnkevormid

Näide 2.3 (hoorattaga konsoolvõlli omavõnkumine). Leida joonisel 2.13 kujutatud hoorattaga konsoolvõlli omavõnkesagedused ja -vormid.



Joonis 2.13. Hoorattaga konsoolvõll

Andmed. Võlli pikkus $\ell = 0.9\,\mathrm{m}$, läbimõõt $d = 50\,\mathrm{mm}$, hooratta mass $m = 500\,\mathrm{kg}$, hooratta inertsiraadius $r_\rho = 0.5\,\mathrm{m}$, nihkeelastsusmoodul $G = 80\,\mathrm{GN/m^2}$, materjali tihedus $\rho = 7.80 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

Lahendus. Omavõnkesageduste arvutamiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{2.76}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor:

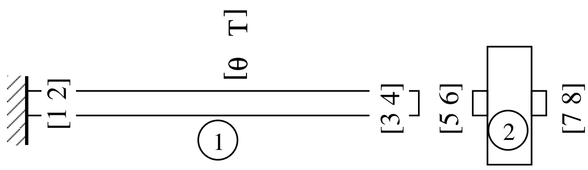
$$\mathbf{Z} = \widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a} \\ \mathbf{Z_b} \\ \mathbf{Z_c} \\ \mathbf{Z_d} \end{bmatrix} \tag{2.77}$$

Vektori komponentideks on väändenurgad ja -momendid võlli ab ning hooratta cd alguses ja lõpus:

$$\mathbf{Z_a} = \begin{bmatrix} \theta_A^{(ab)} \\ T_A^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(1) \\ Z(2) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b} = \begin{bmatrix} \theta_L^{(ab)} \\ T_L^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(3) \\ Z(4) \end{bmatrix} \tag{2.78}$$

$$\mathbf{Z_c} = \begin{bmatrix} \theta_A^{(cd)} \\ T_A^{(cd)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(5) \\ Z(6) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_d} = \begin{bmatrix} \theta_L^{(cd)} \\ T_L^{(cd)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(7) \\ Z(8) \end{bmatrix} \tag{2.79}$$

Muutujate $Z(i)$ (i = 1, 2, ..., 8) järjenumbrid on joonisel 2.14.



Joonis 2.14. Hoorattaga konsoolvõlli muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (2.76) kaks esimest võrrandit on põhivõrrandid (2.43). Kolmas ja neljas võrrand kirjeldavad hooratast (2.50). Järgnevad pidevus- ja tasakaaluvõrrand

$$\begin{aligned} Z(3) - Z(5) &= \theta_L^{(ab)} - \theta_A^{(cd)} &= 0 \\ Z(4) + Z(6) &= T_L^{(ab)} + T_A^{(cd)} &= 0 \end{aligned} \tag{2.80}$$

Ülejäänud kaks võrrandit saame rajatingimustest.

$$\begin{aligned} Z(1) &= \theta_A^{(ab)} &= 0 \\ Z(8) &= T_L^{(cd)} &= 0 \end{aligned} \tag{2.81}$$

Võrrandisüsteemil (2.76) on nüüd kuju

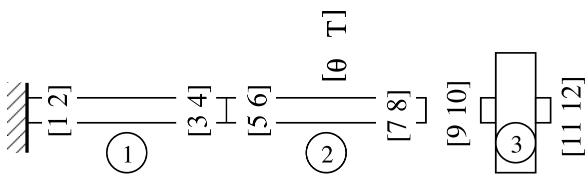
$$
\begin{bmatrix}
\cos\kappa\ell & -i_\circ \dfrac{1}{GI_p}\dfrac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dfrac{1}{-i_\circ} GI_p\kappa\sin\kappa\ell & -\cos\kappa\ell & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{i_\circ}\left(mr_\rho^2\right)\omega^2 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
Z(1) \\ Z(2) \\ Z(3) \\ Z(4) \\ Z(5) \\ Z(6) \\ Z(7) \\ Z(8)
\end{bmatrix}
= 0 \qquad (2.82)
$$

Siin

$$
\kappa = i_\rho\omega\sqrt{\frac{\mu}{GI_p}} = \omega\sqrt{\frac{\rho}{G}} \qquad (2.83)
$$

Võrrandisüsteemi (2.82) determinandi nullid leiame GNU Octave'i programmiga NaideKvollHratas1.m ($\omega_1 = 20.888\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 1.1179 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 2.2358 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$).

Omavõnkevormide määramiseks suurendame võlli elementide arvu nii, nagu näidatud joonisel 2.15.



Joonis 2.15. Hoorattaga konsoolvõlli elemendid ja muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (2.76) tundmatute transponeeritud vektor $\mathbf{Z}$

$$
\mathbf{Z}^{\mathbf{T}} = \left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{Z}_{\mathbf{A}}^{(\mathbf{1})\mathbf{T}} & \mathbf{Z}_{\mathbf{L}}^{(\mathbf{1})\mathbf{T}} & \mathbf{Z}_{\mathbf{A}}^{(\mathbf{2})\mathbf{T}} & \mathbf{Z}_{\mathbf{L}}^{(\mathbf{2})\mathbf{T}} & \mathbf{Z}_{\mathbf{A}}^{(\mathbf{3})\mathbf{T}} & \mathbf{Z}_{\mathbf{L}}^{(\mathbf{3})\mathbf{T}} \end{array}\right] \qquad (2.84)
$$

mille komponentideks on väändenurgad ja -momendid elementide 1, 2, 3 alguses ja lõpus (2.20). Muutujate $Z(i)$ (i = 1, 2, ..., 12) järjenumbrid on joonisel 2.15.

$$
\mathbf{Z}_{\mathbf{A}}^{(\mathbf{1})} = \begin{bmatrix} \theta_A^{(1)} \\ T_A^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(1) \\ Z(2) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z}_{\mathbf{L}}^{(\mathbf{1})} = \begin{bmatrix} \theta_L^{(1)} \\ T_L^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(3) \\ Z(4) \end{bmatrix} \qquad (2.85)
$$

$$\mathbf{Z_A^{(2)}} = \begin{bmatrix} \theta_A^{(2)} \\ T_A^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(5) \\ Z\,(6) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_L^{(2)}} = \begin{bmatrix} \theta_L^{(2)} \\ T_L^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(7) \\ Z\,(8) \end{bmatrix} \tag{2.86}$$

$$\mathbf{Z_A^{(3)}} = \begin{bmatrix} \theta_A^{(3)} \\ T_A^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(9) \\ Z\,(10) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_L^{(3)}} = \begin{bmatrix} \theta_L^{(3)} \\ T_L^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(11) \\ Z\,(12) \end{bmatrix} \tag{2.87}$$

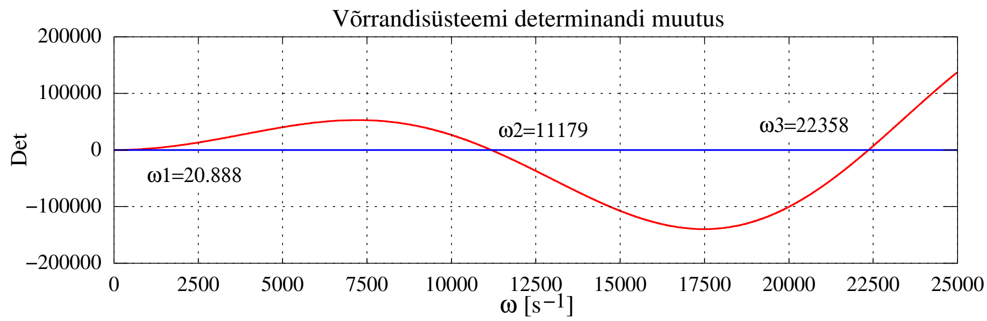
Võrrandisüsteemi (2.76) esimesed kuus võrrandit on põhivõrrandid (2.43). Järgmised neli on sõlmede pidevus- ja tasakaaluvõrrandid

$$\begin{aligned} Z\,(3) - Z\,(5) &= \theta_L^{(1)} - \theta_A^{(2)} &= 0 \\ Z\,(4) + Z\,(6) &= T_L^{(1)} + T_A^{(2)} &= 0 \\ Z\,(7) - Z\,(9) &= \theta_L^{(2)} - \theta_A^{(3)} &= 0 \\ Z\,(8) + Z\,(10) &= T_L^{(2)} + T_A^{(3)} &= 0 \end{aligned} \tag{2.88}$$

Viimased kaks võrrandit saame rajatingimustest.

$$\begin{aligned} Z\,(1) &= \theta_A^{(1)} &= 0 \\ Z\,(12) &= T_L^{(3)} &= 0 \end{aligned} \tag{2.89}$$

Võrrandisüsteemi (2.76) determinandi sõltuvus nurksagedusest ω selgub jooniselt 2.16.

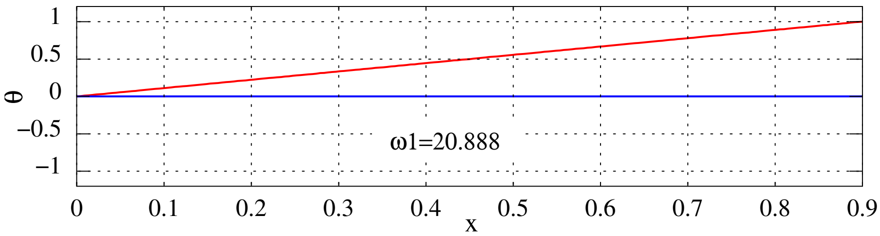


Joonis 2.16. Hoorattaga konsoolvõlli omavõnkesagedused

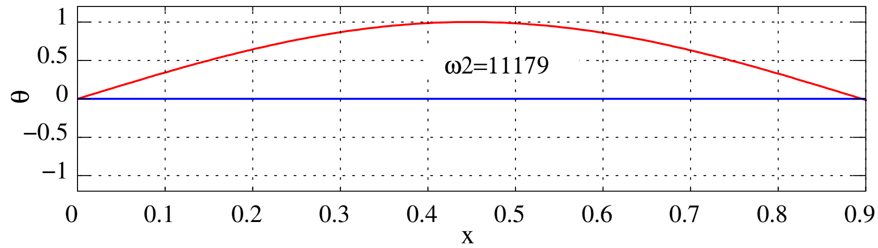
Võrrandisüsteemis (2.76) viime seitsmenda veeru, s.t $Z\,(7)$ kordajad, paremale poolele. Lahendanud hõreda võrrandisüsteemi (vt GNU Octave'i programm NaideKvoll-Hratas1w1M.m) sagedusel $\omega_1 = 20.888\,\mathrm{s}^{-1}$ vähimruutude meetodiga, valime lahendist algparameetrid. Saame omavõnkevormi, mis on joonisel 2.17a.

Omavõnkesageduse $\omega_2 = 1.1179 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$ puhul valime elementide pikkuseks $\ell_1 = 0.45\,\mathrm{m}$ ja $\ell_2 = 0.45\,\mathrm{m}$. Saadud võrrandisüsteemis viime kolmanda veeru paremale poolele. Võrrandisüsteem koostatakse ja lahendatakse GNU Octave'i programmiga NaideKvollHratas1w2M.m. Omavõnkevorm on toodud joonisel 2.17b.

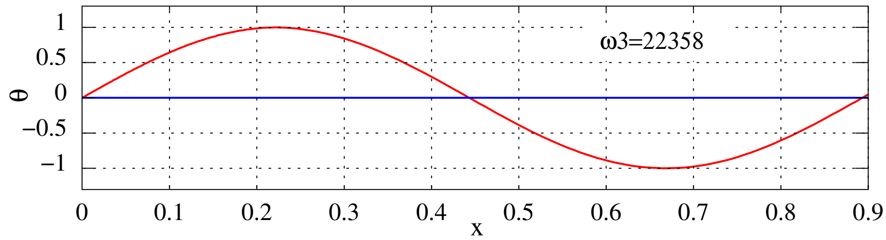
Omavõnkesagedusel $\omega_3 = 2.2358 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$ valime elementide pikkuseks $\ell_1 = 0.225\,\mathrm{m}$ ja $\ell_2 = 0.675\,\mathrm{m}$. Saadud võrrandisüsteemis viime kolmanda veeru paremale poolele. Võrrandisüsteemi koostamiseks ja lahendamiseks kasutatakse GNU Octave'i programmi NaideKvollHratas1w3M.m. Omavõnkevorm on joonisel 2.17c.



(a) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_1 = 20.888\,\mathrm{s}^{-1}$



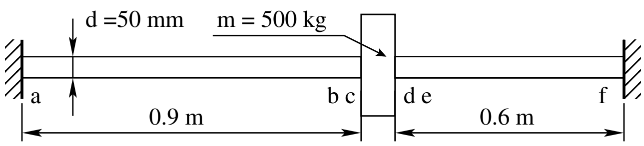
(b) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_2 = 1.1179 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$



(c) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_3 = 2.2358 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$

Joonis 2.17. Hoorattaga konsoolvõlli omavõnkevormid

Näide 2.4 (hoorattaga võlli omavõnkumine). Leida joonisel 2.18 kujutatud hoorattaga võlli omavõnkesagedused ja -vormid.



Joonis 2.18. Hoorattaga võll

Andmed. Võlli pikkus $\ell_1 = 0.9\,\mathrm{m}$, $\ell_2 = 0.6\,\mathrm{m}$, läbimõõt $d = 50\,\mathrm{mm}$, hooratta mass $m = 500\,\mathrm{kg}$, hooratta inertsiraadius $r_\rho = 0.5\,\mathrm{m}$, nihkeelastsusmoodul $G = 80\,\mathrm{GN/m^2}$, materjali tihedus $\rho = 7.80 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$. Valitud andmed vastavad kirjanduses [4] kasutatutele.

[4] http://www.academia.edu/8715878/MACHINERY_VIBRATIONS_ENGINEERING_MECHANICS-IV_LECTURE_NOTES_OF_MEEN-421_Handouts_to_students_email-_kiranmedesign_at_gmail.com_p.52 (3.07.2016)

Lahendus. Omavõnkesageduste arvutamiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{2.90}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor. Transponeeritud kujul

$$\mathbf{Z^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_A^{(1)T}} & \mathbf{Z_L^{(1)T}} & \mathbf{Z_A^{(2)T}} & \mathbf{Z_L^{(2)T}} & \mathbf{Z_A^{(3)T}} & \mathbf{Z_L^{(3)T}} & \mathbf{Z_A^{(4)T}} & \mathbf{Z_L^{(4)T}} & \mathbf{Z_A^{(5)T}} & \mathbf{Z_L^{(5)T}} \end{bmatrix} \tag{2.91}$$

Vektor koosneb väändenurkadest ja -momentidest võlli elementide alguses ja lõpus.

$$\mathbf{Z_A^{(1)}} = \begin{bmatrix} \theta_A^{(1)} \\ T_A^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(1) \\ Z\,(2) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_L^{(1)}} = \begin{bmatrix} \theta_L^{(1)} \\ T_L^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(3) \\ Z\,(4) \end{bmatrix} \tag{2.92}$$

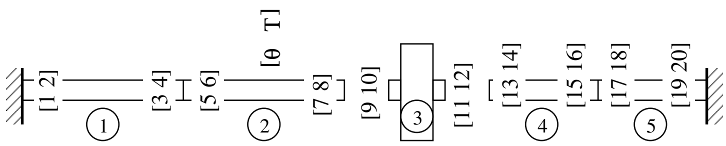
$$\mathbf{Z_A^{(2)}} = \begin{bmatrix} \theta_A^{(2)} \\ T_A^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(5) \\ Z\,(6) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_L^{(2)}} = \begin{bmatrix} \theta_L^{(2)} \\ T_L^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(7) \\ Z\,(8) \end{bmatrix} \tag{2.93}$$

$$\mathbf{Z_A^{(3)}} = \begin{bmatrix} \theta_A^{(3)} \\ T_A^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(9) \\ Z\,(10) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_L^{(3)}} = \begin{bmatrix} \theta_L^{(3)} \\ T_L^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(11) \\ Z\,(12) \end{bmatrix} \tag{2.94}$$

$$\mathbf{Z_A^{(4)}} = \begin{bmatrix} \theta_A^{(4)} \\ T_A^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(13) \\ Z\,(14) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_L^{(4)}} = \begin{bmatrix} \theta_L^{(4)} \\ T_L^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(15) \\ Z\,(16) \end{bmatrix} \tag{2.95}$$

$$\mathbf{Z_A^{(5)}} = \begin{bmatrix} \theta_A^{(5)} \\ T_A^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(17) \\ Z\,(18) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_L^{(5)}} = \begin{bmatrix} \theta_L^{(5)} \\ T_L^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(19) \\ Z\,(20) \end{bmatrix} \tag{2.96}$$

Muutujate $Z\,(i)$ (i = 1, 2, ..., 20) järjenumbrid toome joonisel 2.19.



Joonis 2.19. Hoorattaga võlli muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (2.90) esimesed kümme võrrandit on põhivõrrandid (2.43). Järgmised kaheksa on sõlmede pidevus- ja tasakaaluvõrrandid:

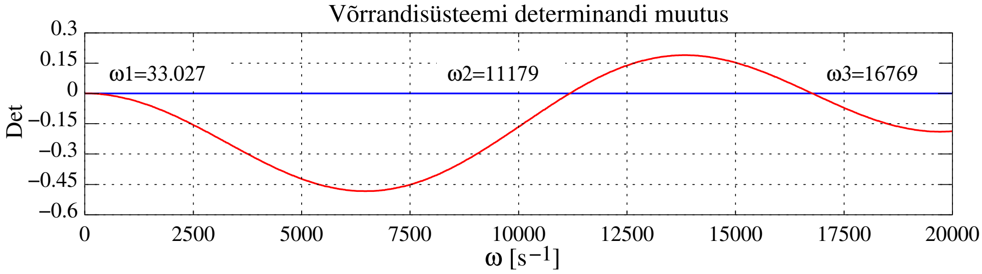
$$\begin{aligned}
Z\,(3) - Z\,(5) &= \theta_L^{(1)} - \theta_A^{(2)} &= 0 \\
Z\,(4) + Z\,(6) &= T_L^{(1)} + T_A^{(2)} &= 0 \\
Z\,(7) - Z\,(9) &= \theta_L^{(2)} - \theta_A^{(3)} &= 0 \\
Z\,(8) + Z\,(10) &= T_L^{(2)} + T_A^{(3)} &= 0 \\
Z\,(11) - Z\,(13) &= \theta_L^{(3)} - \theta_A^{(4)} &= 0 \\
Z\,(12) + Z\,(14) &= T_L^{(3)} + T_A^{(4)} &= 0 \\
Z\,(15) - Z\,(17) &= \theta_L^{(4)} - \theta_A^{(5)} &= 0 \\
Z\,(16) + Z\,(18) &= T_L^{(4)} + T_A^{(5)} &= 0
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Viimased kaks võrrandit saame rajatingimustest.

$$\begin{array}{lllll} Z\,(1) & = & \theta_A^{(1)} & = & 0 \\ Z\,(19) & = & \theta_L^{(5)} & = & 0 \end{array} \tag{2.98}$$

Omavõnkesagedused $\omega_1 = 33.027\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 1.1179\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$ ja $\omega_3 = 1.6769\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$ on leitud GNU Octave'i programmiga NaideVoll2Hratas1.m.

Võrrandisüsteemi (2.90) determinandi sõltuvus nurksagedusest ω selgub jooniselt 2.20.



Joonis 2.20. Hoorattaga võlli omavõnkesagedused

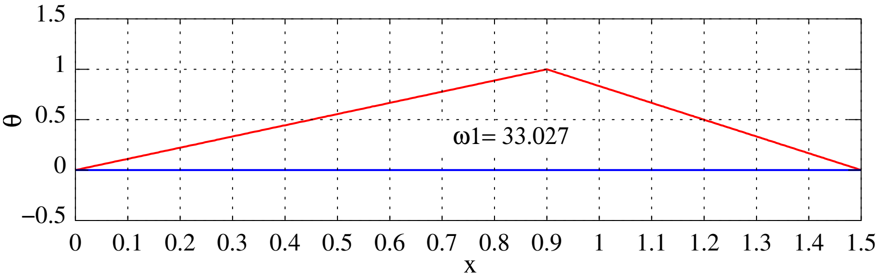
Omavõnkevormide määramisel jagame võlli (jn 2.19) neljaks elemendiks (1, 2, 4, 5) pikkusega $\ell_1 = 0.45\,\mathrm{m}$, $\ell_2 = 0.45\,\mathrm{m}$, $\ell_4 = 0.3\,\mathrm{m}$ ja $\ell_5 = 0.3\,\mathrm{m}$.

Omavõnkesagedusel $\omega_1 = 33.027\,\mathrm{s}^{-1}$ viime saadud võrrandisüsteemis üheteistkümnenda veeru paremale poolele. Pärast hõreda võrrandisüsteemi lahendamist vähimruutude meetodiga saame lahendist valida algparameetrid. Võrrandisüsteemi koostamiseks ja lahendamiseks kasutatakse GNU Octave'i programmi NaideVoll2Hratas1w1.m.

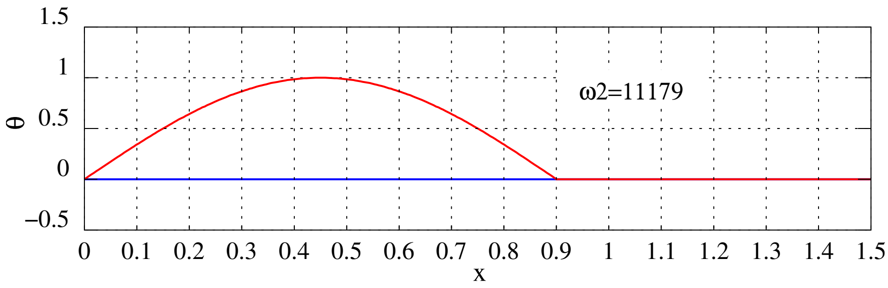
Omavõnkesagedusel $\omega_2 = 1.1179\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$ viime saadud võrrandisüsteemis kolmanda veeru paremale poolele. Võrrandisüsteemi koostamiseks ja lahendamiseks kasutatakse GNU Octave'i programmi NaideVoll2Hratas1w2.m.

Omavõnkesagedusel $\omega_3 = 1.6769\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$ viime saadud võrrandisüsteemis viieteistkümnenda veeru paremale poolele. Võrrandisüsteemi koostamiseks ja lahendamiseks kasutame GNU Octave'i programmi NaideVoll2Hratas1w3.m

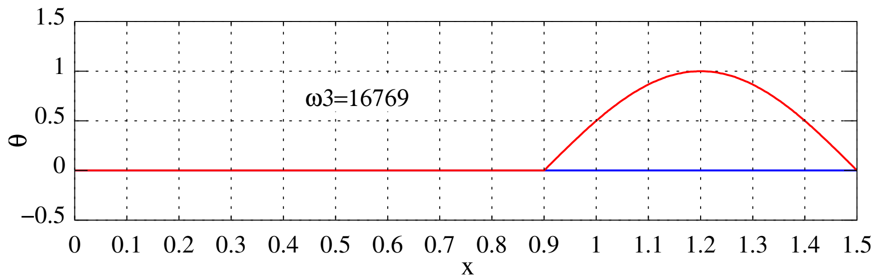
Omavõnkevormid leiab jooniselt 2.21.



(a) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_1 = 33.027\,\mathrm{s}^{-1}$



(b) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_2 = 1.1179 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$



(c) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_3 = 1.6769 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$

Joonis 2.21. Hoorattaga võlli omavõnkevormid

3. Euleri-Bernoulli tala võnkumine

3.1 Euleri-Bernoulli tala vabavõnkumine

Vaatleme tala jaotatud massiga $m = \rho A$, kus m on mass ühikpikkuse kohta, ρ – materjali tihedus ja A – ristlõikepindala. Vabavõnkumise uurimisel eeldatakse, et [EP67, lk 220]

- tala masspunktid liiguvad ainult risti tala kõverdumata teljega (tala massielementide pöörete mõju omavõnkesagedusele on hüljatav);
- põikjõu deformeeriva mõju talale võib hüljata;
- sumbuvus võrdub nulliga.

3.1.1 Tala vabavõnkumise diferentsiaalvõrrand

Vaatleme tala liikumisvõrrandit [EP67, lk 221]

$$EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial \mathrm{x}^4} = p_z\left(x, t\right) - \rho A\, \frac{\partial^2 w}{\partial \mathrm{t}^2} \tag{3.1}$$

Vabavõnkumisel $p_z\left(x, t\right) = 0$, seega

$$EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial \mathrm{x}^4} + \rho A\, \frac{\partial^2 w}{\partial \mathrm{t}^2} = 0 \tag{3.2}$$

Otsime vabavõnkumise kuju lõpmatu reana, mille iga liige koosneb kahe funktsiooni korrutisest:

$$w\left(x, t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right) \cdot \psi_n\left(t\right) \tag{3.3}$$

Siin sõltub esimene tegur ainult koordinaadist x ja teine ainult ajast t.

Asetame rea (3.3) diferentsiaalvõrrandisse (3.2). Rida rahuldab diferentsiaalvõrrandit siis, kui seda rahuldab rea iga üksik liige.

$$EI_y f^{IV}\left(x\right) \psi\left(t\right) + \rho A\, f\left(x\right) \ddot{\psi}\left(t\right) = 0 \tag{3.4}$$

Jagades saadud võrrandi avaldisega $\rho A\, f\left(x\right) \psi\left(t\right)$, eraldame muutujad:

$$\frac{EI_y f^{IV}\left(x\right)}{\rho A\, f\left(x\right)} = -\,\frac{\ddot{\psi}\left(t\right)}{\psi\left(t\right)} \tag{3.5}$$

Siin peavad võrrandi mõlemad pooled võrduma suvaliste x ja t korral, mis on võimalik ainult siis, kui mõlemad pooled kujutavad endast konstantset suurust. Selle konstandi tähiseks on ω^2. Suurust ω nimetatakse omavõnkesageduseks.

Võrrand (3.5) jaguneb kaheks:

$$\frac{EI_y f^{IV}(x)}{\rho A\, f(x)} = \omega^2 \tag{3.6}$$

$$-\frac{\ddot{\psi}(t)}{\psi(t)} = \omega^2 \tag{3.7}$$

ehk

$$EI_y f^{IV}(x) - \omega^2 \rho A\, f(x) = 0 \tag{3.8}$$

$$\ddot{\psi}(t) - \omega^2 \psi(t) = 0 \tag{3.9}$$

Viimase võrrandi lahendiks on

$$\psi(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \tag{3.10}$$

Omavõnkumised on seega harmoonilised võnkumised nurksagedusega ω. Omavõnkesageduste kompleksi ω_1, ω_2, ..., ω_m nimetatakse omavõnkesageduste spektriks.

Kui tala ristlõige A ja inertsimoment I_y on konstantsed, saab diferentsiaalvõrrandi (3.8) esitada kujul

$$f^{IV}(x) - \frac{\omega^2 \rho A}{EI_y} f(x) = 0 \tag{3.11}$$

ehk

$$f^{IV}(x) - \kappa^4 f(x) = 0 \tag{3.12}$$

Siin on kasutatud tähistust

$$\kappa^4 = \frac{\omega^2 \rho A}{EI_y} \tag{3.13}$$

kus κ on diferentsiaalvõrrandi karakteristliku võrrandi lahend:

$$\kappa_{1,2} = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho A}{EI_y}}, \qquad \kappa_{3,4} = i\sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho A}{EI_y}} \tag{3.14}$$

Omavõnkesagedus

$$\omega = \kappa^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} \tag{3.15}$$

Diferentsiaalvõrrandi (3.12) normeerimata lahendite süsteemi otsime kujul

$$f_1^*(\kappa x) = \mathrm{ch}\kappa x, \quad f_2^*(\kappa x) = \mathrm{sh}\kappa x, \quad f_3^*(\kappa x) = \cos\kappa x, \quad f_4^*(\kappa x) = \sin\kappa x \tag{3.16}$$

Lahendite süsteemi normeerimiseks kirjutame välja Wronski determinandi

$$W(\kappa, x) = \begin{vmatrix} \mathrm{ch}\,\kappa x & \mathrm{sh}\,\kappa x & \cos\kappa x & \sin\kappa x \\ \kappa\,\mathrm{sh}\,\kappa x & \kappa\,\mathrm{ch}\,\kappa x & -\kappa\sin(\kappa x) & \kappa\cos(\kappa x) \\ \kappa^2\,\mathrm{ch}\,\kappa x & \kappa^2\,\mathrm{sh}\,\kappa x & -\kappa^2\cos(\kappa x) & -\kappa^2\sin(\kappa x) \\ \kappa^3\,\mathrm{sh}\,\kappa x & \kappa^3\,\mathrm{ch}\,\kappa x & \kappa^3\sin(\kappa x) & -\kappa^3\cos(\kappa x) \end{vmatrix} \tag{3.17}$$

Wronski determinandi W väärtus kohal $x = 0$ on

$$W(\kappa, 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & \kappa \\ \kappa^2 & 0 & -\kappa^2 & 0 \\ 0 & \kappa^3 & 0 & -\kappa^3 \end{vmatrix} \neq 1 \tag{3.18}$$

Selleks et determinandi (3.18) väärtus oleks üks, liidame esimesele veerule kolmanda veeru ja jagame tulemuse kahega. Teisele veerule liidame neljanda ja jagame 2κ-ga. Kolmandast veerust lahutame esimese ja jagame $-2\kappa^2$-ga. Neljandast veerust lahutame teise ja jagame $-2\kappa^3$-ga.

Teeme sarnased teisendused normeerimata lahendite süsteemiga (3.16), tulemuseks on normeeritud lahendite fundamentaalsüsteem:

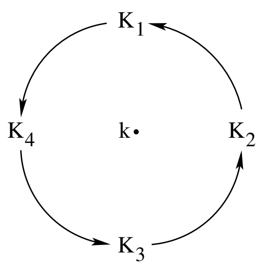
$$f_1(\kappa x) = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\kappa x + \cos\kappa x) = K_1(\kappa x) \tag{3.19}$$

$$f_2(\kappa x) = \frac{1}{2\kappa}(\mathrm{sh}\kappa x + \sin\kappa x) = \frac{1}{\kappa}K_2(\kappa x) \tag{3.20}$$

$$f_3(\kappa x) = \frac{1}{2\kappa^2}(\mathrm{ch}\kappa x - \cos\kappa x) = \frac{1}{\kappa^2}K_3(\kappa x) \tag{3.21}$$

$$f_4(\kappa x) = \frac{1}{2\kappa^3}(\mathrm{sh}\kappa x - \sin\kappa x) = \frac{1}{\kappa^3}K_4(\kappa x) \tag{3.22}$$

Funktsioone $K_i(\kappa x)$ nimetatakse ka Krõlovi[1] funktsioonideks.



Krõlovi funktsioonide diferentseerimisel saab kasutada järgmisi valemeid [SALŠ84, lk 192]:

$$\begin{aligned} K_1'(\kappa x) &= \kappa K_4(\kappa x) \\ K_4'(\kappa x) &= \kappa K_3(\kappa x) \\ K_3'(\kappa x) &= \kappa K_2(\kappa x) \\ K_2'(\kappa x) &= \kappa K_1(\kappa x) \end{aligned} \tag{3.23}$$

Skeem näitab indeksite muutust diferentseerimisel.

[1]Aleksei Nikolajevitš Krõlov (1863–1945), vene laevaehitaja, mehaanik ja matemaatik, akadeemik.

Tala sisejõudude leidmisel kasutatakse rajajõudude (kontaktjõudude) määramiseks kahte märgikokkulepet (joonis A.2).

Võnkumise kuju funktsiooni $f(x)$ ja selle tuletiste väärtused kohal $x = 0$ (algparameetrid) esimese märgikokkuleppe puhul on

$$f_\circ = w_\circ, \quad f'_\circ = -\varphi_0, \quad f''_\circ = -\frac{M_\circ}{EI}, \quad f'''_\circ = -\frac{Q_\circ}{EI} \tag{3.24}$$

ja teise märgikokkuleppe puhul

$$f_\circ = w_\circ, \quad f'_\circ = -\varphi_0, \quad f''_\circ = \frac{M_\circ}{EI}, \quad f'''_\circ = \frac{Q_\circ}{EI} \tag{3.25}$$

Homogeense diferentsiaalvõrrandi lahend esimese märgikokkuleppe järgi on

$$f(x) = w(x) = w_0 K_1(\kappa x) - \varphi_0 \frac{1}{\kappa} K_2(\kappa x) - \frac{M_\circ}{EI}\frac{1}{\kappa^2} K_3(\kappa x) - \frac{Q_\circ}{EI}\frac{1}{\kappa^3} K_4(\kappa x) \tag{3.26}$$

ning teise märgikokkuleppe kohaselt

$$f(x) = w(x) = w_0 K_1(\kappa x) - \varphi_0 \frac{1}{\kappa} K_2(\kappa x) + \frac{Q_\circ}{EI}\frac{1}{\kappa^3} K_4(\kappa x) + \frac{M_\circ}{EI}\frac{1}{\kappa^2} K_3(\kappa x) \tag{3.27}$$

$$\varphi_y = -w'(x) = -w_0 \kappa K_4(\kappa x) + \varphi_0 K_1(\kappa x) - \frac{Q_\circ}{EI}\frac{1}{\kappa^2} K_3(\kappa x) - \frac{M_\circ}{EI}\frac{1}{\kappa} K_2(\kappa x) \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} Q_z(x) = -EI_y w'''(x) = -w_0 EI\kappa^3 K_2(\kappa x) + \varphi_0\, EI\kappa^2 K_3(\kappa x) - Q_\circ K_1(\kappa x) \\ -M_\circ \kappa K_4(\kappa x) \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} M_y(x) = -EI_y w''(x) = -w_0 EI\kappa^2 K_3(\kappa x) + \varphi_0\, EI\kappa K_4(\kappa x) - Q_\circ \frac{1}{\kappa} K_2(\kappa x) \\ -M_\circ K_1(\kappa x) \end{aligned} \tag{3.30}$$

Esitame võrrandid (3.27) – (3.30) maatrikskujul

$$\mathbf{Z_x} = \mathbf{U_x} \cdot \mathbf{Z_A} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{3.31}$$

Siin

$$\mathbf{Z_x} = \begin{bmatrix} w(x) \\ \varphi_y(x) \\ Q(x) \\ M(x) \end{bmatrix}_{\mathbf{x}}, \qquad \mathbf{Z_A} = \begin{bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \\ Q_\circ \\ M_\circ \end{bmatrix}_{\mathbf{A}} \tag{3.32}$$

koormusvektor $\overset{\circ}{\mathbf{Z}} = 0$ ning ülekandemaatriks (vt GNU Octave'i funktsioon talaylekM.m)

$$\mathbf{U_x} = \begin{bmatrix} K_1(\kappa x) & -\frac{1}{\kappa} K_2(\kappa x) & \frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa^3} K_4(\kappa x) & \frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa^2} K_3(\kappa x) \\ -\kappa K_4(\kappa x) & K_1(\kappa x) & -\frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa^2} K_3(\kappa x) & -\frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa} K_2(\kappa x) \\ -EI\kappa^3 K_2(\kappa x) & EI\kappa^2 K_3(\kappa x) & -K_1(\kappa x) & -\kappa K_4(\kappa x) \\ -EI\kappa^2 K_3(\kappa x) & EI\kappa K_4(\kappa x) & -\frac{1}{\kappa} K_2(\kappa x) & -K_1(\kappa x) \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

Siin leitud ülekandemaatriksi elemendid erinevad töös [ST94, lk 84] leituist $\Phi_{i,j}$ märgi poolest. Sama töö leheküljel 82 on pöördenurga ja paindemomendi suund vastupidine siin vaadeldutele.

3.1.2 Põhivõrrandid tala paindel

Tala painde põhivõrrandid teise märgikokkuleppe puhul saab kirjutada võrrandisüsteemina

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{Z_A} - \mathbf{I_{4\times 4}} \cdot \mathbf{Z_L} = -\mathring{\mathbf{Z}} \tag{3.34}$$

Lühemalt,

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8} \cdot \widehat{\mathbf{Z}} = -\mathring{\mathbf{Z}} \tag{3.35}$$

kus

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_A} \\ \mathbf{Z_L} \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

$\mathring{\mathbf{Z}}$ on koormusvektor ning $\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8}$ on laiendatud ülekandemaatriks $(U_{4\times 4} \mid -I_{4\times 4})$ (vt GNU Octave'i funktsioon sptalaylekM.m).

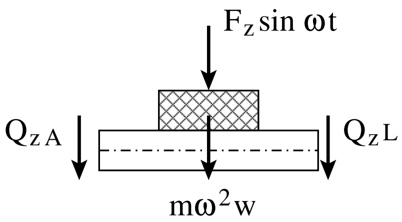
$$\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8} = \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} K_1(\kappa\ell) & -\frac{1}{\kappa}K_2(\kappa\ell) & \dfrac{i_\circ}{EI}\dfrac{1}{\kappa^3}K_4(\kappa\ell) & \dfrac{i_\circ}{EI}\dfrac{1}{\kappa^2}K_3(\kappa\ell) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa K_4(\kappa\ell) & K_1(\kappa\ell) & -\dfrac{i_\circ}{EI}\dfrac{1}{\kappa^2}K_3(\kappa\ell) & -\dfrac{i_\circ}{EI}\dfrac{1}{\kappa}K_2(\kappa\ell) & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{i_\circ}EI\kappa^3K_2(\kappa\ell) & \dfrac{1}{i_\circ}EI\kappa^2K_3(\kappa\ell) & -K_1(\kappa\ell) & -\kappa K_4(\kappa\ell) & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\dfrac{1}{i_\circ}EI\kappa^2K_3(\kappa\ell) & \dfrac{1}{i_\circ}EI\kappa K_4(\kappa\ell) & -\frac{1}{\kappa}K_2(\kappa\ell) & -K_1(\kappa\ell) & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \tag{3.37}$$

kus ℓ on tala elemendi pikkus ning $i_\circ$ on siirde ja paindenurga θ skaleerimistegur (võrrandisüsteemiga (3.35) leitavad siirded ja paindenurgad on $i_\circ$ korda suuremad).

Tala iga elemendi ülekandevõrrandite (3.35) kohta lisame neli rajatingimust.

3.1.3 Koondatud mass tala paindel

Vaatleme tala elementi (jn 3.1), millel on koondatud mass m. Elemendile on rakendatud vibreeriv jõud $F_z \sin \omega t$. Talale mõjuvad veel inertsjõud $m\omega^2 w$ ning põikjõud $Q_{z\,A}$ ja $Q_{z\,L}$. Siin on ω võnkumise nurksagedus ja w – tala siire.



Joonis 3.1. Koondatud mass

Koostame tasakaaluvõrrandid maatrikskujul

$$\mathbf{U_M} \cdot \mathbf{Z_A} - \mathbf{I_{4\times 4}} \cdot \mathbf{Z_L} = \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{3.38}$$

kus

$$\mathbf{Z_A} = \begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ Q_A \\ M_A \end{bmatrix}_{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{Z_L} = \begin{bmatrix} w_L \\ \varphi_L \\ Q_L \\ M_L \end{bmatrix}_{\mathbf{x}} \tag{3.39}$$

ülekandemaatriks

$$\mathbf{U_M} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -m\omega^2 & 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

ning koormusvektor

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ F_z \\ 0.0 \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

Võrrandisüsteemi (3.38) esitame hõreda võrrandisüsteemina

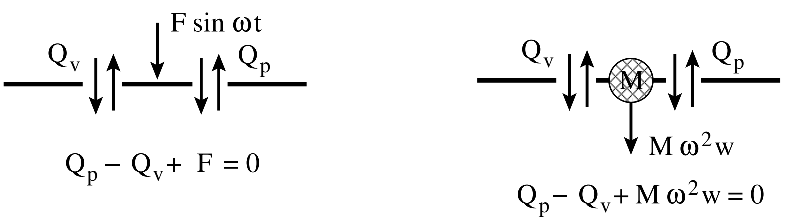
$$\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8} \cdot \widehat{\mathbf{Z}} = \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{3.42}$$

kus

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_A} \\ \mathbf{Z_L} \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

Laiendatud ülekandemaatriksi $\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8} \equiv (U_{M\,4\times 4} \,|\, -I_{4\times 4})$ saab arvutada GNU Octave'i funktsiooniga koondMassHLtala.m.

Koondjõu ja koondmassi mõju põikjõule on kujutatud joonisel 3.2.



(a) Koondjõud ja põikjõud (b) Koondmass ja põikjõud

Joonis 3.2. Põikjõud dünaamilisel koormusel

3.2 Euleri-Bernoulli tala omavõnkesagedused

Omavõnkesageduse arvutamiseks koostame võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{3.44}$$

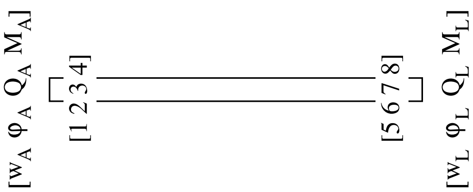
kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a} \\ \mathbf{Z_b} \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

Vektori komponentideks on siirded, paindenurgad, põikjõud ja paindemomendid talaelemendi alguses ning lõpus:

$$\mathbf{Z_a} = \begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ Q_A \\ M_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(1) \\ Z\,(2) \\ Z\,(3) \\ Z\,(4) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b} = \begin{bmatrix} w_L \\ \varphi_L \\ Q_L \\ M_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(5) \\ Z\,(6) \\ Z\,(7) \\ Z\,(8) \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

Muutujate $Z\,(i)$ (i = 1, 2, ..., 8) järjenumbrid on toodud joonisel 3.3.



Joonis 3.3. Tala muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (3.44) neli esimest võrrandit on põhivõrrandid (3.34). Ülejäänud neli võrrandit saame rajatingimustest.

Konsooltala rajatingimused:

$$\begin{aligned} Z\,(1) &= w_A &= 0 \\ Z\,(2) &= \varphi_A &= 0 \\ Z\,(7) &= Q_L &= 0 \\ Z\,(8) &= M_L &= 0 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Konsooltala omavõnkesagedused määrame tingimusest, kus võrrandisüsteemi (3.44) determinandi väärtus võrdub nulliga:

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = 0 \tag{3.48}$$

Siin on determinant $|\mathbf{A}|$ 8×8 maatriks.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} u_{33} & u_{34} & -1 & 0 \\ u_{43} & u_{44} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} u_{33} & u_{34} \\ u_{43} & u_{44} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.49}$$

Ülekandemaatriksi elemendid u_{33}, u_{34}, u_{43} ja u_{44} saab avaldisest (3.33).

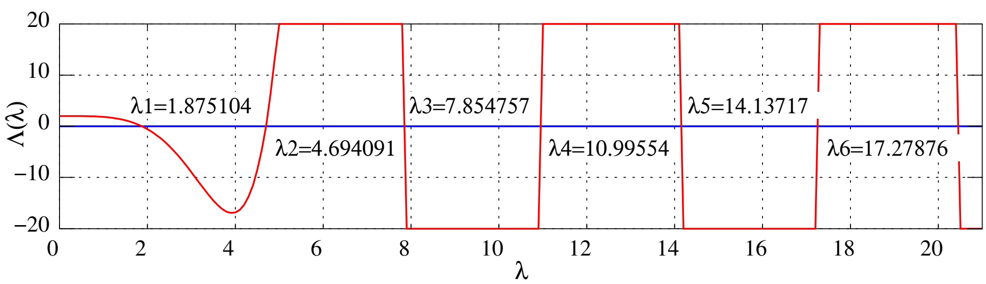
$$\begin{vmatrix} -K_1(\kappa\ell) & -\kappa K_4(\kappa\ell) \\ -\frac{1}{\kappa} K_2(\kappa\ell) & -K_1(\kappa\ell) \end{vmatrix} = K_1^2(\kappa\ell) - K_2(\kappa\ell)\, K_4(\kappa\ell) =$$

$$\frac{1}{4}\left(\mathrm{ch}\kappa\ell + \cos\kappa\ell\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\mathrm{sh}\kappa\ell + \sin\kappa\ell\right)\left(\mathrm{sh}\kappa\ell - \sin\kappa\ell\right) = 0 \tag{3.50}$$

Edasi teisendades saame sagedusvõrrandi, kus $\lambda = \kappa\ell$, vrd [Kis64, lk 110].

$$\Lambda^I(\lambda) = 1 + \mathrm{ch}(\lambda)\cos(\lambda) = 0 \tag{3.51}$$

Funktsiooni $\Lambda^I(\lambda)$ nullpunktide asukohad λ-teljel määrame GNU Octave'i programmiga Kjuured.m. Need nullpunktide asukohad on konsooltala sagedusvõrrandi mõõduta juured $\lambda_i = \kappa_i\ell$: $\lambda_1 = 1.8751040$, $\lambda_2 = 4.6940911$, $\lambda_3 = 7.8547574$, $\lambda_4 = 10.9955407$, $\lambda_5 = 14.1371684$, $\lambda_6 = 17.2787595$, vrd [Yan05, lk 527], [Sto02, lk 7.17]. Funktsiooni $\Lambda^I(\lambda)$ graafik on joonisel 3.4.



Joonis 3.4. Konsooltala sagedusvõrrandi juured

Jäikade tugedega tala rajatingimused:

$$\begin{array}{lcccc} Z(1) & = & w_A & = & 0 \\ Z(2) & = & \varphi_A & = & 0 \\ Z(5) & = & w_L & = & 0 \\ Z(6) & = & \varphi_L & = & 0 \end{array} \tag{3.52}$$

Jäikade tugedega tala omavõnkesagedused määrame tingimusest, kus võrrandisüsteemi (3.44) determinandi väärtus võrdub nulliga:

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = 0 \tag{3.53}$$

Siin on determinant $|\mathbf{A}|$ 8×8 maatriks.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} u_{13} & u_{14} & -1 & 0 \\ u_{23} & u_{24} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.54}$$

Ülekandemaatriksi elemendid u_{13}, u_{14}, u_{23} ja u_{24} saab avaldisest (3.33).

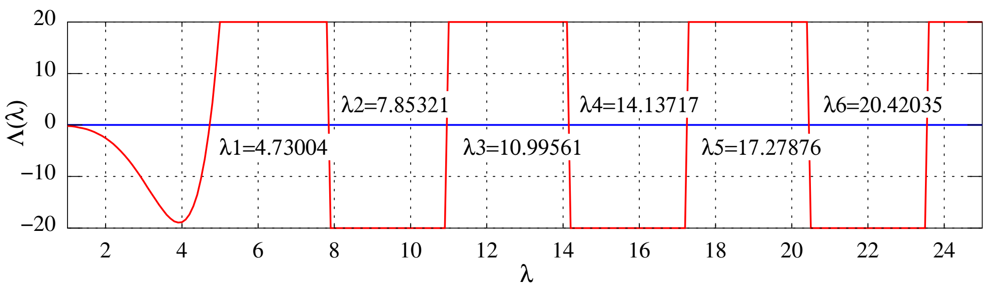
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa^3}K_4(\kappa\ell) & \frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa^2}K_3(\kappa\ell) \\ -\frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa^2}K_3(\kappa\ell) & -\frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa}K_2(\kappa\ell) \end{vmatrix} = \frac{1}{(EI)^2}\frac{1}{\kappa^4}\left[K_3^2(\kappa\ell) - K_2(\kappa\ell)K_4(\kappa\ell)\right] =$$

$$\frac{1}{4}\frac{1}{(EI)^2}\frac{1}{\kappa^4}\left[(\mathrm{ch}\kappa x - \cos\kappa x)^2 - (\mathrm{sh}\kappa\ell + \sin\kappa\ell)(\mathrm{sh}\kappa\ell - \sin\kappa\ell)\right] = 0 \tag{3.55}$$

Teisendamist jätkates saame sagedusvõrrandi, kus $\lambda = \kappa\ell$ (vrd [Kis64, lk 109]).

$$\Lambda^{II}(\lambda) = \mathrm{ch}(\lambda)\cos(\lambda) - 1 = 0 \tag{3.56}$$

Funktsiooni $\Lambda^{I}(\lambda)$ nullpunktide asukohad λ-teljel määrame GNU Octave'i programmiga JaikJaikJuured.m. Need nullpunktide asukohad on jäikade tugedega tala sagedusvõrrandi täpsed mõõduta juured $\lambda_i = \kappa_i\ell$: $\lambda_1 = 4.7300407$, $\lambda_2 = 7.8532046$, $\lambda_3 = 10.9956078$, $\lambda_4 = 14.1371655$, $\lambda_5 = 17.2787597$, $\lambda_6 = 20.4203522$, vrd [Yan05, lk 527], [Sto02, lk 7.17]. Funktsiooni $\Lambda^{II}(\lambda)$ graafiku toome joonisel 3.5.



Joonis 3.5. Jäikade tugedega tala sagedusvõrrandi juured

Paigalseisva ja liikuva liigendtoega tala rajatingimused:

$$\begin{array}{rclcl} Z\left(1\right) & = & w_A & = & 0 \\ Z\left(4\right) & = & M_A & = & 0 \\ Z\left(5\right) & = & w_L & = & 0 \\ Z\left(8\right) & = & M_L & = & 0 \end{array} \tag{3.57}$$

Paigalseisva ja liikuva liigendtoega tala omavõnkesagedused määrame tingimusest, kus võrrandisüsteemi (3.44) determinandi väärtus võrdub nulliga:

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = 0 \tag{3.58}$$

Determinant $|\mathbf{A}|$ on siin 8×8 maatriks.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} u_{12} & u_{13} & -1 & 0 \\ u_{42} & u_{43} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} u_{12} & u_{13} \\ u_{42} & u_{43} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.59}$$

Ülekandemaatriksi elemendid u_{12}, u_{13}, u_{42} ja u_{43} saame avaldisest (3.33).

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{\kappa}K_2\left(\kappa x\right) & \frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa^3}K_4\left(\kappa x\right) \\ EI\kappa K_4\left(\kappa x\right) & -\frac{1}{\kappa}K_2\left(\kappa x\right) \end{vmatrix} = \frac{1}{\kappa^2}\left[K_2^2\left(\kappa\ell\right) - K_4^2\left(\kappa\ell\right)\right] =$$

$$\frac{1}{4}\frac{1}{\kappa^2}\left[\left(\mathrm{sh}\kappa\ell + \sin\kappa\ell\right)^2 - \left(\mathrm{sh}\kappa\ell - \sin\kappa\ell\right)^2\right] = \frac{1}{\kappa^2}\left[\mathrm{sh}\kappa\ell \sin\kappa\ell\right] = 0 \tag{3.60}$$

Siit saame sagedusvõrrandi, kus $\lambda = \kappa\ell$ (vrd [Kis64, lk 108]).

$$\Lambda\left(\lambda\right) = \text{sh}\lambda \sin\lambda = 0 \quad (\text{kui } \lambda \neq 0,\ \text{siis}\ \sin\lambda = 0) \tag{3.61}$$

Paigalseisva ja liikuva liigendtoega tala sagedusvõrrandi (3.61) juured

$$\lambda_n = \kappa_n \ell = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.62}$$

Võrrandi mõõduta juured $\lambda_i = \kappa_i \ell$: $\lambda_1 = 3.1415927$, $\lambda_2 = 6.2831853$, $\lambda_3 = 9.4247780$, $\lambda_4 = 12.5663706$, $\lambda_5 = 15.7079633$, $\lambda_6 = 18.8495559$.

Liikuva liigendtoe ja jäiga toega tala rajatingimused:

$$\begin{array}{lcccc} Z\left(1\right) & = & w_A & = & 0 \\ Z\left(4\right) & = & M_A & = & 0 \\ Z\left(5\right) & = & w_L & = & 0 \\ Z\left(6\right) & = & \varphi_L & = & 0 \end{array} \tag{3.63}$$

Liikuva liigendtoe ja jäiga toega tala omavõnkesagedused määrame tingimusest, kus võrrandisüsteemi (3.44) determinandi väärtus võrdub nulliga:

$$\det \mathbf{A} = \left|\mathbf{A}\right| = 0 \tag{3.64}$$

Determinant $|\mathbf{A}|$ on 8×8 maatriks.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} u_{12} & u_{13} & -1 & 0 \\ u_{22} & u_{23} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} u_{12} & u_{13} \\ u_{22} & u_{23} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.65}$$

Ülekandemaatriksi elemendid u_{12}, u_{13}, u_{22} ja u_{23} saab avaldisest (3.33).

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{\kappa} K_2\left(\kappa x\right) & \frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa^3} K_4\left(\kappa x\right) \\ K_1\left(\kappa x\right) & -\frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa^2} K_3\left(\kappa x\right) \end{vmatrix} = \frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa^3}\left[K_2\left(\kappa\ell\right) K_3\left(\kappa\ell\right) - K_1\left(\kappa\ell\right) K_4\left(\kappa\ell\right)\right] =$$

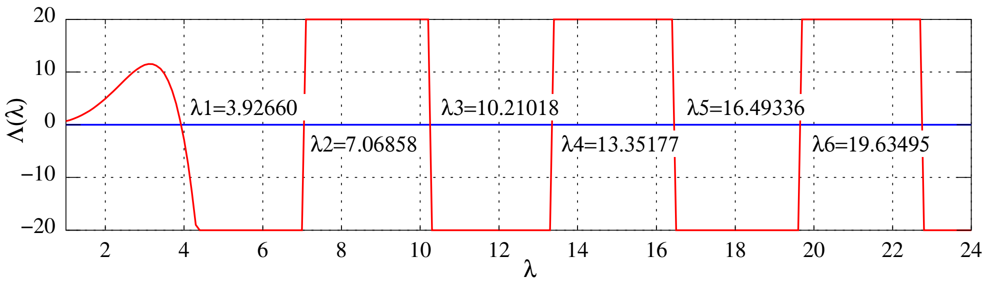
$$\frac{1}{4}\frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa^3}\left[\left(\text{sh}\kappa x + \sin\kappa x\right)\left(\text{ch}\kappa x - \cos\kappa x\right) - \left(\text{ch}\kappa x + \cos\kappa x\right)\left(\text{sh}\kappa x - \sin\kappa x\right)\right] =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa^3}\left[\text{ch}\kappa x \sin\kappa\ell - \text{sh}\kappa\ell \cos\kappa x\right] = 0 \tag{3.66}$$

Siit saame sagedusvõrrandi, kus $\lambda = \kappa\ell$ (vrd $\mathrm{th}\lambda = \tan\lambda$ [Kis64, lk 110]).

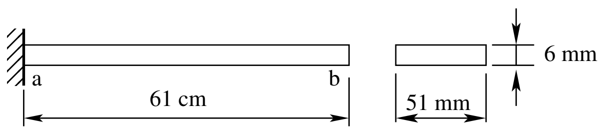
$$\Lambda^{III}(\lambda) = \mathrm{ch}\lambda \sin\lambda - \mathrm{sh}\lambda \cos\lambda = 0 \tag{3.67}$$

Funktsiooni $\Lambda^{III}(\lambda)$ nullpunktide asukohad λ-teljel määrame GNU Octave'i programmiga LiigJaikJuured.m. Need nullpunktide asukohad on konsooltala sagedusvõrrandi mõõduta juured $\lambda_i = \kappa_i\ell$: $\lambda_1 = 3.9266023$, $\lambda_2 = 7.0685827$, $\lambda_3 = 10.2101761$, $\lambda_4 = 13.3517687$, $\lambda_5 = 16.4933614$, $\lambda_6 = 19.6349541$ (vrd [Yan05, lk 527], [Sto02, lk 7.17]). Funktsiooni $\Lambda^{III}(\lambda)$ graafiku toome joonisel 3.6.



Joonis 3.6. Liikuva liigendtoe ja jäiga toega tala sagedusvõrrandi juured

Näide 3.1 (konsooltala omavõnkumine). Leida joonisel 3.7 kujutatud konsooltala omavõnkesagedused ja -vormid.



Joonis 3.7. Konsooltala

Andmed. Konsooltala pikkus $\ell = 61\,\mathrm{cm}$, ristlõike kõrgus $h = 6\,\mathrm{mm}$, ristlõike laius $b = 51\,\mathrm{mm}$, elastsusmoodul $E = 210\,\mathrm{GN/m^2}$, materjali tihedus $\rho = 7.80 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

Lahendus. Omavõnkesageduste arvutamiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{3.68}$$

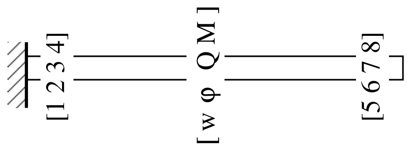
kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor.

$$\mathbf{Z} = \widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a} \\ \mathbf{Z_b} \end{bmatrix} \tag{3.69}$$

Vektori komponentideks on siirded, paindenurgad, põikjõud ja paindemomendid konsooli ab alguses ning lõpus.

$$\mathbf{Z_a} = \begin{bmatrix} w_A^{(ab)} \\ \varphi_A^{(ab)} \\ Q_A^{(ab)} \\ M_A^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(1) \\ Z(2) \\ Z(3) \\ Z(4) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b} = \begin{bmatrix} w_L^{(ab)} \\ \varphi_L^{(ab)} \\ Q_L^{(ab)} \\ M_L^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(5) \\ Z(6) \\ Z(7) \\ Z(8) \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

Muutujate $Z\,(i)$ (i = 1, 2, ..., 8) järjenumbrid on joonisel 3.8.

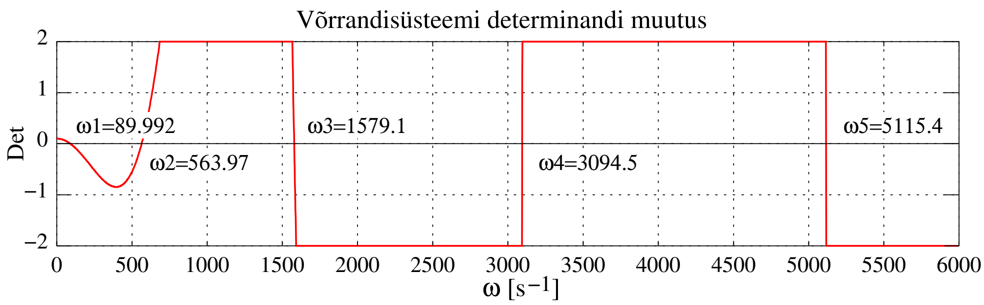


Joonis 3.8. Konsooltala muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (3.68) neli esimest võrrandit on põhivõrrandid (3.34). Ülejäänud neli võrrandit saame rajatingimustest:

$$\begin{aligned} Z\,(1) &= w_A^{(ab)} &= 0 \\ Z\,(2) &= \varphi_A^{(ab)} &= 0 \\ Z\,(7) &= Q_L^{(ab)} &= 0 \\ Z\,(8) &= M_L^{(ab)} &= 0 \end{aligned} \tag{3.71}$$

GNU Octave'i programmiga NaideKonsool1.m leiame hõreda võrrandisüsteemi (3.68) determinandi nullid. Konsooltala esimesed kuus omavõnkesagedust: $\omega_1 = 8.9992\times10\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 5.6397\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 1.5791\times10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 3.0945\times10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_5 = 5.1154\times10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_6 = 7.6415\times10^3\,\mathrm{s}^{-1}$. Võrrandisüsteemi (3.68) determinandi sõltuvus nurksagedusest ω selgub joonisest 3.9.



Joonis 3.9. Konsooltala omavõnkesagedused

Omavõnkesageduste ω_i (3.15) ja sagedusvõrrandi juurte λ_i [Kis64, lk 110] ning κ_i [Sto02, lk 7.15] vaheline seos ($\lambda_i = \kappa_i \ell$):

$$\omega_i = \kappa_i^2 \sqrt{\frac{EI}{A\rho}} = \frac{\lambda_i^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{A\rho}} = \lambda_i^2 \sqrt{\frac{EI}{m\ell^4}} \tag{3.72}$$

Leitud omavõnkesagedused ω_i teisendame sagedusvõrrandi juurteks $\kappa_i\ell$: $\kappa_1\ell = 1.875104$, $\kappa_2\ell = 4.694091$, $\kappa_3\ell = 7.854757$, $\kappa_4\ell = 10.995541$, $\kappa_5\ell = 14.137168$, $\kappa_6\ell = 17.278760$.

Tabelis 3.1 on toodud EST-meetodiga konsooltala sagedusvõrrandi juured. Need ühtivad täpsete sagedusvõrrandi juurtega (vt lk 72) ja spektraalelementide meetodi [Mal13, lk 42] abil leitutega. Tala kõrguse h ja pikkuse ℓ suhe $h/\ell = 0.01$.

Tabel 3.1. Konsooltalasagedusvõrrandi juured

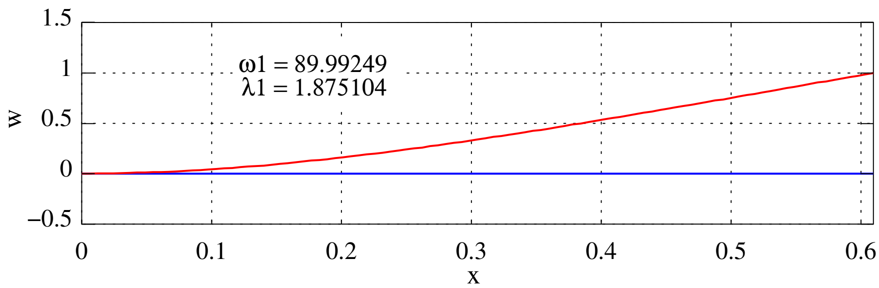
Omavõnke-sagedus	EST-meetod Bernoulli teooria		Täpne sage-dusvõrrandi juur
	ω $\left[s^{-1}\right]$	λ	λ
1.	89.99249	1.87510	1.87510
2.	563.97333	4.69409	4.69409
3.	1579.14165	7.85476	7.85476
4.	3094.48738	10.99554	10.99554
5.	5115.40936	14.13717	14.13717
6.	7641.53581	17.27876	17.27876

Tabelis tähistab λ sagedusvõrrandi mõõduta juurt:

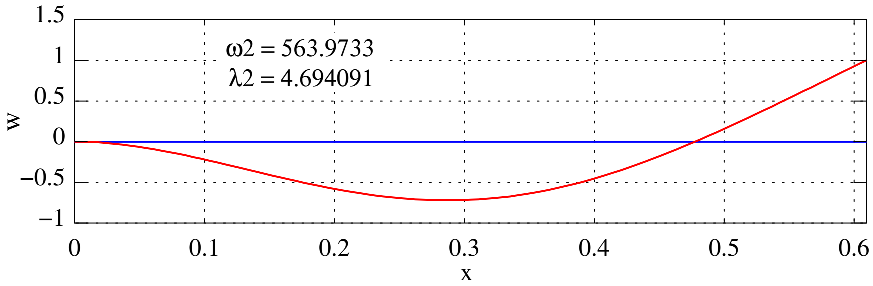
$$\lambda_i = \kappa_i \ell = \sqrt{\omega_i} \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{1/4} \ell \tag{3.73}$$

Omavõnkevormid sagedustel $\omega_1 = 8.9992 \times 10\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 5.6397 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 1.5791 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$ ja $\omega_4 = 3.0945 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$ leiame vastavalt GNU Octave'i programmidega NaideKonsool1w1.m, NaideKonsool1w2.m, NaideKonsool1w3.m ning NaideKonsool1w4.m. Võrrandisüsteemis (3.68) viime viienda veeru paremale poolele. Lahendame hõreda võrrandisüsteemi vähimruutude meetodiga ja valime lahendist algparameetrid.

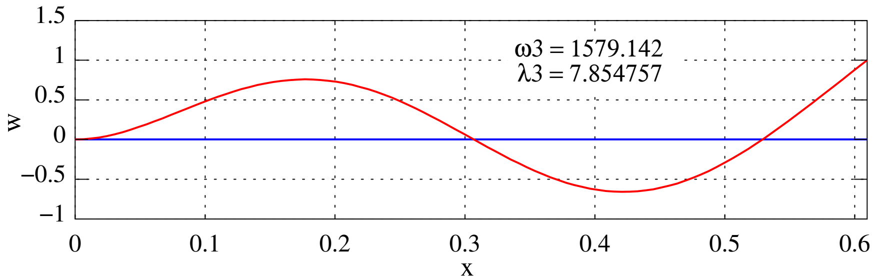
Konsooltala omavõnkevormid on kujutatud joonisel 3.10.



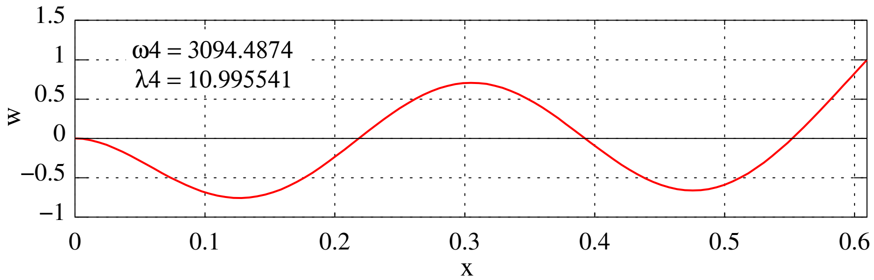
(a) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_1 = 8.9992 \times 10\,\mathrm{s}^{-1}$



(b) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_2 = 5.6397 \times 10^2\ \mathrm{s}^{-1}$



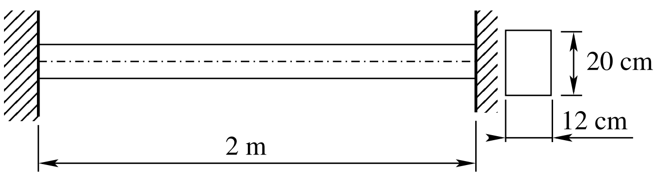
(c) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_3 = 1.5791 \times 10^3\ \mathrm{s}^{-1}$



(d) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_4 = 3.0945 \times 10^3\ \mathrm{s}^{-1}$

Joonis 3.10. Konsooltala omavõnkevormid

Näide 3.2 (jäikade tugedega tala omavõnkumine). Leida joonisel 3.11 kujutatud jäikade tugedega tala omavõnkesagedused ja -vormid.



Joonis 3.11. Jäikade tugedega tala

Andmed. Jäikade tugedega tala pikkus $\ell = 2\,\mathrm{m}$, ristlõike kõrgus $h = 20\,\mathrm{cm}$, ristlõike laius $b = 12\,\mathrm{cm}$, elastsusmoodul $E = 210\,\mathrm{GN/m^2}$, materjali tihedus $\rho = 7.80 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

Lahendus. Omavõnkesageduste arvutamiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{3.74}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor:

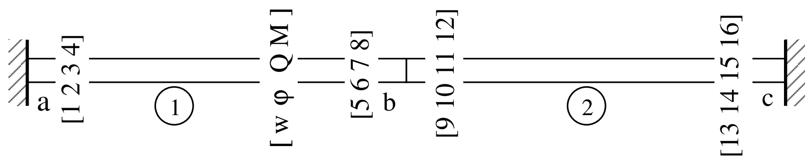
$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a^{(1)}} \\ \mathbf{Z_b^{(1)}} \\ \mathbf{Z_b^{(2)}} \\ \mathbf{Z_c^{(2)}} \end{bmatrix} \tag{3.75}$$

Vektori komponentideks on siirded, paindenurgad, põikjõud ja paindemomendid tala elementide ab ja bc (jn 3.12) alguses ning lõpus:

$$\mathbf{Z_a^{(1)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(ab)} \\ \varphi_A^{(ab)} \\ Q_A^{(ab)} \\ M_A^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(1) \\ Z(2) \\ Z(3) \\ Z(4) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b^{(1)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(ab)} \\ \varphi_L^{(ab)} \\ Q_L^{(ab)} \\ M_L^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(5) \\ Z(6) \\ Z(7) \\ Z(8) \end{bmatrix} \tag{3.76}$$

$$\mathbf{Z_b^{(2)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(bc)} \\ \varphi_A^{(bc)} \\ Q_A^{(bc)} \\ M_A^{(bc)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(9) \\ Z(10) \\ Z(11) \\ Z(12) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_c^{(2)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(bc)} \\ \varphi_L^{(bc)} \\ Q_L^{(bc)} \\ M_L^{(bc)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(13) \\ Z(14) \\ Z(15) \\ Z(16) \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

Muutujate $Z(i)$ (i = 1, 2, ..., 16) järjenumbrid on joonisel 3.12.



Joonis 3.12. Jäikade tugedega tala muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (3.74) kaheksa esimest võrrandit on põhivõrrandid (3.34). Järgnevad sõlme b pidevus- ja tasakaaluvõrrandid

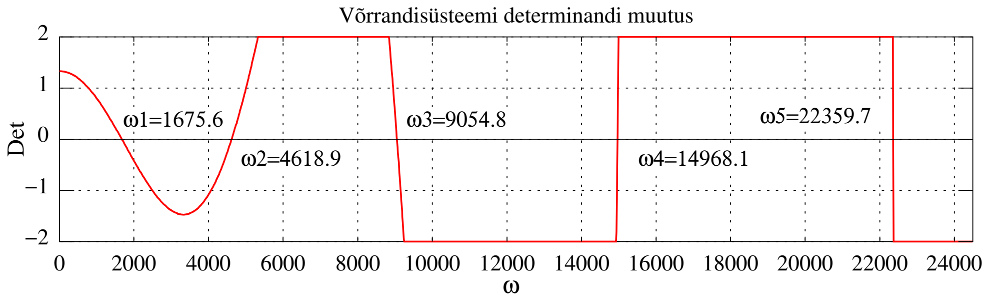
$$\begin{aligned} Z(5) - Z(9) &= w_L^{(ab)} - w_A^{(bc)} = 0 \\ Z(6) - Z(10) &= \varphi_L^{(ab)} - \varphi_A^{(bc)} = 0 \\ Z(7) + Z(11) &= Q_L^{(ab)} + Q_A^{(bc)} = 0 \\ Z(8) + Z(12) &= M_L^{(ab)} + M_A^{(bc)} = 0 \end{aligned} \tag{3.78}$$

Ülejäänud neli võrrandit saame toetingimustest:

$$\begin{aligned} Z(1) &= w_A^{(ab)} = 0 \\ Z(2) &= \varphi_A^{(ab)} = 0 \\ Z(13) &= w_L^{(bc)} = 0 \\ Z(14) &= \varphi_L^{(bc)} = 0 \end{aligned} \tag{3.79}$$

GNU Octave'i programmiga NaideTala1.m leiame hõreda võrrandisüsteemi (3.74) determinandi nullid. Võrrandisüsteemi esimesed kuus omavõnkesagedust: $\omega_1 = 1.67560 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 4.618868 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 9.054828 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 1.49681 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_5 = 2.23597 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_6 = 3.12297 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$.

Võrrandisüsteemi (3.74) determinandi sõltuvus nurksagedusest ω on kujutatud joonisel 3.13.



Joonis 3.13. Jäikade tugedega tala omavõnkesagedused

Leitud omavõnkesagedused ω_i teisendame sagedusvõrrandi juurteks $\lambda_i = \kappa_i \ell$ (vt seos (3.72)): $\kappa_1 \ell = 4.73004$, $\kappa_2 \ell = 7.85321$, $\kappa_3 \ell = 10.99561$, $\kappa_4 \ell = 14.13717$, $\kappa_5 \ell = 17.27876$, $\kappa_6 \ell = 20.42035$. Sagedusvõrrandi juurte võrdlus raamatus [Sto02, lk 7.15] leiduvatega – $\kappa_1 \ell = 4.730$, $\kappa_2 \ell = 7.853$, $\kappa_3 \ell = 10.996$, $\kappa_4 \ell = 14.137$ – näitab head kokkulangevust.

Tabelis 3.2 on toodud EST-meetodiga jäikade tugedega tala sagedusvõrrandi juured. Need ühtivad täpsete sagedusvõrrandi juurtega (vt lk 73) ja spektraalelementide meetodi [Mal13, lk 45] abil leitutega. Tala kõrguse h ja pikkuse ℓ suhe $h/\ell = 0.01$.

Tabel 3.2. Jäikade tugedega tala sagedusvõrrandi juured

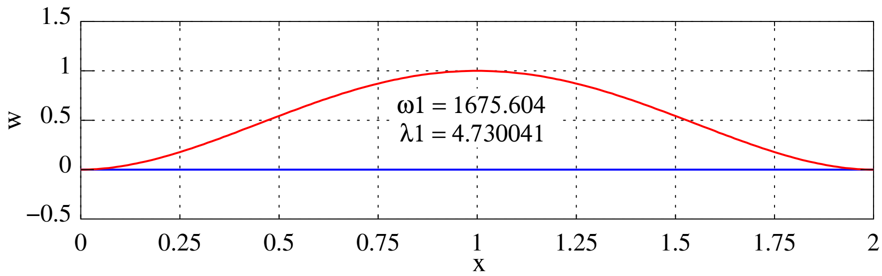
Omavõnke-sagedus	EST-meetod Bernoulli teooria		Täpne sage-dusvõrrandi juur (3.56)
	$\omega\ \left[s^{-1}\right]$	λ	λ
1.	1675.60440	4.73004	4.73004
2.	4618.86804	7.85321	7.85321
3.	9054.82814	10.99561	10.99561
4.	14968.09087	14.13717	14.13717
5.	22359.74543	17.27876	17.27876
6.	31229.72701	20.42035	20.42035

Tabelis tähistab λ sagedusvõrrandi mõõduta juurt.

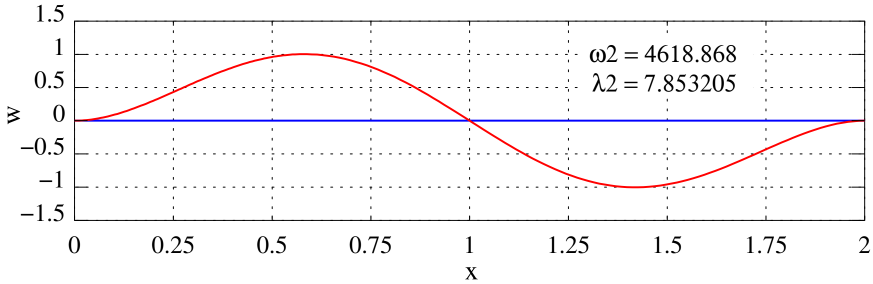
$$\lambda_i = \sqrt{\omega_i} \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{1/4} \ell \tag{3.80}$$

Omavõnkevormid sagedustel $\omega_1 = 1.67560 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 4.618868 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 9.054828 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 1.49681 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$ leiame vastavalt GNU Octave'i programmidega NaideTala1w1.m, NaideTala1w2.m, NaideTala1w3.m ja NaideTala1w4.m. Nendes programmides on tala pikkus $\ell = 2\,\mathrm{m}$ jagatud kaheks elemendiks, mille pikkuseks vastavalt omavõnkesagedusele võtame $(1.0 + 1.0)$ m, $(0.6 + 1.4)$ m, $(0.4 + 1.6)$ m ja $(0.3 + 1.7)$ m. Neljas võrrandisüsteemis (3.74) viime viienda, s.t tundmatu $Z\,(5)$ veeru paremale poolele ja võrdsustame ühega. Lahendades hõreda võrrandisüsteemi vähimruutude meetodiga, saame lahendist valida algparameetrid.

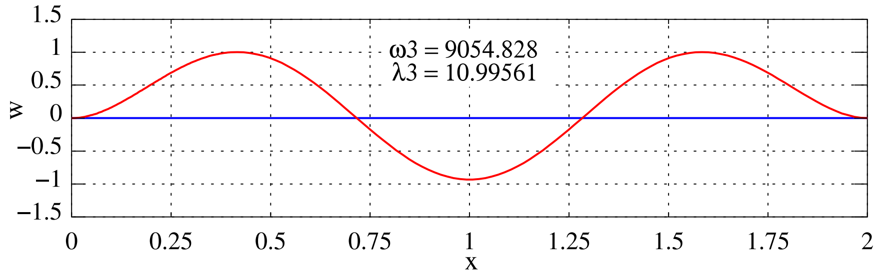
Omavõnkevormid on kujutatud joonisel 3.14.



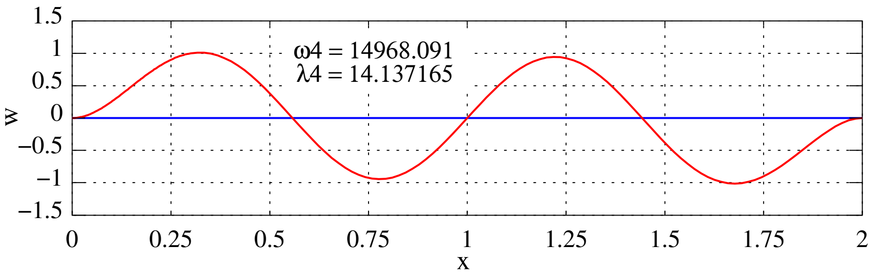
(a) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_1 = 1.67560 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$



(b) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_2 = 4.618868 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$



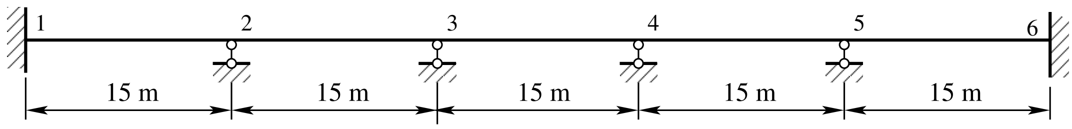
(c) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_3 = 9.054828 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$



(d) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_4 = 1.49681\times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$

Joonis 3.14. Jäikade tugedega tala omavõnkevormid

Näide 3.3 (viiesildeline jätkuvtala). Leida joonisel 3.15 kujutatud viiesildelise jätkuvtala omavõnkesagedused ja -vormid.



Joonis 3.15. Viiesildeline jätkuvtala

Andmed. Jätkuvtalal on võrdsed silded $\ell_i = 15\,\mathrm{m}$ (i = 1, 2, ..., 5). Ristlõike inertsimoment $I = 2.23\times 10^{-2}\,\mathrm{m}^4$, elastsusmoodul $E = 2.3544\times 10^{10}\,\mathrm{Pa}$, ristlõikepindala $A = 0.20752\,\mathrm{m}^2$, materjali tihedus $\rho = 7.80\times 10^3\,\mathrm{kg/m}^3$.

Jätkuvtala geomeetrilised mõõtmed ja materjali omadused on vastavuses raamatus [Kol65, lk 176] leiduvatega, kus elastsusmoodul $E = 2.4\times 10^6\,\mathrm{tm}^{-2}$ ja tala lausmass meetri kohta $m = 0.165\,\mathrm{tm}^{-2}\mathrm{s}^2$.

Lahendus. Algparameetrite leidmiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA}\cdot\mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{3.81}$$

kus **spA** on võrrandisüsteemi kordajate hõre maatriks, milles on 152 nullist erinevat elementi:

```
Compressed Column Sparse (rows = 48, cols = 48, nnz = 152 [6.6%])
```

B on vabaliikmete vektor ja **Z** on võrrandisüsteemi tundmatute vektor:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_1^{(1)}} \\ \mathbf{Z_2^{(1)}} \\ \mathbf{Z_2^{(2)}} \\ \mathbf{Z_3^{(2)}} \\ \mathbf{Z_3^{(3)}} \\ \mathbf{Z_4^{(3)}} \\ \vdots \\ \mathbf{Z_5^{(5)}} \\ \mathbf{Z_6^{(5)}} \\ \mathbf{Z_1^{(C)}} \\ \mathbf{Z_{2\&3}^{(C)}} \\ \mathbf{Z_{4\&5}^{(C)}} \\ \mathbf{Z_6^{(C)}} \end{bmatrix} \tag{3.82}$$

Vektori komponentideks on siirded, paindenurgad, põikjõud ja paindemomendid tala elementide alguses ja lõpus ning toereaktsioonid (jn 3.16):

$$\mathbf{Z_1^{(1)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(1)} \\ \varphi_A^{(1)} \\ Q_A^{(1)} \\ M_A^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(1) \\ Z(2) \\ Z(3) \\ Z(4) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_2^{(1)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(1)} \\ \varphi_L^{(1)} \\ Q_L^{(1)} \\ M_L^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(5) \\ Z(6) \\ Z(7) \\ Z(8) \end{bmatrix} \tag{3.83}$$

$$\mathbf{Z_2^{(2)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(2)} \\ \varphi_A^{(2)} \\ Q_A^{(2)} \\ M_A^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(9) \\ Z(10) \\ Z(11) \\ Z(12) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_3^{(2)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(2)} \\ \varphi_L^{(2)} \\ Q_L^{(2)} \\ M_L^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(13) \\ Z(14) \\ Z(15) \\ Z(16) \end{bmatrix} \tag{3.84}$$

$$\mathbf{Z_3^{(3)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(3)} \\ \varphi_A^{(3)} \\ Q_A^{(3)} \\ M_A^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(17) \\ Z(18) \\ Z(19) \\ Z(20) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_4^{(3)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(3)} \\ \varphi_L^{(3)} \\ Q_L^{(3)} \\ M_L^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(21) \\ Z(22) \\ Z(23) \\ Z(24) \end{bmatrix} \tag{3.85}$$

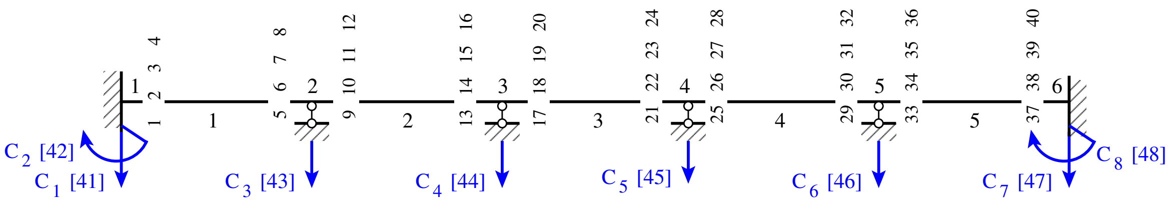
$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

$$\mathbf{Z_5^{(5)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(5)} \\ \varphi_A^{(5)} \\ Q_A^{(5)} \\ M_A^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(33) \\ Z(34) \\ Z(35) \\ Z(36) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_6^{(5)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(5)} \\ \varphi_L^{(5)} \\ Q_L^{(5)} \\ M_L^{(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(37) \\ Z(38) \\ Z(39) \\ Z(40) \end{bmatrix} \tag{3.86}$$

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{C})} = \left[\begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} Z\,(41) \\ Z\,(42) \end{array} \right], \qquad \mathbf{Z}_{\mathbf{2\&3}}^{(\mathbf{C})} = \left[\begin{array}{c} C_3 \\ C_4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} Z\,(43) \\ Z\,(44) \end{array} \right] \tag{3.87}$$

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{4\&5}}^{(\mathbf{C})} = \left[\begin{array}{c} C_5 \\ C_6 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} Z\,(45) \\ Z\,(46) \end{array} \right], \qquad \mathbf{Z}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{C})} = \left[\begin{array}{c} C_7 \\ C_8 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} Z\,(47) \\ Z\,(48) \end{array} \right] \tag{3.88}$$

Muutujate $Z\,(i)$ (i = 1, 2, ..., 48) järjenumbrid on joonisel 3.16.



Joonis 3.16. Viiesildelise jätkuvtala muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (3.81) esimesed kakskümmend võrrandit on põhivõrrandid (3.34). Need koostatakse GNU Octave'i programmis NaideJtkTala5det.m (vt programmi väljavõtet 3.1).

Väljavõte programmist 3.1 (NaideJtkTala5det.m)

```
# hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvFn1=sptalaylekM(baasi0,l1,wf,mg,A,EI);

# hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spyleF1=sptalaylekM(baasi0,l1,wf,mg,A,EI);;
IIv=1;
IJv=1;
# asetab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spyleF1);
spyleF2=sptalaylekM(baasi0,l2,wf,mg,A,EI);;
IIv=5;
IJv=9;
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spyleF2);
spyleF3=sptalaylekM(baasi0,l3,wf,mg,A,EI);;
IIv=9;
IJv=17;
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spyleF3);
spyleF4=sptalaylekM(baasi0,l4,wf,mg,A,EI);;
IIv=13;
IJv=25;
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spyleF4);
spyleF5=sptalaylekM(baasi0,l5,wf,mg,A,EI);;
IIv=17;
IJv=33;
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spyleF5);
%IIv=21; - 20 võrrandit
%IJv=41; - 40 tundmatut + 8 toereaktsiooni
```

Järgnevad sõlmede pidevus- ja tasakaaluvõrrandid.

Pidevusvõrrandid

$$
\begin{array}{lcccccc}
\text{Sõlm 2} & & & & & & \\
Z(5) - Z(9) & = & w_L^{(1)} & - & w_A^{(2)} & = & 0 \\
Z(6) - Z(10) & = & \varphi_L^{(1)} & - & \varphi_A^{(2)} & = & 0 \\
\text{Sõlm 3} & & & & & & \\
Z(13) - Z(17) & = & w_L^{(2)} & - & w_A^{(3)} & = & 0 \\
Z(14) - Z(18) & = & \varphi_L^{(2)} & - & \varphi_A^{(3)} & = & 0 \\
\text{Sõlm 4} & & & & & & \\
Z(21) - Z(25) & = & w_L^{(3)} & - & w_A^{(4)} & = & 0 \\
Z(22) - Z(26) & = & \varphi_L^{(3)} & - & \varphi_A^{(4)} & = & 0 \\
\text{Sõlm 5} & & & & & & \\
Z(29) - Z(33) & = & w_L^{(4)} & - & w_A^{(5)} & = & 0 \\
Z(30) - Z(34) & = & \varphi_L^{(4)} & - & \varphi_A^{(5)} & = & 0
\end{array}
\tag{3.89}
$$

Tasakaaluvõrrandid

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\text{Sõlm 1} & & & & & & & & \\
Z(7) + Z(11) + Z(41) & = & Q_L^{(1)} & + & Q_A^{(2)} & + & C_1 & = & 0 \\
Z(8) + Z(12) + Z(42) & = & M_L^{(1)} & + & M_A^{(2)} & + & C_2 & = & 0 \\
\text{Sõlm 2} & & & & & & & & \\
Z(7) + Z(11) + Z(43) & = & Q_L^{(1)} & + & Q_A^{(2)} & + & C_3 & = & 0 \\
Z(8) + Z(12) & = & M_L^{(1)} & + & M_A^{(2)} & = & 0 & & \\
\text{Sõlm 3} & & & & & & & & \\
Z(15) + Z(19) + Z(44) & = & Q_L^{(2)} & + & Q_A^{(3)} & + & C_4 & = & 0 \\
Z(16) + Z(20) & = & M_L^{(2)} & + & M_A^{(3)} & = & 0 & & \\
\text{Sõlm 4} & & & & & & & & \\
Z(23) + Z(27) + Z(45) & = & Q_L^{(3)} & + & Q_A^{(4)} & + & C_5 & = & 0 \\
Z(24) + Z(27) & = & M_L^{(3)} & + & M_A^{(4)} & = & 0 & & \\
\text{Sõlm 5} & & & & & & & & \\
Z(31) + Z(35) + Z(46) & = & Q_L^{(4)} & + & Q_A^{(5)} & + & C_6 & = & 0 \\
Z(32) + Z(36) & = & M_L^{(4)} & + & M_A^{(5)} & = & 0 & & \\
\text{Sõlm 6} & & & & & & & & \\
Z(31) + Z(35) + Z(47) & = & Q_L^{(4)} & + & Q_A^{(5)} & + & C_7 & = & 0 \\
Z(32) + Z(36) + Z(48) & = & M_L^{(4)} & + & M_A^{(5)} & + & C_8 & = & 0
\end{array}
\tag{3.90}
$$

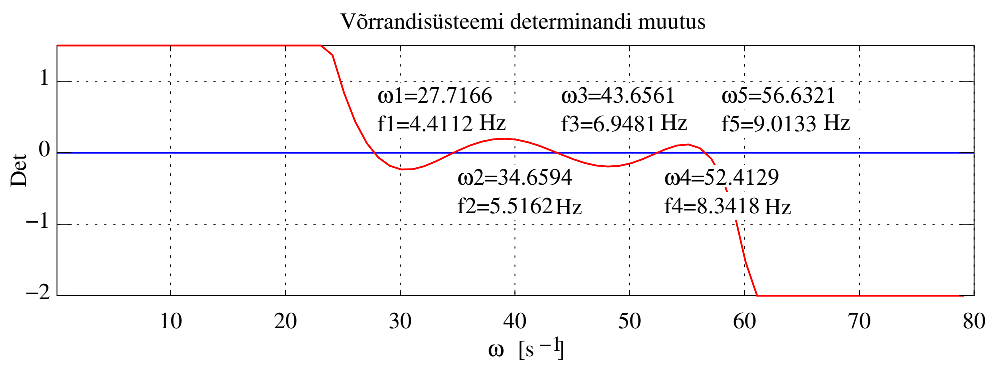
Ülejäänud kaheksa võrrandit saame toetingimustest.

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Sõlm} & 1 & & & \\
Z(1) & = & w_A^{(1)} & = & 0 \\
Z(2) & = & \varphi_A^{(1)} & = & 0 \\
\text{Sõlm} & 2 & & & \\
Z(9) & = & w_A^{(1)} & = & 0 \\
\text{Sõlm} & 3 & & & \\
Z(17) & = & w_A^{(1)} & = & 0 \\
\text{Sõlm} & 4 & & & \\
Z(25) & = & w_A^{(1)} & = & 0 \\
\text{Sõlm} & 5 & & & \\
Z(33) & = & w_A^{(1)} & = & 0 \\
\text{Sõlm} & 6 & & & \\
Z(37) & = & w_L^{(5)} & = & 0 \\
Z(38) & = & \varphi_L^{(5)} & = & 0
\end{array}
\qquad (3.91)
$$

Koostatud võrrandisüsteemil (3.81) on 48 võrrandit 48 tundmatuga, kus nullist erinevaid elemente on 152 (6.6%):

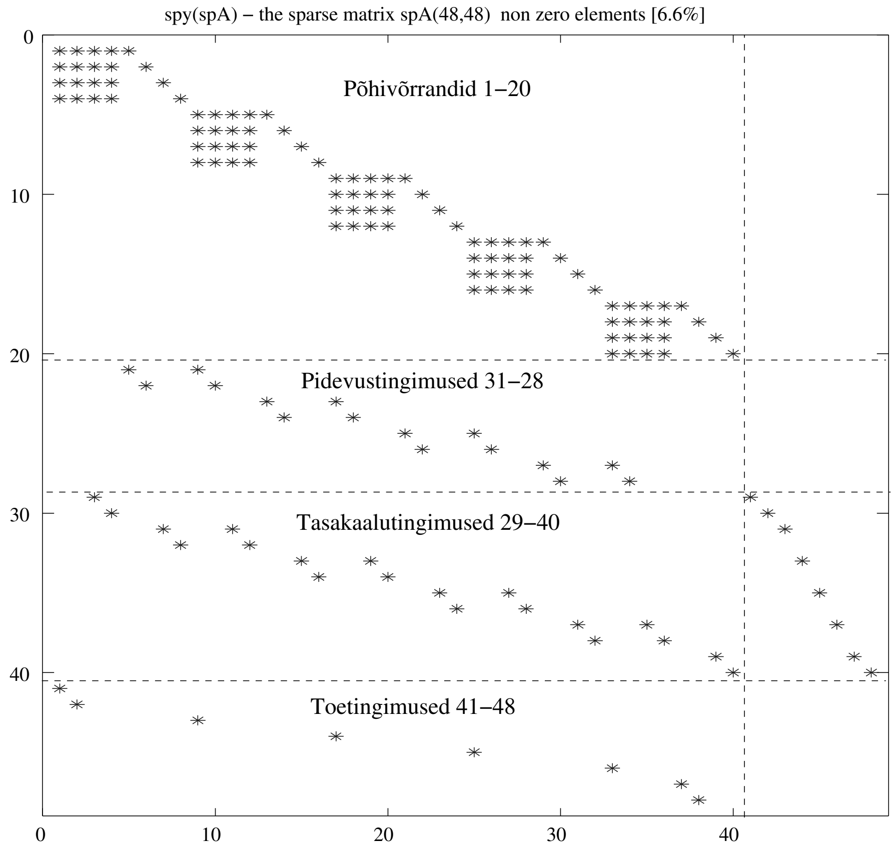
```
Compressed Column Sparse (rows = 48, cols = 48, nnz = 152 [6.6%])
```

GNU Octave'i programmiga NaideJtkTala5det.m leiame võrrandisüsteemi (3.81) determinandi nullid, s.t viiesildelise jätkuvtala omavõnkesagedused (jn 3.17).



Joonis 3.17. Viiesildelise jätkuvtala omavõnkesagedused

Võrrandisüsteemi tundmatute kordajate maatriksi spA muster on joonisel 3.18.



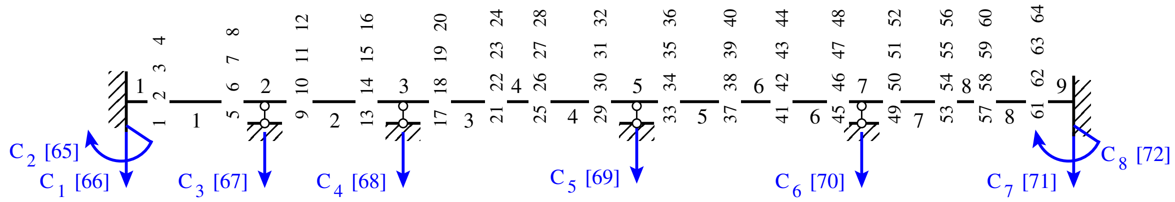
Joonis 3.18. Viiesildelise jätkuvtala maatriksi spA muster

Tabelis 3.3 võrreldakse EST-meetodiga arvutatud ja raamatus [Kol65, lk 176] deformatsioonimeetodiga leitud viiesildelise jätkuvtala omavõnkesagedusi.

Tabel 3.3. Viiesildelise jätkuvtala omavõnkesagedused

Omavõnke-sagedus	EST-meetod. Euleri-Bernoulli teooria			Def-meetod [Kol65, lk 176]
	Sagedus ω $\left[s^{-1}\right]$	Sagedus f [Hz]	Erinevus def-meetodist %	Sagedus f [Hz]
1.	27.7166	4.4112	0.25	4.40
2.	34.6594	5.5162	0.069	5.52
3.	43.6561	6.9481	0.32	6.97
4.	52.4129	8.3418	0.098	8.35
5.	56.6321	9.0133	0.15	9.00
6.	105.6309	16.8117		

Viiesildelise jätkuvtala omavõnkevormide arvutamiseks jagame elemendid 3, 4 ja 5 (jn 3.16) pooleks. Lisame sõlmed 4, 6 ja 8 (jn 3.19).



Joonis 3.19. Viiesildeline jätkuvtala muutujate järjenumbrid omavõnkevormide arvutamiseks

Nüüd on koostatud võrrandisüsteemil 72 võrrandit 72 tundmatuga:

```
spAnull =
Compressed Column Sparse (rows = 72, cols = 72, nnz = 236 [4.6%])
```

Omavõnkesagedustel on kordajate maatriksi spAnull astak 71. Viime ühe veeru, mis kirjeldab siiret talaelemendi lõpus, võrrandisüsteemi paremale poolele. Lineaarne võrrandisüsteem on lahenduv, sest tema astak võrdub laiendatud maatriksi astakuga ja see on võrdne tundmatute arvuga võrrandisüsteemis.[2]

Valides GNU Octave'i programmis NaideJtkTala5Vormid.m sagedusvariandi 1 ($\omega_1 = 27.7166$), viime veeru $Z\,(21)$ paremale poolele.

Lahendanud hõreda võrrandisüsteemi vähimruutude meetodiga, saame lahendist ($Xvect$) valida algparameetrid (vt programmi väljavõte 3.2).

Väljavõte programmist 3.2 (NaideJtkTala5Vormid.m)

```
SalgPar1=Xvect(1:4,1);   %% SalgPar1=Xvect(1:4,1);
SalgPar2=Xvect(9:12,1);  %% SalgPar2=Xvect(9:12,1)
SalgPar3=Xvect(17:20,1); %% SalgPar3=Xvect(17:20,1);
SalgPar4=Xvect(24:27,1); %% SalgPar4=Xvect(25:28,1); Algparameetrid
SalgPar5=Xvect(32:35,1); %% SalgPar5=Xvect(33:36,1); on
SalgPar6=Xvect(40:43,1); %% SalgPar6=Xvect(41:44,1); nihutatud
SalgPar7=Xvect(48:51,1); %% SalgPar7=Xvect(49:52,1); ühe võrra
SalgPar8=Xvect(56:59,1); %% SalgPar8=Xvect(57:60,1); ettepoole
```

Algparameetrite meetodi maatriksvõrrandiga (3.31)

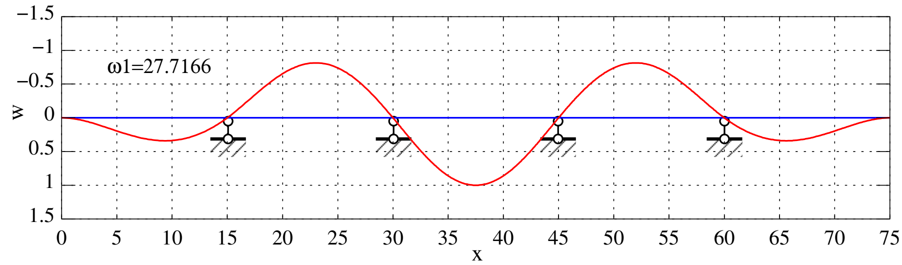
$$\mathbf{Z_x} = \mathbf{U_x} \cdot \mathbf{Z_A} \tag{3.92}$$

arvutame kuue elemendi siirded.

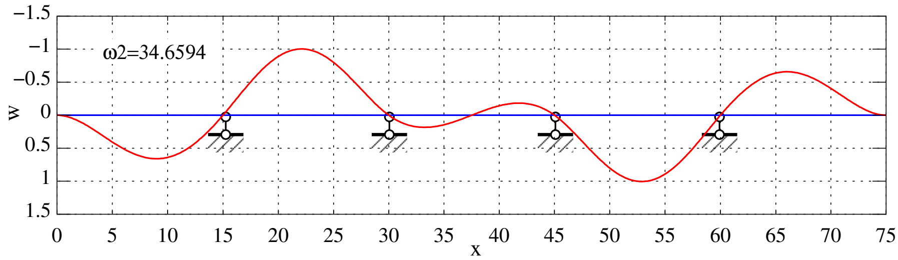
Omavõnkesagedustele ($\omega_1 = 27.7166, \omega_2 = 34.6594, \omega_3 = 43.6561, \omega_4 = 52.4129, \omega_5 = 56.6321$, $\omega_6 = 105.6309$) vastavad omavõnkevormid leiame GNU Octave'i programmiga NaideJtkTala5Vormid.m, kus eelnevalt valime sagedusvariandi numbri.

Omavõnkevormid on kujutatud joonisel 3.20.

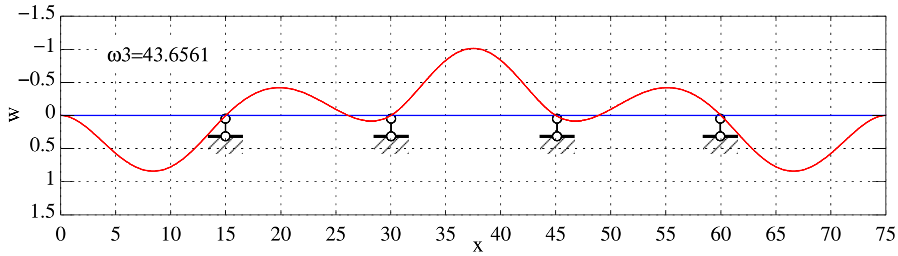
[2] `http://enos.itcollege.ee/~lepikult/lineaaralgebra/Astak.ppt` (10.07.2017)



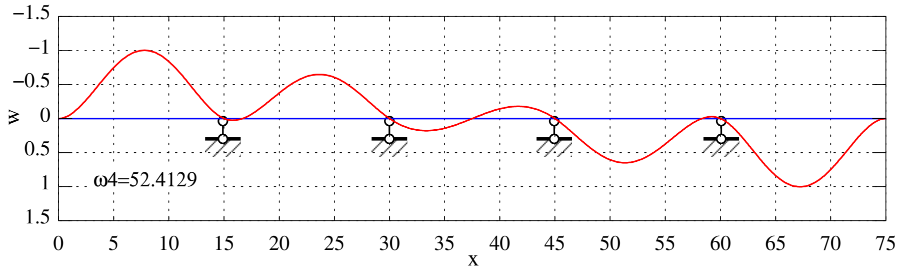
(a) Omavõnkevorm sagedusel $f_1 = 4.4112\,\mathrm{Hz}$



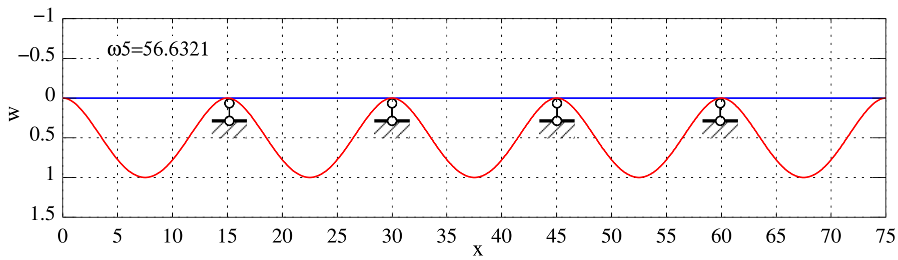
(b) Omavõnkevorm sagedusel $f_2 = 5.5162\,\mathrm{Hz}$



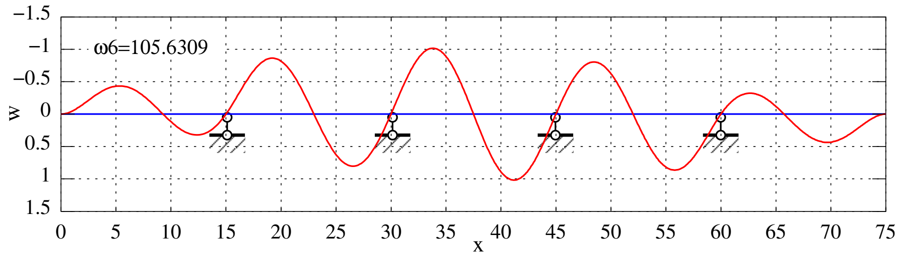
(c) Omavõnkevorm sagedusel $f_3 = 6.9481\,\mathrm{Hz}$



(d) Omavõnkevorm sagedusel $f_4 = 8.3418\,\mathrm{Hz}$



(e) Omavõnkevorm sagedusel $f_5 = 9.0133\,\mathrm{Hz}$



(f) Omavõnkevorm sagedusel $f_6 = 16.8117\,\mathrm{Hz}$

Joonis 3.20. Viiesildelise jätkuvtala omavõnkevormid

3.3 Euleri-Bernoulli tala sundvõnkumine

Vaatleme tala liikumisvõrrandit [EP67, lk 221], [Kis64, lk 102]

$$EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial \mathrm{x}^4} = p_z\,(x,t) - \rho A\,\frac{\partial^2 w}{\partial \mathrm{t}^2} \tag{3.93}$$

Kui talale mõjuv koormus muutub ajas viisil $p_z\,(x,t) = q\,(x) \sin\theta t$ [SALŠ84, lk 196], siis saame

$$EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial \mathrm{x}^4} + \rho A\,\frac{\partial^2 w}{\partial \mathrm{t}^2} = q\,(x) \sin\theta t \tag{3.94}$$

Otsime sundvõnkumise kuju kahe funktsiooni korrutisena [SALŠ84, lk 196]:

$$w\,(x,t) = f\,(x) \sin\theta t \tag{3.95}$$

Esimene tegur sõltub siin ainult koordinaadist x ja teine ainult ajast t.

Asetame avaldise (3.95) diferentsiaalvõrrandisse (3.94). Mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi vabaliikmele lisame lauskoormusega *ekvivalentse üldistatud koormuse* [YSM00], [Abu03, lk 193].

$$EI_y f^{IV}\,(x) - \rho A\,\theta^2\,f\,(x) = q\,(x) \tag{3.96}$$

ehk

$$f^{IV}\,(x) - \kappa^4\,f\,(x) = \frac{q\,(x)}{EI_y} + \frac{F_z\,(x)\,\delta\,(x - x_\circ)}{E\,I_y} + \frac{\mathcal{M}_y\,(x)\,\delta^{(1)}\,(x - x_\circ)}{E\,I_y} \tag{3.97}$$

Siin

$$\kappa^4 = \frac{\omega^2 \rho A}{EI_y} \tag{3.98}$$

$F_z\,(x)\,\delta\,(x - x_\circ)$ on lauskoormusega $q_z\,(x)$ ekvivalentne koondjõud,
$\mathcal{M}_y\,(x)\,\delta^{(1)}\,(x - x_\circ)$ – lauskoormusega $q_z\,(x)$ ekvivalentne koondmoment,

$\delta(x - x_\circ)$ – Dirac'i deltafunktsioon,
$\delta^{(1)}(x - x_\circ)$ – Dirac'i deltafunktsiooni tuletis.

Diferentsiaalvõrrandi (3.97) lahend $f(x)$ koosneb homogeensest lahendist $f_h(x)$ ja erilahendist $f_e(x)$, s.t $f(x) = f_h(x) + f_e(x)$.

Homogeense diferentsiaalvõrrandi lahend teise märgikokkuleppe puhul $f_h(x) = w_h(x)$ on toodud avaldisega (3.27).

Mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi (3.97) erilahendit $f_e(x)$ otsime Cauchy valemi [Ste59] abil:

$$f_e(x) = \int_{x_\circ}^{x} G_n(x,\xi)\, g_n(\xi)\, d\xi \tag{3.99}$$

kus $G(x,\xi)$ on vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi normeeritud lahendite fundamentaalsüsteem. Täpsemalt,

$$f_e(x) = \int_{x_\circ}^{x} G_4(x,\xi)\, g_4(\xi)\, d\xi + \int_{x_\circ}^{x} G_3(x,\xi)\, g_3(\xi)\, d\xi + \int_{x_\circ}^{x} G_2(x,\xi)\, g_2(t)\, d\xi \tag{3.100}$$

Siin kasutame normeeritud lahendite fundamentaalsüsteemi (3.20) – (3.22):

$$G_4(x,\xi) = f_4(x-\xi) = \frac{1}{2\kappa^3}\left(\mathrm{sh}\kappa(x-\xi) - \sin\kappa(x-\xi)\right) = \frac{1}{\kappa^3} K_4(\kappa(x-\xi)) \tag{3.101}$$

$$G_3(x,\xi) = f_3(x-\xi) = \frac{1}{2\kappa^2}\left(\mathrm{ch}\kappa(x-\xi) - \cos\kappa(x-\xi)\right) = \frac{1}{\kappa^2} K_3(\kappa(x-\xi)) \tag{3.102}$$

$$G_2(x,\xi) = f_2(x-\xi) = \frac{1}{2\kappa}\left(\mathrm{sh}\kappa(x-\xi) + \sin\kappa(x-\xi)\right) = \frac{1}{\kappa} K_2(\kappa(x-\xi)) \tag{3.103}$$

ja koormusfunktsioone $g_n(\xi)$:

$$g_4(\xi) = \frac{q_z(\xi)}{EI_y}, \quad g_3(\xi) = \frac{F_z(\xi)}{EI_y}, \quad f_2(\xi) = \frac{\mathcal{M}_y(\xi)}{EI_y} \tag{3.104}$$

Vaatleme juhtu, kui $q_z/EI_y = const$. Erilahendi (3.100) saamiseks tuleb integreerida avaldis

$$f_{4e}(x) = \int_{x_\circ}^{x} G_4(x,t)\, g_4(t)\, d\xi = \frac{q_z}{EI_y}\frac{1}{2\kappa^3} \int_{x_\circ}^{x} \left(\mathrm{sh}\,\kappa\,(x-\xi) - \sin\kappa(x-\xi)\right) d\xi \tag{3.105}$$

Esmalt integreerime integraalide (3.105) esimese liikme:

$$\int_{a}^{x} \mathrm{sh}\,\kappa\,(x-\xi)\, d\xi = -\frac{1}{\kappa}\,\mathrm{ch}\,\kappa\,(x-\xi)\Big|_a^x = \frac{1}{\kappa}\left(\mathrm{ch}\,\kappa\,\langle x-a\rangle_+ - 1\right) \tag{3.106}$$

kus $\langle x-a\rangle_+$ on katkevusfunktsioon.

$$\langle x-a\rangle_+^n = (x-a)^n\, H(x-a) \tag{3.107}$$

Siin on $H\,(x-a)$ Heaviside'i funktsioon.

$$H\,(x-a)=\begin{cases} 0, & kui \quad (x-a)<0 \\ 1, & kui \quad (x-a)\geq 0 \end{cases} \tag{3.108}$$

Integraali (3.105) teise liikme integreerimisel saame

$$\int_a^x \sin\kappa\,(x-\xi)\,d\xi = \frac{1}{\kappa}\cos\kappa\,(x-\xi)\Big|_a^x = \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa}\cos\langle x-a\rangle_+ \tag{3.109}$$

Asetame leitud integraalid erilahendisse (3.105):

$$\begin{aligned} f_{4\,e}\,(x) &= \frac{q_z}{E\,I_y}\frac{1}{2\kappa^4}\left[\operatorname{ch}\kappa\,\langle x-a\rangle_+ + \cos\kappa\,\langle x-a\rangle_+ - 2\right] \\ &= \frac{q_z}{E\,I_y}\frac{1}{\kappa^4}\left[K_1\left(\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right)-1\right] = \frac{q_z}{E\,I_y}\frac{\ell^4}{\lambda^4}\left[K_1\left(\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right)-1\right] \end{aligned} \tag{3.110}$$

Saadud erilahendi $f_{4\,e}\,(x)$ võrdlemiseks raamatus [PL63, lk 143] olevaga võtame arvesse, et $\lambda=\kappa\ell$. Leitud erilahend ühtib raamatus [SALŠ84, lk 197] esitatuga.

Mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi (3.97) teisele vabaliikmele ($F_z/E\,I_y = const$) vastava erilahendi saab avaldist (3.100) integreerides:

$$f_{3\,e}\,(x) = \int_{x_0}^x G_3\,(x,\xi)\,g_3\,(t)\,d\xi = \frac{F_z}{E\,I_y}\frac{1}{2\kappa^2}\int_{x_0}^x\left(\operatorname{ch}\kappa\,(x-\xi)-\cos\kappa\,(x-\xi)\right)d\xi \tag{3.111}$$

Integreerime integraalide (3.111) esimese liikme:

$$\int_a^x \operatorname{ch}\kappa\,\,(x-\xi)\,d\xi = -\frac{1}{\kappa}\operatorname{sh}\kappa\,\,(x-\xi)\Big|_a^x = \frac{1}{\kappa}\operatorname{sh}\kappa\,\langle x-a\rangle_+ \tag{3.112}$$

Teise liikme integreerimisel saame

$$\int_a^x \cos\kappa\,(x-\xi)\,d\xi = -\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\,(x-\xi)\Big|_a^x = \frac{1}{\kappa}\sin\kappa\,\langle x-a\rangle_+ \tag{3.113}$$

Asetame leitud integraalid erilahendisse (3.111):

$$\begin{aligned} f_{3\,e}\,(x) &= \frac{F_z}{E\,I_y}\frac{1}{2\kappa^3}\left[\operatorname{sh}\kappa\,\langle x-a\rangle_+ - \sin\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right] \\ &= \frac{F_z}{E\,I_y}\frac{1}{\kappa^3}\left[K_4\left(\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right)\right] = \frac{F_z}{E\,I_y}\frac{\ell^3}{\lambda^3}\left[K_4\left(\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right)\right] \end{aligned} \tag{3.114}$$

Mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi (3.97) kolmandale vabaliikmele ($\mathcal{M}_y/E\,I_y = const$) vastava erilahendi saab avaldist (3.100) integreerides:

$$f_{2\,e}\,(x) = \int_{x_0}^x G_2\,(x,\xi)\,g_2\,(t)\,d\xi = \frac{\mathcal{M}_y}{E\,I_y}\frac{1}{2\kappa}\int_{x_0}^x\left(\operatorname{sh}\kappa\,(x-\xi)+\sin\kappa\,(x-\xi)\right)d\xi \tag{3.115}$$

Esmalt integreerime integraalide (3.115) esimese liikme:

$$\int_a^x \operatorname{sh}\kappa\,(x-\xi)\,d\xi = -\frac{1}{\kappa}\operatorname{ch}\kappa\,(x-\xi)\Big|_a^x = \frac{1}{\kappa}\left(\operatorname{ch}\kappa\,\langle x-a\rangle_+ - 1\right) \tag{3.116}$$

Teise liikme integreerimisel saame

$$\int_a^x \sin\kappa\,(x-\xi)\,d\xi = \frac{1}{\kappa}\cos\kappa\,(x-\xi)\Big|_a^x = \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa}\cos\kappa\langle x-a\rangle_+ \tag{3.117}$$

Asetame leitud integraalid erilahendisse (3.115):

$$\begin{aligned} f_{2\,e}(x) &= \frac{\mathcal{M}_y}{E\,I_y}\frac{1}{2\kappa^2}\left[\operatorname{ch}\kappa\,\langle x-a\rangle_+ - \cos\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right] \\ &= \frac{\mathcal{M}_y}{E\,I_y}\frac{1}{\kappa^2}\left[K_3\left(\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right)\right] = \frac{\mathcal{M}_y}{E\,I_y}\frac{\ell^2}{\lambda^2}\left[K_3\left(\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right)\right] \end{aligned} \tag{3.118}$$

Erilahenditest (3.110), (3.114) ja (3.118) koostame koormusvektorid $-\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ (3.34).

3.3.1 Koormusvektor paindel

Koormusvektor $\overset{\circ}{\mathbf{Z}} = \overset{\circ}{\mathbf{Z}}_\mathbf{q} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}}_\mathbf{F} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}}_\mathbf{M}$.

Koormusvektor lauskoormusest q_z leitakse programmiga ysndvnkZq.m.

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{w}_e \\ \overset{\circ}{\varphi}_e \\ \overset{\circ}{Q}_e \\ \overset{\circ}{M}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{4e} \\ -f'_{4e} \\ -E\,I_y f'''_{4e} \\ -E\,I_y f''_{4e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_z}{E\,I_y}\frac{1}{\kappa^4}\left[K_1\left(\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right)-1\right] \\ -\frac{q_z}{E\,I_y}\frac{1}{\kappa^3}\left[K_4\left(\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right)\right] \\ -\frac{q_z}{\kappa}\left[K_2\left(\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right)\right] \\ -\frac{q_z}{\kappa^2}\left[K_3\left(\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right)\right] \end{bmatrix} \tag{3.119}$$

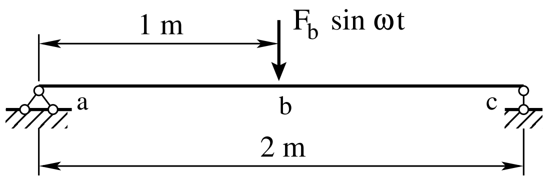
Koormusvektor koondjõust F_z arvutatakse programmiga ysndvnkZF.m.

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{w}_e \\ \overset{\circ}{\varphi}_e \\ \overset{\circ}{Q}_e \\ \overset{\circ}{M}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{3e} \\ -f'_{3e} \\ -E\,I_y f'''_{3e} \\ -E\,I_y f''_{3e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F_z}{E\,I_y}\frac{1}{\kappa^3}\left[K_4\left(\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right)\right] \\ -\frac{F_z}{E\,I_y}\frac{1}{\kappa^2}\left[K_3\left(\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right)\right] \\ -F_z\left[K_1\left(\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right)\right] \\ -\frac{F_z}{\kappa}\left[K_2\left(\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right)\right] \end{bmatrix} \tag{3.120}$$

Koormusvektor koondmomendist $\mathcal{M}_y$ arvutatakse programmiga ysndvnkZM.m.

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{w}_e \\ \overset{\circ}{\varphi}_e \\ \overset{\circ}{Q}_e \\ \overset{\circ}{M}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{2e} \\ -f'_{2e} \\ -E\,I_y f'''_{2e} \\ -E\,I_y f''_{2e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathcal{M}_y}{E\,I_y}\frac{1}{\kappa^2}\left[K_3\left(\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right)\right] \\ -\frac{\mathcal{M}_y}{E\,I_y}\frac{1}{\kappa}\left[K_2\left(\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right)\right] \\ -\mathcal{M}_y\kappa\left[K_4\left(\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right)\right] \\ -\mathcal{M}_y\left[K_1\left(\kappa\,\langle x-a\rangle_+\right)\right] \end{bmatrix} \tag{3.121}$$

Näide 3.4 (paigalseisva ja liikuva liigendtoega tala sundvõnkumine). Koostada vibreeriva jõuga koormatud tala (jn 3.21) siirde ja paindemomentide epüürid.



Joonis 3.21. Paigalseisva ja liikuva liigendtoega tala

Andmed. Tala pikkus $\ell = 2\,\mathrm{m}$, jõu rakenduspunkti kaugus vasakust toest on $1\,\mathrm{m}$, elastsusmoodul $E = 210\,\mathrm{GPa}$, inertsimoment $I = 8.0\times10^{-5}\,\mathrm{m}^4 = 8000\,\mathrm{cm}^4$, vibreeriva jõu F_b sagedus $\omega_b = 400\,\mathrm{s}^{-1}$, tala lausmass $m = 105\,\mathrm{kg/m}$ (koormus omakaalust $q = 9.81\cdot105 = 1030\,\mathrm{N/m}$).

Lahendus. Algparameetrite leidmiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA}\cdot\mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{3.122}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor:

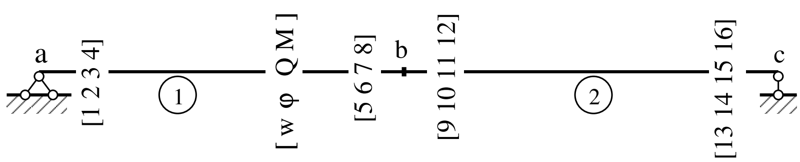
$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_\mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{Z}_\mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{Z}_\mathbf{b}^{(2)} \\ \mathbf{Z}_\mathbf{c}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{3.123}$$

Vektori komponentideks on siirded, paindenurgad, põikjõud ja paindemomendid tala elementide ab ja bc alguses ning lõpus:

$$\mathbf{Z}_\mathbf{a}^{(1)} = \begin{bmatrix} w_A^{(ab)} \\ \varphi_A^{(ab)} \\ Q_A^{(ab)} \\ M_A^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(1) \\ Z(2) \\ Z(3) \\ Z(4) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z}_\mathbf{b}^{(1)} = \begin{bmatrix} w_L^{(ab)} \\ \varphi_L^{(ab)} \\ Q_L^{(ab)} \\ M_L^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(5) \\ Z(6) \\ Z(7) \\ Z(8) \end{bmatrix} \tag{3.124}$$

$$\mathbf{Z}_\mathbf{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} w_A^{(bc)} \\ \varphi_A^{(bc)} \\ Q_A^{(bc)} \\ M_A^{(bc)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(9) \\ Z(10) \\ Z(11) \\ Z(12) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z}_\mathbf{c}^{(2)} = \begin{bmatrix} w_L^{(bc)} \\ \varphi_L^{(bc)} \\ Q_L^{(bc)} \\ M_L^{(bc)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(13) \\ Z(14) \\ Z(15) \\ Z(16) \end{bmatrix} \tag{3.125}$$

Muutujate $Z(i)$ (i = 1, 2, ..., 16) järjenumbrid on joonisel 3.22.



Joonis 3.22. Paigalseisva ja liikuva liigendtoega tala muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (3.122) kaheksa esimest võrrandit on põhivõrrandid (3.34). Järgnevad sõlme b pidevus- ja tasakaaluvõrrandid

$$\begin{aligned} Z(5)-Z(9) &= w_L^{(ab)} - w_A^{(bc)} &= 0 \\ Z(6)-Z(10) &= \varphi_L^{(ab)} - \varphi_A^{(bc)} &= 0 \\ Z(7)+Z(11) &= Q_L^{(ab)} + Q_A^{(bc)} &= 0 \\ Z(8)+Z(12) &= M_L^{(ab)} + M_A^{(bc)} &= 0 \end{aligned} \tag{3.126}$$

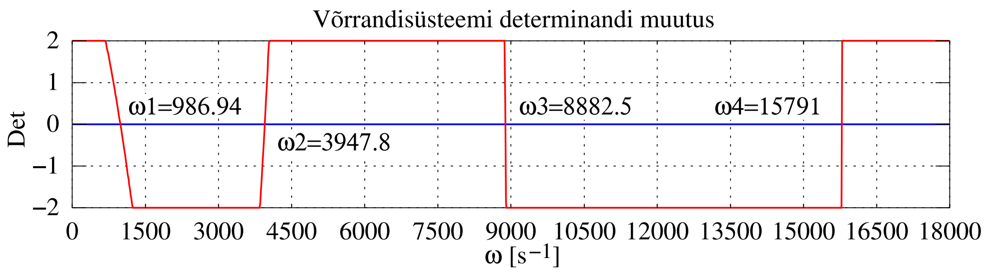
Ülejäänud neli võrrandit saame toetingimustest

$$\begin{aligned} Z(1) &= w_A^{(ab)} &= 0 \\ Z(4) &= M_A^{(ab)} &= 0 \\ Z(13) &= w_L^{(bc)} &= 0 \\ Z(16) &= M_L^{(bc)} &= 0 \end{aligned} \tag{3.127}$$

Kahetoelise tala (jn 3.21) siirete, paindenurkade, põikjõudude ja paindemomentide leidmiseks on koostatud GNU Octave'i programmid NaideTala2Toel1w0.m ja NaideTalaKahelToel1.m. Programmiga NaideTalaKahelToel1.m arvutatakse tala ühe elemendina ($\ell = 2\,\mathrm{m}$). Talale mõjuvat koormust vaadeldakse elementkoormusena (vt koormusvektor $\mathring{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}$ (3.120)).

Programmis NaideTala2Toel1w0.m kirjeldatakse kahe elemendiga tala ($\ell_1 = 1\,\mathrm{m}$, $\ell_2 = 1\,\mathrm{m}$), vt jn 3.22. Talale mõjuvat koormust vaadeldakse sõlmkoormusena. Nimetatud programmidega leitud sisejõud ei erine.

GNU Octave'i programmiga NaideTalaKahelToel1.m leiame hõreda võrrandisüsteemi (3.122) determinandi nullid. Kahetoelise tala (jn 3.21) esimesed neli omavõnkesagedust: $\omega_1 = 9.8694\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 3.9478\times10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 8.8825\times10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 1.5791\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$. Võrrandisüsteemi (3.122) determinandi sõltuvus nurksagedusest ω selgub jooniselt 3.23.



Joonis 3.23. Paigalseisva ja liikuva liigendtoega tala omavõnkesagedused

Tabelis 3.4 on toodud EST-meetodiga leitud paigalseisva ja liikuva liigendtoega tala sagedusvõrrandi juured. Need ühtivad täpsete sagedusvõrrandi juurtega (vt lk 75) ja spektraalelementide meetodi [Mal13, lk 43] abil leitutega.

Tabel 3.4. Paigalseisva ja liikuva liigendtoega tala leitud sagedusvõrrandi juured

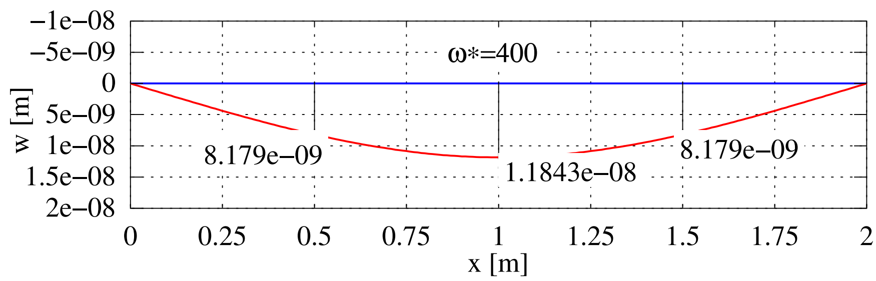
Omavõnke-sagedus	EST-meetod Bernoulli teooria		Täpne sage-dusvõrrandi juur
	ω $\left[s^{-1}\right]$	λ	λ
1.	986.943521	3.141593	3.1415927
2.	3947.774085	6.283185	6.2831853
3.	8882.491691	9.424778	9.4247780
4.	15791.096339	12.566371	12.5663706
5.	24673.588030	15.707963	15.7079633
6.	35529.966755	18.849556	18.8495559

Tabelis on λ sagedusvõrrandi mõõduta juur.

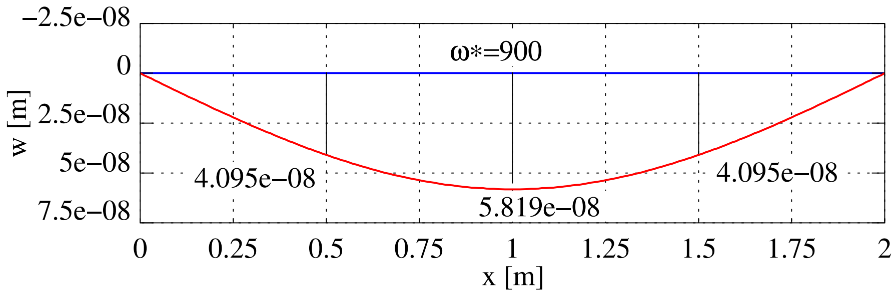
$$\lambda_i = \sqrt{\omega_i}\left(\frac{\rho A}{EI}\right)^{1/4}\ell \tag{3.128}$$

Siirete ja sisejõudude leidmiseks valime vibreeriva jõu amplituudiks $F_b = 1\,\mathrm{N}$. Siirded ja sisejõud leiame vibreeriva jõu sagedustel $\omega_b = 400\,\mathrm{s}^{-1}$ ja $\omega_b = 900\,\mathrm{s}^{-1}$, mis on väiksemad kui esimene resonantssagedus $\omega_1 = 986.94\,\mathrm{s}^{-1}$ (jn 3.23). Siirete ja sisejõudude amplituudid sagedusel $\omega_b = 1024\,\mathrm{s}^{-1}$ (mis on suurem kui esimene resonantssagedus) on märgilt vastupidised mõjuva jõu amplituudi märgile [Kis64, lk 119].

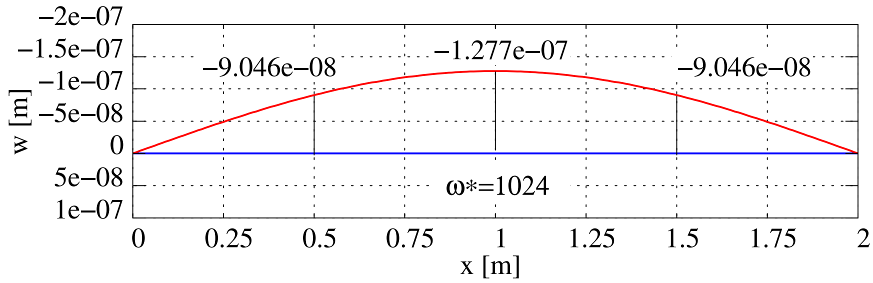
Joonistel 3.24a ja b on toodud kahetoelise tala siirded vibreeriva jõu sagedustel $\omega_b = 400\,\mathrm{s}^{-1}$ ja $\omega_b = 900\,\mathrm{s}^{-1}$. Joonisel 3.24c on kahetoelise tala siirded vibreeriva jõu sagedusel $\omega_b = 1024\,\mathrm{s}^{-1}$. Siin on siirete märgid vastupidised mõjuva jõu amplituudi märgile.



(a) Kahetoelise tala siire sagedusel $\omega = 400\,\mathrm{s}^{-1}$



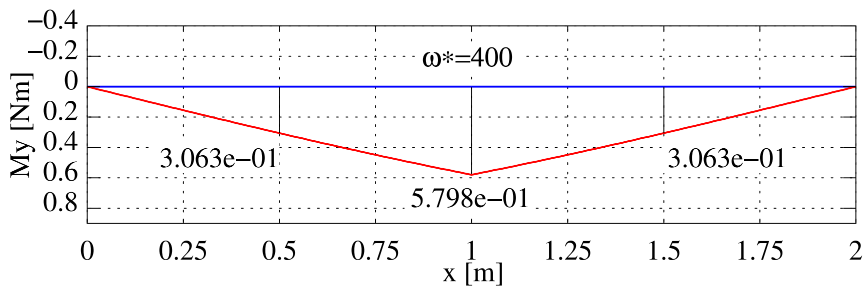
(b) Kahetoelise tala siire sagedusel $\omega = 900\,\mathrm{s}^{-1}$



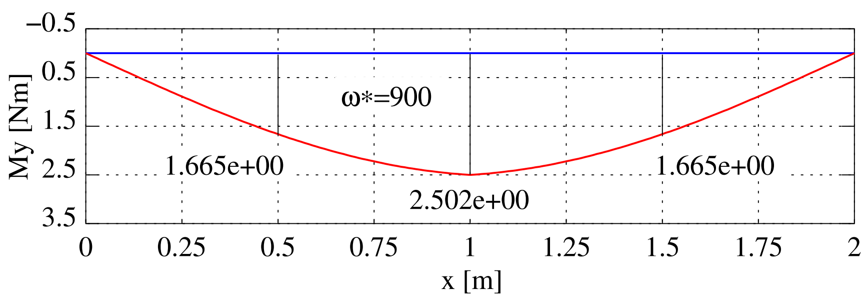
(c) Kahetoelise tala siire sagedusel $\omega = 1024\,\mathrm{s}^{-1}$

Joonis 3.24. Paigalseisva ja liikuva liigendtoega tala siirded eri sagedustel

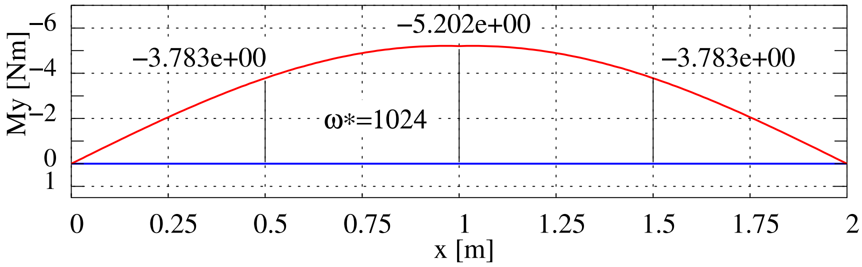
Joonisel 3.25 on kahetoelise tala momendid vibreeriva jõu sagedustel $\omega_b = 400\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_b = 900\,\mathrm{s}^{-1}$ ja $\omega_b = 1024\,\mathrm{s}^{-1}$.



(a) Kahetoelise tala moment sagedusel $\omega = 400\,\mathrm{s}^{-1}$



(b) Kahetoelise tala moment sagedusel $\omega = 900\,\mathrm{s}^{-1}$



(c) Kahetoelise tala moment sagedusel $\omega = 1024\,\mathrm{s}^{-1}$

Joonis 3.25. Paigalseisva ja liikuva liigendtoega tala momendid eri sagedustel

Arvutustulemused vibreeriva jõu $F_b = 1.0\,\mathrm{N}$ sagedusel $\omega_b = 400\,\mathrm{s}^{-1}$ on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 3.1.

Väljavõte arvutuspäevikust 3.1 (NaideTala2Toel1w0.m)

```
 1. element
l1 =   1
Nmitmeks =   4

      x=      0.00         0.25          0.50         0.75         1.00
      w -    0.000e+00    4.378e-09    8.179e-09    1.084e-08    1.184e-08
     fi -   -1.790e-08   -1.674e-08   -1.330e-08   -7.667e-09    0.000e+00
      Q -    6.247e-01    6.154e-01    5.888e-01    5.483e-01    5.000e-01
      M -    0.000e+00    1.554e-01    3.063e-01    4.486e-01    5.798e-01

 2. element
l2 =   1
Nmitmeks =   4

      x=      0.00         0.25          0.50         0.75         1.00
      w -    1.184e-08    1.084e-08    8.179e-09    4.378e-09    0.000e+00
     fi -    1.494e-24    7.667e-09    1.330e-08    1.674e-08    1.790e-08
      Q -   -5.000e-01   -5.483e-01   -5.888e-01   -6.154e-01   -6.247e-01
      M -    5.798e-01    4.486e-01    3.063e-01    1.554e-01    1.110e-16
```

Arvutustulemused vibreeriva jõu sagedusel $\omega_b = 900\,\mathrm{s}^{-1}$ toome arvutuspäeviku väljavõttes 3.2.

Väljavõte arvutuspäevikust 3.2 (NaideTala2Toel1w0.m)

```
 1. element
l1 =   1
Nmitmeks =   4

      x=      0.00         0.25          0.50         0.75         1.00
      w -    0.000e+00    2.211e-08    4.095e-08    5.367e-08    5.819e-08
     fi -   -9.070e-08   -8.400e-08   -6.478e-08   -3.553e-08   -1.323e-23
      Q -    3.641e+00    3.403e+00    2.724e+00    1.705e+00    5.000e-01
      M -    0.000e+00    8.903e-01    1.665e+00    2.224e+00    2.502e+00
```

```
 2. element
l2 =  1
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         0.25          0.50         0.75          1.00
     w -     5.819e-08    5.367e-08    4.095e-08    2.211e-08    2.647e-23
    fi -    -8.976e-24    3.553e-08    6.478e-08    8.400e-08    9.070e-08
     Q -    -5.000e-01   -1.705e+00   -2.724e+00   -3.403e+00   -3.641e+00
     M -     2.502e+00    2.224e+00    1.665e+00    8.903e-01    0.000e+00
```

Valides arvutusprogrammis vibreeriva jõu sageduseks $\omega_b = 1024\,\mathrm{s}^{-1}$, saame arvutuspäeviku väljavõttes 3.3 toodud sisejõud.

Väljavõte arvutuspäevikust 3.3 (**NaideTala2Toel1w0.m**)

```
 1. element
l1 =  1
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         0.25          0.50         0.75          1.00
     w -     0.000e+00   -4.901e-08   -9.046e-08   -1.180e-07   -1.277e-07
    fi -     2.012e-07    1.857e-07    1.416e-07    7.618e-08    5.294e-23
     Q -    -8.461e+00   -7.777e+00   -5.832e+00   -2.925e+00    5.000e-01
     M -     0.000e+00   -2.058e+00   -3.783e+00   -4.894e+00   -5.202e+00

 2. element
l2 =  1
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         0.25          0.50         0.75          1.00
     w -    -1.277e-07   -1.180e-07   -9.046e-08   -4.901e-08   -2.647e-23
    fi -    -2.271e-23   -7.618e-08   -1.416e-07   -1.857e-07   -2.012e-07
     Q -    -5.000e-01    2.925e+00    5.832e+00    7.777e+00    8.461e+00
     M -    -5.202e+00   -4.894e+00   -3.783e+00   -2.058e+00    8.882e-16
```

EST-meetodiga leitud tala keskel oleva siirde ja momendi väärtuste kontrolliks kasutame õpikus [Kis64, lk 116] leiduvaid valemeid (6.54) ja (6.55):

$$w\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{F_b}{2\kappa^3 EI}\,\frac{K_2\left(\kappa,\frac{\ell}{2}\right)K_3\left(\kappa,\frac{\ell}{2}\right) - K_1\left(\kappa,\frac{\ell}{2}\right)K_4\left(\kappa,\frac{\ell}{2}\right)}{K_1^2\left(\kappa,\frac{\ell}{2}\right) - K_3^2\left(\kappa,\frac{\ell}{2}\right)} \tag{3.129}$$

$$M_y\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{F_b}{2\kappa}\,\frac{K_1\left(\kappa,\frac{\ell}{2}\right)K_2\left(\kappa,\frac{\ell}{2}\right) - K_3\left(\kappa,\frac{\ell}{2}\right)K_4\left(\kappa,\frac{\ell}{2}\right)}{K_1^2\left(\kappa,\frac{\ell}{2}\right) - K_3^2\left(\kappa,\frac{\ell}{2}\right)} \tag{3.130}$$

Valemite (3.129) ja (3.130) järgi arvutamiseks on koostatud GNU Octave'i programm NaideLT2keskel.m. Leitud siirde ja momendi väärtused tala keskel eri sagedustel esitame arvutuspäeviku väljavõttes 3.4.

Väljavõte arvutuspäevikust 3.4 (**NaideLT2keskel.m**)

```
 Sagedus wf =  400
w_keskel400 =  1.1843e-08
M_keskel400 =  0.57975
```

```
 Sagedus wf =  900
w_keskel900 =  5.8194e-08
M_keskel900 =  2.5015

 Sagedus wf = 1024
w_keskel1024 = -1.2766e-07
M_keskel1024 = -5.2023
```

Siit näeme, et EST-meetodiga leitud siirde ja momendi väärtused tala keskel (vt arvutuspäeviku väljavõtted 3.1, 3.2, 3.3) ühtivad valemite (3.129) ja (3.130) põhjal arvutatutega.

Dünaamikateguri k_d leidmiseks arvutame siirde w^F_{st} ja paindemomendi $M^F_{y\,st}$ sundiva jõu F_b staatilisel rakendamisel. Selleks kasutame GNU Octave'i programmi NaideTala2Toel1w0Staatika.m (vt arvutuspäeviku väljavõte 3.5).

Väljavõte arvutuspäevikust 3.5 (NaideTala2Toel1w0Staatika.m)

```
 1. element
l1 =  1
Nmitmeks =  4

      x=       0.00          0.25          0.50          0.75          1.00
     w -     0.000e+00     3.643e-09     6.820e-09     9.068e-09     9.921e-09
    fi -    -1.488e-08    -1.395e-08    -1.116e-08    -6.510e-09     0.000e+00
     Q -     5.000e-01     5.000e-01     5.000e-01     5.000e-01     5.000e-01
     M -     0.000e+00     1.250e-01     2.500e-01     3.750e-01     5.000e-01

 2. element
l2 =  1
Nmitmeks =  4

      x=       0.00          0.25          0.50          0.75          1.00
     w -     9.921e-09     9.068e-09     6.820e-09     3.643e-09     3.309e-24
    fi -    -1.514e-24     6.510e-09     1.116e-08     1.395e-08     1.488e-08
     Q -    -5.000e-01    -5.000e-01    -5.000e-01    -5.000e-01    -5.000e-01
     M -     5.000e-01     3.750e-01     2.500e-01     1.250e-01     0.000e+00
```

Kontrolliks arvutame staatilise siirde w^F_{st} ja paindemomendi $M^F_{y\,st}$ tala keskel valemitega

$$w^F_{st}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{F_b\ell^3}{48EI} = \frac{1\cdot 2^3}{48\cdot 2.1\times 10^{11}\cdot 8.0\times 10^{-5}} = 9.9206\times 10^{9}\,\mathrm{m} \tag{3.131}$$

$$M^F_{y\,st}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{F_b\ell}{4} = \frac{1\cdot 2}{4} = 0.5\,\mathrm{Nm} \tag{3.132}$$

EST-meetodiga leitud tala keskel olevad siirde ja momendi väärtused staatilisest koormusest ühtivad valemite (3.131) ja (3.132) abil leitutega.

Dünaamikategurid siirdel, $k_{d\,s}$, ja paindel, $k_{d\,p}$, sagedusel $\omega_b = 400\,\mathrm{s}^{-1}$ on erinevad:

$$k_{d\,s} = \frac{w_d}{w^F_{st}} = \frac{1.184254\times 10^{8}}{9.9206\times 10^{9}} = 1.1937 \tag{3.133}$$

$$k_{d\,p} = \frac{M_{y\,d}}{M^F_{y\,st}} = \frac{0.5797537}{0.5} = 1.1595 \tag{3.134}$$

Võrdsed on nad ainult ühe vabadusastmega süsteemi korral. Leitud dünaamikategurid ühtivad raamatus [Kis64, lk 118] toodutega.

Dünaamikategurid siirdel, $k_{d\,s}$, ja paindel, $k_{d\,p}$, sagedusel $\omega_b = 900\,\mathrm{s}^{-1}$

$$k_{d\,s} = \frac{w_d}{w^F_{st}} = \frac{5.819444\times 10^8}{9.9206\times 10^9} = 5.8660 \tag{3.135}$$

$$k_{d\,p} = \frac{M_{y\,d}}{M^F_{y\,st}} = \frac{2.50150}{0.5} = 5.0030 \tag{3.136}$$

Dünaamikategurid siirdel, $k_{d\,s}$, ja paindel, $k_{d\,p}$, sagedusel $\omega_b = 1024\,\mathrm{s}^{-1}$

$$k_{d\,s} = \frac{w_d}{w^F_{st}} = \frac{-1.276551\times 10^7}{9.9206\times 10^9} = -12.868 \tag{3.137}$$

$$k_{d\,p} = \frac{M_{y\,d}}{M^F_{y\,st}} = \frac{-5.202266}{0.5} = -10.405 \tag{3.138}$$

Vibreeriva jõu sagedusel $\omega_b = 1024\,\mathrm{s}^{-1}$ (mis on suurem kui esimene resonantssagedus) on dünaamikategurid negatiivsed, sest siirde faas ei lange kokku mõjuva jõu faasiga.

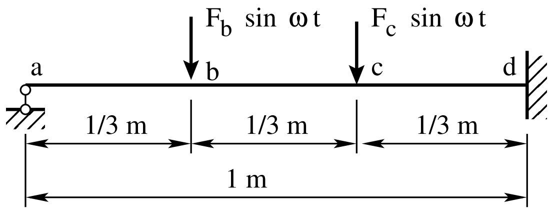
Tala omakaalust $q = 1.03\,\mathrm{kN/m}$ põhjustatud staatilise siirde w^q_{st} ja paindemomendi $M^q_{y\,st}$ arvutame GNU Octave'i programmiga NaideTala2Toel1w0Staatikaqz.m. Leitud siirde ja momendi väärtused toome arvutuspäeviku väljavõttes 3.6.

Väljavõte arvutuspäevikust 3.6 (NaideTala2Toel1w0Staatikaqz.m)

```
 1. element
l1 =  1
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         0.25         0.50         0.75         1.00
     w -    0.000e+00    4.959e-06    9.101e-06    1.182e-05    1.277e-05
    fi -   -2.044e-05   -1.868e-05   -1.405e-05   -7.504e-06   -3.388e-21
     Q -    1.030e+03    7.725e+02    5.150e+02    2.575e+02    0.000e+00
     M -    0.000e+00    2.253e+02    3.862e+02    4.828e+02    5.150e+02

 2. element
l2 =  1
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         0.25         0.50         0.75         1.00
     w -    1.277e-05    1.182e-05    9.101e-06    4.959e-06    1.694e-21
    fi -   -1.551e-21    7.504e-06    1.405e-05    1.868e-05    2.044e-05
     Q -    0.000e+00   -2.575e+02   -5.150e+02   -7.725e+02   -1.030e+03
     M -    5.150e+02    4.828e+02    3.862e+02    2.253e+02    0.000e+00
```

Omakaalust $q = 1.03\,\mathrm{kN/m}$ ja dünaamilisest koormusest $F_b \sin\omega t$ tingitud siirde w_{sum} ja paindemomendi $M_{y\,sum}$ saame vastavate suuruste (w^q_{st}, w_d ja $M^q_{y\,st}$, $M_{y\,d}$) liitmisel.

Näide 3.5 (liikuva liigendtoe ja jäiga toega tala sundvõnkumine). Arvutada joonisel 3.26 kujutatud tala omavõnkesagedused. Koostada vibreerivate jõududega koormatud tala siirde ja paindemomentide epüürid sagedustel $\omega = 0.8\,\omega_1\,\mathrm{s}^{-1}$ ja $\omega = 0.9\,\omega_2\,\mathrm{s}^{-1}$.



Joonis 3.26. Liikuva liigendtoe ja jäiga toega tala

Andmed. Tala pikkus $\ell = 1\,\mathrm{m}$, jõudude rakenduspunktide kaugused vasakust toest $a_b = \ell/3\,\mathrm{m}$, $a_c = 2/3\,\ell\,\mathrm{m}$, elastsusmoodul $E = 210\,\mathrm{GPa}$, inertsimoment $I = 171\,\mathrm{cm}^4 = 1.71{\times}10^{-6}\,\mathrm{m}^4$ (IPN100), vibreerivad jõud on võrdsed ($F_b = F_c = 1.0\,\mathrm{N}$), ristlõikepindala $A = 10.6\,\mathrm{cm}^2 = 1.06{\times}10^{-3}\,\mathrm{m}^2$, materjali tihedus $\rho = 7.85{\times}10^3\,\mathrm{kg/m}^3$, tala lausmass $m = \rho A = 8.321\,\mathrm{kg/m}$ (koormus omakaalust $q = 9.81\rho A = 81.629\,\mathrm{N/m}$).

Lahendus. Algparameetrite leidmiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{3.139}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a^{(1)}} \\ \mathbf{Z_b^{(1)}} \\ \mathbf{Z_b^{(2)}} \\ \mathbf{Z_c^{(2)}} \\ \mathbf{Z_c^{(3)}} \\ \mathbf{Z_d^{(3)}} \end{bmatrix} \tag{3.140}$$

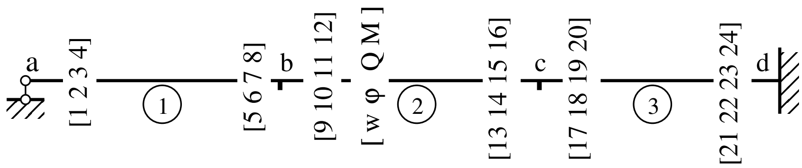
Vektori komponentideks on siirded, paindenurgad, põikjõud ja paindemomendid tala elementide ab, bc ja cd alguses ning lõpus:

$$\mathbf{Z_a^{(1)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(ab)} \\ \varphi_A^{(ab)} \\ Q_A^{(ab)} \\ M_A^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(1) \\ Z\,(2) \\ Z\,(3) \\ Z\,(4) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b^{(1)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(ab)} \\ \varphi_L^{(ab)} \\ Q_L^{(ab)} \\ M_L^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(5) \\ Z\,(6) \\ Z\,(7) \\ Z\,(8) \end{bmatrix} \tag{3.141}$$

$$\mathbf{Z_b^{(2)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(bc)} \\ \varphi_A^{(bc)} \\ Q_A^{(bc)} \\ M_A^{(bc)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(9) \\ Z\,(10) \\ Z\,(11) \\ Z\,(12) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_c^{(2)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(bc)} \\ \varphi_L^{(bc)} \\ Q_L^{(bc)} \\ M_L^{(bc)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(13) \\ Z\,(14) \\ Z\,(15) \\ Z\,(16) \end{bmatrix} \tag{3.142}$$

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{c}}^{(\mathbf{3})} = \begin{bmatrix} w_A^{(cd)} \\ \varphi_A^{(cd)} \\ Q_A^{(cd)} \\ M_A^{(cd)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(17) \\ Z\,(18) \\ Z\,(19) \\ Z\,(20) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z}_{\mathbf{d}}^{(\mathbf{3})} = \begin{bmatrix} w_L^{(cd)} \\ \varphi_L^{(cd)} \\ Q_L^{(cd)} \\ M_L^{(cd)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(21) \\ Z\,(22) \\ Z\,(23) \\ Z\,(24) \end{bmatrix} \tag{3.143}$$

Muutujate $Z\,(i)$ (i = 1, 2, ..., 24) järjenumbrid on toodud joonisel 3.27.



Joonis 3.27. Liikuva liigendtoe ja jäiga toega tala muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (3.139) kaksteist esimest võrrandit on põhivõrrandid (3.34). Järgnevad sõlmede *b* ja *c* pidevus- ja tasakaaluvõrrandid:

$$\begin{array}{lclclcl} Z\,(5) - Z\,(9) & = & w_L^{(ab)} & - & w_A^{(bc)} & = & 0 \\ Z\,(6) - Z\,(10) & = & \varphi_L^{(ab)} & - & \varphi_A^{(bc)} & = & 0 \\ Z\,(7) + Z\,(11) & = & Q_L^{(ab)} & + & Q_A^{(bc)} & = & 0 \\ Z\,(8) + Z\,(12) & = & M_L^{(ab)} & + & M_A^{(bc)} & = & 0 \\ Z\,(13) - Z\,(17) & = & w_L^{(bc)} & - & w_A^{(cd)} & = & 0 \\ Z\,(14) - Z\,(18) & = & \varphi_L^{(bc)} & - & \varphi_A^{(cd)} & = & 0 \\ Z\,(15) + Z\,(19) & = & Q_L^{(bc)} & + & Q_A^{(cd)} & = & 0 \\ Z\,(16) + Z\,(20) & = & M_L^{(bc)} & + & M_A^{(cd)} & = & 0 \end{array} \tag{3.144}$$

Ülejäänud neli võrrandit saame toetingimustest

$$\begin{array}{lclcl} Z\,(1) & = & w_A^{(ab)} & = & 0 \\ Z\,(4) & = & M_A^{(ab)} & = & 0 \\ Z\,(21) & = & w_L^{(cd)} & = & 0 \\ Z\,(24) & = & M_L^{(cg)} & = & 0 \end{array} \tag{3.145}$$

GNU Octave'i programmiga NaideTalaKahelToel3.m leiame hõreda võrrandisüsteemi determinandi nullid. Liikuva liigendtoe ja jäiga toega tala (jn 3.26) esimesed kuus omavõnkesagedust: $\omega_1 = 3.2030 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 1.0380 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 2.1656 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 3.7034 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_5 = 5.6512 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_6 = 8.0090 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$.

Leitud omavõnkesagedused ω_i teisendame sagedusvõrrandi juurteks λ_i:

$$\lambda_i = \kappa_i \ell = \sqrt{\omega_i} \ell \sqrt[4]{\frac{A\,\rho}{EI}} \tag{3.146}$$

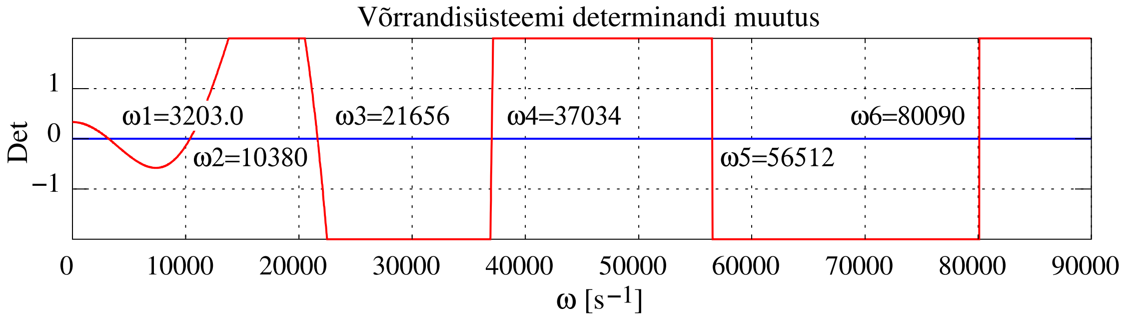
Teisenduse tulemusena saame, et $\lambda_1 = 3.9266$, $\lambda_2 = 7.06858$, $\lambda_3 = 10.21017$, $\lambda_4 = 13.35176$, $\lambda_5 = 16.49336$, $\lambda_6 = 19.63495$.

Tabelis 3.5 on toodud EST-meetodiga leitud liikuva liigendtoe ja jäiga toega tala sagedusvõrrandi juured. Need ühtivad täpsete sagedusvõrrandi juurtega (vt lk 76) ja spektraalelementide meetodi [Mal13, lk 44] abil leitutega.

Tabel 3.5. Liikuva liigendtoe ja jäiga toega tala sagedusvõrrandi juured

Omavõnke-sagedus	EST-meetod Bernoulli teooria		Täpne sage-dusvõrrandi juur
	$\omega\ \left[s^{-1}\right]$	λ	λ
1.	3202.976686	3.926602	3.9266023
2.	10379.696000	7.068583	7.0685827
3.	21656.407201	10.210176	10.2101761
4.	37033.737768	13.351769	13.3517687
5.	56511.689812	16.493361	16.4933614
6.	80090.263338	19.634954	19.6349541

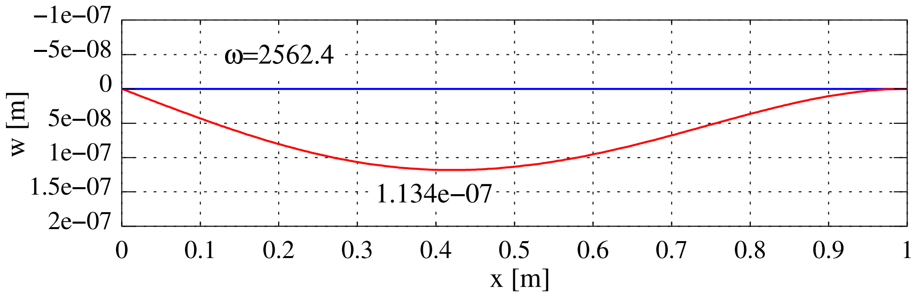
Võrrandisüsteemi (3.139) determinandi sõltuvust nurksagedusest ω näeb jooniselt 3.28.



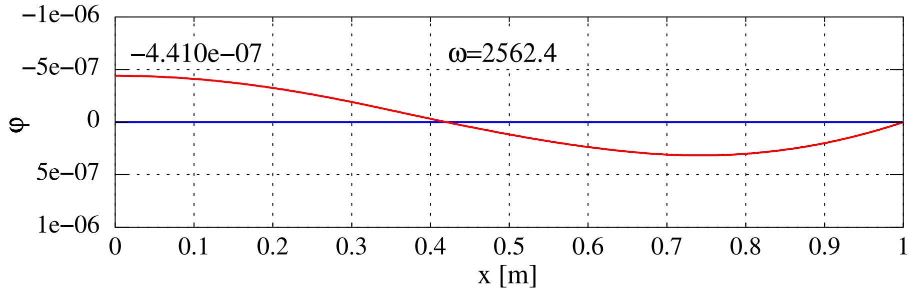
Joonis 3.28. Liikuva liigendtoe ja jäiga toega tala omavõnkesagedused

GNU Octave'i arvutusprogrammis NaideTala2Toel3w0.m valime vibreerivate jõudude sageduseks $\omega_b = \omega_c = 0.8 \cdot 3.2030 = 2562.4\,\mathrm{s}^{-1}$, mis on väiksem esimesest omavõnkesagedusest $\omega_1 = 3.2030 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$. Arvutustulemused toome arvutuspäeviku väljavõttes 3.7.

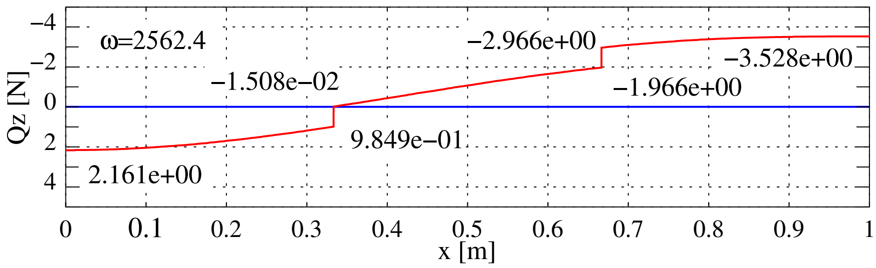
Tala epüürid nimetatud sagedusel on joonisel 3.29. Epüürid on kooskõlas raamatus [Kad15, lk 47] sisalduvatega.



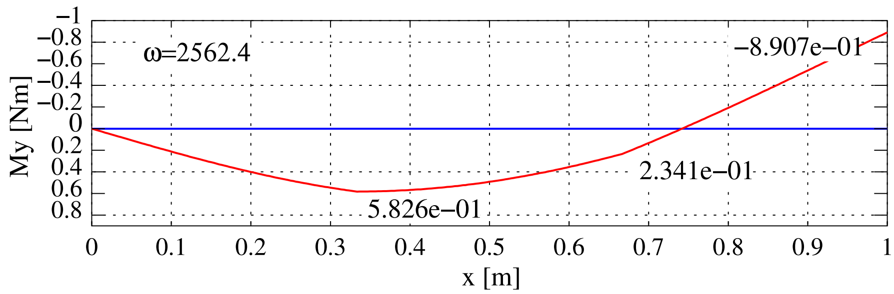
(a) Siire



(b) Paindenurk



(c) Põikjõud

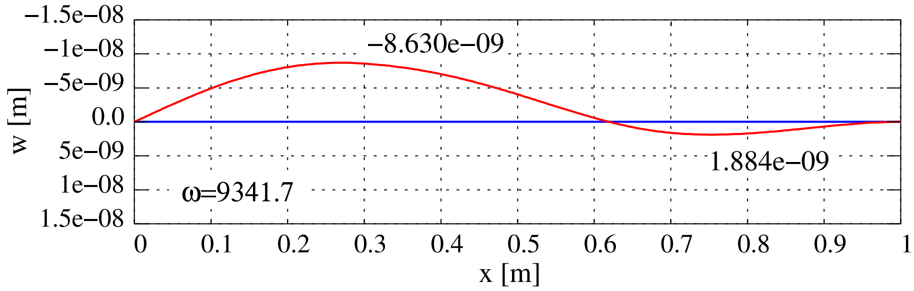


(d) Paindemoment

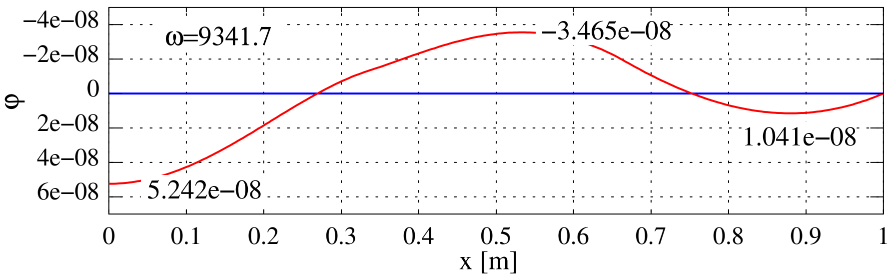
Joonis 3.29. Liikuva liigendtoe ja jäiga toega tala epüürid sagedusel $\omega = 2562.4\,\mathrm{s}^{-1}$

Edasi arvutame siirded ja sisejõud sagedusel $\omega = 0.9\omega_2$, mis on suurem kui esimene omavõnkesagedus ω_1 ja väiksem kui teine omavõnkesagedus ω_2 ($\omega_1 < \omega < \omega_2$). GNU Octave'i arvutusprogrammis NaideTala2Toel3w0.m valime vibreerivate jõudude sageduseks $\omega_b = \omega_c = 0.9 \cdot 10380 = 9341.7\,\mathrm{s}^{-1}$.

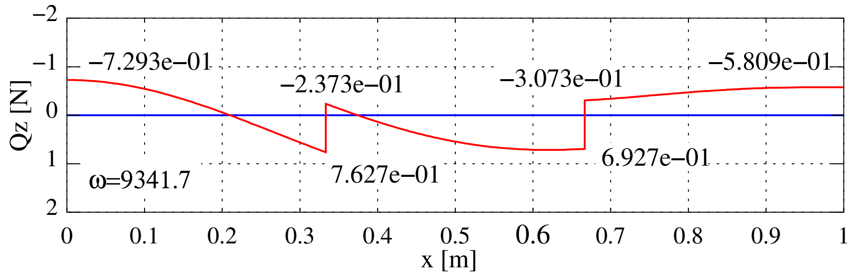
Liikuva liigendtoe ja jäiga toega tala epüürid sagedusel $\omega = 9341.7\,\mathrm{s}^{-1}$ on joonisel 3.30. Epüürid on kooskõlas raamatus [Kad15, lk 48] esitatutega.



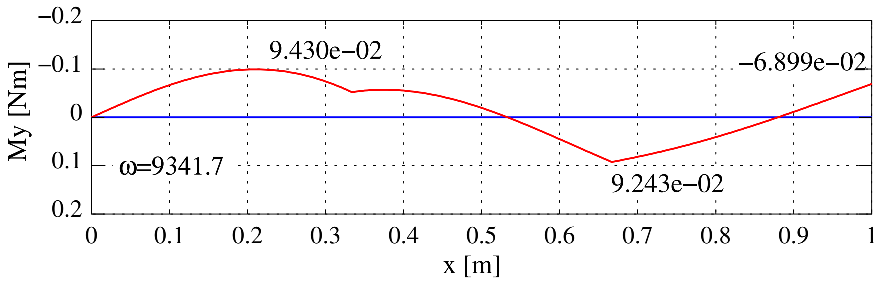
(a) Siire



(b) Paindenurk



(c) Põikjõud



(d) Paindemoment

Joonis 3.30. Liikuva liigendtoe ja jäiga toega tala epüürid sagedusel $\omega = 9341.7\,\mathrm{s}^{-1}$

Väljavõte arvutuspäevikust 3.7 (NaideTala2Toel3w0.m)

```
 1. element
l1 =   0.33333
Nmitmeks =   4

      x=        0.00          0.08           0.17          0.25          0.33
     w -     0.000e+00     3.617e-08     6.893e-08     9.512e-08     1.121e-07
    fi -    -4.410e-07    -4.203e-07    -3.596e-07    -2.636e-07    -1.395e-07
     Q -     2.161e+00     2.078e+00     1.837e+00     1.461e+00     9.849e-01
     M -     0.000e+00     1.778e-01     3.420e-01     4.802e-01     5.826e-01

 2. element
l2 =   0.33333
Nmitmeks =   4

      x=        0.00          0.08           0.17          0.25          0.33
     w -     1.121e-07     1.181e-07     1.134e-07     9.922e-08     7.773e-08
    fi -    -1.395e-07    -6.100e-09     1.168e-07     2.189e-07     2.910e-07
     Q -    -1.508e-02    -5.433e-01    -1.074e+00    -1.561e+00    -1.966e+00
     M -     5.826e-01     5.595e-01     4.920e-01     3.817e-01     2.341e-01

 3. element
l3 =   0.33333
Nmitmeks =   4

      x=        0.00          0.08           0.17          0.25          0.33
     w -     7.773e-08     5.204e-08     2.688e-08     7.665e-09     1.323e-23
    fi -     2.910e-07     3.156e-07     2.773e-07     1.726e-07    -7.941e-23
     Q -    -2.966e+00    -3.263e+00    -3.441e+00    -3.516e+00    -3.528e+00
     M -     2.341e-01    -2.631e-02    -3.064e-01    -5.969e-01    -8.907e-01
```

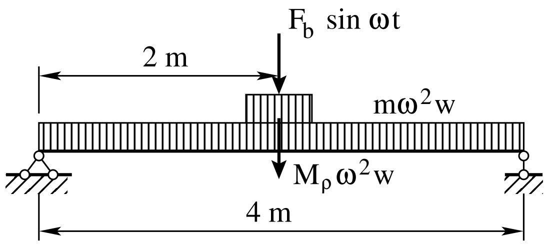
Arvutustulemused sagedusel $\omega = 0.9 \cdot \omega_2 = 9341.7\,\mathrm{s}^{-1}$ on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 3.8. Siit on näha, et siirete ja sisejõudude märgid on muutunud vastupidiseks. Kui vibreeriv jõud on suunatud alla, siis tala siirdub üles. Siirde ja vibreeriva jõu faasid on erinevad. Põhjuseks on esimesest omavõnkesagedusest suurem sagedus.

Väljavõte arvutuspäevikust 3.8 (NaideTala2Toel3w0.m)

```
1. element
l1 =   0.33333
Nmitmeks =   4

      x=        0.00          0.08           0.17          0.25          0.33
     w -     0.000e+00    -4.176e-09    -7.280e-09    -8.630e-09    -8.227e-09
    fi -     5.242e-08     4.558e-08     2.750e-08     4.889e-09    -1.294e-08
     Q -    -7.293e-01    -6.001e-01    -2.458e-01     2.451e-01     7.627e-01
     M -     0.000e+00    -5.715e-02    -9.371e-02    -9.430e-02    -5.213e-02

 2. element
l2 =   0.33333
Nmitmeks =   4

      x=        0.00          0.08           0.17          0.25          0.33
```

```
      w -    -8.227e-09   -6.613e-09   -4.042e-09   -1.125e-09    1.134e-09
     fi -    -1.294e-08   -2.579e-08   -3.465e-08   -3.328e-08   -1.866e-08
      Q -    -2.373e-01    2.172e-01    5.433e-01    6.991e-01    6.927e-01
      M -    -5.213e-02   -5.229e-02   -1.952e-02    3.348e-02    9.243e-02

 3. element
l3 =  0.33333
Nmitmeks =   4

      x=        0.00         0.08          0.17         0.25         0.33
      w -     1.134e-09    1.884e-09    1.429e-09    5.112e-10   -6.617e-24
     fi -    -1.866e-08   -4.622e-10    9.872e-09    1.041e-08    0.000e+00
      Q -    -3.073e-01   -4.063e-01   -5.109e-01   -5.698e-01   -5.809e-01
      M -     9.243e-02    6.301e-02    2.460e-02   -2.082e-02   -6.899e-02
```

Näide 3.6 (koondatud massi kandev tala). Koostada joonisel 3.31 kujutatud vibreeriva jõuga koormatud tala siirde ja paindemomentide epüürid.



Joonis 3.31. Koondatud massi kandev tala

Andmed. Tala pikkus $\ell = 4\,\mathrm{m}$, vibreeriv jõud $F_b = 2.7\,\mathrm{kN}$, jõu rakenduspunkti kaugus vasakust toest on $2\,\mathrm{m}$, vibreeriva jõu F_b sagedus $\omega_b = 30\,\mathrm{s}^{-1}$, koondatud mass tala keskel $M_\rho = 1500\,\mathrm{kg}$, tala lausmass $m = 400\,\mathrm{kg/m}$, ristlõike inertsimoment $I = 2.500\times10^{-5}\,\mathrm{m}^4 = 2500\,\mathrm{cm}^4$, elastsusmoodul $E = 210\,\mathrm{GPa}$, tugevusmoment $W = 2.5\times10^{-4}\,\mathrm{m}^3 = 250\,\mathrm{cm}^3$ (koormus omakaalust $q = 9.81\cdot400 = 3.924\,\mathrm{kN/m}$, koondatud koormus $F_\rho = 9.81\cdot1.500 = 14.715\,\mathrm{kN}$). Andmed on võrreldavad õpikus [Kis64, lk 36] kasutatutega.

Lahendus. Algparameetrite leidmiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA}\cdot\mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{3.147}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a^{(1)}} \\ \mathbf{Z_b^{(1)}} \\ \mathbf{Z_b^{(2)}} \\ \mathbf{Z_c^{(2)}} \\ \mathbf{Z_c^{(3)}} \\ \mathbf{Z_d^{(3)}} \end{bmatrix} \tag{3.148}$$

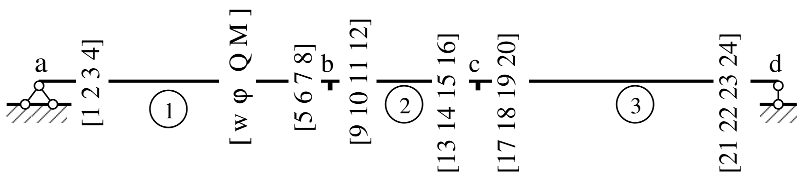
Vektori komponentideks on siirded, paindenurgad, põikjõud ja paindemomendid tala elementide ab, bc ja cd alguses ning lõpus (jn 3.32):

$$\mathbf{Z_a^{(1)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(ab)} \\ \varphi_A^{(ab)} \\ Q_A^{(ab)} \\ M_A^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(1) \\ Z(2) \\ Z(3) \\ Z(4) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b^{(1)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(ab)} \\ \varphi_L^{(ab)} \\ Q_L^{(ab)} \\ M_L^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(5) \\ Z(6) \\ Z(7) \\ Z(8) \end{bmatrix} \tag{3.149}$$

$$\mathbf{Z_b^{(2)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(bc)} \\ \varphi_A^{(bc)} \\ Q_A^{(bc)} \\ M_A^{(bc)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(9) \\ Z(10) \\ Z(11) \\ Z(12) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_c^{(2)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(bc)} \\ \varphi_L^{(bc)} \\ Q_L^{(bc)} \\ M_L^{(bc)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(13) \\ Z(14) \\ Z(15) \\ Z(16) \end{bmatrix} \tag{3.150}$$

$$\mathbf{Z_c^{(3)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(cd)} \\ \varphi_A^{(cd)} \\ Q_A^{(cd)} \\ M_A^{(cd)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(17) \\ Z(18) \\ Z(19) \\ Z(29) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_d^{(3)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(cd)} \\ \varphi_L^{(cd)} \\ Q_L^{(cd)} \\ M_L^{(bc)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(21) \\ Z(22) \\ Z(23) \\ Z(24) \end{bmatrix} \tag{3.151}$$

Muutujate $Z(i)$ (i = 1, 2, ..., 24) järjenumbrid on toodud joonisel 3.32.



Joonis 3.32. Koondatud massi kandva tala muutujate järjenumbrid

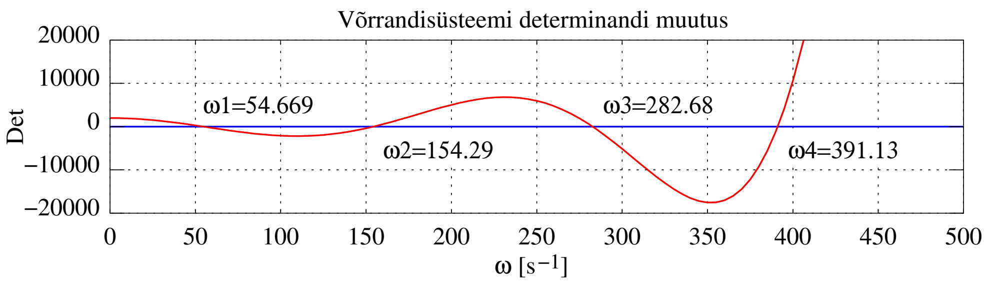
Võrrandisüsteemi (3.147) kaksteist esimest võrrandit on põhivõrrandid (3.34). Järgnevad sõlmede b ja c (jn 3.32) pidevus- ja tasakaaluvõrrandid:

$$\begin{aligned}
Z(5) - Z(9) &= w_L^{(ab)} - w_A^{(bc)} = 0 \\
Z(6) - Z(10) &= \varphi_L^{(ab)} - \varphi_A^{(bc)} = 0 \\
Z(7) + Z(11) &= Q_L^{(ab)} + Q_A^{(bc)} = 0 \\
Z(8) + Z(12) &= M_L^{(ab)} + M_A^{(bc)} = 0 \\
Z(13) - Z(17) &= w_L^{(bc)} - w_A^{(cd)} = 0 \\
Z(14) - Z(18) &= \varphi_L^{(bc)} - \varphi_A^{(cd)} = 0 \\
Z(15) + Z(19) &= Q_L^{(bc)} + Q_A^{(cd)} = 0 \\
Z(16) + Z(20) &= M_L^{(bc)} + M_A^{(cd)} = 0
\end{aligned} \tag{3.152}$$

Ülejäänud neli võrrandit saame toetingimustest

$$\begin{array}{lllll} Z(1) & = & w_A^{(ab)} & = & 0 \\ Z(4) & = & M_A^{(ab)} & = & 0 \\ Z(21) & = & w_L^{(cd)} & = & 0 \\ Z(24) & = & M_L^{(cg)} & = & 0 \end{array} \tag{3.153}$$

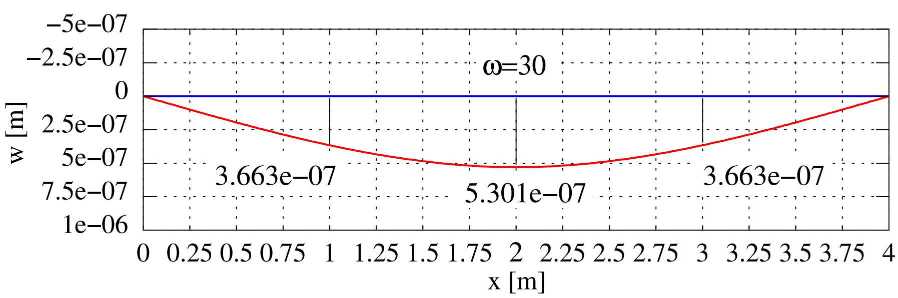
GNU Octave'i programmiga NaideTala2ToelMdet.m leiame hõreda võrrandisüsteemi (3.147) determinandi nullid. Koondatud massi kandva tala (jn 3.31) esimesed neli omavõnkesagedust: $\omega_1 = 5.4669 \times 10^1\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 1.542 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 2.8268 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 3.9113 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$. Võrrandisüsteemi (3.147) determinandi sõltuvus nurksagedusest ω selgub jooniselt 3.33.



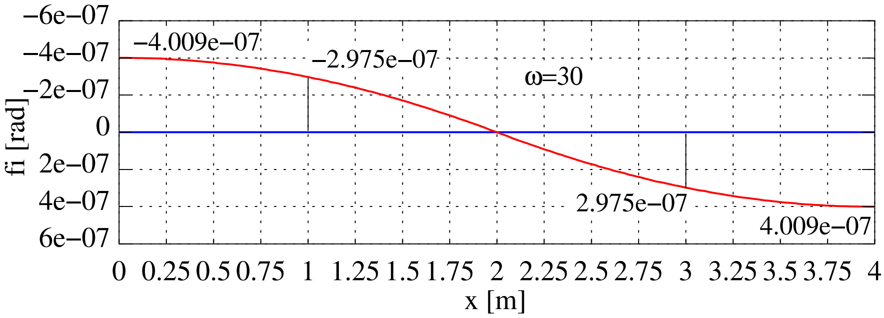
Joonis 3.33. Koondatud massi kandva tala omavõnkesagedused

Siirete ja sisejõudude leidmiseks valime vibreeriva jõu amplituudiks $F_b = 1\,\mathrm{N}$. Siirded ja sisejõud vibreeriva jõu sagedusel $\omega_b = 30\,\mathrm{s}^{-1}$ leiame GNU Octave'i programmiga NaideTala2ToelMw0.m. Jooniselt 3.33 on näha, et jõu F_b sagedus $\omega_b = 30\,\mathrm{s}^{-1}$ on väiksem kui esimene resonantssagedus $\omega_1 = 54.669\,\mathrm{s}^{-1}$.

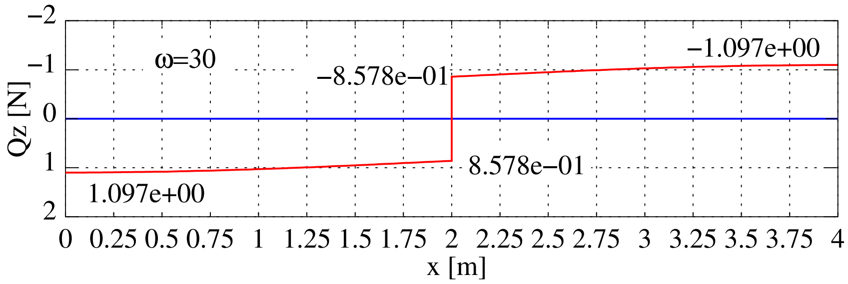
Arvutustulemuste põhjal on koostatud koondatud massi kandva tala epüürid (jn 3.34) vibreeriva jõu $F_b = 1.0\,\mathrm{N}$ sagedusel $\omega_b = 30\,\mathrm{s}^{-1}$.



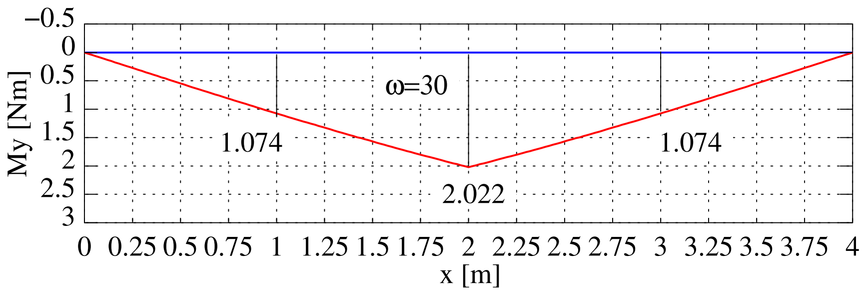
(a) Siire



(b) Paindenurk



(c) Põikjõud



(d) Paindemoment

Joonis 3.34. Koondatud massi kandva tala epüürid sagedusel $\omega = 30\,\mathrm{s}^{-1}$

Arvutustulemused vibreeriva jõu $F_b = 1.0\,\mathrm{N}$ sagedusel $\omega_b = 30\,\mathrm{s}^{-1}$ leiab arvutuspäeviku väljavõttest 3.9.

Väljavõte arvutuspäevikust 3.9 (**NaideTala2ToelMw0.m**)

```
 1. element
l1 =   2
Nmitmeks =   4

      x=        0.00          0.50          1.00          1.50          2.00
     w -     0.000e+00     1.961e-07     3.663e-07     4.855e-07     5.301e-07
    fi -    -4.009e-07    -3.749e-07    -2.975e-07    -1.714e-07    -1.588e-22
     Q -     1.097e+00     1.079e+00     1.028e+00     9.505e-01     8.578e-01
     M -     0.000e+00     5.456e-01     1.074e+00     1.569e+00     2.022e+00

 3. element
l2 =   2
```

```
Nmitmeks =   4

      x=       0.00          0.50          1.00          1.50          2.00
     w -    5.301e-07     4.855e-07     3.663e-07     1.961e-07     2.118e-22
    fi -   -3.293e-23     1.714e-07     2.975e-07     3.749e-07     4.009e-07
     Q -   -8.578e-01    -9.505e-01    -1.028e+00    -1.079e+00    -1.097e+00
     M -    2.022e+00     1.569e+00     1.074e+00     5.456e-01     0.000e+00
```

Näeme, et põikjõu epüüril on tala keskel hüpe jõust $F_b = 1.0\,\mathrm{N}$ ja inertsjõust $F_{inerts} = M_\rho\,\omega\,w_b = 1500 \cdot 30^2 \cdot 5.301\times 10^{-7} = 0.71564\,\mathrm{N}$. Tala keskel jaguneb see hüpe võrdselt, $Q_z\left(\frac{\ell}{2}\right) = \pm\left(F_b + F_{inerts}\right)/2 = \pm\left(1 + 0.71564\right)/2 = \pm\left(0.5 + 0.35782\right) = \pm 0.85782\,\mathrm{N}$.

Vibreeriva jõu $F_b = 2700\,\mathrm{N}$ puhul saame tala keskel siirde w_d ja paindemomendi $M_{y\,d}$ amplituudiks

$$w_d\left(\frac{\ell}{2}\right) = 5.301\times 10^{-7} \cdot F_b = 5.301\times 10^{-7} \cdot 2700 = 0.0014313\,\mathrm{m} = 1.4313\,\mathrm{mm} \tag{3.154}$$

$$M_{y\,d}\left(\frac{\ell}{2}\right) = 2.022 \cdot F_b = 2.024 \cdot 2700 = 5459\,\mathrm{Nm} = 5.459\,\mathrm{kNm} \tag{3.155}$$

Õpikus [Kis64, lk 37] on lihtsustatud arvutusega saadud $M_{y\,d}\left(\frac{\ell}{2}\right) = 592\,\mathrm{kg\,m}$ $(592 \cdot 9.81 = 5807.5\,\mathrm{Nm})$.

Omakaalust $q = 3.924\,\mathrm{kN/m}$ ja koondatud koormusest $F_\rho = 14.715\,\mathrm{kN}$ tingitud staatiline siire $w_{st}^{q\,F_\rho}$ ja staatiline paindemoment $M_{y\,st}^{q\,F_\rho}$ tala keskel avalduvad

$$\begin{aligned} w_{st}^{q\,F_\rho}\left(\frac{\ell}{2}\right) &= \frac{5}{384}\frac{q\ell^4}{EI} + \frac{F_\rho \ell^3}{48EI} = \frac{5 \cdot 3.924\times 10^3 \cdot 4.0^4}{384 \cdot 5.250\times 10^6} + \frac{14.715\times 10^3 \cdot 4.0^3}{48 \cdot 5.250\times 10^6} = \\ &2.4914\times 10^{-3} + 3.7371\times 10^{-3} = 6.2285\times 10^{-3}\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{3.156}$$

$$\begin{aligned} M_{y\,st}^{q\,F_\rho}\left(\frac{\ell}{2}\right) &= \frac{q\ell^2}{8} + \frac{F_\rho \ell}{4} = \frac{3.924\times 10^3 \cdot 4.0^2}{8} + \frac{14.715\times 10^3 \cdot 4}{4} = \\ &7.8480\times 10^3 + 14.715\times 10^3 = 22.563\times 10^3\,\mathrm{Nm} \end{aligned} \tag{3.157}$$

Nimetatud õpikus on lihtsustatud arvutusega saadud $M_{y\,st}^{q\,F_\rho}\left(\frac{\ell}{2}\right) = 2300\,\mathrm{kg\,m}$ $(2300 \cdot 9.81 = 22563\,\mathrm{Nm})$.

Omakaalust $q = 3.924\,\mathrm{kN/m}$, koondatud koormusest $F_\rho = 14.715\,\mathrm{kN}$ ja dünaamilisest koormusest $F_b \sin\omega t$ $(F_b = 2.7\,\mathrm{kN})$ põhjustatud siirde w_{sum} ja paindemomendi $M_{y\,sum}$ saame vastavate suuruste ($w_{st}^{q\,F_\rho}$, w_d ja $M_{y\,st}^{q\,F_\rho}$, $M_{y\,d}$) liitmisel.

Suurim paindepinge tala keskel

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{M_{y\,st}^{q\,F_\rho}}{W} + \frac{M_{y\,d}}{W} = \frac{2.2563\times 10^4}{2.5\times 10^{-4}} + \frac{5.459\times 10^3}{2.5\times 10^{-4}} = \\ &9.0252\times 10^7 + 2,1836\times 10^7 = 112.088\,\mathrm{MPa} \end{aligned} \tag{3.158}$$

Juba mainitud õpikus on lihtsustatud arvutusega saadud $\sigma = 1157\,\mathrm{kG/cm^2}$ ($1157 \cdot 9.81 = 1.1350\times10^4\,\mathrm{N/cm^2} = 113.50\,\mathrm{MPa}$).

Dünaamikateguri k_d leidmiseks arvutame siirde $w_{st}^{F_b}$ ja paindemomendi $M_{y\,st}^{F_b}$ sundiva jõu F_b staatilisel rakendamisel:

$$w_{st}^{F_b} = \frac{F_b\ell^3}{48EI} = \frac{2.7\times10^3 \cdot 4.0^3}{48 \cdot 5.250\times10^6} = 6.8571\times10^{-4}\,\mathrm{m} \tag{3.159}$$

$$M_{y\,st}^{F_b} = \frac{F_b\ell}{4} = \frac{2.7\times10^3 \cdot 4.0}{4.0} = 2.7\times10^3\,\mathrm{Nm} \tag{3.160}$$

Dünaamikategurid siirdel, $k_{d\,s}$, ja paindel, $k_{d\,p}$, sagedusel $\omega_b = 30\,\mathrm{s^{-1}}$ on erinevad:

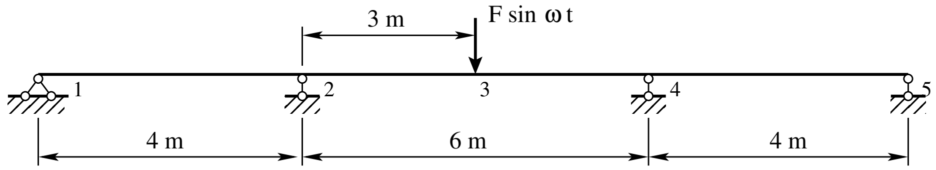
$$k_{d\,s} = \frac{w_d}{w_{st}^{F_b}} = \frac{1.4313\times10^{-3}}{6.8571\times10^{-4}} = 2.0873 \tag{3.161}$$

$$k_{d\,p} = \frac{M_{y\,d}}{M_{y\,st}^{F_b}} = \frac{5.459\times10^3}{2.7\times10^3} = 2.0219 \tag{3.162}$$

Võrdsed on nad ühe vabadusastmega süsteemi korral.

Õpikus [Kis64, lk 36] annab lihtsustatud arvutus ühesuguse dünaamikateguri $k_d = 2.152$ nii siirdel kui ka paindel.

Näide 3.7 (kolmesildeline jätkuvtala). Koostada joonisel 3.35 kujutatud kolmesildelise jätkuvtala siirde ja paindemomentide epüürid.



Joonis 3.35. Kolmesildeline jätkuvtala

Andmed. Jätkuvtala avad $\ell_1 = 4\,\mathrm{m}$, $\ell_2 = 6\,\mathrm{m}$ ja $\ell_3 = 4\,\mathrm{m}$. Teise ava keskel on vibreeriv jõud $F = 1.0\,\mathrm{N}$. Jõu F sagedus $\omega = 100\,\mathrm{s^{-1}}$, ristlõike inertsimoment $I = 2.0\times10^{-4}\,\mathrm{m^4} = 20000\,\mathrm{cm^4}$, elastsusmoodul $E = 200\,\mathrm{GPa}$, tala lausmass $m = 250\,\mathrm{kg/m}$, koormus omakaalust $q = 9.81{\cdot}250 = 2452.5\,\mathrm{N/m}$.

Lahendus. Algparameetrite leidmiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{3.163}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_1^{(1)}} \\ \mathbf{Z_2^{(1)}} \\ \mathbf{Z_2^{(2)}} \\ \mathbf{Z_3^{(2)}} \\ \mathbf{Z_3^{(3)}} \\ \mathbf{Z_4^{(3)}} \\ \mathbf{Z_4^{(4)}} \\ \mathbf{Z_5^{(4)}} \\ \mathbf{Z_{1\&2}^{(C)}} \\ \mathbf{Z_{3\&4}^{(C)}} \end{bmatrix} \tag{3.164}$$

Vektori komponentideks on siirded, paindenurgad, põikjõud ja paindemomendid tala elementide ab, bc, cd ja de alguses ning lõpus (jn 3.36):

$$\mathbf{Z_1^{(1)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(1)} \\ \varphi_A^{(1)} \\ Q_A^{(1)} \\ M_A^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(1) \\ Z\,(2) \\ Z\,(3) \\ Z\,(4) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_2^{(1)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(1)} \\ \varphi_L^{(1)} \\ Q_L^{(1)} \\ M_L^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(5) \\ Z\,(6) \\ Z\,(7) \\ Z\,(8) \end{bmatrix} \tag{3.165}$$

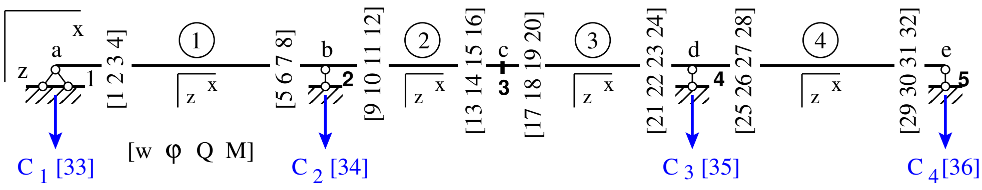
$$\mathbf{Z_2^{(2)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(2)} \\ \varphi_A^{(2)} \\ Q_A^{(2)} \\ M_A^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(9) \\ Z\,(10) \\ Z\,(11) \\ Z\,(12) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_3^{(2)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(2)} \\ \varphi_L^{(2)} \\ Q_L^{(2)} \\ M_L^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(13) \\ Z\,(14) \\ Z\,(15) \\ Z\,(16) \end{bmatrix} \tag{3.166}$$

$$\mathbf{Z_3^{(3)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(3)} \\ \varphi_A^{(3)} \\ Q_A^{(3)} \\ M_A^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(17) \\ Z\,(18) \\ Z\,(19) \\ Z\,(20) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_4^{(3)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(3)} \\ \varphi_L^{(3)} \\ Q_L^{(3)} \\ M_L^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(21) \\ Z\,(22) \\ Z\,(23) \\ Z\,(24) \end{bmatrix} \tag{3.167}$$

$$\mathbf{Z_4^{(4)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(4)} \\ \varphi_A^{(4)} \\ Q_A^{(4)} \\ M_A^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(25) \\ Z\,(26) \\ Z\,(27) \\ Z\,(28) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_5^{(4)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(4)} \\ \varphi_L^{(4)} \\ Q_L^{(4)} \\ M_L^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(29) \\ Z\,(30) \\ Z\,(31) \\ Z\,(32) \end{bmatrix} \tag{3.168}$$

$$\mathbf{Z_{1\&2}^{(C)}} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(33) \\ Z\,(34) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_{3\&4}^{(C)}} = \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(35) \\ Z\,(36) \end{bmatrix} \tag{3.169}$$

Muutujate $Z\,(i)$ (i = 1, 2, ..., 36) järjenumbrid on joonisel 3.36.



Joonis 3.36. Kolmesildelise jätkuvtala muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (3.163) kuusteist esimest võrrandit on põhivõrrandid (3.34). Järgnevad sõlmede pidevus- ja tasakaaluvõrrandid.

Pidevusvõrrandid

$$\begin{aligned}
Z\,(5)\ \ - Z\,(9) &= w_L^{(1)} - w_A^{(2)} = 0\\
Z\,(6)\ \ - Z\,(10) &= \varphi_L^{(1)} - \varphi_A^{(2)} = 0\\
Z\,(13) - Z\,(17) &= w_L^{(2)} - w_A^{(3)} = 0\\
Z\,(14) - Z\,(18) &= \varphi_L^{(2)} - \varphi_A^{(3)} = 0\\
Z\,(21) - Z\,(25) &= w_L^{(3)} - w_A^{(4)} = 0\\
Z\,(22) - Z\,(26) &= \varphi_L^{(3)} - \varphi_A^{(4)} = 0
\end{aligned} \tag{3.170}$$

Tasakaaluvõrrandid

$$\begin{aligned}
Z\,(3) + Z\,(33) &= Q_A^{(1)} + C_{33} = 0\\
Z\,(7) + Z\,(11) + Z\,(34) &= Q_L^{(1)} + Q_A^{(2)} + C_{34} = 0\\
Z\,(8) + Z\,(12) &= M_L^{(1)} + M_A^{(2)} = 0\\
Z\,(15) + Z\,(19) &= Q_L^{(2)} + Q_A^{(3)} = F\\
Z\,(16) + Z\,(20) &= M_L^{(2)} + M_A^{(3)} = 0\\
Z\,(23) + Z\,(27) + Z\,(35) &= Q_L^{(3)} + Q_A^{(4)} + C_{35} = 0\\
Z\,(24) + Z\,(28) &= M_L^{(3)} + M_A^{(4)} = 0\\
Z\,(31) + Z\,(36) &= Q_L^{(4)} + C_{36} = 0
\end{aligned} \tag{3.171}$$

Ülejäänud kuus võrrandit on

kõrvaltingimused

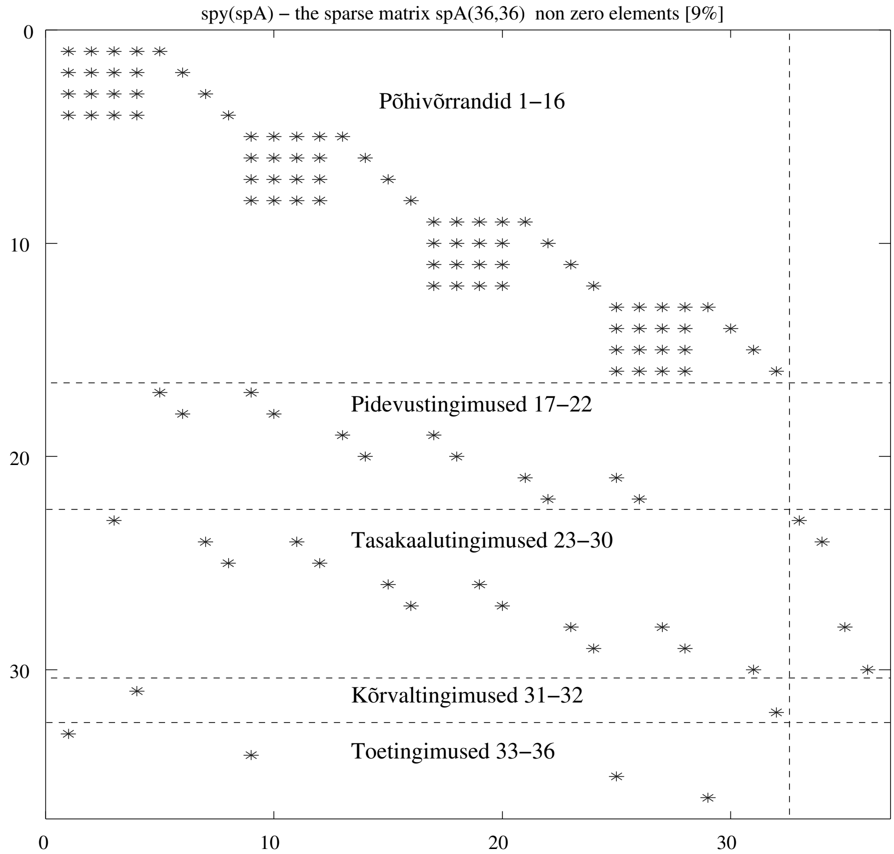
$$\begin{aligned}
Z\,(4) &= M_A^{(1)} = 0\\
Z\,(32) &= M_L^{(4)} = 0
\end{aligned} \tag{3.172}$$

toetingimused

$$\begin{aligned}
Z\,(1) &= w_A^{(1)} = 0\\
Z\,(9) &= w_A^{(2)} = 0\\
Z\,(21) &= w_L^{(3)} = 0\\
Z\,(29) &= w_L^{(4)} = 0
\end{aligned} \tag{3.173}$$

Võrrandisüsteemil (3.163) on 36 võrrandit 36 tundmatuga, kus nullist erinevaid elemente on 116 (9%) (jn 3.37):

```
spA = Compressed Column Sparse (rows = 36, cols = 36, nnz = 116 [9%])
```



Joonis 3.37. Kolmesildelise jätkuvtala maatriksi spA muster

GNU Octave'i programmiga NaideJtkTala1det.m leiame hõreda võrrandisüsteemi (3.163) determinandi nullid. Jätkuvtala (jn 3.35) esimesed viis omavõnkesagedust on $\omega_1 = 1.5492\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 2.9184\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 3.4188\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 5.7293\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_5 = 9.8696\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$. Võrrandisüsteemi (3.163) determinandi sõltuvus nurksagedusest ω on kujutatud joonisel 3.38. Siit näeme, et vibreeriva jõu F sagedus $\omega = 100\,\mathrm{s}^{-1}$ on väiksem kui esimene resonantssagedus $\omega_1 = 154.92\,\mathrm{s}^{-1}$.

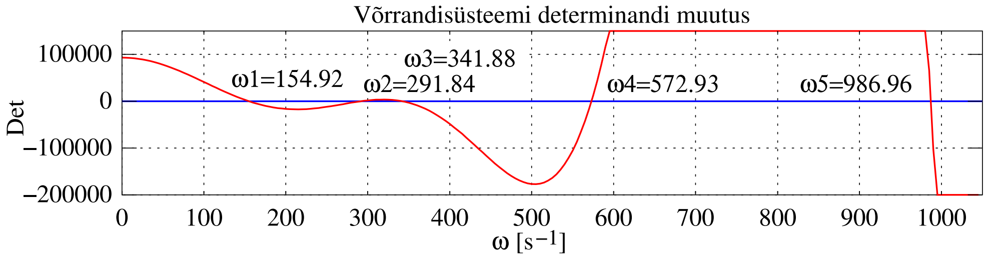
Esimese omavõnkesageduse $\omega_1 = 1.5492\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ avaldame kujul (vt (3.73))

$$\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{\ell_2^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{3.734^2}{\ell_2^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{13.943}{\ell_2^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} = 154.92\,\mathrm{s}^{-1} \tag{3.174}$$

et võrrelda seda raamatus [BL63, lk 272] esitatud sarnase jätkuvtala esimese omavõnkesagedusega

$$\omega_1 = \frac{14}{\ell_2^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{14}{6^2}\sqrt{\frac{4.0\times10^7}{m}} = 155.56\,\mathrm{s}^{-1} \tag{3.175}$$

Siit selgub, et eri meetodeil arvutatud esimesed omavõnkesagedused erinevad väga vähe.

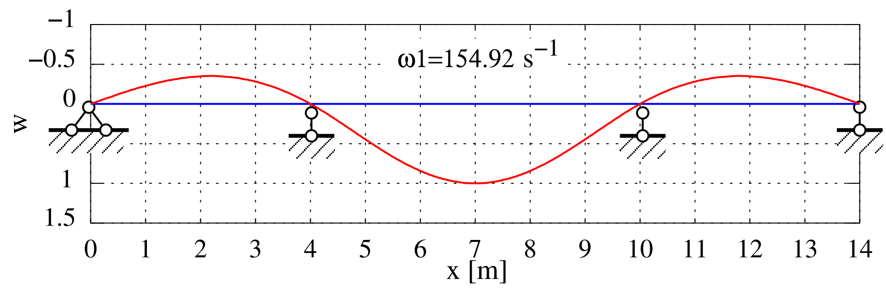


Joonis 3.38. Kolmesildelise jätkuvtala omavõnkesagedused

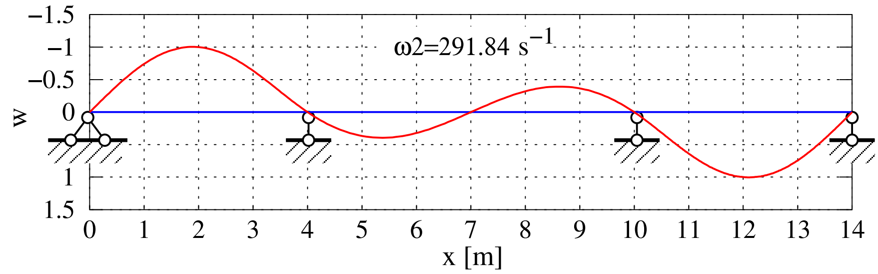
Jätkuvtala esimesed neli omavõnkevormi sagedustel $\omega_1 = 1.5492\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 2.9184\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 3.4188\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 5.7293\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ leiame GNU Octave'i programmidega NaideJtkTala1Vorm1.m, NaideJtkTala1Vorm2.m, NaideJtkTala1Vorm3.m ja NaideJtkTala1Vorm4.m.

Esimese ja neljanda omavõnkevormi leidmisel viime võrrandisüsteemis (3.163) kolmeteistkümnenda veeru ning teise ja kolmanda omavõnkevormi leidmisel kahekümne esimese veeru paremale poolele. Pärast hõreda võrrandisüsteemi lahendamist vähimruutude meetodiga saame lahendist valida algparameetrid.

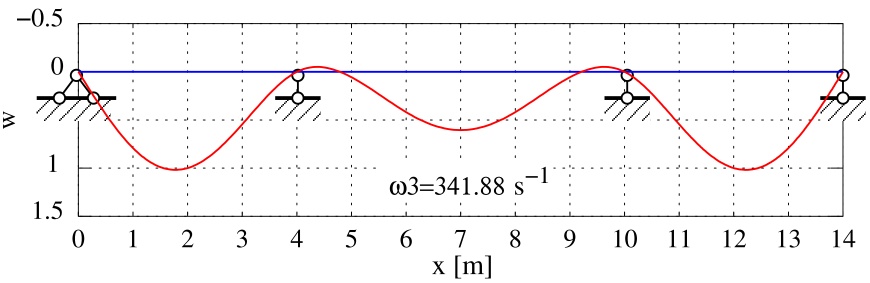
Omavõnkevormid on kujutatud joonisel 3.39.



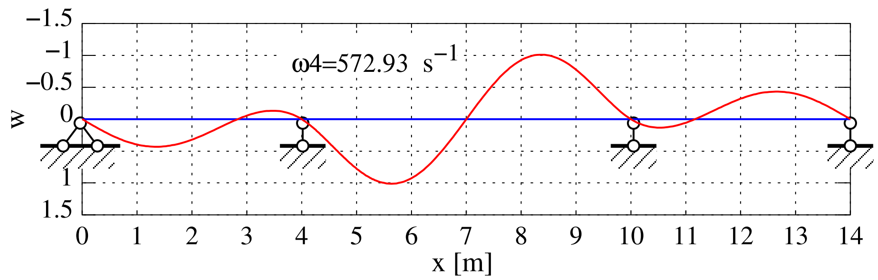
(a) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_1 = 1.5492\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$



(b) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_2 = 2.9184\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$



(c) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_3 = 3.4188 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$



(d) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_4 = 5.7293 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$

Joonis 3.39. Kolmesildelise jätkuvtala omavõnkevormid

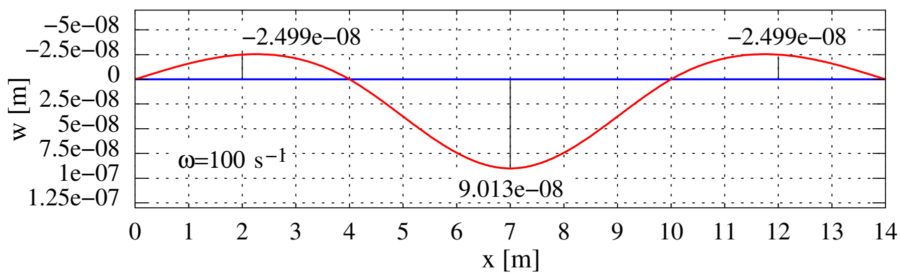
Arvutustulemused jõu $F = 1.0\,\mathrm{N}$ sagedusel $\omega = 100\,\mathrm{s}^{-1}$ toome arvutuspäeviku väljavõttes 3.10.

Väljavõte arvutuspäevikust 3.10 (NaideJtkTala1Mw.m)

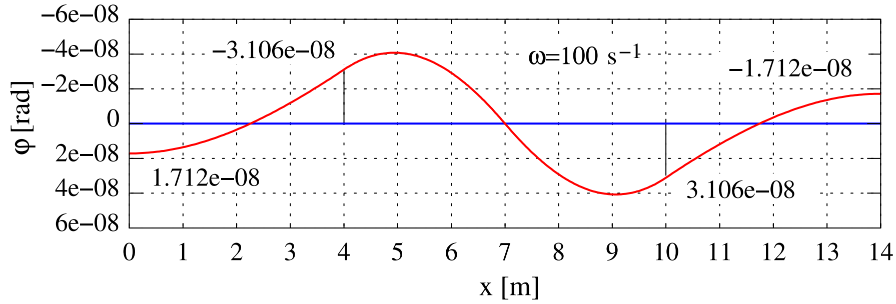
```
 1. element
l1 =  4
Nmitmeks =  4

      x=      0.00         1.00         2.00         3.00         4.00
      w -   0.000e+00   -1.594e-08   -2.499e-08   -2.119e-08    0.000e+00
     fi -   1.712e-08    1.359e-08    3.505e-09   -1.186e-08   -3.106e-08
      Q -  -2.857e-01   -2.651e-01   -2.118e-01   -1.509e-01   -1.204e-01
      M -   0.000e+00   -2.787e-01   -5.191e-01   -6.997e-01   -8.309e-01

 2. element
l21 =  3
Nmitmeks =  4

      x=      0.00         0.75         1.50         2.25         3.00
      w -   0.000e+00    2.756e-08    5.745e-08    8.087e-08    9.013e-08
     fi -  -3.106e-08   -4.034e-08   -3.740e-08   -2.334e-08   -1.323e-23
      Q -   8.992e-01    8.744e-01    7.944e-01    6.631e-01    5.000e-01
      M -  -8.309e-01   -1.626e-01    4.667e-01    1.016e+00    1.453e+00

 3. element
l22 =  3
Nmitmeks =  4

      x=      0.00         0.75         1.50         2.25         3.00
```

```
      w -     9.013e-08     8.087e-08     5.745e-08     2.756e-08    -2.647e-23
     fi -    -1.694e-24     2.334e-08     3.740e-08     4.034e-08     3.106e-08
      Q -    -5.000e-01    -6.631e-01    -7.944e-01    -8.744e-01    -8.992e-01
      M -     1.453e+00     1.016e+00     4.667e-01    -1.626e-01    -8.309e-01

  4. element
l3 =   4
Nmitmeks =   4

     x=         0.00          1.00           2.00          3.00          4.00
      w -     0.000e+00    -2.119e-08    -2.499e-08    -1.594e-08    -2.647e-23
     fi -     3.106e-08     1.186e-08    -3.505e-09    -1.359e-08    -1.712e-08
      Q -     1.204e-01     1.509e-01     2.118e-01     2.651e-01     2.857e-01
      M -    -8.309e-01    -6.997e-01    -5.191e-01    -2.787e-01     0.000e+00
```

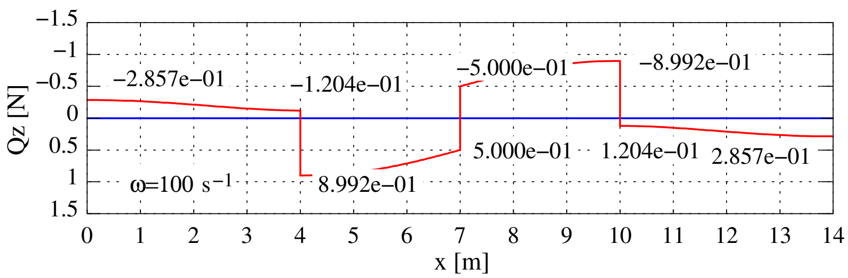
Jätkuvtala sisejõudude epüürid vibreeriva jõu $F = 1.0\,\mathrm{N}$ sagedusel $\omega = 100\,\mathrm{s}^{-1}$ on toodud joonisel 3.40.



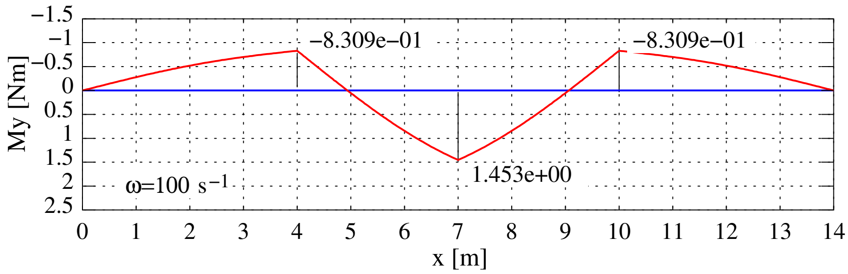
(a) Siire



(b) Paindenurk



(c) Põikjõud



(d) Paindemoment

Joonis 3.40. Kolmesildelise jätkuvtala epüürid sagedusel $\omega = 100\,\mathrm{s}^{-1}$

Vibreeriva jõu $F \sin \theta t$ sagedusel $\omega = 100\,\mathrm{s}^{-1}$ saame tala tugedel 2 ja 3 ning teise silde keskel paindemomendi amplituudiks $M_{y\,d}\,(x = 4) = -0.8309F\,\mathrm{kNm}$ ja $M_{y\,d}\,(x = 7) = 1.453F\,\mathrm{kNm}$ (vt arvutuspäeviku väljavõte 3.10). Need EST-meetodiga leitud suurused ühtivad õpikus [Kis64, lk 196] toodutega.

GNU Octave'i programmiga NaideJtkTala1MwStaatika.m leiame siirde w^F_{st} ja paindemomendi $M^F_{y\,st}$ sundiva jõu F staatilisel rakendamisel.

Leitud siirde ja momendi väärtused tala koormamisel sundiva jõuga F on antud arvutuspäeviku väljavõttes 3.11.

Väljavõte arvutuspäevikust 3.11 (NaideJtkTala1MwStaatika.m)

```
 1. element
l1 =  4
Nmitmeks =  4

      x=      0.00         1.00         2.00         3.00         4.00
      w -   0.000e+00   -8.113e-09   -1.298e-08   -1.136e-08    0.000e+00
     fi -   8.654e-09    7.031e-09    2.163e-09   -5.950e-09   -1.731e-08
      Q -  -1.298e-01   -1.298e-01   -1.298e-01   -1.298e-01   -1.298e-01
      M -   0.000e+00   -1.298e-01   -2.596e-01   -3.894e-01   -5.192e-01

 2. element
l21 =  3
Nmitmeks =  4

      x=      0.00         0.75         1.50         2.25         3.00
      w -   0.000e+00    1.575e-08    3.353e-08    4.807e-08    5.409e-08
     fi -  -1.731e-08   -2.353e-08   -2.272e-08   -1.487e-08   -6.617e-24
      Q -   5.000e-01    5.000e-01    5.000e-01    5.000e-01    5.000e-01
      M -  -5.192e-01   -1.442e-01    2.308e-01    6.058e-01    9.808e-01

 3. element
l22 =  3
Nmitmeks =  4

      x=      0.00         0.75         1.50         2.25         3.00
      w -   5.409e-08    4.807e-08    3.353e-08    1.575e-08   -1.323e-23
     fi -  -1.446e-24    1.487e-08    2.272e-08    2.353e-08    1.731e-08
      Q -  -5.000e-01   -5.000e-01   -5.000e-01   -5.000e-01   -5.000e-01
```

```
     M -    9.808e-01    6.058e-01    2.308e-01   -1.442e-01   -5.192e-01

 4. element
l3 =  4
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         1.00          2.00         3.00          4.00
     w -    0.000e+00   -1.136e-08   -1.298e-08   -8.113e-09   -1.323e-23
    fi -    1.731e-08    5.950e-09   -2.163e-09   -7.031e-09   -8.654e-09
     Q -    1.298e-01    1.298e-01    1.298e-01    1.298e-01    1.298e-01
     M -   -5.192e-01   -3.894e-01   -2.596e-01   -1.298e-01    0.000e+00
```

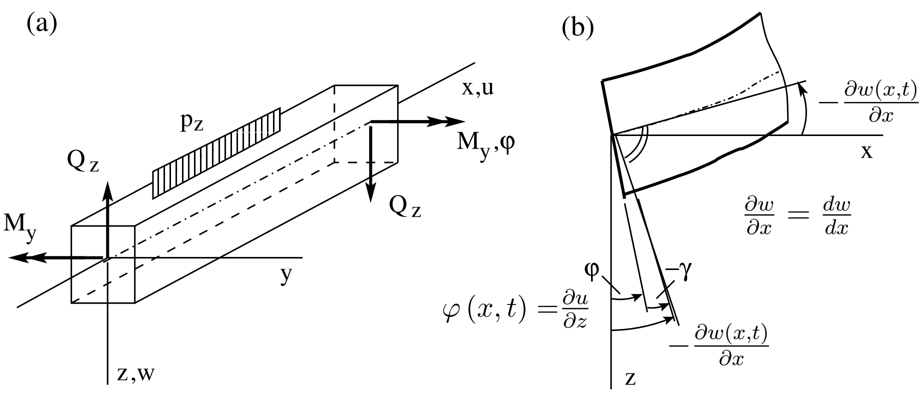
Paindemoment teise silde keskel $M_{y\,st}^{F} = 0.9808F$ ühtib õpikus [Kis64, lk 196] tooduga.

Jätkuvtala siirded ja sisejõud omakaalust $q = 2.4525\,\mathrm{kN/m}$ saab leida GNU Octave'i programmiga NaideJtkTala1MwStaatikaqz.m.

4. Timošenko tala võnkumine

Euleri-Bernoulli tala teoorias hüljatakse ristlõike suhteline nihkedeformatsioon (nihkemoone, nihkenurk): $\gamma \approx 0$. Põikjõud leitakse tasakaalutingimusest.

Timošenko tala teoorias[1] [HBW99] jäävad tala ristlõiked tasapinnaliseks (ei kõverdu) ja pöörduvad nurga φ võrra (jn 4.1 b). Tala ristlõikes arvestatakse suhtelist nihkedeformatsiooni, seega $\gamma \neq 0$.



Joonis 4.1. Timošenko tala

Suhteline nihkedeformatsioon γ tala ristlõikes avaldub kujul

$$\gamma = \frac{\partial w\,(x,t)}{\partial x} + \varphi \tag{4.1}$$

Tala telgjoone kõverus

$$\varkappa = \frac{\partial \varphi\,(x,t)}{\partial x} \tag{4.2}$$

Põikjõud

$$Q_z = k_T G A \gamma = k_T G A \left(\frac{\partial w\,(x,t)}{\partial x} + \varphi \right) \tag{4.3}$$

kus k_T on Timošenko tala teoorias kujutegur [Hut01], mis sõltub ristlõike kujust ja Poissoni tegurist ν (ringile $k_T = (6+12\nu+6\nu^2)/(7+12\nu+4\nu^2)$, ristkülikule $k_T = (5+5\nu)/(6+5\nu)$); GA on lõikejäikus.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Timoshenko_beam_theory (22.01.2017)

Paindemoment

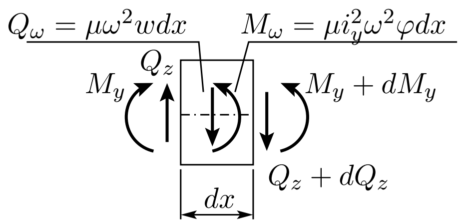
$$M_y = EI_y \frac{\partial \varphi\,(x,t)}{\partial x} \tag{4.4}$$

kus EI_y on paindejäikus.

4.1 Timošenko tala diferentsiaalvõrrandid

4.1.1 Timošenko tala diferentsiaalseosed

Vaatleme talaelemendi tasakaalu (jn 4.2). Talaelemendile mõjuvad põikjõud Q_z, paindemoment M_y, inertsjõud $Q_\omega = \mu\,\omega^2 w dx$ ja inertsjõudude moment[2] $M_\omega = \mu\, i_y^2 \omega^2 \varphi dx$. Siin on μ pikkusühiku kohta tulev mass, i_y ($i_y^2 = I_y/A$) – inertsiraadius telje y suhtes ja ω – nurksagedus.



Joonis 4.2. Talaelemendi tasakaal

Talaelemendi tasakaaluvõrrandid:

$$dM_y = Q_z\, dx - m_y\, dx - \mu\, i_y^2 \omega^2 \varphi\, dx \tag{4.5}$$
$$dQ_z = -\,p_z\, dx - \mu\,\omega^2 w\, dx \tag{4.6}$$

Siin on p_z telje z suunaline lauskoormus ja m_y on lausmoment.

Jagades võrrandid (4.5) ja (4.6) dx-iga, saame diferentsiaalseosed

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z - m_y - \mu\, i_y^2 \omega^2 \varphi \tag{4.7}$$
$$\frac{dQ_z}{dx} = -\,p_z - \mu\,\omega^2 w \tag{4.8}$$

ehk

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} - Q_z + \mu\, i_y^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + m_y = 0 \tag{4.9}$$
$$\frac{\partial Q_z}{\partial x} + \mu\, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_z = 0 \tag{4.10}$$

[2] http://www.obs.ee/~jaak/loengud/esimene_02/loeng6/kuues.html

Asetame avaldised (4.3) ja (4.4) võrranditesse (4.9) ning (4.10).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi\,(x,t)}{\partial x^2} - k_T G A \left(\frac{\partial w\,(x,t)}{\partial x} + \varphi \right) + \mu\, i_y^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + m_y &= 0 \qquad (4.11) \\ k_T G A \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w\,(x,t)}{\partial x} + \varphi \right) + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_z &= 0 \qquad (4.12) \end{aligned}$$

Võrrandist (4.12) elimineerime φ:

$$\frac{\partial \varphi\,(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{k_T G A} \left(k_T G A \frac{\partial^2 w\,(x,t)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_z \right) \qquad (4.13)$$

Tulemuseks on neljandat järku diferentsiaalvõrrand põiksiirdel w [MV14, lk 39 (7)], [SAMST92, lk 39 (2.1)].

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w\,(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\mu}{EI} \frac{\partial^2 w\,(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\mu}{EA} \left(1 + \frac{E}{k_T G} \right) \frac{\partial^4 w\,(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} \\ + \frac{\mu^2}{k_T A^2 E G} \frac{\partial^4 w\,(x,t)}{\partial t^4} = 0 \qquad (4.14) \end{aligned}$$

Elimineerides w võrranditest (4.11) ja (4.12), saame avaldisega (4.14) sarnase võrrandi paindenurga φ jaoks [MV14, lk 39 (11)]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \varphi\,(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\mu}{EI} \frac{\partial^2 \varphi\,(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\mu}{EA} \left(1 + \frac{E}{k_T G} \right) \frac{\partial^4 \varphi\,(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} \\ + \frac{\mu^2}{k_T A^2 E G} \frac{\partial^4 \varphi\,(x,t)}{\partial t^4} = 0 \qquad (4.15) \end{aligned}$$

4.1.2 Timošenko tala vabavõnkumise diferentsiaalvõrrand

Asendame võrrandis (4.8) põikjõu tuletise dQ_z/dx põiksiirde ja paindemomendiga. Selleks võtame põikjõu avaldisest (4.3) tuletise muutuja x suhtes. Tuletises sisalduva $d\varphi/dx$ asendame avaldisest (4.4) saadava seosega M_y/EI_y. Piirdume juhuga, kui $A\,(x) = konst$ ja $I_y\,(x) = konst$ ning $p_z = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}^2 w\,(x,t)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mu\,\omega^2}{k_T G A} w + \frac{M_y}{EI_y} = 0 \qquad (4.16)$$

Võtame võrrandist (4.7) tuletise muutuja x suhtes. Tuletises sisalduva seose dQ_z/dx asendame avaldisega (4.8) ja $d\varphi/dx$ asendame avaldisest (4.4) saadavaga seosega M_y/EI_y. Piirdume juhuga, kui $A\,(x) = konst$, $I_y\,(x) = konst$ ning $p_z = 0$ ja $m_y = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}^2 M_y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mu\, i_y^2 \omega^2}{EI_y} M_y + \mu\,\omega^2 w = 0 \qquad (4.17)$$

Kõrvaldades võrranditest (4.16) ja (4.17) paindemomendi M_y, saame neljandat järku diferentsiaalvõrrandi [PL63, lk 133 (5-6)]

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} + \frac{\mu\,\omega^2 i_y^2}{EI_y}\left(1 + \frac{E}{k_T G}\right)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mu\,\omega^2}{EI_y}\left(1 - \frac{\mu\, i_y^2\omega^2}{k_T GA}\right) w = 0 \tag{4.18}$$

ehk kujul [SAMST92, lk 39 (2.2)]

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} + \frac{\mu\omega^2}{EA}\left(1 + \frac{E}{k_T G}\right)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mu\,\omega^2}{EI_y}\left(1 - \frac{\mu\, i_y^2\omega^2}{k_T GA}\right) w = 0 \tag{4.19}$$

Siin on arvestatud, et $i_y^2 = I_y/A$.

Kasutame tähistusi

$$\beta^4 = \frac{\mu\,\omega^2\ell^4}{EI_y}, \qquad \alpha = \frac{\mu\,\omega^2\ell^2}{k_T GA}, \qquad \eta = \frac{\mu\, i_y^2\,\omega^2\ell^2}{EI_y} \tag{4.20}$$

Diferentsiaalvõrrandi (4.18) võib nüüd esitada kujul

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} + \frac{\alpha + \eta}{\ell^2}\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\beta^4 - \alpha\,\eta}{\ell^4}\, w = 0 \tag{4.21}$$

Võtame kasutusele mõõduta muutujad ξ, ι ja χ:

$$\xi = \frac{x}{\ell}, \qquad (\gamma)\,\iota = \frac{i_y^2}{\ell^2}, \qquad (\alpha)\,\chi = \frac{i_y^2}{\ell^2}\frac{E}{k_T G} \tag{4.22}$$

Saame Timošenko tala põiksiirde w mõõduta muutujaga diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}\xi^4} + (\alpha + \eta)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\xi^2} - \left(\beta^4 - \alpha\eta\right) w = 0 \tag{4.23}$$

ehk [SAMST92, lk 39 (2.4)]

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}\xi^4} + \beta^4(\iota + \chi)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\xi^2} + \beta^4\left[\beta^4\iota\chi - 1\right] w = 0 \tag{4.24}$$

Avaldame diferentsiaalvõrrandi (4.23) karakteristliku võrrandi [PL63, lk 134 (5-8)]:

$$\lambda^4 + (\alpha + \eta)\,\lambda^2 - \left(\beta^4 - \alpha\eta\right) = 0 \tag{4.25}$$

ehk [SAMST92, lk 40 (2.5)]

$$\lambda^4 + \beta^4(\iota + \chi)\,\lambda^2 + \beta^4\left[\beta^4\iota\chi - 1\right] = 0 \tag{4.26}$$

Võrrandi (4.25) lahendid on

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\sqrt{\beta^4 + \frac{1}{4}(\alpha - \eta)^2} \mp \frac{1}{2}(\alpha + \eta)} \tag{4.27}$$

ehk

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{\beta^8(\chi-\iota)^2+4\beta^4} \mp \beta^4(\chi+\iota)} \tag{4.28}$$

Leitud lahendid rahuldavad tingimusi

$$\lambda_2^2-\lambda_1^2=\alpha+\eta, \quad \lambda_1^2\lambda_2^2=\beta^4-\alpha\eta \tag{4.29}$$

Diferentsiaalvõrrandi (4.21) normeerimata lahendite fundamentaalsüsteem:

$$\begin{aligned} f_1(\lambda_1,x) &= \mathrm{ch}\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right), \quad & f_2(\lambda_1,x) &= \mathrm{sh}\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right), \\ f_3(\lambda_2,x) &= \cos\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right), \quad & f_4(\lambda_2,x) &= \sin\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right) \end{aligned} \tag{4.30}$$

Esitame esmalt põiksiirde w avaldise

$$w\left(\frac{x}{\ell}\right) = A_1\sin\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right)+A_2\cos\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right)+A_3\,\mathrm{sh}\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right)+A_4\,\mathrm{ch}\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right) \tag{4.31}$$

kus A_i (i = 1, 2, 3, 4) on konstandid.

Põiksiirde $w(x/\ell)$ tuletised on:

$$w'\left(\frac{x}{\ell}\right) = \frac{\lambda_2}{\ell}A_1\cos\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right)-\frac{\lambda_2}{\ell}A_2\sin\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right)+\frac{\lambda_1}{\ell}A_3\,\mathrm{ch}\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right)+\frac{\lambda_1}{\ell}A_4\,\mathrm{sh}\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right)$$

$$w''\left(\frac{x}{\ell}\right) = -\frac{\lambda_2^2}{\ell^2}A_1\sin\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right)-\frac{\lambda_2^2}{\ell^2}A_2\cos\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right)+\frac{\lambda_1^2}{\ell^2}A_3\,\mathrm{sh}\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right)+\frac{\lambda_1^2}{\ell^2}A_4\,\mathrm{ch}\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right)$$

$$w'''\left(\frac{x}{\ell}\right) = -\frac{\lambda_2^3}{\ell^3}A_1\cos\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right)+\frac{\lambda_2^3}{\ell^3}A_2\sin\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right)+\frac{\lambda_1^3}{\ell^3}A_3\,\mathrm{ch}\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right)+\frac{\lambda_1^3}{\ell^3}A_4\,\mathrm{sh}\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right)$$

Timošenko tala põiksiirde diferentsiaalvõrrandiga (4.24) samalaadselt avaldub ristlõike paindenurga φ diferentsiaalvõrrand (4.15):

$$\frac{\mathrm{d}^4\varphi}{\mathrm{d}\xi^4}+\beta^4(\iota+\chi)\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\xi^2}+\beta^4\left[\beta^4\iota\chi-1\right]\varphi=0 \tag{4.32}$$

Ristlõike paindenurga φ avaldise valikul lähtume nihkenurga γ avaldistest (4.1) ja (4.3).

$$\varphi=\gamma-\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}=\frac{Q_z}{k_T GA}-\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \tag{4.33}$$

kust saab Euleri-Bernoulli tala ristlõike paindenurga

$$\varphi=\lim_{\gamma\to 0}\gamma-\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}=-\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \tag{4.34}$$

Siin on kasutusel parema käe teljestik (jn A.1), kus pööre toimub ümber y-telje.

Ristlõike paindenurga φ avaldiseks saame

$$\varphi\left(\frac{x}{\ell}\right) = s_1 A_1 \cos\left(\lambda_2 \frac{x}{\ell}\right) - s_1 A_2 \sin\left(\lambda_2 \frac{x}{\ell}\right) + s_2 A_3 \operatorname{ch}\left(\lambda_1 \frac{x}{\ell}\right) + s_2 A_4 \operatorname{sh}\left(\lambda_1 \frac{x}{\ell}\right) \quad (4.35)$$

kus

$$s_1 = -\frac{1}{\ell}\left[\lambda_2 - \frac{\chi}{\lambda_2}\beta^4\right], \qquad s_2 = -\frac{1}{\ell}\left[\lambda_1 + \frac{\chi}{\lambda_1}\beta^4\right] \quad (4.36)$$

Paindenurga φ avaldises (4.35) leiduvad parameetrid s_i (4.36) erinevad töös [SAMST92, lk 40 (2.8)] esitatutest märgi poolest, sest seal vaadeldud paindenurga suund ($\varphi = -\gamma + \partial w\,(x,t)/\partial x$) on vastupidine siinsele.

Oleme saanud põiksiirde w avaldise (4.31) ja paindenurga φ avaldised (4.35), mis erinevad raamatus [PL63, lk 134 (5-11) ja (5-12)] tooduist.

Paindemomendi avaldame võrrandist (4.16):

$$M_y\,(\xi) = -\frac{EI_y}{\ell^2}\frac{\mathrm{d}^2 w\,(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} - EI_y \frac{\mu\,\omega^2}{k_T G A} w \quad (4.37)$$

Võrrandist (4.7) avaldame põikjõu Q_z ($m_y = 0$):

$$Q_z\,(\xi) = \frac{1}{\ell}\frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}\xi} + \mu\, i_y^2 \omega^2 \varphi = -\frac{EI_y}{\ell^3}\frac{\mathrm{d}^3 w\,(\xi)}{\mathrm{d}\xi^3} - \frac{EI_y}{\ell}\frac{\mu\,\omega^2}{k_T G A}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\xi} + \mu\, i_y^2 \omega^2 \varphi =$$
$$-\frac{EI_y}{\ell^3}\frac{\mathrm{d}^3 w\,(\xi)}{\mathrm{d}\xi^3} - \frac{EI_y}{\ell^3}\chi\beta^4 + \mu\, i_y^2 \omega^2 \varphi \quad (4.38)$$

Põikjõu Q_z leiame kujul

$$Q_z\,(\xi) =$$
$$-EI_y\left[-\frac{\lambda_2^3}{\ell^3}A_1 \cos\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right) + \frac{\lambda_2^3}{\ell^3}A_2 \sin\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right) + \frac{\lambda_1^3}{\ell^3}A_3 \operatorname{ch}\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right) + \frac{\lambda_1^3}{\ell^3}A_4 \operatorname{sh}\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right)\right]$$
$$-\frac{EI_y}{\ell^2}\chi\beta^4\left[\frac{\lambda_2}{\ell}A_1 \cos\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right) - \frac{\lambda_2}{\ell}A_2 \sin\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right) + \frac{\lambda_1}{\ell}A_3 \operatorname{ch}\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right) + \frac{\lambda_1}{\ell}A_4 \operatorname{sh}\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right)\right]$$
$$+\frac{EI_y}{\ell^2}\iota\beta^4\left[s_1 A_1 \cos\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right) - s_1 A_2 \sin\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right) + s_2 A_3 \operatorname{ch}\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right) + s_2 A_4 \operatorname{sh}\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right)\right]$$

$$Q_z = EI_y s_{11} A_1 \cos\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right) - EI_y s_{11} A_2 \sin\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right) -$$
$$EI_y s_{21} A_3 \operatorname{ch}\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right) - EI_y s_{21} A_4 \operatorname{sh}\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right) \quad (4.39)$$

Esitame paindemomendi M_y avaldise

$$M_y\,(\xi) =$$
$$-EI_y\left[-\frac{\lambda_2^2}{\ell^2}A_1 \sin\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right) - \frac{\lambda_2^2}{\ell^2}A_2 \cos\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right) + \frac{\lambda_1^2}{\ell^2}A_3 \operatorname{sh}\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right) + \frac{\lambda_1^2}{\ell^2}A_4 \operatorname{ch}\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right)\right]$$
$$-EI_y\frac{\mu\,\omega^2}{k_T G A}\left[A_1 \sin\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right) + A_2 \cos\left(\lambda_2\frac{x}{\ell}\right) + A_3 \operatorname{sh}\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right) + A_4 \operatorname{ch}\left(\lambda_1\frac{x}{\ell}\right)\right]$$

$$M_y(\xi) = EI_y s_{12} A_1 \sin\left(\lambda_2 \frac{x}{\ell}\right) + EI_y s_{12} A_2 \cos\left(\lambda_2 \frac{x}{\ell}\right) - \\ EI_y s_{22} A_3 \,\mathrm{sh}\left(\lambda_1 \frac{x}{\ell}\right) - EI_y s_{22} A_4 \,\mathrm{ch}\left(\lambda_1 \frac{x}{\ell}\right) \tag{4.40}$$

Avaldistes (4.39) ja (4.40) on kasutatud tähistusi

$$\begin{aligned} s_{11} &= \theta^3 - \chi\frac{\beta^4}{\ell^2}\theta + \iota\frac{\beta^4}{\ell^2}s_1, \qquad s_{12} = \theta^2 - \chi\frac{\beta^4}{\ell^2} \\ s_{21} &= \upsilon^3 + \chi\frac{\beta^4}{\ell^2}\upsilon - \iota\frac{\beta^4}{\ell^2}s_2, \qquad s_{22} = \upsilon^2 + \chi\frac{\beta^4}{\ell^2} \end{aligned} \tag{4.41}$$

4.1.3 Timošenko tala ülekandemaatriks

Esitame diferentsiaalvõrrandi lahendid (4.31), (4.35), (4.39) ja (4.40) maatrikskujul

$$\mathbf{Z}_\xi = \mathbf{B}_\xi \mathbf{A} \tag{4.42}$$

kus olekuparameetrite vektor $\mathbf{Z}_\xi$ ja konstantidest $\mathbf{A_i}$ moodustatud vektor $\mathbf{A}$ avalduvad moel

$$\mathbf{Z}_\xi = \begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ Q_z \\ M_y \end{bmatrix}_\xi, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

ning maatriks $\mathbf{B}_\xi$ kujul

$$\mathbf{B}_\xi = \begin{bmatrix} \sin(\lambda_2\xi) & \cos(\lambda_2\xi)) & \mathrm{sh}(\lambda_1\xi)) & \mathrm{ch}(\lambda_1\xi) \\ s_1\cos(\lambda_2\xi) & -s_1\sin(\lambda_2\xi) & s_2\mathrm{ch}(\lambda_1\xi) & s_2\mathrm{sh}(\lambda_1\xi) \\ \Xi s_{11}\cos(\lambda_1\xi) & -\Xi s_{11}\sin(\lambda_1\xi) & -\Xi s_{21}\mathrm{ch}(\lambda_2\xi) & -\Xi s_{21}\mathrm{sh}(\lambda_2\xi) \\ \Xi s_{12}\sin(\lambda_2\xi) & \Xi s_{12}\cos(\lambda_2\xi) & -\Xi s_{22}\mathrm{sh}(\lambda_1\xi) & -\Xi s_{22}\mathrm{ch}(\lambda_1\xi) \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

Siin on $\xi = x/\ell$ mõõduta koordinaat ja $\Xi = EJ_y$.

Kohal $\xi = 0$ tähistame olekuvektori $\mathbf{Z_{\xi=0}} = \mathbf{Z_A}$ ja maatriksi $\mathbf{B_{\xi=0}} = \mathbf{B_0}$, siis saab võrrand (4.42) kuju

$$\mathbf{Z_A} = \mathbf{B_0}\mathbf{A} \tag{4.45}$$

kus

$$\mathbf{B_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ s_1 & 0 & s_2 & 0 \\ \Xi s_{11} & 0 & -\Xi s_{21} & 0 \\ 0 & \Xi s_{12} & 0 & -\Xi s_{22} \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

Lahendame võrrandi (4.45) konstantide $\mathbf{A_i}$ suhtes:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B_0^{-1}}\mathbf{Z_A} \tag{4.47}$$

Võrrandisüsteem (4.45) poolitub kaheks võrrandisüsteemiks:

$$\begin{bmatrix} w \\ M_y \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \Xi s_{12} & -\Xi s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ A_4 \end{bmatrix}, \tag{4.48}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ Q_z \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ \Xi s_{11} & -\Xi s_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \end{bmatrix} \tag{4.49}$$

ehk

$$\begin{bmatrix} w \\ M_y \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} b_{12} & b_{14} \\ b_{42} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ A_4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \varphi \\ Q_z \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \end{bmatrix} \tag{4.50}$$

Võrranditest (4.50) leiame

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ A_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{b_{12}b_{44} - b_{14}b_{42}} \begin{bmatrix} b_{44} & -b_{14} \\ -b_{42} & b_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ M_y \end{bmatrix}_0 \tag{4.51}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31}} \begin{bmatrix} b_{33} & -b_{23} \\ -b_{31} & b_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ Q_z \end{bmatrix}_0 \tag{4.52}$$

Siin

$$b_{12}b_{44} - b_{14}b_{42} = -\Xi\left(s_{12} + s_{22}\right), \qquad b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31} = -\Xi\left(s_1 s_{21} + s_2 s_{11}\right) \tag{4.53}$$

Võrrandis (4.47) on nüüd maatriksiks $\mathbf{B_0^{-1}}$:

$$\mathbf{B_0^{-1}} = \begin{bmatrix} 0.0 & \dfrac{s_{21}}{s_1 s_{21} + s_2 s_{11}} & \dfrac{s_2}{\Xi\left(s_1 s_{21} + s_2 s_{11}\right)} & 0.0 \\ \dfrac{s_{22}}{s_{12} + s_{22}} & 0.0 & 0.0 & \dfrac{1}{\Xi\left(s_{22} + s_{12}\right)} \\ 0.0 & \dfrac{s_{11}}{s_1 s_{21} + s_2 s_{11}} & -\dfrac{s_1}{\Xi\left(s_1 s_{21} + s_2 s_{11}\right)} & 0.0 \\ \dfrac{s_{12}}{s_{12} + s_{22}} & 0.0 & 0.0 & -\dfrac{1}{\Xi\left(s_{22} + s_{12}\right)} \end{bmatrix} \tag{4.54}$$

Asetame leitud konstandid $\mathbf{A}$ (4.47) võrrandisse (4.42):

$$\mathbf{Z}_\xi = \mathbf{B}_\xi \mathbf{B_0^{-1}} \mathbf{Z_A} = \mathbf{U}_\xi^* \mathbf{Z_A} \tag{4.55}$$

kus $\mathbf{U}_\xi^*$ on ülekandemaatriks esimese märgikokkuleppe järgi.

$$\mathbf{U}_\xi^* = \mathbf{B}_\xi \mathbf{B_0^{-1}} \tag{4.56}$$

Ülekandemaatriksi $\mathbf{U}_\xi^*$ element u_{ij}^* on maatriksi $\mathbf{B}_\xi$ i-nda rea ja maatriksi $\mathbf{B_0^{-1}}$ j-inda veeru vastavate elementide korrutiste summad.

$$\begin{bmatrix} b^{(0)}_{11} & b^{(0)}_{12} & b^{(0)}_{13} & b^{(0)}_{14} \\ b^{(0)}_{21} & b^{(0)}_{22} & b^{(0)}_{23} & b^{(0)}_{24} \\ b^{(0)}_{31} & b^{(0)}_{32} & b^{(0)}_{33} & b^{(0)}_{34} \\ b^{(0)}_{41} & b^{(0)}_{42} & b^{(0)}_{43} & b^{(0)}_{44} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_0^{-1}$$

$$\overset{\mathbf{B}_\xi}{\begin{bmatrix} b^{(\xi)}_{11} & b^{(\xi)}_{12} & b^{(\xi)}_{13} & b^{(\xi)}_{14} \\ b^{(\xi)}_{21} & b^{(\xi)}_{22} & b^{(\xi)}_{23} & b^{(\xi)}_{24} \\ b^{(\xi)}_{31} & b^{(\xi)}_{32} & b^{(\xi)}_{33} & b^{(\xi)}_{34} \\ b^{(\xi)}_{41} & b^{(\xi)}_{42} & b^{(\xi)}_{43} & b^{(\xi)}_{44} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} u^*_{11} & u^*_{12} & u^*_{13} & u^*_{14} \\ u^*_{21} & u^*_{22} & u^*_{23} & u^*_{24} \\ u^*_{31} & u^*_{32} & u^*_{33} & u^*_{i4} \\ u^*_{41} & u^*_{42} & u^*_{43} & u^*_{44} \end{bmatrix} = \mathbf{U}^*_\xi$$

kus maatriksi element u^*_{ij} avaldub

$$u^*_{ij} = b^{(\xi)}_{i1} b^{(0)}_{1j} + b^{(\xi)}_{i2} b^{(0)}_{2j} + b^{(\xi)}_{i3} b^{(0)}_{3j} + \ldots + b^{(\xi)}_{in} b^{(0)}_{nj} \tag{4.57}$$

Ülekandemaatriksi $\mathbf{U}^*_\xi$ elemendid u^*_{ij} (4.57) on leitud vastavalt parema käe teljestikule (jn A.1) ja esimesele märgikokkuleppele (jn A.2).

$$\begin{aligned}
u^*_{11} &= \frac{1}{s_{12} + s_{22}} \left[s_{12} \mathrm{ch}\,(\lambda_1 \xi) + s_{22} \cos\,(\lambda_2 \xi) \right] \\
u^*_{12} &= \frac{1}{s_1 s_{21} + s_2 s_{11}} \left[s_{11} \mathrm{sh}\,(\lambda_1 \xi) + s_{21} \sin\,(\lambda_2 \xi) \right] \\
u^*_{13} &= -\frac{1}{EI_y\,(s_1 s_{21} + s_2 s_{11})} \left[s_1 \mathrm{sh}\,(\lambda_1 \xi) - s_2 \sin\,(\lambda_2 \xi) \right] \\
u^*_{14} &= -\frac{1}{EI_y\,(s_{12} + s_{22})} \left[\mathrm{ch}\,(\lambda_1 \xi) - \cos\,(\lambda_2 \xi) \right] \\
u^*_{21} &= \frac{1}{s_{12} + s_{22}} \left[s_2 s_{12} \mathrm{sh}\,(\lambda_1 \xi) - s_1 s_{22} \sin\,(\lambda_2 \xi) \right] \\
u^*_{22} &= \frac{1}{s_1 s_{21} + s_2 s_{11}} \left[s_2 s_{11} \mathrm{ch}\,(\lambda_1 \xi) + s_1 s_{21} \cos\,(\lambda_2 \xi) \right] \\
u^*_{23} &= -\frac{s_1 s_2}{EI_y\,(s_1 s_{21} + s_2 s_{11})} \left[\mathrm{ch}\,(\lambda_1 \xi) - \cos\,(\lambda_2 \xi) \right] \\
u^*_{24} &= -\frac{1}{EI_y\,(s_{12} + s_{22})} \left[s_2 \mathrm{sh}\,(\lambda_1 \xi) + s_1 \sin\,(\lambda_2 \xi) \right] \\
u^*_{31} &= -\frac{EI_y}{s_{12} + s_{22}} \left[s_{12} s_{21} \mathrm{sh}\,(\lambda_1 \xi) + s_{11} s_{22} \sin\,(\lambda_2 \xi) \right] \\
u^*_{32} &= \frac{EI_y s_{11} s_{21}}{s_1 s_{21} + s_2 s_{11}} \left[-\mathrm{ch}\,(\lambda_1 \xi) + \cos\,(\lambda_2 \xi) \right]
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$
\begin{aligned}
u_{33}^* &= \frac{1}{s_1 s_{21} + s_2 s_{11}} \left[s_1 s_{21} \mathrm{ch}\,(\lambda_1 \xi) + s_2 s_{11} \cos(\lambda_2 \xi) \right] \\
u_{34}^* &= \frac{1}{s_{12} + s_{22}} \left[s_{21} \mathrm{sh}\,(\lambda_1 \xi) - s_{11} \sin(\lambda_2 \xi) \right] \\
u_{41}^* &= \frac{EI_y s_{12} s_{22}}{s_{12} + s_{22}} \left[-\mathrm{ch}\,(\lambda_1 \xi) + \cos(\lambda_2 \xi) \right] \\
u_{42}^* &= \frac{EI_y}{s_1 s_{21} + s_2 s_{11}} \left[-s_{11} s_{22} \mathrm{sh}\,(\lambda_1 \xi) + s_{12} s_{21} \sin(\lambda_2 \xi) \right] \\
u_{43}^* &= \frac{1}{s_1 s_{21} + s_2 s_{11}} \left[s_1 s_{22} \mathrm{sh}\,(\lambda_1 \xi) + s_2 s_{12} \sin(\lambda_2 \xi) \right] \\
u_{44}^* &= \frac{1}{s_{12} + s_{22}} \left[s_{22} \mathrm{ch}\,(\lambda_1 \xi) + s_{12} \cos(\lambda_2 \xi) \right]
\end{aligned}
$$

Varrassüsteemi sõlme tasakaalutingimuste kirjeldamisel on arvutustehnilistel põhjustel kasutusel teine märgikokkulepe (jn A.2). Sel juhul on tala algul põikjõu Q_{zA} ja paindemomendi M_{yA} märgid vastupidised esimese märgikokkuleppe kohastele.

Ülekandemaatriksi $\mathbf{U}_\xi$ elemendid u_{i3} ja u_{i4} saab teise märgikokkuleppe puhul maatriksi elementidest u_{i3}^* ja u_{i4}^* (4.58).

$$
u_{i3} = -u_{i3}^*\,, \quad u_{i4} = -u_{i4}^* \quad (i = 1,\,2,\,3,\,4)
$$

$$
\begin{aligned}
u_{11} &= \frac{1}{s_{12} + s_{22}} \left[s_{12} \mathrm{ch}\,(\lambda_1 \xi) + s_{22} \cos(\lambda_2 \xi) \right] \\
u_{12} &= \frac{1}{s_1 s_{21} + s_2 s_{11}} \left[s_{11} \mathrm{sh}\,(\lambda_1 \xi) + s_{21} \sin(\lambda_2 \xi) \right] \\
u_{13} &= \frac{1}{EI_y\,(s_1 s_{21} + s_2 s_{11})} \left[s_1 \mathrm{sh}\,(\lambda_1 \xi) - s_2 \sin(\lambda_2 \xi) \right] \\
u_{14} &= \frac{1}{EI_y\,(s_{12} + s_{22})} \left[\mathrm{ch}\,(\lambda_1 \xi) - \cos(\lambda_2 \xi) \right] \\
u_{21} &= \frac{1}{s_{12} + s_{22}} \left[s_2 s_{12} \mathrm{sh}\,(\lambda_1 \xi) - s_1 s_{22} \sin(\lambda_2 \xi) \right] \\
u_{22} &= \frac{1}{s_1 s_{21} + s_2 s_{11}} \left[s_2 s_{11} \mathrm{ch}\,(\lambda_1 \xi) + s_1 s_{21} \cos(\lambda_2 \xi) \right] \\
u_{23} &= \frac{s_1 s_2}{EI_y\,(s_1 s_{21} + s_2 s_{11})} \left[\mathrm{ch}\,(\lambda_1 \xi) - \cos(\lambda_2 \xi) \right] \\
u_{24} &= \frac{1}{EI_y\,(s_{12} + s_{22})} \left[s_2 \mathrm{sh}\,(\lambda_1 \xi) + s_1 \sin(\lambda_2 \xi) \right] \\
u_{31} &= -\frac{EI_y}{s_{12} + s_{22}} \left[s_{12} s_{21} \mathrm{sh}\,(\lambda_1 \xi) + s_{11} s_{22} \sin(\lambda_2 \xi) \right] \\
u_{32} &= \frac{EI_y s_{11} s_{21}}{s_1 s_{21} + s_2 s_{11}} \left[-\mathrm{ch}\,(\lambda_1 \xi) + \cos(\lambda_2 \xi) \right]
\end{aligned}
\tag{4.59}
$$

$$\begin{aligned}
u_{33} &= -\frac{1}{s_1 s_{21} + s_2 s_{11}}\left[s_1 s_{21}\mathrm{ch}\,(\lambda_1\xi) + s_2 s_{11}\cos\,(\lambda_2\xi)\right]\\
u_{34} &= -\frac{1}{s_{12} + s_{22}}\left[s_{21}\mathrm{sh}\,(\lambda_1\xi) - s_{11}\sin\,(\lambda_2\xi)\right]\\
u_{41} &= \frac{EI_y s_{12} s_{22}}{s_{12} + s_{22}}\left[-\mathrm{ch}\,(\lambda_1\xi) + \cos\,(\lambda_2\xi)\right]\\
u_{42} &= \frac{EI_y}{s_1 s_{21} + s_2 s_{11}}\left[-s_{11} s_{22}\mathrm{sh}\,(\lambda_1\xi) + s_{12} s_{21}\sin\,(\lambda_2\xi)\right]\\
u_{43} &= -\frac{1}{s_1 s_{21} + s_2 s_{11}}\left[s_1 s_{22}\mathrm{sh}\,(\lambda_1\xi) + s_2 s_{12}\sin\,(\lambda_2\xi)\right]\\
u_{44} &= -\frac{1}{s_{12} + s_{22}}\left[s_{22}\mathrm{ch}\,(\lambda_1\xi) + s_{12}\cos\,(\lambda_2\xi)\right]
\end{aligned}$$

Algparameetrite meetodi (sks Methode der Anfangsparameter, ingl method of initial parameters, vn метод начальных параметров) maatriksvõrrandi kuju on

$$\mathbf{Z}_\xi = \mathbf{U}_\xi \cdot \mathbf{Z_A} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{4.60}$$

kus $\mathbf{Z_A}$, $\mathbf{Z}_\xi$ on olekuparameetrite vektor tala alguses ja kaugusel $\xi = x/\ell$;

$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ – koormusvektor;

$\mathbf{U}_\xi$ – ülekandemaatriks, mis arvutatakse GNU Octave'i funktsiooniga TimtalaylekM.m.

4.1.4 Timošenko tala põhivõrrandid

Tala painde põhivõrrandid saab teise märgikokkuleppe puhul kirjutada võrrandisüsteemina

$$\mathbf{U_{\xi=1}} \cdot \mathbf{Z_A} - \mathbf{I_{4\times4}} \cdot \mathbf{Z_L} = -\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{4.61}$$

Lühemalt,

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times8} \cdot \widehat{\mathbf{Z}} = -\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{4.62}$$

Siin $\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times8}$ on laiendatud ülekandemaatriks $(U_{4\times4} \mid -I_{4\times4})$:

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times8} = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & -1 & 0 & 0 & 0\\
u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & 0 & -1 & 0 & 0\\
u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{i4} & 0 & 0 & -1 & 0\\
u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right] \tag{4.63}$$

ning

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \left[\begin{array}{c}\mathbf{Z_A}\\ \mathbf{Z_L}\end{array}\right] \tag{4.64}$$

kus

$$\mathbf{Z_L} = \begin{bmatrix} w(\xi) \\ \varphi_y(\xi) \\ Q(\xi) \\ M(\xi) \end{bmatrix}_{\xi=\mathbf{1}}, \qquad \mathbf{Z_A} = \begin{bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \\ Q_\circ \\ M_\circ \end{bmatrix}_{\mathbf{A}} \tag{4.65}$$

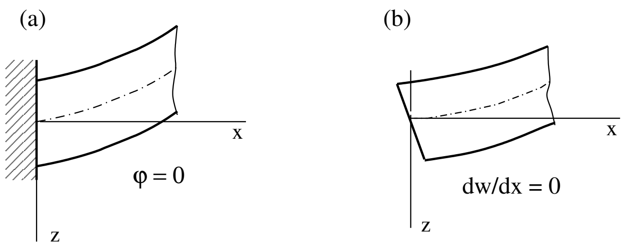
Siin $\xi = x/\ell$, kus ℓ on tala elemendi pikkus.

Laiendatud ülekandemaatriksi $\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8}$ saab arvutada GNU Octave'i funktsiooniga sptalaylekTimM.m.

Tala ülekandevõrranditele (4.62) lisame rajatingimused. Timošenko tala teoorias tuleb vahet teha toetingimustel

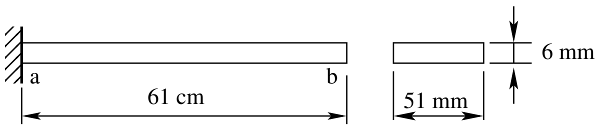
$$\varphi = 0, \qquad dw/dx = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{Q_z}{k_T GA} \tag{4.66}$$

Toetingimuste erinevust selgitab joonis 4.3.



Joonis 4.3. Toetingimusi Timošenko talal

Näide 4.1 (Timošenko konsooltala omavõnkumine). Leida joonisel 4.4 kujutatud konsooltala omavõnkesagedused ja -vormid.



Joonis 4.4. Timošenko konsooltala

Andmed. Konsooltala pikkus $\ell = 61\,\mathrm{cm}$, ristlõike kõrgus $h = 6\,\mathrm{mm}$, ristlõike laius $b = 51\,\mathrm{mm}$, elastsusmoodul $E = 210\,\mathrm{GN/m^2}$, materjali tihedus $\rho = 7.80 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

Lahendus. Omavõnkesageduste arvutamiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{4.67}$$

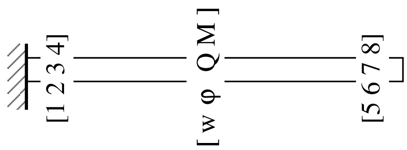
kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor:

$$\mathbf{Z} = \widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a} \\ \mathbf{Z_b} \end{bmatrix} \tag{4.68}$$

Vektori komponentideks on siirded, paindenurgad, põikjõud ja paindemomendid konsooltala ab alguses ja lõpus:

$$\mathbf{Z_a} = \begin{bmatrix} w_A^{(ab)} \\ \varphi_A^{(ab)} \\ Q_A^{(ab)} \\ M_A^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(1) \\ Z\,(2) \\ Z\,(3) \\ Z\,(4) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b} = \begin{bmatrix} w_L^{(ab)} \\ \varphi_L^{(ab)} \\ Q_L^{(ab)} \\ M_L^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(5) \\ Z\,(6) \\ Z\,(7) \\ Z\,(8) \end{bmatrix} \tag{4.69}$$

Muutujate $Z\,(i)$ (i = 1, 2, ..., 8) järjenumbrid on toodud joonisel 4.5.



Joonis 4.5. Timošenko konsooltala muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (4.67) neli esimest võrrandit on põhivõrrandid (4.61). Ülejäänud neli võrrandit saame rajatingimustest:

$$\begin{array}{rcccl} Z\,(1) & = & w_A^{(ab)} & = & 0 \\ Z\,(2) & = & \varphi_A^{(ab)} & = & 0 \\ Z\,(7) & = & Q_L^{(ab)} & = & 0 \\ Z\,(8) & = & M_L^{(ab)} & = & 0 \end{array} \tag{4.70}$$

GNU Octave'i programmiga NaideTimKonsool1.m leiame hõreda võrrandisüsteemi (4.67) determinandi nullid. Konsooltala (4.67) esimesed kuus omavõnkesagedust: $\omega_1 = 8.998488 \times 10\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 5.636406 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 1.576924 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 3.086469 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_5 = 5.094309 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_6 = 7.595669 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$.

Euleri-Bernoulli tala teoorias vaatlesime omavõnkesageduste ω_i (3.15) ja sagedusvõrrandi mõõduta juurte λ_i [Kis64, lk 110] vahelist seost (3.72). Timošenko teoorias väljendub omavõnkesageduste ω_i ja sagedusvõrrandi mõõduta juurte λ_i vaheline seos järgmiselt:

$$\lambda_i = \sqrt{\omega_i} \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{1/4} \ell \tag{4.71}$$

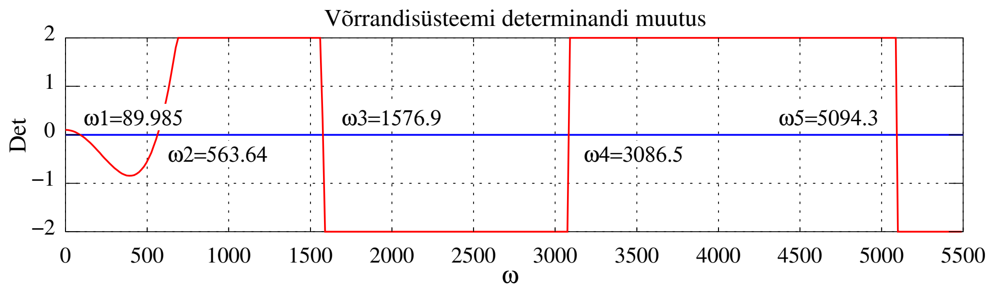
Leitud omavõnkesagedused ω_i teisendame sagedusvõrrandi mõõduta juurteks λ_i: $\lambda_1 = 1.875025$, $\lambda_2 = 4.692706$, $\lambda_3 = 7.849239$, $\lambda_4 = 10.981286$, $\lambda_5 = 14.107981$, $\lambda_6 = 17.226825$.

Tabelis 4.1 on toodud EST-meetodiga leitud Timošenko konsooltala sagedusvõrrandi mõõduta juured. Need ühtivad spektraalelementide meetodi [Mal13, lk 50] abil leitutega. Tala kõrguse h ja pikkuse ℓ suhe $h/\ell = 0.01$.

Tabel 4.1. Timošenko konsooltala sagedusvõrrandi mõõduta juured

Omavõnke-sagedus	EST-meetod		
	Timošenko teooria		Bernoulli teooria
	ω $\left[s^{-1}\right]$	λ	λ
1.	89.98488	1.87503	1.87510
2.	563.64063	4.69271	4.69409
3.	1576.92364	7.84924	7.85476
4.	3086.46934	10.98129	10.99554
5.	5094.30876	14.10798	14.13717
6.	7595.66889	17.22683	17.27876

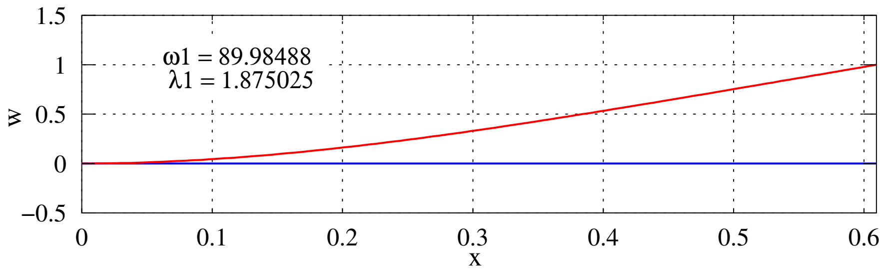
Võrrandisüsteemi (4.67) determinandi sõltuvus nurksagedusest ω selgub jooniselt 4.6.



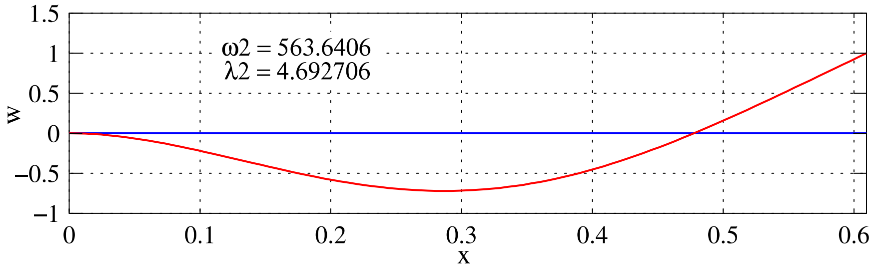
Joonis 4.6. Timošenko konsooltala omavõnkesagedused

Omavõnkevormid sagedustel $\omega_1 = 8.998488 \times 10\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 5.636406 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 1.576924 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 3.086469 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$ leiame vastavalt GNU Octave'i programmidega NaideTimKonsool1w1.m, NaideTimKonsool1w2.m, NaideTimKonsool1w3.m ning NaideTimKonsool1w4.m. Võrrandisüsteemis (4.67) viime viienda veeru paremale poolele. Pärast hõreda võrrandisüsteemi lahendamist vähimruutude meetodiga valime lahendist algparameetrid.

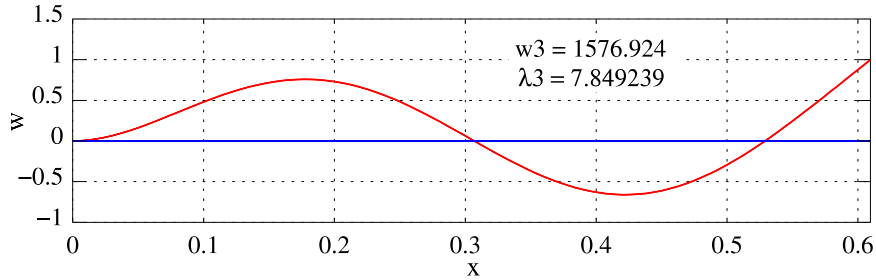
Timošenko konsooltala omavõnkevormid toome joonisel 4.7.



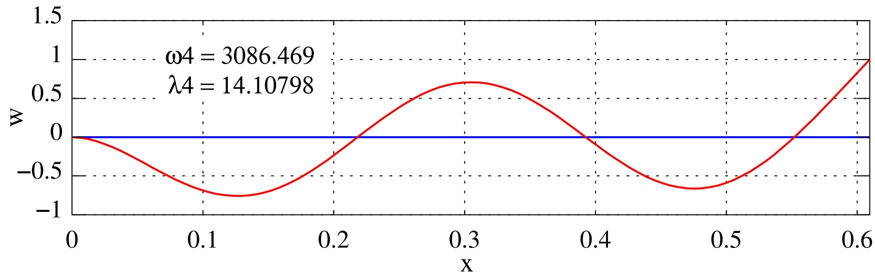
(a) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_1 = 8.9985 \times 10\,\mathrm{s}^{-1}$



(b) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_2 = 5.6364 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$



(c) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_3 = 1.5769 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$

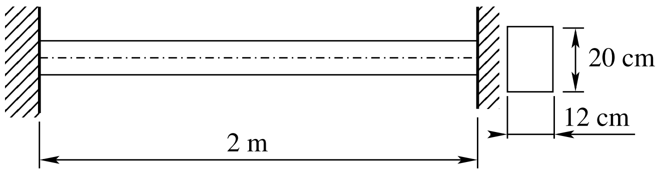


(d) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_4 = 3.0865 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$

Joonis 4.7. Timošenko konsooltala omavõnkevormid

Näide 4.2 (jäikade tugedega Timošenko tala omavõnkumine). Leida joonisel 4.8 kujutatud jäikade tugedega tala omavõnkesagedused ja -vormid Timošenko teooria abil.

Andmed. Tala pikkus $\ell = 2\,\mathrm{m}$, ristlõike kõrgus $h = 20\,\mathrm{cm}$, ristlõike laius $b = 12\,\mathrm{cm}$, elastsusmoodul $E = 210\,\mathrm{GN/m^2}$, materjali tihedus $\rho = 7.80 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.



Joonis 4.8. Jäikade tugedega Timošenko tala

Lahendus. Omavõnkesageduste arvutamiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{4.72}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor:

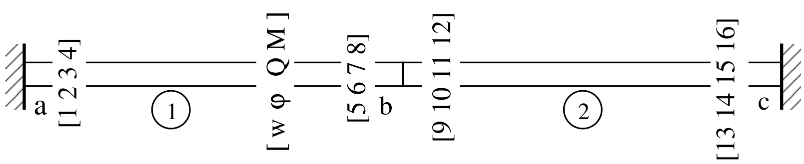
$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a^{(1)}} \\ \mathbf{Z_b^{(1)}} \\ \mathbf{Z_b^{(2)}} \\ \mathbf{Z_c^{(2)}} \end{bmatrix} \tag{4.73}$$

Vektori komponentideks on siirded, paindenurgad, põikjõud ja paindemomendid tala elementide ab ja bc alguses ning lõpus (jn 4.9):

$$\mathbf{Z_a^{(1)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(ab)} \\ \varphi_A^{(ab)} \\ Q_A^{(ab)} \\ M_A^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(1) \\ Z\,(2) \\ Z\,(3) \\ Z\,(4) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b^{(1)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(ab)} \\ \varphi_L^{(ab)} \\ Q_L^{(ab)} \\ M_L^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(5) \\ Z\,(6) \\ Z\,(7) \\ Z\,(8) \end{bmatrix} \tag{4.74}$$

$$\mathbf{Z_b^{(2)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(bc)} \\ \varphi_A^{(bc)} \\ Q_A^{(bc)} \\ M_A^{(bc)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(9) \\ Z\,(10) \\ Z\,(11) \\ Z\,(12) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_c^{(2)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(bc)} \\ \varphi_L^{(bc)} \\ Q_L^{(bc)} \\ M_L^{(bc)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(13) \\ Z\,(14) \\ Z\,(15) \\ Z\,(16) \end{bmatrix} \tag{4.75}$$

Muutujate $Z\,(i)$ (i = 1, 2, ..., 16) järjenumbrid on joonisel 4.9.



Joonis 4.9. Jäikade tugedega Timošenko tala muutujate järjenumbrid

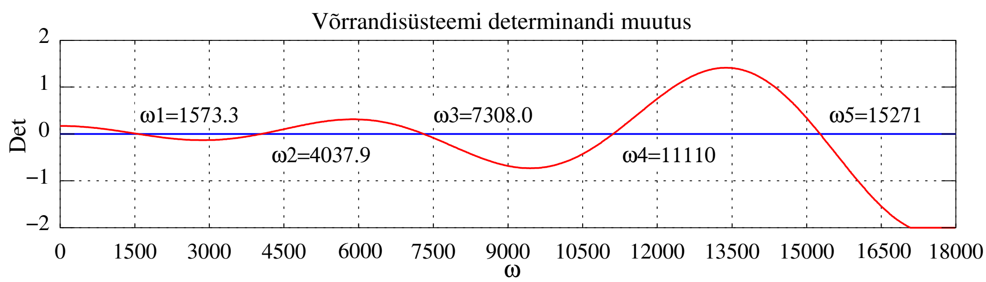
Võrrandisüsteemi (4.72) kaheksa esimest võrrandit on põhivõrrandid (4.61). Lisanduvad sõlme b pidevus- ja tasakaaluvõrrandid

$$\begin{array}{rclcrcl} Z(5)-Z(9) & = & w_L^{(ab)} & - & w_A^{(bc)} & = & 0 \\ Z(6)-Z(10) & = & \varphi_L^{(ab)} & - & \varphi_A^{(bc)} & = & 0 \\ Z(7)+Z(11) & = & Q_L^{(ab)} & + & Q_A^{(bc)} & = & 0 \\ Z(8)+Z(12) & = & M_L^{(ab)} & + & M_A^{(bc)} & = & 0 \end{array} \tag{4.76}$$

Ülejaanud neli võrrandit saame toetingimustest

$$\begin{array}{rclcl} Z(1) & = & w_A^{(ab)} & = & 0 \\ Z(2) & = & \varphi_A^{(ab)} & = & 0 \\ Z(13) & = & w_L^{(bc)} & = & 0 \\ Z(14) & = & \varphi_L^{(bc)} & = & 0 \end{array} \tag{4.77}$$

GNU Octave'i programmiga NaideTimTala1.m leiame hõreda võrrandisüsteemi (4.72) determinandi nullid. Jäikade tugedega Timošenko tala (4.8) esimesed kuus omavõnkesagedust: $\omega_1 = 1.573268693\times10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 4.037856679\times10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 7.307952251\times10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 1.1109951442\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_5 = 1.5271053105\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_6 = 1.9675877960\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$. Võrrandisüsteemi (4.72) determinandi sõltuvus nurksagedusest ω avaldub joonisel 4.10.



Joonis 4.10. Jäikade tugedega Timošenko tala omavõnkesagedused

Omavõnkesageduste ω_i ja sagedusvõrrandi mõõduta juurte λ_i vaheline seos Timošenko teooria järgi:

$$\lambda_i = \sqrt{\omega_i}\left(\frac{\rho A}{EI}\right)^{1/4}\ell \tag{4.78}$$

Leitud omavõnkesagedused ω_i teisendame sagedusvõrrandi mõõduta juurteks λ_i: $\lambda_1 = 4.583324$, $\lambda_2 = 7.342680$, $\lambda_3 = 9.878181$, $\lambda_4 = 12.179661$, $\lambda_5 = 14.279521$, $\lambda_6 = 16.208626$.

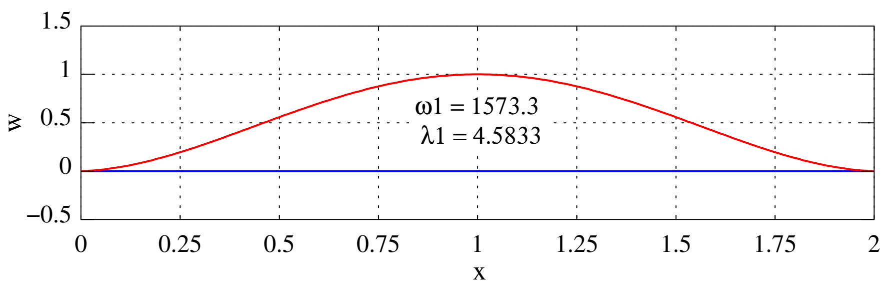
Tabelis 4.2 on toodud EST-meetodiga leitud jäikade tugedega Timošenko tala sagedusvõrrandi mõõduta juured. Need ühtivad spektraalelementide meetodi [Mal13, lk 47] ja pseudospektraalmeetodi [LS04, lk 614] abil leitutega. Tala kõrguse h ja pikkuse ℓ suhe $h/\ell = 0.1$.

Tabel 4.2. Jäikade tugedega Timošenko tala sagedusvõrrandi mõõduta juured

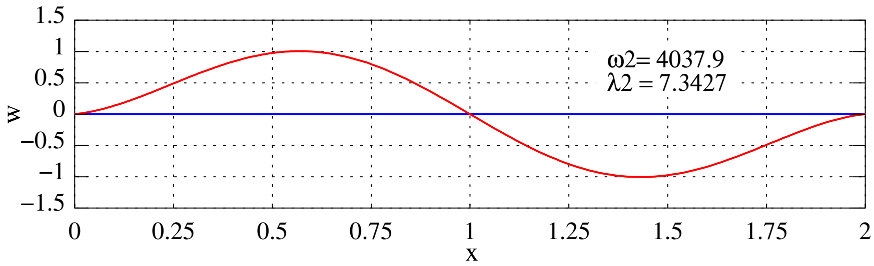
Omavõnke-sagedus	EST-meetod		
	Timošenko teooria		Bernoulli teooria
	ω $\left[s^{-1}\right]$	λ	λ
1.	1573.3	4.5833	4.7300
2.	4037.9	7.3427	7.8532
3.	7308.0	9.8782	10.9956
4.	11110.0	12.1800	14.1372
5.	15271.0	14.2800	17.2788
6.	19675.9	16.2086	20.4204

Omavõnkevormid sagedustel $\omega_1 = 1.573268693 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 4.037856679 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 7.307952251 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$ ja $\omega_4 = 1.1109951442 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$ leiame vastavalt GNU Octave'i programmidega NaideTimTala1w1.m, NaideTimTala1w2.m, NaideTimTala1w3.m ning NaideTimTala1w4.m. Nimetatud programmides on tala pikkusega $\ell = 2\,\mathrm{m}$ jagatud kaheks elemendiks. Elementide pikkuseks on vastavalt omavõnkesagedusele valitud (1.0 + 1.0) m, (0.6 + 1.4) m, (0.4 + 1.6) m ja (0.3 + 1.7) m. Vaadeldavais neljas võrrandisüsteemis (4.67) viime viienda, s.t tundmatu $Z(5)$ veeru paremale poolele ja võrdsustame ühega. Lahendanud hõreda võrrandisüsteemi vähimruutude meetodiga, valime lahendist algparameetrid.

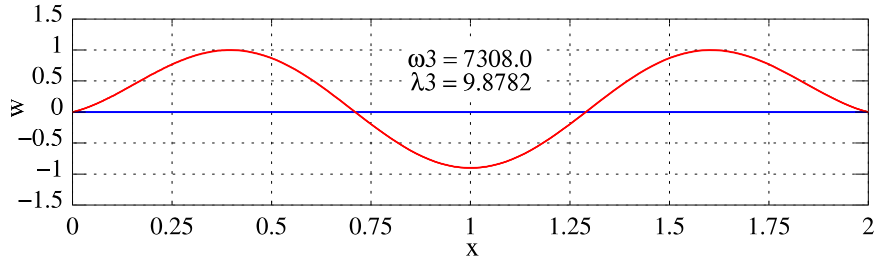
Omavõnkevormid esitame joonisel 4.11.



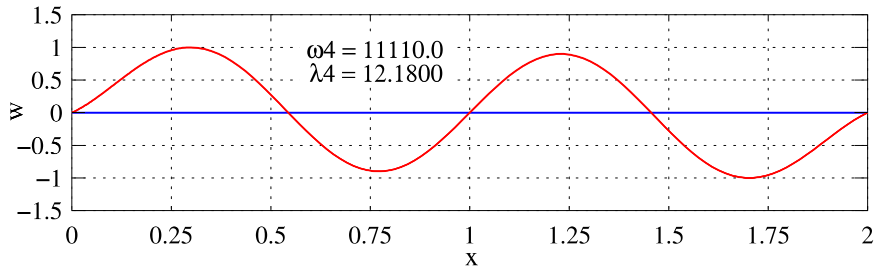
(a) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_1 = 1.5733 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$



(b) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_2 = 4.0379 \times 10^3\ \mathrm{s}^{-1}$



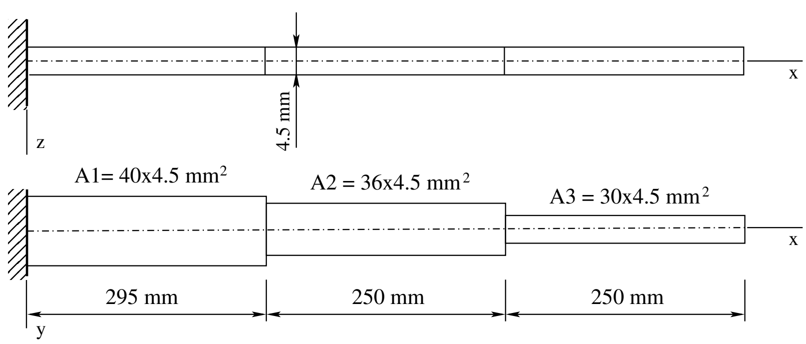
(c) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_3 = 7.3080 \times 10^3\ \mathrm{s}^{-1}$



(d) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_4 = 1.1110 \times 10^4\ \mathrm{s}^{-1}$

Joonis 4.11. Jäikade tugedega Timošenko tala omavõnkevormid

Näide 4.3 (astmeliselt muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala omavõnkumine). Leida Timošenko teooria abil joonisel 4.12 kujutatud astmeliselt muutuva ristlõikega tala omavõnkesagedused ja -vormid tala lapiti- ja servitiasendis (ingl flap-wise, edge-wise).



Joonis 4.12. Astmeliselt muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala lapiti- ja servitiasendis

Andmed. Konsooltala pikkus $\ell = 795\,\mathrm{mm}$ ($\ell_1 = 295\,\mathrm{mm}$, $\ell_2 = 250\,\mathrm{mm}$, $\ell_3 = 250\,\mathrm{mm}$); ristlõigete kõrgused $h_1 = h_2 = h_3 = 4.5\,\mathrm{mm}$; ristlõigete laiused $b_1 = 40\,\mathrm{mm}$, $b_2 = 36\,\mathrm{mm}$, $b_3 = 30\,\mathrm{mm}$. Materjali elastsusmoodul $E = 206\,\mathrm{GPa}$, tihedus $\rho = 7.850 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3} s^{-1}$, Poissoni[3] tegur $\nu = 0.3$. Tala geomeetrilised mõõtmed ja materjali omadused on sarnased töös [Tar08, lk 40] kasutatutega. Nihkeelastsusmoodul $G = E/2(1+\nu) = 79.231\,\mathrm{GPa}$ ja kujutegur $k_T = (5+5\nu)/(6+5\nu) = 0.86667$ [Hut01].

Lahendus. Omavõnkesageduste arvutamiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{4.79}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a^{(1)}} \\ \mathbf{Z_b^{(1)}} \\ \mathbf{Z_b^{(2)}} \\ \mathbf{Z_c^{(2)}} \\ \mathbf{Z_c^{(3)}} \\ \mathbf{Z_d^{(3)}} \end{bmatrix} \tag{4.80}$$

Vektori komponentideks on siirded, paindenurgad, põikjõud ja paindemomendid tala elementide ab, bc, cd alguses ja lõpus (jn 4.13):

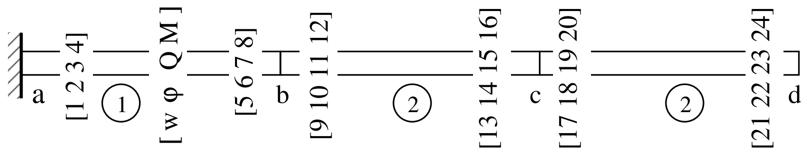
$$\mathbf{Z_a^{(1)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(ab)} \\ \varphi_A^{(ab)} \\ Q_A^{(ab)} \\ M_A^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(1) \\ Z\,(2) \\ Z\,(3) \\ Z\,(4) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b^{(1)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(ab)} \\ \varphi_L^{(ab)} \\ Q_L^{(ab)} \\ M_L^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(5) \\ Z\,(6) \\ Z\,(7) \\ Z\,(8) \end{bmatrix} \tag{4.81}$$

$$\mathbf{Z_b^{(2)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(bc)} \\ \varphi_A^{(bc)} \\ Q_A^{(bc)} \\ M_A^{(bc)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(9) \\ Z\,(10) \\ Z\,(11) \\ Z\,(12) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_c^{(2)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(bc)} \\ \varphi_L^{(bc)} \\ Q_L^{(bc)} \\ M_L^{(bc)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(13) \\ Z\,(14) \\ Z\,(15) \\ Z\,(16) \end{bmatrix} \tag{4.82}$$

$$\mathbf{Z_c^{(3)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(cd)} \\ \varphi_A^{(cd)} \\ Q_A^{(cd)} \\ M_A^{(cd)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(17) \\ Z\,(18) \\ Z\,(19) \\ Z\,(20) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_d^{(3)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(cd)} \\ \varphi_L^{(cd)} \\ Q_L^{(cd)} \\ M_L^{(cd)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(21) \\ Z\,(22) \\ Z\,(23) \\ Z\,(24) \end{bmatrix} \tag{4.83}$$

Muutujate $Z\,(i)$ (i = 1, 2, ..., 24) järjenumbrid on toodud joonisel 4.13.

[3] Siméon Denis Poisson (1781–1840), prantsuse füüsik ja matemaatik.



Joonis 4.13. Astmeliselt muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (4.79) kaksteist esimest võrrandit on põhivõrrandid (4.61). Need koostatakse GNU Octave'i programmidega NaideTimKonsool3det.m ja NaideTimKonsool3Srw15.m (vt programmi väljavõtet 4.1).

Väljavõte programmist 4.1 (NaideTimKonsool3Srdet.m)

```
spyleF1=sptalaylekTimM(baasi0,kT,l1,wf,mg,A1,Iy1,E,G); # hõreda laiendatud
ülekandemaatriksi arvutus
IIv=1;
IJv=1;
spAnull=spInsertBtoA(spAnull,IIv,IJv,spyleF1); # asetab ülekandemaatriksi
võrrandisüsteemi
spyleF2=sptalaylekTimM(baasi0,kT,l2,wf,mg,A2,Iy2,E,G);
IIv=5;
IJv=9;
spAnull=spInsertBtoA(spAnull,IIv,IJv,spyleF2);
spyleF3=sptalaylekTimM(baasi0,kT,l3,wf,mg,A3,Iy3,E,G);
IIv=9;
IJv=17;
spAnull=spInsertBtoA(spAnull,IIv,IJv,spyleF3);
```

Põhivõrranditele järgnevad sõlme b ja c pidevus- ja tasakaaluvõrrandid.

$$
\begin{array}{lclclcl}
\text{Sõlm b} & & & & & & \\
Z(5) - Z(9) & = & w_L^{(ab)} & - & w_A^{(bc)} & = & 0 \\
Z(6) - Z(10) & = & \varphi_L^{(ab)} & - & \varphi_A^{(bc)} & = & 0 \\
Z(7) + Z(11) & = & Q_L^{(ab)} & + & Q_A^{(bc)} & = & 0 \\
Z(8) + Z(12) & = & M_L^{(ab)} & + & M_A^{(bc)} & = & 0 \\
\text{Sõlm c} & & & & & & \\
Z(13) - Z(17) & = & w_L^{(bc)} & - & w_A^{(cd)} & = & 0 \\
Z(14) - Z(18) & = & \varphi_L^{(bc)} & - & \varphi_A^{(cd)} & = & 0 \\
Z(15) + Z(19) & = & Q_L^{(bc)} & + & Q_A^{(cd)} & = & 0 \\
Z(16) + Z(20) & = & M_L^{(bc)} & + & M_A^{(cd)} & = & 0
\end{array}
\tag{4.84}
$$

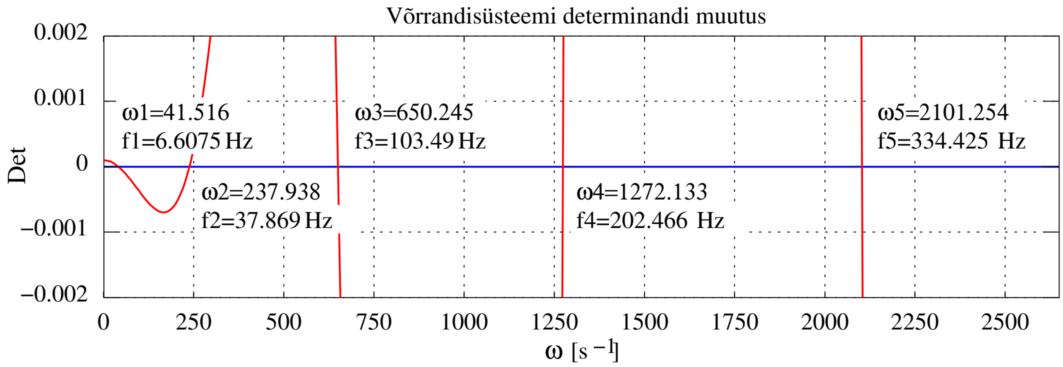
Ülejaanud neli võrrandit saame toetingimustest.

$$
\begin{array}{lclcl}
\text{Sõlm a} & & & & \\
Z(1) & = & w_A^{(ab)} & = & 0 \\
Z(2) & = & \varphi_A^{(ab)} & = & 0 \\
\text{Sõlm d} & & & & \\
Z(23) & = & Q_L^{(cd)} & = & 0 \\
Z(24) & = & M_L^{(cd)} & = & 0
\end{array}
\tag{4.85}
$$

Koostatud võrrandisüsteemis (4.79) on 24 võrrandit 24 tundmatuga, kus nullist erinevaid elemente on 80 (14%):

```
Compressed Column Sparse (rows = 24, cols = 24, nnz = 80 [14%])
```

GNU Octave'i programmiga NaideTimKonsool3det.m leiame võrrandisüsteemi (4.79) determinandi nullid, s.t astmeliselt muutuva ristlõikega lapitiasendis konsooltala omavõnkesagedused (jn 4.14).



Joonis 4.14. Astmeliselt muutuva ristlõikega lapitiasendis konsooltala omavõnkesagedused

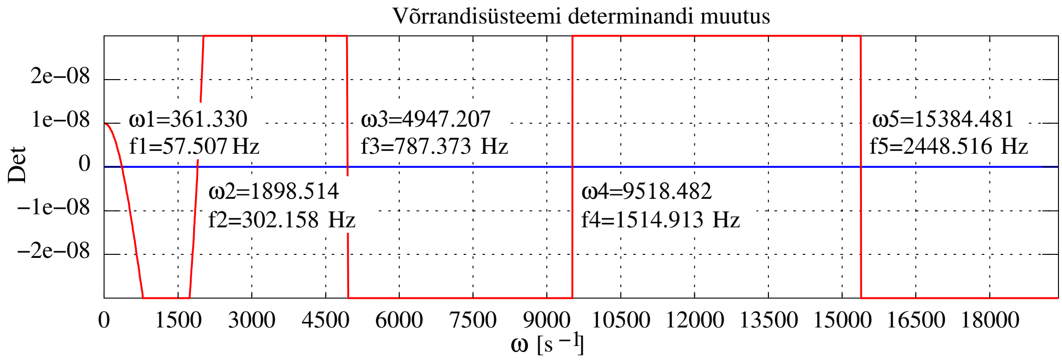
Tabelis 4.3 võrreldakse konsooltala omavõnkesageduste erinevusi, mis on arvutatud EST-meetodi ja programmi Siemens NX5[4] [Tar08, lk 63] abil.

Tabel 4.3. Astmeliselt muutuva ristlõikega lapitiasendis Timošenko konsooltala omavõnkesagedused

Omavõnke-sagedus	EST-meetod. Timošenko teooria			
	Sagedus $\omega\ [s^{-1}]$	Sagedus f [Hz]	Erinevus NX5st %	Erinevus katsest %
1.	41.516	6.6075	0.43	17.6
2.	237.938	37.869	0.40	6.31
3.	650.245	103.490	0.39	4.15
4.	1272.133	202.466	0.51	0.30
5.	2101.254	334.425	0.53	8.76
6.	3136.304	499.158		

[4]CAD/CAM/CAE, ruumiline element Nastran-SEMODES 103.

GNU Octave'i programmiga NaideTimKonsool3Srdet.m leiame astmeliselt muutuva ristlõikega servitiasendis konsooltala omavõnkesagedused (jn 4.15).



Joonis 4.15. Astmeliselt muutuva ristlõikega servitiasendis Timošenko konsooltala omavõnkesagedused

Tabelis 4.4 võrreldakse vaadeldava konsooltala omavõnkesageduste erinevusi EST-meetodi, LEM-programmi BEAMANALYSIS.m (Euleri-Bernoulli teooria) ja programmi Siemens NX5 abil arvutatuna [Tar08, lk 63].

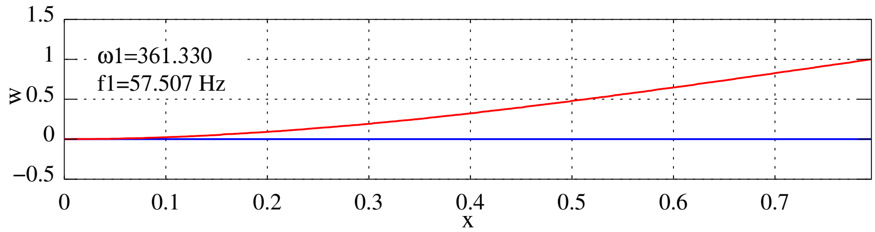
Tabel 4.4. Astmeliselt muutuva ristlõikega servitiasendis Timošenko konsooltala omavõnkesagedused

Omavõnke-sagedus	EST-meetod. Timošenko teooria			
	Sagedus ω $\left[s^{-1}\right]$	Sagedus f [Hz]	Erinevus LEMist %	Erinevus NX5st %
1.	361.330	57.507	0.20	0.075
2.	1898.514	302.158	0.11	0.085
3.	4947.207	787.373	2.44	0.175
4.	9518.482	1514.913	4.56	0.072
5.	15384.481	2448.516	6.85	0.062
6.	22266.878	3543.884		

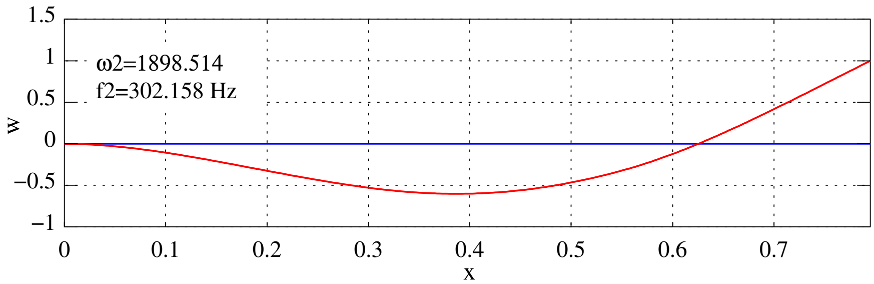
Astmeliselt muutuva ristlõikega servitiasendis konsooltala omavõnkevormide leidmisel on võrrandisüsteemi (4.79) determinandi väärtus null. Viime võrrandisüsteemi veeru 21 paremale poolele ja võrdsustame ühega. Lahendanud hõreda võrrandisüsteemi vähimruutude meetodiga, valime lahendist algparameetrid.

Tala omavõnkesagedusele vastava siirde leidmisel kasutame ülekandemaatriksit (GNU Octave'i funktsioon TimtalaylekM.m).

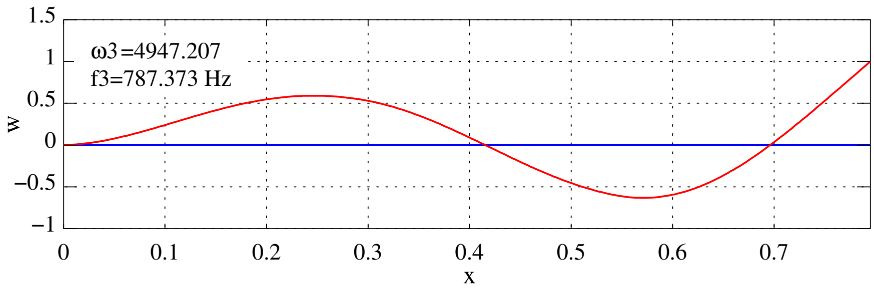
Valides GNU Octave'i programmis NaideTimKonsool3Srw15.m ühe omavõnkesagedustest $\omega_1 = 361.330\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 1898.514\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 4947.207\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 9518.482\,\mathrm{s}^{-1}$ või $\omega_5 = 15384.481\ \mathrm{s}^{-1}$, saame vastava omavõnkevormi (vt joonis 4.16).



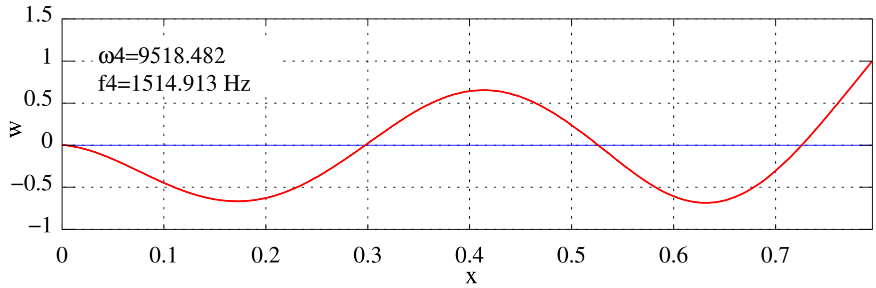
(a) Omavõnkevorm sagedusel $f_1 = 57.507\,\mathrm{Hz}$



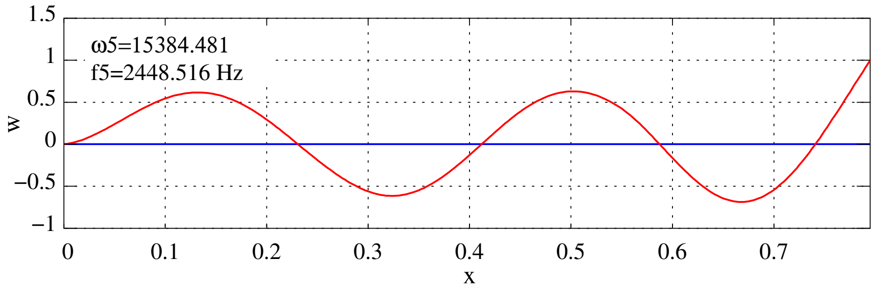
(b) Omavõnkevorm sagedusel $f_2 = 302.158\,\mathrm{Hz}$



(c) Omavõnkevorm sagedusel $f_3 = 787.373\,\mathrm{Hz}$



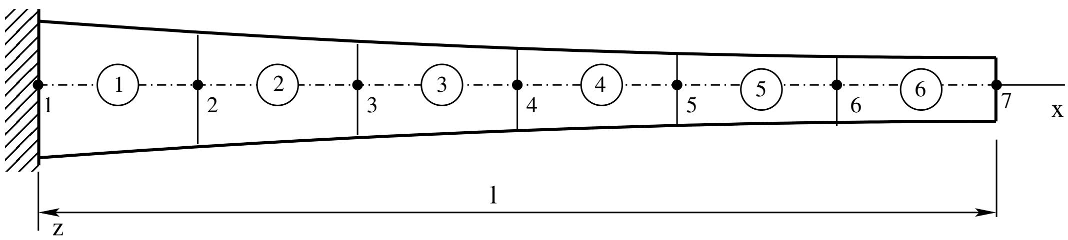
(d) Omavõnkevorm sagedusel $f_4 = 1514.913\,\mathrm{Hz}$



(e) Omavõnkevorm sagedusel $f_5 = 2448.516\,\mathrm{Hz}$

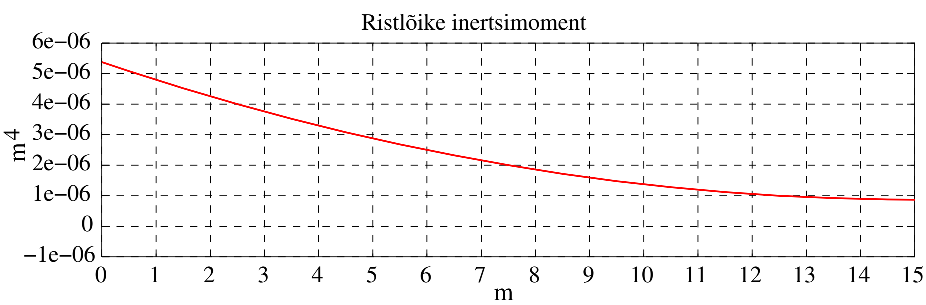
Joonis 4.16. Astmeliselt muutuva ristlõikega servitiasendis Timošenko konsooltala omavõnkevormid

Näide 4.4 (muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala omavõnkumine). Leida joonisel 4.17 kujutatud konsooltala omavõnkesagedused ja -vormid.



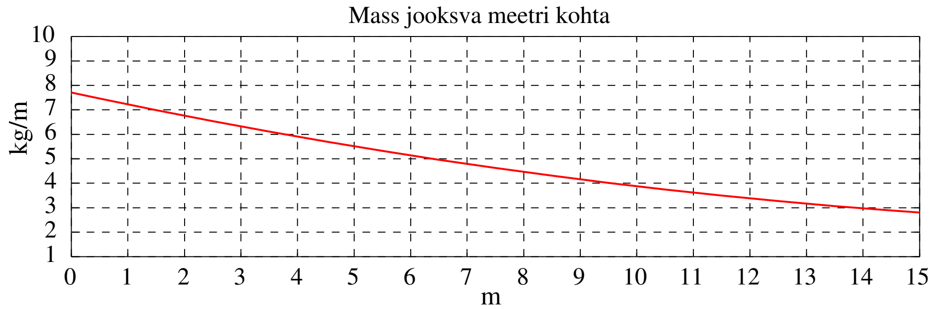
Joonis 4.17. Muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala

Andmed. Konsooltala pikkus $\ell = 15\,\mathrm{m}$. Konsooltala ristlõike inertsimomendi $Iy\,(x)$ muutumine tala pikiteljel on toodud joonusel 4.18 ja pikkusühiku kohta tuleva massi $\mu\,(x)$ muutumine on toodud joonusel 4.19. Olgu konsooltala valmistatud alumiiniumoksiidi nanokiust Saffil[5], mille elastsusmoodul $E = 300\,\mathrm{GPa}$, Poissoni tegur $\nu = 0.2$ ja materjali tihedus $\rho = 3.300 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$. Nihkeelastsusmooduli $G = E/2(1+\nu)$ ja kujuteguri $k_T = (6 + 12\nu + 6\nu^2)/(7 + 12\nu + 4\nu^2)$ [Hut01] arvutame.



Joonis 4.18. Ristlõike inertsimomendi muutus

[5] http://www.mse.mtu.edu/~drjohn/my4150/props.html (06.07.2017)



Joonis 4.19. Pikkusühiku kohta tuleva massi muutus

Lahendus. Omavõnkesageduste arvutamiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{4.86}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_1^{(1)}} \\ \mathbf{Z_2^{(1)}} \\ \mathbf{Z_2^{(2)}} \\ \mathbf{Z_3^{(2)}} \\ \mathbf{Z_3^{(3)}} \\ \mathbf{Z_4^{(3)}} \\ \vdots \\ \mathbf{Z_6^{(6)}} \\ \mathbf{Z_7^{(6)}} \end{bmatrix} \tag{4.87}$$

Vektori komponentideks on siirded, paindenurgad, põikjõud ja paindemomendid tala elementide $1, 2, ..., 48$ alguses ja lõpus (jn 4.20):

$$\mathbf{Z_1^{(1)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(1)} \\ \varphi_A^{(1)} \\ Q_A^{(1)} \\ M_A^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(1) \\ Z\,(2) \\ Z\,(3) \\ Z\,(4) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_2^{(1)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(1)} \\ \varphi_L^{(1)} \\ Q_L^{(1)} \\ M_L^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(5) \\ Z\,(6) \\ Z\,(7) \\ Z\,(8) \end{bmatrix} \tag{4.88}$$

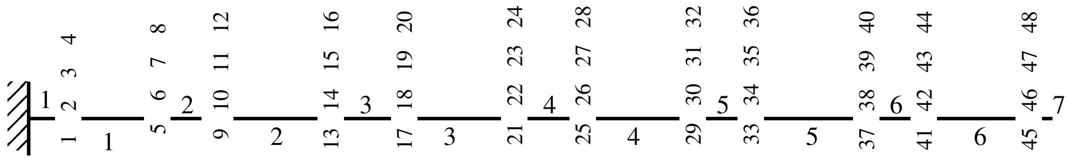
$$\mathbf{Z_2^{(2)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(2)} \\ \varphi_A^{(2)} \\ Q_A^{(2)} \\ M_A^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(9) \\ Z\,(10) \\ Z\,(11) \\ Z\,(12) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_3^{(2)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(2)} \\ \varphi_L^{(2)} \\ Q_L^{(2)} \\ M_L^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(13) \\ Z\,(14) \\ Z\,(15) \\ Z\,(16) \end{bmatrix} \tag{4.89}$$

$$\mathbf{Z_3^{(3)}} = \begin{bmatrix} w_A^{(3)} \\ \varphi_A^{(3)} \\ Q_A^{(3)} \\ M_A^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(17) \\ Z\,(18) \\ Z\,(19) \\ Z\,(20) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_4^{(3)}} = \begin{bmatrix} w_L^{(3)} \\ \varphi_L^{(3)} \\ Q_L^{(3)} \\ M_L^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(21) \\ Z\,(22) \\ Z\,(23) \\ Z\,(24) \end{bmatrix} \tag{4.90}$$

$$\dots \qquad\qquad\qquad\qquad \dots$$

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{6})} = \begin{bmatrix} w_A^{(6)} \\ \varphi_A^{(6)} \\ Q_A^{(6)} \\ M_A^{(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(41) \\ Z\,(42) \\ Z\,(43) \\ Z\,(44) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{6})} = \begin{bmatrix} w_L^{(6)} \\ \varphi_L^{(6)} \\ Q_L^{(6)} \\ M_L^{(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(45) \\ Z\,(46) \\ Z\,(47) \\ Z\,(48) \end{bmatrix} \tag{4.91}$$

Muutujate $Z\,(i)$ (i = 1, 2, ..., 48) järjenumbrid on toodud joonisel 4.20.



Joonis 4.20. Muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (4.86) kakskümmendneli esimest võrrandit on põhivõrrandid (4.61). Need koostatakse GNU Octave'i programmidega NaideTimKonsool6det.m ja NaideTimKonsool15det.m (vt programmi väljavõtet 4.2).

Väljavõte programmist 4.2 (NaideTimKonsool6det.m)

```
# hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spyleF1=sptalaylekTimM(baasi0,kT,l1,wf,mg,A1,Iy1,E,G);
IIv=1;
IJv=1;
# asetab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spyleF1);
spyleF2=sptalaylekTimM(baasi0,kT,l2,wf,mg,A2,Iy2,E,G);
IIv=5;
IJv=9;
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spyleF2);
spyleF3=sptalaylekTimM(baasi0,kT,l3,wf,mg,A3,Iy3,E,G);
IIv=9;
IJv=17;
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spyleF3);
spyleF4=sptalaylekTimM(baasi0,kT,l4,wf,mg,A4,Iy4,E,G);
IIv=13;
IJv=25;
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spyleF4);
spyleF5=sptalaylekTimM(baasi0,kT,l5,wf,mg,A5,Iy5,E,G);
IIv=17;
IJv=33;
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spyleF5);
spyleF6=sptalaylekTimM(baasi0,kT,l6,wf,mg,A6,Iy6,E,G);
IIv=21;
IJv=41;
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spyleF6);
%IIv=37; - 36 võrrandit
%IJv=73; - 72 tundmatut
```

Põhivõrranditele järgnevad sõlmede *2, 3, 4, 5, 6* pidevus- ja tasakaaluvõrrandid.

Pidevusvõrrandid

$$\begin{array}{lllllll}
\text{Sõlm 2} & & & & & & \\
Z\,(5)-Z\,(9) & = & w_L^{(1)} & - & w_A^{(2)} & = & 0 \\
Z\,(6)-Z\,(10) & = & \varphi_L^{(1)} & - & \varphi_A^{(2)} & = & 0 \\
\text{Sõlm 3} & & & & & & \\
Z\,(13)-Z\,(17) & = & w_L^{(2)} & - & w_A^{(3)} & = & 0 \\
Z\,(14)-Z\,(18) & = & \varphi_L^{(2)} & - & \varphi_A^{(3)} & = & 0 \\
\text{Sõlm 4} & & & & & & \\
Z\,(21)-Z\,(25) & = & w_L^{(3)} & - & w_A^{(4)} & = & 0 \\
Z\,(22)-Z\,(26) & = & \varphi_L^{(3)} & - & \varphi_A^{(4)} & = & 0 \\
\text{Sõlm 5} & & & & & & \\
Z\,(29)-Z\,(33) & = & w_L^{(4)} & - & w_A^{(5)} & = & 0 \\
Z\,(30)-Z\,(34) & = & \varphi_L^{(4)} & - & \varphi_A^{(5)} & = & 0 \\
\text{Sõlm 6} & & & & & & \\
Z\,(37)-Z\,(41) & = & w_L^{(5)} & - & w_A^{(6)} & = & 0 \\
Z\,(38)-Z\,(42) & = & \varphi_L^{(5)} & - & \varphi_A^{(6)} & = & 0
\end{array} \tag{4.92}$$

Tasakaaluvõrrandid

$$\begin{array}{lllllll}
\text{Sõlm 2} & & & & & & \\
Z\,(7)+Z\,(11) & = & Q_L^{(1)} & + & Q_A^{(2)} & = & 0 \\
Z\,(8)+Z\,(12) & = & M_L^{(1)} & + & M_A^{(2)} & = & 0 \\
\text{Sõlm 3} & & & & & & \\
Z\,(15)+Z\,(19) & = & Q_L^{(2)} & + & Q_A^{(3)} & = & 0 \\
Z\,(16)+Z\,(20) & = & M_L^{(2)} & + & M_A^{(3)} & = & 0 \\
\text{Sõlm 4} & & & & & & \\
Z\,(23)+Z\,(27) & = & Q_L^{(3)} & + & Q_A^{(4)} & = & 0 \\
Z\,(24)+Z\,(27) & = & M_L^{(3)} & + & M_A^{(4)} & = & 0 \\
\text{Sõlm 5} & & & & & & \\
Z\,(31)+Z\,(35) & = & Q_L^{(4)} & + & Q_A^{(5)} & = & 0 \\
Z\,(32)+Z\,(36) & = & M_L^{(4)} & + & M_A^{(5)} & = & 0 \\
\text{Sõlm 6} & & & & & & \\
Z\,(39)+Z\,(43) & = & Q_L^{(5)} & + & Q_A^{(6)} & = & 0 \\
Z\,(40)+Z\,(44) & = & M_L^{(5)} & + & M_A^{(6)} & = & 0
\end{array} \tag{4.93}$$

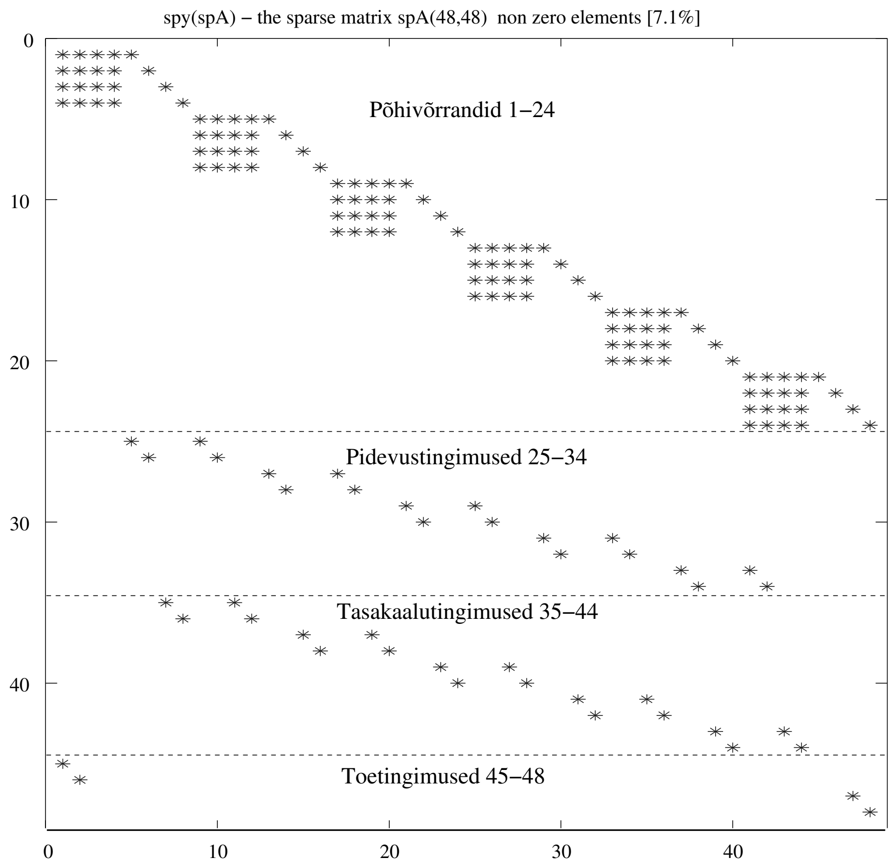
Ülejäänud neli võrrandit saame toetingimustest.

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Sõlm} & 1 & & & & \\
Z(1) & = & w_A^{(1)} & = & 0 & \\
Z(2) & = & \varphi_A^{(1)} & = & 0 & \\
\text{Sõlm} & 7 & & & & \\
Z(47) & = & Q_L^{(6)} & = & 0 & \\
Z(48) & = & M_L^{(6)} & = & 0 &
\end{array}
\tag{4.94}
$$

Võrrandisüsteemis (4.86) on 48 võrrandit 48 tundmatuga, kus nullist erinevaid elemente on 164:

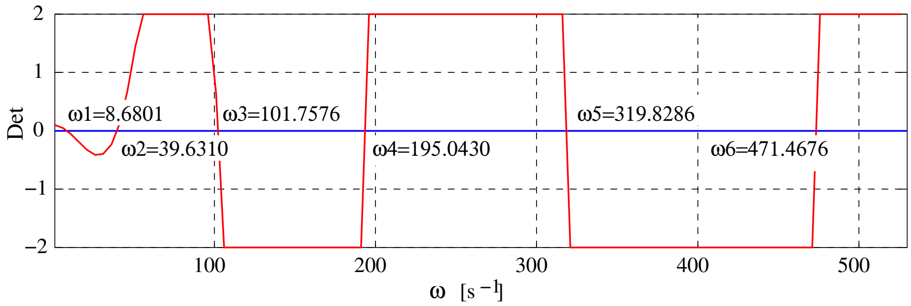
```
Compressed Column Sparse (rows = 48, cols = 48, nnz = 164 [7.1%])
```

Muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala maatriksi spA muster on joonisel 4.21.

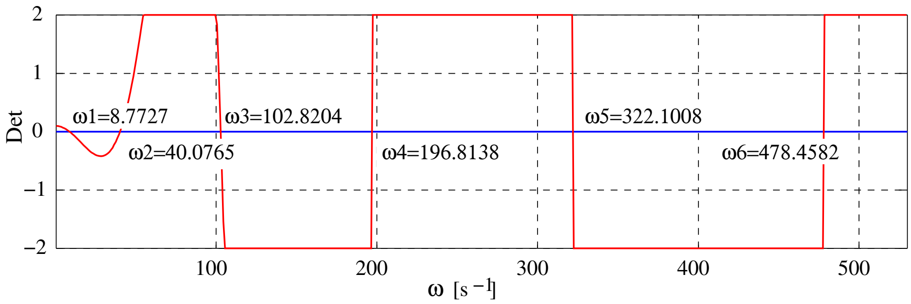


Joonis 4.21. Muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala maatriksi spA muster

GNU Octave'i programmidega NaideTimKonsool6det.m ja NaideTimKonsool15det.m leiame võrrandisüsteemi (4.86) determinandi nullid, s.t muutuva ristlõikega konsooltala omavõnkesagedused (jn 4.22).



(a) Konsooltala on jaotatud kuueks elemendiks



(b) Konsooltala on jaotatud viieteistkümneks elemendiks

Joonis 4.22. Muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala omavõnkesagedused

Omavõnkevormide arvutamisel viime võrrandisüsteemis (4.86) siirde $Z\,(45) = w_L^{(6)}$ veeru paremale poolele. Lahendanud hõreda võrrandisüsteemi vähimruutude meetodiga, valime lahendist ($Xvect$) algparameetrid (vt väljavõte programmist 4.3).

Väljavõte programmist 4.3 (NaideTimKonsool6SAMSTw6.m)

```
SalgPar1=Xvect(1:4,1);
SalgPar2=Xvect(9:12,1);
SalgPar3=Xvect(17:20,1);
SalgPar4=Xvect(25:28,1);
SalgPar5=Xvect(33:36,1);
SalgPar6=Xvect(41:44,1);
```

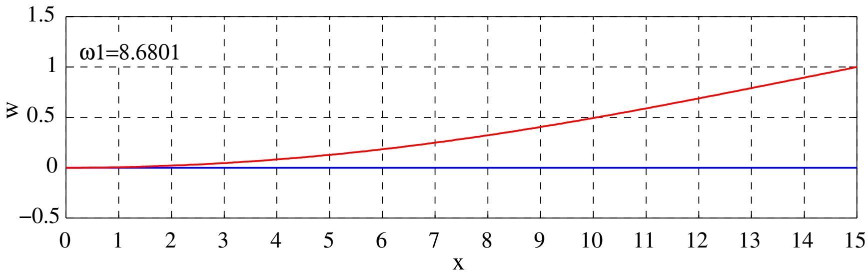
Algparameetrite meetodi maatriksvõrrandiga (4.60)

$$\mathbf{Z}_{\xi} = \mathbf{U}_{\xi} \cdot \mathbf{Z}_{\mathbf{A}} \tag{4.95}$$

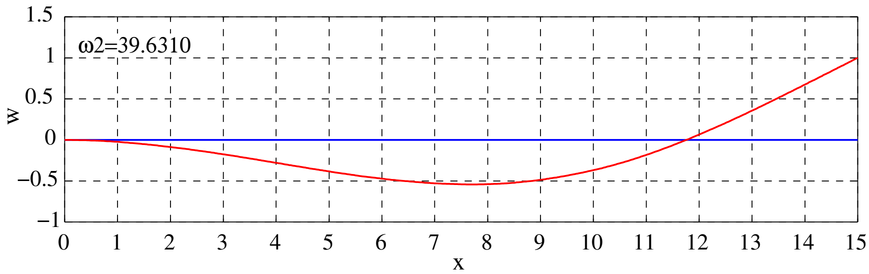
arvutame kuue elemendi siirded.

Valides GNU Octave'i programmis NaideTimKonsool6SAMSTw6.m ühe omavõnkesagedustest $\omega_1 = 8.6801\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 39.6310\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 101.7576\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 195.0430\,\mathrm{s}^{-1}$ ja $\omega_5 = 319.8286\ \mathrm{s}^{-1}$, saame sellele vastava omavõnkevormi.

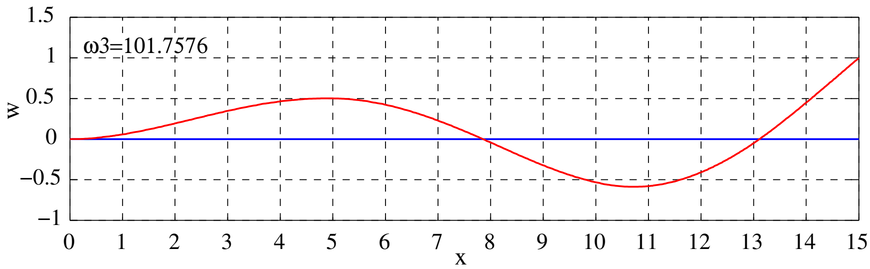
Omavõnkevormid on toodud joonisel 4.23.



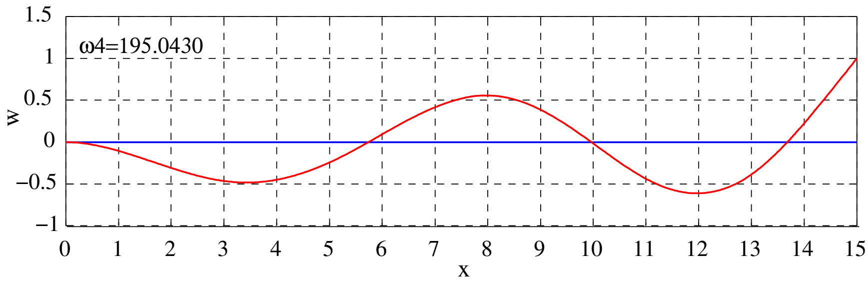
(a) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_1 = 8.6801\,\mathrm{s}^{-1}$



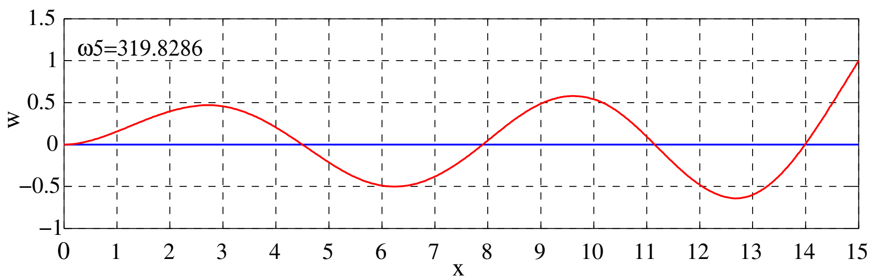
(b) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_2 = 39.6310\,\mathrm{s}^{-1}$



(c) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_3 = 101.7576\,\mathrm{s}^{-1}$



(d) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_4 = 195.0430\,\mathrm{s}^{-1}$



(e) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_5 = 319.8286\,\mathrm{s}^{-1}$

Joonis 4.23. Muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala omavõnkevormid

Tabelisse 4.5 on kantud alumiiniumoksiidi nanokiust Saffil valmistatud muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala omavõnkesagedused, mis on arvutatud EST-meetodil kuue ja viieteistkümne elemendiga tala juhul. Võrdluseks on toodud erinevused muutuva ristlõikega, kuid materjali elastsusmooduliga $E = 200\,\mathrm{GPa}$ (materjali teisi omadusi pole avaldatud) Timošenko konsooltala omavõnkesagedused, mis on arvutatud lõplike elementide meetodil (LEM [SAMST92, lk 47]) ja ülekandemaatriksmeetodil (ÜMM [SAMST92, lk 47]) (sks Übertragungsmatrizenverfahren, ingl transfer matrix method, vn метод матриц перехода).

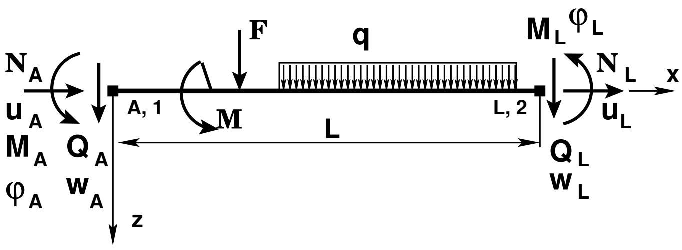
Tabel 4.5. Muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala omavõnkesagedused

Omavõnke-sagedus	EST-meetod. Timošenko teooria			
	6 elementi Sagedus $\omega\ \left[s^{-1}\right]$	15 elementi Sagedus $\omega\ \left[s^{-1}\right]$	Erinevus LEMist %	Erinevus ÜMMist %
1.	8.6801	8.7727	0.28	0.038
2.	39.6310	40.0765	0.22	0.021
3.	101.7576	102.8204	0.13	1.033
4.	195.0430	196.8138	1.05	3.775
5.	319.8286	322.1008	0.30	2.225
6.	471.4676	478.4582		

5. Raamid

5.1 Raami võnkumise põhivõrrandid

Raami elemendi kirjeldamisel kasutame parema käe teljestikku (jn A.1) ja teist märgikokkulepet (jn A.2).



Joonis 5.1. Raami elemendi jõudude ja siirete positiivsed suunad

Avaldame raami elemendi ülekandevõrrandid maatrikskujul

$$\mathbf{Z_L} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z_A} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{5.1}$$

kus $\mathbf{Z_L}$ ja $\mathbf{Z_A}$ tähistavad pikisiirdeid, paindenurki, piki- ja põikjõude ning paindemomente elemendi lõpus ja alguses (vt avaldisi (1.21), (3.32) või (4.65)):

$$\mathbf{Z_L} = \begin{bmatrix} u(x) \\ w(x) \\ \varphi_y(x) \\ N(x) \\ Q(x) \\ M(x) \end{bmatrix}_{\mathbf{x=L}}, \qquad \mathbf{Z_A} = \begin{bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \varphi_0 \\ N_\circ \\ Q_\circ \\ M_\circ \end{bmatrix}_{\mathbf{A}} \tag{5.2}$$

Ülekandemaatriksi $\mathbf{U}$ saame avaldistest (1.22), (3.33) või (4.59) ning koormusvektori $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ avaldistest (1.42) ja (3.119).

Raami elemendi põhivõrrandid saab teise märgikokkuleppe puhul kirjutada võrrandisüsteemina

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{Z_A} - \mathbf{I_{6\times6}} \cdot \mathbf{Z_L} = -\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{5.3}$$

Lühemalt,

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{6\times 12} \cdot \widehat{\mathbf{Z}} = -\overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{5.4}$$

kus

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_\mathbf{A} \\ \mathbf{Z}_\mathbf{L} \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

ning $\widehat{\mathbf{UI}}_{6\times 12}$ on laiendatud ülekandemaatriks $\left(U_{6\times 6} \mid -I_{6\times 6}\right)$ avaldises (5.9).

Ülekandemaatriksid on Euleri-Bernoulli[1] ja Timošenko[2] paindeteoorias erinevad. Timošenko paindeteooriat kirjeldavas 4. järku diferentsiaalvõrrandis on teist järku tuletis, mis Euleri-Bernoulli paindeteooriat kirjeldavas 4. järku diferentsiaalvõrrandis puudub.

Ülekandemaatriks Euleri-Bernoulli paindeteoorias. Ülekandemaatriksi (5.8) saab arvutada GNU Octave'i funktsiooniga raamylekM.m, laiendatud ülekandemaatriksi (5.9) funktsiooniga spraamylekM.m.

Ülekandemaatriks Timošenko paindeteoorias. Ülekandemaatriksi (5.10) arvutame GNU Octave'i funktsiooniga raamTimylekM.m, laiendatud ülekandemaatriksi (5.11) funktsiooniga spraamTimylekM.m.

Raami koormusvektori $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ komponendid leiame pikke (1.42), (1.43) ja tala koormusvektorist (3.119)–(3.121) ($\overset{\circ}{\mathbf{Z}} = \overset{\circ}{\mathbf{Z}}_\mathbf{n} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}}_\mathbf{q} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}}_\mathbf{N} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}}_\mathbf{F} + \overset{\circ}{\mathbf{Z}}_\mathbf{M}$ (5.6), (5.7), (5.12)–(5.14)).

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{u}_e \\ \overset{\circ}{w}_e \\ \overset{\circ}{\varphi}_e \\ \overset{\circ}{N}_e \\ \overset{\circ}{Q}_e \\ \overset{\circ}{M}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{n_x}{EA}\dfrac{1}{\kappa^2}\left[1-\cos\kappa\,(x-a)_+\right] \\ 0.0 \\ 0.0 \\ n_x\,\dfrac{1}{\kappa}\left[\sin\kappa\,(x-a)_+\right] \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{u}_e \\ \overset{\circ}{w}_e \\ \overset{\circ}{\varphi}_e \\ \overset{\circ}{N}_e \\ \overset{\circ}{Q}_e \\ \overset{\circ}{M}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ \dfrac{q_z}{EI_y}\dfrac{1}{\kappa^4}\left[K_1\left(\kappa\,(x-a)_+\right)-1\right] \\ -\dfrac{q_z}{EI_y}\dfrac{1}{\kappa^3}\left[K_4\left(\kappa\,(x-a)_+\right)\right] \\ 0.0 \\ -\dfrac{q_z}{\kappa}\left[K_2\left(\kappa\,(x-a)_+\right)\right] \\ -\dfrac{q_z}{\kappa^2}\left[K_3\left(\kappa\,(x-a)_+\right)\right] \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Bending#Euler.E2.80.93Bernoulli_bending_theory

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Bending#Timoshenko_bending_theory

Ülekandemaatriks Euleri-Bernoulli paindeteoorias

$$\mathbf{U}_{6\times 6} = \begin{bmatrix} \cos\kappa x & 0 & 0 & -\frac{1}{EA}\frac{1}{\kappa}\sin\kappa x & 0 & 0 \\ 0 & K_1(\kappa x) & -\frac{1}{\kappa}K_2(\kappa x) & 0 & \frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa^3}K_4(\kappa x) & \frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa^2}K_3(\kappa x) \\ 0 & -\kappa K_4(\kappa x) & K_1(\kappa x) & 0 & -\frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa^2}K_3(\kappa x) & -\frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa}K_2(\kappa x) \\ -EA\kappa\sin\kappa x & 0 & 0 & -\cos\kappa x & 0 & 0 \\ 0 & -EI\kappa^3K_2(\kappa x) & EI\kappa^2K_3(\kappa x) & 0 & -K_1(\kappa x) & -\kappa K_4(\kappa x) \\ 0 & -EI\kappa^2K_3(\kappa x) & EI\kappa K_4(\kappa x) & 0 & -\frac{1}{\kappa}K_2(\kappa x) & -K_1(\kappa x) \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

Laiendatud ülekandemaatriks Euleri-Bernoulli paindeteoorias

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{6\times 12} = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} \cos\kappa\ell & 0 & 0 & -\frac{1}{EA}\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1(\kappa\ell) & -\frac{1}{\kappa}K_2(\kappa\ell) & 0 & \frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa^3}K_4(\kappa\ell) & \frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa^2}K_3(\kappa\ell) & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa K_4(\kappa\ell) & K_1(\kappa\ell) & 0 & -\frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa^2}K_3(\kappa\ell) & -\frac{1}{EI}\frac{1}{\kappa}K_2(\kappa\ell) & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -EA\kappa\sin\kappa\ell & 0 & 0 & -\cos\kappa\ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -EI\kappa^3K_2(\kappa\ell) & EI\kappa^2K_3(\kappa\ell) & 0 & -K_1(\kappa\ell) & -\kappa K_4(\kappa\ell) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -EI\kappa^2K_3(\kappa\ell) & EI\kappa K_4(\kappa\ell) & 0 & -\frac{1}{\kappa}K_2(\kappa\ell) & -K_1(\kappa\ell) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \tag{5.9}$$

Krõlovi funktsioonid $K_i(\kappa x)$ on esitatud avaldistes (3.19)–(3.22).

Ülekandemaatriks Timošenko paindeteoorias

$$\mathbf{U}_{6\times 6} = \begin{bmatrix}
\cos\kappa x & 0 & 0 & -\frac{1}{EA}\,\frac{1}{\kappa}\sin\kappa x & 0 & 0 \\
0 & \frac{s_{12}\mathrm{ch}(\lambda_1,\xi)+s_{22}\cos(\lambda_2,\xi)}{s_{12}+s_{22}} & \frac{s_{11}\mathrm{sh}(\lambda_1,\xi)+s_{21}\sin(\lambda_2,\xi)}{s_1 s_{21}+s_2 s_{11}} & 0 & \frac{s_1\mathrm{sh}(\lambda_1,\xi)-s_2\sin(\lambda_2,\xi)}{EI_y(s_1 s_{21}+s_2 s_{11})} & \frac{\mathrm{ch}(\lambda_1,\xi)-\cos(\lambda_2,\xi)}{EI_y(s_{12}+s_{22})} \\
0 & \frac{s_2 s_{12}\mathrm{sh}(\lambda_1,\xi)-s_1 s_{22}\sin(\lambda_2,\xi)}{s_{12}+s_{22}} & \frac{s_2 s_{11}\mathrm{ch}(\lambda_1,\xi)+s_1 s_{21}\cos(\lambda_2,\xi)}{s_1 s_{21}+s_2 s_{11}} & 0 & \frac{s_1 s_2(\mathrm{ch}(\lambda_1,\xi)-\cos(\lambda_2,\xi))}{EI_y(s_1 s_{21}+s_2 s_{11})} & \frac{s_2\mathrm{sh}(\lambda_1,\xi)+s_1\sin(\lambda_2,\xi)}{EI_y(s_{12}+s_{22})} \\
-EA\kappa\sin\kappa x & 0 & 0 & -\cos\kappa x & 0 & 0 \\
0 & -\frac{EI_y(s_{12}s_{21}\mathrm{sh}(\lambda_1,\xi)+s_{11}s_{22}\sin(\lambda_2,\xi))}{s_{12}+s_{22}} & \frac{EI_y s_{11}s_{21}(-\mathrm{ch}(\lambda_1,\xi)+\cos(\lambda_2,\xi))}{s_1 s_{21}+s_2 s_{11}} & 0 & -\frac{s_1 s_{21}\mathrm{ch}(\lambda_1,\xi)+s_2 s_{11}\cos(\lambda_2,\xi)}{s_1 s_{21}+s_2 s_{11}} & -\frac{s_{21}\mathrm{sh}(\lambda_1,\xi)-s_{11}\sin(\lambda_2,\xi)}{s_{12}+s_{22}} \\
0 & \frac{EI_y s_{12}s_{22}(-\mathrm{ch}(\lambda_1,\xi)+\cos(\lambda_2,\xi))}{s_{12}+s_{22}} & \frac{EI_y(-s_{11}s_{22}\mathrm{sh}(\lambda_1,\xi)+s_{12}s_{21}\sin(\lambda_2,\xi))}{s_1 s_{21}+s_2 s_{11}} & 0 & -\frac{s_1 s_{22}\mathrm{sh}(\lambda_1,\xi)+s_2 s_{12}\sin(\lambda_2,\xi)}{s_1 s_{21}+s_2 s_{11}} & -\frac{s_{22}\mathrm{ch}(\lambda_1,\xi)+s_{12}\cos(\lambda_2,\xi)}{s_{12}+s_{22}}
\end{bmatrix} \tag{5.10}$$

Laiendatud ülekandemaatriks Timošenko paindeteoorias

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{6\times 12} = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
\cos\kappa\ell & 0 & 0 & -\frac{1}{EA}\,\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{s_{12}\mathrm{ch}(\lambda_1)+s_{22}\cos(\lambda_2)}{s_{12}+s_{22}} & \frac{s_{11}\mathrm{sh}(\lambda_1)+s_{21}\sin(\lambda_2)}{s_1 s_{21}+s_2 s_{11}} & 0 & \frac{s_1\mathrm{sh}(\lambda_1)-s_2\sin(\lambda_2)}{EI_y(s_1 s_{21}+s_2 s_{11})} & \frac{\mathrm{ch}(\lambda_1)-\cos(\lambda_2)}{EI_y(s_{12}+s_{22})} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{s_2 s_{12}\mathrm{sh}(\lambda_1)-s_1 s_{22}\sin(\lambda_2)}{s_{12}+s_{22}} & \frac{s_2 s_{11}\mathrm{ch}(\lambda_1)+s_1 s_{21}\cos(\lambda_2)}{s_1 s_{21}+s_2 s_{11}} & 0 & \frac{s_1 s_2(\mathrm{ch}(\lambda_1)-\cos(\lambda_2))}{EI_y(s_1 s_{21}+s_2 s_{11})} & \frac{s_2\mathrm{sh}(\lambda_1)+s_1\sin(\lambda_2)}{EI_y(s_{12}+s_{22})} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-EA\kappa\sin\kappa\ell & 0 & 0 & -\cos\kappa\ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{EI_y(s_{12}s_{21}\mathrm{sh}(\lambda_1)+s_{11}s_{22}\sin(\lambda_2))}{s_{12}+s_{22}} & \frac{EI_y s_{11}s_{21}(-\mathrm{ch}(\lambda_1)+\cos(\lambda_2))}{s_1 s_{21}+s_2 s_{11}} & 0 & -\frac{s_1 s_{21}\mathrm{ch}(\lambda_1)+s_2 s_{11}\cos(\lambda_2)}{s_1 s_{21}+s_2 s_{11}} & -\frac{s_{21}\mathrm{sh}(\lambda_1)-s_{11}\sin(\lambda_2)}{s_{12}+s_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & \frac{EI_y s_{12}s_{22}(-\mathrm{ch}(\lambda_1)+\cos(\lambda_2))}{s_{12}+s_{22}} & \frac{EI_y(-s_{11}s_{22}\mathrm{sh}(\lambda_1)+s_{12}s_{21}\sin(\lambda_2))}{s_1 s_{21}+s_2 s_{11}} & 0 & -\frac{s_1 s_{22}\mathrm{sh}(\lambda_1)+s_2 s_{12}\sin(\lambda_2)}{s_1 s_{21}+s_2 s_{11}} & -\frac{s_{22}\mathrm{ch}(\lambda_1)+s_{12}\cos(\lambda_2)}{s_{12}+s_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right] \tag{5.11}$$

Tähised s_1, s_2 ning s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22} on kirjeldatud avaldistega (4.36) ja (4.41).

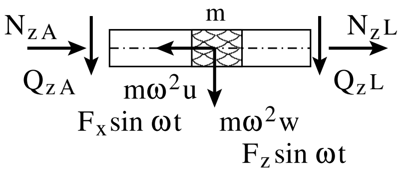
$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{u}_e \\ \overset{\circ}{w}_e \\ \overset{\circ}{\varphi}_e \\ \overset{\circ}{N}_e \\ \overset{\circ}{Q}_e \\ \overset{\circ}{M}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{F_x}{EA}\dfrac{1}{\kappa}\left[\,\sin\kappa\,(x-a)_+\right] \\ 0.0 \\ 0.0 \\ F_x\left[\,\cos\kappa\,(x-a)_+\right] \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{u}_e \\ \overset{\circ}{w}_e \\ \overset{\circ}{\varphi}_e \\ \overset{\circ}{N}_e \\ \overset{\circ}{Q}_e \\ \overset{\circ}{M}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ \dfrac{F_z}{EI_y}\dfrac{1}{\kappa^3}\left[K_4\left(\kappa\,(x-a)_+\right)\right] \\ -\dfrac{F_z}{EI_y}\dfrac{1}{\kappa^2}\left[K_3\left(\kappa\,(x-a)_+\right)\right] \\ 0.0 \\ -F_z\left[K_1\left(\kappa\,(x-a)_+\right)\right] \\ -\dfrac{F_z}{\kappa}\left[K_2\left(\kappa\,(x-a)_+\right)\right] \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{u}_e \\ \overset{\circ}{w}_e \\ \overset{\circ}{\varphi}_e \\ \overset{\circ}{N}_e \\ \overset{\circ}{Q}_e \\ \overset{\circ}{M}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ \dfrac{\mathcal{M}_y}{EI_y}\dfrac{1}{\kappa^2}\left[K_3\left(\kappa\,(x-a)_+\right)\right] \\ -\dfrac{\mathcal{M}_y}{EI_y}\dfrac{1}{\kappa}\left[K_2\left(\kappa\,(x-a)_+\right)\right] \\ 0.0 \\ -\mathcal{M}_y\kappa\left[K_4\left(\kappa\,(x-a)_+\right)\right] \\ -\mathcal{M}_y\left[K_1\left(\kappa\,(x-a)_+\right)\right] \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

5.1.1 Koondatud mass raamil

Vaatleme raami elementi (jn 5.2), millel on koondatud mass m. Elemendile on rakendatud vibreerivad jõud $F_x \sin\omega t$ ja $F_z \sin\omega t$. Ühtlasi mõjuvad elemendile inertsjõud $m\omega^2 u$ ja $m\omega^2 w$, pikijõud $N_{z\,A}$ ja $N_{z\,L}$ ning põikjõud $Q_{z\,A}$ ja $Q_{z\,L}$. Siin tähistab ω võnkumise nurksagedust ning u ja w on massi siirded.



Joonis 5.2. Koondatud mass

Koostame tasakaaluvõrrandi maatrikskujul

$$\mathbf{U_M} \cdot \mathbf{Z_A} - \mathbf{I_{6\times 6}} \cdot \mathbf{Z_L} = \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{5.15}$$

Siin

$$\mathbf{Z_A} = \left[\begin{array}{c} u_A \\ w_A \\ \varphi_A \\ N_A \\ Q_A \\ M_A \end{array}\right]_{\mathbf{A}} \qquad \mathbf{Z_L} = \left[\begin{array}{c} u_L \\ w_L \\ \varphi_L \\ N_L \\ Q_L \\ M_L \end{array}\right]_{\mathbf{x}} \tag{5.16}$$

$\mathbf{I_{6\times 6}}$ on 6×6 ühikmaatriks;

ülekandemaatriks $\mathbf{U_M}$ avaldub

$$\mathbf{U_M} = \left[\begin{array}{cccccc} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -m\omega^2 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -m\omega^2 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \end{array}\right] \tag{5.17}$$

ning koormusvektor

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}} = \left[\begin{array}{c} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ F_x \\ F_z \\ 0.0 \end{array}\right] \tag{5.18}$$

Tasakaaluvõrrandi (5.15) esitame hõreda võrrandisüsteemina

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{6\times 12} \cdot \widehat{\mathbf{Z}} = \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \tag{5.19}$$

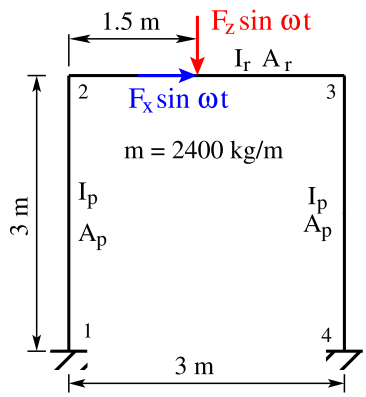
kus

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{Z_A} \\ \mathbf{Z_L} \end{array}\right] \tag{5.20}$$

Laiendatud ülekandemaatriksi $\widehat{\mathbf{UI}}_{6\times 12} \equiv \left(\mathrm{U}_{\mathrm{M}\,6\times 6} \mid -\mathrm{I}_{6\times 6}\right)$ saab arvutada GNU Octave'i funktsiooniga koondMassHLRaam.m.

5.2 Raami vabavõnkumine

Näide 5.1 (jäikade sõlmedega põikraami vabavõnkumine). Leida joonisel 5.3 kujutatud raami omavõnkesagedused ja -vormid.



Joonis 5.3. Jäikade sõlmedega põikraam

Andmed. Raami ava on $3\,\mathrm{m}$, ka postide pikkuseks on $3\,\mathrm{m}$. Elastsusmoodul $E = 200\,\mathrm{GPa}$. Raami riivi ja postide lausmass $m = 2400\,\mathrm{kg/m}$. Riivi ja posti ristlõiked on ühesugused. Ristlõike kõrgus $h = 20\,\mathrm{cm}$ ja laius $b = 20\,\mathrm{cm}$.

Lahendus. Algparameetrite leidmiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

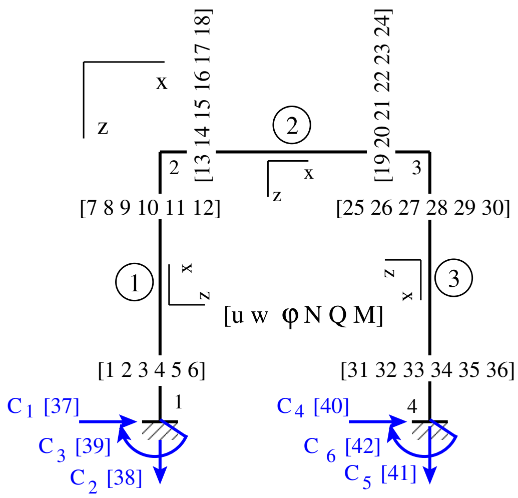
$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{5.21}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor.

Vektori komponentideks on piki- ja põiksiirded, paindenurgad, piki- ja põikjõud, paindemomendid raami elementide alguses ja lõpus (5.2) ning toereaktsioonid (jn 5.4):

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z(1,1) \\ Z(2,1) \\ Z(3,1) \\ Z(4,1) \\ Z(5,1) \\ Z(6,1) \\ \cdots \\ Z(37,1) \\ Z(38,1) \\ Z(39,1) \\ Z(40,1) \\ Z(41,1) \\ Z(42,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_A^{(1)} \\ w_A^{(1)} \\ \varphi_A^{(1)} \\ N_A^{(1)} \\ Q_A^{(1)} \\ M_A^{(1)} \\ \cdots \\ C(1,1) \\ C(2,1) \\ C(3,1) \\ C(4,1) \\ C(5,1) \\ C(6,1) \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

Muutujate järjenumbrid on toodud joonisel 5.4.



Joonis 5.4. Jäikade sõlmedega põikraami muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (5.21) kaheksateist esimest võrrandit on põhivõrrandid (5.3). Need koostatakse GNU Octave'i programmiga NaideRaam1det.m (vt programmi väljavõte 5.1).

Väljavõte programmist 5.1 (NaideRaam1det.m)

```
# hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvFn1=spraamylekM(baasi0,h,wf,msp,EAp,EIp);
IIv=1;
IJv=1;
# asetab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvFn1);
spvFn2=spraamylekM(baasi0,l,wf,msr,EAr,EIr);
IIv=7;
IJv=13;
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvFn2);
spvFn3=spraamylekM(baasi0,h,wf,msp,EAp,EIp);
IIv=13;
IJv=25;
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvFn3);
%
%IIv=19; - 18 võrrandit
%IJv=37; - 36 tundmatut + 6 toereaktsiooni
```

Lisanduvad sõlmede pidevus- ja tasakaaluvõrrandid, mis koostatakse üldkoordinaatides. Piki- ja põiksiirete, paindenurkade, piki- ja põikjõudude ning paindemomentide teisendamiseks kohalikest koordinaatidest üldkoordinaatidesse kasutame teisendusavaldisi (vt GNU Octave'i funktsiooni spTeisndMaatriks(VarrasN,krdn,selem)).

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_z \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\cos\beta & 0 \\ \cos\beta & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x^* \\ F_z^* \\ M_y^* \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

Sõlmedes piki- ja põiksiirete ning paindenurkade pidevuse kirjeldamisel kasutame ka negatiivseid teisendusmaatrikseid (vt programmi väljavõte 5.2).

Väljavõte programmist 5.2 (NaideRaam1det.m)

```
%SpTM3x3=spTeisndMaatriks(VarrasN,krdn,selem)
spTM1=spTeisndMaatriks(1,krdn,selem)
spTM2=spTeisndMaatriks(2,krdn,selem)
spTM3=spTeisndMaatriks(3,krdn,selem)
spTM1m=-spTeisndMaatriks(1,krdn,selem)
spTM2m=-spTeisndMaatriks(2,krdn,selem)
spTM3m=-spTeisndMaatriks(3,krdn,selem)
```

Siin sõltuvad teisendusmaatriksi suunakoosinused elemendi kohalike teljestike suundadest. Raami (jn 5.4)

vardal 1: $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = -1$;
vardal 2: $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = 0$;
vardal 3: $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 1$.

Arvutuspäeviku väljavõttes 5.1 toome teisendusmaatriksid raami postide ja riivi kohalike koordinaatide viimiseks üldkoordinaatide süsteemi.

Väljavõte arvutuspäevikust 5.1 (NaideRaam1det.m)

```
spTM1 =             |  spTM2 =             |  spTM3 =
                    |                      |
  (2, 1) -> -1      |    (1, 1) ->  1      |    (2, 1) ->  1
  (1, 2) ->  1      |    (2, 2) ->  1      |    (1, 2) -> -1
  (3, 3) ->  1      |    (3, 3) ->  1      |    (3, 3) ->  1

spTM1m =            |  spTM2m =            |  spTM3m =
                    |                      |
  (2, 1) ->  1      |    (1, 1) -> -1      |    (2, 1) -> -1
  (1, 2) -> -1      |    (2, 2) -> -1      |    (1, 2) ->  1
  (3, 3) -> -1      |    (3, 3) -> -1      |    (3, 3) -> -1
```

Rajatingimusteks sõlmedes on:

- piki- ja põiksiirete ning paindenurkade pidevusvõrrandid;
- piki- ja põikjõudude ning paindemomentide tasakaaluvõrrandid. Kui sõlmes on toereaktsioonid, võetakse need arvesse tasakaaluvõrrandites;
- toetingimused.

Rajatingimuste määramist saame jälgida programmi väljavõttes 5.3.

Väljavõte programmist 5.3 (NaideRaam1det.m)

```
## Pidevustingimused
#sõlm2 (u, w fi)
spA=spInsertBtoA(spA,19,7,spTM1);   spA=spInsertBtoA(spA,19,13,spTM2m);
```

```
#
#sõlm3  (u, w fi)
spA=spInsertBtoA(spA,22,19,spTM2);  spA=spInsertBtoA(spA,22,25,spTM3m);
#
## Tasakaalutingimused
#sõlm1 (N, Q, M)
spA=spInsertBtoA(spA,25,4,spTM1);  spA=spSisestaArv(spA,25,37,-1);  # C1
                                   spA=spSisestaArv(spA,26,38,-1);  # C2
                                   spA=spSisestaArv(spA,27,39,-1);  # C3
#sõlm2 (N, Q, M)
spA=spInsertBtoA(spA,28,10,spTM1);
spA=spInsertBtoA(spA,28,16,spTM2);
#sõlm3 (N, Q, M)
spA=spInsertBtoA(spA,31,22,spTM2);
spA=spInsertBtoA(spA,31,28,spTM3);
#
#sõlm4 (N, Q, M)
spA=spInsertBtoA(spA,34,34,spTM3);  spA=spSisestaArv(spA,34,40,-1);  # C4
                                    spA=spSisestaArv(spA,35,41,-1);  # C5
                                    spA=spSisestaArv(spA,36,42,-1);  # C6
#
# Toetingimused
#sõlm1
spA=spSisestaArv(spA,37,1,1);  # u
spA=spSisestaArv(spA,38,2,1);  # w
spA=spSisestaArv(spA,39,3,1);  # fi
#sõlm4
spA=spSisestaArv(spA,40,31,1);  # u
spA=spSisestaArv(spA,41,32,1);  # w
spA=spSisestaArv(spA,42,33,1);  # fi

%% 42 võrrandit
```

Rajatingimuste koostamisel arvestame, et programm spInsertBtoA(spA,IV,Jv,spTM) lisab võrrandisüsteemi maatriksi spTM, milles on kolm rida:

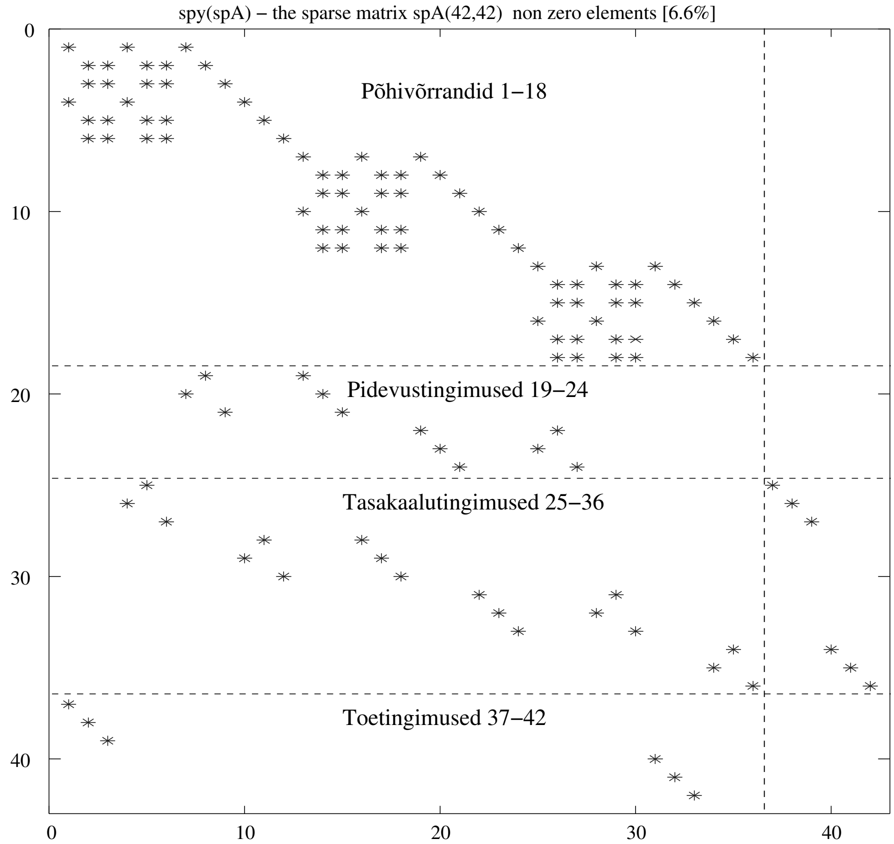
```
spTMN =

Compressed Column Sparse (rows = 3, cols = 3, nnz = 3 [33%])
```

Võrrandisüsteemil (5.21) on nüüd 42 võrrandit 42 tundmatuga, kus nullist erinevaid elemente on 120 (6.8%) (jn 5.5):

```
spA =

Compressed Column Sparse (rows = 42, cols = 42, nnz = 120 [6.8%])
```

Võrrandisüsteemi tundmatute kordajate maatriksi spA muster on joonisel 5.5.

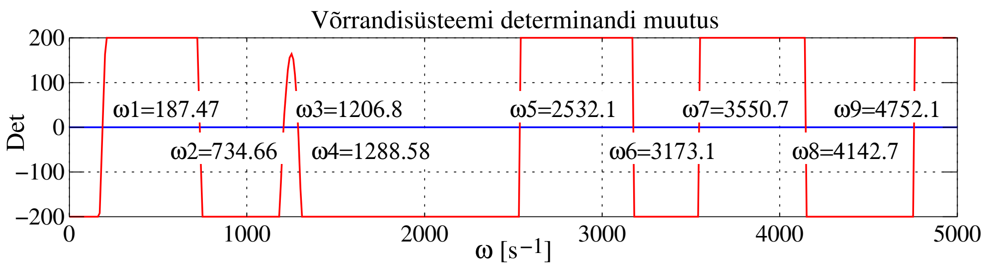
GNU Octave'i programmiga NaideRaam1det.m arvutame hõreda võrrandisüsteemi (5.21) determinandi nullide asukohad sõltuvana sagedusest ω (jn 5.6).



Joonis 5.5. Jäikade sõlmedega põikraami maatriksi spA muster

Leitud omavõnkesagedused ω_i (jn 5.6) teisendame sagedusvõrrandi mõõduta juurteks $\lambda_i = \kappa_i \ell$ (vt seosed (3.72), (3.73)):

$$
\begin{array}{ll}
\text{antisümmeetrilisel võnkumisel} & \text{sümmeetrilisel võnkumisel} \\
\omega_1 = 1.8747\times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}, \quad \lambda_1 = 1.7892, & \omega_2 = 7.3466\times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}, \quad \lambda_2 = 3.5419, \\
\omega_3 = 1.2068\times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}, \quad \lambda_3 = 4.5396, & \omega_4 = 1.2885\times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}, \quad \lambda_4 = 4.6907, \\
\omega_5 = 2.5321\times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}, \quad \lambda_5 = 6.5756, & \omega_6 = 3.1731\times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}, \quad \lambda_6 = 7.3611, \\
\omega_7 = 3.5507\times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}, \quad \lambda_7 = 7.7867, & \omega_8 = 4.1427\times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}, \quad \lambda_8 = 8.4108, \\
\omega_9 = 4.7521\times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}, \quad \lambda_9 = 9.0082. &
\end{array}
\tag{5.24}
$$



Joonis 5.6. Jäikade sõlmedega põikraami omavõnkesagedused

Tabelis 5.1 võrreldakse jäikade sõlmedega põikraami omavõnkesagedusi, mis on arvutatud EST-meetodiga Bernoulli ja Timošenko teooria järgi (NaideRaamTim1det.m). Raami riivi ristlõike kõrguse h ja riivi pikkuse ℓ suhe $h/\ell = 0.066667$.

Tabel 5.1. Jäikade sõlmedega põikraami omavõnkesagedused

Omavõnke-sagedus	EST-meetod			
	Bernoulli teooria		Timošenko teooria	
	ω $[s^{-1}]$	λ	ω $[s^{-1}]$	λ
1.	187.470176	1.789217	186.302385	1.783635
2.	734.661871	3.541935	725.891843	3.520731
3.	1206.795708	4.539560	1181.350212	4.491446
4.	1288.468304	4.690658	1254.196110	4.627854
5.	2532.096969	6.575625	2451.428984	6.470034
6.	3173.115157	7.361050	3020.809035	7.182217
7.	3550.662010	7.786666	3371.010949	7.587120
8.	4142.694380	8.410820	4085.995799	8.353065
9.	4752.085628	9.008221	4677.159620	8.936922

Tabelis tähistab λ sagedusvõrrandi mõõduta juurt:

$$\lambda_i = \sqrt{\omega_i}\left(\frac{\rho A}{EI}\right)^{1/4} \ell \tag{5.25}$$

Omavõnkesageduse $\omega_1 = 1.8747 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ võrdlemiseks raamatus [TD97, lk 308] lõplike elementide meetodil leituga ($\omega_1 = 3.21\sqrt{EI/(m\ell^4)}$) kasutame seost (3.72). Võrdluses EST-meetodi abil leitud täpse esimese omavõnkesagedusega $\omega_1 = \lambda_1^2\sqrt{EI/(m\ell^4)} = 1.7892^2\sqrt{EI/(m\ell^4)} = 3.2012\sqrt{EI/(m\ell^4)}$ võib viidatud raamatus pakutut $3.21\sqrt{EI/(m\ell^4)}$ pidada vastuvõetavaks. Järgnevad lõplike elementide meetodiga leitud omavõnkesagedused erinevad täpsetest veelgi enam – adekvaatsete tulemuste saamiseks tuleks suurendada raami elementide ja masspunktide arvu.

Võrdlemaks EST-meetodiga arvutatud täpseid omavõnkesagedusi deformatsioonimeetodi abil leitutega vaatame, milliseid piiranguid tehakse jäikade sõlmedega põikraami vabavõnkumise uurimisel riivi sõlmede (vt sõlm 2 ja 3, jn 5.3) siiretele u_i, w_i ning paindenurkadele φ_i:

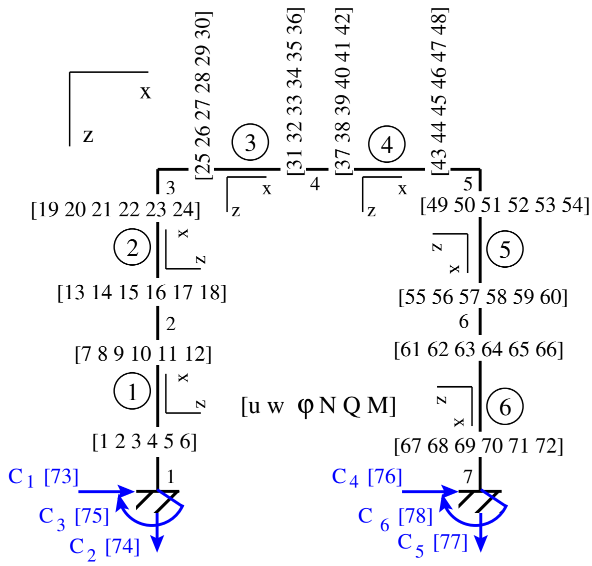
- antisümmeetrilisel võnkumisel $u_2 = u_3$, $w_2 = -w_3$, $\varphi_2 = \varphi_3$ [Now63, lk 167];
- sümmeetrilisel võnkumisel $u_2 = -u_3$, $w_2 = w_3$, $\varphi_2 = -\varphi_3$ [Now63, lk 166].

Tehes sümmeetrilise võnkumise arvutamisel täiendavaid lihtsustusi (siirded $u_2 = -u_3 = 0$, $w_2 = w_3 = 0$ [Now63, lk 168]), ei arvestata raami riivi ja postide pikideformatsioone. Nende lihtsustustega valemi (B.18) [Kis64, lk 181] järgi arvutades saame GNU Octave'i programmiga NaideSymRaam1det.m sümmeetrilise võnkumise omavõnkesageduse karakteristikuteks $\lambda_2 = \kappa_2\ell = 3.5564$, $\lambda_4 = \kappa_4\ell = 4.7300$ ja $\lambda_6 = \kappa_6\ell = 7.4295$. Karakteristikud λ_2 ja λ_6 vastavad viidatud raamatus toodutele ($\lambda_2 = 3.556$, $\lambda_6 \approx 7.43$).

GNU Octave'i programmiga NaideRaam1det.m arvutades suurendame raami riivi ja postide pikideformatsioonidest loobumiseks riivi ja postide pikijäikusi, näiteks $EAr = EAp = 4.5036\times10^{15}$. Pikideformatsioonide puudumisel saame sümmeetrilise võnkumise omavõnkesagedusteks $\omega_2 = 7.4068\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ $(\lambda_2 = \kappa_2\ell = 3.5564)$, $\omega_4 = 1.3102\times10^3\,\mathrm{s}^{-1}$ $(\lambda_4 = \kappa_4\ell = 4.7300)$ ja $\omega_6 = 3.2324\times10^3\,\mathrm{s}^{-1}$ $(\lambda_6 = \kappa_6\ell = 7.4295)$. Tulemus $\lambda_2 = 3.5564$ ühtib raamatutes [Kis64, lk 181], [Now63, lk 168], [Now74, lk 246] ja [BL63, lk 222] esitatud sagedusvõrrandi mõõduta juurtega. Pikideformatsioonide puudumisel saab sagedusvõrrandi juuri töös [BL63, lk 222] toodud valemitega arvutada programmiga SymRaamDet.m.

Sümmeetrilise võnkumise täpne esimene omavõnkesagedus on $\omega_2 = 7.3466\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ $(\lambda_2 = \kappa_2\ell = 3.5419)$.

Jäikade sõlmedega põikraami (jn 5.3) omavõnkevormide leidmiseks suurendame raami varraste elementide arvu (jn 5.7).



Joonis 5.7. Jäikade sõlmedega põikraami muutujate muudetud järjenumbrid

GNU Octave'i programmiga NaideRaam1Bdet.m leiame põikraami omavõnkevormid (jn 5.8). Põikraami muutujate muudetud järjenumbritega omavõnkesageduste arvutamiseks on koostatud GNU Octave'i programm NaideRaam1Adet.m. Võrrandisüsteemi determinandi märgi saab siin muuta vastupidiseks, kui vahetada omavahel kaks rida. Leitud omavõnkesagedused on võrdsed avaldistes (5.24) esitatutega.

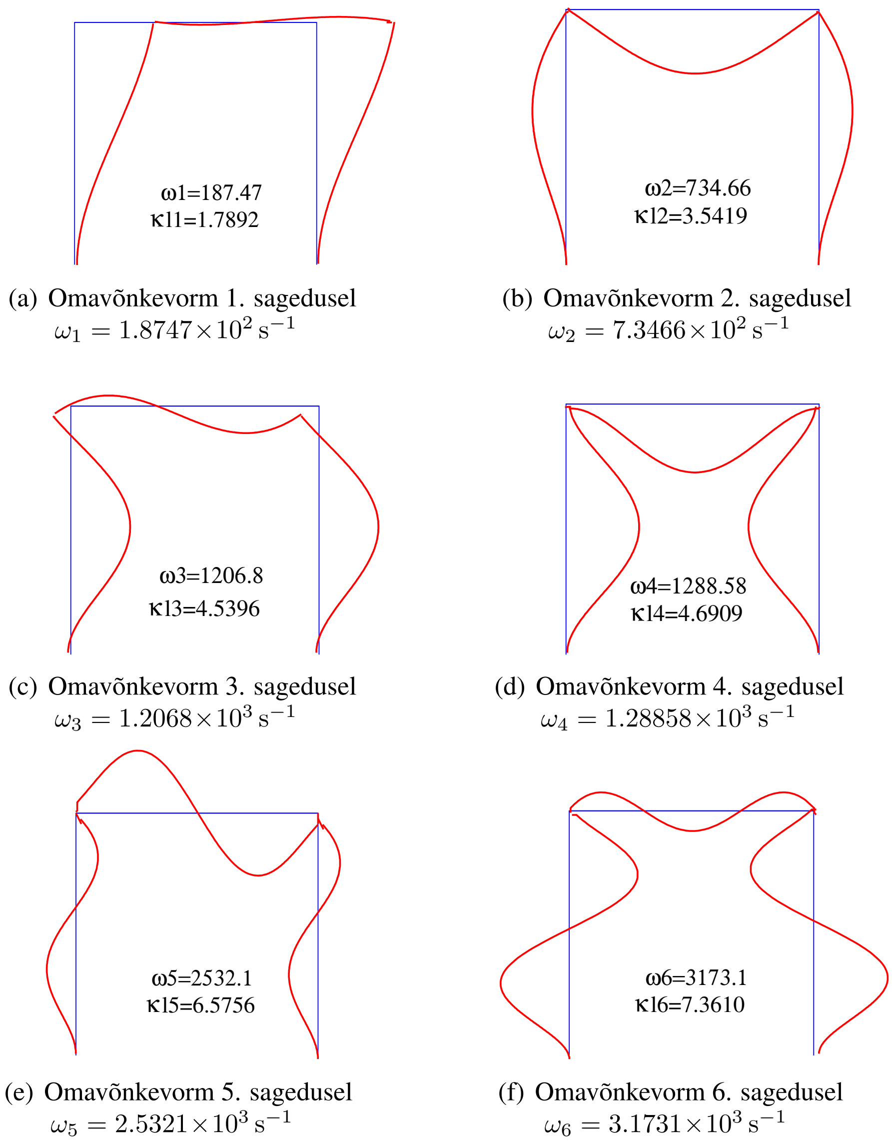
Põikraami omavõnkesagedusele ω_i vastava omavõnkevormi leidmisel viiakse programmis võrrandisüsteemi (5.21) i-s veerg paremale poolele. Elementide pikkused $h1 = h2 = 1.5\,\mathrm{m}$ ja $l1 = l2 = 1.5\,\mathrm{m}$.

Viienda omavõnkevormi leidmisel muudame pikkusi: $l1 = 2.25\,\mathrm{m}$ ja $l2 = 0.75\,\mathrm{m}$. Kuuenda omavõnkevormi leidmiseks kasutame pikkusi $h1 = 0.75\,\mathrm{m}$ ja $h2 = 2.25\,\mathrm{m}$.

Võnkevorm	ω_i $[\mathrm{s}^{-1}]$	Paremale poolele	Elementide pikkused
1	187.47	$veerg$ 20	
2	734.66	$veerg$ 32	
3	1206.8	$veerg$ 56	
4	1288.58	$veerg$ 56	
5	2532.1	$veerg$ 56	$l1 = 2.25\,\mathrm{m},\ \ l2 = 0.75\,\mathrm{m}$
6	3173.1	$veerg$ 56	$h1 = 0.75\,\mathrm{m},\ \ h2 = 2.25\,\mathrm{m}$

(5.26)

Lahendanud hõreda võrrandisüsteemi vähimruutude meetodiga, valime lahendist algparameetrid. Algparameetritega leitud põiksiire on kujutatud joonisel 5.8.



(a) Omavõnkevorm 1. sagedusel $\omega_1 = 1.8747 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$

(b) Omavõnkevorm 2. sagedusel $\omega_2 = 7.3466 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$

(c) Omavõnkevorm 3. sagedusel $\omega_3 = 1.2068 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$

(d) Omavõnkevorm 4. sagedusel $\omega_4 = 1.28858 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$

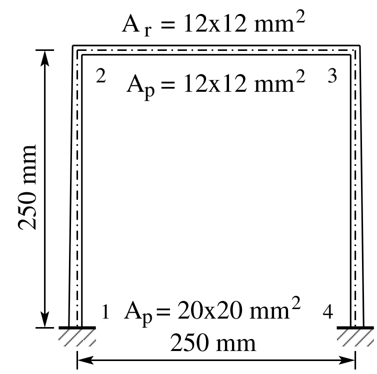
(e) Omavõnkevorm 5. sagedusel $\omega_5 = 2.5321 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$

(f) Omavõnkevorm 6. sagedusel $\omega_6 = 3.1731 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$

Joonis 5.8. Jäikade sõlmedega põikraami omavõnkevormid

EST-meetodiga arvutatud sümmeetrilise võnkumise esimeseks omavõnkesageduse karakteristikuks saame $\kappa_2\ell = 3.5419$, mis erineb deformatsioonimeetodil lihtsustustega leitust $\kappa_2\ell = 3.556$.

Näide 5.2 (muutuva ristlõikega põikraami vabavõnkumine). Leida joonisel 5.9 kujutatud raami omavõnkesagedused ja -vormid.



Joonis 5.9. Muutuva ristlõikega põikraam

Andmed. Nii raami ava kui ka postide pikkuseks on $250\,\mathrm{mm}$. Raami riivi ristlõige on ruudukujuline mõõtmetega $12 \times 12\,\mathrm{mm}$. Riivi ristlõige ei muutu. Postide ruudukujuline ristlõige muutub lineaarselt. Ristlõike mõõtmed raami kannas on $20 \times 20\,\mathrm{mm}$ ja posti ülemises otsas $12 \times 12\,\mathrm{mm}$. Materjali elastsusmoodul $E = 200\,\mathrm{GPa}$, tihedus $\rho = 7.850 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3 s^{-1}}$, Poissoni[3] tegur $\nu = 0$ (cf. [Tat13, lk 17]). Nihkeelastsusmoodul $G = E/2(1+\nu) = E/2$ ja kujutegur $k_T = (5+5\nu)/(6+5\nu) = 5/6$ [Hut01].

Lahendus. Muutuva ristlõikega postide asemel valime astmeliselt muutuvad postid. Postide jagamisel elementideks vaatleme kahte juhtu:

- post on jagatud viieks võrdseks elemendiks ($h/\ell = 20/50 = 1/2.5$);
- post on jagatud kümneks võrdseks elemendiks ($h/\ell = 20/25 = 1/1.25$).

Kõrge tala omavõnkesageduste määramiseks valime Timošenko paindeteooria. Algparameetrite leidmiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{5.27}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor.

Vektori komponentideks on piki- ja põiksiirded, paindenurgad, piki- ja põikjõud, paindemomendid varraste alguses ja lõpus (5.2) ning toereaktsioonid:

[3] Siméon Denis Poisson (1781–1840), prantsuse füüsik ja matemaatik.

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z(1,1) \\ Z(2,1) \\ Z(3,1) \\ Z(4,1) \\ Z(5,1) \\ Z(6,1) \\ \cdots \\ Z(145,1) \\ Z(146,1) \\ Z(147,1) \\ Z(148,1) \\ Z(149,1) \\ Z(150,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_A^{(1)} \\ w_A^{(1)} \\ \varphi_A^{(1)} \\ N_A^{(1)} \\ Q_A^{(1)} \\ M_A^{(1)} \\ \cdots \\ C(1,1) \\ C(2,1) \\ C(3,1) \\ C(4,1) \\ C(5,1) \\ C(6,1) \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

Muutujate järjenumbrid varraste otstes ja toereaktsioonide järjenumbrid on näidatud programmi väljavõtetes 5.4 ja 5.5.

Väljavõte programmist 5.4 (NaideRaamKVTim5det.m)

```
%==========
% Muutujate järjenumbrid. Ristlõike jäikus
% Sõlme number varda alguses ja lõpus
%==========
selemjl=...
 [1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 EIp1 1 2 ;    % varras 1
 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 EIp2 2 3 ;    % varras 2
 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 EIp3 3 4 ;    % varras 3
 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 EIp4 4 5 ;    % varras 4
 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 EIp5 5 6 ;    % varras 5
61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 EIr 6 7 ;  % varras 6 - riiv
73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 EIr 7 8 ;  % varras 7 - riiv
 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 EIp5 8 9 ;              % varras 8
 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 EIp4 9 10 ;     % varras 9
109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 EIp3 10 11 ;  % varras 10
121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 EIp2 11 12 ;  % varras 11
133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 EIp1 12 13 ]; % varras 12
%==========
```

Väljavõte programmist 5.5 (NaideRaamKVTim5det.m)

```
%==========
% Toereaktsioonid
%==========
#sõlm 1
spAnull=spInsertBtoA(spAnull,145,4,spTM1);    % varda 1 suunakoosinused
spAnull=spSisestaArv(spAnull,145,145,-1);  #
spAnull=spSisestaArv(spAnull,146,146,-1);  #
spAnull=spSisestaArv(spAnull,147,147,-1);  #
#sõlm 13
spAnull=spInsertBtoA(spAnull,148,142,spTM12); % varda 12 suunakoosinused
```

```
spAnull=spSisestaArv(spAnull,148,148,-1);  #
spAnull=spSisestaArv(spAnull,149,149,-1);  #
spAnull=spSisestaArv(spAnull,150,150,-1);  #
%==========
```

Varda 1 ja 12 suunakoosinused esitame arvutuspäeviku väljavõttes 5.2.

Väljavõte arvutuspäevikust 5.2 (NaideRaamKVTim5det.m)

```
spTM1 =

Compressed Column Sparse (rows = 3, cols = 3, nnz = 3 [33%])

  (2, 1) -> -1
  (1, 2) ->  1
  (3, 3) ->  1
   ...
   ...
spTM12 =

Compressed Column Sparse (rows = 3, cols = 3, nnz = 3 [33%])

  (2, 1) ->  1
  (1, 2) -> -1
  (3, 3) ->  1
```

Võrrandisüsteemi (5.27) 72 esimest võrrandit on põhivõrrandid (5.3), kus kasutame laiendatud ülekandemaatriksit (5.11). See koostatakse GNU Octave'i funktsiooniga spraamTimylekM.m.

Edasi moodustatakse sõlmede pidevus- ja tasakaaluvõrrandid. Kasutades suunakoosinusi (A.10), koostame need võrrandid üldteljestikus.

Ülejäänud kuus võrrandit on toetingimused (vt programmi väljavõte 5.6).

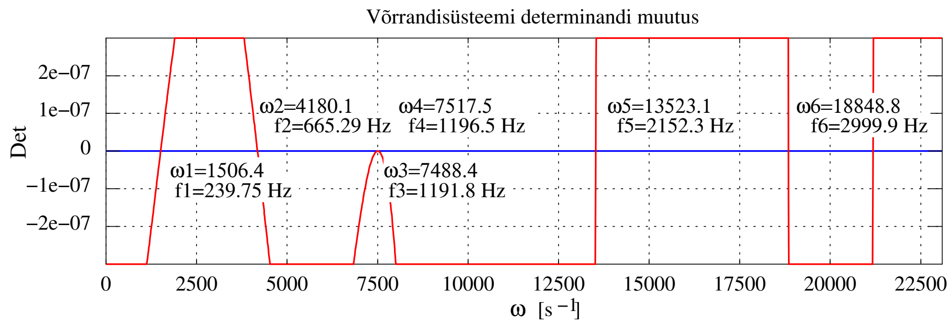
Väljavõte programmist 5.6 (NaideRaamKVTim5det.m)

```
%==========
% Toetingimused
%==========
#sõlm 1
spAnull=spSisestaArv(spAnull,139,1,1);    # siire u = 0
spAnull=spSisestaArv(spAnull,140,2,1);    # siire w = 0
spAnull=spSisestaArv(spAnull,141,3,1);    # paindenurk = 0
#sõlm 13
spAnull=spSisestaArv(spAnull,142,139,1);  # siire u = 0
spAnull=spSisestaArv(spAnull,143,140,1);  # siire w = 0
spAnull=spSisestaArv(spAnull,144,141,1);  # paindenurk = 0
%==========
```

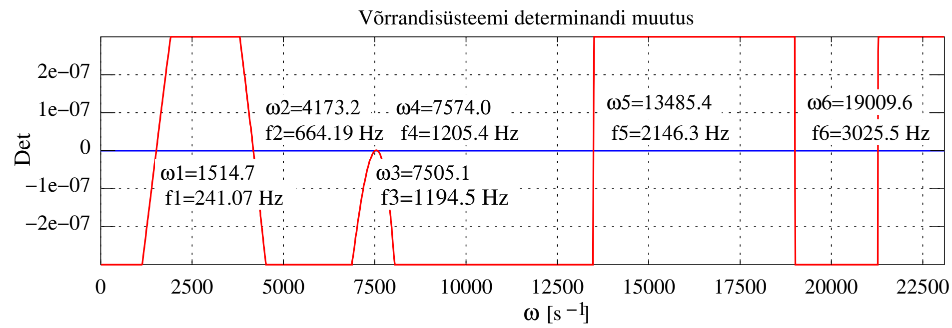
Võrrandisüsteemil (5.27) on nüüd 150 võrrandit 150 tundmatuga, kus nullist erinevaid elemente on 462 (2.1%):

```
Compressed Column Sparse (rows = 150, cols = 150, nnz = 462 [2.1%])
```

GNU Octave'i programmidega NaideRaamKVTim5det.m ja NaideRaamKVTim10det.m leiame muutuva ristlõikega põikraami omavõnkesagedused (jn 5.10).



(a) Raami post on jagatud viieks võrdseks elemendiks



(b) Raami post on jagatud kümneks võrdseks elemendiks

Joonis 5.10. Muutuva ristlõikega põikraami omavõnkesagedused

Tabelis 5.2 on toodud muutuva ristlõikega põikraami omavõnkesagedused EST-meetodi ja LEM-programmi abil arvutatuna [Tat13, lk 18] ning katses määratuna [Tat13, lk 23]. Viidatud töös oli raam lõplike elementide meetodiga (ANSYS Solid45) arvutades jagatud 2228 ruumiliseks elemendiks.

Tabel 5.2. Muutuva ristlõikega põikraami omavõnkesagedused

Omavõnke-sagedus	EST-meetod. Timošenko teooria			
	11 elementi		21 elementi	
	ω $[s^{-1}]$	f [Hz]	ω $[s^{-1}]$	f [Hz]
1.	1506.4	239.75	1514.7	241.07
2.	4180.1	665.29	4173.2	664.19
3.	7488.4	1191.8	7505.1	1194.5
4.	7517.5	1196.5	7574.0	1205.4
5.	13523.1	2152.3	13485.4	2146.3
6.	18848.8	2999.9	19009.6	3025.5

Tabelist 5.3 selgub, et EST-meetodiga leitud muutuva ristlõikega põikraami omavõnkesagedused erinevad vähe LEM-programmi abil arvutatutest ja katses määratutest [Tat13, lk 18, 23].

Tabel 5.3. EST-meetodiga arvutatud ja katsega leitud omavõnkesageduste erinevus

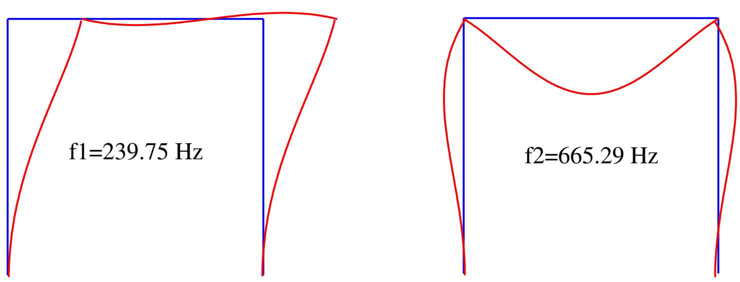
Omavõnke-sagedus	EST-meetod. Timošenko teooria					
	11 elementi			21 elementi		
	Sagedus f [Hz]	Erinevus LEMist %	Erinevus katsest %	Sagedus f [Hz]	Erinevus LEMist %	Erinevus katsest %
1.	239.75	1.69	0.93	241.07	1.14	0.38
2.	665.29	0.67	0.41	664.19	0.83	0.57
3.	1191.8	1.72	1.91	1194.5	1.49	1.69
4.	1196.5	2.34	2.33	1205.4	1.62	1.60
5.	2152.3	1.42	1.72	2146.3	1.69	2.00
6.	2999.9	1.89	15.26	3025.5	1.05	14.53

Muutuva ristlõikega põikraami omavõnkevormide leidmisel on vastava omavõnkesageduse puhul võrrandisüsteemi (5.27) determinandi väärtus null. Esimese omavõnkesageduse puhul viime võrrandisüsteemi veeru 56 paremale poolele ja võrdsustame ühega. Järgnevate omavõnkesageduste puhul on võrrandisüsteemi paremale poolele viidavate veergude järjenumbrid 68, 116, 116, 68 ja 104.

Pärast hõreda võrrandisüsteemi lahendamist vähimruutude meetodiga saame lahendist valida algparameetrid.

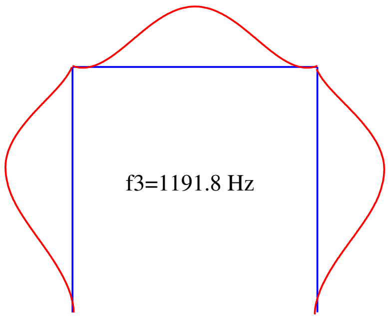
Raami omavõnkesagedusele vastavate siirete leidmisel kasutame ülekandemaatriksit (GNU Octave'i funktsioon raamTimylekM.m).

Valides GNU Octave'i programmis NaideRaamKVTim5Bvormid.m ühe omavõnkesagedustest $\omega_1 = 1506.39\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 4180.12\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_3 = 7488.42\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 7517.53\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_5 = 13523.05\ \mathrm{s}^{-1}$ ja $\omega_6 = 18848.83\ \mathrm{s}^{-1}$, saame vastava omavõnkevormi. Omavõnkevormid leiab joniselt 5.11.

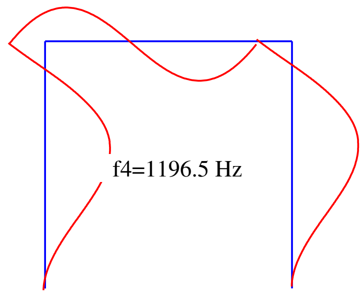


(a) Omavõnkevorm 1. sagedusel $\omega_1 = 1.50639 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$

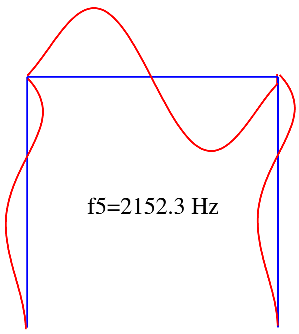
(b) Omavõnkevorm 2. sagedusel $\omega_2 = 4.18012 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$



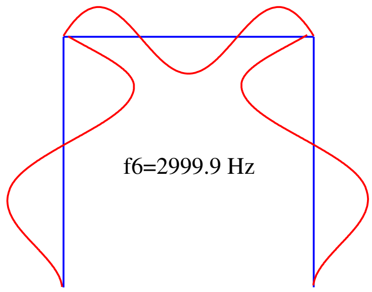
(c) Omavõnkevorm 3. sagedusel
$\omega_3 = 7.48842 \times 10^3 \, \mathrm{s}^{-1}$



(d) Omavõnkevorm 4. sagedusel
$\omega_4 = 7.51753 \times 10^3 \, \mathrm{s}^{-1}$



(e) Omavõnkevorm 5. sagedusel
$\omega_5 = 1.352305 \times 10^4 \, \mathrm{s}^{-1}$



(f) Omavõnkevorm 6. sagedusel
$\omega_6 = 1.884883 \times 10^4 \, \mathrm{s}^{-1}$

Joonis 5.11. Muutuva ristlõikega põikraami omavõnkevormid

5.3 Raami sundvõnkumine

Jäikade sõlmedega põikraami (jn 5.3) sundvõnkumist uurime kahes osas:

- antisümmeetriline sundvõnkumine, vt jaotis 5.3.2,
- sümmeetriline sundvõnkumine, vt jaotis 5.3.3.

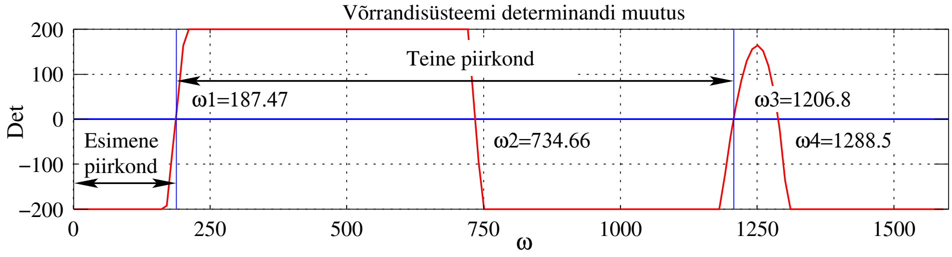
Antisümmeetrilist sundvõnkumist vaatleme kahes piirkonnas (jn 5.12a):

$$-\ 0 < \omega < \omega_1 \quad \text{ja} \quad \omega_1 < \omega < \omega_3.$$

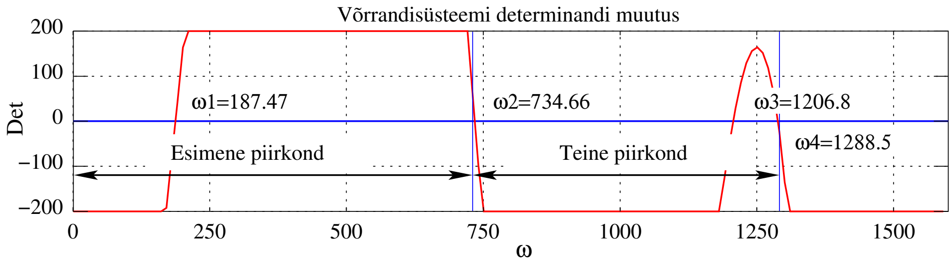
Ka sümmeetrilist sundvõnkumist vaatleme kahes piirkonnas (jn 5.12b):

$$-\ 0 < \omega < \omega_2 \quad \text{ja} \quad \omega_2 < \omega < \omega_4.$$

Staatilisel koormusel tekkivaid siirdeid ja sisejõude (vt jaotis 5.3.1) võrdleme dünaamilisest koormusest tingitud siirete ja sisejõududega.



(a) Antisümmeetrilise sundvõnkumise piirkonnad



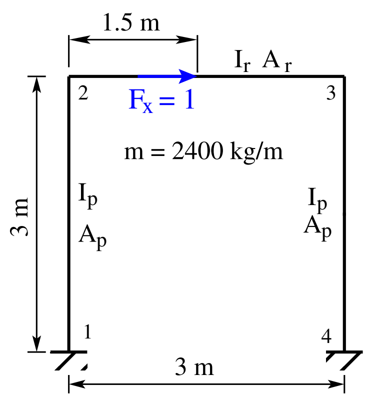
(b) Sümmeetrilise sundvõnkumise piirkonnad

Joonis 5.12. Sundvõnkumise piirkonnad

5.3.1 Raami staatiline koormamine

Leiame raami siirded ja sisejõud ning koostame nende epüürid antisümmeetrilisel (näide 5.3) ja sümmeetrilisel (näide 5.4) koormamisel.

Näide 5.3 (jäikade sõlmedega põikraami antisümmeetriline staatiline koormamine). Leida joonisel 5.13 kujutatud raami piki- ja põiksiirded, paindenurgad, piki- ja põikjõud, paindemomendid ning toereaktsioonid.



Joonis 5.13. Jäikade sõlmedega põikraam koormusega $F_x = 1\,\mathrm{N}$

Andmed. Nii raami ava kui ka postide pikkuseks on $3\,\mathrm{m}$. Elastsusmoodul $E = 200\,\mathrm{GPa}$. Raami riivi ja postide lausmass $m = 2400\,\mathrm{kg/m}$. Riivi ja posti ristlõiked on ühesugused. Ristlõike kõrgus $h = 20\,\mathrm{cm}$ ja laius $b = 20\,\mathrm{cm}$.

Lahendus. Algparameetrite leidmiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{5.29}$$

kus **Z** on võrrandisüsteemi tundmatute vektor.

Vektori komponentideks on piki- ja põiksiirded, paindenurgad, piki- ja põikjõud, paindemomendid varraste alguses ja lõpus (5.2) ning toereaktsioonid. Muutujate järjenumbrid varraste otstes tõime joonisel 5.7.

Jäikade sõlmedega põikraami (jn 5.13) antisümmeetrilisest staatilisest koormusest tekkivate piki- ja põiksiirete, paindenurkade, piki- ja põikjõudude, paindemomentide ning toereaktsioonide arvutamiseks kasutame GNU Octave'i programmi NaideRaam1CwMFxstaatika.m.

Arvutuspäeviku väljavõttes 5.3 on esitatud staatilisel koormusel $F_x = 1\,\mathrm{N}$ arvutatud siirded ja sisejõud, joonisel 5.14 on nende epüürid. Tabelis 5.4 toome vaadeldava põikraami toereaktsioonid.

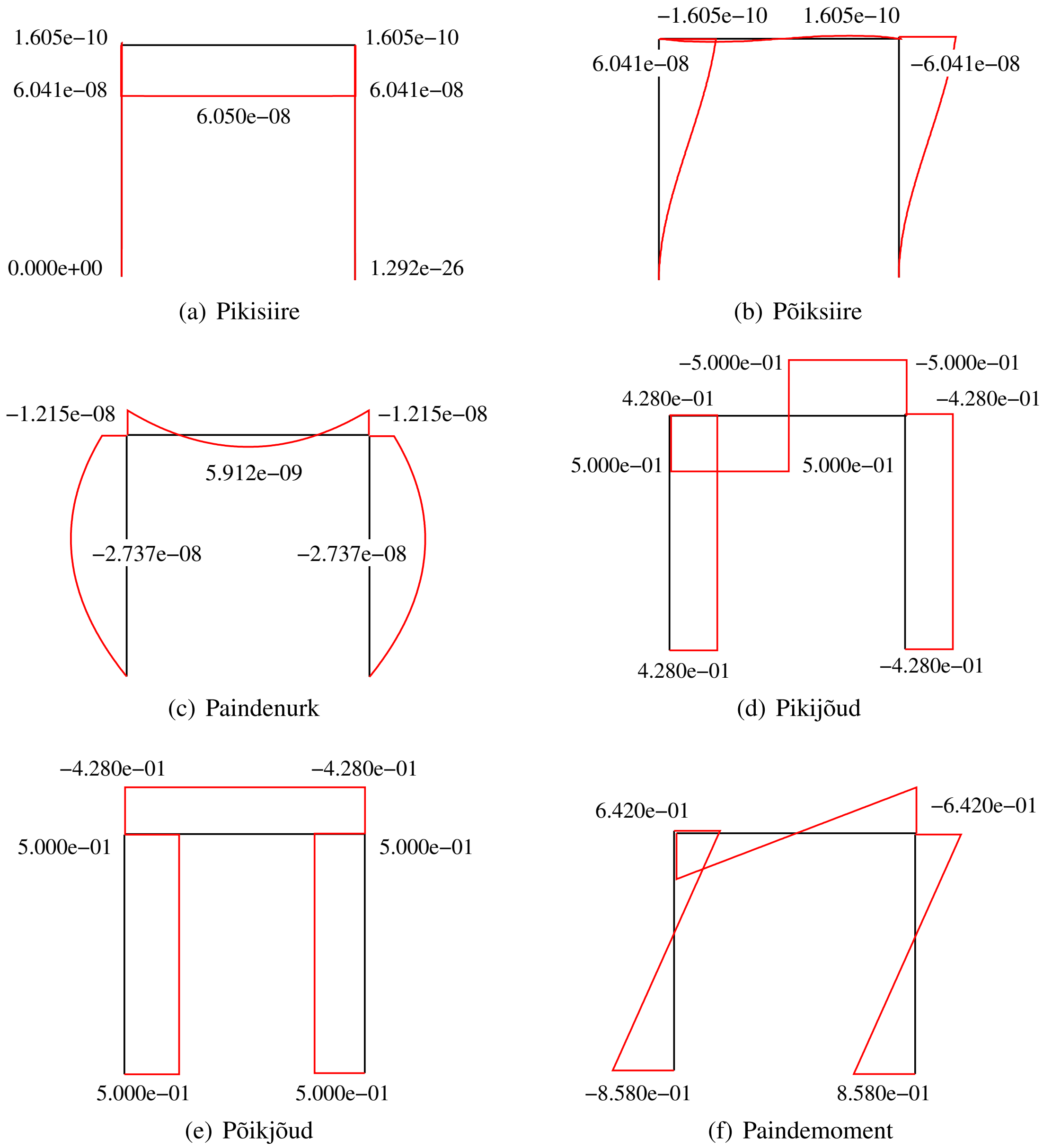
Tabel 5.4. Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid staatilisel koormusel $F_x = 1\,\mathrm{N}$

Toereaktsioon (jn 5.7)	Staatilisel koormusel	Toereaktsioon (jn 5.7)	Staatilisel koormusel
C_1 [N]	$-0.50000F_x$	C_4 [N]	$-0.50000F_x$
C_2 [N]	$0.42803F_x$	C_5 [N]	$-0.42803F_x$
C_3 [Nm]	$0.85796F_x$	C_6 [Nm]	$0.85796F_x$

Väljavõte arvutuspäevikust 5.3 (NaideRaam1CwMFxstaatika.m)

```
 1. element
h1 =  1.5000
Nmitmeks =   4

      x=      0.00        0.38        0.75        1.12        1.50
     u -    0.000e+00   2.006e-11   4.013e-11   6.019e-11   8.026e-11
     w -    0.000e+00   2.097e-09   7.730e-09   1.591e-08   2.565e-08
    fi -    0.000e+00  -1.075e-08  -1.886e-08  -2.433e-08  -2.717e-08
     N -    4.280e-01   4.280e-01   4.280e-01   4.280e-01   4.280e-01
     Q -    5.000e-01   5.000e-01   5.000e-01   5.000e-01   5.000e-01
     M -   -8.580e-01  -6.705e-01  -4.830e-01  -2.955e-01  -1.080e-01

 2. element
h2 =  1.5000
Nmitmeks =   4

      x=      0.00        0.38        0.75        1.12        1.50
     u -    8.026e-11   1.003e-10   1.204e-10   1.404e-10   1.605e-10
     w -    2.565e-08   3.596e-08   4.584e-08   5.432e-08   6.041e-08
    fi -   -2.717e-08  -2.737e-08  -2.493e-08  -1.986e-08  -1.215e-08
     N -    4.280e-01   4.280e-01   4.280e-01   4.280e-01   4.280e-01
     Q -    5.000e-01   5.000e-01   5.000e-01   5.000e-01   5.000e-01
     M -   -1.080e-01   7.954e-02   2.670e-01   4.545e-01   6.420e-01
```

```
 3. element
l1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         0.38          0.75         1.12          1.50
     u -    6.041e-08    6.043e-08    6.045e-08    6.048e-08    6.050e-08
     w -   -1.605e-10    2.842e-09    3.306e-09    2.076e-09   -3.309e-24
    fi -   -1.215e-08   -4.245e-09    1.398e-09    4.784e-09    5.912e-09
     N -    5.000e-01    5.000e-01    5.000e-01    5.000e-01    5.000e-01
     Q -   -4.280e-01   -4.280e-01   -4.280e-01   -4.280e-01   -4.280e-01
     M -    6.420e-01    4.815e-01    3.210e-01    1.605e-01    0.000e+00

 4. element
l2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         0.38          0.75         1.12          1.50
     u -    6.050e-08    6.048e-08    6.045e-08    6.043e-08    6.041e-08
     w -   -1.155e-24   -2.076e-09   -3.306e-09   -2.842e-09    1.605e-10
    fi -    5.912e-09    4.784e-09    1.398e-09   -4.245e-09   -1.215e-08
     N -   -5.000e-01   -5.000e-01   -5.000e-01   -5.000e-01   -5.000e-01
     Q -   -4.280e-01   -4.280e-01   -4.280e-01   -4.280e-01   -4.280e-01
     M -    2.004e-17   -1.605e-01   -3.210e-01   -4.815e-01   -6.420e-01

 5. element
h2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         0.38          0.75         1.12          1.50
     u -    1.605e-10    1.404e-10    1.204e-10    1.003e-10    8.026e-11
     w -   -6.041e-08   -5.432e-08   -4.584e-08   -3.596e-08   -2.565e-08
    fi -   -1.215e-08   -1.986e-08   -2.493e-08   -2.737e-08   -2.717e-08
     N -   -4.280e-01   -4.280e-01   -4.280e-01   -4.280e-01   -4.280e-01
     Q -    5.000e-01    5.000e-01    5.000e-01    5.000e-01    5.000e-01
     M -   -6.420e-01   -4.545e-01   -2.670e-01   -7.954e-02    1.080e-01

 6. element
h1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         0.38          0.75         1.12          1.50
     u -    8.026e-11    6.019e-11    4.013e-11    2.006e-11    1.292e-26
     w -   -2.565e-08   -1.591e-08   -7.730e-09   -2.097e-09   -8.272e-24
    fi -   -2.717e-08   -2.433e-08   -1.886e-08   -1.075e-08    0.000e+00
     N -   -4.280e-01   -4.280e-01   -4.280e-01   -4.280e-01   -4.280e-01
     Q -    5.000e-01    5.000e-01    5.000e-01    5.000e-01    5.000e-01
     M -    1.080e-01    2.955e-01    4.830e-01    6.705e-01    8.580e-01
```



Joonis 5.14. Jäikade sõlmedega põikraami epüürid staatilisel koormusel $F_x = 1\,\mathrm{N}$

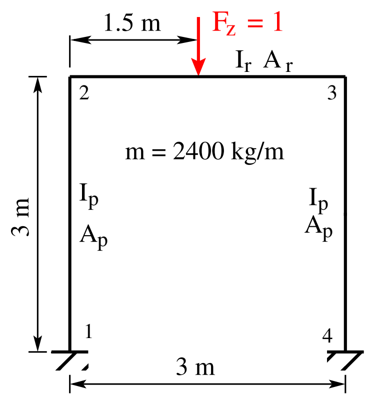
Näide 5.4 (jäikade sõlmedega põikraami sümmeetriline staatiline koormamine). Leida joonisel 5.15 kujutatud raami piki- ja põiksiirded, paindenurgad, piki- ja põikjõud, paindemomendid ning toereaktsioonid.

Andmed. Nii raami ava kui ka postide pikkuseks on $3\,\mathrm{m}$. Elastsusmoodul $E = 200\,\mathrm{GPa}$. Raami riivi ja postide lausmass $m = 2400\,\mathrm{kg/m}$. Riivi ja posti ristlõiked on ühesugused. Ristlõike kõrgus $h = 20\,\mathrm{cm}$ ja laius $b = 20\,\mathrm{cm}$.

Lahendus. Algparameetrite leidmiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{5.30}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor.



Joonis 5.15. Jäikade sõlmedega põikraam koormusega $F_z = 1\,\mathrm{N}$

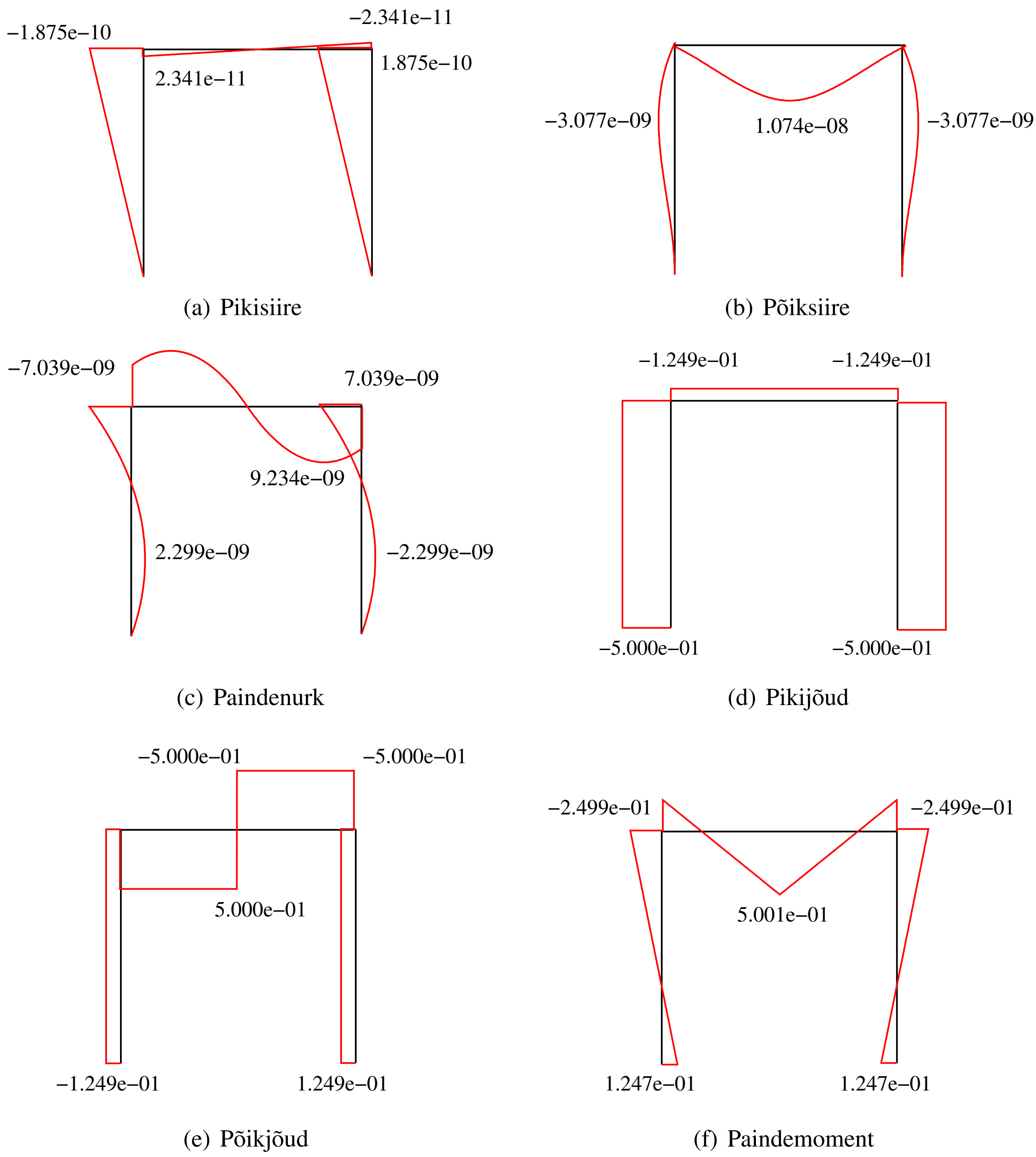
Vektori komponentideks on piki- ja põiksiirded, paindenurgad, piki- ja põikjõud, paindemomendid varraste alguses ja lõpus (5.2) ning toereaktsioonid. Muutujate järjenumbrid varraste otstes tõime joonisel 5.7.

Jäikade sõlmedega põikraami (jn 5.15) sümmeetrilisest staatilisest koormusest tingitud piki- ja põiksiirete, paindenurkade, piki- ja põikjõudude, paindemomentide ning toereaktsioonide arvutamiseks kasutame GNU Octave'i programmi NaideRaam1CwMstaatika.m.

Arvutuspäeviku väljavõttes 5.4 on esitatud staatilisest koormusest $F_z = 1\,\mathrm{N}$ tingitud siirete ja sisejõudude arvulised suurused. Joonis 5.16 toob nende epüürid.

Väljavõte arvutuspäevikust 5.4 (NaideRaam1CwMstaatika.m)

```
 1. element
h1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

     x=       0.00         0.38          0.75          1.12          1.50
     u -    0.000e+00   -2.344e-11   -4.687e-11   -7.031e-11   -9.375e-11
     w -    0.000e+00   -2.877e-10   -9.862e-10   -1.849e-09   -2.628e-09
    fi -    0.000e+00    1.425e-09    2.191e-09    2.299e-09    1.748e-09
     N -   -5.000e-01   -5.000e-01   -5.000e-01   -5.000e-01   -5.000e-01
     Q -   -1.249e-01   -1.249e-01   -1.249e-01   -1.249e-01   -1.249e-01
     M -    1.247e-01    7.790e-02    3.108e-02   -1.575e-02   -6.257e-02

 2. element
h2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

     x=       0.00         0.38          0.75          1.12          1.50
     u -   -9.375e-11   -1.172e-10   -1.406e-10   -1.641e-10   -1.875e-10
     w -   -2.628e-09   -3.077e-09   -2.950e-09   -1.999e-09    2.341e-11
    fi -    1.748e-09    5.390e-10   -1.329e-09   -3.855e-09   -7.039e-09
     N -   -5.000e-01   -5.000e-01   -5.000e-01   -5.000e-01   -5.000e-01
     Q -   -1.249e-01   -1.249e-01   -1.249e-01   -1.249e-01   -1.249e-01
     M -   -6.257e-02   -1.094e-01   -1.562e-01   -2.030e-01   -2.499e-01

 3. element
l1 =  1.5000
Nmitmeks =  4
```



(a) Pikisiire (b) Põiksiire

(c) Paindenurk (d) Pikijõud

(e) Põikjõud (f) Paindemoment

Joonis 5.16. Jäikade sõlmedega põikraami epüürid staatilisel koormusel $F_z = 1\,\mathrm{N}$

x=	0.00	0.38	0.75	1.12	1.50
u -	2.341e-11	1.756e-11	1.171e-11	5.853e-12	-3.318e-24
w -	1.875e-10	3.321e-09	6.784e-09	9.586e-09	1.074e-08
fi -	-7.039e-09	-9.234e-09	-8.793e-09	-5.715e-09	0.000e+00
N -	-1.249e-01	-1.249e-01	-1.249e-01	-1.249e-01	-1.249e-01
Q -	5.000e-01	5.000e-01	5.000e-01	5.000e-01	5.000e-01
M -	-2.499e-01	-6.236e-02	1.251e-01	3.126e-01	5.001e-01

```
 4. element
l2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00        0.38         0.75         1.12         1.50
     u -   -3.325e-24  -5.853e-12   -1.171e-11   -1.756e-11   -2.341e-11
     w -    1.074e-08   9.586e-09    6.784e-09    3.321e-09    1.875e-10
    fi -    2.047e-25   5.715e-09    8.793e-09    9.234e-09    7.039e-09
     N -   -1.249e-01  -1.249e-01   -1.249e-01   -1.249e-01   -1.249e-01
     Q -   -5.000e-01  -5.000e-01   -5.000e-01   -5.000e-01   -5.000e-01
     M -    5.001e-01   3.126e-01    1.251e-01   -6.236e-02   -2.499e-01

 5. element
h2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00        0.38         0.75         1.12         1.50
     u -    1.875e-10   1.641e-10    1.406e-10    1.172e-10    9.375e-11
     w -    2.341e-11  -1.999e-09   -2.950e-09   -3.077e-09   -2.628e-09
    fi -    7.039e-09   3.855e-09    1.329e-09   -5.390e-10   -1.748e-09
     N -   -5.000e-01  -5.000e-01   -5.000e-01   -5.000e-01   -5.000e-01
     Q -    1.249e-01   1.249e-01    1.249e-01    1.249e-01    1.249e-01
     M -   -2.499e-01  -2.030e-01   -1.562e-01   -1.094e-01   -6.257e-02

 6. element
h1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00        0.38         0.75         1.12         1.50
     u -    9.375e-11   7.031e-11    4.687e-11    2.344e-11    1.292e-26
     w -   -2.628e-09  -1.849e-09   -9.862e-10   -2.877e-10    4.136e-25
    fi -   -1.748e-09  -2.299e-09   -2.191e-09   -1.425e-09    4.136e-25
     N -   -5.000e-01  -5.000e-01   -5.000e-01   -5.000e-01   -5.000e-01
     Q -    1.249e-01   1.249e-01    1.249e-01    1.249e-01    1.249e-01
     M -   -6.257e-02  -1.575e-02    3.108e-02    7.790e-02    1.247e-01
```

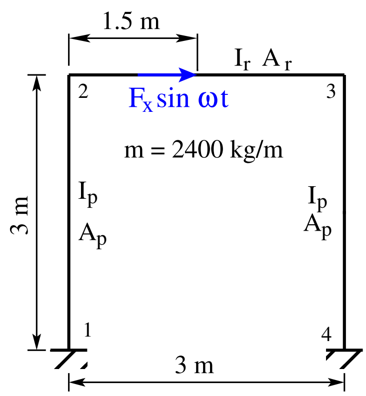
Tabelis 5.5 on esitatud jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid (jn 5.7) staatilisel koormusel $F_z = 1\,\mathrm{N}$.

Tabel 5.5. Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid staatilisel koormusel $F_z = 1\,\mathrm{N}$

Toereaktsioon (jn 5.7)	Staatilisel koormusel	Toereaktsioon (jn 5.7)	Staatilisel koormusel
C_1 [N]	$0.12486F_z$	C_4 [N]	$-0.12486F_z$
C_2 [N]	$-0.50000F_z$	C_5 [N]	$-0.50000F_z$
C_3 [Nm]	$-0.12472F_z$	C_6 [Nm]	$0.12472F_z$

5.3.2 Raami antisümmeetriline sundvõnkumine

Näide 5.5 (jäikade sõlmedega põikraami antisümmeetriline sundvõnkumine). Leida joonisel 5.17 kujutatud raami omavõnkesagedused ja -vormid.



Joonis 5.17. Jäikade sõlmedega põikraam antisümmeetrilise koormusega

Andmed. Nii raami ava kui ka postide pikkuseks on $3\,\mathrm{m}$. Elastsusmoodul $E = 200\,\mathrm{GPa}$. Raami riivi ja postide lausmass $m = 2400\,\mathrm{kg/m}$. Riivi ja posti ristlõiked on ühesugused. Ristlõike kõrgus $h = 20\,\mathrm{cm}$, ka laius $b = 20\,\mathrm{cm}$.

Lahendus. Algparameetrite leidmiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{5.31}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor.

Vektori komponentideks on piki- ja põiksiirded, paindenurgad, piki- ja põikjõud, paindemomendid varraste alguses ja lõpus (5.2) ning toereaktsioonid. Muutujate järjenumbrid varraste otstes on joonisel 5.7. Allpool vaatleme antisümmeetrilisi sundvõnkumisi kahes sageduste ω_i piirkonnas.

- Esimene piirkond kuni esimese omavõnkesageduseni $\omega_1 = 1.8747\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ (omavõnkesageduse karakteristik $\kappa_1\ell = 1.7892$): siin teeme arvutused sagedustel $7.2216\times10\,\mathrm{s}^{-1}$ (lk 230), $1.3627\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ (lk 184) ja $1.8599\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ (lk 232). Vastavad omavõnkesageduse karakteristikud λ on 1.1105, 1.5254 ja 1.7821.
- Teine piirkond ulatub esimesest omavõnkesagedusest $\omega_1 = 1.8747\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ kuni omavõnkesageduseni $\omega_3 = 1.2068\times10^3\,\mathrm{s}^{-1}$ (omavõnkesageduse karakteristik $\kappa_3\ell = 4.5396$), mis on teine antisümmeetrilise võnkumise resonantssagedus. Nüüd teeme arvutused sagedustel $1.8889\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ (lk 187), $7.300\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ (lk 235) ja $1.206\times10^3\,\mathrm{s}^{-1}$ (lk 238). Vastavad omavõnkesageduse karakteristikud λ on 1.7960, 3.5307 ja 4.5381.

Antisümmeetrilisel sundvõnkumisel on koormuseks horisontaalne jõud $F_x = 1.0\,\mathrm{N}$. Raami toereaktsioonides võetakse arvesse varrastele mõjuvad inertsjõud $\sum_1^3\int_\circ^{\ell_i} m_i\,\omega^2 u dx$

ja $\sum_1^3 \int_\circ^{l_i} m_i \omega^2 w \mathrm{d}x$, kus ℓ_i on varda pikkus; m_i – mass ühikpikkuse kohta; ω – võnkumise nurksagedus; u – pikisiire; w – põiksiire.

Esimeses piirkonnas arvutatakse siirded ja sisejõud sagedusvariantidel 1, 2 ja 3 GNU Octave'i programmiga NaideRaam1CwMFx.m. Arvutustulemused leiab arvutuspäeviku väljavõtetest B.3 (lk 230), 5.6 (lk 184) ja B.4 (lk 232). Tabelites B.1, 5.6 ja B.2 on esitatud jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid (jn 5.7). Joonistel B.9, 5.19 ja B.10 on siirete ja sisejõudude epüürid.

Teises piirkonnas arvutatakse siirded ja sisejõud sagedusvariantidel 4, 5 ja 6 GNU Octave'i programmiga NaideRaam1CwMFx.m. Arvutustulemused toome arvutuspäeviku väljavõtetes 5.7 (lk 187), B.5 (lk 235) ja B.6 (lk 238). Tabelitest 5.7, B.3 ja B.4 leiab jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid (jn 5.7). Joonistel 5.20, B.11 ja B.12 on siirete ja sisejõudude epüürid.

Jäikade sõlmedega põikraami (jn 5.3) siirdeid ja sisejõude (jn 5.7) antisümmeetrilisel sundvõnkumisel võrdleme staatilisest koormusest tingituiga, need arvutame GNU Octave'i programmiga NaideRaam1CwMFxstaatika.m. Arvutuspäeviku väljavõttes 5.3 tuuakse staatilisest koormusest $F_x = 1\,\mathrm{N}$ põhjustatud siirete ja sisejõudude arvulised suurused ning joonisel 5.14 nende epüürid. Tabel 5.4 esitab vaadeldava põikraami toereaktsioonid.

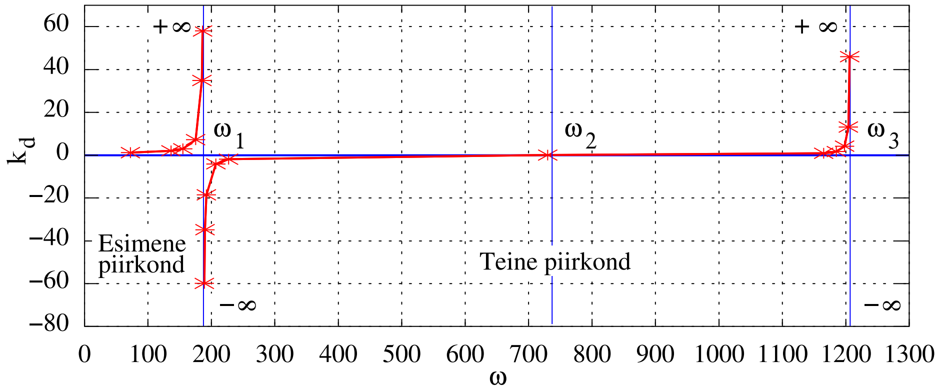
Põikraami riivi algul sõlmes 3 (jn 5.7) leiame GNU Octave'i programmiga dynaamikategurA.m paindemomendi dünaamikateguri k_d sõltuvuse sundiva jõu $F_x \sin \omega t$ sagedusest ω.

$$k_d(\omega) = \frac{M_{3\,\text{dünaamilisest koormusest}}}{M_{3\,\text{staatilisest koormusest}}} \tag{5.32}$$

Dünaamikateguri arvutamise tulemused on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 5.5. Dünaamikateguri graafiku leiame joniselt 5.18.

Väljavõte arvutuspäevikust 5.5 (dynaamikategurA.m)

```
Dünaamikategur esimeses piirkonnas kd1 =
    1.1590    2.0218    2.9704    7.1760   34.9065   58.0374

Sagedused esimeses piirkonnas Xw1 =
    72.216   136.270   155.000   175.000   185.000   185.990

Dünaamikategur teises piirkonnas kd2 =
 Columns 1 through 6:
    -59.844237  -34.844237  -18.551402   -4.066978   -1.864486    0.060016
 Columns 7 through 11:
     0.896417  1.700935   4.180685   13.107477   45.996885

Sagedused teises piirkonnas Xw2 =
  Columns 1 through 6:
     188.89    189.90    192.00    207.00    227.00    730.00
 Columns 7 and 11:
     1165.00  1185.00   1198.00    1204.00   1206.00
```



Joonis 5.18. Paindemomendi dünaamikategur k_d antisümmeetrilisel võnkumisel

Antisümmeetrilise koormuse esimene piirkond (vt lk 183). Sagedus $\omega = 1.3627 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\lambda = 1.5254$.

Tabel 5.6. Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 1.3627 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$

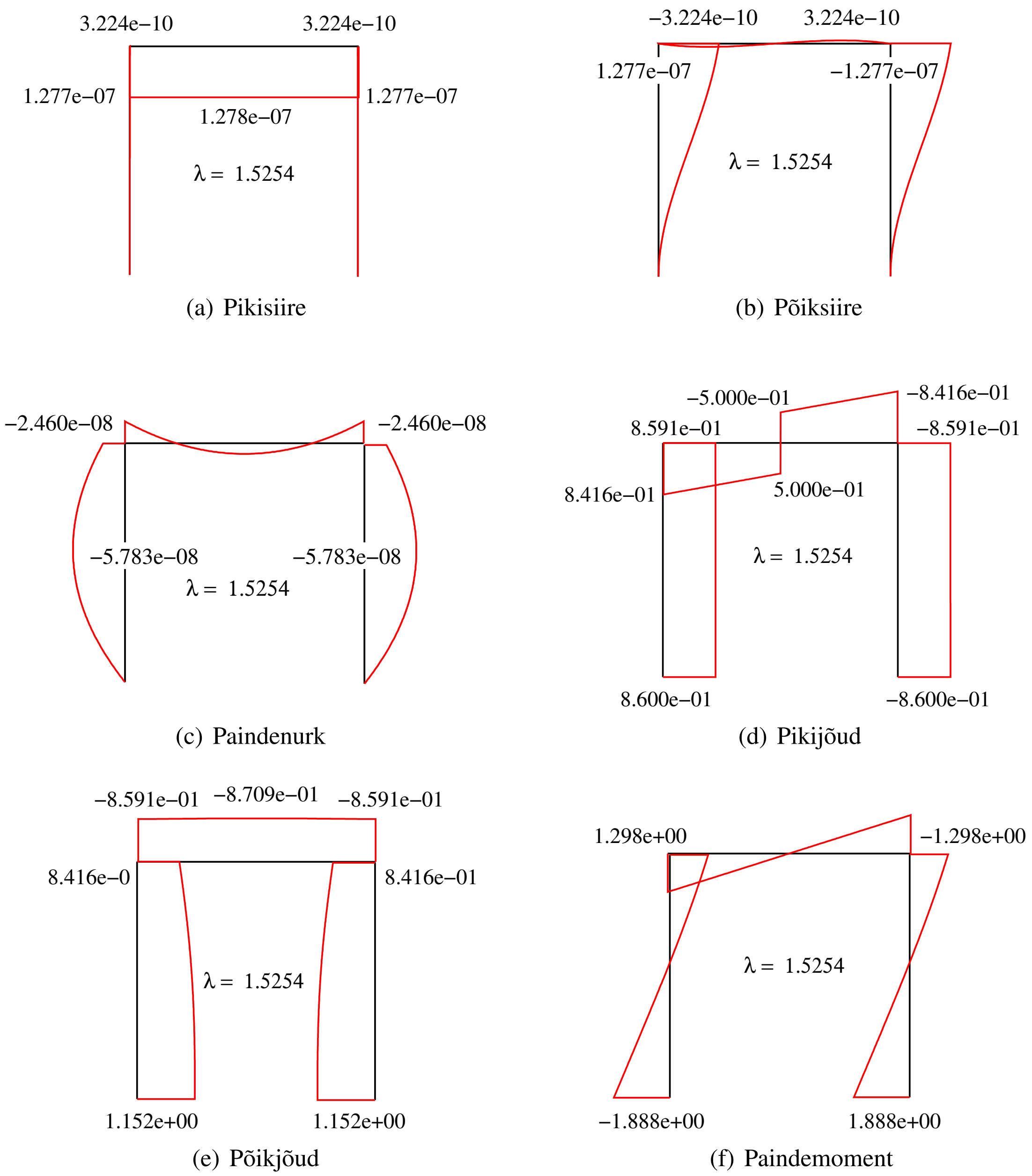
Toereaktsioon (jn 5.7)	Dünaamilisel koormusel	Staatilisel koormusel	Erinevus
C_1 [N]	$-1.15233F_x$	$-0.50000F_x$	$-0.65233F_x$
C_2 [N]	$0.85999F_x$	$0.42803F_x$	$0.43196F_x$
C_3 [Nm]	$1.88788F_x$	$0.85796F_x$	$1.02992F_x$
C_4 [N]	$-1.15233F_x$	$-0.50000F_x$	$-0.65233F_x$
C_5 [N]	$-0.85999F_x$	$-0.42803F_x$	$-0.43196F_x$
C_6 [Nm]	$1.8878F_x$	$0.85796F_x$	$1.02992F_x$

Väljavõte arvutuspäevikust 5.6 (NaideRaam1CwMFx.m)

```
 1. element
h1 =   1.5000
Nmitmeks =   4

      x=        0.00         0.38          0.75         1.12         1.50
     u -     0.000e+00    4.031e-11    8.062e-11    1.209e-10    1.612e-10
     w -     0.000e+00    4.598e-09    1.687e-08    3.456e-08    5.540e-08
    fi -     0.000e+00   -2.351e-08   -4.095e-08   -5.236e-08   -5.783e-08
     N -     8.600e-01    8.600e-01    8.599e-01    8.599e-01    8.598e-01
     Q -     1.152e+00    1.151e+00    1.144e+00    1.128e+00    1.098e+00
     M -    -1.888e+00   -1.456e+00   -1.025e+00   -5.988e-01   -1.811e-01

 2. element
h2 =   1.5000
Nmitmeks =   4
```

```
      x=        0.00          0.38           0.75          1.12          1.50
     u -    1.612e-10    2.015e-10    2.418e-10    2.821e-10    3.224e-10
     w -    5.540e-08    7.721e-08    9.785e-08    1.153e-07    1.277e-07
    fi -   -5.783e-08   -5.752e-08   -5.166e-08   -4.057e-08   -2.460e-08
     N -    8.598e-01    8.597e-01    8.595e-01    8.593e-01    8.591e-01
     Q -    1.098e+00    1.053e+00    9.946e-01    9.231e-01    8.416e-01
     M -   -1.811e-01    2.226e-01    6.070e-01    9.669e-01    1.298e+00

 3. element
l1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=        0.00          0.38           0.75          1.12          1.50
     u -    1.277e-07    1.277e-07    1.277e-07    1.278e-07    1.278e-07
     w -   -3.224e-10    5.765e-09    6.708e-09    4.214e-09    1.985e-23
    fi -   -2.460e-08   -8.617e-09    2.828e-09    9.708e-09    1.200e-08
     N -    8.416e-01    7.562e-01    6.708e-01    5.854e-01    5.000e-01
     Q -   -8.591e-01   -8.613e-01   -8.657e-01   -8.695e-01   -8.709e-01
     M -    1.298e+00    9.756e-01    6.518e-01    3.264e-01   -2.220e-16

 4. element
l2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=        0.00          0.38           0.75          1.12          1.50
     u -    1.278e-07    1.278e-07    1.277e-07    1.277e-07    1.277e-07
     w -    7.566e-24   -4.214e-09   -6.708e-09   -5.765e-09    3.224e-10
    fi -    1.200e-08    9.708e-09    2.828e-09   -8.617e-09   -2.460e-08
     N -   -5.000e-01   -5.854e-01   -6.708e-01   -7.562e-01   -8.416e-01
     Q -   -8.709e-01   -8.695e-01   -8.657e-01   -8.613e-01   -8.591e-01
     M -    1.153e-17   -3.264e-01   -6.518e-01   -9.756e-01   -1.298e+00

 5. element
h2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=        0.00          0.38           0.75          1.12          1.50
     u -    3.224e-10    2.821e-10    2.418e-10    2.015e-10    1.612e-10
     w -   -1.277e-07   -1.153e-07   -9.785e-08   -7.721e-08   -5.540e-08
    fi -   -2.460e-08   -4.057e-08   -5.166e-08   -5.752e-08   -5.783e-08
     N -   -8.591e-01   -8.593e-01   -8.595e-01   -8.597e-01   -8.598e-01
     Q -    8.416e-01    9.231e-01    9.946e-01    1.053e+00    1.098e+00
     M -   -1.298e+00   -9.669e-01   -6.070e-01   -2.226e-01    1.811e-01

 6. element
h1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=        0.00          0.38           0.75          1.12          1.50
     u -    1.612e-10    1.209e-10    8.062e-11    4.031e-11    0.000e+00
     w -   -5.540e-08   -3.456e-08   -1.687e-08   -4.598e-09   -1.654e-24
    fi -   -5.783e-08   -5.236e-08   -4.095e-08   -2.351e-08   -1.158e-23
```

```
N -    -8.598e-01   -8.599e-01   -8.599e-01   -8.600e-01   -8.600e-01
Q -     1.098e+00    1.128e+00    1.144e+00    1.151e+00    1.152e+00
M -     1.811e-01    5.988e-01    1.025e+00    1.456e+00    1.888e+00
```



Joonis 5.19. Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 1.3627 \times 10^2\ \mathrm{s}^{-1}$

Antisümmeetrilise koormuse teine piirkond (vt lk 183). Sagedus $\omega = 1.8889\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\lambda = 1.7960$.

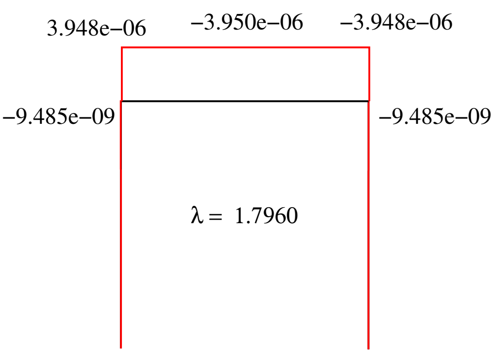
Tabel 5.7. Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 1.8889\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$

Toereaktsioon (jn 5.7)	Dünaamilisel koormusel	Staatilisel koormusel	Erinevus
C_1 [N]	$38.46527F_x$	$-0.50000F_x$	$38.965F_x$
C_2 [N]	$-25.30905F_x$	$0.42803F_x$	$-25.737F_x$
C_3 [Nm]	$-60.58417F_x$	$0.85796F_x$	$-61.442F_x$
C_4 [N]	$38.46527F_x$	$-0.50000F_x$	$38.965F_x$
C_5 [N]	$25.30905F_x$	$-0.42803F_x$	$25.737F_x$
C_6 [Nm]	$-60.58417F_x$	$0.85796F_x$	$-61.442F_x$

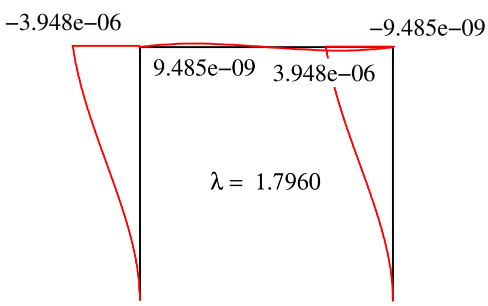
Väljavõte arvutuspäevikust 5.7 (NaideRaam1CwMFx.m)

```
 1. element
h1 =   1.5000
Nmitmeks =   4

      x=       0.00         0.38         0.75         1.12         1.50
     u -    0.000e+00   -1.186e-09   -2.373e-09   -3.559e-09   -4.745e-09
     w -    0.000e+00   -1.471e-07   -5.376e-07   -1.096e-06   -1.749e-06
    fi -    0.000e+00    7.506e-07    1.299e-06    1.647e-06    1.801e-06
     N -   -2.531e+01   -2.531e+01   -2.531e+01   -2.530e+01   -2.530e+01
     Q -   -3.847e+01   -3.840e+01   -3.798e+01   -3.695e+01   -3.513e+01
     M -    6.058e+01    4.617e+01    3.183e+01    1.776e+01    4.216e+00

 2. element
h2 =   1.5000
Nmitmeks =   4

      x=       0.00         0.38         0.75         1.12         1.50
     u -   -4.745e-09   -5.930e-09   -7.116e-09   -8.300e-09   -9.485e-09
     w -   -1.749e-06   -2.423e-06   -3.054e-06   -3.580e-06   -3.948e-06
    fi -    1.801e-06    1.769e-06    1.568e-06    1.213e-06    7.297e-07
     N -   -2.530e+01   -2.529e+01   -2.528e+01   -2.527e+01   -2.526e+01
     Q -   -3.513e+01   -3.245e+01   -2.892e+01   -2.465e+01   -1.979e+01
     M -    4.216e+00   -8.482e+00   -2.001e+01   -3.008e+01   -3.842e+01

 3. element
l1 =   1.5000
Nmitmeks =   4

      x=       0.00         0.38         0.75         1.12         1.50
     u -   -3.948e-06   -3.949e-06   -3.950e-06   -3.950e-06   -3.950e-06
     w -    9.485e-09   -1.712e-07   -1.993e-07   -1.252e-07   -2.118e-22
    fi -    7.297e-07    2.560e-07   -8.377e-08   -2.884e-07   -3.567e-07
     N -   -1.979e+01   -1.472e+01   -9.647e+00   -4.574e+00    5.000e-01
```

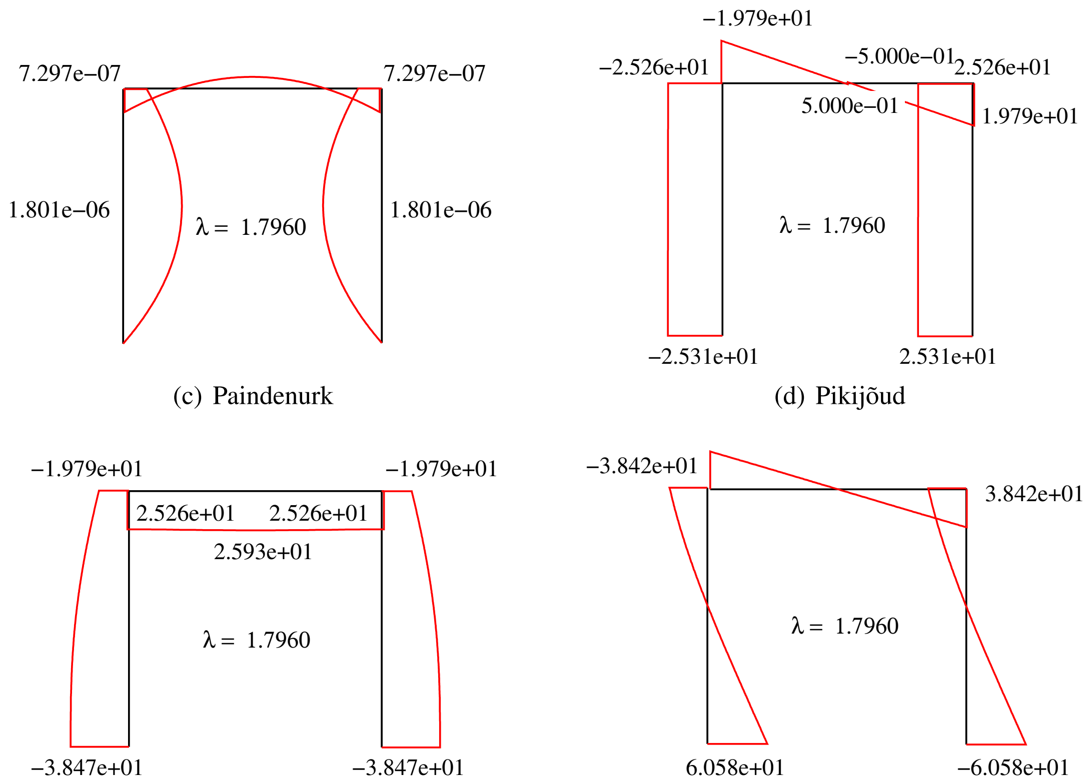
```
     Q -     2.526e+01    2.538e+01    2.563e+01    2.585e+01    2.593e+01
     M -    -3.842e+01   -2.894e+01   -1.937e+01   -9.715e+00   -7.105e-15

 4. element
l2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=        0.00         0.38          0.75          1.12          1.50
     u -    -3.950e-06   -3.950e-06   -3.950e-06   -3.949e-06   -3.948e-06
     w -     2.381e-23    1.252e-07    1.993e-07    1.712e-07   -9.485e-09
    fi -    -3.567e-07   -2.884e-07   -8.377e-08    2.560e-07    7.297e-07
     N -    -5.000e-01    4.574e+00    9.647e+00    1.472e+01    1.979e+01
     Q -     2.593e+01    2.585e+01    2.563e+01    2.538e+01    2.526e+01
     M -    -7.355e-15    9.715e+00    1.937e+01    2.894e+01    3.842e+01

 5. element
h2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=        0.00         0.38          0.75          1.12          1.50
     u -    -9.485e-09   -8.300e-09   -7.116e-09   -5.930e-09   -4.745e-09
     w -     3.948e-06    3.580e-06    3.054e-06    2.423e-06    1.749e-06
    fi -     7.297e-07    1.213e-06    1.568e-06    1.769e-06    1.801e-06
     N -     2.526e+01    2.527e+01    2.528e+01    2.529e+01    2.530e+01
     Q -    -1.979e+01   -2.465e+01   -2.892e+01   -3.245e+01   -3.513e+01
     M -     3.842e+01    3.008e+01    2.001e+01    8.482e+00   -4.216e+00

 6. element
h1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=        0.00         0.38          0.75          1.12          1.50
     u -    -4.745e-09   -3.559e-09   -2.373e-09   -1.186e-09    8.272e-25
     w -     1.749e-06    1.096e-06    5.376e-07    1.471e-07   -4.765e-22
    fi -     1.801e-06    1.647e-06    1.299e-06    7.506e-07    1.059e-22
     N -     2.530e+01    2.530e+01    2.531e+01    2.531e+01    2.531e+01
     Q -    -3.513e+01   -3.695e+01   -3.798e+01   -3.840e+01   -3.847e+01
     M -    -4.216e+00   -1.776e+01   -3.183e+01   -4.617e+01   -6.058e+01
```



(a) Pikisiire



(b) Põiksiire



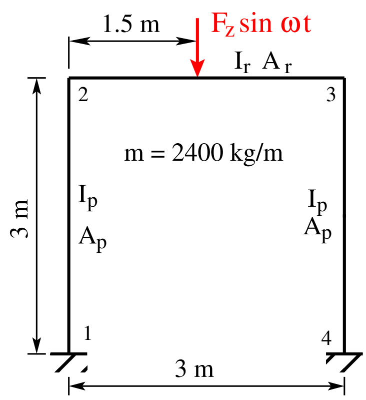
(c) Paindenurk (d) Pikijõud

(e) Põikjõud (f) Paindemoment

Joonis 5.20. Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 1.8889 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$

5.3.3 Raami sümmeetriline sundvõnkumine

Näide 5.6 (jäikade sõlmedega põikraami sümmeetriline sundvõnkumine). Leida joonisel 5.21 kujutatud raami omavõnkesagedused ja -vormid.



Joonis 5.21. Jäikade sõlmedega põikraam sümmeetrilise koormusega

Andmed. Nii raami ava kui ka postide pikkuseks on $3\,\mathrm{m}$. Elastsusmoodul $E = 200\,\mathrm{GPa}$.

Raami riivi ja postide lausmass $m = 2400\,\mathrm{kg/m}$. Riivi ja posti ristlõiked on ühesugused. Ristlõike kõrgus $h = 20\,\mathrm{cm}$ ja laius $b = 20\,\mathrm{cm}$.

Lahendus. Algparameetrite leidmiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B} \tag{5.33}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor.

Vektori komponentideks on piki- ja põiksiirded, paindenurgad, piki- ja põikjõud, paindemomendid varraste alguses ja lõpus (5.2) ning toereaktsioonid. Muutujate järjenumbrid varraste otstes on joonisel 5.7.

Allpool vaatleme sümmeetrilist sundvõnkumist kahes sageduste ω_i piirkonnas.

- Esimene piirkond kuni esimese sümmeetrilise omavõnkesageduseni $\omega_2 = 7.3466 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ (omavõnkesageduse karakteristik $\lambda_2 = 3.5419$): siin teeme arvutused sagedustel $2.83 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ (lk 240), $5.34 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ (lk 243) ja $7.2886 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ (lk 192), vastavad omavõnkesageduse karakteristikud λ on 2.1983, 3.0197 ja 3.527.
- Teine piirkond ulatub esimesest sümmeetrilisest omavõnkesagedusest $\omega_2 = 7.3466 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ kuni omavõnkesageduseni $\omega_4 = 1.28858 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$ (omavõnkesageduse karakteristik $\lambda_4 = 4.6909$), kus ω_4 on sümmeetrilise võnkumise teine resonantssagedus. Siin teeme arvutused sagedustel $7.3813 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ (lk 194), $9.95084 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$ (lk 246) ja $1.2860274 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$ (lk 248). Vastavad omavõnkesageduse karakteristikud λ on 3.5503, 4.122 ja 4.6862.

Sümmeetrilisel sundvõnkumisel on koormuseks horisontaaljõud $F_z = 1.0\,\mathrm{N}$. Raami toereaktsioonides võetakse arvesse varrastele mõjuvad inertsjõud $\sum_1^3 \int_\circ^{\ell_i} m_i\,\omega^2 u dx$ ja $\sum_1^3 \int_\circ^{l_i} m_i\,\omega^2 w dx$. Siin on ℓ_i varda pikkus, m_i – mass ühikpikkuse kohta, ω – võnkumise nurksagedus, u – pikisiire, w – põiksiire.

Esimeses piirkonnas arvutatakse siirded ja sisejõud sagedusvariantidel 1, 2 ja 3 GNU Octave'i programmiga NaideRaam1CwM.m. Tulemused on esitatud arvutuspäeviku väljavõtetes B.7 (lk 240), B.8 (lk 243) ja 5.9 (lk 192). Tabelites B.5, B.6 ja 5.8 on toodud jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid (jn 5.7). Siirete ja sisejõudude epüürid leiab joonistelt B.13, B.14 ja 5.23.

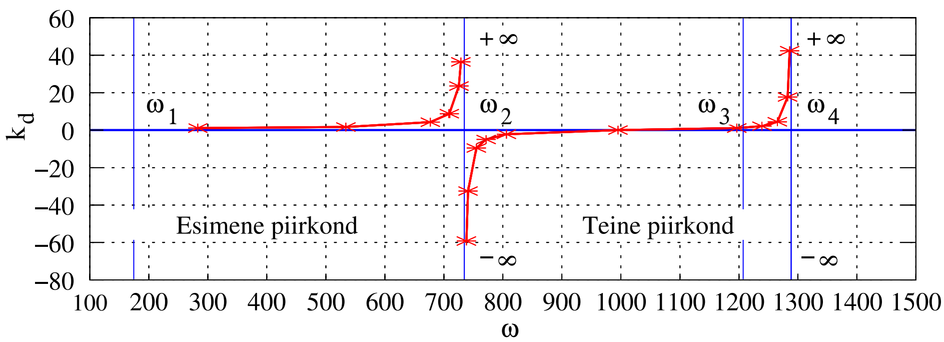
Teises piirkonnas arvutatakse siirded ja sisejõud sagedusvariantidel 4, 5 ja 6 GNU Octave'i programmiga NaideRaam1CwM.m. Tulemused on esitatud arvutuspäeviku väljavõtetes 5.10 (lk 194), B.9 (lk 246) ja B.10 (lk 248). Tabelites 5.9, B.7 ja B.8 on toodud jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid (jn 5.7). Joonistel 5.24, B.15 ja B.16 on siirete ja sisejõudude epüürid.

Põikraami riivi keskel, sõlmes 4, leiame GNU Octave'i programmiga dynaamikategurS.m paindemomendi dünaamikateguri k_d sõltuvuse sundiva jõu $F_z \sin \omega t$ sagedusest ω.

$$k_d(\omega) = \frac{M_{4\,\text{dünaamilisest koormusest}}}{M_{4\,\text{staatilisest koormusest}}} \tag{5.34}$$

Dünaamikateguri graafiku leiame jooniselt 5.22 (vrd [Kis64, lk 189]).

Dünaamikateguri arvutamise tulemused on esitatud arvutuspäeviku väljavõttes 5.8.



Joonis 5.22. Paindemomendi dünaamikategur k_d sümmeetrilisel võnkumisel

Väljavõte arvutuspäevikust 5.8 (**dynaamikategurS.m**)

```
Dünaamikategur esimeses piirkonnas kd1 =
   1.1072   1.6687   4.2472   8.8082  23.5553  36.4727

Sagedused esimeses piirkonnas Xw1 =
   283.00   534.00   676.96   709.19   725.59   728.86

Dünaamikategur teises piirkonnas kd2 =
 Columns 1 through 6:
   -5.9248e+01 -3.2533e+01 -9.5541e+00 -4.9510e+00 -2.2336e+00  1.0188e-06
 Columns 7 through 11:
    1.1054e+00  2.1136e+00  4.4431e+00  1.7672e+01  4.2412e+01

Sagedused teises piirkonnas Xw2 =
 Columns 1 through 6:
    738.13  740.92  755.00  771.65  806.04  995.08
 Columns 7 and 11:
    1196.40  1239.10  1265.00   1282.60   1286.03
```

Sümmeetrilise koormuse esimene piirkond (vt lk 190). Sagedus $\omega = 7.2886 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\lambda = 3.5503$.

Tabel 5.8. Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 7.2886 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$

Toereaktsioon (jn 5.7)	Dünaamilisel koormusel	Staatilisel koormusel	Erinevus
C_1 [N]	$18.83489F_x$	$0.12486F_x$	$18.710F_x$
C_2 [N]	$-28.12344F_x$	$-0.50000F_x$	$-27.623F_x$
C_3 [Nm]	$-15.50564F_x$	$-0.12472F_x$	$-15.381F_x$
C_4 [N]	$-18.83489F_x$	$-0.12486F_x$	$-18.710F_x$
C_5 [N]	$-28.12344F_x$	$-0.50000F_x$	$-27.623F_x$
C_6 [Nm]	$15.50564F_x$	$0.12472F_x$	$15.381F_x$

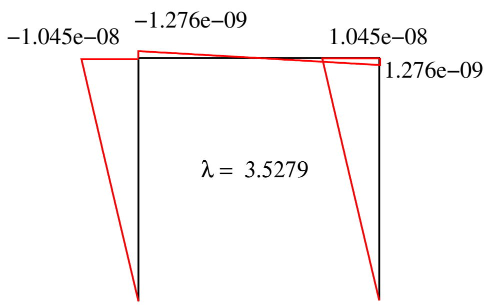
Väljavõte arvutuspäevikust 5.9 (NaideRaam1CwM.m)

```
 1. element
h1 =  1.5000
Nmitmeks =   4

      x=        0.00        0.38         0.75        1.12        1.50
     u -     0.000e+00  -1.318e-09  -2.635e-09  -3.950e-09  -5.261e-09
     w -     0.000e+00  -3.468e-08  -1.141e-07  -2.029e-07  -2.699e-07
    fi -     0.000e+00   1.684e-07   2.393e-07   2.201e-07   1.268e-07
     N -    -2.812e+01  -2.811e+01  -2.807e+01  -2.801e+01  -2.792e+01
     Q -    -1.883e+01  -1.860e+01  -1.722e+01  -1.418e+01  -9.604e+00
     M -     1.551e+01   8.465e+00   1.699e+00  -4.242e+00  -8.742e+00

 2. element
h2 =  1.5000
Nmitmeks =   4

      x=        0.00        0.38         0.75        1.12        1.50
     u -    -5.261e-09  -6.567e-09  -7.867e-09  -9.161e-09  -1.045e-08
     w -    -2.699e-07  -2.917e-07  -2.546e-07  -1.557e-07  -1.276e-09
    fi -     1.268e-07  -1.679e-08  -1.823e-07  -3.422e-07  -4.757e-07
     N -    -2.792e+01  -2.781e+01  -2.767e+01  -2.751e+01  -2.732e+01
     Q -    -9.604e+00  -4.148e+00   1.174e+00   5.192e+00   6.773e+00
     M -    -8.742e+00  -1.133e+01  -1.187e+01  -1.062e+01  -8.281e+00

 3. element
l1 =  1.5000
Nmitmeks =   4

      x=        0.00        0.38         0.75        1.12        1.50
     u -    -1.276e-09  -9.580e-10  -6.392e-10  -3.197e-10   7.445e-24
     w -     1.045e-08   2.018e-07   3.847e-07   5.148e-07   5.619e-07
    fi -    -4.757e-07  -5.211e-07  -4.346e-07  -2.458e-07   0.000e+00
     N -     6.773e+00   6.794e+00   6.810e+00   6.819e+00   6.822e+00
     Q -     2.732e+01   2.532e+01   1.966e+01   1.094e+01   5.000e-01
     M -    -8.281e+00   1.704e+00   1.025e+01   1.606e+01   1.824e+01

 4. element
l2 =  1.5000
Nmitmeks =   4

      x=        0.00        0.38         0.75        1.12        1.50
     u -     7.313e-24   3.197e-10   6.392e-10   9.580e-10   1.276e-09
     w -     5.619e-07   5.148e-07   3.847e-07   2.018e-07   1.045e-08
    fi -     1.351e-22   2.458e-07   4.346e-07   5.211e-07   4.757e-07
     N -     6.822e+00   6.819e+00   6.810e+00   6.794e+00   6.773e+00
     Q -    -5.000e-01  -1.094e+01  -1.966e+01  -2.532e+01  -2.732e+01
     M -     1.824e+01   1.606e+01   1.025e+01   1.704e+00  -8.281e+00

 5. element
h2 =  1.5000
Nmitmeks =   4
```

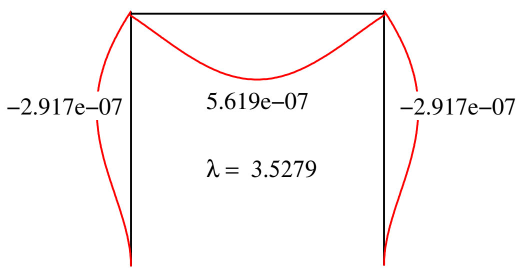
x=	0.00	0.38	0.75	1.12	1.50
u -	1.045e-08	9.161e-09	7.867e-09	6.567e-09	5.261e-09
w -	-1.276e-09	-1.557e-07	-2.546e-07	-2.917e-07	-2.699e-07
fi -	4.757e-07	3.422e-07	1.823e-07	1.679e-08	-1.268e-07
N -	-2.732e+01	-2.751e+01	-2.767e+01	-2.781e+01	-2.792e+01
Q -	-6.773e+00	-5.192e+00	-1.174e+00	4.148e+00	9.604e+00
M -	-8.281e+00	-1.062e+01	-1.187e+01	-1.133e+01	-8.742e+00

6. element
h1 = 1.5000
Nmitmeks = 4

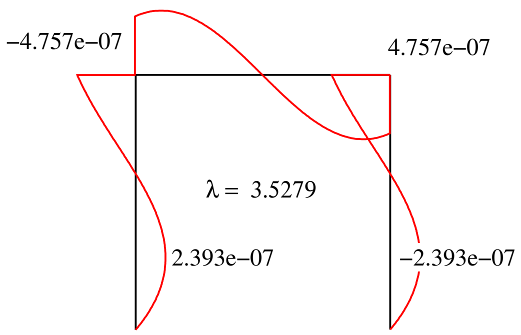
x=	0.00	0.38	0.75	1.12	1.50
u -	5.261e-09	3.950e-09	2.635e-09	1.318e-09	-1.654e-24
w -	-2.699e-07	-2.029e-07	-1.141e-07	-3.468e-08	-1.059e-22
fi -	-1.268e-07	-2.201e-07	-2.393e-07	-1.684e-07	1.059e-22
N -	-2.792e+01	-2.801e+01	-2.807e+01	-2.811e+01	-2.812e+01
Q -	9.604e+00	1.418e+01	1.722e+01	1.860e+01	1.883e+01
M -	-8.742e+00	-4.242e+00	1.699e+00	8.465e+00	1.551e+01



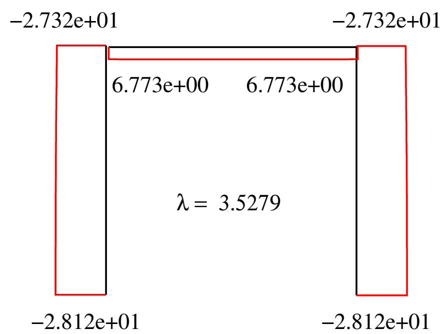
(a) Pikisiire



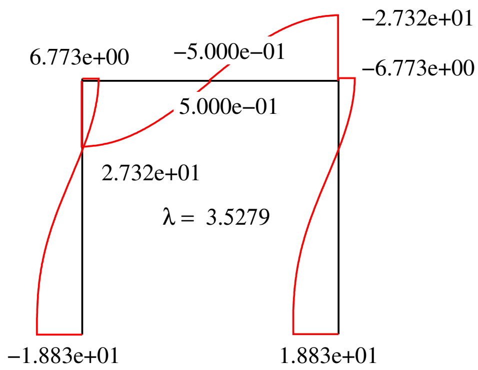
(b) Põiksiire



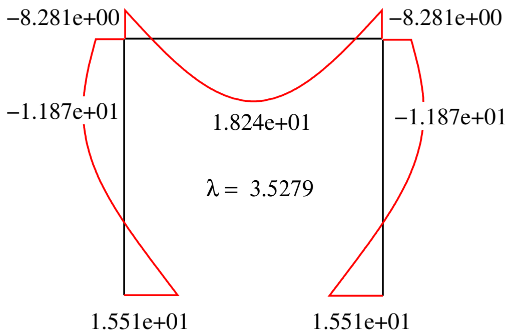
(c) Paindenurk



(d) Pikijõud



(e) Põikjõud



(f) Paindemoment

Joonis 5.23. Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 7.2886 \times 10^2\ \mathrm{s}^{-1}$

Sümmeetrilise koormuse teine piirkond (vt lk 190). Sagedus $\omega = 7.3813 \times 10^2\ \mathrm{s}^{-1}$, $\lambda = 3.5503$.

Tabel 5.9. Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 7.3813 \times 10^2\ \mathrm{s}^{-1}$

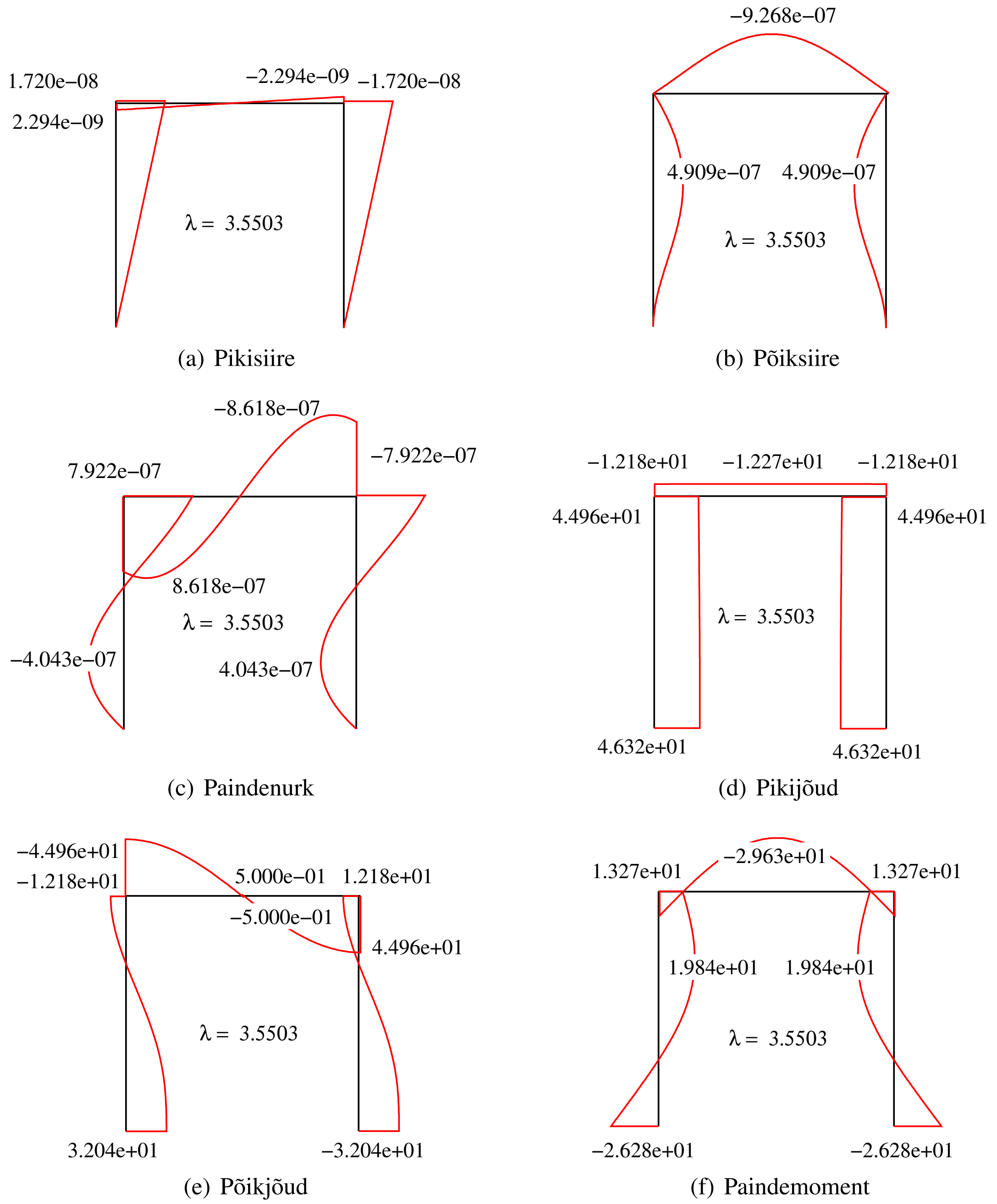
Toereaktsioon (jn 5.7)	Dünaamilisel koormusel	Staatilisel koormusel	Erinevus
C_1 [N]	$-32.0431F_x$	$0.12486F_x$	$-32.168F_x$
C_2 [N]	$46.31716F_x$	$-0.50000F_x$	$46.817F_x$
C_3 [Nm]	$26.27555F_x$	$-0.12472F_x$	$26.400F_x$
C_4 [N]	$32.04310F_x$	$-0.12486F_x$	$32.168F_x$
C_5 [N]	$46.31716F_x$	$-0.50000F_x$	$46.817F_x$
C_6 [Nm]	$-26.27555F_x$	$0.12472F_x$	$-26.400F_x$

Väljavõte arvutuspäevikust 5.10 (NaideRaam1CwM.m)

```
 1. element
h1 =   1.5000
Nmitmeks =   4

      x=        0.00          0.38          0.75          1.12          1.50
     u -     0.000e+00     2.171e-09     4.340e-09     6.504e-09     8.663e-09
     w -     0.000e+00     5.873e-08     1.931e-07     3.428e-07     4.552e-07
    fi -     0.000e+00    -2.851e-07    -4.043e-07    -3.705e-07    -2.115e-07
     N -     4.632e+01     4.630e+01     4.623e+01     4.613e+01     4.598e+01
     Q -     3.204e+01     3.164e+01     2.925e+01     2.397e+01     1.605e+01
     M -    -2.628e+01    -1.430e+01    -2.799e+00     7.272e+00     1.484e+01

 2. element
h2 =   1.5000
Nmitmeks =   4
```

```
      x=       0.00         0.38          0.75         1.12          1.50
     u -    8.663e-09    1.081e-08    1.295e-08    1.508e-08    1.720e-08
     w -    4.552e-07    4.909e-07    4.273e-07    2.605e-07    2.294e-09
    fi -   -2.115e-07    3.141e-08    3.094e-07    5.748e-07    7.922e-07
     N -    4.598e+01    4.579e+01    4.555e+01    4.528e+01    4.496e+01
     Q -    1.605e+01    6.618e+00   -2.557e+00   -9.465e+00   -1.218e+01
     M -    1.484e+01    1.912e+01    1.984e+01    1.748e+01    1.327e+01

 3. element
l1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         0.38          0.75         1.12          1.50
     u -    2.294e-09    1.722e-09    1.149e-09    5.749e-10    7.775e-23
     w -   -1.720e-08   -3.346e-07   -6.364e-07   -8.500e-07   -9.268e-07
    fi -    7.922e-07    8.618e-07    7.151e-07    4.022e-07    3.176e-22
     N -   -1.218e+01   -1.222e+01   -1.224e+01   -1.226e+01   -1.227e+01
     Q -   -4.496e+01   -4.155e+01   -3.194e+01   -1.717e+01    5.000e-01
     M -    1.327e+01   -3.152e+00   -1.712e+01   -2.646e+01   -2.963e+01

 4. element
l2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         0.38          0.75         1.12          1.50
     u -    7.754e-23   -5.749e-10   -1.149e-09   -1.722e-09   -2.294e-09
     w -   -9.268e-07   -8.500e-07   -6.364e-07   -3.346e-07   -1.720e-08
    fi -    3.258e-22   -4.022e-07   -7.151e-07   -8.618e-07   -7.922e-07
     N -   -1.227e+01   -1.226e+01   -1.224e+01   -1.222e+01   -1.218e+01
     Q -   -5.000e-01    1.717e+01    3.194e+01    4.155e+01    4.496e+01
     M -   -2.963e+01   -2.646e+01   -1.712e+01   -3.152e+00    1.327e+01

 5. element
h2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         0.38          0.75         1.12          1.50
     u -   -1.720e-08   -1.508e-08   -1.295e-08   -1.081e-08   -8.663e-09
     w -    2.294e-09    2.605e-07    4.273e-07    4.909e-07    4.552e-07
    fi -   -7.922e-07   -5.748e-07   -3.094e-07   -3.141e-08    2.115e-07
     N -    4.496e+01    4.528e+01    4.555e+01    4.579e+01    4.598e+01
     Q -    1.218e+01    9.465e+00    2.557e+00   -6.618e+00   -1.605e+01
     M -    1.327e+01    1.748e+01    1.984e+01    1.912e+01    1.484e+01

 6. element
h1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         0.38          0.75         1.12          1.50
     u -   -8.663e-09   -6.504e-09   -4.340e-09   -2.171e-09    0.000e+00
     w -    4.552e-07    3.428e-07    1.931e-07    5.873e-08    0.000e+00
    fi -    2.115e-07    3.705e-07    4.043e-07    2.851e-07    0.000e+00
```

```
N -     4.598e+01    4.613e+01    4.623e+01    4.630e+01    4.632e+01
Q -    -1.605e+01   -2.397e+01   -2.925e+01   -3.164e+01   -3.204e+01
M -     1.484e+01    7.272e+00   -2.799e+00   -1.430e+01   -2.628e+01
```

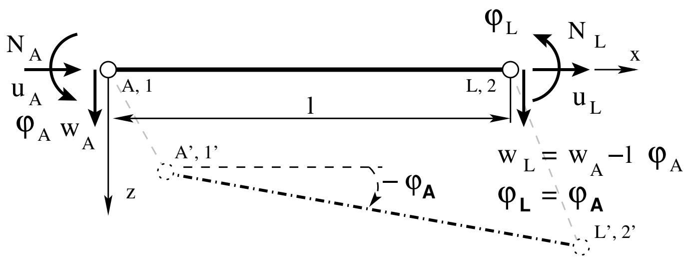


Joonis 5.24. Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 7.3813 \times 10^2\ \mathrm{s}^{-1}$

6. Sõrestikud

6.1 Sõrestiku ülekandemaatriks

Sõrestiku varda (jn 6.1) kirjeldamisel võtame kasutusele parema käe teljestiku ja teise märgikokkuleppe.



Joonis 6.1. Sõrestiku varras

Varda alguse ja lõpu siirdeid kohalikes koordinaatides kirjeldame järgmiste võrranditega (vrd (1.17) ja [Lah12, lk 384]):

$$u_L = u_A \cos\kappa\ell - \frac{N_A}{EA}\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell \tag{6.1}$$

$$w_L = w_A - \varphi_A \ell \tag{6.2}$$

$$\varphi_L = \varphi_A \tag{6.3}$$

kus

u_A, u_L on varda alguse ja lõpu siire x-telje suunas,
w_A, w_L – varda alguse ja lõpu siire z-telje suunas,
φ_A, φ_L – varda alguse ja lõpu pööre ümber z-telje (sisemine vabadusaste),
EA – varda ristlõike pikkejäikus,
N_A – pikijõud varda algul,
ℓ – varda pikkus.

Pikijõudu N_L varda lõpus kirjeldame seosega

$$N_L = -u_A EA\kappa \sin\kappa\ell - N_A \cos\kappa\ell \tag{6.4}$$

Esitame eespool vaadeldud seosed maatrikskujul

$$\mathbf{Z_L} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{Z_A} \tag{6.5}$$

kus $\mathbf{Z_L}$, $\mathbf{Z_A}$ on varda lõpus ja alguses olevad siirded ning pikijõud

$$\mathbf{Z_L} = \begin{bmatrix} u_L \\ w_L \\ \varphi_L \\ \dots \\ N_L \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_A} = \begin{bmatrix} u_A \\ w_A \\ \varphi_A \\ \dots \\ N_A \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

ja maatriks $\mathbf{U}$ avaldub kujul

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos\kappa\ell & 0 & 0 & \vdots & -i_0\frac{1}{EA}\frac{1}{\kappa}\sin\kappa\ell \\ 0 & 1 & -\ell & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \frac{1}{i_0}EA\kappa\sin\kappa\ell & 0 & 0 & \vdots & -\cos\kappa\ell \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

kus i_0 on baasjäikus.

Minnes sõrestiku dünaamika laiendatud ülekandemaatriksis piirile $\lambda = \kappa\ell \to 0$, saame staatika ülekandemaatriksi [Lah12, lk 385]).

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda\to 0} u_{11} = \lim_{\lambda\to 0}\cos\lambda = 1, && \lim_{\lambda\to 0} u_{14} = -\frac{\ell}{EA}\lim_{\lambda\to 0}\frac{\sin\lambda}{\lambda} = -\frac{\ell}{EA} \\ &\lim_{\lambda\to 0} u_{41} = \lim_{\lambda\to 0} -\frac{EA}{\ell}\lambda\sin\lambda = 0, && \lim_{\lambda\to 0} u_{44} = \lim_{\lambda\to 0} -\cos\lambda = -1 \end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -i_0\frac{x}{EA} \\ 0 & 1 & -\ell & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

Maatriks (6.9) koosneb järgmistest alammaatriksitest:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} jäiga\ \ keha\ \ liikumist & \vdots & põhideformatsioone \\ kirjeldav\ \ alammaatriks & \vdots & kirjeldav\ \ alammaatriks \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \vdots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & \vdots & tasakaaluvõrrandeid \\ & \vdots & kirjeldav\ \ alammaatriks \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

Sõrestiku varda põhivõrrandid teise märgikokkuleppe puhul saab kirjutada võrrandisüsteemina

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{Z_A} - \mathbf{I_{4\times 4}}\cdot\mathbf{Z_L} = 0 \tag{6.11}$$

Lühemalt,

$$\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8}\cdot\widehat{\mathbf{Z}} = 0 \tag{6.12}$$

kus

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_A} \\ \mathbf{Z_L} \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

ja $\widehat{\mathbf{UI}}_{4\times 8}$ on laiendatud ülekandemaatriks $(\mathrm{U}_{4\times 4} \mid -\mathrm{I}_{4\times 4})$.

Sõrestiku dünaamika hõreda laiendatud ülekandemaatriksi koostamiseks kasutame GNU Octave'i funktsiooni spTrussP6hiv.m. Staatika hõreda laiendatud ülekandemaatriksi koostamiseks rakendame funktsiooni yspSRmhvIVahet.m.

6.1.1 Sõrestikuvarda massi koondamine sõlmedesse

Sõrestikuvarda (jn 6.1) lausmassi $m = \rho \cdot A$ koondamisel sõlmedesse A ja L kasutatakse *konsistentset massimaatriksit* (sks konsistente Massenmatrix[1], ingl consistent mass matrix, vn согласованная матрица масс[2]) ja *diagonaalile keskendatud massimaatriksit* (sks konzentrierte Massenmatrix[3], ingl lumped mass matrix, vn диагональная матрица масс). Kasutusel olevaid massimaatrikseid kirjeldab Carlos Felippa [Fel13].

Konsistentse massimaatriksiga [Rüm05, lk 149], [Wer01, lk 294] sõlmedesse koondatud massi võnkumine nurksagedusega ω tekitab inertsjõud $F_{x\,A}$ ja $F_{x\,L}$:

$$\begin{bmatrix} F_{x\,A} \\ F_{x\,L} \end{bmatrix} = -\frac{\rho\cdot A\cdot \ell\cdot\omega^2}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_A \\ u_L \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

Diagonaalile keskendatud massimaatriksiga sõlmedesse koondatud massi võnkumisel avalduvad inertsjõud $F_{x\,A}$ ja $F_{x\,L}$ viisil

$$\begin{bmatrix} F_{x\,A} \\ F_{x\,L} \end{bmatrix} = -\frac{\rho\cdot A\cdot \ell\cdot\omega^2}{6}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_A \\ u_L \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

6.1.2 Koondmassi element sõrestikul

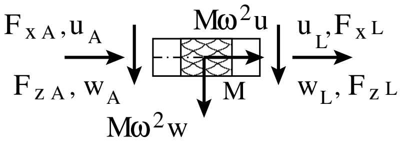
Vaatleme koondmassi M sõrestiku sõlmes (jn 6.2). Koondmassi võnkumine nurksagedusega ω tekitab inertsjõud $M\omega^2 u$ ja $M\omega^2 w$, kus u ja w on massi siirded.

---

[1] http://www.cae-wiki.info/wikiplus/index.php/Konsistente_Massenmatrix (19.03.2017)

[2] http://mash-xxl.info/info/552137/ (19.03.2017)

[3] http://www.cae-wiki.info/wikiplus/index.php/Konzentrierte_Massenmatrix (19.03.2017)



Joonis 6.2. Koondmass

Koostame koondmassi võrrandid maatrikskujul:

$$\mathbf{U_M} \cdot \mathbf{Z_A} - \mathbf{I_{4\times4}} \cdot \mathbf{Z_L} = 0 \tag{6.16}$$

Siin

$$\mathbf{Z_A} = \begin{bmatrix} u_A \\ w_A \\ F_{x\,A} \\ F_{z\,A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z_L} = \begin{bmatrix} u_L \\ w_L \\ F_{x\,L} \\ F_{z\,L} \end{bmatrix} \tag{6.17}$$

$\mathbf{I_{4\times4}}$ on 4×4 ühikmaatriks
ja ülekandemaatriks $\mathbf{U_M}$ avaldub

$$\mathbf{U_M} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -M\omega^2 & 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & -M\omega^2 & 0.0 & -1.0 \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

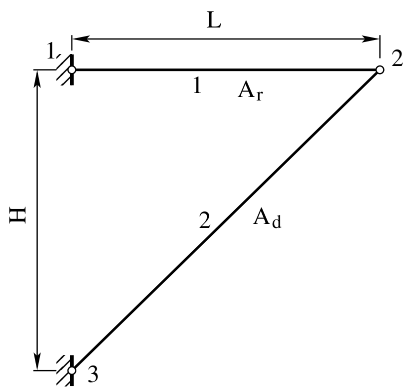
Sõrestiku sõlmesse inertsjõu lisamiseks võtame jõud $F_{x\,L}$ ja $F_{z\,L}$ võrdseks nulliga, siis saab võrrandi (6.16) esitada järgmisel kujul:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \\ M\omega^2 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & M\omega^2 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ w_A \\ F_{x\,A} \\ F_{z\,A} \\ u_L \\ w_L \end{bmatrix} = 0 \tag{6.19}$$

Massimaatriksi koostame GNU Octave'i funktsiooniga koondMassHLSorestik46.m.

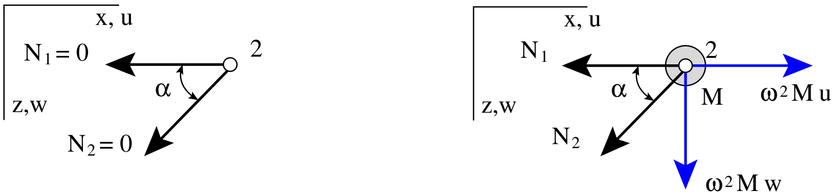
6.2 Sõrestiku omavõnkesagedused

Esmalt vaatleme kahe vardaga tarindit (jn 6.3). Niisugust tarindit nimetatakse kirjutises [Ram16, jn 1b] „üliõpilase tarindiks" (student's structure).



Joonis 6.3. Kahe vardaga tarind

Selle tarindi uurimisel tuleb tõdeda, et lausmassiga (jaotatud massiga) ja sõlme *2* rakendatud koondmassiga ülesanded (jn 6.4) on erinevad.



(a) Koormuseta sõlm (b) Inertsjõududega koormatud sõlm

Joonis 6.4. Sõlmes on kaks eri sirgeil asuvat varrast

Koostame koormuseta sõlme (jn 6.4a) tasakaaluvõrrandid.

$$\Sigma X = 0, \ \ -N_1 - N_2 \cos\alpha = 0; \qquad \Sigma Z = 0, \ \ N_2 \sin\alpha = 0 \tag{6.20}$$

Siit järeldub, et $N_1 = 0$ ja $N_2 = 0$. Seega koormuseta sõlmes, mis moodustub kahest eri sirgeil asuvast vardast, on varraste pikijõud võrdsed nulliga (vrd [Rää75, lk196]).

Koostame inertsjõududega koormatud sõlme (jn 6.4b) tasakaaluvõrrandid.

$$\Sigma X = 0, \ \ -N_1 - N_2 \cos\alpha + \omega^2 M u = 0; \qquad \Sigma Z = 0, \ \ N_2 \sin\alpha + \omega^2 M w = 0 \tag{6.21}$$

Siit leiame, et $N_1 = -N_2 \cos\alpha + \omega^2 M u$, kus $N_2 = -\omega^2 M w / \sin\alpha$ ($\sin\alpha \neq 0$, sest vardad asuvad eri sirgeil).

Kirjutises [Ram16, jn 1a] on omavõnkesagedused arvutatud lõplike elementide meetodiga, kusjuures on kasutatud konsistentset CMM ja keskendatud massimaatriksit DLMM. Konsistentse massimaatriksiga leitakse kahe vardaga tarindi omavõnkesageduse ülempiir f_1^{sup} ja f_2^{sup}. Diagonaalile keskendatud massimaatriksiga leitakse kahe vardaga tarindi omavõnkesageduse alampiir f_1^{inf} ja f_2^{inf}. Leitakse ka täpse omavõnkesagedused f_1 ja f_2.

Näide 6.1 (kahe vardaga tarindi omavõnkumine). Leida joonisel 6.3 kujutatud kahest vardast koosneva tarindi omavõnkesagedused.

Andmed. Kahe vardaga tarindi silde pikkus $L = 1.0\,\mathrm{m}$, sõrestiku kõrgus $H = 1.0\,\mathrm{m}$, ristlõikepindala $A_r = A_d = A = 3.1416 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$, elastsusmoodul $E = 211.62\,\mathrm{GPa}$, materjali tihedus $\rho = 7.86 \times 10^3\,\mathrm{kg/m}^3$ (cf. $\rho = 7.80 \times 10^3\,\mathrm{kg/m}^3$, $E = 210\,\mathrm{GPa}$).

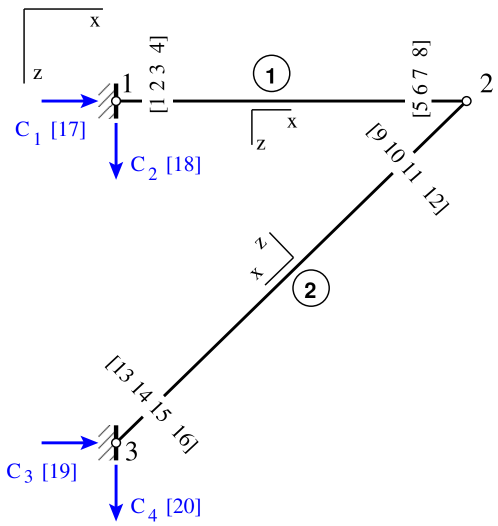
Lahendus. Koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{6.22}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor, mille elementideks on piki- ja põiksiirded, paindenurgad ning pikijõud varraste alguses ja lõpus (6.13) ning toereaktsioonid:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z(1,1) \\ Z(2,1) \\ Z(3,1) \\ Z(4,1) \\ \cdots \\ Z(17,1) \\ Z(18,1) \\ Z(19,1) \\ Z(20,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_A^{(1)} \\ w_A^{(1)} \\ \varphi_A^{(1)} \\ N_A^{(1)} \\ \cdots \\ C(1,1) \\ C(2,1) \\ C(3,1) \\ C(4,1) \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

Varda otste muutujate järjenumbrid on joonisel 6.5.



Joonis 6.5. Kahe vardaga tarindi muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (6.22) kaksteist esimest võrrandit on põhivõrrandid (6.12).

Põhivõrranditele lisanduvad kaks sõlme *2* pidevusvõrrandit. Varraste *1* ja *2* siirded sõlmes üldtelgede X ja Z suunas on võrdsed. Lisanduvad jõudude tasakaaluvõrrandid sõlmedes *1*, *2* ja *3* üldtelgede X ja Z suunas.

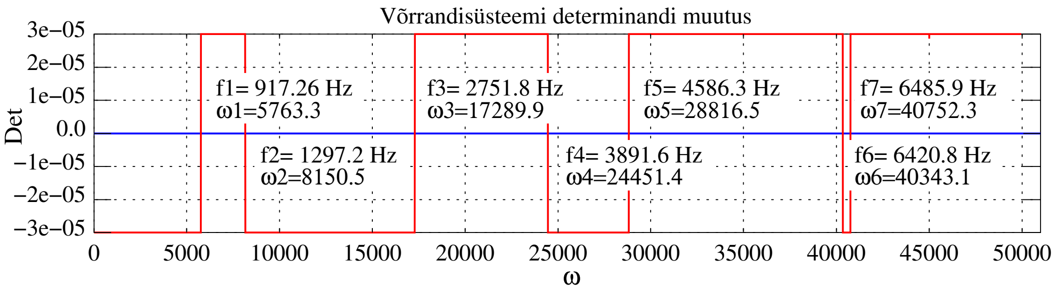
Tugedel siirete piiramise tingimusi on neli, mis on vastavuses toereaktsioonide arvuga.

GNU Octave'i programmiga NaideTrussTarind1VibrDet.m leiame hõreda võrrandisüsteemi (6.22) determinandi nullid (jn 6.6).

Kahe vardaga tarindi (jn 6.3) esimesed seitse omavõnkesagedust:

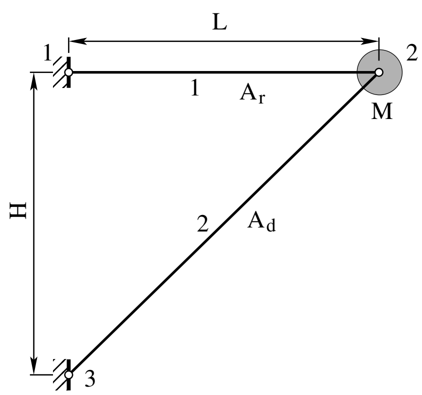
$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= 5.763301025\times10^3\,\mathrm{s}^{-1}, & f_1 &= 917.2\,\mathrm{Hz}\ (vrd\ varras\ S2\ jn\ B.7)\\
\omega_2 &= 8.150461987\times10^3\,\mathrm{s}^{-1}, & f_2 &= 1297.2\,\mathrm{Hz}\ (vrd\ varras\ S1\ jn\ B.3)\\
\omega_3 &= 1.7289906506\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}, & f_3 &= 2751.8\,\mathrm{Hz}\ (vrd\ varras\ S2\ jn\ B.7)\\
\omega_4 &= 2.4451385781\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}, & f_4 &= 3891.6\,\mathrm{Hz}\ (vrd\ varras\ S1\ jn\ B.3)\\
\omega_5 &= 2.8816510843\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}, & f_5 &= 4586.3\,\mathrm{Hz}\ (vrd\ varras\ S2\ jn\ B.7)\\
\omega_6 &= 4.0343115181\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}, & f_6 &= 6420.8\,\mathrm{Hz}\ (vrd\ varras\ S2\ jn\ B.7)\\
\omega_7 &= 4.0752309635\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}, & f_7 &= 6485.9\,\mathrm{Hz}\ (vrd\ varras\ S1\ jn\ B.3)
\end{aligned}
\tag{6.24}
$$

Tarindi varraste *1* ja *2* omavõnkesagedused (vt joonised B.3 ja B.7) on järjestatud kasvavas järjekorras (jn 6.6). Kahe vardaga tarindi koormuseta sõlmes *2* asuvad kaks varrast eri sirgeil ja pikijõud sõlmes on nullid (vt tasakaaluvõrrandid (6.20)). Nii on vaadeldava ülesande rajatingimused võrreldavad varraste *S1* ja *S2* rajatingimustega näidetes B.1 ja B.2. Varraste *S1* ja *S2* omavõnkesagedused ühtivad kirjutises [Ram16, jn 5] leitutega.



Joonis 6.6. Kahe vardaga tarindi omavõnkesagedused

Näide 6.2 (koondmassi ja kahe vardaga tarindi omavõnkumine). Leida joonisel 6.7 kujutatud kahest vardast koosneva tarindi omavõnkesagedused, kui selle sõlmes on koondatud mass M.



Joonis 6.7. Koondmassi ja kahe vardaga tarind

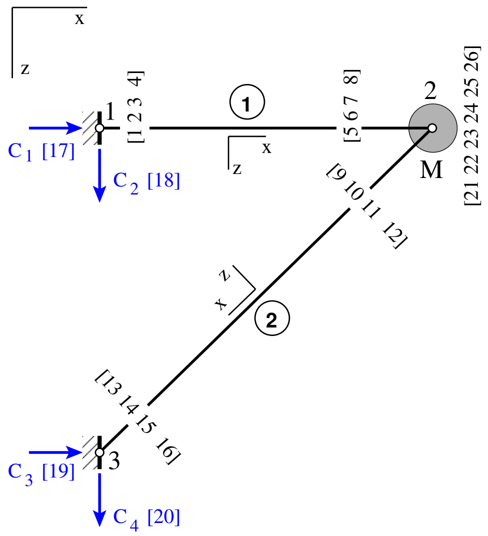
Andmed. Kahe vardaga tarindi silde pikkus $L = 1.0\,\mathrm{m}$, sõrestiku kõrgus $H = 1.0\,\mathrm{m}$, ristlõikepindala $A_r = A_d = A = 3.1416\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2$, elastsusmoodul $E = 211.62\,\mathrm{GPa}$, materjali tihedus $\rho = 7.86\times10^3\,\mathrm{kg/m}^3$ (cf. $\rho = 7.80\times10^3\,\mathrm{kg/m}^3$, $E = 210\,\mathrm{GPa}$). Varraste pikkuseks on ℓ_1 ja ℓ_2 ning varrastevaheline nurk $\alpha = 45°$. Hülgame varraste lausmassi ja võrdleme koondmassidega (konsistentse (6.14) ja diagonaalile keskendatud massimaatriksiga (6.15)) leitud omavõnkesagedusi (vrd [Ram16, jn 1a]). Konsistentne koondmass $M = \rho A\left(\ell_1 + \ell_2\right)/3$ ning keskendatud koondmass $M = \rho A\left(\ell_1 + \ell_2\right)/2$.

Lahendus. Koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA}\cdot\mathbf{Z} = 0 \tag{6.25}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor, mille elementideks on piki- ja põiksiirded, paindenurgad ning pikijõud varraste alguses ja lõpus (6.13), toereaktsioonid ning massi siirded ja inertsjõud.

Varraste ja koondmassi elementide muutujate järjenumbrid toome joonisel 6.8.



Joonis 6.8. Koondmassi ja kahe vardaga tarindi muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (6.25) kuusteist esimest võrrandit on põhivõrrandid (6.12). Võrdlemaks EST-meetodiga arvutatud omavõnkesagedusi lõplike elementide meetodil leitutega [Ram16, jn 4] rakendame staatika laiendatud ülekandemaatriksit (6.8).

Põhivõrranditele lisanduvad kaks sõlme *2* pidevusvõrrandit. Varraste *1* ja *2* siirded sõlmes üldtelgede X ja Z suunas on võrdsed. Lisanduvad jõudude tasakaaluvõrrandid sõlmedes *1*, *2* ja *3* üldtelgede X ja Z suunas. Tugedel siirete piiramise tingimusi on neli, mis on vastavuses toereaktsioonide arvuga.

Koostatud kahekümnele võrrandile lisanduvad neli koondmassi võrrandit (6.19) ja kaks võrrandit, mis võrdsustavad koondmassi siirded sõlme *2* siiretega üldkoordinaatides. Nüüd on 26 tundmatut ja 26 võrrandit. Jääb üle veel lisada inertsjõud $Z(23,1)$ ja $Z(24,1)$ (vt avaldist (6.26)) sõlme *2* tasakaaluvõrranditele.

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z(1,1) \\ Z(2,1) \\ Z(3,1) \\ Z(4,1) \\ \cdots \\ Z(17,1) \\ Z(18,1) \\ Z(19,1) \\ Z(20,1) \\ \cdots \\ Z(21,1) \\ Z(22,1) \\ Z(23,1) \\ Z(24,1) \\ Z(25,1) \\ Z(26,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_A^{(1)} \\ w_A^{(1)} \\ \varphi_A^{(1)} \\ N_A^{(1)} \\ \cdots \\ C(1,1) \\ C(2,1) \\ C(3,1) \\ C(4,1) \\ \cdots \\ u_A^{(M)} \\ w_A^{(M)} \\ F_x^{(M)} \\ F_z^{(M)} \\ u_L^{(M)} \\ w_L^{(M)} \end{bmatrix} \tag{6.26}$$

Kirjutises [Ram16, jn 4] leitakse täpsete omavõnkesageduse f_1 ja f_2. Konsistentse massimaatriksiga leitakse kahe vardaga tarindi omavõnkesageduse ülempiir f_1^{sup} ja f_2^{sup}. Diagonaalile keskendatud massimaatriksiga leitakse kahe vardaga tarindi omavõnkesageduse alampiir f_1^{inf} ja f_2^{inf} [Ram16, jn 1b].

Leiame hõreda võrrandisüsteemi (6.25) determinandi nullid (jn 6.9) GNU Octave'i programmiga NaideTrussTarind3VibrDet.m, kus valime

inertsjõud = 1: *lausmass*, *koondmass* $M = 0$ (vt näide 6.1);
inertsjõud = 2: *koondmass*; konsistentne koondmass $M = \rho A\,(\ell_1 + \ell_2)\,/3$;
inertsjõud = 3: *koondmass*; keskendatud koondmass $M = \rho A\,(\ell_1 + \ell_2)\,/2$ või
inertsjõud = 4: *lausmass ja koondmass*; koondmass $M = \rho A\,(\ell_1 + \ell_2)\,/\,(3 \cdot 1.2)$.

EST-meetodil (staatika laiendatud ülekandemaatriksiga) konsistentse koondmassiga $M = \rho A\,(\ell_1 + \ell_2)\,/3$ leitud kaks omavõnkesagedust (jn 6.9a)

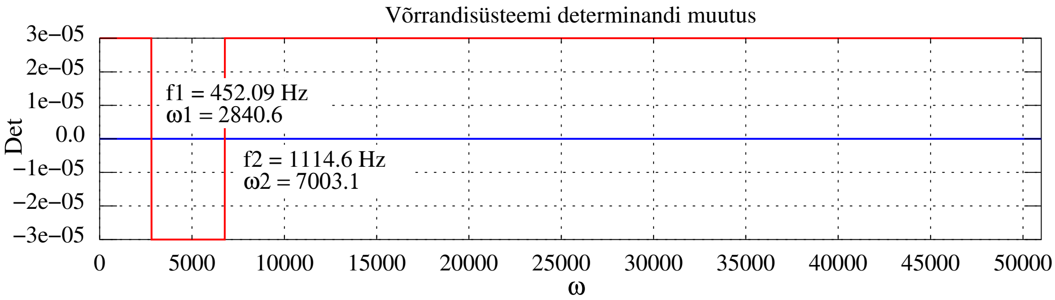
$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2.8406 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}, \qquad f_1 = 452.09\,\mathrm{Hz} \\ \omega_2 &= 7.0031 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}, \qquad f_2 = 1114.6\,\mathrm{Hz} \end{aligned} \tag{6.27}$$

on võrdsed lõplike elementide meetodil konsistentse (CMM) massimaatriksiga leitutega [Ram16, jn 1b].

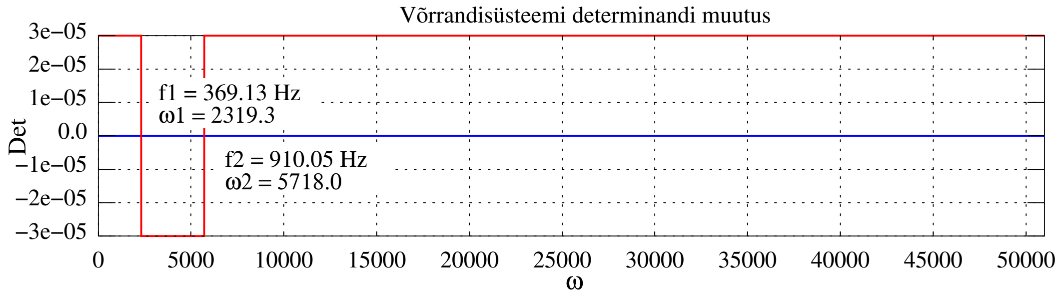
Keskendatud koondmassiga $M = \rho A\,(\ell_1 + \ell_2)\,/2$ leitud omavõnkesagedused (jn 6.9b)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2.3193 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}, \qquad f_1 = 369.13\,\mathrm{Hz} \\ \omega_2 &= 5.7180 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}, \qquad f_2 = 910.05\,\mathrm{Hz} \end{aligned} \tag{6.28}$$

on võrdsed lõplike elementide meetodil keskendatud massimaatriksiGA (DLMM) leitutega [Ram16, jn 1b].



(a) Sõlmes on koondmass $\rho A\,(\ell_1 + \ell_2)/3$

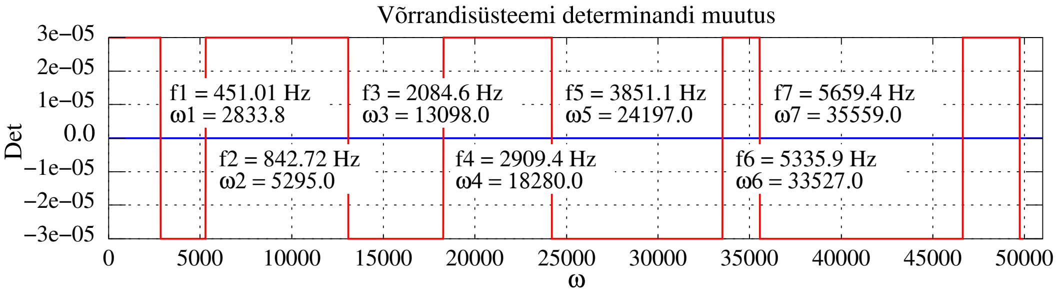


(b) Sõlmes on koondmass $\rho A\,(\ell_1 + \ell_2)/2$

Joonis 6.9. Koondmassi ja kahe vardaga tarindi omavõnkesagedused

Kirjutises [Ram16, jn 1b] arvutatakse omavõnkesagedusi lõplike elementide meetodiga. Elementide arvu suurendamisega püütakse läheneda lausmassiga tarindile. Leitakse f_1 ja f_2.

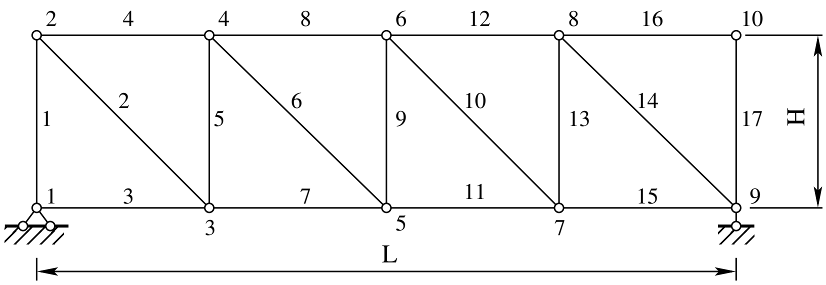
Lausmassi ja koondmassiga tarindid erinevad teineteisest kvalitatiivselt (vt jn 6.4 ja avaldised (6.20), (6.21)). EST-meetodiga lahendamisel (programm NaideTrussTarind3 VibrDet.m, inertsjõud = 4) valime lausmassi ja koondmassi $M = \rho A\,(\ell_1 + \ell_2)\,/\,(3 \cdot 1.2)$. Arvutatud omavõnkesagedused on näidatud joonisel 6.10. Siin on koondmass valitud nii, et esimene omavõnkesagedus f_1 oleks võrdne kirjutises [Ram16, jn 4] leituga, teine omavõnkesagedus $f_2 = 842.72\,\mathrm{Hz}$ aga kirjutises pakutust (f_2-est) oluliselt väiksem.



Joonis 6.10. Koond- ja lausmassiga kahe vardaga tarindi omavõnkesagedused

Näide 6.3 (sõrestiku T omavõnkumine). Leida joonisel 6.11 kujutatud sõrestiku omavõnkesagedused.

Andmed. Silde pikkus $L = 2.0\,\mathrm{m}$, paneeli pikkus $d = 0.5\,\mathrm{m}$, sõrestiku kõrgus $H = 0.7\,\mathrm{m}$, ristlõikepindala $A = 4.00 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$, elastsusmoodul $E = 208.66\,\mathrm{GPa}$, materjali tihedus $\rho = 7.800{\times}10^3\,\mathrm{kg/m}^3$ (cf. $\rho = 7.85{\times}10^3\,\mathrm{kg/m}^3$, $E = 210\,\mathrm{GPa}$ verifitseerimisnäites [VE 0103]).



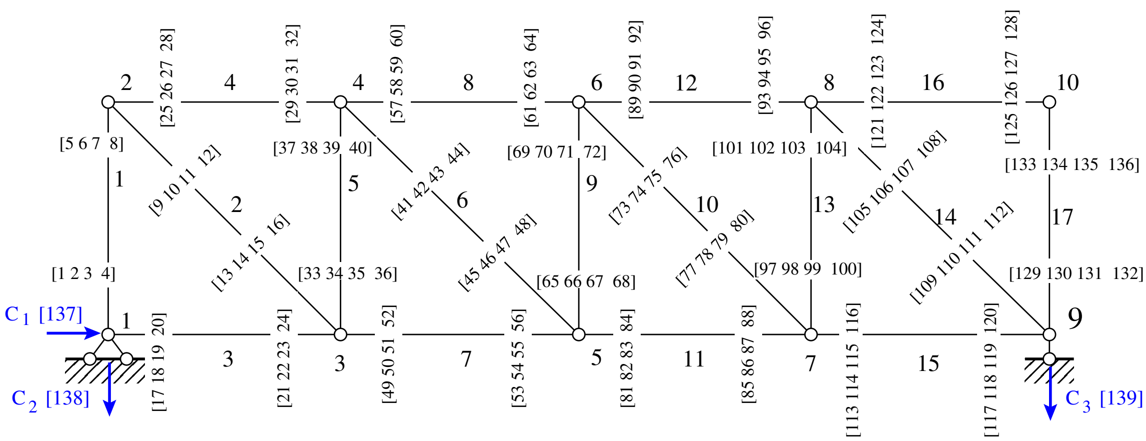
Joonis 6.11. Sõrestik T

Lahendus. Koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{6.29}$$

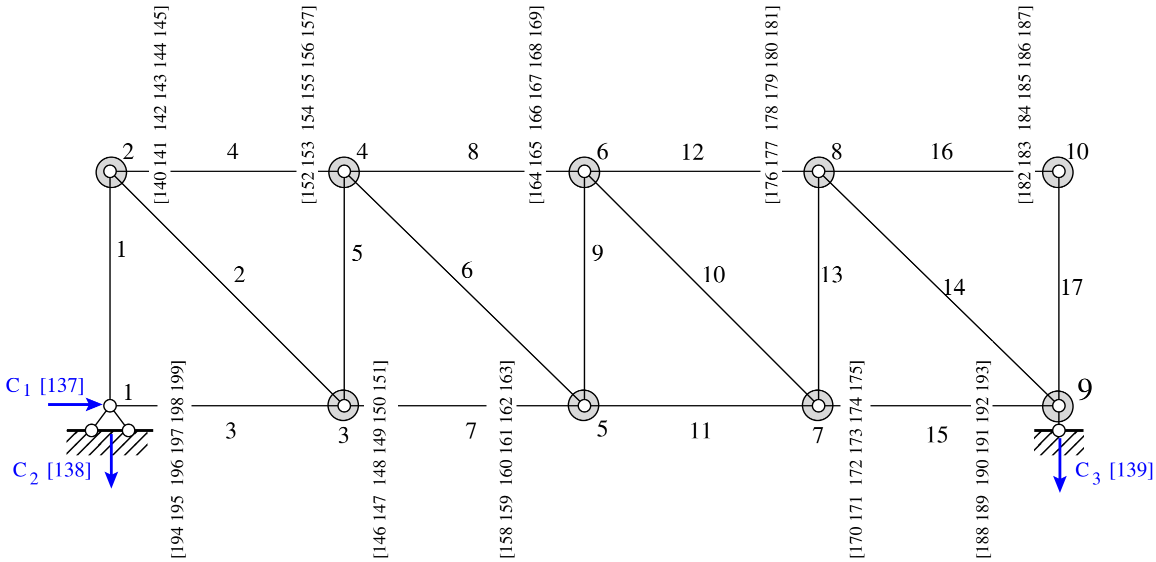
kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor, mille elementideks on piki- ja põiksiirded, paindenurgad ning pikijõud varraste alguses ja lõpus, toereaktsioonid ning massi siirded ja inertsjõud.

Sõrestikuvarraste muutujate järjenumbrid vt joonis 6.12.



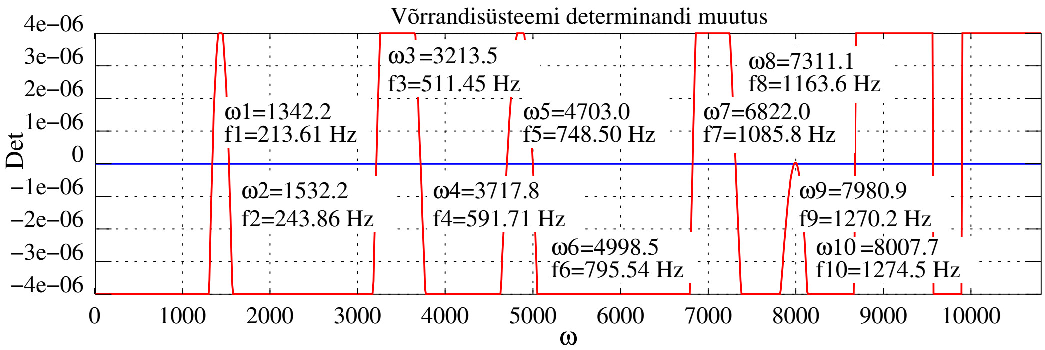
Joonis 6.12. Sõrestiku T muutujate järjenumbrid

Sõrestiku T koondmasside muutujate järjenumbrid on joonisel 6.13.

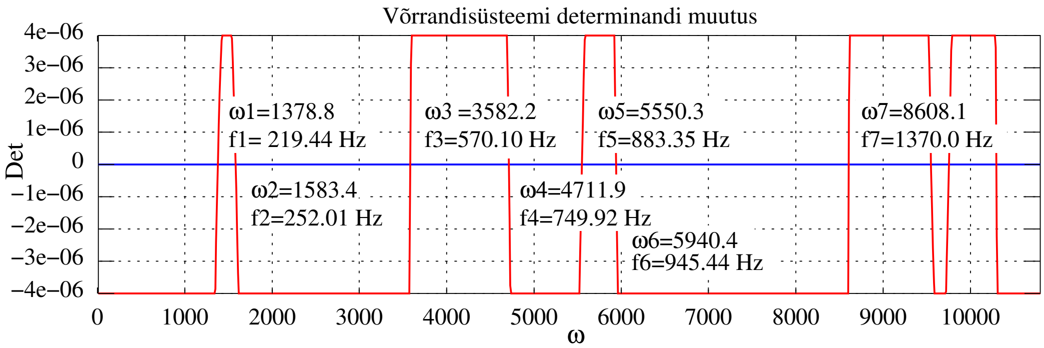


Joonis 6.13. Sõrestiku T koondmasside muutujate järjenumbrid

GNU Octave'i programmiga (NaideTrussTest3VibrDet.m) arvutatakse sõrestiku T omavõnkesagedused staatika laiendatud ülekandemaatriksiga nii keskendatud kui ka konsistentse koondmassiga.



(a) Sõlmedes on keskendatud koondmass



(b) Sõlmedes on konsistentne koondmass

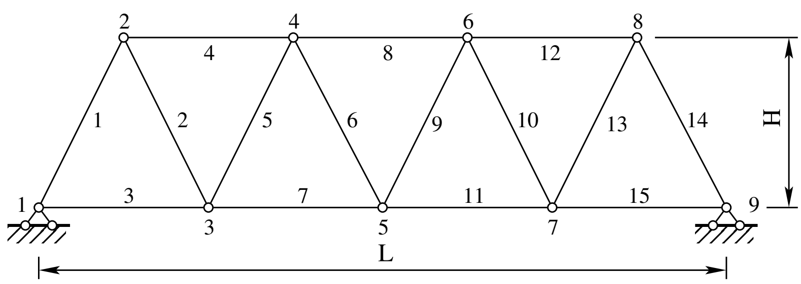
Joonis 6.14. Sõrestiku T omavõnkesagedused

Tabelis 6.1 võrreldakse sõrestiku EST-meetodil konsistentse ja keskendatud koondmassiga arvutatud omavõnkesagedusi. Siin esimesed viis keskendatud koondmassiga arvutatud omavñkesagedust ühtivad verifitseerimisnäites [VE 0103] keskendatud massimaatriksiga leitutega.

Tabel 6.1. Sõrestiku T omavõnkesagedused

Omavõnke-sagedus	EST-meetod			
	Keskendatud koondmass		Konsistentne koondmass	
	Sagedus ω $[s^{-1}]$	Sagedus f [Hz]	Sagedus ω $[s^{-1}]$	Sagedus f [Hz]
1.	1342.16	213.61	1378.78	219.44
2.	1532.25	243.86	1583.41	252.01
3.	3213.53	511.45	3582.05	570.10
4.	3717.83	591.71	4711.91	749.92
5.	4702.98	748.50	5550.25	883.35
6.	4998.53	795.54	5940.38	945.44
7.	6822.03	1085.8	8608.07	1370.0
8.	7311.09	1163.6	9549.92	1519.9
9.	7980.87	1270.2	9755.28	1552.6
10.	8007.66	1274.5	10296.29	1638.7
11.	8676.93	1386.9	11150.71	1774.7
12.	9568.30	1522.8	12503.10	1989.9
13.	9893.72	1574.6	13092.80	2083.8
14.	10869.68	1730.0	14787.85	2353.6

Näide 6.4 (sõrestiku AM omavõnkumine). Leida joonisel 6.15 kujutatud sõrestiku omavõnkesagedused.



Joonis 6.15. Sõrestik AM

Andmed. Silde pikkus $L = 8.0\,\mathrm{m}$, paneeli pikkus $d = 2.0\,\mathrm{m}$, sõrestiku kõrgus $H =$

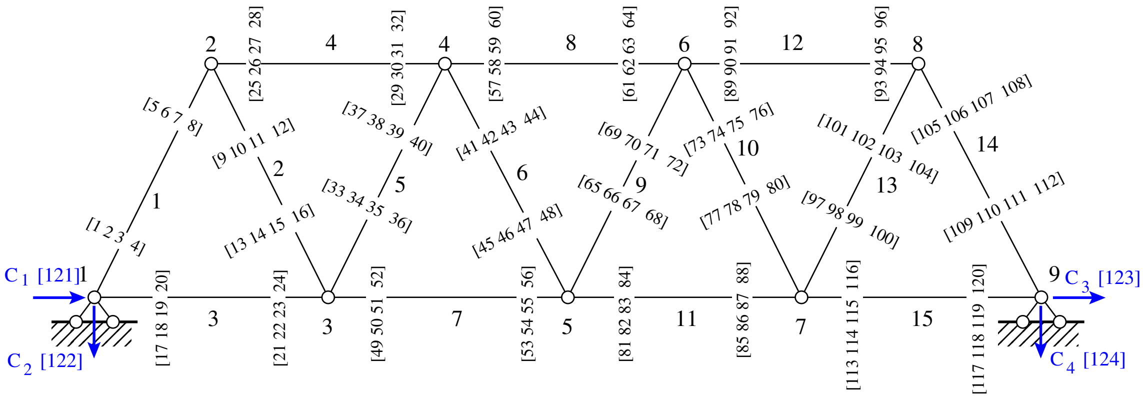
2.0 m, ristlõikepindala $A = 0.001\,\mathrm{m}^2$, elastsusmoodul $E = 206.32\,\mathrm{GPa}$, materjali tihedus $\rho = 7.86 \times 10^3\,\mathrm{kg/m}^3$ (cf. $\rho = 8.0 \times 10^3\,\mathrm{kg/m}^3$, $E = 210\,\mathrm{GPa}$ [AM91], [Arn09]).

Lahendus. Koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{6.30}$$

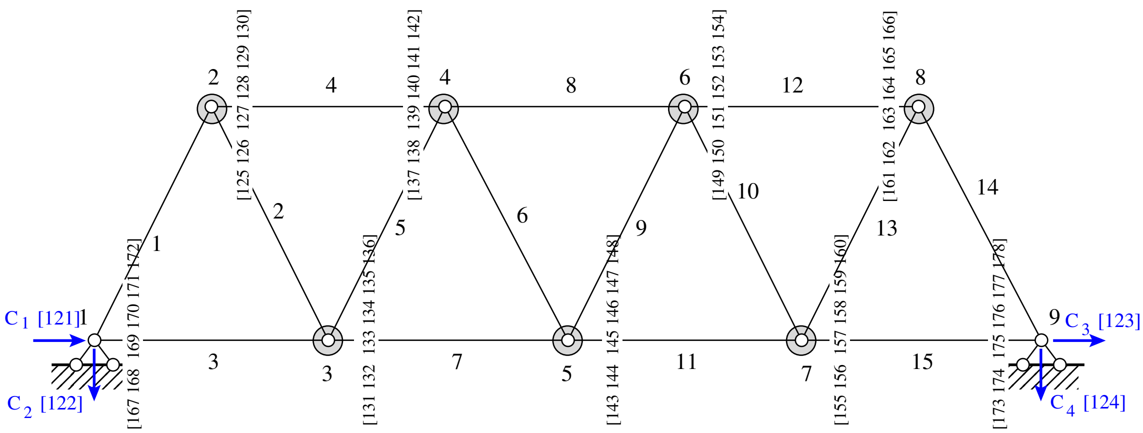
kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor, mille komponentideks on piki- ja põiksiirded, paindenurgad ning pikijõud varraste alguses ja lõpus, toereaktsioonid ning massi siirded ja inertsjõud.

Sõrestikuvarraste muutujate järjenumbrid on joonisel 6.16.



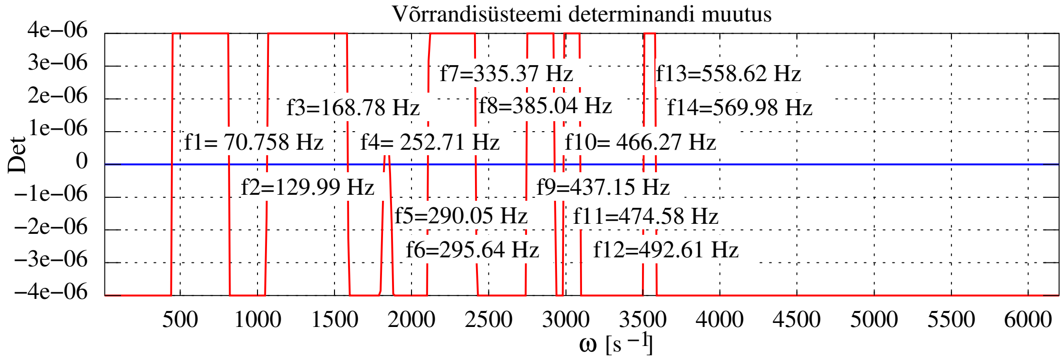
Joonis 6.16. Sõrestiku AM muutujate järjenumbrid

Sõrestiku AM koondmasside muutujate järjenumbrid on toodud joonisel 6.17.

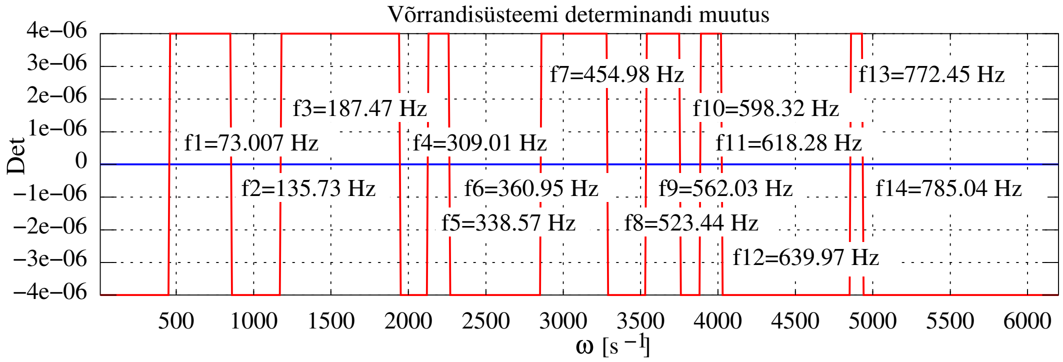


Joonis 6.17. Sõrestiku AM koondmasside muutujate järjenumbrid

GNU Octave'i programmiga NaideTrussArg3VibrDet.m leiame hõreda võrrandisüsteemi (6.30) determinandi nullid.



(a) Sõlmedes on keskendatud koondmass



(b) Sõlmedes on konsistentne koondmass

Joonis 6.18. Sõrestiku AM omavõnkesagedused

Tabelis 6.2 võrreldakse sõrestiku EST-meetodil programmiga NaideTrussArg3VibrDet.m konsistentse ja keskendatud koondmassiga arvutatud omavõnkesagedusi. Siin esimesed neliteist konsistentse koondmassiga arvutatud omavõnkesagedust ühtivad lõplike elementide meetodil [AM91, lk 141] konsistentse massimaatriksiga leitutega.

Tabel 6.2. Sõrestiku AM omavõnkesagedused

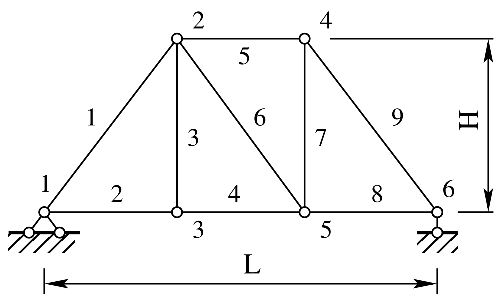
Omavõnke-sagedus	EST-meetod			
	Keskendatud koondmass		Konsistentne koondmass	
	Sagedus ω $[s^{-1}]$	Sagedus f [Hz]	Sagedus ω $[s^{-1}]$	Sagedus f [Hz]
1.	444.587	70.758	458.714	73.007
2.	816.774	129.99	852.847	135.73
3.	1060.46	168.78	1177.92	187.47
4.	1587.84	252.71	1941.58	309.01

Tabeli 6.2 järg

Omavõnke-sagedus	EST-meetod			
	Keskendatud koondmass		Konsistentne koondmass	
	Sagedus ω $\left[\mathrm{s}^{-1}\right]$	Sagedus f [Hz]	Sagedus ω $\left[\mathrm{s}^{-1}\right]$	Sagedus f [Hz]
5.	1822.44	290.05	2127.27	338.57
6.	1857.57	295.64	2267.94	360.95
7.	2107.17	335.37	2858.71	454.98
8.	2419.26	385.04	3288.87	523.44
9.	2746.70	437.15	3531.36	562.03
10.	2929.68	466.27	3759.36	598.32
11.	2981.88	474.58	3884.74	618.28
12.	3095.15	492.61	4021.03	639.97
13.	3509.89	558.62	4853.46	772.45
14.	3581.26	569.98	4932.58	785.04

Raamatus [AM91, lk 141] toodud sõrestiku omavõnkesagedused on arvutatud konsistentse massimaatriksiga Jacobi meetodil. Sealsetes arvutustes on kasutatud lõplike elementide programmi ASKA.

Näide 6.5 (sõrestiku KB omavõnkumine). Leida joonisel 6.19 kujutatud sõrestiku omavõnkesagedused.



Joonis 6.19. Sõrestik KB

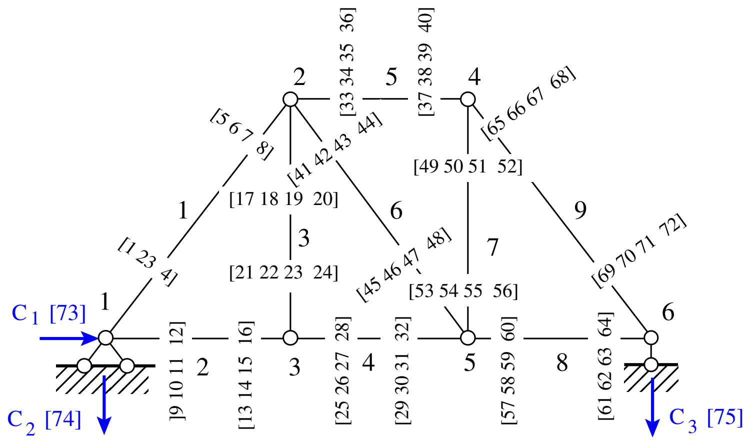
Andmed. Silde pikkus $H = 12.0\,\mathrm{m}$, paneeli pikkus $d = 4.0\,\mathrm{m}$, sõrestiku kõrgus $H = 3.0\,\mathrm{m}$, ristlõikepindala $A = 0.0025\,\mathrm{m}^2$, elastsusmoodul $E = 198.47\,\mathrm{GPa}$, materjali tihedus $\rho = 7.800 \times 10^3\,\mathrm{kg/m}^3$ (cf. $\rho = 7.860 \times 10^3\,\mathrm{kg/m}^3$, $E = 200\,\mathrm{GPa}$ [Kan13, p. 36]).

Lahendus. Koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{6.31}$$

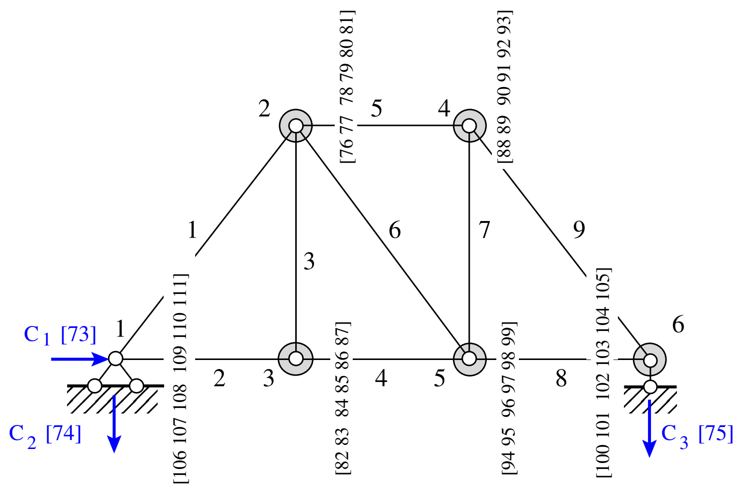
kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor, mille elementideks on piki- ja põiksiirded, paindenurgad ning pikijõud varraste alguses ja lõpus, toereaktsioonid ning massi siirded ja inertsjõud.

Sõrestikuvarraste muutujate järjenumbrid on joonisel 6.20.



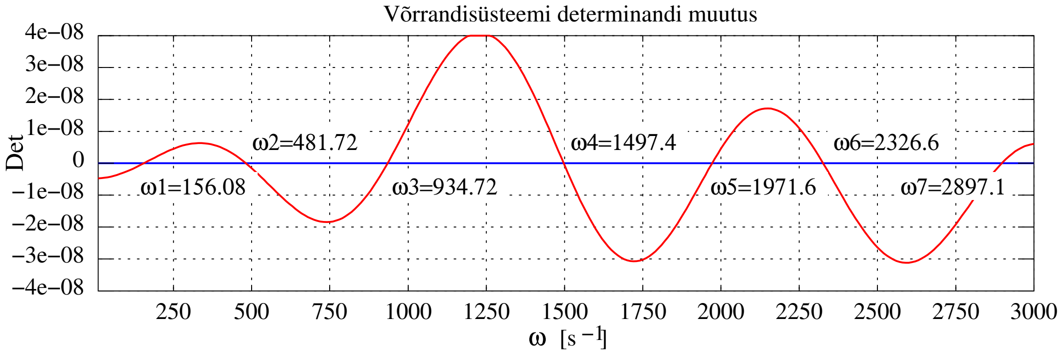
Joonis 6.20. Sõrestiku KB muutujate järjenumbrid

Sõrestiku KB koondmasside muutujate järjenumbrid toome joonisel 6.21.

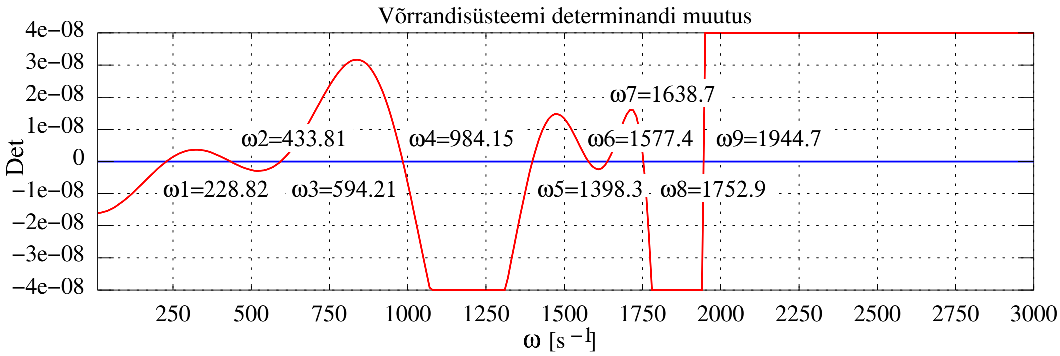


Joonis 6.21. Sõrestiku KB koondmasside muutujate järjenumbrid

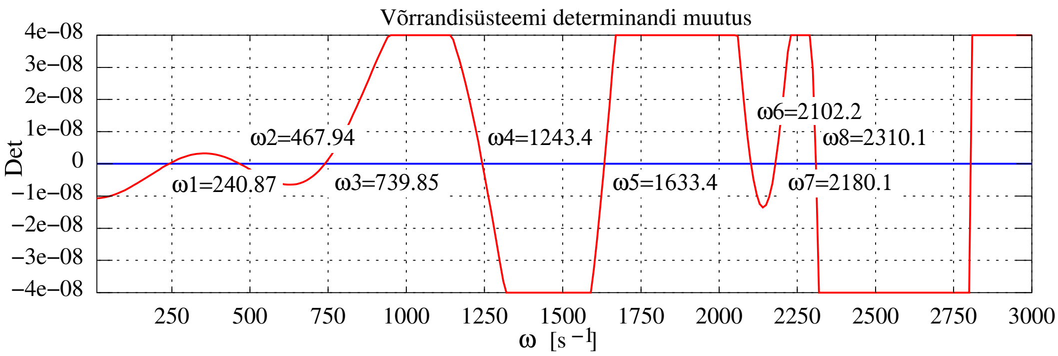
GNU Octave'i programmiga NaideTrussKB1VibrDet.m leiame hõreda võrrandisüsteemi (6.31) determinandi nullid (jn 6.22).



(a) Lausmassiga sõrestik



(b) Sõlmedes on keskendatud koondmass



(c) Sõlmedes on konsistentne koondmass

Joonis 6.22. Sõrestiku KB omavõnkesagedused

Tabelis 6.3 võrreldakse sõrestiku EST-meetodil konsistentse ja keskendatud koondmassiga arvutatud omavõnkesagedusi. Siin esimesed viis konsistentse koondmassiga arvutatud omavõnkesagedust ühtivad lõplike elementide meetodil [Kan13, p. 36] konsistentse massimaatriksiga leitutega.

Tabel 6.3. Sõrestiku KB omavõnkesagedused

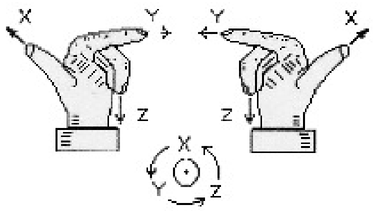
Omavõnke-sagedus	EST-meetod			
	Keskendatud koondmass		Konsistentne koondmass	
	Sagedus ω $\left[\mathrm{s}^{-1}\right]$	Sagedus f $[\mathrm{Hz}]$	Sagedus ω $\left[\mathrm{s}^{-1}\right]$	Sagedus f $[\mathrm{Hz}]$
1.	228.82	36.418	240.87	38.336
2.	433.81	69.042	467.94	74.475
3.	594.21	94.572	739.85	117.75
4.	984.15	156.63	1243.4	197.89
5.	1398.3	222.555	1633.4	259.97
6.	1577.4	251.05	2102.2	334.57
7.	1638.7	260.80	2180.1	346.98
8.	1752.9	278.98	2310.1	367.67
9.	1944.7	309.50	2802.2	445.99

A. Vektorite teisendused

A.1 Kohalik ja üldteljestik

Tarindivarraste asukoha ja suuna kirjeldamiseks kasutame xz-üldteljestikku. Varrastarindi iga vardaga seotakse kohalik teljestik x^*z^* nii, et x^*-telg ühtib varda teljega.

Kasutame ainult parema käe teljestikku (jn A.1). Vaadates tasapinnalist tarindit y-telje positiivsest otsast, loeme pöörde positiivseks z-teljest x-telje suunas. Parema käe teljestiku puhul on positiivne pööre (põhjapoolkeral) vastupäeva. Siirete ja jõuvektorite kirjeldamiseks kohalikes ja üldkoordinaatides tuleb teha koordinaatide teisendused.



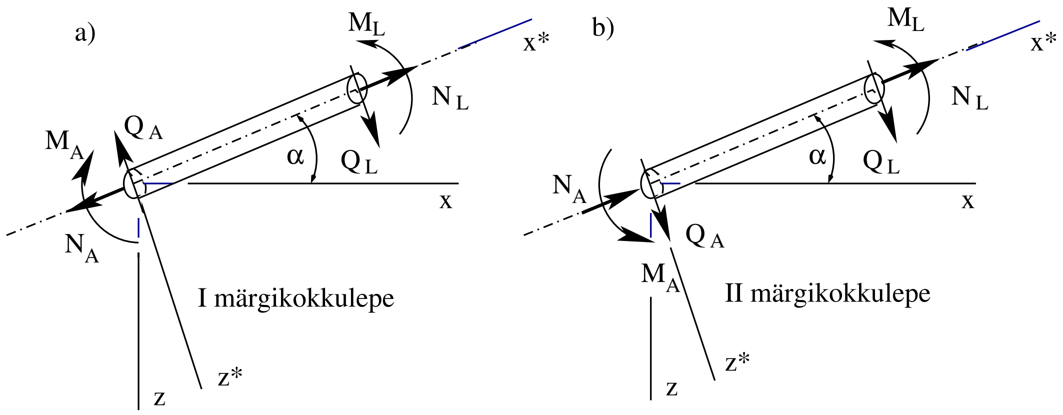
Joonis A.1. Vasaku ja parema käe teljestik

Joonisel on näidatud positiivse pöördenurga suund. Vaadates telje positiivsest otsast, loeme pöörde positiivseks z-teljest x-telje suunas, x-teljest y-telje suunas ja y-teljest z-telje suunas.

A.2 Märgikokkulepped

Võtame kasutusele parema käe teljestiku (jn A.1). Varda otste välispinnal mõjuvaid rajajõude vaatleme kui välisjõude, täpsemini, kui reaktsiooni mõjuvale koormusele. Reaktsioonijõud määratakse tasakaalutingimustest. Rajajõudude märgi määramisel on kasutusel kaks märgikokkulepet. *Esimene märgikokkulepe* (jn A.2a) on tuttav tugevusõpetusest. *Teine märgikokkulepe* (jn A.2b) on vajalik varrassüsteemide tasakaaluvõrrandite algoritmide koostamiseks.

Märgikokkuleppeid võrreldes näeme, et rajajõudude suunad varda lõpus ühtivad, varda alguses on aga vastandmärgilised.



Joonis A.2. Märgikokkulepped

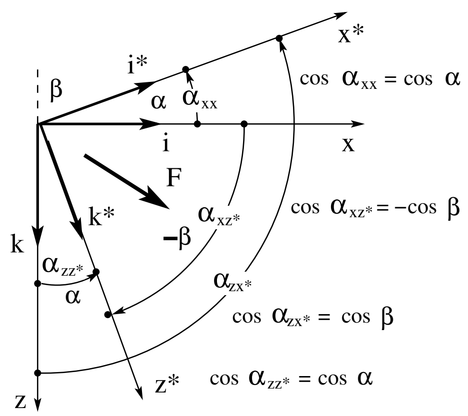
A.3 Koordinaatide teisendus

Koordinaatide teisendusvalemite tuletamiseks vaatleme joonist A.3. Olgu koordinaadid x, y, z üldkoordinaadid ja x^*, y^*, z^* kohalikud koordinaadid. Vaatleme veel parema käe kolmikuid $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ja $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*$. Need on ühikvektorite kolmikud, mis määravad koordinaattelgede suuna. Joonisel A.3 on ühikvektorid $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{j}^*$ suunatud vaataja poole. Vektori $\vec{F}$ projektsioonid telgedele x, z on F_x, F_z, telgedele x^*, z^* aga F_x^*, F_z^*. Seega

$$\vec{\mathbf{F}} = F_x \cdot \vec{\mathbf{i}} + F_z \cdot \vec{\mathbf{k}} = F_x^* \cdot \vec{\mathbf{i}}^* + F_z^* \cdot \vec{\mathbf{k}}^*, \qquad \left\{ \begin{array}{l} \cdot\vec{\mathbf{i}}^* \\ \cdot\vec{\mathbf{k}}^* \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot\vec{\mathbf{i}} \\ \cdot\vec{\mathbf{k}} \end{array} \right. \tag{A.1}$$

Korrutame avaldise (A.1) vektoritega $\vec{\mathbf{i}}^*$ ja $\vec{\mathbf{k}}^*$. Võtame arvesse, et risti olevate vektorite skalaarkorrutis (sisekorrutis) on null. Saame

$$\begin{array}{lllllll} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{i}}^* & = & F_x^* & = & F_x \cdot \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{i}}^* & + & F_z \cdot \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{i}}^* \\ \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{k}}^* & = & F_z^* & = & F_x \cdot \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{k}}^* & + & F_z \cdot \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{k}}^* \end{array} \tag{A.2}$$



Joonis A.3. Koordinaatide teisendus

Pöördseoste leidmiseks korrutame avaldist (A.1) vektoritega $\vec{\mathbf{i}}$ ja $\vec{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{i}} &= F_x &= F_x^* \cdot \vec{\mathbf{i}}^* \cdot \vec{\mathbf{i}} &+ F_z^* \cdot \vec{\mathbf{k}}^* \cdot \vec{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{k}} &= F_z^* &= F_x^* \cdot \vec{\mathbf{i}}^* \cdot \vec{\mathbf{k}} &+ F_z^* \cdot \vec{\mathbf{k}}^* \cdot \vec{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{A.3}$$

Ühikvektorite skalaarkorrutis võrdub nende positiivsete suundade vahelise nurga koosinusega:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{i}}^* &= \vec{\mathbf{i}}^* \cdot \vec{\mathbf{i}} = \cos\alpha_{xx^*}, & \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{k}}^* &= \cos\alpha_{xz^*} \\ \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{k}}^* &= \vec{\mathbf{k}}^* \cdot \vec{\mathbf{k}} = \cos\alpha_{zz^*}, & \vec{\mathbf{i}}^* \cdot \vec{\mathbf{k}} &= \cos\alpha_{zx^*} \end{aligned} \tag{A.4}$$

Telje x^* suunakoosinused tähistame järgmiselt: $\cos\alpha_{xx^*} = \cos\alpha$ ja $\cos\alpha_{zx^*} = \cos\beta$ ($\cos\beta = \cos(90\,^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$). Jooniselt A.3 näeme, et

$$\begin{aligned} \cos\alpha_{xx^*} &= \cos\alpha, & \cos\alpha_{zx^*} &= \cos\beta \\ \cos\alpha_{zz^*} &= \cos\alpha, & \cos\alpha_{xz^*} &= -\cos\beta \end{aligned} \tag{A.5}$$

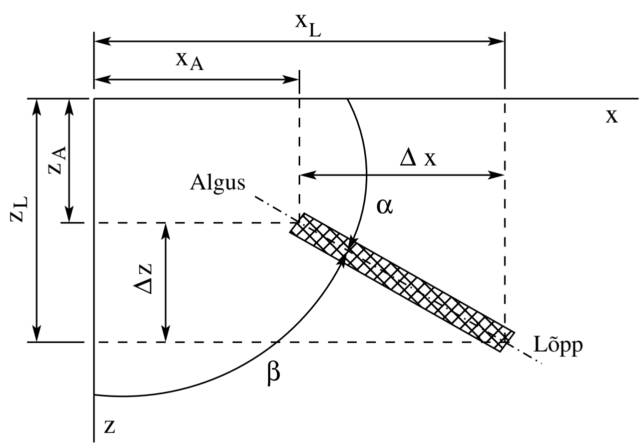
Suunakoosinused arvutame varda lõpu ja alguse koordinaatide x_L, z_L, x_A, z_A (jn A.4) järgi:

$$\cos\alpha = \frac{x_L - x_A}{l} \tag{A.6}$$

$$\cos\beta = \frac{z_L - z_A}{l} \tag{A.7}$$

kus varda pikkus

$$l = \sqrt{(z_L - z_A)^2 + (x_L - x_A)^2} \tag{A.8}$$



Joonis A.4. Varda suunakoosinused

Nüüd avaldame koordinaatide teisenduse:

$$\begin{bmatrix} F_x^* \\ F_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ -\cos\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

Koordinaatide pöördteisendus (teisendus kohalikest koordinaatidest üldkoordinaatidesse, vt GNU Octave'i funktsioon spTeisndMaatriks.m):

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\cos\beta \\ \cos\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x^* \\ F_z^* \end{bmatrix} \tag{A.10}$$

Võrreldes koordinaatide teisendusmaatrikseid avaldistes (A.9) ja (A.10), näeme, et nendes on read ja veerud vahetatud, s.t ühe saab teisest *transponeerimisel*. Asendades F_x ja F_z võrrandis (A.9) nende avaldistega võrrandis (A.10), saame maatrikskorrutise

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ -\cos\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\cos\beta \\ \cos\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.11}$$

Siin annab maatriksi korrutamine tema transponeeritud kujuga ühikmaatriksi. Selliseid maatrikseid nimetatakse *ortogonaalseteks*. Ortogonaalse maatriksi pöördmaatriks võrdub tema transponeeritud kujuga (mõlemal juhul on korrutiseks ühikmaatriks).

Arvestades, et $\cos\beta = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$, võime seosed (A.9) kirjutada kujul

$$\begin{bmatrix} F_x^* \\ F_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} \tag{A.12}$$

ja pöördteisenduse

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x^* \\ F_z^* \end{bmatrix} \tag{A.13}$$

Koordinaatide teisendus pöördel nurga α võrra:

– ümber z^*-telje

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_{z^*}(\alpha) \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

– ümber x^*-telje

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_{x^*}(\alpha) \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} \tag{A.15}$$

– ümber y^*-telje

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_{y^*}(\alpha) \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} \tag{A.16}$$

Näide A.1 (vektorite teisendus pöördel). Olgu antud varda väändenurga vektor $\theta_x^{(1)}$ ja paindenurga vektor $\varphi_y^{(1)}$. Kohalike koordinaatide x^*, y^* pöördel ümber z^*-telje nurga $-\pi/2$ võrra

$$\begin{bmatrix} \theta_x^{(2)} \\ \varphi_y^{(2)} \\ z^* \end{bmatrix} = R_{x^*} \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) & 0 \\ -\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x^{(1)} \\ \varphi_y^{(1)} \\ z^* \end{bmatrix} \tag{A.17}$$

Siit

$$\theta_x^{(2)} + \varphi_y^{(1)} = 0 \tag{A.18}$$

$$\varphi_y^{(2)} - \theta_x^{(1)} = 0 \tag{A.19}$$

Avaldised (A.18) ja (A.19) selgitavad, kuidas tuleb pöörete vektorid kontakti panna.

Murdepunktis peavad olema tasakaalus väändemomendi vektor $T_x^{(1)}$ ja paindemomendi vektor $M_y^{(1)}$ ning vektorid $T_x^{(2)}$ ja $M_y^{(2)}$:

$$T_x^{(2)} - M_y^{(1)} = 0 \tag{A.20}$$

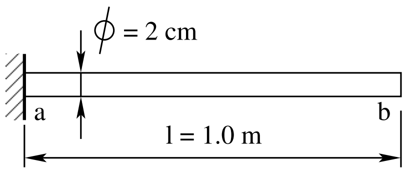
$$M_y^{(2)} + T_x^{(1)} = 0 \tag{A.21}$$

B. EST-meetodiga lahendatud ülesandeid

Algparameetrid varrassüsteemi võnkumise diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks leitakse EST-meetodiga. Varda siirete ja sisejõudude arvutamisel ülekandemaatriksmeetodiga kasutatakse leitud algparameetreid.

B.1 Varda võnkumise arvutusi

Näide B.1 (varda S1 omavõnkumine). Leida joonisel B.1 kujutatud sõrestikuvarda (vt ka jn 6.3) [Ram16, jn 1b] omavõnkesagedused ja -vormid.



Joonis B.1. Konsoolvarras S1

Andmed. Varda pikkus $\ell = 1.0\,\mathrm{m}$, ristlõike diameeter $d = 2.0\,\mathrm{cm}$, elastsusmoodul $E = 210\,\mathrm{GPa}$, materjali tihedus $\rho = 7.80 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

Lahendus. Omavõnkesageduse arvutamiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{B.1}$$

kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor:

$$\mathbf{Z} = \widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a} \\ \mathbf{Z_b} \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

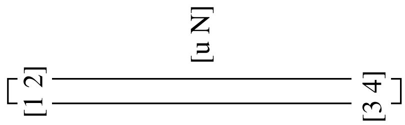
Vektori komponentideks on pikisiirded ja pikijõud varda ab alguses ning lõpus (1.21):

$$\mathbf{Z_a} = \begin{bmatrix} u_A^{(ab)} \\ N_A^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(1) \\ Z\,(2) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b} = \begin{bmatrix} u_L^{(ab)} \\ N_L^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(3) \\ Z\,(4) \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

Muutujate $Z\,(i)$ järjenumbrid (i = 1, 2, 3, 4) on toodud joonisel B.2.

Võrrandisüsteemi (B.1) kaks esimest võrrandit on põhivõrrandid (1.47). Ülejäänud kaks võrrandit saame rajatingimustest:

$$\begin{aligned} Z\,(1) &= u_A^{(ab)} &= 0 \\ Z\,(4) &= N_L^{(ab)} &= 0 \end{aligned} \tag{B.4}$$



Joonis B.2. Konsoolvarda S1 muutujate järjenumbrid

GNU Octave'i programmiga NaidePikeS1.m leiame hõreda võrrandisüsteemi (B.1) determinandi nullid. Determinandi arvutus on toodud programmi väljavõttes B.1.

Väljavõte programmist B.1 (NaidePikeS1.m) %
```
            # hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E);
IIv=1;
IJv=1;
           # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=0
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
####### Rajatingimused
spA=spSisestaArv(spA,3,1,1);  # $u_A$ - pikisiire
spA=spSisestaArv(spA,4,4,1);  # $T_L$ - $N_L$ - pikijõud

 spA determinant
D(j)=det(spA);
```

Võrrandisüsteemi (B.1) determinandi märk muutub nurksageduse ω vahemikus, mida täpsustatakse etteantud väärtuseni $eps0$ (vt arvutuspäeviku väljavõte B.1).

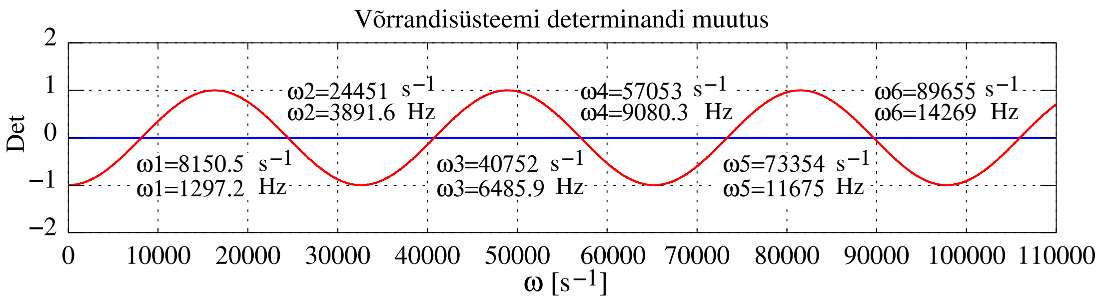
Väljavõte arvutuspäevikust B.1 (NaidePikeS1.m)
```
octave:1>NaidePikeS1
l =  1
d =  0.02
A =  3.1416e-04
E =  2.1000e+11
md =  7800
EA =  65973600
baasi0 =  65973600
alg=0.1
samm =  15
lop =  110000
Arvutuse algus.
NNK =  4
-------- Sparse matrix instantiation --------
  spA=sparse(NNK,NNK)
Oota! Arvutan.
 Lähme esimest determinandi nulli täpsustama.
wf_enne =  8150.5
wf_parast =  8150.5
```

```
***************
Arvutus on lõppenud.
octave:2>
```

Valime pikisiirde skaleerimisteguri võrdseks pikkejäikusega (baasi0 = EA). Nüüd on omavõnkevormide amplituudid suuremad, kuid omavõnkesagedused jäävad samaks.

Varda (jn B.1) esimesed kuus omavõnkesagedust on $\omega_1 = 8150.5\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 2.4451\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$ $\omega_3 = 4.0752\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 5.7053\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_5 = 7.3354\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$ ja $\omega_6 = 8.9655\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$.

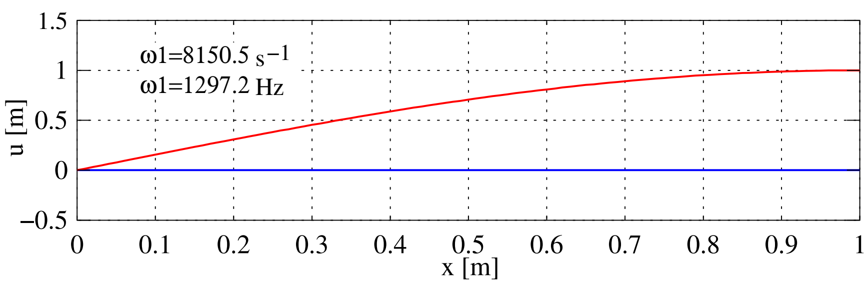
Võrrandisüsteemi (B.1) determinandi sõltuvus nurksagedusest ω on toodud joonisel B.3.



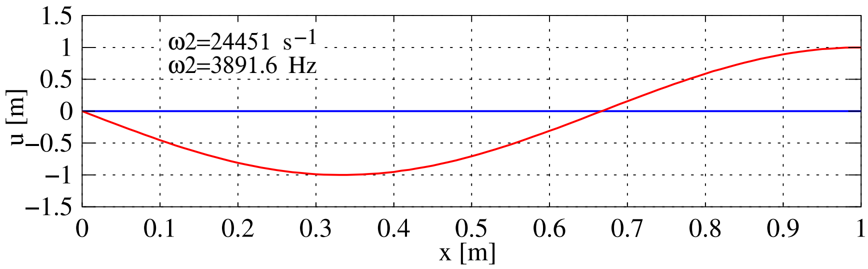
Joonis B.3. Varda S1 omavõnkesagedused

Omavõnkevormid sagedustel $\omega_1 = 8150.5\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 24451\,\mathrm{s}^{-1}$ ja $\omega_3 = 40752\,\mathrm{s}^{-1}$ leiame vastavalt GNU Octave'i programmidega NaidePikeS1w1.m, NaidePikeS1w2.m ning NaidePikeS1w3.m.

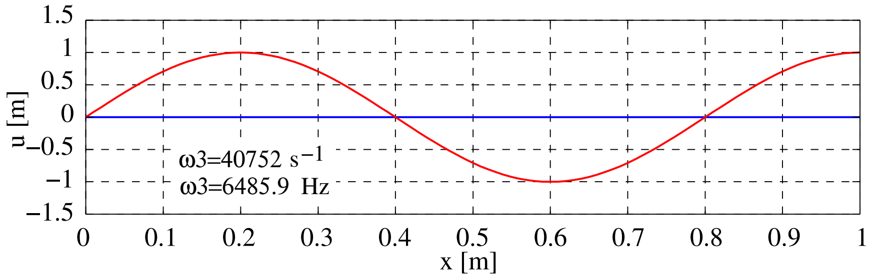
Omavõnkevormid toome joonisel B.4.



(a) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_1 = 8150.5\,\mathrm{s}^{-1}$



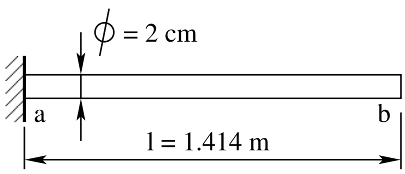
(b) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_2 = 24451\,\mathrm{s}^{-1}$



(c) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_3 = 40752\,\mathrm{s}^{-1}$

Joonis B.4. Varda S1 omavõnkevormid

Näide B.2 (varda S2 omavõnkumine). Leida joonisel B.5 kujutatud sõrestikuvarda (vt ka jn 6.3) [Ram16, jn 1b] omavõnkesagedused ja -vormid.



Joonis B.5. Konsoolvarras S2

Andmed. Varda pikkus $\ell = 1.4142\,\mathrm{m}$, ristlõike diameeter $d = 2.0\,\mathrm{cm}$, elastsusmoodul $E = 210\,\mathrm{GPa}$, materjali tihedus $\rho = 7.80 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

Lahendus. Omavõnkesageduse arvutamiseks koostame EST-meetodi võrrandisüsteemi

$$\mathbf{spA} \cdot \mathbf{Z} = 0 \tag{B.5}$$

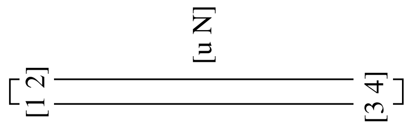
kus $\mathbf{Z}$ on võrrandisüsteemi tundmatute vektor:

$$\mathbf{Z} = \widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z_a} \\ \mathbf{Z_b} \end{bmatrix} \tag{B.6}$$

Vektori komponentideks on pikisiirded ja pikijõud varda ab alguses ning lõpus (1.21):

$$\mathbf{Z_a} = \begin{bmatrix} u_A^{(ab)} \\ N_A^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(1) \\ Z\,(2) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z_b} = \begin{bmatrix} u_L^{(ab)} \\ N_L^{(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\,(3) \\ Z\,(4) \end{bmatrix} \tag{B.7}$$

Muutujate $Z\,(i)$ järjenumbrid (i = 1, 2, 3, 4) on toodud joonisel B.6.



Joonis B.6. Konsoolvarda S2 muutujate järjenumbrid

Võrrandisüsteemi (B.5) kaks esimest võrrandit on põhivõrrandid (1.47). Ülejäänud kaks võrrandit saame rajatingimustest:

$$\begin{array}{rcccl} Z\,(1) & = & u_A^{(ab)} & = & 0 \\ Z\,(4) & = & N_L^{(ab)} & = & 0 \end{array} \tag{B.8}$$

GNU Octave'i programmiga NaidePikeS2.m leiame hõreda võrrandisüsteemi (B.1) determinandi nullid. Determinandi arvutuse toome programmi väljavõttes B.2.

Väljavõte programmist B.2 (NaidePikeS2.m)

```
            # hõreda laiendatud ülekandemaatriksi arvutus
spvF=splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E);
IIv=1;
IJv=1;
           # sisestab ülekandemaatriksi võrrandisüsteemi spA*Z=0
spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
####### Rajatingimused
spA=spSisestaArv(spA,3,1,1);  # $u_A$ - pikisiire
spA=spSisestaArv(spA,4,4,1);  # $T_L$ - $N_L$ - pikijõud

 spA determinant
D(j)=det(spA);
```

Võrrandisüsteemi (B.5) determinandi märk muutub nurksageduse ω vahemikus, mida täpsustatakse kuni etteantud väärtuseni $eps0$ (vt arvutuspäeviku väljavõte B.2).

Väljavõte arvutuspäevikust B.2 (NaidePikeS2.m)

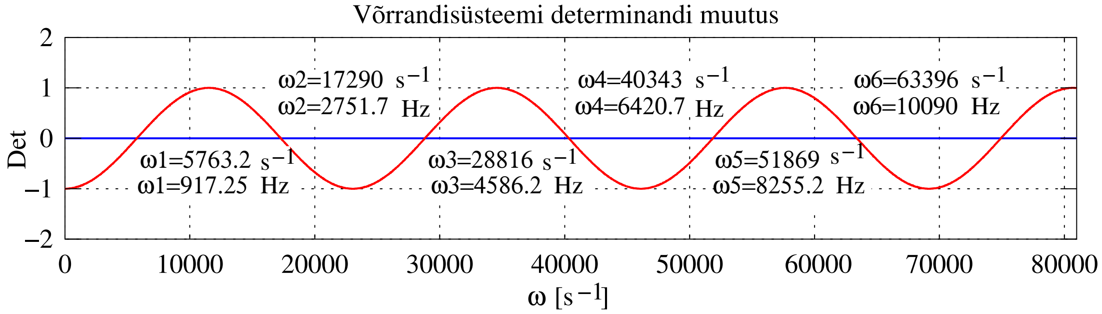
```
octave:1>NaidePikeS2
l =  1
d =  0.02
A =  3.1416e-04
E =  2.1000e+11
md =  7800
EA =  65973600
baasi0 =  65973600
alg=0.1
samm =  15
lop =  110000
Arvutuse algus.
```

```
NNK =   4
-------- Sparse matrix instantiation --------
  spA=sparse(NNK,NNK)
Oota! Arvutan.
 Lähme esimest determinandi nulli täpsustama.
wf_enne =  8150.5
wf_parast =  8150.5
***************
Arvutus on lõppenud.
octave:2>
```

Valime pikisiirde skaleerimisteguri võrdseks pikkejäikusega (baasi0 = EA). Nüüd saame suuremad omavõnkevormide amplituudid, kuid omavõnkesagedused jäävad samaks.

Varda (jn B.5) esimesed kuus omavõnkesagedust on $\omega_1 = 5763.2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 1.7290\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$ $\omega_3 = 2.8816\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_4 = 4.0343\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_5 = 5.1869\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$ ja $\omega_6 = 6.3396\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$.

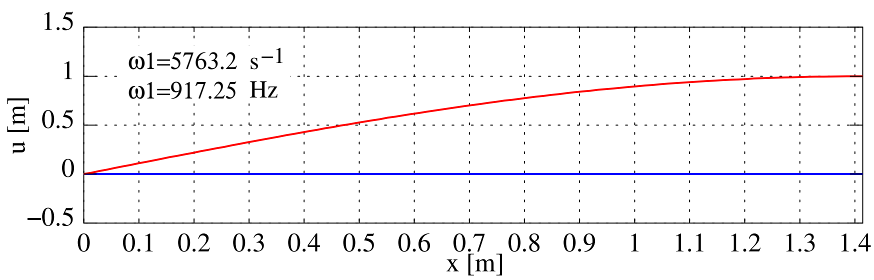
Võrrandisüsteemi (B.5) determinandi sõltuvus nurksagedusest ω on kujutatud joonisel B.7.



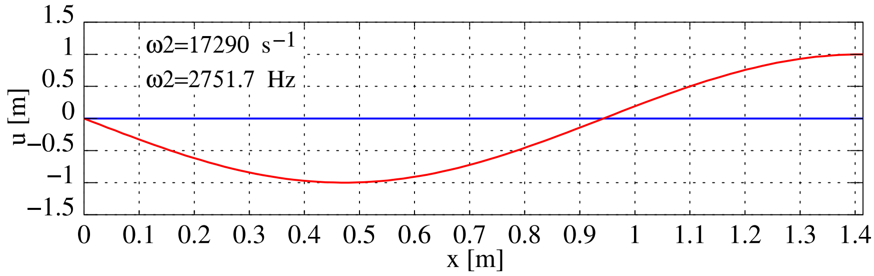
Joonis B.7. Varda S2 omavõnkesagedused

Omavõnkevormid sagedustel $\omega_1 = 5763.2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 17290\,\mathrm{s}^{-1}$ ja $\omega_3 = 28816\,\mathrm{s}^{-1}$ leiame vastavalt GNU Octave'i programmidega NaidePikeS2w1.m, NaidePikeS2w2.m ning NaidePikeS2w3.m.

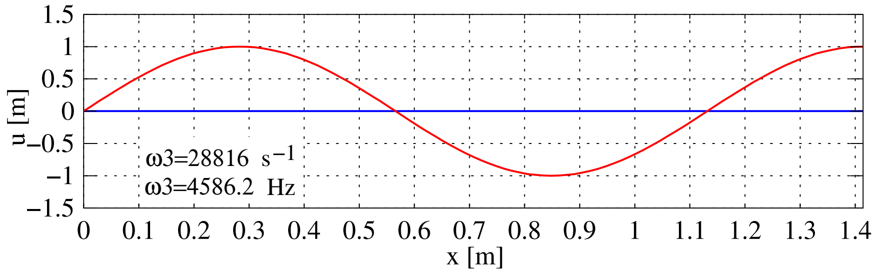
Omavõnkevormid on toodud joonisel B.8.



(a) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_1 = 5763.2\,\mathrm{s}^{-1}$



(b) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_2 = 17290\,\mathrm{s}^{-1}$



(c) Omavõnkevorm sagedusel $\omega_3 = 28816\,\mathrm{s}^{-1}$

Joonis B.8. Varda S2 omavõnkevormid

B.2 Raami sundvõnkumise arvutusi

Raami sundvõnkumist vaatleme antisümmeetrilisel (jaot 5.3, jn 5.13) ja sümmeetrilisel koormusel (jaot 5.3, jn 5.15).

B.2.1 Jäikade sõlmedega põikraami antisümmeetriline sundvõnkumine

Antisümmeetrilise koormuse esimene piirkond (vt lk 183). Sagedus $\omega = 7.2216 \times 10\,\mathrm{s}^{-1}$, $\lambda = 1.1105$.

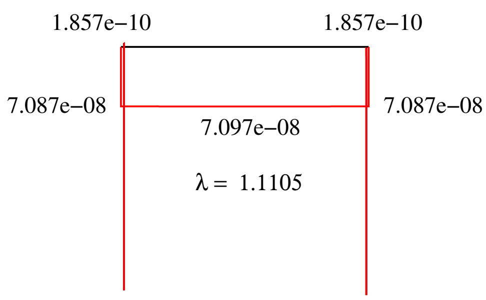
Tabel B.1. Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 7.2216 \times 10\,\mathrm{s}^{-1}$

Toereaktsioon (vt jn 5.7)	Dünaamilisel koormusel	Staatilisel koormusel	Erinevus
C_1 [N]	$-0.60129F_x$	$-0.50000F_x$	$-0.101288F_x$
C_2 [N]	$0.49523F_x$	$0.42803F_x$	$0.067200F_x$
C_3 [Nm]	$1.01803F_x$	$0.85796F_x$	$0.160072F_x$
C_4 [N]	$-0.60129F_x$	$-0.50000F_x$	$-0.101288F_x$
C_5 [N]	$-0.49523F_x$	$-0.42803F_x$	$-0.067200F_x$
C_6 [Nm]	$1.01803F_x$	$0.85796F_x$	$0.160072F_x$

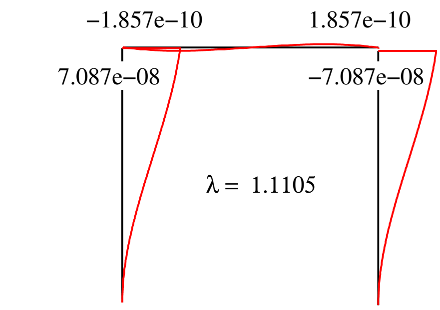
Väljavõte arvutuspäevikust B.3 (NaideRaam1CwMFx.m)

```
 1. element
h1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=      0.00        0.38        0.75        1.12        1.50
     u -   0.000e+00   2.321e-11   4.643e-11   6.964e-11   9.285e-11
     w -   0.000e+00   2.486e-09   9.152e-09   1.881e-08   3.027e-08
    fi -   0.000e+00  -1.273e-08  -2.229e-08  -2.869e-08  -3.194e-08
     N -   4.952e-01   4.952e-01   4.952e-01   4.952e-01   4.952e-01
     Q -   6.013e-01   6.011e-01   6.001e-01   5.975e-01   5.929e-01
     M -  -1.018e+00  -7.926e-01  -5.673e-01  -3.427e-01  -1.194e-01

 2. element
h2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=      0.00        0.38        0.75        1.12        1.50
     u -   9.285e-11   1.161e-10   1.393e-10   1.625e-10   1.857e-10
     w -   3.027e-08   4.237e-08   5.393e-08   6.381e-08   7.087e-08
    fi -  -3.194e-08  -3.206e-08  -2.909e-08  -2.308e-08  -1.408e-08
     N -   4.952e-01   4.952e-01   4.952e-01   4.951e-01   4.951e-01
     Q -   5.929e-01   5.861e-01   5.770e-01   5.660e-01   5.533e-01
     M -  -1.194e-01   1.017e-01   3.199e-01   5.342e-01   7.441e-01

 3. element
l1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=      0.00        0.38        0.75        1.12        1.50
     u -   7.087e-08   7.089e-08   7.092e-08   7.094e-08   7.097e-08
     w -  -1.857e-10   3.297e-09   3.835e-09   2.409e-09   6.617e-24
    fi -  -1.408e-08  -4.926e-09   1.620e-09   5.550e-09   6.860e-09
     N -   5.533e-01   5.400e-01   5.266e-01   5.133e-01   5.000e-01
     Q -  -4.951e-01  -4.954e-01  -4.961e-01  -4.968e-01  -4.970e-01
     M -   7.441e-01   5.584e-01   3.725e-01   1.863e-01  -1.110e-16

 4. element
l2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=      0.00        0.38        0.75        1.12        1.50
     u -   7.097e-08   7.094e-08   7.092e-08   7.089e-08   7.087e-08
     w -   5.015e-24  -2.409e-09  -3.835e-09  -3.297e-09   1.857e-10
    fi -   6.860e-09   5.550e-09   1.620e-09  -4.926e-09  -1.408e-08
     N -  -5.000e-01  -5.133e-01  -5.266e-01  -5.400e-01  -5.533e-01
     Q -  -4.970e-01  -4.968e-01  -4.961e-01  -4.954e-01  -4.951e-01
     M -  -1.144e-17  -1.863e-01  -3.725e-01  -5.584e-01  -7.441e-01

 5. element
h2 =  1.5000
Nmitmeks =  4
```

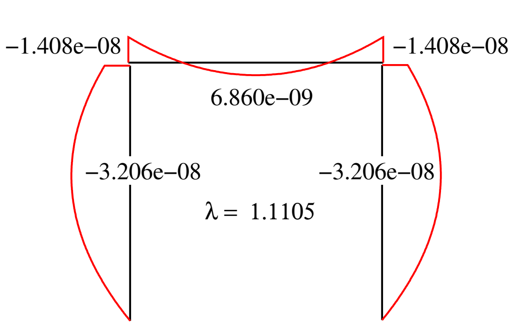
```
     x=       0.00         0.38          0.75          1.12          1.50
    u -    1.857e-10    1.625e-10    1.393e-10    1.161e-10    9.285e-11
    w -   -7.087e-08   -6.381e-08   -5.393e-08   -4.237e-08   -3.027e-08
   fi -   -1.408e-08   -2.308e-08   -2.909e-08   -3.206e-08   -3.194e-08
    N -   -4.951e-01   -4.951e-01   -4.952e-01   -4.952e-01   -4.952e-01
    Q -    5.533e-01    5.660e-01    5.770e-01    5.861e-01    5.929e-01
    M -   -7.441e-01   -5.342e-01   -3.199e-01   -1.017e-01    1.194e-01

 6. element
h1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

     x=       0.00         0.38          0.75          1.12          1.50
    u -    9.285e-11    6.964e-11    4.643e-11    2.321e-11    0.000e+00
    w -   -3.027e-08   -1.881e-08   -9.152e-09   -2.486e-09   -4.136e-24
   fi -   -3.194e-08   -2.869e-08   -2.229e-08   -1.273e-08    3.309e-24
    N -   -4.952e-01   -4.952e-01   -4.952e-01   -4.952e-01   -4.952e-01
    Q -    5.929e-01    5.975e-01    6.001e-01    6.011e-01    6.013e-01
    M -    1.194e-01    3.427e-01    5.673e-01    7.926e-01    1.018e+00
```



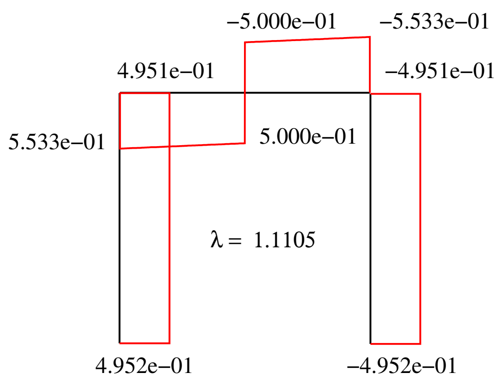
(a) Pikisiire



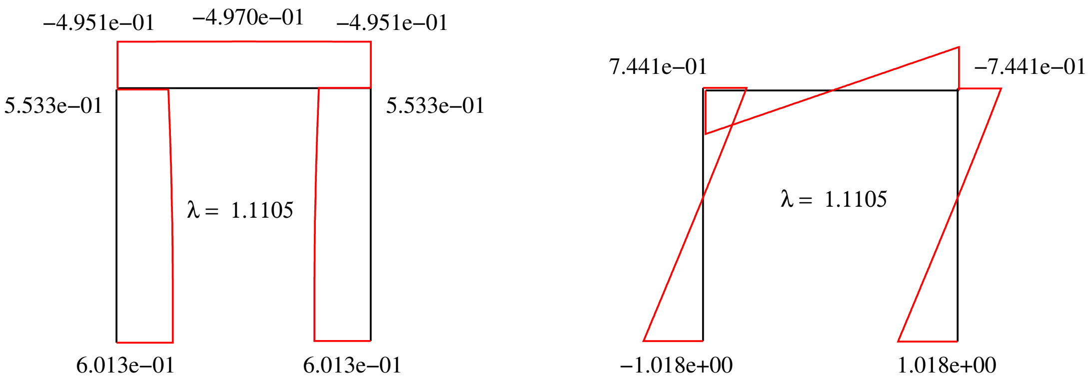
(b) Põiksiire



(c) Paindenurk



(d) Pikijõud



(e) Põikjõud (f) Paindemoment

Joonis B.9. Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 7.2216 \times 10 \text{ s}^{-1}$

Antisümmeetrilise koormuse esimene piirkond (vt lk 183). Sagedus $\omega = 1.8599 \times 10^2 \text{ s}^{-1}$, $\lambda = 1.5254$.

Tabel B.2. Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 1.8599 \times 10^2 \text{ s}^{-1}$

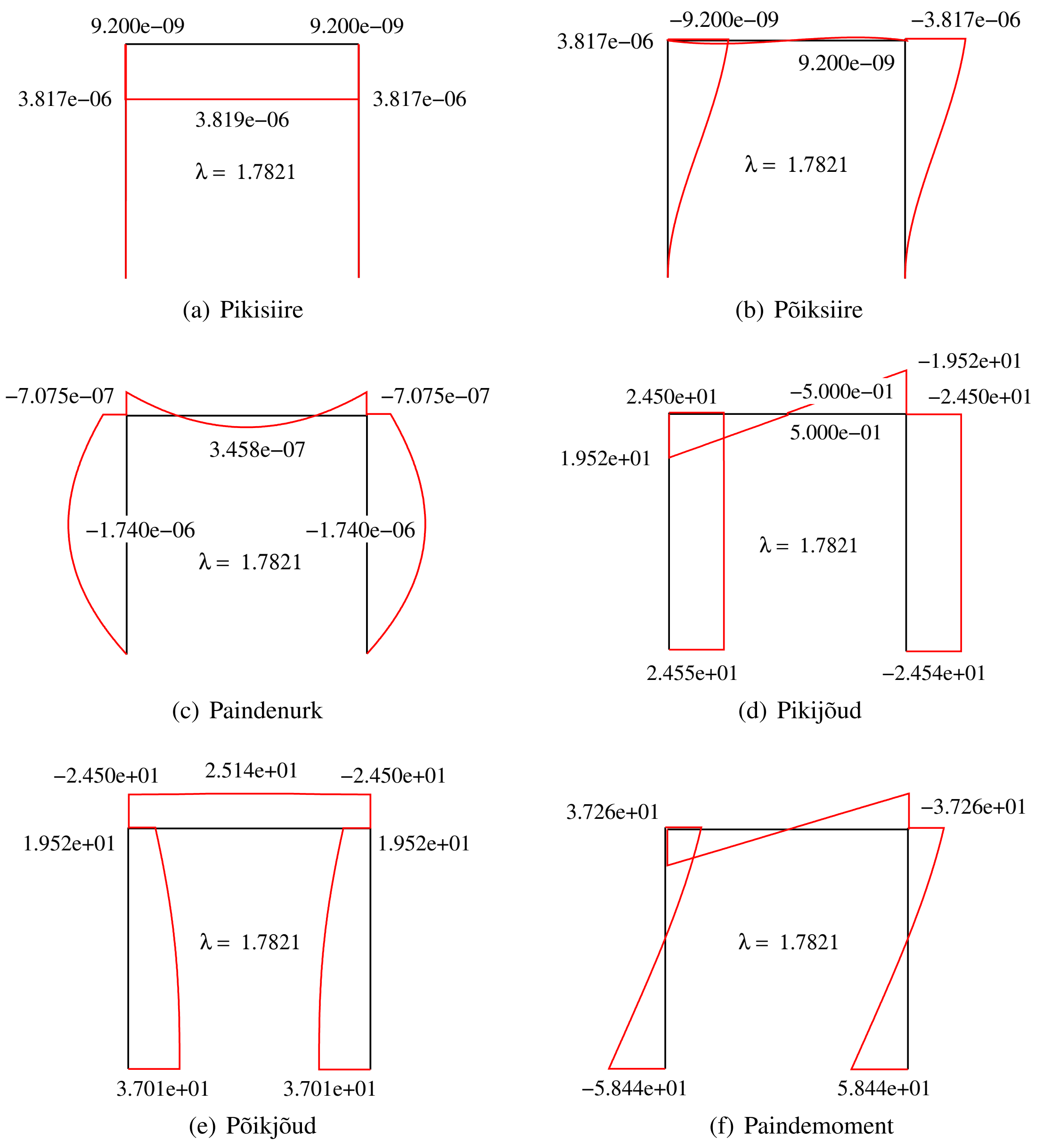
Toereaktsioon (vt jn 5.7)	Dünaamilisel koormusel	Staatilisel koormusel	Erinevus
C_1 [N]	$-37.01386F_x$	$-0.50000F_x$	$-36.514F_x$
C_2 [N]	$24.54984F_x$	$0.42803F_x$	$24.122F_x$
C_3 [Nm]	$58.43928F_x$	$0.85796F_x$	$57.581F_x$
C_4 [N]	$-37.01386F_x$	$-0.50000F_x$	$-36.514F_x$
C_5 [N]	$-24.54984F_x$	$-0.42803F_x$	$-24.122F_x$
C_6 [Nm]	$58.43928F_x$	$0.85796F_x$	$57.581F_x$

Väljavõte arvutuspäevikust B.4 (NaideRaam1CwMFx.m)

```
 1. element
h1 =   1.5000
Nmitmeks =   4

      x=        0.00         0.38         0.75         1.12         1.50
     u -     0.000e+00    1.151e-09    2.301e-09    3.452e-09    4.602e-09
     w -     0.000e+00    1.419e-07    5.188e-07    1.058e-06    1.688e-06
    fi -     0.000e+00   -7.242e-07   -1.254e-06   -1.591e-06   -1.740e-06
     N -     2.455e+01    2.455e+01    2.455e+01    2.454e+01    2.454e+01
     Q -     3.701e+01    3.695e+01    3.656e+01    3.559e+01    3.389e+01
     M -    -5.844e+01   -4.456e+01   -3.077e+01   -1.722e+01   -4.162e+00

 2. element
h2 =   1.5000
Nmitmeks =   4
```

```
      x=       0.00         0.38          0.75         1.12          1.50
     u -    4.602e-09    5.752e-09    6.902e-09    8.052e-09    9.200e-09
     w -    1.688e-06    2.341e-06    2.951e-06    3.461e-06    3.817e-06
    fi -   -1.740e-06   -1.711e-06   -1.518e-06   -1.176e-06   -7.075e-07
     N -    2.454e+01    2.453e+01    2.452e+01    2.451e+01    2.450e+01
     Q -    3.389e+01    3.138e+01    2.808e+01    2.407e+01    1.952e+01
     M -   -4.162e+00    8.101e+00    1.927e+01    2.907e+01    3.726e+01

 3. element
l1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         0.38          0.75         1.12          1.50
     u -    3.817e-06    3.818e-06    3.819e-06    3.819e-06    3.819e-06
     w -   -9.200e-09    1.659e-07    1.932e-07    1.214e-07    0.000e+00
    fi -   -7.075e-07   -2.482e-07    8.123e-08    2.796e-07    3.458e-07
     N -    1.952e+01    1.477e+01    1.001e+01    5.256e+00    5.000e-01
     Q -   -2.450e+01   -2.462e+01   -2.486e+01   -2.506e+01   -2.514e+01
     M -    3.726e+01    2.805e+01    1.878e+01    9.417e+00    7.105e-15

 4. element
l2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         0.38          0.75         1.12          1.50
     u -    3.819e-06    3.819e-06    3.819e-06    3.818e-06    3.817e-06
     w -    1.774e-22   -1.214e-07   -1.932e-07   -1.659e-07    9.200e-09
    fi -    3.458e-07    2.796e-07    8.123e-08   -2.482e-07   -7.075e-07
     N -   -5.000e-01   -5.256e+00   -1.001e+01   -1.477e+01   -1.952e+01
     Q -   -2.514e+01   -2.506e+01   -2.486e+01   -2.462e+01   -2.450e+01
     M -    8.447e-16   -9.417e+00   -1.878e+01   -2.805e+01   -3.726e+01

 5. element
h2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         0.38          0.75         1.12          1.50
     u -    9.200e-09    8.052e-09    6.902e-09    5.752e-09    4.602e-09
     w -   -3.817e-06   -3.461e-06   -2.951e-06   -2.341e-06   -1.688e-06
    fi -   -7.075e-07   -1.176e-06   -1.518e-06   -1.711e-06   -1.740e-06
     N -   -2.450e+01   -2.451e+01   -2.452e+01   -2.453e+01   -2.454e+01
     Q -    1.952e+01    2.407e+01    2.808e+01    3.138e+01    3.389e+01
     M -   -3.726e+01   -2.907e+01   -1.927e+01   -8.101e+00    4.162e+00

 6. element
h1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         0.38          0.75         1.12          1.50
     u -    4.602e-09    3.452e-09    2.301e-09    1.151e-09   -1.654e-24
     w -   -1.688e-06   -1.058e-06   -5.188e-07   -1.419e-07    1.059e-22
    fi -   -1.740e-06   -1.591e-06   -1.254e-06   -7.242e-07   -5.294e-23
```

N –	-2.454e+01	-2.454e+01	-2.455e+01	-2.455e+01	-2.455e+01
Q –	3.389e+01	3.559e+01	3.656e+01	3.695e+01	3.701e+01
M –	4.162e+00	1.722e+01	3.077e+01	4.456e+01	5.844e+01



Joonis B.10. Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 1.8599 \times 10^2\ \mathrm{s}^{-1}$

Antisümmeetrilise koormuse teine piirkond (vt lk 183). Sagedus $\omega = 7.300\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\lambda = 3.5307$.

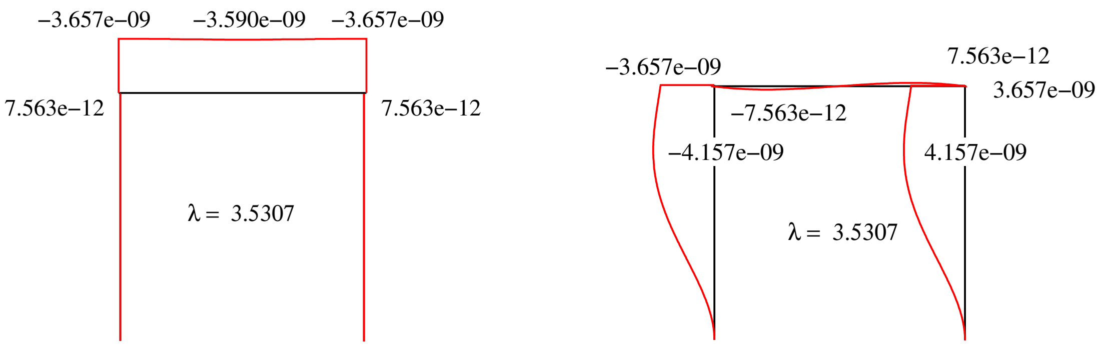
Tabel B.3. Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 7.300\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$

Toereaktsioon (vt jn 5.7)	Dünaamilisel koormusel	Staatilisel koormusel	Erinevus
C_1 [N]	$0.18844F_x$	$-0.50000F_x$	$0.68844F_x$
C_2 [N]	$0.02036F_x$	$0.42803F_x$	$-0.40767F_x$
C_3 [Nm]	$-0.17000F_x$	$0.85796F_x$	$-1.02796F_x$
C_4 [N]	$0.18844F_x$	$-0.50000F_x$	$0.68844F_x$
C_5 [N]	$-0.02036F_x$	$-0.42803F_x$	$0.40767F_x$
C_6 [Nm]	$-0.17000F_x$	$0.85796F_x$	$-1.02796F_x$

Väljavõte arvutuspäevikust B.5 (NaideRaam1CwMFx.m)

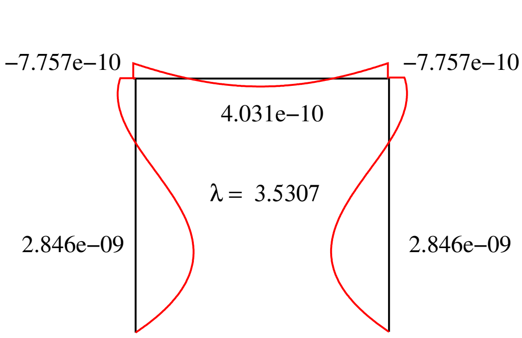
```
 1. element
h1 =   1.5000
Nmitmeks =   4

      x=       0.00        0.38        0.75        1.12        1.50
      u -   0.000e+00   9.544e-13   1.908e-12   2.860e-12   3.809e-12
      w -   0.000e+00  -3.862e-10  -1.299e-09  -2.386e-09  -3.345e-09
     fi -   0.000e+00   1.895e-09   2.815e-09   2.846e-09   2.174e-09
      N -   2.036e-02   2.035e-02   2.033e-02   2.028e-02   2.022e-02
      Q -  -1.884e-01  -1.859e-01  -1.703e-01  -1.349e-01  -7.956e-02
      M -   1.700e-01   9.958e-02   3.226e-02  -2.562e-02  -6.642e-02

 2. element
h2 =   1.5000
Nmitmeks =   4

      x=       0.00        0.38        0.75        1.12        1.50
      u -   3.809e-12   4.755e-12   5.696e-12   6.633e-12   7.563e-12
      w -  -3.345e-09  -3.965e-09  -4.157e-09  -3.983e-09  -3.657e-09
     fi -   2.174e-09   1.090e-09  -3.702e-11  -7.962e-10  -7.757e-10
      N -   2.022e-02   2.014e-02   2.004e-02   1.992e-02   1.978e-02
      Q -  -7.956e-02  -8.794e-03   6.979e-02   1.483e-01   2.216e-01
      M -  -6.642e-02  -8.335e-02  -7.203e-02  -3.103e-02   3.853e-02

 3. element
l1 =   1.5000
Nmitmeks =   4

      x=       0.00        0.38        0.75        1.12        1.50
      u -  -3.657e-09  -3.645e-09  -3.630e-09  -3.612e-09  -3.590e-09
      w -  -7.563e-12   1.883e-10   2.221e-10   1.410e-10  -1.365e-23
     fi -  -7.757e-10  -2.869e-10   8.588e-11   3.220e-10   4.031e-10
      N -   2.216e-01   2.917e-01   3.615e-01   4.309e-01   5.000e-01
```

```
     Q -    -1.978e-02   -2.181e-02   -2.597e-02   -2.959e-02   -3.099e-02
     M -     3.853e-02    3.085e-02    2.191e-02    1.145e-02   -4.372e-16

 4. element
l2 =  1.5000
Nmitmeks =   4
      x=        0.00         0.38          0.75          1.12          1.50
     u -    -3.590e-09   -3.612e-09   -3.630e-09   -3.645e-09   -3.657e-09
     w -    -1.343e-23   -1.410e-10   -2.221e-10   -1.883e-10    7.563e-12
    fi -     4.031e-10    3.220e-10    8.588e-11   -2.869e-10   -7.757e-10
     N -    -5.000e-01   -4.309e-01   -3.615e-01   -2.917e-01   -2.216e-01
     Q -    -3.099e-02   -2.959e-02   -2.597e-02   -2.181e-02   -1.978e-02
     M -    -4.316e-16   -1.145e-02   -2.191e-02   -3.085e-02   -3.853e-02

 5. element
h2 =  1.5000
Nmitmeks =   4
      x=        0.00         0.38          0.75          1.12          1.50
     u -     7.563e-12    6.633e-12    5.696e-12    4.755e-12    3.809e-12
     w -     3.657e-09    3.983e-09    4.157e-09    3.965e-09    3.345e-09
    fi -    -7.757e-10   -7.962e-10   -3.702e-11    1.090e-09    2.174e-09
     N -    -1.978e-02   -1.992e-02   -2.004e-02   -2.014e-02   -2.022e-02
     Q -     2.216e-01    1.483e-01    6.979e-02   -8.794e-03   -7.956e-02
     M -    -3.853e-02    3.103e-02    7.203e-02    8.335e-02    6.642e-02

 6. element
h1 =  1.5000
Nmitmeks =   4
      x=        0.00         0.38          0.75          1.12          1.50
     u -     3.809e-12    2.860e-12    1.908e-12    9.544e-13    0.000e+00
     w -     3.345e-09    2.386e-09    1.299e-09    3.862e-10   -1.241e-24
    fi -     2.174e-09    2.846e-09    2.815e-09    1.895e-09    1.654e-24
     N -    -2.022e-02   -2.028e-02   -2.033e-02   -2.035e-02   -2.036e-02
     Q -    -7.956e-02   -1.349e-01   -1.703e-01   -1.859e-01   -1.884e-01
     M -     6.642e-02    2.562e-02   -3.226e-02   -9.958e-02   -1.700e-01
```

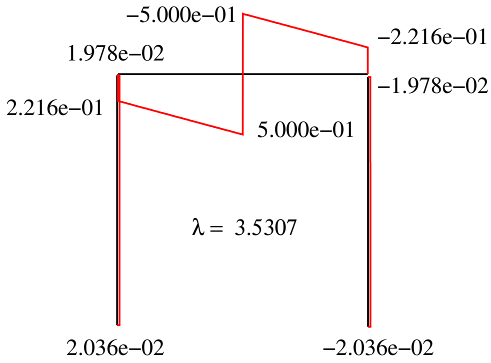


(a) Pikisiire

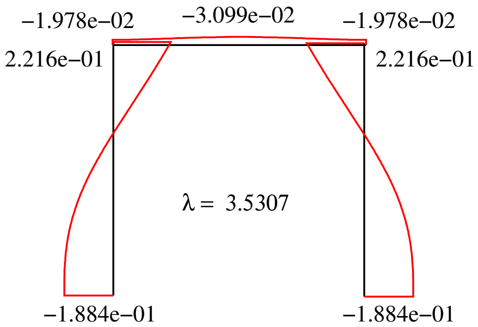
(b) Põiksiire



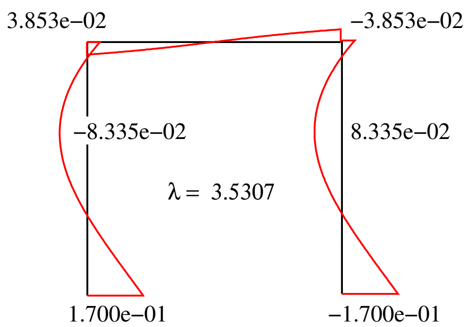
(c) Paindenurk



(d) Pikijõud



(e) Põikjõud



(f) Paindemoment

Joonis B.11. Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 7.300 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$

Antisümmeetrilise koormuse teine piirkond (vt lk 183). Sagedus $\omega = 1.206 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\lambda = 4.5381$.

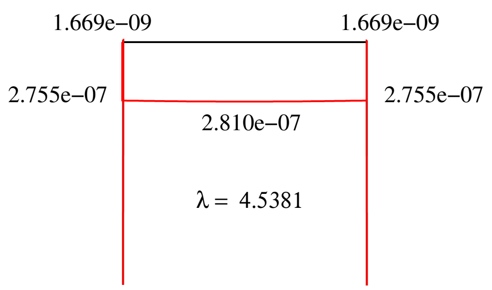
Tabel B.4. Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 1.206 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$

Toereaktsioon (vt jn 5.7)	Dünaamilisel koormusel	Staatilisel koormusel	Erinevus
C_1 [N]	$86.47166F_x$	$-0.50000F_x$	$86.9717F_x$
C_2 [N]	$4.57026F_x$	$0.42803F_x$	$4.1422F_x$
C_3 [Nm]	$-57.42325F_x$	$0.85796F_x$	$-58.2812F_x$
C_4 [N]	$86.47166F_x$	$-0.50000F_x$	$86.9717F_x$
C_5 [N]	$-4.57026F_x$	$-0.42803F_x$	$-4.1422F_x$
C_6 [Nm]	$-57.42325F_x$	$0.85796F_x$	$-58.2812F_x$

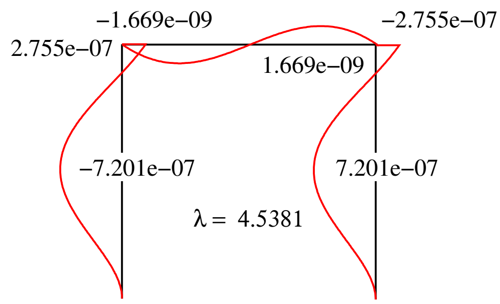
Väljavõte arvutuspäevikust B.6 (NaideRaam1CwMFx.m)

```
 1. element
h1 =   1.5000
Nmitmeks =   4

      x=        0.00         0.38          0.75          1.12          1.50
     u -     0.000e+00    2.141e-10    4.278e-10    6.403e-10    8.513e-10
     w -     0.000e+00   -1.229e-07   -3.800e-07   -6.173e-07   -7.201e-07
    fi -     0.000e+00    5.801e-07    7.211e-07    4.924e-07    3.177e-08
     N -     4.570e+00    4.565e+00    4.548e+00    4.520e+00    4.481e+00
     Q -    -8.647e+01   -8.420e+01   -7.126e+01   -4.478e+01   -9.007e+00
     M -     5.742e+01    2.522e+01   -4.359e+00   -2.651e+01   -3.676e+01

 2. element
h2 =   1.5000
Nmitmeks =   4

      x=        0.00         0.38          0.75          1.12          1.50
     u -     8.513e-10    1.060e-09    1.267e-09    1.470e-09    1.669e-09
     w -    -7.201e-07   -6.352e-07   -3.807e-07   -3.754e-08    2.755e-07
    fi -     3.177e-08   -4.761e-07   -8.441e-07   -9.317e-07   -6.814e-07
     N -     4.481e+00    4.431e+00    4.370e+00    4.298e+00    4.216e+00
     Q -    -9.007e+00    2.731e+01    5.451e+01    6.561e+01    5.897e+01
     M -    -3.676e+01   -3.319e+01   -1.743e+01    5.657e+00    2.953e+01

 3. element
l1 =   1.5000
Nmitmeks =   4

      x=        0.00         0.38          0.75          1.12          1.50
     u -     2.755e-07    2.779e-07    2.796e-07    2.807e-07    2.810e-07
     w -    -1.669e-09    1.776e-07    2.146e-07    1.388e-07    2.118e-22
    fi -    -6.814e-07   -2.797e-07    6.950e-08    3.122e-07    3.994e-07
     N -     5.897e+01    4.448e+01    2.988e+01    1.521e+01    5.000e-01
     Q -    -4.216e+00   -9.479e+00   -2.032e+01   -2.997e+01   -3.374e+01
     M -     2.953e+01    2.726e+01    2.173e+01    1.217e+01    0.000e+00

 4. element
l2 =   1.5000
Nmitmeks =   4

      x=        0.00         0.38          0.75          1.12          1.50
     u -     2.810e-07    2.807e-07    2.796e-07    2.779e-07    2.755e-07
     w -    -1.156e-22   -1.388e-07   -2.146e-07   -1.776e-07    1.669e-09
    fi -     3.994e-07    3.122e-07    6.950e-08   -2.797e-07   -6.814e-07
     N -    -5.000e-01   -1.521e+01   -2.988e+01   -4.448e+01   -5.897e+01
     Q -    -3.374e+01   -2.997e+01   -2.032e+01   -9.479e+00   -4.216e+00
     M -    -3.149e-16   -1.217e+01   -2.173e+01   -2.726e+01   -2.953e+01

 5. element
h2 =   1.5000
Nmitmeks =   4
```

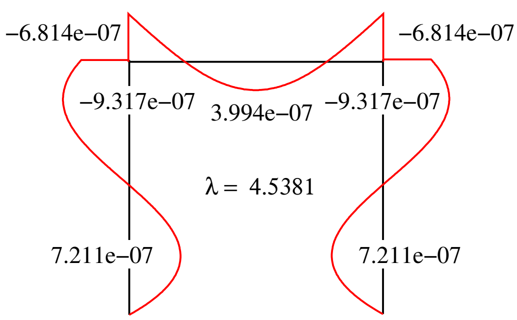
```
    x=        0.00         0.38          0.75          1.12          1.50
   u -    1.669e-09    1.470e-09    1.267e-09    1.060e-09    8.513e-10
   w -   -2.755e-07    3.754e-08    3.807e-07    6.352e-07    7.201e-07
  fi -   -6.814e-07   -9.317e-07   -8.441e-07   -4.761e-07    3.177e-08
   N -   -4.216e+00   -4.298e+00   -4.370e+00   -4.431e+00   -4.481e+00
   Q -    5.897e+01    6.561e+01    5.451e+01    2.731e+01   -9.007e+00
   M -   -2.953e+01   -5.657e+00    1.743e+01    3.319e+01    3.676e+01

 6. element
h1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

    x=        0.00         0.38          0.75          1.12          1.50
   u -    8.513e-10    6.403e-10    4.278e-10    2.141e-10    0.000e+00
   w -    7.201e-07    6.173e-07    3.800e-07    1.229e-07    0.000e+00
  fi -    3.177e-08    4.924e-07    7.211e-07    5.801e-07    0.000e+00
   N -   -4.481e+00   -4.520e+00   -4.548e+00   -4.565e+00   -4.570e+00
   Q -   -9.007e+00   -4.478e+01   -7.126e+01   -8.420e+01   -8.647e+01
   M -    3.676e+01    2.651e+01    4.359e+00   -2.522e+01   -5.742e+01
```



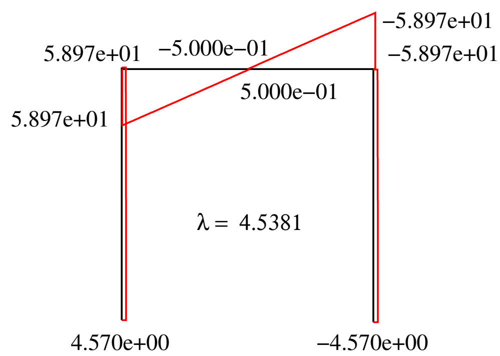
(a) Pikisiire



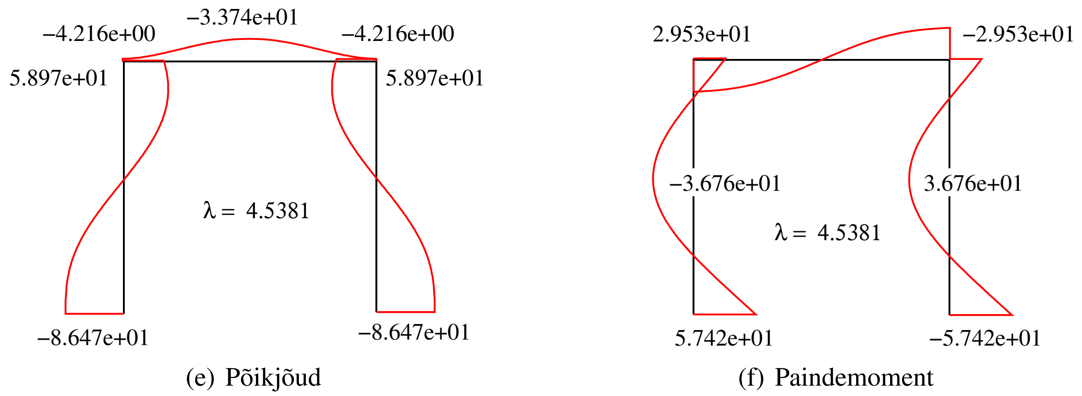
(b) Põiksiire



(c) Paindenurk



(d) Pikijõud



Joonis B.12. Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 1.206 \times 10^3\ \mathrm{s}^{-1}$

B.2.2 Jäikade sõlmedega põikraami sümmeetriline sundvõnkumine

Sümmeetrilise koormuse esimene piirkond (vt lk 190). Sagedus $\omega = 2.83 \times 10^2\ \mathrm{s}^{-1}$, $\lambda = 2.1983$.

Tabel B.5. Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 2.83 \times 10^2\ \mathrm{s}^{-1}$

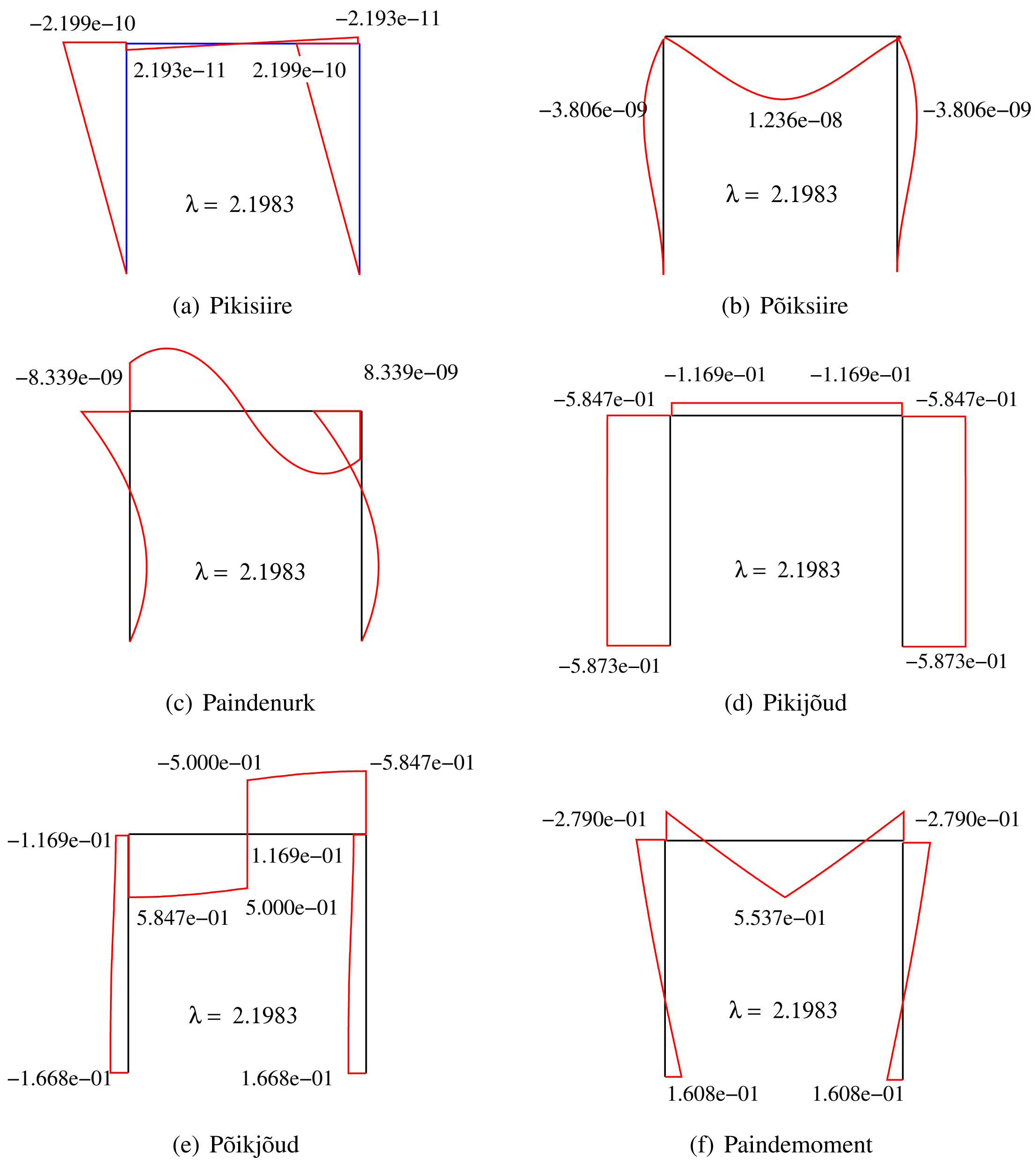
Toereaktsioon (vt jn 5.7)	Dünaamilisel koormusel	Staatilisel koormusel	Erinevus
C_1 [N]	$0.16680F_x$	$0.12486F_x$	$0.041944F_x$
C_2 [N]	$-0.58726F_x$	$-0.50000F_x$	$-0.087265F_x$
C_3 [Nm]	$-0.16084F_x$	$-0.12472F_x$	$-0.036123F_x$
C_4 [N]	$-0.16680F_x$	$-0.12486F_x$	$-0.041944F_x$
C_5 [N]	$-0.58726F_x$	$-0.50000F_x$	$-0.087265F_x$
C_6 [Nm]	$0.16084F_x$	$0.12472F_x$	$0.036123F_x$

Väljavõte arvutuspäevikust B.7 (NaideRaam1CwM.m)

```
 1. element
h1 =  1.5000

Nmitmeks =   4

      x=       0.00         0.38         0.75         1.12         1.50
     u -    0.000e+00   -2.753e-11   -5.505e-11   -8.257e-11   -1.101e-10
     w -    0.000e+00   -3.691e-10   -1.257e-09   -2.337e-09   -3.288e-09
    fi -    0.000e+00    1.822e-09    2.767e-09    2.848e-09    2.092e-09
     N -   -5.873e-01   -5.872e-01   -5.871e-01   -5.869e-01   -5.866e-01
     Q -   -1.668e-01   -1.664e-01   -1.642e-01   -1.590e-01   -1.508e-01
     M -    1.608e-01    9.833e-02    3.626e-02   -2.444e-02   -8.262e-02
```

```
 2. element
h2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00          0.38           0.75          1.12          1.50
     u -   -1.101e-10   -1.376e-10   -1.650e-10   -1.925e-10   -2.199e-10
     w -   -3.288e-09   -3.806e-09   -3.602e-09   -2.408e-09    2.193e-11
    fi -    2.092e-09    5.412e-10   -1.750e-09   -4.725e-09   -8.339e-09
     N -   -5.866e-01   -5.863e-01   -5.858e-01   -5.853e-01   -5.847e-01
     Q -   -1.508e-01   -1.405e-01   -1.296e-01   -1.206e-01   -1.169e-01
     M -   -8.262e-02   -1.373e-01   -1.879e-01   -2.347e-01   -2.790e-01

 3. element
l1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00          0.38           0.75          1.12          1.50
     u -    2.193e-11    1.645e-11    1.097e-11    5.484e-12    2.000e-24
     w -    2.199e-10    3.890e-09    7.881e-09    1.107e-08    1.236e-08
    fi -   -8.339e-09   -1.072e-08   -1.006e-08   -6.437e-09   -9.926e-24
     N -   -1.169e-01   -1.169e-01   -1.170e-01   -1.170e-01   -1.170e-01
     Q -    5.847e-01    5.790e-01    5.620e-01    5.343e-01    5.000e-01
     M -   -2.790e-01   -6.048e-02    1.538e-01    3.597e-01    5.537e-01

 4. element
l2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00          0.38           0.75          1.12          1.50
     u -    2.004e-24   -5.484e-12   -1.097e-11   -1.645e-11   -2.193e-11
     w -    1.236e-08    1.107e-08    7.881e-09    3.890e-09    2.199e-10
    fi -   -2.975e-24    6.437e-09    1.006e-08    1.072e-08    8.339e-09
     N -   -1.170e-01   -1.170e-01   -1.170e-01   -1.169e-01   -1.169e-01
     Q -   -5.000e-01   -5.343e-01   -5.620e-01   -5.790e-01   -5.847e-01
     M -    5.537e-01    3.597e-01    1.538e-01   -6.048e-02   -2.790e-01

 5. element
h2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00          0.38           0.75          1.12          1.50
     u -    2.199e-10    1.925e-10    1.650e-10    1.376e-10    1.101e-10
     w -    2.193e-11   -2.408e-09   -3.602e-09   -3.806e-09   -3.288e-09
    fi -    8.339e-09    4.725e-09    1.750e-09   -5.412e-10   -2.092e-09
     N -   -5.847e-01   -5.853e-01   -5.858e-01   -5.863e-01   -5.866e-01
     Q -    1.169e-01    1.206e-01    1.296e-01    1.405e-01    1.508e-01
     M -   -2.790e-01   -2.347e-01   -1.879e-01   -1.373e-01   -8.262e-02

 6. element
h1 =  1.5000
Nmitmeks =  4
```

x=	0.00	0.38	0.75	1.12	1.50
u -	1.101e-10	8.257e-11	5.505e-11	2.753e-11	-1.292e-26
w -	-3.288e-09	-2.337e-09	-1.257e-09	-3.691e-10	-8.272e-25
fi -	-2.092e-09	-2.848e-09	-2.767e-09	-1.822e-09	-8.272e-25
N -	-5.866e-01	-5.869e-01	-5.871e-01	-5.872e-01	-5.873e-01
Q -	1.508e-01	1.590e-01	1.642e-01	1.664e-01	1.668e-01
M -	-8.262e-02	-2.444e-02	3.626e-02	9.833e-02	1.608e-01



(a) Pikisiire (b) Põiksiire (c) Paindenurk (d) Pikijõud (e) Põikjõud (f) Paindemoment

Joonis B.13. Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 2.83 \times 10^2\ \mathrm{s}^{-1}$

Sümmeetrilise koormuse esimene piirkond (vt lk 190). Sagedus $\omega = 5.34\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\lambda = 3.0197$.

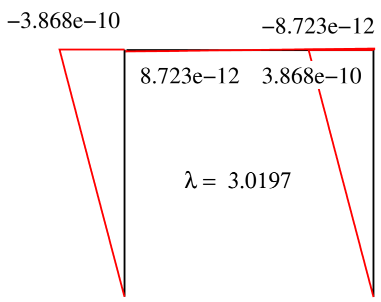
Tabel B.6. Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 5.34\times10^2\,\mathrm{s}^{-1}$

Toereaktsioon (vt jn 5.7)	Dünaamilisel koormusel	Staatilisel koormusel	Erinevus
C_1 [N]	$0.41870F_x$	$0.12486F_x$	$0.29384F_x$
C_2 [N]	$-1.03680F_x$	$-0.50000F_x$	$-0.53680F_x$
C_3 [Nm]	$-0.37296F_x$	$-0.12472F_x$	$-0.24824F_x$
C_4 [N]	$-0.41870F_x$	$-0.12486F_x$	$-0.29384F_x$
C_5 [N]	$-1.03680F_x$	$-0.50000F_x$	$-0.53680F_x$
C_6 [Nm]	$0.37296F_x$	$0.12472F_x$	$0.24824F_x$

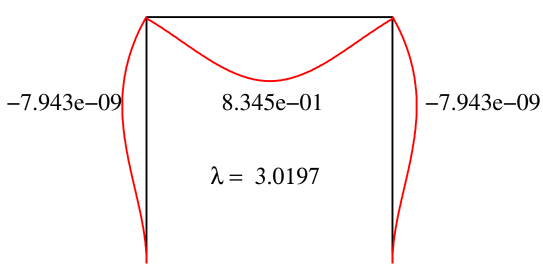
Väljavõte arvutuspäevikust B.8 (NaideRaam1CwM.m)

```
 1. element
h1 =  1.5000
Nmitmeks =   4

      x=       0.00        0.38        0.75        1.12        1.50
      u -   0.000e+00  -4.860e-11  -9.717e-11  -1.457e-10  -1.942e-10
      w -   0.000e+00  -8.454e-10  -2.833e-09  -5.158e-09  -7.075e-09
     fi -   0.000e+00   4.142e-09   6.098e-09   5.969e-09   3.970e-09
      N -  -1.037e+00  -1.037e+00  -1.036e+00  -1.035e+00  -1.033e+00
      Q -  -4.187e-01  -4.157e-01  -3.974e-01  -3.564e-01  -2.929e-01
      M -   3.730e-01   2.162e-01   6.313e-02  -7.896e-02  -2.013e-01

 2. element
h2 =  1.5000
Nmitmeks =   4

      x=       0.00        0.38        0.75        1.12        1.50
      u -  -1.942e-10  -2.425e-10  -2.908e-10  -3.389e-10  -3.868e-10
      w -  -7.075e-09  -7.943e-09  -7.258e-09  -4.676e-09   8.723e-12
     fi -   3.970e-09   4.331e-10  -4.235e-09  -9.624e-09  -1.541e-08
      N -  -1.033e+00  -1.031e+00  -1.028e+00  -1.025e+00  -1.021e+00
      Q -  -2.929e-01  -2.147e-01  -1.352e-01  -7.222e-02  -4.640e-02
      M -  -2.013e-01  -2.968e-01  -3.622e-01  -4.003e-01  -4.210e-01

 3. element
l1 =  1.5000
Nmitmeks =   4

      x=       0.00        0.38        0.75        1.12        1.50
      u -   8.723e-12   6.546e-12   4.366e-12   2.183e-12  -1.162e-24
      w -   3.868e-10   6.941e-09   1.373e-08   1.892e-08   2.094e-08
     fi -  -1.541e-08  -1.866e-08  -1.674e-08  -1.023e-08  -9.926e-24
```

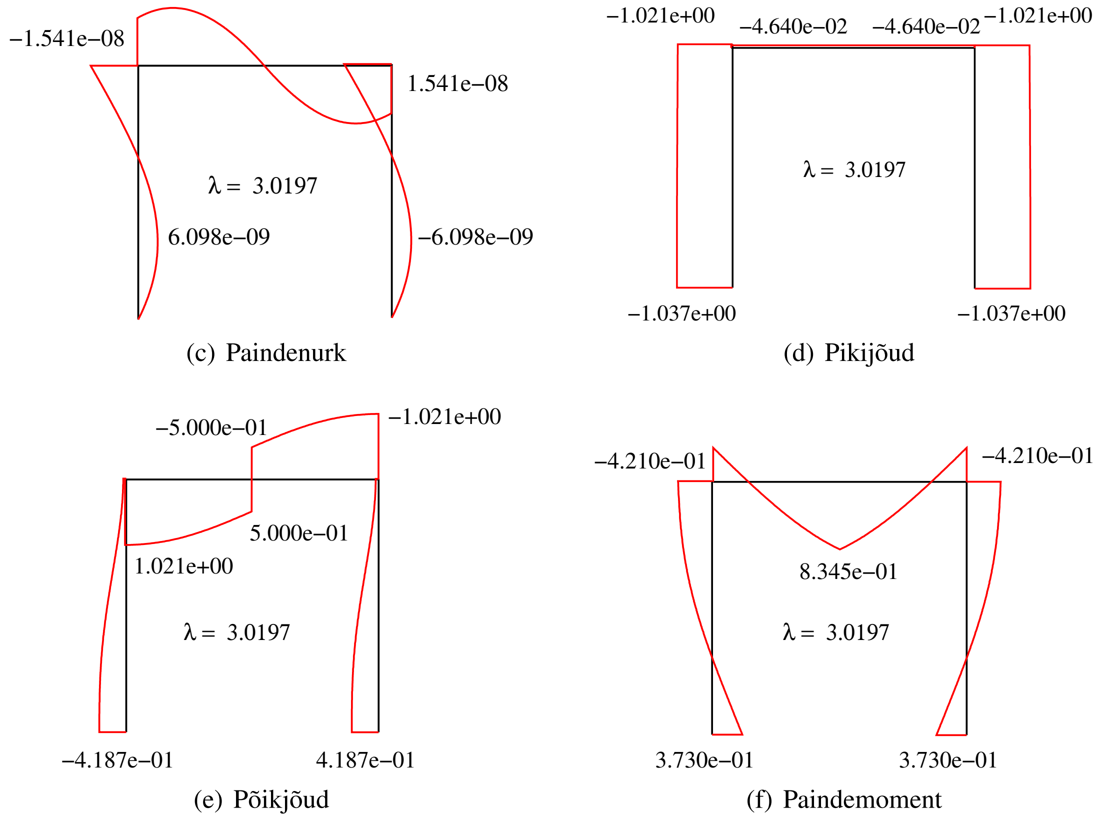
```
     N -   -4.640e-02   -4.648e-02   -4.654e-02   -4.657e-02   -4.658e-02
     Q -    1.021e+00    9.843e-01    8.776e-01    7.079e-01    5.000e-01
     M -   -4.210e-01   -4.291e-02    3.084e-01    6.073e-01    8.345e-01

 4. element
l2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         0.38          0.75          1.12          1.50
     u -   -1.160e-24   -2.183e-12   -4.366e-12   -6.546e-12   -8.723e-12
     w -    2.094e-08    1.892e-08    1.373e-08    6.941e-09    3.868e-10
    fi -   -1.555e-24    1.023e-08    1.674e-08    1.866e-08    1.541e-08
     N -   -4.658e-02   -4.657e-02   -4.654e-02   -4.648e-02   -4.640e-02
     Q -   -5.000e-01   -7.079e-01   -8.776e-01   -9.843e-01   -1.021e+00
     M -    8.345e-01    6.073e-01    3.084e-01   -4.291e-02   -4.210e-01

 5. element
h2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         0.38          0.75          1.12          1.50
     u -    3.868e-10    3.389e-10    2.908e-10    2.425e-10    1.942e-10
     w -    8.723e-12   -4.676e-09   -7.258e-09   -7.943e-09   -7.075e-09
    fi -    1.541e-08    9.624e-09    4.235e-09   -4.331e-10   -3.970e-09
     N -   -1.021e+00   -1.025e+00   -1.028e+00   -1.031e+00   -1.033e+00
     Q -    4.640e-02    7.222e-02    1.352e-01    2.147e-01    2.929e-01
     M -   -4.210e-01   -4.003e-01   -3.622e-01   -2.968e-01   -2.013e-01

 6. element
h1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00         0.38          0.75          1.12          1.50
     u -    1.942e-10    1.457e-10    9.717e-11    4.860e-11   -5.170e-26
     w -   -7.075e-09   -5.158e-09   -2.833e-09   -8.454e-10   -1.654e-24
    fi -   -3.970e-09   -5.969e-09   -6.098e-09   -4.142e-09   -1.654e-24
     N -   -1.033e+00   -1.035e+00   -1.036e+00   -1.037e+00   -1.037e+00
     Q -    2.929e-01    3.564e-01    3.974e-01    4.157e-01    4.187e-01
     M -   -2.013e-01   -7.896e-02    6.313e-02    2.162e-01    3.730e-01
```



(a) Pikisiire



(b) Põiksiire



Joonis B.14. Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 5.34 \times 10^2\ \mathrm{s}^{-1}$

Sümmeetrilise koormuse teine piirkond (vt lk 190). Sagedus $\omega = 9.95084 \times 10^2\ \mathrm{s}^{-1}$, $\lambda = 4.122$.

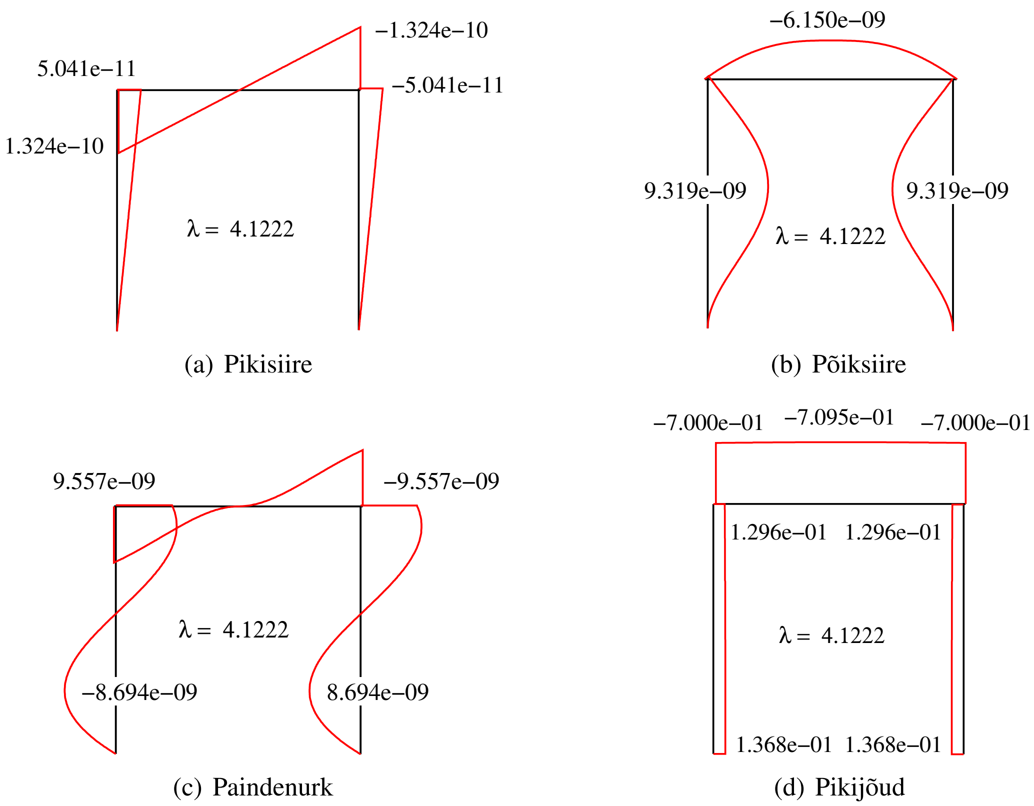
Tabel B.7. Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 9.95084 \times 10^2\ \mathrm{s}^{-1}$

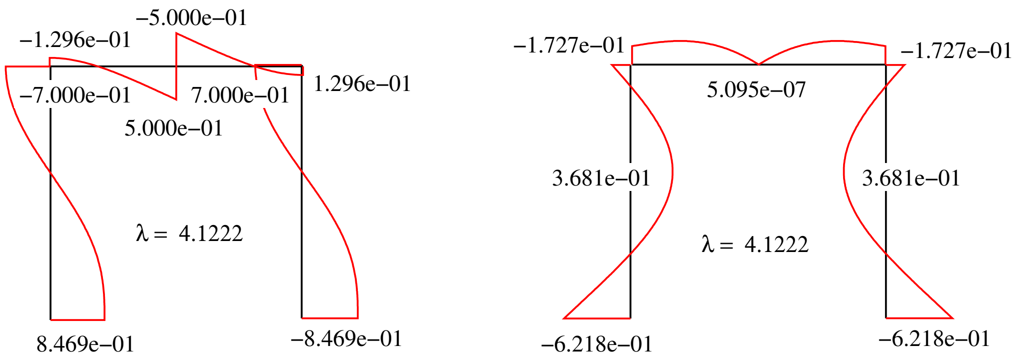
Toereaktsioon (vt jn 5.7)	Dünaamilisel koormusel	Staatilisel koormusel	Erinevus
C_1 [N]	$-0.84691F_x$	$0.12486F_x$	$-0.97177F_x$
C_2 [N]	$0.13685F_x$	$-0.50000F_x$	$0.63685F_x$
C_3 [Nm]	$0.62185F_x$	$-0.12472F_x$	$0.74657F_x$
C_4 [N]	$0.84691F_x$	$-0.12486F_x$	$0.97177F_x$
C_5 [N]	$0.13685F_x$	$-0.50000F_x$	$0.63685F_x$
C_6 [Nm]	$-0.62185F_x$	$0.12472F_x$	$-0.74657F_x$

Väljavõte arvutuspäevikust B.9 (NaideRaam1CwM.m)

```
 1. element
h1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00          0.38          0.75          1.12          1.50
     u -    0.000e+00     6.413e-12     1.282e-11     1.920e-11     2.554e-11
     w -    0.000e+00     1.361e-09     4.343e-09     7.403e-09     9.305e-09
    fi -    0.000e+00    -6.516e-09    -8.694e-09    -7.068e-09    -2.744e-09
     N -    1.368e-01     1.367e-01     1.364e-01     1.358e-01     1.350e-01
     Q -    8.469e-01     8.299e-01     7.307e-01     5.195e-01     2.168e-01
     M -   -6.218e-01    -3.059e-01    -9.933e-03     2.279e-01     3.681e-01

 2. element
h2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00          0.38          0.75          1.12          1.50
     u -    2.554e-11     3.185e-11     3.810e-11     4.429e-11     5.041e-11
     w -    9.305e-09     9.319e-09     7.353e-09     3.944e-09     1.324e-10
    fi -   -2.744e-09     2.708e-09     7.536e-09     1.017e-08     9.557e-09
     N -    1.350e-01     1.340e-01     1.328e-01     1.313e-01     1.296e-01
     Q -    2.168e-01    -1.212e-01    -4.238e-01    -6.281e-01    -7.000e-01
     M -    3.681e-01     3.860e-01     2.817e-01     8.062e-02    -1.727e-01

 3. element
l1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00          0.38          0.75          1.12          1.50
     u -    1.324e-10     9.952e-11     6.644e-11     3.325e-11     2.068e-25
     w -   -5.041e-11    -3.139e-09    -5.119e-09    -6.003e-09    -6.150e-09
    fi -    9.557e-09     6.816e-09     3.746e-09     1.126e-09     1.654e-24
     N -   -7.000e-01    -7.042e-01    -7.071e-01    -7.089e-01    -7.095e-01
     Q -   -1.296e-01    -6.969e-02     8.092e-02     2.821e-01     5.000e-01
     M -   -1.727e-01    -2.135e-01    -2.136e-01    -1.465e-01     5.095e-07

 4. element
l2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=       0.00          0.38          0.75          1.12          1.50
     u -    2.128e-25    -3.325e-11    -6.644e-11    -9.952e-11    -1.324e-10
     w -   -6.150e-09    -6.003e-09    -5.119e-09    -3.139e-09    -5.041e-11
    fi -    1.290e-24    -1.126e-09    -3.746e-09    -6.816e-09    -9.557e-09
     N -   -7.095e-01    -7.089e-01    -7.071e-01    -7.042e-01    -7.000e-01
     Q -   -5.000e-01    -2.821e-01    -8.092e-02     6.969e-02     1.296e-01
     M -    5.095e-07    -1.465e-01    -2.136e-01    -2.135e-01    -1.727e-01

 5. element
h2 =  1.5000
```

```
Nmitmeks =   4

     x=        0.00         0.38          0.75         1.12          1.50
    u -    -5.041e-11   -4.429e-11   -3.810e-11   -3.185e-11   -2.554e-11
    w -     1.324e-10    3.944e-09    7.353e-09    9.319e-09    9.305e-09
   fi -    -9.557e-09   -1.017e-08   -7.536e-09   -2.708e-09    2.744e-09
    N -     1.296e-01    1.313e-01    1.328e-01    1.340e-01    1.350e-01
    Q -     7.000e-01    6.281e-01    4.238e-01    1.212e-01   -2.168e-01
    M -    -1.727e-01    8.062e-02    2.817e-01    3.860e-01    3.681e-01

 6. element
h1 =  1.5000
Nmitmeks =   4

     x=        0.00         0.38          0.75         1.12          1.50
    u -    -2.554e-11   -1.920e-11   -1.282e-11   -6.413e-12    0.000e+00
    w -     9.305e-09    7.403e-09    4.343e-09    1.361e-09    0.000e+00
   fi -     2.744e-09    7.068e-09    8.694e-09    6.516e-09    3.309e-24
    N -     1.350e-01    1.358e-01    1.364e-01    1.367e-01    1.368e-01
    Q -    -2.168e-01   -5.195e-01   -7.307e-01   -8.299e-01   -8.469e-01
    M -     3.681e-01    2.279e-01   -9.933e-03   -3.059e-01   -6.218e-01
```





(e) Põikjõud (f) Paindemoment

Joonis B.15. Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 9.95084 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$

Sümmeetrilise koormuse teine piirkond (vt lk 190). Sagedus $\omega = 1.2860274 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\lambda = 4.6862$.

Tabel B.8. Jäikade sõlmedega põikraami toereaktsioonid sagedusel $\omega = 1.2860274 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$

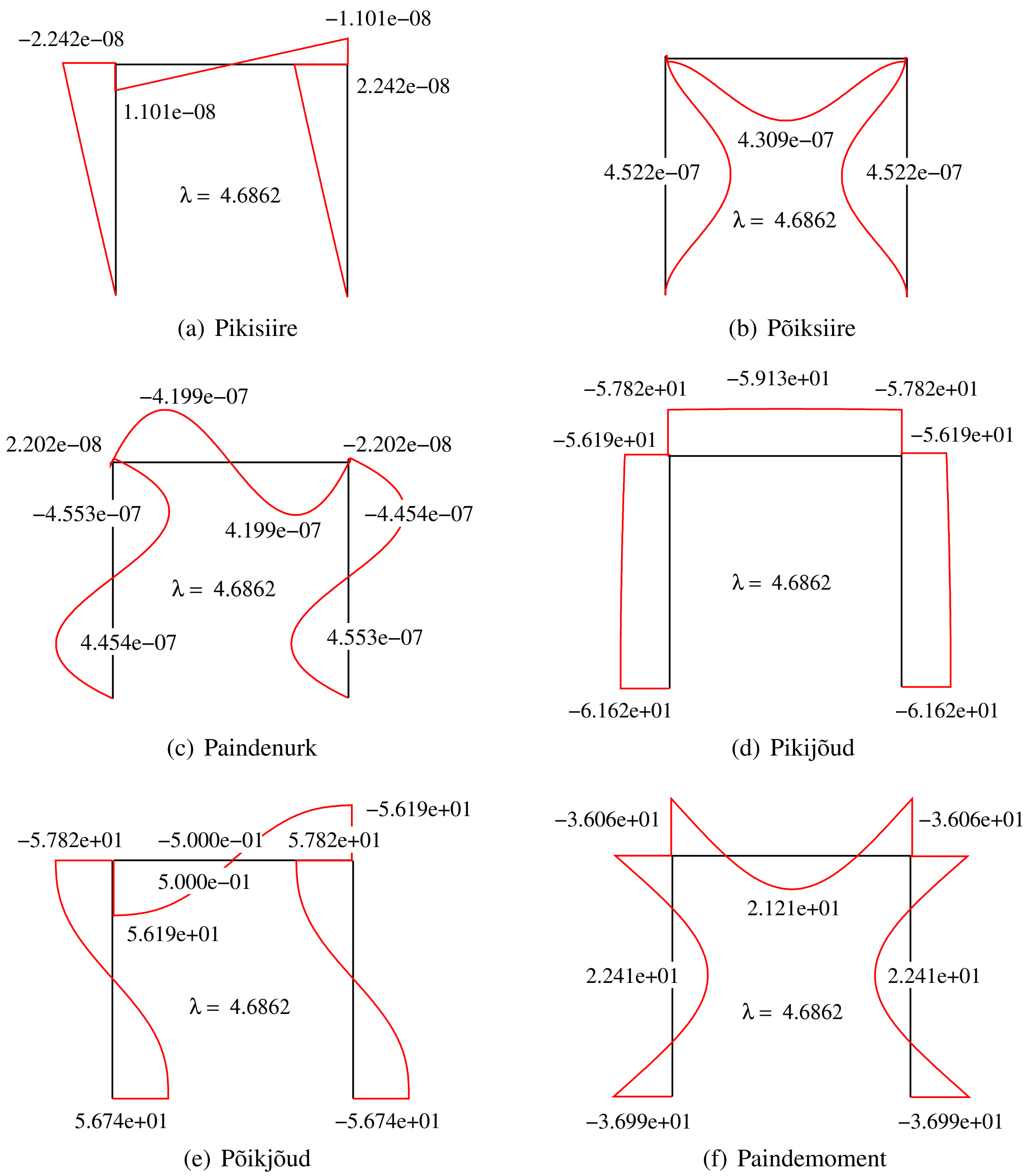
Toereaktsioon (vt jn 5.7)	Dünaamilisel koormusel	Staatilisel koormusel	Erinevus
C_1 [N]	$-56.73742F_x$	$0.12486F_x$	$-56.862F_x$
C_2 [N]	$-61.61615F_x$	$-0.50000F_x$	$-61.116F_x$
C_3 [Nm]	$36.99391F_x$	$-0.12472F_x$	$37.119F_x$
C_4 [N]	$56.73742F_x$	$-0.12486F_x$	$56.862F_x$
C_5 [N]	$-61.61615F_x$	$-0.50000F_x$	$-61.116F_x$
C_6 [Nm]	$-36.99391F_x$	$0.12472F_x$	$-37.119F_x$

Väljavõte arvutuspäevikust B.10 (NaideRaam1CwM.m)

```
 1. element
h1 =  1.5000
Nmitmeks =   4

      x=      0.00         0.38         0.75         1.12         1.50
     u -    0.000e+00   -2.887e-09   -5.766e-09   -8.629e-09   -1.147e-08
     w -    0.000e+00    7.887e-08    2.423e-07    3.905e-07    4.522e-07
    fi -    0.000e+00   -3.711e-07   -4.553e-07   -3.030e-07   -1.359e-08
     N -   -6.162e+01   -6.153e+01   -6.127e+01   -6.084e+01   -6.025e+01
     Q -    5.674e+01    5.508e+01    4.567e+01    2.655e+01    9.177e-01
     M -   -3.699e+01   -1.588e+01    3.321e+00    1.714e+01    2.241e+01

 2. element
h2 =  1.5000
```

```
Nmitmeks =  4

      x=      0.00        0.38        0.75        1.12        1.50
     u -   -1.147e-08  -1.427e-08  -1.704e-08  -1.976e-08  -2.242e-08
     w -    4.522e-07   4.001e-07   2.581e-07   9.537e-08   1.101e-08
    fi -   -1.359e-08   2.805e-07   4.454e-07   3.778e-07   2.202e-08
     N -   -6.025e+01  -5.948e+01  -5.855e+01  -5.745e+01  -5.619e+01
     Q -    9.177e-01  -2.501e+01  -4.491e+01  -5.531e+01  -5.782e+01
     M -    2.241e+01   1.779e+01   4.415e+00  -1.468e+01  -3.606e+01

 3. element
l1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=      0.00        0.38        0.75        1.12        1.50
     u -    1.101e-08   8.281e-09   5.534e-09   2.771e-09  -1.836e-22
     w -    2.242e-08   9.085e-08   2.412e-07   3.772e-07   4.309e-07
    fi -    2.202e-08  -3.384e-07  -4.199e-07  -2.747e-07  -1.271e-21
     N -   -5.782e+01  -5.839e+01  -5.881e+01  -5.905e+01  -5.913e+01
     Q -    5.619e+01   5.349e+01   4.376e+01   2.507e+01   5.000e-01
     M -   -3.606e+01  -1.536e+01   3.157e+00   1.632e+01   2.121e+01

 4. element
l2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=      0.00        0.38        0.75        1.12        1.50
     u -   -1.836e-22  -2.771e-09  -5.534e-09  -8.281e-09  -1.101e-08
     w -    4.309e-07   3.772e-07   2.412e-07   9.085e-08   2.242e-08
    fi -   -8.298e-22   2.747e-07   4.199e-07   3.384e-07  -2.202e-08
     N -   -5.913e+01  -5.905e+01  -5.881e+01  -5.839e+01  -5.782e+01
     Q -   -5.000e-01  -2.507e+01  -4.376e+01  -5.349e+01  -5.619e+01
     M -    2.121e+01   1.632e+01   3.157e+00  -1.536e+01  -3.606e+01

 5. element
h2 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=      0.00        0.38        0.75        1.12        1.50
     u -    2.242e-08   1.976e-08   1.704e-08   1.427e-08   1.147e-08
     w -    1.101e-08   9.537e-08   2.581e-07   4.001e-07   4.522e-07
    fi -   -2.202e-08  -3.778e-07  -4.454e-07  -2.805e-07   1.359e-08
     N -   -5.619e+01  -5.745e+01  -5.855e+01  -5.948e+01  -6.025e+01
     Q -    5.782e+01   5.531e+01   4.491e+01   2.501e+01  -9.177e-01
     M -   -3.606e+01  -1.468e+01   4.415e+00   1.779e+01   2.241e+01

 6. element
h1 =  1.5000
Nmitmeks =  4

      x=      0.00        0.38        0.75        1.12        1.50
     u -    1.147e-08   8.629e-09   5.766e-09   2.887e-09  -4.963e-24
```

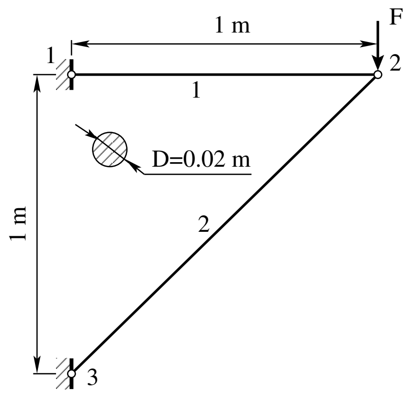
w –	4.522e-07	3.905e-07	2.423e-07	7.887e-08	2.118e-22
fi –	1.359e-08	3.030e-07	4.553e-07	3.711e-07	2.118e-22
N –	-6.025e+01	-6.084e+01	-6.127e+01	-6.153e+01	-6.162e+01
Q –	-9.177e-01	-2.655e+01	-4.567e+01	-5.508e+01	-5.674e+01
M –	2.241e+01	1.714e+01	3.321e+00	-1.588e+01	-3.699e+01



Joonis B.16. Jäikade sõlmedega põikraami epüürid sagedusel $\omega = 1.2860274 \times 10^3\ \mathrm{s}^{-1}$

B.3 Sõrestiku arvutusi staatilisel koormusel

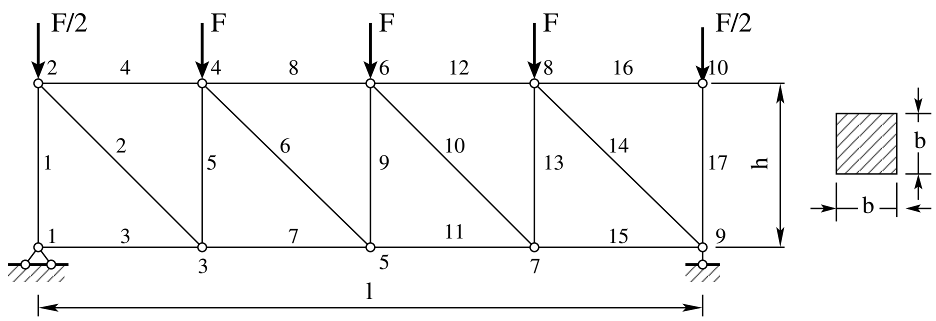
1. Kahe vardaga tarind



Joonis B.17. Kahe vardaga tarind

Arvutame GNU Octave'i programmiga NaideTrussTarind1Vibr.m.

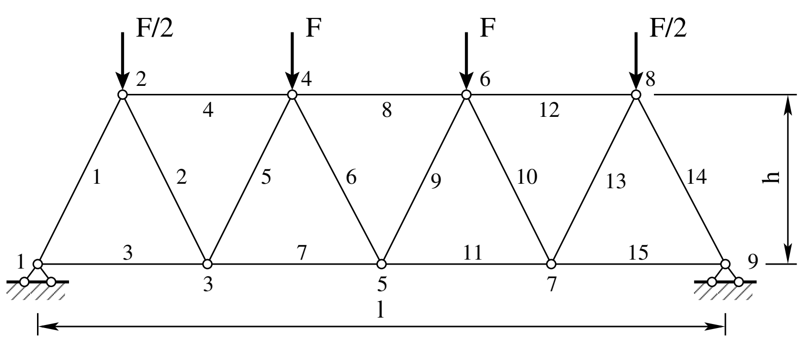
2. Sõrestik T



Joonis B.18. Sõrestik T

Arvutame GNU Octave'i programmiga NaideTrussTest1Vibr.m.

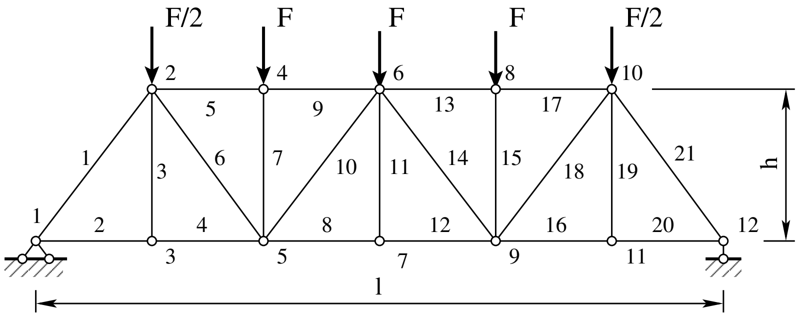
3. Sõrestik AM



Joonis B.19. Sõrestik AM

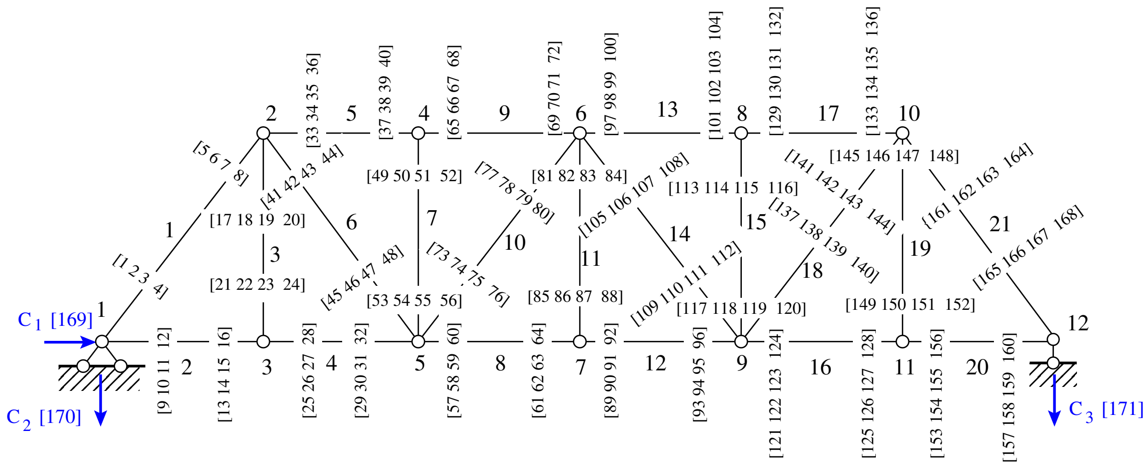
Arvutame GNU Octave'i programmiga NaideTrussArg1Vibr.m.

4. Sillasõrestik



Joonis B.20. Sillasõrestik

Sõrestiku varraste ristlõikepindalad:
$126.75\,\mathrm{mm}^2 = 1.2675 \times 10^{-4}\mathrm{m}^2$ (alumine vöö)
$81.750\,\mathrm{mm}^2 = 8.1750 \times 10^{-5}\mathrm{m}^2$ (diagonaal)
$253.50\,\mathrm{mm}^2 = 2.5350 \times 10^{-4}\mathrm{m}^2$ (ülemine vöö)



Joonis B.21. Sillasõrestiku muutujad

Arvutame GNU Octave'i programmiga NaideTrussBridge1Vibr.m.

B.4 Valemeid

Toome tala võnkeamplituudi avaldise algparameetrite kaudu teise märgikokkuleppe puhul (vrd [Kis64, (5.41) lk 100])

$$w(x) = w_0 K_1(\kappa x) - \varphi_0 \frac{1}{\kappa} K_2(\kappa x) + \frac{Q_\circ}{EI}\frac{1}{\kappa^3} K_4(\kappa x) + \frac{M_\circ}{EI}\frac{1}{\kappa^2} K_3(\kappa x) + f_{ie}(x) \tag{B.9}$$

kus funktsioone $K_i\left(\kappa x\right)$ nimetatakse ka Krõlovi funktsioonideks (vrd [Kis64, (5.42) lk 100])

$$K_1\left(\kappa x\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\kappa x + \cos\kappa x\right) = A_{s_k z} \tag{B.10}$$

$$K_2\left(\kappa x\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sh}\kappa x + \sin\kappa x\right) = B_{s_k z} \tag{B.11}$$

$$K_3\left(\kappa x\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\kappa x - \cos\kappa x\right) = C_{s_k z} \tag{B.12}$$

$$K_4\left(\kappa x\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sh}\kappa x - \sin\kappa x\right) = D_{s_k z} \tag{B.13}$$

ning $f_{i\,e}\left(x\right)$ on erilahend (vrd [Kis64, (5.59) lk 103])

$$f_{4\,e}\left(x\right) = \frac{q_z}{E\,I_y}\frac{1}{\kappa^4}\left[K_1\left(\kappa\left(x-a\right)_+\right)-1\right] \tag{B.14}$$

$$f_{3\,e}\left(x\right) = \frac{F_z}{E\,I_y}\frac{1}{\kappa^3}\left[K_4\left(\kappa\left(x-a\right)_+\right)\right] \tag{B.15}$$

$$f_{2\,e}\left(x\right) = \frac{\mathcal{M}_y}{E\,I_y}\frac{1}{\kappa^2}\left[K_3\left(\kappa\left(x-a\right)_+\right)\right] \tag{B.16}$$

Siin on kasutatud tähistust

$$\kappa^4 = \frac{\omega^2\rho A}{EI_y} \tag{B.17}$$

Sarnaste varraste ja jäikade sõlmedega põikraami sagedusvõrrand sümmeetrilisel võnkumisel (vrd [Kis64, valem (a) lk 181])

$$4\mu_1\left(\kappa\ell\right) - \mu_2\left(\kappa\ell\right) = 0 \tag{B.18}$$

kus (vrd [Kis64, (6.74), (6.75) lk 121])

$$\begin{aligned}\mu_1\left(\kappa\ell\right) &= \frac{\kappa\,\ell}{4}\frac{K_2\left(\kappa\ell\right)K_3\left(\kappa\ell\right)-K_1\left(\kappa\ell\right)K_4\left(\kappa\ell\right)}{K_3^2\left(\kappa\ell\right)-K_2\left(\kappa\ell\right)K_4\left(\kappa\ell\right)}\\ &= \frac{\kappa\,l}{4}\frac{\mathrm{ch}\kappa\ell\sin\kappa\ell-\mathrm{sh}\kappa\ell\cos\kappa\ell}{1-\mathrm{ch}\kappa\ell\cos\kappa\ell}\end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\mu_2\left(\kappa\ell\right) = \frac{\kappa\,\ell}{2}\frac{K_4\left(\kappa\ell\right)}{K_3^2\left(\kappa\ell\right)-K_2\left(\kappa\ell\right)K_4\left(\kappa\ell\right)} = \frac{\kappa\,l}{2}\frac{\mathrm{sh}\kappa\ell-\sin\kappa\ell}{1-\mathrm{ch}\kappa\ell\cos\kappa\ell} \tag{B.20}$$

C. Arvutiprogrammid

Arvutiprogrammid on kirjutatud programmeerimiskeeles GNU Octave ja need leiab raamatule (ISBN 978-9949-83-223-1) lisatud CD-plaadilt (ISBN 978-9949-83-224-8).

C.1 Programmid varda pikivõnkumise arvutamiseks

Programm C.1 (NaidePike1.m) [1] 27, 29 – arvutab konsoolvarda omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E) [2]
- siiremPike(baasi0,xx,A,wf,md,E) [3]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB) [4]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv) [5]
- mrkmts(a) [6]

Programm C.2 (NaidePike2.m) [7] 32 – arvutab jäikade tugedega varda omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E) [8]
- siiremPike(baasi0,xx,A,wf,md,E) [9]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB) [10]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv) [11]
- mrkmts(a) [12]

---

[1] ./octaveProgrammid/NaidePike1.m
[2] ./octaveProgrammid/splvfmPike.m
[3] ./octaveProgrammid/siiremPike.m
[4] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[5] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[6] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[7] ./octaveProgrammid/NaidePike2.m
[8] ./octaveProgrammid/splvfmPike.m
[9] ./octaveProgrammid/siiremPike.m
[10] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[11] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[12] ./octaveProgrammid/mrkmts.m

Programm C.3 (NaidePikeS1.m)[13] 224 – arvutab konsoolvarda omavõnkesagedused. Kasutab funktsioone

- splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E)[14]
- siiremPike(baasi0,xx,A,wf,md,E)[15]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[16]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[17]
- mrkmts(a)[18]

Programm C.4 (NaidePikeS2.m)[19] 227 – arvutab konsoolvarda omavõnkesagedused. Kasutab funktsioone

- splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E)[20]
- siiremPike(baasi0,xx,A,wf,md,E)[21]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[22]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[23]
- mrkmts(a)[24]

Programm C.5 (NaidePike1w1.m)[25] 29 – arvutab konsoolvarda 1. omavõnkevormi. Kasutab funktsioone

- splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E)[26]
- siiremPike(baasi0,xx,A,wf,md,E)[27]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[28]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[29]
- mrkmts(a)[30]

Programm C.6 (NaidePike1w2.m)[31] 29 – arvutab konsoolvarda 2. omavõnkevormi. Kasutab funktsioone

---

[13] ./octaveProgrammid/NaidePikeS1.m
[14] ./octaveProgrammid/splvfmPike.m
[15] ./octaveProgrammid/siiremPike.m
[16] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[17] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[18] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[19] ./octaveProgrammid/NaidePikeS2.m
[20] ./octaveProgrammid/splvfmPike.m
[21] ./octaveProgrammid/siiremPike.m
[22] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[23] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[24] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[25] ./octaveProgrammid/NaidePike1w1.m
[26] ./octaveProgrammid/splvfmPike.m
[27] ./octaveProgrammid/siiremPike.m
[28] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[29] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[30] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[31] ./octaveProgrammid/NaidePike1w2.m

- splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E)[32]
- siiremPike(baasi0,xx,A,wf,md,E)[33]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[34]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[35]
- mrkmts(a)[36]

Programm C.7 (NaidePike1w3.m)[37] 29 – arvutab konsoolvarda 3. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E)[38]
- siiremPike(baasi0,xx,A,wf,md,E)[39]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[40]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[41]
- mrkmts(a)[42]

Programm C.8 (NaidePike2w1.m)[43] 33 – arvutab jäikade tugedega varda 1. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E)[44]
- siiremPike(baasi0,xx,A,wf,md,E)[45]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[46]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[47]
- mrkmts(a)[48]

Programm C.9 (NaidePike2w2.m)[49] 33 – arvutab jäikade tugedega varda 2. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

---

32 `./octaveProgrammid/splvfmPike.m`
33 `./octaveProgrammid/siiremPike.m`
34 `./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m`
35 `./octaveProgrammid/spSisestaArv.m`
36 `./octaveProgrammid/mrkmts.m`
37 `./octaveProgrammid/NaidePike1w3.m`
38 `./octaveProgrammid/splvfmPike.m`
39 `./octaveProgrammid/siiremPike.m`
40 `./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m`
41 `./octaveProgrammid/spSisestaArv.m`
42 `./octaveProgrammid/mrkmts.m`
43 `./octaveProgrammid/NaidePike2w1.m`
44 `./octaveProgrammid/splvfmPike.m`
45 `./octaveProgrammid/siiremPike.m`
46 `./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m`
47 `./octaveProgrammid/spSisestaArv.m`
48 `./octaveProgrammid/mrkmts.m`
49 `./octaveProgrammid/NaidePike2w2.m`

- splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E)[50]
- siiremPike(baasi0,xx,A,wf,md,E)[51]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[52]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[53]
- mrkmts(a)[54]

Programm C.10 (NaidePike2w3.m)[55] 33 – arvutab jäikade tugedega varda 3. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E)[56]
- siiremPike(baasi0,xx,A,wf,md,E)[57]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[58]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[59]
- mrkmts(a)[60]

Programm C.11 (NaidePike2w4.m)[61] 33 – arvutab jäikade tugedega varda 4. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E)[62]
- siiremPike(baasi0,xx,A,wf,md,E)[63]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[64]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[65]
- mrkmts(a)[66]

Programm C.12 (NaidePike2Fx.m)[67] 35 – arvutab jäikade tugedega varda pikisiirde ja pikijõu sundivast jõust.
Kasutab funktsioone

---

[50] ./octaveProgrammid/splvfmPike.m
[51] ./octaveProgrammid/siiremPike.m
[52] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[53] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[54] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[55] ./octaveProgrammid/NaidePike2w3.m
[56] ./octaveProgrammid/splvfmPike.m
[57] ./octaveProgrammid/siiremPike.m
[58] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[59] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[60] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[61] ./octaveProgrammid/NaidePike2w4.m
[62] ./octaveProgrammid/splvfmPike.m
[63] ./octaveProgrammid/siiremPike.m
[64] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[65] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[66] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[67] ./octaveProgrammid/NaidePike2Fx.m

– splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E)[68]
– siiremPike(baasi0,xx,A,wf,md,E)[69]
– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[70]
– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[71]
– mrkmts(a)[72]

Programm C.13 (NaidePike2FxStaat.m)[73] 35, 36 – arvutab jäikade tugedega varda pikisiirde ja pikijõu staatiliselt rakendatud sundivast jõust.
Kasutab funktsioone

– splvfmPikeStaat(baasi0,l,EA)[74]
– siiremPikeStaat(baasi0,x,EA)[75]
– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[76]
– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[77]

Programm C.14 (NaidePikeS1w1.m)[78] 225 – arvutab konsoolvarda 1. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

– splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E)[79]
– siiremPike(baasi0,xx,A,wf,md,E)[80]
– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[81]
– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[82]
– mrkmts(a)[83]

Programm C.15 (NaidePikeS1w2.m)[84] 225 – arvutab konsoolvarda 2. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

– splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E)[85]
– siiremPike(baasi0,xx,A,wf,md,E)[86]

---

[68] ./octaveProgrammid/splvfmPike.m
[69] ./octaveProgrammid/siiremPike.m
[70] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[71] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[72] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[73] ./octaveProgrammid/NaidePike2FxStaat.m
[74] ./octaveProgrammid/splvfmPikeStaat.m
[75] ./octaveProgrammid/siiremPikeStaat.m
[76] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[77] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[78] ./octaveProgrammid/NaidePikeS1w1.m
[79] ./octaveProgrammid/splvfmPike.m
[80] ./octaveProgrammid/siiremPike.m
[81] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[82] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[83] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[84] ./octaveProgrammid/NaidePikeS1w2.m
[85] ./octaveProgrammid/splvfmPike.m
[86] ./octaveProgrammid/siiremPike.m

– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[87]
– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[88]
– mrkmts(a)[89]

Programm C.16 (NaidePikeS1w3.m)[90] 225 – arvutab konsoolvarda 3. omavõnkevormi. Kasutab funktsioone

– splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E)[91]
– siiremPike(baasi0,xx,A,wf,md,E)[92]
– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[93]
– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[94]
– mrkmts(a)[95]

Programm C.17 (NaidePikeS2w1.m)[96] 228 – arvutab konsoolvarda 1. omavõnkevormi. Kasutab funktsioone

– splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E)[97]
– siiremPike(baasi0,xx,A,wf,md,E)[98]
– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[99]
– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[100]
– mrkmts(a)[101]

Programm C.18 (NaidePikeS2w2.m)[102] 228 – arvutab konsoolvarda 2. omavõnkevormi. Kasutab funktsioone

– splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E)[103]
– siiremPike(baasi0,xx,A,wf,md,E)[104]
– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[105]

87 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
88 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
89 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
90 ./octaveProgrammid/NaidePikeS1w3.m
91 ./octaveProgrammid/splvfmPike.m
92 ./octaveProgrammid/siiremPike.m
93 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
94 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
95 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
96 ./octaveProgrammid/NaidePikeS2w1.m
97 ./octaveProgrammid/splvfmPike.m
98 ./octaveProgrammid/siiremPike.m
99 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
100 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
101 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
102 ./octaveProgrammid/NaidePikeS2w2.m
103 ./octaveProgrammid/splvfmPike.m
104 ./octaveProgrammid/siiremPike.m
105 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m

– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[106]
– mrkmts(a)[107]

Programm C.19 (NaidePikeS2w3.m)[108] 228 – arvutab konsoolvarda 3. omavõnkevormi. Kasutab funktsioone

– splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E)[109]
– siiremPike(baasi0,xx,A,wf,md,E)[110]
– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[111]
– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[112]
– mrkmts(a)[113]

Funktsioon C.1 (splvfmPike(baasi0,l,A,wf,md,E))[114] 23 – arvutab pikke laiendatud ülekandemaatriksi.

Funktsioon C.2 (siiremPike(baasi0,x,A,wf,md,E))[115] 19 – arvutab pikke ülekandemaatriksi.

Funktsioon C.3 (splvfmPikeStaat(baasi0,l,EA))[116] 35 – arvutab pikke laiendatud ülekandemaatriksi staatilisel koormusel.

Funktsioon C.4 (siiremPikeStaat(baasi0,x,EA))[117] 35 – arvutab pikke ülekandemaatriksi staatilisel koormusel.

Funktsioon C.5 (splfHRmassPike(baasi0,wf,mW))[118] 23 – arvutab koondmassi pikkel.

Funktsioon C.6 (splfHLmassPike(baasi0,wf,mW))[119] 24 – arvutab koondmassi pikkel.

---
[106] `./octaveProgrammid/spSisestaArv.m`
[107] `./octaveProgrammid/mrkmts.m`
[108] `./octaveProgrammid/NaidePikeS2w3.m`
[109] `./octaveProgrammid/splvfmPike.m`
[110] `./octaveProgrammid/siiremPike.m`
[111] `./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m`
[112] `./octaveProgrammid/spSisestaArv.m`
[113] `./octaveProgrammid/mrkmts.m`
[114] `./octaveProgrammid/splvfmPike.m`
[115] `./octaveProgrammid/siiremPike.m`
[116] `./octaveProgrammid/splvfmPikeStaat.m`
[117] `./octaveProgrammid/siiremPikeStaat.m`
[118] `./octaveProgrammid/splfHRmassPike.m`
[119] `./octaveProgrammid/splfHLmassPike.m`

C.2 Programmid võlli väändevõnkumise arvutamiseks

Programm C.20 (NaideKvoll1.m)[120] 49, 51 – arvutab konsoolvõlli omavõnkesagedused. Kasutab funktsioone

- splvfmVoll(baasi0,l,d,wf,md,G)[121]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[122]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[123]
- mrkmts(a)[124]

Programm C.21 (NaideKvoll1w1.m)[125] 51 – arvutab konsoolvõlli 1. omavõnkevormi. Kasutab funktsioone

- splvfmVoll(baasi0,l,d,wf,md,G)[126]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[127]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[128]
- siiremVoll(baasi0,xx,d,wf,md,G))[129]
- mrkmts(a)[130]

Programm C.22 (NaideKvoll1w2.m)[131] 51 – arvutab konsoolvõlli 2. omavõnkevormi. Kasutab funktsioone

- splvfmVoll(baasi0,l,d,wf,md,G)[132]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[133]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[134]
- siiremVoll(baasi0,xx,d,wf,md,G))[135]
- mrkmts(a)[136]

Programm C.23 (NaideKvoll1w3.m)[137] 51 – arvutab konsoolvõlli 3. omavõnkevormi. Kasutab funktsioone

---

[120] ./octaveProgrammid/NaideKvoll1.m
[121] ./octaveProgrammid/splvfmVoll.m
[122] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[123] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[124] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[125] ./octaveProgrammid/NaideKvoll1w1.m
[126] ./octaveProgrammid/splvfmVoll.m
[127] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[128] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[129] ./octaveProgrammid/siiremVoll.m
[130] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[131] ./octaveProgrammid/NaideKvoll1w2.m
[132] ./octaveProgrammid/splvfmVoll.m
[133] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[134] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[135] ./octaveProgrammid/siiremVoll.m
[136] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[137] ./octaveProgrammid/NaideKvoll1w3.m

- splvfmVoll(baasi0,l,d,wf,md,G) [138]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB) [139]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv) [140]
- siiremVoll(baasi0,xx,d,wf,md,G)) [141]
- mrkmts(a) [142]

Programm C.24 (NaideVoll2M.m)[143] 54 – arvutab jäikade tugedega võlli omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- splvfmVoll(baasi0,l,d,wf,md,G) [144]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB) [145]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv) [146]
- mrkmts(a) [147]

Programm C.25 (NaideVoll2Mw1.m)[148] 55 – arvutab jäikade tugedega võlli 1. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- splvfmVoll(baasi0,l,d,wf,md,G) [149]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB) [150]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv) [151]
- siiremVoll(baasi0,xx,d,wf,md,G)) [152]
- mrkmts(a) [153]

Programm C.26 (NaideVoll2Mw2.m)[154] 55 – arvutab jäikade tugedega võlli 2. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- splvfmVoll(baasi0,l,d,wf,md,G) [155]

---

[138] ./octaveProgrammid/splvfmVoll.m
[139] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[140] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[141] ./octaveProgrammid/siiremVoll.m
[142] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[143] ./octaveProgrammid/NaideVoll2M.m
[144] ./octaveProgrammid/splvfmVoll.m
[145] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[146] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[147] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[148] ./octaveProgrammid/NaideVoll2Mw1.m
[149] ./octaveProgrammid/splvfmVoll.m
[150] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[151] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[152] ./octaveProgrammid/siiremVoll.m
[153] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[154] ./octaveProgrammid/NaideVoll2Mw2.m
[155] ./octaveProgrammid/splvfmVoll.m

– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[156]
– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[157]
– siiremVoll(baasi0,xx,d,wf,md,G))[158]
– mrkmts(a)[159]

Programm C.27 (NaideVoll2Mw3.m)[160] 55 – arvutab jäikade tugedega võlli 3. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

– splvfmVoll(baasi0,l,d,wf,md,G)[161]
– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[162]
– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[163]
– siiremVoll(baasi0,xx,d,wf,md,G))[164]
– mrkmts(a)[165]

Programm C.28 (NaideKvollHratas1.m)[166] 59 – arvutab hoorattaga konsoolvõlli omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

– splvfmVoll(baasi0,l,d,wf,md,G)[167]
– splfHLratas(baasi0,rg,wf,mW)[168]
– siireHratas(baasi0,rg,wf,mW)[169]
– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[170]
– InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[171]
– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[172]
– mrkmts(a)[173]

Programm C.29 (NaideKvollHratas1w1M.m)[174] 59 – arvutab hoorattaga konsoolvõlli 1. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

[156] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[157] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[158] ./octaveProgrammid/siiremVoll.m
[159] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[160] ./octaveProgrammid/NaideVoll2Mw3.m
[161] ./octaveProgrammid/splvfmVoll.m
[162] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[163] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[164] ./octaveProgrammid/siiremVoll.m
[165] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[166] ./octaveProgrammid/NaideKvollHratas1.m
[167] ./octaveProgrammid/splvfmVoll.m
[168] ./octaveProgrammid/splfHLratas.m
[169] ./octaveProgrammid/siireHratas.m
[170] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[171] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[172] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[173] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[174] ./octaveProgrammid/NaideKvollHratas1w1M.m

- splvfmVoll(baasi0,l,d,wf,md,G)[175]
- splfHLratas(baasi0,rg,wf,mW)[176]
- siireHratas(baasi0,rg,wf,mW)[177]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[178]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[179]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[180]
- mrkmts(a)[181]

Programm C.30 (NaideKvollHratas1w2M.m)[182] 59 – arvutab hoorattaga konsoolvõlli 2. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- splvfmVoll(baasi0,l,d,wf,md,G)[183]
- splfHLratas(baasi0,rg,wf,mW)[184]
- siireHratas(baasi0,rg,wf,mW)[185]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[186]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[187]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[188]
- mrkmts(a)[189]

Programm C.31 (NaideKvollHratas1w3M.m)[190] 59 – arvutab hoorattaga konsoolvõlli 3. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- splvfmVoll(baasi0,l,d,wf,md,G)[191]
- splfHLratas(baasi0,rg,wf,mW)[192]
- siireHratas(baasi0,rg,wf,mW)[193]

---

175 ./octaveProgrammid/splvfmVoll.m
176 ./octaveProgrammid/splfHLratas.m
177 ./octaveProgrammid/siireHratas.m
178 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
179 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
180 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
181 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
182 ./octaveProgrammid/NaideKvollHratas1w2M.m
183 ./octaveProgrammid/splvfmVoll.m
184 ./octaveProgrammid/splfHLratas.m
185 ./octaveProgrammid/siireHratas.m
186 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
187 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
188 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
189 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
190 ./octaveProgrammid/NaideKvollHratas1w3M.m
191 ./octaveProgrammid/splvfmVoll.m
192 ./octaveProgrammid/splfHLratas.m
193 ./octaveProgrammid/siireHratas.m

- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[194]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[195]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[196]
- mrkmts(a)[197]

Programm C.32 (NaideVoll2Hratas1.m)[198] 62 – arvutab hoorattaga ja jäikade tugedega võlli omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- splvfmVoll(baasi0,l,d,wf,md,G)[199]
- splfHLratas(baasi0,rg,wf,mW)[200]
- siireHratas(baasi0,rg,wf,mW)[201]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[202]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[203]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[204]
- mrkmts(a)[205]

Programm C.33 (NaideVoll2Hratas1w1.m)[206] 62 – arvutab hoorattaga ja jäikade tugedega võlli 1. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- splvfmVoll(baasi0,l,d,wf,md,G)[207]
- splfHLratas(baasi0,rg,wf,mW)[208]
- siireHratas(baasi0,rg,wf,mW)[209]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[210]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[211]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[212]

---

194 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
195 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
196 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
197 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
198 ./octaveProgrammid/NaideVoll2Hratas1.m
199 ./octaveProgrammid/splvfmVoll.m
200 ./octaveProgrammid/splfHLratas.m
201 ./octaveProgrammid/siireHratas.m
202 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
203 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
204 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
205 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
206 ./octaveProgrammid/NaideVoll2Hratas1w1.m
207 ./octaveProgrammid/splvfmVoll.m
208 ./octaveProgrammid/splfHLratas.m
209 ./octaveProgrammid/siireHratas.m
210 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
211 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
212 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m

- mrkmts(a)[213]

Programm C.34 (NaideVoll2Hratas1w2.m)[214] 62 – arvutab hoorattaga ja jäikade tugedega võlli 2. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- splvfmVoll(baasi0,l,d,wf,md,G)[215]
- splfHLratas(baasi0,rg,wf,mW)[216]
- siireHratas(baasi0,rg,wf,mW)[217]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[218]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[219]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[220]
- mrkmts(a)[221]

Programm C.35 (NaideVoll2Hratas1w3.m)[222] 62 – arvutab hoorattaga ja jäikade tugedega võlli 3. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- splvfmVoll(baasi0,l,d,wf,md,G)[223]
- splfHLratas(baasi0,rg,wf,mW)[224]
- siireHratas(baasi0,rg,wf,mW)[225]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[226]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[227]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[228]
- mrkmts(a)[229]

Funktsioon C.7 (splvfmVoll(baasi0,l,d,wf,md,G))[230] 44 – arvutab väände laiendatud ülekandemaatriksi.

---

[213] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[214] ./octaveProgrammid/NaideVoll2Hratas1w2.m
[215] ./octaveProgrammid/splvfmVoll.m
[216] ./octaveProgrammid/splfHLratas.m
[217] ./octaveProgrammid/siireHratas.m
[218] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[219] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[220] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[221] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[222] ./octaveProgrammid/NaideVoll2Hratas1w3.m
[223] ./octaveProgrammid/splvfmVoll.m
[224] ./octaveProgrammid/splfHLratas.m
[225] ./octaveProgrammid/siireHratas.m
[226] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[227] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[228] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[229] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[230] ./octaveProgrammid/splvfmVoll.m

Funktsioon C.8 (siiremVoll(baasi0,x,d,wf,md,G))[231] 41 – arvutab väände ülekandemaatriksi.

Funktsioon C.9 (splfHLratas(baasi0,rg,wf,mW))[232] 45 – arvutab koondmassi väändel.

Funktsioon C.10 (splfHRratas(baasi0,rg,wf,mW))[233] 45 – arvutab koondmassi väändel.

Funktsioon C.11 (siireHratas(baasi0,rg,wf,mW))[234] 264 – arvutab inertsjõudude momendi väändel.

C.3 Programmid tala võnkumise arvutamiseks

C.3.1 Programmid Euleri-Bernoulli tala võnkumise arvutamiseks

Programm C.36 (NaideKonsool1.m)[235] 77 – arvutab Euleri-Bernoulli konsooltala omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[236]
- sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[237]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[238]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[239]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[240]
- mrkmts(a)[241]

Programm C.37 (NaideKonsool1M.m)[242] – arvutab Euleri-Bernoulli konsooltala omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[243]
- sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[244]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[245]

[231] ./octaveProgrammid/siiremVoll.m
[232] ./octaveProgrammid/splfHLratas.m
[233] ./octaveProgrammid/splfHRratas.m
[234] ./octaveProgrammid/siireHratas.m
[235] ./octaveProgrammid/NaideKonsool1.m
[236] ./octaveProgrammid/talaylekM.m
[237] ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
[238] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[239] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[240] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[241] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[242] ./octaveProgrammid/NaideKonsool1M.m
[243] ./octaveProgrammid/talaylekM.m
[244] ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
[245] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m

- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[246]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[247]
- mrkmts(a)[248]

Programm C.38 (NaideKonsool1w1.m)[249] 78 – arvutab Euleri-Bernoulli konsooltala 1. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[250]
- sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[251]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[252]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[253]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[254]
- mrkmts(a)[255]

Programm C.39 (NaideKonsool1w2.m)[256] 78 – arvutab Euleri-Bernoulli konsooltala 2. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[257]
- sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[258]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[259]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[260]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[261]
- mrkmts(a)[262]

Programm C.40 (NaideKonsool1w3.m)[263] 78 – arvutab Euleri-Bernoulli konsooltala 3. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

---

[246] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[247] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[248] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[249] ./octaveProgrammid/NaideKonsool1w1.m
[250] ./octaveProgrammid/talaylekM.m
[251] ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
[252] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[253] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[254] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[255] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[256] ./octaveProgrammid/NaideKonsool1w2.m
[257] ./octaveProgrammid/talaylekM.m
[258] ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
[259] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[260] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[261] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[262] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[263] ./octaveProgrammid/NaideKonsool1w3.m

- talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[264]
- sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[265]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[266]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[267]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[268]
- mrkmts(a)[269]

Programm C.41 (NaideKonsool1w4.m)[270] 78 – arvutab Euleri-Bernoulli konsooltala 4. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[271]
- sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[272]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[273]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[274]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[275]
- mrkmts(a)[276]

Programm C.42 (NaideTala1.m)[277] 81 – arvutab jäikade tugedega Euleri-Bernoulli tala omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[278]
- sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[279]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[280]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[281]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[282]

---

[264] ./octaveProgrammid/talaylekM.m
[265] ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
[266] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[267] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[268] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[269] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[270] ./octaveProgrammid/NaideKonsool1w4.m
[271] ./octaveProgrammid/talaylekM.m
[272] ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
[273] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[274] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[275] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[276] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[277] ./octaveProgrammid/NaideTala1.m
[278] ./octaveProgrammid/talaylekM.m
[279] ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
[280] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[281] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[282] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m

– mrkmts(a)[283]

Programm C.43 (NaideTala1w1.m)[284] 82 – arvutab jäikade tugedega Euleri-Bernoulli tala 1. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

– talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[285]
– sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[286]
– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[287]
– InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[288]
– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[289]
– mrkmts(a)[290]

Programm C.44 (NaideTala1w2.m)[291] 82 – arvutab jäikade tugedega Euleri-Bernoulli tala 2. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

– talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[292]
– sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[293]
– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[294]
– InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[295]
– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[296]
– mrkmts(a)[297]

Programm C.45 (NaideTala1w3.m)[298] 82 – arvutab jäikade tugedega Euleri-Bernoulli tala 3. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

– talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[299]
– sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[300]

---

283 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
284 ./octaveProgrammid/NaideTala1w1.m
285 ./octaveProgrammid/talaylekM.m
286 ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
287 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
288 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
289 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
290 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
291 ./octaveProgrammid/NaideTala1w2.m
292 ./octaveProgrammid/talaylekM.m
293 ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
294 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
295 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
296 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
297 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
298 ./octaveProgrammid/NaideTala1w3.m
299 ./octaveProgrammid/talaylekM.m
300 ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m

- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[301]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[302]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[303]
- mrkmts(a)[304]

Programm C.46 (NaideTala1w4.m)[305] 82 – arvutab jäikade tugedega Euleri-Bernoulli tala 4. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[306]
- sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[307]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[308]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[309]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[310]
- mrkmts(a)[311]

Programm C.47 (NaideTalaKahelToel1.m)[312] 96 – arvutab paigalseisva ja liikuva liigendtoega Euleri-Bernoulli tala omavõnkesagedused. Tala kirjeldatakse ühe elemendiga.
Kasutab funktsioone

- talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[313]
- sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[314]
- ysndvnkZF(baasi0,x,a,Fz,wf,mg,A,EI)[315]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[316]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[317]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[318]
- mrkmts(a)[319]

---

[301] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[302] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[303] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[304] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[305] ./octaveProgrammid/NaideTala1w4.m
[306] ./octaveProgrammid/talaylekM.m
[307] ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
[308] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[309] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[310] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[311] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[312] ./octaveProgrammid/NaideTalaKahelToel1.m
[313] ./octaveProgrammid/talaylekM.m
[314] ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
[315] ./octaveProgrammid/ysndvnkZF.m
[316] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[317] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[318] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[319] ./octaveProgrammid/mrkmts.m

Programm C.48 (NaideTala2Toel1w0.m)[320] 96, 98, 99 – arvutab paigalseisva ja liikuva liigendtoega Euleri-Bernoulli tala siirded ja sisejõud sagedustel wf = 400 (sagedusvariant = 1), wf = 900 (sagedusvariant = 2), wf = 1024 (sagedusvariant = 3). Tala kirjeldatakse kahe elemendiga.
Kasutab funktsioone

- talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[321]
- sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[322]
- LT2keskel(F,L,wf,mg,A,EI)[323]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[324]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[325]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[326]
- mrkmts(a)[327]

Programm C.49 (NaideTala2ToelMdet.m)[328] 111 – arvutab koondmassi kandva kahe toega Euleri-Bernoulli tala omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[329]
- sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[330]
- koondMassHLtala(baasi0,wf,mw)[331]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[332]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[333]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[334]
- mrkmts(a)[335]

Programm C.50 (NaideTala2ToelMw0.m)[336] 111 – arvutab koondmassi kandva kahe toega Euleri-Bernoulli tala siirded ja sisejõud vibreeriva jõu sagedusel $\omega = 30\,\mathrm{s}^{-1}$.
Kasutab funktsioone

- talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[337]

---

[320] ./octaveProgrammid/NaideTala2Toel1w0.m
[321] ./octaveProgrammid/talaylekM.m
[322] ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
[323] ./octaveProgrammid/LT2keskel.m
[324] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[325] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[326] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[327] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[328] ./octaveProgrammid/NaideTala2ToelMdet.m
[329] ./octaveProgrammid/talaylekM.m
[330] ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
[331] ./octaveProgrammid/koondMassHLtala.m
[332] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[333] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[334] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[335] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[336] ./octaveProgrammid/NaideTala2ToelMw0.m
[337] ./octaveProgrammid/talaylekM.m

- sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[338]
- LT2keskel(F,L,wf,mg,A,EI)[339]
- koondMassHLtala(baasi0,wf,mw)[340]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[341]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[342]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[343]
- mrkmts(a)[344]

Programm C.51 (NaideTalaKahelToel3.m)[345] 104 – arvutab liikuva liigend- ja jäiga toega Euleri-Bernoulli tala omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[346]
- sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[347]
- LT2keskel(F,L,wf,mg,A,EI)[348]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[349]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[350]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[351]
- mrkmts(a)[352]

Programm C.52 (NaideTala2Toel3w0.m)[353] 105 – arvutab liikuva liigend- ja jäiga toega Euleri-Bernoulli tala siirded ja sisejõud vibreerivate jõudude sagedustel $\omega = 0.8\omega_1\,\mathrm{s}^{-1}$ ja $\omega = 0.9\omega_2\,\mathrm{s}^{-1}$.
Kasutab funktsioone

- talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[354]
- sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[355]
- LT2keskel(F,L,wf,mg,A,EI)[356]

[338] ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
[339] ./octaveProgrammid/LT2keskel.m
[340] ./octaveProgrammid/koondMassHLtala.m
[341] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[342] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[343] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[344] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[345] ./octaveProgrammid/NaideTalaKahelToel3.m
[346] ./octaveProgrammid/talaylekM.m
[347] ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
[348] ./octaveProgrammid/LT2keskel.m
[349] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[350] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[351] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[352] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[353] ./octaveProgrammid/NaideTala2Toel3w0.m
[354] ./octaveProgrammid/talaylekM.m
[355] ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
[356] ./octaveProgrammid/LT2keskel.m

– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[357]
– InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[358]
– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[359]
– mrkmts(a)[360]

C.3.2 Programmid Timošenko tala võnkumise arvutamiseks

Programm C.53 (NaideTimKonsool1.m)[361] 135 – arvutab Timošenko konsooltala omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

– sptalaylekTimM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[362]
– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[363]
– InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[364]
– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[365]
– mrkmts(a)[366]

Programm C.54 (NaideTimKonsool1w1.m)[367] 136 – arvutab Timošenko konsooltala 1. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

– TimtalaylekM(baasi0,kT,x,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[368]
– sptalaylekTimM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[369]
– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[370]
– InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[371]
– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[372]
– mrkmts(a)[373]

---

357 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
358 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
359 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
360 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
361 ./octaveProgrammid/NaideTimKonsool1.m
362 ./octaveProgrammid/sptalaylekTimM.m
363 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
364 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
365 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
366 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
367 ./octaveProgrammid/NaideTimKonsool1w1.m
368 ./octaveProgrammid/TimtalaylekM.m
369 ./octaveProgrammid/sptalaylekTimM.m
370 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
371 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
372 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
373 ./octaveProgrammid/mrkmts.m

Programm C.55 (NaideTimKonsool1w2.m)[374] 136 – arvutab Timošenko konsooltala 2. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- TimtalaylekM(baasi0,kT,x,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[375]
- sptalaylekTimM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[376]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[377]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[378]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[379]
- mrkmts(a)[380]

Programm C.56 (NaideTimKonsool1w3.m)[381] 136 – arvutab Timošenko konsooltala 3. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- TimtalaylekM(baasi0,kT,x,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[382]
- sptalaylekTimM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[383]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[384]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[385]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[386]
- mrkmts(a)[387]

Programm C.57 (NaideTimKonsool1w4.m)[388] 136 – arvutab Timošenko konsooltala 4. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- TimtalaylekM(baasi0,kT,x,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[389]
- sptalaylekTimM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[390]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[391]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[392]

---

374 ./octaveProgrammid/NaideTimKonsool1w2.m
375 ./octaveProgrammid/TimtalaylekM.m
376 ./octaveProgrammid/sptalaylekTimM.m
377 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
378 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
379 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
380 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
381 ./octaveProgrammid/NaideTimKonsool1w3.m
382 ./octaveProgrammid/TimtalaylekM.m
383 ./octaveProgrammid/sptalaylekTimM.m
384 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
385 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
386 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
387 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
388 ./octaveProgrammid/NaideTimKonsool1w4.m
389 ./octaveProgrammid/TimtalaylekM.m
390 ./octaveProgrammid/sptalaylekTimM.m
391 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
392 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m

- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[393]
- mrkmts(a)[394]

Programm C.58 (NaideTimTala1.m)[395] 139 – arvutab jäikade tugedega Timošenko tala omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- sptalaylekTimM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[396]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[397]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[398]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[399]
- mrkmts(a)[400]

Programm C.59 (NaideTimTala1w1.m)[401] 140 – arvutab jäikade tugedega Timošenko tala 1. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- TimtalaylekM(baasi0,kT,x,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[402]
- sptalaylekTimM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[403]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[404]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[405]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[406]
- mrkmts(a)[407]

Programm C.60 (NaideTimTala1w2.m)[408] 140 – arvutab jäikade tugedega Timošenko tala 2. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- TimtalaylekM(baasi0,kT,x,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[409]
- sptalaylekTimM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[410]

---

393 `./octaveProgrammid/spSisestaArv.m`
394 `./octaveProgrammid/mrkmts.m`
395 `./octaveProgrammid/NaideTimTala1.m`
396 `./octaveProgrammid/sptalaylekTimM.m`
397 `./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m`
398 `./octaveProgrammid/InsertBtoA.m`
399 `./octaveProgrammid/spSisestaArv.m`
400 `./octaveProgrammid/mrkmts.m`
401 `./octaveProgrammid/NaideTimTala1w1.m`
402 `./octaveProgrammid/TimtalaylekM.m`
403 `./octaveProgrammid/sptalaylekTimM.m`
404 `./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m`
405 `./octaveProgrammid/InsertBtoA.m`
406 `./octaveProgrammid/spSisestaArv.m`
407 `./octaveProgrammid/mrkmts.m`
408 `./octaveProgrammid/NaideTimTala1w2.m`
409 `./octaveProgrammid/TimtalaylekM.m`
410 `./octaveProgrammid/sptalaylekTimM.m`

- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[411]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[412]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[413]
- mrkmts(a)[414]

Programm C.61 (NaideTimTala1w3.m)[415] 140 – arvutab jäikade tugedega Timošenko tala 3. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- TimtalaylekM(baasi0,kT,x,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[416]
- sptalaylekTimM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[417]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[418]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[419]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[420]
- mrkmts(a)[421]

Programm C.62 (NaideTimTala1w4.m)[422] 140 – arvutab jäikade tugedega Timošenko tala 4. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- TimtalaylekM(baasi0,kT,x,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[423]
- sptalaylekTimM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[424]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[425]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[426]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[427]
- mrkmts(a)[428]

Programm C.63 (NaideTimKonsool3det.m)[429] 143 – arvutab astmeliselt muutuva lapiti ristlõikega Timošenko konsooltala omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

[411] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[412] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[413] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[414] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[415] ./octaveProgrammid/NaideTimTala1w3.m
[416] ./octaveProgrammid/TimtalaylekM.m
[417] ./octaveProgrammid/sptalaylekTimM.m
[418] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[419] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[420] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[421] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[422] ./octaveProgrammid/NaideTimTala1w4.m
[423] ./octaveProgrammid/TimtalaylekM.m
[424] ./octaveProgrammid/sptalaylekTimM.m
[425] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[426] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[427] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[428] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[429] ./octaveProgrammid/NaideTimKonsool3det.m

– sptalaylekTimM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[430]
– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[431]
– InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[432]
– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[433]
– mrkmts(a)[434]

Programm C.64 (NaideTimKonsool3Srdet.m)[435] 145 – arvutab astmeliselt muutuva serviti ristlõikega Timošenko konsooltala omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

– sptalaylekTimM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[436]
– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[437]
– InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[438]
– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[439]
– mrkmts(a)[440]

Programm C.65 (NaideTimKonsool3Srw15.m)[441] 143 – arvutab astmeliselt muutuva serviti ristlõikega Timošenko konsooltala omavõnkevormid sagedustel wfs = 361.330 (sagedusvariant = 1), wfs = 1898.514 (sagedusvariant = 2), wfs = 4947.207 (sagedusvariant = 3), wfs = 9518.482 (sagedusvariant = 4), wfs = 15384.481 (sagedusvariant = 5).
Kasutab funktsioone

– sptalaylekTimM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[442]
– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[443]
– InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[444]
– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[445]
– mrkmts(a)[446]

[430] ./octaveProgrammid/sptalaylekTimM.m
[431] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[432] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[433] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[434] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[435] ./octaveProgrammid/NaideTimKonsool3Srdet.m
[436] ./octaveProgrammid/sptalaylekTimM.m
[437] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[438] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[439] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[440] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[441] ./octaveProgrammid/NaideTimKonsool3Srw15.m
[442] ./octaveProgrammid/sptalaylekTimM.m
[443] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[444] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[445] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[446] ./octaveProgrammid/mrkmts.m

Programm C.66 (NaideTimKonsool6det.m)[447] 149 – arvutab muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- sptalaylekTimM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[448]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[449]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[450]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[451]
- mrkmts(a)[452]

Programm C.67 (NaideTimKonsool15det.m)[453] 151 – arvutab muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- sptalaylekTimM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[454]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[455]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[456]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[457]
- mrkmts(a)[458]

Programm C.68 (NaideTimKonsool6SAMSTw6.m)[459] 152 – arvutab muutuva ristlõikega Timošenko konsooltala omavõnkevormid sagedustel wfs = 8.6801 (sagedusvariant = 1), wfs = 39.6310 (sagedusvariant = 2), wfs = 101.7576 (sagedusvariant = 3), wfs = 195.0430 (sagedusvariant = 4), wfs = 319.8286 (sagedusvariant = 5).
Kasutab funktsioone

- sptalaylekTimM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[460]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[461]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[462]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[463]
- mrkmts(a)[464]

---

[447] ./octaveProgrammid/NaideTimKonsool6det.m
[448] ./octaveProgrammid/sptalaylekTimM.m
[449] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[450] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[451] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[452] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[453] ./octaveProgrammid/NaideTimKonsool15det.m
[454] ./octaveProgrammid/sptalaylekTimM.m
[455] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[456] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[457] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[458] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[459] ./octaveProgrammid/NaideTimKonsool6SAMSTw6.m
[460] ./octaveProgrammid/sptalaylekTimM.m
[461] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[462] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[463] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[464] ./octaveProgrammid/mrkmts.m

C.3.3 Programmid jätkuvtala võnkumise arvutamiseks

Programm C.69 (NaideJtkTala5det.m)[465] 87 – arvutab viiesildelise jätkuvtala omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[466]
- sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[467]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[468]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[469]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[470]
- mrkmts(a)[471]

Programm C.70 (NaideJtkTala5Vormid.m)[472] 89 – arvutab viiesildelise jätkuvtala omavõnkevormid sagedustel wfs = 27.7166 (sagedusvariant = 1), wfs = 34.6594 (sagedusvariant = 2), wfs = 43.6561, (sagedusvariant = 3), wfs = 52.4129 (sagedusvariant = 4), wfs = 56.6321 (sagedusvariant = 5), wfs = 105.6309 (sagedusvariant = 6).
Kasutab funktsioone

- talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[473]
- sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[474]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[475]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[476]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[477] `./octaveProgrammid/mrkmts.m`

Programm C.71 (NaideJtkTala1det.m)[478] 117 – arvutab kolmesildelise jätkuvtala omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[479]
- sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[480]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[481]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[482]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[483]

---

[465] `./octaveProgrammid/NaideJtkTala5det.m`
[466] `./octaveProgrammid/talaylekM.m`
[467] `./octaveProgrammid/sptalaylekM.m`
[468] `./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m`
[469] `./octaveProgrammid/InsertBtoA.m`
[470] `./octaveProgrammid/spSisestaArv.m`
[471] `./octaveProgrammid/mrkmts.m`
[472] `./octaveProgrammid/NaideJtkTala5Vormid.m`
[473] `./octaveProgrammid/talaylekM.m`
[474] `./octaveProgrammid/sptalaylekM.m`
[475] `./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m`
[476] `./octaveProgrammid/InsertBtoA.m`
[477] `./octaveProgrammid/spSisestaArv.m`
[478] `./octaveProgrammid/NaideJtkTala1det.m`
[479] `./octaveProgrammid/talaylekM.m`
[480] `./octaveProgrammid/sptalaylekM.m`
[481] `./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m`
[482] `./octaveProgrammid/InsertBtoA.m`
[483] `./octaveProgrammid/spSisestaArv.m`

– mrkmts(a)[484]

Programm C.72 (NaideJtkTala1Vorm1.m)[485] 118 – arvutab kolmesildelise jätkuvtala 1. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

– talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[486]
– sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[487]
– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[488]
– InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[489]
– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[490]
– mrkmts(a)[491]

Programm C.73 (NaideJtkTala1Vorm2.m)[492] 118 – arvutab kolmesildelise jätkuvtala 2. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

– talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[493]
– sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[494]
– spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[495]
– InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[496]
– spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[497]
– mrkmts(a)[498]

Programm C.74 (NaideJtkTala1Vorm3.m)[499] 118 – arvutab kolmesildelise jätkuvtala 3. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

– talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[500]
– sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[501]

---

484 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
485 ./octaveProgrammid/NaideJtkTala1Vorm1.m
486 ./octaveProgrammid/talaylekM.m
487 ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
488 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
489 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
490 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
491 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
492 ./octaveProgrammid/NaideJtkTala1Vorm2.m
493 ./octaveProgrammid/talaylekM.m
494 ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
495 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
496 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
497 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
498 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
499 ./octaveProgrammid/NaideJtkTala1Vorm3.m
500 ./octaveProgrammid/talaylekM.m
501 ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m

- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[502]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[503]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[504]
- mrkmts(a)[505]

Programm C.75 (NaideJtkTala1Vorm4.m)[506] 118 – arvutab kolmesildelise jätkuvtala 4. omavõnkevormi.
Kasutab funktsioone

- talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[507]
- sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[508]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[509]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[510]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[511]
- mrkmts(a)[512]

Programm C.76 (NaideJtkTala1Mw.m)[513] 119 – arvutab kolmesildelise jätkuvtala siirded ja sisejõud vibreeriva jõu sagedusel $\omega = 100\,\mathrm{s}^{-1}$.
Kasutab funktsioone

- talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI)[514]
- sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI)[515]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[516]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[517]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[518]
- mrkmts(a)[519]

---

502 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
503 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
504 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
505 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
506 ./octaveProgrammid/NaideJtkTala1Vorm4.m
507 ./octaveProgrammid/talaylekM.m
508 ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
509 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
510 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
511 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
512 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
513 ./octaveProgrammid/NaideJtkTala1Mw.m
514 ./octaveProgrammid/talaylekM.m
515 ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
516 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
517 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
518 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
519 ./octaveProgrammid/mrkmts.m

C.4 Programmid raami võnkumise arvutamiseks

Programm C.77 (NaideRaam1det.m)[520] 164, 167 – arvutab jäikade sõlmedega Euleri-Bernoulli põikraami omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- spraamylekM(baasi0,h,wf,msp,EAp,EIp)[521]
- raamylekM(baasi0,x,wf,mass,EA,EI)[522]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[523]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[524]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[525]
- mrkmts(a)[526]

Programm C.78 (NaideRaam1Adet.m)[527] 167 – arvutab jäikade sõlmedega kuue elemendiga Euleri-Bernoulli põikraami omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- spraamylekM(baasi0,h,wf,msp,EAp,EIp)[528]
- raamylekM(baasi0,x,wf,mass,EA,EI)[529]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[530]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[531]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[532]
- mrkmts(a)[533]

Programm C.79 (NaideRaam1Bdet.m)[534] 167 – arvutab jäikade sõlmedega Euleri-Bernoulli põikraami omavõnkevormid sagedustel wfs = 187.47 (sagedusvariant = 1), wfs = 734.66 (sagedusvariant = 2), wfs = 1206.8 (sagedusvariant = 3), wfs = 1288.58 (sagedusvariant = 4), wfs = 2532.1 (sagedusvariant = 5), wfs = 3173.1 (sagedusvariant = 6).
Kasutab funktsioone

- spraamylekM(baasi0,h,wf,msp,EAp,EIp)[535]
- raamylekM(baasi0,x,wf,mass,EA,EI)[536]

---

[520] ./octaveProgrammid/NaideRaam1det.m
[521] ./octaveProgrammid/spraamylekM.m
[522] ./octaveProgrammid/raamylekM.m
[523] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[524] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[525] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[526] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[527] ./octaveProgrammid/NaideRaam1Adet.m
[528] ./octaveProgrammid/spraamylekM.m
[529] ./octaveProgrammid/raamylekM.m
[530] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[531] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[532] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[533] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[534] ./octaveProgrammid/NaideRaam1Bdet.m
[535] ./octaveProgrammid/spraamylekM.m
[536] ./octaveProgrammid/raamylekM.m

- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[537]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[538]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[539]
- mrkmts(a)[540]

Programm C.80 (NaideSymRaam1det.m)[541] 167 – arvutab jäikade sõlmedega Euleri-Bernoulli põikraami sümmeetrilised omavõnkevormid. Raami riivi ja postide pikideformatsioonid on hüljatud.
Kasutab funktsiooni

- SymRaamDet(h,l,wf,mass1,mass2,E,I1,I2)[542]

Programm C.81 (NaideRaam1CwMFx.m)[543] 238 – arvutab jäikade sõlmedega Euleri-Bernoulli põikraami siirded ja sisejõud antisümmeetrilisel sundvõnkumisel vibreeriva jõu sagedustel wfs = 72.216 (sagedusvariant = 1), wfs = 136.27 (sagedusvariant = 2), wfs = 185.99 (sagedusvariant = 3), wfs = 188.89 (sagedusvariant = 4), wfs = 730.00 (sagedusvariant = 5), wfs = 1206.00 (sagedusvariant = 6).
Kasutab funktsioone

- spraamylekM(baasi0,h,wf,msp,EAp,EIp)[544]
- raamylekM(baasi0,x,wf,mass,EA,EI)[545]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[546]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[547]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[548]
- mrkmts(a)[549]

Programm C.82 (NaideRaam1CwM.m)[550] 248 – arvutab jäikade sõlmedega Euleri-Bernoulli põikraami siirded ja sisejõud sümmeetrilisel sundvõnkumisel vibreeriva jõu sagedustel wfs = 283 (sagedusvariant = 1), wfs = 534 (sagedusvariant = 2), wfs = 728.86 (sagedusvariant = 3), wfs = 738.13 (sagedusvariant = 4), wfs = 995.084 (sagedusvariant = 5), wfs = 1286.0274 (sagedusvariant = 6).
Kasutab funktsioone

- spraamylekM(baasi0,h,wf,msp,EAp,EIp)[551]

---

[537] `./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m`
[538] `./octaveProgrammid/InsertBtoA.m`
[539] `./octaveProgrammid/spSisestaArv.m`
[540] `./octaveProgrammid/mrkmts.m`
[541] `./octaveProgrammid/NaideSymRaam1det.m`
[542] `./octaveProgrammid/SymRaamDet.m`
[543] `./octaveProgrammid/NaideRaam1CwMFx.m`
[544] `./octaveProgrammid/spraamylekM.m`
[545] `./octaveProgrammid/raamylekM.m`
[546] `./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m`
[547] `./octaveProgrammid/InsertBtoA.m`
[548] `./octaveProgrammid/spSisestaArv.m`
[549] `./octaveProgrammid/mrkmts.m`
[550] `./octaveProgrammid/NaideRaam1CwM.m`
[551] `./octaveProgrammid/spraamylekM.m`

- raamylekM(baasi0,x,wf,mass,EA,EI)[552]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[553]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[554]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[555]
- mrkmts(a)[556]

Programm C.83 (NaideRaam1CwMFxstaatika.m)[557] 183, 176 – arvutab jäikade sõlmedega Euleri-Bernoulli põikraami siirded ja sisejõud antisümmeetrilisel staatilisel koormusel. Kasutab funktsioone

- sptalaStaatikaM(baasi0,l,l,GAr,EI)[558]
- yspTlfhlin(baasi0,x,GAr,EJ)[559]
- ylfhlin(baasi0,xx,GAr,EI)[560]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[561]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[562]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[563]

Programm C.84 (NaideRaam1CwMstaatika.m)[564] 179 – arvutab jäikade sõlmedega Euleri-Bernoulli põikraami siirded ja sisejõud sümmeetrilisel staatilisel koormusel. Kasutab funktsioone

- spraamSaatikaM(baasi0,h1,EAp,GAr,EIp)[565]
- ysplfhlin(baasi0,l,EA,GAr,EJ)[566]
- ylfhlin(baasi0,xx,EA,GAr,EI)[567]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[568]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[569]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[570]

---

552. ./octaveProgrammid/raamylekM.m
553. ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
554. ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
555. ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
556. ./octaveProgrammid/mrkmts.m
557. ./octaveProgrammid/NaideRaam1CwMFxstaatika.m
558. ./octaveProgrammid/sptalaStaatikaM.m
559. ./octaveProgrammid/yspTlfhlin.m
560. ./octaveProgrammid/ylfhlin.m
561. ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
562. ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
563. ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
564. ./octaveProgrammid/NaideRaam1CwMstaatika.m
565. ./octaveProgrammid/spraamSaatikaM.m
566. ./octaveProgrammid/ysplfhlin.m
567. ./octaveProgrammid/ylfhlin.m
568. ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
569. ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
570. ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m

Programm C.85 (NaideRaamTim1det.m)[571] 166 – arvutab jäikade sõlmedega Timošenko põikraami omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- spraamTimylekM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[572]
- raamTimylekM(baasi0,kT,x,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[573]
- spTeisndMaatriks(VarrasN,krdn,selem)[574]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[575]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[576]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[577]
- mrkmts(a)[578]

Programm C.86 (NaideRaamKVTim5det.m)[579] 170, 172 – arvutab jäikade sõlmedega ja muutuva ristlõikega Timošenko põikraami omavõnkesagedused. Raami postid on jagatud viieks elemendiks.
Kasutab funktsioone

- spraamTimylekM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[580]
- raamTimylekM(baasi0,kT,x,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[581]
- spTeisndMaatriks(VarrasN,krdn,selem)[582]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[583]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[584]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[585]
- mrkmts(a)[586]

Programm C.87 (NaideRaamKVTim10det.m)[587] 172 – arvutab jäikade sõlmedega ja muutuva ristlõikega Timošenko põikraami omavõnkesagedused. Raami postid on jagatud kümneks elemendiks.
Kasutab funktsioone

- spraamTimylekM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[588]

[571] ./octaveProgrammid/NaideRaamTim1det.m
[572] ./octaveProgrammid/spraamTimylekM.m
[573] ./octaveProgrammid/raamTimylekM.m
[574] ./octaveProgrammid/spTeisndMaatriks.m
[575] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[576] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[577] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[578] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[579] ./octaveProgrammid/NaideRaamKVTim5det.m
[580] ./octaveProgrammid/spraamTimylekM.m
[581] ./octaveProgrammid/raamTimylekM.m
[582] ./octaveProgrammid/spTeisndMaatriks.m
[583] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[584] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[585] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[586] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[587] ./octaveProgrammid/NaideRaamKVTim10det.m
[588] ./octaveProgrammid/spraamTimylekM.m

- raamTimylekM(baasi0,kT,x,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[589]
- spTeisndMaatriks(VarrasN,krdn,selem)[590]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[591]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[592]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[593]
- mrkmts(a)[594]

Programm C.88 (NaideRaamKVTim5Bvormid.m)[595] 173 – arvutab jäikade sõlmedega ja muutuva ristlõikega Timošenko põikraami omavõnkevormid sagedustel wfs = 1506.39 (sagedusvariant = 1), wfs = 4180.12 (sagedusvariant = 2), wfs = 7488.42 (sagedusvariant = 3), wfs = 7517.53 (sagedusvariant = 4), wfs = 13523.05 (sagedusvariant = 5), wfs = 18848.83 (sagedusvariant = 6).
Kasutab funktsioone

- spraamTimylekM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[596]
- raamTimylekM(baasi0,kT,x,l,wf,mg,A,Iy,E,G)[597]
- spTeisndMaatriks(VarrasN,krdn,selem)[598]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[599]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[600]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[601]
- mrkmts(a)[602]

C.5 Programmid sõrestiku võnkumise arvutamiseks

Programm C.89 (NaideTrussTarind1VibrDet.m)[603] 202 – arvutab lausmassiga (inertsjõud = 1) kahe vardaga tarindi omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- spTrussP6hiv(baasi0,Li,wf,mg,A,E)[604]

---

589 ./octaveProgrammid/raamTimylekM.m
590 ./octaveProgrammid/spTeisndMaatriks.m
591 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
592 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
593 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
594 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
595 ./octaveProgrammid/NaideRaamKVTim5Bvormid.m
596 ./octaveProgrammid/spraamTimylekM.m
597 ./octaveProgrammid/raamTimylekM.m
598 ./octaveProgrammid/spTeisndMaatriks.m
599 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
600 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
601 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
602 ./octaveProgrammid/mrkmts.m
603 ./octaveProgrammid/NaideTrussTarind1VibrDet.m
604 ./octaveProgrammid/spTrussP6hiv.m

- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[605]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[606]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[607]
- mrkmts(a)[608]

Programm C.90 (NaideTrussTarind3VibrDet.m)[609] 205 – arvutab konsistentse koondmassiga (inertsjõud = 2), keskendatud koondmassiga (inertsjõud = 3) ja lausmassi+koondmassiga (inertsjõud = 4) kahe vardaga tarindi omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- spTrussP6hiv(baasi0,Li,wf,mg,A,E)[610]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[611]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[612]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[613]
- mrkmts(a)[614]

Programm C.91 (NaideTrussTest3VibrDet.m)[615] 208 – arvutab konsistentse koondmassiga (inertsjõud = 2) ja keskendatud koondmassiga (inertsjõud = 3) sõrestiku T omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- yspSRmhvIVahet(baasi0,Li,EA)[616]
- yspSRhlin(baasi0,x,EA)[617]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[618]
- spInsertNtimesBtoA(spA,IM,JN,NK,spB)[619]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[620]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[621]
- mrkmts(a)[622]

[605] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[606] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[607] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[608] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[609] ./octaveProgrammid/NaideTrussTarind3VibrDet.m
[610] ./octaveProgrammid/spTrussP6hiv.m
[611] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[612] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[613] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[614] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[615] ./octaveProgrammid/NaideTrussTest3VibrDet.m
[616] ./octaveProgrammid/yspSRmhvIVahet.m
[617] ./octaveProgrammid/yspSRhlin.m
[618] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[619] ./octaveProgrammid/spInsertNtimesBtoA.m
[620] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[621] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[622] ./octaveProgrammid/mrkmts.m

Programm C.92 (NaideTrussArg3VibrDet.m)[623] 211 – arvutab konsistentse koondmassiga (inertsjõud = 2) ja keskendatud koondmassiga (inertsjõud = 3) sõrestiku AM omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- yspSRmhvIVahet(baasi0,Li,EA)[624]
- yspSRhlin(baasi0,x,EA)[625]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[626]
- spInsertNtimesBtoA(spA,IM,JN,NK,spB)[627]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[628]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[629]
- mrkmts(a)[630]

Programm C.93 (NaideTrussKB1VibrDet.m)[631] 213 – arvutab konsistentse koondmassiga (inertsjõud = 2) ja keskendatud koondmassiga (inertsjõud = 3) sõrestiku KB omavõnkesagedused.
Kasutab funktsioone

- yspSRmhvIVahet(baasi0,Li,EA)[632]
- yspSRhlin(baasi0,x,EA)[633]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[634]
- spInsertNtimesBtoA(spA,IM,JN,NK,spB)[635]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[636]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[637]
- mrkmts(a)[638]

Programm C.94 (NaideTrussTarind1Vibr.m)[639] 251 – arvutab kahe vardaga tarindi siirded ja sisejõud staatilisel koormusel.
Kasutab funktsioone

- yspSRmhvIVahet(baasi0,Li,EA)[640]

[623] ./octaveProgrammid/NaideTrussArg3VibrDet.m
[624] ./octaveProgrammid/yspSRmhvIVahet.m
[625] ./octaveProgrammid/yspSRhlin.m
[626] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[627] ./octaveProgrammid/spInsertNtimesBtoA.m
[628] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[629] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[630] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[631] ./octaveProgrammid/NaideTrussKB1VibrDet.m
[632] ./octaveProgrammid/yspSRmhvIVahet.m
[633] ./octaveProgrammid/yspSRhlin.m
[634] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[635] ./octaveProgrammid/spInsertNtimesBtoA.m
[636] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[637] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[638] ./octaveProgrammid/mrkmts.m
[639] ./octaveProgrammid/NaideTrussTarind1Vibr.m
[640] ./octaveProgrammid/yspSRmhvIVahet.m

- yspSRhlin(baasi0,x,EA)[641]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[642]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[643]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[644]

Programm C.95 (NaideTrussTest1Vibr.m)[645] 251 – arvutab sõrestiku T siirded ja sisejõud staatilisel koormusel.
Kasutab funktsioone

- yspSRmhvIVahet(baasi0,Li,EA)[646]
- yspSRhlin(baasi0,x,EA)[647]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[648]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[649]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[650]

Programm C.96 (NaideTrussArg1Vibr.m)[651] 252 – arvutab sõrestiku AM siirded ja sisejõud staatilisel koormusel.
Kasutab funktsioone

- yspSRmhvIVahet(baasi0,Li,EA)[652]
- yspSRhlin(baasi0,x,EA)[653]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[654]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[655]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[656]

Programm C.97 (NaideTrussBridge1Vibr.m)[657] 252 – arvutab sillasõrestiku siirded ja sisejõud staatilisel koormusel.
Kasutab funktsioone

- yspSRmhvIVahet(baasi0,Li,EA)[658]

641 ./octaveProgrammid/yspSRhlin.m
642 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
643 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
644 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
645 ./octaveProgrammid/NaideTrussTest1Vibr.m
646 ./octaveProgrammid/yspSRmhvIVahet.m
647 ./octaveProgrammid/yspSRhlin.m
648 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
649 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
650 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
651 ./octaveProgrammid/NaideTrussArg1Vibr.m
652 ./octaveProgrammid/yspSRmhvIVahet.m
653 ./octaveProgrammid/yspSRhlin.m
654 ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
655 ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
656 ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
657 ./octaveProgrammid/NaideTrussBridge1Vibr.m
658 ./octaveProgrammid/yspSRmhvIVahet.m

- yspSRhlin(baasi0,x,EA)[659]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[660]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[661]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[662]

C.6 Varia

Programm C.98 (NaideTala2Toel1w0Staatika.m)[663] 101 – arvutab paigalseisva ja liikuva liigendtoega Euleri-Bernoulli tala siirded ja sisejõud jõu F_b staatilisel rakendamisel. Kasutab funktsioone

- sptalaStaatikaM(baasi0,l1,l1,GAr,EI)[664]
- yspTlfhlin(baasi0,x,GAr,EI)[665]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[666]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[667]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[668]

Programm C.99 (NaideTala2Toel1w0Staatikaqz.m)[669] 102 – arvutab paigalseisva ja liikuva liigendtoega Euleri-Bernoulli tala siirded ja sisejõud tala koormamisel omakaaluga q_z. Kasutab funktsioone

- sptalaStaatikaM(baasi0,l1,l1,GAr,EI)[670]
- yspTlfhlin(baasi0,x,GAr,EI)[671]
- yzThqz(baasi0,x,qz,EI)[672]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[673]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[674]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[675]

[659] ./octaveProgrammid/yspSRhlin.m
[660] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[661] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[662] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[663] ./octaveProgrammid/NaideTala2Toel1w0Staatika.m
[664] ./octaveProgrammid/sptalaStaatikaM.m
[665] ./octaveProgrammid/yspTlfhlin.m
[666] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[667] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[668] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[669] ./octaveProgrammid/NaideTala2Toel1w0Staatikaqz.m
[670] ./octaveProgrammid/sptalaStaatikaM.m
[671] ./octaveProgrammid/yspTlfhlin.m
[672] ./octaveProgrammid/yzThqz.m
[673] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[674] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[675] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m

Programm C.100 (NaideJtkTala1MwStaatika.m)[676] 121 – arvutab kolmesildelise jätkuvtala siirded ja sisejõud tala staatilisel koormamisel jõuga F.
Kasutab funktsioone

- sptalaStaatikaM(baasi0,l1,l1,GAr,EI)[677]
- yspTlfhlin(baasi0,x,GAr,EI)[678]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[679]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[680]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[681]

Programm C.101 (NaideJtkTala1MwStaatikaqz.m)[682] 122 – arvutab kolmesildelise jätkuvtala siirded ja sisejõud tala staatilisel koormamisel omakaaluga q_z.
Kasutab funktsioone

- sptalaStaatikaM(baasi0,l1,l1,GAr,EI)[683]
- yspTlfhlin(baasi0,x,GAr,EI)[684]
- yzThqz(baasi0,x,qz,EI)[685]
- spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spB)[686]
- InsertBtoA(Bvb,I,J,IM,JN,vB,M,N)[687]
- spSisestaArv(spA,iv,jv,sv)[688]

Programm C.102 (NaideLT2keskel.m)[689] 100 – arvutab paigalseisva ja liikuva liigendtoega Euleri-Bernoulli tala keskel siirde ja momendi õpikus [Kis64, lk 116] toodud valemitega vibreeriva jõu sagedustel $\omega_b = 400\,\mathrm{s}^{-1}$ ja $\omega_b = 900\,\mathrm{s}^{-1}$.
Kasutab funktsiooni

- LT2keskel(F,L,wf,mg,A,EI)[690]

Programm C.103 (Kjuured(baasi0,l,wf,mg,A,EI))[691] 72 – arvutab konsooltala sagedusvõrrandi (3.51) juured.

Programm C.104 (JaikJaikJuured(baasi0,l,wf,mg,A,EI))[692] 73 – arvutab jäikade tugedega tala sagedusvõrrandi (3.56) juured.

[676] ./octaveProgrammid/NaideJtkTala1MwStaatika.m
[677] ./octaveProgrammid/sptalaStaatikaM.m
[678] ./octaveProgrammid/yspTlfhlin.m
[679] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[680] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[681] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[682] ./octaveProgrammid/NaideJtkTala1MwStaatikaqz.m
[683] ./octaveProgrammid/sptalaStaatikaM.m
[684] ./octaveProgrammid/yspTlfhlin.m
[685] ./octaveProgrammid/yzThqz.m
[686] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[687] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m
[688] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[689] ./octaveProgrammid/NaideLT2keskel.m
[690] ./octaveProgrammid/LT2keskel.m
[691] ./octaveProgrammid/Kjuured.m
[692] ./octaveProgrammid/JaikJaikJuured.m

Programm C.105 (LiigJaikJuured(baasi0,l,wf,mg,A,EI))[693] 76 – arvutab liikuva liigend- ja jäiga toega tala sagedusvõrrandi (3.67) juured.

Programm C.106 (dynaamikategurA.m)[694] 183 – arvutab jäikade sõlmedega Euleri-Bernoulli põikraami riivi algul paindemomendi dünaamikateguri k_d sõltuvuse sundiva jõu $F_x \sin \omega t$ sagedusest ω antisümmeetrilisel sundvõnkumisel.

Programm C.107 (dynaamikategurS.m)[695] 191 – arvutab jäikade sõlmedega Euleri-Bernoulli põikraami riivi keskel paindemomendi dünaamikateguri k_d sõltuvuse sundiva jõu $F_x \sin \omega t$ sagedusest ω sümmeetrilisel sundvõnkumisel.

Funktsioon C.12 (spraamSaatikaM(baasi0,h1,EAp,GAr,EIp))[696] – arvutab Euleri-Bernoulli raami hõreda laiendatud ülekandemaatriksi staatilisel koormusel.

Funktsioon C.13 (sptalaStaatikaM(baasi0,x,l,GAr,EJ))[697] – arvutab Euleri-Bernoulli tala hõreda laiendatud ülekandemaatriksi staatilisel koormusel.

Funktsioon C.14 (talaylekM(baasi0,x,wf,mg,A,EI))[698] – arvutab Euleri-Bernoulli tala ülekandemaatriksi.

Funktsioon C.15 (sptalaylekM(baasi0,l,wf,mg,A,EI))[699] – arvutab Euleri-Bernoulli tala ülekandemaatriksi.

Funktsioon C.16 (ysplfhlin(baasi0,l,EA,GAr,EJ))[700] – arvutab Euleri-Bernoulli raami hõreda ülekandemaatriksi staatilisel koormusel.

Funktsioon C.17 (yspTlfhlin(baasi0,x,GAr,EJ))[701] – arvutab Euleri-Bernoulli tala hõreda ülekandemaatriksi staatilisel koormusel.

Funktsioon C.18 (sptalaylekTimM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G))[702] – arvutab Timošenko tala hõreda laiendatud ülekandemaatriksi.

Funktsioon C.19 (TimtalaylekM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G))[703] – arvutab Timošenko tala ülekandemaatriksi.

[693] ./octaveProgrammid/LiigJaikJuured.m
[694] ./octaveProgrammid/dynaamikategurA.m
[695] ./octaveProgrammid/dynaamikategurS.m
[696] ./octaveProgrammid/spraamSaatikaM.m
[697] ./octaveProgrammid/sptalaStaatikaM.m
[698] ./octaveProgrammid/talaylekM.m
[699] ./octaveProgrammid/sptalaylekM.m
[700] ./octaveProgrammid/ysplfhlin.m
[701] ./octaveProgrammid/yspTlfhlin.m
[702] ./octaveProgrammid/sptalaylekTimM.m
[703] ./octaveProgrammid/TimtalaylekM.m

Funktsioon C.20 (ylfhlin(baasi0,xx,EA,GAr,EI))[704] – arvutab Euleri-Bernoulli raami ülekandemaatriksi staatilisel koormusel.

Funktsioon C.21 (yzThqz(baasi0,x,qz,EJ))[705] – arvutab Euleri-Bernoulli tala koormusvektori staatilisel koormusel q_z.

Funktsioon C.22 (SymRaamDet(h,l,wf,mass1,mass2,E,I1,I2))[706] 167 – arvutab õpikus [BL63, lk 222] toodud valemitega Euleri-Bernoulli põikraami omavõnkesagedused.

Funktsioon C.23 (raamylekM(baasi0,x,wf,mass,EA,EI))[707] 156 – arvutab Euleri-Bernoulli raami ülekandemaatriksi.

Funktsioon C.24 (spraamylekM(baasi0,l,wf,mass,EA,EI))[708] 156 – arvutab Euleri-Bernoulli raami hõreda laiendatud ülekandemaatriksi.

Funktsioon C.25 (raamTimylekM(baasi0,kT,x,l,wf,mg,A,Iy,E,G))[709] 156 – arvutab Timošenko raami ülekandemaatriksi.

Funktsioon C.26 (spraamTimylekM(baasi0,kT,l,wf,mg,A,Iy,E,G))[710] 156, 171 – arvutab Timošenko raami hõreda laiendatud ülekandemaatriksi.

Funktsioon C.27 (spTeisndMaatriks(VarrasN,krdn,selem))[711] 162, 220 – teisendab vektorid kohalikest koordinaatidest üldkoordinaatidesse. Teisendusmaatriksid on hõredad maatriksid.

Funktsioon C.28 (ysndvnkZF(baasi0,x,a,Fz,wf,mg,A,EI))[712] 94 – arvutab koormusvektori $\mathring{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}$ koondjõust F_z Euleri-Bernoulli tala paindel.

Funktsioon C.29 (ysndvnkZM(baasi0,x,a,My,wf,mg,A,EI))[713] 94 – arvutab koormusvektori $\mathring{\mathbf{Z}}_{\mathbf{M}}$ koondmomendist M_y Euleri-Bernoulli tala paindel.

Funktsioon C.30 (ysndvnkZq(baasi0,x,a,qz,wf,mg,A,EI))[714] 94 – arvutab koormusvektori $\mathring{\mathbf{Z}}_{\mathbf{q}}$ lauskoormusest q_z Euleri-Bernoulli tala paindel.

[704] ./octaveProgrammid/ylfhlin.m
[705] ./octaveProgrammid/yzThqz.m
[706] ./octaveProgrammid/SymRaamDet.m
[707] ./octaveProgrammid/raamylekM.m
[708] ./octaveProgrammid/spraamylekM.m
[709] ./octaveProgrammid/raamTimylekM.m
[710] ./octaveProgrammid/spraamTimylekM.m
[711] ./octaveProgrammid/spTeisndMaatriks.m
[712] ./octaveProgrammid/ysndvnkZF.m
[713] ./octaveProgrammid/ysndvnkZM.m
[714] ./octaveProgrammid/ysndvnkZq.m

Funktsioon C.31 (LT2keskel(F,L,wf,mg,A,EI))[715] 293 – arvutab paigalseisva ja liikuva liigendtoega Euleri-Bernoulli tala keskel siirded ja momendi õpikus [Kis64, lk 116] toodud valemitega. Funktsiooni kasutab programm NaideTala2Toel1w0.m.

Funktsioon C.32 (koondMassHLtala(baasi0,wf,mw))[716] 70 – koostab hõreda maatriksi koondmassi arvestamiseks Euleri-Bernoulli talal.

Funktsioon C.33 (koondMassHLRaam(baasi0,wf,mw))[717] 160 – koostab hõreda maatriksi koondmassi arvestamiseks Euleri-Bernoulli raamil.

Funktsioon C.34 (spTrussP6hiv(baasi0,l,wf,mg,A,E))[718] 199 – arvutab sõrestiku dünaamika hõreda laiendatud ülekandemaatriksi.

Funktsioon C.35 (yspSRmhvIVahet(baasi0,Li,EA))[719] 199 – arvutab sõrestiku staatika hõreda laiendatud ülekandemaatriksi.
Kasutab funktsiooni

- yspSRhlin(baasi0,x,EA)[720]

Funktsioon C.36 (yspSRhlin(baasi0,x,EA))[721] 296 – arvutab sõrestiku staatika hõreda ülekandemaatriksi.

Funktsioon C.37 (koondMassHLSorestik46(baasi0,wf,MassX,MassZ))[722] 200 – koostab hõreda maatriksi koondmassi arvestamiseks sõrestikul.

Funktsioon C.38 (spInsertBtoA(spA,IM,JN,spB))[723] – sisestab hõreda maatriksi $\mathbf{spB}$ hõredasse maatriksisse $\mathbf{spA}$, alustades $\mathbf{IM}$-inda rea ja $\mathbf{JN}$-inda veeru lõikekohast. Hõredate maatriksite $\mathbf{spA}$ ja $\mathbf{spB}$ kattuvad elemendid liidetakse.

Funktsioon C.39 (spInsertNtimesBtoA(spA,IM,JN,aNK,spB))[724] – sisestab hõreda maatriksi $(\mathbf{aNK}\cdot\mathbf{spB})$ hõredasse maatriksisse $\mathbf{spA}$, alustades $\mathbf{IM}$-inda rea ja $\mathbf{JN}$-inda veeru lõikekohast. Hõredate maatriksite $\mathbf{spA}$ ja $\mathbf{spB}$ kattuvad elemendid liidetakse.

Funktsioon C.40 (InsertBtoA(A,I,J,IM,JN,B,M,N))[725] – sisestab $(M\times N)$-järku maatriksi $\mathbf{B_{M\times N}}$ $(I\times J)$-järku maatriksisse $\mathbf{A_{I\times J}}$, alustades $\mathbf{IM}$-inda rea ja $\mathbf{JN}$-inda veeru lõikekohast.

[715] ./octaveProgrammid/LT2keskel.m
[716] ./octaveProgrammid/koondMassHLtala.m
[717] ./octaveProgrammid/koondMassHLRaam.m
[718] ./octaveProgrammid/spTrussP6hiv.m
[719] ./octaveProgrammid/yspSRmhvIVahet.m
[720] ./octaveProgrammid/yspSRhlin.m
[721] ./octaveProgrammid/yspSRhlin.m
[722] ./octaveProgrammid/koondMassHLSorestik46.m
[723] ./octaveProgrammid/spInsertBtoA.m
[724] ./octaveProgrammid/spInsertNtimesBtoA.m
[725] ./octaveProgrammid/InsertBtoA.m

Funktsioon C.41 (spSisestaArv(spA,iv,jv,sv))[726] – sisestab arvu `sv` hõreda maatriksi `spA` `iv`-nda rea `jv`-nda veeru lõikekohale.

Funktsioon C.42 (mrkmts(a))[727] – arvutab funktsiooni märgi muutuste arvu vaadeldavas vahemikus.

---

[726] ./octaveProgrammid/spSisestaArv.m
[727] ./octaveProgrammid/mrkmts.m

Kirjandus

[Abu03] M. Abu-Hilal. Forced vibration of Euler-Bernoulli beams by means of dynamic Green functions.[1] [2] *Journal of Sound and Vibration*, vol. 267, pp. 191–207, 2003. 91

[AM91] J. H. Argyris, H.-P. Mlejnek. *Dynamics of Structures*. Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo: North-Holland | Elsevier Science Publishers B.V., 1991. 210, 211, 212

[Arn09] M. Arndt. *O método dos elementos finitos generalizados aplicado a análise devibrações livres de estruturas reticuladas curitiba*. PhD thesis.[3] Curitiba, Universiade Federal do Paraná[4], 2009. 210

[BL63] Н. И. Безухов, О. В. Лужин. *Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах*. Москва: Госстройиздат, 1963. 117, 167, 295

[Bla05] T. Black. *Spectral Element Analysis of Bars, Beams, and Levy Plates*.[5] MSci thesis. Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 2005. 28

[CCD10] V. Ceauşu, A. Craifaleanu, Cr. Dragomirescu. Transfer matrix method for forced vibrations of bars.[6] *U.P.B. Sci. Bull., Series D*, vol. 72, iss. 2, pp. 35–42, 2010. 31, 34

[EP67] R. Eek, L. Poverus. *Ehitusmehaanika II*.[7] Tallinn: Valgus, 1967. 65, 91

[1] https://www.google.ee/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0ahUKEwjTyJi64LDUAhUDSJoKHfAAA8AQFgghMAA&url=https%3A%2F%2Fstaff-old.najah.edu%2Fsites%2Fdefault%2Ffiles%2FForced_Vibration_Of_Euler-Bernoulli_Beams_By_Means_Of_Dynamic_Greens_Functions.pdf&usg=AFQjCNGVWCBuk-6AInP_rRK4hcedT79uEw&cad=rja

[2] https://www.researchgate.net/publication/222555224_Forced_vibration_of_Euler-Bernoulli_beams_by_means_of_dynamic_Green_functions (17.05.2017)

[3] https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/1884/19508/1/OMEFGAPLICADOAANALISEDEVIBRACOESLIVRESDEESTRUTURASRETICULADAS.pdf

[4] http://www.ufpr.br/portalufpr/

[5] https://theses.lib.vt.edu/theses/available/etd-05262005-081901/unrestricted/Thesis_Thomas_Black.pdf

[6] http://www.scientificbulletin.upb.ro/rev_docs_arhiva/full6922.pdf

[7] http://digi.lib.ttu.ee/i/?791

[Fel16] C. A. Felippa. *Introduction to Aerospace Structures.*[8] Ch. 12: Beam Deflections by Discontinuity Functions. [9] Department of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado at Boulder. Last update: September 12, 2016. 21

[Fel13] C. A. Felippa. *Matrix Finite Element Methods in Dynamics.*[10] Ch. 16: Mass Matrix Construction Overview. [11] [12] Ch. 22: Mass Templates for Bar2 Elements.[13] Department of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado at Boulder. Last update: November 27, 2013. 199

[GV06] W. Graf, T. Vassilev. *Einführung in computerorientierte Methoden der Baustatik.*[14] Berlin: Ernst & Sohn, 2006. S. 359. 3

[HBW99] S. M. Han, H. Benaroya, T. Wei. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories.[15] *Journal of Sound and Vibration*, vol. 225, no. 5, pp. 935–988, 1999. 123

[HRZ12] B. He, X. Rui, H. Zhang. Transfer matrix method for natural vibration analysis of tree system.[16] *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2012, article ID 393204, 19 p., 2012. 3

[Hut01] J. R. Hutchinson. Shear coefficients for Timoshenko beam theory. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 68, pp. 87–92, 2001. 123, 142, 147, 169

[Jür85] A. Jürgenson. *Tugevusõpetus.*[17] [18] Tallinn: Valgus, 1985. 19

[8] http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/Structures.d/ (12.06.2017)
[9] http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/Structures.d/IAST.Lect12.d/IAST.Lect12.pdf (12.06.2017)
[10] http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/MFEMD.d/ (19.03.2017)
[11] http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/MFEMD.d/MFEMD.Ch16.d/MFEMD.Ch16.pdf (19.03.2017)
[12] http://kis.tu.kielce.pl/mo/COLORADO_FEM/colorado/IFEM.Ch31.pdf (19.03.2017)
[13] http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/MFEMD.d/MFEMD.Ch22.d/MFEMD.Ch22.pdf (19.03.2017)
[14] https://books.google.ee/books?id=b8r1EchqijQC&pg=PA69&lpg=PA69&dq=Differentialgleicung+Methode+der+Anfangsparameter&source=bl&ots=GXpdetTU4B&sig=GQAxByl2gyxoMGOlhprOizhcv_I&hl=et&sa=X&ved=0ahUKEwj6j52DvYvVAhVKDZoKHeg1AmcQ6AEILDAB#v=onepage&q=Differentialgleicung%20Methode%20der%20Anfangsparameter&f=false (15.07.2017)
[15] http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.484.7887&rep=rep1&type=pdf&usg=AFQjCNGHW3aQYTXHDVDLd9dLJ-FJ_6r7RQ&bvm=bv.146073913,d.bGs&cad=rja
[16] https://www.hindawi.com/journals/mpe/2012/393204/ (12.12.2017)
[17] http://digi.lib.ttu.ee/i/?472
[18] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/AJ_tugevus.djvu (3.12.2015)

[Kad15] Г. М. Кадисов. *Динамика и устойчивость сооружений.*[19] ЛитРес, 2015. 105, 107

[Kan13] A. K. Kanar. *Free Vibration of 1-D and 2-D Skeletal Structures.* BTech thesis.[20] [21] Department of Civil Engineering, National Institute of Technology Rourkela, 2013. 212, 214

[Kis64] В. А. Киселев. *Строительная механика. Специальный курс. (Динамика и устойчивость сооружений).* Москва: Госстройиздат, 1964. 72, 73, 75, 76, 77, 91, 97, 100, 102, 109, 113, 114, 121, 122, 135, 166, 167, 190, 252, 253, 293, 296

[KMPR12] A. Klauson, J. Metsaveer, P. Põdra, U. Raukas. *Tugevusõpetus.* Tallinn: Tallinna Tehnikaülikooli kirjastus, 2012.

[Kna17] N. Knarr. *Höhere Mathematik 3. Das Vorlesungsskript zum Herunterladen.*[22] 6.5. Normierte Fundamentalsysteme.[23] Universität Stuttgart. Fachbereich Mathematik. Wintersemester 2016/17. 18

[Kol65] В. Колоушек. *Динамика строительных конструкций.* Москва: Госстройиздат, 1965. 83, 88

[KB97] Y. W. Kwon, H.-C. Bang. *The Finite Element Method Using MATLAB.*[24] Boca Raton, Fl., London, New York, Washington, D.C.: CRC Press LLC, 1997.

[Lah97] A. Lahe. The transfer matrix and the boundary element method.[25] *Proc. Estonian Acad. Sci. Engng.*, 3, 1, pp. 3–12, 1997. 3

[Lah12] A. Lahe. *Ehitusmehaanika.*[26] Tallinn: Tallinna Tehnikaülikooli kirjastus, 2012. 23, 48, 197, 198

---

[19] https://books.google.ee/books?id=e5QoCwAAQBAJ&pg=PA42&lpg=PA42&dq=%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8+%D0%BA%D1%80%D1%8B%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B0&source=bl&ots=x_xm0_es4R&sig=IfAOMo9zXgCKf5hWucAtas1QKSg&hl=ru&sa=X&ved=0ahUKEwig_unNn-jNAhXFKywKHX1HBlUQ6AEISzAJ#v=onepage&q=%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8%20%D0%BA%D1%80%D1%8B%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B0&f=false

[20] http://ethesis.nitrkl.ac.in/4988/ (17.05.2017)

[21] http://ethesis.nitrkl.ac.in/4988/1/109CE0040.pdf (17.05.2017)

[22] http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Knarr/Folien/HM3.pdf (7.06.2017)

[23] http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Knarr/Folien/Kapitel6.pdf (7.06.2017)

[24] https://www.scribd.com/doc/49217904/The-Finite-Element-Method-Using-MATLAB (17.05.2017)

[25] http://books.google.ee/books?id=ghco7svk5T4C&pg=PA3&lpg=PA3&dq=Andres+Lahe&source=bl&ots=3SFfo4UCES&sig=_XLUez-SfW2FVYGRx8v2LVm16V8&hl=et&ei=YQaFTMeIEoWcOOyCyNwP&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=5&ved=0CB0Q6AEwBDgK#v=onepage&q=Andres%20Lahe&f=false (3.12.2015)

[26] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/Ehitusmehaanika.pdf (8.08.2013)

[Lah14] A. Lahe. *The EST Method. Structural Analysis.*[27] Tallinn: Tallinn University of Technology Press, 2014. 48

[Lah16] A. Lahe. *Õhukeseseinaliste varraste takistatud vääne. EST-meetod.*[28] Tallinn: Tallinna Tehnikaülikooli kirjastus, 2016. 48

[LS04] J. Lee, W.W. Schultz. Eigenvalue analysis of Timoshenko beams and axisymmetric Mindlin plates by the pseudospectral method.[29] *Journal of Sound and Vibration*, vol. 269, no. 3–5, pp. 609–621, 2004. 140

[Mal13] A. Malik. *Free Vibration of Rods, Beams and Frames Using Spectral Element Method.*[30] MTech thesis. National Institute of Technology Rourkela, India, 2013. 28, 32, 77, 81, 96, 105, 136, 140

[MV14] A. I. Manevich, V. Yu. Vlasova. Free vibrations of Timoshenko beam with end mass in the field of centrifugal forces.[31] *Mechanics and Mechanical Engineering*, vol. 18, no. 1, pp. 37–51, 2014. 125

[Now63] В. Новацкий. *Динамика сооружений.*[32] Москва: Госстройиздат, 1963. 166, 167

[Now74] W. Nowacki. *Baudynamik.*[33] Wien: Springer Verlag, 1974. 167

[PL63] E. C. Pestel, F. A. Leckie. *Matrix Method in Elastomechanics*. New York, San Francisco, Toronto, London: McGraw-Hill, 1963. 18, 40, 93, 126, 128

[PW94] W. D. Pilkey, W. Wunderlich. *Mechanics of Structures: Variational and Computational Methods*. (2nd ed. 2003: W. Wunderlich, W. D. Pilkey, p. 252.[34]) Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo: CRC Press, 1994. 3

[27] http://digi.lib.ttu.ee/estmethod/ESTmethod.pdf (8.08.2013)

[28] http://digi.lib.ttu.ee/avatud6huke/Avatud6huke.pdf (8.06.2016)

[29] https://pdfs.semanticscholar.org/191d/673c3a209dc74e5b9c55b7bbf6f477776f4f.pdf

[30] http://ethesis.nitrkl.ac.in/4990/1/211CE2027.pdf

[31] http://www.kdm.p.lodz.pl/articles/2014/5_M_V.pdf

[32] https://www.ester.ee/search~S1*est/X?searchtype=X&searcharg=%D0%9D%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%86%D0%BA%D0%B8%D0%B9%2C%20%D0%92%D0%B8%D1%82%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%B4%20%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D0%BA%D0%B0%20&searchscope=1&SORT=DZ&extended=0&SUBMIT=OTSI

[33] https://books.google.ee/books?id=UfXSBgAAQBAJ&pg=PA244&lpg=PA244&dq=baudynamik+rahmen&source=bl&ots=DFTAF1jl9f&sig=Jm_yl720ylHJrHqkP0fZzppYsZ4&hl=et&sa=X&ved=0ahUKEwjx3PjUpYTPAhUlS5oKHUkaCMMQ6AEITzAI#v=onepage&q=baudynamik%20rahmen&f=false

[34] https://books.google.ee/books?id=XPnLBQAAQBAJ&pg=PA252&lpg=PA252&dq=The+Transfer+Matrix+Method+mechanics&source=bl&ots=KmoworKoFZ&sig=-StrAmN8WaHQohpO9mabbO6T1u4&hl=et&sa=X&ved=0ahUKEwj1qqH-9YjVAhXkCJoKHQtACh84ChDoAQhHMAY#v=onepage&q=The%20Transfer%20Matrix%20Method%20mechanics&f=false (17.07.2017)

[Ram16] A. Ramsay. Dynamic characteristics of a truss structure.[35] [36] *NAFEMS Benchmark Challenge (NBR)*, no 5. January 2016 – April 2016. 200, 201, 203, 204, 205, 206, 223, 226

[Rao11] S. S. Rao. *Mechanical Vibrations.* 5th ed.[37] Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2011.

[Rää75] R. Räämet. *Ehitusmehaanika.* [38] [39] Tallinn: Valgus, 1975. 201

[Rüm05] A. T. Rümmelin. *Entwicklung, Bemessung, Konstruktion und Anwendung von ultrahochfesten Betonen.* Diplomarbeit.[40] Fachhochschule Stuttgart – Hochschule für Technik. Stuttgart 2005. 199

[SALŠ84] А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лащеников, Н. Н. Шапошников. *Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений.* Москва: Стройиздат, 1984. 20, 42, 67, 91, 93

[SAMST92] J. Y. Shen, E. G. Abu-Saba, W. M. Mcginley, L. Sharpe Jr., L. W. Taylor Jr. A piecewise continuous Timoshenko beam model for the dynamic analysis of tapered beam-like structures.[41] [42] North Carolina Agricultural and Technical State Univ., the Center for Aerospace Research: A NASA Center of Excellence at N.C.A&T. Dec 12, 1992. 125, 126, 128, 154

[ST94] J. Y. Shen, L. W. Taylor Jr. Applying transfer matrix method to the estimation of the modal characteristics of the NASA Mini-Mass Truss.[43] [44] NASA Langley Research Center; NASA Workshop on Distributed Parameter Modeling and Control of Flexible Aerospace Systems, pp. 77–94, June 10, 1994. 69

[35] https://www.researchgate.net/publication/304571394_NAFEMS_Benchmark_Challenge_No_5_Dynamic_Characteristics_of_a_Truss_Structure (12.01.2017)

[36] https://www.linkedin.com/pulse/dynamic-characteristics-truss-structure-angus-ramsay (22.11.2016)

[37] https://aerocastle.files.wordpress.com/2012/10/mechanical_vibrations_5th-edition_s-s-rao.pdf

[38] https://digi.lib.ttu.ee/i/?473

[39] http://digi.lib.ttu.ee/opik_eme/RR_ehmeh.djvu

[40] http://ruemmelin.info/Beruf/Diplomarbeit/Diplomarbeit_low.pdf (12.01.2017)

[41] https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19930010270

[42] https://archive.org/stream/nasa_techdoc_19930010270/19930010270?ui=embed#page/n0/mode/2up

[43] https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19940031363

[44] https://archive.org/details/NASA_NTRS_Archive_19940031363

[Sob64] L. S. Sobolev. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics.*[45] Translated from the third Russian edition by E.R. Dawson. Ed. T.A.A. Broadbent. Dover Publications, Inc., New York: Pergamon Press Ltd., 1964. 25

[Ste59] В. В. Степанов. *Курс дифференциальных уравнений.* Москва: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1959. 21, 42, 92

[Sto02] W. F. Stokey. Ch. 7: Vibration of systems having distributed mass and elasticity.[46] In: *Harris' Shock and Vibration Handbook.* 5th ed.[47] (C. M. Harris, A. G. Piersol, eds.) New York, Chicago, San Francisco: McGraw-Hill, 2002. 72, 73, 76, 77, 81

[Tar08] K. Tartibu. *A Simplified Analysis of the Vibration of Variable Length Blade As Might Be Used in Wind Turbine Systems.* MTech thesis[48] Cape Town: Cape Peninsula University of Technology, 2008. 142, 144, 145

[Tat13] İ. Tatar. *Vibration Characteristics of Portal Frames.* MSc thesis.[49] İzmır: İzmır Institute of Technology, 2013. 169, 172, 173

[TD97] W. T. Thomson, M. D. Dahleh. *Theory of Vibration with Applications.* 5th ed.[50] Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997. 166

[VE 0103] Structural Engineering Software for Analysis and Design. Verification Examples | Dlubal Software.[51] Verification Example 0103 – Natural Vibrations of a Planar Truss Structures.[52] VE 0103 23 December 2015. 207, 209

[45] https://books.google.ee/books?id=hQGvUcT-h0cC&pg=PA334&lpg=PA334&dq=frequency+equation+characteristic++equation+physics&source=bl&ots=EwD7FDoMKS&sig=bnh6s38NiO1P17aa5ZICpBu57xo&hl=et&sa=X&ved=0ahUKEwjFgbTxi8fWAhXrJZoKHSnrCNgQ6AEIdzAN#v=onepage&q=frequency%20equation%20characteristic%20%20equation%20physics&f=false

[46] https://perso.univ-rennes1.fr/lalaonirina.rakotomanana-ravelonarivo/Stokey_chapter7.pdf (15.07.2016)

[47] http://nguyen.hong.hai.free.fr/EBOOKS/SCIENCEANDENGINEERING/MECANIQUE/DYNAMIQUE-VIBRATION/Shock&VibrationHandbook.pdf (15.07.2016)

[48] https://www.google.ee/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj2iLeUgZHaAhVCCCwKHUkHD1gQFggoMAA&url=https://www.researchgate.net/profile/Lagouge_Tartibu2/publication/273769819_A_simplified_analysis_of_the_vibration_of_variable_length_blade_as_might_be_used_in_wind_turbine_systems/links/550c0f080cf2063799397d3f/A-simplified-analysis-of-the-vibration-of-variable-length-blade-as-might-be-used-in-wind-turbine-systems.pdf&usg=AOvVaw1uKyxz4tAFX2tyZQzGUjti (24.05.2017)

[49] http://library.iyte.edu.tr/tezler/master/makinamuh/t001109.pdf (21.05.2017)

[50] https://www.bookdepository.com/Theory-Vibration-with-Applications-William-T-Thomson/9780136510680

[51] https://www.dlubal.com/en/downloads-and-information/examples-and-tutorials/verification-examples (23.04.2017)

[52] https://www.dlubal.com/-/media/719B78EA2C044C43983ED6C85921740D.ashx (23.04.2017)

[Wer01] H. Werkle. *Finite Elemente in der Baustatik: Statik und Dynamik der Stab- und Flächentragwerke.* 2. Aufl.[53] Wiesbaden: Vieweg, 2001. 199

[Yan05] B. Yang. *Stress, Strain, and Structural Dynamics.*[54] Elsevier Academic Press, 2005. 25, 26, 42, 46, 47, 72, 73, 76

[YSM00] A. Yavari, S. Sarkani, E. T. Moyer, Jr. On applications of generalized functions to beam bending problems.[55] *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, no. 40, pp. 5675–5705, 2000. 20, 42, 91

[53] https://books.google.ee/books/about/Finite_Elemente_in_der_Baustatik.html?id=JWbFXwAACAAJ&redir_esc=y (12.04.2017)

[54] https://civilenglineering.files.wordpress.com/2014/10/stress-strain-and-structural-dynamics.pdf

[55] http://www.yavari.ce.gatech.edu/sites/default/files/pubs/generalized_functions.pdf (25.03.2015)

Aineregister

A
algparameetrid, 3, 51, 59, 140
arvutifunktsioon
InsertBtoA.m, 296
koondMassHLRaam.m, 296
koondMassHLSorestik46.m, 296
koondMassHLtala.m, 296
LT2keskel.m, 296
mrkmts.m, 297
raamTimylekM.m, 295
raamylekM.m, 295
siireHratas.m, 268
siiremPike.m, 261
siiremPikeStaat.m, 261
siiremVoll.m, 268
spInsertBtoA.m, 296
spInsertNtimesBtoA.m, 296
splfHLmassPike.m, 261
splfHLratas.m, 268
splfHRmassPike.m, 261
splfHRratas.m, 268
splvfmPike.m, 261
splvfmPikeStaat.m, 261
splvfmVoll.m, 267
spraamSaatikaM.m, 294
spraamTimylekM.m, 295
spraamylekM.m, 295
spSisestaArv.m, 297
sptalaStaatikaM.m, 294
sptalaylekM.m, 293, 294
sptalaylekTimM.m, 294
spTeisndMaatriks.m, 295
spTrussP6hiv.m, 296
SymRaamDet.m, 295
talaylekM.m, 294
TimtalaylekM.m, 294
ylfhlin.m, 295
ysndvnkZF.m, 295
ysndvnkZM.m, 295
ysndvnkZq.m, 295
ysplfhlin.m, 294
yspSRhlin.m, 296
yspSRmhvIVahet.m, 296
yspTlfhlin.m, 294
yzThqz.m, 295
arvutiprogramm
dynaamikategurA.m, 294
dynaamikategurS.m, 294
NaideJtkTala1det.m, 281
NaideJtkTala1Mw.m, 283
NaideJtkTala1MwStaatika.m, 293
NaideJtkTala1MwStaatikaqz.m, 293
NaideJtkTala1Vorm1.m, 282
NaideJtkTala1Vorm2.m, 282
NaideJtkTala1Vorm3.m, 282
NaideJtkTala1Vorm4.m, 283
NaideJtkTala5det.m, 281
NaideJtkTala5Vormid.m, 281
NaideKonsool1.m, 268
NaideKonsool1M.m, 268
NaideKonsool1w1.m, 269
NaideKonsool1w2.m, 269
NaideKonsool1w3.m, 269
NaideKonsool1w4.m, 270
NaideKvoll1.m, 262
NaideKvoll1w1.m, 262
NaideKvoll1w2.m, 262
NaideKvoll1w3.m, 262
NaideKvollHratas1.m, 264
NaideKvollHratas1w1M.m, 264
NaideKvollHratas1w2M.m, 265
NaideKvollHratas1w3M.m, 265

NaideLT2keskel.m, 293
NaidePike1.m, 255
NaidePike1w1.m, 256
NaidePike1w2.m, 256
NaidePike1w3.m, 257
NaidePike2Fx.m, 258
NaidePike2FxStaat.m, 259
NaidePike2.m, 255
NaidePike2w1.m, 257
NaidePike2w2.m, 257
NaidePike2w3.m, 258
NaidePike2w4.m, 258
NaidePikeS1.m, 256
NaidePikeS1w1.m, 259
NaidePikeS1w2.m, 259
NaidePikeS1w3.m, 260
NaidePikeS2.m, 256
NaidePikeS2w1.m, 260
NaidePikeS2w2.m, 260
NaidePikeS2w3.m, 261
NaideRaam1Adet.m, 284
NaideRaam1Bdet.m, 284
NaideRaam1CwMFx.m, 285
NaideRaam1CwMFxstaatika.m, 286
NaideRaam1CwM.m, 285
NaideRaam1CwMstaatika.m, 286
NaideRaam1det.m, 284
NaideRaamKVTim5Bvormid.m, 288
NaideRaamKVTim5det.m, 287
NaideRaamKVTim10det.m, 287
NaideRaamTim1det.m, 287
NaideSymRaam1det.m, 285
NaideTala1.m, 270
NaideTala1w1.m, 271
NaideTala1w2.m, 271
NaideTala1w3.m, 271
NaideTala1w4.m, 272
NaideTala2Toel1w0.m, 273
NaideTala2Toel1w0Staatika.m, 292
NaideTala2Toel1w0Staatikaqz.m, 292
NaideTala2Toel3w0.m, 274
NaideTala2ToelMdet.m, 273
NaideTala2ToelMw0.m, 273
NaideTalaKahelToel1.m, 272
NaideTalaKahelToel3.m, 274
NaideTimKonsool1.m, 275
NaideTimKonsool1w1.m, 275
NaideTimKonsool1w2.m, 276
NaideTimKonsool1w3.m, 276
NaideTimKonsool1w4.m, 276
NaideTimKonsool3det.m, 278
NaideTimKonsool3Srdet.m, 279
NaideTimKonsool3Srw15.m, 279
NaideTimKonsool6det.m, 280
NaideTimKonsool6SAMSTw6.m, 280
NaideTimKonsool15det.m, 280
NaideTimTala1.m, 277
NaideTimTala1w1.m, 277
NaideTimTala1w2.m, 277
NaideTimTala1w3.m, 278
NaideTimTala1w4.m, 278
NaideTrussArg1Vibr.m, 291
NaideTrussArg3VibrDet.m, 290
NaideTrussBridge1Vibr.m, 291
NaideTrussKB1VibrDet.m, 290
NaideTrussTarind1VibrDet.m, 288
NaideTrussTarind1Vibr.m, 290
NaideTrussTarind3VibrDet.m, 289
NaideTrussTest1Vibr.m, 291
NaideTrussTest3VibrDet.m, 289
NaideVoll2Hratas1.m, 266
NaideVoll2Hratas1w1.m, 266
NaideVoll2Hratas1w2.m, 267
NaideVoll2Hratas1w3.m, 267
NaideVoll2M.m, 263
NaideVoll2Mw1.m, 263
NaideVoll2Mw2.m, 263
NaideVoll2Mw3.m, 264

B
baasjäikus, 198

C
Cauchy valem, 21, 42, 92

D
deltafunktsioon, 21, 42, 92
Diraci deltafunktsioon, 21, 42, 92

dünaamikategur, 35, 101, 114

E
ekvivalentne koondmoment, 91
ekvivalentne koormus, 20, 42, 91
elastsusmoodul, 17
erilahend, 21, 22, 43, 44, 93, 94
esimene märgikokkulepe, 19, 40, 41, 130, 131

H
Heaviside'i funktsioon, 22, 43
hooratas, 56

I
I märgikokkulepe, 19, 40, 41, 217
II märgikokkulepe, 19, 40, 41, 217
inertsiraadius, 39, 45

K
karakteristlik võrrand, 126
karakteristliku võrrandi juured, 25
karakteristliku võrrandi lahend, 66
katkevusfunktsioon, 21, 43, 92
kohalikud koordinaadid, 218
konsooltala sagedusvõrrand, 72
kontaktjõud, 40
koondatud mass tala paindel, 70
koondjõud, 20, 91
koondmass, 23
koondmoment, 42
koordinaadid
  kohalikud koordinaadid, 218
  üldkoordinaadid, 218
koordinaatide teisendus, 220
koormusfunktsioon, 21, 43, 92
koormusvektor, 3, 20, 22, 44, 155
kujutegur, 123

L
lahendite fundamentaalsüsteem, 18
laiendatud ülekandemaatriks, 23, 44, 69, 133, 156–158, 199
lõpp-parameetrid, 3

M
maatriks
  laiendatud ülekandemaatriks, 23, 44, 69, 133, 156–158, 199
  ortogonaalne maatriks, 220
Macaulay noolsulud, 21
mõõduta koordinaat, 129
märgikokkulepe, 217

N
nihkeelastsusmoodul, 39
nihkemoone, 123
nihkenurk, 123
normaaldeformatsioon, 17
normaalmoone, 17
normeerimata lahendite fundamentaalsüsteem, 127
normeeritud lahendite fundamentaalsüsteem, 18, 21, 43, 67, 92

O
olekuvektor, 3
omavõnkesagedus, 25, 66, 96, 111, 117
omavõnkesageduste spekter, 66
omavõnkevormid, 26, 48

P
parema käe kolmikud, 218
parema käe teljestik, 131
pidevus- ja tasakaaluvõrrandid, 86, 139, 143, 150, 162
pidevusvõrrand, 32
pikisiire, 17
pikkejäikus, 17, 24
pikkekarakteristik, 18
Poissoni tegur, 123
polaarinertsimoment, 39
põhivõrrandid, 22, 24, 32, 44, 46, 69, 85, 133, 135, 143, 149, 155, 162, 198

R
rajajõud, 19, 40
rajatingimused, 24, 32, 46, 135
resonantssagedus, 96, 111, 117

S

sagedusvõrrand, 25, 26, 46, 47, 72
sagedusvõrrandi juured, 25, 26, 46, 47
skaleerimine, 23
skaleerimistegur, 23, 44, 69
spektraalelementide meetod, 28
suhteline nihkedeformatsioon, 123
suunakoosinus, 219

T

tala painde põhivõrrandid, 69
tala sagedusvõrrandi juured, 75
teine märgikokkulepe, 19, 40, 41, 132
telgjoone kõverus, 123
toetingimused, 87, 139, 143, 150

V

varda tunnusarv pikkel, 18
vektorite skalaarkorrutis, 218
Wronski determinant, 18, 40, 67
võlli tunnusarv väändel, 40
võrrandisüsteemi tundmatute vektor, 24
väändejäikus, 39, 45
väändekarakteristik, 40
väändenurk, 39

Ü

ühikvektorite kolmikud, 218
üldistatud koormus, 20, 42, 91
üldkoordinaadid, 218
ülekandemaatriks, 3, 19, 41, 68, 155
ülekandevõrrand, 41, 155